Metrikus terek

A távolság fogalma általánosítható:

Def.: Az M halmazt a $\varrho: M\times M \to \mathbb{R}$ fv-nyel, (M,ϱ) metrikus térnek nev. ha

1) $\forall x,y \in M$-re $\varrho(x,y)\geq 0$ és $\varrho(x,y)=0 \iff x=y$,
2) $\forall x,y \in M$-re $\varrho(x,y)=\varrho(y,x)$,
3) $\forall x,y,z\in M$-re $\varrho(x,y)+\varrho(y,z)\geq \varrho(x,z)$, ($\Delta$ egyenl.).

Volt: $\mathbb{R}^n$-en $\varrho_2(\underline{x},\underline{y})=\|\underline{x}-\underline{y}\|_2$, de $\varrho_1(x,y)=\|\underline{x}-\underline{y}\|_1=$
$=\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|$, ill. $\varrho_\infty(\underline{x},\underline{y})=\|\underline{x}-\underline{y}\|_\infty=\max\{|x_j-y_j|: j=1,\dots,n\}$
is metrikák (Hf ell.)

Korábbi $\|\cdot\|$ becslések $\Rightarrow$ $\varrho_\infty(\underline{x},\underline{y})\leq \varrho_2(\underline{x},\underline{y})\leq \varrho_1(\underline{x},\underline{y})\leq n\varrho_\infty(\underline{x},\underline{y})$

$$\varrho_2(\underline{x},\underline{y}) \leq \sqrt{n}\,\varrho_\infty(\underline{x},\underline{y})$$

Pl.: M tetsz. halm., (M,ϱ_{diszkr}), diszkrét metrika

$\varrho_{diszkr}(x,y)=\begin{cases}1 & \text{ha } x\neq y\\ 0 & \text{ha } x=y\end{cases}$, Hf: Bi.be. metr. tér.

Pl.: $S=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^3: \|\underline{x}\|_2=1\}$ gömb felszín.

Legyen $\varrho=\varrho_2$ az $(\mathbb{R}^3,\varrho)$ eukl. tér metrikája.
$\forall \underline{x},\underline{y}\in S$-re $\varrho_{S,1}(\underline{x},\underline{y})\overset{\text{def}}{=}\varrho(\underline{x},\underline{y})$.
Ekkor $(S,\varrho_{S,1})$ metr. tér. (altér metrika)

Alt. def: Ha $\emptyset\neq N\subset M$ és (M,ϱ) metr. tér, akkor $\forall x,y\in N$-re a $\varrho_N(x,y)\overset{\text{def}}{=}\varrho(x,y)$ egy (N,ϱ_N) metr. teret az (M,ϱ) egy alterét def. (Hf: Bi. be. metrika.)

S-en $\varrho_{S,2}(\underline{x},\underline{y})=$ az $\underline{x}$-et $\underline{y}$-nal ö.k. rövidebb főkördarab ívhossza. (Ez az $\underline{x}$-et $\underline{y}$-nal S-ben ö.k. görbék közül a legrövidebb.) $(S,\varrho_{S,2})$ is metr. t.

$M=C[a,b]$, $\varrho_{sup}(f,g)=\underset{(\max)}{\sup}\{|f(x)-g(x)|: x\in[a,b]\}$

$(C[a,b], \varrho_{\sup})$ metr. tér, de

$\varrho_1(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$, $(C[a,b], \varrho_1)$ is metr. tér.

<u>Def.:</u> Ha $a \in M$, $\delta > 0$, akkor az (M,ϱ) metr. térben a $B(a,\delta) = \{x \in M : \varrho(x,a) < \delta\}$ halmazt a kp.ú, δ sugarú (nyílt) <u>gömbnek</u> (vagy az a, δ-sugarú nyílt gömbi kzetének nev.

$\mathring{B}(a,\delta) = B(a,\delta) \setminus \{a\}$ az a kp. ú δ-sug. <u>pontozott</u> (nyílt) <u>gömb</u>.

$\bar{B}(a,\delta) = \{x \in M : \varrho(x,a) \le \delta\}$ az a kp. ú δ sug. <u>zárt g.</u>

(Más jel: $U_\delta(a)$, $\mathring{U}_\delta(a)$, $\bar{U}_\delta(a)$.)

<u>Def.:</u> A $H \subset M$ halm. <u>nyílt</u> ha $\forall x \in H$, $\exists \delta > 0$, hogy $B(x,\delta) \subset H$.

A $H \subset M$ h. <u>zárt</u> ha $M \setminus H$ nyílt.

A $H \subset M$ <u>sűrű</u> M-ben ha $\forall a \in M$, $\forall \delta > 0$-ra $B(a,\delta) \cap H \neq \emptyset$

<u>Pl.:</u> $\emptyset$ nyílt $\Rightarrow M$ zárt, M nyílt $\Rightarrow \emptyset$ zárt,

<u>T.:</u> $B(a,\delta)$ nyílt.

<u>Biz.:</u> Hf. mint $\mathbb{R}^n$-ben Anal. 2-ben $\|\underline{x}-\underline{y}\| = \varrho(\underline{x},\underline{y})$ ⌟

<u>Def.:</u> T.f.h. $H \subset M$, (M,ϱ) m.t.

1) $x \in H$ a H <u>belső pontja</u>, $x \in \operatorname{int}(H)$ ha $\exists \delta > 0$, $B(x,\delta) \subset H$.

2) $x \in M$ a H <u>külső pontja</u>, $x \in \operatorname{ext}(H)$ ha $\exists \delta > 0$, $B(x,\delta) \cap H = \emptyset$, (azaz $x \in \operatorname{int}(M \setminus H)$).

3) $x \in M$ a H <u>határpontja</u>, $x \in \operatorname{mar} H \; (= \partial H)$, ha $x \notin \operatorname{int} H \cup \operatorname{ext} H \Leftrightarrow \forall \delta > 0$ $B(x,\delta) \cap H \neq \emptyset$ és $B(x,\delta) \setminus H \neq \emptyset$.

4) $x \in M$ a H <u>torlódási pontja</u>, $x \in H'$ ha $\forall \delta > 0$-ra $\mathring{B}(x,\delta) \cap H \neq \emptyset$.

5) Az $x\in M$ a H izolált pontja, $x\in H_{iso}$ ha $\exists\delta>0$, hogy $B(x,\delta)\cap H=\{x\}$.

Pl.: $H=\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}$-nek $(\mathbb{R},\varrho)$-ban $0\in H'$, $\frac{1}{2}\in H_{iso}$, (-1) egyik se,

Mint $\mathbb{R}^n$-ben: $int(H)$ és $ext(H)$ nyíltak, $hat(H)$ zárt.

Def.: A $H\subset M$ halmaz lezárása $cl(H)=int(H)\cup hat(H)=$
$= M\setminus ext(H)$. (HF.: $\overline{B}(a,\delta)\supset cl(B(a,\delta))$) Pl. amikor nem =? R^n-ben =

Mint $\mathbb{R}^n$-ben $cl(H)$ az a legszűkebb zárt halmaz, ami tart. H-t, $cl(H)=\bigcap\{F: H\subset F,\ F \text{ zárt}\}$.

Áll.: Ha $\forall\alpha\in A$-ra G_α nyílt és F_α zárt, akkor $\bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$ nyílt és $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ zárt.
Ha A véges akkor $\bigcap_{\alpha\in A} G_\alpha$ nyílt és $\bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha$ zárt.

Biz.: mint An. 2-ben. ⌋

Def.: A (p_k), $p_k\in M$ sorozat konvergál az $a\in M$ ponthoz, azaz $\lim_{k\to\infty} p_k=a$, ha $\varrho(p_k,a)\to 0$.

T.: $cl(H)=\{x\in M: \exists p_k\in H, p_k\to x\}$.

Biz.: $x\notin cl(H)=M\setminus ext(H)\Rightarrow x\in ext(H)$, $ext(H)$ nyílt $\Rightarrow$ $\exists\delta>0$, $B(x,\delta)\subset ext(H)\Rightarrow\forall y\in B(x,\delta)$, $y\notin H\Rightarrow\nexists p_k\in M$, $p_k\to x$ (mert hogy $\varrho(p_k,x)\geq\delta$ $\forall p_k\in H$-ra).
Ha $x\in cl(H)\Leftrightarrow x\notin ext(H)$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $\exists p_k\in B(x,\frac{1}{k})\cap H$ $\Rightarrow p_k\to x$. ⌋

T.: H zárt $\Leftrightarrow cl(H)=H$. (Előző tétellel kombinálva $H=\{x\in M: \exists p_k\in H, p_k\to x\}$, azaz nem lehet kikonvergálni H-ból, mert ha $\exists x\in M\setminus H$, $\exists p_k\in M$, $p_k\to x$ akkor $x\in cl(H)\setminus H$ azaz $cl(H)\neq H$ azaz H nem zárt.)

Biz.: Ha $H=cl(H)=M\setminus ext(H)$ zárt $\Rightarrow H$ zárt.

Ha H zárt, akkor $M \setminus H$ nyílt $\Rightarrow ext(H) = int(M \setminus H) =$ -4-
$= M \setminus H$, $cl(H) = M \setminus ext(H) = M \setminus (M \setminus H) = H$ ⌋

Def.: A (p_k) sorozat Cauchy ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists k_\varepsilon$, hogy $\forall m \geq k \geq k_\varepsilon$ esetén $\varrho(p_k, p_m) < \varepsilon$.

T.: Ha $p_k \to p$ akkor p_k Cauchy.

Biz.: $\varrho(p_k, p_m) \leq \varrho(p_k, p) + \varrho(p_m, p) < 2\varepsilon$ ha $m \geq k \geq k_\varepsilon$ ⌋

Def.: (M, ϱ) teljes ha $\forall (p_k)$ Cauchy sorozat konv. egy $p \in M$ ponthoz.

Pl.: $(\mathbb{Q}, \varrho)$, $\varrho(p,q) = |p-q|$ nem teljes.
Ha $p_k \to \sqrt{2}$, akkor p_k Cauchy, de $\nexists p \in \mathbb{Q}$, hogy $p_k \to p$.

Pl.: $((0,1), \varrho)$-ban $p_k = \frac{1}{k}$ Cauchy de nincs $(0,1)$-beli hat. ért.

T.: Ha (H, ϱ) az (M, ϱ) teljes m.t. altere, akkor (H, ϱ) akkor teljes, ha H zárt M-ben.

Biz.: Ha H zárt és $p_k \in H$ Cauchy s. akkor $\exists p \in M$, hogy $p_k \to p$, de H zárt $\Rightarrow p \in H$ is telj.
Ha (H, ϱ) teljes és $p \in cl(H)$, akkor $\exists p_k \in H$, $p_k \to p \Rightarrow p_k$ Cauchy M-ben $\Rightarrow$ H-ban is, $\exists p' \in H$
$p_k \to p'$, de $\varrho(p, p') \leq \underset{\downarrow\, 0}{\varrho(p_k, p)} + \underset{\downarrow\, 0}{\varrho(p_k, p')} \Rightarrow p = p' \in H \Rightarrow cl(H) = H$ ⌋

Folytonosság

T.f.h. (M_1, ϱ_1) és (M_2, ϱ_2) metr. terek.

Def.: T.f.h. $H \subset M_1$. Az $f: H \to M_2$ fv. (lek.) <u>H-ra szorítkozva folyt. az $a \in H$ pontban</u>, ha
(*) $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ amire ha } x \in H \text{ és } \varrho_1(x,a) < \delta, \text{ akkor } \varrho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon}$

(*) $\Leftrightarrow$ (**) $\forall x \in B_1(a, \delta) \cap H$-ra $f(x) \in B_2(f(a), \varepsilon)$
($B_i(x, r)$ az i-edik metr. sz. gömb)

f folyt. H-n ha $\forall$ pontjában az,
f egyenl. folyt. H-n ha $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, hogy
$\forall x, y \in H$-ra ha $\varrho_1(x, y) < \delta$, akkor $\varrho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
T.: (Átv. elv) T. f. h. (M_1, ϱ_1), (M_2, ϱ_2) metr. terek
és $H \subset M_1$. Az $f: H \to M_2$ lez. akkor folyt. $a \in H$-ban
H-ra szűkv. ha $\forall p_k \to a$, $p_k \in H$ sorozatra $f(p_k) \to f(a)$.
Biz.: (Mint $\mathbb{R}^n$-ben $\|x - a\| = \varrho(x, a)$ stb.)
Folyt. lez. kompozíciójára vonatk. tétel (mint $\mathbb{R}^n$-ben)
is érv.
Ha $f, g: H \xrightarrow{\subset M} \mathbb{R}$, H-n ált. fvek akkor $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$-re
vonatk. tételek is telj.
T.: T. f. h. (M_1, ϱ_1) és (M_2, ϱ_2) m. terek. Az $f: M_1 \to M_2$ lez.
akkor folyt. ha $\forall G \subset M_2$ nyílt halmazra $f^{-1}(G) =$
$= \{x \in M_1 : f(x) \in G\}$ nyílt M_1-ben.
Biz.: ($\Rightarrow$) T. f. h. $G \subset M_2$ nyílt és $a \in f^{-1}(G) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(a) \in G \Rightarrow \exists \delta > 0$, $B_2(f(a), \delta) \subset G \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$, $\forall x \in B_1(a, \varepsilon)$-
-ra $f(x) \in B_2(f(a), \delta) \subset G \Rightarrow f(B_1(a, \varepsilon)) \subset G \Rightarrow B_1(a, \varepsilon) \subset f^{-1}(G)$.
($\Leftarrow$) T. f. h. $a \in M_1$, $\delta > 0$, $G \overset{\text{def}}{=} B_2(f(a), \delta)$, $f^{-1}(G)$ nyílt,
$a \in f^{-1}(G) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$, $B_1(a, \varepsilon) \subset f^{-1}(G) \Rightarrow \forall x \in B(a, \varepsilon)$-ra
$f(x) \in G = B_2(f(a), \delta)$]
$\Rightarrow$ folyt. def. nyílt halmazokkal $\Rightarrow$ topologikus terek.
Def.: Ha $H \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ és $\forall \alpha \in A$-ra G_α nyílt, akkor
$\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in A\}$ a H nyílt fedése.
Ha $\exists A_0 \subset A$ véges, hogy $H \subset \bigcup_{\alpha \in A_0} G_\alpha$, akkor $\mathcal{G}$-ből
kiválasztható véges nyílt részfedés.
Def.: A $H \subset M$ kpkt. ha H minden nyílt fedése
tartalmaz véges részfedést.

<u>Megj.:</u> $(\mathbb{R}, \varrho_{diszkr})$, $\forall x \in \mathbb{R}$-re $\varrho_{diszkr}(0,x) \le 1$

$\Rightarrow \forall H \subset \mathbb{R}$ korl., $\forall x$-re $\{x\} = B(x, \frac{1}{2})$ nyílt,

$[0,1] = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{x \notin [0,1]} \{x\}$ zárt, $[0,1] = \bigcup_{x \in [0,1]} \{x\}$ de nincs véges részlefedés, csak a véges halmazok kompaktak.

<u>T.:</u> Ha $H \subset M$ kplt. akkor H zárt.

<u>Biz.:</u> mint ANZ-ben. ∎

<u>T.:</u> Ha $H \subset M$ kplt. és $E \subset H$ zárt, akkor E kpkt.

<u>Biz.:</u> mint ANZ-ben. ∎

<u>T.:</u> T.f.h. $f: M_1 \to M_2$ folyt. lek. $H \subset M_1$ kpkt.
Ekkor 1) $f(H)$ is kpkt., 2) f egyenl. folyt. H-n.

<u>Biz.:</u> mint ANZ-ben. 1)-re $H = M_1$ esetben kicsit más biz.: T.f.h. $f(H) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ nyílt fedés, f folyt.
$\Rightarrow \forall \alpha \in A$-ra, $f^{-1}(G_\alpha)$ nyílt és $H \subset \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(G_\alpha)$, H kpkt.
$\Rightarrow \exists$ véges $A_0 \subset A$, hogy $H \subset \bigcup_{\alpha \in A_0} f^{-1}(G_\alpha) \Rightarrow \forall x \in H$-ra $\exists \alpha \in A_0$, $x \in f^{-1}(G_\alpha)$ azaz $f(x) \in G_\alpha \Rightarrow f(H) \subset \bigcup_{\alpha \in A_0} G_\alpha$ ∎

<u>Def.:</u> T.f.h. (M, ϱ) metr. tér és $f: M \to M$ lek.
Az f lek. <u>kontrakció</u> ha $\exists \alpha \in (0,1)$, hogy $\forall x, y \in M$-re
$\varrho(f(x), f(y)) \le \alpha \cdot \varrho(x,y)$.

f kontrakció $\Rightarrow$ f egyenl. folyt. M-en.

<u>Def.:</u> Az $x \in M$ pont az $f: M \to M$ lek. fixpontja ha $f(x) = x$.

<u>Jel.:</u> $f^k(x) = \overbrace{f \circ \dots \circ f}^{k}(x)$, $f^0(x) \overset{\text{def.}}{=} x$.

<u>T.:</u> (Banach fixponttétel) Ha (M, ϱ) teljes mt. és $f: M \to M$ kontr., akkor $\exists !\, x_* \in M$, amire $f(x_*) = x_*$ és $\forall x_0 \in M$-re $x_k = f^k(x_0) \to x_*$ ha $k \to +\infty$.

Biz.: x_k Cauchy, mivel $k \le m$-re

$\varrho(x_k, x_m) = \varrho(f^k(x_0), f^m(x_0)) \le \alpha^k \varrho(x_0, x_{m-k}) \le$

$\le \alpha^k \big(\varrho(x_0, \underset{f(x_0)}{\underset{\parallel}{x_1}}) + \varrho(x_1, \underset{f(x_1)}{\underset{\parallel}{x_2}}) + \dots + \varrho(\underset{f^{m-k-1}(x_0)}{\underset{\parallel}{x_{m-k-1}}}, \underset{f^{m-k-1}(x_1)}{\underset{\parallel}{x_{m-k}}})\big) \le$

$\le \alpha^k \varrho(x_0, x_1)(1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-k-1}) \le \alpha^k \varrho(x_0, x_1) \cdot \frac{1}{1-\alpha} < \varepsilon$

ha $k_\varepsilon \le k \le m$. teljesség $\Rightarrow \exists\, x_* \in M$, $x_k \to x_*$

f folytonos $\Rightarrow f(x_*) = f(\lim_{k\to\infty} x_k) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = x_*$

Ha $f(y_*) = y_*$ is telj., akkor $\varrho(x_*, y_*) = \varrho(f(x_*), f(y_*)) \le$

$\le \alpha \varrho(x_*, y_*) \Rightarrow \varrho(x_*, y_*)\underset{\overset{\vee}{0}}{(1-\alpha)} \le 0 \Rightarrow \varrho(x_*, y_*) = 0 \Rightarrow \boxed{x_* = y_*}$

Leképezések ht. ért., mint AN2 "gömbös" def. ..

Def.: T.f.h. (M, ϱ) m.t. Az $S \subset M$ halmaz sehol se sűrű ha $\forall\, B(x, \varepsilon) \subset M$ nyílt gömbben $\exists\, \emptyset \ne B(y, \delta) \subset B(x, \varepsilon)$, hogy $S \cap B(y, \delta) = \emptyset$.

Megj.: Ha S seh. s. $\Rightarrow cl(S)$ is az, $cl(S) \cap B(y, \delta) = \emptyset$.

T.: (Baire kategóriatétel) T.f.h. (M, ϱ) teljes m.t. és $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$, ahol $\forall k$-ra S_k seh. s. M-ben. Ekkor $M \setminus S$ sűrű M-ben.

Biz.: T.f.h. $\emptyset \ne B(x_0, r_0) \subset M$. S_k seh. s. $\Rightarrow cl(S_k)$ is az

$\exists\, B(x_1, 2r_1) \subset B(x_0, r_0)$, $r_1 < 1$, hogy $B(x_1, 2r_1) \cap cl(S_1) = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow cl(B(x_1, r_1)) \cap cl(S_1) = \emptyset$ és $cl(B(x_1, r_1)) \subset B(x_0, r_0)$

Indukcióval vál. $x_k \in M$, $0 < r_k < \frac{1}{k}$, hogy

$cl(B(x_k, r_k)) \cap cl(S_k) = \emptyset$ és $cl(B(x_k, r_k)) \subset B(x_{k-1}, r_{k-1})$

$\Rightarrow x_k$ Cauchy, mivel $k, l > N$-re $x_k, x_l \in B(x_N, r_N)$

$\Rightarrow \varrho(x_k, x_l) \le \varrho(x_k, x_N) + \varrho(x_l, x_N) < \frac{2}{N}$

X teljes $\Rightarrow \exists\, x_*,\ x_k \to x_*$. Rögz ℓ-re $x_k \in B(x_\ell, r_\ell)$
$\forall k \geq \ell \Rightarrow x_* \in cl(B(x_\ell, r_\ell)) \subset B(x_0, r_0) \Rightarrow x_* \notin cl(S_\ell)$
$\Rightarrow x_* \in B(x_0, r_0) \setminus S$. ⌋

Def.: $A \subset M$ első kategóriájú ha $\exists\, S_k \subset M$ seh. s., hogy $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$. Ha A nem első kat. akkor második kat. $A \subset M$ reziduális ha $M \setminus A$ első kat.

Def.: A $H \subset M$ F_σ (G_δ) halmaz, ha $\exists\, F_k$ zárt (G_k nyílt) halmazok, hogy $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, ($H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$).

Pl.: $\mathbb{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{q_k\}$, F_σ és első kat., $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, G_δ reziduális és második kat., ha $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ első kat. lenne, akkor $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ ahol F_k seh. sűrű és $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{q_k\} \cup \bigcup_{\ell=1}^{\infty} F_\ell$ I. kat. lenne $(\mathbb{R}, e)$ teljes m.t.

Def.: Az (M, e) m.t. szeparábilis ha $\exists\, F \subset M$ megszt. sűrű r. halmaza.

Pl.: $(\mathbb{R}^n, e_2)$ szep., mivel $F = \mathbb{Q}^n$ sűrű megsz.
$(\mathbb{R}^n, e_{diszkr})$ nem szep. csak $\mathbb{R}^n$ sűrű, mivel $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$-re $\{\underline{x}\} = B(\underline{x}, \frac{1}{2})$ nyílt.

Pl.: $\ell_\infty = \{(x_k) : x_k \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ |x_k| \leq M\}$ korl. sor. tér, $e(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k|$. (HF: ez m.t.)
ℓ_∞ nem szep. $H = \{(x_k) : x_k \in \{0, 1\}\}$ nem megsz. h.
$\# H = 2^{\aleph_0}$. $x, y \in H$ $x \neq y$ $\Rightarrow e(x, y) = 1 \Rightarrow \{B(x, \frac{1}{2}) : x \in H\}$ kontinuum sok diszjunkt gömb $\Rightarrow$ ha $F \subset M$ sűrű, akkor $\# F = 2^{\aleph_0}$.

$c \subset l_\infty$, $c = \{(x_k) : \exists \lim\limits_{k\to\infty} x_k\}$ konv. sor. tér.
Ez szep., t.f.h. $\mathbb{Q} = \{q_n\}$, $\{x \in c : \forall i\ x_i \in \mathbb{Q},\ \forall i \geq k,\ x_i = q_n\}$ alakú sorozatok megszt. sűrű halmazt alkotnak. (Hf.)

$c_0 \subset c \subset l_\infty$, c_0 a 0-hoz tartó sorozatok tere.
Hf.: teljesek-e ezek a terek?

diszjunkt

<u>Def.:</u> Az (M, ϱ) m.t. <u>nem összefüggő</u> ha $\exists G_1, G_2 \subset M$ nem üres nyíltak, hogy $G_1 \cup G_2 = M$. A $H \subset M$ nem ö.f. ha a (H, ϱ) altér nem ö.f.
Pl.: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ nem ö.f., Hf.: Bi.be. $[0,1] \subset \mathbb{R}$ ö.f.
$\mathbb{R}$-ben az összes öf. halmaz (esetleg degenerált) intervallum, vagy $\mathbb{R}$, vagy $\emptyset$ (Hf.).
<u>Def.:</u> A $H \subset M$ halmazt <u>kontinuum nak</u> nev. ha kompakt és összefüggő.
<u>Pl.:</u> Biz. Hf. $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin\frac{1}{x},\ 0 < x \leq 1\} \cup$
$\cup \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}$ kontinuum.

A Jordan mérték

<u>Def.:</u> A $T = \mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$, $a_k < b_k$, $k = 1, \dots, n$ halmazokat n-dim. tégláknak nev. Térfogatuk $t(T) = \prod\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$.
<u>Def.:</u> A $T_1, \dots, T_k$ téglák <u>befedik</u> a $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazt, ha $H \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} T_j$.
A T tégla <u>H-ban fekszik</u>, vagy H-beli, ha $T \subset H$.
A $H_1, H_2 \subset \mathbb{R}^n$ halmazok <u>egymásba nem nyúlóak</u>, <u>ENNY</u> ha $\operatorname{int}(H_1) \cap \operatorname{int}(H_2) = \emptyset$.

<u>Def.:</u> A $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz <u>Jordan-féle külső térfogata</u>

$k(H) \overset{def}{=} \inf\{\sum_{j=1}^{k} t(T_j) : a\ T_1,\dots,T_k$ téglák befedik H-t$\}$

<u>Jordan-féle belső térfogata</u>

$b(H) \overset{def}{=} \sup\{\sum_{j=1}^{k} t(T_j) : a\ T_1,\dots,T_k$ <u>ENNY</u> téglák H-ban fekszenek$\}$

(itt $\sup \emptyset \overset{def}{=} 0$.)

H (Jordan) mérhető, $H \in \mathcal{J}$ ha $k(H) = b(H) \overset{def}{=} t(H)$

<u>a H Jordan mértéke</u>, $n=1$ hosszúság, $n=2$ terület, $n=3$ térf.

<u>Más megközelítés</u>

$\mathcal{K}_m \overset{def}{=} \{[\frac{i_1-1}{m}, \frac{i_1}{m}] \times \dots \times [\frac{i_n-1}{m}, \frac{i_n}{m}] : i_1,\dots,i_n \in \mathbb{Z}\} =$

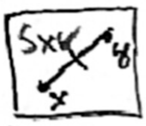
$=$ n dim. $\frac{1}{m}$ oldalhosszúságú kockák halmaza.

<u>Def.:</u> Adott $H \subset \mathbb{R}^n$ korl. halmazra a K kocka <u>belső kocka</u> ha $K \subset \text{int}(H)$, <u>külső kocka</u> ha $K \subset \text{ext}(H)$ és <u>határkocka</u> ha se nem külső, se nem belső kocka.

<u>Áll.:</u> K határk. $\iff K \cap \text{mar}(H) \neq \emptyset$.

<u>Biz.:</u> Ha K nem határk. $\Rightarrow K \subset \text{int}(H) \cup \text{ext}(H) \Rightarrow$ $K \cap \text{mar}(H) = \emptyset$.

T.f.h. K hat.k. Ha $\nexists x \in \text{mar}(H) \cap K$, akkor $\exists x \in K \cap \text{int}(H)$ és $y \in K \cap \text{ext}(H) \Rightarrow x \in H$, $y \notin H$. Az S_{xy} szakasz $\subset K$. Felezgetéssel vál. S_k rész szakaszokat, hogy egyik végp. $x_k \in H$ másik v.p. $y_k \notin H$, $x_* = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k \in \text{mar}(H) \cap K$. ⌟



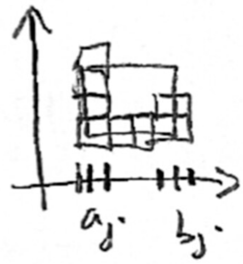
K

K azaz belső v. határ kocka ha

$\emptyset \neq K \cap (\mathrm{int}(H) \cup \mathrm{hat}\, H) = K \cap cl(H)$.

$b_m(H) \overset{def.}{=} \sum_{\substack{K \in \mathcal{K}_m \\ K \subset \mathrm{int}(H)}} t(K)$, $k_m(H) \overset{def.}{=} \sum_{\substack{K \in \mathcal{K}_m \\ K \cap cl(H) \neq \emptyset}} t(K)$

(üres $\sum \overset{def.}{=} 0$), Nyilván $b_m(H) \leq k_m(H)$.



L.: Tetsz. $T = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ téglára

$$\lim_{m \to \infty} k_m(T) = \lim_{m \to \infty} b_m(T) = t(T) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

Biz.: T.f.h. m rögz. vál. $p_j, q_j \in \mathbb{Z}$, hogy

$$\frac{p_j - 1}{m} < a_j \leq \frac{p_j}{m}, \quad \frac{q_j - 1}{m} \leq b_j < \frac{q_j}{m}, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\underbrace{\left[\frac{i_1 - 1}{m}, \frac{i_1}{m}\right] \times \ldots \times \left[\frac{i_n - 1}{m}, \frac{i_n}{m}\right]}_{\in \mathcal{K}_m} \cap T \neq \emptyset \iff p_j \leq i_j \leq q_j, \ j = 1, \ldots, n$$

$$\Rightarrow k_m(T) = \frac{1}{m^n} \cdot \prod_{j=1}^{n} (q_j - p_j + 1) \leq \prod_{j=1}^{n} \left(b_j + \frac{1}{m} - \left(a_j - \frac{1}{m}\right)\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$-ra $\exists M_0$ ha $m \geq M_0$, akkor $k_m(T) < t(T) + \varepsilon$.

Hasonlóan belátható: $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists M_0'$ ha $m \geq M_0'$, akkor $b_m(T) > t(T) - \varepsilon$. Így ha $m \geq \max(M_0, M_0')$ akkor

$t(T) - \varepsilon < b_m(T) \leq k_m(T) < t(T) + \varepsilon \Rightarrow b_m(T) \to t(T)$, $k_m(T) \to t(T)$ ∎

T.: $\forall H \subset \mathbb{R}^n$ korl. halmazra

i) $\lim_{m \to \infty} k_m(H) = k(H)$, ii) $\lim_{m \to \infty} b_m(H) = b(H)$, iii) $b(H) \leq k(H)$.

Biz.: i) T.f.h. $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists T_1, \ldots, T_N$ téglák, hogy

$H \subset \bigcup_j T_j$, $\sum_{j=1}^{N} t(T_j) < k(H) + \varepsilon$,

$\mathcal{K}_m(H, k) \overset{def.}{=} \{K \in \mathcal{K}_m : K \cap cl(H) \neq \emptyset\}$

Nyilván $H \subset \bigcup_{K \in \mathcal{K}_m(H,k)} K \Rightarrow k_m(H) \overset{(*)}{\geq} k(H)$

összes tégla fedésre az inf.

$K \in \mathcal{K}_m(H,k) \Rightarrow \exists j,\ T_j \cap K \neq \emptyset \Rightarrow$

$k_m(H) \le \sum_{j=1}^{N} k_m(T_j) \xrightarrow[m\to+\infty]{} \sum_{j=1}^{N} t(T_j) < k(H)+\varepsilon$

$\exists M_0, \forall m \ge M_0$-ra $k(H) \underset{(*)}{\le} k_m(H) < k(H)+\varepsilon \Rightarrow k_m(H) \to k(H)$.

ii) Ha $\mathrm{int}(H) = \emptyset \Rightarrow b(H)=0$ és $b_m(H)=0$ $\forall m$-re.

Ha $\mathrm{int}(H) \neq \emptyset$ és $\varepsilon>0$, akkor $\exists$ ENNY $T_1,\dots,T_N \subset H$, hogy $\sum_{j=1}^{N} t(T_j) > b(H)-\varepsilon$.

$b_m(A)$ def. $\Rightarrow b_m(H) \ge \sum_{j=1}^{N} b_m(T_j) \xrightarrow[m\to+\infty]{} \sum_{j=1}^{N} t(T_j) > b(H)-\varepsilon$

$\exists M_0, \forall m \ge M_0$-ra, $b(H) \underset{b(H)\text{ def.}}{\ge} b_m(H) \ge \sum_{j=1}^{N} b_m(T_j) > b(H)-\varepsilon$.

$\Rightarrow b_m(H) \to b(H)$

iii) $b_m(H) \le k_m(H)$ $m\to+\infty \Rightarrow b(H) \le k(H)$. ⌋

T.: T.f.h. $A, B \subset \mathbb{R}^n$ korl.

i) $k(A\cup B) \le k(A)+k(B)$, ii) ha A és B ENNY $\Rightarrow b(A\cup B) \ge b(A)+b(B)$

iii) $A \subset B \Rightarrow b(A) \le b(B)$, $k(A) \le k(B)$.

Biz.: $\forall m$-re $k_m(A\cup B) \le k_m(A)+k_m(B)$, $m\to+\infty \Rightarrow$ i)

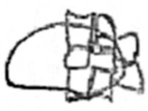
A és B ENNY $\Rightarrow b_m(A\cup B) \ge b_m(A)+b_m(B)$, $m\to+\infty \Rightarrow$ ii)

$A\subset B$ és $T \subset A \Rightarrow T \subset B$, ($T$ tégla) $\Rightarrow b(A) \le b(B)$,

$\bigcup_{j=1}^{N} T_j \supset B \supset A \Rightarrow k(A) \le k(B)$ ⌋

(*)

T.: $H \subset \mathbb{R}^n$ korl. halmazra $\boxed{k(H) = k(\mathrm{cl}\,H) = b(H) + k(\mathrm{mar}(H))}$



$\mathcal{K}_m(H, k)$ = belső kockák $\cup$ határkockák

$\mathrm{mar}(H)$ zárt $\Rightarrow$ ha egy kocka metszi $\mathrm{mar}(H)$-t, akkor metszi $\mathrm{cl}(\mathrm{mar}\,H) = \mathrm{mar}(H)$-t is. $k_m(\mathrm{mar}\,H) = \cup$ határkockáinak térf. $\Rightarrow k_m(H) = k_m(\mathrm{cl}(H)) = b_m(H) + k_m(\mathrm{mar}\,H) \xrightarrow[m\to+\infty]{} (*)$ ⌋

Def.: $H \subset \mathbb{R}^n$ nulla (Jordan) mértékű, ha $k(H)=0$.

T.: $H \subset \mathbb{R}^n$ akkor mérh. ha korl. és $k(\text{hat}(H))=0$.

Biz.: (*) $\Rightarrow k(H)-b(H)=k(\text{hat}(H))$ ∎

Ha T tégla, akkor T lefedi T-t és így $k(T)\le t(T)$
és $\forall \varepsilon>0$-ra $b(T)\ge t(T)-\varepsilon$, mivel $k(T)\ge b(T) \Rightarrow k(T)=b(T)$
$\Rightarrow T\in\mathcal{J}$ és $\mathcal{J}$. mértéke $t(T)$ (nincs új def.)

Pl.: $H=(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\cap[0,1]^2 \notin \mathcal{J}$ mivel $b(H)=0$,
$k(H)=1$, $\text{hat}(H)=[0,1]^2$, $k(\text{hat}\,H)=k([0,1]^2)=t([0,1]^2)=1$.

T.: Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f\ge 0$, $f\in R[a,b]$, akkor
$A_f=\{(x,y): 0\le y\le f(x)\}\subset\mathbb{R}^2$ Jordan mérh. és $t(A_f)=\int_a^b f$.

Biz.: $k(A_f)\le\int_a^b f$ és $b(A_f)\ge\int_a^b f \Rightarrow k(A_f)=b(A_f)=t(A_f)=\int_a^b f$. ∎

Mivel $\text{graf}(f)\subset\text{hat}(A_f) \Rightarrow t(\text{graf}(f))=0$.

Áll.: $\text{hat}(A\cup B)$, $\text{hat}(A\cap B)$, $\text{hat}(A\setminus B)$ mind része $\text{hat}(A)\cup\text{hat}(B)$-nek

Biz.: $\text{hat}(A\cap B)\subset\text{hat}(A)\cup\text{hat}(B)$ (többi HF)
$x\in\text{hat}(A\cap B)\Rightarrow \forall\delta>0,\ \exists y_1\in B(x,\delta)\cap(A\cap B)$ és
$\exists y_2\in B(x,\delta)\setminus(A\cap B)\Rightarrow y_2\notin A$ v. $y_2\notin B$
(I) $y_1\in B(x,\delta)\cap A$ és $y_2\in B(x,\delta)\setminus A$, vagy
(II) $y_1\in B(x,\delta)\cap B$ és $y_2\in B(x,\delta)\setminus B$
A $\delta_n=\frac{1}{n}$ sorozattal (I) v. (II) ∞ sokszor telj. Ha (I) akkor
$x\in\text{hat}(A)$, ha (II) akkor $x\in\text{hat}(B)\Rightarrow x\in\text{hat}(A)\cup\text{hat}(B)$. ∎

T.: Ha $A,B\in\mathcal{J}$ akkor $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B\in\mathcal{J}$.

Biz.: $A, B \in \mathcal{J} \Rightarrow$ korl. $\Rightarrow A\cup B,\ A\cap B,\ A\setminus B$ is korl.

$k(\mathrm{mar}\,A) = k(\mathrm{mar}\,B) = 0 \Rightarrow 0 \le k(\mathrm{mar}\,A \cup \mathrm{mar}\,B) \le k(\mathrm{mar}\,A) +$
$+ k(\mathrm{mar}\,B) = 0 \Rightarrow k(\mathrm{mar}(A\cup B)) = k(\mathrm{mar}(A\cap B)) = k(\mathrm{mar}(A\setminus B)) = 0$ ∎

T.: i) $t(A) \ge 0$ $\forall A \in \mathcal{J}$-re,

ii) ha $A, B \in \mathcal{J}$, A, B ENNY $\Rightarrow t(A\cup B) = t(A) + t(B)$,

iii) ha $A \in \mathcal{J}$ és $B = A + \underline{v} = \{\underline{x}+\underline{v} : \underline{x}\in A\}$, $\underline{v}\in\mathbb{R}^n$,
(B az A eltoltja), akkor $B\in\mathcal{J}$ és $t(B) = t(A)$.

iv) $t([0,1]^n) = 1$.

Az i)–iv) tul. már egyért. meghat. a Jordan mértéket ld. Tk.

Biz.: $t(A) = b(A) \ge 0$ $\forall$ korl. A-ra $\Rightarrow$ i)

$A, B \in \mathcal{J} \Rightarrow t(A\cup B) = k(A\cup B) \le k(A) + k(B) = t(A) + t(B)$

Ha $A, B \in \mathcal{J}$, A, B ENNY, akkor $t(A\cup B) = b(A\cup B) \ge b(A) + b(B) = t(A) + t(B)$ $\Rightarrow$ (ii)

$T+v$ is tégla, ha T az és $t(T+v) = t(T)$. $A \subset \bigcup_{j=1}^{k} T_j \Rightarrow A + \underline{v} \subset \bigcup_{j=1}^{k} (T_j + \underline{v})$

$\Rightarrow k(A) = k(A+\underline{v})$. Hasonlóan $b(A) = b(A+\underline{v})$.

$A \in \mathcal{J} \Rightarrow b(A) = b(A+\underline{v}) = k(A) = k(A+\underline{v}) \Rightarrow A + \underline{v} \in \mathcal{J}$.

$[0,1]^n$ tégla $\Rightarrow t([0,1]^n) = 1^n = 1$ ∎

T.: Ha $A\subset B$, $A, B\in\mathcal{J}$ akkor $B\setminus A \in \mathcal{J}$ és $t(B\setminus A) = t(B) - t(A)$.

Biz.: A és $B\setminus A$ ENNY $\Rightarrow t(B\setminus A) + t(A) = t((B\setminus A)\cup A) = t(B)$

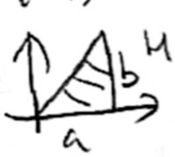
Eml.: (*) $k(H) = k(\mathrm{cl}\,H) = b(H) + k(\mathrm{mar}\,H)$, $H\in\mathcal{J} \Rightarrow k(\mathrm{mar}\,H) = 0$

T.: Ha $A\in\mathcal{J}$ akkor $\mathrm{int}(A), \mathrm{cl}(A) \in \mathcal{J}$ és (**) $t(A) = t(\mathrm{cl}(A)) = t(\mathrm{int}(A))$.

Biz.: $k(\mathrm{mar}\,A) = b(\mathrm{mar}\,A) = 0 \Rightarrow \mathrm{mar}(A) \in \mathcal{J} \Rightarrow$

$\mathrm{int}(A) = A \setminus \mathrm{mar}(A) \in \mathcal{J}$ és $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{mar}(A) \in \mathcal{J}$

$t(\mathrm{mar}(A)) = 0 \Rightarrow$ (**) ∎

Áll.: 

Az ábrán látható H háromszögre $H\in\mathcal{J}$ és $t(H) = \frac{ab}{2}$.

Biz.: $t(H) = \int_0^a \frac{b}{a} x\, dx = \left[\frac{b}{a}\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{ab}{2}$ ∎

Köv.: $t(H+v) = t(H)$ $\forall v \in \mathbb{R}^2$-re.

$\Rightarrow$ Tetsz. $H \subset \mathbb{R}^2$ téglalap mérh. és $t(H) =$ oldalak szorzata.

<u>Biz.:</u> (vázlat)

H-t foglaljuk bele egy tengely párh. T_0 téglalapba. Ekkor $T_0 \setminus H$ teng. párh. befogójú derékszögű háromszögekből áll. T_0 és e háromszögek területe megegyezik az elemi geometriából ismert értékkel $\Rightarrow$ $t(H) = ab$ ⌋

<u>T.:</u> Legyen Φ a sík tetsz. egybevágósága. Ha $A \subset \mathbb{R}^2$ korl. akkor $b(\Phi(A)) = b(A)$ és $k(\Phi(A)) = k(A)$.
Ha $A \in \mathcal{J}$, akkor $\Phi(A) \in \mathcal{J}$ és $t(\Phi(A)) = t(A)$.

<u>Biz.:</u> T.f.h. $T_1, \dots, T_k \subset A$, ENNY téglák, akkor $t(\Phi(T_j)) = t(T_j)$ a fentiek szerint és a $\Phi(T_j)$ téglák ENNY $\mathcal{J}$ mérh halmazok (elemi geom. $\Rightarrow$ téglalap egybevágó képe téglalap és körlemez (2D gömb) képe körlemez) $\Rightarrow t\left(\bigcup_{j=1}^{k} \Phi(T_j)\right) = \sum_{j=1}^{k} t(T_j) \Rightarrow b(\Phi(A)) \geq$
$\geq b\left(\bigcup_{j=1}^{k} \Phi(T_j)\right) = \sum_{j=1}^{k} t(T_j)$, sup-ot véve $\forall T_1, \dots, T_k \subset A$ ENNY téglákra $\Rightarrow b(\Phi(A)) \geq b(A)$.
Φ^{-1} is egybevágóság $\Rightarrow b(\underbrace{\Phi^{-1}(\Phi(A))}_{A}) \geq b(\Phi(A)) \Rightarrow b(\Phi(A)) = b(A)$.
Hasonlóan biz. $k(\Phi(A)) = k(A)$
$A \in \mathcal{J} \Rightarrow k(A) = b(A) = t(A) \Rightarrow k(\Phi(A)) = b(\Phi(A)) = t(\Phi(A))$ ⌋

<u>Megj.:</u> A fenti tétel $\mathbb{R}^n$-beli egybevágóságokra is igaz.
l.u. TK.

Tr! T.f.h. $\lambda>0$ és $\psi_\lambda(\underline{x})=\lambda\underline{x}$, $(\forall\underline{x}\in\mathbb{R}^n)$, λ arányú középpontos hasonlóság. Ekkor $b(\psi_\lambda(A))=\lambda^n b(A)$, $k(\psi_\lambda(A))=\lambda^n k(A)$ és ha $A\in\mathcal{J}$, akkor $t(\psi_\lambda(A))=\lambda^n t(A)$.

Biz: Ha T tégla, akkor $\psi_\lambda(T)$ is tégla és $t(\psi_\lambda(T))=\lambda^n t(T)$.

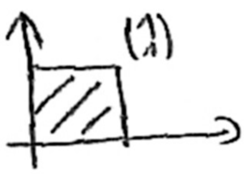
$$A\subset\bigcup_{j=1}^{k}T_j \Leftrightarrow \psi_\lambda(A)\subset\bigcup_{j=1}^{k}\psi_\lambda(T_j) \Rightarrow k(\psi_\lambda(A))=\lambda^n k(A).$$

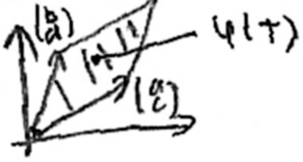
Hasonló biz. b-re és t-re is a megf. egyenlőség]

T.f.h. $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ lin. tr. (oszlopvektorokat írunk a mátrix szorzás szabályai miatt)

$$\varphi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}.$$

T.f.h. $T=[0,1]\times[0,1]$





$\varphi(T)$ egy parallelogramma $\Rightarrow$ $\varphi(T)\in\mathcal{J}$.
Legyen ψ az a forgatás, amire $\psi\binom{a}{c}$ az x tengelyre kerül.

Ekkor $t(\psi(\varphi(T)))=t(\varphi(T))$ és $\det(\psi)=1$.

Legyen $\psi\circ\varphi$ mátrixa $\begin{pmatrix}a'&b'\\0&d'\end{pmatrix}$, $t(\varphi(T))=t(\psi(\varphi(T)))=|a'd'|=$

$$=\left|\det\begin{pmatrix}a'&b'\\0&d'\end{pmatrix}\right|=\left|\det(\psi)\cdot\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right|=|D_\varphi|\cdot \underset{1}{\underset{\parallel}{t(T)}}$$

Ha $D_\varphi=0$ akkor $\binom{a}{c}$ és $\binom{b}{d}$ lin. ö.f. $\Rightarrow$ egy egyenesbe esnek $\Rightarrow t(\varphi(T))=0=|D_\varphi|\cdot t(T)$.

Def: (sorvektorokat írunk) az $\underline{v}=(a,c)$, $\underline{w}=(b,d)\in\mathbb{R}^2$ síkvektorok keresztszorzata (a vektoriális szorzat 2D változata)

$$\underline{v}\times\underline{w}=ad-bc=\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=v_1w_2-v_2w_1=\det\begin{pmatrix}v_1&w_1\\v_2&w_2\end{pmatrix}$$

A $\underline{v}$ és $\underline{w}$ által meghatározott parallelogramma területe $|\underline{v}\times\underline{w}|=|v_1w_2-v_2w_1|=\sqrt{\|\underline{v}\|^2\cdot\|\underline{w}\|^2-\langle\underline{v},\underline{w}\rangle^2}=$

$$=\sqrt{(v_1^2+v_2^2)(w_1^2+w_2^2)-(v_1w_1+v_2w_2)^2}=$$

$$=\sqrt{\cancel{v_1^2w_1^2}+v_1^2w_2^2+v_2^2w_1^2+\cancel{v_2^2w_2^2}-\cancel{v_1^2w_1^2}-2v_1w_2v_2w_1-\cancel{v_2^2w_2^2}}$$

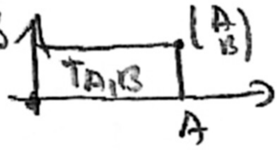
a $\underline{v}$ és $\underline{w}$ irányított szöge az a $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{R}$ szög, amelyre

$\|\underline{v}\| \|\underline{w}\| \cos\varphi = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$, $\underbrace{\|\underline{v}\| \|\underline{w}\| \sin\varphi = \underline{v} \times \underline{w}}$,

innen is látszik a parallelogramma terület.

---

visszatérve $T = [0,1] \times [0,1]$-hez és oszlopvektorokhoz



Ha B, $\binom{A}{B}$ ha tetsz. $T_{A,B}$ téglalapot veszünk, akkor $\Psi_{A,B} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$-re $\Psi_{A,B}(T) = T_{A,B}$ és

$$t(\varphi(T_{A,B})) = t(\varphi \circ \Psi_{A,B}(T)) = |D\varphi| \cdot (AB) \cdot \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{t(T)} = |D\varphi|\, t(T_{A,B})$$

Mivel eltolás nem változtatja meg egy tetsz. téglalap J. mértékét, így általában is igaz $\forall$ téglalapra, hogy $t(\varphi(T)) = |D\varphi| \cdot t(T)$.

Ebből következik, hogy $\forall A \subset \mathbb{R}^2$-re $t_b^k(\varphi(A)) = |D\varphi|\, t_b^k(A)$.

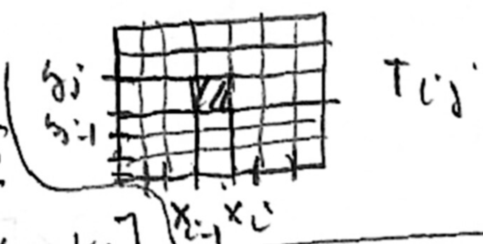
A tétel magasabb dim-ben is érv. Ld Tk.!

<u>T.:</u> Minden korl. $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazra és minden $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. tr-ra $t_b^k(\varphi(A)) = |\det(\varphi)|\, t_b^k(A)$. Ha $\det \varphi \neq 0$, akkor $A \in \mathcal{J} \Leftrightarrow \varphi(A) \in \mathcal{J}$.

<u>Def.:</u> A $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz <u>átmérője</u>
$\delta(H) = \operatorname{diam} H = \sup\{\|\underline{x} - \underline{y}\| : \underline{x}, \underline{y} \in H\}$ $(\sup \emptyset \overset{\text{def}}{=} 0)$.

Nyilván: H korl. $\Leftrightarrow \delta(H) < +\infty$.

<u>Integrálás 2D téglákon</u>



<u>Def.:</u> A $T = [a,b] \times [c,d]$ tégla felosztása olyan $T_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ téglák rendszere, melyekre $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ és $c = y_0 < y_1 < \dots < y_k = d$. Az x_i, y_j pontok az osztópontok a T_{ij} téglák az osztó téglák.

Ha $f: T \to \mathbb{R}$ korl. fv., akkor

$$\begin{matrix} m_{ij} \\ M_{ij} \end{matrix} = \begin{matrix} \inf \\ \sup \end{matrix} \{ f(x,y) : (x,y) \in T_{ij} \}, \quad 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le k.$$

$$s_\Phi(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} m_{ij} \cdot t(T_{ij}), \quad S_\Phi(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} M_{ij} \cdot t(T_{ij})$$

a Φ felo-hoz tart. alsó, ill. felső int. köz összeg.

Φ' a Φ finomítása, ha Φ $\forall$ osztópontja a Φ'-nek is az.

Jel: $\Phi' \supset \Phi$

Az 1D esethez hasonlóan:

L.: Ha $f: T \to \mathbb{R}$ korl. fv. és $\Phi' \supset \Phi$ akkor $s_{\Phi'} \ge s_\Phi$

és $S_{\Phi'} \le S_\Phi$.

Biz.: Mint 1D Mf. ⌋

Def.: A Φ_1 és Φ_2 felok egyesítése $\Phi_1 \cup \Phi_2$ az a felo., melynek osztópontjai mindazok a pontok, melyek Φ_1 és Φ_2 o.p.-i.

L.: Ha $f: T \to \mathbb{R}$ korl., Φ_1 és Φ_2 a T két felo-ja akkor $s_{\Phi_1} \le S_{\Phi_2}$.

Biz.: $s_{\Phi_1} \le s_{\Phi_1 \cup \Phi_2} \le S_{\Phi_1 \cup \Phi_2} \le S_{\Phi_2}$. ⌋

Jelölés $\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}$ a T összes felosztása.

$\Phi_2 \in \mathcal{F}$ tetsz. $\Rightarrow$ $\forall \Phi \in \mathcal{F}$-re $s_\Phi \le S_{\Phi_2} \Rightarrow \sup\limits_{\Phi \in \mathcal{F}} s_\Phi \le S_{\Phi_2}$

$\forall \Phi_2$-re érv. $\Rightarrow \sup\limits_{\Phi \in \mathcal{F}} s_\Phi \le \inf\limits_{\Phi_2 \in \mathcal{F}} S_{\Phi_2}$.

Def.: Ha $f: T \to \mathbb{R}$ korl. fv. akkor $\sup\limits_{\Phi \in \mathcal{F}} s_\Phi = \underline{\int_T} f(x,y)\,dx\,dy$ az f alsó integrálja T-n, $\inf\limits_{\Phi \in \mathcal{F}} S_\Phi = \overline{\int_T} f(x,y)\,dx\,dy$ az f felső integrálja.

Az előzőek szerint $\underline{\int_T} f(x,y)\,dx\,dy \le \overline{\int_T} f(x,y)\,dx\,dy$

Ha $I = \underline{\int_T} f(x,y)\,dx\,dy = \overline{\int_T} f(x,y)\,dx\,dy$, akkor f integrálható T-n, $f \in R(T)$ és integrálja $\int_T f(x,y)\,dx\,dy = I$.
($\iint_T f(x,y)\,dx\,dy$ jelölést is haszn.)

T.: Ha $f \geq 0$, $f \in R(T)$, akkor a

(**) $H_f = \{(x,y,z) : (x,y) \in T,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$
test J. mérh. $\mathbb{R}^3$-ben és $t(H_f) = V(H_f) = \int_T f(x,y)\,dx\,dy$.

Biz.: $\underline{\int_T} f(x,y)\,dx\,dy \leq b(H_f) \leq k(H_f) \leq \overline{\int_T} f(x,y)\,dx\,dy$.]

Def.: Ha $f, g \in R(T)$ és $f(x,y) \leq g(x,y)$ $\forall (x,y) \in T$, akkor a
(*) $H_{f,g} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in T,\ f(x,y) \leq z \leq g(x,y)\}$ halmazt az f és g által meghat. normáltartománynak nev.

T.: Ha $f, g \in R(T)$ és $\forall (x,y) \in T$-re $f(x,y) \leq g(x,y)$, akkor a (*)-beli $H_{f,g}$ n.tart. mérh. és $t(H_{f,g}) = \int_T (g-f)\,dx\,dy$.

Biz.: Ha $f \geq 0$, akkor a (**)-beli H_f és a has. def. H_g is J.mérh. $\Rightarrow$ $t(H_f) = \int_T f\,dx\,dy$, $t(H_g) = \int_T g\,dx\,dy$ $\Rightarrow$
$t(H_g \setminus H_f) = \int_T (g-f)\,dx\,dy$. Mivel $H_{f,g} \supset H_g \setminus H_f$ és
$H^* = H_{f,g} \setminus (H_g \setminus H_f) = \{(x,y,z) : (x,y) \in T,\ z = f(x,y)\}$-re
$H^* \subset \operatorname{mar}(H_f) \Rightarrow t(H^*) = 0 \Rightarrow H^* \in \mathcal{J} \Rightarrow H_{f,g} \in \mathcal{J}$
és $t(H_{f,g}) = t(H_g \setminus H_f) + t(H^*) = \int_T (g-f)\,dx\,dy$.

Ha $f < 0$ akkor f korl. $\Rightarrow \exists K$, $f+K \geq 0$ és $g+K \geq 0$,
$t(H_{f,g}) = t(H_{f,g} + (0,0,K)) = \int_T ((g+K)-(f+K))\,dx\,dy = \int_T (g-f)\,dx\,dy$]

Az egyszerű integrálszt. többi tétele is érv. $\int_T f\,dx\,dy$-ra, ezeket csak felsoroljuk, biz. HF/64.

T.: Az $f: T \to \mathbb{R}$ korl. fv. acsa. int.ható, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \Phi$ felo., hogy $\left(\underline{\int_T} f\right) - \varepsilon < s_\Phi \le S_\Phi < \left(\overline{\int_T} f\right) + \varepsilon$.

T.: Az $f: T \to \mathbb{R}$ korl. fv. acsa. int.ható ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \Phi$ felo., hogy $S_\Phi - s_\Phi < \varepsilon$.

Def.: $H \neq \emptyset$ halmazon a $f: H \to \mathbb{R}$ korl. fv. oszcillációja H-n, $\omega(f; H) = \sup f(H) - \inf f(H) = \sup\{|f(\underline{x}) - f(\underline{y})| : \underline{x}, \underline{y} \in H\}$.

Az $f: T \to \mathbb{R}$ korl. fv. Φ felo-hoz tart. oszcillációs összege

$$\Omega_\Phi(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\omega(f; T_{ij})}_{M_{ij} - m_{ij}} \cdot t(T_{ij}) = S_\Phi - s_\Phi.$$

T.: Egy tetsz. korl. $f: T \to \mathbb{R}$ fv. acsa int.ható, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \Phi$ felo. hogy $\Omega_\Phi < \varepsilon$.

Def.: Az $f: T \to \mathbb{R}$ korl. fv. Φ felo-hoz és $\underline{\xi}_{ij} \in T_{ij}$ pontokhoz tartozó <u>integrálközelítő összege</u>

$$\sigma_\Phi(f; (\underline{\xi}_{ij})) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} f(\underline{\xi}_{ij}) t(T_{ij}).$$

L.: Tetsz. korl. $f: T \to \mathbb{R}$ fv-re és Φ felo-ra

$$\inf_{\underline{\xi}_{ij} \in T_{ij},\ \forall i,j\text{-re}} \sigma_\Phi(f; (\underline{\xi}_{ij})) = s_\Phi, \quad \sup_{\underline{\xi}_{ij} \in T_{ij},\ \forall i,j\text{-re}} \sigma_\Phi(f; (\underline{\xi}_{ij})) = S_\Phi.$$

T.: Az $f: T \to \mathbb{R}$ korl. fv. acsa. int.ható és integrálja I ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \Phi$ felo. hogy $\forall \sigma_\Phi$ int. köz. összegre $|\sigma_\Phi(f; (\underline{\xi}_{ij})) - I| < \varepsilon$.

Def.: A $\Phi \in \mathcal{F}(T)$ finomsága $\delta(\Phi) = \max\limits_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k}} \delta(T_{ij})$. Φ δ_0-nál finomabb ha $\delta(\Phi) \le \delta_0$.

T.: Az $f: T \to \mathbb{R}$ korl. fv. acsa. int.ható és integrálja I ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta_\varepsilon$, hogy ha $\delta(\Phi) \le \delta_\varepsilon$ akkor $|\sigma_\Phi(f; (\underline{\xi}_{ij})) - I| < \varepsilon$, tetsz $\underline{\xi}_{ij} \in T_{ij}$-re.

T.: Ha $f \in C(T)$, akkor $f \in R(T)$.

Biz.: T kompakt $\Rightarrow$ f korl. és e. folyt., $\varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta_0 > 0$, hogy $\underline{p}, \underline{q} \in T$, $\|\underline{p} - \underline{q}\| < \delta_0 \Rightarrow |f(\underline{p}) - f(\underline{q})| < \varepsilon$.
$\Rightarrow$ Ha Φ felosztásra $x_i - x_{i-1} < \frac{\delta_0}{\sqrt{2}}$ és $y_j - y_{j-1} < \frac{\delta_0}{\sqrt{2}}$ akkor $\delta(T_{ij}) < \delta_0$ $\forall i, j$-re $\Rightarrow \omega(f; T_{ij}) < \varepsilon \Rightarrow$
$$\Omega_\Phi(f) = \sum_i \sum_j \omega(f; T_{ij}) \cdot t(T_{ij}) < \varepsilon \sum_i \sum_j t(T_{ij}) = \varepsilon t(T)$$

T.: Ha $f, g \in R(T)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, akkor $\alpha f + \beta g \in R(T)$ és
$$\int_T (\alpha f + \beta g)\, dx\, dy = \alpha \int_T f\, dx\, dy + \beta \int_T g\, dx\, dy.$$

T.: Ha $g \in R(T)$, $\alpha \le g(x) \le \beta$, $\forall x \in T$ és $f \in C[\alpha, \beta]$, akkor $f \circ g \in R(T)$.

T.: $f, g \in R(T) \Rightarrow |f|$, $f \cdot g \in R(T)$, ha még $|g(\underline{x})| \ge \delta > 0$ és telj. $\forall \underline{x} \in T$-re, akkor $\frac{1}{g} \in R(T)$.

A területi integrál átalakítása kétszeres integrállá

$f_x(y) = f^y(x) = f(x, y)$ szekció függvények.

T.: (lebontási "Fubini" tétel) T. fh. $T = [a, b] \times [c, d]$ és $f \in R(T)$. Ekkor

(i) az $y \mapsto \overline{\int_a^b} f^y(x)\, dx$ és az $y \mapsto \underline{\int_a^b} f^y(x)\, dx$ fv-ek int. hatók $[c, d]$-n és
$$I = \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\overline{\int_a^b} f^y(x)\, dx \right) dy = \int_c^d \left(\underline{\int_a^b} f^y(x)\, dx \right) dy,$$

(ii) az $x \mapsto \overline{\int_c^d} f_x(y)\, dy$ és az $x \mapsto \underline{\int_c^d} f_x(y)\, dy$ fv-ek int. hatók $[a, b]$-n és
$$I = \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\overline{\int_c^d} f_x(y)\, dy \right) dx = \int_a^b \left(\underline{\int_c^d} f_x(y)\, dy \right) dx$$

Köv.: (Szukcesszív integrálás tétele) $f \in R(T)$

i) Ha $\forall y \in [c,d]$-re $f^y \in R[a,b]$, akkor

$$\int\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = I$$

ii) Ha $\forall x \in [a,b]$-re $f_x \in R[c,d]$, akkor

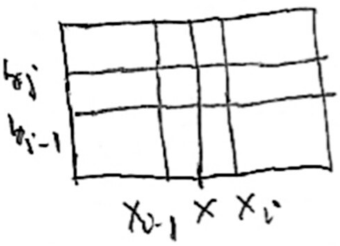
$$\int\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = I$$

teh. ha mindkét felt. telj. (pl. $f \in C(T)$)

Biz.: (ii)-t biz. ((i) $x \leftrightarrow y$-nal kapható)

$\varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \Phi$ T felo., hogy $\underbrace{a = x_0 < \dots < x_n = b}_{\Phi_1\ [a,b]\ \text{felo.}}$, $\underbrace{c = y_0 < \dots < y_k = d}_{\Phi_2\ [c,d]\ \text{felo.}}$

és $I - \varepsilon < s_\Phi \le S_\Phi < I + \varepsilon$



$x \in [x_{i-1}, x_i]$ esetén az $f_x(y)$ fv-re az $[y_{j-1}, y_j]$-n nyilván $m_j(f_x) \ge m_{ij}$ és $M_j(f_x) \le M_{ij}$ $\Rightarrow \int_c^d f_x\,dy \le S_{\Phi_2}(f_x) \le \sum_{j=1}^k M_{ij}(y_j - y_{j-1})$

teh. $\forall\, x \in [x_{i-1}, x_i]$-re $\Rightarrow S_{\Phi_1}\left(\int_c^d f_x\,dy \right) \le \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k M_{ij}(y_j - y_{j-1}) \right)(x_i - x_{i-1})$

$$\Rightarrow \int_a^b \left(\int_c^d f_x\,dy \right) dx \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k M_{ij}\,(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k M_{ij}\, t(T_{ij}) = S_\Phi < I + \varepsilon.$$

Hasonlóan belátható, hogy

$$\int_a^b \left(\int_c^d f_x\,dy \right) dx \ge \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k m_{ij}\, t(T_{ij}) = s_\Phi > I - \varepsilon \Rightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0$-ra $I - \varepsilon < \underline{\int_a^b} \left(\underline{\int_c^d} f_x\,dy \right) dx \underset{(*)}{\le} \underline{\int_a^b} \left(\overline{\int_c^d} f_x\,dy \right) dx \underset{(**)}{\le} \overline{\int_a^b} \left(\overline{\int_c^d} f_x\,dy \right) dx < I + \varepsilon$

$\Rightarrow$ (*)-nál és (**)-nál $=$ van és mindegyik $= I$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \int_a^b \left(\int_c^d f_x(y)\,dy \right) dx = I.$

Hasonlóan $\exists \int_a^b \left(\int_c^d f_x(y)\,dy \right) dx = I$

<u>Pl.:</u> $I=\int_{[0,1]^2} x^3 e^{yx^2}\,dx\,dy = ?$, $x^3 e^{yx^2} = f(x,y) \in C([0,1]^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\in R([0,1]^2)$ és $I = \int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^1 x^3 e^{yx^2}\,dx}_{\text{kellemetlen}}\Big)\,dy = \int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^1 x^3 e^{yx^2}\,dy}_{\text{így könnyebb}}\Big)\,dx =$

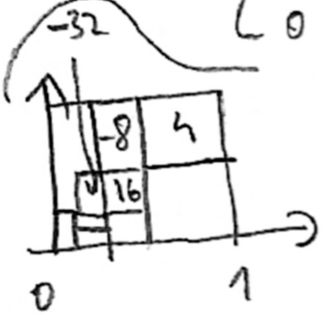
$=\int_0^1 \left(\left[\frac{x^3 e^{yx^2}}{x^2}\right]_{y=0}^{1}\right)dx = \int_0^1 x\,(e^{x^2}-1)\,dx = \int_0^1 x e^{x^2}\,dx - \int_0^1 x\,dx =$

$=\left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2} = \frac{e-1-1}{2} = \frac{e-2}{2}.$

<u>Megj.:</u> (ld TK. 14.7/64) $f\in R(T) \not\Rightarrow \forall y\in[c,d]$-re $\exists \int_a^b f^y\,dx$ ill. $\forall x\in[a,b]$-re $\exists \int_c^d f_x\,dy$.

<u>Pl.:</u> $\exists f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$, melyre $\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy = 0$, de $\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx = 1$ (persze $f\notin R([0,1]^2)$.)

$$f(x,y)=\begin{cases} 2^{2n} & \text{ha } (x,y)\in[2^{-n},2^{-n+1})\times[2^{-n},2^{-n+1}) \\ -2^{2n+1} & \text{ha } (x,y)\in[2^{-n-1},2^{-n})\times[2^{-n},2^{-n+1}) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



$\int_0^1 f(x,y)\,dx = 0 \quad \forall y\in[0,1]$-re $\Rightarrow \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy = 0$

Ha $x\in[0,\frac{1}{2}]$, akkor $\int_0^1 f(x,y)\,dy = 0$, de

ha $x\in[\frac{1}{2},1)$, akkor $\int_0^1 f(x,y)\,dy = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$

$\Rightarrow \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 2 = \boxed{1}$

A fenti def. és tét. elek $\mathbb{R}^n$-beli téglákra is megfogalmazhatóak. Ld. TK. Sőt téglák helyett J. mérh. halmazokra is általánosíthatóak (részl. TK).

<u>Def.:</u> T.f.h. $A\subset\mathbb{R}^n$, J. mérh. halmaz. Az A Φ felosztása olyan $\Phi=\{A_1,\dots,A_k\}$ halmazrendszer melyre az $A_1,\dots,A_k$ ENNY nem üres J. mérh. halmazok és $A=\bigcup_{j=1}^{k} A_j$. Finomság $\delta(\Phi)=\max_{j=1,\dots,k}\delta(A_j)$.

$m_j \overset{\text{def.}}{=} \inf$, $M_j \overset{\text{def.}}{=} \sup \{ f(\underline{x}) : \underline{x} \in A_j \}$, $s_\Phi = \sum_{j=1}^{k} m_j\, t(A_j)$, $S_\Phi = \sum_{j=1}^{k} M_j\, t(A_j)$

$\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}$ összes Φ felo. halmaza.

$\underline{\int_A} f\, d\underline{x} = \sup_{\Phi \in \mathcal{F}} s_\Phi$, $\overline{\int_A} f\, d\underline{x} = \inf_{\Phi \in \mathcal{F}} S_\Phi$ az f, A-ra vonatk. (Darboux-féle) alsó és felső (térfogati) integrálja.

Ism. bizonyítható, hogy $\underline{\int_A} f\, d\underline{x} \le \overline{\int_A} f\, d\underline{x}$ és ha $I = \underline{\int_A} f\, d\underline{x} = \overline{\int_A} f\, d\underline{x}$, akkor f int.-ható A-n, $f \in R(A)$ és terf. integrálja $I = \int_A f\, d\underline{x} = \int_A f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int \dots \int_A f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$.

$\omega(f; A_j) = M_j - m_j$, $\Omega_\Phi \overset{\text{def.}}{=} S_\Phi - s_\Phi = \sum_{j=1}^{k} \omega(f; A_j)\, t(A_j)$.

T.: $f \in R(A) \iff \forall \varepsilon > 0$, $\exists \Phi \in \mathcal{F}$, $\Omega_\Phi < \varepsilon$.

$\Rightarrow$ $f \in R(A)$ és $B \subset A$, $B \in \mathcal{J} \Rightarrow \exists \int_B f\, d\underline{x}$.

T.: Ha $A, B \in \mathcal{J}$, A, B ENNY és $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ korl. fv, ha $f \in R(A)$ és $f \in R(B)$, akkor $f \in R(A \cup B)$ és
$$\int_{A \cup B} f(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_A f(\underline{x})\, d\underline{x} + \int_B f(\underline{x})\, d\underline{x}.$$

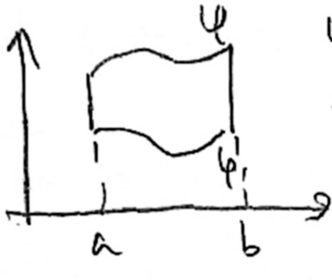
$\Rightarrow$ Ha $A \in \mathcal{J} \Rightarrow$ korl. $\exists T$ tégla, hogy $A \subset T$. Ha adott $f : A \to \mathbb{R}$ fv, akkor $\bar{f}(\underline{x}) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} f(\underline{x}) & \text{ha } \underline{x} \in A \\ 0 & \text{ha } \underline{x} \in T \setminus A. \end{cases}$

Nyilván $\exists \int_{T \setminus A} \bar{f}\, d\underline{x} = 0$ és $f \in R(A) \iff \bar{f} \in R(T)$.

Ak.: Ha $A \in \mathcal{J}$ és $f(\underline{x}) = 1$, $\forall \underline{x} \in A$, akkor $\int_A f(\underline{x})\, d\underline{x} = t(A)$.

Biz.: $\forall \Phi \in \mathcal{F}$-re $s_\Phi = S_\Phi = \sum_{j=1}^{k} 1 \cdot t(A_j) = t(A)$ $\square$

Def.: Ha $\varphi, \psi \in C[a,b]$ és $\varphi \le \psi$ $[a,b]$-n, akkor az $A_{\varphi,\psi} = \{(x,y) : x \in [a,b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ halmazokat y-ra nézve vett (síkbeli) (C-)normáltartományoknak nev.



$\varphi, \psi \in C[a,b] \Rightarrow \varphi, \psi \in R[a,b]$ és volt, hogy $t(\text{graph}\,\varphi) = t(\text{graph}\,\psi) = 0$ és $\text{mar}(A_{\varphi,\psi}) =$
$= \text{graph}(\varphi) \cup \text{graph}(\psi) \cup \{\text{max } 2 \text{ db. zárt szakasz}\}$, így $k(\text{mar}\, A_{\varphi,\psi}) = t(\text{mar}\, A_{\varphi,\psi}) = 0$

$\Rightarrow A_{\varphi,\psi} \in \mathcal{J}$.

T.: Ha $f : A_{\varphi,\psi} \to \mathbb{R}$ fv. és $\exists \int\limits_{A_{\varphi,\psi}} f \,dx\,dy$ és $\forall x \in [a,b]$-re $\exists \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$, akkor
$$\int\limits_{A_{\varphi,\psi}} f \,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Megj.: Hcs. def. x-re nézve vett norm. tart. és érv. a fenti tétel x és y felcs. is.

Biz.: $A_{\varphi,\psi}$ korl. $\Rightarrow \exists [c,d]$, hogy $A_{\varphi,\psi} \subset [a,b] \times [c,d] = T$.
Def. $\bar{f}$-t, mint előbb. Ekkor $\bar{f} \in R(T)$ és
$$\int\limits_{A_{\varphi,\psi}} f = \int\limits_T \bar{f} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{szukcesszív} \\ \text{int. tétel}}}{=} \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d \bar{f}(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$
$$\boxed{\int\limits_c^d \bar{f}(x,y) = \int\limits_c^{\varphi(x)} 0\,dy + \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy + \int\limits_{\psi(x)}^d 0\,dy}$$

A lebontási (Fubini) tétel magasabb dim-ben is megfogalmazható és szukc. int. tétele is általánosítható. Ld TK. Mi csak kétféle 3D általánosítást nézünk meg.

T.: Legyen $T = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]$ és t.f.h. $f \in R(T)$. Legyen $N = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$, $I_1(x,y) = \int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz$, $(x,y) \in N$, $I_2(z) = \int\limits_N f(x,y,z)\,dx\,dy$, $z \in [a_3,b_3]$.

Ha $\forall (x,y) \in N$-re, $\exists I_1(x,y)$, akkor

$$\int_T f\,dx\,dy\,dz = \int_N \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

Ha $\forall z \in [a_3, b_3]$-ra $\exists I_2(z)$, akkor

$$\int_T f\,dx\,dy\,dz = \int_{a_3}^{b_3} \left(\int_N f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz.$$

Ha megf. 2D integrálok tovább bonthatók (pl. $f \in C(T)$)

akkor $\int_T f = \int_{a_3}^{b_3} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx \right) dy \right) dz.$

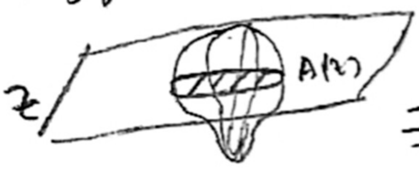
T.: Ha $B \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{J}$ mérh. kpkt, $\varphi, \psi : B \to \mathbb{R}$ folyt. fv-ek, $\forall (x,y) \in B$-re $\varphi(x,y) \le \psi(x,y)$, akkor az

$A_{\varphi,\psi} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in B,\ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y) \}$

z-re nézve vett normál tart. $\mathcal{J}$. mérh. és ha $f : A_{\varphi,\psi} \to \mathbb{R}$ int. fv., valamint $\forall (x,y) \in B$-re $\exists \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz$,

akkor $\int_{A_{\varphi,\psi}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_B \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy.$

Egy másik változat: T.: T.f.h. $A \subset \mathbb{R}^3$, $A \in \mathcal{J}$



$A \subset [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]$, $\forall z \in [a_3,b_3]$-ra $\exists \int_{A(z)} f(x,y,z)\,dx\,dy$, akkor

$$\int_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_3}^{b_3} \left(\int_{A(z)} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz.$$

Ha $f(x,y,z) \equiv 1$, A-n, akkor $\int_A 1\,dx\,dy\,dz = V(A) = t(A)$, A térfogata.

Cavalieri-elv $V(A) = t_3(A) = \int_{a_3}^{b_3} \left(\int_{A(z)} 1\,dx\,dy \right) dz = \int_{a_3}^{b_3} t_2(A(z))\,dz$

sík metszet. ter.

($\Rightarrow$ Ha két test megf. sík metszetei egyforma ter. akkor a térfogatuk megegyezik.)

<u>Pl.:</u> (Ferde) gúla térfogata: h magasságú és $t(A)$ alapterületű, $z\in[0,h]$

$$\int_{A(z)} 1\,dx\,dy = \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 t(A)$$

$$V(G) = \int_0^h \left(\int_{A(z)} 1\,dx\,dy\right) dz = \int_0^h \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 t(A)\,dz =$$

$$= \frac{t(A)}{h^2}\int_0^h (h-z)^2\,dz = \frac{t(A)}{h^2}\left[\frac{-(h-z)^3}{3}\right]_0^h = t(A)\cdot\frac{h}{3}.$$

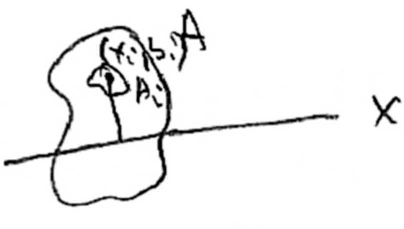
Ha A körlemez akkor a ferde körkúp térf. is hasonló.

Inhomogén $\varrho(x,y)$ sűrűségű lemez tömege:

$\sum_{i=1}^{n} \varrho(x_i,y_i)\,t(A_i) \approx$ a tömeg, ∞-ül finomítva:

$$m(A) = \int_A \varrho(x,y)\,dx\,dy$$

<u>x-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték</u>



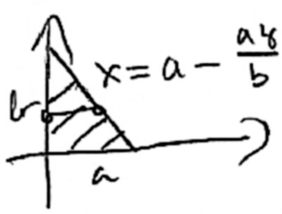
$$\Theta \approx \sum_{i=1}^{n} y_i^2\, m(A_i) \approx \sum_{i=1}^{n} y_i^2\, \varrho(x_i,y_i)\, t(A_i)$$

∞-ül finomítva

(y-tengelyre vonatk. esetben x-y szerepcsere)

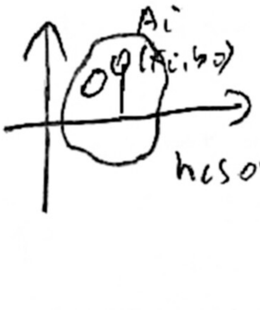
$$\Theta = \int_A y^2\, \varrho(x,y)\,dx\,dy$$

<u>Pl.:</u> $\triangle$ Θ-ja $\displaystyle\int_{\triangle} y^2\,dx\,dy = \int_0^b \left(\int_0^{a-\frac{ay}{b}} y^2\,dx\right) dy =$



$$= \int_0^b \left(a - \frac{ay}{b}\right) y^2\,dy = \frac{ab^3}{3} - \frac{ab^4}{4b} = \frac{ab^3}{12}.$$

Tömegközéppont (x_s, y_s) $\quad x_s \approx \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i\, m(A_i)}{m(A)} \approx \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i\,\varrho(x_i,y_i)\,t(A_i)}{m(A)}$



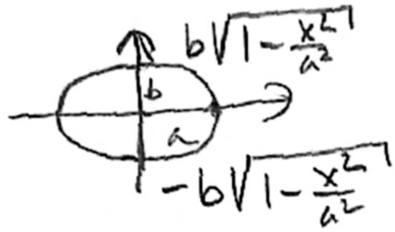
$$x_s = \frac{1}{m(A)}\int_A x\,\varrho(x,y)\,dx\,dy = \frac{\int_A x\,\varrho(x,y)\,dx\,dy}{\int_A \varrho(x,y)\,dx\,dy}$$

hasonlóan:

$$y_s = \frac{1}{m(A)}\int_A y\,\varrho(x,y)\,dx\,dy.$$

$\varrho = 1$ súlypont

Ellipszis területe:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$$

$$T=\int_A 1\,dx\,dy=\int_{-a}^{a}\left(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 1\,dy\right)dx=\int_{-a}^{a}2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=(*)$$

$\frac{x}{a}=\sin u$, $\frac{dx}{du}=a\cos u$ | $(*)=2b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 u}\,a\cos u\,du=$

$$=2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\,du=2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2u}{2}\,du=ab\pi$$

Térfogati integrál transzformációja (helyettesítés)

Volt, hogy ha $\varphi\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\binom{x}{y}=\binom{ax+by}{cx+dy}$ és $A\subset\mathbb{R}^2$, $A\in\mathcal{M}$ akkor $\varphi(A)\in\mathcal{M}$ és $t(\varphi(A))=|D_\varphi|\,t(A)$.

Mivel $\varphi'\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}\partial_1(ax+by) & \partial_2(ax+by)\\ \partial_1(cx+dy) & \partial_2(cx+dy)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ így az előző képlet $t(\varphi(A))=\|\varphi'\|\cdot t(A)=|\det(\varphi')|\,t(A)$ alakba írható, ekkor φ' értéke nem függ $\binom{x}{y}$-tól.

Ez kis darabokon lin. leképezésekkel való közelítésekkel általánosítható (részletek TK).

T.: (mérték és integráltranszformáció)

T.f.h. $G\subset\mathbb{R}^n$ nyílt, $\varphi: G\to\mathbb{R}^n$ folyt. diffh. Ha $H\in\mathcal{M}$, $cl(H)\subset G$ és φ injektív int(H)-n, akkor $\varphi(H)\in\mathcal{M}$ és $t(\varphi(H))=\int_H|\det\varphi'(\underline{x})|\,d\underline{x}$. Ha $f:\varphi(H)\to\mathbb{R}$ korl. fv., akkor

$$\int_{\varphi(H)} f(\underline{t})\,d\underline{t}=\int_H f(\varphi(\underline{x}))\,|\det(\varphi'(\underline{x}))|\,d\underline{x},$$ ha az egyik old. $\exists$ akkor a másik is. $\underline{t}=\varphi(\underline{x})$-et helyettesítettünk.

1D $\int_{\varphi([a,b])} f(t)\,dt=\int_c^d f(t)\,dt=\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\int_{[a,b]} f(\varphi(x))\,|\varphi'(x)|\,dx$

felt. φ szig. mon. nő $\varphi:[a,b]\to[c,d]$, (φ szt. mcs. $c>d$ $(\cdot(-1))$)

Biz.: Tk.]

T.: (Polárkoordinátás helyettesítés)

T.f.h. $\psi\binom{r}{\varphi} = \binom{r\cos\varphi}{r\sin\varphi} = \binom{x}{y}$. $H \subset [0,\infty) \times [0,2\pi]$, $H \in \mathcal{J}$

$\Rightarrow \psi(H) \in \mathcal{J}$, $t(\psi(H)) = \int_H r\,dr\,d\varphi$. Ha $f : \psi(H) \to \mathbb{R}$ korl.,

akkor $\int_{\psi(H)} f((x,y)^T)\,dx\,dy = \int_H f((r\cos\varphi, r\sin\varphi)^T)\,r\,dr\,d\varphi$

ha az egyik old $\exists$ akkor a másik is.

Biz.: ψ folyt. diff. $G = \mathbb{R}^2$-en. ψ injektív a $G_0 = \{\binom{r}{\varphi} \in \mathbb{R}^2 : r>0,\ 0<\varphi<2\pi\}$ nyílt halmazon.

$\psi\binom{r_1}{\varphi_1} = \psi\binom{r_2}{\varphi_2} \Leftrightarrow r_1\cos\varphi_1 = r_2\cos\varphi_2$ és $r_1\sin\varphi_1 = r_2\sin\varphi_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_1^2(\cos^2\varphi_1+\sin^2\varphi_1) = r_2^2(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2) \Rightarrow |r_1|=|r_2| \Rightarrow r_1=r_2$.

$\sin\varphi_1=\sin\varphi_2$ és $\cos\varphi_1=\cos\varphi_2$, $\varphi_1=\varphi_2$ mivel $0<\varphi_1,\varphi_2<2\pi$.

$\Rightarrow \det\psi' = \det\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix} = r(\cos^2\varphi - (-\sin^2\varphi)) = r$

alk az int. tr. tételt (Ha $H\subset[0,\infty)\times[0,2\pi]$, akkor $\operatorname{int} H \subset G_0$ így rajta ψ injektív.)]

Pl.: $H=[0,R]\times[0,2\pi]$ esetén $\psi(H) = \overline{B}(0,R)$

Ha $f:\overline{B}(0,R)\to\mathbb{R}$ az $f((x,y)^T) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ félgömb felszín

$$t(\text{Félgömb}) = \int_{\overline{B}(0,R)} f((x,y)^T) - 0\,dx\,dy = \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} f\circ\psi\binom{r}{\varphi}\,r\,dr\,d\varphi =$$

$\overline{B}(0,R) = \psi(H)$

$$\Rightarrow \int_{\overline{B}(0,R)} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} \sqrt{R^2-r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi}\,r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^R\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2-r^2}\,r\,d\varphi\right)dr = 2\pi\left(-\frac12\right)\int_0^R \sqrt{\underbrace{R^2-r^2}_{u}}\,\overbrace{(-2r)\,dr}^{du} = -\pi\int_{R^2}^0 \sqrt{u}\,du =$$

$\frac{du}{dr} = -2r$

$$= \pi\int_0^{R^2}\sqrt{u}\,du = \pi\left[\frac{u^{\frac32}}{\frac32}\right]_0^{R^2} = \frac{2\pi}{3}(R^2)^{\frac32} = \frac{2\pi}{3}R^3, \Rightarrow \text{teljes gömb } V = \frac{4\pi}{3}R^3$$]

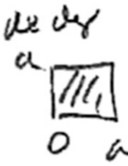
Pl.: $\int e^{-x^2}dx$ nem elemi, de

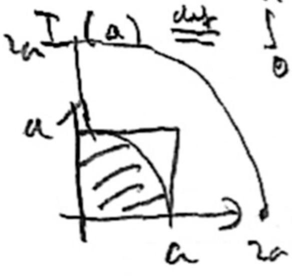
Áll.: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\left(\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}\right)$

Biz.: Ha $x \ge 1$, akkor $e^{-x^2} \le e^{-x}$, így $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx \le \int_1^{+\infty} e^{-x}dx = e^{-1} < +\infty$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ konv.

$I(a) \overset{\text{def}}{=} \int_0^a e^{-x^2}dx$; $(I(a))^2 = \int_0^a e^{-x^2}dx \cdot \int_0^a e^{-y^2}dy \overset{\text{felbontási tétel}}{=} \int_{[0,a]\times[0,a]} e^{-x^2-y^2}dx\,dy$





K_a a megf. körnegyed, $e^{-x^2-y^2} > 0 \Rightarrow$

$$f(a) \overset{\text{def}}{=} \int_{K_a} e^{-x^2-y^2}dx\,dy \le \int_{[0,a]\times[0,a]} e^{-x^2-y^2}dx\,dy \le \int_{K_{2a}} e^{-x^2-y^2}dx\,dy =$$

$= f(2a)$

$$f(a) = \int_{K_a} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}\cdot r\,d\varphi\,dr = \frac{\pi}{2}\int_0^a e^{-r^2}\cdot r\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left[e^{-r^2}\right]_0^a = -\frac{\pi}{4}\left(e^{-a^2}-1\right) = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right) \to \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(a) \to \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow f(2a) \to \frac{\pi}{4}$, rendőr szabály $\Rightarrow (I(a))^2 \to \frac{\pi}{4} \Rightarrow I(a) \to \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ■

Paraméteres integrálok

$$\int_0^1 x_1\cos(tx_2)\,dt = \left[\frac{x_1\sin(tx_2)}{x_2}\right]_0^1 = \frac{x_1\sin(x_2)}{x_2}$$

$$\int_0^1 \partial_1\left(x_1\cos(tx_2)\right)dt = \int_0^1 \cos(tx_2)\,dt = \frac{\sin(x_2)}{x_2} = \partial_1\left(\frac{x_1\sin(x_2)}{x_2}\right),$$

Mikor lehet az integrálást és a differenciálást felcserélni? (Sorvektorokat fogunk írni.)

$$\partial_i \int_a^b f(x_1,x_2,t)\,dt \overset{?}{=} \int_a^b \partial_i f(x_1,x_2,t)\,dt \quad i=1,2$$

T.: Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt h. $I=[a,b] \subset \mathbb{R}$ és $f: G\times I \to \mathbb{R}$.

Legyen $\underline{x} \in G$-re $\varphi(\underline{x}) = \int_a^b f(\underline{x},t)\,dt$.

i) Ha f folytonos $G\times I$-n, akkor $\exists \varphi(\underline{x})$ $\forall \underline{x} \in G$-re és $\varphi \in C(G)$.

ii) Ha $f \in C(G\times I)$ és $\exists \partial_j f$, $(j=1,\dots,n)$ és $\partial_j f \in C(G\times I)$,

akkor $\varphi \in C^1(G)$ és $\partial_j \varphi(\underline{x}) = \int_a^b \partial_j f(\underline{x},t)\,dt$, $(j=1,\dots,n)$.

Megj.: ii)-ben $\partial_{n+1} f$-ről semmit se tettünk fel!

Biz.: $f(\underline{x},t)$ folyt. t-ben $\Rightarrow \exists \varphi(\underline{x})$ $(\exists \text{ az } \int_a^b)$

i) T.f.h. $\underline{x} \in G$ és $r>0$-ra $\overline{B}(\underline{x},r) \subset G$.

$\overline{B}(\underline{x},r) \times I$ kpkt. $\Rightarrow f$ rajta e. folytonos.

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, |f(\underline{y},t_1) - f(\underline{z},t_2)| < \varepsilon$ ha $\|(\underline{y},t_1)-(\underline{z},t_2)\|<\delta$

és $(\underline{y},t_1),(\underline{z},t_2) \in \overline{B}(\underline{x},r) \times I$. Föltehető $\delta<r \Rightarrow$

$\underline{y} \in B(\underline{x},\delta), t \in I \Rightarrow (\underline{x},t), (\underline{y},t) \in \overline{B}(\underline{x},r)\times I$ és $\|(\underline{x},t)-(\underline{y},t)\|<\delta$

$\Rightarrow |\varphi(\underline{x})-\varphi(\underline{y})| = \left|\int_a^b (f(\underline{x},t)-f(\underline{y},t))\,dt\right| < \varepsilon(b-a) \Rightarrow \varphi \in C(G).$ ∎

ii) T.f.h. $\underline{e}^j$ a j-ik egységv., kell: $\boxed{\lim_{\alpha\to 0} \frac{\varphi(\underline{x}+\alpha\underline{e}^j)-\varphi(\underline{x})}{\alpha} =}$

$\boxed{= \int_a^b \partial_j f(\underline{x},t)\,dt.}$ $\partial_j f \in C(\overline{B}(\underline{x},r)\times I) \Rightarrow \partial_j f$ e. folyt. $\overline{B}(\underline{x},r)\times I$-n

$\exists \delta>0, \delta \le r$, hogy $|\partial_j f(\underline{y},t_1) - \partial_j f(\underline{z},t_2)|<\varepsilon$ ha $\|(\underline{y},t_1)-(\underline{z},t_2)\|<\delta$

és $(\underline{y},t_1),(\underline{z},t_2) \in \overline{B}(\underline{x},r)\times I$. Ha $|\alpha|<\delta$ akkor a Lagrange

k.t. $\Rightarrow \forall t \in I, \exists c_t, |c_t|<|\alpha|$ és $\frac{f(\underline{x}+\alpha\underline{e}^j,t)-f(\underline{x},t)}{\alpha} =$

$= \partial_j f(\underline{x}+c_t\underline{e}^j,t)$. Mivel $|c_t|<|\alpha|<\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |\partial_j f(\underline{x}+c_t\underline{e}^j,t) - \partial_j f(\underline{x},t)| < \varepsilon \Rightarrow$

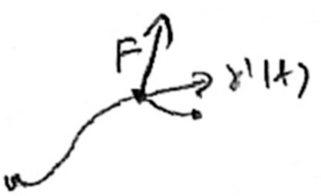
$\Rightarrow \left|\int_a^b \frac{f(\underline{x}+\alpha\underline{e}^j,t)-f(\underline{x},t)}{\alpha} - \partial_j f(\underline{x},t)\,dt\right| < \varepsilon(b-a)$

$\left|\frac{\varphi(\underline{x}+\alpha\underline{e}^j)-\varphi(\underline{x})}{\alpha}'' - \int_a^b \partial_j f(\underline{x},t)\,dt\right| < \varepsilon(b-a)$

$\partial_j f$ folytonossága i)-ből köv. ∎

A vonalintegrál

Legyen $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ adott 2D erőtér és $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ adott folyt. diff.h. görbe. Ha a fenti erőtér egy γ mentén mozgó részecskére hat, akkor mekkora munkát végez? $W = F\cdot\Delta s$ ha F állandó



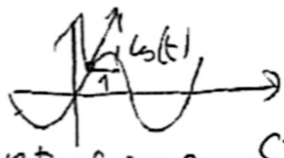
$W \approx \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n F(\gamma(t_i))\bullet(\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})) \approx$

$\approx \sum_{i=1}^n (F(\gamma(t_i))\bullet\gamma'(t_i))(t_i-t_{i-1}) \longrightarrow \int_a^b F(\gamma(t))\bullet\gamma'(t)\,dt$

Előkészítő definíciók (sorvektorokkal)

Def.: A $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ folyt. leképezést $\mathbb{R}^n$-beli **görbének** nev, értékkészlete $\gamma([a,b])$ a görbe **nyoma/pályája**.
Ha γ folyt. diffható $[a,b]$-n, akkor γ-t **sima görbének** nev.
(Végpontokban félold. deriváltakat tek.) $\gamma'(t)$ a görbéhez húzott érintő irányú sebesség hosszúságú vektor.

Pl.: $\gamma(t)=(t,\sin(t))$, $\gamma'(t)=(1,\cos(t))$



Def.: A $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ görbe **szakaszonként sima**, SZS, ha az $[a,b]$-nek $\exists$ $a=t_0<t_1<\ldots<t_k=b$ felosztása, hogy $\forall j$-re $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ sima görbe.

Pl.:

$\gamma:[0,2]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(t,t)$ ha $0\le t\le 1$
$\gamma(t)=(t,1)$ ha $1<t\le 2$

De

$\gamma_0:[-1,1]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma_0(t)=(t,1)$ ha $-1\le t\le 0$
$\gamma_0(t)=(t,\frac{1}{2})$ ha $0<t\le 1$

NEM SZAKASZONKÉNT SIMA.

Előbb γ két sima görbe egyesítéseként jött létre:

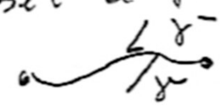
Def.: T.f.h. $\gamma_1:[a_1,b_1]\to\mathbb{R}^n$ és $\gamma_2:[a_2,b_2]\to\mathbb{R}^n$ két adott görbe. Ha $\gamma_1(b_1)=\gamma_2(a_2)$ akkor γ_1 és γ_2 **egyesíthetőek** és **egyesítésük** $\gamma_3:[a_1,b_1+(b_2-a_2)]\to\mathbb{R}^n$,

$$\gamma_3(t)=\begin{cases}\gamma_1(t) & \text{ha } t\in[a_1,b_1]\\ \gamma_2(t-b_1+a_2) & \text{ha } t\in[b_1,b_1+(b_2-a_2)]\end{cases},$$

Jelölés: $\gamma_3=\gamma_1\cup\gamma_2$.

γ_3 nyoma γ_1 és γ_2 nyomának uniója.

Def.: Legyen $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ adott görbe. A $\gamma^-:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, $\gamma^-(t)=\gamma(a+b-t)$ görbét a γ-val **ellentétes irányítású görbének** nev.



Def.: A $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ görbe **zárt**, ha $\gamma(a)=\gamma(b)$.

<u>Def:</u> A $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ egyszerű, ha a megf. lek. injektív.

<u>Def:</u> A $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ egyszerű zárt görbe, ha $\gamma(a)=\gamma(b)$ és $\gamma|_{[a,b)}$ injektív.

<u>Def:</u> A $H\subset\mathbb{R}^n$ halmaz <u>"simán" ívszerűen összefüggő</u>, ha bármely két pontja szak. sim. görbével össze-köthető, azaz $\forall\, \underline{x},\underline{y}\in H$ $\exists\, \gamma:[a,b]\to H$, szak. s. görbe, hogy $\gamma(a)=\underline{x}$, $\gamma(b)=\underline{y}$.

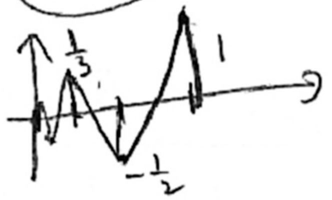
<u>Def:</u> $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ <u>tartomány</u> ha i) Ω nyílt, ii) simán, ívszerűen összefüggő.

(<u>Megj:</u> (ii) több kül. feltétellel helyettesíthető.)

<u>Jordan görbetétel</u>: Tetsz $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ egyszerű zárt görbe két tartományra bontja a síkot, az egyik korlátos és γ belsejének hívjuk, jele: $INT(\gamma)$ a másik nem korl. és γ külsejének nev. jele: $EXT(\gamma)$.

$INT(\gamma)\neq \operatorname{int}(\gamma([a,b]))$.

<u>Görbék ívhossza</u>



Legyen $\gamma(t)=(t,f(t))$, $t\in[0,1]$, $f\left(\frac{1}{n}\right)=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$, $n=1,2,\dots$ és egyébként lineáris és $f(0)=0$.

Ekkor $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ folytonos görbe. Milyen "hosszú" γ? Alsó becslés $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$.

<u>Def:</u> A $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ görbe <u>rektifikálható</u>, ha <u>ívhossza</u> $l(\gamma)=\sup\left\{\sum_{j=1}^{k}\|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\| : \{t_0,t_1,\dots,t_k\} \text{ az } [a,b] \text{ felosztása}\right\}$ véges. Ha $l(\gamma)=+\infty$ akkor γ nem rektifikálható.

T.: Ha $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ egyszerű sima görbe, akkor

$$l(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,dt=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^n|\gamma_i'(t)|^2}\,dt$$

(fizikai jelentés: sebességvektor nagysága)

Biz.: Legyen $\Gamma:[a,b]^n\to\mathbb{R}$, $\Gamma(x_1,\dots,x_n)=\sqrt{\sum_{i=1}^n(\gamma_i'(x_i))^2}$

$[a,b]^n$ kompakt, Γ folytonos $\Rightarrow$ e. folyt. $[a,b]^n$-n.

(*) $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$, hogy $|\Gamma(\underline{x})-\Gamma(\underline{y})|<\varepsilon$ ha $\underline{x},\underline{y}\in[a,b]^n$, $\|\underline{x}-\underline{y}\|<\delta$.

T.f.h. $\Phi=\{s_0,\dots,s_N\}$ az $[a,b]$ tetsz. felo-ja. Vál.

$\Phi_0=\{t_0,\dots,t_k\}$-t, ami Φ-nél finomabb és $\delta(\Phi_0)<\delta/\sqrt{n}$.

$\|\gamma'(t)\|$ folytonos $\Rightarrow\|\gamma'(t)\|\in R[a,b]\Rightarrow$ föl. tehető, hogy

(**) $$\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,dt-\varepsilon<\sum_{j=1}^k\|\gamma'(t_j)\|(t_j-t_{j-1})<\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,dt+\varepsilon$$

$\forall i\in\{1,\dots,n\}$ és $j\in\{1,\dots,k\}$-ra a Lagrange ktt. $\Rightarrow$

$\exists\, c_{i,j}\in[t_{j-1},t_j]$, hogy $\gamma_i(t_j)-\gamma_i(t_{j-1})=\gamma'(c_{i,j})(t_j-t_{j-1})$

$d(\Phi_0)<\delta/\sqrt{n}\Rightarrow\|(c_{1,j},\dots,c_{n,j})-(t_j,\dots,t_j)\|<\delta$, $\forall j$-re.

(*)-ot is haszn. $\Rightarrow$ $|\underbrace{\Gamma(t_j,\dots,t_j)}_{=\|\gamma'(t_j)\|}-\Gamma(c_{1,j},\dots,c_{n,j})|<\varepsilon$. (***)

másrészt $\Gamma(c_{1,j},\dots,c_{n,j})(t_j-t_{j-1})=\sqrt{\sum_{i=1}^n(\gamma_i'(c_{i,j}))^2}\,(t_j-t_{j-1})=$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^n\underbrace{(|\gamma_i'(c_{i,j})|(t_j-t_{j-1}))^2}_{(\gamma_i(t_j)-\gamma_i(t_{j-1}))^2}}=\|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\|.$$ (***) $\Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^k\|\gamma'(t_j)\|(t_j-t_{j-1})-\varepsilon(b-a)<\sum_{j=1}^k\|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\|<$$

$$<\sum_{j=1}^k\|\gamma'(t_j)\|(t_j-t_{j-1})+\varepsilon(b-a),$$ (**)-ot is haszn. $\Rightarrow$

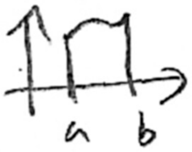
$$\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,dt-\varepsilon(1+(b-a))<\sum_{j=1}^k\|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\|<\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,dt+\varepsilon(1+(b-a))\Rightarrow$$

(†) $$l(\gamma)\geq\sum_{j=1}^k\|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\|>\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,dt-\varepsilon(1+(b-a))$$

Mivel $\Phi_0 \supset \Phi$, így $\sum_{j=1}^{N} \|\gamma(s_j)-\gamma(s_{j-1})\| \le \sum_{j=1}^{K}\|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\| <$
$< \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt + \varepsilon(1+(b-a))$. $\Phi \in \mathcal{F}$-re sup-ot véve

(++) $l(\gamma) \le \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt + \varepsilon(1+(b-a))$. $\forall \varepsilon>0$-ra telj. (+) és (++) $\Rightarrow$

$\Rightarrow l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt.$]



Ha $\gamma(t)\in\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(t,f(t))$ függvény grafikon, akkor

$$\boxed{\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt.}$$

Def.: Legyen $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ adott tartomány, $\gamma:[a,b]\to\Omega$ SZS. görbe és $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ folyt. lek., akkor az

$\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_a^b\langle f(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle\,dt$ számot az f fv. γ-görbére vonatk. vonalintegráljának nev. Jele: $\int_\gamma f$.

(Megj.: Feltevéseink $\Rightarrow \exists \int_\gamma f$. Ált. megköz. (ld. TK) γ rektif. f. tetsz., SZS görbékre és folyt. f-re u. az)

Tulajdonságok:

T.: T.f.h. $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ adott tart., $\gamma_1:[a_1,b_1]\to\Omega$, $\gamma_2:[a_2,b_2]\to\Omega$ két SZS. egyesíthető görbe, $f,g:\Omega\to\mathbb{R}^n$ folyt. lek., $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Ekkor 1) $\int_{\gamma_1}(c_1 f + c_2 g) = c_1\int_{\gamma_1} f + c_2\int_{\gamma_1} g$, 2) $\int_{\gamma_1^-} f = -\int_{\gamma_1} f$,

3) $\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$, 4) $\left|\int_{\gamma_1} f\right| \le \underbrace{\max\{\|f(\gamma_1(t))\| : t\in[a,b]\}}_{M}\cdot l(\gamma_1)$

ívhossz $< +\infty$ felt. alapján.

Biz.: 1) $\int_{a_1}^{b_1}(c_1 f(\gamma_1(t)) + c_2 g(\gamma_1(t)))\cdot\gamma_1'(t)\,dt = c_1\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(t))\cdot\gamma_1'(t)\,dt +$
$+ c_2\int_{a_1}^{b_1} g(\gamma(t))\cdot\gamma_1'(t)\,dt.$