2) $\gamma_1^-(t)=\gamma_1(a_1+b_1-t)$, $(\gamma_1^-)'(t)=-\gamma_1'(a_1+b_1-t)$

$$\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1^-(t))\cdot(\gamma_1^-)'(t)\,dt=\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(a_1+b_1-t))\cdot(-\gamma_1'(a_1+b_1-t))\,dt=$$

$$=-\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(\underbrace{a_1+b_1-t}_{u}))\cdot\gamma_1'(\underbrace{a_1+b_1-t}_{u})\,dt=+\int_{b_1}^{a_1} f(\gamma_1(u))\cdot\gamma_1'(u)\,du=$$

$$=-\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(u))\cdot\gamma_1'(u)\,du.$$

3) $$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f=\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)\,dt+\int_{b_1}^{b_1+(b_2-a_2)} f(\gamma_2(\underbrace{t-b_1+a_2}_{u}))\cdot\gamma_2'(\underbrace{t-b_1+a_2}_{u})\,dt=$$

$$=\int_{\gamma_1} f+\int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(u))\cdot\gamma_2'(u)\,du=\int_{\gamma_1} f+\int_{\gamma_2} f.$$

4) $$\left|\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)\,dt\right|\leq\int_{a_1}^{b_1}\|f(\gamma_1(t))\|\cdot\|\gamma_1'(t)\|\,dt\leq$$

Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz

$$\leq M\cdot\int_{a_1}^{b_1}\|\gamma_1'(t)\|\,dt=M\cdot l(\gamma_1).$$

Pl.: $f(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$

$$\gamma'(t)=(-\sin t,\cos t),\quad \int_\gamma f=\int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{-\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}(-\sin t)+$$

$$+\frac{\cos t}{\sin^2 t+\cos^2 t}(\cos t))\,dt=\int_0^{2\pi}1\,dt=2\pi$$

γ egyszerű zárt görbe, $\int_\gamma f\neq 0$.

Primitív fv.

Def.: Legyen $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ adott tart és $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$. Az $F:\Omega\to\mathbb{R}$ fv. az f leke. primitív fv-e, ha F diff.ható Ω-n és $(F')^T=\nabla F=f$. (Vannak akik kissit pongyolán $F'=f$-et írnak)

Nyilván $(F+c)'=F'$ így $F+c$ is pr. fv.

Elektrosztatikus erőtér potenciál fv-e.

T.: T.f.h. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány. Ha F_1 és F_2 az $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ lin. pr. fv-e, akkor $F_1 - F_2 =$ állandó.

Biz.: $F = F_1 - F_2 \Rightarrow \nabla F = \underline{0}$. T.f.h. $\underline{x} \in \Omega$ rögz. pont. $c = F(\underline{x})$ és $\underline{y} \in \Omega$ tetsz. Ω tart. $\Rightarrow \exists \gamma: [a,b] \to \Omega$ szs. görbe, amire $\gamma(a) = \underline{x}$, $\gamma(b) = \underline{y}$. F diff.ható $\Rightarrow$ $F(\gamma(t))$ folyt. és véges sok ponttól eltek. $\frac{dF(\gamma(t))}{dt} =$
$= F'(\gamma(t))\gamma'(t) = \nabla F(\gamma(t)) \circ \gamma'(t) = 0$. Ha $[t_{j-1}, t_j]$ -n $F(\gamma(t))$ diff.h. $\Rightarrow$ $F(\gamma(t))$ állandó $\Rightarrow c = F(\underline{x}) = F(\gamma(a)) =$
$= F(\gamma(t_0)) = F(\gamma(t_1)) = \dots = F(\gamma(t_k)) = F(\underline{y})$ |

Newton-Leibniz formula vonalintegrálokra:

T.: T.f.h. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ folyt. fv., $F: \Omega \to \mathbb{R}$ a f pr. fv-e Ω-n. Akkor tetsz. $\gamma: [a,b] \to \Omega$ szs. görbére $\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

Biz.: T.f.h. $t_0 = a < t_1 < \dots < t_k = b$ olyan, hogy $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} = \gamma_i$ sima görbe. Akkor $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$.

$$\int_{\gamma_i} f = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t)) \circ \gamma'(t)\, dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (F(\gamma(t)))'\, dt \underset{1D\ N\text{-}L}{=} F(\gamma(t_i)) - F(\gamma(t_{i-1}))$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} f = \sum_{i=1}^{k} F(\gamma(t_i)) - F(\gamma(t_{i-1})) = F(\gamma(t_k)) - F(\gamma(t_0)) =$$
$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$ |

Köv.: Ha γ zárt görbe, akkor $\gamma(b) = \gamma(a)$ így ha f-nek $\exists$ pr. fv.-e, akkor $\int_\gamma f = 0$.

További pl.: $f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$
$\int_\gamma f \neq 0 \Rightarrow f$-nek $\nexists$ pr. fv-e $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$-n.

Def.: Az $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ lek. **konzervatív** ha tetsz. $\underline{x},\underline{y}\in\Omega$ esetén $\int_\gamma f$ értéke megegyezik $\forall\gamma:[a,b]\to\Omega$, $\gamma(a)=\underline{x}$, $\gamma(b)=\underline{y}$ SZS görbére.

Hc $\exists$ f-nek pr. fv.-e $\Rightarrow$ konzervatív.

Ha f konz. és γ zárt SZS görbe akkor $\int_\gamma f=\int_{\gamma\cup\gamma} f=$ $=2\int_\gamma f\Rightarrow\int_\gamma f=0$. Fordítva:

T.: Legyen $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ adott tartomány és $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ folyt. lek. Ha $\forall\gamma:[a,b]\to\Omega$ SZS zárt görbére $\int_\gamma f=0$, akkor f-nek $\exists$ pr. fv.-e.

Biz.: T.f.h. $\underline{x}\in\Omega$ rögz. és $\underline{y}\in\Omega$ tetsz. Vál. $\gamma:[a,b]\to\Omega$ $\gamma(a)=\underline{x}$, $\gamma(b)=\underline{y}$ SZS görbét. $\boxed{F(\underline{y})\overset{\text{def.}}{=}\int_\gamma f}$. Ha ψ másik SZS görbe, amire $\psi(a)=\underline{x}$ és $\psi(b)=\underline{y}$, akkor $\gamma\cup\psi^-$ zárt SZS g. $\Rightarrow$ $0=\int_{\gamma\cup\psi^-} f=\int_\gamma f+\int_{\psi^-} f=\int_\gamma f-\int_\psi f=F(\underline{y})-\int_\psi f$.

$\Rightarrow$ F def nem függ γ választásától.

T.f.h. $\underline{y}\in\Omega$ tetsz., $\delta>0$ olyan, hogy $B(\underline{y},\delta)\subset\Omega$.

T.f.h. $\|\underline{h}\|<\delta$, γ_1 a $\underline{x}$-et $\underline{y}$-nal, γ_2 a $\underline{x}$-et $\underline{y}+\underline{h}$-val sik. SZS g.-k, $\gamma_3(t)=\underline{y}+t\underline{h}$, $t\in[0,1]$. $\gamma_1\cup\gamma_3\cup\gamma_2^-$ Ω-beli SZS g.

$$\Rightarrow 0=\int_{\gamma_1\cup\gamma_3\cup\gamma_2^-} f=\int_{\gamma_1} f+\int_{\gamma_3} f-\int_{\gamma_2} f\Rightarrow F(\underline{y}+\underline{h})-F(\underline{y})=\int_{\gamma_3} f.$$

f folyt. $\varepsilon>0$-hoz $\exists$ $\delta_1>0$, hogy $\delta_1<\delta$ és $\tilde{\underline{y}}\in B(\underline{y},\delta_1)$ esetén $\|f(\tilde{\underline{y}})-f(\underline{y})\|<\varepsilon$. Ha $\|\underline{h}\|<\delta_1$ és $t\in[0,1]$, akkor $\|f(\underline{y}+t\underline{h})-f(\underline{y})\|<\varepsilon$.

$$\Rightarrow |F(\underline{y}+\underline{h})-F(\underline{y})-f(\underline{y})\cdot\underline{h}|=\left|\int_{\gamma_3} f-\int_0^1 f(\underline{y})\cdot\underline{h}\,dt\right|=$$

$$=\left|\int_0^1 f(\underbrace{\underline{y}+t\underline{h}}_{\gamma_3(t)})\cdot\underbrace{\underline{h}}_{\gamma_3'(t)}\,dt-\int_0^1 f(\underline{y})\cdot\underline{h}\,dt\right|=\left|\int_0^1 (f(\underline{y}+t\underline{h})-f(\underline{y}))\cdot\underline{h}\,dt\right|\le\varepsilon\|\underline{h}\|$$

$\Rightarrow F'(\underline{y})=f(\underline{y})$

T.: T.f.h. $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ diff.ható fv-nek, $\exists F : \Omega \to \mathbb{R}$ pr. fv-e, azaz $(F')^T = f$. Ekkor $\partial_j f_i = \partial_i f_j$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$, azaz f' Jacobi mátrixa szimmetrikus (a főátlójára).

$$\begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_j f_i & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & & & \\ \partial_i f_j & & & & \\ \vdots & & & & \\ \partial_1 f_n & & & & \partial_n f_n \end{bmatrix}$$

(A "keresztbe vett" deriváltak megegyeznek.)

Biz.: $f_i = \partial_i F$, $f_j = \partial_j F$, F 2x diff.ható, Young tétel $\Rightarrow$

$\partial_j \partial_i F = \partial_i \partial_j F$. $\rfloor$

Ez szüks. de nem eléggs. felt. pr. fv. létezésére.

Def.: Az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ csillagszerű az $\underline{x} \in \Omega$ pontra nézve, ha $\forall \underline{y} \in \Omega$-ra az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ által meghat. szakasz is Ω-ban van, azaz $\gamma_{\underline{y}}(t) = \underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x}) \in \Omega$, $\forall t \in [0,1]$.

T.: T.f.h. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ csillagszt. a $\underline{x} \in \Omega$-ra nézve, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ folyt. diff.h. leképz. és $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ $\forall 1 \le i \le n$-re és $\forall 1 \le j \le n$-re. Ekkor f-nek $\exists$ pr. fv-e.

Biz.: $F(\underline{y}) \overset{def.}{=} \int_0^1 f(\underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x})) \cdot (\underline{y} - \underline{x})\, dt = \int_{\gamma_{\underline{y}}} f$ jó pr. fv.

$g(\underline{y}, t) = f(\underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x})) \cdot (\underline{y} - \underline{x})$. f folyt. $\Rightarrow$ $g(\underline{y}, t)$ folyt. $\Omega \times [0,1]$-en. $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$-re, $j = 1, \dots, n$ esetén:

$\partial_j g(\underline{y}, t) = \partial_j \left(\sum_{i=1}^n f_i(\underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x}))(y_i - x_i) \right) =$ | $i = j$-s tagból

$= \left(\sum_{i=1}^n \partial_j f_i(\underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x})) \cdot t \cdot (y_i - x_i) \right) + f_j(\underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x}))$

folytonos ($(\underline{y}, t)$-ben).

Paraméteres $\int$ diff.hatóságára vonatk. T szerint, F diff.ható és

$$\partial_j F(\underline{y}) = \int_0^1 \partial_j g(\underline{y},t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \underbrace{t\cdot\left(\sum_{i=1}^n \partial_j f_i(\underline{x}+t(\underline{y}-\underline{x}))(y_i-x_i)\right)}_{\|} + f_j(\underline{x}+t(\underline{y}-\underline{x}))\,dt = \circledast$$

$$t\cdot \sum_{i=1}^n \partial_i f_j(\underline{x}+t(\underline{y}-\underline{x}))(y_i-x_i) = t\,\frac{d}{dt}\left(f_j(\underline{x}+t(\underline{y}-\underline{x}))\right)$$

$$\circledast = \int_0^1 \underbrace{t}_{u}\,\underbrace{\frac{d}{dt}\left(f_j(\underline{x}+t(\underline{y}-\underline{x}))\right)}_{v'}dt + \int_0^1 f_j(\underline{x}+t(\underline{y}-\underline{x}))\,dt =$$

$$= \left[t\, f_j(\underline{x}+t(\underline{y}-\underline{x}))\right]_{t=0}^1 - \int_0^1 f_j(\underline{x}+t(\underline{y}-\underline{x}))\,dt + \int_0^1 f_j(\underline{x}+t(\underline{y}-\underline{x}))\,dt$$

$$= f_j(\underline{y}), \quad \Rightarrow \boxed{(F')^T = \underline{f}}$$

Megj.: A tétel csillagszt. tart. helyett ún. egyszeresen összefüggő tartományokra is érv. Ezek olyan $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ tart., melyekre tetsz. $\gamma:[a,b]\to\Omega$ egysz. zárt görbére $\mathrm{INT}(\gamma)\subset\Omega$. ($\Omega$-ban nincsenek "körbejárható" lyukak.)

 ilyen,  ilyen,  nem ilyen.

Ívhossz szerinti integrál

T.f.h. $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ tart. és $\gamma:[a,b]\to\Omega$ sz.s. görbe "inhomogén tömegeloszlású drót", az adott $f:\gamma[a,b]\to\mathbb{R}$ (vagy $\Omega\to\mathbb{R}$) sűrűség fv. Milyen "nehéz" a drót?

$a=t_0<t_1<\dots<t_k=b$ felo. a $[t_{j-1},t_j]$ osztóintervallumhoz tartozó darab tömeg $\approx f(\gamma(t_j^*))\cdot\|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\|\approx$

$\approx$ (mint $l(\gamma)$-nál) $\approx f(\gamma(t_j^*))\,\|\gamma'(t_j^*)\|\,(t_j-t_{j-1})$

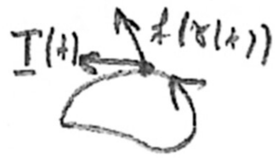
a teljes tömeg $\approx \sum_{j=1}^k f(\gamma(t_j^*))\,\|\gamma'(t_j^*)\|\,(t_j-t_{j-1}) \to$

$\to \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$, ha $\delta(\Phi)\to 0$ és f folyt.

(Ha $f(\gamma(t))\equiv 1$ akkor $\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = l(\gamma)$.)

<u>Def.</u>: T.f.h. $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ SZS görbe és f folytonos $\gamma([a,b])$-n ekkor az f γ-ra vonatkozó <u>ívhossz szerinti vonalintegrálja</u>, $\int_\gamma f\,ds \overset{\text{def.}}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\underbrace{\|\gamma'(t)\|\,dt}_{ds}$.

Megj.: Általánosabb def. is adható rektif. γ-ra, megf. int. köz. összegekkel.



Kapcsolat a vonalintegrállal:

T.f.h. $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ sima görbe, $\|\gamma'(t)\|\neq 0$, $t\in[a,b]$.

$\underline{T}(t)=\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ érintő egységvektor, $\underline{f}:\gamma[a,b]\to\mathbb{R}^n$ "vektormező" $\int_\gamma \underline{f}=\int_a^b \underline{f}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt=\int_a^b(\underline{f}(\gamma(t))\cdot\underline{T}(t))\|\gamma'(t)\|\,dt=$

$=\int_\gamma \underline{f}(\gamma(t))\cdot\underline{T}(t)\,ds=\int_\gamma\langle\underline{f}(\gamma(t)),\underline{T}(t)\rangle\,ds$.

<u>Def.</u>: T.f.h. $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ SZS görbe és $f:\gamma[a,b]\to\mathbb{R}$ folyt. fv. ekkor f <u>x_j szerinti vonalintegrálja</u>

$$\int_\gamma f\,dx_j=\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma_j'(t)\,dt.$$

Ha $\underline{f}:\gamma([a,b])\to\mathbb{R}^n$ vektormező, akkor

$$\int_\gamma \underline{f}=\int_a^b(f_1(\gamma(t)),\dots,f_n(\gamma(t)))\cdot(\gamma_1'(t),\dots,\gamma_n'(t))\,dt=\sum_{j=1}^n\int_a^b f_j(\gamma(t))\cdot\gamma_j'(t)\,dt=\sum_{j=1}^n\int_\gamma f_j\,dx_j$$

Ha $\underline{f}:\gamma[a,b]\to\mathbb{R}^k$, vektormező, akkor

$\int_\gamma \underline{f}\,dx_j=(\int_\gamma f_1\,dx_j,\dots,\int_\gamma f_k\,dx_j)$. (vagy a transzponáltja).

Def.: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Jordan tart. ha Ω tart. és határa egy Jordan görbe (egyszerű zárt görbe). γ STS görbe pozitív ("óramutató járásával ellentétes) irányítású ha a γ normálvektora (külső normálisa) $\underline{n}(t) = \frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{\|\gamma'(t)\|}$, Ω külsejébe mutat (INT(γ) bal kéz felé esik.) (feltéve, hogy $\gamma'(t) \neq \underline{0}$)

T.: (Green) T.f.h. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Jordan tart. és határa $\partial\Omega$ a γ pozitív STS görbe, $f: G \to \mathbb{R}$ folyt. differenciálható fv., ahol $G \subset \mathbb{R}^2$ nyílt, és $cl(\Omega) = \Omega \cup \partial\Omega \subset G$, akkor

a) $\int_{\partial\Omega} f\,dy = \int_\gamma f\,dy = \int_\Omega \overset{=\partial_x f}{\partial_1 f}\,dx\,dy$,

b) $\int_{\partial\Omega} f\,dx = \int_\gamma f\,dx = -\int_\Omega \overset{=\partial_y f}{\partial_2 f}\,dx\,dy$,

Megj.: dx dy területi integrálnál néha dA-t szokás írni.

Ha $\underline{f}: G \to \mathbb{R}^2$ folyt. diff.h. vektormező, akkor

c) $\int_\Omega (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) \underbrace{dx\,dy}_{\text{jel: } dA} = \int_\gamma \underline{f} = \int_\gamma f_1\,dx + \int_\gamma f_2\,dy = \int_{\partial\Omega} \underline{f}$.

Megj.: Ha $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$, azaz a keresztbe vett deriváltak megegyeznek pont azt kapjuk, hogy $\int_\gamma \underline{f} = 0$.

1D N.L. $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$ "=" $\int_{\partial([a,b])} f$ $(= \text{mar}([a,b]))$

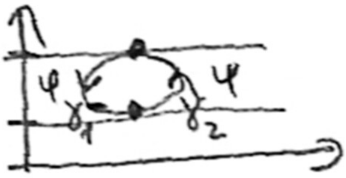
Biz.: b) Ha Ω "[illegible]" (azaz x-re és y-ra nézve is normál tart.), akkor $\gamma_1(t) = \{(t, \varphi(t)), t \in [a,b]\}$,

$\gamma_2(t) = \{(t, \psi(t)) : t \in [a,b]\}$

$\Omega = \{(x,y) : x \in [a,b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$

$$\int_\Omega \underset{=\partial_y f}{\partial_2 f}\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \partial_y f\,dy \right) dx \overset{N.L.}{=} \int_a^b \big(f(x,\psi(x)) - f(x,\varphi(x))\big)\,dx$$

$$= \int_{\gamma_2} f\,dx - \int_{\gamma_1} f\,dx = -\int_{\gamma_2^-} f\,dx - \int_{\gamma_1} f\,dx = -\int_\gamma f\,dx$$

a) hasonlóan 

a γ_2 és γ_1^- miatt fordulnak az előjelek.

c) a) és b) alk. f_2-re és f_1-re.

(Bonyolultabb tartományt szép komplikra kell darabolni:  a vágáséleken kiejtik egymást a vonalintegrálok.)

Alk. területszámításra:

<u>T.:</u> Ha γ egyszer. zárt tér. SZS görbe és $t(\Omega)$ a γ által határolt Jordan tart. területe, akkor

$$t(\Omega)=\int_\gamma -y\,dx=\int_\gamma x\,dy=\frac{1}{2}\int_\gamma(-y\,dx+x\,dy).$$

<u>Biz.:</u> $\underline{f}(x,y)=(-y,0)$-ra alk. a Green t-t.

$$t(\Omega)=\int_\Omega 1\,dx\,dy=\int_\Omega(\partial_1 f_2-\partial_2 f_1)\,dx\,dy=\int_\Omega 0-(-1)\,dx\,dy\underset{\text{G.T.}}{=}$$

$$\int_\gamma(f_1\,dx+f_2\,dy)=\int_\gamma(-y\,dx+0\,dy),$$ a többi hasonló.

<u>Pl.:</u> asztrois által határolt terület

$$\gamma(t)=(\underbrace{\cos^3(t)}_{x(t)},\underbrace{\sin^3(t)}_{y(t)}),\quad 0\le t\le 2\pi,$$

$$dx=x'(t)\,dt=3\cos^2(t)(-\sin t)$$

$$T=\int_\gamma(-y)\,dx=\int_0^{2\pi}(-\sin^3 t)\,3\cos^2 t\,(-\sin t)\,dt=$$

$$=3\cdot 4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\,dt=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)\,dt=$$

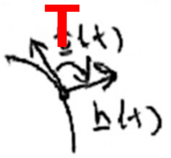
$$=12\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\,dt\right)=12\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}=$$

$$=12\cdot\left(1-\frac{5}{6}\right)\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{8}\pi.$$

Wallis formula előtti lemma

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,dt=\frac{2n-1}{2n}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

T. f. h. $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ sts. görbe, $\gamma'(t)\neq\underline{0}$, $\underline{T}(t)=\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ érintő egységvektor, $-\frac{\pi}{2}$ elforg. normálvektor



$$\underline{n}=\frac{(y'(t),-x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}\qquad \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}=\|\gamma'(t)\|$$

T. f. h. $f:\gamma([a,b])\to\mathbb{R}$ folyt. fv.

$$\int_\gamma f\cdot\underline{n}\,ds=\int_a^b f(\gamma(t))\,\frac{(y'(t),-x'(t))}{\|\gamma'(t)\|}\,\|\gamma'(t)\|\,dt=$$

$$=\int_a^b \big(f(\gamma(t))\,y'(t),\,-f(\gamma(t))\,x'(t)\big)\,dt=\Big(\int_\gamma f\,dy,\,-\int_\gamma f\,dx\Big)$$

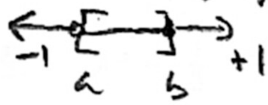
$\underline{n}\,ds=(dy,-dx)$, hasonlóan $\underline{T}\,ds=(dx,dy)$.

T.: (2D Newton–Leibniz formula) T. f. h. γ egyszt. zárt + ir. sts görbe, ami az Ω Jordan tart. határa és $\Omega\cup\gamma=\mathrm{cl}(\Omega)\subset G\subset\mathbb{R}^2$ nyílt, $f:G\to\mathbb{R}$ folyt. diffh., akkor

$$\int_\Omega \nabla f\,dA=\int_\Omega \nabla f\,dx\,dy=\int_{\partial\Omega} f\,\underline{n}\,ds=\int_\gamma f\,\underline{n}\,ds.$$

kifelé mutató "normálvektorok"

1D vált. $\int_{[a,b]} f'(t)\,dt=f(a)\cdot(-1)+f(b)(+1)$



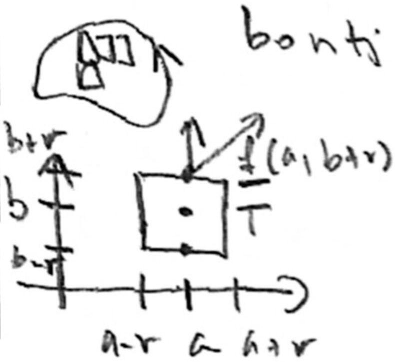
Biz.: $\int_\gamma f\,\underline{n}\,ds=\int_\gamma f\,(dy,-dx)=\Big(\int_\gamma f\,dy,\,-\int_\gamma f\,dx\Big)\overset{G.F.}{=}$

$$=\Big(\int_\Omega \partial_x f\,dA,\,\int_\Omega \partial_y f\,dA\Big)=\int_\Omega \nabla f\,dA \;\rfloor$$

T. f. h. $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ Jordan tart., melynek a γ egyszt. zárt sts görbe határa. $\Omega\cup\gamma\subset G\subset\mathbb{R}^2$ nyílt. $\underline{f}:G\to\mathbb{R}^2$ folyt. vektormező "folyadék áramlás". Mennyi folyadék áramlik át Ω határán? Egy ds "hosszú" görbedarabon $\underline{f}\cdot\underline{n}\,ds$ víz folyik át (ki), az egész görbén $\int_\gamma \underline{f}\cdot\underline{n}\,ds$. Ha nincs forrás és nyelő akkor ami be, az ki, azaz $\int_\gamma \underline{f}\cdot\underline{n}\,ds=0$.

Az $\underline{f}$ vektormező fluxusa $\int_\gamma \underline{f}\cdot\underline{n}\,ds=\int_\gamma f_1\,dy-\int_\gamma f_2\,dx$.

Mi van ha van "forrás" és "nyelő". Lokálisan mennyi folyadék születik/tűnik el? Kis négyzetekre bontjuk Ω-t. $(a,b)\in T$ kis négyzet kp-ú.



vízszintes darabokon ki- és beáramló folyadék (kiáramlás +).

Felül $\approx f_2(a,b+r)\cdot 2r$, alul $\approx -f_2(a,b-r)\cdot 2r$

jobbra $\approx f_1(a+r,b)\cdot 2r$, balra $\approx -f_1(a-r,b)\cdot 2r$

forrás erőssége (mennyi folyadék jön ki) $\approx$

$$\approx f_1(a+r,b)2r - f_1(a-r,b)2r + f_2(a,b+r)2r - f_2(a,b-r)2r =$$

$$= \left(\frac{f_1(a+r,b)-f_1(a-r,b)}{2r} + \frac{f_2(a,b+r)-f_2(a,b-r)}{2r}\right)(2r)^2 \approx$$

$$\approx \left(\partial_1 f_1(a,b) + \partial_2 f_2(a,b)\right)\cdot \underset{T \text{ területe}}{\underset{\parallel}{A(T)}}$$

Formális operátor $\nabla = (\partial_1,\dots,\partial_n)$ (vagy $(\partial_1,\dots,\partial_n)^T$)

Def: $G\subset\mathbb{R}^n$ nyílt, $\underline{f}: G\to\mathbb{R}^n$ diffh. lekép./vektormező. divergenciája, vagy forrássűrűsége $\operatorname{div}\underline{f} = \partial_1 f_1 + \dots + \partial_n f_n$

$$= \langle\nabla, \underline{f}\rangle = \nabla\cdot\underline{f} = \operatorname{tr} f'.$$

T.: (2D Gauss–Osztrogradszkij t., vagy divergencia tétel) ha $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ J.-tart, melyet a γ egysz. z. tir. sz.-s görbe határol, $\Omega\cup\gamma\subset G\subset\mathbb{R}^2$ nyílt és $\underline{f}: G\to\mathbb{R}^2$ folyt. diff. vektormező, akkor

$$\int_\Omega \operatorname{div}\underline{f}\, dA = \int_\gamma \underline{f}\cdot\underline{n}\, ds = \int_{\partial\Omega}\langle\underline{f},\underline{n}\rangle\, ds.$$

fluxus a γ-n keresztül

Biz: $\int_\gamma \underline{f}\cdot\underline{n}\, ds = \int_\gamma \left(f_1\,dy + f_2(-dx)\right) = \int_\gamma f_1\,dy - \int_\gamma f_2\,dx =$

Green: $\int_\Omega \partial_1 f_1\, dA + \int_\Omega \partial_2 f_2\, dA = \int_\Omega (\operatorname{div}\underline{f})\, dA$ ∎

Volt korábban 2D vektorok keresztszorzata

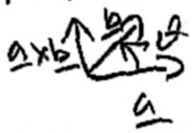
$\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^2$, $\underline{a}\times\underline{b} = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2\end{pmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$.

3D-ben $\underline{a},\underline{b}\in\mathbb{R}^3$ esetén a vektoriális szorzatot haszn.

$\underline{a}\times\underline{b}$ az az egyért. megh. vektor, amire

i) $\langle \underline{a}\times\underline{b}, \underline{a}\rangle = 0$, $\langle \underline{a}\times\underline{b}, \underline{b}\rangle = 0$ (azaz $\perp$ $\underline{a}$-ra $\underline{b}$-re),

ii) $\|\underline{a}\times\underline{b}\| = \|\underline{a}\|\,\|\underline{b}\|\sin\theta$ ($\underline{a}$ és $\underline{b}$ irányított szöge θ.



axb hossza a kifeszített parallelogramma területe

iii) $\underline{a},\underline{b}$, és $\underline{a}\times\underline{b}$ jobbrendszert alkot

$\underline{i},\underline{j},\underline{k}$ ortonormált bázis $\mathbb{R}^3$-ben

$\underline{a} = a_1\underline{i}+a_2\underline{j}+a_3\underline{k}$, $\underline{b} = b_1\underline{i}+b_2\underline{j}+b_3\underline{k}$, A $n\times n$ mátrix

$\det(A) = |A|$ jelölést is haszn.

$$\underline{a}\times\underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\underline{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\underline{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\underline{k} =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\underline{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\underline{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\,\underline{k}$$

Vektormező örvényessége / örvénysűrűsége

$\underline{f}: G\to\mathbb{R}^3$, $G\subset\mathbb{R}^3$ nyílt, $\underline{f}$ diff.h.

$$\operatorname{rot}\underline{f} = \nabla\times\underline{f} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2)\,\underline{i} + (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3)\,\underline{j} +$$

$$+ (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)\,\underline{k}.$$

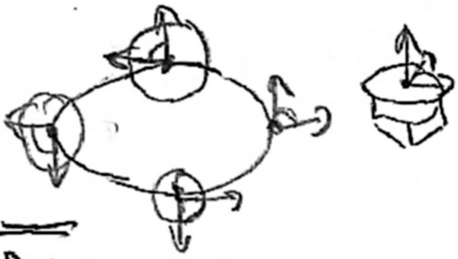
Ha $\underline{f}: G\to\mathbb{R}^2$, $G\subset\mathbb{R}^2$, akkor $\operatorname{rot}\underline{f} = \nabla\times\underline{f} = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1$,

ez 3D eset spec. esete ha $\underline{f} = f_1\underline{i} + f_2\underline{j} + 0\cdot\underline{k}$, $f_1(x,y,z) = \tilde{f}_1(x,y)$, $f_2(x,y,z) = \tilde{f}_2(x,y)$, akkor $\operatorname{rot}\underline{f} = 0\cdot\underline{i} + 0\cdot\underline{j} + (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)\,\underline{k} = \left(\nabla\times(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)\right)\underline{k}$

Fizikai jelentés folyadék cirkulációja / örvénylése

Pl.: $\underline{f}(x,y,z) = -y\,\underline{i} + x\,\underline{j} + 0\cdot\underline{k}$ z tengely körüli

forgómozgás $\text{rot}\,\underline{f} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = (1-(-1))\,\underline{k} = 2\underline{k}$



kis lapát kerék a folyadékban körbefordul.

Def.: Nulla rotációjú vektormezőket örvénymentesnek nev.

2D esetben $\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = 0 \iff$ keresztbe vett deriváltak egyenlők. (csillszt. vagy e.öf. tart-on zárt görbék mentén végzett munka (vonalintegrál) nulla.)

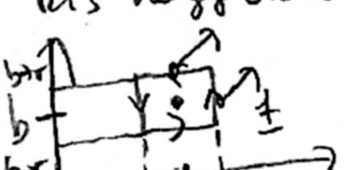
Örvényerősség $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, γ tart. $\partial\Omega = \gamma$ egysz. z. StS görbe

mekkora munkát végez a $\underline{f}$ erőtér ha egységnyi tömeget körbeviszünk γ-n? $W = \int_\gamma \underline{f} = \int_\gamma f_1\,dx_1 + \int_\gamma f_2\,dx_2 = \int_\gamma f_1\,dx + \int_\gamma f_2\,dy.$

Lokális örvénysűrűség:

munka közelítése

kis négyzetek határán végzett munka alsó él: $f_1(a,b-r)\cdot 2r$



felső él: $-f_1(a,b+r)\cdot 2r$, bal o.: $-f_2(a-r,b)\cdot 2r$

jobb o.: $f_2(a+r,b)\cdot 2r$

$W \approx -f_1(a,b+r)\cdot 2r + f_1(a,b-r)\cdot 2r + f_2(a+r,b)\cdot 2r - f_2(a-r,b)\cdot 2r = \left(\frac{f_2(a+r,b)-f_2(a-r,b)}{2r} - \frac{f_1(a,b+r)-f_1(a,b-r)}{2r}\right)(2r)^2$

$\approx (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)(2r)^2$ ← kis négyzet területe, finomítva, összegezve

$W = \int_\Omega (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)\,dA = \int_\Omega \text{rot}\,\underline{f}\,dA = \int_\Omega \nabla \times \underline{f}\,dA$

T.: (2D Stokes tétel) T.f.h. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ J. tart.
\+ irányított
melyet a γ egysz. z. SZS görbe határol, $\Omega \cup \gamma \subset G \subset \mathbb{R}^2$ nyílt
és $\underline{f} : G \to \mathbb{R}^2$ folyt. diff. vektormező, akkor

$$\int_\Omega \operatorname{rot} \underline{f}\, dA \overset{(*)}{=} \int_\gamma \underline{f} \overset{(**)}{=} -\int_\gamma \underline{f} \times \underline{n}\, ds$$

a ~~γ~~ zárt görbe mentén vett cirkuláció

Biz.: (*) $\int_\gamma \underline{f} = \int_\gamma (f_1\, dx + f_2\, dy) \overset{\text{Green}}{=} \int_\Omega -\partial_2 f_1\, dA + \int_\Omega \partial_1 f_2\, dA =$

$= \int_\Omega \operatorname{rot} \underline{f}\, dA.$

(**) $-\int_\gamma \underline{f} \times \underline{n}\, ds = \int_a^b \left(\underline{f}(\gamma(t)) \times \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\gamma'(t)\|} \right) \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt =$

$= -\int_a^b \left(f_1(\gamma(t))(-x'(t)) - f_2(\gamma(t))\, y'(t) \right) dt = \int_a^b \big(f_1(\gamma(t))\, x'(t) +$

$+ f_2(\gamma(t))\, y'(t)\, dt \big) = \int_\gamma \underline{f}.$ ∎

Def.: $A \subset \mathbb{R}^n$ zárt Jordan tartomány, ZJ-tartomány,
ha $A = cl(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \emptyset$, nyílt, összefüggő J.mérh.

Def.: T.f.h. $k \in \mathbb{N}$, $S \subset \mathbb{R}^3$ egy C^k-felület, ha $\exists (\varphi, A)$ pár, amire $A \subset \mathbb{R}^2$ 2D ZJ-tartomány, $\varphi : A \to \mathbb{R}^3$, C^k leképezés A-n és injektív int(A)-n és $S = \varphi(A)$. Ekkor (φ, A) az S egy paraméterezése és S a (φ, A) paraméterezés nyoma.

$x = \varphi_1(u,v)$, $y = \varphi_2(u,v)$, $z = \varphi_3(u,v)$, $(u,v) \in A$, az S, (φ, A) által megadott paraméteres egyenletei.

Áll.: T.f.h. $A \subset \mathbb{R}^2$, 2D ZJ-tartomány, $f : A \to \mathbb{R}$ C^k fv.
Ekkor f grafikonja C^k-felület.

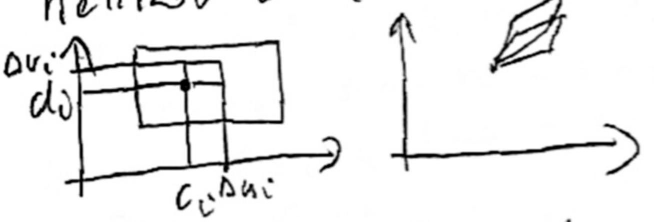
Biz.: $\varphi(u,v) = (u, v, f(u,v))$, φ C^k és injektív A-n
$\varphi(A) = \{(u, v, f(u,v)) : (u,v) \in A\} = \operatorname{graph}(f).$ ∎

T. f. h. S egy (φ, A) paraméterezésű C^k felület.
T. f. h. $(u_0, v_0) \in \operatorname{int}(A)$. Ekkor $u \mapsto \varphi(u, v_0)$ egy S felületen haladó görbe, ami áthalad a $\varphi(u_0, v_0)$ ponton és $\partial_1 \varphi(u_0, v_0)$ e pontban az érintővektora.
Hasonlóan $v \mapsto \varphi(u_0, v)$ is egy $\varphi(u_0, v_0)$-on áth. görbe, érintővektor $\partial_2 \varphi(u_0, v_0)$. Ha ezek a vektorok lin ftlenek akkor kifeszítik a $\varphi(u_0, v_0)$ pontbeli érintősíkot. E sík normálvektora $\underline{N}_\varphi(u_0, v_0) = \partial_1 \varphi(u_0, v_0) \times \partial_2 \varphi(u_0, v_0)$.

Ha $z = f(x, y)$, $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ paraméterezéssel akkor $\underline{N}_\varphi(u, v) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & \partial_1 f \\ 0 & 1 & \partial_2 f \end{vmatrix} = -\partial_1 f\, \underline{i} - \partial_2 f\, \underline{j} + \underline{k}$.

<u>Defi:</u> Ha (φ, A) egy C^k felület paraméterezése, akkor
(i) (φ, A) sima az $(u_0, v_0) \in A$ pontban ha $\underline{N}_\varphi(u_0, v_0) \neq \underline{0}$.
(ii) (φ, A) sima az $A_0 \subset A$-n kívül, ha $A \setminus A_0$ minden pontjában az.
Az S felület sima ha $\forall\, \underline{x}_0 \in S$ ponthoz $\exists (\varphi, A)$ paraméterezés, ami sima abban az (u_0, v_0) pontban, melyre $\underline{x}_0 = \varphi(u_0, v_0)$.
<u>Defi:</u> Az S felület (φ, A) és (ψ, B) C^k paraméterezései simán ekvivalensek ha $\exists$ egy C^k fv. τ, amire $\tau(B) = A$, $\psi = \varphi \circ \tau$ és $\det(\tau'(u, v)) \neq 0$ $\forall (u, v) \in B$-re.
τ az A-ról B-re történő áttérés leképezés.

T. f. h. $A \subset \mathbb{R}^2$ téglalap és (φ, A) egy C^1 felület paraméterezése. Mekkora a $\varphi(A) = S$ felület felszíne?



$\varphi(c_i + \Delta u_i, d_i) \approx \varphi(c_i, d_i) + \partial_1 \varphi(c_i, d_i) \Delta u_i$
$\varphi(c_i, d_i + \Delta v_i) \approx \varphi(c_i, d_i) + \partial_2 \varphi(c_i, d_i) \Delta v_i$
$\varphi(A_i)$ felszíne $\approx$ $\varphi(c_i, d_i)$-be eltolt $\partial_1 \varphi(c_i, d_i) \Delta u_i$ és $\partial_2 \varphi(c_i, d_i) \Delta v_i$ vektorok által kifeszített

Parallelogramma területével közelítjük $\approx$

$\approx \|(\partial_1\varphi(u_i,v_i)\Delta u_i)\times(\partial_2\varphi(u_i,v_i)\Delta v_i)\| =$

$= \|\partial_1\varphi(u_i,v_i)\times\partial_2\varphi(u_i,v_i)\|\cdot\Delta u_i\Delta v_i$

A teljes felszín $\approx \sum_i \|\partial_1\varphi(u_i,v_i)\times\partial_2\varphi(u_i,v_i)\| \overbrace{\Delta u_i\Delta v_i}^{t(A_i)} \sim$

$\sim \int_A \|\partial_1\varphi\times\partial_2\varphi\|\,du\,dv = \int_A \|\underline{N}_\varphi(u,v)\|\,du\,dv$

Def.: Legyen S egy (φ,A) paraméterezésű sima C^k felület. S felszíne $\sigma(S) \overset{\text{def}}{=} \int_A \|\underline{N}_\varphi(u,v)\|\,du\,dv = \int_A \|\partial_1\varphi\times\partial_2\varphi\|\,du\,dv$

(A megf. integr. tr. formulák miatt a simán ekvivalens paraméterezések ugyanazt az értéket adják.)

Pl.: A gömb felszíne: $x^2+y^2+z^2=r^2$

$\varphi(u,v)=(r\cos u\cos v,\ r\sin u\cos v,\ r\sin v)$

$A=[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$$\partial_1\varphi\times\partial_2\varphi = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -r\sin u\cos v & r\cos u\cos v & 0 \\ r\cos u(-\sin v) & r\sin u(-\sin v) & r\cos v \end{vmatrix} =$$

$= r^2\cos u\cos^2 v\,\underline{i} + r^2\sin u\cos^2 v\,\underline{j} + (r^2\sin^2 u\cos v\sin v +$
$+ r^2\cos^2 u\cos v\sin v)\,\underline{k} = r^2\cos u\cos^2 v\,\underline{i} + r^2\sin u\cos^2 v\,\underline{j} + r^2\cos v\sin v\,\underline{k}$

$\|\partial_1\varphi\times\partial_2\varphi\| = r^2\sqrt{\cos^2 u\cos^4 v + \sin^2 u\cos^4 v + \cos^2 v\sin^2 v} =$
$= r^2|\cos v|\cdot\sqrt{\cos^2 u\cos^2 v + \sin^2 u\cos^2 v + \sin^2 v} = r^2|\cos v|\cdot 1.$

$\sigma(S) = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2|\cos v|\,dv\,du = r^2\cdot 2\pi\cdot 2 = 4\pi r^2$

Felszíni integrál

"ívhossz szerinti integrál magasabb dimenzióban"

T.f.h. S egy (φ,A) paraméterezésű sima C^k felület "membrán" ami nem homogén tömeg eloszlású.
Adott egy $g: S\to\mathbb{R}$ sűrűség fv. Finom $\{A_i\}_{i=1}^{\ell}$ felo.-t és $\xi_i\in A_i$ pontokat véve a membrán tömege $\sim \sum_i g(\varphi(\xi_i))\sigma(\varphi(A_i))$
$\sim \int_A g\circ\varphi(u,v)\,\|\underline{N}_\varphi(u,v)\|\,du\,dv.$

<u>Def:</u> Legyen S egy (φ, A) paraméterezésű sima C^k felület, $g: S \to \mathbb{R}$ folyt. fv. A g fv-n, S-en vett <u>felszíni integrálja</u> $\int_S g\,d\sigma \overset{def.}{=} \int_A g(\varphi(u,v))\,\|\underline{N}_\varphi(u,v)\|\,du\,dv =$
$= \int_A g(\varphi(u,v))\,\|\partial_1\varphi(u,v) \times \partial_2\varphi(u,v)\|\,du\,dv.$

Ha $z = f(x,y)$ fv. felületről van szó, akkor
$$\int_S g\,d\sigma = \int_A g(x,y)\sqrt{1+(\partial_1 f(x,y))^2+(\partial_2 f(x,y))^2}\,dx\,dy$$
(volt korábban, hogy $\underline{N}_\varphi = -\partial_1 f\,\underline{i} - \partial_2 f\,\underline{j} + \underline{k}$)

<u>Felület határa</u>

Henger palást felszín, $x^2+y^2=1$ $0 \le z \le 2$.
$A = [0,2\pi]\times[0,2]$, $\varphi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$
A $(\cos u, \sin u, v)$, $0 < v < 2$ pontok a felület "belsejében" vannak, $\exists$ egy kis 2D egységkörlemezzel homeomorf környezetük. A $(\cos u, \sin u, 0)$ és a $(\cos u, \sin u, 2)$ pontok S határán, peremén vannak.

<u>Def:</u> Az $(x,y,z) \in S$ pont a S C^k-felület <u>belső pontja</u>, ha van egy kis 2D körlemezzel homeomorf környezete (a felületen lakó lény "bármerre indul" a felületen marad). A belső pontokat $\mathrm{Int}(S)$-sel jelöljük. A <u>felület határa</u> $\partial S = S \setminus \mathrm{Int}(S)$.
($\mathrm{Int}(S) \neq \mathrm{int}(S)$, $\partial S \neq \mathrm{mar}(S)$.)

<u>Def:</u> S zárt felület, ha $\partial S = \emptyset$.

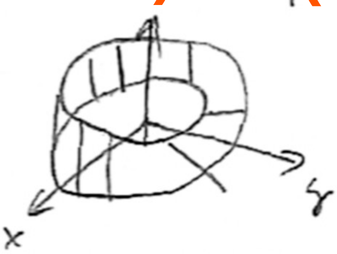
<u>Pl:</u> Az $x^2+y^2+z^2=r^2$ gömbfelület zárt, de $z = \sqrt{r^2-x^2-y^2}$ félgömbfelszín nem az.
A tórusz is zárt.

Def.: Az $S\subset\mathbb{R}^3$ halmaz <u>darabonként sima felület</u>, ha $S=\bigcup_{j=1}^{N} S_j$, ahol S_j egy (φ_j, A_j) paraméterezésű sima felület és ha $j\neq k$, akkor vagy $S_j\cap S_k=\emptyset$, vagy S_j és S_k a határuknál vannak "összeragasztva", azaz S_j és S_k egymásba nem nyúlóak $\left(\varphi_j(\mathrm{int}(A_j))\cap\varphi_k(\mathrm{int}(A_k))=\emptyset\right)$, csak ∂S_j és ∂S_k képeződik egymásra, feltesszük továbbá, hogy bármely három S_j metszete üres vagy véges halmaz.

S felszíne $\sigma(S)=\sum_{j=1}^{N}\sigma(S_j)$, ∂S azon ∂S_j darabok uniója, amik nincsenek "összeragasztva". $\int_S g\,d\sigma \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N}\int_{S_j} g\,d\sigma$.

Irányított felületek

Möbius szalag $\varphi(u,v)=\big((2+v\sin(u/2))\cos u,\ (2+v\sin(u/2))\sin u,\ v\cos(u/2)\big)$, $A=[-\pi,\pi]\times[-1,1]$



Def.: Az S sima felület (φ,A) paraméterezéséhez tartozó $(x_0,y_0,z_0)=\varphi(u_0,v_0)\in S$ pontbeli <u>irányított normál egységvektora</u> $\underline{n}(x_0,y_0,z_0)=\dfrac{\underline{N}_\varphi(u_0,v_0)}{\|\underline{N}_\varphi(u_0,v_0)\|}$.

Ha a (φ,A) paraméterezés injektív és sima A-n, akkor ez egyért. Ha φ nem injektív, akkor (φ,A) simasága mellett is előfordulhat, hogy $\underline{n}$ nem egyértelmű, mivel $\exists\,(u_0,v_0)$ és $(u_1,v_1)\in A$, hogy $\varphi(u_0,v_0)=\varphi(u_1,v_1)=(x_0,y_0,z_0)$, de $\dfrac{\underline{N}_\varphi(u_0,v_0)}{\|\underline{N}_\varphi(u_0,v_0)\|}\neq\dfrac{\underline{N}_\varphi(u_1,v_1)}{\|\underline{N}_\varphi(u_1,v_1)\|}$.

Pl.: Möbius szalag $\varphi(\pi,0)=\varphi(-\pi,0)$, de $\underline{N}_\varphi(\pi,0)=-\underline{N}_\varphi(-\pi,0)$

Def.: Az S felület irányítható ha $\exists\, (\varphi, A)$ paraméterezése, ami egy egyértelmű normál egységvektort értelmez S-en, mely folytonosan változik.

$\left(\varphi(u_0,v_0)=\varphi(u_1,v_1) \Rightarrow \underline{N}_\varphi(u_0,v_0)\right.$ és $\underline{N}_\varphi(u_1,v_1)$ egy irányba mutat (a megf. egységvektorok megegyeznek).)

Def.: T.f.h. az S irányítható felület $\underline{n}$ normál egységvektorát a (φ, A) paraméterezés adja meg, $\underline{F}: S \to \mathbb{R}^3$ folytonos vektormező (irányított) felületi integrálja, fluxusa S-en

$$\int_S \underline{F} \bullet \underline{n}\, d\sigma = \int_A (\underline{F}\circ\varphi)(u,v) \bullet \underline{N}_\varphi(u,v)\, du\, dv.$$

$$\left(\underline{n} = \frac{\underline{N}_\varphi}{\|\underline{N}_\varphi\|},\quad d\sigma = \|\underline{N}_\varphi\|\, du\, dv\right)$$

Mi a fluxus "fizikai" jelentése?

P az S felületen egy pont, $\underline{F}$ egy folyadékáramlás, egy kis $d\sigma$ felületelemen egységnyi idő alatt ki/át áramló folyadék egy kis "hengert" tölt meg, ennek alapterülete $d\sigma$ a magassága $\underline{F}\bullet\underline{n}$ a kiáramló folyadékmennyiség

$$\underline{F}\bullet\underline{n}\, d\sigma = \underline{F}\bullet\frac{\underline{N}_\varphi}{\cancel{\|\underline{N}_\varphi\|}}\cancel{\|\underline{N}_\varphi\|}\, du\, dv.$$

Pl.: Ha a triviális $z=f(x,y)$ felületdarabot vesszük $S=\{(x,y,f(x,y)) : (x,y)\in A\}$ és

$$\int_S \underline{F}\bullet\underline{n}\, d\sigma = \int_A \langle \underline{F}(x,y,f(x,y)), (-\partial_1 f, -\partial_2 f, 1)\rangle\, dx\, dy$$

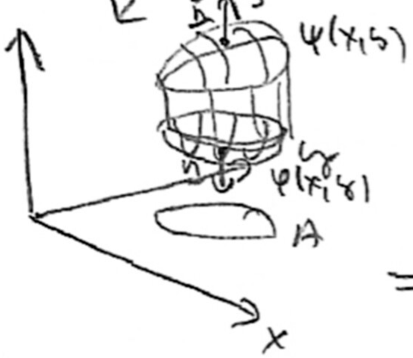
T.: (Gauss–Osztrogradszkij-tétel, divergencia tétel)
T.f.h. $K \subset \mathbb{R}^3$ tartomány, melynek (topologikus) határa ∂K darabonként sima zárt Jordan C^1 pozitívan irányított ($\underline{n}$ kifelé mutat) felület. Ha $\underline{F}: K \to \mathbb{R}^3$ folyt. diffható K-n, akkor

$$\int_{\partial K} \underline{F}\bullet\underline{n}\, d\sigma = \int_K \operatorname{div} \underline{F}\, dV = \int_K \operatorname{div}\underline{F}\, \underbrace{dx\, dy\, dz}_{dV}.$$

Biz.: Csak szép komplikra (ezek x-re, y-ra és z-re nézve is normáltartományok, bonyolultabb alakzatokat ilyenekre kell bontani, a "vágási felületeken" a fluxusok kiesnek).

$\underline{F}=(F_1,F_2,F_3)$, $\int_K \operatorname{div}\underline{F}\,dV=\int_K(\partial_1F_1+\partial_2F_2+\partial_3F_3)\,dV$

az $\int_K \partial_3F_3\,dV$-t részletezzük



$\psi(x,y)$ felső felület (ψ,A), alsó (φ,A)

$$\int_K\partial_3F_3\,dV=\int_A\left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)}\partial_3F_3(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy=$$

$$=\int_A F_3(x,y,\psi(x,y))-F_3(x,y,\varphi(x,y))\,dx\,dy=(*)$$

$\underline{n}=(n_1,n_2,n_3)$

$$\int_{\partial K}\underline{F}\circ\underline{n}\,d\sigma=\int_{\partial K}(F_1\cdot n_1+F_2\cdot n_2+F_3\cdot n_3)\,d\sigma$$

Azt mutatjuk meg, hogy $(*)=$

$$=\int_{\partial K}F_3\cdot n_3\,d\sigma=\int_A F_3(x,y,\psi(x,y))\cdot 1+F_3(x,y,\psi(x,y))\cdot(-1)\,dx\,dy=(**)$$

az oldalsó lapokon $n_3=0$ így elég az alsó és felső lapokon integrálni.

a felső lapon $\underline{N}=(-\partial_1\psi,-\partial_2\psi,1)$, $n_3=\frac{1}{\|N_\psi\|}$

az alsó lapon $\underline{N}=-(-\partial_1\varphi,-\partial_2\varphi,1)$, $n_3=\frac{-1}{\|N_\varphi\|}$

$$\int_{\partial K}F_3n_3\,d\sigma=\int_A F_3(x,y,\psi(x,y))\frac{1}{\|\underline{N}_\psi(x,y)\|}\|N_\psi(x,y)\|\,dx\,dy+$$

$$+\int_A F_3(x,y,\varphi(x,y))\cdot\frac{-1}{\|N_\varphi(x,y)\|}\cdot\|N_\varphi(x,y)\|\,dx\,dy=(**)$$

a többi komponens hasonlóan megy. ⌋

T.: (Stokes tétel) T.f.h. S irányított darabonként sima C^2 felület és $\underline{n}$ az egység normálvektor. Ha ∂S egy szt. C^1 pozitíven irányított γ görbe

( $\underline{n}$ irányába felfele állva a határon gyalogolva a felület belseje balkéz fele esik)

és $\underline{F}: S \to \mathbb{R}^3$ folyt. diff. vektormező. Ekkor

$$\int_{\partial S} \underline{F}\cdot \underline{T}\, ds = \int_\gamma \underline{F} = \int_S \operatorname{rot}\underline{F}\cdot\underline{n}\, d\sigma.$$

$\underline{T}$ a poz. ir. görbe érintő egység vektora

Biz.: Spec. eset S fv. felület $S=\{(x,y,f(x,y)) : (x,y)\in A\}$

$f: A\to\mathbb{R}$, C^2 fv. $\underline{n}$ felfele mutat., azaz

$$\underline{n} = \frac{\underline{N}}{\|\underline{N}\|}, \quad \underline{N} = (-\partial_x f, -\partial_y f, 1)$$

$(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, $t\in[a,b]$, ∂A határgörbe szt., + ir. paraméterezése, $\gamma(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)))$, $t\in[a,b]$.

$$\int_\gamma \underline{F} = \int_a^b F_1(\gamma(t))\,\varphi_1'(t) + F_2(\gamma(t))\,\varphi_2'(t) + F_3(\gamma(t))\Big(\partial_1 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\,\varphi_1'(t) + \partial_2 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\,\varphi_2'(t)\Big)\,dt = \int_a^b \Big(\big(F_1(\underbrace{\varphi_1(t),\varphi_2(t), f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))}_{\gamma(t)}) +$$

$$+ F_3(\varphi_1(t),\varphi_2(t), f(\varphi_1(t),\varphi_2(t)))\cdot \partial_1 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\big)\cdot\varphi_1'(t) +$$

$$+ \big(F_2(\varphi_1(t),\varphi_2(t), f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))) + F_3(\varphi_1(t),\varphi_2(t), f(\varphi_1(t),\varphi_2(t)))\cdot$$

$$\cdot\, \partial_2 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\big)\,\varphi_2'(t)\Big)\,dt = (*)$$

Alkalmazzuk a síkbeli Green tételt az

$$\big(F_1(x,y,f(x,y)) + F_3(x,y,f(x,y))\,\partial_1 f(x,y),\ F_2(x,y,f(x,y)) + F_3(x,y,f(x,y))\cdot$$

$$\cdot\,\partial_2 f(x,y)\big) = \underline{G} \text{ vektormezőre, } \int_\varphi \underline{G} = \int_A (\partial_1 G_2 - \partial_2 G_1)\,dx\,dy = (\times)$$

$$\partial_1 G_2 = \overset{(5)}{\boxed{\partial_1 F_2(x,y,f(x,y))}} + \overset{(2)}{\partial_3 F_2(x,y,f(x,y))\,\partial_1 f(x,y)} + \overset{(4)}{\partial_1 F_3(x,y,f(x,y))} +$$

$$+ \cancel{\partial_3 F_3(x,y,f(x,y))\,\partial_1 f(x,y)}\,\partial_2 f(x,y) + F_3(x,y,f(x,y))\,\partial_1\partial_2 f(x,y)$$

$$\partial_2 G_1 = \overset{(6)}{\boxed{\partial_2 F_1(x,y,f(x,y))}} + \overset{(3)}{\partial_3 F_1(x,y,f(x,y))\,\partial_2 f(x,y)} + \overset{(1)}{\partial_2 F_3(x,y,f(x,y))} +$$

$$+ \cancel{\partial_3 F_3(x,y,f(x,y))\,\partial_2 f(x,y)}\,\partial_1 f(x,y) + F_3(x,y,f(x,y))\,\partial_2\partial_1 f(x,y)$$

$$= \int_A (\overset{1}{\partial_2 F_3} - \overset{2}{\partial_3 F_2})(-\partial_1 f) + (\overset{3}{\partial_3 F_1} - \overset{4}{\partial_1 F_3})(-\partial_2 f) +$$

$$+ (\overset{5}{\partial_1 F_2} - \overset{6}{\partial_2 F_1}) \cdot 1 \, dx\,dy = \int_A \text{rot}\,\underline{F} \cdot \underline{N} \, dx\,dy = \int_S \text{rot}\,\underline{F} \cdot \underline{n} \, d\sigma$$

Emlékeztető $\underline{N} = (-\partial_1 f, -\partial_2 f, 1)$

$$\text{rot}\,\underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2)\,\underline{i} + (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3)\,\underline{j} + (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)\,\underline{k}$$

Maxwell egyenletek, elektrodinamika hasztn. Gausz–Osztr. és Stokes tételt is

$\underline{E}$ elektrosztatikus mező, $\underline{H}$ mágneses mező

Pl.: Faraday  $\gamma = \partial S$, γ egysz. zárt görbe (vezeték)

S tetszőleges γ határú irányított sima felület.

Mágneses fluxus S-en keresztül $\Phi = \int_S \underline{H} \cdot \underline{n} \, d\sigma$

A γ vezetékben indukált áram (elektrosztatikus mező cirkulációja/örvényessége) arányos a mágneses fluxus változásával

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{\mu_0} \int_\gamma \underline{E} \overset{\text{Stokes}}{=} -\frac{1}{\mu_0} \int_S \text{rot}\,\underline{E} \cdot \underline{n} \, d\sigma$$

$$\Rightarrow \int_S \text{rot}\,\underline{E} \cdot \underline{n} \, d\sigma = -\mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \underline{H} \cdot \underline{n} \, d\sigma = -\mu_0 \int_S \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \cdot \underline{n} \, d\sigma$$

mivel S tetszőleges $\Rightarrow$ Faraday törvénye

$$\nabla \times \underline{E} = \text{rot}\,\underline{E} = -\mu_0 \frac{\partial \underline{H}}{\partial t}$$ (második Maxwell egyenlet)

$\Rightarrow$ az elektromos erőtér örvénymentes, ha a mágneses erőtér állandó időben.

Fourier sorok

Def.: T.f.h. $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

a) N-ed fokú trigonometrikus polinom
$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

b) trigonometrikus sor $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

Fourier használta a trig. sorokat a hőegyenlet megoldása során (hőeloszlás fémrúdban).
Euler rezgőhúrt tanulmányozott velük.
Milyen 2π szt. per. fvek állíthatók elő?

Def.: T. f. h. $f \in R[-\pi,\pi]$ (vagy $L^1[-\pi,\pi]$).

Az f Fourier együtthatói

$$a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\ k=0,1,\dots;\ b_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx,\ k=1,2,\dots$$

f Fourier sora $(Sf)(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx)$

Részlet összegei: $(S_0 f)(x)=\frac{a_0(f)}{2}$, $(S_N f)(x)=\frac{a_0(f)}{2}+$
$+\sum_{k=1}^{N}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx)$,

f komplex Fourier sora $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ -t használva.

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k e^{ikx}+d_k e^{-ikx}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

$$c_0=\frac{a_0}{2},\ c_k=\frac{a_k-ib_k}{2},\ d_k=\frac{a_k+ib_k}{2}=c_{-k},\ k=1,2,\dots$$

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$$

Lemma (ortogonalitás) $k,j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos jx\,dx=\begin{cases}2\pi & \text{ha } k=j=0\\ \pi & \text{ha } k=j\neq 0\\ 0 & \text{ha } k\neq j\end{cases},\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin jx\,dx=\begin{cases}\pi & \text{ha } k=j\neq 0\\ 0 & \text{ha } k\neq j\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos jx\,dx=0$$

Biz.: HF.

T.: (Fourier) Ha $S=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ egyenl. konv. $\mathbb{R}$-en f-hez, akkor S az f Fourier sora, azaz $a_k=a_k(f)$, $b_k=b_k(f)$.

Biz.: Mivel S e. konv. f-hez és $\cos kx$ korl. így

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j \cos jx \cos kx + b_j \sin jx \cos kx\right) \text{ is}$$

e. konv. $f \in R[-\pi;\pi]$ (tagt. mivel folyt. fv-ek egyenl. limesze)

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{a_j}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos jx\,dx + \right.$$

$$\left. + \frac{b_j}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin jx\,dx\right) = a_k, \quad b_k(f) = b_k \text{ hasonló} \rfloor$$

Def.: Az N-edrendű Dirichlet magok (magfv-ek):

$$D_0(x) = \frac{1}{2}, \quad D_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\cos kx.$$

Az N-edrendű Fejér magok: $K_0(x) = \frac{1}{2}$, $K_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(1 - \frac{k}{N+1}\right)\cos kx$

Megj.: $K_N(x) = \dfrac{D_0(x) + \dots + D_N(x)}{N+1}$ (+) Biz.: HF/GY.

2cos(a)sin(b)=sin(a+b)-sin(a-b)
2sin(a)sin(b)=cos(a-b)-cos(a+b)

T.: Ha $x \notin \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, akkor

$$(*)\ D_N(x) = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \text{ és } (**)\ K_N(x) = \frac{2}{N+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Biz.: $N=0$ triv. $\left(D_N(x) - \frac{1}{2}\right)\sin\frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{N}\cos kx \sin\frac{x}{2} =$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\sin\left(k+\tfrac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\tfrac{1}{2}\right)x\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(N+\tfrac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}\right) \Rightarrow (*)$$

(*)-ot használva $D_k(x)\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x =$

$= \frac{1}{4}\left(\cos kx - \cos(k+1)x\right)$, (+)-ot is haszn. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (N+1)K_N(x)\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=0}^{N} D_k(x)\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{N}\left(\cos kx - \cos(k+1)x\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \cos(N+1)x\right) = \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{N+1}{2}\right)x. \rfloor$$

Def.: A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor, melynek részletösszegei $S_N = \sum_{k=0}^{N} a_k$, az L számhoz, ha a v.ö.-k Cesàro szummálható

Cesàro közepei $\sigma_N \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{S_0 + \dots + S_N}{N+1} \to L$.

Megj.: Ha $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = L \in \mathbb{R}$, akkor $\sigma_N \to L$. Biz.: HF/GY $\rfloor$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \text{ div., de } \sigma_N = \begin{cases} \frac{N+2}{2(N+1)} & \text{ha } N \text{ ps.} \\ \frac{1}{2} & \text{ha } N \text{ ptlan,} \end{cases} \qquad \sigma_N \to \frac{1}{2}.$$

L.: T.f.h. $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π sz. per. és $f\in R[-\pi,\pi]$.

Ekkor $(\sigma_N f)(x) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{(S_0 f)(x)+\dots+[S_N(f)](x)}{N+1} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_N(t)\,dt =$

$N=0,1,\dots,\ \forall x\in\mathbb{R}.$ $\quad = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(x-t)dt$

Biz.: $a_j(f)\cos jx + b_j(f)\sin jx = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos ju\cos jx\,du +$

$+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin ju\sin jx\,du = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)(\cos ju\cos jx+\sin ju\sin jx)\,du =$

$=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos(j(x-u))\,du,$ összeadva:

$(S_k f)(x) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{j=1}^{k}(a_j(f)\cos jx + b_j(f)\sin jx) =$

$=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left(\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{k}\cos(j(x-u))\right)du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)D_k(x-u)\,du$

$t=x-u$-t helyettesítve és f, D_k 2π-sz. periodicitását haszn.

$(S_k f)(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-t)D_k(t)(-1)\,dt =$ $\left[\begin{array}{l} u=x-t,\ \frac{du}{dt}=-1 \\ u=-\pi \Rightarrow t=x+\pi, \\ u=\pi \Rightarrow t=x-\pi \end{array}\right.$

$=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_k(t)\,dt,\quad k=0,1,\dots$

$\Rightarrow (\sigma_N f)(x) = \dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{N}(S_k f)(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_k(t)\,dt =$

$=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_N(t)\,dt.$ ⌋

L.: $\forall N=\{0,1,\dots\}$-re (i) $K_N(t)\geq 0$, $\forall t\in\mathbb{R}$-re,

(ii) $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,dt = 1$, (iii) $\forall 0<\delta<\pi$-re $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_{\delta}^{\pi}|K_N(t)|\,dt = 0$.

Mivel $K_N(-t)=K_N(t)$ így (iii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{-\delta}$-ra is érv.

Biz.: Ha $t=2j\pi$, $j\in\mathbb{Z}$, akkor $D_k(t)=k+1/2\geq 0 \Rightarrow K_N(t)\geq 0$,

Különben (**) $\Rightarrow K_N(t) = \dfrac{2}{N+1}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0.$

$\underline{\text{Def}} \Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{k}{N+1}\right) \cos kt\right) dt = \pi.$

$0 < \delta < \pi$ esetén $\sin(t/2) \geq \sin \delta/2 \quad \forall t \in [\delta, \pi]$, (**) $\Rightarrow$

$$\int_{\delta}^{\pi} |K_N(t)|\,dt \leq \frac{2}{N+1} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\left(\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)t\right)^2}{\left(2\sin\frac{\delta}{2}\right)^2}\,dt \leq \frac{\pi}{2(N+1)\sin^2\frac{\delta}{2}} \to 0 \,\Big]$$

$\underline{\text{T.:}}$ (Fejér) T.f.h. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π sz. per. és $f \in R[-\pi, \pi]$

(i) ha $\exists L = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h)}{2}$, akkor $(\sigma_N f)(x_0) \to L$,

(ii) ha $f \in C(I)$, I zárt. int., akkor $\sigma_N f \to f$ egyenletesen I-n.

$\underline{\text{Biz.:}}$ f periodikus felt. $x_0 \in [-\pi, \pi]$, $K_N(-t) = K_N(t) \Rightarrow$

$$(\sigma_N f)(x_0) - L = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\left(f(x_0 - t) - L\right) dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} K_N(t)(f(x_0-t)-L)\,dt\right.$$

$$\left. + \int_{-\pi}^{0} K_N(t)\left(f(x_0-t)-L\right) dt\right] = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} K_N(t)(f(x_0-t)-L)\,dt + \int_{\pi}^{0} K_N(-u)\,\cdot\right.$$

$u = -t$, $-\pi \to \pi$, $0 \to 0$, $dt = -du$

$$\left.\cdot\,(f(x_0+u) - L)(-1)\,du\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} K_N(t) \underbrace{\left(\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2} - L\right)}_{F(x_0,t)} dt$$

T.f.h. $\varepsilon > 0$ és vál $0 < \delta < \pi$-t, hogy $|t| < \delta \Rightarrow |F(x_0, t)| < \varepsilon/3 \Rightarrow$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} K_N(t)|F(x_0,t)|\,dt < \frac{2\varepsilon}{3\pi}\int_0^{\delta} K_N(t)\,dt \leq \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Vál N_0-t, hogy $\forall N \geq N_0$-ra $\boxed{\int_{\delta}^{\pi} K_N(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{4M}}$, ahol

$M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < +\infty$ ($f \in R[-\pi, \pi]$ és f 2π sz. per.)

$|F(x_0, t)| \leq 2M. \Rightarrow \boxed{\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} K_N(t)|F(x_0,t)|\,dt \leq \frac{4M}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} K_N(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{3}}$

$$|(\sigma_N f)(x_0) - L| \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} K_N(t)|F(x_0,t)|\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} K_N(t)|F(x_0,t)|\,dt <$$

$< \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ ha $N \geq N_0 \Rightarrow$ (i).

(ii)-höz ha $f \in C(I)$ akkor itt e.folyt. $\forall x_0 \in I$-re u.az a $\delta > 0$ jó és a fenti becslés ugyanarra az N_0-ra megy.]

Köv.: Ha $f \in C(\mathbb{R})$, 2π sz. per., akkor $\sigma_N(f) \to f$ egyenletesen $\mathbb{R}$-en.

Köv.: Ha $f \in C(\mathbb{R})$, 2π sz. per. és $a_k(f) = 0$, $k = 0, 1, \dots$, $b_k(f) = 0$, $k = 1, 2, \dots \Rightarrow f(x) \equiv 0$.

Biz.: $(\sigma_N f)(x) = 0$ $\forall N$-re.]

Köv.: Ha $f \in C(\mathbb{R})$, 2π sz. per., akkor $\exists$-nek $T_1, T_2, \dots$ trig. polinomok, melyekre $T_N f \to f$ egyenletesen $\mathbb{R}$-en.

Biz.: $T_N = \sigma_N f$]

T.: (Weierstrass approximációs tétele) T.f.h. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ korl. int. és $f \in C[a, b]$. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$, $\exists p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ polinom, hogy $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in [a, b]$-re.

Biz.: $g(t) = f\left(a + \frac{(b-a)t}{\pi}\right)$ – t ter. felt. $a = 0$, $b = \pi$.
Terjesszük ki f-et $[0, \pi]$-ről $\mathbb{R}$-re úgy, hogy legyen folyt. és 2π sz. per. Előzőek $\Rightarrow$ $\exists T$ trig. polinom, hogy $|T(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
$\sin(kx)$, $\cos(kx)$ analitikusak $\mathbb{R}$-en. A megf. Taylor sorok $[-\pi, \pi]$-n e. konv. $\Rightarrow$ $\exists P$ $\mathbb{R}$-en ért polinom, melyre $|T(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ha $x \in [-\pi, \pi] \supseteq [a, b]$ $\Rightarrow$
$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ ha $x \in [a, b]$]

L.: T.f.h. $f \in R[-\pi, \pi]$, $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(S_N f)(x)\,dx =$

$$= \frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_N f(x)|^2\,dx.$$

Biz.: $f, S_N f \in R[-\pi, \pi] \Rightarrow$ az $\int$-ok léteznek, Def. + ortogonalitás $\Rightarrow$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{a_0(f)}{2}\,dx = \frac{|a_0(f)|^2}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(S_N f)(x)\frac{a_0(f)}{2}\,dx$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, a_k(f)\cos kx\,dx = |a_k(f)|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(S_N f)(x)\, a_k(f)\cos kx\,dx$$

$$b_k(f)\sin kx\,dx = |b_k(f)|^2 = \qquad b_k(f)\sin kx\,dx$$

$\sum_{k=0}^{N} \dots$]

T.: (Bessel egyenlőtlenség) Ha $f \in R[-\pi,\pi]$, 2π sz. per. fv.

akkor ⊛ $\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) \underset{(+)}{\leq} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx$

Megj.: (+)-ben $\leq$, $=$-é javítható (Parseval formula), $L^2[-\pi,\pi]$-ben

Biz.: $0 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - (S_N f)(x)|^2\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx - \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,(S_N f)(x)\, dx +$

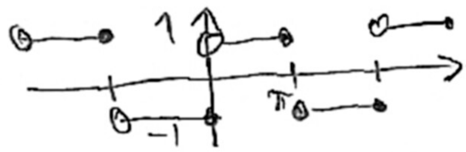
$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |(S_N f)(x)|^2\, dx \underset{\text{előző L.}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx - \left(\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right)\right)$

$\forall N \in \mathbb{N}$, $N \to \infty \Rightarrow$ ⊛, $f \in R[-\pi,\pi] \Rightarrow |f|^2 \in R[-\pi,\pi]$,

$\Rightarrow$ Riemann-Lebesgue lemma: $f \in R[-\pi,\pi] \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} |a_n(f)| = \lim_{n\to\infty} |b_n(f)| = 0$ (mivel $|a_n(f)|^2 \to 0$, $|b_n(f)|^2 \to 0$).

Pl.: Legyen $f(x)$ a köv. négyszögjel: f 2π sz. per.



$f(x) = -1$ ha $-\pi < x \leq 0$

$f(x) = 1$ ha $0 < x \leq \pi$

f ptlan. $\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos nx}_{\text{ptlan}}\, dx = 0$

$b_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos(n0) - \cos(-n\pi)}{n} +\right.$

$\left.+ \frac{-\cos(n\pi) + \cos(n0)}{n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } n = 2, 4, \ldots \\ \frac{4}{n\pi} & \text{ha } n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$

$\sum |a_n| + |b_n| = +\infty$, de $\sum |a_n|^2 + |b_n|^2 < +\infty$.

Mese a Fourier transzformáltról / integrálról

Komplex alak:

$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, $\quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$

feltéve, hogy a sor konv.

Alkalmas "határérték menettel"

⊛ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{ixt}\, dt$, $\quad g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ixt}\, dx$.

(*) bizonyítható ha f minden véges intervallumon SZS és $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$.

(Ha bizonyos $\int$-ok div., akkor néha Cauchy-főértéket lehet használni: $\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = (PV)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ez néha $\exists$, bár $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ div.)

Többféle "normalizálás" lehetséges. A leggyakoribb:

$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x t}\,dx$ a Fourier-tr.

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\, e^{2\pi i t x}\,dt$ az invert.

Nyilván $\wedge$ lin. operátor, azaz $\widehat{c_1 f_1 + c_2 f_2} = c_1 \hat{f}_1 + c_2 \hat{f}_2$.

Nevezetes tul., hogy $\widehat{f'}(t) = 2\pi i t\, \hat{f}(t)$ azaz deriválásból szorzás lesz, alk. diff. e megoldásra.

Bi.: Ha $f \in C_c^1(\mathbb{R})$ (kompakt tartójú C^1 fv.), akkor

$$\int_{-a}^{a} f'(x)\, e^{-2\pi i x t}\,dx = \underbrace{\left[f(x)\, e^{-2\pi i x t}\right]_{x=-a}^{a}}_{\downarrow\, 0} + 2\pi i t \int_{-a}^{a} f(x)\, e^{-2\pi i x t}\,dx$$

ha $f(a) \to 0$ és $f(-a) \to 0$ $\Rightarrow$ formula, ha $a \to \infty$.

Def.: $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ (Lebesgue inth. fv-ek $\mathbb{R}$-en)

Lebesgue m.m. x-re $f(y)g(x-y)$ y-ban $\in L^1(\mathbb{R})$

$h(x) = (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\,dy$ fv. az f és g konvolúciója.

Érvényes tul.: $\hat{h}(t) = \widehat{f*g}(t) = \hat{f}(t)\,\hat{g}(t)$.

Ha alk. a Fubini tétel ált. változatát:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, e^{-2\pi i x t}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\,dy\right) e^{-2\pi i x t}\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-2\pi i y t}\, g(x-y)\, e^{-2\pi i (x-y) t}\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-2\pi i y t} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)\, e^{-2\pi i (x-y) t}\,dx\right)}_{\hat{g}(t)} dy = \hat{f}(t)\,\hat{g}(t)$$

$u = x - y$ -t helyettesítve

A funkcionálanalízis alapjai

Def.: T.f.h. X ($\mathbb{R}$, vagy $\mathbb{C}$ feletti) vektortér.
A $\|\cdot\|: X \to [0, +\infty)$ fv. X-en értelmezett normá, ha
(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$, (ii) $\|ax\| = |a|\,\|x\|$ $\forall x \in X$, $\forall a \in \mathbb{R}$-re
(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$.

Az $(X, \|\cdot\|)$ normált téren a $\|\cdot\|$ által indukált metrika
$\varrho(x,y) \overset{\text{def}}{=} \|x-y\|$. (HF164 ez tényleg metrika)

Korábban láttuk az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ tereket. Volt, hogy $\|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|\underline{x}\|_\infty$,
$\|\underline{x}\|_2 \leq \|\underline{x}\|_1 \leq n\|x\|_\infty$.

ϱ nyilván eltolás inv. $\varrho(x,y) = \varrho(x+z, y+z)$ $\forall x, y, z \in X$.

Def.: $(X, \|\cdot\|)$ Banach tér ha teljes, normált lin. tér.

Pl.: l_2 azon $x = (x_1, x_2, \dots)$ sorozatok tere, melyekre
$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$. Hf. Bizonyítsa be, hogy ez B-tér.

l_∞ az összes korl. $x = (x_1, x_2, \dots)$ sorozat tere,
$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$. Ez is B.tér Hf.

$c \subset l_\infty$ konvergens sorozatok tere
$c_0 \subset c \subset l_\infty$ 0-hoz tartó sorozatok tere. Hf Ezek is B.terek.

$C[a,b]$, $f \in C[a,b]$, $\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$, Hf.: ez is B-tér

$C^1[a,b]$, $f \in C^1[a,b]$, $\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| + \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$, Hf.: ez is B.tér

Def.: T.f.h. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ és $\Phi = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$
az $[a,b]$ egy felosztása. $V(f, \Phi) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$.

Az f fv. <u>variációja</u> $[a,b]$-n

$V(f;[a,b]) \overset{\text{def}}{=} \sup\{V(f,\Phi) : \Phi \text{ az } [a,b] \text{ egy felo. ja}\}$.

Ha $V(f;[a,b]) < +\infty$, akkor f <u>korlátos változású</u>

$f \in BV[a,b]$.

T.f.h. $f \in BV[a,b]$. $T(x) = V(f;[a,x])$ nyilván mon. növ. HF.: $T(x) - f(x)$ is mon. növ. fv. és

$f(x) = T(x) - (T(x) - f(x))$ két mon. növ. fv. kül.

$BV[a,b]$-n $\|f\| = |f(a)| + V(f;[a,b])$, HF.: $BV[a,b]$, B.tér.

$NBV[a,b]$, $f \in NBV[a,b]$ ha f jobbról folyt. (a,b)-n és $f(a)=0$, $\|f\| = V(f;[a,b])$, HF.: ez is B.tér.

Def.: T.f.h. X, Y lin. terek, $T: X \to Y$. Ha $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in X$-re $T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2)$ akkor T <u>lineáris operátor/transzformáció</u> X-ből Y-ba.

Ha $Y = \mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{C}$) akkor <u>lineáris funkcionál</u>.

$T(0+0) = T(0) + T(0) = T(0) \Rightarrow T(0) = 0$.

Pl.: $f \in C[a,b]$ esetén $(Tf)(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

lin. $C[a,b] \to C[a,b]$ operátor.

T.: T.f.h. X, Y normált lin. terek, $T: X \to Y$ lin. op.

Ha $\exists x_0 \in X$, hogy T folyt. x_0-ban, akkor T mindenütt folyt. és egyenletesen is X-en.

Biz.: T folyt. 0-ban, hiszen $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,

$\|T(x_0) - T(y)\| < \varepsilon$ ha $\|x_0 - y\| < \delta$, $\Rightarrow$

$\|T(\underbrace{x_0 - y}_{z}) - \underbrace{T(0)}_{=0}\| = \|T(x_0) - T(y) - (T(y) - T(y))\| = \|T(x_0) - T(y)\| < \varepsilon$

$\forall \|\underbrace{x_0 - y}_{z}\| < \delta$-ra.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ha $\|x\| < \delta \Rightarrow \|Tx\| < \varepsilon$.

$\Rightarrow$ ha $\|x-y\| < \delta$, akkor $\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| < \varepsilon$ ⌋

<u>Def.:</u> A $T: X \to Y$ lin. op. <u>korlátos</u> ha $\exists M > 0$, hogy $\|Tx\| \leq M\|x\|$, $\forall x \in X$. A $T: X \to Y$ op. <u>normája</u> $\|T\| = \inf\{M : \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X\}$.

Ha $x \neq 0$, akkor $Tx = T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\|x\|$ és $T0 = 0$, így $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$.

Nyilván $\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$.

<u>T.:</u> $T: X \to Y$ lin. op. korlátos $\Leftrightarrow$ T folytonos.

<u>Biz.:</u> T.f.h. M a T korlátja. $\varepsilon > 0$-hoz vál. $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$-et. Ha $\|x\| < \delta$, akkor $\|Tx\| \leq M\|x\| < M \cdot \delta = \varepsilon \Rightarrow$ T folyt. a 0-ban $\Rightarrow$ T folyt. mindenütt.

T.f.h. T folyt. $\Rightarrow$ folyt. a 0-ban, $\varepsilon = 1$-hez $\exists \delta > 0$, hogy $\|Tx\| < 1$ ha $\|x\| \leq \delta$. Ha $x \in X$, $x \neq 0$, $\left\|\frac{\delta x}{\|x\|}\right\| = \delta$ $\Rightarrow \|Tx\| = \left\|T\left(\frac{\delta x}{\|x\|}\right)\right\| \cdot \frac{\|x\|}{\delta} < \frac{1}{\delta}\|x\| \Rightarrow M = \frac{1}{\delta}$-val T korl. ⌋

<u>Def.</u> T.f.h. X, Y normált lin. terek és $B(X,Y)$ az $X \to Y$ lin. op. tere.

<u>All.:</u> $B(X,Y)$ normált lin. tér.

<u>Biz.:</u> $\|(T_1 + T_2)(x)\| = \|T_1(x) + T_2(x)\| \leq \|T_1(x)\| + \|T_2(x)\| \leq \|T_1\|\|x\| + \|T_2\|\|x\| = (\|T_1\| + \|T_2\|)\|x\| \Rightarrow \|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$, hasonlóan $\|\alpha T\| = |\alpha|\,\|T\|$ is bizonyítható, nyilván $\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$ ⌋

<u>T.:</u> T.f.h. X normált lin. tér és Y Banach tér. Ekkor $B(X,Y)$ is B.t.

Biz: Kell $B(X,Y)$ teljes. T.f.h. T_n Cauchy s. $B(X,Y)$-ban. $\forall x \in X$-re $\|T_m x - T_n x\| \leq \|T_m - T_n\| \, \|x\| \Rightarrow$
$\Rightarrow$ $T_n x$ Cauchy s., Y teljes $\Rightarrow$ $T_n x$ konv.
$Tx \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} T_n x$. Kell $T \in B(X,Y)$ és $T_n \to T$ $B(X,Y)$-ban.
T nyilván lin., T_n Cauchy $\varepsilon = 1$-hez $\exists N_0$, $\forall n, m \geq N_0$, $\|T_n - T_m\| < 1 \Rightarrow \|T_n\| \leq \|T_{N_0}\| + 1$ $\forall n \geq N_0 \Rightarrow$
$\exists M$, $\|T_n\| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|T_n x\| \leq M \|x\|$
$\Rightarrow \|Tx\| \overset{<}{=} \|T_n x\| + \|Tx - T_n x\| \leq M\|x\| + \|Tx - T_n x\| \to M\|x\|$ ha $n \to \infty$
Kell $\|T_m - T\| \to 0$. T.f.h. $\varepsilon > 0$. Vál $N_1 \in \mathbb{N}$-et, hogy $\|T_m - T_n\| < \varepsilon$ $\forall m, n \geq N_1$, $\Rightarrow \|T_m x - T_n x\| < \varepsilon \|x\|$ $\forall m, n \geq N_1$ $\forall x \in X$, $m \geq N_1$-et rögz. $n \to \infty$ esetén $\|T_m x - Tx\| \leq \varepsilon \|x\|$, $\forall x \in X \Rightarrow$
$\Rightarrow \|T_m - T\| \leq \varepsilon$, $\forall m \geq N_1 \Rightarrow T_m \to T$].

Spec eset $Y = \mathbb{R}$, $B(X, \mathbb{R}) = X^*$ az X duális tere.
$x^* \in X^*$ esetén $\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| : \|x\| \leq 1\}$ (korábbi def.)

gyakori jelölés $x^*(x) = \langle x, x^* \rangle$.

Ha X egy normált lin. tér, akkor X^* B.tér.

T.: (Egyenletes korlátosság) T.f.h. X Banach t. Y normált lin. tér és $\mathcal{F}$ X-ből Y-ba képező folytonos lin. operátorok egy családja. T.f.h. $\forall x \in X$, $\exists M_x$, hogy $\|Tx\| \leq M_x$ $\forall T \in \mathcal{F}$. Ekkor $\exists M$, hogy $\|T\| \leq M$, $\forall T \in \mathcal{F}$.

Biz: $\forall n \in \mathbb{N}$ legyen $A_n = \{x \in X : \|Tx\| \leq n, \forall T \in \mathcal{F}\}$
T-k folytonosak $\{x : \|Tx\| \leq n\}$ zárt $\forall T \in \mathcal{F} \Rightarrow$
$A_n = \bigcap_{T \in \mathcal{F}} \{x : \|Tx\| \leq n\}$ is zárt. Felt $\forall x \in X$, $\exists n_x$, $x \in A_{n_x}$.
$\Rightarrow$ Baire kategória tétel $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists B(x_0, \delta) \subset A_{n_0} \subset X \Rightarrow$
$\Rightarrow \|Tx\| \leq n_0$ $\forall x \in B(x_0, \delta)$, $\forall T \in \mathcal{F}$.

T.f.h. $z\in X$, $\|z\|<\delta \Rightarrow x_0+z\in B(x_0,\delta) \Rightarrow \forall T\in \mathcal{F}$-re

$\|Tz\| = \|T(x_0+z)-T(x_0)\| \le \|T(x_0+z)\| + \|Tx_0\| \le 2n_0$.

$\Rightarrow \|Tz\|\le 2n_0$ $B(0,\delta)$-n $\Rightarrow \|Tx\|\le 2n_0/\delta$, $\forall x\in B(0,1)$

$\Rightarrow \|T\|\le 2n_0/\delta$ $\forall T\in\mathcal{F}$-re|

T.: T.f.h. X Banach t., Y normált lin. tér, $T_n: X\to Y$ folyt. lin. op. Ha $T_nx\to Tx$ $\forall x\in X$-re akkor T folyt. lin. op.

Biz.: T nyilván lin. $T(ax+by) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(ax+by) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} (aT_n(x)+bT_n(y)) = aT(x)+bT(y)$.

Kell T folytonos X-en. T.f.h. $x\in X$, $\|x\|=1$.

$T_nx\to Tx \Rightarrow \|T_nx\| \le \|T_nx-Tx\|+\|Tx\|$ korlátos $\Rightarrow \|T_nx\|\le M_x$

Egyenl. korl. tétel $\Rightarrow \exists M$, $\|T_n\|\le M$ $\forall n\in\mathbb{N}$-re.

Ha $z\in X$, $\|z\|=1$, $\|Tz\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|T_nz\| \le \limsup\limits_{n\to\infty} \|T_n\|\,\|z\| =$

$= \limsup\limits_{n\to\infty} \|T_n\|\le M \Rightarrow \|T\|\le M$|

Hilbert terek

T.f.h. X egy $\mathbb{C}$ (vagy $\mathbb{R}$) feletti lin. tér.

Def.: Az $\langle\cdot,\cdot\rangle: X\times X\to \mathbb{C}$ (vagy $\mathbb{R}$) fv. belső szorzat, vagy skalár szorzat ha

1) $\langle f,f\rangle\ge 0$ $\forall f\in X$, $\langle f,f\rangle=0 \Leftrightarrow f=0$,

2) $\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$ $\forall f,g\in X$,

3) $\langle af,g\rangle = a\langle f,g\rangle$ $\forall f,g\in X$, $a\in\mathbb{C}$ v ($a\in\mathbb{R}$),

4) $\langle f_1+f_2,g\rangle = \langle f_1,g\rangle+\langle f_2,g\rangle$, $g\in X$.

$\Rightarrow \langle f, \lambda_1g_1+\lambda_2g_2\rangle = \overline{\lambda_1}\langle f,g_1\rangle + \overline{\lambda_2}\langle f,g_2\rangle$

(valós esetben $\overline{\lambda_1}=\lambda_1$, $\overline{\lambda_2}=\lambda_2$).

$\|f\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\langle f,f\rangle}$

A belső szorzattereket <u>prehilbert</u> tereknek hív.

<u>L.:</u> (Cauchy-Schwarz egyenl.) T.f.h. X prehilbert t. $\forall f,g \in X$-re $|\langle f,g\rangle| \le \|f\|\|g\|$.

<u>Biz.:</u> (valós eset) $0 \le P(\alpha) = \langle \alpha f+g, \alpha f+g\rangle =$

$= \alpha^2\langle f,f\rangle + 2\alpha\langle f,g\rangle + \langle g,g\rangle = \|f\|^2\alpha^2 + 2\langle f,g\rangle\alpha + \|g\|^2$

$\Rightarrow p(\alpha) \ge 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow 4(\langle f,g\rangle^2 - \|f\|^2\|g\|^2) \le 0$ ⌋

<u>Áll.:</u> $\forall f,g \in X$, $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$.

<u>Biz.:</u> $\|f+g\|^2 = \langle f+g, f+g\rangle = \langle f,f\rangle + \langle g,f\rangle + \langle f,g\rangle +$
$+ \langle g,g\rangle \le \langle f,f\rangle + 2|\langle f,g\rangle| + \langle g,g\rangle \le \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2$
$= (\|f\| + \|g\|)^2.$ ⌋

<u>T.:</u> (Paralelogramma szabály) T.f.h. X prehilbert tér. $\forall f,g \in X$-re $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$.

<u>Biz.:</u> $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = \langle f+g, f+g\rangle + \langle f-g, f-g\rangle =$
$=$ (egyszerűsítés ut.) $= 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$ ⌋

(Megj.: Ha egy normált térben telj. a P.sz. akkor definiálható alkalmas belső szorzat, amire ez a norma.)

"Geometria": f merőleges g-re, ha $\langle f,g\rangle = 0$.

<u>T.:</u> (Pitagorasz tétel) Ha $f_1,\dots,f_n$ páronként merőlegesek egymásra az X prehilbert térben, akkor

$$\Big\|\sum_{k=1}^n f_k\Big\|^2 = \sum_{k=1}^n \|f_k\|^2.$$

<u>Biz.:</u> $\Big\|\sum_{k=1}^n f_k\Big\|^2 = \Big\langle \sum_{k=1}^n f_k, \sum_{l=1}^n f_l\Big\rangle \overset{\text{merőlegességet használ}}{=} \sum_{k=1}^n \langle f_k, f_k\rangle$ ⌋

<u>Másképp:</u> Ha $\{f_k\}$, $k=1,\dots,n$ <u>ortonormáltak</u> (azaz ortogonálisak (páronként $\perp$) és $\|f_k\|=1$, $\forall k$-ra), akkor

$$\Big\|\sum_{k=1}^n c_k f_k\Big\|^2 = \sum_{k=1}^n |c_k|^2.$$

Def.: Az $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ prehilbert tér Hilbert tér ha a belső szorzat által definiált norma szerint a tér Banach tér, azaz teljes normált tér.

Pl.: $\mathbb{R}^n$, $(\mathbb{C}^n)$ valós (ill. komplex) Hilbert terek,

$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, $\left(\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}\right)$.

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$.

Pl.: ∞ dim. általánosítás $X = \{x = (x_1, x_2, \dots) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty\}$

$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$, $\left(\langle x_k, y_k\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}\right.$ komplex eset$\left.\right)$

A köv. nem Hilbert tér, csak prehilbert tér:

$C[a,b]$, $\langle f, g\rangle = \int_a^b fg$ $\left(\text{vagy } \int_a^b f\overline{g}\right)$. (később $L_2(X, \mathcal{B}, \mu)$ lesz)

Konvex halmazok

Def.: T.f.h. X vektortér, $E \subset X$ konvex ha $\forall f, g \in E$-re és $0 < t < 1$-re, $tf + (1-t)g \in E$.

$\mathrm{dist}(x, E) = \inf\{\|x - y\| : y \in E\}$. Van-e legközelebbi elem? Egyértelmű-e?

$x_a \in E$, $\|x_a - x\| = \mathrm{dist}(x, E)$.

T.: T.f.h. H Hilbert t., $C \subset H$ zárt, nemüres, konvex, és $f \in H$. Ekkor $\exists!\, g \in C$, amire $\mathrm{dist}(f, C) = \|f - g\|$.

Biz.: C-t, $C - f$-re cserélve felt. $f = 0$.

$c \overset{\text{def.}}{=} \mathrm{dist}(0, C) = \inf\{\|g\| : g \in C\}$. $\forall g_1, g_2 \in C$-re par. szab. $\Rightarrow$

(*) $\frac{1}{4}\|g_1 - g_2\|^2 = \frac{1}{2}\|g_1\|^2 + \frac{1}{2}\|g_2\|^2 - \|\frac{1}{2}(g_1 + g_2)\|^2$, $\frac{1}{2}(g_1 + g_2) \in C$

$\Rightarrow$ (**) $\|g_1 - g_2\|^2 \le 2\|g_1\|^2 + 2\|g_2\|^2 - 4c^2$. $\exists\, g_n \in C$, amire $\|g_n\| \to c$.

(**) $\Rightarrow$ $\|g_n - g_m\|^2 \le 2\|g_n\|^2 + 2\|g_m\|^2 - 4c^2 \Rightarrow g_n$ Cauchy.

H Hilbert $\Rightarrow \exists\, f_a \in H$, $g_n \to f_a$; C zárt $\Rightarrow f_a \in C$.

$|\|g_n\| - \|f_a\|| \le \|g_n - f_a\| \to 0 \Rightarrow \|f_a\| = c$.

egyértelműség: Ha $\|g_1\| = \|g_2\| = c$, $g_1 \neq g_2$, $g_1, g_2 \in C$

$$\circledast \Rightarrow \|\underbrace{\tfrac{1}{2}(g_1 + g_2)}_{\in C}\|^2 = \tfrac{1}{2}c^2 + \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}\underbrace{\|g_1 - g_2\|^2}_{>0} < c^2 \ \text{↯}$$

<u>Köv.:</u> Ha H Hilbert tér, $C \subset H$ zárt, konvex akkor $\exists!\, f \in C$, $\|f\| = \min\{\|g\| : g \in C\}$.

<u>T.:</u> T.f.h. H Hilbert tér, $E \subset H$ zárt altér és $f \in H$. Ekkor $\exists!\, f_E$ és $f_\perp$, hogy $f = f_E + f_\perp$ és $f_E \in E$, $f_\perp \perp E$, azaz $\langle f_\perp, g\rangle = 0$ $\forall g \in E$. Továbbá $\|f\|^2 = \|f_E\|^2 + \|f_\perp\|^2$.

<u>Biz.:</u> E konvex $\Rightarrow \exists!\, f_E$, amire $\operatorname{dist}(f, E) = \|f - f_E\|$.

$f_\perp \overset{\text{def}}{=} f - f_E$. T.f.h. $\lambda \in \mathbb{C}$ (vagy $\mathbb{R}$), $g \neq 0$, $g \in E$

$$\circledast\ \|f_\perp - \lambda g\|^2 = \|f - (f_E + \lambda g)\|^2 \geq \operatorname{dist}(f, E)^2 = \|f - f_E\|^2$$

$$\|f - f_E - \lambda g\|^2 = \langle f - f_E - \lambda g, f - f_E - \lambda g\rangle = \cancel{\langle f - f_E, f - f_E\rangle} -$$

$$-\langle \lambda g, f - f_E\rangle - \langle f - f_E, \lambda g\rangle + |\lambda|^2\langle g, g\rangle \underset{\circledast}{\geq} \cancel{\langle f - f_E, f - f_E\rangle}$$

$$\Rightarrow -\lambda\langle g, f - f_E\rangle - \overline{\lambda}\langle f - f_E, g\rangle + |\lambda|^2\langle g, g\rangle \geq 0.$$

$\lambda \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\langle f - f_E, g\rangle}{\langle g, g\rangle}$ vál. mellett

$$\Rightarrow -\frac{|\langle g, f - f_E\rangle|^2}{\langle g, g\rangle} - \frac{|\langle f - f_E, g\rangle|^2}{\langle g, g\rangle} + \frac{|\langle f - f_E, g\rangle|^2}{\langle g, g\rangle^2}\langle g, g\rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \geq |\langle g, f - f_E\rangle|^2 = |\langle f - f_E, g\rangle|^2 \Rightarrow \langle \underbrace{f - f_E}_{f_\perp}, g\rangle = 0$$

$\Rightarrow f_\perp \perp E$.

$$\Rightarrow \|f\|^2 = \langle f_E + f_\perp, f_E + f_\perp\rangle = \langle f_E, f_E\rangle + \langle f_\perp, f_\perp\rangle + 0 + 0.$$

Ha $f = f_E' + f_\perp' = f_E + f_\perp$, akkor $\langle f_\perp, f_\perp\rangle = \langle f - f_E, f - f_E\rangle =$

$$= \langle \underbrace{f - f_E'}_{f_\perp'} + \underbrace{f_E' - f_E}_{\in E}, f - f_E' + f_E' - f_E\rangle = \langle f_\perp', f_\perp'\rangle + \langle f_E' - f_E, f_E' - f_E\rangle$$

$\Rightarrow \|f_E' - f_E\|^2 = \|f_\perp\|^2 - \|f_\perp'\|^2$, szerepcserével $\|f_E - f_E'\|^2 =$

$= \|f_\perp'\|^2 - \|f_\perp\|^2 \Rightarrow \|f_E' - f_E\|^2 = 0.$ $\square$

T.: (Fréchet–Riesz) T.f.h. $\Lambda: H \to \mathbb{R}$ folyt. lin. funkcionál. Ekkor $\exists!\, g \in H$, $\Lambda(f) = \langle f, g \rangle$, $\forall f \in H$-ra.

Biz.: Ha $\Lambda(f) = 0$, $\forall f \in H$, akkor $g = 0$ jó.
Ha nem, akkor $E \overset{def.}{=} \{ f \in H : \Lambda(f) = 0 \}$, E altér (mivel Λ lineáris), E zárt, mivel Λ folytonos. $E \neq H$, mivel $\exists \tilde{f} \in H$, $\Lambda(\tilde{f}) \neq 0$. Előző tétel $\tilde{f} = \tilde{f}_E + \tilde{f}_\perp$, $\tilde{f}_\perp \perp E$, $\tilde{f}_\perp \neq 0$
$g_1 \overset{def.}{=} \frac{\tilde{f}_\perp}{\|\tilde{f}_\perp\|}$, $\|g_1\| = 1$ és $\forall g \in E$-re $\langle g_1, g \rangle = 0$.
$\lambda \overset{def.}{=} \overline{\Lambda(g_1)}$, $\boxed{g \overset{def.}{=} \lambda \cdot g_1}$. T.f.h. $f \in H$ tetsz. $h \overset{def.}{=} \Lambda(f) g_1 - \Lambda(g_1) f \Rightarrow \Lambda(h) = \Lambda(f)\Lambda(g_1) - \Lambda(g_1)\Lambda(f) = 0 \Rightarrow h \in E$.
$\Rightarrow 0 = \langle h, g_1 \rangle = \langle \Lambda(f) g_1 - \Lambda(g_1) f, g_1 \rangle = \Lambda(f) \underbrace{\langle g_1, g_1 \rangle}_{=1} -$
$- \Lambda(g_1) \langle f, g_1 \rangle = \Lambda(f) - \bar{\lambda} \langle f, g_1 \rangle = \Lambda(f) - \langle f, \lambda g_1 \rangle =$
$= \Lambda(f) - \langle f, g \rangle$.
Ha $\langle f, g \rangle = \langle f, g' \rangle$ $\forall f \in H$, akkor $f = g - g'$-re,
$\langle g - g', g - g' \rangle = 0 \Rightarrow g - g' = 0$]

T.: Ha H Hilbert tér, akkor a duális tere H^* is Hilbert tér.

Biz.: $\forall \Lambda \in H^*$-nak a előző tétel szerint megfelel pontosan egy $g \in H$, amire $\forall f \in H$-ra $\Lambda(f) = \langle f, g \rangle$. $\Phi: H \to H^*$, $\Phi(g)(f) = \langle f, g \rangle$. Φ bijekció. Kell belső szorzat H^*-on. Mivel $\Phi(c_1 g_1 + c_2 g_2) = \bar{c}_1 \Phi(g_1) + \bar{c}_2 \Phi(g_2)$ (valós esetben nincs gond, mivel $\bar{c}_1 = c_1$, $\bar{c}_2 = c_2$) ezért a jó def.: $\langle \Lambda_1, \Lambda_2 \rangle = \langle \Phi^{-1}\Lambda_2, \Phi^{-1}\Lambda_1 \rangle$ Hf.: így H^* Hilbert tér.]