EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Uma equação é exponencial quando a incógnita está no expoente. Para achar o seu valor, deve-se reduzir os membros da igualdade a uma mesma base. Ou seja:

$$a^m = a^n \quad \text{então} \quad m = n$$

ou, em exemplo numérico:

$$2^x = 2^4 \ \text{então}\ x = 4$$

Exemplo de uma equação exponencial:

$5^x = 125$

Antes de tudo, vamos relembrar as propriedades da potenciação, que são as mais utilizadas na resolução de uma equação e inequações exponenciais:

P1.	$a^m . a^n = a^{m+n}$	**P5.**	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
P2.	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	**P6.**	$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$
P3.	$(a^m)^n = a^{m.n}$	**P7.**	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
P4.	$(a.b)^n = a^n.b^n$	**P8.**	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Alguns exercícios para praticar:

a. $7^5 \cdot 7^6$

b. $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^3\right]^{-3}$

c. $(13^3)^6$

d. $\left(\frac{7}{9}\right)^{20} : \left(\frac{7}{9}\right)^{15}$

e. $8^5 : 8^{-4}$

f. $(0,9)^{-8} \cdot (0,9) \cdot (0,9)^5$

Outra propriedade matemática muito utilizada também é decompor um número (fatoração), dividindo-o por outro sucessivamente, até chegar a 1.

Exemplo da fatoração do número 125:

$$\begin{array}{l|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ \cline{2-2} 1 & 5^3 \end{array}$$

Ou seja, $125 = 5^3$

Desse modo, retomando o primeiro exemplo:

$5^x = 125$

$5^x = 5^3$

Agora, como as bases são iguais, cortam-se elas; sendo assim:

$X = 3$

O que acabamos de ver, é que o número 125 pode ser escrito em base 5, que é a mesma base onde a incógnita X é expoente, ou seja, utilizamos da fatoração para resolver esse exercício.

Ex2) $27^{3-x} = \frac{1}{81^x}$

Utilizando-se da propriedade da fatoração para reduzir os números a uma mesma base:

27 | 3

9 | 3

3 | 3

1 | $27 = 3^3$

81 | 3

27 | 3

9 | 3

3 | 3

1 | $81 = 3^4$

Com todos os números na mesma base, o exercício pode ser resolvido apenas com as propriedades da potenciação, agora.

Substituindo:

$$(3^3)^{3-x} = \frac{1}{(3^4)^{x}}$$

Foi utilizada a propriedade 3, multiplicando o expoente 3 por (3-x).

$$3^{9-3x} = \frac{1}{(3^4)^{x}}$$

Utilizaremos a propriedade 6, para trazer o ${3^4}^{x}$ para cima, ou seja, o expoente ficará negativo.

$$3^{9-3x} = 3^{-4x}$$

Corta-se as bases:

9 - 3x = -4x

Agora é apenas resolver a equação normalmente.

9 = -4x - 3x

9 = -x

-9 = x

INEQUAÇÕES

Para as inequações exponenciais, o procedimento é o mesmo, com uma única diferença: caso a base seja maior que 1, mantém-se o sinal original, caso a base seja entre 0 e 1, o sinal se inverte. Mas o que isso significa?

Algebricamente:

Para $a > 1 \rightarrow \quad a^b > a^c \Rightarrow b > c$

Para $0 < a < 1 \rightarrow \quad a^b > a^c \Rightarrow b < c$

Inverteu o sinal ↑

Após a inversão do sinal, resolve - se normalmente, utilizando as mesmas propriedades de uma equação exponencial. Ainda não entendeu? Vamos tentar na prática.

Ex3) $2^x < 8^3$

Fatora-se o 8

$2^x < 2^{3^3}$

Nesse caso, a base é maior que 1, ou seja, NÃO há inversão.

$2^x < 2^9$

Corta as bases

$x < 9$

Ex4) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 256$

Fatoramos, dividindo 256 por 2 sucessivamente, sendo assim:

$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2^8$

Utilizamos a propriedade 6 e 5, sucessivamente.

$\left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{2^{-8}}$ (aqui, foi utilizada a propriedade 6 para trazer o 2 para baixo.)

$\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-8}$ (já aqui, a propriedade 5 foi utilizada, pois 1^{-8} = 1.)

A base nesse caso, é MENOR que 1, ou seja, o sinal será invertido.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-8}$

x > -8

OBSERVAÇÃO MAIS IMPORTANTE: Se a base é menor que 1, deve-se inverter o sinal ao “cortar” as bases.

Para mais exercícios, confira a página de matemática do site. Caso ainda restem dúvidas, contate-nos.