

TEOREMA

As Mil Faces de Pitágoras

André L. G. Mandolesi

O Teorema de Pitágoras (TP) é um dos mais antigos, famosos e úteis teoremas da Matemática, e possivelmente o que maior impacto teve na evolução desta e outras ciências. Neste artigo, vamos olhar para este velho conhecido de diferentes perspectivas, algumas pouco usuais. Iremos lembrar um pouco da sua história, algumas aplicações e generalizações bem conhecidas, outras nem tanto, e ver que ele guarda muitas facetas surpreendentes e geralmente ignoradas.

O teorema de mil faces

Em sua forma moderna, o TP é a relação

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad (1)$$

entre os comprimentos a da hipotenusa, e b e c dos catetos, de um triângulo retângulo (Fig. 1).

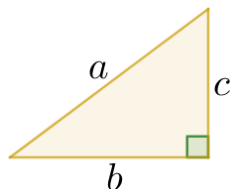


Figura 1: Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$.

Sua importância se reflete nas centenas de demonstrações surgidas ao longo do tempo [1, 11]. E a forma como ele permeia toda a Matemática, sob diferentes roupagens, se reflete na diversidade de métodos que usaremos: geometria euclidiana, não-euclidiana, analítica, Riemanniana, trigonometria circular e hiperbólica, álgebra linear e exterior, determinantes, cálculo integral e vetorial, combinatória, nú-

meros complexos, etc. Isso mostra também a unidade da Matemática, e como é fértil o fluxo de conhecimentos entre suas diferentes áreas.

Inúmeros resultados bem conhecidos são basicamente aplicações ou generalizações do TP. Sendo impossível listar todos, ficaremos só nos mais óbvios:

- O TP equivale à identidade trigonométrica fundamental, $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.
- Decompondo $v \in \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C}^n numa base ortogonal como $v = v_1 + \dots + v_n$, temos

$$\|v\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2. \quad (2)$$

- Em \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n , a distância d entre $A = (a_1, \dots, a_n)$ e $B = (b_1, \dots, b_n)$ é

$$d(A, B)^2 = \sum_{k=1}^n |a_k - b_k|^2.$$

- Se os lados b e c formarem um ângulo θ , o TP se generaliza como a Lei dos Cossenos,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta. \quad (3)$$

- A métrica Riemanniana no plano euclidiano é $ds^2 = dx^2 + dy^2$, um TP para distâncias infinitesimais. Em superfícies curvas (Fig. 2), ela é uma versão infinitesimal de (3),

$$ds^2 = g_{xx}dx^2 + g_{yy}dy^2 + 2g_{xy}dxdy,$$

onde g_{xx} e g_{yy} ajustam a escala de comprimento nas direções x e y , e g_{xy} envolve o ângulo entre elas. Em dimensão n , $ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}dx_i dx_j$.

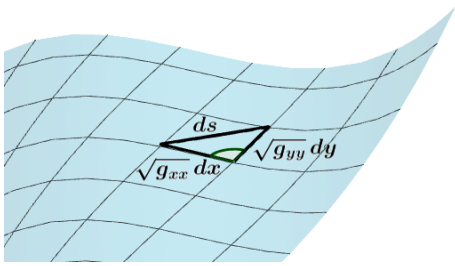


Figura 2: Métrica Riemanniana em uma superfície é uma versão infinitesimal da Lei dos Cossenos.

- Num espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, u e v são ditos ortogonais se $\langle u, v \rangle = 0$, e nesse caso $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. Com isso pode-se até, por exemplo, interpretar $\int_0^{2\pi} (\sin x + \cos x)^2 dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx + \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$ em termos do TP num espaço de funções.

Veremos depois generalizações menos conhecidas.

Um pouco de história

Apesar do nome, o TP era conhecido por várias civilizações muito antes da época de Pitágoras (séc. VI a.C.), sendo improvável que ele ou seus seguidores, os pitagóricos, tenham sido os primeiros a prová-lo [15]. E é possível que estivessem menos interessados em (1) como resultado geométrico do que como uma relação aritmética de certos trios de números naturais, as *ternas pitagóricas*, como (3, 4, 5), (5, 12, 13), etc.

Estes trios eram tabelados por vários povos antigos, e possivelmente tinham finalidade didática, servindo como exemplos fáceis de trabalhar. Também podiam ter utilidade prática: para demarcar um terreno retangular, uma maneira de checar se os lados estão bem retos e perpendiculares é ver se formam com a diagonal uma dessas ternas. Arqueólogos ainda fazem algo parecido hoje em dia.

Os pitagóricos se interessavam menos por geometria que pelos números, vistos como algo místico, a base do Universo, cujas propriedades revelariam verdades fundamentais. Mas, na época, os únicos números eram os naturais, e mesmo frações eram só relações entre eles: se um segmento a media 1, dizer que outro segmento b media $\frac{2}{3}$ significava apenas que 3 segmentos b mediam o mesmo que 2 a 's. Ou, equivalentemente, que era possível achar uma unidade comum de comprimento que coubesse 3 vezes em a , e 2 vezes em b . E, como tudo no mundo devia ser descrito por relações entre números, esperava-se que quaisquer comprimentos pudessem ser comparados assim.

Ironicamente, o TP pode ter levado ao fim da filosofia pitagórica, e à primeira crise da história da matemática. Usando (1) para achar a razão $\frac{m}{n}$ entre a diagonal de um quadrado e seu lado, obtém-se $\frac{m^2}{n^2} = 2$. Mas fatorando m e n em primos, ao elevá-los ao quadrado a quantidade de cada fator dobra, e simplificando não há como sobrar um único 2. Ou seja, é impossível comparar tais comprimentos por meio de uma razão entre números (naturais). Eles são *incomensuráveis*, não podem ser ambos múltiplos inteiros de uma unidade de medida comum.

Diz-se que encontrar algo que não podia ser descrito por números foi um choque para os pitagóricos, que tentaram esconder o resultado. Mas o segredo se espalhou, destruindo a ideia de um mundo regido por números. Estes deixaram o palco principal da matemática grega, que se voltou para a geometria, vista a partir daí como a base de verdades mais fundamentais, que os números não alcançam.

Alguns historiadores discordam dessa narrativa, pois como os pitagóricos se interessavam pouco por geometria, não teriam dado tanta importância aos incomensuráveis [15]. Mas é inegável o impacto que a descoberta destes teve na matemática grega. A percepção de que a geometria guardava mistérios contraintuitivos levou a uma maior preocupação com demonstrações formais, como na obra de Euclides. E ela passou a ser feita quase sem números: achar uma área não era atribuir-lhe um valor, mas construir, com régua não numerada e compasso, um quadrado de mesma área, que pudesse ser comparado com outros. Daí vem o problema da quadratura do círculo, que perseguiu os matemáticos por milênios.

Áreas de figuras semelhantes

Na geometria grega, o TP era mais comumente visto como uma relação

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2, \quad (4)$$

entre a área \mathcal{A} de um quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo, e áreas \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 de quadrados construídos sobre os catetos (Fig. 3). Nessa perspectiva, o triângulo vira um “somador” de áreas, juntando \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 num único quadrado \mathcal{A} com a área total. E (4) só se converte em (1) após aplicarmos a fórmula da área do quadrado.

Diz a lenda que Pitágoras teria descoberto (4) observando uma parede ladrilhada (Fig. 4). Uma prova bem conhecida e autoexplicativa é a da Fig. 5.

As figuras construídas sobre os lados nem precisam ser quadrados, basta serem semelhantes entre si, pois

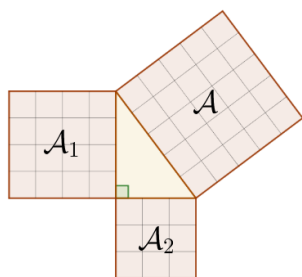


Figura 3: Teorema de Pitágoras, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$.

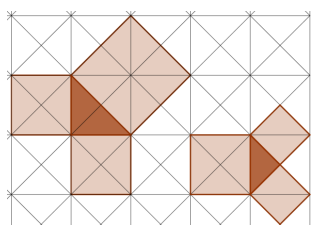


Figura 4: Teorema de Pitágoras em ladrilhos triangulares.

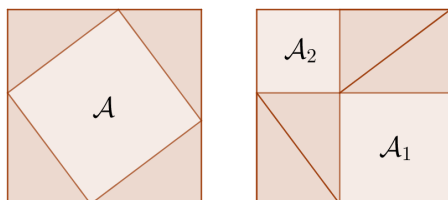


Figura 5: Duas maneiras de remover 4 triângulos retângulos iguais de um mesmo quadrado, sobrando áreas iguais.

nesse caso as razões entre suas áreas e as dos quadrados serão iguais (Fig. 6). Isso também significa que o TP pode ser provado usando qualquer trio de figuras semelhantes construídas sobre os lados.

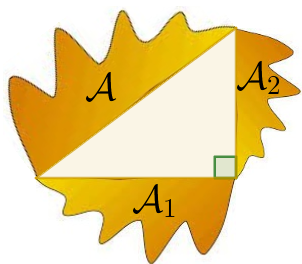


Figura 6: Áreas de figuras semelhantes, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$.

Em geral, construímos as figuras para fora do triângulo, mas as áreas não mudam se estiverem pro outro lado, certo? Isso levou Albert Einstein, aos 12 anos, a uma prova interessante (Fig. 7): a altura em relação à hipotenusa divide o triângulo em dois semelhantes a ele, e tomando os três como sendo as figuras construídas sobre os lados, é imediato que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$.

E, claro, as figuras nem precisam ser construídas nos lados do triângulo. Basta serem figuras semelhantes, com escalas de comprimento proporcionais aos comprimentos de tais lados (Fig. 8).

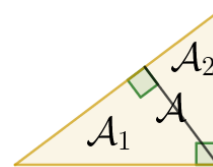


Figura 7: Demonstração de Einstein, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$.

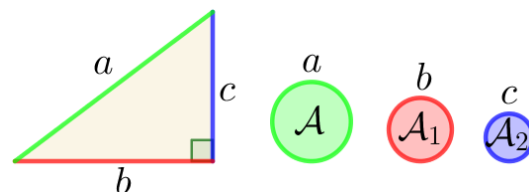


Figura 8: Discos obtidos 'enrolando' os lados do triângulo retângulo. Novamente, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$.

TP e o Axioma das Paralelas

É comum provar (1) usando propriedades de semelhança e proporcionalidade, que dependem do famoso Axioma das Paralelas (AP). Já (4) parece resultar, em provas como a da Fig. 5, de um jogo de cortar, mover e reagrupar figuras, via congruência. Isso pode dar a impressão de que o AP só entre na passagem de (4) para (1), que usa a fórmula $\mathcal{A} = l^2$ da área do quadrado de lado l , obtida dividindo-o em outros menores por meio de paralelas.

Na verdade, o AP já está presente em (4) de várias formas. Para que as áreas \mathcal{A} , \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 na Fig. 5 tenham ângulos retos é preciso que a soma dos ângulos dos triângulos seja 180° , o que requer o AP. E a própria existência de quadrados depende dele, bem como o conceito de figuras semelhantes: sem ele não há como dilatar uma figura de forma homogênea, preservando seus ângulos, dilatando seus comprimentos por um fator k , suas áreas por k^2 , etc.

Pode-se provar que o TP, em ambas as formas, é equivalente ao AP. E a melhor forma de entender como ele é um resultado puramente euclidiano é ver o que ocorre em outras geometrias.

Geometrias não-euclidianas

As geometrias não-euclidianas [16] (esférica/elíptica e hiperbólica) resultam da negação do AP (e alguns ajustes em outros axiomas). Vamos começar pela esférica, que é mais intuitiva.

O que faz o papel de 'retas' na superfície de uma esfera são os círculos máximos (com mesmo centro e raio da esfera), pois o menor caminho entre 2 pontos ao longo da superfície é um arco deles. Como tais círculos sempre se interceptam, nessa geometria não

há paralelas. Além disso, polígonos ficam mais “arredondados” à medida que seu tamanho aumenta, e a soma de seus ângulos depende da área. Para triângulos, a soma é maior que 180° . Não existem quadrados (quadriláteros com lados iguais e ângulos retos), e sim quadriláteros equiláteros e com ângulos iguais mas maiores que 90° (Fig. 9). Sua área não é $\mathcal{A} = l^2$, pois se tentarmos dividi-los em outros menores, estes não se encaixarão direito.

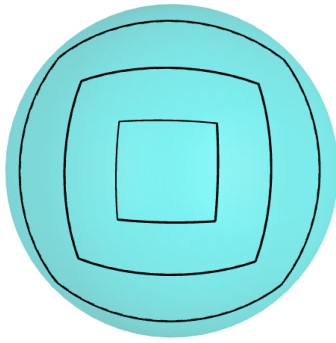


Figura 9: Quadriláteros esféricos equiláteros e equiangulars. Não são semelhantes, pois a área afeta os ângulos.

Vamos ver como (1) falha na superfície da Terra. Na Fig. 10, temos o triângulo formado por Quito-Ecuador, Macapá-AP e Porto Alegre-RS. Duas cidades estão quase na linha do Equador, e duas quase no mesmo meridiano, logo o ângulo em Macapá é quase reto. Por (1), a distância de Quito a Porto Alegre deveria ser de 4511km , um erro de 123km em relação à distância no mapa. Isso ocorre porque o triângulo é levemente arredondado, devido à curvatura da Terra, logo o TP não se aplica perfeitamente a ele.



Figura 10: Triângulo retângulo na superfície da Terra. Fonte: Google Maps.

O erro aumenta para triângulos maiores. Na Fig. 11, temos um triângulo esférico delimitando um octante da superfície da Terra. Ele é equilátero, seus 3 ângulos são retos, e, claro, não há a menor chance do TP funcionar com ele!



Figura 11: Triângulo esférico equilátero trirretângulo. Fonte: Google Maps.

Alguém poderia dizer que esses não são realmente triângulos, e as distâncias deveriam ser medidas em linha reta, atravessando a Terra. Mas para o planejamento de rotas, por exemplo, o que importam são distâncias ao longo da superfície. Para isso a geometria esférica tem seu próprio TP, relacionando os lados de um triângulo retângulo esférico.

Teorema (Pitágoras Esférico). *Sejam a, b, c os comprimentos da hipotenusa e catetos de um triângulo retângulo esférico, numa esfera de raio R . Então*

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cdot \cos \frac{c}{R}. \quad (5)$$

Demonstração. Com a origem O no centro da esfera, e os eixos como na Fig. 12, de modo que $A = (R, 0, 0)$, $B = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$ e $C = (R \cos \beta, 0, R \sin \beta)$, temos $\alpha = \frac{a}{R}$, $\beta = \frac{b}{R}$, $\theta = \frac{c}{R}$, e o produto escalar entre \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OC} leva a $\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \theta$ (exercício). \square

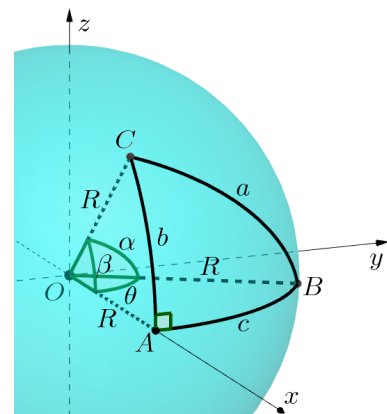


Figura 12: Teor. de Pitágoras esférico, $\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cdot \cos \frac{c}{R}$.

Como o raio da Terra é $R \cong 6371\text{km}$, por (5) a distância de Porto Alegre a Quito seria de 4414km , bem mais próxima da real (mas não exata pois o ângulo em Macapá não é precisamente reto e a Terra não é uma esfera perfeita).

Na Fig. 11, ocorre algo interessante: os 3 lados são hipotenusas! Mas (5) funciona, com os três cossenos

dando 0. Outro fenômeno inusitado é que se $b = \frac{\pi}{2}R$ então $a = \frac{\pi}{2}R$ ou $\frac{3\pi}{2}R$, independente do valor de c . Tente entender o significado geométrico disso.

Como o TP sempre serviu para medir pequenas distâncias na superfície da Terra, espera-se que (1) e (5) deem resultados parecidos para triângulos não muito grandes. De fato, como $\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2}$ para x pequeno, temos $a^2 \cong b^2 + c^2$ se $a, b, c \ll R$ (exercício).

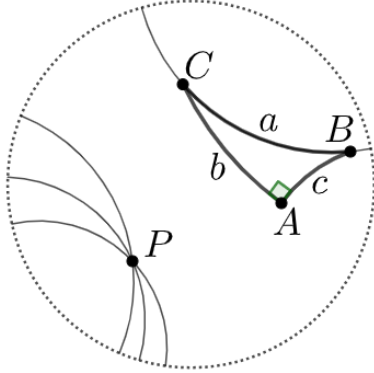


Figura 13: Modelo do disco de Poincaré da geometria hiperbólica. As “retas” são arcos de círculo perpendiculares à borda, ou diâmetros do disco. Por P passam infinitas paralelas à reta BC . O triângulo ABC é retângulo, com $a \cong 3.34$ e $b = c = 2$ (a escala de comprimento aumenta perto da borda). A curvatura é $K = -1$.

A geometria hiperbólica é, de certa forma, antípoda da esférica. Nela, por um ponto passam infinitas paralelas a uma reta (Fig. 13). Triângulos ficam “magros”, com sua área determinando a soma dos ângulos, que é menor que 180° . Sua trigonometria usa funções hiperbólicas, e temos a seguinte versão do TP:

Teorema (Pitágoras Hiperbólico). *Sejam a, b, c os comprimentos da hipotenusa e catetos de um triângulo retângulo hiperbólico, num plano hiperbólico de curvatura $K = -\frac{1}{R^2}$. Então*

$$\cosh \frac{a}{R} = \cosh \frac{b}{R} \cdot \cosh \frac{c}{R}. \quad (6)$$

A prova pode ser vista em [16]. Teste com os valores da Fig. 13 (R não é o raio do disco, e sim um pseudo-raio definido a partir de K). Como $\cosh x \cong 1 + \frac{x^2}{2}$ para x pequeno, de novo $a^2 \cong b^2 + c^2$ se $a, b, c \ll R$.

Teorema de Pitágoras Unificado

Essas aproximações para pequenos triângulos não revelam a conexão mais ampla que há entre os TP's das três geometrias, e que surge ao generalizarmos a forma (4). Mas como, se nas não-euclidianas não há quadrados nem figuras semelhantes em geral?

Semelhança euclidiana requer figuras com comprimentos proporcionais e ângulos iguais, o que é difícil nas geometrias não-euclidianas, nas quais a área afeta os ângulos. Mas círculos não têm ângulos, logo esse problema não os atinge, e intuitivamente eles parecem semelhantes. É uma semelhança mais fraca, pois seus comprimentos não são proporcionais ao raio, nem suas áreas ao quadrado dele (imagine o que ocorre quando o raio do círculo ultrapassa $\frac{1}{4}$ de uma volta na esfera). Surpreendentemente, já basta.

As três geometrias são ligadas pelo conceito de curvatura: na esférica, $K = \frac{1}{R^2} > 0$, na euclidiana $K = 0$, e na hiperbólica $K = -\frac{1}{R^2} < 0$ (a euclidiana pode ser vista como um limite das outras quando $R \rightarrow \infty$). E uma forma do TP válida em todas é:

Teorema (Pitágoras Unificado [8]). *As áreas \mathcal{A} , \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 de discos com raios dados pela hipotenusa e catetos de um triângulo retângulo (Fig. 14) satisfazem*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - \frac{K}{2\pi} \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2. \quad (7)$$

Demonstração. Na geometria esférica, a área do disco de raio r é $\mathcal{A}(r) = 2\pi R^2(1 - \cos \frac{r}{R})$, e na hiperbólica é $\mathcal{A}(r) = 2\pi R^2(\cosh \frac{r}{R} - 1)$. Agora é só usar (5) e (6). \square

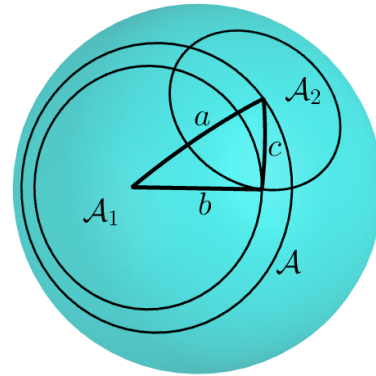


Figura 14: Discos cujos raios são os lados de um triângulo. Se este for retângulo, temos (7). Se for próprio, temos (4).

Triângulos próprios

O termo extra em (7) lembra um pouco o de (3), e sugere que triângulos retângulos deixam de ser os que dão a fórmula mais simples. Na verdade, nas geometrias não-euclidianas eles perdem várias propriedades que os tornam especiais, como a hipotenusa ser o diâmetro do círculo circunscrito. Mas estas são herdadas por outro tipo de triângulo [13].

Um triângulo é *próprio* se um ângulo for a soma dos demais (Fig. 15). O lado oposto a ele também é chamado de *hipotenusa*, e os outros de *catetos*. Na

geometria euclidiana, a soma dos ângulos é 180° , logo triângulos retângulos e próprios são a mesma coisa.

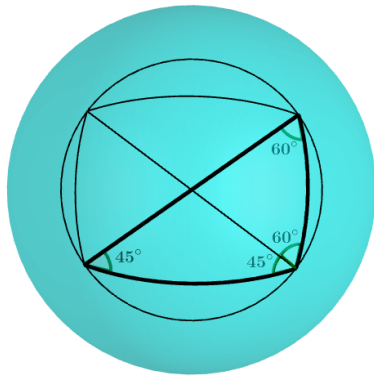


Figura 15: Triângulo próprio, hipotenusa é diâmetro do círculo circunscrito, e diagonal do quadrilátero equiangular.

Para discos construídos com os lados desse triângulo, (4) vale nas três geometrias:

Teorema (Pitágoras Próprio [13]). *As áreas \mathcal{A} , \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 de discos com raios dados pela hipotenusa e catetos de um triângulo próprio satisfazem $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$.*

A prova geral é dada em [13]. Em [14], são citados artigos anteriores que tratam do caso hiperbólico.

Esse resultado tem uma interpretação interessante: girando o triângulo próprio da Fig. 14 de modo que o segmento a “varra” a área \mathcal{A} , e b varra \mathcal{A}_1 , c irá varrer a área $\mathcal{A} - \mathcal{A}_1$ do anel entre elas, que é igual à área \mathcal{A}_2 que c varreria se girasse em torno de sua extremidade.

O caso euclidiano é fácil de entender [8]. Na Fig. 16, ao girar o triângulo retângulo por um ângulo $d\theta$, o segmento c varre uma área $d\mathcal{A}$. Nesse movimento, ele gira o mesmo $d\theta$, enquanto desliza ao longo do seu comprimento. Desconsiderando tal deslizamento, que varre uma área nula, $d\mathcal{A}$ será igual à área pintada do disco à direita, obtida só girando c . Integrando, a área do anel será igual à desse disco.

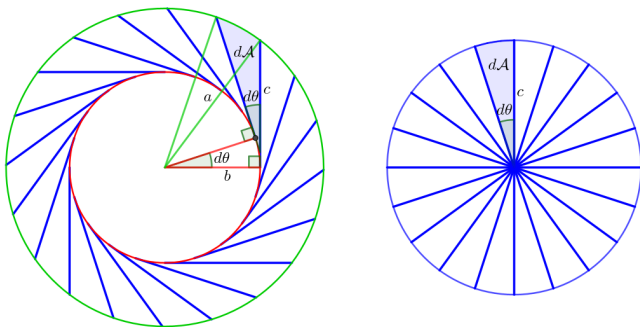


Figura 16: As regiões pintadas têm a mesma área $d\mathcal{A}$, logo a área total do anel é igual à do disco à direita.

Na Fig. 14, se o triângulo for retângulo e girar $d\theta$, o segmento c irá girar o mesmo $d\theta$ no espaço, mas

sua rotação na superfície da esfera, que varre áreas, será menor (imagine carregar uma vara pela linha do Equador: ela está girando no espaço, mas vista da superfície está sempre apontada para a frente). Isso faz a área $\mathcal{A} - \mathcal{A}_1$ do anel ser menor que \mathcal{A}_2 , o que explica a subtração em (7). Na geometria hiperbólica, a curvatura $K < 0$ faz c girar mais que $d\theta$, de modo que $\mathcal{A} - \mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_2$. Nessas duas geometrias, a mudança para triângulo próprio ajusta o ângulo entre c e a direção de rotação para criar um deslizamento transversal ao comprimento, que varre a área necessária para compensar o efeito da curvatura e obter $\mathcal{A} - \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.

Substituindo as fórmulas das áreas, o teorema dá relações entre os lados do triângulo próprio:

Corolário. *A hipotenusa a e os catetos b e c de um triângulo próprio esférico ou hiperbólico estão relacionados, respectivamente, por*

$$1 + \cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} + \cos \frac{c}{R}, \text{ ou}$$

$$1 + \cosh \frac{a}{R} = \cosh \frac{b}{R} + \cosh \frac{c}{R}.$$

Teste na Fig. 15, construída no GeoGebra com raio da esfera $R = 1$, e o triângulo tendo $a = \frac{\pi}{2}$, $b \cong 1.22$ e $c \cong 0.86$. Quando $a, b, c \ll R$, novamente $a^2 \cong b^2 + c^2$.

Tetraedros e simplexos

Vamos voltar para a geometria euclidiana, e generalizar o TP para dimensões maiores.

Um tetraedro é *trirretângulo* se as três arestas em um vértice são perpendiculares (Fig. 17). A *face hipotenusal* é a oposta a esse vértice.

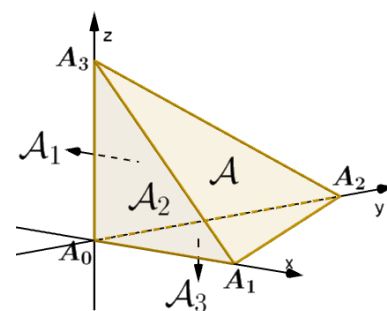


Figura 17: Tetraedro trirretângulo, $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2$.

Teorema (De Gua (1783)). *Em um tetraedro trirretângulo, a área \mathcal{A} da face hipotenusal está relacionada às áreas \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 , \mathcal{A}_3 das outras faces por*

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2. \quad (8)$$

Demonstração. Na Fig. 17, $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\|$ e analogamente para as outras áreas. Além disso,

$\overrightarrow{A_1 A_2} = \overrightarrow{A_0 A_2} - \overrightarrow{A_0 A_1}$ e $\overrightarrow{A_1 A_3} = \overrightarrow{A_0 A_3} - \overrightarrow{A_0 A_1}$. O resto fica como exercício (observando que $\overrightarrow{A_0 A_1} \times \overrightarrow{A_0 A_2}$, $\overrightarrow{A_0 A_1} \times \overrightarrow{A_0 A_3}$ e $\overrightarrow{A_0 A_2} \times \overrightarrow{A_0 A_3}$ são perpendiculares). \square

A versão em \mathbb{R}^n desse tetraedro é um n -simplexo retangular. Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais (x_1, \dots, x_n) , ele é um poliedro n -dimensional com um vértice A_0 na origem, e um A_k em cada eixo, na coordenada $x_k = a_k > 0$. Sua face F_k é o poliedro $(n-1)$ -dimensional formado por todos os vértices exceto A_k . A face hipotenusal é F_0 .

O seguinte resultado é frequentemente redescoberto, por diferentes meios ([2, 5, 7, 10], entre outros). Um m -volume é um volume m -dimensional (comprimentos são 1-volumes, áreas são 2-volumes, etc.).

Teorema. Em um n -simplexo retangular S , seja \mathcal{V}_k o $(n-1)$ -volume da face F_k . Então

$$\mathcal{V}_0^2 = \sum_{k=1}^n \mathcal{V}_k^2. \quad (9)$$

Daremos uma prova via Cálculo Vetorial, e outra usando Cálculo Integral e Geometria Analítica.

Demonstração ([7]). Seja \vec{v} um campo vetorial constante em \mathbb{R}^n , dV o diferencial de n -volume, $d\mathcal{V}$ o de $(n-1)$ -volume, e \hat{n}_k o vetor normal unitário para fora de F_k . Como $\text{div } \vec{v} = 0$, o Teorema da Divergência dá

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S \text{div } \vec{v} dV = \sum_{k=0}^n \int_{F_k} \vec{v} \cdot \hat{n}_k d\mathcal{V} = \sum_{k=0}^n \vec{v} \cdot \hat{n}_k \int_{F_k} d\mathcal{V} \\ &= \sum_{k=0}^n \vec{v} \cdot \hat{n}_k \mathcal{V}_k = \vec{v} \cdot \left(\sum_{k=0}^n \mathcal{V}_k \hat{n}_k \right). \end{aligned}$$

Como \vec{v} é arbitrário, isso implica $\sum_{k=0}^n \mathcal{V}_k \hat{n}_k = 0$, logo $\mathcal{V}_0 \hat{n}_0 = -\mathcal{V}_1 \hat{n}_1 - \dots - \mathcal{V}_n \hat{n}_n$. Como $\hat{n}_1, \dots, \hat{n}_n$ são ortogonais, (2) nos dá o resultado. \square

Demonstração ([5]). Para $0 \leq k \leq n$, seja h_k a altura do vértice A_k em relação à face oposta F_k . A seção transversal a essa altura, a uma distância x de A_k , é semelhante a F_k , e tem $(n-1)$ -volume $\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}_k \cdot \left(\frac{x}{h_k}\right)^{n-1}$. Assim, o n -volume de S é $V = \int_0^{h_k} \mathcal{V}(x) dx = \frac{\mathcal{V}_k h_k}{n}$, para todo k . Para $k \neq 0$ temos $h_k = a_k$ (o comprimento da aresta $A_0 A_k$), logo $\mathcal{V}_k a_k = nV = \mathcal{V}_0 h_0$, ou seja, $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}_0 \cdot \frac{h_0}{a_k}$.

O hiperplano da face F_0 é descrito pela equação $\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1$. Como $\vec{v} = (\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n})$ é ortogonal a ele, e $\lambda \vec{v}$ satisfaz a equação quando $\lambda = \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)^{-1}$, temos $h_0 = \|\lambda \vec{v}\| = \left(\frac{1}{a_1^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Assim, obtemos $\sum_{k=1}^n \mathcal{V}_k^2 = \mathcal{V}_0^2 h_0^2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} = \mathcal{V}_0^2$. \square

Outros métodos serão vistos a seguir, quando olharmos para o TP e estes teoremas de outra forma.

Projeções de volumes

Esses resultados podem ser reinterpretados em termos de projeções ortogonais de m -volumes. Sempre que falarmos em projeções, serão ortogonais.

Separando os lados do triângulo retângulo, podemos ver o TP como uma relação entre o comprimento de um segmento reto e suas projeções em um sistema de eixos perpendiculares, como na Fig. 18.

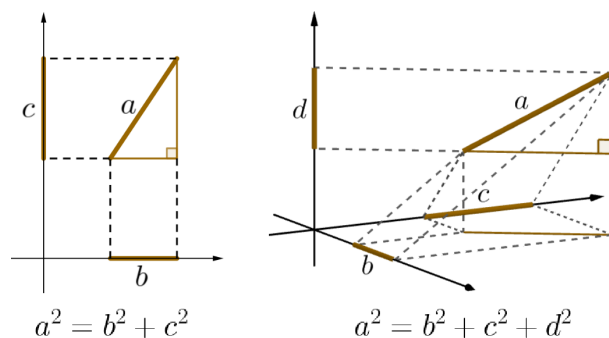


Figura 18: Projeções ortogonais de segmentos sobre eixos.

E, separando as faces do tetraedro, (8) vira uma relação entre a área de um triângulo e suas projeções em planos coordenados perpendiculares. Como projeções são transformações lineares, a razão $\frac{\mathcal{A}_k}{\mathcal{A}}$ não muda se trocarmos \mathcal{A} pela área de qualquer figura no mesmo plano, e \mathcal{A}_k pela de sua projeção no k -ésimo plano coordenado. Assim, (8) vale para qualquer área plana e suas projeções (Fig. 19). Esse resultado já era conhecido no Séc. XVIII.

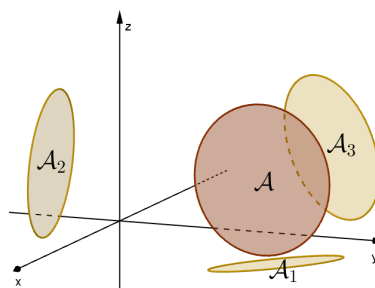


Figura 19: Projeções de uma área plana, $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2$.

Da mesma forma, (9) vale para qualquer $(n-1)$ -volume \mathcal{V}_0 num hiperplano de \mathbb{R}^n , e suas projeções \mathcal{V}_k em hiperplanos coordenados perpendiculares.

Vamos estender para m -volumes. Sejam (e_1, \dots, e_n) uma base ortonormal, e \mathcal{I}_m o conjunto dos *multi-índices* $I = (i_1, \dots, i_m)$ com $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$. Cada $C_I = \text{span}\{e_i : i \in I\}$, com $I \in \mathcal{I}_m$, é um *subespaço coordenado*. Chamaremos de *figura* ou *região* os conjuntos mensuráveis, i.e., com um volume bem definido da dimensão do subespaço considerado.

Teorema ([3]). Se \mathcal{V} é o m -volume de uma região R num subespaço m -dimensional de \mathbb{R}^n , e \mathcal{V}_I é o de sua projeção em C_I , então

$$\mathcal{V}^2 = \sum_{I \in \mathcal{J}_m} \mathcal{V}_I^2. \quad (10)$$

Pela linearidade das projeções, basta provar para um paraleloto (paralelogramo m -dimensional) R gerado por vetores v_1, \dots, v_m . Vamos ver primeiro uma prova via determinantes.

Demonstração ([3]). Pondo v_1, \dots, v_m como colunas de uma matriz $M_{n \times m}$, o Teorema de Cauchy-Binet dá

$$\det(M^T M) = \sum_{I \in \mathcal{J}_m} \det(M_I)^2, \quad (11)$$

onde M_I é a submatriz $m \times m$ de M formada pelas linhas com índices em I , de modo que suas colunas são as projeções dos v_k 's em C_I . O resultado vem da interpretação geométrica dos determinantes: $\det(M^T M)$ é o determinante de Gram que dá o quadrado do m -volume de R , e $|\det(M_I)|$ dá o m -volume da projeção de R em C_I . \square

A prova mais fácil usa Álgebra Exterior [9], uma extensão da Álgebra Linear com *multivetores*, vetores representando figuras multi-dimensionais (Fig. 20).

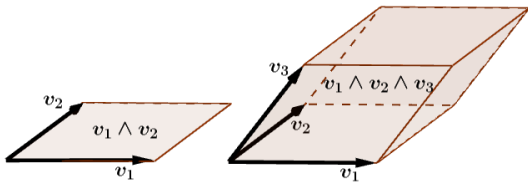


Figura 20: Multivetores: $v_1 \wedge v_2$ representa um paralelogramo de área $\|v_1 \wedge v_2\|$, e $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$ representa um paralelepípedo de volume $\|v_1 \wedge v_2 \wedge v_3\|$.

Demonstração. O multivetor $M = v_1 \wedge \dots \wedge v_m$ representa R , e a norma $\|M\|$ é seu m -volume \mathcal{V} . Multivetores são também vetores num certo espaço vetorial, que tem base ortonormal formada pelos $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$ com $I = (i_1, \dots, i_m) \in \mathcal{J}_m$. Cada componente de M nessa base representa a projeção de R em C_I , de modo que (10) vem de (2). \square

Exemplo. Se \mathcal{A} é a área de uma figura plana em $\mathbb{R}^4 = \{(x_1, \dots, x_4)\}$, e \mathcal{A}_{ij} é sua projeção no plano $x_i x_j$,

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}_{12}^2 + \mathcal{A}_{13}^2 + \mathcal{A}_{14}^2 + \mathcal{A}_{23}^2 + \mathcal{A}_{24}^2 + \mathcal{A}_{34}^2. \quad (12)$$

Por exemplo, $v = (a, b, c, d)$ e $w = (-b, a, -d, c)$ têm mesma norma e são perpendiculares, formando um quadrado de área $\mathcal{A} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Suas projeções $(a, b, 0, 0)$ e $(-b, a, 0, 0)$ no plano $x_1 x_2$ formam um

quadrado de área $\mathcal{A}_{12} = a^2 + b^2$. Da mesma forma, $\mathcal{A}_{34} = c^2 + d^2$. As projeções $(a, 0, c, 0)$ e $(-b, 0, -d, 0)$ no plano $x_1 x_3$ formam um paralelogramo com $\mathcal{A}_{13} = |bc - ad|$ (ignore a 4ª coordenada nula, e use o produto vetorial). Analogamente, obtemos $\mathcal{A}_{24} = \mathcal{A}_{13}$ e $\mathcal{A}_{14} = \mathcal{A}_{23} = |ac + bd|$. Uma conta chata mostra que essas áreas satisfazem (12).

Exemplo. Se \mathcal{V} é o volume de uma região em um subespaço tridimensional de \mathbb{R}^4 , e \mathcal{V}_{ijk} é sua projeção no subespaço $x_i x_j x_k$,

$$\mathcal{V}^2 = \mathcal{V}_{123}^2 + \mathcal{V}_{124}^2 + \mathcal{V}_{134}^2 + \mathcal{V}_{234}^2.$$

Com um pouco de combinatória, generalizamos para projeções em subespaços de outra dimensão.

Corolário ([4, 6]). Se \mathcal{V} é o p -volume de uma região R em um subespaço de dimensão $p \leq m$ de \mathbb{R}^n , e \mathcal{V}_I é sua projeção em C_I , com $I \in \mathcal{J}_m$, então

$$\mathcal{V}^2 = \binom{n-p}{n-m}^{-1} \cdot \sum_{I \in \mathcal{J}_m} \mathcal{V}_I^2.$$

Demonstração. Cada \mathcal{V}_I pode ser projetado nos subespaços coordenados de dimensão p contidos em C_I , e cada um desses está em $\binom{n-p}{n-m}$ dos C_I 's. O resultado então segue de (10). \square

Exemplo. Sejam \mathcal{L} o comprimento de um segmento em \mathbb{R}^3 , \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_3 suas projeções nos planos coordenados, e b , c e d suas projeções nos eixos (Fig. 21). Então $\mathcal{L}_1^2 = b^2 + c^2$, $\mathcal{L}_2^2 = b^2 + d^2$, $\mathcal{L}_3^2 = c^2 + d^2$ e $\mathcal{L}^2 = b^2 + c^2 + d^2 = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{L}_3^2)$.

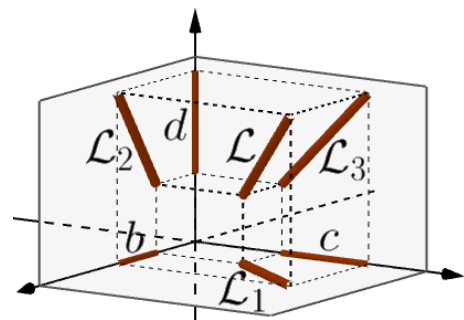


Figura 21: Projeções de um segmento nos planos coordenados, $\mathcal{L}^2 = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{L}_3^2)$.

Versões complexas

Em espaços complexos, a generalização (2) do TP pode ser reinterpretada como uma soma de áreas, e estendida para volumes de maior dimensão, com fórmulas mais simples que as do caso real.

Vamos rever a geometria real desses espaços. Pode-se identificar $z = x + iy \in \mathbb{C}$ com o vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e seu módulo é a norma do vetor, ou seja, $|z|^2 = x^2 + y^2$. O que diferencia \mathbb{C} de \mathbb{R}^2 é a multiplicação por i , que pode ser vista apenas como uma rotação de 90° , pois $iz = -y + ix$ corresponde ao vetor $(-y, x)$, de mesma norma e ortogonal a (x, y) . Assim, $i^2 = -1$ significa apenas que $i^2(x, y) = i(-y, x) = (-x, -y)$.

Da mesma forma, identifica-se $v = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, onde $z_k = x_k + iy_k$, com $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, e $\|v\|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_n^2 + y_n^2$. De novo, $iv = (iz_1, \dots, iz_n)$ corresponde a $(-y_1, x_1, \dots, -y_n, x_n)$, que é v girado 90° numa certa direção. Assim, \mathbb{C}^n é só \mathbb{R}^{2n} com um operador i de rotação de 90° .

Se $v \in \mathbb{C}^n$ e $z = x + iy \in \mathbb{C}$ então $zv = xv + y(iv)$ é combinação linear (com coeficientes reais x e y) de v e iv . Assim, a *linha¹ complexa* $\mathbb{C}v = \{zv : z \in \mathbb{C}\}$ é o plano real $\text{span}\{v, iv\}$, no qual esses vetores formam um quadrado de área $\mathcal{A} = \|v\|^2$ (Fig. 22).

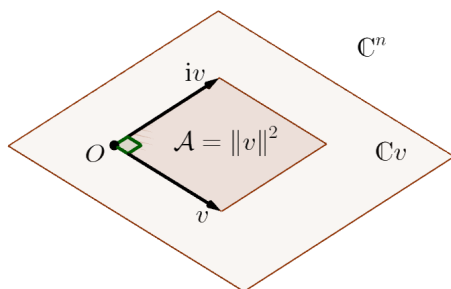


Figura 22: Quadrado numa linha complexa.

Seja (e_1, \dots, e_n) uma base ortogonal de \mathbb{C}^n .

Teorema (Pitágoras para Linhas Complexas [12]). Se \mathcal{A} é a área de uma região em uma linha complexa $\mathbb{C}v$, e \mathcal{A}_k é sua projeção em $\mathbb{C}e_k$, então

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \dots + \mathcal{A}_n. \quad (13)$$

Demonstração. Basta provar para o quadrado da Fig. 22. Como a projeção $P : \mathbb{C}v \rightarrow \mathbb{C}e_k$ é \mathbb{C} -linear, se $P(v) = v_k$ então $P(iv) = iv_k$. Logo, a projeção de \mathcal{A} é outro quadrado, de área $\mathcal{A}_k = \|v_k\|^2$. O resultado segue de (2). \square

Ao contrário do caso real, (13) não é quadrática, e tem menos termos, já que a dimensão complexa é metade da real correspondente. Na Fig. 23, \mathcal{A} é a soma de 2 áreas, das projeções nas linhas complexas de uma base ortogonal (e_1, e_2) de \mathbb{C}^2 . Identificando $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$, teríamos (12), com 6 termos quadráticos.

Exemplo. Em \mathbb{C}^2 , os vetores $v = (a + ib, c + id)$ e $iv = (-b + ia, -d + ic)$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, têm norma

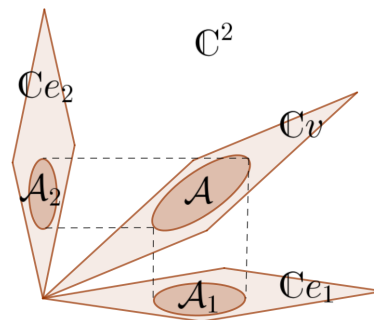


Figura 23: Projeção em linhas complexas, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$.

$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$, e formam um quadrado de área $\mathcal{A} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Sejam $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. As projeções de v e iv em $\mathbb{C}e_1$ são $(a + ib, 0)$ e $(-b + ia, 0)$, e formam um quadrado de área $\mathcal{A}_1 = a^2 + b^2$. E em $\mathbb{C}e_2$ formam um quadrado de área $\mathcal{A}_2 = c^2 + d^2$. Como previsto, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$.

Identificando $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$, este se torna o exemplo dado após (12), com $w = iv$. Note como a abordagem real foi mais complexa². Naquele exemplo, aos planos x_1x_2 e x_3x_4 correspondem a $\mathbb{C}e_1$ e $\mathbb{C}e_2$, por isso as projeções deram quadrados. O plano x_1x_3 não corresponde a uma linha complexa, pois $i(1, 0, 0, 0) = (0, 1, 0, 0)$ sai dele, e o mesmo ocorre com os outros nos quais as projeções deram paralelogramos.

Vamos estender para um subespaço complexo V de dimensão m , que é um subespaço real de dimensão $2m$ invariante pela rotação i , isto é, $v \in V \Rightarrow iv \in V$. Como antes, seja $C_I = \text{span}\{e_i : i \in I\}$ para $I \in \mathcal{I}_m$ (mas agora o span é com coeficientes complexos).

Teorema (Pitágoras para Subespaços Complexos [12]). Se \mathcal{V} é o $2m$ -volume de uma região R num subespaço complexo m -dimensional em \mathbb{C}^n , e \mathcal{V}_I é sua projeção em C_I , então

$$\mathcal{V} = \sum_{I \in \mathcal{I}_m} \mathcal{V}_I. \quad (14)$$

Demonstração. Como a de (10), mas (11) se torna $\det(M^\dagger M) = \sum_{I \in \mathcal{I}_m} |\det(M_I)|^2$, onde M^\dagger é a transposta conjugada, e a interpretação de determinantes complexos muda: $\det(M^\dagger M)$ é o $2m$ -volume do paralelepípedo formado por $v_1, iv_1, \dots, v_m, iv_m$, e sua projeção em C_I é $|\det(M_I)|^2$.

Também pode-se usar (2) e Álgebra Exterior complexa, na qual $\|v_1 \wedge \dots \wedge v_m\|^2$ é o $2m$ -volume do paralelepípedo formado por $v_1, iv_1, \dots, v_m, iv_m$. \square

¹Por ter dimensão complexa 1.

²Juro que tentei resistir.

Conclusão

Há mais generalizações que não discutimos, como versões da lei dos cossenos para áreas ou volumes [2, 9], ou em geometrias não-euclidianas [8]. Outras esperam para serem descobertas: por ex., nos parece que (10) e (14) virem $\sqrt{\mathcal{V}} = \sum_{I \in \mathcal{J}_m} \sqrt{\mathcal{V}_I}$ em espaços quaterniônicos³; e há menções (sem prova) de uma versão do Teorema de De Gua para geometrias não-euclidianas de dimensão 3, mas não para dimensões maiores. Também seria interessante provar o Teorema de Pitágoras Próprio a partir dos axiomas da Geometria Absoluta (a grosso modo, a parte comum das geometrias euclidiana, elíptica e hiperbólica).

É impressionante que, milênios após suas primeiras aparições, o TP ainda guarde surpresas e mistérios. Isso mostra que esse velho teorema, com suas mil faces, continua a evoluir e dar frutos. Vida longa ao Teorema de Pitágoras!

Bibliografia

- [1] A. Bogomolny. Pythagorean Theorem. <https://www.cut-the-knot.org/pythagoras>. Accessed: 2023-10-04.
- [2] E. C. Cho. The generalized cross product and the volume of a simplex. *Appl. Math. Lett.*, 4(6):51–53, 1991.
- [3] D. R. Conant and W. A. Beyer. Generalized Pythagorean theorem. *Amer. Math. Monthly*, 81(3):262–265, 1974.
- [4] K. Czyzewska. Generalization of the Pythagorean theorem. *Demonstratio Math.*, 24(12), 1991.
- [5] P. S. Donchian and H. S. M. Coxeter. An n-dimensional extension of Pythagoras' theorem. *Math. Gaz.*, 19(234):206–206, 1935.
- [6] D. Drucker. A comprehensive Pythagorean theorem for all dimensions. *Amer. Math. Monthly*, 122(2):164–168, 2015.
- [7] L. Eifler and N. H. Rhee. The n-dimensional Pythagorean theorem via the divergence theorem. *Amer. Math. Monthly*, 115(5):456–457, 2008.
- [8] R. L. Foote. A unified Pythagorean theorem in Euclidean, spherical, and hyperbolic geometries. *Math. Mag.*, 90(1):59–69, feb 2017.
- [9] M. Khosravi and M. D. Taylor. The wedge product and analytic geometry. *Amer. Math. Monthly*, 115(7):623–644, 2008.
- [10] S. Y. Lin and Y. F. Lin. The n-dimensional Pythagorean theorem. *Linear Multilinear Algebra*, 26(1-2):9–13, 1990.
- [11] E. S. Loomis. *The Pythagorean Proposition*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1968.
- [12] A. L. G. Mandolesi. Projection factors and generalized real and complex Pythagorean theorems. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 30(43), 2020.
- [13] P. Maraner. A spherical Pythagorean theorem. *Math. Intelligencer*, 32(3):46–50, 09 2010.
- [14] V. Pambuccian. Maria Teresa Calapsos hyperbolic Pythagorean theorem. *Math. Intelligencer*, 32(4):2–2, 2010.
- [15] Tatiana Roque. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Editora Zahar, 2012.
- [16] H. E. Wolfe. *Introduction to non-Euclidean geometry*. Courier Corporation, 2012.



André Mandolesi é bacharel em Física e mestre em Matemática pela Unicamp, e doutor em Matemática pela University of Texas at Austin. É professor da UFBA desde 2009. Nunca se curou da Física, e caiu nas frestas entre as áreas da Matemática, por isso até hoje trava quando perguntam com o que trabalha. Neste ano parece ser Álgebras de Grassmann e Clifford, mas já foi Geometria e Mecânica Quântica. Quando não está quebrando a cabeça para aprender algo novo, relaxa praticando Tai Chi Chuan, maratonando séries ou jogando videogame.

³Quatérnios generalizam os complexos, com 4 números reais.