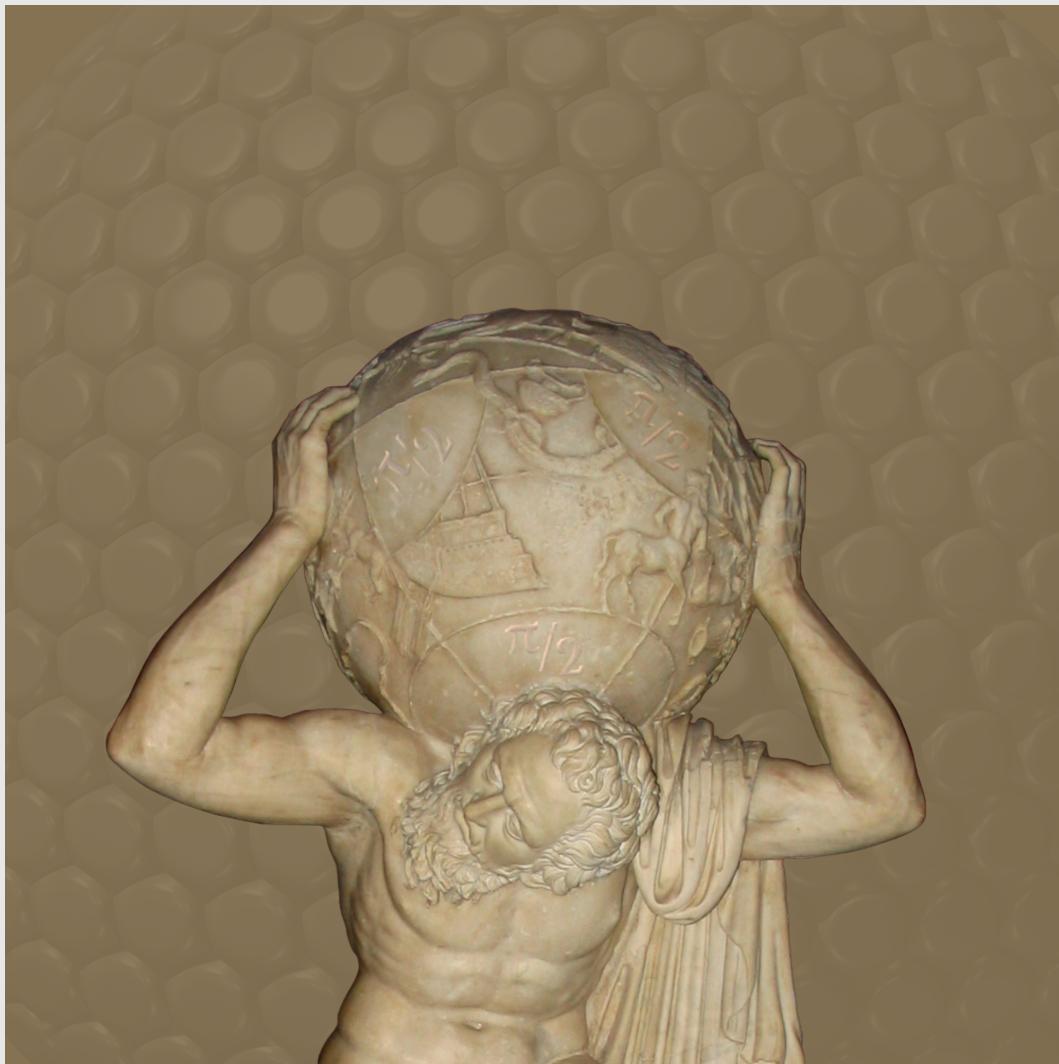


*Revista de Matemática*



# Hipátia

Volume 1, Número 2



Atlas Farnese



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA**  
**Reitor:** Paulo César Miguez de Oliveira

**Pró-Reitoria de Extensão Universitária**  
**Pró-Reitor:** Guilherme Bertissolo

**Instituto de Matemática e Estatística**  
**Diretor:** Kleyber Mota da Cunha

**Departamento de Matemática**  
**Chefe:** Darllan Conceição Pinto

# *Revista de Matemática* **Hipátia**

## **Conselho Editorial**

André Mandolesi  
Cristina Lizana  
Elaís Cidely S. Malheiro  
Henrique da Costa  
Márcia Barbosa  
Nicola Sambonet  
Roberto Sant'Anna  
Vinícius Mello

## **Equipe Técnica**

Helena Beatriz Jesus Gomes  
Eldon Barros dos Reis Júnior  
Taíse Lara de Souza Jorge

**Editor Responsável:** Samuel Feitosa

**Endereço para Correspondência**  
Instituto de Matemática e Estatística

Av. Milton Santos, s/n, Campus Universitário de Ondina CEP: 40.170-110  
[hipatia@ufba.br](mailto:hipatia@ufba.br)

**ISSN 3085-6256**



# SINOPSE

EPÍSTOLA	
Sucesso!.....	1
HISTÓRIA	
Galois: genialidade e paixão .....	3
EFEMÉRIDE	
80 anos do Curso de Licenciatura .....	15
TEOREMA	
As Mil Faces de Pitágoras .....	27
BIOGRAFIA	
<i>de Arlete Cerqueira Lima</i> .....	37
TÉCNICA	
Acaso e Certezas: A Versatilidade do Método Probabilístico .....	46
SIMPÓSIO	
Eventos do DMAT .....	54
PROBLEMA	
A Basileia e outros problemas.....	62



# EPÍSTOLA

# Sucesso!

Foi com grande satisfação que constatamos o sucesso da primeira edição de nossa Revista de Matemática Hipátia (RMH). Vimos os quadros brancos dos corredores do prédio do Instituto de Matemática e Estatística repletos de contas envolvendo problemas ou temas apresentados no primeiro número. Também nos causou alegria ver como os alunos se mobilizaram para produzir cópias da revista, cópias de boa qualidade e preço acessível. Não pode haver maior sinal de sucesso para uma revista de divulgação matemática que a disseminação espontânea de seu conteúdo.

Isso nos motivou a trabalhar ainda mais para produzir esta segunda edição, com o mesmo propósito de levar a Matemática, em seus vários aspectos, para um público que parece estar sedento por informação de qualidade.

Neste número, tratamos de uma diversidade de temas. Começamos com o prof. Thierry nos contando, com grande erudição, um pouco da breve **História** de Évariste Galois. Na seção **Efeméride**, celebramos os 80 anos do curso de Licenciatura em Matemática na Bahia, num belo trabalho de pesquisa da prof.<sup>a</sup> Márcia. Um dos primeiros resultados que nos vêm à mente quando pensamos na palavra **Teorema** é justamente o Teorema de Pitágoras, objeto de uma análise original do prof. André, mostrando as várias facetas desse teorema essencial. Na sequência, homenageamos uma mulher importantíssima para nosso Instituto de Matemática e Estatística: a prof.<sup>a</sup> Arlete Cerqueira Lima. Além de redigir uma **Biografia** condensada da prof.<sup>a</sup> Arlete, a prof.<sup>a</sup> Márcia destaca, em sua segunda contribuição para esta edição, o papel primordial das mulheres na fundação de nosso Instituto. Na seção **Técnica**, os professores Carlos Augusto, Maria Joice e Daniel Vitor discorrem sobre a versatilidade do Método Probabilístico. Cristina, Elaís, Henrique e Roberto, professores membros do corpo editorial, relatam os eventos acadêmicos ocorridos no Departamento de Matemática na seção **Simpósio**, no período de julho de 2023 a fevereiro de 2024. Finalizamos com a seção **Problema**, contendo tanto as soluções dos problemas propostos na edição anterior, com destaque para as enviadas pelo leitor Yure Carneiro, quanto novos e desafiadores problemas.

---

Na imagem de capa, temos uma representação do titã Atlas, Rei da Mauritânia, encarregado por Zeus de segurar o firmamento. Ele dá seu nome ao oceano Atlântico, e também à primeira vértebra do corpo humano, aquela que segura nossa cabeça. A imagem é baseada no Atlas Farnese, cópia romana de original helenístico, do século II A.D., conservada no Museu Arqueológico Nacional de Nápoles, Itália, em uma foto de Gabriel Seah (CC BY-SA 3.0, [https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Atlas\\_\(Farnese\\_Globe\).jpg](https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Atlas_(Farnese_Globe).jpg)). Mas é claro que alguém alterou a imagem, os antigos não tinham o algarismo arábico 2! Tinha que ser obra do prof. Nicola, o mais novo integrante do corpo editorial da RMH, inspirado pelas mil faces de Pitágoras.

Salvador, 25 de abril de 2024  
O Editor



# HISTÓRIA

## Galois: genialidade e paixão

### Entre história e poesia

*Thierry Petit Lobão*

*Oisive jeunesse  
À tout asservie,  
Par délicatesse  
J'ai perdu ma vie.  
Ah! que le temps vienne  
Où les curs s'éprennent.*

- Chanson de la plus haute tour  
Arthur Rimbaud

### Introdução

Os versos acima<sup>1</sup> são de um genial poeta francês da segunda metade do século XIX: Jean-Nicolas Arthur Rimbaud; nascido em 1854, veio a falecer, com apenas 37 anos, em 1891. Rimbaud teve uma vida atribulada e mesmo trágica; viveu pouco; escreveu pouco; amou demasiado e, embora tenha composto as suas obras mais famosas ainda na adolescência, é considerado um revolucionário da poesia, sendo um dos principais nomes do simbolismo e um dos precursores do surrealismo. Porém... não é a literatura ou mesmo a história trágica de Rimbaud que abordaremos aqui, mas sim o drama de outro gênio, também francês e do século XIX, que igualmente teve uma vida atribulada; viveu pouco; escreveu pouco; amou em demasia; e da mesma forma, já na adolescência, começou a desenvolver sua obra genial, a qual, ou trossim, foi precursora de uma revolução. Essa revo-

lução, entretanto, não se deu na Literatura, mas na Matemática.

Trata-se de Évariste Galois.

Galois e Rimbaud, embora ambos nascidos na França e no mesmo século, não se conheceram; nem poderiam, pois, como veremos, Galois morre antes da metade do século, quando nasce Rimbaud. Interessante, contudo, é observar como os dois jovens franceses, vivendo num período conturbado, foram responsáveis por profundas revoluções em suas áreas de atuação. Curiosamente, a Europa do século XIX foi também palco de outros jovens rebeldes; por exemplo, foi o cenário da vida atribulada de outro gênio da literatura, nascido no Império Russo e morto em 1837 aos 37 anos (mesma idade de Rimbaud): Alexander Sergeyevich Puschkin. Ele publicou seu primeiro poema aos 15 anos e, assim como Rimbaud, foi responsável por uma revolução na poesia russa, considerado um dos principais nomes da moderna literatura russa. Profundamente influenciado pelo iluminismo francês, foi perseguido por suas ideias progressistas e, como Galois, morreu vítima de um ferimento no abdômen resultado de um duelo com pistolas envolto num caso amoroso!

Não temos a pretensão de discutir os aspectos técnicos dos resultados matemáticos de Galois, tampouco a de apresentar uma biografia completa, pois há muitas e melhores publicações sobre esses temas que, ademais, não são nada breves. Queremos apenas levantar algumas questões que cercam sua espantosa trajetória, notadamente em torno de sua morte e da forma enviesada como alguns autores a trataram, transformando-o num herói romântico ou num

<sup>1</sup>Ociosa juventude \|A tudo oprimida,\|Por delicadeza \|Eu perdi minha vida.\|Ah! Que venha o tempo\|Em que os corações se apaixonam.

- Canção da mais alta torre

---

protagonista político; criando, assim, mais literatura poética do que relatos históricos. Todavia, para tanto, teceremos breves comentários sobre seus trabalhos e fatos de sua vida. Advertimos que todas as traduções de textos em línguas estrangeiras foram feitas pelo autor, que pede desculpas pelos prováveis desacertos.



Évariste Galois, esta é a sua imagem mais conhecida, deveria ter em torno de quinze anos.

## A notável obra de Galois

São impressionantes as conquistas de Galois para o desenvolvimento da Matemática, embora o conjunto de seus trabalhos não ultrapasse uma centena de páginas (em torno de sessenta páginas para ser mais exato). Seu principal resultado, entre outros<sup>2</sup>, foi a solução de um intrincado problema que, há muito, assombrava os matemáticos: estabelecer as condições em que uma equação algébrica um polinômio em uma variável é solúvel por radicais; ou seja, em que condições as raízes (as soluções!) de um polinômio podem ser obtidas a partir de seus coeficientes com o uso das operações básicas da aritmética, isto é, da adição e da multiplicação e, possivelmente, de suas associadas, como subtração, divisão, potencia-

<sup>2</sup>Com apenas 17 anos, Galois publicou seu primeiro artigo, sobre frações contínuas periódicas, nos *Annales de Mathématiques de Gergonne*. Desenvolveu ainda estudos sobre funções elípticas, corpos finitos e solução de equações modulares, introduzindo técnicas e conceitos conhecidos como “imaginários de Galois”.

ção e radiciação. Um bom exemplo é o das soluções de um polinômio de segundo grau; que, como sabem os estudantes do ensino médio, podem ser descritas através da *fórmula de Bhaskara*<sup>3</sup>. Eram também já conhecidos métodos que, assim como no caso dos polinômios de segundo grau, permitiam a obtenção por radicais das raízes dos polinômios de terceiro e quarto graus; todavia o caso dos polinômios de quinto grau permanecia elusivo. Muitos matemáticos de destaque investigaram esse problema, entre estes, podemos citar o suíço Leonhard Euler (1707-1783) e o italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813, seu nome francês deve-se ao fato de que seu pai era francês, embora sua mãe, italiana). Com o tempo, os matemáticos começaram a suspeitar de que a solução por radicais das equações de quinto grau seria impossível em geral; de fato, Paolo Ruffini (1765-1822, nascido nos Estados Pontifícios; hoje, na Itália) tentou demonstrar essa impossibilidade por vários anos, porém não obteve sucesso. Foi apenas o matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) quem primeiramente provou a impossibilidade da solução geral das equações polinomiais de quinto grau por radicais (provavelmente entre 1821 e 1823); um feito espetacular considerando ainda a idade em que o obteve. A propósito, Abel foi outro jovem matemático, com grandes conquistas para a Matemática; também teve uma vida trágica e morreu muito cedo vitimado notadamente pela pobreza. Abel mereceria um artigo exclusivo!

Voltando a Galois, vale notar que a demonstração de Abel fechava a questão da solução por radicais, porém apenas para os polinômios de quinto grau. Galois foi muito além. Desenvolvendo ideias e técnicas inteiramente revolucionárias, obteve um critério geral para decidir sobre a possibilidade da solução por radicais para polinômios de qualquer grau! Para tanto, obteve uma correspondência, antes insuspeitada, entre as subestruturas de dois importantes conceitos que, hoje, utilizamos largamente na Matemática, quais sejam, as estruturas de grupos e de corpos. Em suma, podemos dizer que seu principal resultado afirma (em linguagem técnica moderna):

**Teorema.** *Dado um polinômio, em uma variável, de grau  $n$ , denotado por  $p$ , com coeficientes em um corpo  $K$  e raízes distintas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , existe uma correspondência bijetora entre os subcorpos da extensão  $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que contém  $K$  e os subgrupos de um dado grupo de permutações de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Ademais, as raízes de  $p$  são obtidas por radicais se, e somente se,*

<sup>3</sup>Em homenagem a Bhaskara Akaria, matemático indiano que viveu de 1114 a 1185, embora esse resultado o tenha precedido.

---

*o citado grupo de permutação das raízes é do tipo solúvel.*<sup>4</sup>

O trabalho de Galois não apenas pôs fim a uma longa demanda na Matemática, como também revelou a importância das estruturas de grupos e de corpos; o nome do primeiro conceito foi dado pelo próprio Galois que o chamou de *groupe*, em francês.<sup>5</sup>

O conceito de grupo é um dos mais pervasivos, não apenas no âmbito da matemática, mas em diversas outras áreas de conhecimento o mesmo vale para os resultados fundamentais da Teoria de Grupos. A Teoria de Corpos, por sua vez, está na base de muitas aplicações teóricas e práticas. Claro está que Galois não foi um pensador isolado ou independente; seu trabalho foi profundamente inspirado por grandes nomes na Matemática, notadamente por Lagrange; entretanto, podemos igualmente citar, Euler, os alemães Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851), e outros como Rufini e o próprio Abel. A influência de seu trabalho na Matemática se estende até nossos dias através das propostas de generalização de suas ideias. Sua concepção seminal de relações, com determinadas características, entre estruturas matemáticas distintas (e não apenas as de grupos e corpos à luz da solução de equações algébricas) é ainda denominada “Correspondência de Galois” em muitos âmbitos. A Teoria de Galois parecia mesmo antever as tremendas generalizações que advieram com a Teoria de Categorias, daí sua extrema fertilidade. O historiador da matemática, Hans Wussing, afirma: *Galois está no início da matemática moderna. Galois pôs diante dos matemáticos do século dezenove o problema da “análise da análise” (aquilo que D. Hilbert referiu no fim do século dezenove como “Metamathematik”), o de encontrar o núcleo abstrato de vários domínios e métodos. Esse problema leva ao desenvolvimento do método axiomático e ao estudo das estruturas matemáticas.* Já nas palavras do matemático John Stillwell, referindo-se à obra de Galois: *Todavia, esses resultados apenas arranharam a superfície, e é ainda possível que uma mais extensa ‘Teoria de Galois’ esteja por ser descoberta.*

## As tortuosas biografias de Galois

A Matemática é pródiga em histórias trágicas de mulheres e homens que a ela se dedicaram, Abel, como já foi mencionado, é um desses casos, Hipátia, que dá nome a essa revista, foi outro caso famoso; porém, talvez pela importância e profundidade da obra de Galois, desenvolvida quando ele ainda era muito jovem, sua personalidade rebelde e contestatória e talvez até mesmo inconsequente, assim como sua morte novelesca, num obscuro duelo aos vinte anos, foram certamente responsáveis por tê-lo elevado à condição de paradigma dos gênios atormentados que deixaram esse mundo muito precocemente. Em seu famoso e delicioso livro *Men of Mathematics* (Homens da Matemática, de 1937) que contém biografias de alguns homens famosos da Matemática<sup>6</sup>, Eric Temple Bell (um matemático e historiador escocês) abre o capítulo dedicado a Galois, intitulado *Genius and Stupidity* (que poderia ser traduzido como: Genialidade e Estupidez), com as seguintes palavras:

*Abel was done to death by poverty, Galois by stupidity. In all the history of science there is no completer example of the triumph of crass stupidity over untamable genius than is afforded by the all too brief life of Évariste Galois.*<sup>7</sup>

É oportuno lembrar também da epígrafe que Bell escolhe para encabeçar esse capítulo, citando o poeta alemão Schiller: *Contra a estupidez os próprios deuses lutam em vão.*

Com seu inigualável estilo lírico, Bell construiu na mente de muitos de seus leitores<sup>8</sup> a figura de Galois como a de um gênio rebelde, apaixonado e não compreendido, e, talvez, até mesmo abandonado, por seus contemporâneos. Bell o pintou com as cores de um herói romântico. Todavia, se é certo que a vida de Galois é exemplo de uma tragédia pessoal e

---

<sup>6</sup>A referência a “Homens” no título não é casual; infelizmente, não há um único capítulo no livro de Bell que referira qualquer das muitas mulheres matemáticas e suas inestimáveis contribuições à ciência! E não por desconhecimento de Bell, uma vez que ele cita, apenas *en passant*, alguns nomes femininos, entre eles o de Sonja Kowalewski citada como “pupila” de Karl Wilhelm Theodor Weierstrass e o de Marie-Sophie Germain lembrada para mostrar a “liberalidade das opiniões de Gauss com respeito às mulheres que trabalham em ciência”. A fabulosa Emmy Noether, responsável, assim como Galois, por profundos resultados, também é lembrada apenas por ser oriunda da Universidade de Göttingen... com o adendo: “a alma mater de Gauss”!

<sup>7</sup>Abel foi levado à morte pela pobreza, Galois, pela estupidez. Em toda a história da ciência, não há exemplo tão acabado do triunfo da crassa estupidez sobre o gênio indomável que aquele oferecido pela extremamente breve vida de Évariste Galois.

<sup>8</sup>O autor dessas mal traçadas linhas confessa que, também ele, foi seduzido por Bell quando leu esse livro ainda na adolescência.

---

<sup>4</sup>O moderno conceito de grupo solúvel é técnico e independente da teoria das equações algébricas, podendo ser encontrado em qualquer texto sobre a teoria de grupos; ademais, o nome “solúvel” se estabeleceu por força do resultado de Galois.

<sup>5</sup>Muito embora, é importante esclarecer, Galois estivesse se referindo a um tipo particular de grupo conhecido como grupo de permutações.

que seu gênio em matemática é incontestável, talvez a ideia de que ele seria uma alma ingênuas e de que ele fora inteiramente desconsiderado e injustiçado por seus contemporâneos seja apenas uma superestimada crença romântica sem muito lastro na realidade. Certamente, a imagem oferecida por Bell foi uma das mais influentes, talvez por sua escrita eloquente, e esta é a razão de focalizarmos sua versão; entretanto muitos outros autores escreveram sobre a vida de Galois... alguns de forma mais imparcial que Bell. Leopold Infeld (um físico polonês), em *Whom the Gods Love, The Story of Évariste Galois* (O Amado pelos Deuses, A Estória de Évariste Galois, de 1948), por exemplo, desenvolve uma “biografia ficcional”, em suas próprias palavras, pois que ele se permitiu preencher algumas passagens obscuras da vida de Galois. Diferentemente de Bell, Infeld sugere que Galois teria sido vítima de um complô político. A primeira biografia de fôlego surgiu pelas mãos de Paul Dupuy, *La vie d'Évariste Galois* (A vida de Évariste Galois, 1896). Publicada ainda no final do século XIX, é a obra que servirá de base para muitas das que se seguiram; uma obra cuidadosa e que merece ainda ser lida; contudo, ao que parece, Dupuy não teve acesso a muitos dos documentos posteriormente descobertos e que trouxeram alguma luz ao tema. A obra de André Dalmas, inspirada na de Dupuy, *Évariste Galois, révolutionnaire et géomètre* (Évariste Galois, revolucionário e geométrico, 1956), vem corrigir, em parte, a falta de Dupuy; porém como nos avverte René Taton, Dalmas também não atenta para alguns documentos importantes. Houve, contudo, várias outras publicações que discutiram a vida de Galois, como é o caso dos trabalhos de Louis Kollros (Évariste Galois, 1949), John Sommerfield (The Adversaries, 1952), Fred Hoyle (Ten Faces of the Universe, 1977), Laura Toti Rigatelli (Matematica sulle barriera. Vita di Evariste Galois, 1993), Tom Petsinis (The French Mathematician, 1997), Bruno Aberro (Évariste Galois, mathématicien, humaniste et révolutionnaire, 2007) para citar uns tantos.<sup>9</sup> Algumas destas obras, todavia, pintam Galois com cores muito pessoais ou ainda oferecem versões não comprovadas sobre aspectos da vida de Galois, em especial, acerca das obscuras condições em que se deu sua morte. Como já comentamos, Bell o transforma num herói romântico, que morre pela mulher amada; Infeld, num líder revolucionário, morto por agentes da monarquia, assim como na novela de Sommerfield; já Hoyle sugere, num breve ensaio, que ele teria sido vítima de seus

próprios amigos republicanos desconfiados com suas estranhas atitudes. Uma crítica, de certa forma muito apropriada, de algumas dessas visões apaixonadas é desenvolvida nos artigos de Tony Rothman (ver bibliografia). A obra de Rigatelli sugere uma outra (assombrosa!) interpretação para a razão de sua morte; comentaremos essa versão ao final deste artigo. A autora afirma que elaborou suas conclusões a partir de documentação que obteve em temporada na cidade de Paris; ademais, seu livro oferece uma extensa biografia que merece ser consultada. O livro de Petsinis é excessivamente ficcional (o autor não esconde este fato ao adotar o subtítulo “A novel”). Oportuno também lembrar o conto de Leo Perutz, *Der Tag ohne Abend* (O dia sem noite, de 1985), no qual o autor se inspira na vida de Galois para fazer uma reflexão da condição humana.

## Venturas e desventuras de Galois

Alguns aspectos da vida de Galois são razoavelmente conhecidos. Como dissemos, há várias biografias publicadas; muitas delas se valem, precipuamente, de cartas por ele escritas ou recebidas, publicações e menções de contemporâneos seus. Sua vida curta e quase novelesca e uma certa imprecisão em torno de alguns de seus fatos marcantes foram, de certo modo, responsáveis pelo surgimento de diversas fantasias sobre suas venturas e desventuras. Aqui, vamos tentar traçar um esboço o mais direto e honesto possível (e muito breve!) de suas aventuras.

Évariste Galois nasceu em 25 de outubro de 1811 em Bourg-la-Reine, uma pequena vila nos arredores de Paris, numa próspera família; seus pais foram Adélaïde-Marie e Nicolas-Gabriel Galois; seu avô paterno fora diretor de uma das escolas da Universidade Imperial e o materno, um importante jurista do Império. Pelo que sabemos, seus pais tinham uma sólida formação e alto nível intelectual, ademais eram espíritos progressistas. Nicolas-Gabriel era um sujeito amável e um típico livre-pensador: revolucionário, libertário, anticlerical e contra a monarquia. Já Adélaïde-Marie tinha um caráter forte, versada na leitura dos clássicos em grego e latim e célica em relação à religião. O ambiente na casa dos Galois parecia estimulante e divertido, com saraus e festas animadas pela encenação de peças e recital de poemas compostos por Nicolas-Gabriel e com a participação do pequeno Galois. Assim, Galois foi o segundo dos filhos de uma família feliz, que ainda incluía seus irmãos: Nathalie-Théodore e Alfred. Todavia, era uma época conturbada na França, que vivia ainda as con-

<sup>9</sup>Galois também inspirou peças de teatro, filmes e mesmo poemas.

sequências da grande Revolução; lembremos que a tomada da Bastilha ocorreu há apenas 22 anos antes do nascimento de Galois! Em fevereiro de 1815, Napoleão foge de seu exílio na ilha de Elba e retoma o poder dando início ao período dos famosos 100 dias; momento em que o pai de Galois é eleito prefeito de Bourg-la-Reine e, mesmo após a queda de Napoleão em Waterloo, Nicolas-Gabriel, apesar de suas fortes convicções republicanas, consegue manter sua posição à frente da prefeitura. Todavia, a era da restauração, com o retorno da monarquia ao poder — ainda que, agora, constitucional —, a dinastia dos Bourbon, com Louis XVIII, exigia maiores cuidados daqueles que abertamente se declaravam republicanos, como logo veremos.

Até os doze anos, Galois foi educado em casa por sua mãe; de quem recebeu uma formação baseada nos textos clássicos e uma estoica concepção moral. Essa formação lhe deu as condições para sair-se bem nos primeiros anos do Lycée Royal de Louis-le-Grand em Paris, após sua admissão em outubro de 1823. Era uma escola de prestígio, tendo abrigado outros nomes famosos como os de Robespierre e de Victor Hugo. Lá, Galois mostrou-se, inicialmente, um bom aluno; tendo mesmo sido reconhecido por seus conhecimentos de latim. Também lá, teve seus primeiros contatos com a turbulência política que agitava a França. Houve um caso rumoroso, já no primeiro ano da admissão de Galois, em que o recém indicado diretor da escola — um simpatizante da monarquia que retornou após Napoleão — expulsou 40 estudantes que se rebelaram contra as suas atitudes antiliberais. Galois não estava entre os alunos expulsos, mas, certamente, este episódio fortaleceu suas convicções de antipatia à autoridade, à religião e à monarquia. Foi ainda no colégio que ele começou a desenvolver forte interesse pelas matemáticas, quando conheceu os *Éléments de Géométrie* (Elementos de Geometria) do matemático francês Andrian-Marie Legendre (1752-1833). Embora não fosse um texto fácil, contamos Bell que Galois o devorou e o dominou em pouco tempo. Esse encontro com a Matemática de alto nível foi provavelmente o início de uma profunda mudança no espírito de Galois. Não sabemos se devido ao fascínio que a Matemática lhe despertou ou pelo tédio que lhe provocaram os temas e professores das outras disciplinas, Galois começou a descurar dos demais assuntos e devotar todo seu espírito à Matemática; desenvolveu outrrossim uma personalidade rebelde e mesmo indomável. Na opinião de Bell, a incapacidade de seus professores em reconhecer e compreender seu incomensurável talento para as questões abs-

tratas da Matemática foi a principal razão das dificuldades que veio a enfrentar no liceu; Bell dizia, acerca desses professores: *His teachers were good men and patient, but they were stupid, and to Galois stupidity was the unpardonable sin.*<sup>10</sup> Por sua vez, eles o acusavam de “ambição e originalidade afetadas”. O juízo de Bell sobre esses mestres, entretanto, parece muito severo e talvez injusto. Houve professores que souberam identificar o gênio que habitava aquele jovem excêntrico; foi o caso do professor da disciplina *Matemáticas preparatórias*, chamado Jean-Hyppolite Véron e conhecido como Vernier. Ele o descreveu certa feita como tendo “excelente aplicação e progresso”... Vernier lamentava, todavia, a sua falta de método, referindo-se à pouca importância que Galois dava ao estudo assíduo e ao cumprimento de suas tarefas. Entretanto, seu desinteresse pelas demais disciplinas se acentuava; nas palavras de seu professor de retórica, Desforges:

*C'est la fureur des mathématiques qui le domine ; aussi je pense qu'il vaudrait mieux pour lui que ses parents consentent à ce qu'il ne s'occupe que de cette étude ; il perd son temps ici et n'y fait que tourmenter ses maîtres.*<sup>11</sup>

Entre as novidades advindas com a Revolução Francesa, estavam a fundação da École Normale Supérieure e a da École Polytechnique, esta última firmou-se como uma importante instituição científica, atraindo os principais pensadores, cientistas e seus discípulos na Europa; destacada nas matemáticas, além de ser um centro das ideias revolucionárias. Obviamente, ser admitido na École Polytechnique se tornou uma obsessão para Galois; assim é que, em junho de 1828, ele prestou os exames de admissão. Todavia, as exigências para entrada na École Polytechnique eram rigorosas e Galois, provavelmente por seu estrito interesse em matemática, que o fazia negligenciar as demais disciplinas, não estava suficientemente preparado e foi reprovado. Retornou então ao Lycée Louis-le-Grand onde conheceu outro professor de matemática, Louis-Paul-Émile Richard, que, percebendo o talento de Galois, o encorajou tremendamente, e foi sob sua orientação que Galois publicou seu primeiro artigo (citado acima), nos Annales de mathématiques pures et appliquées, de J. D. Gergonne, sobre frações contínuas periódicas. O professor Richard o descreveu como “por vezes

<sup>10</sup>Eles eram homens bons e pacientes, porém estúpidos, e para Galois a estupidez era o pecado imperdoável.

<sup>11</sup>É o furor das matemáticas que o domina; tanto que penso ser melhor para ele que seus pais consentam em que ele não se ocupe senão desse estudo; ele perde seu tempo aqui e apenas atormenta seus mestres.

---

doce e razoável, por vezes torna-se muito desagradável”; entretanto, encantado pelo talento de Galois, Richard defendia que ele merecia ser admitido na École Polytechnique mesmo sem os exames regulares, aclamado por sua genialidade!

A relação com o professor Richard foi profícua; com sua ajuda, na primavera de 1929, Galois envia à Académie des Sciences, uma respeitada instituição, dois manuscritos. Um deles, intitulado *Recherches algébriques*, é encaminhado a Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), um dos mais importantes matemáticos daquela época e, certamente, de todos os tempos! Diferentemente do que conta a lenda, Cauchy não perdeu o manuscrito de Galois, tampouco o menos prezou; anunciou mesmo que faria uma comunicação dele na reunião da Academia, o que, infelizmente não ocorreu, até onde sabemos, devido a Cauchy ter adoecido. O segundo manuscrito, *Recherches sur les équations algébriques de degré premier*, foi confiado a Siméon-Denis Poisson (1781-1857).

No ano seguinte à sua primeira reprovação na École Polytechnique, em 1829, Galois tentou uma vez mais ser nela admitido (não seria permitida uma terceira oportunidade). Todavia, dessa vez, ele foi atingido por um acontecimento que, provavelmente, o abalou terrivelmente<sup>12</sup>: poucos dias antes dos exames de ingresso, em 2 de julho, seu pai, Nicolas-Gabriel, por quem Galois nutria um profundo amor, suicidou-se em Paris por não ter conseguido suportar uma sórdida campanha movida contra ele pelo novo pároco da cidade que, aliado aos ultraconservadores locais, forjou alguns poemas constrangedores e os atribuiu a Nicolas-Gabriel, então prefeito de Bourg-la-Reine. Jean-Pierre Escofier Galois nos conta que o pai de Galois lhe teria legado uma carta arrebatadora com um terrível presságio:

*Il m'est dur de te dire adieu, mon cher fils. Tu es mon fils aîné et j'ai toujours été fier de toi. Un jour, tu seras un grand homme et un homme célèbre. Je sais que ce jour viendra, mais je sais aussi que la souffrance, la lutte et la désillusion t'attendent. Tu seras mathématicien. Mais même les mathématiques, la plus noble et la plus abstraite de toutes les sciences, pour éthérées qu'elles soient, n'en ont pas moins leurs racines profondes sur la terre où nous vivons. Même les mathématiques ne te permettront pas d'échapper à tes souffrances et à celles des autres hommes. Lutte, mon cher enfant, lutte plus courageusement que je ne l'ai fait. Puisses-tu entendre avant de mourir sonner le carillon de la*

<sup>12</sup>Muito embora Galois não deixe esse sentimento transparecer em seus escritos.

### *Liberté.* <sup>13</sup>

Galois é mais uma vez reprovado nos exames de admissão! Conta a lenda que irritado com as perguntas dos examinadores, atirou num deles o apagador da lousa.

Nesse momento, premido pelas circunstâncias e dificuldades financeiras decorrentes da morte de seu pai, Galois voltou-se, embora sem grande interesse, para a École Normale Supérieure (então denominada École Préparatoire), onde receberia uma bolsa de estudos. Lá, não sem algumas outras dificuldades, ele foi enfim aceito no início de 1830; dando prosseguimento à sua pesquisa, pois no primeiro semestre do ano, Galois publica três trabalhos no Bulletin de Féruccac. Com respeito aos manuscritos anteriormente submetidos à Academia (em maio e junho de 1829), as informações que temos não são muito claras; ao que parece, Cauchy teria sugerido que aperfeiçoasse o trabalho, o que ele teria feito, submetendo-o em fevereiro ao *Gran Prix de Mathématiques* (Grande Prêmio de Matemática) da Academia que ocorreria em 1º de março de 1830. Dessa vez, a análise de seu trabalho ficou a cargo de Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), que o levou para casa e... em 16 de março, morreu! O manuscrito se perdeu e o prêmio foi concedido a Abel (postumamente) e a Jacobi.

Naquele mesmo ano, uma nova revolta popular abalou a França, Paris fervilhou nos dias que ficaram conhecidos como “os três dias gloriosos”, 27, 28 e 29 de julho. Os alunos da École Polytechnique aderiram prontamente aos movimentos de contestação, já os da École Normale foram impedidos, por seu diretor, Joseph-Daniel Guigniault, de sair dos limites da escola. Isso insuflou o espírito rebelde de Galois, que escreveu uma carta condenando o diretor, o que resultou em sua expulsão da École Normale em janeiro de 1831.

A partir de então, os eventos se precipitam e Galois inicia o que parece ter sido, para lembrar Rimbaud, sua *saison en enfer*<sup>14</sup>. Sem mais a bolsa da École Normale para lhe garantir sustento financeiro, em janeiro

---

<sup>13</sup>É-me difícil dizer-te adeus, meu querido filho. Tu és meu filho mais velho e sempre tive orgulho de ti. Um dia, tu serás um grande homem e um homem célebre. Sei que esse dia virá, mas sei também que o sofrimento, a luta e a desilusão te aguardam. Tu serás matemático. Porém mesmo as matemáticas, a mais nobre e a mais abstrata de todas as ciências, por mais etéreas que sejam, não têm menos profundas suas raízes sobre a terra em que vivemos. Mesmo as matemáticas não te permitirão escapar dos teus sofrimentos e daqueles dos demais homens. Lute, meu querido filho, lute mais corajosamente do que eu. Que possas ouvir, antes de morrer, soarem os dores da Liberdade.

<sup>14</sup>Une saison en enfer (Uma temporada - no sentido de estação - no inferno) é uma famosa coletânea de Rimbaud.

de 1831, Galois tentou dar aulas de matemática; em verdade o que inicialmente ele propõe para seu curso seria uma explanação de seus trabalhos; é escusado dizer que o curso redundou em fracasso, quer pelo fato de suas ideias (ou mesmo suas exposições!) parecerem muito inovadoras e intrincadas, quer por seus alunos não serem matemáticos de fato, mas companheiros da causa revolucionária. No início da segunda quinzena de janeiro, submete à Academia uma terceira versão de seus manuscritos a pedido de Poisson; que viria a rejeitá-lo em julho do mesmo ano, após analisá-lo com a assistência de Sylvestre François Lacroix (1765-1865); não está claro se Galois trouxe conhecimento do parecer de Poisson, senão até outubro do ano em curso. Seus ideais republicanos recrudesceram e ele se envolveu profundamente nos movimentos políticos; filiou-se à *Société des Amis du Peuple* (Sociedade dos Amigos do Povo), uma associação secreta francamente contrária à monarquia, e alistou-se como artilheiro na *Garde Nationale*, uma organização militar que surgiu durante a revolução francesa e cuja extinção fora exigida pelo rei Louis-Philippe em 31 de dezembro de 1830. Alguns dos componentes dessa guarda, por terem se recusado a depor as armas, foram presos; Galois não estava entre eles, porém, ao que parece, havia um chamado Péscheux d'Herbinville, que será mencionado mais adiante. Finalmente, foram absolvidos num julgamento que se tornou um grande evento político. A comemoração da absolvição se deu num restaurante em 9 de maio de 1831, num banquete ao qual compareceram duas centenas de republicanos, entre eles, Galois e o famoso Alexandre Dumas (pai), autor dos conhecidos *O Conde de Monte Cristo* e *Os Três Mosqueteiros*. Nessa celebração, o jovem rebelde Galois faz um irônico brinde ao rei: *À Louis-Philippe ! ... com uma taça numa mão e uma faca na outra!* Galois foi preso no dia seguinte, mas foi absolvido no julgamento que ocorreu em junho; em parte, sob a alegação de que sua frase não fora inteiramente ouvida pela confusão que acontecera durante a celebração; a frase completa seria: *À Louis-Philippe, si il trahit !* (A Louis-Philippe, se ele traír! referindo-se a alguma eventual traição dos ideais republicanos). Há quem insinue que sua absolvição se deu porque, ademais de uma inteligente estratégia da defesa que usou o fato de o jantar ter sido um evento fechado, o júri considerou sua atitude como mais uma inconsequência de um jovem imaturo. A respeito deste julgamento, Dumas, que esteve presente ao jantar de comemoração, diria em *Mes mémoires* (Minhas memórias):

*Je n'ai rien vu de plus simple carré que ce procès,*

*dans lequel l'accusé semblait prendre à tâche de fournir aux juges les preuves qui pouvaient leur manquer.*<sup>15</sup>

Contudo, já no mês seguinte, Galois foi preso uma vez mais; nessa ocasião, por estar trajando o uniforme proibido da Guarda Nacional e portar diversas armas no Dia da Bastilha, 14 de julho. Dessa vez, as condições foram mais difíceis e ele foi sentenciado a passar seis meses na prisão de Sainte-Pélagie. Embora provavelmente tenha prosseguido com sua pesquisa em matemática, a estada na prisão parece que foi devastadora para o espírito de Galois; sua irmã, Nathalie-Théodore, após uma visita à prisão, afirmou que ele tinha se tornado “melancólico, envelhecido e que seu olhar estava profundo com se tivesse cinquenta anos”. A situação chegou ao ponto de Galois, num momento de embriaguez por álcool, tentar cometer suicídio; momento em que foi contido pelos demais companheiros de prisão, entre os quais encontrava-se François-Vincent Raspail.<sup>16</sup> O destino, todavia, parecia jogar uma vez mais com a vida de Galois, pois, no segundo semestre de 1832, Paris foi assolada por uma terrível epidemia de cólera e Galois foi posto em liberdade condicional e transferido para uma casa de saúde em 16 de março de 1832, a clínica do senhor Faultrier. Uma vez lá, até onde sabemos, Galois apaixonou-se por Stéphanie, filha do médico residente da clínica, Jean-Louis Auguste Poterin du Motel. As informações que temos sobre esse caso e o que se segue a partir de então são muito obscuras, elas se resumem, até onde sabemos, a cartas de Galois para seus amigos e a cópias rasuradas feitas por Galois de duas cartas que ela lhe teria enviado. O próprio nome da jovem, Stéphanie-Félicie Poterin du Motel, somente foi confirmado numa investigação acurada que ocorreu após a metade do século XX<sup>17</sup>. Os textos rasurados sugerem que a jovem não teria correspondido ao afeto de Galois e tentou mesmo dissuadi-lo de sua paixão, como o demonstra a primeira carta que conhecemos em que ela lhe implora:

*Brisons la sur cette affaire je vous prie [...] et ne plus penser a des choses qui ne sauraient exister et qui n'existeront jamais.*<sup>18</sup>

Isso o levou a uma profunda decepção. Numa carta

<sup>15</sup>Eu nunca tinha visto nada mais simples que este processo, no qual o acusado parecia ter assumido a tarefa de fornecer aos juízes as provas que poderiam lhes faltar.

<sup>16</sup>Raspail é outro insurgente, que viria a se tornar um famoso político republicano e um dos fundadores da biologia celular.

<sup>17</sup>Ver o artigo de C. A. Infantozzi.

<sup>18</sup>Acabemos com esse assunto, eu vos peço ... e não mais pensar em coisas que não teriam existido e que não existirão jamais.



Retrato de Galois feito de memória por seu irmão, Alfred Galois, em 1848.

a seu amigo fiel Auguste Chevalier (uma amizade nascida nos tempos da Escola normal) em 25 de maio, ele a revelou:

*Comment détruire la trace d'émotions aussi violentes que celles où j'ai passé ? Comment se consoler d'avoir épousé en un mois la plus belle source de bonheur qui soit dans l'homme, de l'avoir mise à sec pour la vie ?<sup>19</sup>*

Chegamos então ao *gran finale* do drama de Galois: na manhã do dia 30 de maio, ele se envolveu num misterioso duelo com pistolas contra um adversário cuja identidade permanece nebulosa, o que lhe rendeu um ferimento mortal no abdômen; conta a lenda que ele foi encontrado em agonia por um camponês que o levou ao Hôpital Couchin no qual morreu no dia seguinte. A cena mais pungente do drama é a que narra a sua morte nos braços de seu irmão mais novo — então com 17 anos — Alfred que, aos prantos, ouviu as últimas palavras de Évariste Galois:

*Ne pleure pas, j'ai besoin de tout mon courage pour mourir à vingt ans.*

<sup>19</sup>Como destruir o rastro de emoções tão violentas quanto aquelas por que passei? Como se consolar de ter esgotado em um mês a mais bela fonte de felicidade que há para o homem, de a ter secado para a vida?

“Não chores, eu careço de toda minha coragem para morrer aos vinte anos.”

## Considerações finais

Na noite anterior ao duelo, Galois redigiu um esboço dos seus resultados e o confiou, na forma de uma ‘carta testamento’, ao seu leal amigo Chevalier. O início e final dessa carta são reproduzidos abaixo com as rasuras do próprio Galois:

*Mon cher Ami,  
J'ai fait en analyse plusiers choses nouvelles.  
...  
Tu feras imprimer cette lettre dans la revue Encyclopédique.  
En Fait Je me suis souvent hasardé dans ma vien à avancer des propositions dont je n'étais pas sûr. Mais tout ce que j'ai écrit là est depuis bientôt un an dans ma tête, et je p il trop de mon intérêt dont je n'aurais pas la démonstrtion compléte.  
Tu engageras prieras publiquement Jacobi et où Gauss de donner leur avis non sur la vérité, mais sur l'importance des théorèmes.  
Après celà il se trouvera, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gachis.  
Je t'embrasse avec effusion.  
Galois<sup>20</sup>*

Galois admite algumas eventuais lacunas em suas demonstrações. Todavia ele afirma: *Je n'ai pas le temps*, ou seja, “Eu não tenho tempo” para melhor desenvolver os resultados. Obviamente, não tem fundamento a difundida lenda<sup>21</sup> de que ele teria desenvolvido sua teoria, no todo ou em parte, na noite anterior ao duelo.

Após a morte, suas ideias permaneceram desco-

<sup>20</sup>Meu caro Amigo,  
Eu fiz várias coisas novas em análise.

...  
Tu farás esta carta ser impressa na revista Encyclopédica.  
De-fato Eu me arrisquei muitas vezes em minha vida ao avançar proposições das quais eu não tinha segurança. Porém tudo o que eu escrevi aqui estava há quase um ano em minha mente, e é muito do meu interesse não me enganar para que se suspeite de eu ter enunciado teoremas dos quais eu não teria a demonstração completa.  
Tu recrutaráς rogarás publicamente a Jacobi e où Gauss a darem suas opiniões não sobre a verdade, mas sobre a importância dos teoremas.

Tu farás esta carta ser impressa na revista Encyclopédica.  
De-fato Eu me arrisquei muitas vezes em minha vida ao avançar proposições das quais eu não tinha segurança. Porém tudo o que eu escrevi aqui estava há quase um ano em minha mente, e é muito do meu interesse não me enganar para que se suspeite de eu ter enunciado teoremas dos quais eu não teria a demonstração completa.

Tu recrutaráς rogarás publicamente a Jacobi e où Gauss a darem suas opiniões não sobre a verdade, mas sobre a importância dos teoremas.

Após isso haverá, eu espero, pessoas que encontrarão benefício ao decifrar toda essa desordem.  
Eu o abraço com carinho.  
Galois

<sup>21</sup>Ver: Evariste Galois oder das tragische Scheitern eines Genies (Évariste Galois ou o trágico fracasso de um gênio), de Bernd Klein.

nhecidas na comunidade matemática. Entretanto, a devoção de seu irmão Alfred e de seu fiel amigo Chevalier, que recopiram e organizaram suas cartas e anotações e as apresentaram, como fora pedido na ‘carta testamento’, a diversos matemáticos, incluindo Gauss e Jacobi; terminou por levar seus manuscritos às mãos de Joseph Liouville (França, 1809-1882), em 1842.<sup>22</sup> Por sua vez, Liouville anunciou à Academia, em 1843 (ver abaixo), ter encontrado profundos resultados nos escritos de Galois; os quais, finalmente, foram publicados em 1846 no *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* dirigido pelo próprio Liouville.

*Dans les papiers d'Évariste Galois, j'ai trouvé une solution aussi exakte que profonde de ce beau problème: "Étant donné une équation irréductible de degré premier, décider si elle est ou non résoluble à l'aide des radicaux." Le Mémoire de Galois est rédigé peut-être d'une manière un peu trop concise. Je me propose de le compléter par un commentaire qui ne laissera, je crois, aucun doute sur la réalité de la belle découverte de notre ingénieux et infortuné compatriote.*<sup>23</sup>

As condições e mesmo as razões concernentes à morte de Galois estão ainda envoltas em polêmica. É indiscutível que Galois foi atingido por um disparo de pistola no abdômen e que morreu em consequência desse ferimento, porém o real motivo e o autor do disparo permanecem em mistério. Dumas, em suas memórias, afirma que Péscheux d'Herbinville fora o responsável, já o jornal *Le Precursor*, já mencionado, atribui essa autoria a alguém de iniciais L. D.; mas quem seria L. D.? Estaria correta a grafia do nome? O D seria de d'Herbinville? Ou, como quer Rothman, seria de Duchâtelêt? A incerteza em torno a essas questões deu azo às diversas construções, por vezes fantasiosas, dos autores que escreveram sobre Galois; minha opinião particular é a de que muitas delas não se sustentam. A ideia de uma conspiração política, envolvendo espiões e sicários da monarquia, com a participação de uma mulher de má reputação que o teria seduzido, ou mesmo a de um embuste arquitetado por seus próprios companheiros republicanos foram discutidas e desmontadas por vários críticos

<sup>22</sup>Chevalier publicou, em setembro de 1832, na *Revue Encyclopédique* a carta testamento, atendendo ao pedido de Galois, bem como um necrológio.

<sup>23</sup>Nos papéis de Évariste Galois, eu encontrei uma solução tão exata quanto profunda desse belo problema: “Dada uma equação irreductível de grau primo, decidir se ela é ou não resolúvel com a ajuda de radicais.” A Exposição de Galois foi redigida, quiçá, de maneira demasiado concisa. Eu me proponho a completá-la por um comentário que não permitirá, creio eu, dúvida alguma sobre a realidade da bela descoberta de nosso engenhoso e desafortunado compatriota.

(ver referências, em particular, Tony Rothman). Algumas dessas construções até que não contradizem frontalmente os fatos conhecidos, porém são improváveis ou inverossímeis. A maioria delas foi, provavelmente, induzida pelas cartas escritas por Galois na noite anterior à sua morte, reproduzidas a seguir.

A primeira foi endereçada a todos os republicanos, provavelmente aos companheiros da Société des Amis du Peuple:

*Je prie les patriotes, mes amis, de ne pas me reprocher de mourir autrement que pour le pays. Je meurs victime d'une infâme coquette, et de deux dupes de cette coquette. Cest un dans un misérable cancan que séteint ma vie. Oh ! Pourquoi mourir pour si peu de chose, mourir pour quelque chose daussi méprisable ! Je prends le ciel à témoin que cest constraint et forcé que jai cédé à une provocation que jai conjuré par tous les moyens. Je me repends d'avoir dit une vérité une vérité funeste à des hommes si peu en état de lentendre de sang-froid. Mais enfin, jai dit la vérité. J'emporte au tombeau une conscience nette de sang patriote. Adieu ! Javais bien de vie pour le bien public. Pardon pour ceux qui mont tué, ils sont de bonne foi.*<sup>24</sup>

A segunda dirigida a dois de seus amigos também republicanos N. L. e V. D. (era comum usarem-se as iniciais dos nomes, não necessariamente por economia, mas para proteger identidades), especula-se que seriam Napoléon-Aimé Leblon e Vincent Delaunay ou Vincent Duchâtelêt.

*Mes bons amis,  
Jai été provoqué par deux patriotes ... Il ma été impossible de refuser.  
Je vous demande pardon de n'avoir averti ni lun ni lautre de vous.  
Mais mes adversaires mavaient sommé SUR LHON-NEUR de ne prévenir aucun patriote.  
Votre tâche est bien simple : prouver que je me suis battu malgré moi, cest-à-dire après avoir épuisé tout moyen daccommodelement, et dire si je suis capable de mentir, de mentir même pour un si petit objet que celui dont il sagissait.  
Gardez mon souvenir, puisque le sort ne ma pas donné*

<sup>24</sup>Eu peço aos patriotas, meus amigos, que não me condenem por morrer de outra forma que não pela pátria. Eu morro vítima de uma infame coquete, e de dois trouxas seus amigos. É por uma miserável futrica que se apaga minha vida. Oh! Por que morrer por tão pouca coisa, morrer por algo tão desprezível! Tomo o céu por testemunha de que foi coagido e forçado que cedi a uma provocação que tentei conjurar por todos os meios. Eu me arrependo de ter dito uma verdade, uma verdade terrível a homens tão incapazes de ouvi-la com sangue-frio. Mas, enfim, eu disse a verdade. Levo ao túmulo uma consciência limpa de sangue patriótico. Adeus! Tive uma boa vida para o bem público. Perdão para aqueles que me terão matado, eles estão de boa fé.

---

*assez de vie pour que la patrie sache mon nom.  
Je meurs votre ami.*<sup>25</sup>

Há ainda uma estranha passagem numa carta de Raspail de 25 de julho de 1831 (portanto, Galois ainda se encontra vivo quando da publicação da carta!); nela, ele conta que, quando de sua estada na prisão de Sainte-Pélagie, Galois lhe teria dito:

*...et, vous l'entendrez dire, je mourrai en duel, à l'occasion de quelque coquette de bas étage ; pourquoi pas, puisqu'elle m'invitera à venger son honneur qu'un autre aura compromis !*<sup>26</sup>

Seria uma estranha profecia do próprio Galois? Ou antes, seria uma fantasia construída por Raspail?

Não discutimos ainda a assombrosa versão proposta por Rigatelli; a autora afirma que chegou a essa versão após uma temporada pesquisando documentos da Biblioteca Histórica da Cidade de Paris no Hôtel de Lamoignon. Ela concluiu que Galois teria se oferecido em sacrifício como um mártir da causa republicana para, através de sua morte, provocar um levante dos partidários republicanos em Paris em oposição à Casa d'Orléans de Louis-Philippe. Teria sido um plano cuidadosamente arquitetado, que incluía a composição de cartas para despistar e a cumplicidade dos republicanos que dele participaram mantendo o silêncio; tudo em nome da causa revolucionária! Seu enterro, de fato, provocou grande comoção, diz-se que milhares de pessoas acorreram à cerimônia, os jornais noticiaram:

Jornal *La Tribune* de 3 de junho:

*Le convoi d'Evariste Galois a eu lieu aujourd'hui samedi a midi. Une députation des Amis du peuple, les élèves des écoles de droit et de médecine, un détachement de l'artillerie parisienne et de nombreux amis l'accompagnaient.*<sup>27</sup>

Outros jornais também se referiram ao acontecimento como o *Journal de Rouen* de 3 de junho e, logo

---

<sup>25</sup>Meus bons amigos,

Fui provocado por dois patriotas... Foi-me impossível recusar. Eu lhes peço perdão por não ter advertido a nenhum dos dois. Porém meus adversários exigiram EM NOME DA HONRA de não prevenir qualquer patriota. Vossa tarefa é bem simples: provar que me bati contra minha vontade, isto é, após ter esgotado todos os meios de conciliação, e dizei se eu sou capaz de mentir, de mentir por algo tão ínfimo como o de que se trata. Guardem minha lembrança, pois que o destino não me concedeu o suficiente de vida para que a pátria soubesse do meu nome.

Morro vosso amigo.

<sup>26</sup>...e, vós ouvireis dizer, eu morrerei num duelo, devido a alguma coquete de classe baixa, por que não, já que ela me convidará a vingar sua honra que um outro terá comprometido!

<sup>27</sup>O fúretro de Évariste Galois ocorreu ontem, sábado, ao meio-dia. Uma comissão dos Amigos do povo, alunos das escolas de direito e medicina, um destacamento da artilharia parisiense e muitos amigos o acompanharam.

em seguida, no *Le Précurseur de Lyon*. Contudo não houve o levante popular, ao menos como esperava Galois, desencadeado por sua morte; pois, conta-nos a autora, seu enterro foi empanado pela morte concomitante do General Jean-Maximilien Lamarque que fora marechal de Napoleão. Esse acontecimento, sim, provocou uma insurreição nos dias 5 e 6 de junho que ficou conhecida como a Rebelião de Junho 1832 em Paris.

A versão de Rigatelli não desafia qualquer fato conhecido; ademais, a forma como Galois refere-se ao duelo, dando a entender que sua morte seria algo inevitável, é certamente intrigante. Por que tamanha convicção de que iria morrer? Não combina em absoluto com sua personalidade rebelde e desafiadora. Por que a preocupação em solicitar aos amigos que provassem que participou do duelo contrariado e de que não mentiria por un si petit objet? No entanto, a explicação de Rigatelli é tão chocante que não nos parece plausível!

Talvez a realidade seja mais simples. Embora indiscutivelmente Galois fosse um excepcional gênio matemático, era um jovem atormentado com uma grande dificuldade de relacionar-se com as demais pessoas e com os fatos mais comezinhos da vida humana. Um adolescente, quase uma criança, imaturo e suscetível que nasceu num tempo e num lugar em convulsão e que trazia em si sentimentos contraditórios, aliando candura e rebeldia. O historiador das matemáticas Hans WuSSing (1927-2011) o descreve como *uma fascinante mescla de arrogância, real superioridade, autoconhecimento e senso de missão*. Tony Rothman diz ser evidente que ele teria desenvolvido uma paranoia. Sobre isso, vale a pena atentarmos para o comentário feito por Marie-Sophie Germain (1776-1831), ao matemático italiano Gugliemo Libri Carucci dalla Sommaja (1803-1869) que tivera uma altercação na Academia com Galois após uma apresentação do próprio Libri:

*...décidément, il y a un sort sur tout ce qui tient aux mathématiques votre préoccupation celle de Cauchy, la mort de Mr. Fourier pour achever cet élève Gallois qui malgré ses impertinences annonçait des dispositons heureuses, en a tant fait qu'il a été chassé de l'école normale, il est sans fortune et sa mère en a fort peu. Rentré chez elle il a continué envers elle cette habitude d'injure dont il vous a donné à vous-même un échantillon après votre meilleure lecture à l'académie, La pauvre dame a quitté sa maison laissant de quoi vivre médiocrement à ce fils et a été forcée de se placer dame de compagnie pour satisfaire à cette nécessité.*

*On dit qu'il deviendra tout a fait fou et je le crains.*<sup>28</sup>

Todavia, vale também observarmos os relatos que fizeram aqueles que com ele conviveram, como seus professores, amigos e contemporâneos; em particular as cenas comoventes narradas por Raspail, em suas cartas sobre as prisões, da relação com Galois. Há ainda uma amorosa carta, enviada à sua tia (irmã de Adélaïde-Marie) que revela um lado terno e carente de Galois.

Em suma, talvez Galois fosse apenas um jovem imaturo e genial, saído abruptamente de um mundo feliz e protetor (aos doze anos!) para um novo mundo em crise e ameaçador. Ingênuo e romântico em excesso ao ponto de bater-se em duelo pela honra de uma jovem ultrajada, assim ele devia pensar, a primeira jovem por quem se enamorou. Sem esquecermos que sobre ele pesava ainda o apelo de seu amadíssimo pai: *Lutte, mon cher enfant, lutte plus courageusement que je ne l'ai fait !*

Enfim, seu pai estava certo: *Un jour, tu seras un grand homme et un homme célèbre !* A obra Galois é grandiosa, das matemáticas ele foi súdito e soberano, para usar uma expressão cunhada pelo próprio Bell, e ocupa uma das principais posições no Olimpo das matemáticas.

Após a morte de Rimbaud, Paul Verlaine lhe dedicou um poema cuja estrofe final canta:

*L'histoire ta sculpté triomphant de la mort  
Et jusqu'aux purs excès jouissant de la vie,  
Tes pieds blancs posés sur la tête de l'Envie !*

A história te esculpiu triunfante sobre a morte  
E até os puros excessos de gozo da vida  
Teus pés brancos postos sobre a cabeça da inveja!

Espero que Verlaine não se ofenda se oferecermos esses versos também a Galois; mas isso é poesia e, conquanto seu poder de apaixonar e sua força arrebatadora... a poesia não é história.

<sup>28</sup>decididamente há uma maldição em tudo que se relaciona com as matemáticas, sua preocupação é a [mesma] de Cauchy, a morte do Sr. Fourier pode acabar com esse aluno Galois que, malgrado suas impertinências, anuncia felizes aptidões [significando que tinha talento], tanto fez que foi expulso da Escola Normal, ele não tem recursos e sua mãe os tem muito poucos. Retornando à casa da mãe, ele continuou com este hábito do insulto, coisa da qual lhe deu, a vós mesmo, uma amostra após vossa melhor leitura à academia. A pobre senhora abandonou sua casa deixando o filho vivermediocramente e foi forçada a tornar-se dama de companhia para satisfazer essa necessidade. Diz-se que ele ficará completamente louco e eu o receio.

## Referências

Muitas obras foram consultadas na elaboração deste texto, é-me impossível listar aqui todas elas; reformando a célebre queixa de Galois, eu poderia dizer: Je nai pas despace !

E a publicação de novas obras prossegue; quando estava finalizando a redação deste artigo, tomei conhecimento de uma nova, justamente com esse título: *Jai ne pas le temps: Le roman tumultueux d'Évariste Galois*, de Jacques Cassabois (Hachette, 2011); ainda não o li, mas essa é somente um mostra que o tema é inesgotável.

Assim é que, por economia, elencarei brevemente as que se tornaram mais centrais neste texto e são, portanto, fundamentais para o seu entendimento. Sugiro fortemente que se observem as bibliografias dessas obras, pois lá estão diversos textos que utilizei; muitos estão acessíveis na Internet.

Embora enviesadas, as obras de E. T. Bell (*Men of Mathematics*, Touchstone, 1986) e L. Infeld (*Who the Gods Love*, Whittlesey House, 1948) são importantes; recomendo a bibliografia deste último.

Para narrativa mais sóbria, Paul Dupuy (*La vie d'Évariste Galois*, Éditions Jacques Gabay, 1992) e de André Dalmas (*Évariste Galois, révolutionnaire et géomètre*, Fasquelle Éd., Paris, 1956) ambas podem ser obtidas na biblioteca digital Gallica. Nesta biblioteca digital, estão acessíveis as obras mencionadas de Alexandre Dumas e de François-Vincent Raspail.

Laura Toti Rigatelli (*Matematica sulle barricate. Vita di Evariste Galois*, Sansoni, Firenze, 1993) tem uma bibliografia que merece ser consultada; dessa obra, há uma versão revista e ampliada em inglês de 1996.

Como textos críticos, sugiro os artigos de Tony Rothman (*The Short Life of Évariste Galois*, Sci. Amer., 1982 e *Science à la mode*, Princeton, Uni. Press, Princeton 1989) e de Roger Cooke (*Review in Amer. Math. Month.*, 105, 1998), em particular, as referências nos artigos do primeiro. Interessante também conferir o artigo de Carlos Alberto Infantozzi (*Sur la mort d'Évariste Galois*, *Revue d'Histoire des Sciences*, 2, 151, 1968).

Como conjunto completo dos trabalhos de Galois, a referência definitiva é Robert Bougne et Jean-Pierre Azra (*Écrits et mémoires Mathématiques d'Évariste Galois*. Gauthier-Villars, Paris, 1962); boa crítica dos trabalhos está em Peter M. Neumann (*The mathematical writings of Évariste Galois*, Eur. Math. Soc., 2011).

Para a Teoria de Galois, numa primeira leitura,

sugiro Ian Stewart (Galois Theory, Taylor and Francis, Boca Raton, 2015); para uma segunda leitura, com contextualização histórica: Jean-Pierre Escofier (Springer-Verlag, New York, 2001).

Não encontrei muitas publicações relevantes em língua portuguesa, para citar algumas, Gilberto G. Garbi (O Romance das Equações Algébricas, Makron Books, São Paulo, 1997) faz rápido e honesto relato histórico e o livro de Mario Livio (A equação que ninguém conseguia resolver, Ed. Record, Rio de Janeiro, 2008) é uma ótima leitura, em nível de divulgação, tanto da vida, quanto da teoria de Galois.

Por fim, vale ressaltar que o historiador das ciências René Taton tem inúmeras publicações sobre o tema, são tantas que listá-las aqui, é impossível, mas vale a consulta.



Thierry Petit Lobao trabalha no Instituto de Matemática e Estatística da UFBA. Com formação em Física e Matemática, sua área de pesquisa principal é a da álgebra não comutativa, trabalhando também em teoria geral de radicais, estruturas algébricas deformadas e fundamentos da física. Sendo um amante compulsivo dos livros, sua devoção às matemáticas, à literatura e à cultura em geral, somente é suplantada pela completa veneração a seus seis gatinhos.

### FILME



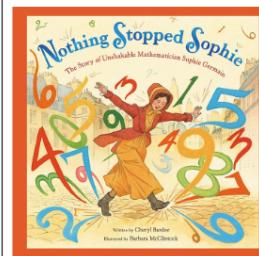
O filme *O Desafio de Marguerite* que fez parte do Festival Varilux de cinemas e venceu a categoria júri técnico no Festival de Cannes, narra a história de Marguerite, uma jovem matemática empenhada em desenvolver uma demonstração para a Conjectura de Goldbach. Embora não tenha como pauta a quebra de estereótipos, na obra, a autora consegue transpor as angustias de um(a) matemático(a).

Lançamento: Dezembro de 2023 em meio ao processo de pesquisa.

Direção: Anna Novion  
Duração: 1h 52 min

14

### LIVRO



Publicação: Little, Brown Books for Young Readers New York , Boston, 2021, p. 40  
Autoria: Cheryl Bardoe  
Idioma: Inglês



### PODCAST



Vinculado a Unicamp, o Podcast Matemática Multimídia-M3, revela no episódio: Olimpíadas - Previsões e Apostas, uma breve apresentação da origem das Olimpíadas e em seguida, discute a presença de uma relação matemática que possibilita uma estimativa da quantidade de medalhas a serem concebidas, levando em conta, fatores como população, PIB, e ser ou não país sede dos jogos. Embora não forneça um resultado, preciso, os resultados apresentam previsões dentro de um intervalo de erro.



Sugestões culturais compiladas por Taíse Jorge.

## EFEMÉRIDE

# Licenciatura em Matemática na Bahia

80 anos de investimentos e (re) construção de processos educacionais

*Márcia Barbosa de Menezes*

Este artigo foi pensado e estruturado para comemorar os 80 anos da licenciatura em Matemática na Bahia. Nesse sentido, (re)lembramos o contexto histórico e social dos processos formativos dos/as professores/as desde o período colonial chegando ao atual termo moderno: licenciatura. Desde 1943, quando o curso de graduação em Matemática começou a ser desenvolvido, a Licenciatura no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal da Bahia mantém-se em constantes investimentos de reestruturação, visando aprimoramento e atualização, no sentido de proporcionar desenvolvimento de competências e habilidades para futuros e futuras docentes de Matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

### Introdução

Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela, tampouco, a sociedade muda. (Paulo Freire)

Onde quer que haja mulheres e homens, há sempre o que fazer, há sempre o que ensinar, há sempre o que aprender. (Paulo Freire)

O ano de 2023 despontou no horizonte dos licenciados e licenciadas baianas/as como um ano de comemorações, afinal, há exatamente 80 anos iniciavam-se, na recém-fundada Faculdade de Filosofia da Bahia — FF (13/06/1941), os cursos de graduação com habilitações em Bacharelado e em Licenciatura.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Os/As licenciandos e licenciandas dos cursos de graduação

No dia 15 de março de 1943, o Professor Isaías Alves, no papel de Diretor, proferiu a aula inaugural da Faculdade de Filosofia. [...] abrangendo as áreas de Filosofia, Letras, Pedagogia, Ciências e Didática. A área de Letras congregava os cursos de Letras Clássicas, Neo-Latinas e Anglo-Germânicas, e a área de Ciências compunha-se dos cursos de Matemática, Física, Química, História Natural, Geografia e História e Ciências Sociais. (Passos, 1999, p. 32).

Comemorar significa também relembrar o passado, analisar o presente e construir caminhos mais favoráveis para o futuro.

### Breve contexto da Formação de professores e professoras

A história da Institucionalização da formação de docentes no Brasil “foi deliberadamente mediada por aspectos políticos, econômicos e sociais” (Santos; Mororó, 2019, p. 3).

A atenção que deveria ser dada à educação através da formação de seu corpo docente, já permeava o pensamento de filósofos dos séculos XVI e XVII, a exemplo de Jan Amos Komenský ou Comenius (1592) considerado o fundador da didática.

Comenius acreditava em uma educação para a vida toda. Seu projeto pedagógico

precisavam participar das aulas da disciplina Didática e, no caso da matemática, a disciplina era chamada Didática Especial da Matemática.

---

é fundamentalmente um plano de sociedade — de sua organização, sua política e seu funcionamento. Para formar uma nação equilibrada, em tempos de guerras e de epidemias, seria fundamental uma sólida formação, para a qual seriam necessárias as instituições que Comenius chamava de escolas universais. (Boto, 2021, p. 41).

Apesar de certas divergências, a exemplo do controle das pessoas e a obrigatoriedade em relação ao culto católico, a pedagogia defendida por Comenius, em relação à educação democrática e igualitária para a sociedade, pode ser considerada o sonho de consumo de todos os professores e todas as professoras que lutam por este ideal — educação de qualidade para todos e todas.

Ainda no século XVII, segundo Dermeval Saviani (2005, p. 12), “o primeiro estabelecimento de ensino destinado à formação de professores teria sido instituído por São João Batista de La Salle em 1684, em Reims, com o nome de ‘Seminário dos Mestres’ ”.

Na Europa do século XVIII as questões políticas e sociais agitavam a população, causando um sentimento de luta, desejo de mudanças e transformações na condição precária em que viviam sob um regime ainda feudal, dominado pela monarquia absolutista. Através de vários movimentos, a exemplo da Revolução Industrial e da Revolução Francesa, o povo almejava alcançar os ideais de Liberdade, Igualdade e Fraternidade difundidos naquele momento. Para alcançar esses objetivos, porém, seria preciso um novo olhar sobre a educação que, até aquele momento, se mantinha basicamente sob o poder da Igreja e dirigida a poucos. De acordo com Marlete Schaffrath (2008, p. 143): “Este período foi também muito rico em reflexões pedagógicas, principalmente em torno de uma educação leiga e a cargo do Estado”. Esses movimentos favoreceram a instalação, em Paris, da primeira *École Normale*, ocorrida em 1795.

Apesar das ações ocorridas no século XVII e XVIII, o desenvolvimento das discussões em torno da formação de docentes só começou a ganhar mais força e a ter mais destaque no século XIX, devido às necessidades que começaram a surgir “no mundo do trabalho, sobretudo após a Revolução Industrial, a partir da qual se passou a pensar uma educação mais atenta à qualificação de mão-de-obra.” (Schaffrath, 2008, p. 143) Neste sentido, pontua Luiz Antônio Cunha (1979, p. 114):

Os sistemas escolares europeus praticamente excluíam os trabalhadores, e as es-

colas eram frequentadas pelas classes dominantes e pelas camadas médias da população. Os filhos dos trabalhadores, e preferencialmente os órfãos e abandonados, quando muito eram acolhidos por entidades confessionais.

A questão envolvendo classe social perpassa os caminhos de todas as atividades e de todas as relações sociais, o que não foi diferente no contexto educacional, ou seja, a educação era pensada para poucos, sendo estes os homens de classe social mais favorecida. Observa-se também a presença da questão de gênero, uma vez que as mulheres eram deixadas de fora do núcleo educacional. Esse contexto histórico e cultural, infelizmente, ainda nos atinge nos dias atuais em muitas sociedades.

No Brasil as preocupações com a formação de professores foram tardias, pois o contraste social com o contexto europeu era imenso. “Enquanto lá se viaia um momento de grandes transformações sociais, aqui ainda se encontrava uma sociedade escravista, agrária e submetida a uma política econômica opressora por parte da Coroa Portuguesa” (Schaffrath, 2008, p. 143). Somente após a independência do país, começaram a surgir ideias para se instruir a população, com o objetivo de se consolidar o novo Estado Brasileiro.

Em 1823 um decreto imperial cria uma escola de primeiras letras, mas com o objetivo principal de instruir as corporações militares:

Crêa uma Escola de primeiras letras, pelo metodo do Ensino Mutuo para instrucção das corporações militares. Convindo promover a instrucção em uma classe tão distinta dos meus subditos, qual a da corporação militar, e achando-se geralmente recebido o metodo do Ensino Mutuo, pela facilidade e precisão com que desenvolve o espírito, e o prepara para aquisição de novas e mais transcendentes ideas; [...] sendo em benefício não somente dos militares do Exército, mas de todas as classes dos meus subditos que queiram aproveitar-se de tão vantajoso estabelecimento. (Brasil, 1823, p. 41).

Somente em **1827**, a Lei Imperial de 15 de outubro estabelece o ensino das Primeiras Letras para toda a população. Podemos considerar esta Lei como a primeira tentativa para a consolidação da formação de professores no Brasil. Alguns dos seus principais artigos assim estabeleciam:

Art. 1º Em todas as cidades, vilas e lugares mais populosos, **haverão as escolas de primeiras letras que forem necessárias**.

Art. 4º As escolas serão do **ensino mútuo**<sup>2</sup> nas capitais das províncias; e serão também nas cidades, vilas e lugares populosos delas, em que for possível estabelecerem-se.

Art. 5º [...] os **Professores que não tiverem a necessária instrução deste ensino, irão instruir-se em curto prazo e à custa dos seus ordenados nas escolas das capitais**.

Art. 6º Os professores ensinarão a **ler, escrever, as quatro operações de aritmética, prática de quebrados, decimais e proporções, as noções mais gerais de geometria prática, a gramática de língua nacional, e os princípios de moral cristã e da doutrina da religião católica e apostólica romana, proporcionados à compreensão dos meninos; preferindo para as leituras a Constituição do Império e a História do Brasil**.

Art. 7º **Os que pretendem ser providos nas cadeiras serão examinados publicamente** perante os Presidentes, em Conselho; e estes proverão o que for julgado mais digno e darão parte ao Governo para sua legal nomeação.

Art. 11. **Haverão escolas de meninas** nas cidades e vilas mais populosas, em que os Presidentes em Conselho, julgarem necessário este estabelecimento.

Art. 12. As Mestras, além do declarado no Art. 6º, com exclusão das noções de geometria e **limitado a instrução de aritmética só as suas quatro operações, ensinarão também as prendas que servem à economia doméstica**; e serão nomeadas pelos Presidentes em Conselho, aquelas mulheres, que sendo brasileiras e de reconhecida honestidade, se mostrarem com mais conhecimento nos exames. (Brasil, 1827; grifos nossos).

Várias discussões podem emergir desses artigos, a exemplo da questão de gênero, como aparece no artigo 11, ou seja, impõe-se a criação de escolas para

meninos e escolas para meninas; também no artigo 12 fica estabelecido que as mulheres exercerão a docência para as meninas desde que atendam às normas de boa conduta e honestidade. Ainda no artigo 12 fica estabelecida a exclusão de conteúdos matemáticos para as meninas e inclusão do ensino das prendas domésticas. São posicionamentos que demarcam e que deixam evidentes as questões históricas e culturais que envolviam a criação e formação das pessoas, particularmente, a exclusão e o desinteresse na formação educacional das mulheres. Mas essa discussão será ampliada em outro artigo; no momento, voltemos ao artigo 5 — “**os Professores que não tiverem a necessária instrução deste ensino, irão instruir-se em curto prazo e à custa dos seus ordenados nas escolas das capitais**” — que estabelece a discussão do nosso contexto (Grifos nossos). A determinação de que os custos com a formação ficariam a cargo do próprio interessado demonstra que a educação dos homens continuava sendo pensada para poucos — os privilegiados da elite.

Segundo Leonor Tanuri (2000, p. 63), “pouco resultou [...] do Governo Central [...] preparo dos seus docentes de conformidade com a lei de 1827. As primeiras escolas normais brasileiras só seriam estabelecidas, por iniciativa das Províncias, logo após a reforma constitucional de 12/8/1834”.

Essa reforma constitucional, conhecida como Ato Adicional de 1834, foi promulgada através de acordos entre os grupos políticos liberais e os conservadores, estabelecendo uma maior autonomia das Províncias e a criação de Assembleias Legislativas. Diante desse ‘ajuste’ político, o grupo conservador que assumiu o poder na província do Rio de Janeiro criou, em 1835, a primeira escola normal brasileira no município de Niterói. Nesta escola, “mais do que ensinar a ler e escrever, [...] o professor deveria funcionar muito mais como agente disseminador de uma mentalidade moralizante do que como difusor de conhecimentos”; afinal, os objetivos dos grupos dominantes com a instrução pública era “fazer com que os populares identificassem os objetivos da classe dirigente com os seus” (Schaffrath, 2008, p. 150).

Mais uma vez, chamamos atenção para a questão das interseccionalidades, englobando as categorias de gênero, classe, raça e poder, que ocorriam no contexto social e não foi diferente no contexto das escolas normais visto que, como já foi pontuado, essas são questões históricas e culturais que estão enraizadas na sociedade. A pesquisadora Marlete Schaffrath (2008, p. 151) frisa em sua pesquisa:

[...] um ponto que merece destaque no es-

<sup>2</sup>Ensino mútuo, também conhecido como método de Lancaster, consiste em utilizar alunos/as com nível de conhecimento mais avançado para ensinar outros/as estudantes, tipo de monitoria. Ou seja, os professores aprendiam a ensinar enquanto estavam aprendendo.

tudo da Escola Normal de Niterói refere-se à ausência do elemento feminino e do negro na busca de preparo para a docência. A instrução era pública, mas o saber era distribuído em porções e não atingia a todos os segmentos da sociedade. Na verdade, somente aqueles que eram homens, livres e possuíam propriedades eram depositários do nobre benefício de ser cidadão do Império. Os negros, inclusive os já libertos, eram proibidos de frequentar as escolas públicas [...] e a Escola Normal. [...] Quanto à discriminação sofrida pelas mulheres, era um pouco mais sutil dada a prerrogativa da diferenciação de currículo em relação ao que era oferecido nas escolas primárias masculinas. A ela era dado aprender leitura, escrita e as quatro operações matemáticas, sendo, portanto, interditado ensino de Geometria, Decimais e Proporções, oferecido aos meninos.

Persistem os mecanismos de discriminação com os considerados pertencentes às “minorias” pela representação social. É importante ressaltar que desde o tempo dos Jesuítas, que fundaram as primeiras escolas no Brasil em 1549, com o objetivo de evangelizar os homens da população indígena, as mulheres dessa etnia foram desconsideradas. É diante desse quadro histórico que, infelizmente, ainda nos deparamos com a realidade atual, ou seja, observamos que as escolhas profissionais ainda são demarcadas pelas relações de gênero, classe social, raça/etnia e poder. As primeiras Escolas Normais não tiveram o êxito esperado, “o insucesso [...] e os parcós resultados por elas produzidos granjearam-lhes tal desprestígio que alguns presidentes de Províncias e inspetores de Instrução chegaram a rejeitá-las” (Tanuri, 2000, p. 65). Ocorreu um período de incertezas generalizado em todas as províncias brasileiras, só voltando a atingirem um certo grau de valorização a partir dos anos 1870, quando:

[...] transformações de ordem ideológica, política e cultural foram acompanhadas de intensa movimentação de ideias [...] A crença de que um “país é o que a sua educação o faz ser” generalizava-se. [...] ocorre também o enriquecimento de seu currículo, ampliação dos requisitos para ingresso e sua abertura ao elemento feminino. (Tanuri, 2000, p. 66).

Diante desse contexto, faz-se necessário pontuar

o objetivo inicial das escolas denominadas de Escola Normal:

[...] foi pensada com a função de transmitir, consolidar e garantir, através de “normas”, os objetivos de ordem social e moral estabelecidos por seus dirigentes, de maneira que as/os futuras/os professoras/es se identificassem e assumissem tais objetivos como seus. [...] na época, a intenção era controlar a população e integrá-la aos ideais da boa ordem e da boa conduta, não tardou para que as mulheres fossem vistas como o elemento agregador e transmissor destas características. Assim, o termo “Escola Normal” esteve associado as pretensões de “normalidade” que significava, neste caso, seguir as regras da moral, da boa conduta, do amor a pátria e aos seus dirigentes. Características condizentes ao que se estabelecia como próprio da conduta feminina. (Menezes, 2019, p. 36).

Mesmo com o advento da República, que transformou as Províncias em Estados Federados, o campo educacional continuou pobre de significativas mudanças, as relações de poder continuaram atuantes mantendo os mesmos interesses dos grupos dominantes do período imperial. Alguns Estados se

[...] organizaram independentemente, ao sabor de seus reformadores, [...] sob a liderança dos estados mais progressistas, especialmente São Paulo, e registram alguns avanços no que diz respeito ao desenvolvimento qualitativo e quantitativo das escolas de formação de professores. (Tanuri, 2000, p. 68).

Na década de 30 do século XX, algumas reformas e atos ocorreram, a exemplo da Reforma Francisco Campos (1931), que reorganizou e modernizou o ensino secundário: aumentando o curso de 5 para 7 anos; tornando a frequência obrigatória; passando o curso para o regime de dois ciclos, sendo o primeiro chamado de fundamental e o segundo de complementar; criando o regramento para as avaliações; criando o Conselho Nacional de Educação. Ao assumir a pasta da Educação, em 1930, o ministro Francisco Campos destacou em seu discurso: “queremos ter professores sem cuidar de formá-los” e, em 1931, ao falar das motivações do Decreto nº 19.890, relatou:

O Brasil não cuidou ainda de formar o professorado secundário, deixando a educação

da sua juventude entregue ao acaso da improvisação e da virtuosidade, sendo inacreditável que nenhum esforço haja sido tentado naquela direção. (Campos apud Castro, 1974, p. 629).

Já em 1932 ocorreu o Manifesto dos Pioneiros da Educação Nova, liderado por Anísio Teixeira e assinado também por Fernando de Azevedo, Lourenço Filho e outros intelectuais. O manifesto defendia uma educação pública, laica e gratuita:

[...] o dever mais alto, mais penoso e mais grave é, de certo, o da educação que, dando ao povo a consciência de si mesmo e de seus destinos e a força para afirmar-se e realizá-los, entretém, cultiva e perpetua a identidade da consciência nacional, na sua comunhão inteira com a consciência humana. (Teixeira, 1984, p. 425).

As ideias defendidas por Anísio Teixeira na época demonstravam a preocupação com a formação da classe docente, dizia ele: “Se a ‘escola normal’ for realmente uma instituição de preparo profissional do mestre, todos os seus cursos deverão possuir o caráter específico que lhe determinará a profissão do magistério” (Teixeira, 1933, p. 2). Nesse documento, Anísio traça o programa de formação da “profissão do magistério — que é mais uma arte do que uma ciência — não se pode preparar o professor senão por meio do aprendizado direto”. Essa reforma transforma a escola normal do Distrito Federal em Instituto de Educação.<sup>3</sup>

Esses movimentos e decretos retratavam as preocupações de alguns intelectuais em relação a situação educacional em que se encontrava o país. Havia, como já pontuado, um descaso com a educação que era oferecida, os considerados “minorias” não eram vistos. A proposta trazida pela educação nova tinha por objetivo integrar a escola ao meio social, buscando valorizar todas as pessoas em suas individualidades e em suas regionalidades, sem perder de vista as relações humanas cooperativas e integrativas.

Foi nesse contexto, com o advento da criação das Universidades do Distrito Federal (1935) e da Universidade de São Paulo — USP (1934), que as Escolas de Professores idealizadas por Anísio Teixeira, Fernando de Azevedo e todos os participantes do movimento renovador foram incorporadas às Universi-

dades como Escolas de Educação. Surgiu assim, em 1939,

[...] o curso de Pedagogia [...] na Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil. [...] visando à dupla função de formar bacharéis, [...] e licenciados, destinados à docência nos cursos normais. Iniciava-se um esquema de licenciatura que passou a ser conhecido como “3+1”, ou seja, três anos dedicados às disciplinas de conteúdo — no caso da Pedagogia, os próprios “fundamentos da educação” — e um ano do Curso de Didática, para formação do licenciado. (Tanuri, 2000, p. 74).

Segundo Dermeval Saviani (2005, p. 17), “aos Cursos de Licenciatura coube a tarefa de formar professores para as disciplinas específicas que compunham os currículos das escolas secundárias; e os Cursos de Pedagogia ficaram com o encargo de formar os professores das Escolas Normais”.

Observa-se que “o título de licenciado, portanto, não tinha origem em um curso em si, mas se tratava de uma complementação pedagógica justaposta ao curso de bacharelado” (Santos; Mororó, 2019, p. 5).

Durante o período de 1942 a 1946 foram promulgados decretos-leis conhecidos como “Leis Orgânicas do Ensino”, que tinham como objetivos regulamentar o funcionamento e organização do ensino no Brasil na tentativa de garantir “uma base comum aos sistemas estaduais de formação de professores” (Tanuri, 2000, p. 75). E continua esclarecendo a autora:

A Lei Orgânica do Ensino Normal (decreto-lei 8530 de 1946) não introduziu grandes inovações, apenas acabando por consagrar um padrão [...] o Normal foi dividido em dois ciclos: o primeiro fornecia o curso de formação de “regentes” do ensino primário, em quatro anos, e funcionaria em Escolas Normais Regionais; o curso de segundo ciclo, em dois anos, formaria o professor primário e era ministrado nas Escolas Normais e nos Institutos de Educação. (Tanuri, 2000, p. 75).

Durante o período conturbado vivido pela população brasileira com o regime militar de 1964, a estrutura educacional foi reajustada e reformulada. Em 1968, ocorreu a reformulação do ensino superior através da Lei 5.540 (Brasil, 1968).

A Reforma Universitária de 1968 constituiu-se também como um marco regulatório da

<sup>3</sup>“O Instituto de Educação foi constituído por quatro escolas: Escola de Professores, Escola Secundária (com dois cursos, um fundamental, com cinco anos, e um preparatório, com um ano), Escola Primária e Jardim de Infância” (Tanuri, 2000, p. 73).

---

formação de professores, pois foi inaugurado a partir daí um novo campo de estudos nos espaços das faculdades/centros de educação das universidades. Nessa conjunção, as licenciaturas, que até então estavam vinculadas à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, ganham outra configuração: departamentos específicos de cada área do conhecimento; um espaço de formação pedagógica. (Santos; Mororó, 2019, p. 6).

Três anos depois, a Lei 5.692 (Brasil, 1971) alterou a estrutura do Ensino Primário e do Ensino Médio, que passaram a ser designados, respectivamente, de Primeiro Grau, com duração de oito anos, e Segundo Grau, com duração de três a quatro anos,

Em decorrência dessa nova estrutura desapareceram as Escolas Normais. Em seu lugar foi instituída a Habilitação Específica de 2º grau para o exercício do magistério de 1º grau (HEM), [...] a formação de professores para o antigo ensino primário, foi reduzida a uma habilitação dispersa em meio a tantas outras. [...] a lei 5692/71 previu a formação de professores em nível superior, em cursos de Licenciatura curta (3 anos de duração) ou plena (4 anos de duração). Ao Curso de Pedagogia, além da formação de professores para HEM, conferiu-se a atribuição de formar os especialistas em educação [...] diretores, orientadores, supervisores e inspetores de ensino. (Saviani, 2005, p. 19; 20; 21).

Durante as décadas de 80 e 90, no contexto cultural e educacional do país, já se apresentava um quadro de insatisfação geral em relação à qualidade dos cursos de formação docente, os quais apresentavam falhas e carências em relação à atuação do governo. Desse modo, vários educadores se reuniram em movimentos de luta, na tentativa de alcançar novas alternativas para melhorar a formação do corpo docente. Era um momento de grandes conflitos, o país estava envolvido com a ascensão das políticas neoliberais que assolavam o mundo e atingiam os critérios e a qualidade do ensino. Fazia-se necessária e urgente a constituição de uma nova estrutura, uma nova reforma que, de fato, pudesse atender aos anseios de uma sociedade que já vivenciava o contexto da industrialização. Segundo Santos e Mororó (2019, p. 9), o “contexto de luta e de embate ideológico entre as concepções alternativas dos movimentos organizados da sociedade e a concepção neoliberal representada

pelo capital” deu origem à construção de uma nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional — Lei 9.394 (Brasil, 1996), elaborada em consonância com a Constituição de 1988.

Com base nos preceitos da Constituição Federal de 1988 é que se pode dar fim à discussão acerca do ensino privado, uma vez que restou pacificado o entendimento trazido pelo art. 209 quanto ao ensino livre à iniciativa privada, desde que sejam cumpridas as normas gerais educação nacional e o seu funcionamento seja autorizado e avaliado pelo poder público. E insere, ademais, a questão curricular, depois regulamentada pela LDB/96, no sentido de que devem ser fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de modo a “assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais” — art. 210. A importância da CF/88 e sua principal contribuição à LDB/96 está no fato de efetivamente considerar a educação como um serviço público de responsabilidade do Estado, em suas diversas esferas. (Carvalho; Rosa, 2020, p. 298).

Corroborando esse debate, Iria Brzezinski (2010, p. 190) reforça o contexto da promulgação da nova LDB:

O cenário da tramitação da LDB/1996 revelou o campo de disputa ideológica entre o público e o privado, tendo como foco a relação conflitante entre a defesa da escola pública, laica, gratuita para todos e de qualidade socialmente referenciada em todos os níveis de escolarização, e o ensino privado, administrado pelos empresários que não encontraram obstáculos da sociedade política para transformar em mercadoria o direito à educação preceituado na Constituição de 1988. Esse cenário foi marcado no Congresso Nacional por uma disputa na arena de poder na qual se aglutinaram forças de alguns parlamentares do Colégio de Líderes em torno das reivindicações do mundo vivido dos educadores, representado pelo Fórum, bem como de outros parlamentares que atendiam interesses dos empresários e lobistas do ensino privado.

A nova LDB “estabelece que a formação de docentes para atuar na educação básica far-se-á em ní-

vel superior, em cursos de licenciatura, de graduação plena, em universidades e institutos superiores de educação” (Tanuri, 2000, p. 85). Estabelece também a ampliação do acesso e obrigatoriedade à educação básica para todas as pessoas brasileiras.

A educação básica (educação infantil, ensino fundamental e o ensino médio) é um conceito mais do que inovador para um país que, por séculos, negou, de modo elitista e seletivo, a seus cidadãos, o direito ao conhecimento pela ação sistemática da organização escolar. (Cury, 2008, p. 294).

Segundo Luiz Carvalho e Rosana Rosa (2020, p. 299): “a LDB/96 trouxe avanços [...] para a construção de propostas educacionais que finalmente superem os paradigmas da ‘transmissão do conhecimento’ e possibilitem a extinção da educação bancária combatida por Paulo Freire”. Assim como as normativas que, em geral, apresentam aspectos de avanços e desafios que estão sempre sendo ajustados e modificados de acordo com a época e o contexto da sociedade em que estão inseridas, a LDB também entra nesta lista, afinal, a sociedade está em constante transformação. O que importa é o olhar, a vontade de crescer e melhorar. Dessa forma, precisamos da ajuda de todas as pessoas conscientes de que só através da EDUCAÇÃO conseguiremos enfrentar as adversidades que o contexto social nos apresenta.

A LDB não será suficiente para, sozinha, promover o necessário salto de qualidade da educação pública brasileira. De toda forma, a Lei faz parte do extenso repertório de políticas necessárias para que esse salto seja possível — é necessário, entre outros pontos, financiamento adequado, condições de trabalho, formação continuada, valorização salarial e profissional dos trabalhadores da educação. Desse modo, as escolas serão capazes de assegurar inclusão e qualidade do ensino a todos os estudantes. (Souza; Araújo; Silva, 2017, p. 159).

É nesse sentido que a licenciatura como espaço de formação profissional dos educadores e das educadoras é também um espaço de luta em prol da valorização salarial e profissional, questões imprescindíveis para alcançarmos a qualidade educacional desejada e a equidade de inserção e permanência de quem ocupa esse espaço.

## A Licenciatura em Matemática na Bahia

A Bahia foi sede de alguns pioneirismos em relação ao estudo da Matemática. Segundo o pesquisador Clóvis Pereira da Silva (1999, p. 14), “no Colégio da Bahia<sup>4</sup>, em 1757, foi criada a Faculdade de Matemática, na qual os alunos estudavam geometria euclidiana, perspectiva, trigonometria, equações algébricas, entre outros”. Para a época, os estudos desses temas foram inovadores e se constituiu no começo de uma longa jornada. Outro pioneirismo inovador na Bahia ocorreu com a presença majoritária de mulheres no curso de graduação em Matemática da Faculdade de Filosofia.

A “novidade” presente no índice numérico da participação das mulheres no curso de Matemática em plena década de 40 do século passado se mostrou motivadora pelo fato do campo da Matemática ainda ser considerado adverso à participação das mulheres, portanto, no passado, mulheres ingressando no curso superior em Matemática configurava-se como uma novidade surpreendente no cenário baiano. (Menezes, 2019, p. 28).

Mas em relação ao processo de formação de professores e professoras a Bahia seguiu o percurso ocorrido no país, ou seja, o processo foi lento e atravessado por questões sociais, políticas e econômicas que demarcavam o poderio das classes dominantes e o abandono das classes sociais menos favorecidas. O pensamento era educar as elites e instruir a população para atender ao mercado capitalista com mão de obra mais especializada. Pensamento fortalecido

<sup>4</sup>No Estado da Bahia, até 1950, só existia uma instituição pública de nível secundário, o Liceu Provincial da Bahia, depois chamado de Ginásio da Bahia (GB) e, atualmente, chamado de Colégio Estadual da Bahia, mais conhecido como Colégio Central. A Escola Normal já funcionava, contudo seu objetivo era a preparação de professores primários (Lima, 2003). Um fato importante descrito na dissertação de mestrado de Lima foi o registro da presença minoritária das mulheres como discentes no GB e também como docentes. Somente em 1927 ocorreu a contratação de uma mulher para o quadro docente, Heddy Peltier dos Santos Cajueiro, professora de inglês e filha do médico Santos Cajueiro. Podemos inferir que a influência do pai determinou a possibilidade dessa contratação. Ao pesquisar na Wikipedia, veículo de comunicação on-line, sobre o GB outra “surpresa”, pois há uma lista de nomes dos ilustres alunos e professores do GB, da qual não consta, porém, o nome de nenhuma mulher. Mais uma vez, a certeza de que nossa historiografia continua mantendo os marcadores das diferenças de gênero que invisibilizam as realizações e participação das mulheres na história (Menezes, 2019, p. 116).

pela “ideologia da Igreja Católica, sólida instituição, que se posicionava claramente a favor do ensino acadêmico, classicista e sobretudo classista (Cury, 1994, p. 19, apud Brzezinski, 2010, p. 189). Contudo, com a fundação da Faculdade de Filosofia da Bahia (FF), ocorrida em 1941, tendo como articulador e fundador o professor Isaías Alves, ocorreu a institucionalização do processo formativo de professores e professoras, pois neste espaço se deu início aos cursos de graduação que começaram a funcionar em março de 1943. Nessa época, ao escolher a graduação em matemática, os/as estudantes, após três anos de curso, estavam aptos a obter o título de Bacharel em Matemática e, segundo Januária Bertani (2011, p. 59), havia “a necessidade do título de bacharel para a matrícula no curso de Didática”. Esse processo é conhecido como 3+1.

[...] em 1946, foram estabelecidas novas condições para o regime didático das faculdades de filosofia. Dentre outros aspectos, foi ampliado para quatro anos o tempo de estudo necessário para obtenção do diploma de bacharel ou de licenciado. Para os três primeiros anos, haveria um currículo fixo, enquanto que, no quarto ano, para obter a licenciatura, os alunos deveriam receber formação didática, teórica e prática, na escola de aplicação anexa, além das disciplinas regulares do curso de Didática. Aqueles que não quisessem a licenciatura, poderiam cursar durante o quarto ano cadeiras complementares oferecidas na faculdade para receberem o diploma de bacharel. (Dias; Lando; Freire, 2018, p. 151).

Segundo Bertani (2011, p. 62), “o programa de ensino do curso de Didática seguia o ‘padrão da Faculdade Federal de São Paulo’”, e as atividades de prática de ensino eram realizadas no Colégio de Aplicação. O curso de Didática era composto pelas seguintes disciplinas:

Didática Geral, Didática Especial de Matemática, Psicologia Educacional, Administração Escolar, Fundamentos Biológicos da Educação e Fundamentos Sociológicos da Educação. Sua carga horária semanal era de 18 horas, com três horas semanais para cada disciplina, que eram frequentadas por alunos de todos os cursos, exceção para a didática especial, que tinha seis ramos: filosofia; matemática; geografia e história; ciências sociais; letras: clássicas, neolatinas

e anglo germânicas; e pedagogia. (Dias; Lando; Freire, 2018, p. 151)

Antes desse período, atuavam nas escolas secundárias como docentes de matemática os profissionais formados em engenharia. Particularmente, assumiam a cátedra de Matemática os professores catedráticos da Escola de Engenharia da Bahia e do Colégio da Bahia (atual Colégio Central). Portanto o advento da fundação da FF da Bahia estabeleceu um marco fundamental para a profissionalização de professores e professoras de Matemática no Estado — a criação da formação específica do docente e da docente em Matemática. Somente em 1956, porém, o termo Licenciatura passa a ser usado, “as quatro séries eram compreendidas como sendo do Curso de Licenciatura em Matemática, com três anos de matemática e um de didática, voltada para as questões referentes ao ensino da matemática e das disciplinas de caráter pedagógico comuns a todos os cursos de licenciatura” (Bertani, 2011, p. 63). Uma das professoras que assumiu a cadeira de Didática Especial da Matemática foi a professora Martha Maria de Souza Dantas, concluinte do curso de matemática da FF na turma de 1947. Martha Dantas (1993, p. 15) não se sentia confortável com a metodologia matemática usada nas escolas na época.

[...] os cursos de metodologia da matemática eram por vezes, até ridicularizados [...] foram essas dificuldades que me levaram [...] a observar, em 1953, na Bélgica, França e Inglaterra, o ensino da Matemática, [...] eu poderia [...] sabendo transmiti-la, [...] arrancar das garras do medo, quantos, no ensino da Matemática foram mal introduzidos. A partir daí eu não podia mais separar o conhecimento da pedagogia, porque só dessa união podem advir soluções para eliminar o sacrifício inútil de muitos alunos, causado por um ensino irresponsável. (Dantas, 1993, p. 27-28).

Nesta fala, a professora Martha reforça a importância dos cursos de Licenciatura na formação do educador e da educadora. É preciso conciliar conhecimento específico da área com conhecimento didático-pedagógico.

Com o pensamento de aprimorar o conhecimento específico da Matemática na Bahia, a professora Arlete Cerqueira Lima, concluinte do curso de Licenciatura em Matemática da turma de 1954, vai à USP, em 1957, estudar a nova matemática que estava sendo di-

fundida em outros Estados — era a Matemática Moderna que começava a ser introduzida. Arlete foi a pioneira no ensino das disciplinas “*Teoria dos Conjuntos, Álgebra Linear, Álgebra Moderna, Topologia Geral, Teoria de Galois, Funções Analíticas, Lógica Formal*” (Menezes, 2019, p. 219).

Juntas, Martha e Arlete sentiram que precisavam se unir com o objetivo de aprimorar os conhecimentos matemáticos que eram praticados na Bahia. Após enfrentarem as relações de gênero e de poder que se faziam presentes no campo matemático baiano, elas articularam e, finalmente, criaram, em 1960, o Instituto de Matemática e Física da Universidade da Bahia.<sup>5</sup>

Com a Reforma Universitária de 1968 o Instituto de Matemática passa a ter vida própria, separando-se do Instituto de Física, assumindo todo o ensino de Matemática da universidade, ou seja, o curso de Matemática passa a ter seu espaço, seu departamento e sua estrutura própria.

De 1968 até os dias atuais, a Licenciatura em Matemática da UFBA tem procurado se ajustar ao perfil dos/as ingressantes. Há uma constante busca por atualização das disciplinas e preparação dos/as futuros/as docentes.

Desde o momento em que foi criado através do Decreto Federal nº 10.664 (Brasil, 1942), o curso de graduação em Matemática continuamente se reestrutura para atender às demandas normativas e sociais. Em 1988 realizou uma grande mudança no perfil do curso buscando atingir os seguintes objetivos:

- Adequar o currículo à realidade dos(as) alunos(as) que ingressavam e à realidade educacional brasileira da época;
  - Agrupar as disciplinas em dois ciclos: um básico [...] e um profissionalizante;
  - Incluir, no início do curso, disciplinas de conteúdo matemático de nível médio com abordagem de nível superior;
  - Estabelecer um encadeamento de disciplinas, através do sistema de pré-requisitos.
- (UFBA, 1988, p. 13).

Em 2007 adaptou seu Projeto Pedagógico do Curso — PPC às exigências da Resolução do Conselho Nacional de Educação (CNE) no que tange às dimensões práticas e aos estágios supervisionados para os Cursos de Formação de Professores da Educação Básica em nível superior.

Em 2008 o Instituto de Matemática e Estatística se incorporou ao Programa Presidencial de Apoio a

Planos de Expansão e Reestruturação das Universidades Federais (REUNI), passando a oferecer 45 vagas anuais para o Curso Noturno de Licenciatura em Matemática. Esse novo curso tem uma grande relevância no sentido de proporcionar oportunidade ao público formado, em geral, por trabalhadores, para a realização profissional como docente em matemática para atuar no Ensino Fundamental e Ensino Médio. Em 2013 ocorreu uma nova reformulação no PPC objetivando adequar e preparar os/as discentes para o Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE). Em 2024.1 o programa do curso englobará os temas de Gênero, Direitos Humanos, Relações Étnico-Raciais e Meio Ambiente, objetivando preparar os/as licenciados/as para assumirem uma relação de integração e respeito com a diversidade cultural e social característica da nossa sociedade.

Um importante trabalho é desenvolvido pelo Laboratório de Ensino de Matemática e Estatística — LEMA/UFBA, espaço que tem “contribuído para a formação, difusão, popularização e desmistificação da ciência, sem deixar de enfatizar as justificativas que caracterizam o pensamento científico” (UFBA, 2023).

Atualmente o curso disponibiliza anualmente 60 vagas para ingresso no turno diurno. A partir de 2024 os novos ingressantes irão desenvolver seus estudos baseados na nova matriz curricular que está sendo avaliada pelos Conselhos Superiores da Universidade e deve ser implementada ainda no ano de 2024.

Quadro 1 — Matriz Curricular da Licenciatura em

Matemática da UFBA	
Disciplinas	Carga Horária
Obrigatórias	2655 horas
Optativas	180 horas
Atividades Complementares	200 horas
Atividades de Extensão	288 horas
TOTAL	3323 horas

Fonte: Elaboração própria a partir do PPC/Licenciatura em Matemática (UFBA, 2023).

De acordo com o Projeto Pedagógico do Curso (UFBA, 2023, p. 22), “os componentes obrigatórios de Laboratório de Ensino de Matemática I, Laboratório de Ensino de Matemática II e Seminários Temáticos, contém cada um, 15 horas dedicadas obrigatoriamente à extensão”. As disciplinas obrigatórias apresentam a seguinte distribuição de acordo com o núcleo de formação:

Quadro 2 — Disciplinas Obrigatórias da Licenciatura em Matemática da UFBA

Conhecimentos Matemáticos	1650 horas
Conhecimentos das Ciências da Educação	705 horas
Conhecimentos das Ciências Afins	300 horas

<sup>5</sup>Somente em 1965 a Universidade da Bahia (UBa) passou a ser chamada Universidade Federal da Bahia (UFBA), atendendo às determinações da Lei Nº 4.759/65 (Brasil, 1965).

---

Fonte: Elaboração própria a partir do PPC/Licenciatura em Matemática (UFBA, 2023).

Ao longo do processo formativo, os/as estudantes realizam também estágios supervisionados no total de 405 horas e disciplinas de dimensão prática, perfazendo o total de 405 horas.

Como foi visto anteriormente, além das disciplinas de conhecimento específico da matemática, os/as estudantes, desde o segundo semestre, já começam a participar dos assuntos relacionados a didática pedagógica e estágios, visando adquirir experiência no seu fazer em sala de aula. Essas atividades serão assim distribuídas:

**Quadro 3 — Disciplinas Obrigatórias da Licenciatura em Matemática da UFBA**

Dimensão Prática	855 horas
Estágios Supervisionados	405 horas

Fonte: Elaboração própria a partir do PPC/Licenciatura em Matemática (UFBA, 2023).

Em todo e qualquer currículo e área de conhecimento, os desafios estão sempre presentes e, no caso específico das licenciaturas, é fundamental o olhar para o ser que ingressa no curso — o futuro professor e a futura professora.

[...] o ensino da Matemática, quando feito com seriedade, exige pesquisa. Pesquisa dos conteúdos a trabalhar que revele, constantemente, o que eliminar e o que introduzir. Pesquisa dos melhores processos para apresentar ao aluno o conteúdo selecionado. [...] A pesquisa em Educação Matemática é um tema vital para os que buscam novas soluções para a Educação. (Dantas, 1993, p. 25; 26;).

A fala da professora Martha mostra a importância da pesquisa constante entre conteúdos e formas de abordagem. É fundamental a perspectiva de proporcionar oportunidades para que as pessoas possam criar seus processos de aprendizagem formativa de forma individual e, ao mesmo tempo, coletiva.

O corpo docente do IME/UFBA tem consciência de que muito ainda precisa ser feito para proporcionar e alcançar uma formação discente preparada para enfrentar as novas práticas, as novas tecnologias, as multiplicidades/pluralidades sociais e culturais que despontam no novo século já em andamento.

No presente ano (2024) será lançado o Edital de Concurso para docentes com formação de Doutorado em Educação Matemática; além disso, receberemos, através de um processo de redistribuição de vaga, um

professor, ex-aluno do nosso curso, com formação na área de Educação Matemática. Uma grande notícia para nossa comunidade discente, que muito tem reivindicado o aprimoramento das práticas didáticas.

Diante dos novos desafios, faz-se necessário que todas as pessoas estejam preparadas para girar a manivela e construir novas formas didáticas e pedagógicas para oferecer uma formação de qualidade aos futuros e às futuras docentes dos conhecimentos matemáticos na perspectiva do ensino para a Educação Básica.

## Alguns comentários

Quando estamos escrevendo sobre um contexto tão complexo como a formação de docentes, não temos como dizer que chegamos a conclusões ou considerações finais, pois estamos tratando de um processo que se aprimora, se recria e se ressignifica constantemente, ao sabor dos novos tempos e ventos que sopram na atmosfera da sociedade em transformação. E consideramos positivo esse processo, pois transformações levam, em geral, a aprimoramento e crescimento, essenciais no processo educacional.

Apesar de, neste texto, se tentar construir um relato temporal linear, não há, na verdade, uma trajetória em linha reta. O processo de formação docente se redimensiona progressivamente, pois ocorre em um contexto sinuoso de avanços e constantes desafios. Afinal, estamos tratando de um processo que é construído em uma relação que está envolvida nos contextos histórico, social, político, temporal e religiosos.

Comemorar 80 anos da Licenciatura em Matemática na UFBA é lembrar que cada nova geração que adentrou esse espaço imprimiu novas concepções, novas contribuições, novos caminhos, novos perfis, novas identidades e novas experiências que precisaram ser vistas, discutidas, valorizadas e ressignificadas.

O tempo todo a formação docente vai sendo gestada em um processo de criação e recriação fomentado pelas novas identidades e experiências pessoais e coletivas envolvidas no processo.

O processo é de constante interação. Cada pessoa vai construindo individualmente seu processo formativo, ao mesmo tempo vai recebendo contribuição do coletivo e, também, vai atuando na construção do processo das outras pessoas.

Os investimentos e (re)construções no processo educativo são importantes e necessários para alcançarmos uma Educação de qualidade a fim de se construir uma sociedade que respeita a diversidade cultu-

ral e social. Parabéns a todas as pessoas que assumiram e lutam pelo crescimento e qualidade das Licenciaturas em nosso país.

Parabéns ao Curso de Matemática com Habilitação em Licenciatura da UFBA e que comemore seus 80 anos de existência investindo a cada dia em avanços estruturais, didáticos, metodológicos, pedagógicos e pessoais para alcançar os próximos 80 anos com mais qualidade na prática docente nas escolas.

## Bibliografia

BERTANI, Januária A. Formação de Professores de Matemática: um estudo histórico comparativo entre a Bahia e Portugal (1941-1968). 2011. 214 f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências)-Universidade Federal da Bahia/Universidade Estadual de Feira de Santana, 2011. Disponível em: <https://ppgefhc.ufba.br/sites/ppgefhc.ufba.br/files/januariaaraujobertani20011.pdf>. Acesso em: 31 out. 2023.

BOTO, Carlota. Comenius e a educação universal para ensinar todas as coisas. *Pedagogia y Saberes*, Bogotá, Colombia, Universidad Pedagógica Nacional/Facultad de Educación, n.54, p. 37-54, 2021.

BRASIL. Decreto Federal Nº 10.664/42, de 20 de outubro de 1942. Autoriza o funcionamento de cursos na Faculdade de Filosofia da Bahia. Disponível em: [https://www.lexml.gov.br/...](https://www.lexml.gov.br/.../). Acesso em: 15 set. 2023.

BRASIL. Decreto Imperial, de 1º de março de 1823. In: COLEÇÃO das Leis do Império do Brasil de 1823 — parte II. Rio de Janeiro: Imprensa Nacional, 1887a. p. 41-42. Disponível em: <https://bd.camara.leg.br/bd/handle/bdcamara/18336>. Acesso em: 31 out. 2023.

BRASIL. Lei Federal Nº 4.759, de 20 de Agosto de 1965. Dispõe sobre a denominação e qualificação das Universidades e Escolas Técnicas Federais. Disponível em: [https://www2.camara.leg.br/...](https://www2.camara.leg.br/.../). Acesso em 6 nov. 2023.

BRASIL. Lei Federal Nº 5.540, de 28 de Novembro de 1968. Fixa normas de organização e funcionamento do ensino superior e sua articulação com a escola média, e dá outras providências. Brasília-DF, 1968. Disponível em: [https://www.planalto.gov.br/.../ccivil\\_03/leis/.../](https://www.planalto.gov.br/.../ccivil_03/leis/.../). Acesso em: 18 out. 2023.

BRASIL. Lei Federal Nº 5.692, de 11 de Agosto de 1971. Fixa Diretrizes e Bases para o ensino de 1º e 2º graus, e dá outras providências. Brasília-DF, 1971. Disponível em: [https://www.planalto.gov.br/.../ccivil\\_03/leis/.../](https://www.planalto.gov.br/.../ccivil_03/leis/.../). Acesso em: 15 set. 2023.

BRASIL. Lei Federal Nº 9.394, de 20 de Dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília-DF, 1996. Disponível em: [https://www.planalto.gov.br/.../ccivil\\_03/leis/.../](https://www.planalto.gov.br/.../ccivil_03/leis/.../). Acesso em: 28 out. 2023.

BRASIL Lei Imperial de 1827. In: COLEÇÃO das Leis do Império do Brasil de 1827. Rio de Janeiro: Imprensa Nacional. Disponível em: <https://bd.camara.leg.br/bd/handle/bdcamara/18336>. Acesso em: 31 out. 2023.

Acesso em: 31 out. 2023.

BRZEZINSKI , Iria. Tramitação e desdobramentos da LDB/1996: embates entre projetos antagônicos de sociedade e de educação. *Revista Trabalho, Educação e Saúde*. Fundação Oswaldo Cruz, v.8, n.2, p.185-206, out.2010.

CARVALHO, Luiz G.; ROSA, Rosana G. da. A construção histórico-normativa da LDB e a necessidade de adequar o sistema educacional brasileiro ao contexto pós-pandemia. *Revista Res Severa Verum Gaudium*, Porto Alegre, v. 5, n. 1, p. 288-320, out. 2020.

CASTRO, Amélia D. de. A licenciatura no Brasil. *Revista de História*, v.50, n.100, p.627-652, 1974.

CUNHA, Luiz Antônio. Educação e desenvolvimento social no Brasil. 4.ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1979.

CURY, Carlos R. J. A educação básica como direito. *Cadernos de Pesquisa*, v. 38, n. 134, p. 293-303, maio/ago. 2008.

DANTAS, Martha M. de S. Uma mestra e sua vida. *Cadernos do IFUFBA*, Salvador, v.6, n.1/2, p.11-36, out.1993.

DIAS, André L. M.; LANDO, Janice C.; FREIRE, Inês A. Formação de professores na Bahia: os cursos de Matemática e de Didática da Faculdade de Filosofia (1943-1968). In: BRITO, Arlete de Jesus; MIORIM, Maria ngela; FERREIRA, Ana Cristina (Org.). *História de formação de professores: a docência da matemática no Brasil*. 2. ed. Salvador: EDUFBA, 2018. p.141-172.

LIMA, Deborah K. de. O banquete espiritual da instrução: o Ginásio da Bahia, Salvador: 1895-1942.

174f. 2003. Dissertação (Mestrado em História)-Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas da Uni-

versidade Federal da Bahia, Salvador, 2003.

MENEZES, Márcia B. de. A Matemática das mulhe-

res: as marcas de Gênero na trajetória profissional das professoras fundadoras do Instituto de Matemá-

tica e Física da Universidade da Bahia (1944-1980).

Salvador: EDUFBA, 2019.

PASSOS, Elizete. Palcos e Plateias: as representa-

cões de gênero na Faculdade de Filosofia. Salvador:

EDUFBA, 1999.

SANTOS, Cláudio W. dos; MORORÓ, Leila Pio. O de-

senvolvimento das Licenciaturas no Brasil: dilemas, perspectivas e política de formação docente. *Revista Histedbr on-line*, Campinas-SP, v.19, p.1-19, 2019.

SAVIANI, Dermeval. História da formação docente no

Brasil: três momentos decisivos. *Revista do Centro de*

*Educação*, v. 30, n. 2, p. 11-26, jul./dez. 2005.

SCHAFFRATH, Marlete. Escola Normal: o projeto das elites brasileiras para a formação de professores. In:

ENCONTRO INTERDISCIPLINAR DE PESQUISA EM

ARTES, 1., 2008, Curitiba. Anais... Curitiba: FAP, 2008.

p.142-152.

SILVA, Clóvis P. da. A matemática no Brasil: uma his-

tória de seu desenvolvimento. 2.ed. São Leopoldo,

Rio Grande do Sul: Editora Unisinos, 1999.

SOUZA, Glória M. A. de; ARAÚJO, Gisele C. de O;

SILVA, Waldeck C. da. Vinte anos da Lei nº 9.394/96,

o que mudou? Políticas educacionais em busca de

democracia. *Revista Retratos da Escola*, Brasília, v.

11, n. 20, p. 147-160, jan./jun. 2017.

TANURI, Leonor M. História da formação de profes-

sores. Revista Brasileira de Educação, n.14, p.61-193, maio/jun./jul./ago. 2000.

TEIXEIRA, Anisio. Como ajustar os ‘cursos de matérias’ na escola normal com os “cursos de prática de ensino”. Boletim de Educação Pública, Rio de Janeiro, Nacional, p.5-13, jan./jun., 1933. Disponível em: <http://arquivohistorico.inep.gov.br/index.php/educadores-m55p1-artigo-comoajustaroscursos\dematerianaescolanormalcomoscursosdepratica\deensino-anisioteixeira1953>. Acesso em: 31 out. 2023.

TEIXEIRA, Anisio. O manifesto dos pioneiros da Educação Nova. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, Brasília, v.65, n.150, p.407- 425, 1984. Disponível em: <http://www.bvanisioteixeira.ufba.br/artigos/mapion.htm>. Acesso em: 20 mar. 2023.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA. Instituto de Matemática e Estatística (IME). LEMA (Laboratório de Ensino de Matemática e Estatística). Salvador, [2023]. Disponível em: <https://ime.ufba.br/index.php/lema/>. Acesso em: 31 out. 2023.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA. Instituto de Matemática e Estatística (IME). Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática. Salvador, 1988. Disponível em: [https://colmat.ufba.br/sites/colmat.ufba.br/files/ppc\\_matematica\\_diurno\\_2006.pdf](https://colmat.ufba.br/sites/colmat.ufba.br/files/ppc_matematica_diurno_2006.pdf). Acesso em: 18 jun. 2023.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA. Instituto de Matemática e Estatística (IME). Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática. Salvador, 2023. Não publicado (Ainda nos órgãos da instituição para avaliação final).



Márcia Barbosa de Menezes é docente do Departamento de Matemática da UFBA. Mestra em Matemática e Doutora em Estudos Interdisciplinares sobre Mulheres, Gênero e Feminismo.

Atua na Pesquisa com o tema: “Trajetórias de Mulheres Matemática na Bahia: desafios e superações”, e no projeto de Extensão “Matemática é coisa de Menina”. Seu foco é incentivar meninas e jovens mulheres a admirarem, ingressarem e permanecerem atuantes na área das Ciências Exatas.

## TEOREMA

# As Mil Faces de Pitágoras

*André L. G. Mandolesi*

O Teorema de Pitágoras (TP) é um dos mais antigos, famosos e úteis teoremas da Matemática, e possivelmente o que maior impacto teve na evolução desta e outras ciências. Neste artigo, vamos olhar para este velho conhecido de diferentes perspectivas, algumas pouco usuais. Iremos lembrar um pouco da sua história, algumas aplicações e generalizações bem conhecidas, outras nem tanto, e ver que ele guarda muitas facetas surpreendentes e geralmente ignoradas.

## O teorema de mil faces

Em sua forma moderna, o TP é a relação

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad (1)$$

entre os comprimentos  $a$  da hipotenusa, e  $b$  e  $c$  dos catetos, de um triângulo retângulo (Fig. 1).

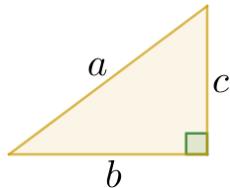


Figura 1: Teorema de Pitágoras,  $a^2 = b^2 + c^2$ .

Sua importância se reflete nas centenas de demonstrações surgidas ao longo do tempo [1, 11]. E a forma como ele permeia toda a Matemática, sob diferentes roupagens, se reflete na diversidade de métodos que usaremos: geometria euclidiana, não-euclidiana, analítica, Riemanniana, trigonometria circular e hiperbólica, álgebra linear e exterior, determinantes, cálculo integral e vetorial, combinatória, nú-

meros complexos, etc. Isso mostra também a unidade da Matemática, e como é fértil o fluxo de conhecimentos entre suas diferentes áreas.

Inúmeros resultados bem conhecidos são basicamente aplicações ou generalizações do TP. Sendo impossível listar todos, ficaremos só nos mais óbvios:

- O TP equivale à identidade trigonométrica fundamental,  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ .
- Decompondo  $v \in \mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$  numa base ortogonal como  $v = v_1 + \dots + v_n$ , temos

$$\|v\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2. \quad (2)$$

- Em  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$ , a distância  $d$  entre  $A = (a_1, \dots, a_n)$  e  $B = (b_1, \dots, b_n)$  é

$$d(A, B)^2 = \sum_{k=1}^n |a_k - b_k|^2.$$

- Se os lados  $b$  e  $c$  formarem um ângulo  $\theta$ , o TP se generaliza como a Lei dos Cossenos,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta. \quad (3)$$

- A métrica Riemanniana no plano euclidiano é  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ , um TP para distâncias infinitesimais. Em superfícies curvas (Fig. 2), ela é uma versão infinitesimal de (3),

$$ds^2 = g_{xx} dx^2 + g_{yy} dy^2 + 2g_{xy} dxdy,$$

onde  $g_{xx}$  e  $g_{yy}$  ajustam a escala de comprimento nas direções  $x$  e  $y$ , e  $g_{xy}$  envolve o ângulo entre elas. Em dimensão  $n$ ,  $ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j$ .

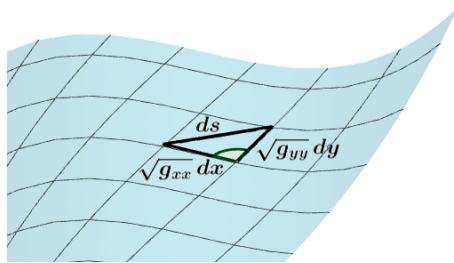


Figura 2: Métrica Riemanniana em uma superfície é uma versão infinitesimal da Lei dos Cossenos.

- Num espaço vetorial com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $u$  e  $v$  são ditos ortogonais se  $\langle u, v \rangle = 0$ , e nesse caso  $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ . Com isso pode-se até, por exemplo, interpretar  $\int_0^{2\pi} (\sin x + \cos x)^2 dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx + \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$  em termos do TP num espaço de funções.

Veremos depois generalizações menos conhecidas.

## Um pouco de história

Apesar do nome, o TP era conhecido por várias civilizações muito antes da época de Pitágoras (séc. VI a.C.), sendo improvável que ele ou seus seguidores, os pitagóricos, tenham sido os primeiros a prová-lo [15]. E é possível que estivessem menos interessados em (1) como resultado geométrico do que como uma relação aritmética de certos trios de números naturais, as *ternas pitagóricas*, como  $(3, 4, 5)$ ,  $(5, 12, 13)$ , etc.

Estes trios eram tabelados por vários povos antigos, e possivelmente tinham finalidade didática, servindo como exemplos fáceis de trabalhar. Também podiam ter utilidade prática: para demarcar um terreno retangular, uma maneira de checar se os lados estão bem retos e perpendiculares é ver se formam com a diagonal uma dessas ternas. Arqueólogos ainda fazem algo parecido hoje em dia.

Os pitagóricos se interessavam menos por geometria que pelos números, vistos como algo místico, a base do Universo, cujas propriedades revelariam verdades fundamentais. Mas, na época, os únicos números eram os naturais, e mesmo frações eram só relações entre eles: se um segmento  $a$  media 1, dizer que outro segmento  $b$  media  $\frac{2}{3}$  significava apenas que 3 segmentos  $b$  mediam o mesmo que 2  $a$ 's. Ou, equivalentemente, que era possível achar uma unidade comum de comprimento que coubesse 3 vezes em  $a$ , e 2 vezes em  $b$ . E, como tudo no mundo devia ser descrito por relações entre números, esperava-se que quaisquer comprimentos pudessem ser comparados assim.

Ironicamente, o TP pode ter levado ao fim da filosofia pitagórica, e à primeira crise da história da matemática. Usando (1) para achar a razão  $\frac{m}{n}$  entre a diagonal de um quadrado e seu lado, obtém-se  $\frac{m^2}{n^2} = 2$ . Mas fatorando  $m$  e  $n$  em primos, ao elevá-los ao quadrado a quantidade de cada fator dobra, e simplificando não há como sobrar um único 2. Ou seja, é impossível comparar tais comprimentos por meio de uma razão entre números (naturais). Eles são *incomensuráveis*, não podem ser ambos múltiplos inteiros de uma unidade de medida comum.

Diz-se que encontrar algo que não podia ser descrito por números foi um choque para os pitagóricos, que tentaram esconder o resultado. Mas o segredo se espalhou, destruindo a ideia de um mundo regido por números. Estes deixaram o palco principal da matemática grega, que se voltou para a geometria, vista a partir daí como a base de verdades mais fundamentais, que os números não alcançam.

Alguns historiadores discordam dessa narrativa, pois como os pitagóricos se interessavam pouco por geometria, não teriam dado tanta importância aos incomensuráveis [15]. Mas é inegável o impacto que a descoberta destes teve na matemática grega. A percepção de que a geometria guardava mistérios contraintuitivos levou a uma maior preocupação com demonstrações formais, como na obra de Euclides. E ela passou a ser feita quase sem números: achar uma área não era atribuir-lhe um valor, mas construir, com régua não numerada e compasso, um quadrado de mesma área, que pudesse ser comparado com outros. Daí vem o problema da quadratura do círculo, que perseguiu os matemáticos por milênios.

## Áreas de figuras semelhantes

Na geometria grega, o TP era mais comumente visto como uma relação

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2, \quad (4)$$

entre a área  $\mathcal{A}$  de um quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo, e áreas  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  de quadrados construídos sobre os catetos (Fig. 3). Nessa perspectiva, o triângulo vira um “somador” de áreas, juntando  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  num único quadrado  $\mathcal{A}$  com a área total. E (4) só se converte em (1) após aplicarmos a fórmula da área do quadrado.

Diz a lenda que Pitágoras teria descoberto (4) observando uma parede ladrilhada (Fig. 4). Uma prova bem conhecida e autoexplicativa é a da Fig. 5.

As figuras construídas sobre os lados nem precisam ser quadrados, basta serem semelhantes entre si, pois

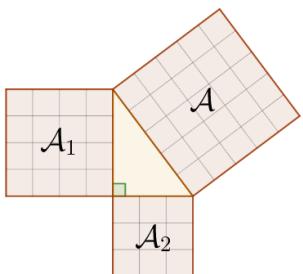


Figura 3: Teorema de Pitágoras,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ .

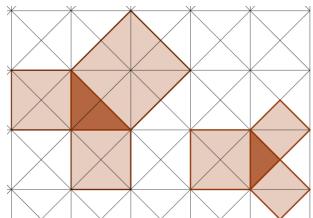


Figura 4: Teorema de Pitágoras em ladrilhos triangulares.

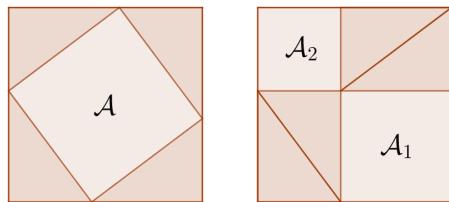


Figura 5: Duas maneiras de remover 4 triângulos retângulos iguais de um mesmo quadrado, sobrando áreas iguais.

nesse caso as razões entre suas áreas e as dos quadrados serão iguais (Fig. 6). Isso também significa que o TP pode ser provado usando qualquer trio de figuras semelhantes construídas sobre os lados.

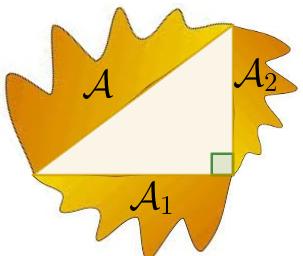


Figura 6: Áreas de figuras semelhantes,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ .

Em geral, construímos as figuras para fora do triângulo, mas as áreas não mudam se estiverem pro outro lado, certo? Isso levou Albert Einstein, aos 12 anos, a uma prova interessante (Fig. 7): a altura em relação à hipotenusa divide o triângulo em dois semelhantes a ele, e tomando os três como sendo as figuras construídas sobre os lados, é imediato que  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ .

E, claro, as figuras nem precisam ser construídas nos lados do triângulo. Basta serem figuras semelhantes, com escalas de comprimento proporcionais aos comprimentos de tais lados (Fig. 8).

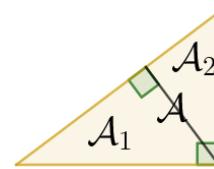


Figura 7: Demonstração de Einstein,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ .

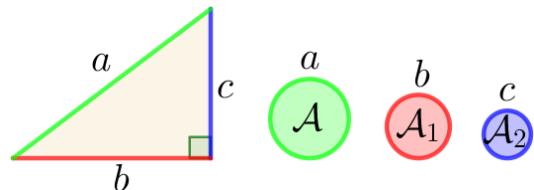


Figura 8: Discos obtidos ‘enrolando’ os lados do triângulo retângulo. Novamente,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ .

## TP e o Axioma das Paralelas

É comum provar (1) usando propriedades de semelhança e proporcionalidade, que dependem do famoso Axioma das Paralelas (AP). Já (4) parece resultar, em provas como a da Fig. 5, de um jogo de cortar, mover e reagrupar figuras, via congruência. Isso pode dar a impressão de que o AP só entre na passagem de (4) para (1), que usa a fórmula  $\mathcal{A} = l^2$  da área do quadrado de lado  $l$ , obtida dividindo-o em outros menores por meio de paralelas.

Na verdade, o AP já está presente em (4) de várias formas. Para que as áreas  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  na Fig. 5 tenham ângulos retos é preciso que a soma dos ângulos dos triângulos seja  $180^\circ$ , o que requer o AP. E a própria existência de quadrados depende dele, bem como o conceito de figuras semelhantes: sem ele não há como dilatar uma figura de forma homogênea, preservando seus ângulos, dilatando seus comprimentos por um fator  $k$ , suas áreas por  $k^2$ , etc.

Pode-se provar que o TP, em ambas as formas, é equivalente ao AP. E a melhor forma de entender como ele é um resultado puramente euclidiano é ver o que ocorre em outras geometrias.

## Geometrias não-euclidianas

As geometrias não-euclidianas [16] (esférica/elíptica e hiperbólica) resultam da negação do AP (e alguns ajustes em outros axiomas). Vamos começar pela esférica, que é mais intuitiva.

O que faz o papel de ‘retas’ na superfície de uma esfera são os círculos máximos (com mesmo centro e raio da esfera), pois o menor caminho entre 2 pontos ao longo da superfície é um arco deles. Como tais círculos sempre se interceptam, nessa geometria não

há paralelas. Além disso, polígonos ficam mais “arredondados” à medida que seu tamanho aumenta, e a soma de seus ângulos depende da área. Para triângulos, a soma é maior que  $180^\circ$ . Não existem quadrados (quadriláteros com lados iguais e ângulos retos), e sim quadriláteros equiláteros e com ângulos iguais mas maiores que  $90^\circ$  (Fig. 9). Sua área não é  $\mathcal{A} = l^2$ , pois se tentarmos dividi-los em outros menores, estes não se encaixarão direito.

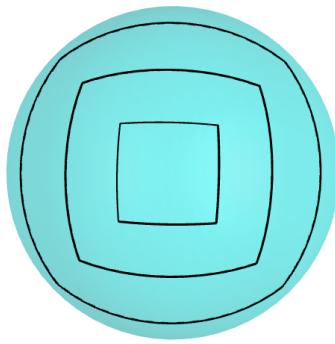


Figura 9: Quadriláteros esféricos equiláteros e equiangulares. Não são semelhantes, pois a área afeta os ângulos.

Vamos ver como (1) falha na superfície da Terra. Na Fig. 10, temos o triângulo formado por Quito-Ecuador, Macapá-AP e Porto Alegre-RS. Duas cidades estão quase na linha do Equador, e duas quase no mesmo meridiano, logo o ângulo em Macapá é quase reto. Por (1), a distância de Quito a Porto Alegre deveria ser de  $4511\text{ km}$ , um erro de  $123\text{ km}$  em relação à distância no mapa. Isso ocorre porque o triângulo é levemente arredondado, devido à curvatura da Terra, logo o TP não se aplica perfeitamente a ele.

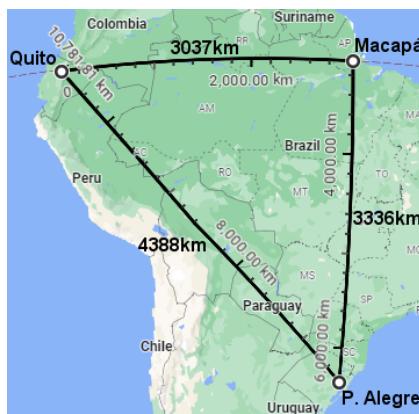


Figura 10: Triângulo retângulo na superfície da Terra. Fonte: Google Maps.

O erro aumenta para triângulos maiores. Na Fig. 11, temos um triângulo esférico delimitando um octante da superfície da Terra. Ele é equilátero, seus 3 ângulos são retos, e, claro, não há a menor chance do TP funcionar com ele!



Figura 11: Triângulo esférico equilátero trirretângulo. Fonte: Google Maps.

Alguém poderia dizer que esses não são realmente triângulos, e as distâncias deveriam ser medidas em linha reta, atravessando a Terra. Mas para o planejamento de rotas, por exemplo, o que importam são distâncias ao longo da superfície. Para isso a geometria esférica tem seu próprio TP, relacionando os lados de um triângulo retângulo esférico.

**Teorema (Pitágoras Esférico).** *Sejam  $a, b, c$  os comprimentos da hipotenusa e catetos de um triângulo retângulo esférico, numa esfera de raio  $R$ . Então*

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cdot \cos \frac{c}{R}. \quad (5)$$

*Demonstração.* Com a origem  $O$  no centro da esfera, e os eixos como na Fig. 12, de modo que  $A = (R, 0, 0)$ ,  $B = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$  e  $C = (R \cos \beta, 0, R \sin \beta)$ , temos  $\alpha = \frac{a}{R}$ ,  $\beta = \frac{b}{R}$ ,  $\theta = \frac{c}{R}$ , e o produto escalar entre  $\overrightarrow{OB}$  e  $\overrightarrow{OC}$  leva a  $\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \theta$  (exercício).  $\square$

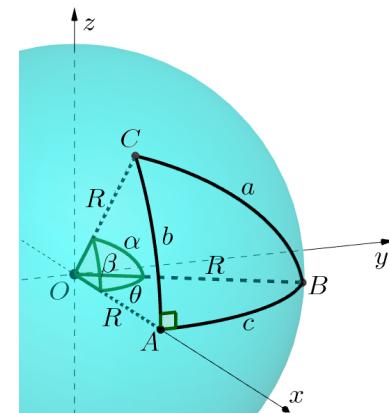


Figura 12: Teor. de Pitágoras esférico,  $\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cdot \cos \frac{c}{R}$ .

Como o raio da Terra é  $R \approx 6371\text{ km}$ , por (5) a distância de Porto Alegre a Quito seria de  $4414\text{ km}$ , bem mais próxima da real (mas não exata pois o ângulo em Macapá não é precisamente reto e a Terra não é uma esfera perfeita).

Na Fig. 11, ocorre algo interessante: os 3 lados são hipotenusas! Mas (5) funciona, com os três cossenos

dando 0. Outro fenômeno inusitado é que se  $b = \frac{\pi}{2}R$  então  $a = \frac{\pi}{2}R$  ou  $\frac{3\pi}{2}R$ , independente do valor de  $c$ . Tente entender o significado geométrico disso.

Como o TP sempre serviu para medir pequenas distâncias na superfície da Terra, espera-se que (1) e (5) deem resultados parecidos para triângulos não muito grandes. De fato, como  $\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2}$  para  $x$  pequeno, temos  $a^2 \cong b^2 + c^2$  se  $a, b, c \ll R$  (exercício).

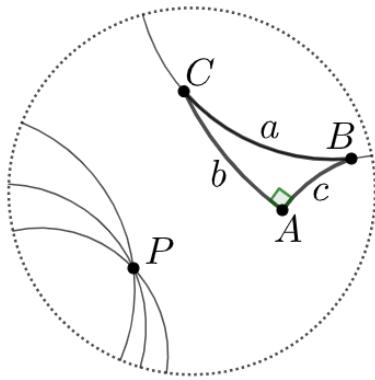


Figura 13: Modelo do disco de Poincaré da geometria hiperbólica. As “retas” são arcos de círculo perpendiculares à borda, ou diâmetros do disco. Por  $P$  passam infinitas paralelas à reta  $BC$ . O triângulo  $ABC$  é retângulo, com  $a \cong 3.34$  e  $b = c = 2$  (a escala de comprimento aumenta perto da borda). A curvatura é  $K = -1$ .

A geometria hiperbólica é, de certa forma, antípoda da esférica. Nela, por um ponto passam infinitas paralelas a uma reta (Fig. 13). Triângulos ficam “magros”, com sua área determinando a soma dos ângulos, que é menor que  $180^\circ$ . Sua trigonometria usa funções hiperbólicas, e temos a seguinte versão do TP:

**Teorema** (Pitágoras Hiperbólico). *Sejam  $a, b, c$  os comprimentos da hipotenusa e catetos de um triângulo retângulo hiperbólico, num plano hiperbólico de curvatura  $K = -\frac{1}{R^2}$ . Então*

$$\cosh \frac{a}{R} = \cosh \frac{b}{R} \cdot \cosh \frac{c}{R}. \quad (6)$$

A prova pode ser vista em [16]. Teste com os valores da Fig. 13 ( $R$  não é o raio do disco, e sim um pseudo-raio definido a partir de  $K$ ). Como  $\cosh x \cong 1 + \frac{x^2}{2}$  para  $x$  pequeno, de novo  $a^2 \cong b^2 + c^2$  se  $a, b, c \ll R$ .

## Teorema de Pitágoras Unificado

Essas aproximações para pequenos triângulos não revelam a conexão mais ampla que há entre os TPs das três geometrias, e que surge ao generalizarmos a forma (4). Mas como, se nas não-euclidianas não há quadrados nem figuras semelhantes em geral?

Semelhança euclidiana requer figuras com comprimentos proporcionais e ângulos iguais, o que é difícil nas geometrias não-euclidianas, nas quais a área afeta os ângulos. Mas círculos não têm ângulos, logo esse problema não os atinge, e intuitivamente eles parecem semelhantes. É uma semelhança mais fraca, pois seus comprimentos não são proporcionais ao raio, nem suas áreas ao quadrado dele (imagine o que ocorre quando o raio do círculo ultrapassa  $\frac{1}{4}$  de uma volta na esfera). Surpreendentemente, já basta.

As três geometrias são ligadas pelo conceito de curvatura: na esférica,  $K = \frac{1}{R^2} > 0$ , na euclidiana  $K = 0$ , e na hiperbólica  $K = -\frac{1}{R^2} < 0$  (a euclidiana pode ser vista como um limite das outras quando  $R \rightarrow \infty$ ). E uma forma do TP válida em todas é:

**Teorema** (Pitágoras Unificado [8]). *As áreas  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  de discos com raios dados pela hipotenusa e catetos de um triângulo retângulo (Fig. 14) satisfazem*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - \frac{K}{2\pi} \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2. \quad (7)$$

*Demonstração.* Na geometria esférica, a área do disco de raio  $r$  é  $\mathcal{A}(r) = 2\pi R^2(1 - \cos \frac{r}{R})$ , e na hiperbólica é  $\mathcal{A}(r) = 2\pi R^2(\cosh \frac{r}{R} - 1)$ . Agora é só usar (5) e (6).  $\square$

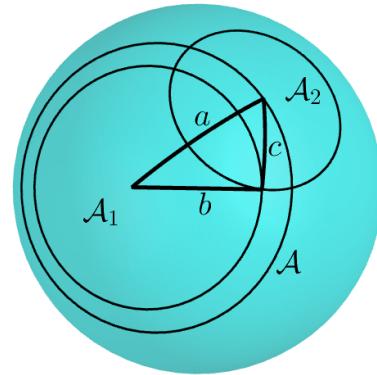


Figura 14: Discos cujos raios são os lados de um triângulo. Se este for retângulo, temos (7). Se for próprio, temos (4).

## Triângulos próprios

O termo extra em (7) lembra um pouco o de (3), e sugere que triângulos retângulos deixam de ser os que dão a fórmula mais simples. Na verdade, nas geometrias não-euclidianas eles perdem várias propriedades que os tornam especiais, como a hipotenusa ser o diâmetro do círculo circunscrito. Mas estas são herdadas por outro tipo de triângulo [13].

Um triângulo é *próprio* se um ângulo for a soma dos demais (Fig. 15). O lado oposto a ele também é chamado de *hipotenusa*, e os outros de *catetos*. Na

geometria euclidiana, a soma dos ângulos é  $180^\circ$ , logo triângulos retângulos e próprios são a mesma coisa.

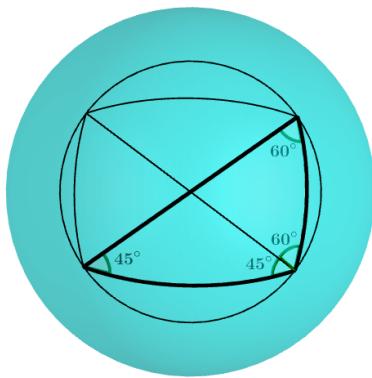


Figura 15: Triângulo próprio, hipotenusa é diâmetro do círculo circunscrito, e diagonal do quadrilátero equiangular.

Para discos construídos com os lados desse triângulo, (4) vale nas três geometrias:

**Teorema** (Pitágoras Próprio [13]). *As áreas  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  de discos com raios dados pela hipotenusa e catetos de um triângulo próprio satisfazem  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ .*

A prova geral é dada em [13]. Em [14], são citados artigos anteriores que tratam do caso hiperbólico.

Esse resultado tem uma interpretação interessante: girando o triângulo próprio da Fig. 14 de modo que o segmento  $a$  “varra” a área  $\mathcal{A}$ , e  $b$  varra  $\mathcal{A}_1$ ,  $c$  irá varrer a área  $\mathcal{A} - \mathcal{A}_1$  do anel entre elas, que é igual à área  $\mathcal{A}_2$  que  $c$  varreria se girasse em torno de sua extremidade.

O caso euclidiano é fácil de entender [8]. Na Fig. 16, ao girar o triângulo retângulo por um ângulo  $d\theta$ , o segmento  $c$  varre uma área  $d\mathcal{A}$ . Nesse movimento, ele gira o mesmo  $d\theta$ , enquanto desliza ao longo do seu comprimento. Desconsiderando tal deslizamento, que varre uma área nula,  $d\mathcal{A}$  será igual à área pintada do disco à direita, obtida só girando  $c$ . Integrando, a área do anel será igual à desse disco.

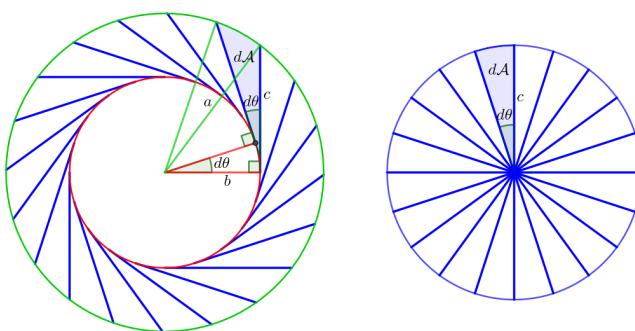


Figura 16: As regiões pintadas têm a mesma área  $d\mathcal{A}$ , logo a área total do anel é igual à do disco à direita.

Na Fig. 14, se o triângulo for retângulo e girar  $d\theta$ , o segmento  $c$  irá girar o mesmo  $d\theta$  no espaço, mas

sua rotação na superfície da esfera, que varre áreas, será menor (imagine carregar uma vara pela linha do Equador: ela está girando no espaço, mas vista da superfície está sempre apontada para a frente). Isso faz a área  $\mathcal{A} - \mathcal{A}_1$  do anel ser menor que  $\mathcal{A}_2$ , o que explica a subtração em (7). Na geometria hiperbólica, a curvatura  $K < 0$  faz  $c$  girar mais que  $d\theta$ , de modo que  $\mathcal{A} - \mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_2$ . Nessas duas geometrias, a mudança para triângulo próprio ajusta o ângulo entre  $c$  e a direção de rotação para criar um deslizamento transversal ao comprimento, que varre a área necessária para compensar o efeito da curvatura e obter  $\mathcal{A} - \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ .

Substituindo as fórmulas das áreas, o teorema dá relações entre os lados do triângulo próprio:

**Corolário.** *A hipotenusa  $a$  e os catetos  $b$  e  $c$  de um triângulo próprio esférico ou hiperbólico estão relacionados, respectivamente, por*

$$1 + \cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} + \cos \frac{c}{R}, \text{ ou}$$

$$1 + \cosh \frac{a}{R} = \cosh \frac{b}{R} + \cosh \frac{c}{R}.$$

Teste na Fig. 15, construída no GeoGebra com raio da esfera  $R = 1$ , e o triângulo tendo  $a = \frac{\pi}{2}$ ,  $b \approx 1.22$  e  $c \approx 0.86$ . Quando  $a, b, c \ll R$ , novamente  $a^2 \approx b^2 + c^2$ .

## Tetraedros e simplexos

Vamos voltar para a geometria euclidiana, e generalizar o TP para dimensões maiores.

Um tetraedro é *trirretângulo* se as três arestas em um vértice são perpendiculares (Fig. 17). A *face hipotenusal* é a oposta a esse vértice.

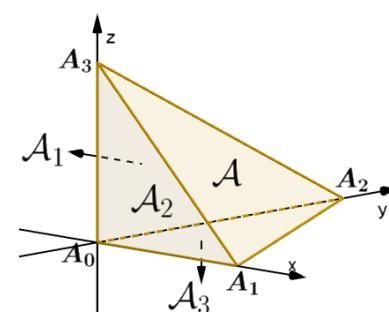


Figura 17: Tetraedro trirretângulo,  $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2$ .

**Teorema** (De Gua (1783)). *Em um tetraedro trirretângulo, a área  $\mathcal{A}$  da face hipotenusal está relacionada às áreas  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}_2$ ,  $\mathcal{A}_3$  das outras faces por*

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2. \quad (8)$$

*Demonstração.* Na Fig. 17,  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{A_1 A_2} \times \overrightarrow{A_1 A_3}\|$  e analogamente para as outras áreas. Além disso,

$\overrightarrow{A_1 A_2} = \overrightarrow{A_0 A_2} - \overrightarrow{A_0 A_1}$  e  $\overrightarrow{A_1 A_3} = \overrightarrow{A_0 A_3} - \overrightarrow{A_0 A_1}$ . O resto fica como exercício (observando que  $A_0 A_1 \times A_0 A_2$ ,  $A_0 A_1 \times A_0 A_3$  e  $A_0 A_2 \times A_0 A_3$  são perpendiculares).  $\square$

A versão em  $\mathbb{R}^n$  desse tetraedro é um *n-simplexo retangular*. Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais  $(x_1, \dots, x_n)$ , ele é um poliedro *n*-dimensional com um vértice  $A_0$  na origem, e um  $A_k$  em cada eixo, na coordenada  $x_k = a_k > 0$ . Sua face  $F_k$  é o poliedro  $(n-1)$ -dimensional formado por todos os vértices exceto  $A_k$ . A face hipotenusal é  $F_0$ .

O seguinte resultado é frequentemente redescoberto, por diferentes meios ([2, 5, 7, 10], entre outros). Um *m-volume* é um volume *m*-dimensional (comprimentos são 1-volumes, áreas são 2-volumes, etc.).

**Teorema.** Em um *n-simplexo retangular*  $S$ , seja  $\mathcal{V}_k$  o  $(n-1)$ -volume da face  $F_k$ . Então

$$\mathcal{V}_0^2 = \sum_{k=1}^n \mathcal{V}_k^2. \quad (9)$$

Daremos uma prova via Cálculo Vetorial, e outra usando Cálculo Integral e Geometria Analítica.

*Demonstração* ([7]). Seja  $\vec{v}$  um campo vetorial constante em  $\mathbb{R}^n$ ,  $dV$  o diferencial de *n*-volume,  $d\mathcal{V}$  o de  $(n-1)$ -volume, e  $\hat{n}_k$  o vetor normal unitário para fora de  $F_k$ . Como  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ , o Teorema da Divergência dá

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S \operatorname{div} \vec{v} dV = \sum_{k=0}^n \int_{F_k} \vec{v} \cdot \hat{n}_k d\mathcal{V} = \sum_{k=0}^n \vec{v} \cdot \hat{n}_k \int_{F_k} d\mathcal{V} \\ &= \sum_{k=0}^n \vec{v} \cdot \hat{n}_k \mathcal{V}_k = \vec{v} \cdot \left( \sum_{k=0}^n \mathcal{V}_k \hat{n}_k \right). \end{aligned}$$

Como  $\vec{v}$  é arbitrário, isso implica  $\sum_{k=0}^n \mathcal{V}_k \hat{n}_k = 0$ , logo  $\mathcal{V}_0 \hat{n}_0 = -\mathcal{V}_1 \hat{n}_1 - \dots - \mathcal{V}_n \hat{n}_n$ . Como  $\hat{n}_1, \dots, \hat{n}_n$  são ortogonais, (2) nos dá o resultado.  $\square$

*Demonstração* ([5]). Para  $0 \leq k \leq n$ , seja  $h_k$  a altura do vértice  $A_k$  em relação à face oposta  $F_k$ . A seção transversal a essa altura, a uma distância  $x$  de  $A_k$ , é semelhante a  $F_k$ , e tem  $(n-1)$ -volume  $\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}_k \cdot \left(\frac{x}{h_k}\right)^{n-1}$ . Assim, o *n*-volume de  $S$  é  $V = \int_0^{h_k} \mathcal{V}(x) dx = \frac{\mathcal{V}_k h_k}{n}$ , para todo  $k$ . Para  $k \neq 0$  temos  $h_k = a_k$  (o comprimento da aresta  $A_0 A_k$ ), logo  $\mathcal{V}_k a_k = nV = \mathcal{V}_0 h_0$ , ou seja,  $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}_0 \cdot \frac{h_0}{a_k}$ .

O hiperplano da face  $F_0$  é descrito pela equação  $\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1$ . Como  $\vec{v} = (\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n})$  é ortogonal a ele, e  $\lambda \vec{v}$  satisfaz a equação quando  $\lambda = \left(\frac{1}{a_1^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ , temos  $h_0 = \|\lambda \vec{v}\| = \left(\frac{1}{a_1^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ . Assim, obtemos  $\sum_{k=1}^n \mathcal{V}_k^2 = \mathcal{V}_0^2 h_0^2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} = \mathcal{V}_0^2$ .  $\square$

Outros métodos serão vistos a seguir, quando olharemos para o TP e estes teoremas de outra forma.

## Projeções de volumes

Esses resultados podem ser reinterpretados em termos de projeções ortogonais de *m*-volumes. Sempre que falarmos em projeções, serão ortogonais.

Separando os lados do triângulo retângulo, podemos ver o TP como uma relação entre o comprimento de um segmento reto e suas projeções em um sistema de eixos perpendiculares, como na Fig. 18.

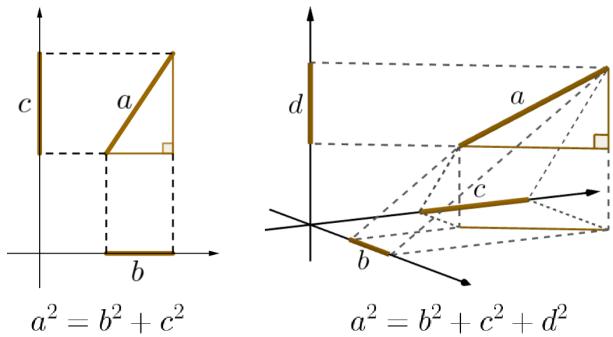


Figura 18: Projeções ortogonais de segmentos sobre eixos.

E, separando as faces do tetraedro, (8) vira uma relação entre a área de um triângulo e suas projeções em planos coordenados perpendiculares. Como projeções são transformações lineares, a razão  $\frac{\mathcal{A}_k}{\mathcal{A}}$  não muda se trocarmos  $\mathcal{A}$  pela área de qualquer figura no mesmo plano, e  $\mathcal{A}_k$  pela de sua projeção no  $k$ -ésimo plano coordenado. Assim, (8) vale para qualquer área plana e suas projeções (Fig. 19). Esse resultado já era conhecido no Séc. XVIII.

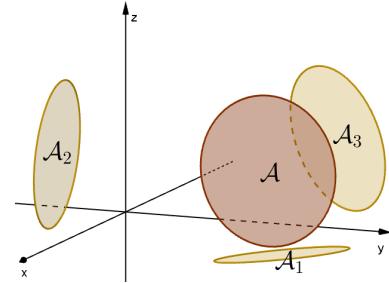


Figura 19: Projeções de uma área plana,  $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2$ .

Da mesma forma, (9) vale para qualquer  $(n-1)$ -volume  $\mathcal{V}_0$  num hiperplano de  $\mathbb{R}^n$ , e suas projeções  $\mathcal{V}_k$  em hiperplanos coordenados perpendiculares.

Vamos estender para *m*-volumes. Sejam  $(e_1, \dots, e_n)$  uma base ortonormal, e  $\mathcal{I}_m$  o conjunto dos *multi-índices*  $I = (i_1, \dots, i_m)$  com  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ . Cada  $C_I = \operatorname{span}\{e_i : i \in I\}$ , com  $I \in \mathcal{I}_m$ , é um *subespaço coordenado*. Chamaremos de *figura* ou *região* os conjuntos mensuráveis, i.e., com um volume bem definido da dimensão do subespaço considerado.

**Teorema ([3]).** Se  $\mathcal{V}$  é o  $m$ -volume de uma região  $R$  num subespaço  $m$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$ , e  $\mathcal{V}_I$  é o de sua projeção em  $C_I$ , então

$$\mathcal{V}^2 = \sum_{I \in \mathcal{J}_m} \mathcal{V}_I^2. \quad (10)$$

Pela linearidade das projeções, basta provar para um paralelotopo (paralelogramo  $m$ -dimensional)  $R$  gerado por vetores  $v_1, \dots, v_m$ . Vamos ver primeiro uma prova via determinantes.

*Demonstração ([3]).* Pondo  $v_1, \dots, v_m$  como colunas de uma matriz  $M_{n \times m}$ , o Teorema de Cauchy-Binet dá

$$\det(M^T M) = \sum_{I \in \mathcal{J}_m} \det(M_I)^2, \quad (11)$$

onde  $M_I$  é a submatriz  $m \times m$  de  $M$  formada pelas linhas com índices em  $I$ , de modo que suas colunas são as projeções dos  $v_k$ 's em  $C_I$ . O resultado vem da interpretação geométrica dos determinantes:  $\det(M^T M)$  é o determinante de Gram que dá o quadrado do  $m$ -volume de  $R$ , e  $|\det(M_I)|$  dá o  $m$ -volume da projeção de  $R$  em  $C_I$ .  $\square$

A prova mais fácil usa Álgebra Exterior [9], uma extensão da Álgebra Linear com *multivetores*, vetores representando figuras multi-dimensionais (Fig. 20).

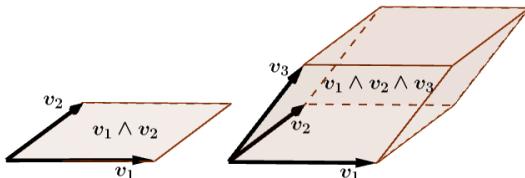


Figura 20: Multivetores:  $v_1 \wedge v_2$  representa um paralelogramo de área  $\|v_1 \wedge v_2\|$ , e  $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$  representa um paralelepípedo de volume  $\|v_1 \wedge v_2 \wedge v_3\|$ .

*Demonstração.* O multivetor  $M = v_1 \wedge \dots \wedge v_m$  representa  $R$ , e a norma  $\|M\|$  é seu  $m$ -volume  $\mathcal{V}$ . Multivetores são também vetores num certo espaço vetorial, que tem base ortonormal formada pelos  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$  com  $I = (i_1, \dots, i_m) \in \mathcal{J}_m$ . Cada componente de  $M$  nessa base representa a projeção de  $R$  em  $C_I$ , de modo que (10) vem de (2).  $\square$

**Exemplo.** Se  $\mathcal{A}$  é a área de uma figura plana em  $\mathbb{R}^4 = \{(x_1, \dots, x_4)\}$ , e  $\mathcal{A}_{ij}$  é sua projeção no plano  $x_i x_j$ ,

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}_{12}^2 + \mathcal{A}_{13}^2 + \mathcal{A}_{14}^2 + \mathcal{A}_{23}^2 + \mathcal{A}_{24}^2 + \mathcal{A}_{34}^2. \quad (12)$$

Por exemplo,  $v = (a, b, c, d)$  e  $w = (-b, a, -d, c)$  têm mesma norma e são perpendiculares, formando um quadrado de área  $\mathcal{A} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ . Suas projeções  $(a, b, 0, 0)$  e  $(-b, a, 0, 0)$  no plano  $x_1 x_2$  formam um

quadrado de área  $\mathcal{A}_{12} = a^2 + b^2$ . Da mesma forma,  $\mathcal{A}_{34} = c^2 + d^2$ . As projeções  $(a, 0, c, 0)$  e  $(-b, 0, -d, 0)$  no plano  $x_1 x_3$  formam um paralelogramo com  $\mathcal{A}_{13} = |bc - ad|$  (ignore a 4ª coordenada nula, e use o produto vetorial). Analogamente, obtemos  $\mathcal{A}_{24} = \mathcal{A}_{13}$  e  $\mathcal{A}_{14} = \mathcal{A}_{23} = |ac + bd|$ . Uma conta chata mostra que essas áreas satisfazem (12).

**Exemplo.** Se  $\mathcal{V}$  é o volume de uma região em um subespaço tridimensional de  $\mathbb{R}^4$ , e  $\mathcal{V}_{ijk}$  é sua projeção no subespaço  $x_i x_j x_k$ ,

$$\mathcal{V}^2 = \mathcal{V}_{123}^2 + \mathcal{V}_{124}^2 + \mathcal{V}_{134}^2 + \mathcal{V}_{234}^2.$$

Com um pouco de combinatória, generalizamos para projeções em subespaços de outra dimensão.

**Corolário ([4, 6]).** Se  $\mathcal{V}$  é o  $p$ -volume de uma região  $R$  em um subespaço de dimensão  $p \leq m$  de  $\mathbb{R}^n$ , e  $\mathcal{V}_I$  é sua projeção em  $C_I$ , com  $I \in \mathcal{J}_m$ , então

$$\mathcal{V}^2 = \binom{n-p}{n-m}^{-1} \cdot \sum_{I \in \mathcal{J}_m} \mathcal{V}_I^2.$$

*Demonstração.* Cada  $\mathcal{V}_I$  pode ser projetado nos subespaços coordenados de dimensão  $p$  contidos em  $C_I$ , e cada um desses está em  $\binom{n-p}{n-m}$  dos  $C_I$ 's. O resultado então segue de (10).  $\square$

**Exemplo.** Sejam  $\mathcal{L}$  o comprimento de um segmento em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  e  $\mathcal{L}_3$  suas projeções nos planos coordenados, e  $b$ ,  $c$  e  $d$  suas projeções nos eixos (Fig. 21). Então  $\mathcal{L}_1^2 = b^2 + c^2$ ,  $\mathcal{L}_2^2 = b^2 + d^2$ ,  $\mathcal{L}_3^2 = c^2 + d^2$  e  $\mathcal{L}^2 = b^2 + c^2 + d^2 = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{L}_3^2)$ .

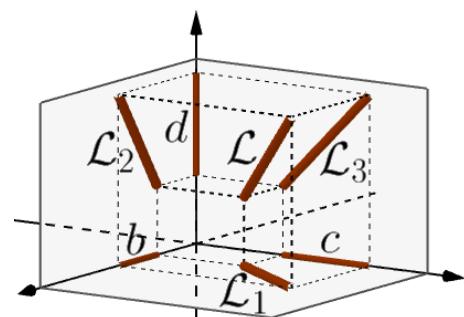


Figura 21: Projeções de um segmento nos planos coordenados,  $\mathcal{L}^2 = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{L}_3^2)$ .

## Versões complexas

Em espaços complexos, a generalização (2) do TP pode ser reinterpretada como uma soma de áreas, e estendida para volumes de maior dimensão, com fórmulas mais simples que as do caso real.

Vamos rever a geometria real desses espaços. Pode-se identificar  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  com o vetor  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , e seu módulo é a norma do vetor, ou seja,  $|z|^2 = x^2 + y^2$ . O que diferencia  $\mathbb{C}$  de  $\mathbb{R}^2$  é a multiplicação por  $i$ , que pode ser vista apenas como uma rotação de  $90^\circ$ , pois  $iz = -y + ix$  corresponde ao vetor  $(-y, x)$ , de mesma norma e ortogonal a  $(x, y)$ . Assim,  $i^2 = -1$  significa apenas que  $i^2(x, y) = i(-y, x) = (-x, -y)$ .

Da mesma forma, identifica-se  $v = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ , onde  $z_k = x_k + iy_k$ , com  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ , e  $\|v\|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_n^2 + y_n^2$ . De novo,  $iv = (iz_1, \dots, iz_n)$  corresponde a  $(-y_1, x_1, \dots, -y_n, x_n)$ , que é  $v$  girado  $90^\circ$  numa certa direção. Assim,  $\mathbb{C}^n$  é só  $\mathbb{R}^{2n}$  com um operador  $i$  de rotação de  $90^\circ$ .

Se  $v \in \mathbb{C}^n$  e  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  então  $zv = xv + y(iv)$  é combinação linear (com coeficientes reais  $x$  e  $y$ ) de  $v$  e  $iv$ . Assim, a *linha complexa*  $\mathbb{C}v = \{zv : z \in \mathbb{C}\}$  é o plano real  $\text{span}\{v, iv\}$ , no qual esses vetores formam um quadrado de área  $\mathcal{A} = \|v\|^2$  (Fig. 22).

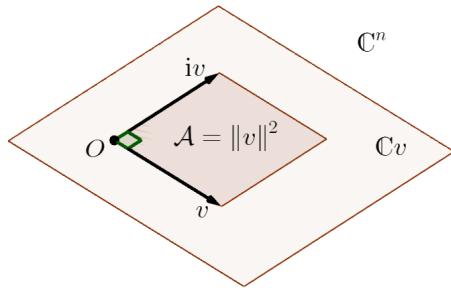


Figura 22: Quadrado numa linha complexa.

Seja  $(e_1, \dots, e_n)$  uma base ortogonal de  $\mathbb{C}^n$ .

**Teorema** (Pitágoras para Linhas Complexas [12]). Se  $\mathcal{A}$  é a área de uma região em uma linha complexa  $\mathbb{C}v$ , e  $\mathcal{A}_k$  é sua projeção em  $\mathbb{C}e_k$ , então

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \dots + \mathcal{A}_n. \quad (13)$$

*Demonstração.* Basta provar para o quadrado da Fig. 22. Como a projeção  $P : \mathbb{C}v \rightarrow \mathbb{C}e_k$  é  $\mathbb{C}$ -linear, se  $P(v) = v_k$  então  $P(iv) = iv_k$ . Logo, a projeção de  $\mathcal{A}$  é outro quadrado, de área  $\mathcal{A}_k = \|v_k\|^2$ . O resultado segue de (2).  $\square$

Ao contrário do caso real, (13) não é quadrática, e tem menos termos, já que a dimensão complexa é metade da real correspondente. Na Fig. 23,  $\mathcal{A}$  é a soma de 2 áreas, das projeções nas linhas complexas de uma base ortogonal  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{C}^2$ . Identificando  $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ , teríamos (12), com 6 termos quadráticos.

**Exemplo.** Em  $\mathbb{C}^2$ , os vetores  $v = (a + ib, c + id)$  e  $iv = (-b + ia, -d + ic)$ , com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , têm norma

<sup>1</sup>Por ter dimensão complexa 1.

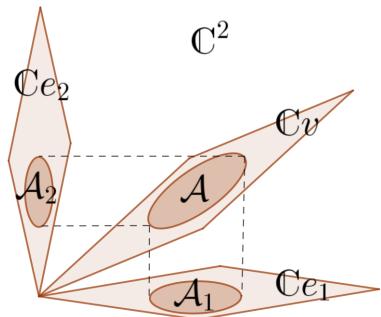


Figura 23: Projeção em linhas complexas,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ .

$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ , e formam um quadrado de área  $\mathcal{A} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ . Sejam  $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$ . As projeções de  $v$  e  $iv$  em  $\mathbb{C}e_1$  são  $(a + ib, 0)$  e  $(-b + ia, 0)$ , e formam um quadrado de área  $\mathcal{A}_1 = a^2 + b^2$ . E em  $\mathbb{C}e_2$  formam um quadrado de área  $\mathcal{A}_2 = c^2 + d^2$ . Como previsto,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ .

Identificando  $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ , este se torna o exemplo dado após (12), com  $w = iv$ . Note como a abordagem real foi mais complexa<sup>2</sup>. Naquele exemplo, aos planos  $x_1x_2$  e  $x_3x_4$  correspondem a  $\mathbb{C}e_1$  e  $\mathbb{C}e_2$ , por isso as projeções deram quadrados. O plano  $x_1x_3$  não corresponde a uma linha complexa, pois  $i(1, 0, 0, 0) = (0, 1, 0, 0)$  sai dele, e o mesmo ocorre com os outros nos quais as projeções deram paralelogramos.

Vamos estender para um subespaço complexo  $V$  de dimensão  $m$ , que é um subespaço real de dimensão  $2m$  invariante pela rotação  $i$ , isto é,  $v \in V \Rightarrow iv \in V$ . Como antes, seja  $C_I = \text{span}\{e_i : i \in I\}$  para  $I \in \mathcal{I}_m$  (mas agora o span é com coeficientes complexos).

**Teorema** (Pitágoras para Subespaços Complexos [12]). Se  $\mathcal{V}$  é o  $2m$ -volume de uma região  $R$  num subespaço complexo  $m$ -dimensional em  $\mathbb{C}^n$ , e  $\mathcal{V}_I$  é sua projeção em  $C_I$ , então

$$\mathcal{V} = \sum_{I \in \mathcal{I}_m} \mathcal{V}_I. \quad (14)$$

*Demonstração.* Como a de (10), mas (11) se torna  $\det(M^\dagger M) = \sum_{I \in \mathcal{I}_m} |\det(M_I)|^2$ , onde  $M^\dagger$  é a transposta conjugada, e a interpretação de determinantes complexos muda:  $\det(M^\dagger M)$  é o  $2m$ -volume do paralelotopo formado por  $v_1, iv_1, \dots, v_m, iv_m$ , e sua projeção em  $C_I$  é  $|\det(M_I)|^2$ .

Também pode-se usar (2) e Álgebra Exterior complexa, na qual  $\|v_1 \wedge \dots \wedge v_m\|^2$  é o  $2m$ -volume do paralelotopo formado por  $v_1, iv_1, \dots, v_m, iv_m$ .  $\square$

<sup>2</sup>Juro que tentei resistir.

## Conclusão

Há mais generalizações que não discutimos, como versões da lei dos cossenos para áreas ou volumes [2, 9], ou em geometrias não-euclidianas [8]. Outras esperam para serem descobertas: por ex., nos parece que (10) e (14) virem  $\sqrt{V} = \sum_{I \in \mathcal{I}_m} \sqrt{V_I}$  em espaços quaterniônicos<sup>3</sup>; e há menções (sem prova) de uma versão do Teorema de De Gua para geometrias não-euclidianas de dimensão 3, mas não para dimensões maiores. Também seria interessante provar o Teorema de Pitágoras Próprio a partir dos axiomas da Geometria Absoluta (a grosso modo, a parte comum das geometrias euclidiana, elíptica e hiperbólica).

É impressionante que, milênios após suas primeiras aparições, o TP ainda guarde surpresas e mistérios. Isso mostra que esse velho teorema, com suas mil faces, continua a evoluir e dar frutos. Vida longa ao Teorema de Pitágoras!

## Bibliografia

- [1] A. Bogomolny. Pythagorean Theorem. <https://www.cut-the-knot.org/pythagoras>. Accessed: 2023-10-04.
- [2] E. C. Cho. The generalized cross product and the volume of a simplex. *Appl. Math. Lett.*, 4(6):51–53, 1991.
- [3] D. R. Conant and W. A. Beyer. Generalized Pythagorean theorem. *Amer. Math. Monthly*, 81(3):262–265, 1974.
- [4] K. Czyzewska. Generalization of the Pythagorean theorem. *Demonstratio Math.*, 24(12), 1991.
- [5] P. S. Donchian and H. S. M. Coxeter. An n-dimensional extension of Pythagoras' theorem. *Math. Gaz.*, 19(234):206–206, 1935.
- [6] D. Drucker. A comprehensive Pythagorean theorem for all dimensions. *Amer. Math. Monthly*, 122(2):164–168, 2015.
- [7] L. Eifler and N. H. Rhee. The n-dimensional Pythagorean theorem via the divergence theorem. *Amer. Math. Monthly*, 115(5):456–457, 2008.
- [8] R. L. Foote. A unified Pythagorean theorem in Euclidean, spherical, and hyperbolic geometries. *Math. Mag.*, 90(1):59–69, feb 2017.
- [9] M. Khosravi and M. D. Taylor. The wedge product and analytic geometry. *Amer. Math. Monthly*, 115(7):623–644, 2008.
- [10] S. Y. Lin and Y. F. Lin. The n-dimensional Pythagorean theorem. *Linear Multilinear Algebra*, 26(1-2):9–13, 1990.
- [11] E. S. Loomis. *The Pythagorean Proposition*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1968.
- [12] A. L. G. Mandolesi. Projection factors and generalized real and complex Pythagorean theorems. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 30(43), 2020.
- [13] P. Maraner. A spherical Pythagorean theorem. *Math. Intelligencer*, 32(3):46–50, 09 2010.
- [14] V. Pambuccian. Maria Teresa Calapsos hyperbolic Pythagorean theorem. *Math. Intelligencer*, 32(4):2–2, 2010.
- [15] Tatiana Roque. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Editora Zahar, 2012.
- [16] H. E. Wolfe. *Introduction to non-Euclidean geometry*. Courier Corporation, 2012.



André Mandolesi é bacharel em Física e mestre em Matemática pela Unicamp, e doutor em Matemática pela University of Texas at Austin. É professor da UFBA desde 2009. Nunca se curou da Física, e caiu nas frestas entre as áreas da Matemática, por isso até hoje trava quando perguntam com o que trabalha. Neste ano parece ser Álgebras de Grassmann e Clifford, mas já foi Geometria e Mecânica Quântica. Quando não está quebrando a cabeça para aprender algo novo, relaxa praticando Tai Chi Chuan, maratonando séries ou jogando videogame.

<sup>3</sup>Quaternions generalizam os complexos, com 4 números reais.

## BIOGRAFIA

# Arlete Cerqueira Lima

*Márcia Barbosas de Menezes*

## Introdução

Começo este texto parabenizando o curso de Matemática, particularmente a habilitação de Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal da Bahia, que completou 80 anos em 2023. O curso, desde seu início, na Faculdade de Filosofia da Bahia, em 1943, vem se aprimorando e se (re)estruturando para atender às demandas dos/as novos/as alunos/as e das novas Diretrizes da Educação, buscando assim acompanhar os contextos históricos, culturais e sociais do novo século.

Mas comemorar 80 anos de curso requer relembrar e resgatar suas histórias, os “sujeitos” que dela participaram, assim como traçar metas para o caminhar futuro. Nesse sentido, escolhemos tirar do anonimato, do silêncio, da invisibilidade as mulheres que articularam e fundaram o Instituto de Matemática, espaço do qual hoje a sociedade baiana usufrui e se orgulha.

Portanto, falar da história da construção e consolidação dos estudos matemáticos, na Bahia, nos remete à fundação da Faculdade de Filosofia da Bahia — FFBA (1941) e à fundação do Instituto de Matemática e Física da Universidade da Bahia — IMF/UBA (1960). E, sendo assim, chegamos às professoras Arlete Cerqueira Lima, Martha Maria de Souza Dantas e todas as outras docentes<sup>1</sup> que se juntaram a elas com o intuito de consolidar e manter o novo espaço. Mulheres que, apesar de terem histórias de vida tão di-

ferentes, se uniram em busca de um ideal comum — fundar um Centro de Estudo Matemático na Universidade da Bahia.

## As mulheres e a matemática na Faculdade de Filosofia da Bahia

As matemáticas baianas vivenciaram um momento histórico de transformações econômicas, sociais e políticas na Bahia da década de 40 do século passado e, de forma inusitada, protagonizaram uma história surpreendente, envolvendo mulheres e a matemática, área considerada tradicionalmente como associada ao masculino.

Até aquele momento, o ensino secundário esteve nas mãos dos intelectuais, bacharéis em economia e engenheiros, pois,

Tanto médicos quanto engenheiros e advogados [...] gozavam de prestígio pela origem social e pela formação educacional. O diploma gerava capital cultural e possibilidades profissionais na área de especialização, assim como no jornalismo e em órgãos públicos. A magistratura e o magistério secundário e superior constituíam campo preferencial de atuação. (Silva, 2000, p. 102).

Portanto, era um privilégio, na época, atuar no magistério secundário, mas, com o passar dos anos, a Bahia começou a participar do movimento de industrialização e modernização que se fazia presente na sociedade. Neste sentido, os homens começaram a

<sup>1</sup>Todas as docentes tiveram um papel relevante e determinante na fundação e consolidação do IMF, tornando o sonho possível, mas, neste momento, falaremos da trajetória de uma das idealizadoras — a professora Arlete.

mudar a direção de sua formação cultural e interesses profissionais e passaram a buscar novos caminhos na indústria, na construção de rodovias e portos, na perfuração de poços de petróleo, enfim, estavam buscando atuação em atividades mais promissoras do ponto de vista econômico. Essa mudança de perfil da atuação masculina no mercado de trabalho provocou um déficit no setor do magistério secundário. Era preciso preparar pessoas que pudessem preencher as vagas docentes que se encontravam ociosas e, principalmente, alcançar uma melhor qualificação no ensino secundário.

A fundação da FF, idealizada pelo professor Isaías Alves, em 1941, tinha como um dos objetivos formar profissionais para atuarem neste espaço deixado vazio que se encontrava muito precário na época. Os cursos de graduação da FF começaram a funcionar em 15/03/1943, entre eles, o curso de Matemática. Ocorreu, portanto, nesse período, a institucionalização da formação de docentes para atuarem no ensino básico e ensino secundário, momento caracterizado como um *divisor de águas* na formação docente: saiu de cena o professor engenheiro e começou a atuação definitiva do/a profissional professor/a de matemática com formação didática e pedagógica na área.

Esse momento também proporcionou oportunidade para muitas mulheres que idealizavam romper com alguns estereótipos sociais e alcançar alguma estabilidade financeira.

As mudanças sociais que a industrialização e a urbanização crescente estavam favorecendo, [...] levaram as mulheres a vislumbrar no magistério um espaço profissional que se adequasse ao que delas se esperava em termos sociais e aquilo de que realmente precisavam para ir ao encontro de um futuro com mais independência e menos opressão. (Almeida, 1998, p. 74).

Além disso, houve oportunidade para as mulheres que adoravam matemática e se sentiam entusiasmadas com os desafios numéricos propostos, de ingressarem no curso e aprimorarem conhecimentos. Nas palavras da professora Arlete<sup>2</sup>:

Sempre estudei com entusiasmo. Decidi fazer o curso de matemática, depois que passei a trabalhar com a famosa “banca”. Foram tantos estudantes que procuravam as aulas particulares que fui admirando e

<sup>2</sup>Entrevista realizada com a professora Arlete Cerqueira Lima em novembro de 2023.

aprendendo, pois como dizem: Quem sabe faz, quem não sabe ensina!! Então eu fui refazendo minha base matemática para dar aula. (Entrevista, 2023).

Assim como Arlete, inúmeras mulheres ingressaram no curso de Matemática oferecido na FF e o concluíram. Tanto que o quantitativo de mulheres que frequentou o curso de Matemática na Bahia é inusitado para as concepções patriarcais vigentes na época, constituindo um índice diferenciado e inovador em relação às mulheres na matemática.

Particularmente, de 1945 a 1968<sup>3</sup>, formaram-se no curso de matemática 118 estudantes (Licenciados e/ou Bacharelados), sendo 84 mulheres e 34 homens. De 1969<sup>4</sup> a 1980<sup>5</sup>, formaram-se 188 estudantes, sendo 121 mulheres e 67 homens. Em várias formaturas, o número de mulheres foi superior ao número de homens e, em algumas, formaram-se apenas mulheres, a exemplo de 1965 quando nove mulheres receberam o diploma de licenciadas em Matemática. (Menezes, 2019, p. 118).

Segundo depoimento da professora Arlete (2013):

As mulheres que faziam o curso de matemática visavam o ensino secundário, todas precisavam trabalhar, eram todas da classe média. [...] Tínhamos um entusiasmo muito grande no curso; além disso, a profissão facilitava a condição de vida profissional e familiar.

Essa fala revela condicionantes impostas social e culturalmente à trajetória de vida das mulheres, qual seja Gênero/Classe Social e Gênero/Carreira, fatores muitas vezes determinantes no momento das escolhas profissionais. Arlete revela, também, o grande entusiasmo das mulheres que frequentavam o curso de Matemática, mostrando, mais uma vez, o falso mito de que as mulheres não gostam da matemática.

Os homens, todos que tinham tendência para a matemática, iam para a engenharia. Só aqueles que perdião o vestibular para a engenharia, para não ficarem “vadiando”, faziam matemática. Mas esses homens estavam ali só interessados nas disciplinas para o vestibular de engenharia, a

<sup>3</sup>De acordo com o Livro de Bacharéis e Licenciados da FF (Arquivo da FF).

<sup>4</sup>De acordo com o Livro Registro de Diplomas — nº 28 e nº 7-A (Arquivo do SEDIC/UFBA); agradeço a colaboração de Áurea Ana Fagundes Oliveira do SEDIC.

<sup>5</sup>Os dados de 1970/1980 foram pesquisados no Livro do Termo de Colação de grau dos alunos dos cursos de Matemática e Processamento de Dados da UFBA (Arquivo do IM).

matemática era o trampolim. Então as mulheres eram muito melhores alunas que eles (os homens), porque elas estavam ali por um ideal. (Entrevista, 2013).

Esse ideal levou essas mulheres a quebrarem o mito e a ingressarem como estudantes no curso de graduação em Matemática e, depois de formadas, continuarem lutando para aprimorar seus conhecimentos e trazer, para a Bahia, a nova Matemática Moderna que surgia, transformando assim toda a estrutura matemática vigente até aquele momento. Como argumenta Sandra Harding (1993, p. 15), “o empreendimento científico é estrutural e, simbolicamente, integrante dos sistemas de valores da cultura”, ou seja, a ciência está baseada num construto histórico/cultural/temporal que mantém uma estrutura de padrões diferenciados para homens e mulheres, incluindo concepções “definidoras de posturas eminentemente masculinas” (Chassot, 2004, p. 47).

Como falamos anteriormente, entre as alunas do curso de Matemática, duas começaram a buscar novos caminhos para se desenvolverem profissionalmente e alcançarem melhorias na qualidade do ensino matemático praticado na universidade baiana — ARLETE CERQUEIRA LIMA e MARTHA MARIA DE SOUZA DANTAS.

Neste artigo, em especial, vamos homenagear a professora ARLETE, articuladora e fundadora do IMF e Primeira Mestra em Matemática da Bahia.

Escrever sobre a trajetória profissional da Professora Arlete sob a perspectiva de gênero é importante, pois

Torna-se [...] fundamental que as/os aspirantes às carreiras científicas tenham conhecimento das contribuições de mulheres que, contrariando as representações do senso comum, elevaram seus gritos de luta e fizeram suas vozes ecoarem nestes espaços recheados de androcentrismo. Mulheres que participaram efetivamente do fazer científico como “sujeitos” e produtoras de conhecimento. Mulheres que precisam ser vistas como “modelos de referência” para as futuras gerações. (Menezes, 2020, p. 48).

Além disso, precisamos lutar por equidade nas relações de integração e respeito para com a diversidade cultural e social característica da nossa sociedade e criar um elo entre o espaço matemático e sua história.

## **Arlete — a jovem menina que iniciou o ensino da Matemática Moderna na Bahia**



Professora Arlete.

Arlete nasceu no dia 27 de agosto de 1932 em Itabaiana, município de Sergipe. Filha de Auto José de Jesus e de Silvina Vieira de Jesus. É a filha caçula do casal. A família era composta de 7 mulheres e três homens. Segundo suas lembranças,

A família vivia de acordo com o lema: “todos por um e um por todos”. Coincidência ou trabalho dos Deuses as 7 Jabuticabeiras e as 7 meninas eram exuberantes cada uma a seu modo, comungavam o entusiasmo pela natureza ou pela vida. Coincidência, magia ou trama dos Deuses? “SETE”. (Entrevista, 2013).

Ela relembra as sete jabuticabeiras que existia no sítio da família e que cresciam juntas com as sete meninas. A união das sete meninas era fundamental para enfrentarem os desafios comuns à vida no agreste nordestino, principalmente para uma família com baixos recursos financeiros.

Meu pai, que era um analfabeto funcional, trabalhava na pequena cultura de subsistência, cultivando feijão, batata, cebola, alho, aipim, inhame, etc. Aos sábados, ele levava as sobras dos alimentos cultivados no sítio para serem vendidas na feira local e com o dinheiro obtido, eram compras

---

dos, às vezes trocados, por outros alimentos para consumo da família, como a carne e o requeijão. Apesar desta situação aparentemente de pobreza, digo aparente, porque nós não passávamos fome, tínhamos uma boa alimentação. [...] Nós éramos felizes, vivíamos bem! (Entrevista, 2013).

Os irmãos homens de Arlete, desde muito jovens, deixaram o sertão em busca de trabalho nas cidades grandes. Fato ainda comum nos dias atuais, os homens saem de suas cidades em busca de melhores condições de sobrevivência, e as mulheres ficam no local, cuidando da pequena lavoura. Essa questão relaciona as categorias de gênero e classe social, pois, segundo Heleith Saffioti (2009, p. 19):

As classes sociais são, desde sua gênese, um fenômeno gendrado. Por sua vez, dezenas de transformações no gênero são introduzidas pela emergência das classes sociais. Para amarrar melhor esta questão, precisa-se juntar o racismo. [...] Não se trata de somar racismo + gênero + classe social, mas de perceber a realidade composta e nova que resulta desta fusão. [...] Não se trata de variáveis quantitativas, mensuráveis, mas sim de determinações, de qualidades, que tornam a situação destas mulheres muito mais complexa.

Arlete tinha aproximadamente quatro anos quando teve que se mudar com a família para Aracaju, devido à presença constante de Virgulino Ferreira da Silva, conhecido como Lampião, o rei do cangaço. Em uma dessas passagens pela Serra de Itabaiana, Lampião pediu abrigo no sítio de seu Auto, mas este negou a proposta e, em contrapartida, Lampião o ameaçou: “O senhor tem sete filhas, lembre-se disso”. Seu Auto, pai de Arlete, ficou muito apreensivo e, rapidamente, saiu da cidade.

A mudança para Aracaju inicialmente trouxe inúmeras dificuldades, pois a família era numerosa e as condições na cidade grande são mais onerosas que no interior. Nesta cidade, Arlete estudou inicialmente no Grupo Escolar General Valadão e depois no Colégio Ateneu Sergipense.

Por volta dos quatorze anos, a família tornou a se mudar, desta vez o destino foi Salvador. A irmã Odete, já morando e trabalhando em Salvador, proporcionou a mudança da família. Começou, assim, uma nova etapa na vida de Arlete, ela precisava trabalhar para ajudar nas despesas.

Nessa época, a profissão aceitável para as mulheres era o magistério, mas Arlete não tinha formação para atuar nas escolas oficiais, então começou a aproveitar as oportunidades das aulas particulares (as chamadas “bancas”), inicialmente “foram aulas de latim, de francês, de inglês, português, matemática e tudo que aparecia. Eu ficava apreensiva, pois não tinha tanto domínio, mas Odete me ‘empurrrava’ e eu ia me virando. Deu certo! Eu fui a ‘primeira chutadora da Bahia’” — diz Arlete (Entrevista, 2013).

Com o passar do tempo, Arlete escolheu atuar apenas com as aulas particulares de matemática e, assim, ensinava e fortalecia seus conhecimentos. É o começo da sua escolha profissional.

Em 1951, ela realizou, com aprovação, o vestibular para Matemática. Durante os quatro anos no curso, ela se empenhou e realizou sua formação em Licenciatura em Matemática, formando-se em 1954. Em janeiro de 1955, foi aprovada em concurso para professora do Estado, sendo designada para atuar no Ginásio da Bahia, conhecido como Colégio Central. Em suas palavras: “Eu estava entusiasmada para assumir meu cargo de professora secundária”. Para uma jovem recém-formada, vinda do agreste nordestino, essa aprovação em concurso público era uma grande vitória, a oportunidade de melhorar as condições de vida.

Nesse período, Arlete ainda não tinha a visão acadêmica de realizar pesquisa científica, campo ainda incipiente na Bahia:

Existia o curso de bacharelado, mas poucas se interessavam. Eu mesma me matriculei, mas desisti. O curso de bacharelado, na época, não era atrativo, os professores eram fracos. Eu precisava ganhar dinheiro, precisava continuar dando aulas particulares. As mulheres visavam o ensino secundário, não havia essa perspectiva de ensino no curso superior. (Entrevista, 2013).

A visão de Arlete começou a mudar quando participou do I Congresso de Matemática para o Ensino Secundário, realizado em Salvador, em 1955. Evento idealizado e concretizado pela professora de matemática Martha Maria de Souza Dantas, futura amiga de Arlete na luta pela fundação do Instituto de Matemática da Universidade da Bahia.

O evento contou com a participação de professores e professoras de vários Estados do país. Foi um momento de integração, trocas e inúmeras discussões acerca da qualidade e do aprimoramento do ensino matemático. Entre os convidados, esteve pre-

---

sente o já renomado professor/pesquisador de matemática da Universidade de São Paulo (USP) Omar Catunda<sup>6</sup>. Na visão de Arlete, o professor Catunda já era um ícone da matemática naquela época:

Ao vê-lo, na mesa de abertura do Congresso, [...] tomei um susto: Omar Catunda era vivo? Nas minhas aulas de cálculo, o seu nome era frequentemente citado, [...] imaginava-o um vivente do século passado! Mas ele estava ali, falando aos professores. (Lima, 1985, p. 42)

Ao visitar a FF da Bahia e verificar a situação do curso de Matemática da Instituição, que contava, na época, com apenas quatro professores, todos com idade já avançada, Omar Catunda ofereceu uma bolsa de estudos na USP para a professora Arlete. Inicialmente, ela não aceitou devido à empolgação com suas atividades no Colégio da Bahia. Mas o professor Catunda continuou insistindo e incentivando o convite e, dois anos depois, em 1957, Arlete decidiu aceitar o convite para passar um período de estudos na USP.

Nesse primeiro período na USP, a jovem Arlete enfrentou muitas dificuldades em relação aos conteúdos matemáticos novos, defasagem de conhecimentos, pouca base teórica, pouco dinheiro para se manter, enfim, foi um ano difícil:

Ao começar seus estudos na USP em 1957, Arlete sofreu com o choque de nível educacional entre o que se ensinava aqui na Bahia e o que estava sendo ensinado em São Paulo. Era grande o desnível em relação aos conteúdos, na USP já se trabalhava a teoria dos conjuntos, trazida pelos professores estrangeiros que lá ensinavam. Em apenas um semestre na USP, ela estudou tudo que tinha aprendido em quatro na FF da Bahia, com a diferença de que lá, estudava-se teoria e prática. Todos os teoremas eram demonstrados, o que pouco se fazia aqui. (Menezes, 2019, p.178).

Um momento marcante para Arlete durante o período na USP foi quando o professor Catunda determinou que ela assumisse a monitoria de uma turma, houve uma grande apreensão.

<sup>6</sup>Omar Catunda formou-se em engenharia pela USP, mas sua grande paixão sempre foi a matemática. Em 1945, tornou-se professor do departamento de Matemática da Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da USP.

Passei mal “pra burro” lá, porque a bolsa era muito pequena e, além disso, Catunda não tinha muito “feeling”; me indicou para assumir uma turma de exercícios, muitos exercícios. Fiquei apreensiva, **os alunos sabiam mais do que eu**. Eu me esforcei tanto para dar conta que adquiri uma insônia terrível. Mas, valeu! Sai com um aprendizado e entusiasmo maior. (Menezes, 2019, 179).

Segundo as análises de Márcia Menezes (2019, p.180):

Pode-se inferir que algumas das dificuldades enfrentadas pela jovem Arlete estavam atreladas às diferenças de gênero impostas pela sociedade, das quais, talvez, ela mesma nem tivesse consciência. Imagine uma mulher jovem, nordestina, recém-formada no curso de matemática, chegando pela primeira vez na USP em 1957, entrando no espaço acadêmico das “ciências duras” e sendo designada para a função de monitoria. Que olhares lhe foram dirigidos? Que questionamentos lhe foram feitos? Uma mulher, assumindo a monitoria de uma turma de matemática, majoritariamente composta por homens? Homens que detêm a objetividade e a razão, sendo conduzidos por uma mulher? Com certeza, mesmo inconscientemente, esses questionamentos fizeram parte dos seus medos e receios. Os medos, os receios — “eles sabiam muito mais do que eu” — estavam arraigados na sua identidade de mulher. Na identidade arraigada que determinava que a jovem Arlete estaria ocupando um lugar, que, em tese, não deveria lhe pertencer — o espaço do campo matemático. Uma mulher que estava infringindo as “normas naturais” que determinam espaços educacionais próprios para os homens e outros, próprios para as mulheres, nos quais a matemática se apresentava como “inadequada” ao caminhar profissional das mulheres.

Apesar dos medos e receios, o período na USP foi recompensador, pois Arlete foi construindo suas bases matemáticas, adquirindo e tornando-se uma agente social autorizada e com autoridade para permanecer e ser reconhecida por seus pares dentro do campo matemático. É o nascer de uma nova mulher, determinada e decidida a mudar a estrutura do ensino matemático que se praticava na Bahia.

---

Antes de retornar a Salvador, Arlete decidiu começar a pôr em prática seus novos objetivos indo ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) no Rio de Janeiro, para falar com o então diretor geral da divisão técnico-científico, o Dr. Antônio Moreira Couceiro. Nesse encontro, ela relatou a situação do ensino matemático na Bahia.

**Eu era muito ousada;** além disso, não existia burocracia em relação ao acesso ao CNPq. Então eu fui lá!. Relatei a situação precária em que se encontrava a matemática na Bahia: um ensino sem elaborações mais profundas que atendesse um futuro desenvolvimento para a pesquisa. Desta forma, gostaria que minhas colegas também pudessem aprimorar seus conhecimentos em prol de um futuro matemático mais promissor. O Dr. Couceiro prontamente se dispôs a atender meu pedido e disse: “quantas você desejar”. (Menezes, 2019, p. 181)

O desejo de Arlete era proporcionar às/aos colegas baianas/os a oportunidade de irem também para a USP aprenderem os novos conhecimentos matemáticos. A sororidade<sup>7</sup> era uma característica latente em Arlete, ela lutava para incentivar o aperfeiçoamento de todas as pessoas com quem convivia. Ao mesmo tempo, também exercia o que Michel Foucault (1985) chamou de “micropoderes” — um poder local, exercido por alguém que não tem noção desse poder, mas que o exerce sutilmente a fim de alcançar mudanças na estrutura social.

Ao chegar de volta a Salvador, Arlete tinha em mente implementar, paralelamente ao curso de Matemática da FF, um Centro de Estudos Matemáticos, que funcionaria como apoio ao curso já existente. Haveria palestras, cursos com professores de outros Estados, discussões dos novos temas da matemática moderna, enfim, seria um espaço de construção e aprimoramentos. Para alcançar esses objetivos, Arlete precisava visitar o chefe maior da UFBA — o reitor, na época, o Prof. Dr. Edgard Santos<sup>8</sup> e, assim, ela o fez. Vai a reitoria e solicita uma conversa com o reitor, nas lembranças dela, “crente de que estava abafando”,

<sup>7</sup>O conceito “Sororidade” é definido como sendo uma aliança entre as mulheres no sentido de se ajudarem e se apoiarem mutuamente.

<sup>8</sup>Edgard Santos — médico, professor, diretor da Faculdade de Medicina da Bahia (1936/1946), fundador da Universidade da Bahia, atual Universidade Federal da Bahia, da qual foi reitor de 1946 a 1961 (Santos, 2008)

de que seria bem recebida e que teria sua ideia totalmente aprovada pelo reitor.

Durante a conversa, que na verdade foi um pequeno monólogo, Arlete relatou ao reitor sua experiência na USP, sua falta de conhecimento e despreparo diante das aulas a que assistiu em São Paulo devido à grande defasagem matemática que existia aqui em Salvador e que gostaria do apoio para formar um Centro de Estudos Matemáticos, o qual receberia professores de fora do Estado, para cursos, palestras, mesas-redondas, com o objetivo de trazer a Matemática Moderna para a Bahia. Relatou também, ao reitor, que já tinha ido ao CNPq e que o Dr. Couceiro estava ciente das condições precárias da matemática que se praticava aqui na Bahia e que tinha prometido bolsas de estudos para aperfeiçoamento na USP. O monólogo resultou na expulsão de Arlete do gabinete do reitor.

O reitor ouviu tudo calado e foi ficando uma fera, ficava cada vez mais ofendido com meu relato....e de repente disse “que eu não tinha autorização para solicitar bolsas e muito menos para desqualificar a imagem da Universidade junto ao CNPq”. Ofendidíssimo, o reitor me expulsa da sua sala!. (Entrevista, 2013).

A jovem Arlete não tinha noção da extensão que suas críticas ao ensino matemático baiano provocariam, afinal, criticar o ensino da FF estava interligado a criticar o ensino oferecido pelos catedráticos da Escola Politécnicas e intelectuais baianos da época. Mas, segundo a própria Arlete:

Os professores não tinham culpa de nada, eles ofereciam o curso que podiam e que sabiam. A FF não tinha verba para contratar professores de fora, como foi o caso da USP, então os cursos ficaram empobrecidos dos avanços. Com a minha ida a São Paulo, eu vi a possibilidade de conseguir avanços, renovação e aprimoramento. (Entrevista, 2013).

A questão defendida por Arlete foi também pontuada pelo professor Rubens Gouveia Lintz<sup>9</sup> (1996, p. 61): “o ambiente matemático então era pobre, com velhos professores lecionando, cursos petrificados há dezenas de anos e absolutamente nenhuma pesquisa na Matemática”.

Após o incidente da expulsão de Arlete da reitoria, surgiu a figura de outra mulher, a professora Martha

<sup>9</sup>Rubens Lintz foi o primeiro diretor do Instituto de Matemática e Física da Universidade da Bahia (1960-1962)

---

Maria de Souza Dantas, articuladora e fundadora do IME.

Após o conflito inicial entre Arlete e o reitor, surgiu a figura de outra mulher, Martha Dantas, professora de Matemática, filha da classe alta burguesa, que tinha acesso às rodas sociais da elite baiana e, particularmente, era amiga do professor Edgard Santos. Neste ponto, infiro que a interseccionalidade de gênero e classe se fez presente de forma determinada. Inicialmente, diante do reitor, uma mulher desconhecida, vinda das camadas populares da sociedade, sem status social para ser ouvida — Arlete. Surge, no segundo momento, outra mulher, mas com capital simbólico de classe, filha da alta sociedade baiana, com status social dos pais, ou seja, capital de classe igual ao do reitor, o que lhe conferiu o poder de ser ouvida e acolhida. Segundo Arlete, quando Martha foi questionada pelo reitor sobre as questões do ensino da Matemática, confirmou todas as considerações feitas anteriormente por ela, dizendo: “É doutor, essa menina tem toda razão! Eu mesma estive em Portugal assistindo às aulas do professor Sebastião e Silva<sup>10</sup> e não entendi absolutamente nada”. (Menezes, 2020, p. 53).

Após ouvir Martha Dantas, o reitor resolveu procurar Arlete.

Depois de ouvir a professora Martha, o reitor redigiu um bilhete de próprio punho para que eu comparecesse à reitoria. Chegando lá, ele se desculpou e me pediu para organizar um Instituto de Matemática. Veja que humildade! O reitor me pedindo desculpas! Eu disse: Doutor eu não tenho condições de fazer isso! É um projeto muito grande. Além disso, o professor Catunda está pleiteando mais um ano de bolsa de estudo para mim na USP. Ele então disse: Vá e eu lhe dou mais uma bolsa e quando

você retornar falaremos deste projeto. (Entrevista, 2013).

Após essa conversa, Arlete passou mais um ano no USP se aprimorando e, ao retornar, estava mais preparada para levar em frente seu sonho de fundar não mais um Centro de Estudos, mas um Instituto de Matemática.

Estava com carta branca para procurar no Brasil, um matemático competente para assumir a direção do IM. [...] Mas a proposta vasou e as escolas tradicionais da universidade que tinham Matemática em seu currículo rejeitaram, com violência, a criança ainda em gestação. Senti-me muito só e tive a feliz ideia, [...] de convidar Ramiro de Porto Alegre Muniz<sup>11</sup> e propor ao reitor a fundação de um Instituto de Matemática e Física em vez de um Instituto de Matemática. Com a companhia de Ramiro, que tem um conhecimento profundo, muito mais do que eu, inclusive um conhecimento internacional, teremos mais condições de realizar a fundação não mais de um centro em matemática, mas sim de um Instituto de Matemática e Física — IMF. (Entrevista, 2013).

Algumas reflexões são necessárias sobre o desdobramento dos fatos:

— Por que houve rejeição ao IMF? Segundo o pensamento de Arlete, o motivo foi

Medo. Eles tinham medo de serem abafados pelos matemáticos que viriam. (Entrevista, 2013).

— Por que Arlete ou Martha não assumiram a direção do IMF?

Ah, porque Lintz era doutor. Nós éramos ....(gesticulação das mãos) Era preciso um doutor para se impor perante o IMPA e outras Universidades do país. Lintz tinha muito conhecimento, prestígio e trouxe vários professores de fora para dar cursos aqui. (Entrevista, 2013).

Sem desconsiderar a competência e o mérito do professor Lintz, considero que tanto Arlete quanto

<sup>10</sup>José Sebastião e Silva — renomado professor matemático português do século XX. Um dos responsáveis pela introdução da Matemática Moderna em Portugal. Para ele, “[...] a educação, na era científica, não pode continuar, de modo nenhum, a ser feita segundo os moldes do passado. Em todas as escolas o ensino das ciências tem que ser intensificado e remodelado desde as suas bases, não só quanto a programas, mas ainda quanto a métodos”. (Disponível em: [cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/p22.html](http://cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/p22.html). Acesso em: 7 mar. 2013).

<sup>11</sup>Um dos mais prestigiados e conhecidos físicos experimentais do Brasil. Veio inicialmente para a Bahia, a convite do Dr. Edgard Santos, com o objetivo de organizar e dirigir a Escola de Geologia. Foi professor também da FF.

Martha estavam em condições de assumir o cargo de direção do Novo IMF. Mas não podemos esquecer que os mecanismos de poder atuam em redes e são exercidos através de graus de hierarquização estabelecidos nas relações sociais, assim, no momento de decisão sobre o cargo de direção do IMF, as relações de poder foram acionadas, os pares se sentiram ameaçados no ambiente androcêntrico que caracteriza a ciência.

O poder deve ser analisado como algo que circula, ou melhor, como algo que só funciona em cadeia. Nunca está localizado aqui ou ali, nunca está nas mãos de alguns, nunca é apropriado como uma riqueza ou um bem. O poder funciona e se exerce em rede. Nas suas malhas os indivíduos não só circulam, mas estão sempre em posição de exercer este poder e de sofrer sua ação. (Foucault, 1985, p. 183, grifos nossos).

Apesar de todas as discussões, adversidades enfrentadas no caminho, a união entre Martha, Arlete, Ramiro e Edgard proporcionou a fundação,

[...] em 1960, dos “Institutos Gêmeos” — Instituto de Matemática e Instituto de Física da Universidade da Bahia, [...] Vale reafirmar: A fundação do IMF só foi possível devido à tenacidade dessas duas mulheres. (Menezes, 2019, p. 193)

Ao longo do tempo, outras mulheres foram aderindo ao sonho e ao ideal de proporcionar à nova geração um ensino matemático de qualidade. As atividades no IMF ocorriam de forma paralela ao curso de Matemática da FF. No Instituto, a busca por aquisição de novos conhecimentos era empolgante. Vários professores e professoras de outros Estados e países eram convidados para desenvolver cursos, palestras e seminários. Havia um entusiasmo enorme. Várias bolsas de estudos foram oferecidas para os egressos do curso terem a oportunidade de desenvolver pesquisa em outros estados e em outros países. Mas, em 1968, ocorreu a Reforma Universitária e,

[...] através do Decreto-Lei 62241 que reestruturou a UFBA o IMF foi subdividido em IM (Instituto de Matemática) e IF (Instituto de Física), [...] portanto, de acordo com as normas de reestruturação<sup>12</sup>, o Instituto de

<sup>12</sup>O art.1º do Decreto 6.224/68 estabeleceu que a UFBA passava a constituir-se das Unidades Universitárias e Órgãos Suplementares. Disponível em <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1960-1969/decreto-62241-8-fevereiro-1968-403521-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 4 maio 2013.

Matemática assumiu suas funções de Unidade Universitária. Assim, aquele “antigo” grupo de mulheres do IMF assumiu todas as atividades de matemática que faziam parte do currículo dos cursos da Universidade. (Menezes, 2019, p. 213)

O Instituto de Matemática, ao se tornar Unidade Universitária, passou a ser um futuro e promissor núcleo de avanços nas áreas das pesquisas científicas, não só da Matemática, mas de todas as áreas que a envolvessem, como, por exemplo, os convênios que foram firmados com a Escola de Geologia e que tinham o apoio financeiro da Petrobrás e da Sudene. Era um novo horizonte em expansão.

Muitas lutas, muitas discordâncias ocorreram na trajetória do Instituto, mas também muita união, muito empenho e muitos desejos de manter o espaço progredindo e se atualizando. Isso só foi possível graças à tenacidade das mulheres que assumiram a luta, enfrentaram os obstáculos e mantiveram acessa a chama da Educação de qualidade e, hoje, podemos usufruir do Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia como um polo de referência no circuito matemático.

## Algunas atividades desenvolvidas por Arlete

Anteriormente, vimos que Arlete começou sua carreira profissional de ensino atuando nas famosas aulas de “banca”, construindo de forma autodidata sua base matemática. No seu caminhar, exerceu a docência no Colégio da Bahia, no Colégio Dois de Julho, na FF, na Escola de Geologia (atual Instituto de Geociências da UFBA), no IMF, no Centro de Ensino de Ciências da Bahia (Ceciba) e na Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS).

Arlete foi responsável pela implantação, em 1969, do Programa de Pós-Graduação (Mestrado) em Matemática no Instituto e é a primeira mestra em Matemática da Bahia. Durante seu curso de mestrado, ela passou um período de estudos em Trieste (Itália), ao retornar, defendeu sua dissertação intitulada *A note on the Asymptotic Equivalence of two Systems of Differential Equations*, orientada pelo professor visitante tcheco Marco Svec.

Arlete foi diretora do Instituto de Matemática de 1980 até 1982 e, durante sua gestão, o Instituto ganhou sede própria no Campus de Ondina. Foi também coordenadora de colegiados de cursos e da Pós-Graduação em Matemática. Coordenou a Central de

Pesquisa e Pós-Graduação (atual Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da UFBA — PRPPG) de 1974 a 1975. Nesse período, liderou o projeto “Ambientes Estuarinos do Estado da Bahia”. Recebeu em 1995 o Título de Professora Emérita da UFBA.

Em 1992, publicou o livro *Lógica e Linguagem* e, em 2010, publicou um novo livro, *Lógica Formal — origens e aplicações*. Entre os artigos, destacam-se: “Asymptotic Equivalence of Volterra Integral Equations” (1977); “A note on Generated Systems of Sets” (1977); “Os três problemas gregos da antiguidade, as construções com régua e compasso e a Teoria de Galois” (1993); “O banquete de Hilbert ou um diálogo sobre o infinito” (1994); “O método axiomático e o problema da consistência absoluta” (2001).

Na trajetória de vida da menina de saia estampada, houve quedas e tropeços, mas essa menina sempre se levantou, sacudiu a poeira e se reergueu, assim como tantas outras pessoas de que infelizmente não conhecemos suas histórias e continuam sob o véu da invisibilidade. E é exatamente com o objetivo de termos referências de apoio e exemplo, que grafamos o nome da professora **ARLETE CERQUEIRA LIMA**.

## Um pouco mais dessa mulher cheia de entusiasmo pela vida e pelo ensino matemático

Uma vida Profissional Heuristicamente vivida

No princípio (da aula) eram os conceitos.

E eu lhes dava cor e forma.

E eles (os alunos) os intimavam através de exemplos e de contra-exemplos.

Depois, era a relação entre eles (os conceitos).

E eu os fazia distinguir a diferença entre causa e efeito, entre premissas e conclusão. E os conduzia através do diálogo ao objetivo (a conclusão).

A aula se transformava em um jogo (jogado por todos), onde a meta era atingida, muitas vezes, por caminhos diversos.

Havia entusiasmo e brilho nos olhos, sempre que alguém descobria um caminho novo.

E o tempo passava rápido...e ninguém se cansava.

Aos poucos, o milagre acontecia: eles iam adquirindo (sempre através do diálogo) independência do raciocínio e enfrentando, sozinhos, situações novas.

E eu constatava e desfrutava a alegria que dá a autonomia.

E eu me comprazia com o prazer que eles sentiam ao se descobrirem livres.

E eu... só tenho saudades.

ARLETE CERQUEIRA LIMA, 1983

## Bibliografia

ALMEIDA, Jane S. de. Mulher e educação: a paixão pelo possível. São Paulo: Editora UNESP, 1998.

CHASSOT, Attico. A Ciência é masculina? São Leopoldo-RS: Editora Unisinos, 2004.

FOUCAULT, Michel. Microfísica do poder. Organização e Tradução de Roberto Machado. 5.ed. Rio de Janeiro: Edições Graal, 1985.

HARDING, Sandra. A instabilidade das categorias analíticas na teoria feminista. Revista Estudos Feministas, Florianópolis, UFSC, v.1, n.1, p. 7-31. 1993.

LIMA, Arlete C. Depoimento. Caderno do IFUFBA, Salvador, ano I, n. 3, p.36-53, Jul,1985.

LINTZ, Rubens G. Depoimento. Cadernos do IFUFBA, Salvador, ano 11, v.8, n.1 e 2, p.61-62, jul. 1996.

MENEZES, Márcia B. de. A matemática das mulheres: as marcas de gênero na trajetória profissional das professoras fundadoras do Instituto de Matemática e Física da Universidade da Bahia (1941-1980). Salvador: EDUFBA, 2019.

MENEZES, Márcia B. de. A importância do exemplo — Arlete Cerqueira Lima e Martha Maria de Souza Dantas como matemáticas inspiradoras para as novas gerações. In: ROCHA, Cristiane L. S., SANTOS, Sílvia Karla A. dos. (Org.). Bahia das mulheres: histórias, sabores, práticas, olhares. Salvador: Sagga, 2020, p: 47-63.

SAFFIOTTI, Heleith. I. Ontogênese e Filogênese do Gênero: ordem patriarcal de gênero e a violência masculina contra mulheres. Série Estudos e Ensaios/Ciências Sociais/ FLACSO — Brasil, p.1-44, jun. 2009

SANTOS, Roberto F. Vidas Paralelas. 2. ed. Salvador: EDUFBA, 2008.

SILVA, Paulo S. Âncoras de tradição: luta política, intelectuais e construção do discurso histórico na Bahia (1930-1949). Salvador: EDUFBA, 2000.



Márcia Barbosa de Menezes é docente do Departamento de Matemática da UFBA. Mestra em Matemática e Doutora em Estudos Interdisciplinares sobre Mulheres, Gênero e Feminismo. Atua na Pesquisa com o tema: “Trajetórias de Mulheres Matemática na Bahia: desafios e superações”, e no projeto de Extensão “Matemática é coisa de Menina”. Seu foco é incentivar meninas e jovens mulheres a admirarem, ingressarem e permanecerem atuantes na área das Ciências Exatas.



# TÉCNICA Acaso e Certezas: A Versatilidade do Método Probabilístico

*Carlos Augusto D. Ribeiro, Daniel Vitor C. Vieira e Joice M. Brito*

## Introdução

O Método Probabilístico trouxe um novo sopro de criatividade para a Matemática lá pelos anos 50, graças à visão inovadora dos matemáticos húngaros Paul Erdős e Alfréd Rényi. Eles, meio que cansados das longas e complexas demonstrações do jeito tradicional, especialmente em áreas como teoria dos números e combinatória, decidiram que era hora de algo diferente. E assim, mergulharam no mundo das probabilidades e estatísticas para dar vida a suas ideias.

Erdős e Rényi foram verdadeiros desbravadores, abraçando a aleatoriedade de sistemas complexos de uma maneira totalmente nova. Em vez de seguir o roteiro tradicional passo a passo, eles jogaram com distribuições de probabilidade e aplicaram teoremas poderosos, como o do Limite Central, para tirar conclusões elegantes mesmo quando tudo parecia incerto.

O coração do método é bastante direto: primeiro, modelar o problema de maneira probabilística, depois mostrar que a propriedade que estamos de olho tem uma chance real de acontecer e, por fim, usar desigualdades famosas, como as de Markov ou Chebyshev, para provar que essa propriedade realmente vem à tona conforme o sistema cresce.

Essa abordagem acabou sendo um verdadeiro achado, ajudando a desvendar problemas antes vistos como impossíveis em várias áreas, desde a teoria dos números até a bioinformática, passando pela física estatística. Por exemplo, Erdős e Rényi usaram essa técnica para descobrir grafos com características que muitos achavam que só existiam na imaginação. Rényi, por sua vez, aplicou esse método para solucio-

nar um dilema sobre números primos que estava sem resposta há mais de meio século.

O sucesso do Método Probabilístico não só abriu portas para novos campos de estudo, como a combinatoria probabilística e a teoria dos números analítica, mas também motivou uma nova geração de matemáticos a seguir explorando. Um exemplo é Endre Szemerédi, que levou as ideias ainda mais longe, resolvendo problemas complexos em teoria dos grafos e aritmética.

Apesar de ter sido um pouco controverso no início, hoje o Método Probabilístico é considerado fundamental na matemática contemporânea, continuando a desvendar padrões misteriosos e a estabelecer conexões surpreendentes por todo o universo matemático. Devido a sua versatilidade, hoje vemos o Método Probabilístico ser usado, de maneira direta ou indireta, em áreas como:

- **Teoria dos Números:** O método probabilístico tem sido muito empregado para demonstrar a existência de padrões em propriedades aparentemente aleatórias de números primos, como na estimativa da distribuição de primos feita por Rényi em 1958.
- **Combinatória:** Permite provar a existência de certas configurações combinatórias como emparelhamentos perfeitos, ciclos hamiltonianos, e resolução de identidades envolvendo coeficientes binomiais. Foi crucial para estabelecer novos resultados em teoria extremal de grafos.
- **Teoria dos Grafos:** Ideal para estudar propriedades de grafos aleatórios e probabilísticos. Utiliza-se amplamente na bioinformática e na física estatística.

lizado para provar bounds em parâmetros como independência, conectividade, coloração e empacotamento de arestas/vértices.

- **Otimização Combinatória:** Técnicas probabilísticas fornecem algoritmos randômicos e aproximados para problemas NP-difíceis de escalonamento, empacotamento, matching e coloring.
- **Processos Estocásticos:** O método probabilístico se aplica no estudo de cadeias de Markov, movimento Browniano, processos de ramificação e percolação.
- **Inferência Estatística:** Estimativas de parâmetros e testes de hipóteses frequentemente envolvem modelagem probabilística. Técnicas como bootstrap e Markov Chain Monte Carlo empregam raciocínio semelhante.

E é esse o objetivo desse artigo: nos lembrar que a Matemática não é só sobre encontrar respostas definitivas, mas também sobre explorar as possibilidades e usar a incerteza para demonstrar certezas. É uma lição sobre como, às vezes, aceitar que não sabemos tudo pode ser exatamente o que precisamos para descobrir algo novo, qualquer que seja a área.

## O funcionamento do Método Probabilístico

Como mencionamos na introdução, a beleza do Método Probabilístico reside em sua simplicidade: se uma propriedade tem uma probabilidade não nula de ocorrer, então essa propriedade existe em algum caso concreto. Isso é uma maneira elegante de afirmar a existência de certas configurações sem a necessidade de construí-las passo a passo.

O raciocínio é direto: se a chance de um evento  $A$  acontecer é maior que zero, então  $A$  tem que se manifestar em algum momento dentro do nosso universo de possibilidades. Demonstrando que  $P(A) > 0$ , confirmamos a existência de  $A$  em alguma instância específica.

O Método Probabilístico, então, se desdobra nos passos a seguir:

- Modelar o problema de forma probabilística, designando distribuições de probabilidade aos componentes do problema.
- Escolher um evento  $A$  ligado à característica que queremos demonstrar.

- Calcular a probabilidade  $P(A)$ , geralmente procurando estabelecer um limite inferior.
- Provar que  $P(A) > 0$ , muitas vezes recorrendo a desigualdades, como a de Markov.
- Concluir que, devido a  $P(A) > 0$ ,  $A$  precisa existir em alguma realização determinística.

Nos exemplos que traremos nas próximas seções, você vai ver essa lógica em ação, ilustrando a aplicabilidade e a eficácia do Método. O artigo se divide então em seis seções principais: Pré-requisitos de Probabilidade, Aplicações em Teoria dos Números, Combinatória, Teoria dos Grafos, Álgebra, e Geometria. Todos os problemas discutidos são acessíveis para estudantes envolvidos em olimpíadas de Matemática do ensino médio. Então, vamos explorar juntos essas ideias fascinantes!

## Um pouco de Probabilidade

Um **espaço amostral**  $\Omega$  é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Por exemplo, ao lançar uma moeda, temos  $\Omega = \{cara, coroa\}$ . Este espaço pode ser **finito**, **infinito** ou **enumerável**, dependendo do número de resultados possíveis.

A noção de espaço amostral é crucial para definir a possibilidade de um evento. Um evento é dito possível se puder ocorrer dentro dos resultados do espaço amostral. Por exemplo, “obter cara” é possível ao lançar uma moeda, mas “obter dois” não é, já que não está contido no espaço amostral definido.

Para um espaço amostral finito  $\Omega$  com  $n$  elementos, a **probabilidade** é uma função  $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$  que atribui a cada resultado  $\omega \in \Omega$  um número real  $P(\omega)$ , satisfazendo as seguintes condições:

1.  $P(\omega) \geq 0$ , para todo  $\omega \in \Omega$ .
2.  $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$ .

Isso indica que as probabilidades são não-negativas e a soma das probabilidades de todos os resultados possíveis é igual a 1.

Em espaços amostrais infinitos, a probabilidade é associada a subconjuntos de  $\Omega$  através de uma **medida probabilística**  $\mu$ , que é uma função satisfazendo:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2. Se  $A \subseteq B$ , então  $\mu(A) \leq \mu(B)$  (monotonia).

3. Se  $A_1, A_2, \dots$  são conjuntos disjuntos, então  $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$  (aditividade contável).
4.  $\mu(\Omega) = 1$ .

Portanto,  $\mu(A)$  para um subconjunto  $A \subseteq \Omega$  pode ser interpretado como a probabilidade  $P(A)$  desse evento.

Dentro deste contexto, introduzimos conceitos como **probabilidade condicional** e **variáveis aleatórias**. A probabilidade condicional de um evento  $A$  dado outro evento  $B$  com  $P(B) > 0$  é expressa como  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ , representando a probabilidade de  $A$  ocorrer sob a condição de  $B$ .

Uma **variável aleatória** é uma função que associa um valor numérico a cada resultado de um experimento aleatório, mapeando os resultados de  $\Omega$  para números reais. Variáveis aleatórias podem ser **discretas** ou **contínuas**, dependendo do tipo de  $\Omega$ .

A **função de distribuição** ou função de distribuição acumulada (FDA) de uma variável aleatória  $X$ ,  $F_X(x) = P(X \leq x)$ , descreve a probabilidade de  $X$  assumir um valor menor ou igual a  $x$ . Esta função é fundamental para entender a distribuição de probabilidades de variáveis aleatórias, aplicável em diversas distribuições como a Uniforme, Normal, Exponencial, entre outras.

O **valor esperado**  $\mathbb{E}[X]$  representa a média ou o “valor médio” de uma variável aleatória  $X$ . Para variáveis aleatórias discretas, ele é calculado como:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x P(X = x).$$

O valor esperado pondera cada resultado possível de  $X$  pelo seu peso probabilístico. Por exemplo, o valor esperado ao lançar um dado é 3.5, calculado como a média ponderada de todos os resultados possíveis.

O valor esperado permite resumir o comportamento de uma variável aleatória em um único número, apresentando propriedades importantes como:

1. **Linearidade:**  $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
2. **Multiplicação por constante:**  $\mathbb{E}[cX] = c\mathbb{E}[X]$  para qualquer constante  $c$ .
3. **Propriedade de não-negatividade:** Se  $\mathbb{E}[X] \geq a$ , então  $P(X \geq a) > 0$ .

A **variância**, definida como  $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ , mede a dispersão dos valores de  $X$  em torno de  $\mathbb{E}[X]$ . Uma alta variância indica que os valores de  $X$  estão espalhados longe da média, enquanto uma baixa variância mostra que estão concentrados próximos à média.

Propriedades da variância incluem:

1.  $\text{Var}[cX] = c^2 \text{Var}[X]$  para qualquer constante  $c$ .
2.  $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$  se  $X$  e  $Y$  são independentes.
3.  $\text{Var}[X] \geq 0$ , com igualdade somente se  $X$  é constante quase certamente.

A **covariância**  $\text{Cov}[X, Y]$  mede a dependência linear entre  $X$  e  $Y$ , com as propriedades:

1.  $\text{Cov}[X, Y] = \text{Cov}[Y, X]$ .
2.  $\text{Cov}[X, Y] = 0$  se  $X$  e  $Y$  são independentes.
3.  $\text{Cov}[X, X] = \text{Var}[X]$ .

Finalmente, as desigualdades de Markov e Chebyshev são ferramentas essenciais:

1. **Desigualdade de Markov:** Para  $X \geq 0$ ,  $P(X \geq M) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{M}$  para todo  $M > 0$ .
2. **Desigualdade de Chebyshev:** Para  $X$  com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ ,  $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$  para qualquer  $k > 0$ .

Agora vamos partir para as aplicações, começando pela Teoria dos Números, e sendo o mais objetivo possível a fim de não tornar a leitura desse artigo massante.

## Método Probabilístico e Teoria dos Números

Consideremos  $v(n)$  como a quantidade de divisores primos distintos  $p$  que são divisores de  $n$ . Um resultado notável afirma que a maioria esmagadora dos números  $n$  possui um número de fatores primos muito próximo a  $\ln \ln n$ . Esse resultado, originalmente complexo, foi inicialmente demonstrado por Hardy e Ramanujan em 1920. No entanto, uma prova notavelmente simples foi apresentada por Turán em 1934, uma prova que desempenhou um papel crucial no avanço dos métodos probabilísticos na teoria dos números.

**Teorema.** *Seja  $\omega(n) \rightarrow \infty$  arbitrariamente devagar. Então o número de  $x$  em  $1, \dots, n$  tal que*

$$|v(x) - \ln \ln n| > \omega(n) \sqrt{\ln \ln n}$$

é  $o(n)$ .

*Demonstração.* Seja  $x$  um inteiro escolhido uniformemente ao acaso em  $1, \dots, n$ . Para cada primo  $p$ , definimos a variável aleatória:

$$X_p = \begin{cases} 1, & \text{se } p|x, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja  $M = n^{1/10}$  e  $X = \sum X_p$ , a soma sobre todos os primos  $p \leq M$ . Como nenhum  $x \leq n$  pode ter mais de 10 divisores primos maiores que  $M$ , temos:

$$\nu(x) - 10 \leq X \leq \nu(x).$$

Logo, grandes desvios em  $X$  implicam em desvios assintoticamente similares em  $\nu(x)$ . Agora, por linearidade do valor esperado:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{p \leq M} \mathbb{E}[X_p] = \sum_{p \leq M} \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \ln \ln n + O(1),$$

onde usamos a fórmula assintótica bem conhecida para soma de inversos de primos. Similarmente, pode-se mostrar que:

$$\text{Var}[X] = \ln \ln n + O(1).$$

De fato, para isso, basta usar que

$$\text{Var}[X] = \sum_{p \leq M} \text{Var}[X_p] + \sum_{p \neq q} \text{Cov}[X_p, X_q].$$

Como  $\text{Var}[X_p] = (1/p)(1 - 1/p) + O(1/n)$ ,

$$\sum_{p \leq M} \text{Var}[X_p] = \left( \sum_{p \leq M} \frac{1}{p} \right) + O(1) = \ln \ln n + O(1).$$

Com  $p, q$  primos distintos,  $X_p X_q = 1$  se e somente se  $p|x$  e  $q|x$ , o que ocorre se e somente se  $pq|x$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_p, X_q] &= E[X_p X_q] - E[X_p]E[X_q] \\ &= \frac{[n/pq]}{n} - \frac{[n/p]}{n} \frac{[n/q]}{n} \\ &\leq \frac{1}{pq} - \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \right) \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{n} \right) \\ &\leq \frac{1}{n} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{p \neq q} \text{Cov}[X_p, X_q] \leq \frac{1}{n} \sum_{p \neq q} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \leq \frac{2M}{n} \sum_{p \leq M} \frac{1}{p}.$$

Daí,

$$\sum_{p \neq q} \text{Cov}[X_p, X_q] \leq O(n^{-9/10} \ln \ln n) = o(1).$$

E da mesma forma,

$$\sum_{p \neq q} \text{Cov}[X_p, X_q] \geq -o(1).$$

Por fim, a desigualdade de Chebyshev então implica que:

$$P\left[|X - \ln \ln n| > \lambda \sqrt{\ln \ln n}\right] < \frac{1}{\lambda^2} + O(1).$$

Como  $|X - \nu| \leq 10$ , o mesmo vale para  $\nu(x)$ , completando a prova.  $\square$

Na Teoria dos Números, os conjuntos livres de somas são particularmente intrigantes. Eles são definidos de tal maneira que nenhum de seus elementos pode ser obtido pela soma de outros elementos distintos presentes no conjunto. A exploração da existência desses subconjuntos dentro de conjuntos maiores nos permite desvendar aspectos fundamentais da composição aditiva dos números. O teorema apresentado a seguir mergulha nessa questão, destacando a relevância desses conjuntos na compreensão das propriedades numéricas:

**Teorema.** Seja  $A \subseteq \mathbb{N}$  um conjunto com  $n$  elementos. Então existe  $B \subseteq A$  livre de somas com mais que  $\frac{n}{3}$  elementos.

*Demonstração.* Vamos usar aritmética modular para introduzir permutações. Seja  $\bar{a}$  o maior elemento de  $A$  e seja  $p > 2\bar{a}$  um número primo. Dessa forma, para  $a, b, c \in A$ , temos:

$$a + b = c \Leftrightarrow a + b \equiv c \pmod{p},$$

o que nos permite focar apenas na aritmética modular  $\pmod{p}$ , que é mais simples. Suponha, para simplificar, que  $p = 3k + 2$ . Considere o conjunto livre de somas  $S = \{k+1, k+2, \dots, 2k+1\}$  com  $k+1$  elementos. Vamos permutar esse conjunto multiplicando seus elementos por algum  $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$  escolhido aleatoriamente, pois:

$$xa + xb \equiv xc \pmod{p} \Leftrightarrow a + b \equiv c \pmod{p}.$$

Considere então a variável aleatória:

$$X(x) = |xS \cap A|,$$

onde  $xS = \{x(k+1), x(k+2), \dots, x(2k+1)\}$ . Podemos escrever  $X = \sum_{a \in A} X_a$ , onde:

$$X_a = \begin{cases} 1, & \text{se } a \in xS, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que  $\mathbb{E}[X_a] = \mathbb{P}[a \in xS] = \frac{k+1}{3k+1} > \frac{1}{3}$ , pois  $a \in xS \Leftrightarrow x^{-1}a \in S$ . Logo,  $\mathbb{E}[X] > \frac{n}{3}$ , e existe  $x$  tal que  $|xS \cap A| > \frac{n}{3}$ . Tomando  $B = xS \cap A$ , obtemos o conjunto livre de somas desejado.  $\square$

## Método Probabilístico e Combinatória

Considere uma família  $F$  de subconjuntos  $A_i$ , todos de tamanho  $d \geq 2$ , de um conjunto finito  $X$ . Dizemos que  $F$  é *bicolorizável* se existe uma coloração de  $X$  com duas cores de forma que ambas as cores aparecem em cada conjunto  $A_i$ . É imediato que nem toda família pode ser colorida dessa maneira. Como um exemplo, tome todos os subconjuntos de tamanho  $d$  de um conjunto  $X$  com  $(2d-1)$  elementos. Então qualquer que seja a forma com que bicolorirmos  $X$ , deverão existir  $d$  elementos que são coloridos da mesma forma. Por outro lado, fica igualmente claro que cada subfamília de uma família bicolorizável de conjuntos com  $d$  elementos é bicolorizável. Daí, estamos interessados no menor número  $m = m(d)$  para qual existe uma família com  $m$  conjuntos que não seja bicolorizável. Expressando de maneira diferente,  $m(d)$  é o menor número que garante que cada família com menos de  $m(d)$  conjuntos é bicolorizável.

**Teorema.** *Cada família de no máximo  $2^{d-1}$  conjuntos com  $d$  elementos é bicolorizável, isto é,  $m(d) > 2^{d-1}$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $F$  seja uma família de conjuntos de  $d$  elementos com no máximo  $2^{d-1}$  conjuntos. Colorize  $X$  aleatoriamente com duas cores, sendo todas as colorações igualmente prováveis. Para cada conjunto  $A$  pertencente a  $F$ , consideremos o evento  $E_A$ , que ocorre quando todos os elementos de  $A$  são coloridos da mesma forma. Dado que existem exatamente duas possíveis colorações, podemos expressar essa situação de outra forma:

$$P(E_A) = \left(\frac{1}{2}\right)^{d-1}.$$

Daí, com  $m = |F| \leq 2^{d-1}$ . Note também que os eventos  $E_A$  não são adjuntos, isto é,

$$P\left(\bigcup_{A \in F} E_A\right) < \sum_{A \in F} P(E_A) = m \left(\frac{1}{2}\right)^{d-1} \leq 1.$$

Portanto, podemos concluir que existe alguma bicoloração de  $X$  sem um conjunto unicolorido e isso é justamente o que procurávamos.  $\square$

Para o resultado que segue, uma família  $F$  de subconjuntos de  $\{1, 2, \dots, n\}$  é uma *anticadeia* se nenhum conjunto em  $F$  é subconjunto de outro conjunto em  $F$ .

**Teorema. (Sperner)** *Mostre que o tamanho da maior anticadeia de um conjunto com  $n$  elementos é*

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

*Demonstração.* Inicialmente, vamos provar que se  $F$  é uma anticadeia, então

$$\sum_{A \in F} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1.$$

De fato, seja  $\sigma$  uma permutação aleatoriamente e uniformemente escolhida de  $\{1, \dots, n\}$  e defina o conjunto

$$C_\sigma = \{\{\sigma(j) : 1 \leq j \leq i\} : 0 \leq i \leq n\}.$$

É imediato que  $\emptyset \in C_\sigma$  e  $\{1, \dots, n\} \in C_\sigma$ . Defina uma variável aleatória

$$X = |F \cap C_\sigma|.$$

Decompondo  $X$ , obtém-se

$$X = \sum_{A \in F} X_A,$$

onde  $X_A$  é a variável aleatória indicadora para  $A \in C_\sigma$ . Então

$$\mathbb{E}[X_A] = P[A \in C_\sigma] = \frac{1}{\binom{n}{|A|}},$$

já que  $C_\sigma$  contém precisamente um conjunto de tamanho  $|A|$ , que é distribuído uniformemente entre os conjuntos com  $|A|$  elementos. Pela linearidade da expectativa,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{A \in F} \frac{1}{\binom{n}{|A|}}.$$

Para qualquer  $\sigma$ ,  $C_\sigma$  forma uma cadeia – pois cada par de conjuntos é comparável. Uma vez que  $F$  é uma anticadeia, devemos ter  $X = |F \cap C_\sigma| \leq 1$ . Assim  $\mathbb{E}[X] \leq 1$ , o que conclui o que queríamos provar.

Para finalizar, basta notar que a função  $\binom{n}{x}$  é maximizada em  $x = \lfloor n/2 \rfloor$ . Logo, usando o fato provado anteriormente, obtemos

$$1 \geq \sum_{A \in F} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \geq \frac{|F|}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}. \quad \square$$

## Método Probabilístico e Grafos

Um torneio em um conjunto  $V$  de  $n$  jogadores é uma orientação  $T = (V, E)$  das arestas do grafo completo no conjunto de vértices  $V$ . Assim, para cada par distinto de elementos  $x$  e  $y$  em  $V$ , ou  $(x, y)$  ou  $(y, x)$  está em  $E$ , mas não ambos. O nome “torneio” é natural, já que podemos pensar em  $V$  como um conjunto de jogadores onde cada par joga uma única partida, e  $(x, y)$  está no torneio se e somente se  $x$  derrota  $y$ . Dizemos que  $T$  tem a propriedade  $S_k$  se para qualquer conjunto de  $k$  jogadores em  $V$ , existe um jogador que derrota todos eles. Em outras palavras, dado qualquer grupo de  $k$  jogadores, há um que vence cada um deles nas respectivas partidas do torneio. Assim, podemos enunciar o seguinte.

**Teorema.** Se  $\binom{n}{k}(1 - 2^{-k})^{n-k} < 1$ , então existe um torneio com  $n$  vértices que possui a propriedade  $S_k$ .

*Demonstração.* Considere um torneio aleatório no conjunto  $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Para cada subconjunto fixo  $K$  de tamanho  $k$  de  $V$ , seja  $A_K$  o evento em que não existe nenhum vértice de  $K$  que vença todos os demais membros do mesmo. Claramente,  $P(A_K) = (1 - 2^{-k})^{n-k}$ . Isso acontece porque, para cada vértice fixo  $v \in V - K$ , a probabilidade de que  $v$  não vença todos os membros de  $K$  é  $1 - 2^{-k}$ , e todos esses  $n - k$  eventos, correspondentes às várias escolhas possíveis de  $v$ , são independentes. Logo, segue que

$$P\left(\bigvee_{K \subset V} A_K\right) \leq \sum_{K \subset V} P(A_K) = \binom{n}{k} (1 - 2^{-k})^{n-k} < 1.$$

Portanto, com probabilidade positiva, nenhum evento de  $A_K$  ocorre, isto é, existe um torneio com  $n$  vértices com a propriedade  $S_k$ .  $\square$

Façamos agora um problema tipicamente olímpico:

**Teorema.** (SJSU M179 Midterm) Dados  $n$  pontos vermelhos e  $n$  pontos azuis, suponha que conectemos pelo menos  $n^2 - n + 1$  pares de cores opostas. Prove que podemos selecionar  $n$  segmentos, sem que nenhum par compartilhe uma extremidade.

*Demonstração.* Como há um total de  $n^2$  arestas possíveis, ter pelo menos  $n^2 - n + 1$  arestas significa que praticamente todas as arestas estão presentes. Vamos construir um emparelhamento aleatório entre os dois conjuntos de  $n$  vértices, independentemente da existência real de arestas entre eles. Definimos a pontuação desse emparelhamento como o número de pares que estão conectados por uma aresta. Queremos mostrar que existe algum emparelhamento com pontuação  $n$ , que será o emparelhamento perfeito desejado.

Sejam  $v_1, \dots, v_n$  os  $n$  vértices à esquerda. Para cada um, considere a variável aleatória:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o par com } v_i \text{ tiver uma aresta,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A pontuação da configuração é dada por  $X = X_1 + \dots + X_n$ . Temos que  $\mathbb{E}[X_i] = \frac{\text{grau}(v_i)}{n}$ , logo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n] \\ &= \frac{\text{grau}(v_1)}{n} + \dots + \frac{\text{grau}(v_n)}{n} \\ &= \frac{n^2 - n + 1}{n} = n - 1 + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Como  $X$  assume apenas valores inteiros, existe alguma configuração com  $X = n$ . Portanto, concluímos a demonstração.  $\square$

## Método Probabilístico e Álgebra

Os próximos dois resultados são conhecidos como problemas de balanceamento de vetores e mostram que podemos usar o método probabilístico também na Álgebra.

**Teorema.** Sejam  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ , tal que  $|v_i| = 1$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Então existem  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n = \pm 1$  de modo que:

$$|\epsilon_1 v_1 + \dots + \epsilon_n v_n| \leq \sqrt{n},$$

e também existem  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n = \pm 1$  de modo que

$$|\epsilon_1 v_1 + \dots + \epsilon_n v_n| \geq \sqrt{n}.$$

*Demonstração.* Sejam  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \mathbb{R}^n$  selecionados de forma uniforme e independente a partir de  $\{-1, +1\}$ . Defina:

$$X = |\epsilon_1 v_1 + \dots + \epsilon_n v_n|^2.$$

Então

$$X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \epsilon_i \epsilon_j v_i \cdot v_j.$$

Por isso,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i \cdot v_j \mathbb{E}[\epsilon_i \epsilon_j].$$

Quando  $i \neq j$  temos  $\mathbb{E}[\epsilon_i \epsilon_j] = \mathbb{E}[\epsilon_i] \mathbb{E}[\epsilon_j] = 0$ , e quando  $i = j$  temos  $\epsilon_i^2 = 1$  e então  $\mathbb{E}[\epsilon_i^2] = 1$ . Assim,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n v_i \cdot v_i = n.$$

Portanto, existem valores específicos  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n = \pm 1$  com  $X \geq n$  e com  $X \leq n$ . Tomando as raízes quadradas, obtemos o teorema.  $\square$

Nessa mesma ideia, temos o:

**Teorema.** Seja  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ , com todos os  $|v_i| \leq 1$ . Sejam  $p_1, \dots, p_n \in [0, 1]$  arbitrários e defina  $w = p_1 v_1 + \dots + p_n v_n$ . Então existem  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{0, 1\}$  de forma que, definindo  $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ ,

$$|w - v| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

*Demonstração.* Escolha  $\epsilon_i$  de forma independente com

$$P[\epsilon_i = 1] = p_i, \quad P[\epsilon_i = 0] = 1 - p_i.$$

A escolha aleatória de  $\epsilon_i$  gera um  $v$  aleatório e uma variável aleatória

$$X = |w - v|^2.$$

Fazendo uma expansão

$$X = \left| \sum_{i=1}^n (p_i - \epsilon_i) v_i \right|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i \cdot v_j (p_i - \epsilon_i)(p_j - \epsilon_j),$$

dessa forma

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i \cdot v_j \mathbb{E}[(p_i - \epsilon_i)(p_j - \epsilon_j)].$$

Para  $i \neq j$ ,

$$\mathbb{E}[(p_i - \epsilon_i)(p_j - \epsilon_j)] = \mathbb{E}[p_i - \epsilon_i] \mathbb{E}[p_j - \epsilon_j] = 0.$$

Para  $i = j$ ,

$$\mathbb{E}[(p_i - \epsilon_i)^2] = p_i(p_i - 1)^2 + (1 - p_i)p_i^2 = p_i(1 - p_i) \leq \frac{1}{4},$$

$\mathbb{E}[(p_i - \epsilon_i)^2] = \text{Var}[\epsilon_i]$ . Assim,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i)|v_i|^2 \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \leq \frac{n}{4},$$

e a prova conclui-se como a do teorema anterior.  $\square$

## Método Probabilístico e Geometria

O exemplo a seguir é uma bela aplicação do método probabilístico na Geometria Plana.

**Teorema.** (IMO 1989) Sejam  $n$  e  $k$  inteiros positivos e seja  $S$  um conjunto de  $n$  pontos no plano tais que:

- (i) Não existem três pontos de  $S$  que sejam colineares, e
- (ii) Para qualquer ponto  $P$  de  $S$  existem pelo menos  $k$  pontos de  $S$  equidistantes de  $P$ .

Prove que:

$$k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

*Demonstração.* Primeiro, note que a desigualdade pedida é equivalente a:

$$n \geq \binom{k}{2} + 1.$$

Agora, para cada ponto  $P$  em  $S$ , construímos um círculo centrado em  $P$  que contém pelo menos  $k$  pontos de  $S$ .

Seja  $d_P$  o número de círculos que contêm o ponto  $P$ . Seja também  $f_O$  o número de pontos contidos no círculo definido com centro em  $O$ , para cada ponto  $O \in S$ . Por construção, temos que  $f_O \geq k$  para todo  $O \in S$ .

Como a função binomial  $\binom{n}{2}$  é crescente para  $n \geq 1$  inteiro, segue que  $\binom{f_O}{2} \geq \binom{k}{2}$  para todo  $O \in S$ . Logo,

$$\mathbb{E}\left[\binom{f}{2}\right] \geq \binom{k}{2},$$

onde o valor esperado é sobre a escolha uniforme do ponto  $O \in S$ .

Por outro lado, observe que qualquer par de pontos compartilha no máximo 2 círculos, pois caso contrário teríamos 3 círculos com centros em suas bissetrizes perpendiculares, o que violaria as condições do problema. Logo,

$$\sum_{O \in S} \binom{f_O}{2} \leq 2 \binom{n}{2},$$

pois o lado esquerdo conta pares de pontos compartilhando algum círculo, enquanto o lado direito limita esse valor por todos os pares possíveis.

Portanto,

$$\binom{k}{2} \leq \mathbb{E}\left[\binom{f}{2}\right] \leq \frac{2}{n} \binom{n}{2} = n - 1,$$

que completa a prova.  $\square$

## Bibliografia

- [1] M. Aigner and G. M. Ziegler. *Proofs from the book*. Springer, Berlin, 1998.
- [2] N. Alon and J. H. Spencer. *The probabilistic method*. Wiley, New York, 3 edition, 2000.
- [3] B. Bollobás. *Random graphs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2 edition, 2001.
- [4] Evan Chen. Expected uses of probability. 18 p., 2014.
- [5] R. Diestel. *Graph theory*. Springer, Berlin, 5 edition, 2017.
- [6] P. Erdős and A. Rényi. On the evolution of random graphs. *Publicationes Mathematicae*, 1950.
- [7] P. Erdős and A. Rényi. On random graphs. *Publicationes Mathematicae*, 6:290–297, 1959.
- [8] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*. Wiley, New York, 3 edition, 1968.
- [9] F. Harary and E. M. Palmer. *Graphical enumeration*. Academic Press, New York, 1973.

- 
- [10] Kiran Kedlaya. Graph theory: Definitions and results. 4 p., 1999.
  - [11] H. G. Landau and H. J. Landau. *Prime numbers and the Riemann hypothesis*. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
  - [12] Thiago Landim. Aplicações inesperadas do valor esperado. 10 p., 2020.
  - [13] Po-Shen Loh. Probabilistic methods in combinatorics. 7 p., 2009.
  - [14] A. Rényi. On the distribution of primes. *Publicationes Mathematicae*, 1958.
  - [15] J. Spencer. *Ten lectures on the probabilistic method*. SIAM, Philadelphia, 1994.



Carlos Augusto D. Ribeiro é professor da Universidade Federal do Delta do Parnaíba (UFDPAR) desde 2010 e ex-olímpico com premiações na OBM, OCM, Rioplatense, etc. Consciente do impacto positivo que a Olimpíada de Matemática teve em sua vida, hoje contribui com a OBM na promoção de suas olimpíadas, com a ONG Cactus produzindo materiais de treinamento que impactam a vida de dezenas de milhares de alunos da escola pública, bem como com o Projeto CQD com quem tem a alegria de trabalhar ao lado de amigos da época de olimpíada. Viciado em Star Wars, nerd de carteirinha e apaixonado por sua esposa Keivy Lany, se esforça em manter o bom humor quando os seus pets Ahsoka, Yoda, Bombom e Sushi resolvem aprontar.



Maria Joice Machado Brito é natural de Cocal dos Alves, uma cidade pequena no interior do Piauí. Concluiu a graduação em Licenciatura em Matemática pela UFDPAR. Seu interesse pela matemática surgiu durante o ensino médio, graças à participação na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), onde foi medalhista. Atualmente, trabalha em sua cidade natal e busca incentivar os alunos a gostarem de Matemática.

Gosta muito de crianças, de jogos de raciocínio e de competição. Por gostar de crianças, ela já até pensou em fazer pedagogia, mas o que realmente a realiza é resolver questões desafiadoras que envolvam probabilidade. Por isso, pretende fazer um mestrado na área.



Daniel Vitor C. Vieira nasceu em Brasília e está radiante por ter se formado em licenciatura em Matemática pela UFDPAR. Atualmente, ele compartilha seu conhecimento ensinando matemática sempre que possível em seu estado que mora, o Maranhão. Daniel tem uma queda pelo estudo da probabilidade e seus campos abstratos, que incluem geometria, teoria dos números e teoria dos grafos. Além disso, é totalmente apaixonado por sua namorada, Liandra, e se esforça ao máximo para fazer com que ela também goste de matemática.

# SIMPÓSIO Eventos DMAT Julho/23 a Fevereiro/24

*Cristina Lizana, Elaís Cidely, Henrique da Costa, Roberto Sant'Anna*

## Introdução

Nesta seção SIMPÓSIO, faremos uma breve resenha de eventos organizados por membros da comunidade do Departamento de Matemática (DMAT) do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade Federal da Bahia (UFBA) durante o período julho de 2023 a fevereiro de 2024.

## Cerimônia de Premiação da OBMEP

No dia 18 de julho, ocorreu a 17<sup>º</sup> Cerimônia de Premiação Regional Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) - BA01. Na ocasião, foram homenageados os estudantes que obtiveram medalhas de ouro, prata e bronze na prova da OBMEP realizada em 2022. Durante a cerimônia, os estudantes tiveram a oportunidade de receber sua premiação e serem reconhecidos publicamente por seus resultados (Fig. 1).



Figura 1: Alguns dos alunos premiados.

A cerimônia contou com a presença do Magnífico Reitor da UFBA, Sr. Paulo Cesar Miguez de Oliveira, além de Secretários da Educação e representantes das Secretarias de Educação de Salvador, Camaçari, Madre de Deus, Vera Cruz e do Estado da Bahia. Integrando a mesa principal tivemos Erika Sholl, Coordenadora de Logística da OBMEP em todo o Brasil; Prof. Roberto Sant'Anna, Coordenador Regional da OBMEP; Prof. Kleyber Mota, Diretor do IME-UFBA; Prof.<sup>a</sup> Elaís Cidely, Coordenadora local do PICME-UFBA; e Prof.<sup>a</sup> Glória Fernandes, Coordenadora Estadual do PIC-Bahia (Fig. 2).



Figura 2: Cerimônia de Premiação Regional OBMEP celebrada em 18 de julho de 2023.

Durante a cerimônia, tivemos falas importantes não apenas sobre a importância do projeto e da premiação, mas também sobre o futuro dos medalhistas após a premiação, como as bolsas de estudos para participar de programas de iniciação científica.

Para mais informações sobre a OBMEP, acesse o

site <https://www.obmep.org.br/>, e para informações sobre as atividades da OBMEP na Bahia, visite @dma-tufba no Instagram/Facebook.



Figura 3: Professores e discentes do DMAT que fazem parte da equipe da OBMEP-BA.

## 8<sup>a</sup> OMEBA e cerimônia de premiação

As Olimpíadas de Matemática estão estabelecidas na cultura escolar do Brasil. A OBMEP está desde 2005 fomentando a discussão científica e a descoberta de novos talentos, aumentando a cada ano o número de escolas e alunos participantes.

Já a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), realizada pela Associação Olimpíada Brasileira de Matemática (AOBM), com apoio da UFBA, e voltada para alunos desde o 6º ano do Ensino Fundamental até o Ensino Médio, é a principal porta de entrada para competições internacionais. Uma das maneiras de participar da OBM é por meio das olimpíadas estaduais, em que a Olimpíada de Matemática do Estado da Bahia (OMEBA) apresenta sua cara.

Desde 2013, a OMEBA é realizada em uma parceria do DMAT e da AOBM. Devido à pandemia de COVID-19, as provas da OMEBA foram realizadas de forma virtual. A edição de 2024 marcou a volta de provas presenciais e contou com a presença de pelo menos 600 estudantes, em diversos polos de aplicação, na cidade de Salvador e no interior do estado.

Como em toda competição, os melhores participantes são premiados com medalhas e a Cerimônia de Premiação da OMEBA ocorreu no dia 30 de Novembro de 2023 no Salão Nobre da Reitoria da UFBA, em Salvador (Fig. 4). A ilustre cerimônia ocorreu com a presença dos professores Kleyber Mota da Cunha, representando o IME-UFBA; Darllan Conceição Pinto, representando o DMAT; Evandro Carlos Fer-



Figura 4: Públco presente na cerimônia de premiação da OMEBA em 30 de novembro de 2023.

reira dos Santos, na ocasião representando a OMEBA; além da professora Vanessa Balbina da Silva Lopes Miguel, da Escola SESI Djalma Pessoa, e o professor Antônio Márcio de Lima Soares, do Instituto Federal da Bahia (IFBA) representando os professores das escolas participantes (Fig. 5). Quase uma centena de alunos e alunas foram homenageados com medalhas de bronze, prata e ouro, devido ao seu desempenho nos três níveis de competição.



Figura 5: Professores presidindo a cerimônia.

Para mais informações da OMEBA, acesse <https://www.omeba.ufba.br>.

## Braid Theory and related aspects

A Teoria das Tranças é um tópico recente de pesquisa da Topologia em Matemática, em que são estudados

os grupos formados por suas classes de equivalência e várias generalizações destes grupos. Foi sediada na UFBA, entre os dias 10 e 13 de Julho de 2023, a conferência intitulada "Braid Theory and related aspects", a fim de promover a interação entre pesquisadores da área e áreas relacionadas (Fig. 6). Reuniram-se pesquisadores, docentes e discentes do Brasil, da França e da América Latina, para a apresentação de palestras e pôsteres durante os quatro dias de congresso.



Figura 6: Participantes no Braid Theory and related aspects.

A organização da conferência foi realizada pelos comitês científico e organizador compostos pelos professores: Alejandra Alderete (Universidade Federal do Oeste da Bahia), Carolina de Miranda e Pereiro (Universidade Federal do Espírito Santo), Daciberg Lima Gonçalves (Universidade de São Paulo), John Guaschi (Université de Caen), Neha Nanda (Université de Caen), Oscar Ocampo (Universidade Federal da Bahia), Paolo Bellingeri (Université de Caen) e Renato Diniz (Universidade Federal do Recôncavo da Bahia).

Para mais informações sobre o evento, acesse <https://sites.google.com/view/braidtheory>.

## Lançamento da Revista de Matemática Hipátia

Às 16h40 do dia 24 de agosto de 2023, ocorreu a Cerimônia de lançamento da Revista de Matemática Hipátia, no Auditório do IME-UFBA. A Cerimônia teve duração aproximada de 1 hora e contou com a presença de professores e estudantes do IME-UFBA no local, bem como participantes externos interessados neste projeto, inclusive no formato virtual. À frente na mesa estiveram presentes os professores do

DMAT: Samuel Feitosa e Vinícius Mello, membros representantes do Conselho Editorial da Revista; Darlan Pinto, Chefe do DMAT-UFBA; e Kleyber Mota, Diretor do IME-UFBA.

Na ocasião, houve a importante fala da professora Lindamir Casagrande (UTFPR), a qual fez uma bela explanação sobre a história de Hipátia, uma matemática contemporânea do século IV d.C. em Alexandria, com contribuições nas áreas de Aritmética, Geometria e Filosofia, e também símbolo inspirador desta revista (Fig. 7).



Figura 7: Prof.<sup>a</sup> Lindamir Casagrande (UTFPR).

Além disso, foi apresentada a gravação de uma entrevista com a Prof.<sup>a</sup> Eliza Maria Silva, primeira baiana a obter Doutorado em Matemática, a qual não pôde estar presente na Cerimônia por razões de saúde. Eliza Maria foi estudante do IME-UFBA durante sua graduação, vindo a ser professora do mesmo anos depois. Um pouco de sua bela história é contada na primeira edição da Revista. O evento foi muito bem recebido pelo público que acompanhou, tanto de forma presencial quanto de forma virtual. (Fig. 8)



Figura 8: Prof.<sup>a</sup> Márcia Barbosa apresentando a Prof.<sup>a</sup> Eliza Maria Silva.

Antes do encerramento foram exibidos ao público alguns exemplares impressos da Revista, o que despertou ainda mais o interesse e curiosidade do público presente (Fig. 9). Ao final houve um coffee-break de encerramento.



Figura 9: Parte do Conselho Editorial da Revista Hipátia ao final do lançamento.

Para mais informações sobre a Revista Hipátia, acesse <http://www.dmat.ufba.br/extensao/revista-hipatia>.

## Seminário de Sistemas Dinâmicos

Os grupos de pesquisa em Sistemas Dinâmicos da UFBA e UFC tiveram o projeto de pesquisa aprovado na Chamada Universal do CNPq (CNPq/MCTI/FNDCT Nº 18/2021), conquistando financiamento para execução dos objetivos e ações propostas. A Chamada Universal é destinada a projetos de grupos emergentes e consolidados de qualquer área do conhecimento. Esse projeto tem fortalecido os vínculos com a Universidade Federal do Ceará (UFC), contribuindo na melhoria e formação de recursos humanos tanto na UFBA, quanto na UFC, e promovendo essa área de pesquisa na região Nordeste.

Esse financiamento tem permitido que o grupo de pesquisa da UFBA receba convidados nacionais e internacionais, e realize eventos, como a primeira edição do Workshop Nordestino de Sistemas Dinâmicos, que terá a sua segunda edição a ser realizada em setembro de 2024 na cidade de Fortaleza em conjunto com o Jangada Dinâmica.

Entre os anos 2020 e 2022, como consequência da pandemia, todas as atividades foram realizadas no formato virtual, aumentando o número de seminários acessíveis a nível mundial. Portanto, o seminário

local teve uma interrupção e foi retomado em agosto de 2022, acontecendo regularmente em formato presencial com uma frequência quinzenal desde então. Temos recebido visitantes de diversas universidades a nível nacional e internacional, com mais de 19 palestras realizadas em um período de um ano e meio, nas mais diversas sub-áreas de pesquisa em Sistemas Dinâmicos (Fig. 10).



Figura 10: Palestra do Khadim War do IMPA.

Durante esse último ano, o grupo de pesquisa em Sistemas Dinâmicos tem recebido as visitas longas de dois pós-doutorandos da UFC (projeto Jangada Dinâmica) e a visita por 5 meses de um aluno do programa de doutorado da Pontificia Universidad Católica de Valparaíso no Chile, contribuindo nas discussões e enriquecendo o seminário. Para mais informações sobre as atividades do grupo de Sistemas Dinâmicos da UFBA, acesse <https://sites.google.com/view/dynamicalsystemsufba/>.

## VIII Encontro da Pós-graduação em Matemática da UFBA

Entre os dias 20 e 24 de novembro de 2023, foi realizado o VIII Encontro da Pós-graduação em Matemática da UFBA (EPGMAT) no Auditório Maria José “Zezé” de Oliveira no IME-UFBA (Fig. 11). A oitava edição foi realizada após uma longa pausa devido a pandemia, a última edição aconteceu em 2019.

O encontro acontece anualmente no segundo semestre de cada ano letivo, dirigido a docentes, pesquisadores e alunos de cursos de Mestrado e Doutorado em Matemática e Estatística, tanto da UFBA como de outras instituições de ensino superior no Brasil. Também estão aptos a participar os alunos de cursos de graduação. Palestras e minicursos são ministrados por docentes do Programa de Pós-



Figura 11: VIII EPGMAT.

Graduação em Matemática da UFBA e do Programa de Doutorado em Matemática UFBA/UFAL e convidados.

O objetivo principal do encontro é divulgar os trabalhos do corpo docente e discente dos dois programas e promover a interação entre os participantes, enriquecendo o ambiente de trabalho de ensino e pesquisa, contribuindo para a difusão da Matemática, Estatística e áreas afins.

Para mais informações sobre o Encontro da Pós-graduação em Matemática da UFBA, acesse <https://encontropgmat.ufba.br/>.

## Black Math Friday

Aprender é muito mais interessante quando a gente se diverte e conhece coisas novas. Concorda?

Essa é uma das propostas do Ondjango Asili, um coletivo de estudantes de graduação da UFBA e professores de Matemática da Educação Básica, liderado pela Prof.<sup>a</sup> Simone Moraes do DMAT-UFBA (Fig. 12). O coletivo surgiu no projeto de extensão da UFBA, Jogos Africanos e Ensino de Matemática, também coordenado pela professora. Nas atividades do coletivo e do projeto de extensão a ideia de aprender associada ao conhecimento com diversão é colocada em prática, seja utilizando jogos africanos de diferentes categorias ou elementos culturais de África, como por exemplo a geometria sona ou os símbolos adinkras.

O coletivo Ondjango Asili tem trabalhado com a filosofia de criar um espaço de (re)união, conversa, discussão, troca e criação de atividades, tanto para proporcionar a afrodescendentes o conhecimento originário de África, como mostrar a importância de ensinar, conhecer e aprender utilizando jogos e aspectos da cultura africana, proporcionando atividades para o ensino de Matemática no contexto da lei 10.639/03,



Figura 12: Equipe Ondjango Asili.

que podem ser adaptadas tornando-se também atividades interdisciplinares.

Em novembro de 2023, como parte das celebrações do Novembro Negro, o Ondjango Asili auxiliou a Superintendência de Relações Internacionais da UFBA na promoção da palestra “Extensão de corpos e teoria de Galois”, proferida pelo Prof. Massingacala Paulo Sebastião, da Université de Technologie de Compiègne. A atividade ocorreu no Auditório do IME-UFBA, no dia 17 às 15h, com a presença da superintendente Wlamyra Ribeiro Albuquerque. Após a palestra, houve uma roda de conversa com o Prof. Massingacala, estudantes de Matemática e docentes do DMAT, sobre os temas da palestra e sobre a representatividade de negros nas ciências exatas (Fig. 13).



Figura 13: Audiência com Prof. Massingacala.

Fechando a programação do Novembro Negro, no dia 24, foi a vez do Ondjango Asili apresentar um pouco do que vem se envolvendo, das 15h às 20h deste dia ocorreu a BLACK MATH FRIDAY (Fig. 14), o evento também contou com a participação dos estudantes matriculados na disciplina MATG12 ACCS:

Cultura e Jogos Africanos no Ensino da Matemática. A BLACK MATH FRIDAY começou com uma palestra da Prof.<sup>a</sup> Simone, apresentando uma panorâmica do projeto, seguido de depoimentos de integrantes da equipe, falando um pouco das experiências vividas e as suas perspectivas futuras. Na sequência, houve uma sessão de pôsteres, com painéis colocados no saguão do IME, neles os estudantes bolsistas do projeto e da ACCS apresentaram trabalhos que elaboraram e aplicaram em escolas da Educação Básica de Salvador. O evento finalizou com um torneio de jogos africanos, com ampla participação de estudantes do curso de Matemática, foi uma oportunidade para conhecerem jogos de diferentes categorias e de vários países de África, além de garantir a diversão!



Figura 14: Participantes ao final da Black Math Friday.

Acompanhe as atividades do Ondjango Asili acessando <https://ondjangoasili.com/> ou pelo Instagram @ondjango.asili, conheça o trabalho e divirta-se!

## Abertura do ano comemorativo dos 80 anos da Licenciatura em Matemática

Em 2023, o curso de Licenciatura em Matemática da UFBA completou 80 anos! Para celebrar este marco tão importante, serão realizadas diversas ações comemorativas ao longo deste ano de 2024, com o intuito de resgatar e valorizar a história do curso, ressaltar a sua importância para a educação em Matemática no Brasil, além de promover discussões acerca das perspectivas futuras.

O evento de lançamento destas ações aconteceu no dia 14 de dezembro de 2023, com uma especial conversa sobre os primórdios do curso com a ex-aluna e ex-diretora do IME, a Prof.<sup>a</sup> Arlete Cerqueira Lima (Fig. 15). Graduada em Matemática pela antiga Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da UFBA, a

Prof.<sup>a</sup> Arlete é considerada a primeira Mestra em Matemática da Bahia e, entre outras importantes contribuições durante os seus anos de estudo e trabalho na UFBA, participou diretamente do processo de fundação do Instituto de Matemática da UFBA, que mais tarde se transformou no Instituto de Matemática e Estatística da UFBA.



Figura 15: Prof.<sup>a</sup> Arlete Cerqueira.

Atualmente, com 91 anos e uma memória de dar inveja aos jovens estudantes presentes na conversa, a professora falou sobre a sua formação como matemática e sobre os desafios enfrentados para a criação e consolidação do Curso de Matemática da UFBA como referência no Brasil.

Na ocasião, além do atual Diretor do IME, o Prof. Kleyber Mota, e de atuais estudantes e professores do DMAT, também estiveram presentes os professores aposentados do DMAT: Adelaide Mendonça, Benedito Helvio Ikeda, Isaac Costa Lázaro, José Fernandes e Vera Lúcia Wasconcellos, que também compartilharam depoimentos repletos de recordações de momentos importantes, emocionantes e engraçados relacionados ao nosso curso e departamento (Fig. 16).



Figura 16: Professores atuais e aposentados do DMAT.

Certamente, esta conversa foi uma oportunidade única para reviver histórias e reunir diferentes gerações do nosso curso de Matemática da UFBA, além de servir de inspiração e motivação à comunidade acadêmica para continuar avançando em direção a novas conquistas e realizações (Fig. 17).



Figura 17: Participantes ao final da conversa com a Prof.<sup>a</sup> Arlete Cerqueira.

Este evento foi organizado por uma comissão de professores e estudantes do DMAT, responsável por realizar as ações comemorativas do octogésimo aniversário do curso de Licenciatura em Matemática da UFBA. Para acompanhar as outras ações que serão realizadas acesse @dmatufba no Instagram/Facebook.

## Prêmio UFBA

Em setembro de 2023, a Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação (PRPPG) da UFBA lançou o “Edital 16/2023 - Prêmio UFBA de Tese, Dissertação Acadêmica e Trabalho de Conclusão de Programa Profissional ano 2021 e 2022”. Este edital teve como propósito reconhecer o mérito acadêmico e a contribuição para a sociedade brasileira por meio de trabalhos defendidos na pós-graduação da nossa instituição.

Foram recebidos 140 inscrições de excelentes trabalhos acadêmicos, submetidos pelos Programas de Pós-Graduação, pré-selecionados por meio de suas comissões de avaliação internas. Para avaliação externa, foram estabelecidas comissões julgadoras para nove áreas de conhecimento, além de uma comissão específica para Programas Profissionais. Os critérios usados para avaliar os trabalhos foram: (a) originalidade do trabalho; (b) relevância para o desenvolvimento científico, tecnológico, cultural e social; (c) qualidade e quantidade de publicações decorrentes do trabalho; (d) metodologia utilizada; (e) qualidade

da redação; e (f) estrutura/organização do texto.



Figura 18: Cerimônia de Premiação.

O nosso programa de Pós-graduação em Matemática foi agraciado com duas menções honrosas: Juan Carlos Arroyave Blanco (Dissertação 2021), orientado pelo prof. Tertuliano Franco; e Elivan Neri Lima (Dissertação 2022), orientado pela prof.<sup>a</sup> Cristina Lizana Araneda. Foi realizada uma cerimônia de premiação dos trabalhos (Fig. 18), celebrando o encerramento deste primeiro Prêmio UFBA de Tese, Dissertação Acadêmica e Trabalho de Conclusão de Programa Profissional, no Salão Nobre da Reitoria no dia 12 de dezembro de 2023.

Para mais informações sobre a Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação (PRPPG) acesse <https://prppg.ufba.br/>, ou sobre o Programa de Pós-graduação em Matemática acesse <https://pgmat.ufba.br/>.



Cristina Lizana é venezuelana, com graduação e mestrado em Matemática pela Universidad de Los Andes-ULA (Venezuela), e doutorado em Matemática pelo IMPA (Brasil). Foi professora da ULA(2004-2017) e trabalha na UFBA desde 2018. Pesquisa na área de Sistemas Dinâmicos, atuando principalmente em Dinâmica Parcialmente Hiperbólica e mapas robustamente transitivos. Atualmente, é a coordenadora do Núcleo de Extensão do IME e vice-coordenadora do Mestrado em Matemática. O seu hobby é a fotografia e a estreita relação desta com a matemática.



Elaís Cidely é baiana, nascida na cidade de Macaúbas. Possui graduação e mestrado em matemática pela UFBA, doutorado em matemática pelo IMPA e, desde 2015, é professora do IME-UFBA. Sua área de pesquisa é Sistemas Dinâmicos, com ênfase em Teoria Ergódica. Atualmente, é coordenadora local do PICME-UFBA e vice-coordenadora institucional do PROFMAT-UFBA. Na adolescência, tocou bateria em uma banda do colégio. Durante o doutorado, tocou alfaia em um grupo carioca de maracatu. Mas desde 2021, tem o CrossFit como parte indispensável da sua rotina.



Henrique da Costa é mineiro, cursou graduação e pós-graduação no ICMC-USP em São Carlos, interior de São Paulo, e está na UFBA em Salvador desde 2016. Atua na área de pesquisa em análise, mais precisamente sistemas dinâmicos não-lineares e equações diferenciais parciais. Estuda piano e jogos de cartas e tabuleiro como hobby. Foi cabeludo durante a pandemia, no entanto não se atreveu a ser padeiro.



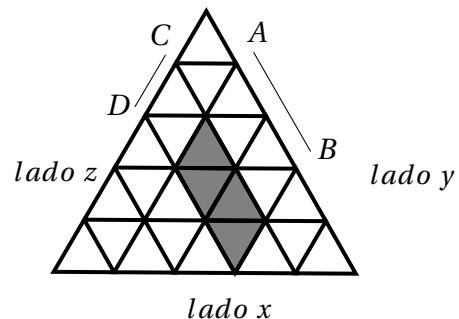
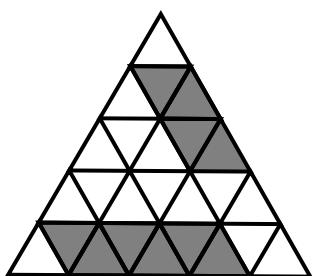
Roberto Sant'Anna é nascido e criado em Salvador, Bahia. É doutor em Matemática Pura pela UFBA e atualmente é professor adjunto no Instituto de Matemática Estatística da UFBA e também Coordenador Regional da OBMEP. Tem realizado pesquisas na temática de Otimização Ergódica, dentro da área de Sistemas Dinâmicos e também tem atuado em diversos projetos tendo em vista a divulgação da Matemática. Nas horas vagas, é amante da música e busca através dela se expressar por meio do teclado ou piano, instrumentos que tanto admira.

## PROBLEMA

# A Basileia e outros problemas

### Soluções da Edição Anterior

**Problema 1.** Uma malha triangular é formada pela decomposição de um triângulo equilátero de lado 5 em  $5^2$  triângulos equiláteros de lado 1, como indicado na figura. Determine o número de paralelogramos que podem ser desenhados por segmentos que formam a malha.



Cada paralelogramo do tipo  $x$  é determinado pelas suas projeções nos lados do triângulo, que possuem comprimentos de 1 a 4. Se  $AB$  é a projeção no lado  $y$ , contaremos quais os possíveis comprimentos de  $CD$ , que é a projeção no lado  $z$ .

i) Se  $AB = 4$ , podemos ter apenas  $CD = 1$  e assim há 1 paralelogramo possível.

ii) Se  $AB = 3$ , podemos ter apenas  $CD = 1$  ou  $CD = 2$  e assim há

$$3 + 1 = 4$$

paralelogramos possíveis.

iii) Se  $AB = 2$ , podemos ter apenas  $CD = 1$ ,  $CD = 2$  ou  $CD = 3$  e assim há

$$6 + 3 + 1 = 10$$

paralelogramos possíveis.

iv) Se  $AB = 1$ , podemos ter apenas  $CD = 1$ ,  $CD = 2$ ,  $CD = 3$  ou  $CD = 4$  e assim há

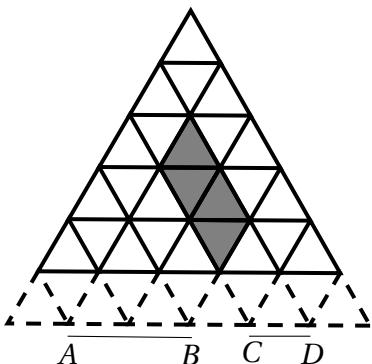
$$10 + 6 + 3 + 1 = 20$$

paralelogramos possíveis.

**Solução** (Solução de Zezé de Oliveira). Denotemos os lados do triângulo pelas letras  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Qualquer paralelogramo na malha possui lados paralelos a dois dos três lados do triângulo e isso nos permite classificá-los em três tipos. Um paralelogramo tipo  $x$  possui lados paralelos aos lados  $y$  e  $z$  e assim para os demais casos. Por simetria, basta contarmos o número de paralelogramos do tipo  $x$ , pois o resultado total será o triplo desse número.

Portanto, há  $1+4+10+20=35$  paralelogramos do tipo  $x$  e assim o total de paralelogramos na malha é  $3 \cdot 35 = 105$ .

**Solução alternativa para o caso geral de um triângulo de lado  $n$ .**



Criando uma camada extra para a malha, podemos associar de modo único cada paralelogramo do tipo  $x$  a dois segmentos disjuntos no novo lado de tamanho  $n+1$ . Assim, o total de triângulos do tipo  $x$  é  $\binom{n+2}{4}$  e a resposta geral é  $3 \cdot \binom{n+2}{4}$ .

**Problema 2.** Determine a quantidade de números reais  $x$  que satisfazem a equação:

$$2^{x^2+x} + \log_2 x = 2^{x+1}.$$

**Solução** (Solução de Yure Carneiro). Por conta da função logarítmica, precisamos ter  $x > 0$ . Agora vejamos os casos:

i) Para  $0 < x < 1$ , temos  $x^2 < 1$  e  $x^2 + x < x + 1$ , de onde

$$2^{x^2+x} < 2^{x+1}$$

Além disso,  $\log_2 x < 0$ . Portanto,

$$2^{x^2+x} + \log_2 x < 2^{x^2+x} < 2^{x+1}.$$

ii) Para  $x > 1$ , temos  $x^2 > 1$  e  $x^2 + x > x + 1$ , de onde

$$2^{x^2+x} > 2^{x+1}$$

Além disso,  $\log_2 x > 0$ . Portanto,

$$2^{x^2+x} + \log_2 x > 2^{x^2+x} > 2^{x+1}.$$

De onde vemos que para todo  $0 < x \neq 1$ , não temos verificado a igualdade (1). Enquanto para  $x = 1$ , vale a igualdade

$$2^{1^2+1} + \log_2 1 = 2^{1+1} + 0 = 2^{1+1}$$

De onde concluímos que existe apenas **um** número real  $x$  para o qual é verificado a equação dada.

**Problema 3.** Seja  $a$  um inteiro positivo tal que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{25} = \frac{a}{25!}.$$

Encontre o resto de  $a$  na divisão por 13.

**Solução** (Solução de Yure Carneiro). Veja que

$$a = \sum_{j=1}^{25} \frac{25!}{j} \equiv \frac{25!}{13} \pmod{13},$$

visto que as parcelas com índice  $j \neq 13$  são tais que  $13 \mid \frac{25!}{j}$ . Agora temos

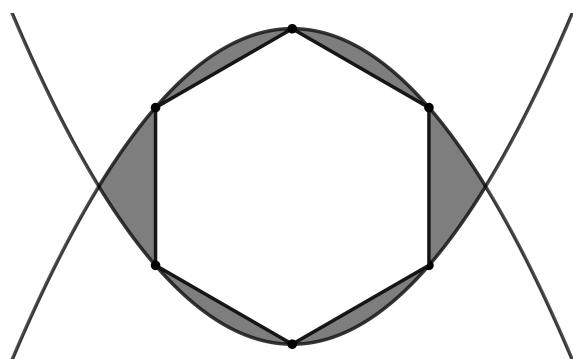
$$\begin{aligned} a &\equiv 1 \times 2 \times \dots \times 12 \times 14 \times \dots \times 25 \pmod{13} \\ &\equiv 12! \times 1 \times 2 \times \dots \times 12 \pmod{13} \\ &= 12! \times 12! \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Wilson, como  $12! = (13 - 1)! \equiv -1 \pmod{13}$ , segue que

$$a \equiv (-1)^2 = 1 \pmod{13}$$

e daí  $r = 1$  é o resto de  $a$  na divisão por 13.

**Problema 4.** Um hexágono regular de lado 1 está inscrito na interseção de duas parábolas idênticas, mas que estão orientadas em direções opostas, i.e., uma é simétrica a outra em relação à reta que passa pelos seus pontos de interseção. Encontre a área da região sombreada, ou seja, a área que está entre as parábolas, mas que é externa ao hexágono.



**Solução** (Solução de Yure Carneiro). Sabemos que a distância entre dois vértices opostos de um hexágono regular é igual ao dobro da medida de seu lado. Nesse caso, essa distância é igual a 2. Considere a situação na figura do problema e suponhamos que o vértice da parábola de concavidade para cima (chamada aqui de parábola 1) coincide com a origem do plano XY, e a reta que une os pontos de interseção das parábolas é paralelo ao eixo X.

Por conta do hexágono ali inscrito, o ponto  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$  está na parábola 1. Portanto, sendo  $y = ax^2$  a equação

dessa parábola, vamos ter  $\frac{1}{2} = a \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3a}{4}$ , de onde  $a = \frac{2}{3}$ . Assim,  $y = \frac{2x^2}{3}$  é a equação da parábola 1. De onde segue que a parábola 2 possui equação  $y = -ax^2 + 2 = -\frac{2x^2}{3} + 2$ . Além disso a interseção entre as duas ocorre quando  $\frac{2x^2}{3} = -\frac{2x^2}{3} + 2$ , quando  $4x^2 = 6$ , ou seja,  $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$  e  $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

Assim, a área da região plana limitada pelas duas parábolas é dada por

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-\frac{\sqrt{6}}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{2}} -\frac{2x^2}{3} + 2 - \frac{2x^2}{3} dx \\ &= 4 \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}} 1 - \frac{2x^2}{3} dx = 4 \left( \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{2(\frac{\sqrt{6}}{2})^3}{9} \right) \\ &= 4 \left( \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{6} \right) \\ &= \frac{4\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

Como a área  $A_2$  do hexágono regular de lado 1 é  $A_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ , segue que a área da região sombreada é

$$A = A_1 - A_2 = \frac{4\sqrt{6}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{6} - 9\sqrt{3}}{6}$$

**Problema 5.** Calcule o valor da soma

$$S = \sum_{k=1}^{2022} (-1)^k \cdot \frac{(k^2 + k + 1)}{k!}.$$

**Solução** (Solução de Yure Carneiro). Testando o valor da soma para os primeiros valores de  $k$ , conjectura-se que

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{(k^2 + k + 1)}{k!}$$

é igual a

$$-1 + \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{n!}.$$

Vamos provar essa identidade por indução:

$$\begin{aligned} i) \text{ Para } n = 1, \text{ temos } S_1 &= (-1)^1 \frac{(1^2 + 1 + 1)}{1!} = -3 = \\ &-1 + \frac{(-1)^1 \cdot (1+1)}{1!} \end{aligned}$$

ii) Agora supomos válida a identidade para  $n$  e mostraremos que é também verificada para  $n+1$ . Temos então

$$\text{HI: } S_n = -1 + \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{n!}$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \frac{(k^2 + k + 1)}{k!} \\ &= S_n + (-1)^{n+1} \frac{((n+1)^2 + (n+1) + 1)}{(n+1)!} \\ &\stackrel{\text{HI}}{=} -1 + \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{n!} \\ &+ (-1)^{n+1} \frac{((n+1)^2 + (n+1) + 1)}{(n+1)!} \\ &= -1 + \frac{(-1)^n \cdot (n+1)^2}{(n+1)!} \\ &+ (-1)^{n+1} \frac{((n+1)^2 + (n+1) + 1)}{(n+1)!} \\ &= -1 + (-1)^{n+1} \frac{((n+1)^2 + (n+2) - (n+1)^2)}{(n+1)!} \\ &= -1 + (-1)^{n+1} \frac{(n+2)}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

como gostaríamos de demonstrar. Então a identidade é válida para todo  $n$  inteiro positivo. Com isso,

$$S = -1 + \frac{(-1)^{2022} \cdot 2023}{2022!} = \frac{2023 - (2022)!}{2022!}$$

**Problema 6.** Sejam  $a$  e  $b$  números reais com  $a < b$  e sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$  funções contínuas tais que  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ , mas  $f \neq g$ . Defina

$$I_n = \int_a^b \frac{f(x)^{n+1}}{g(x)^n} dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Mostre que a sequência  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é crescente e que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$ .

**Solução** (Solução de Yure Carneiro). Sabendo que  $f \neq g$ , que ambas são contínuas e que  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ , segue que existe  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0) - g(x_0) = \alpha > 0$  e existe um intervalo fechado  $[c, d]$  com  $c < d$  contendo  $x_0$  e contido em  $[a, b]$  para o qual  $f(x) - g(x) > \frac{\alpha}{2}$  para todo  $x \in [c, d]$ . Ainda nesse intervalo

$$\frac{f(x)}{g(x)} - 1 > \frac{\alpha}{2g(x)}.$$

Agora tomando um  $M > 0$  tal que  $0 < g(x) < M$  para todo  $x \in [a, b]$  temos

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 1 + \beta$$

para todo  $x \in [c, d]$ , onde  $\beta = \frac{\alpha}{2M}$ .

Agora veja que

$$\begin{aligned}
 I_{n+1} - I_n &= \int_a^b \frac{f(x)^{n+2}}{g(x)^{n+1}} - \frac{f(x)^{n+1}}{g(x)^n} dx \\
 &= \int_a^b \frac{f(x)^{n+1}}{g(x)^{n+1}} [f(x) - g(x)] dx \\
 &= \int_a^b \frac{f(x)^{n+1}}{g(x)^{n+1}} [f(x) - g(x)] dx \\
 &\quad - \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \\
 &= \int_a^b \left( \frac{f(x)^{n+1}}{g(x)^{n+1}} - 1 \right) [f(x) - g(x)] dx \\
 &= \int_a^b \left( \frac{f(x)^{n+1} - g(x)^{n+1}}{g(x)^{n+1}} \right) [f(x) - g(x)] dx \\
 &= \int_a^b \left( \frac{\sum_{k=0}^n f(x)^k g(x)^{n-k}}{g(x)^{n+1}} \right) [f(x) - g(x)]^2 dx,
 \end{aligned}$$

Em virtude do comentário inicial, a última igualdade pode ser estimada como

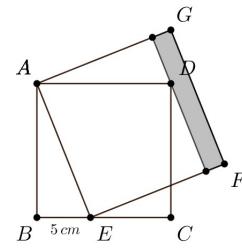
$$\begin{aligned}
 &\geq \int_c^d \left( \frac{\sum_{k=0}^n f(x)^k g(x)^{n-k}}{g(x)^{n+1}} \right) [f(x) - g(x)]^2 dx \\
 &\geq \int_c^d \left( \frac{\sum_{k=0}^n (1+\beta)^k g(x)^k g(x)^{n-k}}{g(x)^{n+1}} \right) \frac{\alpha^2}{4} dx \\
 &= \int_c^d \left( \frac{\sum_{k=0}^n (1+\beta)^k g(x)^n}{g(x)^{n+1}} \right) \frac{\alpha^2}{4} dx \\
 &= \int_c^d \left( \frac{\sum_{k=0}^n (1+\beta)^k}{g(x)} \right) \frac{\alpha^2}{4} dx \\
 &\geq \int_c^d \left( \frac{\sum_{k=0}^n (1+\beta)^k}{M} \right) \frac{\alpha^2}{4} dx \\
 &= \frac{\alpha(d-c)}{2} \cdot [(1+\beta)^{n+1} - 1] \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

De onde segue que  $I_{n+1} > I_n$  e a sequência é crescente, e além disso

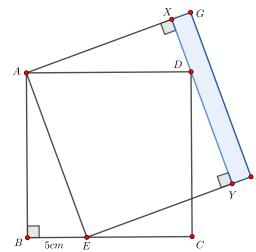
$$\begin{aligned}
 I_{n+1} &\geq \frac{\alpha(d-c)}{2} \cdot [(1+\beta)^{n+1} - 1] + I_n \\
 &> \frac{\alpha(d-c)}{2} \cdot [(1+\beta)^{n+1} - 1].
 \end{aligned}$$

Como  $\frac{\alpha(d-c)}{2} \cdot [(1+\beta)^{n+1} - 1] \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , segue que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$ .

**Problema 7.** Na figura a seguir,  $ABCD$  e  $AEGF$  são quadrados. O segmento  $BE$  mede 5 cm. Encontre a área do retângulo sombreado.



**Solução** (Solução de Yure Carneiro). Considere a figura a seguir.



Da semelhança entre os triângulos  $ABE$  e  $AXD$ , obtemos

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AX}$$

Portanto,

$$AB^2 = AB \cdot AD = AE \cdot AX = [AEFG] - [XYFG] \quad (1)$$

Além disso, do triângulo retângulo  $ABE$ , temos

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 = AB^2 + 25$$

$$AB^2 = AE^2 - 25 \quad (2)$$

Como  $[AEFG] = AE^2$ , segue das equações (1) e (2) que a área do retângulo sombreado é

$$[XYFG] = 25 \text{ cm}^2.$$

**Problema 8.** Na figura a seguir, cada quadradinho representa uma cadeira. Note que as quantidades de cadeiras consecutivas de uma mesma cor correspondem apenas aos números 1 e 3, que são ímpares.



De quantas maneiras podemos colocar 12 cadeiras em fila, cada uma sendo da cor branca ou cinza, de tal modo que as quantidades de cadeiras consecutivas pintadas de uma mesma cor sejam sempre números ímpares?

**Solução** (Solução de Yure Carneiro). Considere o problema de achar o número de maneiras de obter uma soma 12 em que as parcelas são números ímpares positivos, onde a ordem das parcelas importa, ou seja, aqui consideramos que a soma  $1 + 1 + 1 + 9 = 12$  é uma forma de somar diferente de  $1 + 9 + 1 + 1 = 12$ . Então a resposta ao problema das cadeiras é o dobro da resposta ao problema da soma aqui descrito. Em que cada parcela representa um conjunto de cadeiras de uma mesma cor em sequência, e podemos considerar que a primeira parcela forma um conjunto de cadeiras brancas e cada parcela na sequência está associada a uma cor entre cinza e branca que fica alternando. Exemplo: A forma de somar  $1 + 1 + 1 + 9 = 12$ , representa a fileira de cadeiras



Já a forma de somar  $1 + 9 + 1 + 1 = 12$  representa a fileira



Veja que ambos começam pela cor branca. A quantidade das fileiras que começam com a cor cinza é a mesma das que estão sendo contadas começando com a cor branca. Assim, vamos tratar o problema das somas.

Vamos generalizar o problema chamando de  $K_n$  o número de formas diferentes de obter  $n$  como soma de ímpares positivos, e onde a ordem das parcelas importa. Veja que para achar  $K_n$  (supondo conhecidos  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ ) basta considerar o seguinte, cada uma das formas de obter soma  $n$  deve começar com um dos ímpares positivos  $j$  menores ou iguais a  $n$ , e a quantidade de maneiras de completar a forma de somar que começa com  $j$  é exatamente igual a  $K_{n-j}$ . Exemplo: para achar  $K_7$ , temos as formas de obter soma 7 que começa com 1, 3, 5 e 7. As formas de obter soma 7 que começa com 1 é exatamente  $K_6$ . As formas de obter soma 7 que começa com 3 é exatamente  $K_4$ . As formas de obter soma 7 que começa com 5 é exatamente  $K_2$ . Já as formas de obter soma 7 que começa com 7 é exatamente 1 (que denotaremos por  $K_0 = 1$ ). Portanto,

$$K_7 = K_6 + K_4 + K_2 + K_0$$

Generalizando, para  $n = 2j + 1$

$$K_{2j+1} = K_{2j} + K_{2j-2} + \dots + K_0 = K_{2j} + K_{2j-2}$$

e de modo análogo, para  $n = 2j$  temos

$$K_{2j} = K_{2j-1} + K_{2j-3} + \dots + K_1 = K_{2j-1} + K_{2j-3}$$

Assim,

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-2}$$

Temos então que  $K_n$  é definida recursivamente pela fórmula acima, onde  $K_1 = K_0 = 1$  (ou mesmo  $K_2 = K_1 = 1$ ), ou seja,  $K_n$  representa a Sequência de Fibonacci. Temos então que  $K_{12} = 144$  que é o décimo segundo termo da sequência

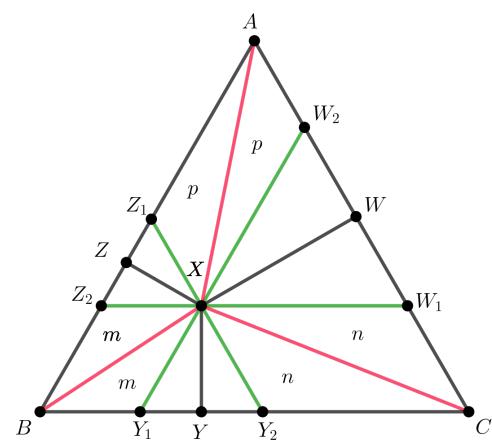
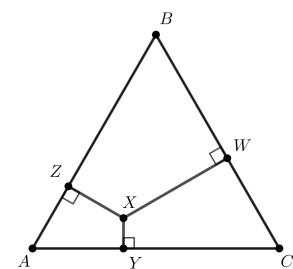
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

Com isso a resposta ao problema original, da quantidade de maneiras de colocar 12 cadeiras em fila conforme especificado é

$$2K_{12} = 288 \text{ maneiras.}$$

**Problema 9.** Na figura a seguir,  $X$  é um ponto no interior do triângulo equilátero  $ABC$  e  $Y$ ,  $W$  e  $Z$  são os pés das perpendiculares de  $X$  aos lados  $AC$ ,  $BC$  e  $AB$ , respectivamente.

- Se  $XY = k$ ,  $XZ = 2k$ ,  $XW = 4k$  e a área do quadrilátero  $AYXZ$  é  $13 \text{ cm}^2$ , encontre a área do triângulo  $ABC$ .
- Se  $XY = ak$ ,  $XZ = bk$  e  $XW = ck$ , encontre a razão entre as áreas do triângulo  $ABC$  e do quadrilátero  $AYXZ$ .



**Solução** (Solução de Diego Alberto).

a) Se  $h$  é a altura do triângulo  $ABC$ , temos que

$$\begin{aligned} XZ \cdot AB + XY \cdot BC + XW \cdot AC &= h \cdot AB \\ XZ + XY + XW &= h \end{aligned}$$

Daí,  $h = 7k$ . Por  $X$ , trace paralelas aos lados do triângulo  $ABC$ , como indicado na figura. Sejam  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S$  as áreas dos triângulos  $XY_1Y_2$ ,  $XZ_1Z_2$ ,  $XW_1W_2$  e  $ABC$ , respectivamente. Por semelhança de triângulos, temos

$$S_1/S = 4/49, S_2/S = 1/49 \text{ e } S_3/S = 16/49.$$

Além disso, como os triângulos  $ABX$ ,  $BCX$  e  $ACX$  possuem mesma base, segue que

$$A_{ABX}/S = 2/7, A_{BCX}/S = 1/7 \text{ e } A_{ACX}/S = 4/7.$$

Portanto, considerando as áreas representadas pelas letras  $m$ ,  $n$  e  $p$ , temos

$$\begin{aligned} m + n + S_1 &= S/7, \\ m + p + S_2 &= 2S/7, \\ n + p + S_3 &= 4S/7. \end{aligned}$$

Assim,

$$m + n = 3S/49, \quad (3)$$

$$m + p = 13S/49, \quad (4)$$

$$n + p = 12S/49. \quad (5)$$

Além disso, somando todas as equações, temos

$$2m + 2n + 2p = 28S/49. \quad (6)$$

De

$$2m + S_1/2 + S_2/2 = 13,$$

e (4), obtemos

$$\frac{5/2S}{49} - \frac{24S}{49} = 13 - \frac{28S}{49}$$

e assim  $S = 98 \text{ cm}^2$

b) Aproveitando a notação do item anterior, temos  $h = (a + b + c)k$  e

$$m + n + S_1 = \frac{a}{(a + b + c)}S \quad (7)$$

$$m + p + S_2 = \frac{b}{(a + b + c)}S \quad (8)$$

$$n + p + S_3 = \frac{c}{(a + b + c)}S \quad (9)$$

Portanto, calculando (5) + (6) - (7), temos

$$2m + S_1 + S_2 = \frac{(a + b - c)S}{(a + b + c)} + \frac{c^2S}{(a + b + c)^2} = \frac{(a + b)^2S}{(a + b + c)^2}.$$

$$\frac{S}{A_{AZXY}} = \frac{S}{2m + S_1/2 + S_2/2} \quad (10)$$

$$= \frac{2S}{4m + S_1 + S_2} \quad (11)$$

$$= \frac{2(a + b + c)^2}{2(a + b)^2 - a^2 - b^2} \quad (12)$$

$$= \frac{2(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + 4ab} \quad (13)$$

## Novos Problemas

### Problemas Universitários

**Problema 10.** Calcule o valor de  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\tan x)^{2022}}$  é

**Problema 11.** Encontre o valor de

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(\cos x) dx + \int_0^{\pi/2} \sin^2(\sin x) dx.$$

**Problema 12.** Seja  $A_{2022} = (a_{ij})$  a matriz  $2022 \times 2022$  definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{3}, & \text{se } i = j \\ 1, & \text{se } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Encontre o valor de  $\det A_{2022}$ .

**Problema 13.** Sejam  $z = e^{\frac{2\pi i}{2023}} = \cos \frac{2\pi}{2023} + i \sin \frac{2\pi}{2023}$ ,

$$A = \{1, z, z^2, \dots, z^{2022}\}$$

e

$$B = \{1, 1+z, 1+z+z^2, \dots, 1+z+z^2+\dots+z^{2022}\}.$$

Determine o número de elementos de  $A \cap B$ .

**Problema 14.** O famoso Problema da Basileia<sup>1</sup> nos permite descobrir que

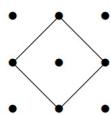
$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Vamos usar a série anterior para encontrar a soma de outra série. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , defina como  $a_n$  seu maior divisor positivo ímpar. Por exemplo,  $a_{30} = 15$  e  $a_{24} = 3$ . Encontre o valor da soma:

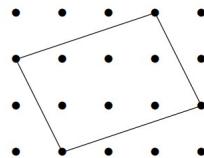
$$S = \frac{a_1}{1^3} + \frac{a_2}{2^3} + \frac{a_3}{3^3} + \dots$$

## Problemas de Matemática Elementar

**Problema 15.** Bernardo está brincando de desenhar quadriláteros em um papel pontilhado como o da imagem a seguir. Os pontos pretos são vértices de quadrinhos de lado 1 cm e os quadriláteros desenhados só podem usar como vértices os pontos pretos.



$$I = 1$$



$$I = 6$$

A letra  $I$  representa o número de pontos pretos no interior de cada quadrilátero.

- a) Dê exemplos, por meio de um desenho, de quadrados com  $I = 4$  e  $I = 9$  no papel pontilhado.
- b) Explique como Bernardo pode desenhar losangos contendo qualquer valor de pontos interiores desejado.
- c) Qual é a menor área possível para um triângulo com vértices nos pontos do papel?

**Problema 16.** O número de todos os inteiros positivos de 64 dígitos sem zeros em sua representação e que são divisíveis por 101 é par ou ímpar?

**Problema 17.** É possível arranjar os números 1, 1, 2, 2, 3, 3, ..., 1986, 1986 em fila de modo que entre quaisquer dois  $i$ 's hajam  $(i - 1)$  números?

<sup>1</sup>Euler foi o primeiro a provar que

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Além dele, alguns membros da família Bernoulli, que também viviam na cidade da Basileia, tentaram obter esse resultado. Por conta disso esse resultado também ficou atrelado ao nome da cidade.

**Problema 18.** Os alunos da DMAT aprendem *n* matérias no semestre. É verdade que para cada matéria exatamente 3 alunos são os melhores nessa matéria, e que para cada 2 matérias, existe exatamente um aluno que é um dos melhores nas duas. Prove que:

- a) Se  $n = 8$  existe um aluno que é um dos melhores em todas as matérias.
- b) Se  $n = 7$ , não é necessário que haja um aluno que é um dos melhores em todas as matérias.

(Página intencionalmente deixada em branco.)

# CÓLOFON

Esta edição contou com a colaboração dos seguintes alunos:



Eldon Barros dos Reis Júnior é bacharel em Matemática pela Universidade Federal da Bahia (UFBA) e atua como bolsista no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) na área de Probabilidade com o projeto “Método da Entropia Relativa e  $q$ -Entropia”.



Helena Beatriz Jesus Gomes é licenciada em Matemática pela Universidade Federal da Bahia (UFBA). É membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática e Educação Matemática Inclusiva (UFCG). Sua área de interesse é Educação Matemática Inclusiva e Tecnologia no Ensino de Matemática.



Taíse Lara de Souza Jorge é licenciada em Matemática pela UFBA e mestrandona em Educação pela UFFS. Realiza pesquisa na área de Mediação Pedagógica e Alfabetização Matemática sob a perspectiva do Numeramento, amparada na Educação Crítica e Educação Matemática Crítica.



Link para o *site* da  
Revista de Matemática Hipátia

