Revista de Matemática

Hipátia

Dezembro de 2025 Volume 3, Número 2

Ciência e Fotografia

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
Reitor: Paulo César Miguez de Oliveira

Pró-Reitoria de Extensão Universitária
Pró-Reitor: Guilherme Bertissolo

Instituto de Matemática e Estatística
Diretor: Kleyber Mota da Cunha

Departamento de Matemática
Chefe: Darllan Conceição Pinto

Revista de Matemática
Hipátia

Endereço para Correspondência
Instituto de Matemática e Estatística
Av. Milton Santos, s/n, Campus Universitário de Ondina CEP: 40.170-110
`hipatia@ufba.br`

NEX IME
Núcleo de Extensão
IME | UFBA

ISSN 3085-6256

D M A T
IME-UFBA

Sinopse

EPÍSTOLA

Arte e Matemática

Caro Leitor,

Matemática, Arte e Ciência são campos do conhecimento humano que, embora distintos em seus métodos e objetivos, frequentemente se entrelaçam de maneiras surpreendentes e inspiradoras. Nesta edição da REVISTA DE MATEMÁTICA HIPÁTIA, exploramos a interseção entre esses domínios, destacando como eles se complementam e se enriquecem mutuamente.

Na seção HISTÓRIA, a professora Ana Lucia apresenta a primeira parte de uma série de dois artigos em que ela, mais do que traçar a evolução da fotografia e sua conexão com a ciência e a matemática, nos propõe uma reflexão sobre o papel das imagens, sejam analógicas ou digitais, como mediadoras entre o homem e a realidade, com todas as consequências sociais e políticas que isso acarreta. Ana Lucia, além de matemática de formação, está concluindo seu mestrado na Escola de Belas Artes da UFBA, o que lhe confere uma perspectiva única para abordar esse tema.

A relação entre Arte e Matemática é aprofundada na seção DIDÁTICA, onde os autores (Maiara Santos e este editor) exploram como a arte pode ser uma ferramenta poderosa para o ensino da matemática. Após uma introdução aos principais elementos e princípios das composições geométricas, o artigo relata uma oficina realizada com estudantes de Seabra–BA, utilizando o *software* GeoGebra para reproduzir obras de arte concretistas e explorar transformações isométricas. Essa é a primeira vez que a REVISTA DE MATEMÁTICA HIPÁTIA publica um artigo de pesquisa em ensino de matemática, pesquisa esta conduzida no escopo do PROFMAT/UFBA (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/UFBA), reforçando nosso compromisso com a educação matemática de qualidade.

Na seção TÉCNICA, o autor Armando Barbosa apresenta um método para resolver equações polinomiais de grau 3, utilizando as fórmulas de Tartaglia–Cardano. Não custa lembrar que o título do livro em que Cardano publicou essas fórmulas (gerando uma polêmica célebre com Tartaglia) é *Ars Magna*, ou seja, *A Grande*

Arte, o que evidencia a fronteira tênue entre a matemática e a arte, ao menos no início da Idade Moderna.

Na tradicional seção PROBLEMA, apresentamos a resolução dos desafios da edição anterior, com destaque para as soluções enviadas por nossos leitores, e propomos novos problemas que certamente requererão engenho e ... arte.

Trazemos uma retrospectiva das atividades realizadas pelo Departamento de Matemática (DMAT) da UFBA em 2025 na seção SIMPÓSIO. A seção destaca eventos de formação de professores, congressos científicos como o XVIII ENAMA e o X EPGMAT, encontros como o EMAT e o Seminário de IC, projetos de extensão como o PECMat (egressos), Café Cultural e o coletivo Ondjango Asili (jogos africanos), além de grandes eventos como a Semana Olímpica da OBM e as cerimônias de premiação da OBMEP e da OMEBA.

Para encerrar com chave de ouro essa edição recheada de arte e matemática, apresentamos a seção FOTOGRAFIA, onde a professora Cristina Lizana apresenta algumas de suas belas fotografias, as quais manifestam um olhar artístico permeado por sensibilidade matemática.

Na capa desta edição, temos uma composição criada pelo professor Nicola Sambonet, na qual uma carta do matemático Euler, em que ele descreve o funcionamento de um conjunto de lentes, está sobreposta a uma fotografia (de autoria de Kenny Louie) de uma câmera Hasselblad. São muitas camadas de significado: um matemático quase cego descrevendo a ciência das lentes, muito antes da invenção de um instrumento composto de lentes, a câmera fotográfica, que é capaz de registrar imagens, como a imagem de uma câmera!

Salvador, 29 de dezembro de 2025.
O Editor

HISTÓRIA

Ciências e Fotografia: 500 anos de História (I)

Ana Lucia Pinheiro Lima

Introdução

A humanidade, depois de aproximadamente duzentos mil anos de história, chega ao vigésimo quinto ano do século XXI imersa em uma organização social caracterizada por amplas e profundas transformações.

O tempo da nossa contemporaneidade é urgente e ritmado pelos mais recentes desenvolvimentos tecnológicos. Nas últimas décadas, formou-se uma complexa e abrangente rede de invenções que abrem possibilidades antes inimagináveis na história da humanidade e que se auto desafiam numa corrida pelo posto de mais avançada e poderosa. Essa tecnologia, que hoje se materializa em nossas mãos na forma de um telefone celular, tem suas raízes no século XVI, quando começou a Revolução Científica que, por sua vez, herdou os frutos das investigações acumuladas ao longo dos séculos anteriores. É o conhecimento científico construído pela mente humana que sustenta essa rede.

Paradoxalmente, a superfície lisa e fria das telas funciona como uma sedutora barreira, que nos separa e distancia de toda essa complexidade. Diante das telas, nossos olhos são inundados pela luz. As imagens, mosaicos de pixels, apresentam-se como realidade, uma realidade sem contradições e, portanto, sem questionamentos. Somos convidados a seguir o fluxo imposto por escolhas feitas em outras camadas, inacessíveis ao usuário hipnotizado pelo espelho negro.

Mas, se o questionamento é caminho para o raciocínio crítico e este é terreno fértil para o desenvolvimento de novos conhecimentos, é válido perguntarmos sobre como essa espécie de inércia intelectual gerada pela submissão às imagens digitais, que são o código, a linguagem da vida na sociedade informatizada, se reflete na investigação da própria realidade e, consequentemente, no mundo do ensino e da pesquisa científica.

As possíveis abordagens para investigar essa questão são tão abrangentes quanto as circunstâncias em que ela se insere. O conjunto de aspectos que contorna a nossa relação com a tecnologia perpassa os principais aspectos da construção do conhecimento: Ciências Exatas, Humanas, Sociais, da Saúde, Biológicas, da Terra, Arte, Religião; toda forma de investigar e explicar a experiência humana foi atingida pelo mundo digital.

Antes de analisarmos os reflexos desses novos “padrões de comportamento”, dessa nova estrutura social modelada pelas novas tecnologias, é fundamental encararmos essa tecnologia, é urgente espiarmos por trás das telas. Como no mito da caverna de Platão, para entendermos as circunstâncias em que estamos inseridos, é preciso olhar de onde vem a luz.

A proposta desse texto, que será publicado em duas edições da Revista de Matemática Hipátia, é construir uma linha do tempo, dos últimos 500 anos, apresentando paralelos entre algumas das principais descobertas/invenções das ciências e a evolução do registro de imagens criadas com a luz. Da investigação a respeito da natureza da luz, até a criação de imagens pelas inteligências artificiais, vamos revisitar alguns dos principais resultados científicos alcançados nesse período. Nessa primeira parte do texto, falaremos dos acontecimentos até o final do século XIX. Na próxima edição, voltaremos ao início do século XX procurando os primeiros movimentos que culminaram na revolução digital, até chegarmos às novas (novas?) imagens geradas por inteligência artificial.

Recuando um pouco no tempo e estabelecendo uma pequena distância do *tsunami* de imagens em que estamos mergulhados, poderemos refletir criticamente sobre as estruturas que moldam e sustentam a sociedade contemporânea e, consequentemente, poderemos ter a chance de sairmos da indiferença e do tédio diante dessas pseudo-imagens-verdades.

A revolução científica e a pesquisa sobre a luz

No início do século XVI, as novas rotas marítimas geraram uma primeira onda de globalização, desencadearam a expansão do comércio e o confronto de civilizações; promoveram conquistas e infortúnios. Influenciaram no fim do feudalismo na Europa e promoveram uma era de exploração, com o surgimento do colonialismo. Foi também um tempo de inovação nas artes e de questionamentos sobre a autoridade religiosa, confrontada pela ideia de que o ser humano podia dar sentido à própria vida.

Os valores humanistas tiveram grande influência nas investigações sobre a realidade. A partir desse momento, a observação dos fenômenos e o posterior questionamento sobre eles, privilegiando o rigor do raciocínio, seriam a base da pesquisa científica.

No livro “De Revolutionibus Orbium Coelestium” (Sobre as Revoluções das Esferas Celestiais [4]), publicado em 1543, Nicolau Copérnico (Polônia, 1473) apresentou um modelo para o universo onde, pela primeira vez, a Terra não ocupava o seu centro. As ideias de Copérnico divergiam do que era defendido pela igreja e também de clássicas teorias gregas.

No século seguinte, Galileo Galilei (Itália, 1564), utilizando um telescópio, invenção aprimorada por ele a partir de uma primeira versão holandesa, para observar o movimento de luas de Júpiter, comprovou que as teorias geocêntricas, centradas na Terra, para o universo não poderiam estar corretas, fortalecendo as ideias de Copérnico.

Em 1632, Galileo publica “Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo” (Diálogo sobre os dois principais sistemas mundiais [11]), comparando os modelos geocêntrico e heliocêntrico, centrado no sol. Por questionar a influência dos dogmas religiosos dominantes à época sobre o conhecimento científico, Galileo foi julgado e condenado por heresia.

A pesquisa realizada por Galileo é um marco da história das ciências, pois apresenta um equilíbrio entre experimentos e teorias, que é a base do hoje chamado *método científico*:

$$\text{observações} \rightarrow \text{perguntas} \rightarrow \text{hipóteses} \rightarrow \text{experimentações} \rightarrow \text{conclusões} \rightarrow \text{observações} \rightarrow \text{perguntas}$$

A curiosidade humana sempre se interessou pelos fenômenos relacionados à luz. O primeiro registro sobre a chamada *câmara escura*, uma caixa ou sala fechada, com uma única pequena abertura em uma das paredes por onde passa a luz, projetando-se na parede oposta, encontra-se em um texto do filósofo chinês Mozi do século V a.c. [16]. Tanto Mozi, como também o matemático grego Euclides, um século mais tarde, perceberam que a luz move-se em linha reta. Assim, a imagem projetada na parede de uma câmara escura era refletida de cima para baixo e da esquerda para a direita.

Foi no século XI que o matemático e físico persa Alhazen (Iraque, c. 965) escreveu “Kitab al-Manazir” (Livro de óptica [27]), o primeiro tratado sobre os fenômenos envolvendo a luz. No texto, ele apresenta semelhanças de como a luz afeta o olho humano com o que acontece quando a luz penetra na câmara escura. Também argumenta que a visão acontece no cérebro e, portanto, seria influenciada pela experiência pessoal. Alhazen foi um precursor do método científico. Seu trabalho abrangeu, além de matemática e física, filosofia, teologia e medicina, e seus escritos foram referência para muitas pesquisas a partir do século XVI.

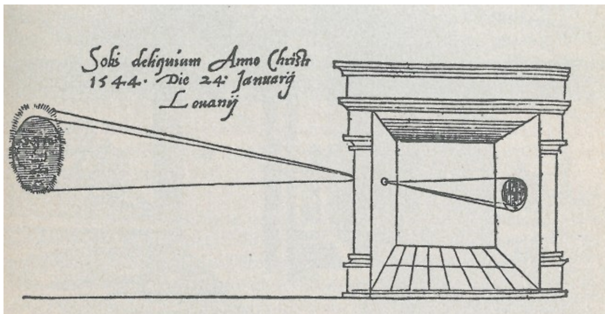


Figura 1: Michelangelo, 1545

Durante a Renascença, além de ser usada na observação de eclipses e outros fenômenos celestes, a câmara escura foi usada por artistas como instrumento auxiliar para desenho e pintura. Leonardo da Vinci (Itália, 1452) foi um desses artistas. Em seus cadernos [5], aparecem centenas de desenhos de câmaras escuras. Na época, espelhos e lentes passaram a compor as câmaras, de modo a melhorar a qualidade da imagem projetada.

O matemático e astrônomo Johannes Kepler (Alemanha, 1571), contemporâneo de Galileo, também se interessou em investigar fenômenos astronômicos. Kepler construiu, dentre outras, a teoria matemática que garante a forma elíptica da trajetória dos planetas em torno do sol. Suas observações sobre os corpos celestes, utilizando a câmara escura, o levaram a também dedicar seus estudos para compreender a óptica. "Astronomiae pars optica" (A parte óptica da astronomia [17]) foi publicado em 1604. O trabalho de Kepler estabelece as leis matemáticas da chamada *Geometria Óptica*, demonstrando as leis geométricas que descrevem o fenômeno da produção de imagens feitas pela luz no interior de uma câmara escura e também os efeitos da luz no interior do olho humano. Kepler, a partir de resultados da anatomia humana conhecidos na época, explicou como as imagens se formavam na retina do olho e não no cristalino, como se acreditava até então.

Na pesquisa de Kepler, as leis matemáticas da astronomia e da óptica se encontram.

Também é importante destacar que o trabalho de Kepler delimita quais aspectos do fenômeno da visão caberia à óptica e a geometria, isto é, o que acontecia no olho. O caminho que a imagem formada na retina seguia a partir dali era outro fenômeno. Era um prenúncio de um tempo de especialização das pesquisas científicas.

Em seus cálculos, Galileo e Kepler usam argumentos que mais tarde seriam fundamentados matematicamente na teoria do cálculo infinitesimal elaborada por Isaac Newton e Gottfried Leibniz, no século seguinte, de maneira independente.

Na segunda metade do século XVII, o cientista Isaac Newton (Inglaterra, 1642), considerado por muitos como o maior de todos os cientistas, apresentou o conjunto de leis que regula o movimento dos corpos e a lei da gravitação universal, generalizando os resultados de Galileo e Kepler. Seu livro "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" (Princípios matemáticos da filosofia natural [22]) foi publicado em 1687. As pesquisas feitas por Newton também envolviam a luz. Em "Optics" (Ótica [23]), publicado em 1704, ele apresentou a teoria sobre a *dispersão da luz*: a separação da luz branca (luz do sol) em um espectro de sete cores, ao passar por um meio transparente.

O trabalho de Newton foi profundamente influenciado por René Descartes, matemático, físico e filósofo francês (1596), autor da célebre frase "Penso, logo existo.", e do tratado "Discours de la méthode" (Discurso do método [6]), publicado em 1637, onde ele apresenta o *método dedutivo* para investigação científica baseado em quatro etapas: evidência, análise, síntese, verificação. Criador da geometria analítica, que usa a simbologia algébrica para descrever objetos geométricos, Descartes também investigou fenômenos envolvendo a luz. Em "La Dioptrique" (A dióptrica [7]), de 1637, aplicou o método dedutivo para explicar matematicamente o fenômeno da *refração da luz*: quando a luz muda de direção ao mudar de um meio de propagação para outro. Os trabalhos de Descartes e Newton completam a teoria óptica que explica o fenômeno do arco-íris.

O matemático e físico Christiaan Huygens (Holanda, 1629) também publicou importante trabalho sobre a natureza da luz e suas propriedades. Em seu livro "Traité de la lumière" (Tratado sobre a luz [15], 1690), apresenta uma teoria ondulatória para explicar a natureza da luz. Huygens é considerado um dos primeiros cientista a usar o rigor matemático para explicar um fenômeno não observável [8]. Com o avanço do uso dos símbolos algébricos como ferramenta para tratar assuntos complexos, a pesquisa em matemática que até então se inspirava em fenômenos da natureza e dedicava esforços a explicá-los, passou a ser capaz de investigar problemas abstratos.

No início do século XVIII, teorias físicas e matemáticas explicando fenômenos envolvendo a luz estavam bem fundamentadas. Já sobre a natureza da luz, os estudiosos se dividiam em dois grandes grupos: luz como onda, como Huygens, e luz como partícula, como Newton. Foram necessários mais dois séculos de pesquisas para que as teorias sobre a natureza dual da luz, onda e partícula, fossem finalmente estabelecidas.

Embora os efeitos da luz na pele humana e nos objetos fossem observados e investigados desde a antiguidade, foi a partir das pesquisas feitas pelo alquimistas, considerados os primeiros químicos, durante a idade média, que as propriedades que algumas substâncias químicas possuem de transmutar (escurecer) sob a ação da luz foi investigado com rigor científico.

O primeiro registro da produção da substância química *nitrato de prata*, conseguida dissolvendo prata em ácido cítrico, aparece em escritos do alquimista Geber (Irã, c. VIII). Os também alquimistas Angelo Sala (Itália, 1576) e Johann Heinrich Schulze (Alemanha, 1687) descobriram a propriedade do nitrato de prata escurecer sob a ação da luz solar [9]. Em 1610, Sala anunciou a descoberta, mas como não parecia haver uma aplicação imediata, o fenômeno foi deixado de lado, inclusive pelos alquimistas. Em 1717, Schulze demonstrou que era, de fato, a luz e não o fogo que escurecia o nitrato de prata, como alguns acreditavam. Ele usou uma "máscara com texto vazado" para cobrir uma garrafa contendo o nitrato de prata e expôs a garrafa à luz do sol. Após um tempo de exposição, a porção da substância exposta à luz escureceu e, retirada a máscara, o texto ficou "impresso" no vidro. Embora o experimento tenha funcionado bem, a impressão durou apenas o tempo necessário para que todo o nitrato de prata escurecesse.

A partir daí, iniciou-se a busca por um método efetivo de escrita usando a luz.

A fotografia como produto da revolução industrial

O desenvolvimento das ciências durante o século XVIII foi marcado pela consolidação do rigor das metodologias de pesquisa surgidas nos séculos anteriores. Na matemática, o uso do cálculo infinitesimal deu origem a novas áreas de pesquisa, como análise e geometria diferencial. A ênfase na razão, as críticas às superstições e o questionamento do poder absoluto, representados pela monarquia e pela igreja, eram marcas do *iluminismo*. Os ideais de igualdade e liberdade pregados pelo movimento, iniciado na França no final do século XVII e que se tornou popular durante o século XVIII, ressoaram nas colônias europeias nas Américas. Os movimentos de independência dos EUA (1776), do Haiti (1804), e também a Inconfidência Mineira (1789) e a Revolta dos Alfaiates (Bahia, 1798), foram movimentos emancipatórios com fortes valores iluministas.

O século XVIII também testemunhou o desenvolvimento da *revolução industrial*. Com a invenção das máquinas, o método de produção de bens passou a ser mecânico. Assim como a expansão marítima, as mudanças nos meios de produção também redefiniram as forças que sustentavam a organização social, bem como o equilíbrio entre elas.

As pesquisas sobre substâncias que reagiam à ação da luz continuaram. No início do século XVIII, foram descobertas outras substâncias que também eram sensíveis à luz. Os sais de ferro, por exemplo, mudam de cor sob a ação da luz, criando um pigmento azul-escuro, nomeado de *azul da Prússia*. As imagens criadas usando essas substâncias, embora impressionassem pela definição, parecendo-se com imagens refletidas em um espelho, eram fugidias; rapidamente toda a superfície sensibilizada com a substância química tornava-se completamente escura. O desafio era encontrar uma maneira de interromper a ação da luz, fixando essas imagens.

No início do século XIX, John Herschel (Inglaterra, 1792), matemático, químico, astrônomo, descobriu a substância hipossulfito de sódio e que esta tinha a propriedade de dissolver o nitrato de prata. Ao publicar seu resultado no Edinburg Philosophical Journal ([14] 1819), ele descreve o fenômeno como "a prata derrete como açúcar na água". Na época, pouca atenção foi dada às propriedades da nova substância, inclusive pelos que investigavam a sensibilidade da prata à luz.

Figura 2: Niépce, Heliografia, 1827

Joseph Nicéphore Niépce (França, 1765) e Louis Daguerre (França, 1787) são nomes que entraram na história como inventores da fotografia. Niépce, na década de 1810, enfrentou as dificuldades da fixação das imagens criadas utilizando sais de prata e uma câmara escura, mas não obteve sucesso. Em seus experimentos, além da prata, ele passou a utilizar o *betume da judéia*, um derivado do asfalto natural, que endurece sob a ação da luz solar. Em 1822, Niépce, em correspondência com seu irmão, anuncia que conseguiu produzir a primeira imagem utilizando essa substância, tendo como suporte uma placa de vidro exposta à luz dentro de uma câmara escura. Essa primeira imagem não resistiu ao tempo, possivelmente pela fragilidade do vidro. A fotografia mais antiga, feita por Niépce, utilizando betume sobre uma placa de estanho exposta à luz dentro de uma câmara escura, hoje encontra-se exposta no museu *Harry Ransom Center*, Texas – EUA. Datada de 1827, a placa serviu como matriz para a produção de cópias da imagem. A técnica criada por Niépce hoje é chamada de *heliografia*.

Nos anos seguintes, Niépce também procurou aprimorar o uso das lentes acopladas à câmara escura, para aperfeiçoar a nitidez das imagens e diminuir o tempo de exposição que era muito longo, inviabilizando a comercialização do invento. Nessa busca, Niépce teve contato com Daguerre, que também trabalhava na produção de imagens utilizando a luz. Os dois usavam o serviço da ótica parisiense de Jacques Chevalier (França, 1777), que colocou os dois em contato. Niépce e Daguerre trabalharam juntos com experimentações com iodeto de prata e mercúrio. Niépce faleceu em 1833. Daguerre continuou as pesquisas e, em 1839, anunciou o processo fotográfico chamado de *daguerreótipo*. Cada imagem feita pelo daguerreótipo era única, como uma jóia. A patente do novo aparelho foi vendida ao governo francês no mesmo ano, que a tornou domínio público. Rapidamente, a fotografia ganhou o mundo. [9]

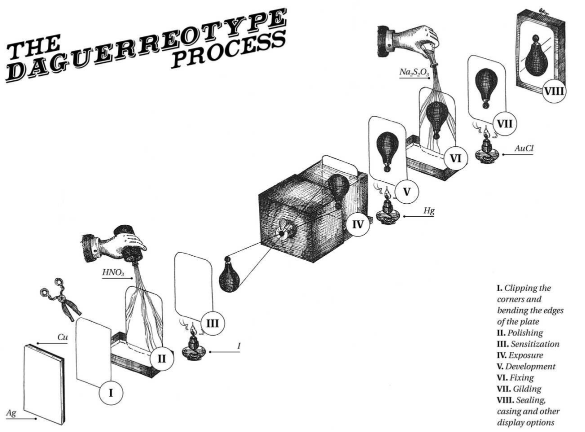


Figura 3: Daguerreótipo, Daguerre, 1839

A *reprodutibilidade* que caracteriza a fotografia foi conseguida a partir do trabalho de William Fox Talbot (Inglaterra, 1800), que inventou as técnicas do *papel salgado* e do *calótipo*, na década de 1830, processos fotográficos realizados em duas etapas: negativo e positivo [9]. A química usada era baseada no nitrato de prata, mas a grande novidade era a produção de uma primeira imagem em negativo, utilizando uma câmara escura, que depois seria usada como matriz para a reprodução da mesma imagem, agora exposta diretamente à luz do sol, processo chamado *fotograma*, fotografia sem câmera. Em 1843, Talbot também desenvolveu uma técnica de ampliação, reproduzindo cópias de tamanho maior do que o negativo. Esses métodos de reprodução/ampliação foram a base do processo fotográfico até a invenção da fotografia digital, mais de cem anos depois.

Todos esses experimentos que obtiveram sucesso na impressão de imagens usando o nitrato ou o iodeto de prata exposto à luz solar, utilizavam o hipossulfito de sódio, descoberto por Herschel vinte anos antes, para fixar as imagens.

Entre 1833 a 1839, o francês Hercule Florence (1804), vivendo em Campinas – Brasil, desenvolveu uma pesquisa inédita e independente, buscando imprimir imagens usando a luz. O jovem Florence chega ao Brasil em 1824, desembarcando no Rio de Janeiro em busca de experiências no novo mundo. Entre 1825 e 1829, participou da expedição científica Langsdorff, como desenhista. A expedição, patrocinada pelo governo russo e chefiada pelo barão Georg von Langsdorff, médico alemão naturalizado russo, tinha o objetivo de aproximar as relações entre Rússia e Brasil, recém independente de Portugal. A viagem passou por Minas, São Paulo e seguiu até a Amazônia. Florence também foi o responsável pelo relato da expedição ao final da jornada.

No início da década de 1830, já estabelecido em Campinas, Florence, autodidata e profundamente influenciado pelo período de viagem na expedição, pesquisou a *zoophonia*, estudo das vozes dos animais, e, para divulgar suas descobertas, desenvolveu um método de impressão que ele chamou de *poligrafia*. Embora independente de Portugal, a estrutura econômica e social do Brasil era comparada à estrutura feudal, rural e escravocrata, do século XV. A circulação de informações era muito limitada. A prensa móvel, inventada por Johannes Gutenberg (Alemanha, c.1400), em 1450, que tinha sido fundamental na divulgação do conhecimento produzido durante a revolução científica, ainda era artigo raro no Brasil Império. Nos anos seguintes, Florence aperfeiçoou seu invento, obtendo sucesso na comercialização de materiais impressos.

Tendo tido conhecimento das propriedades do nitrato de prata sob ação da luz, Florence passou a pesquisar a impressão usando a substância. Aproximadamente em 1833, Florence produziu rótulos para produtos farmacêuticos já utilizando o método de impressão com o nitrato de prata inventado por ele. Continuou as pesquisas e tentou divulgar seus resultados, sem ter conseguido reconhecimento, até 1839, quando a notícia sobre a invenção de Daguerre foi publicada pela imprensa brasileira.

Os diários escritos por Florence, descrevendo as experiências feitas e os resultados obtidos no período, inclusive usando a palavra *fotografia*, que significa escrita com a luz, alguns anos antes de Herschel, que oficialmente foi o primeiro a usar palavra em 1839, são a documentação histórica dos feitos alcançados por ele. Mais de cem anos depois, o pesquisador e fo-

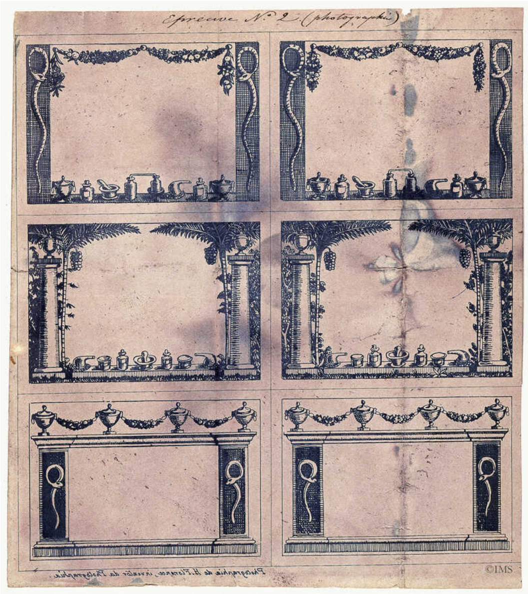


Figura 4: Rótulos farmacêuticos, Florence, c. 1833

tógrafo brasileiro Boris Kossoy publicou sua pesquisa sobre vida e obra de Hercule Florence em sua tese de doutorado (USP, 1979 [18]). Antes disso, os feitos de Florence estavam apagados da história oficial da fotografia. Esse evento permite uma reflexão sobre como a História é construída e como o acesso a recursos e o poder da narrativa influenciam no registro dos acontecimentos.

Em 1850, os fundamentos científicos para a produção de uma fotografia estavam bem estabelecidos. Sob a influência da expansão das indústrias, o êxodo do campo para as cidades desencadeou o início de problemas estruturais que precarizavam as condições de vida dos habitantes dos centros urbanos. Pesquisas científicas para enfrentar os novos problemas surgiam. Como exemplo, na década de 1860, o microbiologista francês Louis Pasteur (1822) desenvolve o processo de *pasteurização*, que elimina microorganismos causadores de doenças, aumentando a segurança alimentar. O trem, inventado em 1804, foi fundamental na expansão da industrialização, encurtando distâncias e tempo, permitindo uma maior circulação de mercadorias e pessoas. A economia tornou-se centrada na indústria. A *burguesia industrial* surge como a classe que detém os meios de produção: fábrica, máquinas e matéria prima, usando como mão de obra os trabalhadores assalariados.

A fotografia se adaptou bem a esse contexto, servindo bem à essa nova classe burguesa nascida das revoluções iluminista e industrial, fundamentalmente urbana. Era a primeira vez que pessoas fora da nobreza e da aristocracia, parte da sociedade que circundava a nobreza, tinham a possibilidade de perpetuar a sua própria imagem.

Patenteado pelo fotógrafo francês André Disdéri, em 1854, o formato dos "cartes de visite" (cartões de visita) possibilitaram a produção em massa, sintonizado ao ritmo industrial, de pequenos retratos que eram colados em cartões de papel rígido e depois distribuídos entre familiares e amigos. Os cartões de visita tornaram-se um importante símbolo de status social. [32]

Desde os primeiros anos após a invenção da fotografia, esta passou a ser usada como ferramenta de investigação e registro da realidade.

O livro "Photographs of British Algae: Cyanotype Impressions" (Fotografias de algas britânicas: impressões em cianotipia, 1843 [1]), de Anna Atkins (Inglaterra, 1799), é considerado a primeira publicação ilustrada com fotografias. A produção dos exemplares foi totalmente manual e a autora utilizou o método de impressão de fotogramas utilizando sais de ferro chamado *cianotipia*, inventado por John Herschel, em 1842. As imagens azuis das algas presentes no livro foram um marco nos estudos da botânica pois, até então, todo o registro de plantas era feito em desenhos, cuja precisão e detalhamento dependiam da habilidade dos desenhistas. Os livros que resistiram ao tempo, hoje se encontram em museus e centros de pesquisa e preservação.

O início do fotojornalismo foi marcado pela publicação da primeira imagem fotográfica em jornal, em 1848. A impressão sobre gravura feita a partir de um daguerreótipo, foi o registro visual de uma rua de Paris com barricadas, durante as revoltas ocorridas na cidade naquele ano. Duas imagens feitas por um morador, da janela do seu apartamento, foram publicadas no *L'Illustration*, jornal de circulação semanal [38].

As observações de corpos celestes, tão importantes para o desenvolvimento das ciências, também se beneficiaram da invenção. A primeira fotografia bem sucedida da lua foi feita por John W. Draper (Inglaterra/EUA), em Nova Iorque 1840 [31], e a primeira fotografia do sol foi feita pelos físicos franceses Hippolyte Fizeau e Léon Foucault, em 1845. Ambas usando o daguerreótipo. [33]

No início da segunda metade do século XIX, a figura do fotógrafo e as funções da fotografia faziam parte do funcionamento da sociedade industrial. Mas, nas décadas seguintes, uma nova etapa da revolução industrial iria se impor sobre a ordem estabelecida, mudando novamente a organização social. A fotografia iria acompanhar as mudanças.

A segunda revolução industrial e a sociedade moderna

Duas importantes evoluções técnicas permitiram novas possibilidades no registro de imagens usando a luz, ainda no século XIX.

A primeira delas foi a invenção da fotografia colorida.

Seguindo as pesquisas de Newton sobre óptica, onde ele estabelece a decomposição da luz branca em sete cores, o físico e matemático James C. Maxwell (Escócia, 1831) publicou o artigo “On the theory of compound colors, and the relations of the colours of the spectrum” (Sobre a teoria das cores compostas e as relações das cores do espectro, 1860 [20]), onde demonstra que a luz de qualquer cor pode ser conseguida adicionando luzes nas três cores: vermelho (R), verde (G) e azul (B). A teoria de Maxwell se baseia na anatomia e funcionamento do olho humano, que enxerga cores através de três tipos de células, chamadas cones, localizadas na retina. Em 1854, a pesquisa de Carl Bergmann, anatomista alemão (1814), mostrava que as células cones, que detectam cores, e as células bastões, que detectam a intensidade luminosa, localizadas na retina, eram as responsáveis pela conversão da luz em sinais neurais [3].

A primeira fotografia colorida foi construída por Thomas Sutton (Inglaterra, 1819), em 1861, usando projeção de luz através de filtros nas três cores RGB, a partir de um artigo de Maxwell, publicado em 1855 [44].

O processo para a impressão colorida teve sucesso a partir de 1868, quando Louis Ducos du Hanson (França, 1837) patenteou um método utilizando tintas nas cores: ciano (C), magenta (M) e amarelo (Y), sobre papel branco [9], baseado na propriedade dos materiais, nesse caso específico do papel e das tintas, absorverem partes do espectro da luz e refletirem outras. A mesma propriedade era a base das técnicas usadas pelos artistas pintores na aplicação de tintas e pigmentos naturais nas cores vermelho, azul e amarelo sobre madeira, pedra e, posteriormente, sobre telas. A utilização das cores CMY mostrou-se mais eficiente na construção de uma maior gama de cores, em relação aos resultados conseguidos utilizando as cores RBY, aumentando assim a qualidade da imagem impressa.

Atualmente, os sistemas *aditivo*, utilizando luzes nas cores RGB, e *subtrativo*, utilizando tintas nas cores CMYK, onde K refere-se a cor preta, são empregados na construção de imagens nas telas dos aparelhos digitais e nas impressões gráficas, respectivamente.

Antes da popularização da impressão colorida, que ocorreu já no século XX, a coloração das imagens fotográficas era feita manualmente. Muitos artistas pintores passaram a trabalhar com fotografia e alguns voltaram seu interesse para esse tipo de atividade, que se transformou em grande sucesso comercial. A relação da fotografia, recém inventada, e a arte, que na época era a chamada arte acadêmica: desenho, gravura, pintura, escultura, arquitetura; ainda estava iniciando.

No *impressionismo*, movimento artístico nascido na França, na década de 1870, os pintores abdicaram do dever de registrar a realidade. Agora, a fotografia podia fazer essa tarefa. Também o físico alemão Hermann von Helmholtz (1821), interessado em estabelecer teorias matemáticas sobre a percepção visual, afirmou em seu livro “Handbuch der Physiologischen Optik” (Tratado sobre óptica fisiológica, 1867 [13]), que uma perfeita representação da natureza seria impossível, pois a escala de pigmentos é infinitamente menor do que a escala da luz, estabelecendo limites técnicos para a precisão exigida das obras de arte. A partir daquele momento, os artistas estavam livres para representar suas sensações sobre natureza, sociedade e outros temas, através da sua arte.

A impressão fotográfica usando a substância platina contribuiu para que a própria fotografia passasse a ser considerada uma forma de arte.

O contato dos europeus com a platina aconteceu na América do Sul, no século XVI, quando encontraram artefatos religiosos e utilitários produzidos por povos originários da região onde hoje se localiza a divisa entre Equador e Colômbia. A fabricação das peças era feita utilizando a técnica de *sinterização*, transformando o metal em pó em uma massa sólida sem fundi-lo completamente. A técnica só seria totalmente dominada pelos europeus durante a revolução industrial.

A primeira patente sobre a impressão fotográfica usando platina foi registrada em 1873, por William Willis (Inglaterra, 1841). No final da década de 1880, o processo estava consolidado. O valor artístico desse tipo de impressão se relaciona com o fato de que a emulsão de platina é aplicada diretamente no papel, diferente da prata que precisa ser acrescentada a um meio gelatinoso que permanece sobre o papel, sem penetrá-lo. Assim, a imagem impressa com a platina adquire profundidade, alcançando uma ampla gama de tonalidades de cinza. A impressão em platina é a mais durável dentre todos os tipos de impressão pela estabilidade física e química do metal. A estabilidade da platina, além da alta condutibilidade elétrica, tornou-a importante para a indústria militar no século XX. Com o aumento da demanda, o preço do metal tornou-se excessivamente caro, restringindo o seu uso para a impressão fotográfica. [12]

O segundo grande avanço técnico da fotografia, na segunda metade do século XIX, foi a invenção da primeira máquina fotográfica portátil, patenteada em 1888, por George Eastman (EUA, 1854) e comercializada por sua empresa Kodak, fundada em 1884, em sociedade com Henry Strong (EUA, 1838).

No final do século XIX, a invenção de Eastman tinha tornado a fotografia um produto industrial e comercial de grande sucesso.

A promessa na publicidade da nova mercadoria era

"Você aperta o botão e nós fazemos o resto."

Figura 5: Propaganda Kodak, 1888

A frase é quase uma antítese perfeita do equilíbrio proposto por Galileo em seu método científico.

A máquina fotográfica portátil era uma pequena câmara escura, acoplada com uma lente fixa e munida com um filme fotográfico de cem exposições. Não tinha visor. Após fazer o registro das imagens, a máquina era levada ao laboratório da empresa, para que o filme fosse tratado quimicamente e, em seguida, as imagens fossem impressas, empregando o mesmo sistema negativo-positivo inventado cinquenta anos antes.

O filme fotográfico utilizado na câmara também era produzido pela empresa. No ano de fundação, a Kodak lançou o primeiro filme fotográfico usando como suporte o *celulóide*, o primeiro material plástico fabricado com sucesso comercial, patenteado pelo engenheiro John Hyatt (EUA, 1837), em 1872. [36]

Além da facilidade do manuseio do aparelho, a produção em massa da primeira câmara fotográfica portátil permitiu que o custo da produção fotográfica diminuísse, ajudando a tornar a fotografia popular. E, junto com a popularização, criou-se uma distância entre o processo técnico da produção da imagem, baseado em teorias científicas, e o indivíduo que "cria" a imagem apertando um botão. Antes, a figura do fotógrafo, como o detentor do *saber fazer* estava presente, orquestrando a condução do processo. Nesse momento, como é característico da produção industrial, o produto final *fotografia* se afasta da linha de produção, dos trabalhadores e dos saberes envolvidos no processo, fenômeno que só se acentuou, desde então.

As pesquisas sobre a luz permitiram a descoberta de fenômenos "semelhantes à luz", mas fora do espectro visível aos olhos humanos. Em 1800, o astrônomo William Herschel (Alemanha, 1738), descobriu a onda de luz infravermelha. Herschel foi o descobridor do planeta Urano e também foi o primeiro a investigar o movimento do sol no espaço. Pouco tempo depois, em 1801, motivado pela descoberta dos raios infravermelhos, Johann Ritter (Alemanha, 1776), pesquisando sobre sais de prata, descobriu os raios ultravioletas. A descoberta do raio X aconteceu em 1895, pelo físico alemão Wilhelm Roentgen (1845) que, fazendo experimentos sobre a luminescência de materiais utilizando uma câmara escura, observou que os raios gerados por um tubo de Crookes, aparelho que gera raios de elétrons, tinham a propriedade de atravessar alguns materiais, mas não outros. A primeira imagem produzida usando raios x, chamada *radiografia*, que é precisamente uma fotografia utilizando esse tipo de raio, foi a mão da esposa do cientista posicionada entre o tubo e a câmara escura com um papel fotográfico dentro. A radiografia permitiu, pela primeira vez, a visualização do interior do corpo humano, sem a necessidade de cirurgia. [26]

O estudo do movimento dos corpos foi outro tema de investigação que se beneficiou do uso da fotografia.

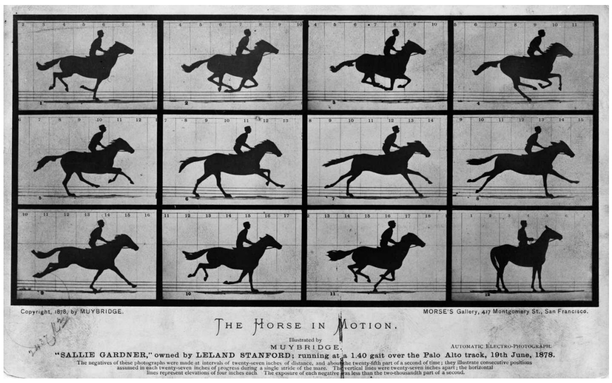


Figura 6: O cavalo em movimento, Muybridge, 1878

O aparelho *zoopraxiscópio*, tendo como tradução livre do grego “aparelho para observar a vida na prática”, inventado em 1879, pelo fotógrafo inglês Eadweard J. Muybridge (1830) [40], projetava uma série de fotografias de um objeto em movimento, feitas em vários instantes e em um curto intervalo de tempo. A projeção rápida da sequência de fotografias dava ao observador a ilusão do movimento do objeto. A técnica usada para o registro da série de imagens chama-se *cronofotografia* e começou a ser desenvolvida logo após à invenção.

Joseph Plateau, matemático e físico belga (1801), em sua tese de doutorado [25], foi o primeiro a estudar a duração da imagem na retina. Em 1832, décadas antes de Muybridge, Plateau inventou o aparelho *fenacistoscópio*, um instrumento que criava a ilusão de movimento, utilizando desenhos de um mesmo objeto em diferentes posições. Esse aparelho é considerado o primeiro dispositivo de animação.

O desenvolvimento desses experimentos e aparelhos, mais tarde, culminaria na invenção do cinema.

Na segunda metade do século XIX, a *indústria da energia* e a *indústria das comunicações* se expandiram, tornando-se grandes conglomerados. Concentrando riqueza e poder, moldaram o desenvolvimento científico e tecnológico, influenciando nos rumos da sociedade.

A principal fonte de energia durante a primeira fase da revolução industrial foi o *carvão mineral*, que alimentava as máquinas à vapor e os fornos das indústrias metalúrgicas.

Com a primeira patente do motor à combustão interna, registrado em Londres, em 1854, pelos engenheiros italianos Eugenio Barsanti (1821) e Felice Matteucci (1804), e os posteriores aprimoramentos da invenção, o *petróleo*, fonte de energia química, passou a ser o principal combustível dos motores. Desde então, a extração de petróleo tornou-se fator decisivo no desenvolvimento industrial dos países, e na consequente geração de riquezas. Entre os países que mais produziram petróleo no século XIX estavam os Estados Unidos, a Rússia e o Azerbaijão. A indústria petroquímica passou a ser um importante ramo da indústria química, sendo responsável pela produção dos derivados do petróleo, como combustíveis e plásticos.

Podemos dizer que a história do uso da eletricidade como fonte de energia para o funcionamento de motores, se inicia na antiguidade, quando tempestades e peixes que “dão choque” despertavam a curiosidade de todos e eram investigados pelos que se dedicavam à busca de explicações. Também não seria exagero dizer que, assim como a luz, a eletricidade e o magnetismo foram objetos de investigação dos principais cientistas até aquele momento. No século XIX, as pesquisas sobre a eletricidade, assim como as suas interações com a luz e o magnetismo ganharam impulso.

A relação entre eletricidade e magnetismo foi descoberta em 1819, quando Hans Christian Oersted (Dinamarca, 1777), identificou que a posição da agulha magnética de uma bússola sofria interferência ao se aproximar de um fio por onde passava energia elétrica. [24]

Em 1831, Michael Faraday (Inglaterra, 1791) descobriu o fenômeno da *indução eletromagnética*, a geração de energia elétrica através da variação de um campo magnético. [10]

Edward Becquerel (França, 1820), pesquisando as propriedades do brometo de prata, em 1839, descobriu o chamado *efeito fotovoltaico*, a criação de corrente elétrica em um material, após a sua exposição à luz. [2]

Em 1873, os resultados das pesquisas realizadas pelo físico e matemático James Maxwell, entre 1850 e 1870, foram condensadas no livro “A treatise on Electricity and Magnetism” (Tratado sobre eletricidade e magnetismo [21]). Nessa obra, estão estabelecidas as equações que unificam os três campos: eletricidade, magnetismo e luz. Segundo a teoria de Maxwell, a luz pode ser considerada como uma propagação de *ondas eletromagnéticas*. Maxwell é considerado o terceiro mais influente físico da história, Newton e Einstein ocupando as duas primeiras posições.

A existência das ondas eletromagnéticas, previstas teoricamente pelas equações de Maxwell, foram detectadas, experimentalmente, em 1887, por Heinrich Hertz (Alemanha, 1857). Na sua pesquisa, Hertz descobriu as ondas de rádio, que, mais tarde, seriam utilizadas para transmitir som.

Nos anos seguintes, as ondas eletromagnéticas se tornaram a principal ferramenta das duas indústrias: energia e comunicações.

O uso da energia elétrica pelas indústrias foi possível a partir da invenção do *dínamo*, aparelho que converte energia mecânica em energia elétrica, através da indução eletromagnética. Um modelo de dínamo que poderia ser usado efetivamente pela indústria foi desenvolvido por Henry Wilde (Inglaterra, 1833). Os resultados de sua pesquisa foram apresentados à Royal Institution, por Michael Faraday, em 1866 [28]. O primeiro trem com motor elétrico foi lançado pela empresa alemã Siemens & Halske, em 1879.

Com a invenção do motor elétrico, começou a adaptação das indústrias ao novo tipo de energia, iniciannd-se a *segunda fase da revolução industrial*.

Além do funcionamento das máquinas, a energia elétrica passou a ser usada para a geração de luz. Thomas Alva Edison (EUA, 1847), inventor e homem de negócios, era um dentre os muitos inventores, de vários lugares do mundo, que buscavam a criação de um dispositivo que transformasse energia elétrica em luz. Edison patenteou a lâmpada elétrica incandescente em 1880.

O próximo objetivo de Thomas Edison foi construir um sistema de produção e distribuição de energia elétrica em grande escala para o uso em iluminação. Em 1882, o sistema foi inaugurado, atendendo consumidores de Nova Iorque, sendo a fonte de energia elétrica uma usina termoelétrica, alimentada por carvão mineral. A primeira hidrelétrica foi inaugurada no mesmo ano, no rio Fox, nos Estados Unidos. Edison era um dos envolvidos no projeto.

A corrente elétrica distribuída pela empresa de Edison era contínua, o que impedia a transmissão para longas distâncias. Nikolas Tesla (Sérvia, 1856), inventor do *motor por indução*, também foi o inventor da *corrente alternada*, que tinha a vantagem de permitir a transmissão por longas distâncias. Em sociedade com Tesla, George Westinghouse, inventor e empreendedor industrial americano (1846), passou a disputar o fornecimento de energia com Edison, episódio que é conhecido como "a guerra das correntes" [35]. No final do século, a corrente alternada tinha sido adotada como o padrão de transmissão de energia elétrica.

A empresa Westinghouse Electric Manufacturing Company, fundada por George Westinghouse em 1886, agora, no século XXI, atua na geração de energia nuclear. Edison participou da fundação das empresas Edison Lamp Company (lâmpadas), Edison Machine Works (dínamos e motores elétricos), Bergman & Company (luminárias, tomadas e outros acessórios para iluminação elétrica), Edison Illuminating Company (estações de geração de energia elétrica). As empresas de Edison foram precursoras da empresa General Electric. Recentemente, a *GE* foi reestruturada e dividida em três empresas que produzem: motores para aviões, turbinas eólicas e tecnologias para a produção de energia renovável, aparelhos tecnológicos voltados para a área de saúde. [34]

A indústria da comunicação foi completamente transformada com a invenção do *telégrafo*. A invenção atualizou a troca de informações, conhecimentos e sentimentos para a era industrial.

A tecnologia empregada na invenção envolvia eletricidade e magnetismo. O primeiro telégrafo eletromagnético foi construído pelos alemães Carl Friedrich Gauss (sim, o matemático!) e o físico Wilhelm Weber, em 1833. Os dois, que pesquisavam juntos sobre magnetismo, conectaram o observatório e o instituto de física da Universidade de Göttingen, onde trabalhavam, com fios de transmissão.

Em 1844, Samuel Morse (EUA, 1791) inaugurou uma linha de telégrafo entre as cidades de Washington DC e Baltimore, nos Estados Unidos, construída ao longo da estrada de ferro que ligava as cidades. Além da versão comercial do telégrafo, Morse criou o código que se tornou padrão para as transmissões das mensagens de texto. Em 1845, fundou a Magnetic Telegraph Company com o objetivo de construir linhas de telégrafo ao longo do país. As tentativas de expandir os negócios instalando cabos submarinos entre a Europa e a América do Norte foram iniciadas na década de 1850. O feito foi alcançado em 1866, tornando possível a comunicação entre os dois continentes através do telégrafo.

A próxima etapa na evolução do envio de dados envolveu a transmissão do som. Alexander Graham Bell (EUA, 1847) patenteou o telefone eletromagnético em 1876. A Bell Telephone Company foi fundada em 1877 e, em 1899, transformou-se em AT&T — American Telephone and Telegraph Company. Em 1915, foi feita a primeira ligação telefônica transcontinental entre Boston, na costa atlântica, e São Francisco, costa pacífica, dos Estados Unidos. O primeiro cabo telefônico submarino foi instalado em 1956, ligando Inglaterra e Canadá.

Além de Bell, os inventores Edison e Tesla também desenvolveram aparelhos envolvendo a transmissão e gravação do som. Tesla pesquisou a transmissão de som sem o uso de fios, utilizando as ondas eletromagnéticas de rádio. A invenção do *rádio*, por Guglielmo Marconi (Itália, 1874), aconteceu em 1896. Edison, em 1877, inventou o *fonógrafo* que gravava e reproduzia som. Dez anos depois, Emile Berliner (Alemanha, 1851) patenteou o *gramofone*, que reproduzia sons gravados em discos planos. Ao contrário do fonógrafo, a estrutura de funcionamento do gramofone permitia sua produção pela indústria.

A transmissão de imagens foi o passo seguinte no desenvolvimento da transmissão de dados. Na primeira década do século XX, Arthur Korn, inventor, matemático e físico (Alemanha, 1870), desenvolveu o primeiro dispositivo de varredura fotoelétrica dando origem à *telefotografia* [45]. Vamos continuar essa história na segunda parte do texto.

Diante desse fluxo intenso de invenções ocorridas nesse período, é importante questionarmos de onde vinha o dinheiro que mantinha o ritmo das pesquisas. Os apoios financeiros para a invenção do telégrafo, do telefone e do sistema de produção e distribuição de energia elétrica, são bem ilustrativos da diversidade de situações que poderiam acontecer em qualquer país industrializado ao final do século XIX.

A pesquisa realizada por Morse contou com o financiamento do congresso americano, conseguido por intermédio do parlamentar e advogado Francis O. S. Smith (USA, 1806) que, posteriormente, tornou-se sócio de Morse. Ao final do século XIX, investigar as possibilidades de aplicações de descobertas científicas para o desenvolvimento e aprimoramento das indústrias tornou-se uma questão estratégica para os países, passando assim a receber investimento público [43]. Edison, cuja família paterna era originária da Holanda, pode ser considerado um representante do "sonho americano", por ter conseguido sucesso pelo próprio trabalho. Mas, é importante destacar que a Electric Light Company, o braço financeiro das empresas criadas a partir das invenções de Edison, era associada à J. P. Morgan (EUA, 1837), banqueiro de investimentos, herdeiro de uma das primeiras famílias inglesas a chegar na colônia americana [39]. Bell, nascido em uma família de professores da Escócia, iniciou sua trajetória nos Estados Unidos também como professor, conseguindo sucesso financeiro suficiente para manter suas pesquisas iniciais. Anos mais tarde, o pai de uma de suas alunas, Gardiner Greene Hubbard, tornou-se amigo e patrocinador dos experimentos de Bell. Hubbard, que viria a ser sogro de Graham Bell, era neto de colonizador inglês estabelecido em Nova Iorque e com fazendas de algodão, café e açúcar na América do Sul [37].

Analisando o contexto que envolveu o avanço tecnológico industrial no final dos anos 1800, podemos perceber que a força desse desenvolvimento foi fruto do espírito inovador e do trabalho de muitos pesquisadores-inventores, mas também foi alimentado pelas riquezas acumuladas nos séculos anteriores, em economias baseadas no feudalismo e no colonialismo.

No final do século XIX, a sociedade e a economia industrializadas exigiam novos desenvolvimentos científicos, com o objetivo de expandir a indústria e torná-la mais eficiente. Os nomes que se destacaram na evolução das indústrias de energia e das comunicações, também tiveram relevância na gerência da continuidade das pesquisas voltadas à indústria, institucionalizando a área de pesquisa científica que passou a ser chamada *ciências aplicadas*.

Nesse sentido, Thomas Edison criou o *Menlo Park Street Laboratory*, considerado o primeiro laboratório industrial. As invenções desenvolvidas no Menlo Laboratory eram de propriedade de Edison, que possui mais de mil patentes registradas em seu nome. Em 1880, Edison foi um dos financiadores do lançamento da revista científica *Science* [42]. Alguns anos depois, Graham Bell e seu sogro Gardiner Hubbard compraram os direitos sobre a revista. Hubbard também foi um dos fundadores da *National Geographic Society*, e o seu primeiro presidente, seguido por seu genro Graham Bell [41].

Para apoiar as pesquisas que realizava com o som, no início da década de 1880, Bell criou o *Volta Laboratory and Bureau*. Em nome do laboratório estão registradas as patentes da invenção do telefone. Em 1915, a empresa AT&T, participante do conglomerado Bell System, inaugurou o *Bell Telephone Laboratories*, que tinha como objetivo consolidar as pesquisas na área de comunicações e suas ramificações. Funcionava com 3.600 funcionários, num prédio de 37.000 m^2, em Nova Iorque. Nas décadas seguintes, as pesquisas desenvolvidas pelo Bell Labs definiriam os rumos das novas tecnologias envolvendo comunicação. [30]

Diante da importância dos recursos naturais, como água, carvão, petróleo, ferro e outros metais, para a existência das indústrias, os países, que no final do século XIX tinham alcançado a consolidação da sua produção industrial: Inglaterra, França, Bélgica, Alemanha, Itália, Estados Unidos e Japão; passaram a disputar os recursos naturais localizados em outras regiões do planeta. Era o início de um novo período de colonização. Na ata da "Conferência de Berlim", em 1884, organizada pelo chanceler do Império Alemão, Otto von Bismarck, está escrito o objetivo da reunião: "regulamentar a liberdade do comércio nas bacias do Congo e do Níger, assim como novas ocupações territoriais sobre a costa ocidental da África" [29].

Na virada do século, a fotografia ganhou uma nova função: a de testemunho histórico. Das atrocidades cometidas pela colonização na África, às precárias condições de trabalho nas fábricas, passando pelo registro da natureza e de modos de vida, que não resistiriam às transformações impostas pela industrialização, a fotografia foi uma ferramenta de documentação e denúncia, uma espécie de guardiã da memória visual.

Ao final do século XIX, a estrutura social tinha se "modernizado", tentando se adaptar às muitas e tão profundas transformações. Transformações que, de maneira semelhante ao que aconteceu no início do séc XVI, determinariam os rumos da humanidade do

Figura 7: Inauguração Monumento ao 2 de Julho, 1895, fotografia, autor desconhecido

século seguinte, reverberando até o século XXI.

A seguir...

Na segunda parte do texto, vamos ver como o efeito fotovoltaico foi fundamental na transmissão de imagens através das ondas eletromagnéticas. Depois, vamos acompanhar os movimentos históricos e os desenvolvimentos científicos que desencadearam a criação do mundo digital e como toda a estrutura industrial, inclusive as comunicações e a produção de imagens usando a luz, se adaptaram a esse novo mundo, até chegar à internet, ao telefone celular e à inteligência artificial.

Investigaremos como as teorias matemáticas são fundamentais para fazer todo esse mundo funcionar. Enquanto estamos distraídos, os rumos do futuro estão sendo traçados nos *espaços latentes* das inteligências artificiais, que, segundo o *Chat GPT4*, são "subconscientes matemáticos" das IAs.

Como estudantes, professores e pesquisadores das ciências e, principalmente, como indivíduos do XXI, precisamos refletir sobre como o conhecimento científico e as novas tecnologias desenvolvidas a partir dele estão sendo usadas para moldar as próximas décadas e séculos, o nosso futuro.

Bibliografia

[1] ATKINS, Anna. *Photographs of British Algae: Cyanotype Impressions.* London: s.n., 1843.

[2] BECQUEREL. A. E., *Mémoire sur les Effects dElectriques Produits Sous lInfluence des Rayons Solaires* (Relatório sobre os efeitos das ondas elétricas produzidas sob a influência dos raios solares.), Comptes Rendus de lAcademie des Sciences, Vol. 9, 1839, pp. 561-567.

[3] BERGMANN, C. 1857. *Anatomisches und Physiologisches über die Netzhaut des Auges* (Informações anatômicas e fisiológicas sobre a retina do olho). Zeitschrift für rationelle Medicin 3:83108.

[4] COPÉRNICO, Nicolau. *Revolutions of the Celestial Spheres.* Manuscrito, 1543.

[5] DA VINCI, Leonardo. *The Notebooks of Leonardo Da Vinci.* New York: Dover Publications, 1970.

[6] DESCARTES, René. *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences.* Leiden: Jan Maire, 1637.

[7] DESCARTES, René. *La Dioptrique.* Leiden: Jan Maire, 1637.

[8] DIJKSTERHUIS, Fokko Jan. *Stevin, Huygens and the Dutch Republic (The Golden Age of Mathematics).* Nieuw Archief voor Wiskunde, v. 9, n. 2, 2008.

[9] EDER, Josef Maria. *History of Photography.* Dover Publications. New York: 1945.

[10] FARADAY, Michael. *Experimental Researches In Electricity.* Vol. 1.. Printed by Taylor and Francys. Londres, 1839

[11] GALILEI, Galileo. *Dialogue Concerning the Two Chief World Systems.* Florence: Giovanni Battista Landini, 1632.

[12] HAFEY, John & SHILLEA, TOM. *The Platinum Print*, Graphic Art Research Center, Rochester Institute of Technology ,1979

[13] HELMHOLTZ, Hermann von. *Treatise on Physiological Optics*, Editado por: James P.C. Southall, Optical Society of America, 1925

[14] HERSCHEL, John Frederick William. *On the hyposulphurous acid and its compounds.* Edinburgh Philosophical Journal, Edinburgh: Archibald Constable & Co., v. 1, 1819, p. 829; 396400.

[15] HUYGENS, Christiaan. *Traité de la lumière.* Leiden: Pierre van der Aa, 1690.

[16] JUN, Wenren. *Ancient Chinese Encyclopedia of Technology.* Translation and Annotation of Kaogong Ji, The Artificers' Record. London: Taylor & Francis, 2014.

[17] KEPLER, Johannes. *Astronomiae Pars Optica.* Augsburg: David Franck, 1604.

[18] KOSSOY, Boris. *Hercule Florence: A Descoberta Isolada da Fotografia no Brasil.* São Paulo: Edusp, 2007.

[19] KOSSOY, Boris. *Dicionário histórico-fotográfico brasileiro: fotógrafos e ofício da fotografia no Brasil (18331910).* São Paulo: Instituto Moreira Salles, 2002.

[20] MAXWELL, James C., *On the theory of compound colours, and the relations of the colours of the spectrum.* Phil. Trans. R. Soc. (1860) (150): 5784.

[21] MAXWELL, James C. *A Treatise on Electricity and Magnetism.* Oxford Press. 1873

[22] NEWTON, Isaac. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.* London: Joseph Streater, for the Royal Society, 1687.

[23] NEWTON, Isaac. *Opticks: or, A Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light*. London: Samuel Smith & Benjamin Walford, 1704.

[24] ØRSTED, H.C. *Experimenta Circa Effectum Conflictus Electrici in Acum Magneticam*, Hafniae, Schultz, 1820.

[25] PLATEAU, Joseph. *Dissertation sur quelques propriétés des impressions produites par la lumière sur l'organe de la vue*, présentée et soutenue, sous le rectorat de Mr J. Kinker, à la Faculté des sciences de l'Université de Liège, mai 1829, pour obtenir le grade de docteur en sciences mathématiques et physiques.

[26] RÖNTGEN. Wilhelm Conrad. *Ueber Eine Neue Art von Strahlen* (Sobre uma nova espécie de Raios), Sitzungsberichte Wurzberger der Physikmedic, 1895

[27] SABRA, A. I. *The Optics of Ibn al-Haytham. Books IIIII: On Direct Vision*. London: The Warburg Institute, University of London, 1989. 2 vols. (Studies of the Warburg Institute, v. 40).

[28] WILDE, Henry. *Experimental researches into electricity and magnetism*, Proceedings of the Royal Society, 1866, p. 107-111

[29] ATA GERAL DA CONFERÊNCIA DE BERLIM, Berlim, redigida em 26 de fevereiro de 1885. Disponível em: https://mamapress.wordpress.com/wp-content/uploads/2013/12/conf_berlim.pdf Acesso em: 01 de dezembro de 2025

[30] BELL Telephone Laboratories. Página na Wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Bell_Labs Acesso em: 01 de dezembro de 2025

[31] John William DRAPER. Daguerreotype of the Moon. Nova York: s.n., 18401841. https://www.metmuseum.org/art/collection/search/789162 Acesso em: 01 de dezembro de 2025

[32] André DISDERI. Entrada biográfica em Brasiliana Fotográfica. Rio de Janeiro: Fundação Biblioteca Nacional; Instituto Moreira Salles, Disponível em: https://brasilianafotografica.bn.gov.br/?p=3873 Acesso em: 01 de dezembro de 2025

[33] ESA; Foucault, Hippolyte; Fizeau, Louis. First Photograph of the Sun. Paris: Observatoire de Paris, 1845 Disponível em: https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2004/03/First_photo_of_the_Sun_1845 Acesso em: 01 de dezembro de 2025

[34] General Electric Company. Página na Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/General_Electric Acesso em: 01 de dezembro de 2025

[35] Guerra das correntes. Página na Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/War_of_the_currents Acesso em: 01 de dezembro de 2025

[36] John HYATT. Patente n US133229A Disponível em: https://patents.google.com/patent/US133229A/en Acesso em: 01 de dezembro de 2025

[37] Gardiner Greene HUBBARD. Página na Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Gardiner_Greene_Hubbard Acesso em: 01 de dezembro de 2025

[38] L'Illustration: Journal Universel. Paris: Bureau du Journal L'Illustration, v. 11, s.d. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=_MlLAAAAcAAJ&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=true Acesso em: 01 de dezembro de 2025

[39] John Pierpont MORGAN. Página na Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/J._P._Morgan Acesso em: 01 de dezembro de 2025

[40] Eadweard J. MUYBRIDGE. Página no Google Arts & Culture: https://artsandculture.google.com/entity/m0gc57?hl=pt Acesso em: 01 de dezembro de 2025

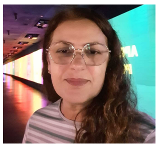
[41] National Geographic Society. Página na Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/National_Geographic_Society#cite_note-9 Acesso em: 01 de dezembro de 2025

[42] SCIENCE, Revista Científica. Site: https://www.science.org/content/page/about-science-aaas Acesso em: 01 de dezembro de 2025

[43] Francis Ormand J. SMITH. Página na Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Francis_Ormand_Jonathan_Smith Acesso em: 01 de dezembro de 2025

[44] Thomas SUTTON . The British Journal of Photography, 1875 Vol. XXII (London: Henry Greenwood), pp. 210-212. https://archive.org/details/britishjournalof58londuoft/page/n1093/mode/2up Acesso em: 01 de dezembro de 2025

[45] The New York Times. *Sending Photographs by Telegraph*, Sunday Magazine, 20 September 1907, p. 7. Disponível em: https://en.wikisource.org/wiki/The_New_York_Times/1907/02/24/Sending_Photographs_by_Telegraph Acesso em: 01 de dezembro de 2025



Ana Pinheiro é professora do Departamento de Matemática da UFBA, doutora pela UFRJ, na área de Geometria Diferencial. Atualmente, cursa o Mestrado em Artes Visuais, na Escola de Belas Artes da UFBA, onde estuda Fotografia. Quer muito entender o mundo, e desconfia que quem não sabe História, não sabe nada.

Didática

Composições Geométricas: Unindo Arte e Matemática

Maiara Santos e Vinícius Mello

Introdução

Ao ensinar Matemática na educação básica, podemos nos deparar com questionamentos por parte dos discentes sobre a utilidade ou aplicação prática dos temas estudados. Esses questionamentos podem indicar a necessidade de utilizar abordagens em sala de aula que mostrem a Matemática de forma integrada ou sua relação com outras áreas do conhecimento. Isso pode ser feito ao ensinarmos tópicos da Matemática numa perspectiva interdisciplinar, no intuito de expor a relevância de conteúdos matemáticos associados a temáticas de outras disciplinas e também provocar o interesse dos estudantes para o estudo da Matemática. Concordamos com [2] quando se afirma que a interdisciplinaridade vai permitir uma melhor compreensão de fenômenos e problemas complexos, além de contribuir para a redução da "fragmentação do conhecimento e a limitação das disciplinas básicas, ao estimular o diálogo entre diferentes campos e perspectivas".

Neste trabalho, que resume a pesquisa desenvolvida na dissertação de mestrado de Maiara Santos pelo PROFMAT, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, sob a orientação do professor Vinícius Mello, a Arte surge como uma motivadora para o ensino e a aprendizagem da Matemática. A escolha pela área das artes visuais se deu pela possibilidade de associá-la ao conhecimento matemático através da *geometria*. Acreditamos que as artes visuais podem contribuir para a percepção da Matemática como parte do cotidiano e como produção humana, além de funcionar como ponto de partida para discussões mais empíricas sobre o conhecimento matemático na sala de aula. Como bem resumido por [3],

> Ao longo da sua existência, a sociedade humana construiu uma variedade cultural que se manifesta por meio de atividades relacionadas à arte e que podem ser interpretadas como uma aplicação de conceitos e técnicas geométricas, principalmente aquelas cujos princípios geométricos são centrais na construção de um desenho ou projeto artístico.

Dentro das artes visuais, podemos observar a presença da matemática com diferentes níveis de complexidade e intencionalidade. Existem movimentos artísticos que de forma intencional utilizam os conceitos matemáticos e a abstração por eles fornecida, juntamente com uso das cores, para expressar ideias em obras de arte. Chamaremos a organização das cores e conceitos geométricos observados nessas pinturas de *composição geométrica*. Assim, nos interessa estudar a influência que essas composições podem ter no ensino de conteúdos matemáticos.

Quanto a presença da matemática no cotidiano do estudante, resolvemos desenvolver uma proposta interdisciplinar tendo como meio de desenvolvimento um *software* livre de geometria dinâmica, o GeoGebra. As ferramentas tecnológicas fazem parte do dia a dia da nossa sociedade e existem metodologias que incentivam o uso de diferentes tecnologias em sala de aula. Acreditamos que as ferramentas tecnológicas podem ser grandes aliadas no ensino de matemática, quando utilizadas de forma organizada, didática e com viés pedagógico, visando os processos de ensino e de aprendizagem.

O tema da nossa pesquisa, Composições Geométricas no GeoGebra, surge, portanto, da percepção que realizar uma pesquisa envolvendo geometria, arte e tecnologia para a educação básica poderia trazer bons resultados relacionados ao ensino de matemática. Nessa perspectiva, com o intuito de unir matemática, arte e tecnologia, construímos a seguinte questão de pesquisa: *de que forma o uso de composições geométricas, aliadas à tecnologia, pode favorecer o ensino de conteúdos matemáticos geométricos?*

Assim, nosso objetivo de pesquisa é analisar as contribuições para estudantes do ensino médio de sequências didáticas sobre composições geométricas no GeoGebra para o ensino de conhecimentos geométricos. Neste artigo para a Revista de Matemática Hipátia, resumiremos nossa pesquisa, começando por delinear o conceito de "composição geométrica", através de seus princípios, elementos, desenvolvimento histórico e principais expoentes, e terminando com a descrição de sua metodologia, execução e resultados.

Composição: Elementos e Princípios

O termo composições geométricas ocupa o centro das discussões, por ser o fator de interdisciplinaridade entre Matemática e Arte que gera os nossos estudos. Estamos explorando a potencialidade das composições geométricas para mostrar a matemática existente em obras de arte e é necessário compreendermos o que essa expressão significa. Iniciaremos tentando compreender o que o termo 'composição' significa nas artes visuais.

Ao buscarmos em dicionário, a palavra composição apresenta vários significados, dos quais enfatizamos: "Ação ou efeito de compor, formar um todo. Disposição do que constitui um todo; constituição. Maneira como algo está ou se encontra disposto; organização. [Artes Plásticas] Constituição ou desenvolvimento da estrutura da obra de arte" [1]. No contexto da nossa pesquisa, adotamos uma definição inspirada pela dada em [4]: *composição é a organização dos elementos visuais para comunicar uma intenção.* A palavra-chave aqui é intenção, pois a organização dos elementos visuais não é aleatória, mas sim planejada pelo artista para expressar sentidos, emoções, sensações e, no caso das *composições geométricas*, conceitos matemáticos.

Para completar essa definição, entretanto, precisamos entender o que são precisamente os *elementos visuais* e em que *princípios* se baseia essa organização. Como não há um consenso na literatura sobre quais sejam esses elementos e princípios, até pela dificuldade de se estabelecer definições precisas para conceitos tão subjetivos, optamos por adaptar definições encontradas em [7] e [5] para o nosso contexto.

Os elementos da composição são:

Linha É considerada o elemento fundamental da composição, definida como o rastro de um ponto em movimento. As linhas podem ser retas, curvas, finas ou grossas e servem para criar movimento, dar direção e guiar o olhar do espectador através da obra.

Forma Refere-se a espaços fechados criados quando linhas se encontram ou áreas de cor e textura se intersectam. Elas podem ser geométricas (como quadrados e círculos) ou orgânicas (semelhança com seres vivos). Na composição, a forma serve como um elemento unificador que vincula os outros componentes.

Volume (ou Forma Tridimensional) É a técnica de fazer objetos parecerem tridimensionais em uma superfície plana. Isso é alcançado através do uso de perspectiva, luz e sombra, criando a ilusão de profundidade. No espaço real, como na escultura, o volume é tangível, enquanto na pintura ele é uma representação visual de massa e peso que influencia o equilíbrio da composição.

Cor É um dos elementos mais expressivos, capaz de criar harmonia, contraste e profundidade sem o uso de palavras. A cor atrai a atenção para partes específicas da obra e atua como símbolo ou metáfora (ex: azul para serenidade, vermelho para paixão). O efeito de uma cor é sempre relativo à sua situação em relação às cores vizinhas.

Valor (ou Tom) Refere-se ao grau de claridade ou obscuridade de uma cor ou superfície. É essencial para criar contraste e profundidade, permitindo que o artista destaque pontos de luz intensa ou sombras profundas. O valor dá à pintura seu senso de realismo e dimensão.

Textura Diz respeito à qualidade da superfície ou à sensação tátil de um objeto, podendo ser percebida visualmente ou sentida fisicamente. Ela adiciona uma dimensão sensorial à composição.

Espaço Refere-se às áreas ao redor e entre os objetos. Inclui o espaço positivo (ocupado pelos elementos principais) e o espaço negativo (as áreas

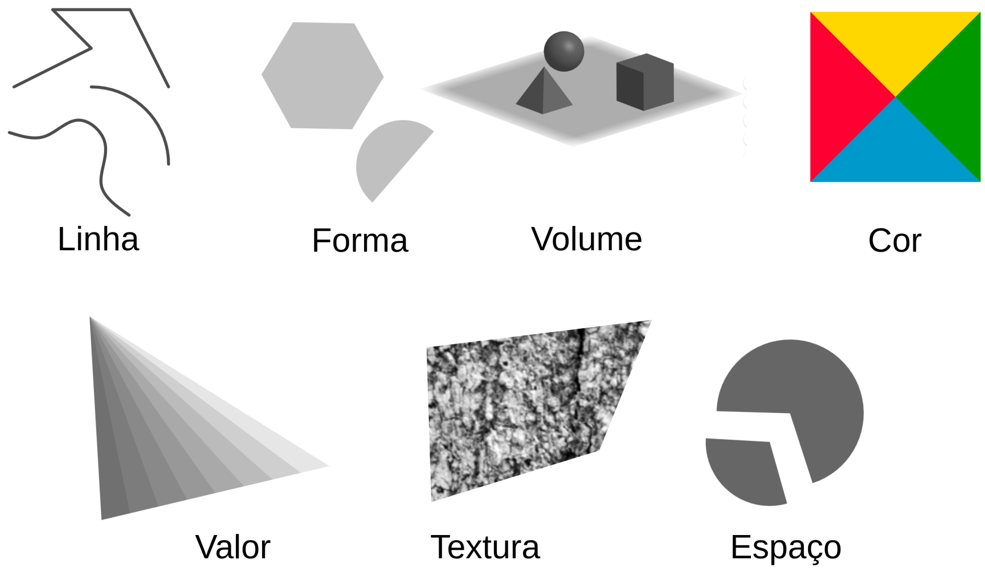


Figura 1: Elementos da composição. Figura produzida apenas com recursos do GeoGebra.

abertas ao redor deles). O espaço é vital para definir limites, escala e criar ênfase na composição. Em artes monumentais, o espaço também envolve o movimento físico do espectador para apreciar a obra de diferentes pontos de vista.

Estes elementos estão ilustrados na Figura 1, que foi produzida utilizando apenas recursos do GeoGebra.

Já os princípios da composição estão ligados à forma como os elementos visuais se relacionam para criar uma obra coesa e expressiva. São eles:

Equilíbrio (ou Harmonia) O equilíbrio refere-se à distribuição igualitária de elementos visuais dentro de uma composição. Ele é essencial para conferir estabilidade e unidade à obra, podendo ser alcançado de dois modos principais: *simétrico*, quando as partes são organizadas de forma idêntica ou espelhada em relação a um eixo, geralmente vertical, e *assimétrico* quando elementos diferentes (em peso visual, cor ou forma) são organizados de modo a contrabalançar uns aos outros, criando uma estabilidade sem repetição exata.

Proporção Este princípio trata da relação de tamanho entre objetos ou partes de um todo. A proporção é vital para estabelecer harmonia e unidade. Historicamente, artistas utilizaram sistemas matemáticos para garantir proporções "perfeitas", como a *proporção áurea* ($1 : \phi$, com $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$) e os *retângulos de raiz*($1 : \sqrt{2}$, $1 : \sqrt{3}$ etc.) (Fig. 3).

Contraste O contraste ocorre quando se percebem diferenças distintas entre dois efeitos comparados. Ele serve para intensificar ou enfraquecer o impacto visual e é crucial para criar hierarquia.

Ênfase A ênfase é o princípio de tornar certos elementos mais proeminentes para criar um ponto focal que capture a atenção do espectador. Isso é geralmente alcançado através do contraste de cor, valor ou nitidez de bordas.

Movimento O movimento é a ilusão de ação dentro de uma composição estática. Ele guia o olhar do espectador através da obra e pode ser gerado pela repetição de linhas, curvas ou diagonais.

Ritmo O ritmo é criado pela repetição de elementos visuais (como cores, formas ou linhas) para produzir um senso de fluxo e energia. Ele funciona de forma análoga à música, apresentando uma sucessão de valores no tempo e no espaço. O ritmo ajuda a organizar o olhar do observador, podendo evocar sentimentos de calma ou excitação.

Unidade A unidade refere-se a como todos os elementos são colocados juntos para criar um senso de ordem e completude. A geometria é frequentemente a ferramenta usada para conferir essa unidade estrutural invisível à obra.

Esses princípios serão referenciados ao longo do artigo quando discutirmos as composições apresentadas.

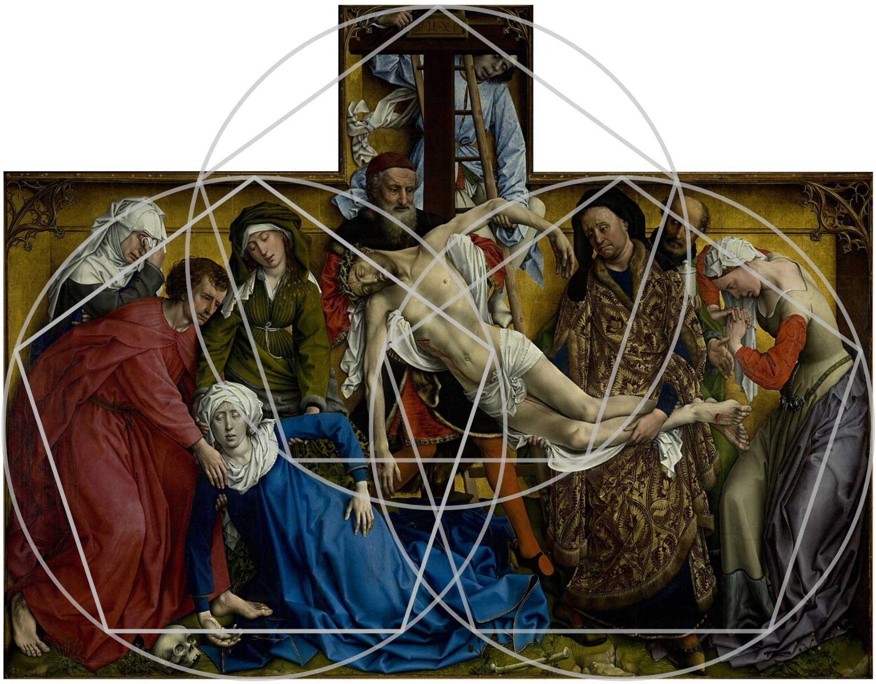


Figura 2: *A Deposição da Cruz*, de Rogier van der Weyden, Museu do Prado, com a composição geométrica proposta por Bouleau sobreposta.

Histórico e Principais Expoentes

Até o início do século XX, a composição geométrica era um recurso utilizado principalmente na fase preparatória de obras artísticas, através de esboços e estudos. Em seu monumental tratado *La Géometrie Secréte des Peintres* ("A Geometria Secreta dos Pintores", [6]), o pintor e teórico Charles Bouleau analisa centenas de obras de arte, desde a antiguidade até o século XX, e demonstra como os artistas utilizavam recursos geométricos para estruturar suas composições. Traremos apenas dois exemplos dessa prática, retirados do livro de Bouleau.

O primeiro exemplo é a pintura *A Deposição da Cruz*, de Rogier van der Weyden (Fig. 2). Bouleau observa que o quadro possui um formato incomum, assemelhando-se a um tríptico amalgamado em um único bloco, mantendo a simetria e a composição ternária herdada dos retábulos de abas. A construção da moldura baseia-se em um retângulo de proporção $1 : \sqrt{3}$ (Fig. 3), mas o que mais chama a atenção é a complexa estrutura geométrica que organiza a cena central. O coração da composição, segundo o autor, é organizado por meio de um complexo jogo de figuras geométricas. Existem três círculos de mesmo raio, dois deles tangenciais às bordas laterais e ao topo, e o ponto de intersecção entre eles serve como centro para um terceiro círculo central. Dentro desses círculos, van der Weyden inscreveu pentágonos. Bouleau afirma que as diagonais desses pentágonos conferem vigor e arquitetura às formas, que de outra forma pareceriam apenas um "redemoinho" de corpos. Bouleau ressalta que, apesar desse rigor matemático, a obra atinge um equilíbrio perfeito entre a geometria e a emoção. O efeito dramático é intensificado pelas curvas dos corpos suplicantes, que se inclinam em direção a dois polos principais: o Cristo e a Virgem Maria. As diagonais e os eixos não são apenas auxílios de harmonia, mas o objetivo artístico acentuado, onde o "humano se sujeita às exigências da geometria".

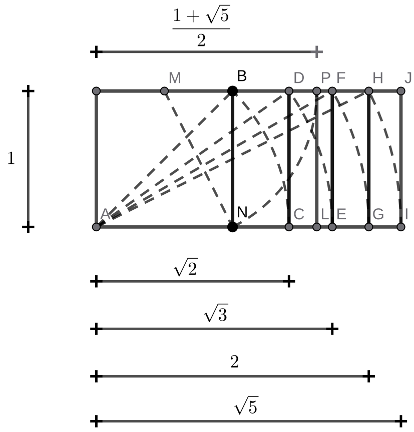


Figura 3: Construção da razão áurea e dos retângulos de raiz a partir do quadrado.

O outro exemplo, com uma composição bem mais simples, é a pintura *Lição de Anatomia do Dr. Tulp*, de Rembrandt (Fig. 4). Bouleau descreve-a como sendo estruturada a partir de um esquema que utiliza quatro pontos, um em cada lado da pintura. A partir desses pontos, são traçadas linhas inclinadas em direção aos cantos da obra, formando dois pares de linhas paralelas. Esse arranjo resulta em um paralelogramo que é dividido por uma diagonal em dois triângulos iguais. Dentro dessa organização geométrica, Rembrandt agrupa os retratos dos assistentes no triângulo superior. Já o cadáver ocupa quase todo o espaço do triângulo inferior. Essa estrutura oculta permite a Rembrandt sacrificar detalhes secundários para enfatizar o centro de interesse através da luz, uma técnica que o autor compara ao trabalho de um diretor de cena, com os triângulos direcionando o olhar do espectador dos assistentes para o o dr. Tulp e para o cadáver.

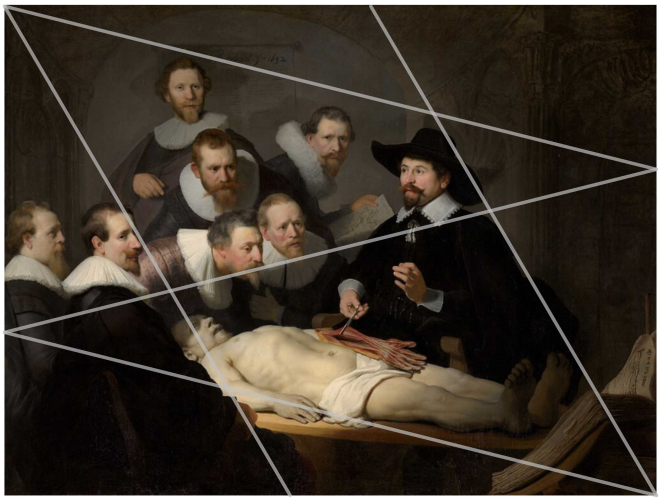


Figura 4: *Lição de Anatomia do Dr. Tulp*, de Rembrandt, Museu Mauritshuis, com a composição geométrica proposta por Bouleau sobreposta.

A partir do século XX, em parte devido ao impacto da fotografia e do cinema, mas também graças a busca de novas formas de expressão artística, a composição geométrica deixa de ser um recurso utilizado apenas na fase preparatória das obras e passa a ser o foco principal de diversos movimentos artísticos. Por exemplo, em *Círculos em um Círculo*, de Wassily Kandinsky (Fig. 5), a composição é inteiramente baseada em formas geométricas e cores, organizadas de forma a criar equilíbrio, movimento e ritmo, sem qualquer representação figurativa.

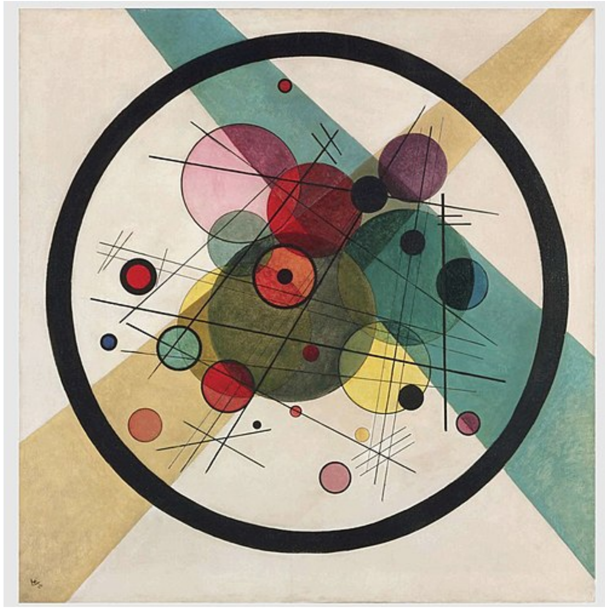


Figura 5: *Círculos em um Círculo*, de Wassily Kandinsky, Museu Guggenheim.

Kandinsky, além de ser um dos pioneiros da arte abstrata, foi professor na Bauhaus, escola alemã que funcionou por 14 anos (de 1919 a 1933, até ser fechada pelo regime nazista) e deixou contribuições no que diz respeito a arte, mais especificamente a arte concreta, na arquitetura e no *design* que reverberam até os dias atuais. Em seus fundamentos, utilizava-se da abstração geométrica a partir dos elementos básicos da composição visual, sendo referência para o *design* contemporâneo.

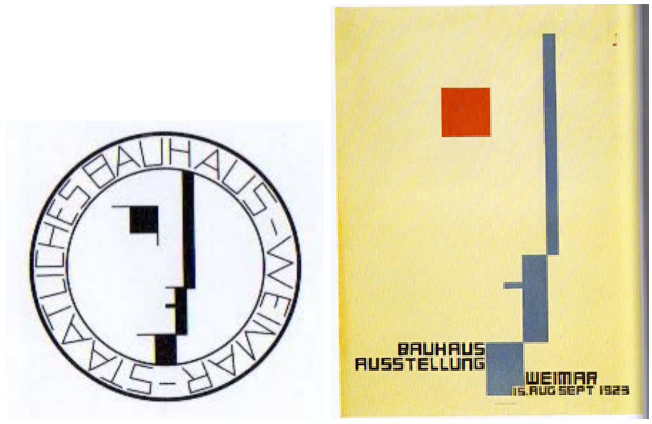


Figura 6: Emblema da Bauhaus, de Oskar Schlemmer e cartaz *Bauhaus Ausstellung* de Fritz Schleifer.

Um exemplo é o cartaz de uma exposição da Bauhaus, feita pelo artista Fritz Schleifer (Fig. 6), seguindo os princípios *construtivistas* que eram defendidos pela Bauhaus. Elam explica em [11] que o cartaz apresenta um rosto humano que é representado de forma abstrata através de cinco formas geométricas retangulares, uma simplificação do emblema da

Bauhaus concebido pelo artista Oskar Schlemmer, e que há um alinhamento entre o quadrado que representa um olho e o eixo vertical, mas os demais elementos estão organizados de forma assimétrica em relação a esse eixo. Além disso, percebemos que as formas geométricas estão pintadas com as cores primárias vermelho e azul.

Após a Segunda Guerra Mundial, outra escola influente de *design* foi criada na Alemanha: a *HfG Ulm* (*Hochschule für Gestaltung Ulm*, ou Escola Superior de *Design* de Ulm), fundada em 1953 por ex-integrantes da Bauhaus. Vamos citar três expoentes dessa escola que contribuíram para o desenvolvimento da composição geométrica no *design*.

O primeiro deles é o arquiteto e *designer* Max Bill (1908–1994), que foi aluno da Bauhaus e um dos fundadores da HfG Ulm. Bill defendia uma arte baseada na razão e na clareza, utilizando formas geométricas simples e cores primárias para criar composições equilibradas e harmoniosas. Seu trabalho influenciou o *design* gráfico, industrial e arquitetônico. Um exemplo de seu trabalho está em uma das sequências didáticas que desenvolvemos.

O segundo nome é Johannes Itten (1888–1967), que também foi professor na Bauhaus e teve influência significativa no desenvolvimento da composição geométrica. Itten foi um dos primeiros a ensinar a teoria da cor e a composição geométrica na Bauhaus, e suas ideias foram fundamentais para o movimento construtivista. Em seu livro *The Elements of Color* [13], Itten aborda a teoria estética da cor, resultados de anos de estudo sobre o tema. Ele discute a existência da harmonia das cores que surge a partir do relacionamento entre um conjunto de matizes. Assim como existe o equilíbrio na disposição desses elementos, há arranjos que não harmonizam e podem ter o sentindo provocativo. A posição, a proporção, o grau de pureza e o brilho são determinantes para a mensagem que se pretende passar em uma composição visual:

> Uma cor particular incita o olho, por uma sensação específica, a buscar a generalidade. Para, então, buscar essa totalidade, para se satisfazer, o olho busca, além de qualquer espaço de cor, um espaço incolor onde produzir a cor ausente. Aqui temos a regra fundamental de toda harmonia cromática.

Ele desenvolveu o *círculo cromático* (Fig. 7), que é um fundamento indispensável ao tratarmos de teoria estética da cor.

O terceiro nome é Hermann von Baravalle (1898–1973). Convidado por Max Bill e Inge Scholl,

Figura 7: Círculo cromático de Johannes Itten.

Baravalle atuou como professor convidado regular na *hfg Ulm* entre 1954 e 1968, integrando o *Grundlehre* (Curso Básico). Sua "marca" pedagógica em Ulm foi o ensino da *Geometria Dinâmica*, onde as formas não eram estáticas, mas vistas como o resultado de tensões e transformações originadas pelo movimento (Fig. 8). Diferente da geometria descritiva tradicional, focada apenas na representação de objetos, Baravalle propunha a geometria como um idioma visual [17].

Figura 8: Baravalle e suas composições geométricas. Fonte: Revista LIFE 21 mar. 1949.

Antes de sua atuação em Ulm, Baravalle fora um dos pioneiros do Movimento Waldorf, tendo sido escolhido pelo próprio Rudolf Steiner — filósofo e pensador austríaco que desenvolveu a Pedagogia Waldorf, um método educacional baseado na Antroposofia — para integrar o corpo docente da primeira escola em Stuttgart, em 1920. O objetivo central de Baravalle em ambas as instituições era "reativar o sentido geométrico". Ele acreditava que, ao ensinar os alunos a descobrir as leis matemáticas por meio da percepção direta e do desenho manual, eles se tornariam criadores mais conscientes e autônomos.

A influência da Escola de Ulm no Brasil foi profunda e estruturante, atuando como um catalisador para a modernização do design gráfico, da arte e do ensino superior no país a partir da década de 1950. O ponto de partida histórico dessa influência ocorreu em 1951, quando a escultura "Unidade Tripartida" de Max Bill foi premiada na Primeira Bienal de São Paulo, tornando-se o marco de apoio para o movimento concretista brasileiro ao introduzir o rigor matemático e o anti-romantismo na produção nacional. No campo educacional, a Escola de Ulm serviu de modelo direto para a criação da ESDI (Escola Superior de Desenho Industrial) no Rio de Janeiro, em 1963, a primeira instituição a oferecer um curso de *design* em nível superior no território brasileiro [12].

Figura 9: Composição com Triângulo Proporcional, Alexandre Wollner, 1953, Museu de Arte Contemporânea da USP.

A influência também se manifestou através de figuras individuais, sendo Alexandre Wollner, pioneiro do *design* gráfico no Brasil, o caso mais emblemático (Fig. 9); após estudar em Ulm a convite de Max Bill, Wollner retornou ao Brasil e fundou o escritório *Forminform*, consolidando o uso do *grid* e do rigor estrutural em marcas icônicas como Elevadores Atlas e Banco Itaú [16].

Outro nome brasileiro a ser citado é o de Luiz Sacilotto, que embora não tenha estudado diretamente em Ulm, foi fortemente influenciado por Max Bill e pelo Concretismo de Theo van Doesburg, que é relacionado aos ideais da Bauhaus [12]. Sacilotto foi um dos pioneiros da *Arte Concreta* no Brasil e uma de suas obras é tema de uma de nossas sequências didáticas.

Fora da Europa e do Brasil, outro nome importante no contexto da composições geométricas de caráter mais matemático é o de Crockett Johnson (pseudônimo de David Johnson Leisk). Seu trabalho representa uma interseção única entre a arte e a matemática, fruto de uma "odisseia" iniciada nos últimos dez anos de sua vida (1965–1975) [18]. Johnson dedicou-se a criar pinturas abstratas que documentam marcos matemáticos históricos e investigações próprias. Johnson executou suas pinturas em um estilo de bordas rígidas (*hard edge*) e massa plana, utilizando cores que focavam em intensidade ou contraste para destacar o sentido dos teoremas. Seu objetivo era retratar a beleza oculta da matemática sem o uso de símbolos, equações ou palavras, permitindo que as formas geométricas falassem por si mesmas (Fig. 10, acima).

Nossa Pesquisa

A origem de nossa pesquisa foi um trabalho final, unindo arte e geometria, que o segundo autor (Vinícius) propôs aos alunos da disciplina Geometria Euclidiana Plana no início de 2024. Foi neste momento que conhecemos os trabalhos de Crockett Johnson e Max Bill. Após um pouco de experimentação, ele percebeu que o GeoGebra tinha todos os recursos necessários para reproduzir boa parte das obras desses autores (Fig. 10, abaixo), e perguntou a primeira autora (Maiara) se ela gostaria de trabalhar com esse tema em sua dissertação de mestrado. Ela aceitou e iniciou a pesquisa que resumiremos a seguir (continuaremos a usar a primeira pessoa do plural no texto, mas a pesquisa foi conduzida de forma bastante autônoma pela primeira autora).

A fim de responder nossa pergunta inicial, definimos que a nossa pesquisa teria caráter *qualitativo*, o qual permite a observação, compreensão e análise dos sujeitos interagindo com os conhecimentos pretendidos, em busca de entender os processos que os levam aos resultados e não apenas focar nos resultados finais [9]. Quanto aos objetivos do estudo, classi-

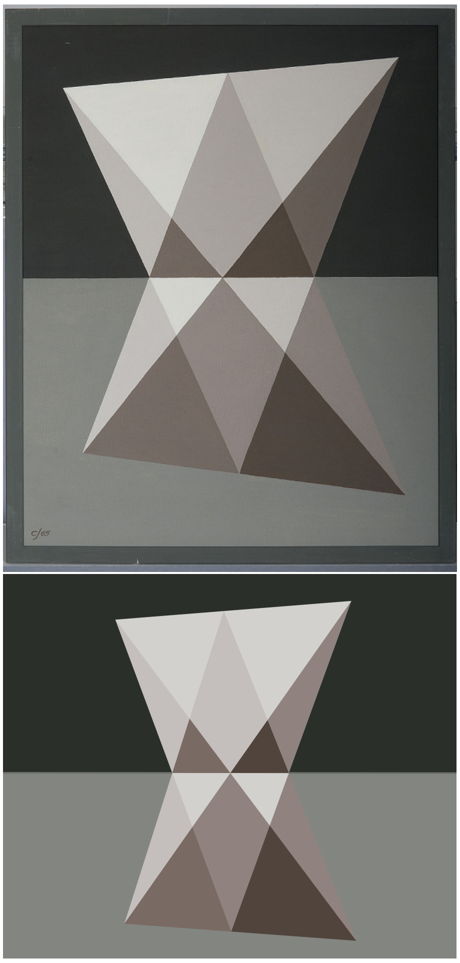


Figura 10: *Reciprocation*, de Crockett Johnson, acima e nossa reprodução no GeoGebra abaixo. A pintura ilustra o Teorema de Pappus.

ficamos a pesquisa como *exploratória*, já que concordamos com Lunetta e Guerra [15] sobre esse tipo de pesquisa ser utilizado quando se pretende aprofundar os conhecimentos sobre o conteúdo pesquisado, permitindo desenvolver hipóteses e maior especificidade no que se conhece sobre o tema.

Após um período de estudo e planejamento, formulamos os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver sequências didáticas que utilizem composições geométricas para o ensino de conteúdos matemáticos;
- Apresentar o desenvolvimento de uma oficina sobre Composições Geométricas com o auxílio do GeoGebra;
- Investigar a percepção dos estudantes sobre as sequências didáticas e sobre a oficina;
- Entender a viabilidade do ensino de conteúdos matemáticos a partir da interdisciplinaridade com a arte.

O local escolhido para a realização da pesquisa foi um Colégio Estadual situado na zona urbana da cidade de Seabra-Bahia, onde a pesquisadora exerce a docência. Ele atende majoritariamente estudantes do Ensino Médio, Ensino Médio Técnico e Educação de Jovens e Adultos (EJA), funciona nos turnos matutino, vespertino, noturno e integral e possui um polo da Universidade Aberta do Brasil (UAB), que oferece cursos de graduação e pós-graduação. Solicitamos à coordenação o uso do laboratório de informática UAB, localizado no interior da escola estadual, pois optamos em desenvolver as atividades em computadores, ao invés de celulares ou *tablets*. Fizemos essa opção metodológica por entendermos que os computadores proporcionariam melhor visualização das construções e seus detalhes. No momento da visita inicial ao laboratório, havia 12 computadores com bom funcionamento e decidimos limitar o número de participantes à quantidade de máquinas. A direção escolar e a coordenação da UAB Seabra-BA assinaram as respectivas declarações de anuência, concedendo a permissão para a realização da pesquisa.

Sabendo com precisão o local de aplicação que a pesquisa seria desenvolvida — o laboratório de informática — foi possível definir os convidados para a realização da oficina. Decidimos convidar estudantes que tivessem disponibilidade para estar na escola no turno oposto ao que estudavam e assim surgiu a oportunidade de convidar os participantes do Clube de Ciências da escola (MegamenteCES), os quais já frequentavam a escola no turno oposto para reuniões.

Como o quantitativo do público esperado não havia sido atingido estendemos o convite para estudantes de uma turma de quarto semestre de Licenciatura em Matemática à distância, pertencente à UAB — Seabra, e uma manifestou interesse em participar. No momento do convite, acreditávamos que ter participantes do Ensino Médio e do Ensino Superior traria visões complementares e nos ajudaria na melhor compreensão sobre os efeitos da atividade interdisciplinar no ensino da matemática. Posteriormente, um estudante que cursava a terceira série, mas não fazia parte do clube de ciências, se mostrou interessado em compor o grupo. Dessa forma, o grupo final foi composto por sete estudantes, sendo seis do Ensino Médio e um do Ensino Superior. Todos os participantes assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) para participar da pesquisa.

Quanto ao conteúdo das Oficinas, optamos por nos limitar ao estudo das Transformações Isométricas e ao Teorema de Pitágoras, por serem conteúdos do

Ensino Médio que podem ser explorados através de composições geométricas. Transformações Isométricas são transformações que conservam a distância ([14]). O ensino de Isometrias está previsto na BNCC do Ensino Médio, inclusive tendo como sugestão a sua utilização para análise de obras de arte:

> (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras [8].

Com os conteúdos matemáticos definidos, realizamos a estruturação das sequências didáticas. Elas são iniciadas com o conceito matemático que se pretende trabalhar, para que o estudante comece a refletir sobre a matemática envolvida. Nesse momento pode haver uma conversa sobre o tema entre docente e discentes. Em seguida, há sessões da sequência com as construções propostas. Cada sessão conta com o passo a passo da construção que se pretende realizar no GeoGebra e, prosseguindo, são feitos questionamentos para incentivar que os participantes reflitam sobre o que estão elaborando e sintetizem seus aprendizados. Ao final de cada sessão de construção, há uma sessão chamada "para finalizar" onde são dadas as instruções sobre como salvar, exportar ou estilizar a produção.

Sabendo que os estudantes podem não ter familiaridade com o GeoGebra, organizamos uma sessão inicial para que os participantes conheçam o aplicativo com o auxílio da docente responsável. Elaboramos alguns vídeos para apoiar os momentos de prática, sobre: informações iniciais relativas ao GeoGebra; como exportar imagens do GeoGebra para o computador; como modificar as cores no GeoGebra. Ademais, elaboramos e disponibilizamos vídeos sobre os artistas dos quais pretendemos realizar construções das obras de arte, que são: Max Bill, Luiz Sacilotto e Crockett Johnson. O *link* de cada vídeo está disponível ao longo das sequências didáticas e também na página *online* organizada para uso durante as oficinas [19].

Foram elaboradas três sequências didáticas com composições geométricas para serem desenvolvidas no GeoGebra. Elas buscam despertar nos participantes o caráter investigativo, contando com o auxílio de um docente que fará a mediação das atividades, mas permitindo que os discentes desenvolvam as atividades seguindo as orientações escritas nas sequências didáticas.

As duas primeiras sequências se complementam, tratando do conteúdo matemático isometrias no plano: a primeira sequência trabalhando com produções que envolvem reflexão e rotação, e a segunda sequência focando no estudo de translações. Para estas sequências didáticas, exploramos tanto construções mais livres em que estudaríamos os conceitos a partir das produções de cada estudante e construções das obras de arte de Max Bill e Luiz Sacilotto. A terceira sequência explora o teorema de Pitágoras e a média geométrica a partir de uma obra do artista Crockett Johnson.

Execução e Resultados

As oficinas ocorreram em três encontros presenciais de duas horas cada, no laboratório de informática, com datas escolhidas em diálogo com os participantes para minimizar ausências. Sete alunos participaram do primeiro encontro (identificados como A, B, C, D, E, F e G); seis no segundo e cinco no terceiro.

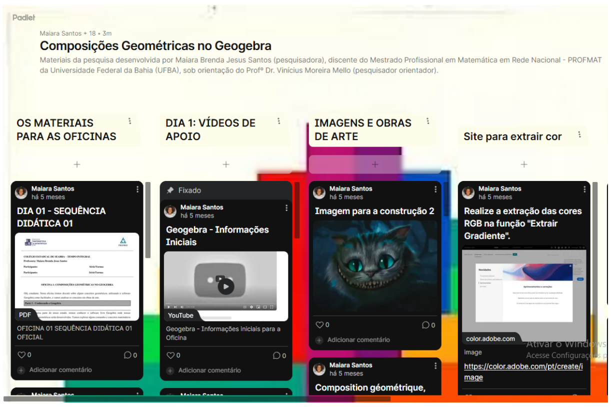


Figura 11: Mural interativo elaborado para as oficinas [19].

No **primeiro encontro**, após apresentar o mural colaborativo (Fig. 11), contendo todos os materiais de apoio, e o GeoGebra, os alunos iniciaram a sequência didática que consiste das seguinte construções:

1. Reflexão utilizando comando do GeoGebra;
2. Rotação utilizando comando do GeoGebra;
3. *Composition Géometrique*, 1990, Max Bill
4. *Concreção 8745* de Luiz Sacilotto.

A primeira construção consistia em efetuar reflexões de um polígono em relação aos eixos e à origem. Ao comparar coordenadas, perceberam as mudanças provocadas pelas reflexões e surpreenderam-se ao mover o polígono original e verificar que as imagens refletidas o acompanhavam. O estudante F comentou: “acompanharam a posição do polígono inicial, porém permaneceram invertidos”.

Em seguida, exploraram rotações da obra referencial em 45°, 90°, 180° e 270° em torno da origem, construindo círculos para destacar a preservação de distâncias. O estudante B observou que “o círculo passa sempre nos mesmos vértices” e a estudante E notou que os círculos passavam por todas as imagens rotacionadas, mesmo ao mover a figura inicial. Por fim, utilizaram controle deslizante para visualizar rotações contínuas em torno da origem e de um vértice.

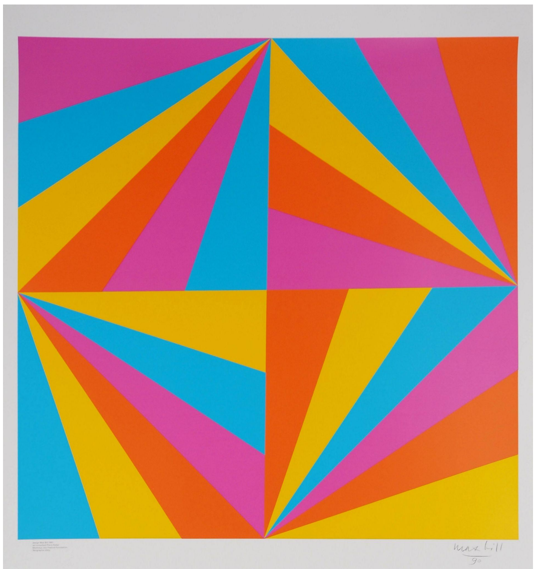


Figura 12: *Composition Géométrique*, Max Bill (1990).

O **segundo encontro** focou na reprodução de obras de arte. Após assistir a vídeo sobre Max Bill, os alunos analisaram *Composition Géométrique* (1990) (Fig. 12). Destacam-se as observações do estudante F — “diversos triângulos unidos em diferentes sentidos” e formação de um quadrilátero central (losango) — e do estudante B — “dividida em 4, cada imagem em ângulo diferente, dá a impressão que está rodando em espiral”. Fragmentos das respostas reforçam a percepção de simetria, repetição de cores e padrões rotacionais de 90°.

Os alunos reproduziram um quarto da obra e completaram o restante usando rotações e reflexões. Três participantes (A, B e F) demonstraram maior autonomia; os demais necessitaram de mais apoio, especialmente no manuseio preciso do mouse e na extração de cores RGB.

Ao final, iniciou-se a análise da obra *Concreção 8745* de Luiz Sacilotto (Fig. 13), com percepções sobre simetria, harmonia cromática e possibilidade de obter formas inferiores por reflexão.

O **terceiro encontro** foi dedicado à conclusão da

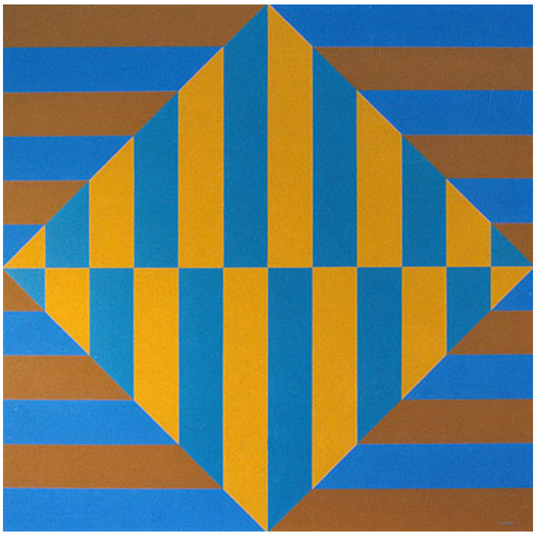


Figura 13: *Concreção 8745*, Luiz Sacilotto.

reprodução de *Concreção 8745*. Os alunos construíram uma parte triangular (oitavo da obra), coloriram-na e completaram o quadrado central azul-amarelo usando reflexões. Para finalizar a obra inteira, empregaram reflexões em relação a segmentos internos. Os estudantes A, B e F atuaram com autonomia; C, D e E requereram maior intervenção da docente. O estudante A, tendo já concluído, criou composição original inspirada nas oficinas (Fig. 14).

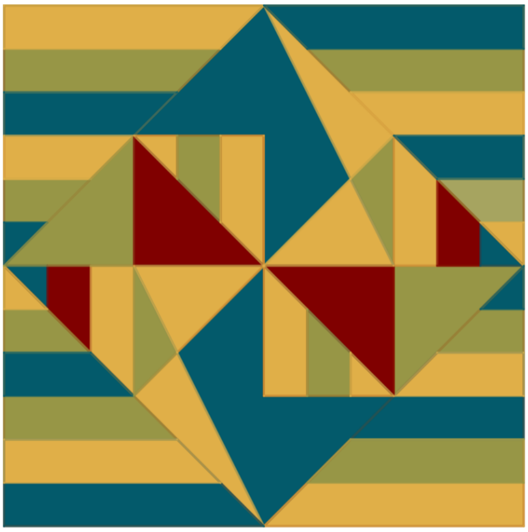


Figura 14: Composição geométrica de autoria do estudante A.

O questionário *online* (Google Forms), intitulado “Questionário sobre as oficinas: composições geométricas no GeoGebra”, foi respondido pelos cinco participantes presentes na última oficina. Composto por 20 perguntas de múltipla escolha e discursivas, buscou investigar perfil tecnológico, percepções sobre tecnologias digitais em aulas de matemática, relação matemática-arte, experiência com o GeoGebra, dificuldades enfrentadas e sugestões sobre as oficinas.

Todos os respondentes declararam ter acesso à internet em casa e na escola, principalmente via *smartphone* (100%), *notebook* (80%), *tablet* (40%) e computador (20%). Quanto à experiência com computadores, todos já possuíam alguma, sendo 60% em nível básico e 40% intermediário.

Os participantes consideraram, de forma unânime, ser importante o uso de tecnologias digitais em aulas de matemática. Destacam-se justificativas como: "tecnologias digitais têm muitas ferramentas que tem forte ligação com a matemática"; "nos ajuda a entender a matemática de maneira dinâmica e didática"; "enriquece as aulas"; "acompanha a evolução que acontece na sociedade atual". Tais percepções reforçam a contribuição das ferramentas digitais para o engajamento e construção significativa de conceitos matemáticos, conforme aponta Cox em [10].

Apenas uma participante (licencianda em Matemática) já havia utilizado o GeoGebra anteriormente, mas todos o consideraram uma boa ferramenta para aprender matemática, destacando: "diversidade de funções"; "aproximação prática com a teoria"; "facilita o aprendizado e demonstra melhor as figuras visualmente"; "oportunidade de conhecer várias formas geométricas através da arte". Como aspectos mais interessantes, citaram o aprendizado prático e a abordagem via arte.

O grupo concordou que relacionar matemática e arte é uma boa estratégia pedagógica, pois permite explorar criatividade, estudar de forma dinâmica, compreender conexões interdisciplinares e reproduzir processos artísticos. Essa abordagem evidencia a presença da matemática em contextos culturais e sua potencialidade interdisciplinar, corroborando Mendes ao afirmar que atrelar geometria a manifestações artísticas torna o aprendizado mais atraente e significativo, extensão válida também para adolescentes e adultos [3].

Quanto às dificuldades, 60% relataram problemas devido à falta de familiaridade prévia com o GeoGebra ou baixa frequência no uso de computadores, mas enfatizaram a importância das orientações da docente para superar os obstáculos.

Todos aprovaram o formato das oficinas (orientações presenciais, sequência didática impressa e uso de computadores), destacando trechos como: "é como se houvesse um guia"; "metodologia muito boa"; "gostei muito desse formato"; "tivemos autonomia".

Nos comentários finais, todos foram positivos, elogiando a experiência e sugerindo a inclusão de momento para criações autorais no GeoGebra. Trechos relevantes: "quero levar como conhecimento para aprimorar meus estudos"; "ganhei experiência em novas plataformas digitais"; "aprendi mais sobre a matemática e a arte"; "excelente oportunidade de aprendizado sobre o aplicativo e suas funcionalidades".

Considerações Finais

Infelizmente, não foi possível aplicar todas as sequências didáticas planejadas, o que sugere que uma Oficina como esta necessita de mais tempo para ser desenvolvida. O número reduzido de participantes também limitou a abrangência dos resultados, mas, mesmo assim, foi possível perceber que a proposta foi bem recebida pelos estudantes e que eles conseguiram compreender os conceitos matemáticos trabalhados. Acreditamos que a interdisciplinaridade entre matemática e arte, aliada ao uso de tecnologias digitais, pode ser uma estratégia eficaz para o ensino de conteúdos matemáticos, como as transformações isométricas. Esperamos que este trabalho incentive outros educadores a explorar essas conexões em suas práticas pedagógicas.

Bibliografia

[1] DICIO - Dicionário Online de Português. Disponível em: `https://www.dicio.com.br/composicao/`. Acesso em: 10 de julho de 2024.

[2] SILVA, R. C. *Introdução ao estudo das artes visuais*. UFBA, Escola de Teatro; Superintendência de Educação a Distância, 2021.

[3] MENDES, I. A. *Ensino de Conceitos Geométricos, Medidas e Simetria: Por uma Educação (Etno)Matemática com Arte*. Revista Cocar, vol. 2, num. 4, 2012.

[4] COHEN, D.; Anderson, S. *A Visual Language: Elements of Design*. London: Herbert Press, 2006.

[5] GATTO, J. A; PORTER, A. W.; SELLECK, J. *Exploring Visual Design*. Worcester: Davis Publications, 1987.

[6] BOULEAU, C. *The Painter's Secret Geometry: A Study of Composition in Art*. New York: Dover, 2014.

[7] DONDIS, D. A. *Sintaxe da Linguagem Visual*. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

[8] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2017.

[9] BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari Knopp. *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. 4. ed. Porto Alegre: Artmed, 2003.

[10] COX, K. K. *Informática na Educação Escolar*. São Paulo: Cortez, 2003.

[11] ELAM, Kimberly. *Geometria do Design*. São Paulo: Cosac Naify, 2007.

[12] FUCHS, I.M. *Relações entre o design gráfico brasileiro e arte concreta a partir da obra de Luiz Sacilotto*. Blucher Design Proceedings, Outubro 2016, num. 2, vol. 9.

[13] ITTEN, Johannes. *The Elements of Color*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1970.

[14] LIMA, E.L. *Isometrias*. Editora SBM, 2007.

[15] LUNETTA, A.; GUERRA, R. *Metodologias e classificação das pesquisas científicas*, Revista Científica Multidisciplinar, vol. 5, num. 8, 2024.

[16] MIZANZUK, I. A. *A narrativa histórica de Alexandre Wollner sobre o design brasileiro em sua relação com arte, indústria e tecnologia*. Tese de Doutorado, UTFPR, 2015.

[17] ROLDÁN, E.M.B. *La geometría como lenguaje de las Formas: Hermann von Baravalle en la hfg de Ulm*. Tese de Doutorado, Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid, 2016.

[18] STROUD, J. B. *Crockett Johnson's Mathematical Paintings*. Journal of Mathematics and the Arts, 2:2, 77-99, 2008.

[19] Mural interativo. Disponível em: `https://padlet.com/maiarabrendas/composi-es-geom-tricas-no-geogebra-4ep91qmzkq529ivs`. Acesso em: 10 de dezembro de 2025.

Maiara Santos é soteropolitana e reside na cidade de Seabra-BA. É especialista em Educação Matemática e atua principalmente em turmas de ensino médio. Além de ser apaixonada por Dança e Literatura, é encantada pela versatilidade da Geometria e com o seu potencial artístico. Por isso, sempre se utiliza de alguma conexão entre Matemática e Arte em suas aulas.

Vinícius Mello nasceu em Salvador e obteve seu doutorado em Computação Gráfica no IMPA. Ensina matemática na UFBA e fica alegre sempre que pode usar o GeoGebra em suas aulas. Gosta de matemática, música e programação em exata proporção, podendo ser encontrado a (quase) qualquer momento fazendo ao menos uma dessas coisas.

TÉCNICA

Equações de 3º grau

Armando Barbosa

Introdução

A busca por soluções explícitas de equações polinomiais envolvendo radicais é um dos episódios mais fascinantes do desenvolvimento da matemática. Ele se inicia ainda na antiguidade com fórmulas conhecidas dos babilônicos e atinge o seu ápice no século XIX com os trabalhos Abel e Galois.

O objetivo deste artigo é apresentar aplicações das fórmulas de Tartaglia–Cardano, que surgiram no Renascimento Italiano, para solucionar equações de 3º grau em problemas de vestibulares e olimpíadas de matemática. No final, também discutiremos brevemente fórmulas por radicais para equações de graus maiores.

Uma equação do 3º grau de coeficientes reais na variável x é uma expressão algébrica da forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. O Teorema Fundamental da Álgebra garante que essa equação possui três soluções complexas, contando-se multiplicidades. Estamos interessados em saber quais são os três valores complexos de x que satisfazem a equação acima. Para isso, podemos dividir a estratégia para obter uma fórmula para esses valores em três partes:

1. Eliminar o coeficiente de x^2 através de uma mudança de variável que crie uma nova equação do 3º grau cuja soma das raízes é nula;

2. Realizar uma nova mudança de variável, reduzindo o problema de determinar uma raiz da equação do 3º grau do passo anterior à resolução de uma equação do 2º grau com raízes u^3 e v^3;

3. Perceber que as outras duas soluções, além de $u + v$, conjugadas ou não, são $uw + vw^2$ e $uw^2 + vw$, sendo $w = \operatorname{cis} 120°$.

Expliquemos agora cada um desses passos com mais detalhes.

Eliminando o termo quadrático

Dividindo a equação original por a, temos que

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Pelas relações de Girard, as três soluções x_1, x_2 e x_3 somadas resultam em $-\frac{b}{a}$. Daí, considerando a substituição de variáveis

$$t = x + \frac{b}{3a} \Leftrightarrow x = t - \frac{b}{3a},$$

teremos que

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 &= (x_1 + \frac{b}{3a}) + (x_2 + \frac{b}{3a}) + (x_3 + \frac{b}{3a}) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3) + 3 \cdot \frac{b}{3a} \\ &= -\frac{b}{a} + \frac{b}{a} = 0, \end{aligned}$$

e a soma das raízes na variável t será igual a 0. Substituindo, então, na equação do 3º grau, podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
\left(t-\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{b}{a}\cdot\left(t-\frac{b}{3a}\right)^2+\frac{c}{a}\cdot\left(t-\frac{b}{3a}\right)+\frac{d}{a}=0 \\
\therefore t^3-3t^2\cdot\frac{b}{3a}+3t\cdot\frac{b^2}{9a^2}-\frac{b^3}{27a^3}+ \\
t^2\cdot\frac{b}{a}-2t\cdot\frac{b^2}{3a^2}+\frac{b^3}{9a^3}+ \\
t\cdot\frac{c}{a}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}=0 \\
\therefore t^3+t\left(\frac{b^2}{3a^2}-2\frac{b^2}{3a^2}+\frac{c}{a}\right)+\left(-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{b^3}{9a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}\right)=0,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\boxed{t^3+t\left(\frac{-b^2+3ac}{3a^2}\right)+\left(\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}\right)=0,}$$

e o termo quadrático foi eliminado.

Redução para uma equação quadrática

Sejam

$$p=\frac{-b^2+3ac}{3a^2} \text{ e } q=\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}.$$

Daí, temos que

$$t^3+pt+q=0.$$

Considerando a nova substituição de variáveis

$$t=u+v,$$

podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
(u+v)^3+p\cdot(u+v)+q=0 \\
\therefore u^3+v^3+3uv(u+v)+p\cdot(u+v)+q=0 \\
\therefore \left(u^3+v^3+q\right)+(u+v)\cdot\left(3uv+p\right)=0.
\end{aligned}
$$

Podemos, então, definir u e v de modo a zerar as duas parcelas acima. Para isso, basta escolher u e v tais que

$$\left\{\begin{aligned} u^3+v^3+q &= 0 \\ 3uv+p &= 0, \end{aligned}\right. , \tag{I}$$

de modo que obtemos o sistema

$$\left\{\begin{aligned} u^3+v^3 &= -q \\ u^3v^3 &= -\frac{p^3}{27} \end{aligned}\right. , \tag{II}$$

em u^3 e v^3. Note que toda soluçao de (I) é uma solução de (II), mas a recíproca não é necessariamente verdadeira, se considerarmos u e v complexos. Ou seja, devemos verificar posteriormente quais soluções de (II) satisfazem (I).

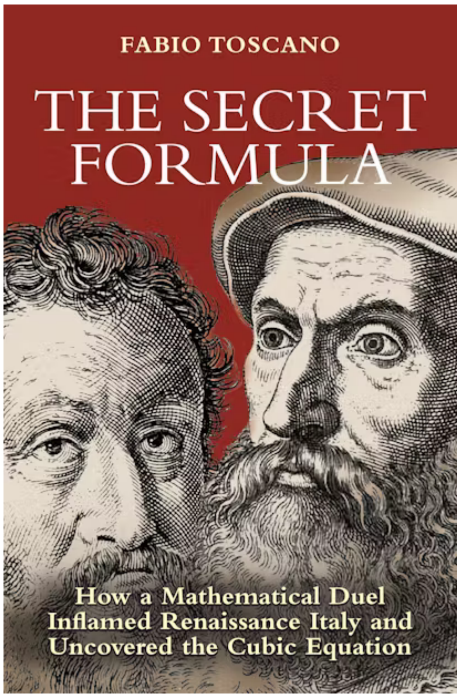


Figura 1: "Niccolò Tartaglia (à direita) era um professor ambicioso que possuía uma fórmula secreta — a chave para desvendar um problema matemático aparentemente insolúvel. Gerolamo Cardano (à esquerda) era um médico, erudito brilhante e notório jogador que não hesitaria em usar bajulação e até mesmo artimanhas para descobrir o segredo de Tartaglia." [1]

De todo modo, pelas relações de soma e produto, podemos concluir que u^3 e v^3 são raízes da equação do 2º grau em z dada por

$$z^2-(u^3+v^3)z+u^3v^3=0,$$

ou seja,

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0.$$

Portanto, temos que

$$z=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}}{2},$$

e definindo $\Delta=\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}$, temos que

$$z=\frac{-q\pm\sqrt{4\Delta}}{2}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\Delta}.$$

Logo,

$$\left\{\begin{aligned} u^3 &= -\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta} \\ v^3 &= -\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta} \end{aligned}\right. .$$

Lembrando que $x = t - \dfrac{b}{3a}$ e

$$t = u + v = \sqrt[3]{u^3} + \sqrt[3]{v^3},$$

obtemos finalmente que

$$\boxed{x = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}},$$

que é a fórmula de Tartaglia–Cardano para uma das raízes da equação do 3º grau. Mais adiante entenderemos o que acontece nos casos em que $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$.

Fórmulas para as demais raízes

Se $\omega = \operatorname{cis}(120°) = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, podemos escrever

$$\begin{cases} (u\omega)^3 + \left(v\omega^2\right)^3 & = u^3 + v^3 \\ (u\omega)^3 \cdot \left(v\omega^2\right)^3 & = u^3 v^3 \end{cases},$$

já que $\omega^3 = 1$. Assim o par $u\omega$ e $v\omega^2$ satisfaz os mesmo sistemas que u e v (por outro lado, o par $u\omega$ e $v\omega$ satisfaz o sistema (II), mas não o (I), assim um elemento do par deve ter o ω e o outro ω^2 para satisfazer (I)). Logo $u\omega + v\omega^2$ também é raiz da mesma equação de 3º grau em t encontrada no passo anterior. O mesmo vale para $u\omega^2 + v\omega$, que é o conjugado de $u\omega + v\omega^2$ quando u e v são reais, pois $\omega^2 = \overline{\omega}$. Portanto, as três raízes de $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ são da forma

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \\ x_2 &= -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} \cdot w + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \cdot w^2 \\ x_3 &= -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} \cdot w^2 + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \cdot w \end{aligned}$$

onde,

$$q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2 d}{27a^3}$$

e

$$p = \frac{-b^2 + 3ac}{3a^2}.$$

Assim como ocorre nas equações de 2º grau, o valor

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

é muito importante, uma vez que seu sinal ajuda a entender quando temos raízes reais. Vamos ver como isso acontece através de alguns problemas.

Problemas

Seja $x_i = -\dfrac{b}{3a} + t_i$. Como $-\dfrac{b}{3a}$ é um número real, x_i é real se, e somente se, t_i é real. Portanto, para encontrar as raízes reais, podemos nos ater a estudar apenas equações do tipo $t^3 + pt + q = 0$.

Problema 1. *Calcule o valor de*

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

Solução: Considere os números reais u e v tais que

$$u^3 = 20 + 14\sqrt{2} \qquad v^3 = 20 - 14\sqrt{2}$$

Note que $u^3 + v^3 = 40$ e $u^3 v^3 = 400 - 392 = 8 = 2^3$. Como

$$(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv\,(u + v)\,,$$

se $t = u + v$, que é o valor procurado, obtemos

$$t^3 - 6t - 40 = 0.$$

Pelo teste da raiz racional, testando os divisores de -40, temos que $t = 4$ é raiz. Dividindo por $(t - 4)$, podemos concluir que

$$t^3 - 6t - 40 = (t - 4) \cdot \left(t^2 + 4t + 10\right)$$

$$t_1 = 4 \qquad t_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{-24}}{2} = -2 \pm i\sqrt{6}$$

Logo, nossa resposta é $t = 4$, pois $-2 \pm i\sqrt{6} \notin \mathbb{R}$. ■

Na notação anterior, considerando a equação $t^3 - 6t - 40 = 0$, temos que

$$p = -6, \quad q = -40$$

e

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \\ &= \frac{(-40)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27} \\ &= 392 > 0 \end{aligned}$$

Daí, as raízes t_2 e t_3 e, consequentemente, x_2 e x_3 não são reais, pois teremos valores reais distintos

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} \text{ e } \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

multiplicados por $w = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e por $w^2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ na fórmula encontrada no final da seção anterior, produzindo necessariamente um número com parte imaginária não nula.

Vejamos agora um exemplo com $\Delta < 0$ ao trocarmos o -40 por $+4$ na última equação:

Problema 2. *Determine todas as soluções de* $t^3 - 6t + 4 = 0$.

Solução: Pelo teste da raiz racional, testando os divisores de $+4$, temos que $t_1 = 2$ é raiz.

Dividindo por $(t-2)$, podemos concluir que

$$t^3 - 6t + 4 = (t-2)\cdot\left(t^2 + 2t - 2\right)$$

$$t_1 = \boxed{2} \qquad t_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \boxed{-1 \pm \sqrt{3}}$$

■

Repetindo a analise anterior para $t^3 - 6t + 4 = 0$, temos que

$$p = -6, \quad q = 4$$

e

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \\ &= -4.\end{aligned}$$

Calculemos t_1 pela fórmula, lembrando que $-2 \pm 2i = \sqrt{8}\cdot \operatorname{cis}(\pm 135°)$:

$$\begin{aligned} t_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \\ &= \sqrt[3]{-2+2i} + \sqrt[3]{-2-2i} \\ &= \sqrt{2}\cdot\left(\operatorname{cis}\left(45°\right) + \operatorname{cis}\left(-45°\right)\right) \\ &= 2\sqrt{2}\cdot\cos\left(45°\right) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Calculando agora t_2:

$$\begin{aligned} t_2 &= \sqrt[3]{-2+2i}\cdot w + \sqrt[3]{-2-2i}\, w^2 \\ &= \sqrt[3]{-2+2i}\cdot\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt[3]{-2-2i}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

Analisando a expressão acima, é difícil acreditar que t_2 é um número real. Porém, podemos simplificá-la:

$$\begin{aligned} t_2 &= \sqrt{2}\cdot \operatorname{cis}\left(45°\right)\cdot w + \sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\left(-45°\right)\cdot w^2 \\ &= \sqrt{2}\cdot \operatorname{cis}\left(45°\right)\cdot w + \sqrt{2}\cdot\overline{\operatorname{cis}\left(45°\right)}\cdot \overline{w} \\ &= \sqrt{2}\cdot\left(2\mathrm{Re}\left(\operatorname{cis}45°\cdot w\right)\right) \\ &= 2\sqrt{2}\cdot\cos\left(165°\right) \\ &= -\sqrt{3} - 1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De modo análogo, podemos obter $t_3 = \sqrt{3} - 1 \in \mathbb{R}$.

Isso é o que ocorre com qualquer equação cúbica com Δ negativo, pois

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta} \text{ e } -\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta},$$

são números complexos conjugados, cujas raízes cúbicas também são conjugadas. Assim, ao multiplicá-las por w e $w^2 = \overline{w}$, respectivamente, as partes imaginárias se cancelam e obtemos três soluções reais. O caso $\Delta = 0$ gera $t_2 = t_3$, sendo um número real, pois cancelam-se as partes imaginárias.

Em resumo, obtemos o seguinte resultado geral:

$\Delta > 0$	1 raiz real e 2 raízes complexas conjugadas
$\Delta < 0$	3 raízes reais e distintas
$\Delta = 0$	3 raízes reais, sendo pelo menos 2 iguais

Problema 3. (IME/2025) *A equação $x^3 - \alpha x + \beta = 0$, onde α e β são constantes reais, admite raiz não real de módulo γ. Determine α em função de β e γ.*

Solução: Se admite raiz não real g, conforme vimos anteriormente considerando $x = u + v$, temos que

$$(I)\begin{cases} u^3 + v^3 = -\beta \\ 3uv = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} g = u\omega + v\omega^2 \\ \omega = \operatorname{cis}(120°) \qquad \gamma = |g| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \gamma^2 = \left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(u+v)\right]^2 + \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(u-v)\right]^2$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{4}\cdot\left[(u+v)^2 + 3(u-v)^2\right] \Rightarrow \boxed{\gamma^2 = u^2 + v^2 - uv} \quad (II)$$

$$\gamma^2 = u^2 + v^2 - uv = (u+v)^2 - 3uv$$

$$\overset{(I)}{\Longrightarrow} u^3 + v^3 = -\beta \overset{(II)}{\Longrightarrow} (u+v) = \frac{-\beta}{\gamma^2}$$

$$\overset{(I)}{\Longrightarrow} \gamma^2 = (u+v)^2 - 3uv = \left(\frac{-\beta}{\gamma^2}\right)^2 - \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\beta^2}{\gamma^4} - \gamma^2}$$

■

Problema 4. *Encontre o valor de* $\operatorname{sen} 18°$.

Solução: A partir da identidade $\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$ podemos concluir que

$$\begin{aligned} 4\operatorname{sen}^3 18° - 3\operatorname{sen} 18° &= -\operatorname{sen} 54° \\ &= -\cos 36° \\ &= -1 + 2\operatorname{sen}^2 18° \end{aligned}$$

Se $x = \operatorname{sen} 18°$, temos $4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$. Como $x = 1$ é raiz, segue que $4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = (x-1)\cdot\left(4x^2 + 2x - 1\right) = 0$. Daí, como $\operatorname{sen} 18° \neq 1$, temos $\operatorname{sen} 18° = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Dado que $\operatorname{sen} 18° > 0$, obtemos $\operatorname{sen} 18° = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Considerações sobre equações de graus maiores

Para equações do 4º grau, também existe um método para a obtenção de fórmulas para as raízes por meio de radicais conhecido como método de Ferrari. Para equações de grau $\geqslant 5$, tem-se o teorema de Abel-Ruffini que afirma que não há uma solução geral através de operações com radicais, incluindo soma, subtração, multiplicação e divisão envolvendo os coeficientes da equação polinomial.

Notemos que isso não significa que é impossível resolver qualquer uma dessas equações de grau $\geqslant 5$. Por exemplo, a equação do 6º grau

$$x^6 - 9x^3 + 8 = 0$$

pode ser completamente resolvida e reduzida para um caso já estudado realizando a troca de x^3 por y. A nova equação possui raízes $y = 1$ e $y = 8$. Daí,

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x^3 = 1 \Rightarrow x = 1, \omega, \omega^2 \\ y = x^3 = 8 \Rightarrow x = 2, 2\omega, 2\omega^2 \end{cases}$$

Além disso, por vezes, podemos adaptar as ideias apresentadas para situações parecidas. Por exemplo, para a equação do 5º grau

$$x^5 + px^3 + \frac{p^2}{5}x + q = 0,$$

sendo p um valor dado, podemos fazer a mudança $x = u + v$ para obter que

$$(u+v)^5 + p \cdot (u+v)^3 + \frac{p^2}{5} \cdot (u+v) + q = 0$$
$$\therefore \left(u^5 + v^5\right) + 5uv\,(u+v)^3 - 5u^2v^2\,(u+v) + p\,(u+v)^3$$
$$+ \frac{p^2}{5}\,(u+v) + q = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} u^5 + v^5 = -q \\ 5uv = -p \Rightarrow u^5 v^5 = -\dfrac{p^5}{5^5} \end{cases}$$
$$\Rightarrow u^5, v^5 \text{ são raízes de } z^2 + qz - \frac{p^5}{5^5} = 0$$

Problema 5. (Bulgária/2023 - Outono) *Encontre todas as soluções da equação*

$$(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x\sqrt{x^2 + 1} = 0.$$

Solução: Passando o segundo termo para o outro lado e elevando ao quadrado, temos que

$$(x+1)^2\left[(x+1)^2 + 1\right] = x^2\left(x^2 + 1\right)$$

A expressão $t\,(t+1)$ é crescente para $t \geqslant 0$.

Logo, temos que

$$(x+1)^2 = x^2 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

que é a única solução. ■

Para finalizar, deixaremos duas questões de equações de 3º grau de treino para o leitor.

Problema 6. *Determine todas as raízes das equações do 3º grau a seguir:*

1. $t^3 - 6t - 9 = 0$;
2. $t^3 - 6t - 4 = 0$.

Problema 7. (Hong Kong/2014 - adaptada) *Determine o valor simplificado de* $\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^{2014}$.

Respostas

Problema 6. *1.* 3 *e* $-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

2. -2 *e* $1 \pm \sqrt{3}$.

Problema 7. 5^{1007}. *Uma ideia é fazer* $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$, $b = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ *e* $x = a + b$ *para chegar a*

$$x^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a+b) = 2\sqrt{5} + 3x.$$

Daí, basta perceber que $x = \sqrt{5}$ é raiz e as outras raízes são complexas, podendo só dividir por $\left(x - \sqrt{5}\right)$ para concluir isso.

Portanto, $x = \sqrt{5}$ e $x^{2014} = \boxed{5^{1007}}$.

Bibliografia

[1] Toscano, Fábio. *A Fórmula Secreta.* Editora Unicamp, São Paulo, 2012.

José Armando Barbosa Filho é iteano, ex-olímpico e trabalha olimpíadas de matemática desde 2012. Os principais destaques de sua carreira são os livros da coleção IME/ITA/Cone Sul/EGMO, da qual se orgulha de ser o autor, e ter sido vice-líder da equipe do Brasil na IMO/2018. Atualmente, está vivendo os primeiros dias de pai do José Heitor. Muito *nerd* a ponto de ser fã do personagem Leonard Hofstadter, da série *The Big Bang Theory*.

PROBLEMA

O Método de Heron e Outros Problemas

Yure Carneiro e Samuel Feitosa

Soluções da Edição Anterior

Problemas Universitários

Problema 1. *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ subconjuntos não vazios de $\{1,2,\ldots,n\}$. Prove que existem conjuntos de índices disjuntos e não vazios $I, J \subset \{1,2,\ldots,n+1\}$ tais que*

$$\bigcup_{k\in I} A_k = \bigcup_{k\in J} A_k.$$

Solução:

Considere a matriz $A = (a_{ij})_{i,j}^{n,n+1}$ (n linhas e $n+1$ colunas) definida da seguinte maneira:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in A_j \\ 0, & \text{se } i \notin A_j \end{cases}.$$

Ou seja, dispomos os conjuntos $A_1, \ldots, A_{n+1}$ como vetores colunas $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_{n+1}$ representando as indicadoras da $n-$upla ordenada $(1,2,\ldots,n)$ em cada um dos conjuntos. Por hipótese, como cada um deles é não vazio, significa que os vetores colunas dessa matriz são não nulos.
Agora, sendo o posto da matriz A no máximo n, então o números de colunas linearmente independentes é no máximo n, de onde segue que, $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_{n+1}$ são linearmente dependentes. De onde segue que, existem números reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$, não todos nulos, para os quais

$$\alpha_1\overline{A}_1 + \cdots + \alpha_{n+1}\overline{A}_{n+1} = 0.$$

Como todos esses vetores são não nulos e com entradas 0 ou 1 (não negativas), segue que existem entre esses escalares, alguns que são positivos ($\alpha_i > 0$) e alguns que são negativos ($\alpha_j < 0$). Considere então I e J os conjuntos destes escalares que são positivos e negativos, respectivamente (são não vazios e disjuntos). Daí,

$$v = \sum_{i\in I} \alpha_i \overline{A}_i = \sum_{j\in J} (-\alpha_j)\overline{A}_j.$$

Essa igualdade entre as duas representações do vetor v acima (que possui entradas não negativas), em termos dos conjuntos A_k significa que, se a entrada ℓ de v é diferente de 0, então $\ell \in A_i, A_j$ para algum $i \in I$ e $j \in J$. Agora, se a entrada ℓ de v é igual a 0, então $\ell \notin A_i, A_j$ para todos $i \in I$ e $j \in J$. Ou seja,

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J} A_j.$$

Problema 2. *Dizemos que um grupo $G = (G,*)$ tem raiz se existe um grupo $H = (H,\cdot)$ de tal sorte que G é isomorfo a $H \times H$. Mostre que o grupo $(\mathbb{R},+)$ possui raiz.*
Dica: Tente ver a possível raíz como um subespaço vetorial de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Como construir uma base para esse espaço vetorial?

Solução de Rafael A. da Ponte

Suponha que $(\mathbb{R},+)$ possui uma raiz X via um isomorfismo ϕ. Podemos considerá-la como um subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ identificando X com a imagem por ϕ de $X \times 0$. É simples de ver que X, com as operações usuais, é um subespaço de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. De fato, dado qualquer natural q e um elemento $x \in X$, existe (a,b) em $X \times X$ tal que $q \cdot (a,b) = (x,0)$ e, portanto, $b = 0$. Assim, $a \in X$ é tal que $a = x/q$ e daí segue da estrutura de grupo que X é fechado por produto por escalar racional.

Disso segue que X é raiz de $\mathbb{R}$, por analogia ao conceito definido no enunciado, também como estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$. Feito isso, note que se B é base de Hamel de X, $B\times\{0\}\cup\{0\}\times B$ é base de $X\times X$ e suas imagens serão uma base de Hamel de $\mathbb{R}$. Daí, o problema de achar uma raiz de $(\mathbb{R},+)$ resume-se a, dada uma base de Hamel H de $\mathbb{R}$, encontramos um subconjunto B contido em H em bijeção com $H\setminus B$.

Para isso, defina o conjunto dos pares (C,f), C contido em H e $f: C\to H\setminus C$ injetivas ordenado com $(C,f)\le(D,g)\Leftrightarrow C\subset D$ e g estende f. Esse conjunto satisfaz as condições do Lema de Zorn, logo tem um elemento maximal (B,h). Agora, em virtude da maximalidade, $(H\setminus B)\setminus h(B)$ tem, no máximo, um elemento, e em ambos os casos de cardinalidades de $(H\setminus B)\setminus h(B)$, B é um subconjunto como pedimos no parágrafo acima.

Problema 3. *Seja G um conjunto finito de matrizes $n\times n$ de coeficientes reais $\{M_i\}$, $1\le i\le r$, que forma um grupo sobre a multiplicação matricial. Suponha que $\sum_{i=1}^{r} tr(M_i)=0$, onde $tr(A)$ denota o traço da matriz A. Prove que $\sum_{i=1}^{r} M_i$ é a matriz nula.*

Solução:

Seja $S=\sum_{i=1}^{r} M_i$. Para qualquer j, a sequência $M_jM_1, M_jM_2,\ldots,M_jM_r$ é uma permutação dos elementos de G. Somando todos eles, obtemos $M_jS=S$. Somando essas expressões de $j=1$ até r resulta em $S^2=rS$. Portanto, o polinômio minimal de S divide x^2-rx e, consequentemente, todo autovalor de S é 0 ou r. Por outro lado, soma dos autovalores, contados com multiplicidade, é $\mathrm{tr}(S)=0$, então todos os autovalores são iguais a 0. Todo autovalor de $S-rI$ é $-r\neq 0$, logo $S-rI$ é invertível. Portanto, de $S(S-rI)=0$, obtemos $S=0$.

Problema 4. *Seja $f(x)=a_1\,\mathrm{sen}\,x+a_2\,\mathrm{sen}\,2x+\ldots+a_n\,\mathrm{sen}\,nx$, onde $a_1,a_2,\ldots,a_n$ são números reais e n é um inteiro positivo. Dado que $|f(x)|\le|\mathrm{sen}\,x|$ para todo o número real x, prove que*

$$|a_1+2a_2+\ldots+na_n|\le 1.$$

Solução de Yan Lima Machado:

Dado o $f(x)$ do enunciado, tem-se que

$$f'(x)=a_1\cdot\cos(x)+2\cdot a_2\cdot\cos(2x)+\ldots+n\cdot a_n\cdot\cos(nx).$$

Daí, nota-se que

$$\begin{aligned} f(0)&=a_1\cdot sen(0)+a_2\cdot sen(0)+\ldots+a_n\cdot sen(0)\\ &=0;\\ f'(0)&=a_1\cdot\cos(0)+2\cdot a_2\cdot\cos(0)+\ldots+n\cdot a_n\cdot\cos(0);\\ &=a_1+2\cdot a_2+\ldots+n\cdot a_n.\end{aligned}$$

Portanto, basta mostrarmos que $|f'(0)|\le 1$. Pelo enunciado, $|f(x)|\le|\mathrm{sen}(x)|$, então supondo que $x\neq 0$, tem-se que

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\left|\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right|.$$

Daí

$$|f'(0)|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\le\left|\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right|=1.$$

Problema 5. *Calcule a integral*

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{sen}^{25}x}{\cos^{25}x+\mathrm{sen}^{25}x}dx.$$

Solução de Yan Lima Machado:

Denote o valor da integral acima por I. Fazendo a mudança de variável $u=\frac{\pi}{2}-x$, tem-se que

$$\frac{\mathrm{sen}^{25}(x)}{\mathrm{sen}^{25}(x)+\cos^{25}(x)}=\frac{\cos^{25}(u)}{\cos^{25}(u)+\mathrm{sen}^{25}(u)}.$$

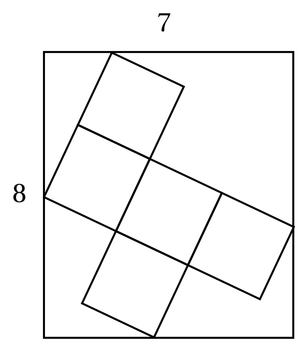
Além do mais, $du=-dx$ para $x=0$ temos $u=\pi/2$ e para $x=\pi/2$, temos $u=0$. Daí, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{sen}^{25}(x)}{\mathrm{sen}^{25}(x)+\cos^{25}(x)}\,dx&=\\ -\int_{\pi/2}^{0}\frac{\cos^{25}(u)}{\mathrm{sen}^{25}(u)+\cos^{25}(u)}\,du&=\\ \int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{25}(x)}{\mathrm{sen}^{25}(x)+\cos^{25}(x)}\,dx&.\end{aligned}$$

Portanto, $I+I=\int_0^{\pi/2}1dx=\pi/2$ e, consequentemente, $I=\frac{\pi}{4}$.

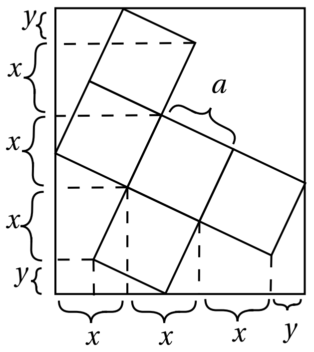
Problemas de Matemática Elementar

Problema 6. *A figura a seguir consiste de 5 quadrados iguais colocados no interior de um retângulo $8cm\times 7cm$. Qual a medida do lado desses quadrados?*



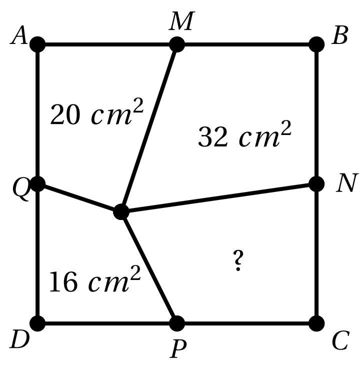
Solução:

Seja a o comprimento do lado do quadrado. Como as inclinações dos lados dos quadrados formam 90° entre si, só existem dois comprimentos possíveis de projeções dos lados dos quadrados sobre os lados dos retângulos: x ou y.



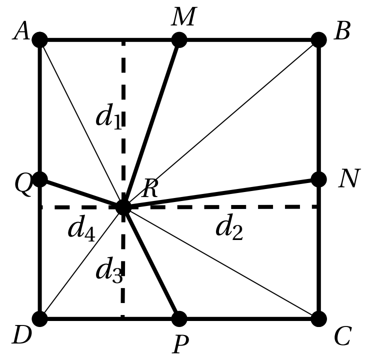
Comparando as medidas dos dois lados dos retângulos com essas projeções, temos $8 = 2x + y + x + y = 3x + 2y$ e $7 = 3x + y$. Resolvendo o sistema resultante, encontramos $x = 2$ e $y = 1$. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, $a = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5}\,cm$.

Problema 7. *Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado e M, N, P e Q são os pontos médios dos seus lados. As áreas de três regiões do seu interior são $20\,cm^2$, $32\,cm^2$ e $16\,cm^2$, também como indicado na figura. Qual a área da quarta região?*



Solução:

Seja R o ponto central da figura, $2x$ o comprimento de metade de um lado do quadrado e d_1, d_2, d_3 e d_4 as distâncias de R aos lados.



A área do quadrilátero $DPRQ$ é a soma das áreas de dois triângulos de bases de comprimento $2x$ e alturas d_3 e d_4. Ou seja,

$$A_{DPRQ} = \frac{2x \cdot d_3}{2} + \frac{2x \cdot d_4}{2} = x \cdot (d_3 + d_4).$$

De modo semelhante,

$$A_{AQRM} = x \cdot (d_1 + d_4), A_{BMRN} = x \cdot (d_1 + d_2)$$

$$\text{e } A_{CNRP} = x \cdot (d_2 + d_3).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A_{CNRP} + A_{AQRM} &= A_{BMRN} + A_{DPRQ} \\ A_{CNRP} + 20 &= 32 + 16. \end{aligned}$$

Assim, $A_{CNRP} = 32 + 16 - 20 = 28\,cm^2$.

Problema 8. *Dois inteiros positivos x e y são tais que*

$$\frac{2010}{2011} < \frac{x}{y} < \frac{2011}{2012}.$$

Encontre o menor valor possível para a soma $x + y$.

Solução de Yan Lima Machado:

A desigualdade acima pode ser reescrita como:

$$\begin{gathered} \frac{2010}{2011} < \frac{x}{y} < \frac{2011}{2012} \Leftrightarrow \\ 1 - \frac{1}{2011} < 1 - \frac{t}{y} < 1 - \frac{1}{2012} \Leftrightarrow \\ 2011 < \frac{y}{t} < 2012. \end{gathered}$$

com $t = y - x \in \mathbb{Z}$. Devemos ter $t \geq 2$, pois para $t = 1$ não existe um inteiro y tal que $2011 < y < 2012$. Da desigualdade $2011 \cdot t < y < 2012 \cdot t$, tem-se que $y \geq 2011 \cdot t + 1$. Daí:

$$\begin{aligned} x + y &= (y - t) + y \\ &= 2y - t \\ &= 2 \cdot (2011 \cdot t + 1) - t \\ &= 4021 \cdot t + 2. \end{aligned}$$

Como $t \geq 2$, tem-se que o menor valor possível para $x+y$ é

$$x+y = 4021 \cdot 2 + 2 = 8042 + 2 = 8044.$$

Um exemplo é $x = 4021$ e $y = 4023$.

Problema 9. *Sejam a, b e c reais satisfazendo $a+b+c=0$ e $a^2+b^2+c^2=4$. Qual o valor de $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$?*

Solução:
Veja que

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 = 0.$$

De onde,

$$ab+bc+ca = -2$$

(pois $a^2+b^2+c^2=4$).

Assim,

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2+2(ab^2c+bc^2a+ca^2b) =$$

$$(ab+bc+ca)^2 = (-2)^2 = 4$$

$$\therefore (ab)^2+(bc)^2+(ca)^2+2abc(a+b+c) = 4$$

$$\therefore (ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 = 4.$$

Problema 10. *Mostre que*

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} > \frac{9}{2}.$$

Solução:
Note que,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}\\ &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}\\ &= \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} &= \sum_{n=1}^{99}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\\ &= \sqrt{100}-\sqrt{1} = 10-1 = 9.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} =$$

$$\sum_{k=0}^{49}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k+2}} > \sum_{k=0}^{48}\frac{1}{\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k+3}}$$

e

$$\sum_{k=0}^{49}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k+2}}+\sum_{k=0}^{48}\frac{1}{\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k+3}} =$$

$$\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 9.$$

Portanto,

$$2\sum_{k=0}^{49}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k+2}} > 9$$

e

$$\sum_{k=0}^{49}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k+2}} > \frac{9}{2}.$$

Problema 11. *Em uma sequência de inteiros positivos, uma inversão é um par de posições em que o elemento da posição mais a esquerda é maior que o elemento da posição mais a direita. Por exemplo, a sequência* $2,5,3,1,3$ *tem* 5 *inversões: entre a primeira e a quarta posição, entre a segunda e todas as demais para a direita e, finalmente, entre a terceira e a quarta. Qual é o maior número possível de inversões em uma sequência de inteiros positivos cuja a soma de seus elementos é* 2019*?*

Solução:

Primeiramente vamos mostrar que qualquer sequência maximizante do número de inversões precisa ser não-crescente. De fato, se existe um par de números consecutivos a e b, com $a<b$, então a troca de posição desses elementos não altera a soma e aumenta o número de inversões em uma unidade. A seguir, mostraremos que qualquer sequência não-crescente que maximiza o número de inversões deve possuir apenas números iguais a 1 e 2. Suponha, por absurdo, que a sequência contém algum número $k>2$. Troque o último k por um par de elementos: $k-1$ na posição original e 1 na posição final. Claramente essa operação não altera a soma. O 1 final é parte de uma inversão com todo o elemento que era membro de uma inversão com o k original, exceto pelos números 1 a sua direita. O novo $k-1$ é parte de uma inversão com todo elemento que era menor que o k original, incluindo as parcelas 1 a sua direita. Assim, contabilizando a inversão criada entre o novo $k-1$ e o novo 1, essa troca criada aumenta o número de inversões em pelo menos uma unidade. Finalmente, considerando uma sequência qualquer que maximiza o número de inversões e que possui de soma de seus elementos igual a 2019, podemos supor que existem a parcelas iguais a 2 e $2019-2a$ parcelas iguais a 1. O número de inversões é

$$\begin{aligned} a(2019-2a) &= 2019a-2a^2 \\ &= \frac{2019^2}{8}-2\left(a-\frac{2019}{4}\right)^2. \end{aligned}$$

Para maximizar a expressão anterior, devemos minimizar $|a-2019/4|$ e isso ocorre para $a=505$. Portanto, o maior número de inversões é $505\cdot 1009$.

Problema 12. *A soma dos números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é igual a $\frac{1}{2}$. Prove que*

$$\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\cdots\frac{1-x_n}{1+x_n}\geq\frac{1}{3}.$$

Solução:

Provaremos esse resultado por indução. Vejamos.

Se $n=1$, temos $x_1=\frac{1}{2}$ e então $\frac{1-x_1}{1+x_1}=\frac{1/2}{3/2}=\frac{1}{3}$.

Agora, vamos supor que a afirmação é válida para n, e suponhamos que $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ são números positivos para os quais $x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}=\frac{1}{2}$.

Primeiro vejamos o seguinte: se $0<a\leq b$ e $c\geq 0$, então $bc\geq ac$ e $(a+c)b=ab+bc\geq ab+ac=(b+c)a$ e portanto, $\frac{a+c}{b+c}\geq\frac{a}{b}$. Aplicando esse fato aos números $a=1-(x_n+x_{n+1})$, $b=1+(x_n+x_{n+1})$ e $c=x_nx_{n+1}$, segue que

$$\frac{1-(x_n+x_{n+1})+x_nx_{n+1}}{1+(x_n+x_{n+1})+x_nx_{n+1}}\geq\frac{1-(x_n+x_{n+1})}{1+(x_n+x_{n+1})}.$$

Portanto,

$$\frac{1-x_n}{1+x_n}\cdot\frac{1-x_{n+1}}{1+x_{n+1}}\geq\frac{1-(x_n+x_{n+1})}{1+(x_n+x_{n+1})}. \qquad (1)$$

Agora, fazendo $y_n=x_n+x_{n+1}$, temos que $x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n$ são n números positivos cuja soma é igual a $\frac{1}{2}$, e por hipótese de indução vale que,

$$\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\cdots\frac{1-y_n}{1+y_n}\geq\frac{1}{3},$$

isto é,

$$\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\cdots\frac{1-(x_n+x_{n+1})}{1+(x_n+x_{n+1})}\geq\frac{1}{3}. \qquad (2)$$

Por (1) e (2), segue que,

$$\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\cdots\frac{1-x_n}{1+x_n}\cdot\frac{1-x_{n+1}}{1+x_{n+1}}\geq\frac{1}{3}$$

e por indução, a afirmação é vale para todo $n\geq 1$, de onde segue o desejado.

Novos Problemas

Problemas Universitários

Problema 13. *Mostre que para qualquer primo $p>17$, o número*

$$p^{32}-1$$

é divisivel por 16320.

Problema 14. *Sejam c e x_0 números reais positivos fixados. Defina a sequência*

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{c}{x_{n-1}}\right),\ \textit{para } n\geq 1.$$

Prove que a sequência converge e que o limite é $\sqrt{c}$.

Problema 15. *Calcule o determinante da matriz quadrada de ordem n, $A=(a_{ij})_{ij}$, definida por*

$$a_{ij}=\begin{cases}(-1)^{|i-j|}, & \textit{se } i\neq j\\ 2, & \textit{se } i=j\end{cases}.$$

Problema 16. *Considere uma esfera de raio unitário centrada na origem de um sistemas de coordenadas xyz. Seja C um pentágono regular inscrito na esfera e contido no plano xy. Determine a área da região contida na esfera cuja projeção com respeito à terceira coordenada coincide com a região delimitada por C.*

Problema 17. *Seja f diferenciável em $x=a$ com $f(a)\neq 0$. Calcule:*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+1/n)}{f(a)}\right]^n.$$

Problema 18. *Sejam $A, B\in M(n,\mathbb{C})$ e $P\in\mathbb{C}[X]$ um polinômio no-constante tal que $P(0)\neq 0$ e $AB=P(A)$. Prove que a matriz A é invertível e que as matrizes A e B comutam (isto é, que $AB=BA$).*

Problemas de Matemática Elementar

Problema 19. *O produto dos números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é igual a 1. Prove, **sem ser por indução**, que*

$$(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geq 2^n.$$

Problema 20. *Seja A um subconjunto dos números naturais tal que, entre 100 números naturais consecutivos, existe um elemento de A. Prove que podemos encontrar quatro números diferentes a, b, c e d em A tais que $a+b=c+d$.*

Problema 21. *Uma pilha tem 40 pedras. A pilha é dividida em duas partes, depois uma das partes é dividida em duas novamente, etc., até termos 40 pedras separadas (40 pilhas formadas com uma pedra cada). Depois de cada divisão de uma das pilhas em duas menores, escrevemos o produto dos números de pedras nestas duas pilhas em um quadro. Mostre que, no final, a soma de todos os números no quadro será igual a 780.*

Problema 22. *A sequência de números inteiros* x_n *é definida por* $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ *e, para* $n \geq 3$, x_n *é o menor número composto maior que* $2x_{n-1} - x_{n-2}$. *Encontre o valor de* x_{2026}.

Problema 23. *Em uma festa, existem* 25 *membros que satisfazem a seguinte condição: quando dois deles não se conhecem, então eles possuem algum amigo em comum. Sabemos que ninguém conhece todos na festa. Prove que a soma dos números de amigos de cada pessoa na festa é pelo menos* 72.

Problema 24. *Seja* $ABCD$ *um quadrilátero inscritível e* $P = BD \cap AC$. *Os pés das perpendiculares de* P *aos lados* AB *e* CD *são* X *e* Y. *Se* M *e* N *são os pontos médios dos lados* BC *e* AD, *prove que* $MN \perp XY$.

Problema 25. *Uma máquina tem dois botões: um deles dobra um número inteiro e o outro aumenta ele em* 1 *unidade. Por exemplo, apertando os botões dessa máquina é possível realizar as seguintes operações:*

$$1 \rightarrow_{+1} 2 \rightarrow_{\times 2} 4 \rightarrow_{+1} 5.$$

Se no início você começa com o número 0, *qual o número mínimo de vezes que você precisa apertar botões dessa máquina para obter:*

a) 100*?*

b) 2024*?*

SIMPÓSIO
Eventos DMAT Janeiro a Dezembro/25

Cristina Lizana, Elaís Cidely Malheiro, Henrique da Costa, Roberto Sant'Anna

Nesta seção SIMPÓSIO faremos uma breve resenha de eventos organizados por membros da comunidade do Departamento de Matemática (DMAT) do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade Federal da Bahia (UFBA) durante o período de janeiro a dezembro de 2025.

CENÁRIO CIENTÍFICO E PÓS-GRADUAÇÃO

Iniciamos nossa retrospectiva destacando os eventos que conectaram o DMAT à fronteira do conhecimento, reunindo pesquisadores de diversas partes do mundo e fortalecendo a pós-graduação e a produção científica.

Formação de Professores de Matemática no Verão da UFBA

Realizado no dia 31 de janeiro de 2025, no Auditório do IME-UFBA, o evento "Formação de Professores de Matemática no Verão da UFBA" teve como um dos principais objetivos contribuir para a melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica. Diante dos desafios apontados por índices nacionais, a atividade ofereceu um conjunto de palestras voltadas ao desenvolvimento de saberes práticos e estratégias pedagógicas inovadoras.

A organização foi uma parceria entre o Programa de Iniciação à Docência (PIBID-UFBA/Matemática) e o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT-UFBA), sob a coordenação das professoras Graça Dominguez e Elaís Cidely.

A programação científica destacou-se pela abordagem de temas contemporâneos. O professor Rogério Steffenon (UNISINOS) proferiu a palestra "Belos Problemas de Matemática", explorando o raciocínio lógico e o reconhecimento de padrões.

Figura 1: Prof. Rogério Steffenon (UNISINOS) durante sua apresentação sobre problemas matemáticos.

Em seguida, o professor Luciano Guimarães (FGV) discutiu "Problemas de Olimpíada na sala de aula", apresentando técnicas estratégicas para o ambiente escolar. Encerrando o ciclo, o professor Krerley Oliveira (UFAL) apresentou o "NES - Novo Ensino Suplementar", uma proposta inovadora para o Ensino Médio que integra Ciência de Dados e Inteligência Artificial.

As atividades demonstraram uma sólida articulação entre teoria e prática, vinculando-se tanto às disciplinas das Licenciaturas quanto às pesquisas do

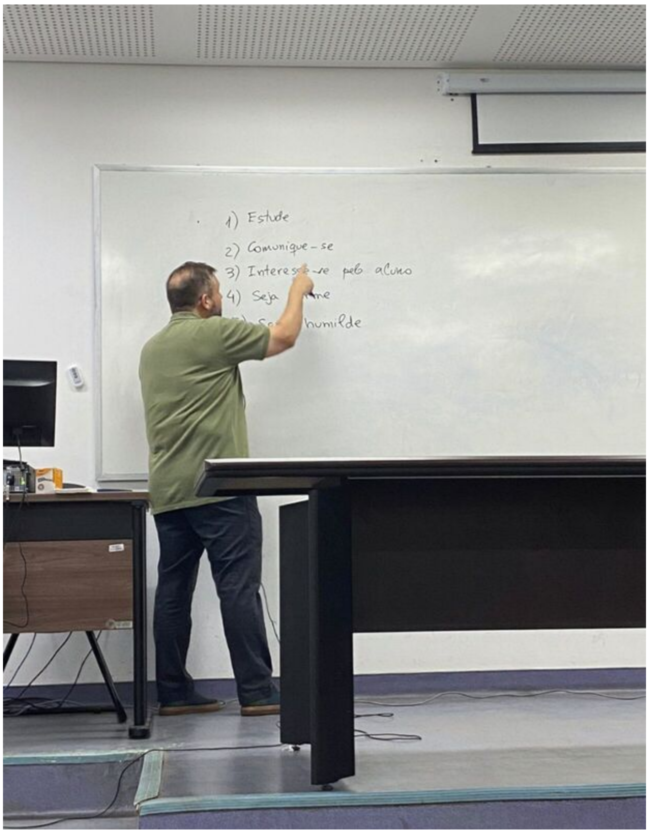


Figura 2: Prof. Luciano Guimarães (FGV) discutindo o uso de problemas olímpicos em sala de aula.

PROFMAT. Com um público de aproximadamente 70 participantes, o encontro foi marcado por trocas de experiências que incentivam o uso de abordagens criativas no contexto escolar.

Figura 3: Público presente no Auditório do IME durante o evento de formação.

XVIII ENAMA

O Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações (ENAMA) teve sua 18ª edição sediada no IME - UFBA entre os dias 2 e 5 de novembro de 2025. O tradicional evento anual, que ocorre desde 2005, reúne professores e pesquisadores de todas as regiões do Brasil e também do exterior, e tem o propósito de criar debates nas áreas de Análise Funcional, Análise Numérica, Equações Diferenciais Parciais, Ordinárias e Funcionais.

Na edição deste ano foram mais de 100 inscritos e 80 trabalhos apresentados, entre eles os convidados Alexandre Nolasco Carvalho (ICMC - USP), Enrique Zuazua (*Friedrich-Alexander-Universität*, Alemanha), Fernando Costa Jr (UFPB), Jaqueline Godoy Mesquita (Unicamp) e Sandra Moreira Neto (UEMA).

Figura 4: Mesa de abertura do XVIII ENAMA.

O encontro é reconhecido por unir novos e renomados pesquisadores e ter espaço convidativo para que todos participem, fato que influencia positivamente a carreira dos participantes, muitos dos quais sempre retornam ao evento. Entre as diversas palestras e minicursos apresentados ocorreram também atividades sociais, incluindo um jantar oficial e culinária típica.

Tanto a organização local, encabeçada por Arthur Cunha (UFBA) e composta por Henrique Costa (UFBA), Juan González (UFBA), Roseane Martins (UESC), Carlos Raposo (UFPA), Joilson Ribeiro (UFBA) e Leandro Araújo (UESB), quanto o comitê nacional, composto por Haroldo Clark (UFDPar), Joedson Santos (UFPB) e Sandra Malta (LNCC), foram elogiados pela realização do evento.

Os trabalhos apresentados no congresso farão parte de um volume especial da revista *Matemática Contemporânea* (`https://mc.sbm.org.br/`) da SBM, que tem publicação prevista para a semana anterior à próxima edição do evento, confirmada para 2026 na Universidade Federal de Juiz de Fora (MG). Para mais informações sobre o ENAMA, acesse https://www.enama.org.

Figura 5: Foto de grupo do XVIII ENAMA.

X Encontro da Pós-graduação em Matemática da UFBA

Mantendo a tradição de promover a excelência e a integração na comunidade matemática, o X Encontro da Pós-Graduação em Matemática da UFBA (X EPGMAT) foi realizado entre os dias 24 e 28 de novembro de 2025. Este evento, que celebrou sua décima edição, é direcionado a docentes, pesquisadores e estudantes de Mestrado (Acadêmico e Profissional) e Doutorado em Matemática da UFBA e de outras instituições, e incentiva também a participação de discentes da graduação.

O objetivo principal do EPGMAT é a divulgação das áreas de pesquisa dos programas de Pós-Graduação em Matemática vinculados ao Instituto de Matemática e Estatística (IME-UFBA) e servir como meio de interação entre a comunidade interna e o público externo. A participação do PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), integrada a partir da edição anterior, foi mantida nesta décima edição.

Figura 6: Professores que integraram a mesa de abertura do X EPGMAT da UFBA.

A abertura do Encontro contou com a participação de representantes institucionais da UFBA, incluindo o Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação , professor Ronaldo Oliveira, o Diretor do IME, professor Kleyber Mota, e os professores Evandro Santos (coordenador do PROFMAT), Cristina Lizana (coordenadora do Mestrado) e Benigno Alves (vice-coordenador do Doutorado). Tais representantes realizaram uma breve apresentação da pesquisa e dos programas de pós-graduação em Matemática da UFBA, destacando o papel da UFBA como um centro ativo de pesquisa do Brasil.

O X EPGMAT, que busca enriquecer o ambiente de ensino e pesquisa na pós-graduação, consolidou-se ainda mais como um fórum para a difusão científica, oferecendo palestras, minicursos, e sessões de comunicação oral e pôsteres.

Figura 7: Foto de grupo do X EPPGMAT - UFBA.

Além de um minicurso na área de Sistemas Dinâmicos, a programação de 2025 apresentou uma ampla gama de temas, com palestras, por exemplo, sobre "Teoria Abstrata dos Modelos: sobre esboços e instituições", e "Ferramentas de IA para Aprender e Criar". As discussões de pesquisa avançadas foram enriquecidas com contribuições de docentes e estudantes da UFBA, e pesquisadores convidados externos, como Keti Tenenblat da UNB, Zaqueu Ramos da UFS e Luciana Salgado da UFRJ.

Um aspecto relevante nesta edição, que reflete uma abordagem de tópicos centrais do ambiente acadêmico atual, foi a inclusão de uma Mesa Redonda intitulada "Saúde Mental na Pós-Graduação: Ações, Desafios e Caminhos Possíveis", que levantou discussões sobre o tema e apresentou iniciativas desenvolvidas na UFBA. A mesa contou com a presença das professoras Denise Vieira (Chefe de Gabinete da UFBA) e Martha Macedo (Coordenadora do PSIU-UFBA), que compartilharam ações e desafios na construção de uma universidade mais acolhedora e saudável.

Figura 8: Mesa redonda sobre saúde mental com as professoras Denise Vieira (Chefe de Gabinete) e Martha Macedo (PSIU-UFBA).

Os estudantes de Doutorado em Matemática da UFBA apresentaram 16 Comunicações Orais, com pesquisas que variaram de “Caracterização da Semi-Hiperbolicidade via Medida de Máxima Entropia” a “Estimativas de grandes desvios para o passeio aleatório no Toro”. O PROFMAT também contribuiu com duas comunicações orais, e discentes da Graduação e Pós-Graduação tiveram a oportunidade de apresentar suas pesquisas em sessões de Pôsteres.

Figura 9: Sessão do PROFMAT no X EPGMAT.

Em síntese, o X EPGMAT aprofundou a disseminação do conhecimento em Matemática, reforçando o papel de liderança do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFBA, ao mesmo tempo que abordou questões relevantes do ambiente acadêmico atual, como o bem-estar mental dos integrantes dos programas.

Para mais informações sobre o Encontro da Pós-graduação em Matemática da UFBA, acesse https://encontropgmat.ufba.br.

Seminário de Iniciação Científica

O Seminário de Iniciação Científica do DMAT, que já havia acontecido em 2021 e 2022, em formato online e sob organização do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFBA, foi retomado no primeiro semestre de 2025 por iniciativa dos alunos de graduação que participam de projetos de IC, com apoio da professora Cristina Lizana e do Programa de Pós-Graduação em Matemática. Mais informações sobre as edições anteriores estão disponíveis em `https://dgmp.mat.ufba.br/ICmat/seminarioICmat.html`.

A proposta do seminário é ser um espaço descontraído e colaborativo, desenvolvido pelos estudantes e voltado para eles mesmos, onde cada participante pode apresentar seus tópicos de estudo e compartilhar experiências com colegas. Além de valorizar o trabalho desenvolvido em cada projeto de iniciação científica, o seminário busca estimular a troca de ideias e promover o amadurecimento acadêmico e científico dos alunos.

Figura 10: Primeiro encontro do Seminário de Iniciação Científica em abril de 2025.

Em 2025, os encontros aconteceram quinzenalmente e somaram 12 apresentações. A organização ficou a cargo dos próprios estudantes, sempre com a supervisão da professora Cristina Lizana. No primeiro semestre, os doutorandos Leydiane Campos e Elivan Neri Lima organizaram os encontros junto com o discente da graduação Mateus de Santana. Já no segundo semestre, Samuel Figueiredo (graduação) assumiu a coordenação, com apoio de Tácio Fernandes (mestrado) e novamente Elivan Neri Lima (doutorado).

O seminário seguirá em 2026, trazendo uma nova programação e mantendo o compromisso de fortalecer a integração e o desenvolvimento científico dos estudantes. Fique atento às redes sociais do DMAT!

Figura 11: Último encontro do Seminário de Iniciação Científica em dezembro de 2025.

Integração e Vivência Acadêmica

Voltando o olhar para a nossa comunidade, o ano também foi marcado por projetos de extensão e vivência acadêmica que fortalecem a memória institucional e a formação integral dos nossos estudantes.

PECMat em 2025: Fortalecendo o Vínculo entre Gerações

O ano de 2025 marcou um período de intensa articulação para o projeto de extensão PECMat (Egressos dos cursos de Matemática da UFBA), consolidando seu papel fundamental na vida acadêmica do Instituto. O projeto avançou para além do mapeamento de ex-estudantes, transformando-se em um espaço vibrante de reconhecimento de trajetórias e troca de experiências.

Figura 12: Ex-alunos e Diretores do IME, no Bate-Papo com a Profª . Célia Gomes.

Os Bate-Papos com Egressos apresentaram um panorama inspirador, conectando gerações. Tivemos a participação de lideranças institucionais, como o atual Diretor do IME, Prof. Kleyber Mota, e a Profª . Célia Gomes (aposentada), ex-diretora do antigo Instituto de Matemática, que compartilharam suas visões sobre a gestão e a evolução da carreira acadêmica.

Além da gestão, o projeto destacou a pesquisa em Educação Matemática e a prática docente. Egressos como a Profª . Jamille Vilas Bôas (IFBA/Salvador) trouxeram debates sobre o ensino, enquanto o egresso Paulo Malta (IFBA/Porto Seguro) ministrou uma oficina prática sobre demonstrações do Teorema de Pitágoras, integrando formação técnica e compromisso extensionista.

Figura 13: Oficina PECMat do LEMA com estudantes do IFBA.

Um momento de grande emoção foi a valorização da memória institucional, com a homenagem à Profª . Elinalva Vergasta (Lina), figura central na história do Laboratório de Ensino (LEMA), atualmente aposentada. O egresso Fellipe Antônio conduziu o debate “Minha Vida Como Rato de Laboratório”, destacando o impacto pedagógico e afetivo do LEMA na formação de gerações.

Outro marco foi o encontro com o Prof. José Fernandes (aposentado), realizado durante o XVIII EMAT. O bate-papo revisitou sua trajetória e contribuições decisivas para a pós-graduação, promovendo um valioso cruzamento entre docentes aposentados, professores na ativa e estudantes.

A conexão com o presente também se deu nas recepções realizadas no início de cada semestre do ano, onde o público, especialmente os calouros, foi acolhidos com os bate-papos intitulados “A minha vida tem lógica!” e “A dinâmica caótica para se tornar um matemático”, ministrados, respectivamente, pelos professores Darllan Pinto (Chefe do DMAT) e Kleyber Mota.

Com uma equipe dedicada de docentes e estudantes atuando na execução das atividades, sob a coordenação da Profª . Elaís Cidely, as discussões abordadas também se voltaram para temas como inclusão de meninas na Matemática, vivências e trajetórias nas olimpíadas de Matemática, empreendedorismo, desafios emocionais da carreira, entre outros.

Figura 14: Equipe PECMat atual.

Para ampliar o acesso, os encontros foram gravados e disponibilizados no canal do DMAT no YouTube. Para mais informações, acesse o perfil no Instagram: @pecmatufba.

Seminário Café Cultural

O Seminário Café Cultural, coordenado pelos professores Cristina Lizana e Roberto Sant'Anna, manteve sua agenda ativa e diversificada em 2025, reafirmando seu compromisso com a formação complementar e o debate multidisciplinar.

Figura 15: Profª . Vanessa Barros (DMAT) no Seminário Café Cultural.

O ano iniciou com uma edição especial em janeiro, recebendo os professores visitantes Antonio Caminha (UFC) e Ana Paula Chaves (UFG) para uma sessão dupla sobre Geometria e Teoria dos Números. Outro momento de destaque foi a celebração do "May 12 - Celebrating Women in Mathematics", que contou com a exibição presencial do documentário sobre a vida da medalhista Fields, Maryam Mirzakhani.

A programação de 2025 caracterizou-se por um forte diálogo com outras áreas, promovendo mesas redondas e palestras que integraram a Matemática com a Biologia (em parceria com o IBIO-UFBA), a Física (Projeto Física Fora da Caixinha) e a Educação Inclusiva (Projeto Modelando Matemática/ICTI). O seminário também trouxe respostas lúdicas para questionamentos clássicos, com destaque para a palestra "Professora, para que serve a matemática?", ministrada pela Profª . Vanessa Barros. Nela, a docente explorou a geometria e o cálculo no cotidiano, analisando desde o formato de batatas *chips* até o design ideal de copos para conservar a temperatura de bebidas.

Figura 16: Prof. Alexandre Barbosa (IF) no Seminário Café Cultural.

As atividades ocorreram no Auditório do IME, muitas com transmissão simultânea, garantindo o acesso ampliado ao conteúdo. Para mais informações e acesso às gravações, visite http://www.cafeculturaldmat.ime.ufba.br.

I Seminário de Visualização e Matemática Computacional

Com a provocação "Como podemos enxergar a matemática?", ocorreu no dia 09 de julho de 2025 o I Seminário de Visualização e Matemática Computacional (SVMC). O evento marcou a primeira grande ação pública do recém-criado Núcleo de Estudos em Matemática Pura e Aplicada (NEMPA).

Figura 17: Prof. Vinícius Mello apresenta um panorama histórico da visualização matemática.

Sob a coordenação do Prof. Roberto Sant'Anna e com apoio da equipe técnica do núcleo, o seminário reuniu mais de 60 participantes no Auditório do IME. A programação contou com palestras ministradas pelos professores do DMAT Vinícius Mello, Carlos Siqueira, Perfilino Júnior e Roberto Sant'Anna, oferecendo um panorama abrangente da área.

As discussões transitaram desde uma perspectiva histórica da visualização matemática até a geometria fractal da natureza e o processamento de imagens digitais, culminando na demonstração prática de animações matemáticas usando a biblioteca Manim em Python. O sucesso de público demonstrou o potencial desta área na UFBA, estabelecendo as bases para futuros projetos de computação científica e divulgação visual.

Figura 18: Palestrantes e equipe de organização do I SVMC no Auditório do IME.

XIX Encontro de Matemática da UFBA (EMAT)

Encontros de pesquisa de Matemática são comuns e muito abrangentes, tendo como público alvo professores, pesquisadores e alunos de pós-graduação. Tão importantes quanto são os eventos voltados para aqueles que estão iniciando sua vida acadêmica na matemática em cursos de graduação, seja no bacharelado ou em licenciaturas. Para tanto, a 19ª edição do Encontro de Matemática (EMAT) aconteceu nos dias 10 a 14 de novembro de 2025.

Figura 19: Organizadores e participantes do XIX EMAT.

O evento tem como finalidade divulgar e discutir os cursos de matemática da UFBA e de outras instituições. Esta edição contou com uma vasta programação nos três turnos (manhã, tarde e noite), permitindo que os alunos matriculados em cursos noturnos também tivessem oportunidade de participar.

Com cerca de 100 participantes credenciados até o terceiro dia de evento, a programação ofereceu uma imersão de aproximadamente 9 horas diárias de atividades. No total, foram realizadas 17 palestras, 3 minicursos, além de 5 mesas-redondas, 2 oficinas e sessões de pôsteres para a exposição de trabalhos científicos, possibilitando a troca de experiências acadêmicas, o debate de temas atuais da matemática e reflexões sobre pesquisa e formação docente e também reforçando a relevância do EMAT para a formação acadêmica e científica dos participantes.

Figura 20: Foto de grupo após palestra da Profª . Vanessa Barros durante a programação do XIX EMAT.

A organização desta edição foi inteiramente formada por alunos do IME, mobilizando um total de 43 estudantes em diversas frentes de trabalho, sob a liderança de uma comissão central composta pelos discentes Amanda dos Santos, Clara Rios, Gabriel Siron, Jay Victor Cintra, João Victor Delgado, Larissa de Jesus Mota e Sergio Samuel Figueiredo. Para sua realização, o EMAT contou com o apoio crucial da PROEXT (Pró-Reitoria de Extensão), além do suporte do Diretório Acadêmico, do Departamento de Matemática e de doações de 29 professores da unidade.

Figura 21: Mesa redonda promovida pelo Seminário Café Cultural no XIX EMAT.

Durante o evento, ocorreram em paralelo edições especiais de outros projetos da casa: o **Café Cultural**, com uma mesa redonda formada por alunos de graduação e pós-graduação discutindo os primeiros passos na pesquisa matemática; e o **PECMat**, em que o Prof. José Fernandes teve oportunidade de compartilhar sua jornada pessoal e profissional no mundo da Academia e da Matemática.

Acompanhe as redes sociais do evento em @ematufba para ficar em dia com as edições futuras!

Seminários de Educação Matemática

Em junho de 2025, o grupo dos professores da área de Educação Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da UFBA (IME/UFBA), Graça Dominguez, Elias Santiago, Kátia Lima e Diogo Rios, deu início ao projeto de ensino e pesquisa intitulado *Seminários de Educação Matemática*. A iniciativa é direcionada para estudantes da graduação em Licenciatura em Matemática, profissionais da Educação Básica, estudantes de outros cursos de graduação ou pós-graduação interessados em estabelecer relações com o tema e compreender o que é "fazer ciência" nesse campo científico.

O projeto configura-se como um espaço colaborativo para estudos e reflexões sobre as diversas subáreas da Educação Matemática. Sob a mediação dos professores coordenadores, o grupo promove estudos dirigidos, minicursos e momentos de socialização de saberes. Mais que um espaço para difusão de trabalhos da área, o seminário funciona como um fomentador de novas pesquisas, ao suscitar o interesse dos participantes pelas temáticas abordadas, as quais podem fundamentar futuros trabalhos e propostas de pesquisa em suas trajetórias acadêmicas.

Figura 22: Coordenadores do Seminário de Educação Matemática.

Nesses primeiros meses de existência, o grupo estabeleceu uma rotina de reuniões semanais, abordando tópicos fundamentais. Entre os debates realizados, destacam-se os materiais curriculares, o fazer docente, a trajetória histórica do currículo de Matemática no Brasil e a institucionalização da Educação Matemática como um campo científico no país. O projeto também se mantém atento às transformações tecnológicas contemporâneas, tendo discutido as complexas relações entre a Inteligência Artificial e o ensino de Matemática.

Para 2026, a coordenação planeja expandir o alcance das discussões e debates. Entre as metas estabelecidas, está o convite a pesquisadores externos para ministrarem oficinas e/ou minicursos. O objetivo é oferecer perspectivas complementares e aprofundar os temas sugeridos pelos próprios participantes, consolidando o seminário como um polo dinâmico de formação e investigação científica na área de Educação Matemática no Departamento de Matemática da UFBA.

Para mais informações sobre os Seminários, acesse o instagram do DMAT: @dmatufba.

Diálogos com Escola e Sociedade

Para além dos muros da universidade, o departamento ampliou seu impacto social, levando a matemática de forma lúdica, inclusiva e desafiadora para centenas de jovens da educação básica, promovendo a diversidade e a história na descolonização do conhecimento.

28ª Semana Olímpica da OBM em Salvador

Entre os dias 26 de janeiro e 2 de fevereiro de 2025, Salvador tornou-se a capital nacional da matemática ao sediar a 28ª Semana Olímpica. O evento, promovido pela Associação da Olimpíada Brasileira de Matemática (AOBM), reuniu centenas de estudantes medalhistas da OBM e do Torneio Meninas na Matemática (TMš) de todo o Brasil para uma imersão de alto nível.

Embora seja um evento nacional, a realização desta edição contou com o suporte logístico e organizacional fundamental do Programa de Extensão Matemática Olímpica da UFBA. Sob a coordenação do Prof. Samuel Feitosa (DMAT-UFBA) e com o apoio local do professor Roberto Sant'Anna, a equipe de extensão — incluindo docentes e discentes como Carlos Rocha, Sara Sousa e Elaís Cidely — garantiu o sucesso das atividades.

Figura 23: Integrantes do Programa de Extensão Matemática Olímpica (Elaís Cidely, Carlos Rocha e Sara Sousa) na organização do evento.

A programação incluiu aulas avançadas, palestras de orientação acadêmica e a tradicional "Vingança Olímpica", uma competição divertida onde os alunos criam problemas para os professores resolverem. O encerramento foi marcado pela Cerimônia de Premiação, que contou com a presença de autoridades da matemática brasileira, como o Prof. Carlos Gustavo Moreira (Gugu), e do Diretor do IME-UFBA, Prof. Kleyber Mota.

Figura 24: Mesa da cerimônia de premiação com a presença dos professores Carlos Moreira (Gugu), Kleyber Mota, Edmilson Motta e Luíze D'Urso, bem como Carolina da Costa (Instituto Stone) e o vice-presidente da SBM Daniel Pellegrino.

O evento também promoveu um rico intercâmbio entre educadores. Momentos de fala conjunta, como o protagonizado pelo coordenador Samuel Feitosa ao lado de Carlos Gomes (UFRN), Rogério Steffenon (UNISINOS), reforçaram a importância da colaboração interinstitucional para o fortalecimento das olimpíadas no país.

Figura 25: Prof. Samuel Feitosa (UFBA) em atividade com Carlos Gomes (UFRN) e Rogério Steffenon (UNISINOS).

Inspirados pelo sucesso deste encontro e visando fomentar ainda mais a cultura olímpica no Estado, o DMAT-UFBA anuncia a criação da **1ª Semana Olímpica da UFBA**, prevista para fevereiro de 2026. O novo evento terá como foco a integração e o incentivo aos talentos da Bahia, consolidando o trabalho que vem sendo realizado pelos interessados na área em todo o

Estado.

Aulões Olímpicos: Superando Desafios em Matemática

Ao longo de 2025, o Instituto de Matemática e Estatística (IME-UFBA) abriu suas portas para receber centenas de estudantes da Educação Básica por meio da ação de extensão Aulão Olímpico: Superando Desafios em Matemática. Coordenada pelo Prof. Roberto Sant'Anna, a iniciativa consolidou-se como uma ponte vital entre a escola e a universidade, tendo como objetivo principal não apenas o treinamento técnico, mas a desmistificação do ambiente acadêmico e o fortalecimento da cultura olímpica em escolas públicas de Salvador e Região Metropolitana.

Figura 26: Estudante de graduação do Programa de Extensão ministrando aula para alunos da rede pública.

Diferente de treinamentos tradicionais focados apenas na repetição, os encontros se destacaram pelo caráter multidisciplinar e humanista. A programação integrou o rigor da Matemática com atividades culturais inovadoras, como a parceria com o Projeto de Extensão Cineclube de História da Matemática e a realização de oficinas de teatro. Estas últimas visaram o desenvolvimento da oratória e a desinibição, competências essenciais para a formação integral dos jovens talentos.

A diversidade de atividades incluiu também uma imersão científica durante a Semana Nacional de Ciência e Tecnologia (SNCT), onde os estudantes puderam visitar o Planetário da UFBA, conectando a matemática à astronomia e expandindo seus horizontes científicos.

Um ponto alto e distintivo do projeto foi a abordagem socioemocional. Reconhecendo que o desempenho acadêmico está atrelado ao bem-estar mental, diversas edições contaram com palestras de psicólogos, como a realizada em outubro com a psicóloga Taíris Araújo. O foco na gestão da ansiedade pré-prova preparou os alunos não apenas intelectualmente, mas emocionalmente para os desafios de competições como a OBMEP e o ENEM.

Figura 27: Visita ao Planetário da UFBA: integrando ciência e cultura na formação dos estudantes.

Figura 28: Aulão inaugural com intervenção sobre gestão emocional e ansiedade, conduzida pela psicóloga Taíris Araújo.

O ano encerrou com uma expansão ambiciosa das fronteiras do projeto: a organização da "Seleção Baiana" para a olimpíada internacional *Formula of Unity*, em parceria com a Universidade de São Petersburgo (Rússia). Esta iniciativa inédita permitiu que estudantes da rede pública baiana tivessem contato com problemas desafiadores de padrão internacional, colocando a Bahia no mapa da matemática global nesta área.

O projeto contou com a participação engajada de diversas instituições, como o Colégio da Polícia Militar (unidades Candeias e Dendezeiros), o Colégio Estadual Central e o Colégio Estadual Anna Junqueira

Ayres Tourinho - CEAJAT (São Francisco do Conde), reafirmando o IME-UFBA como um espaço de pertencimento e transformação social para a juventude baiana.

Para acompanhar a agenda dos próximos aulões, acesse @mat.olimpica.

Cerimônias de Premiação: Celebrando Talentos

O ano de 2025 foi marcado por grandes celebrações do mérito acadêmico, reafirmando o compromisso da UFBA e do DMAT com a valorização da ciência na Educação Básica. Mais do que a entrega de medalhas, estes eventos representaram o ápice de um trabalho contínuo de inclusão e descoberta de talentos, promovendo o encontro emocionante entre a universidade, as escolas públicas e as famílias dos estudantes.

No dia 22 de julho, o Salão Nobre da Reitoria sediou a Cerimônia Regional da 19ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) - Regional BA01. O evento solene, sob coordenação do Prof. Roberto Sant'Anna, contou com a presença do Vice-Reitor em exercício, Prof. Penildon Silva Filho, e diretores da universidade. A presença massiva da comunidade escolar celebrou um resultado expressivo da nossa região, que acumulou 77 medalhas nacionais e 229 medalhas regionais, refletindo a capilaridade e a força do ensino de matemática na Bahia.

Figura 29: Mesa diretora da solenidade na Reitoria da UFBA.

Para além dos números, a cerimônia buscou integrar diferentes formas de conhecimento. Um destaque especial desta edição foi a união entre Arte e Ciência. A solenidade foi abrilhantada por apresentações culturais do Maestro José Maurício Brandão (piano) e da soprano Gisele Nino, que trouxeram leveza e sofisticação ao ambiente, emocionando o público presente e mostrando que a matemática dialoga com todas as esferas da cultura humana.

Figura 30: Apresentação artística do Maestro José Maurício Brandão e da soprano Gisele Nino.

Encerrando o ciclo anual, em 04 de dezembro, ocorreu a premiação da 9ª Olimpíada de Matemática do Estado da Bahia (OMEBA). Organizada pelos professores Henrique Barbosa, Roberto Sant'Anna e Samuel Feitosa, a cerimônia reuniu estudantes de diversas regiões do Estado, da capital ao interior. Foram premiados 11 medalhistas de ouro, 20 de prata e 33 de bronze. Este evento consolidou a competição como uma referência de excelência estadual e um incentivo fundamental para que os jovens talentos baianos, muitas vezes descobertos em escolas distantes dos grandes centros, percebam a UFBA como sua futura casa.

Figura 31: Entrega de medalhas aos estudantes destaque na 9ª OMEBA.

Coletivo Ondjango Asili

O coletivo Ondjango Asili, braço do projeto de extensão Jogos Africanos e Ensino de Matemática, do DMAT, é coordenado pela Profª . Simone Moraes e integrado por estudantes de graduação da UFBA e professores da Educação Básica. Em 2025, reafirmou seu protagonismo na promoção de um ensino de Matemática inclusivo e antirracista. Reconhecido por suas ações significativas na descolonização do ensino de Matemática, o coletivo manteve sua filosofia de criar espaços de (re)união, troca e criação, utilizando jogos e elementos culturais africanos para fundamentar práticas pedagógicas no contexto da Lei 10.639/03.

Após a aprovação do projeto Ananse — Tecendo sabedoria na matemática com jogos e elementos culturais africanos, em dezembro de 2024 pelo edital Matemática nos finais do Ensino Fundamental do Itaú Social, também coordenado pela professora Simone, o coletivo iniciou o ano promovendo a Exposição dostrabalhos criados na ACCS — Cultura e Jogos Africanos no Ensino da Matemática. Na ocasião, os estudantes apresentaram os trabalhos por eles desenvolvidos e os participantes tiveram a oportunidade conhecer e experimentá-los.

Em maio e junho, foram promovidas as Oficinas Ananse — Tecendo Sabedoria com Matemática, no contexto do projeto do Itaú Social, em diversas escolas de Salvador, Lauro de Freitas e Camaçari. Nas atividades, os estudantes tiveram a oportunidade de explorar conceitos matemáticos de forma lúdica e conectada à ancestralidade africana, por meio de jogos e curiosidades africanas.

Figura 32: Profª . Simone Moraes e equipe da Escola Municipal de Vida Nova (Lauro de Freitas) durante a realização das Oficinas Ananse.

Em julho, o coletivo recebeu a equipe do Itaú Social para uma série de atividades no IME-UFBA, em que foram realizadas oficinas de Geometria Sona e jogos como Mbomge e Unxantathu, contando com a participação de 110 estudantes e professores da rede pública. As atividades dessa visita foram documentadas em vídeo (`https://youtu.be/Ijp9eACGMg8`) e na coletânea de projetos (`https://encurtador.com.br/ebook_itau`), disponíveis online.

Figura 33: A docente com Alexandre Moreira (Itaú Social) durante a premiação no Rio de Janeiro.

O coletivo também marcou presença em importantes fóruns científicos e educativos, como o V COPENE Nordeste — ministrando a oficina "Nea onnim no sua a, ohu" (Aquele que não sabe, pode aprender), e o Encontro Regional da OBMEP em Salvador, no qual apresentou a Oficina Ananse e os instrutores tiveram a rica experiência de trabalhar com estudantes que se mostraram surpresos e curiosos sobre as informações acerca da cultura africana.

No mês de novembro, afim de promover atividades unindo conhecimento, matemática e diversão, o coletivo realizou novas visitas a escolas aplicando uma oficina de construção de jogos da família Mancala, assim como as oficinas criadas pelos estudantes na disciplina ACCS.

O ciclo anual encerrou-se em 28 de novembro com a 3ª *Black Math Friday*. Conectado à filosofia Sankofa — que ensina a importância de olhar para o passado para construir o futuro — o evento celebrou o Novembro Negro no Auditório Nadja Viana (PAF 1) e no saguão do IME/UFBA. A celebração incluiu a apresentação das realizações e trabalhos do coletivo durante o ano, painéis com atividades desenvolvidas por bolsistas e colaboradores, e um grande torneio de jogos africanos, promovendo a interação entre estudantes e professores em um ambiente de aprendizado e diversão.

As atividades do coletivo mostram que o ensino da Matemática pode ser uma ferramenta de trans-

Figura 34: Profª . Simone Moraes recebendo a homenagem das mãos de Tereza Farias, Coordenadora Geral do Ensino Fundamental do MEC.

formação social quando valoriza os saberes africanos como elementos centrais do processo educativo. Ao integrar o rigor matemático aos saberes ancestrais, as ações de 2025 fortaleceram uma proposta educativa fundamentada na equidade e na valorização da identidade, refletiram a resistência e a perseverança do coletivo, além de reafirmarem seu papel na construção de um ensino de Matemática que respeite e celebre a cultura e a história africana e afro-brasileira.

A importância do trabalho foi amplamente reconhecida durante o seminário de lançamento do "Compromisso Nacional Toda Matemática" em dezembro de 2025, realizado no Rio de Janeiro. Na ocasião, a professora Simone Moraes recebeu uma placa em homenagem pelo impacto do projeto de extensão Jogos Africanos e Ensino de Matemática, em frente ao coletivo Ondjango Asili.

Conheça as atividades do coletivo acessando o site `https://ondjangoasili.com/` e o perfil @ondjango.asili no Instagram.

Cristina Lizana é venezuelana, com graduação e mestrado em Matemática pela Universidad de Los Andes-ULA (Venezuela), e doutorado em Matemática pelo IMPA (Brasil). Foi professora da ULA(2004-2017) e trabalha na UFBA desde 2018. Pesquisa na área de Sistemas Dinâmicos, atuando principalmente em Dinâmica Parcialmente Hiperbólica e mapas robustamente transitivos. Atualmente, é a coordenadora do Programa de Pós-graduação em Matemática. O seu hobby é a fotografia e a estreita relação desta com a matemática.

Elaís Cidely é baiana, nascida na cidade de Macaúbas. Possui graduação e mestrado em matemática pela UFBA, doutorado em matemática pelo IMPA e, desde 2015, é professora do IME-UFBA. Sua área de pesquisa é Sistemas Dinâmicos, com ênfase em Teoria Ergódica. Atualmente, é coordenadora geral do projeto de extensão PECMat, e atua em diversos outros projetos do DMAT. Na adolescência, tocou bateria em uma banda do colégio. Durante o doutorado, tocou alfaia em um grupo carioca de maracatu. E desde 2021, passou a vivenciar o exercício físico como uma agradável e indispensável opção de lazer.

Henrique da Costa é mineiro, cursou graduação e pós-graduação no ICMC-USP em São Carlos, interior de São Paulo, e está na UFBA em Salvador desde 2016. Atua na área de pesquisa em análise, mais precisamente sistemas dinâmicos não-lineares e equações diferenciais parciais. Estuda piano e jogos de cartas e tabuleiro como hobby. Foi cabeludo durante a pandemia, no entanto não se atreveu a ser padeiro.

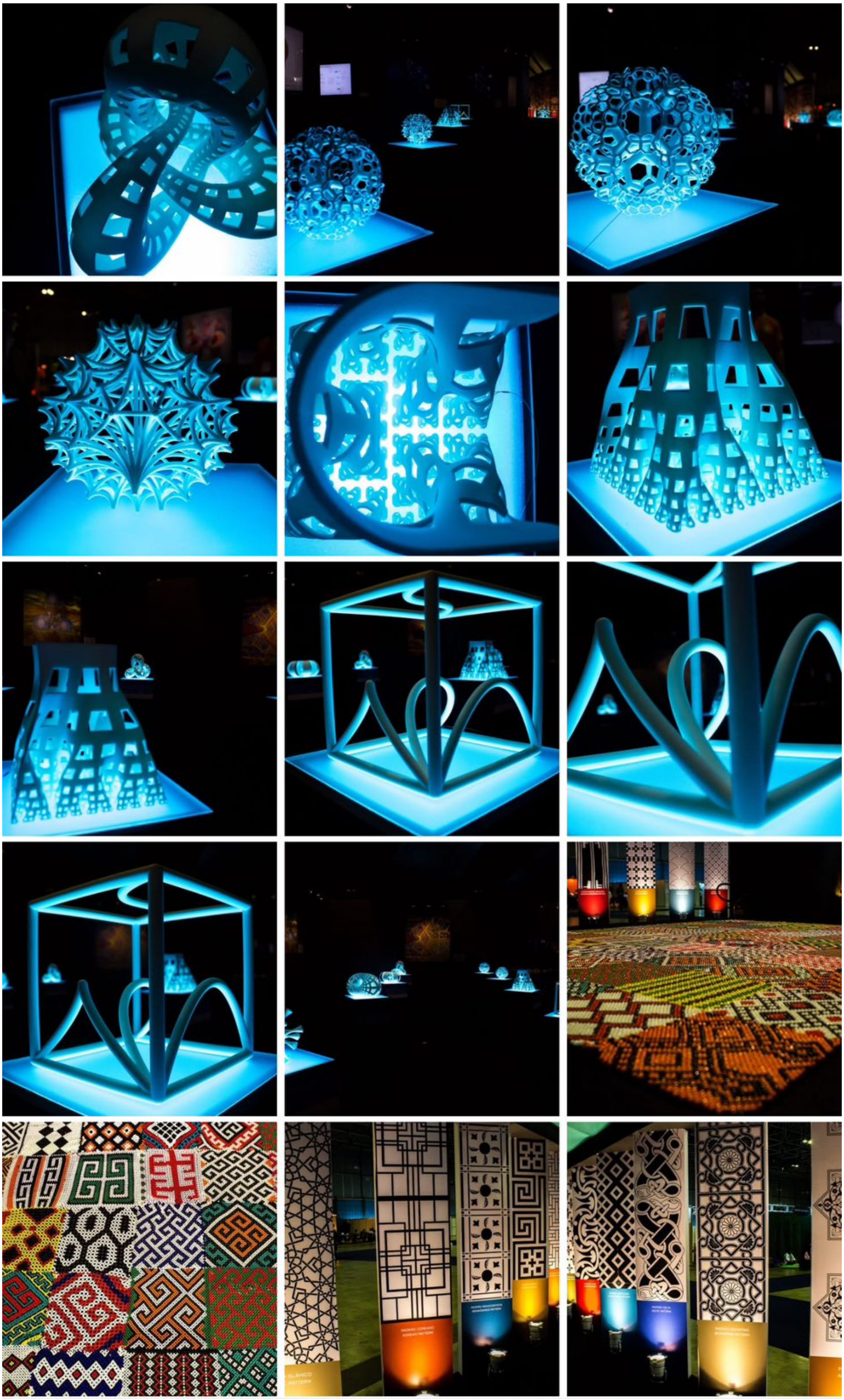
Roberto Sant'Anna é nascido e criado em Salvador, Bahia. É doutor em Matemática Pura pela UFBA e atualmente é professor adjunto no Instituto de Matemática Estatística da UFBA e também Coordenador Regional da OBMEP. Tem realizado pesquisas na temática de Otimização Ergódica, dentro da área de Sistemas Dinâmicos e também tem atuado em diversos projetos tendo em vistas a divulgação da Matemática. Nas horas vagas, é amante da música e busca através dela se expressar por meio do teclado ou piano, instrumentos que tanto admira.

FOTOGRAFIA

Natureza e Matemática

Cristina Lizana

O olhar matemático revela padrões onde o olhar comum vê apenas formas. Nas composições a seguir, a professora Cristina Lizana nos convida a perceber a geometria silenciosa que organiza o mundo: desde a espiral que rege o crescimento de uma planta até a simetria rigorosa das esculturas e mosaicos. A natureza e a arte, aqui, falam a mesma linguagem.



Cólofon

Esta edição contou com a colaboração dos seguintes alunos:

Álisson Conceição Santos é egresso do IFBA, campus Salvador. Atualmente, é estudante de graduação em Matemática na UFBA, onde também é bolsista do PIBID. Além disso, Álisson atua como voluntário nas exposições do LEMA e integra o projeto de extensão Ondjango Asili.

Cleber Brito Figueiredo é estudante do bacharelado em física na Universidade Federal da Bahia (UFBA). Atualmente faz iniciação científica como bolsista da FAPESB em um projeto focado na teoria de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP). Além disso, Cleber é apaixonado por jogos de tabuleiro e histórias de mistério.

Eldon Barros dos Reis Júnior é bacharel em Matemática pela Universidade Federal da Bahia (UFBA) e atua como bolsista no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) na área de Probabilidade com o projeto “Método da Entropia Relativa e q-Entropia”.

João Vitor Fonseca iniciou sua trajetória acadêmica no curso de engenharia elétrica, com uma longa passagem na medicina e, por fim, na matemática, onde hoje cursa bacharelado. Realizou pesquisas na área de epidemiologia e patologia digital, quando foi bolsista do programa PIBIC. Além da matemática, tem grande interesse em música, entusiasta da improvisação.

José Valdomiro da Silva Neto é estudante do bacharelado em estatística na UFBA. Assistente de esportes na Associação Acadêmica Atlética Alan Turing e monitor voluntário nas exposições do LEMA, José está apenas começando sua jornada na universidade.

Yure Carneiro de Oliveira graduou-se e fez mestrado em matemática na UFBA, onde também realiza seu doutorado em matemática na área de Probabilidade. Após quase concluir um mestrado em estatística, ingressar em uma outra graduação e começar a estudar violino, agora está focado na conclusão do doutorado.

Link para o *site* da
Revista de Matemática Hipátia

REVISTA HIPÁTIA