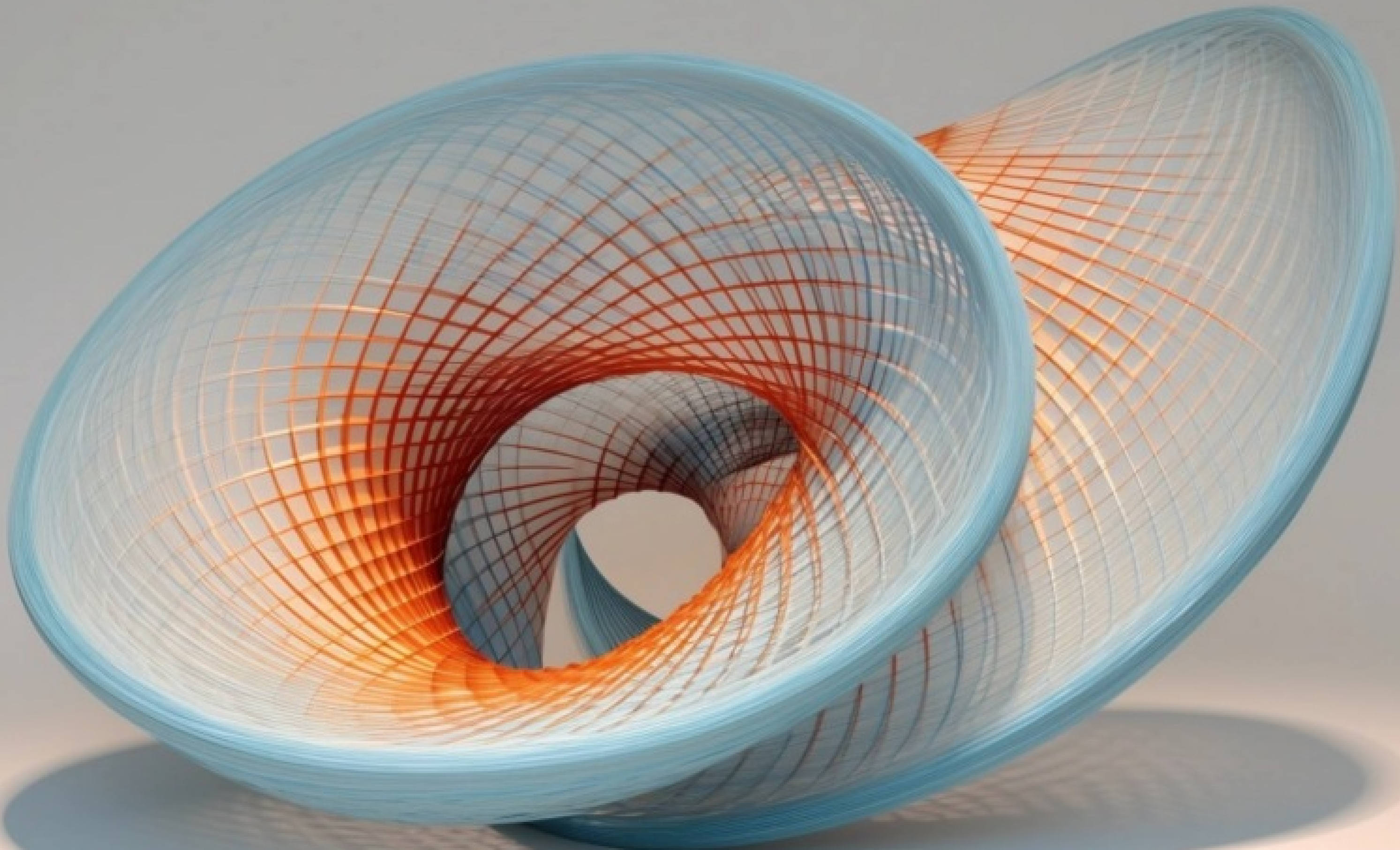
Revista de Divulgación Matemática

Enero
2024

Vol. I, Número 1
ISSN: XXXX-XXXX



Edita: Retos Matemáticos

Revista Lva2

ISSN: XXXX-XXXX

Volumen I, Número 1, enero 2024

Grupo de Telegram «Retos Matemáticos»

ENERO
2024
Vol. I, Núm. 1
ISSN: XXXX-XXXX

Índice

Edita
Grupo de Telegram
«Retos Matemáticos»

ISSN: XXXX-XXXX
web: https://n9.cl/revista_lva2
email: retmatematicos@gmail.com

Vol. I
Núm. 1
ENE.
2024

INVESTIGACIÓN

RECURSOS PEDAGÓGICOS

MISCELÁNEA

ENERO 2024
Vol. I, Núm. 1, pp. 003–004
ISSN: XXXX–XXXX

Editorial

Que estés leyendo estas líneas significa que las horas de preparación y gestiones necesarias han dado su fruto para que puedas disfrutar del primer número de este proyecto cooperativo.

«Elevados» (o «Lva2», como la hemos querido bautizar haciendo un juego de letras), nació en el seno del grupo de Telegram «Retos Matemáticos» de divulgación matemática. En este grupo se ha aglutinado un activo no sólo talentoso, en nuestra humilde opinión, una comunidad con un objetivo común, un apetito voraz por el conocimiento y unas ganas enormes por divulgar y democratizar la (para todos nosotros integrantes de él) maravillosa disciplina matemática. Fue allí donde comenzó a gestarse la primigenia revista que ahora llega a ti estimado lector. Algunos miembros del grupo sugirieron que podría ser una buena idea canalizar de alguna manera el interés creativo surgido en el mismo, y que dicha verborrea matemática podría materializarse con la aparición de una publicación donde tuvieran cabida trabajos académicos de profesores y alumnos de todos los niveles educativos o miembros de la comunidad matemática. Para ello necesitábamos que el «contenedor» de todo ese talento matemático fuera lo suficientemente atractivo y adaptable a los tiempos modernos, que pudiera ser leída y manejada tanto física como en la red a través de dispositivos móviles.

La que fuera sólo una propuesta inicial llega a buen puerto gracias, en primer lugar, a la colaboración de los autores que han compartido de forma altruista con nosotros su trabajo. En segundo lugar tenemos que agradecer el enorme trabajo y disposición para mejorar esta propuesta editorial de todos los miembros del Comité, formado por un equipo muy representativo de la comunidad pedagógica, profesores universitarios y de secundaria, doctorandos, divulgadores e incluso profesionales de la empresa privada con una contrastada experiencia, que son el pilar fundamental sobre el que se sustenta la revista. En tercer lugar, y el más importante a nuestro modo de ver, queremos agradecerte a ti, lector, que hayas considerado este proyecto lo suficientemente atractivo para satisfacer tus inquietudes matemáticas. Tu interés y lectura le da completo sentido a esta publicación. Tú eres el portador de un gran poder que no es otro que hacer llegar este conocimiento a tu entorno más cercano, y permitir que Lva2 crezca cada vez más.

La revista tendrá en principio una periodicidad de dos números al año, y en cuanto a su temática, tendrán cabida todos los trabajos de divulgación, investigación o experiencias docentes que sean del interés de la comunidad matemática.

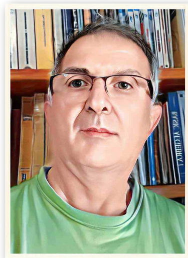
Somos completamente conscientes de que este proyecto no ha hecho nada más que comenzar un camino no exento de dificultades, pero esperamos y deseamos que exitoso, y que nuestro margen de mejora es inmenso. Nuestra ilusión es llegar a hacer de esta revista un referente editorial y crecer a medida que aumente el interés de nuestro potencial público, por lo que en los primeros pasos de esta andadura consideramos trascendental que nuestro público se sienta parte fundamental del proyecto y nos proponga cualquier aportación que mejore la publicación que nos permita crecer y llegar a más gente.

En principio, la intención de Lva2 es no tener una estructura cerrada de secciones, sino estar abiertos al máximo posible de inquietudes. Para ello todo el «feed-back» que recibamos será considerado una información de incalculable valor para nosotros, puesto que nos capacitará en mayor medida poder llegar a un público objetivo mucho más heterogéneo.

La revista nace gracias a la ilusión de un gran equipo de trabajo que se ha aglutinado en torno a este proyecto, y sin ánimo de parecer pretenciosos, se trata de un equipo de unos valores pedagógicos y académicos contrastados y, sobre todo, con un capital humano de una calidad sobresaliente, por lo que no tenemos la menor duda que dichas características quedarán plasmadas en la calidad pedagógica y divulgativa de los contenidos que aparezcan a lo largo de los sucesivos números.

La sección de «Problemas» que dirige nuestro compañero Antonio Roberto Martínez Fernández nace como reflejo editorial del grupo de Telegram «Retos Matemáticos». La idea es que nuestros lectores participen activamente en la publicación de resultados a los problemas propuestos, y quien sabe si a su vez se conviertan en proponentes.

Sin ánimo de quererno extender demasiado, únicamente nos queda desearte que disfrutes de la lectura y agradecerte que nos hagas crecer y mejorar cada día.

José Manuel Sánchez Muñoz y
Francisco Javier García Capitán

Directores de Lva2

ENERO 2024
Vol. I, Núm. 1, pp. 005–018
ISSN: XXXX–XXXX

Los logros de la matemática india clásica

José Manuel Sánchez Muñoz

Este artículo pretende mostrar una visión panorámica de los principales logros de la matemática india clásica (sobre todo el sistema de numeración indoarábigo y el desarrollo de la función seno) y su influencia en el mundo occidental.

Palabras clave: sistema de numeración indoarábigo, matemática india clásica, Brahmagupta, Bhāskara II.

The Main Achievements of Classical Indian Mathematics

This article aims to show an overview of the main achievements of classical indian mathematics (especially the Indo-Arabic numeral system and the development of the sine function) and their influence in the Western world.

Keywords: Indo-Arabic numeral system, classical indian mathematics, Brahmagupta, Bhāskara II.

MSC2020: 01A32.

Contexto histórico

El comienzo de la historia de la India, comienza cuando hacia el año 1500 a.C. los arios se establecieron en la península indostánica procedentes del noroeste y fundaron una civilización propia de elevado desarrollo.

Al inicio del siglo VI a.C. aparecieron las primeras manifestaciones religiosas, fundamentalmente el budismo (fundado por Buda al modificar las doctrinas del brahmanismo) y el jainismo, fundada por Vardhamana, contemporáneo de Buda.

Hacia la mitad del siglo VI a.C. se produjo la primera invasión persa del noroeste de la península indostánica, y de esta forma las tribus indias comenzaron a agruparse y a ponerse en contacto con el mundo griego.

En el año 326 a.C. Alejandro Magno conquistó el noroeste de la India y rápidamente se estableció el Imperio Maurya. El representante más importante de dicho imperio fue el rey Aśoka (272 - 232 a.C.) que mandó construir algunos de los mayores dólmenes de piedra donde se muestran inscritas las primeras manifestaciones primigenias de los numerales que utilizamos hoy día.

Tras el reinado de Aśoka, se produjeron una serie sucesiva de invasiones que desembocaron en la instauración de la dinastía Gupta de emperadores nativos indios. El periodo Grupta es considerado la edad dorada del renacimiento del sánscrito, y la India se convirtió en una referencia para el aprendizaje del arte o la medicina. El grado de desarrollo de las ciudades se tradujo en la fundación de las primeras universidades, y con ellas la aparición de los primeros textos matemáticos como el anónimo *Sūrya Siddhānta* (en español «conocimiento del sol»), probablemente datado en el siglo V.

Existen suficientes evidencias que ponen de manifiesto que se produjo un intercambio cultural y que hubo influencia en ambas direcciones entre los matemáticos griegos, babilonios, chinos e indios, provocados y promovidos por la *Pax Romana*.

Al igual que en otras civilizaciones antiguas, la matemática india adolece de documentos testimoniales que pervivieran al paso del tiempo, y los pocos que lo hicieron carecen de registros cronológicos suficientemente fiables. Todo ello por lo general desembocó en un trato un tanto inmerecido por parte de los historiadores matemáticos, que a lo largo de la historia tuvieron una dedicación muy vaga a dejar constancia de la contribución india al conocimiento y pensamiento matemático de la humanidad, muy en contradicción para ser justos si se compara con los logros conseguidos por esta civilización.

No obstante, casi todas las fuentes clásicas coinciden en que las dos principales contribuciones más relevantes aportadas por los indios a las matemáticas fueron el desarrollo del sistema decimal posicional (incluido su grafía y la aparición del «cero» como cifra que representa el concepto de ausencia de cantidad) y la introducción del equivalente a la función seno que en la actualidad se utiliza en trigonometría. Sin menoscabar estos dos fundamentales logros, cabría destacar también las aportaciones menores de varios matemáticos indios clásicos.

El sistema posicional decimal

El principio posicional de cifras ya había sido utilizado con antelación por los babilónicos, sin embargo los indios se encargaron de aplicarlo a un sistema de notación decimal para los números enteros. El desarrollo histórico de las notaciones numéricas utilizado en la India siguió una evolución parecida a la de Grecia. En el periodo cultural más primitivo anterior al denominado Mohenjo Daro, se utilizaban inscripciones basadas en palotes verticales agrupados, sin embargo hacia la época del rey Aśoka (siglo III a.C.) se empezó a utilizar un sistema de notación parecido al herodiánico. Aunque se seguía utilizando el principio repetitivo, se adoptaron nuevos símbolos para unidades de orden superior, concretamente, para cuatro, diez, veinte y cien. Este sistema de escritura denominado *karosthi* fue paulatinamente dando lugar al que se conoce como sistema de notación de caracteres Brahmi, muy parecido al cifrado alfabético del sistema jónico griego.

Desde los numerales cifrados del sistema Brahmi a la notación que más tarde se encargarían de introducir los árabes en Europa a través de la península Ibérica tras su invasión del siglo VIII, se interpolaron dos breves etapas; la primera consistía en reconocer que utilizando el principio posicional, las cifras que representan los nueve primeros dígitos, pueden servir de forma adicional como cifras para los múltiplos de potencias de diez. La segunda consiste en pensar que este gran salto de abstracción no se produjo de forma instantánea, y además, no se sabe con certeza en qué momento sucedió, parece ser que se llevó a cabo de un modo gradual, bien en un contexto de intercambios occidentales de la India con Persia, bien en los contactos hacia el Este con China, donde se utilizaba un sistema pseudoposicional de barras que pudiera haber provocado una reducción a nueve cifras.

Figura 1. Expansión del sistema indoarábigo.

El sistema decimal y posicional tal y como lo conocemos hoy día se instauró precisamente en la India en torno al siglo VI d.C.; parece que las primeras referencias documentadas respecto a los numerales indios datan del año 662 en escritos del obispo sirio Severo Sebokt. Se sabe que por aquella época dichos numerales ya hacía tiempo que estaban siendo utilizados, como revela el hecho de que el primer documento propiamente india se trate de una inscripción en un plato, datado en el año 595, en el que aparece la fecha del año 346 en notación decimal posicional.

Para la implantación definitiva del sistema decimal posicional, los indios centraron sus esfuerzos en dos facetas estratégicas

- Evolucionar sus numerales hacia una grafía muy sencilla de utilizar y desarrollar una notación numérica en el que el valor de una cifra era igual a su posición (de ahí su nombre «posicional»).
- Inventar e introducir el cero como concepto de «ausencia de cantidad».

Tabla 1. Evolución de los números indoarábigos.

India, Numerales Brahmi, 300 a.C.	
India, Swalior, 876	
India, Devanagar, s. XI	
Arábigo Occidental, Shogar, s. XI	
Arábigo Oriental, 1574	
Europa, s. XII	
Europa, 1197	
Europa, 1275	
Europa, 1360	

El cero, que se introdujo con posterioridad al resto de numerales, significó una simplificación enorme de la capacidad aritmética de cálculo si se compara con otras culturas como la griega o la romana, donde una simple multiplicación era de por sí una tarea fuera del alcance de aquellos que desconocieran las reglas básicas. Cierto es que el griego Arquímedes (c. 287 - c. 212 a.C.) ya realizó un intento serio de implantar un sistema decimal, aunque desgraciadamente no tuvo éxito. El propio Gauss (1777 - 1855) admitía que de haberlo tenido, el desarrollo de la ciencia durante la Edad Media en Europa habría sido sin duda muy diferente.

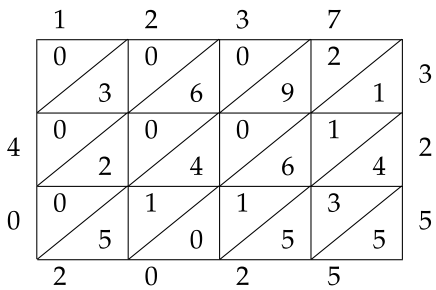


Figura 2. Método de multiplicación en celosía (método indio), $1\,237 \times 325 = 402\,025$.

Los árabes fueron los encargados de introducir tanto la numeración, como la distinta grafía que se utilizaría con posterioridad para las cifras numerales en Europa, por lo que a nuestro sistema numérico con frecuencia se le denomina «sistema indoarábigo», y dada su sencillez y comodidad de cálculo acabó reemplazando rápidamente al sistema de numeración romano utilizado hasta entonces y su inmanejable aritmética.

La primera referencia bibliográfica en Occidente en el que aparecieron los números indoarábigos es la *Crónica Albeldense*, un manuscrito redactado en latín y finalizado en el 833 por el monje Vigila o Vela, así como por sus discípulos Sarracino y García. El nombre *Albeldense* provenía del códice del monasterio de San Martín de Albelda, en Albelda de Iregua, La Rioja, y fue copiado y continuado por el monje Vigila hasta el año 976, de ahí que el nombre recibido sea *Códice Vigiliano* (*Codex Conciliorum Albendensis seu Vigilanus*). Dicha obra estaba dirigido especialmente a comerciantes y académicos, lo cual provocó que rápidamente empezara a convencer al público más general de la superioridad del nuevo sistema numérico.

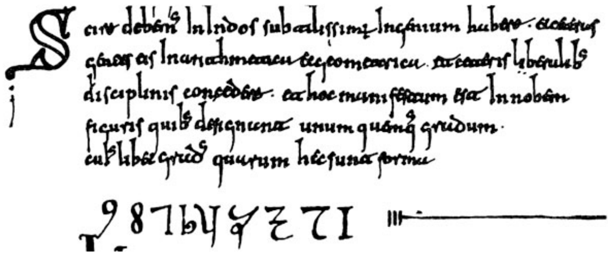


Figura 3. Primera aparición de los números indoarábigos en el *Codex Vigilanus* (a excepción del cero).

Leonardo de Pisa (más conocido como Fibonacci, apodo recibido póstumamente que significaba *filius Bonacci*, hijo de Bonacci) fue uno de los primeros en publicar un libro en el que se ponían de manifiesto las bondades del sistema indoarábigo y su aritmética. Parece ser que el italiano los conoció cuando estudió

Figura 4. Leonardo de Pisa (c. 1170 - 1240).

Vol. I
Núm. 1
ENE.
2024

con los árabes mientras vivía en Bugía (actual Bejaia, Argelia), por entonces uno de los puertos más prósperos del Mediterráneo, debido a la profesión comercial de su padre. Fibonacci, que en un principio se encontró con la incomprensión de sus paisanos a su vuelta a Pisa en torno al año 1200, se encargó de popularizar en Occidente el sistema decimal y acuñó la palabra *zero* para designar el símbolo de la nada. Parece ser que el término *sifr*, *vacío* en árabe, derivó en el término latino *zephyrum*, que acabaría convirtiéndose en *zefiro* en italiano y posteriormente contraído como *zero* en veneciano. Debido a su gran sencillez, el nuevo sistema comenzó a aplicarse a la contabilidad comercial, conversión de pesos y medidas, cálculo, intereses, cambio de moneda y un sin fin de aplicaciones. Su obra maestra *Liber abaci* (1202), cuya traducción debiera ser «Libro de cálculo» y no «Libro del ábaco» como se ha sostenido erróneamente durante mucho tiempo, describe métodos de hacer cálculos sin la ayuda del ábaco. Existe bastante controversia en torno a la traducción del título y su significado exacto. Parece ser que por entonces existía una larga discusión entre los denominados «abacistas», defensores y partidarios de la utilización del ábaco y la vieja notación romana, y los «algoristas», entusiastas del nuevo y revolucionario sistema indoarábigo. En su libro, además de descubrir el cero, describió la notación posicional, la descomposición en factores primos y los criterios de divisibilidad. El libro fue recibido con entusiasmo entre el público culto, teniendo un impacto profundo en el pensamiento matemático europeo.

Figura 5. *Margarita philosophica* de Gregor Reisch (1503) en el que se representa precisamente la rivalidad entre abacistas (drcha.) y algoristas (izqda.).

El nacimiento de la función seno

En el siglo VI (parece ser que en torno al año 510), el matemático indio Ãryabhaṭa I publicaba su obra maestra (única que se ha conservado hasta nuestros días), el *Ãryabhaṭĩya* o *Ãryabhaṭĩyam*, un tratado astronómico sánscrito. Su obra es una recopilación de todos los desarrollos matemáticos de sus predecesores, equivalente al trabajo de Euclides (c. 325 - c. 265 a.C.) en la Grecia clásica, llegando a dar incluso una serie de reglas para extraer raíces cuadradas y cúbicas de números enteros además de fórmulas (desafortunadamente la mitad de ellas son más o menos erróneas) para el cálculo de áreas. Cita a matemáticos como Maskarĩ, Pũrana, Mudgala, Pũtana, y se refiere a ellos con el término *Ãcãryas* (Maestros), sin embargo no ha llegado información de los referidos hasta nosotros.

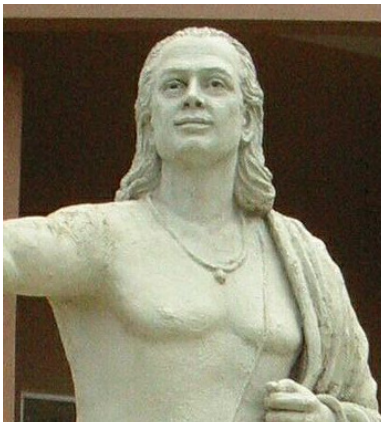


Figura 6. Ãryabhaṭa I (c. 476 - 550).

En una de sus cuatro secciones (la *Gitikapada* –13 versos–, es decir, matemáticas) se incluye una tabla de senos. Utiliza un valor de π $\big($muy similar al ya utilizado por Ptolomeo (c. 100 - c. 170)$\big)$ del siguiente modo «*suma* 4 *a* 100, *multiplica por* 8 *y súmale* $62\,000$. *El resultado te da aproximadamente la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es* $20\,000$». Dicha afirmación implicaba

$$\pi \equiv \frac{(4+100)\cdot 8 + 62\,000}{20\,000} = \frac{62\,832}{20\,000} = 3{,}1416\,,$$

exacto hasta la cuarta cifra significativa, lo que desde luego resulta nada desdeñable. Pudiera ser que Ãryabhaṭa I utilizara el término *ãsanna* (aproximación) para referirse a aquellos valores que los griegos consideraban inconmensurables (irracionales), intuyendo precisamente la naturaleza de π que no se demostraría hasta 1761 por Johan Heinrich Lambert (1728 - 1777). Tras la traducción al árabe de su obra (c. 820), dicha aproximación fue mencionada en los trabajos de álgebra del matemático árabe Al-Juarismi (c. 780 - c. 850). Ãryabhaṭa I también se encargó de estudiar las progresiones aritméticas, dando reglas para calcular su suma o el número de términos conocido el primero, la medida y el cálculo del tiempo y la trigonometría esférica. Calculó de manera exacta el valor del seno de 30° el cual es $\frac{1719}{3438} = 0{,}5$, por lo que a veces a dicho valor se le conoce como la *cifra de Ãryabhaṭa*.

La manera de calcular de Ãryabhaṭa I no se conoce con exactitud, pero manifiesta que «*de un lugar a otro, cada uno es diez veces el que le precede*» lo cual evidencia que utilizaba el principio de notación posicional. Su obra tuvo una relevancia e influencia fundamentales en la tradición astronómica de la India y sirvió de base del desarrollo científico de culturas vecinas como la árabe mediante sucesivas traducciones. Parece ser que Ãryabhaṭa I defendía la creencia del modelo que consideraba que la Tierra rotaba sobre su propio eje como recogieron posteriormente el ya citado Al-Juarismi, o Al-Biruni (973 - 1048) en los siglos IX y X respectivamente.

La obra *Pañca Siddhãtikã* (siglo VI) del astrónomo Varãhamihira de Ujjain basada en la anónima *Sũrya Siddhãnta*, contiene un gran resumen de la primitiva trigonometría india y tablas para el seno aparentemente obtenidas de las *tablas de cuerdas* de Ptolomeo.

Hacia el año 629, el matemático indio Bhãskara I (c. 600 - c. 680) escribió varios trabajos sobre astronomía. En uno de ellos comentaba el *Ãryabhaṭĩya-baãṣya* y los 33 versos sobre matemáticas que componían dicha obra. Más tarde, en el capítulo 7 de su tratado astronómico *Mahã-Bhãskarĩya*, dio una de las primeras aproximaciones históricas a la función sen x,

$$\operatorname{sen} x \approx \frac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)}, \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

El error relativo de dicha aproximación es menor del 1,9 %, sin duda un logro increíble. Se encargó de interrelacionar el seno y el coseno de ángulos, o relacionar el seno de ángulos mayores de 90°, mayores de 180° o mayores de 270° con el seno de un ángulo menor de 90°. En su tratado *Laghu-Bhãskrĩya* ilustra también el método de resolución de ecuaciones lineales diofánticas aplicadas a la astronomía.

Otros logros de Bhãskara I versaron sobre los números primos, de hecho sembró la semilla de lo que hoy es conocido como el teorema de Wilson. Llegó a afirmar que «*si p es un número primo, entonces* $1 + (p-1)!$ *es divisible por p*». Dicha afirmación sería demostrada posteriormente por el matemático árabe Alhazen (965 - 1040). También declaró teoremas sobre las soluciones de lo que hoy se conocen como ecuaciones de Pell, un tipo específico de ecuaciones diofánticas, o ecuaciones en números enteros, de la forma $x^2 - n\,y^2 = 1$ con $n \in \mathbb{Z}$, y solución distinta de la trivial si n no es un cuadrado perfecto. Dichas ecuaciones fueron acuñadas erróneamente por el suizo Leonhard Euler (1707 - 1783) que atribuyó su autoría al matemático inglés John Pell (1611 - 1685) en lugar de William, conde de Brouncker (c. 1620 - 1685), y cabe comentar que aparecieron históricamente por primera vez en el problema de los bueyes de Arquímedes. En particular planteó el problema «*Dime, oh matemático, ¿cuál es el cuadrado que multiplicado por ocho se convierte –junto con la unidad– en un cuadrado?*», que se traduce en notación moderna como la ecuación de Pell $8x^2 + 1 = y^2$, que tiene una solución simple generadora para $x = 1$, $y = 3$, a partir de la cual se pueden construir más soluciones.

Otros logros

Los algebristas indios trataron de manera exitosa la ecuación lineal diofántica, por lo que pronto dedicaron sus esfuerzos en investigar la ecuación cuadrática indeterminada $Dx^2 + m = y^2$, acuñada *varga-prakṛti*. El primero que puso especial énfasis fue el ya nombrado Bhãskara I. Se centraron en resolver el caso $Dx^2 + 1 = y^2$, siendo D un entero positivo que no es cuadrado perfecto.

La siguiente figura significativa de la matemática india antigua es Brahmagupta (590 - 670). En su obra el *Brãhma Spuṭa Siddhãnta* (628), sistematizó la aritmética de los números positivos y negativos, y encontró soluciones para las ecuaciones lineales y cuadráticas. Menciona en su escrito, dos valores de π, el «valor práctico» 3 y el «valor exacto» $\sqrt{10}$. Adoptó como el radio del círculo el valor 3,270 en contraposición al 3,1416 de Ãryabhaṭa I. Dedujo explícitamente la fórmula de la ecuación de segundo grado que ha llegado hasta la actualidad del siguiente modo

$$\begin{gathered}
ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \Rightarrow \\
\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Rightarrow \\
\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} \Rightarrow \\
\Rightarrow \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}} \Rightarrow
\end{gathered}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,. \qquad \square$$

El *Brãhma Spuṭa Siddhãnta* fue la primera obra que contiene reglas de la operativa aritmética con el cero y los números negativos. Brahmagupta destiló las propiedades del cero que conocemos hoy día, afirmando que $\frac{0}{0} = 0$, y en cuanto a la cuestión $\frac{a}{0}$, donde $a \neq 0$, no deja muy claro de qué forma proceder. Trató por primera vez el concepto del infinito como noción antagónica del cero.

Cabe decir en este punto que los indios consideraban como números las raíces irracionales de otros números, cosa que por ejemplo nunca hicieron los griegos que los denominaban *inconmensurables*. Este hito significó un gran paso para el desarrollo del álgebra, sin embargo resulta bastante evidente que la contribución india fue más bien fruto de la inconsciencia lógica que de un estudio concienzudo de una profundidad matemática. Los indios carecieron de una distinción evidente entre resultados exactos e inexactos. Para ellos no existió ningún impedimento en aceptar los números irracionales, y las generaciones posteriores siguieron su mismo camino de una manera alegre e ingenua, hasta que se produjo en el siglo XIX la fundamentación del sistema de los números reales sobre una base sólida.

Resulta evidente que las matemáticas indias recibieron en general una influencia mesopotámica de manera muy notable, en particular parece evidente que la India recibió de la cultura babilónica un «trasvase» del conocimiento de las ternas pitagóricas así como el procedimiento para construirlas.

Brahmagupta retomó el trabajo de los antiguos *Salvasutras* (en español *Manual de las reglas de la cuerda*) utilizados entre los siglos VIII y II a.C. para la construcción ritual de altares de forma y tamaños determinados.Los Salvasutras de mayor interés fueron los de Baudhayana y Apastamba donde se describía la utilización de la cuerda con la finalidad no sólo de medir, sino para realizar el trazado de líneas perpendiculares por medio de cuerdas de longitudes de ternas pitagóricas. Brahmagupta desarrolló una regla para la formación de ternas pitagóricas,

$$m, \quad \frac{m^2}{2(m-n)}, \quad \frac{m^2}{2(m+n)}, \quad m, n \in \mathbb{N}\,.$$

seguramente como modificación de la antigua regla babilónica que parece pudo haber conocido, lo cual demuestra la aseveración de la influencia mesopotámica sobre el saber indio antiguo. De hecho, en contraposición al «triángulo egipcio» (rectángulo) {3, 4, 5}, los indios utilizaban el «triángulo indio» {5, 12, 13}. Generalizó la fórmula de Herón (siglo I d.C.) utilizada en el cálculo de áreas de triángulos cualesquiera cuyos lados eran conocidos, obteniendo la expresión:

$$K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\,,$$

para el cálculo de áreas de cuadriláteros conocidos sus lados a, b, c y d, siendo s el denominado semiperímetro

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}\,,$$

sin embargo su descubrimiento se vio un tanto enturbiado, ya que dicha fórmula únicamente es válida si se trata de un cuadrilátero cordal o cíclico, es decir circunscribible, en cualquier caso la fórmula correcta para un cuadrilátero arbitrario es

$$K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - L}\,,$$

con $L = abcd \cdot \cos^2 \alpha$, donde α representa la semisuma de dos ángulos opuestos de dicho cuadrilátero. También obtuvo la expresión de las diagonales de cuadriláteros cuyos lados, diagonales y áreas fueran todos ellos números racionales

$$\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}, \quad \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}\,,$$

Entre dichos cuadriláteros se construye el que tiene por lados $a = 52$, $b = 25$, $c = 39$ y $d = 60$, y por diagonales 63 y 56. Considera como «área bruta» de dicho cuadrilátero $1933\frac{3}{4}$, a pesar del hecho de que en este caso su fórmula da el área exacta 1764.

Brahmagupta recogió los trabajos de sus antecesores sobre la ecuación diofántica $ax + by = c$, con $a, b, c \in \mathbb{Z}$, y refinó el algoritmo de resolución, de manera que para que tuviera solución, el $mcd(a, b)$ debe dividir a c. Si a y b son primos entre sí, entonces todas las soluciones de la ecuación vienen dadas por las fórmulas

$$x = p + mb, \quad y = q - ma, \quad \forall m \in \mathbb{Z}\,.$$

Su trabajo, junto con el de sus antecesores Ãryabhaṭa I (499) y Bhãskara I (c. 600), sirvió para posteriores refinamientos algorítmicos por parte de otros matemáticos como Mahãvĩra (c. 860), Govindasvãmin (c. 860), Pṛthũdakasvãmin (c. 860), Ãryabhaṭa II (950), Śrĩpati (1039), Bhãskara II (1150) y Nãrãyaṇa (c. 1350). El algoritmo utilizado se acuñó con el término *kuṭṭaka* (en español «pulverizador»).

En su obra se comenta la resolución de ecuaciones cuadráticas indeterminadas (diofánticas) como la ya descubierta anteriormente por Ãryabhaṭa I $8x^2 + 1 = y^2$, para las que obtuvo soluciones $(x, y) = (1, 3)$, $(6, 17)$, $(35, 99)$, $(204, 577)$, $(1189, 3363)$, $\ldots$, o la ecuación $11x^2 + 1 = y^2$, para la que obtuvo soluciones $(x, y) = (3, 10)$, $(\frac{161}{5}, \frac{534}{5})$, $\ldots$ El método utilizado por Brahmagupta, denominado *bhãvanã*, tuvo una enorme significación en el desarrollo de la teoría de números y el álgebra. Consistía en generar infinitas soluciones enteras a partir de una solución entera de $Dx^2 + 1 = y^2$, además de llegar a una solución entera en una amplia variedad de casos dependiente del valor de D (como $D = 83$ o $D = 92$). El método de Brahmagupta servía para conseguir una solución parcial del problema, pero con posterioridad otro algebrista indio se encargó de descubrir una solución entera completa mediante un método cíclico denominado *cakravã* (*cakra*: disco o rueda). Parece ser que dicho descubrimiento tuvo lugar en algún momento entre los siglos VII y XI, y el primero que lo describió fue Jayadeva (que parece vivió con anterioridad al año 1073 y del que nada se conoce), y posteriormente el famoso astrónomo matemático Bhãskara II, del que más adelante hablaremos. Si D es negativo, o si D es el cuadrado de un entero positivo, entonces $Dx^2 + 1 = y^2$ tiene únicamente un número finito de soluciones enteras, de hecho, resulta sencillo ver que $(0, \pm 1)$ son las únicas soluciones en todos estos casos, excepto $D \neq -1$, y $(\pm 1, 0)$; $(0, \pm 1)$ son las únicas soluciones cuando $D = -1$. Si $\sqrt{D}$ es un número real irracional, entonces sorprendentemente resulta que la ecuación tiene infinitas soluciones.

Resulta evidente cuando se estudia el trabajo de Brahmagupta la influencia griega en la India. Su álgebra al igual que la de Diofanto es sincopada, es decir, la suma se indica mediante una simple yuxtaposición, la resta colocando un punto sobre el substraendo, y la división escribiendo el divisor debajo del dividendo de forma similar a nuestra notación para las fracciones, pero sin la barra separadora entre numerador y denominador. Las operaciones de multiplicación y de «evolución» (o de extracción de raíces), al igual que las cantidades incógnitas, se representan mediante abreviaturas de las palabras correspondientes.

Cabe mencionar en este punto la presentación de dos teoremas, cuya demostración obviamos (véase Emch, Sridharam & Srinivas, 2005, pp. 90–95).

Teorema 1. *Si* $y_i^2 = Dx_i^2 + m_i$, *con* $i = 1, 2$, *entonces* $y = Dx_1x_2 \pm y_1y_2$, $x = x_1y_2 \pm x_2y_1$, $m = m_1m_2$ *satisfacen la ecuación* $y^2 = Dx^2 + m$.

Teorema 2.

i) Si $Dp^2 + 4 = q^2$, *entonces*

$$\left(\frac{1}{2}p(q^2-1), \frac{1}{2}q(q^2-3)\right),$$

es una solución de $Dx^2 + 1 = y^2$.

ii) Si $Dp^2 + 4 = q^2$, *y* $r = \frac{1}{2}(q^2+3)(q^2+1)$, *entonces* $\left(pqr, (q^2+2)(r-1)\right)$ *es una solución de* $Dx^2 + 1 = y^2$.

Obtuvo reglas para la suma de series, como por ejemplo la suma de los cuadrados, o de los cubos de los primeros n números naturales

$$S_{n^2} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad S_{n^3} = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2.$$

Parece ser que en el año 665, Brahmagupta dio una fórmula de interpolación para calcular los senos de ángulos intermedios con base en una tabla. Dicha interpolación es equivalente a la fórmula de Newton-Stirling para diferencias de segundo orden.

En el siglo IX, el matemático jainista Mahãvĩra (o Mahaviracharya traducido como Mahãvĩra «el maestro») (? - c. 875) escribió su obra *Ganitasãrasañgraha* (c. 850). A diferencia de todos sus antecesores, su obra separó claramente la matemática de la astronomía, debiendo considerar dicho compendio un texto dedicado fundamentalmente al desarrollo de estrategias para resolver problemas algebraicos. Trató materias ya estudiadas por sus antecesores, pero de un modo más claro. Se encargó de establecer formalmente conceptos como los triángulos equiláteros e isósceles, rombos, círculos y semicírculos. Descubrió identidades algebraicas como

$$a^3 = a(a+b)(a-b) + b^2(a-b) + b^3.$$

Además, descubrió una fórmula para aproximar el área y perímetro de elipses y encontró métodos para calcular el cuadrado y la raíz cúbica de un número. También encontró la fórmula para los coeficientes binomiales $C_{(n,r)}$ como

$$C_{(n,r)} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)}{r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdots 2 \cdot 1}.$$

En su compendio matemático se descartaba como inexistentes los números imaginarios con los que se tropezaba al intentar resolver un tipo específico de ecuaciones de segundo grado, las que hoy denominamos ecuaciones cuadráticas irreducibles (con discriminante negativo). Parece ser que una variante del algoritmo moderno de la división euclídea se describe en tratados de aritmética de matemáticos como Śrīdhara (años 750), el propio Mahāvīra y otros matemáticos posteriores. Sin embargo parece ser que ni Āryabhaṭa I ni Brahmagupta se tomaron la molestia de explicar cualquier método de división, dado por hecho que se conocía el método de la división «larga» cuando describen sus algoritmos para la obtención de raíces cuadradas y cúbicas. Se tiene convicción histórica de que dicho método se conocía en la India desde antes del siglo V, motivo por el cual ninguno de los anteriores matemáticos consideraron oportuno incluirlo en sus respectivos tratados.

El matemático indio más relevante del siglo XI fue Śrīpati (1019 - 1066) cuyo trabajo en astronomía y aritmética tuvo gran repercusión, por ejemplo su estudio de las esferas. Su *Dhikotidakarana* (1039) es un trabajo sobre los eclipses solares y lunares. Su *Dhruvamanasa* (1056) versa sobre el cálculo de longitudes planetarias, eclipses y tránsitos planetarios. El *Siddhantasekhara*, su trabajo más relevante sobre astronomía, tenía 19 capítulos. Los capítulos 13, 14 y 15 versan sobre la aritmética, el álgebra y la esfera respectivamente. En el capítulo 13 hay un pequeño tratado sobre aritmética denominado *Ganitatilaka*. En el capítulo 14 se exponen varias reglas de álgebra sin demostración y sin lenguaje algebraico alguno traducido a símbolos, simplemente narrado de forma verbal. En dicho capítulo Śrīpati dio las reglas para la suma, resta, multiplicación, división, potencia cuadrada, raíz cuadrada y cúbica, y cantidades negativas. Su trabajo sobre ecuaciones en este capítulo contiene la regla para resolver la ecuación cuadrática ofreciendo la siguiente identidad

$$\sqrt{x+\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-y}\right)} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-y}\right)}.$$

Parece ser que Śrīpati obtuvo mayor fama como astrólogo que como matemático. Escribió su *Jyotisaratnamala* un texto sobre astrología donde aparecen comentarios sobre el *maratí*, una de las lenguas más habladas en la India y con mayor tradición literaria que ha sobrevivido y que data aproximadamente del año 1000 de nuestra era, y parece ser proviene de una de las lenguas indoarias regionales más antiguas.

La figura más destacable de la matemática medieval india es Bhāskara II (1114 - 1185). En su famoso tratado *Siddhanta Siroman* (1150), dividido en cuatro partes en las que destacan el *Bījaṇita* (álgebra) y sobre todo el *Līlāvatī* (aritmética, llamado así en honor a su hija según unas fuentes, o a su mujer según otras), afirmó que «*un número distinto de cero dividido por cero es infinito*», ya que para alcanzar la unidad se ha de recurrir siempre a un divisor fraccional más pequeño, una vez realizada la división el resto se ha de dividir siempre por un divisor más pequeño.

Como la ecuación lineal diofántica tenía aplicaciones en la astronomía, la mayoría de los matemáticos indios consideraron el problema de determinar todas las soluciones enteras positivas de ecuaciones del tipo $ay - bx = \pm c$, donde a, b, c son enteros positivos. Como dicha ecuación se visualizaba de la forma $y = \frac{bx \pm c}{a}$, las cantidades a, b, c, x, y se denominaban *hāra* o *bhājaka* (divisor), *bhājya* (dividendo), *kṣepa* (interpolador), *guṇaka* (multiplicador) y *phala* o *labdhi* (cociente) respectivamente.

Existía en la India una vieja tendencia a emplear las reducciones en las ecuaciones diofánticas. Dicha tendencia era parte de lo que hoy consideraríamos como una metodología propia, que los indios denominaban *kuṭṭaka*. Bhāskara I, Brahmagupta, Āryabhaṭa II (c. 920 - c. 1000), Śrīpati y Bhāskara II, entre otros, afirmaban explícitamente que todos los coeficientes debían dividirse por el $mcd(a, b)$ $\big(= mcd(a, b, c)\big)$, de manera que los coeficientes de la ecuación resultaran primos entre sí, y haciendo uso de su terminología, *dṛḍha* (mutuamente reducidos), *niccheda* (sin ningún divisor), *nirapavarta* (irreducible). Bhāskara II ejemplifica este procedimiento en su *Bījaṇita*, de manera que reduce la ecuación $221y - 195x = -65$ a $17y - 15x = -5$. Āryabhaṭa II y sucesores como Bhāskara II estudiaron otro tipo de reducción aplicable en el caso de que a y c o bien b y c tuvieran factores comunes. Si se considera $d_1 = mcd(a, c)$, entonces $a_1 = \frac{a}{d_1}$, del mismo modo $d_2 = mcd\left(b, \frac{c}{d_1}\right)$, entonces $b_1 = \frac{b}{d_2}$; entonces la ecuación $ay - bx = \pm c$ se reduce a resolver la ecuación $a_1Y - b_1X = \pm 1$, de manera que si (u, v) es una solución entera de la misma, entonces $\left(\frac{cu}{d_2}, \frac{cv}{d_1}\right)$ es una solución entera de la ecuación original. Un ejemplo concreto de este tipo de problemas se puede encontrar en el *Bījaṇita* de Bhāskara II, en el que expone el problema (en versos) que se puede traducir algebraicamente como $100y - 63x = \pm 90$, cuya reducción resulta $10Y - 7X = \pm 1$ para la que obtiene $X = 3$ e $Y = 1$, obteniendo fácilmente la solución $x = 30$ e $y = 18$ para la ecuación original.

Por lo tanto, el problema de encontrar todas las soluciones enteras, se reducía a encontrar una solución entera positiva. Supóngase que (u, v) fueran una solución entera positiva de la ecuación $ay - bx = \pm c$. Dividiendo u y v por a y b respectivamente, se tiene que $u = pa + r$ y $v = qb + s$ para cualquier p, q, r, s tales que $0 < r < a$ y $0 < s < b$. Si $p = q$, entonces (r, s) es claramente una solución para la ecuación $ay - bx = \pm c$; de hecho, es la solución entera positiva mínima. Si $p \neq q$, entonces puede considerarse que si $p < q$, se está considerando la ecuación $ay - bx = c$, y al contrario, si $p > q$ entonces se considera la ecuación $ay - bx = -c$. Las soluciones enteras positivas mínimas en los dos casos resultan $\big(r, s + (q-p)b\big)$ y $\big(r + (p-q)a, s\big)$ respectivamente.

Demostró el teorema de Pitágoras, calculando el mismo área de dos modos diferentes y después anulando términos de manera muy similar a la demostración que aparece en el tratado chino *Chou Pei suan Ching* (siglo III a.C.).

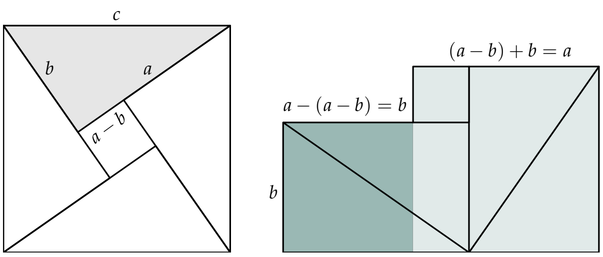


Figura 7. Demostración de Bhãskara II del teorema de Pitágoras.

Obtuvo una fórmula sorprendente para el siglo XIII de las ecuaciones cuadráticas indeterminadas (o diofánticas) del tipo $ax^2 + b = y^2$.

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}\,.$$

Al igual que sus antecesores, trabajó en las ecuaciones de Pell de la forma $px^2 + 1 = y^2$ para $p = 8$, 11, 32, 61 y 67 (el *cakrãvala* anteriormente referido). Encontró las soluciones $x = 5\,987$ e $y = 48\,842$ para $p = 67$. En particular, para el caso de $p = 61$, obtuvo que las soluciones enteras positivas «más pequeñas» eran $x = 226\,153\,980$ e $y = 1\,766\,318\,049$. Encontró también las soluciones enteras $(x, y) = (6, 5)$, $(23, 20)$ o $(40, 35)$ para la ecuación $195x = 221y + 65$.

Bhãskara II se interesó en la trigonometría desde un punto de vista mucho más conceptual que sus predecesores, cuya perspectiva se reducía a una mera consideración como herramienta de cálculo de ciencias como la astronomía, más que una rama fundamental de la ciencia matemática. Entre otros resultados, expresó el seno de los ángulos suma y resta, obteniendo

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b\,.$$

En contraposición al trabajo de Mahãvĩra, Bhãskara II percibió que las ecuaciones cuadráticas irreducibles debían tener dos raíces, aunque siguió rechazando las negativas. En el *Lĩlãvatĩ* aparecen soluciones de ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado, y soluciones enteras de ecuaciones cuadráticas indeterminadas (diofánticas), simples problemas de medida de áreas, progresiones aritméticas y geométricas, raíces, ternas pitagóricas y otros. Esta diversidad le da a la obra un carácter heterogéneo, ya que trata problemas cuya solución es tanto determinada como indeterminada. Cuando trata problemas del círculo y de la esfera no consigue distinguir entre resultados exactos y solo aproximados; de esta forma, el área del círculo por ejemplo, se expresa de manera correcta como un cuarto de la circunferencia por el diámetro, y el volumen de la esfera como un sexto del producto del área por el diámetro, pero en cambio Bhãskara II sugiere como razón de la circunferencia al diámetro o bien $\frac{3927}{1250}$ o bien el «valor bruto» $\frac{22}{7}$. El primero resulta equivalente a la razón que ya mencionó (aunque no utilizó) Ãryabhaṭa II, sin embargo no existen evidencias que pongan de manifiesto que ni Bhãskara II, ni otros matemáticos indios, tuvieran constancia de que todas esas razones propuestas se trataban únicamente de aproximaciones. En cualquier caso Bhãskara II criticó con vehemencia a sus predecesores por haber utilizado las fórmulas de Brahmagupta para el área y las diagonales de un cuadrilátero en general, basándose en su acertada observación de que un cuadrilátero no puede quedar unívocamente determinado por sus lados. Existen evidencias, en cambio, que ponen de manifiesto que no se percató de que las fórmulas consideradas en cuestión, sí que resultan correctas para todos los cuadriláteros cíclicos (inscribibles en una circunferencia).

La Escuela de Kerala

En la región india de Kerala, al sur del país, se fundó una importante escuela de pensamiento matemático y astronómico que floreció entre los siglos XIV y XVI. La escuela se convirtió una notable tradición intelectual que realizó importantes contribuciones a diversas ramas de las matemáticas y la astronomía. Algunos investigadores sugieren que existió una trasmisión de conocimiento matemático desde esta región hacia Europa a través de China y el mundo árabe. Dicha escuela hizo contribuciones importantes en lingüística, llegando incluso a fundar tradiciones poéticas.

La Escuela es conocida por sus avances en trigonometría, cálculo, álgebra y astronomía. Fundada por Mādhava de Sangamagrama (c. 1340 - c. 1425), algunos de sus representantes más notables fueron Parameśvara (c. 1370 - c. 1460), Nilakantha Somayaji (1444 - 1545), Jyeṣṭhadeva (c. 1350 - c. 1575), Achyuta Pisharati (c. 1550 - 1621), Melpathur Narayana Bhattathiri (1560 - 1646/1666) y Achyuta Panikkar (c. 1550 - 1621). Los descubrimientos originales de la escuela finalizaron con la figura de Narayana Bhattathiri (1550 - 1632).

Sus miembros desarrollaron técnicas y fórmulas innovadoras que anticiparon muchos conceptos posteriormente redescubiertos en Europa, especialmente en el campo del cálculo. Sus resultados más importantes (desarrollo en series de potencias de funciones trigonométricas) aparecen en versos sánscritos en el libro de Nilakantha llamado *Tantrasangraha*, y en una edición anónima comentada de este trabajo llamada *Tantrasangraha-vakhya*. Los teoremas que aparecen están dictados sin demostración, pero las demostraciones de las expresiones en serie de potencias de las funciones seno, coseno y arco tangente aparecieron en un trabajo posterior *Yuktibhāṣā* (c. 1530), el primer libro de cálculo de la historia, escrito por Jyeṣṭhadeva en lengua Malayalam propia de la región de Kerala. Dicho escrito fue otra contribución notable de la escuela, puesto que supuso el desarrollo del concepto matemático del «método de Kerala» para resolver ecuaciones polinómicas. Este método, involucraba el uso de principios geométricos para resolver ecuaciones y desempeñó un papel crucial en el desarrollo del álgebra en India.

En el campo de la astronomía, la escuela realizó avances significativos en la precisa predicción de eventos celestiales y en la comprensión del movimiento planetario. La obra principal de Nilakantha Somayaji, el *Aryabhatiya Bhashya*, proporcionó explicaciones e interpretaciones completas del tratado astronómico de Aryabhata, el *Aryabhatiya*.

La escuela utilizó a menudo de manera intuitiva la inducción matemática, aunque la hipótesis inductiva no había sido aún empleada en las demostraciones. Sus miembros utilizaron dicha metodología para descubrir demostraciones «semirrigurosas» como

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p \approx \frac{n^{p+1}}{p+1}$$

para n grande.

Sus miembros aplicaron ideas del (aún no descubierto) cálculo diferencial e integral para obtener desarrollos en series de potencias (de Taylor o Maclaurin) de las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, y $\arctan x$. En el *Tantrasangraha-vakhya* aparecen descritas en verso las siguientes expresiones (escritas en notación matemática moderna)

$$\begin{aligned}
r \arctan\left(\frac{y}{x}\right) &= \frac{1}{1}\cdot\frac{ry}{x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{ry^3}{x^3} + \ldots, \text{ con } \frac{y}{x} \leq 1.\\
r \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) &= x - x\cdot\frac{x^2}{(2^2+2)r^2} + \\
&\quad + x\cdot\frac{x^2}{(2^2+2)r^2}\cdot\frac{x^2}{(4^2-4)r^2} - \ldots\\
r\left(1-\cos\left(\frac{x}{r}\right)\right) &= r\cdot\frac{x^2}{(2^2-2)r^2} - \\
&\quad - r\cdot\frac{x^2}{(2^2-2)r^2}\cdot\frac{x^2}{(4^2-4)r^2} + \ldots,
\end{aligned}$$

donde, para $r = 1$, las series se reducen al desarrollo estándar en series de potencias de las funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

teniendo en cuenta que la escuela no utilizó el símbolo del factorial.

La escuela de Kerala, el primero su fundador Mādhava, utilizó la rectificación (cálculo de la longitud) del arco de una circunferencia para dar una prueba de estos resultados. Cabe decir que el último método de Leibniz, usando la cuadratura (es decir, el cálculo del área bajo el arco de la circunferencia), aún no se había desarrollado. También hicieron uso de la expansión en serie de la función $\arctan x$ para obtener una expresión de serie infinita (más tarde conocida como *serie de Gregory*) para π

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

Su aproximación racional del error para la suma finita de sus series es de particular interés. Manipularon los términos, utilizando el desarrollo en fracciones parciales de $\frac{1}{n^3-n}$ para obtener una serie de convergencia más rápida para π:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3^3-3} - \frac{1}{5^3-5} + \frac{1}{7^3-7} - \ldots$$

Utilizaron la serie mejorada para llegar a una expresión racional de π, de manera que obtuvieron

$$\pi = \frac{104\,348}{33\,215} \approx 3{,}141\,592\,653,$$

exacto hasta la décima cifra decimal. Hicieron uso de una noción intuitiva de un límite para calcular estos resultados. También obtuvieron una metodología semirigurosa de diferenciación de algunas funciones trigonométricas, a pesar que la noción de función no había sido aún inventada.

Mãdhava fabricó una tabla de senos precisa hasta la séptima cifra decimal, para ello dividió un cuarto de arco de circunferencia en veinticuatro intervalos, para lo que obtuvo las longitudes de las semicuerdas (senos) correspondientes a cada uno de ellos, posiblemente utilizando una especie de desarrollo en serie de potencias de las funciones seno y coseno.

Respecto a la serie de Gregory (también conocida como *serie de Mãdhava–Leibniz*), obtuvo varias expresiones para el término de corrección R_n de la misma

$$\begin{aligned} R_n &= (-1)^n \cdot \frac{1}{4n}, \text{ o} \\ R_n &= (-1)^n \cdot \frac{n}{4n^2+1}, \text{ o} \\ R_n &= (-1)^n \cdot \frac{n^2+1}{4n^3+5n}. \end{aligned}$$

Se ha especulado mucho acerca de cómo Mãdhava obtuvo estas expresiones del término de corrección. Las tres convergen con la expresión de una fracción continua finita, la cual, cuando se combina con la expresión de la serie obtenida por Mãdhava evaluada en los n términos, resultan $\frac{3n}{2}$ cifras decimales correctas:

$$\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \\ + \cfrac{(-1)^n}{4n + \cfrac{1^2}{n + \cfrac{2^2}{4n + \cfrac{3^2}{\cdots + \cfrac{\cdots}{\cdots + \cfrac{n^2}{n(4-3(n \bmod 2))}}}}}}$$

El valor absoluto del término de corrección de siguiente orden resulta

$$|R_n| = \frac{4n^3+13n}{16n^4+56n^2+9}.$$

También llevó a cabo transformaciones en el desarrollo en serie de π para acelerar su convergencia, obteniendo

$$\pi = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \ldots\right).$$

Utilizando los primero veintiún términos calculó una aproximación de π correcta hasta la undécima cifra decimal.

También encontró métodos de expansión polinomial, descubrió criterios de convergencia para series infinitas, e investigó el análisis relacionado con las fracciones continuas infinitas. Descubrió también soluciones de ecuaciones trascendentes mediante iteración y encontró una aproximación de números trascendentes mediante fracciones continuas.

Ya en el siglo XIV se debe destacar la figura de Parameśvara astrónomo y matemático que hizo una gran aportación escribiendo muchos comentarios sobre muchos trabajos de sus antecesores. Se crió en el seno de la familia Namputiri Brahmana, con grandes astrónomos. Su hogar familiar era Vatasseri en el pueblo de Alattur en la región de Kerala.

Según algunos de sus escritos y otros trabajos de autores posteriores, fue discípulo de Rudra (a quien conoció personalmente), Mãdhava y Narayna (c. 1340 - c. 1400). Contribuyó de manera notable en el desarrollo de las matemáticos que tuvieron lugar en Kerala a finales del siglo XIV y principios del XV. Sobre su obra cabe citar por ejemplo el *Karmadipika*, o el *Laghubhaskariyam* que son ambos comentarios sobre el *Mahabhaskariyam* de Bhaskara I. Uno de sus descubrimientos más notables fue una versión primitiva del teorema del valor medio de Lagrange. En su *Govindasvami* comenta sobre sobre el *Mahabhaskariya* de Bhaskara I, ofreciendo algunas de sus observaciones de eclipses (incluidos uno realizado en Navaksetra en 1422, y otros dos en Gokarna en 1425 y 1430 respectivamente). Este último trabajo contiene una fórmula de valor medio para la interpolación inversa del seno. Presenta una técnica iterativa de un punto para calcular el seno de un ángulo dado. En su *Siddhantadipika* ofrece una aproximación más eficiente que funciona con un algoritmo iterativo de dos puntos que resulta ser esencialmente el mismo que el método moderno de la secante.

Parece ser que Parameśvara describió en torno al año 1432 la regla de la expresión del radio de la circunferencia en la que se inscribe un cuadrilátero cíclico dada en términos de los lados del cuadrilátero (véase Gupta, 1977), atribuida habitualmente al suizo Simon

Antoine Jean L'Huilier (1750 - 1840) en 1782. Si los lados de un cuadrilátero cíclico son a, b, c y d entonces el radio de la circunferencia circunscrita resulta según Parameśvara

$$
\begin{aligned}
& r^2 = \frac{x}{y}, \ \text{donde} \\
& x = (ab+cd)(ac+bd)(ad+bc), \ \text{e} \\
& y = (a+b+c-d)(b+c+d-a)\cdot \\
& \qquad \cdot (c+d+a-b)(d+a+b-c).
\end{aligned}
$$

Las contribuciones de la Escuela de Kerala tuvieron un impacto profundo en el desarrollo de las matemáticas y la astronomía en India. Sin embargo, a pesar de sus descubrimientos innovadores, las obras de estos matemáticos permanecieron relativamente desconocidas fuera de Kerala hasta que fueron redescubiertas y reconocidas por los académicos europeos siglos después.

La contraposición de la matemática griega respecto a la india

Los matemáticos indios consideraron que las matemáticas eran una mera herramienta al servicio de la astronomía, mientras que los griegos la entendían como una ciencia autónoma e independiente en sí misma. En la India los sacerdotes y representantes religiosos eran los encargados de cultivar casi en exclusividad el conocimiento matemático, mientras que la visión griega era mucho más democrática, de manera que cualquiera pudiera tener acceso a ella y tuviera la libertad de dedicarle tiempo a estudiarla. los indios fueron excelentes calculistas, pero geómetras muy mediocres, mientras que los griegos fueron excelsos geómetras pero no tan buenos calculistas. La trigonometría india tuvo un carácter mucho más aritmético que la griega, de naturaleza eminentemente geométrica. Los textos matemáticos indios se escribían en verso y tenían un carácter críptico, obscurantista y místico en muchos casos, mientras que los griegos lo hacían de un modo claro, racional y lógicamente expuestos y presentados. A diferencia de los matemáticos griegos antiguos que resolvían las ecuaciones de segundo grado mediante métodos geométricos, los matemáticos indios lograron dar una solución de dicha ecuación mediante métodos puramente de cálculo aritmético, distinguiendo sus dos raíces o soluciones.

La contraposición entre la matemática griega e india se perpetúa incluso cuando se ponen de manifiesto las diferencias existentes entre nuestros actuales libros de texto de geometría elemental, de carácter deductivo, y álgebra, presentados muchas veces en forma de meros expositores de reglas.

Referencias Bibliográficas

Argüelles Rodríguez, Juan A. (1989). *Historia de la Matemática*. Madrid: Akal.

Boyer, Carl B. (1999). *Historia de la Matemática*, Mariano Martínez Pérez (trad.). Madrid: Alianza.

Burton, David M. (2011). *The History of Mathematics*, 7th Ed. New York: McGraw Hill.

Cajori, Florian (1928). *A History of Mathematical Notations*. New York: Dover Publications, Inc.

Colebrooke, Henry T. (1817). *Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit*. London: John Murray, Albemarle Street.

Collette, Jean-Paul (2000). *Historia de las Matemáticas*, Vol. I y II, 4ª Ed. Alonso Casal Piga (trad.). México: Siglo XXI Editores.

Datta, Bibhutibhusan & Singh, Avadhesh N. (1962). *History of Hindu mathematics*, 2 Vols. (orig. 1935-1938). Bombay: Asia Publ. House.

Emch, Gérard G., Sridharan, R. & Srinivas, M.D. (Eds.) (2005). *Contributions to History of Indian Mathematics*. New Delhi: Hindustan Book Agency.

Eves, Howard (2000). *An Introduction to the History of Mathematics*, 6th Ed. Philadelphia: Saunders College Publishing.

Gupta, Radha Charan. «Parameśvara's rule for the circumradius of a cyclic quadrilateral». *Historia Mathematica*, 4(1), 1977, pp. 67–74.

Ifrah, Georges (2000). *The Universal History of Numbers*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Joseph, George G. (2016). *Indian Mathematics. Engaging with the World from Ancient to Modern Times*. London: World Scientific.

Kaye, George R. (1915). *Indian Mathematics*. Calcutta & Simla: Thacker, Sprink & Co.

Katz, Victor J. (2008). *A History of Mathematics. An Introduction*, 3rd Ed. Boston: Addison-Wesley.

Kline, Morris (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Jesús Hernández Alonso et al (trads.). Madrid: Alianza.

Plofker, Kim (2009). *Mathematics in India*. Princeton & Oxford: Princeton University Press.

Robson, Eleanor & Stedall, Jacqueline (Eds.) (2009). *The Oxford handbook of the history of mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Scriba, Cristoph J. & Schreiber, Peter (2015). *5000 Years of Geometry Mathematics in History and Culture*. Basel: Birkhauser.

Seshadri, C.S. (Ed.) (2010). *Studies in the History of Indian Mathematics*. New Delhi: Hindustan Book Agency.

Stillwell, John (2010). *Mathematics and its History*, 3rd Ed. New York: Springer.

Stewart, Ian (2012). *Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años*. Javier García Sanz (trad.). Barcelona: Crítica.

Weisstein, Eric W. (Ed.) (1999). *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Part. I, II, III, IV. New York: Chapman & Hall / CRC.

Fecha de recepción: *25 de febrero, 2023.*
Fecha de aceptación: *12 de noviembre, 2023.*

José Manuel Sánchez Muñoz (Madrid, nov. 1973)

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos por la Universidad Politécnica de Madrid (UPM). Profesor de Educación Secundaria, miembro del Grupo de Innovación Educativa «Pensamiento Matemático» (UPM) y fundador de la revista digital homónima. Autor de numerosos artículos y libros sobre divulgación e historia de las matemáticas. Sus investigaciones se centran en campos como la criptografía, teoría de juegos, geometrías riemannianas o innovación educativa matemática.

jose.sm@educa.madrid.org I.E.S. Sor Juana de la Cruz (Cubas de la Sagra), Madrid

ENERO 2024 Vol. I, Núm. 1, pp. 019–028
ISSN: XXXX–XXXX

Marshall y la refundación matemática de la economía

ROMÁN CEANO

En el campo de las matemáticas aplicadas, sin duda la economía ocupa un lugar privilegiado. Este artículo muestra como un visionario Alfred Marshall supo conjugar dichas ciencias para refundar las bases de la economía moderna.

Palabras clave: Marshall, modelos económicos matemáticos.

Marshall and the Mathematical Refoundation of Economics

In the field of applied mathematics, economics undoubtedly occupies a privileged place. This article shows how a visionary Alfred Marshall knew how to combine these sciences to refound the foundations of modern economics.

Keywords: Marshall, economic mathematical models.

MSC2020: 91-03, 97A03.

Introducción

La simbiosis entre la investigación empírica cuantificada y el desarrollo del lenguaje matemático está en el corazón de la revolución científico-técnica. La descripción hecha por Johannes Kepler (1571 - 1630) del movimiento de los planetas mediante la fórmula de la elipse inició un camino que seguiría Isaac Newton (1643 - 1727) mostrando como las matemáticas permitían describir el mundo físico con tantos decimales como se tuviera la paciencia de calcular. Armados con esta convicción, los científicos del siglo XVIII midieron, pesaron y tomaron temperaturas hasta construir una visión de la realidad que los ingenieros del siglo XIX utilizarían para crear fábricas, trenes, barcos y puentes de hierro.

Alfred Marshall (1842 - 1924) era un intelectual victoriano horrorizado por la pobreza que veía en los barrios obreros de las nuevas ciudades industriales. Cuando su preocupación le llevó a leer libros sobre ciencia económica, se dio cuenta que la matemática que contenían era muy rudimentaria. Pensó que ese era el problema y dedicó el resto de su vida a matematizar la economía. A pesar del empeño que puso durante veinte años, nunca logró crear un modelo matemático que describiera la realidad económica con la precisión con la que la física describe el mundo material. La reflexión sobre su fracaso ilustra el problema epistemológico de la modelización y la disyuntiva entre inducción y deducción.

Grandes esperanzas

El padre de Alfred Marshall era cajero en el Banco de Inglaterra pero descendía de una larga estirpe de reverendos. Quería que su hijo volviera a la tradición familiar y le impuso un programa intensivo de estudio de lenguas clásicas que hizo que el pequeño Alfred dominara desde la infancia el latín, el hebreo, al arameo y las diferentes variantes del griego antiguo. El colegio en que estudiaba, la Merchant

Vol. I
Núm. 1
ENE.
2024

Taylor's School, ofrecía un programa de matemáticas muy avanzado que llegaba hasta el cálculo diferencial. A pesar de las muchas horas que dedicaba a las lenguas muertas, Alfred destacaba extraordinariamente en esa asignatura que se convirtió en su pasión secreta. Siempre llevaba en el bolsillo un ejemplar de los *Elementos* de Euclides (c. 325 - c. 265 a.C) que sacaba en cuanto podía eludir la vigilancia paterna. Fue su fascinación por las matemáticas lo que terminó para siempre con la saga de reverendos.

Figura 1. Alfred Marshall (Clapham, 26 de julio de 1842 – Cambridge, 13 de julio de 1924, Reino Unido) en 1869, veintiún años antes de publicar su opus magnus *The Principles of Economics* (véanse Marshall, 1890; Keynes, 1924).

Cuando Marshall terminó el colegio decidió estudiar matemáticas en Cambridge, para especializarse después en la matemática de la física molecular. La física molecular utilizaba las matemáticas más avanzadas de la época para crear un nuevo nivel de comprensión de la estructura interna de los fluidos. Utilizando la naciente mecánica estadística, se podía describir la temperatura, la presión y la dinámica de las reacciones químicas, como efectos emergentes de la interacción entre las partículas que formaban el fluido.

Llegó al St. John's College de Cambridge en 1861 y sus dos primeros años allí fueron un periodo de éxtasis y plenitud. Sumergido en ecuaciones diferenciales, funciones, integrales y límites, sentía el mismo tipo de felicidad que experimentaban los poetas románticos contemporáneos vagando por Italia. En su tiempo libre Marshall participaba en tertulias y charlas eruditas, donde su dominio de las lenguas clásicas le granjeó un gran prestigio entre los doctores en humanidades, ya que podía citar la *Metafísica* de Aristóteles (384 - 322 a.C.) o el *Deuteronomio* de la Biblia en la lengua en que fueron vertidos al papiro.

Figura 2. Merchant Taylor's School en Charterhouse, Londres. Grabado sobre madera de Benjamin Fleming (1875). Imagen cortesía de Welcome Library.

Figura 3. St. John's College en torno a 1870. Imagen cortesía de Kimberly Blaker (https://www.parksandgardens.org/places/st-johns-college-cambridge).

El ambiente intelectual en Cambridge estaba dominado por el tránsito desde la confianza tradicional en el Plan Divino a un nuevo optimismo tecnológico. Marshall no compartía este optimismo y su desconfianza en el automatismo del progreso no se basaba en especulaciones sino en sus visitas a las zonas más depauperadas de las ciudades inglesas. Eran lugares insalubres de calles sin asfaltar en los que la gente vivía hacinada en infraviviendas a las que volvía tras jornadas de trabajo de doce horas. La visión de esa pobreza extrema y la decadencia moral que causaba en las personas empezó a obsesionarle. Paseaba durante horas por los arrabales de las ciudades industriales buscando una respuesta. Gracias a la ingeniería moderna, un tren de vapor arrastraba con naturalidad docenas de vagones cuyo peso unitario habría supuesto un problema de primera magnitud para cualquier civilización anterior. Los barcos ya no dependían del viento, en las ciudades no se hacía de noche, por no hablar del telégrafo, la química, la metalurgia, etc ... Y aquí aparecía la pregunta de Marshall ¿Por qué en un mundo de prodigios técnicos y abundancia creciente esas personas vivían mucho peor que los campesinos medievales?

Marshall buscó la opinión de los economistas académicos. Estos le dijeron que el problema no tenía solución. La Economía Política era la ciencia que trataba sobre la creación y la distribución de la riqueza. Tras casi cien años de investigaciones se había demostrado que las cosas solo podían ser como eran. De hecho, algunos autores aseguraban que la insistencia en mejorar la vida de los pobres era contraproducente. Marshall se dio cuenta de la ignorancia abismal de los economistas sobre cómo funcionaba la economía. No solo carecían de una explicación razonable para la persistencia de la pobreza de masas sino que cada diez o doce años se veían sorprendidos por crisis económicas que no podían ni prever ni entender. Decidió informarse por su cuenta leyendo las obras de referencia de la economía académica. En pocas semanas devoró *La riqueza de las naciones* de Adam Smith (1723 - 1790), los *Principios de economía política y tributación*, de David Ricardo (1772 - 1823), el *Ensayo sobre el principio de la población* de Thomas Robert Malthus (1766 - 1834), y terminó con los *Principios de economía política*, de John Stuart Mill (1806 - 1873), el intelectual por excelencia de la generación anterior y todavía entonces una autoridad incontestable en temas económicos y morales.

Estas lecturas le causaron una profunda decepción. Para los estándares científicos de su época, ninguno de aquellos autores resultaba mínimamente solvente. El libro de Adam Smith era más una charla que un libro de ciencia. Los modelos de David Ricardo tenían una caracterización matemática muy rudimentaria y llegaban a conclusiones que ya eran evidentes en las premisas. Malthus utilizaba las expresiones «crecimiento exponencial» y «crecimiento aritmético» sin ninguna justificación cuantitativa. John Stuart Mill tenía menos gráficos y menos rigor en las descripciones que David Ricardo, y aunque todos los párrafos estaban marcados como proposiciones, no tenían una estructura lógica de axioma, postulado y corolario.

La conclusión de sus lecturas era clara, la Política Económica no era una ciencia moderna y apenas si podía ser llamada ciencia porque carecía de un lenguaje algebraico en el que almacenar y comunicar el conocimiento. Se parecía a una primitiva meteorología de puerto de pescadores, llena de refranes y tópicos mezclados con consejos y apelaciones vacías al sentido común. Para una persona con formación matemática avanzada que estaba al corriente de los trabajos del británico Lord Kelvin (1824 - 1907), del escocés James Clerk Maxwell (1831 - 1879) y del austríaco Ludwig Boltzman (1844 - 1906) aquello era ridículo. Se estaba opinando sobre temas que afectaban a las vidas de millones de personas utilizando razonamientos cuyo rigor no sería aceptable ni para construir la casita del perro en el jardín. Los economistas llenaban páginas y páginas con razonamientos verbales que podían ser defendidos o rebatidos simplemente discutiendo el significado de una palabra. Marshall era un experto en palabras, su conocimiento de las lenguas muertas y las sutilezas de la traducción le enseñaban hasta qué punto el significado de una palabra es arbitrario y cambia con el contexto. A la economía le hacían falta las matemáticas que estaban revolucionando todas las demás ramas de la ciencia.

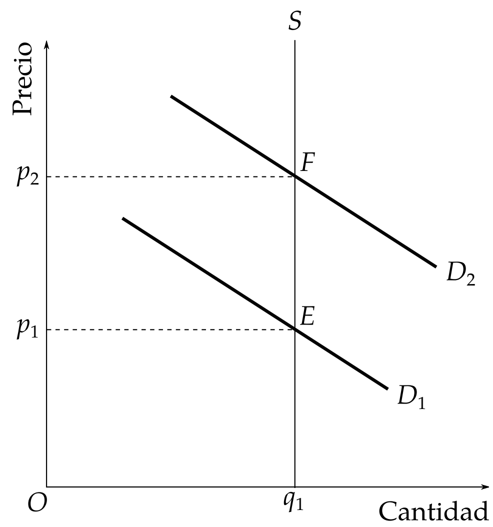


Figura 4. Ganancias de un factor de suministro fijo, diagrama reproducido en Ricardo (1821).

Una aproximación matemática a la economía llamada «aproximación inductiva» tenía partidarios pero era despreciada por la escuela clásica y muy especialmente por Adam Smith. Algunos economistas, como por ejemplo William Stanley Jevons (1835 - 1882), habían compilado series de valores económicos, estudiando polvorientos registros centenarios. Tenían series que para algunas localidades abarcaban más de un siglo, con los precios de diversos productos en los mercados semanales, las rentas de los hogares, la población, etc ... Jevons y los economistas inductivos confiaban en que hallarían regularidades en esas series de números y que podrían describirlas con fórmulas, tal como había hecho Kepler con las observaciones del danés Tycho Brahe (1546 - 1601). El plan de Jevons era describir las variaciones en los precios como una estructura de diversos ciclos superpuestos y después averiguar a qué fenómeno real correspondía cada ciclo. Si lo lograba podría predecir los valores futuros de las series tal como Newton había predicho la altura de las mareas. Jevons encontró muchas formas de descomponer las series en ciclos de diferentes longitudes y amplitudes de onda. Conjeturó muchas explicaciones para cada ciclo, pero nunca logró nada sólido.

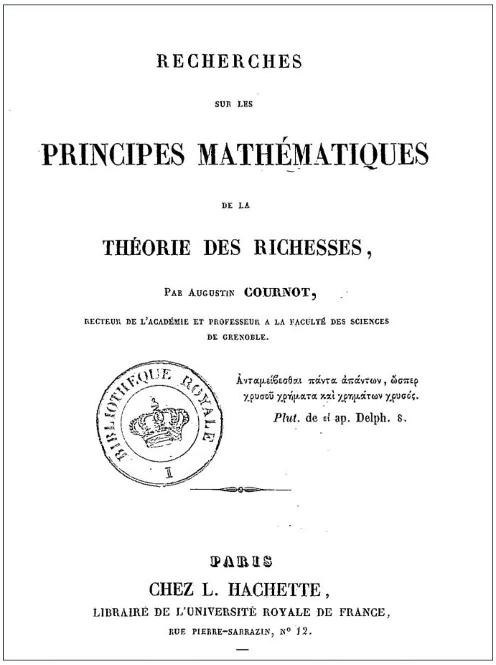
Marshall estaba de acuerdo con los economistas de la escuela clásica en que este método de recopilar series de cifras y analizarlas en abstracto no daría resultado. Se había intentado en otras disciplinas como la meteorología o el magnetismo terrestre y no había llevado a ninguna parte. Joseph Fourier (1768 - 1830) había demostrado que cualquier curva, por loca que parezca, puede ser aproximada por una suma de sinusoides regulares. Esto garantiza que cualquiera que busque ciclos en cualquier serie temporal de datos, los va a encontrar y podrá después inventarse la explicación que quiera para cada uno. Para Marshall la verdadera ciencia matemática funcionaba al revés. Primero había que crear un modelo matemático, luego estudiar la relación entre sus variables y finalmente aplicar valores reales para ver si funcionaba. Kepler había encontrado su fórmula porque intentaba encajar las mediciones reales de Brahe en el modelo de sistema solar de Nicolás Copérnico (1473 - 1543). Antes de medir nada hacía falta un modelo matematizable.

Mientras daba vueltas al problema, Marshall leyó un libro muy corto pero que resultó determinante para fijar definitivamente el marco epistemológico con el que trabajaría. Se trataba de *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, escrito en 1838 por Augustin Cournot (1801 - 1877). La mayor parte de las matemáticas que conocía Marshall habían sido elaboradas por franceses o por extranjeros residentes en París. Muchas naciones europeas habían contribuido al avance del análisis matemático pero ninguna como Francia. Durante el siglo XVIII se había ido construyendo una tradición que había florecido a caballo entre ese y el siguiente siglo. Una enorme proporción de las herramientas matemáticas utilizadas por los ingenieros y científicos contemporáneos de Marshall llevaba apellidos franceses. Cournot era amigo del alemán Johann P.G. Lejeune Dirichlet (1805 - 1859) y asistía con él a conferencias impartidas por el francés Pierre Simon Laplace (1749 - 1827), una leyenda de la talla del suizo Leonhard Euler (1707 - 1783) y el alemán Gottfried W. Leibniz (1646 - 1716). Su protector había sido Poisson, otro nombre familiar para quien se adentraba en el país de la alta matemática. Cournot opinaba desde el pedestal «francés» de Augustin L. Cauchy (1789 - 1857), Adrien Marie Legendre (1752 - 1833) o Fourier y a ojos de Marshall consagraba la necesidad de matematizar la economía.

Figura 5. Antoine Augustin Cournot.

En su libro Cournot deploraba el poco uso que se hacía de las matemáticas en la «ciencia económica» y desmontaba la falacia de que si no era posible poner valores concretos a los resultados de las ecuaciones, estas resultaban inútiles. Conocer las relaciones entre los movimientos de las variables era muy valioso porque permitía caracterizar la estructura del mecanismo económico. La creación de un modelo matemático congruente *a priori*, era la forma científica de sistematizar la toma de datos. Las variables observables podían ser puestas en relación con las no observables, al igual que los astrónomos deducen la posición en tres dimensiones de los planetas de las lecturas bidimensionales de sus coordenadas en el cielo.

Tras esta introducción metodológica, Cournot dedicaba cada capítulo a un excurso algebraico sobre un tema económico concreto. El más brillante es el que estudia el duopolio (un mercado en que sólo hay dos oferentes), donde a partir de una sencilla reflexión sobre la aproximación al equilibrio en pasos sucesivos construye un elegante sistema de ecuaciones diferenciales. Sin escribir un solo valor numérico ni postular más que un puñado de supuestos muy razonables, Cournot halla el precio y las cantidades que producirá cada empresa cuando la situación llegue al equilibrio, es decir, cuando variar el precio y la cantidad producida deje de ser rentable a ambos oferentes.


RECHERCHES

SUR LES

PRINCIPES MATHÉMATIQUES

DE LA

THÉORIE DES RICHESSES,

PAR AUGUSTIN COURNOT,

RECTEUR DE L'ACADÉMIE ET PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE GRENOBLE.

BIBLIOTHEQUE ROYALE

Ἀνταμείβεσθαι πάντα ἁπάντων, ὥσπερ χρυσοῦ χρήματα καὶ χρημάτων χρυσός.

Plut. de ei ap. Delph. 8.

PARIS

CHEZ L. HACHETTE,

LIBRAIRE DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,

RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 12.

Figura 6. Portada del libro de Cournot que inspiró en Marshall el deseo de refundar la economía sobre una base matemática.

Hasta entonces el interés de Marshall por la economía le había ocupado solo horas libres. Esto cambió cuando alrededor de la época en que leía a Cournot, le fue asignada una sustitución para dar clases en un curso de economía política. No sabemos si fue iniciativa suya o casualidad pero Marshall aceptó impartir la asignatura durante un año. Durante ese año insistía en decir que él no era economista, seguramente porque a esas alturas esa palabra para él era sinónimo de «analfabeto matemático».

El dilema de Marshall es que mientras que su atracción intelectual le llevaba hacia las matemáticas de la física, su formación moral le impedía desentenderse del problema de la pobreza. Su tradición familiar religiosa le impregnaba de un sentido de misión. Se compró un cuadro que representaba un mendigo y lo colgó en su habitación para que le recordara la existencia de los pobres. Paseaba por los barrios obreros y sentía que la gente con la que se cruzaba le pedía que hiciera algo para ayudarles. Empezó a escribir pequeñas monografías de economía matemática al modo de Cournot, pero cuando había escrito unas cuantas decidió acometer una obra mucho más ambiciosa. Decidió nada menos que refundar la Economía Política sobre cimientos matemáticos tal como los *Principia Mathematica* … de Newton habían refundado la física.

Un nuevo comienzo

La primera parte de la tarea era modelizar la economía utilizando unos elementos abstractos que representaran a los actores reales. Modelizar significaba representar las entidades reales mediante conjuntos de cifras y representar las relaciones entre ellas como operaciones matemáticas. Newton había estudiado el comportamiento de los cuerpos celestes abstrayéndolos como objetos puntuales cuya única magnitud era la masa y cuya única relación era la atracción mutua, que podía ser calculada mediante la ley de la gravitación universal, como una función de la distancia.

Pero el ejemplo que más inspiraba a Marshall era el de su contemporáneo Maxwell, el cual estaba modelizando los fluidos a base de considerarlos formados por partículas iguales entre sí cuya única magnitud relevante era la velocidad, entendida como energía cinética. Muchos científicos criticaban esta aproximación alegando que explicar los fenómenos mediante unas partículas que no podían ser vistas no era científico. No había ninguna prueba de que los fluidos no fueran continuos y que la explicación de su comportamiento fuera diferente de la que proponía Maxwell. Si el modelo funcionaba, es decir si los cálculos matemáticos realizados sobre el modelo daban el resultado que se observaba en las mediciones, consagraría la existencia de esas partículas iguales, por muy antiintuitiva que resultara la idea.

Al igual que Maxwell describía la temperatura de un cuerpo como epifenómeno de la agitación de sus moléculas, Marshall buscaría caracterizar las grandes variables económicas como epifenómenos del comportamiento individual de unos individuos genéricos abstractos e iguales entre sí. Si para Maxwell, la velocidad de cada partícula individual era irrelevante e imposible de calcular, para Marshall el comportamiento de cada individuo no importaría sino como parte del agregado social.

Para crear su modelo matemático Marshall necesitaba un individuo abstracto caracterizable por el mínimo número de variables, a ser posible solo una. Como intelectual moralista estaba familiarizado con las ideas del inglés Jeremy Bentham (1748 - 1832), padre del utilitarismo moderno, que proponía la búsqueda del placer como único motor del comportamiento humano. En el modelo cristiano clásico el comportamiento humano se mueve en un atractor con dos polos, el placer y el deber, pero Bentham afirmaba que el cumplimiento del deber (los tabús religiosos, sociales, etc ...) también producía placer. Un individuo basado en las ideas de Bentham se comportaría de una forma consistente, seleccionando aquel comportamiento que le proporcionara más placer. Si los planetas de Newton caían unos hacia otros de forma previsible, los individuos abstractos de Marshall se comportarían de forma previsible buscando el máximo placer (que Bentham llamaba «utilidad»).

Como estaba modelizando el comportamiento económico a Marshall solo le interesaba la utilidad (el placer) que los individuos obtuvieran de la adquisición de bienes. En términos matemáticos, Marshall definió una función U cuyas variables independientes eran las cantidades adquiridas de cada bien. Al analizar la relación entre los incrementos de las variables independientes y el valor de la función, Marshall se dio cuenta que no era razonable suponer una pendiente constante y procedió a estudiar en detalle qué aspecto tendría la curva para cada variable, suponiendo constantes las demás.

Supongamos una persona que hubiera cruzado un desierto y llevara un día entero sin beber. Para las primeras gotas de agua que bebiera la función U tendría una pendiente positiva muy fuerte porque pequeños incrementos de agua darían lugar a mucha utilidad (mucho placer). A medida que siguiera bebiendo, la pendiente disminuiría porque cada gota adicional le daría placer pero menos que la gota anterior. Llegaría un momento en que no querría más agua porque el agua adicional no le proporcionaría placer alguno y la curva sería plana. En caso de que se le obligase a seguir bebiendo, esto le produciría displacer y la curva tendría pendiente negativa. Podemos utilizar este análisis básico para calcular qué precio estaría dispuesto a pagar ese individuo por el agua.

Por consideraciones heurísticas supongamos que se la vendemos gota a gota y que el individuo decide cada vez. La primera gota le da una utilidad muy grande que con toda seguridad supera el precio que está dispuesto a pagar y lo mismo podemos asegurar de las siguientes gotas. Pero como hemos establecido más arriba que el placer por gota (unidad de producto) va disminuyendo junto con la curvatura de la función hasta desaparecer cuando la curva es plana, asumiendo que el precio es fijo, necesariamente llegará un momento en que la siguiente gota dará menos placer que el displacer de separarse del dinero. Así estableció Marshall su teorema fundamental: el precio que un consumidor está dispuesto a pagar por un bien es aquel que iguala la utilidad de la última unidad comprada. En términos matemáticos significa que si queremos saber cuánto de un bien consumirá un individuo, hemos de igualar el precio del bien a la derivada de la función que relaciona las cantidades consumidas con la utilidad obtenida.

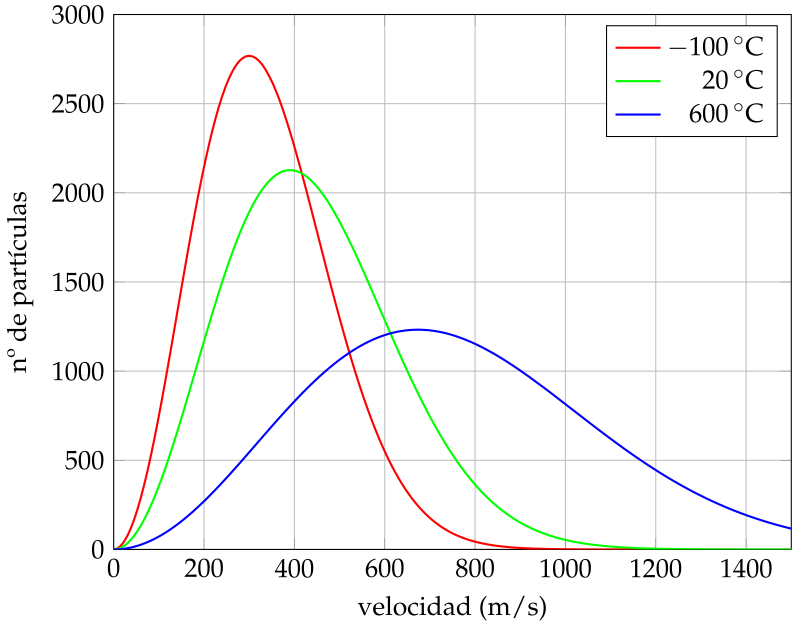


Figura 7. Distribución de velocidades de un conjunto de 1 000 000 moléculas de oxígeno (0,032 kg/mol) a tres temperaturas diferentes: −100 °C, 20 °C y 600 °C. A mayor temperatura el máximo del histograma se desplaza a mayores velocidades (Fuente: Wikipedia).

Refinando un poco más el modelo, Marshall estudió el caso en que al individuo se le ofrecen dos bienes, como por ejemplo agua y comida. Situando el agua en el eje de abscisas y la comida en el de ordenadas podemos describir una serie de lugares geométricos que representan las infinitas combinaciones de agua y comida que proporcionan el mismo placer. A causa del efecto de la utilidad decreciente que hemos visto más arriba, estas curvas, denominadas «curvas de indiferencia», son convexas respecto al origen. Si situamos la variable dependiente en el eje Z, veremos que las curvas de indiferencia son en realidad curvas de nivel de la función U. Podemos introducir ahora la restricción presupuestaria asumiendo que el individuo tiene una cantidad fija de dinero. Si se gastara todo su dinero en agua, iría a parar a un punto sobre el eje de abscisas. Si se gastara todo su dinero en comida iría a parar a un punto sobre el eje de ordenadas. Podemos unir estos dos puntos para obtener el lugar geométrico al que pertenecen todos los puntos al alcance del consumidor. Se trata de una recta cuya pendiente es la proporción de los precios de ambos bienes. Finalmente, basta con buscar entre los puntos de esta recta aquel que cruza la curva de indiferencia con una U mayor, y habremos hallado la combinación que elegirá el individuo. Al ser las curvas convexas, la recta será tangente a la curva y por tanto la proporción entre los precios igualará a la derivada de un producto respecto al otro, un resultado que ya conocíamos. Este análisis se puede generalizar a espacios n-dimensionales y puede tratarse mediante multiplicadores de Lagrange en los que la restricción es un hiperplano creado por la limitación presupuestaria.

De manera análoga podemos modelizar la producción. El empresario combinará materias primas para obtener un producto acabado. Irá añadiendo más cantidad de cada materia prima hasta que con una unidad más, lo producido no compense porque el incremento de producción sea menor que el precio que le cuesta la materia prima adicional.

Marshall utilizó este modelo para construir las curvas de oferta y demanda. Si sobre un mapa de curvas de indiferencia de consumo vamos moviendo la recta de precios para modelizar incrementos en la disponibilidad total de dinero, se va creando un camino de pendiente positiva. Si hacemos lo mismo con el mapa de curvas de indiferencia de producción, obtenernos un camino de pendiente negativa. Si superponemos ambos, obtenemos las curvas de oferta y demanda («las tijeras de Marshall») que se han convertido en el emblema mismo de la economía.

Satisfecho con su modelo, Marshall se dispuso a escribir su opus magnus que se llamaría *Principles of Economy* para emular los *Principia Mathematica* … de Newton. Por fin la sociedad dejaría de estar a merced de las fuerzas oscuras y desconocidas que creaban las crisis de demanda, los pánicos bancarios, la pobreza crónica y todo el resto de desastres que caracterizaban a la «ciencia sombría», uno de los sobrenombres de la economía.

Decepción

Marshall se debió dar cuenta muy pronto de lo artificioso e inútil de su modelo. Durante los veinte años que se pasó escribiendo su obra luchó por refinarlo y sofisticarlo pero nunca llegó a estar satisfecho del resultado. Discutía a menudo con sus alumnos los temas sobre los que trabajaba y estos lo veían dudar y cambiar de opinión cada vez más frustrado. Se daba cuenta que en la práctica resulta imposible calcular ninguno de los parámetros de la función U. Solo podían observarse los agregados, es decir las cantidades totales que se compraban de cada producto a nivel nacional, y la descripción de Marshall del supuesto comportamiento del consumidor individual no afectaba en nada a esta observación. En el caso de Maxwell y sus partículas, se tenía una formula que relacionaba la curva de velocidades con la temperatura del fluido para cada tipo de gas. Marshall no tenía nada parecido y por tanto no podía agregar sus consumidores teóricos en un epifenómeno observable.

Con la función de producción era aún peor. Es posible aceptar que un consumidor puede consumir cualquier combinación de bienes, pero un ingeniero que dirige una fábrica carece de ese margen para sustituir unos factores por otros. Como mucho puede variar las cantidades adquiridas de materia prima para regular la cantidad producida del bien, pero está claro que no puede cambiar la proporción entre unas materias primas y otras. Además, el modelo no distingue entre capital fijo y capital variable ni tiene manera de expresar las variaciones de stocks. La conclusión evidente era que las funciones matemáticas «continuas y derivables» que requiere el cálculo infinitesimal no podían modelizar el comportamiento real de las fábricas.

La intención de Marshall de hacer un libro completamente matemático se fue torciendo hasta frustrarse completamente. El resultado final fueron páginas y páginas del tipo de prosa que tanto había odiado en sus antecesores. Sus matemáticas son de un nivel infinitamente superior a las de Ricardo o Adam Smith y en los *Principles* ... el álgebra es la protagonista de los momentos estelares, pero el libro no gira sobre ella. Lo que da unidad al libro son largas disquisiciones salpicadas de notas, excepciones y puntualizaciones. A diferencia de muchos de sus seguidores durante el siglo y medio siguiente, Marshall tuvo la honestidad científica de renunciar al exceso de modelización cuando eso le alejaba de la realidad y convirtió los diagramas en consecuencias de la prosa, lo contrario de lo que había pretendido. Parte del desconcierto que sufrió durante la redacción del libro se puede relacionar con la crisis económica de 1873 que se desató cuando apenas había empezado a escribir. Aún hoy, esa crisis se puede considerar como la más larga y profunda de todas las que han sucedido desde que la economía dejó de estar gobernada por el ciclo de las cosechas. La depresión consiguiente duró los veinte años que tardó Marshall en publicar su libro y el problema es que con su modelo no podía ni explicar qué estaba pasando ni decir qué había que hacer para solucionarlo.

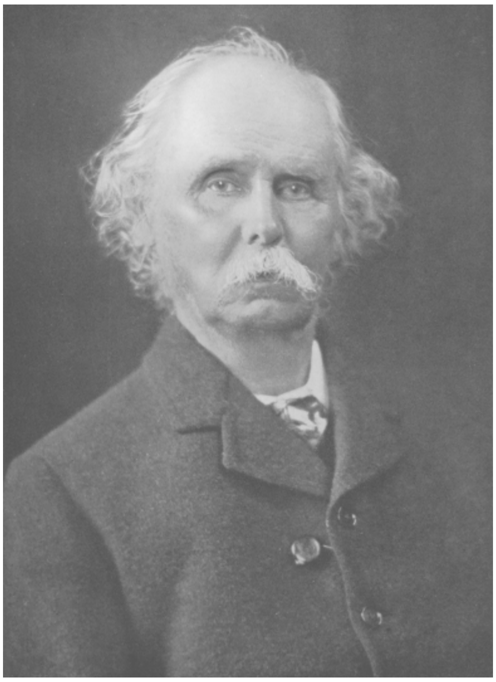


Figura 8. Alfred Marshall (1921), (Keynes, 1924).

El fracaso de su proyecto no hizo que Marshall perdiera la fe en la aplicabilidad de las matemáticas a la economía. Pensó que él había establecido los fundamentos y que quedaba para la siguiente generación continuar construyendo sobre ellos. Aceptó que mientras la economía científica, es decir matemática, no estuviera en condiciones de ofrecer una descripción del mecanismo interno de los procesos económicos habría que conformarse con el tratamiento empirista, sintomático y aproximativo que habían practicado los economistas desde tiempo inmemorial.

A pesar de la decepción de Marshall con su propio proyecto, sus contemporáneos saludaron los *Principles* ... como si Marshall fuera realmente el Newton de la economía. La elegancia de las demostraciones y la sofisticación del aparato matemático causaron sensación entre los economistas, la mayor parte contables o moralistas en la estela de Stuart Mill. Llegaron noticias de académicos que estaban construyendo modelizaciones parecidas y de manera completamente inexplicable el modelo de Marshall se convirtió en el fundamento de la economía científica, a pesar de que jamás ofreció un solo resultado que pudiera ser comparado con la realidad. Hubo que esperar al siglo siguiente para que por fin se implementaran modelos económicos matemáticos útiles.

Referencias Bibliográficas

Cournot, Antoine Augustin (1897). *Researches into the mathematical principles of the theory of wealth, 1838. With an essay, Cournot and mathematical economics and a Bibliography of mathematical economics*. Nathaniel T. Bacon (trans.). London: The Macmillan Company.

Jevons, William Stanley (1905). *The Principles of Economics: A Fragment of a Treatise on the Industrial Mechanism of Society and other papers*. London: Macmillan and Co., Limited.

Keynes, John Maynard (1924). «Alfred Marshall, 1842 - 1924», *The Economic Journal*, Vol. 34, No. 135, Sep., pp. 311–372. Blackwell Publishing for the Royal Economic Society.

Malthus, Thomas Robert (1846). *Ensayo sobre el Principio de la Población*. José María Noguera & Joaquín Miguel (trads.). Madrid: Lucas González y Compañía.

Marshall, Alfred (1890). *The Principles of Economics*. London: Macmillan.

Mill, John Stuart (1884). *Principles of Political Economy*. New York: D. Appleton and Company.

Ricardo, David (1821). *On The Principles of Political Economy, and taxation*, 3rd Ed. London: John Murray.

Smith, Adam (2020). *La Riqueza de las Naciones*. Carlos Rodríguez Braun (Ed.).

Fecha de recepción: *25 de julio, 2023.*
Fecha de aceptación: *12 de diciembre, 2023.*

Román Ceano (Barcelona, nov. 1962)

Economista. Socio fundador y Director Gerente de la empresa «Vector 3» dedicada a la creación de software para instalaciones de televisión y multimedia en calidad broadcast. Actualmente consultor independiente en comercio internacional. Autor de varios libros y numerosos artículos de divulgación científico histórica como su famosa monografía sobre la máquina de cifrado Enigma en *Kriptópolis*.

✉ romanceanovivas@gmail.com

ENERO 2024
Vol. I, Núm. 1, pp. 029–038
ISSN: XXXX–XXXX

Logaritmos: análisis histórico, propiedades y aplicaciones

Pedro Sempere Valdés

Este artículo pretende mostrar la relevancia de la invención de los logaritmos, su importancia para simplificar los cálculos, las propiedades y las aplicaciones en que aparecen.

Palabras clave: logaritmos, matemática clásica, John Napier.

Logarithms: historical analysis, properties and applications

This article aims to show the relevance of the invention of logarithms, their importance to simplify calculations, the properties and the applications in which they appear.

Keywords: logarithms, classical mathematics, John Napier.

MSC2020: 01-02, 51-03.

Una necesidad práctica

Sin ayuda de calculadoras ni de ordenadores, es un hecho que las operaciones de adición o suma requieren menos esfuerzos que las operaciones de producto o multiplicación. Se considera la siguiente tabla donde se compara los números pares (progresión aritmética) con las potencias de 3 (progresión geométrica):

2	4	6	8	10	12	14
3	9	27	81	243	729	2187

Así se observa que la multiplicación de potencias de 3 como $27 \cdot 81$, correspondiendo con 6 y 8 respectivamente, da lugar a 2187 que corresponde con 14, siendo $6 + 8 = 14$. El hecho de conocer que el producto de dos potencias de las misma base resulta en una potencia de igual base cuyo exponente es la suma de los dos anteriores, efectivamente ayuda a simplificar dicho producto. En nuestro caso, la relación se corresponde con $3^{\frac{x}{2}}$. Así:

$$27 \cdot 81 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 6} \cdot 3^{\frac{1}{2}\cdot 8} = 3^3 \cdot 3^4 = 3^{3+4} = 3^7 = 2187.$$

Parece conveniente y bastante práctico que exista una función u operación que transforme los productos en potencias deseables a nuestra elección, de tal forma que al sumar los exponentes, se tendría el resultado final en forma de la potencia elegida, con una simple suma. Este hecho impulsó la invención de los logaritmos a comienzos del siglo XVII para facilitar los cálculos astronómicos.

Análisis histórico

Aunque se tiene constancia de la aparición de los logaritmos, como se conocen hoy en día, a principios del siglo XVII, sus bases teóricas comenzaron tiempo atrás. Arquímedes de Siracusa, en su obra del contador de arena, relacionando progresiones aritméticas y geométricas, la siguiente afirmación:

$$A_n \cdot A_m = A_{m+n-1} \ / \ A_1 = 1 \ \wedge \ A_m = A_m \cdot A_1.$$

En torno al siglo IX, el matemático indio Acharya Virasena (792 - 853) computó el número de veces que dado un número N, éste podía ser dividido entre 2 hasta llegar a 1 (concepto conocido como «ardhaccheda»). Este cálculo para potencias de 2 es equivalente al logaritmo en base 2 que se conoce en la actualidad. Así el «ardhaccheda» de 16, denotado por n:

$$16 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{n = 4}.$$

Siglos más tarde, y concretamente, en 1544, el monje alemán Michael Stifel (1487 - 1567) publicó *Arithmetica Integra*, donde se destacan relaciones entre progresiones aritméticas y geométricas, extendiendo las tablas de potencias de 2 realizadas por el francés Nicolas Chuquet (1445 - 1488) (con exponentes desde 0 hasta 20), incluyendo exponentes negativos.

En la década de 1580, se volvió popular el método de la «prostaféresis», que precedió al logaritmo, y era ampliamente usado en la navegación astronómica. Los calculadores evitaban la multiplicación y la división de números de varias cifras, simplificándose en operaciones de adición y sustracción. Este método usaba identidades trigonométricas como las siguientes (fórmulas descubiertas por el francés François Viête (1540 - 1603)):

$$\operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(y) = \frac{1}{2} \cdot \big(\cos(x-y) - \cos(x+y) \big),$$
$$\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2} \cdot \big(\cos(x-y) + \cos(x+y) \big).$$

Este método de amplio uso en Dinamarca, le fue transmitido al escocés John Napier (1550 - 1617) a través de James Craig, quien fue médico del rey Jacobo VI de Escocia. Gracias a ello, Napier hizo un avance importante. Si se pretende conseguir que los términos de una progresión geométrica sean muy cercanos entre sí, es imperativo tomar valores próximos a 1. Napier escogió como razón de la progresión, el valor $1 - 10^{-7}$, y a fin de evitar uso de decimales multiplicó las potencias de la progresión 10^7. Entonces si se obtiene un número

$$N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L,$$

se deduce que L es el «logaritmo» de Napier del número N. Así para $L = 0$ se obtiene que $N = 10^7$, para $L = 1$ se tiene que $N = 999\,999, \ldots$

Figura 1. John Napier.

Con la motivación de agilizar cálculos numéricos, largos y difíciles que estaban frenando el avance científico, Napier decide publicar en 1617 su obra *Rabdologiae*, en la que explica el diseño de 3 aparatos para facilitar los cálculos. Sin embargo, el más famoso es su «ábaco neperiano», también conocido como varas o huesos de Napier. Se trataban de unas varillas que contenían las tablas de multiplicar de los números 1 al 9 (salvo el 0 que implicaba dejar hueco entre varillas). Por ejemplo, para multiplicar 385 por 7, se situaban las varillas 3, 8 y 5 y se selecciona la fila 7 para el cálculo:

1	3	8	5
2	0/6	1/6	1/0
3	0/9	2/4	1/5
4	1/2	3/2	2/0
5	1/5	4/0	2/5
6	1/8	4/8	3/0
7	2/1	5/6	3/5
8	2/4	6/4	4/0
9	2/7	7/2	4/5

Así, empezando de derecha a izquierda y de arriba a abajo, se escoge 5 para las unidades, $6 + 3 = 9$

para las decenas, $5+1 = 6$ para las centenas, y finalmente 2 para las unidades de millar, dando lugar al resultado 2695, que efectivamente es el resultado del producto de 385 por 7. En el caso de obtener acarreo, éste se lleva a la unidad siguiente. Este ábaco también servía para realizar divisiones e incluso raíces cuadradas. El invento de Napier tuvo éxito entre los astrónomos, reduciendo el tiempo de cálculo que conllevaría varios meses a cuestión de días.

Paralelamente, el suizo Joost Bürgi (1552 - 1632), mientras trabajaba en el observatorio astronómico de Praga junto al alemán Johannes Kepler (1571 - 1630), con objetivo de simplificar los cálculos, elaboró entre 1603 y 1611 su tabla de logaritmos en base a tablas similares a las elaboradas en 1585 por el neerlandés inventor de los números negativos y las fracciones decimales Simon Stevin (1548 - 1620), es decir, de la forma $a(1+r)^n$, lo que se conoce hoy en día como antilogaritmos. Dada su lentitud al publicar perdió la prioridad frente a Napier. De hecho, la publicación de Napier llegaría en 1614, que fue adoptada con gran rapidez.

Figura 2. Joost Bürgi.

La siguiente mejora respecto a los logaritmos llegó al año siguiente de la mano del inglés Henry Briggs (1561 - 1630), primer catedrático saviliano de geometría de la Universidad de Oxford, cuando decidió visitar a Napier. Ambos concluyeron que lo adecuado era utilizar potencias de 10. Sin embargo, Napier se encontraba sin energías y dicha tarea recayó en Briggs, quien a partir de la igualdad $\log 10 = 1$, fue obteniendo otros logaritmos tomando raíces sucesivas, los cuales fueron denominados como logaritmos vulgares, creando así tablas de nuevos logaritmos con una precisión de hasta 14 decimales. Así, por ejemplo, se fue calculando:

$$\log_{10}\sqrt{10} = 0{,}5; \quad \log_{10}\sqrt{\sqrt{10^3}} = 0{,}75;$$
$$\log_{10}\sqrt{\sqrt{\sqrt{10^7}}} = 0{,}875\ldots$$

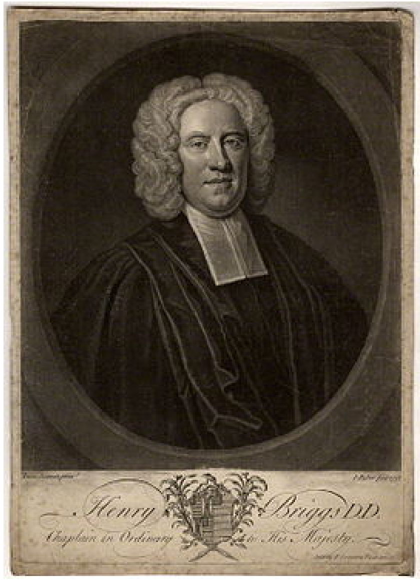


Figura 3. Henry Briggs.

En 1619, el inglés John Spiedell (1600 - 1634) reajustaba los logaritmos naturales de funciones trigonométricas, y en el año 1650, su coterráneo William Oughtred (1574 - 1660) publicó las propiedades de los logaritmos, presentadas más adelante. En esta época, el italiano Evangelista Torricelli (1608 - 1647) consideró la gráfica que representa la función logarítmica. En 1647, el belga Grégoire de St. Vincent (1584 - 1667), había probado que el área por debajo de la hipérbola $\frac{1}{x}$ venía dada por el logaritmo.

Tras esta revisión historia, se concluye que la invención de los logaritmos supuso un gran avance en la estructura de las matemáticas, facilitó los cálculos astronómicos y hoy en día aparecen en múltiples aplicaciones de la ciencia y de la ingeniería.

Definiciones

En la anterior sección se ha mostrado que el logaritmo es una herramienta que en cierta manera ayuda a calcular el valor del exponente de una progresión geométrica, es decir, una posible función inversa de la función exponencial, pero ¿es esto posible?

En primer lugar se define la función exponencial de variable real siendo a la base y x el exponente $f\colon (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}^{+*},\cdot)$, tal que $f(x) = a^x$, siendo $a \neq \{0,1\}$ y $a \in \mathbb{R}^+$.

Entre otras propiedades la función exponencial es monótona, continua, inyectiva y suprayectiva/sobreyectiva (por tanto la función es biyectiva), y además cumple que:

a) $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$.
b) $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Por tanto la función exponencial a^x establece un isomorfismo entre los grupos $(\mathbb{R},+)$ y $(\mathbb{R}^{+*},\cdot)$, y por ende, existe un isomorfismo inverso entre los grupos $(\mathbb{R}^{+*},\cdot)$ y $(\mathbb{R},+)$, es decir, existe la función inversa de la exponencial la cual denotaremos por $\log_a(x)$. Así, se tiene que:

$$(f\circ f^{-1})(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x \Rightarrow a^{\log_a(x)} = x,$$
$$(f^{-1}\circ f)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x \Rightarrow \log_a(a^x) = x.$$

Con todos los elementos anteriores, se puede establecer una definición para el logaritmo:

Definición
Se define logaritmo de base a de x, tal que $x \neq 0$ y $x \in \mathbb{R}^+$, y se denota como $\log_a x$, el valor de exponente b al que habría que elevar el valor a para obtener x.

$$\log_a x = b \iff a^b = x.$$

Para el caso concreto del logaritmo natural, se define logaritmo natural de un número x, y se denota como $\ln x$, a la potencia a la cual el número e debe ser elevado para obtener x. El número e es un número irracional y trascendente, cuyo valor es aproximadamente 2,718 281 828 4...

Es posible dar una definición alternativa para el logaritmo natural haciendo uso de los resultados del belga Grégory de St. Vicent (1584 - 1667), calculando el área de la hipérbola:

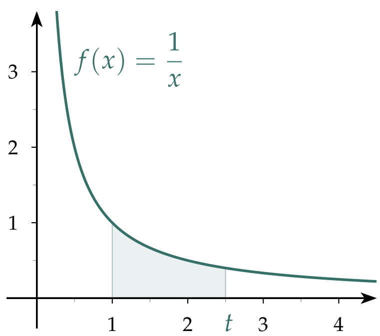
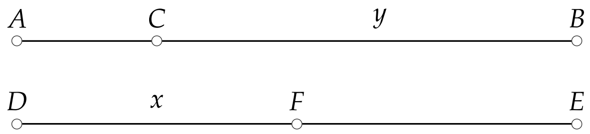


Figura 4. Función inversa (hipérbola).

Definición
Se define logaritmo natural de x, como el área definida bajo la curva $f(t) = \frac{1}{t}$ entre las rectas $t = 1$ y $t = x$ de la forma:

$$\ln x := \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

Napier expone en su tratado una definición para el logaritmo de forma geométrica, que detallaba de forma similar a la que sigue:



Sean un segmento AB y una semirrecta DE, con puntos C y F, que parten simultáneamente de A y D respectivamente. Se considera que el punto C está en movimiento con velocidad de magnitud y, es decir que la velocidad del punto C en AB es como la distancia AB a la distancia y; si además, el punto F se desplaza con velocidad uniforme por el segmento DE conforme a la velocidad inicial de C, entonces, Napier indica que la longitud de x corresponde con el logaritmo de y:

$$x := \operatorname{Naplog} y.$$

Y si se toma como velocidad inicial de C como $v_0 = 10^7$, y mediante cálculos infinitesimales se obtienen las relaciones siguientes:

$$v_C = -y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_{v_0}^{y} \frac{dy}{y} = \int -\,dt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln y - \ln v_0 = -t.$$

Por otro lado, como la velocidad del punto F se desplaza con velocidad uniforme conforme a la velocidad inicial de C:

$$v_F = -\frac{dx}{dt} = 10^7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 10^7 t = 10^7(\ln 10^7 - \ln y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{y}\right) = 10^7 \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{y}{10^7}\right).$$

> **Definición**
> Se define logaritmo de Napier de la distancia x, denotado por Naplog x, como el producto de la potencia 10^7 y el logaritmo de base $\frac{1}{e}$ del cociente de la distancia y entre la potencia 10^7
>
> $$\operatorname{Naplog} x := 10^7 \log_{\frac{1}{e}} \left(\frac{y}{10^7}\right).$$

Todo ello implica que, en la exposición geométrica realizada por Napier, las distancias x e y están divididas por un factor 10^7 , que inevitablemente conlleva a un sistema de logaritmos de base $\frac{1}{e}$, y no de e como cabría esperar. Por último, cabe destacar que Napier calculó sus tablas de logaritmos de forma numérica y no de forma geométrica.

Tras ver las posibles formas de definir los logaritmos, a continuación se detallan las propiedades fundamentales de los mismos.

Propiedades

El logaritmo cumple las siguientes propiedades:

1. $\log_a 1 = 0$.

   Demostración.

   $$\log_a 1 = \log_a a^0 = 0 \iff a^0 = 1. \qquad \square$$

2. $\log_a a = 1$.

   Demostración.

   $$\log_a a = \log_a a^1 = 1 \iff a^1 = a. \qquad \square$$

3. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.

   Demostración. Sean

   $$x = a^n, y = a^m \iff n = \log_a x,\ m = \log_a y,$$

   entonces:

   $$\begin{aligned}\log_a(x \cdot y) &= \log_a(a^n \cdot a^m) = \log_a(a^{n+m}) \\ &= n + m = \log_a x + \log_a y. \qquad \square\end{aligned}$$

4. $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$.

   Demostración. Sean $x = a^n \iff n = \log_a x$, entonces

   $$x^y = a^{n \cdot y} \iff \log_a x^y = n \cdot y.$$

   Luego:

   $$\begin{aligned}\log_a x^y &= \log_a (a^n)^y = \log_a a^{n\cdot y} = n \cdot y \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_a x^y = y \cdot n = y \cdot \log_a x. \qquad \square\end{aligned}$$

5. $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$.

   Demostración. Inmediata por la propiedad 4, al tomar la variable $y = -1$. $\square$

6. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.

   Demostración. A través de las propiedades 3 y 5 se comprueba que:

   $$\begin{aligned}\log_a \left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a \left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \log_a x + \log_a \left(\frac{1}{y}\right) \\ &= \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y. \qquad \square\end{aligned}$$

7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ (fórmula de cambio de base):

   Demostración. Sea $x = a^n = b^m$, entonces

   $$n = \log_a x = \log_a b^m = m \cdot \log_a b,$$

   por tanto

   $$\begin{aligned}\log_a b = p &\iff b = a^p \iff \\ &\iff b^{\frac{1}{p}} = a \iff \frac{1}{p} = \log_b a.\end{aligned}$$

   Así:

   $$\begin{aligned}\frac{1}{p} = \frac{1}{\log_a b} &= \log_b a \Rightarrow \log_a x = m \cdot \frac{1}{\log_b a} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_a x = \frac{\log_b b^m}{\log_b a} = \frac{\log_b x}{\log_b a}. \qquad \square\end{aligned}$$

8. La derivada de $\log_a x$ es $\frac{1}{x \cdot \ln a}$.

   Demostración. Por definición:

   $$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\log_a x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(\frac{x+h}{x}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \log_a \left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h\to 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h\to 0} \log_a \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \log_a \left(\lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{h}\cdot\frac{x}{x}}\right)\end{aligned}$$

$$= \log_a \left(\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}} \right)^{\frac{x}{h}} \right)^{\frac{1}{x}} =$$

Y aplicando la definición de e y la fórmula de cambio de base:

$$= \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\log_a x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}. \qquad \square$$

Se han detallado (y demostrado) las propiedades fundamentales de los logaritmos. A continuación se describen algunas aplicaciones donde se usan los logaritmos.

Aplicaciones

Las aplicaciones son la manifestación práctica de las matemáticas en contextos reales. En el caso de los logaritmos, sus aplicaciones son múltiples en diversas materias (no solamente ciencia o ingeniería) y siguen patentes a día de hoy, entre las que se destacan:

1. Música

Si ocurre que un sonido tiene el doble de frecuencia que otro, se dice que están separados por una «octava», la diferencia de altura de dos sonidos de frecuencias x y $2x$.

$$\cdots\ N_1 \quad \log_a 2 \quad N_2 \quad \log_a 2 \quad N_3 \quad \log_a 2 \quad N_4\ \cdots$$

Al representar estos sonidos como las notas $(N_1, N_2, \dots)$, separadas por «octavas» entre sí, la «octava» tendría una medida como:

$$\log_b 2x - \log_b x = \log_b 2,$$

de donde $N_n = \log_b(2^{n-1}x)$. Si se toma $b = 2$, la medida de la octava sería 1. En general, para definir la medida de un intervalo musical se aplica $\log_2$ usando la relación de equivalencia, $x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1$, usada para el cálculo de un intervalo musical, entendido como la diferencia de altura o de entonación entre dos notas musicales. Así:

$$\log_2 y_1 - \log_2 x_1 = \log_2 y_2 - \log_2 x_2.$$

De la igualdad anterior se puede definir la medida en octavas de un intervalo $\overline{(x, y)}$:

$$m\left(\overline{(x, y)}\right) = |\log_2 y - \log_2 x| = \left|\log_2 \left(\frac{y}{x}\right)\right|.$$

Esta definición de medida del intervalo es usada para la representación de las notas en el pentagrama.

2. Aviación

Para permitir la circulación de aviones por la pista se tienen en cuenta dos factores de carga: la carga que el avión aplica al pavimento, que se denota por LCN (*Load Classification Number*), y la carga máxima que resiste el pavimento independientemente del avión, que se denota por LCG (*Load Classification Ground*).

Si el número del pavimento es superior al del avión entonces puede circular. Entonces para un valor de carga equivalente W y para un valor de presión de inflado P_i, existe un LCN. Estos dos valores están relacionados mediante el área de huella del neumático (A_i):

$$W = P_i \cdot A_i.$$

El comportamiento de rotura del pavimento se aproxima por la relación:

$$\left(\frac{W_1}{W_2}\right) = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^N = \left(\frac{W_1}{W_2}\right)^N \cdot \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^N \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^N = \left(\frac{W_1}{W_2}\right)^{N-1}.$$

De donde tomando logaritmos, se obtiene la relación:

$$\log_{10}\left(\frac{W_1}{W_2}\right) = \frac{N}{N-1} \cdot \log_{10}\left(\frac{P_1}{P_2}\right).$$

3. Astronomía

Para el cálculo de términos conocidos como magnitud aparente, la magnitud absoluta, la temperatura superficial y la distancia, es imprescindible el uso de logaritmos.

Se define la magnitud aparente m como el brillo de una estrella observado desde la Tierra (o cerca de la Tierra). Se usa para su cálculo la magnitud y la intensidad de una estrella medida anteriormente. Esta magnitud viene expresada en la relación:

$$m = m_{\text{ref}} - 2{,}5 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_{\text{ref}}}\right).$$

donde: m_{ref} es la magnitud de referencia aparente, I es la intensidad medida procedente de la estrella y I_{ref} es la intensidad de la luz procedente de la estrella de referencia.

La magnitud absoluta M se define como la magnitud relativa que tendría una estrella si fuera colocada a 10 parsecs (unos 32,6 años luz aproximadamente) del Sol. En base a lo anterior, la ecuación de la distancia (medida en parsecs) viene expresada como:

$$m - M = 5 \cdot \log_{10} D - 5.$$

4. Geología

Es mundialmente conocida por todos la escala de Ritcher, y es sabido que sirve para medir la magnitud de un terremoto (energía que libera). Ritcher se basó en el cálculo de las magnitudes estelares, y aplicó la función logaritmo para incorporarlo al uso de esta escala. Se toma el valor de magnitud 0 al terremoto que produce un desplazamiento horizontal máximo de 1 µm producido en el sismógrafo localizado a 100 km de distancia del epicentro. La magnitud de un seísmo viene dada por:

$$\begin{aligned} M &= \log_{10} A + 3 \cdot \log_{10}(8\Delta t) - 2{,}92 \\ &= \log_{10}\left(\frac{A \cdot \Delta t^3}{1{,}62}\right). \end{aligned}$$

5. Química

La concentración de las sustancias en disoluciones, como por ejemplo una concentración de $[H_2O^+] = 0{,}000\,000\,1\,M = 10^{-7}\,M$, que conllevan muchos decimales, por lo que parece adecuado el uso de logaritmos, a fin de simplificar los cálculos. En 1909, el bioquímico danés Søren Sørensen (1868 - 1939) propuso medir este «potencial de hidrógeno» en una disolución acuosa, es decir el pH, que indica la acidez o la basicidad de una disolución acuosa.

Si se elige el agua como una sustancia neutra, en una reacción de equilibrio conocido como *equilibrio de autoionización*, donde el agua puede actuar tanto de ácido como de base. Así:

$$H_2O\,(l) + H_2O\,(l) \rightleftharpoons H_3O^+\,(ac) + OH^-\,(ac).$$

La medición del pH calculado de forma teórica:

$$\mathrm{pH} = \log_{10}\left(\frac{1}{[H_3O^+]}\right) = -\log_{10}[H_3O^+].$$

De forma análoga, el pOH se puede calcular como:

$$\mathrm{pOH} = \log_{10}\left(\frac{1}{[OH^-]}\right) = -\log_{10}[OH^-].$$

Esta escala varía entre 0 y 14. Se dice que las disoluciones son ácidas si su pH es menor a 7, y básicas o alcalinas si su pH es mayor a 7, siendo la disolución neutra (para el agua) cuyo pH = 7. De esta manera, la relación entre pH y pOH viene definida por:

$$\mathrm{pH} + \mathrm{pOH} = 14.$$

El pH ayuda a interpretar y a determinar el comportamiento de las sustancias en las reacciones químicas, como por ejemplo el cloro en las piscinas: a fin de garantizar una correcta calidad del agua esta escala de pH se debe encontrar entre 6,5 y 8, de otra manera, el cloro no actuará.

6. Electrónica

A la hora de diseñar amplificadores es crucial conocer la ganancia del mismo G, que se define como el cociente entre la potencia de salida, P_{sal}, y la potencia de entrada, P_{ent}:

$$G = \frac{P_{\text{sal}}}{P_{\text{ent}}}.$$

Se puede expresar esta ganancia G en unidades logarítmicas denominadas como Belios (en honor a Graham Bell). De esta forma si P_{sal} tiene un nivel de N Belios con respecto a P_{ent}, se determina por la relación:

$$N = \log_{10}\left(\frac{P_{\text{sal}}}{P_{\text{ent}}}\right).$$

Como el Belio da valores muy grandes de nivel, se decide reducir en un factor 10 dando lugar al conocido, DeciBelio (dB). Así una relación de nivel de potencia de N dB se determina como:

$$\frac{P_{\text{sal}}}{P_{\text{ent}}} = 10^{\frac{N}{10}} \Rightarrow N = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P_{\text{sal}}}{P_{\text{ent}}}\right).$$

Así si una potencia es el doble que la otra implica sumar aproximadamente 3 dB

$$\begin{aligned} N &= 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P_{\text{sal}}}{P_{\text{ent}}}\right) = 10 \cdot \log_{10} 2 \\ &= 3{,}010\,299\ldots \approx 3\,\text{dB}. \end{aligned}$$

Este tipo de relaciones son ampliamente usadas no sólo en Electrónica sino en Telecomunicaciones como, por ejemplo, en proyectos de Infraestructura Común de Telecomunicaciones (ICT) donde se usa para determinar dónde y cuántos amplificadores usar para garantizar que la potencia de señal de antena de TV sea superior a una cantidad establecida.

De esta manera, una relación de nivel que implique -3 dB, implica que la potencia saliente se ve reducida a la mitad, o si la relación de nivel aumenta en $+9$ dB implica que la potencia saliente es 8 veces mayor que la potencia de entrada.

7. Arqueología

Es muy popular y archiconocido el método de datación por carbono-14. El carbono-14, elemento radiactivo o inestable del carbono, tiene un decaimiento exponencial dado por la ecuación:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t},$$

donde:

- N_0: es la cantidad de átomos de carbono-14 en el instante que comienza la desintegración radiactiva del mismo, es decir, $t = 0$.
- N: número de átomos de carbono-14 en el instante de tiempo t.
- λ: constante de desintegración radiactiva.

De esta forma se puede datar el tiempo como:

$$t(BP) = -t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{N}{N_0}\right).$$

donde $t(BP)$ significa tiempo antes del presente, o por sus siglas en ingles, «Before Present».

Este método obtiene la edad radiológica, es decir la edad de desintegración, pero para estimar la edad cronológica se hace uso de unas curvas de calibración.

8. Otras aplicaciones

Existen un numeroso número de ejemplos donde se utilizan los logaritmos, pero que exceden de la intención inicial de este artículo. No obstante, y a título meramente informativo, se citan algunos ejemplos a continuación:

- Teoría de la Información: el teorema de Shannon-Hartley establece una cota superior para la transmisión de datos digitales sobre un enlace con un ancho de banda específico.
- Inmunología: el método de Kaerber usado para calcular el «título» (cantidad o concentración de un virus) de dosis letal LD_{50}.
- Economía Financiera: la fórmula para determinar un gravamen sigue una función de tipo logaritmo.
- Física: el trabajo ejercido por un gas con una expansión a temperatura constante es proporcional al logaritmo neperiano del cociente de volúmenes.
- Psicología: la Ley de Webner-Fechner describe cómo la sensación sonora varía proporcionalmente al logaritmo del cociente de la intensidad del sonido producido y la intensidad umbral.

Referencias Bibliográficas

Borrell, Guillem (2021). *Cálculo de aviones*. Trabajo de Dominio Público. En línea: https://n9.cl/4zdwne (consultado 23 oct. 2023).

Boyer, Carl B. (1999). *Historia de la Matemática*, Mariano Martínez Pérez (trad.). Madrid: Alianza.

Collette, Jean-Paul (2000). *Historia de las Matemáticas*, Vol. I y II, 4ª Ed. Alonso Casal Piga (trad.). México D.F.: Siglo XXI Editores.

Gómez Gómez, J. (2012). *Temario Matemáticas al cuerpo de profesores de enseñanza secundaria*. Madrid: Editorial MAD.

Hoyos H., Diego L. (2012). «La matemática de la música», *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, vol. XX, núm. 1, pp. 29–48. Escuela Regional de Matemáticas de Cali, Colombia.

Kalnin, R. A. (1978). *Álgebra y Funciones Elementales*. Moscú, URSS: MIR.

Kline, Morris (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Jesús Hernández Alonso, Juan Tarrés Freixenet. Alfonso Casal Piga, Carlos Fernández Pérez y Mariano Martínez Pérez (trads.). Madrid: Alianza.

Markushevich, A. I. (1975). *Áreas y Logaritmos*. Moscú: MIR.

Ribnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: MIR.

Stewart, Ian (2012). *Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años*. Javier García Sanz (trad.). Barcelona: Crítica.

VV.AA. (2000). *Students' Britannica India, Vol. VI, Select Essays*, pp. 329. New Delhi: Encyclopedia Britannica (India) Pvt. Ltd.

VV.AA. (2012). *CD-ROM: The ESA/ESO Astronomy Exercise Series*. European Space Agency (ESA) & European Southern Observatory (ESO).

Fecha de recepción: *25 de abril, 2023.*
Fecha de aceptación: *12 de diciembre, 2023.*

Pedro Sempere Valdés (Alicante, jul. 1981)

Ingeniero en Telecomunicación por la Universidad Miguel Hernández de Elche, con formación de Máster de Profesorado en Secundaria, en la especialidad de Matemáticas, por la Universidad de Alicante y, de Máster Universitario en Tecnologías de la Información y la Comunicación para la Educación y Aprendizaje Digital, por la Universidad de Nebrija. Formación y experiencia profesional en el sector de las TICs. Actualmente, ejerce la docencia en los niveles educativos de ESO, Bachillerato y FP.

p.sempere valdes@edu.gva.es I.E.S. Virgen del Remedio, Alicante