конспект гранде

October 20, 2024

Abstract

Это всего лишь неловкие попытки совместить приятное с полезным - освоить большую часть матмематических команд и фукнций LaTeXa и заодно повторить (ну или выучить) материал к коллоку. Если вам эта штукенция попалась в руки - не обращайте внимания, проходите мимо и не осуждайте неточности и грубость изложения

Contents

1 Число сочетаний, свойства. Бином Ньютона. Примеры.

Презентация по теме: 03.09.24, гл. 1, пар. 1

Сразу - тут могло бы быть определение факториала, но его нет в вопросе, потому нет так нет. Но для общего развития: *факториал* - это та штучка с восклицательным знаком около числа; обозначает последовательное перемножение всех чисел от 1 до данного числа. Типа, факториал числа 5 (5!) это перемножение всех чисел от 1 до пяти: $1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120$.

Числом сочетаний из n по k называется число равное $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, при $n \leq k$. Оно обозначается как C_n^k. Так же является числом неупорядоченных из k элементов множества, состоящего из n элементов. (Есть мешок из 5 яблок, мы в абсолютно случайном порядке хотим вытащить 3 яблока - $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!}$), это так называемый *комбинаторный смысл* числа сочетаний.

1.1 Свойства числа сочетаний

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$
2. $C_n^0 = C_n^n = 1$
3. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
4. $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$

В основном, чаще всего мы вспоминаем про первое и третье - особенно полезно помнить при раскрытиях биномов Ньютона, так как они обьясняют симметричность коэффициентов; про второе никто не вспоминает, но всеми ими пользуются (те самые единицы в треугольнике Паскаля как раз появляются из-за них), но да ладно.
Вопроса на докозательство этих штук нет! Чему я безусловно рада, но доказываются они буквально через раскрытие всех выражений через формулу, а дальше простая арифметика. Потому не теряемся если спросит!

1.2 Бином Ньютона

А, кстати, о нем.

$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$

Или же!

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Тут добавить более нечего, на деле. Это буквально все по теме, что было включено в презентацию, помимо примеров, до которых вы и сами додумаетесь если вспомните квадраты или кубы сумм или разностей.

2 Принцип математической индукции, примеры. Неравенство Бернулли.

Презентация по теме: 05.09.24, гл. 1, пар. 2

Принцип математической индукции: пусть $\rho_n, n \leq 1$ - последовательность утверждений. Если

1. Утверждение ρ_1 верное
2. Из того, что ρ_n верно, следует, что ρ_{n+1} верно. Тогда утверждение ρ_n верно при всех $n \leq 1$

Предположение о том, что ρ_n верно (первая часть второго пункта) называют *индукционным предположением*. Переход от истинности ρ_n к истинности ρ_{n+1} (сам второй пункт полностью) - *индукционным переходом*. Вся логика мат. индукции строится на том, что любое множество, состоящее из натуральных чисел, имеет наименьший элемент (собственно, потому она начинается с первого элемента и проверки истинности выражения на единице).

2.1 Неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \leq 1+nx, x \leq -1textn \leq 1$$

А теперь, самое веселое, доказательство:

1. Проверим истинность выражения для $n = 1$:
$$(1+x)^1 \leq 1+1*x \Leftrightarrow 1+x \leq 1+x$$
2. Если оно верно для $n = 1$, предположим что оно верно для n, тогда докажем его верность для $n+1$
$$(x+1)^{n+1} \leq 1+(n+1)x \Leftrightarrow$$
$$(x+1)(x+1)^n \leq (1+nx)(1+x)$$
$$\leq (1+nx)+x = 1+(n+1)x$$
ч.т.д. (допишу потом пояснения)

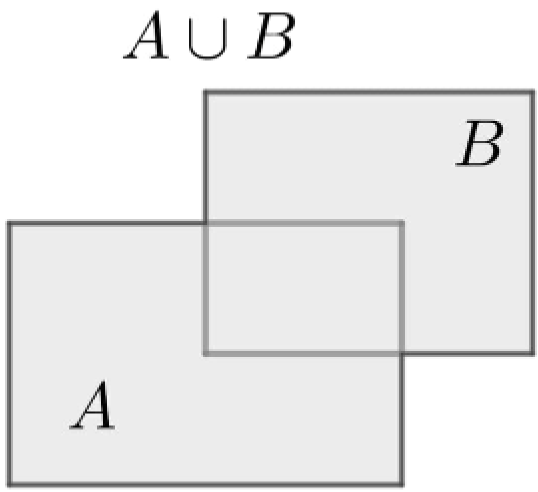
3 Множества, их объединение, пересечение, разность и декартово произведение. Геометрический смысл этих понятий. Примеры.

Презентация по теме: 05.09.24, гл. 1, пар. 3

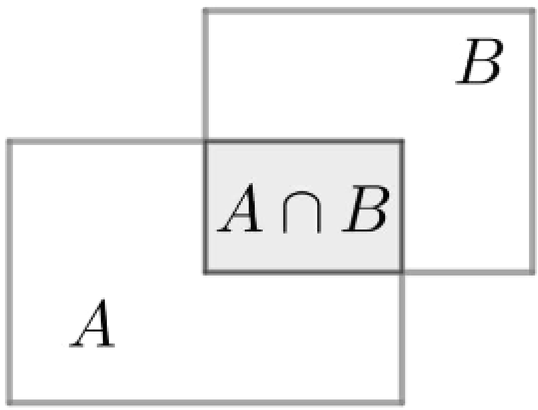
Множество - набор, собрание, коллекция предметов определенной природы. Эти предметы называются элементами множества. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается $\emptyset$. Как правило, они обозначаются прописными латинскими буквами $(A, B, C, ...Z)$, элементы же - строчными $(a, b, c, ...z)$. Принадлежность элемента a множеству A обозначается при помощи значка $\in$ и записывается как $a \in A$, *не*принадлежность же - $a \notin A$ (просто перечеркнули, да). Если нужно просто перечислить множество некоторых элементов, эти элементы заключают в фигурные скобки, т.е. $\{a, b, c, ...z\}$.
Теперь о более сложном - предположим, $\rho(x)$ - некоторое логическое высказывание, а в некотором множестве A для всех элементов это высказывание истинно. Такое высказывание будет записываться как $\{x \in A | \rho(x)\}$ или $\{x | \rho(x)\}$
Из примеров множеств - любое числовое множество от мало до велика $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R})$, ну или что-то более произвольное прозаическое - например, множество положительных рациональных чисел $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. Сути не имеет, главное чтобы это был какой-то набор чисел, даже необязательно имеющих какое-то правило, которому они соотвествуют. (это уже были бы последовательности, например.. но об этом позже).
Если каждый элемент множества A является элементом множества B или, как еще говорят, *содержится*, то A узывают подмножеством B и обозначают $A \subset B$. Ну, или, если оно не содержится, то опять весьма просто перечеркивают $A \not\subset B$
Ну и о простом, если множества A и B состоят одни из одних и тех же элементов, то данные множества равны и обозначают это как $A = B$

3.1 Манипуляции с множествами

Обьединением множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадледащих множествам A и B - иными словами, тупо все элементы этих двух множеств. Обозначается как $A \cup B$.

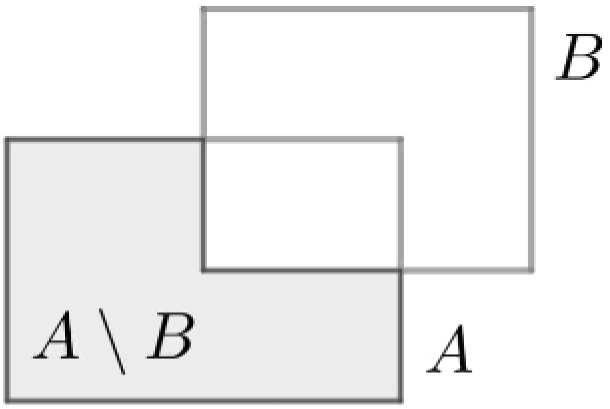


Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов принадлежащих как множеству A, так и множеству B. Обозначается как $A \cap B$.

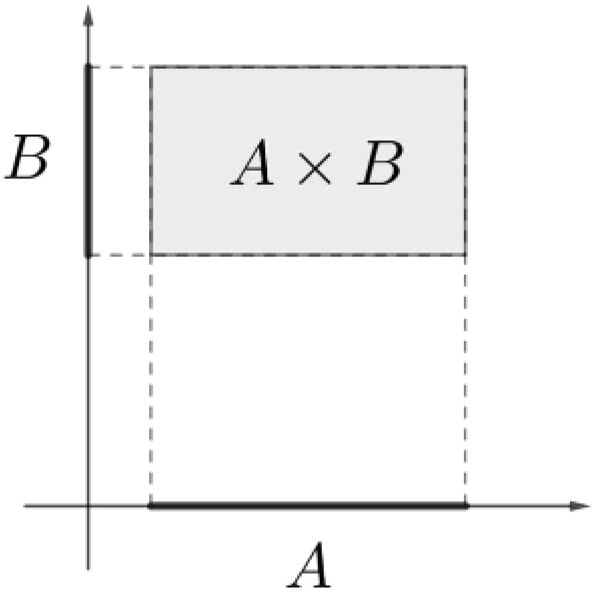


Разностью множесвом A и B называется множество, состоящее из элементов принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B. Обозначается как

$A \setminus B$.



И о самом сложном: пусть A и B - множества. Тогда множество $A \times B =^{def} \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$ называется **декартовым произведением** множества A и B (по картинке правда яснее).



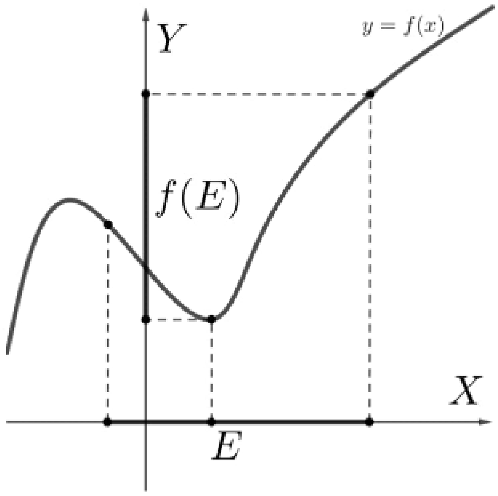
Соотвественно, все приведенные выше картинки и есть *геометрические* смыслы данных операций над множествами; если у вас появились внезапные ассоциации с 9-11 классом и кругами Эйлера - не беспокойтесь, они полностью оправданы, вставьте вместо квадратов круги и грубо говоря будете правы.

4 Отображение множества X во множество Y. Образ и прообраз. Инъективное, сюръективное и биективное отображения. Примеры. Обратное отображение, критерий существования обратного отображения

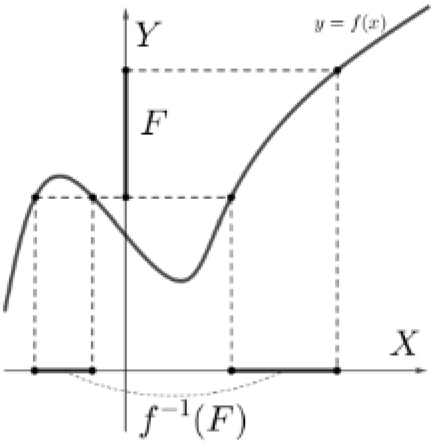
Презентация по теме: 10.09.24, гл. 1, пар. 4

Отображением f множества X во множество Y называется правило, сопоставляющее каждому элементу $x \in X$ единственный элемент $y \in Y$. Факт отображения f записывается как $f : X \to Y$ или $X \to^f Y$, а факт *сопоставления* элемента x элементу y записывается в виде $y = f(x)$ или же $x \to^f y$. Внимательные могли заметить что выбор буквы для обозначения отображения и сама формулировка кажется больно знакмой - оно и верно, ибо если $Y = \mathbb{R}$, то f называется *функцией*.

Пусть $f : X \to Y$ и $E \subset X$. Тогда множество $f(E) =^{def} \{f(x) | x \in E\}$ называется **образом** множества E при отображении f.



И соотвественно, пусть $f : X \to Y$ и $F \subset Y$. Тогда множество $f^{-1}(F) =^{def} \{x \in X | f(x) \in F\}$ называется **прообразом** множества F при отображении f.



В общем и целом, по-простому, по-людски, так сказать, образ - это множество значений функции от x на некотором участке E. Прообраз - обратное действие, дающее значение всех y в неком подмножестве F. Геометрические значения даны выше.

Отображением $f : X \to Y$ называется **инъекцией**, если для любых двух различных $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ верно то, что $f(x_1) \neq f(x_2)$; ну или же по более умному: $(\forall (x_1 \in X \wedge x_2 \in X) : x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Отображение $f : X \to Y$ называется **сюрьекцией**, если для любого $y \in Y$ найдется $x \in X$ такой, что $f(x) = y$; иначе же - $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$

По-простому же - иньекция - это ситуация, при котором для любого x существует собственный *уникальный* y, в то время как сюрьекция - это про то, что для любого x этот самый y *в целом существует*. В тех случаях же, когда при отображении $f : X \to Y$ выполняются оба правила - такое отображение будет называться **биекцией**

В качестве примера можно просто и незамысловато привести квадратичную функцию $f(x) = x^2$ и рассмотреть ее при разных на разных областях определения и значения: так, например, при $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$ не происходит ни сюрьекции, ни иньекции, зато при $X = \mathbb{R}_+, Y = \mathbb{R}$ происходит сюрьекция, а при $X = \mathbb{R}_+, Y = \mathbb{R}_+$ происходит биэкция. Самое сложное во всем этом не путаться между определениями, но с картинками все намного проще...

Не уверена, будет ли определение композиции отображения, потому на всякий случай замечание - **композиция отображения** это отображение сложной функции, которое обозначается как $f \circ g(x) =^{def} f(g(x))$. То бишь, $x \to^g y \to^f Z$

Пусть $f : X \to Y$. Отображение $g : Y \to X$ называется **обратным отображением** к f, если $g(f(x)) = x, \forall x \in X$ и $f(g(x)) = y, \forall y \in Y$. Обратное отображение g обозначается f^{-1} (то есть $f^{-1} = g$). Да, это обратная операция к отображению. Да, как $x \to^f y$, но $y \to^{f^{-1}} x$.

Критерий существования обратного отображения до ужасного прост - отображение $f : X \to Y$ должно быть *биэктивно*. (теорема 4.1)

5 Конечные, бесконечные, счетные, не более чем счетные и несчетные множества. Примеры

Презентация по теме: 10.09.24, 12.09.24, гл. 1, пар. 5