

# 第1章 分式方程及其应用

## 1.1 知识要点

### 一、分式方程的概念及解法

1. 分式方程的概念: \_\_\_\_\_ 的方程.

2. 解分式方程

(1) 基本思想: 分式方程  $\xrightarrow{\text{化简}}$  整式方程

(2) 一般步骤:

i 化为 \_\_\_\_\_

ii 解整式方程

iii \_\_\_\_\_:  $\begin{cases} \text{_____}: x = a \text{ 不是分式方程的解} \\ \text{_____}: x = a \text{ 是分式方程的解} \end{cases}$

(3) 技巧: 去分母时, 先确定 \_\_\_\_\_; 若分母是多项式, 要进行 \_\_\_\_\_; 若分子是多项式, 则需将其 \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ 后再进行下一步运算.

(4) 分式方程的增根: 分式方程的增根是 \_\_\_\_\_.

(5) 分式方程无解: 可能是 \_\_\_\_\_, 也可能是 \_\_\_\_\_.

### 二、分式方程的实际应用

1. 解题步骤: 实际问题  $\xrightarrow[\text{设未知数}]{\text{找等量关系}}$  列分式方程  $\rightarrow$  解分式方程  $\rightarrow$  双检验  $\rightarrow$  作答.

2. 【易错警示】解分式方程必须“双检验”: ①检验 \_\_\_\_\_; ②检验 \_\_\_\_\_.

3. 常见问题的关系式

(1) 行程问题 \_\_\_\_\_

(2)  $\frac{\text{工作总量}}{\text{_____}} = \text{工作时间}$

(3) 购买分配类问题: \_\_\_\_\_

## 1.2 重难点突破

分式方程的解法:

**例 1.1** 解方程:  $\frac{1}{x-5} = \frac{x+1}{5-x} + 2$

解: 方程两边同时乘以  $(x-5)$ ,

得:  $1 = -(x+1) + 2$  ..... 第一步

去括号得:  $1 = -x - 1 + 2$ , ..... 第二步

移项得:  $x = -1 + 2 - 1$ , ..... 第二步

解得:  $x = 0$ , ..... 第四步

检验: 当  $x = 0$  时,  $x - 5 \neq 0$ , ..... 第五步

$\therefore$  原分式方程的根为  $x = 0$  ..... 第六步

【查找错因】上述解答过程是从第\_\_步开始出现错误的, 错误原因是\_\_\_\_\_.

【自主解答】

【易错警示】给方程两边同乘以最简公分母时, 不要给常数项或整式部分漏乘.

## 1.3 中考真题

### 一、 命题点: 分式方程的解法

(仅 2010 年考)

**真题 1.1** (2018 江西 18 题 7 分) 解方程:  $\frac{x-2}{x+2} + \frac{4}{x^2-4} = 1$ .

**真题 1.2** (2019 玉林) 解方程:  $\frac{x}{x-1} - \frac{3}{(x-1)(x+2)} = 1$ .

### 二、 命题点分式方程的实际应用

(仅 2019 年考)

**真题 1.3** (2019 江西 11 题 3 分) 斑马线前“车让人”, 不仅体现着一座城市对生命的尊重, 也直接反映着城市的文明程度. 如图, 某路口的斑马线路段  $A-B-C$  横穿双向行驶车道, 其中  $AB = BC = 6$  米, 在绿灯亮时, 小明共用 11 秒通过  $AC$ , 其中通过  $BC$  的速度是通过  $AB$  速度的 2 倍, 求小明通过  $AB$  时的速度. 设小明通过  $AB$  时的速度是  $x$  米/秒, 根据题意列方程得: \_\_\_\_\_.

**真题 1.4** (2019 广州) 甲、乙二人做某种机械零件, 已知每小时甲比乙少做 8 个, 甲做 120 个所用的时间与乙做 150 个所用的时间相等, 设甲每小时做  $x$  个零件, 下列方程正确的是 ( )

A.  $\frac{120}{x} = \frac{150}{x-8}$

B.  $\frac{120}{x+8} = \frac{150}{x}$

C.  $\frac{120}{x-8} = \frac{150}{x}$

D.  $\frac{120}{x} = \frac{150}{x+8}$

**真题 1.5** 班级组织同学乘大巴车前往“研学旅行”基地开展爱国教育活动, 基地离学校有 90 公里, 队伍 8:00 从学校出发. 苏老师因有事情, 8:30 从学校自驾小车以大巴 1.5 倍的速度追赶, 追上大巴后继续前行, 结果比队伍提前 15 分钟到达基地. 问:

- (1) 大巴与小车的平均速度各是多少?  
(2) 苏老师追上大巴的地点到基地的路程有多远?

## 1.4 练习

### 一、 回归教材

- 一、 李庄村原来用  $10h\text{ m}^2$  耕地种植粮食作物, 用  $80h\text{ m}^2$  种植经济作物. 为了增加粮食作物的种植面积, 该村计划将部分种植经济作物的耕地改为种植粮食作物, 使得粮食作物的种植面积与经济作物的种植面积之比为  $5:7$ . 设有  $xh\text{ m}^2$  种植经济作物的耕地改为种植粮食作物, 那么  $x$  满足怎样的分式方程?
- 二、 有两块面积相同的小麦试验田, 第一块使用原品种, 第二块使用新品种, 分别收获小麦  $12000\text{kg}$  和  $14000\text{kg}$ , 已知第一块试验田每公顷的产量比第二块少  $1500\text{kg}$ . 如果设第一块试验田每公顷的产量为  $x\text{kg}$ , 那么  $x$  满足怎样的分式方程?
- 三、 某运输公司需要装运一批货物, 由于机械设备没有及时到位, 只好先用人工装运,  $6h$  完成了一半任务; 后来机械装运和人工装运同时进行,  $1h$  完成了后一半任务. 如果设单独采用机械装运  $xh$  可以完成后一半任务, 那么  $x$  满足怎样的分式方程?
- 四、 从甲地到乙地有两条公路: 一条是全长  $600\text{km}$  的普通公路, 另一条是全长  $480\text{km}$  的高速公路. 某客车在高速公路上行驶的平均速度比在普通公路上快  $45\text{km/h}$ , 由高速公路从甲地到乙地所需的时间是由普通公路从甲地到乙地所需时间的一半. 如果设该客车由高速公路从甲地到乙地所需的时间为  $xh$ , 那么  $x$  满足怎样的分式方程?
- 五、 某市为治理污水, 需要铺设一段全长为  $3000m$  的污水排放管道. 为了尽量减少施工对城市交通所造成的影响, 实际施工时每天的工效比原计划增加  $25\%$ , 结果提前  $30$  天完成这一任务. 实际每天铺设多长管道?
- 六、 某质检部门抽取甲、乙两厂相同数量的产品进行质量检测, 结果甲厂有  $48$  件合格产品, 乙厂有  $45$  件合格产品, 甲厂的合格率比乙厂高  $5\%$ , 求甲厂的合格率.
- 七、 某市从今年  $1$  月  $1$  日起调整居民用水价格, 每立方米水费上涨  $\frac{1}{3}$ . 小丽家去年  $12$  月份的水费是  $15$  元, 而今年  $7$  月份的水费则是  $30$  元. 已知小丽家今年  $7$  月份的用水量比去年  $12$  月份的用水量多  $5m^3$ , 求该市今年居民用水的价格.

- 八、 小明和同学一起去书店买书, 他们先用 15 元买了一种科普书, 又用 15 元买了一种文学书. 科普书的价格比文学书高出一半, 他们所买的科普书比所买的文学书少 1 本. 这种科普书和这种文学书的价格各是多少?
- 九、 甲种原料与乙种原料的单价比为 2:3, 将价值 2 000 元的甲种原料与价值 1 000 元的乙种原料混合后, 单价为 9 元, 求甲种原料的单价.
- 十、 某商店销售一批服装, 每件售价 150 元, 可获利 25%. 求这种服装的成本价.
- 十一、 某商店甲种糖果的单价为 20 元/kg, 乙种糖果的单价为 16 元/kg. 为了促销, 现将 10 kg 乙种糖果和 10 kg 甲种糖果混合后 (搅匀) 销售, 如果将混合后的糖果单价定为 17.5 元/kg, 那么混合销售与分开销售的销售额相同. 这包甲种糖果有多少千克?

## 二、 备考练习

(时间:40 分钟)

### 一、 基础过关

1. 解分式方程  $\frac{1-x}{x-2} = \frac{1}{2-x} - 2$  时, 去分母变形正确的是 ( )
- A.  $-1 + x = -1 - 2(x - 2)$   
B.  $1 - x = 1 - 2(x - 2)$   
C.  $-1 + x = 1 + 2(2 - x)$   
D.  $1 - x = -1 - 2(x - 2)$
2. 关于  $x$  的分式方程  $\frac{2}{x} + \frac{3}{x-a} = 0$  的解  $x = 4$ , 则常数  $a$  的值为 ( )
- A.  $a = 1$                       B.  $a = 2$                       C.  $a = 4$                       D.  $a = 10$
3. 分式方程  $\frac{x-5}{x-1} + \frac{2}{x} = 1$  的解为 ( )
- A.  $x = -1$                       B.  $x = 1$                       C.  $x = 2$                       D.  $x = -2$
4. 现代互联网技术的广泛应用, 催生了快递行业的高速发展. 据调查, 湘潭某家小型快递公司的分拣工小李和小江, 在分拣同一类物件时, 小李分拣 120 个物件所用的时间与小江分拣 90 个物件所用的时间相同, 已知小李每小时比小江多分拣 20 个物件, 若设小江每小时分拣  $x$  个物件, 则可列方程为 ( )
- A.  $\frac{120}{x-20} = \frac{90}{x}$                       B.  $\frac{120}{x+20} = \frac{90}{x}$                       C.  $\frac{120}{x} = \frac{90}{x-20}$                       D.  $\frac{120}{x} = \frac{90}{x+20}$
5. 十堰即将跨入高铁时代, 钢轨铺设任务也将完成. 现还有 6000 米的钢轨需要铺设, 为确保年底通车, 如果实际施工时每天比原计划多铺设 20 米, 就能提前 15 天完成任务, 设原计划每天铺

设钢轨  $x$  米, 则根据题意所列的方程是 ( )

A.  $\frac{6000}{x} - \frac{6000}{x+20} = 15$

B.  $\frac{6000}{x+20} - \frac{6000}{x} = 15$

C.  $\frac{6000}{x} - \frac{6000}{x-15} = 20$

D.  $\frac{6000}{x-15} - \frac{6000}{x} = 20$

6. 分式方程  $\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$  的解为  $x =$  \_

7. 甲、乙两地相距 1000km, 如果乘高铁列车从甲地到乙地比乘特快列车少用  $3h$ . 已知高铁列车的平均速度是特快列车的 1.6 倍, 设特快列车的平均速度为  $x$ km/h, 根据题意可列方程为\_\_\_\_\_.

8. 若关于  $x$  的分式方程  $\frac{3x}{x-2} - 1 = \frac{m+3}{x-2}$  有增根, 则  $m$  的值为\_.

9. 解方程:  $\frac{x-2}{x-3} + 1 = \frac{2}{3-x}$ .

10. 解分式方程:  $\frac{x}{x-2} - 1 = \frac{4}{x^2-4x+4}$

11. 某公司购买了一批 A、B 型芯片, 其中 A 型芯片的单价比 B 型芯片的单价少 9 元, 已知该公司用 3120 元购买 A 型芯片的条数与用 4200 元购买 B 型芯片的条数相等.

(1) 求该公司购买的 AB 型芯片的单价各是多少元?

(2) 若两种芯片共购买了 200 条, 且购买的总费用为 6280 元, 求购买了多少条 A 型芯片?

## 二、提高

12. 若关于  $x$  的分式方程  $\frac{x}{x-3} + \frac{3a}{3-x} = 2a$  无解, 则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

13. 在我市“青山绿水”行动中, 某社区计划对面积有  $3600m^2$  的区域进行绿化, 经投标由甲、乙两个工程队来完成. 已知甲队每天能完成绿化的面积是乙队每天能完成绿化面积的 2 倍, 如果两队各自独立完成面积为  $600m^2$  区域的绿化时, 甲队比乙队少用 6 天.

(1) 求甲、乙两工程队每天各能完成多少面积的绿化;

(2) 若甲队每天绿化费用是 1.2 万元. 乙队每天绿化费用为 0.5 万元, 社区要使这次绿化的总费用不超过 40 元, 则至少应安排乙工程队绿化多少天?

## 三、核心素养

1. 在求  $3x$  的倒数的值时, 嘉淇同学误将  $3x$  看成了  $8x$ , 她求得的值比正确答案小 5. 依上述情形, 所列关系成立的是 ( )

A.  $\frac{1}{3x} = \frac{1}{8x} - 5$

B.  $\frac{1}{3x} = \frac{1}{8x} + 5$

C.  $\frac{1}{3x} = 8x - 5$

D.  $\frac{1}{3x} = 8x + 5$

2. 某工厂计划生产 1500 个零件, 但是在实际生产时, ..., 求实际每天生产零件的个数在这个题目中, 若设实际每天生产零件  $x$  个, 可得方程  $\frac{1500}{x-5} - \frac{1500}{x} = 10$ . 则题目中用 “...” 表示的条件应是 ( )

- A. 每天比原计划多生产 5 个, 结果延期 10 天完成
- B. 每天比原计划多生产 5 个, 结果提前 10 天完成
- C. 每天比原计划少生产 5 个, 结果延期 10 天完成
- D. 每天比原计划少生产 5 个, 结果提前 10 天完成

