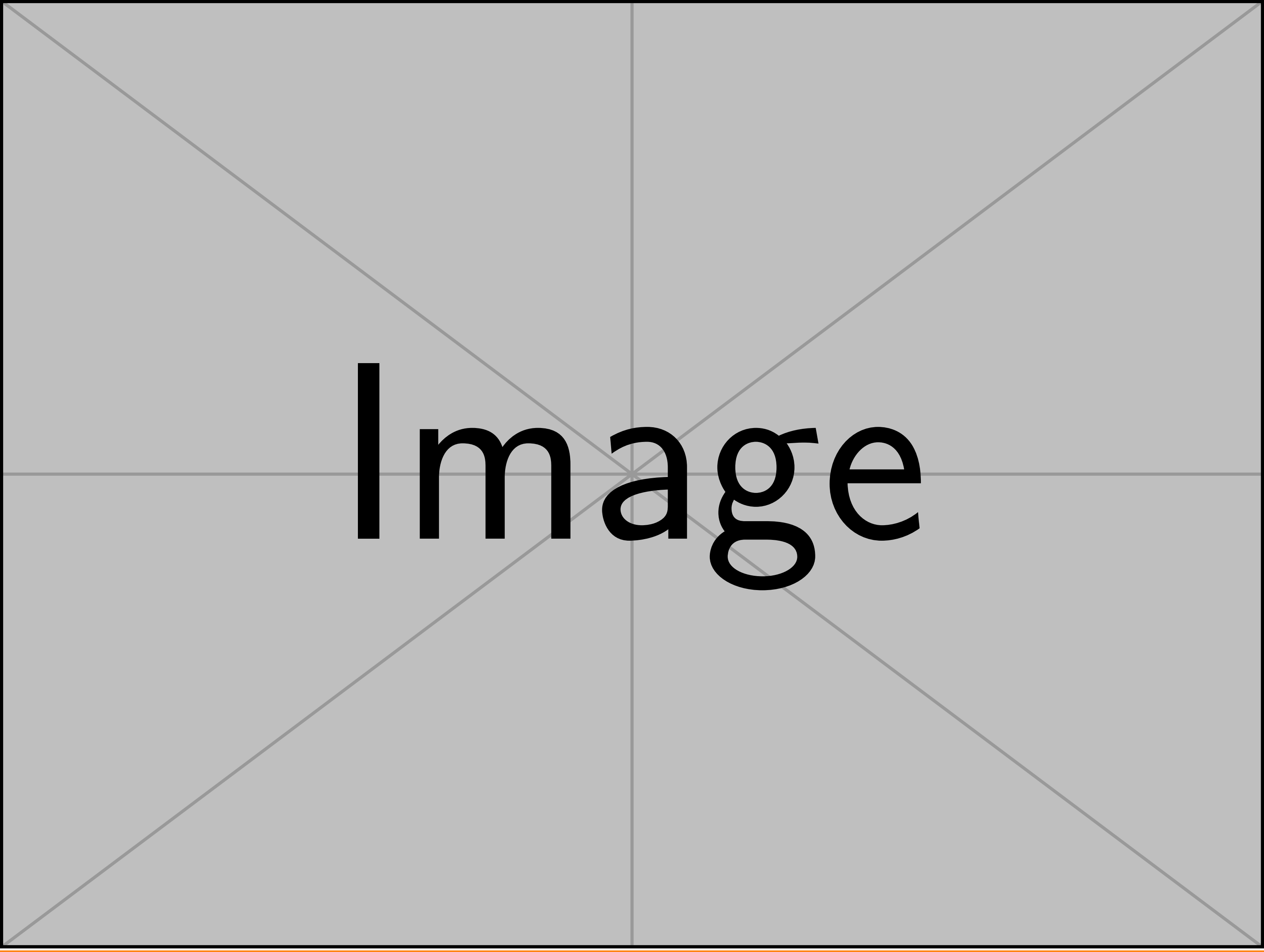


Image

目录

第 1 章 整式乘除法

1.1 同底数幂的乘法

一、 知识要点

1. 运算规则: 同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加.
2. 公式:

$$a^m \cdot a^n = \underline{a^{m+n}}(m,n\text{都是正整数}) \tag{1.1}$$

3. 公式推导:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m\text{个}a} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{n\text{个}a} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{(m+n)\text{个}} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

4. 拓展公式:

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = \underline{a^{m+n+p}} \tag{1.2}$$

二、 例题

例 1.1 计算:

(1) $10^2 \times 10^3 = \underline{10^5}$

(2) $10^5 \times 10^8 = \underline{10^{13}}$

(3) $10^m \times 10^n = \underline{10^{m+n}}$

例 1.2 计算:

(1) $2^m \times 2^n = \underline{2^{m+n}}$

(2) $(\frac{1}{7})^m \times (\frac{1}{7})^n = \underline{(\frac{1}{7})^{m+n}}$

(3) $(-3)^m \times (-3)^n = \underline{(-3)^{m+n}}$

例 1.3 计算:

(1) $(-3)^7 \times (-3)^6 = \underline{(-3)^{13}}$

(2) $(\frac{1}{111})^3 \times \frac{1}{111} = \underline{(\frac{1}{111})^4}$

(3) $-x^3 \cdot x^5 = \underline{-x^8}$

(4) $b^{2m} \cdot b^{2m+1} = \underline{b^{4m+1}}$

例 1.4 光在真空中的速度约为 $3 \times 10^8 m/s$, 太阳光照射到地球上大约需要 $5 \times 10^2 s$, 地球距离太阳大约有多远.

解 光在真空中的速度约为 $3 \times 10^8 m/s$, 太阳光照射到地球上大约需要 $5 \times 10^2 s$, 地球距离太阳大约有多远.

三、 习题

(一) 基础题

习题 1.1 计算:

(1) $5^2 \times 5^7 = \underline{5^9}$

(2) $7 \times 7^3 \times 7^2 = \underline{7^6}$

(3) -$x^2 \cdot x^3 = \underline{-x^5}$

(4) $(-c)^3 \cdot (-c)^m = \underline{(-c)^{3+m}}$

习题 1.2 一种电子计算机每秒可做 4×10^9 次运算, 它工作 $5 \times 10^2 s$ 可做多少次运算?

解 答:2×10^{12}

习题 1.3 光在真空中的速度约为 $3 \times 10^8 m/s$, 太阳系以外距离地球最近的恒星是比邻星, 它发出的光到达地球大约需要 4.22 年. 一年以 $3 \times 10^7 s$ 计算, 比邻星与地球的距离约为多少?

解 答:$3 \times 10^8 \times 3 \times 10^7 \times 4.22 = 3.798 \times 10^{16} m$

习题 1.4 计算:

(1) $c \cdot c^{11} = \underline{c^{12}}$

(2) $10^4 \times 10^2 \times 10 = \underline{10^7}$

(3) $(-b)^3 \cdot (-b)^2 = \underline{-b^5}$

(4) $-b^3 \cdot b^2 = \underline{-b^5}$

(5) $x^{m-1} \cdot x^{m+1} (m > 1) = \underline{x^{2m}}$

(6) $a \cdot a^3 \cdot a^n = \underline{a^{4+n}}$

习题 1.5 已知 $a^m = 2, a^n = 8$, 求$a^{m+n} = \underline{16}$

习题 1.6 下列计算是否正确? 如有错误请改正.

(1) $a^3 \cdot a^2 = a^6$

解 错. $= a^5$

(2) $b^4 \cdot b^4 = 2b^4$

解 错. $= b^8$

(3) $x^5 + x^5 = x^{10}$

解 错.$= 2x^5$

(4) $y^7 \cdot y = y^8$

解 答: 对

习题 1.7 在我国, 平均每平方千米的土地一年从太阳得到的能量, 相当于燃烧 $1.3 \times 10^8 kg$ 煤炭所产生的能量. 我国 960万km^2 的土地上, 一年从太阳得到的能量相当于燃烧多少千克的煤所产生的能量?

解 答:$1.3 \times 10^8 \times 960 \times 10^4 = 1.248 \times 10^{15} kg$

习题 1.8 某种细菌每过一分钟由 1 个分裂成成 2 个.

(1) 经过 5min,1 个细菌分裂成多少个?

(2) 这些细菌再继续分裂, $t$min 后共分裂成多少个?

解 答:(1) 2^5 个

(2) 2^{5+t} 个

1.2 幂的乘方与积的乘方

一、 知识要点

1. 幂的乘方

(1) 运算规则: 同底数幂的乘方, 底数不变, 指数相乘.

(2) 公式:

$$(a^m)^n = \underline{a^{mn}}(m, n\text{都是正整数}) \tag{1.3}$$

(3) 公式推导:

$$
\begin{aligned}
(a^m)^n &= \overbrace{(a^m \cdot a^m \cdots a^m)}^{n个m} \\
&= a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}} \\
&= a^{mn}
\end{aligned}
$$

2. 积的乘方
   (1) 运算规则: 积的乘方等于<u>乘方的积</u>.
   (2) 公式:

$$(ab)^n = \underline{a^n b^n}(n是正整数) \tag{1.4}$$

   (3) 公式推导:

$$
\begin{aligned}
(ab)^n &= \underbrace{((ab)\cdot(ab)\cdots(ab))}_{n个ab} \\
&= \underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n个a} \cdot \underbrace{b\cdot b\cdots b}_{n个b} \\
&= a^n b^n
\end{aligned}
$$

二、 例题

(一) 幂的乘方

例 1.5 计算:

(1) $(6^2)^4$=$\underline{6^8}$

(2) $(a^2)^3$=$\underline{a^6}$

(3) $(a^m)^2$=$\underline{a^{2m}}$

(4) $(a^m)^n$=$\underline{a^{mn}}$

例 1.6 计算:

(1) $(10^2)^3 =\underline{10^6}$

(2) $(b^5)^5 =\underline{b^{25}}$

(3) $(a^n)^3 =\underline{a^{3n}}$

(4) $-(x^2)^m =\underline{-x^{2m}}$

(5) $(y^2)^3 \cdot y =\underline{y^7}$

(6) $2(a^2)^6 - (a^3)^4 =\underline{a^{12}}$

例 1.7 地球, 木星, 太阳可以近似地看作是球体. 木星, 太阳的半径分别约是地球的 10 倍和 10^2 倍, 它们的体积分别约是地球的多少倍?(球体体积公式为 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, 其中 V 是球的体积, r 是球的半径.

解 答:1000 倍,1 百万倍.

(二) 积的乘方

例 1.8 计算:

(1) $(3\times 5)^4 = 3^{(\underline{\quad\quad})}\cdot 5^{(\underline{\quad\quad})}$

(2) $(3\times 5)^m = 3^{(\underline{\quad\quad})}\cdot 5^{(\underline{\quad\quad})}$

(3) $(ab)^n = a^{(\underline{\quad\quad})}\cdot b^{(\underline{\quad\quad})}$

例 1.9 计算:

(4) $(3x)^2 = \underline{9x^2}$

(5) $(-2b)^5 = \underline{-32b^5}$

(6) $(-2xy)^4 = \underline{16x^4y^4}$

(7) $(3a^2)^n = \underline{3^n a^{2n}}$

例 1.10 地球可以近似地看作是球体, 地球的半径约为 $6\times 10^3 km$, 它的体积大约是多少立方千米?(π 取近似值 3.14)

解 答:$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times (6\times 10^3)^3 = 9.04\times 10^{11} m^3$

三、 习题

(一) 幂的乘方

习题 1.9 计算:

(1) $(10^3)^3 = \underline{10^9}$

(2) $-(a^2)^5 = \underline{-a^{10}}$

(3) $(x^3)^4\cdot x^2 = \underline{x^{14}}$

习题 1.10 计算:

(1) $[(\frac{1}{3})^3]^2 = \underline{(\frac{1}{3})^6}$

(2) $(a^4)^2 = \underline{a^8}$

(3) $-(b^5)^2 = \underline{-b^{10}}$

(4) $(y^2)^{2n} = \underline{y^{4n}}$

(5) $(b^n)^3 = \underline{b^{3n}}$

(6) $(x^3)^{3n} = \underline{x^{9n}}$

习题 1.11 计算:

(1) $-p\cdot(-p)^4=\underline{-p^5}$

(2) $(a^2)^3\cdot(a^3)^2=\underline{a^{12}}$

(3) $(t^m)^2\cdot t=\underline{t^{2m+1}}$

(4) $(x^4)^6-(x^3)^8=\underline{0}$

习题 1.12 下面的计算是否正确? 如有错误请改正

(1) $(x^3)^3=x^6$

解 错.x^9

(2) $a^6\cdot a^4=a^{24}$

解 a^{10}

习题 1.13 $1m=10dm=100cm$, 那么 $1m^2$ 等于多少 dm^2? 等于多少 cm^2?

解 $1m^2=100dm^2=10^4cm^2$

习题 1.14 $1m=10dm=100cm$, 那么 $1m^3$ 等于多少 dm^3? 等于多少 cm^3?

解 $1m^3=1000dm^3=10^6cm^3$

习题 1.15 $1cm=10^{-1}dm=10^{-2}m$, 那么 $1cm^2$ 等于多少 dm^2? 等于多少 m^2?

解 $1cm^2=10^{-2}dm^2=10^{-4}m^2$

习题 1.16 $1cm=10^{-1}dm=10^{-2}m$, 那么 $1cm^3$ 等于多少 dm^3? 等于多少 m^3?

解 $1cm^3=10^{-3}dm^3=10^{-6}m^3$

(二) 积的乘方

习题 1.17 计算:

(1) $(3b)^2=\underline{9b^2}$

(2) $-(ab)^2=\underline{-a^2b^2}$

(3) $-a^3+(-4a)^2a=\underline{-15a^3}$

(4) $(y^2z^3)^3=\underline{y^6z^9}$

习题 1.18 计算:

(1) $(-3n)^3 = \underline{-27n^3}$

(2) $(5xy)^3 = \underline{125x^3y^3}$

(3) $-a^3 + (-4a)^2a = \underline{15a^3}$

习题 1.19 计算:

(1) $(xy^4)^m = \underline{x^my^{4m}}$

(2) $-(p^2q)^n = \underline{-p^{2n}q^n}$

(3) $(xy^{3n})^2 + (xy^6)^n = \underline{x^2y^{6n} + x^ny^{6n}}$

(4) $(-3x^3)^2 - [(2x)^2]^3 = \underline{-55x^6}$

习题 1.20 下面的计算是否正确? 如有错误请改正.

(1) $(ab^4)^4 = ab^8$

解 错.a^4b^{16}

(2) $(-3pq)^2 = -6p^2q^2$

解 错.$9p^2q^2$

习题 1.21 简便运算:

(1) $2^2 \times 3 \times 5^2$

解 $= 2^2 \times 5^2 \times 3 = (2 \times 5)^2 \times 3 = 300$

(2) $2^4 \times 3^2 \times 5^3$

解 $= (2 \times 5)^3 \times 2 \times 3^2 = 1000 \times 2 \times 9 = 18000$

习题 1.22 $(abc)^n = \underline{a^nb^nc^n}$

1.3 同底数幂的除法

一、 知识要点

1. 同底数幂的除法

(1) 运算规则: 同底数幂相除, 底数不变, 指数相减.

(2) 公式:

$$a^m \div a^n = \underline{a^{m-n}} \tag{1.5}$$

$$a^0 = 1(a \neq 0) \tag{1.6}$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}(a \neq 0) \tag{1.7}$$

(3) 公式推导:

$$\begin{aligned} a^m \div a^n &= \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{m\text{个}a}}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{个}a}} \\ &= \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{(m-n)\text{个}} \\ &= a^{m-n} \end{aligned}$$

2. 科学记数法

(1) 定义: 把一个数表示成 a 与 10 的 n 次幂相乘的形式 ($1 \leq |a| < 10, n$ 为整数), 当数的绝对值小于 1 时,n 是负整数. 用科学记数法可以很方便的表示一些绝对值较大或较小的数.

(2) 科学记数法的精确度:$a \times 10^n$ 的的精确度以 a 的最后一个数在原数中的数位为准. 如 13600 精确到十位记作 1.360×10^4; 精确到百位记作 1.36×10^4; 精确到千位记作 1.3×10^5.

二、 例题

(一) 同底数幂的除法

例 1.11 计算:

(1) $10^{12} \div 10^9 = \underline{10^3}$

(2) $10^m \div 10^n = \underline{10^{m-n}}$

(3) $(-3)^m \div (-3)^n = (-3)^{m-n}$

例 1.12 计算:

(1) $a^7 \div a^4 = \underline{a^3}$

(2) $(-x)^6 \div (-x)^3 = \underline{-x^3}$

(3) $(xy)^4 \div (xy) = \underline{x^3y^3}$

(4) $b^{2m+2} \div (b^2) = \underline{b^{2m}}$

例 1.13 计算:

(1) $10^4 = 10000$

(2) $10^{(\underline{\quad})} = 1000$

(3) $10^{(\underline{\quad})} = 100$

(4) $10^{(\underline{\quad})} = 10$

(5) $2^4 = 16$

(6) $2^{(\underline{\quad})} = 8$

(7) $2^{(\underline{\quad})} = 4$

(8) $2^{(\underline{\quad})} = 2$

例 1.14 用小数或分数表示下列各数:

(1) $10^{-3}=\underline{0.001}$

(2) $7^0\times 8^{-2}=\underline{\frac{1}{64}}$

(3) $1.6\times 10^{-4}=\underline{0.00016}$

例 1.15 计算:

(4) $7^{-3}\div 7^{-5}=\underline{49}$

(5) $3^{-1}\div 3^{6}=\underline{3^{-7}}$

(6) $(\frac{1}{2})^{-5}\div(\frac{1}{2})^{2}=\underline{2^7}$

(7) $(-8)^0\div(-8)^{-2}=\underline{64}$

例 1.16 一种液体每升含有 10^{12} 个有害细菌, 为了试验某种杀菌剂的效果, 科学家们进行了实验, 发现 1 滴杀菌剂可以杀死 10^9 个此种细菌. 要将 $1L$ 液体中的有害细菌全部杀死, 需要这种杀菌剂多少滴?

解 $\frac{10^{12}}{10^9}=10^3$ 滴

(二) 科学记数法

例 1.17 用科学记数法表示:

(1) 细胞的直径只有 1 微米 (μm), 即 $0.000,001m$

解 1×10^{-6}m

(2) 某种计算机完成一次基本运算的时间约为 1 纳秒 (ns), 即 $0.000,000,001s$

解 1×10^{-9}s

(3) 一个氧原子的质量为 $0.000,000,000,000,000,000,000,026,57kg$

解 2.657×10^{-26} kg

例 1.18 用科学记数法表示:

(4) 0.000,000,000,1 = $\underline{1\times 10^{-10}}$

(5) 0.000,000,000,002,9 = $\underline{2.9\times 10^{-12}}$

(6) 0.000,000,001,295 = $\underline{1.295\times 10^{-9}}$

例 1.19 PM2.5 是指大气中直径小于或等于 $2.5\mu m$ 的颗粒物, 也称为可入肺颗粒物. 假设一种可入肺颗粒物的直径约为 $2.5\mu m$, 相当于多少米? 多少个这样的颗粒物首尾相接连起来能达到 1m?

解 2.5×10^{-6}m; $\frac{1}{2.5\times 10^{-6}}=4\times 10^5=400000$ 个

三、 习题

(一) 同底数幂的除法

习题 1.23 计算:

(1) $x^{12} \div x^4 =\underline{x^8}$

(2) $(-y)^3 \div (-y)^2 =\underline{-y}$

(3) $-(k^6 \div k^6) =\underline{-1}$

(4) $(-r)^5 \div r^4 =\underline{-r}$

(5) $m \div m^0 =\underline{m}$

(6) $(mn)^5 \div (mn) =\underline{m^4n^4}$

习题 1.24 计算:

(1) $2^{13} \div 2^7$=$\underline{2^6}$

(2) $(-\frac{3}{2})^6 \div (-\frac{3}{2})^2$=$\underline{\frac{81}{16}}$

(3) $a^{11} \div a^5$=$\underline{a^6}$

(4) $(-x)^7 \div (-x)$=$\underline{x^6}$

(5) $a^{-4} \div a^{-6}$=$\underline{a^2}$

(6) $6^{2m+1} \div 6^m$=$\underline{6^{m+1}}$

(7) $5^{n+1} \div 5^{3n+1}$=$\underline{5^{-2n}}$

(8) $9^n \div 9^{n+2}$=$\underline{\frac{1}{81}}$

习题 1.25 用小数或分数表示下列各数:

(1) $(\frac{1}{2})^0$= $\underline{1}$

(2) 3^{-3}= $\underline{\frac{1}{27}}$

(3) 1.3×10^{-5}= $\underline{0.000013}$

(4) 5^{-2}= $\underline{\frac{1}{25}}$

习题 1.26 下面的计算是否正确? 如有错误请改正

(1) $a^6 \div a = a^6$<u>错.a^5</u>

(2) $b^6 \div b^3 = b^2$<u>错.b^2</u>

(3) $a^{10} \div a^9 = a$<u>对.</u>

(4) $(-bc)^4 \div (-bc)^2 = -b^2c^2$<u>错.$b^2c^2$</u>

习题 1.27 某种细胞分裂时,1 个细胞分裂 1 次变为 2 个, 分裂 2 次变为 4 个, 分裂 3 次变为 8 个, …… 你能由此说明 $2^0 = 1$ 的合理性吗?

解 不分裂, 即分裂次数为 0 时, 结果为 1.

(二) 科学记数法

习题 1.28 用科学计数法表示:

(1) 0.000,000,72= $\underline{7.2 \times 10^{-7}}$

(2) 0.000,861= $\underline{8.52 \times 10^{-4}}$

(3) 0.000,000,000,342,5= $\underline{3.425 \times 10^{-10}}$

习题 1.29 1 个电子的质量为 $0.000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 911g$, 用科学记数法表示这个数.

解 $9.11 \times 10^{-28}\text{g}$

习题 1.30 纳米 (nm) 是一种长度单位, $1nm$ 为十亿分之一米, 直径为 $1nm$ 的球与乒乓球相比, 相当于乒乓球与地球相比. 用科学记数法表示纳米与米的单位转换.

解 $1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$

习题 1.31 用科学记数法表示万, 亿.

解 $1 \times 10^4, 1 \times 10^8$

习题 1.32 国际单位制词头用来表示单位的倍数和分数, 常用的词头有: 兆千 (个) 毫微纳, 其中前面一个为后面一个的 1000 倍, 写出它们的一般形式, 然后用科学记数法表示.

解 兆: 百万, 毫: 千分之一, 微: 百万分之一, 纳: 十亿分之一.

$M: 10^6, K: 10^3, 10^0, m: 10^{-3}, \mu: 10^{-6}, \text{n}: 10^{-9}$

习题 1.33 用科学记数法表示:

(1) 0.007,398= $\underline{7.398 \times 10^{-3}}$

(2) 0.000,022,6= $\underline{2.26 \times 10^{-5}}$

(3) 0.000,000,000,054,2= $\underline{5.42 \times 10^{-11}}$

(4) 0.000,000,000,000,000,000,000,199,4= $\underline{1.994 \times 10^{-22}}$

习题 1.34 空气的密度是 $1.293 \times 10^{-3} g/cm^3$, 用小数把它表示出来.

解 $0.001293\ \text{g/cm}^3$

习题 1.35 一个铁原子的质量为 $0.000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 092, 88kg$, 用科学记数法表示.

解 $9.288\times 10^{-26}\text{kg}$

习题 1.36 人体内一种细胞的直径约为 $1.56\mu m$, 相当于多少米? 多少个这样的细胞首尾连接起来能达到 $1m$?

解 $1.56\text{mm}=1.56\times 10^{-6}\text{m}=0.000,001,56\text{m}$

$\frac{1}{1.56\times 10^{-6}}=6.41\times 10^{5}=641,000$ 个

1.4 整式的乘法

一、 知识要点

1. 单项式与单项式相乘: 把系数, 相同字母的幂分别相乘, 其余字母连同它的指数不变作为积的因式.
2. 单项式与多项式相乘: 根据分配率用单项式去乘多项式的每一项, 再把所得的积相加.
3. 多项式与多项式相乘: 先用一个多项式的每一项乘另一个多项式的每一项, 再把所得的积相加.

二、 例题

(一) 单项式与单项式相乘

例 1.20 计算:

(1) $3a^2b\cdot 2ab^3=\underline{6a^3b^3}$

(2) $xyz\cdot y^2z=\underline{xy^3z^2}$

(3) $2xy^2\cdot \frac{1}{3}xy=\underline{\frac{2}{3}x^2y^3}$

(4) $-2a^2b^3\cdot(-3a)=\underline{2a^4b^3}$

(5) $7xy^2z\cdot(2xyz)^2=\underline{14x^3y^4z^3}$

例 1.21 计算:

(6) $5x^3\cdot 2x^2y=\underline{10x^5y}$

(7) $-3ab\cdot(-4b^2)=\underline{12ab^3}$

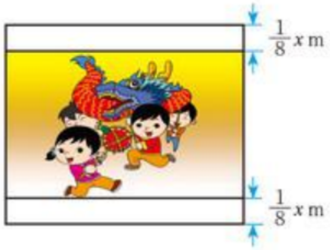
(8) $3ab\cdot 2a=\underline{6a^2b}$

(9) $yz\cdot 2y^2z^2=\underline{2y^3z^3}$

(10) $(2x^2y)^3\cdot(-4xy^2)=\underline{-32x^7y^5}$

(11) $\frac{1}{3}a^3b\cdot 6a^5b^2c\cdot(-ac^2)^2=\underline{2a^{10}b^3c^5}$

例 1.22 如图, 第一幅画的画面大小与纸的大小相同, 第二幅画的画面在纸的上, 下方各留有 $\frac{1}{8}x\,m$ 的空白.



(1) 第一幅和第二幅画的画面面积分别是多少平方米?

(2) 若把图中的 $1.2x$ 改为 mx, 其他不变, 则两幅画的面积又该怎样表示?

解 (1) $1.2x^2\text{m}^2$; $1.2x\cdot(1-2\times\frac{1}{8})x=0.9x^2\text{m}^2$

(2) $mx^2\text{m}^2$; $\frac{3}{4}mx^2\text{m}^2$

(二) 单项式与多项式相乘

例 1.23 计算:

(1) $2ab(5ab^2+3a^2b)$= $\underline{10a^2b^3+6a^3b^2}$

(2) $(\frac{2}{3}ab^2-2ab)\cdot\frac{1}{2}ab$= $\underline{\frac{1}{3}a^2b^3-a^2b^2}$

(3) $5m^2n(2n+3m-n^2)$= $\underline{10m^2n^2+15m^3n-5m^2n^3}$

(4) $2(x+y^2z+xy^2z^3)\cdot xyz$= $\underline{2x^2yz+2xy^3z^2+2x^2y^3z^4}$

例 1.24 计算:

(1) $a(a^2m+n)$= $\underline{a^3m+a_n}$

(2) $b^2(b+3a-a^2)$ = $\underline{b^3+3ab^2-a^2b}$

(3) $x^3y(\frac{1}{2}xy^3-1)$ = $\underline{\frac{1}{2}x^4y^4-x^3y}$

(4) $4(e+f^2d)\cdot ef^2d$ = $\underline{4e^2f^2d+4ef^4d^2}$

(三) 多项式与多项式相乘

例 1.25 计算:

(1) $(1-x)(0.6-x)$ = $\underline{x^2-1.6x+0.6}$

(2) $(2x+y)(x-y)$ = $\underline{2x^2-xy-y^2}$

例 1.26 计算:

(1) $(m+2n)(m-2n)$ = $\underline{m^2-4n^2}$

(2) $(2n+5)(n-3)$ = $\underline{2n^2-n-15}$

(3) $(x+2y)^2$ = $\underline{x^2+4xy+4y^2}$

(4) $(ax+b)(cx+d)$ = $\underline{acx^2+(ad+bc)x+bd}$

三、 习题

(一) 单项式与单项式相乘

习题 1.37 计算:

(1) $4xy\cdot(-2xy^3)=\underline{-8x^2y^4}$

(2) $a^3b\cdot ab^5c=\underline{a^4b^6c}$

(3) $2x^2y\cdot(-xy)^2=\underline{-2x^4y^3}$

(4) $\frac{2}{5}x^2y^3\cdot\frac{5}{8}xyz=\underline{\frac{1}{4}x^3y^4z}$

(5) $-xy^2z^3\cdot(-x^2y)^3=\underline{x^7y^5z^3}$

(6) $-ab^3\cdot 2abc^2\cdot(a^2c)^3=\underline{-2a^7b^4c^5}$

(二) 单项式与多项式相乘

习题 1.38 计算:

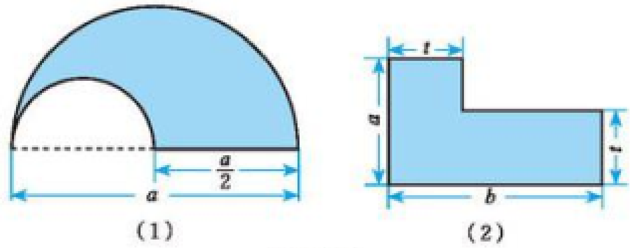
(1) $5x(2x^2-3x+4)=\underline{10x^3-15x^2+20x}$

(2) $-6x(x-3y)=\underline{-6x^2+18xy}$

(3) $-2a^2(\frac{1}{2}ab+b^2)=\underline{-a^3b-2a^2b^2}$

(4) $(\frac{2}{3}x^2y-6xy)\cdot\frac{1}{2}xy^2=\underline{\frac{1}{3}x^3y^3-3x^2y^3}$

习题 1.39 分别计算下面图中阴影部分的面积.



解 (1) 阴影 $=\frac{1}{2}$(大圆-小圆); 大圆半径 $=\frac{a}{2}$, 小圆半径 $=\frac{a}{4}$

所以: 阴影面积 $=\frac{1}{2}(\pi(\frac{1}{2}a)^2-\pi(\frac{1}{4}a)^2)=\frac{3}{32}\pi a^2$

(2) 阴影 = 大长方形-空白小长方形; 大长方形边长为 a,b, 小长方形边长为 $b-t,a-t$

所以: 阴影面积 $=ab-(b-t)(a-t)=ab-ab+bt+at-t^2=at+bt-t^2$

习题 1.40 如图, 按照图中棋子的摆法, 第 n 个图形中共有多少枚棋子?

解 规律:$2\times1,3\times2,4\times3,5\times4\cdots$

所以, 第 n 个图形: $(n+1)n=n^2+n$

(三) 多项式与多项式相乘

习题 1.41 计算:

(1) $(x+y)(a+2b)=\underline{ax+ay+2bx+2by}$

(2) $(2a+3)(\frac{3}{2}b+5)$ = $\underline{3ab+10a+\frac{9}{2}b+15}$

(3) $(2x+3)(-x-1)$ = $\underline{-2x^2-5x-3}$

(4) $(-2m-1)(3m-2)$ = $\underline{-6m^2+m+2}$

(5) $(x-y)^2$ = $\underline{x^2-2xy+y^2}$

(6) $(-2x+3)^2$ = $\underline{4x^2-12x+9}$

习题 1.42 (1) 观察:$4\times 6=24, 14\times 16=224, 24\times 26=624, 34\times 36=1224,\cdots$

发现其中的规律并用代数式表示.

(2) 利用 (1) 中的规律计算 124×126.

(3) 还有类似的规律吗?

解 (1) ① $(10n+4)(10n+6)=100n^2+100n+24$; ②$(n-1)(n+1)=n^2-1$

(2) ① $(10\times 12+4)(10\times 12+6)=100\times 144+100\times 12+24=15624$ ②$124\times 126=125^2-1=15624$

(3) $(n-3)(n-4)=n^2-12$

习题 1.43 计算:$(a+b+c)(c+d+e)$

解 $ac+ad+ae+bc+bd+be+c^2+cd+ce$

1.5 平方差公式

一、 知识要点

1. 公式:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \tag{1.8}$$

2. 应用: 因式分解, 简便计算

二、 例题

(一) 平方差公式

例 1.27 计算:

(1) $(x+2)(x-2)$ = $\underline{x^2-4}$

(2) $(x+5y)(x-5y)$ = $\underline{x^2-25y^2}$

(3) $(1+3a)(1-3a)$ = $\underline{1-9a^2}$

(4) $(2y+z)(2y-z)$ = $\underline{4y^2-z^2}$

例 1.28 利用平方差公式计算:

(1) $(5+6x)(5-6x)$ = $\underline{25-36x^2}$

(2) $(x-2y)(x+2y)$ = $\underline{x^2-4y^2}$

(3) $(-m+n)(-m-n)$ = $\underline{m^2-n^2}$

例 1.29 利用平方差公式计算:

(1) $(-\frac{1}{4}x-y)(-\frac{1}{4}x+y)$ = $\underline{\frac{1}{16}x^2-y^2}$

(2) $(ab+8)(ab-8)$ = $\underline{a^2b^2-64}$

(3) $(a-b)(-a-b)$ = $\underline{b^2-a^2}$

例 1.30 利用平方差公式计算:

(1) $(a+2)(a-2)$ = $\underline{a^2-4}$

(2) $(3a+2b)(3a-2b)$ = $\underline{9a^2-4b^2}$

(3) $(-x-1)(1-x)$ = $\underline{x^2-1}$

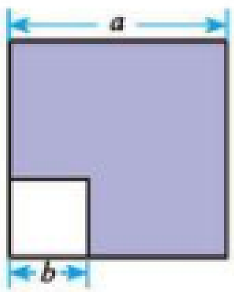
(4) $(-4k+3)(-4k-3)$ = $\underline{16k^2-9}$

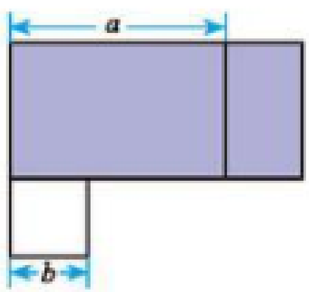
例 1.31 平方差公式的几何验证: 如图, 边长为 a 的大正方形中有一个边长为 b 的小正方形.

(1) 写出左图中阴影部分的面积.

(2) 如右图, 阴影部分可以拼成一个长方形, 这个长方形的长, 宽和面积分别是多少?

(3) 比较 (1)(2) 的结果, 和平方差公式之间的联系?





解 (1) a^2-b^2

(2) 长:$(a+b)$, 宽 $(a-b)$, 面积 $(a+b)(a-b)$

(3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(二) 平方差公式应用

例 1.32 (1) 计算下列算式, 并观察它们共同的特点

(i) $7\times 9=\underline{63}$	(iii) $11\times 13=\underline{143}$	(v) $79\times 81=\underline{6399}$
(ii) $8\times 8=\underline{64}$	(iv) $12\times 12=\underline{144}$	(vi) $80\times 80=\underline{6400}$

(2) 用字母表示这一规律. $\underline{(n+1)(n-1)=n^2-1}$

例 1.33 用平方差公式进行计算:

(1) $103 \times 97 = \underline{9991}$

(2) $118 \times 122 = \underline{14436}$

例 1.34 计算:

(1) $a^2(a+b)(a-b)+a^2b^2 = \underline{a^4}$

(2) $(2x-5)(2x+5)-2x(2x-3) = \underline{4x^2-25-4x^2+6x=6x-25}$

(3) $704 \times 696 = \underline{700^2-4^2=489984}$

(4) $(x+2y)(x-2y)+(x+1)(x-1) = \underline{x^2-4y^2+x^2-1=2x^2-4y^2-1}$

(5) $x(x-1)-(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{3}) = \underline{x^2-x-x^2+\frac{1}{9}=-x+\frac{1}{9}}$

三、 习题

(一) 平方差公式

习题 1.44 计算:

(1) $(3x+7y)(3x-7y) = \underline{9x^2-49y^2}$

(2) $(0.2x-0.3)(0.2x+0.3) = \underline{0.04x^2-0.09}$

(3) $(mn-3n)(mn+3n) = \underline{m^2n^2-9n^2}$

(4) $(-2x+3y)(-2x-3y) = \underline{4x^2-9y^2}$

(5) $(-\frac{1}{4}x-2y)(-\frac{1}{4}x+2y) = \underline{\frac{1}{16}x^2-4y^2}$

(6) $(5m-n)(-5m-n) = \underline{n^2-25m^2}$

习题 1.45 计算:

(1) $(a^n+b)(a^n-b) = \underline{a^{2n}-b^2}$

(2) $(a+1)(a-1)(a^2+1) = \underline{a^4-1}$

(二) 平方差公式应用

习题 1.46 计算:

例 1.1 $(2m+3)(2m-3) = \underline{4m^2-9}$

例 1.2 $x(x+1)+(2-x)(2+x) = \underline{x^2+x+4-x^2=x+4}$

例 1.3 $(3x-y)(3x+y)+y(x+y) = \underline{9x^2-y^2+xy+y^2=9x^2+xy}$

例 1.4 $(a+\frac{1}{2}b)(a-\frac{1}{2}b)-(3a-2b)(3a+2b) = \underline{a^2-\frac{1}{4}b^2-9a^2+4b^2=-8a^2+\frac{15}{4}b^2}$

习题 1.47 用平方差公式进行计算:

例 1.1 $1007 \times 993 = \underline{1000^2-49=999,951}$

例 1.2 $108 \times 112 = \underline{110^2 - 4 = 12096}$

1.6 完全平方公式

一、 知识要点

1. 公式:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \tag{1.9}$$

2. 公式推导

$$(a+b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = [a+(-b)]^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. 应用: 因式分解, 简便计算

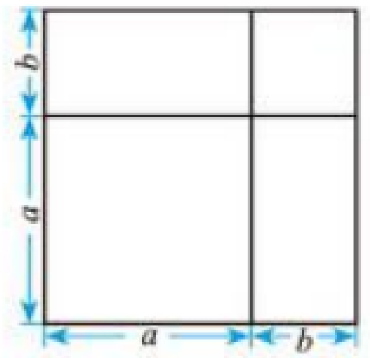
二、 例题

例 1.35 计算:

(1) $(m+3)^2 = \underline{m^2 + 6m + 9}$

(2) $(2+3x)^2 = \underline{9x^2 + 12x + 4}$

例 1.36 用下图解释和验证完全平方公式:



例 1.37 利用完全平方公式计算:

(1) $(2x-3)^2 = \underline{4x^2 - 12x + 9}$

(2) $(4x+5y)^2 = \underline{16x^2 + 40xy + 25y^2}$

(3) $(mn-a)^2 = \underline{m^2n^2 - 2amn + a^2}$

例 1.38 计算:

(1) $(\frac{1}{2}x - 2y)^2 = \underline{\frac{1}{4}x^2 - xy + 4y^2}$

(2) $(2xy+\frac{1}{5}x)^2 = \underline{4x^2y^2+\frac{4}{5}x^2y+\frac{1}{25}x^2}$

(3) $(n+1)^2-n^2 = \underline{n^2+2n+1-n^2=2n+1}$

例 1.39 计算:

(1) $102^2 = \underline{(100+2)^2=10000+400+4=10404}$

(2) $197^2 = \underline{(200-3)^2=200^2-1200+9=38809}$

例 1.40 计算:

(3) $(x+3)^2-x^2 = \underline{6x+9}$

(4) $(a+b+3)(a+b-3) = \underline{(a+b)^2-9=a^2+2ab+b^2-9}$

(5) $(x+5)^2-(x-2)(x-3) = \underline{x^2+10x+25-(x^2-5x+6)=15x+19}$

例 1.41 一位老人非常喜欢孩子, 每当有孩子到他家做客时, 老人都要拿出糖果招待他们. 如果来一个孩子, 老人就给这个孩子 1 块糖; 来两个孩子, 老人就给每个孩子 2 块糖, 如果来 3 个孩子, 老人就给每个孩子 3 块糖果 ……

假如第一天有 a 个孩子一起去看老人, 第二天有 b 个孩子一起去看老人, 第三天有 $(a+b)$ 个孩子一起去看老人, 那么第三天老人给出去的糖果和前两天给出去的糖果总数一样多吗?

解 第一天:a^2, 第二天:b^2, 第三天:$(a+b)^2$

例 1.42 利用整式乘法公式计算:

(6) $96^2 = \underline{(100-4)^2=9216}$

(7) $(a-b-3)(a-b+3) = \underline{(a-b)^2-3^2=a^2-2ab+b^2-9}$

三、 习题

习题 1.48 计算:

(1) $(2x+5y)^2 = \underline{4x^2+20xy+25y^2}$

(2) $(\frac{1}{3}m-\frac{1}{2})^2 = \underline{\frac{1}{9}m^2-\frac{1}{3}m+\frac{1}{4}}$

(3) $(-2t-1)^2 = \underline{4t^2+4t+1}$

(4) $(\frac{1}{5}x+\frac{1}{10}y)^2 = \underline{\frac{1}{25}x^2+\frac{1}{25}xy+\frac{1}{100}y^2}$

(5) $(7ab+2)^2 = \underline{49a^2b^2+28ab+4}$

(6) $(-cd+\frac{1}{2})^2 = \underline{c^2d^2-cd+\frac{1}{4}}$

习题 1.49 一个圆的半径长为 $r\ cm$, 减少 2 cm 后, 这个圆的面积减少了多少?

解 $\pi r^2-\pi(r-2)^2=(4\pi r-4\pi)\mathrm{cm}^2$

习题 1.50 观察下列各式:$15^2 = 225, 25^2 = 625, 35^2 = 1225, \cdots$

个位数字是 5 的两位数平方后, 末尾的两个数有什么规律? 为什么?

解 末尾都是 25. $(10n+5)^2 = 100n^2 + 100n + 25 = 100n(n+1) = 25$

习题 1.51 计算 $(a+b+c)^2$

解 $(a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

习题 1.52 计算:

(1) $(2x+y+1)(2x+y-1)$ = $\underline{(2x+y)^2 - 1 = 4x^2 + 4xy + y^2 - 1}$

(2) $(x-2)(x+2) - (x+1)(x-3)$ = $\underline{x^2 - 4 - (x^2 - 2x - 3) = 2x - 1}$

(3) $(ab+1)^2 - (ab-1)^2$ = $\underline{(ab+1+ab-1)(ab+1-ab+1) = 4ab}$

(4) $(2x-y)^2 - 4(x-y)(x+2y)$ = $\underline{4x^2 - 4xy + y^2 - 4(x^2 + xy - 2y^2) = -8xy + 9y^2}$

习题 1.53 一个底面是正方形的长方体, 高为 6 cm, 底面正方形边长为 5 cm, 如果它的高不变, 底面正方形边长增加了 a cm, 那么它的体积增加了多少?

解 原体积: $6 \times 5 \times 5 = 150$; 改变后体积 $6 \times (5+a)(5+a) = 6a^2 + 60a + 150$

所以, 增加 $6a^2 + 60a$

习题 1.54 利用完全平方公式计算:

(1) 63^2 = $\underline{(60+3)^2 = 3600 + 360 + 9 = 3969}$

(2) 998^2 = $\underline{(1000-2)^2 = 1000^2 - 4 \times 1000 + 4 = 996004}$

习题 1.55 计算 $(a+b)^3$

解 $= (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

1.7 整式的除法

一、 知识要点

1. 单项式相除: 把系数, 同底数幂分别相除后, 作为商的因式; 对于只在被除式里含有的字母, 则连同它的指数一起作为商的一个因式.

   $x^5y \div x^2; 8m^2n^2 \div 2m^2n; a^4b^2c \div 3a^2b$

2. 多项式除以单项式, 先把多项式的每一项分别除以单项式, 再把所得的商相加.

   $(ad+bd) \div d; (a^2b+3ab) \div a; (xy^3 - 2xy) \div xy$

3. 类比分数约分

二、 例题

(一) 单项式除单项式

例 1.43 计算:

(1) $-\frac{3}{5}x^2y^3 \div 3x^2y$ = $\underline{-\frac{1}{5}y^2}$

(2) $10a^4b^3c^2 \div 5a^3bc$ = $\underline{2ab^2c}$

(3) $(2x^2y)^3 \cdot (-xy^2) \div 14x^4y^3$ = $\underline{-\frac{4}{7}x^3y^2}$

(4) $(2a+b)^4 \div (2a+b)^2$ = $\underline{(2a+b)^2 = 4a^2+4ab+b^2}$

例 1.44 如图, 三个大小相同的球恰好放在一个圆柱形盒子里, 三个球的体积之和占整个盒子容积的几分之几?

解 三个球体积 = $3\times\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^3$; 圆柱体积 =$Sh = \pi r^2\cdot 6r = 6\pi r^3$; $\frac{4\pi r^3}{6\pi r^3} = \frac{2}{3}$

例 1.45 计算:

(1) $2a^6b^3 \div a^3b^2$ = $\underline{2a^3b}$

(2) $\frac{1}{48}x^3y^2 \div \frac{1}{16}x^2y$ = $\underline{\frac{1}{3}xy}$

(3) $3m^2n^3 \div (mn)^2$ = $\underline{3n}$

(4) $(2x^2y)^3 \div 6x^3y^2$ = $\underline{\frac{4}{3}x^3y}$

(二) 单项式除多项式

例 1.46 计算:

(1) $(6ab+8b)\div 2b$ = $\underline{3a+4}$

(2) $(27a^3-15a^2+6a)\div 3a$ = $\underline{9a^2-5a+2}$

(3) $(9x^2y-6xy^2)\div 3xy$ = $\underline{3x-2y}$

(4) $(3x^2y-xy^2+\frac{1}{2}xy)\div(-\frac{1}{2}xy)$ = $\underline{-6x+2y-1}$

例 1.47 小明在爬一小山时, 第一阶段的平均速度为 v, 所用时间为 t_1; 第二阶段的平均速度为 $\frac{1}{2}v$, 所用时间为 t_2.

下山时, 小明的平均速度保持为 $4v$. 已知小明上山的路程和下山的路程是相同的, 那么小明下山用了多长时间?

解 总路程 $=vt_1+\frac{1}{2}vt_2$, 时间 $=\frac{vt_1+\frac{1}{2}vt_2}{4v}=\frac{2t_2+t_2}{8}$

三、 习题

(一) 单项式除单项式

习题 1.56 计算:

(1) $(-2r^2s)^2\div 4rs^2=\underline{r^3}$

(2) $(5x^2y^3)^2\div 25x^4y^5=\underline{y}$

(3) $(x+y)^3\div(x+y)=\underline{x^2+2xy+y^2}$

(4) $7a^5b^3c^5\div 14a^2b^3c=\underline{\frac{1}{2}a^3c^4}$

习题 1.57 计算:

(1) $8a^4b^3c\div 2a^2b^3\cdot(-\frac{2}{3}a^3bc^2)=\underline{-\frac{8}{3}a^5bc^3}$

(2) $(3x^2y)^2\cdot(-15xy^3)\div(-9x^4y^2)=\underline{15xy^3}$

习题 1.58 我们都知道 “先看见闪电, 后听见雷声”, 那是因为在空气中光的传播速度比声音快, 科学家们发现, 光在空气中的传播速度约为 $3\times 10^8m/s$, 而声音在空气中的传播速度大约只有 $300m/s$, 你能进一步算出光的传播速度是声音的多少倍吗?

解 $3\times 10^8\div 300=10^6$ 倍

习题 1.59 一个圆柱形桶装满了水, 已知桶的底面直径为 a, 高为 b. 又知另一长方体形容器的长为 b, 宽为 a, 若把圆柱形桶中水倒入长方体形容器中 (水不溢出), 水面高度是多少?

解 $\pi\times(\frac{a}{2})^2\times b\div(ab)=\frac{1}{4}\pi a^2b\times\frac{1}{ab}=\frac{1}{4}\pi a$

(二) 多项式除单项式

习题 1.60 计算:

(1) $(5m^3n^2-6m^2)\cdot 3m=\underline{\frac{5}{3}m^2n^2-2m}$

(2) $(6a^2b-5a^2c^2)\div(-3a^2) = \underline{-2b+\frac{5}{3}c^2}$

(3) $(16x^4+4x^2+x)\div x = \underline{16x^3+4x+1}$

(4) $(3a^2b-2ab+2ab^2)\div ab = \underline{3a-2+2b}$

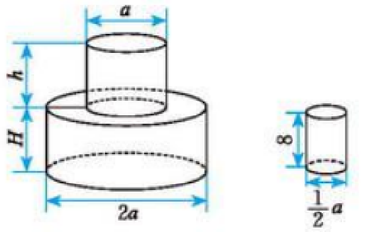
(5) $(-4a^3+6a^2b^3+3a^3b^3)\div(-4a^2) = \underline{a-\frac{3}{2}b^3-\frac{3}{4}ab^3}$

(6) $(\frac{2}{5}mn^3-m^2n^2+\frac{1}{6}n^4)\div\frac{2}{3}n^2 = \underline{\frac{3}{5}mn-\frac{3}{2}m^2+\frac{1}{4}n^2}$

(7) $(\frac{1}{10}xy^2+\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}y)\div\frac{1}{5}y = \underline{\frac{1}{2}xy+\frac{5}{4}y-\frac{5}{2}}$

(8) $[(x+1)(x+2)-2]\div x = \underline{x+3}$

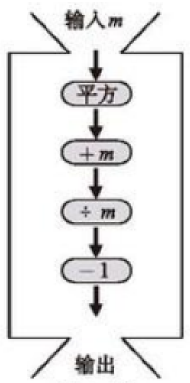
习题 1.61 图 (1) 中的瓶子中装满了水, 如果将这个瓶子中的水全部倒入图 (2) 的杯子中, 那么一共需要多少个这样的杯子?(单位:cm)



(1) 瓶子　(2) 杯子

解 $V_1=\pi(\frac{a}{2})^2h+\pi a^2H;\quad V_2=\pi(\frac{a}{4})^2\times 8=\frac{a^2}{2}\pi\quad \frac{V_1}{V_2}=\frac{h}{2}+2H$

习题 1.62 任意给一个非零数, 按下列程序进行计算, 写出输出结果.



解 $m\neq 0, (m^2+m)\div m-1=m$

1.8 章总结

一、 知识要点

1. 同底数幂的乘法: 底数不变, 指数相加.$a^m\cdot a^n=\underline{a^{m+n}}$, $a^m\cdot a^n\cdot a^p=\underline{a^{m+n+p}}$;

2. 幂的乘方: 运算规则: 同底数幂的乘方, 底数不变, 指数相乘. $(a^m)^n =$<u>a^{mn}</u>
3. 积的乘方: 积的乘方等于<u>乘方的积</u>. $(ab)^n =$<u>a^nb^n</u>
4. 同底数幂的除法: 同底数幂相除, 底数不变, 指数相减. $a^m \div a^n =$<u>a^{m-n}</u>, $a^0 = 1(a \neq 0)$, $a^{-p} = \frac{1}{a^p}(a \neq 0)$
5. 科学记数法: 把一个数表示成 a 与 10 的 n 次幂相乘的形式 $(1 \leq |a| < 10, n$ 为整数), 当数的绝对值小于 1 时,n 是负整数.
6. 整式乘法
   (1) 单项式与单项式相乘: 把系数, 相同字母的幂分别相乘, 其余字母连同它的指数不变作为积的因式.$2xy \cdot 3x^2y^2z = 6x^3y^3z$
   (2) 单项式与多项式相乘: 根据分配率用单项式去乘多项式的每一项, 再把所得的积相加.$m(a+b+c) = ma + mb + mc$
   (3) 多项式与多项式相乘: 先用一个多项式的每一项乘另一个多项式的每一项, 再把所得的积相加.$(a+b)(m+n) = am + an + bm + bn$
7. 平方差公式: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
8. 完全平方公式:$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
9. 整式除法: 类比分数约分
   (1) 单项式相除: 把系数, 同底数幂分别相除后, 作为商的因式; 对于只在被除式里含有的字母, 则连同它的指数一起作为商的一个因式. 如: $8m^2n^2 \div 2m^3np = \frac{4n}{mp}$
   (2) 多项式除以单项式, 先把多项式的每一项分别除以单项式, 再把所得的商相加. 如: $(a^2b + 3ab) \div a = ab + 3b$

二、 例题

例 1.48 概念巩固: 整式, 单项式, 多项式, 乘方, 幂, 底数, 指数

例 1.49 同底数幂相乘. 口算:

(1) $a \cdot a^3 \cdot a^5$<u>$= a^9$</u>
(2) $(-b)^2(-b)^3(-b)^5$ <u>$= b^{10}$</u>
(3) $(m+n)^2(m+n)^3$<u>$= (m+n)^5$</u>
(4) $(x-2y)^2(2y-x)^3$ <u>$= (2y-x)^5$</u>

笔记 技巧: $(a-b)^n = \begin{cases} (b-a)^n & n\text{为偶数} \\ -(b-a)^n & n\text{为奇数} \end{cases}$

例 1.50 幂的乘方. 口算

(1) $(-11^2)^3 =$<u>-11^6</u>
(2) $(-11^3)^2 =$<u>11^6</u>
(3) $[(-x^3)]^4 =$<u>x^{12}</u>

(4) $(a^3)^2 \cdot (a^2)^3 = \underline{a^{12}}$

(5) $(y^3)^6 - (y^2)^9 = \underline{0}$

(6) $(x^{2m-2})^4 \cdot (x^{m+1})^2 = \underline{x^{10m-6}}$

(7) $[(a-b)^2]^3 \cdot [(b-a)^3]^3 = \underline{(b-a)^{15}}$

(8) $[(-a)^3]^4 + [(-a)^6]^2 = \underline{2a^{12}}$

(9) $[(-2)^3]^3 + [(-2^5)]^5 = \underline{-2^9 + 2^{10} = 2^9}$

笔记 易错题, 需化简到最简形式

例 1.51 积的乘方. 口算

(1) $(3x^4)^2 = \underline{9x^8}$

(2) $(2a^3b)^2 = \underline{4a^6b^2}$

(3) $(-1\frac{1}{2}xy^2z^2)^3 = \underline{-\frac{27}{8}x^3y^6z^6}$

(4) $(-a^mb^{3m})^2 = \underline{a^{2m}b^{6m}}$

(5) $(2 \times 10^2)^3 \times (-10^3)^4 = \underline{8 \times 10^{18}}$

(6) $[3(a+b)^2]^3[-2(a+b)^3]^2 = \underline{108(a+b)^{12}}$

例 1.52 找出下列式子中的单项式, 多项式和分式:

$a^2 - 1, 0, \frac{1}{3a}, x + \frac{1}{y}, -\frac{xy^2}{4}, m, \frac{x+y}{2}, \sqrt{2} - 3b$

解 单项式:$0, -\frac{xy^2}{4}, m,$

多项式:$a^2 - 1, \frac{x+y}{2}, \sqrt{2} - 3b$

分式: $\frac{1}{3a}, x + \frac{1}{y}$

例 1.53 概念巩固: 如何确定单项式的次数

$\frac{-3\times10^2\pi a^5b}{4}$

例 1.54 概念巩固: 如何确定多项式的次数与项数.

$10^5a^2b + a^5b^{11} - 7ab \cdot 3 + 6a$ <u>16 次 3 项式</u>

例 1.55 $3x^{7-m}y^{n+3}$与 $-4x^{1-4m}y^{2n}$ 是同类项, 求 m, n

解 $7 - m = 1 - 4m, n + 3 = 2n \Rightarrow m = -2, n = 3$

例 1.56 单项式乘单项式. 口算

(1) $10x^2yz^3(-\frac{1}{2}xy^4) = \underline{-5x^3y^5z^3}$

(2) $(-\frac{3}{7}ab^2)(\frac{7}{3}a^2bc) = \underline{-a^3b^3c}$

(3) $3ab^2(-\frac{1}{3}a^2b)2abc = \underline{-2a^4b^4c}$

(4) $(-2x^{n+1}y^n)(-3xy)(-\frac{1}{2}x^2z) = \underline{-3x^{n+4}y^{n+1}z}$

(5) $-6a^2b(x-y)^2 \cdot \frac{1}{3}ab^2(y-x)^2 = \underline{-2a^3b^3(x-y)^5}$

(6) $-\frac{3}{5}(m+n)^3 \cdot n \cdot \frac{4}{3}(m+n)p = \underline{-\frac{4}{5}(m+n)^4np}$

例 1.57 $\frac{\sqrt{15-2x^2}}{3}$ 是单项式还是多项式? 是整式吗?

例 1.58 单项式乘多项式.

(1) $-\frac{3}{2}xy(\frac{2}{3}x^2y - 4xy^2 + \frac{4}{3}y) = \underline{-x^3y^2 + 6x^2y^3 - 2xy^2}$

(2) $6mn^2(2 - \frac{1}{3}mn^4) = \underline{12mn^2 - 2m^2n^6}$

(3) $-3a^2b(9ab^2 + 2a^2b - 3abc) = \underline{-27a^3b^3 - 6a^4b^2 + 9a^3b^2c}$

例 1.59 多项式乘多项式

(1) $(x+y)(a+b) = \underline{ax + bx + ay + by}$

(2) $(x-y)(x+y) = \underline{x^2 - y^2}$

(3) $(x-2)(x^2+4x-3) = \underline{x^3 + 2x^2 - 11x + 6}$

(4) $(x-3)(3x+4) = \underline{3x^2 - 5x - 12}$

(5) $(4x-3y)(4x+3y) = \underline{16x^2 - 9y^2}$

例 1.60 同底数幂相除.

(1) $-a^4 \div a = \underline{-a^3}$

(2) $5^8 \div 5^6 = \underline{25}$

(3) $a^4b^4 \div (ab)^2 = \underline{a^2b^2}$

例 1.61 单项式除单项式.

(1) $6x^2y \div 3xy = \underline{2x}$

(2) $-8a^2b^3 \div 6ab^2 = \underline{-\frac{4}{3}ab}$

(3) $4a^3b^4 \div 2a^3b = \underline{2b^3}$

例 1.62 多项式除单项式.

(1) $(25x^2 - 20x^4) \div (-5x^2) = \underline{-5 + 4x^2}$

(2) $\frac{-4a^3+12a^2b-7a^3b^2}{-4a^2} = \underline{a - 3b + \frac{7}{4}ab^2}$

例 1.63 平方差公式.

(1) 用语言描述平方差公式

(2) $(xy+1)(xy-1) = \underline{x^2y^2 - 1}$

(3) $(ab+cd)(ab-cd) = \underline{a^2b^2 - c^2d^2}$

(4) $(2a+3)(2a-3)=\underline{4a^2-9}$

(5) $(x^2+yz)(x^2-yz)=\underline{x^4-y^2z^2}$

(6) $(a+3)(a-3)-(a+4)(a-4)=\underline{7}$

(7) $(x-3)(x^2+9)(x+3)=\underline{x^4-81}$

(8) $100.5\times 99.5=\underline{9999.75}$

例 1.64 完全平方公式

(1) 用语言描述完全平方公式

(2) $x^2-16x+64=\underline{(x-8)^2}$

(3) $x^2+6x+\underline{9}=\underline{(x+3)^2}$

(4) $x^2+8x+\underline{16}=\underline{(x+4)^2}$

(5) $x^2-20x+\underline{100}=\underline{(x-10)^2}$

(6) $x^2+40x+\underline{400}=\underline{(x+20)^2}$

(7) $(3a+b)^2=\underline{9a^2+6ab+b^2}$

(8) $(x-2y)^2=\underline{x^4-4xy+4y^2}$

(9) $(3a+b)^2=\underline{9a^2+6ab+b^2}$

(10) $(x-2y)^2=\underline{x^2-4xy+4y^2}$

(11) $(-2x-3y)^2=\underline{4x^2+12xy+9y^2}$

(12) $2002^2=\underline{4008004}$

(13) $1999^2=\underline{3996001}$

例 1.65 判断正误:

(1) $a^3+a^3=a^6$ $\underline{=2a^3}$

(2) $(3a^3)^2=6a^6$ = $\underline{9a^6}$

(3) $a^3a^3=a^6$ = $\underline{\checkmark}$

(4) $(a^3)^3=a^6$ = $\underline{=a^9}$

(5) $1-\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}(x+2)(x-2)$ = $\underline{=\frac{1}{4}(2+x)(2-x)}$

(6) $(x-y)^3-(y-x)=(x-y)(x-y+1)(x-y-1)$ = $\underline{=(x-y)[(x-y)^2+1]}$

(7) $4x-2x^2-2=-2(x-1)^2$ = $\underline{=-2[(x-1)^2+1]}$

(8) $x^2-y^2-x+y=(x+y)(x-y-1)$ = $\underline{=(x-y)(x+y-1)}$

例 1.66 逆用幂运算:

(1) $2^m=64, 2^n=8,$ 求2^{m+n}

解 $2^{m+n}=2^m\cdot 2^n=64\times 8=512$

(2) $(-2)^{2007}+(-2)^{2008}$

解 $=-2^{2007}+2^{2008}=2^{2007}$

例 1.67 逆用幂乘方:$a=2^{555},b=3^{444},c=5^{333}$, 比较 a,b,c 的大小

解 $a=(2^5)^{111}=32^{111},b=81^{111},c=125^{111},\therefore a<b<c$

例 1.68 逆用积的乘方: 求 $(\frac{99}{100})^{2008}\times(\frac{100}{99})^{2009}$

解 原式 $=(\frac{99}{100})^{2008}\times(\frac{100}{99})^{2008}\times\frac{100}{99}=(\frac{99}{100}\times\frac{100}{99})^{2008}\times\frac{100}{99}=\frac{100}{99}$

例 1.69 逆用同底数幂相除: 已知 $5^m=3,25^m=11$, 求5^{3m-2n}

解 $5^{3m-2n}=\frac{5^{3m}}{5^{2n}}=\frac{(5^m)^3}{25^n}=\frac{27}{11}$

例 1.70 灵活运用整式乘法

(1) 已知 $xy^2=-6$, 求 $-xy(x^3y^7-3x^2y^5-5y)$

解 原式 $=-x^4y^8+3x^3y^6+5xy^2=-(xy^2)^4+3(xy^2)^3+5xy^2=-(-6)^4+3(-6)^3+5\times(-6)=1974$

(2) 已知 $x^2-5x=6$, 求$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

解 原式 $=[(x-1)(x-4)(x-2)(x-3)=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=120$

例 1.71 指数方程求解:

(1) $4^{3x-1}\times16=64\times4$, 求$x$

解 原式变化: $4^{3x-1}=16\Rightarrow 3x-1=2\Rightarrow x=1$

(2) 已知 $a^{n+1}\cdot a^{m+2}=a^7$, 且$m-2n=1$, 求 m^n

解 $a^{m+n+3}=a^7\Rightarrow m+n=4$, 又$m-2n=1\Rightarrow m=3,n=1,m^n=3$

例 1.72 熟练运用两个公式: 下列哪些式子可以用平方差公式, 哪些式子可以用完全平方公式.

(1) $(a+b)(a-b)=\underline{a^2-b^2}$

(2) $(-a+b)(-a-b)=\underline{a^2-b^2}$

(3) $(-a-b)(a-b)=\underline{b^2-a^2}$

(4) $(-a-b)(-a+b)=\underline{a^2-b^2}$

(5) $(-a-b)(a+b)=\underline{-a^2-2ab-b^2}$

(6) $(-a+b)(a-b)=\underline{-a^2+2ab-b^2}$

(7) $(x-3)(x^2+9)(x+3)=\underline{x^4-81}$

(8) $(2y-x-3z)(-x-2y-3z)=\underline{(x+3z)^2-4y^2=x^2+6xz+9z^2=4y^2}$

(9) $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\cdots(1-\frac{1}{10^2})$

解 原式 $=(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{10})(1-\frac{1}{10})=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\cdots\frac{9}{10}\times\frac{11}{10}=\frac{1}{2}\times\frac{11}{10}=\frac{11}{20}$

三、 习题

习题 1.63 计算:

(1) $(-\frac{3}{5})^2\cdot(-\frac{3}{5})^3\ \underline{=(-\frac{3}{5})^5=-\frac{243}{1725}}$

(2) $(a-b)^3\cdot(a-b)^4\ \underline{=(a-b)^7}$

(3) $(-a^5)^5\ \underline{=-a^{25}}$

(4) $(-\frac{1}{2}x)^7\div(-\frac{1}{2}x)\ \underline{=\frac{1}{64}x^6}$

(5) $(a+b)^3\div(a+b)\ \underline{=(a+b)^2}$

(6) $(-a^2\cdot b)^3\ \underline{=-a^6b^3}$

(7) $(-a)^2(a^2)^2\ \underline{=a^6}$

(8) $(y^2)^3\div y^6\ \underline{=1}$

(9) $(-y)^2\cdot y^{n-1}(n>1)\ \underline{=y^{n+1}}$

(10) $a^{n+1}\cdot a^{n-1}(n>1)\ \underline{=a^{2n}}$

(11) $a^{m+2}\div a^{m+1}\ \underline{=a}$

(12) $(-c^2)^{2n}\ \underline{=c^{4n}}$

习题 1.64 计算:

(1) $10^5\div10^{-1}\times10^0\ \underline{=10^6}$

(2) $16\times2^{-4}\ \underline{=1}$

(3) $(\frac{1}{3})^0\div(-\frac{1}{3})^{-2}\ \underline{=-9}$

习题 1.65 一个正方体的棱长为 $2\times10^2\,mm$.

(1) 它的表面积是多少平方米?

(2) 它的体积是多少立方米?

解 (1) 边长 $a=0.2m, S=0.2\times0.2\times6=0.24\mathrm{m}^2$

(2) 体积 $V=0.2\times0.2\times0.2=0.008\mathrm{m}^3$

习题 1.66 计算:

(1) $(x+a)(x+b)\ \underline{=x^2+ax+bx+ab}$

(2) $(3x+7y)(3x-7y)\ \underline{=9x^2-49y^2}$

(3) $(3x+9)(6x+8)\ \underline{=18x^2+78x+72}$

(4) $(\frac{1}{2}x^2y-2xy+y^2)\cdot3xy\ \underline{=\frac{3}{2}x^3y^2-6x^2y^2+3xy^3}$

(5) $\frac{1}{3}a^2b^3\cdot(-15a^2b^2)\ \underline{=-5a^4b^5}$

(6) $(4a^3b-6a^2b^2+12ab^3)\div2ab\ \underline{=2a^2-3ab+6b^2}$

(7) $(a^2bc)^2 \div ab^2c \underline{= a^3c}$

(8) $(3mn+1)(3mn-1)-8m^2n^2 \underline{= m^2n^2-1}$

(9) $[(3a+b)^2-b^2] \div a \underline{= 9a+6b}$

(10) $(x+2)^2-(x+1)(x-1) \underline{= 4x+5}$

习题 1.67 计算:

(1) $10^7 \div (10^3 \div 10^2) \underline{= 10^6}$

(2) $(x-y)^3 \cdot (x-y)^2 \cdot (y-x) \underline{= -(x-y)^6}$

(3) $4 \times 2^n \times 2^{n-1}(n>1) \underline{= 2^{2n+1}}$

(4) $(-x)^3 \cdot x^{2n-1} + x^{2n} \cdot (-x)^2 \underline{= 0}$

(5) $(y^2 \cdot y^3) \div (y \cdot y^4) \underline{= 1}$

(6) $x^2 \cdot x^3 + x^7 \div x^2 \underline{= 2x^5}$

(7) $m^5 \div m^2 \times m \underline{= m^4}$

(8) $a^4 + (a^2)^4 - (a^2)^2 \underline{= a^8}$

习题 1.68 计算:

(1) $(2x^2)^3 - 6x^3(x^3+2x^2+x) \underline{= 2x^6-12x^5-6x^4}$

(2) $(x+y+z)(x+y-z) \underline{= x^2+2xy+y^2-z^2}$

(3) $[(x+y)^2-(x-y)^2] \div 2xy \underline{= 2}$

(4) $a^2(a+1)^2 - 2(a^2-2a+4) \underline{= a^4+2a^3-a^2+4a-8}$

习题 1.69 求下列各式的值:

(1) $3x^2 + (-\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}y^2)(2x - \frac{2}{3}y)$, 其中 $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$

(2) $[(xy+2)(xy-2) - 2x^2y^2 + 4] \div xy$, 其中 $x = 10, y = -\frac{1}{25}$

(3) $x(x+2y) - (x+1)^2 + 2x$, 其中 $x = \frac{1}{25}, y = -25$.

解 (1) 原式 $= xy + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{2}{9}y^3$, 代入 $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$, 原式 $=-\frac{94}{243}$

(2) 原式 $= -xy = \frac{2}{5}$

(3) 原式 $= 2xy - 1 = -3$

习题 1.70 利用整式乘法公式计算下列各题:

(1) 2001^2 (2) 2001×1999 (3) $99^2 - 1$

解 (1) $(2000+1)^2 = 4004001$

(2) $(2000+1)(2000-1) = 3999999$

(3) $(99+1)(99-1) = 9800$

习题 1.71 利用整式乘法公式计算:

(1) $899 \times 901 + 1$ (2) $123^2 - 124 \times 122$

解 (1) 原式 $= (900+1)(900-1) + 1 = 810000$

(2) 原式 $= 123^2 - (123+1)(123-1) = 1$

习题 1.72 试用直观的方法说明 $(a+3)^2 \neq a^2 + 3^2 (a \neq 0)$

解 边长为 a 与边长为 3 的正方形的面积和, 不等于边长为 $a+3$ 的正方形的面积

习题 1.73 某种原子质量为 $0.000,000,000,000,000,000,000,019,93g$, 你能用科学计数法把它表示出来吗? 科学上把这个数量的十二分之一定为 1 个原子质量单位, 并用符号 u 表示, 请你用科学计数法把 u 表示出来.

解 答:$1.993 \times 10^{-23} g$, $\quad 1.661 \times 10^{-24} g = 1.661 \times 10^{-27} kg$

习题 1.74 求 $(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{32}+1)+1$ 的个位数字.

解 原式 $= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{32}+1)+1 = (2^{32}-1)(2^{32}+1)+1) = 2^{64}-1+1 = 2^{64}$

2^n 的尾数依次为 2,4,8,6,2,4,8,6$\cdots$, 即周期为 4 的重复数列,64 为 4 的整数倍,$\therefore$ 原式尾数为 6.

1.9 强化训练

1.9.1 基础篇一

一、 填空

1. $(x+1)(x-1) = \underline{x^2-1}$
2. $(a-b)^2 = \underline{a^2-2ab+b^2}$
3. $\underline{(a+b)^2} = a^2+2ab+b^2$
4. $[(-2)^3]^3 = \underline{-2^9}$
5. $x^5 \div x^3 \cdot x^2 = \underline{x^4}$
6. $(x-2)(x+3) = \underline{x^2+x-6}$
7. $(-a-2b)^2 = \underline{(a+2b)^2}$
8. $(x+1)(x-1)+1 = \underline{x^2}$
9. $9x^4y^5 \div (-\frac{1}{4}x^3y) \div (-3y^2)^2 = \underline{-4x}$
10. $(3a^2y^2)^3 - 2(a^3y^3)^2 = \underline{25a^6y^6}$

11. $(-0.5a)(\frac{1}{3}ax^2-\frac{1}{2}a^2x-a^3)=\underline{-\frac{1}{6}a^2x^2+\frac{1}{4}a^3x+\frac{1}{2}a^4}$

12. 把 $(a-b)^3(a-b)+(a-b)^2(a-b)^2$ 化成 $(a-b)^n$ 的形式:$\underline{2(a-b)^4}$

13. $(3a^{n+2}+a^{n+1})\div(-\frac{1}{3}a^{n-1})\underline{-9a^3-3a^2}$

14. $x^2-4x+\underline{4}=(\underline{x-2})^2$

15. $(-a+2b)(-a-2b)=\underline{a^2-4b^2}$

16. 若 $(a+3b)^2=(a-3b)^2+N$, 则 $N=\underline{12ab}$

17. 若 $a+b=5, ab=6$, 则 $a^2+b^2=\underline{13}$

18. 若 $m+n=10, mn=24$, 则$m^2+n^2=\underline{52}$

19. 如果 $4x^2+mx+9$ 是一个完全平方式, 那么 $m=\underline{\pm 12}$

20. $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)=\underline{=2^8-1=255}$

二、 选择题

21. 下列各计算中, 正确的是 (　　)

A. $b^5\cdot b^5=2b^5$　　B. $x^5+x^5=x^{10}$

C. $m^2\cdot m^3=m^5$　　D. $a\cdot b^2=a^2b^2$

解 C

22. 下列多项式乘法中, 正确的是 (　　)

A. $(a+bx)(-bx+a)=a^2-b^2x$　　B. $(a+b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

C. $(-a-b)(a+b)=-a^2-2ab-b^2$　　D. $(a-b)(a^2+2ab+b^2)=a^3-b^3$

解 C

23. 一个正方形的边长增加了 $3cm$, 面积相应增加了 $39cm^2$, 则这个正方形的边长为 (　　)

A. $6cm$　　B. $5cm$　　C. $8cm$　　D. $7cm$

解 B.$(x+3)^2-x^2=6x+9=30\Rightarrow x=5\text{cm}$

24. 计算结果与 $(a^2b^3-a^3b^2)^2$ 相同的是 (　　)

A. $(a^2b^3+a^3b^2)^2$　　B. $(-a^2b^3-a^3b^2)^2$

C. $(a^3b^2-a^2b^3)^2$　　D. $-(a^2b^3-a^3b^2)^2$

解 C

25. 有下列各运算:

① $(-2a^2b)^3 \div (-2a^2b)^2 = -2a^2b$　　②$(-2a^2b)^4 \div (-2a^2b)^2 = -4a^4b^2$

③ $2a^3b^2c \div \frac{1}{2}a^3b^2 = c$　　④ $\frac{1}{5}a^2b^3c^2 \div (-5abc)^2 = \frac{b}{125}$

其中计算正确的是 (　　)

A. ① ②　　B. ② ③　　C. ① ④　　D. ② ④

解 C

三、 计算题

26. $125^2 \times 0.08^2$

解 100

27. 199^2

解 39601

四、 解答题

28. 已知 $f(x) = 10x^2 + 8x^5 - 12x^3$, 求

(1) $f(x) \div (-5x^2)$

(2) $f(x) \cdot (x^2 - 1)$

解 (1) $-2 - \frac{8}{5}x^3 + \frac{12}{}$

(2) $8x^7 - 20x^5 + 10x^4 + 12x^3 - 10x^2$

29. 已知一个长方体的高是 $1 + a$, 底面积是 $16a^2 - 12a$, 求这个长方体的体积.

解 $16a^3 + 4a^2 - 12a$

1.9.2 基础篇 (二)

一、 填空题

1. $a^m = 4$,$a^n = 3$,$a^{m+n} = \underline{12}$.

2. $(2x - 1)(-3x + 2) = \underline{-6x^2 + 7x - 2}$

3. $(-\frac{2}{3}m+n)(-\frac{2}{3}m-n)=$ $\underline{\frac{4}{9}m^2-n^2}$

4. $(-\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y)^2=$ $\underline{\frac{4}{9}x^2+2xy+\frac{9}{4}y^2}$

5. 若 $A\div 5ab^2=-7ab^2c^3$, 则 $A=$ $\underline{-35a^2b^4c^3}$, 若 $4x^2yz^3\div B=-8x$, 则 $B=$ $\underline{-\frac{1}{2}xy^3}$.

6. 若 $(ax+b)(x+2)=x^2-4$, 则 $b^a=$ $\underline{-2(a=1,b=-2}$.

7. 1 纳米 = 0.000000001 米, 则 3.5 纳米 = $\underline{3.5\times 10^{-9}}$米.(用科学计数法表示)

8. 若 $|a-2|+b^2-2b+1=0$, 则 $a=$ $\underline{2}$, $b=$ $\underline{1}$.

9. 已知 $a+\frac{1}{a}=3$, 则 $a^2+\frac{1}{a^2}$ 的值是$\underline{7}$.

10. 如果 $2a+3b=1$, 那么 $3-4a-6b=$ $\underline{1}$.

二、 选择题

11. 下列计算错误的个数是 (　　)

①$(x^4-y^4)\div(x^2-y^2)=x^2-y^2$, ②$(-2a^2)^3=-8a^5$,

③$(ax+by)\div(a+b)=x+y$, ④$6x^{2m}\div 2x^m=3x^2$

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

解 A. 全错

12. 已知被除式是 x^3+2x^2-1, 商式是 x, 余式是 -1, 则除式是 (　　)

A. x^2+3x-1　　B. x^2+2x　　C. x^2-1　　D. x^2-3x+1

解 B

13. 若 $3^x=a$,$3^y=b$, 则 3^{x-y} 等于 (　　)

A. $\frac{a}{b}$　　B. ab　　C. $2ab$　　D. $a+\frac{1}{b}$

解 A

14. 一个正方形的边长增加了 $2cm$, 面积相应增加了 $36cm^2$, 则这个正方形的边长为 (　　)

A. $6cm$　　B. $5cm$　　C. $8cm$　　D. $7cm$

解 C

15. 下列各式是完全平方式的是 (　　)

A. $x^2 - x + \frac{1}{4}$ B. $1 + x^2$ C. $x^2 + xy + 1$ D. $x^2 + 2x - 1$

解 A

16. 在下列各式中, 运算结果是 $b^2 - 16a^2$ 的是 ( )

A. $(-4a + b)(-4a - b)$ B. $(-4a + b)(4a - b)$

C. $(-a - b)(a - b)$ D. $(-4a - b)(4a - b)$

解 D

17. $(-a - b)^2$ 等于 ( )

A. $a^2 + b^2$ B. $a^2 - b^2$ C. $a^2 + 2ab + b^2$ D. $a^2 - 2ab + b^2$

解 C

18. $(x - y)^2 = x^2 + xy + y^2 + N$, 则 $N =$( )

A. xy B. $-xy$ C. $3xy$ D. $-3xy$

解 D

三、 计算题

19. 如果 $ab = 1$, 求 $(a^n - b^n)^2 - (a^n + b^n)^2$

解 原式 =$(a^n - b^n + a^n + b^n)(a^n - b^n - a^n - b^n) = 2a^n \cdot (-2b^n) = -4(ab)^n = -4$

20. 简便方法计算:(1) $98 \times 102 - 99^2$ (2) $99^2 + 198 + 1$

解 (1) 原式 == $(100 + 2)(100 - 2) = 100^2 - 4 - 99^2 = (100 + 99)(100 - 99) - 4 = 195$

(2) 原式 =$(99 + 1)^2 = 10000$

21. 先化简, 再求值:$2x(x + 1)(x - 1) + x^2(1 - 2x) - 5(x - 1)^2, x = -1$

解 -17

22. 已知 $(a + b)^2 = 10, (a - b)^2 = 3$, 求

(1)a, b 这两个数的平方和;

(2)a, b 两个数的积.

解 $a^2 + b^2 = \frac{13}{2}, ab = \frac{7}{4}$

1.9.3 提高篇

1. 若 $2^a=3,2^b=5,2^c=30$, 试用含有 a,b 的式子表示 c.

解 $2^c=30=2\times3\times5=2^1\times2^a\times2^b=2^{1+a+b}\Rightarrow c=1+a+b$

2. 证明: 在四个连续自然数中, 中间两数的乘积比前后两个数的乘积大.

解 设四个连续自然数为 $a,a+1,a+2,a+3,(a+1)(a+2)=a^2+3a+2>a^2+3a=a(a+3)$

3. $\triangle ABC$ 三边长为 a,b,c, 且满足 $b+c=8,bc=a^2-12a+52$, 试问 $\triangle ABC$ 是什么三角形?

解 $b+c=8\Rightarrow c=8-b$, 代入, 得:

$b(8-b)=a^2-12a+52\Rightarrow a^2-12a+b^2-8b+52=0\Rightarrow(a-6)^2+(b-4)^2=0\Rightarrow a=6,b=4,c=4$

等腰三角形.

4. 若三角形三边长分别为 a,b,c, 且满足 $a^2b-a^2c+b^2c-b^3=0$, 则这个三角形是什么三角形?

解 $a^2(b-c)+b^2(c-b)=0\Rightarrow(b-c)(a^2)(a-c)=0\Rightarrow b=c$或$a-c=0$

等腰三角形

5. 已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边的长, 且满足 $a^2+2b^2+c^2-2b(a+c)=0$ 试判断此三角形的形状.

解 原式 $=a^2+b^2+b^2+c^2-2ab-2bc=(a-b)^2+(b-c)^2=0\Rightarrow a=b=c$

等腰三角形

6. 若 $(x^2+px+q)(x^2-2x-3)$ 展开项中不含 x^2和x^3 项, 求 p 和 q 的值.

解 x^2 项的系数为 $-3-2p+q$, x^3 项的系数为 $-2+p$, 所以 $p=2,q=7$

7. 重点题: 已知 $x+\frac{1}{x}=3$, 试求 $x^2+\frac{1}{x^2}$ 和 $(x-\frac{1}{x})^2$ 的值

解 $x+\frac{1}{x}=3\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2=9\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=7$

$(x-\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=7-2=5$

8. (1) 已知 $x^2+x-1=0$, 试求 x^3+2x^2+3 的值.

(2) 如果 $1+x+x^2+x^3=0$, 求 $x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8$ 的值.

解 (1) $x^2+x-1=0\Rightarrow x^2+x=1.x^3+2x^2+3=x(x^2+2x)+3=x(x^2+x+x)+3=x(x+1)+3=1+3=4$

(2) 原式 $=x(1+x+x^2+x^3)+x^5(1+x+x^2+x^3)=0$

9. (1) 计算:

   a. $(x+1)(x-1)$
   b. $(x-1)(x^2+x+1)$
   c. $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$
   d. $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

   解 (1) x^2-1; (2) x^3-1 ; (3) x^4-1; (4) x^5-1

   (2) 根据以上结果, 你能猜想下列各式运算的结果吗?

   a. $(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$
   b. $(x-1)(x^9+x^8+x^6+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

   解 (1) x^7-1; (2) $x^{10}-1$

(3) 请写出你总结出的规律;

解 $(x-1)(x^n+x^{n-1}+\cdots+1)=x^{n+1}-1, n$ 为正整数

(4) 若 $(x-1)\cdot M=x^{15}-1$, 你知道 M 等于什么吗?

解 $M=x^{14}+x^{13}\cdots+1$