

第 1 章 因式分解 (20200416)

1.1 知识要点

1. 定义:

(a). 和差化积: 将整式的和差形式化为乘积形式.

(b). 因式分解与整式乘法互为逆运算. $x(x+y) \Leftrightarrow x^2+xy$, 从左到右为整式乘除, 从右到左为因式分解.

2. 因式分解的方法

(a). 提公因式法:(1) 先提系数的最大公约数; (2) 再提各字母最低的次数; (3) 提取后观察是否可进一步分解

(b). 公式法:(1) 完全平方公式; (2) 平方差公式

(c). 分组分解法

(d). 十字相乘法

I. 只适用于如 ax^2+bx+c 形式的二次三项式

II. 原理: $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$, $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$,

III. 两种情况:(1) 二次项系数为 1; (2) 二次项系数不为 1

IV. 为一元二次方程, 一元二次函数打基础

1.2 例题

1.2.1 提公因式法

例题 1.2.1 $2x^3y^2 - 4x^2y + 8x^2y^2$

解 答案: $2x^3y^2 - 4x^2y + 8x^2y^2 = 2x^2y(xy - 2 + 4y)$

1.2.2 分组分解法

一、 分组后能直接提公因式

例题 1.2.2

1. $am + an + bm + bn$

2. $a^2 - ab + ac - bc$

3. $xy - x - y + 1$

解

1. $am + an + bm + bn = (a+b)(m+n)$

2. $a^2 - ab + ac - bc = (a-b)(a+c)$

3. $xy - x - y + 1 = (x-1)(y-1)$

二、分组后能直接用公式

例题 1.2.3

1. $x^2 - y^2 + ax + ay$
2. $a^2 - c^2 - 2ab + b^2$
3. $x^2 - x - 9y^2 - 3y$
4. $ax^2 - bx^2 + bx - ax + a - b$
5. $a^2 - 6ab + 12b + 9b^2 - 4a$
6. $4a^2x - 4a^2y - b^2x + b^2y$
7. 在有理数或实数范围内分解: $x^4 - 4$
8. $a^2 - 2a + b^2 - 2b + 2ab + 1$
9. $(a + c)(a - c) + b(b - 2a)$

解

1. $x^2 - y^2 + ax + ay = (x + y)(x - y) + a(x + y) = (x + y)(x - y + a)$
2. $a^2 - c^2 - 2ab + b^2 = (a^2 - 2ab + b^2 - c^2) = (a - b)^2 - c^2 = (a - b + c)(a - b - c)$
3. $x^2 - x - 9y^2 - 3y = (x^2 - 9y^2) - (x + 3y) = (x + 3y)(x - 3y) - (x + 3y) = (x + 3y)(x - 3y - 1)$
4. $ax^2 - bx^2 + bx - ax + a - b = x^2(a - b) - x(a - b) + (a - b) = (a - b)(x^2 - x + 1)$
5. $a^2 - 6ab + 12b + 9b^2 - 4a = (a^2 - 6ab + 9b^2) + (12b - 4a) = (a - 3b)^2 + 4(3b - a) = (3b - a)^2 + 4(3b - a) = (3b - a)(3b - a + 4)$
6. $4a^2x - 4a^2y - b^2x + b^2y = 4a^2(x - y) - b^2(x - y) = (x - y)(4a^2 - b^2) = (x - y)(2a + b)(2a - b)$
7. 在有理数或实数范围内分解: $x^4 - 4$
 - (a). 有理数范围: $x^4 - 4 = (x^2 + 2)(x^2 - 2)$
 - (b). 实数范围: $x^4 - 4 = (x^2 + 2)(x^2 - 2) = (x^2 + 2)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$
8. $a^2 - 2a + b^2 - 2b + 2ab + 1 = (a^2 + 2ab + b^2) - (2a + 2b) + 1 = (a + b)^2 - 2(a + b) + 1 = (a + b - 1)^2$. 注意: 将 $(a + b)$ 看成一个整体, 运用完全平方公式
9. $(a + c)(a - c) + b(b - 2a) = a^2 - c^2 + b^2 - 2ab = (a^2 - 2ab + b^2) - c^2 = (a - b)^2 - c^2 = (a - b + c)(a - b - c)$. 注意: 原式有乘除, 但不是因式分解, 需要先打开再重新组合.

1.2.3 十字相乘法

一、二次项系数为 1

原理: $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$. 即两个数的和是一次项系数, 两个数的积是常数项

例题 1.2.4

1. $x^2 - 5x + 4$
2. $x^2 + 5x + 6$
3. $x^2 - 7x + 6$
4. $x^2 + 14x + 24$
5. $a^2 - 15a + 36$
6. $x^2 + 4x - 5$
7. $x^2 + x - 2$
8. $y^2 - 2y - 15$
9. $x^2 - 10x - 24$

解

1. $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$

2. $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$
3. $x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$
4. $x^2 + 14x + 24 = (x + 2)(x + 12)$
5. $a^2 - 15a + 36 = (a - 12)(a - 3)$
6. $x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 5)$
7. $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$
8. $y^2 - 2y - 15 = (y - 5)(y + 3)$, 注意变量为 y
9. $x^2 - 10x - 24 = (x - 12)(x + 2)$

二、二次项系数不为 1

原理: $ax^2 + bx + c = (a_1x_0 + c_1)(a_2x_0 + c_2)$, 其中 $a_1 \times a_2 = a, c_1 \times c_2 = c$, 且 $a_1 \times c_2 + a_2 \times c_1 = b$

例题 1.2.5

1. $3x^2 - 11x + 10$
2. $5x^2 + 7x - 6$
3. $3x^2 - 7x + 2$
4. $10x^2 - 17x + 3$
5. $-6y^2 + 11y + 10$
6. $2x^2 - 7xy + 6y^2$
7. $x^2y^2 - 3xy + 2$
8. $15x^2 + 7xy - 4y$
9. $12x^2 - 11xy - 15y^2$

解

1. $3x^2 - 11x + 10 = (x - 2)(3x - 5)$
2. $5x^2 + 7x - 6 = (5x - 3)(x + 2)$
3. $3x^2 - 7x + 2 = (x - 2)(3x - 1)$
4. $10x^2 - 17x + 3 = (2x - 3)(5x - 1)$
5. $-6y^2 + 11y + 10 = -(6y^2 - 11y - 10) = -(2y - 5)(3y + 2)$. 注意先提负号.
6. $2x^2 - 7xy + 6y^2 = (x - 2y)(2x - 3y)$
7. $x^2y^2 - 3xy + 2 = (xy - 1)(xy - 2)$
8. $15x^2 + 7xy - 4y = (3x - y)(5x + 4y)$
9. $12x^2 - 11xy - 15y^2 = (3x - 5y)(4x + 3y)$

1.2.4 综合

例题 1.2.6

1. $(x + y)^2 - 3(x + y) - 10$
2. $(a + b)^2 - 4a - 4b + 3$
3. $m^2 - 4mn + 4n^2 - 3m + 6n + 2$
4. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3$
5. $4x^2 - 4xy - 6x + 3y + y^2 - 10$

解

1. $(x + y)^2 - 3(x + y) - 10 = (x + y - 5)(x + y + 2)$
2. $(a + b)^2 - 4a - 4b + 3 = (a + b)^2 - 4(a + b) + 3 = (a + b - 1)(a + b - 3)$

3. $m^2 - 4mn + 4n^2 - 3m + 6n + 2 = (m - 2n)^2 - 3(m - 2n) + 2 = (m - 2n - 1)(m - 2n - 2)$
 4. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3 = (x + 2y)^2 - 2(x + 2y) - 3 = (x + 2y - 3)(x + 2y + 1)$
 5. $4x^2 - 4xy - 6x + 3y + y^2 - 10 = (4x^2 - 4xy + y^2) + (3y - 6x) - 10 = (2x - y)^2 - 3(2x - y) - 10 = (2x - y - 5)(2x - y + 3)$

1.3 习题

1. 下列变形是因式分解的是 ()

A. $(3 - x)(3 + x) = 9 - x^2$

B. $m^3 - mn^2 = m(m + n)(m - n)$

C. $(y + 1)(y - 3) = -(3 - y)(y + 1)$

D. $4yz - 2y^2z + z = 2y(2z - yz) + z$

解 答案:B.

解析:A 为整式乘法,C 原式已经是因式分解完成,D 右边是未完全展开的整式

2. 下列多项式中能用平方差公式分解因式的是 ()

A. $a^2 + (-b)^2$

B. $5m^2 - 20mn$

C. $-x^2 - y^2$

D. $-x^2 + 9$

解 答案:D.

解析:AC 都是平方和,D 是 $3^2 - x^2$

3. 若 $(p - q)^2 - (q - p)^3 = (q - p)^2 \cdot E$, 则 E 是 ()

A. $1 - q - p$

B. $q - p$

C. $1 + p - q$

D. $1 + q - p$

解 答案:C

解析: $(p - q)^2 - (q - p)^3 = (q - p)^2 - (q - p)^3 = (q - p)^2 \cdot (1 - q + p) = (q - p)^2 \cdot (1 + p - q) = (q - p)^2 \cdot E, \therefore E = 1 + p - q$

4. 一个多项式分解因式的结果是 $(b^3 + 2)(2 - b^3)$, 那么这个多项式是 ()

A. $b^6 - 4$

B. $4 - b^6$

C. $b^6 + 4$

D. $-b^6 - 4$

解 答案:B.

解析: 平方差公式, 同底数幂的乘法

5. 把多项式 $m^2(a - 2) + m(2 - a)$ 分解因式等于 ()

A. $(a - 2)(m^2 + m)$

B. $(a - 2)(m^2 - m)$

C. $m(a - 2)(m - 1)$

D. $m(a - 2)(m + 1)$

解 答案:C

解析: $m^2(a - 2) + m(2 - a) = m^2(a - 2) - m(a - 2) = (a - 2)(m^2 - m) = m(a - 2)(m - 1)$

6. 下列多项式中, 含有因式 $(y + 1)$ 的多项式是 ()

A. $y^2 - 2xy - 3x^2$

B. $(y + 1)^2 - (y - 1)^2$

C. $(y + 1)^2 - (y^2 - 1)$

D. $(y + 1)^2 + 2(y + 1) + 1$

解 答案:C

解析: $A = (y - 3x)(y + x)$; $B = 4y$ 直接打开或利用平方差公式; $C = y^2 + 2y + 1 - y^2 - 1 = 2y + 2 = 2(y + 1)$; $D = (y + 1 + 1)^2 = (y + 2)^2$

7. 已知多项式 $2x^2 + bx + c$ 分解因式为 $2(x - 3)(x + 1)$, 则 b, c 的值为 ()

A. $b = 3, c = -1$

B. $b = -6, c = 2$

C. $b = -6, c = -4$

D. $b = -4, c = -6$

解 答案:D.

解析: $2(x-3)(x+1) = 2(x^2 - 2x - 3) = 2x^2 - 4x - 6$

8. 若将 $x^2 + px + q$ 分解因式为 $(x-3)(x+5)$, 则 p 为 ()

A. -15

B. -2

C. 8

D. 2

解 答案:D

解析: $p = -3 + 5 = 2, q = -3 \times 5 = -15$

9. $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 满足 $a^2 - 2bc = c^2 - 2ab$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等边三角形

D. 锐角三角形

解 答案:A

解析: $a^2 - 2bc = c^2 - 2ab \Rightarrow a^2 - 2bc - c^2 + 2ab = a^2 - c^2 + (2ab - 2bc) = (a+c)(a-c) + 2b(a-c) = (a-c)(a+c+2b) = 0$.
 $\therefore a, b, c$ 为边长, 都大于 0, $\therefore a+c+2b > 0, \therefore a-c=0 \Rightarrow a=c$, \therefore 是等腰三角形.

10. 已知 $a = 2002x + 2006, b = 2002x + 2007, c = 2002x + 2008$, 则多项式 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ 的值为 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

解 答案:D

解析: $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) = \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + a^2 - 2ac + c^2) = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2] = \frac{1}{2}(1^2 + 1^2 + 2^2) = 3$. 常用技巧之一.

11. 已知: $ab \neq 0, a^2 + ab - 2b^2 = 0$, 那么 $\frac{2a-b}{2a+b}$ 的值为 ____.

解 答案: $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{5}{3}$

解析: $ab \neq 0 \Rightarrow a \neq 0, b \neq 0$

$(a^2 + ab - 2b^2 = 0 \Rightarrow (a+2b)(a-b) = 0 \therefore a \neq 0, b \neq 0, \therefore \Rightarrow a = b$ 或 $a = -2b$

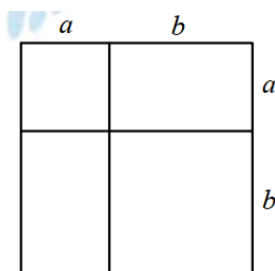
代入 $\frac{2a-b}{2a+b}$, 分类讨论, 求得值. 注意分类讨论.

12. 分解因式: $x(a-b)^{2n} + y(b-a)^{2n+1} =$ ____.

解 答案: $(b-2a)^{2n}(x+by-ay)$

解析: 利用偶次方底数正负号无关的性质.

13. 观察右图, 根据图形的面积关系, 不需要连其他的线, 便可以得到一个用来分解因式的公式, 这个公式是.



解 答案: $a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$

解析: 完全平方公式的几何意义. 注意必须从和的形式写成积的形式才符合体重所说的分解因式.

14. 若 $x^2 + 2(m-3)x + 16$ 是完全平方公式, 则 $m =$ ____.

解 答案: -1 或 7

解析: 注意分类讨论, 完全平方公式有 $(a \pm b)^2$ 两种形式. 即一次项的系数 $2(m-3) = \pm 2ab = \pm 2 \times 1 \times 4 = 8 \Rightarrow m-3 = \pm 4 \Rightarrow m = -1$ 或 $m = 7$

15. 若 $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 12$, 则 $x^2 + y^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 答案:4

解析:令 $x^2 + y^2 = a$, $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 12 \Rightarrow a(a - 1) = 12 \Rightarrow a^2 - a - 12 = 0 \Rightarrow a = 4$ 或 $a = -3$. $\because a = x^2 + y^2 \geq 0$, $\therefore -3$ 舍去, $x^2 + y^2 = 4$. 整体代换时, 必须注意代换式的取值范围.

16. 已知 a, b, c, d 为非负整数, 且 $ac + bd + ad + bc = 1997$, 则 $a + b + c + d = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 答案:1998

解析: 原式 $= a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d) = 1997$, $\because 1997$ 是质数, $\therefore a + b, c + d$ 只能是 1, 1997, $\therefore a + b + c + d = 1 + 1997 = 1998$

1.4 中考真题

例题 1.4.1

- 江西 2008 分解因式: $x^3 - 4x =$
- 江西 2010 分解因式: $2a^2 - 8 =$
- 江西 2011 分解因式: $x^3 - x =$
- 江西 2013 分解因式: $x^2 - 4 =$
- 江西 2016 分解因式: $ax^2 - ay^2 =$
- 把多项式 $x^2 + ax + b$ 分解因式, 得 $(x + 1)(x - 3)$ 则 a, b 的值分别是 ()
 A. $a = 2, b = 3$ B. $a = -2, b = -3$ C. $a = -2, b = 3$ D. $a = 2, b = -3$
- 下列运算错误的是 ()
 A. $a + 2a = 3a$ B. $(a^2)^3 = a^6$ C. $a^2 \times a^3 = a^5$ D. $a^6 \div a^3 = a^2$
- 下列计算正确的是 ()
 A. $3a + 4b = 7ab$ B. $(ab^3)^3 = ab^6$ C. $(a + 2)^2 = a^2 + 4$ D. $x^{12} \div x^6 = x^6$
- 当 $1 < a < 2$ 时, 代数式 $|a - 2| + |1 - a|$ 的值是 ()
 A. -1 B. 1 C. 3 D. -3
- 下列计算正确的是 ()
 A. $x^2 \times x^3 = x^5$ B. $x^6 + x^6 = x^{12}$ C. $(x^2)^3 = x^5$ D. $x^{-1} = x$
- 分解因式: $16 - x^2 = (\quad)$
 A. $(4 - x)(4 + x)$ B. $(x - 4)(x + 4)$ C. $(8 + x)(8 - x)$ D. $(4 - x)^2$
- 将下列多项式因式分解, 结果中不含有因式 $a + 1$ 的是 ()
 A. $a^2 - 1$ B. $a^2 + a$ C. $a^2 + a - 2$ D. $(a + 2)^2 - 2(a + 2) + 1$
- 分解因式: $a^3 - 9a =$
- 分解因式: $a^3 - 16a =$
- 因式分解: $a^2 - 6a + 9 =$
- 分解因式: $x^2 - 36 =$
- 把多项式 $9a^3 - ab^2$ 分解因式的结果是
- 把多项式 $ax^2 + 2a^2x + a^3$ 分解因式的结果是
- 分解因式: $a^2 - 9 =$

20. 分解因式 $3m^4 - 48 =$
 21. 分解因式: $xy^2 - x =$
 22. 分解因式: $ab^4 - 4ab^3 + 4ab^2 =$
 23. 分解因式: $ax^2 - ay^2 =$
 24. 分解因式: $2a^2 + 4a + 2 =$
 25. 分解因式: $(m+1)(m-9) + 8m =$

解

1. 江西 2008 分解因式: $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2)$
 2. 江西 2010 分解因式: $2a^2 - 8 = 2(a^2 - 4) = 2(a+2)(a-2)$
 3. 江西 2011 分解因式: $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$
 4. 江西 2013 分解因式: $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$
 5. 江西 2016 分解因式: $ax^2 - ay^2 = a(x^2 - y^2) = a(x+y)(x-y)$
 6. 把多项式 $x^2 + ax + b$ 分解因式, 得 $(x+1)(x-3)$ 则 a, b 的值分别是 (B)
 $a = -3 + 1 = 2, b = -3 \times 1 = -3$
 7. 下列运算错误的是 (D)
 A. $a + 2a = 3a$ B. $(a^2)^3 = a^6$ C. $a^2 \times a^3 = a^5$ D. $a^6 \div a^3 = a^2$
 解析: $a^6 \div a^3 = a^3$
 8. 下列计算正确的是 (D)
 A. $3a + 4b = 7ab$ B. $(ab^3)^3 = ab^6$ C. $(a+2)^2 = a^2 + 4$ D. $x^{12} \div x^6 = x^6$
 解析: $A = 7a, B = a^3b^6; C = a^2 + 4a + 4$
 9. 当 $1 < a < 2$ 时, 代数式 $|a-2| + |1-a|$ 的值是 (C)
 A. -1 B. 1 C. 3 D. -3
 解析: 原式 $= 2 - a + a - 1 = 1$
 10. 下列计算正确的是 (A)
 A. $x^2 \times x^3 = x^5$ B. $x^6 + x^6 = x^{12}$ C. $(x^2)^3 = x^5$ D. $x^{-1} = x$
 解析: $B = 2x^6, C = x^6, D = \frac{1}{x}$
 11. 分解因式: $16 - x^2 =$ (A)
 A. $(4-x)(4+x)$ B. $(x-4)(x+4)$ C. $(8+x)(8-x)$ D. $(4-x)^2$
 12. 将下列多项式因式分解, 结果中不含有因式 $a+1$ 的是 (C)
 A. $a^2 - 1$ B. $a^2 + a$ C. $a^2 + a - 2$ D. $(a+2)^2 - 2(a+2) + 1$
 解析: $A = (a+1)(a-1), B = a(a+1), C = (a+2)(a-1), D = (a+2-1)^2 = (a+1)^2$
 13. 分解因式: $a^3 - 9a = a(a^2 - 9) = a(a+3)(a-3)$
 14. 分解因式: $a^3 - 16a = a(a^2 - 16) = a(a+4)(a-4)$
 15. 因式分解: $a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2$
 16. 分解因式: $x^2 - 36 = (x+6)(x-6)$
 17. 把多项式 $9a^3 - ab^2$ 分解因式的结果是 $a(9a^2 - b^2) = a(3a+b)(3a-b)$
 18. 把多项式 $ax^2 + 2a^2x + a^3$ 分解因式的结果是 $a(x^2 + 2ax + a^2) = a(x+a)^2$
 19. 分解因式: $a^2 - 9 = (a+3)(a-3)$
 20. 分解因式 $3m^4 - 48 = 3(m^4 - 16) = 3(m^2 + 4)(m^2 - 4) = 3(m^2 + 4)(m+2)(m-2)$
 21. 分解因式: $xy^2 - x = x(y^2 - 1) = x(y+1)(y-1)$
 22. 分解因式: $ab^4 - 4ab^3 + 4ab^2 = ab^2(b^2 - 4b + 4) = ab^2(b-2)^2$
 23. 分解因式: $ax^2 - ay^2 = a(x^2 - y^2) = a(x+y)(x-y)$
 24. 分解因式: $2a^2 + 4a + 2 = 2(a^2 + 2a + 1) = 2(a+1)^2$

25. 分解因式: $(m+1)(m-9) + 8m = m^2 - 8m - 9 + 8m = m^2 - 9 = (m+3)(m-3)$

