

第1章 分式



笔记 【对接教材】人教: 八上第十五章 P126-P142; 北师: 八下第五章 P108-P124.

【中考分值】(近9年必考,3或6分)

1.1 知识要点

一、基本概念

1. 定义: 形如 $\frac{A}{B}$ 的式子, 其中 A, B 为两个整式, $B \neq 0$, 且 B 中含有字母.
2. 分式 $\frac{A}{B}$ 有意义的条件是: $B \neq 0$;
3. 分式 $\frac{A}{B}$ 值为0的条件是: $A = 0, B \neq 0$;
4. 最简分式: 分子和分母没有公因式的分式.
5. 【易错警示】分式化简时, 要将结果化成最简结果.

二、分式的性质

1. 基本性质: 分式的分子与分母乘(或除以)同一个不等于0的整式, 分式的值不变:
2. 符号变化法则: 分式中分式本身, 分子, 分母三者有两者同时改变符号, 分式值不变. 如 $\frac{2}{3} = \frac{-2}{-3} = -\frac{-2}{3} = -\frac{2}{-3}$
3. 基本性质的应用: 通分. $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}$.
4. 基本性质的应用: 约分. $\frac{A}{B} = \frac{A \div C}{B \div C}$, 其中 A, B, C 是整式, 且 $c \neq 0$.

三、分式的运算法则

1. 通分

- (1) 通分的概念: 根据分式基本性质, 把异分母分式化为与原来的分式相等的同分母分式.
- (2) 通分的方法: 关键是寻找最简公分母. ①各分母能因式分解的先因式分解; ②取各分母中所有因式的最高次幂的积(数字因式取最小公倍数)作为公分母.

2. 约分

- (1) 约分的概念: 把一个分式分子与分母的公因式约去.
- (2) 约分的方法: 关键是寻找分子、分母的公因式. ①分子、分母能因式分解的先因式分解; ②取分子、分母中的相同因式的最低次幂的积(数字因式取最大公约数)作为公因式.

3. 分式的加减运算

(1) **同分母**分式加减: 分母不变, 分子相加减. $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$;

(2) **异分母**分式加减: 先**通分**, 再按同分母分式的加减法则计算. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

4. 分式的乘除运算

(1) 乘法运算: 分子乘分子, 分母乘分母. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$;

(2) 除法运算: 先**转化为乘法**, 能**约分的约分**后再**按乘法法则**运算. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

5. 分式的混合运算: 先**乘方**, 再乘除, 最后加减; 同级运算从左到右依次进行; 如有括号先计算括号内.

1.2 重难点突破

例 1.1 先化简, 再求值: $\frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{x^2-6x+9} \div \frac{x^2+x}{x-3}$, 其中 $x = -\frac{3}{2}$.

解: 原式 = $\frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{(x-3)^2} \cdot \frac{x-3}{x(x+1)}$ 除法变乘法, 分子、分母因式分解
 $= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)}$ 约分
 $= \frac{x+1}{x(x+1)}$ 通分
 $= \frac{1}{x}$ 化简为最简结果
 当 $x = -\frac{3}{2}$ 时, 原式 = $-\frac{2}{3}$ 代值计算

例 1.2 化简 $(\frac{a^2}{a+1} - a + 1) \div \frac{a-1}{a^2+2a+1}$

解: 原式 = $\frac{a^2 - (a+1)^2}{a+1} \cdot \frac{(a+1)^2}{a-1}$ 第一步
 $= \frac{-2a-1}{a+1} \cdot \frac{(a+1)^2}{a-1}$ 第二步
 $= \frac{(-2a-1) \cdot (a+1)}{a-1}$ 第三步
 $= \frac{-(2a+1)(a+1)}{a-1}$ 第四步

上述解法是从第 步开始出现错误, 请写出正确的解题过程.

解 第一步, 原式 = $\frac{a+1}{a-1}$

例 1.3 单一化简型: $\frac{a-2}{a^2-1} \cdot \frac{a^3+2a^2+a}{a^2-2a}$, 其中 $a = -2$

解 $\frac{a+1}{a-1}, \frac{1}{3}$

例 1.4 双化简型: $(\frac{x^2-4}{x^2+x+1})^2 \div (\frac{x^3-2x^2}{x^3+x^2+x})^2 \cdot \frac{x}{(x+2)^3}$, 其中 $x^2 + 2x - 2 = 0$

解 $\frac{1}{x^2+2x}, \frac{1}{2}$

例 1.5 桃李不言型: $|2a - b + 1| + (3a + \frac{3}{2}b)^2 = 0$, 求 $\frac{b^2}{a+b} \div [(\frac{a}{a-b} - 1)(a - \frac{a^2}{a+b})]$

解 $a = -\frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$

例 1.6 倒数型: $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{10}$, 求 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$

解 由已知倒数得: $x + \frac{1}{x} = 9$, 原式倒数化简得: $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 + 1 = 80$, 原式 $= \frac{1}{80}$

例 1.7 参数型: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$, 求 $\frac{x^2-2y^2+3z^2}{xy+2yz+3xz}$

解 设 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k \Rightarrow x = 2k, y = 3k, z = 4k$

代入, 原式化简得 $\frac{17}{27}$

1.3 中考真题

1.3.1 分式有意义的条件 (仅 2018 年考)

真题 1.1 (2018 江西 7 题 3 分) 若分式 $\frac{1}{x-1}$ 有意义, 则 x 的取值范围为 $x \neq 1$.

1.3.2 分式化简及求值 (10 年 9 考, 仅 2010 年未考)

一、分式化简 (10 年 6 考)

真题 1.2 (2018 江西 2 题 3 分) 计算 $(-a)^2 \cdot \frac{b}{a^2}$ 的结果为 ()

A. b

B. $-b$

C. ab

D. $\frac{b}{a}$

解 A

真题 1.3 (2019 江西 2 题 3 分) 计算 $\frac{1}{a} \div (-\frac{1}{a^2})$ 的结果为 ()

A. a

B. $-a$

C. $-\frac{1}{a^3}$

D. $\frac{1}{a^3}$

解 B

真题 1.4 (2015 江西 4 题 3 分) 下列运算正确的是 ()

A. $(2a^2)^3 = 6a^6$

B. $-a^2b^2 \cdot 3ab^3 = -3a^2b^5$

C. $\frac{b}{a-b} + \frac{a}{b-a} = -1$

D. $\frac{a^2-1}{a} \cdot \frac{1}{a+1} = -1$

解 C

真题 1.5 (2017 江西 13(1) 题 3 分) 计算: $\frac{x+1}{x^2-1} \div \frac{2}{x-1}$

解 原式 $= \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} \times \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2}$

真题 1.6 (2014 江西 15 题 6 分) 计算: $(\frac{x-1}{x} - \frac{1}{x}) \div \frac{x-2}{x^2-x}$

解 原式 $= \frac{x-2}{x} \times \frac{x(x-1)}{x-2} = x-1$

真题 1.7 (2012 江西 15 题 6 分) 化简: $(\frac{1}{a} - 1) \div \frac{a^2-1}{a^2+a}$

解 原式 $= \frac{1-a}{a} \times \frac{a(a+1)}{(a+1)(a-1)} = -1$

二、 类型二: 化简求值: 给定值 (10 年 2 考)

真题 1.8 (2016 江西 14 题 6 分) 先化简, 再求值: $(\frac{2}{x+3} + \frac{1}{3-x}) \div \frac{x}{x^2-9}$, 其中 $x=6$

解 原式 $= \frac{x-9}{x}$, 代入后得 $-\frac{1}{2}$

真题 1.9 (2011 江西 17 题 6 分) 先化简, 再求值: $(\frac{2a}{a-1} + \frac{a}{1-a}) \div a$, 其中 $a = \sqrt{2} + 1$

解 原式 $= \frac{1}{a-1}$, 代入后 $= \frac{\sqrt{2}}{2}$

真题 1.10 (2019 黄石) 先化简, 再求值: $\frac{3}{x+2} + x-2 \div \frac{x^2-2x+1}{x+2}$, 其中 $|x|=2$.

解 原式 $= \frac{x+1}{x-1}$

代入: $|x|=2 \Rightarrow x=\pm 2$, 又 $x+2 \neq 0, x-1 \neq 0, \therefore x=2$, 原式 $= 3$

三、 类型三：化简求值-选值代入 (仅 2013 年考查)

真题 1.11 (2013 江西 17 题 6 分) 先化简, 再求值: $\frac{x^2 - 4x + 4}{2x} \div \frac{x^2 - 2x}{x^2} + 1$, 在 0, 1, 2 三个数中选一个合适的, 代入求值.

解 原式 $= \frac{x}{2}$, $x \neq 0, x \neq 2$, 代入 1, 得 $\frac{1}{2}$

真题 1.12 (2019 荆州) 先化简 $(\frac{a}{a-1} - 1) \div \frac{2}{a^2 - a}$, 然后从 $-2 \leq a < 2$ 中选出一个合适的整数作为 a 的值代入求值.

解 原式 $= \frac{a}{2}$, $a \neq 0, a \neq 1$, 取 $a = -1$ 代入, 得 $-\frac{1}{2}$

1.4 强化训练

1.4.1 基础篇

习题 1.1 下列式子中, 哪些是分式? 哪些是整式?

(1) $\frac{x}{2}$

(6) $\frac{1}{9}m^2 + n$

(10) $\frac{1}{2}x - \frac{4}{5}y$

(2) $\frac{3}{x+1}$

(7) $\frac{-m}{\pi}$

(11) $\frac{1}{\pi+3}$

(3) $2y$

(8) $\frac{3a-b}{a+b}$

(12) $\frac{\pi}{m+2}$

(4) $-\frac{1}{-2ac}$

(9) $\frac{m^7}{m^3}$

(13) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

(5) $x + y^2$

解 3, 4, 8, 9, 12, 13

习题 1.2 下列分式有意义的条件是什么?

(1) $\frac{1}{x}$

解 $x \neq 0$

(3) $\frac{x+y}{x^2+y^2}$

解 x, y 不同时为 0

(2) $\frac{3}{x+3}$

解 $x \neq -3$

(4) $\frac{x+y}{x^2-y^2}$

解 $x \neq \pm y$

$$(5) \frac{1}{x^2 + 3}$$

解 x 取任意实数

习题 1.3 当 x 为何值时, 下列分式的值为零?

$$(1) \frac{x+1}{x}$$

解 $x = -1$

$$(4) \frac{x^2 + 3}{x + 7}$$

解 不存在这样的 x

$$(2) \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

解 $x = 1$

$$(5) \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

解 $x = -3$

$$(3) \frac{|x| - 3}{x - 3}$$

解 $x = -3$

$$(6) \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x}$$

解 $x = 2$

习题 1.4 回答下列问题:

$$(1) \text{ 分式 } \frac{x-6}{x+5} \text{ 的值为正数, 求 } x \text{ 的取值范围}$$

解 $x > 6$ 或 $x < -5$

$$(2) \frac{x^2 + 1}{x - 9} \text{ 的值为负数, 求 } x \text{ 的取值范围;}$$

解 $x < 9$

$$(3) \text{ 分式 } \frac{|x-4|}{2x-11} \text{ 的值为负数, 求 } x \text{ 的取值范围;}$$

解 $x < \frac{11}{2}$ 且 $x \neq 4$

$$(4) \text{ 分式 } \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x - 9} \text{ 的值为 1, 求 } x \text{ 的取值.}$$

解 $x = \frac{5}{4}$

习题 1.5 约分:

$$(1) \frac{(2x-y)^2}{y-2x}$$

解 $y - 2x$

$$(2) \frac{(3b-2a)^2}{(2a-3b)^3}$$

解 $\frac{1}{2a-3b}$

解 $\frac{2x-3y}{2x+3y}$

$$(3) \frac{4x^2 - 9y^2}{4x^2 + 12xy + 9y^2}$$

$$(4) \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{c^2 - a^2 - b^2 + 2ab}$$

解 $\frac{a+b-c}{c-a+b}$

习题 1.6 通分:

$$(1) \frac{1}{2x}, \frac{4}{3xy^2}, -\frac{9}{4y}$$

解 最简公分母: $12xy^2$

$$(2) \frac{2}{7-7a}, \frac{3a}{1-2a+a^2}, \frac{1}{a^2-1}$$

解 最简公分母: $7(a+1)(a-1)^2$

$$(3) \frac{1}{x^2-4x-5}, \frac{x}{x^2+3x+2}, \frac{x^2}{x^2-3x-10}$$

解 最简公分母: $(x-5)(x+1)(x+2)$

习题 1.7 写出下列各等式中未知的分子或分母:

$$(1) \frac{9-x^2}{(x+3)^2} = \frac{?}{x+3}$$

$$(2) \frac{?}{m^2+11m} = \frac{1}{m+11}$$

解 (1) $3-x$

(2) m

习题 1.8 不改变分式的值, 将下列分式的分子、分母的系数化为整数:

$$(1) \frac{0.3x}{4y}$$

$$(2) \frac{0.7x-0.05y}{0.03x+0.2y}$$

$$(3) \frac{-\frac{1}{12}x}{\frac{1}{24}y}$$

解 (1) $\frac{3x}{40y}$; (2) $\frac{70x-5y}{3x+20y}$; (3) $-\frac{2x}{y}$

习题 1.9 不改变分式的值, 使分式的分子、分母的符号都为正:

$$(1) \frac{-3x}{7xy}$$

$$(3) \frac{-2m}{-17n}$$

$$(5) -\frac{-x^2}{3x+7}$$

$$(2) \frac{4x}{-5y}$$

$$(4) -\frac{4a}{-3a^2-5}$$

$$(6) -\frac{-9x}{-4x-1}$$

解 (1) $-\frac{3x}{7xy}$; (2) $-\frac{4x}{5y}$ (3) $\frac{2m}{17n}$
 (4) $\frac{4a}{3a^2+5}$; (5) $\frac{x^2}{3x+1}$; (6) $-\frac{9x}{4x+1}$

习题 1.10 计算:

$$(1) \frac{x+8}{2x-x^2} \cdot \frac{x^2-4}{3x+24} \cdot \frac{3}{x+2}$$

$$(3) \frac{x+2y}{x^2-y^2} + \frac{y}{y^2-x^2} + \frac{2x}{x^2-y^2}$$

$$(2) \frac{3+3y}{x^2-y^2} - \frac{x+2y}{x^2-y^2} + \frac{2x-3y}{x^2-y^2}$$

$$(4) \frac{1}{6x-4y} - \frac{1}{6x+4y} - \frac{3x}{4y^2-9x^2}$$

解 (1) $-\frac{1}{x}$; (2) $\frac{2}{x+y}$; (3) $\frac{3x+y}{x^2-y^2}$; (4) $\frac{1}{3x-2y}$

1.4.2 强化篇

习题 1.11 计算:

$$(1) -\frac{6a^2b}{a^2-9b^2} - \frac{9b^2}{a+3b} - a + 3b$$

$$(2) \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4}$$

$$(3) \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \cdots + \frac{1}{(x+9)(x+10)}$$

解 (1) $= -\frac{6a^2b}{a^2-9b^2} - \frac{9b^2}{a+3b} - \frac{a^2-9b^2}{a+3b} = \frac{-a^2}{a^2-3b^2}$

$$(2) = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{8}{1-x^8}$$

$$(3) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \cdots = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+10} = \frac{9}{x^2+11x+10}$$

习题 1.12 先化简, 再求值: $\frac{a-1}{a+2} \cdot \frac{a^2-4}{a^2-2a+1} \div \frac{1}{a^2-1}$, 其中 a 满足 $a^2-a=0$

解 原式 $= a^2 - a - 2$, 代入后得 -2

习题 1.13 已知 $2a-3b+c=0$, $3a-2b-6c=0$, $abc \neq 0$, 求 $\frac{a^3-2b^3+4c^3}{a^2b-2b^2c+3ac^2}$

解 $b=3c$, $a=4c$, 原式 $= \frac{1}{3}$