


第1章 分式方程及其应用

 **笔记** 人教: 八上第十五章 P 149-P 156; 北师: 八下第五章 P 125 - P 130

1.1 知识要点

一、分式方程的概念及解法

1. 分式方程的概念: **分母中含有未知数**的方程.

2. 解分式方程

(1) 基本思想: 分式方程 $\xrightarrow{\text{化简}}$ 整式方程

(2) 一般步骤:

i 化为**整式方程**: **去分母**

ii 解整式方程

iii **检验**: $\begin{cases} \text{最简公分母为 } 0 : x = a \text{ 不是分式方程的解} \\ \text{最简公分母不为 } 0 : x = a \text{ 是分式方程的解} \end{cases}$

(3) 技巧: 去分母时, 先确定**最简公分母**; 若分母是多项式, 要进行**因式分解**; 若分子是多项式, 则需将其**看作一个整体, 加括号**后再进行下一步运算.

(4) 分式方程的增根: 分式方程的增根是**去分母后的整式方程解得根**, 但此根却是使**分式方程的分母为 0 的根**.

(5) 分式方程无解: 可能是**解为增根**, 也可能是**去分母后的整式方程无解**.

二、分式方程的实际应用

1. 解题步骤: 实际问题 $\xrightarrow[\text{设未知数}]{\text{找等量关系}}$ 列分式方程 \rightarrow 解分式方程 \rightarrow 双检验 \rightarrow 作答.

2. 【易错警示】解分式方程必须“双检验”: ①检验**是否是分式方程的解**; ②检验**是否符合实际意义**.

3. 常见问题的关系式

(1) 行程问题 $\begin{cases} \frac{\text{路程}}{\text{速度}} = \text{时间} \\ \frac{\text{同一路程}}{\text{慢速}} - \frac{\text{同一路程}}{\text{快速}} = \text{时间差} \end{cases}$

(2) $\frac{\text{工作总量}}{\text{工作效率}} = \text{工作时间}$

(3) 购买分配类问题: $\frac{\text{总价}}{\text{单价}} = \text{数量}$

1.2 重难点突破

分式方程的解法:

例 1.1 解方程: $\frac{1}{x-5} = \frac{x+1}{5-x} + 2$

解: 方程两边同时乘以 $(x-5)$,

得: $1 = -(x+1) + 2$ 第一步

去括号得: $1 = -x - 1 + 2$, 第二步

移项得: $x = -1 + 2 - 1$, 第二步

解得: $x = 0$, 第四步

检验: 当 $x = 0$ 时, $x - 5 \neq 0$, 第五步

\therefore 原分式方程的根为 $x = 0$ 第六步

【查找错因】上述解答过程是从第 **一** 步开始出现错误的, 错误原因是 **忘给 2 乘以 $(x-5)$** .

【自主解答】

【易错警示】给方程两边同乘以最简公分母时, 不要给常数项或整式部分漏乘.

解 $x = 12$

1.3 中考真题

一、命题点: 分式方程的解法

(仅 2010 年考)

真题 1.1 (2018 江西 18 题 7 分) 解方程: $\frac{x-2}{x+2} + \frac{4}{x^2-4} = 1$.

解 $x = 3$

真题 1.2 (2019 玉林) 解方程: $\frac{x}{x-1} - \frac{3}{(x-1)(x+2)} = 1$.

解 $x = 1$ 是增根, 方程无解.

二、命题点分式方程的实际应用

(仅 2019 年考)

真题 1.3 (2019 江西 11 题 3 分) 斑马线前“车让人”, 不仅体现着一座城市对生命的尊重, 也直接反映着城市的文明程度. 如图, 某路口的斑马线路段 $A-B-C$ 横穿双向行驶车道, 其中 $AB = BC = 6$ 米, 在绿灯亮时, 小明共用 11 秒通过 AC , 其中通过 BC 的速度是通过 AB 速度的 2 倍, 求小明通过 AB 时的速度. 设小明通过 AB 时的速度是 x 米/秒, 根据题意列方程得: $\frac{6}{x} + \frac{6}{1.2x} = 11$.

真题 1.4 (2019 广州) 甲、乙二人做某种机械零件, 已知每小时甲比乙少做 8 个, 甲做 120 个所用的时间与乙做 150 个所用的时间相等, 设甲每小时做 x 个零件, 下列方程正确的是 ()

A. $\frac{120}{x} = \frac{150}{x-8}$

B. $\frac{120}{x+8} = \frac{150}{x}$

C. $\frac{120}{x-8} = \frac{150}{x}$

D. $\frac{120}{x} = \frac{150}{x+8}$

解 D

真题 1.5 班级组织同学乘大巴车前往“研学旅行”基地开展爱国教育活动, 基地离学校有 90 公里, 队伍 8:00 从学校出发. 苏老师因有事情, 8:30 从学校自驾小车以大巴 1.5 倍的速度追赶, 追上大巴后继续前行, 结果比队伍提前 15 分钟到达基地. 问:

(1) 大巴与小车的平均速度各是多少?

(2) 苏老师追上大巴的地点到基地的路程有多远?

解 (1) $\frac{90}{x} - \frac{90}{1.5x} = \frac{45}{60} \Rightarrow x = 40$, 大巴 40km/h, 小汽车 60 km/h.

(2) $\frac{x}{40} - \frac{x}{60} = 0.5 \Rightarrow x = 60$, 到基地路程 = $90 - 60 = 30$ 公里.

1.4 练习

一、回归教材

一、李庄村原来用 10hm^2 耕地种植粮食作物, 用 80hm^2 种植经济作物. 为了增加粮食作物的种植面积, 该村计划将部分种植经济作物的耕地改为种植粮食作物, 使得粮食作物的种植面积与经济作物的种植面积之比为 5 : 7. 设有 $x\text{hm}^2$ 种植经济作物的耕地改为种植粮食作物, 那么 x 满足怎样的分式方程?

解 $\frac{10+x}{80-x} = \frac{5}{7}$

二、有两块面积相同的小麦试验田, 第一块使用原品种, 第二块使用新品种, 分别收获小麦 12000kg 和 14000kg, 已知第一块试验田每公顷的产量比第二块少 1500kg. 如果设第一块试验田每公顷的产量为 $x\text{kg}$, 那么 x 满足怎样的分式方程?

解 $\frac{12000}{x} = \frac{14000}{x+1500}$

三、某运输公司需要装运一批货物, 由于机械设备没有及时到位, 只好先用人工装运, 6h 完成了一半任务; 后来机械装运和人工装运同时进行, 1h 完成了后一半任务. 如果设单独采用机械装运 $x\text{h}$ 可以完成后一半任务, 那么 x 满足怎样的分式方程?

解 $\frac{1}{6} + \frac{1}{x} = 1$ 或 $\frac{1}{12} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$

四、从甲地到乙地有两条公路: 一条是全长 600km 的普通公路, 另一条是全长 480km 的高速公路. 某客车在高速公路上行驶的平均速度比在普通公路上快 45km/h, 由高速公路从甲地到乙地所

需的时间是由普通公路从甲地到乙地所需时间的一半. 如果设该客车由高速公路从甲地到乙地所需的时间为 x h, 那么 x 满足怎样的分式方程?

解 $\frac{480}{x} - \frac{600}{2x} = 45$

五、某市为治理污水, 需要铺设一段全长为 $3000m$ 的污水排放管道. 为了尽量减少施工对城市交通所造成的影响, 实际施工时每天的工效比原计划增加 25% , 结果提前 30 天完成这一任务. 实际每天铺设多长管道?

解 $25m$.

原计划每天 x , $\frac{3000}{x} - \frac{3000}{(1+25\%)x} = 30 \Rightarrow$

六、某质检部门抽取甲、乙两厂相同数量的产品进行质量检测, 结果甲厂有 48 件合格产品, 乙厂有 45 件合格产品, 甲厂的合格率比乙厂高 5% , 求甲厂的合格率.

解 甲厂合格率 80% .

$$\frac{48}{x\%} = \frac{45}{(x-5)\%}$$

七、某市从今年 1 月 1 日起调整居民用水价格, 每立方米水费上涨 $\frac{1}{3}$. 小丽家去年 12 月份的水费是 15 元, 而今年 7 月份的水费则是 30 元. 已知小丽家今年 7 月份的用水量比去年 12 月份的用水量多 $5m^3$, 求该市今年居民用水的价格.

解 设该市去年居民用水的价格为 x 元 $/m^3$, 则今年的水价为 $(1 + \frac{1}{3})x$ 元 $/m^3$, 根据题意, 得

$$\frac{30}{(1+\frac{1}{3})x} - \frac{15}{x} = 5$$

$x = 3$ 经检验, $x = \frac{3}{2}$ 是所列方程的根. $\frac{3}{2} \times (1 + \frac{1}{3}) = 2$ (元 $/m^3$). 所以, 该市今年居民用水的价格为 2 元 $/m^3$.

八、小明和同学一起去书店买书, 他们先用 15 元买了一种科普书, 又用 15 元买了一种文学书. 科普书的价格比文学书高出一半, 他们所买的科普书比所买的文学书少 1 本. 这种科普书和这种文学书的价格各是多少?

解 文学书 5 元, 科普书 7.5 元.

$$\frac{15}{x} = \frac{15}{1.5x} + 1$$

九、甲种原料与乙种原料的单价比为 $2:3$, 将价值 $2\,000$ 元的甲种原料与价值 $1\,000$ 元的乙种原料混合后, 单价为 9 元, 求甲种原料的单价.

解 甲单价 8 元. $\frac{2000}{2x} + \frac{1000}{3x} = \frac{2000+1000}{9}$

十、某商店销售一批服装, 每件售价 150 元, 可获利 25% . 求这种服装的成本价.

解 成本价 120 元. $\frac{150-x}{x} = 25\%$

- 十一、某商店甲种糖果的单价为 20 元/kg, 乙种糖果的单价为 16 元/kg. 为了促销, 现将 10 kg 乙种糖果和 1 包甲种糖果混合后 (搅匀) 销售, 如果将混合后的糖果单价定为 17.5 元/kg, 那么混合销售与分开销售的销售额相同. 这包甲种糖果有多少千克?

解 6kg. $\frac{20x+16 \times 10}{x+10} = 17.5$

二、备考练习

(时间:40 分钟)

一、基础过关

1. 解分式方程 $\frac{1-x}{x-2} = \frac{1}{2-x} - 2$ 时, 去分母变形正确的是 ()

A. $-1 + x = -1 - 2(x - 2)$

B. $1 - x = 1 - 2(x - 2)$

C. $-1 + x = 1 + 2(2 - x)$

D. $1 - x = -1 - 2(x - 2)$

解 D

2. 关于 x 的分式方程 $\frac{2}{x} + \frac{3}{x-a} = 0$ 的解 $x = 4$, 则常数 a 的值为 ()

A. $a = 1$

B. $a = 2$

C. $a = 4$

D. $a = 10$

解 D

3. 分式方程 $\frac{x-5}{x-1} + \frac{2}{x} = 1$ 的解为 ()

A. $x = -1$

B. $x = 1$

C. $x = 2$

D. $x = -2$

解 A

4. 现代互联网技术的广泛应用, 催生了快递行业的高速发展. 据调查, 湘潭某家小型快递公司的分拣工小李和小江, 在分拣同一类物件时, 小李分拣 120 个物件所用的时间与小江分拣 90 个物件所用的时间相同, 已知小李每小时比小江多分拣 20 个物件, 若设小江每小时分拣 x 个物件, 则可列方程为 ()

A. $\frac{120}{x-20} = \frac{90}{x}$

B. $\frac{120}{x+20} = \frac{90}{x}$

C. $\frac{120}{x} = \frac{90}{x-20}$

D. $\frac{120}{x} = \frac{90}{x+20}$

解 B

5. 十堰即将跨入高铁时代, 钢轨铺设任务也将完成. 现还有 6000 米的钢轨需要铺设, 为确保年底通车, 如果实际施工时每天比原计划多铺设 20 米, 就能提前 15 天完成任务, 设原计划每天铺设钢轨 x 米, 则根据题意所列的方程是 ()

A. $\frac{6000}{x} - \frac{6000}{x+20} = 15$

B. $\frac{6000}{x+20} - \frac{6000}{x} = 15$

C. $\frac{6000}{x} - \frac{6000}{x-15} = 20$

D. $\frac{6000}{x-15} - \frac{6000}{x} = 20$

解 A

6. 分式方程 $\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$ 的解为 $x=1$
7. 甲、乙两地相距 1000km, 如果乘高铁列车从甲地到乙地比乘特快列车少用 3h. 已知高铁列车的平均速度是特快列车的 1.6 倍, 设特快列车的平均速度为 x km/h, 根据题意可列方程为 $\frac{1000}{x} - \frac{1000}{1.6x} = 3$.
8. 若关于 x 的分式方程 $\frac{3x}{x-2} - 1 = \frac{m+3}{x-2}$ 有增根, 则 m 的值为 3.
9. 解方程: $\frac{x-2}{x-3} + 1 = \frac{2}{3-x}$.
解 $x = \frac{3}{2}$
10. 解分式方程: $\frac{x}{x-2} - 1 = \frac{4}{x^2-4x+4}$
解 $x = 4$
11. 某公司购买了一批 A、B 型芯片, 其中 A 型芯片的单价比 B 型芯片的单价少 9 元, 已知该公司用 3120 元购买 A 型芯片的条数与用 4200 元购买 B 型芯片的条数相等.
(1) 求该公司购买的 AB 型芯片的单价各是多少元?
(2) 若两种芯片共购买了 200 条, 且购买的总费用为 6280 元, 求购买了多少条 A 型芯片?
解 (1) A:26 元; B:35 元.
(2) 80 条.

二、提高

12. 若关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-3} + \frac{3a}{3-x} = 2a$ 无解, 则 a 的值为 1 或 $\frac{1}{2}$.
13. 在我市“青山绿水”行动中, 某社区计划对面积有 $3600m^2$ 的区域进行绿化, 经投标由甲、乙两个工程队来完成. 已知甲队每天能完成绿化的面积是乙队每天能完成绿化面积的 2 倍, 如果两队各自独立完成面积为 $600m^2$ 区域的绿化时, 甲队比乙队少用 6 天.
(1) 求甲、乙两工程队每天各能完成多少面积的绿化;
(2) 若甲队每天绿化费用是 1.2 万元. 乙队每天绿化费用为 0.5 万元, 社区要使这次绿化的总费用不超过 40 元, 则至少应安排乙工程队绿化多少天?
解 (1) 甲 100, 乙 50;
(2) 32 天

三、核心素养

1. 在求 $3x$ 的倒数的值时, 嘉淇同学误将 $3x$ 看成了 $8x$, 她求得的值比正确答案小 5. 依上述情形, 所列关系成立的是 ()

A. $\frac{1}{3x} = \frac{1}{8x} - 5$ B. $\frac{1}{3x} = \frac{1}{8x} + 5$ C. $\frac{1}{3x} = 8x - 5$ D. $\frac{1}{3x} = 8x + 5$

解 B

2. 某工厂计划生产 1500 个零件, 但是在实际生产时, ..., 求实际每天生产零件的个数在这个题目

中, 若设实际每天生产零件 x 个, 可得方程 $\frac{1500}{x-5} - \frac{1500}{x} = 10$. 则题目中用 “...” 表示的条件应是 ()

- A. 每天比原计划多生产 5 个, 结果延期 10 天完成
- B. 每天比原计划多生产 5 个, 结果提前 10 天完成
- C. 每天比原计划少生产 5 个, 结果延期 10 天完成
- D. 每天比原计划少生产 5 个, 结果提前 10 天完成

解 B

