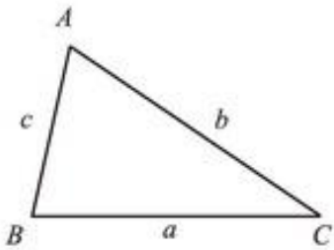


# 第 1 章 三角形基本概念与性质

## 1.1 知识要点

### 一、 三角形的基础概念

1. 定义: 如图, 由不在同一直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形叫做三角形 (triangle).

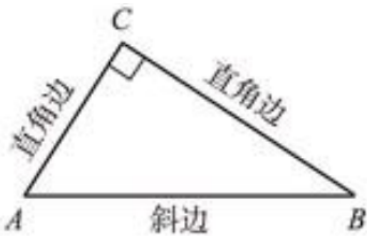


2. 构成: 三角形有三条边, 三个角和三个顶点.
3. 符号表示: 三角形用符号  $\triangle$  表示.  $\triangle ABC$  的三个角可以用  $\angle A, \angle B, \angle C$  表示, 三边有时也用  $a, b, c$  表示. 大小写字母相对.

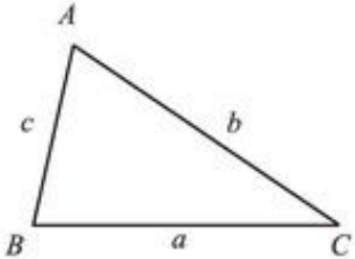
### 二、 三角形的分类

按角度: 锐角三角形, 直角三角形, 钝角三角形

锐角三角形 (acute triangle) 三个内角都是锐角	直角三角形 (right triangle) 有一个内角是直角	钝角三角形 (obtuse triangle) 有一个内角是钝角



按边的关系: 等腰三角形, 等边三角形



### 三、 三角形的性质

#### 1. 普遍性质

- (1) 稳定性
- (2) 三角形三个内角的和等于  $180^\circ$
- (3) 三角形任意两边之和大于第三边
- (4) 三角形任意两边之差小于第三边

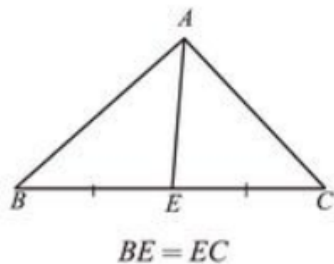
## 2. 特殊三角形的特有性质

- (1) 直角三角形的两个锐角互余
- (2) 等腰直角三角形的三个角为:  $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$
- (3) 等边三角形的三条边相等, 三个角都是  $60^\circ$

## 四、 三角形的三线

## 1. 中线

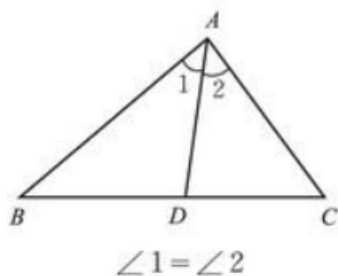
- (1) 定义: 如图, 三角形中连接一个顶点与它对边中点的线段, 叫做这个三角形的中线 (median).



- (2) 性质: 中线将三角形分成两个面积相等的小三角形.
- (3) 交点: 三角形三条中线交于一点, 这点成为三角形的**重心**.

## 2. 角平分线

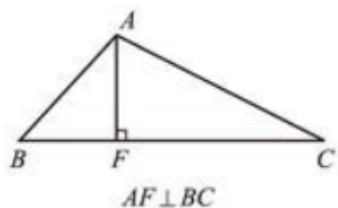
- (1) 定义: 如图, 三角形中, 一个内角的角平分线与它的对边相交, 这个角的顶点与交点之间的线段叫做三角形的角平分线.



- (2) 性质: 角平分线上的点到角的两边的距离相等 (从点向两边作垂线段).
- (3) 交点: 三角形三条角平分线交于一点, 这点成为三角形的**内心**.

## 3. 高

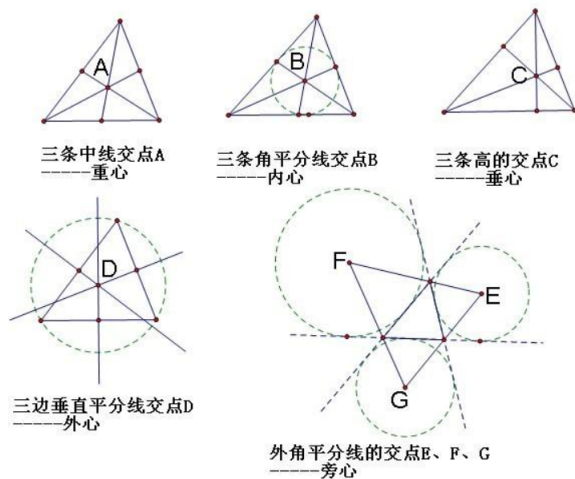
- (1) 定义: 如图, 从三角形的一个顶点向它的对边所在直线作垂线, 顶点和垂足之间的线段叫做三角形的高线, 简称三角形的高 (height).



- (2) 性质: 高可能在三角形内 (锐角三角形), 可能在三角形外 (钝角三角形), 也可能与边重合 (直角三角形).
- (3) 交点: 三角形三条角平分线交于一点, 这点成为三角形的**内心**.

## 五、三角形的四心

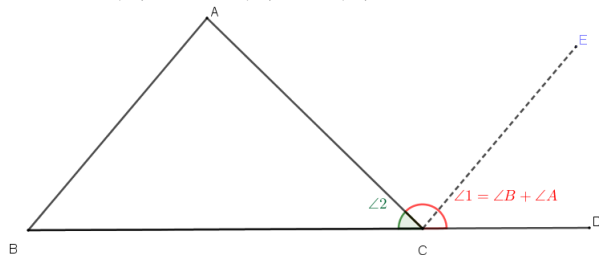
1. 内心: 三条角平分线的交点
2. 外心: 三条中垂线的交点
3. 重心: 三条中线的交点
4. 垂心: 三条高的交点



注: 任意三角形都具有以上五心: 重心、内心、垂心、外心、旁心。

## 六、三角形的外角

1. 定义: 三角形的外角是三角形的一边与另边的反向延长线组成的角。



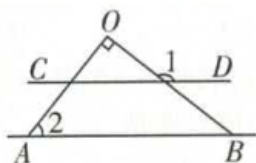
## 2. 性质

- (1) 三角形的一个外角等于不相邻的两个内角和
- (2) 三角形的一个外角大于与它不相邻的任一内角
- (3) 三角形三个外角之和为  $360^\circ$
- (4) 三角形的每个顶点处都有两个相等的外角, 所以每个三角形都有六个外角

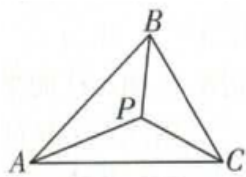
穿插 习题 4.29

## 1.2 历年真题

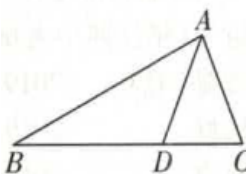
**真题 1.1** (2019 益阳) 如图, 直线  $AB \parallel CD$ ,  $OA \perp OB$ , 若  $\angle 1 = 142^\circ$  则  $\angle 2 =$       度.



**真题 1.2** (2011 江西 13 题 3 分) 如图, 在  $\triangle ABC$  中, 点  $P$  是  $\triangle ABC$  的内心, 则  $\angle PBC + \angle PCA + \angle PAB =$  \_\_\_\_ 度.

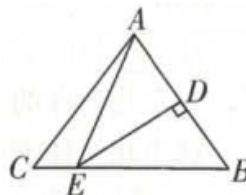


**真题 1.3** (2019 眉山) 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AD$  平分  $\angle BAC$  交  $BC$  于点  $D$ ,  $\angle B = 30^\circ$ ,  $\angle ADC = 70^\circ$ , 则  $\angle C$  的度数是 ( )



- A.  $50^\circ$                       B.  $60^\circ$                       C.  $70^\circ$                       D.  $80^\circ$

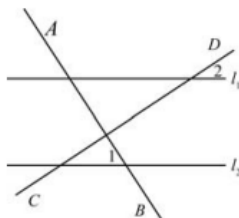
**真题 1.4** 如图  $\triangle ABC$  中,  $AB$  的垂直平分线交  $AB$  于点  $D$ , 交线段  $BC$  于点  $E$ ,  $BC = 6$ ,  $AC = 5$ , 则  $\triangle ACE$  的周长是 ( )



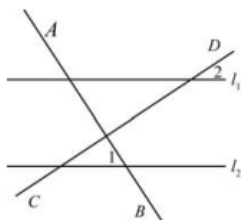
- A. 14                      B. 13                      C. 12                      D. 11

**真题 1.5** 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle B = 40^\circ$ ,  $\angle C = 80^\circ$ , 则  $\angle A =$  \_\_\_\_  $^\circ$ .

**真题 1.6** (河南) 如图, 直线  $l_1 \parallel l_2$ ,  $AB \perp CD$ ,  $\angle 1 = 34^\circ$ , 那么  $\angle 2$  的度数是 \_\_\_\_.

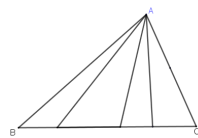
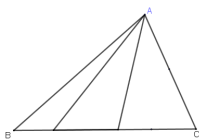
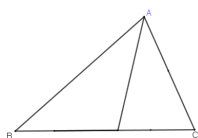


**真题 1.7** 如图, 将三角尺的直角顶点放在直尺的一边上,  $\angle 1 = 30^\circ$ ,  $\angle 2 = 50^\circ$ , 则  $\angle 3$  等于 \_\_\_\_  $^\circ$ .

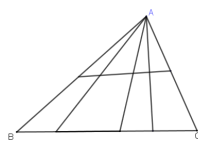
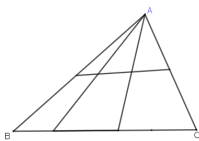
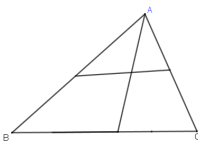


## 1.3 典型例题

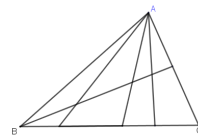
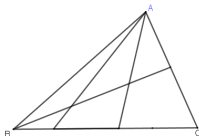
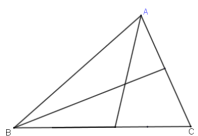
**例 1.1** 下列图形中三角形的个数 (1)



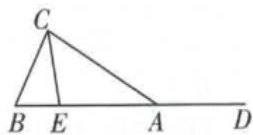
(2)



(3)



**例 1.2** 如图,  $D$  是  $\triangle ABC$  边  $BA$  延长线上一点.



(1) 若  $BC = 3$ ,  $AC = 6$ , 则  $AB$  的长的范围只能是 ( )

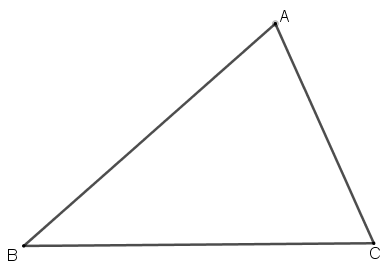
A.  $AB > 3$

B.  $AB < 9$

C.  $3 < AB < 9$

D.  $AB > 6$





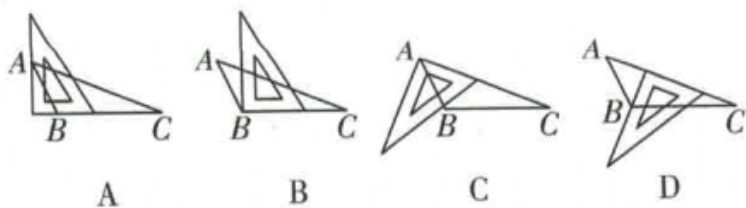
**例 1.5** 已知等腰三角形周长为 24, 其中两边长比 3:2, 求三角形三边长.

**例 1.6** 已知等腰三角形周长为 18,

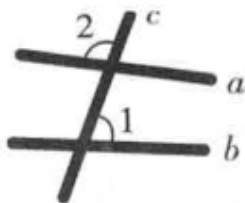
(1) 其中一边为 6, 求另外两边长;

(2) 其中一边为 4, 求另外两边长.

**例 1.7** 用三角板作  $\triangle ABC$  的边  $BC$  的高, 下列三角板的摆放位置正确的是: ( )



**例 1.8** (2019 绍兴) 如图, 墙上钉着三根木条  $a, b, c$ , 量得  $\angle 1 = 70^\circ, \angle 2 = 100^\circ$ , 那么木条  $a, b$  所在直线所夹的锐角是 ( )



A.  $5^\circ$

B.  $10^\circ$

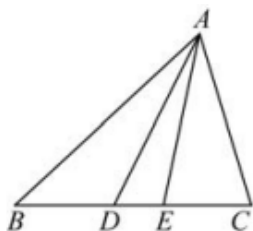
C.  $30^\circ$

D.  $70^\circ$

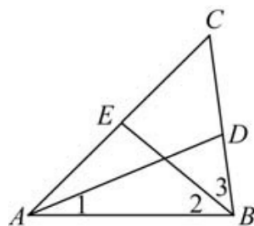
## 1.4 强化练习

### 1.4.1 三角形有关的线段

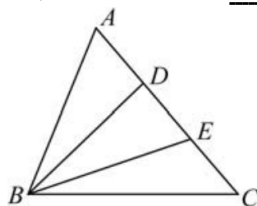
**习题 1.1** 如图, 图中所有三角形的个数为\_\_\_\_, 在  $\triangle ABE$  中,  $AE$  所对的角是\_\_\_\_,  $\angle ABC$  所对的边是\_\_\_\_,  $AD$  在  $\triangle ADE$  中是\_\_\_\_的对边, 在  $\triangle ADC$  中是\_\_\_\_的对边;



**习题 1.2** 如图, 已知  $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle BAC$ ,  $\angle 2 = \angle 3$ , 则  $\angle BAC$  的平分线为\_\_\_\_,  $\angle ABC$  的平分线为\_\_\_\_;

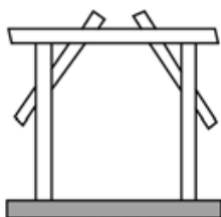


**习题 1.3** 如图,  $D, E$  是边  $AC$  的三等分点, 图中有\_\_\_\_个三角形,  $BD$  是三角形\_\_\_\_中\_\_\_\_边上的中线,  $BE$  是三角形\_\_\_\_中\_\_\_\_边上的中线;



**习题 1.4** 若等腰三角形的两边长分别为 7 和 8, 则其周长为\_\_\_\_;

**习题 1.5** 如图, 木工师傅做完门框后, 为了防止变形, 常常象图中所示那样钉上两条斜拉的木条, 这样做的数学道理是\_\_\_\_;



**习题 1.6** 如图, 图中共有三角形 ( )

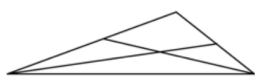


A. 4 个

B. 5 个

C. 6 个

D. 8 个



**习题 1.7** 下列长度的三条线段中, 能组成三角形的是 ( )

A.  $3\text{cm}, 5\text{cm}, 8\text{cm}$ B.  $8\text{cm}, 8\text{cm}, 18\text{cm}$ C.  $0.1\text{cm}, 0.1\text{cm}, 0.1\text{cm}$ D.  $3\text{cm}, 40\text{cm}, 8\text{cm},$ 

**习题 1.8** 如果线段  $a, b, c$  能组成三角形, 那么, 它们的长度比可能是 ( )

A.  $1:2:4$ B.  $1:3:4$ C.  $3:4:7$ D.  $2:3:4$ 

**习题 1.9** 如果三角形的两边分别为 7 和 2, 且它的周长为偶数, 那么第三边的长为 ( )

A. 5

B. 6

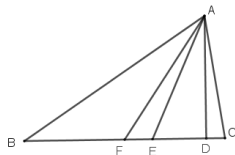
C. 7

D. 8

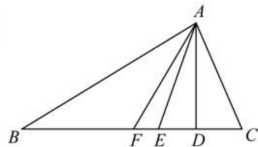
**习题 1.10** 一个三角形的三边之比为  $2:3:4$ , 周长为  $36\text{cm}$ , 求此三角形三边的长.

**习题 1.11** 已知:  $\triangle ABC$  的周长为  $48\text{cm}$ , 最大边与最小边之差为  $14\text{cm}$ , 另一边与最小边之和为  $25\text{cm}$ , 求:  $\triangle ABC$  的各边的长.

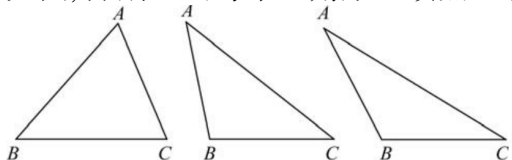
**习题 1.12** 如图,  $AD$  是  $\triangle ABC$  的高,  $AE$  是  $\triangle ABC$  的角平分线,  $AF$  是  $\triangle ABC$  的中线, 写出图中所有相等的角和相等的线段.



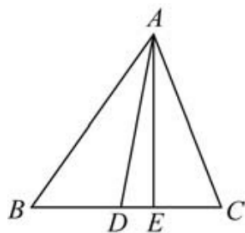
**习题 1.13 常用模型:** 如图,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AD$  是  $\triangle ABC$  的高,  $AE$  是  $\triangle ABC$  的角平分线,  $AF$  是  $\triangle ABC$  的中线, 写出图中所有相等的角和相等的线段.



**习题 1.14** 如图, 分别画出每个三角形过顶点  $A$  的中线、角平分线和高.



**习题 1.15** 如图, 在  $\triangle ABC$  中, 若  $AD$  是  $BC$  边上的中线, 则有  $BD = \underline{\hspace{1cm}} = \frac{1}{2}\underline{\hspace{1cm}}$ , 若过  $A$  点作  $BC$  边上的高  $AE$ , 利用三角形的面积公式可求得  $S_{\triangle ABD} = \underline{\hspace{1cm}} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$



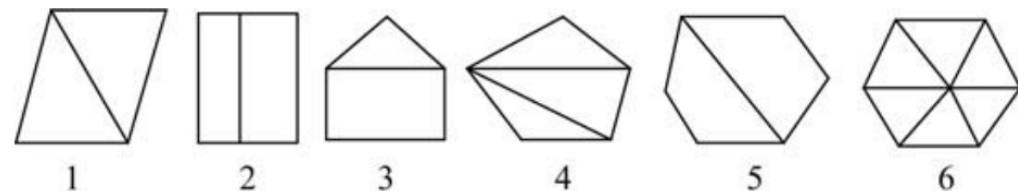
**习题 1.16** 请你任意画一个三角形, 将这个三角形的面积四等分.

**习题 1.17** (1) 已知等腰三角形的一边等于  $8\text{cm}$ , 另一边等于  $6\text{cm}$ , 求此三角形的周长;  
(2) 已知等腰三角形的一边等于  $5\text{cm}$ , 另一边等于  $2\text{cm}$ , 求此三角形的周长.

## 一、拓展篇

**习题 1.18** 在  $\triangle ABC$  中  $AB = AC$ ,  $AC$  上的中线  $BD$  把三角形的周长分为  $24\text{cm}$  和  $30\text{cm}$  的两个部分, 求三角形的三边长.

**习题 1.19** (1) 下列图中哪些具有稳定性?



(2) 对不具稳定性的图形, 请适当地添加线段, 使之具有稳定性.

## 1.4.2 三角形的内角

## 一、基础篇

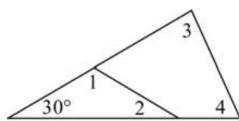
习题 1.20 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ , 则  $\angle C =$  \_\_\_\_\_;

习题 1.21 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 60^\circ$ ,  $\angle A - \angle B = 20^\circ$ , 则  $\angle B =$  \_\_\_\_\_;

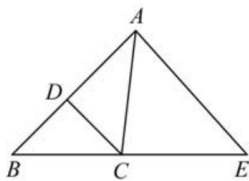
习题 1.22 三角形的三个内角之比为  $1:3:5$ , 那么这个三角形的最大内角为 \_\_\_\_\_;

习题 1.23 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = \angle B = 4\angle C$ , 则  $\angle C =$  \_\_\_\_\_;

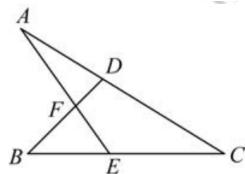
习题 1.24 如图,  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 =$  \_\_\_\_\_;



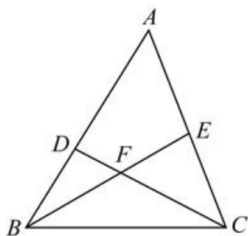
习题 1.25 如图,  $CD$  平分  $\angle ACB$ ,  $AE \parallel DC$  交  $BC$  的延长线于  $E$ , 若  $\angle ACE = 80^\circ$ , 则  $\angle CAE =$  \_\_\_\_\_;



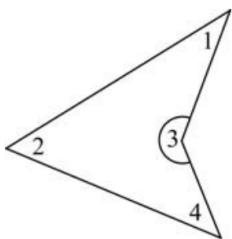
习题 1.26 如图,  $\angle A = 32^\circ$ ,  $\angle B = 45^\circ$ ,  $\angle C = 38^\circ$ , 则  $\angle DFE =$  ( )

A.  $120^\circ$ B.  $115^\circ$ C.  $110^\circ$ D.  $105^\circ$

**习题 1.27** 如图,  $D$  是  $AB$  上的一点,  $E$  是  $AC$  上的一点,  $BE$ 、 $CD$  相交于  $F$ ,  $\angle A = 50^\circ$ ,  $\angle ACD = 40^\circ$ ,  $\angle ABE = 28^\circ$ , 则  $\angle CEF$  的度数是 ( )

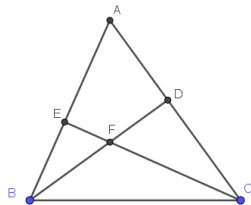
A.  $62^\circ$ B.  $68^\circ$ C.  $78^\circ$ D.  $90^\circ$ 

**习题 1.28** 如下图,  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4$  的值为 \_\_\_\_.

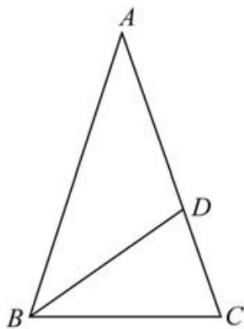


## 二、提高篇

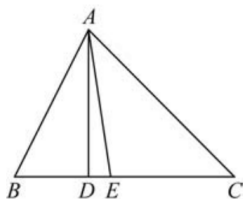
**习题 1.29** 如图, 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $\angle ABC = 66^\circ$ ,  $\angle ACB = 54^\circ$ ,  $BD$  是  $AC$  上的高,  $CE$  是  $AB$  上的高,  $F$  是  $BD$  和  $CE$  的交点, 求  $\angle BFC$  的度数.



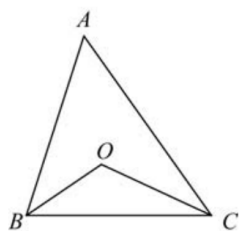
**习题 1.30** 如图, 已知:  $\angle A = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle C$ ,  $BD$  平分  $\angle ABC$ , 求  $\angle DBC$  的度数.



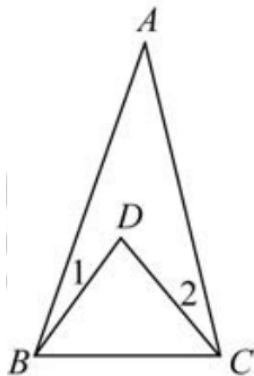
**习题 1.31** 如图, 已知  $\triangle ABC$  中,  $AD$  是  $BC$  边上的高,  $AE$  是  $\angle BAC$  的平分线, 若  $\angle B = 65^\circ$ ,  $\angle C = 45^\circ$ , 求  $\angle DAE$  的度数.



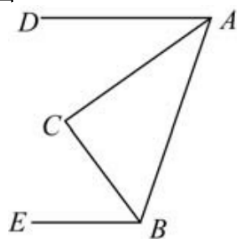
**习题 1.32** 如图在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ABC, \angle ACB$  的平分线交于点  $O$ , 若  $\angle A = 60^\circ$ , 求  $\angle BOC$  的度数.



**习题 1.33** 如图,  $\angle 1 = 20^\circ$ ,  $\angle 2 = 25^\circ$ ,  $\angle A = 35^\circ$ , 求  $\angle BDC$  的度数.

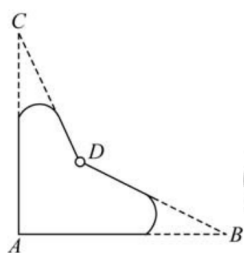


**习题 1.34** 如图,  $AD \parallel BE$ ,  $AC, BC$  分别平分  $\angle DAB$  和  $\angle EBA$ , 试判断  $AC$  和  $CB$  的位置关系, 并说明理由.

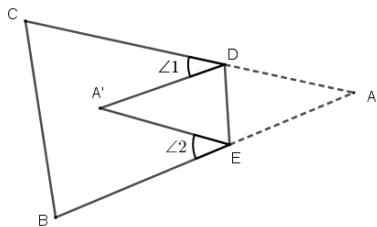


### 三、 拓展篇

**习题 1.35** 一个零件的形状如图, 按规定  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle B$  和  $\angle C$  应分别是  $32^\circ$  和  $21^\circ$ , 检验工人量得  $\angle BDC = 148^\circ$ , 就断定这两个零件不合格, 运用三角形的有关知识说明零件不合格的理由



**习题 1.36** 如图, 把  $\triangle ABC$  沿  $DE$  折叠, 当点  $A'$  落在四边形  $BCDE$  内部时, 则  $\angle A$  与  $\angle 1 + \angle 2$  之间有一种数量关系始终保持不变, 请试着找一找这个规律, 你发现的规律是什么? 试说明你找出的规律的正确性.



### 1.4.3 三角形有关的角

#### 一、 基础篇

**习题 1.37** 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = \angle B = \angle C$ , 则  $\angle A = \underline{\hspace{2cm}}$

**习题 1.38** 在  $\triangle ABC$  中, 若  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ , 则  $\triangle ABC$  的形状是       ; 若  $\angle B = \angle C = 45^\circ$ , 则  $\triangle ABC$  的形状是       

**习题 1.39**  $\triangle ABC$  中, 若  $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 2 : 1$ , 则  $\angle A = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\angle C = \underline{\hspace{2cm}}$

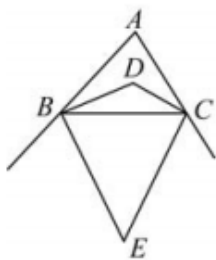
**习题 1.40**  $\triangle ABC$  中,  $\angle A - \angle C = 35^\circ$ ,  $\angle B - \angle A = 20^\circ$ , 则  $\angle C = \underline{\hspace{2cm}}$

**习题 1.41** 一个三角形三个内角中最多有        个钝角, 最少有        个锐角, 一个三角形三个外角最多有        个锐角, 最少有        个钝角

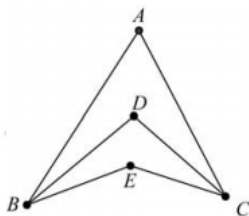
**习题 1.42**  $\triangle ABC$  是锐角三角形, 且  $\angle A > \angle B > \angle C$ , 则  $\angle A$  的取值范围是\_\_\_\_,  $\angle C$  的取值范围是\_\_\_\_

**习题 1.43** 等腰三角形中的一个外角等于  $100^\circ$ , 则顶角的度数是\_\_\_\_

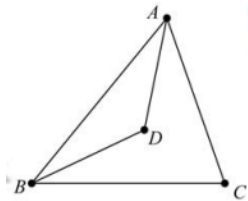
**习题 1.44** 如图,  $\triangle ABC$  中,  $BD, CD$  是内角平分线,  $BD, CD$  交于  $D$ ,  $BE, CE$  是外角平分线,  $BE, CE$  交于  $E$ , 则  $\angle D$  与  $\angle E$  满足的关系式是\_\_\_\_(写出一个关于  $\angle D$  与  $\angle E$  的等式)



**习题 1.45** 如图,  $BD$  平分  $\angle ABE$ ,  $CD$  平分  $\angle ACE$ ,  $BD, CD$  相交于点  $D$ ,  $\angle D = 100^\circ$ ,  $\angle E = 150^\circ$ , 求  $\angle A$  的度数

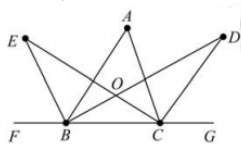


**习题 1.46** 如图,  $D$  是  $\triangle ABC$  内的一点,  $AD, BD$  相交于  $D$ , 试判断  $\angle D$  与  $\angle C$  的大小关系并说明.

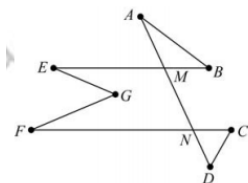


## 二、提高篇

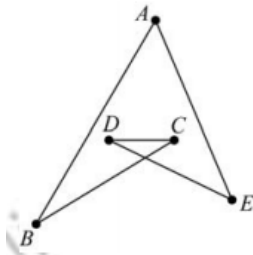
**习题 1.47** 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $CD, BE$  是外角平分线,  $BD, CE$  是内角平分线,  $BE, CE$  交于  $E$ ,  $BD, CD$  交于  $D$ , 试探索  $\angle D$  与  $\angle E$  的关系.



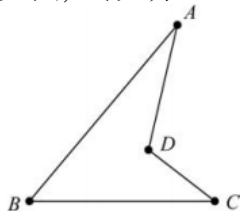
**习题 1.48** 如图, 已知  $\angle EGF = \angle BEG + \angle CFG$ , 试探索  $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D$  的度数.



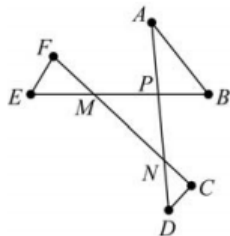
**习题 1.49** 如图, 求  $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D$  的度数



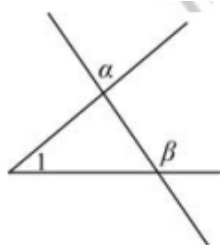
**习题 1.50** 如图, 试说明  $\angle ADC = \angle A + \angle B + \angle C$



**习题 1.51** 如图, 求  $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$ .

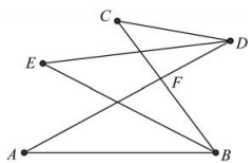


**习题 1.52**  $\angle 1$  的两边被一条直线所截, 用含有  $\alpha$  和  $\beta$  的式子表示  $\angle 1$ .



**习题 1.53** 如图, 已知  $DE$  平分  $\angle ADC$ ,  $BE$  平分  $\angle ABC$ ,  $DE$  与  $BE$  相交于  $E$ ,  $\angle A = 27^\circ$ ,  $\angle E = 33^\circ$ , 求  $\angle C$  的度数





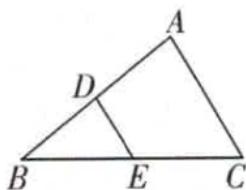
## 1.4.4 综合题组 1

30 分钟

## 一、基础过关

1. 三角形的内角和等于 ( )

- A.  $90^\circ$                       B.  $180^\circ$                       C.  $270^\circ$                       D.  $360^\circ$

2. 如图, 点  $D, E$  分别是  $\triangle ABC$  边  $BA, BC$  的中点,  $AC = 3$ , 则  $DE$  的长为 ( )

- A. 2                      B.  $\frac{4}{3}$                       C. 3                      D.  $\frac{3}{2}$

3. 下列长度的 3 根小木棒不能搭成三角形的是 ( )

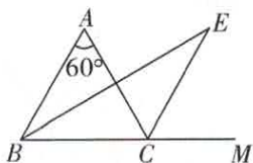
- A.  $2\text{cm}, 3\text{cm}, 4\text{cm}$                       B.  $1\text{cm}, 2\text{cm}, 3\text{cm}$                       C.  $3\text{cm}, 4\text{cm}, 5\text{cm}$                       D.  $4\text{cm}, 5\text{cm}, 6\text{cm}$

4. 已知三角形的两边长分别为 1 和 4, 第三边长为整数, 则该三角形的周长为 ( )

- A. 7                      B. 8                      C. 9                      D. 10

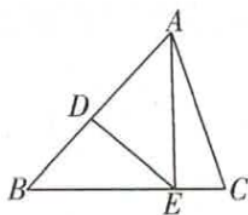
5. 在  $\triangle ABC$  中, 若一个内角等于另两个内角的差, 则 ( )

- A. 必有一个内角等于  $30^\circ$   
B. 必有一个内角等于  $45^\circ$   
C. 必有一个内角等于  $60^\circ$   
D. 必有一个内角等于  $90^\circ$

6. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $BE$  是  $\angle ABC$  的平分线,  $CE$  是外角  $\angle ACM$  的平分线,  $BE$  与  $CE$  相交于点  $E$ . 若  $\angle A = 60^\circ$ , 则  $\angle BEC$  是 ( )

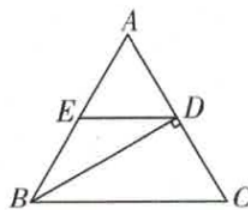
- A.  $15^\circ$                       B.  $30^\circ$                       C.  $45^\circ$                       D.  $60^\circ$

7. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AB$  的垂直平分线交  $AB$  于点  $D$ , 交线段  $BC$  于点  $E$ ,  $BC = 6$ ,  $AC = 5$ , 则  $\triangle ACE$  的周长是 ( )



- A. 8                      B. 11                      C. 16                      D. 17

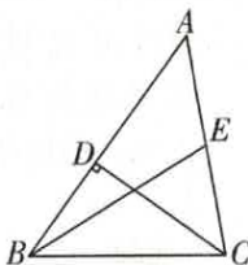
8. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $D$  是  $AC$  的中点, 且  $BD \perp AC$ ,  $ED \parallel BC$ ,  $ED$  交  $AB$  于点  $E$ ,  $BC = 7\text{cm}$ ,  $AC = 6\text{cm}$ , 则  $\triangle AED$  的周长等于 \_\_\_\_.



9. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $CD$  是  $AB$  边上的高,  $BE$  是  $AC$  边上的中线, 且  $BD = CE$ .

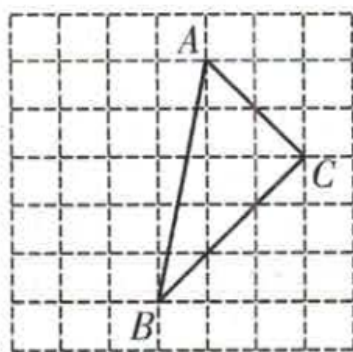
求证: (1) 点  $D$  在  $BE$  的垂直平分线上;

(2)  $\angle BEC = 3\angle ABE$ .

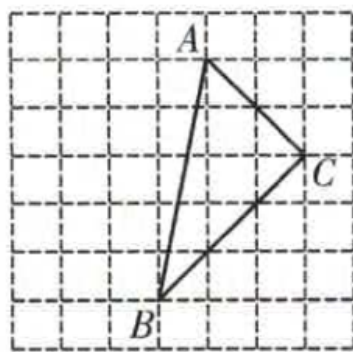


## 二、 满分冲关

- 已知  $n$  是正整数, 若一个三角形的 3 边长分别是  $n+2$ ,  $n+8$ ,  $3n$ , 则满足条件的  $n$  的值有 ( )  
A. 4 个                      B. 5 个                      C. 6 个                      D. 7 个
- 如图, 是边长为 1 的正方形网格,  $\triangle ABC$  的三个顶点均在格点上, 请仅用无刻度的直尺, 分别按下列要求画图.



图①



图②

- (1) 如图, 画线段  $AD$ , 使得  $AD$  平分  $\triangle ABC$  的面积;
- (2) 如图, 在  $\triangle ABC$  内部找一点  $P$ , 使得  $S_{\triangle PDC} = \frac{1}{8}S_{\triangle ABC}$  ( $D$  为  $BC$  的中点).