

第 1 章 因式分解 (20200416)

1.1 知识要点

1. 定义:

(a). 和差化积: 将整式的和差形式化为乘积形式.

(b). 因式分解与整式乘法互为逆运算. $x(x+y) \Leftrightarrow x^2 + xy$, 从左到右为整式乘除, 从右到左为因式分解.

2. 因式分解的方法

(a). 提公因式法:(1) 先提系数的最大公约数;(2) 再提各字母最低的次数;(3) 提取后观察是否可进一步分解

(b). 公式法:(1) 完全平方公式;(2) 平方差公式

(c). 分组分解法

(d). 十字相乘法

I. 只适用于如 $ax^2 + bx + c$ 形式的二次三项式

II. 原理: $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$, $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$,

III. 两种情况:(1) 二次项系数为 1;(2) 二次项系数不为 1

IV. 为一元二次方程, 一元二次函数打基础

1.2 例题

1.2.1 提公因式法

例题 1.2.1 $2x^3y^2 - 4x^2y + 8x^2y^2$

1.2.2 分组分解法

一、 分组后能直接提公因式

例题 1.2.2

1. $am + an + bm + bn$

2. $a^2 - ab + ac - bc$

3. $xy - x - y + 1$

二、 分组后能直接用公式

例题 1.2.3

1. $x^2 - y^2 + ax + ay$

2. $a^2 - c^2 - 2ab + b^2$

3. $x^2 - x - 9y^2 - 3y$

4. $ax^2 - bx^2 + bx - ax + a - b$

5. $a^2 - 6ab + 12b + 9b^2 - 4a$
6. $4a^2x - 4a^2y - b^2x + b^2y$
7. 在有理数或实数范围内分解: $x^4 - 4$
8. $a^2 - 2a + b^2 - 2b + 2ab + 1$
9. $(a + c)(a - c) + b(b - 2a)$

1.2.3 十字相乘法

一、二次项系数为 1

原理: $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$. 即两个数的和是一次项系数, 两个数的积是常数项

例题 1.2.4

1. $x^2 - 5x + 4$
2. $x^2 + 5x + 6$
3. $x^2 - 7x + 6$
4. $x^2 + 14x + 24$
5. $a^2 - 15a + 36$
6. $x^2 + 4x - 5$
7. $x^2 + x - 2$
8. $y^2 - 2y - 15$
9. $x^2 - 10x - 24$

二、二次项系数不为 1

原理: $ax^2 + bx + c = (a_1x_0 + c_1)(a_2x_0 + c_2)$, 其中 $a_1 \times a_2 = a$, $c_1 \times c_2 = c$, 且 $a_1 \times c_2 + a_2 \times c_1 = b$

例题 1.2.5

1. $3x^2 - 11x + 10$
2. $5x^2 + 7x - 6$
3. $3x^2 - 7x + 2$
4. $10x^2 - 17x + 3$
5. $-6y^2 + 11y + 10$
6. $2x^2 - 7xy + 6y^2$
7. $x^2y^2 - 3xy + 2$
8. $15x^2 + 7xy - 4y$
9. $12x^2 - 11xy - 15y^2$

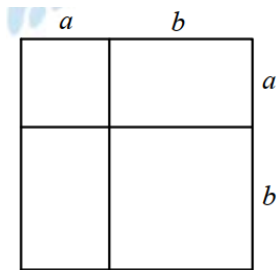
1.2.4 综合

例题 1.2.6

1. $(x + y)^2 - 3(x + y) - 10$
2. $(a + b)^2 - 4a - 4b + 3$
3. $m^2 - 4mn + 4n^2 - 3m + 6n + 2$
4. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3$
5. $4x^2 - 4xy - 6x + 3y + y^2 - 10$

1.3 习题

- 下列变形是因式分解的是 ()
 - $(3-x)(3+x) = 9-x^2$
 - $m^3 - mn^2 = m(m+n)(m-n)$
 - $(y+1)(y-3) = -(3-y)(y+1)$
 - $4yz - 2y^2z + z = 2y(2z - yz) + z$
- 下列多项式中能用平方差公式分解因式的是 ()
 - $a^2 + (-b)^2$
 - $5m^2 - 20mn$
 - $-x^2 - y^2$
 - $-x^2 + 9$
- 若 $(p-q)^2 - (q-p)^3 = (q-p)^2 \cdot E$, 则 E 是 ()
 - $1-q-p$
 - $q-p$
 - $1+p-q$
 - $1+q-p$
- 一个多项式分解因式的结果是 $(b^3+2)(2-b^3)$, 那么这个多项式是 ()
 - b^6-4
 - $4-b^6$
 - b^6+4
 - $-b^6-4$
- 把多项式 $m^2(a-2) + m(2-a)$ 分解因式等于 ()
 - $(a-2)(m^2+m)$
 - $(a-2)(m^2-m)$
 - $m(a-2)(m-1)$
 - $m(a-2)(m+1)$
- 下列多项式中, 含有因式 $(y+1)$ 的多项式是 ()
 - $y^2 - 2xy - 3x^2$
 - $(y+1)^2 - (y-1)^2$
 - $(y+1)^2 - (y^2-1)$
 - $(y+1)^2 + 2(y+1) + 1$
- 已知多项式 $2x^2 + bx + c$ 分解因式为 $2(x-3)(x+1)$, 则 b, c 的值为 ()
 - $b=3, c=-1$
 - $b=-6, c=2$
 - $b=-6, c=-4$
 - $b=-4, c=-6$
- 若将 $x^2 + px + q$ 分解因式为 $(x-3)(x+5)$, 则 p 为 ()
 - 15
 - 2
 - 8
 - 2
- $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 满足 $a^2 - 2bc = c^2 - 2ab$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()
 - 等腰三角形
 - 直角三角形
 - 等边三角形
 - 锐角三角形
- 已知 $a = 2002x + 2006, b = 2002x + 2007, c = 2002x + 2008$, 则多项式 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ 的值为 ()
 - 0
 - 1
 - 2
 - 3
- 已知: $ab \neq 0, a^2 + ab - 2b^2 = 0$, 那么 $\frac{2a-b}{2a+b}$ 的值为 ____.
- 分解因式: $x(a-b)^{2n} + y(b-a)^{2n+1} =$ ____.
- 观察右图, 根据图形的面积关系, 不需要连其他的线, 便可以得到一个用来分解因式的公式, 这个公式是.



- 若 $x^2 + 2(m-3)x + 16$ 是完全平方公式, 则 $m =$ ____.
- 若 $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 12$, 则 $x^2 + y^2 =$ ____.
- 已知 a, b, c, d 为非负整数, 且 $ac + bd + ad + bc = 1997$, 则 $a + b + c + d =$ ____.

1.4 中考真题

例题 1.4.1

- 江西 2008 分解因式: $x^3 - 4x =$
- 江西 2010 分解因式: $2a^2 - 8 =$
- 江西 2011 分解因式: $x^3 - x =$
- 江西 2013 分解因式: $x^2 - 4 =$
- 江西 2016 分解因式: $ax^2 - ay^2 =$
- 把多项式 $x^2 + ax + b$ 分解因式, 得 $(x+1)(x-3)$ 则 a, b 的值分别是 ()
A. $a = 2, b = 3$ B. $a = -2, b = -3$ C. $a = -2, b = 3$ D. $a = 2, b = -3$
- 下列运算错误的是 ()
A. $a + 2a = 3a$ B. $(a^2)^3 = a^6$ C. $a^2 \times a^3 = a^5$ D. $a^6 \div a^3 = a^2$
- 下列计算正确的是 ()
A. $3a + 4b = 7ab$ B. $(ab^3)^3 = ab^6$ C. $(a+2)^2 = a^2 + 4$ D. $x^{12} \div x^6 = x^6$
- 当 $1 < a < 2$ 时, 代数式 $|a-2| + |1-a|$ 的值是 ()
A. -1 B. 1 C. 3 D. -3
- 下列计算正确的是 ()
A. $x^2 \times x^3 = x^5$ B. $x^6 + x^6 = x^{12}$ C. $(x^2)^3 = x^5$ D. $x^{-1} = x$
- 分解因式: $16 - x^2 =$ ()
A. $(4-x)(4+x)$ B. $(x-4)(x+4)$ C. $(8+x)(8-x)$ D. $(4-x)^2$
- 将下列多项式因式分解, 结果中不含有因式 $a+1$ 的是 ()
A. $a^2 - 1$ B. $a^2 + a$ C. $a^2 + a - 2$ D. $(a+2)^2 - 2(a+2) + 1$
- 分解因式: $a^3 - 9a =$
- 分解因式: $a^3 - 16a =$
- 因式分解: $a^2 - 6a + 9 =$
- 分解因式: $x^2 - 36 =$
- 把多项式 $9a^3 - ab^2$ 分解因式的结果是
- 把多项式 $ax^2 + 2a^2x + a^3$ 分解因式的结果是
- 分解因式: $a^2 - 9 =$
- 分解因式 $3m^4 - 48 =$
- 分解因式: $xy^2 - x =$
- 分解因式: $ab^4 - 4ab^3 + 4ab^2 =$
- 分解因式: $ax^2 - ay^2 =$
- 分解因式: $2a^2 + 4a + 2 =$
- 分解因式: $(m+1)(m-9) + 8m =$