

Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана

Специализированный учебно-научный центр  
Физико-математический лицей №1580

Кафедра «Основы физики»

Лабораторный практикум по физике  
Электронное издание  
10 класс

# МЕХАНИКА

Лабораторная работа М0

Введение в теорию погрешностей. Измерения  
в физическом практикуме

Москва, 2013

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ФИЗИКЕ. МЕХАНИКА. —  
Московский государственный технический университет имени Н. Э. Ба-  
умана

Лабораторный практикум по физике для 10 класса состоит из лабораторных работ для занятий учащихся 10 классов в Специализированном учебно-научном центре МГТУ имени Н. Э. Баумана.

Лабораторные работы, приведенные в сборнике, позволят учащимся глубже изучить законы физики и получить навыки проведения экспериментальных физических исследований.

Составители лабораторных работ:

И. Н. Грачева, В. И. Гребенкин, А. Е. Иванов,  
И. А. Коротова, Е. И. Красавина, А. В. Кравцов,  
Н. С. Кулеба, Б. В. Падалкин, Г. Ю. Шевцова,  
Т. С. Цвечинская.

Под редакцией И. Н. Грачевой, А. Е. Иванова, А. В. Кравцова.

## Предисловие

Физический практикум содержит описания лабораторных работ для учащихся 10-х классов лицея №1580 при МГТУ имени Н. Э. Баумана.

На выполнение каждой работы отводится два академических часа занятий. Подготовку к выполнению работ учащиеся производят в часы их самостоятельной работы.

Основной задачей лабораторных занятий является приобретение навыков в обращении с измерительными приборами, знакомство с простейшими приемами обработки результатов измерений и привитие учащимся навыков самостоятельной работы.

Наряду с этим выполнение лабораторных работ способствует более осознанному пониманию физических явлений и законов.

В описании работ даны краткая теория, методика выполнения работы, последовательность измерительных операций, а также простейшие приемы обработки результатов измерений.

## Методические указания

При подготовке к выполнению лабораторной работы нужно ознакомиться с ее содержанием, изучить по рекомендованной литературе теоретический материал, дать ответы на контрольные вопросы, продумать измерительные операции, оформить лабораторный журнал. В качестве лабораторного журнала используют общую тетрадь. Оформление каждой работы начинают с новой страницы.

В тетрадь вписывают название, номер работы, дату выполнения, цель, схемы установки, перечень приборов, таблицы, расчетные формулы.

Для вспомогательных записей и расчетов отводят четные страницы; схемы, таблицы выполняются в карандаше; все записи делают чернилами; графики вклеивают в тетрадь.

По окончании всех измерений рассчитывают искомые величины и их погрешность. В конце работы пишут заключение, в котором:

- указывают, что и каким методом определили
- приводят окончательный результат измерений
- приводят краткое обсуждение полученного результата

## Введение

### В.1 Предварительное знакомство с теорией погрешностей

В физической лаборатории вы сможете непосредственно наблюдать те явления, которые будете изучать на лекциях и по учебнику, сможете познакомиться с наиболее важными современными приборами и методами измерений, освоить правила обработки и оформления результатов измерения.

Физическая величина — это характеристика одного из свойств физического объекта, качественно общая для разных объектов, но присущая данному объекту в количественном отношении. Физическими величинами являются, например, масса, сила, температура.

Для получения количественной характеристики физической величины — значения физической величины — устанавливают единицы физической величины (неверным является словосочетание «единица измерения»). Выбор единиц физических величин, определение некоторых из них как основных и формирование систем единиц физических величин осуществляются в процессе развития науки и техники и определяются удобством практического использования. В Российской Федерации принята Международная система единиц (СИ) как обязательная для использования.

В основе лабораторного эксперимента лежит измерение — нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств. Выделяют измерение прямое, при котором искомое значение величины находят непосредственно из опытных данных, и косвенное, при котором искомое значение величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям.

Для производства измерения необходимо взаимодействие средств измерения с элементами измеряемой физической системы. Любое взаимодействие тел изменяет их состояние, а значит, в процессе любого измерения мы определяем значения физических величин, которое они принимают в процессе взаимодействия исследуемого тела с измерительными средствами. Это означает, что полученные в процессе измерения значения исследуемых физических величин отличаются от их значений в отсутствие измерительного взаимодействия. Следовательно, в задачу любого измерения входит не только нахождение значения самой величины, но и оценка допущенной при измерении погрешности.

Погрешности измерений подразделяются на систематические, случайные и грубые.

*Систематическая составляющая погрешности измерения* — погрешность, обусловленная одной и той же причиной, которая может быть известна заранее или определена в процессе дополнительных исследований. Эта погрешность остаётся постоянной или закономерно изменяется при повторных измерениях одной и той же величины. Она обусловлена, в основном, методом измерений, игнорированием некоторых постоянно действующих факторов и погрешностями измерительных приборов, внесёнными при их изготовлении и градуировке. Систематические погрешности в принципе можно устранить, учитывая их в виде поправок к показаниям приборов, выбирая более точный метод или прибор и т. п. На практике некоторая систематическая погрешность результата измерений существует всегда, поскольку точность измерительного прибора имеет конечное значение. При обработке результатов измерений оценивают диапазон значений измеряемой величины, обусловленный точностью прибора.

*Случайная составляющая погрешности измерения* — погрешность, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины. Эти погрешности обусловлены разными причинами, которые заранее не известны. Такими причинами могут быть неконтролируемые изменения внешних условий (температуры, давления, влажности,

вибраций, освещённости и т. п.). Случайные погрешности принципиально неустранимы, но существуют способы их уменьшения.

Можно выделить общие закономерности в появлении случайных погрешностей:

- отклонения от истинного значения измеряемой величины в сторону завышения и в сторону занижения встречаются в среднем одинаково часто;
- малые отклонения встречаются чаще, чем большие.

Наличие таких закономерностей позволяет надеяться, что среднее значение результатов нескольких измерений близко к истинному и, чем больше число измерений, тем точнее полученный результат.

*Грубая погрешность* возникает как следствие ошибок измерений (небрежности при чтении показаний приборов, неправильного включения прибора и т. п.). Эта погрешность существенно превышает ожидаемую при данных условиях погрешность. Результаты, полученные с грубой погрешностью, следует исключать из рассмотрения (как говорят, «отбрасывать»). Методы математической статистики позволяют оценить ожидаемую погрешность и тем самым оценить наличие грубой погрешности. В принципе, систематические погрешности можно устранить. Исключить случайные погрешности отдельных измерений невозможно, хотя математическая теория случайных явлений позволяет уменьшить влияние этих погрешностей на окончательный результат измерений и установить разумное значение погрешностей. Для этого необходимо произвести не одно, а несколько измерений, причем, чем меньшее значение случайной погрешности мы хотим получить, тем больше измерений нужно произвести.

Однако нет смысла производить измерений больше, чем это необходимо. Число измерений целесообразно выбирать таким, чтобы случайная погрешность была несколько меньше систематической, а последняя определяла окончательную погрешность результата.

## В.2 Абсолютная и относительная погрешность

Абсолютной погрешностью измерения называют разность  $\Delta X$  между истинным и измеренным значениями величины.

$$\Delta x = X_{\text{ист}} - x_i, \quad (\text{B.1})$$

где  $x_i$  — значение величины  $X$ , полученное при  $i$ -м измерении;  $X_{\text{ист}}$  — истинное значение величины  $X$ . Абсолютная погрешность измерения не полностью характеризует качество произведённого измерения. Например, абсолютная погрешность, равная 1 м при измерении расстояния 10 км в целях оценки расхода топлива автомобилем, является малой величиной, а для расстояния 5 м может считаться только грубой оценкой.

Для характеристики качества измерения вводят понятие относительной погрешности

$$\varepsilon = \left| \frac{\Delta x}{X_{\text{ист}}} \right| \quad (\text{B.2})$$

Часто относительную погрешность выражают в процентах от истинного значения.

## В.3 Стандартный способ представления результата измерения

Результат любого измерения имеет смысл только в том случае, если экспериментатор указывает:

1. Наилучшую оценку истинного значения измеряемой величины.
2. Интервал значений (доверительный интервал), в котором, по мнению экспериментатора, с некоторой задаваемой экспериментатором вероятностью (доверительной вероятностью) находится истинное значение измеряемой величины.
3. Саму доверительную вероятность.

Если мы не укажем хотя бы один из этих показателей, то результат нашего эксперимента будет лишен смысла, так как мы не знаем при этом, насколько надежны наши данные.

Строгая запись результата эксперимента выглядит следующим образом:

$$P(X_{\text{наил}} \pm \delta) = \alpha, \quad (\text{B.3})$$

где  $P$  — обозначение для доверительной вероятности;  $X_{\text{наил}}$  — значение наилучшей оценки истинного значения измеряемой величины;  $\delta$  — полуширина доверительного интервала;  $\alpha < 1$  — значение доверительной вероятности.

На практике чаще используют так называемую стандартную запись результата:

$$X = X_{\text{наил}} \pm \delta \quad (P = \alpha). \quad (\text{B.4})$$

Выражение «с вероятностью  $P = \alpha$ » означает, что 100% измерений будут иметь погрешность не большую, чем  $\alpha$ .

Как выбирают значения наилучшей оценки измеряемой величины и доверительного интервала, показано ниже.

## В.4 Погрешности при прямых измерениях

### В.4.1 Учёт случайных погрешностей

При измерениях физических величин в случаях, когда основную роль играют случайные погрешности, все оценки точности можно сделать с некоторой вероятностью. В большинстве случаев, с которыми приходится сталкиваться на практике, случайные погрешности возникают как результат действия множества независимых факторов, каждый из которых сравнительно слабо влияет на результат измерений. В этих случаях случайные погрешности подчиняются определенному закону распределения по значениям — нормальному, или гауссовскому, закону. Для такого класса погрешностей является верным (это строго доказывается в теории вероятностей) следующее положение: наилучшей оценкой (наиболее вероятным значением) измеряемой величины является среднее арифметическое значение, вычисленное из ряда измеренных значений:

$$X_{\text{наил}} = \langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i}{n}, \quad (\text{B.5})$$

где  $n$  — число измерений.

Среднее арифметическое значение тем больше приближается к истинному, чем больше число измерений  $n$ . Мы можем осуществить лишь конечное число измерений, поэтому

никогда не достигаем истинного значения измеряемой величины. Для оценки погрешности измерений используют величину, называемую средним квадратичным отклонением:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (\langle x \rangle - x_i)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (\Delta x_i)^2}{n}}. \quad (\text{B.6})$$

Для нормального распределения случайных погрешностей доверительная вероятность попадания единичного измерения в доверительный интервал полушириной  $\sigma$  составляет 68,2%, полушириной  $2\sigma$  — 95,4%, полушириной  $3\sigma$  — 99,7% (это следует из теории вероятностей).

В теории погрешностей показано, что среднее квадратичное отклонение дает довольно грубую оценку случайной абсолютной погрешности измерений. Уточнить эту оценку можно, исходя из следующих соображений. Разобьем ряд измеренных значений на группы и вычислим средние арифметические значения по каждой группе. Среднее арифметическое значение этих средних по группам, очевидно, является средним по всему массиву измерений. Погрешность же определения такого среднего с вероятностью  $P = 0,68$  при числе измерений  $n > 5$  не превышает значения

$$\Delta S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}, \quad (\text{B.7})$$

причём это утверждение тем более справедливо, чем больше  $n$ .

Погрешность, вычисленная по этой формуле, называется среднеквадратичной.

Оценка границ доверительного интервала производится по методике, предложенной в 1908 году английским математиком и химиком В. Госсетом, публиковавшим свои работы под псевдонимом Стьюдент.

По Стьюденту, доверительный интервал имеет вид

$$\langle x \rangle - \Delta \langle x \rangle < x < \langle x \rangle + \Delta \langle x \rangle, \quad (\text{B.8})$$

$$\Delta \langle x \rangle = t_a(n) \Delta S. \quad (\text{B.9})$$

Значение коэффициента  $t_a(n)$  определяется из таблицы В.1.

Задавая значение  $\alpha$ , по числу проведенных измерений определяют из таблицы В.1 значение коэффициента Стьюдента  $t_a(n)$ . По формуле (В.8) определяют погрешность  $\Delta \langle x \rangle$ , после чего результат измерений записывают в виде

$$X = \langle x \rangle \pm \Delta \langle x \rangle \quad (P = \alpha). \quad (\text{B.10})$$

Это означает, что истинное значение величины  $x$  попадает в доверительный интервал  $\langle x \rangle - \Delta \langle x \rangle, \langle x \rangle + \Delta \langle x \rangle$  с вероятностью  $\alpha$ .

## В.5 Учёт систематических погрешностей

Систематическая погрешность каждого ряда измерений постоянна и определяется обычно в лабораторном практикуме классом точности прибора, дающим верхнюю границу значения систематической погрешности.

Таблица В.1 — Коэффициенты Стьюдента

$n$	$\alpha$				
	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	6,31	12,71	31,82	63,66	636,62
2	2,92	4,30	6,96	9,92	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
4	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
$\rightarrow \infty$	1,64	1,96	2,33	2,59	3,29

Если случайная погрешность оказывается сравнимой с погрешностью прибора, то нужно учитывать и случайную, и систематическую погрешности одновременно, и границы доверительного интервала в этом случае определяются соотношением

$$\Delta\langle x \rangle = \sqrt{t_n^2(n) \cdot (\Delta S)^2 + t_\alpha^2(m \rightarrow \infty) \sigma^2}, \quad (\text{В.11})$$

Часто систематическую погрешность, обусловленную характеристиками измерительных средств, называют инструментальной или приборной.

## В.6 Косвенные измерения

В большинстве случаев измеряется не непосредственно интересующая нас величина, а другая, зависящая от нее. Оценка погрешности косвенных измерений основана на методах, развиваемых в дифференциальном исчислении функций многих переменных. Здесь мы приведем только конечные результаты для важных частных случаев, когда погрешности непосредственно измеренных величин малы, а сами величины независимы друг от друга.

### В.6.1 Погрешность суммы двух величин

### В.6.2 Погрешность разности двух величин

### В.6.3 Погрешность произведения двух величин

### В.6.4 Погрешность отношения двух величин

### В.6.5 Погрешность степенной функции

## В.7 О приближенных вычислениях

Точность обработки числового материала должна быть согласована с погрешностью самих измерений. Вычисления, производимые с большим числом значащих цифр, чем это необходимо, требуют лишней затраты труда и создают ложное впечатление о большой точности измерений.



Напомним, что значащими цифрами в записи числа являются все цифры, за исключением нулей, стоящих левее первой отличной от нуля цифры.

При выполнении вычислительных операций с приближенными числами число значащих цифр в результате определяется операндом (участником вычислительной операции) с наименьшим числом значащих цифр.

Существует правило: погрешность, получающаяся в результате вычислений, должна быть примерно на порядок (т. е. в 10 раз) меньше суммарной погрешности измерений, или, другими словами, все вычисления следует производить с числом значащих цифр, превышающим на единицу число значащих цифр, полученных при измерениях. Число значащих цифр окончательного результата определяется значением погрешности измерений.

Для записи приближенных многозначных чисел следует применять стандартную форму их записи  $n \cdot 10^m$ , где мантисса  $n$  записывается с нужным числом значащих цифр.

Для сохранения в записи числа нужного количества значащих цифр производят округление числа. Вспомним правила округления.

- Если первая из отбрасываемых цифр *меньше 5*<sup>1</sup>, то последнюю из оставляемых цифр не изменяют.
- Если первая из отбрасываемых цифр *больше 5*, то последнюю из оставляемых цифр увеличивают на единицу.
- Если первая из отбрасываемых цифр *равна 5*, то если последняя из оставляемых цифр нечетная, то ее увеличивают на единицу, а иначе — не изменяют.

Последнее из приведенных правил называют «правилом четной цифры» и применяют для того, чтобы избежать накопления вычислительных погрешностей, возникающих при округлении.

Рассмотрим для примера расчет суммы приближенных чисел. Допустим, при измерениях были получены следующие значения величин, которые нужно просуммировать:  $4,5 \cdot 10^4 + 3,456 \cdot 10^3 + 1,3 \cdot 10^2 = 10^4 \cdot (4,5 + 0,3456 + 0,013) = 4,8586 \cdot 10^4$ . В мантиссе должно быть не более двух значащих цифр, поэтому  $4,8586 \cdot 10^4 \approx 4,8 \cdot 10^4$  (проводим округление с применением правила четной цифры).

Применение правил работы с приближенными числами в физике имеет некоторые особенности.

Допустим, мы рассчитали абсолютную погрешность измерения так, что результат содержит три значащих цифры, например,  $\Delta x = 0,356$ . Правильный с математической точки зрения результат показывает, что мы ошибаемся уже в десятых долях единицы. Погрешность в тысячных долях мало влияет на общую погрешность результата. Конечно, в особых случаях проведения измерений можно добиваться и более высокой точности, но в учебной лаборатории целесообразно округлять значение абсолютной погрешности не более, чем до двух значащих цифр.

При записи среднего значения измеренной величины следует опираться на полученное значение абсолютной погрешности, оставляя не только нужное по расчету число значащих цифр, но и добиваясь, чтобы младший десятичный разряд в записи среднего был такой же, как и в записи абсолютной погрешности. Например,  $x = 12,3 \pm 0,1$  — запись верная, а  $x = 12,3 \pm 0,11$  — запись неверная. В последней записи погрешность имеется в том десятичном разряде (в сотых долях), который не гарантируется записью среднего значения.

## В.8 Графическая обработка результатов

Результаты измерений следует записывать в таблицу.

Часто бывает целесообразно построить график зависимости одной измеряемой физической величины (функции) от другой (аргумента). График дает наглядное представление об исследуемой закономерности, поэтому умение правильно строить его — необходимое условие для формирования навыка экспериментальной работы. График строят, используя табличную запись результатов.

График необходимо строить на масштабно— координатной (миллиметровой) бумаге в следующей последовательности.

1. Установить пределы изменения величин, откладываемых по координатным осям.

---

<sup>1</sup>Напоминаем, что цифра — это знак, обозначающий число, поэтому говорить о проведении математических операций с цифрами некорректно, но из-за наглядности это стало общепринятым.

Таблица В.2 — Пример: результаты измерения  
разрядного тока при различных значениях напряжения,  
зазоре 15 мм, высоте пламени 30 мм

U, В	0	50	100	200	400	500
I, мкА	0,35	0,55	1,2	2,0	3,2	4,1

2. Выбрать масштабы по осям координат в зависимости от погрешности измерений. На миллиметровой бумаге 1 см может соответствовать  $10^n, 2 \cdot 10^n, 5 \cdot 10^n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) единицам физической величины.
3. Поле графика нужно постараться приблизить к квадрату.
4. На каждую координатную ось следует наносить шкалу в пределах изменения величин, отложенную в выбранном масштабе, а не координаты точек и не результаты измерений и расчетов.
5. Буквенные обозначения и единицы физических величин располагаются, как указано на рис. ??
6. Результаты измерения в виде точек следует наносить на поле графика, не проводя дополнительных линий.
7. Строить график нужно с помощью лекала или линейки путем осреднения: количество точек над и под графиком должно быть примерно одинаковым. Существуют более строгие способы построения экспериментальных кривых. С ними вы познакомитесь позже.
8. Погрешности измерения изображаются отрезками в соответствующем масштабе у экспериментальных точек (см. рис. ??) как границы доверительного интервала.
9. Под графиком помещается название рисунка, пишется номер рисунка и примечания к рисунку. В таблице В.2 и на рис. ?? дан пример построения вольт-амперной характеристики несамостоятельного разряда.