

Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Специализированный учебно-научный центр
Лицей №1580 при МГТУ им. Н. Э. Баумана

Кафедра «Основы физики»

Лабораторный практикум по физике
Электронное издание
10 класс

МЕХАНИКА

Лабораторная работа М–11

Измерение ускорения свободного падения
с помощью математического маятника

Москва, 2014

Лабораторный практикум по физике. Механика. — Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

Лабораторный практикум по физике для 10 класса состоит из лабораторных работ для занятий учащихся 10 классов в Специализированном учебно-научном центре МГТУ имени Н. Э. Баумана.

Лабораторные работы, приведенные в сборнике, позволят учащимся глубже изучить законы физики и получить навыки проведения экспериментальных физических исследований.

Составители лабораторных работ:

И. Н. Грачева, В. И. Гребенкин, А. Е. Иванов,
И. А. Коротова, Е. И. Красавина, А. В. Кравцов,
Н. С. Кулеба, Б. В. Падалкин, Г. Ю. Шевцова,
Т. С. Цвезинская.

Под редакцией И. Н. Грачевой, А. Е. Иванова, А. В. Кравцова.

Об ошибках и неточностях просьба сообщать на электронную почту
metod1580@gmail.com

- © Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, 2014
- © Лицей №1580 при МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014

11.1 Цель работы

Определение значения ускорения свободного падения и экспериментальная проверка закономерностей движения математического маятника.

11.2 Основные теоретические сведения

В физике под маятником понимают твёрдое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной точки или оси.

Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из невесомой нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке. Достаточно хорошим приближением математического маятника служит небольшой тяжёлый шарик, подвешенный на длинной тонкой нити. Отклонение маятника от положения равновесия будем характеризовать углом φ , образованным нитью и вертикалью (рис. 11.1).

Будем рассматривать малые колебания, когда угол φ не превосходит нескольких градусов. В этом случае $\sin \varphi \approx \varphi$, а дуга A и хорда a практически совпадают, так что в первом приближении можно считать движение груза прямолинейным, а колебания — гармоническими (происходящими по гармоническому закону синуса или косинуса). Таким образом, при малых амплитудах математический маятник совершает гармонические колебания с частотой

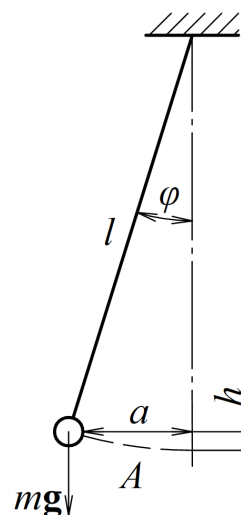


Рис. 11.1

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

и периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Формулой периода можно воспользоваться для определения ускорения силы тяжести в той или иной точке Земли, поскольку длину маятника и период его колебаний можно измерить весьма точно.

Ускорение свободного падения в разных точках Земли несколько различно. При не очень точных измерениях этой разницей (которая не превышает 0,6%) пренебрегают и считают $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

11.3 Описание экспериментальной установки

Схема установки показана на рис. 11.2. В качестве математического маятника используется металлический шар 3, подвешенный на двух капроновых нитях к кронштейну 2. На этом же кронштейне укреплен фотодатчик 4. Расстояние между кронштейнами определяется по нанесённой на штатив шкале 5.

11.4 Порядок выполнения эксперимента

1. Установите нижний кронштейн с фотодатчиком 4 в крайнее нижнее положение шкалы 5 так, чтобы верхняя плоскость кронштейна совпала с одной из рисок шкалы.

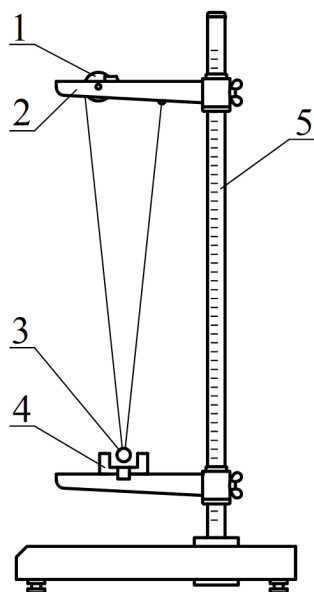


Рис. 11.2: Схема установки

Установите верхний кронштейн таким образом, чтобы шарик 3 математического маятника оказался в рабочей зоне фотодатчика. Вращая ролик 1, добейтесь такого положения шарика, при котором его центральная риска будет совпадать по высоте с риской на фотодатчике. По шкале на вертикальной стойке определите длину математического маятника l_1 .

2. Приведите математический маятник в колебательное движение, отклонив металлический шарик на угол $5-6^\circ$, после чего нажмите на кнопку «СБРОС» на блоке. По показанию таймера определите значение времени 40–50 колебаний маятника. Определите среднее значение периода колебания маятника по формуле $T_1 = t_1/N$, где t_1 — время колебаний, N — число колебаний.
3. Передвиньте вверх кронштейн с фотодатчиком на два деления шкалы вертикальной стойки. Вращая ролик 1, добейтесь такого положения шарика, при котором его центральная риска будет совпадать по высоте с риской на фотодатчике. По шкале вертикальной стойки определите длину математического маятника l_2 . Повторите эксперимент по п. 2.
4. Повторите эксперимент по п. 3, уменьшая длину маятника, 6 раз. Запишите полученные результаты в таблицу 11.1.
5. Постройте график зависимости квадрата периода колебаний от длины маятника. Аппроксимируйте полученную зависимость прямой линией $T^2 = al + b$. Определите коэффициент наклона a по методу наименьших квадратов (см. Приложение). Найдите величину ускорения свободного падения

$$g = \frac{4\pi^2}{a}.$$

6. Сравните теоретическое и экспериментальное значение ускорения свободного падения. Определите относительную погрешность по формуле

$$\eta = \frac{g_{\text{э}} - g_{\text{т}}}{g_{\text{т}}} \cdot 100\%.$$

Таблица 11.1

№ измерения	l , м	t , с			$\langle t \rangle$, с	T , с	T^2 , с ²	$g_{\text{э}}$, м/с ²
		1	2	3				
1								
2								
3								
4								
5								
6								

11.5 Контрольные вопросы

1. Каким образом в данной работе проводилась обработка результатов измерений?
2. В чём состоит метод наименьших квадратов?
3. По какой траектории будет двигаться шарик математического маятника, если нить маятника пережечь в тот момент, когда шарик переходит положение равновесия? Ответ поясните рисунком.

Приложение

Математическая обработка результатов эксперимента
по методу наименьших квадратов

На практике часто целью измерений является установление вида некоторой функциональной зависимости $y = f(x)$, где x — независимая переменная, а y — зависимая переменная. В эксперименте одновременно определяются как значения x , так и соответствующие им значения y , а задачей является установление математической модели исследуемой зависимости — подборе аналитической функции, наилучшим образом описывающей экспериментальные данные.

Искомая математическая модель функциональной зависимости может быть найдена лишь в результате совместной обработки всех полученных значений x и y . Задача выбора вида функциональной зависимости (эмпирической формулы) — задача не формализуемая, так как одна и та же кривая на данном участке примерно с одинаковой точностью может быть описана самыми различными аналитическими выражениями. Иногда эмпирическую формулу удаётся выбрать, исходя из физического смысла в виде линейной зависимости, экспоненциальной или логарифмической функции и т. п., то есть в виде компактного и содержательного выражения, где параметры имеют определённый интерпретируемый смысл. После того как выбран вид функции-модели, с помощью которой пытаются описать экспериментальные результаты, должны быть найдены параметры, входящие в эту формулу (a , b и т. д.).

Основной способ нахождения этих параметров — метод наименьших квадратов (МНК), хотя он не является единственным.

Пусть после предварительного анализа была выбрана линейная модель вида $y = ax + b$. Теперь задача состоит в том, чтобы найти наилучшее значение параметров модели a и b . Нам известны значения x_i и y_i — конкретные числа, полученные в опытах (см. рис. 11.3).

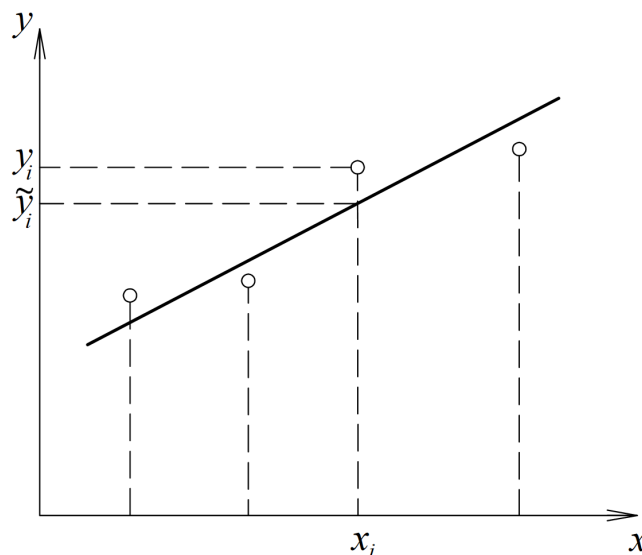


Рис. 11.3: Линейная аппроксимация

Для определения неизвестных параметров можно составить систему условных линейных уравнений, каждое из которых имеет вид:

$$y_i = ax_i + b, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.1)$$

Система уравнений (11.1) при n -кратных измерениях может быть избыточной, если $n > 2$ и, вообще говоря, несовместна, т. к. результаты измерений величин x и y неизбежно содержат ошибки. Поэтому из этих уравнений можно определить лишь оценки A и B искомых параметров a, b , которые являются случайными величинами.

Будем считать, что все пары экспериментальных значений x_i, y_i равновероятны (т. е. измерения равноточные), случайные ошибки величин x и y распределены по нормальному закону, а систематическими ошибками можно пренебречь. Между рассчитанными по модели значениями \tilde{y}_i и экспериментальными отсчётами y_i будут наблюдаться отклонения. Введём для них обозначения $\Delta_i = y_i - \tilde{y}_i = y_i - (Ax_i + B)$. Математики Лежандр и Гаусс показали, что оценки A и B параметров a и b будут наиболее вероятными, если сумма квадратов отклонений по всем точкам n будет наименьшей:

$$Q = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \rightarrow \min \quad (11.2)$$

Минимум этой суммы находится по правилам дифференциального исчисления. Условием минимума функции является обращение в нуль частных производных функций Q по независимым переменным A и B :

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial B} = 0. \quad (11.3)$$

Подставляя (11.2) в (11.3), получаем:

$$\begin{cases} B \cdot \sum_{i=1}^n x_i + A \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0 \\ A \cdot \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot B - \sum_{i=1}^n y_i = 0 \end{cases} \quad (11.4)$$

Решая эту систему уравнений относительно параметров A и B , находим:

$$\begin{aligned} A &= \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \\ B &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Если разделить числители и знаменатели решений системы на n^2 , то после несложных преобразований можно выразить коэффициенты A и B через средние значения величин, входящих в уравнения. Тогда получим:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \\ B &= \frac{\langle x^2 \rangle \cdot \langle y \rangle - \langle x \rangle \cdot \langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \end{aligned} \quad (11.6)$$

где $\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $\langle y \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$, $\langle xy \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$ — средние арифметические значения соответствующих величин. Нахождение искомых оценок A и B по уравнениям (11.6) удобно при ручном счете на микрокалькуляторах или на ЭВМ.

Теория даёт возможность определить также дисперсию точек (рассеяние, отклонение экспериментальных точек от модельной прямой) и дисперсию коэффициентов A и B . Если обозначить S_0^2 — дисперсию точек, S_A^2 и S_B^2 — дисперсии коэффициентов A и B , то

$$S_0^2 = \frac{n}{n-2} \cdot \left(\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 - \frac{[\langle xy \rangle - \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle]^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \right), \quad (11.7)$$

$$S_A^2 = \frac{S_0^2}{n \cdot [\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2]}, \quad (11.8)$$

$$S_B^2 = S_A^2 \cdot \langle x^2 \rangle. \quad (11.9)$$

Интервалы, в которых с доверительной вероятностью β могут находиться коэффициенты a и b , записываются в виде

$$A - t_{\beta, n-2} \cdot S_A \leq a \leq A + t_{\beta, n-2} \cdot S_A, \quad (11.10)$$

$$B - t_{\beta, n-2} \cdot S_B \leq b \leq B + t_{\beta, n-2} \cdot S_B, \quad (11.11)$$

где $t_{\beta, n-2}$ — коэффициент Стьюдента.

Полученные формулы непосредственно могут быть использованы для расчёта параметров линейных аппроксимирующих зависимостей в лабораторных работах.