Métodos Numéricos - Trabalho T4

Integração Numérica e Solução Numérica de EDOs

Prof. Tiago Martinuzzi Buriol

1. Use um programa em Python para integrar numericamente a função

$$\int_0^3 x^2 e^x dx$$

usando a regra dos trapézios, a regra de 1/3 de Simpson e a regra de 3/8 de Simpson com 12 subintervalos. Compare dos resultados obtidos com a solução analítica.

2. Suponha que uma força para cima de resistência do ar em um objeto em queda livre seja proporcional ao quadrado da velocidade. Nesse caso, a velocidade pode ser calculada por

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right)$$

em que c_d é o coeficiente de arrasto de segunda ordem. Se $g = 9,81m/s^2$, $m = 68,1kg$, e $c_d = 0,25kg/m$, calcule, usando um programa em Python e integração numérica, quanto o objeto cai em $10s$. Use um número de intervalos suficientemente grande para que se tenha pelo menos três casas decimais de precisão.

3. A massa total de uma haste de densidade variável é dada por

$$m = \int_0^L \rho(x) A_c(x) dx$$

em que m é a massa, $\rho(x)$ é a densidade, $A_c(x)$ é a área da seção transversal, x é distância ao longo da haste e L é o comprimento total da haste. Os seguintes dados foram medidos para uma haste de $12m$. Determine a massa em quilogramas usando integração numéria com as regras de 1/3.

x, m	|0	|2	|4	|6	|8	|10	|12
$\rho, g/cm^3$	|4,00	|3,95	|3,80	|3,60	|3,41	|3,30	|3.20
A_c, cm^3	|100	|103	|110	|120	|133	|150	|171

4. Dados o seguinte PVI e sua solução exata (analítica), pede-se:

   (a) Use o método de Euler para estimar $u(t)$ com os passos 0.25, 0.10 e 0.05. Mostre os resultados obtidos para valores de i, t_i, u_i e k;

   (b) Plote os pontos (t_i, u_i) calculados juntamente com a solução exata;

   (c) (c) Determine o maior erro cometido em cada caso e comente os resultados obtidos.

$$\begin{cases} u' = t^2(5-u) \\ 0 \leq t \leq 2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Solução exata: $u(x) = 5 - 5e^{-t^3/3}$.

5. A taxa de fluxo calor (condução) entre dois pontos em um cilindro aquecido em uma extremidade é dada por

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda A \frac{dT}{dx}$$

onde λ é uma constante, A é a área da seção transversal do cilindro, Q é o fluxo de calor, T é a temperatura, t é o tempo e x é a distância da extremidade aquecida. Como a equação envolve duas derivadas, vamos simplificar essa equação, tomando

$$\frac{dT}{dx} = \frac{100(L-x)(20-t)}{100-xt}$$

onde L é o comprimento do cilindro. Combine essas duas equações e calcule o fluxo de calor de $t = 0$ a $25s$. A condição inicial é $Q(0)$ e os parâmetros são $\lambda = 0,5$ cal·cm/s, $A = 12\text{cm}^2$, $L = 20\text{cm}$ e $x = 2,5\text{cm}$. Faça o gráfico dos resultados.