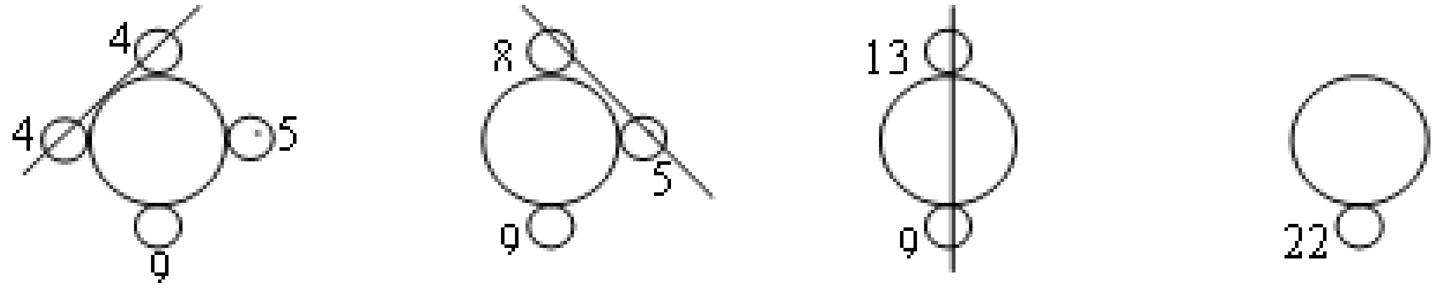
区间类动态规划

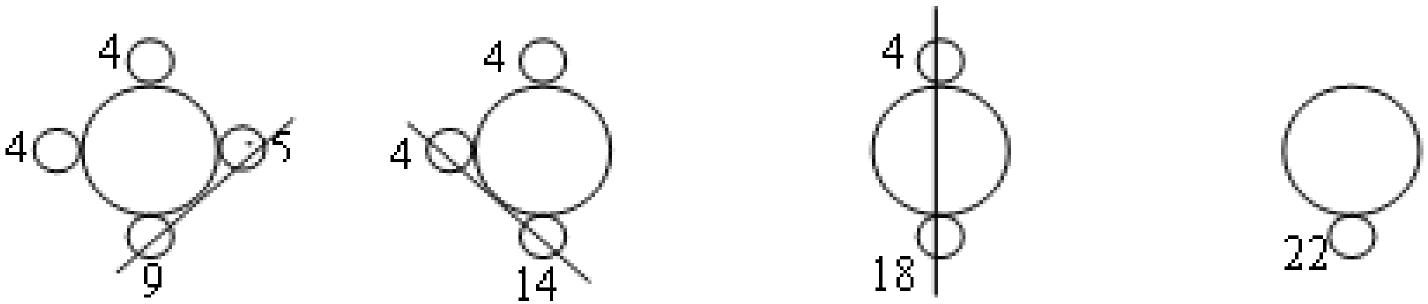
石子合并

- 在一园形操场四周摆放**N**堆石子**(N≤100)**；
- 现要将石子有次序地合并成一堆；
- 规定每次只能选相临的两堆合并成一堆,并将新的一堆的石子数,记为该次合并的得分。
    1. 选择一种合并石子的方案,使得做**N-1**次合并,得分的总和最少
    2. 选择一种合并石子的方案,使得做**N-1**次合并,得分的总和最大

示例



总得分=8+13+22=43



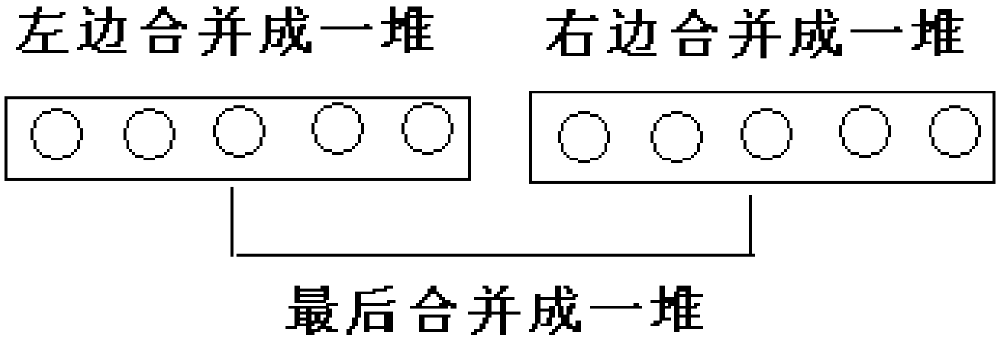
总得分=14+18+22=54

贪心法

<table>
<tr><td colspan="2">N=5　石子数分别为3 4 6 5 4 2。</td></tr>
<tr><td>用贪心法的合并过程如下：
第一次 3 4 6 5 4 2得分 5
第二次 5 4 6 5 4得分9
第三次 9 6 5 4得分9
第四次 9 6 9得分15
第五次 15 9得分24
第六次24
总分：62</td><td>然而有更好的方案：
第一次3 4 6 5 4 2得分 7
第二次7 6 5 4 2得分13
第三次13 5 4 2得分6
第四次13 5 6得分11
第五次 13 11得分24
第六次24
总分：61</td></tr>
<tr><td colspan="2">显然，贪心法是错误的。</td></tr>
</table>

分析

- 假设只有**2**堆石子，显然只有**1**种合并方案
- 如果有**3**堆石子，则有**2**种合并方案，**((1,2),3)**和**(1,(2,3))**
- 如果有**k**堆石子呢？
- 不管怎么合并，总之最后总会归结为**2**堆，如果我们把最后两堆分开，左边和右边无论怎么合并，都必须满足最优合并方案，整个问题才能得到最优解。如下图：



动态规划

- 设**t[i,j]**表示从第**i**堆到第**j**堆石子数总和。
  Fmax(i,j)表示将从第**i**堆石子合并到第**j**堆石子的最大的得分
  Fmin(i,j)表示将从第**i**堆石子合并到第**j**堆石子的最小的得分

$$F\max(i,j)=\max_{i\le k\le j-1}\{F\max(i,k)+F\max(k+1,j)+t[i,j]\}$$

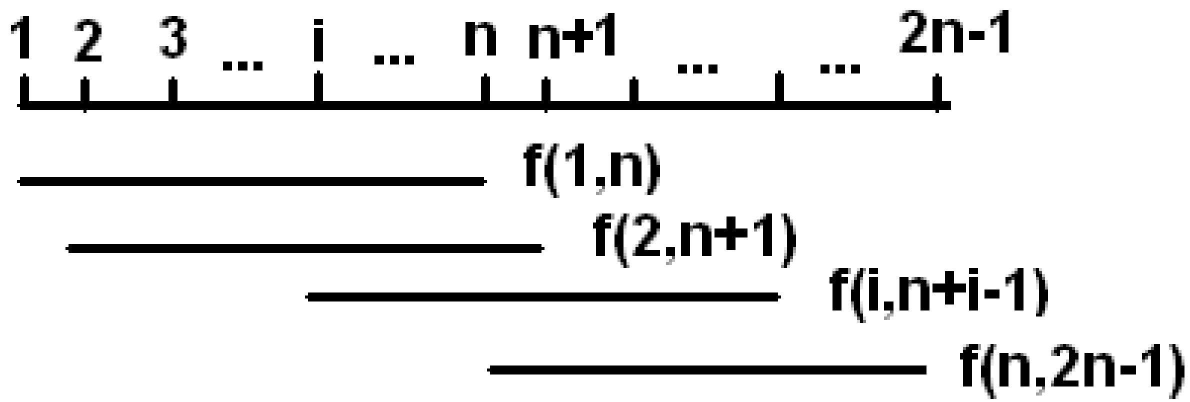
同理，

$$F\min(i,j)=\min_{i\le k\le j-1}\{F\min(i,k)+F\min(k+1,j)+t[i,j]\}$$

- **Fmax[i,i] = 0**，**Fmin[i,i] = 0**
- 时间复杂度为**O(n^3)**

优化

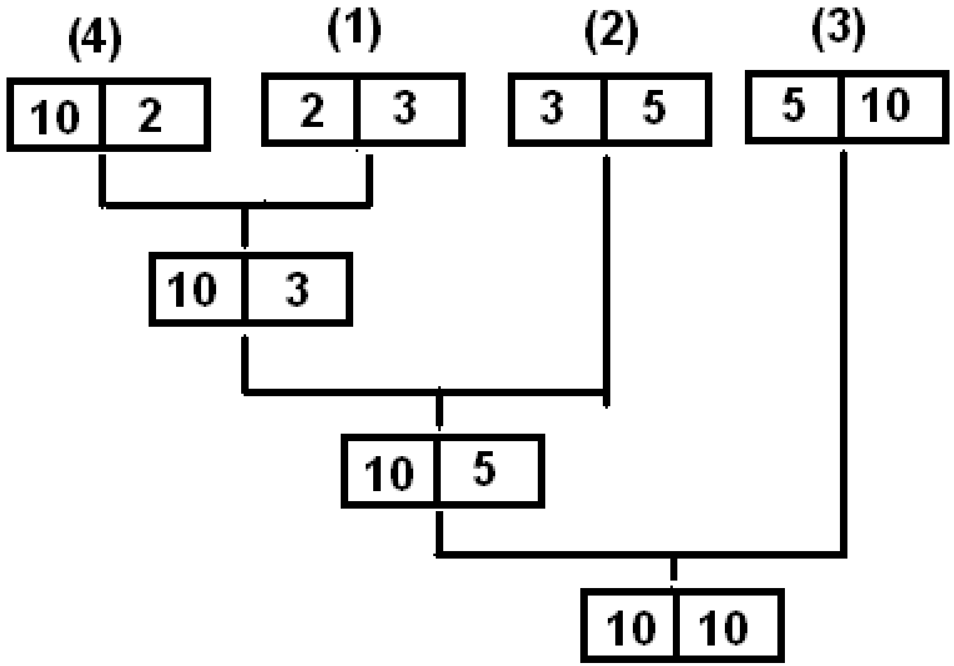
- 由于石子堆是一个圈，因此我们可以枚举分开的位置，首先将这个圈转化为链，因此总的时间复杂度为**O(n^4)**。
- 这样显然很高，其实我们可以将这条链延长**2**倍，扩展成**2n-1**堆，其中第**1**堆与**n+1**堆完全相同，第**i**堆与**n+i**堆完全相同，这样我们只要对这**2n**堆动态规划后，枚举**f(1,n),f(2,n+1),…,f(n,2n-1)**取最优值即可即可。
- 时间复杂度为**O(8n^3),**如下图：



能量项链

- 在Mars星球上，每个Mars人都随身佩带着一串能量项链。
- 在项链上有N颗能量珠。
- 能量珠是一颗有头标记与尾标记的珠子，这些标记对应着某个正整数。
- 对于相邻的两颗珠子，前一颗珠子的尾标记一定等于后一颗珠子的头标记。如果前一颗能量珠的头标记为m，尾标记为r，后一颗能量珠的头标记为r，尾标记为n，则聚合后释放的能量为m×r×n（Mars单位），新产生的珠子的头标记为m，尾标记为n。
- 显然，对于一串项链不同的聚合顺序得到的总能量是不同的，请你设计一个聚合顺序，使一串项链释放出的总能量最大。

- 分析样例：
  N=4，4颗珠子的头标记与尾标记依次为
  (2，3) (3，5) (5，10) (10，2)。
- 我们用记号⊕表示两颗珠子的聚合操作，释放总能量：
  ((4⊕1)⊕2)⊕3）=10*2*3+10*3*5+10*5*10=710



动态规划

- 该题与石子合并完全类似。
- 设链中的第**i**颗珠子头尾标记为(S_{i-1}与S_i)。
- 令**F(i,j)**表示从第**i**颗珠子一直合并到第**j**颗珠子所能产生的最大能量，则有：

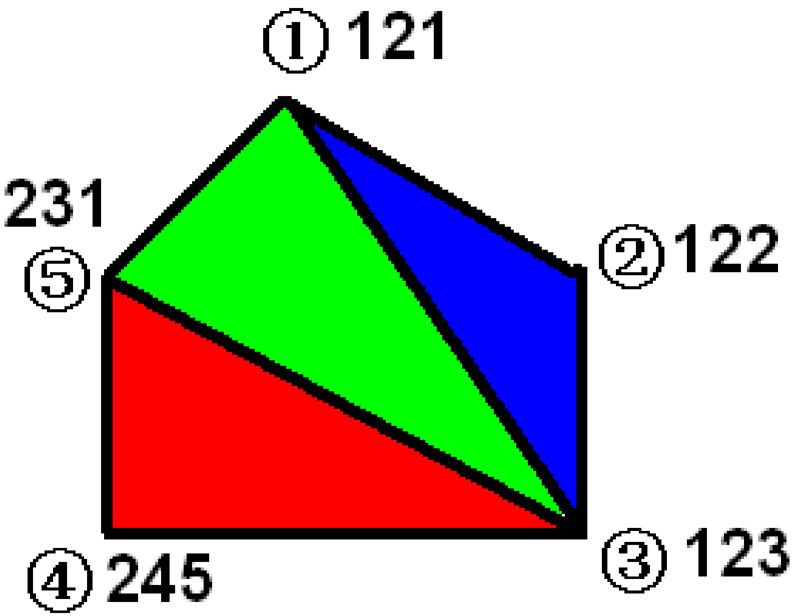
$$F(i,j)=Max\{F(i,k)+F(k+1,j)+S_{i-1}*S_k*S_j,\ i<=k<j\}$$

- 边界条件：**F(i,i)=0**
- **1<=i<k<j<=n**
- 至于圈的处理，与石子合并方法完全相同，时间复杂度$O(8n^3)$ 。

凸多边形的三角剖分

- 给定由**N**顶点组成的凸多边形
- 每个顶点具有权值
- 将凸**N**边形剖分成**N-2**个三角形
- 求**N-2**个三角形顶点权值乘积之和最小？

- 样例



上述凸五边形分成△**123**， △**135**， △**345**

三角形顶点权值乘积之和为：

121*122*123+121*123*231+123*245*231= 12214884

分析

- 性质：一个凸多边形剖分一个三角形后，可以将凸多边形剖分成三个部分：
  - 一个三角形
  - 二个凸多边形（图2可以看成另一个凸多边形为0）

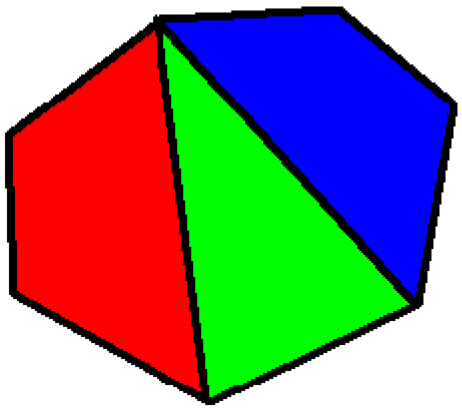


图1

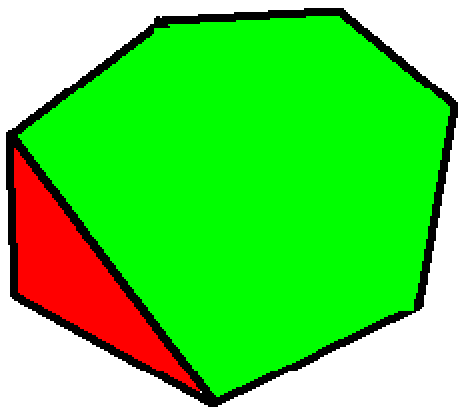
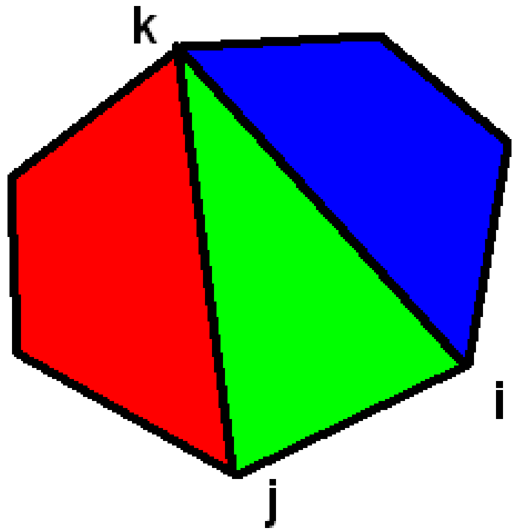


图2

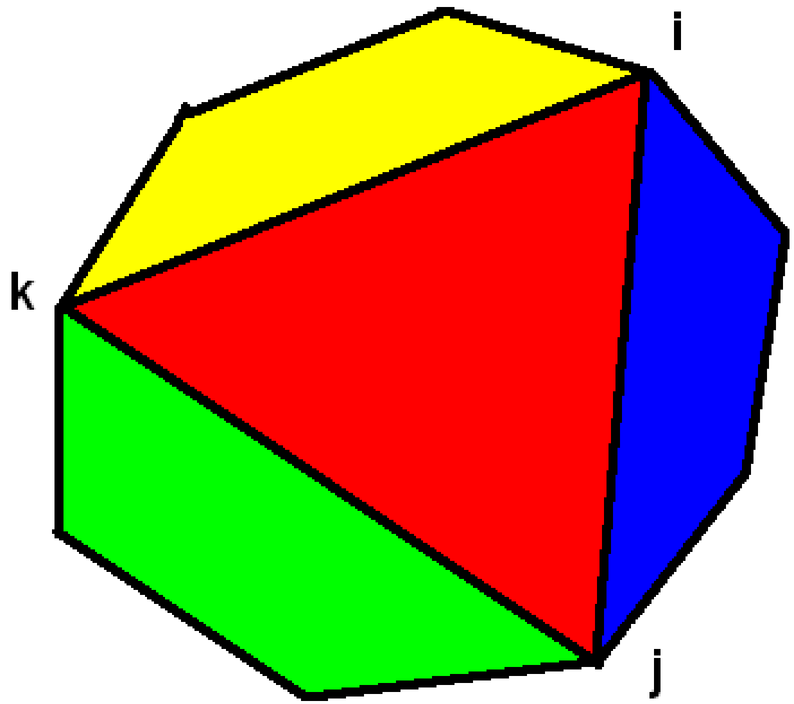
动态规划

- 如果我们按顺时针将顶点编号，则可以相邻两个顶点描述一个凸多边形。
- 设f(i,j)表示i~j这一段连续顶点的多边形划分后最小乘积
- 枚举点k，i、j和k相连成基本三角形，并把原多边形划分成两个子多边形，则有
- $f(i,j)=\min\{f(i,k)+f(k,j)+a[i]*a[j]*a[k]\}$
- $1<=i<k<j<=n$
- 时间复杂度$O(n^3)$



讨论

- 为什么可以不考虑这种情况？



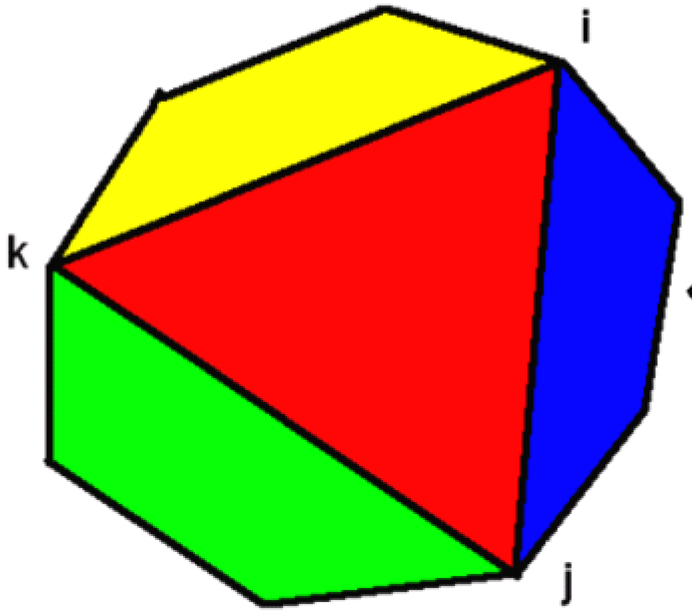


图1

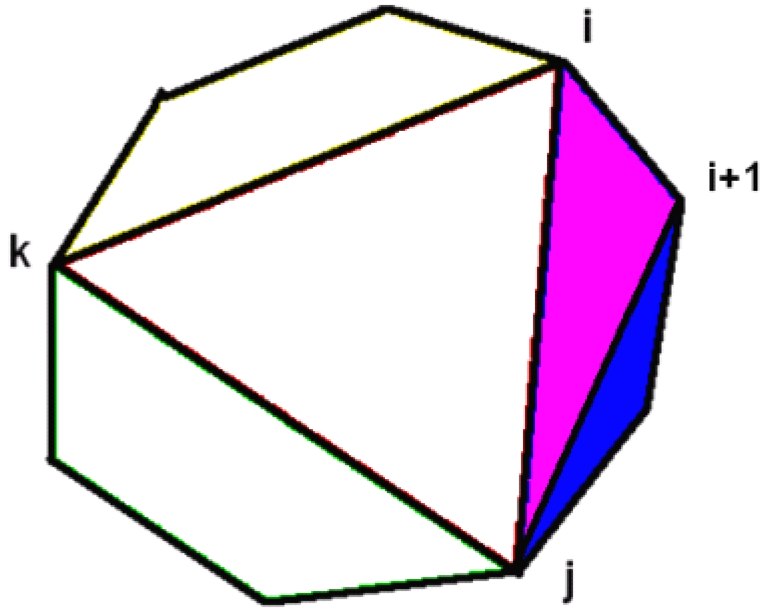


图2

- 可以看出图**1**和图**2**是等价的，也就是说如果存在图**1**的剖分方案，则可以转化成图 **2**的剖分方案，因此可以不考虑图 **1**的这种情形。