RELASI DAN FUNGSI

JURUSAN TEKNIK INFORMATIKA

Kemampuan akhir yang direncanakan

Mahasiswa mampu :

1. Menjelaskan pengertian cartesian product
2. Menjelaskan pengertian relasi
3. Merepresentasikan persoalan relasi
4. Menginverskan relasi
5. Melakukan operasi kombinasi dan komposisi relasi
6. Menjelaskan pengertian fungsi
7. Menginverskan fungsi
8. Melakukan operasi komposisi fungsi
9. Mengetahui beberapa fungsi khusus
10. Mengetahui fungsi rekursif

Sub Pokok Bahasan

- Caertesian Product
- Relasi
- Representasi Relasi
- Relasi Invers
- Kombinasi dan komposisi Relas
- Fungsi
- Fungsi Inversi
- Komposisi Fungsi
- Beberapa Fungsi Khusus
- Fungsi Rekursif

Cartesian Product

Definisi: Perkalian Kartesian (Cartesian Product) dari himpunan A ke himpunan B adalah himpunan yang elemennya semua pasangan terurut (ordered pairs) yang dibentuk dari komponen pertama dari himpunan A dan komponen kedua dari himpunan B.

Notasi: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ dan } b \in b\}$

- **Contoh:**

  Himpunan A = {a, b}, B = { 1, 2, 3}, maka

A x B ={(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)}

Konsep Relasi dan Representasinya

Definisi: Relasi antara A dan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.

Notasi: $R \subseteq (A \times B)$

Contoh:

Cartesian Product:

$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

Misalkan relasi R menyatakan jumlah buku yang dibeli. Maka relasinya dapat dituliskan dengan:

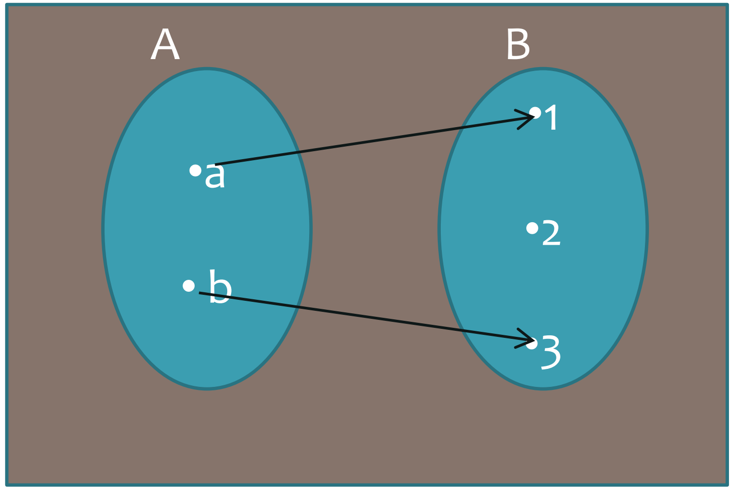
Relasi R = {(a,1),(b,3)}

Dalam database, relasi = tabel yang menghubungkan entitas.

Representasi Relasi

1. Dengan Diagram Panah

Relasi R = {(a,1),(b,3)}



2. Dengan Tabel

Relasi dapat direpresentasikan dengan tabel. Kolom pertama menyatakan daerah asal (domain), sedangkan kolom kedua menyatakan daerah hasil (range).

A	B
a	1
b	3

Representasi Relasi

3. **Dengan Matriks**

Misalkan R adalah relasi dari $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b, \dots, b_n\}$

Relasi R dapat disajikan dengan matriks $M = [m_{ij}]$,

Yang dalam hal ini:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{array} \\ M = \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Elemen matriks pada posisi (i, j) bernilai 1 jika a_i dihubungkan dengan b_j, dan bernilai 0jika a_i tidak dihubungkan dengan b_j

Representasi Relasi

Dengan Matriks

Contoh:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Jadi matriks representasinya:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat Relasi

Relasi yang didefinisikan pada sebuah himpunan dapat memiliki sifat seperti refleksif, menghantar, setangkup, tolak setangkup

1. Refleksif (reflexive)

   Relasi R pada himpunan A disebut refleksif jika $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$.

   Relasi R pada himpunan A tidak refleksif jika ada $a \in A$ sedemikian sehingga $(a, a) \notin R$.

2. Menghantar (transitive)

   Relasi R pada himpunan A disebut menghantar jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$, untuk $a, b, c \in A$.

3. Setangkup (symmetric)

Relasi R pada himpunan A disebut **setangkup** jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R$ untuk $a, b \in A$.

Relasi R pada himpunan A tidak setangkup jika $(a, b) \in R$ tetapi $(b, a) \notin R$.

4. Tolak setangkup (antisymmetric)

Relasi R pada himpunan A sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ hanya jika $a = b$ untuk $a, b \in A$ disebut **tolak-setangkup.**

Relasi R pada himpunan A tidak tolak-setangkup jika ada elemen berbeda a dan b sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$.

Perhatikan bahwa relasi yang "tidak setangkup" tidak selalu berarti sama dengan "tolak setangkup".

Contoh:

Relasi $R = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(4,2),(4,4)\}$ tidak setangkup dan juga tidak tolak-setangkup. R tidak setangkup karena $(4,2) \in R$ tetapi $(2,4) \notin R$. R tidak tolak-setangkup karena $(2,3) \in R$ dan $(3,2) \in R$ tetapi $2 \neq 3$.

Relasi Inversi

Definisi: Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Invers dari relasi R, dilambangkan dengan R^{-1}, adalah relasi dari B ke A yang didefinisikan oleh:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

Contoh:

$$R = \{(a, 1), (b, 3)\}$$

$$R^{-1} = \{(1, a), (3, b)\}$$

Kombinasi Relasi

Definisi: Jika R_1 dan R_2 masing-masing adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, maka operasi

$$R_1 \cap R_2,\ R_1 \cup R_2,\ R_1 - R_2,\ \textbf{dan}\ \ R_1 \oplus R_2$$

juga adalah relasi dari A ke B.

Komposisi Relasi

Definisi: Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, dan S adalah relasi dari himpunan B ke C. Komposisi R dan S, dinotasikan dengan $S \circ R$, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh:

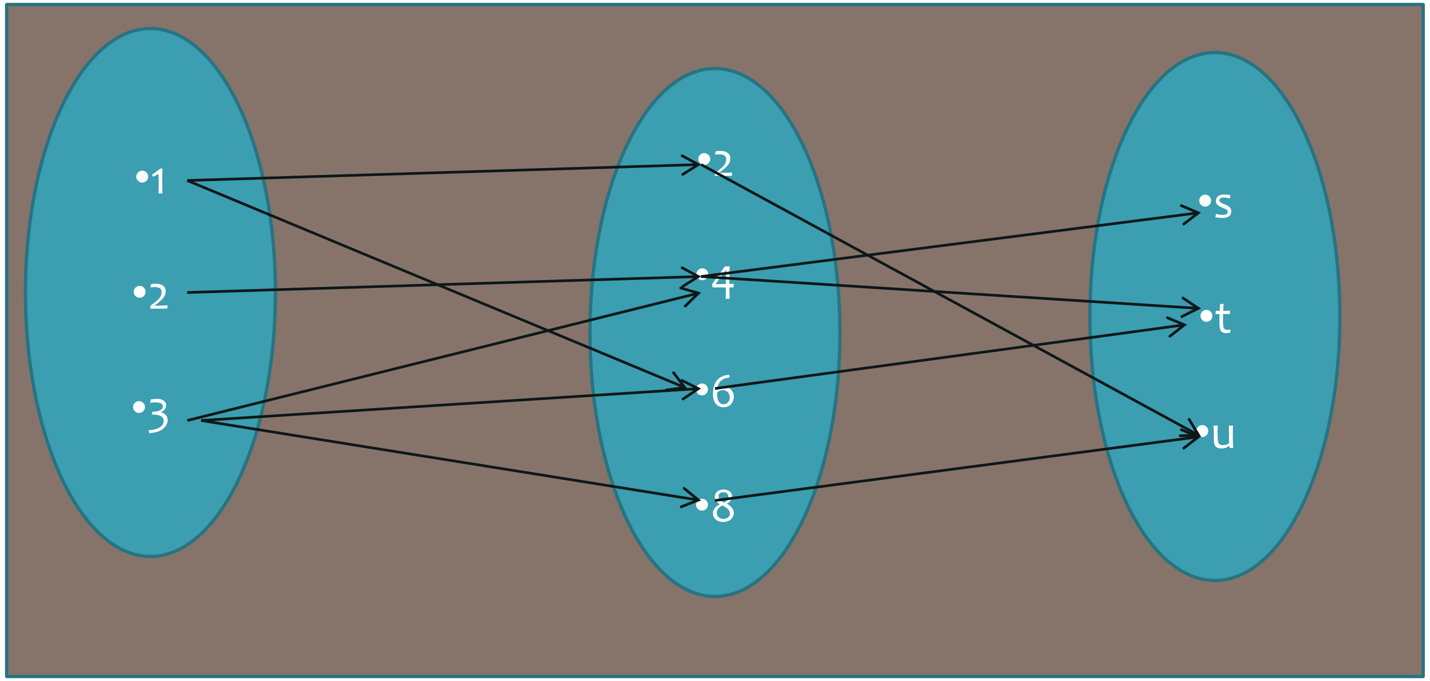
$$S \circ R = \{(a, c) | a \in A,\ c \in C,\ \text{dan untuk beberapa}\ b \in B,\ (a, b) \in R\ \text{dan}\ (b, c) \in S\}$$

Contoh: Misalkan $R = \{(1,2), (1,6), (2,4), (3,4), (3,6), (3,8)\}$ adalah relasi dari himpunan $\{1, 2, 3\}$ ke himpunan $\{2, 4, 6, 8\}$, dan $S = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$ adalah relasi dari himpunan $\{2,4,6,8\}$ ke himpunan $\{s, t, u\}$. Maka komposisi relasi R dan S adalah

$$S \circ R = \{(1, \mathrm{u}), (1, \mathrm{t}), (2, \mathrm{s}), (2, \mathrm{t}), (3, \mathrm{s}), (3, \mathrm{t}), (3, \mathrm{u})\}$$

Komposisi Relasi

Contoh:



Diskusi Kasus : Sistem Akademik Sederhana

Diberikan: Mahasiswa = $\{M1, M2, M3\}$, Mata Kuliah = $\{MTK, RPL\}$, Dosen = $\{D1, D2\}$

1. Buat himpunan hasil kali Cartesius Mahasiswa × MataKuliah.
2. Definisikan relasi "mengambil" mahasiswa terhadap mata kuliah:

   $R1$={$(M1, MTK)$, $(M2, RPL)$, $(M3, MTK)$, $(M3, RPL)$}

   Representasikan $R1$dalam bentuk:

   a. Diagram panah
   b. Matriks biner

4. Tentukan relasi invers ${R_1}^{-1}$ → "mata kuliah diambil oleh mahasiswa mana saja".
5. Dosen pengampu mata kuliah:

   $R_2 = \{(MTK, D1), (RPL, D2)\}$. Tentukan komposisi relasi $R_2 \circ R_1$untuk mengetahui dosen pengampu masing-masing mahasiswa

Fungsi

Terdapat hubungan antara ukuran masukan dengan kebutuhan waktu program dalam menentukan lama waktu yang dibutuhkan computer untuk mengeksekusi sebuah program.

Kebutuhan waktu sebuah program adalah **fungsi** dari ukuran masukan.

Fungsi sering dipakai untuk mentransformasikan elemen di sebuah himpunan dengan elemen di himpunan lain.

Fungsi

Definisi: Misalkan A dan B himpunan. Relasi f dari A ke B merupakan suatu fungsi jika setiap elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B. Jika f adalah fungsi dari A ke B, dapat dituliskan:

$$f : A \to B$$

yang artinya f memetakan A ke B.

Contoh

1. Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u, v, , w\}$ adalah fungsi dari A ke B.
2. Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{u, v, , w\}$ adalah bukan fungsi dari A ke B. Kenapa?
3. Relasi $f = \{(1, u), (1, v), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u, v, , w\}$ adalah bukan fungsi dari A ke B. Kenapa?

Contoh (Diskusi)

5. Misalkan A adalah himpunan mahasiswa Politeknik Negeri Batam. Manakah dari pemetaan berikut yang mendefinisikan sebuah fungsi pada himpunan A?

   a. Setiap mahasiswa memetakan NIM

   b. Setiap mahasiswa memetakan nomor *handphone*-nya

   c. Setiap mahasiswa memetakan dosen walinya

   d. Setiap mahasiswa memetakan matakuliah yang diambilnya

Fungsi

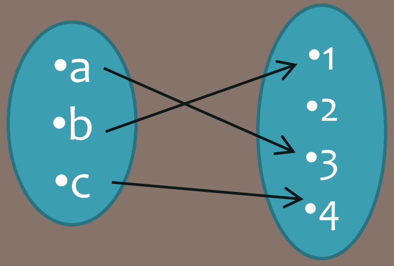
Fungsi f dikatakan **satu-ke-satu** (one-to-one) atau **injektif** jika tidak ada dua elemen himpunan A yang memiliki bayangan sama.

Fungsi f dikatakan **pada** (onto) atau **surjektif** jika setiap elemen himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan A.

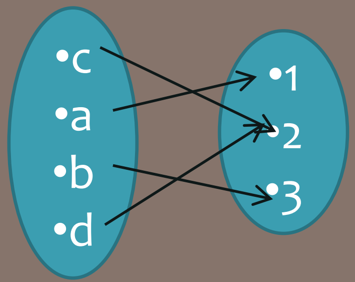
Fungsi f dikatakan **berkoresponden satu-ke-satu** atau **bijeksi** (bijection) jika ia fungsi satu-ke-satu dan juga fungsi pada.

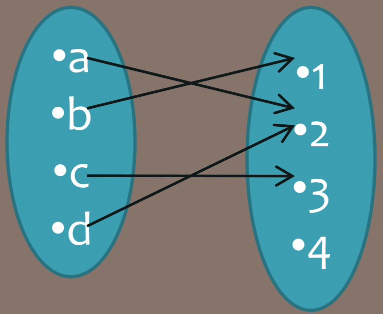
Fungsi

Fungsi satu-ke-satu

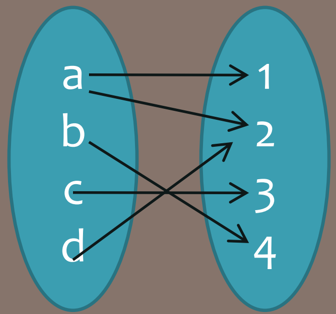


Fungsi pada





Bukan fungsi satu-satu maupun pada



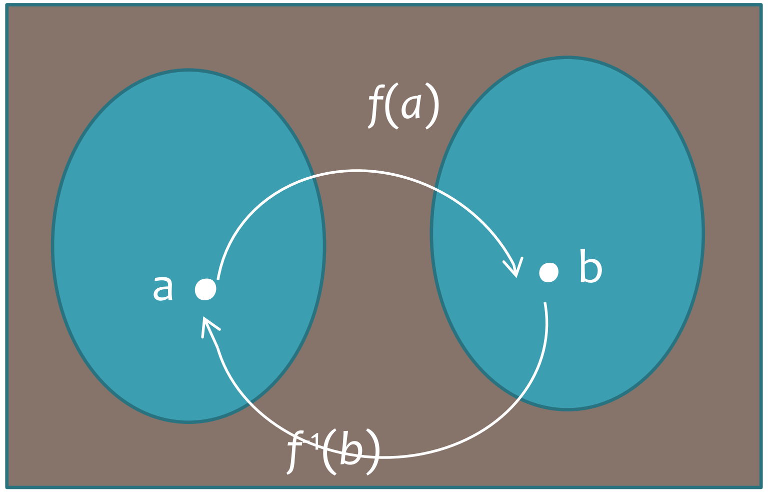
Bukan fungsi

Fungsi Inversi

Jika f adalah fungsi berkorespondensi satu-satu dari A ke B, maka kita dapat menemukan balikan atau inversi (invers) dari f.

Fungsi inversi dari f dilambangkan dengan f^{-1}.

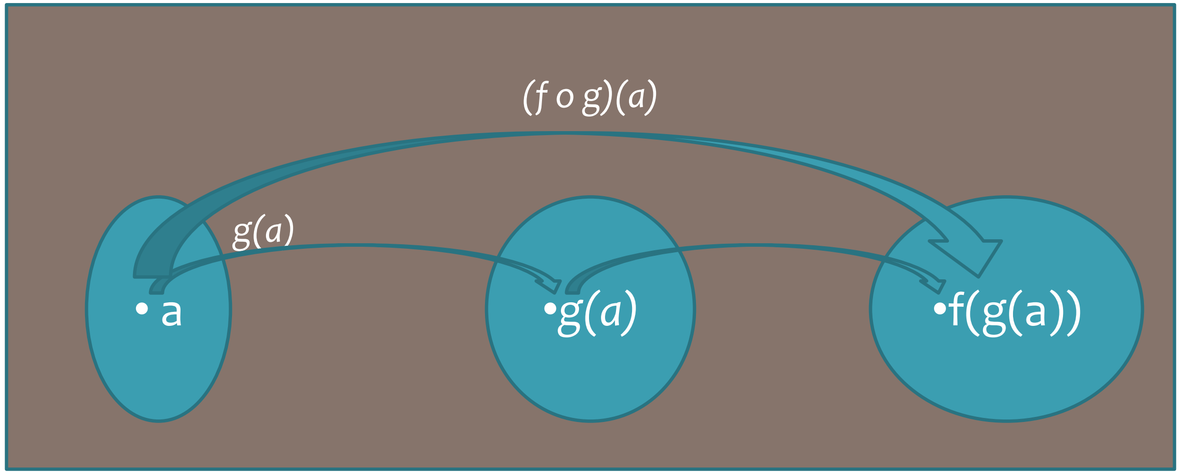
Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$.



Komposisi Fungsi

Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi f dan g, dinotasikan dengan $f \circ g$, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$



Fungsi Khusus

1. **Fungsi Floor dan Ceiling**

Fungsi floor dari *x*, dilambangkan dengan $\lfloor x \rfloor$ dan fungsi ceiling dari *x* dilambangkan dengan $\lceil x \rceil$.

$\lfloor x \rfloor$ menyatakan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan *x*.

$\lceil x \rceil$menyatakan nilai bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan *x*.

Contoh:

$$\lfloor 3.5 \rfloor = 3 \qquad \lceil 3.5 \rceil = 4$$
$$\lfloor 0.5 \rfloor = \ldots \qquad \lceil 0.5 \rceil = \ldots$$
$$\lfloor 4.8 \rfloor = \ldots \qquad \lceil 4.8 \rceil = \ldots$$
$$\lfloor -0.5 \rfloor = \ldots \qquad \lceil -0.5 \rceil = \ldots$$
$$\lfloor -3.5 \rfloor = \ldots \qquad \lceil -3.5 \rceil = \ldots$$

Fungsi Khusus

2. Fungsi Modulo

Misalkan a adalah sembarang bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat positif.

a mod **m** memberikan sisa pembagian bilangan bulat jika a dibagi dengan m

Contoh:

25 mod 7	= 4
15 mod 4	= …
3612 mod 45	= …
0 mod 5	= …
-25 mod 7	= …

Fungsi Khusus

3. Fungsi Faktorial

Untuk sembarang bilangan bulat tidak-negatif n, faktorial dari n, dilambangkan dengan n!, didefinisikan sebagai:

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n & , n > 0 \end{cases}$$

Contoh:

0!	= 1
1!	= …
4!	= …
15!	= …

Fungsi Khusus

4. **Fungsi Eksponensial dan Logaritmik**

Fungsi Eksponensial berbentuk:

$$a^n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n} & , n > 0 \end{cases}$$

Fungsi Eksponensial perpangkatan negatif:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Fungsi logaritmik berbentuk:

$$y = {}^a\log x \leftrightarrow x = a^y$$

Contoh:

$$4^3 = 4.4.4 = 64$$

$$4^{-3} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

$${}^4\log 64 = {}^4\log 4^3 = 3$$

$$\lfloor {}^2\log 1000 \rfloor = 9 \quad \text{karena} \quad 2^9 = 512 \text{ tapi } 2^{10} = 1024$$

Fungsi Rekursif

Fungsi f dikatakan fungsi rekursif jika definisi fungsinya mengacu pada dirinya sendiri.

Contoh:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 2f(n-1) + 1 & , n > 0 \end{cases}$$

Fungsi Rekursif

$$f(n) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 2f(n-1)+1 & , n > 0 \end{cases}$$

$f(0) = \ldots$
$f(1) = \ldots$
$f(2) = \ldots$
$f(3) = \ldots$
$f(4) = \ldots$
$f(5) = \ldots$
dst

Tugas (relasi)

Carilah basis data berdasarkan kasus proyek PBL yang sedang dikerjakan. Kaitkan dengan materi relasi, Sebagai contoh pelajari kasus Sistem Akademik Sederhana.

Latihan

1. Tentukan apakah setiap fungsi berikut satu-ke-satu?
    a. Setiap orang di bumi memetakan jumlah usianya.
    b. Setiap negara di dunia memetakan letak garis lintang dan garis bujur ibukotanya.
    c. Setiap buku yang ditulis oleh pengarangnya memetakan nama pengarangnya.
    d. Setiap negara di dunia yang mempunyai seorang presiden memetakan nama presidennya.

Latihan

2. Misalkan $g = \{(1, b), (2, c), (3, a), (4, b)\}$ adalah fungsi dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{a, b, c, d\}$ dan $f = \{(a, x), (b, y), (c, w), (d, z)\}$ adalah fungsi dari B ke $C = \{w, x, y, z\}$. Tuliskan $f \circ g$ sebagai himpunan pasangan berurutan!

3. Misalkan f adalah fungsi dari $X = \{0,1,2,3,4\}$ ke X yang didefinisikan oleh $f(x) = 3x \ mod \ 5$. Tuliskan f sebagai himpunan pasangan terurut. Apakah f satu-ke-satu atau pada?