Методы вычислений
Лабораторная работа № 2
"Методы решения проблемы собственных значений. Численное решение нелинейных уравнений"

По результатам работы необходимо составить итоговый отчёт.

Требования к отчёту:

- Отчёт предоставляется в электронном виде
- Рекомендуемый язык – C++. Основное требование к программам – компактность и читаемость
- Отчёт должен содержать условие, согласно варианту, развернутые ответы на все вопросы, поставленные в задании. Внимательно читайте каждый пункт!
- В работе должны быть представлены собственные выводы проделанной работы (на основании полученных результатов). При использовании нестандартных приёмов или алгоритмов, необходимо расписать их в отчёте и указать их преимущества.
- Каждая лабораторная работа будет оцениваться по десятибалльной системе. Оценка зависит от качества выполнения и срока сдачи работы.
- Работа должна быть сдана в срок. Работу позволяется сдавать только ОДИН раз.

Срок сдачи – `24.05.2020 22:00`.

Замечание!

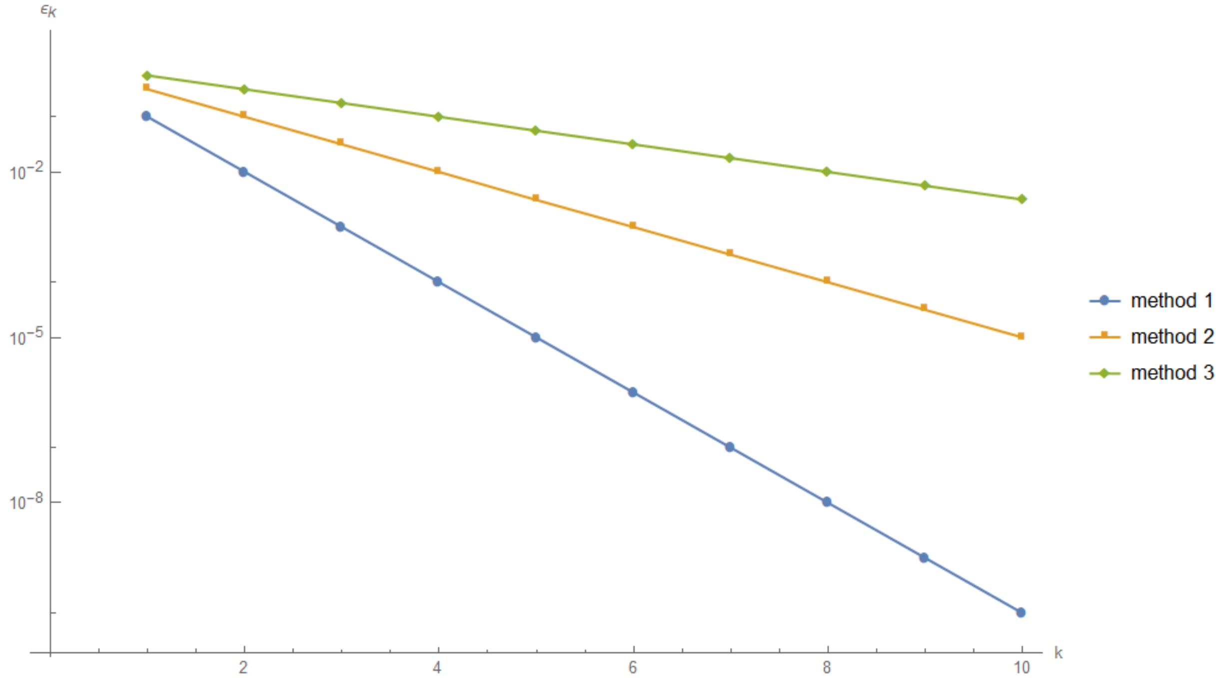
В каждом из вариантов требуется строить *диаграммы сходимости итерационного процесса*. Диаграмма сходимости представляет собой график, ось абсцисс которого соответствует номеру итерации k, а ось ординат — норме погрешности $|x^k - x^*|$ либо невязки $|f(x^k)|$. При этом для наглядности ось погрешностей имеет логарифмическую шкалу (по основанию 10). Ниже показано, как строятся такие диаграммы в среде *Mathematica* (копируем код в документ и нажимаем Shift+Enter).

```
errors1 = {0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, 1.*^-6, 1.*^-7, 1.*^-8, 1.*^-9, 1.*^-10};

errors2 = {0.3162, 0.1, 0.03162278, 0.01, 0.0031, 0.001, 0.000316, 0.0001, 0.00003162, 0.00001};

errors3 = {0.5623413, 0.31622776, 0.17782, 0.1, 0.056, 0.0316, 0.01778, 0.01, 0.005623, 0.003164};

ListLogPlot[{Legended[errors1, "method 1"], Legended[errors2, "method 2"], Legended[errors3, "method 3"]},
 PlotMarkers → Automatic, Joined → True, AxesLabel → {"k", "ϵk"}]
```



Вариант N (N – номер в списке подгруппы)

1. Заполнить матрицу A размером 10×10 рациональными случайными числами из отрезка $[-2^{N/4}, 2^{N/4}]$ так, чтобы каждое число представляло собой десятичную дробь не менее чем с 13 значащими цифрами. Другими словами, должна быть ненулевая вероятность попасть в ячейку любого числа, начинающегося с тринадцати любых цифр.

2. Степенным методом максимально точно найти все максимальные и минимальные по модулю собственные значения матрицы A и соответствующие им собственные векторы. В отчете подробно изложить способ определения случая и критерия остановки итераций.

3. С помощью QR-алгоритма максимально точно найти все собственные значения матрицы A.

4. Рассмотрим функцию $f(x)$ (см. распределение вариантов):

   а) $f(x) = \ln(\sin^2 x + 1) - \frac{x^2-5x-3}{15}$;

   б) $f(x) = \frac{30\sin(x-2)}{x} - \frac{1}{x^2+5} + 7$;

   в) $f(x) = 3x\cos(x^4+1) + 7x^2 - 8x - 1$;

   г) $f(x) = \frac{e^{4\cos x}}{5} - x$;

   д) $f(x) = e^{\frac{2}{\cos^2 x + \frac{1}{2}}} + x^2 - 2x - 5$;

   е) $f(x) = \mathrm{sh}(\ln(x^4+1)) - 25x + 5$;

ж) $f(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{\sin x}{2} + 5\right) - x^2 + 30$;

з) $f(x) = \operatorname{th} x - \frac{6}{7}\sin(2x - 6)$;

и) $f(x) = e^{\sin x} - \frac{x^2 - 8x + 4}{2x}$;

к) $f(x) = \operatorname{tg}(\cos 2x) + \ln 2x$;

5. Отделить все корни уравнения $f(x) = 0$ (можно графически). Обосновать (не обязательно доказать строго) единственность каждого корня на отрезке, отсутствие других корней.

6. Методом бисекции сузить отрезки отделенности корней до размера не более 10^{-4}.

7. Методом Ньютона, а также его дискретным вариантом найти все корни уравнения $f(x) = 0$ с максимально возможной точностью. Обосновать сходимость указанных методов (достаточно использовать условие Фурье). Исследовать влияние величины шага на скорость сходимости дискретного метода Ньютона.

8. Проделать пункты 1-7 и вывести отчет в формате .txt. В отчет должно входить:

   - Норма разности $Ax_1 - \lambda_1 x_1$, где λ_1 – собственное значение матрицы A, полученное степенным методом, а x_1 – соответствующий ему собственный вектор. Вывести норму этой разности для всех найденных собственных значений и собственных векторов.

   - Максимальное, минимальное и среднее время нахождения собственного значения и соответствующего ему собственного вектора степенным методом.

   - Максимальное, минимальное и среднее время нахождения всех собственных значений с помощью QR-алгоритма.

   - Конечные отрезки отделенности корней, полученные методом бисекции.

   - Количество шагов метода бисекции для каждого из корней.

   - Корни уравнения, полученные дискретным вариантом метода Ньютона.

   - Количество шагов дискретного варианта метода Ньютона для каждого из корней.

   - Корни уравнения, полученные методом Ньютона.

   - Количество шагов метода Ньютона для каждого из корней.

9. Выполнить пункты 2-3 для следующей матрицы

$$A=\begin{pmatrix}
\frac{-7+15n}{2} & \frac{1+n}{2} & \frac{7-n}{2} & \frac{1+n}{2} & \frac{11-13n}{2} & \frac{-7+9n}{2} & 1+n & 2(-1+n) & \frac{3-5n}{2} & \frac{-5+11n}{2}\\
\frac{1-3n}{2} & \frac{1+n}{2} & \frac{-1+3n}{2} & \frac{1-3n}{2} & \frac{-1+3n}{2} & \frac{1-3n}{2} & 0 & 0 & \frac{-1+3n}{2} & \frac{1-3n}{2}\\
-\frac{29}{2}+2n & -\frac{5}{2}+2n & \frac{5}{2}+n & -\frac{5}{2}+2n & \frac{29}{2}-2n & -\frac{21}{2}+2n & 0 & -4 & \frac{13}{2}-2n & -\frac{21}{2}+2n\\
\frac{17+3n}{2} & \frac{5+n}{2} & \frac{-5+n}{2} & \frac{5(1+n)}{2} & -\frac{3(7+n)}{2} & \frac{3(5+n)}{2} & -2 & 5 & -\frac{3(5+n)}{2} & \frac{3(7+n)}{2}\\
\frac{-55+9n}{2} & \frac{-11+n}{2} & \frac{11-n}{2} & \frac{-11+n}{2} & \frac{63-11n}{2} & \frac{9(-5+n)}{2} & 3-n & -11+2n & \frac{33-5n}{2} & \frac{7(-7+n)}{2}\\
-\frac{59}{2}+5n & -\frac{11}{2}+n & \frac{11}{2}-n & -\frac{11}{2}+n & \frac{63}{2}-7n & -\frac{43}{2}+6n & 2-2n & 2(-6+n) & \frac{35}{2}-3n & -\frac{55}{2}+3n\\
-2+\frac{5n}{2} & \frac{n}{2} & -\frac{n}{2} & \frac{n}{2} & 3-\frac{7n}{2} & -2+\frac{5n}{2} & -n & -1+n & 1-\frac{3n}{2} & -1+\frac{3n}{2}\\
-\frac{5}{2}-4n & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{11}{2}+3n & -\frac{11}{2}-2n & 1-n & 0 & \frac{5}{2}+n & -\frac{1}{2}-2n\\
5(5+2n) & 7+2n & -3-2n & 7+2n & -30-11n & 23+8n & -3-n & 3(3+n) & -4(4+n) & 21+6n\\
8+3n & 2+n & -2-n & 2+n & -11-4n & 8+3n & -1-n & 3+n & -5-2n & 2(3+n)
\end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{N}+\mathbf{3}$.

Включите в отчёт аналогичные пункту 8 характеристики.

10. Написать отчет в формате .docx (или .pdf), в котором изложить все выводы на основании полученных результатов. Также в отчёте должны быть:

- Обоснование из пункта 1.

- Сравнение используемых методов решения нелинейных уравнений (пункт 7). В качестве сравнения для одного из корней построить диаграмму сходимости (с легендой) для каждого из методов (на одной диаграмме все методы). Объяснить быструю или медленную сходимость методов. Для указанной выше диаграммы достаточно выбрать 2-3 различных шага для дискретного метода (которые явно покажут влияние величины шага на скорость сходимости)

11. Папку с проектом и два файла отчета добавить в итоговый архив .zip, расширение которого по необходимости переименовать в .mv. Итоговый архив прислать на электронную почту по адресу cma.vorobiov@gmail.com или выслать через edufpmi.bsu.by.