ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ МЕТОДОМ GMRES

Решать будем следующую систему

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 18 \\ 26 \\ 23 \\ -23 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Итерации проводим до тех пор, пока $\|Ax - b\|_2 \geq \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-8}$.

1. Решение системы (1) методом GMRES (по определению)

1-ая итерация

$$K_1 = b = \begin{pmatrix} 18 \\ 26 \\ 23 \\ -23 \end{pmatrix};$$

$$\|AK_1 c - b\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -54 \\ -159 \\ -209 \\ 242 \end{pmatrix} c - \begin{pmatrix} 18 \\ 26 \\ 23 \\ -23 \end{pmatrix} \right\|_2 \to min.$$

Решаем указанную выше задачу наименьших квадратов с помощью метода отражений.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 361.168 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_1 = \begin{pmatrix} -0.758 \\ -0.290 \\ -0.382 \\ 0.442 \end{pmatrix};$$

$$361.168\, c = -42.858 \Leftrightarrow c \approx -0.119.$$

Таким образом,

$$x = c\, b = -0.119 \begin{pmatrix} 18 \\ 26 \\ 23 \\ -23 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2.136 \\ -3.085 \\ -2.729 \\ 2.729 \end{pmatrix}.$$

Проверим полученный результат:

$$\|Ax - b\|_2 \approx 14.872 > \varepsilon.$$

2-ая итерация

$$K_2 = [b|Ab] = \begin{pmatrix} 18 & -54 \\ 26 & -159 \\ 23 & -209 \\ -23 & 242 \end{pmatrix};$$

$$\|AK_2c-b\|_2=\left\|\begin{pmatrix}-54 & 983\\ -159 & 1036\\ -209 & 2055\\ 242 & -2055\end{pmatrix}c-\begin{pmatrix}18\\ 26\\ 23\\ -23\end{pmatrix}\right\|_2 \to min.$$

Решаем указанную выше задачу наименьших квадратов с помощью метода отражений.

$$a_1=\begin{pmatrix}361.168\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\qquad \omega_1=\begin{pmatrix}-0.758\\ -0.290\\ -0.382\\ 0.442\end{pmatrix};$$

После первого этапа метода отражений получили систему

$$\begin{pmatrix}361.168 & -3169.197\\ 0 & -554.2\\ 0 & -35.262\\ 0 & 365.304\end{pmatrix}c=\begin{pmatrix}-42.858\\ 2.693\\ -7.637\\ 12.474\end{pmatrix},$$

стоит отметить, что первый столбец матрицы и правый вектор системы выше получаются на первой итерации метода GMRES (т.е. их считать не нужно).
После второго этапа метода отражений получим следующую систему

$$\begin{pmatrix}361.168 & -3169.197\\ 0 & 664.701\end{pmatrix}c=\begin{pmatrix}-42.858\\ 5.016\end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{c}\approx\begin{pmatrix}-0.052\\ 0.008\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$x=K_2\mathrm{c}=-0.052\begin{pmatrix}18\\ 26\\ 23\\ -23\end{pmatrix}+0.008\begin{pmatrix}-54\\ -159\\ -209\\ 242\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1.352\\ -2.564\\ -2.783\\ 3.032\end{pmatrix}.$$

Проверим полученный результат:

$$\|Ax-b\|_2\approx 14.001>\varepsilon.$$

<u>3-я итерация</u>

$$K_3=[b|Ab|A^2b]=\begin{pmatrix}18 & -54 & 370\\ 26 & -159 & 1481\\ 23 & -209 & -2011\\ -23 & 242 & -136\end{pmatrix};$$

$$\|AK_3c-b\|_2=\left\|\begin{pmatrix}-54 & 983 & 491\\ -159 & 1036 & -20966\\ -209 & 2055 & -1519\\ 242 & -2055 & 4593\end{pmatrix}c-\begin{pmatrix}18\\ 26\\ 23\\ -23\end{pmatrix}\right\|_2\to min.$$

Решаем указанную выше задачу наименьших квадратов с помощью метода отражений. После первого этапа метода отражений получили

$$\begin{pmatrix}361.168 & -3169.197 & 13113.185\\ 0 & -554.2 & -16131.982\\ 0 & -35.262 & 4835.15\\ 0 & 365.304 & -2764.436\end{pmatrix}c=\begin{pmatrix}-42.858\\ 2.693\\ -7.637\\ 12.474\end{pmatrix},$$

стоит отметить, что первый и второй столбцы матрицы и правый вектор системы выше получаются на первой и второй итерациях метода GMRES (т.е. их считать не нужно). После второго этапа метода отражений получим следующую систему

$$\begin{pmatrix}361.168 & -3169.197 & 13113.185\\ 0 & 664.701 & 11674.391\\ 0 & 0 & 5639.578\\ 0 & 0 & -11097.99\end{pmatrix}c=\begin{pmatrix}-42.858\\ 5.016\\ -7.57\\ 11.778\end{pmatrix}.$$

Опять же заметим, что считать пришлось только последний столбец матрицы указанной выше системы. Всё остальное было посчитано ранее. После третьего этапа метода отражений получим систему

$$\begin{pmatrix}361.168 & -3169.197 & 13113.185\\ 0 & 664.701 & 11674.391\\ 0 & 0 & -12448.703\end{pmatrix}c=\begin{pmatrix}-42.858\\ 5.016\\ 13.929\end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{c}\approx\begin{pmatrix}0.161\\ 0.027\\ -0.001\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$x=K_3\mathrm{c}=\begin{pmatrix}-54 & 983 & 491\\ -159 & 1036 & -20966\\ -209 & 2055 & -1519\\ 242 & -2055 & 4593\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.161\\ 0.027\\ -0.001\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1.008\\ -1.806\\ 0.26\\ 3.04\end{pmatrix}.$$

Проверим полученный результат:

$$\|Ax-b\|_2\approx 1.413>\varepsilon.$$

<u>4-ая итерация</u>

$$K_4 = [b|Ab|A^2b|A^3b] = \begin{pmatrix} 18 & -54 & 370 & 1398 \\ 26 & -159 & 1481 & -7515 \\ 23 & -209 & -2011 & -23255 \\ -23 & 242 & -136 & 4562 \end{pmatrix};$$

$$\|AK_4c - b\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -54 & 983 & 491 & 58961 \\ -159 & 1036 & -20966 & -45422 \\ -209 & 2055 & -1519 & 3141 \\ 242 & -2055 & 4593 & -76125 \end{pmatrix} c - \begin{pmatrix} 18 \\ 26 \\ 23 \\ -23 \end{pmatrix} \right\|_2 \to min.$$

Решаем указанную выше задачу наименьших квадратов с помощью метода отражений. После первого этапа метода отражений получим

$$\begin{pmatrix} 361.168 & -3169.197 & 13113.185 & -41644.148 \\ 0 & -554.12 & -16131.982 & -83951.549 \\ 0 & -35.262 & 4835.15 & -47504.76 \\ 0 & 365.304 & -2764.436 & -17482.542 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} -42.858 \\ 2.693 \\ -7.637 \\ 12.474 \end{pmatrix},$$

стоит отметить, что все столбцы, кроме последнего, матрицы выше получаются на предыдущих итерациях метода GMRES (т.е. их считать не нужно). После второго этапа метода отражений получим следующую систему

$$\begin{pmatrix} 361.168 & -3169.197 & 13113.185 & -41644.148 \\ 0 & 664.701 & 11674.391 & 62907.387 \\ 0 & 0 & 5639.578 & -43256.183 \\ 0 & 0 & -11097.99 & -61496.076 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} -42.858 \\ 5.016 \\ -7.57 \\ 11.778 \end{pmatrix}.$$

Опять же заметим, что считать пришлось только последний столбец матрицы. После третьего этапа метода отражений получим систему

$$\begin{pmatrix} 361.168 & -3169.197 & 13113.185 & -41644.148 \\ 0 & 664.701 & 11674.391 & 62907.387 \\ 0 & 0 & -12448.703 & -35227.459 \\ 0 & 0 & 0 & -66422.066 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} -42.858 \\ 5.016 \\ 13.929 \\ -1.413 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{c} \approx \begin{pmatrix} 0.157 \\ 0.026 \\ -0.001 \\ 0.00002 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$x = K_3\mathrm{c} = \begin{pmatrix} 18 & -54 & 370 & 1398 \\ 26 & -159 & 1481 & -7515 \\ 23 & -209 & -2011 & -23255 \\ -23 & 242 & -136 & 4562 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.157 \\ 0.026 \\ -0.001 \\ 0.00002 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3. \end{pmatrix}.$$

Проверим полученный результат:

$$\|Ax-b\|_2 \approx 0 < \varepsilon.$$

Метод GMRES сошёлся к решению с нужной точностью.

1. Решение системы (1) методом GMRES И FOM (с помощью алгоритма Арнольди)

$$q_1 = \frac{b}{\|b\|_2} \approx \begin{pmatrix} 0.397 \\ 0.573 \\ 0.507 \\ -0.507 \end{pmatrix}, \; d_k = (\|b\|_2, 0, \dots, 0)^T, \; d_k \in \mathbb{R}^k.$$

1-ая итерация

$$H_{2\times1} \approx \begin{pmatrix} -7.521 \\ 2.610 \end{pmatrix}, \; Q_{4\times2} \approx \begin{pmatrix} 0.397 & 0.687 \\ 0.573 & 0.309 \\ 0.507 & -0.304 \\ -0.507 & 0.583 \end{pmatrix},$$

$$\|H_{2\times1}y - d_2\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -7.521 \\ 2.610 \end{pmatrix} y - \begin{pmatrix} 7\sqrt{42} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 \to min.$$

Для метода FOM получим систему $-7.521y = 7\sqrt{42} \Rightarrow y^{FOM} \approx -6.031.$

Решаем указанную выше задачу наименьших квадратов с помощью метода вращений. Матрицы Гивенса (матрицы вращений)

$$Q_{21} = \begin{pmatrix} -0.945 & 0.328 \\ -0.328 & -0.945 \end{pmatrix}.$$

Получим следующую систему

$$7.961\, y = -42.858 \Leftrightarrow y \approx -5.383.$$

Таким образом,

$$x = q_1 y = -5.383 \begin{pmatrix} 0.397 \\ 0.573 \\ 0.507 \\ -0.507 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2.136 \\ -3.085 \\ -2.729 \\ 2.729 \end{pmatrix},$$

$$x^{FOM} = q_1 y^{FOM} = -6.031 \begin{pmatrix} 0.397 \\ 0.573 \\ 0.507 \\ -0.507 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2.393 \\ -3.457 \\ -3.058 \\ 3.058 \end{pmatrix},$$

Проверим полученный результат:

$$\|Ax-b\|_2 \approx 14.872 > \varepsilon, \;\; \|Ax^{FOM}-b\|_2 \approx 15.742 > \varepsilon.$$

2-ая итерация

$$H_{3\times 2} \approx \begin{pmatrix} -7.521 & 4.233 \\ 2.610 & 0.535 \\ 0 & 5.285 \end{pmatrix}, \quad Q_{4\times 3} \approx \begin{pmatrix} 0.397 & 0.687 & 0.534 \\ 0.573 & 0.309 & -0.746 \\ 0.507 & -0.304 & 0.397 \\ -0.507 & 0.583 & -0.028 \end{pmatrix},$$

$$\|H_{3\times 2}y - d_3\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -7.521 & 4.233 \\ 2.610 & 0.535 \\ 0. & 5.285 \end{pmatrix} y - \begin{pmatrix} 7\sqrt{42} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 \to min.$$

Для метода FOM получим систему $\begin{pmatrix} -7.521 & 4.233 \\ 2.610 & 0.535 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 7\sqrt{42} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y^{FOM} \approx \begin{pmatrix} -1.611 \\ 7.855 \end{pmatrix}$.

Стоит отметить, что вышеуказанную систему решили обычным методом Гаусса, хотя также можно применить метод вращений или отражений. Решаем указанную выше задачу наименьших квадратов с помощью метода вращений. Матрицы Гивенса (матрицы вращений)

$$Q_{21} = \begin{pmatrix} -0.945 & 0.328 & 0 \\ -0.328 & -0.945 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.337 & 0.941 \\ 0 & -0.941 & -0.337 \end{pmatrix}.$$

Получим следующую систему (жёлтым помечены те элементы системы, которые вычислялись на прошлых итерациях)

$$\begin{pmatrix} 7.961 & -3.824 \\ 0. & 5.614 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -42.858 \\ 5.0156 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y \approx \begin{pmatrix} -4.954 \\ 0.8937 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$x = Q_{4\times 2}y = \begin{pmatrix} 0.397 & 0.687 \\ 0.573 & 0.309 \\ 0.507 & -0.304 \\ -0.507 & 0.583 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4.954 \\ 0.8937 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.352 \\ -2.564 \\ -2.783 \\ 3.032 \end{pmatrix},$$

$$x^{FOM} = Q_{4\times 2}y^{FOM} = \begin{pmatrix} 0.397 & 0.687 \\ 0.573 & 0.309 \\ 0.507 & -0.304 \\ -0.507 & 0.583 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.611 \\ 7.855 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4.76 \\ 1.502 \\ -3.206 \\ 5.395 \end{pmatrix},$$

Проверим полученный результат:

$$\|Ax - b\|_2 \approx 41.514 > \varepsilon, \quad \|Ax^{FOM} - b\|_2 \approx 14.001 > \varepsilon.$$

3-я итерация

$$H_{4\times 3} \approx \begin{pmatrix} -7.521 & 4.233 & 5.254 \\ 2.610 & 0.535 & 4.202 \\ 0 & 5.285 & -4.434 \\ 0 & 0 & 3.714 \end{pmatrix},$$

$$Q_{4\times 4} \approx \begin{pmatrix} 0.397 & 0.687 & 0.534 & 0.291 \\ 0.573 & 0.309 & -0.746 & -0.141 \\ 0.507 & -0.304 & 0.397 & -0.702 \\ -0.507 & 0.583 & -0.028 & -0.634 \end{pmatrix},$$

$$\|H_{4\times 3}y - d_4\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -7.521 & 4.233 & 5.254 \\ 2.610 & 0.535 & 4.202 \\ 0 & 5.285 & -4.434 \\ 0 & 0 & 3.714 \end{pmatrix} y - \begin{pmatrix} 7\sqrt{42} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 \to min.$$

Для метода FOM получим систему

$$\begin{pmatrix} -7.521 & 4.233 & 5.254 \\ 2.610 & 0.535 & 4.202 \\ 0 & 5.285 & -4.434 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 7\sqrt{42} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y^{FOM} \approx \begin{pmatrix} -3.640 \\ 1.714 \\ 2.043 \end{pmatrix}.$$

Решаем указанную выше задачу наименьших квадратов с помощью метода вращений. Матрицы Гивенса (матрицы вращений)

$$Q_{21} = \begin{pmatrix} -0.945 & 0.328 & 0 & 0 \\ -0.328 & -0.945 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.337 & 0.941 & 0 \\ 0 & -0.941 & -0.337 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_{43} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.879 & 0.476 \\ 0 & 0 & -0.476 & 0.879 \end{pmatrix}.$$

Получим следующую систему (жёлтым помечены те элементы системы, которые вычислялись на прошлых итерациях)

$$\begin{pmatrix} 7.961 & -3.824 & -3.586 \\ 0. & 5.614 & -2.255 \\ 0 & 0 & 7.795 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -42.858 \\ 5.0156 \\ 12.31 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y \approx \begin{pmatrix} -3.938 \\ 1.528 \\ 1.579 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$x = Q_{4\times 3}y = \begin{pmatrix} -7.521 & 4.233 & 5.254 \\ 2.610 & 0.535 & 4.202 \\ 0 & 5.285 & -4.434 \\ 0 & 0 & 3.714 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3.938 \\ 1.528 \\ 1.579 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.331 \\ -2.963 \\ -1.835 \\ 2.842 \end{pmatrix},$$

$$x^{FOM} = Q_{4\times 3}y^{FOM} = \begin{pmatrix} -7.521 & 4.233 & 5.254 \\ 2.610 & 0.535 & 4.202 \\ 0 & 5.285 & -4.434 \\ 0 & 0 & 3.714 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3.640 \\ 1.714 \\ 2.043 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.825 \\ -3.081 \\ -1.556 \\ 2.787 \end{pmatrix},$$

Проверим полученный результат:

$$\|Ax-b\|_2 \approx 6.67 > \varepsilon, \ \ \|Ax^{FOM}-b\|_2 \approx 7.586 > \varepsilon.$$

4-ая итерация

$$H_{5\times 4} \approx \begin{pmatrix} -7.521 & 4.233 & 5.254 & -7.812 \\ 2.610 & 0.535 & 4.202 & 2.409 \\ 0 & 5.285 & -4.434 & 0.754 \\ 0 & 0 & 3.714 & 5.42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что элемент 5,4 матрицы $H_{5\times 4}$ равен нулю, следовательно, алгоритм Арнольди стоит приостановить (не нужно искать столбец матрицы $Q_{4\times 5}$).

$$\|H_{5\times 4}y-d_5\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -7.521 & 4.233 & 5.254 & -7.812 \\ 2.610 & 0.535 & 4.202 & 2.409 \\ 0 & 5.285 & -4.434 & 0.754 \\ 0 & 0 & 3.714 & 5.42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y - \begin{pmatrix} 7\sqrt{42} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 \to min.$$

Для метода FOM получим систему

$$\begin{pmatrix} -7.521 & 4.233 & 5.254 & -7.812 \\ 2.610 & 0.535 & 4.202 & 2.409 \\ 0 & 5.285 & -4.434 & 0.754 \\ 0 & 0 & 3.714 & 5.42 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 7\sqrt{42} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow y^{FOM} \approx \begin{pmatrix} -2.27 \\ 1.818 \\ 1.941 \\ -1.33 \end{pmatrix}.$$

Решаем указанную выше задачу наименьших квадратов с помощью метода вращений. В данном случае матрицы Гивенса (матрицы вращений) полностью берутся из прошлых итераций (не нужно никаких новых матриц!!!!)

$$Q_{21} = \begin{pmatrix} -0.945 & 0.328 & 0 & 0 \\ -0.328 & -0.945 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \ Q_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.337 & 0.941 & 0 \\ 0 & -0.941 & -0.337 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_{43} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.879 & 0.476 \\ 0 & 0 & -0.476 & 0.879 \end{pmatrix}.$$

Получим следующую систему (жёлтым помечены те элементы системы, которые вычислялись на прошлых итерациях)

$$\begin{pmatrix} 7.961 & -3.824 & -3.586 & 8.17 \\ 0. & 5.614 & -2.255 & 0.613 \\ 0 & 0 & 7.795 & 2.123 \\ 0 & 0 & 0 & 5.014 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -42.858 \\ 5.0156 \\ 12.31 \\ -6.67 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y \approx \begin{pmatrix} -2.27 \\ 1.818 \\ 1.941 \\ -1.33 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$x = Q_{4\times4}y = \begin{pmatrix} 0.397 & 0.687 & 0.534 & 0.291 \\ 0.573 & 0.309 & -0.746 & -0.141 \\ 0.507 & -0.304 & 0.397 & -0.702 \\ -0.507 & 0.583 & -0.028 & -0.634 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2.27 \\ 1.818 \\ 1.941 \\ -1.33 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$x^{FOM} = Q_{4\times4}y^{FOM} = \begin{pmatrix} 0.397 & 0.687 & 0.534 & 0.291 \\ 0.573 & 0.309 & -0.746 & -0.141 \\ 0.507 & -0.304 & 0.397 & -0.702 \\ -0.507 & 0.583 & -0.028 & -0.634 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2.27 \\ 1.818 \\ 1.941 \\ -1.33 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Проверим полученный результат:

$$\|Ax - b\|_2 \approx 0 < \varepsilon, \ \ \|Ax^{FOM} - b\|_2 \approx 0 < \varepsilon.$$

Метод GMRES и метод FOM сошлись к решению с нужной точностью.