

Вычислительные методы алгебры

Лабораторная работа № 1

"Методы решения СЛАУ"

По результатам работы необходимо составить итоговый отчёт.

Требования к отчёту:

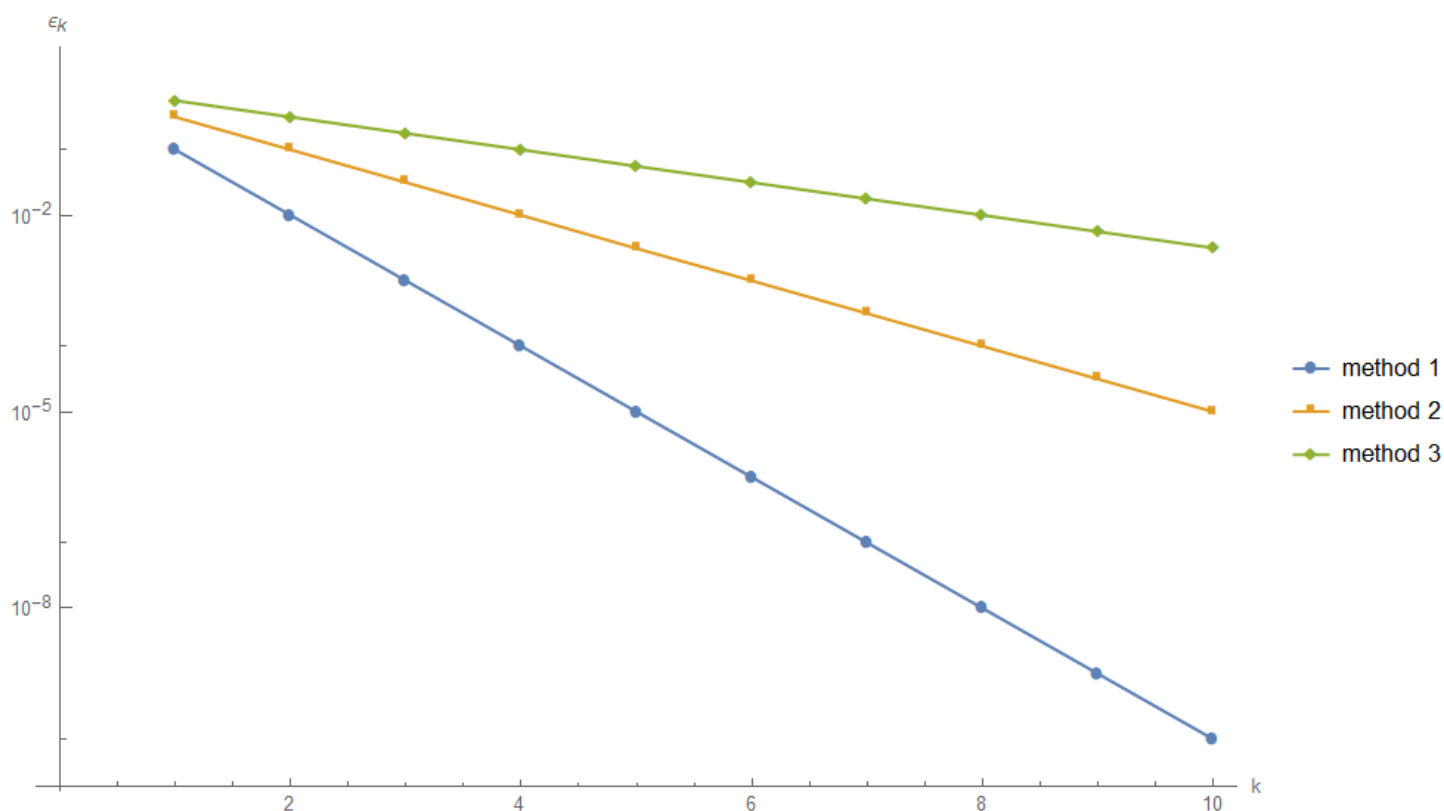
- Отчёт предоставляется в электронном виде
- Рекомендуемый язык – C++. Основное требование к программам – компактность и читаемость
- Отчёт должен содержать условие, согласно варианту, развернутые ответы на все вопросы, поставленные в задании. Внимательно читайте каждый пункт!
- В работе должны быть представлены собственные выводы проделанной работы (на основании полученных результатов). При использовании нестандартных приёмов или алгоритмов, необходимо расписать их в отчёте и указать их преимущества.
- Каждая лабораторная работа будет оцениваться по десятибалльной системе. Оценка зависит от качества выполнения и срока сдачи работы.
- Работа должна быть сдана в срок. Работу допускается сдавать только ОДИН раз.

Срок сдачи – **17.04.2020 23:00**.

Замечание!

В каждом из вариантов требуется строить *диаграммы сходимости итерационного процесса*. Диаграмма сходимости представляет собой график, ось абсцисс которого соответствует номеру итерации k , а ось ординат — норме погрешности $\|x^k - x^*\|$ либо невязки $\|Ax^k - b\|$. При этом для наглядности ось погрешностей имеет логарифмическую шкалу (по основанию 10). Ниже показано, как строятся такие диаграммы в среде *Mathematica* (копируем код в документ и нажимаем Shift+Enter).

```
errors1 = {0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, 1.*^-6, 1.*^-7, 1.*^-8, 1.*^-9, 1.*^-10};  
errors2 = {0.3162, 0.1, 0.03162278, 0.01, 0.0031, 0.001, 0.000316, 0.0001, 0.00003162, 0.00001};  
errors3 = {0.5623413, 0.31622776, 0.17782, 0.1, 0.056, 0.0316, 0.01778, 0.01, 0.005623, 0.003164};  
ListLogPlot[{Legended[errors1, "method 1"], Legended[errors2, "method 2"], Legended[errors3, "method 3"]},  
PlotMarkers → Automatic, Joined → True, AxesLabel → {"k", "εk
```



Вариант N (N – номер в списке подгруппы)

1. Заполнить верхний треугольник матрицы A размером 256×256 , а также вектор u длиной 256 рациональными случайными числами из полуинтервала $[-2^{N/4}, 2^{N/4})$ так, чтобы каждое число представляло собой десятичную дробь не менее чем с 13 значащими цифрами. Другими словами, должна быть ненулевая вероятность попасть в ячейку любого числа, начинающегося с тринадцати любых цифр. Нижний треугольник матрицы A заполнить таким образом, чтобы выполнялось $A = A^T$. Диагональные элементы получить из формулы $a_{ii} = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Умножив матрицу A на вектор u получить вектор правой части b . Таким образом имеем СЛАУ $Ax = b$, точным решением которой является вектор u .
2. Найти число обусловленности матрицы A , вычислив A^{-1} методом Гаусса-Жордана, в качестве нормы матрицы выбрать кубическую норму.
3. Решить СЛАУ $Ax = b$ методом Гаусса с выбором главного элемента по матрице.
4. Получить LUP -разложение матрицы A и решить полученную систему $LUx = \tilde{b}$.
5. Решить СЛАУ $Ax = b$ методом квадратного корня.
6. Получить максимально точное решение СЛАУ $Ax = b$ методом релаксации с параметром $(N + 1)/6$.
7. Решить СЛАУ $Ax = b$ методом отражений.

8. Из имеющейся матрицы A получить матрицу \tilde{A} – подматрица матрицы A , размером $256 \times 20N$, расположенная в левом верхнем углу (первые $20N$ столбцов матрицы A). Решить линейную задачу наименьших квадратов $\|\tilde{A}x - b\|_2 \rightarrow \min$.
9. Решить СЛАУ $Ax = b$ обобщенным методом минимальных невязок (GMRES), построенным на основе подпространств Крылова.
10. Используя алгоритм Арнольди решить СЛАУ $Ax = b$ обобщенным методом минимальных невязок (GMRES), построенным на основе ортонормированного базиса подпространств Крылова.
11. Прodelать пункты 1-10 сто раз и вывести отчёт в формате .txt. В отчет должно входить:
- Минимальное и максимальное число обусловленности, а также среднее арифметическое для всех матриц. Матрицу с максимальным числом обусловленности необходимо сохранить в отдельный файл (понадобится позже).
 - Среднее время нахождения обратной матрицы.
 - Минимальная, максимальная и средняя норма разности решения, полученного методом Гаусса, с точным решением u . В качестве нормы вектора взять кубическую норму.
 - Среднее время решения СЛАУ методом Гаусса.
 - Среднее время построения LUP -разложения.
 - Минимальная, максимальная и средняя норма разности решения, полученного решением СЛАУ $LUx = \tilde{b}$, с точным решением u .
 - Среднее время решения СЛАУ $LUx = \tilde{b}$.
 - Минимальная, максимальная и средняя норма разности решения, полученного методом квадратного корня, с точным решением u .
 - Среднее время решения СЛАУ методом квадратного корня.
 - Минимальная, максимальная и средняя норма разности решения, полученного методом релаксации, с точным решением u .
 - Среднее время решения СЛАУ методом релаксации.
 - Среднее время решения СЛАУ методом отражений.
 - Минимальная, максимальная и средняя $\|\tilde{A}u - b\|_2$, где u – решение задачи наименьших квадратов.

- Среднее время решения линейной задачи наименьших квадратов.
 - Минимальная, максимальная и средняя норма разности решения, полученного обобщенным методом минимальных невязок 9, с точным решением u .
 - Среднее время решения СЛАУ обобщенным методом минимальных невязок 9.
 - Минимальная, максимальная и средняя норма разности решения, полученного обобщенным методом минимальных невязок 10, с точным решением u .
 - Среднее время решения СЛАУ обобщенным методом минимальных невязок 10.
12. Исследовать (путём решения нескольких СЛАУ) влияние возмущения вектора b на погрешность полученного решения для матрицы с максимальным числом обусловленности (сравнить с теоретической оценкой). Сделайте соответствующие выводы.
 13. Построить диаграмму сходимости решения СЛАУ (матрица с максимальным числом обусловленности) методом релаксации (с параметрами равными 0, 1 и $(N + 1)/6$). Попробуйте оценить наиболее оптимальный параметр релаксации.
 14. Для матрицы размерности 4×4 (матрицу выбрать самостоятельно) выполнить пункты 2-10.
 15. Написать отчёт в формате .docx (или .pdf), в котором изложить все выводы на основании полученных результатов. Добавить в отчёт полученные результаты пункта 14.
 16. Папку с проектом и два файла отчета добавить в итоговый архив .zip, расширение которого по необходимости переименовать в .mv. Итоговый архив прислать на электронную почту по адресу сma.vorobiov@gmail.com.