**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Факультет прикладной математики и информатики**

**Кафедра информационных систем управления**

**Отчет**

**По методам вычислений**

Выполнил студент группы № 12

*Шишлянников Иван Викторович*

# Минск 2020

Вариант 10

Весь код написан на C#. Все основные методы для работы матрицами ( транспонирование , умножение, нахождение обратной матрицы и т.д ) реализованы мной. Из библиотек C# я использовал основную библиотеку (циклы , условные , логические операторы и т.д ), библиотеку Random (для генерации случайных чисел), библиотеку Math, для таких операций как определение знака числа, возведение в степень и т.д. То есть я использовал готовые методы только для основной работы с числами.

1. Заполнить верхний треугольник матрицы 𝐴 размером 256 × 256, а также вектор 𝑦 длиной 256 рациональными случайными числами из полуинтервала [−2𝑁⁄4, 2𝑁⁄4) так, чтобы каждое число представляло собой десятичную дробь не менее чем с 13 значащими цифрами. Другими словами, должна быть ненулевая вероятность попасть в ячейку любого числа, начинающегося с тринадцати любых цифр. Нижний треугольник матрицы 𝐴 заполнить таким образом, чтобы выполнялось 𝐴 = 𝐴𝑇. Диагональные элементы получить из формулы 𝑎𝑖𝑖 = ∑𝑗≠𝑖|𝑎𝑖𝑗|. Умножив матрицу 𝐴 на вектор 𝑦 получить вектор правой части 𝑏. Таким образом имеем СЛАУ 𝐴𝑥 = 𝑏, точным решением которой является вектор 𝑦.
2. Найти число обусловленности матрицы 𝐴, вычислив 𝐴−1 методом Гаусса-Жордана, в качестве нормы матрицы выбрать кубическую норму.
3. Решить СЛАУ 𝐴𝑥 = 𝑏 методом Гаусса с выбором главного элемента по матрице.
4. Получить 𝐿𝑈𝑃-разложение матрицы 𝐴 и решить полученную систему 𝐿𝑈𝑥 = 𝑏̃.
5. Решить СЛАУ 𝐴𝑥 = 𝑏 методом квадратного корня.
6. Получить максимально точное решение СЛАУ 𝐴𝑥 = 𝑏 методом релаксации с параметром (𝑁 + 1)/6.
7. Решить СЛАУ 𝐴𝑥 = 𝑏 методом отражений.
8. Из имеющейся матрицы 𝐴 получить матрицу 𝐴̃ – подматрица матрицы 𝐴, размером 256 × 20𝑁, расположенная в левом верхнем углу (первые 20𝑁 столбцов матрицы 𝐴). Решить линейную задачу наименьших квадратов ‖𝐴̃ 𝑥 − 𝑏‖ → min.

2

1. Решить СЛАУ 𝐴𝑥 = 𝑏 обобщенным методом минимальных невязок (GMRES), построенным на основе подпространств Крылова.
2. Используя алгоритм Арнольди решить СЛАУ 𝐴𝑥 = 𝑏 обобщенным методом минимальных невязок (GMRES), построенным на основе ортонормированного базиса подпространств Крылова.
3. Проделать пункты 1-10 сто раз и вывести отчёт в формате .txt. В отчет должно входить:
   * Минимальное и максимальное число обусловленности, а также среднее арифметическое для всех матриц. Матрицу с максимальным числом обусловленности необходимо сохранить в отдельный файл (понадобится позже).

Минимальное число обусловленности: 2637,146

Максимальное число обусловленности: 1229988,2

Среднее значение числа обусловленности: 35672,656

* + Среднее время нахождения обратной матрицы.

200 мс

* + Минимальная, максимальная и средняя норма разности решения, полученного методом Гаусса, с точным решением 𝑦. В качестве нормы вектора взять кубическую норму.

Максимальная норма: 0.65

Минимальная норма: 0.0007297

Средняя норма: 0.038

* + Среднее время решения СЛАУ методом Гаусса.

132,36 мс

* + Среднее время построения 𝐿𝑈𝑃-разложения.

55,8 мс

* + Минимальная, максимальная и средняя норма разности решения, полученного решением СЛАУ 𝐿𝑈𝑥 = 𝑏̃, с точным решением 𝑦.

Максимальная норма: 0.0028

Минимальная норма: 0.000045

Средняя норма: 0.00035

* + Среднее время решения СЛАУ 𝐿𝑈𝑥 = 𝑏̃.

0.03мс

* + Минимальная, максимальная и средняя норма разности решения, полученного методом квадратного корня, с точным решением 𝑦.

Максимальная норма: 0.00023

Минимальная норма: 0.000007

Средняя норма: 0.0003

* + Среднее время решения СЛАУ методом квадратного корня.

Среднее время: 40,25 мс

* + Среднее время решения СЛАУ методом отражений.

Среднее время 50 мс

Выводы по полученным результатам:

Как видим, все основные методы решения СЛАУ без заранее составленного разложения выполняются приблизительно за одно и то же время. Что касается метода Гауса с выбором главного элемента по матрице. Он выполнялся в среднем в 2 раза дольше. Это возможно связано с тем , что время тратится на частую перестановку столбцов и строк, а так же на множественную реолокацию памяти вызванную в данном методе ( это хорошо видно , если при анализе производительности использовать стороннее ПО). Поэтому, можно считать , что “Чистое” время выполнение алгоритма совпадает с временем выполнения алгоритмов и того же семейства ( без заведомо известных разложений). Сложность данных алгоритмов составляет O(n^3).

Что касается алгоритмов с заранее известными разложениями, они значительно превосходят предыдущее семейство. Так например при известном LUP - разложении , решение находится почти мгновенно ( 0.03 мс)

Сложность данных алгоритмов составляет O(n^2) так как решение состоит из решения двух систем с треугольными матрицами ( O(n^2) каждая).

Все нормы полученные в результате эксперимента крайне малы, что говорит, о том, что в реализации данных методов было проведено минимум действий способных повлиять на точность вычислений. Исключение как и следовало ожидать составляет метод Гауса. В нем за счет , хоть и более точного, но все же “Зануления в лоб” мы получили сильно большую норму, что свидетельствует о том, что данный подход является нежелательным при решении СЛАУ, хотя и может являться самым выигрышным по памяти (так как мы не храним никаких разложений)

При работе с матрицей перестановок, я использовал вектор вместо матрицы, что значительно сократило расходы по памяти.

Заключение выводов об опыте:

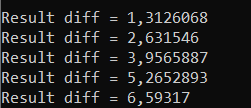
Если система A меняется, и числа в ней не по модулю не сильно большие и не сильно маленькие (|a|>1), то стандартным способом ее решения будет метод Гауса с выбором главного элемента ( в особых случаях можно использовать прямой ход).

Если же система не меняется (меняется только вектор B). То будет дешевле заранее разложить матрицу A (разложение может быть любой из стандартных). Информацию о разложении можно по памяти поместить в одну матрицу равную размеру матрицы A и в худшем случае появится еще вектор перестановок. То есть мы можем максимум потерять память под N чисел (при матрице N x N). При известном разложении, мы можем “бесплатно” (за O(n^2)) получить решение системы, что на порядок быстрее обычного прямого хода Гауса.

1. Исследовать (путём решения нескольких СЛАУ) влияние возмущения вектора b на погрешность полученного решения для матрицы с максимальным числом обусловленности (сравнить с теоретической оценкой). Сделайте соответствующие выводы.

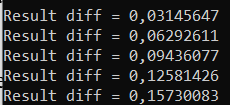
При исследовании было обнаружено, что даже небольшие возмущения вектора b приводят к существенным отличиям решения X.

Вот как меняется кубическая норма разности полученных решений между собой при каждом увеличении вектора b на 0.1 ( Было проведен о 5 опытов)



Видим, что при увеличении вектора b на 0.1 кубическая норма растет примерно на 1 целую.

Для сравнения, такой же опыт был проделан с матрицей с наименьшим числом обусловленности:



Как видим, в данном случае норма увеличивается всего на 0.03

Вывод: Большее число обусловленности содействует большему различию между решениями системы при изменении вектора b. То есть система становится более чувствительна к округлениям, что влечет за собой неточные расчеты при решении семейства данных систем.

1. Для матрицы размерности 4 × 4 (матрицу выбрать самостоятельно) выполнить пункты 2-10.

A =

1| 0| -1| 1|

0| 2| 4| 1|

-1| 4| 14| 0|

1| 1| 0| 2|

Число обусловленности: 190

Обратная матрица =

3,3333335 | 1,9999998 | -0,33333334| -2,6666665|

2 | 4 | -1 | -3|

-0,33333334 | -1 | 0,33333334 | 0,6666666|

-2,6666665 | -2,9999998 | 0,6666666 | 3,3333333|

Решено методом Гауса с выбором главного элемента по матрице:

X = (18,999998| 26,999996| -5| -21,999998|)

LUP – разложение матрицы A

L =

1 | 0 | 0 | 0|

-1| 1 | 0 | 0|

0 | 0,5 | 1 | 0|

1 | 0,25| 0,9| 1|

U =

1| 0| -1 | 1|

0| 4| 13 | 1|

0| 0| -2,5 | 0,5|

0| 0| 0 | 0,3|

P = 0 | 2 | 1 | 3 |

Решение при помощи LUP:

X = 19 | 27 | -5 | -22|

Решение методом квадратного корня:

X =

18,999996|

26,999994|

-4,9999986|

-21,999994|

Решено методом отражений:

X =

18,99999|

26,999994|

-4,999999|

-21,999992|