

# Pendahuluan

---

- Materi ini tentang konsep matematis yang melandasi teori pengolahan citra
- Dua operasi matematis penting dalam pengolahan citra :
  - Operasi Konvolusi (*Spatial Filter/Discret Convolution Filter*)
  - Transformasi Fourier

# Teori Konvolusi (Spatial Filter)

---

- Konvolusi terdapat pada operasi pengolahan citra yang mengalikan sebuah citra dengan sebuah *mask* (*convolution mask*) atau *kernel*
- Secara matematis, konvolusi 2 buah fungsi  $f(x)$  dan  $g(x)$  didefinisikan sebagai berikut :

$$h(x) = f(x) \otimes g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)g(x-a)da$$

- Untuk fungsi diskrit :

$$h(x) = f(x) \otimes g(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(a)g(x-a)$$

# Teori Konvolusi (Spatial Filter)

---

- Pada operasi konvolusi di atas,  $g(x)$  disebut *mask (convolution mask)* atau *kernel*.
- Kernel  $g(x)$  yang akan dioperasikan secara bergeser pada sinyal masukan  $f(x)$ , yang dalam hal ini, jumlah perkalian kedua fungsi pada setiap titik merupakan hasil konvolusi yang dinyatakan dengan keluaran  $h(x)$

# Teori Konvolusi (Spatial Filter)

---

- Contoh operasi konvolusi pada data 1 dimensi :

- $f(x) = \{0,1,2,3,2,1,0\}$

- $g(x) = \{1,3,1\}$

Didefinisikan  $\otimes$  adalah operasi konvolusi, maka :

- $h(x) = f(x) \otimes g(x) = \{1,5,10,13,10,5,1\}$

- Caranya :

- $(0 \times 1) + (0 \times 3) + (1 \times 1) = 1$

- $(0 \times 1) + (1 \times 3) + (2 \times 1) = 5$

- $(1 \times 1) + (2 \times 3) + (3 \times 1) = 10$

- $(2 \times 1) + (3 \times 3) + (2 \times 1) = 13$

- $(3 \times 1) + (2 \times 3) + (1 \times 1) = 10$

- $(2 \times 1) + (1 \times 3) + (0 \times 1) = 5$

- $(1 \times 1) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 1$

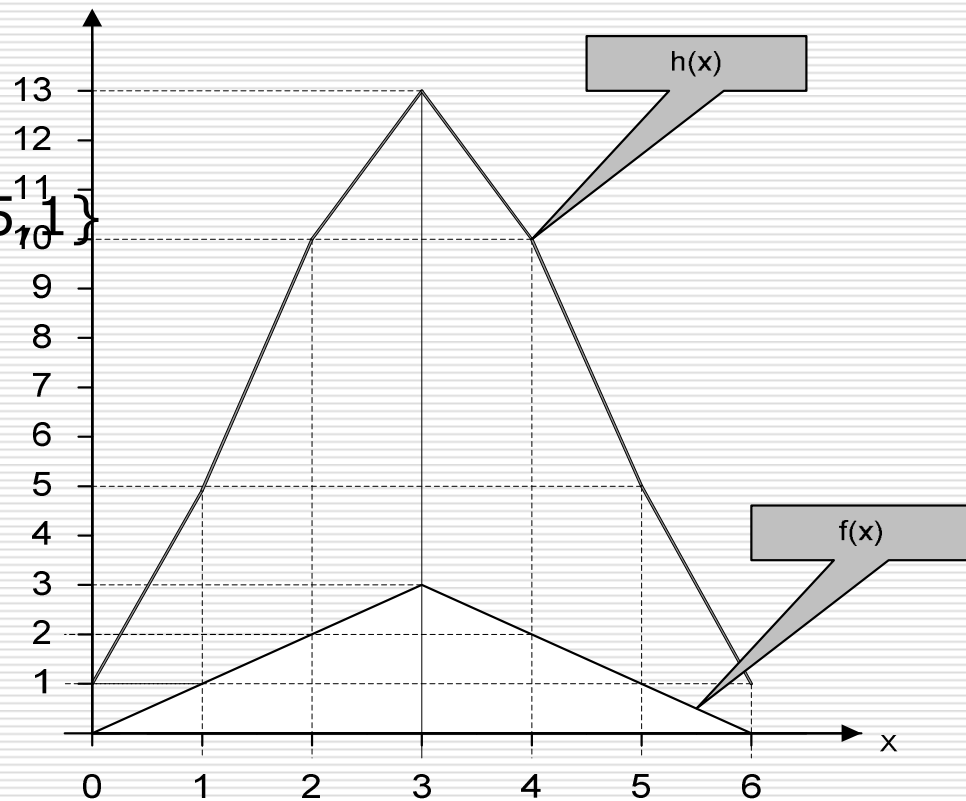
---

# Teori Konvolusi (Spatial Filter)

□  $f(x) = \{0, 1, 2, 3, 2, 1, 0\}$

□  $g(x) = \{1, 3, 1\}$

□  $h(x) = f(x) \otimes g(x) =$   
 $= \{1, 5, 10, 13, 10, 5, 1\}$



# Teori Konvolusi (Spatial Filter)

---

- Sedangkan pemakaian teknik *spatial filtering* pada citra, umumnya titik yang akan diproses beserta titik-titik disekitarnya dimasukkan ke dalam sebuah matrix 2 dimensi yang berukuran  $N \times N$ .
- Matrix ini dinamakan matrix *neighbor* (matrix tetangga), dimana  $N$  ini besarnya tergantung dari kebutuhan, tetapi pada umumnya  $N$  ini selalu kelipatan ganjil karena titik yang akan diproses diletakkan di tengah dari matrix
- Untuk citra, konvolusi dituliskan :
  - $\mathbf{h(x,y) = f(x,y) \otimes g(x,y)}$

# Teori Konvolusi (Spatial Filter)

---

- Contoh matrix tetangga 3 x 3 :

1	2	3
4	T	5
6	7	8

- Selain digunakannya *matrix tetangga*, teknik spatial filtering menggunakan sebuah matrix lagi yaitu matrix convolution (*mask/kernel*) yang ukurannya sama dengan matrix tetangga.

# Teori Konvolusi (Spatial Filter)

- Citra dengan 5 x 5 pixel dan 8 grayscale :

0	5	5	4	4
0	0	5	4	4
1	6	1	3	3
1	6	7	2	3
1	6	7	6	6

Dikonvolusi dengan  
*image mask* :

-2	-1	0
-1	0	1
0	1	2

- Hasilnya :

	8			

$$\begin{aligned} \text{Hasil konvolusi} &= (0 \times -2) + (5 \times -1) + \\ &+ (5 \times 0) + (0 \times -1) + (0 \times 0) + (5 \times 1) + \\ &+ (1 \times 0) + (6 \times 1) + (1 \times 2) = 8 \end{aligned}$$



# Teori Konvolusi (Spatial Filter)

- Citra dengan 5 x 5 pixel dan 8 grayscale :

0	5	5	4	4
0	0	5	4	4
1	6	1	3	3
1	6	7	2	3
1	6	7	6	6

Dikonvolusi dengan  
*image mask* :

-2	-1	0
-1	0	1
0	1	2

- Hasilnya :

	8	-4		

Hasil konvolusi =  $(5 \times -2) + (5 \times -1) + (4 \times 0) + (0 \times -1) + (5 \times 0) + (4 \times 1) + (6 \times 0) + (1 \times 1) + (3 \times 2) = -4$

# Teori Konvolusi (Spatial Filter)

- ❑ Citra dengan 5 x 5 pixel dan 8 grayscale :

0	5	5	4	4
0	0	5	4	4
1	6	1	3	3
1	6	7	2	3
1	6	7	6	6

Dikonvolusi dengan  
*image mask* :

-2	-1	0
-1	0	1
0	1	2

- ❑ Hasilnya

5	15	12	11	0
13	8	-4	-6	-13
19	20	3	-4	-12
18	18	2	9	-5
5	-2	-19	-17	-13

Normalisasi

5	7	7	7	0
7	7	0	0	0
7	7	3	0	0
7	7	2	7	0
5	0	0	0	0

# Teori Konvolusi (Spatial Filter)

---

## Algoritma :

```
void konvolusi (citra Image, citra ImageResult, matrix Mask, int N, int M) {  
    /*  
    Mengkonvolusi citra Image yang berukuran N x M dengan mask 3x3.  
    Hasil konvolusi disimpan dalam matriks ImageResult  
    */  
    int i,j;  
    for (i=1;i<=N-2;i++ ) {  
        for (j=1;j<=M-2;j++ ) {  
            ImageResult[i][j] =  
                Image[i-1][j-1]*Mask[0][0] +  
                Image[i-1][j] *Mask[0][1] +  
                Image[i-1][j+1]*Mask[0][2] +  
                Image[i][j-1] *Mask[1][0] +  
                Image[i][j] *Mask[1][1] +  
                Image[i][j+1] *Mask[1][2] +  
                Image[i+1][j-1]*Mask[2][0] +  
                Image[i+1][j] *Mask[2][1] +  
                Image[i+1][j+1]*Mask[2][2];  
        }  
    }  
}
```

---

# Teori Konvolusi (Spatial Filter)

---

- Konvolusi berguna pada proses citra seperti :
  - Perbaikan kualitas citra
  - Penghilangan Noise
  - Blur
  - Deteksi Tepi

# Transformasi Fourier

---

- ❑ Konvolusi per-pixel → Lama, terdapat operasi perkalian dan penjumlahan untuk setiap pixel
- ❑ Untuk mempercepat komputasi :
  - Mengubah citra dari domain spatial ke domain frekuensi, dengan Transformasi Fourier.
- ❑ Keuntungan penggunaan domain frekuensi adalah proses konvolusi dapat diterapkan dalam bentuk perkalian langsung

# Transformasi Fourier

---

Rumus :

□ Jika :

- $h(x,y) = f(x,y) \otimes g(x,y)$
- $F(u,v) = \text{Transf.Fourier dari } f(x,y)$
- $G(u,v) = \text{Transf.Fourier dari } g(x,y)$

□ Maka berlaku :

- $H(u,v) = F(u,v) \cdot G(u,v)$
- $h(x,y) = \text{invers Transf.Fourier dari } H(u,v)$

# Transformasi Fourier

---

$$F(u, v) = \frac{1}{N.M} \cdot \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) \cdot \left[ \cos 2\pi \left( \frac{ux}{N} + \frac{vy}{M} \right) - i \cdot \sin 2\pi \left( \frac{ux}{N} + \frac{vy}{M} \right) \right]$$

$$|F(u, v)| = \sqrt{\left[ \frac{1}{N.M} \cdot \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) \cdot \cos 2\pi \left( \frac{ux}{N} + \frac{vy}{M} \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{N.M} \cdot \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) \cdot \sin 2\pi \left( \frac{ux}{N} + \frac{vy}{M} \right) \right]^2}$$

dengan:  $u=0,1,2,\dots,N-1$  dan  $v=0,1,2,\dots,M-1$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} F(u, v) \cdot \left[ \cos 2\pi \left( \frac{ux}{N} + \frac{vy}{M} \right) + i \cdot \sin 2\pi \left( \frac{ux}{N} + \frac{vy}{M} \right) \right]$$

$$|f(x, y)| = \sqrt{\left[ \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} F(u, v) \cdot \cos 2\pi \left( \frac{ux}{N} + \frac{vy}{M} \right) \right]^2 + \left[ \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} F(u, v) \cdot \sin 2\pi \left( \frac{ux}{N} + \frac{vy}{M} \right) \right]^2}$$

dengan:  $x=0,1,2,\dots,N-1$  dan  $y=0,1,2,\dots,M-1$