

Pendahuluan

- Materi ini tentang konsep matematis yang melandasi teori pengolahan citra
 - Dua operasi matematis penting dalam pengolahan citra :
 - Operasi Konvolusi (*Spatial Filter/Discrete Convolution Filter*)
 - Transformasi Fourier
-

Teori Konvolusi (Spatial Filter)

- Konvolusi terdapat pada operasi pengolahan citra yang mengalikan sebuah citra dengan sebuah *mask* (*convolution mask*) atau *kernel*
- Secara matematis, konvolusi 2 buah fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ didefinisikan sebagai berikut :

$$h(x) = f(x) \otimes g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)g(x-a)da$$

- Untuk fungsi diskrit :

$$h(x) = f(x) \otimes g(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(a)g(x-a)$$

Teori Konvolusi (Spatial Filter)

- Pada operasi konvolusi di atas, $g(x)$ disebut *mask (convolution mask)* atau *kernel*.

 - Kernel $g(x)$ yang akan dioperasikan secara bergeser pada sinyal masukan $f(x)$, yang dalam hal ini, jumlah perkalian kedua fungsi pada setiap titik merupakan hasil konvolusi yang dinyatakan dengan keluaran $h(x)$
-

Teori Konvolusi (Spatial Filter)

- Contoh operasi konvolusi pada data 1 dimensi :

- $f(x) = \{0,1,2,3,2,1,0\}$

- $g(x) = \{1,3,1\}$

Didefinisikan \otimes adalah operasi konvolusi, maka :

- $h(x) = f(x) \otimes g(x) = \{1,5,10,13,10,5,1\}$

- Caranya :

- $(0 \times 1) + (0 \times 3) + (1 \times 1) = 1$

- $(0 \times 1) + (1 \times 3) + (2 \times 1) = 5$

- $(1 \times 1) + (2 \times 3) + (3 \times 1) = 10$

- $(2 \times 1) + (3 \times 3) + (2 \times 1) = 13$

- $(3 \times 1) + (2 \times 3) + (1 \times 1) = 10$

- $(2 \times 1) + (1 \times 3) + (0 \times 1) = 5$

- ~~$(1 \times 1) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 1$~~

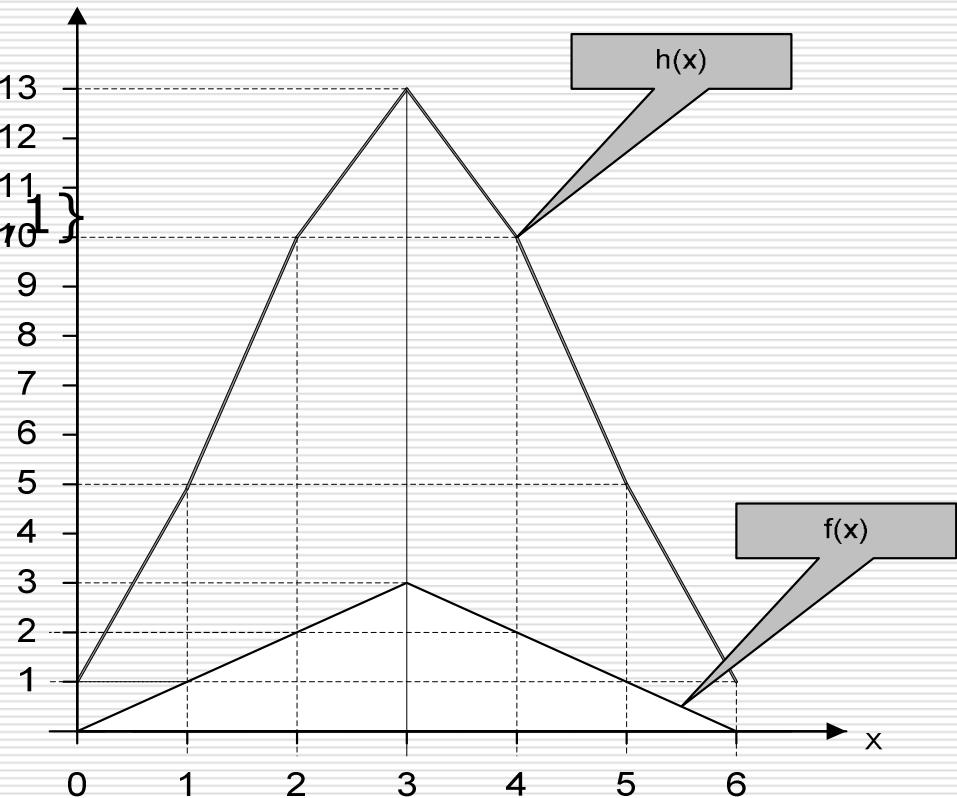
Teori Konvolusi (Spatial Filter)

$f(x) = \{0,1,2,3,2,1,0\}$

$g(x) = \{1,3,1\}$

$h(x) = f(x) \otimes g(x) =$

$$= \{1,5,10,13,10,5,1\}$$



Teori Konvolusi (Spatial Filter)

- Sedangkan pemakaian teknik *spatial filtering* pada citra, umumnya titik yang akan diproses beserta titik-titik disekitarnya dimasukkan ke dalam sebuah matrix 2 dimensi yang berukuran $N \times N$.
 - Matrix ini dinamakan matrix *neighbor* (matrix tetangga), dimana N ini besarnya tergantung dari kebutuhan, tetapi pada umumnya N ini selalu kelipatan ganjil karena titik yang akan diproses diletakkan di tengah dari matrix
 - Untuk citra, konvolusi dituliskan :
 - $$h(x,y) = f(x,y) \otimes g(x,y)$$
-

Teori Konvolusi (Spatial Filter)

- Contoh matrix tetangga 3×3 :

1	2	3
4	T	5
6	7	8

- Selain digunakannya *matrix tetangga*, teknik spatial filtering menggunakan sebuah matrix lagi yaitu matrix convolution (*mask/kernel*) yang ukurannya sama dengan matrix tetangga.
-

Teori Konvolusi (Spatial Filter)

- Citra dengan 5×5 pixel dan 8 grayscale :

0	5	5	4	4
0	0	5	4	4
1	6	1	3	3
1	6	7	2	3
1	6	7	6	6

→ Dikonvolusi dengan
image mask :

-2	-1	0
-1	0	1
0	1	2

- Hasilnya :

Hasil konvolusi = $(0 \times -2) + (5 \times -1) + (5 \times 0) + (0 \times -1) + (0 \times 0) + (5 \times 1) + (1 \times 0) + (6 \times 1) + (1 \times 2) = 8$

Teori Konvolusi (Spatial Filter)

- Citra dengan 5×5 pixel dan 8 grayscale :

0	5	5	4	4
0	0	5	4	4
1	6	1	3	3
1	6	7	2	3
1	6	7	6	6

→ Dikonvolusi dengan
image mask :

-2	-1	0
-1	0	1
0	1	2

- Hasilnya :

	8	-4		

→ Hasil konvolusi = $(5 \times -2) + (5 \times -1) + (4 \times 0) + (0 \times -1) + (5 \times 0) + (4 \times 1) + (6 \times 0) + (1 \times 1) + (3 \times 2) = -4$

Teori Konvolusi (Spatial Filter)

- Citra dengan 5×5 pixel dan 8 grayscale :

0	5	5	4	4
0	0	5	4	4
1	6	1	3	3
1	6	7	2	3
1	6	7	6	6

→ Dikonvolusi dengan
image mask :

-2	-1	0
-1	0	1
0	1	2

- Hasilnya

5	15	12	11	0
13	8	-4	-6	-13
19	20	3	-4	-12
18	18	2	9	-5
5	-2	-19	-17	-13

Normalisasi →

5	7	7	7	0
7	7	0	0	0
7	7	3	0	0
7	7	2	7	0
5	0	0	0	0

Teori Konvolusi (Spatial Filter)

Algoritma :

```
void konvolusi (citra Image, citra ImageResult, matrix Mask, int N, int M) {  
/*  
Mengkonvolusi citra Image yang berukuran N x M dengan mask 3x3.  
Hasil konvolusi disimpan dalam matriks ImageResult  
*/  
    int i,j;  
    for (i=1;i<=N-2;i++) {  
        for (j=1;j<=M-2;j++) {  
            ImageResult[i][j] =  
                Image[i-1][j-1]*Mask[0][0] +  
                Image[i-1][j] *Mask[0][1] +  
                Image[i-1][j+1]*Mask[0][2] +  
                Image[i][j-1] *Mask[1][0] +  
                Image[i][j] *Mask[1][1] +  
                Image[i][j+1] *Mask[1][2] +  
                Image[i+1][j-1]*Mask[2][0] +  
                Image[i+1][j] *Mask[2][1] +  
                Image[i+1][j+1]*Mask[2][2];  
        }  
    }  
}
```

Teori Konvolusi (Spatial Filter)

- Konvolusi berguna pada proses citra seperti :
 - Perbaikan kualitas citra
 - Penghilangan Noise
 - Blur
 - Deteksi Tepi

Transformasi Fourier

- Konvolusi per-pixel → Lama, terdapat operasi perkalian dan penjumlahan untuk setiap pixel
 - Untuk mempercepat komputasi :
 - Mengubah citra dari domain spatial ke domain frekuensi, dengan Transformasi Fourier.
 - Keuntungan penggunaan domain frekuensi adalah proses konvolusi dapat diterapkan dalam bentuk perkalian langsung
-

Transformasi Fourier

Rumus :

□ Jika :

- $h(x,y) = f(x,y) \otimes g(x,y)$
- $F(u,v) = \text{Transf. Fourier dari } f(x,y)$
- $G(u,v) = \text{Transf. Fourier dari } g(x,y)$

□ Maka berlaku :

- $H(u,v) = F(u,v) \cdot G(u,v)$
- $h(x,y) = \text{invers Transf. Fourier dari } H(u,v)$

Transformasi Fourier

$$F(u, v) = \frac{1}{N.M} \cdot \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) \left[\cos 2\pi \left(\frac{ux}{N} + \frac{vy}{M} \right) - i \cdot \sin 2\pi \left(\frac{ux}{N} + \frac{vy}{M} \right) \right]$$

$$|F(u, v)| = \sqrt{\left[\frac{1}{N.M} \cdot \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) \cdot \cos 2\pi \left(\frac{ux}{N} + \frac{vy}{M} \right) \right]^2 + \left[\frac{1}{N.M} \cdot \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) \cdot \sin 2\pi \left(\frac{ux}{N} + \frac{vy}{M} \right) \right]^2}$$

dengan: $u = 0, 1, 2, \dots, N-1$ dan $v = 0, 1, 2, \dots, M-1$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} F(u, v) \left[\cos 2\pi \left(\frac{ux}{N} + \frac{vy}{M} \right) + i \cdot \sin 2\pi \left(\frac{ux}{N} + \frac{vy}{M} \right) \right]$$

$$|f(x, y)| = \sqrt{\left[\sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} F(u, v) \cdot \cos 2\pi \left(\frac{ux}{N} + \frac{vy}{M} \right) \right]^2 + \left[\sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} F(u, v) \cdot \sin 2\pi \left(\frac{ux}{N} + \frac{vy}{M} \right) \right]^2}$$

dengan: $x = 0, 1, 2, \dots, N-1$ dan $y = 0, 1, 2, \dots, M-1$