



به نام خدا

درس ترکیب داده



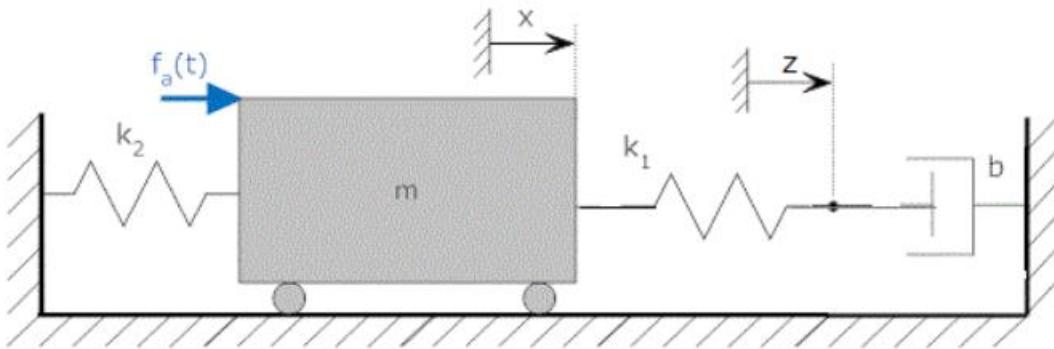
نیم سال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳

تمرین سری دوم

مدرس: دکتر بهزاد مشیری

سوال ۱:

سیستم شکل زیر را درنظر بگیرید:



شکل ۱: سیستم.

در این سیستم جرم جسم (m) ۱۰ کیلوگرم می‌باشد، ضریب سختی فنرها $k_2 = k_1 = 10 \text{ N/m}$ و $b = 2 \text{ kg/s}$ می‌باشد. برای بدست آوردن معادلات حالت حاکم بر این سیستم سه متغیر حالت تعریف می‌کنیم که x_1 انرژی ذخیره شده در فنر k_2 , x_2 انرژی جنبشی جسم و x_3 انرژی ذخیره شده در فنر k_1 می‌باشد. معادلات حاکم بر این سیستم به صورت خطی می‌باشد و آن را به فرم کلی زیر می‌توان نمایش داد:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax \\ y &= Cx\end{aligned}$$

که در آن ماتریس A و B در زیر نمایش داده شده‌اند:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m} & 0 & \frac{k_1}{m} \\ \frac{k_1}{b} & 0 & -\frac{k_1}{b} \end{bmatrix}$$

الف) با درنظر گرفتن $\Delta t = 0.02$ ، معادلات حالت سیستم را با استفاده از روش تعریف شده در ضمیمه ۱ گسسته کنید. و آن را گزارش نمایید. (توجه نمایید ورودی کنترلی برابر با صفر می‌باشد)

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Fx_k \\F &\equiv ?\end{aligned}$$

سیستم گستته را با نویز پروسه گوسی با میانگین صفر و جمع شونده به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Fx_k + \omega \\ \omega &\sim N(0, diag[10, 10, 5])\end{aligned}$$

ب) سه سنسور در اختیار داریم که هرکدام یکی از حالات سیستم را اندازه‌گیری می‌کنند.

$$\begin{aligned} y_1 &= [1 \quad 0 \quad 0]x + v_1 & v_1 &\sim N(0,10) \\ y_2 &= [0 \quad 1 \quad 0]x + v_2 & v_2 &\sim N(0,5) \\ y_3 &= [0 \quad 0 \quad 1]x + v_3 & v_3 &\sim N(0,5) \end{aligned}$$

خروجی سنسورها در فایل sensor_output.xlsx ذخیره گردیده است. مقادیر واقعی حالات نیز در فایل states.xlsx قرار دارد. ابتدا خطای جذر میانگین مربعات خطأ را بین مقادیر واقعی حالات و خروجی سنسورها را محاسبه نمایید.

$$Root\ Mean\ Squared\ Error\ (RMSE) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2}{N}}$$

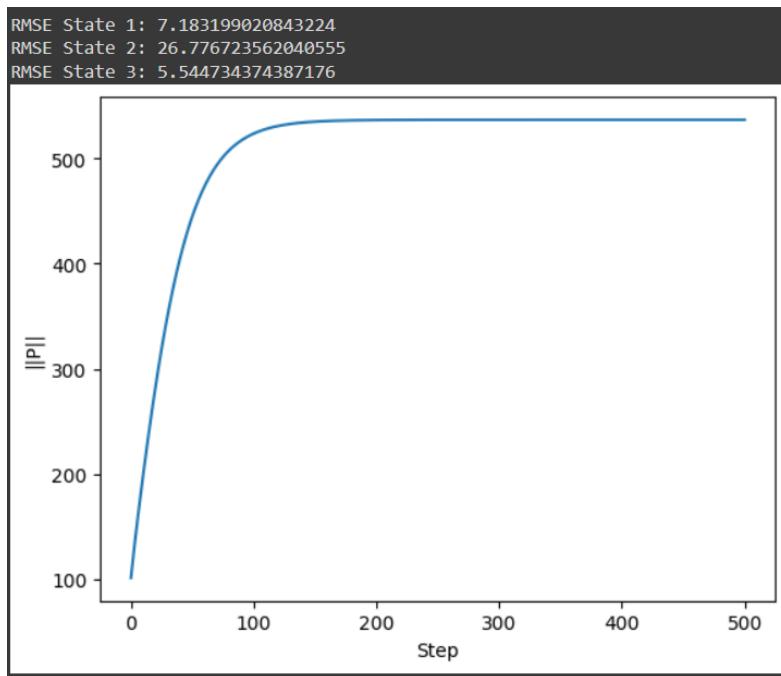
و سپس خطای هر کدام از سنسورها را نسبت به مقدار واقعی حالت مورد اندازه‌گیری، در یک جدول گزارش نمایند.

ج) در این مرحله قصد داریم تا با استفاده از خروجی تک تک سنسورها به صورت **جداگانه** حالات سیستم را تخمین بزنیم. مقدار اولیه حالات و کواریانس خطای را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\hat{x}_0^+ = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$P_0^+ = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

با تشکیل ماتریس (در صورتی که با یک سنسور تخمین میزنید، عدد) R و ماتریس (در صورتی که با یک سنسور تخمین میزنید، بردار) C مربوطه و با درنظر گرفتن ۵۰۰ گام زمانی الگوریتم فیلتر کالمن را اجرا نمایید. خطای RMSE هر کدام از حالات به ازای درنظر گرفتن هر کدام از سنسورها، را گزارش کنید و در یک شکل مقدار نرم ماتریس P_k^+ را در مراحل مختلف نمایش دهید. همچنین عملکرد تخمین فیلتر کالمن را به ازای درنظر گرفتن سنسورهای مختلف را با یکدیگر مقایسه نمایید. (در شکل ۲ یک نمونه پاسخ آورده شده است)



شکل ۲: نمونه پاسخ تخمین و گزارش خطای از ازای درنظر گرفتن یکی از سنسورها.

د) این بار با استفاده از ترکیب داده‌های سنسورهای مختلف خطای RMSE را گزارش و مقدار نرم ماتریس P_k^+ را در مراحل مختلف نمایش دهید. (در این مرحله می‌بایست ترکیب سنسورها را به صورت {۱و۲و۳}، {۲و۳و۱} و {۱و۲و۳} در نظر بگیرید)

راهنمایی: در صورتی که از دو سنسور برای تخمین استفاده می‌کنید، ماتریس C به صورت یک ماتریس 3×2 تشکیل می‌شود. و همچنین ماتریس R یک ماتریس 2×2 می‌شود که روی قطر اصلی آن واریانس سنسور مربوطه قرار می‌گیرد.

۵) با استفاده از خطای RMSE و نمودار نرم P، تحلیل کنید که از بین این ۸ حالت انتخاب سنسورها، کدام یکی از این حالات بهینه می‌باشد.

نکات مهم در تحویل تمرين‌ها:

- کلیه‌ی فایل‌های مربوط به هر سری تمرين را در یک پوشه قرار داده و آن را با نام HWNumber_StudentNumber به صورت زیپ شده در سایت درس بارگزاری کنید. لازم به ذکر است در این پوشه می‌بایست فایل کدها و گزارش ارسال شود.
- لطفاً پاسخ تمرين‌ها را در صورت امکان به صورت تایپ شده و در غیر این صورت با خط خوانا و با اسکن مناسب تحویل دهید.
- در هر سری از تمرين‌ها ممکن است تعدادی سوال امتیازی مطرح شود که بسته به صلاحديد تا٪ ۱۰ نمره‌ی آن تمرين، امتیاز مزاد برای آن در نظر گرفته می‌شود.
- تحویل تمرين‌ها پس از زمان معین شده ممکن است ولی درصدی از نمره‌ی آن تمرين کسر خواهد شد.
- مشورت در مورد روال حل تمرين مجاز است ولی نتیجه‌گیری و حل نهايی هر تمرين باید به صورت انفرادي انجام بپذيرد. فرض کنید پس از تصحیح تمرين‌ها مشخص می‌شود دانشجوی a و b تمرين‌ها را کاملاً به کمک هم حل کرده‌اند نمره‌ی این عزيزان به اين صورت محاسبه خواهد شد:

Student A score: S_a

Student B score: S_b

$$CHEAT! \Rightarrow S_a = S_b = 0.6 * \frac{\min(S_a, S_b)}{2}$$

- بسته به نوع تمرين‌ها برخی از آن‌ها ممکن است ارائه‌ی شفاهی داشته باشند که زمانبندی آن از قبل اعلام خواهد شد.
- لطفاً هر گونه ابهام یا سوالی در مورد حل اين تمرين را با تدریسیار مربوطه در میان بگذارید:

Email address: Aminsheykh@yahoo.com

Email caption: DF_023

- لطفاً ايميل‌ها را با كپشن مشخص شده بفرستيد تا احتمال گم شدن و بی‌پاسخ ماندن آنها به حداقل برسد.

موفق باشيد

ضمیمه ۱. روش گسسته سازی اویلر:

سیستم زیر را درنظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

برای گسسته سازی این سیستم از رابطه‌ی زیر می‌توان استفاده کرد:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &\approx \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = f(x(k), u(k), k) \\ \rightarrow x_{k+1} &= x_k + \Delta t * f(x(k), u(k), k)\end{aligned}$$

حال اگر سیستم به صورت خطی و به فرم زیر باشد:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ \rightarrow x_{k+1} &= x_k + \Delta t * Ax(t) + \Delta t * Bu(t)\end{aligned}$$

این روش همان روش مستطیلی است که در کلاس درس مطرح گردیده.