



به نام خدا  
درس ترکیب داده



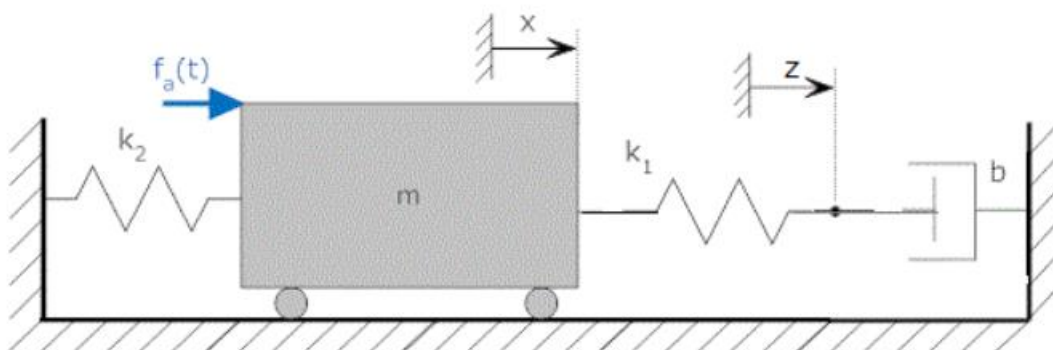
نیم سال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳

تمرین سری دوم

مدرس: دکتر بهزاد مشیری

سوال ۱:

سیستم شکل زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۱: سیستم.

در این سیستم جرم جسم (m) ۱۰ کیلوگرم می باشد، ضریب سختی فنرها  $k_1 = 10 \text{ N/m}$  و  $k_2 = 5 \text{ N/m}$  و ضریب دمپر برابر با  $b = 2 \text{ kg/s}$  می باشد. برای بدست آوردن معادلات حالت حاکم بر این سیستم سه متغیر حالت تعریف می کنیم که  $x_1$  انرژی ذخیره شده در فنر  $k_1$ ،  $x_2$  انرژی جنبشی جسم و  $x_3$  انرژی ذخیره شده در فنر  $k_2$  می باشد. معادلات حاکم بر این سیستم به صورت خطی می باشد و آن را به فرم کلی زیر می توان نمایش داد:

$$\dot{x} = Ax$$

$$y = Cx$$

که در آن ماتریس A و B در زیر نمایش داده شده‌اند:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m} & 0 & \frac{k_1}{m} \\ \frac{k_1}{b} & 0 & -\frac{k_1}{b} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

الف) با در نظر گرفتن  $\Delta t = 0.02$ ، معادلات حالت سیستم را با استفاده از روش تعریف شده در ضمیمه ۱ گسسته کنید. و آن را گزارش نمایید. (توجه نمایید ورودی کنترلی برابر با صفر می‌باشد)

$$x_{k+1} = Fx_k$$

$$F = ?$$

سیستم گسسته را با نویز پروسه گوسی با میانگین صفر و جمع شونده به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$x_{k+1} = Fx_k + \omega$$

$$\omega \sim N(0, \text{diag}[10, 10, 5])$$

ب) سه سنسور در اختیار داریم که هر کدام یکی از حالات سیستم را اندازه‌گیری می‌کنند.

$$y_1 = [1 \quad 0 \quad 0]x + v_1 \quad v_1 \sim N(0, 10)$$

$$y_2 = [0 \quad 1 \quad 0]x + v_2 \quad v_2 \sim N(0, 5)$$

$$y_3 = [0 \quad 0 \quad 1]x + v_3 \quad v_3 \sim N(0, 5)$$

خروجی سنسورها در فایل sensor\_output.xlsx ذخیره گردیده است. مقادیر واقعی حالات نیز در فایل states.xlsx قرار دارد. ابتدا خطای جذر میانگین مربعات خطا را بین مقادیر واقعی حالات و خروجی سنسورها را محاسبه نمایید.

$$\text{Root Mean Squared Error (RMSE)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2}{N}}$$

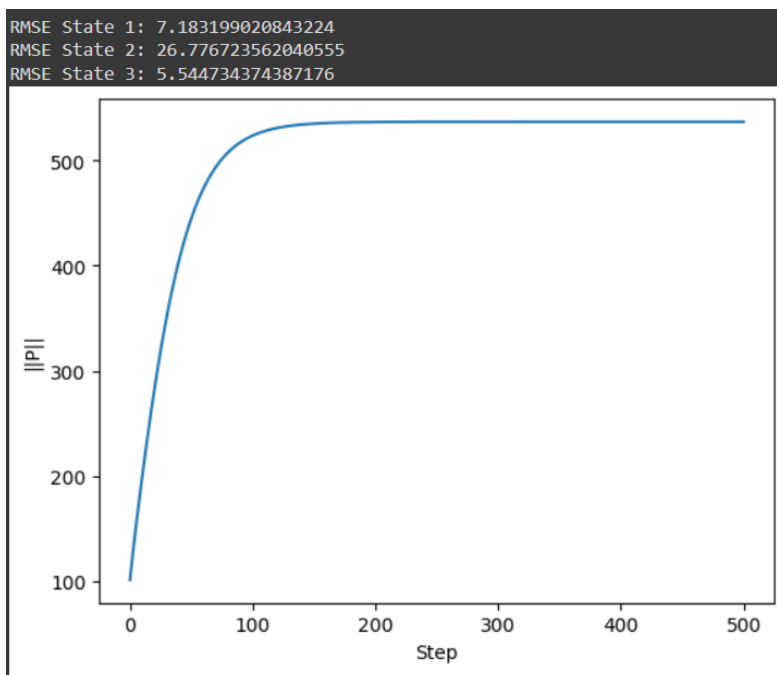
و سپس خطای هر کدام از سنسورها را نسبت به مقدار واقعی حالت مورد اندازه‌گیری، در یک جدول گزارش نمایید.

ج) در این مرحله قصد داریم تا با استفاده از خروجی **تک تک سنسورها به صورت جداگانه** حالات سیستم را تخمین بزنیم. مقدار اولیه حالات و کواریانس خطا را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\hat{x}_0^+ = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$P_0^+ = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

با تشکیل ماتریس (در صورتی که با یک سنسور تخمین میزنید، عدد)  $R$  و ماتریس (در صورتی که با یک سنسور تخمین میزنید، بردار)  $C$  مربوطه و با در نظر گرفتن ۵۰۰ گام زمانی الگوریتم فیلتر کالمن را اجرا نمایید. خطای  $RMSE$  هر کدام از حالات به ازای در نظر گرفتن هر کدام از سنسورها، را گزارش کنید و در یک شکل مقدار نرم ماتریس  $P_k^+$  را در مراحل مختلف نمایش دهید. همچنین عملکرد تخمین فیلتر کالمن را به ازای در نظر گرفتن سنسورهای متخلف را با یکدیگر مقایسه نمایید. (در شکل ۲ یک نمونه پاسخ آورده شده است)



شکل ۲: نمونه پاسخ تخمین و گزارش خطا به ازای در نظر گرفتن یکی از سنسورها.

د) این بار با استفاده از ترکیب داده‌های سنسورهای مختلف خطای  $RMSE$  را گزارش و مقدار نرم ماتریس  $P_k^+$  را در مراحل مختلف نمایش دهید. (در این مرحله می‌بایست ترکیب سنسورها را به صورت  $\{۱و۲\}$ ،  $\{۱و۳\}$ ،  $\{۲و۳\}$  و  $\{۱و۲و۳\}$  در نظر بگیرید)

راهنمایی: در صورتی که از دو سنسور برای تخمین استفاده می‌کنید، ماتریس  $C$  به صورت یک ماتریس  $2 \times 3$  تشکیل می‌شود. و همچنین ماتریس  $R$  یک ماتریس  $2 \times 2$  می‌شود که روی قطر اصلی آن واریانس سنسور مربوطه قرار می‌گیرد.

۵) با استفاده از خطای  $RMSE$  و نمودار نرم  $P$ ، تحلیل کنید که از بین این ۸ حالت انتخاب سنسورها، کدام یکی از این حالات بهینه می‌باشد.

نکات مهم در تحویل تمرین‌ها:

- کلیه فایل‌های مربوط به هر سری تمرین را در یک پوشه قرار داده و آن را با نام HWNumber\_StudentNumber به صورت زیپ شده در سایت درس بارگزاری کنید. لازم به ذکر است در این پوشه می‌بایست فایل کدها و گزارش ارسال شود.
- لطفا پاسخ تمرین‌ها را در صورت امکان به صورت تایپ شده و در غیر این صورت با خط خوانا و با اسکن مناسب تحویل دهید.
- در هر سری از تمرین‌ها ممکن است تعدادی سوال امتیازی مطرح شود که بسته به صلاحدید تا ۱۰٪ نمره‌ی آن تمرین، امتیاز مازاد برای آن در نظر گرفته می‌شود.
- تحویل تمرین‌ها پس از زمان معین شده ممکن است ولی درصدی از نمره‌ی آن تمرین کسر خواهد شد.
- مشورت در مورد روال حل تمرین مجاز است ولی نتیجه‌گیری و حل نهایی هر تمرین باید به صورت انفرادی انجام پذیرد. فرض کنید پس از تصحیح تمرین‌ها مشخص می‌شود دانشجوی a و b تمرین‌ها را کاملاً به کمک هم حل کرده‌اند نمره‌ی این عزیزان به این صورت محاسبه خواهد شد:

Student A score:  $S_a$

Student B score:  $S_b$

$$CHEAT! \Rightarrow S_a = S_b = 0.6 * \frac{\min(S_a, S_b)}{2}$$

- بسته به نوع تمرین‌ها برخی از آن‌ها ممکن است ارائه‌ی شفاهی داشته باشند که زمانبندی آن از قبل اعلام خواهد شد.
- لطفاً هر گونه ابهام یا سوالی در مورد حل این تمرین را با تدریس‌یار مربوطه در میان بگذارید:

Email address: [Aminsheykh@yahoo.com](mailto:Aminsheykh@yahoo.com)

Email caption: DF\_023

لطفاً ایمیل‌ها را با کپشن مشخص شده بفرستید تا احتمال گم شدن و بی‌پاسخ ماندن آنها به حداقل برسد.

**موفق باشید**

**ضمیمه ۱.** روش گسسته سازی اویلر:

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

برای گسسته سازی این سیستم از رابطه‌ی زیر می‌توان استفاده کرد:

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = f(x(k), u(k), k)$$

$$\rightarrow x_{k+1} = x_k + \Delta t * f(x(k), u(k), k)$$

حال اگر سیستم به صورت خطی و به فرم زیر باشد:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\rightarrow x_{k+1} = x_k + \Delta t * Ax(t) + \Delta t * Bu(t)$$

این روش همان روش مستطیلی است که در کلاس درس مطرح گردیده.