CRITERIO DE ROUTH-HURWITZ

CON OCTAVE – MATHLAB

Reynaldo Vladimir Hurtado Morató

Palabras clave: Lugar de las raíces, control automático.

Resumen

El análisis de estabilidad de la función de transferencia en lazo cerrado puede ser realizado por diversos métodos, sin embargo, el criterio de Routh-Hurwitz permite determinar los rangos en los cuales el sistema será estable cuando la función de transferencia tiene parámetros desconocidos.

Es así que el criterio de Routh-Hurwitz es una herramienta útil al momento del diseño de sistemas de control automático.

1 INTRODUCCIÓN

El análisis de estabilidad de un sistema a lazo cerrado se realiza mediante la evaluación de los polos del sistema.

Si los polos se encuentran en lado izquierdo del plano *s*, el sistema es estable. Si estos polos se encuentran sobre el plano derecho el sistema será inestable, y si se encuentran sobre el eje imaginario será condicionalmente estable.

Esta evaluación puede realizarse con distintas funcionalidades de Octave o Matlab. Pueden, por ejemplo, evaluarse las raíces de la ecuación característica o también trazando la gráfica del lugar de las raíces. Sin embargo, si en esta ecuación se tienen parámetros desconocidos estas metodologías no son de utilidad.

El criterio de Routh-Hurwitz es una herramienta adecuada para determinar la localización de los polos en el plano *s*. Como el procedimiento solo requiere de operaciones algebraicas, éste puede ser utilizado cuando se tienen parámetros desconocidos.

Tanto Octave como Matlab implementan un paquete de manejo simbólico, lo cual lo hace muy adecuado para aplicar el criterio.

2 CRITERIO DE ROUTH HURWITZ

Es un método de dos pasos: generar una tabla denominada Tabla de Routh; interpretar la tabla obteniendo el número de polos de lazo cerrado en el plano izquierdo, plano derecho, y en el eje imaginario.

Las computadoras modernas pueden calcular la localización exacta del sistema de polos, sin embargo, el poder del método recae en el diseño y no así en el análisis. Por ejemplo, si se tiene un parámetro desconocido, es difícil determinar vía computo el rango en el que este parámetro da estabilidad. El criterio de Routh-Hurwitz puede dar una expresión de forma cerrada para el rango de un parámetro desconocido.

3 TABLA BÁSICA DE ROUTH

Ya que estamos interesados en los polos del sistema, consideremos el siguiente denominador de una función de transferencia de lazo cerrado: $a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$,

Construimos la tabla de Routh de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} s^4 & a_4 & a_2 & a_0 \\ s^3 & a_3 & a_1 & 0 \\ s^2 & & & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{bmatrix}$$

Empezamos etiquetando las filas con potencias de *s* a partir de la más alta potencia del denominador hasta s^0. A continuación se tiene el coeficiente de la potencia más alta de *s,* luego horizontalmente en la primera fila coeficiente por medio. En la segunda fila, horizontalmente se empieza con la siguiente más alta potencia de *s*, y luego cada coeficiente que fue omitido en la primera fila.

Las entradas siguientes son llenadas con el determinante negativo de las dos filas previas dividido por la entrada en la primera columna directamente arriba de la fila calculada. Se repite el procedimiento hasta completar la fila s^0.

$$\begin{bmatrix} s^4 & a_4 & a_2 & a_0 \\ s^3 & a_3 & a_1 & 0 \\ s^2 - \dfrac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1 & -\dfrac{\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2 & -\dfrac{\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0 & \\ s^1 - \dfrac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1 & -\dfrac{\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2 & -\dfrac{\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0 & \\ s^0 - \dfrac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1 & -\dfrac{\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2 & -\dfrac{\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0 & \end{bmatrix}$$

Al elaborar la tabla tienen dos casos excepcionales:

1 Cero solo en la primera columna Una forma de resolver este caso es reemplazando el cero por un valor muy pequeño. Para fines prácticos en el programa que se expone en este trabajo se reemplaza por -0.1.

2 Fila de ceros Este caso es resuelto reemplazando la fila con la derivada de la fila anterior.

4 INTERPRETACIÓN DE LA TABLA DE ROUTH

El programa implementado al ser invocado pide el ingreso de la función de transferencia en lazo abierto y devuelve no solo la Tabla de Routh, sino también su interpretación.

Los siguientes ejemplos ilustran lo expuesto.

Ejemplo 1: Elaborar la tabla de Routh para la siguiente función de transferencia:
1000/((s+2)*(s+3)*(s+5))

Solución: Invocamos el programa para Octave o Matlab "RouthHurwitz.m", el cual pedirá la función de transferencia en lazo abierto. Una vez introducida esta función, el programa obtendrá la función de transferencia en lazo cerrado sobre la cual elaborará la tabla.

```
>> RouthHurwitz
Funcion de Transferencia:

1000/((s+2)*(s+3)*(s+5))

Lazo abierto
G = (sym)

             1000
   -----------------------
   (s + 2)*(s + 3)*(s + 5)


Lazo cerrado
T = (sym)

                1000
   ------------------------------
   (s + 2)*(s + 3)*(s + 5) + 1000
```

El programa despliega inicialmente la función de transferencia a lazo abierto, seguido de la función de transferencia a lazo cerrado.

A continuación despliega la tabla de Routh

```
 Tabla Rout-Hurwitz :
F = (sym 4x3 matrix)

  [ 3              ]
  [s     1      31 ]
  [                ]
  [ 2              ]
  [s     10   1030]
  [                ]
  [s    -72     0  ]
  [                ]
  [1    1030    0  ]
```

La tabla despliega en la primera columna el grado del polinomio.

El criterio de Routh-Hurwitz se aplica sobre la segunda columna. En esta columna se observan dos cambios de signo, esto significa que se tienen dos polos en el lado derecho del plano *s*, por lo cual el sistema es inestable.

A continuación se obtiene el diagnóstico que comprende el número de raíces positivas, raíces negativas y raíces sobre el eje imaginario. También el diagnóstico si el sistema es estable o inestable y finalmente las raíces.

```
Nro raices negativas   : 1
Nro raices positivas   : 2
Nro raices imaginarias : 0
Nro total de raices : 3
El sistema es inestable
Raices:
ans =

  -13.4136 +       0i
    1.7068 +  8.5950i
    1.7068 -  8.5950i
```

Ejemplo 2 En este ejemplo la tabla presenta solo un cero en la primera columna.

La función de transferencia en lazo abierto y cerrado es:

```
Lazo abierto
G = (sym)

                    10
  ---------------------------------
   5      4      3      2
  s  + 2*s  + 3*s  + 6*s  + 5*s - 7


Lazo cerrado
T = (sym)

                    10
  ---------------------------------
   5      4      3      2
  s  + 2*s  + 3*s  + 6*s  + 5*s + 3
```

Esta función presenta un cero en la fila 3, donde éste se reemplaza por -0.1.

```
Tabla Routh-Hurwitz para e = 0.1 en fila 3 :

F = (sym 6x4 matrix)

  [ 5                 ]
  [s     1     3     5]
  [                   ]
  [ 4                 ]
  [s     2     6     3]
  [                   ]
  [ 3                 ]
  [s   -1/10  7/2    0]
  [                   ]
  [ 2                 ]
  [s    76     3     0]
  [                   ]
  [    2663           ]
  [s   ----    0     0]
  [    760            ]
  [                   ]
  [1     3     0     0]
```

Del análisis se ve que el sistema es inestable.

```
Nro raices negativas    : 3
Nro raices positivas    : 2
Nro raices imaginarias : 0
Nro total de raices : 5
El sistema es inestable
Raices:
ans =

   0.3429 + 1.5083i
   0.3429 - 1.5083i
  -1.6681 +      0i
  -0.5088 + 0.7020i
  -0.5088 - 0.7020i
```

Ejemplo 3 En este ejemplo se obtiene una fila de ceros al construir la tabla de Routh.

En este caso se proporciona el denominador de la función de transferencia a lazo abierto.

```
Lazo abierto
G = (sym)

                    10
  -----------------------------------
   5      4      3       2
  s  + 7*s  + 6*s  + 42*s  + 8*s + 46


Lazo cerrado
T = (sym)

                    10
  -----------------------------------
   5      4      3       2
  s  + 7*s  + 6*s  + 42*s  + 8*s + 56
```

La tercera fila es de ceros, por lo tanto se toma el polinomio de la segunda fila, se la deriva y se reemplaza en la fila de ceros.

El polinomio que da lugar a la fila de ceros es completamente par o completamente impar. En este caso

```
7*s**4 + 42*s**2 + 56
```

Los polinomios pares, como en este caso, solo tienen raíces que son simétricas respecto al origen. Est simetría puede ocurrir bajo tres condiciones de la posición de las raíces: (1) Las raíces son simétricas y reales, (2) las raíces son simétricas e imaginarias, o (3) las raíces son quadrantales, es decir que se sitúan en los vértices de un cuadrado con dos de ellas en el lado positivo y las otras dos en el lado negativo. Cada caso o combinación de estos casos generará un polinomio par.

La fila de ceros nos dice de la existencia de un polinomio par cuyas raíces son simétricas respecto al origen. Algunas de esas raíces podrían estar en el eje imaginario. Por otro lado, como las raíces imaginarias son simétricas respecto al origen, si no tenemos una fila de ceros, posiblemente no tenemos raíces imaginarias.

Otra característica de la tabla de Routh para éste caso es que las filas previas a la fila de ceros contiene el polinomio par que es un factor del polinomio original. Finalmente, todo a partir de la fila que contiene el polinomio par hacia debajo de la tabla de Routh es un test de solo el polinomio par.

La tabla de Routh es del ejemplo es:

```
F = (sym 6x4 matrix)

  [ 5              ]
  [s    1    6   8 ]
  [                ]
  [ 4              ]
  [s    7    42  56]
  [                ]
  [ 3              ]
  [s    28   84  0 ]
  [                ]
  [ 2              ]
  [s    21   56  0 ]
  [                ]
  [s   28/3  0   0 ]
  [                ]
  [1    56   0   0 ]
```

Dando el siguiente resultado:

```
Nro raices negativas   : 1
Nro raices positivas   : 0
Nro raices imaginarias : 4
Nro total de raices : 5
El sistema es estable
Raices:
ans =

  -7.0000 +      0i
   0.0000 + 2.0000i
   0.0000 - 2.0000i
   0.0000 + 1.4142i
   0.0000 - 1.4142i
```

Ejemplo 4 Analicemos la siguiente función de transferencia:

```
Lazo abierto
G = (sym)

                           20
  -----------------------------------------------------
   8    7        6        5        4        3        2
  s  + s  + 12*s  + 22*s  + 39*s  + 59*s  + 48*s  + 38*s

Lazo cerrado
T = (sym)

                              20
  ----------------------------------------------------------
   8    7        6        5        4        3        2
  s  + s  + 12*s  + 22*s  + 39*s  + 59*s  + 48*s  + 38*s + 20
```

Con la tabla de Routh

```
[ 8                                ]
[s     1     12    39   48   20]
[                                  ]
[ 7                                ]
[s     1     22    59   38   0 ]
[                                  ]
[ 6                                ]
[s    -10    -20   10   20   0 ]
[                                  ]
[ 5                                ]
[s     20    60    40   0    0 ]
[                                  ]
[ 4                                ]
[s     10    30    20   0    0 ]
[                                  ]
[ 3                                ]
[s     40    60    0    0    0 ]
[                                  ]
[ 2                                ]
[s     15    20    0    0    0 ]
[                                  ]
[s    20/3    0    0    0    0 ]
[                                  ]
[1     20     0    0    0    0 ]
```

Con el siguiente análisis

```
Nro raices negativas   : 2
Nro raices positivas   : 2
Nro raices imaginarias : 4
Nro total de raices : 8
El sistema es inestable
Raices:
ans =

   0.5000 + 3.1225i
   0.5000 - 3.1225i
   0.0000 + 1.4142i
   0.0000 - 1.4142i
  -1.0000 +      0i
  -1.0000 +      0i
  -0.0000 + 1.0000i
  -0.0000 - 1.0000i
```

El polinomio par que se tiene es el siguiente:

```
10*s**4 + 30*s**2 + 20
```

La interpretación de la tabla de Routh es la siguiente. Como todos los valores desde el polinomio s**4 hasta s**0 no existen cambios de signo, entonces el polinomio par no tiene polos en el lado derecho del plano s, tampoco polos en el plano izquierdo debido a requisitos de simetría, por lo tanto los cuatro polos deben encontrarse sobre el eje imaginario.

Ejemplo 5 En este ejemplo tenemos una variable desconocida en la función de transferencia.

```
Lazo abierto
G = (sym)

          K
  ------------------
  s*(s + 7)*(s + 11)


Lazo cerrado
T = (sym)

            K
  ----------------------
  K + s*(s + 7)*(s + 11)
```

La tabla de Routh correspondiente es:

```
 Tabla Rout-Hurwitz :
F = (sym 4x3 matrix)

  [ 3              ]
  [s      1      77]
  [                ]
  [ 2              ]
  [s     18      K ]
  [                ]
  [         K      ]
  [s   77 - --   0 ]
  [         18     ]
  [                ]
  [1      K      0 ]
```

De esta tabla se obtiene el rango de K que aseguran la estabilidad del sistema.

```
3) K < 1386.000000
4) K > 0.000000
```

De la fila 3 se tiene que K debe ser menor a 1386 para que el sistema sea estable. Y de la fila 4 que K debe ser mayor que 0.

CONCLUSIONES

El programa para Octave y Matlab con todas sus funcionalidades puede ser descargado de los siguientes enlaces:

https://la.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/169413-routh-hurwitz-con-manejo-simbolico

https://github.com/reyhur/Control