Задания для самостоятельной работы

1. ОДУ с разделяющимися переменными

1.1 Решить уравнения:

а) $y' = -2xy$;

б) $xy' = (4 + y^2)\ln x$;

в) $y' = xy^2 + 2xy$;

г) $xdy - ydx = 0$;

д) $y' = 2x + y$;

е) $e^{-y}(1 + y') = 1$;

ж) $2x^2yy' + y^2 = 2$;

з) $y' = \sin(x + y) - \sin(x - y)$;

и) $\sqrt{1 - y^2}dx + \sqrt{1 - x^2}dy = 0$;

к) $y' - y = 2x - 3$.

1.2 Решить задачу Коши:

а) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, y(0) = 1$;

б) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}, y(2) = 0$.

1.3 Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a^2.

1.4 За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Определить, через какое количество времени останется 1 % от первоначального количества, если известно, что количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющемуся в рассматриваемый момент.

1.5 Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $v_0 = 20$ км/ч. На полном ходу её мотор выключается и через 40 секунд после этого скорость лодки уменьшается до $v_1 = 8$ км/ч. Сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки. Определить скорость лодки через 2 минуты после остановки мотора.

2. Однородные ОДУ

2.1 Решить уравнения:

а) $x^2y' + y^2 + xy + x^2 = 0$;

б) $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$;

в) $y' = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$;

г) $y' = \dfrac{x-y+1}{x+y-3}$;

д) $xy' = y + x\cos\dfrac{y}{x}$;

е) $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$;

ж) $y - xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$;

з) $(x+4y)y' = 2x + 3y - 5$.

3. Линейные ОДУ первого порядка

3.1 Решить уравнения:

а) $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x$;

б) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;

в) $y' + 2y = e^{-x}$;

г) $y' = 2x(x^2+y)$;

д) $y' - 2xy = 2x$;

е) $xy' = 2y - 2x^4$;

ж) $xy' + 3y = x^2$;

з) $y' + 2y = 2 - 3x$.

3.2 Решить уравнения Бернулли:

а) $y' = \dfrac{y}{2x} + \dfrac{x^2}{2y}$;

б) $xy' + y = y^2\ln x$.

3.3 Найти кривые, у которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания, есть величина постоянная, равная $3a^2$.

3.4 Конденсатор ёмкостью c включается в цепь с напряжением E и сопротивлением R. Определить заряд q конденсатора в момент t после включения.

4. Уравнения в полных дифференциалах

4.1 Решить уравнения:

а) $ydx + xdy = 0$;

б) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$;

в) $(\sin(xy) + xy\cos(xy))dx + x^2\cos(xy)dy = 0$;

г) $(y\cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2e^y - 1)dy = 0$;

д) $(3x^2 - 2xy + 2)dx + (6y^2 - x^2 + 3)dy = 0$;

е) $(\cos y + y\cos x)dx + (\sin x - x\sin y)dy = 0$;

ж) $xdx + ydy = 0$;

з) $(2x + 3)dx + (2y - 2)dy = 0$;

и) $(\cos x - x\sin x + y^2)dx + 2xydy = 0$;

к) $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$.

5. Линейные ОДУ с переменными коэффициентами

5.1 Исследовать, являются ли данные функции линейно независимыми в их области определения:

а) $x + 2, x - 2$;

б) $x^2 + 2, 3x^2 - 1, x + 4$;

в) x, e^x, xe^x;

г) $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, 2e^x - 1, 3e^x + 5$;

д) $2^x, 3^x, 6^x$;

е) $\sin x, \cos x, \sin 2x$.

5.2 Найти общие решения данных уравнений, зная их частные решения. Если частное решение не дано, то найти его путём подбора, например, в виде функций $y_1 = e^{ax}$ или полинома.

а) $(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0$;

б) $(2 - x)y'' + xy' - 2y = 0$;

в) $xy'' + 2y' - xy = 0,\ y_1 = \dfrac{e^x}{x}$;

г) $y'' - y'\operatorname{tg} x + 2y = 0,\ y_1 = \sin x$;

д) $x^2y''\ln x - xy' + y = 0$;

е) $x^2(x+1)y'' - 2y = 0,\ y_1 = 1 + \dfrac{1}{x}$;

ж) $(x - 1)y'' - xy' + y = 0$;

з) $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = x + \dfrac{1}{x}$.

5.3 Решить уравнения, используя метод вариации произвольных постоянных:

а) $y'' - 2\operatorname{tg} x \cdot y' = 1$;

б) $x \ln x \cdot y'' - y' = \ln^2 x$;

в) $xy'' + (2x-1)y' = -4x^2$;

г) $y''' - \dfrac{3}{x}y'' + \dfrac{6}{x^2}y' - \dfrac{6}{x^3}y = \sqrt{x}$.

5.4 Зная три частных решения $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$ линейного неоднородного уравнения второго порядка, написать его общее решение.

5.5 Функции $y_1 = x$, $y_2 = x^5$, $y_3 = |x^5|$ удовлетворяют уравнению $x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$. Являются ли данные функции линейно зависимыми на интервале $(-1; 1)$? Объяснить ответ.

6. Линейные ОДУ с постоянными коэффициентами

6.1 Решить уравнения:

а) $y'' - 5y' + 6y = 0$;

б) $y''' + 3y'' + 2y' = 0$;

в) $y'' + 2y' + y = 0$;

г) $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0$;

д) $y'' + y = 0$;

е) $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$;

ж) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$;

з) $y'' - 4y' + 5y = 0$;

и) $y''' - 8y = 0$;

к) $y''' - 13y' - 12y = 0$;

л) $y''' + 2y'' + y' = 0$;

м) $y''' + 4y'' + 13y' = 0$;

н) $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$;

о) $y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$.

6.2 Решить уравнения методом неопределённых коэффициентов:

а) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$;

б) $y'' + y = \cos x$;

в) $y'' + y = x^2e^x$;

г) $y''' + 4y' = 16\sin 2x$;

д) $y'' + 25y = x\cos 5x$;

е) $y'' - 6y' + 13y = 8e^{3x}\sin 2x$;

ж) $y'' - y' = e^x + e^{2x} + x$;

з) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$;

и) $y'' - y = \cos^2 x$;

к) $y'' + y = \sin x \cos 3x$.

6.3 Решить уравнения методом вариации произвольных постоянных:

а) $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$;

б) $y''' + y'' = \dfrac{x-1}{x^2}$;

в) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$;

г) $y'' - y' = \dfrac{1}{e^x + 1}$;

д) $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x}$;

е) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

6.4 Построить линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (как можно более низкого порядка), если известны их частные решения:

а) $y_1 = x^2, y_2 = e^x \sin x$;

б) $y_1 = x \cos 2x$;

в) $y_1 = x^2 e^x$;

г) $y_1 = xe^x \cos 2x$;

д) $y_1 = x, y_2 = \sin x$;

е) $y_1 = xe^x, y_2 = e^{-x}$.

7. Системы дифференциальных уравнений

7.1 Решить системы дифференциальных уравнений методом Эйлера[1]:

а) $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -x + 4y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = x - 2y - z, \\ y' = -x + y + z, \\ z' = x - z; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x' = 2x + y + z, \\ y' = -2x - z, \\ z' = 2x + y + 2z; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x' = -2x, \\ y' = -2y; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 3x + y; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x' = x - y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = 3x + z; \end{cases}$

[1]Во всех заданиях функции полагаются зависящими от переменной t, то есть $x' \equiv \dfrac{dx}{dt}$, $y' \equiv \dfrac{dy}{dt}$, $z' \equiv \dfrac{dz}{dt}$.

и) $\begin{cases} x' = -2x + y - 2z, \\ y' = x - 2y + 2z, \\ z' = 3x - 3y + 5z; \end{cases}$ к) $\begin{cases} x' = 2x - y - z, \\ y' = 2x - y - 2z, \\ z' = -x + y + 2z. \end{cases}$

7.2 Решить системы дифференциальных уравнений, построив матричную экспоненту по её определению:

а) $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 2x + 4y, \\ y' = -x - 2y. \end{cases}$

7.3 Решить системы дифференциальных уравнений, построив матричную экспоненту с помощью жордановой нормальной формы:

а) $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 4x - 3y; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x' = -2x - 2y, \\ y' = 4x + 4y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x' = 4x, \\ y' = x + 4y; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -x + y. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = 4x + 6y - 2z, \\ y' = -2x - 4y + 2z, \\ z' = 2x + 2y; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x' = 3x + y + z, \\ y' = -2x - 2z, \\ z' = x + y + 3z; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x' = -3x - 4y + 2z, \\ y' = 2x + 3y - 2z, \\ z' = -z; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x' = x + 2y + z, \\ y' = -3x - 4y - 2z, \\ z' = x + y; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x' = x + y - z, \\ y' = -x + 2y - z, \\ z' = 2x - y + 4z; \end{cases}$ к) $\begin{cases} x' = 2x - 2y + z, \\ y' = x + 5y, \\ z' = -x - y + 5z. \end{cases}$

7.4 Решить системы дифференциальных уравнений методом вариации произвольных постоянных:

а) $\begin{cases} x' = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ y' = -x + \operatorname{tg} t; \end{cases}$; в) $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}; \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = -3x + 4y + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}; \end{cases}$; г) $\begin{cases} x' = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ y' = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$.

7.5 Вещество A разлагается на два вещества P и Q. Скорость образования каждого из этих веществ пропорциональна количеству неразложенного вещества. Пусть x и y — количества вещества P и Q соответственно, образовавшихся к моменту t. Определить закон их изменений, зная, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ $x = 0$, $y = 0$, а через 1 час $x = \frac{3}{8}c$, $y = \frac{1}{8}c$, где c — первоначальное количество вещества A.

7.6 Преобразование радиоактивных веществ происходит со скоростью, пропорциональной наличному количеству данного вещества. RaB преобразуется в RaC с такой скоростью, что половина количества RaB оказывается преобразованной по истечении 27 минут. В свою очередь половина данного количества RaC преобразуется в другое вещество в течение 19,5 минут. Принимая первоначальное количество RaB за единицу, найти, какое количество RaB и RaC будет иметься по истечении 1 часа.

8. Краевые задачи

8.1 Решить краевые задачи:

а) $y'' + y' = 1, y'(0) = 0, y(1) = 1;$

б) $y'' - y = 0, y(0) = 0, y'(1) = 1;$

в) $y'' - 2y' + 2y = 0, y(0) = 0, y'(\pi) = e^{\pi};$

г) $y''' + y'' - y' - y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 2, y(1) = 0;$

д) $y' - y = 2x, y(0) = 0, y(1) = -1;$

е) $y'' - y' = 0, y(0) = -1, y'(1) - y(1) = 2..$

8.2 Найти функции Грина для краевых задач:

а) $y'' + y = f(x), y(0) = 0, y'(\pi) = 0;$

б) $y'' = f(x), y(0) = 0, y(1) = 0;$

в) $y'' + y' = f(x), y(0) = 0, y'(1) = 0;$

г) $y'' - y = f(x), y'(0) = 0, y'(2) + y(2) = 0;$

д) $x^2y'' + 2xy' = f(x), y(1) = 0, y'(3) = 0;$

е) $x^2y'' - 2y = f(x), y(1) = 0, y(2) + 2y'(2) = 0.$

8.3 Решить краевые задачи, используя функцию Грина:

а) $y'' + y' = e^{-x}, y(0) = 0, y'(1) = 0;$

б) $y'' = x^2, y(0) = 0, y(1) = 0;$

в) $y'' + 4y = \sin 2x, y(0) = 0, y'(\pi) = 0;$

г) $y'' + 3y' + 2y = 4x, y(0) = 0, y'(\ln 3) = 0.$

8.4 При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ краевая задача $y''+ay = 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ не имеет решений?

Таблица интегралов

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$$

Формула интегрирования по частям: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$