Chińskie twierdzenie o resztach

Jarosław Wróblewski

Wałbrzych 29.03.2006

Zadanka na rozgrzewkę (do samodzielnego przemyślenia):

1. Podać przykład czterech kolejnych liczb naturalnych, z których pierwsza jest parzysta, druga jest podzielna przez 3, trzecia jest podzielna przez 5, a ostatnia jest podzielna przez 7.

2. Podać przykład rozwiązania równania

$$x^3+y^4=z^5$$

w liczbach całkowitych dodatnich.

Wskazówka: $2^n+2^n=2^{n+1}$.

3. Podać przykład rozwiązania równania

$$x^4+y^5=z^6$$

w liczbach całkowitych dodatnich.

Wskazówka: Przemnożyć równość $1+3=4$ przez $2^n\cdot 3^m$.

Twierdzenie chińskie o resztach mówi, że dla dowolnych liczb całkowitych $r_1, r_2, ..., r_n$ i naturalnych $q_1, q_2, ..., q_n$ (0 nie jest u nas liczbą naturalną) istnieje takie r, że

$$q_1 | r - r_1$$
$$q_2 | r - r_2$$
$$.......................$$
$$q_n | r - r_n$$

o ile dla dowolnych $1 \leqslant i < j \leqslant n$ zachodzi podzielność $NWD(q_i, q_j) | r_i - r_j$. Ten ostatni warunek jest spełniony na przykład wtedy, gdy liczby
$q_1, q_2, ..., q_n$ są parami względnie pierwsze, gdyż wówczas $NWD(q_i, q_j) = 1$ dla $i \neq j$.

Innymi słowy możemy zawsze znaleźć liczbę r, która spełnia ustalone przez nas postulaty typu: "niech r dzieli się przez q_i z resztą r_i", jeśli tylko między tymi postulatami nie ma oczywistej sprzeczności. Nie sposób bowiem żądać, aby liczba dzieliła się przez 6 z resztą 2 i jednocześnie przez 10 z resztą 3, bo to oznaczałoby, że na pytanie czy liczba ma być parzysta odpowiadamy, że jesteśmy za, a nawet przeciw.

$$8 = 2^2 \cdot 2$$
$$9 = 3^2$$

$$48 = 4^2 \cdot 3$$
$$49 = 7^2$$
$$50 = 5^2 \cdot 2$$

$$242 = 11^2 \cdot 2$$
$$243 = 9^2 \cdot 3$$
$$244 = 2^2 \cdot 61$$
$$245 = 7^2 \cdot 5$$

$$844 = 2^2 \cdot 211$$
$$845 = 13^2 \cdot 5$$
$$846 = 3^2 \cdot 94$$
$$847 = 11^2 \cdot 7$$
$$848 = 4^2 \cdot 53$$

Zadanie 4: Dowieść, że istnieje 2006 kolejnych liczb naturalnych, z których każda jest podzielna przez kwadrat liczby naturalnej.

$$4|n$$
$$9|n+1$$
$$25|n+2$$
$$49|n+3$$
$$121|n+4$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$p_k^2|n+k-1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$p_{2006}^2|n+2005$$

$$14 = 2 \cdot 7$$
$$15 = 3 \cdot 5$$

$$644 = 2^2 \cdot 7 \cdot 23$$
$$645 = 3 \cdot 5 \cdot 43$$
$$646 = 2 \cdot 17 \cdot 19$$

$$134043 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 491$$
$$134044 = 2^2 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47$$
$$134045 = 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 83$$
$$134046 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 677$$

Zadanie 5: Dowieść, że istnieje 2006 kolejnych liczb naturalnych, z których każda ma co najmniej 2006 dzielników pierwszych.

Zadanie 6: Dowieść, że istnieje 1000001 kolejnych liczb naturalnych, z których żadna nie jest sumą 2 kwadratów liczb całkowitych.

Rozwiązanie:

Skorzystamy z charakteryzacji liczb będących sumami 2 kwadratów. Otóż liczba naturalna jest sumą 2 kwadratów liczb całkowitych wtedy i tylko wtedy, gdy w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby pierwsze postaci $4k+3$ występują tylko w parzystych potęgach. Tak naprawdę wystarczy wiedzieć, że jeżeli $q=4k+3$ jest liczbą pierwszą, to liczba podzielna przez q, ale niepodzielna przez q^2 nie może być sumą 2 kwadratów. Niech $q_1=3$, $q_2=7$, $q_3=11$, $q_4=19$, ..., $q_{1000000}=32445143$, $q_{1000001}=32445191$ będą liczbami pierwszymi podzielnymi przez 4 z resztą 3.

Zażądamy, aby

$$n+k-1 \equiv q_k (\text{mod } q_k^2)$$

dla $k=1,2,3,...,1000001$. Spełnienie takiego układu warunków zapewnia, że liczby $n, n+1, n+2, ..., n+1000000$ nie są sumami 2 kwadratów.

Następujące pytanie zostało postawione prelegentowi przez Jacka Świątkowskiego w czasie wieczornego spaceru po wsi Mysłów (woj. jeleniogórskie):

ZADANIE 7: Na płaszczyźnie dany jest pionowy odcinek długości 1995 nie zawierający żadnych punktów kratowych (t.j. punktów o obu współrzędnych całkowitych). Czy można tak poruszać tym odcinkiem, aby w żadnym momencie nie zawierał on punktów kratowych, a po zakończeniu ruchu był położony poziomo?

Rozwiązanie:

Skorzystamy z wyniku poprzedniego zadania. Niech n będzie takie, że liczby $n, n+1, n+2, ..., n+1000000$ nie są sumami 2 kwadratów. Rozważmy okręgi o środku w początku układu współrzędnychi promieniach $r=\sqrt{n}$ i $R=\sqrt{n+1000000}$. Z własności liczby n wynika, że na żadnym z tych okręgów, ani w pierścieniu między nimi nie ma punktów kratowych - na tych okręgach są co prawda punkty kratowe, ale między nimi nie ma).

Z twierdzenia Pitagorasa łatwo wyliczamy, że między okręgami można umieścić odcinek długości $2\sqrt{R^2-r^2}=2000$

Obrót wokół początku układu współrzędnych jest żądanym ruchem. Po wykonaniu obrotu o 90^o odcinek stanie się poziomy, a po drodze nie napotka na punkty kratowe, gdyż ruch odbywa się w pierścieniowym obszarze, w którym takowych punktów nie ma.

Zadanie na pożegnanie.

Dowieść, że równanie

$$x^{2005} + y^{2006} + z^{2007} = t^{2010}$$

ma rozwiązanie w liczbach naturalnych x, y, z, t.