

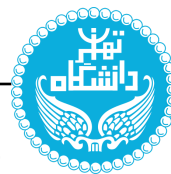
تمرین شماره ۲

طراحان: علی پادیاو، مهدی جمال‌خواه، حسام
رمضانیان

مهلت تحویل: شنبه ۱۸ فروردین ۱۴۰۳، ساعت ۲۳:۵۹

هوش مصنوعی

مدرسین: دکتر فدایی و
دکتر یعقوب‌زاده

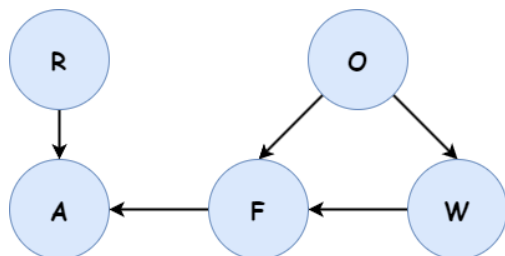


بخش کتبی

Bayes Nets

سوال اول

برای بررسی احتمالات مربوط به تصادفات جاده‌ای یک شبکه بیزی طراحی کرده ایم که در آن قدیمی بودن خودرو با O ، کارکرد بالای خودرو با W ، فرسودگی خودرو با F ، بارش باران با R ، تصادف کردن خودرو با A نمایش داده شده است. با توجه به این شبکه بیزی و جداول احتمالات داده شده به سوالات زیر پاسخ دهید:



O	P(O)
+	0.5
-	0.5

O	W	P(W O)
+	+	0.9
+	-	0.1
-	+	0.2
-	-	0.8

R	P(R)
+	0.2
-	0.8

F	R	A	$P(A F,R)$
+	+	+	0.9
+	+	-	0.1
+	-	+	0.7
+	-	-	0.3
-	+	+	0.4
-	+	-	0.6
-	-	+	0.3
-	-	-	0.7

O	W	F	$P(F O,W)$
+	+	+	0.9
+	+	-	0.1
+	-	+	0.6
+	-	-	0.4
-	+	+	0.7
-	+	-	0.3
-	-	+	0.2
-	-	-	0.8

الف) جدول احتمال مربوط به کارکرد بالای خودرو (W) را بنویسید.

ب) احتمال خواسته شده را محاسبه کنید :

$$P(+o, -w, +f, -r, +a)$$

ج) درست یا نادرست بودن عبارت های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید:

۱- در صورتی که از فرسودگی خودرو اطلاع داشته باشیم ، احتمال تصادف در جاده از احتمال قدیمی بودن خودرو مستقل است.

۲- احتمال فرسودگی خودرو و بارش باران به شرط اطلاع از تصادف خودرو از یکدیگر مستقل هستند.

۳- احتمال فرسودگی خودرو به شرط دانستن کارکرد و قدیمی بودن خودرو از احتمال تصادف کردن خودرو مستقل است.

۴- احتمال بارش باران از فرسودگی خودرو مستقل است.

د) با استفاده از Variable Elimination احتمال قدیمی بودن خودرو به شرط تصادف نکردن آن را به دست آورید. (در این قسمت نیازی به محاسبه مقدار عددی این احتمال نیست و تنها نوشتن مراحل Variable Elimination کافیت)

پاسخ:

الف) ابتدا با ضرب جداول $P(O)$, $P(W|O)$ احتمال $P(W, O)$ را به دست می آوریم سپس با Marginalization آن، جدول $P(W)$ را به دست می آوریم.

W	P(W)
+	0.55
-	0.45

(ب)

$$P(+o, -w, +f, -r, +a) = P(+o)P(-w|+o)P(+f|+o, -w)P(-r)P(+a|+f, -r)$$

$$0.5 \times 0.1 \times 0.6 \times 0.8 \times 0.7 = 0.0168$$

(ج)

- ۱- درست (فرزندان از اجداد خود به شرط دانستن والد مستقل هستند.)
- ۲- نادرست (والد ها به شرط دانستن فرزند از یکدیگر مستقل نیستند.)
- ۳- نادرست (یک گره از فرزندانش به شرط دانستن والدین مستقل نیست.)
- ۴- درست (والدین در حالت کلی از یکدیگر مستقل هستند اما به شرط دانستن فرزند مشترک از یکدیگر مستقل نیستند)

(د)

$$P(+o|-a) \propto P(O, W, F, R, -a) = P(O)P(W|O)P(F|O, W)P(R)P(-a|F, R)$$

$$f_1(F|O) = \sum_w P(F|O, W)P(W|O)$$

$$f_2(-a|O, R) = \sum_f f_1(F|O)P(-a|F, R)$$

$$f_3(-a|O) = \sum_r f_2(-a|O, R)P(R)$$

$$f_4(O, -a) = P(O)f_3(-a|O)$$

$$P(+o|-a) = \frac{f_4(+o, -a)}{\sum_o f_4(o, -a)}$$

HMM

سوال اول

فرض کنید یک HMM برای پلتفرم پخش آنلاین موسیقی طراحی کرده ایم که در آن مجموعه Hidden State ها را حالات روحی کاربر در نظر گرفته ایم ، حالات روحی افراد می تواند غمگین (s) ، عصبانی (a) ، شاد (h) ، آرام (r) باشد و مجموعه Observation ها را ژانر موسیقی که فرد در یک مرتبه مراجعه گوش می دهد در نظر گرفته ایم که میتواند Blues، Heavy Metal، Pop، Lo-Fi باشد. این دو مجموعه را به صورت زیر تعریف میکنیم:

Hidden States : $X = \{s, a, h, r\}$

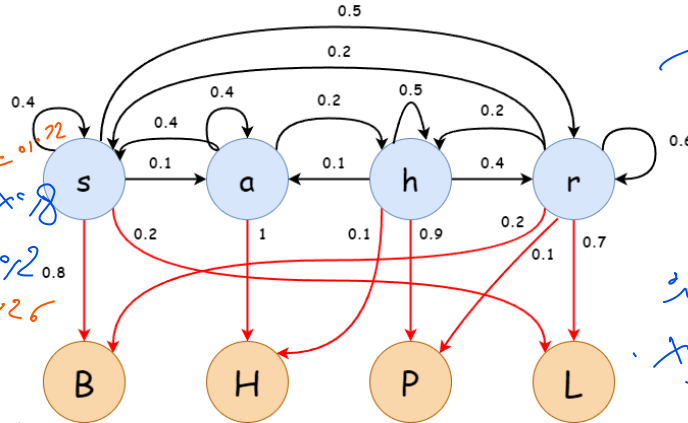
Observations : $Y = \{B, H, P, L\}$

نمودار حالات این HMM به صورت زیر است و احتمال قرار داشتن فرد در هر کدام از حالات روحی در اولین مراجعه به پلتفرم ($t=1$) برابر است. (اعداد نوشته شده بر روی یال ها بیانگر احتمالات است.)

این احتمال یعنی روز قبل اگر اینها بود امروز با چه احتمالی کجا میره

$a_1(s)$
 $\cdot 125 \times 18$
 $a_1(r)$
 $\cdot 125 \times 12$

$a_2(s)$
 $\cdot 12 \times 0.14 \times 18 + 1.5 \times 12 \times 18$
 $\cdot 12 \times 1.5 \times 12 + 1.5 \times 14 \times 12$
 $a_2(r)$
 $\cdot 126$



است قبلی کارش انجام شد
 حسابیاد این است
 اینها به observation اشاره

$a_3(s) = 1/2 \times 0.12 \times 14 + 1/2 \times 0.126 \times 12 = 0.068$
 $a_3(r) = 1/2 \times 0.126 \times 16 + 1/2 \times 0.15 \times 1.72 = 0.312$
 با توجه به توضیحات داده شده به سوالات زیر پاسخ دهید:

$a_4(a) = 1 \times 0.0068 \times 0.1 + 1 \times 0 \times 0.03612$
 $a_4(h) = 0.1 \times 0 \times 0.0068 + 0.1 \times 0.3612 \times 1/2$
 الف) ماتریس Transition, Emission, Initial Probability را به ترتیب با نام های A, B, π تعریف کرده و مقادیر آن ها را مشخص کنید.

ب) با استفاده از الگوریتم Forward احتمال اینکه فرد در مراجعات خود به ترتیب از چپ به راست این رشته از ژانر ها را گوش دهد محاسبه کنید. $O = \{B, B, L, H\}$

ج) به کمک روابط مربوط به Smoothing احتمال اینکه در مراجعه دوم ($t=2$) کاربر در حالت روحی غمگین (s) قرار داشته باشد به شرط اینکه رشته ژانر O را مشاهده کرده باشیم را محاسبه کنید.
 $P(s|O)$

د) با استفاده از الگوریتم Viterbi رشته حالت های روحی که بالاترین احتمال را دارد به شرط اینکه رشته ژانر O را مشاهده کرده باشیم را محاسبه کنید.

پاسخ:

الف)

B:

	B	H	P	L
s	0.8	0	0	0.2
a	0	1	0	0
h	0	0.1	0.9	0
r	0.2	0	0.1	0.7

A:

	s	a	h	r
s	0.4	0.1	0	0.5
a	0.4	0.4	0.2	0
h	0	0.1	0.5	0.4
r	0.2	0	0.2	0.6

π :

s	a	h	r
0.25	0.25	0.25	0.25

(ب)

روابط مربوط به الگوریتم Forward به صورت زیر است:

$$\alpha_1(j) = \pi_i b_i(O_1)$$

$$\alpha_{t+1}(j) = b_j(O_{t+1}) \sum_{i \in X} \alpha_t(i) a_{ij} \quad \text{for } t \geq 1$$

با توجه به روابط بالا به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\alpha_1(s) = 0.25 \times 0.8 = 0.2$$

$$\alpha_1(r) = 0.25 \times 0.2 = 0.05$$

$$\alpha_1(a) = 0$$

$$\alpha_1(h) = 0$$

$$\alpha_2(r) = 0.2 \times ((\alpha_1(r) \times 0.6) + (\alpha_1(h) \times 0.4) + (\alpha_1(s) \times 0.5)) = 0.026$$

$$\alpha_2(s) = 0.8 \times ((\alpha_1(s) \times 0.4) + (\alpha_1(r) \times 0.2) + (\alpha_1(a) \times 0.4)) = 0.072$$

$$\alpha_2(a) = 0$$

$$\alpha_2(h) = 0$$

$$\alpha_3(r) = 0.7 \times ((\alpha_2(r) \times 0.6) + (\alpha_2(h) \times 0.4) + (\alpha_2(s) \times 0.5)) = 0.03612$$

$$\alpha_3(s) = 0.2 \times ((\alpha_2(s) \times 0.4) + (\alpha_2(r) \times 0.2) + (\alpha_2(a) \times 0.4)) = 0.0068$$

$$\alpha_3(a) = 0$$

$$\alpha_3(h) = 0$$

$$\alpha_4(r) = 0$$

$$\alpha_4(s) = 0$$

$$\alpha_4(a) = 1 \times ((\alpha_3(h) \times 0.1) + (\alpha_3(a) \times 0.4) + (\alpha_3(s) \times 0.1)) = 0.00068$$

$$\alpha_4(h) = 0.1 \times ((\alpha_3(h) \times 0.5) + (\alpha_3(a) \times 0.2) + (\alpha_3(r) \times 0.2)) = 0.0007224$$

حال برای محاسبه احتمال 0 همه α_4 ها را با هم جمع می‌کنیم :

$$P(O) = \alpha_4(r) + \alpha_4(s) + \alpha_4(a) + \alpha_4(h) = 0.0014024$$

(ج)

روابط مربوط به Smoothing به صورت زیر است:

$$\gamma_t(i) = P(X_t = i | O_{1:T}) = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{j \in X} \alpha_t(j)\beta_t(j)}$$

$$\beta_T(i) = 1$$

$$\beta_t(i) = P(O_{t+1:T} | X_t = i) = \sum_{j \in X} a_{ij} b_j(O_{t+1}) \beta_{t+1}(j)$$

با توجه به اینکه مقادیر α را در قسمت قبل به دست آوردیم، در این مرحله فقط مقادیر β مورد نیاز را محاسبه می‌کنیم:

$$\beta_2(r) = (\beta_3(r) \times 0.6 \times 0.7) + (\beta_3(s) \times 0.2 \times 0.2) = 0.0124$$

$$\beta_2(s) = (\beta_3(r) \times 0.5 \times 0.7) + (\beta_3(s) \times 0.4 \times 0.2) = 0.015$$

$$\beta_3(s) = \beta_4(a) \times 0.1 \times 1 = 0.1$$

$$\beta_3(r) = \beta_4(h) \times 0.2 \times 0.1 = 0.02$$

$$\beta_4(a) = 1$$

$$\beta_4(h) = 1$$

در نهایت احتمال مورد نظر را به دست می‌آوریم:

$$\gamma_2(s) = \frac{\alpha_2(s)\beta_2(s)}{\sum_{j \in X} \alpha_2(j)\beta_2(j)} = \frac{0.072 \times 0.015}{(0.072 \times 0.015) + (0.026 \times 0.0124)} \simeq 0.77$$

(د)

روابط مربوط به الگوریتم Viterbi به صورت زیر است:

$$\delta_1(i) = \pi_i b_i(O_1)$$

$$\delta_t(j) = \max_{i \in X} [\delta_{t-1}(i) a_{ij}] \times b_j(O_t)$$

$$P^* = \max_{i \in X} [\delta_T(i)]$$

حال به ترتیب مراحل زیر را طی می‌کنیم:

$$\delta_1(s) = 0.25 \times 0.8 = 0.2$$

$$\delta_1(r) = 0.25 \times 0.2 = 0.05$$

$$\delta_1(a) = 0.25 \times 0 = 0$$

$$\delta_1(h) = 0.25 \times 0 = 0$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_\downarrow \quad 0.5 \times 0.2$

$$\delta_2(s) = 0.2 \times 0.4 \times 0.8 = 0.064$$

$$\delta_2(r) = 0.2 \times 0.5 \times 0.2 = 0.02$$

$$\delta_2(a) = 0 \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{0.5 \times 0.6 = 0.30}$$

$$\delta_2(h) = 0$$

$$\delta_3(s) = 0.064 \times 0.4 \times 0.2 = 0.00512$$

$$\delta_3(r) = 0.064 \times 0.5 \times 0.7 = 0.0224$$

$$\delta_3(a) = 0$$

$$\delta_3(h) = 0$$

$$\delta_4(s) = 0$$

$$\delta_4(r) = 0$$

$$\delta_4(a) = 0.00512 \times 0.1 \times 1 = 0.000512$$

$$\delta_4(h) = 0.0224 \times 0.2 \times 0.1 = 0.000448$$

رشته حالت های روحی با بیشترین احتمال : $\{s, s, s, a\}$