سوال ۳: الف، فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n\times n$ با n بردار ویژه خطی مستقل باشد.

مقادیر ویژه را با λ_i و بردارهای ویژه را با q_i نمایش می‌دهیم.
ماتریس Q را به این گونه تعریف می‌کنیم که ستون‌های آن شامل بردارهای ویژه می‌باشند
Λ را ماتریس قطری که مقادیر روی قطر آن، همان مقادیر ویژه می‌باشد.

$$Q = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \quad \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

$$AQ = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ Aq_1 & Aq_2 & \cdots & Aq_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 q_1 & \lambda_2 q_2 & \cdots & \lambda_n q_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = Q\, diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

$$\Rightarrow A = Q \Lambda Q^{-1}$$

ب) یکی از روش‌های نیوتن تصحیح‌شده که از تجزیه مقادیر ویژه ماتریس هسین استفاده می‌کند، تبدیل ماتریس هسین به یک ماتریس مثبت معین (Positive Definite) است. این روش زمانی استفاده می‌شود که ماتریس هسین H نامعین یا منفی معین باشد، که ممکن است باعث حرکت در جهت نادرست یا واگرایی شود.

فرض کنید H ماتریس هسین باشد. تجزیه مقادیر ویژه به صورت زیر انجام می‌شود:

$$H = Q\Lambda Q^T,$$

که در آن Q ماتریسی متعامد است که بردارهای ویژه H را به عنوان ستون‌های خود دارد و Λ یک ماتریس قطری است که مقادیر ویژه H ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$) را روی قطر اصلی خود دارد.

اگر مقادیر ویژه $\lambda_i \leq 0$ باشند، آن‌ها را با یک مقدار مثبت کوچک $\epsilon > 0$ جایگزین می‌کنیم:

$$\Lambda' = diag(\max(\lambda_1, \epsilon), \max(\lambda_2, \epsilon), \ldots, \max(\lambda_n, \epsilon)).$$

ماتریس اصلاح‌شده H' با استفاده از Q و Λ' به صورت زیر بازسازی می‌شود:

$$H' = Q\Lambda' Q^T.$$

این ماتریس H' مثبت معین است، زیرا تمام مقادیر ویژه آن مثبت هستند.

به جای استفاده از جهت معمول نیوتن ($p_k = -H^{-1}\nabla f(x_k)$)، از جهت اصلاح‌شده زیر استفاده می‌شود:

$$p_k = -H'^{-1}\nabla f(x_k).$$

سوال ۳: ج،

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x_1^2 + 3x_2 + 4x_1x_2 \\ 3x_1 + 10x_2 + 2x_1^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 24x_1 + 4x_2 & 3 + 4x_1 \\ 3 + 4x_1 & 10 \end{pmatrix} \longrightarrow Hf(1,0) = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \text{متقارن}$$

$$\det(H - \lambda I) = 0 \Rightarrow \mathrm{dot}\begin{pmatrix} 24-\lambda & 7 \\ 7 & 10-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (24-\lambda)(10-\lambda) - 49 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 34\lambda + 191 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{34 \pm \sqrt{392}}{2} = 17 \pm \sqrt{98}$$

از آنجایی که هر دو مقدار ویژه، مثبت هستند پس ماتریس هسین مثبت معین است و نیازی به اصلاح نداریم پس به صورت مستقیم معکوس هسین را محاسبه می کنیم.

$$\mathrm{dot}(H) = 240 - 49 = 191 \longrightarrow H^{-1}f(1,0) = \frac{1}{191}\begin{pmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 24 \end{pmatrix}$$

$$x^+ = x^- - H^{-1}f(1,0)\,\nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{191}\begin{pmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{191}\begin{pmatrix} 85 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x^+ = \begin{pmatrix} \frac{106}{191} \\ -\frac{36}{191} \end{pmatrix}$$