سوال ۱:

ب) برای بررسی این که آیا متریک جدید همچنان ویژگی‌های یک فاصله استاندارد را دارد، ابتدا متریک جدید را محاسبه می‌کنیم.

فرض کنید $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ و $y = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$ دو نقطه در فضای dـ‌بعدی باشند. متریک اقلیدسی به صورت زیر تعریف شده است:

$$D(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{d}(x_k - y_k)^2}$$

اکنون فرض می‌کنیم که هر بعد با مقداری ثابت و غیرصفر a_k ضرب شده است. بنابراین مختصات جدید به صورت $\acute{x}_k = a_k x_k$ و $\acute{y}_k = a_k y_k$ خواهند بود. حالا می‌خواهیم متریک جدید، یعنی فاصله بین $\acute{x}$ و $\acute{y}$ را محاسبه کنیم:

$$D'(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{d}(\acute{x}_k - \acute{y}_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{d}(a_k x_k - a_k y_k)^2}$$

این رابطه را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$D'(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} a_k^2 (x_k - y_k)^2}$$

برای این که این متریک D' یک فاصله استاندارد باشد، باید سه ویژگی زیر را داشته باشد:

۱. غیر منفی بودن :(Non-negativity)

$$D'(x,y) \geq 0$$

از آنجا که هر عبارت $(x_k - y_k)^2$ غیر منفی است و $a_k^2 > 0$ است (زیرا a_k غیرصفر است)، پس کل جمع نیز غیر منفی خواهد بود. بنابراین $D'(x,y) \geq 0$.

۲. همانی :(Identity)

$$D'(x,y) = 0 \iff x = y$$

اگر $D'(x,y) = 0$، آنگاه:

$$\sum_{k=1}^{d} a_k^2 (x_k - y_k)^2 = 0$$

از آنجا که هر a_k^2 مثبت است، باید $(x_k - y_k)^2 = 0$ برای تمام kها، و در نتیجه $x_k = y_k$ برای همه kها باشد. بنابراین $x = y$.

۳. تقارن :(Symmetry)

$$D'(x,y) = D'(y,x)$$

واضح است که $D'(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} a_k^2 (x_k - y_k)^2}$ با جابجا کردن x و y تغییری نمی‌کند، بنابراین تقارن برقرار است.

۴. ناهم‌برابری مثلثی (Triangle Inequality): برای هر نقطه $z = (z_1, z_2, \ldots, z_d)$ داریم:

$$D'(x,y) \leq D'(x,z) + D'(z,y)$$

از آنجا که $D(\acute{x},\acute{y})$ متریک اقلیدسی است و از ناهم‌برابری مثلثی تبعیت می‌کند، و هر مقدار a_k ثابت است، در نتیجه D' نیز این خاصیت را داراست.

$$D(\acute{x},\acute{y}) \leq D(\acute{x},\acute{z}) + D(\acute{z},\acute{y})$$

بنابراین، متریک $D'(x,y)$ تمامی ویژگی‌های یک فاصله استاندارد را دارد و همچنان یک متریک معتبر است.