حل تکلیف شماره ۱

1) $\int t^2 e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} dt = ?$

$\circledast$ می دانیم : $\int e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} dt = \sqrt{2\pi}\,\sigma$

مشتق گیری نسبت به σ $\rightarrow \int \frac{t^2}{\sigma^3} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} dt = \sqrt{2\pi}$

$\Longrightarrow \int t^2 e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} = \sqrt{2\pi}\,\sigma^3$

---

2) $\mathcal{F}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \right\} \overset{?}{=} e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$

$\mathcal{F}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-t^2/2\sigma^2} \right\} = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} e^{-j\omega t} dt$

$\underset{\text{عامل مربع ساز}}{\overset{\text{اضافه کردن}}{=}} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} e^{-j\omega t} e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} dt$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-\sigma^2\omega^2}{2}} \int e^{-\left(\frac{t^2}{2\sigma^2} + j\omega t - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right)} dt$

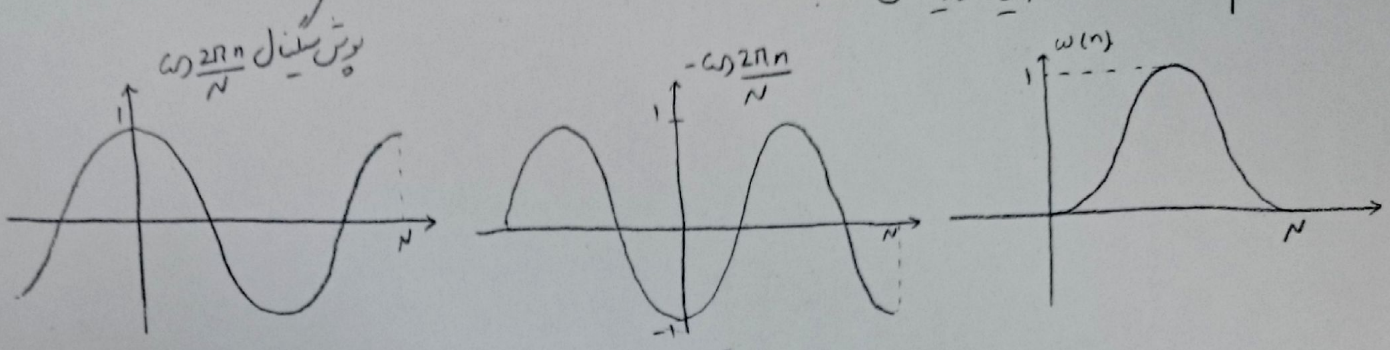
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-\sigma^2\omega^2}{2}} \int e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}\sigma} + \frac{j\omega\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2} dt$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-\sigma^2\omega^2}{2}} \int e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(t + j\omega\sigma)^2} dt$

$\underset{t + j\omega\sigma \to t}{\overset{\text{تغییر متغیر}}{=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-\sigma^2\omega^2}{2}} \underbrace{\int e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}}_{\text{طبق } \circledast \, = \sqrt{2\pi}\,\sigma} = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$

$$w(n) = 0.5\left(1 - \cos\frac{2\pi n}{N}\right) \qquad 0 \le n \le N$$

رسم $w(n)$ و تبدیل فوریه آن ؟



رسم تبدیل فوریه $w(n)$ ⟵ در حالت پیوسته داریم :

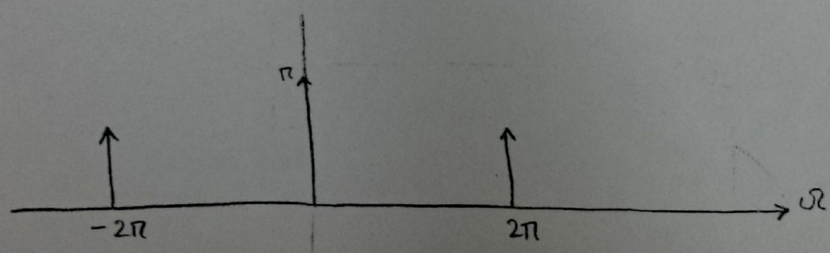
$$w(t) = 0.5\,(1 - \cos 2\pi t) \rightarrow \Omega = 2\pi \ , \ T = 1$$

$$\boxed{K = 8} \longrightarrow T_S = \frac{1}{8}$$

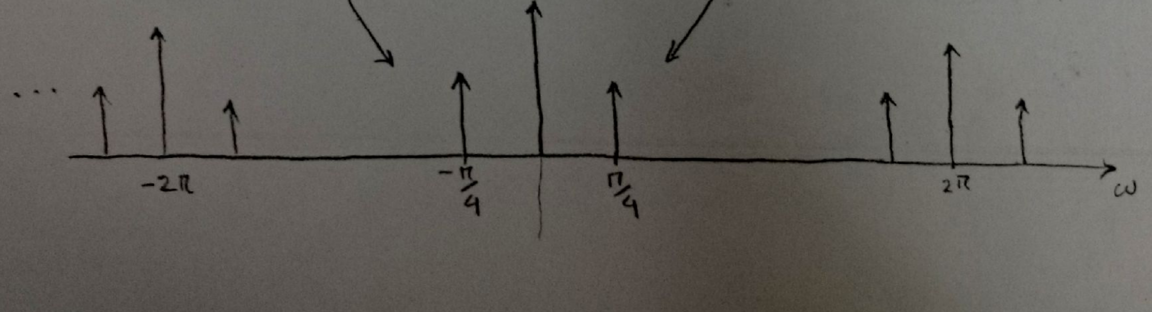
$$\omega = \Omega T_S \implies \omega = \frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{8} = \frac{\pi}{4}$$

برای سیگنال $w(t)$ در حوزه فرکانس ، در $\Omega = 0$ و $\Omega = \pm 2\pi$ ضربه داریم .

$$\hat{W}(\omega) = \pi\,\delta(\Omega) + \frac{\pi}{2}\left[\delta(\Omega - 2\pi) + \delta(\Omega + 2\pi)\right]$$



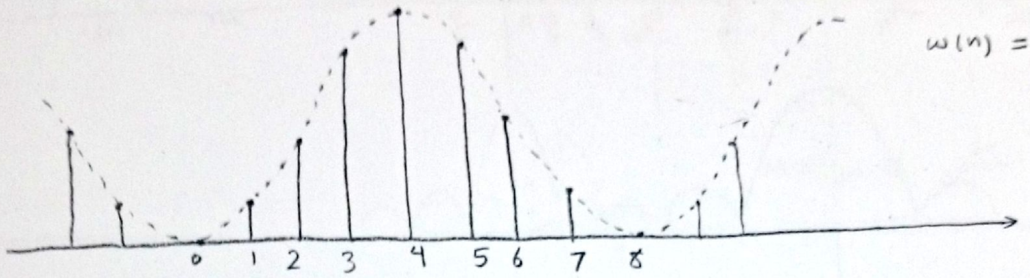
با نمونه برداری به اندازه T_S طبق رابطه I فرکانس ها به این صورت تغییر می کنند .



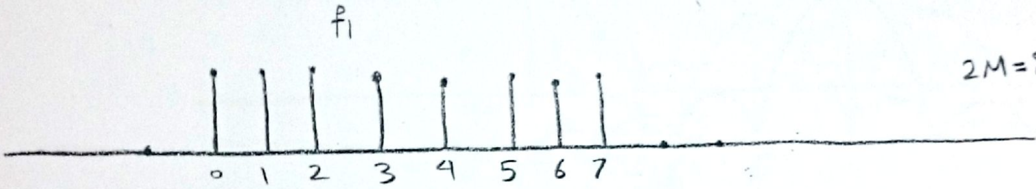
ادامه ۳ ←

سیگنال $w(n)$ در بازه $0 \leq n \leq N$ محدود شده است بنابراین در حوزه زمان پالس ضربه ضرب می‌شود و در حوزه فرکانس sinc با سیگنال کانوالو می‌شود.

$$w(n) = 0.5\left(1-\cos\frac{2\pi n}{N}\right)$$

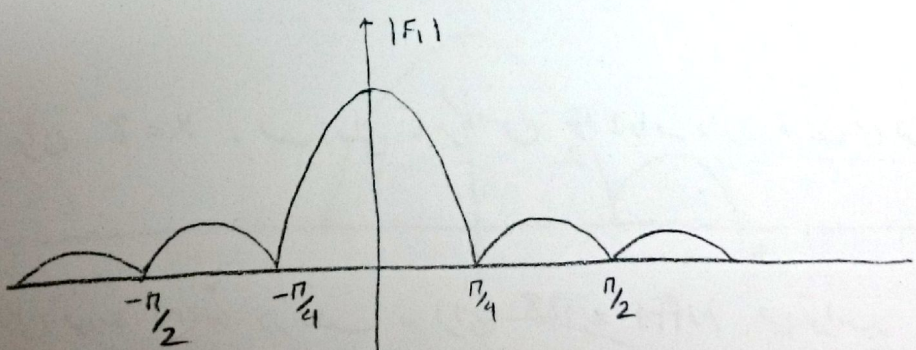


طول پنجره مستطیلی $2M=8$



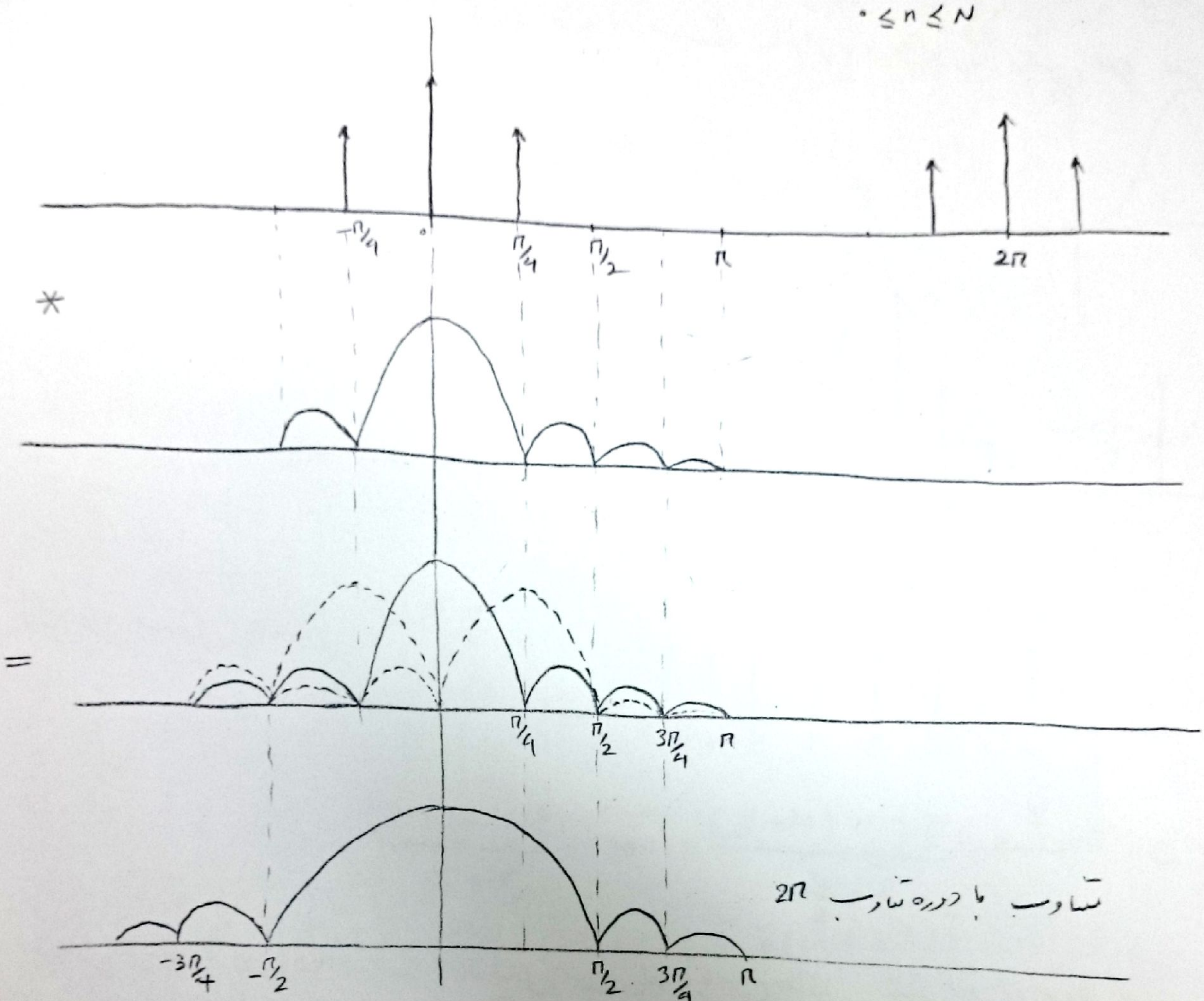
$$\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sin\omega(M+1/2)}{\sin\frac{\omega}{2}} \overset{M=4}{=} \frac{\sin\omega(4.5)}{\sin\omega/2}$$

با صرف‌نظر از 0.5 در $\sin\omega(4.5)$ سیگنال فوق در فرکانس های $\frac{k\pi}{4}$ صفر می‌شود.



محاسبه تبدیل فوریه $\omega(n)=0.5\left(1-\cos\frac{2\pi}{N}n\right)$

$0\le n\le N$



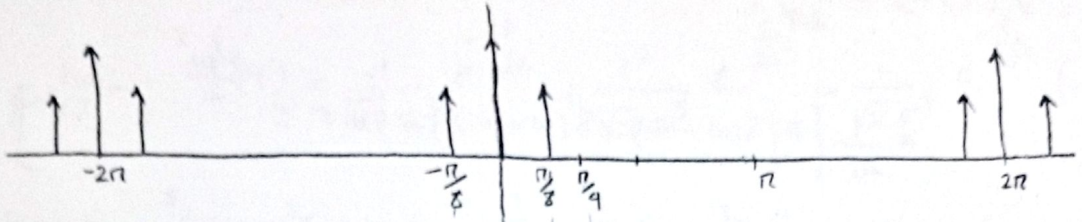
بنابراین برای $K=8$ ، لب اصلی تا فرکانس $\pi/2$ ادامه دارد و پهنای لب های فرعی $\pi/4$ است.

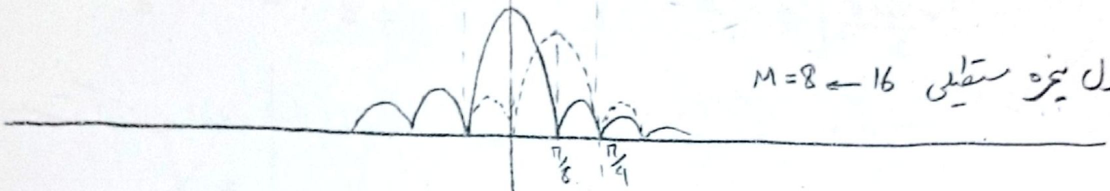
با رسم تبدیل فوریه $\omega(n)$ در متلب به ازای $Nfft = 128$ می توانید مکان صفرها را در همین نقاط بدست آورید.

اولین نقطه صفر : $\frac{x}{128}=\frac{\pi/2}{2\pi} \Rightarrow x=۳۲$

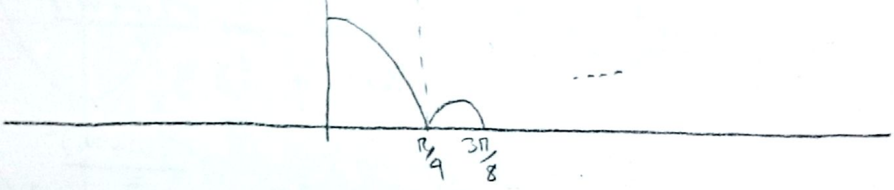
← ۳

$\boxed{K = 16}$ $\qquad \omega = \Omega T_S = 2\pi \times \frac{1}{16} = \frac{\pi}{8}$



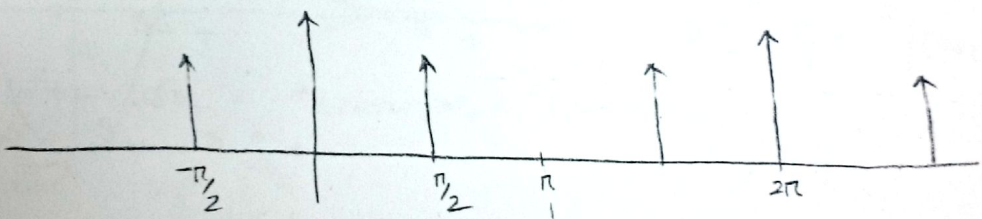


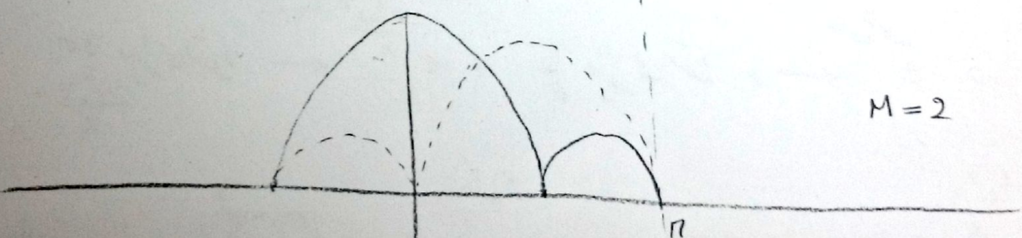
طول پنجره مستطیلی 16 ← M=8



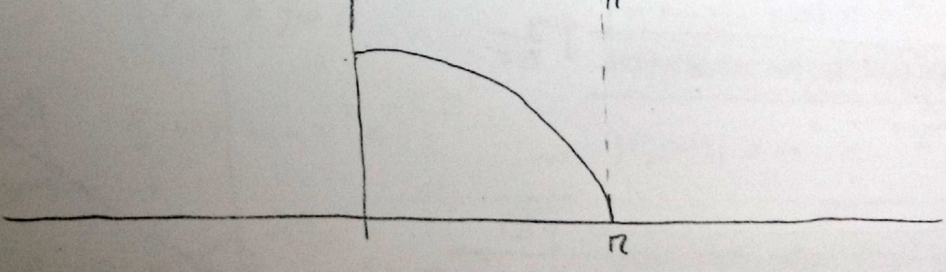
....

$\boxed{K = 4}$ $\qquad \omega = \Omega T_S = 2\pi \times \frac{1}{4} = \pi/2$





$M = 2$



1)

$$f(t) = \cos\omega_0 t \qquad w(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \qquad F(t,\omega) = ?$$

طبق تعریف دوم STFT :

$$F(t,\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(F(\omega) * \hat{w}^*(-\omega)\, e^{-i\omega t} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\pi\left(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right) * \sqrt{2\pi}\,\sigma\, e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} e^{-i\omega t} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}\,\sigma}{2}\left[e^{\frac{-\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}} e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{\frac{-\sigma^2(\omega+\omega_0)^2}{2}} e^{-i(\omega+\omega_0)t} \right]$$

برای بدست آوردن اندازه $F(t,\omega)$ ، به قسمت های موهومی و حقیقی تفکیک می کنیم.

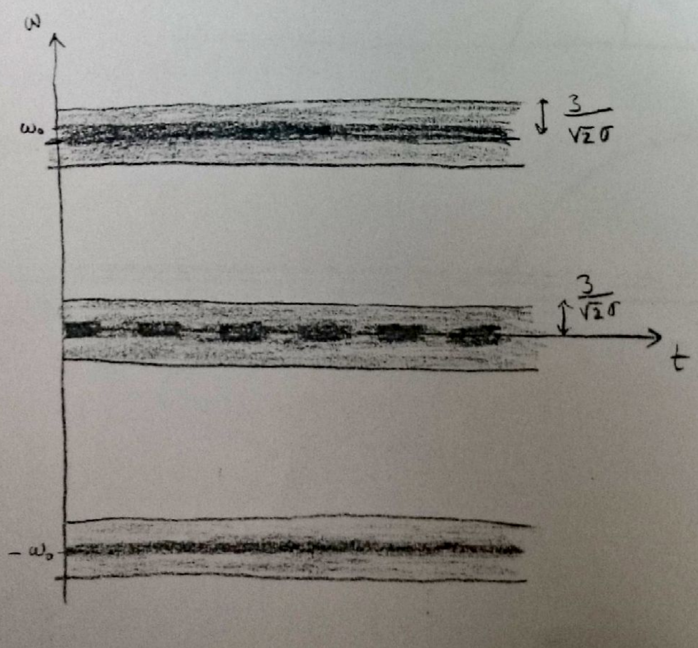
$$\Rightarrow F(t,\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma \Big[e^{\frac{-\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}} \cos(\omega-\omega_0)t + e^{-\frac{\sigma^2(\omega+\omega_0)^2}{2}} \cos(\omega+\omega_0)t$$

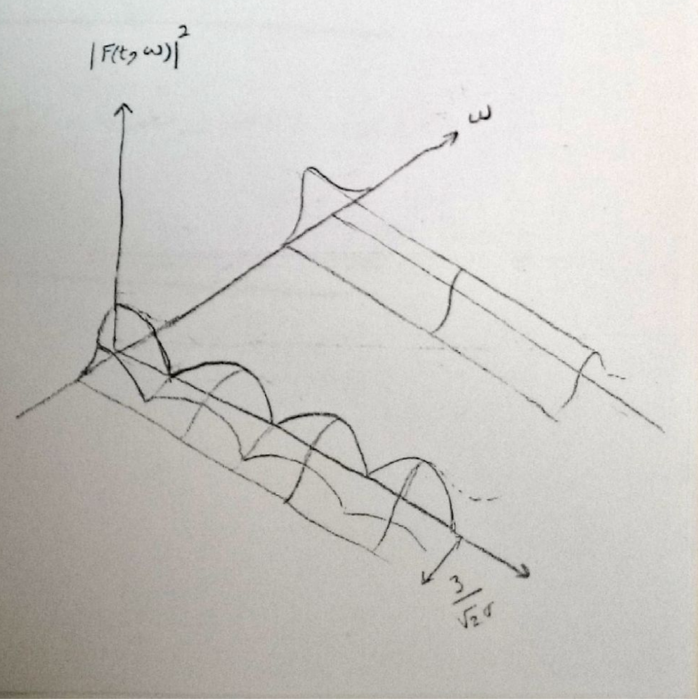
$$- i\left(e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}} \sin(\omega-\omega_0)t + e^{-\frac{\sigma^2(\omega+\omega_0)^2}{2}} \sin(\omega+\omega_0)t \right) \Big]$$

$$|F(t,\omega)|^2 = \frac{\pi}{2}\sigma^2 \left(e^{-\sigma^2(\omega-\omega_0)^2} + e^{-\sigma^2(\omega+\omega_0)^2} + 2e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}} e^{-\frac{\sigma^2(\omega+\omega_0)^2}{2}} \cos 2\omega_0 t \right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\sigma^2 \left(e^{-\sigma^2(\omega-\omega_0)^2} + e^{-\sigma^2(\omega+\omega_0)^2} + 2\, e^{-\sigma^2\omega_0}\, e^{-\sigma^2\omega} \cos 2\omega_0 t \right)$$

در $e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ در 3σ میرا می شود ← در $e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$ در $\frac{3}{\sigma}$ میرا می شود و ← در $e^{-\sigma^2\omega^2}$ در $\frac{3}{\sqrt{2}\sigma}$ میرا می شود.





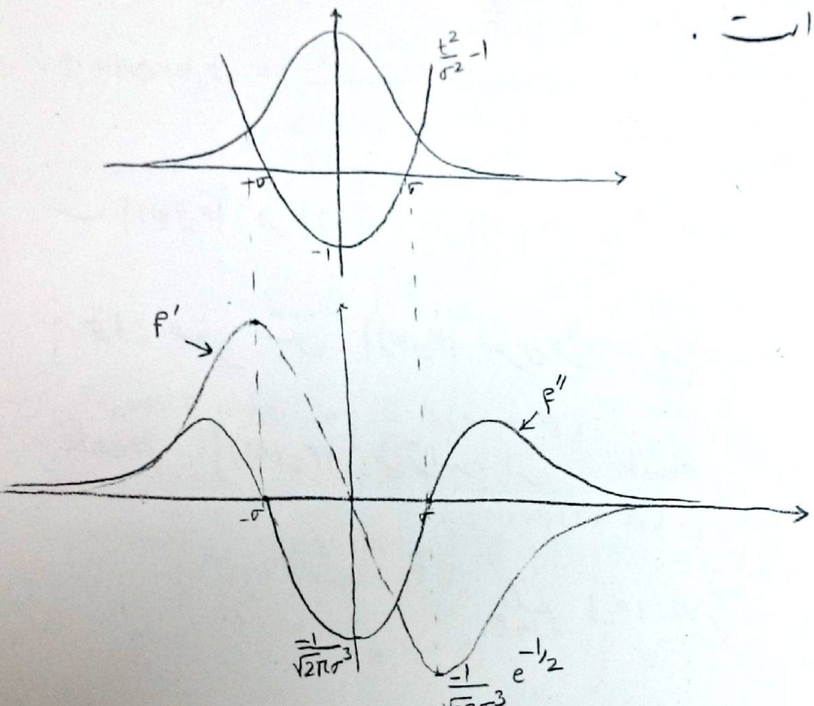
5) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$

مشتق اول $f(t)$: $f'(t) = \frac{-t}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$

مشتق دوم $f(t)$: $f''(t) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} + \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^5} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \left(-1 + \frac{t^2}{\sigma^2}\right)$

نقاط صفر $f''(t)$، نقاط اکسترمم $f'(t)$ است ← $f''(t) = 0 \to t = \pm\sigma$

$f''(t)$ ضرب تابع گوسی در تابع درجه ۲ است.



$F(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$

تبدیل فوریه مشتق اول $F(\omega)$: $F_1(\omega) = j\omega\, e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \Rightarrow |F_1(\omega)| = |\omega|\, e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$

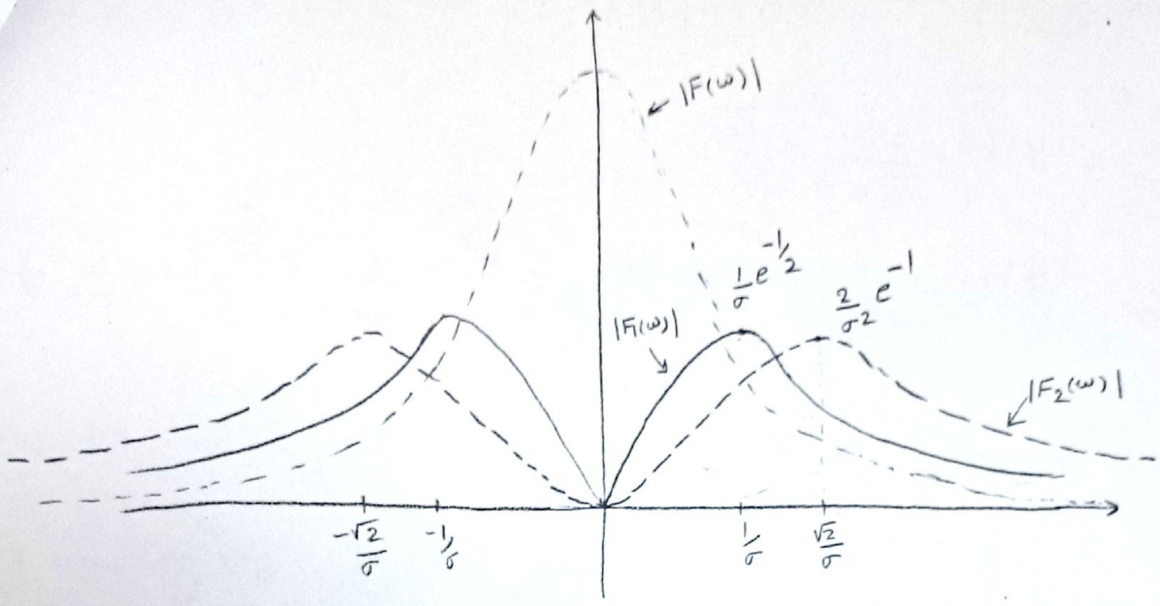
تبدیل فوریه مشتق دوم $F(\omega)$: $F_2(\omega) = -\omega^2 e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \Rightarrow |F_2(\omega)| = \omega^2 e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$

نقاط اکسترمم $|F_1|$ ← $\frac{d}{d\omega}|F_1(\omega)| = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}(1-\sigma^2\omega^2) = 0 \Rightarrow \omega = \pm\frac{1}{\sigma}$

مقدار پیک : $|F_1(\omega)|_{\omega=\pm\frac{1}{\sigma}} = \frac{1}{\sigma} e^{-1/2}$

نقاط اکسترمم $|F_2|$ ← $\frac{d}{d\omega}|F_2(\omega)| = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}(2\omega - \sigma^2\omega^3) = 0 \Rightarrow \omega = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sigma}, 0$

مقدار پیک ← $\frac{2}{\sigma^2} e^{-1}$ ، و در نقطه صفر min F_2 می‌شود.



افت $|F_2(\omega)|$ از $|F_1(\omega)|$ از $|F(\omega)|$ در $\omega \to \infty$ کندتر است.

در حوالی صفر مشتق $|F_2(\omega)|$ صفر می‌شود و تغییرات کندتری نسبت به $|F_1(\omega)|$ در حوالی $\omega = 0$ دارد.

peak $|F_2(\omega)|$ می‌تواند از peak $|F_1(\omega)|$ بالاتر و پایین‌تر باشد (بسته به مقدار σ)

اگر $\frac{2}{\sigma^2} e^{-1/2} > \frac{1}{\sigma} e^{-1} \implies$ پیک $|F_2|$ بالاتر است.

حل تکلیف شماره ۳

2) $f_1(t) = \underbrace{\cos\omega_1 t}_{g_1} + \underbrace{\cos\omega_2 t}_{g_2}$ $\qquad WVT_{f_1} = ?$

$$WVT_{f_1=g_1+g_2}(t,\omega) = WVT_{g_1}(t,\omega) + WVT_{g_2}(t,\omega) + 2\,\mathrm{Real}\left(WVT_{g_1,g_2}(t,\omega)\right)$$

$WVT_{g_1}(t,\omega) = ?$

$$g_1 = \cos\omega_1 t = \frac{e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}}{2}$$

$$WVT_{\frac{1}{2}e^{i\omega_1 t}} = \int \frac{1}{4} e^{i\omega_1(t+\tau/2)}\, e^{-i\omega_1(t-\tau/2)}\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{4}\int e^{-i(\omega-\omega_1)\tau}\, d\tau = \frac{1}{4}\times 2\pi\,\delta(\omega-\omega_1) = \frac{\pi}{2}\,\delta(\omega-\omega_1)$$

به همین ترتیب $\rightarrow WVT_{\frac{1}{2}e^{-i\omega_1 t}} = \frac{\pi}{2}\,\delta(\omega+\omega_1)$

$$WVT_{\frac{1}{2}e^{i\omega_1 t},\frac{1}{2}e^{-i\omega_1 t}} = \frac{1}{4}\int e^{i\omega_1(t+\tau/2)}\, e^{i\omega_1(t-\tau/2)}\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{4} e^{i2\omega_1 t}\int e^{-i\omega\tau}\, d\tau = \frac{1}{4} e^{i2\omega_1 t}\times 2\pi\,\delta(\omega) = \frac{\pi}{2}\,\delta(\omega)\, e^{i2\omega_1 t}$$

$$WVT_{g_1} = \frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_1) + \delta(\omega+\omega_1)\right] + \pi\,\delta(\omega)\cos 2\omega_1 t$$

$$WVT_{g_2} = \frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_2) + \delta(\omega+\omega_2)\right] + \pi\,\delta(\omega)\cos 2\omega_2 t$$

$$WVT_{g_1,g_2}(t,\omega) = \frac{1}{4}\int\left[e^{i\omega_1(t+\tau/2)} + e^{-i\omega_1(t+\tau/2)}\right]\left[e^{-i\omega_2(t-\tau/2)} + e^{+i\omega_2(t-\tau/2)}\right] e^{-i\omega\tau}\, d$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\int e^{i(\omega_1-\omega_2)t}\, e^{i\frac{(\omega_1+\omega_2)\tau}{2}}\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

$$+ \int e^{i(\omega_1+\omega_2)t}\, e^{i\frac{(\omega_1-\omega_2)\tau}{2}}\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau \; +$$

$$\cdots + \int e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}\, e^{-i\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}\tau}\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

$$+ \int e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}\, e^{-i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}\tau}\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

$$\Rightarrow WVT_{g_1, g_2} = \frac{\pi}{2} e^{i(\omega_1-\omega_2)t}\, \delta\left(\omega - \frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}\right)$$

$$+ \frac{\pi}{2} e^{i(\omega_1+\omega_2)t}\, \delta\left(\omega - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)$$

$$+ \frac{\pi}{2} e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}\, \delta\left(\omega + \frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)$$

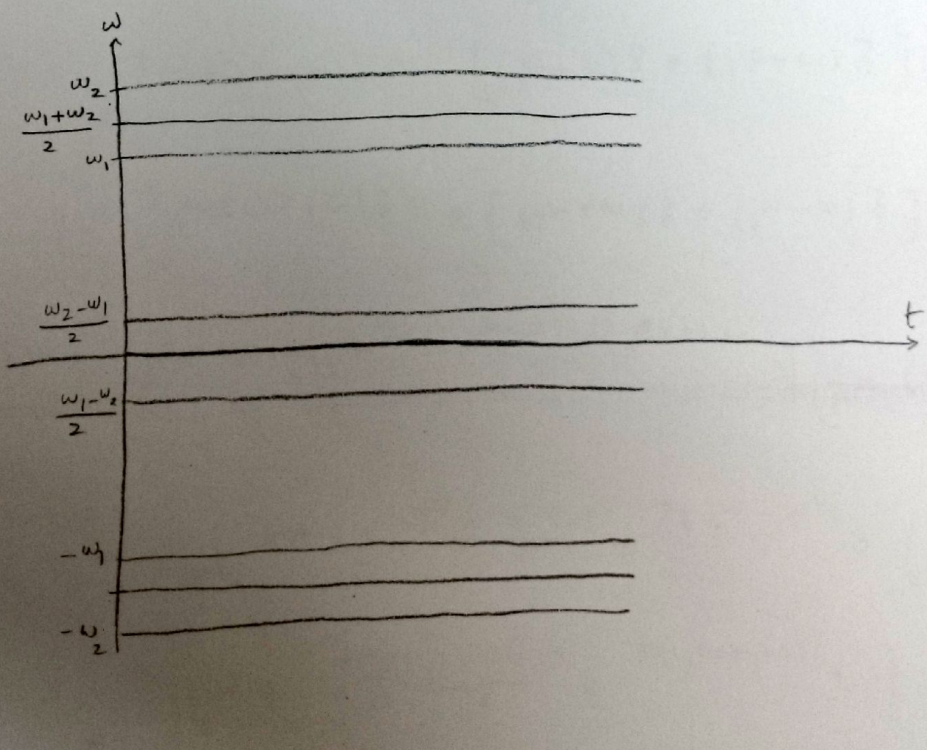
$$+ \frac{\pi}{2} e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}\, \delta\left(\omega + \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow WVT_{f_1} = \frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_1) + \delta(\omega+\omega_1) + \delta(\omega+\omega_2) + \delta(\omega-\omega_1)\right]$$

$$+ \pi\Big[\delta(\omega)\cos 2\omega_1 t + \delta(\omega)\cos 2\omega_2 t + \delta\left(\omega - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\cos(\omega_1-\omega_2)t$$

$$+ \delta\left(\omega - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)\cos(\omega_1+\omega_2)t + \delta\left(\omega - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)\cos(\omega_1+\omega_2)t$$

$$+ \delta\left(\omega + \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\cos(\omega_1-\omega_2)t\Big]$$



سؤال ۲)

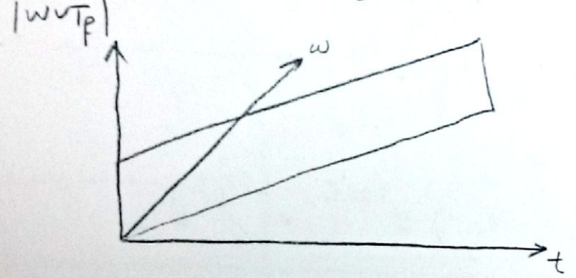
ب) $f_2(t) = A e^{\frac{1}{2}\beta t^2 i}$

$$WVT_{f_2}(t,\omega) = \int A e^{\frac{1}{2}\beta(t+\tau/2)^2 i} A^* e^{-\frac{1}{2}\beta(t-\tau/2)^2 i} e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$= \int |A|^2 e^{\frac{\beta}{2}[(t+\tau/2)^2-(t-\tau/2)^2]i} e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$= |A|^2 \int e^{\frac{\beta}{2}(2\tau t)i} e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$= |A|^2 \int e^{-i(\omega-\beta t)\tau} d\tau = |A|^2 2\pi \, \delta(\omega-\beta t)$$



$\omega - \beta t = 0$

$\Rightarrow \omega = \beta t$

---

3) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = ?$

$$WVT_f(\omega,t) = \int f(t+\tau/2) f^*(t-\tau/2) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$\Rightarrow f(t+\tau/2) f^*(t-\tau/2) = \frac{1}{2\pi}\int WVT_f(\omega,t) e^{i\omega\tau} d\omega$$

$$\tau=0 \Rightarrow |f(t)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} WVT(\omega,t)\, d\omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_t \int_\omega WVT(\omega,t)\, d\omega\, dt$$

۴) $$WVT_{f,g} = \int f(t+\tfrac{\tau}{2})\, g^*(t-\tfrac{\tau}{2})\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau \overset{?}{=} \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\omega+\tfrac{\eta}{2})\, \hat{g}(\omega-\tfrac{\eta}{2})\, e^{i\eta t}\, d\eta$$

$$= \int \underbrace{f(t+\tau/2)}_{f_1} \Big(\underbrace{g(t-\tau/2)\, e^{i\omega\tau}}_{g_1}\Big)^* d\tau =$$

پارامتر فرکانس τ را η درنظر می‌گیریم.

طبق پارسوال

$$= \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}_1 \cdot \hat{g}_1^*\, d\eta = A$$

$$\hat{f}_1 = \mathcal{F}\{f(t+\tau/2)\} = \int f(t+\tau/2)\, e^{-i\eta\tau}\, d\tau \underset{\text{تغییر متغیر}}{=} \int f(\alpha)\, e^{-i(2\alpha-2t)\eta}\, 2\, d\alpha$$

$t+\frac{\tau}{2} \to \alpha$ تغییر متغیر

$$= 2e^{i2\eta t} \int f(\alpha)\, e^{-i(2\eta)\alpha}\, d\alpha = 2e^{i2\eta t}\, \hat{f}(2\eta)$$

$$\hat{g}_1 = \mathcal{F}\{g(t-\tau/2)\, e^{i\omega\tau}\} = \int g(t-\tau/2)\, e^{i\omega\tau}\, e^{-i\eta\tau}\, d\tau$$

$$\overset{t-\frac{\tau}{2}\to\alpha}{=} \int g(\alpha)\, e^{i\omega(2t-2\alpha)}\, e^{-i\eta(2t-2\alpha)}\, 2\, d\alpha$$

$$= 2e^{i2\omega t}\, e^{-i\eta 2t} \int g(\alpha)\, e^{-i2\alpha(\omega-\eta)}\, d\alpha$$

$$= 2e^{-i2t(\eta-\omega)}\, \hat{g}(2\omega-2\eta)$$

بنابراین : $$A = \frac{1}{2\pi} \int 4e^{i2\eta t}\, \hat{f}(2\eta)\, e^{+i2t(\eta-\omega)}\, \hat{g}^*(2\omega-2\eta)\, d\eta$$

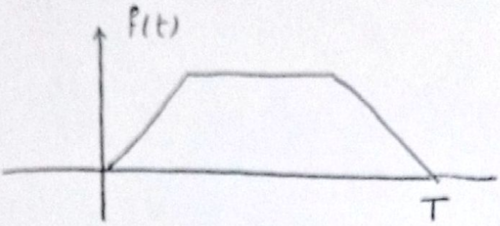
$$= \frac{2}{\pi} e^{-i2\omega t} \int \hat{f}(2\eta)\, \hat{g}^*(2\omega-2\eta)\, e^{i4\eta t}\, d\eta$$

$$2\eta \to \omega + \eta/2 \Rightarrow \eta = \frac{\omega}{2} + \eta/4$$

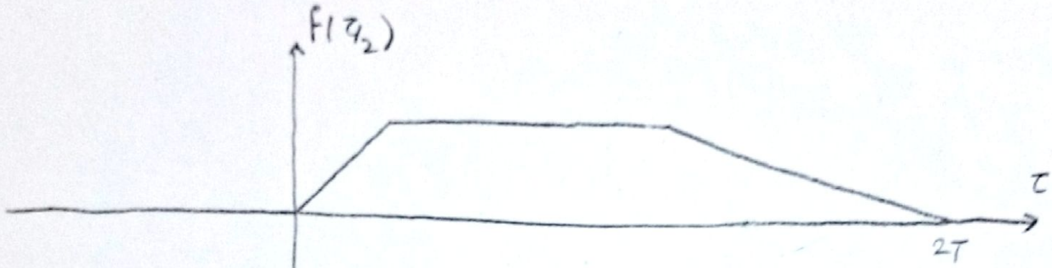
$$A = \frac{2}{\pi} e^{-i2\omega t} \int f(\omega+\eta/2)\, \hat{g}^*(\omega-\eta/2)\, e^{i(2\omega+\eta)t}\, \frac{d\eta}{4}$$

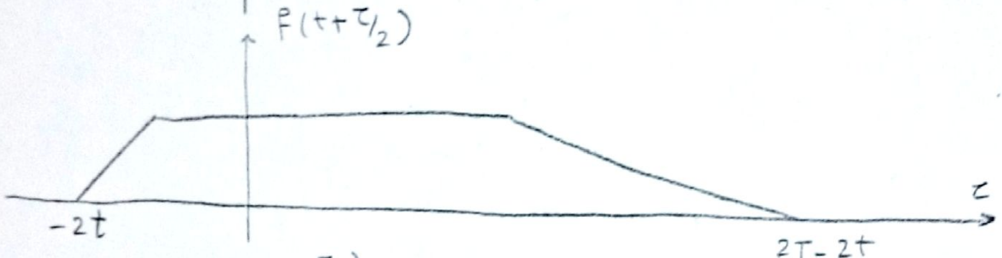
$$= \frac{1}{2\pi} \int f(\omega+\eta/2)\, \hat{g}^*(\omega-\eta/2)\, e^{i\eta t}\, d\eta$$

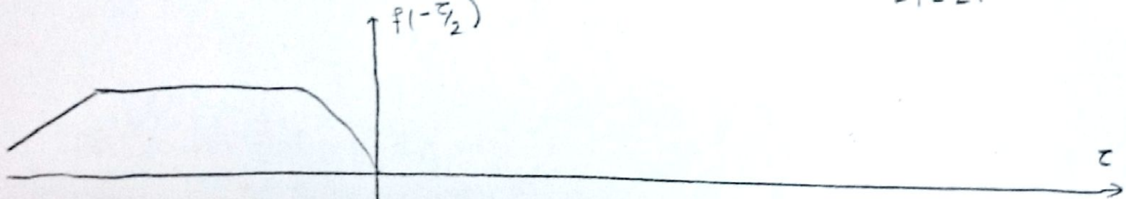
۵)

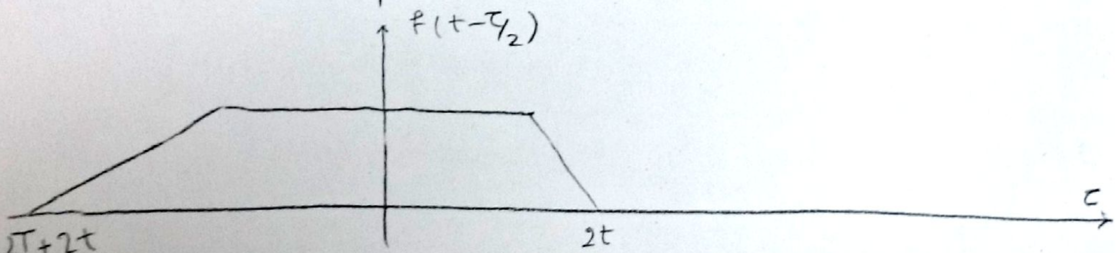


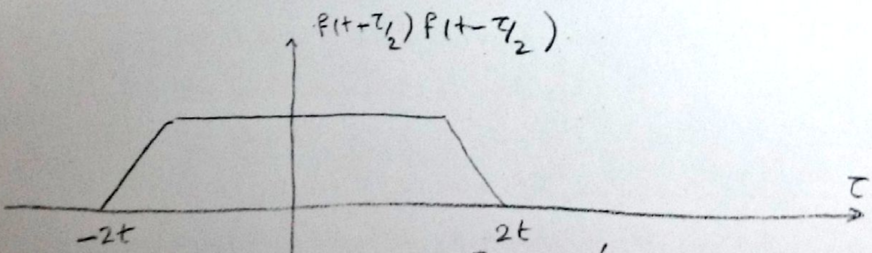
$$WVT_f(\omega,t) = \int f(t+\tau/2)\, f^*(t-\tau/2)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$











اگر $-T \le t \le T$ باشد سیگنال فوق مقدار دارد و خارج از این بازه صفر می‌شود.