بنام خدا

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده برق و کامپیوتر

تمرین سری هشتم – مباحث ویژه در پردازش سیگنال های دیجیتال

استاد: دکتر سعید صدری

رضا سعادتی فرد 9411394

پروانه رشوند 9410124

آرزو فرزانفر 9414724

تاریخ تحویل 95/3/22

سوال 1)

میدانیم که برای MRA برمبنای $N_m(x)$ داریم:

$$h_m(k)=\begin{cases} 2^{-m+1}\binom{k}{m} & 0 \le k \le m \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$g_m(k)=\begin{cases} \frac{(-1)^k}{2^{m-1}} \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \; N_{2m}(k+1-l) & 0 \le k \le 3m-2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

که درآن مقادیر $N_{2m}(k)$رامیتوان با کمک روابط زیر بدست آورد:

$$\begin{cases} N_2(k) = \delta_{k,1} & k \in z \\ N_{n+1}(k) = \dfrac{k}{n} N_n(k) + \dfrac{n+1-k}{n} N_2(k-1) \\ k = 1, 2, \dots \dots . n \end{cases}$$

الف: $h_2(k)$ و$g_2(k)$را با دقت بیابید وسپس شکل موج های $\varphi_2(x)$و$2(x)$ψرارسم کنید.

$h_2(k)=2^{-1}\binom{2}{k}$

$h_2(0)=\frac{1}{2}$, $h_2(1)=1$, $h_2(2)=\frac{1}{2}$

$$g_2(k)=\begin{cases} \frac{(-1)^k}{2^1} \sum_{l=0}^{2} \binom{2}{l} \; N_4(k+1-l) & 0 \le k \le 4 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$N_2(k) = \delta_{k,1}$ $\qquad\qquad$ $k \in z$

$N_2(0) = 0$, $N_2(1) = 1$, $N_2(2) = 0$

$N_3(k) = \frac{k}{2} N_2(k) + \frac{3-k}{2} N_2(k-1)$ $\Rightarrow$

$N_3(0) = 0$ $\quad$ $N_3(1) = \frac{1}{2}$, $N_3(2) = \frac{1}{2}$

$N_3(k) = 0$ for $k \geq 3$

$$N_4(k) = \frac{k}{3} N_2(k) + \frac{4-k}{3} N_3(k-1) \quad \Rightarrow$$

$N_4(0) = 0$ $\quad$ $N_4(1) = \frac{1}{6}$ $\quad$ $N_4(2) = \frac{2}{3}$ $\quad$ $N_4(3) = \frac{1}{6}$

$N_4(k) = 0$ for $k \geq 4$

$$g_2(\mathrm{k}) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(-1)^k}{2^1} \sum_{l=0}^{2} \binom{2}{l} \; N_4(\mathrm{k}+1-\mathrm{l}) \; = \frac{1}{12} & k = 0 \\ \frac{(-1)^k}{2^1} \sum_{l=0}^{2} \binom{2}{l} \; N_4(\mathrm{k}+1-\mathrm{l}) \; = \frac{-6}{12} & k = 1 \\ \frac{(-1)^k}{2^1} \sum_{l=0}^{2} \binom{2}{l} \; N_4(\mathrm{k}+1-\mathrm{l}) \; = \frac{10}{12} & k = 2 \\ \frac{(-1)^k}{2^1} \sum_{l=0}^{2} \binom{2}{l} \; N_4(\mathrm{k}+1-\mathrm{l}) \; = \frac{-6}{12} & k = 3 \\ \frac{(-1)^k}{2^1} \sum_{l=0}^{2} \binom{2}{l} \; N_4(\mathrm{k}+1-\mathrm{l}) \; = \frac{1}{12} & k = 4 \end{array} \right\}$$

بدست آوردن $\psi 2(x)$ و $\varphi_2(x)$:

طبق قضیه گفته شده در متن درس اگر فرض کنیمN_m(x)= Ø (x)

$N_m(\mathrm{x})=\sum h(n) N_m(2\mathrm{x}-\mathrm{n})$

$\frac{\emptyset(w)}{\emptyset\left(\frac{w}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum h(n)e^{-\frac{j\omega}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1e^{-\frac{j\omega}{2}}+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)=\frac{1}{4}\left(1+2e^{-\frac{j\omega}{2}}+e^{-j\omega}\right)=\frac{1}{4}\left(1+e^{-\frac{j\omega}{2}}\right)^2=$

$=\frac{1}{4}\left(e^{-\frac{j\omega}{2}}\left(e^{+\frac{j\omega}{2}}+e^{-\frac{j\omega}{2}}\right)\right)^2=\frac{1}{4}\left(e^{-\frac{j\omega}{2}}\left(2\cos\frac{\omega}{4}\right)\right)^2$

طبق روابط:

$\sin 2\alpha = 2\ \sin\alpha\cos\alpha$

$\mathrm{Cos}\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$

میتوان $\mathrm{Cos}\,\frac{\omega}{4}=\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{2\sin\frac{\omega}{4}}$ راجایگذاری کرد پس داریم:

$\frac{\boldsymbol{\varphi}(w)}{\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{w}{2}\right)}==\frac{1}{4}\left(e^{-\frac{j\omega}{2}}\left(2\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{2\sin\frac{\omega}{4}}\right)\right)^2$

هم چنین اگر :

$e^{-\frac{j\omega}{2}}=\frac{e^{-\frac{j\omega}{2}}}{e^{-\frac{j\omega}{4}}}$

را هم در نظر بگیریم:

$\frac{\boldsymbol{\varphi}(w)}{\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{w}{2}\right)}=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{-\frac{j\omega}{2}}}{e^{-\frac{j\omega}{4}}}\left(2\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{2\sin\frac{\omega}{4}}\right)\right)^2=\left(\frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{j\omega}{2}}}{e^{-\frac{j\omega}{4}}}\left(2\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{2\sin\frac{\omega}{4}}\right)\right)^2=\left(\frac{e^{-\frac{j\omega}{2}}\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}}{e^{-\frac{j\omega}{4}}\frac{\sin\frac{\omega}{4}}{\frac{\omega}{4}}}\right)^2$

پس میتوان نتیجه گرفت:

$\boldsymbol{\varphi}(W)=e^{-\frac{j\omega}{2}}\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\times e^{-\frac{j\omega}{2}}\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}$

میدانیم:

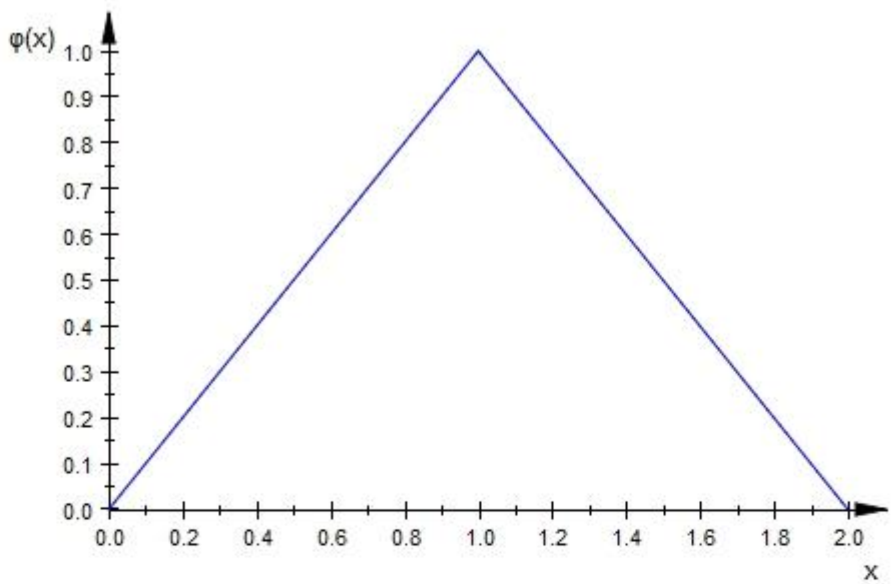
تبدیل فوریه وارون $\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}$برابر است با:

$\Pi(x)$

تبدیل فوریه وارون $\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}e^{-\frac{j\omega}{2}}$برابر است با:

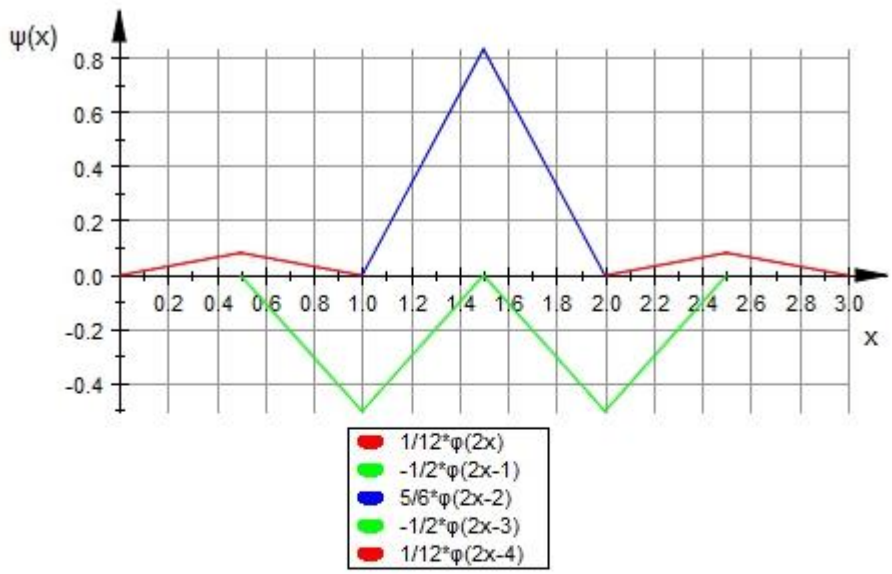
$\Pi(x-0.5)$

پس تبدیل فوریه وارون $\emptyset(w)$که کانولوشن تبدیل فوریه وارون $\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}e^{-\frac{j\omega}{2}}$با خودش است برابر میشود با:

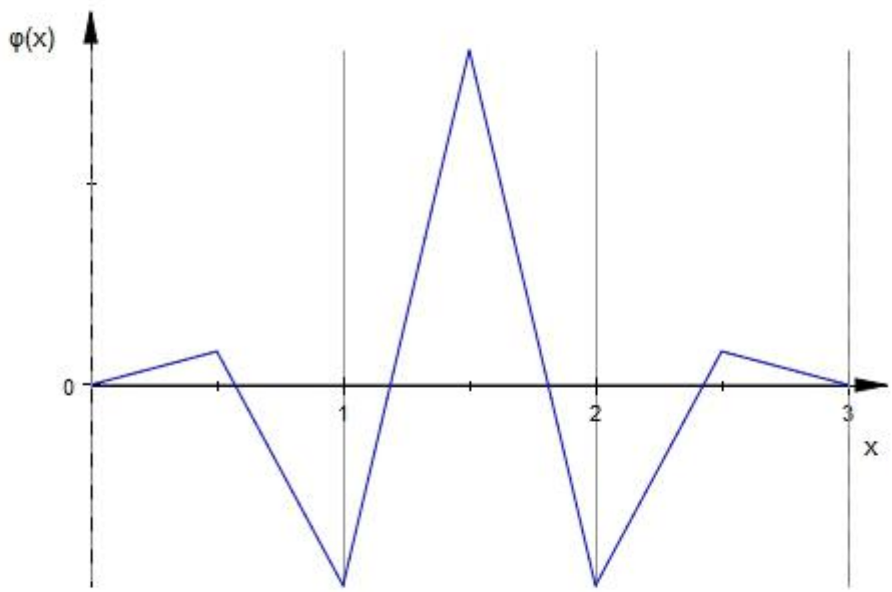


حال میخواهیم $\psi 2(x)$را بیابیم:

$\psi 2(x) = \sum g(n)\boldsymbol{\varphi}(2\mathrm{x}-\mathrm{n})$=$\frac{1}{12}$ $\left(\boldsymbol{\varphi}(2\mathrm{x})+\boldsymbol{\varphi}(2\mathrm{x}-4)\right)$-$\frac{1}{12}\left(\ \boldsymbol{\varphi}(2\mathrm{x}-1)+\boldsymbol{\varphi}(2\mathrm{x}-3)\right)+\frac{5}{6}\boldsymbol{\varphi}(2\mathrm{x}-2)$



پب



ب:در این قسمت میخواهیم ببینیم آیا $\psi 2(x)$ و $\varphi_2(x)$ برهم عمودند؟

کافیست ضرب داخلیشان را بررسی کنیم که اگر مساوی صفر شد یعنی متعاندند و در غیر این صورت متعامد نیستند.

$$\psi 2(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x & 0 \leq x \leq 0.5 \\ \frac{-7}{6}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{12} & 0.5 \leq x \leq 1 \\ \frac{8}{3}(x-1) - \frac{1}{2} & 1 \leq x \leq 1.5 \\ \frac{-8}{3}(x-1.5) + \frac{5}{6} & 1.5 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\int \varphi_2(x)\ \Psi 2(x) d(x) = \int_0^{0.5} \frac{1}{6}x \times x\ \mathrm{d}(x) + \int_{0.5}^{1} \left(\frac{-7}{6}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{12}\right) \times x\ \mathrm{d}(x) + \int_1^{1.5} \left(\frac{8}{3}(x-1) - \frac{1}{2}\right) \times (1 - x)\ \mathrm{d}(x) + \int_{1.5}^{2} \left(\frac{-8}{3}(x-1.5) + \frac{5}{6}\right) \times (1 - x)\ d(x)$$

$$= \frac{1}{144} - \frac{13}{144} - \frac{7}{144} - \frac{5}{144} = -\frac{1}{6}$$

مشاهده میشود که مقدار بدست آمده غیر صفر است بنابراین بر یکدیگر متعامد نیستند.

ج)در این قسمت میخواهیم $h^{\sim}$(k)و $g^{\sim}$(k) رامحاسبه کنیم:

$g^{\sim}{}_2$(k)=$(-1)^k h^*(1-k)$

برای طول محدود:

$g^{\sim}{}_2$(k)=$(-1)^k h^*(N-1-k)$

از قسمت قبل داریم:

$h_2(0)=\frac{1}{2}$, $h_2(1)=1$, $h_2(2)= \frac{1}{2}$

پس$g^{\sim}{}_2$(k) برابر میشود با :

$g^{\sim}{}_2(0)= \frac{1}{2}$ $\quad g^{\sim}{}_2(1) = -1$ $\quad g^{\sim}{}_2(2) = \frac{1}{2}$

حال به محاسبه ی $h^{\sim}$ (k) میپردازیم:

میدانیم:

$$g_2(k) = (-1)^k h^{\sim}(1\text{-}k)$$

پس:

$$h^{\sim}(1-k) = (-1)^{-k} g(k)$$

اگر تغییر متغیر *1-k=n* را در نظر بگیریم داریم:

$$h^{\sim}(n) = (-1)^{n+1} g^*(1\text{-}n)$$

پس در نهایت داریم :

$$h^{\sim}(k) = (-1)^{k+1} g^*(1\text{-}k)$$

با توجه ب طول محدود:

$$h^{\sim}{}_2(\mathrm{k}) = (-1)^{k+1} g^*{}_2(\mathrm{N\text{-}1\text{-}k})$$

با توجه به قسمت های قبل میدانیم که *:*

$$g_2(k) = [\tfrac{1}{12}\ \tfrac{-1}{2}\ \tfrac{5}{6}\ \tfrac{-1}{2}\ \tfrac{1}{12}\ ]$$

پس:

$$h^{\sim}{}_2(\mathrm{k}) = [\tfrac{-1}{12}\ \tfrac{+1}{2}\ \tfrac{-5}{6}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{-1}{12}]$$

سوال 2:

شکل کلی تابع $p_0(z) = F_0(z)H_0(z)$ که در رابطه ی $p_0(z) - p_0(-z)$=2Z^{-L} صدق میکنداز رابطه ی زیر بدست

میاید:

$$\mathbf{p_0(z)=(1+Z^{-1})^{2P} * \frac{1}{2^{2P-1}} \sum_{K=0}^{P-1} \binom{P-1+K}{K} (-1)^K Z^{-(P-1)+K} \left(\frac{1-Z^{-1}}{2}\right)^{2K}}$$

الف:برای P=2 نشان دهید که جدول زیر میتواند شامل تجزیه طیفی $H_0(z)$ و $F_0(z)$ باشد.

آیا فیلتر Daubechies رادر آن میان میبینید؟فیلتر های spline را چطور؟

فیلتر های Daubechies بای ارتوگنال هستند.برحسب مرتبه ی $H_0(z)$ و $F_0(z)$ که با Z^{-n} مشخص میشود فیلتر های مزبور را bior مینامند.مثلا نقره d (2,4)bior میباشد.

ب:برای همین نقره d نشان دهید که فیلتر h(n) در رابطه ی تعامدصدق نمیکنند.

الف:با جایگذاری p=2 در رابطه ی داده شده در صورت سوال داریم:

$p_0(z)$=$(1+\mathrm{Z}^{-1})^4 * \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{1} \binom{k+1}{k} (-1)^k z^{k-1} (\frac{1-z^{-1}}{2})^{2k}$

$p_0(z)$=$(1+\mathrm{Z}^{-1})^4 * \frac{1}{8} (\binom{1}{0} (1) z^{-1} + \binom{2}{1} (-1) z^0 \left(\frac{1-z^{-1}}{2}\right)^2)(z^{-1} \frac{-1}{2} (1-z^{-1})^2)$=

$(1+\mathrm{Z}^{-1})^4 * \frac{1}{8}\left(z^{-1} - \frac{1}{2}(1-z^{-1})^2\right) = \frac{1}{16}(1+\mathrm{Z}^{-1})^4(2z^{-1} - (1+z^{-2} - 2z^{-1}))$=

$\frac{-1}{16}(1+\mathrm{Z}^{-1})^4((z^{-1}-2)^2$-3)=$\frac{-1}{16}(1+\mathrm{Z}^{-1})^4(z^{-1}$-(2+$\sqrt{3}$))(z^{-1}+(2+$\sqrt{3}$))

میدانیم :

$p_0(z) = F_0(z)$و$H_0(z)$

پس:

با روش های مختلف میتوان این تجزیه طیفی را انجام دادکه حالات مختلف جدول زیر را تولید کنند:

a :اگر

$$H_0(z) = 1$$

درنتیجه:

$$F_0(z) = \frac{-1}{16}(1+Z^{-1})^4(2+\sqrt{3}- z^{-1})(2-\sqrt{3}-z^{-1})$$

b :اگر

$$H_0(z) = \frac{1}{2}(1+Z^{-1})^1$$

درنتیجه:

$$F_0(z) = \frac{-1}{8}(1+Z^{-1})^3(2+\sqrt{3}- z^{-1})(2-\sqrt{3}-z^{-1})$$

C :اگر

$$H_0(z) = \frac{1}{4}(1+Z^{-1})^2$$

درنتیجه:

$$F_0(z) = \frac{-1}{4}(1+Z^{-1})^2(2+\sqrt{3}- z^{-1})(2-\sqrt{3}-z^{-1})$$

d :اگر

$$H_0(z) = \frac{1}{2}(1+Z^{-1})^1(2+\sqrt{3}- z^{-1})$$

درنتیجه:

$$F_0(z) = \frac{-1}{8}(1+Z^{-1})^3(2-\sqrt{3}-z^{-1})$$

e :اگر

$$H_0(z) = \frac{+1}{8}(1+Z^{-1})^3$$

درنتیجه:

$F_0(z) = \frac{-1}{2}(1 + Z^{-1})^1(2 + \sqrt{3} - z^{-1})\left(2 - \sqrt{3} - z^{-1}\right)$

f: اگر

$H_0(z) = \frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}}(1 + Z^{-1})^2(2 + \sqrt{3} - z^{-1})$

درنتیجه:

$F_0(z) = \frac{-1\sqrt{2}}{4\sqrt{3}-1}(1 + Z^{-1})^2(2 - \sqrt{3} - z^{-1})$

g :

اگر

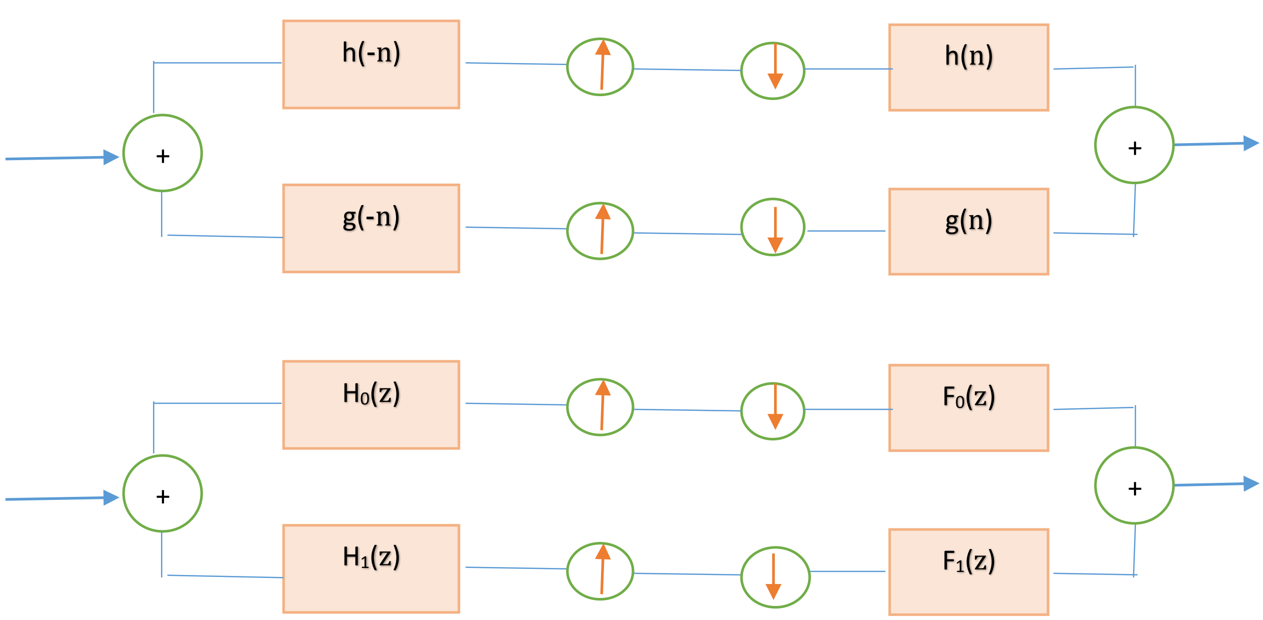
$$H_0(z) = \frac{1}{16}(1 + Z^{-1})^4$$

درنتیجه:

$F_0(z) = -(2+\sqrt{3} - z^{-1})(2 - \sqrt{3} - z^{-1})$

ب:

فیلترهایDaubechies به علت اورتوگنال بودن دارای طول زوج میباشند.در فیلترهای اورتوگنال داریم:



با مقایسه شکل ها و روابط میتوان گفت:

$H_0(z) = H(-z)$

$F_0(z) = H(z)$

برای فیلترهای اورتوگنال باید طول($H_0(z$ و$F_0(z)$ یکسان باشد. هم چنین میبینیم که $H_0(z)F_0(z)$ درجه 6 میباشند پس اگر قرار باشدطول هر دو فیلتر یکسان باشد باید دو فیلتر با طول 4 پیدا کرد.

در f مشاهده میشود که طول فیلتر ها میتواند 4 باشد و با توجه به روابط بالا داریم:

$H_0(z) = H(-z)$

$H_0(z) = \frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}}(1+\mathrm{Z}^{-1})^2(2+\sqrt{3}-z^{-1})$

بامرتب کردن وساده سازی در نهایت داریم:

$$H_0(z) = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \left(\frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)z^{-1} + \left(\frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)z^{-2} + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)z^{-3}$$

سپس $F_0(z)$ راپیدامیابیم

اگر $h_0(-n)$برابربا$f_0(n)$ باشد فیلترDaubechies است.

$F_0(z) = \frac{\sqrt{2}}{4(\sqrt{3}-1)}(1+2z^{-1}+z^{-2})(z^{-1}+\sqrt{3}-2)$

بامرتب کردن وساده سازی در نهایت داریم:

$$F_0(z) = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \left(\frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)z^{-1} + \left(\frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)z^{-2} + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)z^{-3}$$

در نهایت:

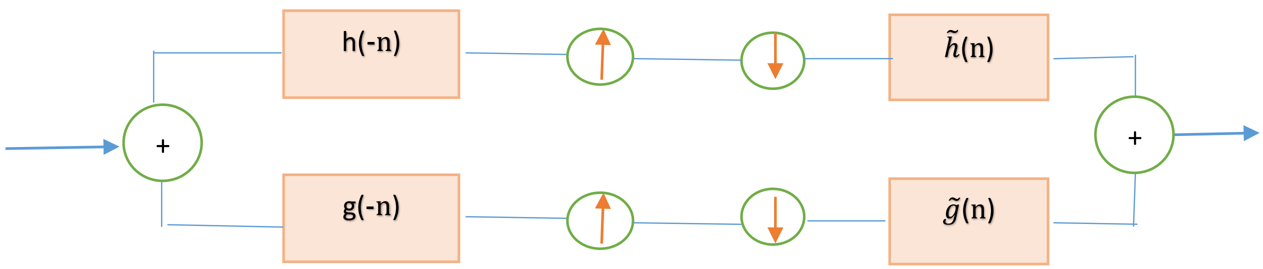
$$h_0(n)=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad \left(\frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right) \quad \left(\frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right) \quad \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)\right)$$

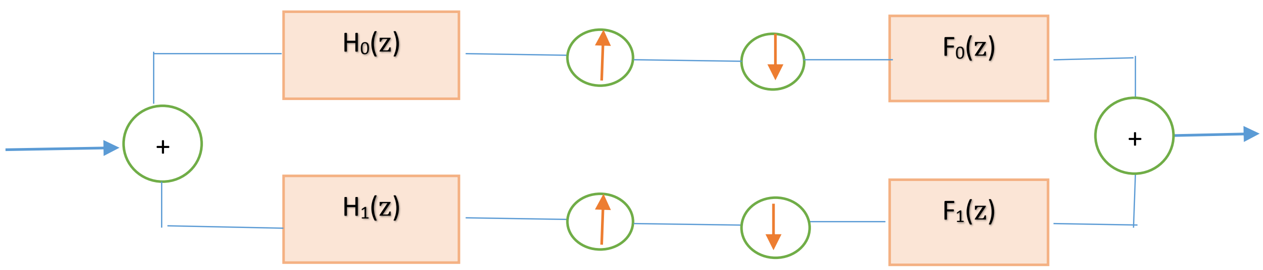
$$f_0(n)=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad \left(\frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right) \quad \left(\frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right) \quad \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)\right)$$

میبینیم که $h_0(n)$با$f_0(n)$برابر شد.پس فیلترDaubechies است

بررسی فیلتر spline :

در فیلتر spline :





با مقایسه شکل ها و روابط میتوان گفت

$h(-n) = h_0(n)$

$f_0(n) = \tilde{h}(n)$

با توجه ب درجه 6 بودن $F_0(z)$ $H_0(z)$ اگر $p_0(z)$ را ب دوفیلترتقسیم کنیم 8 نقطه بدست میاید .پس بایدspline 8 نقطه بیابیم.

درspline اگرطول hبرابر $m+1$ باشد طولgبرابر $3m-2+1$ باید باشد.

اگر m برابر 1باشد طول h برابر 2وطول g برابر 2 بدست میایدک 4 نقطه میشود.

اگر m برابر 2باشد طول h برابر3وطول g برابر 5بدست میایدک 8 نقطه میشود.

اگر m برابر 3ز طول h برابر4وطول g برابر 8بدست میایدک 12 نقطه میشود.

پس باید spline درجه2 بررسی کنیم.چون طول h برابر3وطول g برابر 5 است تجزیه طیفی c را درنظرمیگیریم.

$H_0(z) = \frac{1}{4}(1 + Z^{-1})^2$

پس

$h_0(n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$F_0(z) = \frac{-1}{4}(1 + Z^{-1})^2(2+\sqrt{3} - z^{-1})(2 - \sqrt{3} - z^{-1})$

پس

$f_0(n) = \tilde{h}(\mathrm{n}) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$

با مقایسه مقادیر بدست آمده با جدول spline متوجه میشویم ضرایب بدست آمد ه نشان‌گر spline2.2 میباشد.

$$\text{spline2.2}\begin{pmatrix} h_{-1} = \frac{\sqrt{2}}{4} & h^{\sim}_{-2} = \frac{-\sqrt{2}}{8} \\ h_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} & h^{\sim}_{-1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ h_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} & h^{\sim}_{0} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ & h^{\sim}_{1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ & h^{\sim}_{2} = \frac{-\sqrt{2}}{8} \end{pmatrix}$$

ب

برای بررسی عدم تعامد باید نشان دهیم$\sum h(n)\ \ g(n)$ برابر صفر نمیباشد.پس باید ابتدا برای bior(2,4 h ,gرا پیدا کنیم.

از قسمت قبل داریم

h(-n) =h_0(n)

f_0(n)= $\tilde{h}$(n)

پس با رابطه $g(n) = (-1)^n h^{\sim}$ (1-n) میتوان $g(n)$رایافت.

$H_0(z) = \frac{1}{2}(1 + Z^{-1})^1(2+\sqrt{3} - z^{-1})$

بامرتب کردن وساده سازی در نهایت داریم

$$H_0(z) = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{Z}^{-1} - \frac{1}{2}\mathrm{Z}^{-2}$$

h(n)= $h_0(N-1-n)$

h(n) =$\left(\frac{-1}{2} \quad \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \quad \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right) \quad \right)$

$$F_0(z) = \frac{-1}{8}(1+\mathrm{Z}^{-1})^3(2-\sqrt{3}-z^{-1})$$

بامرتب کردن وساده سازی در نهایت داریم

$$F_0(z) = \frac{-1}{8}(2-\sqrt{3}) + \frac{-1}{8}\left(\frac{5-3\sqrt{3}}{1}\right)\mathrm{Z}^{-1} + \frac{-1}{8}\left(\frac{3-3\sqrt{3}}{1}\right)\mathrm{Z}^{-2} + \frac{1+\sqrt{3}}{8}\mathrm{Z}^{-3} + \frac{-1}{8}\mathrm{Z}^{-4}$$

f$_0$(n)= $\tilde{h}$(n)= $\left(\frac{-1}{8}(2-\sqrt{3}) \quad \frac{-1}{8}\left(\frac{5-3\sqrt{3}}{1}\right) \quad \frac{-1}{8}\left(\frac{3-3\sqrt{3}}{1}\right. \quad \frac{1+\sqrt{3}}{8} \quad \frac{1}{8}\right)$

$g(n) = (-1)^n h^{\sim}$ (N-1-n)

$$g(n) = \left(\frac{1}{8} \quad \frac{-1}{8}\left(\frac{3+3\sqrt{3}}{1}\right. \quad \frac{-1}{8}\left(\frac{3-3\sqrt{3}}{1}\right. \quad \frac{+1}{8}\left(\frac{5-3\sqrt{3}}{1}\right) \quad \frac{-1}{8}(2-\sqrt{3}) \right)$$

$$\sum h(n)\ g(n) = 2-\sqrt{3}$$

مشاهده میشود برابر صفر نشد.پس عدم تعامد نشان داده شد.

سوال سه:

سه بردار پایه در فضا داده شده است میخواهیم سه بردار پایه ی اورتوگنال بدست آوریم هم چنین ضرایب تجزیه ی بردار

V=[1 2 3]را بر حسب $\{\tilde{e_1}\,\tilde{e_2}\,\tilde{e_3}\}$و$\{e_1\ e_2\ e_3\}$ بدست آورید.

$$\tilde{e_1} = [a_1\ \ a_2\ \ a_3\ ]$$

$$\tilde{e_2} = [b_1\ \ b_2\ \ b_3\ ]$$

$$\tilde{e_3} = [c\ \ c_2\ \ c_3\ ]$$

میدانیم:

$<e_i\,, e_j> \ = \delta_{i\,,j}$

پس با توجه ب رابطه ی بالا:

$e_1\ .\tilde{e_1} = a_1 = 1$

$e_2\ .\tilde{e_1}=0 \longrightarrow a_2+1=0 \longrightarrow a_2 = -1$

$e_3\ .\tilde{e_1}=0 \longrightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 0 \longrightarrow a_3 = 0$

$e_2\ .\tilde{e_2} = 1 \longrightarrow b_1 + b_2 = 1 \longrightarrow b_2 = +1$

$e_1\ .\tilde{e_2} = 0 \longrightarrow b_1 = 0$

$e_3\ .\tilde{e_2} = 0 \longrightarrow b_3 = -1$

$e_3\ .\tilde{e_3} = 1 \longrightarrow c_3 = 1$

$e_1\ .\tilde{e_3} = 0 \longrightarrow c_1 = 0$

$e_2\ .\tilde{e_3} = 0 \longrightarrow c_2 = 0$

پس در نهایت داریم :

$e_1^{\sim} = [1 \ -1 \quad 0 \ ]$

$e_2^{\sim} = [0 \quad 1 - 1 \ ]$

$e_3^{\sim} = [0 \quad 0 \quad 1 \ ]$

میدانیم :

V=$\sum < v, e_i^{\sim} > \mathrm{e_i}$

<v, $e_1^{\sim}$>=[1 2 3] $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1$

<v, $e_2^{\sim}$>=[1 2 3] $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1$

<v, $e_3^{\sim}$>=[1 2 3] $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \ 3$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ =-1× $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$