بنام خدا

تمرین سری دوم درس مباحث پیشرفته در پردازش سیگنال های دیجیتال

استاد: دکتر صدری

پروانه رشوند ۹۴۱۰۱۲۴

آرزو فرزانفر ۹۴۱۴۷۲۴

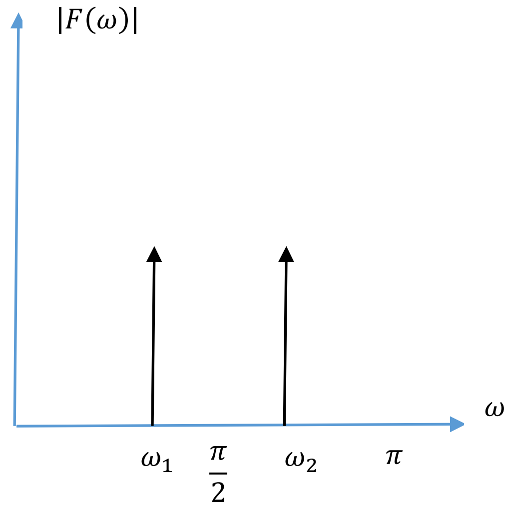
رضا سعادتی فرد ۹۴۱۱۳۹۴

تاریخ تحویل : ۹۴/۱۲/۰۹

حل سوال ۱)

الف)

- محاسبه T_s :



$$\frac{\omega_1+\omega_2}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega_1 + \omega_2 = \pi$$

از طرفی میدانیم :

$$\omega = \Omega * T_s$$

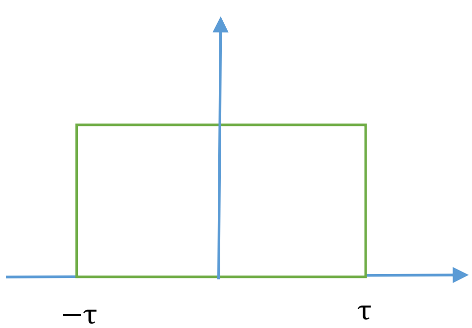
$$\omega_1 + \omega_2 = (\Omega_1+\Omega_2) * T_s \Rightarrow T_s = \frac{\pi}{\Omega_1+\Omega_2}$$

- بله نرخ نایکوئیست رعایت شده است.

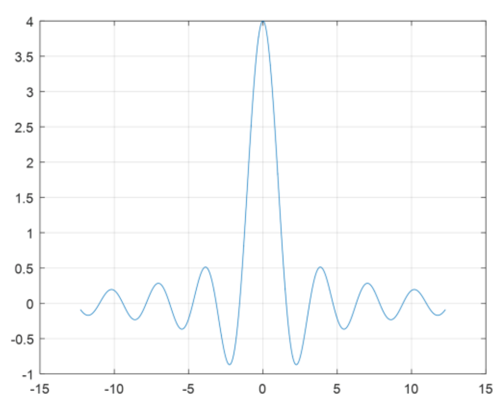
با توجه به اینکه پاسخ فرکانسی زمان گسسته در فرکانس های کمتر از π قرار گرفته و هیچ گونه الیاسینگی هم رخ نداده است می توان نتیجه گرفت که نرخ نمونه برداری نایکوئیست رعایت شده است.

ب)

با توجه به اینکه پنجره مستطیلی در حوزه زمان ، تبدیل فوریه ای به فرم $\frac{2*\sin\tau\omega}{\omega}$ می شود (شکل آن به ازای $\tau = 2$ در پایین رسم شده است).

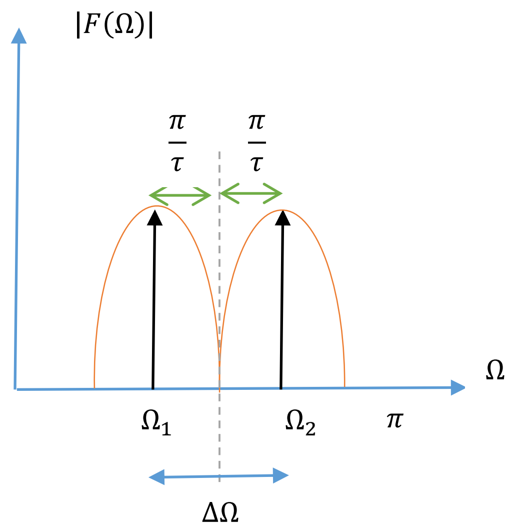


$$\overset{F}{\Rightarrow}$$



پهنای لوب اصلی تبدیل فوریه آن ، برابر $\frac{2\pi}{\tau}$ می شود

حال اگر بخواهیم پس از کانولوشن شدن سیگنال (با دو فرکانس سینوسی) با پنجره مستطیلی (که به صورت ضرب در حوزه فرکانس میشود) شاهد تداخل فرکانسی نباشیم باید τ حداقل به گونه ای انتخاب شود که پس از مدوله شدن پاسخ فرکانسی پنجره توسط دو فرکانس سینوسی تداخل رخ ندهد.



$$\Delta\Omega \geq \frac{2\pi}{\tau} \Rightarrow \frac{\tau}{2\pi} \geq \frac{1}{\Delta\Omega}$$

$$\tau \geq \frac{2\pi}{\Delta\Omega} \xrightarrow{\text{با توجه به اینکه طول پنجره } 2\tau \text{ است}} 2\tau \geq \frac{4\pi}{\Delta\Omega}$$

$$\xrightarrow{\text{حداقل طول پنجره}} 2\tau = \frac{4\pi}{\Delta\Omega}$$

ج)

در این قسمت به بررسی پنجره مستطیلی گسسته زمان می پردازیم.

فرض کنیم که پنجره با طول $2M+1$ باشد میدانیم که تبدیل فوریه آن به فرم $\frac{\sin(\frac{2\pi+1}{2}\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})}$ می باشد.

برای بدست آوردن اندازه لوب اصلی تبدیل فوریه باید محل صفر شدن تبدیل فوریه فوق را بدست آوریم(ضمنا توجه شود که تبدیل فوریه یک تابع گسسته زمان 2π پریودیک است)

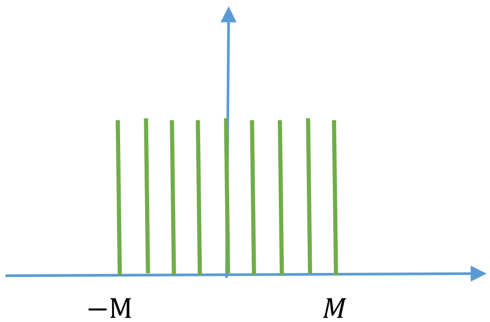
$$\sin(\frac{2M+1}{2}\omega) = 0 \Rightarrow \frac{2M+1}{2}\omega = k\pi \Rightarrow \omega = \frac{2k\pi}{2M+1}$$

$$\sin(\frac{\omega}{2}) = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{2} = k\pi \Rightarrow \omega = 2k\pi$$

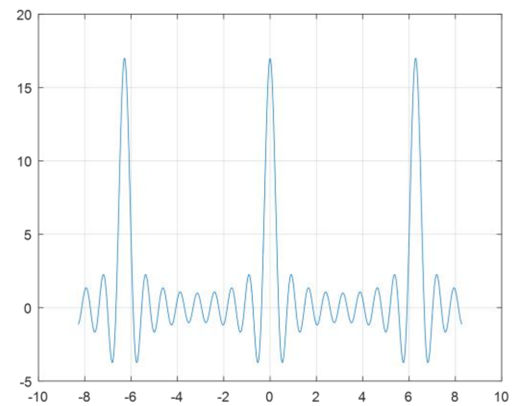
$$\xrightarrow{\text{ک م م}} \omega = \frac{2k\pi}{2M+1}$$

یعنی بجز در نقطه صفر که هر دو سینوسی صورت و مخرج مقدار صفر را میگیرند و با رفع ابهام اندازه آن برابر 2M+1 می شود در سایر ω ها (بین π تا π -) در نقاط $\omega = \frac{2k\pi}{2M+1}$ مقدار تابع صفر می شود در نتیجه اندازه لوب اصلی آن برای $\frac{2*2\pi}{2M+1}$ می شود.

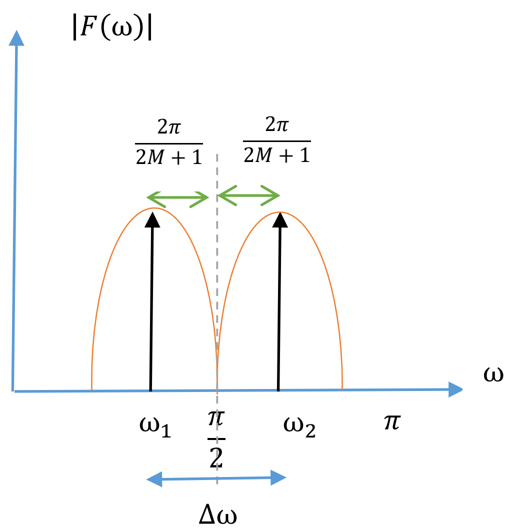
(در زیر شکل آن به ازای M=8 رشم شده است)



$$\overset{F}{\Rightarrow}$$



حال برای محاسبه حداقل فاصله برای جلوگیری از تداخل فرکانسی ، با توجه به لوب اصلی بدست آمده ، می توان روابط زیر را نوشت.



$$\Delta\omega \geq 2\times\frac{2\pi}{2M+1} \Rightarrow \frac{2M+1}{4\pi} \geq \frac{1}{\Delta\omega}$$

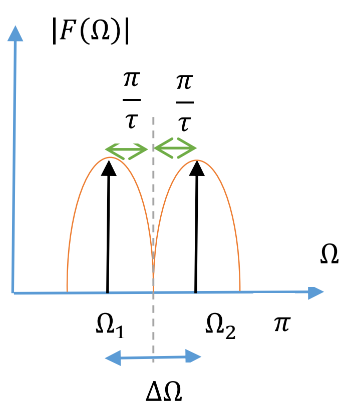
$$2M+1 \geq \frac{4\pi}{\Delta\omega} \xrightarrow{\text{با توجه به اینکه طول پنجره 2M+1 است}} 2M+1 \geq \frac{4\pi}{\Delta\omega}$$

$$\xrightarrow{\text{حداقل طول پنجره}} 2M+1 = \frac{4\pi}{\Delta\omega}$$

د)

با استفاده به نتایج بدست آمده در بند "ب" و بند "ج" به حل این مسئله می پردازیم.

از بند "ب" میدانیم که برای عدم تداخل در پاسخ فرکانسی سیگنال پیوسته باید حداقل طول پنجره به صورت زیر بیان گردد.



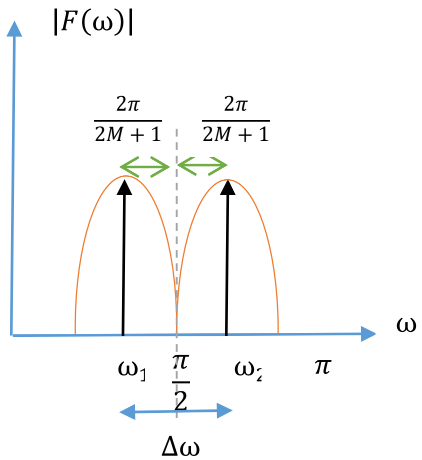
اگر طول پنجره زمان پیوسته را 2τ و مطابق خواسته سوال مطمئن شویم که مطابق شکل روبرو تدااخل فرکانسی در آن رخ نمی دهد باید مطابق حل بیان شده در قسمت "ب" رابطه زیر برقرار باشد

$$2\tau \geq \frac{4\pi}{\Delta\Omega}$$

حال ما از این پنجره با طول 2τ نمونه برداری میکنیم و فرض میکنیم پنجره بدست آمده دارای طول N' است.

$$2\tau \geq \frac{4\pi}{\Delta\Omega} \xrightarrow{T_S \text{ نمونه برداری با نرخ}} N' \geq \frac{4\pi}{\Delta\Omega\times T_S} \xrightarrow{\Delta\omega=\Delta\Omega\times T_S} N' \geq \frac{4\pi}{\Delta\omega} \qquad (*)$$

از طرفی با توجه به حل قسمت "ج" میدانیم برای اطمینان از عدم تداخل فرکانسی در حالت گسسته رابطه زیر برقرار است.



$$2M+1 \geq \frac{4\pi}{\Delta\omega} \qquad (**)$$

با مقایسه روابط (*) و (**) می توان نتیجه گرفت که $2M+1=N'$ است.

در نتیجه میتوان بیان کرد که پنجره زمان پیوسته و زمان گسسته با هم هماهنگ هستند.

حل سوال ۲)

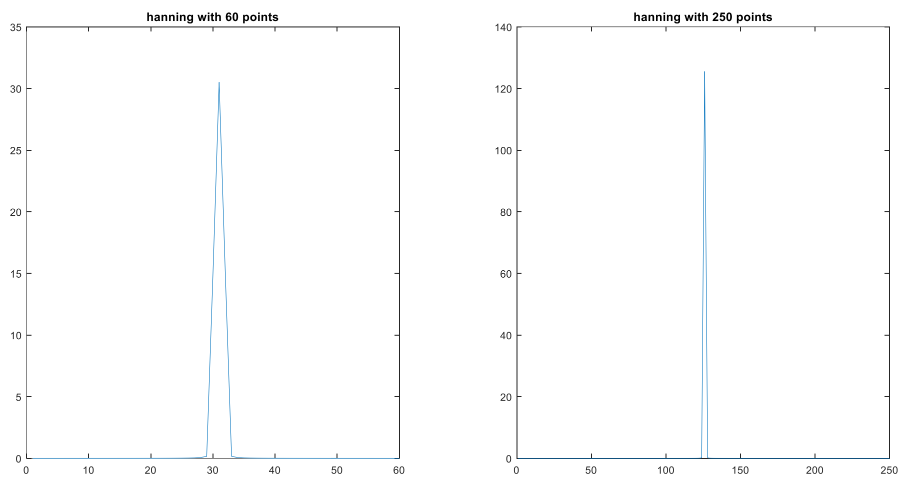
ب) برای بهبود تفکیک دو حالت را باید بررسی کرد ۱-بهبود تفکیک فرکانسی ۲- بهبود تفکیک زمانی

برای ایجاد تغییر درقدرت تفکیک ، از دو روش **تغییر طول پنجره** و **تغییر در نوع پنجره** استفاده میکنیم در ادامه به بررسی اثر این دو تغییر می پردازیم.

- **تغییر طول پنجره**:

مهم ترین راه برای بهبود تفکیک فرکانسی ، افزایش طول پنجره می باشد . چون با افزایش طول پنجره ، پهنای لوب اصلی آن در حوزه فرکانس کاهش می یابد و در نتیجه هنگامی که پنجره با سیگنال در حوزه فرکانس کانولوشن میشود رفتار شبیه تری به تابع ضربه واحد(حالت ایده آل برای تفکیک فرکانسی) خواهد داشت.

در زیر پاسخ فرکانسی دو پنجره hanning باطول های متفاوت 2M+1=60 و 2M+1=250 رسم شده است.



همانطور که در fft رسم شده مربوط به دو پنجره مشخص است پنجره سمت راست که طول ۲۵۰ نقطه ای دارد دارای قدرت تفکیک فرکانسی بهتر(دارای پهنای باند موثر کمتر) نسبت به پنجره با طول کمتر می باشد.

توجه داشته باشیم که هر چه طول پنجره افزایش یابد اندازه گین آن نیز افزایش می یابد(این نکته در دو شکل فوق مشخص است، در حل سوال ۱ قسمت "ج" نیز نشان دادیم که اندازه گین پنجره مستطیلی متناسب با طول پنجره و برابر 2M+1 میگردد که البته در اینجا چون ما از پنجره hanning برای مقایسه استفاده کردیم مقدار گین 2M+1 نمی شود اما مشهود است که با افزایش طول پنجره گین افزایش یافته است).

بر اساس تعبیر اول و دوم بیان شده برای ASTFT در درس ، می توان روابط مشابه را درحالت گسسته بدست آورد.

تعبیر اول :

$$X(n,k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]w[n-m]e^{-\frac{j2\pi}{N}km} \quad \Rightarrow \quad X(n,k)=e^{-\frac{j2\pi}{N}kn}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]w[n-m]e^{-\frac{j2\pi}{N}k(n-m)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{X(n,k)= e^{-\frac{j2\pi}{N}kn}\,(x[n]*w[n])}$$

بر اساس این تعبیر با توجه به ضرب در کانولوشن در حوزه زمان ، برای ساخت DSTFT در صورتی ما میتوانیم تغییرات زمانی را به خوبی شاهد باشیم و قدرت تفکیک مناسب داشته باشیم که پهنای پنجره ما به اندازه کافی کوچک باشد.

تعبیر دوم:

$$X(n,k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]w^*[n-m]e^{-\frac{j2\pi}{N}km} \quad \Rightarrow \quad X(n,k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m](w[n-m]e^{\frac{j2\pi}{N}km})^*$$

$$\Rightarrow \quad X(n,k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m](g[m])^*$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفی بر اساس قضیه ی پارسوال می دانیم}} \quad X(n,k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m](g[m])^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\eta)\hat{g}^*(\eta) \qquad (*)$$

برای محاسبه $\hat{g}(\eta)$ می توان نوشت:

$$\hat{g}(\eta)= \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[n-m]e^{\frac{j2\pi}{N}km}e^{-\eta m} \quad \xrightarrow{n-m=r} \quad \hat{g}(\eta)= \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[r]e^{\frac{j2\pi}{N}k(n-r)}e^{-j\eta(n-r)}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{g}(\eta)=e^{j(\frac{2\pi}{N}k-r)n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[r]e^{-jr(\frac{2\pi}{N}k-\eta)}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{g}(\eta)=e^{j\left(\frac{2\pi}{N}k-\eta\right)n}\hat{w}(\frac{2\pi}{N}k-\eta) \qquad (**)$$

$$\xrightarrow{(**) \text{ و } (*)} \quad X(n,k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\eta)(e^{j\left(\frac{2\pi}{N}k-\eta\right)n}\hat{w}(\frac{2\pi}{N}k-\eta))^*$$

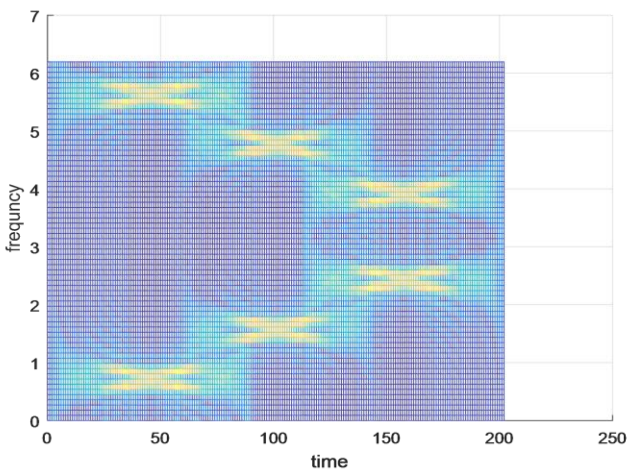
$$\Rightarrow \quad X(n,k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\eta)\hat{w}^*(\frac{2\pi}{N}k-\eta)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k-\eta\right)n}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{X(n,k)=\frac{1}{2\pi}\hat{x}\left(\frac{2\pi}{N}k\right) * \hat{w}^*(\frac{2\pi}{N}k)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

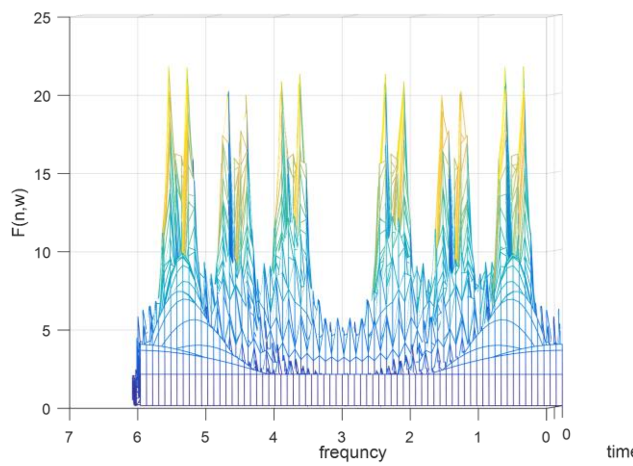
با توجه به رابطه بدست آمده از تعبیر دوم ، DSTFT حاصل کانولشن تبدیل فوریه گسسته زمان x[n] و تبدیل فوریه پنجره w[n] است که برای داشتن تفکیک فرکانسی مناسب نیازمند باید پهنای فرکانسی تبدیل فوریه پنجره $\hat{w}(\omega)$ کوچک باشد که این امر مستلزم افزایش طول پنجره است.

در زیر DSTFT سیگنال داده شده رو با یک پنجره مستطیلی یک بار با طول ۳۵ نقطه و بار دیگر با طول ۲۰۰ نقطه رسم کرده ایم.

rectwin window - 35 points

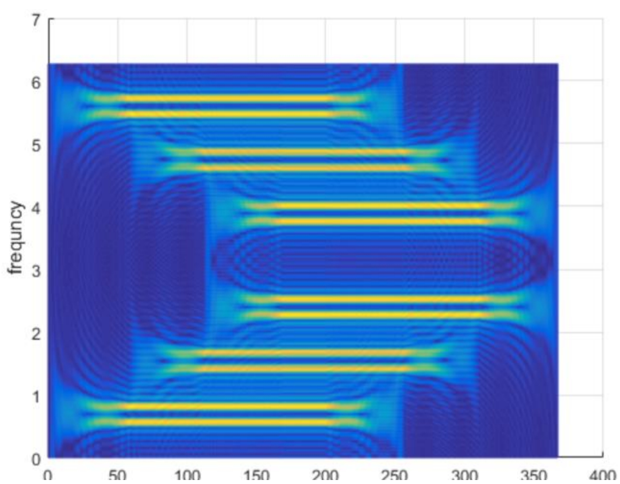


نمودار Frequency بر حسب Time

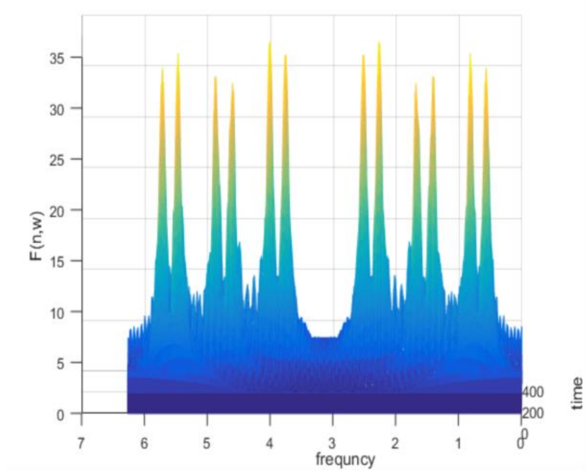


نمودار |F(n,w)|بر حسب Frequency

rectwin window - 200 points



نمودار Frequency بر حسب Time

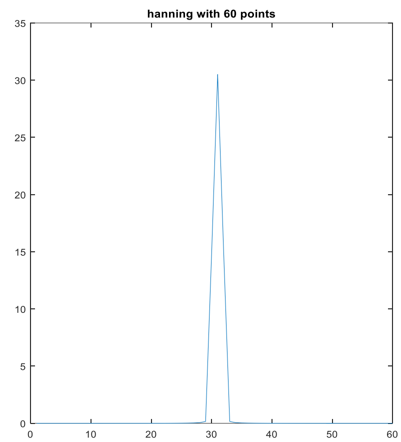


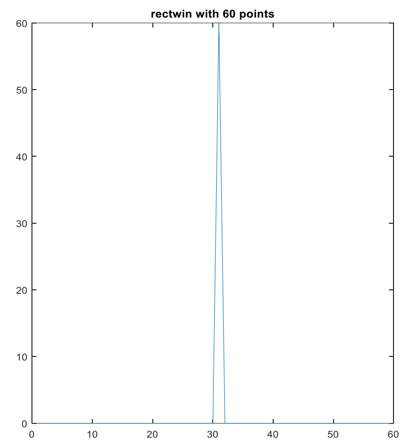
نمودار |F(n,w)|بر حسب Frequency

در شکل های فوق مشخص است که با افزایش طول پنجره ، بهبود تفکیک فرکانسی(در پنجره ۲۰۰ نقطه ای فرکانس ها به خوبی از هم تمییز داده میشوند) ، کاهش قدرت تفکیک زمانی(در پنجره ۲۰۰ نقطه ای مشاهده میکنیم که در یک زمان خاص شاهد هر ۶ فرکانس هستیم اما در پنجره ۳۵ نقطه ای، تفکیک زمانی به خوبی انجام شده است) و به علت افزایش گین پنجره (با افزایش طول پنجره) ، افزایش گین DSTFT را شاهد هستیم.

- **تغییر نوع پنجره**:

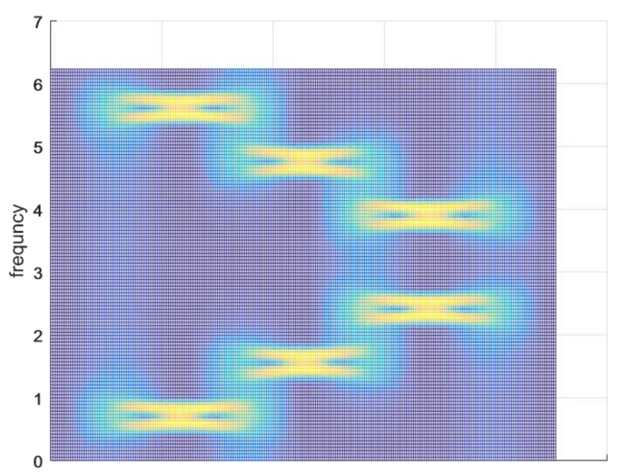
یکی از راه های دیگری که میتوان برای بهبود تفکیک در فرکانس انجام داد تغییر نوع پنجره است. هرچه پنجره از مستطیلی بودن فاصله بگیرد(نرم تر شود) لوب اصلی آن پهن تر میشود و این پهن شدن لوب اصلی باعث کاهش قدرت تفکیک فرکانسی میگردد.
توسط نرم افزار متلب ، پاسخ فرکانسی دو پنجره hanning و rectwin را به ازای تعداد نقاط برابر (۶۰) رسم کردیم.



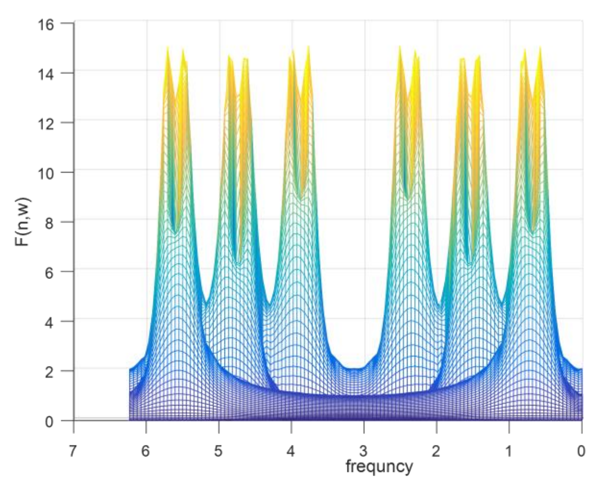


شکل سمت راست مربوط به پنجره مستطیلی و شکل سمت چپ پاسخ فرکانسی پنجره hanning با طول برابر می باشند.
همان طور که مشاهده می شود پنجره مستطیلی دارای لوب اصلی با پهنای فرکانسی کمتری می باشد.
در زیر شکل DSTFT مربوط به دو پنجره hanning و rectwin با طول ۶۰ نقطه را مشاهده میکنیم همانطور که انتظار میرفت ، پنجره مستطیلی با طول یکسان با پنجره hannning ، به علت پهنای لوب اصلی کمتر قدرت تفکیک فرکانسی بهتری دارد.

Hanning window -60 points

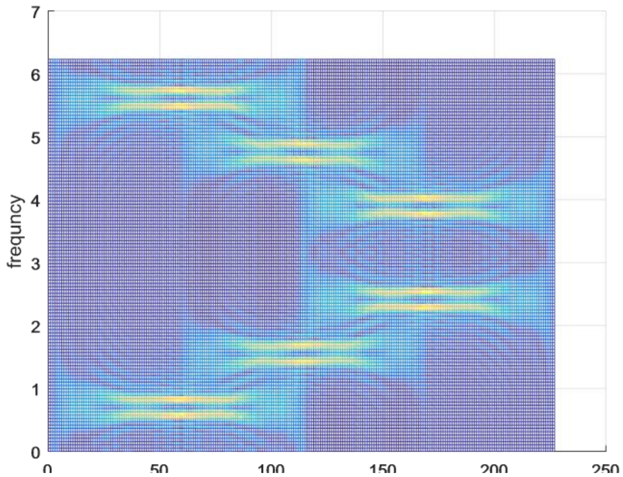


نمودار Frequency بر حسب Time

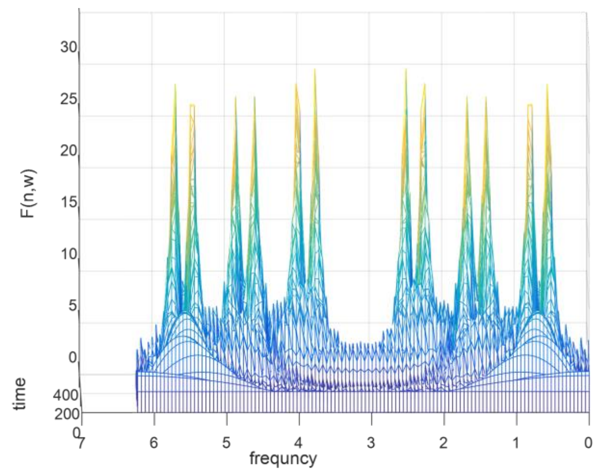


نمودار |F(n,w)| بر حسب Frequency

rectwin window -60 points



نمودار Frequency بر حسب Time



نمودار |F(n,w)| بر حسب Frequency

حل سوال ۳)

با استفاده از مفاهیم سری فوریه گسسته برای توابع متناوب به حل این مساله می پردازیم. با توجه به اینکه سیگنال $\sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n-rN)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب N است. می توان روابط زیر را نوشت:

$$\mathrm{x}[\mathrm{n}] = \sum_{k=<N>} a_k\, e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \; (*) \;\rightarrow\; \sum_{k=0}^{N-1} a_k\, e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

حال با فرض $\mathrm{x}[\mathrm{n}] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n-rN)$ ، a_k مربوط به آن را محاسبه میکنیم.

$$\mathrm{x}[\mathrm{n}] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n-rN) \quad\Rightarrow\quad a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$\Rightarrow\quad a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \delta[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$\Rightarrow\quad a_k = \frac{1}{N}\left(1\times e^{-j\frac{2\pi}{N}\times 0\times k}\right)$$

$$\Rightarrow\quad a_k = \frac{1}{N}$$

طبق رابطه (*) داریم که:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n-rN) = \sum_{k=<N>} a_k\, e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$\xRightarrow{a_{k=\frac{1}{N}}} \quad \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n-rN) = \frac{1}{N}\times\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad\Rightarrow\quad \boxed{N\times\sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n-rN) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk}}$$