بسمه

تکلیف سری چهارم مباحث ویژه در دی اس پی

استاد:جناب آقای دکتر صدری

پروانه رشوند(۹۴۱۰۱۲۴)

رضا سعادتی فرد (۹۴۱۱۳۹۴)

آرزوفرزانفر(۹۴۱۴۷۲۴)

تاریخ تحویل:۹۵/۱/۱۵

سوال یک:الف)

میخواهیم نشان دهیم دنباله $\{2^{\frac{j}{2}}\Psi_H(2^j t-m)\}$ برای هر مقدار دلخواه j ارتونرمال است:

ب)میخواهیم نشان دهیم:

$$<2^{\frac{j}{2}}\Psi_H(2^j t-m) و 2^{\frac{k}{2}}\Psi_H(2^k t-n)>=\delta_{j,k}.\delta_{m,n}$$

حل:

الف:

برای اینکه نشان دهیم یک دنباله اورتونرمال است اولا باید نشان دهیم دارای نرم یک میباشد ثانیا هر بردار دلخواه از آن دو به دو بر هم عمودند که به صورت زیر نشان میدهیم:

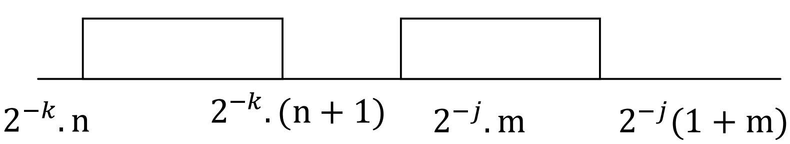
$$\left\|2^{\frac{j}{2}}\Psi_H\left(2^j t-m\right)\right\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left|2^{\frac{j}{2}}\Psi_H\left(2^j t-m\right)\right|^2 dt=\int_{-\infty}^{\infty}2^{\mathrm{j}}\,\Psi_H\left(2^j t-m\right)^2 dt=$$

$2^j t-m=0 \longrightarrow t=2^{-j}.m$ $\qquad$ $2^k t-n=0 \longrightarrow t=2^{-k}.n$

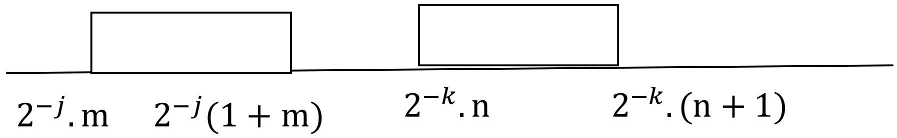
$2^j t-m=1 \longrightarrow t=2^{-j}(1+m)$ $\qquad$ $2^k t-n=1 \longrightarrow t=2^{-k}.(n+1)$

حالات مختلف را ب ازای:m وn های متفاوت بررسی میکنیم:

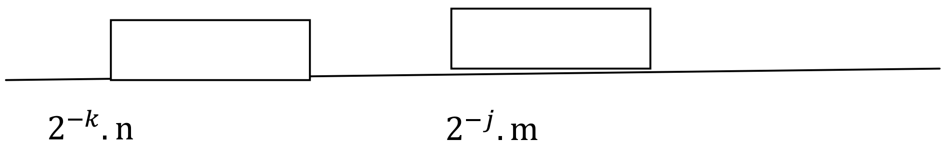
$1{:}m<n,j<k \longrightarrow A=0$



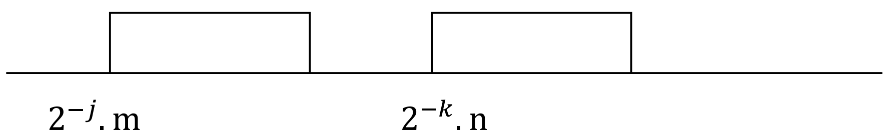
$2{:}m<n,j>k \longrightarrow A=0$



3:m>n,j<k ⟶ A=0



4:m>n,j>k ⟶ A=0



5:m=n,j=k ⟶ A=0

6:m=n,j=k ⟶ A=0

فقط در حالتی m=n,j=k است دو نمودار روی هم افتاده وحاصل یک میشود.

A=$\delta_{j,k}.\delta_{m,n}$

سوال دو:الف)ضرایب $f_1(\mathrm{t})$ در v_1 وشکل $f_1(\mathrm{t})$ رابرحسب زمان رسم کنید.

C_{0k}=1/$\sqrt{2}$[3,,8,21,5,0,-18,-7,-3]

d_{0k}=1/$\sqrt{2}$[-1,-2,-5,1,2,-8,-1,-1]

$$C_{0k}=\frac{C_{1,2k}+C_{1,2k+1}}{\sqrt{2}} \qquad d_{0k}=\frac{C_{1,2k}-C_{1,2k+1}}{\sqrt{2}}$$

$$C_{1,0}+C_{1,1}=3 \longrightarrow C_{1,0}=1\ ,C_{1,1}=2$$
$$C_{1,0}-C_{1,1}=-1$$

$$C_{1,2}+C_{1,3}=8 \longrightarrow C_{1,2}=3\ ,C_{1,3}=5$$
$$C_{1,2}-C_{1,3}=-2$$

$$C_{1,4}+C_{1,5}=21 \longrightarrow C_{1,4}=8\ ,C_{1,5}=13$$
$$C_{1,4}-C_{1,5}=-5$$

$$C_{1,6}+C_{1,7}=5 \longrightarrow C_{1,6}=3\ ,C_{1,7}=2$$
$$C_{1,6}-C_{1,7}=1$$

$$C_{1,8}+C_{1,9}=0 \longrightarrow C_{1,8}=1\ ,C_{1,9}=-1$$
$$C_{1,8}-C_{1,9}=2$$

$C_{1,10} + C_{1,11}$=-18 $\quad\quad C_{1,10} = -13\ , C_{1,11} = -5$

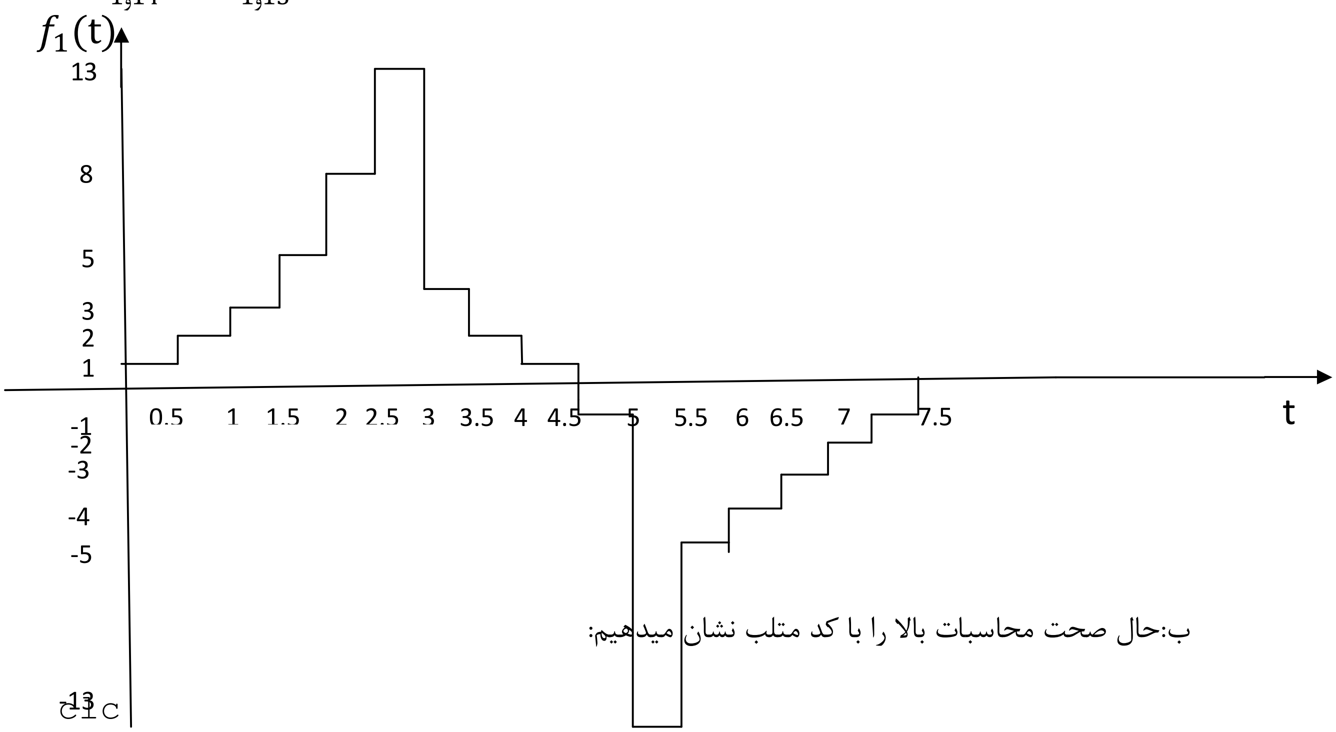
$C_{1,10} - C_{1,11}$=-8

$C_{1,12} + C_{1,13}$=-7 $\quad\quad C_{1,12} = -4\ , C_{1,13} = -3$

$C_{1,12} - C_{1,13}$=-1

$C_{1,14} + C_{1,15}$=-3 $\quad\quad C_{1,14} = -2\ , C_{1,15} = -1$

$C_{1,14} - C_{1,15}$=-1



ب:حال صحت محاسبات بالا را با کد متلب نشان میدهیم:

```
clc
clear
close all
%%%%%%%%%%%%%%prob 2
c_0=1/sqrt(2).*[3 8 21 5 0 -18 -7 -3];
d_0=1/sqrt(2).*[-1 -2 -5 1 2 -8 -1 -1];
C=[c_0 d_0];
L=[8 8 16];
```

```
% a0=waverec(c_0k,d0_k,'db1');
a1=waverec(C,L,'db1');
```

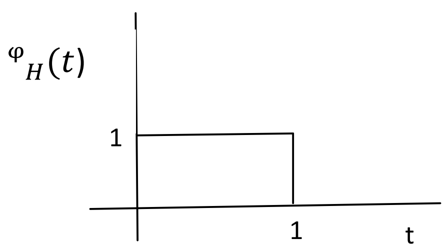
با اجرای کد بالا در متلب مشاهده میکنیم که a1دقیقا برابر همان ضرایبی است که به صورت دستی ضرایب

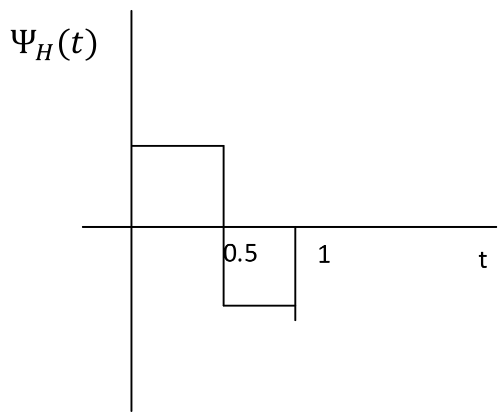
دستی محاسبه کردیم.یعنی:

a1=[1 2 3 5 8 13 3 2 1 -1 -13 -5 -4 -3 -2 -1]

ج:در این قسمت میخواهیم نشان دهیم که:

$$f_1(t)=\sum_{k=0}^{7} c_{0k}\, \varphi_H(t-k)+ \sum_{k=0}^{7} d_{0k}\, \varphi_H(t-k)$$





if k is even $\longrightarrow$ k=2l $\longrightarrow$

$$\varphi_H(2t-k)= \varphi_H(2t-2l)=0.5(\varphi_H(t-l)+\Psi_H(t-l))$$

$$f_1(t)= \sum c_{1k}\sqrt{2}\ \ \varphi_H(2t-2l)$$

if k is odd $\longrightarrow$ k=2l +1 $\longrightarrow$

$\varphi_H(2t-k)=\varphi_H(2t-(2l+1))=0.5(\varphi_H(t-l)-\Psi_H(t-l))$

$f_1(\mathrm{t})= c_{1,0}\sqrt{2}\,\varphi_H(2t)+ c_{1,1}\sqrt{2}\,\varphi_H(2t-1)+ c_{1,2}\sqrt{2}\,\varphi_H(2t-$

$2)+ c_{1,3}\sqrt{2}\,\varphi_H(2t-3)+ c_{1,4}\sqrt{2}\,\varphi_H(2t-4)+ \ldots+c_{1,15}\sqrt{2}\,\varphi_H(2t-15)=$

$\sqrt{2}\,\varphi_H(2t)+ 2\sqrt{2}\,\varphi_H(2t-1)+ 3\sqrt{2}\,\varphi_H(2t-2)+ 5\sqrt{2}\,\varphi_H(2t-$

$3)+ 8\sqrt{2}\,\varphi_H(2t-4)+13\sqrt{2}\,\varphi_H(2t-5)+3\sqrt{2}\,\varphi_H(2t-6) + 2\sqrt{2}\,\varphi_H(2t-$
$7)+$

$\sqrt{2}\,\varphi_H(2t-8)-\sqrt{2}\,\varphi_H(2t-9)- 13\sqrt{2}\,\varphi_H(2t-10)-5\sqrt{2}\,\varphi_H(2t-11)-$
$4\sqrt{2}\,\varphi_H(2t-12) - 3\sqrt{2}\,\varphi_H(2t-13)- 2\sqrt{2}\,\varphi_H(2t-14) - \sqrt{2}\,\varphi_H(2t-$
$15)=$

$\frac{\sqrt{2}}{2}(\varphi_H(t)+\Psi_H(t)) + \sqrt{2}\,(\varphi_H(t)-\Psi_H(t))+ \frac{3\sqrt{2}}{2}(\varphi_H(t-1)+\Psi_H(t-1)) +$

$\frac{5\sqrt{2}}{2}(\varphi_H(t-1)-\Psi_H(t-1)) + \frac{8\sqrt{2}}{2}(\varphi_H(t-2)+\Psi_H(t-2)) + \frac{13\sqrt{2}}{2}(\varphi_H(t-$
$2)-\Psi_H(t-2))\ )+ \frac{3\sqrt{2}}{2}(\varphi_H(t-3)+\Psi_H)+ \Psi_H(t-3)) + 2\frac{\sqrt{2}}{2}(\varphi_H(t-3)-$
$\Psi_H(t-3))+ \frac{\sqrt{2}}{2}(\varphi_H(t-4)+\Psi_H(t-4)) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\varphi_H(t-4)-\Psi_H(t-$
$4))- \frac{13\sqrt{2}}{2}(\varphi_H(t-5)-\Psi_H((t-5))+ - \frac{5\sqrt{2}}{2}(\varphi_H(t-5)-\Psi_H((t-5))-$
$\frac{4\sqrt{2}}{2}(\varphi_H(t-6)-\Psi_H((t-6))-$

$\frac{3\sqrt{2}}{2}(\varphi_H(t-6)-\Psi_H((t-6))- \frac{2\sqrt{2}}{2}(\varphi_H(t-7)+\Psi_H((t-7)) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\varphi_H(t-7)-$
$\Psi_H((t-7))= \frac{3}{\sqrt{2}}\varphi_H(t)-\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_H(t)+\frac{8}{\sqrt{2}}\varphi_H(t-1)-\frac{2}{\sqrt{2}}\Psi_H((t-1)+\frac{21}{\sqrt{2}}\varphi_H(t-$
$2)\frac{5}{\sqrt{2}}\Psi_H(t-2)+ \frac{5}{\sqrt{2}}\varphi_H(t-3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_H(t-3) + 0\varphi_H(t-4)+\frac{2}{\sqrt{2}}\Psi_H(t-$
$4) - \frac{18}{\sqrt{2}}\varphi_H(t-5) -\frac{8}{\sqrt{2}}\Psi_H(t-5) - \frac{7}{\sqrt{2}}\varphi_H(t-6)- \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_H(t-6) -$
$\frac{3}{\sqrt{2}}\varphi_H(t-7)-$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_H(t-7)$

$f_1(\mathrm{t})=\sum_{k=0}^{7} c_{0k}\,\varphi_H(t-k)+ \sum_{k=0}^{7} d_{0k}\,\Psi_H(t-k)$

در این قسمت میخواهیم ضرایب تجزیه‌ی $f_1(\mathrm{t})$ را در v_{-1}وw_{-1}وسپس شکل دوموج $f_1(\mathrm{t})$ را **در**

v_{-1}وe_{-1}رابدست آورید ونشان میدهیم که این دو موج بر هم عمودند.

v_{-1}=span$\{\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_H\left(\frac{t}{2}-k\right)$

$f_{-1}(\mathrm{t})=\sum c_{-1,k}\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_H\left(\frac{t}{2}-k\right)$

میدانیم:

$$c_{-1,k}==\frac{C_{0,2k}+\ C_{0,2k+1}}{\sqrt{2}}$$

$$d_{-1,k}==\frac{C_{0,2k}-\ C_{0,2k+1}}{\sqrt{2}}$$

$$c_{-1,0}==\frac{C_{0,0}+\ C_{0,1}}{\sqrt{2}}\quad =11$$

$$c_{-1,1}==\frac{C_{0,2}+\ C_{0,3}}{\sqrt{2}}\quad =13$$

$$c_{-1,2}==\frac{C_{0,4}+\ C_{0,5}}{\sqrt{2}}\quad =-9$$

$$c_{-1,3}==\frac{C_{0,6}+\ C_{0,7}}{\sqrt{2}}\quad =-5$$

$$d_{-1,0}==\frac{C_{0,0}-\ C_{0,1}}{\sqrt{2}}\quad =-2.5$$

$$d_{-1,1}==\frac{C_{0,2}-\ C_{0,3}}{\sqrt{2}}\quad =8$$

$$d_{-1,2}==\frac{C_{0,4}-\ C_{0,5}}{\sqrt{2}}\quad =9$$

$$d_{-1,3}==\frac{C_{0,6}-\ C_{0,7}}{\sqrt{2}}\quad =2$$

f_{-1}(t)= $\sum c_{-1,k}\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_H\left(\frac{t}{2}-k\right)$=$\frac{11}{2\sqrt{2}}\varphi_H\left(\frac{t}{2}\right)$+$\frac{13}{\sqrt{2}}\varphi_H\left(\frac{t}{2}-1\right)$-$\frac{9}{\sqrt{2}}\varphi_H\left(\frac{t}{2}-2\right)$-$\frac{5}{\sqrt{2}}\varphi_H\left(\frac{t}{2}-3\right)$-

e_{-1}(t)= $\sum d_{-1,k}\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_H\left(\frac{t}{2}-k\right)$=-2.5$\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_H\left(\frac{t}{2}\right)$+8$\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_H\left(\frac{t}{2}-1\right)$+9$\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_H\left(\frac{t}{2}-2\right)$-2 $\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_H\left(\frac{t}{2}-3\right)$

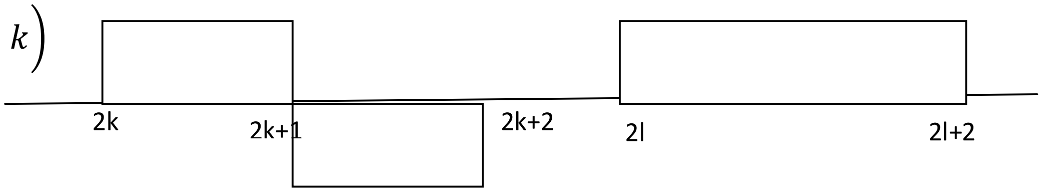
v_{-1}(t)=span($\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_H\left(\frac{t}{2}-k\right)$)

w_{-1}(t)=span($\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_H\left(\frac{t}{2}-k\right)$)

حال میخواهیم نشان دهیم که این دو موج بر هم عمودند.

$<\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_H\left(\frac{t}{2}-k\right),\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_H\left(\frac{t}{2}-3\right)>=0$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_H\left(\frac{t}{2}-k\right)$



بسیار واضح است که در همه حالات حتی اگرk=lباشد:

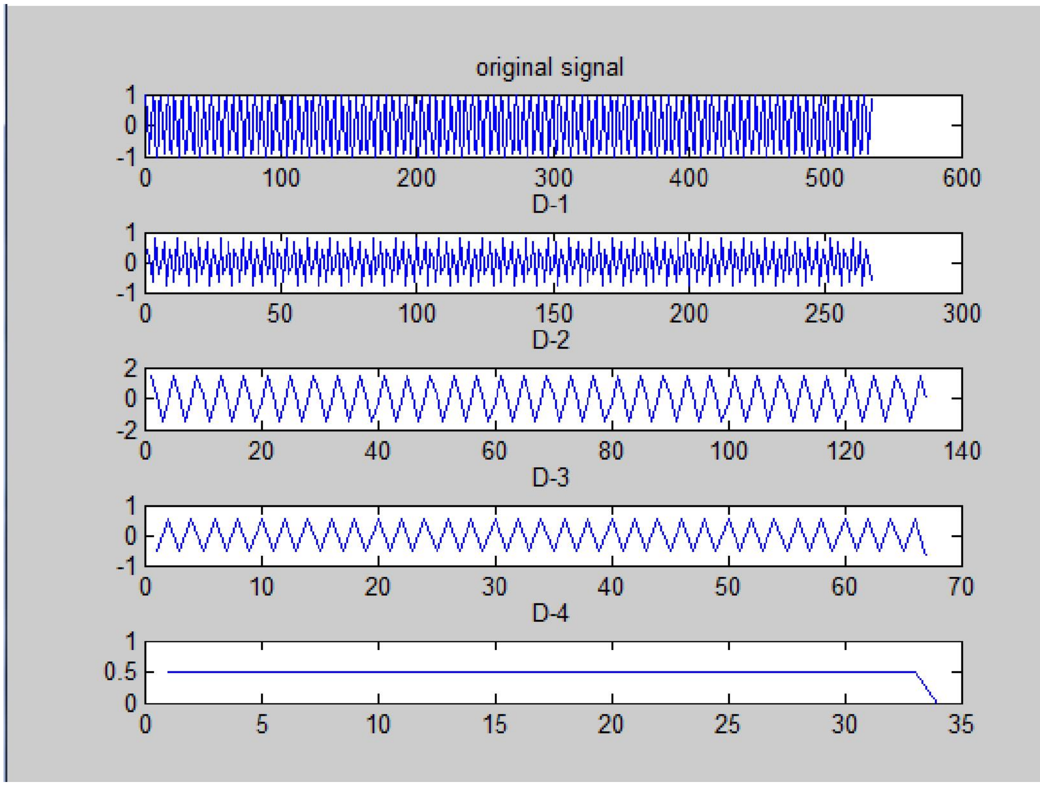
$<\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_H\left(\frac{t}{2}-k\right),\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_H\left(\frac{t}{2}-3\right)>=0$

:۳

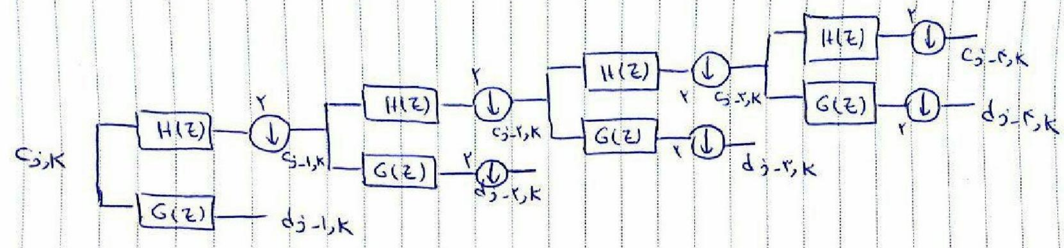
در این قسمت میخواهیم از یک موج به f(t)=cos2π*50t نرخ با $\frac{3}{800}$ نمونه برداری کنیم.نمونه ها به صورت

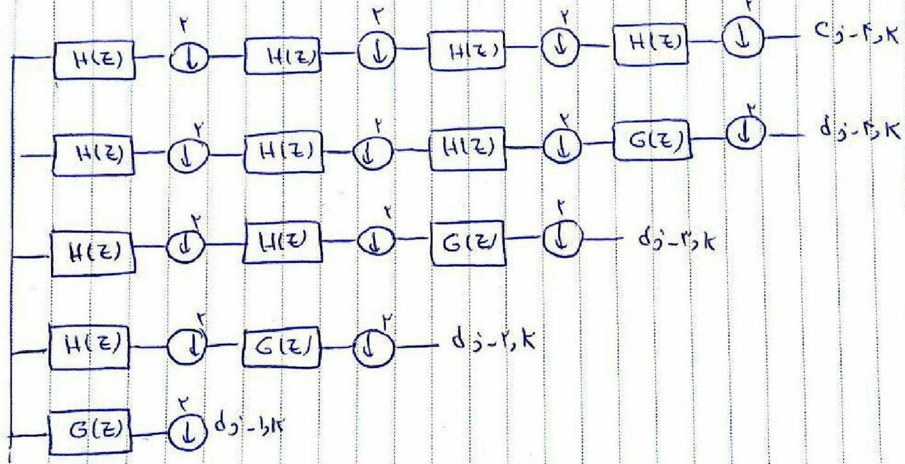
عنوان f(t) در $v_{0(t)}$ تلقی .میشوند دنباله راباموجک Haar تا چهار مرحله تجزیه میکنیم.با استفاده از ضرایب

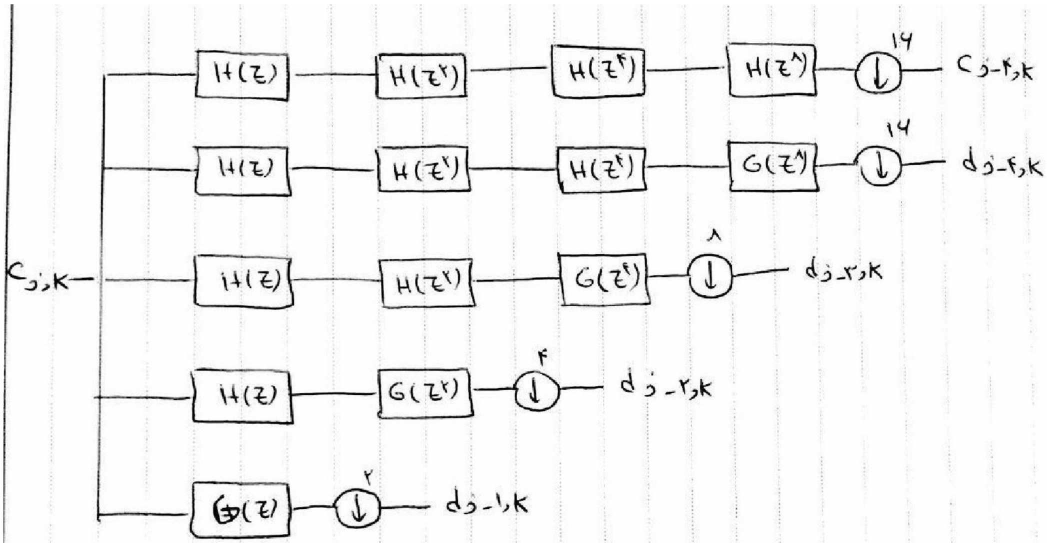
کد wavedec ضرایب $d_{-4},\mathrm{k}\ d_{-3},\mathrm{k}\ d_{-2},\mathrm{k}\ d_{-1},\mathrm{k}$ را رسم میکنیم:



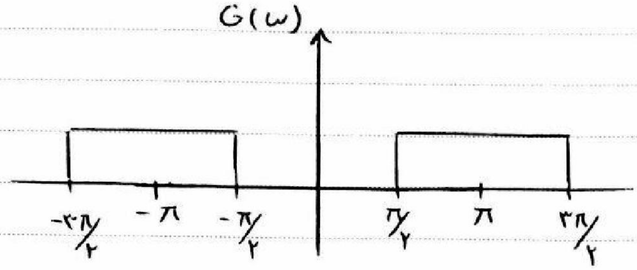
از تیوری ما نتایج زیر را برای مشخصه های فرکانسی بدست آوردیم:


c j,k
H(z)
G(z)
۲
c j-1,k
d j-1,k
c j-2,k
d j-2,k
c j-3,k
d j-3,k
c j-4,k
d j-4,k

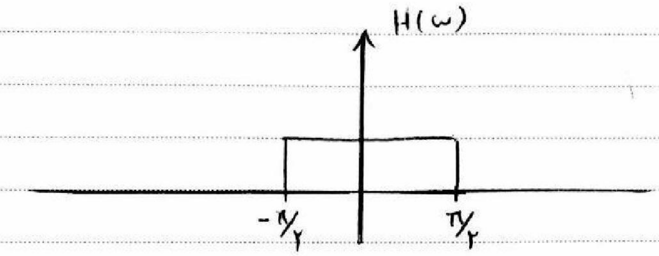

H(z)
G(z)
۲
c j-4,k
d j-4,k
d j-3,k
d j-2,k
d j-1,k

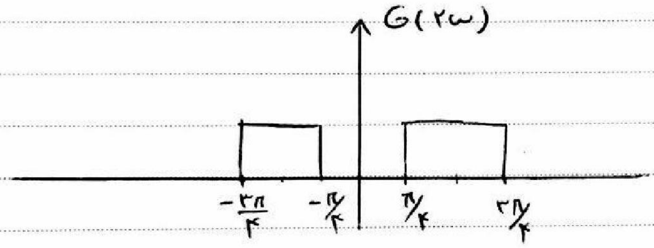

c j,k
H(z)
H(z۲)
H(z۴)
H(z۸)
G(z۸)
G(z۴)
G(z۲)
G(z)
۱۶
۸
۴
۲
c j-4,k
d j-4,k
d j-3,k
d j-2,k
d j-1,k

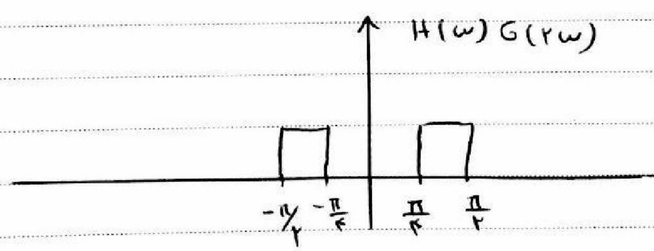
$d_{j-1,k}$



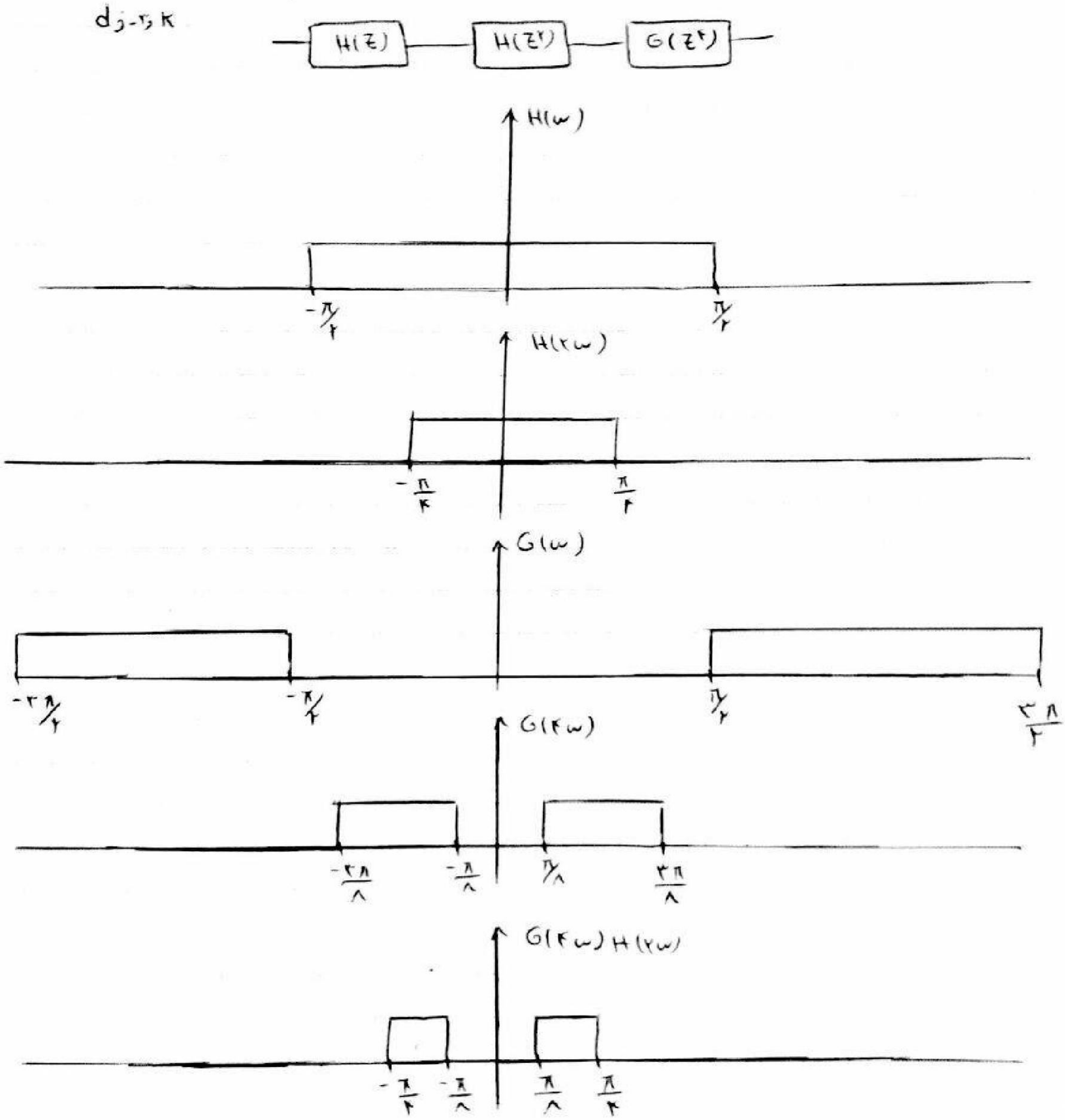
$d_{j-2,k}$ $\quad$ $-\boxed{H(z)}-\boxed{G(z^2)}-$







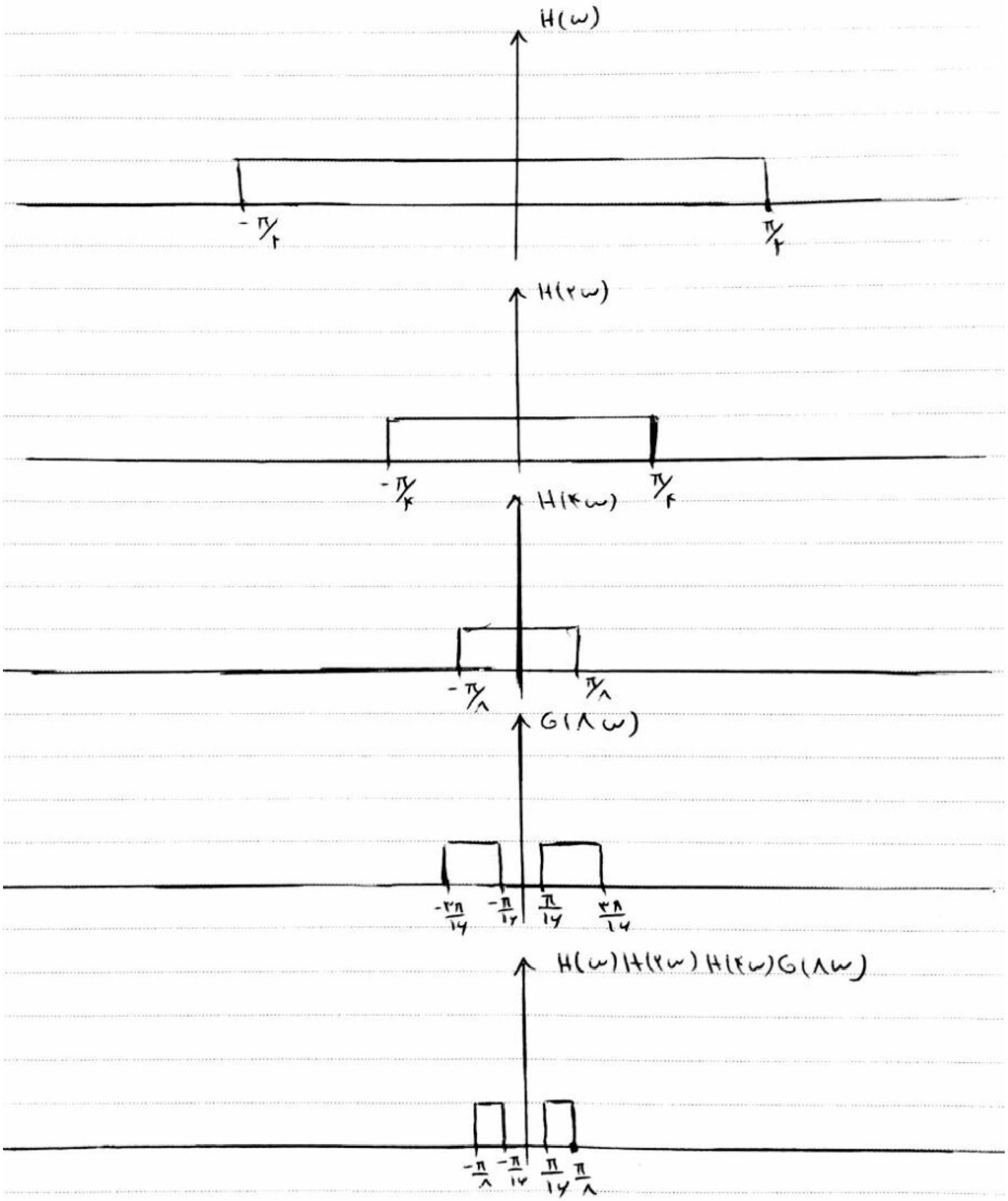
$d_{j-3,k}$

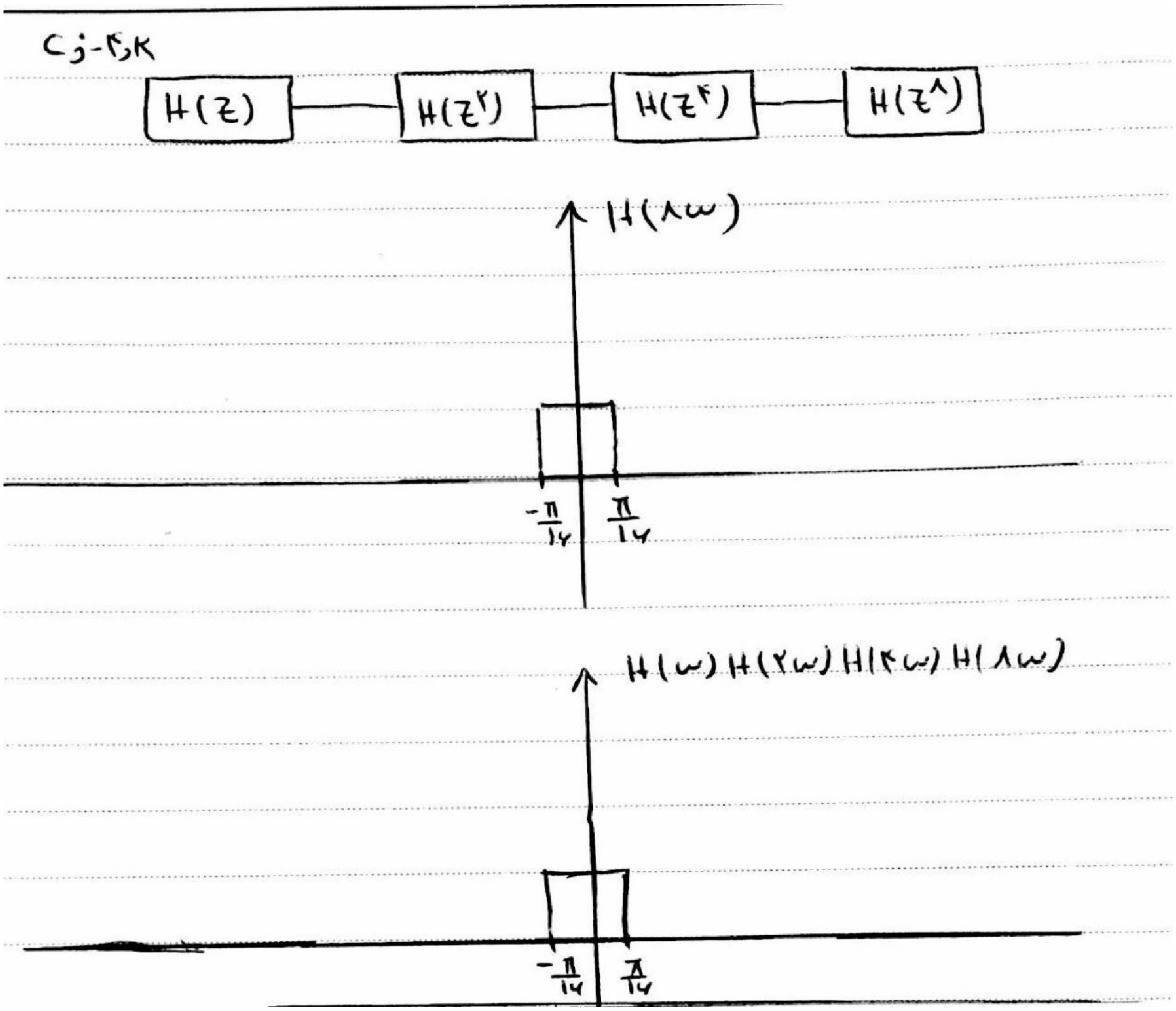


H(Z)
H(Z^۲)
G(Z^۴)
H(ω)
-π/۲
π/۲
H(۲ω)
-π/۴
π/۴
G(ω)
-۳π/۲
-π/۲
π/۲
۳π/۲
G(۴ω)
-۳π/۸
-π/۸
π/۸
۳π/۸
G(۴ω) H(۲ω)
-π/۴
-π/۸
π/۸
π/۴

$d_{j-4,k}$

$$\rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow \boxed{H(z^2)} \rightarrow \boxed{H(z^4)} \rightarrow \boxed{G(z^8)} \rightarrow$$





تفاوت آشکاری که بین مشخصه های فرکانسی وجود دارد این است که بالاترین محدوده ی فرکانسی اD_{-1}ر

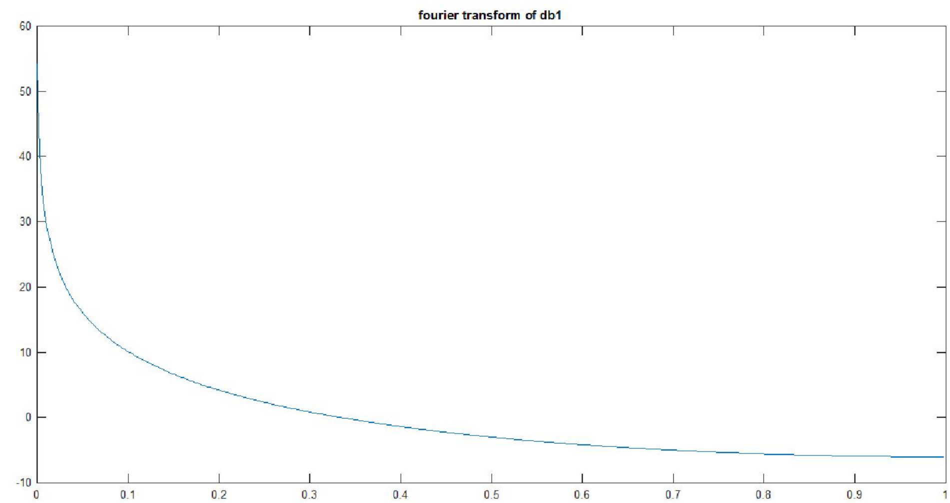
دارد (با توجه ب محاسبات انجام شده در بالا)و به ترتیب بعد از آنD_{-2} D_{-3} D_{-4} دارند.

D_{-1} سیگنال های مولفه شامل(s(t حول πاست که به دلیل ایده آل نبودن مشخصه ی فرکانسی موجک

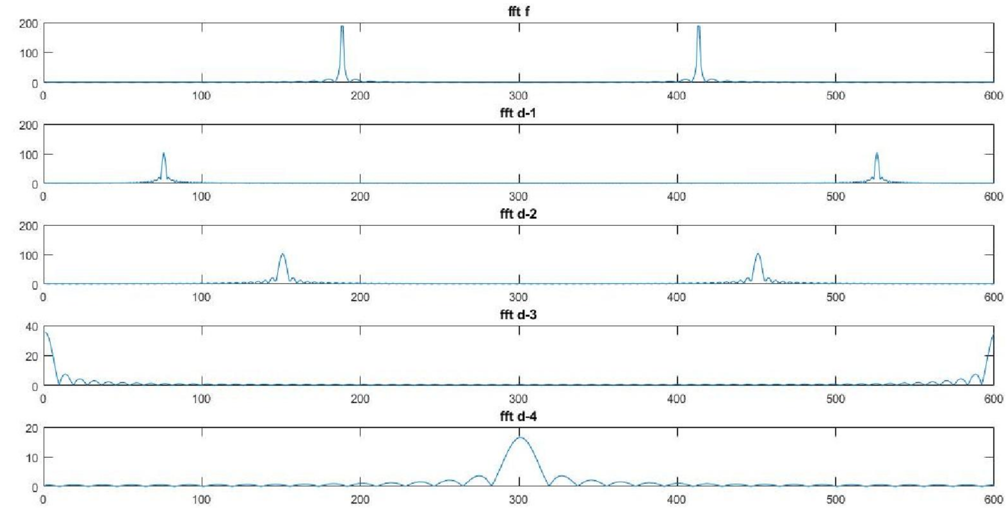
مولفه های دیگر در آن حضور دارند.به همین ترتیب D_{-2} D_{-3} نیزدر حالت ایده آل شامل مولفه های

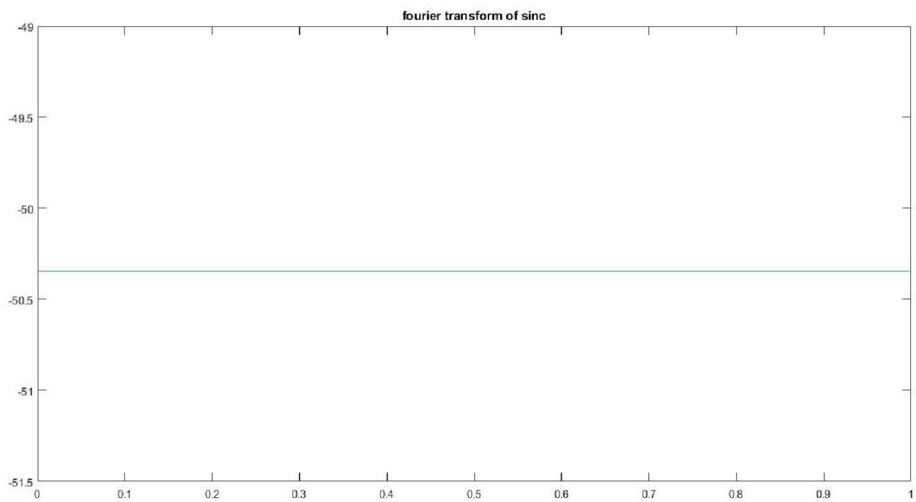
haar

π/۴-π/۲وπ/۴-π/۸هستندکه باز هم ب دلیل فاصله ی زیاد موجک از ایده آل مولفه های اطراف را هم شامل میشوند.

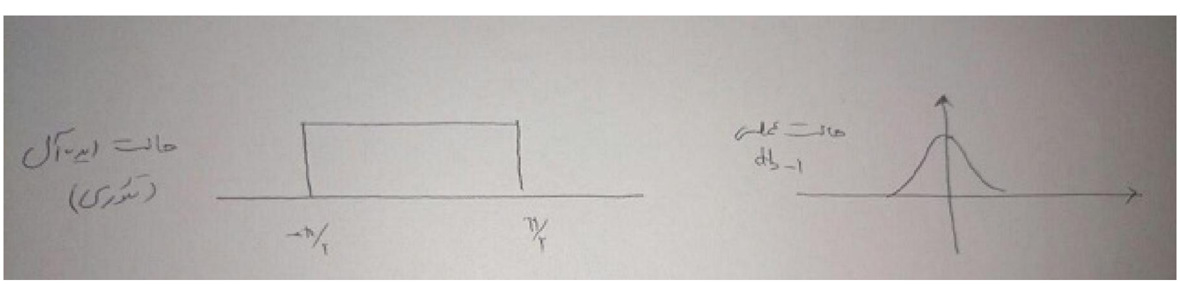


تبدیل فوریه یdb1





تبدیل فوریه یsinc

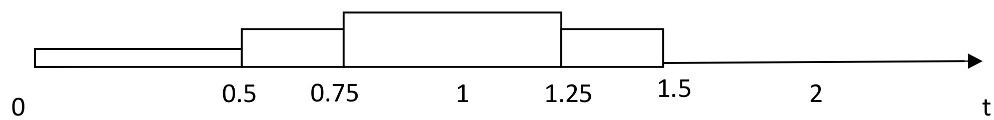


کاملا واضح است که مشخصه ی فرکانسی عملی با تیوری برابر نمیشود.

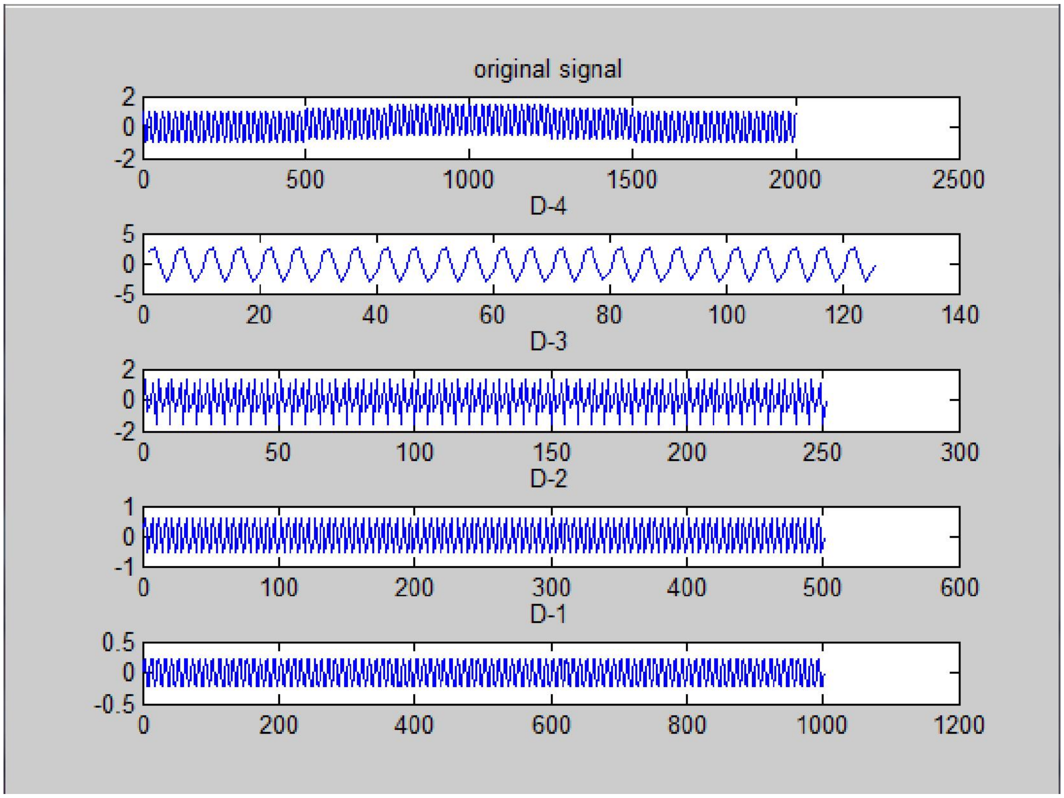
:۴

در قسمت آخر هم همان موج f(t) را در نظر میگیریم که با پالس p(t) به صورت زیر جمع شده است و سیگنال s(t) را ساخته است:

S(t)=p(t)+f(t)



از سیگنال با نرخ نمونه برداری $\frac{1}{1000}$ نم.نه برداری میکنیم.سیگنال را در ۴ سطح تجزیه میکنیم و ضرایب $d_{-4},\mathrm{k}\ d_{-3},\mathrm{k}\ d_{-2},\mathrm{k}\ d_{-1},\mathrm{k}$ واثر میکنیم بررسی را p(t) در خروجی را بررسی میکنیم.میخواهیم یک روشی ارایه کنیم که بتوانیم اثر آن بر f(t) را خنثی کنیم.سیگنال پاک شده از p(t) یعنی $\hat{f}(t)$ را چگونه باید بدست آورد؟



با توجه ب این که p(t) پالسی با فرکانس بالا میباشد هم چنین d_{-1} هم مشخصه فرکانسی اش بالاترین فرکانس را شامل میشود اگر فرض کنیم که تمام d-1 قرار گیرد میتوان با حذف d-1عمل باز سازی را پالس در

انجام داد.