۱۴۰۲ ,۲ ,۶

میان ترم جبر خطی

جبر خطی

مراجع:

1) Introduction to linear Algebra, strang, G.,

2) Matrix Analysis and Applied linear Algebra, Meyer

3) linear Algebra theorems and applications, (Hassan Abid yasser)

ارزیابی:

۱- تمرین و کوییز ← ۳ سری تمرین، ۲ کوییز ← ۵ نمره

۲- میان ترم ← ~~۵~~ ۶ نمره

۳- پایان ترم ← ۸ نمره

۴- حضور و فعالیت کلاسی ← ۲ نمره

سرفصل :

۱- مروری بر بردارها و ماتریس ها

۲- دستگاه معادلات خطی

۳- فضاهای برداری

۴- متعامدسازی

۵- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

۶- چندجمله‌ای ها و توابع ماتریس

۷- تجزیه مقادیر منفرد

بردار: کمیتی که هم دارای اندازه و هم جهت باشد؛ سرعت، نیرو و...

اسکالر: کمیتی که فقط دارای اندازه باشد؛ طول، سطح، جرم و...

* بردار را می‌توان بصورت لیست (List) محدودی از اعداد بصورت سطری یا ستونی نمایش داد.

$$u=\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{bmatrix}_{n\times 1},\quad \vec{v}=\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n\end{bmatrix}_{1\times n}$$

بعد یک بردار به تعداد درایه های آن بستگی دارد.

ماتریس: اگر داده ها را با ابعاد $m\times n$ ذخیره نماییم یک ماتریس بدست می‌آید.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}$$

ماتریس مربعی: $m=n$

جمع و تفریق بردارها و ماتریس: به شرط یکسان بودن ابعاد؛

* ضرب یک عدد اسکالر در یک بردار یا ماتریس: هر درایه آن در عدد اسکالر ضرب می‌شود.

$$cu=c\begin{bmatrix} u_1\\ \vdots\\ u_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} cu_1\\ \vdots\\ cu_n\end{bmatrix}$$

ترکیب خطی بردارها :

بردار u یک ترکیب خطی از بردارهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ و ... و $\vec{v}_n$ می‌باشد
اگر اسکالرهای c_1 و c_2 و ... ، c_n وجود داشته باشد که بتوان u را
بصورت زیر نمایش داد :

$$\vec{u} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n$$

مثال) $\vec{v}_1 = (-1, 2)$ ، $\vec{v}_2 = (4, -6)$ ، $u = (-12, 20)$

آیا u ترکیب خطی از $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ است ؟!

$$\vec{u} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$$

$$(-12, 20) = c_1(-1, 2) + c_2(4, -6)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -c_1 + 4c_2 = -12 \\ 2c_1 - 6c_2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -2c_1 + 8c_2 = -24 \\ 2c_1 - 6c_2 = 20 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad 2c_2 = -4 \Rightarrow \boxed{c_2 = -2} \text{ و } \boxed{c_1 = 4}$$

مثال) $u = (4, 20)$, $\vec{v_1} = (2, 10)$ و $\vec{v_2} = (-3, -15)$

$$c_1 \vec{v_1} + c_2 \vec{v_2} = \vec{u}$$

$$\Rightarrow c_1 (2, 10) + c_2 (-3, -15) = (4, 20)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c_1 - 3c_2 = 4 \rightarrow \\ 10c_1 - 15c_2 = 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2c_1 = 4 + 3c_2 \Rightarrow \boxed{c_1 = 2 + 1.5\, c_2}$$

c_2 آزاد ← زیرا u یک ترکیب خطی از $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ می باشد

(با بی شمار جواب)

مثال) $u = (1, -4)$ ، $\vec{v_1} = (2, 10)$ ، $\vec{v_2} = (-3, -15)$

$$\begin{cases} 2c_1 - 3c_2 = 1 \\ 10c_1 - 15c_2 = -4 \end{cases} \xrightarrow{\times -5} \begin{cases} \cancel{-10c_1} + \cancel{15c_2} = -5 \\ \cancel{10c_1} - \cancel{15c_2} = -4 \end{cases}$$

$0 = -9$ ✗ ← u ترکیب خطی از $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ نیست.

ضرب داخلی inner product

هر قاعده‌ای که به یک جفت بردار u و v یک کمیت اسکالر را اختصاص دهد.

* ضرب داخلی دو بردار $u_{n\times 1}$ و $v_{n\times 1}$ با عناصر حقیقی:

$$\langle u , v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

* ضرب داخلی دو بردار با عناصر مختلط:

$$\langle u , v \rangle = \bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_2 v_2 + \dots + \bar{u}_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i v_i$$

که $\bar{u}_i$، مزدوج u_i هاست.

مثال)

$$u = [2+j3 ,\ 3+j ,\ 4]$$

$$v = [4-j6 ,\ 3 ,\ 3+j2]$$

$$\langle u , v \rangle = (2-j3)(4-j6) + (3-j)3 + 4(3+j2)$$

$$= 11 - j19$$

$$\langle \bar{v}, u \rangle = (4+j6)(2+j3) + 3(3+j) + (3-j2)4 = 11 + j19$$

① $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ ✓

② $\langle cu, v \rangle = \bar{c} \langle u, v \rangle = \langle u, \bar{c} v \rangle$

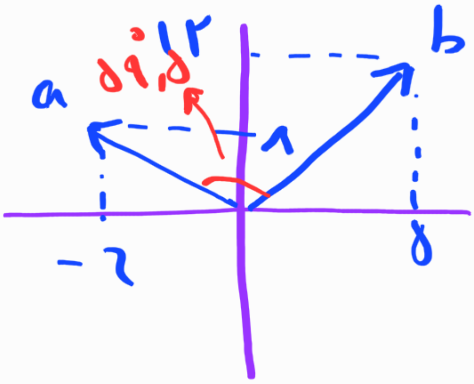
c یک عدد مختلط است.

③ $\langle u+v, w+s \rangle = \langle u, w \rangle + \langle u, s \rangle + \langle v, w \rangle + \langle v, s \rangle$

④ $\forall u \neq 0 \longrightarrow \langle u, u \rangle > 0$

* ضرب داخلی : (تعریف دوره دبیرستان)

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cos\theta$$



$$\longrightarrow a \cdot b = 10 \times 13 \times \cos(59.5^\circ) = 66$$

$$\langle a, b \rangle = (5) \times (-6) + 12 \times 8 = 66$$

نُرم

$\| x \|$

نرم ، یک تابع است که برای هر بردار u ، یک عدد حقیقی تخصیص می دهد

1) $\|u\| > 0$ و $u \neq 0$

2) $\|u\| = 0 \; ; \; \text{if} \; u = 0$

3) $\|ku\| = |k| \, \|u\|$

4) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

5) $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

تعریف نرم در حالت کلی : نُرم p یا L_p

$$\|u\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(|u_1|^p + |u_2|^p + \dots + |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$L_1 : \quad \|u\|_1 = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|$$

(مجموع اندازه تمام مؤلفه‌های بردار u)

$$L_2: \quad \|u\|_2 = \sqrt{|u_1|^2+|u_2|^2+\dots+|u_n|^2}$$

$$L_\infty: \quad \|u\|_\infty = \max\{|u_i|\}$$

مثال) برای بردار $u = \begin{pmatrix}3\\4-j2\\1\end{pmatrix}$ نرم های L_1، L_2، L_∞ ؟!

$$\|u\|_1 = \sum_{i=1}^{3}|u_i| = |u_1|+|u_2|+|u_3|$$
$$= 3+\sqrt{20}+1 = 4+\sqrt{20}$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{|u_1|^2+|u_2|^2+|u_3|^2}$$
$$= \sqrt{9+20+1} = \sqrt{30}$$

$$\|u\|_\infty = \max\{3, \sqrt{20}, 1\} = \sqrt{20}$$

نکته) $\|u\|_\infty \leqslant \|u\|_2 \leqslant \|u\|_1$ ✓

دو بردار متعامد

دو بردار u و v متعامد هستند اگر ضرب داخلی u و v صفر باشند.

$$\langle u, v\rangle = 0$$

orthogonal

برای بردارهای متعامد رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u+v\|^2 = \|u-v\|^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\underbrace{\langle u,v\rangle}_{0}$$

اگر علاوه بر متعامد بودن نرم بردارها هم برابر یک شوند، آن بردارها

یکا متعامد می‌گویند.

orthonormal

* اگر مجموعه‌ای مانند S شامل بردارهایی باشد که تمامی آن‌ها ۲ به ۲ متعامد باشند به آن مجموعه متعامد گفته می‌شود. حال اگر در یک مجموعه متعامد، نرم تمامی بردارها یک باشند، به آن مجموعه یکا متعامد می‌گویند.

مثال) برای مجموعه

$$S = \{ v_1 = (2, 0, -1) ,\ v_2 = (0, -1, 0) ,\ v_3 = (2, 0, 4) \}$$

متعامد بودن و یکا متعامد بودن را بررسی کنید.

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

$$\langle v_1, v_3 \rangle = 0$$

$$\langle v_2, v_3 \rangle = 0$$

متعامد ✓

$$\|v_1\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\|v_2\| = 1 \quad , \quad \|v_3\| = \sqrt{20}$$

$\longrightarrow$ یکا متعامد نیست

بردارهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_3$ را به بردارهای یکامتعامد تبدیل کنید:

← کافیست هر بردار را بر نرم خودش تقسیم کنیم (نرمالیزه)

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|}\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1) \rightarrow \|u_1\| = 1$$

$$u_3 = \frac{1}{\|v_3\|}v_3 = \frac{1}{\sqrt{20}}(2,0,4) \rightarrow \|u_3\| = 1$$

ضرب داخلی و نرم توابع پیوسته:

فرض کنید f و g دو تابع پیوسته و حقیقی در بازه‌ی $[a,b]$ باشند، ضرب داخلی آن‌ها:

$$\langle f,g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

① $\langle f,g \rangle = \langle g,f \rangle$

② $\langle f+g,h \rangle = \langle f,h \rangle + \langle g,h \rangle$

$$\hookrightarrow \int \big(f(x)+g(x)\big)h(x)\,dx$$

$$= \int f(x)h(x)\,dx + \int g(x)h(x)\,dx$$

$$= \langle f,h \rangle + \langle g,h \rangle$$

③ $\langle cf,g \rangle = c\langle g,f \rangle$

④ $\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x)\, dx$

مثال) ضرب داخلی دو تابع پیوسته زیر را در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ بدست آورید.

$f(x) = \sin x - \cos x$

$g(x) = \sin x + \cos x$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \cos^2 x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 2x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \sin 2x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

لذا می‌توان گفت f و g متعامد هستند.

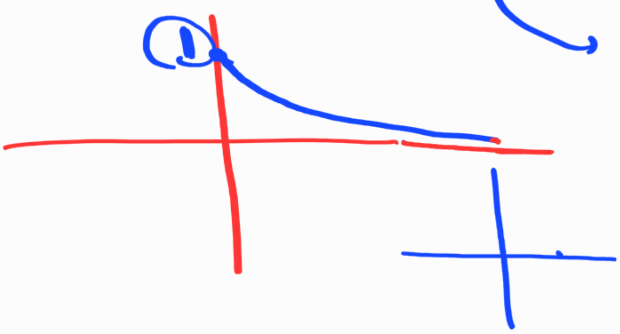
نرم توابع:

$L_1: \quad \|f\|_1 = \int_0^{\infty} |f(t)|\, dt$

$L_2: \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} f^2(t)\, dt}$

$L_\infty: \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |f(t)|$

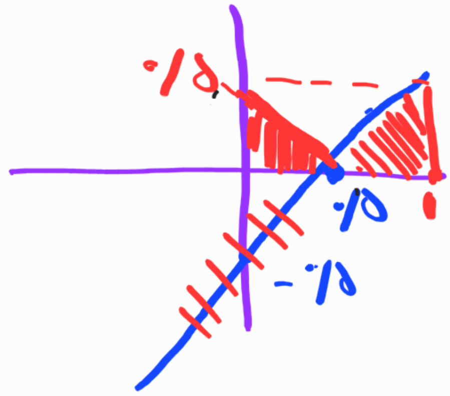
(کوچکترین کران بالا)



مثال) برای تابع $0<t<1$ ، $f(t)=t-0.5$ نرم های L_1 و L_2 و L_∞ ؟

$$L_1: \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |t-0.5|\,dt = \frac{1}{4}$$

$$= \int_0^{0.5} (-t+0.5)\,dt + \int_{0.5}^1 (t-0.5)\,dt$$



$$= \left(-\frac{t^2}{2}+0.5t\right)\Big]_0^{0.5} + \left(\frac{t^2}{2}-0.5t\right)\Big]_{0.5}^1 = \frac{1}{4}$$

$$L_2: \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (t-0.5)^2\,dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}(t-0.5)^3\Big]_0^1} = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$L_\infty: \quad \|f\|_\infty = \sup_{0\leq t\leq 1} |t-0.5| = 0.5$$