دانشگاه صنعتی شاهرود **دانشکده علوم ریاضی**

سری چهارم تمرینات درس ریاضی عمومی ۲ **تاریخ تحویل: ۹۹/۳/۱۶**

---

(۱) فرض کنید $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 4y^2 \leq 4\}$. در این صورت اکسترمم های نسبی و مطلق و نقاط زینی تابع $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 1$ را بر روی ناحیه بسته و کراندار R تعیین کنید.

(۲) فرض کنید رویه S_1 به معادله $z = 2x^2 - 4x - 3y^2 + 6$ و رویه S_2 به معادله $e^{x^2y} - z - (y-1)z^2 = e - 1$ داده شده باشند. در این صورت:

الف. رویه S_1 را توصیف کرده و نوع رویه را مشخص کنید.

ب. اگر C خم حاصل از تلاقی رویه های S_1 و S_2 باشد، انگاه معادله خط مماس بر خم C در نقطه $p(1,1,1)$ را بنویسید.

(۳) تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 siny + y^2 sinx}{x^2+y^2+|x||y|} & if\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & if\ (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

مفروض است:

الف. $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را در نقطه $(0,0)$ بیابید.

ب. وجود مشتق جهتی تابع f را در مبدا مختصات و در جهت بردار یکه $u = \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j$ را بررسی کنید.

ج. با محاسبه $\nabla f(0,0).u$، مشتق پذیری تابع f در نقطه $(0,0)$ را با ذکر دلیل بررسی کنید.

(۴) فرض کنید تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x,y) = \frac{sin^2 x sin^2 y}{1 - cos(x^2+y^2)}$ داده شده باشد بررسی کنید که آیا می توان تابع f را در نقطه $(0,0)$ طوری تعریف کرد که تابع f در $(0,0)$ پیوسته شود یا خیر.

(۵) کمترین و بیشترین فاصله مبدا مختصات از منحنی $x^2 + xy + y^2 = 16$ را بیابید.

(۶) اگر تمام مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع $z = f(x,y)$ موجود باشند و $x = r^2 cos\theta$ و $y = r^2 sin\theta$، در این صورت $z_{\theta\theta}$ را محاسبه نمایید.

مدرس: آل هوز

پاسخ سوال ۱ :

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 1$$

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + 4y^2 \leq 4 \right\}$$

ابتدا باید نقاط بحرانی تابع f که درون ناحیه R قرار می‌گیرند را پیدا کنیم.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} , \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (0,0)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 = 0 \longrightarrow x = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \longrightarrow y = 0 \end{cases} \longrightarrow P = (x,y) = (1,0)$$

نقطه بحرانی تابع f

(به وضوح داخل ناحیه R می‌باشد این نقطه)

حال با استفاده از آزمون مشتق دوم، نوع نقطه‌ی بحرانی فوق را مشخص کنیم:

$$\begin{cases} A = \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_P = 2 \\ B = \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_P = 0 \\ C = \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_P = -2 \end{cases} \longrightarrow \Delta_{(P)} = AC - B^2 = -4 < 0$$

لذا نقطه‌ی $P = (1,0)$ یک نقطه‌ی زینی (مین‌ماکس) تابع f بوده و تابع f در ناحیه R دارای اکسترمم نسبی نمی‌باشد.

حال اکسترمم‌های روی مرز ناحیه R را به دست می‌آوریم:

مدرس: آل‌هزر

(روش اول) استفاده از روش اکسترمم‌های مقید (ضرایب لاگرانژ)

قرار می‌دهیم $g(x,y)=x^2+4y^2-4$ و اکسترمم‌های تابع f تحت شرط (قید) $g(x,y)=0$ را با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ به دست می‌آوریم. برای این منظور باید معادله $\Delta f=\lambda\Delta g$ را حل کنیم. داریم:

$$\Delta f=\lambda\Delta g \longrightarrow \Delta f-\lambda\nabla g=0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}-\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}=0 \longrightarrow 2x-2-2\lambda x=0 & (\star) \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}-\lambda\dfrac{\partial g}{\partial y}=0 \longrightarrow -2y-8\lambda y=0 & (\star\star) \\[2mm] x^2+4y^2-4=0 \longrightarrow x^2+4y^2=4 & (\star\star\star) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\star\star} \begin{cases} y=0 \xrightarrow{\star\star\star} x=\pm 2 \\[2mm] \lambda=-\dfrac{1}{4} \xrightarrow{\star} x=\dfrac{4}{5} \xrightarrow{\star\star\star} y=\pm\dfrac{\sqrt{21}}{5} \end{cases}$$

بنابراین نقاط $(2,0)$ ، $(-2,0)$ ، $\left(\frac{4}{5},\frac{\sqrt{21}}{5}\right)$ و $\left(\frac{4}{5},-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)$ به دست می‌آید. حال با مقایسه مقادیر تابع f بر روی نقاط به دست آمده، داریم:

مدرس: آل‌نعوز

(x,y)	$f(x,y)$	
$(0,1)$	0	
$(2,0)$	1	
$(-2,0)$	9	$\longrightarrow$ Max مطلق
$\left(\frac{\sqrt{21}}{5},\frac{4}{5}\right)$	$-\frac{4}{5}$	$\longrightarrow$ Min مطلق
$\left(-\frac{\sqrt{21}}{5},\frac{4}{5}\right)$	$-\frac{4}{5}$	$\longrightarrow$ Min مطلق

لذا ماکسیمم مطلق تابع f در نقطه‌ی $(-2,0)$ رخ داده و مقدار آن برابر ۹ می‌باشد.
همچنین مینیمم مطلق تابع f در نقاط $\left(\frac{\sqrt{21}}{5},\frac{4}{5}\right)$ و $\left(-\frac{\sqrt{21}}{5},\frac{4}{5}\right)$ رخ می‌دهد و مقدار آن برابر با $-\frac{4}{5}$ است.

(روش دوم)

خم مربوط به مرز ناحیه‌ی R، یعنی $x^2+4y^2=4$ را به صورت زیر پارامتری می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = x(t) = 2\cos t \\ y = y(t) = \sin t \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

و در ادامه اکسترمم تابع زیر را پیدا می‌کنیم:

Scanned by CamScanner

مدرس: آل بهور

$$g(t)=f\big(x(t)\,,\,y(t)\big)$$

$$=4\cos^2 t-\sin^2 t-4\cos t+1$$

$$=5\cos^2 t-4\cos t$$

$$g'(t)=0 \longrightarrow -10\sin t\cos t+4\sin t=0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \sin t=0 \xrightarrow{y=y(t)=\sin t} y=0 \longrightarrow x=\pm 2 \\ \text{یا} \\ \cos t=\frac{2}{5} \xrightarrow{x=x(t)=2\cos t} x=\frac{4}{5} \longrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{21}}{5} \end{cases}$$

و ادامه حل نیز کاملاً مشابه راه حل اول می باشد.

مدرس: آل‌عوض

پاسخ سوال ۲:

$S_1: \quad z = 2x^2 - 4x - 3y^2 + 6$

$S_2: \quad e^{x^2 y} - z - (y-1)z^2 = e - 1$

الف) معادله رویه S_1 را به صورت زیر به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$z = 2(x-1)^2 - 3y^2 + 4$$

به وضوح تقاطع رویه فوق با صفحه $z=c$ (c عددی ثابت) یک هذلولی به معادله $2(x-1)^2 - 3y^2 = c - 4$ می‌باشد. همچنین تقاطع رویه با صفحه $x=c$ یک سهمی به معادله $z = -3y^2 + 2(c-1)^2 + 4$ با دهانه رو به پایین می‌باشد. درنهایت تقاطع رویه با صفحه $y=c$ یک سهمی به معادله $z = 2(x-1)^2 - 3c^2 + 4$ با دهانه (سهمی) رو به بالا می‌باشد.

لذا رویه فوق یک سهمی‌وار هذلولوی (رویه زین‌شکل) می‌باشد.

ب) رویه S_1 دارای معادله

$$f(x,y,z) = 2x^2 - 4x - 3y^2 + 6 - z = 0$$

و رویه S_2 دارای معادله

$$g(x,y,z) = e^{x^2 y} - z - (y-1)z^2 - e + 1 = 0$$

می‌باشد.

مدرس: آل داوود

فرض کنیم $\vec{n}_1 = \nabla f(1,1,1)$ و $\vec{n}_2 = \nabla g(1,1,1)$. در این صورت

بردار هادی خط مماس بر منحنی حاصل از تقاطع رویه‌ها (۱) و (۲) برابر است با

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

$$\vec{n}_1 = \nabla f(1,1,1) = (12x-4, -6y, -1)\Big|_{(1,1,1)} = (0, -6, -1)$$

$$\vec{n}_2 = \nabla g(1,1,1) = \left(2xy e^{x^2y}, x^2 e^{x^2y} - z^2, -1-2(y-1)z\right)\Big|_{(1,1,1)} = (2e, e-1, -1)$$

$$\longrightarrow \vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -6 & -1 \\ 2e & e-1 & -1 \end{vmatrix} = (6-e+1)\vec{i} + (-2e)\vec{j} + (12e)\vec{k}$$

لذا خط خواسته شده، دارای بردار هادی $\vec{u} = (6-e+1, -2e, 12e)$

بوده و گذرا از نقطه‌ی $P = (1,1,1)$. لذا داریم:

$$L: \frac{x-x_0}{A_1} = \frac{y-y_0}{A_2} = \frac{z-z_0}{A_3}$$

$$L: \frac{x-1}{7-e} = \frac{y-1}{-2e} = \frac{z-1}{12e}$$

$$\longrightarrow L: \begin{cases} x = (7-e)t + 1 \\ y = (-2e)t + 1 \\ z = (12e)t + 1 \end{cases}$$

مدرس: آل هفو

پاسخ سوال ۳:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\sin y+y^2\sin x}{x^2+y^2+|x||y|} & \text{اگر } (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & \text{اگر } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الف) برای به دست آوردن مقادیر $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$، باید از تعریف مشتقات جزئی استفاده کنیم. داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0$$

ب) مشتق جهتی تابع f در مبدا مختصات و در جهت بردار یکه $\vec{u}=\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)$، بنا به تعریف مشتق جهتی، به صورت زیر به دست می آید:

$$D_{\vec{u}}f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(0+t\frac{\sqrt2}{2},0+t\frac{\sqrt2}{2}\right)-f(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\frac{t^2}{2}\sin\left(t\frac{\sqrt2}{2}\right)+\frac{t^2}{2}\sin\left(t\frac{\sqrt2}{2}\right)}{\frac{t^2}{2}+\frac{t^2}{2}+\left|t\frac{\sqrt2}{2}\right|\cdot\left|t\frac{\sqrt2}{2}\right|}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{2}{3}\sin\left(\frac{\sqrt2}{2}t\right)}{t}=\frac{\sqrt2}{3}$$

مدرس: آل یعقوب

ج) با توجه به محاسبات انجام شده در قسمت (الف) داریم:

$$\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) , \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) = (0,0)$$

لذا داریم

$$\nabla f(0,0) \cdot \vec{u} = (0,0) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

بنابراین چون

$D_u f(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot \vec{u}$ ، لذا

تابع f در نقطه‌ی $(0,0)$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

مدرس: آل‌نفوز

پاسخ سوال ۱۴:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \frac{\sin^2 x \sin^2 y}{1-\cos(x^2+y^2)}$$

ابتدا بایستی بررسی کنیم که آیا تابع فوق در نقطه‌ی $(0,0)$ دارای حد می‌باشد یا خیر.

(مسیر اول): محور y ها $(x=0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2 x \sin^2 y}{1-\cos(x^2+y^2)} = \lim_{y\to 0} \frac{0 \times \sin^2 y}{1-\cos(0+y^2)} = \frac{0^{\text{مطلق}}}{0^{\text{حدی}}} = 0$$

(مسیر دوم): خط $y=x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2 x \sin^2 y}{1-\cos(x^2+y^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x \sin^2 x}{1-\cos(x^2+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^4 x}{1-\cos(2x^2)}$$

$$\overset{\star}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^4 x}{2\sin^2(x^2)} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

لذا چونکه بر روی مسیرهای مختلف (نزدیک شدن به نقطه $(0,0)$) به جوابهای مختلف رسیدیم که تابع فوق در $(0,0)$ حد ندارد و بنابراین نمی‌توان آن را در $(0,0)$ طوری تعریف کرد که پیوسته شود.

$\star$ یادآوری: $1-\cos\square = 2\sin^2\left(\frac{\square}{2}\right)$ / $\lim_{u\to 0}(\sin u) = \lim_{u\to 0}(u)$ /

مدرس: آل هوز

پاسخ سوال ۵:

فرمول فاصله نقطه (x,y) از مبدا مختصات

$$d=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

برای حل این سوال از روش اکسترمم های مقید (روش ضرایب لاگرانژ) به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$f(x,y)=x^2+y^2 \longleftarrow$$ اون چیزی که قراره Max یا Min شود (مربع فاصله از مبدا)

$$g(x,y)=x^2+xy+y^2-16=0 \longleftarrow$$ شرط (قید) مسأله

$$\nabla f=\lambda\nabla g \longrightarrow \begin{cases} 2x=\lambda(2x+y) & ☆ \\ 2y=\lambda(x+2y) & ☆☆ \\ x^2+xy+y^2=16 & ☆☆☆ \end{cases}$$

$$\frac{☆}{☆☆} \longrightarrow \frac{x}{y}=\frac{2x+y}{x+2y} \longrightarrow x^2+2xy=2xy+y^2$$

$$\longrightarrow x^2=y^2 \longrightarrow x=\pm y$$

اگر $x=y \xrightarrow{☆☆☆} 3x^2=16 \longrightarrow x=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}=y \xrightarrow[\text{در } f]{\text{جای‌گذاری}} f(x,y)=\frac{32}{3}$ کمترین فاصله

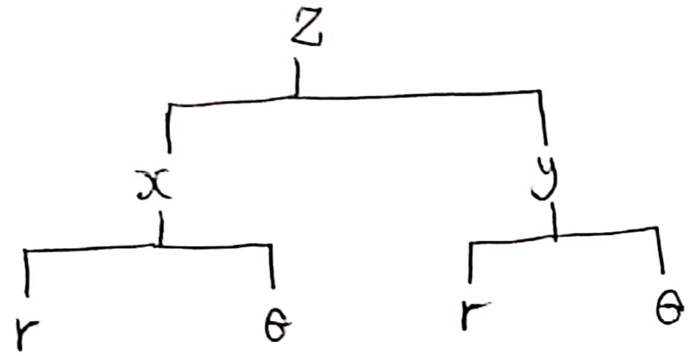
اگر $x=-y \xrightarrow{☆☆☆} x^2=16 \longrightarrow x=\pm 4=y \xrightarrow[\text{در } f]{\text{جای‌گذاری}} f(x,y)=32$ بیشترین فاصله

مدرس: آل معز

پاسخ سوال ۶:

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ x = r^2\cos\theta \\ y = r^2\sin\theta \end{cases} \longrightarrow z_{\theta\theta} = ?$$

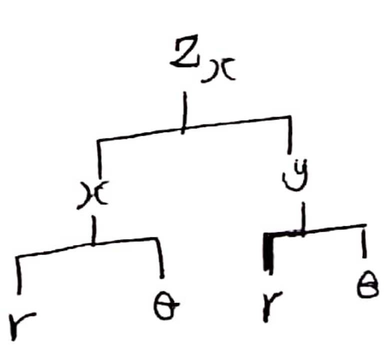
برای حل این سوال از قاعده‌ی زنجیره‌ای مشتق (مشتق زنجیره‌ای توابع) استفاده می‌کنیم.

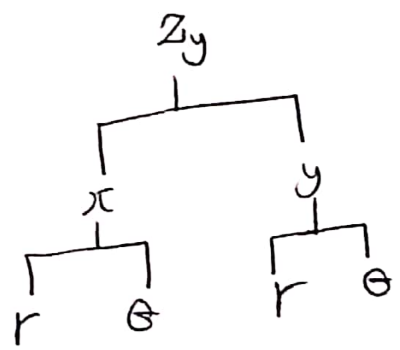


ابتدا z_θ را مشخص می‌کنیم:

$$z_\theta = z_x \cdot x_\theta + z_y \cdot y_\theta$$

حال برای تعیین $z_{\theta\theta}$، باید یک بار دیگر از z_θ نسبت به θ مشتق بگیریم. توجه داریم z_x و z_y خود توابعی از x و y هستند و برای مشتق گیری از آن‌ها نسبت به θ، باید از قاعده‌ی زنجیره‌ای مشتق استفاده نمود.





مدرس: آل هوز

$$Z_{\theta\theta} = \left(Z_\theta\right)_\theta = \left(Z_x \cdot x_\theta + Z_y \cdot y_\theta\right)_\theta$$

$$= Z_{x\theta} \cdot x_\theta + Z_x \cdot x_{\theta\theta} + Z_{y\theta} \cdot y_\theta + Z_y \cdot y_{\theta\theta}$$

از طرفی می‌دانیم که

$$Z_{x\theta} = Z_{xx} \cdot x_\theta + Z_{xy} \cdot y_\theta \qquad x_\theta = -r^2 \sin\theta \quad , \quad x_{\theta\theta} = -r^2 \cos\theta$$

و

$$Z_{y\theta} = Z_{yx} \cdot x_\theta + Z_{yy} \cdot y_\theta \qquad y_\theta = r^2 \cos\theta \quad , \quad y_{\theta\theta} = -r^2 \sin\theta$$

بنابراین

$$Z_{\theta\theta} = \left(Z_{xx} \cdot x_\theta + Z_{xy} \cdot y_\theta\right) \cdot x_\theta + Z_x \cdot x_{\theta\theta} + \left(Z_{yx} \cdot x_\theta + Z_{yy} \cdot y_\theta\right) \cdot y_\theta + Z_y \cdot y_{\theta\theta}$$

$$= \left(\left(-r^2 \sin\theta\right) Z_{xx} + \left(r^2 \cos\theta\right) Z_{xy}\right) \cdot \left(-r^2 \sin\theta\right) + \left(-r^2 \cos\theta\right) Z_x$$

$$+ \left(\left(-r^2 \sin\theta\right) Z_{yx} + \left(r^2 \cos\theta\right) Z_{yy}\right) \cdot \left(r^2 \cos\theta\right) + \left(-r^2 \sin\theta\right) Z_y$$

$$= r^4 \sin^2\theta \, Z_{xx} - r^4 \sin\theta \cos\theta \, Z_{xy} - r^2 \cos\theta \, Z_x$$

$$+ r^4 \cos^2\theta \, Z_{yy} - r^4 \sin\theta \cos\theta \, Z_{yx} - r^2 \sin\theta \, Z_y$$

$$= r^4 \left(\sin^2\theta \, Z_{xx} + \cos^2\theta \, Z_{yy} - \sin\theta\cos\theta \, Z_{xy} - \sin\theta\cos\theta \, Z_{yx}\right) - r^2 \left(\cos\theta \, Z_x + \sin\theta \, Z_y\right)$$