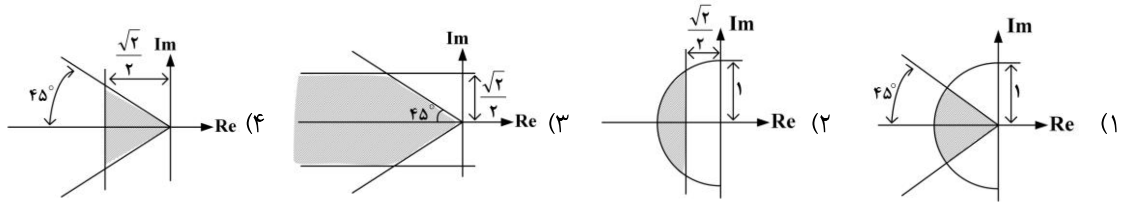
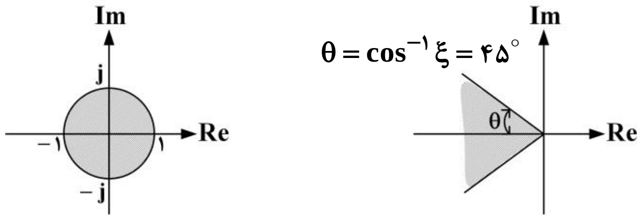
مثال: کدام ناحیه هاشورخورده محل قرار گرفتن قطب‌های یک سیستم درجه ۲ را در صفحه مختلط به نحوی که $\xi \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\omega_n \leq 1$ باشد، نشان می‌دهد؟ (مکانیک ۷۴)



✍ **حل:** گزینه «۱»

کافی است اشتراک دو ناحیه مربوط به مکان هندسی ثابت $\xi \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\omega_n \leq 1$ را بدست آوریم.

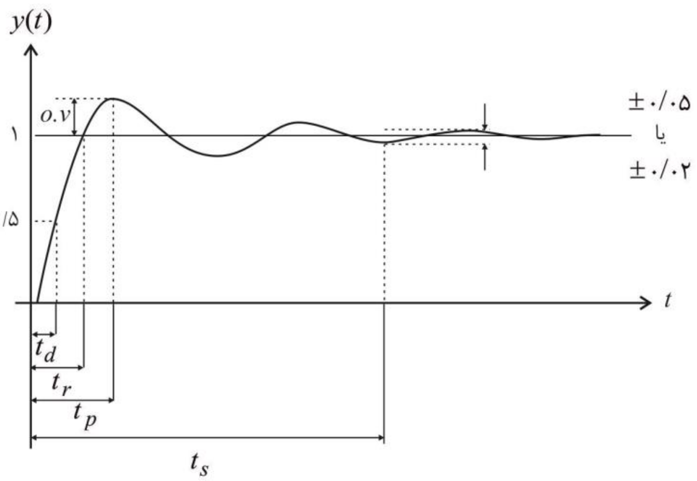


۲-٦-٤ مشخصات پاسخ سیستم‌ها در حوزه زمان

با توجه به این که پاسخ زمانی سیستم‌ها در حوزه زمان از دو قسمت گذرا و ماندگار تشکیل می‌شود، در ادامه به بررسی ویژگی‌های این دو پاسخ می‌پردازیم که در حقیقت معیارهایی برای تعریف رفتار مناسب سیستم‌ها در حوزه زمان خواهند بود. توجه کنید که لزوماً تمام این مشخصات در مورد هر سیستمی قابل اعمال نیست.

۲-٦-٤-۱ مشخصات پاسخ گذرا

مشخصات پاسخ گذرای یک سیستم کنترل را غالباً به ورودی تابع پله‌ای واحد تعریف می‌کنند. چون پاسخ گذرای یک سیستم به شرایط اولیه آن مرتبط است، برای مطالعه فرض می‌کنیم که در لحظه اعمال ورودی به سیستم، شرایط اولیه صفر باشند (سیستم در حال سکون باشد). مشخصات پاسخ گذرای یک سیستم کنترلی به ورودی پله‌ای عبارتند از:



۱- زمان تأخیر t_d

۲- زمان صعود t_r

۳- زمان اوج t_p

۴- ماکزیمم فراجهش M_p

۵- زمان استقرار

زمان تأخیر: مدت زمانی است که لازم است تا پاسخ سیستم برای اولین بار به ۵۰٪ مقدار نهایی‌اش برسد.

زمان صعود (زمان خیز): مدت زمانی است که لازم است تا پاسخ سیستم از ۱۰٪ به ۹۰٪ یا از ۵٪ به ۹۵٪ یا از ۰٪ به ۱۰۰٪

مقدار نهایی‌اش برسد. برای سیستم‌های مرتبه دوم زیرمیرا عموماً زمان صعود از ۰٪ به ۱۰۰٪ استفاده می‌گردد و برای سیستم‌های فوق میرا عموماً زمان صعود از ۱۰٪ به ۹۰٪ بکار می‌رود.

زمان اوج: مدت زمانی است که لازم است تا پاسخ سیستم به ماکزیمم مقدارش برسد.

ماکزیمم فراجهش (اورشوت): ماکزیمم مقداری است که پاسخ سیستم می‌تواند داشته باشد.

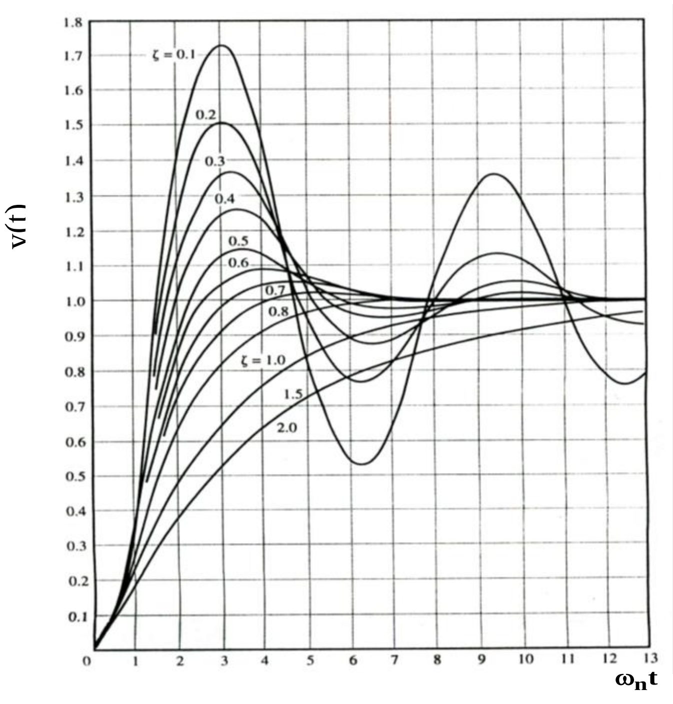
$$\text{ماکزیمم فراجهش} = \frac{y_{\max}(t) - y_{ss}}{y_{ss}} \qquad (y_{ss} \text{ پاسخ ماندگار سیستم است})$$

زمان استقرار: مدت زمانی است که لازم است تا پاسخ سیستم پس از آن در محدوده معینی از مقدار نهایی‌اش که می‌تواند ۲٪± یا ۵٪± باشد، برسد.

اکنون به بررسی مشخصات گذرا برای سیستم‌های مرتبه دوم نوعی می‌پردازیم. این مقادیر برحسب ξ و ω_n بدست خواهند آمد. با فرض این که سیستم زیرمیرا $(۱ > \xi > ۰)$ باشد، پاسخ پله واحد آن عبارتست از:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^۲}{s(s^۲ + ۲\xi\omega_n s + \omega_n^۲)} \xrightarrow{L^{-۱}} c(t) = ۱ - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{۱-\xi^۲}} \sin(\omega_n \sqrt{۱-\xi^۲}\, t + \cos^{-۱}\xi)$$

شکل زیر پاسخ پله واحد را برای سیستم مرتبه دوم نوعی با نسبت‌های میرایی مختلف $(۰ < \xi)$ نشان می‌دهد.



شکل۲-۴: پاسخ پله سیستم مرتبه دوم نوعی

۱- زمان خیز

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$$

θ برحسب رادیان و برابر $\cos^{-۱}\xi$ می‌باشد. برای محاسبه زمان خیز روابط دیگری نیز وجود دارد که به دو مورد آن اشاره می‌کنیم.

$$t_r = \frac{۰/۸ + ۲/۵\xi}{\omega_n} \qquad ۰ < \xi < ۱$$

$$t_r = \frac{۱ - ۰/۴۱۶۷\xi + ۲/۹۱۷\xi^۲}{\omega_n} \qquad ۰ < \xi < ۱$$

۲- زمان تأخیر

$$t_d \approx \frac{۱ + ۰/۷\xi}{\omega_n} \qquad ۰ < \xi < ۱$$

$$t_d \cong \frac{1/1+0/125\xi+0/469\xi^2}{\omega_n}$$ (تقریب دقیق‌تر برای سیستم‌های درجه ۲)

۳- زمان استقرار

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n}$$ (معیار ٪۲)

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n}$$ (معیار ٪۵)

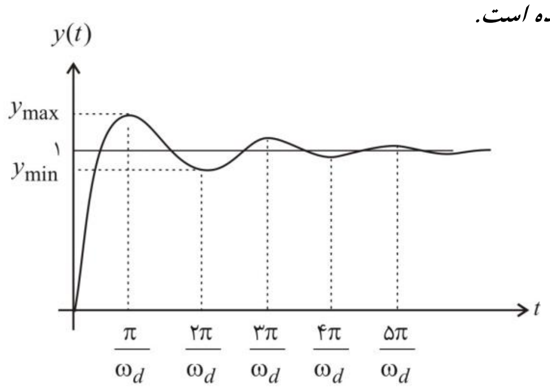
۴- ماکزیمم فراجهش

$$o.v = e^{-\pi\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{-\pi\cot\theta}$$

۵- زمان اوج

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

❋ **نکته:** *اگرچه پاسخ پله‌ای واحد به ازای $\xi \neq 0$ متناوب نمی‌باشد ولی فراجهش‌ها (ماکزیمم‌ها) و فروجهش‌ها (می‌نیمم‌ها)ی آن به صورت متناوب رخ می‌دهد که دوره تناوب آنها $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$ می‌باشد. این واقعیت در شکل زیر نشان داده شده است.*

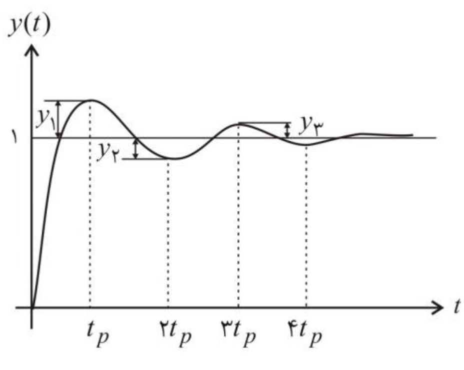


همانطور که مشاهده می‌شود، زمان و مقدار فراجهش‌ها و فروجهش‌ها از رابطه زیر تبعیت می‌کنند.

$$t_{(\max/\min)} = \frac{n\pi}{\omega_d} = nt_p \qquad n = 1,2,3,\dots$$

$$y(t)\Big|_{\max/\min} = 1+(-1)^{n-1}e^{\frac{-n\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \qquad n = 1,2,3$$

به بیانی دیگر، دامنه پاسخ سیستم به صورت یک تصاعد هندسی می‌باشد.



$$\frac{y_2(t)}{y_1(t)} = \frac{e^{\frac{-2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}} = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = o.v$$

$$\frac{y_3(t)}{y_1(t)} = \frac{e^{\frac{-3\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}} = e^{\frac{-2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = o.v^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_n(t)}{y_m(t)} = o.v^{(n-m)}$$

لگاریتم نسبت دامنه‌ها را در رابطه اخیر، نسبت لگاریتمی نامیده و با δ نمایش می‌دهند.

$$\delta = \ln\frac{y_1(t)}{y_1(t+T)} = \ln\frac{y_1(t)}{y_3(t)} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

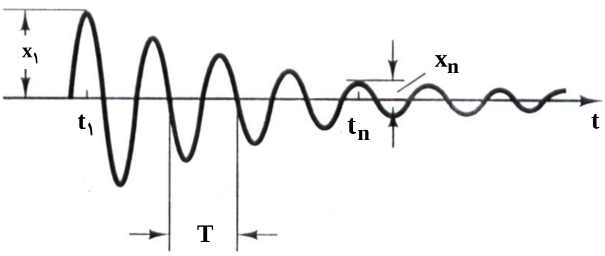
بنابراین می‌توان نسبت میرایی ξ را به طور تجربی از روی آهنگ میرایی نوسانات بدست آورد. داریم:

$$\ln\frac{y_1}{y_n} = (n-1)\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad \rightarrow \quad \xi = \frac{\frac{1}{n-1}\ln(\frac{y_1}{y_n})}{\sqrt{\pi^2 + [\frac{1}{n-1}(\ln\frac{y_1}{y_n})]^2}}$$

مثال: تابع تبدیل یک سیستم نوسانی به صورت روبرو است:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

فرض کنید که نوسانات میرای این سیستم به صورت زیر باشد. نسبت میرایی ξ را برای این سیستم پیدا کنید. (مؤلف)



✍ **حل:**

به دو روش می‌توانیم نسبت میرایی را بدست آوریم.

روش اول: از تعریف ماکزیمم فراجهش داریم:

$$o.v = x_1 = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad \rightarrow \quad \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{\pi}\ln(\frac{1}{x_1}) \quad \rightarrow \quad \xi = \frac{\frac{1}{\pi}\ln(\frac{1}{x_1})}{\sqrt{1+[\frac{1}{\pi}\ln(\frac{1}{x_1})]^2}}$$

روش دوم: با توجه به زمان نشست و پریود نوسانات داریم:

$$t_s = t_n = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad \rightarrow \quad \omega_n = \frac{4}{\xi t_n}$$

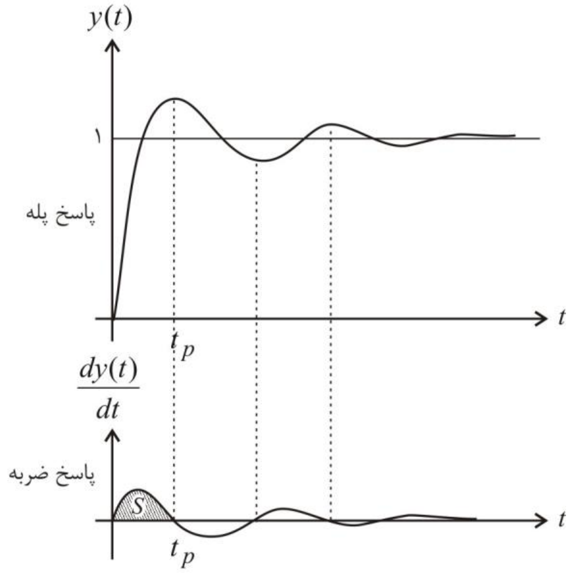
$$\omega_d = \frac{2\pi}{T} = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad \rightarrow \quad \frac{2\pi}{T} = \frac{4}{\xi t_n}\sqrt{1-\xi^2} \quad \rightarrow \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\pi t_n}{2T})^2}}$$

❈ ***نکته:*** *توجه کنید که از تعریف نسبت لگاریتمی نیز می‌توانیم نسبت میرایی را بدست آوریم.*

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \rightarrow \xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$$

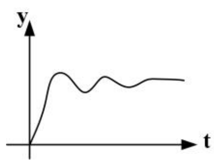
❈ ***نکته:*** *می‌دانیم که در یک سیستم خطی، از مشتق ورودی، مشتق خروجی حاصل می‌شود و از انتگرال ورودی، انتگرال خروجی بدست می‌آید. بنابراین به راحتی می‌توان از مشتق پاسخ پله برای سیستم مرتبه دوم نوعی، پاسخ ضربه آن را بدست آورد. همچنین از انتگرال پاسخ ضربه، پاسخ پله را بدست آورد. این واقعیت قابل تعمیم است.*

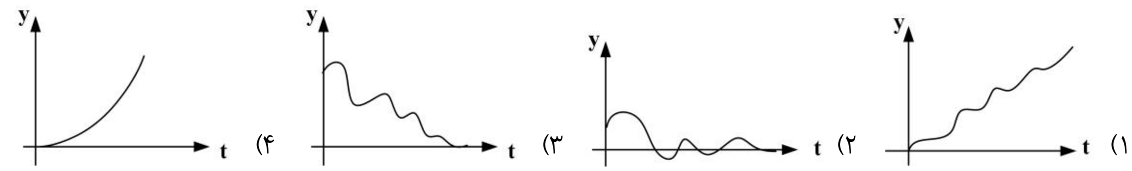
❈ *پاسخ ضربه نوعی برای یک سیستم فرومیرا به صورت زیر است. به راحتی می‌توان دریافت که پاسخ ضربه برای سیستم‌های فرومیرا حول مقدار صفر نوسان کرده و می‌تواند مقادیر مثبت یا منفی داشته باشد. همچنین اگر پاسخ ضربه سیستم مرتبه دوم نوعی تغییرعلامت ندهد، سیستم میرای بحرانی یا فرامیرا است.*



توجه کنید که چون پاسخ ضربه مشتق پاسخ پله است، به راحتی می‌توان ماکزیمم فراجهش $o.v$ پاسخ پله را از روی پاسخ ضربه متناظر با آن پیدا کرد. اگر مساحت زیر منحنی پاسخ ضربه را از $t=۰$ تا $t=t_p$ با s نمایش دهیم، داریم: $s=۱+o.v$

مثال: پاسخ ضربه (ایمپالس) یک سیستم خطی مطابق شکل است. پاسخ پله آن کدام است؟ (هسته‌ای ۸۳)

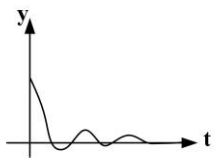


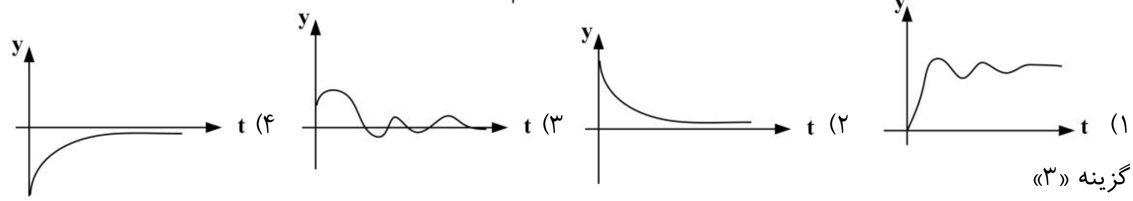


✍ **حل:** گزینه «۱»

می‌دانیم که پاسخ پله یک سیستم انتگرال ضربه آن است. لذا سطح زیر نمودار پاسخ ضربه همان پاسخ پله می‌باشد که در این تست، سطح زیر نمودار پاسخ ضربه بی‌نهایت می‌باشد. لذا گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست می‌باشند. با توجه به وجود نوسانات در پاسخ ضربه، پاسخ پله نیز باید دارای نوسان باشد. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

مثال: پاسخ پله سیستمی خطی در شکل مقابل نشان داده شده است. پاسخ ضربه (ایمپالس) آن کدام است؟ (هسته‌ای ۸۳)

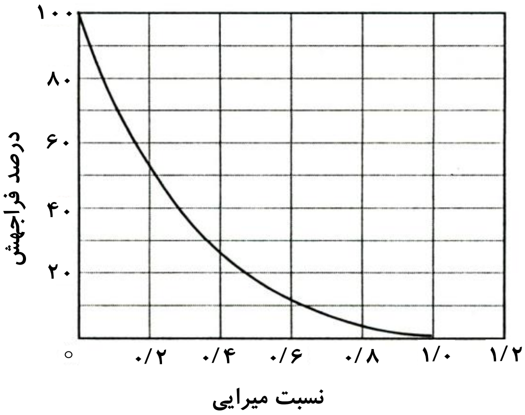




✍ **حل:** گزینه «۳»

می‌دانیم که پاسخ ضربه یک سیستم، مشتق پاسخ پله آن است. بنابراین با توجه به شکل پاسخ پله، گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

❋ **نکته:** *ماکزیمم فراجهش تنها به مقدار نسبت میرایی (ξ) وابسته است به طوری که رابطه عکس دارند.*

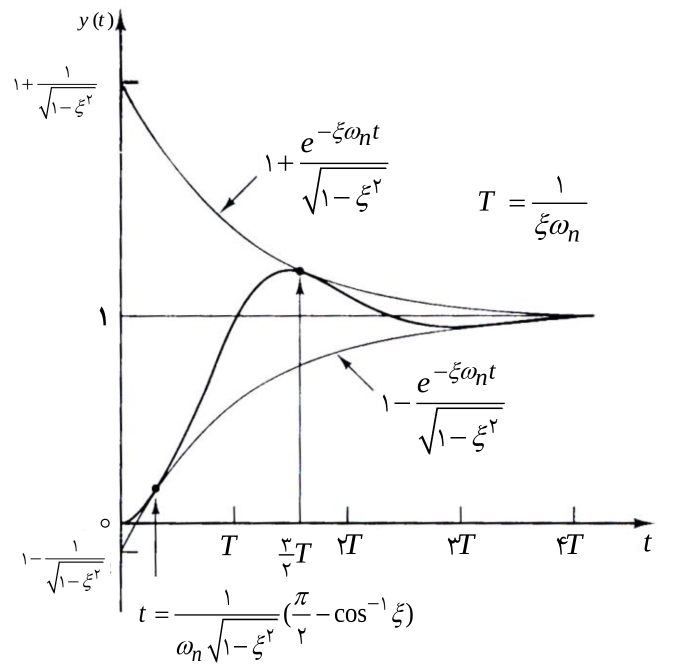


❋ **نکته:** *ماکزیمم فراجهش و زمان خیز با یکدیگر رابطه عکس دارند. این بدان معنی است که نمی‌توان به طور همزمان این دو خاصیت از پاسخ گذرا را کاهش یا افزایش داد.*

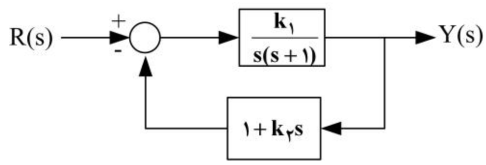
❋ **نکته:** *زمان نشست سیستم‌هایی با نسبت میرایی کمتر (با فرض ω_n ثابت) بزرگ‌تر از سیستم‌هایی با نسبت میرایی بزرگ‌تر می‌باشد، به طوری که این مقدار برای سیستم‌های فوق میرا ($\xi > 1$) به خاطر شروع کند پاسخ، بزرگ‌تر خواهد بود.*

❋ **نکته:** *معیار سرعت سیستم، زمان خیز می‌باشد که با نسبت میرایی (ξ) نسبت مستقیم دارد.*

❋ **نکته:** *منحنی‌های پوش پاسخ پله برای سیستم مرتبه دوم نوعی به صورت زیر هستند.*



مثال: به ازاء چه مقدار از k_2 در سیستم مقابل، حداکثر جهش در پاسخ پله ۲۰٪ و پاسخ در یک ثانیه به اولین جهش خود می‌رسد؟ (هسته‌ای ۷۳)



۱) ۱/۲۵
۲) ۰/۲
۳) ۱/۲
۴) ۰/۱۷۸

حل: گزینه «۴»

تابع تبدیل حلقه بسته سیستم را بدست می‌آوریم.

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{k_۱}{s^۲+(۱+k_۱k_۲)s+k_۱}=\frac{\omega_n^۲}{s^۲+۲\xi\omega_n s+\omega_n^۲}$$

$$o\cdot v=۰/۲=e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{۱-\xi^۲}}}\ \rightarrow\ \xi=۰/۴۶\quad ,\quad t_p=۱=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{۱-\xi^۲}}\ \rightarrow\ \omega_n=۳/۵۴$$

$$k_۱=\omega_n^۲=(۳/۵۴)^۲=۱۲/۵۳\quad ,\quad ۱+k_۱k_۲=۲\xi\omega_n\ \rightarrow\ k_۲=۰/۱۷۸$$

مثال: هنگامی که مقدار استهلاک (ξ) یک سیستم درجه ۲ کاهش می‌یابد، چه تغییری در پاسخ آن سیستم به ورودی پله حاصل می‌گردد؟ مقدار حداکثر جهش .... می‌یابد و پاسخ سیستم .... می‌شود. (هسته‌ای ۷۴)

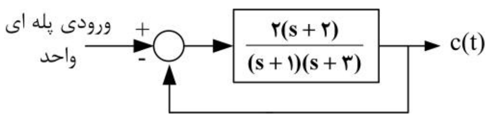
۱) افزایش ـ سریع‌تر ۲) افزایش ـ کندتر ۳) کاهش ـ سریع‌تر ۴) کاهش ـ کندتر

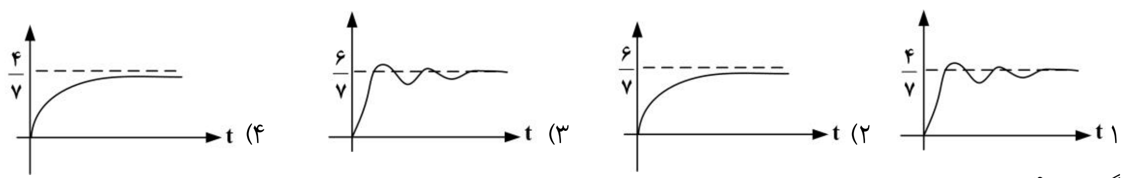
حل: گزینه «۱»

با توجه به متن درس، افزایش ξ سبب کندتر شدن پاسخ سیستم می‌گردد. به طوری که پاسخ سیستم برای $۱<\xi$ همانند یک سیستم مرتبه اول عمل می‌کند. بنابراین گزینه (۱) صحیح است. این موضوع از روی پاسخ پله سیستم مرتبه دوم نوعی به راحتی قابل درک است.

$$o\cdot v=e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{۱-\xi^۲}}}\ \xrightarrow{\xi\downarrow}\ o\cdot v\uparrow\quad ,\quad t_r=\frac{\pi-\theta}{\omega_n\sqrt{۱-\xi^۲}}\ \xrightarrow{\xi\downarrow}\ t_r\downarrow$$

مثال: کدام یک از پاسخ‌های زیر نمایش تقریبی عکس العمل سیستم نسبت به ورودی پله‌ای واحد است؟ (مکانیک ۷۲)





حل: گزینه «۴»

ابتدا از قضیه مقدار نهایی استفاده می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to\infty}c(t)=\lim\limits_{s\to ۰}sC(s)\\ \dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{۲(s+۲)}{s^۲+۶s+۷}\end{array}\right\}\rightarrow\ \lim_{t\to\infty}c(t)=\lim_{s\to ۰}sR(s)\frac{۲(s+۲)}{s^۲+۶s+۷}\ \xrightarrow{R(s)=\frac{۱}{s}}\ \lim_{t\to\infty}c(t)=\frac{۴}{۷}$$

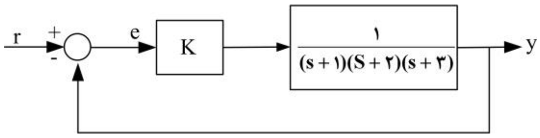
بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست می‌باشند. برای تعیین پاسخ صحیح کافیست که رفتار سیستم را بررسی کنیم که این موضوع توسط قطب‌های آن مشخص می‌شود.

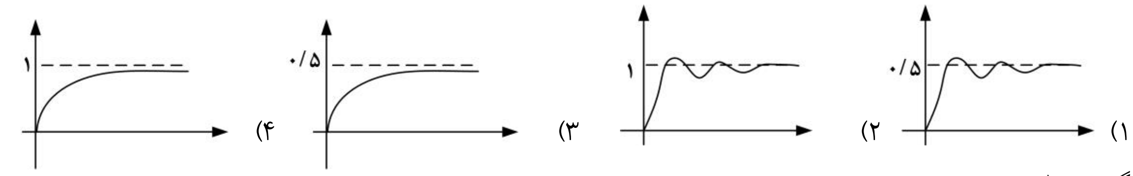
$$\Delta(s)=s^۲+۶s+۷=s^۲+۲\xi\omega_n s+\omega_n^۲=۰$$

$$\omega_n^۲=۷\ \rightarrow\ \omega_n=\sqrt{۷}\quad ,\quad ۲\xi\omega_n=۶\ \rightarrow\ \xi\approx ۱/۱۳$$

چون $۱<\xi$، سیستم فوق میرا است. لذا گزینه (۴) صحیح است.

مثال: در سیستم مدار بسته مقابل به ازاء $k=۶$ ، سیستم مدار بسته دارای کدام یک از پاسخ‌های زمانی زیر برای ورودی پله‌ای واحد r است؟ (هسته‌ای ۷۴)





✍ **حل:** گزینه «۱»

ابتدا از قضیه مقدار نهایی استفاده می‌کنیم.

$$R(s)=\frac{۱}{s} \quad , \quad \frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{k}{(s+۱)(s+۲)(s+۳)+k}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{s\to ۰} sY(s)=\lim_{s\to ۰} sR(s)\frac{k}{s^{۳}+۶s^{۲}+۱۱s+k+۶}=\frac{k}{k+۶}\bigg|_{k=۶}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) نادرست می‌باشند. حال بایستی رفتار سیستم را تعیین کنیم.

$$\Delta(s)=(s^{۳}+۶s^{۲}+۱۱s+k+۶)\bigg|_{k=۶}=s^{۳}+۶s^{۲}+۱۱s+۱۲=۰ \qquad (۱)$$

فرض می‌کنیم که معادله مشخصه به صورت کلی روبرو باشد:

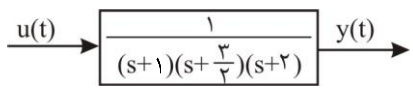
$$\Delta(s)=(s+p)(s^{۲}+۲\xi\omega_n s+\omega_n^{۲})=s^{۳}+(۲\xi\omega_n+p)s^{۲}+(\omega_n^{۲}+۲\xi\omega_n p)s+\omega_n^{۲}p \qquad (۲)$$

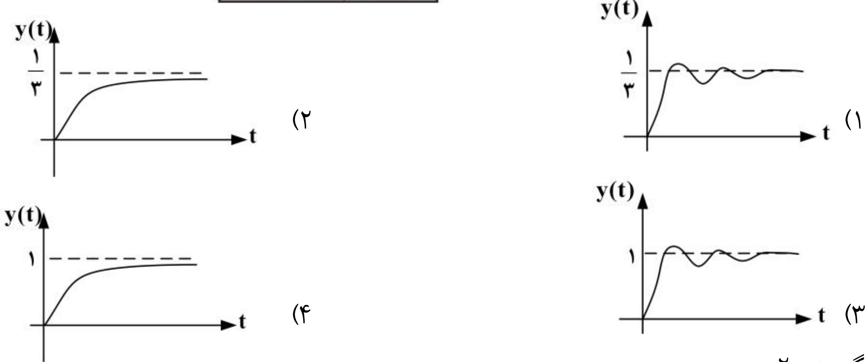
با مقایسه روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\left.\begin{aligned}\omega_n^{۲}p&=۱۲\\ \omega_n^{۲}+۲\xi\omega_n p&=۱۱\\ ۲\xi\omega_n+p&=۶\end{aligned}\right\} \rightarrow \xi=۰/۵۷$$

چون $۰<\xi<۱$ (سیستم زیرمیرا) است. پس گزینه (۱) صحیح است. توجه کنید می‌توانید اینگونه تست‌ها را با مکان هندسی ریشه‌ها نیز حل کنید.

مثال: کدام یک از چهار پاسخ زیر نمایش تقریبی عکس العمل $y(t)$ سیستم شکل مقابل نسبت به ورودی $u(t)$ (پله واحد) می‌باشد؟ (مکانیک ۷۰)





✍ **حل:** گزینه «۲»

$$y_{ss}=\lim_{s\to ۰} sY(s)=\lim_{s\to ۰} sR(s)\frac{۱}{(s+۱)(s+\frac{۳}{۲})(s+۲)} \quad , \quad R(s)=\frac{۱}{s} \Rightarrow y_{ss}=\frac{۱}{۳}$$

با توجه به محل قطب‌های سیستم (ریشه‌های حقیقی منفی)، گزینه (۲) صحیح است.

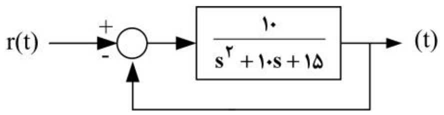
مثال: سیستم کنترل شکل زیر مفروض است. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد آن صادق است؟ (آزاد ۸۳)

۱) این سیستم زیر میرا *(under damped)* است.

۲) این سیستم فوق میرا *(over damped)* است.

۳) این سیستم میرای بحرانی است.

۴) ناپایدار است.



✍ **حل:** گزینه «۳»

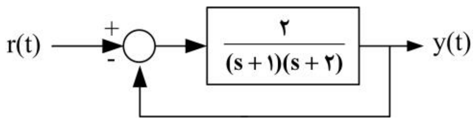
$$\Delta(s)=s^{۲}+۱۰s+۲۵=۰ \;\Rightarrow\; \omega_n^{۲}=۲۵ \;\rightarrow\; \omega_n=۵$$

$$۲\xi\omega_n=۱۰ \;\rightarrow\; \xi=۱ \;\rightarrow\;$$ سیستم میرای بحرانی است

مثال: در سیستم کنترلی نشان داده شده، درصد بالازدگی پاسخ به ورودی پله واحد برابر است با: (هسته‌ای ۸۴ ـ ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۴)

۱) ۰ درصد ۲) ۰/۲۸۴ درصد

۳) ۲/۸۴ درصد ۴) ۲۸/۴ درصد



✍ **حل:** گزینه «۳»

تابع تبدیل حلقه بسته سیستم را بدست می‌آوریم: $\dfrac{Y(s)}{R(s)}=\dfrac{۲}{s^{۲}+۳s+۴}$

لذا معادله مشخصه سیستم عبارتست از: $\Delta(s)=s^{۲}+۳s+۴=۰$

از مقایسه با معادله مشخصه استاندارد سیستم مرتبه دوم داریم: $\omega_n^{۲}=۴ \;\rightarrow\; \omega_n=۲$

$$۲\xi\omega_n=۳ \;\rightarrow\; \xi=\frac{۳}{۴} \;\rightarrow\; \theta=\cos^{-۱}\xi=۴۱/۴۰۹$$

$$o\cdot v=e^{-\pi\cot\theta}=۰/۰۲۸۴ \;\rightarrow\; \%o\cdot v=\%۲/۸۴$$

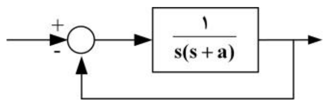
مثال: برای پاسخ پله سیستم درجه دوم مقابل، اگر a از صفر تا دو تغییر کند، کدام عبارت صحیح است؟ (هسته‌ای ۸۳)

۱) پاسخ سیستم فوق میرا است.

۲) با افزایش a زمان قرار سیستم کاهش می‌یابد.

۳) با افزایش a حداکثر دامنه نیز افزایش می‌یابد.

۴) حداکثر دامنه و زمان قرار به a ربطی ندارد.



✍ **حل:** گزینه «۲»

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از: $\Delta(s)=s^{۲}+as+۱=۰$

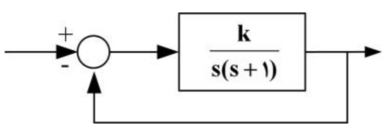
$$\rightarrow\; \omega_n^{۲}=۱ \;\rightarrow\; \omega_n=۱=cte \quad،\quad ۲\xi\omega_n=a \;\rightarrow\; \xi=\frac{a}{۲}$$

با افزایش a، ξ افزایش می‌یابد. بنابراین: $t_s=\dfrac{۴}{\xi\omega_n} \xrightarrow{\xi\uparrow} t_s\downarrow$

مثال: در سیستم کنترل شکل زیر به ازای کدام مقدار k نسبت میرایی سیستم $\xi=۱$ می‌باشد؟ (هسته‌ای ۸۰)

۱) ۴ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۴}$



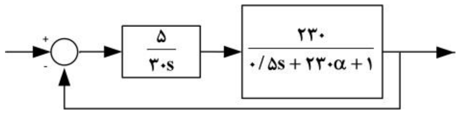
✍ **حل:** گزینه «۴»

$\xi=۱$ نشان‌دهنده این است که رفتار سیستم میرای بحرانی است. در این حالت سیستم دارای دو قطب حقیقی منفی برابر است.

لذا باید در معادله مشخصه $\Delta=۰$ صدق کند. $\Delta(s)=s^{۲}+s+k=۰$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=۰ \;\rightarrow\; ۱-۴k=۰ \;\rightarrow\; k=\frac{۱}{۴}$$

مثال: سیستم زیر به ازاء چه مقادیری از پارامتر α، به داده پله‌ای یکه *(unit step input)* پاسخ نوسانی میرا خواهد داشت؟ (مکانیک ۷۲)



۱) $-4/3\times10^{-3} < \alpha < 0/034$ ۲) $\alpha < -4/3\times10^{-3}$

۳) $\alpha < 0$ ۴) $\alpha < 0/034$

✍ **حل:** گزینه «۱»

معادله مشخصه سیستم عبارتست از:

$$\Delta(s) = s^2 + 2(230\alpha+1)s + 76/7 = 0$$

شرط پاسخ نوسانی میرا، $1 > \xi > 0$ است. بنابراین:

$$\omega_n^2 = 76/7 \;\rightarrow\; \omega_n = \sqrt{76/7}$$

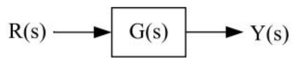
$$2\xi\omega_n = 2(230+\alpha) \;\rightarrow\; \xi = \frac{230\alpha+1}{\sqrt{76/7}}$$

برای برقراری شرط $1 > \xi > 0$ کافی است $-0/0043 < \alpha < 0/034$ باشد.

۲-۶-۴-۲ مشخصات حالت ماندگار

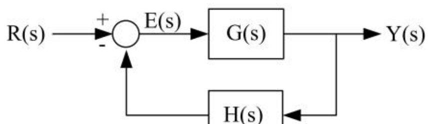
معیار بررسی رفتار سیستم‌ها در حالت ماندگار، خطای حالت ماندگار $e_{ss}(t)$ سیستم‌ها به ورودی‌های معین می‌باشد، که با توجه به شیوه‌های کنترلی به صورت زیر تعریف می‌شود.

- سیستم حلقه باز



$$E(s) \overset{\Delta}{=} R(s) - Y(s)$$

- سیستم حلقه بسته



$$E(s) \overset{\Delta}{=} R(s) - H(s)Y(s)$$

با جایگذاری $R(s)\dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = Y(s)$ داریم:

$$W_e(s) \overset{\Delta}{=} \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)}$$

به $W_e(s)$ تابع تبدیل خطا می‌گوییم. از این به بعد برای سهولت در نوشتار $G(s)H(s)$ را با $GH(s)$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید

۱- خطای حالت ماندگار وابسته به نوع ورودی است.

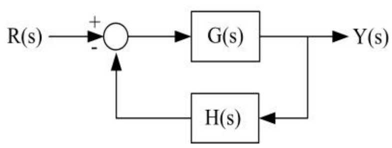
۲- خطای حالت ماندگار وابسته به نوع سیستم است.

۳- خطای حالت ماندگار برای سیستم‌های حلقه بسته ممکن است به صورت‌های دیگری نیز تعریف شود که در صورت مسأله قطعاً ذکر خواهد شد. در غیر این صورت، تعریف خطا همان است که در بالا ذکر گردیده است.

۴- خطای حالت ماندگار برای سیستم‌های پایدار تعریف می‌شود.

۳-۶-۴-۲ نوع سیستم‌های کنترل (type سیستم)

سیستم کنترلی زیر را در نظر بگیرید.



بنا به تعریف، تعداد قطب‌های واقع در مبدأ در تابع تبدیل حلقه باز سیستم، نوع سیستم را مشخص می‌کند. اگر تابع تبدیل حلقه باز سیستم را به صورت $GH(s) = \dfrac{s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0}{s^\lambda (s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0)}$ نمایش دهیم که در آن $a_0 \neq 0$ و $b_0 \neq 0$ می‌باشند، λ نوع سیستم را نشان خواهد داد.

۲-۶-۴-۴ محاسبه خطای حالت ماندگار

کلید محاسبه خطای حالت ماندگار استفاده از قضیه مقدار نهایی است.
$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to ۰} sE(s)$$

بنابراین:
$$W_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} \quad \to \quad E(s) = R(s)W_e(s) = R(s)\frac{۱}{۱+GH(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to ۰} sE(s) = \lim_{s \to ۰} sR(s)\frac{۱}{۱+GH(s)}$$

حال خطای حالت ماندگار را با توجه به ورودی‌های معین (سیگنال‌های آزمون) بررسی می‌کنیم.

- خطای حالت ماندگار به ورودی پله

R دامنه ورودی پله است.
$$R(s) = \frac{R}{s}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to ۰} s(\frac{R}{s})\frac{۱}{۱+GH(s)} = \frac{R}{۱+\lim_{s \to ۰} GH(s)}$$

برای سهولت در محاسبه، ثابت خطای پله k_p را تعریف می‌کنیم.
$$k_p = \lim_{s \to ۰} GH(s)$$

بنابراین خطای حالت ماندگار به ورودی پله برابر است با:
$$e_{ss} = \frac{R}{۱+k_p}$$

- خطای حالت ماندگار به ورودی شیب

R دامنه ورودی شیب است.
$$R(s) = \frac{R}{s^۲}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to ۰} s(\frac{R}{s^۲})\frac{۱}{۱+GH(s)} = \lim_{s \to ۰} \frac{R}{s+sGH(s)} = \frac{R}{\lim_{s \to ۰} sGH(s)}$$

مشابه با حالت ورودی پله، ثابت خطای شیب k_v را تعریف می‌کنیم.
$$k_v = \lim_{s \to ۰} sGH(s)$$

بنابراین خطای حالت ماندگار به ورودی شیب برابر است با:
$$e_{ss} = \frac{R}{k_v}$$

- خطای حالت ماندگار به ورودی سهموی

R دامنه ورودی سهموی است.
$$R(s) = \frac{R}{s^۳}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to ۰} s(\frac{R}{s^۳})\frac{۱}{۱+GH(s)} = \lim_{s \to ۰} \frac{R}{s^۲+s^۲GH(s)} = \lim_{s \to ۰} \frac{R}{s^۲GH(s)}$$

ثابت خطا برای ورودی سهموی k_a را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.
$$k_a = \lim_{s \to ۰} s^۲GH(s)$$

بنابراین خطای حالت ماندگار در این حالت برابر است با:
$$e_{ss} = \frac{R}{k_a}$$

با توجه به نوع سیستم، خطای حالت ماندگار:

الف) برای ورودی پله با دامنه R عبارتست از:

۱- سیستم نوع صفر $e_{ss} = \frac{R}{۱+k_p}$

۲- سیستم نوع یک $e_{ss} = ۰$

۳- سیستم نوع دو و بالاتر $e_{ss} = ۰$

ب) برای ورودی شیب با دامنه R عبارتست از:

۱- سیستم نوع صفر $e_{ss} = \infty$

۲- سیستم نوع یک $e_{ss} = \frac{R}{k_v}$

۳- سیستم نوع دو و بالاتر $e_{ss} = 0$

ج) برای ورودی سهموی با دامنه R عبارتست از:

۱- سیستم نوع صفر $e_{ss} = \infty$

۲- سیستم نوع یک $e_{ss} = \infty$

۳- سیستم نوع دو $e_{ss} = \frac{R}{k_a}$

۴- سیستم نوع سه و بالاتر $e_{ss} = 0$

خلاصه مطالب فوق در جدول (۲ ـ ۲) آورده شده است.

جدول (۲ـ۲): خطای حالت دائمی به ورودی‌های مختلف

ورودی	پله با دامنه R		شیب با دامنه R		سهموی با دامنه R	
نوع سیستم	k_p	e_{ss}	k_v	e_{ss}	k_a	e_{ss}
نوع صفر	cte	$\frac{R}{1+k_p}$	0	∞	0	∞
نوع یک	∞	0	cte	$\frac{R}{k_v}$	0	∞
نوع دو	∞	0	∞	0	cte	$\frac{R}{k_a}$
نوع سه	∞	0	∞	0	∞	0

نتیجه:

از روابط اخیر در جدول فوق نتایج زیر بدست می‌آید:

۱- افزایش نوع سیستم، کاهش خطای حالت دائمی را به دنبال دارد.

۲- با دانستن خطای حالت دائمی، می‌توان نوع سیستم را تشخیص داد.

۳- با توجه به نتیجه (۱)، برای کاهش خطای حالت دائمی بایستی از کنترل‌کننده انتگرال گیر استفاده کنیم.

❋ **نکته:** *در هنگام استفاده از ثوابت خطا در محاسبه خطای حالت دائمی به نکات زیر توجه کنید:*

۱- در هنگام استفاده از ثوابت خطا باید توجه داشته باشید که خطا به فرم متعارف تعریف شده باشد. در غیر این صورت باید خطا را محاسبه کرده و از قضیه مقدار نهایی استفاده کنید.

۲- از قضیه جمع آثار می‌توانید استفاده کنید.

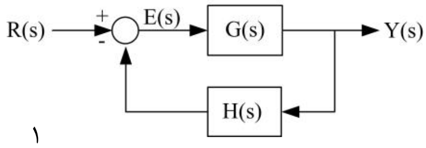
۳- چون تحلیل خطا بر اساس قضیه مقدار نهایی است، اگر $sE(s)$ قطبی روی محور موهومی یا سمت راست آن داشته باشد (شرط قضیه مقدار نهایی نقض گردد)، نمی‌توان از ثوابت خطا برای محاسبه خطای حالت دائمی استفاده کرد.

٤- روش ثابت خطا برای محاسبه خطای حالت دائمی، به دلیل نقض شرط قضیه مقدار نهایی برای ورودی‌های سینوسی قابل استفاده نمی‌باشد.

۲-۶-۴-۵ سری خطا

یکی از معایب استفاده از روش ثابت خطا، عدم آگاهی از نحوه تغییرات خطا با زمان است، به هنگامی که خطای حالت ماندگار بی-نهایت می‌شود. همچنین این روش، برای ورودی‌های سینوسی به دلیل عدم برقراری شرط قضیه مقدار نهایی قابل استفاده نمی‌باشد. سری خطا روشی برای رفع معایب روش ثابت خطا است، به طوری که به کمک آن می‌توانیم خطای حالت ماندگار را به هر ورودی دلخواه بدست آوریم. حال به تشریح این روش می‌پردازیم.

سیستم کنترلی روبرو را در نظر بگیرید.



می‌دانیم که تابع تبدیل خطا برابر است با:

$$W_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{۱}{۱+GH(s)}$$

با بهره‌گیری از انتگرال کانولوشن، سیگنال خطا $e(t)$ برابر است با:

$$E(s)=W_e(s)R(s)$$

$$\xrightarrow{L^{-۱}} e(t)=W_e(t)*r(t)=\int_{-\infty}^{t}W_e(\tau)r(t-\tau)d\tau$$

با استفاده از سری تیلور و با فرض این که $r_s(t)$ قسمت ماندگار ورودی $r(t)$ و $e_s(t)$ قسمت ماندگار خطا $e(t)$ ناشی از $r_s(t)$ باشد، سری خطا را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$e_s(t)=c_\circ r_s(t)+\frac{c_۱}{۱!}\frac{dr_s(t)}{dt}+\frac{c_۲}{۲!}\frac{d^۲r_s(t)}{dt^۲}+\ldots+\frac{c_n}{n!}\frac{d^nr_s(t)}{dt^n}+\ldots$$

$c_\circ$، $c_۱$، $c_۲$، ... و c_n را ضرائب خطای تعمیم یافته یا به طور خلاصه ضرائب خطا می‌نامیم که به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$c_\circ=\lim_{s\to\circ}W_e(s)$$

$$c_۱=\lim_{s\to\circ}\frac{dW_e(s)}{ds}$$

$$c_۲=\lim_{s\to\circ}\frac{d^۲W_e(s)}{ds^۲}$$

$$\vdots$$

$$c_n=\lim_{s\to\circ}\frac{d^nW_e(s)}{ds^n}$$

مثال: فرض کنید که تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترلی به صورت $GH(s)=\frac{k}{s+۱}$ باشد. با استفاده از روش ثابت خطا می‌دانیم که خطای حالت ماندگار این سیستم عبارتست از:

۱- به ورودی پله واحد $e_{ss}=\frac{۱}{۱+k_p}=\frac{۱}{۱+k}$

۲- به ورودی شیب واحد $e_{ss}=\infty$

۳- به ورودی سهمی واحد $e_{ss}=\infty$

مشاهده می‌کنید که از نحوه تغییرات خطای حالت ماندگار با زمان به دو ورودی شیب و سهمی اطلاعی در دست نداریم.

حال از روش سری خطا استفاده می‌کنیم.

تابع تبدیل خطای سیستم عبارتست از:

$$W_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{۱}{۱+GH(s)}=\frac{s+۱}{s+۱+k}$$

ضرائب خطای سیستم عبارتند از:

$$c_\circ=\lim_{s\to\circ}W_e(s)=\frac{۱}{۱+k}$$

$$c_1 = \lim_{s \to 0} \frac{dW_e(s)}{ds} = \frac{k}{(1+k)^2}$$

$$c_2 = \lim_{s \to 0} \frac{d^2 W_e(s)}{ds^2} = \frac{-2k}{(1+k)^3}$$

بنابراین سری خطا عبارتست از:

$$e_s(t) = \frac{1}{1+k} r_s(t) + \frac{k}{(1+k)^2} \frac{dr_s(t)}{dt} + \frac{-k}{(1+k)^3} \frac{d^2 r_s(t)}{dt^2} + \ldots$$

توجه کنید که محاسبه ضرائب مرتبه بالاتر به نوع ورودی بستگی دارد، به طوری که در حالت کلی برای ورودی پله فقط به محاسبه c_0 ، برای ورودی شیب فقط به محاسبه c_0 و c_1 و برای ورودی سهمی فقط به محاسبه c_0 ، c_1 و c_2 نیاز داریم، زیرا مشتقات بالاتر ورودی صفر می‌گردند. در مثال فوق سری خطا برای ورودی‌های مذبور عبارتند از:

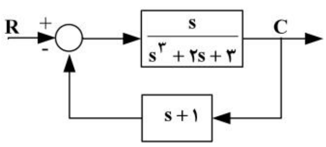
۱- ورودی پله واحد $e_s(t) = \frac{1}{1+k} u(t)$

۲- ورودی شیب واحد $e_s(t) = \frac{1}{1+k} tu(t) + \frac{k}{(1+k)^2} u(t)$

۳- ورودی سهمی واحد $e_s(t) = \frac{1}{2(1+k)} t^2 u(t) + \frac{k}{(1+k)^2} tu(t) - \frac{k}{(1+k)^3} u(t)$

مثال: برای سیستم کنترلی نشان داده شده، خطای حالت ماندگار (حالت دائم) آن برای ورودی پله‌ای واحد برابر است با:

(مکاترونیک ۸۴)



۱) ۰ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

✍ **حل**: گزینه «۲»

یادآوری می‌کنیم برای استفاده از روش ثابت خطا، بایستی شرط قضیه مقدار نهایی برقرار باشد.

$$W_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+GH(s)}$$

$$W_e(s) = \frac{1}{1+\frac{s(s+1)}{s^3+2s+3}} = \frac{s^3+2s+3}{s^3+s^2+3s+3} \quad \to \quad E(s) = \frac{1}{1+GH(s)} R(s) = \frac{s^3+2s+3}{s^3+s^2+3s+3} \cdot \frac{1}{s}$$

شرط قضیه مقدار نهایی این است که $sE(s)$ قطبی روی محور موهومی یا سمت راست آن نداشته باشد. این شرط در مورد این مسأله صدق نمی‌کند. زیرا یک سطر صفر کامل در جدول راث بدون تغییر علامت در ستون اول آن $(3 \times 1 = 3 \times 1)$ وجود دارد که نشان‌دهنده ریشه‌های موهومی است. این ریشه‌ها از معادله کمکی بدست می‌آیند. $A(s) = s^2 + 3 = 0 \ \to \ s = \pm j\sqrt{3}$

لذا از روش سری خطا استفاده می‌کنیم. چون ورودی پله است، به دلیل صفر شدن مشتق اول و بالاتر از آن کافیست فقط ضریب c_0 را محاسبه کنیم. داریم:

$$c_0 = \lim_{s \to 0} W_e(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s^3+2s+3}{s^3+s^2+3s+3} = 1$$

بنابراین سری خطا عبارتست از:

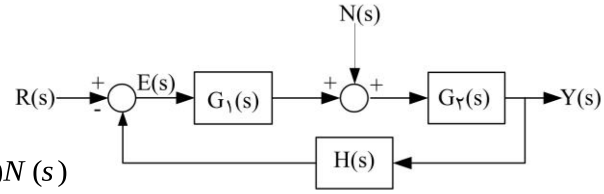
$$e_s(t) = c_0 r_s(t) = 1u(t) = u(t)$$

پس خطای حالت ماندگار برابر است با:

$$\lim_{t \to \infty} e_s(t) = 1$$

۲-۶-۴-۶ استفاده از قضیه جمع آثار در محاسبه خطا

سیستم کنترلی زیر را در نظر بگیرید.



$$E(s)=R(s)-H(s)Y(s)$$

$$Y(s)=[G_۱(s)E(s)+N(s)]G_۲(s)$$

$$\rightarrow\ E(s)=R(s)-G_۱(s)G_۲(s)H(s)E(s)-G_۲(s)H(s)N(s)$$

$$\rightarrow\ [۱+G_۱(s)G_۲(s)H(s)]E(s)=R(s)-G_۲(s)H(s)N(s)$$

$$\Rightarrow\ E(s)=\frac{۱}{۱+G_۱(s)G_۲(s)H(s)}R(s)-\frac{G_۲(s)H(s)}{۱+G_۱(s)G_۲(s)H(s)}N(s)$$

بنابراین با توجه به برقراری خاصیت جمع آثار برای سیستم‌های خطی می‌توانیم خطای حالت دائمی را به ورودی مرجع $R(s)$ و اغتشاش $N(s)$ به تنهایی محاسبه کنیم.

۱- خطای حالت دائمی برای ورودی $R(s)$

$$E_R(s)=\frac{۱}{۱+G_۱G_۲H(s)}R(s)$$

$$N(s)=۰$$

۲- خطای حالت دائمی برای ورودی $N(s)$

$$E_N(s)=-\frac{G_۲(s)H(s)}{۱+G_۱(s)G_۲(s)H(s)}N(s)$$

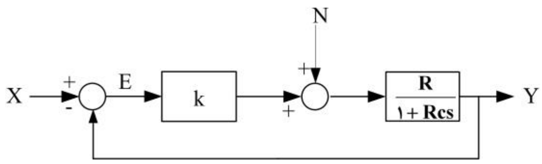
$$R(s)=۰$$

❋ **نکته**: *برای تابع تبدیل سیستم حلقه‌بسته با فیدبک واحد به‌صورت* $M(s)=\frac{G(s)}{۱+G(s)}=\frac{(۱+z_۱s)(۱+z_۲s)...(۱+z_ms)}{(۱+p_۱s)(۱+p_۲s)...(۱+p_ns)}$ *داریم:*

$$\int_۰^\infty e(t)dt=(p_۱+p_۲+...+p_n)-(z_۱+z_۲+...+z_m)$$

$$\int_۰^\infty e(t)dt=\frac{۱}{\lim\limits_{s\to\infty} sG(s)}=\frac{۱}{k_v}$$

مثال: خطای حالت ماندگار، e_{ss} ، به اغتشاش $n(t)=n_۰u(t)$ کدام است؟ (هسته‌ای ۸۳)



۱) $-\frac{n_۰}{۱+kR}$ ۲) $-\frac{n_۰R}{۱+kR}$

۳) $\frac{n_۰R}{۱+kR}$ ۴) $\frac{n_۰}{۱+kR}$

✍ **حل**: گزینه «۲»

از قضیه جمع آثار استفاده می‌کنیم. بنابراین $X=۰$ و داریم:

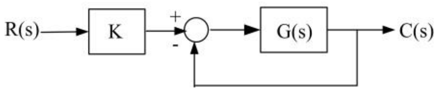
$$G(s)\overset{\Delta}{=}\frac{R}{۱+Rcs}$$

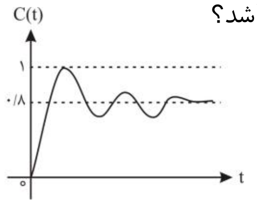
$$E(s)=-\frac{G(s)}{۱+kG(s)}N(s)$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to۰} sE(s)=\lim_{s\to۰} s\cdot\frac{-G(s)}{۱+kG(s)}\cdot\frac{n_۰}{s}=-\frac{n_۰G(۰)}{۱+kG(۰)}\xrightarrow{G(۰)=R} e_{ss}=-\frac{n_۰R}{۱+kR}$$

در ادامه به بررسی تست‌های متنوع مطرح شده برای خطای حالت ماندگار می‌پردازیم.

مثال: در سیستم کنترل شکل زیر برای $k=۱$ پاسخ به ورودی پله واحد داده شده است. مقدار k را چنان تعیین کنید که خطای حالت دائمی صفر باشد؟ (هسته‌ای ۷۵ ـ ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۲)





۱) ۱/۲۵
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) خطای حالت دائمی هرگز صفر نمی‌شود.

✍ **حل:** گزینه «۱»

ابتدا توجه کنید که سیستم تابع تبدیل حلقه باز است. لذا: $E(s)=R(s)-C(s)$

برای $k=۱$، مقدار دائمی خروجی برابر ۰/۸ است. بنابراین:

$$y_{ss}=۰/۸=\lim_{s\to ۰} sY(s)=\lim_{s\to ۰} sR(s)\frac{G(s)}{۱+G(s)}=\lim_{s\to ۰} s\frac{۱}{s}\frac{G(s)}{۱+G(s)}\to ۰/۸=\frac{G(۰)}{۱+G(۰)}\to G(۰)=۴$$

حال $k\neq ۱$ را در نظر می‌گیریم.

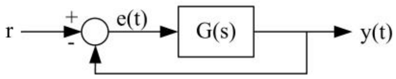
$$E(s)=R(s)-C(s)=R(s)-\frac{kG(s)}{۱+G(s)}R(s)$$

$$E(s)=R(s)[۱-\frac{kG(s)}{۱+G(s)}]=\frac{۱}{s}[۱-\frac{kG(s)}{۱+G(s)}]$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to ۰} sE(s)=۰\to \lim_{s\to ۰} s\frac{۱}{s}[۱-\frac{kG(s)}{۱+G(s)}]=۰\to ۱-\frac{kG(۰)}{۱+G(۰)}=۰\xrightarrow{G(۰)=۴} k=۱/۲۵$$

مثال: یک سیستم کنترل حلقه بسته با فیدبک منفی واحد دارای تابع تبدیل $M(s)=\frac{(۱+۲s)(۱+۳s)(۱+۴s)}{(۱+۵s)(۱+۶s)(۱+۷s)}$ می‌باشد. مطلوبست محاسبه $\int_۰^\infty e(t)dt$ که $e(t)$ سیگنال خطا است. فرض نمایید ورودی **r** پله واحد باشد.

(ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۴- هسته‌ای ۸۴)



۱) ۹
۲) ۱۸
۳) ۲۴
۴) ۲۷

✍ **حل:** گزینه «۱»

طبق نکته داریم:

$$\int_۰^\infty e(t)dt=(p_۱+p_۲+...+p_n)-(z_۱+z_۲+...+z_m)=(۵+۶+۷)-(۲+۳+۴)=۹$$

راه‌حل تشریحی به‌صورت زیر است.

$$M(s)=\frac{۲۴s^۳+۲۶s^۲+۹s+۱}{۲۱۰s^۳+۱۰۷s^۲+۱۸s+۱}=\frac{G(s)}{۱+G(s)}\to G(s)=\frac{۲۴s^۳+۲۶s^۲+۹s+۱}{s(۱۸۶s^۲+۸۱s+۹)}$$

تعریف می‌کنیم:

$$e_۰(t)=\int_۰^\infty e(t)dt \quad\to\quad E_۰(s)=\frac{E(s)}{s}$$

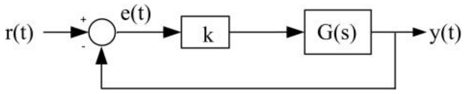
$$E(s)=\frac{R(s)}{۱+GH(s)}\xrightarrow{H(s)=۱} E(s)=\frac{R(s)}{۱+G(s)}\quad,\quad R(s)=\frac{۱}{s}$$

با جایگذاری داریم:

$$E(s)=\frac{۱۸۶s^۲+۸۱s+۹}{۲۱۰s^۳+۱۰۷s^۲+۱۸s+۱}$$

$$\lim_{t\to\infty} e_۰(t)=\lim_{s\to ۰} sE_۰(s)=\lim_{s\to ۰} s\frac{E(s)}{s}=E(۰)=۹$$

مثال: سیستم حلقه بسته روبرو با $G(s)=\dfrac{s-1}{s(s+1)^2}$ را در نظر بگیرید:



مقادیر k که به ازاء آن سیستم حلقه بسته پایدار و خطای حالت ماندگار به ورودی شیب واحد کوچک‌تر یا برابر ۲ ($e_{ss}\le 2$) خواهد بود را بدست آورید. (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۳)

۱) $-\frac{2}{3}<k\le-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{2}{3}<k<0$ ۳) $-\frac{2}{3}<k<-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}\le k\le\frac{2}{3}$

حل: گزینه «۱»

برای تعیین محدوده پایداری از روش راث استفاده می‌کنیم.

$$\Delta(s)=1+kG(s)=s^3+2s^2+(k+1)s-k=0$$

شرایط پایداری عبارتند از:

$$\begin{cases}-k>0 & \rightarrow\ k<0\\ 2(k+1)>1(-k) & \rightarrow\ k>-\frac{2}{3}\end{cases}\xrightarrow{\ \cap\ }\ -\frac{2}{3}<k<0\qquad(1)$$

از سویی دیگر با توجه به فرض مسأله داریم:

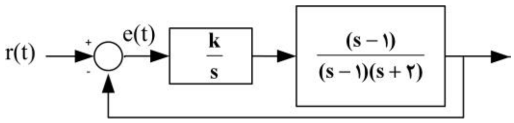
$$e_{ss}=\frac{R}{k_v}=\frac{1}{k_v}\le 2\ \rightarrow\ k_v\ge\frac{1}{2}$$

$$k_v=\lim_{s\to 0}sGH(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{k(s-1)}{s(s+1)^2}=-k\ge\frac{1}{2}\ \rightarrow\ k\le-\frac{1}{2}\qquad(2)$$

از (۱) و (۲) داریم:

$$-\frac{2}{3}<k\le-\frac{1}{2}$$

مثال: برای سیستم کنترلی داده شده، حداکثر ثابت خطای سرعت برابر است با: (هسته‌ای ۸۴ ـ ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۴)



۱) ۰ ۲) ۱

۳) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$

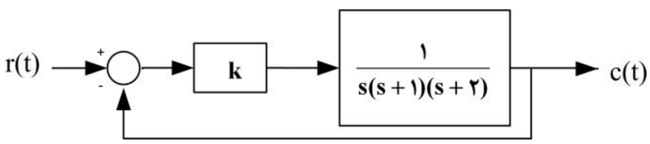
حل: گزینه «؟»

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=(s-1)[s^2+2s-k]=0$$

واضح است به دلیل وجود قطب ناپایدار $s=1$، سیستم حلقه بسته همواره ناپایدار است. با توجه به این که روش ثابت خطا برای سیستم‌های پایدار قابل استفاده است، لذا گزینه صحیح وجود ندارد.

مثال: به ازاء کدام مقدار k خطای حالت ماندگار (e_{ss}) برای ورودی r شیب‌دار واحد برابر با ۰/۰۱ می‌شود؟ (مکانیک ۷۶)



۱) ۲۰۰

۲) ۵۰

۳) ۰/۰۲

۴) به ازاء هیچ مقداری از k

حل: گزینه «۴»

$$k_v=\lim_{s\to 0}sGH(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{k}{s(s+1)(s+2)}=\frac{k}{2}$$

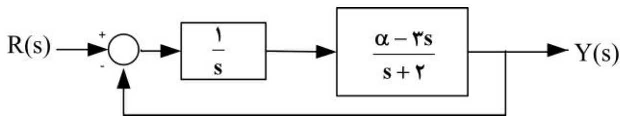
$$e_{ss}=\frac{1}{k_v}=\frac{2}{k}=0.01\quad\rightarrow\quad k=200$$

حال بایستی مطمئن شویم که سیستم با این مقدار k همچنان پایدار است.

$$\Delta(s)=s^3+3s^2+2s+k=0$$

شرایط پایداری عبارتند از $k>0$ و $1\times k<2\times 3$. لذا برای پایداری بایستی $0<k<6$ انتخاب گردد. بنابراین به ازای $k=200$ سیستم ناپایدار شده و نمی‌توان خطای حالت ماندگار مفروض را ایجاد کرد.

مثال: در سیستم روبرو، مقدار α چقدر باشد تا خطای ماندگار برای ورودی شیب واحد $(R(s)=\frac{1}{s^2})$ برابر با ۰/۱ گردد؟
(ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۲)



۱) $\alpha=-20$ ۲) $\alpha=s$

۳) $\alpha=20$ ۴) هیچ‌کدام

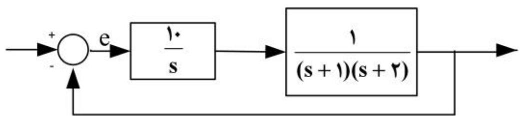
✍ **حل:** گزینه «۴»

$$k_v=\lim_{s\to 0} sGH(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{\alpha-3s}{s(s+2)}=\frac{\alpha}{2} \Rightarrow e_{ss}=\frac{1}{k_v}=\frac{2}{\alpha}=\frac{1}{10} \to \alpha=20$$

توجه کنید سیستم به ازاء هر α ناپایدار است. زیرا معادله مشخصه شرط لازم برای پایداری را ندارد. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

$$\Delta(s)=1+GH(s)=s(s+2)+\alpha-3s=s^2-s+\alpha=0$$

مثال: در سیستم مدار بسته زیر خطای حالت ماندگار برای ورودی پله کدام است؟ (هسته‌ای ۷۴)



۱) ∞ ۲) ۵

۳) $\frac{1}{6}$ ۴) ۰

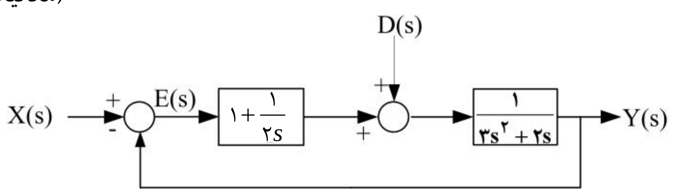
✍ **حل:** گزینه «۱»

معادله مشخصه سیستم عبارتست از:

$$\Delta(s)=1+\frac{10}{s(s+1)(s+2)}=0 \to \Delta(s)=s^3+3s^2+2s+10=0$$

با توجه به عدم برقراری شرط $1\times10<2\times3$، دو تغییر علامت در ستون اول جدول راث وجود دارد و لذا سیستم ناپایدار است. توجه کنید اگرچه تابع تبدیل حلقه باز سیستم $GH(s)=\frac{10}{s(s+1)(s+2)}$ از نوع یک می‌باشد، ولی بایستی سیستم حلقه بسته نیز پایدار باشد تا خطای حالت ماندگار به ورودی پله صفر گردد. زیرا خطای ماندگار برای سیستم پایدار تعریف می‌شود.

مثال: خطای ماندگار *(steady state error)* سیستم کنترل فیدبک *PI* نشان داده شده در شکل مقابل به اغتشاش خارجی D که به صورت تابع پله واحد در نظر گرفته می‌شود، چقدر است؟ (یعنی $x(s)=0$ در نظر گرفته می‌شود و تنها ورودی سیستم *D(s)* است.) (مکانیک ۸۲)



۱) $e_{ss}=0$

۲) $e_{ss}=\infty$

۳) $e_{ss}=2$

۴) $e_{ss}=\frac{1}{2}$

✍ **حل:** گزینه «۱»

با تعریف $k(s)\overset{\Delta}{=}1+\frac{1}{2s}$ و $G(s)\overset{\Delta}{=}\frac{1}{3s^2+2s}$ داریم:

$$E(s)=\frac{-G(s)}{1+G(s)k(s)}D(s) \quad , \quad D(s)=\frac{1}{s}$$

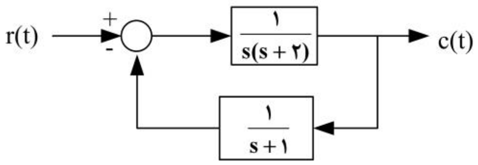
$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{-G(s)}{1+G(s)k(s)}\cdot\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{-G(s)}{1+G(s)k(s)}$$

با جایگذاری داریم:

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{-2s}{6s^3+4s^2+2s+1}=0$$

حال باید از پایداری سیستم حلقه بسته مطمئن شویم. با توجه به مثبت بودن کلیه ضرایب معادله مشخصه $(\Delta(s)=6s^3+4s^2+2s+1)$ و برقراری شرط $1\times6<4\times2$ سیستم پایدار خواهد بود.

مثال: سیستم کنترل داده شده در شکل مقابل را در نظر بگیرید. در صورتی که ورودی این سیستم سیگنال شیب واحد باشد، خطای مانای این سیستم چه مقدار خواهد بود؟ (آزاد ۸۳)



۱) ∞ ۲) ۰

۳) ۱ ۴) ۲

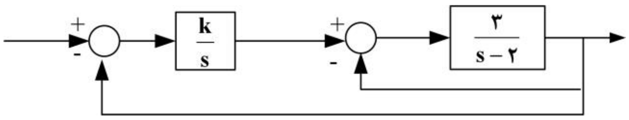
✍ **حل:** گزینه «۴»

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته برابر است با: $\Delta(s)=s(s+۱)(s+۲)+۱=s^{۳}+۳s^{۲}+۲s+۱=۰$

با توجه به مثبت بودن کلیه ضرایب معادله مشخصه و برقراری شرط ۱×۱<۲×۳ سیستم پایدار خواهد بود. لذا گزینه (۱) نادرست است.

$$k_v=\lim_{s\to ۰} sGH(s)=\lim_{s\to ۰} s\frac{۱}{s(s+۱)(s+۲)}=\frac{۱}{۲}\ \Rightarrow\ e_{ss}=\frac{R}{k_v}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲$$

مثال: در سیستم کنترل شکل مقابل k چه محدودیت‌هایی باید داشته باشد تا خطای مانای ناشی از ورودی پله‌ای صفر شود؟ (آزاد ۸۳)



۱) $k>۰$

۲) $۰<k<۳$

۳) $|k|<۳$

۴) چون نوع سیستم یک است، خطای مانای ناشی از ورودی پله‌ای همواره صفر است.

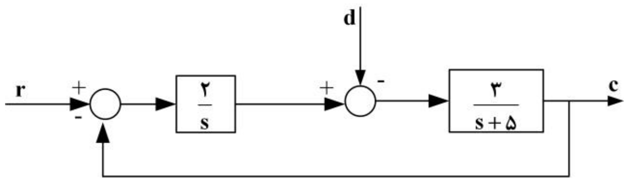
✍ **حل:** گزینه «۱»

معادله مشخصه سیستم حلقه‌بسته برابر است با:

$$\Delta(s)=۱+(\frac{k}{s})(\frac{۳}{s+۱})=۰\ \to\ \Delta(s)=s(s+۱)+۳k=s^{۲}+s+۳k$$

محدوده k از پایداری سیستم حلقه بسته بدست می‌آید که عبارتست از $k>۰$. توجه کنید اگرچه تابع تبدیل حلقه باز سیستم $GH(s)=\frac{۳k}{s(s+۱)}$، از نوع یک است، ولی بایستی سیستم حلقه بسته نیز پایدار باشد. زیرا خطای مانا برای یک سیستم ناپایدار تعریف نمی‌شود.

مثال: در سیستم کنترل مقابل r ورودی d اغتشاش و c خروجی است. سیستم برای $r=۱$ در حالت دائمی قرار دارد که اغتشاش $d(t)=u(t)$ به صورت پله واحد وارد می‌شود. پاسخ $c(t)$ برای $t>۰$ کدام است؟ (هسته‌ای ۷۸)



۱) $۱-۶e^{-۲t}+۹e^{-۳t}$

۲) $-۶e^{-۲t}+۹e^{-۳t}$

۳) $۳e^{-۲t}-۳e^{-۳t}$

۴) $۱+۳e^{-۲t}-۳e^{-۳t}$

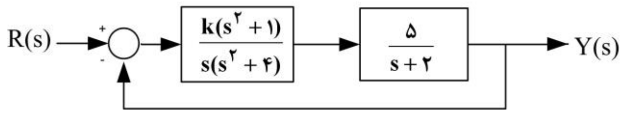
✍ **حل:** گزینه «۴»

پاسخ به ورودی اغتشاش برابر است با: $C_d(s)=\frac{۳s}{s^{۲}+۵s+۶}D(s)$

$$C_d(s)=\frac{۳s}{s^{۲}+۵s+۶}\frac{۱}{s}=\frac{۳}{(s+۲)(s+۳)}=\frac{۳}{s+۲}-\frac{۳}{s+۳}\ \to\ c_d(t)=L^{-۱}\{C_d(s)\}=۳e^{-۲t}-۳e^{-۳t}$$

بنابراین از قضیه جمع آثار داریم: $c(t)=c_{rss}(t)+c_d(t)=۱+۳e^{-۲t}-۳e^{-۳t}$

مثال: بهره k را در سیستم کنترلی زیر به گونه‌ای بیابید که خطای ماندگار نسبت به ورودی شیب از ٪۱۰ تجاوز نکند؟ (هسته‌ای ۸۳)



۱) $k=0/16$ ۲) $k=16$

۳) $k=10$ ۴) امکان‌پذیر نیست.

✍ **حل:** گزینه «۲»

$$k_v=\lim_{s\to 0} sGH(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{5k(s^2+1)}{s(s^2+4)(s+2)}=\frac{5k}{8}\Rightarrow e_{ss}=\frac{1}{k_v}=\frac{8}{5k}=0/1\ \rightarrow\ k=16$$

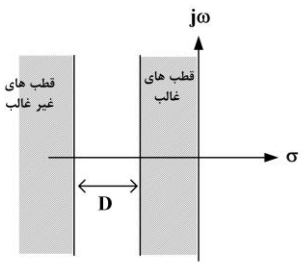
حال پایداری سیستم حلقه بسته را با $k=16$ بررسی می‌کنیم. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته برابر است با:

$$\Delta(s)=s^4+2s^3+84s^2+8s+80=0$$

s^4	۱	۸۴	۸۰
s^3	۲	۸	
s^2	۸۰	۸۰	
s^1	۶		
s^0	۸۰		

بنابراین به دلیل عدم تغییر علامت در ستون اول جدول راث سیستم حلقه بسته پایدار است. پس $k=16$ قابل قبول خواهد بود.

۲-۷ تقریب سیستم‌های مرتبه بالاتر



در عمل مرتبه سیستم‌ها از دو بیشتر می‌باشد. لذا مایلیم که سیستم‌های مرتبه بالا را با یک سیستم درجه ۲ یا ۱ تقریب بزنیم که این عمل توسط قطب‌های غالب صورت می‌گیرد. با توجه به این که محل قطب‌ها در رفتار پاسخ زمانی سیستم نقش مؤثری را ایفا می‌کنند، برای تعیین قطب‌های غالب سیستم، از فاصله قطب‌ها (دوری و نزدیکی) نسبت به محور موهومی استفاده می‌کنیم. به طوری که قطب‌هایی که در مقایسه با قطب‌های دیگر به محور موهومی نزدیک‌ترند، رفتار سیستم را تعیین می‌کنند که در اصطلاح به آن‌ها قطب‌های غالب سیستم می‌گوییم. دوری و نزدیکی قطب‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود که به شرط تقریب معروف است.

اگر قسمت حقیقی قطب p_1 ، ۵ تا ۱۰ برابر قطب p_2 باشد، قطب p_2 را قطب غالب و قطب p_1 را قطب غیرغالب در نظر می‌گیریم. بنابراین نیمه چپ صفحه s را به دو ناحیه می‌توان تقسیم نمود. ناحیه قطب‌های غالب و ناحیه قطب‌های غیرغالب.

❋ **نکته:** ***تقریب فقط برای سیستم‌های پایدار قابل تعریف می‌باشد.***

❋ **نکته:** ***چون تعیین قطب‌های غالب سیستم با محاسبه مانده در قطب قابل توجیه است، اگر صفری در نزدیکی قطب قرار داشته باشد، شرط تقریب دیگر برقرار نخواهد بود و عملاً اثر قطب با کوچک شدن مانده از بین می‌رود. به بیانی دیگر حذف صفر و قطب رخ می‌دهد.***

روش عمل

برای تقریب سیستم‌های مرتبه بالا باید به صورت زیر عمل کرد:

۱- حذف قطب‌های غیرغالب

۲- تصحیح بهره DC به طوری که بهره DC تغییری نکند. بهره DC از قرار دادن $s=0$ در تابع تبدیل بدست می‌آید.

مثال: سیستمی با تابع تبدیل $G(s)=\frac{600}{(s^2+22s+120)(s^2+3s+4)}$ توصیف می‌شود. مناسب‌ترین تقریب مرتبه دوم این سیستم کدام است؟ (هسته‌ای ۷۸)

۱) $\frac{1}{s^2+3s+4}$ ۲) $\frac{5}{s^2+3s+4}$ ۳) $\frac{150}{s^2+22s+20}$ ۴) $\frac{600}{s^2+22s+120}$

✍ **حل:** گزینه «۲»

$$s^{۲}+۳s+۴=۰\to s=-\frac{۳}{۲}\pm j\frac{\sqrt{۷}}{۲}\quad,\quad s^{۲}+۲۲s+۱۲۰=(s+۱۰)(s+۱۲)=۰\to s=-۱۰\,,\,s=-۱۲$$

قسمت حقیقی ریشه‌های $(s^{۲}+۳s+۴)$ عبارتست از $-\frac{۳}{۲}$، بنابراین از اثر قطب‌های $s=-۱۰$ و $s=-۱۲$ در مقایسه با قطب‌های $s=-\frac{۳}{۲}\pm j\frac{\sqrt{۷}}{۲}$ صرف‌نظر کرده و داریم:

$$\hat{G}(s)=\frac{A}{s^{۲}+۳s+۴}$$

حال بایستی شرط بهره DC یکسان برقرار شود. بنابراین:

$$\hat{G}(۰)=G(۰)\quad\to\quad\frac{۵}{۴}=\frac{A}{۴}\quad\to\quad A=۵$$

مثال: تابع انتقال مقابل را در نظر می‌گیریم $G(s)=\frac{۳}{s^{۳}+۴s^{۲}+۳s}$. کدام تابع انتقال تقریب مناسبی برای $G(s)$ است؟

(هسته‌ای ۷۴)

۱) $\frac{۳}{s^{۲}+s}$ ۲) $\frac{۱}{s^{۲}+s}$ ۳) $\frac{۱}{s^{۲}+۳s}$ ۴) $\frac{۳}{s^{۲}+۳s}$

✍ **حل:** گزینه «۲»

اگر از اثر قطب $s=-۳$ در مقایسه با قطب $s=-۱$ صرف‌نظر کنیم (هرچند این تقریب مناسب نیست)، داریم:

$$G(s)=\frac{۳}{s(s+۱)(s+۳)}\ \Rightarrow\ \hat{G}(s)=\frac{A}{s(s+۱)}$$

حال شرط یکسان بودن بهره DC باید برقرار شود. بدون در نظر گرفتن قطب $s=۰$ داریم:

$$G(۰)=\hat{G}(۰)\quad\to\quad A=۱$$

بنابراین تابع تبدیل تقریبی به صورت زیر است:

$$\hat{G}(s)=\frac{۱}{s(s+۱)}=\frac{۱}{s^{۲}+s}$$

مثال: تابع تبدیل یک سیستم حلقه بسته به صورت $\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{۲۰۰(s+۲/۹)}{(s+۳)(s+۴)(s+۱۰۰)}$ می‌باشد. کدام یک از تقریب‌های زیر می‌تواند تقریب مناسب سیستم فوق باشد؟

(هسته‌ای ۷۳)

۱) $\frac{۲۰۰}{s+۳}$ ۲) $\frac{۲۰۰}{s+۴}$ ۳) $\frac{۱/۹۳۳}{s+۴}$ ۴) $\frac{۲/۲۹۱۷}{s+۴}$

✍ **حل:** گزینه «۳»

مطابق آنچه که در متن گفته شد، چون صفر $s=-۲/۹$ نزدیک قطب $s=-۳$ قرار دارد، تقریباً اثر قطب را از بین برده و لذا می‌توانیم حذف صفر و قطب را انجام دهیم. بنابراین دو قطب $s=-۴$ و $s=-۱۰۰$ باقی می‌ماند که با توجه به مقدار آن‌ها می‌توان از اثر قطب $s=-۱۰۰$ صرف‌نظر کرد و $s=-۴$ را به عنوان قطب غالب در نظر گرفت. داریم:

$$\hat{G}(s)=\frac{A}{s+۴}$$

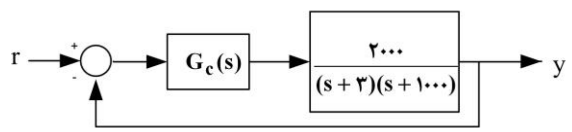
حال شرط یکسان بودن بهره DC را بررسی می‌کنیم.

$$\hat{G}(۰)=G(۰)\quad\to\quad\frac{۲۰۰\times۲/۹}{۳\times۴\times۱۰۰}=\frac{A}{۴}\quad\to\quad A\approx۱/۹۳۳$$

مثال: در سیستم مقابل جبران‌ساز $G_c(s)=\frac{k(s+z)}{s(s+p)}$ را طوری طراحی کنید که شرایط زیر تقریباً برآورده شود؟

(ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۲)

$$\xi=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ T_s=\frac{۲}{۳}\left(T_s=\frac{۴}{\xi\omega_n}\right)$$



۱) $G_c(s)=\frac{۳۶(s+۳)}{s(s+۱۲)}$ ۲) $G_c(s)=\frac{۷۲(s+۳)}{s(s+۶)}$

۳) $G_c(s)=\frac{۳۶(s+۳)}{s(s+۶)}$ ۴) $G_c(s)=\frac{۷۲(s+۳)}{s(s+۱۲)}$

✍ **حل:** گزینه «۱»

با نگاه به گزینه‌ها می‌توان دریافت که $z=-۳$ می‌باشد. از طرفی تعریف می‌کنیم: $G(s)=\dfrac{۲۰۰۰}{(s+۳)(s+۱۰۰۰)}$

اگر از تقریب استفاده نماییم، قطب $s=-۳$ قطب غالب خواهد بود. بنابراین: $\hat{G}(s)=\dfrac{۲}{(s+۳)}$

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته را تشکیل می‌دهیم. $\Delta(s)=۱+G_c(s)\hat{G}(s)=۱+\dfrac{۲}{(s+۳)}\cdot\dfrac{k(s+۳)}{s(s+p)}=۰$

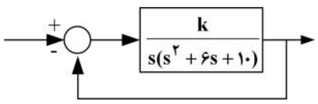
$$\rightarrow\quad \Delta(s)=s(s+p)+۲k=s^۲+ps+۲k=۰\qquad(۱)$$

از مفروضات مسأله داریم: $T_s=\dfrac{۴}{\xi\omega_n}=\dfrac{۲}{۳}\ \rightarrow\ \xi\omega_n=۶\ \xrightarrow{\xi=\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\ \omega_n=۶\sqrt{۲}$

بنابراین معادله مشخصه مطلوب برابر است با: $\Delta(s)=s^۲+۲\xi\omega_n s+\omega_n^۲=s^۲+۱۲s+۷۲=۰\qquad(۲)$

با مقایسه (۱) و (۲) داریم: $p=۱۲\quad,\quad ۲k=۷۲\ \rightarrow\ k=۳۶$

مثال: برای آن که قطب‌های غالب سیستم کنترل حلقه بسته زیر دارای نسبت میرایی $\xi=۰/۵$ باشند، حدود k کدام است؟ (هسته‌ای ۸۰)



۱) ۶ ۲) ۸
۳) ۱۲ ۴) ۲۰

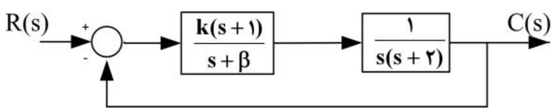
✍ **حل:** گزینه «۳»

$$\Delta(s)=s^۳+۶s^۲+۱۰s+k=(s+p)(s^۲+۲\xi\omega_n s+\omega_n^۲)=s^۳+(۲\xi\omega_n+p)s^۲+(\omega_n^۲+۲\xi\omega_n p)s+p\omega_n^۲=۰$$

از تساوی طرفین معادله مشخصه فوق داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\omega_n^۲ p=k\\ \omega_n^۲+۲\xi\omega_n p=۱۰\\ ۲\xi\omega_n+p=۶\end{array}\right\}\xrightarrow{\xi=۰/۵}\left.\begin{array}{l}\omega_n^۲+\omega_n p=۱۰\\ \omega_n+p=۶\end{array}\right\}\rightarrow\begin{array}{l}\omega_n=\dfrac{۵}{۳}\\ p=\dfrac{۱۳}{۳}\end{array}\Rightarrow\ k=\omega_n^۲ p=\dfrac{۲۵}{۹}\times\dfrac{۱۳}{۳}\approx۱۲$$

مثال در سیستم کنترل زیر می‌خواهیم از کنترلر به نحوی استفاده کنیم که قطب‌های مسلط مدار بسته در $s=-۲\pm۲j$ قرار بگیرند؟ (مکانیک ۷۳)



۱) $k=۵/۳۳\ ,\ \beta=۲/۶۶$
۲) $k=۰/۱۸۷\ ,\ \beta=۲/۶۶$
۳) $k=۰/۱۸۷\ ,\ \beta=۵/۳۳$
۴) $k=۵/۳۳\ ,\ \beta=۱/۳۳$

✍ **حل:** گزینه «۱»

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=s(s+\beta)(s+۲)+k(s+۱)=۰\ \rightarrow\ \Delta(s)=s^۳+(۲+\beta)s^۲+(۲\beta+k)s+k=۰$$

از طرفی معادله مشخصه مطلوب برای سیستم حلقه بسته با توجه به قطب‌های داده شده ($s_{1,۲}=-۲\pm j۲$) عبارتست از:

$$\Delta(s)=(s+\alpha)(s^۲+۴s+۸)=s^۳+(۴+\alpha)s^۲+۴(\alpha+۲)s+۸\alpha=۰$$

از تساوی دو معادله مشخصه داریم:

$$\left.\begin{array}{l}۲+\beta=۴+\alpha\\ ۲\beta+k=۴(\alpha+۲)\\ k=۸\alpha\end{array}\right\}\rightarrow\ \begin{array}{l}\alpha=۰/۶۶\\ \beta=۲/۶۶\\ k=۵/۳۳\end{array}$$

۲-۸ آثار افزودن صفر و قطب به تابع تبدیل

اگرچه ریشه‌های معادله مشخصه که قطب‌های تابع تبدیل حلقه بسته‌اند، رفتار سیستم را تعیین می‌کنند، ولی صفرهای تابع تبدیل نیز در میزان تأثیر هر قطب در رفتار سیستم نقش دارند. این واقعیت با تغییر مانده قطب به راحتی قابل اثبات است. در ادامه به طور خلاصه به بررسی آثار اضافه کردن صفر و قطب می‌پردازیم.

۲-۸-۱ تابع تبدیل حلقه باز

به منظور بررسی، تابع تبدیل حلقه باز روبرو را در نظر بگیرید.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

۲-۸-۱-۱ افزودن صفر

به طور کلی افزودن صفر به تابع تبدیل حلقه باز از یک قاعده کلی تبعیت نمی‌کند. چرا که افزودن صفر به تابع تبدیل حلقه‌باز علاوه بر ایجاد یک صفر در تابع تبدیل حلقه بسته، سبب تغییر قطب‌های آن نیز می‌شود و لذا بسته به این که اثر قطب یا صفر جدید، کدام یک بیش‌تر باشد، رفتار سیستم دستخوش تغییر می‌شود. توضیح بیشتر این که چنانچه صفر افزوده شده بسیار دور از محور موهومی باشد فراجهش بزرگ و نسبت میرایی بسیار ضعیف است. با نزدیک‌شدن صفر به محور موهومی فراجهش کاهش و میرایی بهبود می‌یابد اما چنانچه صفر به محور موهومی خیلی نزدیک شود، فراجهش افزایش و میرایی بهبود می‌یابد.

۲-۸-۱-۲ افزودن قطب

به طور کلی، افزودن قطب به تابع تبدیل حلقه باز مفروض با نزدیک شدن قطب به مبدأ سبب افزایش ماکزیمم فراجهش پاسخ پله حلقه بسته شده، زمان خیز را افزایش داده و کاهش پهنای باند را در پی دارد.

در مورد اضافه کردن صفر و قطب به تابع تبدیل حلقه باز در آینده بیشتر صحبت خواهیم کرد.

۲-۸-۲ تابع تبدیل حلقه بسته

برای بررسی، تابع تبدیل حلقه بسته سیستم مرتبه دوم نوعی روبرو را در نظر بگیرید.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

۲-۸-۲-۱ افزودن صفر

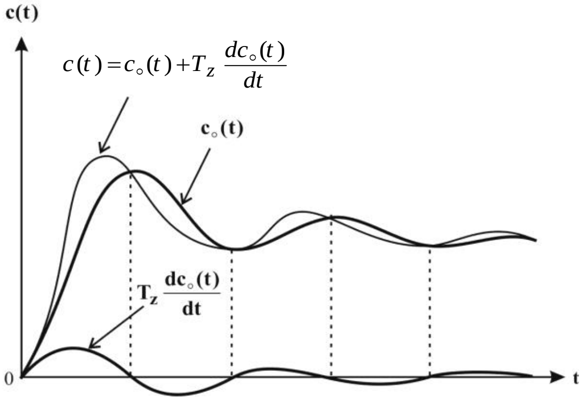
الف) اضافه کردن صفر سمت چپ

تابع تبدیل حلقه بسته جدید را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$M(s) = \frac{\omega_n^2(1+T_z s)}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \qquad T_z > 0$$

اگر پاسخ پله واحد $G(s)$ را با $c_0(t)$ نمایش دهیم، پاسخ پله واحد برای تابع تبدیل حلقه بسته جدید $M(s)$ برابر است با:

$$c(t) = c_0(t) + T_z \frac{dc_0(t)}{dt}$$



واضح است که در هر لحظه پاسخ سیستم با مشتق آن جمع می‌شود که افزایش سرعت سیستم (کاهش زمان خیز) و افزایش ماکزیمم فراجهش را در پی دارد، به طوری که با افزایش T_z، سرعت سیستم و ماکزیمم فراجهش بیشتر شده و لذا زمان نشست افزایش می‌یابد.

توجه کنید که اگر مقدار $T_z \to \infty$ میل کند (اضافه کردن یک صفر در مبدأ)، ماکزیمم فراجهش به سمت بی‌نهایت میل می‌کند ولی تا مادامی که ξ مثبت باشد، سیستم پایدار خواهد بود.