کد فرم : FR/FY/۱۱
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**	امتحان درس : **ریاضی۲-فنی (۷ گروه هماهنگ)**	نیمسال (**اول**/ ~~دوم~~) **۹۶-۱۳۹۵**	نام مدرس:
نام و نام خانوادگی :	شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۳۹۵/۱۰/۲۵**	وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از هرگونه ماشین حساب ممنوع است.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال۱- انتگرال دوگانه $\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{x}}^{1} e^{y^{3}}\, dydx$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۲- به کمک تغییر متغیر مناسب ، انتگرال دوگانه $\iint_R \cos\frac{x-y}{x+y}\, dxdy$ را محاسبه کنید که در آن R ناحیه محدود به خط $x+y=1$ و محورهای مختصات است. **۲۰ نمره**

سوال۳- مسیر C قسمتی از منحنی $r(t)=(t, t^{2}+t, t^{3}+2t)$ از نقطه $r(0)$ تا نقطه $r(1)$ است.
انتگرال منحنی الخط زیر را محاسبه کنید : **۱۵ نمره**

$$\int_C 2x\, dx+(z^{2}+2y)dy+2y\, zdz$$

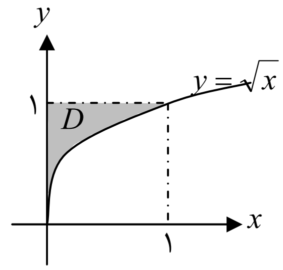
سوال۴- مسیر C دایره $x^{2}+y^{2}=2x$ است که در جهت عکس عقربه های ساعت پیموده می‌شود.
انتگرال منحنی الخط $\oint_C (2y+x)dx+(3y-4x)dy$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۵- حجم ناحیه محدود به مخروط $2z=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ و سهمیگون $5-z=x^{2}+y^{2}$ را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۶- انتگرال $\iint_S x^{2}\, dS$ را محاسبه کنیدکه در آن S سطح خارجی رویه متناهی $\begin{cases} 3y^{2}=x^{2}+z^{2} \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$ است. **۲۰ نمره**

سوال۷- اگر $f(x,y,z)=x^{2}+y^{2}+z^{2}$ و $F(x,y,z)=(x+y, y-z, z+2x)$
حاصل عبارت مقابل را بیابید : $Curl(F)+grad(f)+div(F)F$ **۱۵ نمره**

موفق باشید

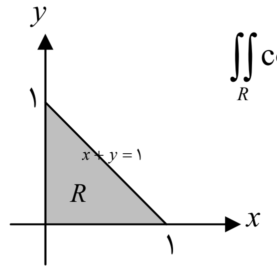


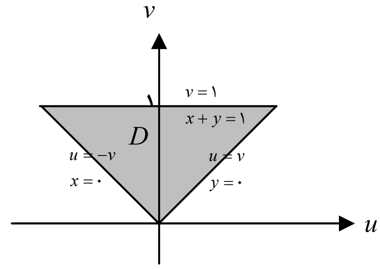
جواب سوال۱- ترتیب انتگرالگیری را عوض می کنیم.

$$\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dydx=\int_0^1\int_0^{y^2} e^{y^3}\,dxdy=\int_0^1 y^2e^{y^3}\,dy=\frac{1}{3}e^{y^3}\,\Big|_0^1=\frac{1}{3}(e-1)$$

جواب سوال۲- تغییر متغیر $x-y=u$ و $x+y=v$ را اعمال می کنیم. داریم :

$$dudv=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}dxdy=2dxy$$





$$\iint_R \cos\frac{x-y}{x+y}\,dxdy=\iint_D \cos\frac{u}{v}\left(\frac{1}{2}dudv\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\int_{-v}^{v}\cos\frac{u}{v}\,dudv=\frac{1}{2}\int_0^1 v\sin\frac{u}{v}\Big|_{-v}^{v}\,dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 v(2\sin 1)dv=(\sin 1)\int_0^1 vdv=\frac{\sin 1}{2}$$

جواب سوال۳- روش اول : (حل انتگرال به کمک مسیر داده شده)

داریم : $x=t\ ,\ y=t^2+t\ ,\ z=t^3+2t\ \rightarrow\ dx=dt\ ,\ dy=(2t+1)dt\ ,\ dz=(3t^2+2)dt$

$$\int_C 2x\,dx+(z^2+2y)dy+2y\,zdz=\int_0^1[2t+((t^3+2t)^2+2(t^2+t))(2t+1)+2(t^2+t)(t^3+2t)(3t^2+2)]dt$$

$$=\int_0^1[2t+(t^6+4t^4+6t^2+2t)(2t+1)+2(t^5+t^4+2t^3+2t^2)(3t^2+2)]dt$$

$$=\int_0^1[2t+(2t^7+t^6+8t^5+4t^4+12t^3+10\,t^2+2t)+(6t^7+6t^6+16t^5+16t^4+8t^3+8t^2)]dt$$

$$=\int_0^1[8t^7+7t^6+24t^5+20t^4+20t^3+18t^2+4t]dt$$

$$=[t^8+t^7+4t^6+4t^5+5t^4+6t^3+2t^2]_0^1=23$$

روش دوم : (تابع گرادیان) اگر تابع برداری $F=(2x,\ z^2+2y, 2yz)$ را در نظر بگیریم می بینیم که $curl(F)=(2z-2z,\ 0-0, 2-2)=(0,0,0)$ یعنی F بردار گرادیان یک تابع f است.

به سادگی می توان دید که $f(x,y,z)=x^2+y^2+yz^2$ و اکنون داریم :

$$\int_C 2x\,dx+(z^2+2y)dy+2y\,zdz=f(r(1))-f(r(0))=f(1,2,3)-f(0,0,0)=23$$

روش سوم : (مسیر جایگزین) همانگونه که در روش دوم دیدیم انتگرال داده شده مستقل از مسیر است. به جای مسیر داده شده از پاره خطی استفاده می کنیم که دو نقطه $r(0)=(0,0,0)$, $r(1)=(1,2,3)$ را به هم وصل می کند. معادله پارامتری خط عبارت است از $x=t\ ,\ y=2t\ ,\ z=3t$ بنابر این $dx=dt\ ,\ dy=2dt\ ,\ dz=3dt$ اکنون داریم :

$$\int_C 2x\,dx+(z^2+2y)dy+2y\,zdz=\int_0^1[2t+2(9t^2+4t)+36\,t^2]dt=\int_0^1[54\,t^2+10\,t]dt=[18\,t^3+5t^2]_0^1=23$$

جواب سوال۴- روش اول : (قضیه گرین) قرار می‌دهیم $P=2y+x$ و $Q=3y-4x$ و داریم $Q_x-P_y=-6$

اگر ناحیه داخل دایره را D بنامیم شرایط قضیه گرین برقرار است و داریم :

$$\oint_C(2y+x)dx+(3y-4x)dy=\iint_D -6dxdy=-6\iint_D dxdy=-6\pi$$

چون $\iint_D dxdy$ برابر مساحت ناحیه D است.

روش دوم : (روش مستقیم) معادله دایره در دستگاه مختصات قطبی به صورت $r = 2\cos\theta$ نوشته می شود و در نتیجه داریم

$$y = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta \quad \text{و} \quad x = 2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$$

یعنی $dx = -2\sin 2\theta\, d\theta$ و $dy = 2\cos 2\theta\, d\theta$ اکنون داریم

$$\oint_C (2y+x)dx + (3y-4x)dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(2\sin 2\theta + 1 + \cos 2\theta)(-2\sin 2\theta) + (3\sin 2\theta - 4 - 4\cos 2\theta)(2\cos 2\theta)]d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [4\sin 2\theta\cos 2\theta - 8\cos^2 2\theta - 4\sin^2 2\theta - 8\cos 2\theta - 2\sin 2\theta]d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [2\sin 4\theta - 2\cos 4\theta - 6 - 8\cos 2\theta - 2\sin 2\theta]d\theta$$

$$= [-\frac{1}{2}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\sin 4\theta - 6\theta - 4\sin 2\theta + \cos 2\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= -6\pi$$

جواب سوال۵- محل برخورد دو رویه دایره $z = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ است. تصویر ناحیه مورد نظر بر روی صفحه $z = 0$ دایره $x^2 + y^2 = 4$ است.

در دستگاه دکارتی داریم : $V = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}}^{5-(x^2+y^2)} dz dy dx$ (انتگرال سه گانه)

و یا $V = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 5 - (x^2+y^2) - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}]dydx$ (انتگرال دو گانه)

در دستگاه مختصات استوانه ای داریم $V = \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{2}r}^{5-r^2} r dz d\theta dr$ و در دستگاه مختصات قطبی داریم : $V = \int_0^2\int_0^{2\pi} r(5 - r^2 - \frac{1}{2}r)d\theta dr$

این انتگرال را حل می کنیم :

$$V = \int_0^2\int_0^{2\pi} r(5 - r^2 - \frac{1}{2}r)d\theta dr = \int_0^2\int_0^{2\pi}(5r - r^3 - \frac{1}{2}r^2)d\theta dr = 2\pi\int_0^2(5r - r^3 - \frac{1}{2}r^2)dr = 2\pi[\frac{5}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{6}r^3]_0^2 = \frac{28}{3}\pi$$

جواب سوال۶- تصویر سطح S روی صفحه $y = 0$ برابر دایره $x^2 + z^2 = 12$ که ناحیه داخل آن را D می نامیم. بردار یکه قائم بر سطح S برابر است با :

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 36y^2 + 4z^2}}(2x, -6y, 2z) = \frac{1}{\sqrt{48y^2}}(2x, -6y, 2z) = (\frac{x}{2\sqrt{3}y}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{z}{2\sqrt{3}y})$$

بنابر این $dS = \frac{2dxdz}{\sqrt{3}}$ و خواهیم داشت : $\iint_S x^2\, dS = \iint_D x^2 \frac{2dxdz}{\sqrt{3}}$

به کمک تغییر متغیر $x = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$ داریم $dxdz = rdrd\theta$

$$\iint_S x^2\, dS = \iint_D x^2 \frac{2dxdz}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\sqrt{3}} r^3\cos^2\theta drd\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi} 36\cos^2\theta\, d\theta = 12\sqrt{3}\int_0^{2\pi}(1 + \cos 2\theta)\, d\theta = 24\pi\sqrt{3}$$

جواب سوال۷- داریم :

$$Curl(F) = (0+1, 0-2, 0-1) = (1, -2, -1) \quad , \quad grad(f) = (2x, 2y, 2z) \; , \quad div(F) = 1+1+1 = 3$$

بنابر این

$$Curl(F) + grad(f) + div(F)F = (0+1, 0-2, 0-1) + (2x, 2y, 2z) + 3(x+y, y-z, z+2x)$$
$$= (5x + 3y + 1, 5y - 3z - 2, 6x + 3z - 1)$$