

مثال) برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ نرم‌های مختلف را به دست آورید.

$$\|A\|_1 = \max(1, 1, 0) = 1 \quad \checkmark$$

$$\|A\|_\infty = \max(3, 2) = 3 \quad \checkmark$$

$$\|A\|_F = \sqrt{1 + 4 + 1 + 4} = \sqrt{10} \approx 3.16 \quad \checkmark$$

$$\|A\|_p = \sqrt{\lambda_{\max}} \rightarrow |A^T A - I| = 0$$

$$A^T A - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1-1 & 2 \\ -2 & 2 & 1-1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |A^T A - I| = 0 \rightarrow \lambda = 0, 1, 14$$

$$\rightarrow \|A\|_p = \sqrt{14}$$

ماتریس متعلق : ماتریک که همه یا برخی از عناصر آن اعداد متعلق باشند.

مزدوج ماتریس متعلق : مزدوج درایه های ماتریس متعلق A

ماتریس ترانژاده : جای سطرها و ستون ها باید معبر عوض شوند A^T

$$(A^T)^T = A \quad \text{خواص :}$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$|A| = |A^T|$$

$$\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad \text{اگر } A \text{ معبر متفرد باشد؛}$$

ماتریس ترانژاده مزدوج : همان مزدوج ترانژاده یک ماتریس است.

$$A^* = \overline{A}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & c \\ -1+j & -1 & -2+cj \\ -1 & c-j & -2 \end{bmatrix} \rightarrow A^* = \begin{bmatrix} 0 & -1-j & -1 \\ 1 & -1 & c+j \\ c & -2-cj & -2 \end{bmatrix}$$

خواص:

$$(A+B)^* = A^* + B^*$$

$$(AB)^* = B^* A^*$$

$$|A^*| = |\bar{A}|$$

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

A غیر منفرد باشد

$$A = A^T$$

$$A = -A^T$$

ماتریس متقارن:

ماتریس شبه متقارن:

* برای ماتریس $A_{m \times n}$ ، ماتریس $B = A^T A$ یک ماتریس متقارن است.

$$B^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = B$$

ماتریس B متقارن ✓

←

* معکوس یک ماتریس متقارن، در صورتیکه وجود داشته باشد، یک ماتریس متقارن است.

$$A A^{-1} = I \rightarrow (A A^{-1})^T = I^T$$

$$\Rightarrow (A^{-1})^T \underline{A^T} = I^T \Rightarrow \underline{(A^{-1})^T A} = I = \underline{A^{-1} A}$$

$$\Rightarrow (A^{-1})^T = A^{-1}$$

$$A^{-1} = B$$

$$B = B^T \checkmark$$

ماتریس قطری: ماتریس مربعی که تمام دایره‌های آن به غیر عناصر روی قطر اصلی
همی صفر باشند

$$① |A| = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \checkmark$$

② ماتریس قطری A غیر منفرد است اگر هیچ یک از عناصر قطر اصلی صفر نباشد.

$$③ \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

④ اگر همه دایره‌های زیر قطر اصلی صفر باشند \leftarrow بالایی U

⑤ $\sim \sim \sim$ بالایی $\sim \sim \sim$ پائینی L

$$|L| = |U| = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

ماتریس متعامد: به ماتریس A متعامد گویند اگر حقیقی بوده و

$$A^T A = A A^T = I \text{ باشد.}$$

$$A^T = A^{-1}$$

① در یک ماتریس متعامد \leftarrow

(۲) ستون‌های ماتریس متعامد، بردارهای یک‌متعامد هستند.

(۳) دترمینان ماتریس متعامد، $|A| = \pm 1$ و لذا A غیر متفرد است.

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

پایان فصل ۱



فصل نیک پیک : MATLAB

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i \quad \text{ضرب داخلی: حقیقی}$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i v_i \quad \text{مختلط}$$

$$u = [3, 4-2j, 1] \quad \text{نرم بردارها:}$$

$$\|u\| = ?$$

1 2 ∞

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

ضرب داخلی توابع:

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

$$g(x) = \sin x + \cos x$$

$$\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

نرم توابع:

$$\|f\|_1 = \int_0^\infty |f(t)| dt$$

$$\|f\|_r = \left(\int_0^\infty |f(t)|^r dt \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\|f\|_{\infty} = \sup |f(t)|$$

$$f(t) = t - 1/5 \quad 0 < t < 1$$

← استق و استرال گیری از ماتریس

$$b = \begin{bmatrix} \sin x & 1 & 0 \\ x & -x & \cos x \end{bmatrix} \rightarrow \vec{b} = \begin{bmatrix} \cos x & 0 & 0 \\ 1 & -x & -\sin x \end{bmatrix}$$

$$\int b = \begin{bmatrix} -\cos x & x & 0 \\ \frac{x^2}{2} & -x^2 & \sin x \end{bmatrix}$$