بسم الله الرحمن الرحیم

تبدیل z - بخش دوم - خواص تبدیل z و کاربرد آن در آنالیز سیستم LTI

خواص تبدیل - ۱- خاصیت خطی Linearity

تبدیل z

$$x_1(n) \longleftrightarrow X_1(z) \quad , ROC = R_1$$

$$x_2(n) \longleftrightarrow X_2(z) \quad , ROC = R_2 .$$

$$\Longrightarrow a x_1(n) + b x_2(n) \longleftrightarrow a X_1(z) + b X_2(z)$$

ROC = شامل $R_1 \cap R_2$

اثبات براحتی انجام میشود.

مثال -

$$\begin{cases} x_1(n) = \alpha^n u(n) & \Longrightarrow R_1 : |z| > |\alpha| \\ x_2(n) = \alpha^n u(n-N) & \rightarrow R_2 : |z| > |\alpha| \end{cases}$$

$$x(n) = \alpha^n u(n) - \alpha^n u(n-N) = \alpha^n [u(n) - u(n-N)]$$ سیگنال محدود زمانی $\Longrightarrow$ ROC = تمام صفحه

۲- خاصیت جابجایی زمانی Time shifting

$$x(n-n_0) \longleftrightarrow z^{-n_0} X(z)$$

ROC (ناحیه همگرایی) همان R_1 است با افزودن اینکه نقاط $z=0$ یا $z=\infty$ باز

ممکن حذف یا اضافه شود.

$$y(n)=x(n-n_0) \longrightarrow Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overbrace{x(n-n_0)}^{m}\, z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\, z^{-(m+n_0)}$$ = اثبات

$$Y(z) = z^{-n_0} \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\, z^{-m}}_{X(z)} = z^{-n_0} X(z)$$

مثال -

$$x_1(n) = (1/4)^n u(n) \longleftrightarrow X_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4} z^{-1}}$$

حالا $$X_2(z) = \frac{+z^{-1}}{1-\frac{1}{4} z^{-1}} \Longrightarrow x_2(n) = (1/4)^{n-1} u[n-1]$$

سئوال -

$$X_2(z) = \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{4} z^{-1}} = -4 + \frac{4}{1-\frac{1}{4} z^{-1}} \Longrightarrow x_2(n) = -4\delta(n) + 4(1/4)^n u(n)$$

چرا دو پاسخ یکسان نیست ؟!

۳- خاصیت ضرب در رشته نمایی multiplication by an exp. sequence

$$z_0^n x[n] \longleftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad ROC = |z_0| R_x$$

، ناحیه همگرایی در $|z_0|$ ضرب می‌شود.

اثبات -

$$y[n] = z_0^n x[n] \Longrightarrow Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_0^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

مثال -

$$u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad x[n] = r^n \cos\omega_0 n\, u[n] \longleftrightarrow X(z) = ?$$

$$x[n] = r^n \cos\omega_0 n\, u[n] = \underbrace{\frac{1}{2}(\overbrace{re^{j\omega_0}}^{z_0^n})^n u[n]} + \underbrace{\frac{1}{2}(\overbrace{re^{-j\omega_0}}^{z_0^n})^n u[n]}$$

$$X(z) = \underset{|z|>r}{\frac{1/2}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}}} + \underset{|z|>r}{\frac{1/2}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}}} = \frac{1-r\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2 z^{-2}}$$

۴- خاصیت مشتق گیری از تبدیل z — Differentiation of X(z)

$nx(n) \longleftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$, ROC = R_1 (بجز اینکه نقاط z=0 و z=∞ اضافه/حذف گردد)

اثبات:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n} \Rightarrow -z\frac{dX(z)}{dz} = -z\sum_{-\infty}^{+\infty} -n\,x(n)\, z^{-n-1} \Rightarrow -z\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\,x(n)\, z^{-n}$$

مثال:

$$X(z)=\log(1+az^{-1}) \;,\; |z|>|\alpha| \Longrightarrow x(n)=?$$

طبق قضیه

$$\frac{dX(z)}{dz}=\frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}} \Longrightarrow nx(n) \longleftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}=\frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} \Longrightarrow$$

$$nx(n)=\alpha(-\alpha)^{n-1}u(n-1) \Longrightarrow x(n)=(-1)^{n+1}\frac{\alpha^n}{n}u(n-1)$$

تبدیل معکوس

تمرین - نشان دهید که:

$$n\alpha^n u(n) \longleftrightarrow \frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2} \;,\; |z|>|\alpha|$$

۵- مزدوج یک دنباله مختلط

Conjugation of a Complex seq.

$$x^*[n] \longleftrightarrow X^*(z^*) \; ; \quad ; \; ROC = R_x$$

اثبات -

$$x_1[n] = x^*[n] \Longrightarrow X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]\, z^{-n} = \Big(\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, (z^*)^{-n}}_{X(z^*)} \Big)^*$$

۶- عکس زمانی Time Reversal

$$x[-n] \longleftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right) \; , \; ROC = \frac{1}{R_x}$$

$$x_1[n] = x[-n] \Longrightarrow X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[-n]}_{m}\, z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, z^{m} = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \left(\frac{1}{z}\right)^{-m}}_{X(1/z)}$$

$$\Longrightarrow X_1(z) = X(1/z)$$

$x_1(n) = \alpha^n u(n) \longrightarrow x_2(n) = \alpha^{-n} u(-n) \Longrightarrow X_2(z) = ?$ حل -

Convolution of seq. ۷- خاصیت کانولوشن

$x_1(n) * x_2(n) \longleftrightarrow X_1(z) \cdot X_2(z) \quad , \quad ROC =$ شامل $R_2 \cap R_1$

اثبات -

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) \Longrightarrow Y(z) = \sum y(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k)\, x_2(n-k)\, z^{-n}$$

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(\underbrace{n-k}_{m})\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_2(m)\, z^{-m-k}$$

$$Y(z) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(k)\, z^{-k}}_{X_1(z)} \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_2(m)\, z^{-m}}_{X_2(z)} \Longrightarrow \underline{Y(z) = X_1(z)\, X_2(z)}$$

تمرین -۱

$x_1(n) = (1/2)^n u(n-1) \; , \; x_2(n) = (1/3)^n u(n) \; , \; y(n) = x_1(n) * x_2(n) \Longrightarrow Y(z) = ?$

$$x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2)$$

$$x_2(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$$

$$,\ y(n) = x_1(n) * x_2(n) \longrightarrow Y(z) = ?$$

تمرین ک

۸ - خاصیت مقدار اولیه

Initial value theorem

$$\text{if } x(n) = 0 \text{ for } n < 0 \Longrightarrow x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \dots + x(-2) z^{2} + x(-1) z^{1} + x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \dots$$

$$\text{if } x(n) = 0,\ n < 0 \Longrightarrow \lim_{z \to \infty} X(z) = \dots + 0 + 0 + x(0) + \underbrace{\cancel{x(1)\infty^{-1}}}_{0} + \underbrace{\cancel{x(2)\infty^{-2}}}_{0} + \dots$$

$$\Longrightarrow \boxed{x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)}$$

تعریف correlation بین دو سیگنال

a- خاصیت همبستگی: Correlation

$$y(n) = x_1(n) \star x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m)\, x_2(m-n) \longleftrightarrow X_1(z) \cdot X_2\left(\frac{1}{z}\right)$$

ROC شامل $R_1 \cap R_2$

تمرین - رابطه فوق را اثبات نمائید. چه رابطه‌ای بین کانولوشن و همبستگی دو سیگنال وجود دارد؟

آنالیز سیستم LTI توسط تبدیل z

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) \quad , \quad \sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{-k}\, Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}\, X(z) \Longrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum b_k\, z^{-k}}{\sum a_k\, z^{-k}}$$

تابع انتقال سیستم

مثال:

$$y[n] + \tfrac{1}{4} y[n-1] - \tfrac{1}{8} y(n-1) = 5x[n-1] + x(n) \Longrightarrow H(z) = \frac{1 + 5z^{-1}}{1 + \tfrac{1}{4} z^{-1} - \tfrac{1}{8} z^{2}}$$

$$H(z) = \frac{1-5z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{A}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \Longrightarrow h(n)$$ پیدا می‌شود.

تمرین – با تشکیل معادله تفاضلی خروجی را به ازای ورودی‌های زیر محاسبه نمایید.

الف- $x(n) = (1/6)^n u(n) \longrightarrow y(n) = ?$

ب- $x(n) = (1/2)^n u(n) \longrightarrow y(n) = ?$

توجه $u(n)$ ندارد

ج- $x(n) = (1/3)^n \longrightarrow y(n) = ?$

د- $x(n) = \cos\frac{2\pi}{5}n \longrightarrow y(n) = ?$

ه- $x(n) = \cos(\frac{2\pi}{5}n)u(n) \longrightarrow y(n) = ?$

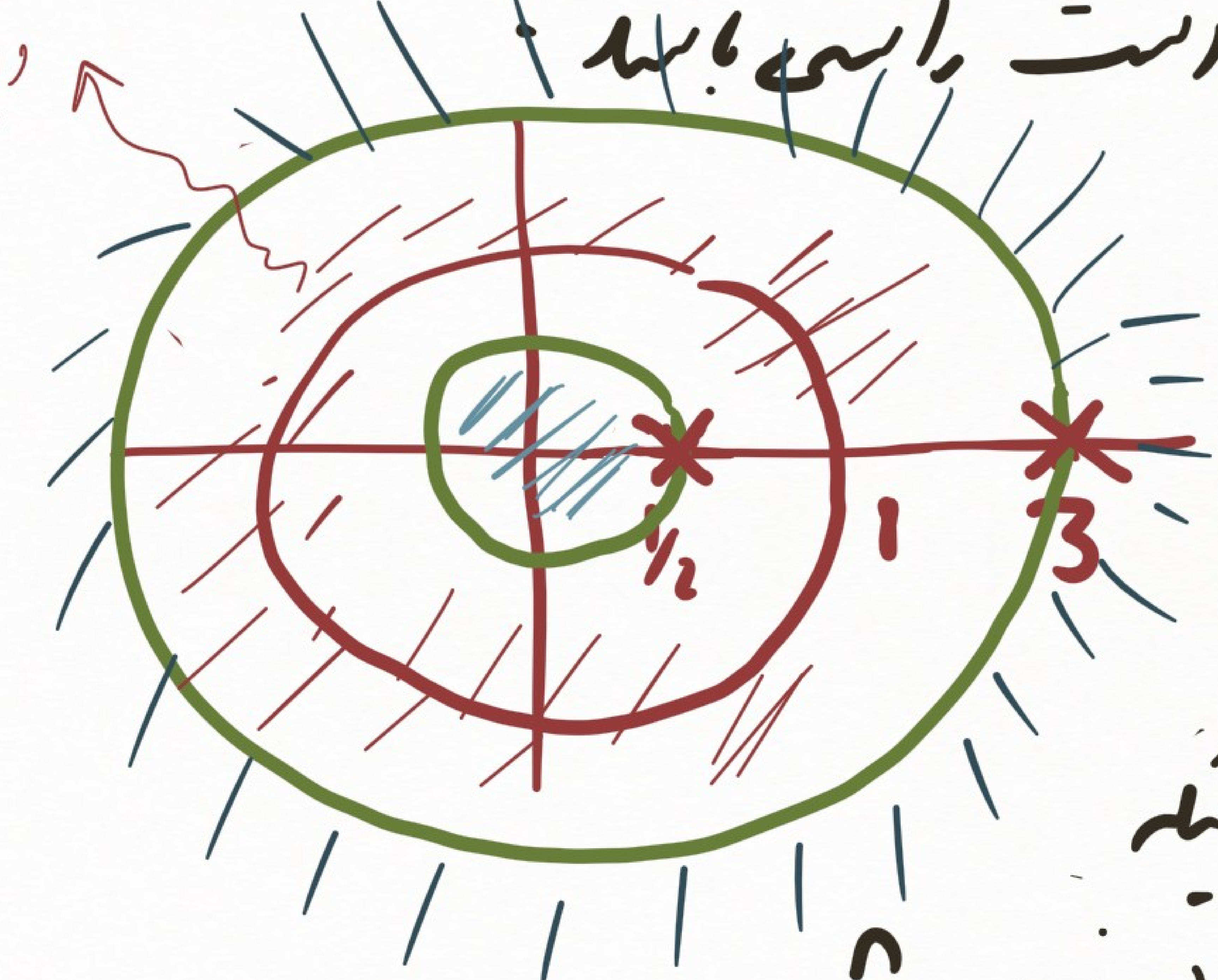
توجه - * اگر ناحیه همگرایی سیگنال X(z) دایره واحد را شامل شود سیگنال ما دارای تبدیل فوریه می باشد.

* اگر ناحیه همگرایی H(z) (یک سیستم) دایره واحد را شامل شود سیستم پایدار خواهد بود.

* برای اینکه سیستم ما دارای H(z) علی باشد باید ناحیه همگرایی آن بیرون دایره باشد یعنی سیگنال h(n) دست راستی باشد.

مثال -

$$H(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-3z^{-1})}$$



$|z| < 1/2$ → $h_1(n)$: سیستم پایدار نیست، سیستم علی نیست

$1/2 < |z| < 3$ → $h_2(n)$: سیستم پایدار است، علی نیست.

$|z| > 3$ → $h_3(n)$: سیستم پایدار نیست، علی است.

نکته - برای اینکه یک سیستم هم علی و هم پایدار باشد باید قطب ها درون دایره واحد باشند.

تبدیل z یکطرفه :

$$x[n] \xleftrightarrow{UZT} X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}$$

سیگنال هایی که برای $n<0$ صفر می باشند یکطرفه و دوطرفه یکسان می باشند.

توجه : برای سیستم های معادله دیفرنس که آغاز آرام، شرایط اولیه می باشند.

تفاوت در خاصیت shift :

$$y(n) = x[n-1] \xleftrightarrow{UZT} Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-1)\, z^{-n} = x(-1) + \sum_{n=1}^{\infty} x(n-1)\, z^{-n}$$

$$Y(z) = x[-1] + z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n} = \underline{x(-1) + z^{-1} X(z)}$$

به همین صورت نیز داریم :

$$w(n) = x(n-2) \xleftrightarrow{UZT} W(z) = \underline{x(-2) + x[-1]\, z^{-1} + z^{-2} X(z)}$$

$$x(n) = \alpha^{n} u(n) \longrightarrow X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

تبدیل یکطرفه و دوطرفه

$$x(n) = \alpha^{n+1} u(n+1) \xrightarrow{\text{دوطرفه}} X(z) = \frac{z}{1-\alpha z^{-1}}$$

$$x(n) = \alpha^{n+1} u(n+1) \xrightarrow{\text{یکطرفه}} X(z) = \frac{\alpha}{1-\alpha z^{-1}}$$