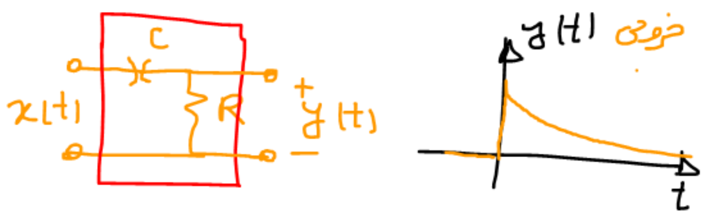
سیستم ها: یک سیستم یک فرآیند است که متأثر از اعمال یک یا چند سیگنال ورودی می باشد و در خروجی یک یا چند سیگنال را نتیجه می دهد.



مثال: فرایند سپرده گذاری در بانک به عنوان یک سیستم گسسته زمان می تواند در نظر گرفته شود.

ورودی سیستم مقدار پولی که در هر ماه وارد حساب می شود $x[n]$ و $y[n]$ موجودی حساب در ماه n ام است.

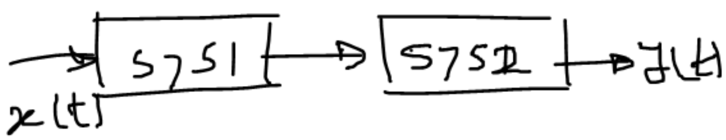
$$y[n] = (1+\alpha)\, y[n-1] + x[n]$$

α نرخ سود بانکی است که به موجودی ماه قبل اعمال می شود.

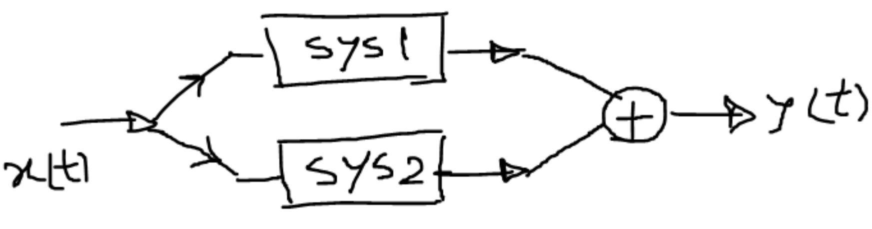
نحوه اتصال سیستم ها: 1) سری cascade 2) موازی Parallel

3) پسخور Feed back

سیستم های سری: خروجی یک سیستم ورودی سیستم بعدی خواهد بود.



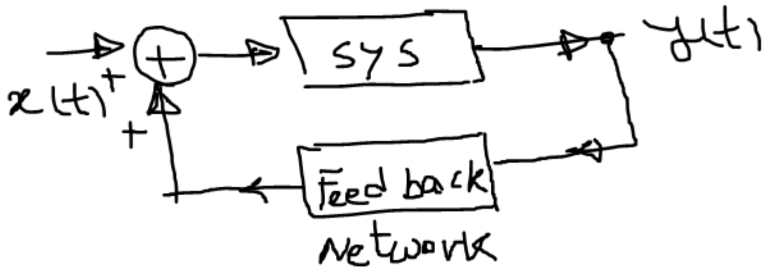
سیستم های موازی:



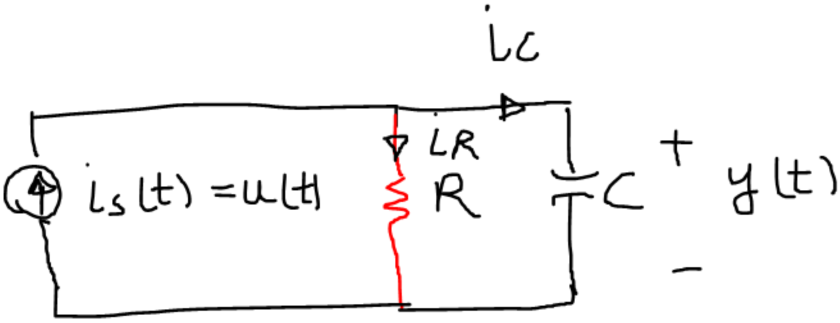
ورودی بطور همزمان به همه سیستم های موازی داده می شود و خروجی سیستم های موازی با هم جمع شده و خروجی نهایی را ایجاد می کند.

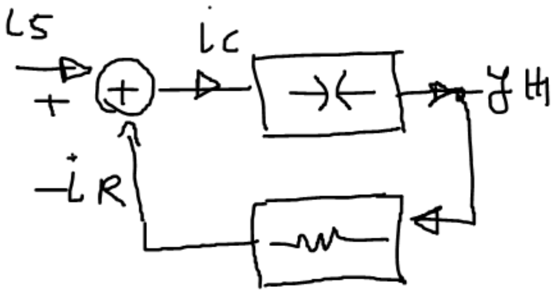
سیستم های پسخور: Feed back به کمک برگشت سیگنال از خروجی و جمع جبری آن با سیگنال ورودی سیستم پسخور را ایجاد می کنند.

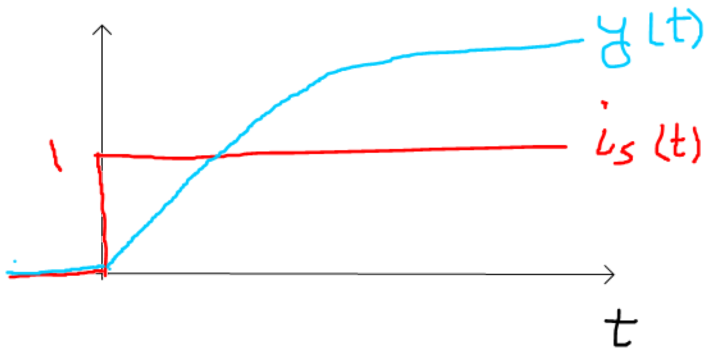
در پسخور منفی سیگنال برگشتی از خروجی به نوعی با ورودی جمع می شود که موجب پایدار شدن رفتار سیستم می گردد.



مثال:







اگر مقاومت R به عنوان شبکه فیدبک از مدار حذف شود ولتاژ خازن تا بی نهایت افزایش می یابد.

در یک سیستم با فیدبک مثبت خروجی به نوعی با ورودی جمع جبری می شود که اثر آن بر سیستم را تشدید می کند لذا موجب ناپایداری سیستم می شود.

از مدارهای با فیدبک مثبت نوسان سازها ساخته می شوند.

خواص سیستم ها:

۱) خاصیت بدون حافظه بودن: یک سیستم بدون حافظه است اگر خروجی در هر لحظه تنها وابسته به ورودی در همان لحظه باشد.

مثال: $y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda$ (سیستم انتگرال گیر)

خروجی در لحظه t وابسته به ورودی در تمام لحظات $-\infty$ تا t است لذا سیستم حافظه دار است.

مثال: $y(t) = \sin(t-\pi/2)\, x^2(t)$

خروجی در لحظه t وابسته به ورودی $x(t)$ در لحظه t است. سیستم بدون حافظه است

مثال: $y[n] = x[n] - x[n+1]$ (سیستم تفاضل گیر)

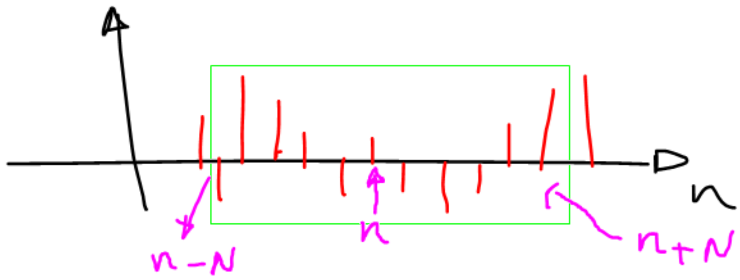
برای محاسبه خروجی در لحظه n باید ورودی در لحظات n و $n+1$ معلوم باشد پس سیستم حافظه دار است.

مثال: $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$ (جمع انباره‌ای Accumulator)

حافظه دار است

مثال: $y[n] = \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^{N} x[n+m]$ (متوسط گیر متحرک Moving average)

حافظه دار است



مثال: $y(t) = \begin{cases} x^2(t) & t \le 0 \\ \sqrt[3]{x(t)} & t > 0 \end{cases}$

بدون حافظه است

مثال: سیستم $y[n] = x[-n]$ آیا حافظه دار است.

پاسخ: بله - مثلاً $y[1] = x[-1]$ یعنی خروجی در لحظه 1 به ورودی در لحظه ی دیگری (-1) وابسته است پس سیستم حافظه دار است.

● **نکته:** بطور کلی سیستم هایی که در آن ورودی تغییر مقیاس دارد حافظه دار هستند.

سیستم علّی: causal یک سیستم علّی است اگر خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه و یا لحظات ماقبل آن وابسته باشد. بعبارتی سیستم به آینده ورودی وابسته نباشد.

مثال: سیستم $y[n] = x[n] - x[n-1]$ (تفاضل گیر) یک سیستم علّی است.

مثال: سیستم

$$y(t) = \begin{cases} x(t+1) & t \leq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2(t) & t > 0 \end{cases}$$

چون برای $t \leq 0$ خروجی به آینده ورودی وابسته است سیستم علّی نیست.

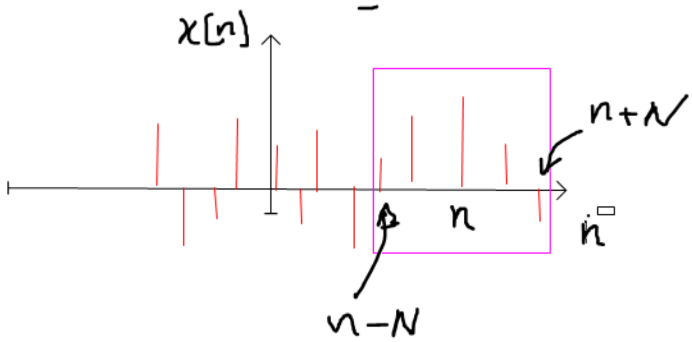
$$y(-1) = x(-1+1) = x(0)$$

لحظه 0 نسبت به لحظه (-1) آینده محسوب می‌شود.

مثال: سیستم Moving average بصورت

$$y[n] = \frac{1}{2N+1}\sum_{m=-N}^{N} x[m+n]$$

غیرعلّی است چون برای یافتن $y[n]$ به N نمونه بعد از لحظه ی n از ورودی نیاز است.



$$y[n] = \frac{1}{2N+1}\sum_{m=-2N}^{0} x[n+m]$$

نسخه ی علّی یک سیستم Moving average است.

مثال: سیستم $y(t) = 3x(2t-1)$ علّی نیست چون برای لحظاتی خروجی به آینده ورودی نیاز دارد.

$$y(2) = 3x(4-1) = 3x(3)$$

آینده

مثال: سیستم $y(t) = x(\tfrac{1}{2}t)$ علّی نیست.

$$y(-1) = x(-\tfrac{1}{2})$$

آینده

- **نکته:** اگر ورودی در سیستم تغییر مقیاس داشته باشد سیستم علّی نیست.

سیستم تغییر ناپذیر با زمان: Time Invariant

یک سیستم تغییر ناپذیر با زمان است اگر رفتار سیستم در طول زمان تغییر نکند.

یکی از راههای اثبات تغییر ناپذیری سیستم این است که ورودی را در زمان به اندازه‌ی t_0 جابجا کنیم و خروجی می بایست به همین اندازه جابجا شود.

$$x(t) \to \boxed{sys} \to y(t) \qquad\qquad x(t-t_0) \to \boxed{sys} \to y(t-t_0)$$

مثال: آیا سیستم انتگرال گیر تغییر ناپذیر با زمان است؟

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda$$

$$x(t-t_0) \to \boxed{sys} \to \int_{-\infty}^{t} x(\lambda - t_0)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\gamma)\, d\gamma = y(t-t_0)$$

$$\gamma = \lambda - t_0$$

پس سیستم تغییر ناپذیر با زمان است.

مثال: آیا سیستم $y[n] = \begin{cases} x[n-1] & n \le 0 \\ \frac{1}{2}x^2[n] & n > 0 \end{cases}$ تغییرناپذیر با زمان است؟

چون رفتار سیستم برای $n \le 0$ متفاوت از رفتار آن برای $n > 0$ است سیستم تغییرپذیر با زمان است.

مثال: آیا سیستم $y(t) = \frac{1}{2}x(2t-1)$ تغییرناپذیر با زمان است؟

$$x(t-t_0) \rightarrow \boxed{sys} \rightarrow \frac{1}{2}x(2t-1-t_0) \ne y(t-t_0) = \frac{1}{2}x(2(t-t_0)-1)$$

- نکته: سیستم هایی که در آن ورودی تغییر مقیاس دارد، تغییرپذیر با زمان هستند.

مثال: سیستم up sampling آیا $y(n) = x_{(2)}(n)$ تغییرناپذیر با زمان است؟

$$y[n] = x_{(2)}[n] = \begin{cases} x[n/2] & \text{برای } n \text{ های مضرب } 2 \\ 0 & \text{غیره} \end{cases}$$

$$x[n-n_0] \rightarrow \boxed{sys} \rightarrow \begin{cases} x[n/2 - n_0] & n \text{ مضرب } 2 \\ 0 & \text{غیره} \end{cases} \ne x_{(2)}[n-n_0]$$

$$= \begin{cases} x\left[\frac{n-n_0}{2}\right] & n-n_0 \text{ مضرب } 2 \\ 0 & \text{غیره} \end{cases}$$

لذا سیستم تغییرپذیر با زمان است

مثال: آیا سیستم $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda t} x(\lambda) d\lambda$ تغییر ناپذیر با زمان است؟

حل:

$$x(t-t_0) \rightarrow \boxed{SYS} \rightarrow \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda t} x(\lambda - t_0) d\lambda$$

$$y(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} e^{-\lambda(t-t_0)} x(\lambda) d\lambda$$

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda t} x(\lambda - t_0) d\lambda = \int_{-\infty}^{t-t_0} e^{-(\gamma+t_0)t} x(\gamma) d\gamma$$

$$\lambda - t_0 = \gamma$$

عبارت های نشان داده شده در انتگرال ها با هم برابر نیستند لذا سیستم تغییر پذیر با زمان است.

خاصیت خطی: یک سیستم خطی است اگر دارای دو خاصیت ۱) همگنی ۲) جمع پذیری باشد.

(خاصیت همگنی): یک سیستم دارای خاصیت همگنی است اگر

$$\alpha x(t) \rightarrow \boxed{SYS} \rightarrow \alpha y(t)$$

یعنی اگر ورودی α برابر شود خروجی سیستم نیز α برابر گردد (α هر عددی می تواند باشد)

(خاصیت جمع پذیری): یک سیستم خاصیت جمع پذیری دارد اگر

$$x_1(t) \rightarrow \boxed{SYS} \rightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow \boxed{SYS} \rightarrow y_2(t)$$

$$\rightarrow x_1(t) + x_2(t) \rightarrow \boxed{SYS} \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

مثال: آیا سیستم $y[n] = 2x[n-1] + nx[n]$ خطی است. حل:

$$\alpha x[n] \rightarrow \boxed{SYS} \rightarrow 2(\alpha x[n-1]) + n(\alpha x[n])$$

$$= \alpha(2x[n-1] + nx[n]) = \alpha y[n]$$

خاصیت همگنی دارد

$$x_1[n] \rightarrow \boxed{SYS} \rightarrow 2x_1[n-1] + nx_1[n]$$

$$x_2[n] \rightarrow \boxed{SYS} \rightarrow 2x_2[n-1] + nx_2[n]$$

$$x_1[n] + x_2[n] \rightarrow \boxed{SYS} \rightarrow 2(x_1[n-1] + x_2[n-1])$$

$$+ n(x_1[n] + x_2[n])$$

$$= (2x_1[n-1) + nx_1[n])$$

$$+ (2x_2[n-1] + nx_2[n])$$

$$= y_1[n] + y_2[n]$$

خاصیت جمع پذیری را دارد.

لذا سیستم خطی است.

مثال: آیا سیستم $y(t)=\int_{-\infty}^{t}\lambda\, x(\lambda)\,d\lambda$ خطی است؟ حل:

$$\alpha x(t) \rightarrow \boxed{sys} \rightarrow \int_{-\infty}^{t}\lambda(\alpha x(\lambda))\,d\lambda = \alpha\int_{-\infty}^{t}\lambda\, x(\lambda)\,d\lambda$$

$$= \alpha y(t)$$

خاصیت همگنی

$$x_1(t)+x_2(t) \rightarrow \boxed{sys} \rightarrow \int_{-\infty}^{t}\lambda(x_1(\lambda)+x_2(\lambda))\,d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{t}\lambda\, x_1(\lambda)\,d\lambda + \int_{-\infty}^{t}\lambda\, x_2(\lambda)\,d\lambda$$

$$= y_1(t)+y_2(t)$$

خاصیت جمع پذیری را دارد.

پس خطی است.

مثال: سیستم $y[n]=nx[2n-1]+1$ آیا خطی است؟ حل:

$$\alpha x[n] \rightarrow \boxed{sys} \rightarrow n(\alpha x[2n-1])+1 \neq \alpha y[n]$$

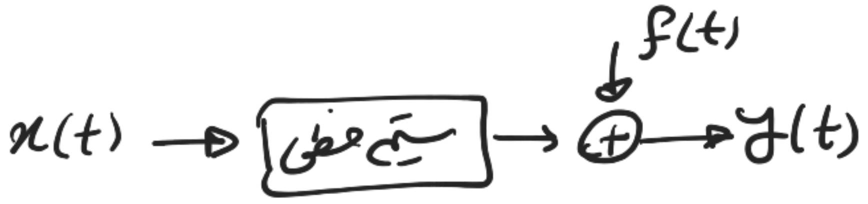
خاصیت همگنی ندارد. لذا سیستم خطی نیست.

مثال: سیستم $y(t)=\begin{cases} 2x(\frac{1}{2}t) & t\leq 0 \\ x^2(t) & t>0 \end{cases}$ آیا خطی است؟ حل:

$$\alpha x(t) \rightarrow \boxed{sys} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha x(\frac{1}{2}t) & t\leq 0 \\ \alpha^2 x^2(t) & t>0 \end{cases} \neq y(t)$$

خاصیت همگنی ندارد.

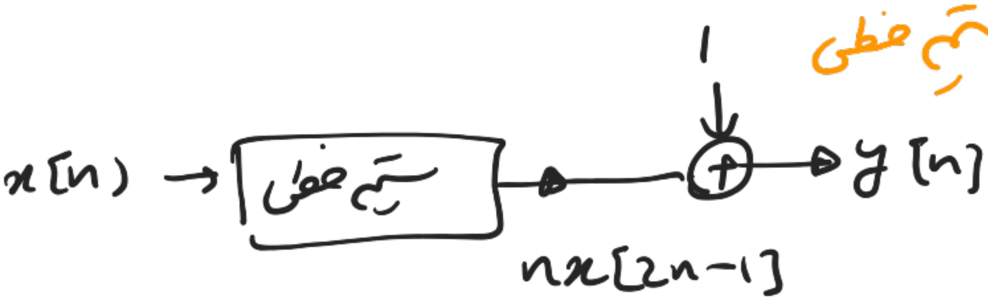
سیستم‌های افزایشی خطی:



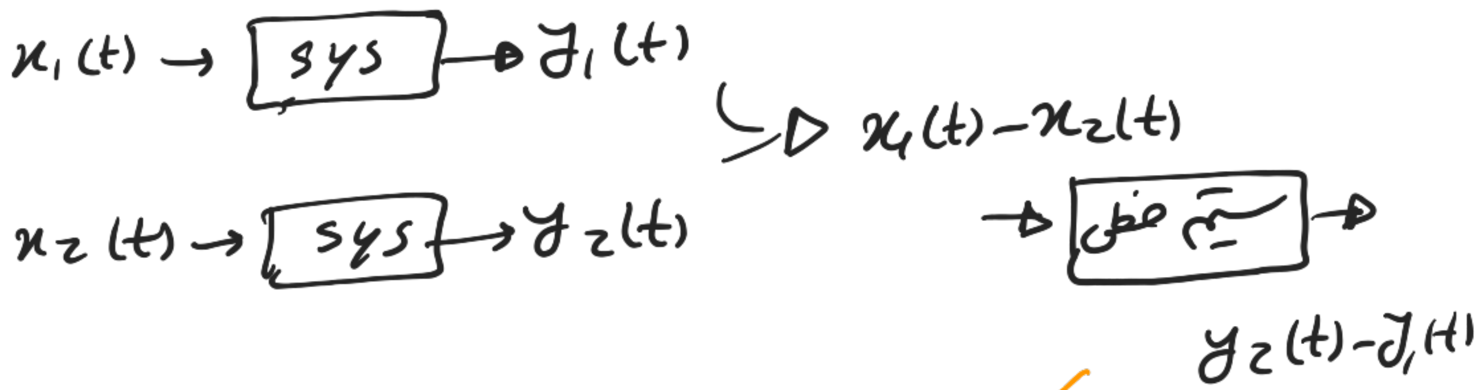
سیستمی است که از جمع خروجی یک سیستم خطی با تابعی از زمان نتیجه می‌شود.

مثال:

$$y[n] = \underbrace{n x[2n-1]}_{\text{سیستم خطی}} + \underbrace{1}_{\text{تابعی مستقل از ورودی}}$$



روش تشخیص سیستم افزایشی خطی:



روش را به مثال بالا اعمال می‌کنیم:

$$x_1[n] \to \boxed{sys} \to n x_1[2n-1]+1$$

$$x_2[n] \to \boxed{sys} \to n x_2[2n-1]+1$$

$$\overbrace{y_1[n]-y_2[n]}^{y[n]} = n\big(\overbrace{x_1[2n-1]-x_2[n-1]}^{x[2n-1]}\big)$$

رابطه تفاضل خروجی‌ها و تفاضل ورودی‌ها یک رابطه خطی است

$$y[n] = n x[2n-1]$$

سیستمی است که هم خاصیت همگنی دارد و هم جمع پذیری

معکوس پذیری: یک سیستم خاصیت معکوس پذیری دارد اگر از با داشتن خروجی سیستم بتوان ورودی سیستم را بطور یکتا بدست آورد.

مثال: آیا سیستم $y(t) = x^2(t-1)$ معکوس پذیر است؟ حل:

$$x(t-1) = \pm\sqrt{y(t)} \quad \text{یا} \quad x(t) = \pm\sqrt{y(t+1)}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود اگر خروجی سیستم معلوم باشد هر کدام از سیگنال‌های $+\sqrt{y(t+1)}$ یا $-\sqrt{y(t+1)}$ می‌توانند ورودی سیستم باشند.

پس سیستم معکوس پذیر نمی‌باشد.

مثال: $y(t) = \frac{1}{2}x(\frac{2}{3}t-1)+3$ آیا معکوس پذیر است؟ حل:

$$y(t+1) = \frac{1}{2}x(\underbrace{\tfrac{2}{3}t-1}_{})$$

$$\lambda = \frac{2}{3}t+1 \longrightarrow t = (\lambda-1)\times\frac{3}{2}$$

$$y(\tfrac{3}{2}(\lambda-1)+1) = \frac{1}{2}x(\lambda)$$

$$x(\lambda) = 2y(\tfrac{3}{2}\lambda - \tfrac{1}{2})$$

با داشتن خروجی سیگنال ورودی بصورت یکتا قابل محاسبه است

لذا سیستم معکوس پذیر است.

مثال: آیا سیستم
$$y(t)=\begin{cases}2x(\tfrac{1}{2}t+1) & t\le 1\\ x(-t+2) & t>1\end{cases}$$
وارون‌پذیر است؟ حل:

$$t\le 1 \Rightarrow y(t)=2x(\underbrace{\tfrac{1}{2}t+1}_{\lambda}) \Rightarrow y(2(\lambda-1))=2x(\lambda)$$

$$x(\lambda)=\tfrac{1}{2}y(2(\lambda-1))$$

$$\tfrac{1}{2}t+1=\lambda \qquad t\le 1 \longrightarrow \lambda\le 3/2 \text{ برای}$$

$$t>1 \Rightarrow y(t)=x(\underbrace{-t+2}) \rightarrow y(2-\lambda)=x(\lambda)$$

$$\lambda=-t+2 \qquad t>1 \Rightarrow \lambda>1$$

$$x(\lambda)=\begin{cases}\tfrac{1}{2}y(2(\lambda-1)) & \lambda\le 3/2\\ y(2-\lambda) & \lambda>1\end{cases}$$

برای بازه $1<\lambda\le 3/2$

$x(\lambda)$ از هر یک از دو ضابطه می‌تواند بدست آید. لذا $x(\lambda)$ یکتا نیست

پس سیستم معکوس‌پذیر نمی‌باشد.

معکوس سیستم: اگر سیستم معکوس‌پذیر باشد سیستمی وجود دارد که اگر پشت سر سیستم اصلی قرار گیرد خروجی نهایی برابر با سیگنال ورودی شود. به این سیستم معکوس سیستم اول گفته می‌شود.

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{sys}} \xrightarrow{y(t)} \boxed{\text{sys Inverse}} \rightarrow x(t)$$

مثال:

$$x(t) \rightarrow \boxed{\tfrac{1}{2}x(\tfrac{2}{3}t-1)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{2y(\tfrac{3}{2}t-\tfrac{1}{2})} \rightarrow x(t)$$

BIBO

پایداری سیستم: یک سیستم پایدار و ورودی محدود ـ خروجی محدود است اگر به ازای تمام ورودی های کراندار $|x(t)| \le B_x$ خروجی سیستم نیز کراندار باشد $|y(t)| \le B_y$.

مثال: آیا سیستم $y(t) = (\sin t)\, x(2t)$ پایدار است؟

حل:

اگر ورودی کراندار باشد $|x(t)| \le B_x \rightarrow |y(t)| = |\sin(t)\, x(2t)|$

$$= |\sin(t)| \cdot |x(2t)|$$

$$\le |x(2t)| \le B_x$$

پس خروجی نیز دارای کران است کران آن همان کران ورودی است.

مثال: آیا سیستم اکوموولاتور $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$ پایدار است؟

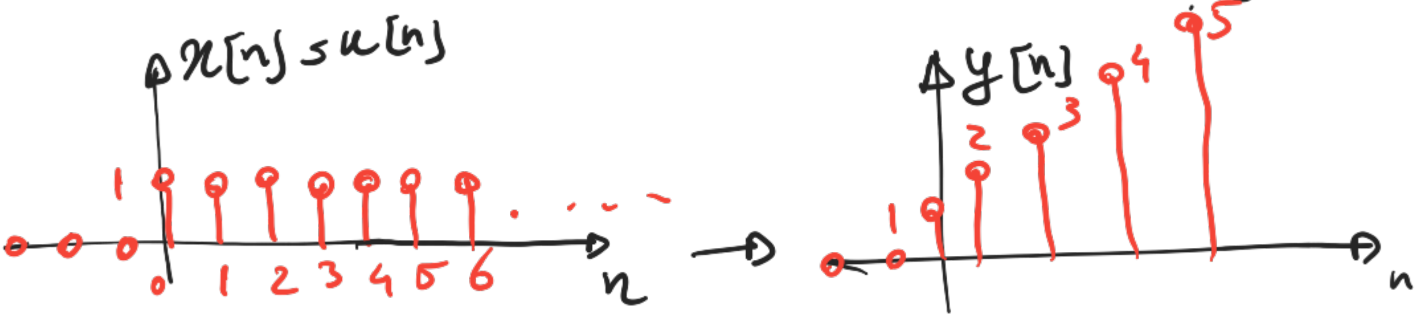
حل:

$$|x[n]| \le B_x \rightarrow |y[n]| = \left| \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \right|$$

$$\le \sum_{m=-\infty}^{n} |x[m]|$$

$$\le \sum_{m=-\infty}^{n} B_x = B_x (n+\infty)$$

هر لحظه سیستم مقدار خطی می‌گردد گرچه ورودی کراندار است خروجی الزاما کراندار نمی‌باشد.



$|x[n]| \le 1$ ← کران ورودی

$|y[n]| < \infty$ خروجی کراندار نیست

مثال: آیا سیستم moving average پایدار است؟

$$y[n]=\frac{1}{2N+1}\sum_{m=-N}^{N}x[n+m]$$

$$|y[n]|=\frac{1}{2N+1}\left|\sum x[n+m]\right| \le \frac{1}{2N+1}\sum_{m=-N}^{N}|x[n+m]|$$

اگر ورودی کراندار باشد $|x[n+m]|\le B_x$ است،

$$|y[n]| \le \frac{1}{2N+1}\sum_{m=-N}^{N}B_x=\frac{1}{2N+1}\times(2N+1)B_x=B_x$$

پس سیستم کراندار است.

لذا سیستم پایدار است.

مثال: آیا سیستم
$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{x(t)}{\sin(t)} & t\le 1\\[2mm] \dfrac{1}{2}x(t^2) & t>1\end{cases}$$
پایدار است؟

اگر ورودی کراندار باشد

$$|x(t)|\le B_x$$

$$|y(t)| \le \begin{cases}\dfrac{B_x}{\min|\sin(t)|} & t\le 1\\[2mm] \dfrac{1}{2}B_x & t>1\end{cases}$$

حداقل مقدار $\sin(t)$ که صفر است

لذا ضابطه $t\le 1$ در سیستم می‌تواند بی‌کران باشد پس سیستم ناپایدار است