فصل ۱ ، هندسه تحلیلی دیفرانسیل

مجموعه $\mathbb{R}^n$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \} \quad x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n$$

اعضای $\mathbb{R}^n$ را nتایی یا بردار یا نقطه می‌نامیم.

مجموعه $\mathbb{R}^n$ را می‌توان بصورت زیر به یک عمل جمع و یک عمل ضرب اسکالر تجهیز نمود:

(به خاطر دوتایی بودن عمل جمع دو بردار در $\mathbb{R}^n$) بسته بودن نسبت به عمل جمع

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \underset{\text{تعریف}}{:=} (\underbrace{x_1 + y_1}_{\mathbb{R}^n}, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

علامت جمع تعریفی در $\mathbb{R}^n$ — نشان دهنده تعریف — جمع ساده

عمل ضرب nتایی‌ها مربوط به ضرب داخلی است در واقع nتایی‌ها ضرب خاصی دارند.

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \lambda := (x_1\lambda_1, x_2\lambda_2, \dots, x_n\lambda_n)$$

علامت ضرب تعریفی در $\mathbb{R}^n$ — ضرب ساده

- مجموعه $\mathbb{R}^n$ به همراه عمل جمع و ضرب اسکالر فوق را یک فضای برداری n بعدی روی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ می‌نامند.

$$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$$

نکته: معمولاً $n \leq 3$ در نظر گرفته می‌شود.

مفهوم خط را در فضای $\mathbb{R}^n$: خط گذرا از نقطه $\vec{a} : (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ و در راستای بردار $\vec{A}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ را با L نمایش داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L = a + \langle A \rangle = \{ a + \lambda A \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \quad \vec{A} \neq 0$$

$\langle A \rangle$ تمام مضارب اسکالر A.

به معنی این که حداقل یک عضو صفر نباشد.

Ex) معادله خط گذرا از نقطه $a = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$ و در راستای بردار $\vec{A}(0, 0, 0, -1)$ را بنویسید؟

$$L = \{ (1, 2, 3, 4) + \lambda(0, 0, 0, -1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{(1,2,3,4)+(\lambda\times 0,\ \lambda\times 0,\ \lambda\times 0,\ -\lambda)\}$$

$$= \{(1,2,3,-\lambda+4) \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$$

نکته: نقاط روی یک خط راست در فضای $\mathbb{R}^n$ با نقاط اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ در تناظر دوسویی می باشند.

نتیجه: لذا تعداد نقاط یک خط راست ناشمارا می باشد. (تعمیمی برای ناشمارا بودن نقاط هر خط در $\mathbb{R}^n$)

$$F: L = a+\langle A\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(a+\lambda A) = \lambda \in\mathbb{R}$$

- این تابع یک به یک و پوشا می باشد لذا f دوسویی بوده (چون $\lambda\in\mathbb{R}$) و چون $\mathbb{R}$ ناشمارا می باشد نقاط خط L نیز ناشمارا می باشد.

یک به یک: $f(x_1)=f(x_2) \longrightarrow x_1=x_2$

$x_1\neq x_2 \longrightarrow f(x_1)\neq f(x_2) \Longrightarrow \underset{\text{دامنه}}{|A|} \leq \underset{\text{برد}}{|B|}$

پوشا: $f: A\longrightarrow B$

$\forall y\in B : \exists x\in A : f(x)=y \Longrightarrow R_f = B \Longrightarrow |A| \geq |B|$

در تابع دوسویی $|A|=|B|$.

نکته: فرض کنیم L یک خط راست گذرا از نقطه $a(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ و در راستای بردار $A=(A_1,A_2,\dots,A_n)\neq 0$ باشد؛ در این صورت اگر فرض کنیم $x(x_1,x_2,\dots,x_n)\in L$ آنگاه داریم:

$$L = \{a+\lambda A \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$$

$$\exists \lambda\in\mathbb{R} : x = a+\lambda A$$

$$\Longrightarrow (x_1,x_2,\dots,x_n) = (a_1,a_2,\dots,a_n)+\lambda(A_1,A_2,\dots,A_n)$$

$$= (a_1+\lambda A_1,\ a_2+\lambda A_2,\ \dots,\ a_n+\lambda A_n)$$

برابری دو بردار $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = a_1+\lambda A_1 \\ x_2 = a_2+\lambda A_2 \\ \vdots \\ x_n = a_n+\lambda A_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1-a_1 = \lambda A_1 \\ x_2-a_2 = \lambda A_2 \\ \vdots \\ x_n-a_n = \lambda A_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1-a_1}{A_1} = \lambda \\ \vdots \\ \dfrac{x_n-a_n}{A_n} = \lambda \end{cases}$$

$\xrightarrow[\text{خط}]{\text{معادله متقارن}} \quad L: \frac{x_1-a_1}{A_1}=\frac{x_2-a_2}{A_2}=\dots=\frac{x_n-a_n}{A_n}=\lambda$

اگر به ازای یک i داشته باشیم $A_i=0$ آنگاه داریم: $x_i=a_i$.

Ex) معادله پارامتری و معادله تقارنی خط راست گذرا از نقطه $a=(1,0,2)$ و در راستای بردار $\vec{A}=(0,-1,4)$ را بنویسید.

$$L: \cancel{\frac{x_1-1}{0}}=\frac{x_2}{-1}=\frac{x_3-2}{4}$$

$$L=\begin{cases} x_1=1 \\ -x_2=\frac{x_3-2}{4} \end{cases} \xrightarrow[\text{پارامتری}]{\text{معادله}} L=\begin{cases} x_1=1+\lambda\times 0=1 \\ x_2=0+\lambda(-1)=-\lambda \\ x_3=2+\lambda(4)=2+4\lambda \end{cases}$$

$a+\lambda\vec{A}$

مختصات نقاط صادق در معادله خط.

تعریف: دو بردار ناصفر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ در فضای $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. گوییم $\vec{A}, \vec{B}$ غیر همراستا هستند هرگاه هیچکدام از $\vec{A}, \vec{B}$ مضربی اسکالر از دیگری نباشد یعنی:

$$\nexists \lambda\in\mathbb{R} \longrightarrow \vec{A}=\lambda\vec{B} \Rightarrow A\notin\langle B\rangle$$
$$\nexists \mu\in\mathbb{R} \longrightarrow \vec{B}=\mu\vec{A} \Rightarrow B\notin\langle A\rangle$$

تعریف صفحه: فرض کنیم $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ یک نقطه در فضای $\mathbb{R}^n$ و A، B دو بردار هر دو ناصفر و ناهمراستا ($A\neq kB$) در فضای $\mathbb{R}^n$ باشند در این صورت معادله صفحه گذرا از نقطه a به موازات بردارهای $\vec{A}$، $\vec{B}$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

معادله صفحه

$$E=a+\langle A,B\rangle=\{a+\lambda A+\mu B \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$$

معادله صفحه گذرا از نقطه $a(0,1,2)$ و به موازات بردارهای $A(0,-1,4)$ و $B(1,2,3)$ را بنویسید:

$$\{(0,1,2)+\lambda(0,-1,4)+\mu(1,2,3) \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$$
$$\{(\mu,-\lambda+2\mu+1,4\lambda+3\mu+2) \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$$

یک صفحه از نامتناهی نقطه تشکیل شده زیرا λ و μ از $\mathbb{R}$ انتخاب شده‌اند.

چون به ازای λ و μ هر عددی به هم یک نقطه از صفحه را می‌دهد.

در حالت خاص اگر یکی از λ و μ صفر باشند معادله به شکل خط را می‌بینیم.

ضرب داخلی دو بردار در فضای $\mathbb{R}^n$:

فرض کنیم $v(v_1, v_2, \dots, v_n)$ و $w(w_1, w_2, \dots, w_n)$ دو بردار دلخواه باشد در $\mathbb{R}^n$ در این صورت ضرب داخلی یا اسکالر دو بردار v, w که با نماد $v.w$ نمایش داده می شود. عددی است که بصورت زیر بدست می آید.

$$v.w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

* اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{v}$, $\vec{w}$ باشد در این صورت خواهیم داشت.

$$\vec{v}.\vec{w} = |v||w|\cos\theta \qquad |v| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

* اگر دو بردار $\vec{v}$, $\vec{w}$ بر هم عمود باشند آنگاه داریم.

$$\vec{v}.\vec{w} = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{w}$$

* ضرب خارجی (برداری) بردارها در فضای $\mathbb{R}^3$:

فرض کنیم $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ و $\vec{w}(w_1, w_2, w_3)$ دو بردار دلخواه در فضای $\mathbb{R}^3$ باشد در این صورت ضرب خارجی این دو بردار که با نماد $\vec{v} \times \vec{w}$ نمایش داده می شود، برداری است در آن واحد بر بردار $\vec{v}$, $\vec{w}$ عمود باشد یعنی بر صفحه شامل بردارهای $\vec{v}$, $\vec{w}$ عمود است و بصورت زیر محاسبه می شود.

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

باید محاسبه دترمینان را از سطری که شامل $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ است شروع کرد.

$$(-1)^{i+j}|M_{ij}| = |\vec{v} \times \vec{w}|$$

* اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{v}$ و $\vec{w}$ باشد در این صورت همواره داریم:

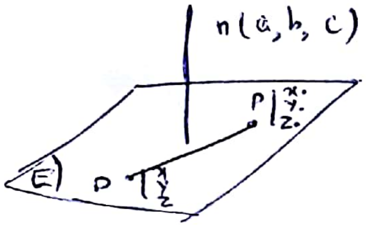
$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |v||w|\sin\theta \qquad \underbrace{\vec{v} \times \vec{w}}_{\text{حاصل بردار}} = (|v||w|\sin\theta).\hat{u}$$

حاصل عدد

u بردار یکه دلخواه در $\mathbb{R}^3$

با توجه به تعریف ضرب خارجی بردارها : $\vec{v}\times\vec{w} = -\vec{w}\times\vec{v}$

نوشتن معادله صفحه با داشتن یک نقطه از صفحه و یک بردار نرمال :



فرض کنیم $P\big|_{z_0}^{x_0}{}_{y_0}$ یک نقطه مشخص در صفحه E باشد و $\vec{n}(a,b,c)$ برداری قائم بر صفحه باشد که بر همه خطوط عمود است آنگاه داریم :

$\vec{PD}=(x-x_0\,,\ y-y_0\,,\ z-z_0)$

$\vec{n}(a,b,c) \xRightarrow{\vec{n}\perp\vec{PD}} a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$$\Rightarrow ax+by+cz+d=0$$
$$d=-(ax_0+by_0+cz_0)$$

* یک عدد در فضای $\mathbb{R}$ یک نقطه و در $\mathbb{R}^2$ یک خط و در $\mathbb{R}^3$ این معادلات به شکل صفحه.

Ex: صفحات مختصاتی xy و xz و yz در فضای $\mathbb{R}^3$:

صفحه مختصاتی xy ابتدا $a(0,0,0)$, $\vec{A}(1,0,0)$, $\vec{B}(0,1,0)$

$$\Rightarrow E=\{a+\lambda A+\mu B \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{(\lambda,\mu,0) \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$$

* در فضای $\mathbb{R}^n$ تعداد صفحات مختصاتی $\binom{n}{2}$ است.

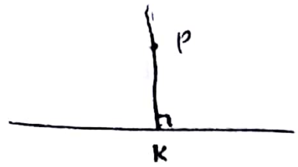
معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه $A\big|\begin{smallmatrix}2\\-2\\3\end{smallmatrix}$ عبور کرده و بر صفحات $E_1=x-2y+z=3$ و $E_2=2x-z=5$ قائم باشد؟

معادله صفحه گذرنده از A بردار نرمالش بر E_1, E_2 عمود است پس برداری که همزمان بر دو بردار عمود باشد تعریف ضرب خارجی را به ما می‌دهد. پس $n_{E_1}\times n_{E_2}$ بردار نرمال صفحه گذرنده از A را به ما می‌دهد

$$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k} \Rightarrow E=2(x-2)+3(y+2)+4(z-3)=0$$

$$E=2x+3y+4z-10=0$$

۱E) معادله‌ی خط گذرا از نقطه‌ی $P\begin{vmatrix}0\\1\\2\end{vmatrix}$ و عمود متقاطع بر خط $L: x=y-2=z-1$ را بنویسید؟



ابتدا توجه داریم که P خارج از خط L است

حال فرض کنیم نقطه‌ی K پای عمود متقاطع باشد، $K\in L$

لذا داریم:

$$L: \begin{cases} x=t \\ y=t+2 \\ z=t+1 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PK}\cdot\overrightarrow{u_L}=0$$

$$\Rightarrow \exists t\in\mathbb{R} \Rightarrow K=(t,t+2,t+1)$$

$$PK=(t-0,t+1,t-1)=(t,t+1,t-1)$$

$$(t,t+1,t-1)\cdot(1,1,1)=0 \Rightarrow \begin{cases} t+t+1+t-1=0 \\ 3t=0 \Rightarrow t=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow K(0,2,1)\ ,\ P(0,1,2)$$

بردار هادی خط $PK=(0,1,-1)$ $\Longrightarrow$ معادله‌ی خط $x=0\ ,\ y-1=2-z=L'$

[illegible]

معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که با بردار $v\begin{vmatrix}-1\\2\\1\end{vmatrix}$ و محور xها موازی بوده و از نقطه‌ی A واقع بر محور yها با عرض 2 عبور کند؟

صفحه‌ی خواسته شده با بردار $\vec{v}$ موازی بوده لذا بردار نرمال صفحه بر بردار $\vec{n}$ عمود است همچنین چون صفحه با محور xها موازی باشد، لذا بردار نرمال آن بر بردار هادی $\vec{i}$ عمود می‌باشد. بردار نرمال صفحه $\vec{v}\times\vec{i}$

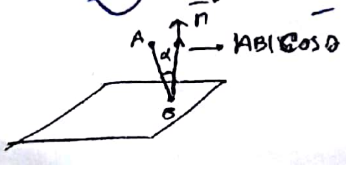
$$\vec{n}=\vec{v}\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} \Rightarrow \vec{n}(0,1,-2) \qquad A(0,2,0)$$

$$E: 0(x-0)+(y-2)-2(z-0)=0 \Rightarrow y-2z=2$$

در صفحه بی‌نهایت خطوطی وجود دارد که هم می‌تواند با $\vec{v}$ و هم با $\vec{i}$ موازی باشد. لزوماً $\vec{v}$ و $\vec{i}$ نباید موازی باشند.

- فاصله‌ی نقطه از صفحه:

الف) فرض کنیم صفحه‌ی P یک صفحه‌ی مفروض باشد در این صورت فاصله‌ی نقطه‌ی A (خارج از صفحه‌ی P) از صفحه‌ی P از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید؛ جایی که B نقطه‌ی دلخواه مربوط به صفحه‌ی P می‌باشد.



$$d=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

ب) اگر صفحه P دارای معادله $ax+by+cz+d=0$ باشد در این صورت فاصله نقطه $A\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ از صفحه P از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

تمرین) اگر صفحات $E_1: 2x-y-z=1$, $E_2: 2x-y-z=2$ دو وجه یک مکعب باشند، حجم مکعب را بیابید؟

نکته: اگر صفحات $E_1: ax+by+cz+d_1=0$ و $E_2: ax+by+cz+d_2=0$ موازی باشند در این صورت داریم

$$\text{فاصله دو صفحه از هم} = \frac{|d_1-d_2|}{|\vec{n}|}$$

هر کدام

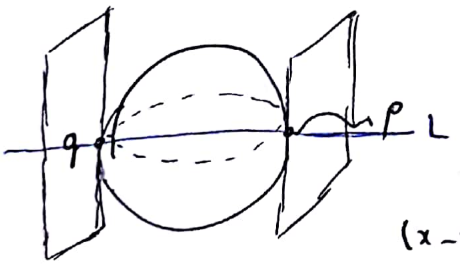
ابتدا توجه کنیم که دو صفحه فوق موازی می‌باشند (به دلیل بردار نرمال های یکسان) لذا فاصله دو صفحه فوق برابر طول ضلع مکعب می‌باشد داریم: برای یافتن فاصله دو صفحه کافیست یک نقطه به دلخواه از یکی از صفحات در نظر گرفته و فاصله آن را از صفحه دیگر بدست آوریم:

$A(0,0,-2) \in E_2$

$$d=\frac{|2(0)-1(0)-1(-2)-1|}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$ ضلع مکعب

$$v=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3=\frac{1}{6\sqrt{6}}$$

تمرین) معادله کره‌ای را بنویسید که از نقطه $P\begin{vmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{vmatrix}$ عبور کرده و بر صفحات $E_1: x-2y+2z=15$ و $E_2: x-2y+2z=-3$ مماس باشد؟



حل: برای نوشتن معادله یک کره به مختصات مرکز آن و اندازه کره نیاز داریم و کره‌ای با مرکز

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

دو صفحه E_1 و E_2 موازی اند لذا شعاع کره نصف فاصله این دو صفحه می‌باشد داریم:

$$r=\frac{1}{2}\left(\frac{|-18|}{\sqrt{9}}\right)=3$$

حال دقت کنیم که نقطه P روی صفحه E_1 واقع شده و لذا نقطه P بایستی نقطه تماس صفحه و کره باشد چون در معادله کره صدق می‌کند.

حال برای بدست آوردن مختصات نقطه q (نقطه تماس کره با E_2) بایستی خط لذا از خط L_{Pq}

با صفحه E_2 تقاطع دهیم:

خط L: $\begin{cases} L \text{ هادی خط} = \text{نرمال صفحات } E_1, E_2 , \quad \vec{u} = (1,-2,2) \\ P\left|\begin{matrix}3\\-4\\2\end{matrix}\right. \in L \end{cases} \Rightarrow L: x-3 = \dfrac{y+4}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$

حال برای بدست آوردن نقطه‌ی تقاطع L با صفحه E_2 باید معادله‌ی پارامتری خط L را در معادله‌ی صفحه E_2 جایگذاری کنیم.

$$\begin{cases} x = t+3 \\ y = -2t-4 \\ z = 2t+2 \end{cases} \xrightarrow[\text{صفحه } E_2]{\text{در معادله}} (t+3) - 2(-2t-4) + 2(2t+2) = 15$$

$$t+3+4t+8+4t+4 = -3 \Rightarrow 9t = -18$$

$$t = -2$$

جایگذاری در معادله‌ی پارامتری و بدست آوردن مختصات q: $q(1,0,-2)$

قطر $\Leftarrow Pq = (-2,4,-4)$

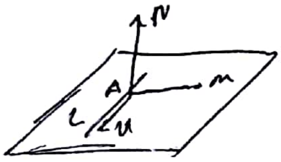
$r = 3 \Leftarrow |pq| = 6$

مختصات مرکز کره $\Rightarrow O\left(\dfrac{3+1}{2}, \dfrac{-4+0}{2}, \dfrac{-2+2}{2}\right) = (2,-2,0)$

معادله‌ی کره $\Longrightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$

E_n) معادله‌ی صفحه‌ای که از نقطه‌ی $M\left|\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}\right.$ و شامل خط $L: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-2t \\ z = 1+3t \end{cases}$ را بنویسید؟

توجه کنید که نقطه‌ی M روی خط L واقع نشده است.



حال کافیست یک نقطه‌ی دلخواه مانند A روی خط L در نظر گرفته و بردار نرمال صفحه برابر با $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{AM}$ که $\vec{u}(1,-2,3)$ بردار هادی L است.

$$A(2,3,1) \in L \Rightarrow \vec{MA} = (2,2,-1)$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{MA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$$

معادله‌ی صفحه $\Longrightarrow -4(x-0) + 7(y-1) + 6(z-2) = 0$

$$-4x + 7y + 6z = 19$$

دو صفحه در فضای $\mathbb{R}^4$ و دو خط در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌توانند متنافر باشند.

Ex) فرض کنیم صفحات $E_1: 2x-3y+z=4$ و $E_2: x+2y+3z=2$ در فضای $\mathbb{R}^3$ متقاطع باشند در این صورت برداری موازی با فصل مشترک صفحات فوق بیابید؟

توجه داریم که در فضای $\mathbb{R}^3$ فصل مشترک دو صفحه یک خط است می‌باشد که روی دو صفحه واقع شده، حال اگر برداری بخواهیم موازی فصل مشترک باشد، باید بر بردارهای نرمال هر دو صفحه عمود باشد لذا برابر با حاصل ضرب خارجی بردارهای نرمال این دو صفحه می‌باشد داریم:

$$\vec n = \vec n_{E_1}\times \vec n_{E_2} = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -11\vec i - 5\vec j + 7\vec k$$

چون $\vec n_{E_1} \nparallel \vec n_{E_2}$ دو صفحه متقاطع اند.

هر مضرب دلخواه از بردار $\vec n$ می‌تواند بردار موازی فصل مشترک است.

ب) معادله خط حاصل از فصل مشترک صفحات E_1 و E_2 ارائه شده در سوال بالا را بنویسید؟

از بردار $\vec n$ بدست آمده در قسمت الف که برداری موازی با فصل مشترک بود می‌توان به عنوان بردار هادی خط فصل مشترک استفاده کرد حال کافیست یک نقطه دلخواه بر روی فصل مشترک بدست آوریم برای این منظور داریم:

$$\begin{cases} 2x-3y=4 \\ x+2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y=0 \\ x=2 \end{matrix} \longrightarrow A(2,0,0)\in L$$

$$\Longrightarrow \text{خط فصل مشترک}\ L = \frac{x-2}{-11} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{7}$$

یک خط می‌تواند نامتناهی نمایش داشته باشد و یک نقطه دیگر خط از $t=k$ بدست می‌آید دیگری $t=1$ و همچنین در صفحات نیز همینطور

معادله صفحه‌ای را بنویسید که از فصل مشترک دو صفحه $E_1: 7x-4y+7z+5=0$ و $E_2: 4x+3y-2z+6=0$ عبور کند و بر صفحه $E_3: x-y-2z+5=0$ عمود باشد؟؟

صفحه‌ی خواسته شده شامل فصل مشترک صفحات E_1 و E_2 می‌باشد لذا نرمال آن باید بر هادی فصل مشترک عمود باشد همچنین چون صفحه‌ی خواسته شده بر صفحه‌ی E_3 عمود است لذا نرمال آن باید بر بردار نرمال E_3 نیز عمود باشد. بنابراین:

$$\underset{\text{هادی فصل}}{m} = \vec n_{E_1}\times \vec n_{E_2} = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 7 & -4 & 7 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -13\vec i + 42\vec j + 37\vec k$$ بردار موازی فصل مشترک

$$\vec n_{\text{نرمال}} = \vec m \times \vec n_{E_3} = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ -13 & 42 & 37 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -47\vec i - 11\vec j - 29\vec k$$

حال کافی است یک نقطه روی فصل مشترک صفحات E_1, E_2 (و لذا نقطه روی صفحه‌ی خواسته شده) بدست آوریم:

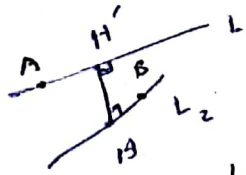
$$\xrightarrow{x=0} \begin{cases} -4y+7z=-5 \\ 3y-2z=-6 \end{cases} \quad z=-3,\ y=-4 \Rightarrow A(0,-4,-3)\in E$$

$$\xrightarrow{\text{معادله صفحه}} -47(x-0)-11(y+4)-29(z+3)=0$$

$$\Longrightarrow E: -47x-11y-29z=131$$

عمود مشترک دو خط متنافر

یادآوری: در فضای $\mathbb{R}^3$ دو خط دلخواه می‌توانند نه موازی و نه متقاطع باشند، در این صورت این دو خط را دو خط متنافر می‌نامیم. برای دو خط متنافر می‌توان خطی یافت که بر هر دو خط عمود باشد، برای یافتن طول عمود مشترک دو خط متنافر به صورت زیر عمل می‌کنیم:



خط‌ها دارای بردارهای $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ باشند و فرض کنیم A و B دو نقطه کاملاً دلخواه به ترتیب بر روی خطوط L_1 و L_2 باشند در این صورت داریم طول عمود مشترک دو خط متنافر

$$|HH'| = \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{u_1}\times\vec{u_2})|}{|\vec{u_1}\times\vec{u_2}|}$$

Ex) طول عمود مشترک دو خط متنافر $L_1: \frac{x-1}{2} = y = 1-z$ و $L_2: x = \frac{y}{2} = z+1$ را بیابید؟

$$|HH'| = \frac{|(-1,0,-2)\cdot(3,3,3)|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\vec{u_1}\times\vec{u_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

ساده سازی مولفه‌ها فقط برای حاصل‌ها در بردارهای کمکی در نظر هستند ؟ ما را اشاره نشان دهند مجازات و در زمانی که به اندازه‌ها نیاز داریم ساده سازی مجاز نیست.

Ex) فرض کنید مکعبی داریم که دو یال آن در راستای دو خط متنافر

$$L_2: \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \\ z = 0 \end{cases}, \quad L_1: \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$$

قرار داشته باشند حجم مکعب را بیابید؟

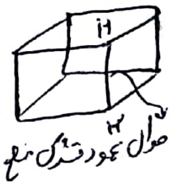
حل تمرین: فرض کنیم مکعبی داریم که دو یال آن در راستای خطوط متنافر

$$L_2\begin{cases}\frac{x}{3}=\frac{y}{4}\\ z=0\end{cases} \quad , \quad L_1:\begin{cases}x=0\\ y=5\end{cases}$$

قرار داشته باشند در این صورت حجم مکعب را بیابید؟

$B(0,0,0) \qquad A(0,5,0)$

به وضوح خط L_1 خطی حاصل از تقاطع صفحه $x=0$ (صفحه yz) و صفحه $y=5$ می‌باشد لذا این موازی با محور zها بود در نتیجه بردار هادی آن بردار $\vec{K}(0,0,1)$ می‌باشد همچنین بردار هادی خط دوم L_2 به وضوح $(3,4,0)$ می‌باشد؟



$$\overline{HH}=\frac{|(0,-5,0)\cdot(\vec{U_1}\times\vec{U_2})|}{|\vec{U_1}\times\vec{U_2}|}=\frac{15}{5}=3\sim a$$

$\Longrightarrow$ حجم مکعب $V=27$

$$\vec{U_1}\times\vec{U_2}=\begin{vmatrix}\hat i & \hat j & \hat k\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 0\end{vmatrix}=-4\vec i+3\vec j+0\vec k$$

تمرین) معادله خطی را بنویسید که بر دو خط متقاطع زیر و در نقطه تقاطع آن‌ها عمود باشد.

خط L_1: فصل مشترک $E_1: x+2y-3z=3$, $E_2: 2x-y-z=6$

خط L_2: $L_2: x-1=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$ ؟

ابتدا معادله خط L_1 یعنی خط حاصل از فصل مشترک صفحه E_1 و E_2 را بدست می‌آوریم داریم:

هادی خط L_1: $$\vec{U_1}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\hat i & \hat j & \hat k\\ 1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=-5\vec i-5\vec j-5\vec k=(1,1,1)$$

$$\begin{cases}x+2y=3\\ 2x-y=6\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}x=3\\ y=0\end{matrix} \qquad A\begin{vmatrix}3\\0\\0\end{vmatrix} \Rightarrow L_1: x-3=y=z$$

حال از ضرب خارجی $\vec{U}_{L_1}\times\vec{U}_{L_2}$ بردار هادی خط خواسته شده بدست می‌آید:

$$\vec{U_1}\times\vec{U_2}=\begin{vmatrix}\hat i & \hat j & \hat k\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\hat i-2\hat j+\hat k \to U \text{ خط خواسته شده } (1,-2,1)$$

حال نقطه تقاطع خطوط را بدست می‌آوریم (با جایگذاری معادله پارامتری در معادله L_2)

$$\begin{matrix}x=t+3\\ y=t,\ z=t\end{matrix} \Rightarrow t+2=\frac{t+1}{2}=\frac{t}{3}\to t=-3$$

جایگذاری در L_1 نقطه تقاطع $W(0,-3,-3)$

$$L=\frac{x-0}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+3}{1}\Rightarrow L\begin{cases}x=t\\ y=-2t-3\\ z=t-3\end{cases}$$

۱۶) معادله خط گذرنده از نقاط $A\begin{vmatrix}3\\2\\-1\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}4\\-1\\1\end{vmatrix}$ را بیابید سپس نقطه اشتراک این خط با صفحه yz را پیدا کنید؟

$x=0$ معادله صفحه

$$\vec{AB}=\vec{U}=(1,-3,2)$$
$$A\begin{vmatrix}3\\2\\-1\end{vmatrix} \longrightarrow L: \frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{2}$$

به وضوح صفحه yz دارای $x=0$ بوده و برای بدست آوردن نقطه تقاطع خط با این صفحه کافیست x در معادله پارامتری خط ما برابر صفر قرار داده شود. داریم:

$$L:\begin{cases}x=t+3\\ y=-3t+2\\ z=2t-1\end{cases} \xrightarrow{x=0} t=-3 \xrightarrow[\text{تقاطع}]{\text{نقطه}} B\begin{vmatrix}0\\11\\-7\end{vmatrix}$$

معادله صفحه گذرا از نقاط $A\begin{vmatrix}2\\-1\\3\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}1\\2\\2\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}-2\\1\\1\end{vmatrix}$ را بنویسید؟

$$\vec{AB}(-1,3,-3),\quad \vec{AC}(-4,2,-2) \Rightarrow \vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\-1&3&-3\\-4&2&-3\end{vmatrix}=-3\hat{i}+9\hat{j}+10\hat{k}$$
$$\Rightarrow n(-3,9,10)$$

$$-3(x-2)+9(y+1)+10(z-3)=0$$
$$-3x+9y+10z=15$$

۱۷) زاویه بین صفحات زیر را بیابید؟

$$E_1: 4x+2y-4z+1=0$$
$$E_2: 9x-2y+6z+5=0$$

$$|n_1\cdot n_2|=|n_1||n_2|\cos\theta$$

$n_1(4,+2,-4)$

$n_2(9,-2,6)$

$$=\cos^{-1}\left(\frac{36-4-24}{6\times 11}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{8}{66}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{4}{33}\right)$$

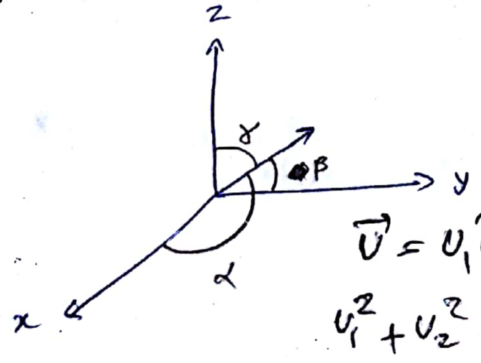
بردار نرمال صفحه‌ای را بیابید که از مبدا مختصات و فصل مشترک صفحات $E_1: y=x-1$ و $E_2: z=y-1$ عبور می‌کند؟

$$n_1(-1,1,0),\quad n_2(0,-1,1) \xrightarrow[\text{با فصل مشترک}]{\text{هادی خط موازی}} n_1\times n_2=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\-1&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=(1,1,1)$$

$z=0$

$$A\begin{vmatrix}2\\1\\0\end{vmatrix} \Rightarrow \vec{OA}=(2,1,0) \Rightarrow \vec{n}=(\vec{n}_1\times\vec{n}_2)\times\vec{OA}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\1&1&1\\2&1&0\end{vmatrix}=(-1,2,-1)$$

$O\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$



بدست آوردن زوایه‌هایی که یک بردار با محورهای مختصات می‌سازد:

فرض کنیم $\vec{U}$ یک بردار یکه در $\mathbb{R}^3$ باشد و با محورها x, y, z به ترتیب زوایای α, β, γ بسازد.

$$\vec{U}=U_1\hat{i}+U_2\hat{j}+U_3\hat{k}$$
$$U_1^2+U_2^2+U_3^2=1$$

می‌دانیم:

$$\begin{cases} \vec{U}\cdot\hat{i} = U_1 \\ \vec{U}\cdot\hat{j} = U_2 \\ \vec{U}\cdot\hat{k} = U_3 \end{cases}$$

$$\cancel{|\vec{U}|}\,\cancel{|\hat{i}|}\cos\alpha = |\vec{U}\cdot\hat{i}| \Rightarrow U_1 = \cos\alpha$$

$$\cancel{|\vec{U}|}\,\cancel{|\hat{j}|}\cos\beta = |\vec{U}\cdot\hat{j}| \Rightarrow U_2 = \cos\beta$$

$$U_3 = \cos\gamma$$

لذا داریم:

$$\vec{U} = \left((\cos\alpha)\hat{i} + (\cos\beta)\hat{j} + (\cos\gamma)\hat{k}\right)$$

حال اگر بردار واحد $\vec{A}$ داشته باشیم که $|A| \neq 1$ یعنی نباشد دارای صورت چون $\frac{A}{|A|}$ بردار یکه می‌باشد خواهیم داشت:

$$\vec{U} = (|A|\cos\alpha)\hat{i} + (|A|\cos\beta)\hat{j} + (|A|\cos\gamma)\hat{k}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$|A|^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 1$$

«فصل دوم:

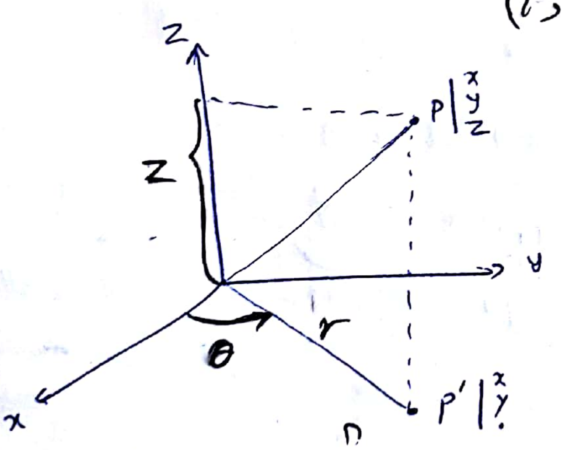
«رویه‌ها و دستگاه‌های مختصاتی»

دستگاه مختصات در صفحه $\mathbb{R}^2$

1. دکارتی (x, y): $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$
2. قطبی (r, θ): $r = \sqrt{x^2+y^2},\ \theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

دستگاه مختصات در فضا $\mathbb{R}^3$:

1. دکارتی (x, y, z)
2. استوانه‌ای (r, θ, z)
3. کروی (ρ, φ, θ)



دکارتی $\rightleftarrows$ استوانه‌ای

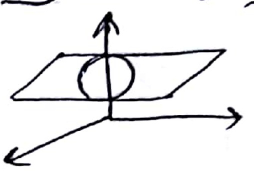
$x = r\cos\theta$	$r = \sqrt{x^2+y^2}$
$y = r\sin\theta$	$\theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$
$z = z$	$z = z$

* در دستگاه مختصات استوانه‌ای اگر r ثابت باشد $(r=a)$ و θ و z اجازه‌ی تغییر داشته باشند در این صورت یک استوانه‌ای رسم کرده‌ایم که سطح مقطع آن دایره‌ای به شعاع $r=a$ می‌باشد و علت نامگذاری این دستگاه مختصات به نام استوانه‌ای این است.

* " " " " " " " " " " θ ثابت باشد $(\theta = a)$ و r و z " " " " " " " " " ". یک صفحه عمود بر xy و شامل محور z رسم کرده‌ایم که با محور xها زاویه θ می‌سازد.

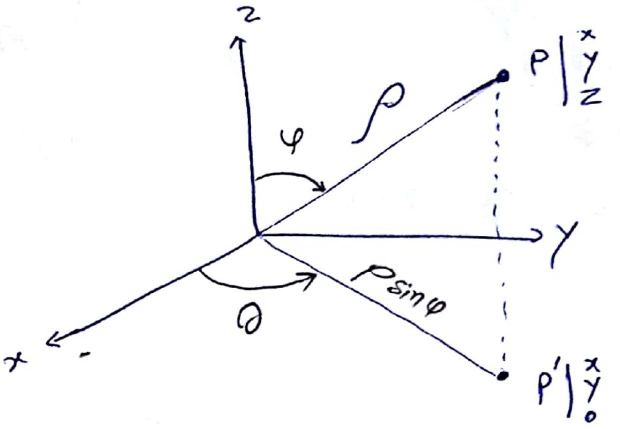
* اگر در دستگاه مختصات استوانه‌ای z ثابت فرض شود ($z=k$) و r و θ اجازه تغییرات داشته باشند در این صورت با یک شکل هندسی (بر حسب رابطه موجود بین r و θ) در صفحه $z=k$ (صفحه موازی با xy) سروکار داریم.

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \\ z = 3 \end{cases}$$ دایره



اگر $z=0$ بود دایره در صفحه xy قرار داشت.

دستگاه مختصات کروی: $(\rho, \hat{\varphi}, \hat{\theta})$



$\rho = |OP| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

زاویه‌ای که OP با جهت + محور z می‌سازد: φ

〃 که OP' با جهت + محور xهای سازد: θ

دستگاه کروی $\Longleftarrow$ دستگاه دکارتی

$x = \rho\sin\varphi\cos\theta$
$y = \rho\sin\varphi\sin\theta$
$z = \rho\cos\varphi$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right)$
$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$

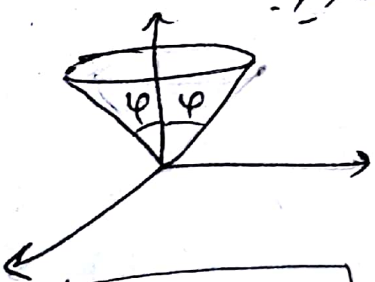
$$x^2+y^2 = \rho^2\sin^2\varphi\,(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi} = tg\,\varphi$$

* در دستگاه مختصات کروی اگر ρ ثابت فرض شود ($\rho=k$) و $\hat{\varphi}$ و $\hat{\theta}$ اجازه‌ی تغییر داشته باشند در این صورت با یک کره به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع $\rho=k$ سروکار داریم.

$$a = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow a^2 = x^2+y^2+z^2$$

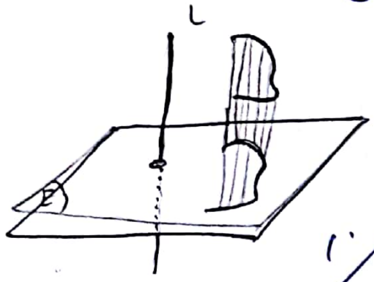
* 〃 〃 〃 〃 〃 〃 $\hat{\varphi}$ ثابت باشد ($\varphi = m$) و ρ و $\hat{\theta}$ اجازه تغییرات داشته باشند در این صورت با یک مخروط قائم سروکار داریم که رأس آن در مبدأ و زاویه‌ی رأس آن $2\hat{\varphi}$ است زیرا چرخش φ در یک طرف همزمان در طرف دیگر نیز انجام می‌شود.



* 〃 〃 〃 〃 〃 اگر θ ثابت باشد ($\theta=k$) در این صورت با صفحه‌ای قائم بر صفحه‌ی xy سروکار داریم که با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی $\theta=k$ ساخته و این صفحه شامل محور z نیز می‌باشد.

$$\boxed{\begin{gathered} 0 \leq \rho \leq \infty \\ 0 \leq \hat{\varphi} \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{gathered}}$$

سیلندر: فرض کنیم صفحه E مفروض باشد و خط L گونه‌ای باشد که صفحه E را در یک نقطه مانند P قطع کند (لزومی ندارد که خط L به صفحه عمود باشد) اگر C یک خم (منحنی) در صفحه E باشد آنگاه یک سیلندر در فضای $\mathbb{R}^3$ مکان هندسی تمام نقاطی در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد که بر روی خطوط موازی با خط L و لذا از یک نقطه روی خم C واقع شده باشد.

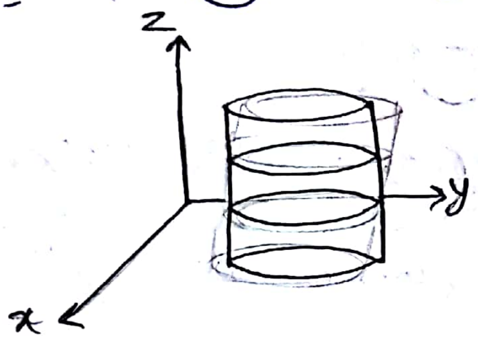


* هرچند لزومی ندارد که $L \perp E$ باشد ولی برای راحتی کار، فرض می‌کنیم $L \perp E$ باشد و با سیلندرهای مورب کاری نداریم. بوضوح یک سیلندر (با توجه به تعریف آن) بی‌کران می‌باشد.

* هیچ محدودیتی برای خم C نداریم و شکل هندسی این خم می‌تواند یک نقطه، یک خط، ... باشد.

* خط L را محور سیلندر می‌نامند.

* نمودار توابع در صفحه وقتی در فضای $\mathbb{R}^3$ دیده شوند یک سیلندر حاصل می‌شود. مثلاً برای تابع $y=f(x)$ داریم $g(x,y)=y-f(x)=0$ و در این صورت با در نظر گرفتن این نمودار در فضای $\mathbb{R}^3$ و با محور سیلندر که z می‌باشد یک سیلندر قائم بدست می‌آید.

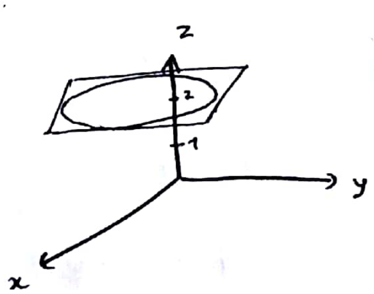


مثال) مجموعه نقاط $W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x=2\cos\theta \\ y=3\sin\theta \\ z=2 \end{matrix}\right\}$ ، $0\le\theta\le 2\pi$ معرف چه شکل هندسی در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد؟؟

$$\cos\theta=\frac{x}{2},\quad \sin\theta=\frac{y}{3} \Rightarrow \sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

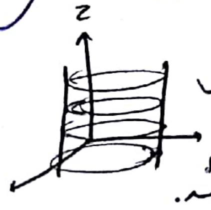
یعنی C خم

لذا با یک بیضی به معادله فوق در صفحه $z=2$ سروکار داریم



Ex) معادلهٔ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ در فضای $\mathbb{R}^3$ معرف چه شکل هندسی می‌باشد (در فضای $\mathbb{R}^3$ آن را توصیف کنید)؟

$$W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 ,\ z \text{ آزاد} \right\}$$



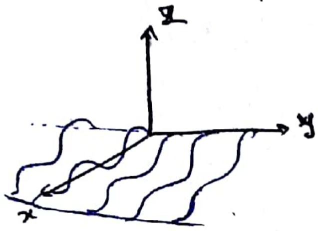
مجموعه نقاط W به نام یک استوانه در فضای $\mathbb{R}^3$ بوده که مقاطع عرضی آن بیضی‌هایی به معادله $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ می‌باشد.

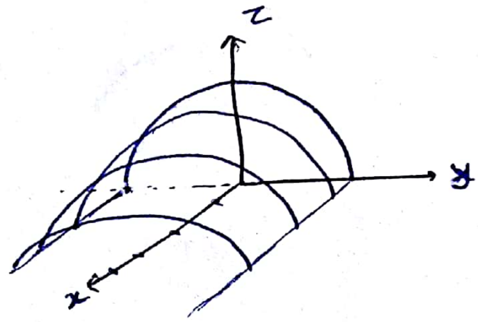
Ex) نمودار معادلات زیر را در فضای $\mathbb{R}^3$ توصیف کنید؟

الف) $z = \sin x$

ب) $y^2 = 9 - z$

الف) $W = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sin x ,\ y \text{ آزاد} \}$





ب) $W_2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 = 9 - z ,\ x \text{ آزاد} \}$

* هر y و z ای که در رابطه صدق کند با x های آزاد جزو مجموعه نقاط W شکلی از سلیندر است.

رویه‌های درجه دوم:

هر معادله‌ای برحسب متغیرهای x, y, z در فضای $\mathbb{R}^3$ که درجه دوم باشد (بالاترین توان موجود در آن 2 باشد) یک رویه درجه دوم می‌نامند مثلاً $y^2 = 9 - z$, $2x = z - y^2$

در این قسمت قصد داریم رویه‌های درجه دوم را شناسایی و طبقه‌بندی کنیم. غیر از بحث رابطه‌ای که برای هر دسته از رویه‌ها ذکر خواهیم کرد (قالب‌بندی فرمولی) همواره می‌توان از ابزارهای زیر برای شناسایی و ترسیم دقیق‌تر رویه‌ها بهره گرفت:

1. تقاطع دادن رویه با صفحات موازی مختصاتی مثلاً: صفحه $x=0$ معادله صفحه xy است و صفحات موازی آن $x=k$ هاست. اگر رویه در راستای مثلاً محور y باشد صفحات موازی صفحه xz بهترین تقاطع‌ها را می‌دهد.

2. پی بردن به تقارن‌های احتمالی موجود در رویه و استفاده از آن (تقارن نسبت به محورها یا نسبت به صفحات). اگر z ها منفی شوند به روی z- بریم و شکل تغییر نکند یعنی رویه نسبت به صفحه xy متقارن است.

3: یافتن محل تقاطع رویه‌ها با محورها، صفحات مختصاتی.

4: پی بردن به اشکال‌های احتمالی رویه و یا دوران‌های احتمالی رخ داده در آن (استفاده از ابزارهایی به مانند مربع کامل کردن و ...)

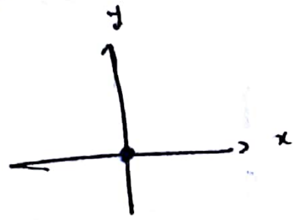
رویه‌های درجه دوم:

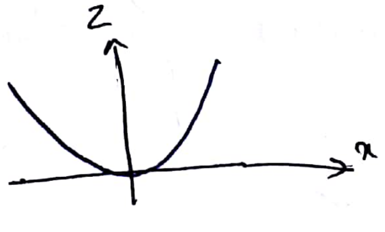
1. سهمیوارها (سهمیگون‌ها)
2. بیضی‌گون‌ها
3. هذلولی‌گون‌ها (یکپارچه و دوپارچه)
4. مخروط‌ها
5. رویه‌های زینی شکل (سهمیوارهای هذلولوی)

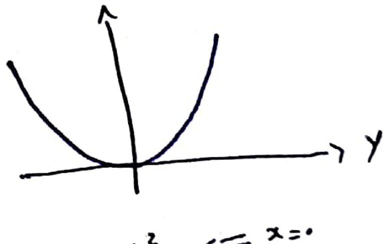
1: درحالت‌های معادله درجه دوم به فرم $z=ax^2+by^2$ یا $x=ay^2+bz^2$ یا $y=ax^2+bz^2$ با شرط $a,b>0$ معرف سهمیگون‌ها در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد. همچنین هر معادله دیگری که پس از یک سری عملیات جبری بتوان آن را به صورت یکی از فرم‌های فوق تبدیل کرد معرف سهمیگون خواهد بود.

Ex) رویه $z=x^2+y^2$ را ترسیم توصیف نمایید؟

ابتدا تقاطع رویه با صفحات مختصاتی xy ، yz و xz را بدست می‌آوریم (تصویر رویه بر روی صفحات مختصاتی)







تصویر سهمی روی صفحه xy به معادله $z=0$: $x^2+y^2=0$

$y=0 \Rightarrow z=x^2$

$x=0 \Rightarrow z=y^2$

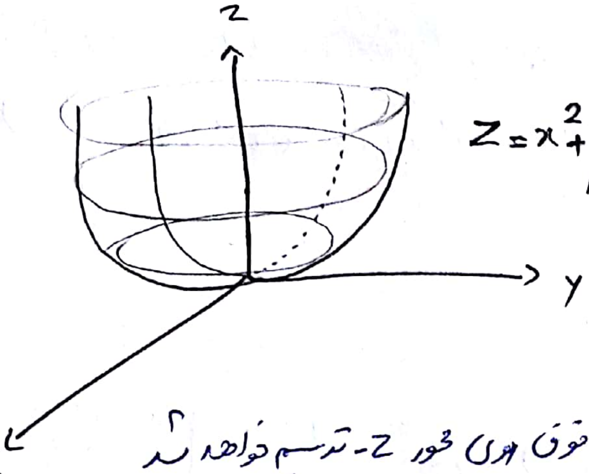
در گام دوم از صفحات موازی صفحه xy (به معادله $z=k$) جهت برش زدن مقاطع عرضی رویه استفاده می‌نماییم (تقاطع رویه با صفحات $z=k$ را بدست می‌آوریم).

$$x^2+y^2=k \begin{cases} k<0: & x^2+y^2=k<0 \quad \times \\ k=0: & x^2+y^2=0 \quad \text{نقطه} \\ k>0: & x^2+y^2=k \end{cases}$$

لذا هیچ اثری از رویه در پایین صفحه xy نیست

تقاطع رویه با صفحه $z=k$ دایره‌هایی به مرکز $(0,0)$ و شعاع $\sqrt{k}$

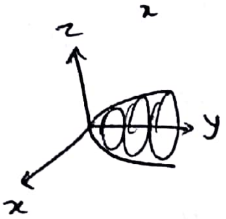
لذا با جمع بندی اطلاعات فوق داریم:



$$z=x^2+y^2$$

توضیحات: برای حالت $z=-x^2-y^2$ سهمیگون فوق روی محور $z-$ ترسیم خواهد شد

همچنین توجه داریم که برای حالت های مشابه $y=ax^2+bz^2$ که $a,b>0$ داریم،



و اگر $a,b<0$ ، $a.b>0$ همین نمودار در طرف منفی محور y ترسیم خواهند شد.

درحالتی که اگر $z=ax^2+by^2$ جایی که $a\neq b$ داریم:

$$a\neq b,\ k>0,\ a,b>0 \Rightarrow \begin{cases} k=ax^2+by^2 \\ \dfrac{x^2}{(\frac{k}{a})^2}+\dfrac{y^2}{(\frac{k}{b})^2}=1 \end{cases}$$

در صورتی ضرایب x^2,y^2 برابر نباشد سطح مقطع های $z=k$ بیضی هستند.

2: بیضی گون ها:

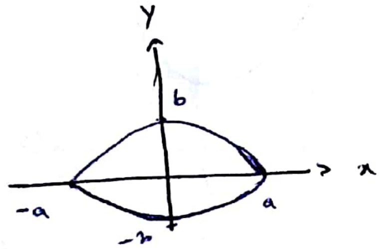
درحالت کلی معادله در فضای $\mathbb{R}^3$ به فرم کلی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

یا هر معادله ای دیگری که پس از طی یک سری عملیات جبری بتواند به فرم فوق تبدیل شود معرف یک بیضی گون در $\mathbb{R}^3$ خواهد بود (به 3 علامت مثبت و همچنین به عدد 1+ در طرف دوم توجه داشته باشید).

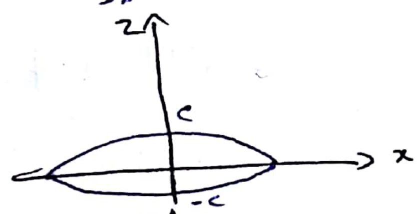
- ترسیم تقریبی بیضی گون فوق را انجام دهید؟

ابتدا تصویر رویه در صفحات مختصاتی را پیدا میکنیم: فرض ($a>b>c$)

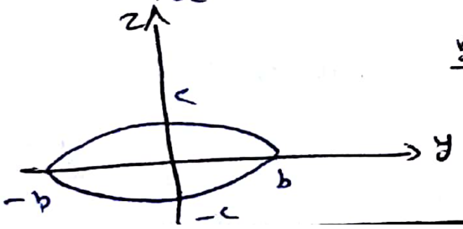


تصویر در صفحه xy به معادله $z=0$

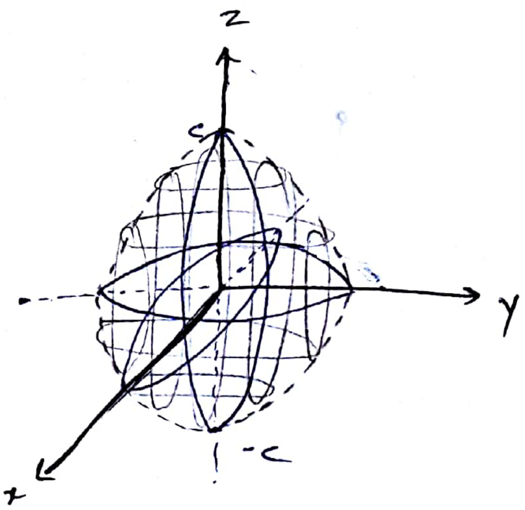
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



حال رویه را با صفحات موازی صفحه‌ی xy ($z=k$) تقاطع می‌دهیم داریم:

اگر داشته باشیم $\frac{k^2}{c^2}>1$ آنگاه چون $1-\frac{k^2}{c^2}<0$ به تناقض می‌رسیم $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$

چون طرف چپ نمی‌تواند منفی باشد لذا در این حالت تقاطع تهی می‌باشد یعنی برای $k>c$ و $k<-c$

، هیچ اثری از رویه وجود ندارد.

اگر $k=c$ داریم $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ در نتیجه تقاطع حاصل نقطه‌ی $(0,0,c)$ خواهد بود و اگر $k=-c$

باشد $(0,0,-c)$ خواهد بود.

و اما اگر $-c<k<c$ در این صورت $\gamma=1-\frac{k^2}{c^2}>0$ و لذا داریم $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\gamma$ معادله

بیضی در صفحه‌ی xy.

در حالت‌هایی که رویه با صفحات $x=k$ و $y=k$ نیز تقاطع داده شود به حالت بالا می‌توان بحث کرد و وضعیت

استقرار رویه مشخص‌تر می‌گردد.

چون با تبدیل $x\to -x$ و $y\to -y$ و $z\to -z$ هیچ تغییری در معادله‌ی رویه ایجاد نمی‌شود لذا این

رویه نسبت به صفحات و محورهای مختصاتی متقارن می‌باشد.

اگر در معادله‌ی بیضی‌گون داشته باشیم $a=b=c$ یعنی $x^2+y^2+z^2=c^2$ با یک کره سروکار داریم.

در حالت کلی معادلاتی به فرم کلی $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=\delta$ نیز معرف یک بیضی‌گون می‌باشند.

3: هذلولی‌گون یکپارچه:

در حالت کلی معادلاتی به فرم کلی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

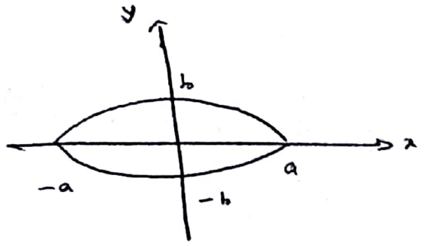
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

یا هر معادله‌ای دیدیم که پس از یک سری عملیات جبری به یکی از صورت‌های

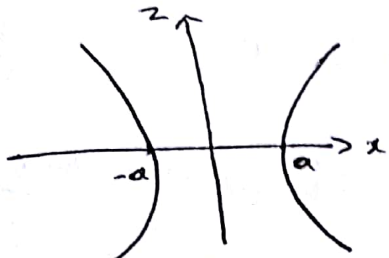
فوق تبدیل شوند معرف یک هذلولی‌گون یکپارچه در فضای $\mathbb{R}^3$ هستند. به یک علامت منفی و دو علامت + در عدد ۱ توجه

کنید.

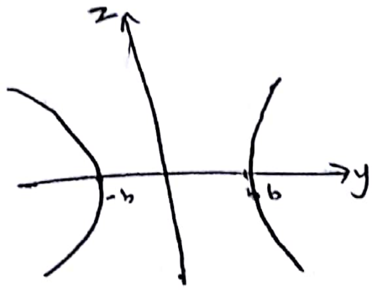
هذلولی گون یکپارچه $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ را بطور تقریبی ترسیم نمایید.



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, xy



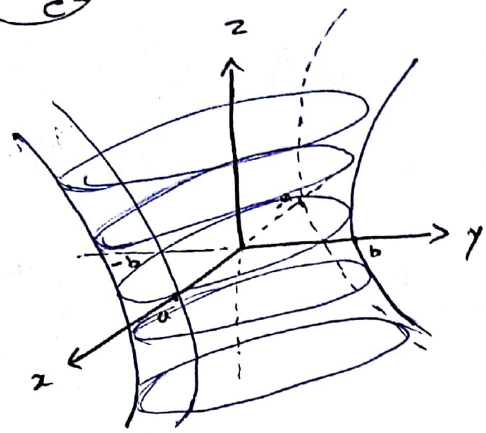
هذلولی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, xz



$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

در صفحات $z=k$, k- صفحات بیضی هستند.

$z=k$ تقاطع با $\xrightarrow{\quad}$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$ بیضی



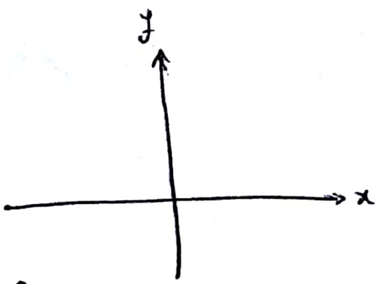
هذلولی گون دوپارچه: در حالت های معادله زیر:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

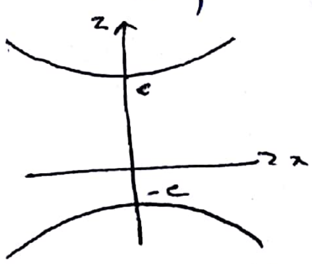
$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ و یا هر معادله دیگری که پس از یک سری عملیات جبری بتوان آن را به صورت حالت فوق تبدیل کرد معرف هذلولی گون دوپارچه است. (به دو علامت منفی و یک علامت مثبت و مقدار توجه کنید)

جایی که علامت مثبت قرار دارد، راستای مقدار را نشان می دهد.

Ex) ترسیم تقریبی $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ را انجام دهید:

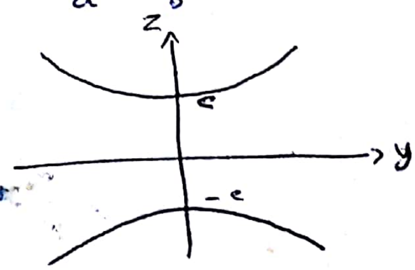


تصویر روی صفحه xy در $z=0$ منفی است یعنی تهی می باشد.



تصویر روی xz هذلولی

$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ $\left(\begin{array}{l} x=0 \to z=\pm c \\ z=0 \to ✲ \end{array} \right)$



تصویر روی yz $(x=0)$ هذلولی است

$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=k \end{cases} \Rightarrow \frac{k^2}{c^2}-1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

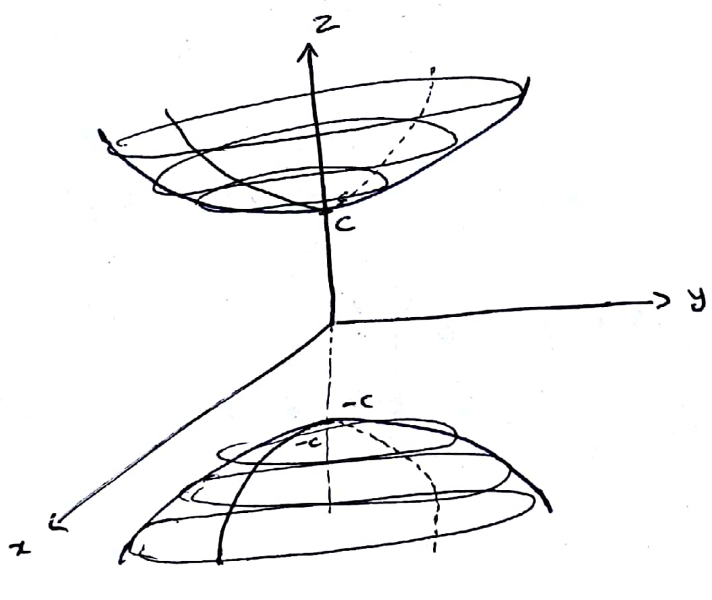
حالت ۱: اگر $\frac{k^2}{c^2}<1$ * باشد یعنی $-c<k<c$ در این صورت چون $\frac{k^2}{c^2}-1<0$ لذا در تساوی * به تناقض می‌رسیم بنابراین در این حالت حاصل تقاطع تهی می‌باشد یعنی اثری از رویه در محدوده $[-c,c]$ وجود ندارد

حالت ۲: اگر $\frac{k^2}{c^2}=1$ یعنی $k=\pm c$ در این صورت داریم $\frac{k^2}{c^2}-1=0$ در نتیجه بنا بر رابطه * خواهیم داشت $x=y=0$ پس حاصل تقاطع نقطه‌ای به مختصات $(0,0,c)$ می‌باشد و $(0,0,-c)$ است.

حالت سوم: اگر $\frac{k^2}{c^2}>1$ در این صورت داریم $\gamma=\frac{k^2}{c^2}-1>0$ که در $k>c$ یا $k<-c$ است لذا داریم:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\gamma \Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{\gamma a^2}^2}+\frac{y^2}{\sqrt{\gamma b^2}^2}=1$$

حال با جمع‌بندی اطلاعات فوق داریم:



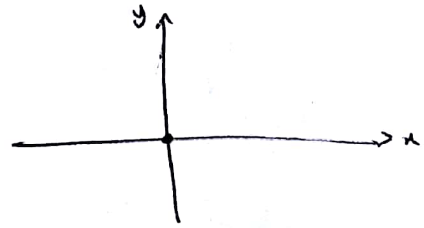
مخروط‌ها: در حالت کلی معادلات به شکل کلی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \text{یا} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

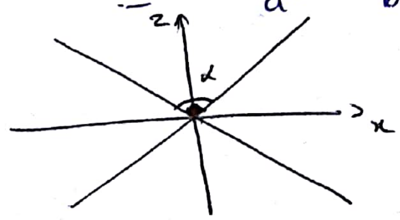
$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=0$$

یا هر معادله‌ای که بتوان پس از یک سری عملیات جبری بتوان آن را به یکی از صورت‌های فوق تبدیل کرد معرف یک مخروط در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد (به دو علامت مثبت و یک منفی و عدد صفر توجه شود)

Ex) رویه $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ را بصورت تقریبی ترسیم کنید؟

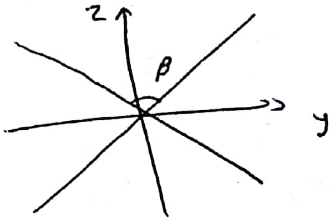


رویه در $z=0$ نقطه‌ی مبدا است.



$z=\pm \frac{c}{a}x$

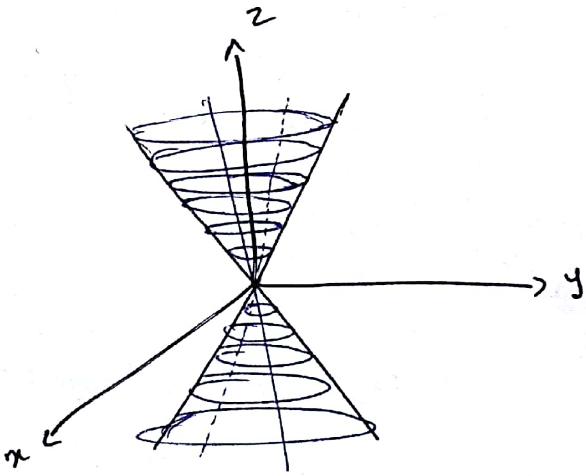
$\frac{c}{a}(-\frac{c}{a})\neq -1$



$z=\pm \frac{c}{b}y$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \\ z=k \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}=\gamma \Rightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{\gamma}a)^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{\gamma}b^2)^2}=1$$

منحنی در صفحه $z=k$



توجه: $z=+\sqrt{x^2+y^2}$ نیم مخروط بالایی و $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ نیم مخروط پایینی می‌باشد.

سهموی هذلولوی (رویه زین اسبی شکل):

در حالت کلی معادلات به فرم کلی $z=ax^2+by^2$ یا $x=ay^2+bz^2$ یا $y=ax^2+bz^2$ جایی که a,b مختلف العلامت باشند ($ab<0$) معرف یک سهموی هذلولوی در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد.

و هر معادله دیگری که بتوان پس از یک سری عملیات جبری که بتوان آن را به یکی از صورت‌های فوق تبدیل کرد سهموی است.

Ex2) ترسیم تقریبی رویه‌ی $z=x^2-y^2$ را انجام دهید:

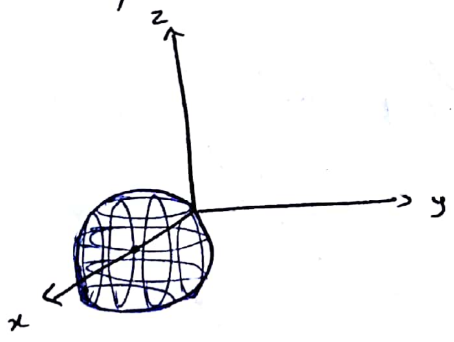
نکته: گاهی اوقات ممکن است رویه در مبدا مختصات واقع شده باشد، مبدا به نقطه‌ای مانند (α, β, γ) در فضای $\mathbb{R}^3$ منتقل شده باشد (انتقال رویه) در این صورت داریم:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}+\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1$$ بیضی‌گون

Ex) معادله رویه‌ای در دستگاه مختصات کروی به صورت $\rho = 2\sin\phi\cos\theta$ می‌باشد. معادله رویه را در دستگاه مختصات دکارتی بازنویسی کرده، رویه را مشخص نموده و آن را به طور تقریبی ترسیم نمایید؟

$$\rho^2 = 2\rho\sin\phi\cos\theta \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 2x \Rightarrow (x-1)^2+y^2+z^2=1$$

یک کره به مرکز $(1, 0, 0)$ و شعاع 1.



Ex) معادله رویه‌ای در دستگاه مختصات استوانه‌ای به فرم $r = 2\cos\theta$ می‌باشد. معادله آن را در دستگاه‌های دکارتی و کروی به دست آورده و به صورت تقریبی به دست آورید؟

$$(x-1)^2+y^2=1 \Leftarrow r^2 = 2r\cos\theta$$

لذا در فضای $\mathbb{R}^3$ باید استوانه‌ای داریم که مقاطع عرضی آن دایره‌های به مرکز $(1,0)$ و شعاع 1 می‌باشد.

$$W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} (x-1)^2+y^2=1 \\ z \text{ آزاد} \end{matrix} \right\}$$

در معادله جدیدی که بدست آوردیم y و x مختصات کروی را جایگذاری می‌کنیم.

$$(\rho \sin\varphi \cos\theta - 1)^2 + \rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta = 1$$

$$\rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta - 2\rho \sin\varphi \cos\theta + 1 + \rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta = 1$$

$$\rho^2 \sin^2\varphi (\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 2\rho \sin\phi \cos\theta = 0$$

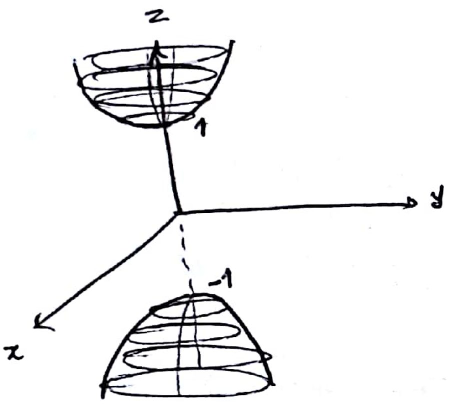
$$\rho^2 \sin^2\varphi = 2\rho \sin\varphi \cos\theta \Rightarrow \rho \sin\varphi = 2\cos\theta$$

حل تمرین:

معادله رویه $x^2+y^2=z^2-1$ را در دستگاه مختصات کروی بیان کرده و نمودار رویه آن را رسم کنید؟

$$z^2 - x^2 - y^2 = 1$$

یک هذلولی گون دو پارچه است در فضای $\mathbb{R}^3$ در امتداد محور zها



$$-\rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta - \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta + \rho^2\cos^2\phi = 1$$

$$-\sin^2\phi\, \rho^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \rho^2 \cos^2\phi = 1$$

$$\rho^2 (\cos^2\phi - \sin^2\phi) = 1$$

$$\rho^2 \cos 2\phi = 1$$

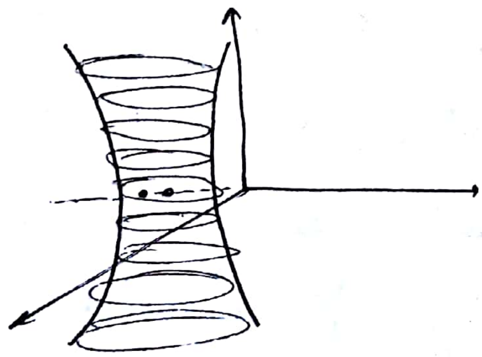
معادله رویه در دستگاه کروی

معادله رویه‌ای در دستگاه مختصات کارتزین به فرم $6x^2+2y^2-3z^2+y=0$ می‌باشد رویه فوق را مشخص داده به صورت تقریبی ترسیم نمایید و معادله آن را در دستگاه مختصات کروی بنویسید؟

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{48}} + \frac{(y+\frac14)^2}{\frac{1}{16}} - \frac{z^2}{\frac{1}{24}} = 1$$

یک هذلولی گون یک پارچه که مبدا آن $(0, -1/4, 0)$ است.

$$6(\rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta) + 2(\rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta) - 3(\rho^2 \cos^2\phi) + \rho \sin\phi \sin\theta = 0$$



مکان هندسی تمام نقاطی در فضای $\mathbb{R}^3$ را مشخص کنید که مختصات استوانه‌ای آن‌ها در روابط زیر صدق کند؟

$r=2$, $\theta=\pi/4$

حل / بوضوح $r=2$ در فضای $\mathbb{R}^3$ معرف یک استوانه می‌باشد

($\sqrt{x^2+y^2}=r=2$, $x^2+y^2=4$ در دستگاه قطبی) که این استوانه دارای مقاطع عرضی دایره‌های متحدالمرکز $x^2+y^2=4$ می‌باشد.

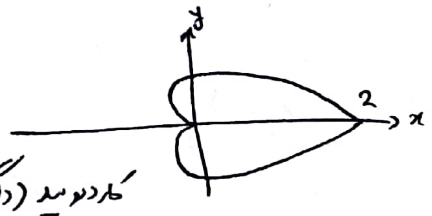
$$r=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x^2+y^2=4 \\ z \text{ آزاد} \end{matrix}\right\}$$

همچنین $\theta=\pi/4$ در فضای $\mathbb{R}^3$ معرف یک صفحه می‌باشد که این صفحه عمود بر xy است و با محور xz دارای زاویه $\theta=\pi/4$ بوده و شامل محور z هاست.

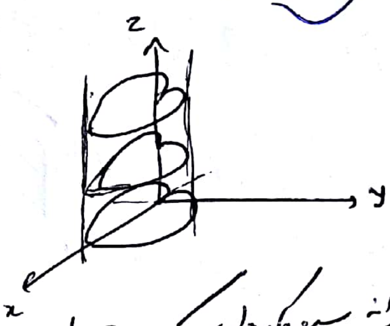
مکان هندسی خواسته شده از تقاطع استوانه و صفحه یاد شده بدست می‌آید که خطی است موازی محور z ها که این خط از نقطه $(2,\pi/4,0)$ عبور می‌کند.

* چون در صورت سوال گفته شده مختصات استوانه‌ای است پس $r=2$ یک استوانه است نه کره.

Ex) معادله رویه‌ای در دستگاه مختصات استوانه‌ای بصورت ($r=1+\cos\theta$) می‌باشد رویه را مشخص نموده بطور تقریبی ترسیم و معادله آن را در هر دستگاه مختصاتی دیگر بنویسید.



کاردیوید (دلگون)



در فضای $\mathbb{R}^3$ با یک استوانه سروکار داریم که مقاطع عرضی آن به ازای هر z، دلوار به معادله $r(\theta)$ باشد.

$$w=\left\{(r,\theta,z) \;\middle|\; \begin{matrix} r=1+\cos\theta \\ z \text{ آزاد} \end{matrix}\right\}$$

$r^2=r+r\cos\theta \Rightarrow x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}+x$ دستگاه استوانه‌ای

$\rho^2\sin^2\phi=\rho\sin\phi+\rho\sin\phi\cos\theta$

$\Rightarrow$ ~~$\rho\sin\phi\cos\theta$~~ $\rho\sin\phi(1+\cos\theta)=\rho^2\sin^2\phi$

$\Rightarrow \rho\sin\phi=1+\cos\theta$

Ex) روش ۳: معادله $2x^2+(y-z)^2=2$ را توصیف کنید؟

$y-z=w \longrightarrow 2x^2+w^2=2$

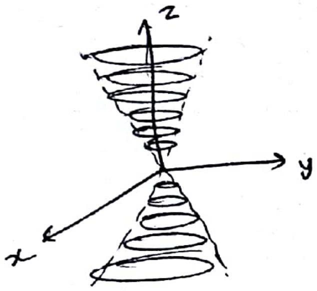
در صفحه xw جایی که w بیانگر متغیر yz باشد با بیضی سروکار داریم اما در فضای $\mathbb{R}^3$ باید با استوانه با مقطع بیضی شکل سروکار داریم.

Ex) روش: در دستگاه مختصات کروی $tg^2\phi=1$ را شناسایی کرده معادله آنرا در دستگاه دکارتی، استوانه‌ای بدست آورید و آنرا توصیف نمایید؟

معادله مخروط در فضای $\mathbb{R}^3$

$tg^2\phi=1 \Rightarrow \sin^2\phi=\cos^2\phi$

$\xrightarrow{\times\rho^2} \rho^2\sin^2\phi=\rho^2\cos^2\phi \xrightarrow{\text{دکارتی}} x^2+y^2-z^2=0$



استوانه‌ای $r^2=z^2$

فصل ۳: خم‌ها، توابع برداری و هندسه خم‌های هموار در فضای $\mathbb{R}^n$

منظور از یک خم یا مسیر در فضای $\mathbb{R}^n$ تابعی به فرم $\gamma: I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ می‌باشد که I بخشی از $\mathbb{R}$ است و این توابع ورودی خود را از اعداد حقیقی گرفته و خروجی آنها بردارهایی در فضای $\mathbb{R}^n$ می‌باشد.

نکته: گاهی اوقات ممکن است I یک بازه زمانی مانند $I=[t_0,t_1]$ در نظر گرفته شود در این صورت خم γ مسیر حرکت یک متحرک بوده در بازه زمانی فوق و به ازای $t\in I$ ، $\gamma(t)$ بیانگر مکان متحرک در زمان t می‌باشد.

در حالت کلی می‌توان خم $\gamma: I\longrightarrow\mathbb{R}^n$ را بصورت $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)$ نمایش داد جایی که هر کدام از γ_i برای هر $1\le i\le n$ یک تابع حقیقی مقدار $\gamma_i: I\longrightarrow\mathbb{R}$ می‌باشد.

اگر خم γ را بصورت $\gamma: I\longrightarrow\mathbb{R}^3$ ، $\gamma(t)=(t^2, \ln t, tg^{-1}(\cos t))$ آنگاه داریم $\gamma(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ جایی که

$\gamma_1 : I \to R$, $\gamma_2 : I \to R$, $\gamma_3 : I \to R$

$\gamma_1(t) = t^2$, $\gamma_2(t) = \ln t$, $\gamma_3(t) = ArCtg(\cos t)$

مفهوم حد و پیوستگی تابع γ :

فرض کنید خم $\gamma : I \subset R \to IR^n$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ مفروض باشد دراین صورت گوییم خم γ

$a \in R$, $L \in IR^n$ در نقطه a دارای حد می‌باشد هرگاه داشته باشیم :

$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0 \Rightarrow 0 < |t - a| < \delta$ $t \neq a$ همسایگی محذوف

$\Rightarrow |\gamma(t) - L| < \varepsilon$

نکته : می‌توان ثابت کرد که خم $\gamma : I \to IR^n$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ در نقطه $t = a$ دارای حد $L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ است اگر و تنها اگر تمام γ_i دارای حد در نقطه $t = a$ باشند و داشته باشیم :

$$\lim_{t \to a} \gamma_i = L_i$$

تعریف پیوستگی :

خم $\gamma : I \subset R \to IR^n$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ در نقطه $t = a$ پیوسته است هرگاه :

1) خم γ در نقطه $t = a$ تعریف شده باشد

2) خم γ در نقطه $t = a$ دارای حد باشد

3) مقدار حد خم γ در $t = a$ با مقدار $\gamma(a)$ برابر باشد یعنی : $\lim_{t \to a} \gamma(t) = \gamma(a)$

* خم $\gamma : I \subset R \to IR^n$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ در نقطه $t = a$ مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر تمام توابع γ_i در نقطه $t = a$ مشتق‌پذیر باشند و در این حالت داریم :

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \dots, \gamma_n'(t))$$

$$\gamma'(a) = \lim_{t \to a} \frac{\gamma(t) - \gamma(a)}{t - a} \xrightarrow{t - a = h} \gamma'(a) = \lim \frac{\gamma(a+h) - \gamma(a)}{h}$$

اگر خم $\gamma : I \subset R \to IR^n$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ مفروض باشد در این صورت بردار سرعت لحظه‌ای و شتاب لحظه‌ای خم γ بصورت زیر است :

$$v(t) = \gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \dots, \gamma_n'(t))$$

$$a(t) = \gamma''(t) = (\gamma_1''(t), \gamma_2''(t), \dots, \gamma_n''(t))$$

کنج فرنه خم γ (T, N, B):

فرض کنید خم $\gamma: I\subset\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\gamma=(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ مفروض باشد. در این صورت مماس یکانی خم γ در $t=t_0$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$T(t_0) = \frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}$$

همچنین بردار قائم یکانی اول خم γ در نقطه t_0 با نماد $N(t_0)$ نمایش داده می‌شود و تعریف می‌شود:

$$N(t_0) = \frac{T'(t_0)}{|T'(t_0)|}$$

و همچنین بردار قائم یکانی دوم خم γ در نقطه t_0 با نماد $B(t_0)$:

$$\vec{B}(t_0) = \vec{T}(t_0) \times \vec{N}(t_0)$$

* در حالت کلی قائم به تنهایی معنا ندارد در واقع منظور ما خط قائم بر خط مماس بر منحنی در نقطه مورد نظر است.

* سه تایی (T, N, B) را دستگاه مختصات متحرک (چهبره خم در یک نقطه مشخص) نامیده می‌شود.

تعریف: صفحه‌ای که از یک نقطه مشخص مانند $\gamma(t_0)$ بر روی خم γ (نقطه متناظر با $t=t_0$ روی خم γ) عبور کند و بردار نرمال آن بردار $B(t_0)$ باشد صفحه بوسان خم γ در نقطه t_0 نامیده می‌شود.

2) صفحه‌ای که از یک نقطه مشخص مانند $\gamma(t_0)$ عبور کند و بردار نرمال آن بردار مماس یکانی $T(t_0)$ باشد صفحه نرمال یا قائم خم γ نامیده می‌شود در نقطه متناظر با t_0.

3) صفحه‌ای که از یک نقطه مشخص مانند $\gamma(t_0)$ عبور کند و بردار نرمال آن بردار قائم یکانی اول $N(t_0)$ باشد صفحه اصلاحی (راستگرد) خم γ در نقطه متناظر با t_0 نامیده می‌شود.

* به صفحه صفحهٔ بوسان شامل بردارهای $\vec{T}$ و $\vec{N}$ می‌باشد.

* به صفحه صفحه‌ی نرمال شامل بردارهای $\vec{N}$ و $\vec{B}$ می‌باشد.

* " " " اصلاحی شامل بردارهای $\vec{T}$ و $\vec{B}$ می‌باشد.

$$
\begin{tikzcd}
& B \arrow[dl, bend right] & \\
T \arrow[rr, bend right] & & N \arrow[ul, bend right]
\end{tikzcd}
$$

$$\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N},\quad \vec{T}=\vec{N}\times\vec{B},\quad \vec{N}=\vec{B}\times\vec{T}$$

مفهوم انحنای یک خم:

میزان تمایل یک خم به خروج از حالت خط راست را انحنای یک خم تعریف می‌کنیم.

بالطبع یک خط راست که خود معیار سنجش انحنا می‌باشد، دارای انحنای صفر بوده و هر اندازه که یک خم از حالت خط راست دورتر باشد مقدار عددی انحنای آن بیشتر می‌شود (انحنای یک خم یا صفر است یا عددی + و حقیقی مثبت).

روابط محاسبه انحنا در حالت‌های مختلف:

1) اگر خم γ در صفحه باشد $\left(\begin{matrix}\gamma: I\subset R\to R^2\\ \gamma(\gamma_1,\gamma_2)\end{matrix}\right)$ و دارای فرم معادله‌ای $y=f(x)$ باشد در این صورت انحنای خم γ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\kappa(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2) اگر خم γ در صفحه به فرم پارامتری $\gamma:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ باشد در این صورت انحنای خم γ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\kappa(t)=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{(x'^2(t)+y'^2(t))^{3/2}}$$

* اگر در معادله دکارتی γ، $y=f(x)$، $x=t$ بگیریم از رابطه دوم انحنا می‌توان انحنا را محاسبه کرد.

3) اگر خم γ در صفحه به فرم قطبی $r=f(\theta)$ داده شده باشد در این صورت:

$$\kappa(\theta)=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

* اگر معادله خم در صفحه به فرم $x=g(y)$ داده شود در این صورت ابتدا باید خم را به صورت $\gamma=\begin{cases}y=t\\ x=g(t)\end{cases}$ پارامتری کرده و سپس از حالت دوم برای محاسبه انحنا استفاده می‌کنیم.

د) اگر γ در فضای $\mathbb{R}^3$ باشد از طریق بردار موضع $\vec{R}(t)$ بیان شود در این صورت برای محاسبه انحنای خم داریم:

$$k(t)=\frac{|R'(t)\times R''(t)|}{|R'(t)|^3}$$

نکته: مقدار انحنای یک خم در هر نقطه از آن تحت تاثیر انتقال‌ها و دوران محفوظ می‌ماند (انتقال و دوران تاثیر در مقدار انحنا ندارند)

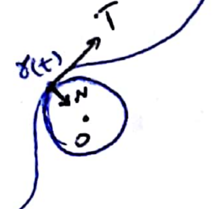
شعاع انحنا:

عکس مقدار انحنا در هر نقطه از خم را شعاع انحنا (شعاع دایره بوسان) خم نامیده و با نماد $\rho(t)$ نمایش می‌دهیم؛ داریم:

$$\rho(t)=\frac{1}{k(t)}$$

مرکز انحنا (مرکز دایره بوسان):

فرض کنیم خم γ منفرد نباشد در این صورت در هر نقطه از خم γ می‌توان دایره‌ای در قسمت گودی (تقعر) خم γ بر خم مماس داشته باشیم که این دایره، دایره بوسان نام دارد و شعاع دایره برابر با شعاع انحنا بوده و مرکز آن از رابطه زیر بدست می‌آید:



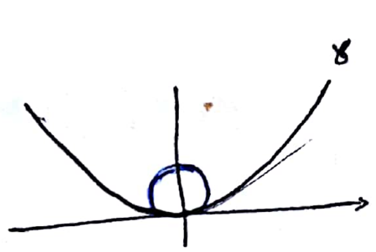
- برای بردار $\vec{B}$ چهار انگشت از T به سمت N خم می‌شود.

$$O(t)=\gamma(t)+\rho(t)\hat{N}(t)$$

$$\rho(t)=\frac{1}{k(t)}$$

نکته: در نقطه‌ای که دایره بوسان بر خم γ مماس می‌باشد تمام ویژگی‌های دایره و خم مرجع منطبق می‌باشند.

Ex) معادله دایره بوسان خم $y=x^2$ را در نقطه $(0,0)$ مربوط به خم بنویسید.



$$k(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \xrightarrow{k(0)} k(x)=\frac{|2|}{(1+4x^2)^{3/2}} \longrightarrow k(0)=2$$

روش دوم: ابتدا می‌توانیم خم را پارامتری کنیم

$$\gamma(t)=\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases} \Rightarrow \gamma=\begin{cases} \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 \\ (t,t^2) \end{cases}$$

$$k(t)=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}} \Rightarrow k(t)=\frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}} \xrightarrow{t=0} k(0)=2 \checkmark$$

$$T(t)=\frac{(1,2t)}{\sqrt{1+4t^2}}$$

$$N(t)=\frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$

$$\rho(t)=\frac{1}{2}\ ,\quad O(0)=0+\frac{1}{2}(\hat{N}(t))$$

$N(0)=$ ——

$$\boxed{N(t)}: \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\cdot(1,2t) = -\frac{1}{2}(8t)\frac{1}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot(1,2t) + \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\cdot(0,2)$$

$$N(t)=\frac{T'(t)}{|T'(t)|} \quad \Longrightarrow T'(0)=(0,2)$$

$$\Longrightarrow N(0)=\frac{(0,2)}{2}=(0,1)$$

$$\Longrightarrow O(0)=(0,0)+\frac{1}{2}(0,1)=(0,\frac{1}{2})$$

لذا معادله‌ی دایره بوسان عبارت:

$$x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$$

Ex) نشان دهید که در یک دایره‌ی دلخواه در صفحه در هر نقطه‌ی دلخواه بر روی دایره، مقدار انحنا نسبت عکس با شعاع دایره دارد، یعنی اگر خم γ دایره‌ای به شعاع R باشد انحنای آن در تمام نقاط روی دایره برابر $\frac{1}{R}$ می‌باشد؟

ابتدا توجه داریم که مقدار انحنا تحت دوران و انتقال محفوظ می‌ماند می‌توان بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کرد که دایره به فرم $x^2+y^2=r^2$ می‌باشد که مرکز دایره مبدا مختصات است. لذا داریم:

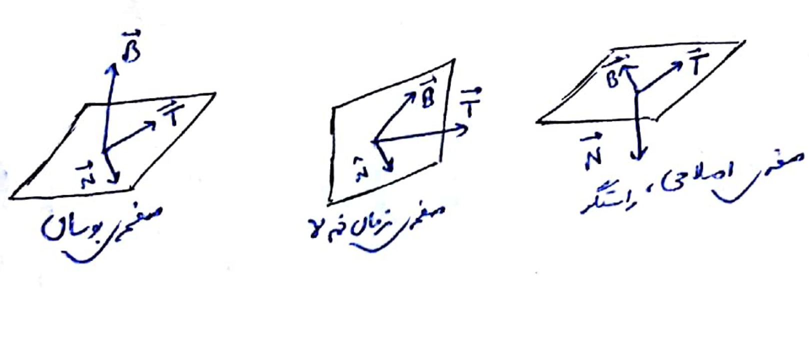
$$\gamma: x^2+y^2=r^2 \Longrightarrow \gamma=\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases} \Longrightarrow \kappa(t)=\frac{|+r\sin t\cdot r\sin t+r^2\cos^2 t|}{(r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Longrightarrow \frac{r^2}{r^3}=\frac{1}{r}$$

$$\gamma'(x,y)=\frac{-x}{y} \Longrightarrow \gamma''(x,y)=\frac{-y+xy'}{y^2} \xrightarrow{y'=-\frac{x}{y}} \gamma''(x,y)=\frac{-(x^2+y^2)}{y^3}=\frac{-r^2}{y^3}$$

$$\kappa(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{r^2}{y^3}}{(1+\frac{x^2}{y^2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{r^2}{y^3}}{(\frac{r^2}{y^2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{r}$$

خلاصه:



Ex) فرض کنیم خم γ در فضای $\mathbb{R}^3$ بصورت $\gamma:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ معرفی شده باشد در این صورت معادله خط مماس و قائم و صفحه قائم، صفحه اصلاحی و بوسان خم γ را در نقطه $(-1,1,-1)$ روی خم γ بنویسید؟

$\gamma(t)=(t,t^2,t^3)$

به ازای $t=-1$ روی خم γ واقع شده

هادی $T(-1)=\dfrac{(1,2t,3t^2)}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}=\dfrac{(1,-2,3)}{\sqrt{14}} \Rightarrow T(-1)\parallel(1,-2,3)$

هادی خط قائم $N(-1)=\left(\underbrace{\dfrac{-4t-18t^3}{(\sqrt{1+4t^2+9t^4})^3}\cdot(1,2t,3t^2)+\dfrac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}\cdot(0,2,6t)}_{\frac{1}{14\sqrt{14}}(22,-16,-18)}\right)\times\dfrac{1}{|T'(-1)|}$

$$N(-1)=\frac{T'(-1)}{|T'(-1)|}\parallel(22,-16,-18)\Rightarrow N(-1)\parallel(11,-8,-9)$$

$$\vec{B}(-1)=\vec{T}(-1)\times\vec{N}(-1)=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\1&-2&3\\11&-8&-9\end{vmatrix}=42\hat{i}+42\hat{j}+14\hat{k}\parallel(3,3,1)$$

معادله خط مماس: $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$

معادله صفحه قائم، $(x+1)-2(y-1)+3(z+1)=0 \Rightarrow x-2y+3z+6=0$

معادله خط قائم، $\dfrac{x+1}{11}=\dfrac{y-1}{-8}=\dfrac{z+1}{-9}$

معادله صفحه اصلاحی، $11(x+1)-8(y-1)-9(z+1)=0 \Rightarrow 11x-8y-9z+10=0$

معادله صفحه بوسان: $3(x+1)+3(y-1)+(z+1)=0 \Rightarrow 3x+3y+z+1=0$

Ex) فرض کنیم خم γ در صفحه بصورت $x=-y^2+y$ داده شده باشد در این صورت انحنای این خم را در نقطه $(0,+1)$ روی خم بدست آورید؟

$x=-t^2+t$ $\quad \gamma:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$

$y=t$ $\quad \gamma(t)=(-t^2+t,t)$ $\quad \sim, t=1$

$$k(t)=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}=\frac{2}{2^{3/2}}=\sqrt{2}/2$$

محاسبه طول قوس (طول خم):

$$S = \int_a^b ds$$

امکان طول قوس در وضعیت‌های مختلف از روابط زیر بدست می‌آید.

الف) اگر خم در صفحه بصورت $y = f(x)$ باشد داریم:

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

ب) اگر خم در صفحه به فرم $x = g(y)$ در این صورت داریم:

$$ds = \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy$$

پ) اگر خم در صفحه بصورت $r = f(\theta)$ باشد داریم:

$$ds = \sqrt{f^2(\theta) + (f'(\theta))^2}\, d\theta$$

ت) اگر خم در صفحه بصورت پارامتری $f(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ باشد:

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

ث) اگر خم در فضای $\mathbb{R}^3$ بصورت پارامتری $f(x) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ داریم:

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

Ex) طول خم $y = e^x$ را در محدوده $[\ln\sqrt{3}, \ln\sqrt{8}]$ بدست آورید؟

$$S = \int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}} \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx \xrightarrow{e^{2x} = u^2 - 1} \int_2^3 u \times \frac{u}{u^2 - 1} du = \int u\, du + \int \frac{u}{u^2 - 1} du$$

$$1 + e^{2x} = u^2$$

$$2e^{2x} dx = 2u\, du$$

$$dx = \frac{u}{e^{2x}} du$$

$$\begin{cases} 1 + e^{2\ln\sqrt{8}} = u^2 \to u = 3 \\ 1 + e^{2\ln\sqrt{3}} = u^2 \to u = 2 \end{cases}$$

$$= \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|u - 1| + \frac{1}{2}\ln|u + 1|$$

جایگذاری مقادیر تغییر داده شده

$$\frac{e^{2x} + 1}{2} + \frac{1}{2}\ln|e^{2x}| \Big|_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}$$

Ex) تابع برداری ..... $x = -y^2 + y$ را در نظر بگیرید:

الف) طول قوس خم فوق را در محدوده $0 \le y \le 1$ محاسبه نمایید:

ب) انحنای خم فوق را در $(0, 0)$ روی خم محاسبه نمایید:

$$S = \int_0^1 \sqrt{4y^2 - 4y + 2}\, dy = 2\int_0^1 \sqrt{y^2 - y + \tfrac{1}{2}}\, dy = 2\int_0^1 \sqrt{(y - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4}}\, dy$$

$$\gamma = \begin{cases} y = t \\ x = -t^2 + t \end{cases} \Longrightarrow k(0) = \frac{2}{(4t^2 - 4t + 2)^{3/2}} \xrightarrow{t = 0} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تاب خم:

در حالت کلی میزان تمایل یک خم به خروج از حالت مسطح بودن می‌باشد یعنی میزان تمایل به خروج از صفحه بوسان. به بیان معادل، تاب یک خم را می‌توان میزان ناکامی یک خم از مسطح بودن تعبیر کرد. لذا خم مسطح خمی است که مقدار تاب آن در تمام نقاط خم صفر باشد و اینچنین خمی به تماماً در صفحه بوسان قرار دارد.

اگر یک خم تمایل به خروج از صفحه بوسان در جهت موافق با بردار قائم دوم ($\vec{B}(t)$) داشته باشد تاب آن + تعبیر می‌شود. اگر خم تمایل به خروج از صفحه بوسان در جهت مخالف بردار $\vec{B}(t)$ داشته باشد تاب آن منفی تعبیر خواهد شد. (برخلاف انحنا که مقدار عددی آن یا صفر و یا عددی مثبت بود تاب یک خم می‌تواند منفی باشد)

برای محاسبه تاب یک خم که بصورت پارامتری $\gamma(t)$ بیان شده باشد می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2}$$

Ex) فرض کنیم خم γ بصورت: $\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$، $\gamma(t) = (t^2, e^t, \ln t)$ داده شده باشد در این صورت مقدار تاب خم را در نقطه متناظر با $t=1$ را محاسبه کنید:

$$\gamma'(t) = (2t, e^t, \frac{1}{t}) = (2, e, 1)$$

$$\gamma''(t) = (2, e^t, -\frac{1}{t^2}) = (2, e, -1)$$

$$\gamma'''(t) = (0, e^t, \frac{2}{t^3}) = (0, e, 2)$$

$$\gamma'(t) \times \gamma''(1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & e & 1 \\ 2 & e & -1 \end{vmatrix} = -2e\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$\Rightarrow |\gamma'(1) \times \gamma''(1)| = 2\sqrt{e^2+4} \quad , \quad (\gamma'(1) \times \gamma''(1)) \cdot \gamma'''(1) = 4e^t = 4e$$

$$\tau = \frac{4e}{4(e^2+4)} = \frac{e}{e^2+4}$$

Ex) تابع انحنا، تابع تاب خم به معادله $f(t)=(\cos t, \sin t, \cosh t)$ را بدست آورید؟

$$f'(t)=(-\sin t, \cos t, \sinh t)$$
$$f''(t)=(-\cos t, -\sin t, \cosh t) \Rightarrow f'\times f'' = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin t & \cos t & \sinh t \\ -\cos t & -\sin t & \cosh t \end{vmatrix}$$
$$f'''(t)=(\sin t, -\cos t, \sinh t)$$

$$= (\cos t\cosh t + \sin t \sinh t)\vec{i} + (\sin t \cosh t - \cos t \sinh t)\vec{j} + (\sin^2 t + \cos^2 t)\hat{k}$$

$$|f'(t)\times f''(t)| = \sqrt{\cosh^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t) + \sinh^2 t(\sin^2 t+\cos^2 t) + 1} = \sqrt{\cosh^2 t + \sinh^2 t + \underbrace{\cancel{1}}_{\cosh^2 t - \sinh^2 t}}$$

$$= \sqrt{2\cosh^2 t} = \sqrt{2}\cosh t$$

$$k(t) = \frac{|f'(t)\times f''(t)|}{|f'(t)|^3} = \frac{\sqrt{2}\cosh t}{\cosh^3 t} = \frac{\sqrt{2}}{\cosh^2 t}$$

$$(f'(t)\times f''(t))\cdot f'''(t) = \sin t\cos t\cosh t + \sin^2 t \sinh t - \cos t \sin t \cosh t + \cos^2 t \sinh t + \sinh t$$
$$= \sinh t(\sin^2 t + \cos^2 t) + \sinh t = 2\sinh t$$

$$\tau(t) = \frac{2\sinh t}{2\cosh^2 t} = \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}$$

Ex) مرکز انحنا و همچنین معادله دایره بوسان خم $\gamma: \begin{cases} x^3 = 6a^2 z \\ x^2 = 2ay \end{cases}$ را در نقطه‌ای (a عدد ثابت) به طول $\underline{\quad}_{x=a}$ a بیابید؟

$$x=t,\quad y=\frac{t^2}{2a^2},\quad z=\frac{t^3}{6a} \Rightarrow \gamma:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3,\quad \gamma(t)=\left(t, \frac{t^2}{\ }, \frac{t^3}{\ }\right)$$

$$\Rightarrow \gamma'(a)\times\gamma''(a) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{vmatrix} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)$$

$$k(a) = \frac{\frac{3}{2a}}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{4}{9a}$$

$$\xrightarrow{\text{نتیجتاً}} \rho(a) = \frac{9}{4}a$$

Scanned by CamScanner

$O(t) = \gamma(t) + \rho(a)\hat{N}(a) \qquad t=a$

حال قصد داریم مرکز انحنا را بدست آوریم:

$O(a) = (a, \frac{a}{2}, \frac{a}{6}) +$

$T = \frac{2a^2}{t^2+2a^2}(1, \frac{t}{a}, \frac{t^2}{2a^2}) = \frac{1}{t^2+2a^2}(2a^2, 2at, t^2)$

$T'(t) = \frac{-2t}{(t^2+2a^2)^2}(2a^2, 2at, t^2) + \frac{1}{t^2+2a^2}(0, 2a, 2t)$ مخرج مشترک نگیر / و گذاشتن مقادیر $t=a$

$T'(a) = \frac{-2}{9a^3}(2a^2, 2a^2, a^2) + \frac{1}{3a^2}(0, 2a, 2a) = \frac{2}{9a}(-2, 1, 2)$

$\Rightarrow |T'(a)| = \frac{2}{3a}$

$N(a) = \frac{T'(a)}{|T'(a)|} = \frac{(-2,1,2)}{3} = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

$O(a) = (a, \frac{a}{2}, \frac{a}{6}) + \frac{9a}{4}(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = (-\frac{1}{2}a, \frac{5}{4}a, \frac{5}{3}a)$ مرکز کره بوسان

معادله کره بوسان، $(x+\frac{a}{2})^2 + (y-\frac{5}{4}a)^2 + (z-\frac{5}{3}a)^2 = \frac{81}{16}a^2$

حال معادله صفحه بوسان را بدست آورده و از تقاطع کره فوق با صفحه بوسان معادله دایره بوسان بدست می‌آید.

$\vec{B}(a) = \vec{T}(a) \times \vec{N}(a) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k} \parallel (1, -2, 2)$

$\xRightarrow[\text{صفحه بوسان}]{\text{معادله}} (x-a) - 2(y-\frac{a}{2}) + 2(z-\frac{a}{2}) = 0 \Rightarrow x - 2y + 2z = \frac{9}{3}$

از صفحه بوسان z و x یا y را بدست آورده و در کره بوسان قرار می‌دهیم تا معادله دایره بوسان بدست آید.

Ex) خم γ با معادله پارامتری $\vec{\gamma}(t) = (t, 1+t, \sqrt{1-2t^2})$ را در نظر بگیرید:

الف) نشان دهید که انحنای خم فوق در تمام نقاط مقدار ثابتی می‌باشد.

ب) نشان دهید که خم فوق یک خم مسطح بوده و معادله صفحه‌ای را بنویسید که شامل خم فوق باشد:

$\tau = 0$ — صفحه بوسان

$$\gamma'(t)=\left(1,1,\frac{-2t}{\sqrt{1-2t^2}}\right)$$

$$\gamma''(t)=\left(0,0,\frac{-2}{(1-2t^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \Rightarrow \gamma'(t)\times\gamma''(t)=\begin{vmatrix}\hat i & \hat j & \hat k\\ 1 & 1 & \frac{-2t}{\sqrt{1-2t^2}}\\ 0 & 0 & \frac{-2}{\sqrt{(1-2t^2)^3}}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{-2}{(1-2t^2)^{\frac{3}{2}}}\hat i+\frac{2}{(1-2t^2)^{3/2}}\hat j$$

$$\Rightarrow |\gamma'(t)\times\gamma''(t)|=\frac{2\sqrt2}{(1-2t^2)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad |\gamma'(t)|=\sqrt{\frac{2}{1-2t^2}}$$

$$\Rightarrow k(t)=+1 \qquad \tau(t)=\frac{(\gamma'(t)\times\gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|^2}=0$$

خم مسطح می‌باشد.

$$\vec B(t)=\frac{\gamma'(t)\times\gamma''(t)}{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}=\left(\frac{-1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0\right)\parallel(-1,1,0)$$

لذا صفحه بوسان صفحه‌ای است که نرمال آن $\vec n(-1,1,0)$ بوده و نقطه $\vec A(0,1,1)$ روی صفحه قرار دارد پس معادله صفحه بوسان عبارت است از:

$$-(x)+(y-1)+0(z-1)=0 \Rightarrow y-x=1$$

روش دوم: می‌توان سه نقطه دلخواه غیرواقع بر یک استقامت مانند A, B, C بدست آورد و با استفاده از آنها معادله صفحه را نوشت:

$$t=0 \rightarrow A(0,1,1)$$
$$t=\tfrac12 \rightarrow B\left(\tfrac12,\tfrac32,\tfrac{\sqrt2}{2}\right) \Rightarrow \vec{AB}\left(\tfrac12,\tfrac12,\tfrac{\sqrt2}{2}-1\right)$$
$$t=\tfrac{\sqrt2}{2} \rightarrow C\left(\tfrac{\sqrt2}{2},\tfrac{1+\sqrt2}{2},0\right) \qquad \vec{AC}\left(\tfrac{\sqrt2}{2},\tfrac{\sqrt2}{2},-1\right)$$

$$\vec n=\vec{AB}\times\vec{AC}=\left(-1+\frac{\sqrt2}{2},-\left(-1+\frac{\sqrt2}{2}\right),0\right)\parallel(1,-1,0)$$

توابع چند متغیره :

در حالت کلی یک تابع چند متغیره به صورت :

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

n و m هر وضعیتی می‌توانند بپذیرند هم را داشته باشند .

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

تابع سه متغیره

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

را در نقطه کلیه در این

$$f(x, y, z) = (xyz, x-y, -z, \ln(\frac{z}{x^2+y^2}))$$

صورت داریم :

$$f_1: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f_2: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f_3: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \longrightarrow xyz \qquad (x, y, z) \longrightarrow x-y \qquad (x, y, z) \longrightarrow -z$$

* در

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$ داریم :

$$Im(f) = \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

تصویر f در فضای $\mathbb{R}^m$ قرار دارد.

$$G(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))\} \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$$

نمودار تابع

Ex) تابع دو متغیره را با ضابطه

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

در نقطه کلیه در این صورت داریم :

$$D_f = \mathbb{R}^2 \qquad Im(f) = [0, +\infty)$$

$$G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$$

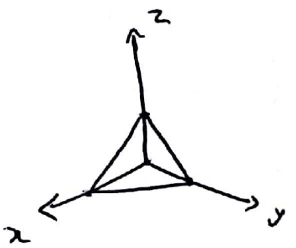
Ex) تابع دو متغیره

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = 1 - x - y$$

را در نقطه کلیه :

$D_f = \mathbb{R}^2 \qquad Im(f) = \mathbb{R} \qquad G(f) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z = 1-x-y\}$



نمودار تابع فوق یک صفحه به معادله $x+y-z=1$ در فضای $\mathbb{R}^3$؛

مثال) دامنه نقاطی که تابع در آن تعریف شده،

$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f((x,y)) = \dfrac{x+y}{x-y} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y\}$

«پیوستگی توابع چند متغیره»

تابع $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ را در نقطه $a(a_1, a_2, \dots, a_n)$ پیوسته گوییم هرگاه:

1) تابع f در نقطه a تعریف شده باشد ($a \in D_f$)

2) تابع f در نقطه a دارای حد باشد ($\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود باشد)

3) مقدار حد تابع در a برابر مقدار خود تابع در a باشد ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$)

★ حد تابع در صورت وجود منحصر بفرد است.

نکته/ در عمل استفاده از تعریف حد تابع، برای اثبات حدود توابع مشکل باشد ولذا برای محاسبه حد تابع می‌توان از نکات زیر استفاده کرد:

1- اگر حد تابع داده شده بر روی مسیرهای* مختلف گذرا از نقطه مورد نظر* مقادیر متفاوتی بدست آید آنگاه تابع در نقطه مورد نظر حد ندارد.

2- گاهی اوقات ممکن است هدف بررسی وجود حد تابع دو متغیره $f(x,y)$ در نقطه $(0,0)$ باشد در این صورت می‌توان برای نشان دادن اینکه تابع $f(x,y)$ در مبدا حد ندارد می‌توان از مسیرهای $y=mx$ در $f(x,y)$ استفاده کرد به این صورت که $x \to 0$ و اگر حد تابع به شیب خط یعنی m وابسته باشد آنگاه تابع در نقطه $(0,0)$ حد ندارد (از این نکته فقط در جهت عدم وجود حد استفاده می‌کنیم یعنی اگر مقدار حد به m وابسته نباشد در مورد حد تابع نمی‌توان اظهار نظر کرد و بایستی مسیرهای دیگر بررسی شود)

3- گاهی اوقات ممکن است هدف بررسی وضعیت حد توابع دو متغیره $f(x,y)$ در مبدا مختصات باشد $(x,y)\to(0,0)$. در این صورت می‌توان از مختصات قطبی به این صورت استفاده کرد که $r\to 0$ و اگر حد تابع به مقدار θ وابسته شود آنگاه تابع در $(0,0)$ حد ندارد.

همچنین در حالت تابع سه متغیره $f(x,y,z)$ برای بررسی حد در $(0,0,0)$ می‌توان از دستگاه مختصات کروی به این صورت استفاده کرد $\rho\to 0$ و اگر حد تابع به مقادیر θ یا φ وابسته شود آنگاه تابع $f(x,y,z)$ در $(0,0,0)$ حد ندارد.

4- فرض کنیم f و g و h توابعی چندمتغیره باشند به طوری که $f\le h\le g$ در این صورت اگر توابع f و g در نقطه $a\in\mathbb{R}^n$ دارای حد باشند و حدشان برابر باشد، آنگاه داریم که حد تابع h نیز برابر حدود توابع f و g می‌باشد.

5- اگر هدف بررسی حد تابع چندمتغیره f در نقطه a باشد و داشته باشیم $f=g.h$ ...... در این صورت اگر $\lim_{x\to a} g(x)=0$ و تابع $h(x)$ کراندار باشد، آنگاه داریم $\lim_{x\to a} f(x)=0$ است.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

مسیر اول محور xها $\Rightarrow$ y معادل صفر مطلق $\lim_{x\to 0} y=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x(0)}{x^2+0} = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = 0$$

مسیر دوم محور yها معادل $\lim_{y\to 0} x=0$

$$\lim_{y\to 0}\frac{2(0)y}{0+y^2} = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = 0$$

مسیرهای خطوط $y=mx$ با شیب m، $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x(mx)}{x^2+m^2x^2} = \frac{2m}{1+m^2}$$

از آنجایی که مقدار حد به شیب خط وابسته است تابع فوق در $(0,0)$ حد ندارد.

(روش دوم) استفاده از مختصات قطبی

$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

$(x,y)\to(0,0)$ چون $r\to 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0}\frac{r^2\sin 2\theta}{r^2} = \sin 2\theta$$

چون مقدار حد به θ وابسته است و به ازای مقادیر مختلف θ حدود متفاوتی به دست می‌آید لذا تابع در $(0,0)$ حد ندارد.

برای اثبات نداشتن حد این تابع نمی‌توان از مختصات کروی استفاده کرد زیرا تابع دو متغیره است و مختصات کروی دارای سه متغیر است.

در حل حدود توابع چند متغیره اول نقطه حد را در تابع جایگذاری می‌کنیم.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

لذا چون در مسیرهای مختلف مقادیر حدی متفاوت بدست آوردیم تابع فوق در $(0,0)$ حد ندارد.

حدها در مسیر (در محور x، محور y) $= \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} = 0$$

$x=y^2$ مسیر $\quad \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}$, $\quad y\to 0$

$y^2=t$ ، میگیریم $\Rightarrow \lim_{(x,y)\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{(x,t)\to(0,0)} \frac{xt}{x^2+t^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^2}\sin\theta.\cos\theta}{\cancel{r^2}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}$

$y\to 0 \Rightarrow t\to 0$

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ t=r\sin\theta \end{cases} \qquad = \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

چون مقدار حد به θ وابسته می‌باشد تابع در $(0,0)$ حد ندارد.

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \qquad \begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

$\rho^2=x^2+y^2+z^2$

$(x,y,z)\to(0,0,0) \Rightarrow \rho\to 0$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho(\ast) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \qquad 0 \le \frac{y^2}{x^2+y^2} \le 1 \xrightarrow[\text{ضرب میکنیم } |x|]{\text{طرفین را در}} 0 \le \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \le |x|$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| = 0$$

لذا طبق قضیه فشردگی داریم $\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$

حال چون

* اگر یک تابع چند متغیره باشد در این صورت

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to a} |f(x)| = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2-xy+y^3}{x-y+2} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} = \lim_{(x,t)\to(0,0)} \frac{xt^2}{x^2+t^2} \xrightarrow{\text{مختصات}}_{\text{قطبی}}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3\sin^2\theta\cos\theta}{r^2} = 0 \times \text{کراندار} = 0$$

Scanned by CamScanner

En) آیا تابع $f(x,y,z)=\dfrac{xy-yz}{x^2+y^2+z^2}$ را می‌توان در نقطه $(0,0,0)$ طوری

تعریف کرد که تابع فوق در همه مقادیر $\mathbb{R}^3$ پیوسته باشد؟

$f:\mathbb{R}^3\longrightarrow \mathbb{R}$

$D_f=\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$

ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا تابع داده شده در $(0,0,0)$ حد دارد یا خیر:

راه اول)

مسیر اول) $y=0$, $x\to 0$, $z\to 0$

$$\lim_{(x,y,z)\to 0}\frac{xy-yz}{x^2+y^2+z^2}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر}}=0$$

مسیر دوم) $x=y=-z$, $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}$$

لذا چون در مسیرهای مختلف مقادیر حدی متفاوتی بدست آوردیم تابع فوق در $(0,0,0)$ حد ندارد.

در نتیجه ناپیوسته است.

صفر zx، $y=0$

مشتق جزئی تابع (نسبی):

فرض کنیم تابع n متغیره $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ بصورت

$y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ داده شده باشد و $a(a_1,a_2,\dots,a_n)$ در این صورت مشتق تابع F در

نسبت به متغیر x_j $(1\leq j\leq n)$ با نمادهای زیر نمایش داده می‌شود.

$$\frac{\partial F}{\partial x_j},\ \frac{\partial y}{\partial x_j},\ f_{x_j},\ f_j,\ D_{x_j}$$

و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,a_2,\dots,a_{j-1},a_j+h,a_{j+1},\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{h}$$

$a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ $\Longrightarrow$

$e_j=(0,0,\dots,\underset{\text{j مؤلفه}}{1},\dots,0)\xrightarrow{\times h\neq 0} he_j=(0,0,\dots,h,0,\dots)$

$\Longrightarrow a+he_j=(a_1,a_2,\dots,a_{j-1},a_j+h,a_{j+1},\dots,a_n)$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+he_j)-f(a)}{h}$$

نکته) دقت کنید که اگر یک تابع n متغیره مفروض باشد $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ دارای مبدا $a(a_1,\dots,a_n)$

چون $f=(f_1,f_2,\dots,f_m)$ جایی که $f_i:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, $1\leq i\leq m$ لذا جزئی اینکه تابع f در نقطه a

مشتق‌پذیر باشد باید تمام f_i ها در نقطه a مشتق‌پذیر باشند (یعنی حدهای $\lim_{h\to 0}\frac{f_i(a+hv)-f(a)}{h}$ موجود باشند) در این صورت داریم:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a)=\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_j}(a),\frac{\partial F_2}{\partial x_j}(a),\dots,\frac{\partial F_m}{\partial x_j}(a)\right)$$

Ex) فرض کنید $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ یک تابع سه متغیره به صورت $f(x,y,z)=\sin(xy)-\ln(z)x+xyz$ باشد، در این صورت داریم:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y\cos(xy)-\ln(z)+yz$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x\cos(xy)-0+Z \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z}=0-\frac{x}{z}+xy$$

Ex) فرض کنید $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ به صورت:

$$f(x,y,z)=\left(xy\ln(z),\ tg^{-1}\left(\frac{xy}{z}\right),\ \sin\left(\frac{1}{x}\right)y,\ -x^2y\right)$$

داده شده باشد،

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\left(y\ln(z),\ \frac{y/z}{1+\frac{x^2y^2}{z^2}},\ -\frac{y}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right),\ -2yx\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\left(x\ln(z),\ \frac{x/z}{1+\frac{x^2y^2}{z^2}},\ \sin\frac{1}{x},\ -x^2\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\left(\frac{xy}{z},\ \frac{-xy/z^2}{1+\frac{x^2y^3}{z^2}},\ 0,\ 0\right)$$

* در بحث مشتقات جزئی توابع چندمتغیره اگر یک تابع چندضابطه‌ای داشته باشیم در این صورت برای محاسبه مشتق تابع در نقاط انفکاک (جدایی) حتماً باید از تعریف مشتق استفاده کرد و نمی‌توان با عبارت مشتق‌گیری تابع را مشتق‌پذیر کرد.

Ex) فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ یک تابع دو متغیره به صورت زیر باشد:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

در این صورت مقادیر $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$ ، $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$ را بیابید؟

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=0$$

نکته: در درس ریاضی ۱ در مبحث مشتق پذیری توابع تک متغیره دیدیم که پیوستگی تابع شرط لازم برای مشتق پذیری آن تابع می باشد یعنی اگر تابع f پیوسته نبود نمی توانست در آن نقطه مشتق پذیر باشد حال آنکه در توابع چندمتغیره ممکن است یک تابع چند متغیره در یک نقطه ناپیوسته باشد، ولی در آن نقطه مشتقات جزئی آن تابع موجود باشد.

Ex) فرض کنیم

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

در این صورت همانطور که قبلاً بررسی شد تابع f در نقطه $(0,0)$ حد ندارد و لذا این تابع در $(0,0)$ ناپیوستگی اساسی دارد در حالیکه داریم!

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)=0\quad,\quad\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=0$$

تمرین ۱) فرض کنیم

$$f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xy^2z}{x^4+y^4+z^4} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

اثبات نشان دهید تابع در نقطه مشخص شده ناپیوسته می باشد ولی مقادیر $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0,0)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0)$, $\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0)$ را محاسبه کنید؟

Ex) فرض کنیم

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2y^2}{x-y} & : x\neq y\\ 0 & : x=y\end{cases}$$

در این صورت $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial F}{\partial x}(1,0)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0)$ را بیابید؟

* تمام نقاطی که x و y آن برابر است تابع در آنجا انفصال دارد.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=1$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,0)\ \xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}}\ \frac{2x(x-y)-(x^2-2y^2)}{(x-y)^2}\Bigg|_{(1,0)}=1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h-0}{h}=2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0)=\frac{-4y(x-y)-(-1)(x^2-2y^2)}{(x-y)^2}\Bigg|_{(1,0)}=1$$

گرادیان و مشتق جهتی:

فرض کنیم تابع n-متغیره $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ داده شده باشد در این صورت بردار گرادیان تابع f در نقطه a به صورت زیر تعریف می‌شود:

نکته: اپراتور گرادیان از توابع اسکالر به توابع برداری تعریف می‌شود یعنی گرادیان به عنوان ورودی یک تابع اسکالر را می‌گیرد و خروجی آن یک تابع برداری می‌باشد.

دل یا نابلا

$$\overline{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

$$\nabla f=\left(\frac{\partial F}{\partial x_1},\frac{\partial F}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$$

نکته: از لحاظ هندسی بردار گرادیان تابع f در نقطه $a\in\mathbb{R}^n$ همواره بر سطح تراز تابع f گذرا از نقطه a عمود می‌باشد.

مشتق جهتی: فرض کنیم تابع $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ n متغیره $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ داده شده باشد در این صورت مشتق جهتی تابع f در نقطه $a(a_1,a_2,\dots,a_n)$ در راستای بردار یکه $\vec{u}$ را با نماد $D_{\vec{u}}f(a)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D_{\vec{u}}f(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+hu)-f(a)}{h}$$

نکته: اگر تابع $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ طوری باشد که تمام مشتقات جزئی آن موجود و پیوسته باشند، $\vec{u}$ برداری یکه باشد در این صورت همواره داریم:

$$D_{\vec{u}}f(a)=\overrightarrow{\nabla f(a)}\cdot\vec{u}$$

Ex) مشتق جهتی تابع $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x,y)=\ln(x^2+y)$ را در نقطه $(2,1)$ ، در جهتی که نقطه $(2,1)$ را به نقطه $(4,5)$ وصل می‌کند بیابید؟

$$\vec{v}=(2,4) \xrightarrow{\div|\vec{v}|} \vec{u}=\left(\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5}\right)$$

$$\vec{\nabla} f=\left(\frac{2x}{x^2+y},\frac{1}{x^2+y}\right) \Rightarrow \vec{\nabla} f(2,1)=\left(\frac45,\frac15\right)$$

$$D_{\vec{u}} f(a)=\left(\frac45,\frac15\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5}\right)=\frac{6\sqrt5}{25}$$

نکته: با توجه به نکته قبل اگر فرض کنیم که θ زاویه بین بردار یکه $\vec{u}$ و بردار گرادیان $\vec{\nabla} f$ باشد، در این صورت:

الف) اگر $\theta=\frac{\pi}{2}$ در این صورت $D_{\vec{u}} f(a)=0$ است.

ب) اگر $\theta=0$ در این صورت $\left[D_{\vec{u}} f(a)\right]_{max}=|\vec{\nabla} f(a)|$

پ) اگر $\theta=\pi$ در این صورت $\left[D_{\vec{u}} f(a)\right]_{min}=-|\vec{\nabla} f(a)|$

$$\underline{\text{result}} \longrightarrow -|\vec{\nabla} f(a)| \leqslant D_{\vec{u}} f(a) \leqslant |\vec{\nabla} f(a)|$$

Ex) مشتق جهتی تابع $Z=\ln(x^2+y^2)$ را در نقطه $\vec{a}=(3,4)$ در راستای بردار گرادیان تابع را بیابید؟

یعنی بردار $\vec{u}$ و بردار $\vec{\nabla} f(a)$ هم‌جهت‌اند و لذا $\theta=0$ ،

$$\vec{\nabla} f(3,4)=\left(\frac{2x}{x^2+y^2},\frac{2y}{x^2+y^2}\right)$$

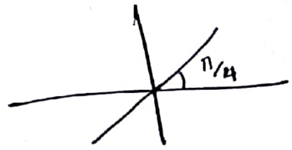
$$=\left(\frac{6}{25},\frac{8}{25}\right) \Rightarrow |\vec{\nabla} f(3,4)|=\frac25$$

Ex) جهتی را بیابید که در آن جهت مشتق جهتی تابع $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ در نقطه $(1,1)$ برابر با صفر باشد؟

می‌توانیم بگوییم،

$$|\vec{u}|=1 \Rightarrow u(\cos\alpha,\sin\alpha).$$

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2} \right) \Rightarrow \vec{\nabla} f(1,1) = (1,-1)$$



$$D_{\vec{U}} f(1,1) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} f(1,1) \cdot \vec{U} = 0$$

$$\Rightarrow (1,-1)\cdot(\cos\alpha, \sin\alpha) = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \sin\alpha$$

$$\Rightarrow tg\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \pi/4$$

$$\Rightarrow \vec{U}(\cos\pi/4, \sin\pi/4) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$$

Ex) تابع $f(x,y)$ به گونه‌ای است که مشتق جهتی آن در نقطه $a(1,2)$ در جهت بردار $\vec{V}_1 = \vec{i}+\vec{j}$ برابر با $2\sqrt{2}$، همچنین مشتق جهتی تابع f در نقطه $a(1,2)$ در جهت بردار $\vec{V}_2 = -2\vec{j}$ برابر با -3 باشد. در این صورت مقدار مشتق جهتی تابع f را در نقطه a در جهت بردار $\vec{V}_3 = -\vec{i}-2\vec{j}$ بیابید.

$$\vec{V}_1 = \vec{i}+\vec{j} \xrightarrow{\div |V_1| = \sqrt{2}} \vec{U}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow D_{\vec{U}} f(1,2) = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (f_x(1,2), f_y(1,2))\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} f_x(1,2) + \frac{\sqrt{2}}{2} f_y(1,2) = 2\sqrt{2}$$

$$\text{I} \Rightarrow f_x(1,2) + f_y(1,2) = 4$$

$$\vec{V}_2 = -2\vec{j} \Rightarrow \vec{U}_2 = (0,-1) \Rightarrow D_{\vec{U}_2} f(1,2) = -3$$

$$\Rightarrow (f_x(1,2), f_y(1,2))\cdot(0,-1) = -3$$

$$\xRightarrow{\text{II}} f_y(1,2) = 3 \xrightarrow{\text{I}} f_x(1,2) = 1 \Rightarrow \nabla f(1,2) = (1,3)$$

$$\vec{U}_3 = -\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \hat{U}_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$D_{\vec{U}_3} f(1,2) = \vec{\nabla} f(1,2)\cdot\vec{U}_3 = (1,3)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-7}{\sqrt{5}}$$

نکته: قبلاً به یاد داریم که بردار گرادیان تابع f در نقطه a، بر سطح تراز تابع f گذرا از نقطه a عمود (قائم) می‌باشد. از این نکته در موارد زیر می‌توان استفاده کرد:

الف: اگر رویه f داده شده باشد در این صورت $\vec{\nabla} f$ می‌تواند نقش بردار نرمال صفحه مماس بر رویه در نقطه a، و همچنین نقش بردار هادی خط قائم بر رویه در نقطه a را داشته باشد.

ب: اگر دو رویه به معادلات $f(x,y,z)=0$ و $g(x,y,z)=0$ داده شده باشد و هدف بدست آوردن معادله خط مماس یا صفحه قائم بر خم حاصل از فصل مشترک دو رویه فوق باشد در این صورت بردار $\vec{n}=\vec{\nabla} f\times\vec{\nabla} G$ می‌تواند نقش هادی خط مماس بر خم و نرمال صفحه قائم بر خم را داشته باشد.

Ex) فرض کنیم خم γ خم حاصل از فصل مشترک رویه‌های $x^2-yz=3$ و $xz+y^2=3$ باشد در این صورت معادله خط مماس و همچنین صفحه قائم بر خم γ را در نقطه $(2,1,1)$ روی خم بنویسید؟

$$f(x,y,z)=x^2-yz-3=0 \Rightarrow \vec{\nabla} f=(2x,-z,-y)$$

$$G(x,y,z)=xz+y^2-3=0 \Rightarrow \vec{\nabla} G=(z,2y,x)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f(4,-1,-1)\ ,\ \vec{\nabla} G(1,2,2)$$

$$\vec{n}=\vec{\nabla} f\times\vec{\nabla} G=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\4&-1&-1\\1&2&2\end{vmatrix}=-9\hat{j}+9\hat{k}\Rightarrow \vec{n}(0,-9,9)$$

خط مماس بر خم: $\cancel{\dfrac{x-2}{0}}=\dfrac{y-1}{-9}=\dfrac{z-1}{9} \Rightarrow \begin{cases}x=2\\y=-9t+1\\z=9t+1\end{cases}$

$x=2$

صفحه قائم بر خم: $0(x-2)-9(y-1)+9(z-1)=0$

$$\Rightarrow -9y+9z=0 \Rightarrow y=z$$