Subject: HW-10 Date: ۹۸۲۱۳۲۳

۱- تبدیل z سیگنال ها را بیابید. 8

الف) $\alpha^n \sin\omega_0 n$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n \sin\omega_0 n\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right) z^{-n}\alpha^n$$

$$\frac{1}{2j}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 n}\alpha^n z^{-n} - \frac{1}{2j}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 n} z^{-n}\alpha^n = \frac{1}{2j}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(e^{j\omega_0}\alpha z^{-1}\right)^n - \frac{1}{2j}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(e^{-j\omega_0}\alpha z^{-1}\right)^n$$

$$\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{j\omega_0}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}\right)$$

ب) $x[n] = \alpha^{|n|}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha^{|n|}z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0}\alpha^{-n}z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0}(\alpha^{-1}z^{-1})^n + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha z^{-1})^n}_{\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha^{-1}z^{-1})^n = \frac{1}{1-\alpha^{-1}z^{-1}} \Rightarrow \frac{1}{1-\alpha^{-1}z^{-1}} + \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \checkmark$$

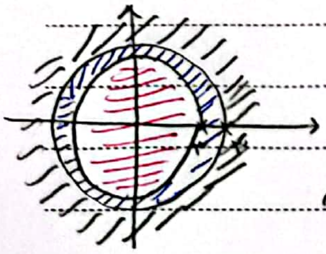
۲- تبدیل z معکوس 8

الف) $$X(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{7}{12}z^{-1}+\frac{1}{12}z^{-2}} \xRightarrow[\times 12]{\times 12} \frac{12-6z^{-1}}{z^{-2}-7z^{-1}+12} = \frac{12-6z^{-1}}{(z^{-1}-3)(z^{-1}-4)} = \frac{A}{z^{-1}-3} + \frac{B}{z^{-1}-4}$$

$$A = (z^{-1}-3)X(z)\Big|_{z^{-1}=3} = +6 \qquad B = (z^{-1}-4)X(z)\Big|_{z^{-1}=4} = -12$$

$$\frac{6}{z^{-1}-3} - \frac{12}{z^{-1}-4} = \frac{\cancel{3}\times 2}{\cancel{3}(-\frac{1}{3}z^{-1}+1)} - \frac{\cancel{4}\times 3}{\cancel{4}(-\frac{1}{4}z^{-1}+1)} \to \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{3}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \Rightarrow$$ با توجه به ناحیه ROC ۳ حالت دارد.

ROC_1 ← هر دو نسبت به قطب های ۴ و ۳ دست راستی باشند.



$$\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

$$-\alpha^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \quad 〃 \qquad |z|<|a|$$

$$x_1[n] = 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] - 3\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n]$$

ROC_2 ← نسبت به قطب ۳ دست راستی و نسبت به قطب ۴ دست چپی است.

$$x_2[n] = 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] + 3\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[-n-1]$$

ROC_3 ← هر دو نسبت به قطب ۳ و ۴ دست چپی اند.

$$x_3[n] = -2\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[-n-1] + 3\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[-n-1]$$

MICRO

Subject: Date:

ب) $X(z) = \frac{1}{1024}\left[\frac{1024 - z^{-10}}{1-\frac{1}{2} z^{-1}}\right]$ $|z|>0$ تمام صفحه بجز $z=0$ است.

$$\frac{1}{2^{10}}\left[\frac{2^{10}-z^{-10}}{1-\frac{1}{2} z^{-1}}\right] \to \frac{2^{10}}{2^{10}} - \frac{z^{-10}}{2^{10}}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2} z^{-1}}\right] = 1 - \frac{1}{(2z)^{10}}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2} z^{-1}}\right]$$

$$-\frac{\frac{1}{z^{10}}}{\frac{2^{10}}{1}} = -\frac{1}{(2z)^{10}} \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{9} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n z^{-1}}_{x[n]}$$

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \le n \le 9 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

ج) $X(z)=\log(1-2z)$ $|z|<\frac{1}{2}$

$$\log(1-2z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n z^{-n}}{n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-2^{-n} z^{-n}}{n} \xrightarrow{\text{دست چپی}} x[n] = \frac{2^{-n}}{n}u[-n-1]$$

د) $X(z) = \frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2} z^{-1})^2}$ $|z|<\frac{1}{2}$ دست چپی

خاصیت مشتق

$$n\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{z} -z\frac{d}{dz}X(z) = \frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2} \to x[n] = n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] \checkmark$$

۳- پاسخ سیستم LTI به ورودی ←

$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$y[n]-\frac{1}{2} y[n-1]+\frac{1}{4} y[n-2]=x[n]$

$$\xrightarrow{z} Y(z)-\tfrac{1}{2} z^{-1}Y(z)+\tfrac{1}{4} z^{-2}Y(z)=X(z) \to H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2} z^{-1}+\frac{1}{4} z^{-2}} \quad |z|>\tfrac{1}{2}$$

$$Y(z)=H(z)X(z) \to X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2} z^{-1})(1-\frac{1}{2} z^{-1}+\frac{1}{4} z^{-2})} = \frac{A}{1-\frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{B}{(z^{-1}-(\frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{4}))} + \frac{C}{(z^{-1}+(\frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{4}))}$$

$$A=(1-\tfrac{1}{2} z^{-1})X(z)\Big|_{z^{-1}=2} = 1 \quad B=(z^{-1}-\tfrac{1}{4}+j\tfrac{\sqrt{3}}{4})X(z)\Big|_{z^{-1}=\frac{1}{4}-j\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$y[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) u[n]$$

MICRO®

Subject: Date:

٤_ $H(z)$ ؟ محل صفر و قطب ؟

پایداری ؟

$x[n]=u[n]$

$y[n]=(\frac{1}{2})^{n-1}u[n+1]$

$y[n]=x[n]*h[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z)=X(z)H(z)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^{-n}=\boxed{\frac{1}{1-z^{-1}}}$$

$$Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y[n]z^{-n}=\sum_{n=-1}^{+\infty}(\tfrac{1}{2})^{n-1}z^{-n}=\sum_{n=-1}^{+\infty}\cancel{(\tfrac{1}{2})^{-1}}^{\,2}(\tfrac{1}{2})^{n}z^{-n}=2\sum_{n=-1}^{+\infty}(\tfrac{1}{2}z^{-1})^{n}$$

$$2\sum_{n=-1}^{0}(\tfrac{1}{2}z^{-1})^{n}+2\sum_{n=0}^{+\infty}(\tfrac{1}{2}z^{-1})^{n} \qquad 4z+2+\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\hookrightarrow \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{4z+2+\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}{\frac{1}{1-z^{-1}}}=\frac{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})(4z+2)+2(1-z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}=\frac{4z-2-3z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

ریشه‌های صورت صفرها را می‌دهد.

$4(z^{-1})^{-1}-3z^{-1}+z^{-2}-2=0$

$z^{-1}=A \rightarrow \frac{4}{A}-3A+A^2-2=0 \xrightarrow{\times A} 4-3A^2+A^3-2A=0 \rightarrow A^3-3A^2-2A+4=0$

$A_1=1 \rightarrow z_1^{-1}=1$ ریشه‌های مخرج قطب‌ها را می‌دهد.

$A_2=\sqrt{5}+1 \rightarrow z_2^{-1}=\sqrt{5}+1$ $\boxed{z_1^{-1}=1}$

$A_3=-\sqrt{5}+1 \rightarrow z_3^{-1}=-\sqrt{5}+1$ $\boxed{z_2^{-1}=2}$ چون با احتساب ∞ قطب‌ها باید تعداد صفر

ها و قطب‌ها برابر باشد چون $z_3^{-1}=\infty$ خواهد شد

ناپایدار است.

٥_ سیستم LTI ← به ازای تمام n ها $x[n]=(-1)^n \rightarrow y[n]=0$

اگر $x[n]=(\frac{1}{2})^n u[n] \rightarrow y[n]=\delta[n]+a(\frac{1}{4})^n u[n]$ ثابت a

$a=?$

$H(-1)=0$

$y[n]$ ← $x[n]=1$ ؟

$y[n]=H(z)z^n\big|_{z=-1}=H(-1)(-1)^n=0 \rightarrow H(-1)=0$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z|>\tfrac{1}{2} \rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{(1+a-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \quad |z|>\tfrac{1}{4}$$

$$Y(z)=1+\frac{a}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \rightarrow H(-1)=0 \rightarrow a+\frac{3}{2}=0 \rightarrow \boxed{a=-\frac{3}{2}} \checkmark$$

MICRO®

$$y[n]=H(1)x[n]=H(1)=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{4}{2}=\boxed{-2} \checkmark$$