سیگنال متناوب گسسته زمان: سیگنال $x[n]$ متناوب است اگر به ازای عدد صحیح N داشته باشیم $x[n+N]=x[n] \quad \forall n$

به کوچکترین عدد صحیح مثبت N، دوره تناوب اصلی سیگنال می‌گویند.

مثال: نشان دهید سیگنال $x[n]=2e^{j\frac{2\pi}{7}n}+3\cos\frac{\pi}{5}n$ متناوب است. دوره تناوب اصلی آن را بدست آورید.

$$2e^{j\frac{2\pi}{7}(n+N_1)}=2e^{j\frac{2\pi}{7}n} \Rightarrow \frac{2\pi}{7}N_1=2k\pi \Rightarrow N_1=7k \rightarrow N_{10}=7$$

$$3\cos\frac{\pi}{5}(n+N_2)=3\cos\frac{\pi}{5}n \Rightarrow \frac{\pi}{5}N_2=2k\pi \Rightarrow N_2=10k \rightarrow N_{20}=10$$

$$N_0=\mathrm{lcm}(7,10)=70$$

سری فوریه سیگنال گسسته :

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$ (فرکانس زاویه‌ای)

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

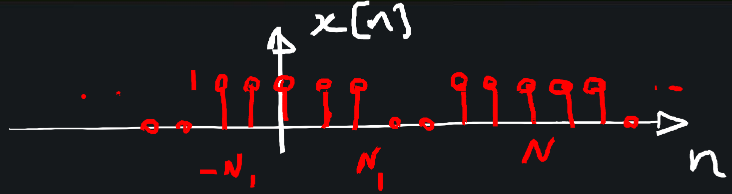
ضرایب سری فوریه گسسته زمان متناوب با دوره تناوب سیگنال (N) هستند.

اثبات :

$$a_{k+N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+N)n} = e^{-j2\pi n}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right)$$

$$= 1 \times a_k = a_k$$

مثال: ضرایب سری فوریه سیگنال پنجره متناوب به صورت روبرو را بدست آورید.



$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\,\frac{\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)^{-N_1} - \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)^{N_1+1}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\,\frac{e^{-j\frac{\pi}{N}k}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k(N_1+1/2)} - e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N_1+1/2)}\right)}{e^{-j\frac{\pi}{N}k}\left(e^{j\frac{\pi}{N}k} - e^{-j\frac{\pi}{N}k}\right)} = \frac{1}{N}\,\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{N}k(N_1+1/2)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N}k\right)}$$

پاسخ سیستم های LTI به ورودی سیگنالهای متناوب:

پاسخ سیستم‌های LTI به ورودی $(z)^n$ eigenfunction

$$z^n \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow z^n H(z)$$

$$x[n]=(z)^n \longrightarrow y[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n-m]\,h[m] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (z)^{n-m}\,h[m] = z^n \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]\, z^{-m}}$$

$H(z)$ تبدیل z سیستم

مثال. پاسخ یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ به ورودی $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ را بدست آورید:

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow \left(\tfrac{1}{2}\right)^n H(1/2)$$

$$H(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\, z^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{3}\right)^m z^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{3}z^{-1}\right)^m$$

$$H(z)=\frac{(1/3\, z^{-1})^0-(1/3\, z^{-1})^{\infty}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$y[n]=\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{\cancel{1-2/3}}\quad 3$$

حال برای سیگنال متناوب $x[n]$ داریم:

$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n]=L\{x[n]\}=L\Big\{\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\Big\}=\sum_{k=\langle N\rangle} L\{a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\}=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k L\{e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\}$$

$$y[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k H\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

مثال: پاسخ سیستمی با $h[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ به ورودی $x[n]=2\sin\frac{\pi}{5}n$ را بدست آورید.

$$x[n]=2\sin\frac{\pi}{5}n=2\left(\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{5}n}-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{5}n}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$y[n]=\frac{1}{j}e^{j\frac{\pi}{5}n}\times H\left(e^{j\frac{\pi}{5}}\right)-\frac{1}{j}e^{-j\frac{\pi}{5}n}H\left(e^{-j\frac{\pi}{5}}\right)=\frac{1}{j}e^{j\frac{\pi}{5}n}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\pi/5}}-\frac{1}{j}e^{-j\frac{\pi}{5}n}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{+j\pi/5}}$$

$$y[n]=\frac{\frac{1}{j}e^{j\pi/5 n}\left(1-\frac{1}{3}e^{j\pi/5}\right)-\frac{1}{j}e^{-j\pi/5 n}\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\pi/5}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\pi/5}\right)\left(1-\frac{1}{3}e^{+j\pi/5}\right)}=\frac{\frac{1}{j}\left(e^{j\frac{\pi}{5}n}-e^{-j\frac{\pi}{5}n}\right)-\frac{1}{3j}\left(e^{j\frac{\pi}{5}(n+1)}-e^{-j\frac{\pi}{5}(n+1)}\right)}{1-\frac{2}{3}\cos(\pi/5)+\frac{1}{9}}$$

$$y[n]=\frac{2\sin(\pi/5\, n)-\frac{2}{3}\sin\pi/5\,(n+1)}{\frac{10}{9}-\frac{2}{3}\cos(\pi/5)}$$

مثال: پاسخ سیستمی با معادله تفاضلی $y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$ به ورودی $x[n]$ متناوب بصورت روبرو بدست آورید.

$$z^n \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow z^n H(z) \qquad H(z)=?$$

$$z^n H(z)+\frac{1}{2}z^{n-1}H(z)=z^n$$

$$\Downarrow$$

$$\longleftarrow \quad H(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$a_k=\frac{1}{6}\,\frac{\sin\frac{2\pi k}{6}\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\sin\frac{\pi k}{6}}$$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{5}\frac{1}{6}\,\frac{\sin\frac{\pi k}{2}}{\sin\frac{\pi k}{6}}\;\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{6}k}}\;\overset{z}{\boxed{e^{j\frac{2\pi}{6}kn}}}$$

شرط همگرایی سری فوریه: سری فوریه یک سیگنال متناوب همگرا می باشد اگر انرژی سیگنال در یک دوره تناوب محدود باشد

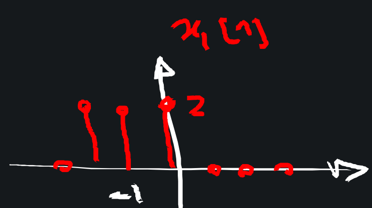
$$\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2 < \infty$$

خواص سری فوریه گسسته:

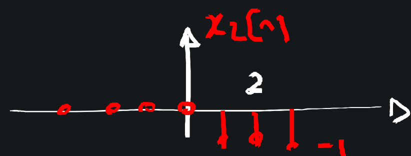
۱) خاصیت خطی: $Ax[n]+Bw[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} Aa_k+Bb_k$ (اگر $x[n]$ و $w[n]$ متناوب با یک دوره تناوب باشند)

۲) جابجایی زمانی: $x[n-n_0] \overset{F_S}{\longleftrightarrow} e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0} a_k$

مثال: ضرایب سری فوریه $x[n]$ به صورت زیر را بدست آورید.

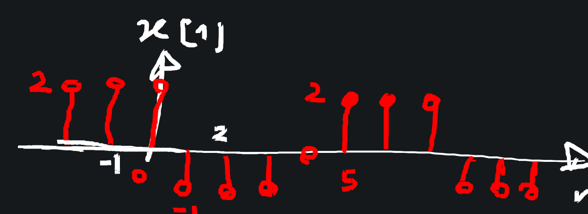


$$\longrightarrow a_k = \frac{2\times 1}{5}\,\frac{\sin\frac{2\pi}{5}k(1+1/2)}{\sin\frac{\pi}{5}k}\,e^{+j\frac{2\pi}{5}k}$$



$$\longrightarrow b_k = (-1)\times\frac{1}{5}\,\frac{\sin\frac{2\pi}{5}k(1+1/2)}{\sin\frac{\pi}{5}k}\times e^{-j\frac{2\pi}{5}k\times 2}$$

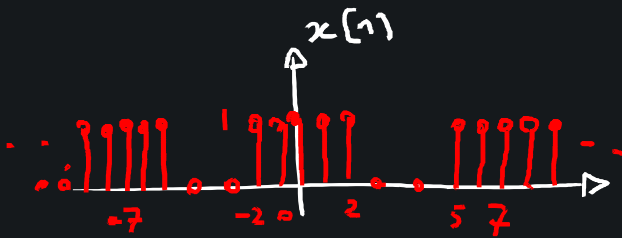
$$\longrightarrow c_k = a_k + b_k$$



۳) جابجایی در ضرایب:

$$e^{j\frac{2\pi}{N}Mn}\,x[n] \xleftrightarrow{F_s} a_{k-M}$$

مثال: ضرایب سری فوریه $W[n] = x[n]\cos\frac{\pi}{7}n$ را بدست آورید



$$W[n] = x[n]\left(\frac{e^{j\frac{\pi}{7}n} + e^{-j\frac{\pi}{7}n}}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{7}\times 2n}\,x[n] + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{7}\times 2n}$$

$$b_k = \frac{1}{2}a_{k-2} + \frac{1}{2}a_{k+2}$$

$$x[n] \xleftrightarrow{F_s} \frac{1}{7}\,\frac{\sin\left(\frac{2\pi k}{7}(2+\frac{1}{2})\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{7}\right)}$$

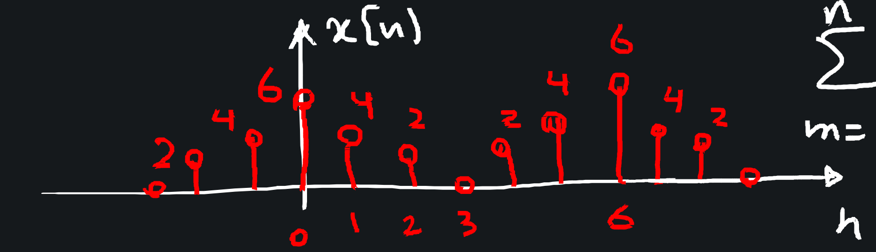
$$b_k = \frac{1}{2}\times\frac{1}{7}\,\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{7}(k-2)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{7}(k-2)\right)} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{7}\,\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{7}(k+2)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{7}(k+2)\right)}$$

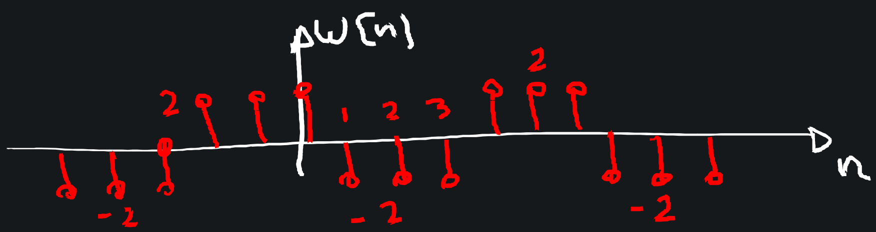
۴) تفاضل‌گیری :

$$x[n]-x[n-1] \xleftrightarrow{FS} \left(1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)a_k$$

۵) جمع انباره‌ای : (به شرطی که مجموع نمونه‌های سیگنال در یک دوره تناوب صفر باشد)

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}\,a_k$$





مثال : ضرایب سری فوریه x[n] بصورت روبرو را بدست آورید

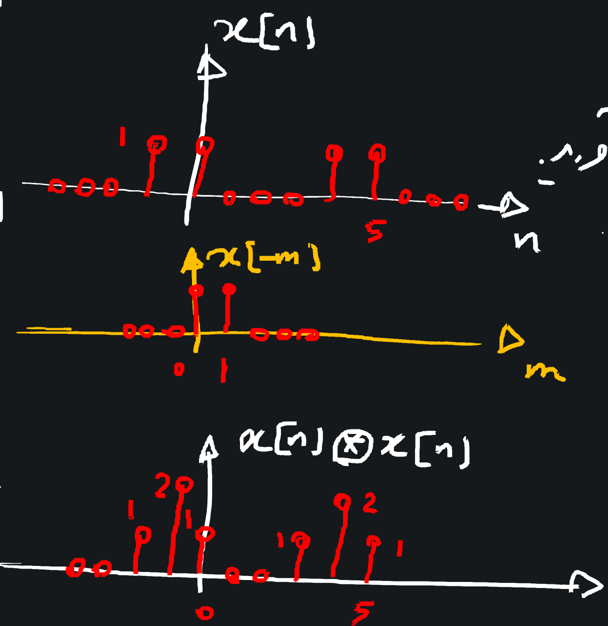
$$x[n]=\sum_{m=-\infty}^{n} w[m] \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{1-e^{-j\frac{2\pi}{6}k}}\,a_k$$

$$w[n] \xleftrightarrow{FS} 2\times\frac{1}{6}\,\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{6}k\left(1+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\frac{\pi}{6}k}\,e^{+j\frac{2\pi}{6}k\times 1} - 2\times\frac{1}{6}\,\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{6}k\left(1+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\frac{\pi}{6}k}\,e^{-j\frac{2\pi}{6}k\times 2}$$

۶) ضرب: $x[n]\cdot w[n] \xleftrightarrow{FS} \sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}$ ($x[n]$, $w[n]$ دوره تناوب یکسان دارند)

۷) کانولوشن متناوب: $\sum_{m=\langle N\rangle} x[m]\, w[n-m] \xleftrightarrow{FS} N a_k b_k$

مثال: کانولوشن متناوب سیگنال $x[n]$ روبرو با خودش چیست؟ ضرایب سری فوریه سیگنال حاصل را بدست آورید.



$$\xleftrightarrow{FS} a_k = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{5}kn} = \frac{1}{5}\left(e^{-j\times 0} + 1\times e^{-j\frac{2\pi}{5}\times 4k}\right)$$

$$\xleftrightarrow{FS} b_k = 5\times a_k \times a_k = \frac{1}{5}\left(1+e^{-j\frac{8\pi}{5}k}\right)^2$$

۸) مزدوج: $x^*[n] \xleftrightarrow{F_s} a^*_{-k}$

۹) وارونگی در زمان: $x[-n] \xleftrightarrow{F_s} a_{-k}$

۱۰) تقارن هرمیتی: برای سیگنالهای حقیقی متناوب $a_k = a^*_{-k}$ (تقارن هرمیتی)

$|a_k| = |a_{-k}|$ $\quad \angle a_k = -\angle a_{-k}$

$Re\{a_k\} = Re\{a_{-k}\}$ $\quad Im\{a_k\} = -Im\{a_k\}$

اگر $x[n]$ حقیقی و زوج باشد آنگاه ضرایب سری فوریه آن حقیقی و زوج هستند

" " " و فرد " " " " " موهومی خالص و فرد هستند.

۱۱) قضیه پارسوال:

$$E_x = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} |x[n]|^2 = \sum_{k=<N>} |a_k|^2$$

مثال: قضیه پارسوال را برای سیگنال $x[n]$ مورد بحث تحقیق کنید.

$$E_x = \frac{1}{3}\sum_{n=<\ >} |x[n]|^2 = \frac{1}{3}(1^2+1^2) = 2/3$$

$$a_k = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{3}kn} = 1/3\left(1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}\times 2k}\right)$$

$$a_0 = 2/3 \quad , \quad a_1 = 1/3\left(1+e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right)$$

$$a_2 = 1/3\left(1+e^{-j8\pi/3}\right)$$

$$\sum_{k=<5>} |a_k|^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left|\frac{1}{3}\left(1+e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right)\right|^2 + \left|1/3\left(1+e^{-j8\pi/3}\right)\right|^2 = \frac{4}{9} + \frac{2}{9}\left(1+\cos\frac{4\pi}{3}\right) + \frac{2}{9}\left(1+\cos\frac{8\pi}{3}\right) = 2/3$$

=