جلسه ششم

فصل دوم - دستگاه معادلات خطی

صورت کلی یک دستگاه معادلات جبری خطی با m معادله و n مجهول :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n$$

این دستگاه معرف یک سیستم $m\times n$ است ؟

$$\underset{m\times n}{A}\,\overset{n\times 1}{X} = \underset{m\times 1}{b}$$

در فرآیند حل دستگاه فوق حالتهای زیر امکان دارد رخ دهد

۱ـ حالتی که دستگاه بدون جواب یا ناسازگار است.

۲ـ حالتی که دستگاه سازگار است و جواب دارد که در این صورت امکان دارد فقط یک جواب منحصربه فرد داشته باشد یا اینکه بی شمار جواب داشته باشه

① حالت $m=n$: دستگاه همواره معین.

اگر $|A|\neq 0$ باشد، دستگاه معادلات سازگار است و یک جواب منحصربه فرد دارد.

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2=5 \\ x_1+x_2=2 \end{cases}$$

اگر $|A|=0$ باشد و دستگاه سازگار باشد، بی شمار جواب دارد.

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2=5 \\ 6x_1+4x_2=10 \end{cases}$$

اگر $|A|=0$ باشد و دستگاه ناسازگار باشد، اصلاً جواب ندارد.

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2=5 \\ 6x_1+4x_2=5 \end{cases}$$

② حالت $m<n$: دستگاه فرومعین.

این دستگاه بی شمار جواب دارد.

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-3x_4=2 \\ -x_1-2x_2+x_4=-1 \\ 2x_1-x_2-x_3=1 \end{cases}$$

۳) حالت $m>n$: دستگاه فرامعین.

درصورت سازگار بودن می‌تواند یک جواب منحصربه‌فرد داشته باشد.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 4 \\ -5x_1 + 2x_2 = -3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

۴) عدد حالت ماتریس‌ها:

برای حساسیت دستگاه معادلات نسبت به خطاهای کوچک می‌سنجی.

مثال)

$$\begin{cases} 23.497\, x_1 + 33.074\, x_2 = 13.920 \\ 52.684\, x_1 + 74.752\, x_2 = 30.616 \end{cases}$$

$$Ax = B \longrightarrow x = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.25 \\ 30.5 \end{bmatrix} \longrightarrow x = \begin{bmatrix} -11.92 \\ 8.81 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.4 \\ 30.5 \end{bmatrix} \longrightarrow x = \begin{bmatrix} 7.27 \\ -4.719 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.5 \\ 20.75 \end{bmatrix} \longrightarrow X = \begin{bmatrix} 8.08 \\ -5.29 \end{bmatrix}$$

تغییرات بسیار کوچک، در b ← به شدت در پاسخ دستگاه تاثیر گذاشت

← دستگاه معادلات بدحالت (ill condition)

* برای تشخیص بدحالت بودن یک دستگاه، پارامتری به نام عدد حالت تعریف می‌شود.

$$\boxed{K = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \qquad K \geq 1$$

✓ اگر عدد حالت کوچک باشد ← دستگاه معادلات خوش حالت است.

✓ اگر عدد حالت مقدار خیلی بزرگی باشد ← 〃 〃 بدحالت است.

← ماتریس A نزدیک به منفرد شدن است.

عدد حالت برای دستگاه مثال قبل:

$$K = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 1.027 \times 10^{4} \gg 1$$

← (دستگاه بدحالت)

تعیین علامت ماتریس ها

۱- ماتریس متقارن حقیقی $A_{n\times n}$ را مثبت معین می گویند اگر:

$$\begin{cases} x^TAx > 0 & , \quad x \neq 0 \\ x^TAx = 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

۲- " " " مثبت نیمه معین گویند اگر:

$$\begin{cases} x^TAx \geq 0 & , \quad x \neq 0 \\ x^TAx = 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

۳- " " " منفی معین گویند اگر:

$$\begin{cases} x^TAx < 0 & , \quad x \neq 0 \\ x^TAx = 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

۴- " " " منفی نیمه معین گویند اگر:

$$\begin{cases} x^TAx \leq 0 & , \quad x \neq 0 \\ x^TAx = 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

۵- اگر x^TAx بتواند علامت های مثبت، منفی و صفر داشته باشد نامعین

نکته) چند جمله ای های به فرم x^TAx را صورت های درجه دوم می نامند.

مثال) صورت درجه دوم زیر را بصورت x^TAx نمایش دهید.

$$x_1^2 \underline{- 2x_1x_2} + \underline{4x_1x_3} + x_2^2 + 8x_3^2$$

$$\to -x_1x_2 - x_1x_2 \qquad \to 2x_1x_3 + 2x_1x_3$$

$$x^TAx = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

معیار تشخیص علامت A :

۱- مثبت معین: شرط لازم و کافی برای مثبت معین بودن یک صورت درجه دوم x^TAx که در آن $A_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن حقیقی می‌باشد آن است که:

کهادهای اصلی مقدم متوالی A مثبت باشند. منظور از کهاد اصلی مقدم، دترمینان‌های ماتریس‌های $k\times k$ $(k=1,2,\dots,n-1)$ در گوشه سمت چپ بالای ماتریس $A_{n\times n}$ می‌باشد؛ به عبارتی:

$$a_{11} > 0 \;,\; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \;,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0 \;, \dots ,\; |A| > 0$$

۲- منفی معین: کهادهای اصلی مقدم متوالی مرتبه زوج مثبت و کهادهای اصلی مقدم متوالی مرتبه فرد منفی باشند.

$$a_{11} < 0 \;,\; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \;,\; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0 \;, \dots$$

۳ـ مثبت نیمه‌معین: تمام کهادهای اصلی ماتریس متقارن A، غیرمنفی باشند.

$$a_{ii} \geq 0 \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \geq 0 \ , \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} \geq 0$$

$$\dots\dots \ \text{و} \quad |A| = 0$$

۴ـ منفی نیمه‌معین: تمام کهادهای اصلی مرتبه زوج آن غیرمنفی و مرتبه فرد آن غیرمثبت باشند.

$$a_{ii} \leq 0 \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \geq 0 \ , \ \dots \ \text{و} \ |A| = 0$$

تعداد کهادهای اصلی مقدم ماتریس $A_{n\times n}$: n

" کهادهای اصلی ماتریس $A_{n\times n}$: $2^n - 1$

مثال) کهادهای اصلی مقدم (۳ تا) و تمام کهادهای اصلی (۷ تا) ماتریس زیر را بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

کهادهای اصلی مقدم: $a_{11} = 2$ و $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ و A

کهادهای اصلی: a_{11}, a_{22}, a_{33} و $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ و A

تعیین علامت A در مثال فوق :

$a_{11} = ۲ > ۰$ ✓

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۶ \end{vmatrix} > ۰ \quad ✓$$

$$|A| = ۲(۶) - ۲(۲) - ۱(۶) > ۰ \quad ✓$$

لذا A مثبت معین است.

مثال) علامت A ؟

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

$a_{11} = ۱ > ۰$

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{vmatrix} = ۰$$

تمام کهادهای اصلی A نوشته شود ⟵ ؟

تمرین) به ازای چه مقادیری از k ، ماتریس زیر مثبت معین است؟

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & k \\ -1 & 2 & -1 \\ k & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

پایان جلسه ۶