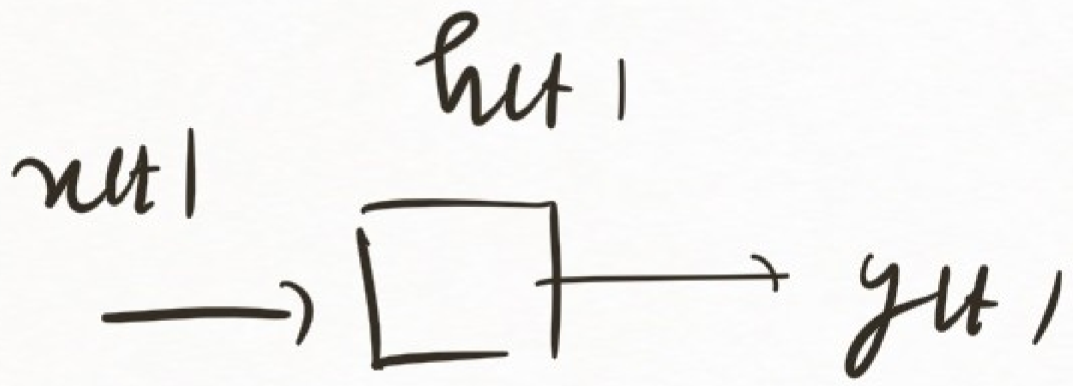
در نظر سیستم های LTI که با معادله دیفرانسیل بیان میشوند با تبدیل لاپلاس



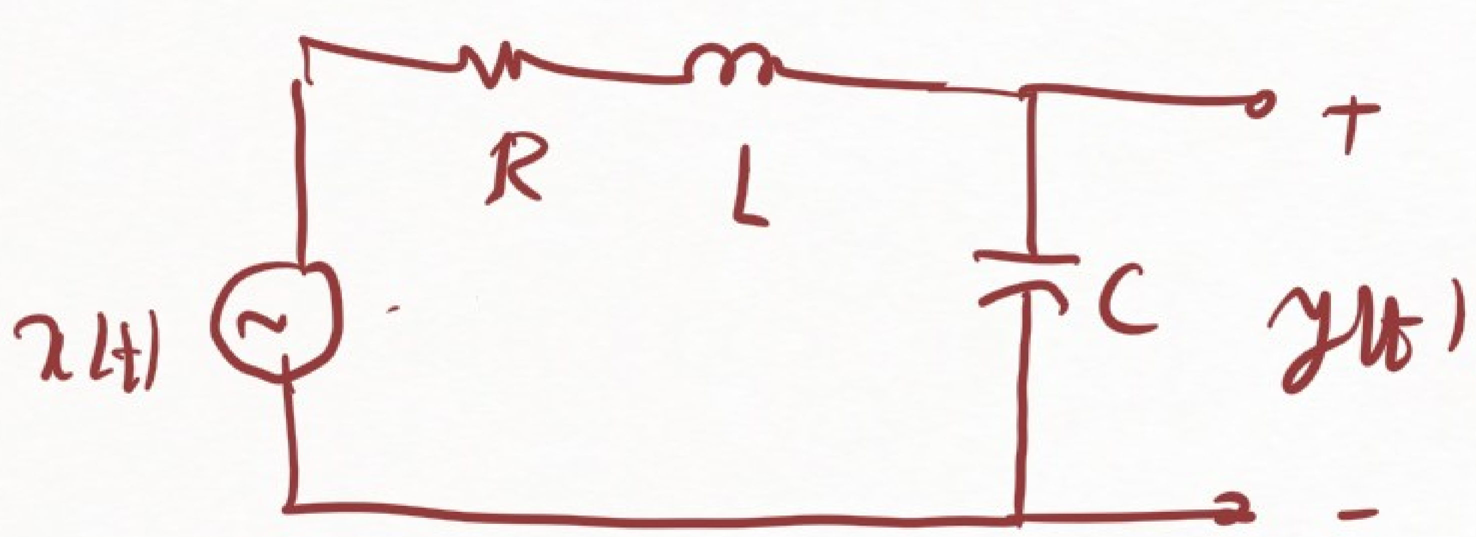
$$\sum_{k=0}^{M} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{M} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{N} b_k s^k X(s)$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} = \frac{\text{چندجمله ای از } s}{\text{چندجمله ای از } s}$$

$M = N = 2$ مثلا

$$\Longrightarrow H(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}$$

مثال ۱



معادله دیفرانسیل حاکم بر مدار

$$\Longrightarrow LC y''(t) + RC y'(t) + y(t) = x(t)$$

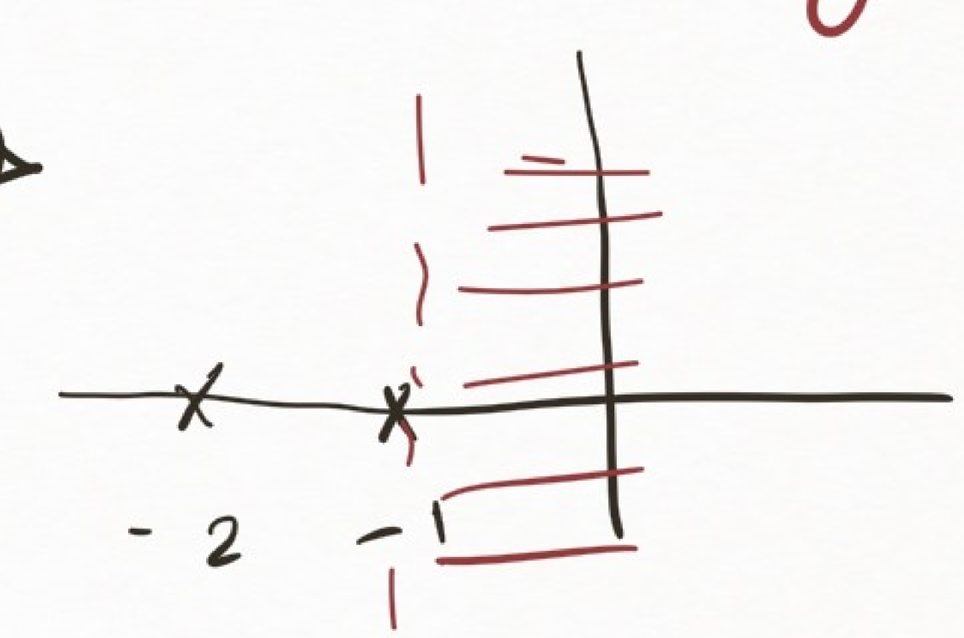
$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + (\frac{1}{LC})}$$

تابع تبدیل سیستم

مثال ۲

$$\begin{cases} x(t) = e^{-3t} u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s+3} \quad ; \quad Re\{s\} > -3 \\ y(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) u(t) \longrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad ; \quad Re\{s\} > -1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$



$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \Longrightarrow s^2Y(s)+3sY(s)+Y(s)=sX(s)+X(s)$$

معکوس

معادله خواسته شد - $h(t)$

تبدیل معکوس

$$\Longrightarrow \frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$$

معادله دیفرانسیل سیستم

تمرین - ۱) فرض کنید $x(t)=e^{-4t}u(t)$ خروجی را برای سیستم فوق بدست آورید.

۲. فرض 〃 $x(t)=e^{-2t}u(t)$ 〃 〃 〃 〃

۳. فرض 〃 $x(t)=\cos 3t\, u(t)$ 〃 〃 〃 〃

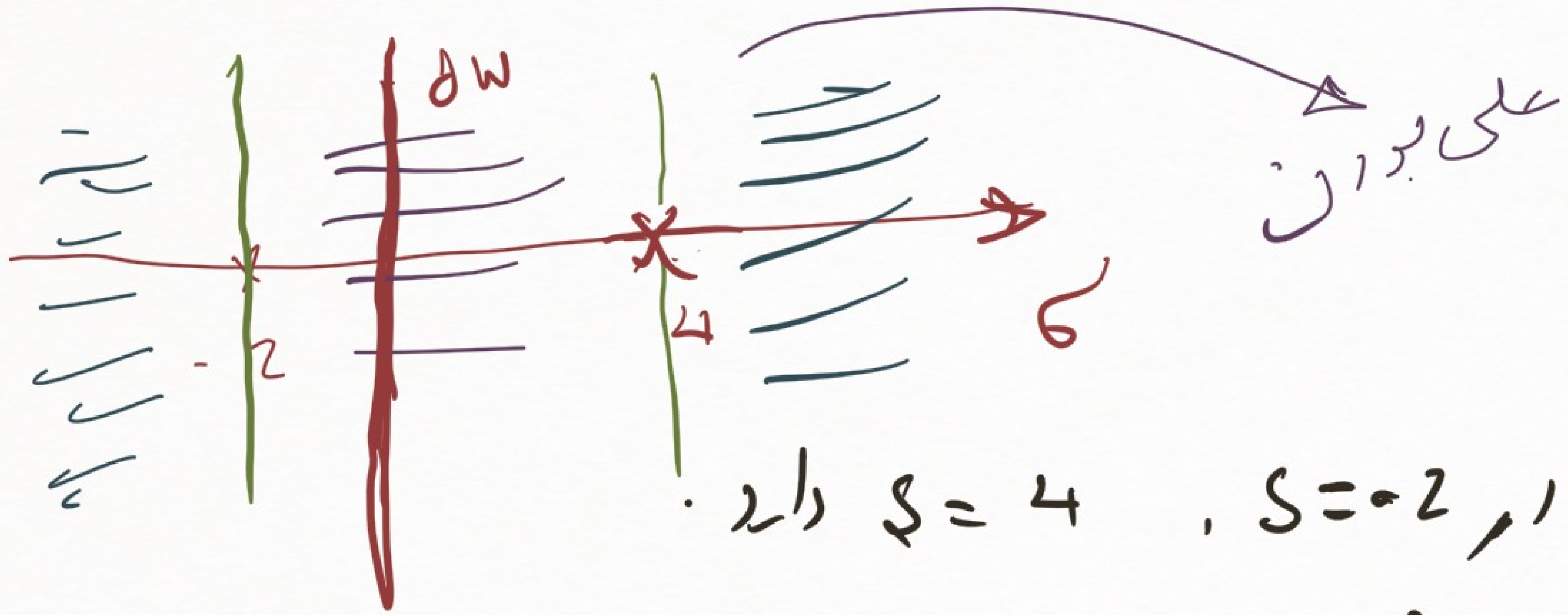
۴. فرض 〃 $x(t)=e^{-4t}$ 〃 〃 〃 〃 〃

توجه $u(t)$ ندارد.

$S_0 t$

$x(t)=e$

تبدیل فوریه



سوال سه - اطلاعات زیر درمورد یک سیستم LTI داده شده است:

الف - سیستم علی است. ب - تابع سیستم گویا است و تنها دو قطب در $s=-2$ و $s=4$ دارد.

ج - به ازای ورودی $x(t)=1$ خروجی $y(t)=0$ می باشد.

د - پاسخ ضربه در $t=0^+$ برابر 4 است. سیستم را با این اطلاعات مشخص نمایید.

$H(s)=?$

حل - با توجه به دو شرط اول واضح است که سیستم ناپایدار است. چون یک قطب در $s=4$ سمت راست محور سیگما دارد و علی هم هست.

$$H(s)=\frac{P(s)}{(s-4)(s+2)}=\frac{P(s)}{s^2-2s-8}$$

توجه: $x(t)=e^{s_0 t} \longrightarrow y(t)=H(s_0)e^{s_0 t}$

$$x(t)=1=1e^{0t} \longrightarrow y(t)=H(0)e^{0t}=0 \longrightarrow \boxed{H(0)=0} \Rightarrow \boxed{P(0)=0} \Longrightarrow$$

پس $P(s)$ یک ریشه در $s=0$ دارد.

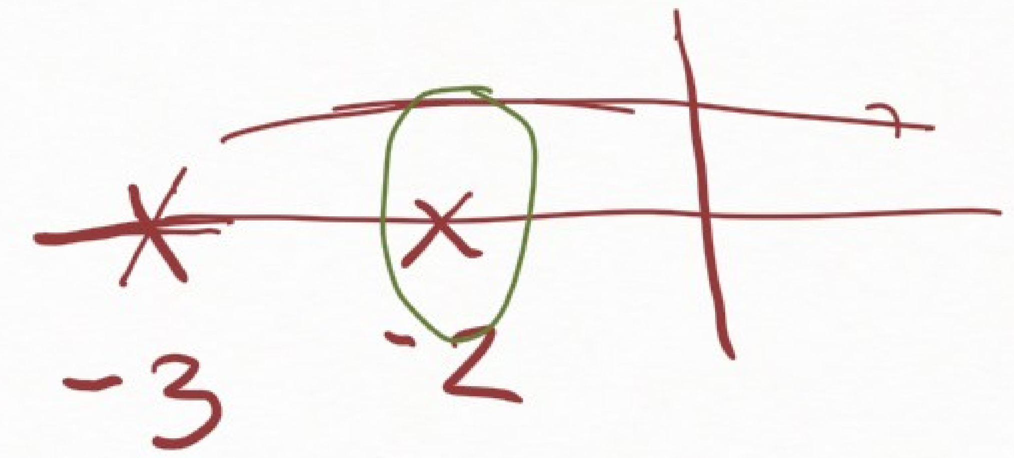
تابع ویژه

بنابراین $P(s)=sq(s)$ و در نتیجه داریم:

$$H(s)=\frac{sq(s)}{s^2-2s+8}$$

$h(0^+) = 4 \Longrightarrow h(0^+) = \lim_{s\to\infty} sH(s) \Longrightarrow \lim_{s\to\infty} \frac{s^2 q(s)}{s^2-2s-8} = 4 \Longrightarrow q(s) = k = 4$ عدد ثابت

$$\Rightarrow H(s) = \frac{4s}{s^2-2s-8}$$



مثال ۴. یک سیستم پایدار و علی با پاسخ ضربه $h(t)$ و تابع سیستم $H(s)$ موجود است. $H(s)$ گویا است. یک قطب در $s=-2$ دارد و در مبدا صفر ندارد. محل بقیه صفرها و قطب‌ها را نمی‌دانیم. درستی یا نادرستی عبارات زیر و یا ناکافی بودن اطلاعات برای تعیین ارزش این موارد مشخص کنید.

الف - تبدیل $F\{h(t)e^{3t}\}$ همگرا است. نادرست است. چون از صورت سوال این تبدیل فوریه باید تبدیل لاپلاس $h(t)$ در $s=3$ وجود داشته باشد. یعنی $H(s)$ در $s=-3$ همگرا و جزء ناحیه همگرایی باشد. چون سیستم علی و پایدار ROC باید در سمت راست تمام قطب‌ها قرار داشته باشد ولی $s=-3$ سمت چپ قطب $s=-2$ است.

ب - $\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt = 0$ ← نادرست است چون

$$H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt = 0 \Longrightarrow H(0)=0$$

طبق سوال در مبدا صفر ندارد.

$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}\,dt$

ج) $h(t)$ پاسخ ضربه یک سیستم علی پایدار است.

این جمله درست است چون طبق خواص تبدیل لاپلاس ROC شکل $t\,h(t)$ با ROC شکل $h(t)$ برابر است و ROC شکل $h(t)$

سمت راستی شامل محور موهومی است (طبق فرض)

, $A\,h(A)$

د- تبدیل لاپلاس $\frac{dh(t)}{dt}$ حداقل یک قطب دارد.

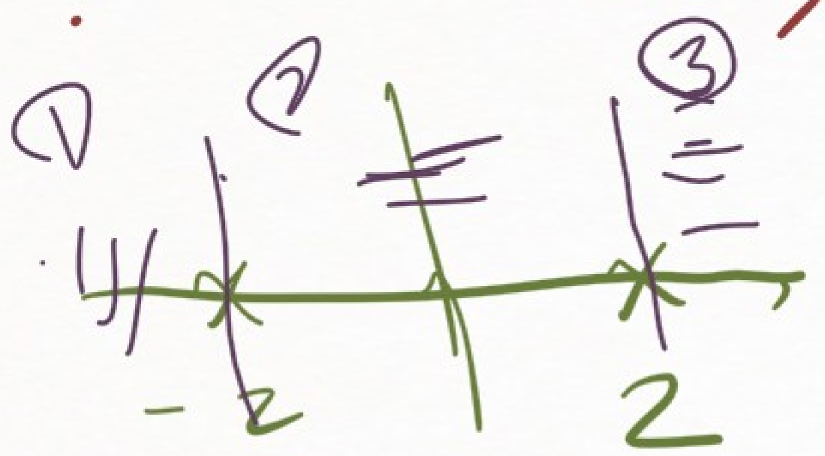
این عبارت درست است چون:

$\frac{dh(t)}{dt} \longleftrightarrow sH(s) \Longrightarrow$ قطب $H(s)$ در $s=-2$ باقی می‌ماند.

ه- $h(t)$ عمر محدودی دارد. این عبارت درست نیست چون اگر $h(t)$ محدود زمانی باشد باید ROC کل صفحه باشد.
در حالیکه ROC کل صفحه نیست.

و- $H(s)=H(-s)$

این عبارت درست نیست، چون اگر درست باشد با توجه به اینکه $s=-2$ قطب است بنابراین $s=2$ نیز قطب بوده و با توجه به اینکه سیستم پایدار و علی است لذا نمی‌تواند قطبی در $s=2$ داشته باشد که محور موهومی را داشته باشد.



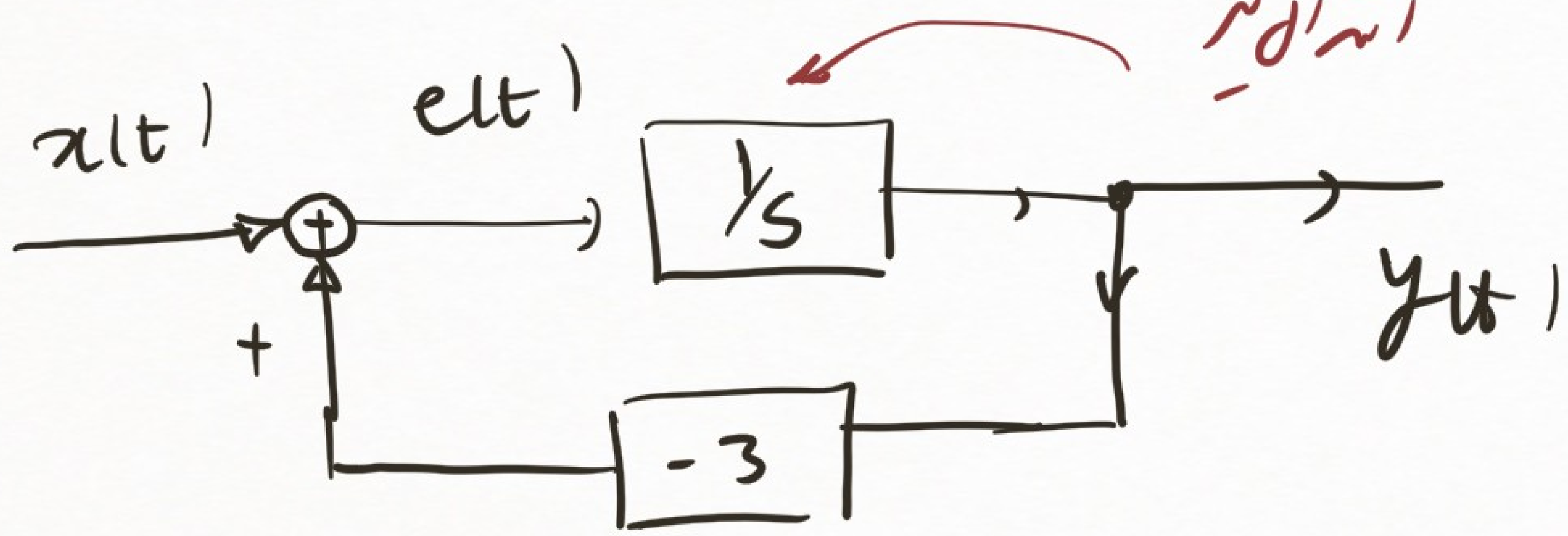
ز- $\lim_{s\to\infty} H(s)=2$ درستی این عبارت را نمی‌توان از اطلاعات داده شده نتیجه گرفت چون در صورت درست بودن باید درجه صورت و مخرج $H(s)$ یکی باشد که از اطلاعات داده شده چنین نتیجه‌ای نمی‌گیریم.

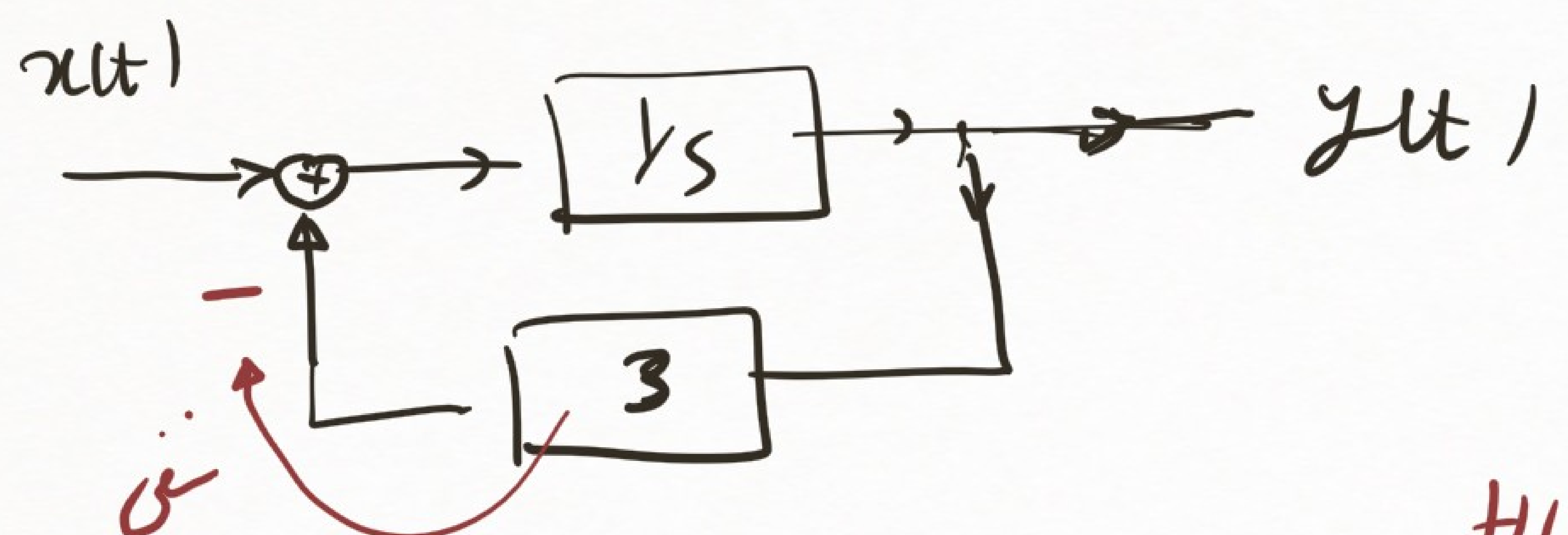
مدل سازی سیستم های LTI علی توصیف شده با معادلات دیفرانسیل توابع سیستم ها گویا

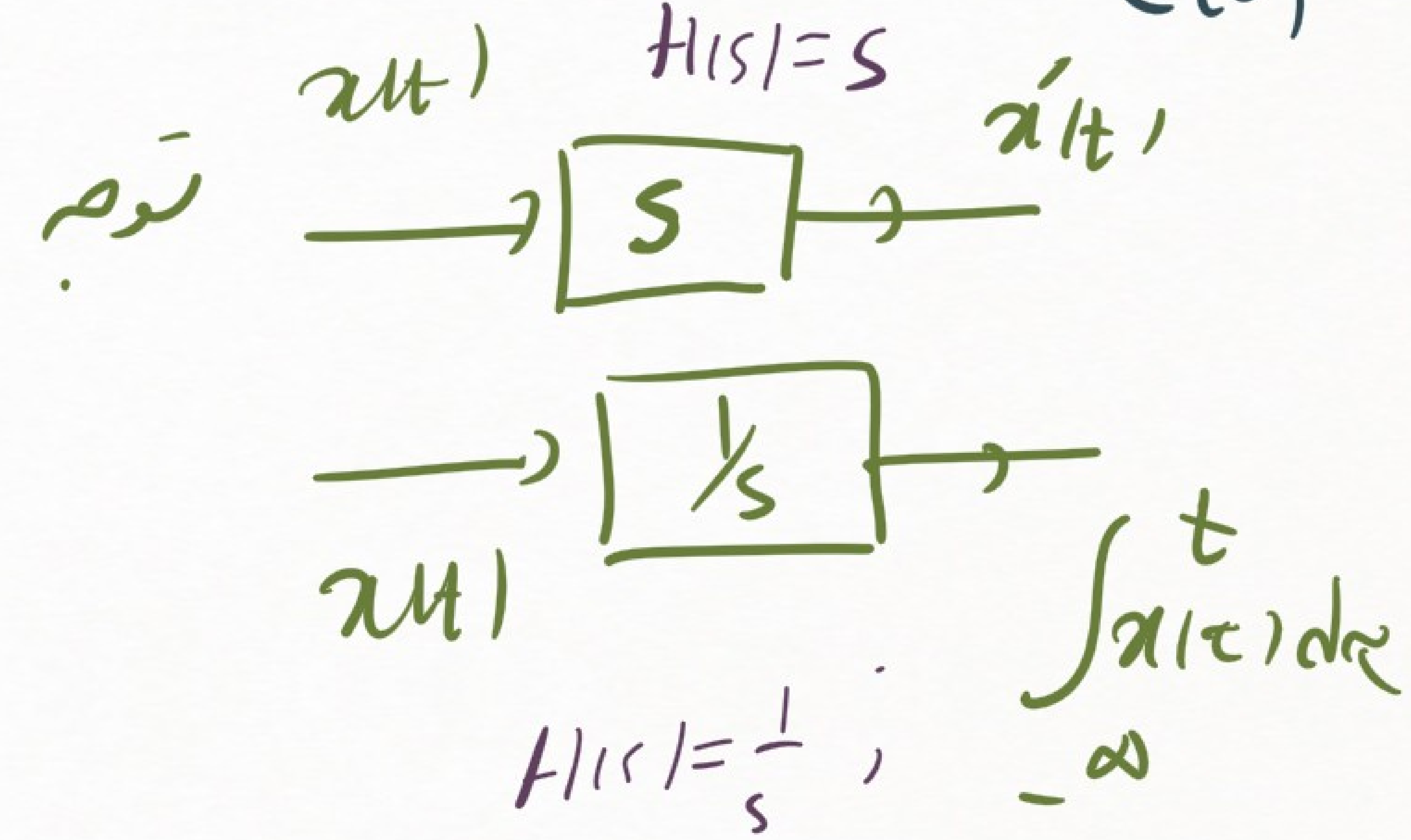
مثال 1- مدل سازی سیستم

$$H(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+3} = \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t) \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = x(t) - 3y(t) \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} \underbrace{(x(\tau) - 3y(\tau))}_{e(t)} d\tau$$





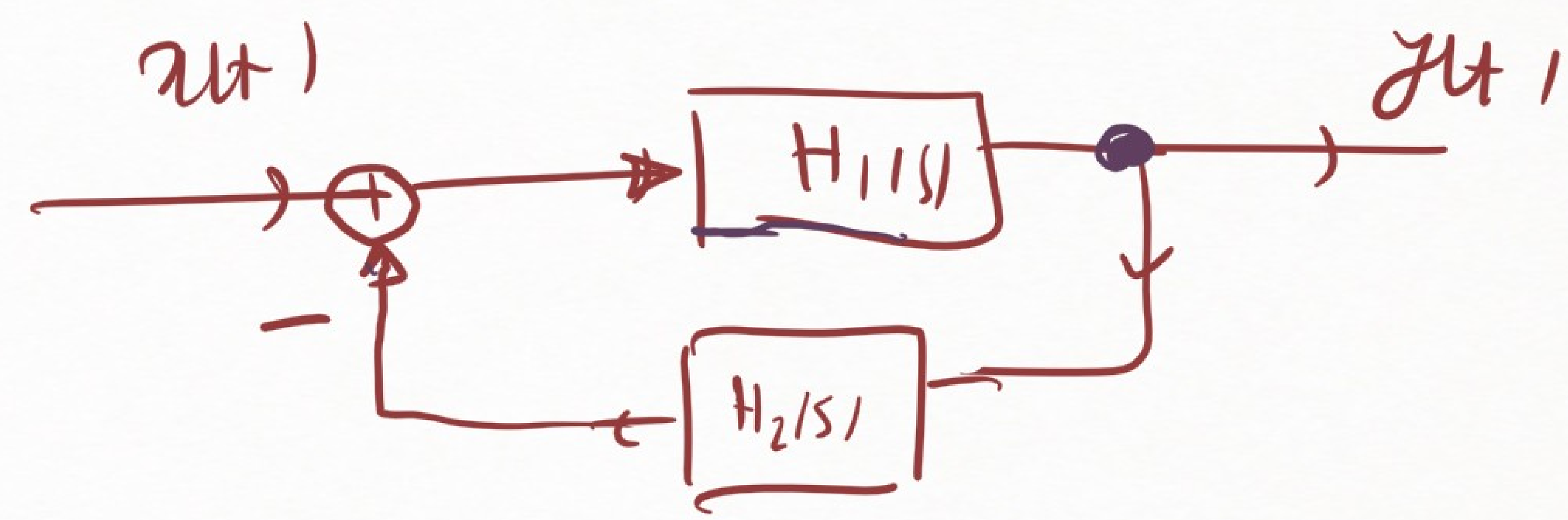


$$H(s) = \frac{1}{s+3} = \frac{1/s}{1+(1/s)3}$$

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s) \cdot H_2(s)} \equiv$$

برابر

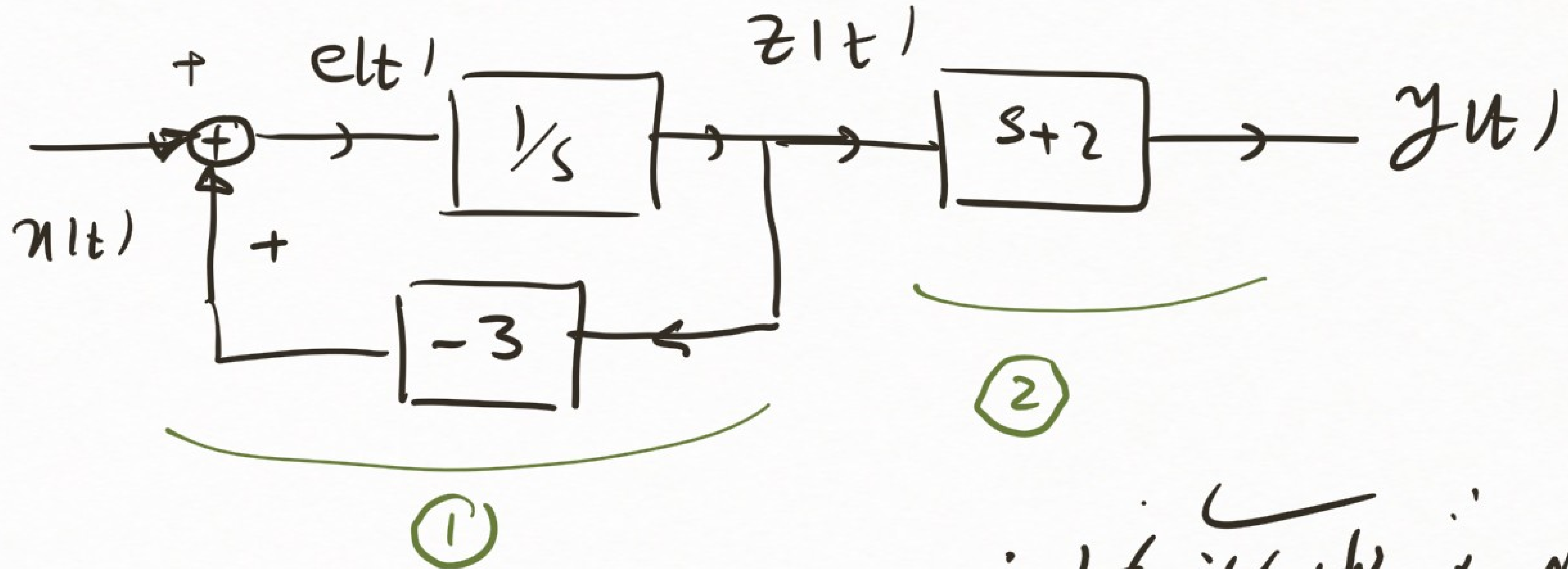
توجه: یک سیستم دارای فیدبک منفی:



$$H(s)=\frac{s+2}{s+3}$$

شکل ۲- مدل سازی تابع

$$H(s)=\frac{s+2}{s+3}=\underbrace{\frac{1}{s+3}}_{\text{تابع ①}}\ \underbrace{(s+2)}_{②\ \text{تابع}} \Rightarrow$$

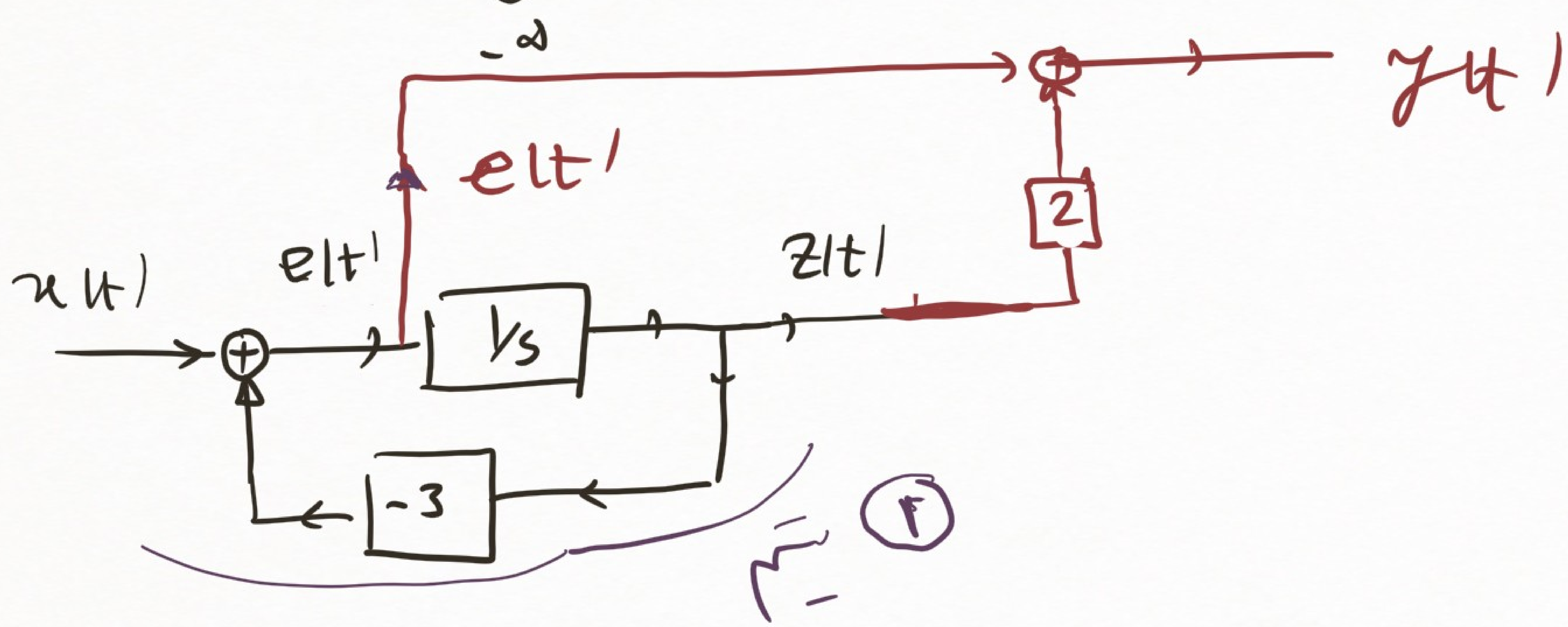


می توان مدل شبه نمایش را پیاده سازی نمود :

② تابع $\Rightarrow Y(s)=(s+2)Z(s)$

$$\begin{cases} y(t)=\dfrac{dz(t)}{dt}+2z(t) \\ z(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{t}e(\tau)\,d\tau \end{cases} \Longrightarrow y(t)=e(t)+2z(t)$$

حال این سیستم را مدل می کنیم :



مانند این شکل نشان میدهد در مدار میتوانیم .

مثال ۳ - مدل‌سازی

$$H(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

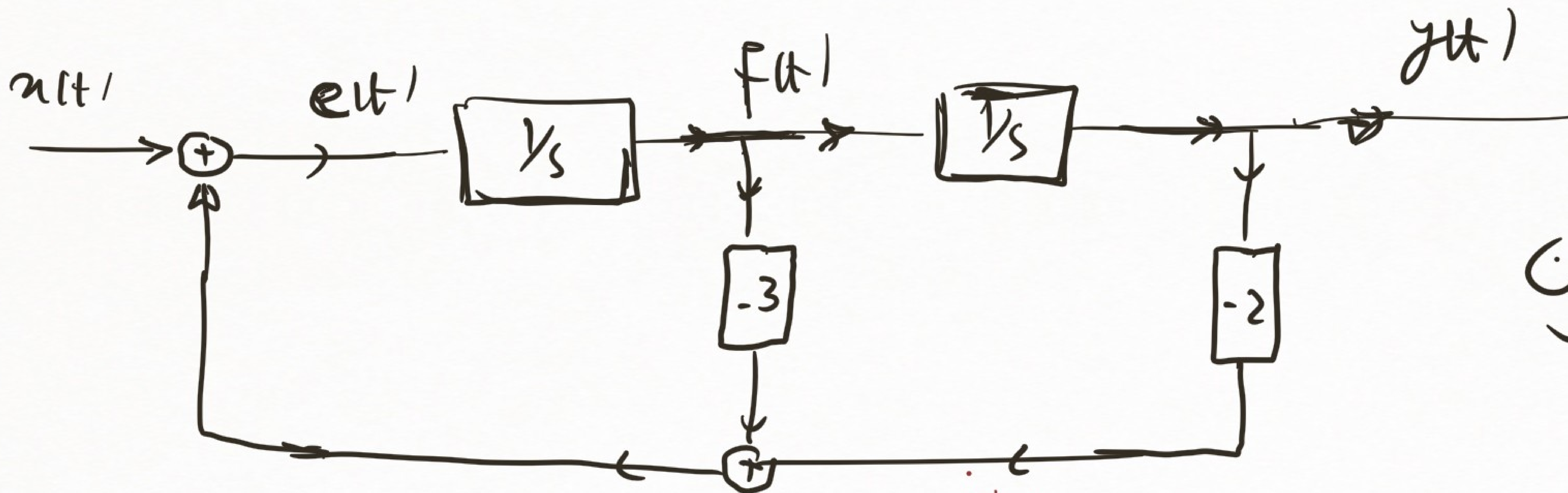
$\Rightarrow$

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x(t) \Rightarrow \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -3\frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) + x(t)$$

فرض کنیم

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} \\ e(t) = \dfrac{df(t)}{dt} = \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow e(t) = -3f(t) - 2y(t) + x(t)$$



* این سیستم است که تبدیل به نمودار بیان شد

مفهوم مشتق با استفاده از انتگرال‌گیر که حالا به جای آن

$1/s$ گذاشته می‌شود. (مفهوم مشتق)

$$\boxed{\tfrac{1}{s}} \Leftarrow \boxed{\int} \qquad \text{انتگرال‌گیر}$$

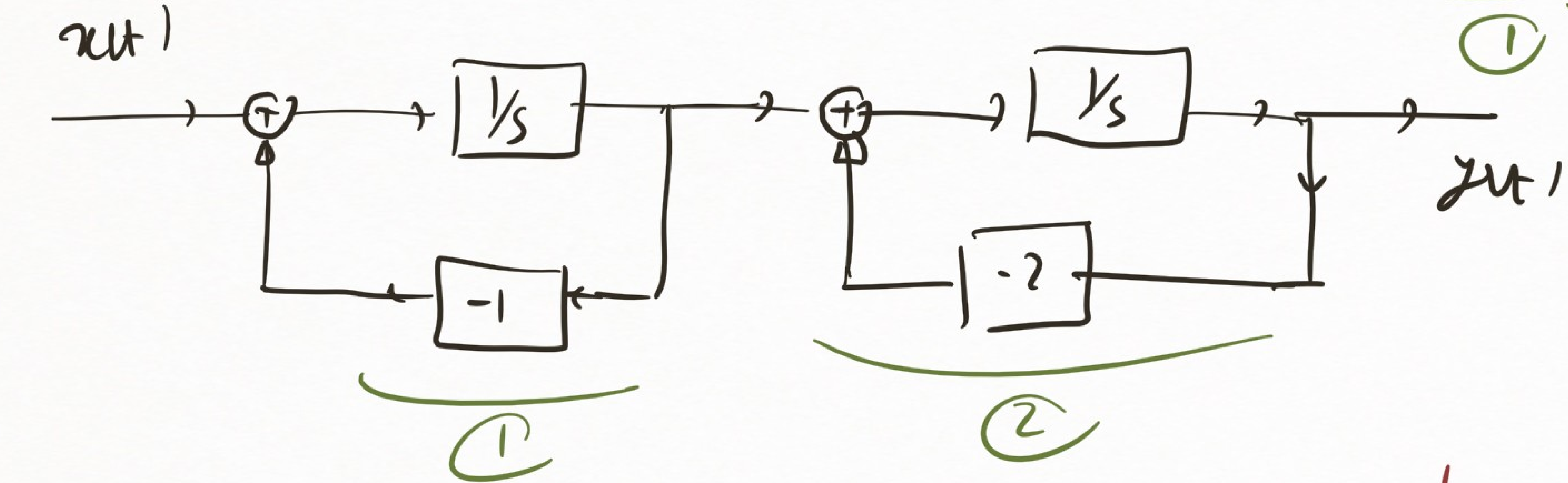
$$\boxed{s} \Leftarrow \boxed{\tfrac{d}{dt}} \qquad \text{مشتق‌گیر}$$

نتیجه مهم: هر مدل‌سازی مبتنی بر انتگرال‌گیر ؛

فرم سیستم → نوع I ، نوع II

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \underbrace{\left(\frac{1}{s+1}\right)}_{1}\underbrace{\left(\frac{1}{s+2}\right)}_{2}$$

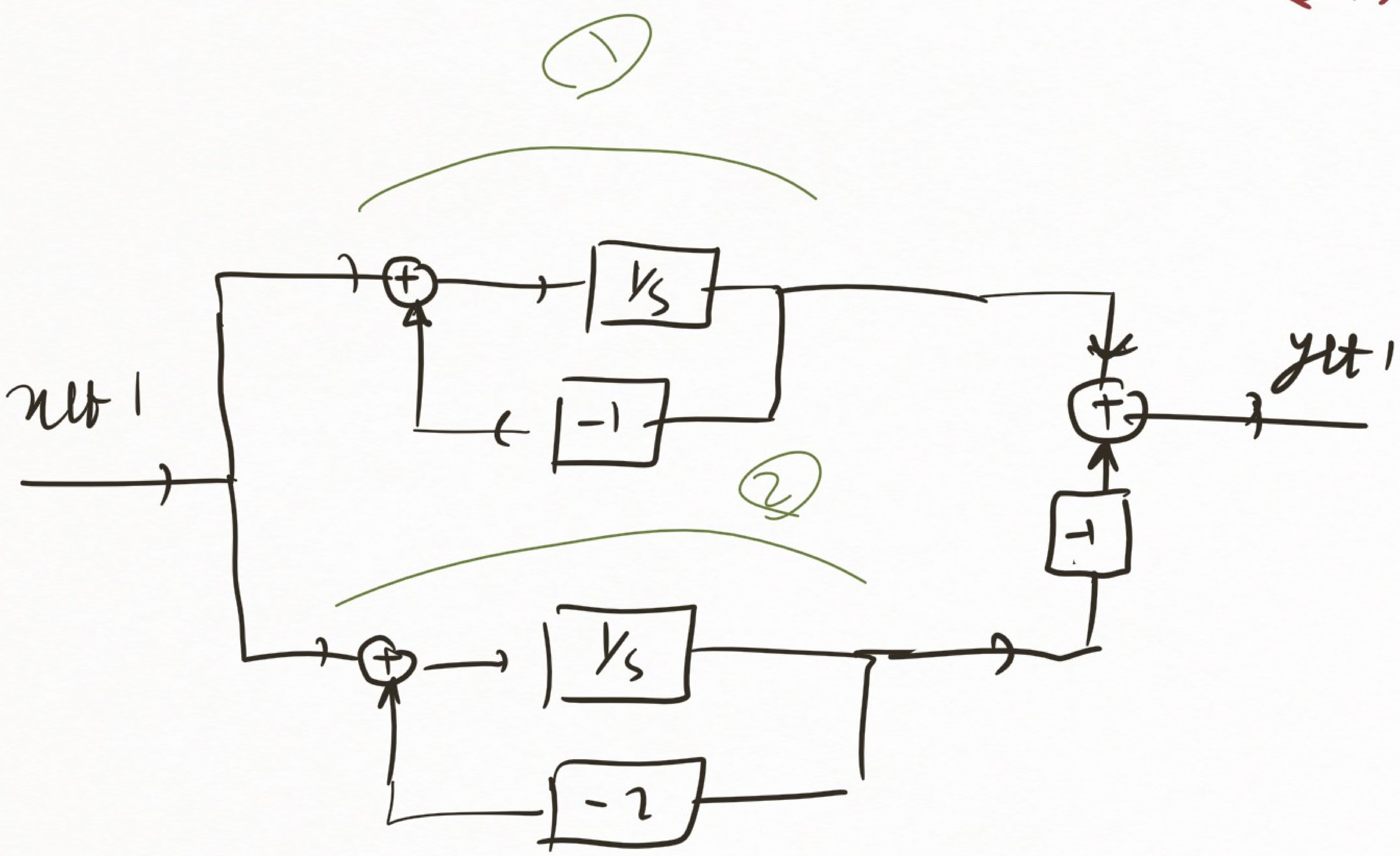
فرم سری :



دو سیستم را سری می‌نامیم .

$$H(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \underbrace{\frac{\cancel{A}^{\,-1}}{s+1}}_{1} + \underbrace{\frac{\cancel{B}^{\,1}}{s+2}}_{2}$$

فرم موازی :



دو سیستم را موازی می‌نامیم .

فرض کردیم { سیستم I
سیستم II

انواع مدل‌ها

سری

موازی

تمرین -

$$H(s)=\frac{2s^2+4s+6}{s^2+3s+2}$$

مدل سازی برای سیستم I و II ، به وسیله رسم نمایید.

تبدیل لاپلاس یکطرفه : برای آنالیز سیستم هایی که علّی و دارای شرایط اولیه می باشند مناسب است.

$$X(s)\triangleq\int_{0^-}^{\infty}x(t)e^{-st}dt$$

تبدیل لاپلاس یکطرفه و دوطرفه سیگنال هایی که برای $t\leq 0$ صفر می باشند یکی است. مثلا

$$x(t)=e^{-\alpha t}u(t)\longleftrightarrow X(s)=\frac{1}{s+\alpha}$$

یکطرفه و دوطرفه

مثال -

$$x(t)=e^{-\alpha(t+1)}u(t+1)\Longrightarrow \boxed{X(s)=\frac{e^{s}}{s+\alpha}}\ ,\ Re\{s\}>-\alpha$$

تبدیل دوطرفه

$$\underset{\text{یکطرفه}}{X(s)}=\int_{0^-}^{\infty}e^{-\alpha(t+1)}u(t+1)e^{-st}dt=\int_{0^-}^{\infty}e^{-\alpha}e^{-t(s+\alpha)}dt=\boxed{\frac{e^{-\alpha}}{s+\alpha}}$$

یکطرفه و دوطرفه ← یکسان نیستند

خواص تبدیل لاپلاس یکطرفه :

اکثر خواص تبدیل لاپلاس یکطرفه و دوطرفه مشابه می‌باشند اما خاصیت مهمی که با هم تفاوت دارند خاصیت مشتق‌گیری است.

تمرین - نشان دهید :

$$\begin{cases} x'(t) \xleftrightarrow{\text{دوطرفه}} sX(s) \\ x'(t) \xleftrightarrow{\text{یکطرفه}} sX(s) - x(0^-) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''(t) \xleftrightarrow{\text{دوطرفه}} s^2X(s) \\ x''(t) \xleftrightarrow{\text{یکطرفه}} s^2X(s) - s\,x(0^-) - x'(0^-) \end{cases}$$

از این خاصیت می‌توان برای حل معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه به کمک تبدیل لاپلاس استفاده کرد.

تمرین -

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x(t) \\ y(0^-) = 2 \;,\; y'(0^-) = 1 \end{cases}$$

با فرض $x(t) = u(t)$ خروجی $y(t)$ را پیدا کنید.

* با استفاده از تبدیل لاپلاس یکطرفه