جلسه هشتم

مثال یادآوری ($R(A)$ ؟

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R(A) \leq \min(m,n) = 2$

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \det(\cdot) = 1 \neq 0$

$\Longrightarrow \boxed{R(A) = 2}$

فصل سوم (فضاهای برداری)

میدان (field) :

یک میدان مجموعه ای از اسکالرهاست بطوریکه همراه با ۲ عمل جمع و ضرب، شرایط زیر را برآورده می سازد :

۱ـ برای هر اسکالر a و b متعلق به میدان F یک اسکالر متناظر a+b در F وجود دارد که مجموع a و b نامیده می شود.

۲- 〃 〃 a و b 〃 〃 F 〃 〃 ab در F

〃 که حاصل ضرب a و b نامیده می‌شود.

۳- برای هر اسکالر a، b و c متعلق به میدان F قوانین زیر برقرار باشند:

۱) $a+b=b+a \quad , \quad ab=ba$

۲) $(a+b)+c=a+(b+c) \quad , \quad (ab)c=a(bc)$

۳) $a(b+c)=ab+ac$

۴) $\forall a \in F \; , \; \exists\, 0 \in F \rightarrow a+0=a$

۵) $\forall a \in F \; , \; \exists\, 1 \in F \rightarrow a \times 1=a$

۶) $\forall a \in F \; , \; \exists\, b \in F \rightarrow a+b=0$

۷) $\forall a \in F \; , \; \exists\, b \in F \rightarrow ab=1$

مثال) $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{C}$ ، $\mathbb{Q}$ $\leftarrow$ میدان ✓

$\mathbb{Z}$ (مجموعه اعداد صحیح) $\leftarrow$ خیر!

$$B \in \mathbb{Z} \rightarrow \frac{1}{B} \notin \mathbb{Z}$$

فضای برداری

یک فضای برداری مانند V بر روی میدان F ، مجموعه‌ای از بردارهاست که با دو عمل جمع و ضرب شرایط زیر را برآورده سازد:

1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \longrightarrow u + v \in V$

2) $\forall \vec{u} \in V \;,\; \forall \underbrace{c}_{\text{اسکالر}} \in F \longrightarrow cu \in V$

3) $\forall u, v \in V \longrightarrow u + v = v + u$

4) $\forall u, v, w \in V \longrightarrow u + (v + w) = (u + v) + w$

5) $\forall u \in V \;,\; \exists \vec{0} \in V \longrightarrow u + 0 = 0 + u$

۶) $\forall u \in V,\ \exists\, -u \in V \rightarrow u+(-u)=(-u)+u = 0$

۷) $\forall u, v \in V,\ \forall \underset{\text{اسکالر}}{a, b} \in F$

$$\rightarrow (a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$$

$$a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$

۸) $\forall u \in V,\ \forall a, b \in F \rightarrow a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$

۹) $\forall u \in V,\ \exists 1 \in F \rightarrow 1u = u$

مثال) ثابت کنید مجموعه R^n که شامل تمام بردارهای n تایی به شکل $u=[u_1, u_2, \ldots, u_n]$ است بر روی میدان R تشکیل یک فضای برداری می دهند.

شرط ۱) $\forall u, v \in R^n \rightarrow u+v = [u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n] \in R^n$ ✓

۲ شرط) $\forall u \in R^n, \forall c \in R$

$$\to cu = [cu_1, \dots, cu_n] \in R^n$$

۳ شرط) $u+v = [u_1+v_1, \dots, u_n+v_n]$

$$= [v_1+u_1, \dots, v_n+u_n] = v+u$$

۴ شرط) $u+(v+w) =$

$$[u_1, \dots, u_n] + [v_1+w_1, \dots, v_n+w_n]$$

$$= [u_1+(v_1+w_1), \dots, u_n+(v_n+w_n)]$$

$$= [(u_1+v_1)+w_1, \dots, (u_n+v_n)+w_n]$$

$$= [u_1+v_1, \dots, u_n+v_n] + [w_1, \dots, w_n]$$

$$= (u+v) + w \quad \checkmark$$

8 شرط) $\vec{u} + \vec{0} = [u_1+0, \dots, u_n+0]$

$$= [0+u_1, \dots, 0+u_n] = \vec{0} + \vec{u} \quad \checkmark$$

7 شرط) $u + (-u) = [u_1 + (-u_1), \dots, u_n + (-u_n)]$

$$= [0, \dots, 0] = [(-u_1)+u_1, \dots, (-u_n)+u_n] \quad \checkmark$$

۷ الف) $(a+b)\vec{u} = (a+b)[u_1, \dots, u_n]$

$= [(a+b)u_1, \dots, (a+b)u_n]$

$= [au_1 + bu_1, \dots, au_n + bu_n]$

$= [au_1, \dots, au_n] + [bu_1, \dots, bu_n]$

$= a\vec{u} + b\vec{u}$ ✓

ب) $a(\vec{u}+\vec{v}) = a[u_1+v_1, \dots, u_n+v_n]$

$= [a(u_1+v_1), \dots, a(u_n+v_n)]$

$= [au_1 + av_1, \dots, au_n + av_n]$

$$= [au_1, \dots, au_n] + [av_1, \dots, av_n]$$

$$= a\vec{u} + a\vec{v} \quad \checkmark$$

بند ۸) $(ab)u = (ab)[u_1, \dots, u_n]$

$$= [(ab)u_1, \dots, (ab)u_n]$$

$$= [a(bu_1), \dots, a(bu_n)]$$

$$= a(b\vec{u}) \quad \checkmark$$

بند ۹) $1\vec{u} = 1[u_1, \dots, u_n]$

$\checkmark \quad = [1u_1, \dots, 1u_n] = [u_1, \dots, u_n] = \vec{u}$

مثال) ثابت کنید مجموعه P_K که شامل تمام چندجمله‌ای‌های است که به فرم زیر می‌باشد بر روی میدان R تشکیل یک فضای برداری می‌دهد.

$$P(x) = P_0 + P_1 x + \cdots + P_K x^K$$

$$(P_0, P_1, \ldots, P_K \in R \quad , \quad K \in N)$$

زیر فضای برداری (subspace)

فرض کنیم V یک فضای برداری بر روی میدان F،

S یک زیر مجموعه غیر تهی از V باشد. S را یک

زیرفضا از V می‌نامند هرگاه:

$$1) \ \forall s, t \in S \rightarrow s + t \in S$$

۲) $\forall \vec{s} \in S, \forall a \in F \rightarrow a\vec{s} \in S$

اسکالر

مثال) نشان دهید در فضای برداری دوبعدی R^2 ، هر خط راستی که از مبدأ عبور کند یک زیرفضای برداری از R^2 است

$$S = \{(x,y) \in R^2 : \underline{ax+by=0}\}$$

1) $(x,y) \in S \rightarrow ax+by=0$

$(u,v) \in S \rightarrow au+bv=0$

$$\xRightarrow{\text{جمع}} a\underbrace{(x+u)}_{X} + b\underbrace{(y+v)}_{Y} = 0$$

$$aX + bY = 0 \quad \checkmark$$

۲) $(x,y) \in S \rightarrow ax+by=0$

$$a\underbrace{(cx)}_{X} + b\underbrace{(cy)}_{Y} = 0$$

$$aX + bY = 0 \quad \checkmark$$

مثال) آیا مجموعه S یک زیرفضا از $M_{2\times 2}(R)$ است؟!

تمام ماتریس های ۲x۲ با درایه‌های حقیقی

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \text{ تمام ماتریس های به فرم } \right\}$$

حل) ۱) $\forall A,B \in S \rightarrow A+B \in S$

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & a_{12}+b_{12} \\ 0 & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix}$$

$\times$:

خیر زیرفضا از $M_{2\times 2}$ نیست.

زیرفضای ستون های یک ماتریس :

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

ستون

$$\longrightarrow C(A) = \left\{ \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n \right\}$$

ترکیب خطی از ستون های ماتریس $\equiv$ زیرفضای ستون های یک ماتریس

مثال) ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۳ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ در نظر بگیرید.

آیا $C(A)$ یک زیرفضا از $R^۳$ است؟!

$$C(A) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۴ \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \right\}$$

$$۱)\ \forall A, B \in S \longrightarrow A + B \in S$$

$$\alpha \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۴ \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + ۳\beta \\ ۲\alpha + ۳\beta \\ ۴\alpha + \beta \end{bmatrix} \in C(A)$$

$$\gamma \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۴ \end{bmatrix} + \varphi \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma + ۳\varphi \\ ۲\gamma + ۳\varphi \\ ۴\gamma + \varphi \end{bmatrix} \in C(A)$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} \overbrace{(\alpha+\gamma)}^{m} + 3(\beta+Q) \\ 2(\alpha+\gamma) + 3(\beta+Q) \\ 4(\alpha+\gamma) + \underbrace{(\beta+Q)}_{n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m+3n \\ 2m+3n \\ 4m+n \end{bmatrix} \in C(A) \checkmark$$

2) $\forall A \in S,\ \forall c \in R \longrightarrow cA \in S$

$$c \begin{bmatrix} \alpha+3\beta \\ 2\alpha+3\beta \\ 4\alpha+\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{c\alpha}^{K} + 3(\overbrace{c\beta}^{L}) \\ 2(c\alpha)+3(c\beta) \\ 4(c\alpha)+(c\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K+3L \\ 2K+3L \\ 4K+L \end{bmatrix} \in C(A) \checkmark$$

لذا $C(A)$ یک زیرفضا از فضای برداری R^3 است.