یا لطیف

تمرین سری ۴ سیگنال سیستم

① تبدیل فوریه سیگنال های زیر را بیابید؟

a) $(\frac{1}{2})^{n-1} u[n]$

یادآوری :
$$\begin{cases} \text{رابطه سنتز} : \quad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ \text{رابطه آنالیز} : \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \end{cases}$$

$$x[n] = (\tfrac{1}{2})^{n-1} u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^{n-1} e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^{n} (\tfrac{1}{2})^{-1} e^{-j\omega n} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^{n} e^{-j\omega n} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2} e^{-j\omega})^{n} = 2 \left[\frac{(\frac{1}{2} e^{-j\omega})^0 - (\frac{1}{2} e^{-j\omega})^{\infty+1}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}} \right]$$

$$= 2 \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}} \right] = \frac{2}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

b) $x[n] = (\frac{1}{2})^{|n-1|}$

می‌دانیم : if $x[n] = a^{|n|}, \ |a| < 1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\omega + a^2}$

$$\hookrightarrow x[n] = (\tfrac{1}{2})^{|n|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = \frac{1 - (\frac{1}{2})^2}{1 - 2(\frac{1}{2})\cos\omega + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \cos\omega + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4} - \cos\omega}$$

$$\xrightarrow{n \to n-1} \quad x[n] = (\tfrac{1}{2})^{|n-1|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \times \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4} - \cos\omega}$$

c) $x[n] = \delta[n-1] + 2\delta[n+2] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} + 2e^{2j\omega}$

یادآوری : $\delta[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$

d) $x[n] = (\frac{1}{2})^{-n} u[-n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = ?$

$$(\tfrac{1}{2})^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\tfrac{1}{2})^n u[n] = \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2} e^{-j\omega})^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^{n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \Rightarrow \text{if } x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{-j\omega})$$

$$\Rightarrow x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}$$

$$\Rightarrow x[-n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{j\omega n_0} X(e^{-j\omega}) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{j\omega} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}$$

e) $$x[n] = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \left[\frac{\pi}{j}\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{j}\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)\right] + \left[\pi\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)\right]$$

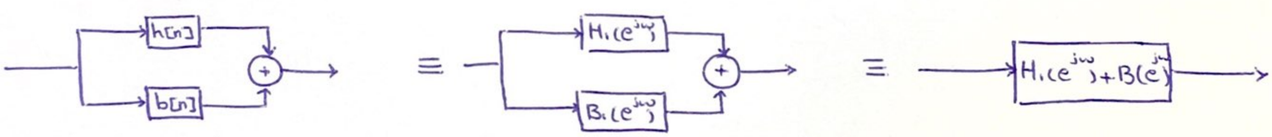
متناوب با دوره 2π *

یادآوری:

$$\begin{cases} \cos\omega_0 n \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\{\delta(\omega-\omega_0-2\pi l) + \delta(\omega+\omega_0-2\pi l)\right\} \\ \sin\omega_0 n \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\{\delta(\omega-\omega_0-2\pi l) - \delta(\omega+\omega_0-2\pi l)\right\} \end{cases}$$

---

2) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ با یک سیستم LTI دیگر با پاسخ ضربه $b[n]$ موازی شده است. پاسخ فرکانسی کل سیستم عبارت است از: $H(e^{j\omega}) = \frac{-12+5e^{j\omega}}{12-7e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}}$ ، $b[n]$ را بیابید.



$$\text{if } h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} \Rightarrow H(e^{j\omega}) + B(e^{j\omega}) = \frac{-12+5e^{j\omega}}{12-7e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}}$$

$$B(e^{j\omega}) = \frac{-12+5e^{j\omega}}{12-7e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} = \frac{-2}{1-\frac{1}{6}e^{-j\omega}} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} b[n] = -2\left(\frac{1}{6}\right)^n u[n]$$

---

3) سیستم LTI علی و پایدار که با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ توسط معادله تفاضلی مرتبه دوم زیر به هم مربوط می‌شوند. a) پاسخ فرکانسی سیستم؟ b) پاسخ ضربه سیستم؟

$$y[n] - \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{6}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} - \frac{1}{6}Y(e^{j\omega})e^{-j2\omega} = X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) \cdot \left[1 - \frac{1}{6}e^{-j\omega} - \frac{1}{6}e^{-j2\omega}\right] = X(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1-\frac{1}{6}e^{-j\omega}-\frac{1}{6}e^{-j2\omega}}$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} = \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$$A = \left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)H(e^{j\omega})\Big|_{e^{j\omega}=-\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}, \quad B = \left(1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)H(e^{j\omega})\Big|_{e^{j\omega}=+\frac{1}{3}} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{3/5}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{2/5}{1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} h[n] = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

(4) سیستم LTI و پایدار که دارای خاصیت $\left(\frac{4}{5}\right)^n u[n] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow n\left(\frac{4}{5}\right)^n u[n]$ است.

a) پاسخ فرکانسی ؟ b) معادله تفاضلی ارتباط دهنده ورودی و خروجی.

a) $\begin{cases} \text{if } x[n] = \left(\frac{4}{5}\right)^n u[n] \\ \\ \text{if } y[n] = n\left(\frac{4}{5}\right)^n u[n] \end{cases} \Rightarrow h[n] = ?$

$$x[n] = \left(\frac{4}{5}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}}$$

$$y[n] = n\left(\frac{4}{5}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega}) = j\frac{d X(e^{j\omega})}{d\omega} = j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}}\right) = \frac{\frac{4}{5}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}\right)^2}$$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{4/5\, e^{-j\omega}}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}}$$

b) $$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\frac{4}{5}e^{-j\omega}}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}} \Rightarrow \frac{4}{5}e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) - \frac{4}{5}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega}$$

$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{4}{5}x[n-1] = y[n] - \frac{4}{5}y[n-1]$$

---

(5) یک سیستم LTI زمان گسسته در زمان با پاسخ ضربه زیر را در نظر بگیرید: $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

با استفاده از خواص تبدیل فوریه، پاسخ این سیستم را به سیگنال های ورودی زیر بیابید ؟

a) $x_1[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$

b) $x_2[n] = (n+1)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}, \quad X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}}, \quad X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2}$$

$X_1(e^{j\omega}) \longrightarrow \boxed{H_1} \longrightarrow Y_1(e^{j\omega})$

$$Y_1(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \times \frac{1}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}} = \frac{-2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{3}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}}$$

$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} y_1[n] = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

$X_2(e^{j\omega}) \longrightarrow \boxed{H_2} \longrightarrow Y_2(e^{j\omega})$

$$Y_2(e^{j\omega}) = X_2(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{-2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{-3}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2}$$

$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} y[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 3(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

۶) سیستم LTI علی توصیف شونده با معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید: $y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$

a) پاسخ فرکانسی سیستم؟ b) پاسخ این سیستم به ورودی های زیر

$$x_1[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(e^{j\omega})=\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$x_2[n]=\delta[n]-\frac{1}{2}\delta(n-1) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(e^{j\omega})=1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}$$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega})+\frac{1}{2}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega}) \Rightarrow Y(e^{j\omega})\cdot\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)=X(e^{j\omega})$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$Y_1(e^{j\omega})=X_1(e^{j\omega})H(e^{j\omega})=\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\times\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}$$

$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} y_1[n]=n\left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n]$$

$$Y_2(e^{j\omega})=X_2(e^{j\omega})H(e^{j\omega})=\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\times\left[1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right]=-1+\frac{2}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} y_2[n]=-\delta[n]+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n]$$

---

۷) سیستمی از اتصال سری دو سیستم LTI با پاسخ فرکانسی زیر تشکیل شده است.

a) معادله دیفرانس توصیف کننده سیستم؟ b) پاسخ ضربه سیستم کل؟

$$H_1(e^{j\omega})=\frac{2-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}, \quad H_2(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}+\frac{1}{4}e^{-j2\omega}} \quad \longrightarrow\boxed{H_1(e^{j\omega})}\longrightarrow\boxed{H_2(e^{j\omega})}\longrightarrow$$

$$\equiv \longrightarrow\boxed{H_1(e^{j\omega})\cdot H_2(e^{j\omega})}\longrightarrow \quad \equiv \longrightarrow\boxed{h_1[n]*h_2[n]}\longrightarrow$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{2-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}+\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}=\frac{2-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{8}e^{-j3\omega}}=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega})+\frac{1}{8}Y(e^{j\omega})e^{-j3\omega}=2X(e^{j\omega})-e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} y[n]+\frac{1}{8}y[n-3]=-x[n-1]+2x[n]$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{2-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{8}e^{-j3\omega}}=\frac{4/3}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{(1+j\sqrt{3})/3}{1-\frac{1}{2}e^{j120}e^{-j\omega}}+\frac{(1-j\sqrt{3})/3}{1-\frac{1}{2}e^{-j120}e^{-j\omega}} \xleftrightarrow{\mathcal{F}}$$

$$h[n]=\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{1+j\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}e^{j120}\right)^n u[n]+\frac{1-j\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}e^{-j120}\right)^n u[n]$$