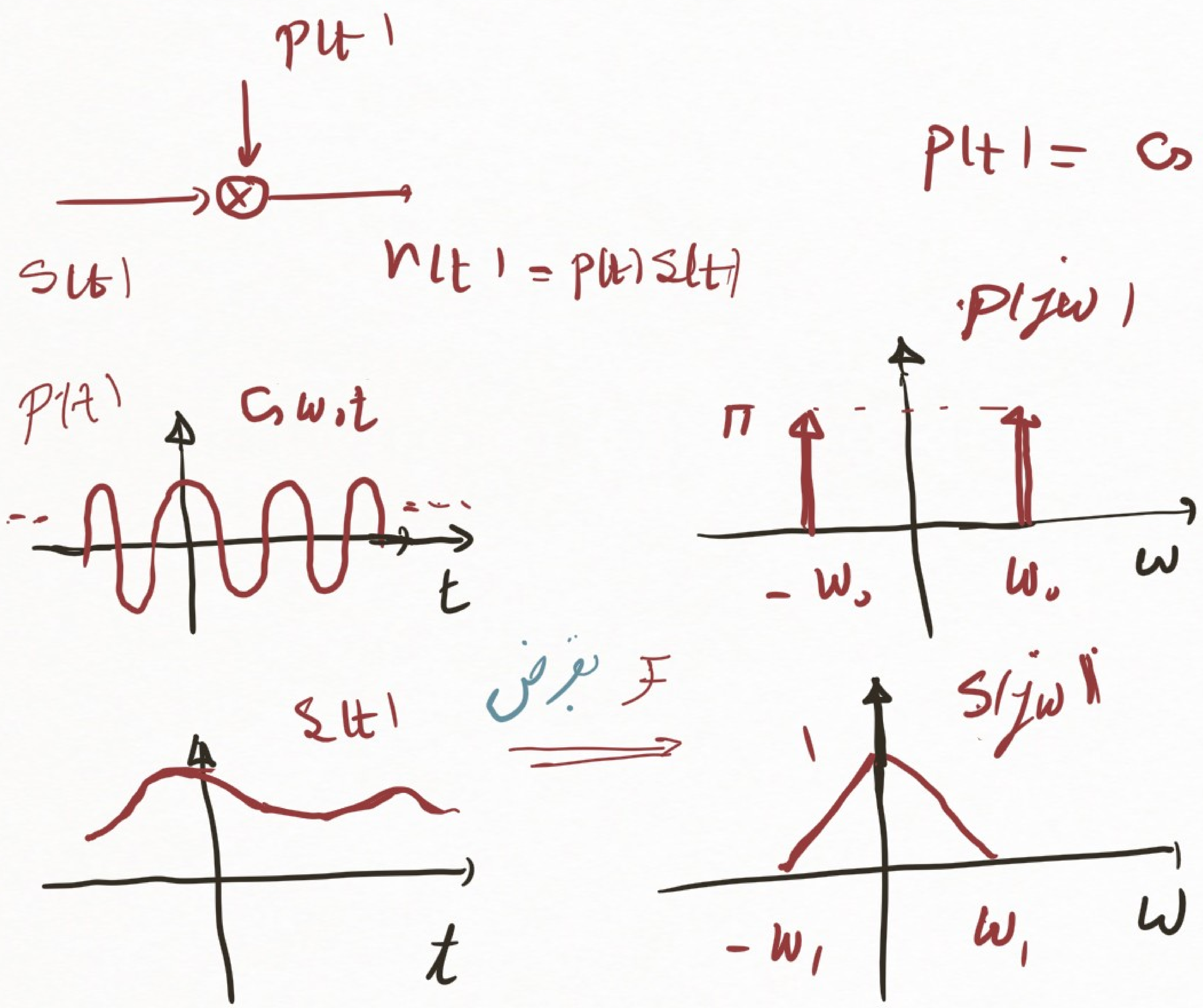
خاصیت ضرب (مدولاسیون):

$$r(t)=s(t).p(t) \xleftrightarrow{F} R(j\omega)=\frac{1}{2\pi}S(j\omega)*P(j\omega)$$

نتیجه: قبلا دیدیم که اگر دو سیگنال در حوزه زمان کانولوشن شوند در حوزه فرکانس (استدلال برعکس) با هم ضرب شده اند. حال می توان از خاصیت دوگانی نتیجه گرفت که اگر دو سیگنال در حوزه زمان در هم ضرب گردند در حوزه فرکانس با هم کانولوشن می شوند.

مثال:



$$p(t)=\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{F} P(j\omega)=\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

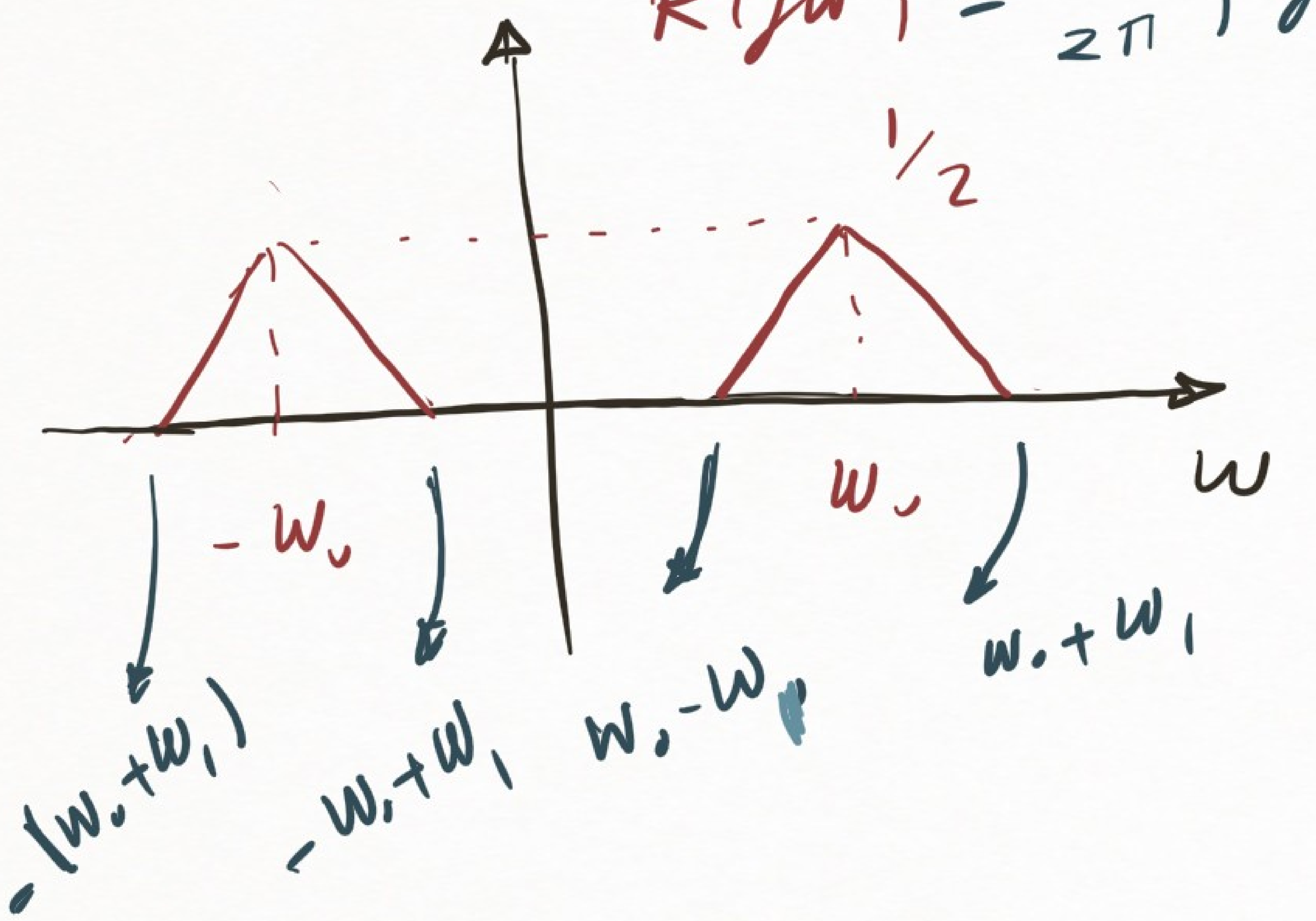
$$R(j\omega)=\frac{1}{2\pi}P(j\omega)*S(j\omega)$$

$$R(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)\right]*S(j\omega)$$

$$R(j\omega)=\frac{1}{2}\left[S(j(\omega+\omega_0))+S(j(\omega-\omega_0))\right]$$

یعنی تبدیل فوریه $R(j\omega)$ برابر با shift یافته تبدیل $S(j\omega)$ به اندازه ω_0 و $-\omega_0$ است که در ضریب $\frac{1}{2}$ نیز ضرب شده است.

$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} P(j\omega) * S(j\omega) = \frac{1}{2}\left[S(j(\omega-\omega_0)) + S(j(\omega+\omega_0))\right]$$



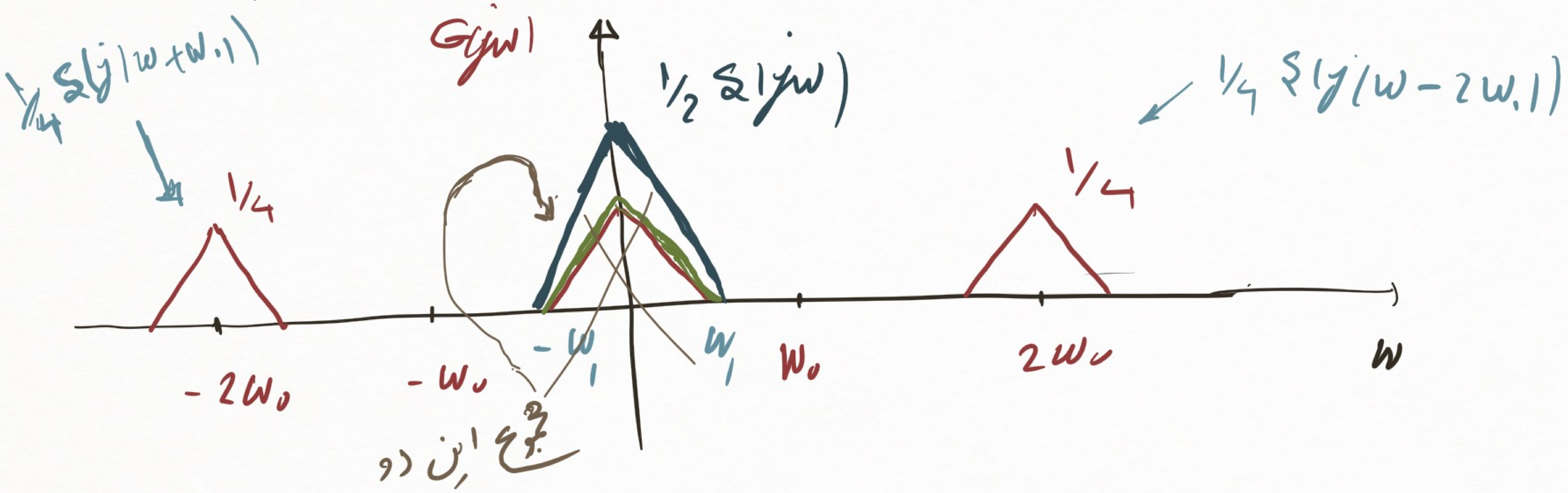
شکل - حالا مقادیر را

$g(t) = r(t)\,p(t)$ می‌سازیم.

$$g(t) = r(t)\cdot p(t) \longleftrightarrow G(j\omega) = \frac{1}{2\pi} R(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{S(j(\omega-\omega_0)) + S(j(\omega+\omega_0))}{2}\right] * \pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$$

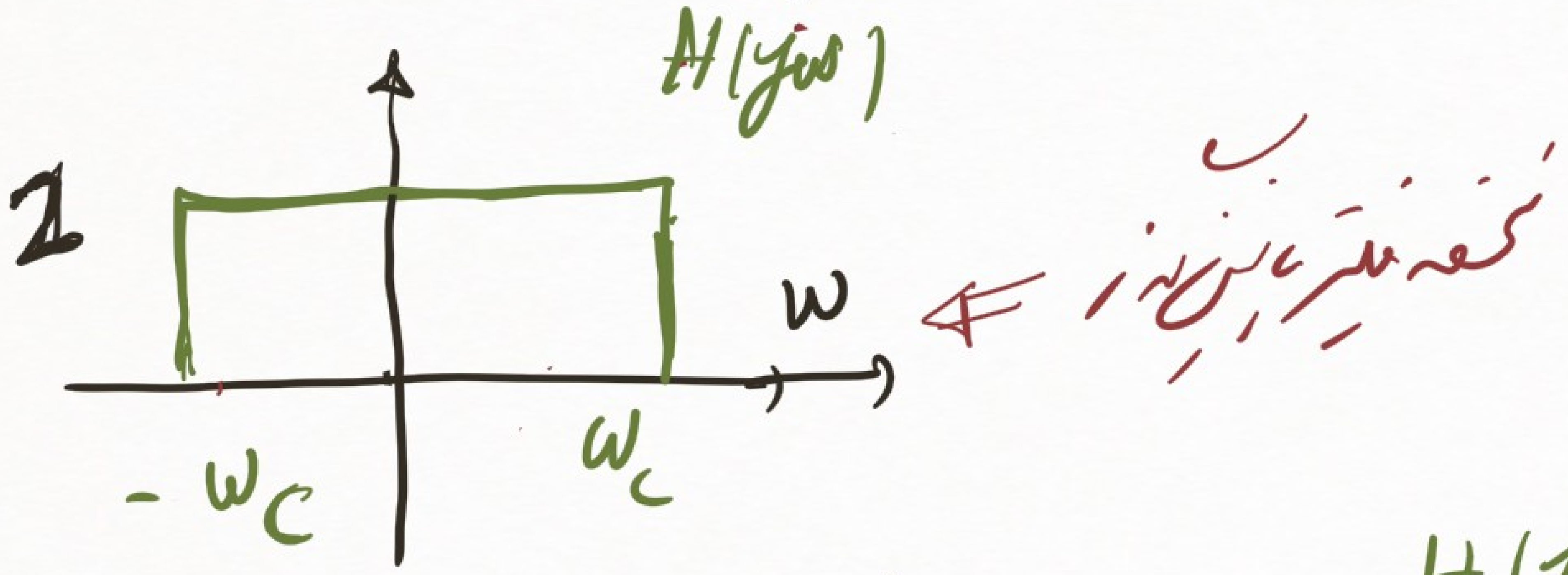
پس بنابراین :

$$\boxed{G(j\omega) = \frac{1}{4}\left(S(j\omega) + S(j(\omega-2\omega_0)) + S(j(\omega+2\omega_0)) + S(j\omega)\right)}$$

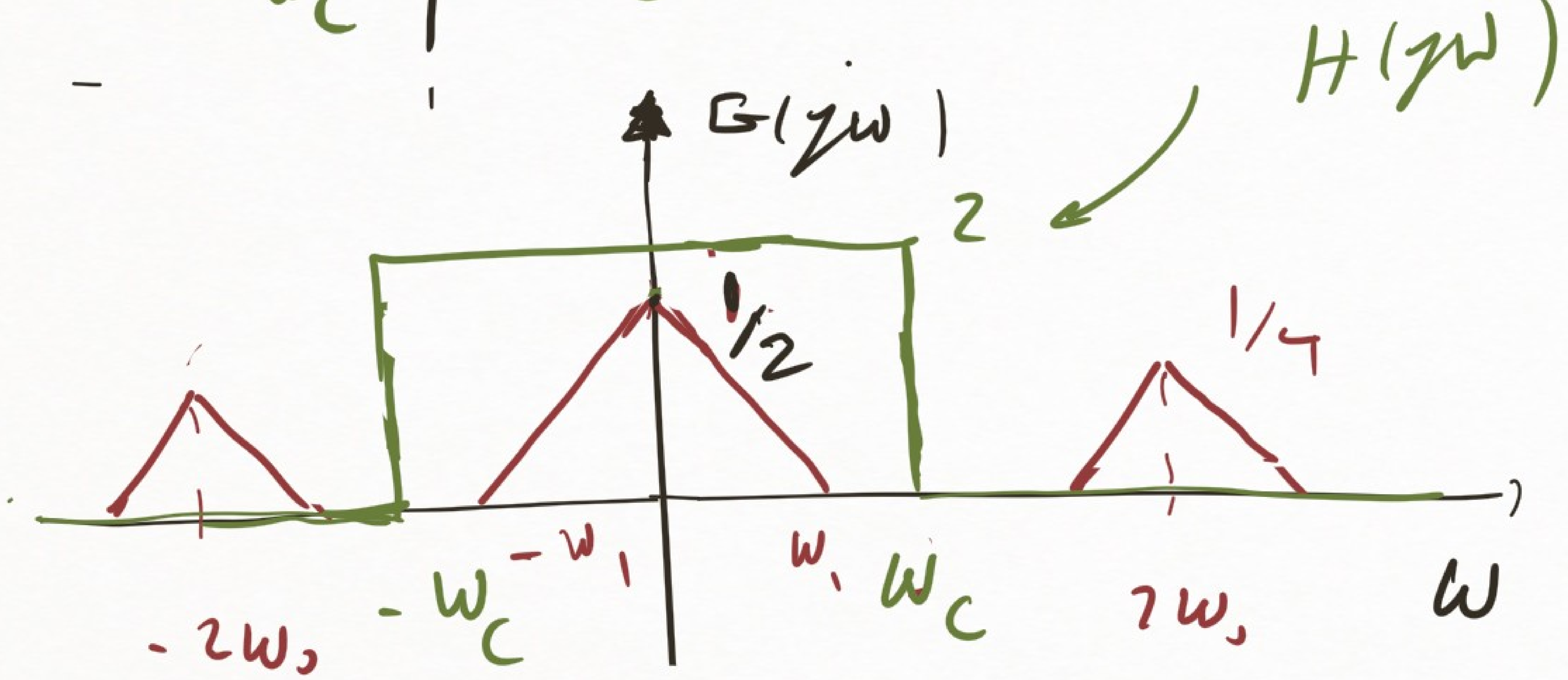


حال در مثال بالا از $G(j\omega)$ ، $S(j\omega)$ را بیابیم:

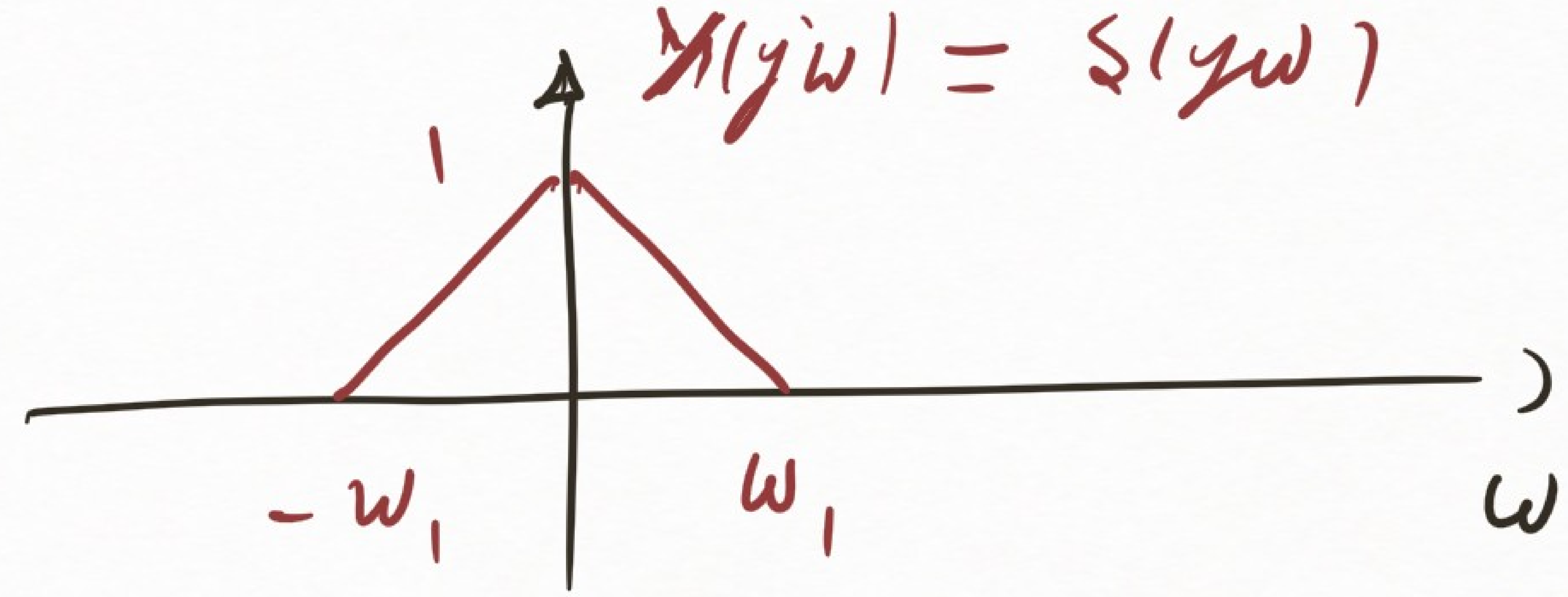
می‌توانیم $G(j\omega)$ را از یک فیلتر پایین‌گذر عبور دهیم.



$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) \Longrightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$



$\Longrightarrow$



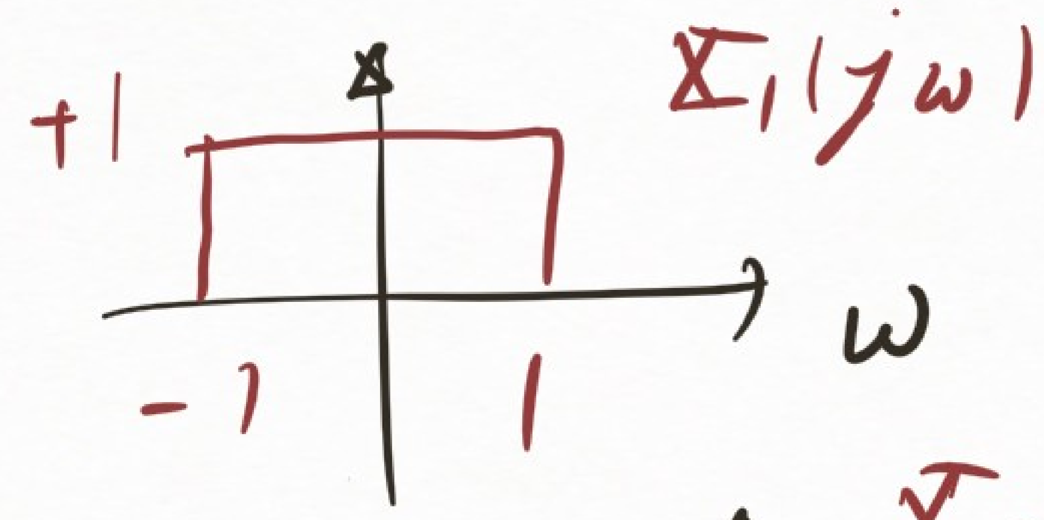
$$x(t) = \frac{\sin(t)\sin(t/2)}{\pi t^2} \Longrightarrow X(j\omega) = ?$$

حل:

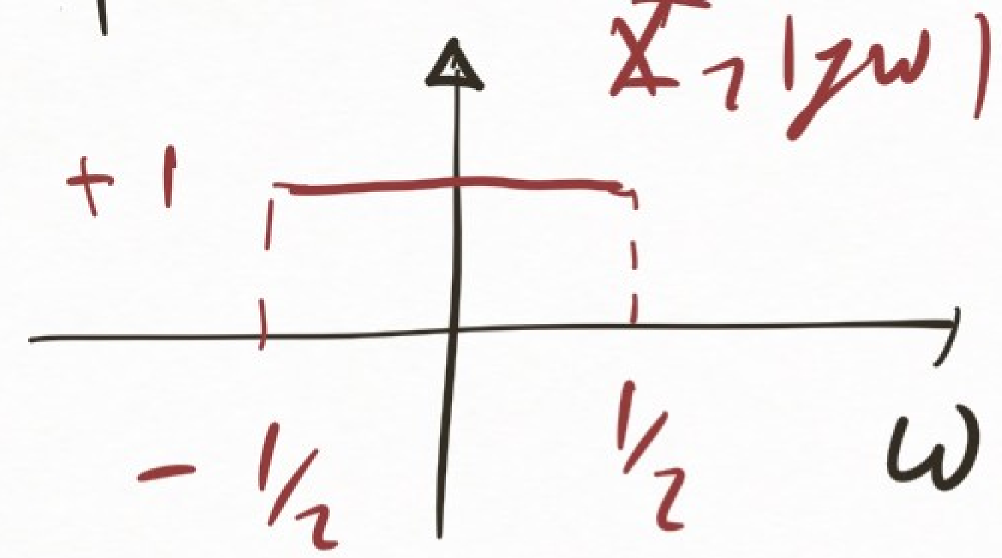
$$x(t) = \pi \underbrace{\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)}_{x_1(t)} \underbrace{\left(\frac{\sin(t/2)}{\pi t}\right)}_{x_2(t)} \overset{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega) = \frac{1}{2\cancel{\pi}}\left[\cancel{\pi}\, X_1(j\omega) * X_2(j\omega)\right]$$

یعنی تبدیل فوریه $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را باید با هم کانوالو کنیم.

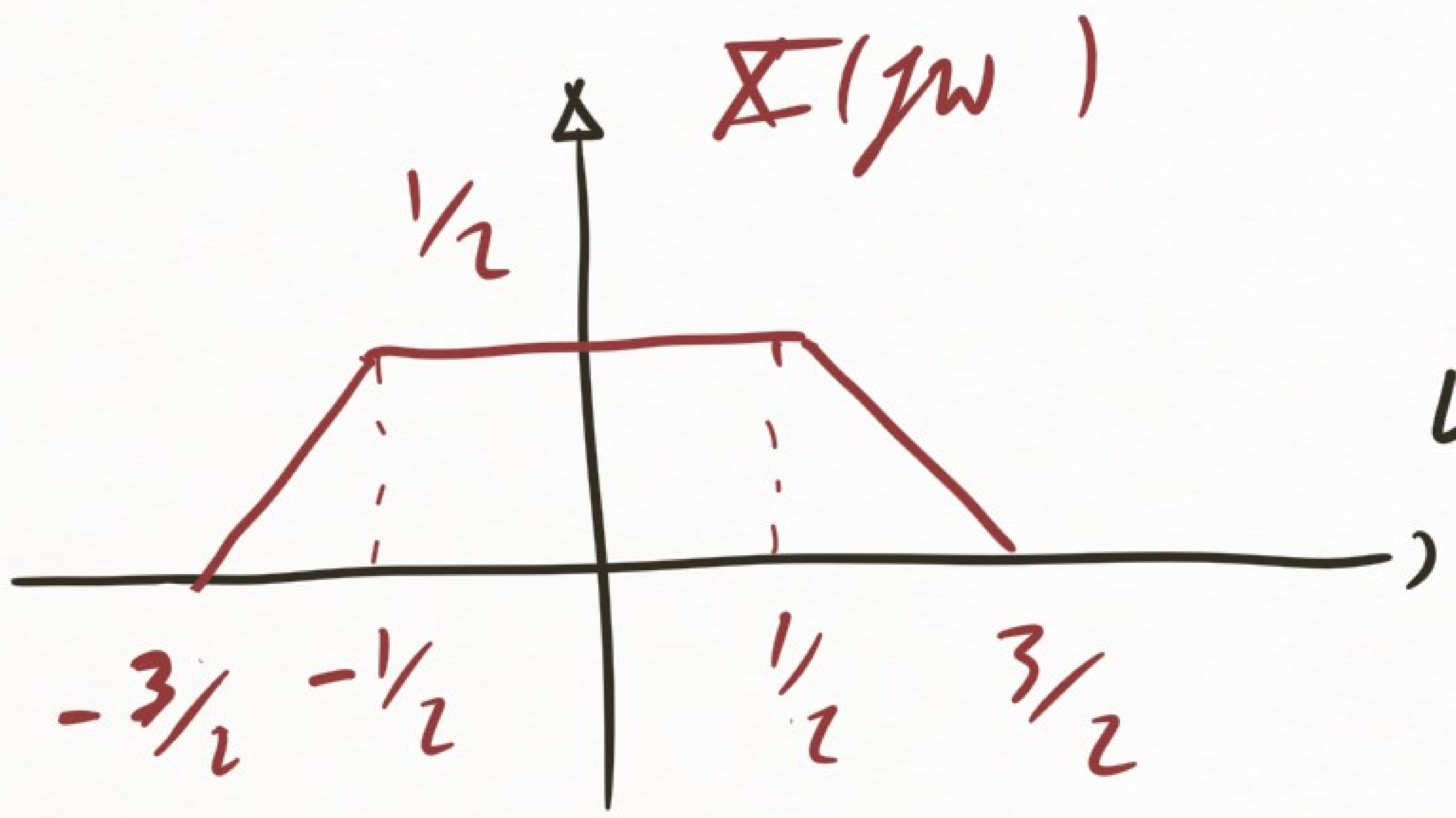
$$x_1(t) = \frac{\sin(t)}{\pi t} \longleftrightarrow$$



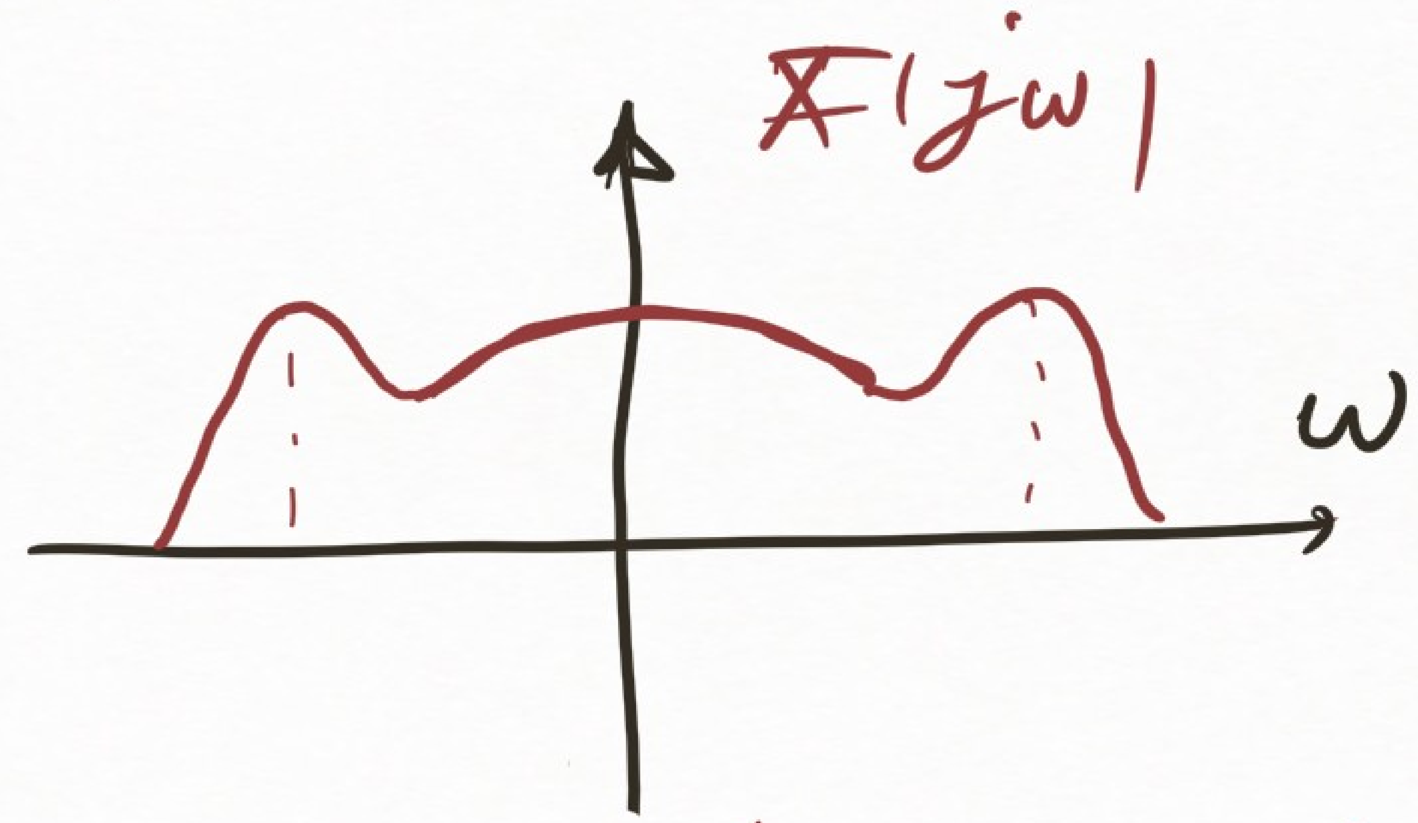
$$x_2(t) = \frac{\sin(t/2)}{\pi t} \longleftrightarrow$$



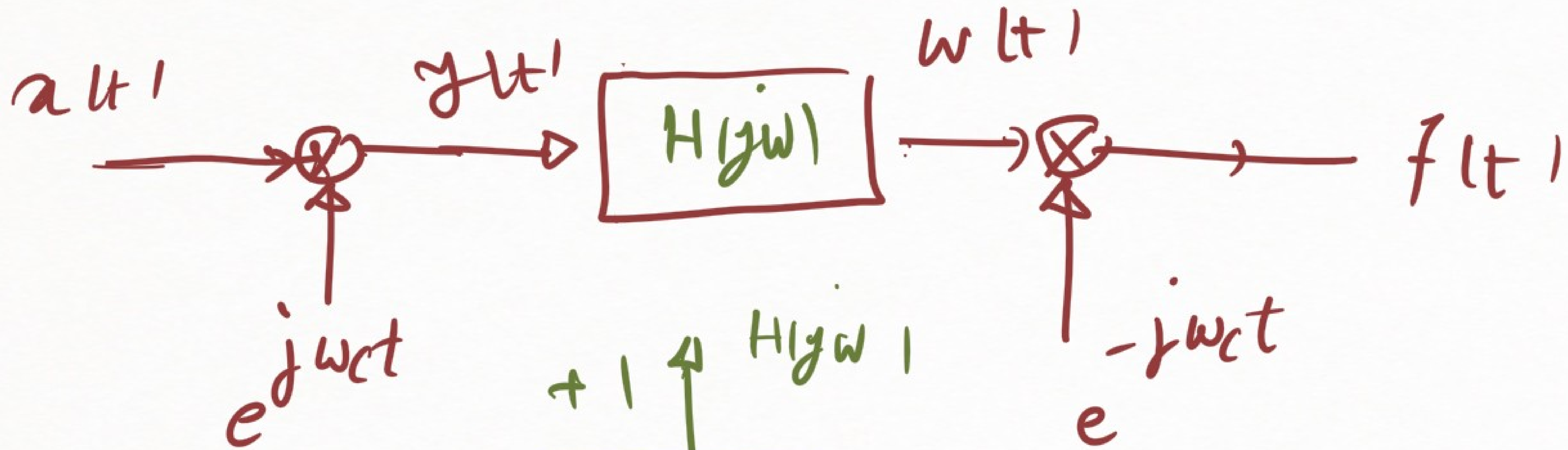
$$\left.\right\} \quad X(j\omega) = \frac{1}{2} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$



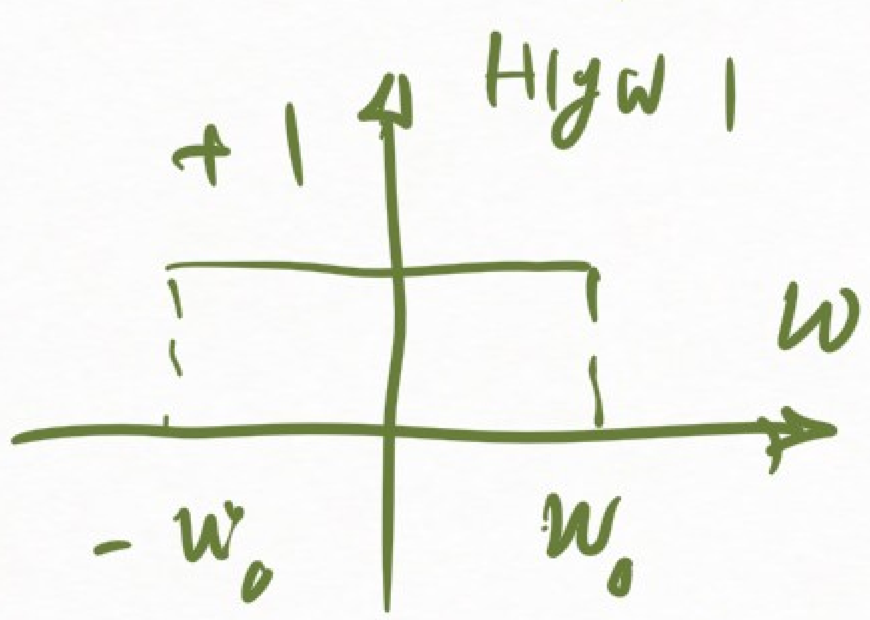
بعنوان تمرین نشان دهید که حاصل کانولوشن دو سیگنال فوق به صورت مقابل است :



تمرین - [illegible]



$\omega_c > \omega_0$



$Y(j\omega)$ و $W(j\omega)$, $F(j\omega)$ را رسم نمایید.

مدل سیستم معادل چه نوع فیلتری می باشد؟

تبدیل معکوس فوریه: یعنی محاسبه $x(t)$ از روی $X(j\omega)$ است.

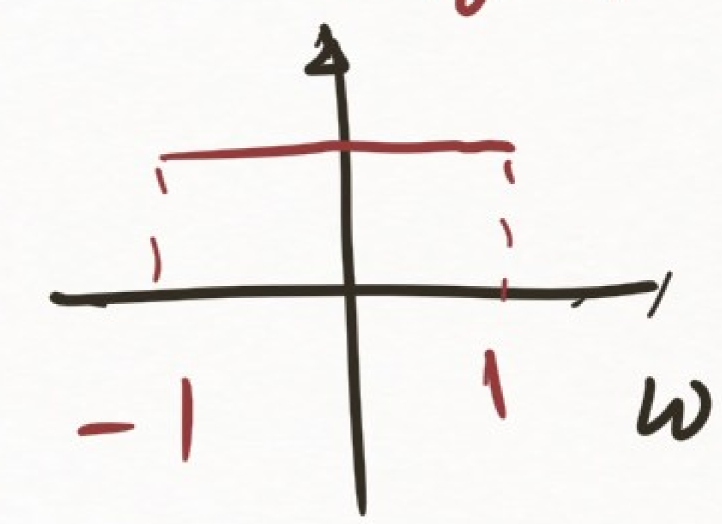
روش های محاسبه تبدیل معکوس فوریه

- استفاده از جداول تبدیل معروف و استفاده از خواص تبدیل فوریه
- تجزیه به کسرهای جزئی
- استفاده از تعریف معکوس تبدیل فوریه

مثال - به روش جدول:

$$X(j\omega) = \begin{cases} e^{-2j\omega} & ; -1 < \omega < 1 \\ 0 & , \text{other} \end{cases} \Longrightarrow x(t) = ?$$

$X_2(j\omega)$



$$X(j\omega) = X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega) \; , \quad X_1(j\omega) = e^{-2j\omega} \; , \quad X_2(j\omega) = \begin{cases} 1 & ; -1 < \omega < 1 \\ 0 & ; \text{oth} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta(t) \longleftrightarrow 1 \\ \delta(t-2) \longleftrightarrow e^{-2j\omega} \times 1 \end{cases}$$

$$x_2(t) = \frac{\sin t}{\pi t}$$

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

$$x(t) = \delta(t-2) * \frac{\sin t}{\pi t} = \boxed{\frac{\sin(t-2)}{\pi(t-2)}}$$

$$X(j\omega) = \frac{\text{چندجمله‌ای از } j\omega}{\text{چندجمله‌ای از } j\omega} = \frac{F(j\omega)}{G(j\omega)} \longrightarrow x(t) = ?$$

روش اول: تجزیه به کسرهای جزئی :

اگر درجه صورت از درجه مخرج بیشتر یا مساوی باشد، ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم تا داریم :

$$X(j\omega) = \text{چندجمله‌ای} + \frac{\text{چندجمله‌ای (درجه کمتر از مخرج)} \rightarrow F_2(j\omega)}{G(j\omega)}$$

خارج قسمت که همان چندجمله‌ای خواهد شد به صورت تبدیل معکوس آن محاسبه شده .

$$F_1(j\omega) = a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \cdots$$

$$f_1(t) = a_0\,\delta(t) + a_1\,\delta'(t) + a_2\,\delta''(t) + \cdots$$

حال بخشی را که درجه صورت آن از مخرج آن کمتر است با تجزیه به کسرهای جزئی می‌نویسیم.

$$\frac{F_2(j\omega)}{G(j\omega)} = \frac{F_2(j\omega)}{(j\omega+b_1)(j\omega+b_2)(j\omega+b_3)^3(j\omega+b_4)\cdots}$$

$$\frac{F_1(j\omega)}{G(j\omega)} = \frac{A_1}{j\omega+b_1} + \frac{A_2}{j\omega+b_2} + \frac{B_1}{(j\omega+b_3)} + \frac{B_2}{(j\omega+b_3)^2} + \frac{B_3}{(j\omega+b_3)^3} + \frac{A_4}{(j\omega+b_4)} + \cdots$$

تبدیل عکس

$$A_1 e^{-b_1 t} u(t) \qquad A_2 e^{-b_2 t} u(t) \qquad B_1 e^{-b_3 t} u(t) \qquad B_2 t e^{-b_3 t} u(t) \qquad B_3 \frac{t^2}{2} e^{-b_3 t} u(t) \qquad A_4 e^{-b_4 t} u(t) + \cdots$$

حالا ضرایب :

$$A_1 = (j\omega+b_1)\frac{F_1(j\omega)}{G(j\omega)}\Bigg|_{j\omega=-b_1} , \quad A_2 = (j\omega+b_2)\frac{F_1(j\omega)}{G(j\omega)}\Bigg|_{j\omega=-b_2}$$

$$B_3 = (j\omega+b_3)^3\frac{F_1(j\omega)}{G(j\omega)}\Bigg|_{j\omega=-b_3} , \quad \underline{B_2} = \frac{d}{d(j\omega)}\left[(j\omega+b_3)^3\frac{F_1(j\omega)}{G(j\omega)}\right]\Bigg|_{j\omega=-b_3} =$$

$$\underline{B_1} = \frac{1}{(3-1)!}\frac{d^2}{d(j\omega)^2}\left[(j\omega+b_3)^3\frac{F_1(j\omega)}{G(j\omega)}\right]\Bigg|_{j\omega=-b_3} =$$

توجه: ملاحظه شد که برای محاسبه جواب وقتی ریشه‌های مخرج مقدار تکراری دو باشند احتیاج به مشتق‌گیری داریم و گاهی اوقات وقت‌گیر است. روش دیگر عددگذاری است. یعنی مقادیری که به مشتق احتیاج ندارد را به ترتیب حساب می‌کنیم. سپس با قرار دادن در جانبین تساوی مقدار خاص مثلاً صفر یا $+1$ یا -1 گذاشته شود و بعد جواب‌های B_1 و B_2 محاسبه گردد. (مقادیر نباید ریشه مخرج باشند).

مثال -

$$X(j\omega)=\frac{(j\omega+5)}{(j\omega+2)(j\omega+3)^2}=\frac{A}{j\omega+2}+\frac{B_1}{j\omega+3}+\frac{B_2}{(j\omega+3)^2}$$

$$A=(j\omega+2)X(j\omega)\Big|_{j\omega=-2}=\frac{-2+5}{-2+3}=\boxed{3}$$

$$B_2=(j\omega+3)^2X(j\omega)\Big|_{j\omega=-3}=\frac{-3+5}{-3+2}=\boxed{-1}$$

حال برای محاسبه B_1 مقدارگذاری به کمک می‌آید

A و B_2 را قرار داده و در جانبین $j\omega=0$ قرار می‌دهیم

$$\Rightarrow \frac{0+5}{(0+2)(0+3)}=\frac{3}{(0+2)}+\frac{B_1}{(0+3)}+\frac{-1}{(0+3)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{B_1=-5/3}$$

کاربرد تبدیل فوریه: تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI که با معادله دیفرانسیل بیان می‌شوند.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) \implies \sum_{k=0}^{M} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

برای آنالیز از طرفین رابطه تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$\sum_{k=0}^{M} a_k F\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^{N} a_k F\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\} \xRightarrow{\text{خاصیت مشتق‌گیری}} \sum_{k=0}^{M} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{N} b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

$$\implies Y(j\omega) \sum_{k=0}^{M} a_k (j\omega)^k = X(j\omega) \sum_{k=0}^{N} b_k (j\omega)^k \implies H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_k b_k (j\omega)^k}{\sum_k a_k (j\omega)^k}$$

$$\implies H(j\omega) = \frac{\text{چندجمله‌ای از } j\omega}{\text{چندجمله‌ای از } j\omega}$$

مثال - پاسخ فرکانسی و ضربه سیستم با معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$\frac{dy(t)}{dt} + a y(t) = x(t)$$

تبدیل فوریه

$$\implies (j\omega) Y(j\omega) + a Y(j\omega) = X(j\omega) \implies H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{j\omega + a} \xRightarrow{\text{تبدیل معکوس}} \boxed{h(t) = e^{-at} u(t)}$$

$$Y(j\omega)(j\omega + a) = X(j\omega)$$

مثال - روش تعیین LTI مطلوب:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

از طرفین تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$(j\omega)^2 Y(j\omega) + 4(j\omega) Y(j\omega) + 3Y(j\omega) = (j\omega)X(j\omega) + 2X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \boxed{\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 3}}$$

به کسرهای ساده:

$$\Longrightarrow H(j\omega) = \frac{A}{j\omega+1} + \frac{B}{j\omega+3}$$

$$A = (j\omega+1)H(j\omega)\Big|_{j\omega=-1} = \frac{1}{2} \quad , \quad B = (j\omega+3)H(j\omega)\Big|_{j\omega=-3} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)}$$

تابع ضربه سیستم

$$x(t) = e^{-t}u(t) \longrightarrow y(t) = ?$$

در سیستم قبل ورودی که $x(t)$ هست خروجی را پیدا کنید.

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+1)} \cdot \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)} = \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)^2(j\omega+3)} = \frac{A_1}{j\omega+1} + \frac{A_2}{(j\omega+1)^2} + \frac{B}{j\omega+3}$$

حال ضرایب A_1 ، A_2 ، B را محاسبه نمی‌کنیم.

$$y(t) = A_1 e^{-t}u(t) + A_2 t e^{-t}u(t) + B e^{-3t}u(t)$$

$$B = (j\omega+3)\,Y(j\omega)\Big|_{j\omega=-3} = \cancel{(j\omega+3)}\,\frac{(j\omega+2)}{(j\omega+1)^2\,\cancel{(j\omega+3)}}\Bigg|_{j\omega=-3} = \frac{-3+2}{(-3+1)^2} = \boxed{\frac{-1}{4}}$$

$$A_2 = (j\omega+1)^2\,Y(j\omega)\Big|_{j\omega=-1} = \cancel{(j\omega+1)^2}\,\frac{(j\omega+2)}{\cancel{(j\omega+1)^2}\,(j\omega+3)}\Bigg|_{j\omega=-1} = \frac{-1+2}{-1+3} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$A_1 = \frac{1}{(2-1)!}\,\frac{d}{d(j\omega)}\left[(j\omega+1)^2\,\frac{(j\omega+2)}{(j\omega+1)^2\,(j\omega+3)}\right]\Bigg|_{j\omega=-1} = \frac{d}{d(j\omega)}\left[\frac{j\omega+2}{j\omega+3}\right]\Bigg|_{j\omega=-1} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\cancel{j\omega}^{\,0}+2}{(\cancel{j\omega}^{\,0}+1)^2\,(\cancel{j\omega}^{\,0}+3)} = \frac{\overset{?}{A_1}}{\cancel{j\omega}^{\,0}+1} + \frac{\overset{1/2}{A_2}}{(\cancel{j\omega}^{\,0}+1)^2} + \frac{\overset{-1/4}{B}}{\cancel{j\omega}^{\,0}+3}$$

راه دوم برای A_1 ⇐ روش عددگذاری :

$$\Longrightarrow \frac{2}{3} = \frac{A_1}{1} + \frac{1/2}{1} + \frac{-1/4}{3} \Longrightarrow \boxed{A_1 = \frac{1}{4}}$$

$$\Longrightarrow y(t) = \frac{1}{4}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}te^{-t}u(t) - \frac{1}{4}e^{-3t}u(t)$$

① تمرین -

یک سیستم با معادله دیفرانسیل زیر بیان شده.

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=x'(t)+4x(t)$$

الف- $H(j\omega)$, $h(t)$ را بیابید.

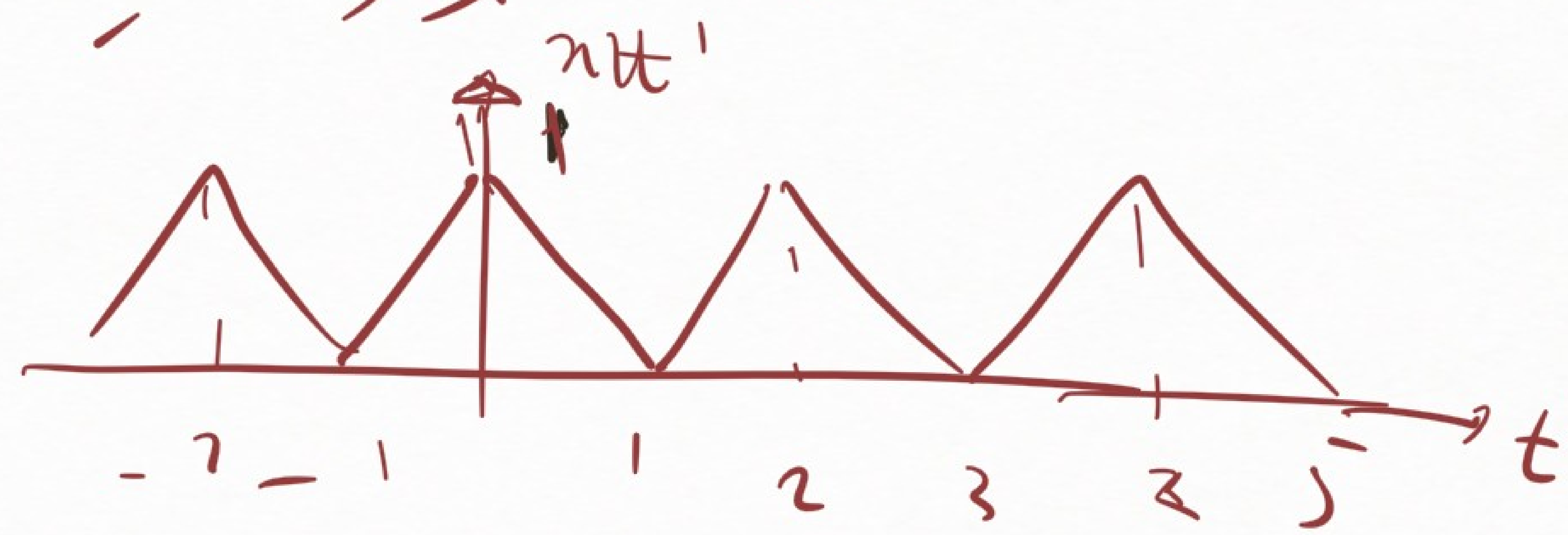
ب- با فرض $x(t)=e^{-5t}u(t)$ خروجی $y(t)$ را بدست آورید.

ج- با فرض اینکه $x(t)=e^{-3t}u(t)$ خروجی $y(t)$ را بدست آورید.

د- اگر $x(t)=e^{-6t}$ خروجی را بیابید.

ه- اگر $x(t)=\cos 10t$ خروجی را پیدا کنید.

و- اگر سیگنال



خروجی را بدست آورید.

②

$$X(j\omega)=\frac{e^{-3j\omega}(j\omega+4)}{(j\omega+2)(j\omega+1)^3}$$

$x(t)=?$