جلسه ۱۱

قطری سازی ماتریس های مربعی:

اگر یک ماتریس $A_{n\times n}$، n بردار ویژه مستقل خطی داشته باشد، به کمک تبدیل همانندی می‌توان قطری نمود. و اگر ماتریس دارای n بردار ویژه مستقل خطی نباشد، به فرم کانونیکال جردن تبدیل می‌شود.

ماتریس های همانند:

ماتریس های $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ را همانند گویند اگر یک ماتریس غیرمنفرد مانند T وجود داشته باشد بطوریکه

$$T^{-1}AT = B$$

$$A = TBT^{-1}$$

ماتریس T = ماتریس تبدیل

تمرین) ماتریس های زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} ۶ & -۲ \\ -۴ & ۵ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ۸ & ۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

الف) نشان دهید A و B تحت ماتریس تبدیل T، همانند هستند.

ب) کدام خواص از ماتریس ها تحت تبدیل همانندی تغییر نمی‌کنند؟ (دترمینان، ...)

۱- قطری سازی ماتریس ها با مقادیر ویژه حقیقی و متمایز :

n بردار ویژه مستقل خطی دارد که با استفاده از آن ها ، ماتریس تبدیل T را بدست می آوریم.

$$T = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_n \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

مثال) فرم قطری سازی شده $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda+6 & 2 \\ -5 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 + 2\lambda^2 - 29\lambda - 30 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -6 \quad , \quad \lambda_2 = -1 \quad \text{و} \quad \lambda_3 = 5$$

حقیقی و متمایز

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

روال حل : $T = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{bmatrix}$

$$(\lambda_i I - A) V_i = 0$$

$$\xrightarrow{\lambda_1 = -6} \quad (-6I - A) V_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -10 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad -10 x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -10 x_1$$

$$x_1 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -\frac{x_1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_3 = 0 \longrightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \longrightarrow V_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{9}{25} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 5 \longrightarrow V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{4}{11} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & 1 \\ 1 & -\frac{9}{25} & -\frac{4}{11} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

نکته) اگر ماتریس A بصورت $\Lambda = T^{-1}AT$ قطری شده باشد،

$$A = T\Lambda T^{-1}$$

برای هر مقدار صحیح مثبت k :

$$A^k = T\Lambda^k T^{-1}$$

مثال) برای سؤال قبلی A^{20} ؟

$$A^{20} = T\Lambda^{20}T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & 1 \\ 1 & -\frac{9}{25} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2)^{20} & & 0 \\ & (-1)^{20} & \\ 0 & & 5^{20} \end{bmatrix} \times T^{-1}$$

۲ـ قطری سازی ماتریس ها با مقادیر ویژه مختلط :

اگر ماتریس $A_{n\times n}$ دارای مقادیر ویژه مختلط غیرتکراری باشد:

در این حالت ماتریس A به فرم قطری بلوکی تبدیل می شود.

$$\Lambda = T^{-1} A T \qquad \lambda_{۱,۲} = \sigma_{۱} \pm j\omega_{۱} \qquad \lambda_{۳,۴} = \sigma_{۳} \pm j\omega_{۳}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c}
\begin{bmatrix} \sigma_{۱} & \omega_{۱} \\ -\omega_{۱} & \sigma_{۱} \end{bmatrix} & 0 & \\
\hline
0 & \begin{bmatrix} \sigma_{۳} & \omega_{۳} \\ -\omega_{۳} & \sigma_{۳} \end{bmatrix} & \\
\hline
 & &
\end{array}\right]$$

مثال) فرض کنید مقادیر ویژه A بصورت زیر باشد:

$$\lambda_{۱,۲} = ۱ \pm j۳$$

$$\lambda_{۳,۴} = -۲ \pm j۵$$

$$\lambda_{۵} = -۴$$

$$\Lambda = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]_{5\times 5}$$

ماتریس تبدیل دسته دوم :

$$T = \left[\begin{array}{c|c|c|c} Re\{v_1\} & Im\{v_1\} & Re\{v_2\} & Im\{v_2\} \; \cdots \end{array}\right]$$

مثال) فرم قطری شده ماتریس A و ماتریس تبدیل را بدست آورید:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = 0 \longrightarrow \lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -2} \qquad \boxed{\lambda_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Lambda = T^{-1} A T = \dots$$

$$= \left[\begin{array}{c|cc} -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]_{3\times 3}$$

$$T = ?$$

$\lambda_1 = -2$

$(\lambda_i I - A) V_1 = 0 \Rightarrow (-2I - A) V_1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0$

$\quad -x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 2x_2$

$$\Rightarrow \quad V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$\lambda_2 = -\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{4}}{2}$

$(\lambda_2 I - A) V_2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_5 = 0}$$

$$\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) x_4 - \overset{0}{\cancel{2x_5}} + x_6 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_6 = \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) x_4}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} v_1 & Re\{v_2\} & Im\{v_2\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

سؤال) فرض کنید مقادیر ویژه ماتریس A بصورت

۴ و ۱ ، ۱- و ۱- باشد. نرم قطری ؟!