Subject: 9824063

Year. Month. Date. ( )

۱

کیا گرمابی

$r_1 = 6$

$r_2 = 0$

$AA^{-1} = I \Rightarrow (AA^{-1})^T = I^T \Rightarrow (A^{-1})^T A^T = I^T \Rightarrow$

$(A^{-1})^T = \frac{I}{A^T} = (A^T)^{-1}$ ✓

۱-۱: $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ تنها در صورتی برقرار است که A غیر منفرد باشد.

۱-۲: در ماتریس متعامد $|A| = \pm 1$ در نتیجه غیرمنفرد است و ماتریس متعامد: $A^T = A^{-1}$
منفرد نمی تواند باشد؛ برای منفرد بودن $|A|$ باید برابر صفر شود.

۱-۳: $\|a\|^2 + \|b\|^2 = \|a+b\|^2 = \|a-b\|^2 \Rightarrow 9+4 = 13 = \|a+b\|^2$

$13 = \|a-b\|^2$

$\Rightarrow \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 26$ ✗

۱-۴: $\|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq \|u\|_1$ ✗ $\|u_1\| = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$, $\|u_2\| = (\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

$\|u\|_\infty = \max\{|u_i|\}$

۲-۱: $Q = 10x_1^2 + 4x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 2x_1x_3$

بررسی کهادهای اصلی مقدم:

$Q = x^T A x \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & -11 \end{bmatrix}$

$a_{11} = 10 > 0$, $\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 39 > 0$, $|A| = (10 \times -48) - (1 \times -13)$

$+ (-1 \times 2) = -469 < 0$

کلیه کهادهای اصلی را چک می کنیم: $a_{11} = 10 > 0$, $a_{22} = 4 > 0$, $a_{33} = -11 < 0$ ✗
علامت نامعین است.

Rashen-s

Subject: 9824063

Year. Month. Date. ( )

2

کیا گرمابی

:2_2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5j \\ 6 & 2-j & 3 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max_j \left(\sum_i |a_{ij}| \right) = \max\Big(\underbrace{|a_{11}| + |a_{21}|}_{7}, \underbrace{|a_{12}| + |a_{22}|}_{\underbrace{0+\sqrt{4+1}}_{\sqrt{5}}}, \underbrace{|a_{13}| + |a_{23}|}_{\sqrt{25}+3} \Big) = \max(7, \sqrt{5}, 8) = 8 \checkmark$$

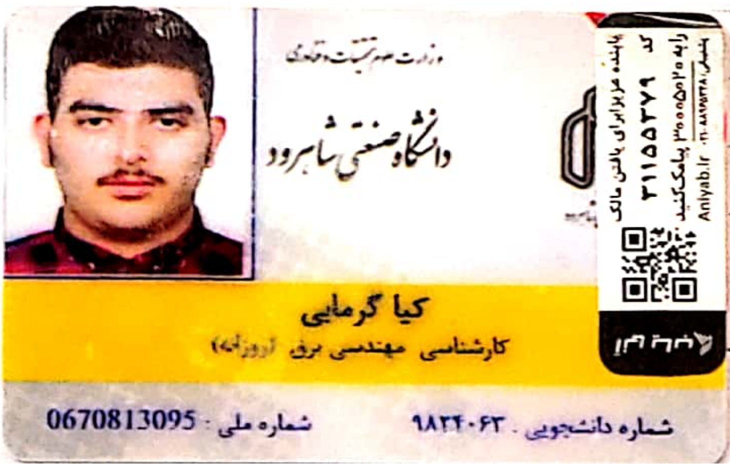
$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}} \qquad A^T A - \lambda I = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2-j \\ 5j & 3 \end{bmatrix}}_{3\times2} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5j \\ 6 & 2-j & 3 \end{bmatrix}}_{2\times3}$$

$$- \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 37-\lambda & 12-6j & 18-5j \\ 12-6j & 3-4j-\lambda & 6-3j \\ 18-5j & 6-3j & -16-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow |A^T A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda =$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_j^n |a_{ij}| \right) = \max\Big(\underbrace{|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{13}|}_{1+0+5}, \underbrace{|a_{21}| + |a_{22}| + |a_{23}|}_{6+\sqrt{4+1}+3} \Big) = \max(6, 9+\sqrt{5}) = 9+\sqrt{5} \checkmark$$

$$\|A\|_F = \sqrt{tr(A^T A)} = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|-1|^2 + 0^2 + 5^2 + 6^2 + 5 + 3^2}$$

$$= \sqrt{1+25+36+5+9} = \sqrt{76} \checkmark$$



Subject: 9824063
Year, Month, Date, ( )

کیا کرمانی

:3-2

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad u_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ترکیب خطی را می‌نویسیم و با r معادل قرار می‌دهیم:

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4 = r$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{3\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = A \quad \Rightarrow \quad m < n \Rightarrow$$

این دستگاه فرومعین است و بی‌شمار جواب دارد، در نتیجه فضای برداری R^3 را اسپن می‌کنند.

:4-1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R(A) \leqslant \min(4, 3) = 3$$

ماتریس حداکثر رتبهٔ 3 می‌تواند داشته باشد.

کهاد 1×1: $1, 2, -1, 1, 6$ ✓

کهاد 2×2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 4$ ✓

کهاد 3×3: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (1\times 6) - (2\times 1) + (-1\times 15) = -11$ ✓

رتبهٔ ماتریس 3 است.

Rashen-s