محاسبهٔ رتبه یک ماتریس:

$A_{m\times n} \longrightarrow R(A) \leq \min(m,n)$

اگر $R(A)=\min(m,n)$ باشد، A یک ماتریس با رتبه کامل نامیده می‌شود.

نحوهٔ محاسبه R یا رتبه به زبان ساده:

از کوچکترین کهاد 1×1 شروع می‌کنیم و به سمت کهاد $i\times i$ حرکت می‌کنیم که i همان $\min(m,n)$ است. هدف این است حداقل یک کهاد غیرصفر در هر مرحله پیدا شود.

(یعنی دترمینان ماتریس)

به مثال‌های زیر توجه کنید:

① $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

کهاد 1×1: ۱، ۲-، ۰، ۰

← حداقل یک کهاد 1×1 غیرصفر پیدا شد. پس فعلاً رتبه A، یک است.

حال می‌رویم سراغ کهاد بزرگتر از 1×1:

کهاد 2×2: تنها کهاد 2×2 ماتریس A، خود A است که دترمینان آن صفر است. لذا حداقل یک کهاد غیرصفر 2×2 وجود ندارد پس رتبه ماتریس A همان یک می‌شود.

توجه کنید $i=\min(m,n)=2$ است که تا کهاد $i\times i$ یعنی 2×2 پیش رفتیم.

$\min(\underset{2}{m},\underset{2}{n})$

۲) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow R(A) = ?$

حل) $i = \min(\underbrace{m}_{4},\underbrace{n}_{2}) = 2$

کهاد ۱×۱ : واضح است حداقل یک کهاد غیرصفر ۱×۱ وجود دارد (مثل ۱، ۲، ۱-) .
لذا فعلاً رتبه ماتریس A، یک است.

کهاد ۲×۲ : کهادهای ۲×۲ ماتریس A باید نوشته شود، اگر حداقل یک کهاد غیرصفر پیدا بشد، رتبه ماتریس ۲ می‌شود؛ در غیر این صورت چون $i=2$ است، فراتر از ۲×۲ نمی‌توان رفت و رتبه ماتریس یک باقی می‌ماند.

کهادهای ۲×۲ از ماتریس A :

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{\text{صفر}} \text{ و } \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{صفر}} \text{ و } \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}_{\text{صفر}} \text{ و } \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}_{\text{صفر}}$$

لذا کهاد ۲×۲ غیرصفری برای A، پیدا نشد؛ پس رتبه A، یک باقی ماند.

۳) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow R(A) = ?$

حل) $i = \min(\underbrace{m}_{3}, \underbrace{n}_{3}) = 3$

کهاد ۱×۱ : واضح است که حداقل یک کهاد ۱×۱ غیرصفر برای A وجود دارد (مثل ۵، ۴، ۲، ۱) لذا فعلاً رتبه A یک است.

کهاد ۲×۲ : دنبال حداقل یک کهاد ۲×۲ غیرصفر در ماتریس A می‌گردیم؛ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$ یک کهاد ۲×۲ از ماتریس A است که دترمینان آن یک می‌شود لذا حداقل یک کهاد ۲×۲ غیرصفر پیدا کردیم؛

پس رتبه A تا اینجا ۲ می‌باشد.

کهاد ۳×۳ : توجه کنید که تا i×i جلو می‌رویم. چون در این مثال $i=3$ است تا ۳×۳ جلو می‌رویم. تنها کهاد ۳×۳ از ماتریس A، خود ماتریس A است که دترمینان آن:

$$|A| = 1(0-5) - 2(0-4) + 1(-10+9) = -5+8-1 = 0$$

لذا رتبه ماتریس A، ۲ است.

④ $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ & -۲ & ۱ \end{bmatrix} \longrightarrow R(A) = ?$

کهاد ۱×۱ ✓

کهاد ۲×۲ ✓

کهاد ۳×۳ :

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۱ \\ ۳ & ۵ & -۲ \end{vmatrix} = ۱(۴-۵) + ۱(-۳)$$

$$= -۴ \neq ۰$$

$$\Rightarrow \boxed{R(A) = ۳}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R(A) \leqslant ۴$$

کهاد ۱×۱ : ✓

کهاد ۲×۲ : ✓

کهاد ۳×۳ : ✓

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \longrightarrow 1(-1) - 1(0) = -1$$

if $|A| \neq 0$ $\longleftarrow$ کهاد ۴×۴

فصل سوم (فضاهای برداری)

میدان

فضای برداری

زیرفضاهای برداری

استقلال خطی _ تبدیلات خطی

فضاهای پوچی ماتریس ها