جلسه ۱۷

(تمرین فرم قطری !!

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad |\lambda I - A| = 0$$

$$\rightarrow (\lambda+1)^2(\lambda^2+2\lambda+2) = 0$$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \qquad \lambda_{3,4} = -1 \pm j$$

تعداد بردار ویژه مستقل خطی !!

$$n - \operatorname{rank}(\lambda_i I - A) \xRightarrow{\lambda=-1} 4 - \underbrace{\operatorname{rank}(I+A)}_{} = 4 - 3 = 1$$

$$I + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_i I - A) V_1 = 0$$

$$(\lambda_i I - A) Q_1 = V_1$$

$\lambda = -1 \Longrightarrow$

$$-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 0$

$x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$-2x_3 - x_4 = 0 \longrightarrow x_4 = -2x_3$

$$\longrightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{I}$$

حسب Q_1 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$x_5 = 1$

$x_6 + x_7 + x_8 = 1$

$-2x_7 - x_8 = -2$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

محاسبه بردار ویژه مربوط به $\lambda_{3,4}$:

$$(\lambda_3 I - A) V_3 = 0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} j & 0 & 0 & 0 \\ -1 & j & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+j & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$j x_1 = 0 \longrightarrow x_1 = 0$$

$$-x + j x_2 = 0 \qquad x_2 = 0$$

$$-x_2 + (-1+j) x_3 - x_4 = 0 \qquad x_4 = 1$$

$$2 x_3 + (1+j) x_4 = 0 \qquad x_3 = -0.5 - 0.5 j$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5 - 0.5 j \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & Q_1 & V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -0.5 & -0.5 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$T^{-1} A T = \cdots$

$$\Lambda = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & & \\ 0 & -1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & -1 & \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & -1 & -1 \end{array}\right]$$

!۴ $p(A) = A^{5} + 2A^{3} + 4A + 8I$, A^{-1} (تمرین

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 \\ -1 & \lambda-8 \end{vmatrix} = \lambda^{2} - 6\lambda - 16$$

$$\Rightarrow A^{2} - 6A - 16I = 0 \Rightarrow \frac{1}{16}\underbrace{\left(A^{2} - 6A\right)}_{A(A-6I)} = I = AA^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{16}\left(A - 6I\right) = \begin{bmatrix} -0/5 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

ب) $P(A) = R(A)$

$$|\lambda I - A| = ۰ \longrightarrow \lambda_1 = ۸ \quad , \quad \lambda_۲ = -۲$$

$$R(\lambda) = c_1 \lambda + c_0$$

$$R(\lambda_i) = p(\lambda_i)$$

$$\Rightarrow \quad ۸c_1 + c_0 = p(۸) = ۴۳۸۴۲$$

$$-۲c_1 + c_0 = p(-۲) = -۴۸$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = ۴۳۸۸ \\ c_0 = ۶۷۲۸ \end{cases}$$

$$P(A) = R(A) = ۴۳۸۸ \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۱ & ۸ \end{bmatrix} + ۶۷۲۸ \times \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

محاسبه توابع ماتریسی:

$$f(A) = R(A)$$

مثال) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ، $\sin(A)$?!

$$|\lambda I - A| = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} \lambda+2 & -2 \\ -1 & \lambda+3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= -4 \end{aligned}$$

$$R(\lambda) = c_1 \lambda + c_0$$

$$f(\lambda_i) = R(\lambda_i)$$

$$\sin(-1) = -c_1 + c_0$$

$$\sin(-4) = -4c_1 + c_0$$

$$\Rightarrow c_0 = -\frac{1}{3}\left(\sin(-4) - 4\sin(-1)\right)$$

$$c_1 = -\frac{1}{3}\left(\sin(-4) - \sin(-1)\right)$$

$$f(A) = \sin A = c_1 A + c_0 = \cdots$$

$$!!\ e^A \ ،\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ (جای

$$\text{Jordan} \longrightarrow \lambda_{1,2,3} = 2$$

$$R(\lambda) = c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0$$

$$f(\lambda_i) = R(\lambda_i)$$

$$f(2) = 4c_2 + 2c_1 + c_0 = e^2$$

$$\dot{f}(2) = 2c_2\lambda + c_1 = 4c_2 + c_1 = e^2$$

$$\ddot{f}(2) = 2c_2 = e^2$$

$$\Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{1}{2} e^2} \ ،\ \boxed{c_1 = -e^2} \ ،\ \boxed{c_0 = e^2}$$

$$f(A) = R(A) = \frac{1}{2} e^2 A^2 - e^2 A + e^2 I$$

$$\Rightarrow e^A = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & \frac{1}{2}e^2 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}$$

تمرین) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$ ، e^{At} !?

تجزیه مقادیر منفرد SVD

برای ماتریس حقیقی $A_{m\times n}$ ، اگر $m<n$ باشد جذر مقادیر ویژه AA^T و اگر $m>n$ باشد جذر مقادیر ویژه A^TA را مقادیر منفرد ماتریس A گویند.

* برای ماتریس مختلط:

$m<n \rightarrow AA^*$ (ترانهاده مزدوج)

$m>n \rightarrow A^*A$

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}$$ مثال) مقادیر منفرد ماتریس A !!

$$m<n \longrightarrow |\lambda I - AA^T| = 0$$

$$AA^T=\begin{bmatrix}11 & 1\\ 1 & 11\end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix}\lambda-11 & -1\\ -1 & \lambda-11\end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-10)(\lambda-12)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_1=\sqrt{12} \quad , \quad \sigma_2=\sqrt{10}$$

تعیین رتبه ماتریس :

تعداد مقادیر منفرد غیرصفر = رتبه

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} \qquad m>n$$

$$|\lambda I - A^TA| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix}\lambda-6 & -1\\ -1 & \lambda-6\end{vmatrix} =$$

$$(\lambda-7)(\lambda-5)=0 \rightarrow R(A)=2$$

محاسبه نرم ۲ و عدد حالت ماتریس :

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}}$$

$$|A^TA - \lambda I| = 0$$

$$\|A\|_2 = \delta_{max}$$

$$K = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$K = \frac{\delta_{max}}{\delta_{min}}$$

تمرین) به کمک SVD ، وضعیت ماتریس را مشخص کنید

well or ill ?!

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 0 & -100 \\ 0 & 100 & -100 \\ -100 & -100 & 200 \end{bmatrix}$$

تجزیه ماتریس ها براساس مقادیر منفرد:

یک ماتریس $A_{m\times n}$ را می توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$A = U \Sigma V^T$$

که $U_{m\times m} = [u_1, \ldots, u_m]$ و $V_{n\times n} = [v_1, \ldots, v_n]$

ماتریس های متعامد هستند.

* ستون های ماتریس $U_{m\times m}$ از بردارهای ویژه یکامتعامد AA^T

و ستون های ماتریس $V_{n\times n}$ از بردارهای ویژه یکامتعامد A^TA تشکیل می شود

و $\Sigma_{m\times n}$ یک ماتریس شبه قطری (یا قطری) است که عناصر روی

قطر آن مقادیر منفرد غیرصفر ماتریس AA^T یا A^TA است.

$$\Sigma_{m\times n} = \mathrm{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_p) \quad ; p = \min\{m, n\}$$

$$\delta_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \ldots \geqslant \delta_k > 0$$

مثال) ماتریس $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ را توسط مقادیر منفرد تجزیه نمایید.