یالطیف

تمرین سری 3 سیگنال سیستم

① فرض کنید :
$$\begin{cases} x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3] \\ h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1] \end{cases}$$
، هر یک از کانولوشن های زیر را محاسبه و رسم کنید ؟

یادآوری : کانولوشن
- گسسته ⟵ $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$
- پیوسته $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

روش فرمولی یا روش ترسیمی

a) $y[n] = x[n] * h[n]$:

روش فرمولی :

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]\, h[k]$$

if $k=-2$: $x[-2]\, h[n+2] = 0$

if $k=-1$: $x[-1]\, h[n+1] = 0$

if $k=0$: $x[0]\, h[n] = h[n]$

if $k=1$: $x[1]\, h[n-1] = 2h[n-1]$

if $k=2$: $x[2]\, h[n-2] = 0$

if $k=3$: $x[3]\, h[n-3] = -h[n-3]$

if $k=4$: $x[4]\, h[n-4] = 0$

$\Rightarrow y[n] = h[n] + 2h[n-1] - h[n-3]$

$= \{2\delta[n+1] + 2\delta[n-1]\} + 2\{2\delta[n+1-1]$

$+ 2\delta[n-1-1]\} - \{2\delta[n-1-3] + 2\delta[n+1-3]\}$

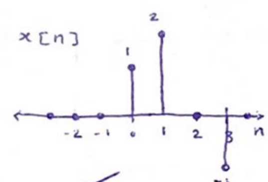
$= 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1] + 4\delta[n] + 4\delta[n-2]$

$- 2\delta[n-4] \cancel{+2} - 2\delta[n-2]$

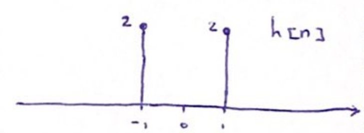
$= 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1] + 4\delta[n] + 2\delta[n-2]$

$- 2\delta[n-4]$

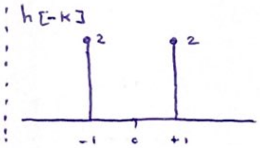
روش ترسیمی :



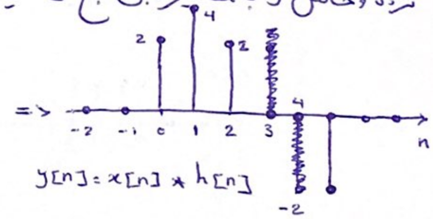
,



روش حل : $h[n]$ یا $x[n]$ را نسبت به محور عمودی قرینه کردن و از $-\infty$ تا $+\infty$ شیفت می دهید و نمونه ها را سمپل به سمپل در هم ضرب کرده و حاصل را با مقادیر قبلی جمع می کنیم



$\Rightarrow$



$y[n] = x[n] * h[n]$

b) $y[n] = x[n+2] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]\, h[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n+2-k]$

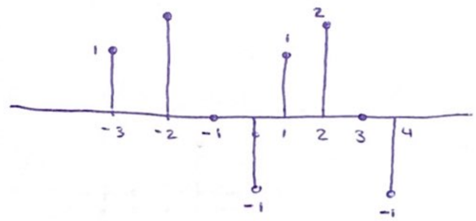
$x[n+2] = \delta[n+2] + 2\delta[n+1] - \delta[n-1]$

if $k = -1$: $h[-1]\, x[n+2+1] = \overset{1}{\cancel{h[-1]}}\, x[n+3] = x[n+3]$

if $k = +1$: $h[1]\, x[n+2-1] = \overset{1}{\cancel{h[1]}}\, x[n-1] = x[n-1]$

$y[n] = \{\delta[n+3] + 2\delta[n-1+3] - \delta[n-3+3]\} + \{\delta[n-1] + 2\delta[n-1-1] - \delta[n-3-1]\}$

$= \delta[n+3] + 2\delta[n+2] - \delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-4]$

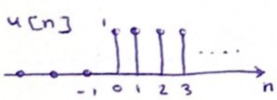


---

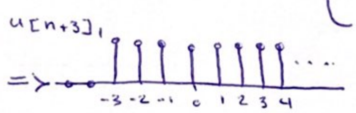
② سیگنال $h[n]$ را درنظر بگیرید، مقدار A و B را برحسب n به گونه‌ای بیابید که معادله زیر برقرار باشد.

$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \{u[n+3] - u[n-10]\}$, $h[n-k] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} & ; A \le k \le B \\ 0 & ; \text{other} \end{cases}$

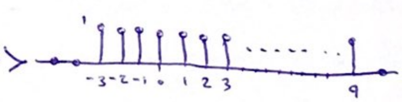
می‌دانیم :



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



$h[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & ; -3 \le n \le +9 \\ 0 & ; \text{other} \end{cases}$

یعنی $h[n]$ فقط در بازه $[-3,9]$ مقدار دارد :
$-3 \le n \le 9$ یا برحسب k ($-3 \le k \le 9$)

$\hookrightarrow h[n-k] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} & ; A \le k \le B \\ 0 & ; \text{other} \end{cases}$

$h[k] \longrightarrow -3 \le k \le +9$

$h[-k] \longrightarrow -9 \le k \le +3$

$\longrightarrow h[-k+n] = h[n-k] \longrightarrow \underbrace{-9+n}_{A} < k < \underbrace{3+n}_{B}$

③ فرض کنید $x[n]$ ورودی یک سیستم و $h[n]$ پاسخ ضربه آن است. خروجی سیستم را بیابید.

$$\begin{cases} h[n] = u[n+2] \\ x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-2] \end{cases}$$

با فرض اینکه سیستم LTI باشد می‌توان نوشت :

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]\, h[k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot u[k-2]\right\}}_{x[k]} \cdot \underbrace{\left\{u[n-k+2]\right\}}_{h[n-k]} = \sum_{k=2}^{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=2}^{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$= 2 \cdot \sum_{k=2}^{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = 2\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 2\left(\frac{\frac{1}{4} - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)\right)}{\frac{1}{2}}\right) = 1 - \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^{n+1}} = \boxed{1 - 2^{-(n+1)}}$$

یادآوری : $$\sum_{n=n_1}^{n_2} a^n = \frac{a^{n_1} - a^{n_2+1}}{1-a}$$

---

④ برای $x[n] = \begin{cases} 1 & ; 3 \le n \le 8 \\ 0 & ; \text{other} \end{cases}$, $h[n] = \begin{cases} 1 & ; 4 \le n \le 15 \\ 0 & ; \text{other} \end{cases}$ فرض کنید $x[n]$ ورودی یک سیستم و $h[n]$ پاسخ ضربه آن است. خروجی سیستم را بیابید.

فرض می‌شود سیستم LTI است :

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]\, h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

* از روش ترسیمی هم می‌توان خروجی را بدست آورد

می‌توان نوشت :

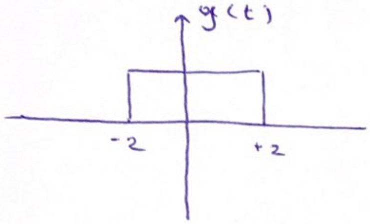
$$\begin{cases} x[n] = u[n-3] - u[n-9] \\ h[n] = u[n-4] - u[n-16] \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{u[k-3] - u[k-9]\} \cdot \{u[n-k-4] - u[n-k-16]\}$$

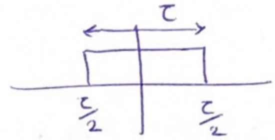
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k-3] \cdot u[n-k-4] - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k-3] \cdot u[n-k-16] - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k-9] \cdot u[n-k-4]$$

$$+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k-9] \cdot u[n-k-16] = \sum_{k=3}^{n-4} 1 - \sum_{k=3}^{n-16} 1 - \sum_{k=9}^{n-4} 1 + \sum_{k=9}^{n-16} 1$$

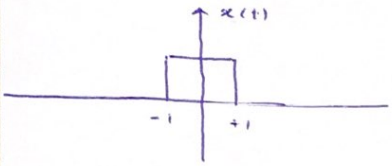
5) اگر $y(t)=\mathrm{rect}\left(\frac{t}{4}\right)$ و $x(t)=\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$ باشد، حاصل عبارات زیر را با روش ترسیمی محاسبه کنید.



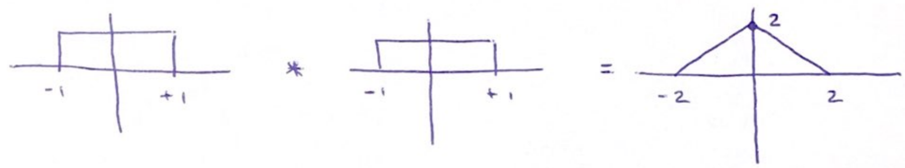
یادآوری: $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) : \begin{cases} 1 ; & |t|<\frac{\tau}{2} \\ 0 ; & |t|>\frac{\tau}{2} \end{cases}$



پالس با عرض τ

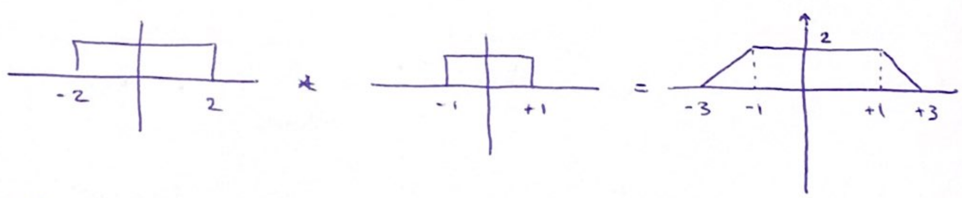


a) $x(t) * x(t)$:

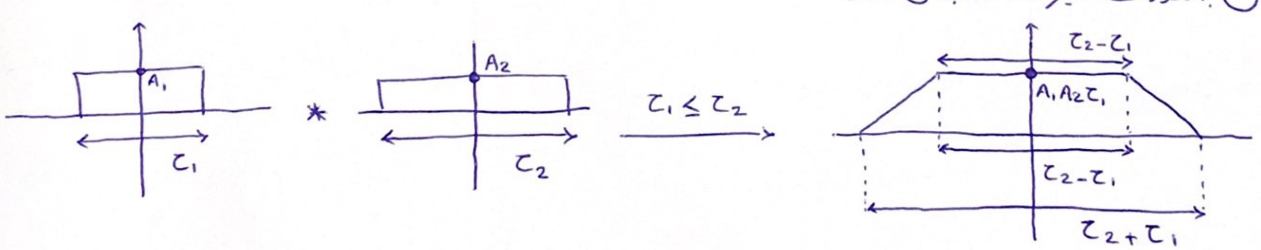


* به طور کلی می‌توان گفت حاصل کانولوشن دو پالس با عرض های مساوی τ برابر است با یک سیگنال مثلثی با عرض 2τ و رأس τ

b) $x(t) * y(t)$:



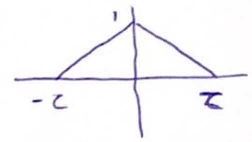
* به طور کلی می‌توان گفت: حاصل کانولوشن دو پالس با عرض های نامساوی (τ_2 ، τ_1)، ذوزنقه‌ای می‌شود که طول آن به صورت زیر محاسبه می‌شود



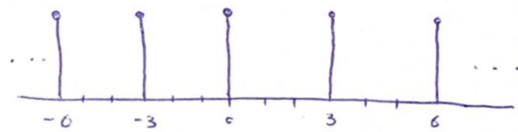
⑥ فرض کنید : $h(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-3k)$, $x(t)=2\,tri(\frac{t}{2})$ ، حاصل $z(t)=x(t)*h(t)$ را حساب کنید.

یادآوری : $tri(\frac{t}{\tau})=\Lambda(\frac{t}{\tau})=\begin{cases}1-\frac{|t|}{\tau} & ;\ |t|\le\tau \\ 0 & ;\ |t|>\tau\end{cases}$

سیگنال مثلثی با قاعده 2τ

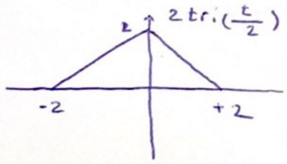


$$h(t):\begin{cases}\vdots \\ \text{if } k=-2 : \delta(t+6) \\ \text{if } k=-1 : \delta(t+3) \\ \text{if } k=0 : \delta(t) \\ \text{if } k=1 : \delta(t-3) \\ \text{if } k=2 : \delta(t-6) \\ \vdots\end{cases} \Rightarrow$$

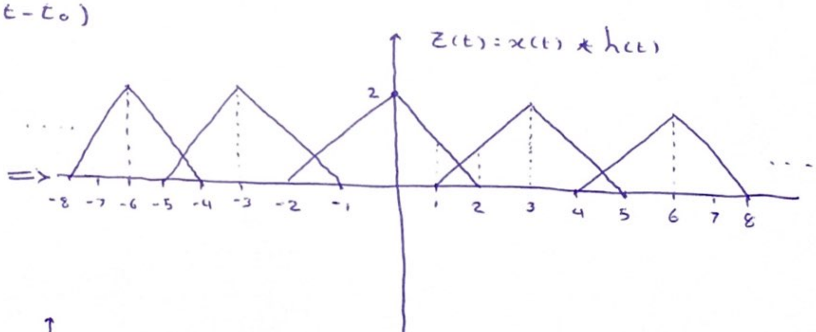


* طبق خاصیت غربالی تابع ضربه : هر سیگنالی با سیگنال ضربه کانولوشن شود، شیفت پیدا می‌کند به محل ضربه

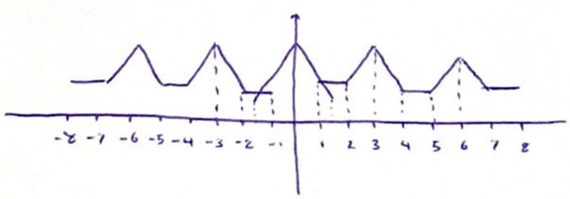
$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

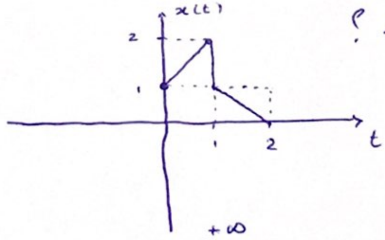


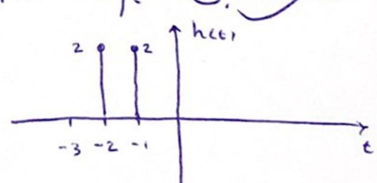
$$z(t)=2\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Lambda\left(\frac{t-3k}{2}\right)$$

---

⑦ فرض کنید پاسخ ضربه یک سیستم $h(t)=\delta(t+2)+2\delta(t+1)$ است. با در نظر گرفتن $x(t)$ به عنوان ورودی، خروجی سیستم را محاسبه کنید؟

$$x(t)=\begin{cases}t+1 & ;\ 0\le t\le 1 \\ 2-t & ;\ 1\le t\le 2 \\ 0 & ;\ \text{other}\end{cases}$$





$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau \longrightarrow$$

هر سیگنالی که با ضربه کانولوشن شود به محل ضربه شیفت پیدا می‌کند

$$y(t)=x(t)*\{\delta(t+2)+2\delta(t+1)\}=\boxed{x(t+2)+2x(t+1)}$$