قطری سازی ماتریس های مربعی :

اگر یک ماتریس $A_{n\times n}$ ، n بردار ویژه مستقل خطی داشته باشد به کمک تبدیل همانندی A را می‌توان قطری نمود.

ولی اگر ماتریس دارای n بردار ویژه مستقل خطی نباشد به فرم کانونیکال جردن تبدیل می‌شود.

ماتریس های همانند :

ماتریس های $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ را همانند گویند اگر یک ماتریس غیر منفرد مانند T وجود داشته باشد به طوری که

$$T^{-1}AT = B$$

ماتریس تبدیل (مدال)

$$A = TBT^{-1}$$

تمرین) ماتریس های زیر را در نظر بگیرید :

$$A = \begin{bmatrix} ٦ & -٢ \\ -۴ & ۴ \end{bmatrix} \quad و \quad B = \begin{bmatrix} ٨ & ١ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} \quad و \quad T = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$$

الف) نشان دهید A و B تحت تبدیل T همانند هستند.

ب) کدام خواص از ماتریس ها تحت تبدیل همانندی تغییر نمی‌کند؟

الف) قطری سازی ماتریس با مقادیر حقیقی و متمایز:

n تا بردار ویژه مستقل خطی دارد که از روی آن‌ها، T بدست می‌آید.

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{bmatrix}$$

مثال) فرم قطری سازی شده ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

$$|\lambda I - A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda+6 & 2 \\ -5 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda-4)(\lambda^2+6\lambda) - 1(5\lambda+30)$$

$$= \lambda^3 + 2\lambda^2 - 29\lambda - 30 = 0 \longrightarrow (\lambda+1)(\lambda+6)(\lambda-5) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -6 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 5 \end{cases}$$

یک مقدار ویژه حقیقی و متمایز ⟵ یک بردار ویژه مستقل خطی

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_i I - A) v_i = 0$$

$$\lambda_1 = -3 \longrightarrow (-3I - A)\bar{v}_1 = 0$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -10 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -10x_1 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_3 &= 0 \\ -5x_1 - 3x_3 &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \longrightarrow (-I - A)\bar{v}_2 = 0 \longrightarrow \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{9}{25} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 5 \longrightarrow \bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{4}{11} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & 1 \\ 1 & -\frac{9}{25} & -\frac{4}{11} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} A T = \begin{bmatrix} -3 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -3 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(-I - A)v_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-5x_1 - x_3 = 0 \longrightarrow x_3 = -5x_1$$

$$\boxed{x_3 = 1} \longrightarrow \boxed{x_1 = -\frac{1}{5}}$$

$$x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0$$

...

نکته) اگر ماتریس A بصورت $\underline{\Lambda = T^{-1} A T}$ قطری شده باشد:

$$A^{k} = T \Lambda^{k} T^{-1} \longrightarrow A^{10} = T \Lambda^{10} T^{-1}$$

* برای مثال قبل:

$$A^{20} = T \Lambda^{20} T^{-1}$$

$$= T \begin{bmatrix} (-2)^{20} & & 0 \\ & (-1)^{20} & \\ 0 & & (8)^{20} \end{bmatrix} T^{-1}$$

ب) اگر ماتریس $A_{n\times n}$ دارای مقادیر ویژه مختلط باشد: $\delta \pm j\omega$

$$T = \begin{bmatrix} Re\{v_1\} & Im\{v_1\} & Re\{v_2\} & Im\{v_2\} & \cdots & v_m \cdots v_{m+n} \end{bmatrix}$$

در این حالت، ماتریس A به فرم قطری بلوکی تبدیل می‌شود:

$$\Lambda = T^{-1} A T$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \delta_1 \end{bmatrix} & & & & 0 \\ & \begin{bmatrix} \delta_2 & \omega_2 \\ -\omega_2 & \delta_2 \end{bmatrix} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_m & \\ 0 & & & & \lambda_{m+n} \end{bmatrix}$$

مثال) فرض کنید مقادیر ویژه A :

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm 3j \quad , \quad \lambda_{3,4} = -2 \pm 5j \quad , \quad \lambda_5 = -4$$

باشد . فرم قطری بلوکی ؟!

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}_{5\times 5}$$

مثال) فرم قطری A را بدست آورید + ماتریس تبدیل .

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 6 = 0 = (\lambda+2)\underbrace{(\lambda^2 + 3\lambda + 3)}$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda_1 = -2} \quad , \quad \lambda_{2,3} = ?$$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{\lambda^3} + 5\lambda^2 + 9\lambda + 6 & \lambda + 2 \\ \hline
\cancel{\lambda^3} + 2\lambda^2 & \lambda^2 + 3\lambda + 3 \\ \hline
\cancel{3\lambda^2} + 9\lambda + 6 & \\
-\cancel{3\lambda^2} + 6\lambda & \\ \hline
3\lambda + 6 & \\
3\lambda + 6 & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

$$\underbrace{\lambda^2 + 3\lambda + 3} \quad \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2}$$

$$\lambda_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_1 = -2 \longrightarrow (\lambda I - A)\vec{v}_1 = 0$$

$$\rightarrow (-2I - A)\vec{v}_1 = 0 \longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$(\underbrace{\lambda_2}_{-\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}} I - A)\vec{v}_2 = 0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x_2 = 0} \qquad x_3 = \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x_1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_3 = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \underline{v_1} & Re\{v_2\} & Im\{v_2\} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \left[\begin{array}{c|cc} -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

ج) ماتریس ها با مقادیر ویژه تکراری :

$$(\lambda I - A)\, v_1 = 0$$

$$(\lambda I - A)\, Q_1 = v_1$$

$$(\lambda I - A)\, Q_2 = Q_1$$

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}$$