یا المطیف

رضا ادیب پور
۹۸۱۴۳۰۳
تمرین سری محاسبات عددی
تمرین ۵ ـــ تمرین های ۵، ۱۱، ۱۷، ۲۳، ۲۹

#5 $\qquad |\sin x - \sin y| \overset{?}{\leq} |x-y| \xrightarrow[\text{حالت}]{\text{طاقی}} \forall x ; \quad |\sin x| \leq |x| \quad , \quad x, y \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} \text{if} \quad b = x \longrightarrow f(b) = \sin x \xrightarrow{\quad |\sin x| \leq 1 \quad} \\ \\ \text{if} \quad a = y \longrightarrow f(a) = \sin y \xrightarrow{\quad |\sin y| \leq 1 \quad} \end{cases} \qquad f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f(c)$

$\Longrightarrow \quad |\sin x - \sin y| = |x-y| \cdot |(\sin z)'| \quad \Longrightarrow \quad |\sin x - \sin y| = |x-y| \cdot |\cos z|$

$\xrightarrow[x < z < y]{\quad |\cos z| \leq 1 \quad} \quad |\sin x - \sin y| = |x-y| \cdot |\cos z| \leq |x-y| \xrightarrow{\quad \text{if } y=0 \quad} \begin{cases} \sin 0 = 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow \quad |\sin x - 0| = |x-0| \cdot |\cos z| \leq |x-0|$

#11 $\quad \begin{cases} \text{if} \quad x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x = 0 \longrightarrow x = r > 0 \\ \\ \text{else} \quad nx^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0 \longrightarrow 0 < x = K < r \end{cases}$

$\text{if} \quad x = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0^n + a_1(0)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(0) = 0$

واگذارش داریم : $f(r) = 0 \longrightarrow$ rریشه معادلات

طبق قضیه
رول $f(a) = f(b) \xrightarrow{c \in (a,b)} f'(c) = 0 \longrightarrow \begin{cases} a = r \\ b = 0 \end{cases} \Longrightarrow f(0) = f(r) = 0 \xrightarrow{0 < c < r} f'(c) = 0$

$\longrightarrow$ بنابراین از معادله $(x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x = 0)$ مشتق می‌گیریم :

$nx^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0 \xrightarrow{\quad x = c \quad} nc^{n-1} + (n-1)a_1 c^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$

#17   if $h \to 0 \implies \underbrace{O(h^m)}_{f_1} \underbrace{O(h^n)}_{f_2} = O(h^{m+n})$

داریم: $f_{(n)} = O(g_{(n)})$ اگر $|f_{(n)}| \leq M|g_{(n)}|$

$$\begin{cases} f_1 = O(h^m) \longrightarrow |f_1| \leq M_1|h^m| \\ f_2 = O(h^n) \longrightarrow |f_2| \leq M_2|h^n| \end{cases} \xrightarrow[= f_1 f_2]{O(h^m) \cdot O(h^n)} |f_1||f_2| \leq M_1 M_2 |h^m||h^n|$$

$$\implies |f_1 f_2| \leq \underbrace{M_1 M_2}_{M} \underbrace{|h^{m+n}|}_{f} \implies f_1 f_2 = F = O(h^{m+n}) = O(f)$$

#23 $x = 3.1415$, x^* تقریبی برای x با ۵ رقم معنی دست

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} < 5 \times 10^{-5} \textcircled{S} \longrightarrow 5 \text{ رقم معنی دست} \implies \frac{|3.1415 - x^*|}{3.1415} < 5 \times 10^{-3}$$

$$\implies |3.1415 - x^*| < 0.0157075 \implies \qquad -0.0157075 < 3.1415 - x^* < 0.0157075$$

$$\implies -3.1572075 < -x^* < -3.1257925 \implies 3.12\boxed{57925}^{\times} < x^* < 3.15\boxed{72075}^{\times}$$

#29 $x = 314.16 \longrightarrow$ تقریبی برای 100π است   خطای نسبی و خطار مطلق $= ?$

$$\begin{cases} x = 100\pi \\ x^* = 314.16 \longrightarrow 5 \text{ رقم معنی دست} \end{cases}$$

طبق سوال بالا ، تقریب با ۵ رقم معناست برای π

بصورت زیراست: $3.12 < \pi < 3.15$

بنابرین $\pi = 3.15 \implies e_r = \left|\dfrac{100\pi - 314.16}{100\pi}\right| = \left|\dfrac{100 \times 3.15 - 314.16}{100\pi}\right| < 314.16 \times 10^{-5}$

$$\implies e_r \approx 0.000084 \longrightarrow \text{دارای 6 رقم معنی است}$$