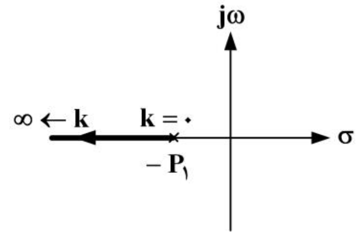
۲-۹-۵ آثار افزودن صفر و قطب سمت چپ صفحه s به تابع تبدیل حلقه باز

۲-۹-۵-۱ افزودن قطب

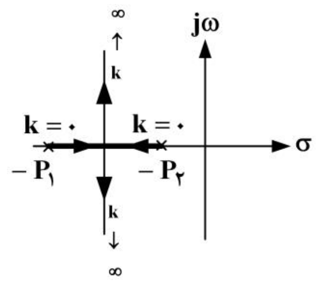
به طور کلی، افزودن قطب سمت چپ صفحه s به تابع تبدیل حلقه باز، باعث کشیده شدن مکان ریشه‌ها به سمت راست صفحه s می‌شود. به بیانی دیگر، علاوه‌بر نزدیک‌کردن قطب‌های سیستم حلقه بسته به مرز ناپایداری (محور موهومی)، سبب کندتر شدن پاسخ سیستم نیز می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، به مثال زیر توجه کنید.

مثال: (مؤلف)

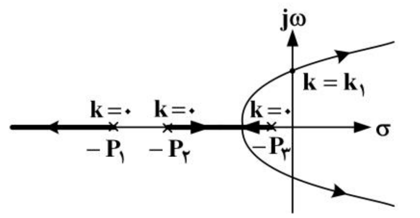
۱) $GH(s)=\dfrac{k}{s+p_1}$ $\qquad k>0 \quad p_1>0$



۲) $GH(s)=\dfrac{k}{(s+p_1)(s+p_2)}$ $\qquad k>0 \quad p_1>p_2>0$



۳) $GH(s)=\dfrac{k}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$ $\qquad k>0 \quad p_1>p_2>p_3>0$

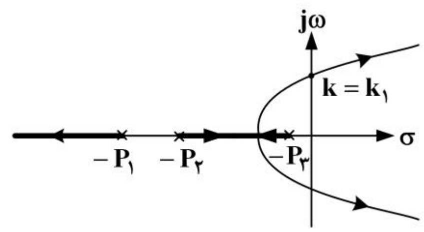


همانطور که مشاهده می‌شود، با اضافه کردن قطب سمت چپ صفحه s، قطب‌های سیستم حلقه بسته به سمت مرز ناپایداری حرکت کرده، به طوری که در حالت سوم پس از بهره مشخص $k=k_1$، قطب‌های سیستم حلقه بسته در سمت راست محور موهومی قرار گرفته و سیستم ناپایدار می‌شود. در حالی که در مقایسه با حالت‌های اول و دوم، سیستم حلقه بسته به ازاء همه مقادیر k پایدار است. توجه شود تفاوت حالت‌های اول و دوم، کشیده شدن قطب‌های سیستم حلقه بسته به سمت محور موهومی است.

۲-۹-۵-۲ افزودن صفر

به طور کلی، افزودن صفر سمت چپ صفحه s به تابع تبدیل حلقه باز، باعث کشیده شدن مکان ریشه‌ها به سمت چپ صفحه s (بهبود پایداری) می‌شود. به بیانی دیگر، علاوه‌بر دور کردن قطب‌های سیستم حلقه بسته از مرز ناپایداری (محور موهومی)، پاسخ سیستم نیز سریع‌تر می‌شود. برای درک بهتر، به مثال زیر توجه کنید.

مثال: تابع تبدیل حلقه باز شماره (۳) مثال قبل را در نظر بگیرید. (مؤلف)

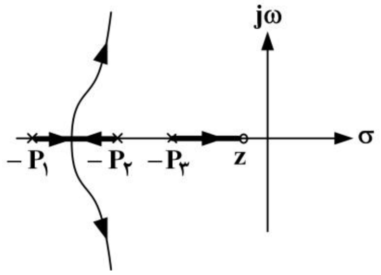


۱) $GH(s)=\dfrac{k}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$

$k>0 \qquad p_1>p_2>p_3>0$

$$۲)\ GH(s)=\frac{k(s+z)}{(s+p_۱)(s+p_۲)(s+p_۳)}$$

$$p_۱>p_۲>p_۳>z>۰ \qquad k>۰$$

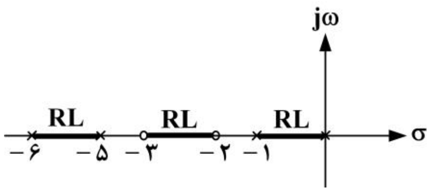


به راحتی مشاهده می‌شود که قطب‌های سیستم حلقه بسته با اضافه کردن صفر سمت چپ از مرز ناپایداری (محور موهومی) دور می‌شود، به طوری که اگرچه قطب‌های سیستم حلقه بسته (۱) به ازاء $k>k_۱$ در سمت راست محور موهومی قرار می‌گیرند، یعنی سیستم ناپایدار می‌شود، با افزودن صفر به آن (تابع تبدیل حلقه باز (۲)) ، سیستم به ازاء همه مقادیر k پایدار می‌شود.

قبل از پرداختن به تست‌های نمونه در چند سال اخیر، به حل یک مثال به طور کامل می‌پردازیم.

مثال: مکان ریشه‌ها را برای تابع تبدیل حلقه باز $GH(s)=\frac{k(s+۲)(s+۳)}{s(s+۱)(s+۵)(s+۶)}$ و $k>۰$ رسم کنید. (مؤلف)

ابتدا مکان ریشه‌ها (RL) را مشخص می‌کنیم.



مجانب‌ها و محل تلاقی آن‌ها عبارتست از:

$$n-m=۲$$

$$\sigma=\frac{(-۱-۵-۶)-(-۲-۳)}{۲}=-۳/۵$$

$$\theta=\frac{(۲l+۱)\pi}{۲}=\frac{\pi}{۲}\ ,\ \frac{۳\pi}{۲} \qquad (l=۰,۱)$$

نقاط شکست عبارتند از:

$$\frac{dk}{ds}=۰ \quad \rightarrow \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{s(s+۱)(s+۵)(s+۶)}{(s+۲)(s+۳)}\right)=۰$$

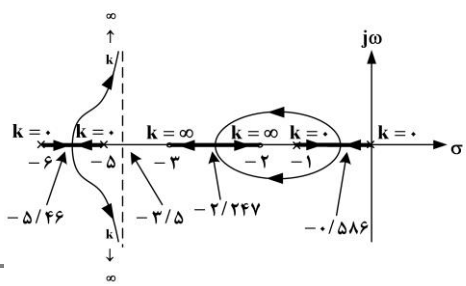
$$\rightarrow \quad s_۱=-۰/۵۸۶ \quad , \quad s_۲=-۵/۴۶ \quad , \quad s_۳=-۲/۲۴۷$$

با توجه به این که هر سه مقدار حقیقی بوده و روی RL قرار دارند، هر سه ریشه فوق نقطه شکست خواهند بود. برای بررسی محل تلاقی با محور موهومی معادله مشخصه سیستم حلقه بسته را تشکیل می‌دهیم.

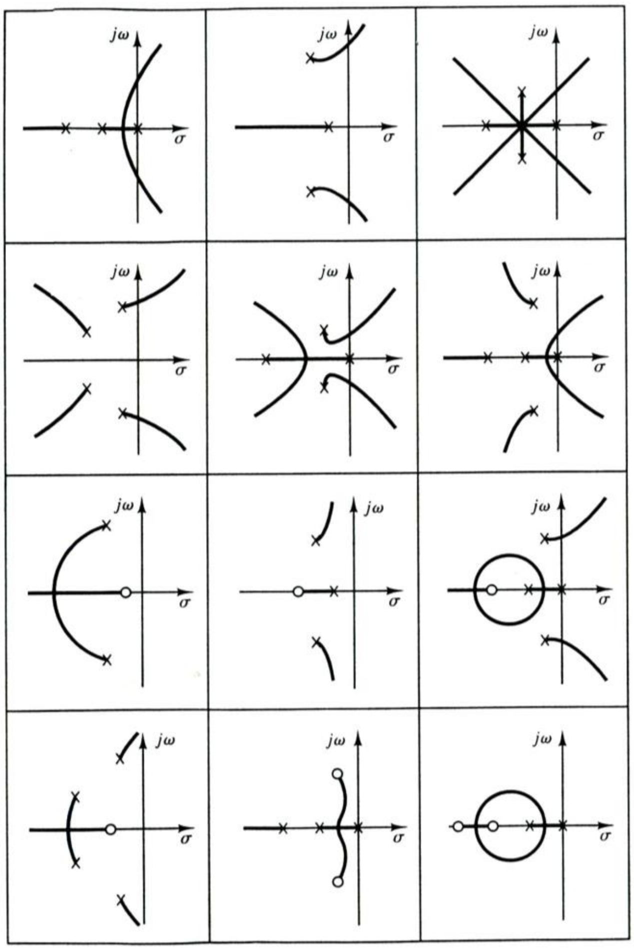
$$\Delta(s)=s^۴+۱۲s^۳+(k+۴۱)s^۲+(۵k+۳۰)s+۶k=۰$$

$$\begin{array}{llll}
s^۴ & ۱ & k+۴۱ & ۶k \\
s^۳ & ۱۲ & ۵k+۳۰ & \\
s^۲ & \frac{۷k+۴۶۲}{۱۲} & ۶k & \\
s^۱ & \frac{۳۵k^۲+۱۶۵۶k+۱۳۸۶۰}{۷k+۴۶۲} & & \rightarrow\ k=-۱۰/۸۶۴۲\ ,\ -۳۶/۴۵۰۱ \\
s^۰ & ۶k & &
\end{array}$$

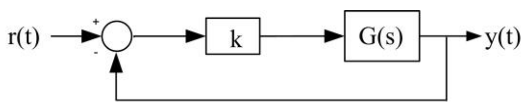
بنابراین مکان ریشه‌ها محور موهومی را قطع نخواهد کرد. با توجه به این که مکان برای $k>۰$ رسم می‌شود، مکان ریشه‌ها از قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز شروع و به صفرهای آن ختم می‌شود. لذا مکان ریشه‌ها به صورت روبرو خواهد بود.



شکل زیر مکان هندسی ریشه‌ها را برای چند سیستم کنترلی با فرض $k > ۰$ نشان می‌دهد.



مثال: سیستم حلقه بسته زیر با $G(s) = \dfrac{۱}{s(s+۵)}$ را در نظر بگیرید. به ازاء چه مقدار k قطب‌های سیستم حلقه بسته در $s_{1,۲} = -۱۰ \pm j۱۰$ قرار دارند؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۳)

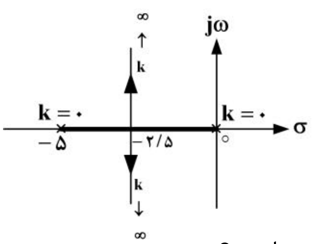


۱) $k = ۲۵$ ۲) $k = \dfrac{۲۵}{۴}$

۳) $k = ۲۰۰$ ۴) به ازاء هیچ مقدار k

✍ **حل:** گزینه «۴»

مکان هندسی ریشه‌های سیستم مفروض به صورت روبرو است.
لذا به راحتی می‌توان دریافت که برای هیچ مقدار k نمی‌توان قطب‌های تابع تبدیل حلقه بسته را در $-۱۰ \pm j۱۰$ قرار داد.



مثال: در مقایسه نمودار مکان ریشه‌ها به ازاء k های مثبت و منفی کدام یک از جملات زیر صحیح است؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۳)

۱) اگر برای k های مثبت نقطه شکست داشته باشیم، برای k های منفی نیز حتماً نقطه شکست داریم.

۲) مجانب‌ها برای k های مثبت و منفی نسبت به محور موهومی قرینه‌اند.

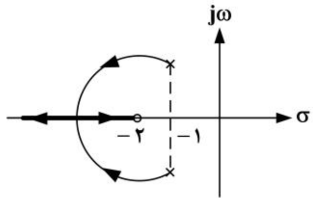
۳) قسمتی از محور حقیقی که برای k های مثبت جزء مکان نیست، برای k های منفی جزء مکان است.

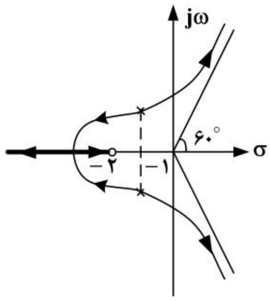
۴) هر سه گزینه صحیح است.

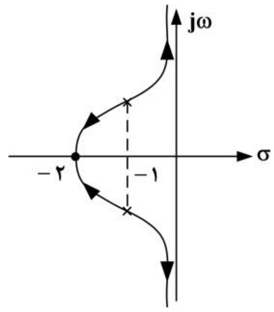
✍ **حل:** گزینه «۳»

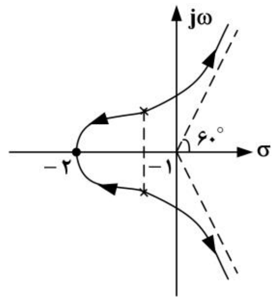
با توجه به متن درس، گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

مثال: مکان ریشه‌های سیستم $G(s)H(s)=\dfrac{k(s+۲)^۲}{(s^۲+۲s+۲)^۲}$ به ازاء k های مثبت تقریباً برابر است با: (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۲)

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

✍ **حل:** گزینه «۳»

روش اول: گزینه‌های (۱) و (۲) به دلیل این که محور حقیقی جزء مکان RL نمی‌باشد، نادرست هستند. البته گزینه (۱) نیز به دلیل دیگری نیز نادرست است. چون قطب‌های مزدوج مختلط از مرتبه ۲ می‌باشند، باید دو شاخه مکان از آن خارج شوند. از بین گزینه‌های (۳) و (۴) کافی است که شرط برخورد با محور موهومی را بررسی کنیم.

$$\Delta(s)=(s^۲+۲s+۲)^۲+k(s+۲)^۲=۰ \;\rightarrow\; \Delta(s)=s^۴+۴s^۳+(k+۸)s^۲+(۸+۴k)s+۴+۴k=۰$$

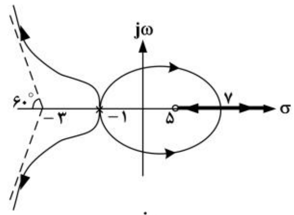
$$\begin{array}{llll}
s^۴ & ۱ & k+۸ & ۴(۱+k) \\
s^۳ & ۴ & ۴(۲+k) & \\
s^۲ & ۶ & ۴(۱+k) & \\
s^۱ & \dfrac{۴+k}{۳} & & \\
s^۰ & ۲(۱+k) & &
\end{array}
\xrightarrow{\text{یک سطر صفر}} ۴+k=۰ \;\rightarrow\; k=-۴<۰$$

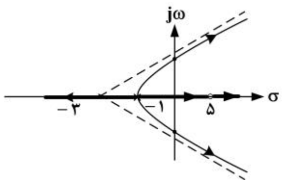
بنابراین مکان محور موهومی را قطع نمی‌کند و لذا گزینه (۳) صحیح است.

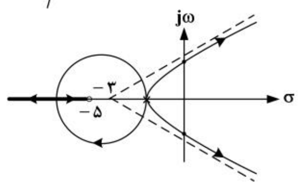
روش دوم: کافی است محل تلاقی مجانب‌ها را بدست آوریم.

$$\sigma=\frac{(-۲\times۲)+(۲\times۲)}{۲}=۰$$

مثال: مکان ریشه‌های سیستم با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)=\dfrac{k(۵-s)}{(۱+s)^۴}$ برای $k>۰$ کدام است؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۲)

۱) 

۲) 

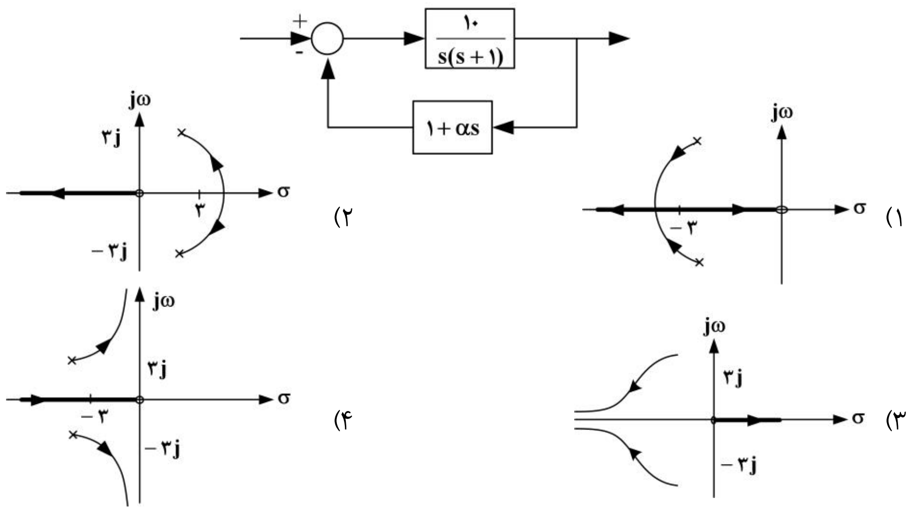
۳) 

۴) هیچ‌کدام

✍ **حل**: گزینه «۱»

با توجه به متن درس، باید از عمل فاکتورگیری استفاده کرد. به عبارتی دیگر، مکان هندسی ریشه‌ها را برای $k<0$ بایستی رسم کنیم. تنها گزینه‌ای که مکمل مکان ریشه‌ها *(CRL)* را به درستی نمایش می‌دهد، گزینه (۱) می‌باشد.

مثال: مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستم داده شده برحسب تغییرات α کدام یک از شکل‌های زیر است؟ (مکانیک ۸۲)



✍ **حل**: گزینه «۱»

ابتدا باید معادله مشخصه سیستم را به فرم استاندارد $\Delta(s)=1+\alpha GH(s)=0$ درآوریم. لذا:

$$\Delta(s)=1+\frac{10(1+\alpha s)}{s(s+1)}=0 \quad\rightarrow\quad \Delta(s)=1+\frac{\alpha(10s)}{s^2+s+10}$$

بنابراین تابع تبدیل حلقه باز عبارتست از:

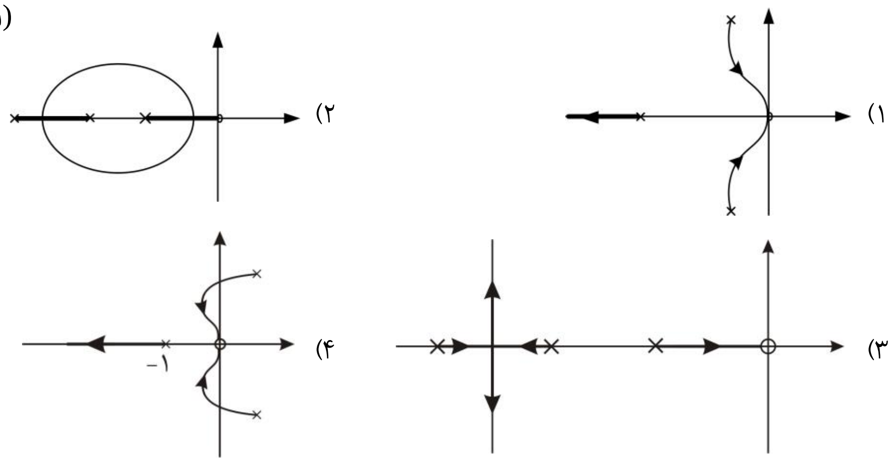
$$GH(s)=\frac{\alpha(10s)}{s^2+s+10}$$

اگرچه در حل مسأله نیازی به محاسبه تابع تبدیل حلقه باز سیستم با توجه به گزینه‌های داده شده نبود، ولی به منظور یادآوری مطالب، این کار صورت گرفته است. بدون حل می‌توان نتیجه گرفت که تنها گزینه (۱) با توجه به قوانین مکان ریشه‌ها صحیح می‌باشد. زیرا یک صفر در بی‌نهایت قرار دارد. لذا بایستی نقطه شکست روی محور حقیقی داشته باشیم که این شرط تنها در گزینه (۱) صدق می‌کند.

$$\frac{dk}{ds}=0 \quad\rightarrow\quad \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+s+10}{10s}\right)=0 \quad\rightarrow\quad s=\begin{cases}-\sqrt{10}\\ +\sqrt{10}\ \text{(غیر قابل قبول)}\end{cases}$$

مثال: مکان ریشه‌های سیستم مدار بسته با فیدبک واحد به ازای تغییرات مثبت k کدام است؟ (هسته‌ای ۸۳)

$$GH(s)=\frac{2(s+2)}{s(s^2+ks+1)}$$



✍ **حل:** گزینه «۴»

ابتدا معادله مشخصه سیستم را به فرم استاندارد $\Delta(s)=1+k\dfrac{N(s)}{D(s)}=0$ تبدیل می‌کنیم.

$$\Delta(s)=1+\frac{2(s+2)}{s(s^2+ks+1)}=0 \quad \rightarrow \quad \Delta(s)=1+k\frac{s^2}{s^3+3s+4}=0$$

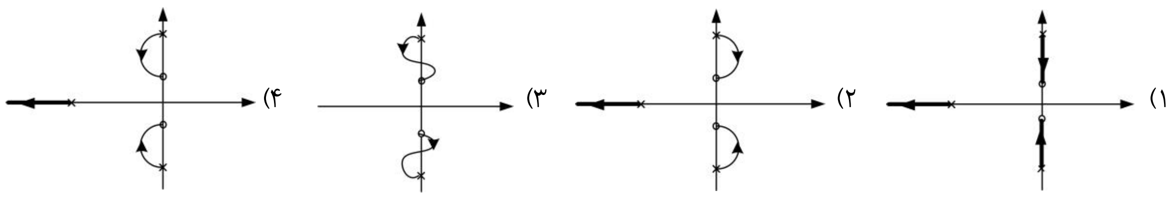
بنابراین تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از: $GH(s)=k\dfrac{s^2}{s^3+3s+4}$

با نگاه اول می‌توان گزینه‌های (۲) و (۳) را حذف کرد، زیرا بایستی دوشاخه مکان به $s=0$ وارد شود. تنها گزینه (۴) از بین دو گزینه باقیمانده صحیح است. زیرا مخرج تابع تبدیل حلقه باز دارای ریشه‌های سمت راست محور موهومی خواهد بود (شرط لازم برای پایداری را ندارد). این واقعیت با تشکیل جدول راث برای معادله مشخصه سیستم حلقه بسته قابل اثبات است.

$$\Delta(s)=s^3+ks^2+3s+4=0$$

شرط پایداری سیستم حلقه بسته برابر است با $k>\frac{4}{3}$. بنابراین سیستم حلقه بسته برای $0<k<\frac{4}{3}$ ناپایدار بوده و در $k=\frac{4}{3}$ محور موهومی را قطع می‌کند.

مثال: مکان ریشه‌های سیستم مدار بسته‌ای که تابع تبدیل مدار باز آن $GH(s)=\dfrac{k(s^2+3)}{(s^2+5)(s+1)}$ است، به ازاء مقادیر مثبت k کدام است؟ (هسته‌ای ۸۳)



✍ **حل:** گزینه «۴»

به دو روش می‌توانیم این تست را حل کنیم.

روش اول: روش راث $\Delta(s)=s^3+(1+k)s^2+5s+5+3k=0$

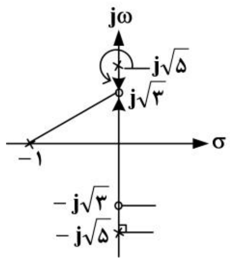
با توجه به روش راث شرایط پایداری عبارتند از: $5+3k>0 \Rightarrow k>-\frac{5}{3} \quad , \quad 1+k>0 \Rightarrow k>-1$

مشاهده می‌شود که برای $k>0$، کلیه درایه‌های ستون اول جدول راث مثبت بوده، لذا سیستم برای کلیه مقادیر k پایدار می‌باشد. تنها گزینه‌ای که این شرط را دارد، گزینه (۴) می‌باشد.

روش دوم: زاویه ورود به صفر $z=j\sqrt{3}$

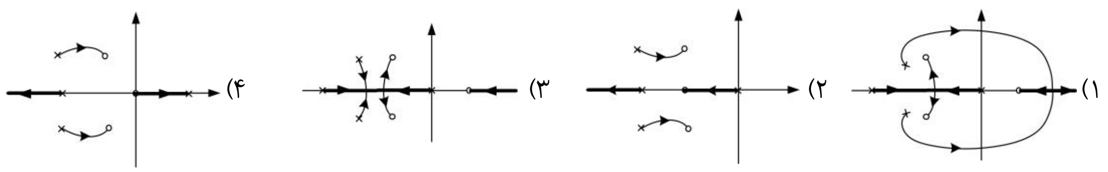
[(مجموع زوایای قطب‌ها نسبت به صفر موردنظر) ـ (مجموع زوایای سایر صفرها نسبت به صفر موردنظر)$-180=\theta$]

$$\theta=180-[(90)-(90+270+60)]=150^\circ$$

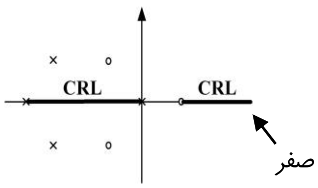


تنها گزینه‌ای که زاویه ورود به صفر آن می‌تواند 150° باشد، گزینه (۴) می‌باشد.

مثال: نمودار مکان ریشه‌ها برای سیستم $G(s)=\dfrac{k(۱-s)(s^۲+۲s+۲)}{s(s+۳)(s^۲+۴s+۵)}$ با فیدبک واحد منفی و $k>۰$ کدام یک از اشکال زیر است؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۳)

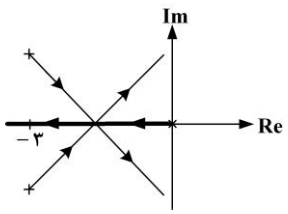


✍ **حل:** گزینه «۱»



با توجه به مطالب ذکر شده، باید عمل فاکتورگیری انجام شود. لذا مکان ریشه‌ها را برای $k<۰$ بایستی رسم کنیم. بنابراین تنها گزینه‌های (۱) و (۳) با توجه به مکمل مکان ریشه‌ها (CRL) صحیح می‌باشند. از میان این دو گزینه، گزینه (۳) نادرست است. زیرا با توجه به وجود یک صفر در ∞، باید نقطه شکست داشته باشیم.

مثال: در سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز $GH(s)=\dfrac{k}{s(s^۲+۶s+\alpha)}$ به ازاء کدام مقدار α مکان ریشه‌های حلقه بسته سیستم به صورت شکل مقابل درمی‌آید؟ (هسته‌ای ۷۸)



۱) ۹

۲) ۱۲

۳) ۱۸

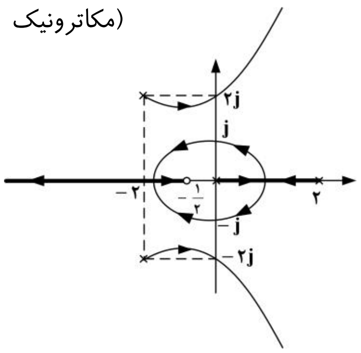
۴) به ازاء هیچ مقدار α نمی‌توان مکانی با این شکل را بدست آورد.

✍ **حل:** گزینه «۲»

نقطه شکست را بدست می‌آوریم. $\dfrac{dk}{ds}=۰ \;\rightarrow\; ۳s^۲+۱۲s+\alpha=۰ \;\rightarrow\; s=\dfrac{-۶\pm\sqrt{۳۶-۳\alpha}}{۳}$

با توجه به این که نقطه شکست روی محور حقیقی منفی می‌باشد و از ۳− بزرگ‌تر می‌باشد، لذا: $۳۶-۳\alpha=۰ \;\rightarrow\; \alpha=۱۲$

مثال: مکان هندسی ریشه‌های مد طولی $(Longitudinal)$ یک سیستم اتوپایلوت هواپیما به صورت زیر است. به ازاء چه مقادیری از $k>۰$ سیستم پایدار است؟ (مکان با دقت کافی رسم شده است.) (مکاترونیک ۸۴)



۱) $۱۴/۵۲<k<۱۶/۱۲$

۲) $۱۰<k<۲۴/۵۴$

۳) با این وضع سیستم همیشه ناپایدار است و احتیاج به جبران‌کننده دارد.

۴) $۱۶/۱۲<k<۲۴/۵۴$

✍ **حل:** گزینه «۳»

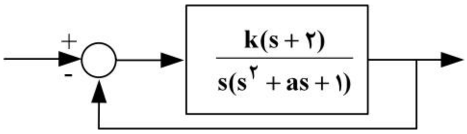
با توجه به مکان هندسی ریشه‌ها، تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از: $GH(s)=\dfrac{k(s+۰/۵)}{s(s-۲)(s^۲+۴s+۸)}$

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته برابر است با: $\Delta(s)=s^۴+۲s^۳+(-۱۶+k)s+۰/۵k=۰$

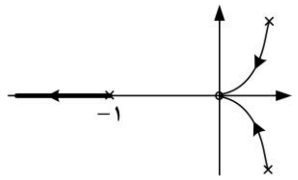
معادله مشخصه حلقه بسته سیستم شرط لازم برای پایداری (کلیه ضرائب مخالف صفر) را ندارد. بنابراین سیستم همواره ناپایدار است.

توجه کنید با توجه به مکان هندسی ریشه‌ها بدون محاسبه نیز می‌توان به ناپایداری سیستم حلقه بسته پی برد.

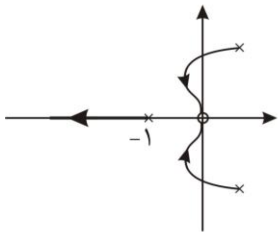
مثال: در سیستم کنترل شکل مقابل اگر $k=۲$ باشد، مکان ریشه‌های سیستم برای تغییرات a از صفر تا بی‌نهایت به کدام صورت خواهد بود؟ (هسته‌ای ۷۷)



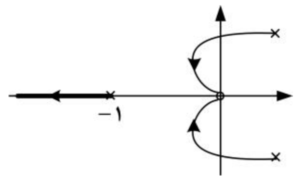
۱)



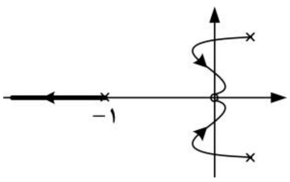
۲)



۳)



۴)



✍ **حل:** گزینه «۲»

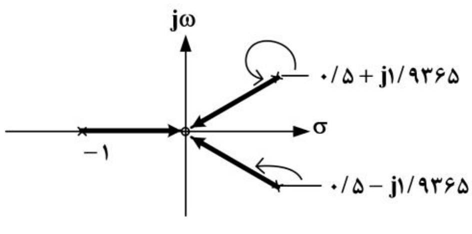
ابتدا بایستی معادله مشخصه سیستم را به فرم استاندارد $\Delta(s)=۱+a\dfrac{N(s)}{D(s)}=۰$ درآوریم. با فرض $k=۲$ داریم:

$$\Delta(s)=۱+\frac{۲(s+۲)}{s(s^{۲}+as+۱)}=۰ \quad\rightarrow\quad \Delta(s)=۱+\frac{as^{۲}}{s^{۳}+۳s+۴}=۰ \quad\rightarrow\quad GH(s)=\frac{as^{۲}}{s^{۳}+۳s+۴}$$

ابتدا شرط برخورد با محور موهومی را بررسی می‌کنیم. از روش راث استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\Delta(s)=s^{۳}+as^{۲}+۳s+۴=۰ \quad\rightarrow\quad ۳\times a-۱\times۴=۰ \quad\rightarrow\quad a=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین مکان ریشه‌ها محور موهومی را فقط در یک نقطه قطع کرده، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست می‌باشند. برای تعیین پاسخ صحیح از میان گزینه‌های باقیمانده کافیست زاویه ورود به $s=۰$ را بدست آوریم. با توجه به این نکته که صفرهای مختلط نقشی در زاویه برای نقاط روی محور حقیقی ندارند داریم:



$s=۰$ مضاعف است : چون $۲\theta=۱۸۰$

$\theta=۹۰$

مثال: اگر مکان ریشه‌های حلقه بسته سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز: $G(s)H(s)=k\dfrac{(s+۳)(s+۴)}{s(s+۱)(s+۲)(s+۵)(s+۶)}$ را برای $k>۰$ رسم می‌کنیم. در مورد تعداد نقاط شکست *(Break points)* روی محور حقیقی برای $k>۰$ کدام بیان درست است؟ (هسته‌ای ۷۷)

۱) برای $k>۰$ فقط یک نقطه شکست وجود دارد.

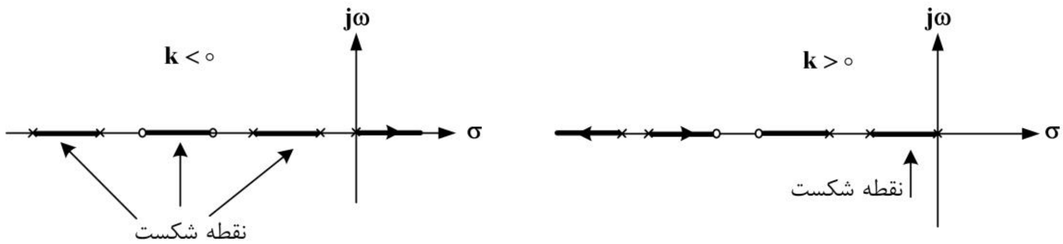
۲) برای $k<۰$ سه نقطه شکست وجود دارد.

۳) نقطه شکست برای $k>۰$ از نقطه شکست برای $k<۰$ به مبدأ نزدیک‌تر است.

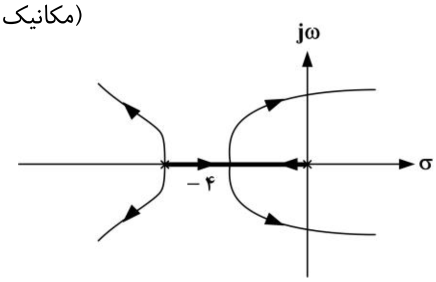
۴) هر سه بیان درست است.

✍ **حل:** گزینه «۴»

کافی است مکان هندسی ریشه‌ها را در دو حالت $k < 0$ و $k > 0$ در نظر بگیریم. یادآوری می‌کنیم که بین هر دو صفر متوالی و یا هر دو قطب متوالی یک نقطه شکست داریم.



مثال: مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه برای یک سیستم کنترل به صورت شکل زیر است. معادله مشخصه مربوط برابر است با: (مکانیک ۷۴)



۱) $s^2 + 8s + 16 + k = 0$

۲) $s^3 + 16s^2 + 8s + k = 0$

۳) $s^4 + 12s^3 + 48s^2 + 64s + k = 0$

۴) $s^4 + 16s^3 + 8s^2 + s + k = 0$

✍ **حل:** گزینه «۳»

چون سه شاخه مکان از $s = -4$ خارج شده، $s = -4$ از مرتبه ۳ می‌باشد و چون یک شاخه مکان از $s = 0$ خارج شده، $s = 0$ از مرتبه یک می‌باشد. لذا تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از: $GH(s) = \dfrac{k}{s(s+4)^3}$

بنابراین معادله مشخصه سیستم حلقه بسته برابر است با:

$$\Delta(s) = 1 + GH(s) = s(s+4)^3 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(s) = s^4 + 12s^3 + 48s^2 + 64s + k = 0$$

مثال: به ازاء چه مقدار a مکان ریشه‌های سیستم با تابع تبدیل حلقه باز $\dfrac{k(s+1)}{s^2(s+a)}$ دارای سه نقطه شکست است؟ $(k > 0)$

(هسته‌ای ۸۰)

۱) $a < 1$ ۲) $a > 6$

۳) $a > 9$ ۴) این معادله نمی‌تواند به ازاء هیچ مقدار a دارای سه نقطه شکست باشد.

✍ **حل:** گزینه «۳»

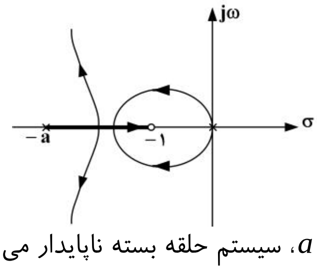
شرط لازم برای نقطه شکست این است که $\dfrac{dk}{ds} = 0 \ \rightarrow\ \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s^2(s+a)}{s+1}\right) = 0 \ \rightarrow\ s\left[s^2 + \dfrac{(a+3)}{2}s + a\right] = 0$

بنابراین مکان ریشه‌های سیستم برای $a > 9$ دارای سه نقطه شکست خواهد بود که یکی $s = 0$ است. این واقعیت بدان معناست که ریشه‌های عامل $\left[s^2 + \dfrac{(a+3)}{2}s + a\right]$، دو ریشه حقیقی منفی می‌باشند. لذا:

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

$$\rightarrow \frac{(a+3)^2}{4} - 4a > 0 \rightarrow (a-1)(a-9) > 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} a > 9 \\ a < 1 \end{cases}$$



توجه کنید که با انتخاب $a < 1$، سیستم حلقه بسته ناپایدار می‌شود.

مثال: در سیستمی که تابع تبدیل حلقه باز آن به صورت $G(s)=\dfrac{k(s+1)}{s(s-2)}$ بوده و پس‌خور منفی واحد دارد، کدام یک از بیان‌های زیر نادرست است؟ (هسته‌ای ۷۹)

۱) مکان ریشه‌های این سیستم دایره به مرکز ۱- و شعاع $\sqrt{3}$ است.

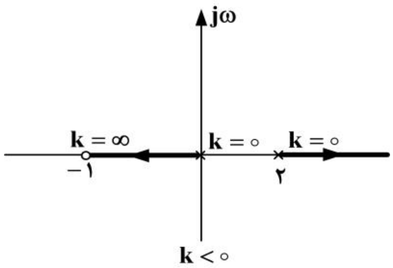
۲) مکان ریشه‌های سیستم برای $k<0$ بر روی محور حقیقی منفی قرار دارد.

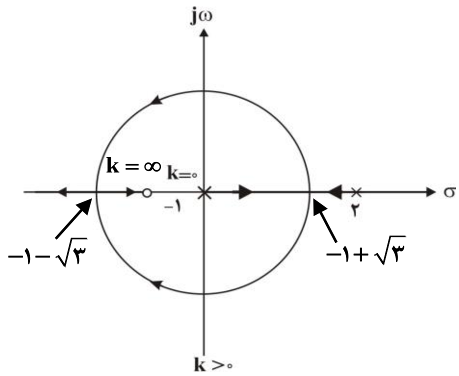
۳) برای $k<0$ مکان ریشه‌ها نقطه شکستی ندارد.

۴) این سیستم دارای دو نقطه شکست بوده و به ازاء مقادیر بزرگ k ناپایدار است.

✍ **حل:** گزینه «۴»

مکان هندسی ریشه‌ها در دو حالت $k>0$ و $k<0$ به صورت زیر است:



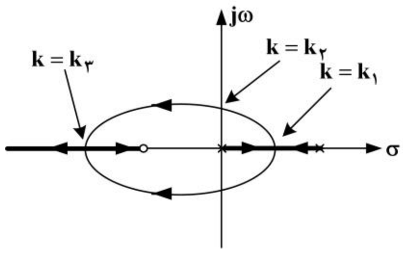


معادله مشخصه سیستم عبارتست از: $\Delta(s)=s^2+(k-2)s+k=0$

شرایط پایداری عبارتند از: $\begin{cases} k>0 \\ k-2>0 \end{cases} \xrightarrow{\cap} k>2$

بنابراین برای k های بزرگ سیستم پایدار است. لذا گزینه (۴) نادرست است.

مثال: نمودار مکان ریشه‌ها برای یک سیستم حلقه باز در شکل زیر نشان داده شده است. در رابطه با این سیستم کدام مورد صادق می‌باشد؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۳)



۱) سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی همواره پایدار است.

۲) سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد مثبت همواره ناپایدار است.

۳) سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی به ازاء $k>k_1$ پایدار است.

۴) سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی به ازاء $k>k_3$ ناپایدار است.

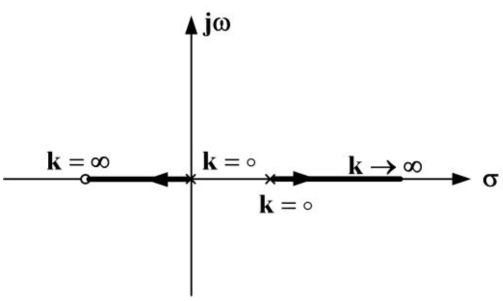
✍ **حل:** گزینه «۲»

با توجه به مکان هندسی ریشه‌ها موارد زیر دریافت می‌شود:

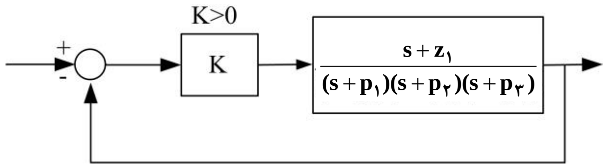
برای $0\le k\le k_1<k_2$ سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی ناپایدار است.

برای $k_2\le k_3<k$ سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی پایدار است.

بنابراین گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ نادرست می‌باشند. با توجه به رسم مکان هندسی ریشه‌ها برای $k<0$ گزینه صحیح (۲) می‌باشد. مکان هندسی ریشه‌ها برای $k<0$ به شکل روبرو است.



مثال: در سیستم شکل مقابل $G(s)$ دارای سه قطب و یک صفر است و داریم $(p_۱ > p_۲ > p_۳)$. همگی قطب‌ها و صفر مدار باز در LHP (نیم صفحه چپ) قرار دارند. چه رابطه‌ای بین صفر مدار باز و قطب‌های مدار باز برقرار باشد تا سیستم مدار بسته برای همه مقادیر $k > ۰$ (از صفر تا ∞) همواره پایدار باشد؟ (مکانیک ۸۳)



۱) $z_۱ > p_۱$

۲) $z_۱ > p_۳$

۳) $z_۱ < (p_۱ + p_۲ + p_۳)$

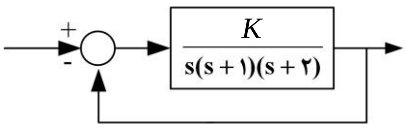
۴) $z_۱ > (p_۱ + p_۲ + p_۳)$

حل: گزینه «۳»

با توجه به مفروضات مسأله کافی است که محل تلاقی مجانب‌ها سمت چپ محور موهومی باشد.

$$\sigma = \frac{-p_۱ - p_۲ - p_۳ + z_۱}{۲} < ۰ \rightarrow -(p_۱ + p_۲ + p_۳) < -z_۱ \quad \rightarrow \quad (p_۱ + p_۲ + p_۳) > z_۱$$

مثال: سیستم کنترلی زیر را در نظر بگیرید:



تعیین کنید که کدام یک از نقاط زیر بر روی مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه سیستم بسته قرار دارند؟ (k مثبت است.) (مکانیک ۷۸)

۱) $s = -۱/۵$ ۲) $s = ۱/۵$ ۳) $s = j\sqrt{۲}$ ۴) $s = j\sqrt{۳}$

حل: گزینه «۳»

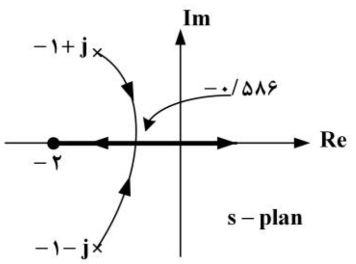
ابتدا معادله مشخصه سیستم حلقه بسته را بدست می‌آوریم. $\Delta(s) = s^۳ + ۳s^۲ + ۲s + k = ۰$

در جدول راث یک سطر صفر با انتخاب $k = ۶$ ایجاد می‌گردد. از معادله کمکی داریم:

$$A(s) = ۳s^۲ + k = ۰ \quad \rightarrow \quad ۳s^۲ + ۶ = ۰ \quad \rightarrow \quad s = \pm j\sqrt{۲}$$

چون ریشه‌های معادله کمکی، ریشه‌های معادله اصلی‌اند، لذا گزینه (۳) صحیح است.

مثال: مکان هندسی ریشه‌های شکل روبرو، مربوط به کدام معادله مشخصه می‌باشد؟ (برای مقادیر k از صفر تا بی‌نهایت) (مکاترونیک ۸۴)



۱) $s^۲ + ۲s + ۲ + k(s+۲) = ۰$

۲) $s + ۲ - k(s^۲ + ۲s + ۲) = ۰$

۳) $(s+۲) + k(s^۲ + ۲s + ۲) = ۰$

۴) $s^۲ + ۲s + ۲ - k(s+۲) = ۰$

حل: گزینه «۴»

با توجه به مکان هندسی ریشه‌های مفروض می‌توانیم محل صفرها و قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز را بیابیم. داریم:

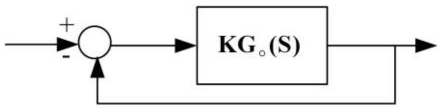
۱- صفرهای حلقه باز: $s = -۲$ ۲- قطب‌های حلقه باز: $s = -۱ \pm j$

بنابراین تابع تبدیل حلقه باز عبارتست از $GH(s) = \frac{(s+۲)}{s^۲ + ۲s + ۲}$. بنابراین معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s) = ۱ + kGH(s) = ۱ + \frac{k(s+۲)}{s^۲ + ۲s + ۲} = ۰ \quad \Rightarrow \quad \Delta(s) = (s^۲ + ۲s + ۲) + k(s+۲) = ۰$$

از سویی چون مکمل مکان هندسی ریشه‌ها (CRL) ترسیم شده است باید بهره‌های منفی در نظر گرفته شود.

مثال: در سیستم مدار بسته شکل مقابل و با فرض پایدار بودن سیستم چه ارتباطی بین سرعت عکس العمل سیستم و میزان پایداری سیستم مدار بسته وجود دارد؟ (مکاترونیک ۸۴)

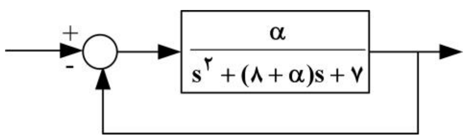


۱) پایداری سیستم مدار بسته ارتباطی با سرعت عکس العمل سیستم ندارد.
۲) هرچه سیستم مدار بسته پایدارتر باشد، سرعت عکس العمل بیشتر است.
۳) هرچه سیستم مدار بسته پایدارتر باشد، سرعت عکس العمل آهسته‌تر است.
۴) نمی‌توان یک دستورالعمل کلی ارائه کرد و ارتباط پایداری و سرعت عکس العمل وابسته به سیستم خاص مورد مطالعه است.

✍ **حل:** گزینه «۲»

می‌دانیم که پایداری نسبی را می‌توان با توجه به مکان قطب‌های تابع تبدیل حلقه بسته تشخیص داد، به طوری که هرچه قطب‌ها از مرز ناپایداری (محور موهومی) دورتر شوند، سیستم پایدارتر است. از سوی دور شدن قطب‌ها از محور موهومی، سرعت پاسخ (عکس العمل سیستم) را افزایش می‌دهد. لذا گزینه (۲) صحیح است.

مثال: نقاط شکست *(Break out , Break in)* مکان ریشه‌های سیستم داده شده $(0 \le \alpha < \infty)$ عبارتند از:
(هسته‌ای ۸۴ ـ ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۴)



۱) ۵- و ۳
۲) ۵ و ۳-
۳) ۸- و ۷
۴) ۸ و ۷-

✍ **حل:** گزینه «؟»

ابتدامعادله مشخصه را به فرم استاندارد $\Delta(s)=1+\alpha GH(s)=0$ درمی‌آوریم.

$$\Delta(s)=1+\frac{\alpha}{s^2+(8+a)s+7}=0 \quad\rightarrow\quad \Delta(s)=1+\alpha\frac{(s+1)}{s^2+8s+7}=0$$

بنابراین تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از:

$$GH(s)=\frac{\alpha(s+1)}{s^2+8s+7}=\frac{\alpha(s+1)}{(s+1)(s+7)} \quad\Rightarrow\quad GH(s)=\frac{\alpha}{s+7}$$

بنابراین مکان هندسی ریشه‌ها نمی‌تواند دارای نقطه شکست باشد. لذا گزینه صحیح وجود ندارد. توجه کنید اگر حذف صفر و قطب در تابع تبدیل حلقه باز رخ دهد، به منظور نمایش کامل قطب‌های سیستم حلقه بسته باید قطب حذف شده تابع تبدیل حلقه باز را به نمودار مکان هندسی ریشه‌ها اضافه نماییم.