دانشگاه صنعتی شاهرود **دانشکده علوم ریاضی**

سری پنجم تمرینات درس ریاضی عمومی ۲ **تاریخ تحویل: ۹۹/۳/۲۳**

---

(۱) حاصل انتگرالهای زیر را بدست آورید.

الف. $\int_0^1 \int_{\sqrt[4]{y}}^1 \frac{dxdy}{1+x^5}$

ب. $\int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{3\sqrt{x^2+z^2}}{\left[1+(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\right]^2} dxdz$

(۲) اگر D ناحیه محدود به خطوط $x=y=0,\ x+y=1$ و $x+y=2$ باشد، مقدار انتگرال $\int\int (x-y)^2 e^{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3} dA$ را روی این ناحیه محاسبه کنید. (از تغییر متغیر $u=x+y$ و $v=x-y$ استفاده کنید.)

(۳) جرم یک جسم سه بعدی در فضا با تابع چگالی $\Delta(x,y,z)$ محدود به ناحیه D، به صورت $M=\iiint_D \Delta dV$ تعریف می شود. جرم جسمی با تابع چگالی $\Delta(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}$ محدود به رویه های $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ و $z=\sqrt{x^2+y^2}$ را محاسبه کنید.

(۴) از تابع $f(x,y,z)=xyz$ روی یک هشتم اول بیضیگون $x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1$ انتگرال بگیرید. (راهنمایی: ابتدا بیضیگون را به کره تبدیل کرده سپس از دستگاه مختصات کروی یا استوانه ای استفاده کنید.)

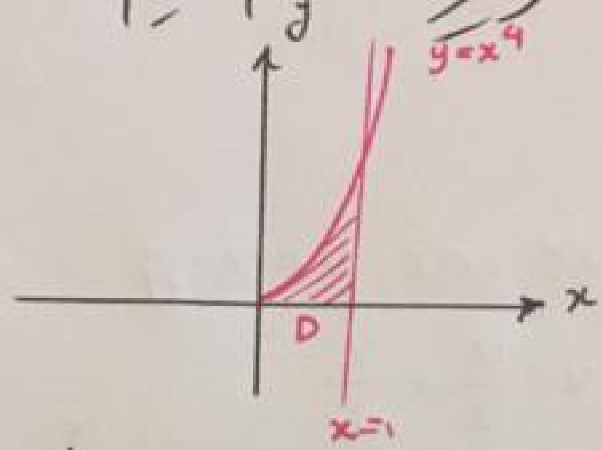
(۵) حجم حفره ایجاد شده توسط استوانه $y^2+z^2=1$ درون کره $x^2+y^2+z^2=100$ چقدر است؟

به نام خدا

پاسخ تمرینات سری ۵ ریاضی ۲

۱-

الف) ابتدا ناحیه انتگرال‌گیری را رسم می‌کنیم



$$\sqrt[4]{y} \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 1 \Rightarrow \begin{cases} y \le x^4 \\ x \le 1 \end{cases}$$

$$I=\int_0^1\int_{\sqrt[4]{y}}^1 \frac{dx\,dy}{1+x^5}=\int_0^1\int_0^{x^4}\frac{dy\,dx}{1+x^5}$$

به جهت سهولت در انتگرال‌گیری ترتیب انتگرال عوض شد.

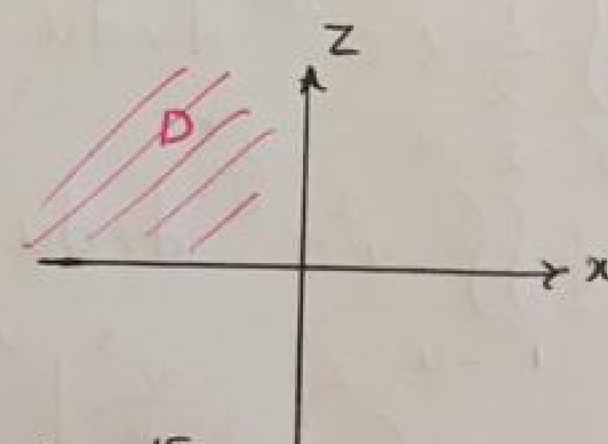
$$=\int_0^1 \frac{y}{1+x^5}\Big|_0^{x^4} dx=\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^5}dx$$

قرار می‌دهیم $u=1+x^5$ پس $du=5x^4$

x	0	1
u	1	2

$$I=\frac{1}{5}\int_0^1 \frac{5x^4}{1+x^5}dx=\frac{1}{5}\int_1^2\frac{du}{u}=\frac{1}{5}\operatorname{Ln}u\Big|_1^2=\frac{\operatorname{Ln}2}{5}$$

ب)



$$I=\int_0^\infty\int_{-\infty}^0 \frac{3\sqrt{x^2+z^2}}{\left[1+(x^2+z^2)^{3/2}\right]^2}dx\,dz$$

قرار می‌دهیم $x=r\cos\theta$ ، $z=r\sin\theta$ پس

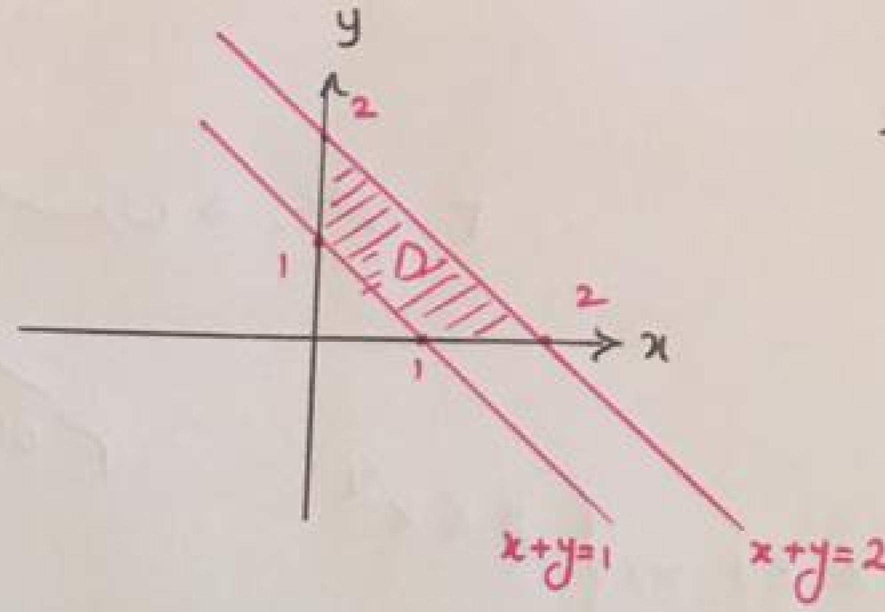
$$x^2+z^2=r^2 \qquad 0<r<\infty \qquad \frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi$$

$$\Rightarrow I=\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^\infty \frac{3r}{(1+r^3)^2}r\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty\frac{3r^2dr}{(1+r^3)^2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{a\to\infty}\int_0^a\frac{3r^2dr}{(1+r^3)^2}=\cdots=\frac{\pi}{2}$$

۲

$$I=\iint_D (x-y)^2 e^{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3} dA$$

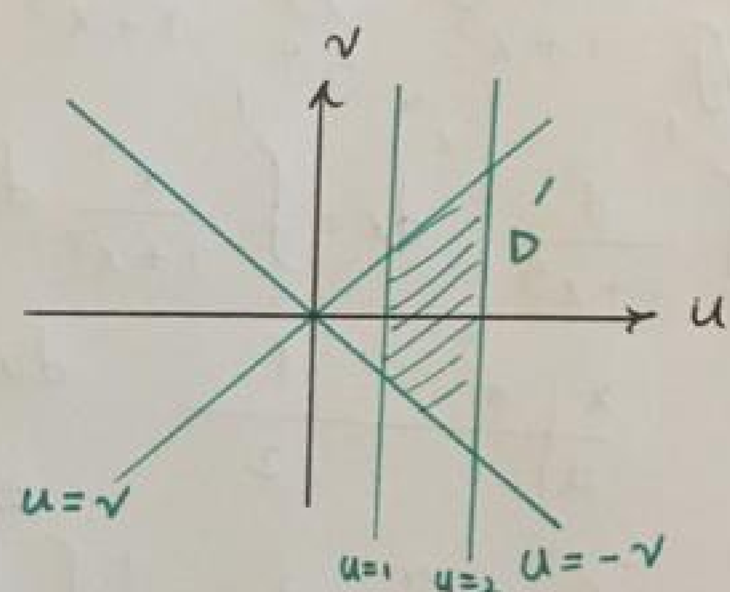


-۲

با تغییر مختصات $u=x+y$ ، $v=x-y$ ناحیه جدید را بدست می آوریم

$$\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{u}{2}+\frac{v}{2} \\ y=\frac{u}{2}-\frac{v}{2} \end{cases} \Rightarrow J=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \det J=-\frac{1}{2}$$

$$D: \begin{cases} x=0 \Rightarrow \frac{u}{2}+\frac{v}{2}=0 \Rightarrow u=-v \\ y=0 \Rightarrow \frac{u}{2}-\frac{v}{2}=0 \Rightarrow u=v \\ x+y=1 \Rightarrow u=1 \\ x+y=2 \Rightarrow u=2 \end{cases}$$



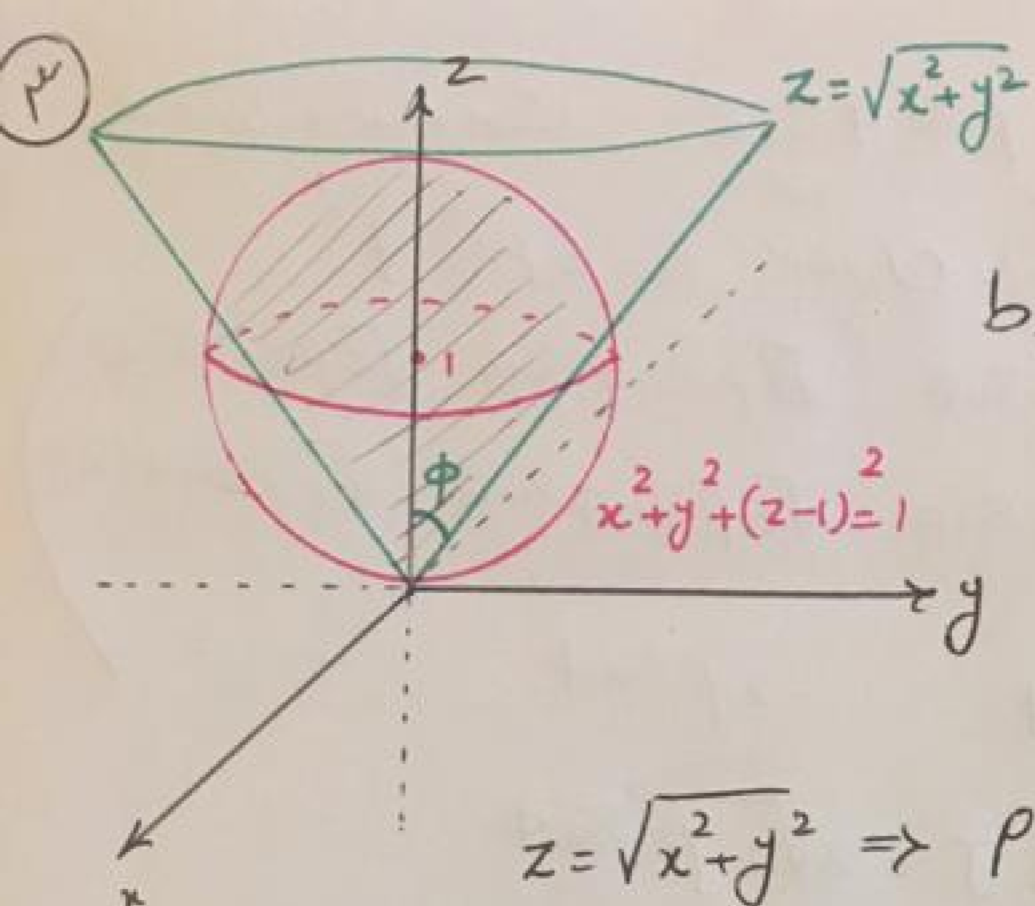
$$I=\iint_{D'} \frac{1}{2} v^2 e^{\frac{v^3}{u^3}} dv\,du$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\int_{-u}^{u} v^2 e^{\frac{v^3}{u^3}} dv\,du=\frac{1}{6}\int_1^2\int_{-u}^{u} 3v^2 e^{\frac{v^3}{u^3}} dv\,du$$

$$=\frac{1}{6}\int_1^2 u^3 e^{\frac{v^3}{u^3}}\Big|_{-u}^{u} du=\frac{1}{6}\int_1^2 u^3(e-e^{-1})\,du$$

$$=\frac{e-e^{-1}}{6}\int_1^2 u^3 du=\frac{e-e^{-1}}{6}\times\frac{1}{4}u^4\Big|_1^2=\frac{5}{8}(e-e^{-1})$$

(۳)



۳- جسم را رسم می کنیم

مطابق شکل مقدار ϕ را از معادله نیم مخروط بدست می آوریم.

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \rho\cos\phi=\rho\sin\phi \Rightarrow 0\le\phi\le\pi/4$$

مقادیر تغییرات ρ از معادله کره بدست می آید

$$x^2+y^2+(z-1)^2=1 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=2z \Rightarrow \rho^2=2\rho\cos\phi \Rightarrow \rho=2\cos\phi$$

$$M=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)^{5/2}\,dv=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\cos\phi} \underbrace{\rho^5\rho^2}_{\rho^7}\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \rho^8\Big|_0^{2\cos\phi}\sin\phi\,d\phi\,d\theta=32\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\cos^8\phi\sin\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$=64\pi\int_0^{\pi/4}\cos^8\phi\sin\phi\,d\phi$$

$$u=\cos\phi \Rightarrow du=-\sin\phi\,d\phi$$

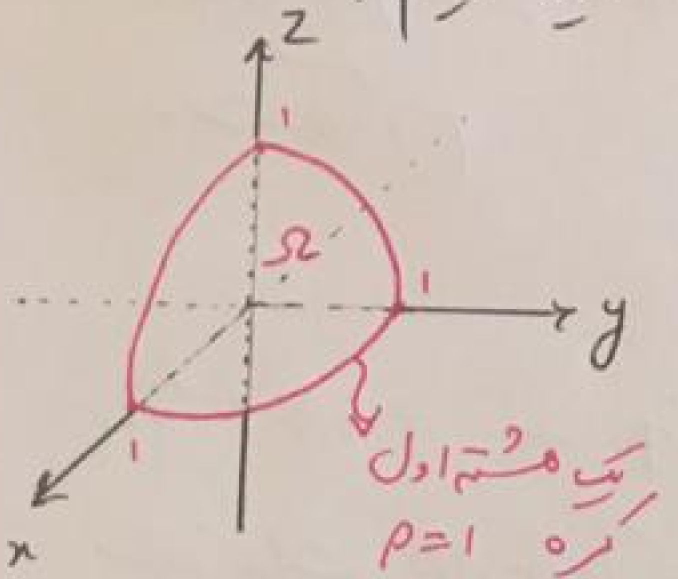
ϕ	0	$\pi/4$
u	1	$1/\sqrt{2}$

$$=-64\pi\int_1^{1/\sqrt{2}} u^8\,du=64\pi\int_{1/\sqrt{2}}^1 u^8\,du$$

$$=\frac{64}{9}\pi u^9\Big|_{1/\sqrt{2}}^1=\frac{64\pi}{9}\left(1-\frac{1}{(\sqrt{2})^9}\right)$$

ابتدا با تبدیلات $x=\rho\sin\phi\cos\theta$ ، $y=\sqrt{2}\rho\sin\phi\sin\theta$ ،

$z=2\rho\cos\phi$ معادله را به کره $\rho=1$ تبدیل میکنیم.



$$J=\begin{pmatrix} \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \\ \sqrt{2}\sin\phi\sin\theta & \sqrt{2}\rho\cos\phi\sin\theta & \sqrt{2}\rho\sin\phi\cos\theta \\ 2\cos\phi & -2\rho\sin\phi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det J = 2\sqrt{2}\,\rho^2\sin\phi$$

$$I=\iiint_{\text{یک هشتم کره}} xyz\,dv = \iiint_{\Omega}\left(2\sqrt{2}\rho^3\sin^2\phi\cos\phi\sin\theta\cos\theta\right)2\sqrt{2}\rho^2\sin^2\phi$$

$$d\rho\, d\phi\, d\theta = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{1}\rho^5\sin^4\phi\cos\phi\sin\theta\cos\theta\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$=\frac{8}{6}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin^4\phi\cos\phi\sin\theta\cos\theta\, d\phi\, d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin^4\phi\cos\phi\, d\phi}_{I_1}\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta}_{I_2}$$

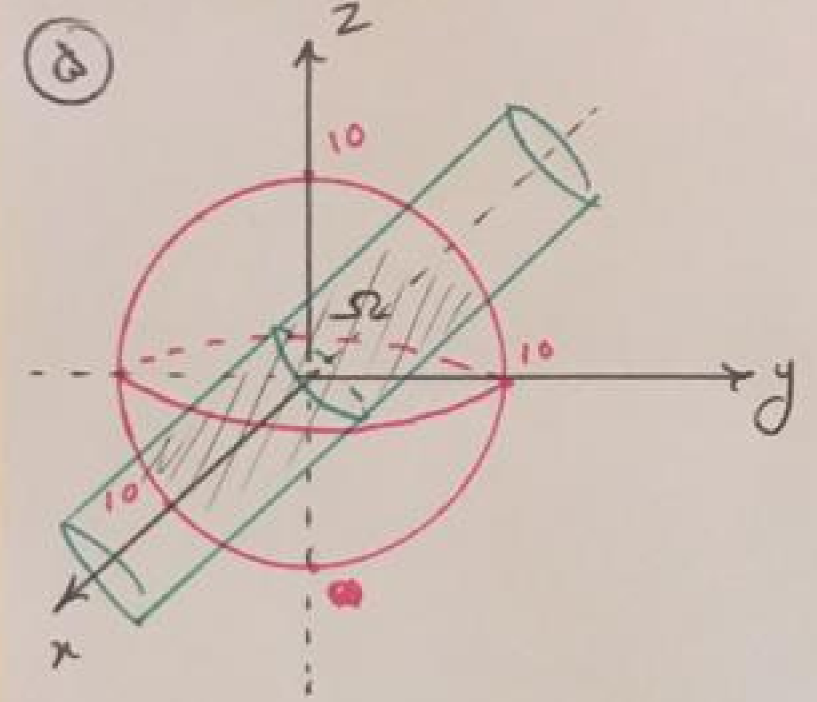
$$I_1=\int_0^{\pi/2}\sin^4\phi\cos\phi\, d\phi \qquad u=\sin\phi \Rightarrow du=\cos\phi\, d\phi \qquad \begin{array}{c|cc} \phi & 0 & \pi/2 \\ \hline u & 0 & 1 \end{array}$$

$$=\int_0^1 u^4\, du=\frac{1}{5}$$

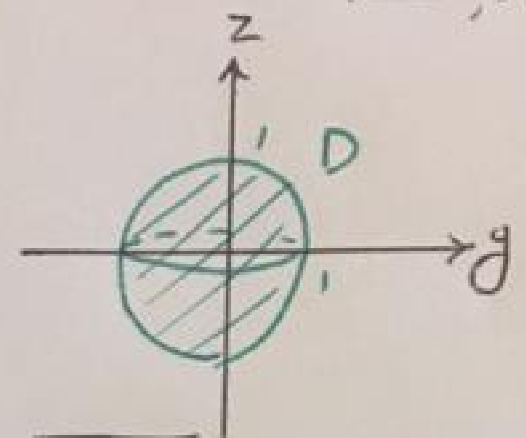
$$I_2=\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta \qquad u=\sin\theta \Rightarrow du=\cos\theta\, d\theta \qquad \begin{array}{c|cc} \theta & 0 & \pi/2 \\ \hline u & 0 & 1 \end{array}$$

$$=\int_0^1 u\, du=\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow I=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}=\frac{2}{15}$$

۵



۵- تصویر حفره Ω روی صفحه yz
دایره $y^2+z^2=1$ می‌باشد



$$V(\text{حفره}) = \iiint_{\Omega} dv = \iint_{D}\int_{-\sqrt{100-y^2-z^2}}^{\sqrt{100-y^2-z^2}} dx\, dA = \iint_{D}\int_{-\sqrt{100-r^2}}^{\sqrt{100-r^2}} dx\, dA$$

$$= 2\iint_{D} \sqrt{100-r^2}\, r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{100-r^2}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^1 \sqrt{100-r^2}\,(2r\,dr)$$

$u=100-r^2 \rightarrow du=-2r\,dr$

r	0	1
u	100	99

$$= -2\pi\int_{100}^{99} \sqrt{u}\, du$$

$$= 2\pi\int_{99}^{100} \sqrt{u}\, du = \frac{4\pi}{3}\left(10^3 - 99\sqrt{99}\right)$$