دانشگاه صنعتی شاهرود | **دانشکده علوم ریاضی**

سری سوم تمرینات درس ریاضی عمومی ۲ | **تاریخ تحویل: ۹۹/۳/۵**

---

(۱) تابع برداری $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ با ضابطه $f(t)=(3t, 2cost, 2sint)$ را در نظر بگیرید.
الف. بردارهای T و B و سپس انحنای خم فوق را به طور دقیق محاسبه کنید.
ب. بردار N و سپس تاب خم فوق را به طور دقیق محاسبه کنید.

(۲) تابع برداری $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ با ضابطه $f(t)=(\frac{1}{\sqrt{t}}, \sqrt{6t}, t\sqrt{t})$ را در نظر بگیرید.
الف. انحنای خم فوق را در نقطه متناظر با $t=1$ روی خم، محاسبه کنید.
ب. تاب خم فوق را در نقطه متناظر با $t=1$ روی خم، محاسبه کنید.
ج. طول قوس این خم را در بازه $[1,4]$ محاسبه کنید.

(۳) معادله دایره بوسان (دایره انحنا) خم $x=y^3-y$ را در نقطه $(0,1)$ بنویسید.

(۴) تابع برداری $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ با ضابطه $f(t)=(2\sqrt{t}cost, 3\sqrt{t}sint, \sqrt{1-t})$ در بازه $0\leq t\leq 1$ بر روی یک رویه درجه دوم واقع است. معادله این رویه را پیدا کرده و نوع رویه را مشخص نمایید.

(۵) تابع برداری $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ با ضابطه $f(t)=(t, t, \sqrt{1-2t^2})$ را در نظر بگیرید.
الف. نشان دهید انحنای خم فوق در تمام نقاط روی خم مقدار ثابتی می باشد.
ب. نشان دهید خم فوق یک خم مسطح می باشد و معادله صفحه ای را بنویسید که شامل خم فوق باشد.
(راهنمایی: برای نشان دادن مسطح بودن این خم می توانید نشان دهید که بردار B یک بردار ثابت است.)

موفق باشید.

مدرس: آل [illegible]

پاسخ سوال ۱ :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(t) = (3t,\ 2\cos t,\ 2\sin t)$$

الف)

$$f'(t) = (3,\ -2\sin t,\ 2\cos t)$$

$$f''(t) = (0,\ -2\cos t,\ -2\sin t)$$

$$|f'(t)| = \sqrt{3^2 + (-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = \sqrt{13}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{f'(t)}{|f'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3,\ -2\sin t,\ 2\cos t)$$

$$f'(t) \times f''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2\sin t & 2\cos t \\ 0 & -2\cos t & -2\sin t \end{vmatrix} = 4\vec{i} + (6\sin t)\vec{j} + (-6\cos t)\vec{k}$$

$$\longrightarrow |f'(t) \times f''(t)| = \sqrt{4^2 + (6\sin t)^2 + (-6\cos t)^2} = \sqrt{52}$$

$$\vec{B}(t) = \frac{f'(t) \times f''(t)}{|f'(t) \times f''(t)|} = \frac{1}{\sqrt{52}}(4,\ 6\sin t,\ -6\cos t)$$

$$K(t) = \frac{|f'(t) \times f''(t)|}{|f'(t)|^3} = \frac{\sqrt{52}}{(\sqrt{13})^3} = \frac{2\sqrt{13}}{13\sqrt{13}} = \frac{2}{13}$$

لذا انحنای خم منحنی در تمام نقاط روی خم برابر با مقدار ثابت $\frac{2}{13}$ می‌باشد.

مدرس: آل هوز

ب)

$$\vec{N}_{(t)}=\vec{B}_{(t)}\times\vec{T}_{(t)}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{4}{\sqrt{52}} & \frac{6\sin t}{\sqrt{52}} & \frac{-6\cos t}{\sqrt{52}}\\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{-2\sin t}{\sqrt{13}} & \frac{2\cos t}{\sqrt{13}}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{26}\left(12\sin 2t\ ,\ -26\cos t\ ,\ -26\sin t\right)$$

$$f'''(t)=\left(0\ ,\ 2\sin t\ ,\ -2\cos t\right)$$

$$\left(f'(t)\times f''(t)\right)\cdot f'''(t)=\left(4\ ,\ 6\sin t\ ,\ -6\cos t\right)\cdot\left(0\ ,\ 2\sin t\ ,\ -2\cos t\right)$$

$$=12\sin^2 t+12\cos^2 t=12$$

تاب خم $\longrightarrow$ $$\tau(t)=\frac{\left(f'(t)\times f''(t)\right)\cdot f'''(t)}{\left|f'(t)\times f''(t)\right|^2}$$

$$=\frac{12}{\left(\sqrt{52}\right)^2}=\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$$

لذا تاب خم منحنی در تمام نقاط روی خم برابر با مقدار ثابت $\frac{3}{13}$ می‌باشد.

مدرس: آل هرمز

پاسخ سوال ۱:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{t}} , \sqrt{6t} , t\sqrt{t} \right)$$

الف)

$$K(1) = ?$$

انحنای خم

$$K(t) = \frac{|f'(t) \times f''(t)|}{|f'(t)|^3}$$

$$f'(t) = \left(\frac{-1}{2t\sqrt{t}} , \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{t}} , \frac{3\sqrt{t}}{2} \right) \xrightarrow{t=1} f'(1) = \left(\frac{-1}{2} , \frac{\sqrt{6}}{2} , \frac{3}{2} \right)$$

$$f''(t) = \left(\frac{3}{4t^2\sqrt{t}} , \frac{-\sqrt{6}}{4t\sqrt{t}} , \frac{3}{4\sqrt{t}} \right) \xrightarrow{t=1} f''(1) = \left(\frac{3}{4} , \frac{-\sqrt{6}}{4} , \frac{3}{4} \right)$$

$$f'(1) \times f''(1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{-\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = \frac{6\sqrt{6}}{8} \vec{i} + \frac{12}{8} \vec{j} - \frac{2\sqrt{6}}{8} \vec{k}$$

$$|f'(1) \times f''(1)| = \sqrt{\frac{1}{64}\left[(6\sqrt{6})^2 + 12^2 + (-2\sqrt{6})^2\right]} = \sqrt{\frac{384}{64}} = \frac{8\sqrt{6}}{8} = \sqrt{6}$$

$$|f'(1)| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{4}} = 2$$

$$\longrightarrow K(1) = \frac{|f'(1) \times f''(1)|}{|f'(1)|^3} = \frac{\sqrt{6}}{8}$$

مقدار انحنای خم در نقطه‌ی متناظر با $t=1$

مدرس: آل هوز

ب)

تاب خم

$$\tau(t)=\frac{\left(f'(t)\times f''(t)\right)\cdot f'''(t)}{\left|f'(t)\times f''(t)\right|^{2}}\qquad \tau(1)=?$$

$$f'(1)\times f''(1)=\left(\frac{6\sqrt{6}}{8},\ \frac{12}{8},\ \frac{-2\sqrt{6}}{8}\right)\quad \text{و}\quad \left|f'(1)\times f''(1)\right|=\sqrt{6}$$

$$f'''(t)=\left(\frac{-15}{8t^{3}\sqrt{t}},\ \frac{3\sqrt{6}}{8t^{2}\sqrt{t}},\ \frac{-3}{8t\sqrt{t}}\right)\xrightarrow{t=1} f'''(1)=\left(\frac{-15}{8},\ \frac{3\sqrt{6}}{8},\ \frac{-3}{8}\right)$$

$$\longrightarrow \left(f'(1)\times f''(1)\right)\cdot f'''(1)=\left(\frac{6\sqrt{6}}{8},\ \frac{12}{8},\ \frac{-2\sqrt{6}}{8}\right)\cdot\left(\frac{-15}{8},\ \frac{3\sqrt{6}}{8},\ \frac{-3}{8}\right)$$

$$=\frac{-48\sqrt{6}}{64}=\frac{-6\sqrt{6}}{8}$$

$$\longrightarrow \tau(1)=\frac{\frac{-6\sqrt{6}}{8}}{\left(\sqrt{6}\right)^{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{8}$$

لذا مقدار عددی تاب به ازای $t=1$ برابر با $\frac{\sqrt{6}}{8}$ و جهت تاب در خلاف جهت بردار قائم دوم $\vec{B}$ می‌باشد.

مدرس: آل هوز

ج) طول قوس در بازه‌ی $[1,4]$

$$S=\int_{t=1}^{t=4} |f'(t)|\,dt$$

$$f'(t)=\left(\frac{-1}{2t\sqrt{t}},\ \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{t}},\ \frac{3\sqrt{t}}{2}\right)$$

$$\longrightarrow |f'(t)|=\sqrt{\frac{1}{4t^3}+\frac{6}{4t}+\frac{9t}{4}}$$

$$=\frac{3t^2+1}{2t\sqrt{t}}=\frac{3\sqrt{t}}{2}+\frac{1}{2t\sqrt{t}}$$

$$\longrightarrow S=\int_{t=1}^{t=4}\left(\frac{3\sqrt{t}}{2}+\frac{1}{2t\sqrt{t}}\right)dt$$

$$=\left(t\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\Bigg|_{t=1}^{t=4}$$

$$=\left(8-\frac{1}{2}\right)-\left(1-1\right)$$

$$=\frac{15}{2}$$

لذا طول قوس مورد نظر برابر $\frac{15}{2}$ می‌باشد.

مدرس : آل هوز

$\boxed{\text{پاسخ سوال ۳ :}}$

معادله دایره بوسان خم $x = y^3 - y$ در نقطه (۰،۱)

ابتدا خم را به صورت زیر پارامتری کنیم:

$$y = t \longrightarrow x = t^3 - t$$

$$\longrightarrow \quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(t) = \left(t^3 - t \,,\, t\right)$$

به وضوح نقطه (۰،۱) به ازای $\boxed{t=1}$ روی خم فوق حاصل می‌شود. ابتدا ~~شعاع~~ انحنا (~~شعاع~~ دایره بوسان) را بایستی محاسبه کنیم. برای این منظور $k(1)$ (مقدار انحنا در $t=1$) را محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} x = x(t) = t^3 - t \longrightarrow x'(t) = 3t^2 - 1 \longrightarrow x''(t) = 6t \\ y = y(t) = t \longrightarrow y'(t) = 1 \longrightarrow y''(t) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{در } t=1]{\text{انحنا}} k(1) = \frac{\left| x'(1)\,y''(1) - x''(1)\,y'(1) \right|}{\left(x'^2(1) + y'^2(1)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left|2 \times 0 - 6 \times 1\right|}{(4+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6}{5\sqrt{5}}$$

$$\xrightarrow[\text{در } t=1]{\cancel{\text{شعاع}}\ \text{انحنا}} f(1) = \frac{1}{k(1)} = \frac{5\sqrt{5}}{6}$$

~~شعاع~~ شعاع انحنا (شعاع دایره بوسان)

Scanned by CamScanner

مدرس: آل جعفر

حال مرکز دایره انحنا (دایره بوسان) را محاسبه می‌کنیم:

$$O(1) = f(1) + \rho(1) N(1)$$

$$f'(t) = (3t^2 - 1, 1)$$

$$T(t) = \frac{f'(t)}{|f'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{9t^4 - 6t^2 + 2}} (3t^2 - 1, 1)$$

$$T'(t) = \frac{-18t^3 + 6t}{(9t^4 - 6t^2 + 2)^{\frac{3}{2}}} (3t^2 - 1, 1) + \frac{1}{\sqrt{9t^4 - 6t^2 + 2}} (6t, 0)$$

$$\xrightarrow{t=1} T'(1) = \frac{-12}{5\sqrt{5}} (2, 1) + \frac{1}{\sqrt{5}} (6, 0)$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{5}} \left[(-24, -12) + (30, 0) \right]$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{5}} (6, -12)$$

$$\longrightarrow |T'(1)| = \sqrt{\left(\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^2 (36 + 144)} = \sqrt{\frac{180}{125}}$$

$$= \frac{6\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = \frac{6}{5}$$

مدرس : آل هوز

$$N(1) = \frac{T'(1)}{|T'(1)|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} , \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$O(1) = f(1) + \rho(1)\, N(1)$$

$$= (0 , 1) + \frac{5\sqrt{5}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} , \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= (0 , 1) + \left(\frac{5}{4} , \frac{-10}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{4} , \frac{-2}{3}\right)$$

مرکز انحنا (مرکز دایره بوسان)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{5}}{4}\right)^2$$

معادله دایره بوسان خم در نقطه $(0 , 1)$

مدرس: آل هوز

پاسخ سوال ۴:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(t) = \left(2\sqrt{t}\cos t,\ 3\sqrt{t}\sin t,\ \sqrt{1-t}\right)$$

$0 \leq t \leq 1$

$$\begin{cases} x = x(t) = 2\sqrt{t}\cos t \longrightarrow x^2 = 4t\cos^2 t \longrightarrow \dfrac{x^2}{4} = t\cos^2 t \\ y = y(t) = 3\sqrt{t}\sin t \longrightarrow y^2 = 9t\sin^2 t \longrightarrow \dfrac{y^2}{9} = t\sin^2 t \\ z = z(t) = \sqrt{1-t} \longrightarrow z^2 = 1-t \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = t \\ z^2 = 1-t \longrightarrow t = 1-z^2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1-z^2$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1}$$

که معادله‌ی یک <u>بیضی‌گون</u> در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد.

مدرس: آل هوز

پاسخ سوال ۵ :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(t) = \left(t\,,\, t\,,\, \sqrt{1-2t^2}\right)$$

الف)

$$f'(t) = \left(1\,,\,1\,,\,\frac{-2t}{\sqrt{1-2t^2}}\right)$$

$$f''(t) = \left(0\,,\,0\,,\,\frac{-2t}{\left(\sqrt{1-2t^2}\right)^3}\right)$$

$$f'(t) \times f''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & \frac{-2t}{\sqrt{1-2t^2}} \\ 0 & 0 & \frac{-2t}{\left(\sqrt{1-2t^2}\right)^3} \end{vmatrix} = \left(\frac{-2}{\left(\sqrt{1-2t^2}\right)^3}\right)\vec{i} + \left(\frac{+2}{\left(\sqrt{1-2t^2}\right)^3}\right)\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

$$\left|f'(t) \times f''(t)\right| = \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{1-2t^2}\right)^3}$$

$$\left|f'(t)\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t^2}}$$

بنابراین داریم:

$$k(t) = \frac{\left|f'(t) \times f''(t)\right|}{\left|f'(t)\right|^3} = \frac{\dfrac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{1-2t^2}\right)^3}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{1-2t^2}\right)^3}} = 1$$

لذا انحنای خم C در تمام نقاط روی خم برابر با مقدار ثابت ۱+ می باشد.

مدرس: آل معز

ب) برای نشان دادن مسطح بودن یک خم، می‌توان نشان داد که بردار قائم دوم $\vec{B}$ یک بردار ثابت می‌باشد (یا می‌توان نشان داد که تاب خم برابر با صفر می‌باشد)

(روش اول)

$$\vec{B}(t)=\frac{f'(t)\times f''(t)}{|f'(t)\times f''(t)|}=\frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{1-2t^2})^3}}\left(\left(\frac{-2}{(\sqrt{1-2t^2})^3}\right)\vec{i}+\left(\frac{+2}{(\sqrt{1-2t^2})^3}\right)\vec{j}+0\vec{k}\right)$$

$$=\frac{(\sqrt{1-2t^2})^3}{2\sqrt{2}}\left(\left(\frac{-2}{(\sqrt{1-2t^2})^3}\right)\vec{i}+\left(\frac{+2}{(\sqrt{1-2t^2})^3}\right)\vec{j}+0\vec{k}\right)$$

$$=\frac{-\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}+0\vec{k}$$

$$\longrightarrow \vec{B}(t)=\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$$

لذا بردار $\vec{B}(t)$ یک بردار ثابت می‌باشد.

(روش دوم)

$$\vec{T}(t)=\frac{f'(t)}{|f'(t)|}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t^2}}\right)}\left(1,1,\frac{-2t}{\sqrt{1-2t^2}}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1-2t^2}}{\sqrt{2}}\right)\vec{i}+\left(\frac{\sqrt{1-2t^2}}{\sqrt{2}}\right)\vec{j}+\left(-\sqrt{2}t\right)\vec{k}$$

مدرس : آل هوز

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{-\sqrt{2}\,t}{\sqrt{1-2t^2}}\right)\vec{i} + \left(\frac{-\sqrt{2}\,t}{\sqrt{1-2t^2}}\right)\vec{j} + \left(-\sqrt{2}\right)\vec{k}$$

$$\left|\frac{dT}{dt}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t^2}}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\frac{dT}{dt}}{\left|\frac{dT}{dt}\right|} = (-t)\,\vec{i} + (-t)\,\vec{j} + \left(-\sqrt{1-2t^2}\right)\vec{k}$$

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\sqrt{1-2t^2}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{1-2t^2}}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2}\,t \\ -t & -t & -\sqrt{1-2t^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{2}\,\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

لذا

$$\vec{B}(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

و درنتیجه بردار $\vec{B}(t)$ یک بردار ثابت می‌باشد.

مدرس: آل داود

(روش سوم)

می توان نشان داد که تاب خم فوق برابر با صفر می باشد. می دانیم

$$\tau(t) = \frac{\left(f'(t) \times f''(t)\right) \cdot f'''(t)}{\left| f'(t) \times f''(t) \right|^2}$$

حال چون

$$f'(t) \times f''(t) = \left(\frac{-2}{\left(\sqrt{1-2t^2}\right)^3} , \frac{2}{\left(\sqrt{1-2t^2}\right)^3} , 0 \right)$$ و

$$f'''(t) = \left(0 , 0 , \frac{-2\left(\sqrt{1-2t^2}\right)^3 - 12t^2\sqrt{1-2t^2}}{\left(1-2t^2\right)^3} \right)$$ ، لذا

به وضوح

$$\left(f'(t) \times f''(t)\right) \cdot f'''(t) = 0$$ و در نتیجه $\tau(t)=0$.

لذا خم داده شده یک خم مسطح می باشد.

حال برای نوشتن معادله ی صفحه ای که خم فوق در آن واقع شده است، توجه داریم که اگر یک خم مسطح باشد آن گاه در دل صفحه ی بوسان واقع شده است و بنابراین بایستی معادله ی صفحه ی بوسان را بنویسیم. برای این منظور نیز ۲ راهکار پیشنهاد می کنیم:

(روش اول) با استفاده از بردار قائم دوم $\vec{B}$ (که بردار نرمال صفحه ی بوسان می باشد)، معادله ی صفحه ی بوسان را می نویسیم:

مدرس: آل هنر

بردار نرمال صفحه بوسان $\vec{n} = \vec{B} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

قرار می‌دهیم $t=0$ در معادله خم → یک نقطه روی خم $P\left|\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}\right.$

حال با استفاده از بردار $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ به عنوان بردار نرمال و نقطه‌ی $P\left|\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}\right.$ به عنوان نقطه‌ای از صفحه‌ی بوسان، معادله‌ی صفحه‌ی بوسان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-0)+\frac{\sqrt{2}}{2}(y-0)+0(z-1)=0 \longrightarrow \boxed{-x+y=0}$$

معادله صفحه بوسان خم

روش دوم) برای نوشتن معادله‌ی صفحه‌ی بوسان خم، کافی است ۳ نقطه‌ی غیر واقع بر یک استقامت را روی خم به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\xrightarrow{t=0} A=(0,0,1)$$
$$\xrightarrow{t=\frac{1}{2}} B=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \longrightarrow \vec{AB}=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}-2}{2}\right)$$
$$\xrightarrow{t=\frac{\sqrt{2}}{2}} C=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \qquad \vec{AC}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$$

بردار نرمال صفحه $\Rightarrow \vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}-2}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1\end{vmatrix}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\vec{i}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\vec{j}+0\vec{k}$

حال با استفاده از بردار $\vec{n}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}+1, 0\right)$ به عنوان بردار نرمال و نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}\right.$ داریم:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)(x-0)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)(y-0)+0(z-1)=0 \longrightarrow \boxed{-x+y=0}$$