پاسخ سری سوم تمرینات درس معادلات دیفرانسیل　　　　۱۳۹۹/۳/۵

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

(۱)
$$y''+\frac{۲}{x}y'+\frac{۹}{x^{۴}}y=۰ \quad , \quad y_{۱}=\cos(\frac{۳}{x})$$

جواب : روش اول: با فرض $t=\frac{۱}{x}$ داریم $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{dt}=y'\times(\frac{-۱}{t^{۲}})$ و

$$\frac{d^{۲}y}{dt^{۲}}=\frac{dy'}{dt}\times(\frac{-۱}{t^{۲}})+y'\times(\frac{۲}{t^{۳}})=y''\times(\frac{-۱}{t^{۲}})^{۲}+y'\times(\frac{۲}{t^{۳}})$$

بنابر این داریم :
$$y'=-t^{۲}\frac{dy}{dt} \quad , \quad y''=t^{۴}\frac{d^{۲}y}{dt^{۲}}+۲t^{۳}\frac{dy}{dt}$$

با اعمال تغییر متغیر معادله داده شده ، به صورت معادله مرتبه دو خطی با ضرایب ثابت $\frac{d^{۲}y}{dt^{۲}}+۹y=۰$
در می آید که جواب عمومی آن عبارت است از $y=a\sin ۳t+b\cos ۳t$ و در نتیجه جواب معادله اصلی برابر است
با : $y=a\sin(\frac{۳}{x})+b\cos(\frac{۳}{x})$

روش دوم : با فرض $y_{۲}=u\times\cos(\frac{۳}{x})$ داریم :

$$y_{۲}'=u'\times\cos(\frac{۳}{x})+\frac{۳u}{x^{۲}}\sin(\frac{۳}{x})$$

$$y_{۲}''=u''\times\cos(\frac{۳}{x})+\frac{۶u'}{x^{۲}}\sin(\frac{۳}{x})-\frac{۶u}{x^{۳}}\sin(\frac{۳}{x})-\frac{۹u}{x^{۴}}\cos(\frac{۳}{x})$$

و با جایگذاری در معادله خواهیم داشت :

$$u''\times\cos(\frac{۳}{x})+[\frac{۶}{x^{۲}}\sin(\frac{۳}{x})+\frac{۲}{x}\cos(\frac{۳}{x})]u'=۰$$

یعنی :
$$\frac{u''}{u'}=-۲[\frac{۳}{x^{۲}}\tan(\frac{۳}{x})+\frac{۱}{x}]$$

با انتگرالگیری از طرفین این معادله داریم $\ln u'=-۲[\ln\cos(\frac{۳}{x})+\ln x]$ و یا $u'=\frac{۱}{x^{۲}}\sec^{۲}(\frac{۳}{x})$

که با انتگرالگیری مجدد خواهیم داشت $u=\frac{-۱}{۳}\tan(\frac{۳}{x})$ و بالاخره داریم : $y_{۲}=\frac{-۱}{۳}\sin(\frac{۳}{x})$

و جواب عمومی معادله داده شده عبارت است از : $y=a\sin(\frac{۳}{x})+b\cos(\frac{۳}{x})$

پاسخ سری سوم تمرینات درس معادلات دیفرانسیل ۱۳۹۹/۳/۵

(۲) $$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0\ ,\quad y_1=x$$

جواب : با فرض $y_2=xu$ داریم $y_2'=u+xu'$ و $y_2''=2u'+xu''$ و با جایگذاری در معادله خواهیم داشت $(x-x^3)u''-(4x^2-2)u'=0$ و یا $\frac{u''}{u'}=\frac{4x^2-2}{x-x^3}=\frac{-2}{x}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}$. با انتگرالگیری از طرفین معادله داریم $\ln u'=-2\ln x-\ln(1+x)-\ln(1-x)$ و یا $u'=\frac{1}{x^2(1-x^2)}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x})$ که نتیجه می دهد $u=\frac{-1}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ و جواب دوم معادله عبارت است از $y_2=-1+\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ و جواب عمومی معادله عبارت است از : $y=ax+b(-2+x\ln\frac{1+x}{1-x})$

(۳) $$2y^{(4)})-3y^{(3)}-2y''=0$$

جواب : این معادله یک معادله مرتبه چهارم خطی با ضرایب ثابت است. معادله مشخصه آن برابر است با $2m^4-3m^3-2m^2=0$ که چهار ریشه $m_1=m_2=0\ ,\ m_3=2\ ,\ m_4=\frac{-1}{2}$ دارد.

بنابر این جواب این معادله همگن عبارت است از : $y=c_1+c_2x+c_3e^{2x}+c_4e^{\frac{-x}{2}}$

(۴) $$y'''-2y''-5y'+6y=0$$

جواب : این معادله یک معادله مرتبه سوم خطی با ضرایب ثابت است. معادله مشخصه آن برابر است با $m^3-2m^2-5m+6=0$ که سه ریشه $m_1==1\ ,\ m_2=-2\ ,\ m_3=3$ دارد.

بنابر این جواب این معادله همگن عبارت است از : $y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}$

معادلات دیفرانسیل زیر را به کمک روش ضرایب نامعین حل کنید.

(۵) $$y''-5y'+6y=24xe^{2x}$$

جواب : جواب معادله همگن عبارت است از $y_h=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ و جواب خصوصی را به صورت $y_p=(ax^2+bx)e^{2x}$ حدس می‌زنیم. با جایگذاری y_p در معادله خواهیم داشت $(-2ax+2a-b)e^{2x}=24xe^{2x}$ و در نتیجه $a=-12\ ,\ b=-24$. بنابر این $y_p=-12(x^2+2x)e^{2x}$.

جواب عمومی معادله برابر است با : $y_g=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}-12(x^2+2x)e^{2x}$

پاسخ سری سوم تمرینات درس معادلات دیفرانسیل　　　　　　۱۳۹۹/۳/۵

---

(۶)
$$y'' + y = ۶e^{۲x} + ۶\cos x$$

جواب : جواب معادله همگن عبارت است از $y_h = c_۱ \sin x + c_۲ \cos x$ و جواب خصوصی را به صورت $y_p = a e^{۲x} + x(A\sin x + B\cos x)$ حدس می‌زنیم. با جایگذاری y_p و در معادله خواهیم داشت $۵a e^{۲x} - ۲B\sin x + ۲A\cos x = ۶e^{۲x} + ۶\cos x$ و در نتیجه $a = \frac{۶}{۵}\ ,\ A = ۳\ ,\ B = ۰$.

اکنون داریم $y_p = \frac{۶}{۵}e^{۲x} + ۳x\sin x$. جواب عمومی معادله برابر است با :

$$y_g = c_۱ \sin x + c_۲ \cos x + \frac{۶}{۵}e^{۲x} + ۳x\sin x$$

(۷)
$$y'' - ۳y' + ۲y = e^x \sin x$$

جواب : جواب معادله همگن عبارت است از $y_h = c_۱ e^x + c_۲ e^{۲x}$ و جواب خصوصی را به صورت $y_p = e^x(A\sin x + B\cos x)$ حدس می‌زنیم. با جایگذاری y_p و در معادله خواهیم داشت $e^x[(B-A)\sin x - (A+B)\cos x] = e^x \sin x$ و در نتیجه $A + B = ۰\ ,\ B - A = ۱$ و یا $A = \frac{-۱}{۲}\ ,\ B = \frac{۱}{۲}$.

اکنون داریم $y_p = \frac{۱}{۲}e^x(-\sin x + \cos x)$. جواب عمومی معادله برابر است با :

$$y_g = c_۱ e^x + c_۲ e^{۲x} + \frac{۱}{۲}e^x(-\sin x + \cos x)$$

(۸)
$$y''' + y' = ۲x^۲ - ۱$$

جواب : جواب معادله همگن عبارت است از $y_h = c_۱ \sin x + c_۲ \cos x + c_۳$ و جواب خصوصی را به صورت $y_p = a x^۳ + b x^۲ + c x$ حدس می‌زنیم. با جایگذاری y_p و در معادله خواهیم داشت $۳ax^۲ + ۲bx + ۶a + c = ۲x^۲ - ۱$ و در نتیجه $A + B = ۰\ ,\ B - A = ۱$ و یا $a = \frac{۲}{۳}\ ,\ b = ۰\ ,\ c = -۵$.

اکنون داریم $y_p = \frac{۲}{۳}x^۳ - ۵x$. جواب عمومی معادله برابر است با :

$$y_g = c_۱ \sin x + c_۲ \cos x + \frac{۲}{۳}x^۳ - ۵x + c_۳$$