یا لطیف

رضا آدینه پور
۹۸۱۴۳۰۳
امتحان شماره ۳، سیگنال سیستم

#2

LTI: $\begin{cases} x(t) = 2e^{-t}u(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} + 3x(t) \end{cases}$

تبدیل فوریه می‌گیریم

الف) $H(j\omega) = ?$ $\rightarrow$ $j\omega Y(j\omega) + Y(j\omega) = j\omega X(j\omega) + 3X(\omega)$

$$\Rightarrow Y(j\omega)\left(j\omega + 1\right) = X(j\omega)\left(j\omega + 3\right) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{3 + j\omega}{1 + j\omega}$$

ب) $\cancel{x(t) = 2e^{-t}u(t) \xrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)^2}}$

$$x(t) = 2e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{2}{1 + j\omega}$$

$$\Rightarrow y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{F} Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{2}{1 + j\omega} \cdot \frac{3 + j\omega}{1 + j\omega}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = \frac{2(3 + j\omega)}{(1 + j\omega)(1 + j\omega)} = \cancel{\frac{A}{(1+j\omega)} + \frac{B}{(1+j\omega)}} = \frac{2(3 + j\omega)}{(1 + j\omega)^2} = \frac{A}{(1+j\omega)^2} + \frac{B}{(1+j\omega)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = (1 + j\omega)^2 Y(j\omega) \Big|_{j\omega = -1} = 4 \\ B = \dfrac{d}{d\omega}\left((1 + j\omega)^2 Y(j\omega)\right)\Big|_{j\omega = -1} = 8 \end{cases} \Rightarrow Y(j\omega) = \frac{4}{(1+j\omega)^2} + \frac{8}{(1+j\omega)}$$

$$\overset{F^{-1}}{\Rightarrow} y(t) = 4te^{-t}u(t) + 8e^{-t}u(t)$$

ج) $H_i(j\omega) = \dfrac{1}{H(j\omega)} = \dfrac{1 + j\omega}{3 + j\omega} = \dfrac{1}{3 + j\omega} + \dfrac{j\omega}{3 + j\omega} \xleftrightarrow{F^{-1}} h_i(t) = e^{-3t}u(t) - 3e^{-3t}u(t) + \delta(0)$