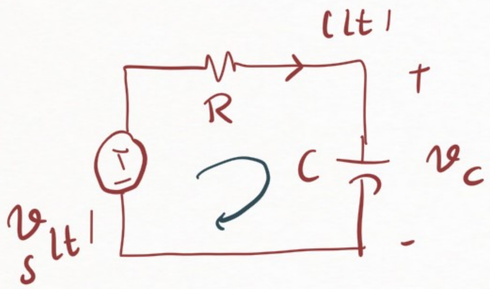
نمونه های ساده از سیستم ها

مثال ۱- شبکه RC

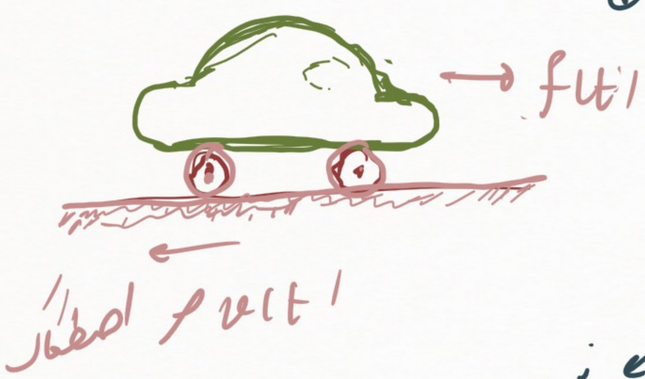


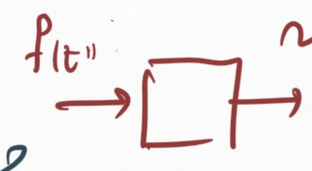
ورودی $v_s(t)$ خروجی $v_c(t)$

سیستم (مدار RC) توسط این معادله دیفرانسیل بیان شده است.

$$\left.\begin{aligned} -v_s(t) + R\,i(t) + v_c(t) &= 0 \\ i(t) = i_c(t) &= C\frac{dv_c(t)}{dt} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_s(t) \Longrightarrow \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}v_s(t)$$

مثال ۲- حرکت یک خودرو





نیروی موتور خودرو $f(t)$ بعنوان ورودی و سرعت با نقطه خودرو یعنی $v(t)$ به عنوان خروجی

$$f = ma \Longrightarrow a = \frac{f}{m} \Longrightarrow \frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{m}\left[f(t) - \underbrace{\rho v(t)}_{\text{رانش نیروها}}\right]$$

جرم

نیرو

ثابت

$$\Longrightarrow \frac{dv(t)}{dt} + \frac{\rho}{m}v(t) = \frac{1}{m}f(t)$$

پس این سیستم نیز با یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول بیان شد

مثال ۳ - سیستم گسسته : سیستم گسسته (بجای معادله دیفرانسیل) با معادله دیفرانسیل میان تفاضل مرتبه بیش

$y(n-1)$, $y(n-2)$, ... , $x(n-1)$, $x(n-2)$, ...

سیستم بانکی - مدل ساده بهره بانکی در یک بانک با بهره یک واحدی در ماه را نشان میدهد.

$$y(n) = 1.01\, y(n-1) + x(n)$$

مانده‌ها انتها ماه n ام

بهره یک واحدی ماه

پس‌انداز ماهی در ماه n ام

تبدیل سیستم پیوسته به گسسته : می‌توان سیستم پیوسته را به گسسته تبدیل نمود. مثلاً معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیریم:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{\rho}{m} v(t) = \frac{1}{m} f(t)$$

برای این منظور زمان را در بازه‌های مساوی به طول Δ تقسیم کنیم و نمایش در $t = n\Delta$ بصورت تفاضل پسرو تقریب بزنیم backward dif

$$\frac{dv(t)}{dt} \longrightarrow \frac{v(n\Delta) - v((n-1)\Delta)}{\Delta} \Rightarrow v(n) - \frac{m}{m+\rho\Delta} v(n-1) = \frac{\Delta}{m+\rho\Delta} f(n)$$

$$\begin{cases} f(n) = f(n\Delta), \\ v(n) = v(n\Delta); \end{cases}$$

معلوم شد که این معادله از لحاظ شکل ظاهری شبیه معادله سیستم بانکی شد. البته توجه کنید که ماهیت آنها متفاوت است.

بررسی خواص سیستم ها

① حافظه دار و بدون حافظه memory & memoryless

اگر خروجی در یک سیستم در هر لحظه فقط به ورودی در همان لحظه بستگی داشته باشد، سیستم بدون حافظه می باشد. اما اگر به گذشته یا آینده وابسته باشد حافظه دار است.

مثال - $y(n)=x^2(n)$, $y(t)=4x^2(t)+x(t)+50$

بدون حافظه:

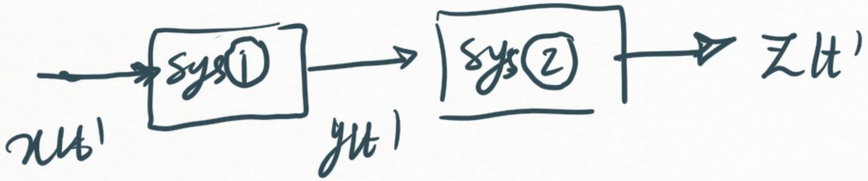
حافظه دار: $y(n)=x(n-2)$ یا $y(t)=x(t+3)$, $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

$$x(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$$

ولتاژ در خازن انتگرال جریان عبوری از آن است لذا خازن سیستم حافظه دار

② سیستم های معکوس پذیر و معکوس ناپذیر:

سیستمی معکوس پذیر است که ورودی های مختلف خروجی های مختلف بدهد و اگر دو یا چند ورودی یک خروجی یکسان بدهند سیستم معکوس پذیر نیست.



سیستم ① معکوس پذیر و عکس آن سیستم ② است. if $z(t)=x(t)$ $\Longrightarrow$

مثال ۱-

$$y[n] = 2x[n-1] \Longrightarrow x[n] = \tfrac{1}{2} y[n+1] \xrightarrow{\text{معکوس}} y[n] = \tfrac{1}{2} x[n+1]$$

مثال ۲- ابتدا $x[n]$ را برحسب $y[n]$ پیدا می‌کنیم.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longrightarrow y[n] - y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] - \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]$$

جای $x[n]$ و $y[n]$ تعویض

$$\Longrightarrow y[n] - y[n-1] = x[n] \Longrightarrow y[n] = x[n] - x[n-1]$$

مثال ۳-

$y[t] = x^2[t]$ | معکوس ندارد

$y[t] = 0$ | معکوس دارد

۳) علی بودن (Causality)

اگر خروجی در هر لحظه وابسته به ورودی در همان لحظه یا لحظه‌های ماقبل باشد سیستم را علی گوییم.

مثال-

$y[n] = \tfrac{1}{3}[x[n] + x[n-1] + x[n-2]]$ علی است

$y[t] = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$ غیرعلی

$y[t] = x[t+1] + x[t]$ غیرعلی

$y[n] = x[n/2]$ غیرعلی

مثال - سیستم میانگین متحرک یک سیستم غیر علی است.

$$y(n)=\frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M} x(n-k)$$

توجه - سیستم $y(t)=x(t)\cos(t+1)$ علی و بدون حافظه است.

$$\begin{cases} y(t)=x(t)\,g(t) \\ g(t)=\cos(t+1) \end{cases}$$

نمی خروجی در هر لحظه فقط به ورودی در همان لحظه وابسته و به لحظه بعد ربط ندارد لذا علی است.

۴) خاصیت پایداری stability

اگر یک ورودی محدود به سیستم بدهیم، خروجی نیز محدود باشد در این صورت سیستم پایدار است.

$$|x(t)|<M \longrightarrow |y(t)|<\infty$$

$$|x(n)|<M \longrightarrow |y(n)|<\infty$$

توجه - پایداری BIBO نمی bounded input bounded output مفهوم است

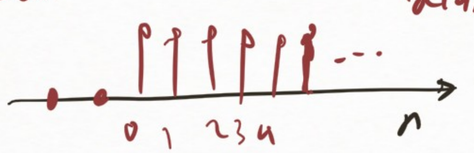
مثال -

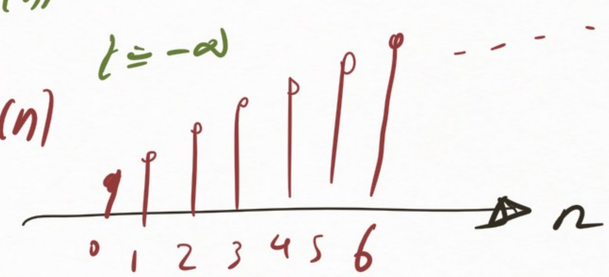
$y(n)=x(n)+x(n+1)$ پایدار

$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$ ناپایدار

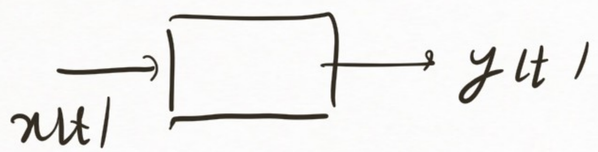
چون $x(n)=u(n) \Rightarrow y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} u(k)=n\,u(n)=r(n)$

$x(n)=u(n) \Rightarrow y(n)=n\,x(n)$





۵) مستقل از زمان: اگر ورودی تغییر زمانی پیدا کند خروجی نیز همان تغییر زمانی را داشته باشد البته بدون اینکه تغییر شکل بدهد.
در این صورت مستقل از زمان است.



یعنی $x(t-t_0) \longrightarrow y(t-t_0)$

توجه - باید سیستم ها بسته نیز شبیه همین تعریف شوند.

بازنویسی: به سیستم $x_1(t)=x(t-t_0)$ اعمال می‌کنیم خروجی آن را $y_1(t)$ می‌نامیم
پس $y(t-t_0)$ را تشکیل می‌دهیم اگر با $y_1(t)$ برابر شد سیستم مستقل از زمان است.

مثال -

$y(t)=x(t-3)+x(t)$

$$\left.\begin{array}{l} x(t-t_0) \longrightarrow y_1(t)=x(t-t_0-3)+x(t) \\ \text{و } y(t-t_0)=x(t-t_0-3)+x(t) \end{array}\right\} \Longrightarrow y(t-t_0)=y_1(t)$$

مستقل از زمان است.

مثال -

$y[n]=n\,x[n]$

$$\left.\begin{array}{l} x[n-n_0] \longrightarrow y_1[n]=n\,x[n-n_0] \\ y[n-n_0]=(n-n_0)\,x[n-n_0] \end{array}\right\} \Longrightarrow y[n-n_0]\neq y_1[n]$$

وابسته به زمان است.

مثال -

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

$$\begin{cases} k=-\infty \Rightarrow m=-\infty \\ k=n \Rightarrow m=n-n_0 \end{cases}$$

$$x(n) = x(n-n_0) \longrightarrow y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(\overbrace{k-n_0}^{m}) = \sum_{m=-\infty}^{n-n_0} x(m) \overset{m\to k}{=} \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x(k)$$

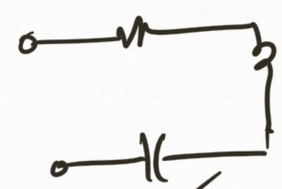
حال تشخیص می‌دهیم.

$$y(n-n_0) = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x(k)$$

$y_1(n) = y(n-n_0)$

پس تغییر ناپذیر است.

توجه - از لحاظ مفهومی سیستم تغییر ناپذیر با زمان سیستمی است که رفتار و مشخصات آن با زمان تغییر نکند. مثال اگر یک مدار RLC



تغییر ناپذیر با زمان است یعنی اگر مقادیر خازن و مقاومت و سلف تغییر نکند باید کاری که برای انجام داریم نتایج آن با امروز و فردا یکی باشد.

مثال - $y(t) = x(2t)$ وابسته به زمان می‌باشد.

$y(n) = x(n/2)$

۶) خاصیت خطی بودن - سیستم وقتی خطی است که دارای دو خاصیت زیر باشد:

الف - خاصیت جمع پذیری:

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \longrightarrow y_2(t) \end{array}\right\} \Longrightarrow x(t)=x_1(t)+x_2(t) \longrightarrow y(t)=y_1(t)+y_2(t)$$

ب - خاصیت همگنی:

$$a\,x(t) \longrightarrow a\,y(t)$$

عدد ثابت

عدد ثابت

$$\boxed{a x_1(t)+b x_2(t) \longrightarrow a y_1(t)+b y_2(t)}$$

می‌توان دو خاصیت را به صورت مقابل نیز نشان داد:

با توجه به نمودار شبیه بالا تعریف تکرار می‌شود.

مثال -

$$y(n)=x(n)+x(n-3)$$

$$\hat{x}(n)=a x_1(n)+b x_2(n) \longrightarrow \hat{y}(n)=a x_1(n)+a x_1(n-3)+b x_2(n)+b x_2(n-3)$$

$$\hat{y}(n)=a\underbrace{\left(x_1(n)+x_1(n-1)\right)}_{y_1(n)}+b\underbrace{\left(x_2(n)+x_2(n-3)\right)}_{y_2(n)}=a y_1(n)+b y_2(n)$$

خطی است.

$y(t)=x^2(t)$ غیرخطی

$y(n)=x(n)+4$ غیرخطی

مثال- $y(n) = Re\{x(n)\}$

این سیستم غیرخطی است چون خاصیت جمع پذیری را دارا است ولی خاصیت همگنی را ندارد

$$x_1(n) = r(n) + j\,s(n) \longrightarrow y_1(n) = Re\{x_1(n)\} = \boxed{r(n)}$$

فرض $a = j$ عدد است $\Longrightarrow x_2(n) = a\,x_1(n) = j\,x_1(n) = j(r(n) + j\,s(n)) = -s(n) + j\,r(n)$

$$y_2(n) = Re\{x_2(n)\} = \boxed{-s(n)}$$

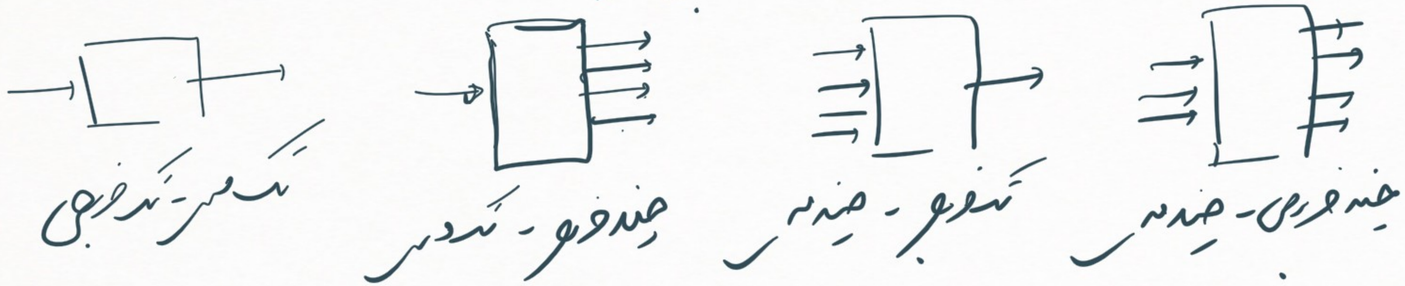
ملاحظه میشود که $y_2(n) \neq a\,y_1(n)$ یعنی:

$$y_2(n) = -s(n) \neq j\,r(n)$$

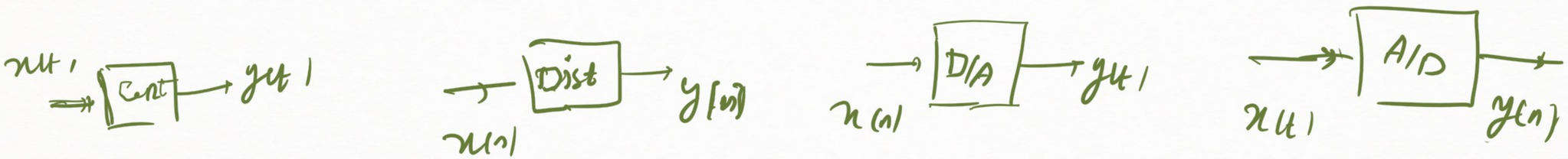
یعنی خاصیت همگنی را ندارد.

توجه: به سیستم هایی که هم خاصیت خطی بودن و هم متغیر از زمان را داشته باشند سیستم LTI (خطی و متغیر از زمان) گوییم.
بسیاری از سیستم هایی که با آن سروکار داریم یا واقعاً LTI می باشند یا اینکه بصورت LTI تقریب زده می شوند.
آنالیز این سیستم ها ساده تر انجام میشود.

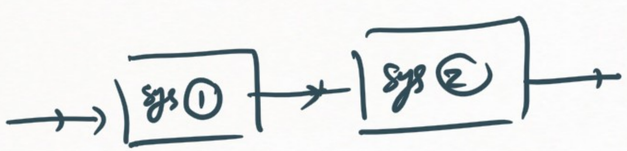
انواع سیستم ها: سیستم ها از دیدگاه های متفاوت دسته بندی شده اند مثلاً از نظر تعداد ورودی خروجی دسته بندی شده اند.



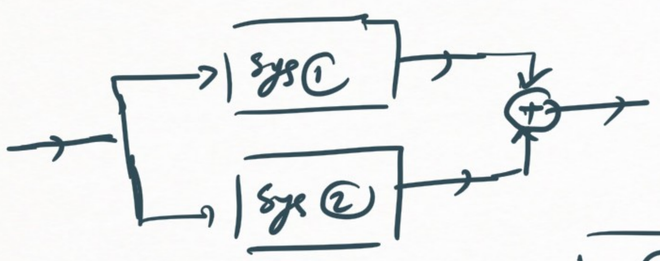
از دیدگاه دیگر:



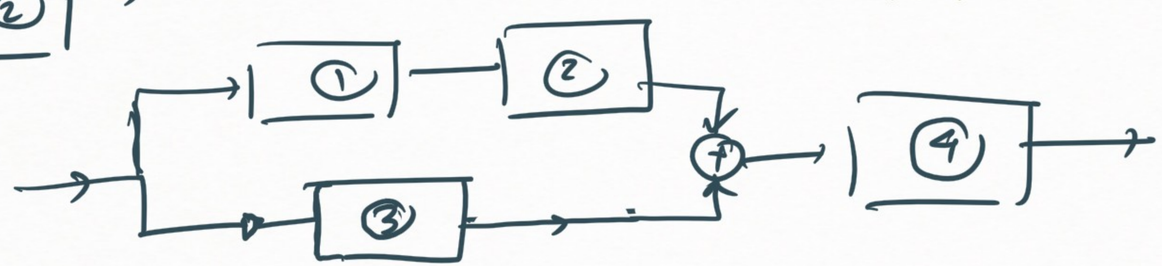
انواع سیستم ها:
- سری
- موازی
- مخلوط
- فیدبک دار
  - منفی: کار برای مدارهای اتوماسیون - تنظیم سرعت موتور
  - مثبت: کار در اسیلاتورها



سری

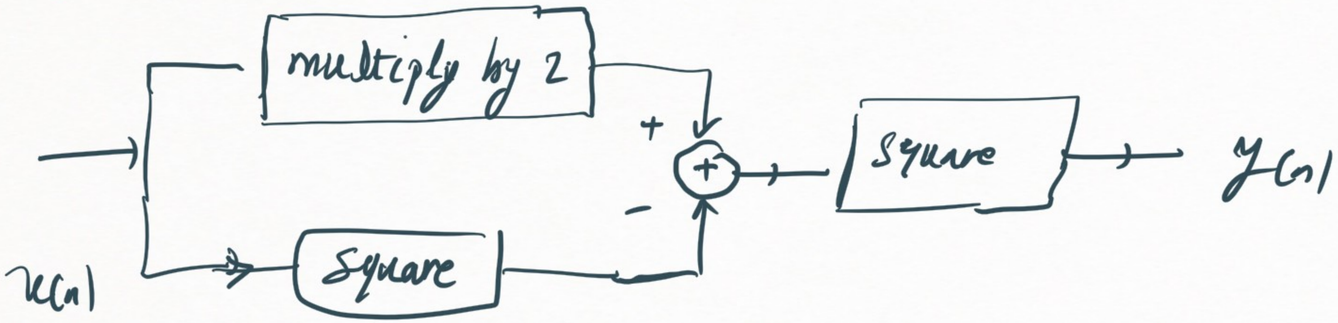


موازی

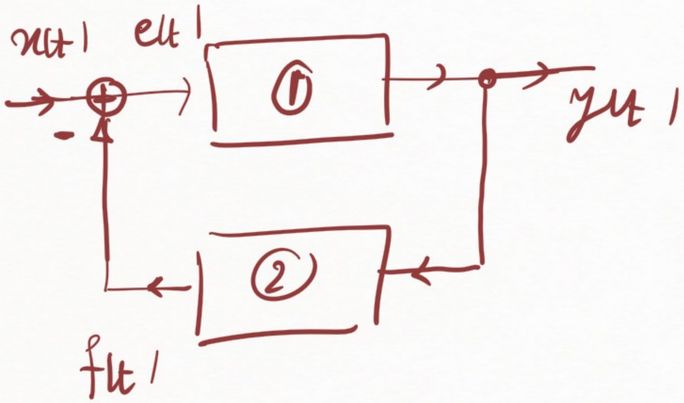


سیستم مخلوط

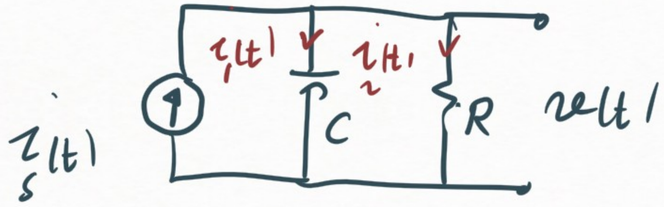
$$y(n) = \left(2x(n) - x(n)^2\right)^2$$



سیستم فیدبک دار -

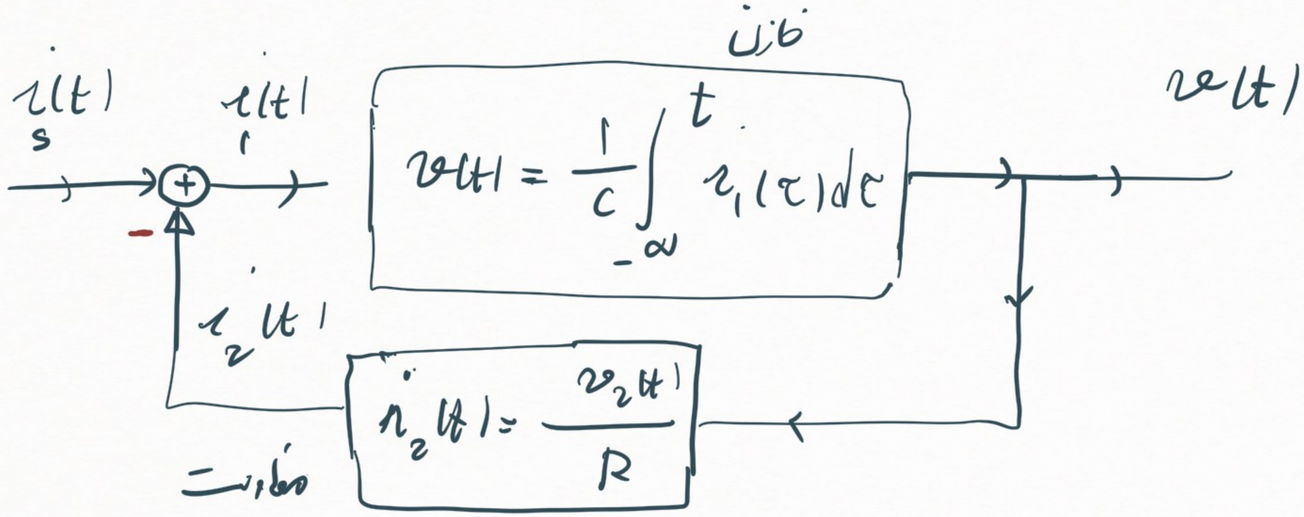


نمایش بلوک فیدبک -



$$i_s(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

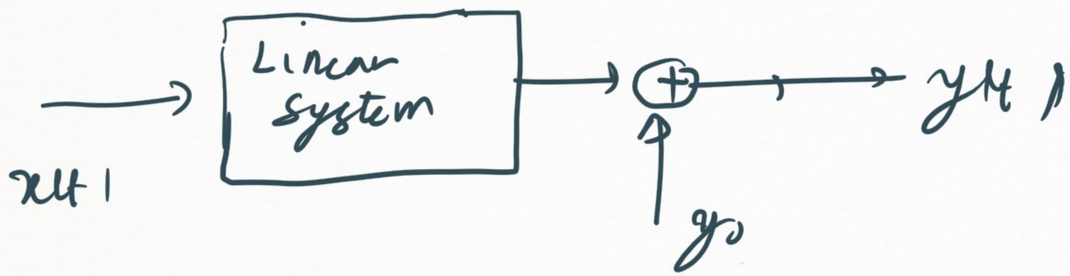
$$i_1(t) = i_s(t) - i_2(t)$$



توجه: سیستم‌های شکل شیم‌های نمایش داده

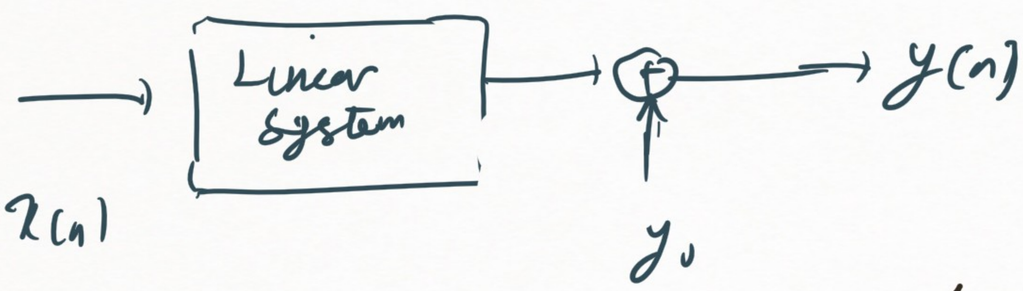
$y(t) = 2x(t) + 3$ یا $y(n) = 10x(n) + 4$

سیستم‌ها خطی افزایشی گردیده. یعنی از یک سیستم خطی با اضافه یک عدد ثابت تشکیل شده است.



این سیستم خطی نیست چون خاصیت جمع‌پذیری را ندارد

ولی به نظر است ورودی به طور خطی تابع می‌باشد.



$x_1(n) - x_2(n) \longrightarrow y_1(n) - y_2(n)$

و $x_1(n) + x_2(n) \not\longrightarrow y_1(n) + y_2(n)$

دسته بزرگی از سیستم‌ها (پیوسته و گسسته) بصورت ساختار فوق می‌باشند.