خواص سری فوریه گسسته در زمان

۱- خاصیت خطی:

$$\begin{cases} x(n) \xleftrightarrow{FS} a_k & ; \text{ دوره‌ای با } N \\ y(n) \xleftrightarrow{FS} b_k & ; \ N \ \text{〃} \ \text{〃} \end{cases} \Rightarrow Ax(n)+By(n) \xleftrightarrow{FS} Aa_k + Bb_k$$

A, B اعداد ثابت.

اثبات:

$$z(n) = Ax(n) + By(n) \longrightarrow c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} z(n)\, e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{\langle N\rangle} \left(Ax(n)+By(n)\right) e^{-jk\omega_0 n}$$

$$\Rightarrow c_k = A\underbrace{\frac{1}{N}\sum x(n)\, e^{-jk\omega_0 n}}_{a_k} + B\underbrace{\frac{1}{N}\sum y(n)\, e^{-jk\omega_0 n}}_{b_k} = Aa_k + Bb_k$$

توجه: $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$,

۲- خاصیت انتقال در حوزه زمان:

$$x(n-n_0) \xleftrightarrow{FS} e^{-jk\omega_0 n_0} a_k$$

$$x_1(n) = x(n-n_0) \longrightarrow b_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)\, e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(\underbrace{n-n_0}_{n_1})\, e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{n_1=-n_0}^{N-1-n_0} x(n_1)\, e^{-jk\omega_0(n_1+n_0)}$$

$$b_k = e^{-jk\omega_0 n_0}\underbrace{\left(\frac{1}{N}\sum_{n_1=\langle N\rangle} x(n_1)\, e^{-jk\omega_0 n_1}\right)}_{a_k} = \boxed{e^{-jk\omega_0 n_0} a_k}.$$

۳ - خاصیت تفاضل گیری :

$$x[n]-x[n-1] \xleftrightarrow{FS} (1-e^{-jk\omega_0})a_k \quad , \quad \omega_0=\frac{2\pi}{N}$$

این خاصیت از روی خاصیت قبلی نتیجه میشود .

۴ - خاصیت ضرب :

$$x[n]\cdot y[n] \xleftrightarrow{FS} c_k=\sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}$$

شبیه کانولوشن ها برای تک سیگنال محدود که کانولوشن متناوب گرفته میشود .

۵ - جمع انباره :

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longleftrightarrow \frac{a_k}{1-e^{-jk\omega_0}} \quad ; \quad a_0=0$$ شرط

۶ - مزدوج

$$x^*[n] \longleftrightarrow a^*_{-k}$$

$x[n]$ حقیقی $\Longrightarrow \underbrace{x[n]=x_e[n]+x_o[n]}_{} \longleftrightarrow a_k=Re\{a_k\}+jIm\{a_k\}$

$x_e[n] \xleftrightarrow{FS} Re\{a_k\}$, $x_o[n] \xleftrightarrow{FS} jIm\{a_k\}$

$x[n]$ حقیقی و زوج $\Longrightarrow a_k$ حقیقی ، $x[n]$ حقیقی و فرد $\Longrightarrow a_k$ موهومی

$$x(n)\ \text{حقیقی} \Rightarrow \begin{cases} |a_k| = |a_{-k}| \\ \measuredangle a_k = -\measuredangle a_{-k} \\ Re\{a_k\} = Re\{a_{-k}\} \\ Im\{a_k\} = -Im\{a_{-k}\} \end{cases}$$

اندازه a برحسب k زوج است

فاز « « « فرد است.

بخش حقیقی a_k برحسب k زوج است.

« موهومی « « « فرد است.

7- خاصیت پارسوال :

$$\begin{cases} x_1[n] \longleftrightarrow a_k \\ x_2[n] \longleftrightarrow b_k \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]\cdot x_2^*[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot b_k^*$$

حالت خاص $x_1[n] = x_2[n] \longrightarrow \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^2$

$$\ldots,\ x_2^*[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k^* e^{-jk\omega_0 n} \qquad x_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{+jk\omega_0 n}$$

جای اینها در طرف اول رابطه قرار دهید

8- خاصیت کانولوشن متناوب :

$$\sum_{r=0}^{N-1} x[r]\, y[n-r] \longleftrightarrow N a_k b_k$$

9- ضرب در نمایی :

$$e^{+jM\omega_0 n}\, x[n] \longleftrightarrow a_{k-M}$$

حل مثال 3-2 ملاحظه شود

مثال - یک سیگنال x(n) دارای مشخصات زیر است:

الف - x(n) متناوب با دوره $N=6$ ب - $\sum_{n=0}^{5} x(n) = 2$ ج - $\sum_{n=2}^{7} (-1)^n x(n) = 1$

د - x(n) در بین تمام x(n) هایی که خواص فوق را دارند مینیمم انرژی را دارا است. x(n) را پیدا کنید

حل - با توجه به x(n) متناوب، ضرایب a_k آن را پیدا می‌کنیم،

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2k\pi}{N}n}$$

با توجه به بند ب 2

$$a_0 = \frac{1}{6}\sum_{n=\langle N\rangle} x(n) = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x(n) \Longrightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{3}}$$

$(-1)^n = e^{-jn\pi}$

ترم

$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$k=3$

$$\text{از بند ج} \Longrightarrow \sum_{n=2}^{7} (-1)^n x(n) = \sum_{n=2}^{7} e^{-jn\pi} x(n) = \sum_{\cancel{n=2}\; n=0}^{\cancel{7}\; 5} e^{-j(\frac{2}{6}\pi)3n} x(n) \Longrightarrow a_3 = \frac{1}{6}$$

ترم: $a_3 = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{6}(3)n}$

$$p = \sum_{k=0}^{5} |a_k|^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2$$

$(1/3)^2$?   ? $(1/6)^2$?   ?

از طرف دیگر طبق قضیه پارسوال داریم:

با توجه به اینکه ادامه $x[n]$ هم تکرار پالس‌ها است نداید

$$a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$$

پس داریم:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=0}^{5} a_k e^{j\frac{2k\pi}{6}n} = a_0 + a_3 e^{+j\pi n} = 1/3 + 1/6\, e^{j\pi n}$$

نتیجه:

توجه: در کنار e^{st} تابع $u(t)$ وجود ندارد

تعریف تابع ویژه برای سیستم ها میگیم:

* به شکل e^{st} تابع ویژه میگوییم

$$x(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t) \quad , \quad x(t) = e^{st} \longrightarrow y(t) = ?$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau}_{H(s)}$$

e^{st} تابع ویژه سیستم LTI باشد. $H(s)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$,
یعنی خروجی برابر همان تابع ورودی در یک عدد خواهد شد.

$$\Longrightarrow \boxed{y(t) = e^{st}H(s)}$$

مثال -

$$x(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y(t) \quad , \quad h(t)=e^{-4t}u(t) \quad , \quad x(t)=e^{6t} \longrightarrow y(t)=?$$

حل - چون e^{6t} تابع ویژه سیستم LTI باشد پس خروجی $y(t)=e^{6t}H(6)$ خواهد شد.

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t}u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(4+s)t}dt = \boxed{\frac{1}{s+4}} \Longrightarrow H(6)=\frac{1}{6+4}=\frac{1}{10}$$

$$\boxed{y(t)=\frac{1}{10}e^{6t}}$$

تمرین:

تمرین - پاسخ سیستم فوق را به ورودی $x(t)=\cos 20t$ بیابید. راهنمایی:

$$x(t)=\frac{1}{2}\left(e^{j20t}+e^{-j20t}\right)$$

$$y(t)=\frac{1}{2}H(j20)e^{j20t}+\frac{1}{2}H(-j20)e^{-j20t} \Longrightarrow \cdots$$

پاسخ به سری فوریه خروجی یک سیستم LTI برحسب ضرایب سری فوریه سیگنال ورودی آن:

می‌خواهیم ببینیم چه رابطه‌ای بین b_k و a_k وجود دارد؟

$$\begin{cases} x(t) \xleftrightarrow{F_S} a_k \\ y(t) \xleftrightarrow{F_S} b_k \end{cases}$$

سری فوریه سیگنال را می‌نویسیم

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

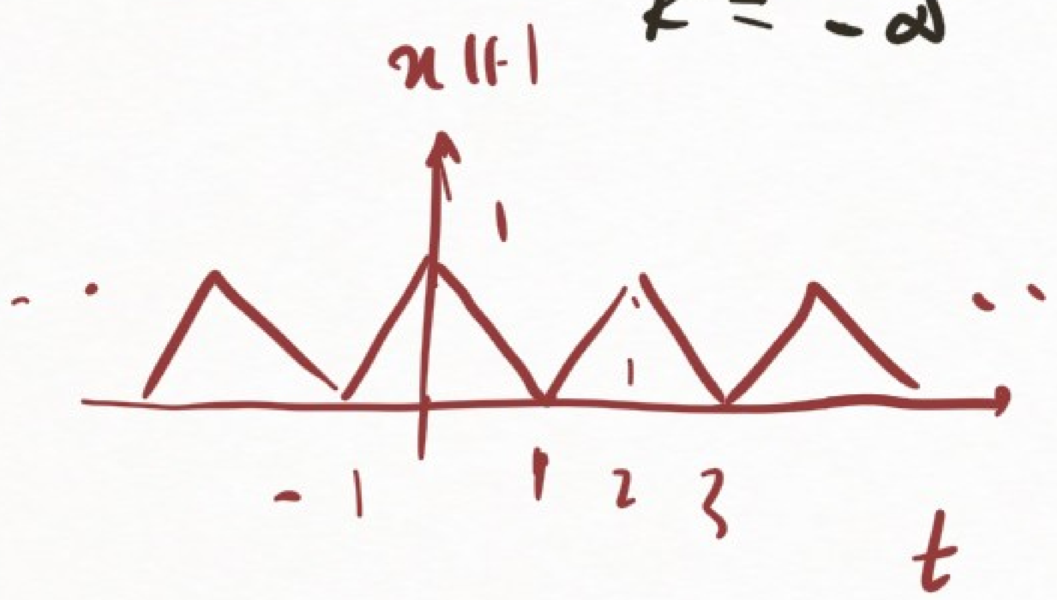
$$x(t) = \cdots + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_0 e^{j0t} + a_1 e^{j\omega_0 t} + a_2 e^{2j\omega_0 t} + \cdots$$

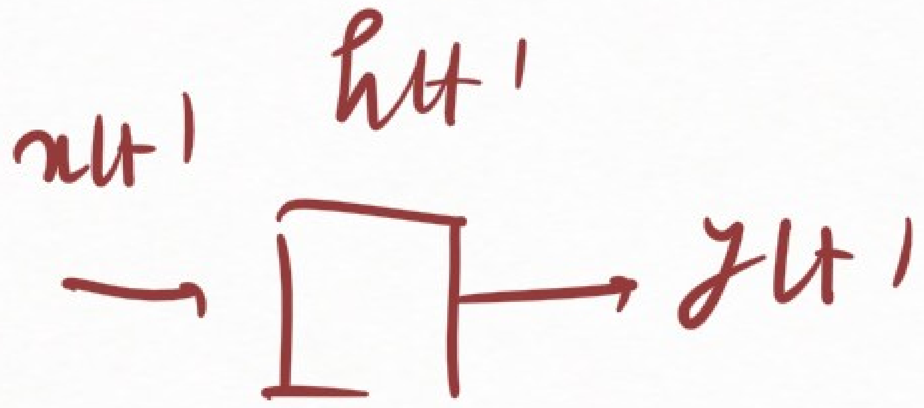
جمع $e^{-kj\omega_0 t}$ با [illegible]:

$$y(t) = \cdots + a_{-1} H(-j\omega_0) e^{-j\omega_0 t} + a_0 H(0) + a_1 H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t} + a_2 H(2j\omega_0) e^{2j\omega_0 t} + \cdots$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \Longrightarrow b_k = a_k H(jk\omega_0)$$

تمرین -





$\longrightarrow a_k = ?$

$, \quad h(t) = e^{-3t} u(t) \Longrightarrow b_k = ?$

$=$ ضرایب سری فوریه خروجی

تابع ویژه‌ی سیستم‌ها گسسته :

$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$

$\underline{x(n) = z^n} \longrightarrow y(n) = ?$

در سیستم‌ها گسسته $x(n)=z^n$ تابع ویژه‌ی می‌باشد چون :

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)\,h(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{n-k} h(k) = z^n \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\, z^{-k}}_{H(z)} = \boxed{z^n H(z)}$$

بنابراین در سیستم گسسته اگر ورودی z^n باشد خروجی همان سیگنال ورودی ضرب شده در عدد ثابت $|H(z)|$

مثال -

$x(n) = (1/2)^n \quad , \quad h(n) = (1/3)^n u(n) \longrightarrow y(n) = ?$

چون $x(n)=(1/2)^n$ تابع ویژه است بنابراین : $y(n) = (1/2)^n H(1/2)$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1/3)^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1/3)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (1/3\, z^{-1})^n = \frac{1}{1 - 1/3\, z^{-1}}$$

تصاعد هندسی بازه : $|1/3\, z^{-1}| < 1$

$|\alpha| < 1$

$$\Rightarrow H(1/2) = \frac{1}{1 - 1/3 \times 2} = \frac{1}{1 - 2/3} = 3 \Longrightarrow \boxed{y(n) = (1/2)^n H(1/2) = 3 (1/2)^n}$$

تمرین - اگر سیگنال ورودی $x[n] = \cos(\frac{2\pi}{5} n)$ و پاسخ ضربه $h[n] = (1/3)^n u[n]$ باشد $y[n]$ را بدست آورید: $\leftarrow$ $x[n] = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{5}n} + e^{-j\frac{2\pi}{5}n}\right)$

پاسخ (جواب) سیگنال متناوب ورودی یک سیستم LTI چیست با جواب سیگنال متناوب در دل سیستم؟

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] \quad \Longrightarrow$$

رابطه بین a_k و b_k را بدست آوریم.

$$\begin{cases} x[n] \longleftrightarrow a_k & \text{معلوم} \\ y[n] \longleftrightarrow b_k = ? \end{cases}$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$x[n] = a_0 + a_1 e^{+j\omega_0 n} + a_2 e^{2j\omega_0 n} + \cdots + a_{N-1} e^{(N-1)j\omega_0 n}$$

$$x[n] = a_0 + a_1 (e^{j\omega_0})^n + a_2 (e^{2j\omega_0})^n + a_3 (e^{3j\omega_0})^n + \cdots$$

$$y[n] = a_0 H(e^{j0}) + a_1 H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n} + a_2 H(e^{2j\omega_0}) e^{2j\omega_0 n} + \cdots + a_{N-1} H(e^{(N-1)j\omega_0}) e^{(N-1)j\omega_0 n}$$

$$y[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k H(e^{jk\omega_0}) e^{+jk\omega_0 n} \Longrightarrow b_k = a_k H(e^{jk\omega_0})$$

مثال -

$|\alpha| < 1$

$$\longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) \quad , \quad h(n) = \alpha^n u(n) \; ; \; x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)n \Longrightarrow y(n) = ?$$

$x(n)$

میدانیم که

$$x(n) = \cos\frac{2\pi}{N}n = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right)$$

تصاعد هندسی $|\alpha| < 1$

$$h(n) = \alpha^n u(n) \longrightarrow H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(\alpha z^{-1})}_{|\cdot|<1}{}^n = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \Longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}}$$

یا اینکه بطور مستقیم $H(e^{j\omega})$ را بدست آوریم :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\omega})^n}_{\text{تصاعد هندسی } |\alpha|<1} = \boxed{\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}}$$

پس :

$$y(n) = \frac{1}{2} e^{+j\frac{2\pi}{N}n} H(e^{j\frac{2\pi}{N}}) + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{N}n} H(e^{-j\frac{2\pi}{N}})$$

$$y(n) = \frac{1}{2} \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}n}}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}} + \frac{1}{2} \frac{e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}{1-\alpha e^{+j\frac{2\pi}{N}}}$$

با توجه به اینکه هر عدد مختلط بفرم نمایش زیر است :

$$\frac{1}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}}} = re^{j\theta}$$

لذا هر کدام از دو عبارت سمت چپ :

$$y(n) = \tfrac{1}{2} re^{j\theta} e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \tfrac{1}{2} re^{-j\theta} e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$$y(n) = \tfrac{1}{2} re^{j(\frac{2\pi}{N}n+\theta)} + \tfrac{1}{2} re^{-j(\frac{2\pi}{N}n+\theta)} \boxed{= r\cos(\tfrac{2\pi}{N}n+\theta)}$$

مثلاً - برای $N=4$ داریم :

$$\frac{1}{1-\alpha e^{-j2\pi/4}} = \frac{1}{1+j\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} e^{j(-\tan^{-1}\alpha)}$$

در نتیجه :

$$\boxed{y(n) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \cos(\tfrac{\pi n}{2} - \tan^{-1}\alpha)}$$

خلاصه درس این جلسه

خواص زاویه به عدد گسسته

تابع زوج

پیوسته

گسسته

با تعریف زاویه نیز بسیار خوش رسم

۱ ۱۲

پیوسته

گسسته