# فصل ۲

# پایداری ــ تحلیل سیستم‌ها در حوزه زمان ــ مکان هندسی ریشه‌ها

**خلاصه**

در این فصل ابتدا به مفهوم پایداری، انواع پایداری و روش‌های پایداری برای سیستم‌های $LTI$ اشاره می‌کنیم. سپس روش راث را به عنوان یک روش مؤثر برای تعیین پایداری مطلق سیستم‌های $LTI$ تشریح می‌کنیم. در ادامه به بررسی و تحلیل سیستم‌ها در حوزه زمان و ارائه مشخصات آن‌ها می‌پردازیم. در نهایت روش مکان هندسی را به عنوان روشی برای بررسی پایداری نسبی سیستم‌های $LTI$ بیان می‌کنیم.

## ۲-۱ پایداری

همان طور که قبلاً اشاره شد، یک سیستم $LTI$ را می‌توان با معادله دیفرانسیل خطی با ضرائب حقیقی ثابت با زمان نمایش داد. در این بخش به تحلیل پایداری برای سیستم‌های $LTI$ می‌پردازیم. مهم‌ترین مشخصه کنترلی برای یک سیستم این است که سیستم پایدار باشد. پایداری یک سیستم کنترلی حلقه بسته مستقیماً وابسته به محل قطب‌های تابع تبدیل حلقه بسته (ریشه‌های معادله مشخصه) می‌باشد. در عمل می‌توان سیستم‌ها را از نظر پایداری به سه دسته کلی دسته‌بندی کرد: ۱- سیستم‌های پایدار (سیستم‌های مفید)، ۲- سیستم‌های ناپایدار (سیستم‌های غیرمفید)، ۳- سیستم‌های پایدار مرزی (پایدار حاشیه‌ای).

به منظور تحلیل و طراحی، پایداری سیستم‌های کنترلی را به دو صورت پایداری مطلق و پایداری نسبی طبقه‌بندی می‌کنیم. پایداری مطلق نشان می‌دهد که سیستم پایدار است یا ناپایدار. در حالی که در مورد میزان پایداری سیستم اطلاعاتی را در اختیار نمی‌گذارد. با پایداری نسبی، میزان پایدار بودن سیستم را نشان می‌دهیم. در این درس، به بررسی روش‌های تعیین پایداری (مطلق ــ نسبی) سیستم‌ها می‌پردازیم که عبارتند از: ۱- روش راث، ۲- روش مکان ریشه‌ها، ۳- روش نایکوئیست، ۴- روش بود.

توجه داریم که از روش راث برای تعیین پایداری مطلق سیستم کنترلی با استفاده از تابع تبدیل حلقه بسته (معادله مشخصه) و از روش‌های دیگر برای تعیین پایداری نسبی سیستم کنترلی با استفاده از تابع تبدیل حلقه باز سیستم بهره می‌بریم.

## ۲-۲ شرایط پایداری

می‌دانیم که پاسخ سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان *(LTI)* از دو بخش تشکیل می‌شود:

۱- پاسخ حالت صفر که پاسخ سیستم به ورودی است زمانی که شرایط اولیه سیستم صفر در نظر گرفته شود.

۲- پاسخ ورودی صفر که پاسخ سیستم به شرایط اولیه است که در این حالت ورودی سیستم صفر در نظر گرفته می‌شود.

بنابراین پاسخ کلی سیستم برابر است با مجموع پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر.

لذا به منظور بررسی پایداری، باید شرایط پایداری را در هر حالت بیان کنیم.

### ۲-۲-۱ پایداری ورودی محدود ـ خروجی محدود[1] (BIBO)

پایداری در حالت صفر معادل است با این که اگر به سیستم ورودی محدود (کراندار) *r(t)* اعمال شود، خروجی سیستم *y(t)* برای همه زمان‌ها محدود (کراندار) باشد.

$$\forall t \qquad |x(t)| \le \beta \quad \to \quad |y(t)| < \infty$$

برای پایداری *BIBO* باید کلیه ریشه‌های معادله مشخصه سیستم سمت چپ محور موهومی در صفحه باشد.

### ۲-۲-۲ پایداری مجانبی

پایداری مجانبی را پایداری ورودی صفر می‌گویند. شرط این که سیستم پایدار مجانبی باشد، آن است که کلیه ریشه‌های معادله مشخصه سیستم سمت چپ محور موهومی باشند. در این حالت با میل کردن زمان به سمت بی‌نهایت، پاسخ سیستم به شرایط اولیه به سمت صفر میل می‌کند. از مطالب قبلی می‌توان نتیجه گرفت که:

۱- در سیستم‌های *LTI* شرط *BIBO* و پایداری مجانبی یکسان است، به طوری که کلیه ریشه‌های معادله مشخصه در نیمه چپ صفحه $s$ باشد.

۲- اگر سیستمی پایدار *BIBO* باشد، پایداری مجانبی نیز هست.

۳- در حالتی که معادله مشخصه سیستم دارای ریشه‌های ساده روی محور موهومی بوده و هیچ ریشه‌ای در نیمه راست صفحه $s$ نداشته باشد، سیستم را پایدار مرزی (پایدار حاشیه‌ای) می‌نامیم.

❋ **نکته**: ***شرط لازم و کافی برای پایداری مطلق این است که کلیه ریشه‌های معادله مشخصه (قطب‌های تابع تبدیل سیستم حلقه بسته) در نیمه چپ صفحه $s$ باشد. به بیانی دیگر:*** $\mathrm{Re}(s_i) < 0$

❋ **نکته**: ***چنانچه حذف صفر و قطب در تابع تبدیل نباشد، پایداری BIBO ، پایداری حالت را نتیجه می‌دهد.***

## ۲-۳ روش راث

روش راث، روشی جبری است که پایداری مطلق یک سیستم *LTI* را بدون محاسبه ریشه‌های معادله مشخصه مشخص می‌کند. همچنین با این روش می‌توان شرایط پایداری را برای انتخاب محدوده‌های مناسب برای پارامترهایی که در سیستم نامعلوم می‌باشند تعیین کرد. این روش وجود و تعداد ریشه در نیمه راست صفحه $s$ به همراه تعداد ریشه‌های روی محور موهومی را مشخص می‌کند. مجدداً یادآوری می‌کنیم که برای استفاده از این روش باید از تابع تبدیل حلقه بسته سیستم (معادله مشخصه) استفاده کنیم.

فرض کنید که معادله مشخصه یک سیستم *LTI* به صورت روبرو باشد:

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

که در آن همه ضرائب حقیقی و ثابت هستند. روش راث شرط لازم و کافی برای تعیین پایداری مطلق را بیان می‌کند. قبل از بررسی این روش، شرط لازم برای پایداری چندجمله‌ای مشخصه را مطرح می‌کنیم. این بدان معنی است که در صورت عدم برقراری شرایط لازم برای پایداری، دیگر نیازی به استفاده از روش راث نمی‌باشد.

### ۲-۳-۱ شرط لازم برای پایداری

شرط لازم برای این که معادله مشخصه مفروض دارای ریشه‌های حقیقی مثبت نباشد، این است که:

۱- همه ضرائب معادله مشخصه علامت یکسان داشته باشند.

---

[1]. Bounded input – Bounded output

۲- هیچ یک از ضرائب معادله مشخصه صفر نباشد.

❋ **نکته**: ***در حالات زیر بدون تشکیل جدول راث به سادگی می‌توان شرایط پایداری را بررسی کرد.***

***برای معادله مشخصه*** $\Delta(s)=a_2s^2+a_1s+a_0$ ***شرط لازم و کافی برای پایداری برابر است*** ($a_2,a_1,a_0>0$).

***برای معادله مشخصه*** $\Delta(s)=a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0$ ***شرط لازم و کافی عبارتند از:***

$a_2a_1>a_3a_0$ و $a_3,a_2,a_1,a_0>0$

واضح است در صورت عدم برقراری رابطه $a_2a_1>a_3a_0$ به واسطه دو تغییر علامت در ستون اول جدول راث، سیستم با دو ریشه سمت راست ناپایدار خواهد بود.

**مثال:** سیستمی با معادله مشخصه $\Delta(s)=s^4+as^3+bs$ در چه شرایطی برحسب $a$ و $b$ پایدار است؟

(هسته‌ای ۸۴ ـ ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۴)

۱) $b>0\,,\,a>0$

۲) $a^2>4b\,,\,b>0\,,\,a>0$

۳) $a^2\geq 4b\,,\,b>0\,,\,a>0$

۴) همیشه ناپایدار است.

✍ **حل**: گزینه «۴»

چون معادله مشخصه مفروض شرط لازم در روش راث را ندارد (کلیه ضرائب معادله مشخصه وجود ندارند) بنابراین سیستم همواره ناپایدار است.

در ادامه چون دارا بودن شرایط لازم، برای پایداری کافی نمی‌باشد، لذا به بررسی روش راث می‌پردازیم. شرط لازم و کافی برای این که کلیه ریشه‌های معادله مشخصه مفروض در نیمه چپ صفحه s باشند، این است که کلیه درایه‌های ستون اول جدول راث هم علامت باشند. تعداد تغییرعلامت‌ها نشان دهنده تعداد ریشه‌هایی (قطب‌هایی) است که در نیمه راست صفحه s قرار دارند. جدول راث برای معادله مشخصه مفروض به صورت زیر تشکیل می‌شود.

$$\begin{array}{lllll} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ s^{n-2} & A_1 & A_2 & A_3 & \cdots \\ s^{n-3} & B_1 & B_2 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ s^1 & \cdots & & & \\ s^0 & \cdots & & & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A_1=\dfrac{a_{n-1}a_{n-2}-a_na_{n-3}}{a_{n-1}} \\ A_2=\dfrac{a_{n-1}a_{n-4}-a_na_{n-5}}{a_{n-1}} \\ B_1=\dfrac{A_1a_{n-3}-A_2a_{n-1}}{A_1} \\ B_2=\dfrac{A_1a_{n-5}-A_3a_{n-1}}{A_1} \end{cases}$$

**مثال:** کدام یک از معادلات مشخصه زیر ریشه‌هایی دارد که همگی در سمت چپ محور موهومی (در صفحه مختلط) قرار داشته باشد؟ (هسته‌ای ۷۴)

۱) $3s^3+2s^2+4s+10=0$

۲) $s^3+3s+1=0$

۳) $s^3+4s^2+8s+12=0$

۴) $s^3-4s^2+s+6=0$

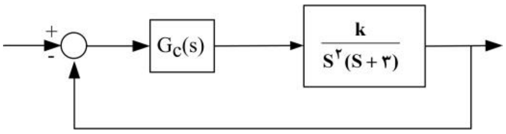
✍ **حل**: گزینه «۳»

گزینه‌های (۲) و (۴) به دلیل این که شرایط لازم برای پایداری را ندارند، نادرست می‌باشند. برای تشخیص درستی سایر گزینه‌ها جدول راث مربوط به هر کدام را تشکیل می‌دهیم. ابتدا گزینه (۱) را بررسی می‌کنیم.

$\Delta(s)=3s^3+2s^2+4s+10=0$

طبق نکته چون $2\times4 \not> 3\times10$ معادله مشخصه دو ریشه ناپایدار دارد. لذا گزینه (۳) صحیح خواهد بود.

**مثال:** سیستم کنترل شکل زیر بدون کنترل‌کننده $G_C(s)$ همیشه ناپایدار است. برای پایدار کردن آن صفری به صورت $(s+\alpha)$ توسط کنترلر $G_C(s)$ اضافه می‌کنیم. کدام گزینه صحیح است؟ (هسته‌ای ۷۵)




۱) یک صفر در $[\text{۰} \quad -\text{۱}]$ باید اضافه کرد.

۲) یک صفر در $[-\text{۱} \quad -\text{۲}]$ باید اضافه کرد.

۳) یک صفر در $[-\text{۲} \quad -\text{۳}]$ باید اضافه کرد.

۴) هر سه مورد

**حل:** گزینه «۴»

معادله مشخصه سیستم را بدست می‌آوریم.

$$\Delta(s)=1+\frac{k(s+\alpha)}{s^2(s+3)}=0 \ \rightarrow\ \Delta(s)=s^3+3s^2+ks+k\alpha=0$$

با توجه به نکته شرایط پایداری عبارتند از:

$$\begin{cases} k>0\ ,\ k\alpha>0 \ \rightarrow\ \alpha>0 \\ 3k>k\alpha \xrightarrow{k>0} \alpha<3 \end{cases} \Rightarrow 0<\alpha<3$$

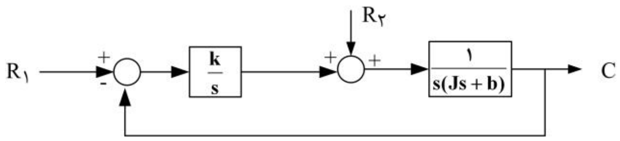
**مثال:** پاسخ نهایی یک سیستم کنترل مدار بسته با تابع تبدیل حلقه بسته $T(s)=\frac{12}{s^3+s^2+2s+24}$ به ورودی پله واحد چقدر است؟ (هسته‌ای ۸۱)

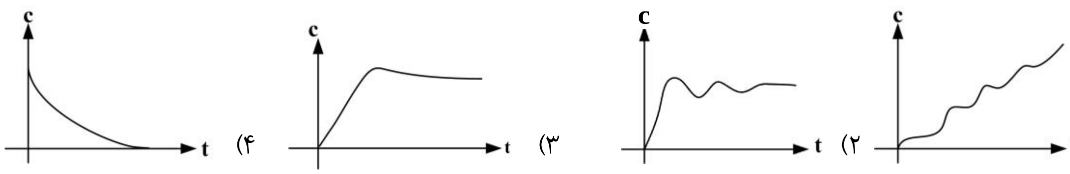
۱) ۰ ۲) ۰/۵ ۳) ۱۲ ۴) هیچ‌کدام

**حل:** گزینه «۴»

ابتدا پایداری سیستم را بررسی می‌کنیم. معادله مشخصه سیستم برابر است با $\Delta(s)=s^3+s^2+2s+24=0$. با توجه به نکته چون $1\times 2 \not> 1\times 24$ سیستم دارای دو قطب در سمت راست محور موهومی بوده و لذا سیستم مفروض ناپایدار می‌باشد. بنابراین خروجی سیستم با افزایش زمان به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و لذا گزینه (۴) صحیح است.

**مثال:** پاسخ سیستم به ازای ورودی ایمپالس $R_1$ و $R_2=0$ با توجه به مقادیر $b=0$ ، $j=0/5$ و $k=4$ کدام است؟(هسته‌ای ۸۳)



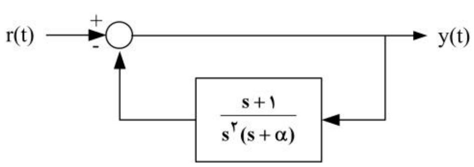

**حل:** گزینه «۱»

می‌دانیم که رفتار یک سیستم با قطب‌های آن تعیین می‌شود. لذا معادله مشخصه سیستم را بدست می‌آوریم.

$$\Delta(s)=1+\frac{4}{s}\times\frac{1}{s(0/5s+0)}=0 \ \rightarrow\ \Delta(s)=0/5s^3+4=0$$

مشاهده می‌شود که چندجمله‌ای مشخصه شرط لازم برای پایداری را ندارد، لذا سیستم ناپایدار است.

**مثال:** در سیستم زیر به ازاء چه مقادیری از $\alpha$ پایداری سیستم تضمین می‌گردد؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۲)




۱) $\alpha>0$

۲) $\alpha>1$

۳) $|\alpha|>1$

۴) هیچ مقدار

✍ **حل**: گزینه «۲»

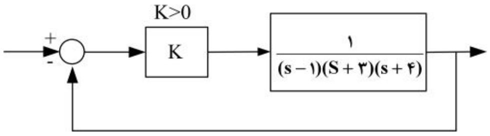
معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=1+\frac{s+1}{s^2(s+\alpha)}=0 \;\rightarrow\; \Delta(s)=s^3+\alpha s^2+s+1=0$$

با توجه به نکته شرایط پایداری عبارتند از:

$$\begin{cases} \alpha>0 \\ 1\times\alpha>1\times1 \;\rightarrow\; \alpha>1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \alpha>1$$

**مثال**: در سیستم شکل زیر، سیستم مدار باز یک قطب ناپایدار دارد. در مورد پایداری سیستم مدار بسته و ارتباط آن با $k$ کدام گزینه صحیح است؟ (مکانیک ۸۴)




۱) برای مقادیر $k$ بزرگ‌تر از ۱۲ و کوچک‌تر از ۴۲ سیستم مدار بسته پایدار است.

۲) برای مقادیر $k$ کوچک‌تر از ۳۰ سیستم مدار بسته همواره پایدار است.

۳) چون سیستم مدار باز ناپایدار است، سیستم مدار بسته به ازاء همه مقادیر $k>0$ ناپایدار است.

۴) گرچه سیستم مدارباز ناپایدار است ولی سیستم مدار بسته به ازاء همه مقادیر $k>0$ پایدار است.

✍ **حل**: گزینه «۱»

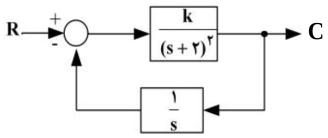
معادله مشخصه سیستم حلقه بسته:

$$\Delta(s)=1+\frac{k}{(s-1)(s+3)(s+4)}=0 \rightarrow \Delta(s)=s^3+6s^2+5s+k-12=0$$

با توجه به نکته، سیستم برای $12<k<42$ همواره پایدار است.

$$\begin{cases} k-12>0 \;\rightarrow\; k>12 \\ 5\times6>k-12 \;\rightarrow\; k<42 \end{cases}$$

**مثال**: در مورد سیستم کنترلی مدار بسته نشان داده شده کدام عبارت صحیح است؟ (مکاترونیک ۸۴)




۱) سیستم به ازای همه مقادیر $k$ پایدار است.

۲) سیستم به ازای همه مقادیر $k$ ناپایدار است.

۳) سیستم به ازای برخی از مقادیر $k$ پایدار است.

۴) با اطلاعات داده شده در مورد پایداری این سیستم نمی‌توان اظهارنظر نمود.

✍ **حل**: گزینه «۳»

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=1+\frac{k}{(s+2)^2}\cdot\frac{1}{s}=0 \;\rightarrow\; \Delta(s)=s^3+4s^2+4s+k=0$$

با توجه به نکته شرایط پایداری عبارتند از: $0<k<16$. بنابراین گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} k>0 \\ 4\times4>k\times1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} 0<k<16$$

❋ **نکته**: ***اگر از فضای حالت برای نمایش سیستم‌های کنترلی در مسائل استفاده شود، یادآوری می‌شود که معادله مشخصه از رابطه $\Delta(s)=\det(sI-A)$ محاسبه می‌گردد. بنابراین برای تعیین پایداری (مطلق) به روش راث فقط ماتریس $A$ مورد استفاده قرار می‌گیرد.***

❋ **نکته**: ***همواره می‌توان درایه‌های یک ردیف در جدول راث را در یک عدد مثبت ضرب یا تقسیم کرد. این واقعیت، در سادگی محاسبات نقش عمده‌ای دارد.***

### ۲ـ۳ـ۲ حالت‌های خاص در تشکیل جدول راث

به هنگام تشکیل جدول راث ممکن است به دو مورد خاص برخورد کنیم که به طور جداگانه هر یک را بررسی می‌نماییم.

**حالت ۱**: در ستون اول یکی از درایه‌ها صفر باشد.

برای رفع این مشکل سه روش وجود دارد:

الف) استفاده از عدد مثبت خیلی کوچک $\varepsilon$ به جای صفر و محاسبه بقیه درایه‌ها مطابق معمول.

ب) استفاده از متغیر جدید $x$ به طوری که در معادله مشخصه به جای $s$، معادل آن $\frac{1}{x}$ قرار داده می‌شود.

ج) ضرب چندجمله‌ای مشخصه در $(s+a)$ و $a>0$ . عموماً $a=1$ فرض می‌شود.

**مثال**: در مورد پایداری چندجمله‌ای روبرو بحث کنید. $\Delta(s)=s^4+s^3+2s^2+2s+5=0$

✍ **حل**: جدول راث را تشکیل می‌دهیم.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | ۱ | ۲ | ۵ |
| $s^3$ | ۱ | ۲ | |
| $s^2$ | ۰ | ۵ | |

حالت خاص رخ داده است. حال هر کدام از روش‌ها را استفاده می‌کنیم.

روش الف) $0 \to \varepsilon$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | ۱ | ۲ | ۵ |
| $s^3$ | ۱ | ۲ | |
| $s^2$ | $\varepsilon$ | ۵ | |
| $s^1$ | $\frac{2\varepsilon-5}{\varepsilon}$ | | |
| $s^0$ | ۵ | | |

دو تغییر علامت در ستون اول جدول راث معادل دو قطب ناپایدار می‌باشد.

روش ب) $s \to \frac{1}{x}$

$$\Delta(s')=5x^4+2x^3+2x^2+x+1=0$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x^4$ | ۵ | ۲ | ۱ |
| $x^3$ | ۲ | ۱ | |
| $x^2$ | −۰/۵ | ۱ | |
| $x^1$ | ۵ | | |
| $x^0$ | ۱ | | |

دو تغییرعلامت در ستون اول جدول راث بیانگر دو قطب ناپایدار می‌باشد.

روش ج)

$$\Delta(s)=(s+1)(s^4+s^3+2s^2+2s+5)=s^5+2s^4+3s^3+4s^2+7s+5=0$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | ۱ | ۳ | ۷ |
| $s^4$ | ۲ | ۴ | ۵ |
| $s^3$ | ۱ | ۴/۵ | |
| $s^2$ | −۵ | ۵ | |
| $s^1$ | ۵/۵ | ۰ | |
| $s^0$ | ۵ | | |

دو تغییر علامت در ستون اول جدول راث بیانگر دو قطب سمت راست محور موهومی (ناپایدار) می‌باشد.

اگرچه ساده‌ترین روش، همان روش الف $(\varepsilon \to 0)$ است، ولی به‌طور کلی روش ب پیشنهاد می‌گردد.

**مثال:** معادله مشخصه حلقه بسته سیستمی عبارتست از: $s^{4}+s^{3}+2s^{2}+2s+1=0$

کدام عبارت درست است؟ (آزاد ۷۹)

۱) سیستم حلقه بسته پایدار است.
۲) سیستم حلقه بسته روی مرز ناپایداری قرار دارد.
۳) سیستم حلقه بسته ناپایدار است.
۴) سیستم حلقه بسته یک قطب ناپایدار دارد.

✍ **حل:** گزینه «۳»

جدول راث را تشکیل می‌دهیم. دو تغییرعلامت در ستون اول جدول راث وجود دارد. بنابراین سیستم دارای دو قطب ناپایدار خواهد بود.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^{4}$ | $1$ | $2$ | $1$ |
| $s^{3}$ | $1$ | $2$ | |
| $s^{2}$ | $0\to\varepsilon$ | $1$ | |
| $s^{1}$ | $\dfrac{2\varepsilon-1}{\varepsilon}$ | $0$ | |
| $s^{0}$ | $1$ | | |

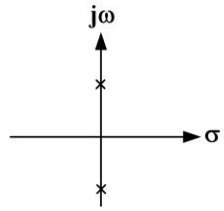
**حالت ۲:** کلیه درایه‌های یک ردیف صفر باشند.

در این شرایط ممکن است یک یا چند حالت زیر وجود داشته باشد:

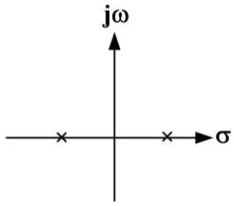
الف) معادله حداقل یک جفت ریشه موهومی دارد.

ب) معادله حداقل یک جفت ریشه حقیقی و مختلف العلامه دارد.

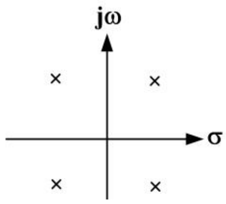
ج) معادله چند ریشه مزدوج مختلط دارد که نسبت به مبدأ صفحه $s$ متقارن هستند.




الف) $s=\pm j\omega$




ب) $s=\pm\alpha$




ج) $s=\pm\alpha\pm j\beta$

برای رفع این مشکل، از معادله کمکی $A(s)=0$ استفاده می‌کنیم. این معادله از ضرائب ردیف ماقبل ردیفی که در جدول راث همه درایه‌های آن صفر هستند، تشکیل می‌شود. سپس از معادله کمکی نسبت به $s$ مشتق گرفته و ضرائب چندجمله‌ای حاصل را به عنوان ضرائب ردیف تمام صفر قرار می‌دهیم.

❋ **نکته:** ***با توجه به حالت‌های ممکن (الف، ب و ج) می‌توان به راحتی دریافت که***

***۱- معادله کمکی یک چندجمله‌ای زوج است، یعنی در این معادله تنها توان‌های زوج $s$، $s^{2k}$ وجود دارند.***

***۲- یک سطر صفر کامل در توان‌های فرد $s$، $s^{2k-1}$ رخ خواهد داد.***

***۳- ریشه‌های معادله کمکی، ریشه‌های معادله اصلی‌اند.***

***٤- حالت (الف) با وجود فقط یک جفت ریشه روی محور موهومی، نشان دهنده پایداری مرزی سیستم است. چنانچه معادله مشخصه دارای ریشه‌های مکرر روی محور موهومی باشد، نشان دهنده ناپایداری سیستم است.***

***۵- حالت‌های ب و ج نشان دهنده ناپایداری سیستم (به واسطه وجود قطب سمت راست) است.***

**تشخیص حالت‌ها**

۱- اگر بعد از ردیفی که برای نخستین بار در جدول راث صفر شده است، ردیف صفر دیگری مجدداً رخ ندهد به شرط این که تغییر علامت در ستون اول جدول راث نداشته باشیم، سیستم دارای ریشه ساده متقارن روی محور موهومی است. بنابراین سیستم پایدار مرزی است (حالت الف).

۲- اگر بعد از ردیفی که برای نخستین بار در جدول راث صفر شده است، ردیف صفر دیگری مجدداً رخ ندهد و در ستون اول جدول راث تغییر علامت داشته باشیم، به تعداد تغییر علامت‌ها سیستم قطب ناپایدار متقارن خواهد داشت. بنابراین سیستم ناپایدار است (حالت ب یا ج).

۳- اگر بعد از ردیفی که برای نخستین بار در جدول راث صفر شده است، ردیف صفر دیگری مجدداً رخ دهد سیستم ناپایدار است. چنانچه تغییر علامتی در ستون اول جدول راث نداشته باشیم سیستم دارای ریشه‌های مکرر روی محور موهومی است (حالت اول) در غیر این صورت به تعداد تغییر علامت‌ها در ستون اول جدول راث، سیستم قطب ناپایدار مکرر متقارن خواهد داشت (حالت ب یا ج).

❋ **نکته**: *اگر ردیف $s^{2k-1}$ صفر شود، در این صورت $2k$ ریشه متقارن نسبت به مبدأ وجود خواهد داشت.*

❋ **نکته**: *به تعداد تغییر علامت قبل از ردیف صفر در ستون اول جدول راث ریشه‌های ناپایدار نامتقارن داریم.*

❋ **نکته**: *تعداد سطرهای صفر در جدول راث مرتبه تکرار ریشه‌های متقارن را نشان می‌دهد.*

**مثال**: تابع تبدیل سیستمی به صورت $G(s)=\dfrac{s+5}{s^4+5s^3+10s^2+20s+24}$ است. در مورد ریشه‌های مخرج آن چه می‌توان گفت؟ (ابزار دقیق واتوماسیون ۸۲)

۱) همه ریشه‌ها در سمت چپ صفحه مختلط می‌باشد.

۲) سه ریشه در سمت چپ و یک ریشه سمت راست دارد.

۳) دارای دو ریشه روی محور موهومی و دو ریشه در سمت چپ صفحه مختلط است.

۴) دو ریشه روی محور، یک ریشه سمت راست و یک ریشه سمت چپ است.

✍ **حل**: گزینه «۳»

جدول راث را تشکیل می‌دهیم. با توجه به متن درس، به دلیل وجود یک سطر صفر کامل و عدم تغییر علامت در ستون اول جدول راث، سیستم دارای دو ریشه موهومی بوده و سایر ریشه‌ها در سمت چپ محور موهومی قرار دارند.

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 10 & 24 \\ s^3 & 5 & 20 & \\ s^2 & 1 & 4 & \\ s^1 & 0 & 0 & \\ s^0 & 4 & & \end{array} \qquad \to A(s)=s^2+4 \qquad \frac{dA(s)}{ds}=2s$$

**مثال**: معادله مشخصه سیستمی به صورت زیر می‌باشد. این سیستم (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۴)

$$\Delta(s)=s^7+4s^6+7s^5+10s^4+11s^3+8s^2+5s+2=0$$

۱) ناپایدار است.
۲) پایدار مجانبی است.
۳) پایدار مرزی است.
۴) گزینه‌های (۲) و (۳) صحیح هستند.

✍ **حل**: گزینه «۱»

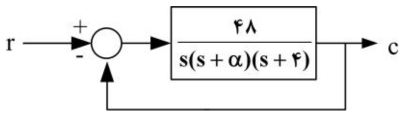
$$\begin{array}{lllll} s^7 & 1 & 7 & 11 & 5 \\ s^6 & 4 & 10 & 8 & 2 \\ s^5 & 1 & 2 & 1 & \\ s^4 & 1 & 2 & 1 & \\ s^3 & 0 & 0 & & \to A_1(s)=s^4+2s^2+1 \quad \dfrac{dA_1(s)}{ds}=4s^3+4s \\ s^2 & 1 & 1 & & \\ s^1 & 0 & 0 & & \to A_2(s)=s^2+1 \quad \dfrac{dA_2(s)}{ds}=2s \\ s^0 & 1 & & & \end{array}$$

جدول راث را تشکیل می‌دهیم که در محاسبه درایه‌های جدول راث، از ساده‌سازی استفاده کرده‌ایم. با توجه به متن درس، چون به ردیف صفر دیگری علاوه بر ردیف اول صفر برخورد کردیم، سیستم ناپایدار است.

توجه کنید بدون تکمیل جدول راث نیز می‌توانید پاسخ صحیح را تعیین کنید. از آنجا که ریشه‌های معادله کمکی، ریشه‌های معادله اصلی‌اند، عبارت $A_1(s)=s^۴+۲s^۲+۱$ فاکتور معادله مشخصه سیستم است. لذا به دلیل نقص شرط لازم برای پایداری (عدم وجود تمام ضرائب)، عبارت $A_1(s)$ ناپایدار می‌باشد. از اینرو سیستم اصلی ناپایدار است. ریشه‌های معادله‌های کمکی (ریشه‌های موهومی مکرر) عبارتند از:

$$A_1(s)=۰ \;\rightarrow\; (s^۲+۱)^۲=۰ \;\rightarrow\; s=\pm j,\pm j$$

**مثال**: به ازاء چه مقدار $\alpha$ سیستم کنترل شکل مقابل نوسانی است و فرکانس نوسان آن کدام است؟ (هسته‌ای ۷۸)




۱) $s=\pm j۲\sqrt{۲}\ ,\ \alpha=۲$

۲) $s=\pm j\sqrt{۲}\ ,\ \alpha=۲$

۳) $s=\pm j۲\sqrt{۲}\ ,\ \alpha=۴$

۴) $s=\pm j\sqrt{۲}\ ,\ \alpha=۴$

✍ **حل**: گزینه «۱»

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته برابر است با:

$$\Delta(s)=s^۳+(\alpha+۴)s^۲+۴\alpha s+۴۸=۰$$

برای ایجاد یک سطر صفر کامل داریم:

$$۴\alpha(\alpha+۴)=۴۸ \;\rightarrow\; ۴\alpha^۲+۱۶\alpha-۴۸=۰ \;\Rightarrow\; \begin{cases}\alpha=۲\\ \alpha=-۶\end{cases}$$

از معادله کمکی داریم:

$$A(s)=(\alpha+۴)s^۲+۴۸=۶s^۲+۴۸=۰ \;\rightarrow\; s=\pm j۲\sqrt{۲}$$

توجه کنید که $\alpha=-۶$ غیرقابل قبول است. زیرا با این مقدار، سیستم حلقه بسته ناپایدار است.

**مثال**: تابع تبدیل مدار باز سیستمی با فیدبک واحد به شکل زیر است. مقدار $k$ و قطب‌های سیستم را در مرز پایداری بدست آورید. (مکاترونیک ۸۴)

$$W_۰(s)=k\frac{(s^۲-۲s+۲)}{s(s+۱)}$$

۱) $k_{\max}=۱\ ,\ p_{۱,۲}=\pm j\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

۲) $k_{\max}=۰/۵\ ,\ p_{۱,۲}=\pm j\sqrt{\frac{۱}{۳}}$

۳) $k_{\max}=۱\ ,\ p_{۱,۲}=\pm j\sqrt{\frac{۱}{۳}}$

۴) $k_{\max}=۰/۵\ ,\ p_{۱,۲}=\pm j\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

✍ **حل**: گزینه «۴»

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=۱+W_o(s)=۰ \;\rightarrow\; \Delta(s)=(۱+k)s^۲+(۱-۲k)s+۲k=۰$$

شرط این که قطب‌های سیستم در مرز پایداری قرار گیرند، عبارتست از:

$$۱-۲k=۰ \;\rightarrow\; k=\frac{۱}{۲}$$

برای $k=\frac{۱}{۲}$ قطب‌های سیستم برابرند با:

$$\Delta(s)\Big|_{k=\frac{۱}{۲}}=(۱+\frac{۱}{۲})s^۲+۲(\frac{۱}{۲})=۰ \rightarrow \frac{۳}{۲}s^۲+۱=۰ \;\rightarrow\; s=\pm j\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

**مثال:** معادله مشخصه سیستمی به صورت $s^6+3s^5+4s^4+6s^3+5s^2+3s+2=0$ است. در مورد پایداری این سیستم کدام گزینه صحیح است؟ (هسته‌ای ۷۵)

۱) سیستم پایدار است.
۲) سیستم ناپایدار است.
۳) سیستم پایدار مرزی است.
۴) در مورد پایداری سیستم نمی‌توان اظهار نظری کرد.

✍ **حل:** گزینه «۲»

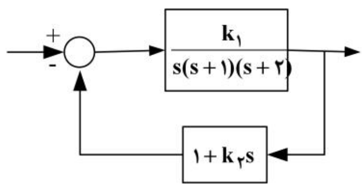
با توجه به متن درس، از آنجا که ریشه‌های معادله کمکی، ریشه‌های معادله اصلی‌اند، عبارت $A_1(s)=2s^4+4s^2+2$ فاکتور معادله مشخصه سیستم می‌باشد.

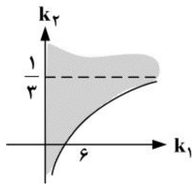
$$\begin{array}{lllll} s^6 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ s^5 & 3 & 6 & 3 & \\ s^4 & 2 & 4 & 2 & \\ s^3 & 0 & 0 & 0 & \rightarrow \ A_1(s)=2s^4+4s^2+2 \end{array}$$

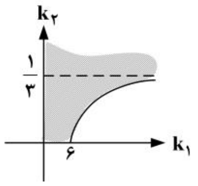
به دلیل نقص شرط لازم برای پایداری (عدم وجود تمام ضرائب)، عبارت $A_1(s)$ ناپایدار بوده و لذا سیستم اصلی ناپایدار است. بنابراین نیازی به تکمیل جدول راث نمی‌باشد. برای تصدیق این موضوع ریشه‌های معادله‌های کمکی (ریشه‌های موهومی مکرر) را بدست می‌آوریم. داریم:

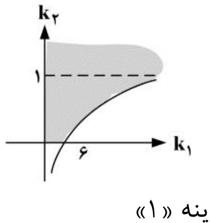
$$A_1(s)=0 \ \rightarrow \ (s^2+1)^2=0 \ \rightarrow \ s=\pm j,\pm j$$

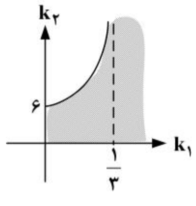
**مثال:** در سیستم کنترل شکل زیر $k_1$ و $k_2$ در چه ناحیه‌ای تغییر کند تا سیستم پایدار بماند؟ (هسته‌ای ۷۷)




۱)



۲)



۳)



۴)



✍ **حل:** گزینه «۱»

ابتدا معادله مشخصه سیستم حلقه بسته را بدست می‌آوریم.

$$\Delta(s)=1+\frac{k_1(1+k_2 s)}{s(s+1)(s+2)}=0 \ \rightarrow \ \Delta(s)=s^3+3s^2+(k_1k_2+2)s+k_1=0$$

با توجه به نکته شرایط پایداری عبارتند از:

$$\begin{cases} k_1>0 \quad , \quad k_1k_2+2>0 & (1) \\ 3(k_1k_2+2)>k_1\times 1 \ \rightarrow \ k_2>\dfrac{k_1-6}{3k_1} & (2) \end{cases}$$

تنها گزینه‌ای که در شرایط (۱) و (۲) صدق می‌کند، گزینه (۱) می‌باشد.

**مثال:** جدول راث متناظر با معادله مشخصه سیستمی به قرار زیر است که ضرایب $a$ و $c$ مثبت و بقیه ضرایب ستون اول منفی می‌باشند. همچنین توجه کنید که ضرایب سطر $s^5$ ابتدا صفر بوده و برای تکمیل جدول جایگزین شده‌اند. کدام گزینه در مورد ریشه‌های این سیستم صحیح است؟

$$\begin{array}{lllll}
s^7 & a & \times & \times & \times \\
s^6 & b & \times & \times & \times \\
s^5 & \cancel{0}c & \cancel{0}\times & \cancel{0}\times & \\
s^4 & d & \times & \times & \\
s^3 & e & \times & & \\
s^2 & f & \times & & \\
s^1 & g & & & \\
s^0 & h & & &
\end{array}$$

۱) دو ریشه سمت راست، سه ریشه سمت چپ، دو ریشه روی محور موهومی
۲) سه ریشه سمت راست، چهار ریشه سمت چپ
۳) سه ریشه سمت راست، چهار ریشه روی محور موهومی
۴) سه ریشه سمت راست، دو ریشه سمت چپ، دو ریشه روی محور موهومی

**حل:** گزینه «۲»

با توجه به متن درس، وجود یک سطر صفر کامل بدون تغییر علامت در ستون اول جدول راث بیانگر ریشه‌های موهومی خالص است (حالت الف)، لذا گزینه (۲) صحیح خواهد بود.

**مثال:** تابع تبدیل حلقه باز سیستمی با فیدبک واحد منفی $G(s)=\dfrac{80k}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$ به هنگام عبور مکان ریشه‌ها از محور $j\omega$ مقدار فرکانس چقدر است؟ (هسته‌ای ۸۴ ـ ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۴)

۱) $\omega=10\dfrac{rad}{s}$ ۲) $\omega=\sqrt{3/25}\dfrac{rad}{s}$ ۳) $\omega=3/25\dfrac{rad}{s}$ ۴) $\omega=\sqrt{10}\dfrac{rad}{s}$

**حل:** گزینه «۴»

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از: $\Delta(s)=s^4+8s^3+36s^2+80s+80k=0$

جدول راث را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 36 & 80k \\
s^3 & 1 & 10 & \\
s^2 & 26 & 80k & \\
s^1 & \dfrac{260-80k}{26} & & \xrightarrow{\text{یک سطر صفر}} 260-80k=0 \quad\rightarrow\quad k=\dfrac{13}{4} \\
s^0 & 80k & &
\end{array}$$

برای بدست آوردن فرکانس عبوری از محور موهومی بایستی یک سطر صفر در جدول راث داشته باشیم. لذا:

$$k=\frac{13}{4}$$

از معادله کمکی داریم: $A(s)=26s^2+80k=0 \xrightarrow{k=\frac{13}{4}} 26s^2+260=0 \rightarrow s=\pm j\sqrt{10}$

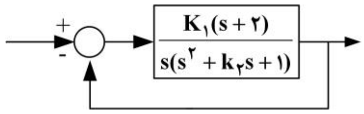
**مثال:** در چه مواردی در هنگام تشکیل جدول راث، کلیه عناصر یک سطر ممکن است صفر درآیند؟ (هسته‌ای ۷۷)

۱) وجود یک جفت ریشه مزدوج بر روی محور $j\omega$
۲) وجود یک جفت ریشه حقیقی مساوی با علامت‌های مختلف
۳) وجود دو جفت ریشه مزدوج مختلط که نسبت به مبدأ صفحه متقارن باشند.
۴) در هر سه حالت.

✍ **حل**: گزینه «۴»

با توجه به متن درس، هر سه حالت می‌تواند به هنگام صفر شدن یک ردیف از جدول راث رخ دهد.

**مثال**: در سیستم مقابل $k_1$ و $k_2$ را چنان تعیین کنید که سیستم مدار بسته دارای قطب‌های $s=\pm j2$ باشد. (هسته‌ای ۸۳)




۱) $k_2=7\,,\,k_1=7$

۲) $k_2=3/5\,,\,k_1=7$

۳) $k_2=\frac{1}{4}\,,\,k_1=2$

۴) به ازای هیچ مقداری از $k_1$ و $k_2$ امکان ندارد.

✍ **حل**: گزینه «؟»

**روش اول**: معادله مشخصه سیستم حلقه بسته برابر است با:

$$\Delta(s)=s^3+k_2s^2+(k_1+1)s+2k_1$$

جدول راث را تشکیل می‌دهیم. شرط وجود یک جفت ریشه موهومی، صفر شدن یک ردیف از جدول راث بدون تغییر علامت در ستون اول آن است.

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & k_1+1 \\ s^2 & k_2 & 2k_1 \\ s^1 & \dfrac{(k_1+1)k_2-2k_1}{k_2} & \\ s^0 & 2k_1 & \end{array}$$

پس:

$$(k_1+1)k_2-2k_1=0 \qquad (1)$$

همچنین ریشه‌های معادله کمکی ریشه‌های معادله اصلی‌اند، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} A(s)=k_2s^2+2k_1=0 \\ s=\pm j2 \end{array}\right\} \rightarrow k_1=2k_2 \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} (2k_2+1)k_2-2(2k_2)=0 \rightarrow 2k_2^2-3k_2=0 \rightarrow \begin{cases} k_2=0 & \text{غیر قابل قبول} \\ k_2=\dfrac{3}{2} \rightarrow k_1=3 \end{cases}$$

**روش دوم**: بنابر فرض داده شده، معادله مشخصه دارای عامل $(s^2+4)$ است. لذا بایستی باقیمانده حاصل از تقسیم معادله مشخصه بر $(s^2+4)$ معادل با صفر باشد.

**مثال**: معادله مشخصه سیستمی برابر است با $s^3+6s^2+13s+k=0$. برای آن که سیستم دو ریشه روی محور موهومی داشته باشد، مقدار $k$ و ریشه‌ها کدام است؟ (مکانیک ۷۴)

۱) $s=\pm\sqrt{6}j\;,\;k=60$

۲) $s=\pm\sqrt{13}j\;,\;k=60$

۳) $s=\pm\sqrt{6}j\;,\;k=78$

۴) $s=\pm\sqrt{13}j\;,\;k=78$

✍ **حل**: گزینه «۴»

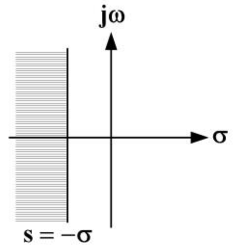
شرط وجود یک جفت ریشه موهومی، صفر شدن یک ردیف از جدول راث بدون تغییر علامت در ستون اول آن است. لذا:

$$6\times13=k \rightarrow \frac{78-k}{6}=0 \rightarrow k=78$$

از طرفی ریشه‌های معادله کمکی، ریشه‌های معادله اصلی‌اند. پس:

$$A(s)=6s^2+k=6s^2+78=0 \rightarrow s=\pm j\sqrt{13}$$

## ۲-٤ تحلیل پایداری نسبی به کمک روش راث




گاهی اوقات (در بسیاری از موارد عملی) اطلاع یافتن از پایداری مطلق توسط روش راث کافی نیست و ما معمولاً به آگاهی از پایداری نسبی آن سیستم نیاز داریم. انتقال محور قائم صفحه $s$ و استفاده از روش راث رهگشای این خواسته است. در این حالت کافیست که محور موهومی را به اندازه $s=-\sigma$ انتقال دهیم. سپس از روش راث برای تعیین تعداد قطب‌های سمت چپ خط $s=-\sigma$ استفاده کنیم.

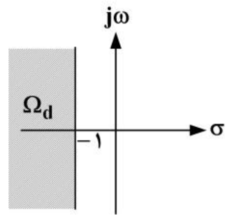
**مثال:** معادله دیفرانسیل سیستمی با ورودی $r$ و خروجی $c$ به صورت زیر است.

$$\dddot{c}+۶\ddot{c}+۱۱\dot{c}+kc=\ddot{r}-r$$

مطلوبست که تمامی قطب‌های این سیستم در ناحیه $\Omega_d$ (مطابق شکل) قرار گیرند. مقادیر $k$ را برای این منظور تعیین کنید. (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۳ ـ هسته‌ای ۷۹)

۱) $k>۰$ ۲) $k\le ۱۲$

۳) $k\ge ۶$ ۴) $۶<k<۱۲$




✍ **حل:** گزینه «۴»

تابع تبدیل سیستم برابر است با $\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{s^{۲}-۱}{s^{۳}+۶s^{۲}+۱۱s+k}$. بنابراین معادله مشخصه سیستم عبارتست از:

$$\Delta(s)=s^{۳}+۶s^{۲}+۱۱s+k$$

با توجه به ناحیه هاشورخورده به منظور تعیین مقادیر $k$ کافیست که $\Delta(s-۱)$ را تشکیل دهیم.

$$\Delta(s-۱)=(s-۱)^{۳}+۶(s-۱)^{۲}+۱۱(s-۱)+k=s^{۳}+۳s^{۲}+۲s+k-۶$$

با توجه به نکته شرایط پایداری عبارتند از:

$$\begin{cases}k-۶>۰ \rightarrow k>۶\\ ۳\times۲>k-۶ \rightarrow k<۱۲\end{cases}\xrightarrow{\cap} ۶<k<۱۲$$

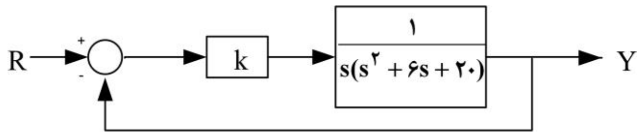
**مثال:** در سیستم کنترلی نشان داده شده در شکل، حداکثر مقدار ضریب بهره $k$ برای این که کلیه قطب‌های مدار بسته $(s_i=\sigma_i+j\omega_i)$ سمت چپ خط $\sigma=-۱$ قرار گیرند، چقدر است؟ (مکانیک ۸۴)

۱) ۱۵

۲) ۴۸

۳) ۱۲۰

۴) ۲۸۸




✍ **حل:** گزینه «۲»

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از $\Delta(s)=s^{۳}+۶s^{۲}+۲۰s+k=۰$. برای برآورده شدن خواسته مسأله کافیست $\Delta(s-۱)=۰$ را تشکیل دهیم.

$$\Delta(s-۱)=(s-۱)^{۳}+۶(s-۱)^{۲}+۲۰(s-۱)+k=۰ \rightarrow \Delta(s-۱)=s^{۳}+۳s^{۲}+۱۱s+k-۱۵$$

$$\begin{cases}k-۱۵>۰ \rightarrow k>۱۵\\ ۳\times۱۱>k-۱۵ \rightarrow k<۴۸\end{cases}\xrightarrow{\cap}۱۵<k<۴۸$$

بنابراین محدوده $k$ برای پایداری برابر است با $۱۵ < k < ۴۸$. لذا حداکثر مقدار $k$ برابر است با ۴۸ .

**مثال:** تابع تبدیل حلقه باز سیستمی به صورت $GH(s) = \frac{k(s-۱)}{(s+۱)^۴}$ است. کوچک‌ترین مقدار $k$ که به ازای آن معادله مشخصه این سیستم دارای ریشه‌ای با جزء حقیقی مثبت باشد، کدام است؟ (هسته‌ای ۷۸)

۱) ۱ ۲) ۳۳/۸۹

۳) ۳۸/۶۲ ۴) معادله مشخصه‌ای با جزء حقیقی مثبت نمی‌تواند داشته باشد.

**حل:** گزینه «۱»

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته برابر است با: $\Delta(s) = (s+۱)^۴ + k(s-۱) = s^۴ + ۴s^۳ + ۶s^۲ + (۴+k)s + ۱ - k$

از جدول راث داریم:

$$\begin{array}{llll} s^۴ & ۱ & ۶ & ۱-k \\ s^۳ & ۴ & ۴+k & ۰ \\ s^۲ & \frac{۲۰-k}{۴} & ۱-k & ۰ \\ s^۱ & \frac{-k^۲+۳۲k+۶۴}{۲۰-k} & & \\ s^۰ & ۱-k & & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} ۲۰-k=۰ \rightarrow k=۲۰ \\ -k^۲+۳۲k+۶۴=۰ \rightarrow k=-۱/۸۹\,,\,۳۳/۸۹ \\ ۱-k=۰ \rightarrow k=۱ \end{cases}$$

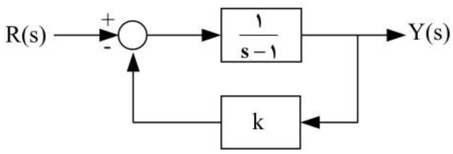
بنابراین کوچک‌ترین $k$ مثبت که بعد از آن یک تغییر علامت در ستون اول جدول راث رخ می‌دهد، عبارتست از $k=۱$.

## ۲-۵ تحلیل پایداری از طریق فیدبک خروجی

همان طور که قبلاً اشاره گردید یکی از فواید استفاده از فیدبک پایدارسازی سیستم‌های ناپایدار است. این تحلیل به دو صورت با توجه به شرایط پایداری برای سیستم‌ها قابل بررسی است که با ذکر دو مثال به این موضوع می‌پردازیم.

### ۲-۵-۱ فیدبک موقعیت

سیستم کنترلی با تابع تبدیل $G(s) = \frac{۱}{s-۱}$ را در نظر بگیرید. با استفاده از فیدبک موقعیت و با انتخاب بهره مناسب $k$ می‌توان سیستم کنترلی مفروض را که ناپایدار است، پایدار کنیم.



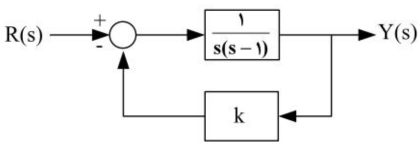

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{۱}{s+k-۱}$$

$$\Delta(s) = s+k-۱$$

بنابراین با انتخاب $k > ۱$ می‌توان سیستم را پایدار کرد.

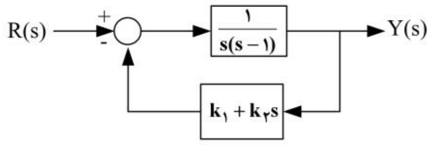
### ۲-۵-۲ فیدبک سرعت

سیستم کنترلی با تابع تبدیل $G(s) = \frac{۱}{s(s-۱)}$ را در نظر بگیرید. این سیستم ناپایدار را نمی‌توان به تنهایی با استفاده از فیدبک موقعیت پایدار کرد.




$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{۱}{s^۲ - s + k}$$

با توجه به معادله مشخصه بدست آمده $\Delta(s)=s^{2}-s+k$ به هیچ عنوان نمی‌توان این سیستم را پایدار کرد. زیرا شرط لازم برای پایداری (هم علامت بودن کلیه ضرائب) وجود ندارد. حال از فیدبک سرعت نیز استفاده می‌کنیم.




$$M(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{s^{2}+(k_{2}-1)s+k_{1}}$$

با انتخاب مناسب بهره‌های $k_1$ و $k_2$ در معادله مشخصه $\Delta(s)=s^{2}+(k_{2}-1)s+k_{1}=0$ می‌توان سیستم مفروض را پایدار کرد.

## ۲-۶ تحلیل سیستم‌ها در حوزه زمان

### مقدمه

چون در اغلب سیستم‌های کنترلی زمان به عنوان متغیر مستقل بکار می‌رود، تحلیل سیستم‌ها در حوزه زمان که به پاسخ زمانی معروف است، امری اجتناب‌ناپذیر می‌باشد. در تحلیل یک سیستم در حوزه زمان عموماً یک ورودی به آن اعمال شده و رفتار آن سیستم در مقابل ورودی بررسی می‌شود. چنانچه هدف سیستم کنترلی این باشد که خروجی تا حد ممکن ورودی را دنبال کند، لازم است که در تمام زمان، ورودی و خروجی با هم مقایسه شوند که این منظور از طریق فیدبک در سیستم کنترلی عملی می‌شود. پاسخ زمانی یک سیستم کنترلی از دو بخش تشکیل شده است.

۱) پاسخ گذرا $(y_{tr}(t))$: این قسمت از پاسخ زمانی ناشی از وجود عناصر ذخیره‌کننده انرژی است و طبق تعریف با گذشت زمان به صفر میل می‌کند. بنابراین:

$$\lim_{t\to\infty} y_{tr}(t)=0$$

۲) پاسخ ماندگار $(y_{ss}(t))$: طبق تعریف، بخشی از پاسخ زمانی سیستم است که پس از بین رفتن پاسخ گذرا باقی می‌ماند. پاسخ ماندگار یک سیستم کنترلی از این جهت حائز اهمیت است که رفتار سیستم را با گذشت زمان نشان می‌دهد. بنابراین طبق قضیه جمع آثار پاسخ زمانی برابر است با:

$$y(t)=y_{tr}(t)+y_{ss}(t)$$

### ۲ـ۶ـ۱ انواع سیگنال‌های ورودی جهت تحلیل در حوزه زمان

همان طور که اشاره شد، برای تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترلی لازم است که معیاری برای مقایسه و ارزشیابی سیستم‌های مختلف در اختیار داشته باشیم، که این مطلب، با اعمال سیگنال‌های ورودی معین تحقق می‌یابد. اگرچه در عمل سیگنال ورودی یک سیستم کنترلی از قبل شناخته شده نیست و اکثر اوقات تغییرات ورودی سیستم نسبت به زمان از تابع خاصی پیروی نمی‌کند، ولی برای طراحی و تحلیل سیستم‌ها لازم است با ورودی‌های معینی تحریک شوند تا بتوانیم با توجه به ورودی‌های معین، خواص و مشخصات آنها را بررسی کنیم. این سیگنال‌های ورودی معین در جدول (۲-۱) آورده شده‌اند که در اصطلاح به آنها سیگنال‌های آزمون می‌گویند.

چنان چه پاسخ حالت ماندگار با ورودی یکی نباشد، گوییم سیستم دارای خطای حالت ماندگار است.

❋ **نکته**: ***یک موج سینوسی را می‌توان در حالت ماندگار فرض کرد، چون رفتار آن در $t=\infty$ تغییر نمی‌کند. با توجه به اهمیت کاربرد سیستم‌های مرتبه اول و مرتبه دوم، ابتدا به بررسی پاسخ زمانی آن‌ها می‌پردازیم.***

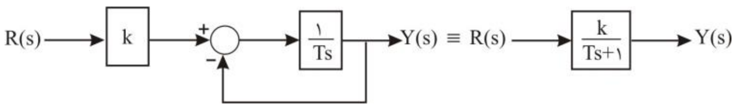
**جدول (۲ـ۱) : سیگنال‌های آزمون**

| سیگنال ورودی | $r(t)$ | $R(s)$ |
|---|---|---|
| ضربه | $r(t)=\begin{cases}1 & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$ | ۱ |
| پله | $r(t)=\begin{cases}R & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$ | $\frac{R}{s}$ |
| شیب (سرعت) | $r(t)=\begin{cases}Rt & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$ | $\frac{R}{s^{2}}$ |

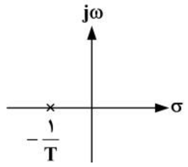
| | | |
|---|---|---|
| $\frac{R}{s^{3}}$ | $r(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}Rt^{2} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$ | سهمی (شتاب) |

### ۲-۶-۲ سیستم‌های مرتبه اول

نمودار بلوکی سیستم مرتبه اول مطابق شکل ۲-۱ را در نظر بگیرید.



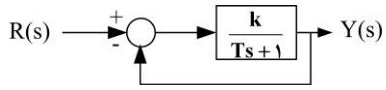

**شکل (۲-۱): نمودار بلوکی سیستم مرتبه اول**




تابع تبدیل سیستم حلقه بسته عبارتست از $\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{k}{Ts+1}$ و لذا

$s=-\frac{1}{T}$ قطب سیستم است. $T$ ثابت زمانی سیستم نامیده می‌شود.

**مثال:** ثابت زمانی سیستم مقابل را بدست آورید. (مولف)




✍ **حل:**

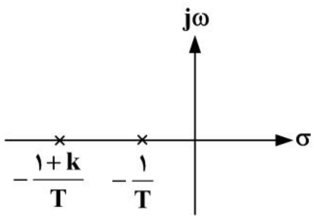
تابع تبدیل حلقه بسته سیستم را بدست می‌آوریم.

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{k}{Ts+1+k}=\frac{\frac{k}{1+k}}{\frac{T}{1+k}s+1}$$

بنابراین ثابت زمانی سیستم برابر است با: $\frac{T}{1+k}$.

**نتیجه:**

فیدبک باعث می‌شود که ثابت زمانی سیستم کوچک‌تر شده و
قطب سیستم از محور موهومی (مرز ناپایداری) دورتر گردد.

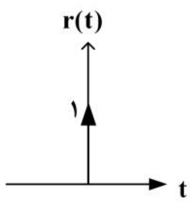


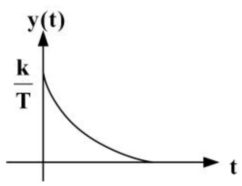

اکنون پاسخ سیستم مرتبه اول را به سیگنال‌های آزمون بررسی می‌کنیم.

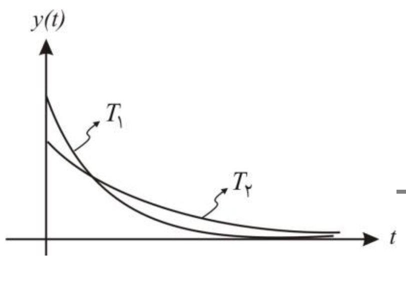
**۱- پاسخ ضربه**

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{k}{Ts+1}\qquad \rightarrow\quad Y(s)=\frac{k}{Ts+1}\ \xrightarrow{L^{-1}}\ y(t)=\frac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$

$$R(s)=L\{\delta(t)\}=1$$



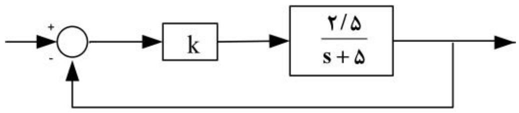




اگر دو سیستم مرتبه اول با ثابت‌های زمانی $T_1$ و $T_2$ در نظر بگیریم که $T_2>T_1$ باشد، در این صورت شکل پاسخ (خروجی) سیستم‌ها به صورت زیر است. مشاهده

می‌شود  که هرچه ثابت زمانی سیستم کوچک‌تر باشد،  پاسخ سریع‌تر است. این بدان معنی است که خروجی سیستم زودتر به مقدار نهایی خود می‌رسد (ردیابی بهتر است).

**مثال:** یک موتور $DC$ که با تابع تبدیل $\frac{۲/۵}{s+۵}$ توصیف می‌شود، پاسخ زمانی کند دارد. برای آن که پاسخ سیستم را ۵ برابر سریع‌تر کنیم از مدار پس‌خور مقابل استفاده می‌کنیم. مقدار $k$ چقدر باید باشد؟ (هسته‌ای ۷۸)



۱) ۲

۲) ۴

۳) ۸

۴) نمی‌توان ثابت زمانی سیستم را ۵ برابر سریع‌تر کرد.

✍ **حل:** گزینه «۳»

ثابت زمانی موتور در حالت بدون فیدبک برابر است با:

$$\frac{۲/۵}{s+۵}=\frac{۰/۵}{\frac{۱}{۵}s+۱} \quad \rightarrow \quad T_۱=\frac{۱}{۵}$$

ثابت زمانی در حالت با فیدبک برابر است با:

$$T_۲=\frac{۱}{۵}T_۱=\frac{۱}{۲۵} \qquad (۱)$$

حال تابع تبدیل سیستم حلقه بسته را بدست می‌آوریم.

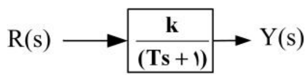
$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{۲/۵k}{s+۵+۲/۵k}=\frac{\frac{۲/۵k}{۲/۵k+۵}}{\frac{۱}{۵+۲/۵k}s+۱} \quad \rightarrow \quad T_۲=\frac{۱}{۵+۲/۵k} \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{۱}{۵+۲/۵k}=\frac{۱}{۲۵} \quad \rightarrow \quad k=۸$$

### ۲- پاسخ پله

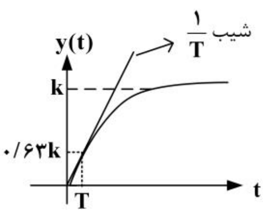
$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{k}{Ts+۱}, \quad R(s)=L\{u(t)\}=\frac{۱}{s} \quad \rightarrow \quad Y(s)=\frac{k}{s(Ts+۱)} \xrightarrow{L^{-۱}} y(t)=k(۱-e^{-\frac{t}{T}})$$



ثابت زمانی در این حالت به روش‌های مختلفی محاسبه می‌شود که فقط به دو مورد آن اشاره می‌کنیم.

۱) محاسبه ثابت زمانی بر اساس ۶۳٪ مقدار نهایی.

۲) محاسبه ثابت زمانی بر اساس شیب خط مماس در لحظه $t=۰$ .




$$\frac{dy(t)}{dt}=\frac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}} \quad \rightarrow \quad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=۰}=\frac{k}{T}$$

هرچه شیب بزرگ‌تر باشد، تبعیت خروجی از ورودی سریع‌تر خواهد بود. بنابراین هرچه ثابت زمانی کوچک‌تر باشد، مطلوب‌تر است. با در نظر گرفتن پاسخ زمانی سیستم، مشاهده می‌شود که در حالت ماندگار، خروجی از ورودی با خطای $(۱-k)$ تبعیت می‌کند. این واقعیت با محاسبه پاسخ گذرا و پاسخ حالت ماندگار سیستم به راحتی قابل اثبات است.

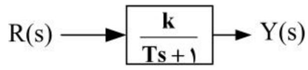
$$y(t)=k-ke^{-\frac{t}{T}} \rightarrow \quad y_{ss}(t)=k \quad , \quad y_{tr}(t)=ke^{-\frac{t}{T}}$$

سیگنال خطا، با استفاده از قضیه مقدار نهایی نیز قابل محاسبه است.

$$e(t)=r(t)-y(t) \quad \rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} s(R(s)-Y(s))=\lim_{s\to 0} s.\frac{(Ts+1-k)}{s(Ts+1)}=1-k$$

### ۳- پاسخ شیب

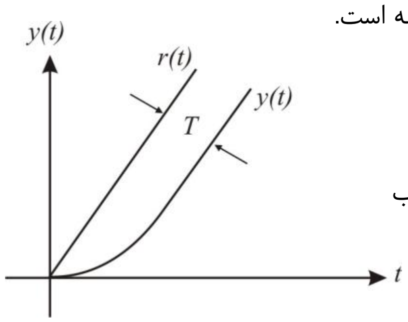
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{Y(s)}{R(s)}=\dfrac{k}{Ts+1}\\ R(s)=L\{tu(t)\}=\dfrac{1}{s^2}\end{array}\right\}\rightarrow Y(s)=\frac{k}{s^2(Ts+1)} \xrightarrow{L^{-1}} y(t)=k(t-T+Te^{-\frac{t}{T}})$$




$$\rightarrow \quad y_{ss}(t)=k(t-T) \quad , \quad y_{tr}(t)=kTe^{-\frac{t}{T}}$$

با در نظر گرفتن پاسخ زمانی سیستم و $k=1$ مشاهده می‌شود که در حالت ماندگار، خروجی با خطای $T$ از ورودی تبعیت می‌کند.

در این حالت (فرض $k=1$) سیگنال خطا با استفاده از قضیه مقدار نهایی نیز قابل محاسبه است.



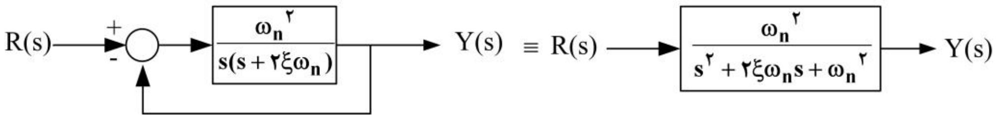

$$e(t)=r(t)-y(t)$$

$$\rightarrow \lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{T}{s(Ts+1)}=T$$

بنابراین هرچه ثابت زمانی $T$ کوچک‌تر باشد، خطای حالت ماندگار برای ورودی‌های شیب کوچک‌تر خواهد بود.

### ۲-۶-۳ سیستم‌های مرتبه دو

شکل ۲-۲، نمودار بلوکی یک سیستم مرتبه دوم نوعی را نشان می‌دهد.




**شکل (۲-۲): نمودار بلوکی سیستم مرتبه دوم**

$\xi$ و $\omega_n$ ثابت های حقیقی‌اند. از سیستم‌های مرتبه دوم، برای تحلیل و طراحی سیستم‌های با مرتبه بالاتر به واسطه سادگی استفاده می‌شود. تابع تبدیل حلقه باز سیستم برابر است با $G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$ و تابع تبدیل حلقه بسته سیستم برابر است با $\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$. همانطور که قبلاً بیان شد، رفتار یک سیستم مستقیماً از قطب‌های آن تأثیر می‌پذیرد. بنابراین برای تعیین رفتار یک سیستم مرتبه دوم نوعی، بایستی قطب‌های آن را که از طریق معادله مشخصه سیستم حلقه بسته بدست می‌آیند، بررسی کنیم. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته برابر است با:

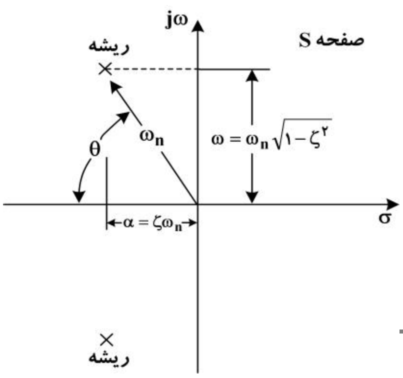
$$\Delta(s)=s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2=0$$

قطب‌ها (ریشه‌های معادله مشخصه) در حالت کلی عبارتند از:

$$s_{1,2}=-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=-\sigma \pm j\omega_d$$

که در آن $\xi=\cos\theta$ نسبت میرایی، $\sigma$ ضریب میرایی، $\omega_n$ فرکانس نامیرای طبیعی و $\omega_d$ فرکانس میرا یا فرکانس مشروط نامیده می‌شود. شکل زیر روابط میان ریشه‌های معادله مشخصه سیستم مرتبه دوم نوعی را با پارامترهای سیستم نمایش می‌دهد.

رفتار سیستم بر اساس تغییرات $\xi$ به صورت زیر طبقه‌بندی می‌شود.




۱- فرومیرا $(-\xi\omega_n<0)$ $\quad s_{1,2}=-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad 0<\xi<1$

۲- میرای بحرانی $\quad s_{1,2}=-\omega_n \quad \xi=1$

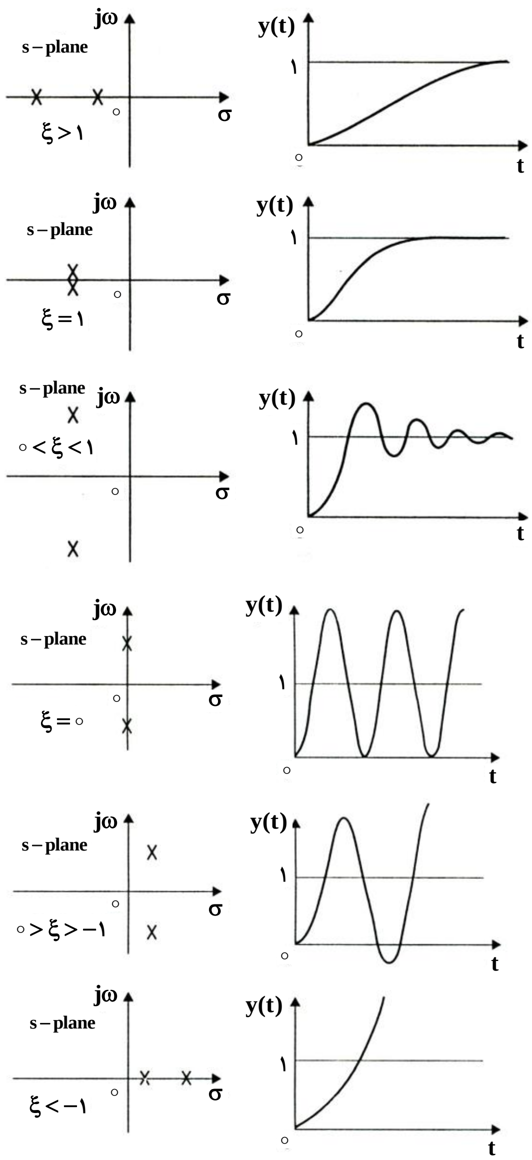
۳- فرامیرا (میرای شدید) $\quad s_{1,2}=-\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1} \quad \xi>1$

۴- نامیرا (نوسانی) $\quad s_{1,2}=\pm j\omega_n \quad \xi=0$

۵- میرای منفی $(-\xi\omega_n > 0)$ $\quad s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\,\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \qquad \xi < 0$

❋ **نکته**: ***ثابت زمانی سیستم متناسب با عکس ضریب میرایی است.*** $T \approx \dfrac{1}{\sigma}$

برای درک بهتر نقش قطب‌های سیستم در تعیین رفتار آن، پاسخ سیستم به ورودی پله واحد در حالت‌های مختلف را در شکل ۳-۲ آورده‌ایم.




**شکل (۲-۳): پاسخ واحد سیستم مرتبه دوم براساس تغییرات نسبت میرایی**

همانطور که از شکل فوق مشاهده می‌شود:

۱- سیستم برای $\xi < 0$، ناپایدار است.

۲- سیستم برای $\xi = 0$، پایدار مرزی است.

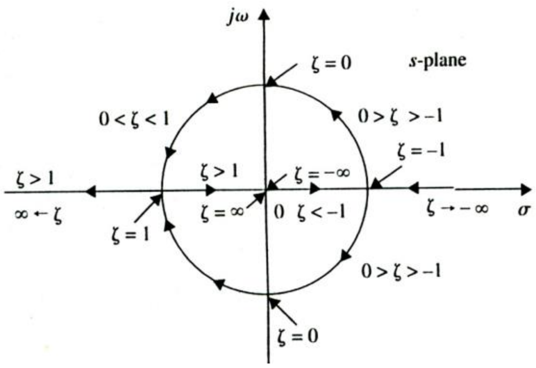
۳- سیستم برای $\xi > 0$، پایدار است.

۴- رفتار سیستم برای $\xi > 1$، همانند یک سیستم مرتبه اول می‌ماند، به طوری که هیچ وقت از مقدار نهایی‌اش تجاوز نکرده و با کندی به سمت آن میل می‌کند.

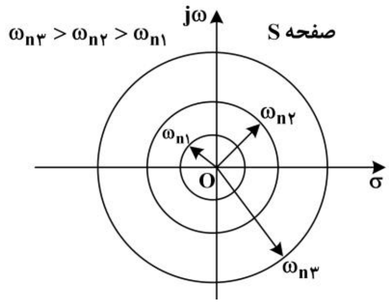
۵- رفتار سیستم برای $\xi = 1$، سریع‌ترین پاسخ بدون فراجهش است.

## مکان‌های هندسی

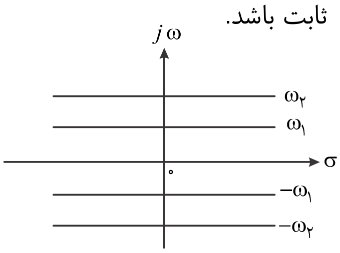
۱- مکان ریشه‌های معادله مشخصه سیستم مرتبه نوعی با فرض $\omega_n$ ثابت و تغییرات $\xi$ از $-\infty$ تا $+\infty$ به صورت زیر است.



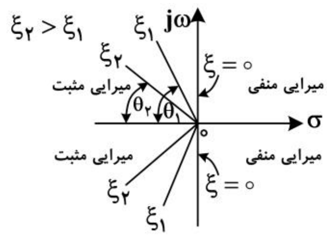

آن چه قابل توجه است، متناظر بودن نیمه سمت چپ صفحه $s$ (ناحیه پایداری سیستم) با نسبت میرایی مثبت ($\xi > ۰$) و نیمه سمت راست صفحه $s$ (ناحیه ناپایداری سیستم) با نسبت میرایی منفی ($\xi < ۰$) می‌باشد. بنابراین مکان هندسی ریشه‌ها وقتی فرکانس نامیرای طبیعی $\omega_n$ ثابت باشد به شکل زیر است.




۲- مکان هندسی ریشه‌ها وقتی فرکانس میرا $\omega_d$ ثابت باشد.




۳- مکان هندسی ریشه‌ها وقتی نسبت میرایی $\xi$ ثابت باشد.




۴- مکان هندسی ریشه‌ها وقتی ضریب میرایی $\sigma$ ثابت باشد.