میان ترم ← ۱۴۰۱/۲/۶

جلسه نهم

مثال یادآوری) ثابت کنید مجموعه P_k که شامل تمام چندجمله‌ای های است که به فرم زیر می‌باشد، بر روی میدان R تشکیل یک فضای برداری می‌دهد.

$$p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_k x^k \qquad (p_0, \dots, p_k \in R, \; k \in N)$$

شرط ۱) ۲ چندجمله‌ای متعلق به P_k در نظر می‌گیریم:

$$p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_k x^k$$

$$q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_k x^k$$

$$p(x) + q(x) = \underbrace{(p_0 + q_0)}_{\bar{p}_0} + \underbrace{(p_1 + q_1)}_{\bar{p}_1} x + \cdots + \underbrace{(p_k + q_k)}_{\bar{p}_k} x^k \quad \checkmark$$

شرط ۲)

$$c\,p(x) = \underbrace{c p_0}_{\bar{p}_0} + \underbrace{c p_1}_{\bar{p}_1} x + \cdots + \underbrace{c p_k}_{\bar{p}_k} x^k \quad \checkmark$$

(به فرمت $p(x)$ درآمد)

شرط ۳)

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)x + \cdots + (p_k + q_k)x^k \\ &= (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)x + \cdots + (q_k + p_k)x^k \\ &= (q_0 + q_1 x + \cdots + q_k x^k) + (p_0 + \cdots + p_k x^k) \\ &= q(x) + p(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

شرط ۴) $p(x) + \big(q(x) + r(x)\big) = \big(p(x) + q(x)\big) + r(x)$

$$r(x) \to r_0 + r_1 x + \dots + r_k x^k$$

واضح است ✓

شرط ۵) $p(x) + 0 = 0 + p(x)$

$$0 \to 0 = 0 + 0x + \dots + 0x^k$$

$$\Rightarrow p(x) + 0 = (p_0 + 0) + (p_1 + 0)x + \dots + (p_k + 0)x^k$$

$$= (0 + p_0) + (0 + p_1)x + \dots + (0 + p_k)x^k$$

$$= 0 + p(x) \quad \checkmark$$

شرط ۶) $p(x) + \big(-p(x)\big) = \big(p_0 + (-p_0)\big) + \big(p_1 + (-p_1)\big)x + \dots$

$$+ \big(p_k + (-p_k)\big)x^k = 0 + 0x + \dots + 0x^k$$

$$= (-p_0 + p_0) + (-p_1 + p_1)x + \dots + (-p_k + p_k)x^k$$

$$= -(p_0 + \dots + p_k x^k) + (p_0 + \dots + p_k x^k)$$

$$= -p(x) + p(x) \quad \checkmark$$

شرط ۷)

الف)

$$(a+b)p(x) = (a+b)p_0 + (a+b)p_1 x + \dots$$

$$+ (a+b)p_k x^k = (ap_0 + ap_1 x + \dots + ap_k x^k)$$

$$+ (bp_0 + bp_1 x + \dots + bp_k x^k)$$

$$= ap(x) + bp(x) \quad \checkmark$$

ب)

$$a(p(x) + q(x)) = a((p_0+q_0) + \dots + (p_k+q_k)x^k)$$

$$= (ap_0 + aq_0) + \dots + (ap_k + aq_k)x^k$$

$$= (ap_0 + \dots + ap_k x^k) + (aq_0 + \dots + aq_k x^k)$$

$$= ap(x) + aq(x) \quad \checkmark$$

(۱ بم

$$(ab)p(x) = (ab)p_0 + \cdots + (ab)p_k x^k$$

$$= a(bp_0) + \cdots + a(bp_k)x^k$$

$$= a\left(bp_0 + \cdots + bp_k x^k\right)$$

$$= a\left(b\,p(x)\right) \quad \checkmark$$

(۹ بم

$$1\,p(x) = 1p_0 + 1p_1 x + \cdots + 1p_k x^k$$

$$= p_0 + p_1 x + \cdots + p_k x^k$$

$$= p(x) \quad \checkmark$$

اسپن : (span)

اگر $S=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعه‌ای از بردارها در فضای برداری V و

W مجموعه کلیه ترکیب‌های خطی از بردارهای $v_1, \dots, v_n$ باشد،

در این صورت W یک اسپن از بردارهای $v_1, \dots, v_n$ است.

$$W = sp(S) \quad \text{یا} \quad W = sp\{v_1, \dots, v_n\}$$

$$W = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n : c_1, \dots, c_n \in R\}$$

مثال) آیا بردارهای زیر فضای برداری R^3 را اسپن می‌کنند؟!

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

نخست ترکیب خطی را تشکیل می‌دهیم:

$$au + bv + cw = a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+b \\ 2a+b+2c \\ a+b-c \end{bmatrix} = r_{3\times 1} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{فرم ماتریسی}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A_{3\times 3}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$m = n \longleftarrow$ یادآوری جلسه ۲

if $|A| \neq 0 \longrightarrow$ جواب منحصر به فرد دارد

$$|A| = 1(-1-2) - 1(-2-2) = 1 \neq 0 \checkmark$$

لذا برای هر بردار دلخواه r، می‌توان یک جواب پیدا کرد.

پس بردارهای u و v و w فضای برداری R^3 را اسپن می‌کنند.

(مثال
$$u=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\ v=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix},\ w=\begin{bmatrix}-3\\8\\-5\end{bmatrix}$$

$$au+bv+cw=a\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-3\\8\\-5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a+3b-3c\\2a-b+8c\\-a+b-5c\end{bmatrix}=r_{3\times1}$$

$$\xrightarrow{\text{فرم ماتریسی}}\ \underbrace{\begin{bmatrix}1&3&-3\\2&-1&8\\-1&1&-5\end{bmatrix}}_{3\times3}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$$

$$|A|=?\ \longrightarrow\ |A|=0$$

$|A|=0$

بیشمار جواب

جواب ندارد X

چون $|A|=0$ می باشد لذا این دستگاه یک جواب منحصر به فرد ندارد

لذا بردارهایی در فضای برداری R^3 وجود دارند که نمی توان آن ها را بصورت

یک ترکیب خطی از u و v و w نوشت. پس بردارهای مذکور فضای برداری R^3 را اسپن نمی‌کنند.

استقلال خطی بردارها:

بردارهای u_1 و ... و u_n را مستقل خطی گویند اگر معادله‌ی

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n = 0$$

فقط به ازای $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ برقرار باشند. درغیراین صورت u_1 تا u_n را وابسته خطی گویند.

نکته) شرط لازم وکافی برای مستقل خطی بودن بردارهای u_1 و ... و u_n که هریک دارای n تا عنصر هستند، آن است که دترمینال ماتریس ضرایب $n \times n$ مخالف صفر باشد.

مثال) استقلال خطی ؟!

$$u_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2c_1 - c_2 + 4c_3 \\ c_1 - 3c_2 - 2c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2c_1 - c_2 + 4c_3 = 0 \\ c_1 - 3c_2 - 2c_3 = 0 \xrightarrow{\times 2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{-2c_1} - c_2 + \cancel{4c_3} = 0 \\ \cancel{2c_1} - 6c_2 - \cancel{4c_3} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_2 = 0} \longrightarrow \boxed{c_1 = 2c_3}$$

لذا بردارهای u_1، u_2، u_3 وابسته خطی هستند.

مثال) استقلال خطی ؟!

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 - c_2 + c_3 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2c_1 \cancel{-2c_2} \cancel{+2c_3} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} -2c_1 + 3c_2 + c_3 = 0 \\ 3c_1 + 4c_2 - 2c_3 = 0 \end{array}\right| \xrightarrow{c_1 = 0}$$

$$-4c_1 + \cancel{2c_2} - \cancel{2c_3} = 0 \Rightarrow -2c_1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

$$3c_2 + c_3 = 0 \longrightarrow 6c_2 + \cancel{2c_3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4c_2 - \cancel{2c_3} = 0 \longrightarrow 10c_2 = 0 \longrightarrow \boxed{c_2 = 0}$$

✓ مستقل خطی $\longleftarrow \boxed{c_3 = 0}$

مثال) به ازای چه مقدار از λ، بردارهای زیر مستقل خطی هستند؟

$$u = \begin{bmatrix} -1 \\ \lambda \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad v = \begin{bmatrix} \lambda \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad w = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

چون ۳ بردار داریم که هر یک ۳ عنصر دارد

$\downarrow$

(نکته ی اسلایدهای قبل)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$|A| = -1(-\lambda - 1) - \lambda(\lambda^2 - 1) - 1(-\lambda - 1)$$

$$= 2(\lambda + 1) - \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$= -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

$\lambda \neq 2$ و $\lambda \neq -1$ ⟵ مستقل خطی ✓

پایه

در یک فضای برداری مانند V، مجموعه بردارهای $u_1, \dots, u_n$ تشکیل یک پایه می دهند اگر ۲ شرط زیر را داشته باشند:

۱- فضای برداری را اسپن کنند $V = sp\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

۲- بردارهای $u_1, \dots, u_n$ مستقل خطی باشند.

مثال) آیا بردارهای زیر برای فضای برداری R^3 تشکیل یک پایه می دهند؟

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad و \quad u_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

شرط ۱) اسپن: نوشتن ترکیب خطی و معادل قرار دادن با r.

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = r$$

$$c_1\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ماتریسی}}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&3\\-1&1&0\\1&2&-1\end{bmatrix}}_{A_{3\times 3}}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$$

$m=n \longrightarrow |A|\neq 0$ شرط جواب

$$|A| = 1(-1)+3(-2-1) = -10 \neq 0$$

لذا u_1، u_2 و u_3 فضای برداری R^3 را اسپن می‌کنند.

شرط ۲) $c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3=0$

$\xrightarrow{\text{if}}$ $c_1=c_2=c_3=0$ ✓

شرط استقلال خطی $\longrightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow |A|=-10\neq 0$

u_1، u_2، u_3 مستقل خطی هستند $\longrightarrow$ $\boxed{\text{تشکیل پایه می‌دهند}}$

تمرین) آیا چندجمله ای های زیر برای فضای برداری P_k تشکیل یک پایه می دهند؟

$$P_1(x) = x - 3$$

$$P_2(x) = x^2 + 2x$$

$$P_3(x) = x^2 + 1$$