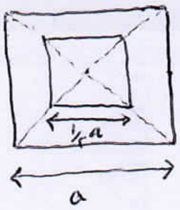
حل تمرین های سری سوم درس آمار و احتمال مهندسی

۱) با توجه به شکل زیر مربع داخلی مکان هندسی نقاطی از داخل دایره مربع به ضلع a است که فاصله آن از مرکز و نزدیکترین ضلع یکسان است:



اگر نقطه با احتمال یکسان از داخل مربع بزرگ انتخاب شود، احتمال آنکه داخل مربع کوچک قرار گیرد یا فاصله آن تا مرکز کمتر از فاصله آن تا نزدیکترین ضلع می شود و طبیعی است که کمتر از فاصله آن تا هر یک از اضلاع دیگر هم خواهد بود:

$$Pr(S \in \text{مربع کوچک}) = \frac{(\frac{1}{2}a)^2}{a^2} = \frac{1}{4}$$

۲) رویداد سالم بودن قطعه E و رویداد تولید کارخانه i بودن A_i نامگذاری می کنیم:

$$Pr(A_1|E) = \frac{Pr(E|A_1)Pr(A_1)}{Pr(E|A_1)Pr(A_1)+Pr(E|A_2)Pr(A_2)} = \frac{\frac{45}{60}\times\frac{60}{100}}{\frac{45}{60}\times\frac{60}{100}+\frac{35}{40}\times\frac{40}{100}} = \frac{9}{16}$$

۳) X مقادیر صفر تا چهار را اختیار کند و داریم:

$$Pr(X=n) = f_X(n) = \binom{4}{n}(0.6)^n(0.4)^{4-n} \qquad n=0,1,2,\dots,4$$

در جدول زیر تابع وزن احتمال و توزیع تجمعی آورده شده است:

n	0	1	2	3	4
$f_X(n)$	0.0256	0.1536	0.3456	0.3456	0.1296
$F_X(n)$	0.0256	0.1792	0.5248	0.8704	1

میانه اولین مقداری از متغیر تصادفی است که $F_X(n) > \frac{1}{2}$ شود و برای این مسئله $n=2$ میانه است

زیرا $f_X(1)=0.1792<\frac{1}{2}$ و $f_X(2)=0.5248>\frac{1}{2}$

میانگین و واریانس X را بصورت زیر بدست می آوریم:

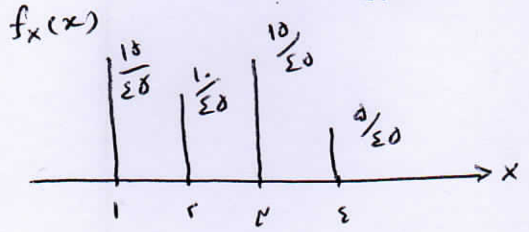
$$E(X)=\sum_{n=0}^{4} n f_X(n) = 1\times0.1536+2\times0.3456+3\times0.3456+4\times0.1296 = \boxed{2.4}$$

$$E(X^2)=\sum_{n=0}^{4} n^2 f_X(n) = 1\times0.1536+4\times0.3456+9\times0.3456+16\times0.1296 = \boxed{6.719}$$

$$VAR(X) = E(X^2)-E^2(X) = 6.719-(2.4)^2 = \boxed{0.959}$$

۴) اگر بین یک ساعت تا سه ربع ساعت مانده به شروع کار از خانه بیرون آید گزینه ۱ انتخاب می‌شود که احتمال آن $Pr(x=1)=\frac{15}{45}$ است زیرا فاصله زمانی این محدوده ۱۵ دقیقه و کل فضای نمونه بیرون آمدن ۴۵ دقیقه است. اگر بین سه ربع ساعت تا نیم ساعت مانده به شروع کار از خانه بیرون بیاید گزینه ۳ را انتخاب می‌کند که احتمال آن $Pr(x=3)=\frac{15}{45}$ است. اگر بین نیم ساعت تا ۲۰ دقیقه مانده به شروع کار بیرون بیاید گزینه ۲ انتخاب می‌شود $Pr(x=2)=\frac{10}{45}$ و اگر بین ۲۰ دقیقه تا ۱۵ دقیقه مانده به شروع کار از منزل خارج شود گزینه ۴ را باید انتخاب کند که احتمال آن $Pr(x=4)=\frac{5}{45}$ است.

الف - تابع وزن احتمال X



ب - تابع هزینه در جدول زیر آمده است:

x	1	2	3	4
g(x) ریال	300	1000	500	5000

$$E\left[g(x)\right]=\sum_{x=1}^{4}f(x)g(x)=\frac{15}{45}\times 300+\frac{10}{45}\times 1000+\frac{15}{45}\times 500+\frac{5}{45}\times 5000=\frac{9400}{9}=1044$$ ریال

۵) x_i شماره گوی iام خارج شده ، $y=\min_{i=1,\dots,3}\{x_i\}$

از این واقعیت کمک می‌گیریم که اگر y حداقل x_1 ، x_2 ، x_3 باشد از هر سه آنها کمتر یا مساوی خواهد بود:

$$Pr\{Y>y\}=Pr\{\min(x_1,x_2,x_3)>y\}=Pr\{x_1>y\}\,Pr\{x_2>y\}\,Pr(x_3>y)$$

بنا بر مستقل بودن x_1 ، x_2 و x_3

$$1-F_Y(y)=\left(1-F_X(y)\right)^3 \quad \text{که} \quad F_X(x)=Pr\{X\le x\}=\frac{x}{20}$$

$y=1,2,\dots,20$

$$\Rightarrow F_Y(y)=1-\left(1-\frac{y}{20}\right)^3=\left(1-1+\frac{y}{20}\right)\left(1+1-\frac{y}{20}+\left(1-\frac{y}{20}\right)^2\right)=\frac{y}{20}\left(3-\frac{3y}{20}+\frac{y^2}{400}\right)$$

$$f_Y(y)=F_Y(y)-F_Y(y-1)=\frac{y}{20}\left(3-\frac{3y}{20}+\frac{y^2}{400}\right)-\frac{(y-1)}{20}\left(3-\frac{3(y-1)}{20}+\frac{(y-1)^2}{400}\right)$$

$$f_Y(y)=\frac{3}{20}-\frac{3}{400}(2y-1)+\frac{3y^2-3y+1}{8000}=\frac{1261}{8000}-\frac{123}{8000}y+\frac{3}{8000}y^2 \qquad y=1,2,\dots,20$$

۶) الف) $\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\,dx=1 \Rightarrow K\int_{-K}^{K}x^2\,dx=1 \Rightarrow \frac{2}{3}K^4=1 \rightarrow K^4=\frac{3}{2} \quad K=\sqrt[4]{3/2}$

۶ - ب)

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\,d\alpha=\int_{-k}^{x} k\alpha^2\,d\alpha = k\left[\tfrac{1}{3}\alpha^3\right]_{-k}^{x}=\frac{k}{3}(x^3+k^3)\qquad -k<x<k$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<-k\\ \frac{1}{3}\sqrt[4]{3/2}\,x^3+\frac{1}{2} & -k<x<k\\ 1 & x>k\end{cases}$$

یا

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & k<-1/1067\\ 0/5+0/3689x^3 & |k|<1/1067\\ 1 & k>1/1067\end{cases}$$

ج)

$$Pr(|x|\le 1)=Pr(-1\le X\le 1)=F_X(1)-F_X(-1^-)$$

چون F_X پیوسته است داریم $F_X(-1^-)=F_X(-1)$ ⇐

$$Pr(|x|\le 1)=0/5+0/3689-(0/5-0/3689)=\boxed{0/7378}$$

$$Pr([x]=-1)=Pr(-1\le x<0)=F_X(0^-)-F_X(-1^-)=F_X(0)-F_X(-1)$$

$$=0/5-(0/5-0/3689)=\boxed{0/3689}$$

۷ - فرد خطرناک D ، فرد عادی U ، فرد محتاط C

$Pr(D)=0/2$ $\quad Pr(U)=0/5$ $\quad Pr(C)=0/3$

رویداد تصادف A

$Pr(A|D)=0/3$ $\quad Pr(A|U)=0/15$ $\quad Pr(A|C)=0/05$

الف - $Pr(\bar{A})=?$

$$Pr(A)=Pr(A|D)Pr(D)+Pr(A|U)Pr(U)+Pr(A|C)Pr(C)$$

$$Pr(A)=0/3\times 0/2+0/15\times 0/5+0/05\times 0/3=0/06+0/075+0/015=\boxed{0/15}$$

$$Pr(\bar{A})=1-Pr(A)=\boxed{0/85}$$

ب - $Pr(U|\bar{A})=?$

$$Pr(U|\bar{A})=\frac{Pr(\bar{A}|U)\,Pr(U)}{Pr(\bar{A})}=\frac{[1-Pr(A|U)]\,Pr(U)}{Pr(\bar{A})}$$

$$Pr(U|\bar{A})=\frac{[1-0/15]\times 0/5}{0/85}=\boxed{0/5}$$

۸ -

$$Pr\{X\le x\}=\frac{S_{\text{هاشور}}}{S_{\text{مربع}}}$$

$$S_{\text{هاشور}}=S_{\text{مربع}}-2S_{\text{مثلث}}$$

$$S_{\text{هاشور}}=4-2\times\frac{1}{2}(2-\sqrt{2}x)^2=4\sqrt{2}x-2x^2$$

$0\le x\le\sqrt{2}$

$$F_X(x)=\frac{4\sqrt{2}x-2x^2}{4}=\sqrt{2}x-\frac{1}{2}x^2\qquad 0\le x\le\sqrt{2}$$

$$f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}=\sqrt{2}-x\qquad 0\le x\le\sqrt{2}$$

ادامه حل ۸)

$$Pr\{X<1\} = F_X(1^-) = \sqrt{2}-\frac{1}{2} = \boxed{0.9142}$$

$$Pr\{0.5<X<1\} = F_X(1^-) - F_X(0.5) = 0.9142 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{8}\right) = \boxed{0.3321}$$

۹) F توپ در چهارچوب - L شوت کردن به چپ - R شوت کردن به راست - C شوت کردن به وسط

K گرفتن توپ توسط دروازه‌بان - G گل شدن توپ

بر طبق فرضیات مسأله داریم:

$$Pr(K\mid L,F)=0.4 \qquad Pr(\bar F\mid R)=0.1$$

$$Pr(K\mid R,F)=0.2 \qquad Pr(\bar F\mid L)=0.05$$

$$Pr(K\mid C,F)=0.1 \qquad Pr(\bar F\mid C)=0.15$$

الف - احتمال گل شدن در سه حالت شوت به چپ، راست و مرکز را محاسبه می‌کنیم، توجه داریم که برای گل شدن باید توپ در چهارچوب بوده و دروازه‌بان آن را مهار نکند:

$$Pr(G\mid L) = Pr(\bar K\mid F,L)\,Pr(F\mid L) = (1-0.4)(1-0.05) = 0.57$$

$$Pr(G\mid R) = Pr(\bar K\mid F,R)\,Pr(F\mid R) = (1-0.2)(1-0.1) = 0.72$$

$$Pr(G\mid C) = Pr(\bar K\mid F,C)\,Pr(F\mid C) = (1-0.1)(1-0.15) = 0.765$$

چون احتمال گل شدن در شوت به وسط بیشتر است، توصیه مربی تیم سیاه به بازیکنش این است که به وسط دروازه شوت کند.

ب - باید به سمتی شیرجه بزند که احتمال گل نشدن توپ بیشینه مقدار شود، توجه داریم که اگر توپ در چهارچوب نباشد یا در چهارچوب باشد و دروازه‌بان آن را مهار کند، توپ گل نمی‌شود.

$$Pr(\bar G\mid L) = Pr(\bar F\mid L) + Pr(F\mid L)\,Pr(K\mid F,L) = 0.05+0.95\times0.4 = 0.43$$

$$Pr(\bar G\mid R) = Pr(\bar F\mid R) + Pr(F\mid R)\,Pr(K\mid F,R) = 0.1+0.9\times0.2 = 0.28$$

$$Pr(\bar G\mid C) = Pr(\bar F\mid C) + Pr(F\mid C)\,Pr(K\mid F,C) = 0.15+0.85\times0.1 = 0.235$$

چون احتمال گل نشدن وقتی به سمت چپ شیرجه می‌رود بیشتر است مربی تیم سفید به دروازه‌بان توصیه می‌کند به سمت چپ شیرجه برود.

ج -

$$Pr(G) = Pr(G\mid L)Pr(L) + Pr(G\mid R)Pr(R) + Pr(G\mid C)Pr(C)$$

$$= \frac{1}{3}(0.72+0.57+0.765) = 0.685$$