یا لطیف

تمرین سری 5 سیگنال سیستم

① سیگنال متناوب پیوسته در زمان $x(t)$ حقیقی و دارای دوره تناوب پایه $T = 8$ است. ضرایب غیرصفر سری فوریه عبارت است از:

-) $a_1 = a_{-1}\ 2$

-) $a_3 = a^*_{-3} = 4j$

$x(t)$ را به صورت روبه رو بیان کنید؟ $x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)$

$$\text{if } T = 8 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_1 e^{j\omega_0 t} + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_3 e^{j3\omega_0 t} + a_{-3} e^{-j3\omega_0 t}$$

$$= 2e^{j\frac{\pi}{4}t} + 2e^{-j\frac{\pi}{4}t} + 4je^{j\frac{3\pi}{4}t} + 4je^{-j\frac{3\pi}{4}t}$$

یادآوری: $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right)$

$\sin\theta = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$

$\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow x(t) = 4\cos(\frac{\pi}{4}t) + 8\overbrace{j^2}^{=-1}\sin(\frac{3\pi}{4}t)$$

$$\Rightarrow x(t) = 4\cos(\frac{\pi}{4}t) - 8\sin(\frac{3\pi}{4}t)$$

$$\Rightarrow x(t) = 4\cos((\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})t) - 8\sin(\frac{3\pi}{4}t)$$

$$\Rightarrow x(t) = 4\sin(\frac{+3\pi}{4}t) - 8\sin(\frac{3\pi}{4}t) = -4\sin(\frac{3\pi}{4}t)$$

---

② سیگنال متناوب پیوسته در زمان $x(t)$ حقیقی و دارای دوره تناوب پایه $T = 8$ است. ضرایب غیرصفر سری فوریه عبارت است از: $a_5 = a_{-5} = 2$ ، $a_1 = a^*_{-1} = j$ ، $x(t)$ را به صورت زیر بیان کنید؟

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)$$

$$\text{if } T = 8 \Rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{4}$$

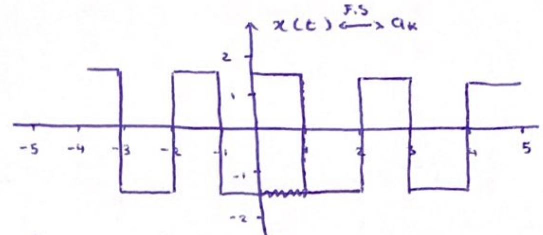
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_1 e^{j\omega_0 t} + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_5 e^{j5\omega_0 t} + a_{-5} e^{-j5\omega_0 t} = je^{j\frac{\pi}{4}t} + je^{-j\frac{\pi}{4}t} + 2e^{j\frac{5\pi}{4}t} + 2e^{-j\frac{5\pi}{4}t}$$

$$\Rightarrow x(t) = -2\sin(\frac{\pi}{4}t) + 4\cos(\frac{5\pi}{4}t) = -2\sin(\frac{\pi}{4}t) + 4\sin((\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{2})t)$$

$$\Rightarrow x(t) = -2\sin(\frac{\pi}{4}t) + 4\sin(\frac{7\pi}{4}t)$$

③ ضرایب a_k سیگنال متناوب زیر را بیابید؟

$$x(t) = \begin{cases} \frac{3}{2} & ; \ 0 \le t \le 1 \\ -\frac{3}{2} & ; \ 1 \le t \le 2 \end{cases}$$



$T = 2$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

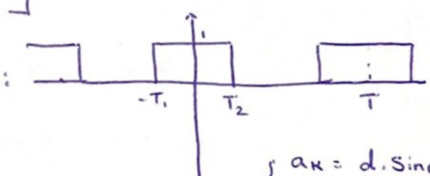
روش اول: استفاده از رابطه آنالیز : $a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$

$T = 2 \ ; \ 0 \le t < 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \left(\frac{3}{2}\right) e^{-jk\pi t} dt + \int_1^2 \left(\frac{-3}{2}\right) e^{-jk\pi t} dt\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\int_0^1 e^{-jk\pi t} dt - \frac{3}{2}\int_1^2 e^{-jk\pi t} dt\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{-1}{jk\pi} e^{-jk\pi t}\right)\Big|_0^1 - \frac{3}{2}\left(\frac{-1}{jk\pi} e^{-jk\pi t}\right)\Big|_1^2\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{-1}{jk\pi}\left(e^{-jk\pi\times 1} - e^{-jk\pi\times 0}\right)\right) + \frac{3}{2}\frac{1}{jk\pi}\left(e^{-jk\pi\times 2} - e^{-jk\pi\times 1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-3}{2jk\pi}\left(e^{-jk\pi} - 1\right) + \frac{3}{2jk\pi}\left(e^{-j2k\pi} - e^{-jk\pi}\right)\right]$

$= \frac{3}{4jk\pi}\left[-e^{-jk\pi} + 1 + e^{-j2k\pi} - e^{-jk\pi}\right] = \frac{3}{4jk\pi}\left(1 - 2e^{-jk\pi} + e^{-j2k\pi}\right)$

روش دوم: استفاده از خواص => می‌دانیم:

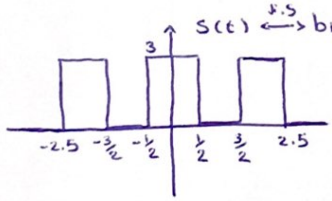


$a_k = d.\,\text{sinc}(kd)$

$d = \text{duty cycle} = \frac{\text{مدت زمانی که سیگنال high است}}{\text{کل پریود } (T)}$

$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

فرض کنید داریم:



$s(t) \xleftrightarrow{F.S} b_k = d\,\text{sinc}(kd) = \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\frac{k\pi}{2}}\right)$

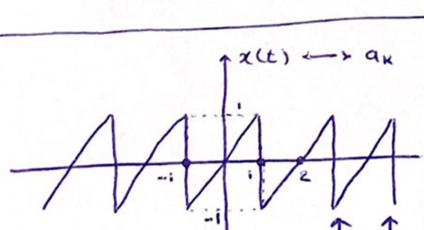
$s(t) = x(t+0.5) + 1.5 \xleftrightarrow{F.S} b_k = a_k e^{jk\omega_0 \times \frac{1}{2}} \Rightarrow a_k = \frac{b_k}{e^{jk\frac{\omega_0}{2}}} = \frac{1}{2e^{jk\frac{\pi}{2}}}\left(\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)\right)$

$; k \neq 0$

---

④ ضرایب سری فوریه سیگنال‌های زیر را بیابید:

a)



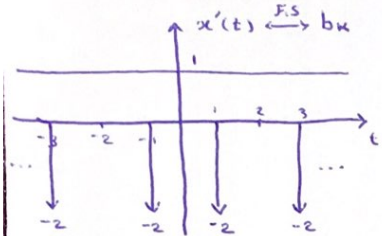
سیگنال $x(t)$ حقیقی و فرد است ⟸ a_k باید موهومی خالص و فرد شود

استفاده از خواص : یادآوری :

$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \xleftrightarrow{F.S} a_k = \frac{1}{T} \times \underset{\text{دامنه ضربه}}{a}$

اگر از $x(t)$ مشتق بگیریم داریم :

$x'(t) \xleftrightarrow{F.S} b_k$



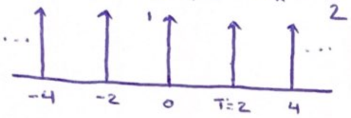
$$\Rightarrow \quad x'(t) = 1 - 2\,\delta(t-1)$$

$$\xleftrightarrow{F.S} \quad (jk\omega_0)\,a_k = -2\,e^{-jk\omega_0 \times 1} \times d_k$$

$$\Rightarrow \quad a_k = \frac{-1}{jk\omega_0}\,e^{-jk\omega_0} \quad \xrightarrow{\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi} \quad a_k = \frac{-1}{jk\pi}\,e^{-jk\pi}$$

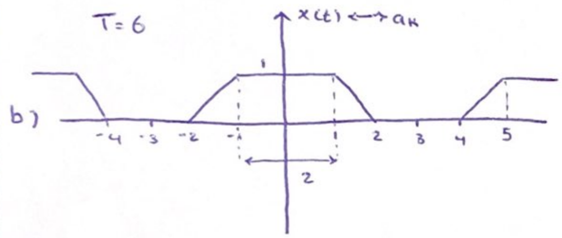
بنابراین اگر فرض کنیم :

$\delta(t) \longleftrightarrow d_k = \frac{1}{2}$

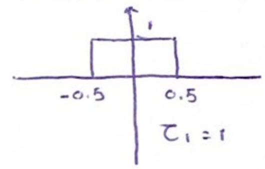


$$= \frac{-1}{jk\pi}\left(e^{-j\pi}\right)^k = \frac{-1}{jk\pi}\cdot(-1)^k = \begin{cases} j\,\dfrac{(-1)^k}{k\pi} & ; \; k \neq 0 \\ 0 & ; \; k = 0 \end{cases}$$

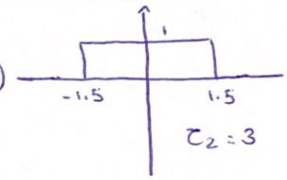
b) $T=6$ $\quad x(t) \longleftrightarrow a_k$



$=$ پریودیک با $T=6$ $S_1(t)$ $\quad \circledast \quad$ پریودیک با $T=6$ $S_2(t)$

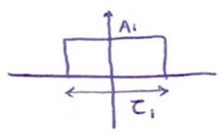


$\tau_1 = 1$

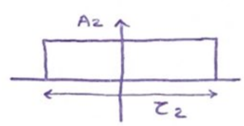


$\tau_2 = 3$

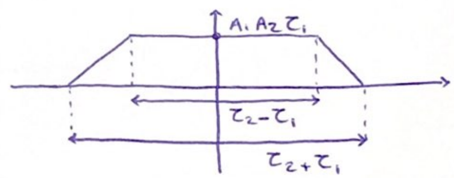
یادآوری :

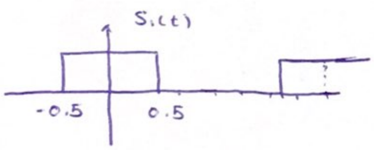


$\ast$

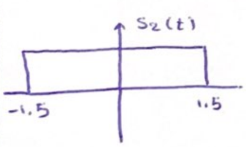


$\xrightarrow{\tau_2 \geq \tau_1}$





$$b_k = d\,\text{sinc}(kd) = \frac{1}{6}\,\text{sinc}\left(\frac{k}{6}\right)$$

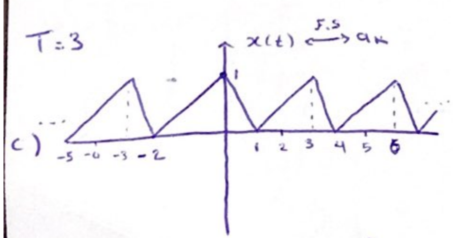


$$C_k = d\,\text{sinc}(kd) = \frac{3}{6}\,\text{sinc}\left(\frac{3k}{6}\right) = \frac{1}{2}\,\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$$

یادآوری : if $\; x(t) \circledast y(t) \xleftrightarrow{F.S} T\cdot a_k\cdot b_k \quad \Rightarrow \quad a_k = 6\left[\left(\frac{1}{6}\text{sinc}\left(\frac{k}{6}\right)\right)\times\left(\frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)\right)\right]$

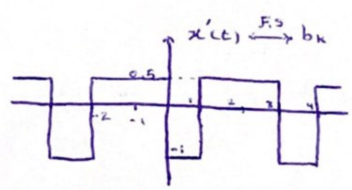
$$= \left(\text{sinc}\left(\frac{k}{6}\right)\right) \times 3\,\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$$

c) $T=3$ $\quad x(t) \xleftrightarrow{F.S} a_k$

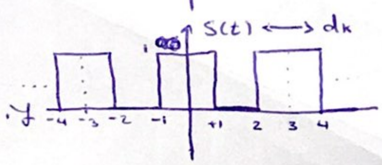


$\xRightarrow{\text{مشتق}}$

$x'(t) \xleftrightarrow{F.S} b_k$



if $\; \delta(t) \longleftrightarrow d_k$



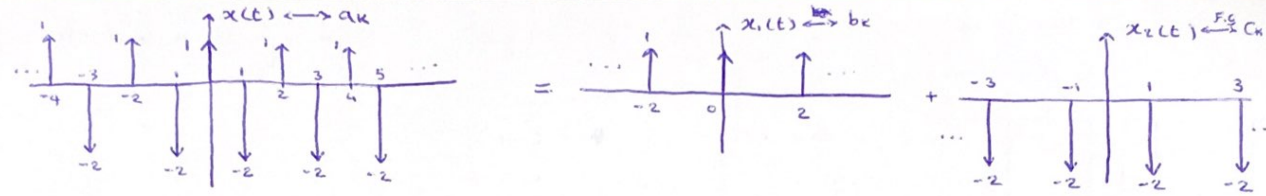
$$d_k = \frac{2}{3}\,\text{sinc}\left(\frac{2k}{3}\right) \quad \Rightarrow$$

$$x'(t) = \delta(t+1) - 1$$

$$(jk\omega_0)\,a_k = e^{jk\omega_0 \times 1}$$

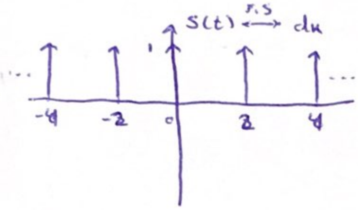
$$a_k = \frac{1}{jk\frac{2\pi}{3}}\,e^{jk\frac{2\pi}{3}} \quad \text{for } k \neq 0$$

d)



$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \xleftrightarrow{F.S} a_k = b_k + c_k \Rightarrow \boxed{b_k = \frac{1}{2}}$$

[illegible] :



$$d_k = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2(t) = -2S(t-1)$$

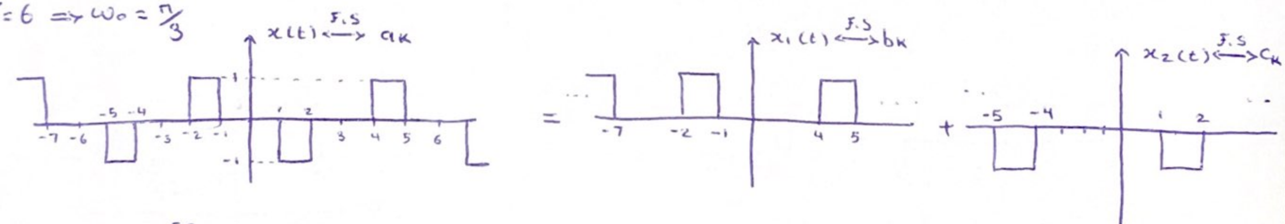
$$c_k = -2e^{-jk\omega_0 \times 1} \times d_k$$

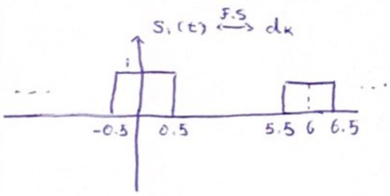
$$c_k = -2e^{-jk\pi} \times \frac{1}{2} = \boxed{-e^{-jk\pi}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_k = b_k + c_k = -e^{-jk\pi} + \frac{1}{2}}$$

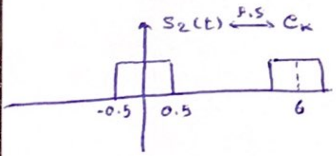
$T = 6 \Rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{3}$

e)





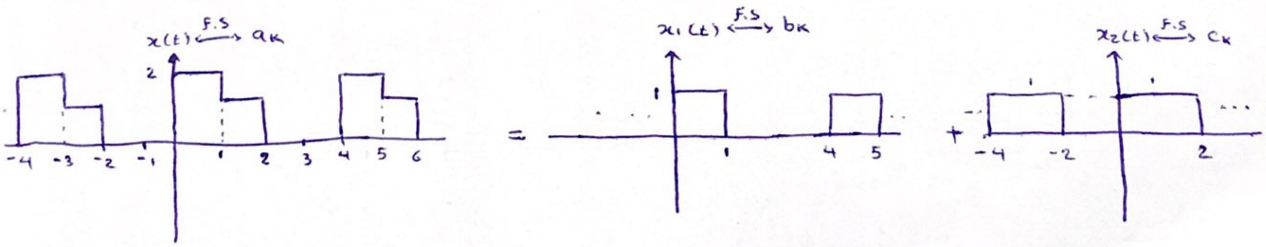
$$d_k = \frac{1}{6} \Rightarrow x_1(t) = S_1(t+1.5) \xleftrightarrow{F.S} b_k = d_k e^{jk\omega_0 \times 1.5} = \frac{1}{6} e^{j\frac{\pi}{2}}$$



$$e_k = \frac{1}{6} \Rightarrow x_2(t) = -S_2(t-1.5) \xleftrightarrow{F.S} c_k = -e_k e^{-jk\omega_0 \times 1.5} = -\frac{1}{6} e^{-jk\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow x(t) = x_1(t) + x_2(t) \xleftrightarrow{F.S} a_k = b_k + c_k = \frac{1}{6} e^{\frac{jk\pi}{2}} - \frac{1}{6} e^{-jk\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{j}{3} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}$$

f)



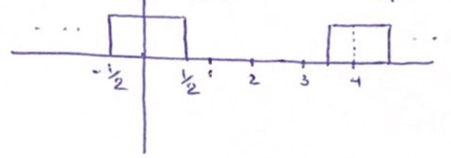
روند حل مشابه با قبل

⑤ در هر یک از موارد زیر، ضرایب سری فوریه یک سیگنال با دوره تناوب $T = 4$ بیان شده است. سیگنال $x(t)$ را در هر مورد بیابید.

$$a_k = \begin{cases} (j)^k \dfrac{\sin(\frac{k\pi}{4})}{k\pi} & ; k \neq 0 \\ 0 & ; k = 0 \end{cases}$$

$x_1(t) \xleftrightarrow{F.S} \frac{1}{4}\operatorname{sinc}(\frac{k}{4}) = b_k$

if $a_k = \dfrac{\sin(\frac{k\pi}{4})}{k\pi} = \underbrace{\frac{1}{4}}_{d}\operatorname{sinc}(\frac{k}{4}) \xrightarrow{(F.S)^{-1}}$

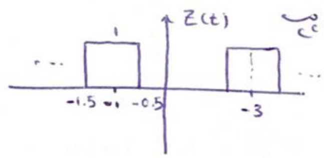


$\Rightarrow d = \dfrac{\text{high مدت زمانی که سیگنال}}{T} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{x}{4}$

$\Rightarrow \boxed{x = 1} \Rightarrow$ سیگنال $x(t)$ فقط به اندازه ۱ واحد high است.

$\Rightarrow C_k = (j)^k b_k = (e^{j\frac{\pi}{2}})^k b_k = e^{j\frac{k\pi}{2}} \cdot b_k \xrightarrow{w_0 = \frac{\pi}{2}} C_k = \underbrace{e^{jkw_0 \times 1}}_{\text{در زمان یک واحد شیفت به چپ}} b_k$

$\xleftrightarrow{F.S^{-1}} Z(t) = x_1(t+1) \Rightarrow$



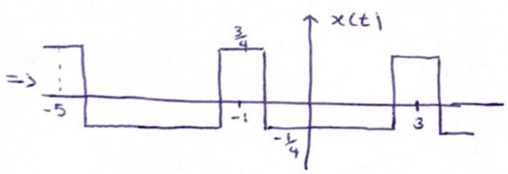
مقدار dc این سیگنال $= \dfrac{\text{مساحت زیر یک پریود}}{\text{یک پریود}}$

$dc = \frac{1}{4} = C_0 \rightarrow$ ضریب اول سری فوریه

$$\Rightarrow a_k = \begin{cases} 0 & ; k = 0 \\ C_k & ; k \neq 0 \end{cases}$$

در a_k داریم $a_0 = 0 \Rightarrow$ پس باید $Z(t)$ را طوری شیفت دهیم که مقدار dc آن صفر شود $\Rightarrow \frac{1}{4}$ به سمت پایین شیفت می دهیم

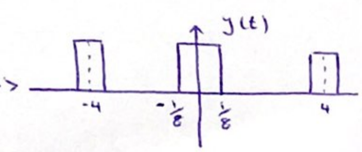
$\Rightarrow$



b) $a_k = (-1)^k \cdot \overbrace{\dfrac{\sin(\frac{k\pi}{8})}{2k\pi}}^{b_k}$, $a_0 = \frac{1}{16}$

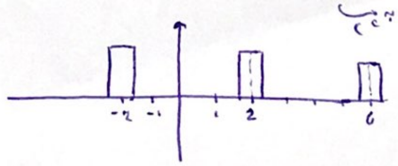
$d = \frac{x}{4} = \frac{1}{16} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

if $b_k = \dfrac{\sin(\frac{k\pi}{8})}{2k\pi} \Rightarrow \dfrac{\sin(\pi\frac{k}{8})}{\pi\frac{k}{8}} \times \frac{1}{16} \Rightarrow b_k = \frac{1}{16}\operatorname{sinc}(\frac{k}{8}) \Rightarrow$



$\Rightarrow C_k = (-1)^k \cdot b_k = (e^{j\pi})^k b_k = e^{jk\pi} \cdot b_k \xrightarrow{w_0 = \frac{\pi}{2}} C_k = \underbrace{e^{jkw_0 \times 2}}_{\text{در زمان 2 واحد شیفت به چپ}} \cdot b_k$

$\xleftrightarrow{F.S^{-1}} Z(t) = y(t+2) \Rightarrow$



$dc = C_0 = \dfrac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{16} = a_0$

$\Rightarrow \boxed{C_k = a_k}$

c) $a_k = \begin{cases} jk & ; \ k < 3 \\ 0 & ; \ \text{else} \end{cases}$ $\qquad$ $\underline{\text{یادآوری}}$: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

تنها ضرایب غیر صفر : $a_1 = a_{-1}^* = j \,,\ a_2 = a_{-2}^* = 2j \implies x(t) = a_1 e^{j\frac{2\pi}{4}t} + a_{-1} e^{-j\frac{2\pi}{4}t} + a_2 e^{2j\frac{2\pi}{4}t} + a_{-2} e^{-2j\frac{2\pi}{4}t}$

$$= je^{j\frac{\pi}{2}t} - je^{j\frac{\pi}{2}t} + 2je^{j\pi t} - 2je^{-j\pi t} = \boxed{-2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 4\sin(\pi t) = x(t)}$$

d) $a_k = \begin{cases} 1 & ; \ k = \text{even} \\ 2 & ; \ k = \text{odd} \end{cases} \implies a_k = \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{b_k} + \underset{\substack{\uparrow \\ z(t)}}{c_k} \implies b_k = 1 \text{ for all } k \,,\ c_k = \begin{cases} 1 & ; \ k \text{ odd} \\ 0 & ; \ k \text{ even} \end{cases}$

$\xleftrightarrow{F.S^{-1}} x(t) = y(t) + z(t)$ $\qquad \begin{cases} y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-k) \\ z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j(\frac{\pi}{2})t} \cdot \delta(t-2k) \end{cases}$

$$\implies x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-k) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j(\frac{\pi}{2})t} \cdot \delta(t-2k)$$

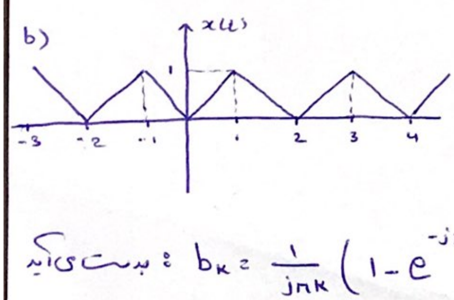
---

6) فرض کنید $x(t) = \begin{cases} t & ; \ 0 \le t \le 1 \\ 2-t & ; \ 1 \le t \le 2 \end{cases}$ یک سیگنال متناوب با $T = 2$ است، و ضرایب سری فوریه آن a_k است. a) a_0 را بیابید؟ b) نمایش سری فوریه $\frac{d}{dt}x(t)$ را تعیین کنید؟

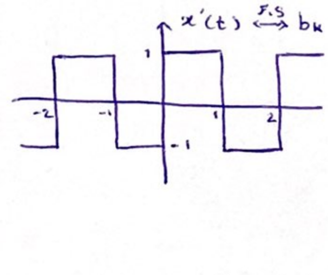
a) $a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \xrightarrow{k=0} a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t\,dt + \frac{1}{2}\int_1^2 (2-t)\,dt =$

$$= \frac{t^2}{2\times 2}\Big|_0^1 + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \boxed{0.5}$$

b)



$\frac{d}{dt} \implies$



$\implies$ با استفاده از خواص سری فوریه b_k ها را بدست آورید

بدست می آید : $b_k = \frac{1}{j\pi k}\left(1 - e^{-j\pi k}\right)$

⑦ $x(t)$ یک سیگنال متناوب با ضرایب سری فوریه زیر است. a) آیا $x(t)$ حقیقی است؟
b) آیا $x(t)$ زوج است؟ c) آیا $\frac{dx(t)}{dt}$ زوج است؟

$$a_k = \begin{cases} j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} & : o.w \\ 2 & ; k=0 \end{cases}$$

یادآوری:

I) if $x(t)$ $\overset{\text{Real}}{\text{and even}} \Longleftrightarrow$ ضرایب سری فوریه آن هم حقیقی و زوج است

II) if $x(t)$ $\overset{\text{Real}}{\text{and odd}} \Longleftrightarrow$ ضرایب سری فوریه آن کاملا موهومی خالص و فرد است.

a) در اینجا ضرایب سری فوریه موهومی خالص است $\Longrightarrow$ پس $x(t)$ حقیقی نیست

if $x(t)$ is Real $\Longrightarrow x(t) = x^*(t) \overset{F.S}{\longleftrightarrow} a_k = a^*_{-k} \xrightarrow{\text{در اینجا}} a_k \neq a^*_{-k}$

b) if $x(t)$ is even $\Longrightarrow x(t) = x(-t)$ & $a_k = a_{-k} \Longrightarrow$ $x(t)$ در اینجا زوج است

c) $g(t) = \frac{dx(t)}{dt} \overset{F.S}{\longleftrightarrow} b_k = jk\frac{2\pi}{T_0}a_k = \begin{cases} 0 & ; k=0 \\ -k\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \times \left(\frac{2\pi}{T_0}\right) & ; o.w \end{cases}$

b_k زوج نیست $\Longrightarrow$ $g(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ هم زوج نیست

---

⑧ $x[n]$ سیگنال حقیقی و فرد و متناوب با دوره تناوب $T=7$ و ضرایب سری فوریه a_k است
اگر $a_{15} = j$ ، $a_{17} = 3j$ ، $a_{16} = 2j$ باشد، مقادیر a_{-3} ، a_{-2} ، a_{-1} و a_0 را بیابید؟

$x(t)$ is Real and odd $\Longrightarrow a_k$ is imaginary and odd

if $x(t)$ is Real $\Longrightarrow x(t) = x^*(t) \overset{F.S}{\longleftrightarrow} a_k = a^*_{-k} \Longrightarrow \begin{cases} a_{15} = a^*_{-15} = j \\ a_{17} = a^*_{-17} = 3j \\ a_{16} = a^*_{-16} = 2j \end{cases}$

ضرایب سری فوریه با دوره تناوب تکراری شوند یعنی:

$$\left.\begin{aligned} & a_1 = a_{1+T} = a_{1+2T} \Rightarrow a_1 = a_8 = a_{15} = j \\ & a_2 = a_9 = a_{16} = 2j \\ & a_3 = a_{10} = a_{17} = 3j \end{aligned}\right\}$$

چون سیگنال حقیقی است $\Longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} & a_1 = a^*_{-1} = j \Rightarrow a_{-1} = -j \\ & a_2 = a^*_{-2} = 2j \Rightarrow a_{-2} = -2j \\ & a_3 = a^*_{-3} = 3j \Rightarrow a_{-3} = -3j \end{aligned}}$$

۹) اطلاعات زیر درمورد سیگنال $x[n]$ داده شده است. a) $x[n]$ حقیقی و زوج است b) دوره تناوب آن 10 است و ضرایب سری فوریه آن a_k نام دارد. c) $a_{11}=5$ d) $0.1\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2=50$

نشان دهید که $x[n]=A\cos(Bn+C)$ و مقادیر A، B، C را بدست آورید.

$x[n]$ is Real and even $\Rightarrow x(t)=x(-t) \xleftrightarrow{F.S} a_k=a_{-k}$

$\Rightarrow a_1=a_{11}=a_{-1}=a_{-11}=5$ و $\omega_0=\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$

یادآوری:

$$P_{av}=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}|x[n]|^2=\sum_{k=\langle N\rangle}|a_k|^2$$

رابطه پارسوال می‌گوید: توان سیگنال $x[n]$ برابر است با مجموع اندازه ضرایب سری فوریه آن به توان 2.

$$0.1\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2=50=\sum_{k=0}^{9}|a_k|^2=50 \Rightarrow \cancel{|a_0|^2}+|a_1|^2+\dots+|a_9|^2=50$$

تمام ضرایب در این پریود به جز a_1 صفر هستند

$$\Rightarrow |a_1|^2=50 \Rightarrow |a_1|=\sqrt{50} \xrightarrow[\text{و زوج است}]{\text{سیگنال حقیقی}} a_1=a_{-1}=\sqrt{50}$$

$$\Rightarrow x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}=a_1 e^{jk\frac{\pi}{5}n}+a_{-1}e^{jk\frac{\pi}{5}n}=10e^{jk\frac{\pi}{5}n}$$