الف) بدون حافظه   ب) علی   پ) تغییرپذیر با زمان   ت) پایدار   ه) خطی   و) معکوس‌پذیر

a) $y(t) = x(t-2) + x(-\frac{1}{2}t + 2)$

الف) $x=1 \rightarrow x(-1) + x(+\frac{3}{2}) \rightarrow$ سیستم حافظه دار
خیر، سیستم در هر لحظه فقط به مقدار ورودی وابسته نیست

ب) $x=1 \rightarrow x(-1) + x(\frac{3}{2}) \rightarrow$ سیستم در $x=1$ به آینده هم وابسته است ← علی نیست

پ) $x(t-t_0) \rightarrow \boxed{sys} \rightarrow x(t-2-t_0) + x(-\frac{1}{2}t + 2 - t_0)$

$y(t-t_0) \rightarrow \boxed{sys} \rightarrow x((t-t_0)-2) + x(-\frac{1}{2}(t-t_0)+2)$ $\neq$

سیستم تغییرپذیر با زمان

ت)

ه) ① خاصیت همگنی: $\alpha x(t) \rightarrow \boxed{sys} \rightarrow \alpha y(t)$ سیستم همگن ✓

$\alpha(x(t-2)) + \alpha((x(-\frac{1}{2}t+2)) \rightarrow \alpha\underbrace{(x(t-2) + (x(-\frac{1}{2}t+2))}_{y(t)}$

② خاصیت جمع‌پذیری:
$$\left.\begin{array}{l} x_1(t-2) + x_1(-\frac{1}{2}t+2) \\ x_2(t-2) + x_2(-\frac{1}{2}t+2) \end{array}\right\} \Rightarrow (+)$$

$(x_1(t-2) + x_2(t-2)) + (x_1(-\frac{1}{2}t+2) + x_2(-\frac{1}{2}t+2)) \rightarrow$ خاصیت جمع‌پذیری ✓

$(x_1(t-2) + x_1(-\frac{1}{2}t+2)) + (x_2(t-2) + x_2(-\frac{1}{2}t+2)) \rightarrow y_1 + y_2$

و) خاصیت معکوس‌پذیری / معکوس‌پذیر نیست چون به ازای ۲ ورودی خروجی یکسان به دست می‌آید.

b) $y(t)=\int_{-\infty}^{2t} x(\tau-1)\,d\tau$

الف) خروجی در لحظه t به ورودی در لحظه $2t$ وابسته است ← سیستم حافظه دار

ب) خروجی در لحظه t به لحظات در آینده بستگی دارد ← علی نیست.

پ) $x(t-t_0) \to \boxed{sys} \to \int_{-\infty}^{2t-t_0} x(\tau-1-t_0)\,d\tau$

$y(t-t_0) \to \boxed{sys} \to \int_{-\infty}^{2(t-t_0)} x(\tau-t_0-1)\,d$

$\neq$ تغییرپذیر با زمان

ت) به ازای ورودی کراندار خروجی کراندار داریم.

ه) همگنی $ax(t) \to \boxed{sys} \to \int_{-\infty}^{2t} a(x(t-1))\,d\tau \to a\int_{-\infty}^{2t} x(\tau-1)\,d\tau$

$\Rightarrow \;= a\,y(t) \to$ ✓

خاصیت جمع پذیری $\to \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau-1)\,d\tau + \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau-1)\,d\tau \to \int_{-\infty}^{2t} (x_1(\tau-1)+x_2(\tau-1))\,d\tau$

$\to$ ✓

و) $y(t)=\int_{-\infty}^{2t} x(\tau-1)\,d\tau \to$ مشتق $\to \frac{dy(t)}{dt}=x(\tau-1) \to \frac{dy(t+1)}{dt}=x(\tau)$

معکوس پذیر ✓

Subject: Year. Month. Date. / /

c) $y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ x(t)+x(t-2) & t\geq 0 \end{cases}$

الف) چون خروجی در لحظه t وابسته به ورودی در لحظات دیگر است ← سیستم حافظه‌دار

ب) سیستم علی نیست چون برای $t<0$ خروجی به آینده بستگی دارد. $t=-2 \to y(t)=0$

ج) $x(t-t_0) \nearrow 0 \quad t<0$ تغییرپذیر با زمان ← مقدار سیستم با حالت اولیه تفاوت شد.

$\to \boxed{sys} \to x(t-t_0)+x(t-2-t_0) \quad t-t_0\geq 0$

د) به ازای ورودی‌های کراندار ← خروجی‌ها کراندار.

ه) خاصیت همگنی ← $0 \quad t<0$

$\to \alpha x(t)+\alpha x(t-2) = \alpha\left(x(t)+x(t-2)\right) = \alpha y(t)$

خاصیت جمع‌پذیری ← $x_1(t)+x_1(t-2)+x_2(t)+x_2(t-2) \Rightarrow$

$x_1(t)+x_2(t)+x_1(t-2)+x_2(t-2) \to$

$\left(x_1(t)+x_2(t-2)\right)+\left(x_2(t)+x_1(t-2)\right) \Rightarrow y_1(t)+y_2(t)$

و) معکوس‌پذیر ← $\boxed{t\geq 0}$ $\quad y(t)=x(t)+x(t-2)$

d) $y[n]=x[n]x[n-1]$

الف) $n=1 \to x[1]x[0]$ چون خروجی در لحظه n به ورودی در لحظات دیگر وابسته است حافظه دارد

ب) سیستم علی است چون خروجی در هر لحظه به ورودی لحظه و لحظات قبل وابسته است.

پ) $x(n-n_0) \to \boxed{sys} \to x[n-n_0]x[n-1-n_0]=y(n-n_0)$ تغییرناپذیر با زمان

ت) به ازای یک ورودی محدود، خروجی محدود است پس پایدار است

ه) خاصیت همگنی $\to \alpha x[n] \Rightarrow \alpha x[n]\cdot\alpha x[n-1] \Rightarrow \alpha\left(x[n]x[n-1]\right)$

خاصیت جمع‌پذیری $\to x_1[n]x_1[n-1]+x_2[n]x_2[n-1] \Rightarrow$

$x_1+x_2=y_1+y_2$?

و) معکوس پذیری $y[n]=x[n]x[n-1]$

x تنها نیست، پس معکوس پذیر نیست.

Subject: Year. Month. Date. / /

e) $y[n] = \mathcal{E}v\{x[n-1]\} \rightarrow \dfrac{x[n-1]+x[1-n]}{2}$

الف) حافظه دار

ب) سیستم علی است چون خروجی به لحظات قبل ورودی ها بستگی دارد.

ج) $x[n-n_0] \rightarrow \boxed{sys} \rightarrow \mathcal{E}v \longrightarrow \dfrac{x[n-1-n_0]+x[1-n-n_0]}{2} = y[n-n_0]$

تغییر ناپذیر با زمان

د) خروجی به ازای ورودی های کراندار، کراندار

ه) همگن $\rightarrow \alpha x[n] = \dfrac{ax[n-1]+ax[1-n]}{2} = a\left[\dfrac{x[n-1]+ax[1-n]}{2}\right]$

جمع پذیر $\rightarrow \dfrac{x_1[n-1]+x_1[1-n]}{2} + \dfrac{x_2[n-1]+x_2[1-n]}{2}$

$\dfrac{x_1[n-1]+x_2[1-n]}{2} + \dfrac{x_2[1-n]+x_1[1-n]}{2}$

و) معکوس پذیر نیست، ورودی ها ، خروجی های یکسان.

Data Max

f) $y[n]=\begin{cases} x[n-1] & n\geq 1 \\ 0 & n=0 \\ x[n] & n\leq -1 \end{cases}$

الف) * خروجی سیستم در لحظه n وابسته به ورودی در لحظات پیشین است حافظه دار (به ازای $n\geq 1$)

ب) * سیستم علی است، چون خروجی به ورودی در لحظات قبل وابسته است.

پ) $\boxed{n\geq 1} \to x[n-1-n_0]$, $\boxed{n=0} \to 0$, $\boxed{n\leq -1} \to x[n-n_0]$

$\to x[n-n_0]=y[n-n_0] \to$ تغییر ناپذیر با زمان

ت)

پایدار است چون کران ها مشخص است (محدود)

ه) همگن $\to \boxed{n\geq 1}$ $\alpha x[n-1]=\alpha y[n]$

$\boxed{n\leq -1}$ $\alpha x[n]=\alpha y[n]$

خاصیت جمع پذیری

$n\geq 1 \to x_1[n-1]+x_2[n-1]$

$n\leq 1 \to x_1[n]+x_2[n]$

و) $\boxed{n\geq 1}$ $y[n]=x[n-1] \to y[n+1]=x[n]$

معکوس پذیر

Subject: Year. Month. Date. / /

g) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k]$

الف) سیستم در لحظهٔ n، به همه لحظهٔ k وابسته است . سیستم حافظه‌دار

ب) علی است ← در لحظه k در لحظات گذشته (منفی و مثبت) به لحظات آینده وابسته نیست .

ج) $\Rightarrow \sum_{k=\infty}^{n-n_0} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-n_0} x[k] \xrightarrow[\text{شیفت}]{} y[n-n_0]$ تغییرناپذیر با زمان

ت) پایداری ✓

د) خطی $\sum_{k=-\infty}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} a x[k] \to a \sum_{k=-\infty}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k]$

ه) معکوس‌پذیری

و) معکوس‌پذیر است ← در $k=n$

$$\frac{y[n]}{\sum_{k=-\infty}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}} = x[k]$$

Data Max

Subject: Year. Month. Date. / /

h) $y(t) = \sin(2t-1)x(t)$

الف) در هر لحظه t وابسته به مقدار $x(t)$ است ← سیستم بدون حافظه

ب) سیستم علی نیست، چون به آینده مقدار وابسته است.

پ) $x(t-t_0) \Rightarrow \sin(2t-1-t_0)x(t-t_0)$

$y(t-t_0) = \sin(2(t-t_0)-1)x(t-t_0)$ $\neq$ تغییر پذیر با زمان

ت) پایدار ← مقدار کراندار ← خروجی کراندار

ه) همگن ← $\sin(2t-1)\alpha x(t) \rightarrow \alpha y(t)$

جمع‌پذیر ← $\sin(2t-1)x_1(t) + \sin(2t-1)x_2(t) \rightarrow y_1+y_2$

و) $y(t) = \sin(2t-1)x(t)$

$\frac{y(t)}{\sin(2t} = x(t)$ معکوس پذیر

۴) نشان دهید سیستم با تعریف $y[n]=n+x[n]+2x[n+4]$ افزایشی خطی است.

$$y_1[n]=n+x_1[n]+2x_1[n+4] \qquad y_1[n]-y_2[n]=$$
$$y_2[n]=n+x_2[n]+2x_2[n+4] \rightarrow$$

$$n+x_1[n]+2x_1[n+4]-\left(n+x_2[n]+2x_2[n+4]\right)$$
$$\cancel{n}+x_1[n]+2x_1[n+4]-\cancel{n}-x_2[n]-2x_2[n+4]$$
$$\underbrace{x_1[n]-x_2[n]}_{x[n]}+2\left(\underbrace{x_1[n+4]-x_2[n+4]}_{x[n+4]}\right)$$

$$\Rightarrow y_1[n]-y_2[n]=x[n]+2x[n+4]$$

رابطه تفاضل خروجی ها یک رابطه خطی است.