۱۱.۵ تمرینهای فصل ۵

۱ — مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$y' = e^{xy} \quad , \quad y(\circ) = \text{۱}$$

با استفاده از روش سری تیلور مرتبه‌ی ۳ و با $h = \circ.\text{۱}$ ، تخمینی برای $y(\circ.\text{۱})$ به‌دست آورید.

۲ — مسأ له‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$y' = x^{\text{۲}} + y^{\text{۲}} \quad , \quad y(\circ) = \text{۱}$$

(الف) — مقدار تقریبی $y(\circ.\text{۲})$ را با روش اویلر محاسبه کنید.($h = \circ.\text{۱}$)

(ب) — مقدار تقریبی $y(\circ.\text{۲})$ را با روش رانگِ — کوتای مرتبه‌ی دو محاسبه کنید. ($h = \circ.\text{۱}$)

(پ) — تقریبی برای $y(\circ.\text{۲})$ و $y(\circ.\text{۳})$ با روش آدامس — بشفورتس دوگامی به‌دست آورید. ($h = \circ.\text{۱}$)

۳ — مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را باروش رانگِ — کوتای مرتبه‌ی دو حل کنید.

$$y' = \frac{\text{۱}}{\text{۱} + x^{\text{۲}} + y^{\text{۲}}} \quad , \quad y(\circ) = \text{۱}$$

($y(\circ.\text{۲})$ را با $h = \circ.\text{۱}$ تقریب بزنید.)

۴ — جواب مسأ له‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را با روش رانگِ — کوتای مرتبه‌ی دو و با $h = \circ.\text{۱}$ از $x = \circ$ تا $x = \circ.\text{۲}$ تعیین کنید.

$$y' = \sin x + \sin y \quad , \quad y(\circ) = \text{۱}$$

۵ — مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$y' = \text{۱} + x \ \sin(xy) \quad , \quad y(\circ) = \circ$$

(الف) — مقدار تقریبی $y(\circ.\text{۲})$ را با روش اویلر محاسبه کنید.($h = \circ.\text{۱}$)

(ب) — مقدار تقریبی $y(\circ.\text{۲})$ را با روش رانگِ — کوتای مرتبه‌ی دو محاسبه کنید. ($h = \circ.\text{۱}$)

٦ — جواب مسأله‌ی زیر را در $x = \text{۱}$ با طول گام $h = \circ.\text{۵}$ با روش اویلر بهسازی شده

محاسبه کنید.

$$y' = x^۳ + y^۲ \quad , \quad y(۰) = ۱$$

۷ — در مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی

$$y' = -y \ln y \quad , \quad y(۰) = \frac{۱}{۲}$$

تقریبی برای $y(۰.۳۷۵)$ با روش $(AB۲)$ و با $h = \frac{۱}{۸}$ به‌دست آورید، و نتیجه را با مقدار واقعی مقایسه کنید.

۸ — جواب مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی

$$y' = y^۲ \quad , \quad y(۰) = ۱$$

را در $x = ۲$ با روش رانگ — کوتای مرتبه‌ی ۴ و با طول گام $h = ۰.۲۵$ به‌دست آورید.
نشان دهید که جواب عددی در نزدیک $x = ۱$ بیکران می‌شود. دلیل آن را بیان کنید.

۹ — در مسأله‌ی

$$y' = -xy^۲ \quad , \quad y(۰) = ۱$$

$y(۱)$ ، را با استفاده از روش نقطه‌ی میانی و $h = ۰.۱$ تقریب بزنید. $y_۱$ را با روش اویلر بهسازی شده بیابید.
نشان دهید جواب تحلیلی چنین است $y = \frac{۲}{x^۲+۲}$ ، و $y(۱) = \frac{۲}{۳}$.

۱۰ — مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$y' = \sin(xy) + \cos(y^۲) + e^{-x^۲} \quad , \quad y(۰) = ۱$$

با استفاده از طول گام $h = ۰.۰۱$ ، $y(۱۰)$ را با هر یک از دو روش زیر تخمین بزنید.
(الف) — روش رانگ — کوتای مرتبه‌ی ۴
(ب) — روش آدامس — بشفورتس مرتبه‌ی ۴ ($AB۴$). مقادیر $y_۱$ ، $y_۲$ و $y_۳$ مورد نیاز را از روش رانگ — کوتای مرتبه‌ی ۴ بیابید.
زمان کامپیوتری را در دو روش با هم مقایسه کنید.

۱۱ — با روش اویلر بهسازی شده و با طول گام $h = ۰.۱$ ، $y(۱)$ را در مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر تقربب بزنید.

$$y''(t) + ۴y(t) = ۰ \ , \ y(۰) = ۱ \quad , \ y'(۰) = ۰$$

مقدار واقعی $y(1)$ را نیز بیابید.

۱۲ — فرمول $(AM4)$ را به‌دست آورید و نشان دهید که خطای برشی آن عبارت است از

$$E = -\frac{19h^5}{720}y^{(5)}(\eta)$$

۱۳ — در مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر، $x(1)$ و $y(1)$ را با روش اویلر و اویلر بهسازی شده تخمین بزنید.

$$x'(t) = x(t) + 3y(t) - 1 \quad , \quad x(0) = 1$$

$$y'(t) = x(t) - 2y(t) + t \quad , \quad y(0) = 3$$

طول گام را $h = 0.2$ بگیرید.

۱۴ — فرمول میلن برای حل مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی

$$y' = f(x,y) \quad , \quad a \leq x \leq b$$

$$y(x_0) = y_0, \; (\; x_0 = a)$$

به‌صورت زیر است

$$y_{i+1} - y_{i-3} = \frac{4h}{3}(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}) + \frac{28}{90}h^5 y^{(5)}(\xi) \quad , \quad x_{i-3} < \xi < x_{i+1}$$

این فرمول را به‌دست آورید.

۱۵ — در مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر، $y(1)$ را با روش رانگ — کوتای مرتبه‌ی ۴ و با طول گام $h = 0.1$ تخمین بزنید و آن را با جواب واقعی مقایسه کنید

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \;, \; y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 2$$

۱۶ — در مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی

$$y' = x^2 - y^2 \quad , \quad y(1.5) = 1.8$$

$y(2)$ را با روش رانگ — کوتای مرتبه‌ی ۴ و با هریک از طول گامهای زیر تقریب بزنید. با کدام طول گام نتیجه بهتر است ؟

$$h = 0.5 \;, \; h = 0.1 \;, \; h = 0.05 \;, \; h = 0.01$$

۱۷ – جواب مسأله‌ی

$$y' = \sin x + \sin y \quad , \quad y(\circ) = ۱$$

را با روش پیش بینی – تصحیح و با انتخاب $h = \circ.۱$ از $x = \circ$ تا $x = \circ.۲$ به‌دست آورید.($\epsilon = \circ.\circ\circ۱$ بگیرید)

۱۸ – جواب مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را

$$\frac{dy}{dt} = e^{t^۲} - \frac{y}{t} \ , \ y(۱) = \frac{e}{۲} \quad , \quad ۱ \leq t \leq ۲$$

(الف) – با روش اویلر و با $h = \circ.۱$ محاسبه کنید.

(ب) – با روش رانگِ – کوتای مرتبه‌ی ۲ و با $h = \circ.۱$ محاسبه کنید.

(پ) – نشان دهید جواب تحلیلی مسأله $y = \frac{e^{t^۲}}{۲t}$ است. جوابهای عددی در قسمتهای (الف) و (ب) را با جواب واقعی مقایسه کنید.

۱۹ – در مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی

$$y' = ۲x - y \ , \ y(\circ) = -۱$$

$y(۱)$ را با روش میلن و با $h = \circ.۱$ تقریب بزنید. مقادیر آغازین را از فرمول رانگِ – کوتای مرتبه‌ی ۲ به‌دست آورید. نتیجه را با مقدار واقعی مقایسه کنید.

۲۰ – جواب مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی

$$\frac{d^۲y}{dt^۲} - ۳\frac{dy}{dt} + ۲y = ٦e^{۳t} \ , \ y(\circ) = ۱ \ , \ y'(\circ) = -۱ \quad , \quad \circ \leq t \leq ۱$$

را با روش $(RK۴)$ و با طول گام $h = \circ.۱$ به‌دست آورید، و نتایج را با جواب واقعی مسأله، $y = -۸e^{۲t} + ٦e^{t} + ۳e^{۳t}$ مقایسه کنید.

۲۱ – جواب مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را در $t = \circ.۵$ و در $t = ۱$ با روش رانگِ – کوتای مرتبه‌ی ۴ و با طول گام $h = \circ.۱$ به‌دست آورید.

$$\frac{dx}{dt} = -۲x + ۲y + z \quad , \quad x(\circ) = \circ$$
$$\frac{dy}{dt} = -y \quad , \quad y(\circ) = ۱$$
$$\frac{dz}{dt} = ۲x - ۲y - z \quad , \quad z(\circ) = \circ$$

توجه کنید که جواب تحلیلی چنین است

$$x = e^{-t} - e^{-۳t} \quad , \quad y = e^{-t} \quad , z = -e^{-t} + e^{-۳t}$$

۲۲ – جواب مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی

$$y' = -y + e^t \ , \ y(0) = 0 \ , \ 0 \leq t \leq 1$$

را با روش $(AB4)$ و با $h = 0.1$ تعیین کنید. مقادیر آغازین را از جواب واقعی آن $y = te^{-t}$، به‌دست آورید.

۲۳ – معادلات تفاضلی همگن زیر حل کنید.

(الف) $y_{k+2} + y_{k+1} - 6y_k = 0$

(ب) $y_{k+2} + y_{k+1} = 2y_k \ , \ y_0 = 0 \ , \ y_1 = 3$

(پ) $x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k = 0 \ , \ x_0 = 3 \ , x_1 = 2$

(ت) $y_{k+2} = -y_k$

(ث) $y_{k+2} - 2y_{k+1} + 4y_k = 0$

(ج) $y_{k+3} - 3y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k = 0$

(چ) $y_{k+3} + y_{k+2} - y_{k+1} - y_k = 0 \ , y_0 = 2 \ , y_1 = -1 \ , y_2 = 3$

(ح) $y_{k+4} + 2y_{k+2} + y_k = 0$

(خ) $y_{n+1} - (2\cos\alpha)\, y_n + y_{n-1} = 0$ ، (α ثابت)

۲۴ – یک جواب خصوصی برای معادله‌ی زیر بیابید.

$$8y_{k+2} - 6y_{k+1} + y_k = 5\sin(\frac{k\pi}{2})$$

۲۵ – معادلات تفاضلی ناهمگن زیر را حل کنید.

(الف) $y_{k+1} - 2y_k = k^2$

(ب) $y_{k+2} - y_k = -4^k + 3.7^k$

(پ) $y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = k$

(ت) $y_{k+2} - 6y_{k+1} + 8y_k = 3k^2 + 2 - 5.3^k$

(ث) $y_{k+3} - 3y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k = 24(k+2)$