بسم الله الرحمن الرحیم

فصل هشتم - نمایش سری فوریه برای سیگنال های پریودیک

سیگنال های پیوسته

سیگنال های گسسته

* نمایش سری فوریه پیوسته

تعریف دو تابع متعامد - دو تابع $f(t)$, $g(t)$ را در بازه (a,b) متعامد گوئیم هرگاه:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\, g^*(t)\, dt = 0}$$

مثلاً $f(t)=t$, $g(t)=t^2$ در $(-5,5)$ متعامد است.

$$\int_{-5}^{5} t\cdot t^2\, dt = \int_{-5}^{5} t^3\, dt = \frac{t^4}{4}\Big|_{-5}^{5} = 0$$

مجموعه متعامد - مجموعه $\{\varphi_n(t)\}_{n=-\infty}^{+\infty} = \{\dots, \varphi_{-2}(t), \varphi_{-1}(t), \varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots\}$ را در فاصله (a,b) متعامد گوئیم هرگاه:

$$\int_a^b \varphi_n(t)\, \varphi_m^*(t)\, dt = \begin{cases} A & ; n = m \\ 0 & ; n \neq m \end{cases}$$

(A عدد ثابت مخالف صفر می باشد)

- مثلاً مجموعه توابع سینوسی ها $\varphi_n(t) = \{\sin n\omega_0 t\}_{n=1}^{\infty}$ در فاصله $(0, T)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ (اثبات شود)

تمرین - نشان دهید مجموعه توابع نمایی $\{e^{jn\omega_0 t}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ یک مجموعه متعامد در $(0,T)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ است.

تعریف سری فوریه تعمیم یافته -

اگر $x(t)$ یک تابع پریودیک و $\varphi_k(t)$ یک مجموعه متعامد باشد (بازه (a,b)). می‌توان تحت شرایطی این سیگنال $x(t)$ را برحسب مجموعه‌ای از توابع متعامد نشان داد یعنی:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varphi_k(t)} = \dots + a_{-1}\varphi_{-1}(t) + a_0\varphi_0(t) + a_1\varphi_1(t) + \dots$$

که در رابطه فوق a_k ها ضرایب ثابت می‌باشند و باید محاسبه شوند.

محاسبه ضرایب a_k - طرفین رابطه بالا را در $\varphi_m^*(t)$ ضرب و $\int_a^b$ حاصل خواهیم داشت:

$$\int_a^b x(t)\varphi_m^*(t)\,dt = \int_a^b \Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varphi_k(t)\Big)\varphi_m^*(t)\,dt$$

وقتی $k=m$ ، $\neq 0$

$$\int_a^b x(t)\varphi_m^*(t)\,dt = \dots + \int_a^b \cancel{a_{-1}\varphi_{-1}(t)\varphi_m^*(t)\,dt}^{\,0} + \dots + \int_a^b a_m\varphi_m(t)\varphi_m^*(t)\,dt + \int_a^b a_{m+1}\varphi_{m+1}(t)\varphi_m^*(t)\,dt + \dots$$

واضح است همه جملات این بدلیل متعامد بودن صفر است بجز زمانیکه $k=m$ گردد پس

$$a_k = \frac{\int_a^b x(t)\varphi_k^*(t)\,dt}{\int_a^b \varphi_k(t)\varphi_k^*(t)\,dt} \quad (*)$$

سینوس و کسینوس
نمایی
توابع بسل
لژاندر و ...

حالت عام: مجموعه $\phi_k(t)$

سری فوریه مثلثاتی: یعنی بسط یک سیگنال برحسب مجموعه ای از سینوس و کسینوس ها

سری فوریه نمایی مختلط: یعنی بسط یک سیگنال برحسب مجموعه ای از توابع نمایی

سری فوریه بسل: " " " " " " بسل

سری فوریه لژاندر و غیره: " " " " " لژاندر و غیره

البته ایده اصلی مدل کردن یا بسط پدیده ها برحسب توابع متناوب با مجموع سینوس و کسینوس ها و توابع نمایی مختلط به زمان بابلی ها برمی گردد که آنها برای پیش بینی رخدادهای نجومی استفاده می کردند و دانشمندان مختلفی روی آن کار کرده اند و معروف ترین آنها فوریه می باشد.

تعریف سری فوریه نمایی: اگر سیگنال $x(t)$ پریودیک، کراندار، تعداد max و min های آن در یک دوره محدود و تعداد نقاط ناپیوستگی آن نیز در یک دوره محدود باشد آنگاه می توان $x(t)$ را بصورت زیر بسط داد:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad و \quad a_k=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \quad , \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

پریود سیگنال

(*) از روابط مهمی است که مدام آمده است.

توجه- برای محاسبه a_k گاهی اوقات نیازی به فرمول محاسبه نیست و در حالات کلی باید از فرمول استفاده نمود.

مثال ۱-

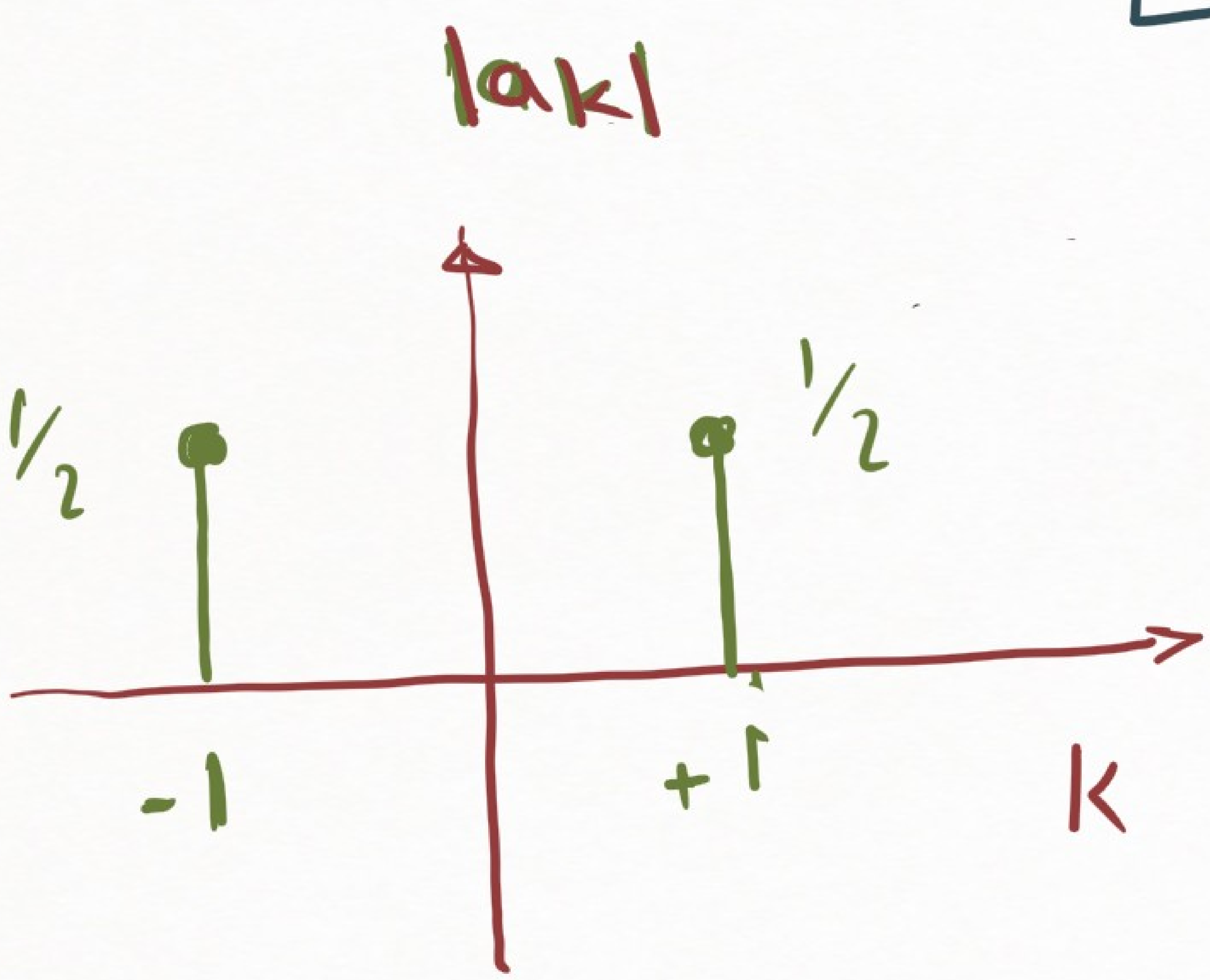
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

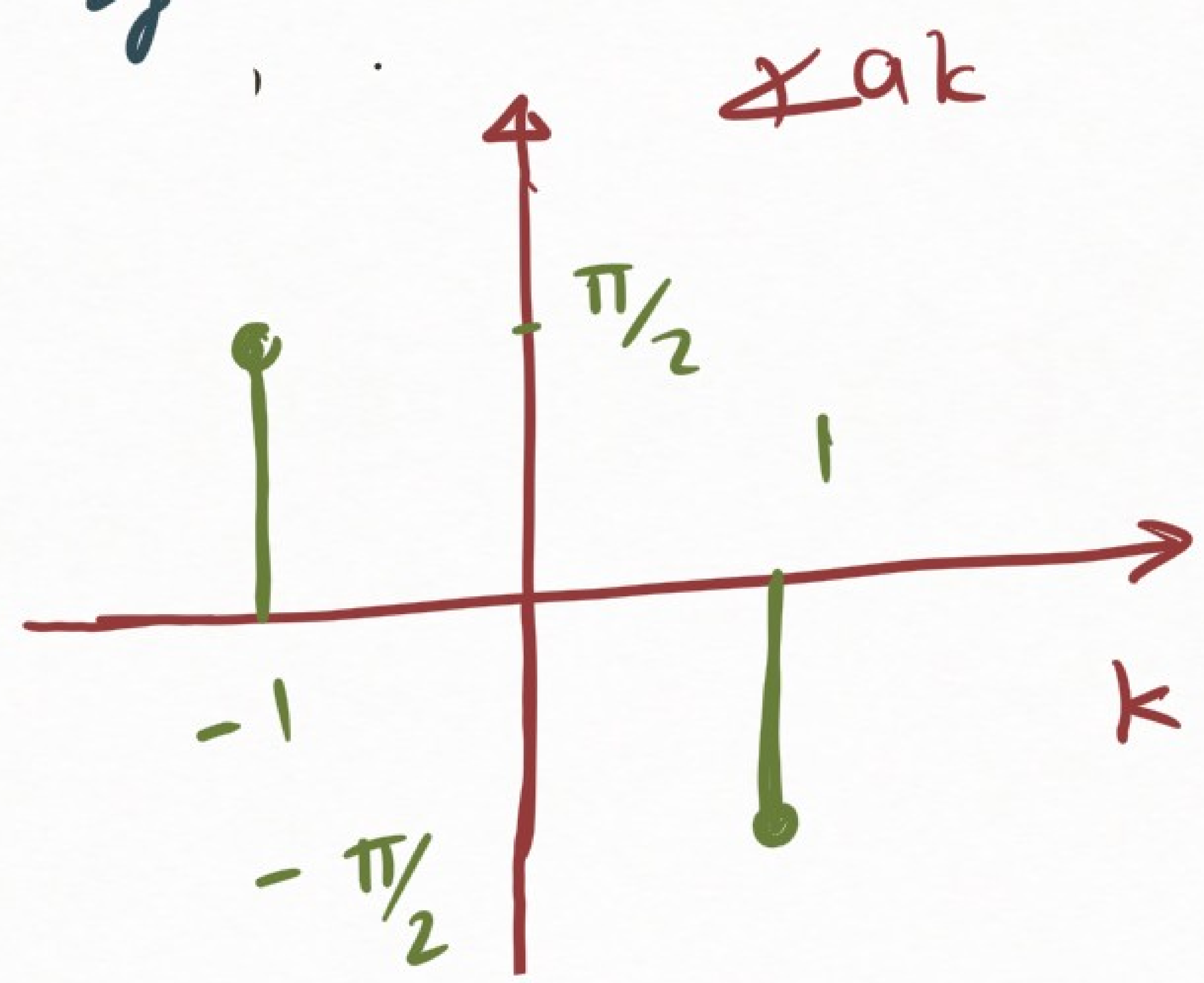
$x(t) = \sin \omega_0 t \Rightarrow a_k = ?$

$$x(t) = \sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t}$$

$k=1$, $k=-1$

$a_{+1} = \frac{1}{2j}$, $a_{-1} = \frac{1}{2j}$





چون اعداد مختلط بصورت اندازه و فاز یا بخش حقیقی و موهومی رسم شد را نشان داد :

مثال ۲-

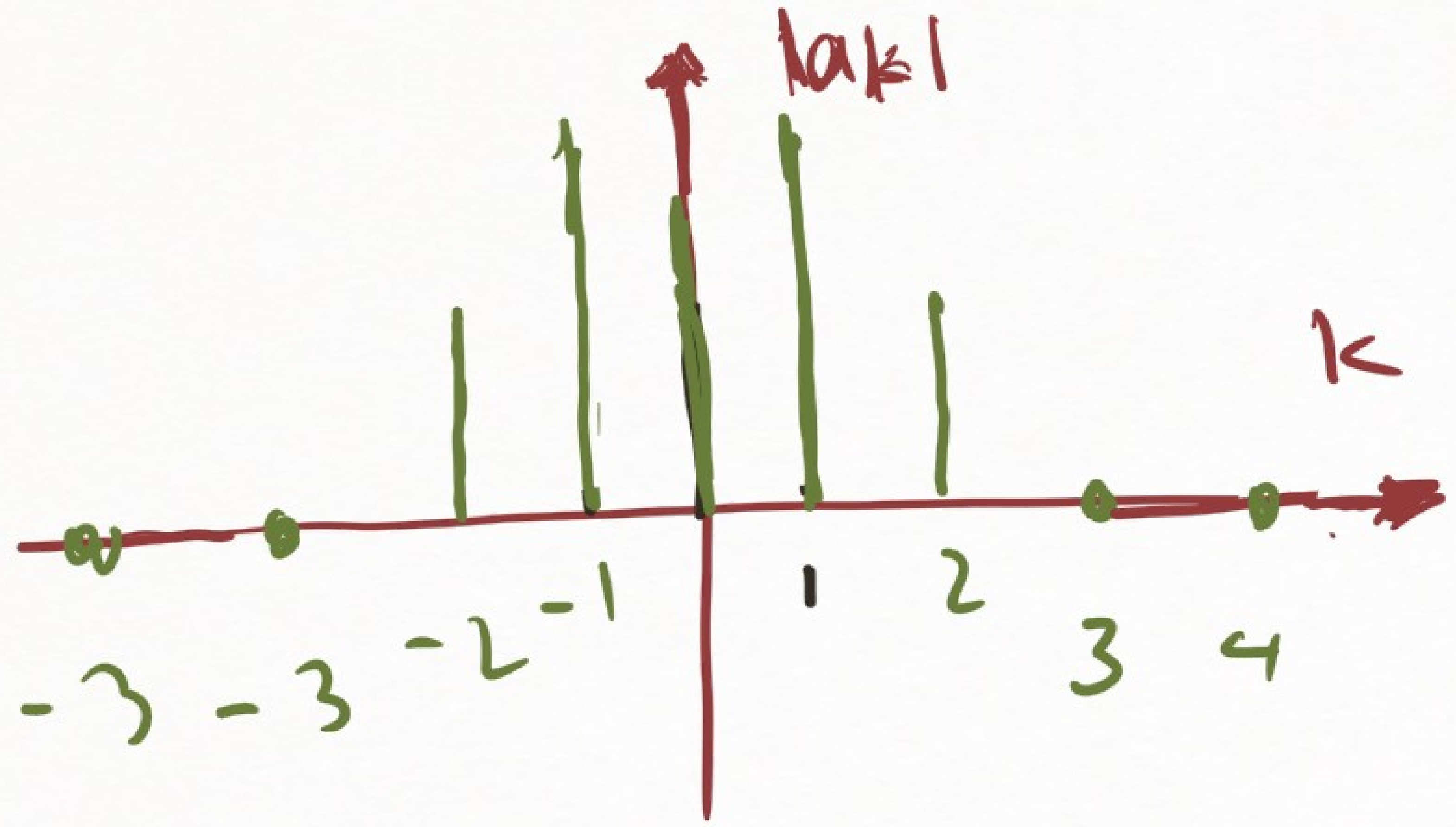
$x(t) = 1 + \sin \omega_0 t + 2\cos \omega_0 t + \cos(2\omega_0 t + \pi/4) \Longrightarrow a_k = ?$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2j}\left[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right] + \frac{1}{2} \times 2\left[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right] + \frac{1}{2} e^{j\pi/4} \cdot e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\pi/4} \cdot e^{-j2\omega_0 t}$$

$$x(t) = \underbrace{1}_{a_0} + e^{\overset{k=1}{j\omega_0 t}}\underbrace{\left(1+\frac{1}{2j}\right)}_{a_1} + e^{\overset{k=-1}{-j\omega_0 t}}\underbrace{\left(1-\frac{1}{2j}\right)}_{a_{-1}} + e^{\overset{k=2}{j2\omega_0 t}}\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}e^{j\pi/4}\right)}_{a_2} + e^{\overset{k=-2}{-j2\omega_0 t}}\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}e^{-j\pi/4}\right)}_{a_{-2}}$$

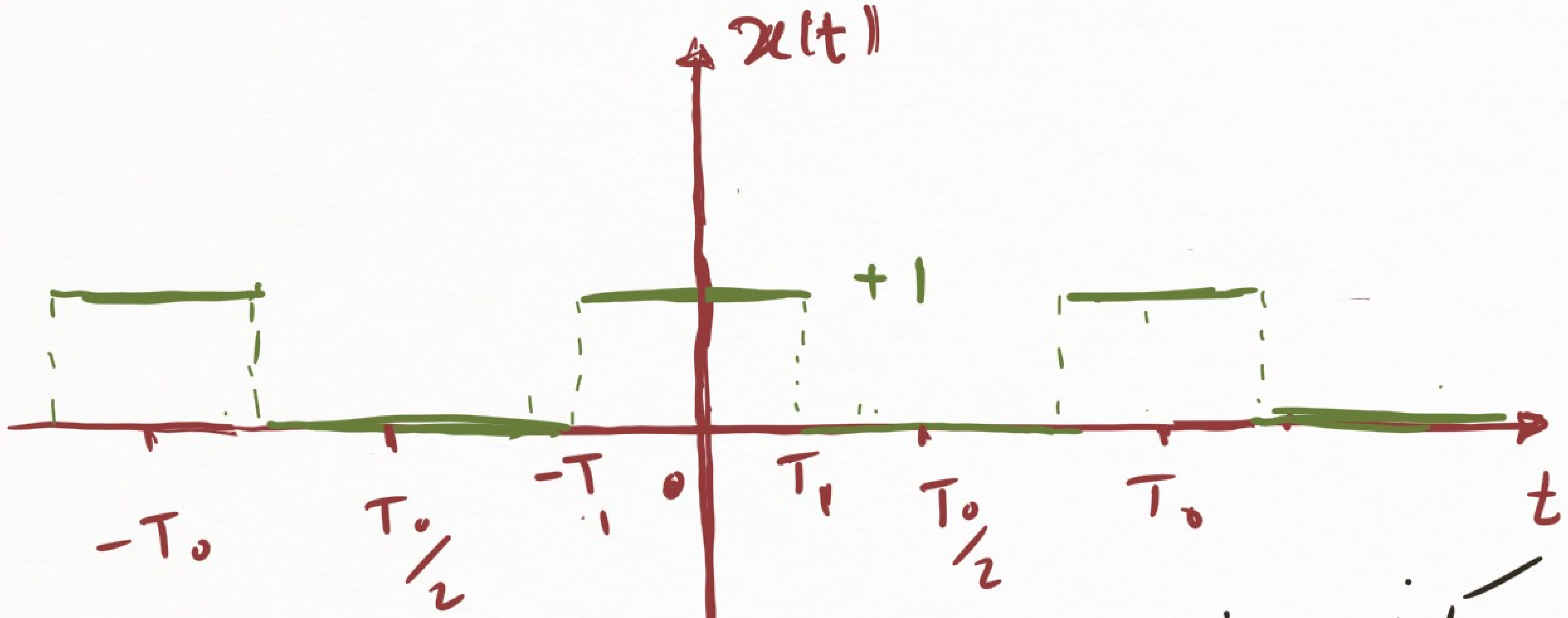
$$a_0 = 0 \;,\; a_1 = 1 + \frac{1}{2j} = 1.12 \measuredangle -27^\circ \;;\; a_{-1} = 1 - \frac{1}{2j} = 1.12 \measuredangle 27^\circ$$

$$a_2 = \tfrac{1}{2} e^{j\pi/4} = \tfrac{1}{2} \measuredangle 45^\circ \;,\; a_{-2} = \tfrac{1}{2} e^{-j\pi/4} = \tfrac{1}{2} \measuredangle -45^\circ \;,\; a_k = 0 \;;\; |k| > 2$$



نکته -

بطور کلی اگر $x(t)$ حقیقی باشد آنگاه $|a_k|$ برحسب k تابع زوج و فاز تابع فرد است.



مثال ۳-

$$a_k = ?$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 \,; & |t| < T_1 \\ 0 \,; & T_1 < |t| < T_0/2 \end{cases}$$

در این مسئله چون نمی‌توان سیگنال را برحسب مجموع توابع سینوس و کسینوس نوشت لذا از فرمول ضرایب استفاده می‌نماییم.

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{0+\alpha}^{T+\alpha} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \,, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \implies a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \implies$$

عدد ثابت

(برای توابع پریودیک حاصل یکی است)

$$\implies a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1} 1 \times e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{-1}{jk\omega_0 T_0}\, e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{-1}{jk\underbrace{\omega_0 T_0}_{2\pi}}\left(e^{-jk\omega_0 T_1} - e^{+jk\omega_0 T_1}\right)$$

$$\implies a_k = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} \,, \; k \neq 0 \quad , \quad a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$$

* ضرایب سری فوریه قطار پالس به ازای مقادیر مختلف دوره تناوب

$T_0 = 4T_1$

$T_0 = 8T_1$

$T_0 = 16T_1$

هرچه دوره تناوب را بزرگ‌تر کنیم فاصله ضرایب از هم کمتر می‌شود.

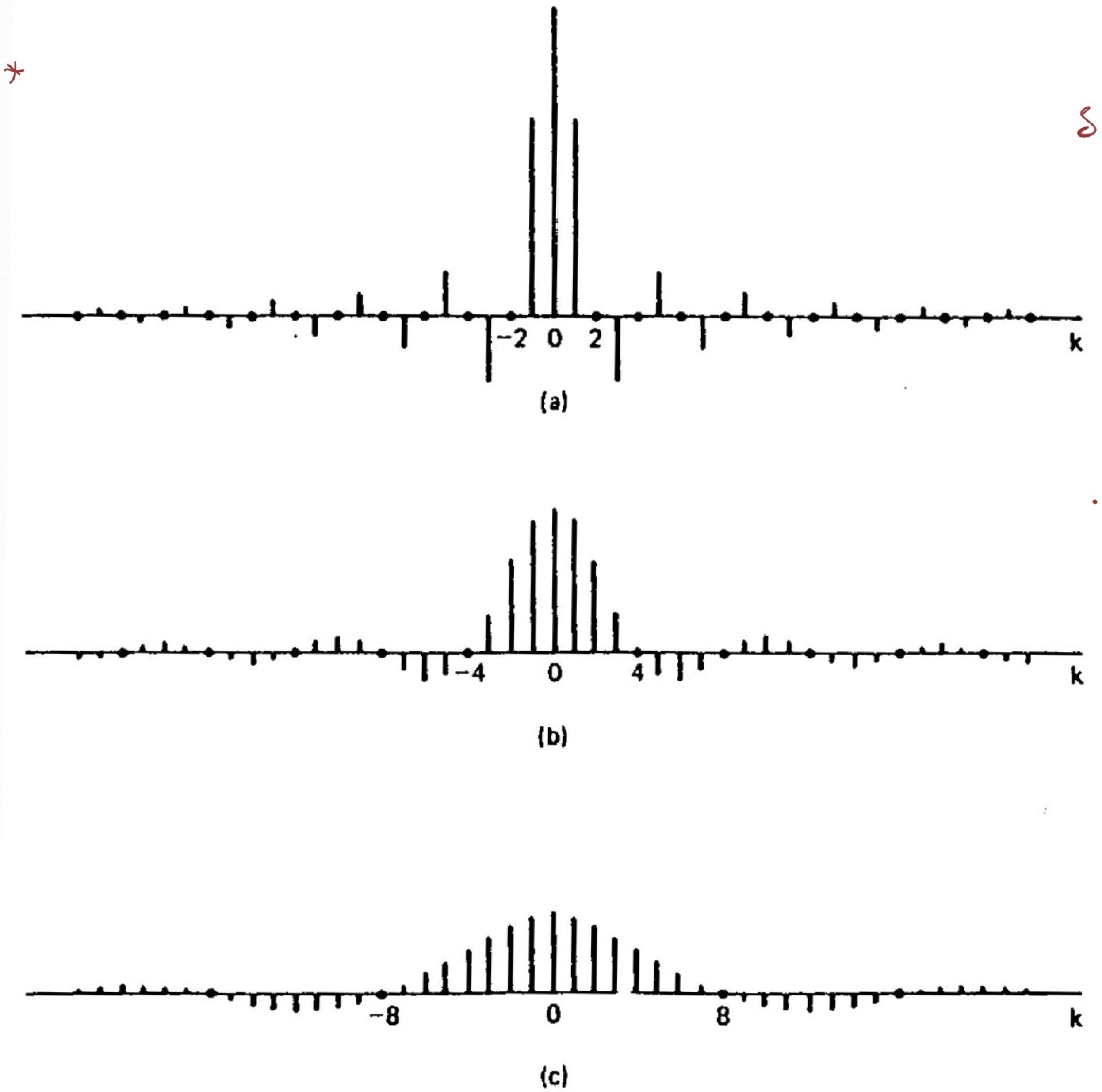
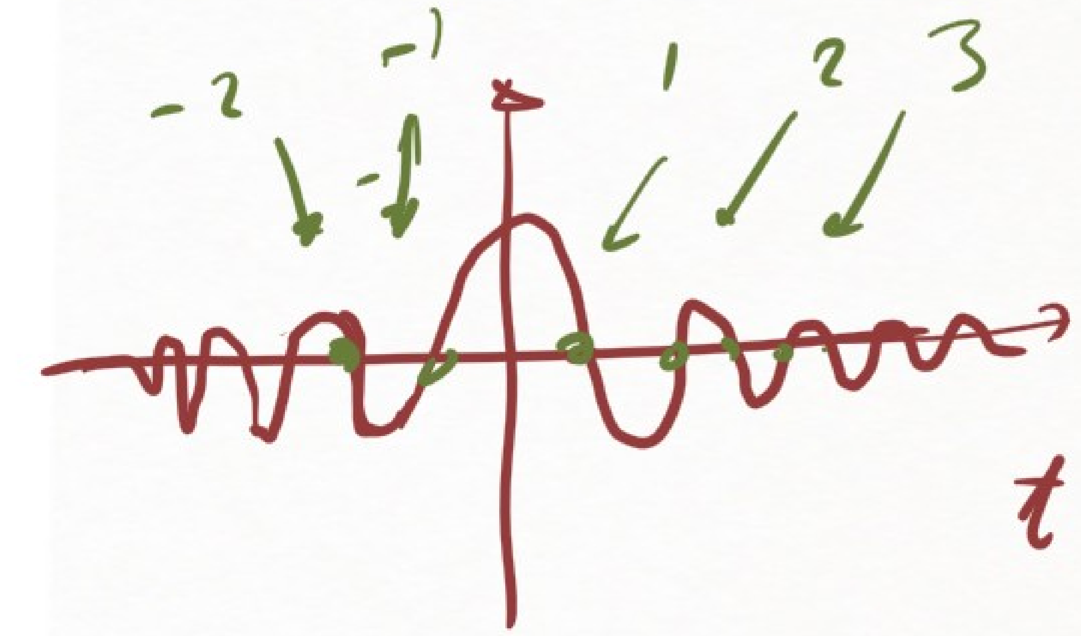


Figure 4.8 Fourier series coefficients for the periodic square wave: (a) $T_0 = 4T_1$; (b) $T_0 = 8T_1$; (c) $T_0 = 16T_1$.

تعریف

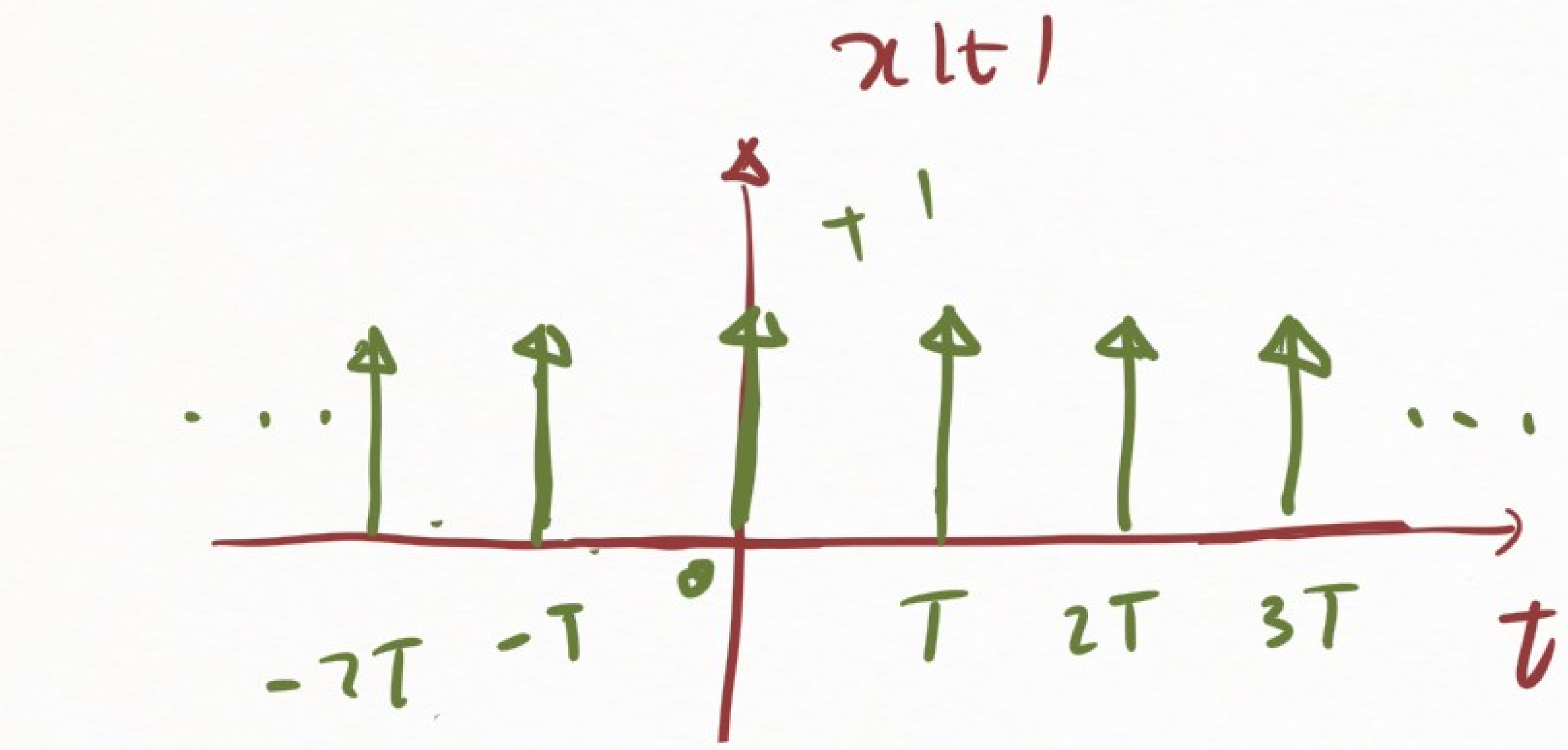
$$\mathrm{sinc}(t) \triangleq \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$



این تابع معروف به تابع سینک می‌باشد.

می‌توان ضرایب را برحسب تابع سینک نیز نوشت.

مثال ۴- ضرایب سری فوریه یک قطار ضربه



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \Longrightarrow a_k = ?$$

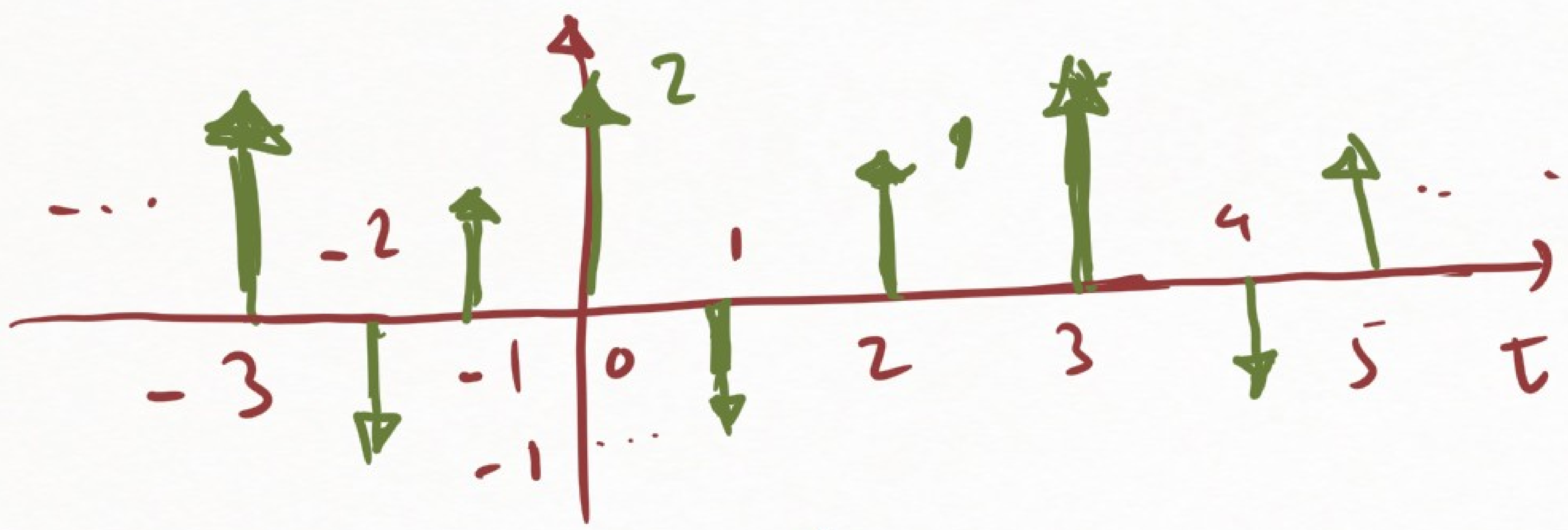
دوره $= T \longrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{0^-}^{T^-} \delta(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

توضیح: در هر یک پریود سیگنال یک تابع ضربه وجود دارد.

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{0^-}^{T^-} \delta(t)\, e^{-jk\omega_0 \times 0}\, dt = \frac{1}{T}\int_{0^-}^{T^-} \delta(t) \times 1\, dt = \boxed{\frac{1}{T}}$$

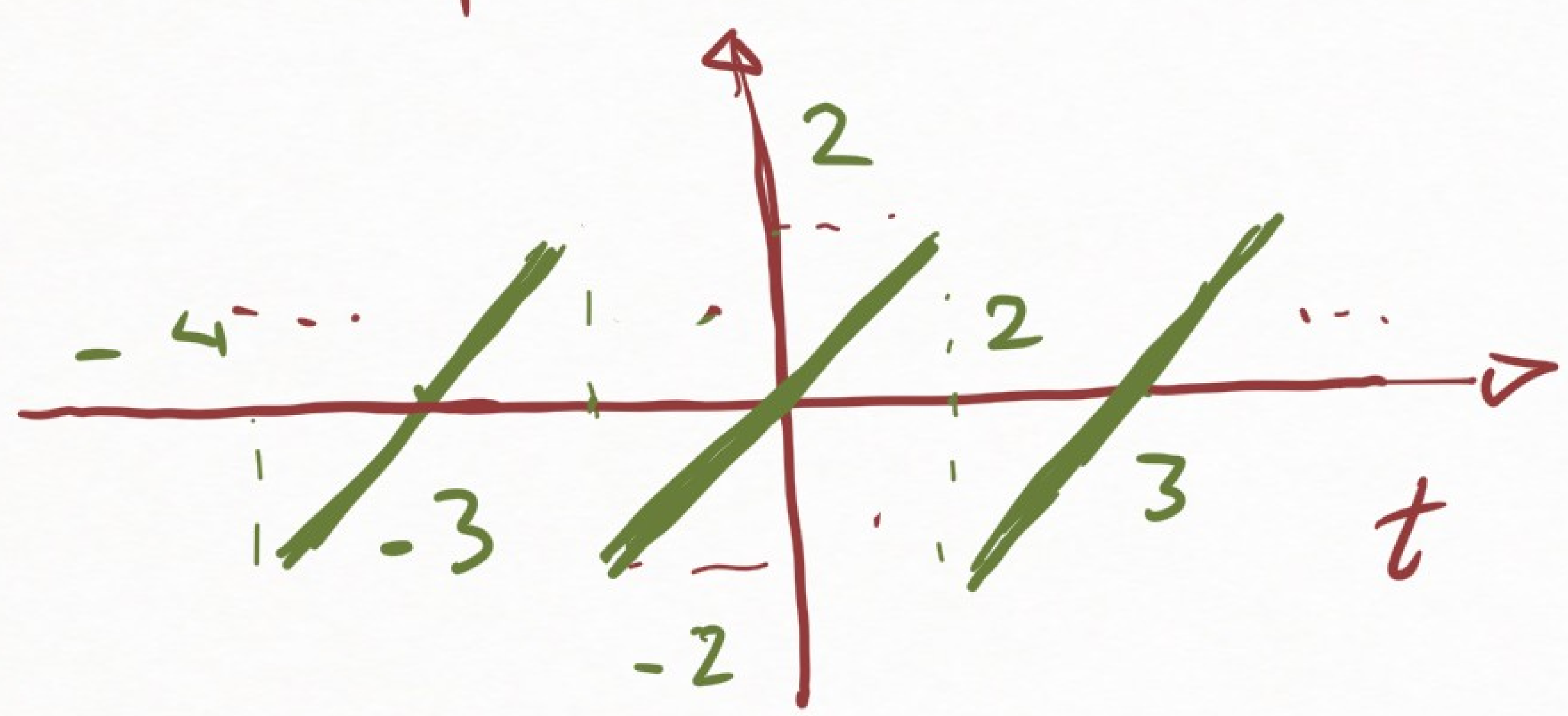
تمرین -



$$\Longrightarrow a_k = ?$$

مثال ۵-

$x(t) = t \quad ; \quad -2 < t < 2 \longrightarrow a_k = ?$



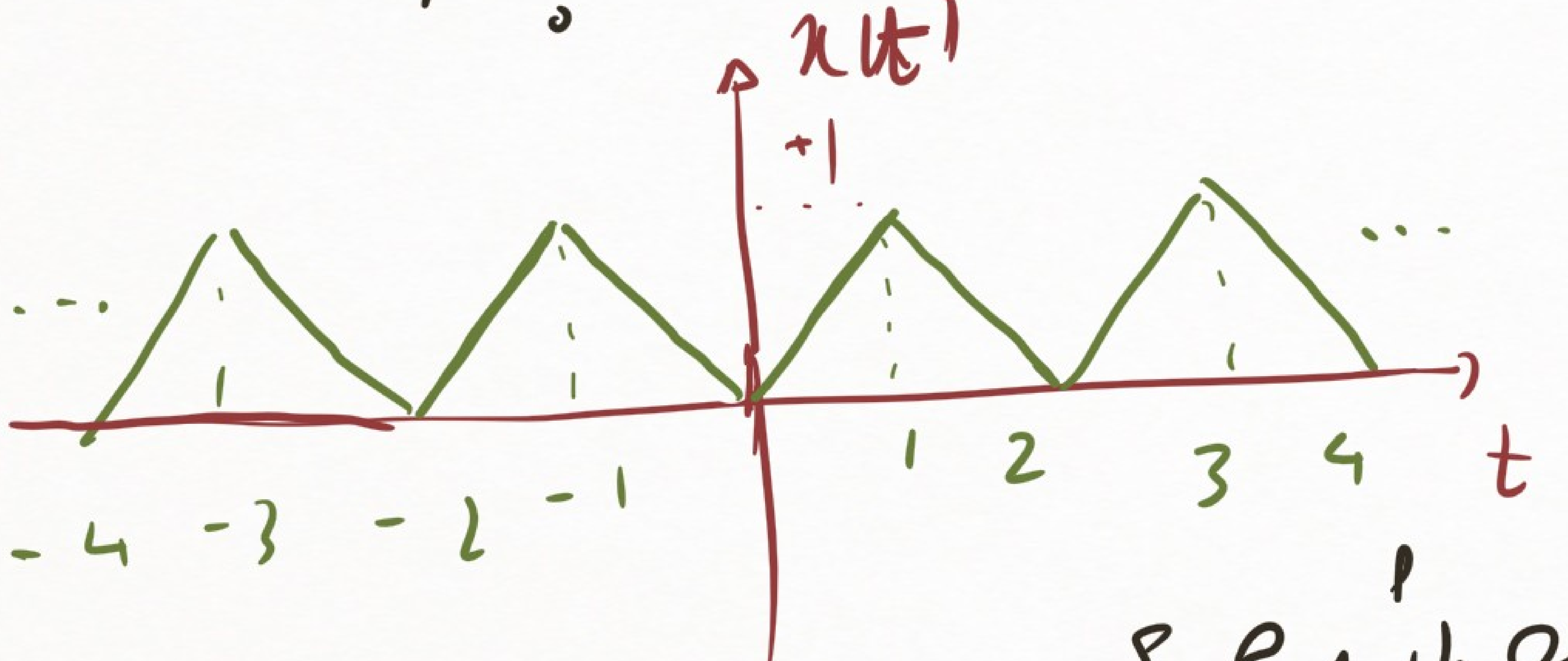
$$T = 4 \;,\; \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

ادامه حل مثال -

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} t\,dt = 0$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} t\,e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\,dt = \cdots = \boxed{\frac{2j(-1)^n}{n\pi}}$$

تمرین -



$\Longrightarrow a_k = ?$

مثال - با توجه به مثال های حل شده، اگر x(t) یک سیگنال حقیقی و فرد باشد ضرایب سری فوریه آن چگونه است؟ اگر سیگنال زوج باشد چه؟

نمایش سری فوریه مثلثاتی : بسط یک سیگنال پریودیک برحسب مجموع سینوس ها و کسینوس ها به صورت زیر می باشد

$$\boxed{x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k \cos k\omega_0 t + \beta_k \sin k\omega_0 t\right)}$$

البته به صورت زیر نیز می توان نمایش داد :

$$\boxed{x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)}$$

محاسبه ضرایب α_k و β_k

الف - محاسبه α_k : طرفین رابطه صفحه قبل را در $\cos k\omega_0 t$ ضرب و $\int_0^T$ $\Leftarrow$ $\alpha_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos k\omega_0 t\, dt$

ب - محاسبه β_k : " " " $\sin k\omega_0 t$ ضرب و $\int_0^T$ $\Leftarrow$ $\beta_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin k\omega_0 t\, dt$

تمرین ۱- روابط فوق را بدست آورید.

توجه : $\alpha_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\, dt$

تمرین ۲- رابطه بین A_k و θ_k در صفحه قبل و α_k و β_k را بدست آورید.

تمرین ۳- رابطه بین ضرایب سری فوریه نمایی a_k و ضرایب سری فوریه مثلثاتی α_k و β_k را بدست آورید.

همگرائی در سری فوریه :

اگر سیگنال $x(t)$ دارای شرایط دیریکله باشد در این صورت سیگنال $x(t)$ و سیگنال حاصل از سری فوریه (البته زمانی که تعداد ضرایب بینهایت (∞) باشد) با هم برابرند بجز در نقاط ناپیوستگی که در این نقاط به مقدار متوسط سیگنال در دو طرف ناپیوستگی میل میکنند.

سری فوریه

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{N\to\infty} \tilde{x}(t_0) = x(t_0) & \text{پیوسته در } t_0 \\ \lim\limits_{N\to\infty} \tilde{x}(t_0) = \dfrac{x(t_0^+) + x(t_0^-)}{2} & \text{ناپیوسته در } t_0 \end{cases}$$

شرایط دیریکله

$$\boxed{\int_T |x(t)|\,dt < \infty}$$

$x(t)$ در یک دوره تناوب مطلقاً انتگرال پذیر باشد.

$$|a_k| \le \frac{1}{T}\int_T \underbrace{|x(t) e^{-jk\omega_0 t}|}_{\text{اندازه یک}}\,dt = \frac{1}{T}\int |x(t)|\,dt < \infty \Longrightarrow \boxed{|a_k| < \infty}$$

مثال نقض — $x(t) = \frac{1}{t}$; $0<t<1$ شکل صفحه بعد (a)

$x(t)$ در هر دوره تناوب تعداد محدودی max و min داشته باشد.

مثال نقض $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right)$, $0<t<1$ شکل صفحه بعد (b) ← تعداد max و min در هر پریود بی‌نهایت

در هر فاصله محدود زمانی تعداد ناپیوستگی‌ها محدود باشد و همچنین تعداد هر ناپیوستگی محدود باشد.

مثال نقض — یک سیگنال با $T=8$ از تعداد نامحدودی قطعه تشکیل شده، که هر کدام نصف طول و نصف ارتفاع قطعه قبلی است. سطح زیر یک تناوب کمتر از 8 ولی تعداد ناپیوستگی‌ها بی‌نهایت ∞ (شکل صفحه بعد (c))

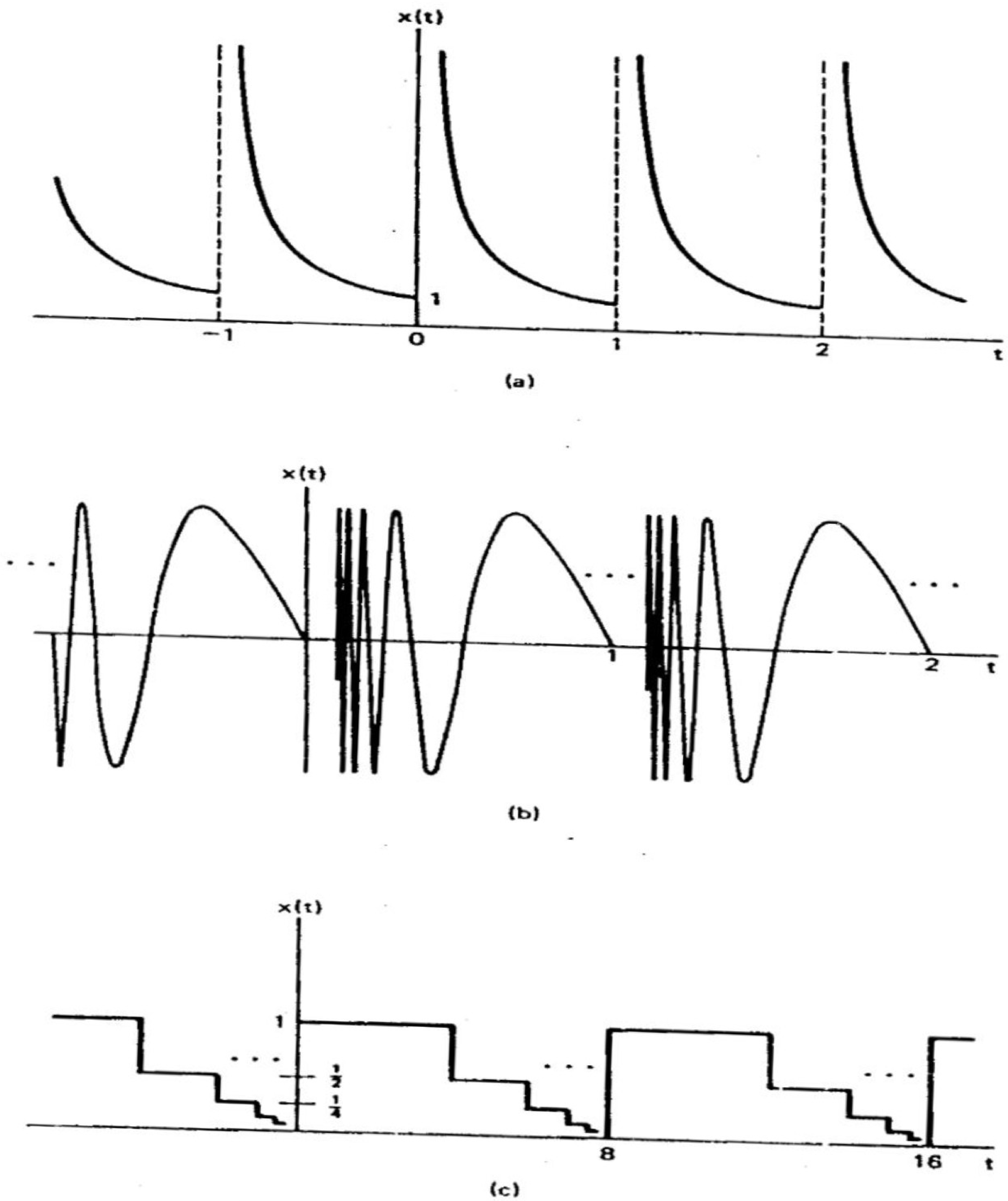


Figure 4.9 Signals that violate the Dirichlet conditions: (a) the signal $x(t)$, periodic with period 1, with $x(t) = 1/t$ for $0 < t \leq 1$ (this signal violates the first Dirichlet condition); (b) the periodic signal of eq. (4.52) which violates the second Dirichlet condition; (c) a signal, periodic with period 8, that violates the third Dirichlet condition [for $0 \leq t < 8$ the value of $x(t)$ decreases by a factor of 2 whenever the distance from t to 8 decreases by a factor of 2; that is $x(t) = 1$, $0 \leq t < 4$, $x(t) = 1/2$, $4 \leq t < 6$, $x(t) = 1/4$, $6 \leq t < 7$, $x(t) = 1/8$, $7 \leq t < 7.5$, etc.].

سؤال - اگر داشته باشیم

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$$

در این صورت:

1- آیا $\sum |a_k| < \infty$ است؟

2- آیا رابطه زیر درست است؟

$$\lim_{N \to \infty} \tilde{x}(t) = x(t)$$

اگر درست نیست چه رابطه ای برقرار است؟

پاسخ - به کتب درسی مراجعه شود.

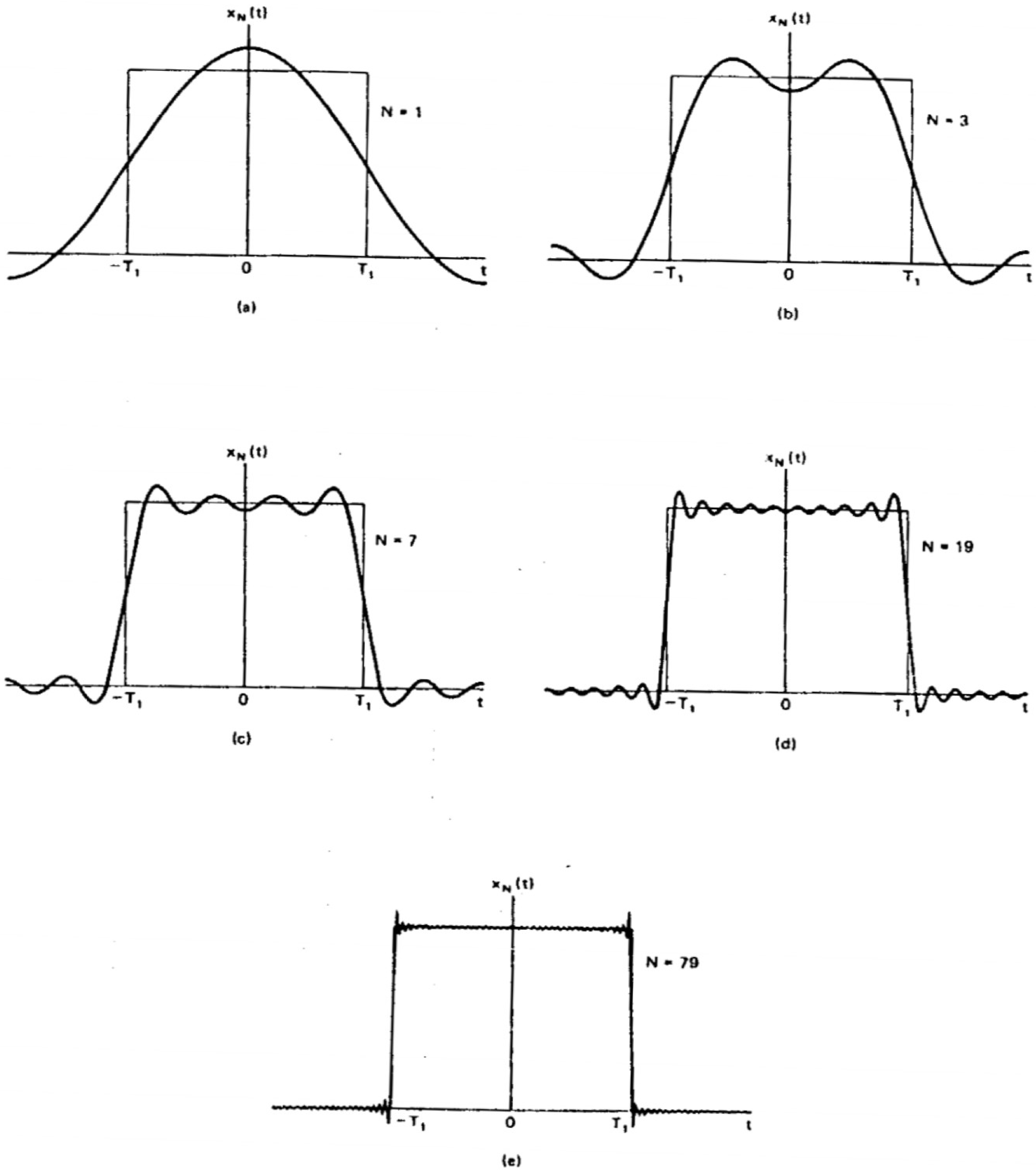


Figure 4.10 Convergence of the Fourier series representation of a square wave: an illustration of the Gibbs phenomenon. Here we have depicted the finite series approximation $x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$ for several values of N.

تقریبهای سری فوریه به سیگنال اصلی $x(t)$

به ازای مقادیر مختلف N (تعداد ضرایب)

با افزایش N سری فوریه به سیگنال اصلی نزدیک‌تر شده‌اند.

در نقاط ناپیوستگی با معدل سیگنال برابر می‌باشد

پدیده گیبس