خواص سری فوریه پیوسته در زمان :

۱- خطی بودن :

اثبات -

$$\begin{cases} x(t) \overset{Fs}{\longleftrightarrow} a_k \\ y(t) \overset{Fs}{\longleftrightarrow} b_k \end{cases} \Longrightarrow A x(t) + B y(t) \overset{Fs}{\longleftrightarrow} A a_k + B b_k$$

$$z(t) = A x(t) + B y(t) \Longrightarrow c_k = \frac{1}{T}\int_0^T z(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T [A x(t) + B y(t)]\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T A x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt + \frac{1}{T}\int_0^T B y(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = A\Big(\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt}_{a_k}\Big) + B\Big(\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt}_{b_k}\Big)$$

$$\Longrightarrow c_k = A a_k + B b_k$$

۲- shift در حوزه زمان :

اثبات -

$$x(t-t_0) \overset{Fs}{\longleftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0}\, a_k \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$y(t) = x(t-t_0) \overset{Fs}{\longleftrightarrow} b_k = ? \Longrightarrow b_k = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T x(\underbrace{t-t_0}_{t_1})\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$t_1 \Longrightarrow t = t_1 + t_0$$

$$dt = dt_1$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{-t_0}^{T-t_0} x(t_1)\, e^{-jk\omega_0 (t_1+t_0)}\, dt_1 = e^{-jk\omega_0 t_0}\Big(\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T x(t_1)\, e^{-jk\omega_0 t_1}\, dt_1}_{a_k}\Big)$$

$$\Longrightarrow \boxed{b_k = e^{-jk\omega_0 t_0}\, a_k}$$

۳- خاصیت وارونگی زمان Time Reversal

$$x(-t) \longleftrightarrow a_{-k}$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{+jk\omega_0 t} \Rightarrow y(t)=x(-t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k} e^{+jk\omega_0 t}=$$

اثبات - ضرایب سری فوریه $x(-t)$ برابر با a_{-k}

۴- تغییر مقیاس زمانی:

$$x(t) \longleftrightarrow a_k \rightarrow x(\alpha t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0(\alpha t)}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t}$$

$$\begin{cases} \omega_0 \rightarrow \alpha\omega_0 \\ T \rightarrow T/\alpha \end{cases}$$

ضرایب سری فوریه تغییری نمی‌کند

۵- خاصیت ضرب:

$$x(t) \longleftrightarrow a_k$$

$$y(t) \longleftrightarrow b_k$$

$$x(t)\cdot y(t) \xleftrightarrow{FS} c_k=\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l} \Longrightarrow$$

ضرب $x(t)y(t)$ پریودیک با دوره T است.

همان کانولوشن گسسته در زمان رشته a_k و b_k می‌باشد.

تمرین -

$$\begin{cases} x(t)=\sin 3t \\ y(t)=\cos 5t \end{cases}$$

$$z(t)=\sin 3t\cdot\cos 5t$$

توجه: یک راه اثبات:

$$\begin{cases} x(t)=\sum a_k e^{jk\omega_0 t}=\dots+a_1 e^{j\omega_0 t}+a_2 e^{j2\omega_0 t}+\dots \\ y(t)=\sum b_k e^{jk\omega_0 t}=\dots+b_1 e^{j\omega_0 t}+b_2 e^{j2\omega_0 t}+\dots \end{cases}$$

و ضرب جملات را بسط دهید و سپس نتیجه به طبق آن

۴ـ خاصیت مزدوج گیری و تقارن مزدوج :

$x(t) \longleftrightarrow a_k$

$x^*(t) \longleftrightarrow a^*_{-k}$

ضرایب سری فوریه $x^*(t)$ است

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{+jk\omega_0 t} \Longrightarrow x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^*_{-k} e^{+jk\omega_0 t}$$

$k \to -k$

۴ـ نتیجه مهم از خاصیت ۴ -

$x(t)$ حقیقی

$x(t) = x^*(t)$

$$a_{-k} = a_k^*$$

بخش موهومی فرد — بخش حقیقی زوج

$$Im\{a_k\} = -Im\{a_{-k}\} \quad , \quad Re\{a_k\} = Re\{a_{-k}\} \quad , \quad \measuredangle a_k = -\measuredangle a_{-k} \quad , \quad |a_k| = |a_{-k}|$$

فاز فرد — اندازه زوج

$x(t)$ زوج باشد $\Longleftarrow$ a_k حقیقی زوج

$x(t)$ فرد باشد $\Longleftarrow$ a_k موهومی و فرد

بخش زوج سیگنال — فرد

$$x(t) = \underbrace{Ev\{x(t)\}} + \underbrace{Od\{x(t)\}} \xleftrightarrow{FS} a_k = \underbrace{Re\{a_k\}} + j\,\underbrace{Im\{a_k\}}$$

$Ev\{x(t)\} \xrightarrow{FS} Re\{a_k\}$

$Od\{x(t)\} \xrightarrow{FS} j\,Im\{a_k\}$

۷- رابطه پارسوال :

$$\frac{1}{T}\int_T x_1(t)\cdot x_2^*(t)\,dt = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\cdot b_k^*}_{\text{توان متوسط یا انرژی بر واحد زمان}}$$

اثبات :

$$x_1(t)=x_2(t)=x(t) \longrightarrow \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

طرف اول

$$\frac{1}{T}\int_T x_1(t)\, x_2^*(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_T x_1(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k^* e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k^* \overbrace{\left(\frac{1}{T}\int_T x_1(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt\right)}^{a_k}$$

$$x_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{و} \quad x_2^*(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$

طرف دوم

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_k^*$$

۸- مشتق گیری در حوزه زمان :

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow (jk\omega_0)a_k$$

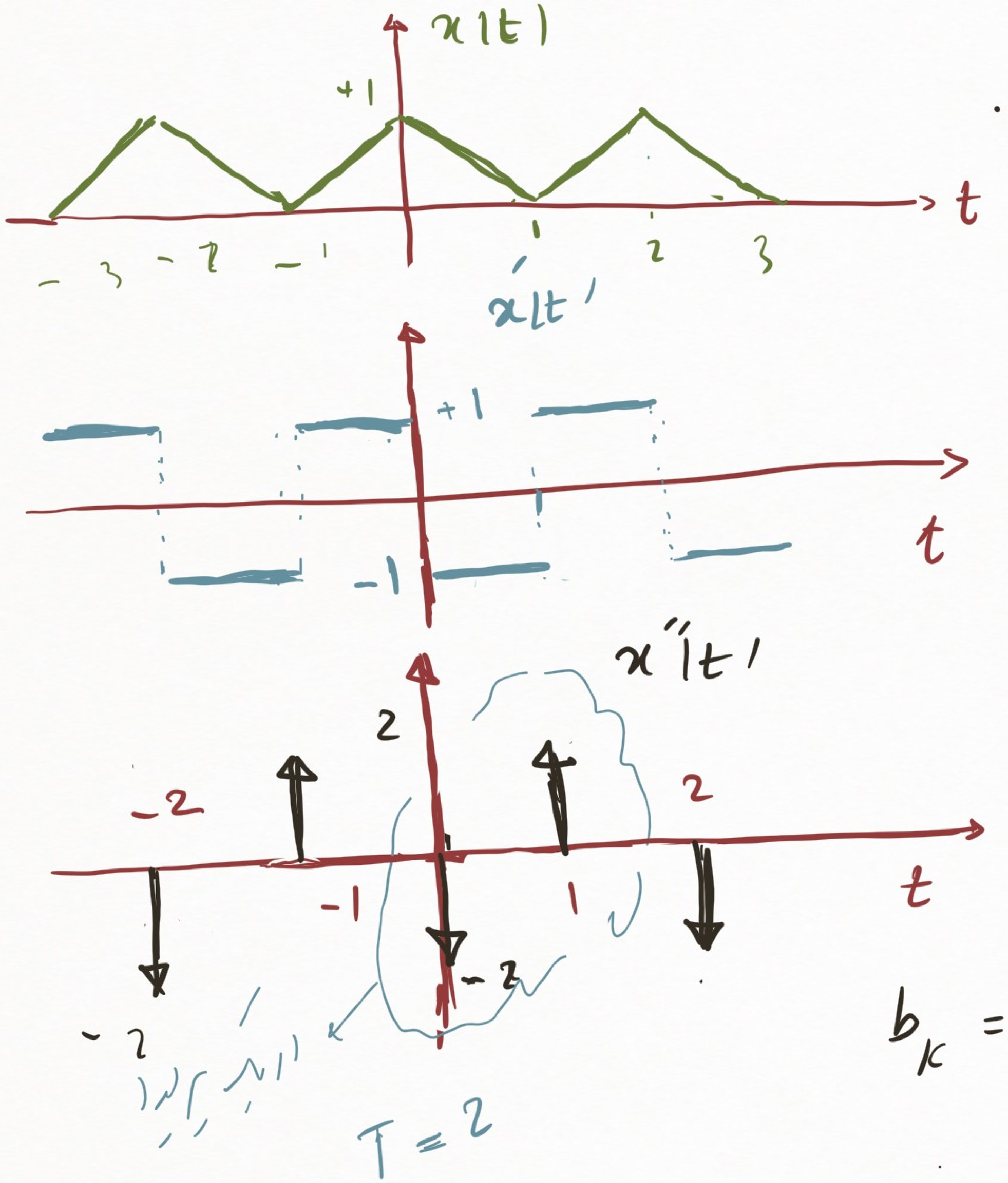
جواب به صورت

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Longrightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (jk\omega_0)a_k\, e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

توجه : با مشتقات بالا هم همین صورت داریم.

۹- انتگرال‌گیری در حوزه زمان:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \longleftrightarrow \frac{a_k}{jk\omega_0}$$



مثال - می‌خواهیم ضرایب سری فوریه x(t) را از روی مشتق دوم آن بدست آوریم.

$$x(t) \longleftrightarrow a_k = ? \qquad , \; T = 2 \; , \; \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$x''(t) \longleftrightarrow b_k = (jk\omega_0)^2 a_k$$

$$x''(t) = -2\delta(t) + 2\delta(t-1)$$

در یک پریود

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{0^-}^{2^-} x''(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{0^-}^{2^-} \left(-2\delta(t) + 2\delta(t-1)\right) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$b_k = \frac{1}{2}\int_{0^-}^{2^-} -2\delta(t)\, e^{-jk\pi t}\, dt + \frac{1}{2}\int_{0^-}^{2^-} 2\delta(t-1)\, e^{-jk\pi t}\, dt$$

$$b_k = \frac{1}{2}\int_{0^-}^{2^-} -2\delta(t)\, dt + \frac{1}{2}\int_{0^-}^{2^-} 2\delta(t-1)\, e^{-jk\pi}\, dt$$

ادامه حل -

$$b_k = \frac{-2}{2}\int_{0^-}^{2^-} \delta(t+1)\,dt + e^{-jk\pi}\int_{0^-}^{2^-} 2\delta(t-1)\,dt = -1 + e^{-jk\pi} = -1 + (-1)^k = \begin{cases} -2 , & \text{فرد } k \\ 0 ; & \text{زوج } k \end{cases}$$

بنابراین:

$$b_k = \begin{cases} -2 , & \text{فرد } k \\ 0 , & \text{زوج } k \end{cases} , \quad b_k = (jk\omega_0)^2 a_k \Rightarrow a_k = \frac{b_k}{(jk\omega_0)^2}$$

$$a_k = \frac{b_k}{-k^2\pi^2} \Rightarrow a_k = \begin{cases} \dfrac{+2}{k^2\pi^2} ; & \text{فرد } k \\ 0 ; & \text{زوج } k \end{cases}$$

تمرین - جواب حل فوق a_k را بطور مستقیم بدست آورده، با نتیجه فوق مقایسه کنید.

جواب سری فوریه سیگنال‌های متناوب گسسته :

تعریف دو تابع متعامد گسسته - دو تابع $x[n]$ و $y[n]$ در فاصله (N_1, N_2) را متعامد گوییم اگر :

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]\, y^*[n] = 0$$

تعریف مجموعه متعامد - مجموعه $\{\varphi_k[n]\}$ را در فاصله (N_1, N_2) متعامد گوییم اگر : (A ثابت است)

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \varphi_k[n]\, \varphi_l^*[n] = \begin{cases} A, & k=l \\ 0, & k\neq l \end{cases}$$

مثال - مجموعه توابع نمایی مختلط $\varphi_k[n] = \{e^{jk\omega_0 n}\}$ و $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ در بازه $n=0,1,2,\dots,N-1$

متعامد می‌باشد. (اثبات نمایید)

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\omega_0 n} \cdot e^{-jl\omega_0 n} = \begin{cases} A, & k=l \\ 0; & k\neq l \end{cases}$$

تعریف سری فوریه تعمیم یافته - بسط یک سیگنال $x[n]$ تحت شرایطی برحسب مجموعه متعامد $\varphi_k[n]$ گوییم.

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k\, \varphi_k[n]$$

$$x[n] = a_0\varphi_0[n] + a_1\varphi_1[n] + \dots + a_{N-1}\varphi_{N-1}[n]$$

برای محاسبه a_k طرفین رابطه فوق را در $\varphi_l^*[n]$ ضرب و $\sum_{k=0}^{N-1}$ گرفته می‌شود

بنابراین طبق خاصیت متعامد بودن خواهیم داشت :

$$a_k = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} x[n]\,\varphi_k^*[n]}{\sum_{k=0}^{N-1} \varphi_k[n]\cdot\varphi_k^*[n]} \qquad (*)$$

تذکر: مجموع توابع متعامد را می‌توان، مجموعه‌های مختلف چون سری فوریه زمان گسسته در نظر گرفت که در حالت پیوسته دارای مجموع توابع نمایی مختلط است و در گسسته حاصل به صورت محدود نمایی است.

تعریف سری فوریه‌ای - سیگنال گسسته بر حسب مجموع توابع نمایی مختلط به صورت زیر است:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k\, e^{j\frac{2k\pi n}{N}} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{N} \qquad e^{jk\omega_0 n}$$

و

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \Longleftarrow$$

از فرمول (*) نتیجه شده

$$\varphi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

تذکر - مجموعه توابع نمایی مختلط گسسته هم نسبت به n و هم نسبت به k پریودیک می‌باشد

$$\varphi_k[n+N] = \varphi_k[n] \quad , \quad \varphi_{k+N}[n] = \varphi_k[n]$$

پریود $= N$

حل -

$x(n) = \sin \omega_0 n \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N} \Longrightarrow a_k = ?$

برای مسئله جواب شبیه جات دیگر بهتر است نمایی‌اش را بنویسیم:

$k=1 \qquad\qquad k=-1$

$$x(n) = \frac{1}{2j} e^{j\underbrace{\left(\frac{2\pi}{N}\right)}_{\omega_0} n} - \frac{1}{2j} e^{-j\underbrace{\left(\frac{2\pi}{N}\right)}_{\omega_0} n} \Longrightarrow a_1 = \frac{1}{2j} \;;\; a_0 = a_2 = a_3 = \dots = a_{N-2} \;,\; a_{N-1} = \frac{-1}{2j}$$

$a_1 = \frac{1}{2j} \qquad a_{-1} = \frac{-1}{2j}$

ولی پس از آن تکرار می‌شوند:

توجه کنیم

1- جواب a_k تعداد محدودی می‌باشند یعنی N عدد (در حالیکه در پیوسته‌ها تعداد بی‌نهایت از سیگنال‌ها به‌وجود می‌آمد).

2- a_k پریودیک بوده و پریود آن N است یعنی

$$a_k = a_{k+N}$$

(این موضوع را از رابطه a_k مشخص‌تر می‌توان نتیجه گرفت)

بنابراین a به شکل مقابل داریم

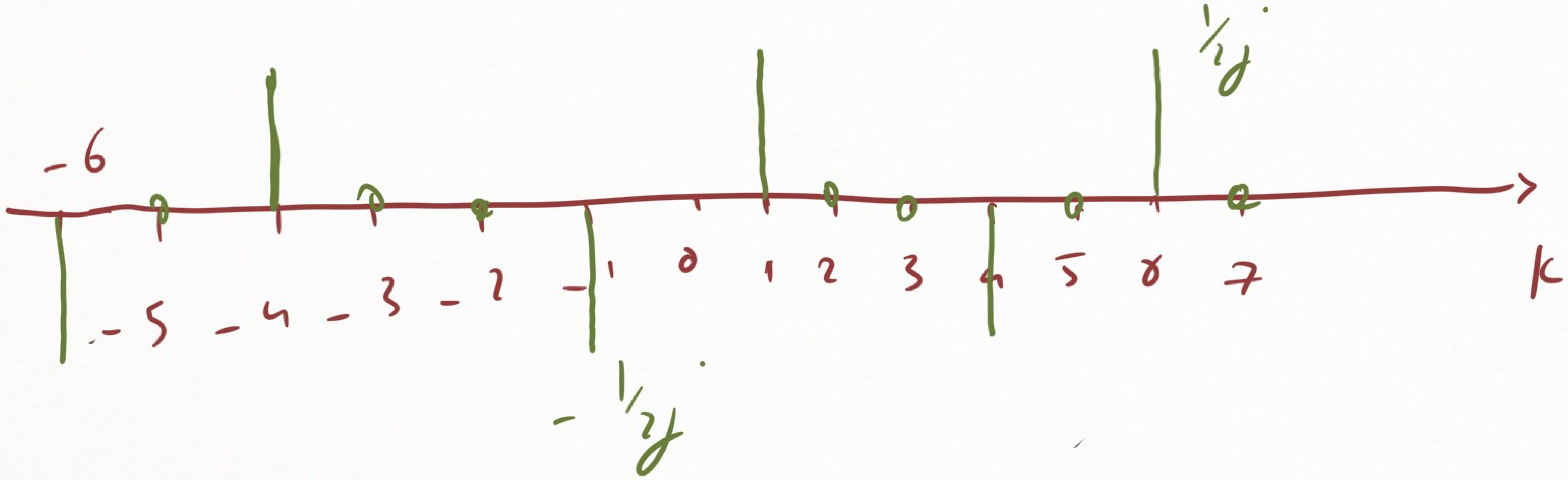
$a_{-1} = a_{-1+N} \quad , \quad a_1 = a_{1+N}$

تمرین سری:

$x(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)n \Longrightarrow a_k = ?$

$N = 5 ; \omega_0 = \frac{2\pi}{5} \Longrightarrow x(n) = \frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi}{5}n} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{2\pi}{5}n} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2j} , a_{-1} = \frac{-1}{2j} \\ a_0 = 0 , a_2 = a_3 = 0 , a_4 = \frac{-1}{2j} \\ a_{k+5} = a_k \end{cases}$

$a_{-1+5} = a_k$

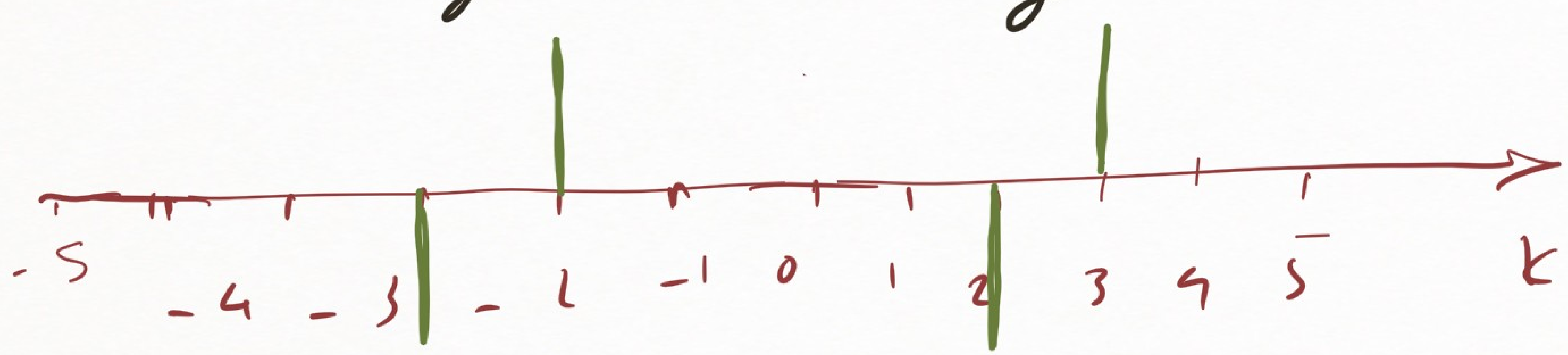


$k=3$ $k=-3$

$x(n) = \sin 3\left(\frac{2\pi}{5}\right)n \Longrightarrow a_k = ?$, $N = 5$, $x(n) = \frac{e^{j3\left(\frac{2\pi}{5}\right)n} - e^{-j3\left(\frac{2\pi}{5}\right)n}}{2j}$

ω_0 ω_0

$\Rightarrow a_3 = \frac{1}{2j} ; a_{-3} = \frac{-1}{2j} , a_0 = a_1 = a_4 = 0 , a_2 = \frac{-1}{2j}$



$a_{-3+5} = a_2$

* a_{-3} در واقع a_{-3+N} است.

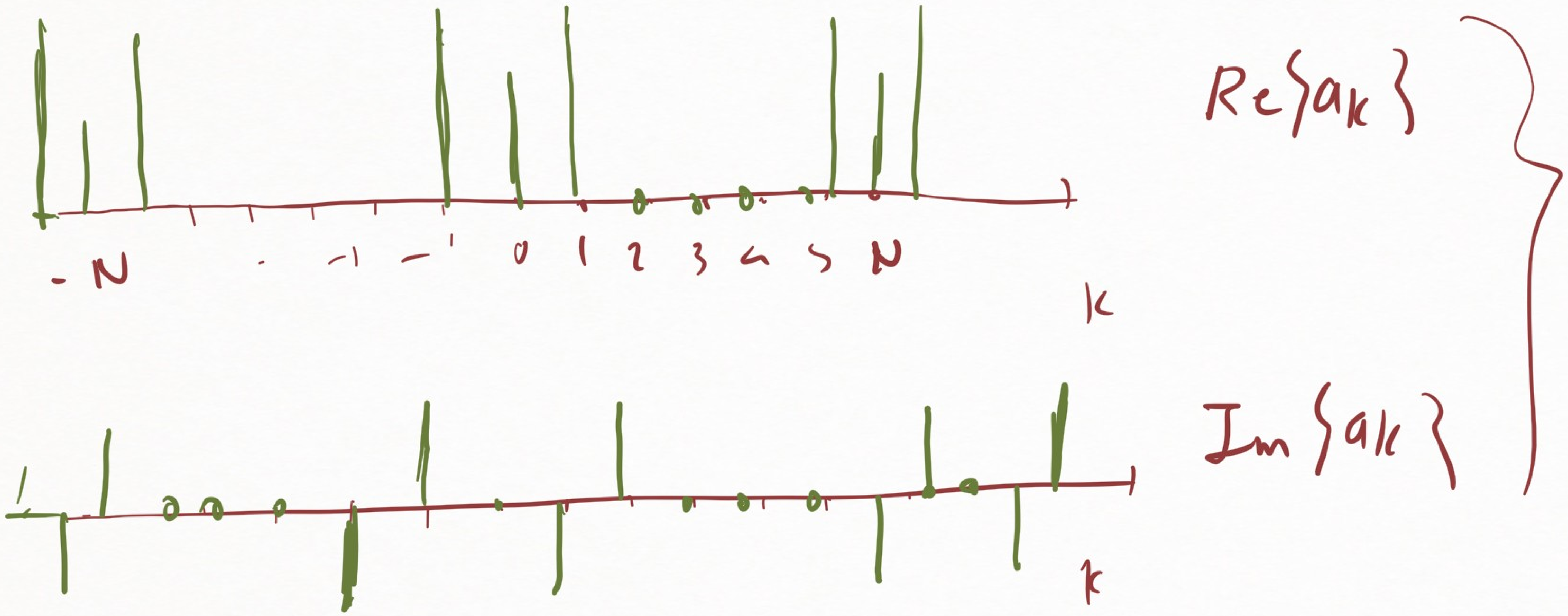
$$x(n) = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow a_k = ?$$

$$x(n) = 1 + \frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right] + 3\left[\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}{2}\right] + \left(\frac{e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{4\pi}{N}n} + e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{4\pi}{N}n}}{2}\right)$$

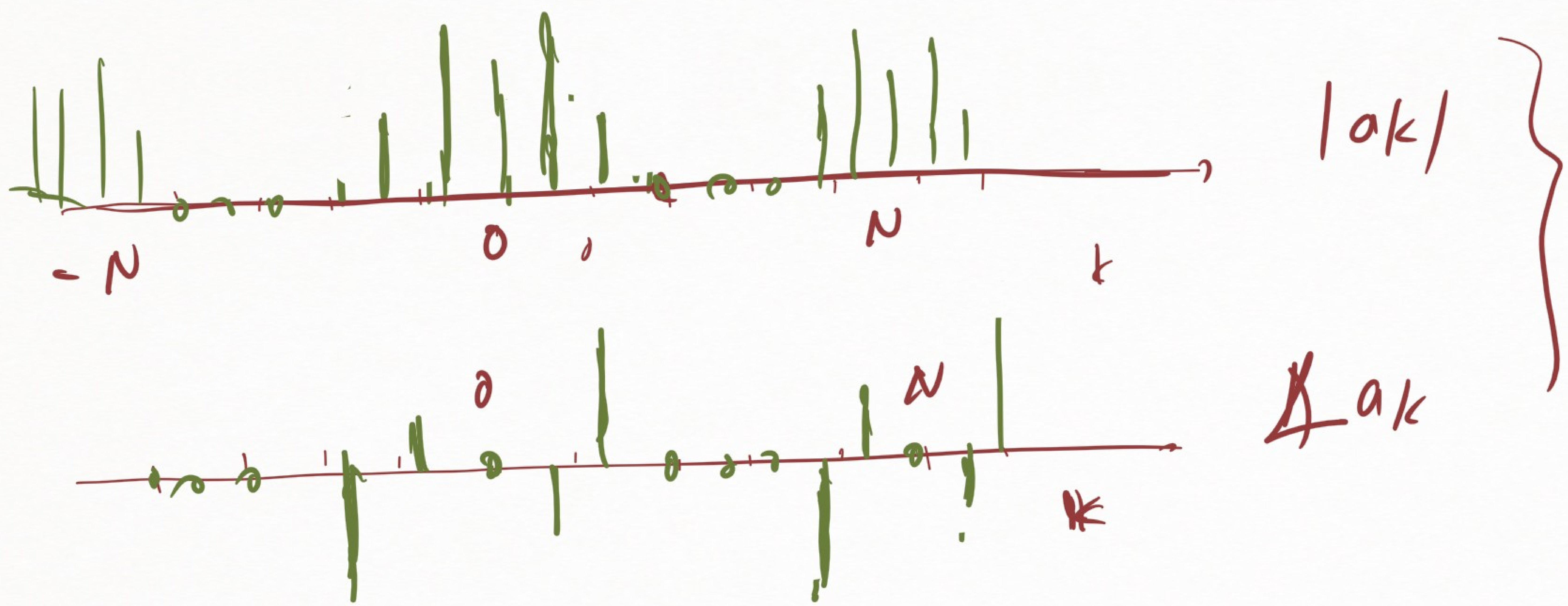
$$x(n) = \underbrace{1}_{a_0} + \underbrace{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2j}\right)}_{a_1} \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{N}n}}_{k=1} + \underbrace{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j}\right)}_{a_{-1}} \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}_{k=-1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}\right)}_{a_2} \underbrace{e^{j2\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}}_{k=2} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)}_{a_{-2}} \underbrace{e^{-j2\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}}_{k=-2}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} - \frac{j}{2} \\ a_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j, \quad a_2 = \frac{1}{2}j, \quad a_{-2} = -\frac{1}{2}j \\ a_0 = a_N, \quad a_{-1} = a_{N-1}, \quad a_2 = a_{N+2}, \quad a_{-2} = a_{N-2} \end{cases}$$

بقیه ضرایب صفر میباشند.



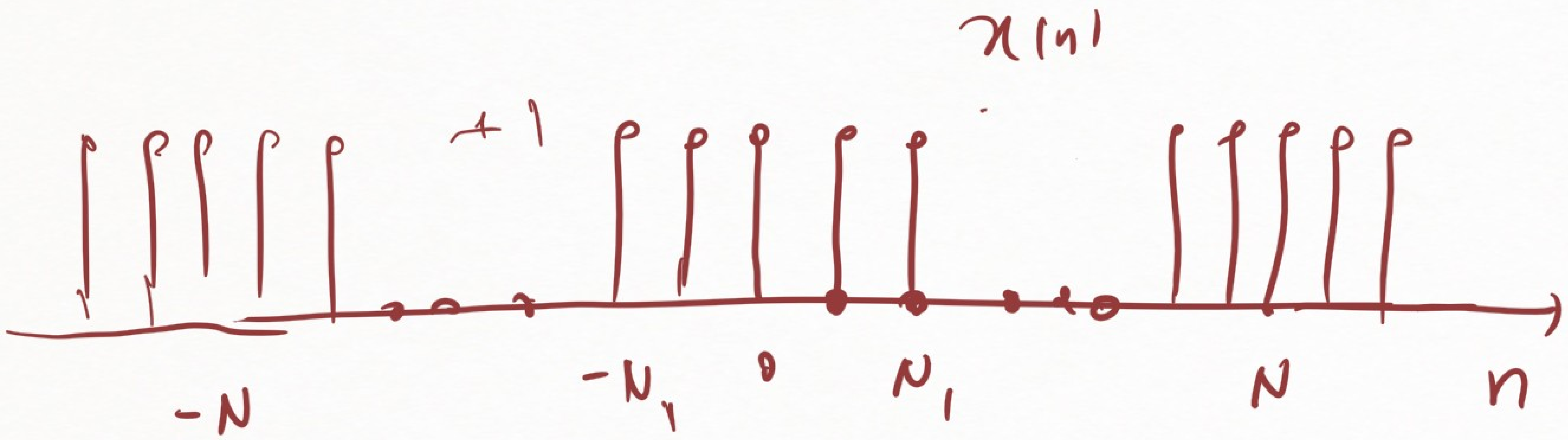
با توجه به اینکه a_k عددی مختلط است برای رسم آن می‌توان بخش حقیقی و موهومی یا اندازه و فاز را رسم کرد.



تمرین: ملاحظه شود

اندازه و بخش حقیقی توابعی زوج
فاز و بخش موهومی توابعی فرد

البته برای $x[n]$ حقیقی



$\Rightarrow a_k = ?$

در این حالت از فرمول باید استفاده کنیم:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2k\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} 1\times e^{-j\frac{2k\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\frac{2k\pi}{N}(m-N_1)} =$$

تغییر متغیر $\begin{cases} m = n+N_1 \\ n = m-N_1 \end{cases}$

$$a_k = \frac{1}{N} e^{j\frac{2k\pi}{N}N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} = \frac{1}{N} e^{j\frac{2k\pi}{N}N_1}\left(\frac{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1)}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}\right)$$

قاعده هندسی

$$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n = \begin{cases} N \;, & \alpha = 1 \\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} \;, & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\,\frac{\cancel{e^{-jk(2\pi/2N)}}\left[e^{jk2\pi(N_1+1/2)/N} - e^{-jk2\pi(N_1+1/2)/N}\right]}{\cancel{e^{-jk(2\pi/2N)}}\left[e^{jk(2\pi/2N)} - e^{-jk(2\pi/2N)}\right]}$$

با فاکتورگیری از الگو توان ها به نتیجه

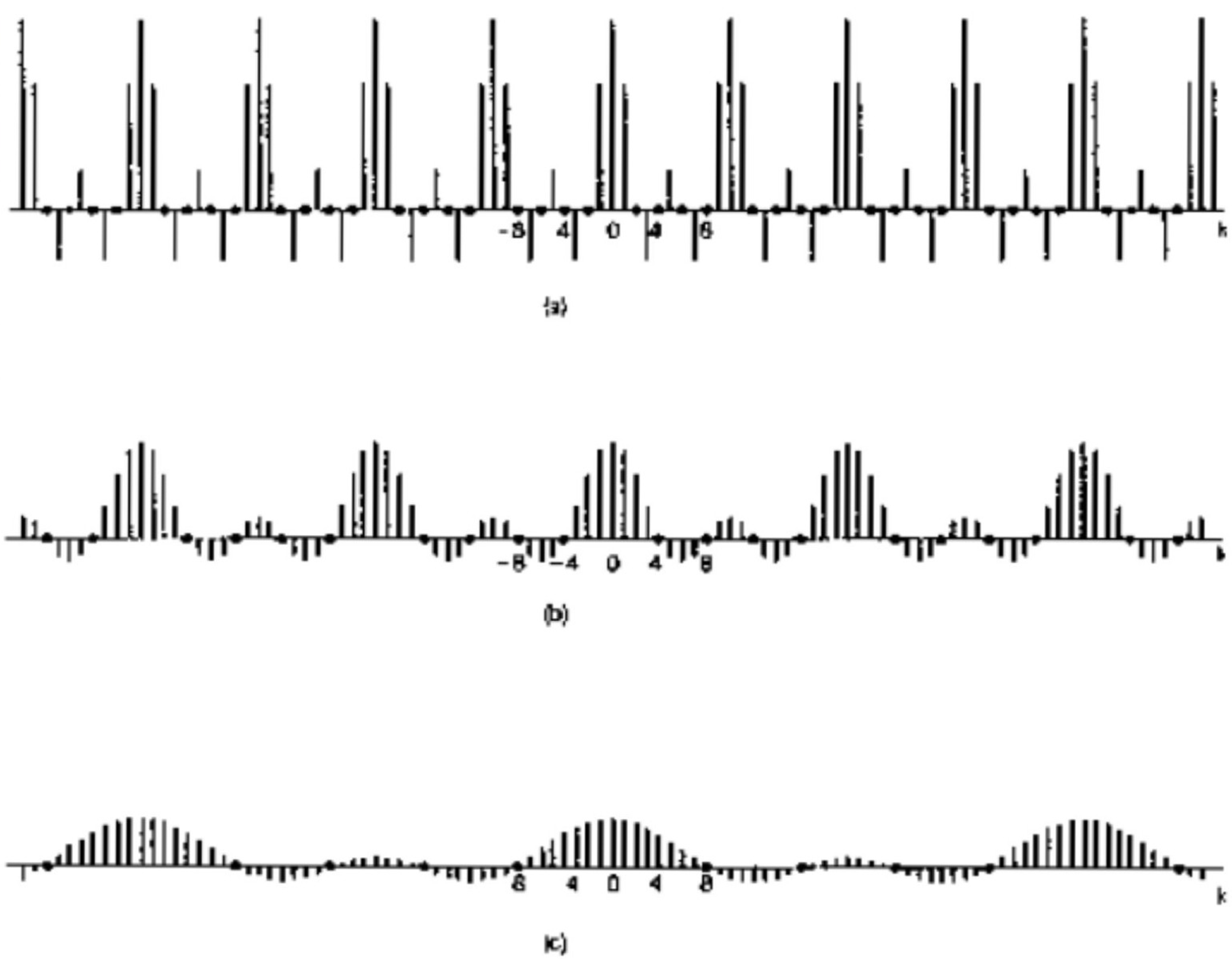


Figure 3.17 Fourier series coefficients for the periodic square wave of Example 3.12; plots of Na_k for $2N_1+1=5$ and (a) $N=10$, (b) $N=20$; and (c) $N=40$.

ادامه مثال :

$$a_k = \frac{1}{N}\frac{\sin[2\pi k(N_1+1/2)/N]}{\sin \pi k/N}$$

for $k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$

$$a_k = \frac{2N_1+1}{N}, \text{ for } k = 0, \pm N, \ldots$$

* شکل‌ها ضرایب به ازای مقادیر مختلف N نشان میدهند.

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1} a_k e$$

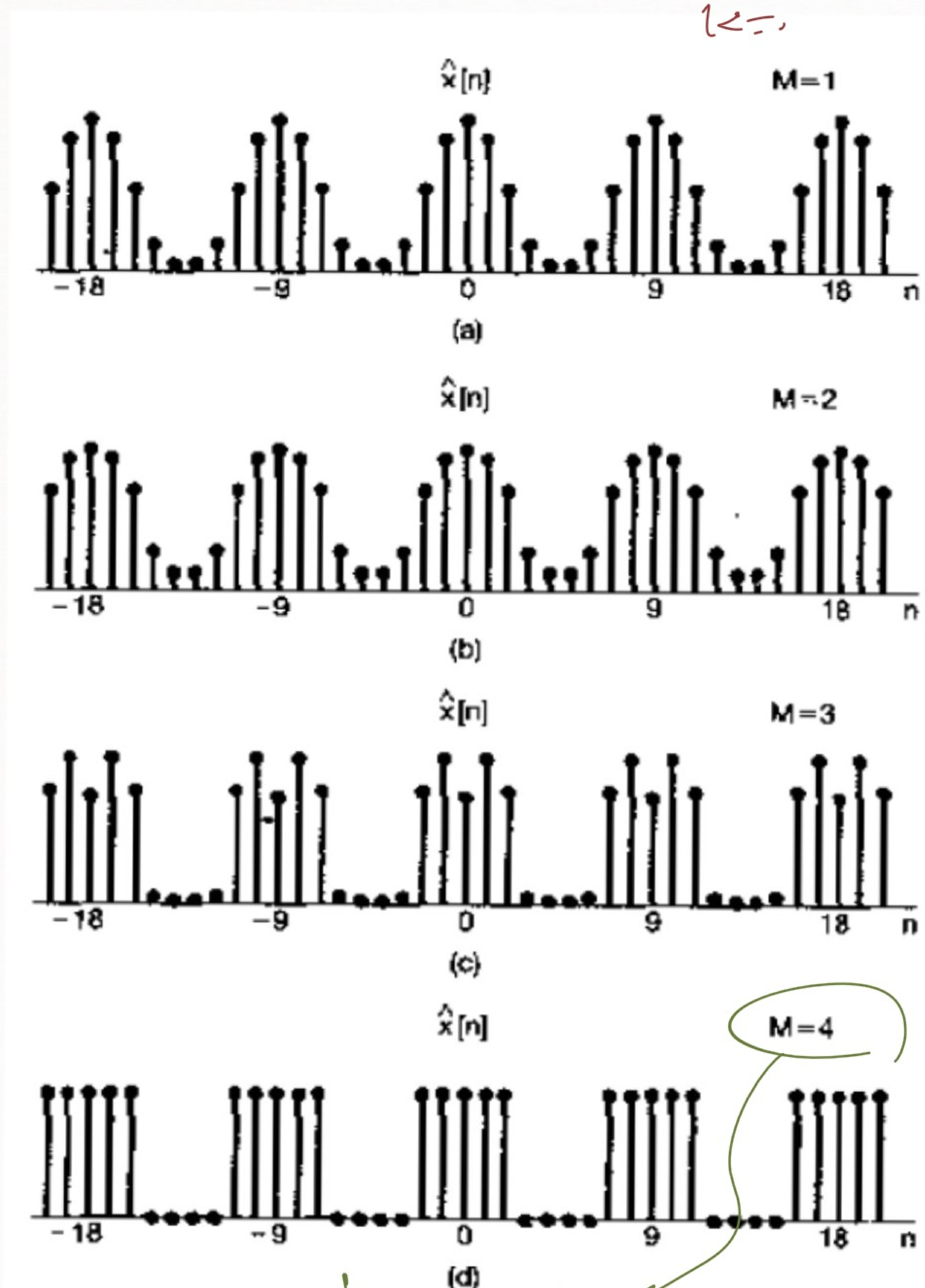


Figure 3.18 Partial sums of eqs (3.106) and (3.107) for the periodic square wave of Figure 3.16 with $N = 9$ and $2N_1 + 1 = 5$ (a) $M = 1$; (b) $M = 2$, (c) $M = 3$, (d) $M = 4$.

به ازای این مقدار شبیه $x(n)$ است

چون a_k پنج عدد است.

توجه: در بحث همگرایی سری فوریه پیوسته در زمان دیدیم که با بی‌نهایت تعداد جملات به یک حالت حاصل به همگرایی نزدیک می‌شد و در نقاط ناپیوستگی‌ها پدیده گیبس را داشتیم

در اینجا شبه همگرایی و پدیده گیبس مطرح نیست. البته باید دقت کرد که

$$\hat{x}[n]=\sum_{k=-M}^{M} a_k e^{j\frac{2k\pi}{N}n}$$ در دست

$\hat{x}[n] \to x(n)$ میل می‌کنند که تعداد a_k ها به اندازه کافی باشد (یعنی N عدد)

* شکل نشان این پدیده را نشان می‌دهد که به ازای $M=1$ و $M=2$ و $M=3$ شکل $\hat{x}(n)$ شبیه $x(n)$ (شکل صریح و بیشتر می‌شود) نیست ولی به ازای $M=4$ یعنی تعداد ضرایب به قدر پنج عدد (5) است، آنها $x(n)$ می‌شود.