جلسه ۱۲

۹)

$$A = \begin{pmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_۱ = \max\left(\underbrace{۱+۲+۰}_{۳},\ \underbrace{۳+۱+۱}_{۵}\right) = \max(۳,۵) = ۵$$

$$\|A\|_\infty = \max(۴, ۳, ۱) = ۴$$

$$\|A\|_F = \sqrt{|a_{۱۱}|^۲ + |a_{۱۲}|^۲ + |a_{۲۱}|^۲ + |a_{۲۲}|^۲ + |a_{۳۱}|^۲ + |a_{۳۲}|^۲}$$

$$= \sqrt{۱+۹+۴+۱+۱} = ۴$$

$$\|A\|_۲ = \sqrt{\lambda_{\max}} \longrightarrow |A^TA - \lambda I| = ۰$$

$$A^TA - \lambda I = \begin{bmatrix} ۵-\lambda & -۵ \\ -۵ & ۱۱-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\det = ۰} \lambda^۲ - ۱۶\lambda + ۳۰ = ۰$$

$$\begin{cases} \lambda_۱ = ۱۳,۸۳ \\ \lambda_۲ = ۲,۱۶۹ \end{cases} \longrightarrow \|A\|_۲ = \sqrt{۱۳,۸۳}$$

$$A^TA - \lambda I = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۰ \\ ۳ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times۳} \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times۲} = \begin{bmatrix} ۵ & -۵ \\ -۵ & ۱۱ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$$

$$-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5-\lambda & -5\\ -5 & 11-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\cdot) = (5-\lambda)(11-\lambda) - 25 = \cdots$$

$$\text{if} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2+i & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max\left(1+\sqrt{5}\ ,\ 5\right) = 5$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -b & -b \\ -b & 1 & b \\ -b & b & 1 \end{pmatrix} \qquad 1$$

متقارن ✓

کهادهای اصلی مقدم: n تا ← ۳ تا

a_{11} و $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ و A

$$a_{11} = 1 > 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -b \\ -b & 1 \end{vmatrix} > 0 \rightarrow 1 - b^2 > 0$$

$$\rightarrow \boxed{-1 < b < 1} \quad (1)$$

$$|A| > 0 \rightarrow 1(1-b^2) + b(-b+b^2)$$

$$-b(-b^2+b) \Rightarrow$$

$$(1-b)(1+b) - b^2(1-b)$$

$$-b^2(1-b)$$

$$\Rightarrow (1-b)(1+b-b^2-b^2)$$

$$\Rightarrow (b-1)(\underbrace{2b^2-b-1}_{(2b+1)(b-1)})$$

$$\Rightarrow (b-1)^2(2b+1) > 0$$

$$\boxed{b > -\frac{1}{2}} \quad (2)$$

(1) , (2)

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{2} < b < 1}$$

۲)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \quad \text{S.P.D}$$

if $a \geq 1$ ✓

$\underbrace{\text{کلیه کهادهای اصلی}}_{۲^۳-۱=۷}$ غیرمنفی باشند و $|A| = ۰$

$\boxed{a > ۰}$ $\boxed{a \geq ۱}$

$a_{۱۱}$ ✓ , $a_{۲۲}$ ✓ , $a_{۳۳}$, و A

$a - ۱ \geq ۰$

$$\begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{pmatrix} ✓ \quad , \quad \begin{pmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{pmatrix}$$

$a - ۱ \geq ۰ \longrightarrow \boxed{a \geq ۱}$

$$|A| = ۱(a-۱) + ۱(-a+۱) + ۱(۱-۱) = ۰ \;✓$$

۳

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^T = A)$$

چون متقارن نیست باید بخش متقارن ماتریس حساب شود و سپس تعیین علامت کنیم:

$$\underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\text{متقارن}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\text{پادمتقارن}}$$

$\bar{A}$?

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 0.5 \\ 1.5 & 4 & 1.5 \\ 0.5 & 1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\bar{A}| = 0$$

کهادهای اصلی:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1.5 \\ 1.5 & 4 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1.5 \\ 1.5 & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

لذا $\bar{A}$ مثبت نیمه معین ← A مثبت نیمه معین

---

۴)

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

شرط منفرد بودن:

$$|A| = (1+a)(-1) - 1(1) + 2(1) = 0$$

$$= -a - 1 - 1 + 2 = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{a = 0}$$

$$A_n = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

عدد حالت : $K = \|A_n\| \cdot \|A_n^{-1}\|$

$$\|A_n\| = ?\ \sqrt{\lambda_{max}}$$

$$|A_n^T A_n - \lambda I| = ۰$$

$$\longrightarrow -\lambda^۳ + ۱۳\lambda^۲ - ۲۲\lambda + ۱ = ۰$$

roots([-۱ ۱۳ -۲۲ ۱])

$$\lambda_۱ = ۱۱٫۰۱$$

$$\lambda_۲ = ۱٫۹۴ \implies \|A_n\| = \sqrt{۱۱٫۰۱}$$

$$\lambda_۳ = ۰/۰۴۶۷ \qquad \|A_n^{-1}\| = \frac{۱}{\sqrt{۰/۰۴۶۷}}$$

نکته)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{min}}}$$

$$\Rightarrow K = \sqrt{11.01} \times \frac{1}{\sqrt{0.0427}}$$

$$\boxed{\simeq 16.06}$$

۱۵

الف)

$$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

$$\leq 4 + 7 = 11 \quad \checkmark$$

ب)

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-j \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \|a\|_1 = ?$$

$$\|a\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i| = ۲ + \sqrt{۲} + ۱$$
$$= ۳ + \sqrt{۲}$$

$$\|a\|_\infty = \max(۲, \sqrt{۲}, ۱) = ۲$$

ج)

$$|kA| = k^n |A|$$
$$= ۲^۳ |A| = ۸ \times |A|$$

د) ✓

$$A^T A = \underbrace{A A^T}_{} = I = \underbrace{A A^{-1}}_{}$$

$$A^T = A^{-1}$$

د)

$$A=\begin{pmatrix} a & -۲ & c \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ b & ۹ & -۲ \end{pmatrix}$$

$$\text{if} \quad R(A)=۳ \longrightarrow |A|\neq ۰$$

$$\Rightarrow |A| = (۳b-۹)(۱-c)\neq ۰$$

$$\boxed{c\neq ۱} \quad \text{و} \quad \boxed{b\neq ۳}$$

$$\text{if} \quad R(A)=۲$$

حاصل یک کهاد ۲x۲ غیرصفر پیدا شود

$$۳a+۳\neq ۰ \Rightarrow a\neq -۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=۱ \\ b=۳ \\ a\neq -۱ \end{cases} \longrightarrow R(A)=۲$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = ۳ \\ c = 1 \end{cases} \longleftarrow R(A) = 1 \text{ برای}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & -۳ & 1 \\ 1 & ۳ & -1 \\ ۳ & ۹ & -۳ \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R(A) = 1}$$

$$c_1 u + c_2 v + c_3 w = r \qquad \text{(v)}$$

$$\Rightarrow c_1 \begin{bmatrix} ۴ \\ ۴ \\ ۰ \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ ۲ \\ 1 \end{bmatrix} = r$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} ۴c_1 + ۲c_2 + c_3 \\ ۴c_1 + ۲c_3 \\ -c_2 + c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_۱ \\ c_۲ \\ c_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_۱ \\ r_۲ \\ r_۳ \end{bmatrix}$$

شرط وجود جواب : $|A| \neq ۰$

$$|A| = ۴(۲) - ۲(۴) + ۱(-۴)$$

$$= -۴ \neq ۰ \quad \checkmark$$

بردارهای مذکور، فضای $R^۳$ را اسپن می‌کنند