دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی برق و روباتیک

مخابرات ۱

استاد مربوطه : دکتر هادی گرایلو

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

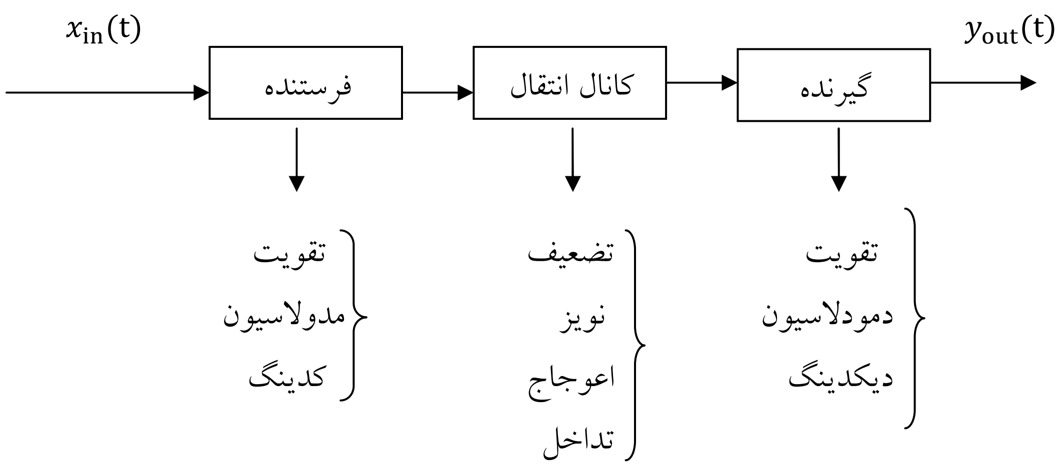
گردآورنده : مرتضی شامانی

بهمن‌ماه ۸۹

فصل اول

انتقال سیگنال و فیلتر کردن

دیاگرام یک سیستم مخابراتی :



فرستنده: فرستنده سیگنال ورورودی $x_{in}(t)$ را به سیگنالی تبدیل می کند که مناسب انتقال در داخـل کانـال باشد. لذا اعمال پردازش سیگنال که در آنجا انجام می‌شود تقریباً همیشه شامل تقویت، مدولاسـیون[۱] و احتمـالاً رمزنگاری[۲] است.

مدولاسیون مشخصات طیفی سیگنال ورودی را متناسب با مشخصات طیفـی کانـال تغییـر مـی‌دهـد و کـدینگ سیگنال ورودی را به گونه‌ای تغییر می‌دهد که احتمال یا نرخ خطا در گیرنـده (بـدلیل وجـود نـویز، تـداخل و اعوجاج) کاهش یابد.

کانال انتقال: در کانال انتقال معمولاً توان سیگنال ورودی کاهش می یابد که به آن تضعیف[۳] می‌گویند. لذا

1. modulation 2. coding
3.attenuation

لازم است در گیرنده واحدی برای تقویت[1] وجود داشته باشد. کانال انتقال علاوه بر تضعیف شامل نویز، تداخل و اعوجاج نیز می‌باشد که بسیار جدی‌تر از تضعیف هستند زیرا آنها شکل سیگنال را تغییر می‌دهند حال آنکه تضعیف فقط اندازه سیگنال را تغییر می‌دهد که با یک تقویت‌کننده قابل جبران است.

نویز : به تغییرات تصادفی و غیر قابل پیش بینی سیگنال الکتریکی گفته می‌شود. نویز در اثر فرآیندهای طبیعی داخل و یا خارج سیستم تولید می‌شود. بطور مثال مقاومت الکتریکی نویز دارد. در عمل، نویز همواره وجود دارد و نمی‌توان آن را بطور کامل حذف کرد.

اعوجاج : به تغییر شکل غیرخطی سیگنال ورودی در حوزه زمان گفته می‌شود. اگر سیگنال ورودی صفر باشد اعوجاج هم صفر است. برای حذف یا کاهش اثرات اعوجاج از تعدیل کننده[2] و یا کامپندینگ[3] استفاده می شود. مهمترین تفاوت نویز و اعوجاج این است که سیستم دارای اعوجاج دارای رفتاری قابل تشخیص است، اما نویز اینگونه نیست.(نویز یعنی یک سیگنال تصادفی) سیستمی که دارای ورودی نیست اگر به آن اعوجاج دهیم خروجی نخواهیم داشت، اما در مورد نویز چه ورودی بدهیم چه ندهیم؛ در خروجی، نویز خواهیم داشت.

تداخل : به تأثیر عوامل محیطی روی سیگنال اصلی گفته می شود که راه حل آن استفاده از فیلترهای مناسب است.

توجه : نویز، تداخل و اعوجاج در هر نقطه از سیستم مخابراتی ممکن است روی دهد اما مرسوم است که همه آن‌ها را در قسمت مربوط به کانال مدل کنند و بقیه سیستم را ایده‌آل فرض می‌کنند.

گیرنده : تمام کارهای لازم برای تبدیل سیگنال دریافتی $x_{in}(t)$ از کانال انتقال به سیگنال پیغام $y_{out}(t)$ را باید انجام دهد. از جمله:

- تقویت توان (بخاطر تضعیف کانال)

---

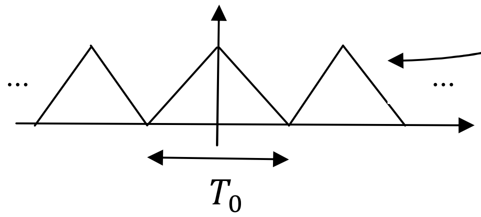
1. amplification
2. equalizer
3. companding

- دمدولاسیون[1] برای برگرداندن سیگنال از حوزه طیفی کانال به حوزه طیفی اولیه
- دیکدینگ[2] برای استخراج پیام از سیگنال کد شده.

لذا در یک سیستم مخابراتی ایده آل باید: $y_{out}(t) = x_{in}(t)$

یادآوری سری فوریه :

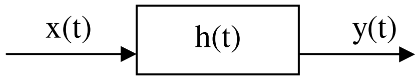
با فرض داشتن یک سیگنال متناوب v(t)



$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n\, e^{j2\pi n f_0 t}$ و $f_0 = \frac{1}{T_0}$

$$\Longrightarrow V(t) \cong \sum_{n=-M}^{M} c_n e^{j2\pi f_0 t}$$

در یک سیستم LTI (خطی تغییرناپذیر با زمان) داریم :



$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$ که h(t) پاسخ ضربه[3] است.

تابع انتقال h(t) برابر است با : $\mathcal{F}\{h(t)\} = H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt$

اگر h(t) حقیقی باشد H(f) تقارن هرمیتی دارد، یعنی :

$$H(-f) = H^*(f) \equiv \begin{cases} |H(f)| & \text{تابع زوج} \\ \measuredangle H(f) & \text{تابع فرد} \end{cases}$$

نکته : شرط لازم برای وجود تبدیل فوریه، LTI بودن است.

در یک سیستم LTI اگر ورودی x(t) و خروجی y(t) باشد، داریم :

$$x(t) = A_x \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x) \quad \rightarrow \quad y(t) = A_y \cos(2\pi f_0 t + \varphi_y)$$

$$\begin{cases} A_y = A_x . |H(f)|_{f=f_0} \\ \varphi_y = \varphi_x + \angle H(f_0) \end{cases}$$

---

1. demodulation 2. decoding
3. impulse response

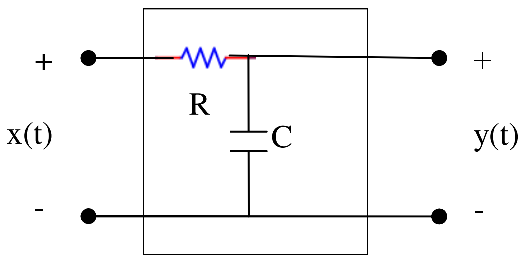
منظور از پاسخ فرکانسی[1] یک سیستم LTI، رسم همزمان دو منحنی $\measuredangle H(f)$ و $|H(f)|$ برحسب فرکانس f است.

انرژی سیگنال :

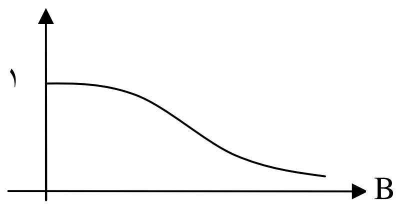
برای سیگنال خروجی سیستم LTI می‌توان نوشت :

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 . |H(f)|^2 df$$

مثال ۱ : پاسخ فرکانسی مدار RC پایین گذر :

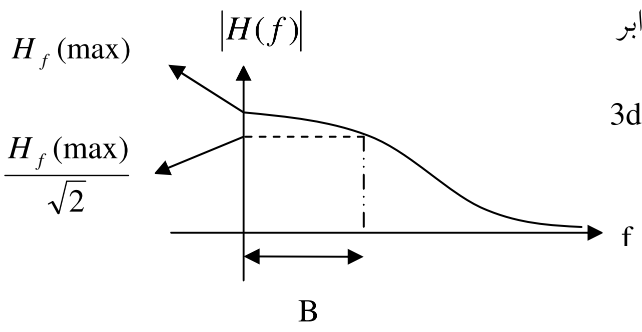


$$|H(f)| = \frac{|Y(f)|}{|X(f)|}$$



$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1/cj\omega}{1/cj\omega + R} = \frac{1}{1 + j2\pi f Rc} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{B}}$$

$\Longrightarrow$ $B = \dfrac{1}{2\pi Rc}$ (B پهنای باند 3dB- سیستم است)



برای یک سیستم پایین گذر، پهنای باند 3dB-، برابر فرکانسی است که پاسخ دامنه یا گین به اندازه 3dB افت کند و این معادل آن است که اندازه دامنه از $H(\max)$ به $\frac{H(max)}{\sqrt{2}}$ برسد.

$$20\log\frac{H(max)}{\sqrt{2}} = 20\log \mathrm{H(max)} - 20\log\sqrt{2} = 20\log \mathrm{H(max)} - 3dB$$

1. frequency response

مثال ۲ : برخی سیستم ها و تابع انتقال آنها :

سیستم ضرب اسکالر $y(t) = \pm kx(t) \rightarrow H(f) = \pm k$

سیستم مشتق گیر $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \rightarrow H(f) = j2\pi f$

سیستم انتگرالگیر $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d(\lambda) \rightarrow H(f) = \dfrac{1}{j2\pi f}$

سیستم تأخیر زمانی $y(t) = x(t - t_d) \rightarrow H(f) = e^{-j2\pi f t_d}$

اعوجاج :

سیستم بدون اعوجاج، سیستمی است که شکل سیگنال ورودی را تغییر ندهد یعنی خروجی عیناً مانند ورودی باشد مگر اینکه در عددی ضرب شده باشد و یا اینکه نسبت به مبدأ زمانی جابجا شده باشد.

بعبارت دیگر تنها تغییراتی مجاز به اعمال است که شامل فقط تغییر مقیاس و تأخیر زمانی باشد. بنابراین در یک سیستم بدون اعوجاج داریم : $y(t) = kx(t - t_d)$

(k یک عدد ثابت و t_d هم مقدار تأخیر ثابت است.)

سیستم بدون اعوجاج است اگر :

$$H(f) = ke^{-j2\pi f t_d} \Leftrightarrow \begin{cases} |H(f)| = |k| \\ \measuredangle H(f) = -2\pi f t_d \pm m180^o \end{cases} \quad *$$

توجه : اگر سیستمی در بازه فرکانسی مورد علاقه ما نیز شرایط * را داشته باشد، می توان آنرا بدون اعوجاج نامید.

انواع اعوجاج :

۱- خطی ۲- غیرخطی

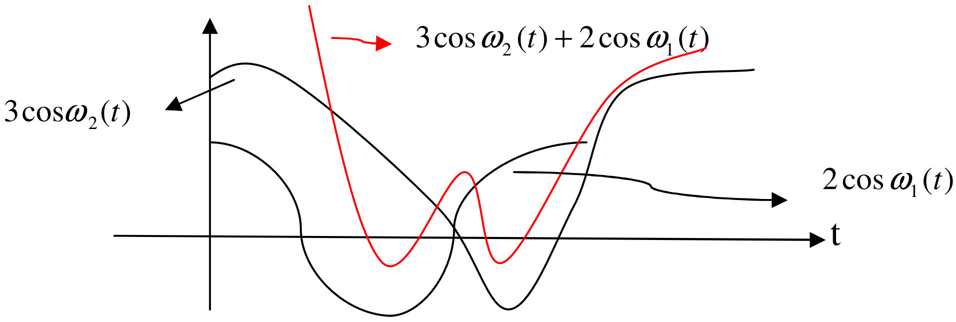
اعوجاج خطی : ۱- اعوجاج دامنه، یعنی $|H(f)| \neq k$ (گاهی اعوجاج فرکانسی نیز نامیده می‌شود.)

۲- اعوجاج تأخیر، یعنی $\measuredangle H(f) \neq -2\pi f t_d \pm m180^\circ$ (اعوجاج فاز نیز نامیده می‌شود.)

مفهوم شیفت زمانی ثابت و شیفت فاز ثابت :

مفهوم شیفت (تأخیر) زمانی ثابت با شیفت فاز ثابت بسیار متفاوت است که در مثال زیر توضیح داده شده است؛

$$if \quad x(t) = 2\cos(\omega_1 t) + 3\cos(\omega_2 t)$$



$x(t-t_0) = 2\cos(\omega_1(t-t_0)) + 3\cos(\omega_2(t-t_0))$ مفهوم شیفت زمانی ثابت

$x'(t) = 2\cos(\omega_1 t - \varphi) + 3\cos(\omega_2 t - \varphi) = 2\cos(\omega_1(t - \frac{\varphi}{\omega_1})) + 3\cos(\omega_2(t - \frac{\varphi}{\omega_2}))$ شیفت فاز ثابت

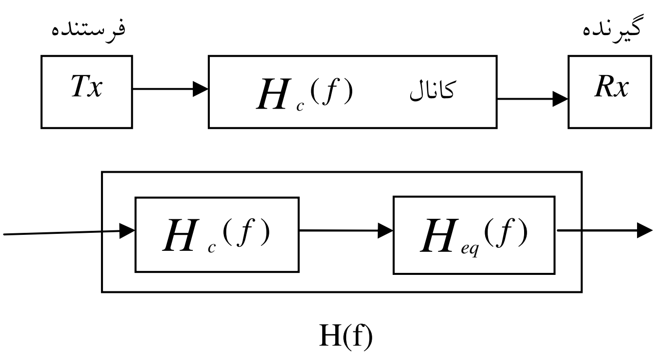
$t_1 = \frac{\varphi}{\omega_1}$ و $t_2 = \frac{\varphi}{\omega_2}$ چون t_1 با t_2 برابر نیست در نتیجه از دو مفهوم شیفت زمانی ثابت و شیفت فاز ثابت؛ تنها شیفت فاز ثابت باعث اعوجاج می‌شود.

تعدیل[1] :

یک راه حل مناسب برای کاهش اعوجاج، استفاده از تعدیل کننده ها[2] است.

توضیح آنکه؛ از نظر تئوری می‌توان اعوجاج خطی $H_c(f)$ را به کمک یک سیستم تعدیل کننده $H_{eq}(f)$ که بطور سری با کانال قرار می گیرد اصلاح کرد :

باید $H_{eq}(f)$ را بگونه ای طراحی کنیم که H(f) در نهایت بدون اعوجاج شود.



1. equalization 2.equalizer

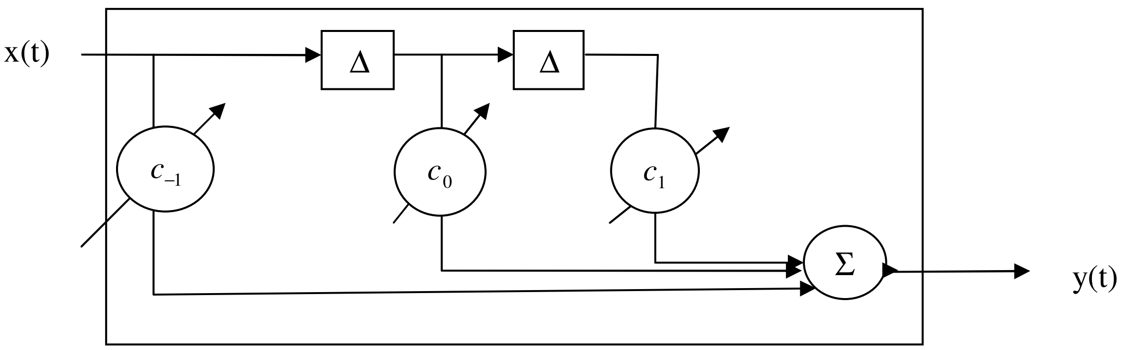
(سیستم بدون اعوجاج یعنی : $H(f)=ke^{-j\omega t_d}$)

$$H(f)=H_c(f).H_{eq}(f)=ke^{-j\omega t_d}$$

$$H_{eq}(f)=\frac{ke^{-j\omega t_d}}{H_c(f)}$$

همانطور که گفته شد در تئوری فقط می‌توان چنین سیستم تعدیل کننده و دقیقی طراحی کرد. در عمل باید تابع انتقال $H_{eq}(f)$ در رابطه اخیر را تقریب زد. یک راه، استفاده از فیلترهای FIR (فیلترهای transversal) یا تعدیل کننده خط تأخیر[1] می‌باشد.

مثلاً برای فیلتر دارای سه ضریب (آنالوگ) داریم :



(Δ نشان دهنده ی تأخیر و c ضریب است. همچنین ضرایب c_{-1} تا c_1 ضرایب قابل تنظیم هستند لذا علامت فلش روی آنها قرار داده شده است.)

$$y(t)=c_{-1}x(t)+c_0x(t-\Delta)+c_1x(t-2\Delta)$$

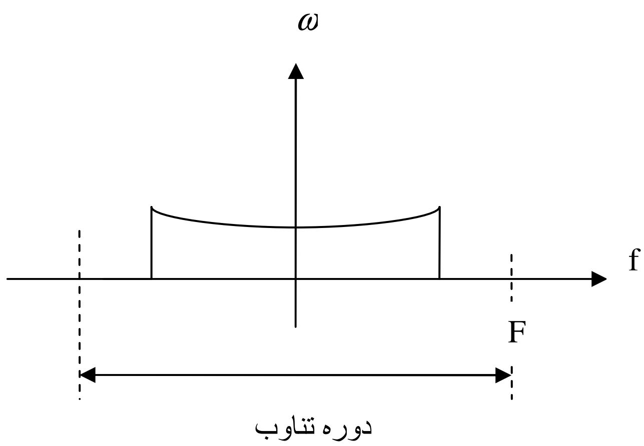
$$\mapsto H_{eq}(f)=c_{-1}+c_0e^{-j\omega\Delta}+c_1e^{-j\omega 2\Delta}=e^{-j\omega\Delta}(c_{-1}e^{j\omega\Delta}+c_0+c_1e^{-j\omega\Delta})$$

$$=e^{-j\omega\Delta}(\underbrace{\textstyle\sum_{m=-1}^{1}c_m e^{-j\omega m\Delta}}_{*})$$

1. lupped-delay-line equalizer

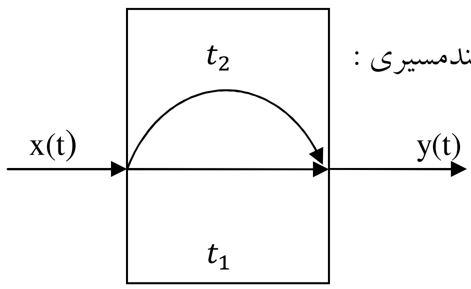
ملاحظه کنید که عبارت ❋ همان سری فوریه است بنابراین روال طراحی فیلتر transversal اینگونه است که ابتدا تعیین می‌کنید برای چه پهنای باندی می‌خواهید تعدیل کننده کار کند. فرض کنید می‌خواهیم برای فرکانس‌های $|f| < w$ کانال را تعدیل کنیم. مقدار Δ در عبارت ❋ با توجه به سری فوریه باید از جنس عکس فرکانس باشد بنابراین باید $\frac{1}{\Delta} \geq w$ باشد. (بعبارت دیگر پریود تابع تقریب باید از پریود تابع اصلی بزرگتر باشد. در اینجا پریود از جنس زمان نیست بلکه از جنس فرکانس است زیرا می خواهیم در حوزه فرکانس تقریب بزنیم.) در مرحله بعد تعیین می‌کنیم که چند ضریب سری فوریه برای تقریب تابع انتقال کانال در محدوده فرکانسی مذکور کافی است. (هرقدر دقت بیشتری بخواهیم، تعداد بیشتری ضریب باید محاسبه شود.) این ضرایب محاسبه شده، همان ضرایب فیلتر transversal هستند.

$$\rightarrow \cong \sum_{m=-M}^{M} c_m e^{-j2\pi f \frac{m}{F}} = \sum_{m=M}^{m} c_m e^{-j\omega m\Delta} \quad و \quad \left(\frac{1}{\Delta} = F \quad و \quad \omega = 2\pi f \right) \qquad \boxed{\rightarrow \frac{1}{\Delta} \geq \omega}$$



دوره تناوب باید بزرگتر – مساوی طیف فرکانسی باشد یعنی: $F \geq \omega$

مثال: اعوجاج چندمسیری :



$$y(t) = k_1 x(t - t_1) + k_2 x(t - t_2)$$

اعوجاج از نوع خطی است چون براحتی می توان از طرفین تبدیل فوریه گرفت.

$$\mapsto \frac{Y(f)}{X(f)} = H_c(f) = k_1 e^{-j\omega t_1} + k_2 e^{-j\omega t_2} \qquad t_2 \succ t_1 \quad , k_2 \prec k_1$$

$$= k_1 e^{-j\omega t_1}(1+ke^{-j\omega t_0}) \qquad و \qquad (\ k=\frac{k_2}{k_1} \quad و \quad t_0 = t_2 - t_1\ )$$

$$H_{eq}(f) = \frac{ke^{-j\omega t_d}}{H_c(f)} = \frac{ke^{-j\omega t_d}}{k_1 e^{-j\omega t_1}(1+ke^{-j\omega t_0})}$$

فرض: $t_d = t_1$ و $k = k_1$ (برای ساده سازی)

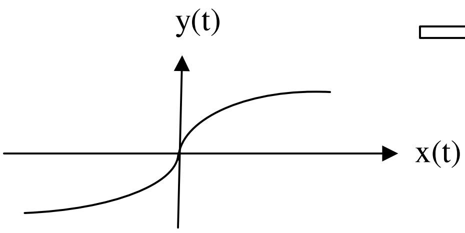
$$.\to\ H_{eq}(f) = \frac{1}{1+ke^{-j\omega t_0}} \to \left(بسط \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\right)$$

$$\to\ H_{eq}(f) = 1 - ke^{-j\omega t_0} + k^2 e^{-j2\omega t_0} - \cdots$$

$$\cong e^{-j\omega t_0}(e^{+j\omega t_0} - k + k^2 e^{-j\omega t_0}) = e^{-j\omega t_0}\sum_{m=-1}^{1} c_m e^{-j\omega m\Delta} \ و (\ c_{-1}=1, c_0=-k,\ c_1=k^2,\ \Delta = t_0)$$

اعوجاج غیر خطی:

مشخصه انتقال $\Longrightarrow$



اعوجاج غیر خطی ناشی از یک سیستم غیرخطی است .

چنین سیستمی تابع انتقال[1] ندارد،

بلکه برای آن می‌توان مشخصه انتقال[2] بصورت $y(t) = T[x(t)]$ در نظر گرفت. علیرغم اینکه تابع انتقال نداریم اما می توان طیف خروجی را محاسبه کرد. برای این کار ابتدا تقریب چند جمله ای y(t) را بر حسب x(t) می نویسیم.

$$بسط\ چند\ جمله\ ای \to y(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t) + \ldots \qquad ❊$$

$$\to Y(f) = a_1 X(f) + a_2 X(f) * X(f) + a_3 X(f) * X(f) * X(f) + \ldots$$

از رابطه فوق می‌توان نتیجه گرفت که اگر ورودی باند محدود[3] نیز باشد، برخلاف سیستم‌های خطی، خروجی باند محدود نخواهد بود.

حال در سیستم غیرخطی فوق چند مورد را در نظر می گیریم:

1. Transfer function
2. Transfer characteristic
3. Band Limited

الف). ورودی یک موج تک تن (سینوسی) باشد : $x(t)=\cos\omega_0(t)$

$$* \;\rightarrow\; y(t)=a_1\cos\omega_0 t+a_2\cos^2\omega_0 t+a_3\cos^3\omega_0 t+\dots$$

(می دانیم که $\cos^2\omega_0 t=\dfrac{1+\cos 2\omega_0 t}{2},\quad \cos^3\omega_0 t=(\dfrac{1+\cos 2\omega_0 t}{2})\cos\omega_0 t,\quad \dots$)

$$\rightarrow y(t)=a_1\cos\omega_0 t+a_2(\frac{1+\cos 2\omega_0 t}{2})+a_3(\frac{1+\cos 2\omega_0 t}{2})\cos\omega_0 t+\dots$$

$$\Longrightarrow \quad y(t)=(\frac{a_2}{2}+\frac{3a_4}{8}+\dots)+(a_1+\frac{3a_3}{4}+\dots)\cos\omega_0 t+(\frac{a_2}{2}+\frac{a_4}{4}+\dots)\cos 2\omega_0 t+(\dots)\cos 3\omega_0 t+\dots$$

ادامه : $\longrightarrow y(t)=A_0+A_1\cos\omega_0 t+A_2\cos 2\omega_0 t+A_3\cos 3\omega_0 t+\dots$

که داریم $\longrightarrow A_0=(\frac{a_2}{2}+\frac{3a_4}{8}+\dots)$ و $A_1=(a_1+\frac{3a_3}{4}+\dots)$ و $A_2=(\frac{a_2}{2}+\frac{a_4}{4}+\dots)$ و ...

از این حالت برای تعیین میزان اعوجاج حاصل از هارمونیک‌های فرکانس اصلی ω_0 استفاده می‌شود.

اعوجاج ناشی از هارمونیک‌ها برابر است با :

$$HD_2(Harmonic\,Distortion)=\left|\frac{A_2}{A_1}\right|\times 100,\quad HD_3=\left|\frac{A_3}{A_1}\right|\times 100,\quad \dots$$

اعوجاج هارمونیکی کل THD[1] برابر است با :

$$THD \overset{\Delta}{=} \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty}|A_n|^2}{|A_1|^2}}\times 100$$

صورت کلیتر عبارت THD به اینصورت است که اگر بسط سری فوریه خروجی را نوشته و ضرائب آن را a_n , b_n بنامیم، آنگاه :

$$THD \overset{\Delta}{=} \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty}a_n^2+b_n^2}{a^2+b^2}}\times 100$$

ب). ورودی مجموع دو سینوسی باشد : $x(t)=\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t$

1. Total Harmonic Distoration

دو سینوسی با فرکانس‌های مختلف f_1, f_2 را با هم جمع و بعنوان ورودی به سیستم غیرخطی می‌دهیم. در این حالت واضح است که در خروجی فرکانس‌های $mf_1 \pm nf_2$ علاوه بر فرکانس‌های اصلی f_1, f_2 وجود خواهد داشت.

به این نوع اعوجاج، مدولاسیون تداخلی[1] گفته می شود.

ج). ورودی مجموع دو سیگنال دلخواه باشد : $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

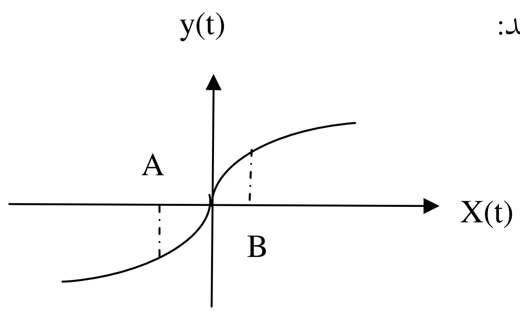
حال اگر ورودی بصورت $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ باشد که $x_1(t)$, $x_2(t)$ ممکن است طیف‌های جدا از هم داشته باشند، با تعمیم حالت قبل می‌توان دید که در طیف خروجی عبارتهایی بصورت زیر وجود خواهند داشت، که ممکن است با طیف هر کدام از سیگنالهای ورودی $x_1(t)$, $x_2(t)$ همپوشانی داشته باشد.

$$(\underbrace{X_1 * X_1 * X_1 * \dots}_{\text{بار } n}) * (\underbrace{X_2 * X_2 * X_2 * \dots}_{\text{بار } m})$$

$$X_1 * X_2$$
$$X_1 * X_1 * X_2$$
$$X_1 * X_2 * X_2$$
$$\vdots$$

$\Longrightarrow$ در این حالت پدیده همشنوایی[2] اتفاق افتاده است.

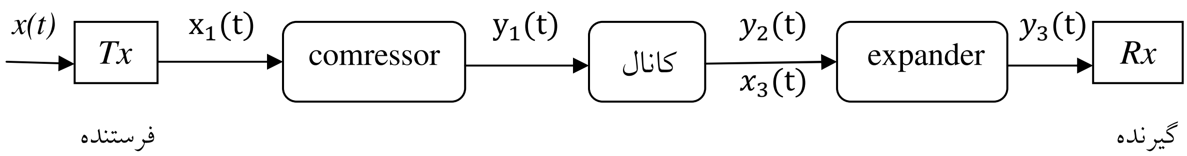
ایدهٔ مقابله با اعوجاج غیرخطی این است که نگذاریم ورودی وارد ناحیه غیرخطی سیستم شود. بطور مثال در مشخصهٔ انتقال روبرو فاصله [A,B] سیستم خطی عمل می کند:



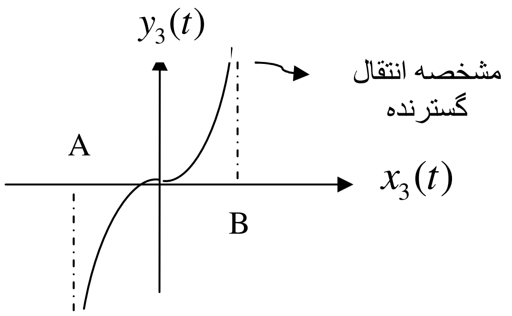
حال اگر x(t) مقادیری بزرگتر از B یا کوچکتر از A بخواهد اختیار کند، از واحد فشرده ساز[3] قبل از ابتدای سیستم غیرخطی (کانال)

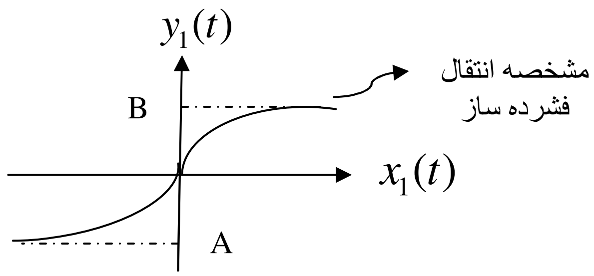
1. intermodulation
2. cross talk
3. compressor

و واحد گسترنده[1] بعد از سیستم غیرخطی (یا کانال) استفاده می‌کنیم. یک فشرده ساز مشخصه عملکردی مانند شکل فوق دارد، در شکل فوق ملاحظه می کنید که محدودهٔ تغییرات x (ورودی فشرده ساز) بسیار زیاد است اما محدوده تغییرات y (خروجی فشرده ساز) بسیار محدود است. لذا سیگنال y را می‌توان به کانال غیرخطی داد تا در محدودهٔ خطی کانال قرار بگیرد حال آنکه اگر x را مستقیماً به کانال بدهیم وارد ناحیه غیرخطی کانال شده و اعوجاج‌های بررسی شده بوجود خواهند آمد. در انتهای کانال باید مجدداً از گسترنده برای برگرداندن سیگنال به حالت اولیه خود استفاده کنیم. لذا گسترنده مشخصه عملکردی دقیقاً مانند واحد فشرده ساز دارد ولی با این تفاوت که جای محور ورودی و خروجی عوض شود.(مشخصه انتقال آن ها نسبت به خط y=x قرینه‌ی هم اند پس خروجی دوباره x می شود و اعوجاج نداریم.) در زیر، بلوک دیاگرام این روش رسم شده است:



($y_2(t)$ ورودی گسترنده است و برای راحتی آنرا $x_3(t)$ می نامیم.)



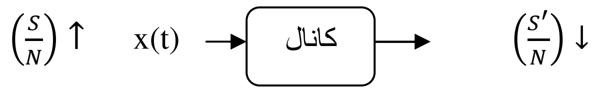


به استفاده همزمان ازفشرده ساز و گسترنده مطابق با روال گفته شده ، کامپندینگ (برگرفته شده از دو کلمه compression و expanding) گفته می‌شود.

1. expander

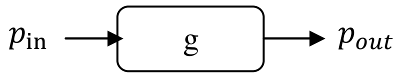
اتلاف توان در انتقال[1]:

یک سیستم انتقال علاوه بر اعوجاج معمولاً توان سیگنال را نیز کاهش می دهد. این کاهش توان را می تـوان بـا تقویت کنندهٔ توان جبران کرد اما اگر کاهش توان از حدی بیشتر باشد نویز موجود در سیگنال مانع بازیابی کامل و تقویت سیگنال مطلوب می شود.

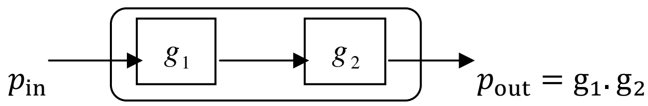


(تضعیف به این علت مهم است که چون نویز همواره وجود دارد، نسبت توان سیگنال به نویز در طرف اول بالاست پس نویز تأثیر زیادی روی سیگنال ندارد اما چون سیگنال در کانال تضعیف می شود و نویز همه جا حضور دارد، پس نسبت توان سیگنال به نویز در طرف دوم پایین می آید.)

گین توان : در سیستم LTI روبرو اگر توان ورودی p_{in} و سیستم بدون اعوجاج باشد آنگاه توان متوسط خروجی متناسب با p_{in} است. (g گین سیستم است.)



$$g \triangleq \frac{p_{out}}{p_{in}} \quad \Longrightarrow \quad p_{\text{out}} = \text{g}.\text{p}_{\text{in}}$$



از آنجائیکه مقدار g در سیستم های متداول بسیار زیاد است مرسوم است که آن را بصورت زیر برحسب دسی بل(dB)[2] بیان می کنند :

$$g_{dB} \triangleq 10\, log_{10}\, g \;\;\Rightarrow\;\; g = 10^{\frac{g_{dB}}{10}}$$

به عنوان مثال

$$if \quad g_{dB} = 20dB \;\;\Longrightarrow\;\; g = 100$$

$$if \quad g = 1000 \;\;\Longrightarrow\;\; g_{dB} = 30dB$$

اگر $g \le 1(= 10^0)$ باشد g_{dB} منفی و یا صفر می شود. (یعنی $g_{\text{dB}} \le 0$)

با این شیوه اعمال ضرب گین ها (حاصل سری کردن چند سیستم) به جمع تبدیل می شود.

$$g = g_1.g_2 \;\rightarrow\; g_{dB} = g_{1dB} + g_{2dB}$$

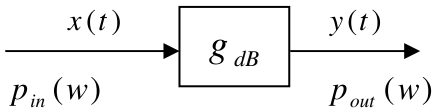
1. transmission loss
2. decible

– دسی بل همواره برای سنجش نسبت توانها است. می‌توان خود مقادیر توان‌ها (برحسب وات یا میلی وات) را نیز بصورت لگاریتمی بیان کرد :

$$p(w) \quad \Rightarrow \quad p_{dBw} = 10\,log\frac{p(w)}{1(w)}$$

$$p(mw) \quad \Rightarrow \quad p_{dBm} = 10\,log\frac{p(mw)}{1(mw)}$$

مثال :



$p_{in}(w)$ $\qquad$ $p_{out}(w) = ?$

$p_{in}(mw)$ $\qquad$ $p_{out}(mw) = ?$

حل :

$$p_{in}(dBw) \quad \Rightarrow \quad p_{out}(dBw) = g_{dB} + p_{in}(dBw)$$

$$p_{in}(dBm) \quad \Rightarrow \quad p_{out}(dBm) = g_{dB} + p_{in}(dBm)$$

توجه شود که توان همواره نسبت به یک بار(یا امپدانس) سنجیده می شود. بنابراین مقایسه توان ورودی و خروجی در صورتی درست است که امپدانس ها در ورودی و خروجی با هم برابر باشند. با این فرض اگر به سیستم LTI مذکور با تابع انتقال H(f) یک موج سینوسی با دامنه A_x بدهیم و دامنه موج سینوسی خروجی A_y باشد آنگاه داریم :

$$x(t) = A_x\cos(\omega_0 t + \varphi_x) \quad , \quad y(t) = A_y\cos(\omega_0 t + \varphi_y) \quad , \quad \omega_0 = 2\pi f_0$$

$$,A_y = A_x.\,|H(f)|_{f=f_0}$$

$$\longrightarrow \ \frac{1}{2}{A_y}^2 = \frac{1}{2}{A_x}^2|H(f_0)|^2 \qquad \left(p_x = \frac{1}{2}{A_x}^2 \quad , \ p_y = \frac{1}{2}{A_y}^2\right)$$

$$\Rightarrow \ p_y = p_x.\,|H(f_0)|^2$$

رابطه گین توان : $g = \frac{p_{out}}{p_{in}} = \frac{p_y}{p_x} = |H(f)|^2$

اگر $H(f) = ke^{-j\omega t_d}$ باشد آنگاه گین توان برابر است با : ❋ $g = |H(f)|^2 = k^2$

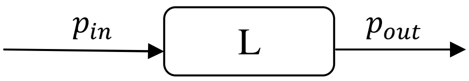
اگر امپدانس‌های ورودی و خروجی با هم برابر نباشند گین توان دیگر k^2 نیست بلکه متناسب با k^2 می شود.

از رابطه* ملاحظه می شود که اگر اندازه تابع انتقال با فرکانس تغییر کند آنگاه گین تابعی از فرکانس می شـود. به همین دلیل معیار مفیدی که وابستگی فرکانسی را برحسب توان سیگنال نشان مـی دهـد تعریـف و اسـتفاده می کنند :

$$g_{dB} \stackrel{\Delta}{=} 10\log|H(f)|^2 = 20\log|H(f)|$$

اتلاف توان و تکرارکننده ها :

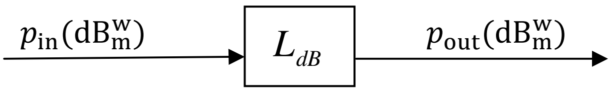
در یک سیستم پسیو توان خروجی کمتر از توان ورودی است ($p_{out} < p_{in}$) لذا برای سنجش میزان تضعیف یا اتلاف توان در انتقال، کمیتی بصورت زیر تعریف و استفاده می کنند :



$$L \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{g} = \frac{p_{in}}{p_{out}} \Rightarrow L_{dB} = -g_{dB} = 10\log\frac{p_{in}}{p_{out}}$$

در سیستم های دارای تضعیف همواره L >1 است.

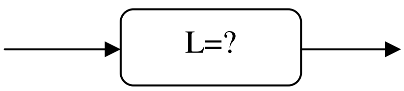
اگر



- $p_{out}(dBw) = p_{in}(dBw) - L_{dB}$
- $p_{out}(dBm) = p_{in}(dBm) - L_{dB}$

مثال : در برخی خطوط انتقال، کابل های کواکسیال و موجبرها توان خروجی بصورت نمایی با فاصله کاهش می یابد ؛

if ، $p_{out} = 10^{\frac{-\alpha\ell}{10}} . p_{in}$



α = ضریب تضعیف و l = طول مسیر بر حسب dB بر واحد طول می باشد.

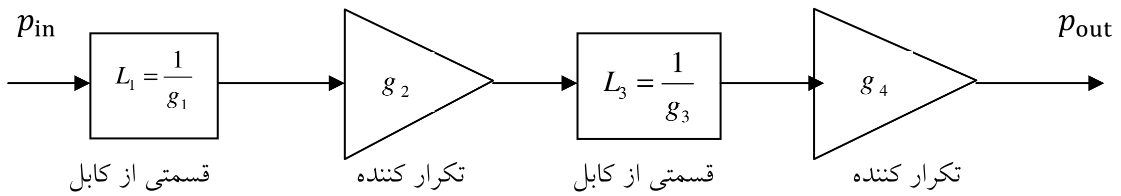
حل :

$$L = 10^{\frac{\alpha l}{10}} \rightarrow L_{dB} = \alpha l$$

از آنجایی که تضعیف (dB) متناسب با فاصله است، بنابراین باید در طول مسیر از تقویت کننده هایی برای جلوگیری از تضعیف بیش از حد سیگنال استفاده کنیم. این تقویت کننده ها را تکرار کننده[1] نیز گویند.

1. Repeater

نحوه‌ی استفاده از تکرار کننده‌ها در شکل زیر نشان داده شده است :



عملگر متوسط گیری : $< z(t) >$

برای سیگنال های توان؛ اگر z(t) توان باشد :

$$< z(t) > \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} z(t)dt.$$

برای سیگنال های انرژی؛ اگر z(t) انرژی باشد :

$$< z(t) > \triangleq \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} z(t)dt$$

ضرب اسکالر یا ضرب داخلی :

برای دو سیگنال $v(t)$ و $w(t)$ داریم : ضرب اسکالر $\triangleq < v(t).w^*(t) >$

ویژگی های عملگر متوسط گیری :

1. $p_v =< |v(t)|^2 >$
2. $E_v =< |v(t)|^2 >$
3. $< z^*(t) >=< z(t) >^*$
4. $< z(t-t_d) >=< z(t) > \quad \forall t_d$
5. $< a_1 z_1(t) + a_2 z_2(t) >= a_1 < z_1(t) > + a_2 < z_2(t) >$

۶- ضرب اسکالر معرف میزان شباهت دو سیگنال است.

۷- نامساوی شوارتز : سیگنال های توان : $|< v(t).w^*(t) >|^2 \le p_v.p_w$

سیگنال های انرژی : $|< v(t).w^*(t) >|^2 \le E_v.E_w$

حالت تساوی زمانی رخ می دهد که : $v(t) = a.w(t)$ (a یک عدد ثابت است.)

بعبارت دیگر حاصلضرب داخلی دو سیگنال زمانی ماکزیمم می شود (زمانی بیشترین شباهت را به هم دارند) که دو سیگنال متناسب باهم باشند.

توابع همبستگی:

۱- تابع همبستگی متقابل ۲- تابع خود همبستگی

همبستگی سیگنال های توان :

تابع همبستگی متقابل :

برای دو سیگنال توان v(t),w(t) داریم :

$$R_{vw}(\tau) \overset{\Delta}{=} < v(t).w^*(t-\tau) >$$
$$= < v(t+\tau).w^*(t) >$$

خواص تابع همبستگی متقابل :

۱- تابع همبستگی متقابل میزان شباهت یکی نسبت به شیفت یافته‌ی دیگری است.

2- $R_{vw}(\tau) \neq R_{wv}(\tau)$

3- $|R_{vw}(\tau)|^2 \leq p_v.p_w$

4- $R_{wv}(\tau) = R^*_{vw}(-\tau)$

تابع خودهمبستگی :

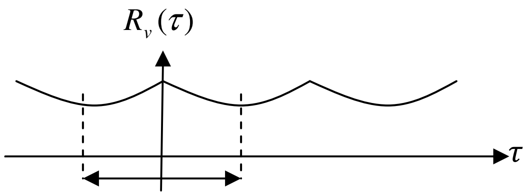
$$R_v(\tau) \overset{\Delta}{=} R_{vv}(\tau) = < v(t).v^*(t-\tau) > = < v(t+\tau).v^*(t) >$$

خواص تابع خودهمبستگی :

۱- این تابع میزان شباهت تابع v(t) را با شیفت یافته خودش به اندازه τ، بیان می کند.

2- متناوب $v(t) \rightarrow R_v(\tau)$ متناوب (دوره تناوب همان دوره تناوب قبلی است.)

3- $|R_v(\tau)| \leq R_v(0) \Longrightarrow$ یعنی شبیه ترین سیگنال به v(t) خود v(t) است نه شیفت یافته آن



مقدار ماکزیمم در مبدأ است

4- $R_v(0) = p_v$

5- $R_v(-\tau) = R_v^*(\tau)$

6- اگر v(t) حقیقی باشد $\Longrightarrow$ $R_v(\tau)$ حقیقی و زوج است.

دو سیگنال ناهمبسته[1] :

دو سیگنال v(t),w(t) را ناهمبسته گوییم هرگاه داشته باشیم: $\forall \tau \quad R_{vw}(\tau) = R_{wv}(\tau) = 0$

اگر v(t),w(t) دوسیگنال دلخواه باشند. $z(t) = v(t) \pm w(t)$

$$\Rightarrow R_z(\tau) = R_v(\tau) + R_w(\tau) \pm [R_{wv}(\tau) + R_{vw}(\tau)]$$

حال اگر این دو سیگنال ناهمبسته نیز باشند $\Rightarrow R_z(\tau) = R_v(\tau) + R_w(\tau)$

$$\tau = 0 \rightarrow \quad p_z = p_v + p_w$$

همبستگی سیگنال های انرژی :

در مورد سیگنال های انرژی نمی‌توان از متوسط گیری استفاده کرد و بجای آن از تعریف انرژی کل استفاده می‌کنیم : $E_v \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v(t).v^*(t)\,dt \geq 0$

حال می‌توان توابع همبستگی متقابل و خودهمبستگی را برای سیگنال‌های انرژی چنین تعریف کرد:

$$R_{vw}(\tau) \stackrel{\Delta}{=} < v(t).w^*(t-\tau) >$$ (v(t),w(t) دو سیگنال انرژی اند.)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} v(t).w^*(t-\tau)\,dt$$

$$R_v(\tau) = R_{vv}(\tau) =< v(t).v^*(t-\tau) > = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t).v^*(t-\tau)\,dt$$

1.uncorrelated

توجه کنید که تمام روابطی که تاکنون برای سیگنال های توان بدست آوردیم، در مورد سیگنال های انرژی نیز صادق است. تنها کافی است که در آنجا بجای توان p_v از انرژی E_v و بجای متوسط گیری <z(t)> از انتگرالگیر $\int_{-\infty}^{+\infty} z(t)\,dt$ استفاده کنیم. بعنوان مثال داریم :

برای سیگنال توان $\quad |R_{vw}(\tau)|^2 \le p_v.p_w$

برای سیگنال انرژی $\quad |R_{vw}(\tau)|^2 \le E_v.E_w$

از آنجایی که از سیگنال های انرژی می توان تبدیل فوریه گرفت (برخلاف سیگنال های توان) به همین دلیل علاوه بر خواص ذکر شده برای سیگنال های توان، یکسری خواص دیگر نیز برای سیگنال انرژی تعریف می کنیم که فقط برای سیگنال انرژی صادق است :

برای دو سیگنال انرژی w(t)وv(t) روابط زیر را داریم :

$$1-R_{vw}(\tau)=v(\tau)*w^*(-\tau)$$

(در مورد سیگنال های توان، کانولوشن تعریف نشده است.)

$$2-R_v(0)=E_v=\int_{-\infty}^{+\infty}|v(f)|^2\,df$$

$$3-R_{vw}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}v(t).w^*(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}v(f).w^*(f)df$$

با ترکیب روابط ۲و۳ و($\tau=0$) داریم :

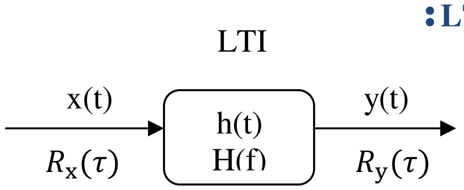
$$|R_{vw}(0)|^2 \le E_v.E_w=R_v(0).R_w(0)$$

$$\rightarrow\quad \left|\int_{-\infty}^{+\infty}v(f).w^*(f)\right|^2 \le \int_{-\infty}^{+\infty}|v(f)|^2\,df.\int_{-\infty}^{+\infty}|w(f)|^2\,df$$

رابطه‌ی بالا بیان دیگری از نامساوی شوارتز در حوزه فرکانس است.

در رابطه بالا تساوی مجدداً زمانی رخ می دهد کهv(f),w(f) با هم متناسب باشند.

توابع همبستگی بین ورودی– خروجی در یک سیستم LTI:



اگر x,y دو سیگنال دلخواه باشند که ورودی– خروجی

سیستم LTI را تشکیل دهند داریم:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda).h(t-\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda).x(t-\lambda)d\lambda$$

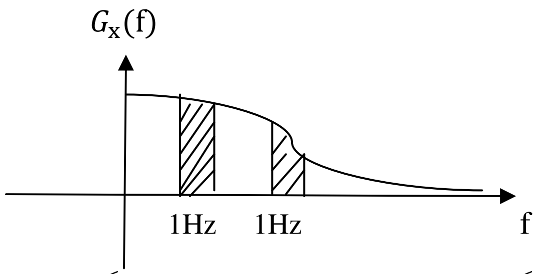
با توجه به رابطه فوق و تعریف توابع همبستگی می‌توان روابط زیر را بدست آورد :

$$1) R_{yx}(\tau) = h(\tau) * R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda).R_x(\tau-\lambda)d\lambda$$

$$2) R_y(\tau) = h^*(-\tau) * R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(-\lambda).R_{yx}(\tau-\lambda)d\lambda$$

1 و 2 $\Rightarrow 3) R_y(\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau) * R_x(\tau)$

تابع چگالی طیفی :



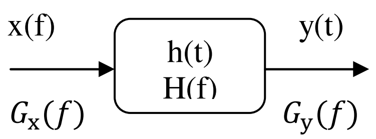
$x(t) \rightarrow G_x(t)$

تابع چگالی طیفی یک سیگنال انرژی یا توان معرف چگونگی توزیع انرژی یا توان در طیف سیگنال است.

دو ویژگی اساسی تابع چگالی عبارت است از :

یعنی سطح زیر منحنی $G_v(f)$ انرژی کل سیگنال یا توان متوسط آنرا بدست می‌دهد. $\quad$ 1- $\int_{-\infty}^{+\infty} G_v(f)df = E_v$

۲- چگالی طیف ورودی و خروجی در یک سیستم LTI با رابطه زیر به یکدیگر مربوط می شوند :



گین توان $g = |H(f)|^2$

$\rightarrow G_y(f) = |H(f)|^2 . G_x(f)$

ترکیب دو ویژگی مذکور، رابطه‌ی روبرو را به ما می‌دهد : $\quad R_y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 \, G_x(f)df$

تعبیر رابطه فوق چنین است که انرژی کل یا توان متوسط سیگنال برابر انتگرال کمیتی است که می‌توان آنـرا بـه عنوان چگالی انرژی یا توان (به عبارت دیگر مقدار انرژی یا توان در واحد فرکـانس) در نظـر گرفـت. لـذا بـه همین دلیل به تابع G(f) **"چگالی طیفی"** توان یا انرژی گفته می‌شود. همچنین از آنجا که انرژی یا توان کمیتـی حقیقی هستند پس تابع چگالی انرژی یا توان نیز باید حقیقی باشد.

طبق قضیه وینر-کنشاین[1] توابع همبستگی و چگالی طیفی تشکیل یک زوج تبدیل فوریه می دهند :

$$G_v(f) \xrightarrow{\mathcal{F}} R_v(\tau)$$

$$\begin{cases} G_v(f) = \mathcal{F}\{R_v(\tau)\} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} R_v(\tau) e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \\ R_v(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_v(f)\} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} G_v(f) e^{j2\pi f\tau}\, df \end{cases}$$

اگر v(t) یک سیگنال انرژی باشد داریم :

$$R_v(\tau) = v(\tau) * v^*(-\tau)$$

$$\rightarrow G_v(f) = v(f).v^*(f) = |v(f)|^2$$

$$\rightarrow G_v(f) = |v(f)|^2$$

اگر v(t) یک سیگنال توان از نوع سیگنال های متناوب باشد می‌توان بسط سری فوریه آن را چنین نوشت :

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi f_0 t} \quad , \quad (e^{j2\pi n f_0 t} = e^{jn\omega_0 t})$$

$$e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$e^{j2\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega - 2\omega_0)$$

.
.
.

تبدیل فوریه یک سیگنال متناوب، یک قطار ضربه است. $\Leftarrow$

$$\rightarrow G_v(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2\, \delta(f - nf_0)$$

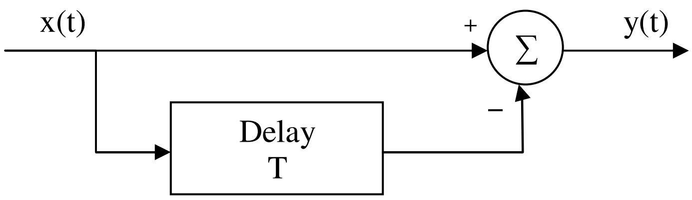
$$\begin{cases} G_v(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \delta(f - nf_0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} G_v(f)df = R_v(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t).v^*(t)dt \end{cases} \dashrightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t).v^*(t)dt$$

صورت دیگری از قضیه پارسوال :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t).v^*(t)\, dt$$

1.Wiener-kinchine theorem

مثال : فیلتر شانه ای[1] :



$R_y(\tau) = ?$

$G_y(\tau) = ?$

$(P_v)E_v = \bar{y}^2 = ?$

(یکی از کاربردهای این فیلتر در سیستم های تلویزیونی است.)

$h(t) = \delta(t) - \delta(t-T)$

تبدیل فوریه $\rightarrow H(f) = 1 - e^{-j2\pi fT}$

$|H(f)^2| = H(f).H^*(f) = \left(1 - e^{-j2\pi fT}\right)(1 - e^{j2\pi fT})$

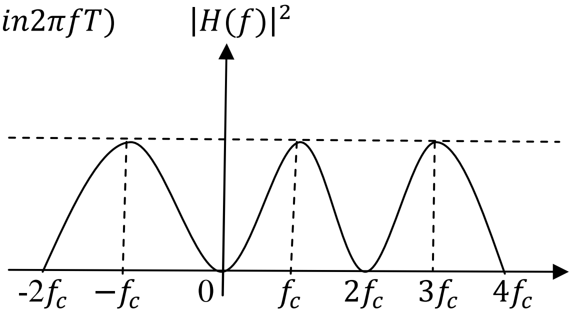
$= 2 - e^{-j2\pi fT} - e^{j2\pi fT}$

$= 2 - (cos2\pi fT - jsin2\pi fT) - (cos2\pi fT + jsin2\pi fT)$

$= 2 - 2cos2\pi fT = 2 - 2(1 - 2sin^2 2\pi fT$

$= 4Sin^2\pi fT$ و $(T = \frac{2}{f_c}$ فرض)

$\rightarrow |H(f)|^2 = 4Sin^2\left(2\pi\frac{f}{f_c}\right)$ $\Rightarrow$



$$\begin{cases} G_y(f) = |H(f)|^2.G_x(f) \\ R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_y(f)\} \end{cases}$$

$\rightarrow R_y(\tau) = F^{-1}[|H(f)|^2] * R_x(\tau)$

و $F^{-1}[|H(f)|^2] = 2\delta(t) - \delta(t-T) - \delta(t+T)$

$\Rightarrow R_y(\tau) = R_x(\tau) * [2\delta(t) - \delta(t-T) - \delta(t+T)]$

$= 2R_x(\tau) - R_x(\tau - T) - R_x(\tau + T)$

$\rightarrow \overline{y^2} = 2R_x(0) - R_x(-T) - R_x(T)$

$= 2\overline{x^2} - 2R_x(T)$ و ($\overline{x^2} =< x(t).x^*(t) >$ اگر سیگنال حقیقی باشد)

1. Comb filter

فصل دوم

نویز

به سیگنال‌های الکتریکی ناخواسته نویز گفته می‌شود.

منابع تولید نویز : ۱- انسان و محصولات ساخت بشر ۲- عوامل طبیعی

برخی منابع نویز را می‌توان با تمهیدات خاصی از بین برد یا ضعیف کرد، اما برخی دیگر را نمی‌توان؛ زیرا بطور ذاتی در پدیده‌ها وجود دارند مانند نویز حرارتی که ناشی از حرکت الکترون‌هاست.

نویز حرارتی : ناشی از حرکت تصادفی ذرات باردار است. به نویز حرارتی نویز جانسون[1] نیز گفته می‌شود.

انرژی متوسط یک ذره در دمای مطلق $\propto kT$, (k = ثابت بولتزمن[2])

هرچه انرژی حرکتی ذره بیشتر شود، نویز بیشتری نیز تولید می‌شود؛ بنابراین انتظار داریم که در عبارت مربوط به نویز حرارتی، جمله kT نیز وجود داشته باشد.

این نویز چون شامل ترکیب بی‌شمار حرکت تصادفی الکترون‌هاست؛ طبق قضیه "حد مرکزی[3]" توزیع گوسی با متوسط صفر و واریانس: (v^2) $E[v^2] = \overline{v^2} = \delta_v^2 = \frac{2(\pi kT)^2}{3h}R$ دارد که :

K= ثابت بولتزمن $= 1.37 \times 10^{-23} \quad J/_{o_K}$ و h= ثابت پلانک $= 6.62 \times 10^{-34} \quad J.sec$

T= دما برحسب درجه کلوین

(یادآوری : امید ریاضی $= E(x) = \begin{cases} \sum x f_x(x) \\ \int x f_x(x) dx \end{cases}$)

1.Johnson Noise 2.Boltzman constant
3.Central limit theorem

چگالی طیفی نویز حرارتی مذکور چنین است : $G_v(f)=\frac{2Rh|f|}{exp(\frac{h|f|}{kT})-1} \qquad (v^2/_{Hz})$

که در فرکانس‌های پایین، $|f| \ll \frac{\mathrm{kT}}{\mathrm{h}}$ ، با استفاده از بسط تیلور می‌تواند چنین تقریب زده شود :

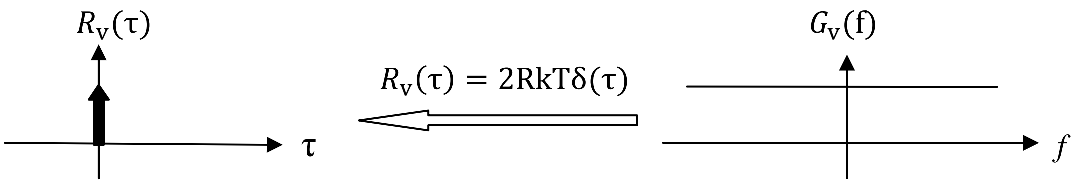
$.\Longrightarrow G_v(f)\simeq 2RkT(1-\frac{h|f|}{2kT})$

(یادآوری بسط تیلور: $|\mathrm{x}| \ll 1$ و $e^{\mathrm{x}}\simeq 1+\mathrm{x}+\frac{\mathrm{x}^2}{2}$)

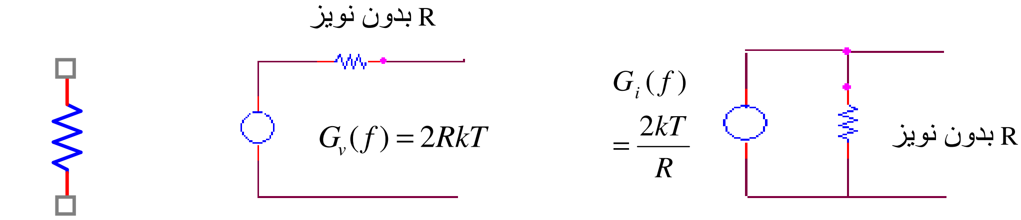
اما حد فوق برای تقریب (یعنی $\frac{kT}{\mathrm{h}}$) عدد بسیار بزرگی است، بطوری که برای $0.1\frac{kT}{h}$ که می‌توان $G_v(f)$ را تقریباً ثابت فرض کرد داریم : $0.1k\frac{T}{h}\simeq 10^{12}Hz$

که این فرکانس در حوزه نور مادون قرمز است و بسیار فراتر از حوزه امواج رادیویی مورد استفاده است. لذا براحتی و با دقت خوبی می توان نوشت :

چگالی طیفی ولتاژ تصادفی ناشی از نویز حرارتی : $\Longrightarrow \quad G_v(f)=2RkT \quad v^2/_{Hz}$



بنابراین هر مقاومت فلزی را می‌توان بصورت زیر با یک مدل تونن یا نورتن مدل کرد. (زیرا مقاومت در حقیقت یک تولیدکننده ولتاژ یا جریان است.)



R نویزی　　مدل تونن　　مدل نورتن

توجه کنید که داخل دایره‌های مربوط به نمادهای $G_v(f)$ و $G_{\mathrm{i}}(\mathrm{f})$ فلش قرار داده نشده است تا طبیعت تصادفی بودن ولتاژ یا جریان مشخص شود.

$G_v(f)=\mathcal{F}\{R_v(\tau)\}=\mathcal{F}\{<v(t).v(t-\tau)>\}$
$=\mathcal{F}\{<Ri(t).Ri(t-\tau)>\}$

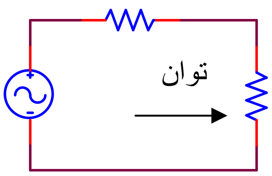
$$= R^2 \mathcal{F}\,\underbrace{\{< i(t).i(t-\tau) >\}}_{R_i(\tau)} = R^2 G_i(f)$$

رابطه بین $G_i(f)$ و $G_v(f)$ در مدل تونن و نورتن : $\Longrightarrow$ $\rightarrow\ G_v(f) = R^2 G_i(f)$

قضیه انتقال توان ماکزیمم :

کل توان موجود (یعنی ماکزیمم توانی که یک منبع با مقاومت ثابت غیر صفر می‌تواند به مقاومت بار تحویل دهد) زمانی به بار منتقل می‌شود که مقاومت بار با مقاومت منبع تطبیق یافته باشد. یعنی :

$$Z_s = R_s + jX_s$$

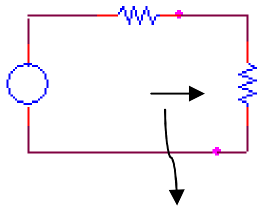


$$Z_L = Z_s^* = R_s - jX_s$$

در این صورت توان موجود (P_a) برابر می‌شود با :

$$P_a = \frac{<\left[\frac{v_s(t)}{2}\right]^2>}{R_s} = \frac{<v_s^2(t)>}{4R_s}$$

حال قضیه فوق را می‌توان برای یک مقاومت فلزی که مدل تونن آنرا دیدیم، بکار برد و مفهوم "چگالی طیفی موجود" را بجای "توان موجود" بکار برد :



چگالی طیفی موجود $\Longleftarrow$ $G_a(f) = \frac{G_v(f)}{4R} = \frac{2RkT}{4R} = \frac{1}{2}kT \quad \left({}^{W}\!/_{Hz}\right)$

همانطور که ملاحظه می‌کنید چگالی طیفی موجود یک مقاومت R فقط به دما بستگی دارد، بعبارت دیگر یک مقاومت حرارتی مستقل از مقدار مقاومت آن، همیشه چگالی طیفی $\frac{KT}{2}$ را به یک بار تطبیق یافته منتقل می‌کند.

کارکردن با $G_a(f)$ بجای $G_v(f)$ محاسبات را سریعتر و ساده‌تر می‌کند.

نویز سفید[1] **:** نویزی است که تابع چگالی طیفی آن مستقل از فرکانس است.

نویز حرارتی که تاکنون بررسی کردیم یک عضو از خانواده نویز سفید است.

چگالی طیفی نویزهای سفید را در حالت کلی به صورت $G(f) = \frac{1}{2}\eta$ می‌نویسیم.

(ضریب $\frac{1}{2}$ بخاطر لحاظ کردن فرکانس‌های مثبت است. در حقیقت رابطه فوق می گوید که نصف چگالی طیفی برای فرکانس‌های مثبت و نصف دیگر برای فرکانس‌های منفی است.)

با توجه به رابطه بالا داریم :

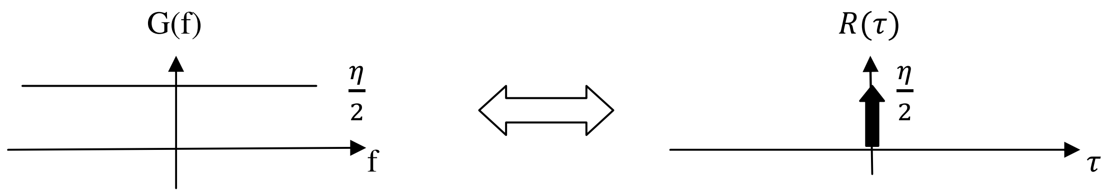
$$G_v(f) = 2RkT = \frac{1}{2}\eta \ \Rightarrow \eta_v = 4RkT$$

$$G_i(f) = \frac{2kT}{R} = \frac{1}{2}\eta \ \Rightarrow \eta_i = \frac{4kT}{R}$$

$$G_a(f) = \frac{1}{2}kT = \frac{1}{2}\eta \ \Rightarrow \eta_a = kT$$

نتیجه : هر منبع نویز سفید حتماً یک η دارد. (اگر نویز سفید ناشی از ولتاژ تصادفی بود، اسم آنرا η_v می‌گذاریم، اگر ناشی از جریان تصادفی بود، اسم آنرا η_i می‌گذاریم و برای چگالی طیفی موجود نام آنرا η_a می‌گذاریم.)

$$G(f) = \frac{1}{2}\eta \quad \rightarrow \quad R(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G(f)\} = \frac{1}{2}\eta\delta(\tau)$$



دمای نویز : برای مقایسه منابع نویز از دمای نویز استفاده می‌شود.

برای درک مفهوم دمای نویز ذکر این نکته ضروری است که منابع نویز دو دسته‌اند :

۱- حرارتی: که مرتبط با حرارت هستند. برای تمام منابع نویز حرارتی داریم : $\eta_a = KT$

۲- غیر حرارتی: که هیچ ارتباطی با دمای فیزیکی ندارند.

1.white noise

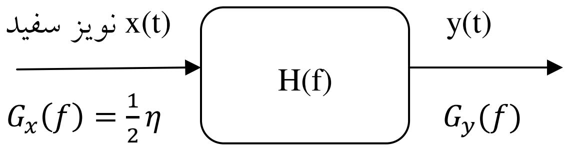
حال می‌توان برای تمام منابع نویز (چه حرارتی و چه غیر حرارتی) دمای نویز درنظر گرفت. بدین صورت که دمای نویز را برای هر منبع دلخواهی اینگونه تعریف می‌کنیم :

$$T_N \triangleq \frac{2G_a(f)}{k} = \frac{\eta_a}{k}$$

بنابراین اگر دمای نویز منبعی را داده باشند می‌توان η_a آنرا محاسبه کرد : $\eta_a = kT_N$

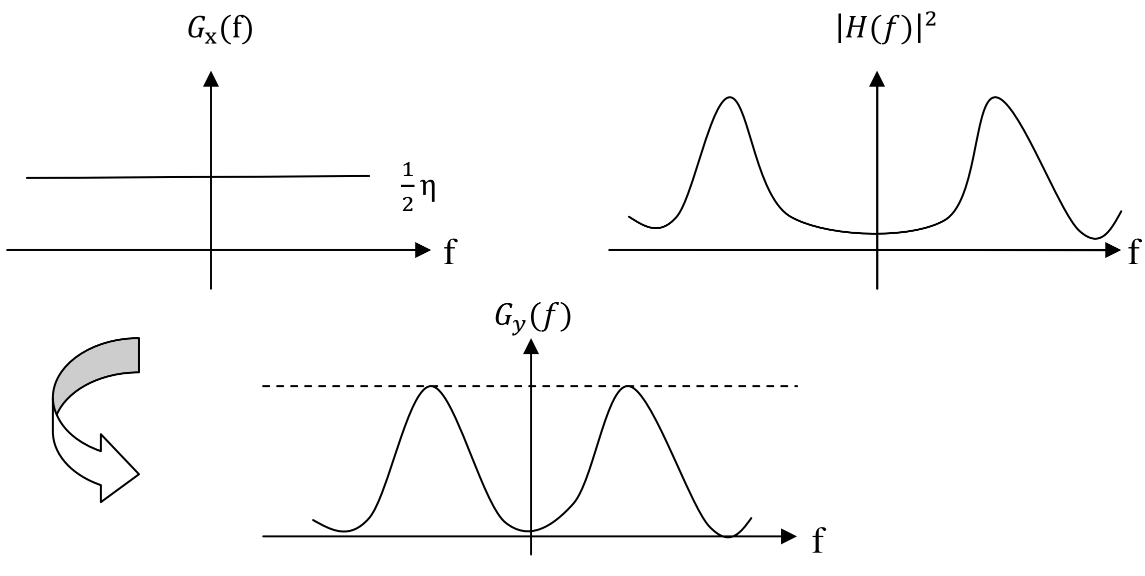
توجه کنید که T_N لزوماً تعبیر فیزیکی ندارد. مثلاً برخی منابع الکترونیکی تولید نویز دمایی حدود $T_N = 3000^{0k}$ دارند.

برخی روابط مربوط به اعمال نویز سفید گوسی به یک سیستم LTI :



$$G_y(f) = G_x(f).|H(f)|^2 \rightarrow G_y(f) = \frac{1}{2}\eta|H(f)|^2 \quad *$$

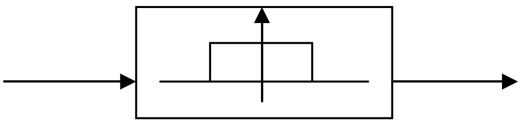
رابطه * نشان می‌دهد که چگالی طیفی نویز _فیلتر شده_، شکل $|H(f)|^2$ را بخود می‌گیرد. لذا دیگر نویز فیلتر شده، سفید نیست بلکه در اصطلاح آنرا رنگی می‌نامند. (در شکل زیر این موضوع را ملاحظه می‌کنید :)

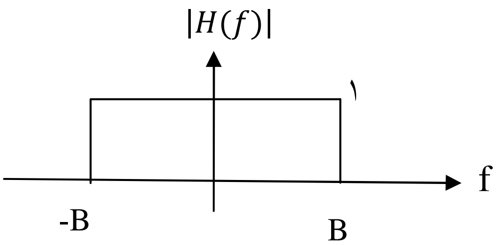


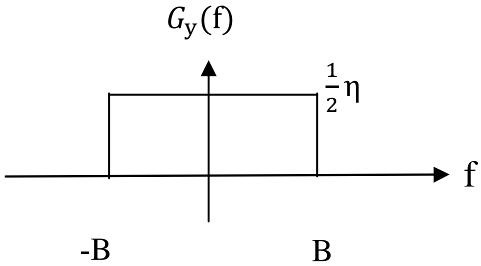
$$* \Rightarrow R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_y(f)\} = \frac{1}{2}\eta\mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\}$$

$$R_y(0) = \overline{y^2} = \frac{1}{2}\eta\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2 df$$

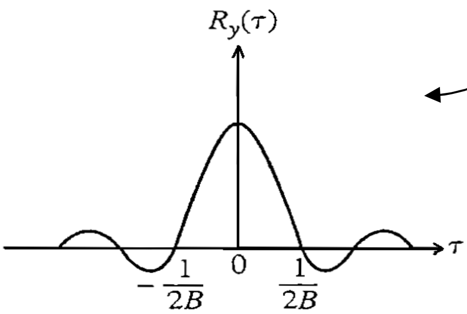
مثال۱ : فیلتر پایین گذر ایده‌آل







$$\Rightarrow \quad G_y(f) = \frac{\eta}{2}\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$



$$R_y(\tau) = \eta B \operatorname{sinc} 2B\tau \quad \text{و} \quad 2B\tau = k$$

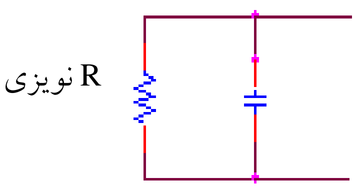
$$\operatorname{sinc} X = k \;\rightarrow\; \tau = \frac{k}{2B}$$

$\frac{1}{2B} =$ فاصله زمانی همبستگی

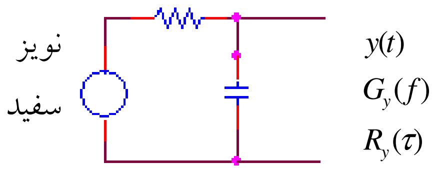
$\rightarrow \overline{y^2} = R_y(0) = \eta B$ توان نویز خروجی

مثال۲ : فیلتر پایین گذر واقعی :

تابع همبستگی خروجی و تابع خودهمبستگی و متوسط توان نویز خروجی را بدست آورید:

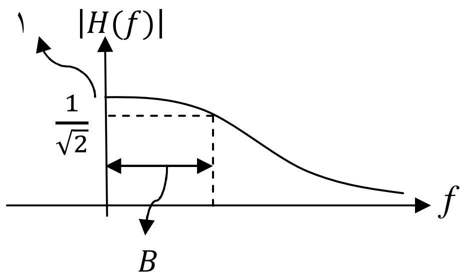


مدار معادل



$$\begin{cases} G_x(f) = 2RkT \\ \eta_v = 4RkT \\ x(f) \rightarrow G_x(f) \end{cases}$$

$$H(f)=\frac{\frac{1}{jc2\pi f}}{R+\frac{1}{j2\pi cf}}=\frac{1}{1+j2\pi fRc}=\frac{1}{1+j\frac{f}{B}}$$



$$B=\frac{1}{2\pi Rc}$$

$$20log\frac{1}{\sqrt{2}}\simeq -3dB$$

$$\rightarrow\ |H(f)|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{f}{B}\right)^2}$$

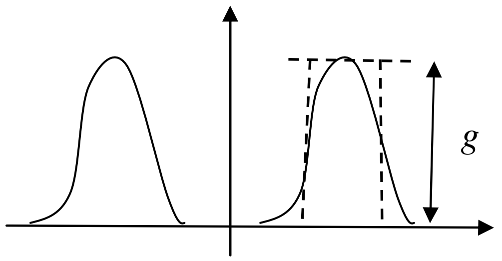
$$\rightarrow G_y(f)=G_x(f).|H(f)|^2=\frac{1}{2}\eta.|H(f)|^2=\frac{2RkT}{1+\left(\frac{f}{B}\right)^2}$$

$$R_y(\tau)=2RkT\pi Be^{-2\pi B|\tau|}=\frac{kT}{c}e^{-\frac{|\tau|}{Rc}}$$

$$\rightarrow \overline{y^2}=R_y(0)=\frac{kT}{c}\quad *$$

از رابطه * ملاحظه می‌کنید که علیرغم اینکه نویز خروجی ناشی از مقاومت حرارتی است اما توان نویز خروجی به c بستگی دارد نه به R. (این موضوع در پهنای باند بررسی می‌شود.)

پهنای باند معادل نویز (B_N) :



$$g=|H(f)|^2{}_{max}$$

$N_0=\eta\int_0^{+\infty}|H(f)|^2\,df$ ⟹ توان نویز خروجی برای حالت سینوسی شکل

$N_0'=\eta\int_0^{+\infty}|H'(f)|^2\,df$ ⟹ توان نویز خروجی برای حالت مستطیل شکل

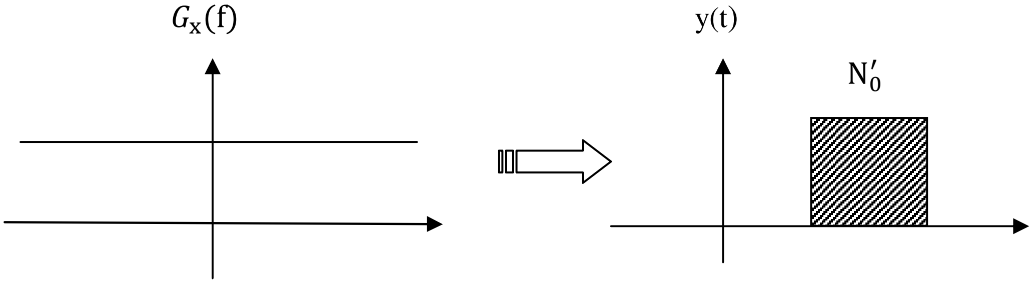
$=\eta.g.B_N$

می‌خواهیم B_N مقداری باشد که $N_0=N_0'$ شود.

$$\rightarrow \eta\int_0^{+\infty}|H(f)|^2\,df=\eta.g.B_N$$

$$\rightarrow B_N=\frac{1}{g}\int_0^{+\infty}|H(f)|^2\,df \quad \text{و}\quad g=|H(f)|^2{}_{max}$$

یعنی $\sqrt{g}$ گین ولتاژ در فرکانس مرکزی فیلتر است.



برای مثال۲ داریم :

$$B_N = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{f}{B}\right)^2} df = \frac{\pi}{2}B = \frac{1}{4Rc} = B_N$$

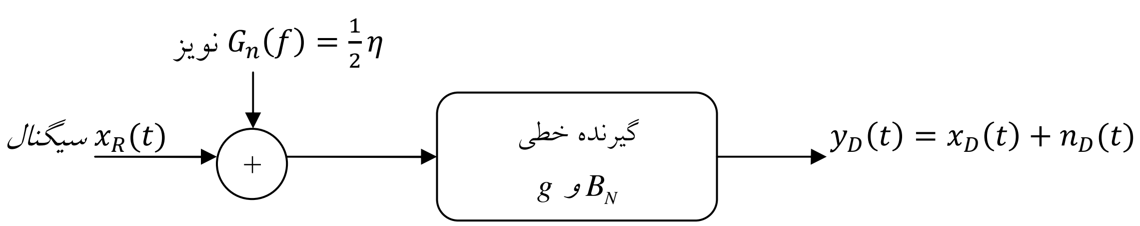
$$N_0 = \underbrace{(4RkT)}_{\eta} \times 1 \times \underbrace{\left(\frac{1}{4Rc}\right)}_{B_N} = \frac{kT}{c}$$

توضیح آنکه: هرچه مقدار R بزرگتر شود، چگالی نویز η بیشتر می‌شود. اما به همان نسبت پهنای باند معادل نویز نیز کاهش می‌یابد، لذا توان خروجی که حاصلضرب این دو کمیت است مستقل از R می‌شود.

پهنای باند معادل نویز برای فیلترهای ایده‌آل همان پهنای باند واقعی آن‌هاست، ولی همانطور که دیدیم برای فیلترهای واقعی پهنای باند معادل نویز بیشتر از $3dB$ آن‌هاست.

انتقال سیگنال با نویز :

در حالت کلی در یک سیستم، نویز در نقاط مختلفی ممکن است به سیگنال اصلی اضافه شود که به آن نویز جمع شونده گفته می‌شود. برای سادگی فرض کنید نویز در یک نقطه فشرده شده و فقط در همان نقطه به سیگنال اصلی اضافه می‌شود. چنین طرحی برای یک گیرنده در زیر نشان داده شده است :



در این طرح براین نکته تأکید شده است که ورودی گیرنده مهمترین و تأثیرگذارترین نقطه است زیرا سیگنال اصلی ضعیف‌ترین سطح ممکن خود را دارد. نکته دیگر اینکه می‌توان نویز موجود در نقاط دیگر غیر از ورودی

سیستم را به ورودی منتقل کرد.

چون سیستم خطی است پس خروجی را می‌توان بصورت مجموع پاسخ‌های هرکدام از دو جزء ورودی نوشت:

$$y_D(t) = x_D(t) + n_D(t)$$
$$y_D{}^2(t) = x_D{}^2(t) + n_D{}^2(t) + 2x_D(t).n_D(t) \; *$$

دو فرض در مورد نویز در نظر می‌گیریم :

۱- نویز تولید شده، متوسط صفر دارد و نیز مشخصات آماری آن با زمان تغییر نمی‌کند.(مشخصات آماری مانند متوسط، واریانس و...)

۲- منبع تولید نویز و سیگنال اصلی مستقل از هم‌اند و هیچگونه همبستگی به هم ندارند.(ناهمبسته هستند.)

با در نظر گرفتن دو فرض فوق از طرفین رابطه * متوسط آماری می‌گیریم :

$$\rightarrow E[y_D^2(t)] = E[x_D^2(t)] + E[n_D^2(t)] + 2E[x_D(t).n_D(t)]$$

فرض شماره۲ $\rightarrow E[y_D^2(t)] = E[x_D^2(t)] + E[n_D^2(t)] + 2E[x_D(t)].E[n_D(t)]$

فرض شماره۱ $\rightarrow E[y_D^2(t)] = E[x_D^2(t)] + E[n_D^2(t)]$

$$\rightarrow \overline{y_D^2}(t) = \overline{x_D^2}(t) + \overline{n_D^2}(t)$$

$\Longrightarrow$ توان سیگنال خروجی در گیرنده $= N_{y_D} = S_D + N_D$

از رابطه‌ی بالا نتیجه می‌گیریم که اصل جمع آثار برای توان در حالت *مستقل و ناهمبسته بودن سیگنال و نویز* صادق است.

نسبت سیگنال به نویز (SNR)[1]:

طبق تعریف برابر است با نسبت توان سیگنال به توان نویز یعنی :

$$SNR \triangleq \frac{S}{N} = \frac{\text{توان سیگنال در آن نقطه}}{\text{توان نویز درآن نقطه}}$$

(با اندیس گذاری می‌توان مشخص کرد که کدام نقطه مدنظر است؛ مثلاًدر $\left(\frac{S}{N}\right)_D$ خروجی مدنظر است.)

1. Signal to Noise Ratio

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_D}{N_D}$$

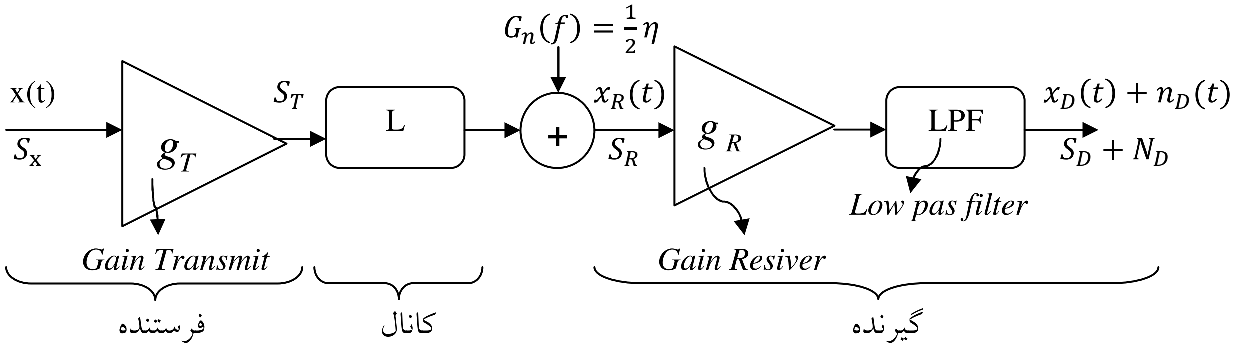
$N_D = g.\eta.B_N$ و

$\eta = kT_N = kT_0(\frac{T_N}{T_0}) \simeq 4 \times 10^{-21}(\frac{T_N}{T_0})$ و

(هرچه SNR بزرگتر باشد برای ما مفیدتر است.)

سیستم انتقال باند پایه آنالوگ :

یک سیستم ساده انتقال باند پایه آنالوگ در شکل زیر نشان داده شده است :



فرض می‌کنیم سیگنال منبع مشخصات آماری ثابت و مستقل از زمان داشته باشد (اصطلاحاً آرگودیک باشد) و پهنای باند آن نیز حدودw باشد یعنی برای $|f| > w$ مولفه‌های ناچیزی داشته باشد.

$$\begin{cases} s_x \triangleq \overline{x^2} \\ s_T = g_T.s_x \\ s_D = \overline{x_D^2} = g_R.s_R \\ s_R = \overline{x_R^2} = \frac{s_T}{L} \\ N_D = g_R.\eta.w \end{cases} \Longrightarrow \left(\frac{s}{N}\right)_D = \frac{s_D}{N_D} = \frac{s_R}{\eta.w} \quad *$$

رابطه * را می‌توان بصورت اثر کانال L و اثر g_T بر SNR اینگونه نوشت :

اثر کانال L : $\frac{S_R}{\eta.W} = \frac{S_T}{\eta.L.W} = \frac{g_T}{\eta.L.w}.S_x \Longrightarrow$ اثر g_T بر SNR

مقدار $\left(\frac{S}{N}\right)_D$ را معمولاً برحسب دسی بل(dB) بیان می‌کنند. برای اینکار توان‌ها را برحسب dBm بیان می‌کنیم :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{D_{dB}} = 10\log\left(\frac{S_R/_{1mw}}{k.T_N.w}\right)$$

$$= S_{R_{dBm}} + 174 - 10log\left(\frac{T_N}{T_0}.w\right)$$

نویز تقویت کننده :

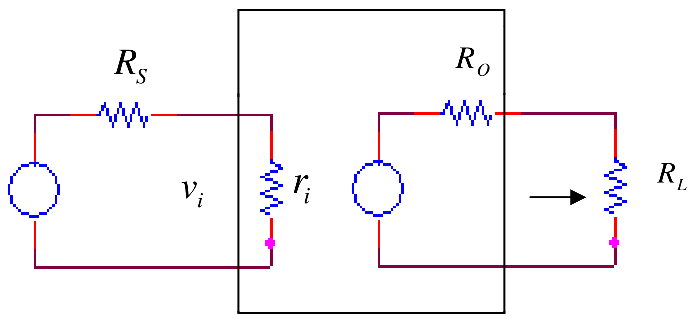
معمولاً از دو کمیت (معیار) برای بررسی و اندازه‌گیری نویز در تقویت کننده‌ها استفاده می‌شود:

۱- دمای مؤثر نویز[1]

۲- عدد نویز[2]

در ادامه به بررسی هرکدام می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم مدل یک تقویت کننده بدون نویز (یعنی خودش نویز اضافه نمی‌کند) چنین باشد :



توان موجود در منبع : $\eta_s(f) = \frac{v_s^2(f)}{4R_s}$

توان موجود در خروجی : $\eta_o(f) = \frac{v_o^2(f)}{4r_o} = \frac{|H(f)|^2.v_i^2(f)}{4r_o}$

$$= \frac{|H(f)|^2}{4r_o}.\left(\frac{r_i}{R_s+r_i}\right)^2.v_s^2(f)$$

گین توان موجود : $g_a(f) \triangleq \frac{\eta_o(f)}{\eta_s(f)} = \left(\frac{|H(f)|.r_i}{R_s+r_i}\right)^2.\frac{R_s}{r_o}$

حال فرض می‌کنیم منبع مورد بررسی، منبع نویز سفید با دمای نویز T_S باشد. پس $\eta_s(f) = kT_s$

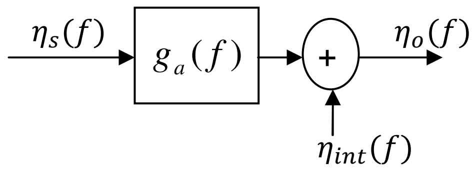
و $\eta_o(f) = g_a(f).\eta_s(f) = g_a(f).kT_s$

حال اگر تقویت کننده نویزی هم باشد یعنی خودش یک نویز داخلی تولید کند که مستقل از نویز منبع باشد آنگاه می‌توان نوشت :

1. Effective noise themperature 2. Noise Figure

$\eta_o(f) = g_a(f).\eta_s(f) + \eta_{int}(f)$

بلوک دیاگرام ⇒



کل توان نویز موجود در خروجی : $N_o = \int_0^{+\infty} \eta_o(f)df = \underbrace{kT_s\int_0^{\infty} g_a(f)df}_{N_0'} + \underbrace{\int_0^{\infty}\eta_{int}(f)df}_{N_0''}$ (1)

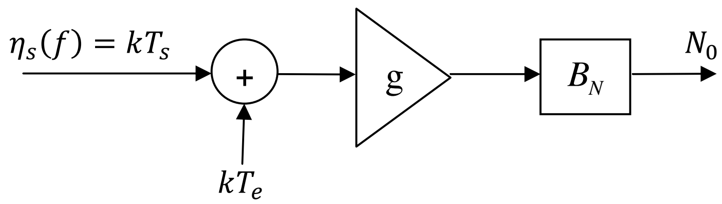
از طرفی : اثر نویز تقویت کننده در خروجی : $N_0'' = g.\eta_{int}.B_N = gkT_e.B_N$ (2)

(1) و (2) ⇒ دمای مؤثر نویز : $T_e \triangleq \frac{1}{gkB_N}\int_0^{\infty}\eta_{int}(f)df$

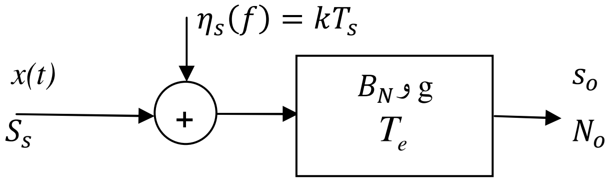
$\rightarrow N_0 = N_0' + N_0'' = gkT_sB_N + gkT_eB_N$

$\rightarrow N_0 = gkB_N(T_s + T_e)$

بلوک دیاگرام ⇒



حال دیاگرام زیر را برای یک تقویت کننده نویزی درنظر بگیرید :



$s_o = g.s_s$

$\rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{gS_s}{N_o} = \frac{gS_s}{gkB_N(T_s+T_e)} = \frac{S_s}{kB_N(T_s+T_e)}$ (1)

$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{S_s}{N_s} = \frac{S_s}{kT_sB_N}$ (2)

(1) و (2) ⇒ $\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{1}{1+\frac{T_e}{T_s}}.\left(\frac{S}{N}\right)_s$

ملاحظه می‌کنید که :

۱- همواره $\left(\frac{S}{N}\right)_o \leq \left(\frac{S}{N}\right)_s$

۲- افت SNR ورودی در خروجی، فقط به نسبت $\frac{T_e}{T_s}$ بستگی دارد.

دومین معیار عدد نویز است که اینگونه تعریف می‌شود :

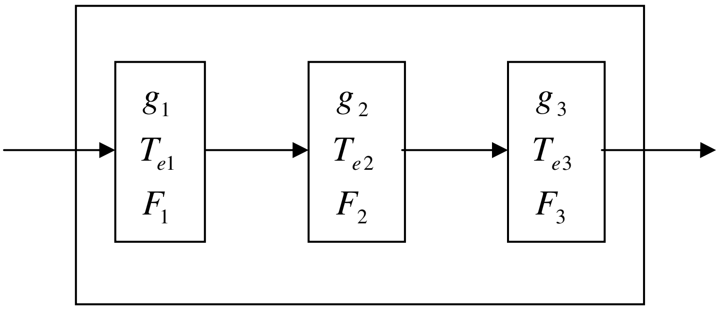
$$F \triangleq \frac{(S/_N)_s}{(S/_N)_o} \qquad (1)$$

F همواره بزرگتر مساوی ۱ است. هرچه F بزرگتر باشد تقویت کننده نویزی تر است.

$$(2).\ F = 1 + \frac{T_e}{T_s} \qquad\qquad (3).\ T_e = (F-1)T_s = (F-1)T_o$$

نکته : F های بزرگ را معمولاً برحسب dB بیان می‌کنند.

اگر چندین سیستم با دماهای مؤثر نویز T_2, T_1 و... و عددهای نویز F_2, F_1 و... و گین‌های g_2, g_1 و... بصورت سری به هم متصل شوند، آنگاه دمای مؤثر نویز کل سیستم و نیز عدد نویز کل سیستم چنین خواهد بود :



$$\rightarrow F = F_1 + \frac{F_2-1}{g_1} + \frac{F_3-1}{g_1 . g_2} + \cdots + \frac{F_n-1}{g_1 . g_2 \cdots g_{n-1}}$$

فرمول فری[1] :

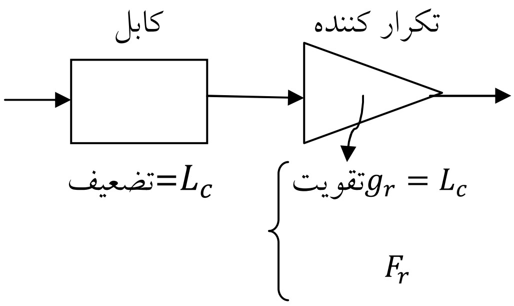
$$\rightarrow T_e = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{g_1} + \frac{T_{e3}}{g_1 . g_2} + \cdots + \frac{T_{en}}{g_1 . g_2 \cdots g_{n-1}}$$

تذکر : از هردو رابطه‌ی فوق اهمیت طبقه اول مشخص می‌شود و اینکه گین تقویت کننده‌ای که در انتهای زنجیره قرار می‌گیرد، مهم نیست.

مثال : یک سیستم تکرار کننده شامل m بخش یکسان است که هر بخشی از یک تکه کابل و یک تکرار کننده مطابق شکل زیر تشکیل شده است :

مطلوبست عدد نویز و دمای نویز کل

1. Feriiś Formula



$$F_c = \frac{(S/N)_s}{(S/N)_o} = \underbrace{\frac{S_s}{S_o}}_{L_c} \times \underbrace{\frac{N_o}{N_s}}_{1} = L_c$$

$$g_c = \frac{1}{L_c}$$

برای ۱بخش از کل: $\quad F_1 = F_c + \frac{F_r - 1}{\left(\frac{1}{L_c}\right)} = L_c + L_c(F_r - 1) = L_c . F_r \quad \Longrightarrow$ فرمول فری

عدد نویز برای کل m بخش: $\left(F_1 = F_2 = F_3 = \cdots\right) \; , \; F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{1} + \frac{F_3 - 1}{1 \times 1} + \cdots \quad \Longrightarrow$

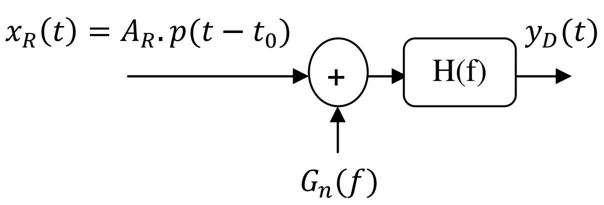
عدد نویز کل $\quad F = mF_1 - (m-1) \simeq mF_1 \quad \Longrightarrow$

دمای نویز کل $\quad T_e = (F-1)T_0 \simeq mF_1 T_0 \quad \Longrightarrow$

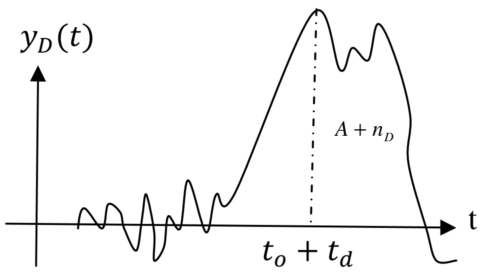
آشکارسازی پالس و فیلترهای تطبیق یافته[1]:

پالسی که شکل موج آنرا می‌دانیم فرستاده و شکل موج تغییر یافته برگشتی که آغشته به نویز نیز می‌باشد را دریافت می‌کنیم. می‌خواهیم در هر لحظه از زمان تعیین کنیم که آیا پالسی وجود دارد یا خیر؟

چون شکل موج پالس را می‌دانیم برای آشکار سازی زمان ورود پالس دریافتی می‌توان فیلترهای متناسب باشکل موج پالس ارسالی طراحی کرد که به این فیلترهای بهینه، فیلترهای تطبیق یافته گفته می‌شود.



مدل سیستم آشکارسازی پالس



یک نمونه خروجی فیلترشده

1. Matched Filter

پالس دریافتی شکل موج معلوم p(t) دارد اما دامنه A_R و زمان ورود t_0 آن نامعلوم است. لذا :

$$x_R(t) = A_R.p(t-t_0)$$

تبدیل فوریه $\rightarrow X_R(f) = A_R.p(f).e^{-j\omega t_0}$

انرژی پالس : $E_R = \int_{-\infty}^{+\infty}|X_R(f)|^2 df = A_R^2\int_{-\infty}^{+\infty}|p(f)|^2 df$

ایده کار چنین است که فیلتری طراحی می‌کنیم که انرژی پالس را در یک نقطه یا یک پالس با دامنه پیک A متمرکز کرده و نیز انرژی نویز خروجی را مینیمم کند.

فرض کنیم زمان مشاهده پیک پالس مذکور، $t = t_0 + t_d$ باشد. لذا شکل موج خروجی مشابه آنچه که در شکل اخیر آمده می‌باشد. حال بدنبال *H(f)* فیلتر مذکور می‌گردیم که هدف مذکور را تحقق دهد. توابع *p(t)* و $G_n(f)$ معلوم فرض می‌شوند.

مقدار پیک $A = F^{-1}\{Y_D(f)\}\Big|_{t=t_0+t_d} = F^{-1}\{H(f).X_R(f)\}\Big|_{t=t_0+t_d}$

$$=A_R\int_{-\infty}^{+\infty} H(f).p(f).e^{j\omega t_d}df$$

$\Rightarrow$ توان سیگنال $=A^2 = A_R^2\left|\int_{-\infty}^{+\infty} H(f).p(f).e^{j\omega t_d}\right|^2$

توان نویز $= \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2\, G_n(f)df$

حال محاسبه *SNR* :

$$SNR = \left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{A^2}{\sigma^2} = \left(\frac{A}{\sigma}\right)^2$$

$$= \frac{A_R^2\left|\int_{-\infty}^{+\infty} H(f).p(f).e^{j\omega t_d}\,df\right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} G_n(f).|H(f)|^2 df}$$

ما بدنبال ماکزیمم کردن نسبت روبرو هستیم:

از نامساوی شوارتز می‌دانیم : $\frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} v(f).w^*(f)df\right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty}|v(f)|^2 df} \le \int_{-\infty}^{+\infty}|w(f)|^2\,df$ ❈

حال v(f) و w(f) را بصورت زیر انتخاب می‌کنیم :

$$v(f) = H(f).\sqrt{G_n(f)}$$

$$w^*(f) = A_R.\frac{H(f)p(f)e^{j\omega t_d}}{v(f)} = \frac{A_R.p(f).e^{j\omega t_d}}{\sqrt{G_n(f)}}$$

می‌دانیم زمانی تساوی در رابطه ❋ برقرار می‌شود که v(f) متناسب با w(f) باشد پس اگر انتخاب کنیم (بطور دلخواه) $v(f)=\frac{kw(f)}{A_R}$ آنگاه مقدار ماکزیمم را چنین می‌توان بدست آورد :

$$\left(\frac{A}{\sigma}\right)^2_{max}=A_R^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|p(f)|^2}{G_n(f)}df$$

از شرط تساوی : $H_{opt}(f)=k.\frac{p^*(f).e^{-j\omega t_d}}{G_n(f)}$ $\Longrightarrow$ تابع فیلتر بهینه

ملاحظه می‌کنید که فیلتر بهینه فرکانس‌هایی که سیگنال طیف قوی دارد تقویت کرده (زیرا متناسب با p(f) است.) و جاهایی که نویز طیف قوی دارد تضعیف می‌کند (زیرا متناسب با معکوس $G_n(f)$ است.)

حال اگر نویز مورد بررسی سفید باشد (یعنی $G_n(f)=\frac{1}{2}\eta$) :

$$\left(\frac{A}{\sigma}\right)^2_{max}=\frac{2A_R^2}{\eta}\int_{-\infty}^{+\infty}|p(f)|^2df=\frac{2E_R}{\eta}$$

$$H_{opt}(f)=\frac{2k}{\eta}.p^*(f).e^{-j\omega t_d}$$

$$\rightarrow\ h_{opt}(t)=F^{-1}\{H_{opt}(f)\}=\frac{2k}{\eta}p(t_d-t)$$

ملاحظه می‌کنید که شکل پاسخ ضربه همان شکل پالس ارسالی را دارد لذا به همین دلیل نام فیلتر *تطبیق یافته* را انتخاب کرده‌اند (t_d زمان تأخیر بین لحظه ورود پالس و لحظه وقوع پیک است.)

ممکن است $h_{opt}(t)$ غیرسببی و در نتیجه غیرقابل تحقق شود. در اینگونه مواقع t_d را به اندازه کافی بزرگ فرض می‌کنند و برای زمان‌های منفی پاسخ ضربه را صفر تقریب می‌زنند.

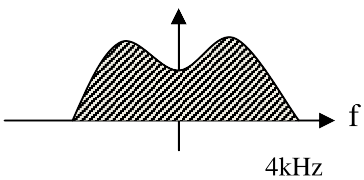
فصل سوم

مدولاسیون پیوسته خطی

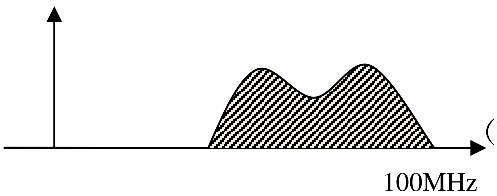
می‌خواهیم سیگنال حقیقی $x(t)$ که پیام نیز نامیده می‌شود را مدوله کنیم. یعنی طیف آنرا در حوزه فرکانس به فرکانس‌های بالاتر منتقل کنیم تا مناسب انتقال روی کانال باشد. در گیرنده عکس‌العمل مدولاسیون بنام دمودلاسیون انجام می‌شود یعنی طیف سیگنال سرجای اولیه خود منتقل می‌شود.

در مدولاسیون پیوسته خطی منظور از خطی بودن این است که شکل طیف پس از مدولاسیون به هم نخورد.

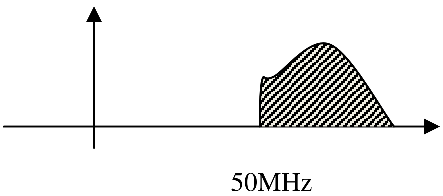
نکته‌ای که در اینجا باید به آن توجه کرد این است که قسمت مهم طیف، فرکانس‌های مثبت است. این موضوع در شکل‌های زیر مشخص شده است :



(شکل۱)



(شکل۲)



(شکل۳)

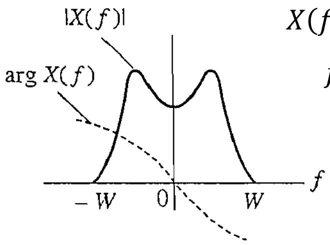
شکل ۲و۳ هردو مدولاسیون پیوسته خطی شکل۱ است. باید توجه داشت که شکل۳ هم خطی است چون قسمت مهم طیف فرکانس‌های مثبت است و کافیست که قسمت مثبت شکل خود را حفظ کند تا خطی تلقی گردد.

در اینجا سه روش مدولاسیون را بررسی می‌کنیم :

۱- AM ۲- DSB ۳- SSB

در ابتدا یکسری فرضیات را در نظر می‌گیریم :

۱- سیگنال را باند محدود در نظر می‌گیریم یعنی:



$X(f) = 0$
$f > w$

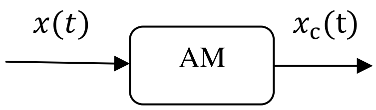
۲- سیگنال را نرمالیزه فرض می‌کنیم. یعنی :

$|x(t)| \leq 1 \quad \rightarrow \quad s_x \leq 1$ و $s_x = \langle x(t)^2 \rangle$

البته بعضی اوقات تحلیل ریاضی با x(t) سخت و حتی غیر ممکن است لذا ممکن است در تحلیل خود از حالت تک‌تن یا سینوسی استفاده کنیم : $x(t) = A_m cos\omega_m t \quad , \quad A_m \leq 1 \quad , \quad f_m < w$

الف) مدولاسیون AM[1]:

در این مدولاسیون، پوش[2] سیگنال مدوله شده، شکل سیگنال پیام x(t) را دارد.



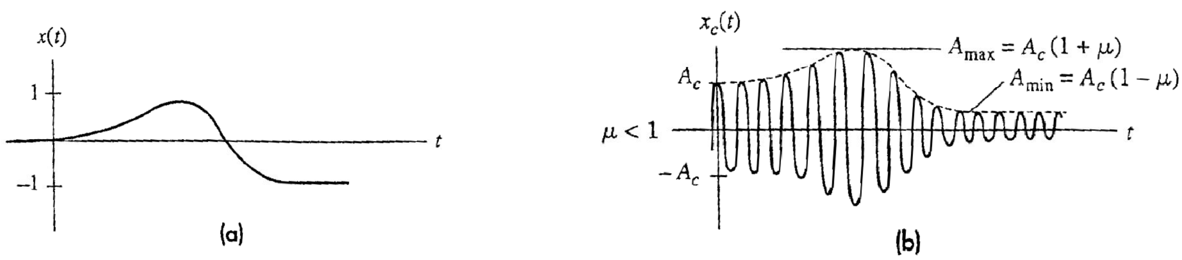
$x_c(t) = A_c\big(1 + \mu x(t)\big)cos\omega_c t$ و $\omega_c = 2\pi f_c$

μ: شاخص یا اندیس مدولاسیون نام دارد.

برای اینکه بتوان از پوش سیگنال مدوله شده، سیگنال اولیه را استخراج کرد دو شرط باید برقرار باشد:

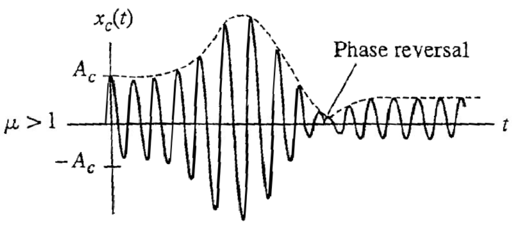
۱- $\mu < 1$

۲- $f_c \gg w$



اگر $\mu > 1$ شود پدیده‌ای بنام برگشت فاز[3] اتفاق می‌افتد. در شکل c مشاهده می‌کنید :

1. Amplitude modulation
2. envelope
3. phase reversal

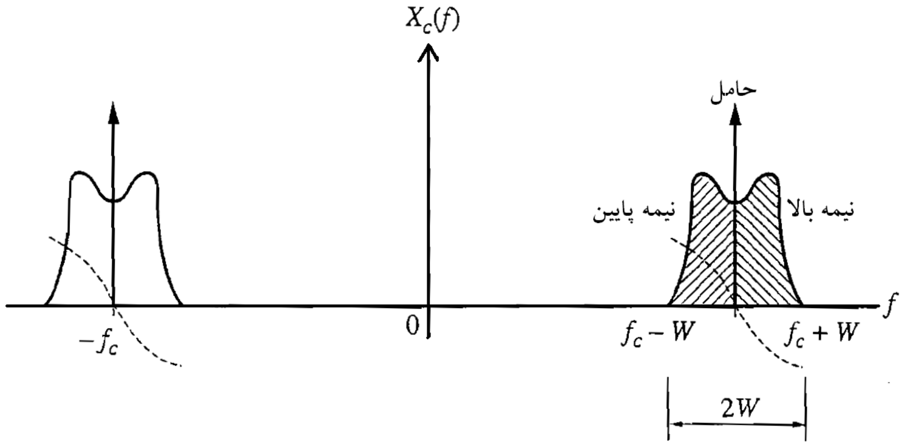


(c)

شرط دوم (یعنی $f_c \gg w$) تضمین می‌کند که موج سینوسی $A_c cos\omega_c t$ که حامل(کریر[1]) نامیده می‌شود در مقایسه با سیگنال پیام $x(t)$ تغییرات بسیار بیشتری دارد تا بتوان برای سیگنال مدوله شده، پوش تصور کرد.

تعیین پهنای باند و توان مدولاسیون AM :

$$X_c(f) = \frac{1}{2}A_c\delta(f - f_c) + \frac{\mu}{2}A_c X(f - f_c) \ , \ f > 0$$



$B_T = 2w$ ⇐ پهنای باند لازم برای ارسال AM ، دوبرابر پهنای باند سیگنال اولیه است.

متوسط توان ارسالی : ⇒ $S_T \triangleq \langle x_c^2(t)\rangle \Longrightarrow \ S_T = \frac{1}{2}A_c^2\langle 1 + 2\mu x(t) + \mu^2 x^2(t)\rangle +$

$\frac{1}{2}A_c^2\langle [1 + \mu x(t)]^2 cos2\omega_c t\rangle$

در عبارت بالا در جمله‌ی اول $\langle x(t)\rangle = 0$ فرض می‌کنیم و $\langle x^2(t)\rangle = S_x$ و در جمله دوم به فرض تغییرات آرام x(t) در مقایسه با $cos\omega_c t$ ، این متوسط برابر صفر است. در نتیجه داریم :

$$S_T = \frac{1}{2}A_c^2(1 + \mu^2 S_x) = \frac{1}{2}A_c^2 + \frac{1}{2}A_c^2\mu^2 S_x = P_c + 2P_{sb}$$

$$P_c = \frac{1}{2}A_c^2 \qquad , \qquad P_{sb} = \frac{1}{4}\mu^2 A_c^2 S_x = \frac{1}{2}\mu^2 S_x P_c$$

1. carrier

P_c توان ناشی از مؤلفه ی سیگنال حامل است که اطلاعاتی حمل نمی‌کند.

P_{sb} توان مربوط به هرکدام از دوطرف بالا و پایین طیف سیگنال است.

$$|\mu x(t)| \leq 1 \implies \mu^2 S_x \leq 1 \implies P_{sb} \leq \frac{1}{2} P_c \implies P_c \geq 2P_{sb} \implies 2P_{sb} \leq \frac{1}{2} S_T$$

یعنی حداقل ۵۰ درصد توان ارسالی S_T مربوط به حامل است که حامل هیچ اطلاعاتی نیست و تلف می‌شود.

ب) مدولاسیون DSB[1] یا DSB-SC[2] :

$$x_c(t) = A_c x(t) cos\omega_c t$$

$$\implies X_c(f) = \frac{1}{2} A_c X(f - f_c) \qquad f > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad B_T = 2w$$

در این مدولاسیون طیف مانند طیف AM است با این تفاوت که دیگر ضربه ناشی از مؤلفه سیگنال حامل را ندارد.

پوش $A(t) = A_c |x(t)|$

فاز $\phi(t) = \begin{cases} 0 & x(t) > 0 \\ \pm 180 & x(t) < 0 \end{cases}$

در این مدولاسیون پوش دیگر $x(t)$ نیست بلکه $|x(t)|$ است. لذا دیگر نمی‌توان بطور ساده فقط با یک آشکارساز پوش سیگنال اصلی را بازیابی کرد، بلکه به مدارات پیچیده تری نیاز است. اما مزیتی که این نوع مدولاسیون دارد بازدهی بالای آن نسبت به AM است : $S_T = 2P_{sb} = \frac{1}{2} A_c^2 S_x$

یعنی DSB نسبت به AM از توان موجود فرستنده بهتر استفاده می‌کند.

اما فرستنده‌ها معمولاً محدودیتی روی توان حاصل از حداکثر دامنه سیگنال (یعنی A_{max}^2) نیز اعمال می‌کنند.

لذا برای مقایسه عملکرد روش‌های مدولاسیون باید نسبت $\frac{P_{sb}}{A_{max}^2}$ آن‌ها را باهم مقایسه کرد. در اینحالت چون در AM، $A_{max} = 2A_c$ و در DSB، $A_{max} = A_c$ است، پس داریم :

$$\frac{P_{sb}}{A_{max}^2} = \begin{cases} \frac{S_x}{4} & DSB \\ \frac{S_x}{16} & AM,\ \mu = 1 \end{cases}$$

1. double side band
2. Double side band carrier

یعنی بازاء یک A_{max}^2 مشخص و ثابت، توان باند جانبی DSB چهار برابر AM است. (یعنی از لحاظ بازدهی توان، DSB چهار برابر بهتر از AM عمل می‌کند.)

مدولاتور : مدار(سیستمی) است که عمل مدولاسیون را انجام می‌دهد.

انواع مدولاتور :

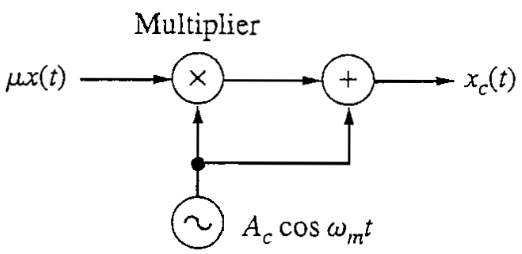
۱- مدولاتورهای ضربی یا ضرب کننده[1] ۲

۲- مدولاتورهای قانون مجذور[2] و متعادل[3]

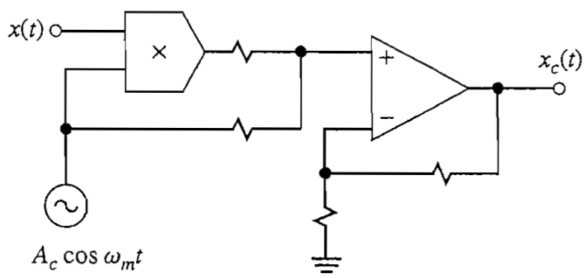
۳- مدولاتورهای سوئیچی[4]

۱- مدولاتورهای ضرب کننده :

برای AM :

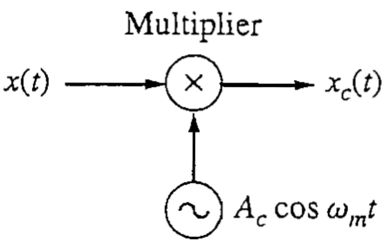


(a)

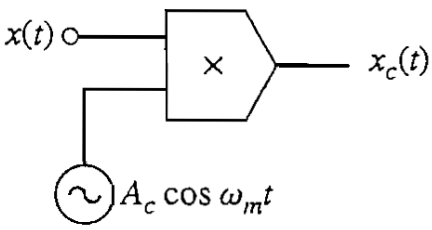


(b)

برای DSB :



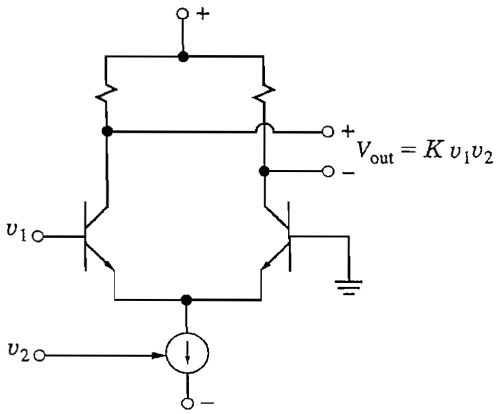
(a)



(b)

1. product modulator
2. Square law modulator
3. balanced modulator
4. switching modulator

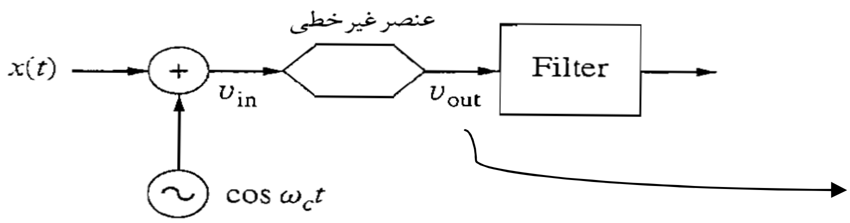
مدارات مختلفی را می‌توان بعنوان ضرب کننده آنالوگ استفاده کرد. از جمله تقویت کننده‌هایی که هدایت آن‌ها متناسب با یک سیگنال متغیر است.



محدودیت این نوع مدولاتورها توان خروجی کم و محدودیت فرکانسی آن‌ها است.

۲– مدولاتورهای قانون مجذور و مدولاتورهای متعادل :

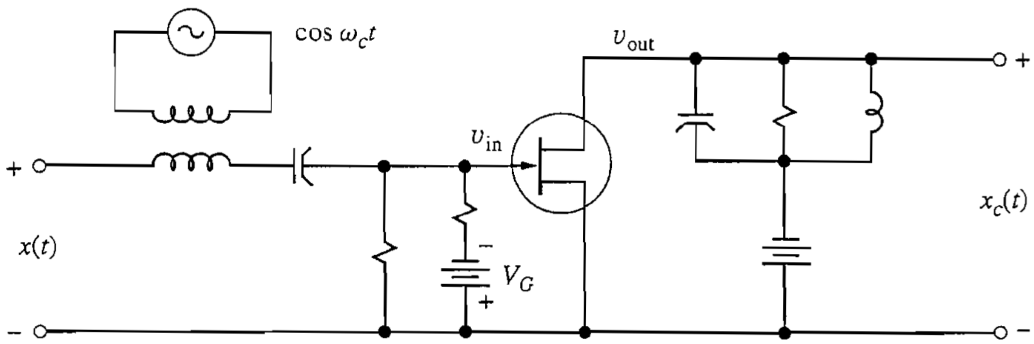
برای رفع محدودیت فرکانسی می‌توان از این نوع مدولاتورها استفاده کرد که از یک عنصر غیرخطی بعنوان ضرب کننده استفاده می‌شود :



$$v_{out} = a_1 v_{in} + a_2 v_{in}^2 \quad *$$

بعنوان یک نمونه از چنین عنصر غیرخطی که رابطه * را تحقق دهد می‌توان از $JFET$ استفاده کرد.

بطور مثال در مدار زیر :



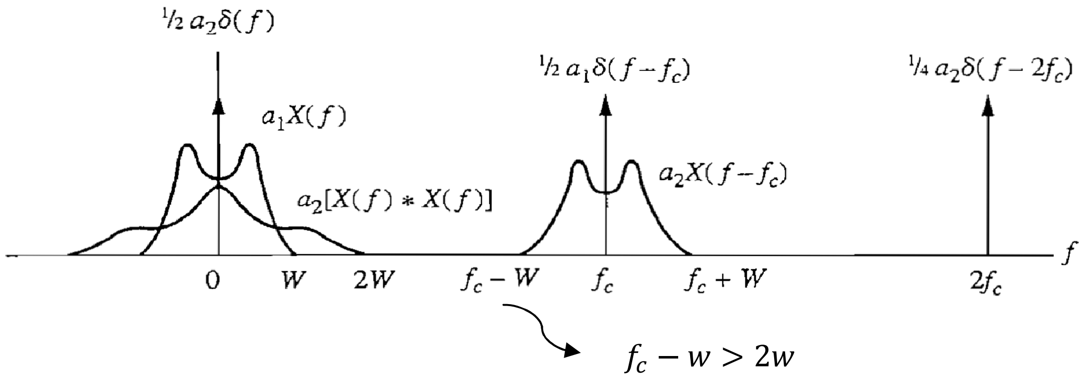
در این مدار، مدار تشدید LC خروجی نقش یک فیلتر میان گذر را ایفا می‌کند.

$$v_{in}(t) = x(t) + cos\omega_c t \implies v_{out}(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_2 cos^2\omega_c t + a_1\left[1+\frac{2a_2}{a_1}\right]cos\omega_c t$$

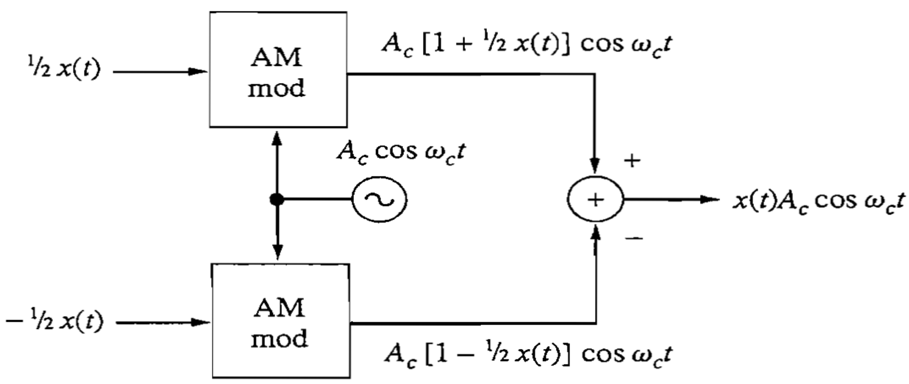
در عبارت بالا $A_c = a_1$ و $\frac{2a_2}{a_1} = \mu$.

جمله آخر رابطه بالا یعنی $a_1\left[1+\frac{2a_2}{a_1}\right]cos\omega_c t$ توسط فیلتر جدا می‌شود.

با توجه به تبدیل فوریه رابطه فوق می‌توان نشان داد که حداقل باید $f_c > 3w$ باشد تا فیلتر خروجی بتواند بطور صحیح طیف مناسب را استخراج کند. این موضوع در شکل زیر نشان داده شده است :



مدار فوق برای داشتن AM مناسب است. برای DSB باید $a_1 = 0$ شود. یعنی عنصری باید داشته باشیم که $v_{out} = a_2 v_{in}^2$ باشد که در عمل بسیار کمیاب است. لذا برای داشتن DSB از مدولاتور متعادل مانند شکل زیر استفاده می‌کنند. (ملاحظه می‌کنید که یک مدولاتور متعادل در حقیقت یک ضرب کننده است.)

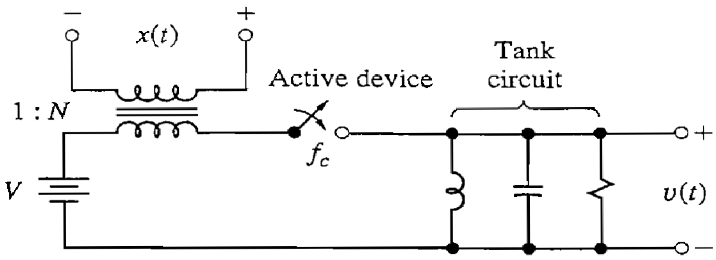


پس تاکنون مشکل محدودیت فرکانسی را حل کردیم اما مشکل توان خروجی کم همچنان باقی است.

۳- مدولاتورهای سوئیچی :

مدولاسیون‌هایی که تاکنون دیدیم اصطلاحاً مدولاسیون سطح پایین بودند یعنی توان خروجی آن‌ها چندان زیاد نیست. برای داشتن توان بالا باید از تقویت‌کننده‌های قدرت RF خطی استفاده کنیم که مسائل خاص خودشان را دارند.

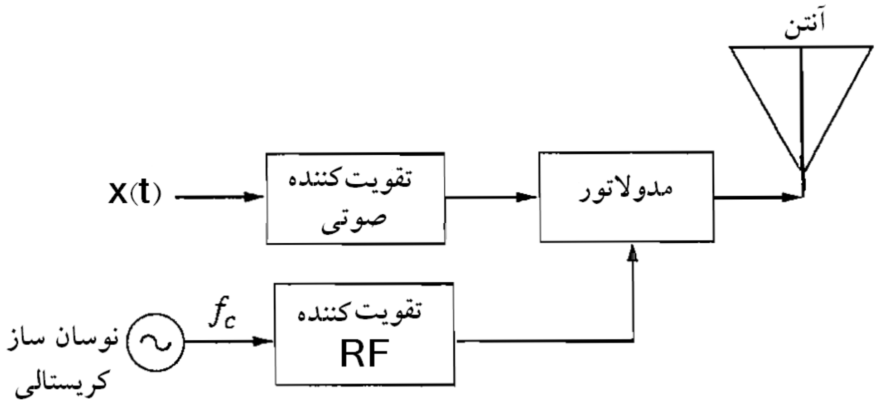
راه دیگر استفاده از مدولاسیون سطح بالاست. یک نمونه مدار مدولاتور چنین است :



$v(t)$ پوش سیگنال $= V+Nx(t)$

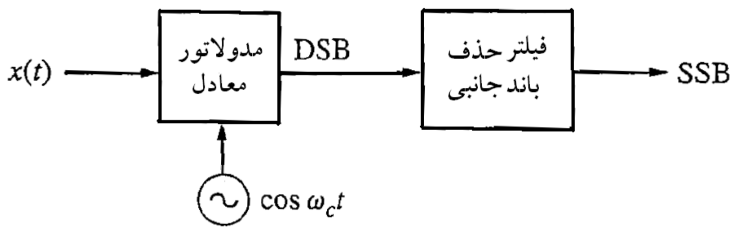
کلید با فرکانس f_c قطع و وصل می‌شود. لذا هر $\frac{1}{f_c}$ ثانیه، مدار تشدید (که روی f_c تشدید می‌کند) تحریک می‌شود. بنابراین خروجی $v(t)$ یک موج سینوسی با فرکانس f_c است که اندازه لحظه‌ای آن متناسب با اندازه تحریک (انرژی داده شده) یعنی $v+Nx(t)$ است. حال چون فرکانس f_c نسبت به پهنای باند $x(t)$ بسیار بزرگ است، پوش سیگنال $v(t)$ همان $v+Nx(t)$ خواهد شد.

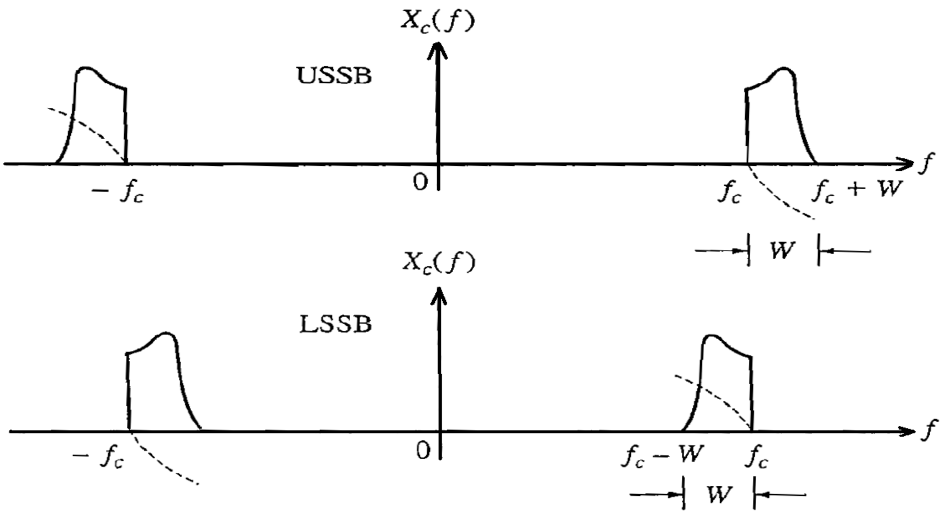
حال از مدولاتور فوق بصورت زیر برای مدولاسیون AM سطح بالا استفاده می‌کنیم :



ج) مدولاسیون SSB[1] :

در مدولاسیون *DSB* ، انرژی حاصل از حامل در *AM* را حذف کردیم، لذا توان ارسالی مفید بیشتر شد. اما پهنای باند همچنان 2W است . برای کاهش پهنای باند از *SSB* یا *VSB* استفاده می‌شود . در *SSB* یک نیمه باند بطور کامل حذف می‌شود اما در *VSB* قسمتی از نیمه باند حذف می‌شود. علت حذف یک نیمه باند این است که به دلیل تقارن ، اطلاعات سیگنال را از یک نیمه باند نیز می‌توان استخراج کرد.





$\Rightarrow\ B_T = w\ ,\ \ S_T = P_{sb} = \frac{1}{4}A_c^2 S_x$

تحلیل در حوزه زمان بر خلاف حوزه فرکانس چندان ساده نیست . برای حالت تک سینوسی در حوزه زمان می‌توان سیگنال *SSB* را چنین نوشت :

$$x_c(t) = \frac{1}{2}A_c A_m cos(\omega_c \pm \omega_m)t$$

در عبارت بالا، علامت مثبت برای *USSB* و علامت منفی برای *LSSB* است.

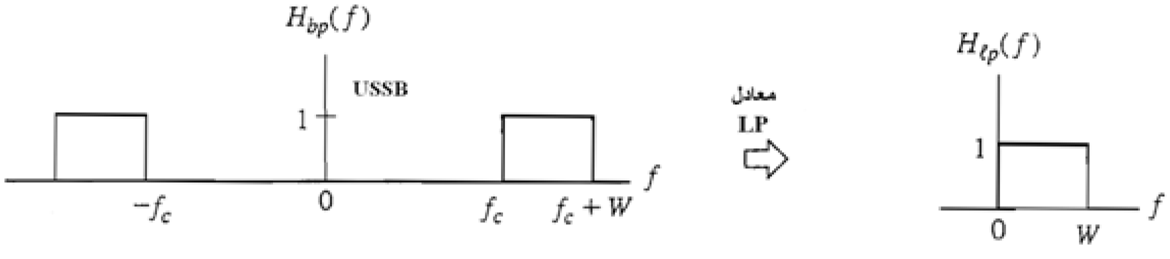
برای تحلیل سیگنال پیام دلخواه *X(t)* از روش تحلیل گذر برای تحلیل سیگنالهای میان گذر استفاده می‌کنیم. به

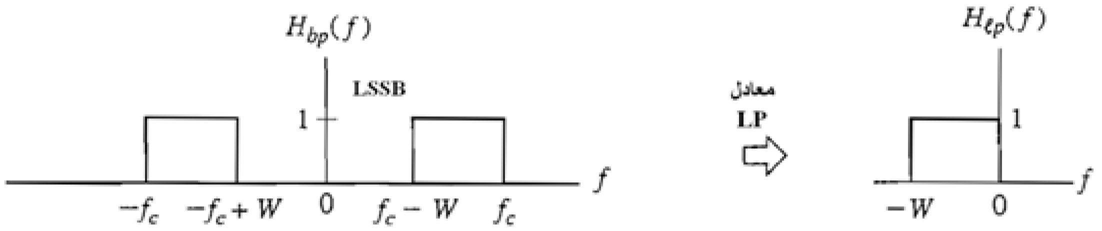
1. single side band

این روش همه سیگنال‌ها و فیلترها را به فرکانس‌های پایین منتقل می‌کنیم .

$$x_{bp}(t) = A_c x(t) cos\omega_c t \xrightarrow{\text{معادل } LP} x_{lp}(t) = Re\{x_{bp}(t)e^{j\omega_c t}\} = \frac{1}{2}A_c x(t)$$

$$\Rightarrow x_{lp}(f) = \frac{1}{2}A_c x(f)$$



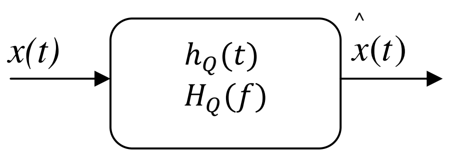


$$H_{bp}(f) \Rightarrow \quad H_{lp}(f) = \begin{cases} u(f) - u(f-w) & USSB \\ u(f+w) - u(f) & LSSB \end{cases} = \frac{1}{2}(1 \pm sgn(f)) \qquad |f| \le w$$

خروجی فیلتر $\Longrightarrow$ $Y_{lp}(f) = H_{lp}(f)X_{lp}(f) = \frac{1}{4}A_c[X(f) \pm (sgn(f)).X(f)]$

$\Longrightarrow$ $y_{lp}(t) = *$

برای بدست آوردن عبارت ٭ ابتدا **تبدیل هیلبرت** را معرفی می‌کنیم :



تبدیل هیلبرت :)
$$H_Q(f) = -jsgn(f) = \begin{cases} -j & f>0 \\ +j & f<0 \end{cases}$$

$$(\quad x^{\wedge}(t) \triangleq x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{x(\lambda)}{t-\lambda} d\lambda$$

حال با استفاده از تبدیل هیلبرت برای عبارت ٭ داریم :

$$-jsgnf = \mathcal{F}\{x^{\wedge}(t)\} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\{(sgnf).X(f)\} = jx^{\wedge}(t) \Rightarrow y_{lp}(t) = \frac{1}{4}A_c[x(t) \pm jx^{\wedge}(t)]$$

حال که معادل پایین گذر خروجی SSB را بدست آوردیم آن را دوباره به محل فرکانس اولیه خود بر می‌گردانیم

تا سیگنال اصلی *SSB* بدست آید :

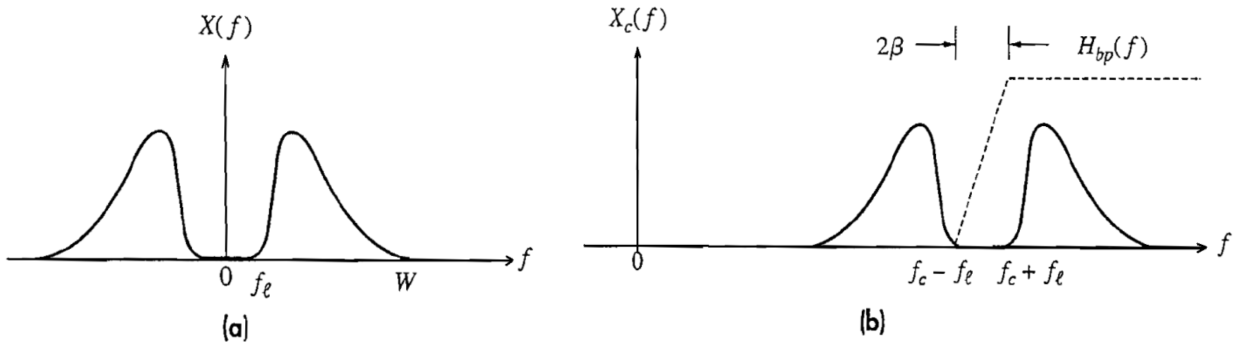
$$\text{سیگنال } SSB \Rightarrow x_c(t) = y_{bp}(t) = 2Re\{y_{lp}e^{j\omega_c t}\} = \frac{1}{2}A_c[x(t)\cos\omega_c t \mp x^{\wedge}(t)\sin\omega_c t]$$

پوش سیگنال *SSB* با توجه به رابطه فوق چنین محاسبه می‌شود :

$$A(t) = \frac{1}{2}A_c\sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}$$

مدارات تولید سیگنال SSB :

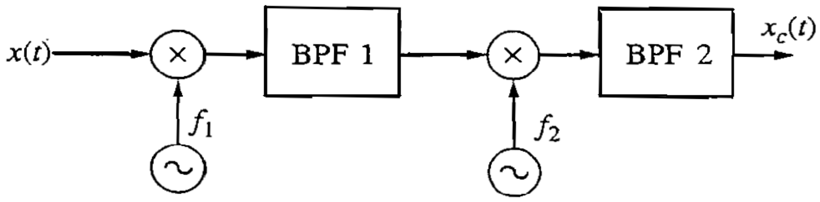
می‌دانیم که برای داشتن *SSB* باید فیلتر ایده‌آل (یعنی در f_c کاملاً تیز باشد) داشته باشیم که در عمل ممکن نیست. زیرا فیلترهای عملی همیشه یک باندگذر غیرصفر دارند. اما خوشبختانه بسیاری از سیگنال‌های *x(t)* در عمل محتوای فرکانسی پایینی آنها کم اهمیت یا بی اهمیت است، مانند سیگنال صحبت. لذا همواره طیف سیگنال *x(t)* بصورت شکل (*a*) است که در اثر مدولاسیون *DSB* بصورت شکل (*b*) درخواهد آمد :



ملاحظه می‌کنید که به اندازه 2β محدوده فرکانسی را می‌توان بعنوان باند گذر فیلترهای عملی در نظر گرفت و استفاده کرد.

اما 2β برابر ۱ درصد فرکانس قطع فیلتر است. بعبارت دیگر با محدودیت $f_{co} < 200\beta$ مواجه هستیم.

2β توسط ماهیت سیگنال *x(t)* مشخص می‌شود و تحت کنترل ما نیست. بنابراین فرکانس قطع فیلتر طبق محدودیت فوق از حدی نمی‌تواند بزرگتر باشد.(فرکانس قطع فیلتر = فرکانس حامل f_c) یعنی فرکانس حامل را نمی‌توان به دلخواه بزرگ انتخاب کرد و این یک عیب مهم محسوب می شود. برای حل این مشکل می‌توان از دو یا چند مرحله مطابق شکل زیر برای تولید سیگنال *SSB* استفاده کرد. (نحوه حل مشکل را توضیح دهید)

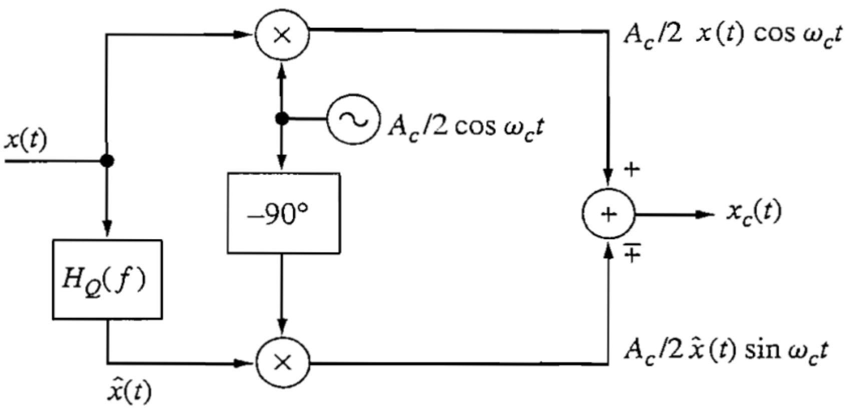


(در این طرح، فرکانس حامل برابر $f_c = f_1 + f_2$ خواهد بود. f_1 برابر فرکانس قطع پایینی BPF1 و f_2 فرکانس قطع پایینی فیلترBPF2 است.)

راه دوم برای تولید سیگنال *SSB* استفاده مستقیم از رابطه خروجی *SSB* است :

$$x_c(t) = \frac{A_c}{2} x(t) \cos \omega_c t \pm \frac{A_c}{2} \hat{x}(t) \cos (\omega_c t - 90°)$$

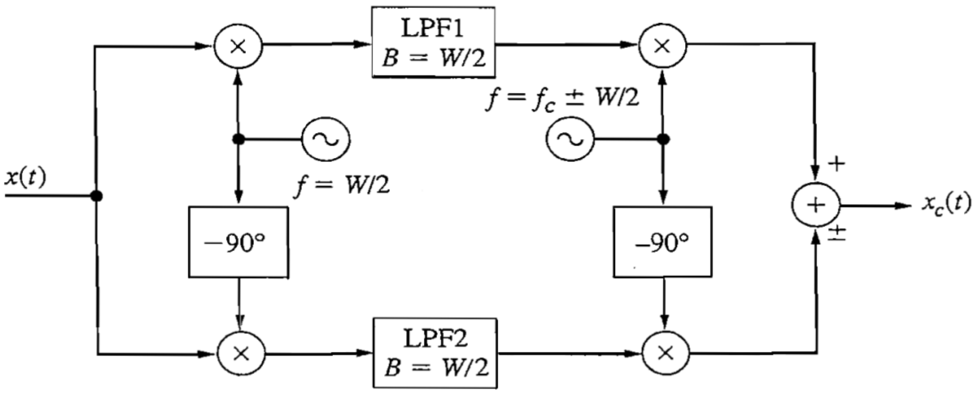
یعنی سیگنال *SSB* را می‌توان از ترکیب دو سیگنال *DSB* بدست آورد. این روش، روش **شیفت فاز** نامیده می‌شود و دیگر نیازی به فیلترهای با مشخصات خاص ندارد.



یک عیب این روش این است که خود تبدیل هیلبرت را نمی‌توان در عمل بطور دقیق پیاده‌سازی کرد و باید آنرا تقریب زد. لذا مناسب سیگنال‌های است که محدوده فرکانس‌های پایینی آن‌ها بی‌اهمیت باشد.

راه سوم برای تولید سیگنال *SSB* استفاده از **مدولاتور Weaver** مطابق طرح زیر است :

(**تمرین** : نحوه کار آن را برای حالت تُن توضیح دهید.)

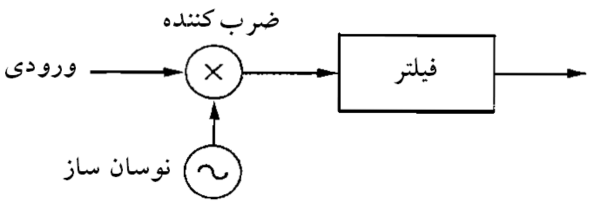


تبدیل فرکانسی[1]:

یعنی انتقال در محور فرکانس به بالا یا پایین به هر میزان دلخواه. این کار با ضرب در یک موج سینوسی انجام می‌شود. بطور مثال اگر سیگنال *DSB* یعنی $x(t)\cos\omega_1 t$ را در $\cos\omega_2 t$ ضرب کنیم، خواهیم داشت :

$$x(t)\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t=\frac{1}{2}x(t)\cos(\omega_1+\omega_2)\,t+\frac{1}{2}x(t)\cos(\omega_1-\omega_2)\,t$$

ملاحظه می‌کنید که فرکانس‌های مجموع (f_1+f_2) و تفاضل $(|f_1-f_2|)$ در خروجی ایجاد شده است که با فیلتر کردن مناسب می‌توان فرکانس بالایی (که تبدیل به بالا[2] نامیده می‌شود) یا فرکانس پائینی (که تبدیل به پایین[3] نامیده می‌شود) را انتخاب کرد، عناصری که عمل مذکور (یعنی ضرب در سینوسی و فیلتر کردن) را انجام می‌دهند مبدل فرکانسی یا میکسر[4] نامیده می‌شوند، و به عمل انجام شده میکس کردن یا هتروداین کردن گفته می‌شود. پس دیاگرام یک میکسر چنین است :



دمدولاسیون[5]:

یعنی عکس‌العمل مدولاسیون و بدست آوردن طیف اولیه سیگنال پیام از روی طیف مدوله شده.

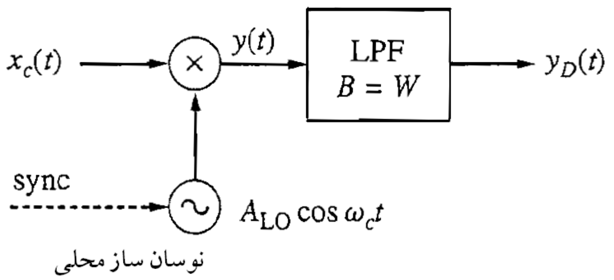
1. frequency conversion
2. up-converting
3. down-converting
4. mixer
5. demodulation

دمدولاسیون برای مدولاسیونهای AM ، DSB ، SSB در حقیقت نوعی انتقال با تبدیل فرکانسی است. پس تبدیل فرکانسی یک حالت کلی است که دمدولاسیون را هم شامل می شود .

دو دسته کلی دمدولاسیون : ۱– آشکارسازهای سنکرون[1] ۲– آشکارسازهای پوش[2]

الف) آشکارسازی سنکرون :

در این روش از دیاگرام زیر برای دمدولاسیون همه انواع مدولاسیون‌های خطی (شامل AM ، DSB ، SSB و VSB) استفاده می‌شود :



پهنای باند فیلتر LPF بزرگتر یا مساوی پهنای باند سیگنال پیام x(t) (یعنی W) باید باشد.

سیگنال سینوسی حاصل از نوسان ساز محلی (LO) باید بطور کاملاً دقیق هم از لحاظ فاز و هم از لحاظ فرکانس سنکرون با سیگنال حامل باشد. به همین دلیل است که نام آشکارسازی سنکرون یا آشکارسازی همانند[3] انتخاب شده است.

برای تحلیل سیگنال $x_c(t)$ را درحالت کلی خود بصورت زیر می‌نویسیم تا همه انواع مدولاسیون‌های خطی را شامل شود :

$$x_c(t) = [k_c + k_\mu x(t)] \cos \omega_c t - k_\mu x_q(t) \sin \omega_c(t)$$

در نتیجه ورودی فیلتر پایین گذر چنین است :

$$x_c(t) A_{lo} \cos \omega_c t = \frac{1}{2} A_{lo} \{ [k_c + k_\mu x(t)] + [k_c + k_\mu x(t)] \cos 2\omega_c t - k_\mu x_q(t) \sin 2\omega_c t \}$$

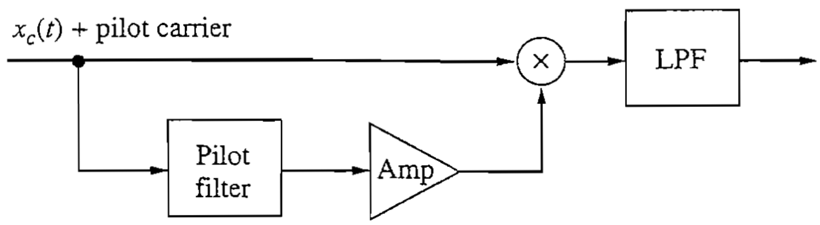
چون $f_c > w$ و فیلتر پایین گذر فرکانس‌های بالاتر از w را حذف می‌کند پس خروجی فیلتر پایین گذر چنین است :

$$y_D(t) = k_D [k_c + k_\mu x(t)]$$

1. synchronous detectors
2. envelope detectors
3. coherent detection

می‌توان مقدار Dc یعنی $k_D k_c$ و البته dc خود سیگنال x(t) را به کمک استفاده از ترانسفورمر یا خازن‌های کوپلاژ حذف کرد.

یکی از مسایل اساسی در دمدولاسیون این است که سیگنال سینوسی استفاده شده باید بطور کامل با سیگنال حامل موجود در گیرنده سنکرون باشد. این مسئله یا مشکل در مدولاسیون‌هایی که سیگنال حامل را حذف کرده‌اند جدی است. برای حل این مشکل در این‌گونه سیستم‌ها قسمت کوچکی از سیگنال حامل را در طیف سیگنال مدوله شده قرار می‌دهند که به آن حامل راهنما[1] گفته می‌شود. در گیرنده این حامل راهنما به کمک یک فیلتر میان‌گذر باند باریک جدا و تقویت می‌شود. سپس از آن در یک نوسان‌ساز محلی برای تولید موج سینوسی سنکرون با سیگنال دریافت شده استفاده می‌شود. به چنین سیستمی که طرح آن در زیر نشان داده شده است آشکار سازی هوموداین[2] گفته می‌شود.



در این روش و دیگر روش‌های سنکرون کردن، در هر صورت مقداری غیر سنکرون بودن وجود دارد. لذا در بررسی دریفت[3] فرکانس یا فاز در سیستم‌های مدولاسیون DSB و SSB می پردازیم.

سیگنال نوسان‌ساز محلی $= \cos(\omega_c t + \omega' t + \phi')$

که ϕ' و ω' خطاهای فاز و فرکانس نسبت به سیگنال حامل اصلی است که به آرامی با زمان تغییر می‌کنند.

برای DSB با مدولاسیون تن داریم :

$$y_D(t) = k_D \cos\omega_m t \cos(\omega' t + \phi') = \begin{cases} \frac{1}{2} k_D[\cos(\omega_m + \omega')t + \cos(\omega_m - \omega')t] \ , & \phi' = 0 \\ k_D \cos\omega_m t \cos\phi' & , \quad \omega' = 0 \end{cases}$$

1. carrier pilot
2. homodyne detection
3. drift

برای SSB با $x_c(t) = cos(\omega_c \pm \omega_m)\, t$ داریم :

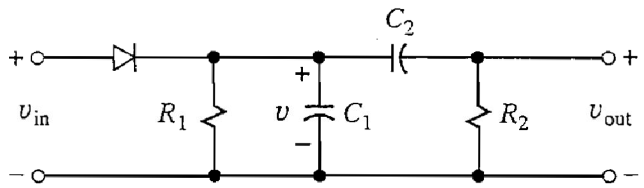
$$y_D(t) = k_D\, cos[\omega_m t \mp (\omega' t + \phi')] = \begin{cases} k_D\, cos(\omega_m \mp \omega')t & , \quad \phi' = 0 \\ k_D\, cos(\omega_m t \mp \phi') & , \quad \omega' = 0 \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که در هر دو مدولاسیون DSB و SSB وجود دریفت فرکانسی که در مقایسه با W قابل ملاحظه باشد، سیگنال آشکارسازی شده را به شدت تحت تاثیر قرار می‌دهد. تاثیر آن برای DSB بیشتر است زیرا دوتن $f_m \pm f'$ بوجود آمده است. در مورد دریفت فاز هم مدولاسیون DSB حساس‌تر از SSB است. زیرا بازاء مثلاً $\phi' = 90$ سیگنال آشکار سازی شده DSB کاملاً از بین می‌رود.

در مورد SSB وجود دریفت فاز منجر به اعوجاج فاز می‌شود و همانطور که می‌دانیم گوش انسان چندان به اعوجاج فاز حساس نیست. لذا دریفت فاز در سیستم‌های صوتی SSB چندان مسئله ساز نیست.

ب) آشکارسازی پوش :

روش‌های دمولاسیون سنکرون برای AM نیز کار می‌کنند اما آشکارسازی AM بخاطر سادگی با آشکارسازهای پوش انجام می‌شود. بطور مثال :



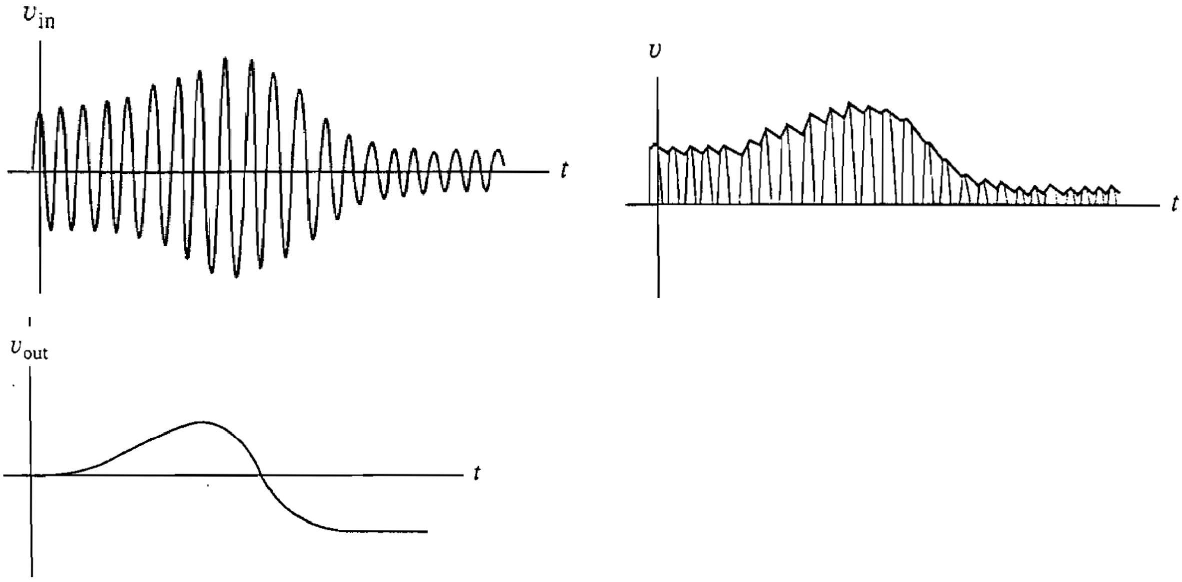
v_{in} یکسوشده = v

R_1C_1 = یک فیلتر پایین‌گذر طوری که

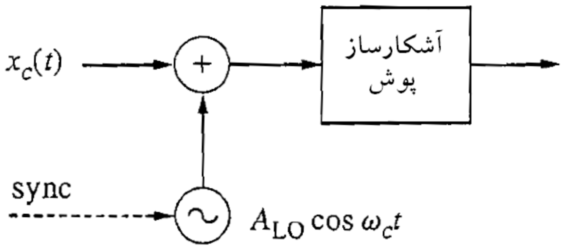
$f_c \gg \frac{1}{R_1C_1} \gg w$. لذا چون $f_c \gg w$ می‌شود پس پوش قابل تعریف است.

زیرا در بین دو قله متوالی، خازن C_1 مقدار بسیار کمی دشارژ می‌شود و v تقریباً همان پوش سیگنال می‌شود. برای حذف dc سیگنال v از فیلتر R_1C_2 استفاده شده است. اما این فیلتر بالاگذر فرکانس‌های پایین سیگنال را نیز دستخوش تغییر و اعوجاج می‌کند لذا برای کاربردهایی که محتویات فرکانس پایین سیگنال مهم هستند، مناسب نیست.

نحوه آشکارسازی AM توسط مدار بالا در شکل‌های زیر نشان داده شده است :



بعضی از دمدولاتورهای SSB وDSB از روش بازسازی پوش که طرح آن در زیر نشان داده شده است استفاده می‌کنند. در این روش یک سیگنال حاصل نوسان‌ساز محلی که دامنه بزرگی هم دارد به سیگنال ورودی اضافه شده و سپس سیگنال حاصل شده به مدار آشکارساز پوش داده می‌شود.



فصل چهارم

مدولاسیون موج پیوسته نمایی

در ابتدا ویژگی‌های مدولاسیون پیوسته خطی و مدولاسیون موج پیوسته نمایی را باهم مقایسه کنیم :

سه ویژگی اساسی مدولاسیون خطی عبارتند از :

۱- طیف سیگنال مدوله شده، همان شکل طیف سیگنال پیام را دارد که شیفت پیدا کرده است.

۲- پهنای باند سیگنال مدوله شده از دوبرابر پهنای باند سیگنال پیام بیشتر نمی‌شود.

۳- می‌توان نشان داد که *SNR* سیگنال دمدوله شده نمی‌تواند از *SNR* سیگنال پیام بیشتر شود، مگر اینکه توان سیگنال ارسالی بیشتر شود.

مدولاسیون نمایی ویژگی‌های متفاوتی با موارد فوق دارد که عبارتند از :

۱- طیف آن در ظاهر هیچ شباهتی به طیف سیگنال پیام ندارد.

۲- پهنای باند آن بیشتر از دوبرابر پهنای باند سیگنال پیام است.

۳- بدون نیاز به افزایش توان سیگنال ارسالی، *SNR* سیگنال گیرنده می‌تواند از *SNR* سیگنال پیام بیشتر شود، بعبارت دیگر مصالحه‌ای بین توان ارسالی و پهنای باند انجام شده است.

مدولاسیون نمایی :

دو نوع اساسی مدولاسیون نمایی *FM* و *PM* است.

سیگنال مدوله شده روبرو را درنظر بگیرید : $x_c(t) = A_c\cos(\omega_c t + \phi(t))$

زاویه لحظه‌ای کل $= \theta_c(t) \triangleq \omega_c t + \phi(t) \implies x_c(t) = A_c \cos\theta_c(t) = A_c Re\left\{e^{j\theta_c t}\right\}$

لذا اگر $\theta_c(t)$ حاوی اطلاعات سیگنال پیام باشد، مدولاسیونی انجام داده‌ایم که مدولاسیون نمایی نامیده می‌شود.

مدولاسیون PM:

در این مدولاسیون فاز لحظه‌ای متناسب با سیگنال است : $\phi(t) \triangleq \phi_\Delta . x(t) \;\; ; \; \phi_\Delta \leq 180^o \;\; , \; |x| \leq 1$

$$\implies x_c(t) = A_c \cos[\omega_c t + \phi_\Delta x(t)]$$

که ϕ_Δ ماکزیمم شیفت فازی است که *x(t)* می‌تواند ایجاد کند.

همانطور که در مدولاسیون AM باید $\mu \leq 1$ می‌بود تا مدولاسیون صحیح انجام شود در اینجا هم $\phi_\Delta \leq 180^o$ باید باشد، لذا به $\boldsymbol{\phi_\Delta}$ شاخص مدولاسیون فاز یا انحراف فاز[1] نیز گفته می‌شود.

$$x_c(t) \text{ فرکانس لحظه‌ای } = f(t) \triangleq \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\theta_c(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}.\frac{d\phi(t)}{dt} \qquad (1)$$

منظور از فرکانس لحظه‌ای این نیست که در هر لحظه طیف $x_c(t)$ یک سینوسی خالص با یک فاز متغیر است. بعبارت دیگر فرکانس در کلمه «فرکانس لحظه ای» با فرکانس در کلمه «طیف فرکانسی» متفاوت است.

مدولاسیون FM:

در این مدولاسیون فرکانس لحظه ای متناسب با سیگنال *x(t)* است :

$f(t) \triangleq f_c + f_\Delta . x(t) \quad , \; f_\Delta < f_c \quad (2) \qquad , \; f_\Delta =$ انحراف فرکانسی

شرط $f_\Delta < f_c$ باید برقرار باشد تا فرکانس لحظه‌ای همیشه مثبت شود، البته در عمل به خاطر محدودیت پهنای باند $f_\Delta \ll f_c$ است.

$$(1),(2) \implies \frac{d\phi(t)}{dt} = 2\pi f_\Delta x(t) \implies \phi(t) = 2\pi f_\Delta \int_{t_0}^{t} x(\lambda)d\lambda + \phi(t_0) \quad , \; t \geq t_0$$

اگر t_0 طوری باشد که : $\phi(t_0) = 0 \qquad \implies \quad \phi(t) = 2\pi f_\Delta \int_{t_0}^{t} x(\lambda)d\lambda$

1. phase deviation

سیگنال مدوله شده FM ⇨ $x_c(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int^t x(\lambda)d\lambda\right]$

ملاحظه می‌کنید که باید این فرض را هم در نظر بگیریم که سیگنال $x(t)$ مولفه dc نداشته باشد زیرا در غیر اینصورت جمله انتگرالی همواره مثبت می‌شود و دیگر فرکانس لحظه‌ای کم و زیاد نمی‌شود بلکه همواره زیاد می شود. وجود این مولفه dc در حقیقت معادل شیفت دادن فرکانس حامل باندازۀ $f_\Delta\langle x(t)\rangle$ است. زیرا $X(t)$ را با در نظر گرفتن یک مولفه dc می‌توان چنین نوشت :

$$x(t) = x_{dc} + x_{ac}(t) = \langle x(t)\rangle + x_{ac}(t)$$

⇨ فرکانس لحظه‌ای $f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\theta_c(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\left(\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int^t [\langle x(\lambda)\rangle + x_{ac}(\lambda)]\, d\lambda\right)$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}(\omega_c t + 2\pi f_\Delta.\langle x(t)\rangle.t + 2\pi f_\Delta \int^t x_{ac}(\lambda)d\lambda)$$

$$= f_c + f_\Delta\langle x(t)\rangle + f_\Delta x_{ac}(t) = f_c' + f_\Delta.x_{ac}(t)$$

پس بطور خلاصه برای مقایسه FM و PM داریم :

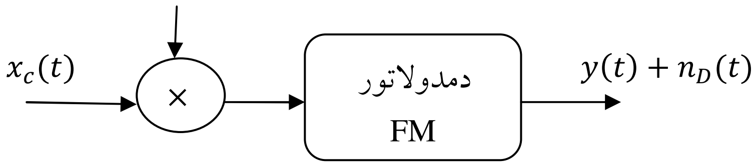
	فاز لحظه‌ای $\phi(t)$	فرکانس لحظه‌ای $f(t)$
PM	$\phi_\Delta.x(t)$	$f_c + \frac{1}{2\pi}\phi_\Delta x'(t)$
FM	$2\pi f_\Delta \int^t x(\lambda)d\lambda$	$f_c + f_\Delta x(t)$

ملاحظه می‌کنید که تفاوت ایندو در یک مشتق گرفتن با انتگرال گرفتن است. لذا اگر مدولاسیون FM و PM یک سیگنال سینوسی(مدولاسیون تُن) را بررسی کنیم شکل موج‌های آن‌ها تفاوتی از لحاظ ظاهری با هم ندارند(چرا؟)

در مدولاسیون‌های FMوPM دامنه سیگنال مدوله شده برخلاف مدولاسیون‌های خطی ثابت است، پس توان سیگنال ارسال شده FM وPM همواره برابر است با : $S_T = \frac{1}{2}A_c^2$ توان ارسالی که مستقل از سیگنال $x(t)$ است.

FM و *PM* در بسیاری از موارد شبیه هم هستند اما رفتار آن‌ها در مورد نویز متفاوت است. خاصیت کاهش نویز *FM* بیشتر و بهتر از *PM* است.

برای اینکار یک دمدولاتور *FM* را در نظر بگیرید که سیگنال $y(t) = f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$ را تولید می‌کند. ملاحظه می‌کنید که سیگنال خروجی به f_Δ بستگی دارد. هرچه f_Δ بزرگتر شود دامنه سیگنال خروجی نیز بیشتر می‌شود بدون اینکه نیاز به افزایش توان ارسالی باشد. حال در مدولاتور فوق که بصورت سیستمی در زیر نشان داده شده است، نسبت *SNR* خروجی همان نسبت توان y(t) به توان $n_D(t)$ است.



به فرض ثابت بودن توان $n_D(t)$ ملاحظه می‌کنید که با افزایش f_Δ می‌توان توان y(t) را افزایش داد (بدون افزایش توان $(n_D(t)$ پس *SNR* خروجی افزایش می‌یابد (بدون اینکه توان ارسالی S_T در فرستنده افزایش یافته باشد) البته توجه کنید که این افزایش *SNR* خروجی به بهای پهنای باند بیشتر بدست آمده است. هرچه پهنای باند بیشتری در نظر گرفته شود می‌توان *SNR* خروجی را افزایش داد.

FM و PM باند باریک[1] :

سیگنال $x_c(t)$ را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم :

$$x_c(t) = x_{ci}(t)\cos\omega_c(t) - x_{cq}(t)\sin\omega_c t \qquad (*)$$

$$x_{ci}(t) = A_c\cos\phi(t) = A_c\left[1 - \frac{1}{2!}\phi^2(t) + \cdots\right]$$

$$x_{cq}(t) = A_c\sin\phi(t) = A_c\left[\phi(t) - \frac{1}{3!}\phi^3(t) + \cdots\right]$$

حال شرط ساده کننده [$|\phi(t)| \ll 1 \quad (1)$] را فرض می‌کنیم. بنابراین :

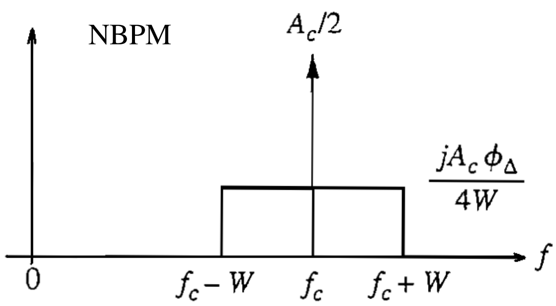
$$x_{ci}(t) \simeq A_c \qquad \text{و} \qquad x_{cq}(t) \simeq A_c\phi(t)$$

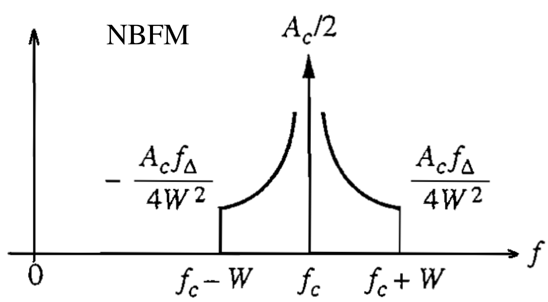
$$\Rightarrow\ X_c(f) = \frac{1}{2}A_c\delta(f - f_c) + \frac{j}{2}A_c\phi(f - f_c)\ ,\ f > 0 \ \xrightarrow{\text{که}}\ \phi(f) = \mathcal{F}\{\phi(t)\} = \begin{cases} \phi_\Delta X(f) & PM \\ -j.f_\Delta\frac{X(f)}{f} \end{cases}$$

1. narrowband PM and FM

ملاحظه کنید که اگر $w \ll f_c$ باشد طیف سیگنال FM و PM میان‌گذر و با پهنای باند 2W خواهد بود. البته به شرطی که فرض (۱) صادق باشد در غیر اینصورت جمله‌های $\phi^2(t)$ و $\phi^3(t)$ و.... را نیز باید در نظر گرفت که منجر به افزایش پهنای باند خواهند شد. لذا در صورت در نظر گرفتن فرض(۱) عبارت FM و PM باند باریک نامیده می شود.

مثال : اگر $x(t) = sinc2wt$ باشد، $X(f) = \frac{1}{2w}\Pi\left(\frac{f}{2w}\right)$ می‌شود و طیف‌های $NBPM$ و $NBFM$ مربوطه چنین خواهند شد :





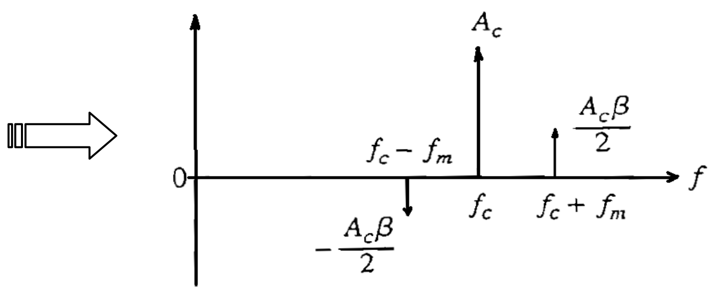
مدولاسیون تُن :

برای سادگی تحلیل فرض کنید : $x(t)=\begin{cases} A_m \sin\omega_m t & PM \\ A_m \cos\omega_m t & FM \end{cases}$

$$\Rightarrow\ \phi(t) = \beta \sin\omega_m t \quad \text{و} \quad \beta \triangleq \begin{cases} \phi_\Delta . A_m & PM \\ \frac{A_m}{f_m} . f_\Delta & FM \end{cases}$$

پارامتر β را شاخص مدولاسیون FM و PM در حالت مدولاسیون تُن گوئیم. در حالت مدولاسیون باند باریک $\beta \ll 1$ است لذا رابطه ❋ را بصورت زیر می‌توان نوشت :

$$x_c(t) \simeq A_c \cos\omega_c t - A_c\beta \sin\omega_m t . \sin\omega_c t$$
$$\simeq A_c \cos\omega_c t - \frac{1}{2}A_c\beta \cos(\omega_c - \omega_m)t + \frac{1}{2}A_c\beta \cos(\omega_c + \omega_m)t$$



حال بدون در نظر گرفتن شرط باند باریک بودن (یعنی $\beta \ll 1$) و با β دلخواه، چنین می‌نویسیم :

$$x_c(t) = A_c[\cos\phi(t) \,.\, \cos\omega_c t - \sin\phi(t) \,.\, \sin\omega_c t]$$
$$= A_c[\cos(\beta\sin\omega_m t)\cos\omega_c t - \sin(\beta\sin\omega_m t)\sin\omega_c t] \quad (2)$$

از جبر مثلثاتی می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} \cos(\beta\sin\omega_m t) = J_0(\beta) + \sum_{n\,\text{زوج}}^{\infty} 2J_n(\beta).\cos n\omega_m t \\ \sin(\beta\sin\omega_m t) = \sum_{n\,\text{فرد}}^{\infty} 2J_n(\beta).\sin n\omega_m t \end{cases}$$

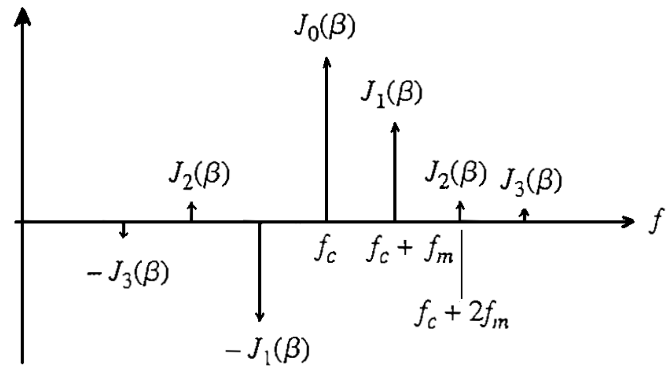
که در عبارت بالا داریم : $J_n(\beta) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta\sin\lambda - n\lambda)}\, d\lambda$ $\Rightarrow$ تابع بسل نوع اول از مرتبه n

جایگذاری معادلات فوق در (**2**) $\Rightarrow$ $x_c(t) = A_c J_0(\beta)\cos\omega_c t$

$$+ \sum_{n\,\text{فرد}}^{\infty} A_c J_n(\beta)[\cos(\omega_c + n\omega_m)t - \cos(\omega_c - n\omega_m)t]$$

$$+ \sum_{n\,\text{زوج}}^{\infty} A_c J_n(\beta)[\cos(\omega_c + n\omega_m)t + \cos(\omega_c - n\omega_m)t]$$

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^0 J_n(\beta) \quad \Rightarrow \quad x_c(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos(\omega_c + n\omega_m)\,t$$



ملاحظه می‌شود که طیف FM شامل تعداد بی شماری مولفه در فرکانس‌های $f_c \pm nf_m$ است و اندازه هر مؤلفه در فرکانس $f_c \pm nf_m$ برابر $|J_n(\beta)|$ است.

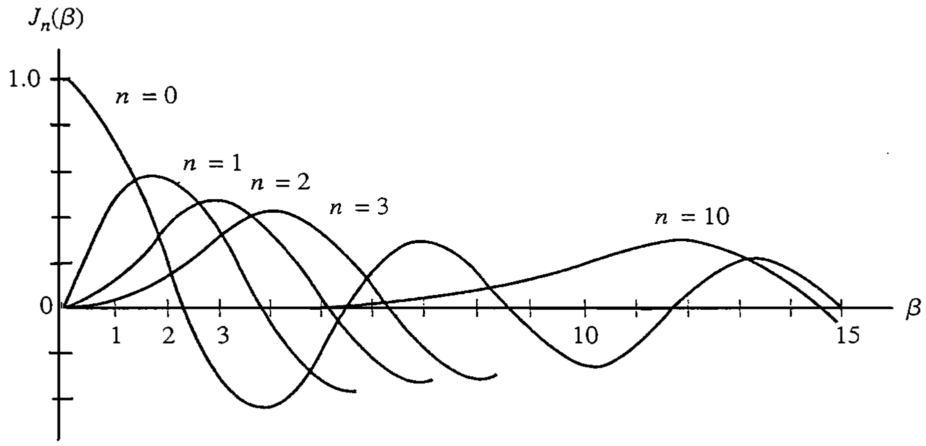
چند نکته در مورد توابع بسل :

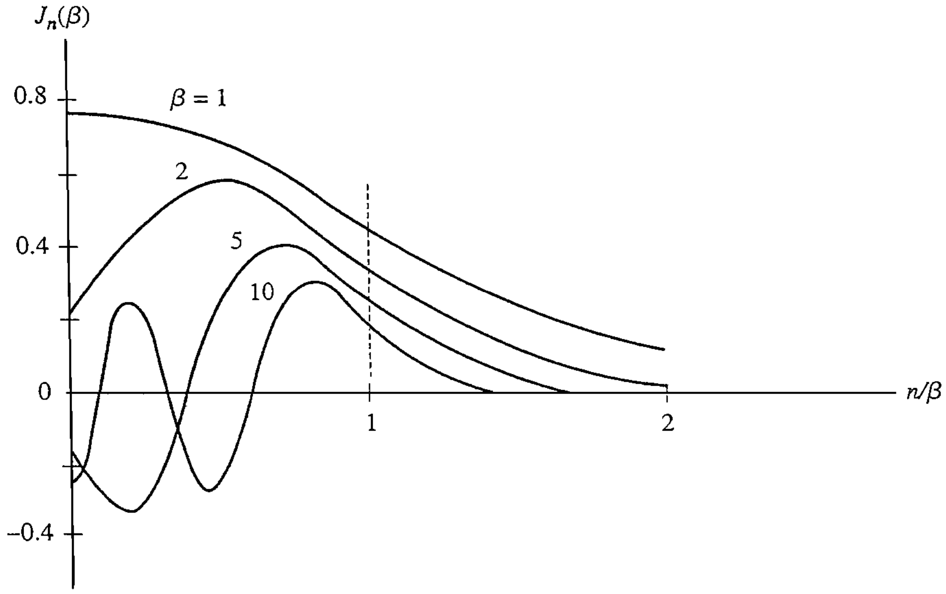
۱- اندازه مؤلفه واقع در f_c برابر $J_0(\beta)$ است که β همان اندیس مدولاسیون و وابسته به سیگنال است. پس برخلاف سیستم‌های مدولاسیون خطی، در اینجا مؤلفه واقع در فرکانس f_c حاوی اطلاعات است.(مفید است.)

همچنین مواقعی پیش می‌آید که این مؤلفه صفر می‌شود . مثلاً بازاء $\beta = 2.4$ و 5.5 و ...

۲- تعداد خطوط باند جانبی که اندازه نسبی دامنه‌هایشان قابل توجه است نیز به β بستگی دارد. اگر $\beta \ll 1$ باشد فقط J_0 و J_1 مهم هستند و بنابراین همانطور که در مورد $NBFM$ و $NBPM$ دیدیم طیف شامل حامل و دو خط جانبی است. اما اگر $\beta \gg 1$ باشد طیف شامل مولفه‌های بسیار زیادی خواهد بود و پهنای باند به همان نسبت بزرگتر می‌شود.

۳- شکل‌های مربوط به $J_n(\beta)$ یکی برحسب β و دیگری برحسب $\frac{n}{\beta}$ مفید هستند.

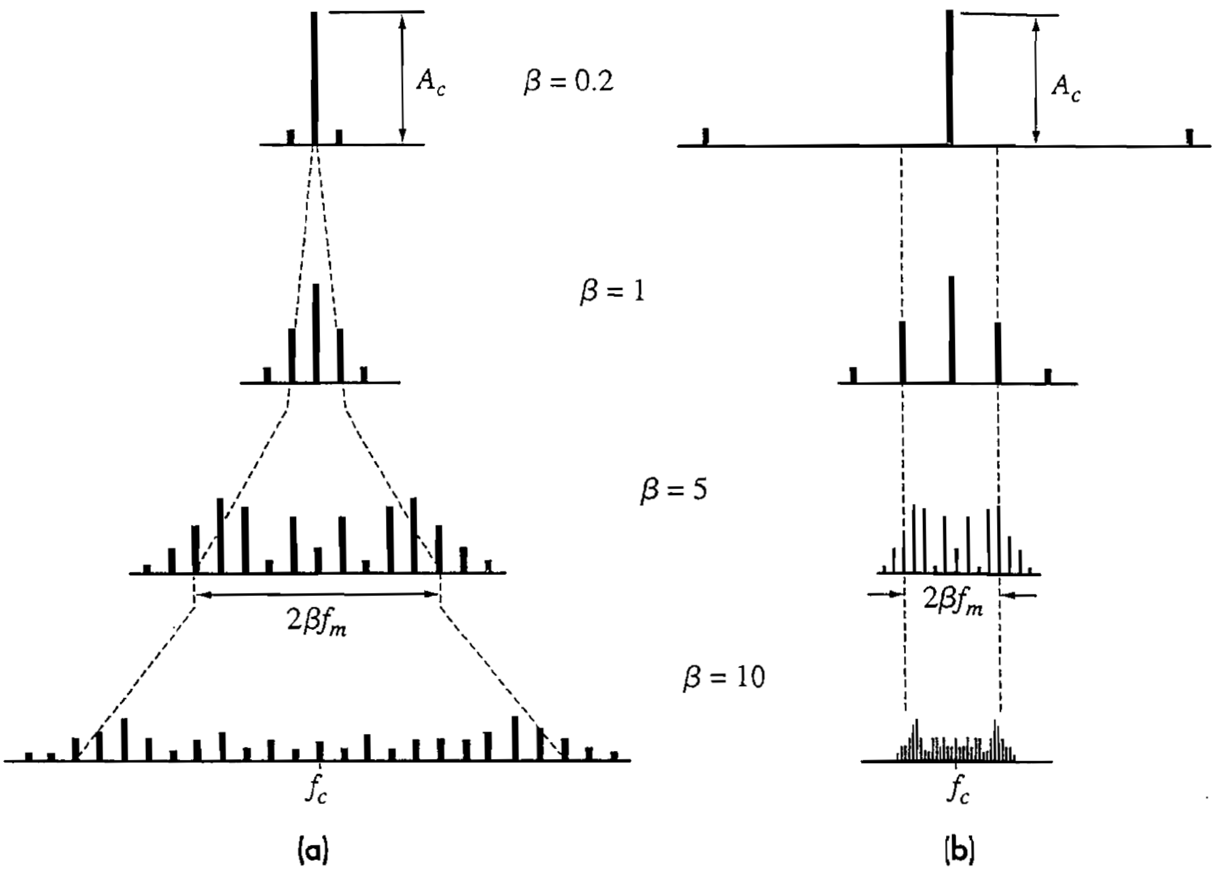




در شکل‌ها ملاحظه می‌کنید که برای $\frac{n}{\beta} > 1$، $J_n(\beta)$ها بطور یکنوا کاهش پیدا می‌کنند و برای $\frac{n}{\beta} \gg 1$، $J_n(\beta) \ll 1$ می‌شود. پس در تعیین پهنای باند (n) مقدار β تعیین کننده است. بعنوان تقریب می‌توان پهنای باند BW (که در حالت کلی $n_{bw}f_m$ است) را برابر βf_m در نظر گرفت.

(زیرا باید $\frac{n_{bw}}{\beta}=1$ شود. ⟵ $B_w = n_{bw} f_m = \beta f_m$)

طیف FM یا PM در دوحالت در شکل های زیر نشان داده شده است :



در شکل (a) که هم برای PM و هم برای FM مناسب است f_m ثابت بوده و β تغییر می‌کند.

در شکل (b) که مناسب تحلیل فقط FM است، $A_m f_\Delta$ ثابت است و با افزایش(کاهش) f_m ، β کاهش(افزایش) می‌یابد. خطوط نقطه چین پهنای باند را نشان می‌دهند.

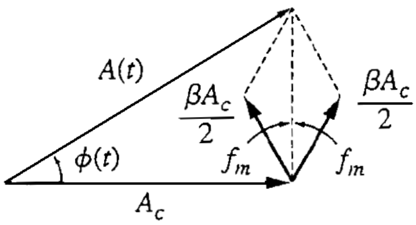
بررسی فازوری مدولاسیون نمایی در حالت تک تُن :

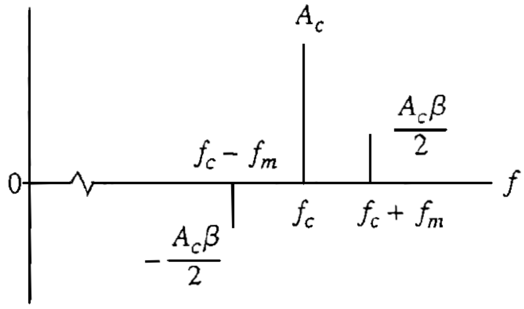
ابتدا حالت باند باریک را بررسی می‌کنیم :

$$NB:\ x_c(t) \simeq A_c \cos\omega_c t - A_c\beta \sin\omega_m t . \sin\omega_c t$$

$$\simeq A_c \cos\omega_c t - \frac{A_c\,\beta}{2}\cos(\omega_c-\omega_m)t + \frac{A_c\,\beta}{2}\cos(\omega_c+\omega_m)\,t$$

نمایش فازوری :



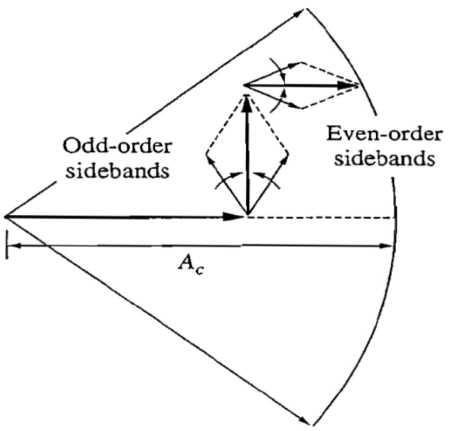


پوش $\quad A(t) \cong \sqrt{A_c^2 + \left(2\frac{\beta}{2}A_c \sin\omega_m t\right)^2} \simeq A_c\left[1+\frac{\beta^2}{4}-\frac{\beta^2}{4}\cos 2\omega_m t\right]$

فاز $\quad \phi(t) \simeq tan^{-1}\left[\frac{2\left(\frac{\beta}{2}\right)A_c\ \sin\omega_m t}{A_c}\right] \simeq \beta \sin\omega_m t$

ملاحظه می‌کنید که فاز همانگونه است که باید می‌بود اما دامنه بجای اینکه ثابت باشد متغیر است. (اعوجاج)

در حالت β دلخواه تعداد بسیار زیادی فازور با مرتبه‌های فرد و زوج داریم که باهم ترکیب می‌شوند : مرتبه‌های فرد پاسخ فاز مناسب و مرتبه‌های زوج پاسخ دامنه مناسب را ایجاد می‌کنند.



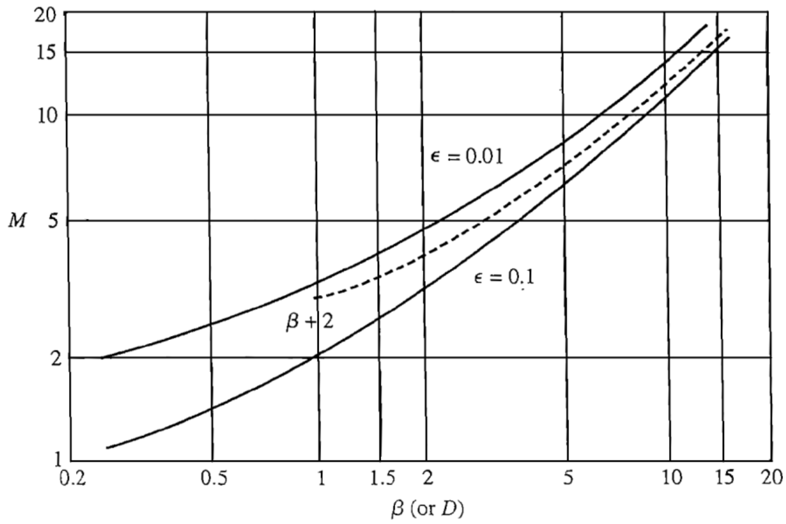
محاسبه پهنای باند FM :

همانطور که گفته شده برای $\beta \gg 1$، $J_n(\beta)$ بازاء $\left|\frac{n}{\beta}\right| > 1$ ناچیز است.

لذا مولفه‌های مهم در $|n| \leq \beta = \frac{A_m f_\Delta}{f_m}$ یا به عبارت دیگر در محدوده فرکانسی $f_c \pm \beta f_m = f_c \pm A_m f_\Delta$ قرار دارند. اگر $\beta \ll 1$ باشد تمام مولفه‌ها در مقایسه با حامل ناچیز هستند اما ما حداقل یکی از این مولفه‌ها را نگه داشته و بعنوان طیف(پهنای باند) درنظر می‌گیریم زیرا در غیر اینصورت خود حامل به تنهایی معرف مدولاسیون نمایی نخواهد بود. پس برای β کوچک مولفه‌های مهم را در فاصله $f_c \pm f_m$ فرض می‌کنیم. در حالت کلی می‌توان نوشت :

پهنای باند $\quad B = 2M(\beta)f_m \quad , \ M(\beta) \geq 1$

که $M(\beta)$ عدد طبیعی است که بازاءِ آن $J_M(\beta) > \varepsilon$ و $J_{M+1}(\beta) < \varepsilon$ است که ε یک مقدار آستانه است. (وابسته به کاربرد بین *0.01* تا *0.1* است.) این عدد همانطور که دیدیم تابعی از β است، لذا بصورت $M(\beta)$ نوشته می‌شود. بازاءِ $\varepsilon = 0.01$ پهنای باند خیلی سخت‌گیرانه و بازاءِ ε*=0.1* پهنای باند نسبتاً بدون احتیاط (همراه با اعوجاج) انتخاب شده است. لذا معمولاً بین ایندو انتخاب می‌شود. نمودار$M(\beta)$ برحسب β در دوحالت مذکور در شکل زیر نشان داده شده است:



(توجه کنید که B زمانی همان پهنای باند انتقال است که β برای ماکزیمم فرکانس موجود در سیگنال و با ماکزیمم دامنه محاسبه شده باشد)

$$M(\beta) \simeq \beta + 2 \implies B \cong 2(\beta + 2)f_m = 2(A_m f_\Delta + 2f_m) \implies$$

$(A_m = 1$ و $f_m = w)$ پهنای باند انتقال $B_T \cong 2(f_\Delta + 2w) \xrightarrow{\text{به شرط}} \beta > 2$

توجه کنید که در رابطه B_T، β متناظر با ماکزیمم فرکانس است و بزرگترین β نیست. ولی تمام مولفه‌های دیگر پهنای باندی کمتر از B_T خواهند داشت.

گرچه در حالت مدولاسیون نمایی نمی‌توان از اصل جمع آثار استفاده کرد اما همانطور که در تحلیل قبلی خود در مورد مدولاسیون چند تُن دیدیم پهنای باند تحت تأثیر فرکانس غالب قرار دارد. لذا در حالت سیگنال دلخواه

x(t) با پهنای باند W، پهنای باند B_T را در شرایط بدترین حالت (بزرگترین مؤلفه فرکانسی $x(t)$) بدست می‌آوریم. بنابراین با تعمیم مدولاسیون تُن به یک سیگنال دلخواه $x(t)$ ، نسبت انحراف[1] را چنین تعریف می‌کنیم :

$$D \triangleq \frac{f_\Delta}{W}$$

ملاحظه می‌کنید که D برابر تقسیم بیشترین انحراف فرکانسی به بیشترین مؤلفه فرکانسی موجود در سیگنال است. از نتایج قبل می‌توان پهنای باند انتقال B_T را چنین نوشت :

$$B_T = 2M(D)W$$

در عبارت بالا D معادل β است.

برای تقریب $M(D)$ در حالت‌های حدی معمولاً از رابطه زیر استفاده می‌شود :

$$B_T = \begin{cases} 2DW = 2f_\Delta & D \gg 1 \\ 2W & D \ll 1 \end{cases}$$

دو نتیجه فوق را می‌توان در رابطه زیر با هم ترکیب کرد :

$$B_T \simeq 2(f_\Delta + W) = 2(D+1)W \quad \begin{cases} D \gg 1 \\ D \ll 1 \end{cases}$$

قاعده کارلسون[2]

در عمل مخصوصاً برای سیستم‌های FM ، $2 < D < 10$ است لذا تقریب فوق چندان مناسب نیست. در حقیقت تقریب فوق مقداری کمتر از مقدار واقعی را بدست می‌دهد.

در این حالت یک تقریب بهتر چنین است :

$$B_T \simeq 2(f_\Delta + 2W) = 2(D+2)W \quad for \quad D > 2$$

که از آن می‌توان برای محاسبه پهنای باند $3dB$ تقویت‌کننده‌های FM استفاده کرد.

همانطور که در مورد FM از پارامتر D استفاده کردیم در مورد PM نیز می‌توان از ϕ_Δ در رابطه B_T استفاده کرد:

$$B_T = 2M(\phi_\Delta)W \qquad M(\phi_\Delta) \geq 1$$

معادل قاعده کارلسون در این حالت چنین می‌شود :

$$B_T \simeq 2(\phi_\Delta + 1)W$$

نکته‌ای که در این‌حالت باید به آن اشاره داشت این است که برخلاف D که به W وابستگی داشت، ϕ_Δ در اینجا مستقل از W است.

1. deviation ratio
2. Carson's rule
3. underestimate

برای FM و PM باند باریک داریم :

$$\left.\begin{array}{l} NBFM:\quad D \ll 1 \\ NBPM:\ |\phi_\Delta| \ll 1 \end{array}\right. \Rightarrow B_T \simeq 2W$$

برای FM باند وسیع داریم :

$$WBFM : D \gg 1 \;\Rightarrow\; B_T \simeq 2f_\Delta \gg W$$

اما PM باند وسیع($WBPM$) وجود ندارد، زیرا طبق تعریف اولیه PM، همیشه $\phi_\Delta \le \pi$ است، درحالیکه برای $WBPM$ باید $\phi_\Delta \gg 1$ باشد که این مخالف با فرض درنظر گرفته شده است.

اعوجاج خطی :

در اثر عبور سیگنال FM یا PM از یک شبکه خطی ممکن است روی دهد :

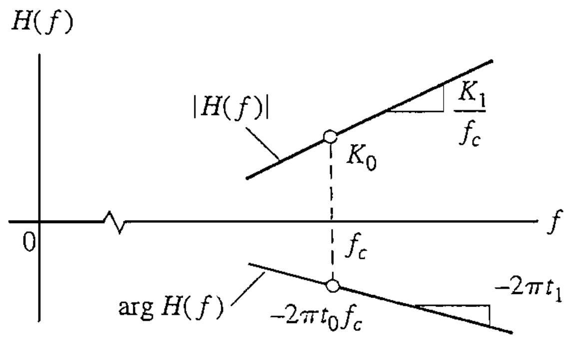
$$x_c(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y_c(t)$$

$$x_c(t) = \frac{1}{2}A_c e^{j(\omega_c t+\phi(t))} \Rightarrow x_{lp}(t) = \frac{1}{2}A_c e^{j\phi(t)}$$

H(f) معادل پایین‌گذر $= H(f+f_c)U(f+f_c) \Rightarrow Y_{lp}(f) = H(f+f_c)U(f+f_c)X_{lp}(f)$

تبدیل به حالت میان‌گذر $\Rightarrow y_c(t) = 2Re\left[y_{lp}(t)e^{j\omega_c t}\right]$

در عمل محاسبه‌ی $X_{lp}(f)$ و $Y_{lp}(f)$ بسیار مشکل است. برای ادامه تحلیل حالت ساده زیر را درنظر می‌گیریم:



$$H(f+f_c)U(f+f_c) = (k_0 + \frac{k_1}{f_c}f)e^{-j2\pi(t_0 f_c + t_1 f)}$$

$$\Rightarrow Y_{lp}(f) = k_0 e^{-j\omega_c t}\left[X_{lp}(f)e^{-j2\pi t_1 f}\right] + \frac{k_1}{j\omega_c}e^{-j\omega_c t}\left[(j2\pi f)X_{lp}(f)e^{-j2\pi t_1 f}\right]$$

$$\Rightarrow y_{lp}(t) = k_0 e^{-j\omega_c t}.x_{lp}(t-t_1) + \frac{k_1}{j\omega_c}e^{-j\omega_c t}.\dot{x}_{lp}(t-t_1)$$

از طرفی : $\dot{x}_{lp}(t-t_1) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}A_c e^{j\phi(t-t_1)}\right] = \frac{j}{2}A_c\dot{\phi}(t-t_1)e^{j\phi(t-t_1)}$

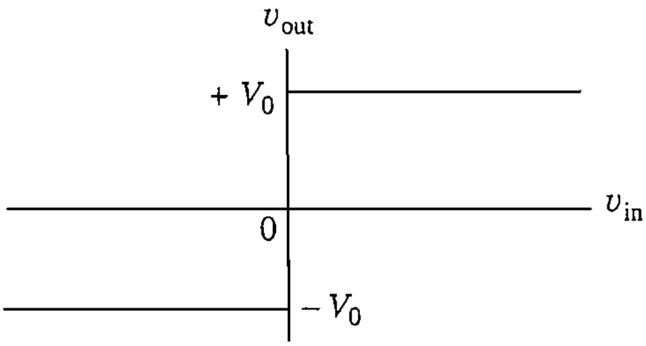
$$\Rightarrow \begin{cases} y_c(t) = A(t)\cos[\omega_c(t-t_0)+\phi(t-t_1)\,] \\ A(t) = A_c\left[k_0 + \frac{k_1}{\omega_c}\phi^{\cdot}(t-t_1)\right] \end{cases}$$ → اعوجاج خطی

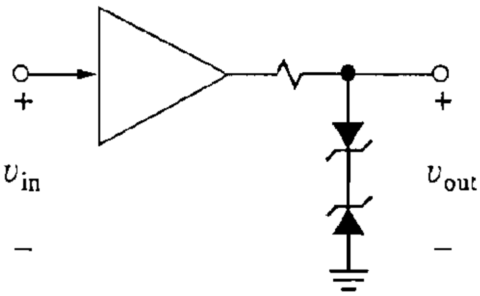
در حالت FM ، $\phi^{\cdot}(t) = 2\pi f_\Delta x(t)$ است لذا :

$$A(t) = A_c\left[k_0 + \frac{k_1 f_\Delta}{f_c}x(t-t_1)\right]$$

ملاحظه می‌کنید که رابطه مربوط به مدولاسیون AM با $\mu = \frac{k_1 f_\Delta}{f_c k_0}$ است. بنابراین سیستم خطی فوق باعث تبدیل FM به AM شده است.

اعوجاج فوق را می‌توان به کمک یک محدودکننده سخت ایده‌آل[1] یا برش دهنده[2] از بین برده و دوباره موج FM بدست آورد :





$v_{out} = T[v_{in}]$ مشخصه انتقال یک برش دهنده

برای تحلیل از سری فوریه $v_{out}(t)$ استفاده می‌کنیم.

اگر ورودی را بصورت $v_{in}(t) = A(t)\cos\theta_c(t)$ بنویسیم ملاحظه می‌شود که خروجی و ورودی هردو با دوره تناوب 2π متناوب هستند. بسط سری فوریه خروجی چنین خواهد شد :

$$v_{out}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}|2a_n|\cos(n\theta_c(t)+\measuredangle a_n) \quad \text{و} \quad a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}T[v_{in}]e^{-jn\theta_c}\,d\theta_c$$

نتیجه نهایی چنین خواهد شد :

$$v_{out}(t) = \frac{4v_o}{\pi}\cos(\omega_c t+\phi(t)) - \frac{4v_o}{3\pi}\cos(3\omega_c t+3\phi(t)) + \cdots$$

حال به کمک یک BPF می‌توان مؤلفه مورد نظر را جدا کرد و موج FM بدست آورد.

1. ideal hard limiter 2. clipper

تولید مستقیم FM :

الف– در فرکانس‌های بالا : به کمک VCO[۱] مانند لامپ کلیسترون[۲] $(f > 1GHZ)$

ب– در فرکانس‌های پایین :
- ۱– انتقال نتیجه قبلی به فرکانس‌های پایین[۳]
- ۲– تغییرات امپدانس با سیگنال، بطور مثال در یک مدار تشدید LC :

$C(t) = C_0 - Cx(t) \Rightarrow$ خروجی نوسان ساز $x_c(t) = A_c \cos \theta_c(t)$

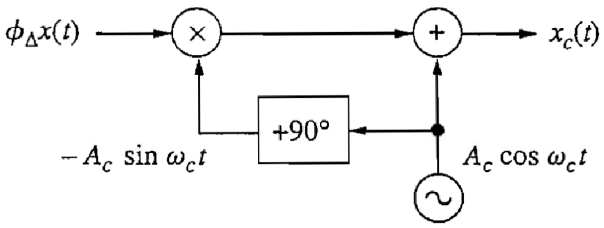
$$\dot{\theta_c}(t) = \frac{1}{\sqrt{LC(t)}} = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}\left[1 - \frac{C}{C_0}x(t)\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad if \begin{cases} \omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \\ \left|\frac{C}{C_0}x(t)\right| \ll 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\dot{\theta_c}(t) \simeq \omega_c\left[1 + \frac{C}{2C_0}x(t)\right] \Rightarrow \theta_c(t) \simeq 2\pi f_c t + 2\pi\frac{C}{2C_0}f_c\int^t x(\lambda)d\lambda$$

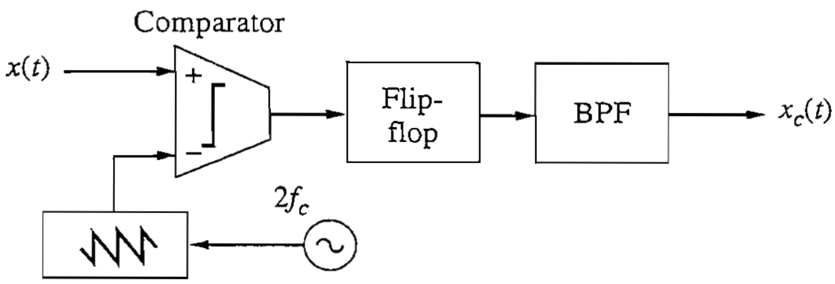
که همان مدولاسیون فرکانسی با $f_\Delta = \frac{C}{2C_0}.f_c$ است.

تولید PM :

۱– PM باند باریک ($NBPM$) : با توجه به رابطه $x_c(t) \simeq A_c \cos \omega_c t - A_c\phi_\Delta x(t).\sin \omega_c t$، مدولاتور $NBPM$ چنین است :

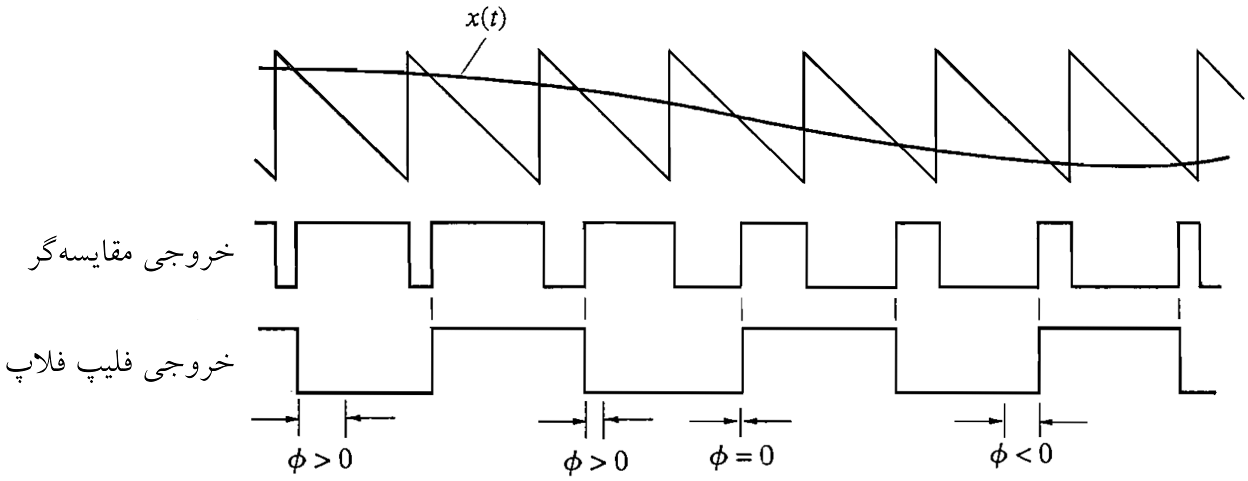


۲– تولید PM معمولی : برای داشتن شیفت‌فازهای بزرگتر می‌توان از طرح زیر استفاده کرد :



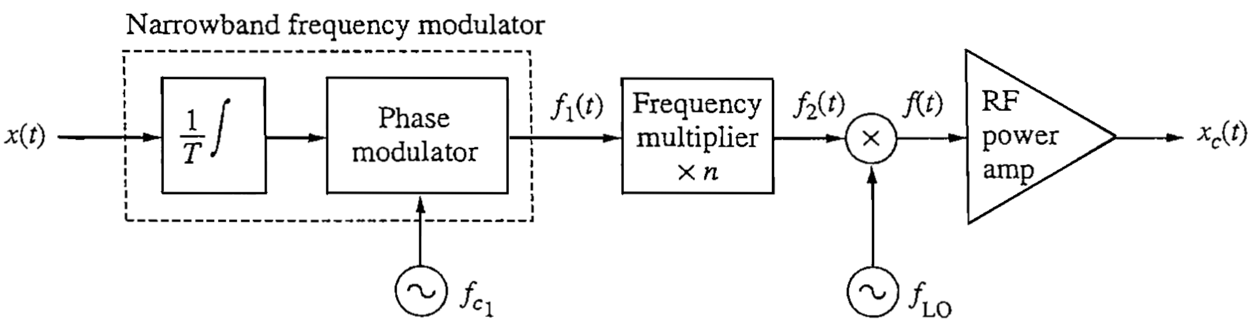
1. voltage controlled oscillator
2. klystron tube
3. down-convert

نحوه عملکرد مدار بالا بصورت زیر است :



تولید غیرمستقیم *FM*:

ابتدا *NBFM* و سپس *FM* می‌سازیم. برای اینکار می‌توان از طرح زیر استفاده کرد :



$f_1(t) = f_{c_1} + \frac{\phi_\Delta}{2\pi T}x(t) \quad \Rightarrow \quad$ انحراف فرکانسی اولیه $\quad f_{\Delta_1} = \frac{\phi_\Delta}{2\pi T}$

انحراف فرکانس نهایی که مطلوب ما است، f_Δ است. مقدار f_{Δ_1} را به کمک ضرب کننده فرکانسی به f_Δ می‌رسانیم. لذا خروجی واحد مذکور دارای فرکانس لحظه‌ای زیر است :

$f_2(t) = nf_1(t) = nf_{c_1} + f_\Delta.x(t) \qquad$ و $\qquad f_\Delta = n.\frac{\phi_\Delta}{2\pi T}$

ملاحظه می‌کنید که فرکانس حامل نیز در n ضرب شده است که ممکن است بزرگتر از مقدار مورد نظر ما باشد. برای بدست آوردن فرکانس حامل مطلوب f_c ، از شیفت یا تبدیل فرکانسی[1] استفاده می‌کنیم. فرکانس

1. frequency conversion

نوسان ساز محلی f_{lo} طوری تعیین می‌شود که $f_c = |nf_{c_1} \pm f_{lo}|$ شود. در این حالت، فرکانس لحظه خروجی، f(t) ، برابر می‌شود با :

$$f(t) = f_c + f_{\Delta}.x(t)$$

آشکارسازی فرکانسی :

یک آشکارساز فرکانسی[1] یا مجزا ساز[2] باید ولتاژ خروجی آن متناسب با فرکانس لحظه‌ای سیگنال ورودی باشد.

دسته‌های مختلف آشکارسازی فرکانسی عبارتند از :

۱- تبدیل FM به AM

۲- مجزاساز برمبنای شیفت فاز[3]

۳- آشکارساز عبور از صفر[4]

٤- فیدبک فرکانسی

در ادامه سه دسته اول را بررسی می‌کنیم.

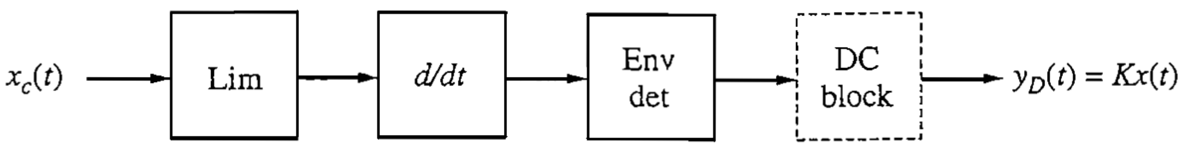
دسته اول : در این دسته خروجی مشتق زمانی ورودی است. با این کار همانطور که دیدیم FM به AM تبدیل می‌شود.

$$x_c(t) = A_c \cos\theta_c(t) \quad \text{و} \quad \dot{\theta_c}(t) = 2\pi[f_c + f_{\Delta}.x(t)] \implies$$

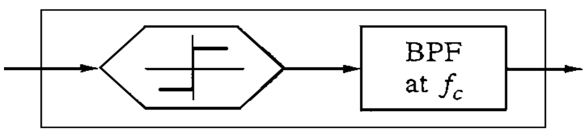
$$\implies \dot{x_c}(t) = -A_c\dot{\theta_c}(t)\sin\theta_c(t) = 2\pi A_c[f_c + f_{\Delta}.x(t)]\sin(\theta_c(t) \pm 180°)$$

حال می‌توان از یک آشکارساز پوش برای بدست آوردن فرکانس لحظه‌ای $f(t) = f_c + f_{\Delta}.x(t)$ استفاده کرد.

بلوک‌دیاگرام این روش چنین است :



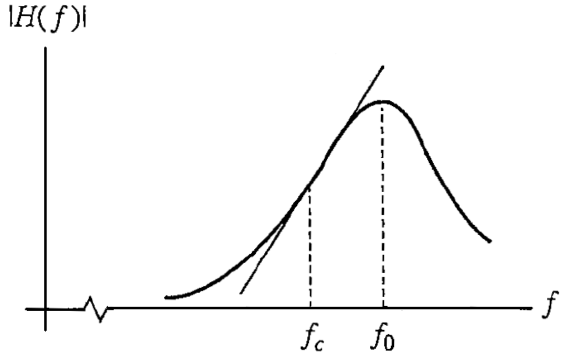
ورودی $x_c(t)$ ابتدا به یک محدودکننده[5] داده می‌شود تا تغییرات ناخواسته و تصادفی دامنه سیگنال $x_c(t)$ حذف شود. واحد محدودکننده معمولاً چنین است :



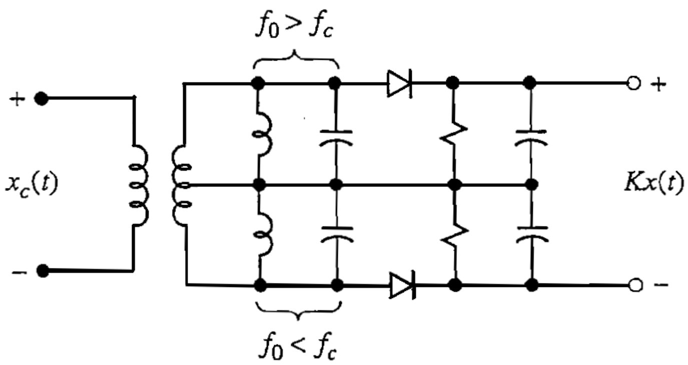
1. frequency detector
2. Discriminator
3. phase-shift discrimination
4. Zero-crossing detection
5. limitter

واحد حذف DC نیز برای حذف مؤلفه DC ناشی از حامل است.

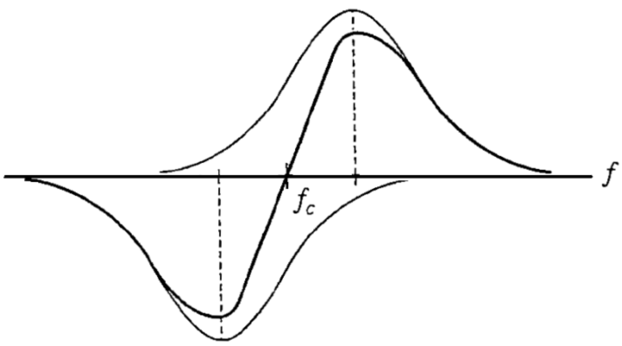
همانطورکه می‌دانیم یک مشتق‌گیر حول نقطه کار خود پاسخ فرکانسی بصورت $|H(f)| = 2\pi f$ دارد. همانطور که در روبرو نشان داده شده یک مدار تشدید معمولی نیز در قسمتی از پاسخ خود چنین رفتاری دارد. (رفتار خطی= خاصیت مشتق‌گیری) اما محدوده خطی مذکور کوچک است.



برای افزایش محدوده خطی می‌توان مطابق شکل زیر از مدار مجزا ساز متعادل[1] استفاده کرده است :



ملاحظه می‌کنید که مدار روبرو از دو مدار تشدید که یکی بالای f_c و دیگری پایین f_c تنظیم شده تشکیل شده است. خروجی برابر تفاضل پاسخ دو مدار تشدید است.



خروجی مدار بالا

در اینحالت نیاز به واحد حذف DC نداریم؛ زیرا در حین تفاضل‌گیری، مقادیر DC از هم کم می‌شوند.

دسته دوم : آشکارسازهای برمبنای شیفت فاز، پاسخ فاز خطی دارند. (برخلاف دسته قبل که پاسخ دامنه خطی داشتند.)

اصول کار آن‌ها برمبنای رابطه روبرو است :

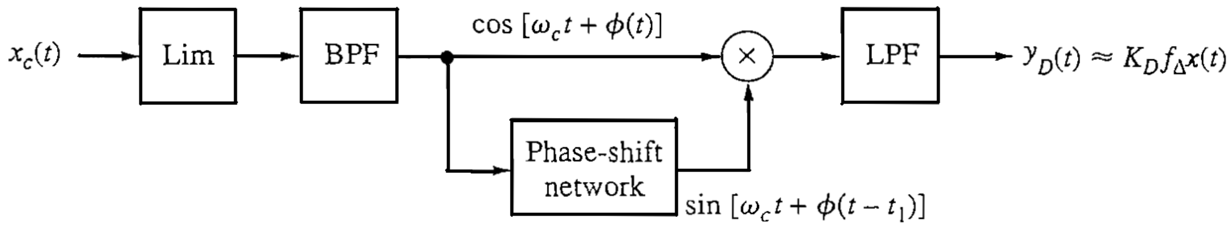
$$\frac{dv}{dt} = v^{\cdot}(t) \simeq \frac{1}{t_1}[v(t) - v(t - t_1)]$$

1. balanced discriminator

حال اگر $v(t)$ سیگنال FM با $\phi^{\cdot}(t) = 2\pi f_{\Delta}.x(t)$ باشد داریم :

$$\phi(t) - \phi(t-t_1) \simeq t_1\phi^{\cdot}(t) = 2\pi f_{\Delta}.t_1.x(t)$$

شکل زیر چنین طرحی را نشان می‌دهد :

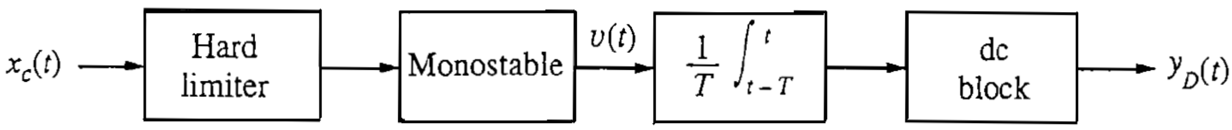


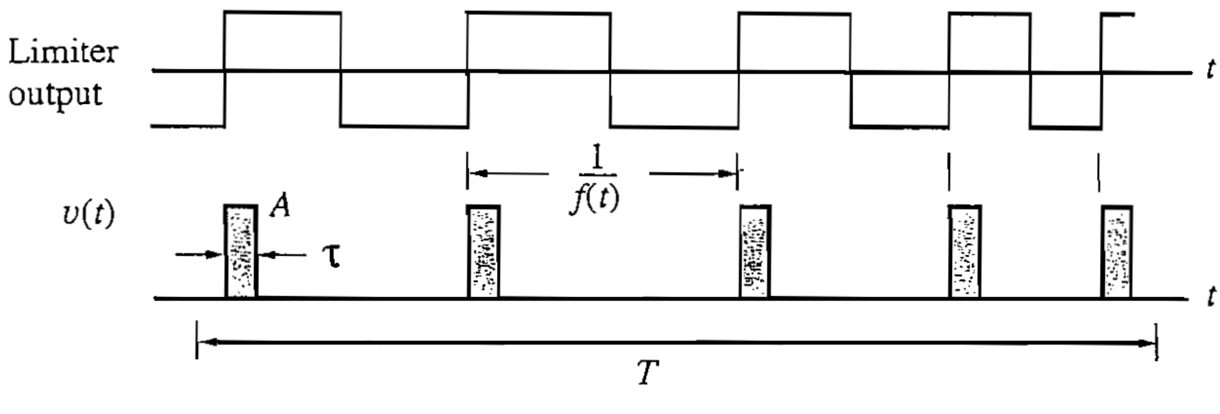
خروجی LPF در حقیقت چنین است :

$$\sin[\phi(t) - \phi(t-t_1)] \simeq \phi(t) - \phi(t-t_1) \qquad ; |\phi(t) - \phi(t-t_1)| \ll \pi$$

$$\Rightarrow\ y_D(t) \simeq k_D f_{\Delta} x(t)$$

دسته سوم : شکل زیر اصول عملکرد آشکارساز عبور از صفر را نشان می‌دهد :





زمان T را طوری انتخاب می‌کنیم که $f_c \gg \frac{1}{T} \gg w$. لذا سیگنال $v(t)$ قطار پالسی با دوره تناوب تقریباً ثابت $\frac{1}{f(t)}$ است. تعداد پالس‌ها در زمان T برابر $n_T \simeq Tf(t)$ است. لذا : $\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} v(\lambda)d\lambda = \frac{1}{T}n_T.A.\tau \simeq A\tau f(t)$

$$\Rightarrow\ y_D(t) \simeq k_D f_{\Delta} x(t)$$

محدوده کاری آشکارساز فوق بین *1HZ* تا *10MHZ* است. برای افزایش محدوده کاری می‌توان از یک شمارنده تقسیم بر ۱۰ بعد از واحد محدودکننده سخت استفاده کرد تا محدوده کاری تا *100MHZ* نیز افزایش یابد.

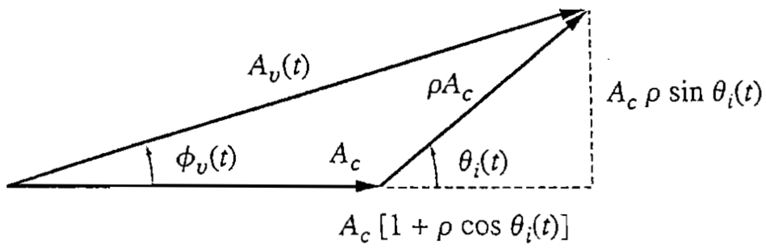
تداخل[1]:

به ترکیب یک سیگنال مفید حاوی اطلاعات با سیگنال دیگری که معمولاً ناشی از یک منبع انسانی است گفته می‌شود. بطور مثال درآنتن گیرنده که همزمان چندین سیگنال روی یک محدوده فرکانسی دریافت می‌شوند. یا دریافت یک سیگنال مشخص از چند مسیر مختلف با تأخیرهای متفاوت.

بررسی تداخل در حالت تن :

فرض کنید کل سیگنال دریافتی یک گیرنده که روی f_c تنظیم شده چنین باشد :

$$v(t) = A_c\, cos\, \omega_c + A_i\, cos[(\omega_c + \omega_i)t + \phi_i]$$
$$= A_v(t)\, cos[\omega_c t + \phi_v(t)] \quad , \quad \rho \triangleq \frac{A_i}{A_c} \quad , \quad \theta_i(t) \triangleq \omega_i t + \phi_i$$



$$\Rightarrow \begin{cases} A_v(t) = A_c\sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho \cos \theta_i(t)} \\ \phi_v(t) = tan^{-1} \frac{\rho \sin \theta_i(t)}{1 + \rho \cos \theta_i(t)} \end{cases} \Longrightarrow$$ هم مدولاسیون دامنه و هم فاز داریم

$$if\ \ \rho \ll 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} A_v(t) \simeq A_c[1 + \rho \cos(\omega_i t + \phi_i)] \\ \\ \phi_v(t) \simeq \rho \sin(\omega_i t + \phi_i) \end{cases}$$

شبیه مدولاسیون AM با $\mu = \rho$

شبیه مدولاسیون PM و FM با $\beta = \rho$ است.

$$if\ \ \rho \gg 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} A_v(t) \simeq A_i[1 + \rho^{-1} \cos\ (\omega_i t + \phi_i)] \\ \phi_v(t) \simeq \omega_i t + \phi_i \end{cases}$$ پوش همچنان مدولاسیون AM را دارد.

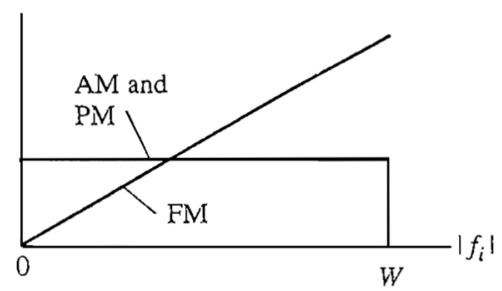
1. Interference

حال اگر $v(t)$ را به یک مدولاتور AM ، یک مدولاتور فرکانسی با ثابت k_D اعمال کنیم، به فرض $\rho \ll 1$ و $\phi_i = 0$ بدست خواهیم آورد :

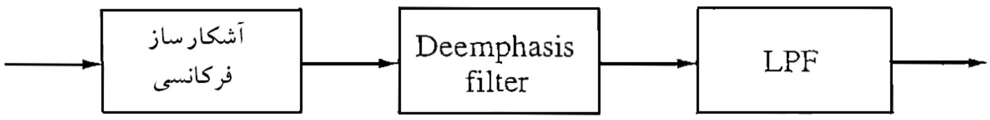
$$y_D(t) \simeq \begin{cases} k_D(1+\rho\cos\omega_i t) & AM \\ k_D\rho\sin\omega_i t & PM \\ k_D\rho f_i\cos\omega_i t & FM \end{cases}$$

تا توسط فیلتر LP حذف نشود $f_i \le W$ به شرط

ملاحظه می‌کنید که در AM و PM یک سیگنال ناخواسته بوجود آمده که متناسب با ρ است. و در FM علاوه بر ρ به f_i نیز بستگی دارد. پس اگر سیگنال تداخل کننده سیگنال، هم‌کانال با سیگنال اصلی و با همان فرکانس حامل باشد($f_i = 0$)، FM مصون از سیگنال ناخواسته خواهد بود و کمترین آسیب را خواهد دید. اما اگر سیگنال ناخواسته مربوط به کانال مجاور باشد($f_i \neq 0$)، FM بیشترین آسیب را خواهد دید.



فیلترهای Deemphasis و Preemphasis :



فیلتر *deemphasis* باعث کاهش اثر اعوجاج ناشی از سیگنال ناخواسته می‌شود.

برای جبران اثر فیلتر *deemphasis* روی سیگنال مطلوب، در فرستنده باید سیگنال اصلی را از یک فیلتر که عکس منحنی فیلتر *deemphasis* است و فیلتر *preemphasis* یا *predistorting* نام دارد عبور دهیم :

$$H_{pe}(f) = \frac{1}{H_{de}(f)} \qquad |f| \le W$$

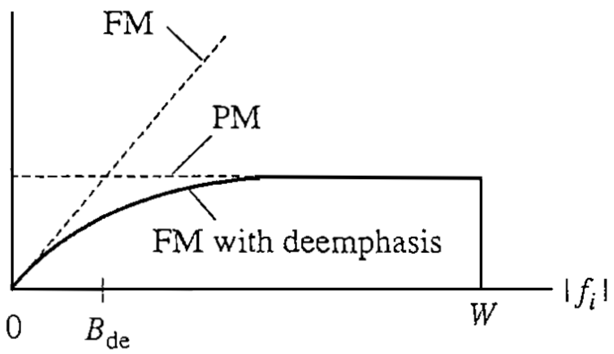
معمولاً :

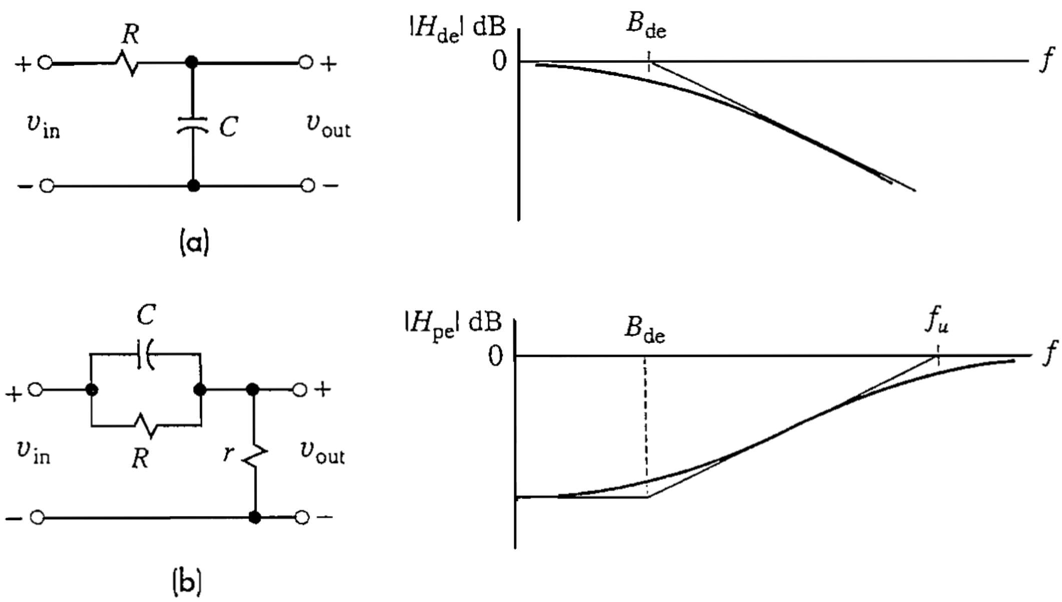
$$H_{de}(f) = \left[1 + j\left(\frac{f}{B_{de}}\right)\right]^{-1} \simeq \begin{cases} 1 & |f| \ll B_{de} \\ \frac{B_{de}}{jf} & |f| \gg B_{de} \end{cases}$$

که B_{de} تا حد قابل ملاحظه‌ای کمتر از W است.

$$H_{pe}(f) = \left[1 + j\left(\frac{f}{B_{de}}\right)\right] \simeq \begin{cases} 1 & |f| \ll B_{de} \\ \frac{jf}{B_{de}} & |f| \gg B_{de} \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنید که قبل از مدولاسیون *FM* از سیگنال مشتق گرفته شده است، و این در حقیقت مدولاسیون فاز است. لذا *preemphasized FM* در حقیقت ترکیبی از *FM* و *PM* است.





(a)

(b)