پاسخ سری چهارم تمرینات درس معادلات دیفرانسیل　　　۱۳۹۹/۳/۱۶

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' - y = e^{۲x}(۳\tan e^x + e^x \sec^۲ e^x) \qquad (۱)$$

روش تغییر پارامتر: جواب معادله همگن متناظر با این معادله دیفرانسیل عبارت است از $y_h = c_۱ e^x + c_۲ e^{-x}$ و $y_۱ = e^x$ و $y_۲ = e^{-x}$ دو جواب مستقل خطی هستند و $w(y_۱, y_۲) = -۲$

جواب خصوصی معادله ناهمگن عبارت است از :

$$y_p = -e^x \int \frac{e^{-x} e^{۲x}(۳\tan e^x + e^x \sec^۲ e^x)}{-۲} dx + e^{-x} \int \frac{e^x e^{۲x}(۳\tan e^x + e^x \sec^۲ e^x)}{-۲} dx$$

$$y_p = \frac{۱}{۲}[e^x \int e^x(۳\tan e^x + e^x \sec^۲ e^x)dx - e^{-x} \int e^{۳x}(۳\tan e^x + e^x \sec^۲ e^x)dx]$$

اکنون با تغییر متغیر $y = e^x$ داریم :

$$\int e^x(۳\tan e^x + e^x \sec^۲ e^x)dx = \int (۳\tan y + y(۱+\tan^۲ y)dy = -۲\ln\cos y + y\tan y$$

$$\int e^{۳x}(۳\tan e^x + e^x \sec^۲ e^x)dx = \int (۳y^۲\tan y + y^۳(۱+\tan^۲ y)dy = y^۳\tan y$$

بنابر این

$$y_p = \frac{۱}{۲}[e^x(-۲\ln\cos e^x + e^x\tan e^x) - e^{-x}(e^{۳x}\tan e^x)] = -e^x\ln\cos e^x$$

و جواب عمومی معادله عبارت است از : $y_g = c_۱ e^x + c_۲ e^{-x} - e^x\ln\cos e^x$

$$x^۲ y'' + xy' - y = -۲x^۲ e^x \qquad (۲)$$

روش تغییر پارامتر: جواب معادله همگن متناظر با این معادله دیفرانسیل عبارت است از $y_h = c_۱ x + \frac{c_۲}{x}$ و $y_۱ = x$ و $y_۲ = \frac{۱}{x}$ دو جواب مستقل خطی هستند و $w(y_۱, y_۲) = \frac{-۲}{x}$

جواب خصوصی معادله ناهمگن عبارت است از :

$$y_p = -x\int \frac{\frac{۱}{x}\times(-۲e^x)}{\frac{-۲}{x}} dx + \frac{۱}{x}\int \frac{x\times(-۲e^x)}{\frac{-۲}{x}} dx = -x\int e^x\,dx + \frac{۱}{x}\int x^۲ e^x\,dx$$

$$= -xe^x + \frac{۱}{x}(x^۲e^x - ۲xe^x + ۲e^x) = ۲e^x(\frac{۱}{x} - ۱)$$

پاسخ سری چهارم تمرینات درس معادلات دیفرانسیل ۱۳۹۹/۳/۱۶

و جواب عمومی معادله عبارت است از : $y_g = c_1 x + \frac{c_2}{x} + 2e^x(\frac{1}{x} - 1)$

(۳) $$(x+2)^2 y'' - (x+2)y' + y = 3x + 4$$

روش تغییر پارامتر: ابتدا تغییر متغیر $t = x + 2$ را اعمال می کنیم.

معادله به صورت $t^2 y'' - ty' + y = 3t - 2$ در می آید.

جواب معادله همگن متناظر با این معادله دیفرانسیل عبارت است از $y_h = t[c_1 + c_2 \ln t]$ و $y_1 = t$ و $y_2 = t \ln t$

دو جواب مستقل خطی هستند و $w(y_1, y_2) = t$

جواب خصوصی معادله ناهمگن عبارت است از :

$$y_p = -t\int \frac{t\ln t \times \frac{3t-2}{t^2}}{t} dt + t\ln t \int \frac{t \times \frac{3t-2}{t^2}}{t} dt = -t\int \frac{(3t-2)\ln t}{t^2} dt + t\ln t \int \frac{3t-2}{t^2} dt$$

$$\int \frac{t\ln t}{t^2} dx = \int (\frac{3\ln t}{t} - \frac{2\ln t}{t^2}) dx = \frac{3}{2}\ln^2 t + \frac{2\ln t + 2}{t}$$

$$\int \frac{3t-2}{t^2} dx = \int (\frac{3}{t} - \frac{2}{t^2}) dx = 3\ln t + \frac{2}{t}$$

$$y_p = -t[\frac{3}{2}\ln^2 t + \frac{2\ln t + 2}{t}] + t\ln t[3\ln t + \frac{2}{t}] = \frac{3}{2} t \ln^2 t - 2$$

و در نتیجه : $y_g = c_1 t + c_2 t \ln t + \frac{3}{2} t \ln^2 t - 2$

و جواب عمومی معادله اصلی عبارت است از :

$$y_g = c_1(x+2) + c_2(x+2)\ln(x+2) + \frac{3}{2}(x+2)\ln^2(x+2) - 2$$

معادلات دیفرانسیل زیر را با روش عملگر D حل کنید.

(۴) $$(D^2 + 2D + 5)y = e^{-x} \sin 2x$$

جواب معادله همگن عبارت است از : $y_h = e^{-x}(A\sin 2x + B\cos 2x)$

جواب خصوصی برابر است با : $y_p = \frac{1}{D^2 + 2D + 5}(e^{-x} \sin 2x)$

پاسخ سری چهارم تمرینات درس معادلات دیفرانسیل   ۱۳۹۹/۳/۱۶

$$y_p = e^{-x}\frac{1}{(D-1)^2+2(D-1)+5}(\sin 2x) = e^{-x}\frac{1}{D^2+4}(\sin 2x) = e^{-x}\frac{1}{D^2+4}(\mathrm{Im}(e^{2ix}))$$

$$= e^{-x}\,\mathrm{Im}(\frac{1}{D^2+4}(e^{2ix})) = e^{-x}\,\mathrm{Im}(e^{2ix}\frac{1}{(D+2i)^2+4}(1)) = e^{-x}\,\mathrm{Im}(e^{2ix}\frac{1}{D(D+4i)}(1))$$

$$= e^{-x}\,\mathrm{Im}(e^{2ix}\frac{1}{4iD}(1-\frac{D}{4i}+\cdots)(1)) = e^{-x}\,\mathrm{Im}(e^{2ix}\frac{1}{4iD}(1)) = e^{-x}\,\mathrm{Im}(e^{2ix}\frac{x}{4i})$$

$$= e^{-x}\,\mathrm{Im}(\frac{x}{4}(\sin 2x - i\cos 2x)) = \frac{-x}{4}e^{-x}\cos 2x$$

جواب عمومی معادله عبارت است از :
$$y_g = e^{-x}(A\sin 2x + B\cos 2x) - \frac{x}{4}e^{-x}\cos 2x$$

(۵)
$$y'' + 2y = e^{3x} + x^2 + 3x + 4$$

جواب معادله همگن عبارت است از :
$$y_h = A\sin\sqrt{2}x + B\cos\sqrt{2}x$$

جواب خصوصی برابر است با :
$$y_p = \frac{1}{D^2+2}(e^{3x} + x^2 + 3x + 4)$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+2}(e^{3x}) + \frac{1}{D^2+2}(x^2+3x+4) = \frac{1}{3^2+2}(e^{3x}) + \frac{1}{2}(1-\frac{D^2}{2}+\frac{D^4}{4}-\cdots)(x^2+3x+4)$$

$$= \frac{1}{11}e^{3x} + \frac{1}{2}(x^2+3x+3)$$

جواب عمومی معادله عبارت است از :
$$y_g = A\sin\sqrt{2}x + B\cos\sqrt{2}x + \frac{1}{11}e^{3x} + \frac{1}{2}(x^2+3x+3)x$$

(۶)
$$(D^2+9)y = x\cos 3x$$

جواب معادله همگن عبارت است از :
$$y_h = A\sin 3x + B\cos 3x$$

جواب خصوصی برابر است با :
$$y_p = \frac{1}{D^2+9}(x\cos 3x)$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+9}(x\,\mathrm{Re}(e^{3ix})) = \mathrm{Re}(\frac{1}{D^2+9}(xe^{3ix})) = \mathrm{Re}(e^{3ix}\frac{1}{(D+3i)^2+9}(x))$$

$$= \mathrm{Re}(e^{3ix}\frac{1}{D(D+6i)}(x)) = \mathrm{Re}(e^{3ix}\frac{1}{6iD}(1-\frac{D}{6i}+\cdots)(x))$$

پاسخ سری چهارم تمرینات درس معادلات دیفرانسیل　　　　　۱۳۹۹/۳/۱۶

$$y_p = \mathrm{Re}(e^{3ix}\frac{1}{6iD}(x-\frac{1}{6i})) = \mathrm{Re}(e^{3ix}\frac{1}{6i}(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6i}x))$$

$$= \mathrm{Re}(\frac{1}{36}[(3x^2\sin 3x + x\cos 3x) + i(x\sin 3x - 3x^2\cos 3x+)])$$

$$= \frac{1}{36}(3x^2\sin 3x + x\cos 3x)$$

جواب عمومی معادله عبارت است از :

$$y_h = A\sin 3x + B\cos 3x + \frac{1}{36}(3x^2\sin 3x + x\cos 3x)$$

(۷)

$$D(D+1)(D+3)y = 4e^{-x} + 4e^{-3x} + 10e^{x} + 3$$

جواب : جواب معادله همگن عبارت است از : $y_h = ae^{-x} + be^{-3x} + c$

جواب خصوصی برابر است با : $y_p = \frac{1}{D(D+1)(D+3)}(4e^{-x} + 4e^{-3x} + 10e^{x} + 3)$

$$y_p = e^{-x}\times\frac{4}{(D-1)D(D+2)}(1) + e^{-3x}\times\frac{4}{(D-3)(D-2)D}(1) + \frac{10}{1\times 2\times 4}(e^{x})$$
$$+\frac{1}{D(D+1)(D+3)}(3)$$

$$y_p = e^{-x}\times\frac{-2}{D}(1+D+\cdots)(1-\frac{D}{2}+\cdots)(1) + e^{-3x}\times\frac{2}{3D}(1-\frac{D}{2}+\cdots)(1-\frac{D}{3}+\cdots)(1)$$
$$+\frac{1}{143}(e^{x}) + \frac{1}{D}(1-D+\cdots)(1-\frac{D}{3}+\cdots)(1)$$

$$y_p = e^{-x}\times\frac{-2}{D}(1) + e^{-3x}\times\frac{2}{3D}(1) + \frac{5}{2}(e^{x}) + \frac{1}{D}(1)$$

$$y_p = -2xe^{-x} + \frac{2}{3}xe^{-3x} + \frac{5}{2}e^{x} + x$$

جواب عمومی معادله عبارت است از : $y_h = ae^{-x} + be^{-3x} + c - 2xe^{-x} + \frac{2}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{143}e^{x} + x$

پاسخ سری چهارم تمرینات درس معادلات دیفرانسیل ۱۳۹۹/۳/۱۶

دستگاههای زیر را با کمک روش حذفی و با استفاده از عملگر D حل کنید.

$$\begin{cases}(D+5)x+(D+3)y=6e^{-t}\\(D+2)x+(D+1)y=3\end{cases} \tag{8}$$

معادله مشخصه دستگاه همگن عبارت است از $(D+5)(D+1)-(D+3)(D+2)=0$ و یا $D-1=0$ یعنی جواب معادله همگن به صورت $x_h=Ae^t\ ,\ y_h=Be^t$ است. پس از جاگذاری این جواب در دستگاه همگن خواهیم داشت $3A+2B=0$ و $x_h=2Ae^t\ ,\ y_h=-3Ae^t$ جواب دستگاه همگن است.

برای پیدا کردن جواب خصوصی به کمک عملگر D می نویسیم :

$$\begin{matrix}(D+1)\\-(D+3)\end{matrix}\begin{cases}(D+5)x+(D+3)y=6e^{-t}\\(D+2)x+(D+1)y=3\end{cases}\to(D-1)x_p=-9$$

$$\to x_p=\frac{1}{D-1}(-9)=(1+D+\cdots)(9)=9\ \to\qquad x_g=2Ae^{-t}+9$$

$$\begin{matrix}-(D+2)\\(D+5)\end{matrix}\begin{cases}(D+5)x+(D+3)y=6e^{-t}\\(D+2)x+(D+1)y=3\end{cases}\to(D-1)y_p=-6e^{-t}+15$$

$$\to y_p=\frac{1}{D-1}(-6e^{-t}+15)=3e^{-t}-15\ \to\qquad y_g=-3Ae^{t}+3e^{-t}-15$$

$$\begin{cases}(D-3)x-y=0\\-4x+(D-3)y=0\end{cases} \tag{9}$$

معادله مشخصه این دستگاه همگن عبارت است از $(D-3)^2-4=0$ که دو ریشه $D=1$ و $D=5$ دارد. یعنی جواب معادله همگن به صورت $x_h=Ae^t+Be^{5t}\ ,\ y_h=A'e^t+B'e^{5t}$ است. پس از جایگذاری این جواب در دستگاه معادلات خواهیم داشت

$$\begin{cases}(-2A-A')e^t+(2B-B')e^{5t}=0\\(-4A-2A')e^t+(-4B+2B')e^{5t}=0\end{cases}$$

اگر ۲ برابر سطر اول را با سطر دوم جمع کنیم نتیجه می شود که $A'=-2A$ و با توجه به این تساوی خواهیم داشت $B'=2B$ و بنابر این جواب دستگاه معادلات همگن عبارت است از :

$$x_h=Ae^t+Be^{5t}\ ,\ y_h=-2Ae^t+2Be^{5t}$$