۱۰.۴ تمرینهای فصل ۴

مشتق

۱ — مقادیر تابع f به‌صورت جدول زیر داده شده است

x	۱	۱.۱	۱.۲	۱.۳	۱.۴
$f(x)$	۱.۲۱۸	۱.۲۴۹	۱.۲۷۸	۱.۳۰۵	۱.۳۲۹

(الف) — $f'(۱.۲)$ را با استفاده از فرمولی که خطای آن $O(h^۲)$ باشد، تقریب بزنید.
(ب) — اگر مقادیر داده شده در جدول مربوط به تابع $f(x) = \tan^{-۱}(e^x)$ باشد، خطای تقریب را به‌دست آورید.

۲ — (الف) چندجمله‌ای درونیاب تابع $f(x) = \sin(\pi x)$ را در نقاط $x_۰ = ۰$ ، $x_۱ = \frac{۱}{۶}$ و $x_۲ = \frac{۱}{۲}$ به‌دست آورید.
(ب) مقدار تقریبی $f'(\frac{۱}{۶})$ را به کمک چندجمله‌ای درونیاب محاسبه کنید و خطای این تقریب را به دست آورید.

۳ — مقادیر تابع f به‌صورت جدول زیر در دست است

x	۱.۲	۱.۳	۱.۴	۱.۵	۱.۶
$f(x)$	۰.۱۸۲۳	۰.۲۶۳۵	۰.۳۳۶۵	۰.۴۰۵۵	۰.۴۷۰۰

(الف) — حساب کنید تقریبی برای $f'(۱.۴)$ با استفاده از فرمولی که خطای آن $O(h^۴)$ باشد.
(ب) — حساب کنید تقریبی برای $f'(۱.۴)$ با استفاده از برونیابی ریچاردسون به‌طوری که دقت آن $O(h^۴)$ باشد.

(پ) — اگر مقادیر داده شده مربوط به‌تابع $f(x) = \ln x$ باشد ، خطاها را در قسمتهای (الف) و (ب) محاسبه کنید.

۴ — مقادیر تابع f به‌صورت جدول زیر داده شده است

x	۱	۱.۲۵	۱.۵	۱.۷۵	۲
$f(x)$	۰.۵۰۰	۰.۴۴۴	۰.۴۰۰	۰.۳۶۴	۰.۳۳۳

(۱)f' را با استفاده از تمام نقاط جدول تقریب بزنید.

اگر داده‌های جدول مربوط به تابع $f(x) = \frac{۱}{۱+x}$ باشد، خطای این تقریب را بیابید.

۵ — در یک مدار با ولتاژ $E(t)$ و خود القای L ، قانون کرشهف بیان می‌کند که

$$E(t) = L\frac{dI}{dt} + RI$$

که R مقاومت در مدار و $I(t)$ شدت جریان است. فرض کنید جریان را در چند زمان مختلف اندازه‌گیری نموده و نتایج به‌صورت جدول زیر به‌دست آمده است، که t زمان بر حسب ثانیه و I بر حسب آمپر است و $L = ۰.۹۸^{Hen}$ ، $R = ۰.۱۴۲^{Ohm}$. ولتاژ E را در زمانهای $t = ۱$ ، $t = ۱.۰۲$ و $t = ۱.۰۴$ پیدا کنید.

t	۱.۰۰	۱.۰۱	۱.۰۲	۱.۰۳	۱.۰۴
$I(t)$	۳.۱۰	۳.۱۲	۳.۱۴	۳.۱۸	۳.۲۴

۶ — با استفاده از تقریبهای

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{۲h} \quad , f''(a) \approx \frac{f(a+h) - ۲f(a) + f(a-h)}{h^۲}$$

جواب تقریبی معادله‌ی دیفرانسیل $y'' - ۳y' + ۲y = ۰$ را به‌ازای $x = ۰.۱$ به‌دست آورید، با فرض آن‌که $y(۰) = ۱$ و $y(۰.۲) = ۱.۲۲۱۴$.

۷ — فرض کنید مقادیر تابع مشتق‌پذیر f در سه نقطه‌ی $x_۰ - h$ ، $x_۰$ و $x_۰ + h$ معلوم باشد. اولاً نشان دهید

$$f''(x_۰) \approx \frac{f(x_۰ - h) - ۲f(x_۰) + f(x_۰ + h)}{h^۲}$$

ثانیاً، اگر f در معادله‌ی دیفرانسیل $f''(x) = ۴f(x)$ صدق کند و $f(۰.۲۰) = ۱.۴۹۱۸$ و $f(۰.۲۵) = ۱.۶۴۸۷$ ، پیدا کنید مقدار تقریبی $f(۰.۱۵)$ و $f(۰.۳۰)$.

۸ — تابع زیر را در نظر بگیرید

$$f(x) = \frac{x - ۱}{۲x - x^۲}$$

(الف) — تقریبی برای $f'(1.5)$ به‌دست آورید که خطای آن $O(h^2)$ باشد. $(h = 0.1)$

(ب) — تقریبی برای $f'(3)$ به‌دست آورید که خطای آن $O(h)$ باشد. $(h = 0.1)$

۹ — فرض کنید a و $h > 0$ اعداد مفروضی باشند و مقدار تابع f در نقاط $a - h$ ، a و $a + h$ معلوم باشد. نشان دهید:

(الف)

$$f'(a+h) \approx \frac{f(a-h) - 4f(a) + 3f(a+h)}{2h}\ ,\ f''(a) \approx \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}$$

(ب) — مقادیری چند از تابع f در جدول زیر داده شده است

x	۰.۰	۰.۱	۰.۲	۰.۳
$f(x)$	۰.۰	۰.۰۹۹	۰.۱۹۷	۰.۲۹۱

می‌دانیم که انحنای منحنی $y = f(x)$ در نقطه‌ی x از فرمول زیر به‌دست می‌آید

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

به‌کمک قسمت (الف) و (ب)، مقدار تقریبی $\kappa(0.2)$ را به‌دست آورید.

انتگرال

۱۰ — برای محاسبه‌ی $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ با روش سیمسون، بازه‌ی $[0, 1]$ را به چند زیر بازه باید تقسیم نمود تا خطا از $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$ بیشتر نباشد.

۱۱ — تابع $f(x) = (\sin x)^{\frac{4}{3}}$ بر بازه‌ی $[0, \frac{\pi}{2}]$ مفروض است. نشان دهید $|f^{(4)}(x)| \leq 60$. کوچکترین مقدار n را تعیین کنید به‌طوری که در محاسبه‌ی $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx$ با روش سیمپسون، خطا از 10^{-4} بیشتر نباشد.

۱۲ — انتگرال $\int_a^{a+h} f(x)dx$ با $hf(a + h) - \frac{h^2}{2}f'(a)$ تقریب زده می‌شود. خطای این تقریب را محاسبه کنید.

۱۳ — انتگرال $K(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha \sin^2 x}}\, dx$ ، انتگرال بیضوی نامیده می‌شود. حساب کنید $K(\frac{\pi}{6})$ را:

(الف)— با روش ذوزنقه‌ای و با $h = \frac{\pi}{10}$.

(ب) ـ با روش رامبرگ و با دقت $\epsilon = 0.001$.

۱۴ — می‌دانیم محیط بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ از رابطه‌ی

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\ dt$$

به‌دست می‌آید. مقدار تقریبی محیط بیضی را به‌ازای $a = ۲$ و $b = ۱$ با روش ذوزنقه‌ای و با $n = ۴$ به‌دست آورید.

۱۵ – حساب کنید مقدار تقریبی $I = \int_۰^۲ \sqrt{\sin x}\, dx$ را:

(الف) – با روش سیمسون و با طول گام $h = \frac{۱}{۴}$.

(ب) – با روش نقطه‌ی میانی و با $h = \frac{۱}{۴}$.

۱٦ – فرض کنید بخواهیم انتگرال $\int_۰^۱ \sin\left(\frac{\pi x^۲}{۲}\right) dx$ را با خطایی حد اکثر $۱۰^{-۳}$ محاسبه کنیم.

(الف) با روش ذوزنقه‌ای بازه $[۰, ۱]$ را حداقل به‌چند زیر بازه باید تقسیم نمود؟

(ب) با روش سیمسون بازه $[۰, ۱]$ را حداقل به‌چند زیر بازه باید تقسیم نمود؟

۱۷ – تابع خطا که با $erf(x)$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$erf(x) = \frac{۲}{\sqrt{\pi}} \int_۰^x e^{-t^۲} dt$$

(الف) حساب کنید $erf(۰.۵)$ را با استفاده از روش سیمسون و با طول گام $h = \frac{۱}{۸}$.

(ب) اگر بخواهیم $erf(۰.۵)$ را با روش ذوزنقه‌ای با چهار رقم اعشار درست تقریب بزنیم ، بازه‌ی $[۰, ۰.۵]$ را حداقل به چند زیر بازه باید تقسیم کنیم؟

۱۸ – مقدار انتگرال زیر را با روش ذوزنقه‌ای به‌دست آورید.

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$$

(راهنمایی : قرار دهید $x = t^۲$)

۱۹ – (الف) مقدار انتگرال $\int_۰^۱ \frac{۱}{\sqrt{۱+x^۴}} dx$ را با روش ذوزنقه‌ای و با $h = \frac{۱}{۸}$ محاسبه کنید.

(ب) – h را چگونه باید انتخاب نمود تا در محاسبه‌ی انتگرال فوق با روش ذوزنقه‌ای، خطا از $۱۰^{-۳}$ کمتر باشد.

۲۰ – فرمولهای نیوتن – کاتس زیر را به‌دست آورید

(الف) :

$$\int_{x_۰}^{x_۳} f(x)dx = \frac{۳h}{۸}(f_۰ + ۳f_۱ + ۳f_۲ + f_۳) - \frac{۳h^۵}{۸۰} f^{(۴)}(\xi) \quad , \quad x_۰ < \xi < x_۳$$

(فرمول نیوتن – کاتس به‌ازای $n = ۳$ که دستور $\frac{۳}{۸}$ سیمسون نامیده می‌شود.)

(ب) :

$$\int_{x_۰}^{x_۴} f(x)dx = \frac{۲h}{۴۵}(۷f_۰ + ۳۲f_۱ + ۱۲f_۲ + ۳۲f_۳ + ۷f_۴) - \frac{۸h^۷}{۹۴۵} f^{(٦)}(\xi) \quad , \quad x_۰ < \xi < x_۴$$

(فرمول نیوتن — کاتس به‌ازای $n = ۴$)

۲۱ — تقریبی برای انتگرال زیر با استفاده از فرمول دو نقطه‌ای گاوس — لژاندر به‌دست آورید.

$$I = \int_{۱}^{۳} x^x \, dx$$

۲۲ — دو تقریب برای انتگرال زیر، یکی با استفاده از فرمول سه نقطه‌ای و یکی چهار نقطه‌ای گاوس — لژاندر به‌دست آورید.

$$I = \int_{۰}^{۱} e^{-x^{۲}} \, dx$$

۲۳ — تابع $f(x) = x^۴ + ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ مفروض است. تقریبی برای

$$I = \int_{-۱}^{۱} f(x) \, dx$$

با استفاده از فرمول دو نقطه‌ای گاوس — لژاندر به‌دست آورید و خطای این تقریب را محاسبه کنید.

۲۴ — تقریبی برای انتگرال زیر به‌دست آورید.

$$I = \int_{۰}^{\infty} e^{-x^{۲}} dx$$

توجه کنید که $I = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}$.

۲۵ — مقدار تقریبی انتگرال

$$I = \int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{۱}{۱ + \sin x} dx$$

را:

(الف) — با روش رامبرگ به‌دست آورید.(بازه‌ی $[-\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴}]$ را دو بار نصف کنید)

(ب) — با فرمول سه نقطه‌ای گاوس — لژاندر به‌دست آورید.

(پ) — نشان دهید مقدار واقعی انتگرال برابر است با $I = ۲$. کدامیک از دو تقریب بالا به مقدار واقعی نزدیکتر است ؟

۲۶ — درجه‌ی دقت را برای فرمول انتگرال گیری

$$\int_{۰}^{۱} f(x)dx \approx \frac{۳}{۴} f(\frac{۱}{۳}) + \frac{۱}{۴} f(۱)$$

به‌دست آورید. با استفاده از این فرمول ، تقریبی برای انتگرال زیر بیابید ، و با مقدار واقعی آن مقایسه کنید.

$$I=\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{۱+x^{۲}}dx$$

۲۷ — تقریبی برای انتگرال زیر به‌دست آورید.

$$I=\int_{۰}^{\infty}e^{-x}\sqrt{۱+\cos^{۲}x}dx$$

۲۸ — ضرایب $w_۱$ ، $w_۲$ و $w_۳$ را طوری تعیین کنید که فرمول انتگرال گیری

$$\int_{۰}^{\pi}\cos(۱۰x)f(x)dx\approx w_۱f(۰)+w_۲f(\frac{\pi}{۲})+w_۳f(\pi)$$

برای همه‌ی چندجمله‌ایهای تا درجه‌ی ۲ دقیق باشد. با استفاده از این فرمول ، تقریبی برای انتگرال زیر ارایه دهید.

$$\int_{-۱}^{۱}\cos(۱۰\pi x)e^{-x^{۲}}dx$$

۲۹ — مقدار انتگرال

$$I=\int_{۰}^{\infty}\frac{x}{e^{x}+۱}dx$$

را با خطایی کمتر از $\epsilon=۰.۰۰۱$ به‌دست آورید.

۳۰ — با روشی مناسب تقریبی برای انتگرال زیر ارایه دهید.

$$I=\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{\sqrt{۱-\ln x}}dx$$