محاسبات عددی

دانشگاه صنعتی شاهرود -دانشکده برق
مدرس: هادی گرایلو

منبع درسی

محاسبات عددی برای دانشجویان علوم و مهندسی

تالیف دکتر اصغر کرایه چیان

انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد

فصل چهارم

فصل ۴ — مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی

$2a+3b=?$

در این بخش محاسبه‌ی مشتق یک تابع را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم.

(الف) تابع به‌صورت فرمولی در دست است، اما فرمول پیچیده است.

(ب) مقادیر تابع در چند نقطه به‌صورت جدولی در دست است.

در هر دو حالت می‌توان فرض کرد که مقادیر یک تابع f به‌صورت جدول زیر داده شده است.

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_n)$

اگر چندجمله‌ای $P_n(x)$ تابع $f(x)$ را در نقاط داده شده در جدول درونیابی کند، آنگاه همانگونه که دیدیم $P_n(x)$ را می‌توان تقریبی برای $f(x)$ در نظر گرفت. انتظار داریم که $P_n'(x)$ نیز تقریبی برای $f'(x)$ باشد. اما خواهیم دید حتی در نقاط x_i که مقادیر $P_n(x)$ و $f(x)$ با هم برابرند در همین نقاط ممکن است اختلاف $P_n'(x)$ و $f'(x)$ زیاد باشد.

برای به‌دست آوردن فرمولهایی برای مشتق، فرض کنید فاصله‌ی نقاط x_i از یکدیگر یکسان و برابر h باشد. به‌طوری‌که دیدیم چندجمله‌ای درونیاب پیشروی نیوتن عبارت‌است از

$$P(x_s)=f_0+s\Delta f_0+\frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\dots+\frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

بنا به قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم

$$P'(x_s)=\frac{dP}{dx}=\frac{dP}{ds}\frac{ds}{dx}=$$

$$\frac{1}{h}\left\{\Delta f_0+\frac{\Delta^2 f_0}{2}(s-1+s)+\frac{\Delta^3 f_0}{6}[(s-1)(s-2)+s(s-2)+s(s-1)]+\dots\right\} \qquad (1)$$

اگر قرار دهیم $s=0$، آنگاه خواهیم داشت

$$f'(x_0)\approx\frac{1}{h}\left(\Delta f_0-\frac{\Delta^2 f_0}{2}+\frac{\Delta^3 f_0}{3}-\dots+\frac{(-1)^{n+1}\Delta^n f_0}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}\Delta^i f_0}{i} \qquad (2)$$

فرمولهای ساده‌ی مشتق

اگر در فرمول (۲) تنها از جمله‌ی اول استفاده شود، داریم

$$f'(x_0)\approx\frac{\Delta f_0}{h}=\frac{f_1-f_0}{h} \qquad (3)$$

که فرمول دو نقطه‌ای مشتق نامیده می‌شود.

با استفاده از دو جمله‌ی اول در (۲)، داریم

$$f'(x_0)\approx\frac{1}{h}\left(\Delta f_0-\frac{\Delta^2 f_0}{2}\right)=\frac{-f_2+4f_1-3f_0}{2h} \qquad (4)$$

که فرمول سه‌نقطه‌ای مشتق نامیده می‌شود.

همین‌طور با استفاده از سه جمله‌ی اول در (۲)، فرمول چهارنقطه‌ای مشتق در نقطه‌ی x_0 را به‌صورت زیر خواهیم داشت

$$f'(x_0)\approx\frac{2f_3-9f_2+18f_1-11f_0}{6h} \qquad (5)$$

به‌طور مشابه با در نظر گرفتن $x_۱$ به‌عنوان اولین نقطه‌ی جدول ، فرمولهای مشتق را در این نقطه به‌دست خواهیم آورد. برای مثال

$$f'(x_۱) \approx \frac{\Delta f_۱}{h} = \frac{f_۲ - f_۱}{h}$$

$$f'(x_۱) \approx \frac{۱}{h}\left(\Delta f_۱ - \frac{\Delta^۲ f_۱}{۲}\right) = \frac{-f_۳ + ۴f_۲ - ۳f_۱}{۲h}$$

اکنون اگر بخواهیم مشتق تابع را در نقطه‌ی x که $x_۰ < x < x_۱$ ، محاسبه کنیم می‌توانیم مشتق را در نقاط $x_۰$ و $x_۱$ تخمین زده و سپس از درونیابی خطی استفاده کنیم ، یعنی

$$f'(x) \approx \frac{x - x_۱}{x_۰ - x_۱} f'(x_۰) + \frac{x - x_۰}{x_۱ - x_۰} f'(x_۱)$$

مثال ۱ — مقادیر تابع f به‌صورت جدول زیر در دست است. $f'(۱.۳)$ را با استفاده از تمام نقاط جدول، و $f'(۱.۷)$ را با استفاده از فرمول سه‌نقطه‌ای مشتق تخمین بزنید.

x	۱.۳	۱.۵	۱.۷	۱.۹	۲.۱
$f(x)$	۳.۶۶۹	۴.۴۸۲	۵.۴۷۴	۶.۶۸۶	۸.۱۶۶

برای یافتن تخمینی برای $f'(۱.۳)$ ، جدول تفاضلات پیشروی تابع را تشکیل می‌دهیم.

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^۲ f$	$\Delta^۳ f$	$\Delta^۴ f$
۱.۳	۳.۶۶۹				
		۰.۸۱۳			
۱.۵	۴.۴۸۲		۰.۱۷۹		
		۰.۹۹۲		۰.۰۴۱	
۱.۷	۵.۴۷۴		۰.۲۲۰		۰.۰۰۷
		۱.۲۱۲		۰.۰۴۸	
۱.۹	۶.۶۸۹		۰.۲۶۸		
		۱.۴۸۰			
۲.۱	۸.۱۶۶				

در این مثال $h = ۰.۲$. پس

$$f'(۱.۳) \approx \frac{۱}{۰.۲}\left(۰.۸۱۳ - \frac{۰.۱۷۹}{۲} + \frac{۰.۰۴۱}{۳} - \frac{۰.۰۰۷}{۴}\right) = ۳.۶۷۷$$

برای به‌دست آوردن تقریبی برای $f'(۱.۷)$ ، با استفاده از فرمول (۴) داریم

$$f'(۱.۷) \approx \frac{-۸.۱۶۶ + ۴(۶.۶۸۸) - ۳(۵.۴۷۴)}{۰.۴} = ۵.۳۹۰$$

مثال ۲ — اگر $f(x)=\sqrt[3]{10+x^2}$ ، تقریبی برای $f'(0.1)$ به‌دست آورید.

حل — جدولی از مقادیر تابع به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم

x	۰.۱	۰.۲	۰.۳	۰.۴
$f(x)$	۲.۱۵۵۲	۲.۱۵۷۳	۲.۱۶۰۹	۲.۱۶۵۹

حال با استفاده از فرمول چهار نقطه‌ای مشتق داریم

$$f'(0.1)\approx\frac{2(2.1659)-9(2.1609)+18(2.1573)-11(2.1552)}{0.6}$$

$$=0.013165$$

برای آن که دقت روش عددی مشخص شود ، مقدار واقعی مشتق را به‌دست می آوریم داریم

$$f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(10+x^2)^2}}\ \Rightarrow f'(0.1)=0.014353$$

تذکر — برای محاسبه‌ی مشتق در نقاط انتهایی جدول ، از چندجمله‌ای درونیاب پسروی نیوتن استفاده می‌شود. به‌طوری که دیدیم این چندجمله‌ای به‌صورت زیر است

$$P(x_s)=f_n+s\nabla f_n+\frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_n+\ldots+\frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

که در آن $\frac{x-x_n}{h}=s$

و مشابه آنچه دیدیم، داریم

$$f'(x_n)\approx P'(x_n)=\frac{1}{h}\left(\nabla f_n+\frac{\nabla^2 f_n}{2}+\frac{\nabla^3 f_n}{3}+\ldots+\frac{\nabla^n f_n}{n}\right)\qquad(6)$$

مثال ۳ — جدول زیر سرعت موشکی را پس از پرتاب در چند زمان نشان می‌دهد. شتاب موشک را در $t=240$ محاسبه کنید.

$t\ (sec)$	۰	۶۰	۱۲۰	۱۸۰	۲۴۰
$v\ (mile/sec)$	۰.۰۰۰۰	۰.۰۸۲۴	۰.۲۷۴۷	۰.۶۵۰۲	۱.۳۸۵۱

حل — باید مشتق تابع $v=v(t)$ را در $t=240$ تخمین زد. جدول تفاضلات پسروی تابع به‌صورت زیر است.

t	$v(t)$	∇v	$\nabla^2 v$	$\nabla^3 v$	$\nabla^4 v$
۰	۰.۰۰۰۰				
		۰.۰۸۲۴			
۶۰	۰.۰۸۲۴		۰.۱۰۹۹		
		۰.۱۹۲۳		۰.۰۷۳۳	
۱۲۰	۰.۲۷۴۷		۰.۱۸۳۲		۰.۱۰۲۹
		۰.۳۷۵۵		۰.۱۷۶۲	
۱۸۰	۰.۶۵۰۲		۰.۳۵۹۴		
		۰.۷۳۴۹			
۲۴۰	۱.۳۸۵۱				

حال از فرمول (۶) به‌ازای $n=4$ و $h=60$ ، داریم

$$v'(240)\approx\frac{1}{60}\left(0.7349+\frac{0.3594}{2}+\frac{0.1762}{3}+\frac{0.1029}{4}\right)=0.01665$$

۲.۴ تحلیل خطا در مشتق‌گیری عددی

اگر $P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب پیشروی نیوتن تابع $f(x)$ و $E(x)$ خطای درونیابی باشد، آنگاه به‌طوری که دیدیم، $f(x) = P(x) + E(x)$. با مشتق‌گیری از طرفین نسبت به x داریم

$$f'(x) = P'(x) + E'(x)$$

از آن‌جایی که $P'(x)$ را تقریبی برای $f'(x)$ تعریف می‌کنیم، پس $E'(x)$ خطا در مشتق است. نشان دادیم که

$$E(x) = \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(c(x)) \quad , \quad s = \frac{x - x_0}{h}$$

پس

$$E'(x) = \frac{dE}{dx} = h^n f^{(n+1)}(c(x_s)) \frac{d}{ds} \binom{s}{n+1} + \binom{s}{n+1} h^{n+1} \frac{d}{dx} \left(f^{(n+1)}(c(x)) \right) \tag{۷}$$

جمله دوم در طرف راست (۷) قابل محاسبه نیست، زیرا بستگی c به x مشخص نیس
اما اگر قرار دهیم $s = 0$ ، که متناظر است با $x = x_0$ ، این جمله صفر می‌شود. همچنین به‌ازای $s = 0$ داریم

$$\frac{d}{ds} \binom{s}{n+1} = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)!}$$

پس خطای مشتق در نقطه‌ی $x = x_0$ عبارت است از

$$E'(x_0) = \frac{(-1)^n}{n+1} h^n f^{(n+1)}(c(x)) \tag{۸}$$

رابطه (۸) نشان می‌دهد که اگرچه در نقطه‌ی x_0 داریم $P(x_0) = f(x_0)$ ، ولی $f'(x_0) - P'(x_0) = O(h^n)$ ، یعنی خطا در $P'(x_0)$ ، $O(h^n)$ است.

۳.۴ مشتقهای مرتبه‌ی دوم

اگر $P_n(x)$ چندجمله‌ای درونیاب پیشروی $f(x)$ باشد، تعریف می‌کنیم

$$f''(x) \approx P_n''(x)$$

و با توجه به رابطه‌ی (۱) در بخش (۱.۴) داریم

$$P_n''(x) = \frac{d^2 P_n}{dx^2} = \frac{1}{h^2} \left\{ \Delta^2 f_0 + \frac{\Delta^3 f_0}{6} [2(s-2) + 2(s-1) + 2s] + \dots \right\}$$

اگر در رابطه‌ی بالا قرار دهیم $s = 0$ ، خواهیم داشت

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \dots \right) \tag{۹}$$

در رابطه‌ی (۹) ضرایب از قانون مشخصی پیروی نمی‌کنند. با استفاده از جمله‌ی اول در (۹) داریم

$$f''(x_0) \approx \frac{\Delta^2 f_0}{h^2} = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} \tag{۱۰}$$

و با استفاده از دو جمله‌ی اول (۹) ، داریم

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 \right) = \frac{-f_3 + 4f_2 - 5f_1 + 2f_0}{h^2} \tag{۱۱}$$

مثال ۴ — مقادیر تابع f به‌صورت جدول زیر داده شده است. تقریبی برای $f''(1.5)$ به‌دست آورید.

x	۱.۳	۱.۵	۱.۷	۱.۹	۲.۱
$f(x)$	۳.۶۶۹	۴.۴۸۲	۵.۴۷۴	۶.۶۸۶	۸.۱۶۶

حل — با استفاده از فرمول (۱۰) و انتخاب $x_0 = 1.5$ ، داریم

$$f''(1.5) \approx \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} = \frac{6.686 - 2(5.474) + 4.482}{0.04} = 5.500 .$$

با استفاده از فرمول (۱۱) و انتخاب $x_0 = 1.5$ ، داریم

$$f''(1.5) \approx \frac{-8.166 + 4(6.686) - 5(5.474) + 2(4.482)}{0.04} = 4.300$$

۴.۴ فرمولهای مشتق با استفاده از فرمول تیلور

فرض کنید تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ به‌قدر کافی مشتق‌پذیر باشد، و x_i ، $i = 0, 1, \ldots, n$ ، نقاط هم فاصله در این بازه باشند. فرض کنید $x_{i+1} = x_i + h$ و $h > 0$ و ثابت است. بنا به فرمول تیلور داریم

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(\xi_1) , \quad x_i < \xi_1 < x_{i+1}$$

یا

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + O(h^3)$$

همین‌طور

$$f(x_{i-1}) = f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + O(h^3)$$

ازتفریق دو رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$

یا

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \qquad (12)$$

و خطای تقریب (۱۲) (خطای برشی) $O(h^2)$ است.

همچنین داریم

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + O(h^4)$$

و

$$f(x_{i-1}) = f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + O(h^4)$$

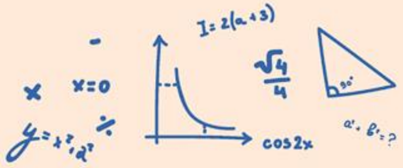
از جمع دو رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

یا

$$f''(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \qquad (13)$$

خطای تقریب (۱۳) نیز $O(h^2)$ است.



اکنون تقریبی برای مشتقهای مرتبه‌ی سه و مرتبه‌ی چهار به‌دست می‌آوریم. می‌توان نوشت

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_i) + O(h^5)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_i) + O(h^5)$$

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + 2hf'(x_i) + 2h^2f''(x_i) + \frac{4h^3}{3}f'''(x_i) + \frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x_i) + O(h^5)$$

$$f(x_{i-2}) = f(x_i) - 2hf'(x_i) + 2h^2f''(x_i) - \frac{4h^3}{3}f'''(x_i) + \frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x_i) + O(h^5)$$

از ترکیب روابط فوق نتیجه می‌شود که

$$2h^3f'''(x_i) = f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}) + O(h^5)$$

بنابراین

$$f'''(x_i) = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3} + O(h^2) \qquad (14)$$

با روشی مشابه می‌توان نشان داد (تمرین) که

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{h^4} + O(h^2) \qquad (15)$$

فرمولهای (۱۲) تا (۱۵) تقریبهایی برای مشتقهای f هستند، و خطای (برشی) هریک از آنها $O(h^2)$ است.

فرمولهای مشتق از مرتبه‌ی $O(h^4)$

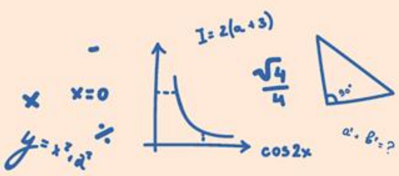
با استفاده از فرمولهای تیلور می‌توان تقریبهای بهتری برای مشتقهای یک تابع به‌دست آورد. این تقریبها عبارتند از

$$f'(x_i) \approx \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h}$$

$$f''(x_i) \approx \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12h^2}$$

$$f'''(x_i) \approx \frac{-f_{i+3} + 8f_{i+2} - 13f_{i+1} + 13f_{i-1} - 8f_{i-2} + f_{i-3}}{8h^3}$$

به‌عنوان تمرین نشان دهید که خطای برشی هریک از تقریبهای بالا $O(h^4)$ است.



مثال ۵ — تابع $f(x) = \sin x$ و مقادیر آن را به‌صورت جدول زیر در نظر بگیرید که x برحسب درجه است.

x°	$f(x)$
۲۰	۰.۳۴۲۰۲
۲۵	۰.۴۲۲۶۲
۳۰	۰.۵۰۰۰۰

$f'(25)$ و $f''(25)$ را با استفاده از فرمولهایی که خطای آنها $O(h^2)$ باشد، به‌دست آورید و با مقادیر واقعی مقایسه کنید.

حل — با استفاده از فرمول (۱۲) و در نظر گرفتن $x_i = 25$ و $h = 5$، داریم

$$f'(25) \approx \frac{0.50000 - 0.34202}{10} = 0.015798$$

همچنین بنا به‌فرمول (۱۳)، داریم

$$f''(25) \approx \frac{0.50000 - 2(0.42262) + 0.34202}{25} = -0.0001288$$

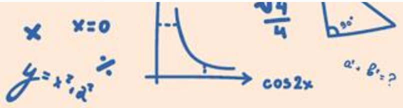
داریم

$$f(x) = \sin(\frac{\pi}{180}x)\ ,\quad f'(x) = \frac{\pi}{180}\cos(\frac{\pi}{180}x)\ ,\quad f''(x) = -(\frac{\pi}{180})^2\sin(\frac{\pi}{180}x)$$

پس

$$f'(25) = 0.015818\ ,\quad f''(25) = -0.00012874$$

ملاحظه می‌شود که تقریبهای به‌دست آمده به مقادیر واقعی نزدیک هستند.



برونیابی ریچاردسون

برونیابی ریچاردسون راهکاری است که با استفاده از آن می‌توان با ترکیب دو تخمینی که برای مشتق یک تابع در یک نقطه در دست است، تخمینی دقیق‌تر به‌دست آورد. برای تشریح این روش، می‌دانیم که اگر f در نقطه‌ی a مشتق پذیر باشد، آنگاه

$$f'(a) = D_h f - \frac{1}{6}h^2 f'''(\xi_1)\ ,\quad a-h < \xi_1 < a+h \qquad (16)$$

$$D_h f = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

یا با تبدیل h به $\frac{h}{2}$ در (۱٦) داریم

$$f'(a) = D_{\frac{h}{2}} f - \frac{1}{6}(\frac{h}{2})^2 f'''(\xi_2)\ ,\quad a - \frac{h}{2} < \xi_2 < a + \frac{h}{2}$$

که

$$D_{\frac{h}{2}} f = \frac{f(a+\frac{h}{2}) - f(a-\frac{h}{2})}{h}$$

از این‌جا

$$4f'(a) = 4D_{\frac{h}{2}} f - \frac{1}{6}h^2 f'''(\xi_2) \qquad (17)$$

برای h کوچک می‌توان فرض کرد که $f'''(\xi_1) \approx f'''(\xi_2)$. در این‌صورت از معادلات (۱٦) و (۱۷) نتیجه می‌شود که

$$3f'(a) \approx 4D_{\frac{h}{2}} f - D_h f$$

پس

$$f'(a) \approx \frac{4D_{\frac{h}{2}} f - D_h f}{3}$$

اگر تعریف کنیم

$$D^{(1)}_{\frac{h}{2}} f = \frac{4D_{\frac{h}{2}} f - D_h f}{3}$$

آنگاه $D^{(1)}_{\frac{h}{2}} f$ تخمین دقیق‌تری برای $f'(a)$ است. در حقیقت می‌توان نشان داد که خطای این تخمین $O(h^4)$ است، در حالی که هر یک از تخمینهای $D_h f$ و $D_{\frac{h}{2}} f$ دارای خطای $O(h^2)$ هستند.

مثال ۶ — تابع $f(x) = e^x$ و مقادیر آن را مطابق جدول زیر در نظر بگیرید.

x	۱.۸	۱.۹	۲	۲.۱	۲.۲
$f(x)$	۶.۰۴۹۶	۶.۶۸۵۹	۷.۳۸۹۱	۸.۱۶۶۲	۹.۰۲۵۰

فرض کنید بخواهیم تقریبی برای $f'(۲.۰)$ به‌دست آوریم. به‌ازای $h = ۰.۲$ داریم

$$f'(۲) \approx \frac{f(۲.۲) - f(۱.۸)}{۰.۴} = ۷.۴۳۸۵$$

حال به‌ازای $h = ۰.۱$ داریم

$$f'(۲) \approx \frac{f(۲.۱) - f(۱.۹)}{۰.۲} = ۷.۴۰۱۵$$

لذا

$$f'(۲.۰) \approx \frac{۴(۷.۴۰۱۵) - ۷.۴۳۸۵}{۳} = ۷.۳۸۹۲$$

نتیجه برونیابی شده بسیار دقیق است، زیر را با چهار رقم اعشار داریم

$$f'(۲.۰) = e^{۲.۰} = ۷.۳۸۹۱$$

۵.۴ انتگرال‌گیری عددی

در این بخش هدف محاسبه‌ی انتگرالهای معین به‌شکل $\int_a^b f(x)dx$ است وقتی که:

(الف) تابع اولیه‌ی f در دست نباشد.

(ب) به‌دست آوردن تابع اولیه‌ی f بسادگی امکان‌پذیر نباشد.

(پ) مقادیر f تنها در تعداد متناهی نقطه واقع در بازه‌ی $[a,b]$ در دست باشد.

برای مثال یافتن مقدار واقعی انتگرالهای زیر امکان‌پذیر نیست.

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \quad , \quad \int_0^2 \sqrt[3]{1+x^3}\,dx$$

مقدار انتگرال $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx$ را می‌توان به‌دست آورد، ولی محاسبه‌ی آن طولانی است.

فرض کنید مقادیر f در نقاط $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ معلوم باشد. فرض کنید $P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f در این نقاط باشد. تعریف می‌کنیم

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P(x)\,dx}$$

در این‌صورت خطای انتگرال‌گیری عبارت است از

$$EI = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b P(x)\,dx = \int_a^b (f(x)-P(x))\,dx = \int_a^b E(x)\,dx$$

که $E(x)$ خطای درونیابی است.

۶.۴ فرمولهای انتگرال گیری نیوتن — کاتس

بازه‌ی $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و قرار می‌دهیم

$$h=\frac{b-a}{n} \quad , \quad x_i = x_0+ih = a+ih\ ,\ i=0,1,\dots n$$

فرض کنید $P(x_s)$ چندجمله‌ای درونیاب پیشروی نیوتن باشد. داریم

$$P(x_s)=f_0+s\Delta f_0+\frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\dots+\frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

دستور ذوزنقه‌ای ساده

ابتدا فرض کنید $n=1$. پس $h=b-a$ و $x_0=a$ و $x_1=b$. در این‌صورت $P(x_s)$ تابع خطی و به‌صورت زیر است

$$P(x_s)=f_0+s\Delta f_0$$

بنابراین

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_1}(f_0+s\Delta f_0)\,dx$$

داریم $s=\frac{x-x_0}{h}$ ، ولذا $dx=hds$ و $x=x_0 \Rightarrow s=0$ ، $x=x_1\Rightarrow s=1$

پس

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\int_0^1 (f_0+s\Delta f_0)\,ds = h\left(sf_0+\frac{s^2}{2}\Delta f_0\right)\Big|_0^1 = \frac{h}{2}(f_0+f_1) \quad (18)$$

فرمول (۱۸) دستور ذوزنقه‌ای ساده نامیده می‌شود.

خطا در دستور ذوزنقه‌ای ساده

$$EI = \frac{h^3}{2} f''(\eta) \int_0^1 s(s-1)\, ds = -\frac{h^3}{12} f''(\eta) = O(h^3) \quad , \quad a < \eta < b \qquad (19)$$

فرمول (۱۹) خطای دستور ذوزنقه‌ای ساده است.

دستور سیمسون ساده

حال فرض کنید $n = 2$. پس $h = \frac{b-a}{2}$ و $x_0 = a$ و $x_2 = b$ و $x_1 = \frac{a+b}{2}$. در این حالت

$$P(x_s) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0$$

بنابراین

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \int_{x_0}^{x_2} \left(f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 \right) dx$$

داریم $s = \frac{x-x_0}{h}$ و $dx = hds$. همچنین $x = x_0 \Rightarrow s = 0 \quad , \quad x = x_2 \Rightarrow s = 2$

پس

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx h \int_0^2 \left(f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 \right) ds$$

$$= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \qquad (20)$$

فرمول (۲۰) دستور سیمسون ساده نامیده می‌شود.

خطا در دستور سیمسون ساده

$$EI = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta) = O(h^5) \quad , a < \eta < b \qquad (21)$$

فرمول (۲۱) خطای دستور سیمسون ساده است.

دستورذوزنقه‌ای مرکب

برای محاسبه‌ی $\int_a^b f(x)\, dx$، بازه‌ی $[a, b]$ را به n زیر بازه $[x_{i-1}, x_i]$، $i = 1, 2, \ldots n$ با طول مساوی تقسیم می‌کنیم و قرار می‌دهیم $h = \frac{b-a}{n}$. بنا به‌دستور ذوزنقه‌ای ساده در بازه‌ی $[x_{i-1}, x_i]$ داریم

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx = \frac{h}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i)) - \frac{h^3}{12} f''(\eta_i) \ , \ x_{i-1} < \eta_i < x_i$$

پس

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) - \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i)$$

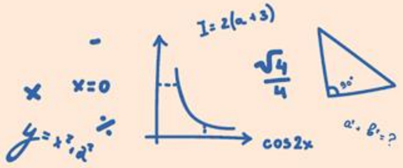
بنابراین

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n) \qquad (22)$$

فرمول (۲۲) **دستور ذوزنقه‌ای مرکب** نامیده می‌شود.

$$ET = -\frac{nh^3}{12} f''(\eta) = -\frac{h^2}{12}(b-a) f''(\eta) = O(h^2) \qquad (23)$$

فرمول (۲۳) خطای دستور ذوزنقه‌ای مرکب است.



مثال ۷ —) مقدار تقریبی انتگرال $I=\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{۱+x^{۳}}\,dx$
را با دستور ذوزنقه‌ای مرکب و به‌ازای $h=۰.۲$ محاسبه کنید.

حل — داریم $\qquad f(x)=\frac{۱}{۱+x^{۳}}\,,\ n=\frac{۱-۰}{۰.۲}\ \Rightarrow n=۵$

مقادیر تابع f در نقاط مورد نیاز به‌صورت جدول زیر است

x	۰	۰.۲	۰.۴	۰.۶	۰.۸	۱
$f(x)$	۱	۰.۹۹۲۰۶	۰.۹۳۹۸۵	۰.۸۲۲۳۷	۰.۶۶۱۳۸	۰.۵

بنابراین

$$I\approx\frac{۰.۲}{۲}[۱+۲(۰.۹۹۲۰۶)+۲(۰.۹۳۹۸۵)+۲(۰.۸۲۲۳۷)+۲(۰.۶۶۱۳۸)+۰.۵]$$
$$=۰.۸۳۳۱۳$$

در این مثال مقدار واقعی انتگرال چنین است

$$I=\frac{۱}{۳}\ln ۲+\frac{\sqrt{۳}\pi}{۹}=۰.۸۳۵۶۵$$

مثال ۸ —) انتگرال زیر را در نظر بگیرید $\qquad I=\int_{۰}^{۱}e^{-x^{۲}}\,dx$

(الف) تقریبی برای انتگرال با روش ذوزنقه‌ای و با $h=۰.۲۵$ به‌دست آورید.
(ب) یک کران بالا برای خطا بیابید.
(پ) اگر بخواهیم تقریبی برای انتگرال با ۶ رقم اعشار درست به‌دست آوریم ، بازه‌ی $[۰,۱]$ را حداقل به چند زیر بازه باید تقسیم کنیم؟

حل — داریم $f(x)=e^{-x^{۲}}$ و $h=۰.۲۵\ \Rightarrow n=۴$

مقادیر تابع f در نقاط مورد نیاز به‌صورت جدول زیر است

x	۰	۰.۲۵	۰.۵	۰.۷۵	۱
$f(x)$	۱	۰.۹۳۹۴۱	۰.۷۷۸۸۰	۰.۵۶۹۷۸	۰.۳۶۷۸۸

داریم

$$I\approx\frac{۰.۲۵}{۲}[۱+۲(۰.۹۳۹۴۱)+۲(۰.۷۷۸۸۰)+۲(۰.۵۶۹۷۸)+۰.۳۶۷۸۸]$$
$$=۰.۷۴۲۹۸$$

(ب) خطا برابر است با

$$ET=-\frac{۱}{۱۲}(۰.۲۵)^{۲}f''(\xi)=-\frac{۱}{۱۹۲}f''(\xi)\ ,\ ۰<\xi<۱$$

داریم

$$|\,ET\,|\le\frac{۱}{۱۹۲}\max_{۰\le x\le ۱}|f''(x)|$$

می‌توان نشان داد (تمرین) که $\max_{۰\le x\le ۱}|f''(x)|=۲$. پس $|\,ET\,|\le\frac{۱}{۹۶}$
و این یک کران بالا برای خطا است.

(پ) اگر بازه به N قسمت مساوی تقسیم شود، آنگاه $h=\frac{۱}{N}$ ، بنابراین

$$|ET|=\frac{h^{۲}}{۱۲}|f''(\xi)|\le\frac{۱}{۱۲N^{۲}}\max_{۰\le x\le ۱}|f''(x)|\le\frac{۱}{۶N^{۲}}\le\frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۶}$$

از این‌جا

$$N\ge\frac{۱۰۰۰}{\sqrt{۳}}>۵۷۷$$

کوچکترین عدد صحیح که در این نامساوی صدق می‌کند $N=۵۷۸$ است.

دستور سیمسون مرکب

در این‌جا بازه‌ی $[a,b]$ را به $2n$ زیر بازه با طول مساوی تقسیم می‌کنیم و قرار می‌دهیم $h=\frac{b-a}{2n}$. فرض کنید

$$a=x_0<x_1<\dots<x_{2i-2}<x_{2i-1}<x_{2i}<\dots<x_{2n-2}<x_{2n-1}<x_{2n}=b$$

افراز $[a,b]$ باشد.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+\dots+2f_{2n-2}+4f_{2n-1}+f_{2n}] \quad (24)$$

فرمول (۲۴) دستور سیمسون مرکب نامیده می‌شود.

خطا در دستور مرکب سیمسون عبارت است از

$$ES=-\frac{nh^5}{90}f^{(4)}(\eta)=-\frac{(b-a)}{180}h^4f^{(4)}(\eta)=O(h^4)$$

مثال ۹ — حساب کنید مقدار تقریبی انتگرال زیر را با روش سیمسون

$$I=\int_{1.2}^{1.6} f(x)\,dx$$

که مقادیر f به‌صورت جدول زیر داده شده است

x	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
$f(x)$	0.1823216	0.2623642	0.3364722	0.4054651	0.4700036

حل — داریم

$$I\approx\frac{0.1}{3}[0.1823216+4(0.2623642)+2(0.3364722)+4(0.4054651)+0.4700036]=0.1332195$$

داده ها مربوط به تابع $f(x)=\ln x$ است ، و داریم

$$I=\int_{1.2}^{1.6}\ln x\,dx=0.1332199$$

خطا برابر است با

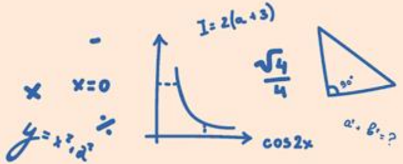
$$|ES|=0.1332199-0.1332195=4\times10^{-7}$$

در این‌جا می‌توانیم با استفاده از فرمول ، یک کران بالا برای خطا محاسبه کنیم

$$ES=-\frac{(1.6-1.2)}{180}h^4f^{(4)}(\xi)=\frac{4}{3\times10^6}\left(\frac{1}{\xi^4}\right)$$

بنابراین

$$|ES|\le\frac{4}{3\times10^6}\left(\frac{1}{1.2}\right)^4=6.43004\times10^{-7}<7\times10^{-7}$$



۷.۴ دستور نقطه‌ی میانی

فرمولهای انتگرال گیری نیوتن — کاتس به دو دسته تقسیم می‌شوند: **فرمولهای بسته** و **فرمولهای باز**
وقتی برای محاسبه‌ی انتگرال

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (۲۵)$$

فرمولی به‌کار رود که در آن از هر دو نقطه‌ی a و b استفاده شود، آن فرمول را **بسته** می‌نامند، مانند فرمولهای ذوزنقه‌ای و سیمسون که بررسی شدند. چنانچه فرمول انتگرال‌گیری حداقل یکی از دو نقطه‌ی انتهایی a یا b را شامل نباشد، آن فرمول انتگرال‌گیری را **باز** می‌نامند.

اگر در انتگرال (۲۵) تابع f در a یا b تعریف نشده باشد ، ولی انتگرال موجود باشد، آنگاه دستورهای ذوزنقه‌ای و سیمسون برای تقریب انتگرال کاربرد ندارد. در چنین حالتهایی باید از فرمولهای باز نیوتن — کاتس استفاده نمود. برای به‌دست آوردن یک فرمول باز در ساده‌ترین حالت، تابع $f(x)$ در (۲۵) را در بازه‌ی $[a,b]$ با تابع ثابت $P(x)=f(\frac{a+b}{2})$ تقریب می‌زنیم. پس

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(\frac{a+b}{2})dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) \qquad (۲۶)$$

فرمول (۲۶) دستور نقطه‌ی میانی ساده نامیده می‌شود.

خطای دستور نقطه‌ی میانی ساده چنین است

$$EM = \frac{(b-a)^3}{24}f''(\eta) \;,\; a<\eta<b$$

اگر قرار دهیم $b-a=h$ ، آنگاه ملاحظه می‌شود که خطای این روش $O(h^3)$ است.

دستور نقطه‌ی میانی مرکب

در انتگرال (۲۵) ، بازه‌ی $[a,b]$ را به n زیر بازه با طول مساوی تقسیم می‌کنیم و در زیر بازه‌ها، نقاط میانی را به‌صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$x_i = a+(i-\frac{1}{2})h \;,\; i=1,2\ldots n \;,\; h=\frac{b-a}{n}$$

دستور نقطه‌ی میانی مرکب چنین است

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(f_1+f_2+\ldots+f_n) \qquad (۲۷)$$

خطای فرمول (۲۷) برابر است با

$$EM = \frac{(b-a)h^2}{24}f''(\eta) \;,\; a<\eta<b$$

مثال ۱۰ — مقدار تقریبی انتگرال زیر را با روش نقطه‌ی میانی به‌دست آورید.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

توجه کنید که تابع $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ در $x=0$ ، حد پایین انتگرال، تعریف نشده، ولی انتگرال موجود است و مقدار آن برابر است با $I=1$.
با انتخاب $h=0.1$ ، نقاط میانی عبارتند از: $x_i=(i-\frac{1}{2})h$ ، $i=1,2,\ldots,10$. لذا

$$I \approx 0.1\sum_{i=1}^{10}\frac{1}{2\sqrt{x_i}} = 0.9044612$$

توجه کنید که خطا زیاد و در حدود ۱۰ % است. علت این امر آن است که تابع $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ در نزدیک $x=0$ مقادیر بزرگ اختیار می‌کند، و این مقادیر در فرمول انتگرال‌گیری منظور نمی‌شود.

۸.۴ انتگرال‌گیری با روش رامبرگ

این روش بر اساس انتگرال‌گیری با روش ذوزنقه‌ای و برونیابی ریچاردسون است که در آن با استفاده از دو تخمینی که برای انتگرالی در دست است ، می‌توان به تخمین بهتری برای آن انتگرال دست یافت. برای تشریح این روش ابتدا آرایه‌ی رامبرگ را معرفی می‌کنیم.

آرایه‌ی رامبرگ

آرایه‌ی رامبرگ یک آرایه‌ی مثلثی است به‌صورت

$$
\begin{array}{lllll}
T_1 & & & & \\
T_2 & T_2^{(1)} & & & \\
T_4 & T_4^{(1)} & T_4^{(2)} & & \\
T_8 & T_8^{(1)} & T_8^{(2)} & T_8^{(3)} & \cdots \\
\vdots & & & &
\end{array}
$$

که هر درایه‌ی آن تقریبی برای انتگرال

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{28}$$

است.

ستون اول، تقریبهای ذوزنقه‌ای هستند که در آنها بازه‌ی $[a, b]$ به‌ترتیب به ۱ ، ۲ ، ۴ ، ۸ و ... تقسیم شده‌اند، و خطای برشی این تقریبها همان‌طور که می‌دانیم $O(h^2)$ است. هر درایه‌ی ستون دوم نیز تقریبی برای انتگرال است و این درایه‌ها از ستون اول به‌صورت زیر به‌دست می آیند

ستون دوم

$$T_{2k}^{(1)} = \frac{4T_{2k} - T_k}{4 - 1} \quad ,k = 1, 2, 2^2, \ldots$$

خطای این تقریبها $O(h^4)$ است. بهمین ترتیب درایه‌های ستون سوم از ستون دوم توسط رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شوند

ستون سوم

$$T_{4k}^{(2)} = \frac{4^2 T_{4k}^{(1)} - T_{2k}^{(1)}}{4^2 - 1} \quad ,k = 1, 2, 2^2, \ldots$$

خطای تقریبهای ستون سوم $O(h^6)$ است. به‌طورکلی، درایه‌های ستون m ام از ستون $(m-1)$ ام به‌صورت زیر به‌دست می آیند

ستون m ام

$$T_{2k}^{(m)} = \frac{4^m T_{4k}^{(m-1)} - T_{2k}^{(m-1)}}{4^m - 1} \quad ,k = 2^{m-1}, 2^m, \ldots \ (m \geq 1)$$

می‌توان نشان داد که دقت تقریبها در هر ستون از ستون سمت چپ آن بهتر است.

مثال ۱۲ — مقدار تقریبی انتگرال $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\, dx$ را با روش رامبرگ حساب کنید. بازه‌ی اولیه، $[0, 1]$، را سه بار نصف کنید.

حل — در گام اول، بازه‌ی انتگرال‌گیری را تقسیم نمی‌کنیم، یعنی به‌عنوان اولین تقریب از دستور ذوزنقه‌ای ساده استفاده می‌کنیم. داریم $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$ و $h = 1$، و لذا

$$T_1 = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) = 0.75$$

حال بازه‌ی $[0, 1]$ را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. پس $h = \frac{1}{2}$ و در نتیجه

$$T_2 = \frac{1}{4}\left(f(0) + 2f(\tfrac{1}{2}) + f(1)\right) = 0.81944$$

این بار بازه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم، لذا $h = \frac{1}{4}$ و

$$T_4 = \frac{1}{8}\left(f(0) + 2f(\tfrac{1}{4}) + 2f(\tfrac{1}{2}) + 2f(\tfrac{3}{4}) + f(1)\right) = 0.83170$$

حال بازه را به هشت قسمت تقسیم می‌کنیم، پس $h = \frac{1}{8}$ و به‌دست می‌آوریم

$$T_8 = 0.83467$$

در این مرحله درایه‌های ستون دوم را محاسبه می‌کنیم

$$T_2^{(1)} = \frac{4T_2 - T_1}{3} = 0.84259$$

$$T_4^{(1)} = \frac{4T_4 - T_2}{3} = 0.83579$$

$$T_8^{(1)} = \frac{4T_8 - T_4}{3} = 0.83566$$

درایه‌های ستون سوم عبارتند از

$$T_4^{(2)} = \frac{16T_4^{(1)} - T_2^{(1)}}{15} = 0.83533 \;,$$

$$T_8^{(2)} = \frac{16T_8^{(1)} - T_4^{(1)}}{15} = 0.83565$$

تنها درایه‌ی ستون چهارم چنین است

$$T_8^{(3)} = \frac{64T_8^{(2)} - T_4^{(2)}}{63} = 0.83566$$

در این مثال آرایه‌ی رامبرگ به‌صورت زیر است

۰.۷۵۰۰۰			
۰.۸۱۹۴۴	۰.۸۴۲۵۹		
۰.۸۳۱۷۰	۰.۸۳۵۷۹	۰.۸۳۵۳۳	
۰.۸۳۴۶۷	۰.۸۳۵۶۶	۰.۸۳۵۶۵	۰.۸۳۵۶۶

پس $I \approx 0.83566$. مقدار واقعی انتگرال عبارت است از $I = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$ یا با پنج رقم اعشار $I = 0.83565$.
ملاحظه کنید که نتیجه به‌دست آمده با روش رامبرگ بسیار دقیق است.

۹.۴ انتگرال‌گیری باروش گاوس

فرمولهای نیوتن — کاتس بر این اساس که نقاط گره‌ای در بازه‌ی انتگرال‌گیری هم فاصله با شند به‌دست می‌آیند. دیدیم که فرمول ذوزنقه‌ای به‌صورت

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=۰}^{n} w_i f(x_i) \qquad (۳۳)$$

است که در آن

$$w_i = h \ \ , i = ۱, ۲, \ldots, n-۱ \ \ , w_۰ = w_n = \frac{h}{۲} \ \ , \ h = \frac{b-a}{n} \ , \ x_i = a + ih$$

همین‌طور فرمول سیمپسون نیز به‌صورت (۳۳) است که در آن n زوج است و

$$w_i = \frac{۴h}{۳} \ \ , \ i = ۱, ۳, \ldots, n-۱ \quad , \quad w_i = \frac{۲h}{۳} \ \ , \ i = ۲, ۴, \ldots, n-۲$$

و $w_۰ = w_n = \frac{h}{۳}$.

خطا در فرمول ذوزنقه‌ای $ET = -\frac{(b-a)h^۲}{۱۲} f''(\xi)$ و در فرمول سیمسون $ES = -\frac{(b-a)h^۴}{۱۸۰} f^{(۴)}(\xi)$. لذا، فرمول ذوزنقه‌ای برای همه چندجمله‌ایهای درجه‌ی اول به‌صورت $f(x) = ax + b$ یک فرمول درست یا بدون خطا است ، زیرا $f''(x) = ۰$. همین‌طور فرمول سیمسون برای همه چندجمله‌ایهای تا درجه‌ی سه یک فرمول درست است. به‌همین دلیل گفته می‌شود که درجه‌ی دقت فرمول انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای برابر ۱ ، و درجه‌ی دقت فرمول انتگرال‌گیری سیمسون برابر ۳ است.

تعریف ۱ — **درجه‌ی دقت** یک فرمول انتگرال‌گیری عددی برابر n است، هرگاه فرمول برای همه‌ی چندجمله‌ایهای تا درجه‌ی حداکثر n یک فرمول بدون خطا باشد.

گاوس نشان داد که اگر شرط هم فاصله بودن نقاط x_i در بازه‌ی انتگرال‌گیری حذف شود، می‌توان فرمولهای انتگرال گیری با بالاترین درجه‌ی دقت به‌دست آورد. پس، هدف در روش گاوس به‌دست آوردن فرمولی به‌صورت

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum^{n} w_i f(x_i) \qquad (۳۴)$$

با این ویژگی است. در این فرمول x_i ها و w_i را به‌ترتیب **گرهها** و **وزنها** می‌نامند.

حال چون $۲n$ پارامتر در رابطه‌ی (۳۴) وجود دارد، n گره x_i و n وزن w_i ، این پارامترها را طوری تعیین می‌کنیم که فرمول (۳۴) برای همه‌ی چندجمله‌ایهای تا درجه‌ی $۲n - ۱$ یک فرمول درست باشد.

بدون آن‌که از کلیت کاسته شود می‌توان بازه‌ی انتگرال‌گیری را $[-۱, ۱]$ در نظر گرفت، زیرا با تبدیل

$$x = \frac{(b-a)t}{۲} + \frac{(b+a)}{۲} \qquad (۳۵)$$

می‌توان بازه‌ی $[-۱, ۱]$ روی محور t را به بازه‌ی $[a, b]$ روی محور x نقش نمود، و برعکس. لذا روش گاوس را برای انتگرالهایی به‌صورت

$$\int_{-۱}^{۱} f(x)dx \qquad (۳۶)$$

بررسی می‌کنیم

ابتدا فرض کنید $n = 2$. در این‌صورت می‌خواهیم گره‌های x_1 و x_2 را در بازه‌ی $[-1, 1]$ و وزنهای مثبت w_1 و w_2 را طوری تعیین کنیم که فرمول

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) \tag{37}$$

در حالتی که $f(x)$ چندجمله‌ای تا درجه‌ی $2n - 1 = 3$ باشد، یک فرمول درست باشد. بنابراین در (۳۷) به‌ترتیب $f(x) = 1$ ، $f(x) = x$ ، $f(x) = x^2$ و $f(x) = x^3$ قرار می‌دهیم. خواهیم داشت

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} dx = 2 \quad \Rightarrow \quad w_1 + w_2 = 2 \tag{38}$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-1}^{1} x\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad w_1 x_1 + w_2 x_2 = 0 \tag{39}$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = \frac{2}{3} \tag{40}$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 = 0 \tag{41}$$

برای حل دستگاه چهار معادله‌ی غیرخطی بالا، معادله‌ی (۳۹) را در x_1^2 ضرب و از معادله‌ی (۴۱) کم می‌کنیم. خواهیم داشت

$$x_2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = 0$$

بسادگی می‌توان دید که تنها رابطه‌ی $x_2 = -x_1$ با معادلات دیگر دستگاه سازگار است. پس با قرار دادن $x_2 = -x_1$ ، به‌دست می‌آوریم

$$w_1 = w_2 = 1 \ , \ x_1^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \ , x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

لذا

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}) \tag{42}$$

اکنون فرمول (۴۲) در حالتی که $f(x)$ چندجمله‌ای با درجه‌ی حداکثر سه باشد، برقرار است. حال برای هر تابع دیگر f که بر بازه‌ی $[-1, 1]$ پیوسته باشد، تعریف می‌کنیم

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}) \tag{43}$$

فرمول (۴۳) ، فرمول انتگرال‌گیری دو نقطه‌ای گاوس — لژاندر نامیده می‌شود.

متشابهاً می‌توان فرمول سه نقطه‌ای گاوس — لژاندر را به‌دست آورد. در این حالت گره‌های x_1 ، x_2 و x_3 و وزنهای مثبت w_1 ، w_2 و w_3 را طوری تعیین می‌کنیم که فرمول

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

در حالتی که $f(x)$ چندجمله‌ای تا درجه‌ی $2n - 1 = 5$ باشد، بر قرار باشد.

فرمول سه نقطه‌ای گاوس — لژاندر برای هر تابع f که بر بازه‌ی $[-1, 1]$ پیوسته باشد به‌صورت زیر است

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \tag{44}$$

مثال ۱۴ — مقدار انتگرال زیر را با استفاده از فرمول دو نقطه‌ای گاوس — لژاندر و همچنین سه نقطه‌ای گاوس — لژاندر تخمین بزنید.

$$I=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

حل — ابتدا بازه‌ی انتگرال گیری ، یعنی $[0,1]$ را به $[-1,1]$ تبدیل می‌کنیم. داریم $a=0$ و $b=1$ ، و لذا تبدیل (۳۵) در این‌جا چنین است

$$x=\frac{t+1}{2}$$

با این تعویض متغیر، انتگرال داده شده به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\frac{(t+1)^2}{4}}\ dt$$

حال تعریف می‌کنیم

$$F(t)=\frac{1}{1+\frac{(t+1)^2}{4}}$$

با استفاده از فرمول دو نقطه‌ای گاوس — لژاندر داریم

$$\int_{-1}^{1} F(t)\ dt \approx F(-\frac{1}{\sqrt{3}})+F(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 0.95725+0.61652=1.57377$$

بنابراین $I\approx 0.78688$.

با استفاده از فرمول سه نقطه‌ای گاوس — لژاندر داریم

$$\int_{-1}^{1} F(t)\ dt \approx \frac{5}{9}F\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}F(0)+\frac{5}{9}F\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=$$

$$0.54857+0.71111+0.31084=1.57053$$

در نتیجه $I\approx 0.78527$.

توجه کنید که مقدار واقعی انتگرال برابر است با $I=\frac{\pi}{4}=0.785398$ ، و می‌بینیم که نتیجه به‌دست آمده با روش سه نقطه‌ای گاوس — لژاندر دقیق‌تر است.

تذکر — ثابت می‌شود که گرهها در فرمولهای گاوس — لژاندر، ریشه‌های چندجمله‌ایهای لژاندر هستند. این چندجمله‌ایها را می‌توان از فرمول زیر که به **فرمول رودریگ** مشهور است، به‌دست آورد.

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\ n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]\ ,\ n=0,1,\ldots \qquad (46)$$

پس، از این فرمول داریم

$$P_0(x)=1\ ,\ P_1(x)=x\ ,\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)\ ,\ P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)\ ,\ldots$$

ملاحظه کنید که گرهها در فرمول دونقطه‌ای گاوس — لژاندر، ریشه‌های $P_2(x)=0$ و در سه نقطه‌ای ریشه‌های $P_3(x)=0$ هستند.

با در دست داشتن گرهها در فرمول n نقطه‌ای گاوس — لژاندر، وزنها را می‌توان از فرمول زیر به‌دست آورد.

$$w_i=\frac{2(1-x_i^2)}{n^2[P_{n-1}(x_i)]^2}\quad i=1,2,\ldots n \qquad (47)$$

برای مثال، به‌ازای $n = ۳$ ، داریم

$$x_۱ = -\sqrt{\frac{۳}{۵}}, \quad x_۲ = ۰, \quad x_۳ = \sqrt{\frac{۳}{۵}}$$

و لذا از فرمول (۴۷) به‌دست می‌آوریم

$$w_۱ = \frac{۵}{۹}, \quad w_۲ = \frac{۸}{۹}, \quad w_۳ = \frac{۵}{۹}$$

پایان فصل چهارم