$$\begin{bmatrix} ۴۰-\lambda & -۲۴ \\ -۲۴ & ۱۶-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \lambda = ۲۸ \pm ۶\sqrt{۵}$$

$$\|A\|_۲ = \sqrt{۲۸ + ۶\sqrt{۵}}$$

$$\|A\|_F = \sqrt{۵۶}$$

مثال) برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ نُرم های مختلف را بدست آورید.

$$\|A\|_۱ = \max(۱, ۱, ۵) = ۵$$

$$\|A\|_\infty = \max(3, 4) = 4$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}}$$

$$\hookrightarrow A^T A - \lambda I$$

$$A^T A = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}} \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{bmatrix} - \lambda I_{3\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & +3 \\ -2 & 3 & 13-\lambda \end{bmatrix}$$

باید منفرد شود:

$$|A^TA-\lambda I| =$$

$$(1-\lambda)\left[(12-\lambda)(1-\lambda)-9\right]-4(1-\lambda)=0$$

$\sqrt{\lambda}_{max}$ ← ریشه معادله فوق

$$\|A\|_F=\sqrt{tr(A^TA)}=\sqrt{18}$$

تعیین علامت ماتریس ها :

۱- ماتریس متقارن حقیقی $A_{n\times n}$ را مثبت معین

گوییم اگر :

$$\begin{cases} x^TAx > 0 & \text{و} \quad x \neq 0 \\ x^TAx = 0 & \text{و} \quad x = 0 \end{cases}$$

۲- " " " نیمه مثبت معین گوییم اگر

$$\begin{cases} x^TAx \geq 0 \; ; \; x \neq 0 \\ x^TAx = 0 \; ; \; x = 0 \end{cases}$$

۳- " " " منفی معین گوییم اگر

$$\begin{cases} x^TAx < 0 \; ; \; x \neq 0 \\ x^TAx = 0 \; ; \; x = 0 \end{cases}$$

۴ـ 〃 〃 〃 نیمه منفی معین گوئیم اگر

$$\begin{cases} x^T A x \leqslant 0 & ; \quad x \neq 0 \\ x^T A x = 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

نکته) چندجمله ای های به فرم $x^T A x$ را صورت های درجه دوم می نامند.

مثال) صورت درجه دوم زیر را به صورت $x^T A x$ نمایش دهید.

$$\underline{x_1^2} - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + \underline{x_2^2} + \underline{8x_3^2}$$

$$x^T A x = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}}_{1\times 3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{3\times 3} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{3\times 1}$$

معیار تشخیص علامت ماتریس:

۱- مثبت معین: کهادهای اصلی مقدم ماتریس باید مثبت باشند؛

تعداد: n تا

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11} > 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$|A| > 0$$

۲ـ منفی معین: کهادهای اصلی مقدم مرتبه فرد منفی و کهادهای اصلی مقدم مرتبه زوج مثبت باشند

$$a_{11} < 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$|A| < 0$$

۳ـ شرط نیمه مثبت معین:

تمام کهادهای اصلی ماتریس A غیرمنفی باشند.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad 2^n - 1$$

$a_{11} , a_{22} , a_{33} \geq 0$ و $A \geq 0$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geq 0 \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \geq 0$ و

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \geq 0$

۴_ شرط نیمه معین منفی:

تمام کهادهای اصلی مرتبه زوج آن غیرمنفی و مرتبه فرد آن غیرمثبت باشد

$a_{ii} \leq 0$ و $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \geq 0$

و ....

مثال) علامت ماتریس A را!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2 > 0 \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} > 0$$

$$|A| = 2(6) - 2(2) - 1(6) > 0$$

مثبت معین؟

مثال) علامت ماتریس A ؟

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

کافیه کهادهای اصلی را بنویسیم :

$a_{11} > ۰$ و $a_{22} > ۰$ و $a_{33} = ۰$ و

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ۰$ و $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} < ۰$

$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < ۰$ و $|A| = ۰$

نامعین ؟

مثال) به ازای کدام مقدار k ، ماتریس زیر، مثبت معین می‌شود؟!

$$A = \begin{bmatrix} k & -4 & -4 \\ -4 & k & -4 \\ -4 & -4 & k \end{bmatrix}$$

$k > 0$ (1)

$k^2 - 16 > 0 \longrightarrow \begin{matrix} k > 4 \\ k < -4 \end{matrix}$ (2)

$|A| > 0 \longrightarrow (k-8)(k+4)^2 > 0$

$\longrightarrow k > 8$ (3)

(3), (2), (1) $\Longrightarrow \boxed{k > 8}$

ماتریس مختلط: ماتریسی که همه یا برخی از درایه های آن اعداد مختلط باشند.

مزدوج ماتریس مختلط:

$$\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$$

مزدوج درایه های ماتریس

ماتریس ترانهاده:

$A^T \leftarrow$ جای سطر و ستون عوض شوند

$$(A^T)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$|A^T| = |A|$$

$$tr(A^T) = tr(A)$$

برای ماتریس غیرمنفرد $A_{n\times n}$: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

ماتریس ترانهاده مزدوج :

همان مزدوج ترانهاده یک ماتریس است که با $\bar{A}^T$ یا A^* نشان می‌دهند.

$$(A+B)^* = A^* + B^*$$

$$(AB)^* = B^* A^*$$

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

A غیرمنفرد

ماتریس متقارن : $A = A^T$

شبه متقارن : $A = -A^T$

$$A = \underbrace{P}_{\text{متقارن}} + \underbrace{Q}_{\text{شبه متقارن}}$$

$$\begin{cases} P = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) \\ Q = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right) \end{cases}$$

نکته) برای ماتریس $A_{m\times n}$ ، ماتریس $B = A^T A$ یک ماتریس متقارن خواهد بود.

$$B^T = \left(A^T A\right)^T = A^T \left(A^T\right)^T$$

$$= A^T A = B$$

نکته) معکوس یک ماتریس متقارن (درصورت وجود)، یک ماتریس متقارن است.

$$AA^{-1} = I \longrightarrow (AA^{-1})^T = I^T$$

$$\Rightarrow \underline{(A^{-1})^T}\, \cancel{A^T} = I = A^{-1}\cancel{A}$$

$$\Rightarrow (A^{-1})^T = A^{-1} \quad \checkmark$$

ماتریس قطری:

ماتریس مربعی که تمام درایه های آن بجز عناصر قطر اصلی همگی صفر باشند. $a_{ij} = 0 \quad i \neq j$

$$\checkmark\ |A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

* ماتریس قطری A غیرمنفرد است اگر هیچ یک از عناصر

قطر اصلی صفر نباشد:

$\mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ ✓

✓ اگر همه درایه‌های زیر قطر اصلی صفر باشند ← بالا مثلثی

✓ 〃 〃 بالای 〃 〃 〃 ← پایین مثلثی

ماتریس متعامد:

ماتریس A را متعامد گویند اگر حقیقی بوده و $A^T A = AA^T = I$ باشد.

✓ در یک ماتریس متعامد ← $A^{-1} = A^T$

✓ ستون‌های ماتریس متعامد بردارهای یکا متعامد هستند.

✓ دریک ماتریس متعامد $|A| = \pm 1$ و لذا
A غیر منفرد است .

✓ برای ماتریس متعامد A :

$$\|Ax\| = \|x\|$$

$$\|Ax\|^2 = (Ax)^T (Ax)$$

$$= x^T \underbrace{A^T A}_{I} x = \|x\|^2$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

محاسبه عدد حالت برای ماتریس ها:

بررسی حساسیت دستگاه معادلات نسبت به خطاهای کوچک محاسباتی یا گرد کردن اعداد.

مثال)

$$\begin{cases} ۲۳،۲۹۷\, x_۱ + ۳۳،۰۷۴\, x_۲ = ۱۳،۵۲ \\ ۵۲،۶۸۴\, x_۱ + ۷۴،۷۵۲\, x_۲ = ۳۰،۶۱۶ \end{cases}$$

$$\to X = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$\text{if } B = \begin{bmatrix} ۱۳،۶۵ \\ ۳۰،۵ \end{bmatrix} \longrightarrow X = \begin{bmatrix} -۱۱،۹۲ \\ ۸،۸۱ \end{bmatrix}$$

$$\text{if } B = \begin{bmatrix} ۱۳،۴ \\ ۳۰،۵ \end{bmatrix} \longrightarrow X = \begin{bmatrix} ۷،۳۷ \\ -۴،۷۱۹ \end{bmatrix}$$

تغییرات بسیار کوچک در B ← به شدت در

پاسخ سیستم تأثیر گذاشت .

← به چنین دستگاه معادلات :

ill condition

بدحالت

* برای تشخیص بدحالت بودن یک دستگاه،

پارامتری به نام عدد حالت تعریف می‌گردد.

condition number

$$K = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

اگر عدد حالت کوچک باشد ← دستگاه معادلات

خوش حالت است .

اگر عدد حالت مقدار خیلی بزرگی باشد ←

دستگاه معادلات بد حالت است.

← ماتریس A نزدیک به منفرد شدن است.

$$K = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = ۱/۰۲۷ \times ۱۰^{۴}$$

← بد حالت ✓