۳-۶-۱۲ نمودارهای نایکوئیست اصلاح شده و کاربرد آن‌ها

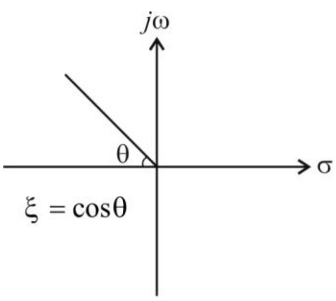
در طراحی سیستم‌های کنترل، اطلاع از پایداری مطلق سیستم کافی نیست و عموماً به آگاهی پایداری نسبی آن نیز نیازمندیم، که در روش راث، با انتقال مبدأ صفحه s به این خواسته رسیدیم. در این بخش نیز به کمک نمودارهای نایکوئیست اصلاح شده می‌توانیم علاوه‌بر بررسی پایداری نسبی، پارامترهای سیستم را تعیین کنیم. این موضوع را در سه حالت مختلف برای سیستم‌های مرتبه دوم بررسی می‌کنیم.

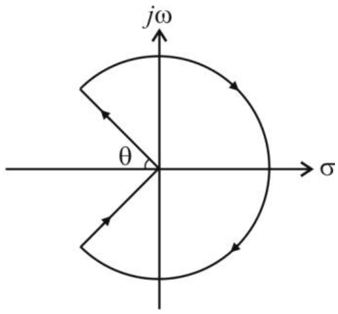
می‌دانیم که معادله مشخصه سیستم مرتبه دوم نوعی عبارتست از: $\Delta(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

با فرض $1 > \xi > 0$، ریشه‌های آن مزدوج مختلط بوده و عبارتند از: $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\,\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

حالت اول: سیستم دارای حداقل نسبت میرایی مشخص باشد.

یادآوری می‌کنیم که $\xi = \cos\theta$ است به طوری که هر چه θ بزرگ‌تر باشد ξ کوچک‌تر است. برای برآورده کردن این خواسته که سیستم دارای حداقل نسبت میرایی مشخص ξ_0 باشد، بایستی مسیر نایکوئیست را طوری در نظر بگیریم که از خطوط $\xi_0 = \cos\theta_0$ بگذرد. لذا مسیر نایکوئیست اصلاح شده را به صورت زیر باید انتخاب کنیم.





اگر در حالت کلی منحنی تابع تبدیل حلقه باز $GH(s)$ متناظر با مسیر نایکوئیست اصلاح شده نقطه بحرانی $(-1 + j0)$ را دور نزند و $GH(s)$ در داخل این مسیر بسته، قطبی نداشته باشد، در این صورت نه تنها سیستم حلقه بسته پایدار خواهد بود، بلکه نسبت میرایی قطب‌های مزدوج مختلط حلقه بسته از مقدار مشخص ξ_0 بزرگ‌تر خواهند بود.

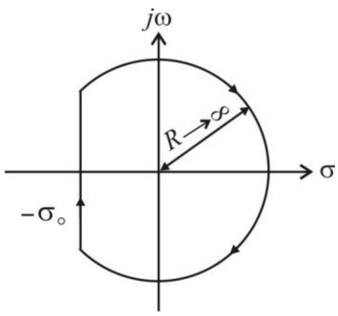
حالت دوم: سیستم دارای حداکثر زمان نشست معین باشد.

یادآوری می‌کنیم که با معیار انحراف ۲٪ زمان نشست برابر است با: $t_s = \dfrac{4}{\xi\omega_n} = \dfrac{4}{\sigma}$

که σ ضریب میرایی سیستم می‌باشد. حال برای این که زمان نشست سیستم از مقدار مشخص t_{s_0} کوچک‌تر باشد، داریم:

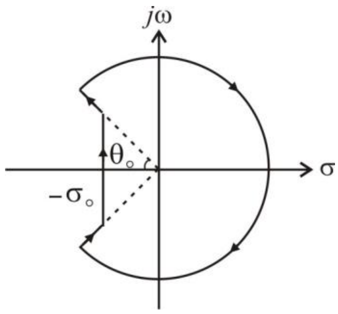
$$t_s = \frac{4}{\sigma} \le t_{s_0} = \frac{4}{\sigma_0} \quad \Rightarrow \quad \sigma \ge \sigma_0$$

بنابراین مسیر نایکوئیست اصلاح شده را باید به صورت زیر انتخاب کنیم. در این حالت نیز اگر منحنی تابع تبدیل حلقه باز $GH(s)$ متناظر با مسیر نایکوئیست اصلاح شده نقطه بحرانی $(-1 + j0)$ را دور نزند و $GH(s)$ در داخل این مسیر بسته، قطبی نداشته باشد، در این صورت نه تنها سیستم حلقه بسته پایدار خواهد بود، بلکه زمان نشست سیستم کمتر از مقدار معین t_{s_0} خواهد بود. توجه داشته باشید که در این حالت تمام قطب‌های تابع تبدیل حلقه بسته در سمت چپ خط $\mathrm{Re}(s) = -\sigma_0$ قرار دارند.



حالت سوم: سیستم دارای حداقل نسبت میرایی مشخص و حداکثر زمان نشست معین باشد.

حالت سوم در حقیقت ترکیبی از حالت‌های اول و دوم می‌باشد. بنابراین چنانچه بخواهیم سیستم دارای حداقل نسبت میرایی مشخص ξ_0 و حداکثر زمان نشست معین t_{s_0} باشد باید مسیر نایکوئیست اصلاح شده را به صورت زیر انتخاب کنیم.



۳-۶-۱۳ اثرات اضافه کردن صفر و قطب به تابع تبدیل حلقه باز در نمودار نایکوئیست

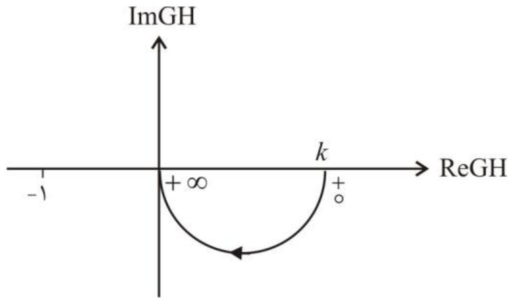
۳-۶-۱۳-۱ اضافه کردن قطب

به طور کلی اضافه کردن قطب، سبب کشیده شدن نمودار نایکوئیست به سمت نقطه بحرانی $(-1+j0)$ شده و لذا سیستم را به سمت ناپایداری سوق می‌دهد که با کم کردن حد بهره و حد فاز این واقعیت صورت می‌گیرد. برای درک بیشتر به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال: (مؤلف)

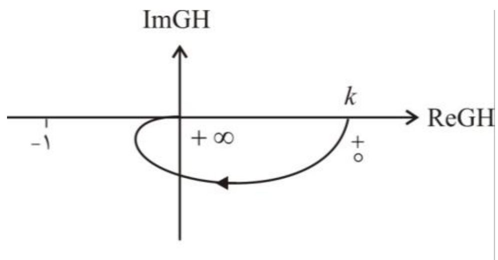
۱) $GH(s)=\dfrac{k}{1+\tau s}$

$k,\tau>0$



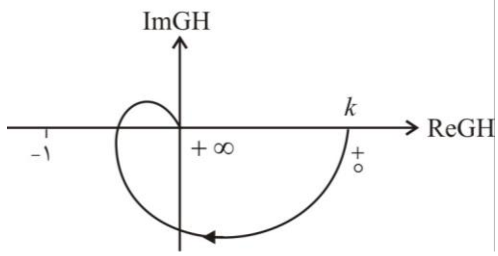
۲) $GH(s)=\dfrac{k}{(1+\tau s)(1+\tau_1 s)}$

$k,\tau,\tau_1>0$



۳) $GH(s)=\dfrac{k}{(1+\tau s)(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$

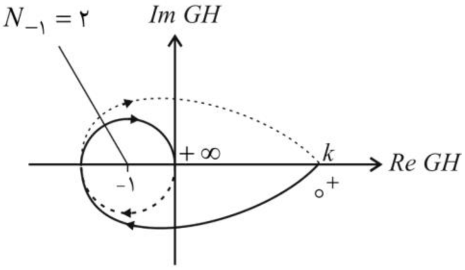
$k,\tau,\tau_1,\tau_2>0$



همان‌طور که مشاهده می‌شود، اگرچه هر دو سیستم حلقه بسته متناظر با (۱) و (۲) پایدارند ولی نمودار نایکوئیست (۲) از نمودار نایکوئیست (۱) به نقطه بحرانی $(-1+j0)$ نزدیک‌تر است. این در حالی است که در نمودار نایکوئیست (۳) بستگی به پارامترهای

سیستم ممکن است سیستم پایدار یا ناپایدار گردد، که در حالت پایداری، سیستم حلقه بسته متناظر با آن از حد فاز و حد بهره کمتری نسبت به دیگر سیستم‌ها برخوردار می‌باشد. این واقعیت را در ادامه نشان داده‌ایم.

حالت اول:

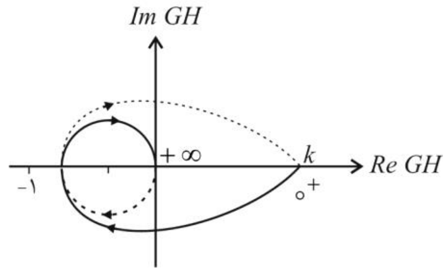


$p = 0$

$N_{-1} = 2$

$\rightarrow\ z = 2\ \rightarrow$ سیستم ناپایدار است.

حالت دوم:



$p = 0$

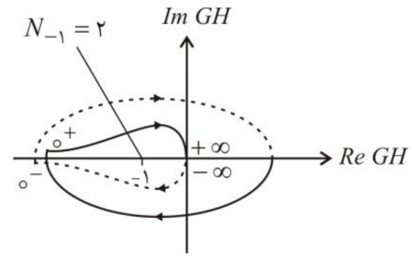
$N_{-1} = 0$

$\rightarrow\ z = 0\ \rightarrow$ سیستم پایدار است.

۳-۶-۱۳-۲ اضافه کردن صفر

اضافه کردن صفر در حالت کلی با افزایش حد بهره و حد فاز، سبب دور کردن نمودار نایکوئیست از نقطه $(-1 + j0)$ شده و پایداری سیستم را بهبود می‌بخشد. به مثال زیر برای درک بهتر توجه کنید. (مؤلف)

مثال:

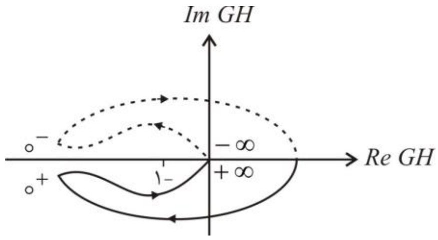


$$1)\ GH(s) = \frac{k}{s^2(1+\tau s)} \qquad k, \tau > 0$$

$p = 0$

$N_{-1} = 2$

$\rightarrow\ z = 2$ (سیستم با دو قطب سمت راست ناپایدار است)



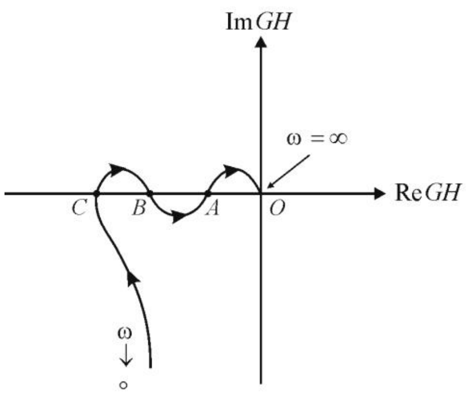
$$2)\ GH(s) = \frac{k(1+\tau_1 s)}{s^2(1+\tau s)} \quad k > 0,\ \ \tau_1 > \tau > 0$$

$p = 0$

$N_{-1} = 0$

$\rightarrow\ z = 0$ (سیستم پایدار است)

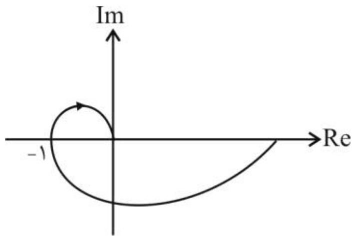
۳-۶-۱۴ سیستم‌های پایدار مشروط



به سیستم‌های حلقه بسته که به ازاء محدوده‌های مختلف از بهره حلقه باز می‌توانند پایدار یا ناپایدار گردند، سیستم‌های پایدار مشروط نامیده می‌شوند. در زیر نمودار قطبی نوعی برای یک سیستم پایدار مشروط نشان داده شده است. با فرض این که سیستم حلقه باز می‌نیمم فاز باشد، برای این که سیستم مذکور پایدار باشد، لازم است که نقطه بحرانی $(-1 + j0)$ در ناحیه بین AB قرار گیرد. در غیر این صورت سیستم ناپایدار خواهد بود. این واقعیت با تکمیل نمودار قطبی در بازه فرکانسی $-\infty$ تا 0 به سادگی نشان داده می‌شود. توجه شود که در کلیه مسائل، نمودار قطبی در گستره فرکانسی $-\infty$ تا $+\infty$ در نظر گرفته شود.

در ادامه به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال: تابع تبدیل مدار باز سیستمی $GH(s)=\dfrac{k}{s^{3}+3s^{2}+2s+4}$ می‌باشد. به ازاء چه مقدار مثبتی از k دیاگرام نایکوئیست آن مطابق شکل خواهد بود؟ (هسته‌ای ۸۳)



۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

حل: گزینه «۳»

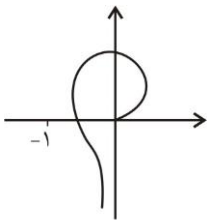
با توجه به متن درس، عبور نمودار قطبی از نقطه بحرانی $-1+j\,0$ به معنای این است که سیستم حلقه بسته پایدار مرزی است، که معادل یک سطر صفر کامل در جدول راث می‌باشد. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=s^{3}+3s^{2}+2s+4+k$$

برای ایجاد یک سطر صفر کامل در جدول راث داریم:

$$2\times 3-1\times(4+k)=0 \;\rightarrow\; k=2$$

مثال: در سیستمی با دیاگرام نایکوئیست روبرو، اضافه شدن تأخیر به صورت e^{-Ts}: (هسته‌ای ۸۳)



۱) تأثیری بر پایداری ندارد.

۲) حد بهره را افزایش می‌دهد.

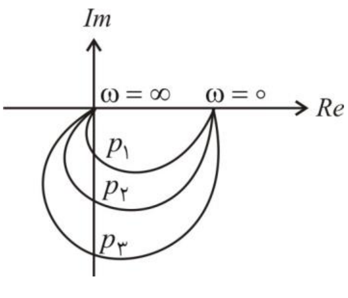
۳) حد فاز را افزایش می‌دهد.

۴) می‌تواند سیستم را به ناپایداری برساند.

حل: گزینه «۴»

همان‌طور که در متن درس بیان شد، تأخیر زمانی e^{-Ts} با کاهش حد فاز می‌تواند سبب ناپایداری سیستم گردد.

مثال: کدام پاسخ در مورد دسته نمودارهای نایکوئیست زیر صحیح است؟ (مکانیک ۸۰)



۱) همگی برای سیستم‌های مرتبه دو استاندارد هستند و فرکانس‌های مربوط به نقاط p_i برابر فرکانس میرایی ω_d است.

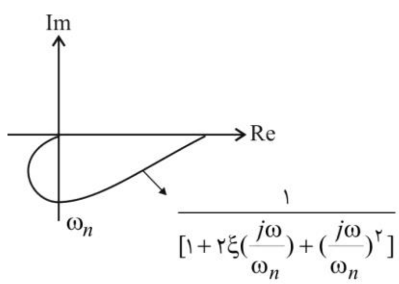
۲) همگی برای سیستم‌های مرتبه اول استاندارد هستند و فرکانس‌های مربوط به نقاط p_i برابر فرکانس طبیعی ω_n هستند.

۳) همگی برای سیستم‌های مرتبه دوم استاندارد هستند و فرکانس‌های مربوط به نقاط p_i برابر فرکانس طبیعی ω_n هستند.

۴) مرتبه سیستم را نمی‌توان از روی این دیاگرام تشخیص داد.

حل: گزینه «۳»

با توجه به متن درس، نمودار قطبی مربوط به عوامل مرتبه دوم هستند و فرکانس محل تلاقی با محور موهومی برابر فرکانس نامیرای طبیعی ω_n است.



مثال: حد بهره یک سیستم با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)=\dfrac{۱}{s(s+۲)^{۲}}$ کدام است؟ (مکانیک ۷۵)

۱) $\dfrac{۱}{۱۶}$ ۲) $\dfrac{۱}{۴}$ ۳) ۴ ۴) ۱۶

✍ **حل:** گزینه «۴»

با توجه به متن درس، محاسبه حد بهره معادل یک سطر صفر کامل در روش راث می‌باشد. لذا معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$GH(s)=\frac{k}{s(s+۲)^{۲}} \quad \Rightarrow \quad \Delta(s)=۱+GH(s)=s^{۳}+۴s^{۲}+۴s+k=۰$$

برای ایجاد یک سطر صفر کامل در جدول راث داریم: $۴\times۴-k=۰ \ \rightarrow \ k=۱۶$

مثال: تابع تبدیل حلقه باز سیستمی به صورت $GH(s)=\dfrac{k}{s(s+۱)(s+۵)}$ است. مقدار k را چنان تعیین کنید که حد بهره سیستم (GM) برابر $۴۰\ dB$ باشد؟ (هسته‌ای ۸۳)

۱) ۱/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۶ ۴) ۱/۸

✍ **حل:** گزینه «۲»

در اینگونه مسائل نیز می‌توان از روش راث استفاده کرد. بدین صورت که در تابع تبدیل حلقه باز مقدار k به ak تبدیل شود، که در آن a حد بهره مطلوب است. بر این اساس در این مثال، کافی است که از تبدیل k به $۱۰۰k$ در تابع تبدیل حلقه باز استفاده کنیم و سپس از روش راث استفاده نماییم. داریم:

$$۲۰\log a=۴۰ \ \rightarrow \ a=۱۰۰$$

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=۱+\frac{۱۰۰k}{s(s+۱)(s+۵)}=۰ \quad \Rightarrow \quad \Delta(s)=s^{۳}+۶s^{۲}+۵s+۱۰۰k=۰$$

برای ایجاد یک سطر صفر کامل در جدول راث داریم: $۵\times۶-۱۰۰k=۰ \ \rightarrow \ k=۰/۳$

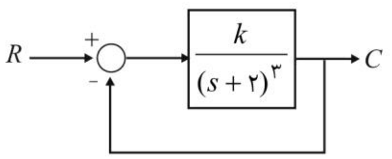
مثال: مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستم کنترلی نشان داده شده مطابق نمودار می‌باشد. اگر $k=۸$ باشد، برای این سیستم حاشیه بهره *gain margin* برابر است با: (مکانیک ۸۳)

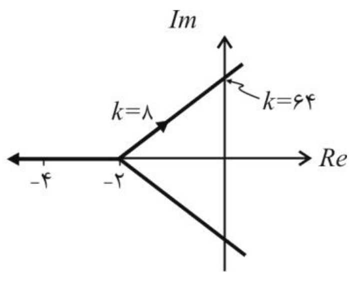
۱) ۴

۲) ۸

۳) ۱۶

۴) ۳۲





✍ **حل:** گزینه «۲»

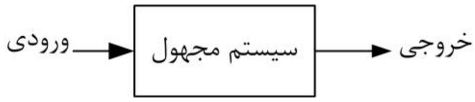
لذا معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=۱+\frac{۸k}{(s+۲)^{۳}}=۰ \quad \Rightarrow \quad \Delta(s)=s^{۳}+۶s^{۲}+۱۲s+۸(۱+k)=۰$$

جدول راث را تشکیل می‌دهیم. با انتخاب $k=۸$ یک سطر کامل صفر در جدول راث ایجاد می‌شود. لذا داریم: $G.M=۸$

توجه کنید از مکان هندسی ریشه‌ها، برای $k_{max}=۶۴$ سیستم در مرز پایداری قرار دارد. بنابراین با توجه به مفهوم حد بهره، مقدار آن $k=\dfrac{۶۴}{۸}=۸$ خواهد بود.

مثال: برای تعیین تابع تبدیل یک سیستم خطی یک بار ورودی‌های پله‌ای و بار دیگر ورودی‌های هارمونیک را به سیستم اعمال می‌کنیم و خروجی را در حالت گذرا *(Transient response)* و در حالت ماندگار *(steady state)* اندازه‌گیری می‌کنیم. به ازاء هر یک از ورودی‌ها با کدام حالت خروجی می‌توان تابع تبدیل را تعیین کرد؟ (مکانیک ۸۳)



۱) به ازاء ورودی‌های پله‌ای و هارمونیک با خروجی‌ها در حالت گذرا

۲) به ازاء ورودی‌های پله‌ای و هارمونیک با خروجی‌ها در حالت ماندگار

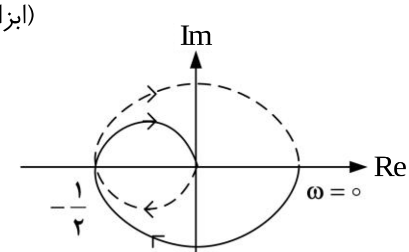
۳) به ازاء ورودی پله‌ای با خروجی در حالت ماندگار و به ازاء ورودی هارمونیک با خروجی در حالت گذرا

۴) به ازاء ورودی پله‌ای با خروجی در حالت گذرا و به ازاء ورودی هارمونیک با خروجی در حالت ماندگار

✍ **حل:** گزینه «۴»

به راحتی با توجه به تعریف پاسخ حالت دائمی سینوسی می‌توان دریافت که حالت ماندگار با ورودی‌های هارمونیک (سینوسی) قابل تعیین است.

مثال: دیاگرام نایکوئیست سیستمی با $k=۱$ در شکل مقابل داده شده است. سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی به ازای $k=۲$ دارای .... ریشه روی محور موهومی است. (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۲)



۱) ۱

۲) ۲

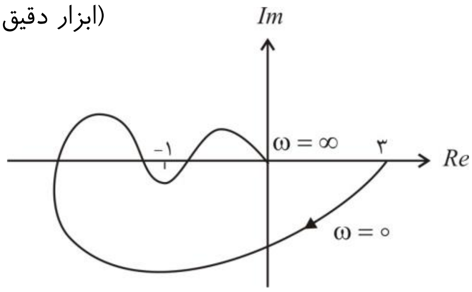
۳) صفر

۴) ۴

✍ **حل:** گزینه «۲»

به راحتی می‌توان دریافت که با $k=۲$، نمودار قطبی سیستم از نقطه بحرانی $-۱+j\circ$ عبور کرده و لذا سیستم پایدار مرزی است. بنابراین بایستی سیستم حلقه بسته دارای یک جفت ریشه موهومی خالص باشد.

مثال: شکل مقابل نمودار نایکوئیست تابع تبدیل حلقه باز سیستمی با فیدبک واحد منفی را نشان می‌دهد. بهره حالت ماندگار $(s=\circ)$ تابع تبدیل حلقه بسته عبارتست از: (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۲)



۱) ۰/۲۵

۲) ۰/۵

۳) ۰/۷۵

۴) ۱

✍ **حل:** گزینه «۳»

روش اول: با توجه به رفتار فرکانس پائین $(s=\circ)$ درمی‌یابیم که سیستم نوع صفر است. لذا می‌توانیم خطای حالت ماندگار را بیابیم. توجه کنید که دامنه ورودی پله را یک در نظر گرفته‌ایم.

$$k_p=\lim_{s\to\circ}GH(s)=GH(\circ)=۳ \quad\Rightarrow\quad e_{ss}=\frac{۱}{۱+k_p}=\frac{۱}{۱+۳}=۰/۲۵ \quad\Rightarrow\quad y_{ss}=۱-e_{ss}=۱-۰/۲۵=۰/۷۵$$

روش دوم: استفاده از قضیه مقدار نهایی برای خروجی سیستم

$$Y(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}R(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}\cdot\frac{1}{s}$$

$$y_{ss}=\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{s\to 0}sY(s)=\frac{G(0)}{1+G(0)}=\frac{3}{1+3}=0/75$$

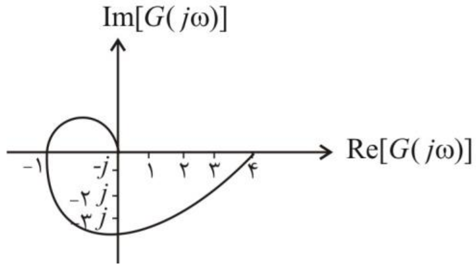
مثال: نمودار قطبی تابع تبدیل مدار باز $G(j\omega)$ برای یک سیستم کنترلی با فیدبک منفی واحد مطابق شکل است. پاسخ حالت ماندگار $y_{ss}=y(t\to\infty)$ این سیستم به ورودی پله‌ای واحد $r(t)=1$ کدام است؟ (مکانیک ۸۴)

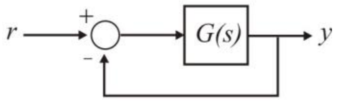
۱) $y_{ss}=0/8$

۲) $y_{ss}=1$

۳) $y_{ss}=4$

۴) $y_{ss}=\infty$





✍ **حل:** گزینه «۱»

روش اول: با توجه به رفتار فرکانس پائین $(s=0)$ نمودار قطبی مفروض داریم: $G(s=0)=4$

$$k_p=\lim_{s\to 0}GH(s)=\lim_{s\to 0}G(s)=G(0)=4$$

$$e_{ss}=\frac{R}{1+k_p}=\frac{1}{1+4}=0/2 \;\Rightarrow\; e_{ss}=r(t)-y_{ss} \;\Rightarrow\; y_{ss}=0/8$$

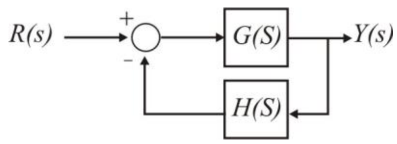
روش دوم: با استفاده از قضیه مقدار نهایی برای خروجی سیستم داریم:

$$Y(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}R(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}\cdot\frac{1}{s}$$

$$y_{ss}=\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{s\to 0}sY(s)=\frac{G(0)}{1+G(0)}=\frac{4}{1+4}=0/8$$

مثال: حد فاز (PM) و حد بهره (GM) سیستم با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)=\frac{4a^2}{(s+a)^2}$ و $a>0$ کدام است؟

(ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۲)



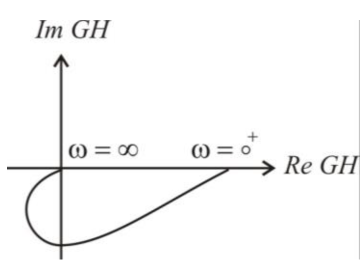
۱) $GM=\infty \;,\; PM=60^\circ$

۲) $GM=0 \;,\; PM=60^\circ$

۳) $GM=\infty \;,\; PM=120^\circ$

۴) محاسبه حد فاز و حد بهره بدون دانستن مقدار a ممکن نیست.

✍ **حل:** گزینه «۱»



بدون محاسبه می‌توان دریافت که حد بهره سیستم بی‌نهایت است. زیرا نمودار قطبی مربوطه محور منفی حقیقی را قطع نمی‌کند. بنابراین کافی است حد فاز را محاسبه کنیم. تابع تبدیل حلقه باز سیستم برابر است با:

$$GH(j\omega)=\frac{4a^2}{(j\omega+a)^2}$$

(ω_1 فرکانس گذر بهره است)

$$|GH(j\omega_1)|=1=\frac{4a^2}{a^2+\omega_1^2} \;\Rightarrow\; \omega_1^2=3a^2 \;\Rightarrow\; \omega_1=\sqrt{3}a$$

$$P.M=180+\angle GH(j\omega_1)=180-2\tan^{-1}\frac{\omega_1}{a}=180-2\tan^{-1}\sqrt{3}=60^\circ$$

مثال: تابع تبدیل حلقه باز سیستمی $G(s)H(s)=\dfrac{k}{s(s+۱۰)}$ است. مقدار تقریبی k برای دستیابی به حد فازی معادل ۵۰° کدام است؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۲)

۱) ۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۷۵ ۴) ۱۰۰

✍ **حل:** گزینه «۴»

روش اول: $P.M=۵۰ \Rightarrow \angle GH(j\omega_۱)=-۱۳۰$

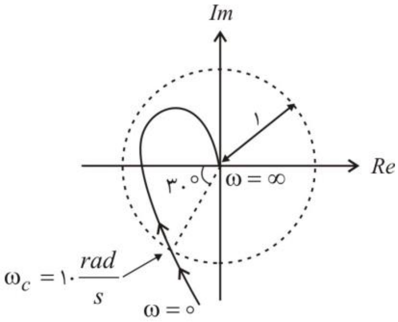
$$\angle GH(j\omega_۱)=-۹۰-\tan^{-۱}\frac{\omega_۱}{۱۰}=-۱۳۰ \Rightarrow \tan^{-۱}\frac{\omega_۱}{۱۰}=۴۰ \Rightarrow \omega_۱=۸/۴\frac{rad}{s}$$

$$|GH(j\omega_۱)|=۱=\frac{k}{\omega_۱\sqrt{\omega_۱^۲+۱۰۰}} \Rightarrow k=\omega_۱\sqrt{\omega_۱^۲+۱۰۰}=۸/۴\sqrt{(۸/۴)^۲+۱۰۰}=۱۰۹/۷\approx ۱۰۰$$

روش دوم: با استفاده از رابطه تقریبی $P\cdot M=۱۰۰\xi$ داریم: $۵۰=۱۰۰\xi \rightarrow \xi=۰/۵$

$$\Delta(s)=s^۲+۱۰s+k=0 \Rightarrow \begin{cases}۲\xi\omega_n=۲(۰/۵)\omega_n=۱۰ \Rightarrow \omega_n=۱۰\\ \omega_n^۲=k \Rightarrow k=۱۰۰\end{cases}$$

مثال: یک سیستم حداقل فاز دارای دیاگرام نایکوئیستی به صورت شکل زیر است. حد فاز ۳۰° و فرکانس قطع بهره ۱۰ رادیان بر ثانیه است. حداکثر تأخیر زمانی که باعث می‌شود سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی به مرز ناپایداری برسد، برابر است با: (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۲)



۱) π

۲) $\dfrac{\pi}{۶۰}$

۳) $\dfrac{\pi}{۶}$

۴) $\dfrac{۵\pi}{۶}$

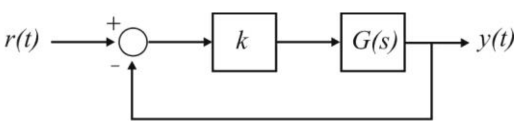
✍ **حل:** گزینه «۲»

می‌دانیم $\angle e^{-Tj\omega}=-T\omega$. بنابراین برای رسیدن به مرز ناپایداری بایستی شرط زیر برقرار باشد.

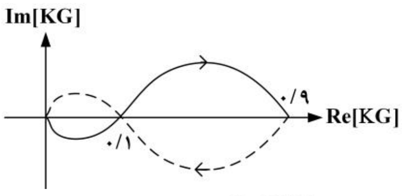
$$T\omega_c=\frac{\pi}{۶} \Rightarrow T\times۱۰=\frac{\pi}{۶} \Rightarrow T=\frac{\pi}{۶۰}$$

مثال: دیاگرام نایکوئیست سیستم حلقه بسته زیر را رسم کنید. (هسته‌ای ۸۴ ـ ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۴)

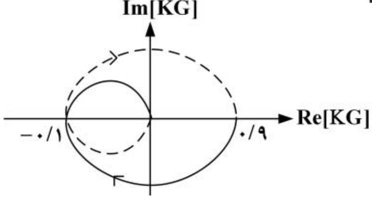
$$KG(s)=\frac{۰/۹s(s+۱)}{(s-۱)(s+۱۰)}$$



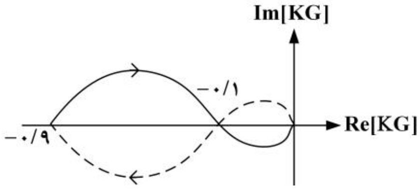
۱)



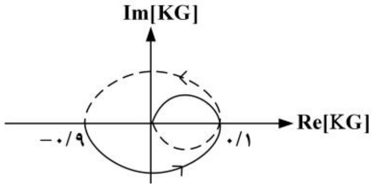
۲)



۳)



۴)



✍ **حل**: گزینه «۱»

از رفتار فرکانس بالا و پایین تابع تبدیل حلقه باز مفروض داریم: $|kG(j\omega)|\Big|_{\omega=\infty}=۰/۹ \quad , \quad |kG(j\omega)|\Big|_{\omega=۰}=۰$

بنابراین گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) نادرست می‌باشند. توجه کنید اگر جهت در نمودار قطبی گزینه (۲) برعکس بود، نیاز به محاسبه زاویه در $\omega=۰$ داشتیم.

مثال: اگر حد فاز سیستمی با تابع تبدیل $\dfrac{k(۱+\tau_۱ s)}{s^۲(۱+\tau_۲ s)}$ ، $PM=۹۰^\circ$ باشد، آن گاه کدام گزینه می‌تواند درست باشد؟

۱) $\tau_۱=\tau_۲$ ۲) $\tau_۲=۱۰۰\tau_۱$ ۳) $\tau_۱=۱۰۰۰\tau_۲$ ۴) $\tau_۲=۱۰۰۰\tau_۱$ (هسته‌ای ۸۳)

✍ **حل**: گزینه «؟»

از روش راث استفاده می‌کنیم. با محاسبه معادله مشخصه و تشکیل جدول راث داریم:

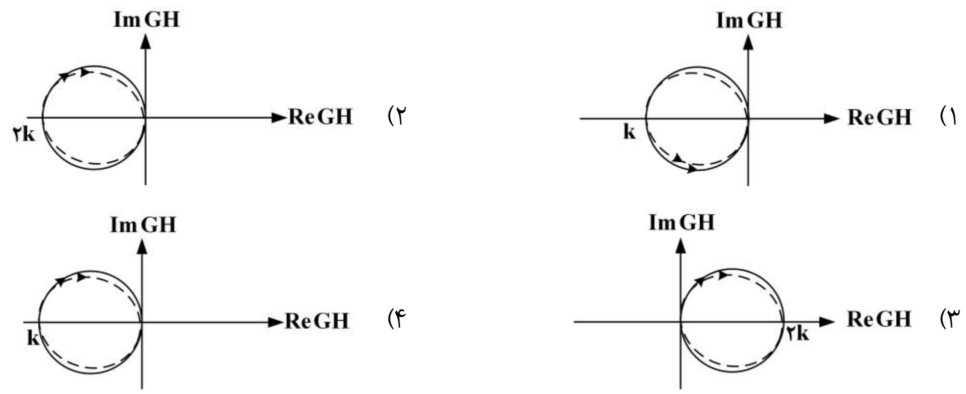
$$\Delta(s)=۱+\frac{k(۱+\tau_۱ s)}{s^۲(۱+\tau_۲ s)}=۰ \quad\Rightarrow\quad \Delta(s)=\tau_۲ s^۳+s^۲+k\tau_۱ s+k=۰$$

شرایط پایداری از جدول راث عبارتند از:

$$\begin{cases} k>۰ \\ k(\tau_۱-\tau_۲)>۰ \quad\Rightarrow\quad \tau_۱>\tau_۲ \end{cases}$$

این شرط تنها در گزینه (۳) برقرار است، ولی با این انتخاب نیز نمی‌توان به حد فاز ۹۰° دست یافت.

مثال: کدام گزینه، دیاگرام نایکوئیست را برای $\dfrac{k(s^۲+۱)}{(s+۱)^۲}$ (برای $k<۰$) نشان می‌دهد؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۴ ـ هسته‌ای ۸۴)



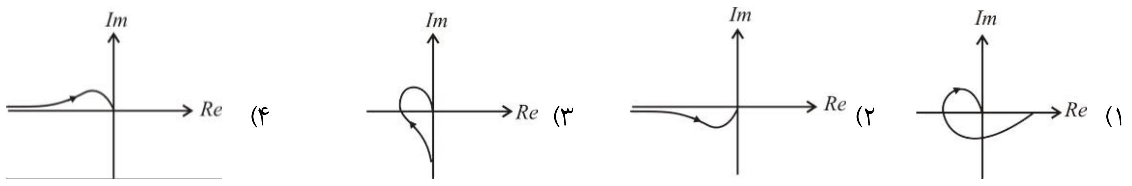
✍ **حل**: گزینه «۴»

با توجه به تابع تبدیل حلقه باز مفروض داریم: $|GH(۰)|=k \quad , \quad |GH(\infty)|=k$

بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست می‌باشند. توجه کنید k منفی است. برای تشخیص پاسخ صحیح از بین گزینه‌های باقیمانده از زاویه $GH(s)$ در فرکانس‌های پایین ($s=۰^+$) استفاده می‌کنیم.

$$GH(j\omega)=\frac{k(۱-\omega^۲)}{(۱+j\omega)^۲} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \angle GH(j\omega)=-\pi-۲\tan^{-۱}\omega \\ \angle GH(۰^+)<-\pi \end{cases}$$

مثال: برای سیستم $G(s)=\dfrac{k(s+۱)}{s^۲(s+۲)}$ کدام نمودار نایکوئیست درست است؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۳)



✍ **حل**: گزینه «۲»

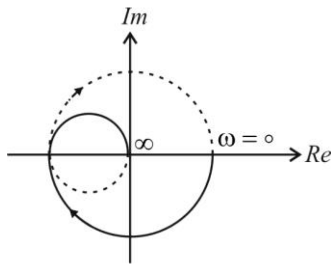
سیستم می‌نیمم فاز است. لذا می‌توانیم از رفتار فرکانس پایین برای تشخیص نوع سیستم استفاده کنیم.

$$\text{نوع سیستم}:\ \lambda=2 \Rightarrow \angle GH(0)=-180^\circ$$

بنابراین گزینه (۱) و (۳) نادرست می‌باشند. حال داریم: $\angle G(j\omega)=\tan^{-1}\omega-\pi-\tan^{-1}\frac{\omega}{2}$

$$\angle G(0^+)>-\pi$$

مثال: تابع تبدیل مدار باز یک سیستم کنترل برابر است با: $G(s)=\frac{k}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ منحنی *Nyquist* این سیستم در زیر ترسیم شده است. محدوده پایداری سیستم مدار بسته با فیدبک واحد برای k چقدر است؟ (مکاترونیک ۸۴)



۱) $0<k<60$

۲) $0<k<10$

۳) $10<k<60$

۴) $1<k<6$

✍ **حل**: گزینه «۱»

از روش راث استفاده می‌کنیم. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=1+\frac{k}{(s+1)(s+2)(s+3)}=0 \Rightarrow \Delta(s)=s^3+6s^2+11s+k+6=0$$

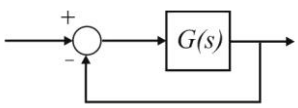
از جدول راث شرایط پایداری عبارتند از:

$$\begin{cases} k+6>0 \rightarrow k>-6 \\ 6\times 11>k+6 \rightarrow k<60 \end{cases} \xrightarrow{\cap} -6<k<60$$

با توجه به نمودار نایکوئیست در $\omega=0$ داریم: $k>0$ لذا محدوده پایداری برای سیستم حلقه بسته فوق عبارتست از:

$$0<k<60$$

مثال: در سیستم شکل مقابل $G(s)$ دارای سه صفر و چهار قطب است که همگی در نیم صفحه سمت چپ قرار دارند و حقیقی هستند. در مورد پایداری این سیستم مدار بسته گزینه صحیح کدام است؟ (توجه شود که $G(s)=kG_0(s)$ که در آن k بهره تابع تبدیل مدار باز است و فرض شده $k>0$، همچنین فرض شده قطب‌های مدار باز خیلی نزدیک محور موهومی و صفرهای مدار باز خیلی دور از محور موهومی هستند ولی همه در نیم صفحه سمت چپ هستند.) (مکاترونیک ۸۴)



۱) سیستم مدار بسته به ازاء مقادیر بزرگ k می‌تواند ناپایدار شود.

۲) سیستم مدار بسته همواره ناپایدار است. (برای همه مقادیر مثبت k)

۳) چون تفاضل رسته صورت و مخرج سیستم مدار باز مساوی واحد است، سیستم مدار بسته همواره به ازاء همه مقادیر k پایدار است.

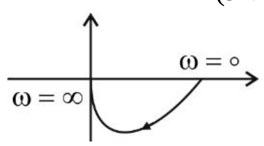
۴) چون زاویه فاز $G(j\omega)$ از ۹۰- کمتر نمی‌شود، سیستم مدار بسته همواره پایدار است، مشروط بر آنکه $k<1$ باشد.

✍ **حل**: گزینه «۳»

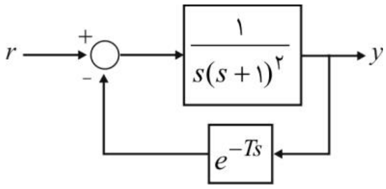
تابع تبدیل حلقه باز نوعی برای سیستم مفروض عبارتست از: $GH(s)=kG_0(s)=\frac{k(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)(s+p_4)}$

طبق مفروضات نوع سیستم صفر بوده و نمودار قطبی محور حقیقی منفی را قطع نمی‌کند.

لذا حد بهره سیستم بی‌نهایت می‌باشد. بنابراین گزینه (۳) صحیح می‌باشد.



مثال: در سیستم کنترلی (شکل زیر) حداکثر مقدار تأخیر T که به ازای آن هنوز سیستم مدار بسته پایدار است، چقدر است؟ (مکاترونیک ۸۴)



۱) ۰/۲۵۱ ۲) ۰/۳۸۲

۳) ۰/۵۴۷ ۴) ۰/۸۵۲

✍ **حل:** گزینه «۳»

ابتدا فرکانس گذر بهره را بدست می‌آوریم. توجه کنید تابع تبدیل حلقه باز سیستم $GH(s)=\frac{e^{-Ts}}{s(s+1)^2}$ می‌باشد.

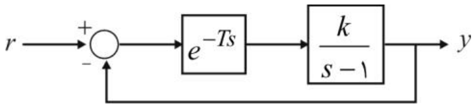
$$|GH(j\omega_1)|=1 \Rightarrow \frac{1}{\omega_1(\omega_1^2+1)}=1 \Rightarrow \omega_1^3+\omega_1-1=0 \Rightarrow \omega_1=0/68\,\frac{rad}{s}$$

شرط پایداری عبارتست از:

$$\angle GH(j\omega_1)=-T\omega_1-\frac{\pi}{2}-2\tan^{-1}\omega_1=-\pi$$

$$\omega_1=0/68 \Rightarrow 0/68T=0/367 \Rightarrow T\approx 0/547$$

مثال: در سیستم مدار بسته نشان داده شده در شکل زیر $T=\frac{\pi}{4}$ می‌باشد. سیستم مزبور در ازاء چه مقادیری از k پایدار خواهد بود؟ (مکاترونیک ۸۴)



۱) $k>1$ ۲) $1<k<\sqrt{2}$

۳) $1<k<2$ ۴) $\sqrt{2}<k<\sqrt{3}$

✍ **حل:** گزینه «۲»

تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از:

$$GH(s)=\frac{ke^{-Ts}}{s-1}$$

با محاسبه فرکانس گذر فاز و با فرض $T=\frac{\pi}{4}$ داریم:

$$\angle GH(j\omega_\pi)=-\pi$$

$$\Rightarrow -T\omega_\pi+\tan^{-1}\omega_\pi=0 \Rightarrow -\frac{\pi}{4}\omega_\pi+\tan^{-1}\omega_\pi=0 \Rightarrow \omega_\pi=1\frac{rad}{\sec}$$

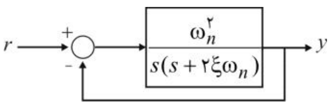
از طرفی می‌دانیم $|GH(j\omega_\pi)|=\frac{k}{\sqrt{1+\omega_\pi^2}}=\frac{k}{\sqrt{2}}$. حال برای پایداری باید داشته باشیم: $|GH(j\omega_\pi)|<1\rightarrow k<\sqrt{2}$

توجه کنید حد پایینی k از قرار دادن $T=0$ در معادله مشخصه سیستم حلقه بسته بدست می‌آید.

$$\Delta(s)=s-1+ke^{-Ts}=0 \qquad if\quad T=0 \Rightarrow \Delta(s)=s-1+k=0$$

بنابراین شرط پایداری در این حالت عبارتست از $k>1$. لذا به منظور پایداری کافیست $1<k<\sqrt{2}$ انتخاب شود.

مثال: در سیستم مدار بسته زیر، حد (کرانه) فاز در چه رابطه‌ای صدق می‌نماید؟ (مکاترونیک ۸۴)



۱) $PM=\tan^{-1}\left(\frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{1+4\xi^4}-2\xi^2}}\right)$ ۲) $PM=\tan^{-1}\left(\frac{2\omega_n}{\sqrt{\sqrt{1+4\omega_n^2}+2\omega_n^2}}\right)$

۳) $PM=\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\omega_n}{\sqrt{\sqrt{1+4\xi^4}+2\xi^2}}\right)$ ۴) $PM=\tan^{-1}\left(\frac{2(\xi\omega_n)}{\sqrt{\sqrt{1+4(\xi\omega_n)^4}-2(\xi\omega_n)^2}}\right)$

✍ **حل:** گزینه «۱»

با توجه به متن درس، پاسخ صحیح گزینه (۱) می‌باشد. حال به حل تشریحی این موضوع می‌پردازیم. تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از:

$$GH(s)=\frac{\omega_n^۲}{s(s+۲\xi\omega_n)}$$

برای محاسبه حد فاز ابتدا، فرکانس گذر بهره را بدست می‌آوریم.

$$|GH(j\omega_۱)|=\frac{\omega_n^۲}{\omega_۱\sqrt{\omega_۱^۲+۴\xi^۲\omega_n^۲}}=۱$$

برای سادگی در محاسبات متغیر جدید u را تعریف می‌کنیم.

$$u=\frac{\omega_۱}{\omega_n}$$

$$\rightarrow\ \frac{۱}{u\sqrt{u^۲+۴\xi^۲}}=۱\ \rightarrow\ u^۲(u^۲+۴\xi^۲)-۱=۰\ \rightarrow\ u^۴+۴\xi^۲u^۲-۱=۰\ \rightarrow\ u^۲=-۲\xi^۲\pm\sqrt{۱+۴\xi^۴}$$

$$\rightarrow\ u=\sqrt{-۲\xi^۲+\sqrt{۱+۴\xi^۴}}\ \rightarrow\ \omega_۱=\omega_n u=\omega_n\sqrt{-۲\xi^۲+\sqrt{۱+۴\xi^۴}}$$

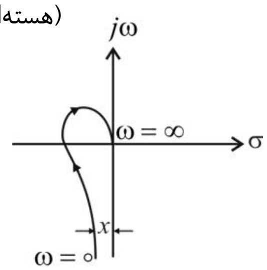
توجه کنید u کمیتی حقیقی است. حال زاویه $GH(s)$ را در $\omega_۱$ بدست می‌آوریم. داریم:

$$\angle GH(j\omega_۱)=-\frac{\pi}{۲}-\tan^{-۱}\frac{\omega_۱}{۲\xi\omega_n}$$

بنابراین حد فاز سیستم با ساده‌سازی و جایگذاری $\omega_۱$ عبارتست از:

$$P\cdot M=\pi+\angle GH(j\omega_۱)\frac{\pi}{۲}-\tan^{-۱}\frac{\omega_۱}{۲\xi\omega_n}=\tan^{-۱}\frac{۲\xi\omega_n}{\omega_۱}=\tan^{-۱}\frac{۲\xi}{\sqrt{-۲\xi^۲+\sqrt{۱+۴\xi^۴}}}$$

مثال: نمودار قطبی سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)=\frac{۱}{s(s+p_۱)(s+p_۲)}$ برای $p_۱,p_۲>۰$ به صورت زیر است. با توجه به شکل مقدار x برابر کدام است؟ (هسته‌ای ۷۵)



۱) $\frac{-\sqrt{p_۱^۲+p_۲^۲}}{p_۱^۲p_۲^۲}$

۲) $\frac{-(p_۱+p_۲)}{p_۱^۲p_۲^۲}$

۳) $\frac{p_۱p_۲}{p_۱^۲+p_۲^۲}$

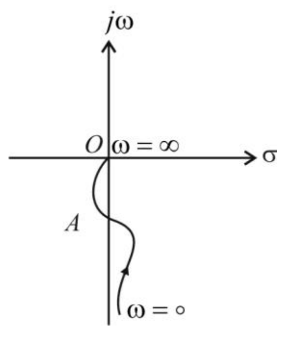
۴) صفر

✍ **حل:** گزینه «۲»

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{۱}{j\omega(j\omega+p_۱)(j\omega+p_۲)}=\frac{-\omega^۲(p_۱+p_۲)-j\omega(p_۱p_۲-\omega^۲)}{\omega^۴(p_۱+p_۲)^۲+\omega^۲(p_۱p_۲-\omega^۲)^۲}$$

$$x=\lim_{\omega\to۰}\mathrm{Re}[G(j\omega)H(j\omega)]=\frac{-(p_۱+p_۲)}{p_۱^۲p_۲^۲}$$

مثال: نمایش تقریبی دیاگرام نایکوئیست سیستم $\frac{۱+۵s}{s(۱+s)(۱+۲s)}$ در شکل زیر رسم شده، مقدار ω در نقطه A و طول OA چقدر است؟ (مکانیک ۷۳)



۱) $\omega_A=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\quad,\quad OA=\frac{۲}{۳}\sqrt{۲}$

۲) $\omega_A=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\quad,\quad OA=۲\sqrt{۲}$

۳) $\omega_A=\frac{\sqrt{۵}}{۵}\quad,\quad OA=۲\sqrt{۵}$

۴) $\omega_A=\frac{\sqrt{۵}}{۵}\quad,\quad OA=\frac{۵\sqrt{۵}}{۳}$

✍ **حل**: گزینه «۴»

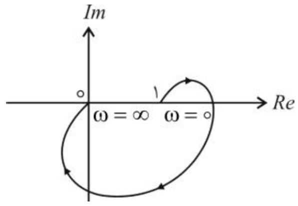
$$G(j\omega)=\frac{1+5j\omega}{j\omega(1+j\omega)(1+2j\omega)}=\frac{2\omega^2(1-5\omega^2)-j\omega(1+13\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$$

فرکانس محل تلاقی با محور موهومی با صفر قرار دادن بخش حقیقی $G(j\omega)$ بدست می‌آید. لذا:

$$\operatorname{Re}G(j\omega)=0 \Rightarrow 2\omega^2(1-5\omega^2)=0 \Rightarrow \begin{cases}\omega=0 \Rightarrow \omega_0=0\\ \omega=\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \omega_A=\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$$

$$OA=|\operatorname{Im}G(j\omega_A)|=\frac{\omega_A(1+13\omega_A^2)}{\omega_A^2(1+\omega_A^2)(1+4\omega_A^2)}=\frac{5\sqrt{5}}{3}$$

مثال: دیاگرام نایکوئیست سیستمی با تابع تبدیل $G(s)=\frac{1+Ts}{(1+s)^3}$ در شکل زیر رسم شده است. کدام یک از گزینه‌های زیر درباره T صحیح است؟ (مکانیک ۸۲)



۱) $T>\sqrt{3}$　　۲) $T>1$

۳) $T>3$　　۴) $3>T>\sqrt{3}$

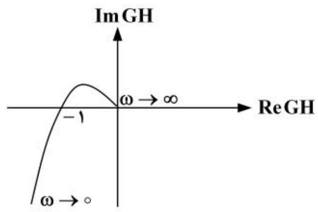
✍ **حل**: گزینه «۳»

$$G(j\omega)=\frac{1+Tj\omega}{(1+j\omega)^3} \Rightarrow \angle G(j\omega)=\tan^{-1}T\omega-3\tan^{-1}\omega$$

چون تغییرات فاز در فرکانس‌های پایین ($\omega=0^+$) مثبت است، داریم:

$$\angle G(j\omega)\Big|_{\omega=0^+}=T\omega-3\omega>0 \Rightarrow T>3$$

مثال: حد بهره GM و حد فاز PM سیستمی که نمودار نایکوئیست مدار باز آن در زیر رسم شده است، به ترتیب $0dB$ و 0° می‌باشند. مقدار حداکثر جهش این سیستم مدار بسته چیست؟ (مکانیک ۸۳)



۱) ٪۰

۲) ٪۵۰

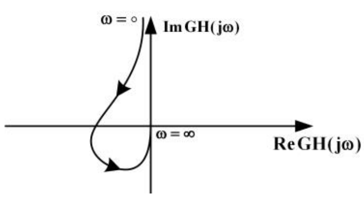
۳) ٪۱۰۰

۴) ٪۲۰۰

✍ **حل**: گزینه «۳»

عبور نمودار قطبی از نقطه بحرانی $(-1+j0)$ معادل این است که سیستم حلقه بسته پایدار مرزی است، یعنی وجود ریشه موهومی خالص. بنابراین $\xi=0$. در نتیجه $\%O.V=\%100$ می‌باشد.

مثال: منحنی نایکوئیست سیستمی به صورت شکل زیر داده شده است. کدام یک از توابع زیر می‌تواند تابع تبدیل این سیستم باشد؟ (هسته‌ای ۸۰)



۱) $\frac{k(s+1)^2}{s^3}$　　۲) $\frac{ks^3}{(s+1)^2}$

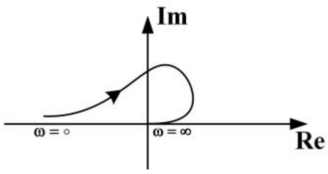
۳) $\frac{k(s+1)}{s^3}$　　۴) $\frac{ks^3}{s+1}$

✍ **حل**: گزینه «۱»

$$\angle GH(j\omega)\Big|_{\omega=\circ^+} = -۲۷۰^\circ \quad \rightarrow$$ نوع سیستم $\lambda = ۳$

$$\angle GH(j\omega)\Big|_{\omega=\infty} = -۹۰^\circ \quad \rightarrow$$ تفاضل صفرها و قطب‌ها $n-m=۱$

مثال: دیاگرام نایکوئیست زیر، پاسخ فرکانسی کدام یک از توابع انتقال داده شده است؟ (مکانیک ۷۵)



۱) $\dfrac{۱}{s^۲(s+۲)}$ ۲) $\dfrac{۱}{s^۲(s+۱)(s+۲)}$

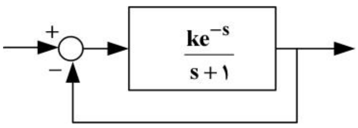
۳) $\dfrac{s+۱}{s^۲(s+۲)}$ ۴) $\dfrac{(s+۱)(s+۲)}{s^۲}$

✍ **حل:** گزینه «۲»

$$\angle GH(j\omega)\Big|_{\omega=\circ^+} = -۱۸۰^\circ \quad \rightarrow$$ نوع سیستم $\lambda = ۲$

$$\angle GH(j\omega)\Big|_{\omega=\infty} = -۳۶۰^\circ \quad \rightarrow$$ تفاضل صفرها و قطب‌ها $n-m=۴$

مثال: حداقل خطای حالت ماندگار به ورودی پله واحد در سیستم کنترل تأخیردار شکل زیر کدام است؟ (هسته‌ای ۷۹)



۱) ۰/۸ ۲) ۰/۵

۳) ۰/۳ ۴) صفر

✍ **حل:** گزینه «۳»

با توجه به تابع تبدیل حلقه باز سیستم $GH(s) = \dfrac{ke^{-s}}{s+۱}$، نوع سیستم صفر است. لذا:

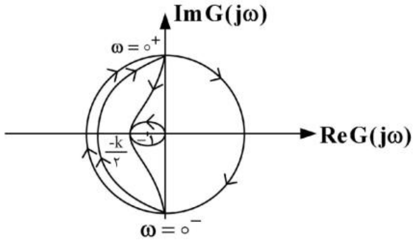
$$k_p = \lim_{s\to\circ} GH(s) = k \quad \Rightarrow \quad e_{ss} = \frac{۱}{۱+k_p} = \frac{۱}{۱+k}$$

بنابراین خطای حالت ماندگار می‌نیمم است اگر k ماکزیمم باشد. بنابراین k_{max} را بگونه‌ای پیدا می‌کنیم که سیستم پایدار باشد. این مقدار، همان حد بهره است.

$$\angle GH(j\omega_\pi) = -\omega_\pi - \tan^{-۱}\omega_\pi = -\pi \quad \Rightarrow \quad \omega_\pi \approx ۲$$

$$|GH(j\omega_\pi)| = ۱ \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{\sqrt{۱+\omega_\pi^۲}} = \frac{k}{\sqrt{۱+۴}} = ۱ \quad \Rightarrow \quad k \approx ۲/۲۳۶ \quad \Rightarrow \quad e_{ss} = \frac{۱}{۱+k_{max}} = \frac{۱}{۱+۲/۲۳۶} \approx ۰/۳$$

مثال: نمودار نایکوئیست سیستمی در شکل مقابل داده شده است. تابع تبدیل حلقه باز سیستم قطبی در نیم صفحه راست ندارد. به ازای کدام مقدار k سیستم حلقه بسته ناپایدار است و معادله مشخصه چند ریشه در نیم صفحه راست دارد؟ (هسته‌ای ۷۹)



۱) $k < ۲$ و دو ریشه

۲) $k < ۲$ و یک ریشه

۳) $k > ۲$ و دو ریشه

۴) $k > ۲$ و یک ریشه

✍ **حل:** گزینه «۱»

چون تابع تبدیل حلقه باز قطبی در سمت راست محور موهومی ندارد، لذا $p=\circ$. بنابراین بنا بر معیار پایداری نایکوئیست به تعداد دورزدن‌های نقطه بحرانی $(-۱+j\circ)$ ، قطب تابع تبدیل حلقه بسته در سمت راست محور موهومی وجود دارد.

$$N_{-۱} = z - p \quad \Rightarrow \quad p = \circ \quad \Rightarrow \quad N_{-۱} = z$$

با توجه به نمودار نایکوئیست با انتخاب محدوده $k < ۲\ (-۱ < -\frac{k}{۲})$، سیستم دو بار در جهت عقربه‌های ساعت نقطه بحرانی $(-۱ + j۰)$ را دور می‌زند. لذا: $z = ۲$

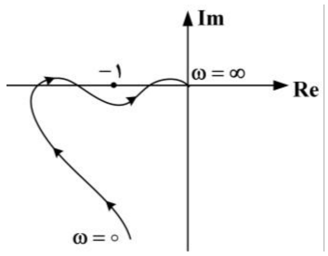
مثال: منحنی نایکوئیست یک سیستم می‌نیمم فاز در شکل زیر داده شده است. در مورد این سیستم کدام بیان زیر درست است؟ (هسته‌ای ۷۸)

۱) سیستم پایدار است.

۲) با افزایش بهره تقویت مسیر مستقیم ناپایدار می‌شود.

۳) با کاهش بهره تقویت مسیر مستقیم سیستم ناپایدار می‌شود.

۴) هر سه بیان درست است.



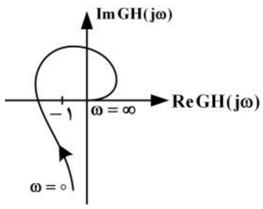
✍ **حل:** گزینه «۴»

چون سیستم پایدار مشروط می‌باشد، گزینه (۴) صحیح خواهد بود.

مثال: منحنی نایکوئیست سیستمی در شکل زیر داده شده است. تابع تبدیل حلقه این سیستم کدام است؟ (هسته‌ای ۸۰)

۱) $\frac{k}{s(s+۱)(s+۲)(s+۳)}$ ۲) $\frac{k}{s^۲(s+۱)(s+۲)}$

۳) $\frac{k(s+۲)(s+۳)}{s(s+۱)}$ ۴) $\frac{k(s+۱)}{s^۲(s+۲)}$



✍ **حل:** گزینه «۱»

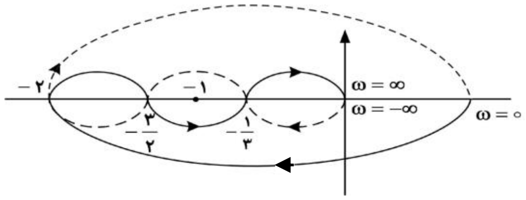
$$\angle GH(j\omega)\Big|_{\omega=۰^+} = -۹۰^\circ \rightarrow$$ نوع سیستم $\lambda = ۱$

$$\angle GH(j\omega)\Big|_{\omega=\infty} = -۳۶۰^\circ \rightarrow$$ تفاضل صفرها و قطب‌ها $n - m = ۴$

مثال: در شکل زیر دیاگرام نایکوئیست پاسخ فرکانسی یک سیستم داده شده، حد بهره از طرف پایین برای این سیستم کدام است؟ (هسته‌ای ۷۳)

۱) ۳ ۲) ۱

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$



✍ **حل:** گزینه «۴»

چون سیستم پایدار مشروط است، برای پایداری داریم:

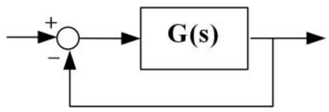
$$\left.\begin{array}{l} -\frac{۱}{k} < -\frac{۱}{۳} \rightarrow \frac{۱}{k} > \frac{۱}{۳} \rightarrow k < ۳ \\ -\frac{۱}{k} > -\frac{۳}{۲} \rightarrow \frac{۱}{k} < \frac{۳}{۲} \rightarrow k > \frac{۲}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۲}{۳} < k < ۳$$

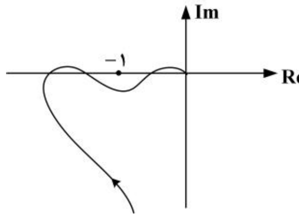
در نتیجه حد بهره k از طرف پایین $\frac{۲}{۳}$ خواهد بود.

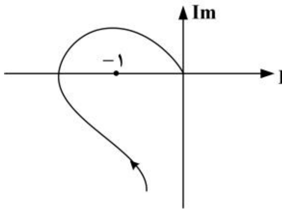
❋ **نکته:** *در چنین مواردی که تعیین محدوده k از روی نمودار قطبی $GH(s)$ مدنظر است، نقطه بحرانی $(\frac{-۱}{k} + j۰)$ به جای $(-۱ + j۰)$ درنظر گرفته می‌شود. زیرا:*

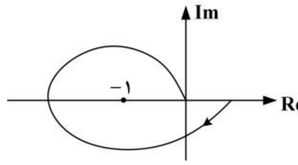
$$۱ + kGH(s) = -۱ \rightarrow GH(s) = \frac{-۱}{k}$$

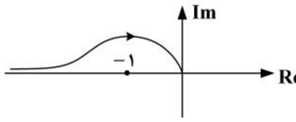
مثال: با درنظر گرفتن سیستم فیدبک مقابل چنانچه $G(s)$ پایدار باشد، کدام پاسخ فرکانسی برای $G(s)$ منجر به یک سیستم بسته پایدار می‌شود؟ (مکانیک ۷۴)



۱) 

۲) 

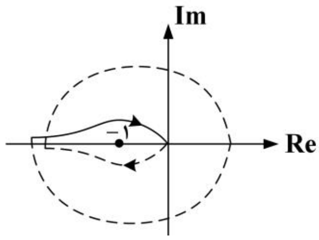
۳) 

۴) 

✍ **حل:** گزینه «۱»

با توجه به پایداری $G(s)$، تابع تبدیل حلقه باز $GH(s)=G(s)$ قطبی در نیمه راست صفحه s ندارد. لذا $p=\circ$. بنابراین طبق معیار نایکوئیست، برای پایداری سیستم حلقه بسته نبایستی نمودار قطبی نقطه بحرانی $(-۱+j\circ)$ را دور بزند. با تکمیل گستره فرکانسی $-\infty$ تا $\circ$، تنها گزینه (۱) این شرط را دارا می‌باشد.

مثال: دیاگرام نایکوئیست برای $G(s)H(s)=\dfrac{k}{s^{۲}(s+۲r_a)}$ (r_a و k مقادیر مثبت هستند) در شکل زیر نشان داده شده است. این، نشان‌دهنده یک سیستم فیدبک (مکانیک ۷۱)



۱) ناپایدار است.

۲) پایدار است.

۳) در مرز پایداری است.

۴) با اطلاعات داده شده پایداری یا ناپایداری مشخص نمی‌شود.

✍ **حل گزینه «۱»**

روش اول: معادله مشخصه سیستم حلقه بسته $\Delta(s)=s^{۳}+r_as^{۲}+k=\circ$ است. در ستون اول جدول راث، دو تغییرعلامت رخ می‌دهد که نشان‌دهنده دو قطب سمت راست محور موهومی است. پس سیستم ناپایدار است.

روش دوم: استفاده از معیار پایداری نایکوئیست می‌باشد. با توجه به فرض مسأله داریم:

$$\begin{matrix} P=\circ \\ N_{-۱}=۲ \end{matrix} \rightarrow \quad Z=۲ \quad \Rightarrow \quad \text{سیستم ناپایدار است}$$

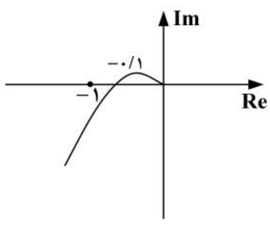
مثال: قسمتی از دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل مدار باز $G(s)$ در شکل (الف) رسم شده است. با قرار دادن $G(s)$ در سیستم مدار بسته شکل (ب) معین کنید چه مقدار k باعث می‌شود تا حد بزرگنمایی، *gain margin* مساوی $۸dB$ شود؟ (مکانیک ۷۰)

۱) $k=۲$

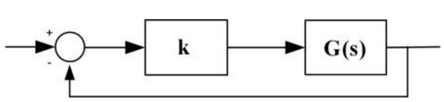
۲) $k=۴$

۳) $k=۶$

۴) $k=۸$



(الف)



(ب)

✍ **حل:** گزینه «۲»

$$GM = ۲۰\log\frac{۱}{|GH(j\omega_\pi)|} \qquad |GH(j\omega_\pi)| = ۰/۱k$$

$$\rightarrow \quad ۸ = ۲۰\log\frac{۱}{۰/۱k} = ۲۰\log\frac{۱۰}{k} \quad \rightarrow \quad \log\frac{۱۰}{k} = ۰/۴ \quad \Rightarrow \quad k \approx ۴$$

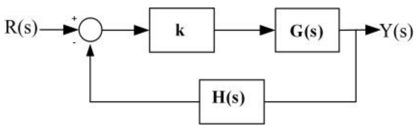
مثال: با علم به اینکه $G(s)H(s)$ یک قطب سمت راست محور $j\omega$ دارد، حدود k برای پایداری سیستم حلقه بسته کدام است؟
(هسته‌ای ۷۳)

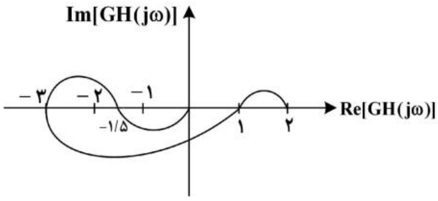
۱) $-۲ < k < -۱$

۲) $-۱ < k < -\frac{۱}{۲}$

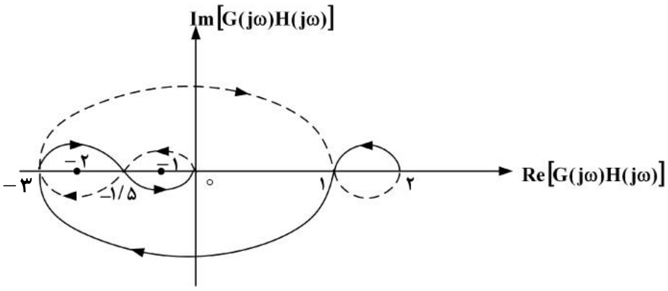
۳) $-۱ < k < \frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۱}{۲} < k < ۱$





✍ **حل:** گزینه «۲»



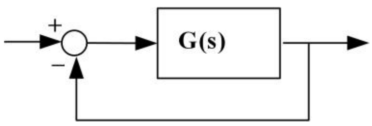
با در نظر گرفتن گستره فرکانسی $-\infty$ تا ۰ و $p = ۱$

داریم: $N_{-۱} = z - p = z - ۱$

بنابراین برای پایداری ($z = ۰$)، بایستی نمودار قطبی مفروض، نقطه بحرانی ($-۱ + j۰$) را یک دور در خلاف جهت عقربه‌های ساعت بزند. لذا:

$$۱ < -\frac{۱}{k} < ۲ \quad \rightarrow \quad -۱ < k < -\frac{۱}{۲}$$

مثال: در سیستم شکل زیر، سیستم مدار باز دارای یک قطب در نیم صفحه سمت راست (از صفحه مختلط) و ۴ قطب در نیم صفحه سمت چپ و دارای سه صفر در نیم صفحه سمت چپ است. سیستم مدار بسته دارای یک قطب در نیم صفحه سمت راست و ۴ قطب در نیم صفحه سمت چپ و سه صفر در نیم صفحه سمت چپ است. تعداد دوران دیاگرام نایکوئیست، N، حول نقطه ۱- وقتی ω از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند، چقدر است؟ (مکانیک ۸۴)

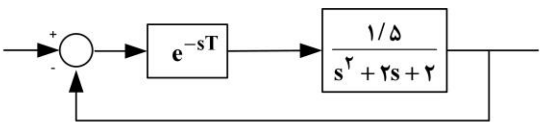


۱) $N = -۲$: تعداد دوران
۲) $N = -۱$: تعداد دوران
۳) $N = ۰$: تعداد دوران
۴) $N = +۲$: تعداد دوران

✍ **حل:** گزینه «۳»

طبق مفروضات داریم: $p = ۱$ و $z = ۱$ بنابراین: $N_{-۱} = z - p = ۱ - ۱ = ۰$

مثال: سیستم مدار بسته نشان داده شده به ازاء چه مقادیری از T پایدار خواهد بود؟ (مکانیک ۸۴)



۱) در ازاء $T > ۲$ سیستم پایدار خواهد بود.

۲) در ازاء $T < ۱$ سیستم پایدار خواهد بود.

۳) در ازاء $T < ۰/۱$ سیستم پایدار خواهد بود.

۴) به ازاء کلیه مقادیر T سیستم پایدار خواهد بود.

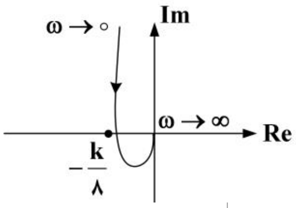
✍ **حل:** گزینه «۴»

فرکانی گذر بهره برابر است با:

$$|GH(j\omega_۱)| = \frac{۱/۵}{\sqrt{(۲-\omega_۱^۲)^۲ + ۴\omega_۱^۲}} = ۱ \quad \Rightarrow \quad \omega_۱^۴ + ۱/۷۵ = ۰$$

معادله اخیر برای فرکانس‌های حقیقی مثبت برقرار نمی‌باشد. بنابراین حد فاز سیستم بی‌نهایت می‌باشد. لذا برای تمام مقادیر T سیستم حلقه بسته پایدار خواهد بود.

مثال: نمودار قطبی یک سیستم با فاز حداقل در شکل زیر ترسیم شده است. کدام یک از نتیجه‌گیری‌های زیر درست است؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۳)



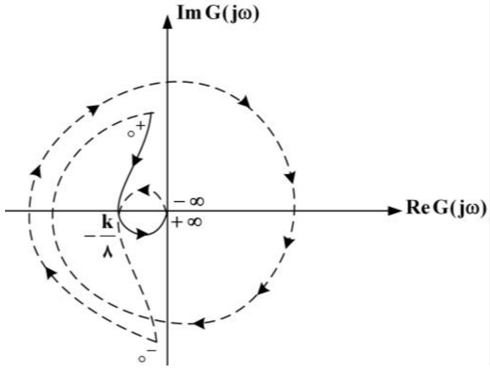
۱) سیستم از نوع *(type)* سه و برای $k < ۸$ پایدار است.

۲) سیستم از نوع *(type)* سه و برای $\circ < k < ۸$ پایدار است.

۳) سیستم از نوع *(type)* دو و برای $k > ۸$ پایدار است.

۴) سیستم از نوع *(type)* سه و برای $k > ۸$ پایدار است.

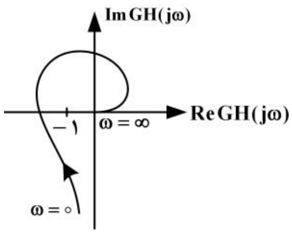
✍ **حل**: گزینه «۴»



چون زاویه نمودار قطبی در فرکانس‌های پایین -۲۷۰° است، لذا نوع سیستم سه می‌باشد. در نتیجه گزینه (۳) نادرست است. چون سیستم می‌نیمم فاز است لذا $p = \circ$. بنابراین برای پایداری سیستم حلقه بسته نقطه بحرانی $(-۱ + j\circ)$ نبایستی توسط نمودار قطبی دور زده شود. با رسم گستره فرکانسی $-\infty$ تا $\circ$ ابتدا نمودار قطبی را کامل می‌کنیم.

بنابراین: $-\frac{k}{۸} < -۱ \quad \rightarrow \quad k > ۸$

مثال: دیاگرام نایکوئیست زیر متعلق به کدام تابع انتقال است؟ (مکانیک ۷۹)



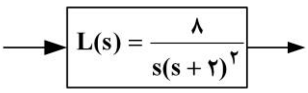
۱) $\frac{k}{s(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$ ۲) $\frac{ks}{s(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$

۳) $\frac{k(s+\alpha)}{s(s+\beta)(s+\gamma)}$ ۴) $\frac{ks(s+\alpha)}{s(s+\beta)(s+\gamma)}$

✍ **حل**: گزینه «۱»

زاویه نمودار نایکوئیست در فرکانس‌های پایین -۹۰° است، بنابراین نوع سیستم یک است. همچنین زاویه نمودار نایکوئیست در فرکانس‌های بالا -۳۶۰° می‌باشد، لذا تفاضل صفرها و قطب‌ها برابر ۴ می‌باشد. در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

مثال: تابع انتقال مدار باز یک سیستم به صورت زیر است. سیستم مدار بسته دارای کدام یک از حدهای زیر است؟ (مکانیک ۷۹)



۱) $GM = \circ$ ۲) $GM = ۱$

۳) $GM = ۲$ ۴) $GM = \infty$

✍ **حل**: گزینه «۳»

تابع تبدیل حلقه باز سیستم برابر است با $kL(s) = \frac{۸k}{s(s+۲)^۲}$. لذا معادله مشخصه سیستم عبارتست از:

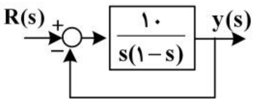
$$\Delta(s) = s^۳ + ۴s^۲ + ۴s + ۸k = \circ$$

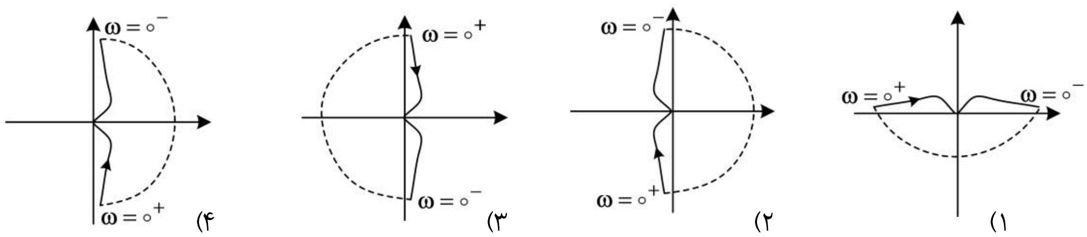
برای ایجاد یک سطر صفر کامل در جدول راث داریم:

$$۴ \times ۴ - ۱ \times (۸k) = \circ \rightarrow k = ۲$$

بنابراین حد بهره سیستم $GM = ۲$ می‌باشد.

مثال: کدام یک از دیاگرام‌های زیر، دیاگرام نایکوئیست سیستم مقابل می‌باشد؟ (هسته‌ای ۷۳)





۴) ۳) ۲) ۱)

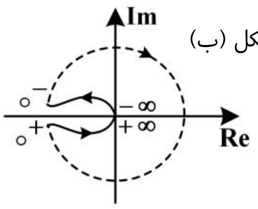
✍ **حل**: گزینه «۴»

تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از: $GH(s)=\frac{۱۰}{s(۱-s)}$

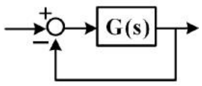
$$GH(j\omega)=\frac{۱۰}{j\omega(۱-j\omega)} \rightarrow \angle GH(j\omega)=-\frac{\pi}{۲}+\tan^{-۱}\omega \Rightarrow \angle GH(۰)=-\frac{\pi}{۲} \quad , \quad \angle GH(\infty)=۰$$

لذا گزینه (۴) صحیح می‌باشد. توجه کنید که قطب سمت راست همانند صفر سمت چپ عمل می‌کند.

مثال: سیستم شکل (الف) که در آن $G(s)$ هیچ صفر و قطبی در سمت راست صفحه s ندارد، دارای منحنی نایکوئیست به صورت شکل (ب) است؟ (مکانیک ۶۹)



شکل (ب)



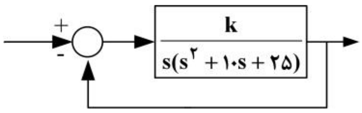
شکل (الف)

۱) این سیستم همواره پایدار است.
۲) این سیستم همواره ناپایدار می‌باشد.
۳) این سیستم در مرز پایداری است.
۴) ناپایدار است ولی با افزایش ضریب تقویت پایدار می‌شود.

✍ **حل**: گزینه «۱»

با توجه به مفروضات مسأله $p=۰$ است. از نمودار قطبی ترسیم شده $N_{-۱}=۰$ می‌باشد. لذا طبق معیار پایداری نایکوئیست $z=۰$ بوده و در نتیجه سیستم همواره پایدار است.

مثال: در سیستم کنترل شکل زیر به ازای کدام مقدار k بهره سیستم برابر $۱۲\ db$ می‌شود؟ (هسته‌ای ۷۹)



۱) ۱۲/۵ ۲) ۴۸/۵
۳) ۲۵/۴ ۴) ۶۲/۸

✍ **حل**: گزینه «۴»

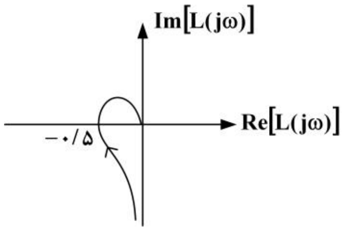
$$۲۰\log a=۱۲ \rightarrow a=۳/۹۸$$

با توجه به متن درس، تابع تبدیل حلقه باز سیستم با تبدیل k به ak برابر است با: $GH(s)=\frac{۳/۹۸k}{s(s^۲+۱۰s+۲۵)}$

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته را بدست می‌آوریم. $\Delta(s)=s^۳+۱۰s^۲+۲۵s+۳/۹۸k=۰$

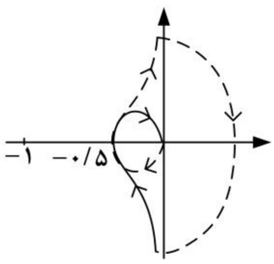
برای ایجاد یک سطر صفر کامل در جدول راث داریم: $۱۰\times۲۵-۱\times(۳/۹۸k)=۰ \rightarrow k=۶۲/۸$

مثال: نمودار قطبی (نایکوئیست) مدار باز $L(s)$ سیستم کنترلی مقابل در شکل نشان داده شده است. در صورتی که $L(s)$ یک تابع حداقل فاز *(Minimum phase)* باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟ (مکانیک ۷۸)



۱) سیستم نوع صفر و ناپایدار است.
۲) سیستم نوع صفر و پایدار است و محدوده پایداری $۰<k<۲$
۳) سیستم نوع یک و پایدار و محدوده پایداری $k>۲$
۴) سیستم نوع یک و پایدار است و محدوده پایداری $۰<k<۲$

✍ **حل**: گزینه «۴»



فاز -۹۰° در فرکانس‌های پایین نشان‌دهنده این است که نوع سیستم برابر یک می‌باشد. لذا گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست است. چون سیستم می‌نیمم فاز است $p=۰$ لذا نمودار قطبی نباید نقطه بحرانی $(-۱+j۰)$ را به منظور پایداری دور بزند. بنابراین با کامل کردن نمودار قطبی برای گستره فرکانسی $-\infty$ تا ۰ داریم: $-۱<-۰/۵k<۰ \rightarrow ۰<k<۲$