۱- گزینه «۴» ـ (ساده)

با توجه به متن درس، محل تلاقی با محور حقیقی منفی را می‌توان به کمک روش راث و ایجاد یک سطر صفر کامل بدست

آورد. لذا از جدول راث داریم: $e(۱۰-k)=۰ \quad \Rightarrow \quad k=۱۰$

پس فرکانس تقاطع منحنی نایکوئیست با محور حقیقی منفی از روی معادله کمکی بدست می‌آید.

$$A(s)=۱۰s^۲+k=۱۰s^۲+۱۰=۰ \quad \Rightarrow \quad s=\pm j \quad \Rightarrow \quad \omega=۱\frac{rad}{\sec}$$

از سویی مقدار منحنی نایکوئیست در فرکانس تقاطع برابر است با $q=-\frac{۱}{k}=-\frac{۱}{۱۰}$. لذا گزینه (۴) صحیح است.

۲- گزینه «۲» (ساده)

روش اول: با توجه به متن درس، از محل تلاقی پاره خط اولیه با شیب $-۴۰\frac{dB}{dec}$ یا امتداد آن با خط $۰dB$ ثابت خطای شتاب قابل محاسبه است ($k_a=\omega_۰^۲$). اگر در سؤال مفروض، پاره خط $-۴۰\frac{dB}{dec}$ را امتداد دهیم خط $۰dB$ را در فرکانس $\omega_۰=۱$ قطع می‌کند. لذا $k_a=۱$. تنها گزینه‌ای که در این رابطه صدق می‌کند، گزینه (۲) می‌باشد.

روش دوم: با توجه به شیب $-۴۰\frac{dB}{dec}$ در فرکانس‌های پایین عامل s^2 در مخرج قطعی است. از سویی با افزایش دامنه و فاز در فرکانس گوشه‌ای ۰/۵، عامل $(۱+۲s)$ در صورت ضروری است. همچنین، با درنظر گرفتن اطلاعات دامنه و فاز، عامل $(T^۲s^۲+۲T\xi s+۱۰)$ در مخرج با $T=\frac{۱}{\omega_۰}=۲$ الزامی است. پس:

$$G(s)=\frac{(۲s+۱)}{s^۲(\frac{۱}{۴}s^۲+\xi s+۱)}=\frac{۴(۲s+۱)}{s^۲(s^۲+۴\xi s+۴)}$$

تنها گزینه (۲) بدین شکل می‌باشد. توجه کنید که با توجه به نمودار اندازه در دیاگرام بودی، باید $۱>\xi>۰$ باشد.

۳- گزینه «۱» (ساده)

چون سیستم مینیمم فاز است از رفتار فرکانس پایین برای تشخیص نوع سیستم استفاده می‌کنیم.

$$\angle GH(۰)=-۱۸۰^\circ \rightarrow \lambda=۲$$

از سویی در فرکانس $\omega=۰^+$، زاویه $GH(s)$ از $-\pi$ بزرگ‌تر است. پس سهم صفر در زاویه بیشتر از سهم قطب‌ها می‌باشد.

$$\angle GH(j\omega)=-\pi+\tan^{-۱}\frac{\omega}{\frac{۱}{z}}-\tan^{-۱}\frac{\omega}{\frac{۱}{P_۱}}-\tan^{-۱}\frac{\omega}{\frac{۱}{P_۲}}$$

$$\Rightarrow \quad \angle GH(j۰^+)>-\pi \rightarrow \tan^{-۱}\omega z-\tan^{-۱}\omega P_۱-\tan^{-۱}\omega P_۲>۰$$

از تقریب $\tan^{-۱}x\approx x$ در نزدیکی $x=۰$ داریم: $\omega z-\omega p_۱-\omega p_۲>۰ \rightarrow z>p_۱+p_۲$

۴- گزینه «۱» (متوسط)

با توجه به متن درس، حداکثر مقدار تأخیری که می‌توان به سیستم اضافه کرد تا همچنان پایدار باقی بماند برابر با حد فاز سیستم است. به عبارتی دیگر $T\omega_1=PM$ که ω_1 فرکانس گذر بهره است. با توجه به داده‌های مسأله می‌توان پی برد که سیستم دارای سه فرکانس گذر بهره تقریبی $۱\frac{rad}{\sec}$، $۲\frac{rad}{\sec}$ و $۳\frac{rad}{\sec}$ خواهد بود که به ترتیب دارای حد فاز ۵۰°، ۷۰° و ۳۰° می‌باشد. برای پایداری سیستم حلقه بسته حداقل حد فاز را باید درنظر گرفت. پس:

$$T\omega_۱=PM \rightarrow T(۳)=۳۰(\frac{\pi}{۱۸۰})=\frac{\pi}{۶} \Rightarrow T=\frac{\pi}{۱۸}=۱۷۴\,m\sec$$

۵- گزینه «۳» (ساده)

با توجه به این که اثر تغییرات فاز از ۰/۱ تا ۱۰ برابر فرکانس گوشه‌ای است، گزینه (۳) صحیح است. توضیح بیشتر این‌که در نمودار مجانبی فاز یک عبارت درجه اول، دو دهه اختلاف بین دو نقطه شکست است. از نمودار فاز می‌توان دریافت که صفرهای تابع تبدیل یک دهه بالاتر از نقاط شکست۱ /۰، ۱ و پایین‌تر از ۲۰۰، ۲۰ است و قطب‌های آن یک دهه بالاتر از نقاط شکست ۱، ۱۰ و پایین‌تر از ۲۰، ۲ می‌باشند. پس تابع تبدیل سیستم عبارتست از:

$$G(s)=\frac{(s+۱)(s+۲۰)}{(s+۲)(s+۱۰)}$$

۶- گزینه «۳» (ساده)

از رفتار فرکانس پایین در $\omega=\circ^+$، گزینه‌های (۲) و (۴) نادرست می‌باشند. زیرا:

$$\angle GH(j\omega)=-\pi+\tan^{-۱}\omega-\tan^{-۱}\frac{\omega}{۲}-\tan^{-۱}\frac{\omega}{۳}\rightarrow\ \angle GH(j\circ^+)>-\pi$$

برای تشخیص پاسخ صحیح، محل تلاقی با محور حقیقی منفی را به کمک روش راث بدست می آوریم.

$$\Delta(s)=s^۲(s+۲)(s+۳)+k(s-۱)=s^۴+۵s^۳+۶s^۲+ks+k$$

با تشکیل جدول راث و ایجاد یک سطر صفر کامل داریم:

$$\begin{array}{llll} s^۴ & ۱ & ۶ & k \\ s^۴ & ۵ & k & \\ s^۲ & \frac{۳۰-k}{۵} & k & \\ s^۱ & A & & \\ s^\circ & k & & \end{array}$$

$$A=\frac{k\left(\frac{۳۰-k}{۵}\right)-۵k}{\frac{۳۰-k}{۵}}=\circ$$

$$\Rightarrow\quad \left(\frac{۳۰-k}{۵}\right)-۵=\circ\rightarrow k=۵$$

بنابراین به ازای $k=۵$، منحنی نایکوئیست از نقطه بحرانی $(-۱+j\circ)$ عبور می‌کند. لذا گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

۷- گزینه «۳» ـ (متوسط)

با استفاده از زاویه در $\omega=\circ^+$ و $\omega=\infty$ به پاسخ صحیح پی می‌بریم.

$$\angle GH(\omega)=-\frac{\pi}{۲}-\tan^{-۱}\frac{\omega}{۱۰}-\tan^{-۱}\frac{\omega}{۲۰}+\tan^{-۱}\frac{۲\omega}{۴-\omega^۲}$$

$$\angle GH(\circ^+)\simeq-\frac{\pi}{۲}-\frac{\omega}{۱۰}-\frac{\omega}{۲۰}+\frac{۲\omega}{۴-\omega^۲}\simeq-\frac{\pi}{۲}-\frac{۳\omega}{۲۰}+\frac{۲\omega}{۴-\circ}=-\frac{\pi}{۲}+۷\frac{\omega}{۲۰}\ \Rightarrow\ \angle GH(\circ^+)>-\frac{\pi}{۲}$$

لذا گزینه‌های (۲) و (۴) نادرست می‌باشند. از سویی با توجه به می‌نیمم فاز بودن تابع تبدیل داریم:

$$\angle GH(\infty)=-۳(۳-۲)\frac{\pi}{۲}=-\frac{\pi}{۲}$$

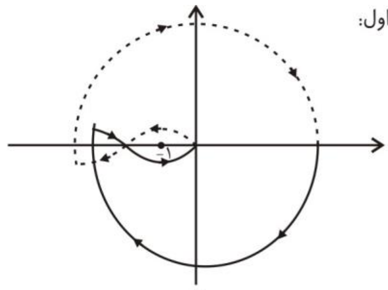
۸- گزینه «۲» ـ (دشوار)

می دانیم که فرکانس گذر بهره $(\omega_۱)$ محل تلاقی نمودار نایکوئیست با دایره واحد و فرکانس گذر فاز (ω_π) محل تلاقی نمودار نایکوئیست با محور حقیقی منفی است. طبق فرض مساله تابع تبدیل حلقه باز سیستم مینیمم فاز بوده (صفر و قطب ناپایدار ندارد) و دارای یک فرکانس گذر فاز و یک فرکانس گذر بهره است به طوری که $\omega_۱>\omega_\pi$. در این شرایط پایداری سیستم حلقه بسته وابسته به منحنی فاز خواهد بود. به عنوان مثال، تابع تبدیل حلقه باز $GH(s)=\frac{(s+z)}{s^۲(s+p)}$ را درنظر بگیرید که با توجه به حضور فقط یک صفر و فقط یک قطب، می‌توان دو حالت برای آن متصور بود: حالت اول) اثر صفر به گونه‌ای باشد که زاویه فاز از بالای ۱۸۰- درجه شروع شده و به تدریج کاهش یابد به طوری که ابتدا محور حقیقی منفی را قطع کرده (ω_π) و سپس با دایره واحد برخورد کند $(\omega_۱)$ و با زاویه ۱۸۰- درجه وارد مبدا شود. حالت دوم) اثر صفر به گونه‌ای باشد که زاویه فاز از پایین ۱۸۰- درجه شروع شده و به تدریج کاهش یابد به طوری که ابتدا محور حقیقی منفی را قطع کرده (ω_π) و سپس با

دایره واحد برخورد کند ($\omega_۱$) و با زاویه ۱۸۰- درجه وارد مبدا شود. نمودارهای نایکوئیست نمونه زیر پایداری و ناپایداری پایداری سیستم حلقه بسته را در این حالت‌ها نشان می‌دهد.

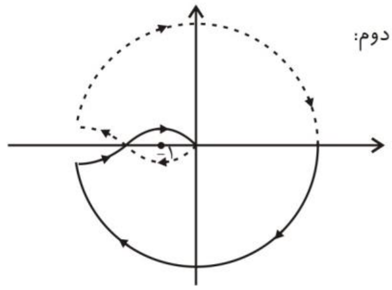
حالت اول:

$N_{-۱} = ۰$
$P = ۰$
$Z = N - P = ۰$



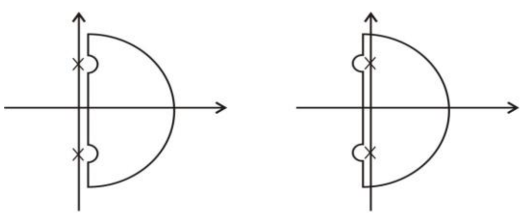
حالت دوم:

$N_{-۱} = ۲$
$P = ۰$
$Z = N - P = ۲ - ۰ = ۲$



۹- گزینه «۴» ـ (متوسط)

روش عمومی استفاده از نگاشت می‌باشد که زمان‌بر است. روش ساده‌تر در ادامه آورده شده است. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از $\Delta(s) = s^۲ + ks + ۱ = ۰$. از آنجا که $k > ۰$ فرض شده است، سیستم حلقه بسته پایدار می‌باشد. بنابراین با درنظر گرفتن نحوه عبور مسیر نایکوئیست از نقاط تکین تابع تبدیل حلقه باز، مطابق با آنچه که در متن درس بیان شده است می‌توان دو مسیر نایکوئیست را در نظر گرفت. لذا با در نظر گرفتن مسیر (۱)، به منظور پایداری سیستم حلقه بسته ($Z = ۰$)، نمودار نایکوئیست باید نقطه بحرانی ($-۱ + j۰$) را ۲ دور بزند ($N_{-۱} = ۲$) لذا گزینه «۳» صحیح است. همچنین با در نظر گرفتن مسیر (۲) و به منظور پایدار بودن سیستم حلقه بسته، نمودار نایکوئیست باید نقطه بحرانی ($-۱ + j۰$) را دور نزند ($N_{-۱} = ۰$). لذا گزینه «۲» نیز صحیح خواهد بود. بنابراین گزینه «۴» پاسخ صحیح این تست می‌باشد. توجه کنید تعداد قطب‌های ناپایدار تابع تبدیل حلقه باز $p = ۰$ است.



مسیر (۲) — $N_{-۱} = Z - p$

مسیر (۱) — $N_{-۱} = Z - p - p_W = Z - p - ۲$

۱۰- گزینه «۲» ـ (ساده)

کافی است به محاسبه حد فاز بپردازیم. تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از:

$$GH(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s} \Rightarrow GH(j\omega) = \frac{e^{-j\omega\tau}}{j\omega}$$

$$|GH(j\omega_۱)| = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{\omega_۱} = ۱ \Rightarrow \omega_۱ = ۱\frac{rad}{\sec}$$

$$\angle GH(j\omega_۱) = -\omega_۱\tau - \frac{\pi}{۲} = -\tau - \frac{\pi}{۲} \Rightarrow P.M = \pi + \angle GH(j\omega_۱) = \pi - \tau - \frac{\pi}{۲} = \frac{\pi}{۲} - \tau$$

بنابراین:

$$P.M = ۰ \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{۲} = ۱/۵۷ \sec$$

۱۱- گزینه «۳» ـ (ساده)

$$k_p = \lim_{s \to ۰} GH(s) = \frac{k}{۱۲} > ۲ \quad \Rightarrow \quad k > ۲۴ \qquad (۱)$$

لذا گزینه «۴» صحیح نمی‌باشد. از سویی با توجه به متن درس، با تبدیل k به $۳k$ معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s) = ۱ + \frac{۳k}{(s+۲)^۲(s+۳)} = ۰ \quad \Rightarrow \quad \Delta(s) = s^۳ + ۷s^۲ + ۱۶s + ۱۲ + ۳k = ۰$$

از روش راث شرط پایداری سیستم حلقه بسته برابر است با:

$$-۴ < k < \frac{۱۰۰}{۳} \qquad (۲)$$

تنها گزینه‌ای که در شرط‌های (۱) و (۲) صدق می‌کند گزینه «۳» می‌باشد.

۱۲- گزینه «۴» ـ (ساده)

از رفتار فرکانس بالا $(\omega = \infty)$ در می‌یابیم که گزینه (۳) و از رفتار فرکانس پایین $(\omega = ۰^+)$ گزینه‌های «۱» و «۲» صحیح نمی‌باشند.

$$\angle GH(j\omega)\Big|_{\omega=\infty} = -۲۷۰^\circ \quad \Rightarrow \quad n - m = ۳ \text{ تفاضل صفرها و قطب‌ها}$$

$$\angle GH(j\omega)\Big|_{\omega=۰^+} = -۱۸۰^\circ \quad \Rightarrow \quad \lambda = ۲ \text{ نوع سیستم}$$

۱۳- گزینه «۳» ـ (ساده)

تابع تبدیل سیستم عبارتست از:

$$G(s) = C(sI - A)^{-۱}B = \frac{۲}{(s-۱)^۲}$$

$$G(j\omega) = \frac{۲}{(j\omega - ۱)^۲} \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega)| = \frac{۲}{\omega^۲ + ۱} \quad ، \quad if \quad \omega = ۱ \quad \Rightarrow \quad ۲۰\log|G(j۱)| = ۲۰\log ۱ = ۰$$

لذا گزینه‌های «۲» و «۴» نادرست هستند. از سویی عامل $\frac{۱}{(s-۱)^۲}$ کاهش شیب $-۴۰\frac{dB}{dec}$ را در پی خواهد داشت.

۱۴- گزینه «۱» ـ (متوسط)

$$GH(s) = \frac{k}{s(s+۱)}$$

$$P.M = ۴۵ = ۱۸۰ + \angle GH(j\omega_۱) \quad \Rightarrow \quad \angle GH(j\omega_۱) = -۱۳۵^\circ$$

$$\angle GH(j\omega_۱) = -۹۰ - \tan^{-۱}\omega_۱ = -۱۳۵ \quad \Rightarrow \quad \tan^{-۱}\omega_۱ = ۴۵^\circ \quad \Rightarrow \quad \omega_۱ = ۱\frac{rad}{\sec}$$

$$|GH(j\omega_۱)| = ۱ = \frac{k}{\omega_۱\sqrt{\omega_۱^۲ + ۱}} \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{۲}$$

لذا داریم:

$$G(s) = \frac{\sqrt{۲}}{s(s+۱)}$$

تابع تبدیل سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{۱ + G(s)} = \frac{\sqrt{۲}}{s^۲ + s + \sqrt{۲}}$$

با توجه به این که خروجی سیستم به ورودی سینوسی دارای همان فرکانس ورودی با تفاوت در دامنه و زاویه است داریم:

$$M(j\omega) = \frac{\sqrt{۲}}{(\sqrt{۲} - \omega^۲) + j\omega} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |M(j\omega)| = \dfrac{\sqrt{۲}}{\sqrt{(\sqrt{۲} - \omega^۲)^۲ + \omega^۲}} \\ \\ \angle M(j\omega) = -\tan^{-۱}\dfrac{\omega}{\sqrt{۲} - \omega^۲} \end{cases}$$

$$\omega_0=\sqrt[4]{2}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\left|M(j\omega_0)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{\omega_0}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{2}\\[2ex]\angle M(j\omega_0)=-\tan^{-1}\dfrac{\sqrt[4]{2}}{0}=-\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

بنابراین:
$$y(t)=\left|M(j\omega_0)\right|\sin(\sqrt[4]{2}t+\angle M(j\omega_0))=\sqrt[4]{2}\sin(\sqrt[4]{4}t-\frac{\pi}{2})\quad\Rightarrow\quad y(t)=-\sqrt[4]{2}\cos\sqrt[4]{2}t$$

۱۵- گزینه «۲» ـ (متوسط)

چون افزایش بهره، کاهش حد فاز را به دنبال دارد، گزینه‌های «۳» و «۴» نادرست می‌باشند. از سویی با توجه به فرمول $P.M=180+\angle GH(j\omega_1)$، برای ماکزیمم شدن حد فاز باید $\angle GH(j\omega_1)$ ماکزیمم گردد. با توجه به نمودار اندازه برحسب فاز کافی است به اندازه $6db$ منحنی را به پایین انتقال دهیم.
$$20\log k=-6db\quad\Rightarrow\quad k=\frac{1}{2}$$

۱۶- گزینه «۱»ـ (متوسط)

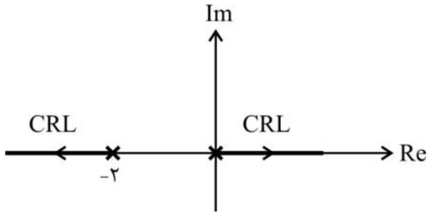
شیب $-40\dfrac{dB}{dec}$ در $\omega=1$ نشان‌دهنده عامل $\dfrac{1}{(s+1)^2}$ و وجود شیب $-20\dfrac{dB}{dec}$ در $\omega=10^6$ نشان‌دهنده عامل $\dfrac{1}{(s+10^6)}$ در تابع تبدیل می‌باشد. لذا گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست می‌باشند. از سویی با توجه به نمودار اندازه و فاز در $\omega=10^3$ (عدم تأثیر بر روی نمودار فاز)، وجود صفر و در نتیجه عامل $(s-10^3)(s+10^3)=(s^2-10^6)$ در تابع تبدیل اجتناب ناپذیر است.

۱۷- گزینه «۴»ـ (ساده)

با توجه به داشتن تابع تبدیل سیستم به راحتی می‌توانیم از روش راث، شرط پایداری را بدست آوریم. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از $\Delta(s)=s^3+6s^2+14s+6+3a=0$. از جدول راث، شرط پایداری عبارتست از:
$$\begin{cases}6\times 14>6+3a>0\to a<26\\ 6+3a>0\to a>-2\end{cases}\xrightarrow{\ \cap\ }-2<a<26$$

۱۸- گزینه «۲»ـ (ساده)

ابتدا معادله مشخصه سیستم حلقه بسته را به فرم استاندارد $\Delta(s)=1+kGH(s)=0$ در می‌آوریم.
$$\Delta(s)=1+\frac{s-a}{s(s+1)}=0\to\Delta(s)=s^2+2s-a=0\to\Delta(s)=1-\frac{a}{s(s+2)}=0$$



لذا تابع تبدیل حلقه باز $GH(s)=\dfrac{-a}{s(s+2)}$ می‌باشد. بنابراین با درنظر گرفتن مکان صفرها و قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز، گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست می‌باشند. از سویی با توجه به تابع تبدیل حلقه باز، مکان هندسی ریشه‌ها باید برای بهره‌های منفی رسم شود، لذا با درنظر گرفتن مکمل مکان ریشه‌های *(CRL)*، گزینه «۲» صحیح می‌باشد.

۱۹- گزینه «۲»ـ (ساده)

ابتدا فرکانس گذر بهره را بدست می‌آوریم.
$$|GH(j\omega_1)|=1\to\frac{\sqrt{\omega_1^2+9}}{\omega_1\sqrt{\omega_1^2+1}}=1\to\omega_1^4=9\to\omega_1=\sqrt{3}\,\frac{rad}{\sec}$$

از طرفی داریم:
$$\angle GH(j\omega_1)=-T\omega_1-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\omega_1+\tan^{-1}\frac{\omega_1}{3}=-T\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=-T\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$$

شرط پایداری عبارتست از:
$$\angle GH(j\omega_1)=-\pi\to-T\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}=-\pi\to T=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

۲۰- گزینه «۳»ـ (ساده)

با توجه به گزینه‌ها، کافی است به محاسبه حد بهره بپردازیم. لذا معادله مشخصه سیستم عبارتست از:

$$\Delta(s) = ۱ + \frac{k}{(s+۱)^۳} = ۰ \to \Delta(s) = s^۳ + ۳s^۲ + ۳s + k + ۱ = ۰$$

با توجه به متن درس، محاسبه حد بهره معادل یک سطر صفر در روش راث می‌باشد. داریم: $۳\times۳ = k+۱ \quad \to \quad k = ۸$

برای حل کامل، به محاسبه حد فاز نیز می‌پردازیم. ابتدا فرکانس گذر بهره را بدست می‌آوریم.

$$|GH(j\omega_۱)| = \frac{۱}{(\omega_۱^۲+۱)\sqrt{\omega_۱^۲+۱}} = ۱ \to (\omega_۱^۲+۱)^۳ = ۱ \to \omega_۱ = ۰\frac{rad}{\sec}$$

$$P\cdot M = ۱۸۰ + \angle GH(j\omega_۱) = ۱۸۰ - ۳\tan^{-۱}\omega_۱ = ۱۸۰$$

توجه کنید که می‌توانیم حد بهره را مستقیماً از تعریف آن نیز محاسبه کنیم.

$$\angle GH(j\omega_\pi) = -۳\tan^{-۱}\omega_\pi = -\pi \to \omega_\pi = \sqrt{۳}\frac{rad}{\sec}$$

$$|GH(j\omega_\pi)| = \frac{k}{\sqrt{(\omega_\pi^۲+۱)^۳}} = \frac{k}{۸} \quad \to \quad G\cdot M = \frac{۱}{|GH(j\omega_\pi)|} = \frac{۸}{k} \quad \to \quad k = ۸$$

۲۱- گزینه «۲» ـ (ساده)

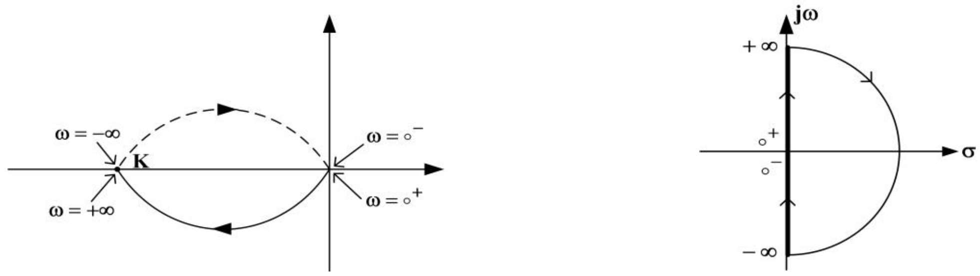
با در نظر گرفتن رفتار فرکانس پایین سیستم، نوع سیستم برابر صفر می‌باشد. بنابراین به فرض پایدار بودن سیستم حلقه بسته داریم:

$$GH(s)\Big|_{s=۰} = GH(۰) = ۱۰ \quad \to \quad k_p = \lim_{s\to۰} GH(s) = ۱۰ \quad \Rightarrow \quad e_{ss} = \frac{R}{۱+k_p} = \frac{۱}{۱+۱۰} = \frac{۱}{۱۱}$$

لذا گزینه (۲) صحیح است. البته به دلیل عدم آگاهی از پایداری سیستم حلقه بسته گزینه (۴) نیز می‌تواند صحیح باشد.

۲۲- گزینه «۳»ـ (متوسط)

توجه کنید می‌توانیم $k<۰$ را به صورت $k = |k|e^{-j\pi}$ نشان دهیم. بنابراین با درنظر گرفتن مسیر نایکوئیست (شکل الف)، دیاگرام نایکوئیست به شکل (ب) خواهد بود.



(ب) (الف)

$$s = j\omega \quad \to \quad GH(j\omega) = \frac{|k|e^{-j\pi} j\omega(j\omega+۱)}{(۲-\omega^۲)+j۲\omega} \to \begin{cases} |GH(j\omega)| = \dfrac{|k|\omega\sqrt{\omega^۲+۱}}{\sqrt{(۲-\omega^۲)^۲+۴\omega^۲}} \\ \angle GH(j\omega) = -\pi + \dfrac{\pi}{۲} + \tan^{-۱}\omega - \tan^{-۱}\dfrac{۲\omega}{۲-\omega^۲} \end{cases}$$

$$\omega = ۰^+ \quad \to \quad \begin{cases} |GH(۰^+)| = ۰ \\ \angle GH(۰^+) = -\dfrac{\pi}{۲} \end{cases}$$

این شرایط فقط در گزینه (۳) صدق می‌کند. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۲۳- گزینه «۱»ـ (دشوار)

چون نوع سیستم یک است، خطای حالت ماندگار به ورودی $u(t)$ ۱/۱ صفر می‌باشد. بنابراین کافیست خطای حالت ماندگار به ورودی $tu(t)$ را محاسبه کنیم. ابتدا k را چنان می‌یابیم که حد بهره سیستم ۱/۱ باشد. لذا:

$$G(s)=\frac{۱/۱k}{s(s+۱)(s+۱۰)} \quad , \quad H(s)=۱ \quad \to \quad GH(s)=\frac{۱/۱k}{s(s+۱)(s+۱۰)}$$

معادله مشخصه عبارتست از:

$$\Delta(s)=۱+GH(s)=s^{۳}+۱۱s^{۲}+۱۰s+۱/۱k=۰$$

از جدول راث برای ایجاد یک سطر صفر کامل داریم:

$$۱۱۰-۱/۱k=۰ \;\to\; k=۱۰۰$$

حال ثابت خطای سرعت را بدست می‌آوریم:

$$k_v=\lim_{s\to ۰} sGH(s)=\lim_{s\to ۰}\frac{k}{s(s+۱)(s+۱۰)}=\frac{k}{۱۰}\bigg|_{k=۱۰۰}=\frac{۱۰۰}{۱۰}=۱۰ \Rightarrow e_{ss}=\frac{R}{k_v}=\frac{۱}{۱۰}=۰/۱$$

۲۴- گزینه «۳»ـ (ساده)

طبق تعریف، توابع تبدیل می‌نیمم فاز، دارای صفر یا قطب سمت راست محور موهومی نمی‌باشند. لذا گزینه‌های (۱) و (۲)، نامی‌نیمم فاز هستند. خاطر نشان می‌شود که در مراجع مختلف، تعاریف متفاوتی برای سیستم‌های نامی‌نیمم فاز ارائه شده است که از جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

۱- سیستم‌هایی که دارای صفر یا قطبی سمت راست محور موهومی می‌باشند.

۲- سیستم‌هایی که فقط دارای صفر سمت راست محور موهومی می‌باشند.

۳- سیستم‌هایی که تغییرات فاز آن‌ها در $\omega\to\infty$ از فرمول $-(n-m)\frac{\pi}{۲}$ تبعیت نکند که در آن n و m به ترتیب درجه مخرج و صورت تابع تبدیل می‌باشند.

در هیچ‌کدام از مراجع بهره منفی به عنوان معیاری برای تعیین نامی‌نیمم فاز بودن سیستم مطرح نشده است. بهره منفی فقط اختلاف فازی برابر (۱۸۰-) درجه ایجاد کرده و به هیچ وجه آثار مخرب مربوط به سیستم‌های نامی‌نیمم فاز را ندارد. بنابراین گزینه (۳) می‌نیمم فاز می‌باشد. توجه کنید که گزینه (۳) به صورت زیر قابل بازنویسی است.

$$G(s)=\frac{-(s+۱)}{s(s+۱)(s+۲)}=\frac{e^{-j\pi}}{s(s+۲)}$$

$$\to \quad \angle G(j\omega)=-\pi-\frac{\pi}{۲}-\tan^{-۱}\frac{\omega}{۲} \quad \to \quad \angle G(j\omega)\Big|_{\omega=\infty}=-۲\pi$$

۲۵- گزینه «۲»ـ (ساده)

با توجه به متن درس، افزایش دوایر $M-$ثابت نشان‌دهنده نزدیک شدن به مرز ناپایداری است، به طوری که $M=\infty$ معادل عبور نمودار قطبی از نقطه بحرانی $(-۱+j۰)$ است. بنابراین مطلوب ما دور شدن از مرز ناپایداری خواهد بود که معادل کاهش دایره $M-$ثابت می‌باشد. پس گزینه (۲) صحیح است. یادآوری می‌کنیم که اوج تشدید (M_p) با مماس شدن نمودار قطبی به دوایر M ثابت بدست می‌آید.

۲۶- گزینه «۳» ـ (متوسط)

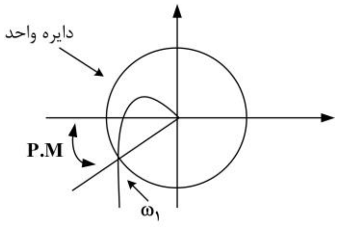
گزینه‌های (۱) و (۴) با توجه به نمودار دامنه بودی در فرکانس‌های پایین نادرست هستند.

گزینه (۱) : $|G(j۰)|=\frac{۱}{۱۰۰} \;\to\; ۲۰\log|G(j۰)|<۰$

گزینه (۴) : $|G(j۰)|=۱ \;\to\; ۲۰\log|G(j۰)|=۰$

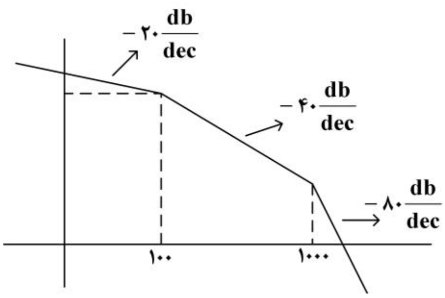
با توجه به این که اثر زاویه از ۰/۱ تا ۱۰ برابر فرکانس گوشه‌ای است، گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

۲۷- گزینه «۱»ـ (متوسط)



چون هر سه تابع تبدیل داده شده از نوع ۱ می‌باشند، نمودار نایکوئیست آن‌ها به فرم کلی روبرو است. در تعیین حد فاز $(P.M)$ مقدار $\angle GH(j\omega_1)=-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\omega_1 T_1-\tan^{-1}\omega$ نقش دارد که در آن T_1 و T_2 ثوابت زمانی مربوط به دو قطب حقیقی منفی می‌باشند. بنابراین هرچه مقادیر ثوابت زمانی کوچک‌تر باشند، حد فاز سیستم بیشتر خواهد بود. بنابراین گزینه (۱) پاسخ صحیح می‌باشد.

۲۸- گزینه «۴»ـ (متوسط)

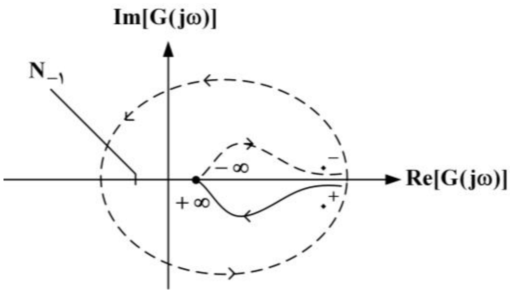


با توجه به متن درس، هر $\pm 20\frac{dB}{dec}$ معادل $\pm 6\frac{dB}{oct}$ است. لذا شیب $-20\frac{dB}{dec}$ در فرکانس پایین نشان‌دهنده عامل $\frac{1}{s}$، کاهش شیب $-20\frac{dB}{dec}$ در $\omega=100$ نشان‌دهنده عامل $\frac{1}{s+100}$ و کاهش شیب $-40\frac{dB}{dec}$ نشان‌دهنده عامل $\frac{1}{(s+1000)^2}$ می‌باشد. بنابراین شکل کلی تابع تبدیل به صورت $G(s)=\frac{k}{s(s+100)(s+1000)^2}$ است. لذا گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست هستند. حال به محاسبه k می‌پردازیم. ابتدا تابع تبدیل را به فرم استاندارد درمی‌آوریم.

$$G(s)=\frac{k}{10^8 s(\frac{s}{100}+1)(\frac{s}{1000}+1)^2} \rightarrow 20\log|G(j\omega)|\Big|_{\omega=10}=40dB \rightarrow |G(j10)|=100$$

$$|G(j10)|=\frac{k}{10^8\omega\sqrt{\frac{\omega^2}{10^4}+1}\sqrt{\frac{\omega^2}{10^6}+1}}\approx\frac{k}{10^8\times 10}=100 \rightarrow k=10^{11}$$

۲۹- گزینه «۳»ـ (دشوار)



چون دامنه در $\omega=\infty$ مقدار ثابتی است، سیستم سره می‌باشد (درجه صورت با درجه مخرج برابر است). لذا گزینه‌های (۲) و (۴) نادرست می‌باشند. از طرفی با توجه به رسم گستره فرکانسی $-\infty$ تا 0 برای کامل کردن نمودار قطبی، داریم: $N_{-1}=1$

بنابراین با توجه به معیار پایداری نایکوئیست داریم:

$$N_{-1}=z-p \rightarrow z=1$$

توجه کنید که رفتار فرکانس پایین نمودار قطبی می‌تواند ناشی از وجود دو قطب در مبدأ و مقدار بهره منفی باشد.

۳۰- گزینه «۴»ـ (دشوار)

رفتار فرکانس بالای توابع تبدیل در چهار گزینه یکسان می‌باشد. از رفتار فرکانس پایین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست می‌باشند. برای تشخیص پاسخ صحیح از بین دو گزینه باقیمانده، از موقعیت صفرها و قطب‌ها به منظور تعیین سهم آن‌ها در تغییرات زاویه در $\omega=0^+$ استفاده می‌کنیم. فرم کلی تابع تبدیل را به صورت روبرو در نظر بگیرید: $G(s)=\frac{-(s-a)(s+b)}{s^2}$

زاویه تابع تبدیل در حالت دائمی سینوسی عبارتست از: $\angle G(j\omega) = -\pi + \tan^{-۱}\frac{\omega}{b} - \tan^{-۱}\frac{\omega}{a}$

چون در $\omega = ۰^{+}$، زاویه تابع تبدیل از -۱۸۰° فراتر می‌رود، بایستی $b > a$ باشد. لذا گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

۳۱- گزینه «۳»ـ (متوسط)

سیستم مفروض یک سیستم پایدار مشروط است. چون سیستم حلقه باز می‌نیمم فاز می‌باشد $(p = ۰)$، طبق معیار پایداری نایکویست، نمودار نایکوئیست نبایستی نقطه بحرانی $(-۱ + j۰)$ را دور بزند $(N_{-۱} = ۰)$. با توجه به نمودار نایکوئیست داده شده که برای $k = ۱$ رسم شده است، شرایط پایداری عبارتست از:

۱) ناحیه از ۲- تا $-\infty$: $-۲k > -۱ \rightarrow k < ۰/۵$

۲) ناحیه بین $-۰/۵$ تا $-۱/۲۵$: $-۱/۲۵k < -۱ \rightarrow k > ۰/۸$

$-۰/۵k > -۱ \rightarrow k < ۲$

۳۲- گزینه «۳»ـ (متوسط)

از روش راث استفاده می‌کنیم. معادله مشخصه سیستم عبارتست از: $\Delta(s) = s^{۲} + (k - ۳)s + ۲ = ۰$

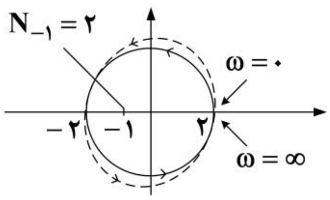
سیستم برای $k > ۳$ پایدار می‌باشد. بنابراین برای $k > ۳$ (پایداری سیستم حلقه بسته)، با توجه به ۲ قطب ناپایدار تابع تبدیل حلقه باز $(p = ۲)$، نمودار نایکوئیست بایستی نقطه بحرانی $(-۱ + j۰)$ را ۲ بار در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دور بزنند.

داریم: $N_{-۱} = z - p \quad \rightarrow \quad -۲ = z - ۲ \rightarrow z = ۰$

لذا واضح است که برای مقادیر $k < ۳$ سیستم حلقه بسته دو قطب ناپایدار دارد. زیرا:

$N_{-۱} = ۰ \;,\; p = ۲ \rightarrow N_{-۱} = z - p \rightarrow ۰ = z - ۲ \rightarrow z = ۲$

۳۳- گزینه «۱»ـ (متوسط)



با کامل نمودن نمودار نایکوئیست برای گستره فرکانسی $-\infty$ تا ۰ داریم: $N_{-۱} = ۲$

با توجه به چرخش ۳۶۰° در خلاف جهت عقربه‌های ساعت سیستم حلقه باز دارای ۲ قطب ناپایدار و ۲ صفر پایدار است. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) نادرست می‌باشند. بنابر معیار پایداری نایکوئیست، برای پایداری سیستم حلقه بسته بایستی $k > \frac{۱}{۲}$ انتخاب شود، زیرا $-۲ < \frac{-۱}{k} \rightarrow k > \frac{۱}{۲}$.

۳۴- گزینه «۳»ـ (ساده)

با توجه به متن درس، عبور نمودار نایکوئیست از نقطه بحرانی $(-۱ + j۰)$ نشان‌دهنده این است که سیستم دارای قطب‌هایی روی محور موهومی خواهد بود. حال اگر این قطب‌های روی محور موهومی ساده باشند، سیستم پایدار مرزی است (یک بار عبور از نقطه بحرانی) ولی اگر قطب‌های روی محور موهومی مکرر باشند، سیستم ناپایدار خواهد بود.

۳۵- گزینه «۴»ـ (ساده)

برای تشخیص پایداری سیستم‌های پایدار مشروط (سیستم‌هایی با حد فاز و حد بهره چندگانه) به دلیل این که دوری و نزدیکی از نقطه بحرانی $(-۱ + j۰)$ به خوبی قابل رؤیت است، استفاده از دیاگرام‌های نایکوئیست و لگاریتم دامنه و فاز (نیکولز) مناسب است.

۳۶- گزینه «۱»ـ (دشوار)

با بررسی رفتار سیستم در فرکانس‌های پایین و بالا، گزینه (۴) نادرست است. زیرا:

$$\omega \rightarrow ۰ \quad \begin{cases} |G(j\omega)H(j\omega)| \rightarrow \infty \\ \angle G(j\omega)H(j\omega) \rightarrow -۹۰^{\circ} \end{cases} \qquad \omega \rightarrow \infty \quad \begin{cases} |G(j\omega)H(j\omega)| \rightarrow ۰ \\ \angle G(j\omega)H(j\omega) \rightarrow -۲۷۰^{\circ} \end{cases}$$

برای تعیین جواب صحیح از بین گزینه‌های باقیمانده، پایداری سیستم حلقه بسته را از روش راث بدست می‌آوریم. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از: $\Delta(s) = ۱ + G(s)H(s) = s^{۴} + ۶s^{۳} + ۱۱s^{۲} + s^{۲} + ۷۶ + ۴ = ۰$

$s^{۴}$	۱	۱۱	۱
$s^{۳}$	۶	۷	
$s^{۲}$	۹/۸۳	۴	
$s^{۱}$	۴/۵۶		
s°	۴		

لذا سیستم پایدار بوده و این به معنی مثبت بودن حد فاز و حد بهره آن می‌باشد. پس گزینه (۲) نیز نادرست می‌باشد. حال با کمی دقت در می‌یابیم که تفاوت گزینه‌های (۱) و (۳) در اندازه حد بهره است. لذا ابتدا فرکانس گذر فاز را بدست می‌آوریم.

$$\angle GH(j\omega) = -\frac{\pi}{۲} - \tan^{-۱}\omega - \tan^{-۱}\frac{\omega}{۲} - \tan^{-۱}\frac{\omega}{۳} + \tan^{-۱}\frac{\omega}{۴} = -\pi$$

$$\rightarrow \quad \tan^{-۱}\frac{\omega}{۴} - \tan^{-۱}\frac{\omega}{۲} = \tan^{-۱}\omega + \tan^{-۱}\frac{\omega}{۳} - \frac{\pi}{۲}$$

از طرفین رابطه اخیر tan می‌گیریم:

$$\rightarrow \frac{-\frac{\omega}{۴}}{۱+\frac{\omega^{۲}}{۸}} = \frac{۱-\frac{\omega^{۲}}{۳}}{-\frac{۴}{۳}\omega} \rightarrow \omega^{۴} + ۱۳\omega^{۲} - ۲۴ = \circ \quad \rightarrow \quad \omega_{\pi} \approx ۱/۳\,\frac{rad}{s}$$

بنابراین حد بهره برابر است با:

$$GM = -۲\circ\log|GH(j\omega_{\pi})| = ۱۱/۷$$

۳۷- گزینه «۲»- (متوسط)

از نمودار فاز و گزینه‌های داده شده، گزینه‌های (۳) و (۴) قطعاً نادرست می‌باشند. زیرا به ازاء $\omega \to \infty$، مقدار فاز $-۱۸\circ^{\circ}$ می‌باشد و لذا سیستم قطعاً بدون تأخیر خواهد بود. از طرفی، چون صفر سمت راست همانند قطب سمت چپ عمل می‌کند، گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

۳۸- گزینه «۱»ـ (ساده)

چون تابع تبدیل حلقه باز، برای بررسی حد فاز و حد بهره از r به $\overline{y}$ و r به y فرقی نمی‌کند، لذا حد بهره و حد فاز تغییری نخواهند کرد. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۳۹- گزینه «۳»ـ (متوسط)

با بررسی رفتار نمودار نایکوئیست در $\omega = \infty$ درمی‌یابیم که درجه صورت و درجه مخرج تابع تبدیل حلقه باز با هم برابرند. لذا سیستم سره (مناسب) بوده و گزینه‌های (۲) و (۴) نادرست می‌باشند. همچنین، با در نظر گرفتن دور زدن نقطه بحرانی $(-۱+j\circ)$، بنا بر معیار پایداری نایکوئیست، سیستم حلقه باز قطعاً ناپایدار خواهد بود. دقت کنید که یک تابع تبدیل نوعی برای نمودار نایکوئیست داده شده می‌تواند به صورت روبرو باشد:

$$\frac{s-۲a}{s+a} \quad , \qquad a > \circ$$

۴۰- گزینه «۲»ـ (متوسط)

ابتدا فرکانس گذر بهره را بدست می‌آوریم.

$$GH(j\omega) = \frac{۸e^{-۲j\omega T}}{(j\omega+۲)^{۲}}$$

$$|GH(j\omega_۱)| = ۱ \quad \rightarrow \quad \frac{۸}{\sqrt{(۴-\omega_۱^{۲})^{۲} + ۱۶\omega_۱^{۲}}} = ۱ \quad \rightarrow \quad \omega_۱ = ۲$$

حال برای پایداری بایستی شرط روبرو برقرار باشد:

$$\angle GH(j\omega_۱) = -۲\omega_۱ T - ۲\tan^{-۱}\frac{\omega_۱}{۲} > -\pi$$

$$\omega_۱ = ۲ \rightarrow \angle GH(j\omega_۱) = -۲\times۲\times T - ۲\tan^{-۱}۱ = -۴T - \frac{\pi}{۲} > -\pi \quad \Rightarrow \quad T < \frac{\pi}{۸}$$

۴۱- گزینه «۳»ـ (ساده)

از اصل آرگومان استفاده می‌کنیم. چون $F(s)$ دارای دو قطب در $s = \circ$ می‌باشد که در مسیر بسته μ_S در صفحه s قرار دارند. داریم:

$$z_{\circ} = \circ \qquad p_{\circ} = ۲ \quad \rightarrow \quad N_{\circ} = z_{\circ} - p_{\circ} = \circ - ۲ = -۲$$

لذا بنا بر اصل آرگومان، نگاشت مسیر بسته μ_S در صفحه $F(s)$ باید مبدأ را دو بار در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دور بزند. بنابراین گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

۴۲- گزینه «۲»ـ(متوسط)

با کامل کردن نمودار نایکوئیست مربوطه $G_{۲}(j\omega)$ برای گستره فرکانسی $-\infty$ تا ۰ مشاهده می‌شود که نقطه بحرانی $(-۱+j۰)$ ۲ بار در جهت عقربه‌های ساعت دور زده می‌شود. با توجه به می‌نیمم فاز بودن $G_{۲}(s)$ حلقه داخلی دو قطب ناپایدار دارد.
$$N_{-۱}=z-p \;\rightarrow\; ۲=z-۰ \;\rightarrow\; z=۲$$

این دو قطب ناپایدار برای حلقه بیرونی به عنوان قطب‌های ناپایدار حلقه باز عمل کرده و لذا با فرض این که $G_{۱}(s)$ نیز می‌نیمم‌فاز باشد، از شکل (ج) مشاهده می‌شود که نقطه بحرانی $(-۱+j۰)$ ۲ بار در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دور زده می‌شود. بنابراین:
$$N_{-۱}=z-p \;\rightarrow\; -۲=z-۲ \;\rightarrow\; z=۰$$

پس حلقه بیرونی پایدار است و لذا گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

۴۳- گزینه «۳»ـ (متوسط)

ابتدا فرکانس گذر بهره را بدست می‌آوریم.
$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{۲e^{-j\omega T}}{(j\omega+۱)(۲j\omega+۱)}$$
$$|G(j\omega_۱)H(j\omega_۱)|=۱ \;\rightarrow\; \frac{۲}{\sqrt{\omega_۱^۲+۱}\sqrt{۴\omega_۱^۲+۱}}=۱ \;\rightarrow\; ۴\omega_۱^۴+۵\omega_۱^۲-۳=۰ \;\rightarrow\; \omega_۱=۰/۶۶۵۶$$

در ادامه با استفاده از حد فاز مقدار T را چنان می‌یابیم که سیستم به مرز ناپایداری قرار گیرد.
$$\angle G(j\omega_۱)H(j\omega_۱)=-T\omega_۱-\tan^{-۱}\omega_۱-\tan^{-۱}۲\omega_۱=-\pi$$
$$\rightarrow\; -T\times ۰/۶۶۵۶-\tan^{-۱}۰/۶۶۵۶-\tan^{-۱}(۲\times ۰/۶۶۵۶)=-\pi \;\rightarrow\; T=۲/۴۴$$

۴۴- گزینه «۲»ـ (ساده)

با توجه به متن درس، می‌دانیم که در $\xi=۱$، مقدار اوج تشدید برابر یک می‌باشد. لذا گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

۴۵- گزینه «۲»ـ (متوسط)

تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از:
$$G_c(s)G(s)=\frac{k}{s(s+۱)(s+۱۰)}$$

با استفاده از ثابت خطای شیب داریم:
$$k_v=\lim_{s\to ۰} sG_c(s)G(s)=\frac{k}{۱۰}$$
$$e_{ss}=\frac{R}{k_v}=\frac{۱}{\frac{k}{۱۰}}=\frac{۱۰}{k}=۰/۲ \;\Rightarrow\; k=۵۰$$

با توجه به متن درس، با تبدیل k به ak، از روش راث برای تعیین حد بهره استفاده می‌کنیم. داریم:
$$۵۰\to ۵۰a \;\Rightarrow\; G_c(s)G(s)=\frac{۵۰a}{s(s+۱)(s+۱۰)}$$

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته در این حالت عبارتست از:
$$\Delta(s)=s^۳+۱۱s^۲+۱۰s+۵۰a=۰$$

شرایط پایداری از جدول راث عبارتند از:
$$\begin{cases}۵۰a>۰ \;\rightarrow\; a>۰\\ ۱۱\times ۱۰>۵۰a \;\rightarrow\; a<۲/۲\end{cases} \xrightarrow{\;\cap\;} ۰<a<۲/۲$$

بنابراین حد بهره سیستم، ۲/۲ می‌باشد. لذا گزینه (۲) صحیح است.

۴۶- گزینه «۲»ـ (متوسط)

ابتدا فرکانس گذر بهره را بدست می‌آوریم.
$$GH(s)=\frac{e^{-Ts}}{s(s+۱)^۲} \;\rightarrow\; GH(j\omega)=\frac{e^{-j\omega T}}{j\omega(j\omega+۱)^۲}$$
$$|GH(j\omega_۱)|=\frac{۱}{\omega_۱(\omega_۱^۲+۱)}=۱ \;\rightarrow\; \omega_۱^۳+\omega_۱=۱ \;\rightarrow\; \omega_۱=۰/۶۸\frac{rad}{s}$$

شرط پایداری عبارتست از:

$$\angle GH(j\omega_1) = -T\omega_1 - \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}\omega_1 = -\pi$$

$$\omega_1 = 0/68 \rightarrow 0/68T = 0/367 \rightarrow T \approx 0/547$$

۴۷- گزینه «۳»ـ (ساده)

از نمودار قطبی داده شده متوجه می‌شویم که به اندازه زاویه φ می‌توانیم به سیستم فاز منفی اضافه کنیم تا سیستم همچنان پایدار بماند که این امر با استفاده از عامل تأخیر (e^{-Ts}) صورت می‌پذیرد. لذا داریم: $\angle e^{-j\omega T} = -\omega T$

$$-\omega T = -\varphi \rightarrow -\frac{1}{2}\cdot T = -\frac{3}{8} \rightarrow T = \frac{6}{8} = 0/75s$$

۴۸- گزینه «۳»ـ (ساده)

از رفتار فرکانس پایین نمودار قطبی داده شده، نوع سیستم صفر می‌باشد. خطای حالت ماندگار با استفاده از ثابت خطای پله قابل محاسبه است. به فرض پایدار بودن سیستم حلقه بسته داریم: $k_p = \lim_{s\to 0} GH(s) \rightarrow k_p = GH(0) = 3$

$$e_{ss} = \frac{R}{1+k_p} = \frac{1}{1+3} \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{4}$$

۴۹- گزینه «۱»ـ (متوسط)

از روش راث استفاده می‌کنیم. $G_c(s) = s + 2 + \frac{1}{s} = \frac{(s+1)^2}{s}$

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s) = 1 + G_c(s)G_p(s) = 1 + \frac{(s+1)^2}{s}\cdot\frac{1}{s^2} = 0 \rightarrow \Delta(s) = s^3 + s^2 + 2s + 1 = 0$$

به واسطه برقراری شرایط پایداری (هم علامت بودن و مخالف صفر بودن ضرایب و شرط $1\times 1 < 2\times 1$) سیستم حلقه بسته پایدار است، یعنی $z = 0$. از طرفی چون تابع تبدیل حلقه باز قطب ناپایداری ندارد، لذا $p = 0$. بنابراین طبق معیار پایداری نایکوئیست بایستی تعداد دور زدن‌های نقطه بحرانی $(-1+j0)$ صفر باشد، یعنی $N_{-1} = 0$. این شرط تنها در گزینه (۱) صدق می‌کند. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۵۰- گزینه «۱»ـ (متوسط)

از رفتار فرکانس بالای سیستم داریم $\angle GH(j\omega)\Big|_{\omega=\infty} = -270^\circ$. بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست می‌باشند. برای تشخیص پاسخ صحیح به روش زیر عمل می‌کنیم. چون تابع تبدیل حلقه باز مفروض قطبی سمت راست ندارد، لذا $p = 0$. از روش راث استفاده می‌کنیم تا تعداد قطب‌های سمت راست محور موهومی را برای سیستم حلقه بسته بدست آوریم. لذا معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از: $\Delta(s) = s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 5 = 0$

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 3 & 5 \\ s^3 & 1 & 5 & \\ s^2 & -2 & 5 & \\ s^1 & \frac{15}{2} & & \\ s^0 & 5 & & \end{array}$$

به واسطه دو تغییر علامت در ستون اول جدول راث، سیستم حلقه بسته دارای ۲ قطب سمت راست محور موهومی می‌باشد، لذا $z = 2$. از طرفی با توجه به مسیر نایکوئیست داده شده، با توجه به متن درس، معیار پایداری نایکوئیست به صورت $N_{-1} = z - p - p_\omega$ است که p_ω تعداد قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز روی محور موهومی است. لذا $p_\omega = 2$. با جایگذاری در رابطه مفروض داریم: $N_{-1} = 2 - 0 - 2 = 0$ بنابراین نمودار قطبی نباید نقطه بحرانی $(-1+j0)$ را دور بزند. در نتیجه گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

۵۱- گزینه «۴»ـ (متوسط)

چون منحنی فاز از -180° شروع شده است، نوع سیستم ۲ می‌باشد. پس گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست می‌باشند. همچنین با توجه به زاویه ۹۰- در فرکانس‌های بالا $(\omega \to \infty)$ و در نظر گرفتن می‌نیمم فاز بودن گزینه‌های باقیمانده، بایستی تفاضل صفرها و قطب‌ها یک باشد. بنابراین گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

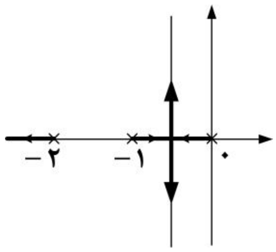
۵۲- گزینه «۱»ـ (متوسط)

برای تعیین حد فاز و حد بهره ابتدا بایستی فرکانس‌های گذر بهره ω_1 و گذر فاز ω_π را بدست آوریم. با توجه به نمودار قطبی داده شده $\omega_\pi = ۴۰$ است. با اندازه‌گیری داریم: $|GH(j\omega_\pi)| = |GH(j۴۰)| = ۰/۶$

$$G.M = -۲۰\log|GH(j۴۰)| = ۴/۴۳۷dB$$

برای بدست آوردن گذر فاز، دایره‌ای به مرکز صفر و شعاع یک رسم می‌کنیم. فرکانس محل تلاقی دایره واحد و نمودار قطبی، فرکانس گذر فاز می‌باشد ($\omega_1 \approx ۸\frac{rad}{s}$). با اندازه‌گیری زاویه، حد فاز تابع تبدیل ۳۵° می‌باشد. $P.M = ۳۵^\circ$

۵۳- گزینه «۲»ـ (متوسط)



مکان هندسی ریشه‌های سیستم حلقه بسته برای $k > ۰$ به صورت روبرو است.

بنابراین با توجه به مکان هندسی ریشه‌ها (RL)، نقطه شکست بین ۰ و ۱- قرار دارد.

پس گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

۵۴- گزینه «۲»ـ (متوسط)

ابتدا فرکانس گذر بهره را بدست می‌آوریم.

$$GH(j\omega) = \frac{ke^{-j\omega T}}{j\omega + ۱} \Rightarrow |GH(j\omega_1)| = ۱ \to \frac{k}{\sqrt{\omega_1^۲ + ۱}} = ۱ \quad \to \quad \omega_1 = \sqrt{k^۲ - ۱}$$

شرط پایداری عبارتست از: $\angle G(j\omega_1) > -\pi$

از طرفی: $\angle G(j\omega_1) = -T\omega_1 - \tan^{-۱}\omega_1 = -T\sqrt{k^۲ - ۱} - \tan^{-۱}\sqrt{k^۲ - ۱}$

با جایگذاری روابط اخیر داریم: $-T\sqrt{k^۲ - ۱} - \tan^{-۱}\sqrt{k^۲ - ۱} > -\pi \quad \to \quad T\sqrt{k^۲ - ۱} + \tan^{-۱}\sqrt{k^۲ - ۱} < \pi$

۵۵- گزینه «۱» ـ (دشوار)

$$GH(j\omega) = \frac{۱}{۱ - \omega^۲}$$

از روی مسیر نایکوئیست داریم:

در نقطه a: $\omega = ۰ \to |GH(۰)| = ۱$

در نقطه d، e و f: $\omega = \infty \to |GH(\infty)| = ۰$

بنابراین فقط گزینه‌های (۱) و (۲) صحیح می‌باشند. برای تشخیص پاسخ صحیح از بین گزینه‌های باقیمانده، کافی است نگاشت مسیر bc را بررسی کنیم. $s = j + \xi e^{j\theta} \qquad \theta : -\frac{\pi}{۲} \to \frac{\pi}{۲}$

$$GH(j + \xi e^{j\theta}) = \frac{۱}{۱ + (j + \xi e^{j\theta})^۲} \approx \frac{۱}{۲j\xi e^{j\theta}} = -j \underset{R\to\infty}{\mathrm{Re}}^{-j\theta} = \underset{R\to\infty}{\mathrm{Re}}^{j\frac{۳\pi}{۲}} e^{-j\theta} \qquad \Delta\theta : ۲\pi \to \pi$$

تنها گزینه‌ای که نگاشت مسیر bc آن دارای تغییرات زاویه‌ای از ۲π به سمت π است، گزینه (۱) می‌باشد.

۵۶- گزینه «۳» ـ (متوسط)

تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از:

$$GH(s) = \frac{۲۶(s + ۲)}{s^۳ + ۴s^۲ + s + ۳۰}$$

از روش راث استفاده می‌کنیم. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s) = ۱ + \frac{۲۶(s + ۲)}{s^۳ + ۴s^۲ + s + ۳۰} = ۰ \to \Delta(s) = s^۳ + ۴s^۲ + ۲۷s + ۸۲ = ۰$$

چون شرایط پایداری (هم علامت بودن و مخالف صفر بودن ضرایب و شرط $۸۲ \times ۱ < ۲۷ \times ۴$) برقرار است، سیستم حلقه بسته پایدار است. لذا $z = ۰$. حال پایداری سیستم حلقه باز را بررسی می‌کنیم. معادله مشخصه سیستم حلقه باز عبارتست از

$\Delta(s)=s^{۳}+۴s^{۲}+s+۳۰$. با توجه به عدم برقراری شرط $(۳۰\times۱\times۱>۴\times۱)$، دو تغییرعلامت در درایه‌های ستون اول جدول راث داریم. لذا سیستم حلقه باز دارای دو قطب سمت راست محور موهومی است. پس طبق معیار پایداری نایکوئیست داریم:

$$p=۲ \;\Rightarrow\; N_{-۱}=z-p=۰-۲=-۲$$

بنابراین نمودار نایکوئیست بایستی نقطه بحرانی $(-۱+j۰)$ را ۲ بار در خلاف جهت مسیر نایکوئیست داده شده دور بزنند.

۵۷- گزینه «۳» ـ (ساده)

تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از $GH(s)=\dfrac{ke^{-۲s}}{s+۱}$. ابتدا فرکانس گذر فاز را بدست می‌آوریم:

$$\angle GH(j\omega_\pi)=-\pi \quad\rightarrow\quad -۲\omega_\pi-\tan^{-۱}\omega_\pi=-\pi \quad\rightarrow\quad \omega_\pi\approx ۱/۱۴۵\frac{rad}{\sec}$$

$$|GH(j\omega_\pi)|=\frac{k}{\sqrt{۱+\omega_\pi^{۲}}}=\frac{k}{\sqrt{۱+(۱/۴۵)^{۲}}}=\frac{k}{۱/۵۲}$$

برای رسیدن به مرز ناپایداری باید داشته باشیم:

$$|GH(j\omega_\pi)|=۱ \quad\rightarrow\quad k=۱/۵۲$$

۵۸- گزینه «۲» ـ (متوسط)

با توجه به فرض غیرمی‌نیمم فاز بودن سیستم، گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست می‌باشند. از گزینه‌ها داریم:

$$G(s)=\frac{k(\frac{s}{۰/۵}-۱)}{\underbrace{s(\frac{s}{۰/۵}+۱)(\frac{s}{۲}+۱)}_{\text{فرم استاندارد}}}=\frac{۲k(s-۰/۵)}{s(s+۰/۵)(s+۲)}$$

$$|G(j\omega)|\Big|_{\omega=۰/۱}=۲۰dB \quad\rightarrow\quad ۲۰\log k=۲۰ \quad\rightarrow\quad k=۱ \;\Rightarrow\; G(s)=\frac{۲(s-۰/۵)}{s(s+۰/۵)(s+۲)}$$

۵۹- گزینه «۱» ـ (متوسط)

با توجه به زاویه فاز سیستم در $\omega\rightarrow\infty$ (-۲۷۰°) سیستم حلقه باز نامی‌نیمم فاز می‌باشد. زیرا در صورت می‌نیمم فاز بودن سیستم، بایستی فاز آن در $\omega\rightarrow\infty$ برابر باشد با: $-(n-m)۹۰=-۹۰^\circ$

چون $|G(j\omega_\pi)|<۱$، سیستم حلقه بسته برای $k=۱$ پایدار است. برای پایداری حلقه بسته باید داشته باشیم:

$$|kG(j\omega_\pi)|<۱$$

با توجه به نمودار اندازه داریم:

$$۰/۴k<۱ \quad\rightarrow\quad k<۲/۵$$

۶۰- گزینه «۴» ـ (ساده)

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=۱+\frac{k(s+۱)}{s(s-۲)}=۰ \quad\rightarrow\quad \Delta(s)=s^{۲}+(k-۲)s+k=۰$$

شرایط پایداری عبارتند از:

$$\begin{cases}k>۰\\ k-۲>۰\end{cases} \xrightarrow{\;\cap\;} k>۲$$

بنابراین سیستم برای $۰\le k\le ۲$ ناپایدار خواهد بود که با توجه به درایه‌های ستون اول جدول راث، در این حالت سیستم دو قطب ناپایدار خواهد داشت.

۶۱- گزینه «۱» ـ (متوسط)

تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از:

$$GH(s)=\frac{k(۱+۵s)}{(۱+s)(۱+۲s)} \quad\rightarrow\quad \angle GH(\infty)=-\frac{\pi}{۲}$$

از زاویه تابع تبدیل حلقه باز در ∞ گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست می‌باشند.

حال برای تشخیص گزینه صحیح از رفتار فرکانس پایین سیستم استفاده می‌کنیم.

$$\angle GH(0^+) = (\tan^{-1} 5\omega - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1} 2\omega)\Big|_{\omega = 0^+} > 0$$

۶۲- گزینه «۱» ـ (ساده)

نوع سیستم صفر می‌باشد. لذا:

$$k_p = \lim_{s \to 0} GH(s) = k \quad \Rightarrow \quad e_{ss} = \frac{1}{1+k_p} = \frac{1}{1+k} = cte$$

۶۳- گزینه «۳» ـ (ساده)

با توجه به متن درس، گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

۶۴- گزینه «۴» ـ (ساده)

با توجه به می‌نیمم فاز بودن سیستم، از اندازه فاز در فرکانس‌های بالا $(\omega \to \infty)$ تفاوت درجه صورت و مخرج را پیدا می‌کنیم.

$$-90(n-m) = -270 \quad \to \quad n-m = 3$$

لذا گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست می‌باشند. از طرفی برای انتقال منحنی دامنه به نقطه بحرانی $(0dB, -180^\circ)$ باید بهره را به اندازه $6\ db$ کاهش دهیم. داریم:

$$GM = -6db$$

۶۵- گزینه «۲» ـ (ساده)

تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتند از:

$$GH(s) = \frac{k(s-1)}{(s+1)}$$

با توجه به متن درس، برای حل این گونه مسائل کافیست مقدار k در تابع تبدیل حلقه باز به ak تبدیل شود که a حد بهره مطلوب می‌باشد. بنابراین در مثال مفروض کافیست k را به $2k$ تبدیل کرده و سپس از روش راث استفاده کنیم.

$$\Delta(s) = 1 + \frac{2k(s-1)}{(s+1)} = 0 \quad \to \quad \Delta(s) = (1+2k)s + 1 - 2k = 0$$

$1-2k > 0 \quad \to \quad k < \frac{1}{2}$:شرط پایداری

بنابراین مقدار مطلوب $k = \frac{1}{2}$ خواهد بود.

۶۶- گزینه «۲» ـ (متوسط)

از قسمت فرکانس پایین نمودار بود درمی‌یابیم که نوع سیستم یک می‌باشد. همچنین از قسمت فرکانس بالای نمودار بود درمی‌یابیم که سیستم سره می‌باشد (تعداد صفرها و قطب‌های محدود آن با هم برابرند).

$\lambda = 1 \quad \to \quad$ پله $e_{ss} = 0$

شتاب $e_{ss} = \infty$

توجه شود که ثابت خطای شیب از تقاطع مجانب $-20\frac{dB}{dec}$ با خط $0dB$ بدست می‌آید. لذا:

$$k_v = 2 \quad \to \quad e_{ss} = \frac{R}{k_v} = \frac{1}{2}$$

۶۷- گزینه «۱» ـ (دشوار)

تابع تبدیل حلقه باز سیستم نامعین عبارتست از:

$$\tilde{g}(s) = g(s) + \delta g(s)$$

به این نوع نامعینی در کنترل نامعینی جمع‌شونده می‌گویند. از نمودارهای ناکوئیست توابع تبدیل (۱)، (۲) و (۳) می‌توان دریافت که برای $\delta g(s)$ پایدار هر سه سیستم حلقه بسته پایدار می‌باشند. با توجه به این که تابع تبدیل داده شده در گزینه (۴) حتی برای $\delta g(s) = 0$ منجر به سیستم حلقه بسته ناپایدار می‌گردد، لذا گزینه (۴) صحیح نمی‌باشد. از آنجا که در گزینه‌های باقیمانده $\tilde{g}(s)$ قطب ناپایداری ندارد، لذا سیستم حلقه بسته پایدار است اگر $1 + \tilde{g}(s) \neq 0$ باشد و نمودار نایکوئیست سیستم نامعین نقطه $(-1+j)$ را دور نزند. توجه کنید:

$$1 + \tilde{g}(s) = (1 + g(s))\left(1 + \frac{1}{1+g(s)}\delta g(s)\right)$$

اگر رابطه زیر برقرار باشد نقطه $(-1+j)$ دور زده نخواهد شد.

$$\sup_{\omega}\left|\frac{\delta g(j\omega)}{1+g(j\omega)}\right| < 1$$

که در آن $\sup(\circ)$، بزرگترین مقدار تابع بر روی کلیه فرکانس‌ها را نشان می‌دهد. به عبارتی دیگر:

$$\left|\frac{\delta g(j\omega)}{1+g(j\omega)}\right| = \left|\delta\, g(j\omega)\right| \left|\frac{1}{10+g(j\omega)}\right| < 1 \quad \forall\omega$$

بنابراین $\left|(1+g(j\omega))^{-1}\right|$ باید به ازاء کلیه فرکانس‌ها کوچکتر از یک باشد. برای گزینه (۱) داریم:

$$\left|(1+\frac{1}{j\omega+2})^{-1}\right| \left|\frac{j\omega+2}{j\omega+3}\right| < 1 \quad \forall\omega$$

برای گزینه (۲)، داریم:

$$\left|(1+\frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+2)})^{-1}\right| = \left|\frac{2-\omega^2+j3\omega}{3-\omega^2+j3\omega}\right|$$

و این مقدار همواره کمتر از یک نمی‌باشد. به عنوان مثال در $\omega=\sqrt{3}$ رادیان بر ثانیه دامنه از یک بزرگتر خواهد بود. برای گزینه (۳)، داریم:

$$\left|(1+\frac{1}{j\omega(j\omega+1)})^{-1}\right| = \left|\frac{-\omega^2+j\omega}{1-\omega^2+j\omega}\right|$$

که این مقدار نیز همواره کوچکتر از یک نمی‌باشد. به عنوان مثال ، در $\omega=1$ رادیان بر ثانیه دامنه از یک بزرگتر است.

۶۸- گزینه «۳» ـ (متوسط)

$$G(j\omega)=\frac{4(j\omega+2)}{(j\omega+1)(j\omega-3)} \;\to\; \operatorname{Im}G(j\omega)=0 \;\to\; \begin{cases}\omega=0\\ \omega=1 \Rightarrow\quad G(j\omega)\Big|_{\omega=1}=-2\\ \omega=\infty\end{cases}$$

بنابراین یکی از گزینه‌های (۱) و (۳) صحیح می‌باشد. از طرفی دیگر داریم:

$$|G(j\omega)|_{\omega=\infty}=0 \;,\; \angle G(j\omega)\Big|_{\omega=\infty}=-90$$

۶۹- گزینه «۱» ـ (متوسط)

s^4	1	11	15
s^3	6	6	
s^2	10	15	
s^1	-3		
s^0	15		

ابتدا تعداد قطب‌های سمت راست محور موهومی تابع تبدیل حلقه باز را با استفاده از روش راث بدست می‌آوریم. به دلیل دو تغییرعلامت در درایه‌های ستون اول جدول راث، تابع تبدیل حلقه باز دارای دو قطب سمت راست محور موهومی خواهد بود. لذا $p=2$. از طرفی با توجه به نمودار نایکوئیست داده شده، نقطه بحرانی $(-1+j0)$ دو دور در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت زده می‌شود. لذا $N_{-1}=-2$. بنابر معیار پایداری نایکوئیست داریم:

$$N_{-1}=z-p \;\to\; -2=z-2$$

$z=0 \;\to\;$ سیستم حلقه بسته پایدار است

توجه کنید که در تعیین تعداد دفعات دور زده شده، گستره فرکانسی $-\infty$ تا 0 نیز رسم گردد.

۷۰- گزینه «۲» ـ (ساده)

از رفتار فرکانس بالا و پائین نمودار قطبی داریم:

$\angle G(j\omega)\Big|_{\omega=0^+}=-90^\circ \;\to\;$ نوع سیستم $\lambda=1$

$\angle G(j\omega)\Big|_{\omega=\infty}=-270^\circ \;\to\;$ تفاضل صفرها و قطب‌ها $n-m=3$

۷۱- گزینه «۳» ـ (ساده)

تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از:

$$GH(s)=\frac{ke^{-j2\omega}}{j\omega+1}=\frac{k}{\sqrt{1+\omega^2}}\angle -2\omega-\tan^{-1}\omega$$

ابتدا فرکانس گذر فاز را پیدا می‌کنیم.

$$\angle GH(j\omega_\pi)=-\pi \;\to\; -2\omega_\pi-\tan^{-1}\omega_\pi=-\pi \;\to\; \omega_\pi \approx 1/145$$

$$|GH(j\omega_\pi)| = \frac{k}{\sqrt{۱+\omega_\pi^۲}} = \frac{k}{\sqrt{۱+(۱/۱۴۵)^۲}} = \frac{k}{۱/۵۲}$$

برای پایداری باید داشته باشیم: $|GH(j\omega_\pi)| < ۱ \quad \rightarrow \quad k < ۱/۵۲$

بنابراین گزینه (۲) صحیح می‌باشد. در حل چنین تست‌هایی توجه داشته باشید که سیستم‌ها می‌نیمم فاز باشند.

۷۲- گزینه «۲» ـ (ساده)

از روی نمودار بهره ـ فاز حد بهره برابر با $-۱۰dB$ و حد فاز برابر با -۳۰° می‌باشد. بنابراین سیستم حلقه بسته با فیدبک منفی ناپایدار است. با توجه به داده‌های مسأله برای داشتن حد بهره حداقل ۱۵ dB داریم:

$$۲۰\log k = -۲۵ \quad \rightarrow \quad k = ۰/۰۵۶$$

اگر به نمودار بهره ـ فاز دقت کنیم، مشاهده می‌شود که با بهره داده شده حد بهره مطلوب برآورده می‌شود. همچنین بر اساس بهره جدید، حد فاز سیستم حدوداً ۴۵° بوده که در محدوده مطلوب می‌باشد.

۷۳- گزینه «۴» ـ (متوسط)

از روش راث استفاده می‌کنیم. معادله مشخصه مربوط به هر سیستم عبارتست از:

$$\Delta_۱(s) = \tau_b s^۳ + s^۲ + k\tau_a s + k = ۰$$

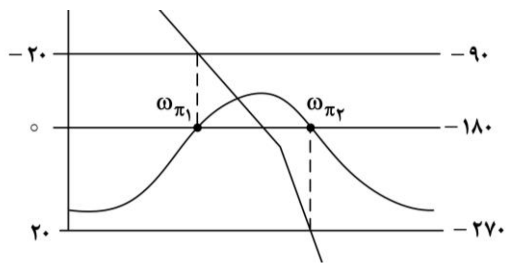
$s^۳$	τ_b	$k\tau_a$
$s^۲$	۱	k
$s^۱$	$k(\tau_a - \tau_b)$	
$s^۰$	k	

$$\Delta_۲(s) = \tau_b s^۳ + s^۲ + k$$

$s^۳$	τ_b	۰
$s^۲$	۱	k
$s^۱$	$-k\tau_b$	
$s^۰$	k	

با در نظر گرفتن درایه‌های ستون اول جدول راث برای هر کدام از سیستم‌ها می‌توان نتیجه گرفت که سیستم شکل (۱) پایدار است و سیستم شکل (۲) به واسطه دو تغییرعلامت در ستون اول جدول راث، دارای دو قطب ناپایدار است.

۷۴- گزینه «؟» ـ (متوسط)



برای پایداری بایستی حد فاز سیستم مثبت باشد. با توجه به نمودار فاز داده شده، مشاهده می‌شود که سیستم پایدار مشروط است. به بیانی دیگر، برای پایداری باید فرکانس گذر فاز، بین دو نقطه داده شده در شکل باشد. لذا با توجه به نمودار دامنه داریم:

$$\begin{array}{l} ۲۰\log k > -۲۰ \;\rightarrow\; k > ۰/۱ \\ ۲۰\log k < ۲۰ \;\rightarrow\; k < ۱۰ \end{array} \xrightarrow{\cap} ۰/۱ < k < ۱۰$$

اگرچه سیستم می‌نیمم فاز بوده و زاویه فاز آن در بی‌نهایت ۲۷۰- درجه (نوع سیستم سه) می‌باشد، ولی چون برای $k = ۱۰۰۰$ سیستم ناپایدار است، خطا بینهایت خواهد بود.

۷۵- گزینه «۲» ـ (ساده)

از نمودار قطبی مفروض داریم $P.M = ۴۵^\circ$. بنابراین فاز منفی که توسط عامل تأخیر زمانی به سیستم می‌تواند اضافه شود برابر است با:

$$\omega_۱ T = \frac{\pi}{۴} \quad \rightarrow \quad ۱\times T = \frac{\pi}{۴} \quad \rightarrow \quad T = ۰/۷۸\sec$$

۷۶- گزینه «۱» ـ (ساده)

ابتدا پهنای باند را محاسبه می‌کنیم.

$$|G(j\omega_b)| = ۰/۷۰ \;\rightarrow\; \frac{۵۰\sqrt{\omega_b^۲ + ۱۰۰}}{\sqrt{\omega_b^۲+۱}\sqrt{\omega_b^۲ + ۲۵۰۰}} = ۰/۷۰۸ \;\rightarrow\; \omega_b = ۵۱/۶$$

با توجه به متن درس، واضح است که اعمال فیدبک پهنای باند را تغییر می‌دهد. حال فرکانس گذر بهره را بدست می‌آوریم.

$$|G(j\omega_1)|=1 \quad \rightarrow \quad 50\sqrt{\omega_1^2+100}=\sqrt{\omega_1^2+1}\sqrt{\omega_1^2+2500} \quad \rightarrow \quad \omega_1=22/3$$

$$\angle G(j\omega_1)\approx -45^\circ \quad \rightarrow \quad P.M=180+\angle G(j\omega_1)=135^\circ$$

بنابراین گزینه (۱) (بدون نیاز به محاسبه حد بهره) صحیح است.

۷۷- گزینه «۲» ـ (ساده)

چون شیب منحنی دامنه در فرکانس‌های پایین $-40\frac{dB}{dec}$ است، نوع سیستم دو می‌باشد. لذا گزینه (۳) نادرست است. با توجه به این که زاویه فاز سیستم در $\omega=\infty$ برابر -360° می‌باشد، قطعاً گزینه (۲) صحیح است. زیرا صفر سمت راست همانند قطب سمت چپ عمل می‌کند. به عبارتی دیگر، سیستم نامی‌نیمم فاز می‌باشد. همچنین توجه کنید گزینه‌های (۱) و (۴) می‌نیمم فاز بوده و لذا زاویه فاز آن‌ها در $\omega=\infty$ برابر است با: $-(3-1)90^\circ=-180^\circ$

۷۸- گزینه «۴» ـ (متوسط)

با استفاده از دیاگرام بود، حاشیه‌های بهره و فاز سیستم برای $k=1$ بدست می‌آیند: $GM=7dB$ ، $PM=45^\circ$

برای آنکه حاشیه بهره سیستم حداقل ۱۲ dB باشد، باید توسط کنترل تناسبی حداقل ۵ dB نمودار دامنه را به طرف پایین انتقال دهیم. بنابراین: $20\log k=-5 \Rightarrow k=0/56$

برای $k=0/56$ حاشیه بهره ۱۲ dB و حاشیه فاز آن تقریباً 64° است.

۷۹- گزینه «۴» ـ (متوسط)

$$\angle GH(j\omega)\Big|_{\omega=0^+}=-180^\circ \quad \rightarrow \quad \lambda=2 \text{ نوع سیستم}$$

$$\angle GH(j\omega)\Big|_{\omega=\infty}=-180^\circ \quad \rightarrow \quad n-m=2 \text{ تفاضل صفرها و قطب‌ها}$$

بنابراین یکی از گزینه‌های (۳) و (۴) صحیح است. با توجه به گزینه‌های داده شده، تنها تفاوت آن‌ها در تغییرات فاز می‌باشد.

$$GH(s)=\frac{k(s+4)}{s^2(s+1)} \quad \rightarrow \quad \angle GH(j\omega)=-180+(\tan^{-1}\frac{\omega}{4}-\tan^{-1}\omega)$$

$$GH(s)=\frac{k(s+1)}{s^2(s+4)} \quad \rightarrow \quad \angle GH(j\omega)=-180+(\tan^{-1}\omega-\tan^{-1}\frac{\omega}{4})$$

با توجه به فاز سیستم در $\omega=0^+$ ($\angle GH(j0^+)>-\pi$)، گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

۸۰- گزینه «۳» ـ (ساده)

از روش راث استفاده می‌کنیم. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از: $\Delta(s)=s^3+s^2+ks+1+\frac{k}{2}$

شرایط پایداری عبارتست از:

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} k>0 \\ 1+\frac{k}{2}>0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cap} k>0 \\ 1\times k>1+\frac{k}{2} \rightarrow k>2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k>2$$

۸۱- گزینه «۴» ـ (متوسط)

تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از: $GH(s)=\frac{k}{s(s+1)(s+10)}$

چون نوع سیستم یک است، داریم: $k_v = \lim\limits_{s\to 0} sGH(s) = \frac{k}{10} \to e_{ss} = \frac{1}{k_v} = \frac{10}{k} < 0/1 \Rightarrow k > 100 \quad (1)$

با توجه به متن درس، با تبدیل k به $5k$ در تابع تبدیل حلقه باز استفاده می‌کنیم. لذا معادله مشخصه برابر است با:

$$\Delta(s) = s^3 + 11s^2 + 10s + 5k = 0$$

برای محاسبه حد بهره کافی است در جدول راث یک سطر صفر کامل ایجاد کنیم. داریم: $11\times 10 - 5\times k = 0 \to k = 22$

بنابراین حد بهره برای پایداری عبارتست از: $k < 22 \qquad (2)$

چون (۱) و (۲) ناحیه اشتراکی ندارند، لذا گزینه (۴) صحیح خواهد بود.

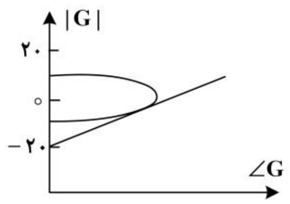
۸۲- گزینه «۴» ـ (ساده)

از نمودار اندازه، فرکانس‌های گوشه‌ای عبارتند از: $\omega = 12$, $\omega = 50$ (عامل قطب ساده)

$\omega = 3$ (عامل صفر ساده)

لذا گزینه (۴) صحیح می‌باشد. توجه کنید که زاویه فاز در فرکانس‌های پایین $-20\frac{dB}{dec}$ بوده و لذا نوع سیستم یک می‌باشد.

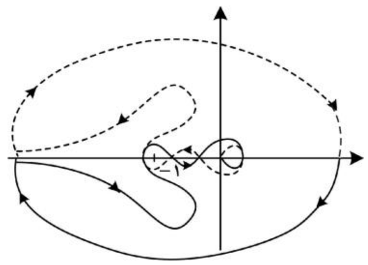
۸۳- گزینه «۴» ـ (ساده)



برای برآورده کردن خواسته مسأله بایستی منحنی $G(j\omega)$ بر مکان هندسی $M = 3$ مماس گردد، که این امر توسط بهره ثابت صورت می‌پذیرد. بدین منظور منحنی $G(j\omega)$ به اندازه $40dB$ به سمت پایین کشیده می‌شود. لذا:

$$20\log k_c = -40 \quad \to \quad k_c = \frac{1}{100}$$

۸۴- گزینه «۱» ـ (ساده)



با رسم گستره فرکانسی $-\infty$ تا 0، ابتدا نمودار قطبی را تکمیل می‌کنیم. مشاهده می‌شود $N_{-1} = 2$. چون $p = 0$ است، لذا $z = 2$. این بدین معناست که سیستم حلقه بسته دارای ۲ قطب سمت راست محور موهومی است.

۸۵- گزینه «۴» ـ (ساده)

با توجه به افزایش شیب منحنی دامنه در $s = 1$ به اندازه $20\frac{dB}{dec}$، یک صفر در $s = 1$ داریم. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست می‌باشند.چون زاویه فاز در $\omega = \infty$ برابر با -270° درجه می‌باشد. لذا سیستم نامی‌نیمم فاز بوده و قطعاً گزینه (۴) صحیح خواهد بود. زیرا صفر سمت راست همانند قطب سمت چپ عمل می‌کند. دقت کنید که با توجه به شیب $-20\frac{dB}{dec}$ در فرکانس‌های پایین در نمودار دامنه، نوع سیستم یک می‌باشد.

۸۶- گزینه «۲» ـ (ساده)

با توجه به $G(j\omega) = \frac{2e^{-j\omega t}}{1 + j\omega}$ و $t = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ فرکانس گذر بهره عبارتست از:

$$|G(j\omega_1)| = \frac{2}{\sqrt{1+\omega_1^2}} = 1 \quad \to \quad \omega_1 = \sqrt{3}\ \frac{rad}{s}$$

$$\angle G(j\omega_1) = -\omega_1 t - \tan^{-1}\omega_1 = -\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right) - \tan^{-1}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6}$$

$$P.M = \pi + \angle G(j\omega_1) = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

۸۷- گزینه «۲» ـ (ساده)

ابتدا گستره فرکانسی $-\infty$ تا ۰ را رسم می‌کنیم. داریم: $N_{-1}=2\ ,\ P_R=2 \rightarrow N_{-1}=P-P_R \quad \Rightarrow \quad P=4$

۸۸- گزینه «۳» ـ (متوسط)

با توجه به فرکانس گوشه‌ای $\omega=1$ در منحنی دامنه، تابع تبدیل باید عبارت $\frac{1}{s+1}$ را داشته باشد. از منحنی فاز نتیجه می‌گیریم

که سیستم باید تأخیردار باشد. لذا: $G(s)=\frac{e^{-Ts}}{s+1}$

برای تعیین T داریم:

$$\angle G(j\omega)=\underbrace{-\omega T}_{\text{برحسب رادیان}}-\tan^{-1}\omega=\underbrace{-57/3\,\omega T}_{\text{برحسب درجه}}-\tan^{-1}\omega$$

$$\angle G(\omega=8)=-300^\circ=-57/3\times 8\times T-83 \quad\rightarrow\quad T=0/5 \quad\Rightarrow\quad G(s)=\frac{e^{-0/5s}}{s+1}$$

۸۹- گزینه «۲» ـ (ساده)

با رسم گستره فرکانسی $-\infty$ تا ۰ نمودار قطبی و مفروضات مسأله داریم:

$$\begin{matrix} p=0 \\ N_{-1}=3 \end{matrix} \rightarrow N_{-1}=z-p \rightarrow z=3$$

۹۰- گزینه «۲» ـ (متوسط)

حل (الف): می‌دانیم

$$c_{ss}=\lim_{s\to 0} sC(s)=\lim_{s\to 0} s.T(s).\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}T(s)=\lim_{s\to 0}\frac{G(s)}{1+G(s)}$$

از دیاگرام قطبی داریم $\lim_{s\to 0}G(s)=4$. از اینرو: $c_{ss}=\frac{4}{5}$

حل (ب): برای آن که دامنه خروجی در فرکانسی برای دامنه ورودی داده شده برابر یک باشد، بایستی دامنه تابع تبدیل حلقه بسته در آن فرکانس برابر یک باشد. با توجه به متن درس، از دوایر Mـثابت، برای $M=1$ بدست می‌آوریم: $x=-\frac{1}{2}$

با ترسیم این خط، از شکل (ب) به سادگی مشاهده می‌شود که در دو نقطه نمودار قطبی $G(j\omega)$ را قطع می‌کند و لذا گزینه (۳) صحیح است.

حل (ج): برای تابع تبدیل $T(j\omega)=\frac{k}{(j\omega)^2+2\xi\omega_n(j\omega)+(\omega_n)^2}$ معادله‌های فرکانس تشدید و مقدار پیک تشدید عبارتند از:

$$\omega_p=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \rightarrow 6=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \qquad (1)$$

$$M_p=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \rightarrow 1/5=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (2)$$

و از شکل (ب) داریم: $|T(j6)|=1/5$

بنابراین داریم:

$$|T(j\omega)|=\frac{k}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\xi\omega_n\omega)^2}} \rightarrow 1/5=\frac{k}{\sqrt{(\omega_n^2-36)^2+(12\xi\omega_n)^2}} \qquad (3)$$

با حل معادلات (۱)، (۲) و (۳) بدست می‌آوریم: $\xi\cong 0/28 \ ,\ \omega_n\cong 6/5 \ ,\ k\cong 34$

حل (د): برای مدل تقریبی درجه دوم از سیستم داریم: $o.v=e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

برای $\xi=0/26$ بدست می‌آوریم: $o.v\cong 0/4 \Rightarrow C_m=1+o.v\cong 1/4$

همچنین داریم: $P.O\cong \%40$