سیگنال متناوب: سیگنال $x(t)$ متناوب با دوره تناوب T است اگر $x(t+T)=x(t) \quad \forall t$. کوچکترین عدد مثبت با این خاصیت را دوره تناوب اصلی سیگنال می گویند.

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

a_k ها ضرایب سری فوریه $x(t)$ و $e^{jk\omega_0 t}$ هارمونی k ام سیگنال $x(t)$ نامیده می شوند. $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$ فرکانس زاویه‌ای (rad/sec) و T_0 دوره تناوب اصلی سیگنال $x(t)$ است.

ضرایب سری فوریه سیگنال $x(t)$ از رابطه

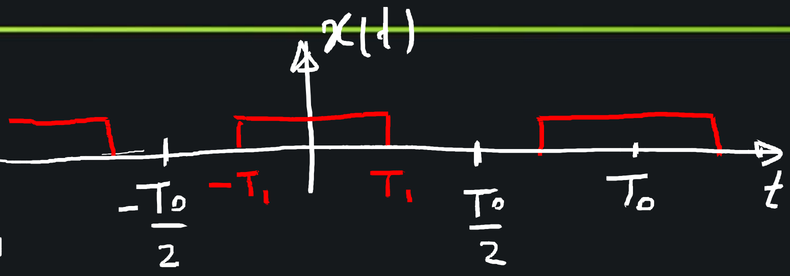
$$a_k=\frac{1}{T}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

بدست می آید.

شرط همگرایی سری فوریه: برای همگرا شدن $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega t}$ به $x(t)$ سه شرط دیریکله باید برقرار باشد.

1) $\int_{T_0} |x(t)|^2 dt$ محدود باشد 2) تعداد ناپیوستگی های $x(t)$ در یک دوره تناوب محدود باشد 3) تعداد اکسترمم های سیگنال در یک دوره تناوب محدود باشد.

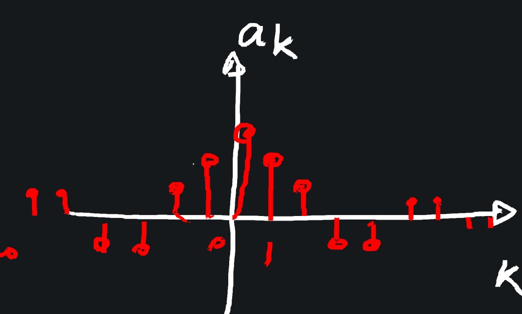
مثال: ضرایب سری فوریه $x(t)$ را بدست آورید.



$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}\, dt$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\frac{2\pi kt}{T_0}}\, dt = \frac{1}{T_0}\times\frac{1}{-j\frac{2\pi}{T_0}k}\, e^{-j\frac{2\pi kt}{T_0}}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{-1}{j2\pi k}\left[e^{-j\frac{2\pi kT_1}{T_0}} - e^{+j\frac{2\pi kT_1}{T_0}}\right]$$

$$a_k = \frac{1}{\pi k}\left[\frac{e^{j\frac{2\pi kT_1}{T_0}} - e^{-j\frac{2\pi kT_1}{T_0}}}{2j}\right] = \frac{1}{\pi k}\sin(k\omega_0 T_1)$$



$$a_0 = \frac{S(0)}{0}$$ مبهم

$\xrightarrow{\text{قاعده هوپیتال}}$

$$a_0 = \frac{\frac{d}{dk}\sin(k\omega_0 T_1)}{\frac{d}{dk}\pi k} = \frac{\omega_0 T_1 \cos(0)}{\pi} = \frac{\frac{2\pi}{T_0}T_1}{\pi} = \frac{2T_1}{T_0}$$

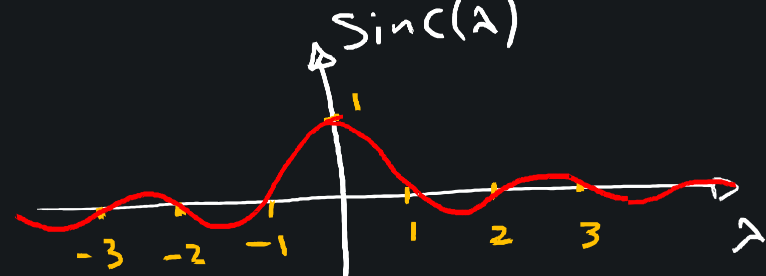
مقدار DC سیگنال

پوش a_k بفرم تابع سینک است.

تعریف تابع sinc

$$\text{Sinc}(\lambda) \triangleq \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}$$

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} = \frac{\sin\left(\pi \frac{2kT_1}{T_0}\right)}{\frac{T_0}{2T_1} \times \pi \frac{2kT_1}{T_0}} = \frac{2T_1}{T_0}\,\text{Sinc}\left(\frac{2kT_1}{T_0}\right)$$



بصورت کلی

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-j0\times\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int^{T_0} x(t)\, dt$$

مقدار DC سیگنال

خاصیت eignFunction ها:

$$e^{st} \to \boxed{LTI\ \text{سیستم}} \to y(t) = e^{st} * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\, e^{s(t-\lambda)}\, d\lambda = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\, e^{-s\lambda}\, d\lambda}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\, e^{-st}\, d\lambda$$

تبدیل لاپلاس دوطرفه h(t)

$$\underset{\text{eign Function}}{e^{st}} \to \boxed{LTI\ \text{سیستم}} \to \underset{\text{eignvalue}}{H(s)}\, e^{st}$$

مثال: پاسخ سیستمی LTI با $h(t) = e^{-2t}u(t)$ به ورودی $x(t) = e^{2jt}$ را بدست آورید.

$$e^{2jt} \to \boxed{} \to e^{2jt}\, H(2j)$$

$$H(2j) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t} u(t)\, e^{-2jt}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2(1+j)t}\, dt$$

$$= \frac{-1}{2(1+j)} \left\{ e^{-2(1+j)\infty} - 1 \right\} = \frac{1}{2(1+j)}$$

$$y(t) = \frac{e^{2jt}}{2(1+j)}$$

محاسبه خروجی سیستم LTI به سیگنال ورودی متناوب :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow y(t) = \underbrace{\mathcal{L}}_{\text{اپراتور پاسخ سیستم}}\left\{ \sum a_k e^{jk\omega_0 t} \right\} \underbrace{=}_{\text{خاصیت جمع پذیری}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}\left\{ a_k e^{jk\omega_0 t} \right\}$$

$$y(t) \underbrace{=}_{\text{خاصیت همگنی}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, \mathcal{L}\left\{ \underbrace{e^{jk\omega_0 t}}_{\text{eignfunction}} \right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

مثال : پاسخ سیستم LTI با معادله دیفرانسیل به ورودی $x(t) = \sin(2t)$ را بدست آورید .

$$dy/dt + 1/2 \, y(t) = x(t)$$

$$x_1(t) = e^{st} \rightarrow y_1(t) = e^{st} H(s) \rightarrow d/dt\left(e^{st} H(s)\right) + \frac{1}{2}\left(e^{st} H(s)\right) = e^{st}$$

$$\Rightarrow s e^{st} H(s) + \frac{1}{2} e^{st} H(s) = e^{st} \rightarrow H(s) = \frac{1}{s + 1/2}$$

$$x(t) = \sin(2t) = \frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2j} \rightarrow \frac{1}{2j} e^{j2t} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \frac{1}{2j} e^{j2t} \cdot H(2j) = \frac{1}{2j} \frac{e^{j2t}}{2j+1}$$

$$\frac{1}{2j} e^{-j2t} \rightarrow \boxed{} \rightarrow \frac{1}{2j} e^{-j2t} \cdot H(-2j) = \frac{1}{2j} \frac{e^{-j2t}}{-2j+1}$$

$$y(t) = \frac{1}{2j}\left[\frac{e^{j2t}}{2j+1} - \frac{e^{-j2t}}{-2j+1} \right] = \frac{1}{2j} \frac{(-2j+1)e^{j2t} - (2j+1)e^{-j2t}}{(2j+1)(-2j+1)} = \frac{-2j(e^{j2t} + e^{-j2t}) + (e^{j2t} - e^{-j2t})}{5 \times 2j}$$

$$y(t) = -\frac{2}{5} \cos(2t) + \frac{1}{5} \sin(2t)$$

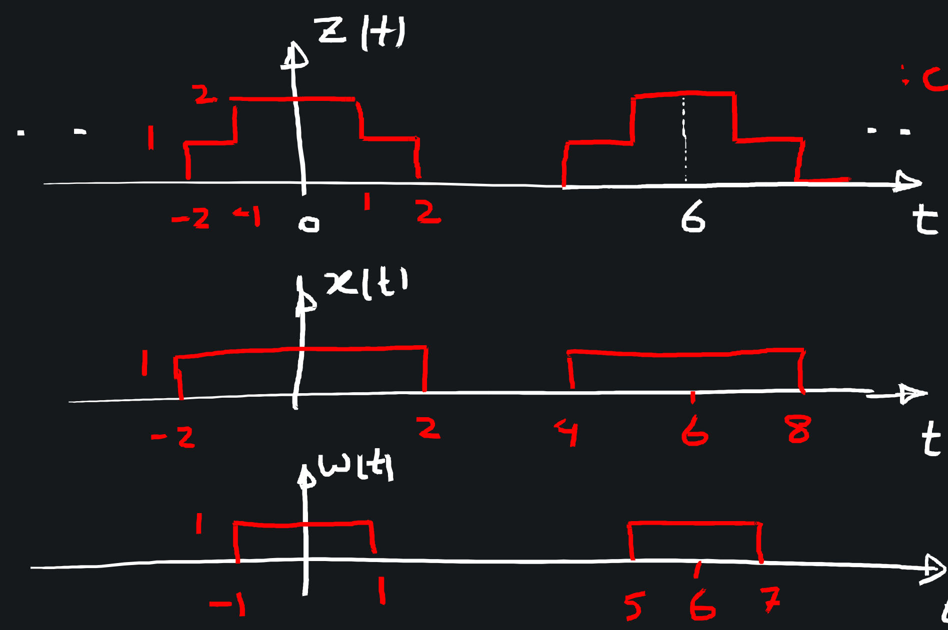
خواص سری فوریه:

۱) خاصیت خطی:

$$Ax(t)+Bw(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} Aa_k+Bb_k$$

(x, w دوره تناوب یکسان دارند)

مثال:



$$z(t)=x(t)+w(t)$$

$$\updownarrow FS \qquad \updownarrow FS$$

$$a_k=\frac{\sin(k\omega_0 2)}{k\pi}+\frac{\sin(k\omega_0 \times 1)}{k\pi}$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{6}=\pi/3$$

۲) خاصیت جابجایی زمانی :

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{Fs} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$$

اثبات :

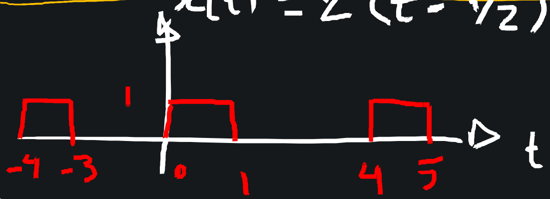
$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t-t_0)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-t_0}^{T_0-t_0} x(\lambda)\, e^{-jk\omega_0(\lambda+t_0)}\, d\lambda$$

$$\lambda = t-t_0$$

$$= e^{-jk\omega_0 t_0} \times \frac{1}{T_0}\int_{-t_0}^{T_0-t_0} x(\lambda)\, e^{-jk\omega_0 \lambda}\, d\lambda = e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$$

مثال : ضرایب سری فوریه $x(t)$ را بدست آورید :

$$x(t) = z(t-1/2)$$



$$\xleftrightarrow{Fs} \left(e^{-jk\frac{2\pi}{4}\times\frac{1}{2}}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{k\pi}$$

$$\xleftrightarrow{Fs} \frac{\sin\left(\frac{2k\pi}{4}\times\frac{1}{2}\right)}{k\pi}$$

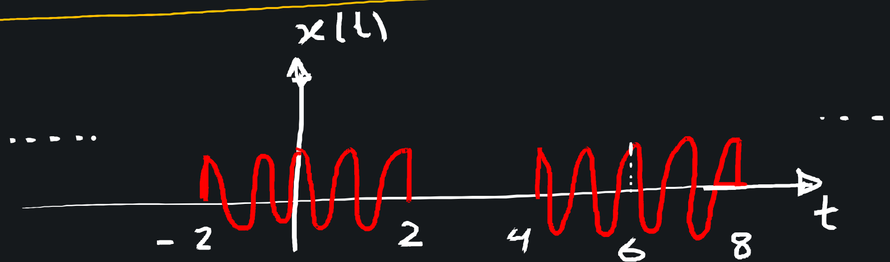
خاصیت جابجایی در فرکانس:

$$e^{j\omega_0 M t}\, x(t) \xleftrightarrow{FS} a_{k-M}$$

(اثبات)

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \left(x(t)\, e^{j\omega_0 M t}\right) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-j\omega_0 (k-M)t}\, dt = a_{k-M}$$



$$x(t) = z(t) \times \cos(t)$$

$$x(t) = z(t)\cdot\frac{e^{jt}}{2} + z(t)\frac{e^{-jt}}{2}$$

$$\Big\updownarrow FS$$

$$b_k = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{6}(k-1)\times 2\right)}{k\pi} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{6}(k+1)\times 2\right)}{k\pi}\right.$$

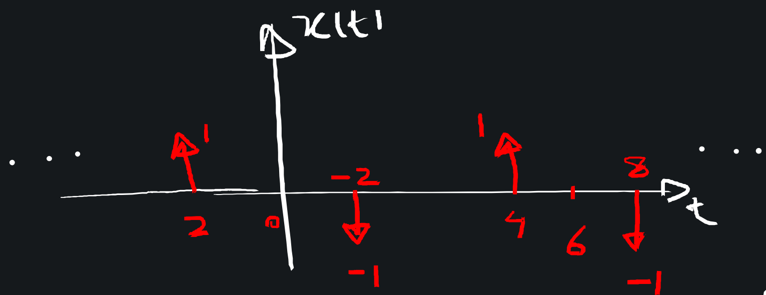
۴) خاصیت مشتق :

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FS} jk\omega_0 a_k$$

اثبات)

$$x(t) = \sum a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum (jk\omega_0 a_k) e^{jk\omega_0 t}$$



مثال : ضرایب سری فوریه برای x(t) بصورت سرراست را بدست آورید.

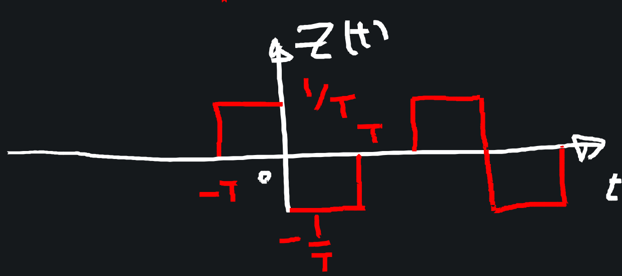
$$\frac{dz(t)}{dt} = x(t) \xleftrightarrow{FS} jk\omega_0 a_k = jk\omega_0 \times \frac{\sin(k\omega_0 2)}{k\pi}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

۵) خاصیت انتگرال: به شرط اینکه سطح زیر منحنی سیگنال در یک دوره تناوب صفر باشد، انتگرال یک سیگنال متناوب نیز متناوب است.

$$\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{jk\omega_0}\, a_k$$

مثال: ضرایب سری فوریه $x(t)$ به فرم مقابل را بدست آورید.



$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} z(\lambda)\,d\lambda \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{jk\omega_0}\cdot a_k = \frac{T_0}{T}\,\frac{\sin^2(k\omega_0 T/2)}{(k\pi)^2}$$

$$z(t) \xleftrightarrow{FS} a_k = \frac{1}{T}\,\frac{\sin(k\omega_0 T/2)}{k\pi}\, e^{+jk\omega_0 T/2} - \frac{1}{T}\,\frac{\sin(k\omega_0 T/2)}{k\pi}\, e^{-jk\omega_0 T/2}$$

$$= \frac{1}{T}\,\frac{\sin(k\omega_0 T/2)}{k\pi}\underbrace{\left(e^{+jk\omega_0 T/2} - e^{-jk\omega_0 T/2}\right)}_{2j\sin(k\omega_0 T/2)}$$

$$a_k = \frac{2j}{T}\,\frac{\sin^2(k\omega_0 T/2)}{k\pi}$$

۶) وارونگی زمان: $x(-t) \xleftrightarrow{F_s} a_{-k}$

۷) مزدوج گیری: $x^*(t) \xleftrightarrow{F_s} a^*_{-k}$

۸) تقارن هرمیتی برای سیگنالهای حقیقی:

اگر $x(t)$ حقیقی باشد $\Leftarrow x(t) = x^*(t) \Leftarrow a_k = a^*_{-k}$ (تقارن هرمیتی)

نتیجه $\Rightarrow$ $|a_k| = |a^*_{-k}| = |a_{-k}|$ و $Re\{a_k\} = Re\{a^*_{-k}\} = Re\{a_{-k}\}$

$\angle a_k = \angle a^*_{-k} = -\angle a_{-k}$ و $Im\{a_k\} = Im\{a^*_{-k}\} = -Im\{a_{-k}\}$

اگر $x(t)$ حقیقی و زوج باشد ضرایب سری فوریه آن حقیقی و زوج خواهد بود

" " حقیقی و فرد " " " " " موهومی خالص و فرد " "

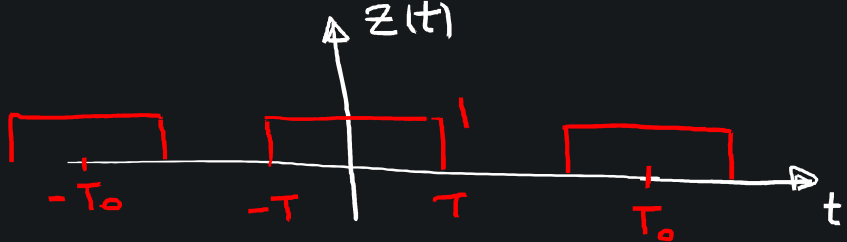
۹) ضرب :

$$x(t)\cdot w(t) \xleftrightarrow{FS} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l\, b_{k-l}$$

(اگر $x(t)$ و $w(t)$ دوره تناوب یکسان داشته باشند)

مثال: ضرایب سری فوریه

$$x(t) = z(t)\cos(5\omega_0 t)$$



$$\cos(5\omega_0 t) = \frac{e^{j5\omega_0 t}}{2} + \frac{e^{-j5\omega_0 t}}{2} = \frac{1}{2}e^{j\frac{10\pi}{T_0}t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{10\pi}{T_0}t} \xleftrightarrow{FS} b_k = \frac{1}{2}\times\delta[k-5] + \frac{1}{2}\times\delta[k+5]$$

$$z(t) \xleftrightarrow{FS} a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T)}{k\pi}$$

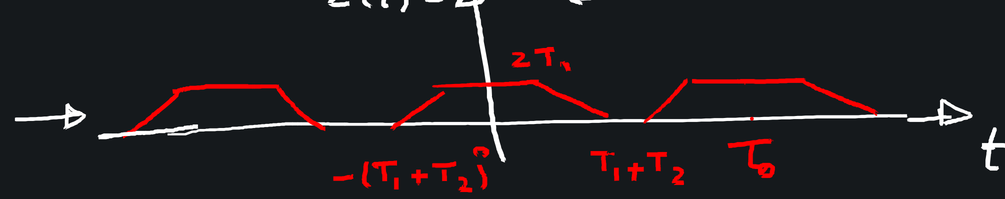
$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k * b_k = \frac{\sin(k\omega_0 T)}{k\pi} * \frac{1}{2}\left(\delta[k-5] + \delta[k+5]\right) = \frac{\sin((k-5)\omega_0 T)}{2\pi(k-5)} + \frac{\sin((k+5)\omega_0 T)}{2\pi(k+5)}$$

۱۰) کانولوشن متناوب :

$$x(t) \circledast w(t) = \int_0^{T_0} x(\lambda)\, w(t-\lambda)\, d\lambda \xleftrightarrow{F_s} T_0\, a_k \cdot b_k$$

مثال) کانولوشن متناوب $x(t)$ و $w(t)$ را بدست آورید و ضرایب سری فوریه آن را محاسبه کنید.

$$z(t) = x(t) \circledast w(t)$$



$$z(t) \xleftrightarrow{F_s} T_0\, a_k \cdot b_k = T_0 \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \cdot \frac{\sin(k\omega_0 T_2)}{k\pi}$$

۱۱) تغییر مقیاس:

$$x(\alpha t) \xleftrightarrow{F_s} a_k$$

مثال: اگر ضرایب سری فوریه $x(t)$ برابر a_k باشد ضرایب سری فوریه

$$z(t) = 3\overset{2T_0}{x(\tfrac{1}{2}t)} + 2\underset{T_0}{x(t)}$$

را بدست آورید.

اگر دوره تناوب $x(t)$ برابر T_0 باشد دوره تناوب $z(t)$ برابر $2T_0$ است

$$T_0' = \mathrm{Kmm}\{2T_0, T_0\} = 2T_0 \Longrightarrow \omega_0' = \omega_0/2$$

$$\underbrace{z(t)}_{\text{ضرایب سری فوریه } z(t)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0' t} = 3x(\tfrac{1}{2}t) + 2x(t) = 3\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{jm\omega_0' t} + 2\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l e^{jl\overset{2\omega_0'}{\cancel{\omega_0}}t}$$

$$2l = m \rightarrow l = m/2$$

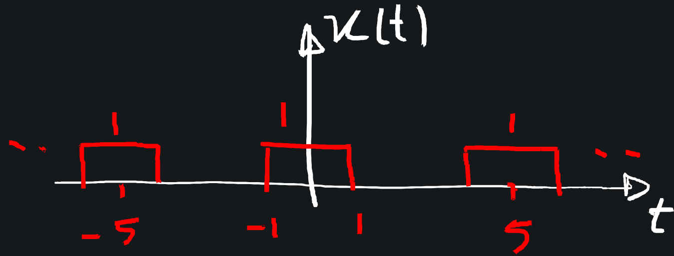
$$= \sum \underbrace{(3a_m + 2a_{m/2})}_{b_k} e^{jm\omega_0' t}$$

$$b_k = \begin{cases} 3a_m & m \text{ فرد} \\ 3a_m + 2a_{m/2} & m \text{ زوج} \end{cases}$$

۱۲) قضیه پارسوال:

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

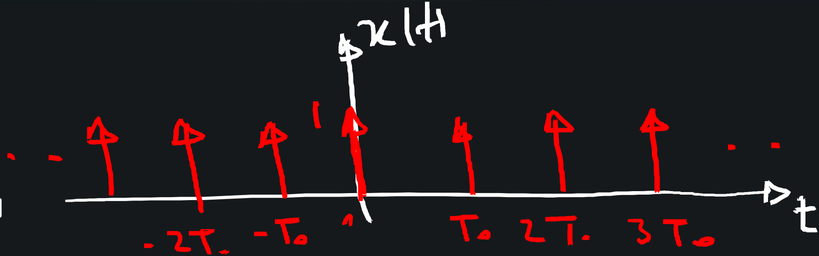
مثال: مقدار سری $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(2m\pi/5)}{m^2}$ چقدر است؟



$$\xleftrightarrow{FS} \frac{\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\times 1\right)}{k\pi}$$

$$\frac{1}{5}\int_0^5 |x(t)|^2 dt = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(2m\pi/5)}{(m\pi)^2} = \frac{1}{5}\times 2 \Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(2m\pi/5)}{m^2} = \frac{2\pi^2}{5}$$

ضرایب سری فوریه قطار ضربه :



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

$$a_m = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)\, e^{-jm\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t)\, e^{-jm\omega_0 t}\, dt$$

$$a_m = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t)\, e^{-jm\omega_0 \times 0}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t)\, dt = \frac{1}{T_0}$$