بسم الله الرحمن الرحیم

تبدیل z

تعریف:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}$$

دوطرفه $n=-\infty$

یکطرفه $n=0$

$$z=re^{j\omega} \longrightarrow X(z)=X(re^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(x[n]\,r^{-n}\right)e^{-j\omega n}$$

یعنی تبدیل z یک سیگنال برابر با تبدیل فوریه r^{-n} برابر آن سیگنال است.

ناحیه همگرایی: Region of convergence (ROC)

مجموعه نقاطی است که تبدیل z در آن همگرا است. یعنی $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]\,r^{-n}|<\infty$

توجه: ممکن است یک سیگنال تبدیل فوریه نداشته باشد $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|=\infty$ ولی با رابطه فوق برقرار باشد و تبدیل z داشته باشد.

با توجه به رابطه بالا ناحیه همگرایی یک Ring حلقه است.

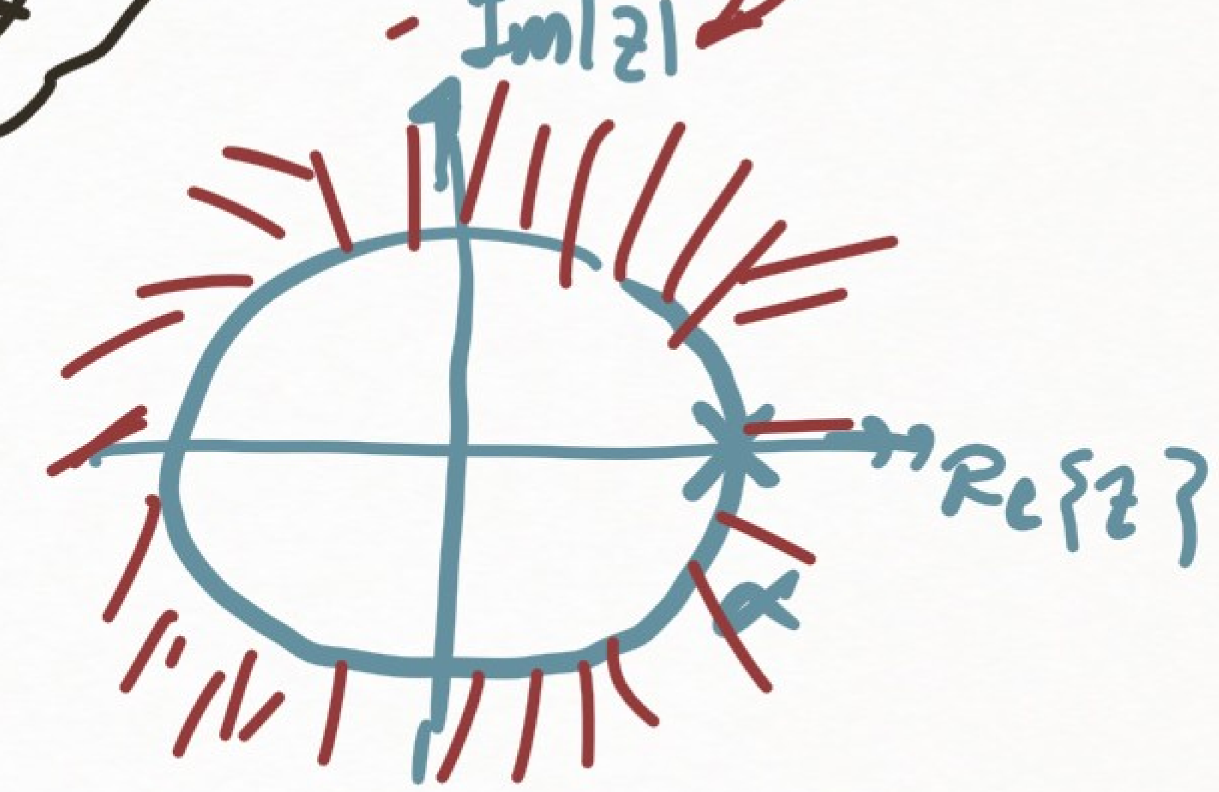
مثال ۱: Right sided sequence

$$x[n]=\alpha^{n}u[n] \longrightarrow X(z)=?$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha}$$

ناحیه همگرایی ROC

با فرض $|\alpha z^{-1}| < 1 \rightarrow |z| > |\alpha| \Rightarrow$



left sided sequence - ۲ مثال

$$x(n) = -\alpha^n u[-n-1]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -\alpha^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^n$$

شرط همگرایی $|\alpha^{-1} z| < 1 \rightarrow |z| < |\alpha|$

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1-\alpha^{-1} z} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha}$$

ROC

مثال -۳

$$x[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]\, z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2} z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\tfrac{1}{3} z^{-1}\right)^n$$

$$\left|\tfrac{1}{2} z^{-1}\right| < 1 \qquad \left|+\tfrac{1}{3} z^{-1}\right| < 1$$

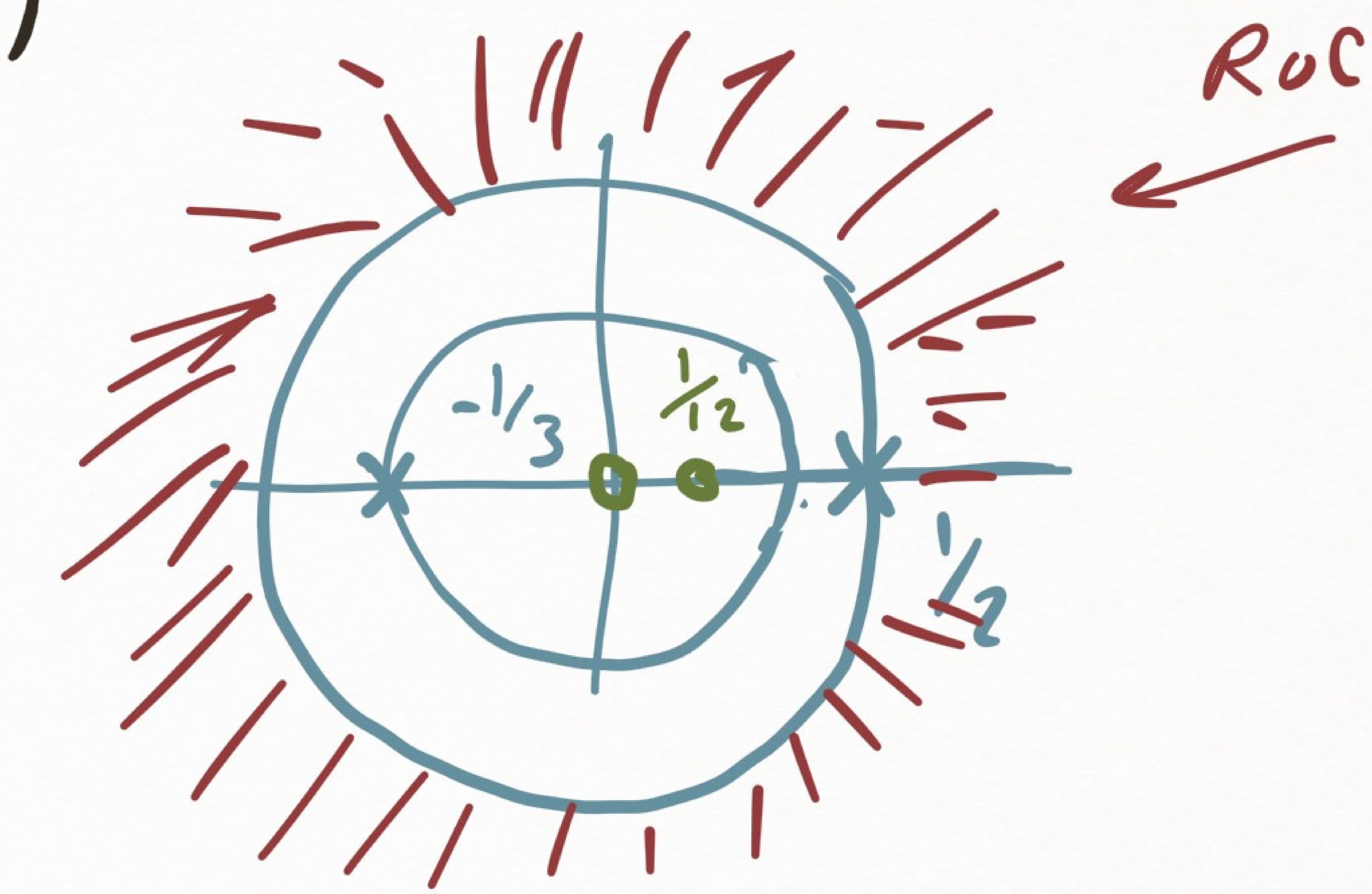
$$|z| > \tfrac{1}{2} \quad , \quad |z| > \tfrac{1}{3}$$

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3} z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{2\left(1-\frac{1}{12} z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3} z^{-1}\right)} = \frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)}$$

ریشه صورت : صفرها o

ریشه مخرج : قطب ها x



مثال ۴- Finite length sequence

$$x(n) = \begin{cases} \alpha^n \; ; \; 0 \le n \le N-1 \\ 0 \; , \; \text{others} \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1-(\alpha z^{-1})^N}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \, \frac{z^N - \alpha^N}{z-\alpha}$$

با توجه به اینکه ما برای محاسبه $\sum$ شرطی نداریم لذا ناحیه همگرایی کل صفحه خواهد بود البته بجز $z=0$

سوال - با توجه به $X(z)$ محاسبه شده یک قطب در $z=\alpha$ داریم ولی $X(z)$ به ازای آن بینهایت (∞) نمی‌شود
پس چرا ناحیه همگرایی تمام صفحه می‌باشد ؟

مثال ۵- $x(n) = \sin \omega_0 n \, u(n)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\sin \omega_0 n) u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\sin \omega_0 n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2j} \left(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right) z^{-n}$$

$$= \frac{1}{2j} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(e^{j\omega_0} z^{-1})}_{|\cdot|<1}{}^n - \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(e^{-j\omega_0} z^{-1})}_{|\cdot|<1}{}^n \right) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{1-e^{j\omega_0} z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-j\omega_0} z^{-1}} \right)$$

$$X(z) = \frac{1}{2j}\left(\frac{z e^{j\omega_0} - z e^{-j\omega_0}}{z^2 - z(e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0}) + 1}\right) = \frac{z \sin\omega_0}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1}$$

ادامه دارد-

$$X(z) = \frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}}$$

شرط همگرایی $\left|e^{j\omega_0} z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 1$

تمرین : نشان دهید :

1- $x(n) = \cos\omega_0 n \, u(n) \longrightarrow X(z) = \dfrac{1 - z^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}}$

2- $x(n) = \alpha^n \sin\omega_0 n \, u(n) \longrightarrow X(z) = \dfrac{\alpha z^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2\alpha z^{-1}\cos\omega_0 + \alpha^2 z^{-2}}$

3- $x(n) = \alpha^n \cos\omega_0 n \, u(n) \longrightarrow X(z) = \dfrac{1 - \alpha z^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2\alpha z^{-1}\cos\omega_0 + \alpha^2 z^{-2}}$

خلاصه‌ای از خواص ناحیه همگرایی:

1- ROC یک Ring است یا باشد در z plane یعنی $0 < r_R < |z| < r_L < \infty$

2- اگر ناحیه همگرایی شامل دایره واحد $|z|=1$ شود تبدیل فوریه $x(n)$ وجود دارد.

3- ناحیه همگرایی قطب را شامل نمی‌شود.

4- اگر $x(n)$ یک سیگنال محدود زمانی باشد ناحیه همگرایی تمام صفحه z خواهد شد به جز نقاط $z=0$ یا $z=\infty$ که ممکن است جزء ناحیه همگرایی نباشند.

5- اگر سیگنال دست راستی باشد ناحیه همگرایی بیرون دایره خواهد شد.

6- اگر سیگنال دست چپی باشد ناحیه همگرایی داخل دایره خواهد شد.

7- اگر سیگنال $x(n)$ دوطرفه باشد (هم چپی و هم راستی) ناحیه همگرایی بین دو دایره خواهد بود که محدود به قطب‌ها می‌باشد.

8- ناحیه همگرایی یک ناحیه پیوسته می‌باشد.

انتگرال کوشی :

تبدیل معکوس z

$$\oint_{(C)} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi j \qquad \text{می دانیم} \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2\pi j}\oint z^{-k}\, dz = \begin{cases} 1 \; ; & k=1 \\ 0 \; ; & k\neq 1 \end{cases}$$

کانتوری شامل مبدا

طرفین در $\frac{z^{k-1}}{2\pi j}$ ضرب، انتگرال گیری

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} \Longrightarrow \frac{1}{2\pi j}\oint_{(C)} X(z)\, z^{k-1}\, dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_{(C)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{(-n+k-1)}\, dz$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{(C)} X(z)\, z^{k-1}\, dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, \underbrace{\frac{1}{2\pi j}\oint_{(C)} z^{-n+k-1}\, dz}$$

وقتی $-n+k-1 = -1$

مطابق انتگرال کوشی وقتی مخالف صفر است که توان -1 شود یعنی $n=k$

بنابراین داریم:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi j}\oint_{(C)} X(z)\, z^{n-1}\, dz = x[n]}$$

تبدیل معکوس z

فرمول صفحه قبل فرمول تبدیل معکوس z می‌باشد که در کتاب‌های اوپنهایم از آن استفاده نمی‌کنیم و برای محاسبه انتگرال از قضیه مانده‌ها در ریاضیات استفاده می‌شود یعنی:

با جمع‌گیری

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{(C)} X(z)\, z^{n-1}\, dz = \sum \left(\text{مجموع مانده‌های } X(z)\, z^{n-1} \text{ در قطب‌های داخل منحنی } C \right)$$

مثال ۱

$$X(z)=\frac{5}{1-0.7z^{-1}} \quad , \quad |z|>0.7 \longrightarrow x(n)=?$$

روش اول - که معمولاً استفاده می‌شود.

می‌دانیم $x(n)=\alpha^n u(n) \longrightarrow X(z)=\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}} \implies x(n)=5(0.7)^n u(n)$

روش دوم - فرمول تبدیل معکوس

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)\, z^{n-1}\, dz = \sum \left(\text{مانده‌های } X(z)\, z^{n-1} \text{ در قطب‌ها} \right)$$

$$x(n)=\operatorname{Res}\{X(z)\, z^{n-1}\}_{z=0.7} = \operatorname{Res}\left\{\frac{5z^{n-1}}{1-0.7z^{-1}}\right\}_{z=0.7} = \lim_{z\to 0.7}\frac{5z^{n}(z-0.7)}{(z-0.7)} = 5(0.7)^n$$

ادامه مثال- چون ناحیه همگرایی خارج دایره می باشد لذا سیگنال سمت راستی و

$$x(n) = 5(0.7)^n u(n)$$

مثال ۲-

$$X(z) = \frac{1}{(1-0.3z^{-1})(1-0.9z^{-1})} = \frac{z^2}{(z-0.3)(z-0.9)} \longrightarrow x(n) = ?$$

راه اول- تجزیه به کسرهای جزئی که روش متداول می باشد.

راه دوم- استفاده از فرمول تبدیل معکوس

می شود:

$$x(n) = \mathrm{Res}\left\{X(z)\, z^{n-1}\right\}_{z=0.3} + \mathrm{Res}\left\{X(z)\, z^{n-1}\right\}_{z=0.9} = \cdots$$

تمرین-

$$X(z) = \frac{z^{10}}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{3}{2})^{10}(z+\frac{3}{2})^2(z+\frac{5}{2})(z+\frac{7}{2})} \longrightarrow \underline{\underline{x[-8] = ?}}$$

ناحیه همگرایی شامل دایره واحد است.

استفاده از تبدیل‌های معروف و خواص تبدیل z

تجزیه به کسرهای جزئی

روش سری توانی

استفاده از فرمول تبدیل معکوس و قضیه مانده‌ها

روش‌های محاسبه تبدیل z معکوس

توجه مهم:

$$X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

دست راستی: $x(n) = (\alpha)^n u(n) \,, \quad |z| > |\alpha|$

دست چپی: $x(n) = -(\alpha)^n u(-n-1) \,; \quad |z| < |\alpha|$

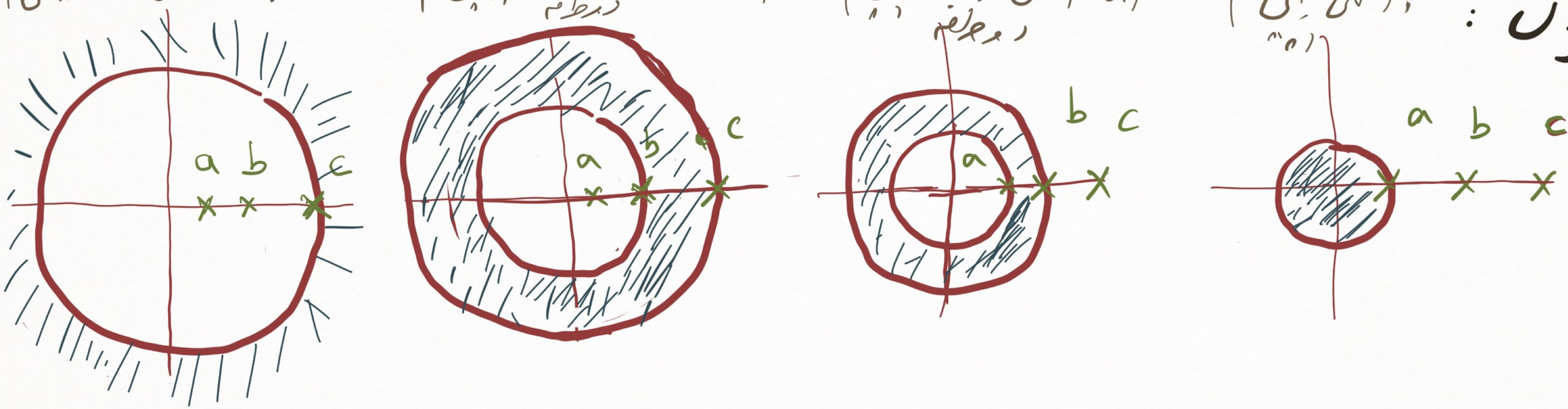
بنابراین اگر یک سیگنال نشان داده شده دارای سه قطب a ، b و c باشد حالات مختلف نواحی همگرایی آن و در نتیجه تعداد تبدیلات معکوس آن:

۱) تبدیل‌ها همگی دست راستی

۲) a و b راستی c دست چپی (دو طرفه)

۳) a راستی و b و c چپی (دو طرفه)

۴) همگی چپی



مثال تجزیه به کسرهای جزئی

$$X(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} \longrightarrow x[n] = ?$$

$$X(z) = \frac{A_1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\begin{cases} A_1 = (1-\frac{1}{4}z^{-1})X(z)\Big|_{z=1/4} = -1 \\ A_2 = (1-\frac{1}{2}z^{-1})X(z)\Big|_{z=1/2} = 2 \end{cases}$$

1. $|z| < 1/4$:

$$x[n] = -A_1(1/4)^n u[-n-1] - A_2(1/2)^n u[-n-1]$$

هر دو سیگنال چپی

2. $1/4 < |z| < 1/2$:

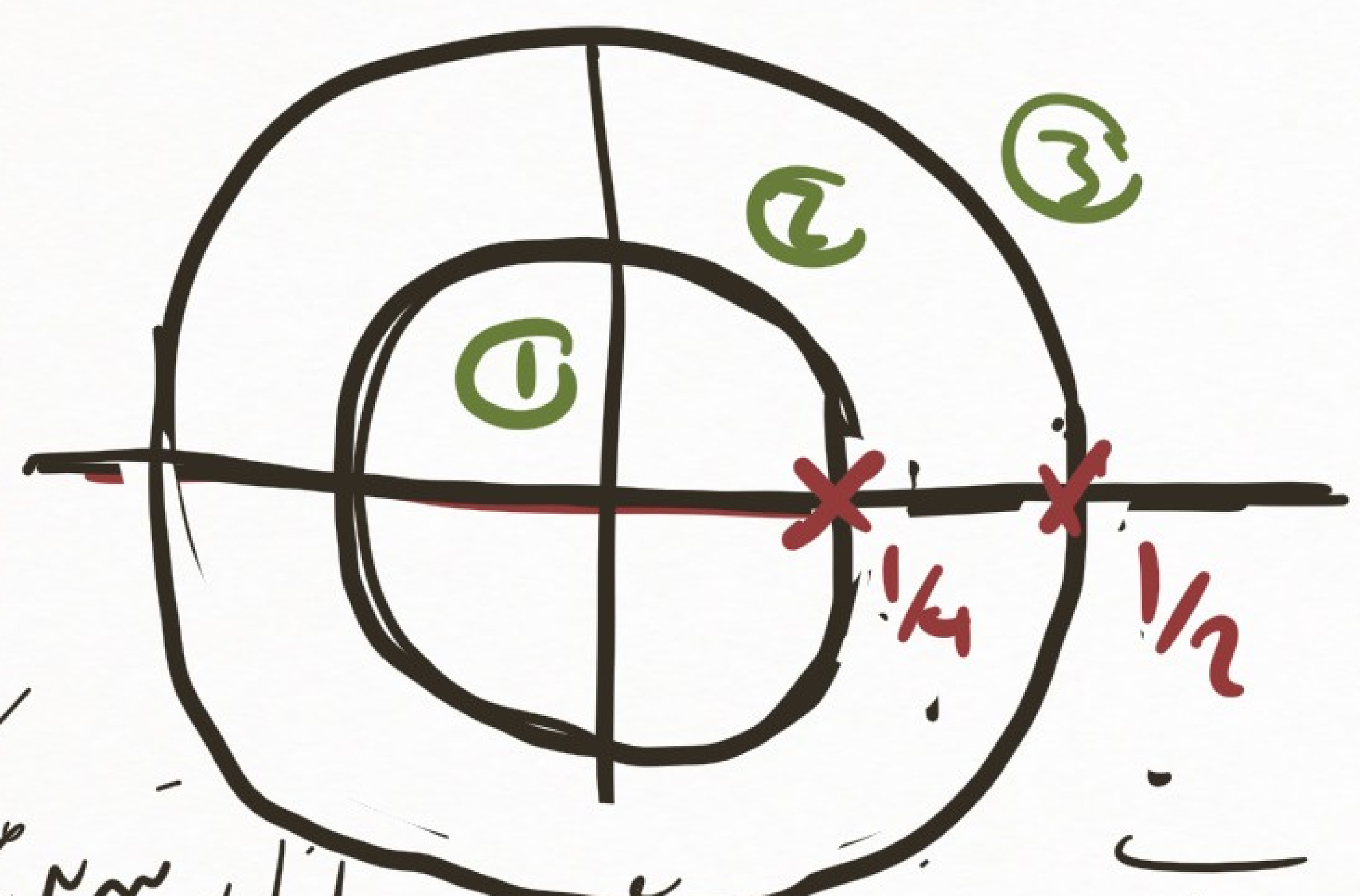
$$x[n] = A_1(1/4)^n u[n] - A_2(1/2)^n u[-n-1]$$

یکی چپی، یکی راستی

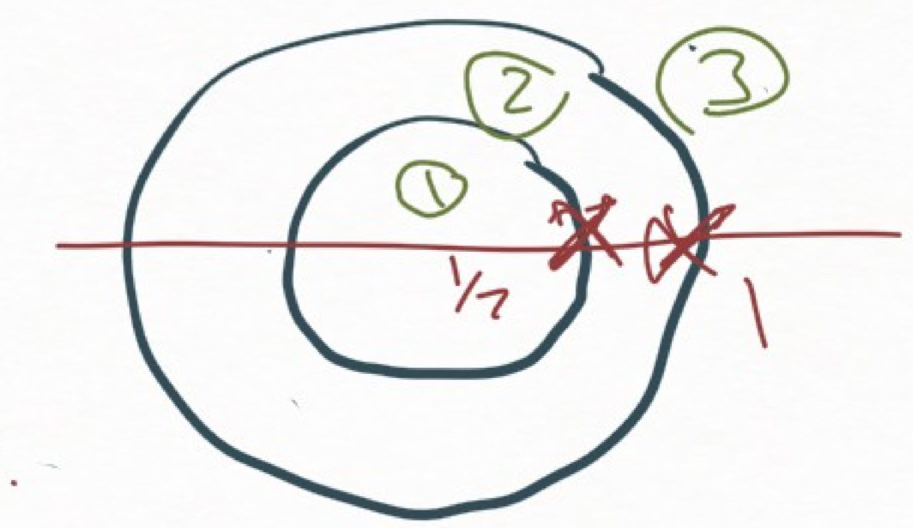
3. $|z| > 1/2$:

$$x[n] = A_1(1/4)^n u[n] + A_2(1/2)^n u[n]$$

هر دو سیگنال راستی



* دارای سه ناحیه همگرایی و لذا سه تبدیل معکوس



$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} \longrightarrow x(n) = ?$$

چون درجه صورت و مخرج مساوی است نسبت به z^{-1}

پس ابتدا صورت بر مخرج تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} z^{-2} + 2z^{-1} + 1 & \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \\ \cline{2-2} z^{-2} - 3z^{-1} + 2 & 2 \\ \cline{1-1} 5z^{-1} - 1 & \end{array}$$

$$X(z) = \frac{(1+z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})} = 2 + \frac{5z^{-1} - 1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}$$

$$X(z) = 2 + \frac{A_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-z^{-1}}$$

ضد علی

① $x_1(n) = 2\delta(n) - A_1 (\frac{1}{2})^n u(-n-1) - A_2 u(-n-1)$

سیگنال دوطرفه

② $x_2(n) = 2\delta(n) + A_1 (\frac{1}{2})^n u(n) - A_2 u(-n-1)$

علی

③ $x_3(n) = 2\delta(n) + A_1 (\frac{1}{2})^n u(n) + A_2 u(n)$

$$A_1 = (1 - \frac{1}{2}z^{-1}) X(z) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = -9$$

$$A_2 = (1 - z^{-1}) X(z) \Big|_{z=1} = 8$$

روش سری توانی :

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,z^{-n} \longrightarrow X(z)=\cdots x[-2]z^{2}+x[-1]z^{1}+x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}\cdots$$

بنابراین اگر $X(z)$ را به سری توانی بسط دهیم ضرایب توان های مختلف z نشانگر مختلف $x[n]$ خواهد بود.

مثال -

$$X(z)=1z^{2}-\frac{1}{2}z+1+\frac{1}{2}z^{-1} \longrightarrow x[n]=\ ?$$

$x[-2]$ $\quad x[-1]$ $\quad x[0]$ $\quad x[+1]$

بنابراین :

$$x[n]=\delta[n+2]-\frac{1}{2}\delta[n+1]+\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]$$

مثال -

$$X(z)=\cos z \longrightarrow x[n]=\ ?$$

$$X(z)=1-\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{4}}{4!}+\frac{z^{6}}{6!}+\frac{z^{8}}{8!}+\cdots \Longrightarrow \begin{cases} x[0]=1\\ x[-2]=-\frac{1}{2!}\\ x[-4]=\frac{1}{4!}\\ x[-6]=-\frac{1}{6!}\\ \vdots \end{cases}$$

$x[0]$ $\quad x[-2]$ $\quad x[-4]$

مثال -

$$X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad , \quad |z| > |\alpha| \longrightarrow x(n) = ?$$

تبدیل معکوس این شکل واضح و روشن است می‌خواهیم تبدیل معکوس را از روش سری توانی به دست آوریم.

برای اینکار باید سری توانی برای $X(z)$ بنویسیم و این کار با تقسیم انجام شدنی

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1-\alpha z^{-1} \\ \hline & 1+\alpha z^{-1}+\alpha^2 z^{-1} \dots \\ -1+\alpha z^{-1} & \\ \hline \alpha z^{-1} & \\ -\alpha z^{-1}+\alpha^2 z^{-2} & \\ \hline \alpha^2 z^{-1} & \\ \vdots & \end{array}$$

$$X(z) = 1+\alpha z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}+\dots \Longrightarrow x(n) = (\alpha)^n u(n)$$

تمرین -

$$X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad , \quad |z| < |\alpha| \longrightarrow x(n) = ?$$

از روش سری توانی محاسبه نمایید.

نمونه -

$$X(z) = \log(1+\alpha z^{-1}) \quad , \quad |z| > |\alpha|$$

می‌توان سری توانی را این شکلی نوشت که

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\alpha^{n} z^{-n}}{n} \longrightarrow x(n) = \begin{cases} (-1)^{n+1}\dfrac{\alpha^{n}}{n} & , \ n \geq 1 \\ 0 & , \ n \leq 0 \end{cases}$$

تمرین -

$$X(z) = e^{z} \longrightarrow x(n) = ?$$

$$X(z) = \sinh z \longrightarrow x(n) = ?$$