فصل ۹ :

تبدیل لاپلاس :

بطور کلی تبدیل لاپلاس یک سیگنال $x(t)$ بصورت مقابل تعریف میشود :

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt \quad , \quad s=\sigma+j\omega$$

تذکر ۱- این تعریف تبدیل لاپلاس دوطرفه می باشد و تعریف یکطرفه $\int_{0}^{\infty}$ است.

تذکر ۲- یعنی تبدیل لاپلاس (دوطرفه) در نقاط $s=j\omega$ همان تبدیل فوریه سیگنال است.

$$X(s)\Big|_{s=j\omega} = X(j\omega) = F\{x(t)\}$$

تذکر ۳-

$$X(s)=X(\sigma+j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x(t)\, e^{-\sigma t}\right) e^{-j\omega t}\, dt = F\{x(t)\, e^{-\sigma t}\}$$

یعنی تبدیل لاپلاس یک سیگنال مساوی تبدیل فوریه $\underline{x(t)\, e^{-\sigma t}}$ می باشد.

مثال ۱-

$$x(t)=e^{-\alpha t}u(t) \quad , \alpha>0 \longrightarrow X(s)=?$$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t}u(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+\alpha)t}\, dt = \frac{e^{-(s+\alpha)t}}{-(s+\alpha)}\Bigg|_{0}^{\infty}$$

با فرض اینکه $(s+\alpha)>0$ یا $(\cancel{j\omega}+\sigma+\alpha)>0$

$$X(s)=\frac{-1}{(s+\alpha)}\left(e^{-(s+\alpha)\infty}-e^{-(s+\alpha)0}\right)=\frac{-1}{(s+\alpha)}(0-1)=\boxed{\frac{1}{s+\alpha}}$$

$Real\{s\}=\sigma>-\alpha$

شرط همگرایی یعنی یا ناحیه همگرایی

توجه : $j\omega$ نقشی نداره چون

$$e^{-(s+\alpha)t}=e^{-(j\omega+\sigma+\alpha)t}=\left|\cancel{e^{-j\omega t}}\right|\cdot e^{-(\sigma+\alpha)t}$$

اندازه واحد است .

بنابراین :

$$x(t)=e^{-\alpha t}u(t)\ ,\ \alpha>0 \xrightarrow{L} X(s)=\frac{1}{s+\alpha}\ ,\ Real\{s\}>-\alpha$$

مدل ۲ -

$$x(t)=-e^{-\alpha t}u(-t)\ ,\ \alpha>0 \longrightarrow X(s)=?$$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}-e^{-\alpha t}u(-t)e^{-st}dt=-\int_{-\infty}^{0}e^{-(\alpha+s)t}dt=\frac{-e^{-(s+\alpha)t}}{-(s+\alpha)}\Bigg|_{-\infty}^{0}=\frac{1-e^{\overbrace{(s+\alpha)}^{<0}\infty}}{s+\alpha}$$

$$X(s)=\boxed{\frac{1}{s+\alpha}}$$

$s+\alpha<0 \Longrightarrow \cancel{j\omega}+\sigma+\alpha<0 \Longrightarrow Re\{s\}=\sigma<-\alpha$

ناحیه همگرایی

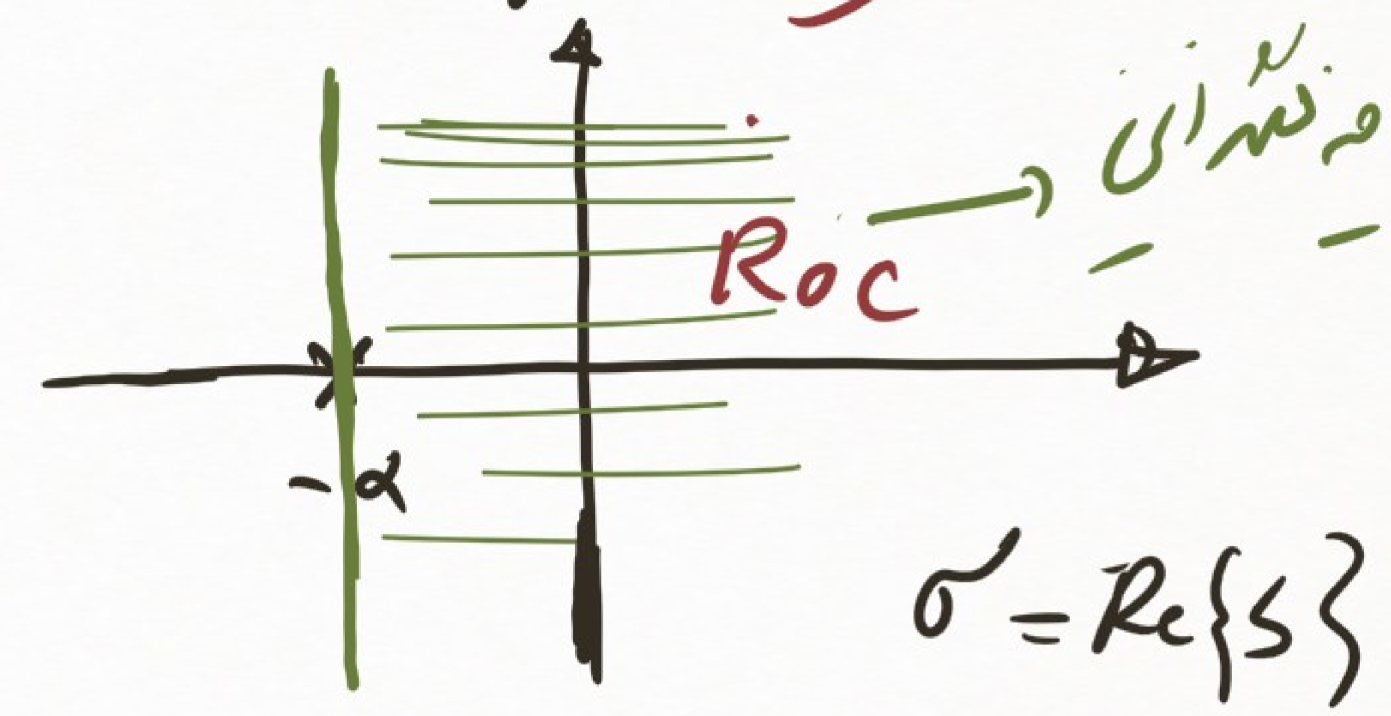
مثال:

$$x(t) = -e^{-\alpha t}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s+\alpha}, \quad Re\{s\} < -\alpha$$

نکته بسیار مهم: رسم:

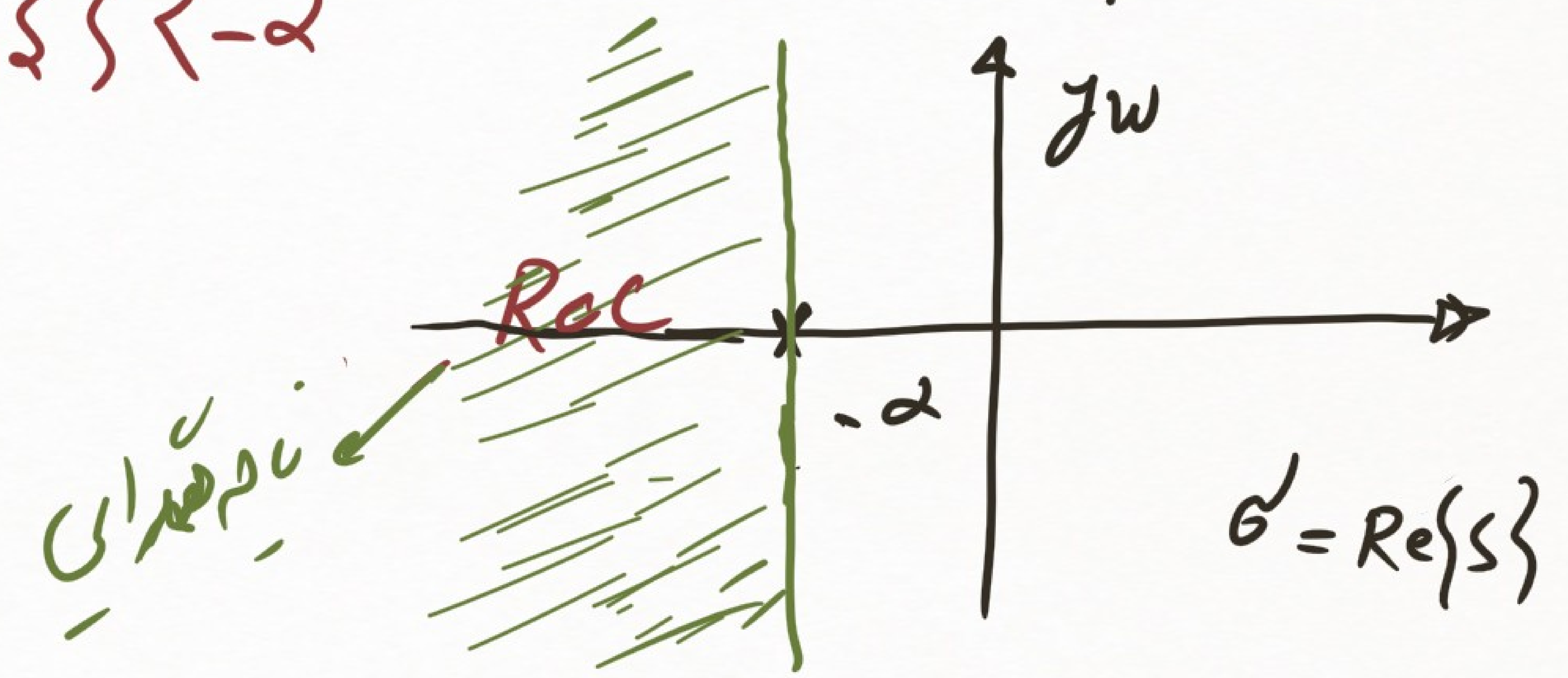
سیگنال دست راستی

① $$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s+\alpha}, \quad Re\{s\} > -\alpha$$



② $$x(t) = -e^{-\alpha t}u(-t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s+\alpha}, \quad Re\{s\} < -\alpha$$

سیگنال دست چپی



توجه مهم – با توجه به ناحیه همگرایی در تبدیل لاپلاس شاهد هستیم که برخی از سیگنال هایی که تبدیل فوریه نداشتند می توان تبدیل لاپلاس آنها را بدست آورد.

مثال:

$$x(t) = e^{2t}u(t) \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt < \infty \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{2t}u(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{2t}\,dt = \boxed{\infty}$$

شرط وجود تبدیل فوریه

تبدیل فوریه ندارد.

اما مانند به این شکل تبدیل لاپلاس ارجاع با شرط ناحیه همگرایی تعریف می‌شود:

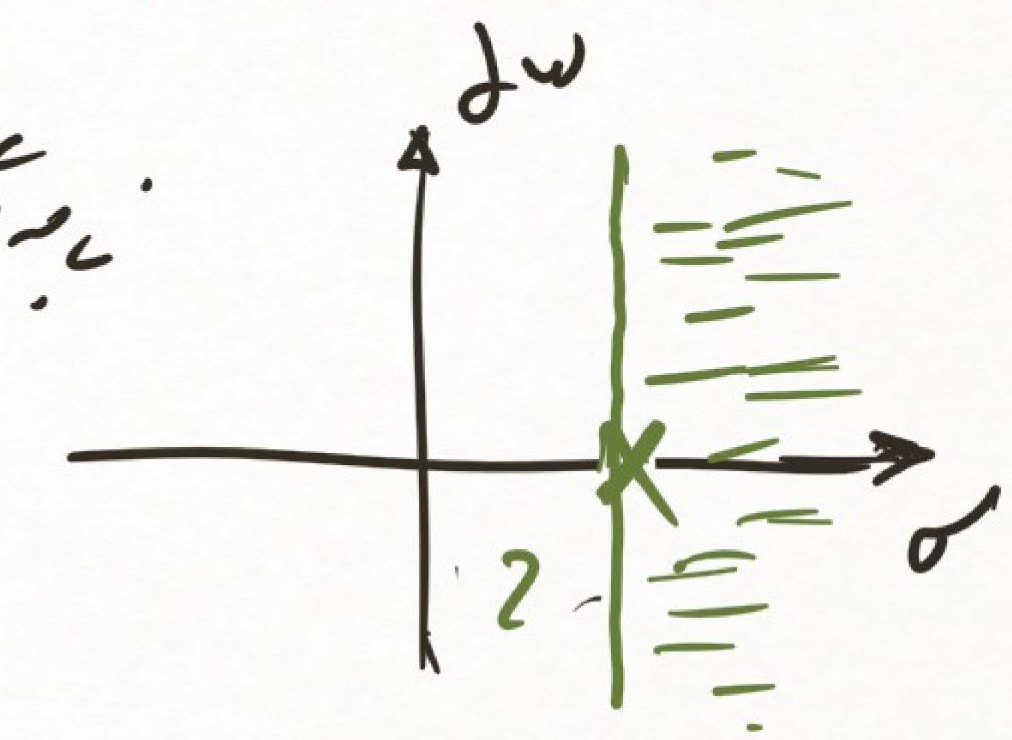
$$x(t) = e^{2t}u(t) \longrightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2t}u(t)e^{-st}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{(-s+2)t} = \frac{1}{(s-2)} e^{(2-s)t}\Big|_0^{\infty} =$$

$$\underbrace{2-s<0}_{} \Rightarrow s>2$$

$$X(s) = \frac{1}{s-2}\left(e^{(2-s)\infty} - e^{0}\right) = \boxed{\frac{1}{s-2}}$$

ناحیه: $Re\{s\} > 2$

ناپایدار



مثال -۳

$$x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t) \longrightarrow X(s) = ?$$

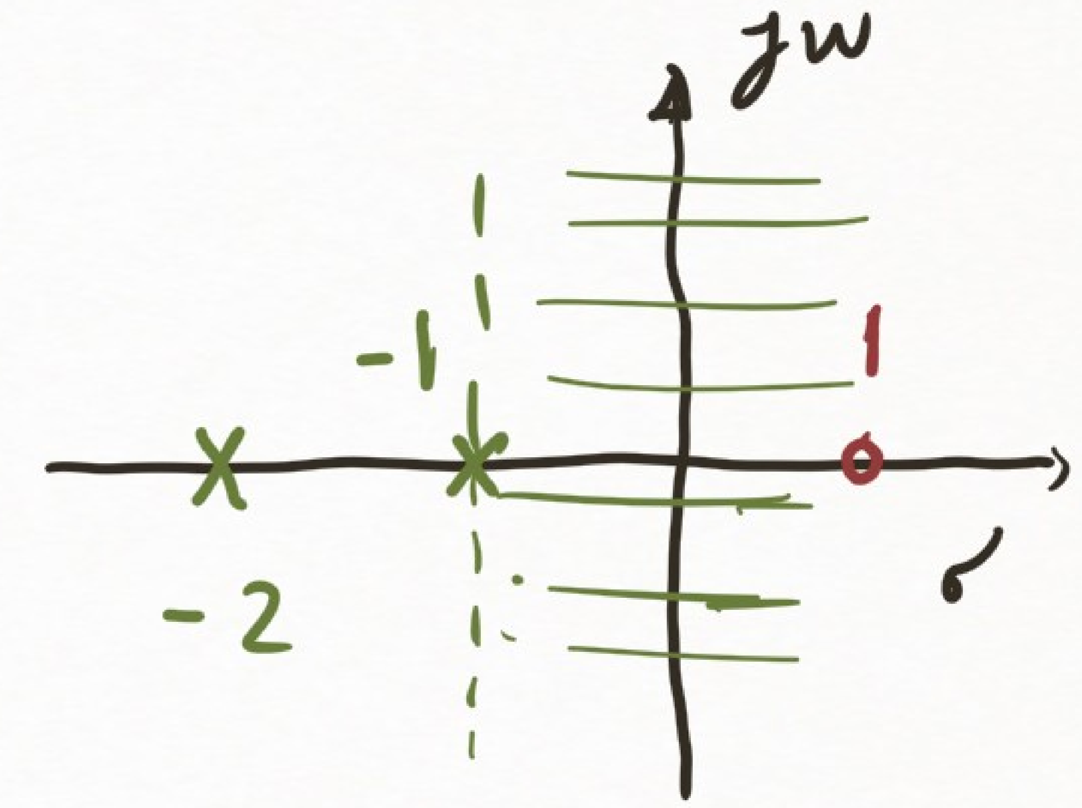
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)\right)e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} 3e^{-2t}e^{-st}\,dt - \int_0^{\infty} 2e^{-t}e^{-st}\,dt$$

$$X(s) = \int_0^{\infty} 3e^{-(2+s)t}\,dt - \int_0^{\infty} 2e^{-(s+1)t}\,dt = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1} = \boxed{\frac{s-1}{s^2+3s+2}}$$

$Re\{s\} > -2$

$Re\{s\} > -1 \Longrightarrow$

$Re\{s\} > -1$



مثال ۴-

$$x(t)=e^{-2t}u(t)+(e^{-t}\cos 3t)u(t) \longrightarrow X(s)=?$$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-2t}+\tfrac{1}{2}e^{-(1-3j)t}+\tfrac{1}{2}e^{-(1+3j)t}\right)u(t)e^{-st}\,dt$$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}u(t)e^{-st}\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{1}{2}e^{-\overbrace{(1-3j)}^{\alpha_1}t}u(t)e^{-st}\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{1}{2}e^{-\overbrace{(1+3j)}^{\alpha_2}t}u(t)e^{-st}\,dt$$

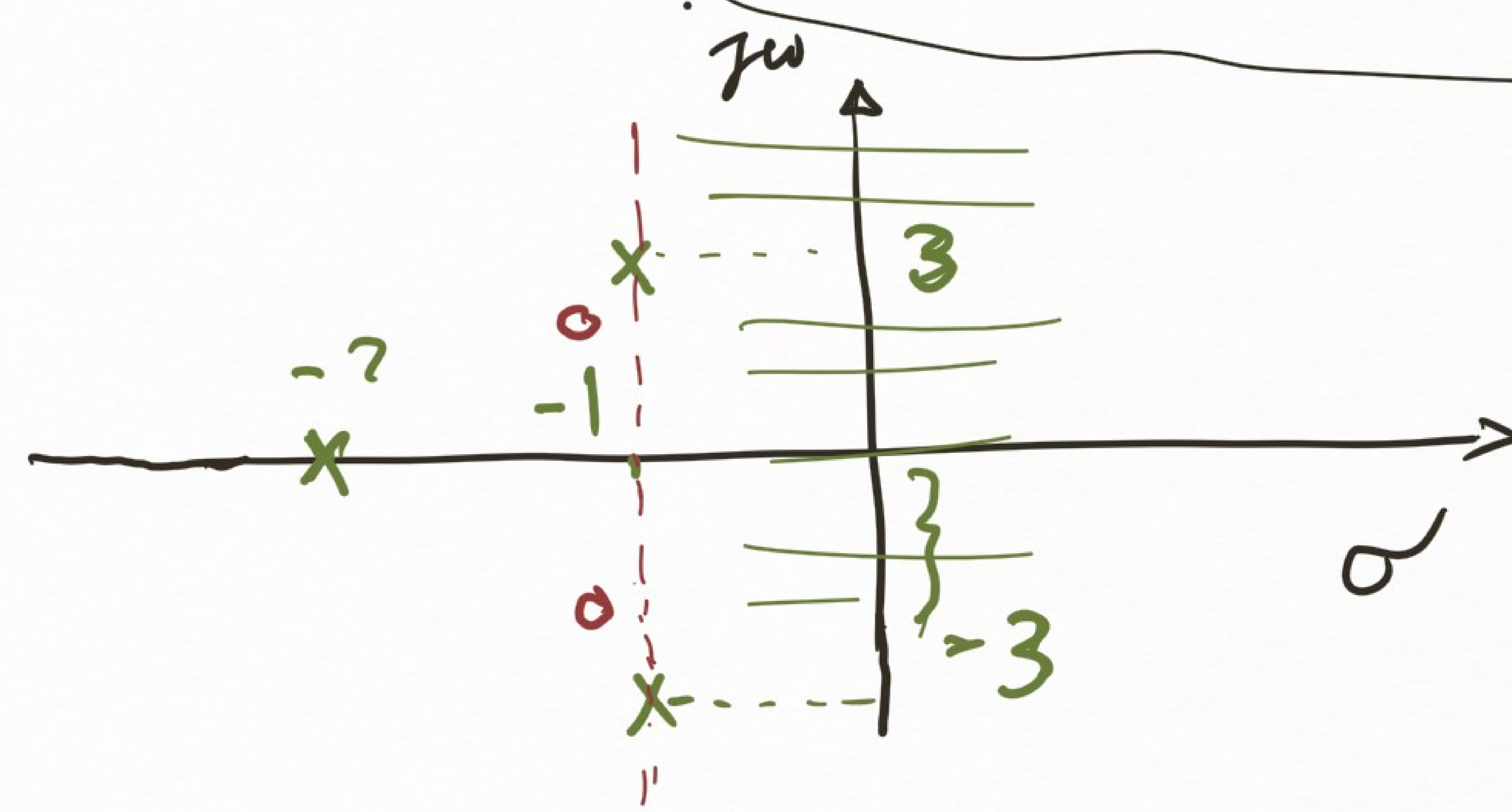
$Re\{s\}>-2$ $\quad$ $Re\{s\}>-1$ $\quad$ $Re\{s\}>-1$

$$X(s)=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+(1-3j)}+\frac{1}{s+(1+3j)}$$

توجه: برای تبدیلات اخیر از فرمول مثال ۱- $e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+\alpha}$ بدست می آید.

$$X(s)=\frac{2s^2+5s+12}{(s+2)(s^2+2s+10)}\,,\quad Re\{s\}>-1$$

$$\begin{cases} 2s^2+5s+12=0 & \text{صفرها} \quad o \\ (s+2)(s^2+2s+10)=0 & \text{قطب ها} \quad x \end{cases}$$



مثال ۵ -

$$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3} e^{-t} u(t) + \frac{1}{3} e^{2t} u(t)$$

$$x_1(t) = \delta(t) \longrightarrow X_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \boxed{1}$$

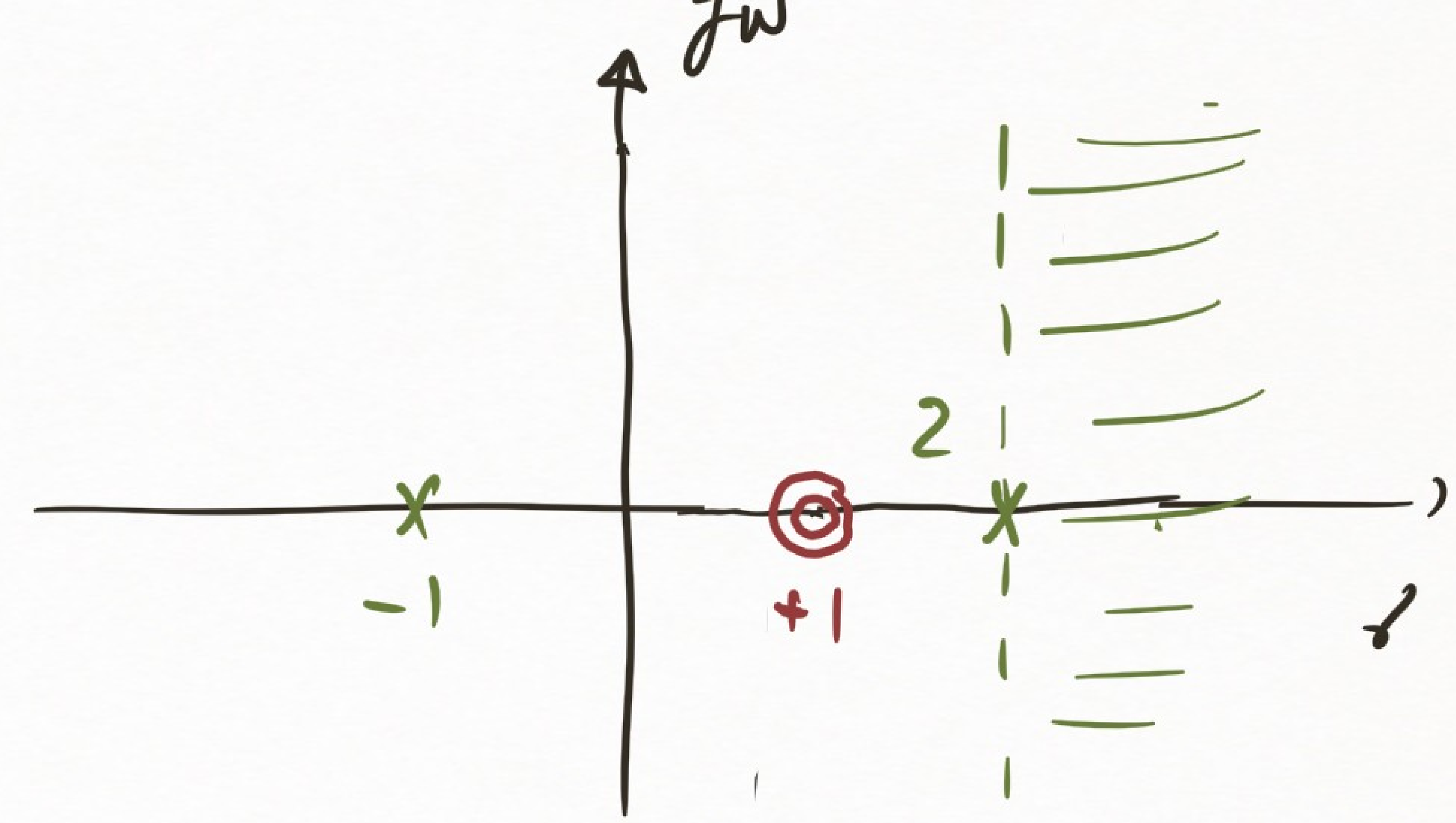
تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه : ناحیه همگرایی تمام صفحه است

$$-\frac{4}{3} e^{-t} u(t) \longleftrightarrow \frac{-4/3}{s+1} \quad , \ Re\{s\} > -1$$

$$\frac{1}{3} e^{2t} u(t) \longleftrightarrow \frac{1/3}{s-2} \quad ; \ Re\{s\} > 2$$

$$\Rightarrow X(s) = 1 - \frac{4/3}{s+1} + \frac{1/3}{s-2} \ ; \ Re\{s\} > 2$$

$$X(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)} \quad ; \ Re\{s\} > 2$$



Region of Convergence (ROC)   ناحیه همگرایی:

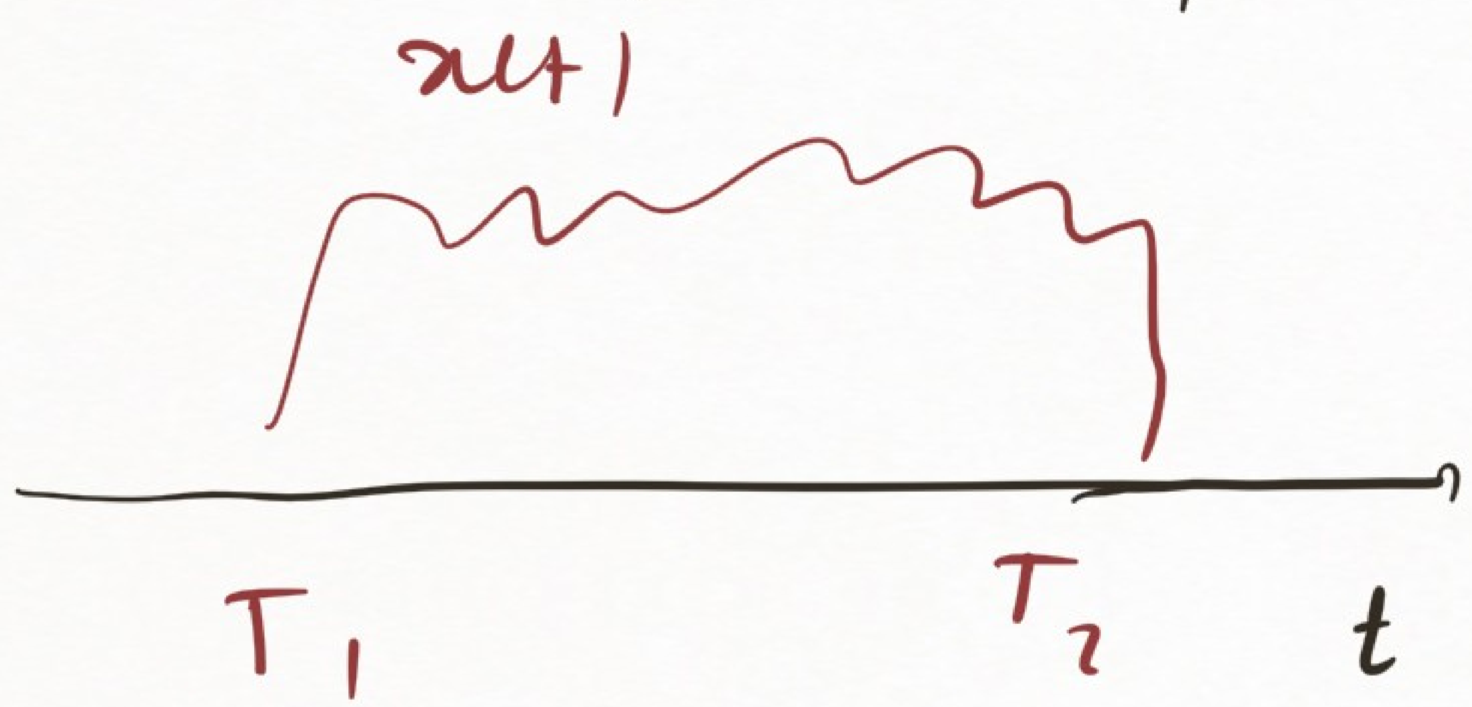
خواص:

1- ROC از صفحه s نوارهای موازی محور jω تشکیل می‌شود.

چون: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$ یعنی

2- برای توابع که تبدیل لاپلاس گویا دارند (Rational: یعنی به صورت کسر چندجمله‌ای از s) ناحیه همگرایی هیچ قطبی را شامل نمی‌شود.

3- اگر x(t) یک سیگنال محدود زمانی باشد و مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد در این صورت ROC تمام صفحه s خواهد شد.



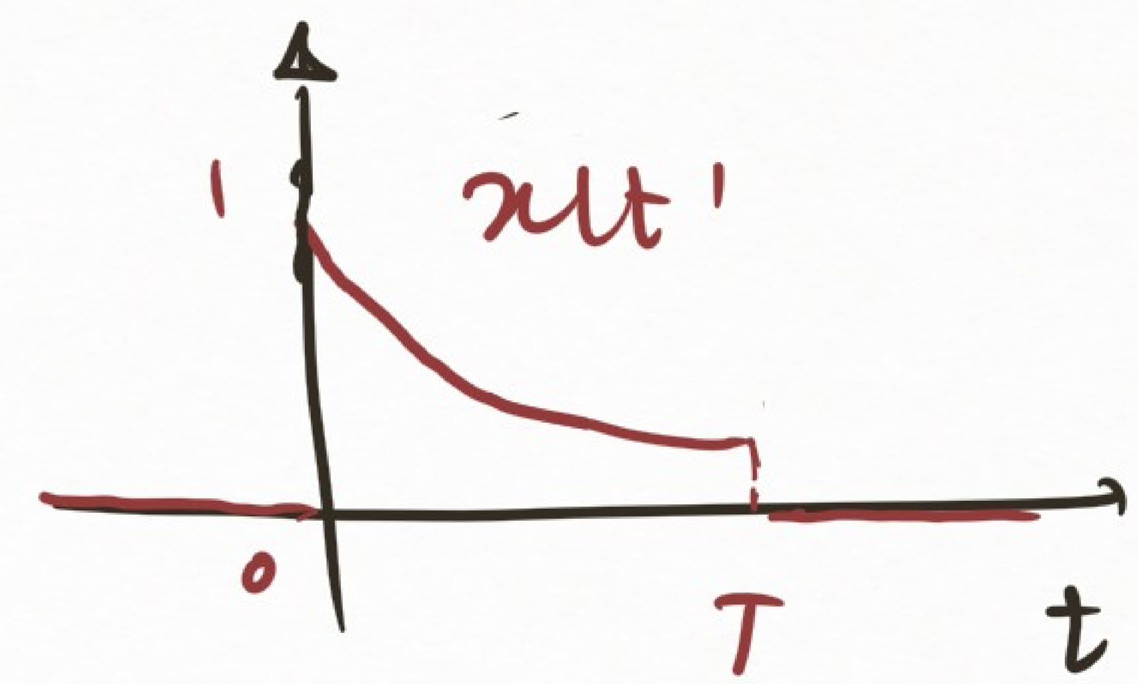
⟹ ROC تمام صفحه s خواهد شد ⟹ $\int_{T_1}^{T} x(t) e^{-st} dt =$ محدود

مثال-۶

$x(t)=\delta(t) \longrightarrow X(s)=1$, ROC = تمام صفحه

مثال-۷

$$x(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & , 0<t<T \\ 0 & , \text{other} \end{cases} \longrightarrow X(s)=?$$



$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{0}^{T} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \frac{1}{s+\alpha}\left[1-e^{-(s+\alpha)T}\right]$$; ROC تمام صفحه

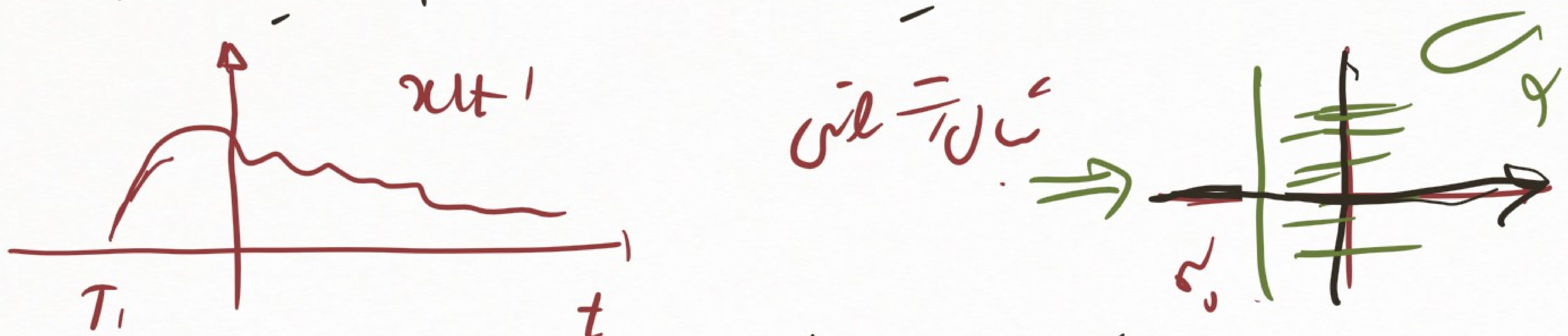
توجه: $X(s)$ صرفاً تنها یک قطب در $s=-\alpha$ دارد بنابراین طبق خاصیت شماره ۲ ـ نباید جزء ناحیه همگرایی باشد

ملاحظه کنیم ناحیه همگرایی تمام صفحه s است چرا؟ دلیل:

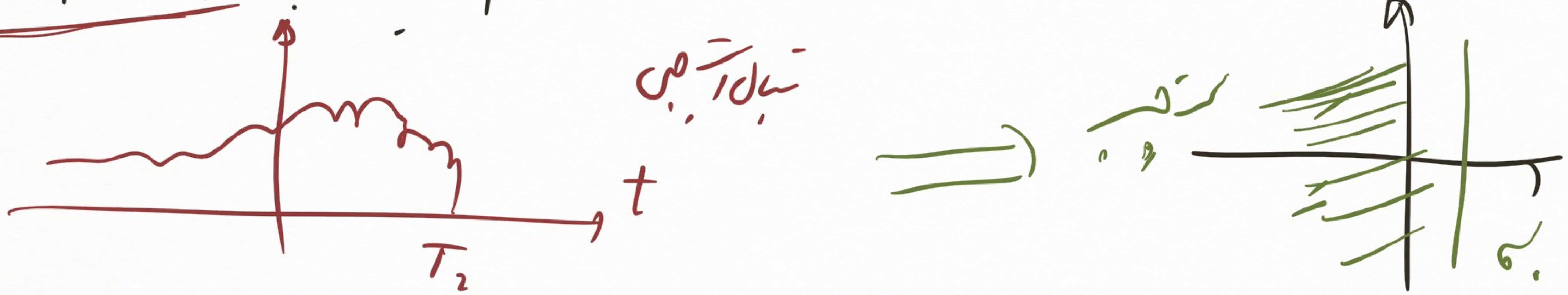
$$\lim_{s\to-\alpha} X(s) = \lim_{s\to-\alpha} \frac{\left(1-e^{-(s+\alpha)T}\right)}{s+\alpha} = \lim_{s\to-\alpha} \frac{d/ds(\text{صورت})}{d/ds(\text{مخرج})} = \lim_{s\to-\alpha} T e^{-\alpha T} e^{sT} = T$$

پس $X(-\alpha)=T$ به عبارت دیگر یک صفر هم در $s=-\alpha$ داریم که قطب از صفر را حذف می‌نماید

۴ـ اگر $x(t)$ یک سیگنال سمت راستی و خط $Re\{s\}=\sigma_0$ جزء ناحیه همگرایی باشد آنگاه تمام مقادیر s با $Re\{s\}>\sigma_0$ جزء ناحیه همگرایی است.



۵ـ اگر $x(t)$ یک سیگنال چپی بوده و خط $Re\{s\}=\sigma_0$ جزء ناحیه همگرایی باشد آنگاه تمام مقادیر s با $Re\{s\}<\sigma_0$ جزء ناحیه همگرایی است.



۶- اگر $x(t)$ یک سیگنال دوطرفه باشد و خط $Re\{s\}=\sigma_0$ جزء ROC باشد آنگاه ROC نوار محدودی خواهد شد که شامل $Re\{s\}=\sigma_0$ می‌باشد.

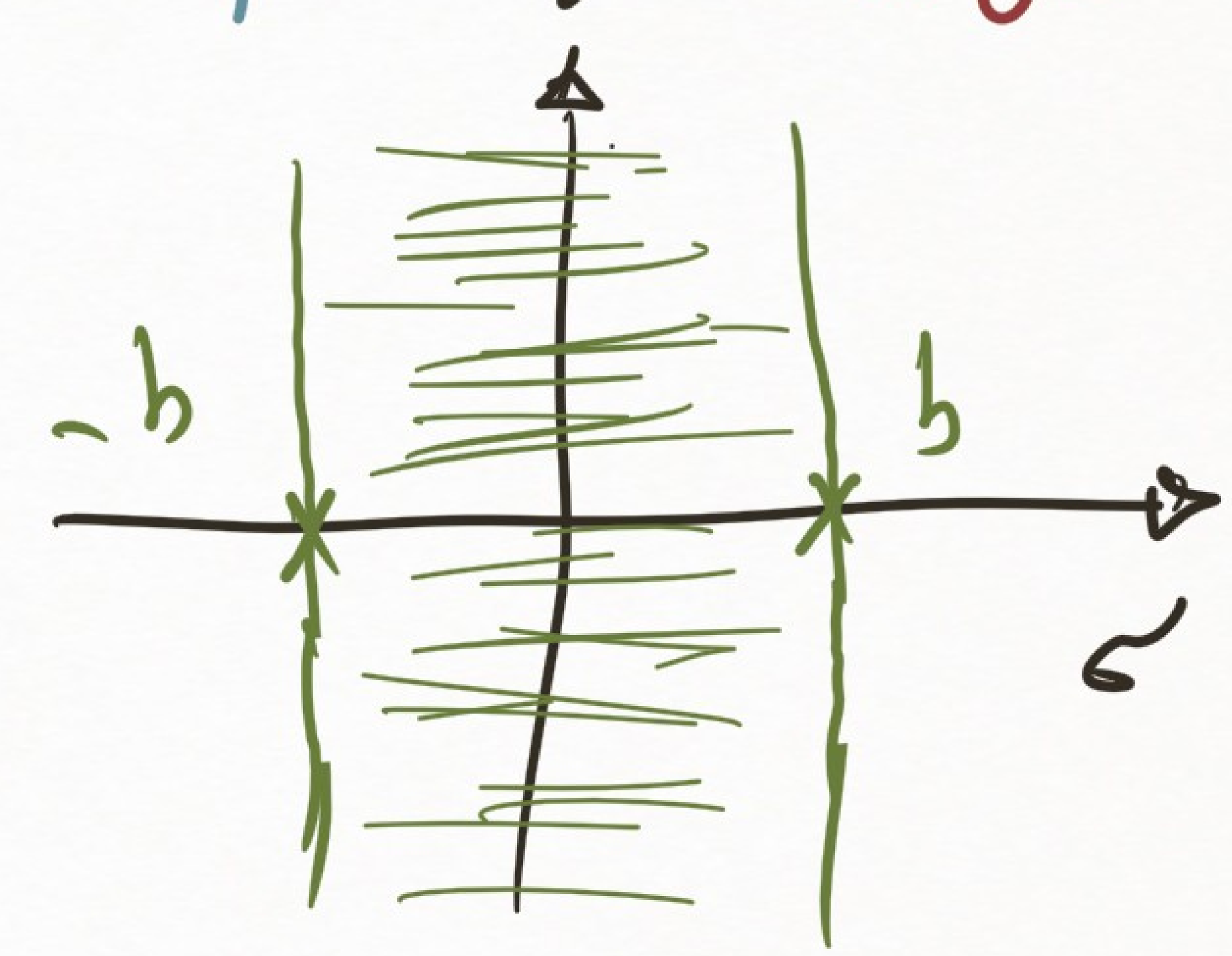
$x(t)=e^{-b|t|}\ ,\ b>0 \longleftrightarrow X(s)=?\ \Longrightarrow x(t)=e^{-bt}u(t)+e^{bt}u(-t)$

$e^{-bt}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{s+b}\ ,\ Re\{s\}>-b$

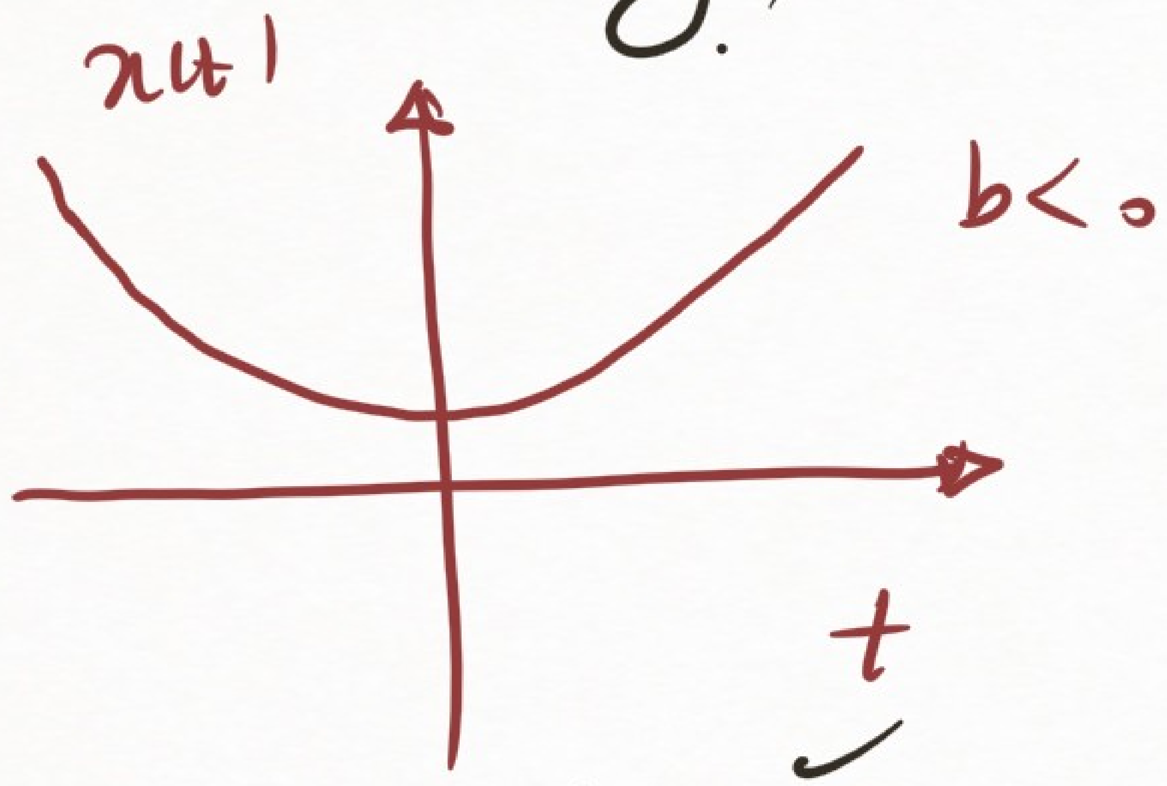
$e^{bt}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \dfrac{-1}{s-b}\ ;\ Re\{s\}<+b$

$\Longrightarrow X(s)=\dfrac{-2b}{s^2-b^2}.$

$-b<Re\{s\}<b$



نتیجه مهم - به ازای $b<0$ حد فاصله‌ای پیدا نمی‌شود که تبدیل لاپلاس‌ها ضمنه تعیین ناحیه همگرایی مشترک ندارند و بنابراین $x(t)$ تبدیل لاپلاس ندارد.



$\Longrightarrow$ $X(s)$ ندارد.

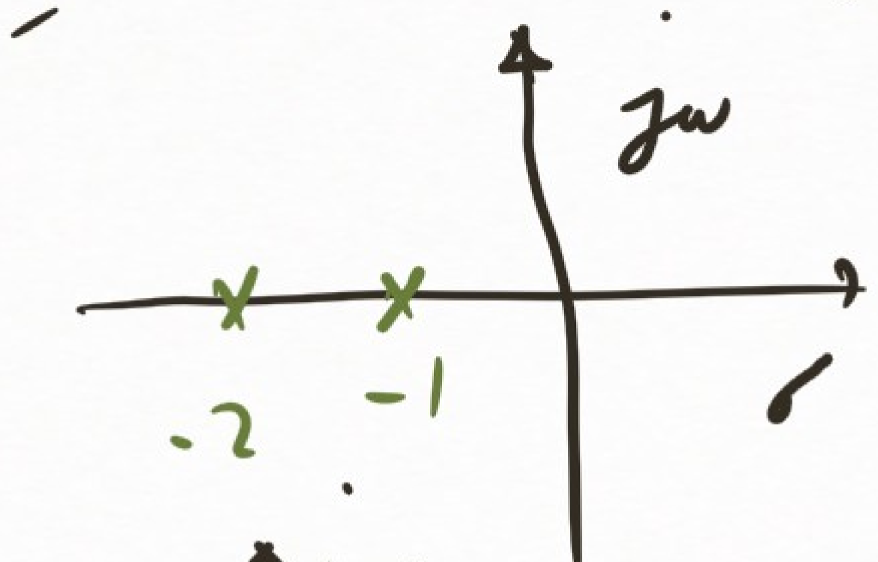
۷- اگر تبدیل لاپلاس $x(t)$ گویا باشد در این صورت ROC آن یا به قطب‌ها محدود می‌شود و یا تا بینهایت گسترده است. در ضمن هیچ یک از قطب‌های $X(s)$ جزء ROC نیست.

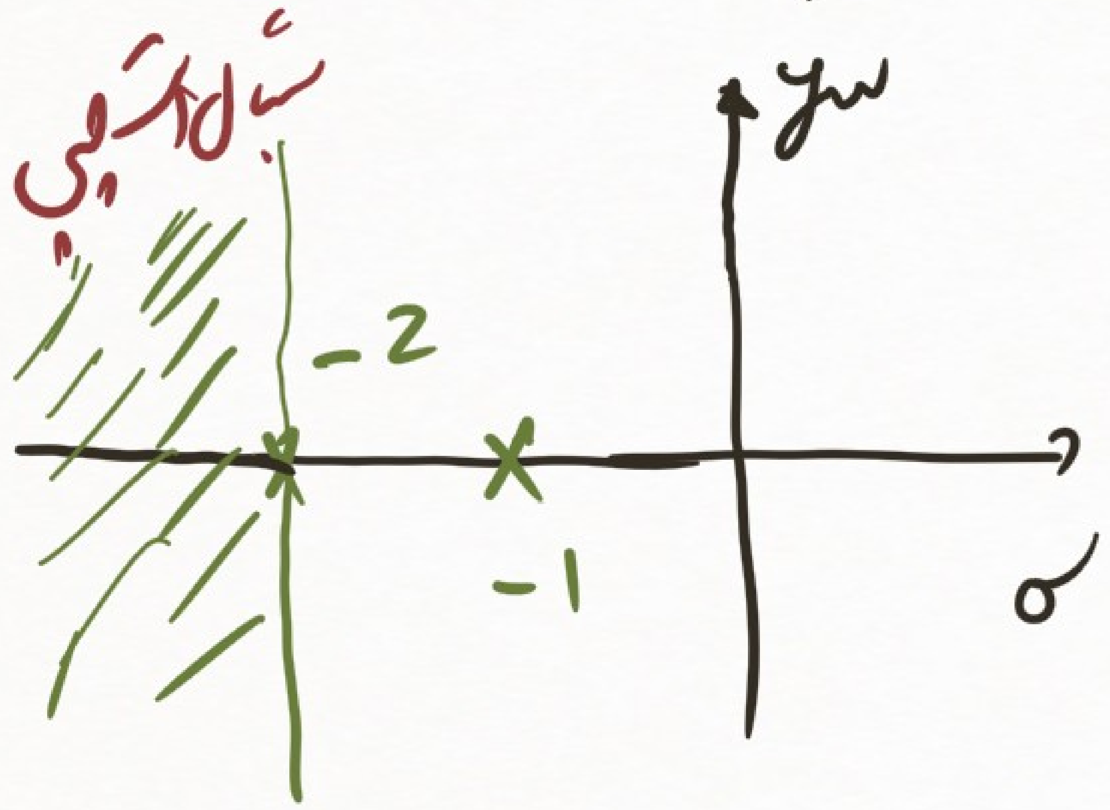
۸- اگر تبدیل لاپلاس $x(t)$ گویا باشد و اگر $x(t)$ سمت راستی باشد. ROC ناحیه سمت راست، راست‌ترین قطب است. اگر $x(t)$ سمت چپی باشد ROC ناحیه سمت چپ، چپ‌ترین قطب است.

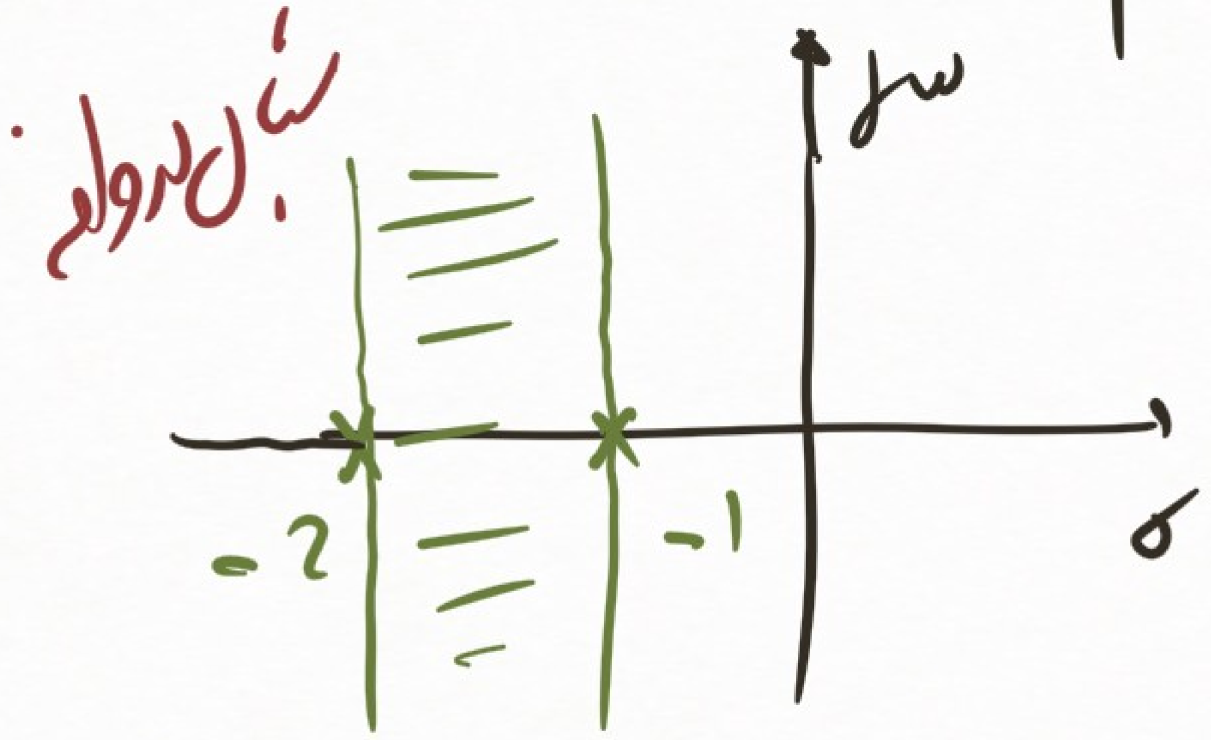
مثال ۹-

محل قطب‌ها

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)} \Longrightarrow$$







عکس تبدیل لاپلاس :

می‌توان نشان داد که عکس تبدیل لاپلاس از رابطه‌ی

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\,e^{st}\,ds$$

به دست می‌آید.

مسیر انتگرال‌گیری روی خط $Re\{s\}=\sigma$ که موازی محور موهومی بوده، انجام می‌شود.

* در عمل از تجزیه به کسرهای جزئی، جداول تبدیل لاپلاس به جای محاسبه تبدیل معکوس استفاده می‌کنیم.

توجه مهم -

$$X(s)=\frac{1}{s+\alpha} \xrightarrow{Re\{s\}>-\alpha} x_1(t)=e^{-\alpha t}u(t)$$

سیگنال راست‌سویی ؛

$$X(s)=\frac{1}{s+\alpha} \xrightarrow{Re\{s\}<-\alpha} x_2(t)=-e^{-\alpha t}u(-t)$$

سیگنال چپ‌سویی ؛

مثال ۱۰-

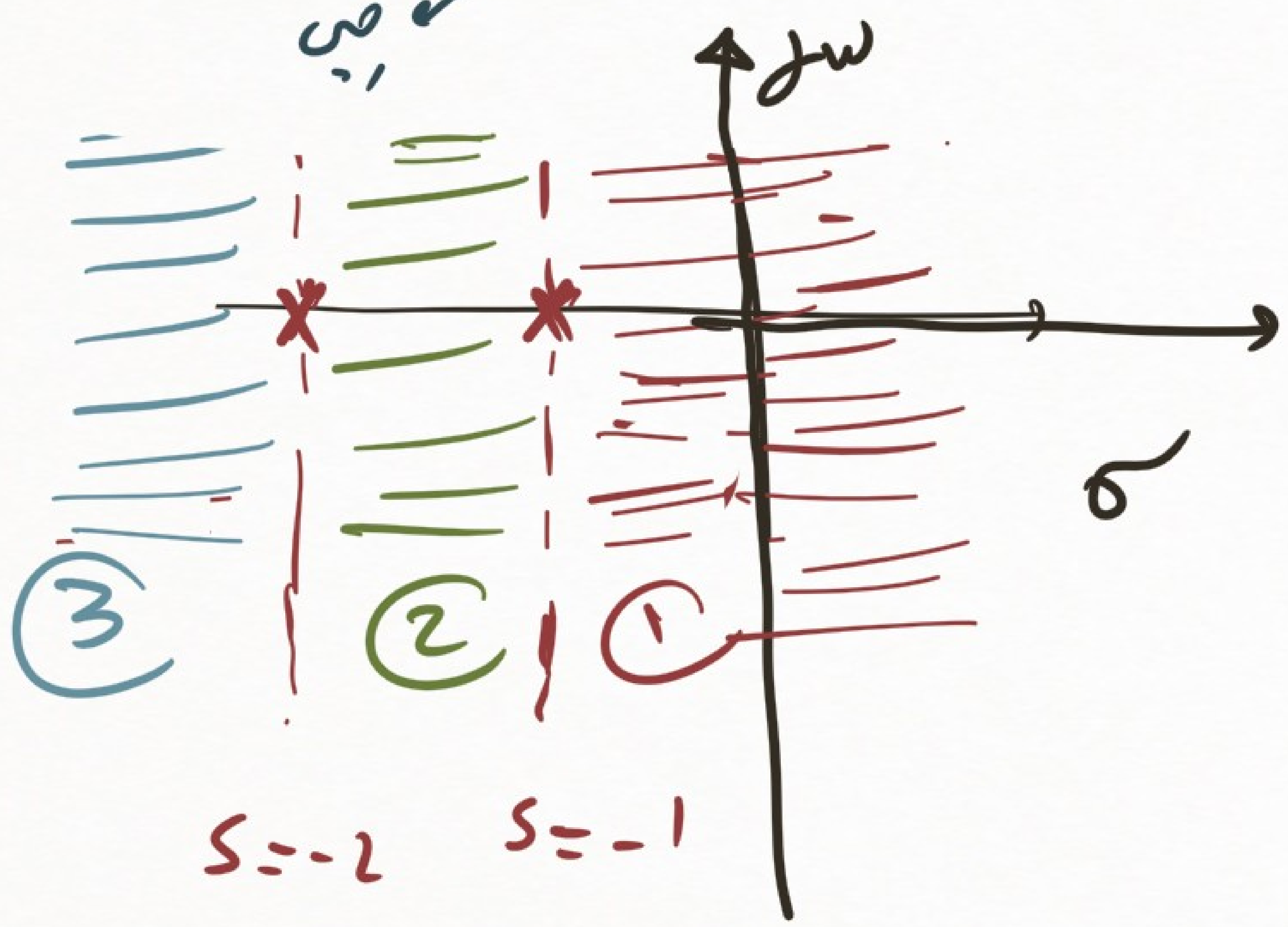
$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)} \Longrightarrow x(t)=?$$

برای محاسبه تبدیل معکوس از تجزیه به کسرهای جزئی (درجه صورت از مخرج باید کوچکتر باشد و در غیر این صورت تقسیم می‌کنیم) استفاده می‌کنیم.

راستی
چپی

$$X(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}, \quad A = (s+1)X(s)\Big|_{s=-1} = \boxed{1}, \quad B = (s+2)X(s)\Big|_{s=-2} = \frac{1}{s+1}\Big|_{s=-2} = \boxed{-1}$$

راستی
چپی



چون دارای سه ناحیه همگرایی هستیم بنابراین دارای سه تبدیل معکوس هستیم.

① ناحیه $\Rightarrow$ (همه راستی) $\rightarrow x(t) = A e^{-t} u(t) + B e^{-2t} u(t)$

② ناحیه $\Rightarrow$ (مربوط به A چپی و مربوط به B راستی) $x(t) = -A e^{-t} u(-t) + B e^{-2t} u(t)$

③ ناحیه $\Rightarrow$ (همه چپی) $\longrightarrow x(t) = -A e^{-t} u(-t) - B e^{-2t} u(t)$