مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

برای ماتریس $A_{n\times n}$ ، $|\lambda I - A| = 0$ مقادیر ویژه را می‌دهد. از طرفی به $|\lambda I - A|$ چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A گویند.

* تعداد مقادیر ویژه $= n$ تا

* مقادیر ویژه به صورت حقیقی و یا به فرم مختلط مزدوج $\alpha \pm j\beta$ هستند.

* برای ماتریس $A_{n\times n}$ با مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ دترمینان و اثر ماتریس:

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \qquad tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

اثبات:

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + C_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + C_1\lambda + C_0$$

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

$$\xrightarrow{\lambda = 0} |A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n$$

* اگر λ یک مقدار ویژه برای ماتریس A باشد، λ^{-1} مقدار ویژه ماتریس A^{-1} خواهد بود:

$$|\lambda I - A| = |\lambda A^{-1}A - A| = |(\lambda A^{-1} - I)A|$$

$$= |\underbrace{\lambda A^{-1} - I}_{\lambda(A^{-1} - \lambda^{-1} I)}||A| = |\lambda||\underbrace{A^{-1} - \lambda^{-1} I}_{=0}||A| = 0$$

$$|\lambda^{-1} I - A^{-1}| = 0$$

* ستون های غیرصفر ماتریس $adj(\lambda I-A)$ بردارهای ویژهٔ ماتریس A هستند.

نکته) ضرایب معادله مشخصه یک ماتریس را می‌توان با استفاده از الگوریتم بازگشتی زیر بدست آورد:

$$|\lambda I-A| = \lambda^{n} + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

$$c_{n-1} = -w_1$$

$$c_{n-2} = -\frac{1}{2}\left(c_{n-1}w_1 + w_2\right)$$

$$c_{n-3} = -\frac{1}{3}\left(c_{n-2}w_1 + c_{n-1}w_2 + w_3\right)$$

$$\vdots$$

$$c_0 = -\frac{1}{n}\left(c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_{n-1}w_{n-1} + w_n\right)$$

که $w_k = tr(A^k)$ است.

مثال) معادله مشخصه A را به کمک الگوریتم بازگشتی بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad |\lambda I-A| = \lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

$$c_2 = -w_1 = -tr(A) = 7$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}\left(c_2w_1 + w_2\right) = -\frac{1}{2}\left(7\times(-7) + w_2\right) = 5$$

$$w_2 = tr(A^2) = 39$$

$$c_0 = -\frac{1}{3}\left(5\times(-7) + 7\times 39 + w_3\right) = -1$$

$$tr(A^3) = -235$$

$$\Rightarrow |\lambda I - A| = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 5\lambda - 1$$

نکته) یکی از راه‌های تعیین علامت ماتریس‌ها، بررسی وضعیت مقادیر ویژه است:

ماتریس حتماً متقارن باشد

- مقادیر ویژه مثبت $\longrightarrow$ P.D
- 〃 〃 منفی $\longrightarrow$ N.D
- 〃 〃 صفر و مثبت $\longrightarrow$ S.P.D
- 〃 〃 صفر و منفی $\longrightarrow$ N.P.D

مثال)
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{علامت؟!}$$

روش ۱) $3 > 0$ و $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} > 0$ و $|A| = 46 > 0 \longrightarrow$ P.D

روش ۲) $|\lambda I - A| = 0 \longrightarrow \lambda^3 - 15\lambda^2 + 51\lambda - 46 = 0$

roots([1 -15 51 -46])

$\lambda_1 = 2.9$ و $\lambda_2 = 1.49$ و $\lambda_3 = 10.59$

λ^3	1	51
λ^2	-15	-46
λ^1	47.93	0
λ^0	-46	

بردار ویژه

به بردارهای v_i غیرصفر که در رابطه‌ی $Av_i = \lambda_i v_i$ صدق کند بردار ویژه ماتریس $A_{n\times n}$ گویند.

$$\Downarrow$$

$$(\lambda_i I - A)v_i = 0$$

مثال) بردارهای ویژه $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ را بدست آورید. $v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$|\lambda I - A| = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} \lambda + 4 & -2 \\ -3 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 9\lambda + 14 = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -7 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

$$(\lambda_i I - A)v_i = 0 \longrightarrow (\lambda_1 I - A)v_1 = 0$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 + 4 & -2 \\ -3 & \lambda_1 + 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\lambda_1 = -7} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -3x_1 - 2x_2 = 0 \longrightarrow x_1 = -\frac{2}{3} x_2$$

$$x_2 = -3$$
$$x_1 = 2 \longrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\lambda_2 = -2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2x_3 - 2x_4 = 0 \longrightarrow \boxed{x_3 = x_4} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نکته) اگر یک ماتریس $A_{n\times n}$ دارای n مقدار ویژه متمایز $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ باشد آن‌گاه n بردار ویژه مستقل خطی $v_1, \dots, v_n$ وجود خواهد داشت.

نکته) اگر ماتریس $A_{n\times n}$ یک مقدار ویژه تکراری از مرتبه k داشته باشد آن‌گاه حداقل یک و حداکثر k بردار ویژه مستقل خطی متناظر با این مقدار ویژه تکراری λ_i وجود خواهد داشت و تعداد بردارهای مستقل خطی در این حالت برابر $n - rank(A-\lambda_i I)$ است.

مثال) بردارهای ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۶ & ۳ & -۸ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

$$|\lambda I - A| = ۰ \longrightarrow \begin{vmatrix} \lambda-۶ & -۳ & ۸ \\ ۰ & \lambda+۲ & ۰ \\ -۱ & ۰ & \lambda+۳ \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-۶)\underbrace{(\lambda^۲+۵\lambda+۶)}_{(\lambda+۲)(\lambda+۳)} + \cancel{۳(۰)} + ۸(\lambda+۲)$$

$$= (\lambda+۲)\underbrace{(\lambda^۲-۳\lambda-۱۸+۸)}_{(\lambda+۲)(\lambda-۵)} = (\lambda+۲)^۲(\lambda-۵) = ۰$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \lambda_{۱,۲} = -۲ \longrightarrow ? \\ \lambda_۳ = ۵ \longrightarrow \checkmark \text{ یک بردار مستقل} \end{cases}$$

$$n - \text{rank}(A - \lambda_i I) = ۳ - \text{rank}(A + ۲I) = ۱$$

$$\begin{bmatrix} ۸ & ۳ & -۸ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} = ۲$$

$$\lambda_1 = -2 \longrightarrow (\lambda_1 I - A) v_1 = 0$$

$$\cdots \leftarrow (\lambda_1 I - A) v_2 = v_1$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -8 & -3 & +8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_3}$$

$$-\cancel{8x_1} - 3x_2 + \cancel{8x_3} = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \longrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 5 \longrightarrow (5I - A) v_3 = 0$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -3 & 8 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 7x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 0} \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-x_1 + 8x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 8x_3$$