پاسخ سری دوم تمرینات درس معادلات دیفرانسیل　　　　　　۱۳۹۹/۲/۲۵

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y' = e^{-x}y^{۲} + y - e^{x} \quad , \quad y_{۱} = e^{x} \tag{۱}$$

جواب : می توان دید که تابع $y_{۱} = e^{x}$ یک جواب معادله ریکاتی داده شده است. با تغییر متغیر $y = e^{x} + \frac{۱}{v}$ معادله را حل می کنیم.

$$e^{x} - \frac{v'}{v^{۲}} = e^{-x}(e^{۲x} + \frac{۲e^{x}}{v} + \frac{۱}{v^{۲}}) + e^{x} + \frac{۱}{v} - e^{x}$$

پس از ساده و مرتب کردن عبارتها داریم $v' + ۳v = -e^{-x}$ که یک معادله مرتبه اول خطی است و

$$v = e^{-۳x}(c - \int e^{۳x}e^{-x}dx) = c\,e^{-۳x} - \frac{۱}{۲}e^{-x}$$

جواب آن است. جواب معادله داده شده عبارت است از : $y = e^{x} + \dfrac{۲}{۲c\,e^{-۳x} - e^{-x}} = \dfrac{۲c\,e^{-۲x} + ۱}{۲c\,e^{-۳x} - e^{-x}}$

$$y' = \frac{x + y - ۳}{۲x + y - ۴} \tag{۲}$$

جواب : با تغییر متغیر $x = X + ۱$ و $y = Y + ۲$ خواهیم داشت $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{X + Y}{۲X + Y}$ که یک معادله همگن است و با تغییر متغیر داریم $u + X\dfrac{du}{dX} = \dfrac{۱ + u}{۲ + u}$ و به معادله دیفرانسیل $\dfrac{u + ۲}{u^{۲} + u - ۱}du = \dfrac{-۱}{X}dX$ می رسیم که جدایی پذیر است و $\int \dfrac{u + ۲}{u^{۲} + u - ۱}du = \int \dfrac{-۱}{X}dX$.

به کمک تجزیه کسرها داریم : $\dfrac{۱}{\sqrt{۵}}\int (\dfrac{\sqrt{۵} - ۳}{۲u + ۱ + \sqrt{۵}} + \dfrac{\sqrt{۵} + ۳}{۲u + ۱ - \sqrt{۵}})du = \int \dfrac{-۱}{X}dX$

$$\frac{۱}{۲\sqrt{۵}}[(\sqrt{۵} - ۳)\ln(۲u + ۱ + \sqrt{۵}) + (\sqrt{۵} + ۳)\ln(۲u + ۱ - \sqrt{۵})] = \ln\frac{A}{X}$$

$$X^{۲\sqrt{۵}}(۲u + ۱ + \sqrt{۵})^{\sqrt{۵} - ۳}(۲u + ۱ - \sqrt{۵})^{\sqrt{۵} + ۳} = c$$

$$X^{۲\sqrt{۵}}(۴u^{۲} + ۴u - ۴)^{\sqrt{۵}}(\frac{۲u + ۱ - \sqrt{۵}}{۲u + ۱ + \sqrt{۵}})^{۳} = c$$

$$(Y^{۲} + XY - X^{۲})^{\sqrt{۵}}(\frac{۲Y + (۱ - \sqrt{۵})X}{۲Y + (۱ + \sqrt{۵})X})^{۳} = c$$

جواب معادله داده شده عبارت است از :

پاسخ سری دوم تمرینات درس معادلات دیفرانسیل　　　　　۱۳۹۹/۲/۲۵

$$[(y-2)^2+(x-1)(y-2)-(x-1)^2)^{\sqrt{5}}\left(\frac{2(y-2)+(1-\sqrt{5})(x-1)}{2(y-2)+(1+\sqrt{5})(x-1)}\right)^3=c$$

$$(3x+y)dx-4(3x+y-2)dy=0\ ,\ y(1)=0 \qquad (3)$$

جواب : با تغییر متغیر $u=3x+y$ داریم $u\,dx-4(u-2)(du-3dx)=0$ و بعد از ساده و مرتب کردن عبارتها داریم $\frac{4(u-2)}{13u-24}du=dx$ که یک معادله جدایی پذیر است. با انتگرال گیری از طرفین معادله داریم:

$$\frac{4u}{13}-\frac{8}{169}\ln(13u-24)=x+c$$

$$13(4u-13x)-8\ln(13u-24)=c_0$$

$$13(4y-x)-8\ln(13y+39x-24)=c_0$$

با توجه به شرط اولیه $y(1)=0$ داریم $c_0=-13-8\ln 15$ و جواب نهایی عبارت است از :

$$13(4y-x+1)=8\ln\left(\frac{13y+39x-24}{15}\right)=0$$

و یا :

$$(13y+39x-24)^8=15^8e^{13(4y-x+1)}$$

$$y=xy'+\tan(3y'+5) \qquad (4)$$

جواب : این معادله یک معادله کلرو است. جواب عمومی آن دسته خطهای راست $y=ax+\tan(3a+5)$ هستند.

برای پیدا کردن جواب خصوصی از طرفین معادله مشتق می گیریم. $y'=y'+xy''+3y''(1+\tan^2(3y'+5))$

و داریم $x=-3(1+\tan^2(3y'+5))$. اکنون با فرض $y'=m$ جواب خصوصی معادله به شکل پارامتری

$$\begin{cases} x=-3(1+\tan^2(3m+5)) \\ y=-3m(1+\tan^2(3m+5))+\tan(3m+5) \end{cases}$$

پیدا می شود. البته می توان جواب را به صورت زیر هم نشان داد.

$$y=\frac{x}{3}(\arctan(\pm\sqrt{-\frac{x}{3}-1})-5)\pm\sqrt{-\frac{x}{3}-1}$$

$$yy''+(y')^2-(y')^3\ln y=0 \qquad (5)$$

جواب : این معادله فاقد x است و با تغییر متغیر $y'=u$ حل می شود. داریم $y''=u\frac{du}{dy}$ و

$$yu\frac{du}{dy}+u^2-u^3\ln y=0$$

پاسخ سری دوم تمرینات درس معادلات دیفرانسیل ۱۳۹۹/۲/۲۵

اگر فرض کنیم $u=0$ آنگاه تمام توابع ثابت $y=m$ به ازای هر m مثبت در معادله صدق می کنند.

اگر $u\neq 0$ آنگاه با حذف u به یک معادله برنولی می رسیم : $y\dfrac{du}{dy}+u=u^2\ln y$

در این معادله ، تغییر متغیر $v=\dfrac{1}{u}$ را اعمال می کنیم $\dfrac{-y}{v^2}\dfrac{dv}{dy}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{1}{v^2}\ln y$ و به معادله خطی مرتبه اول

$v'-\dfrac{1}{y}v=-\dfrac{1}{y}\ln y$ می‌رسیم و جواب آن عبارت است از : $v=cy+\ln y+1$

پس جواب معادله $y\dfrac{du}{dy}+u=u^2\ln y$ برابر است با : $u=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{cy+\ln y+1}$

این معادله یک معادله جدایی پذیر است. $(cy+\ln y+1)dy=dx$

جواب این معادله برابر است با : $\dfrac{c}{2}y^2+y\ln y=x+a$

پس این معادله دو دسته جواب دارد.

(۶) $$xy''+y'+x=0\,,\quad y(0)=y'(0)=0$$

جواب : در این معادله داریم $(xy')'=-x$ که نتیجه می دهد $xy'=\dfrac{-1}{2}x^2+a$ و با توجه به شرط اولیه $y'(0)=0$ داریم $a=0$. بنابر این $y'=\dfrac{-1}{2}x$ یعنی $y=\dfrac{-1}{4}x^2+b$ و با توجه به شرط اولیه $y(0)=0$ داریم $b=0$ و بالاخره داریم : $y=\dfrac{-1}{4}x^2$

(۷) مسیرهای قائم بر دسته منحنی‌های $y=c\,(\sec x+\tan x)$ را بیابید.

جواب : داریم $y=\dfrac{c(1+\sin x)}{\cos x}$ و $y'=\dfrac{c(1+\sin x)}{\cos^2 x}$ بنابر این معادله دیفرانسیل این دسته از منحنی ها عبارت است از $y'=\dfrac{y}{\cos x}$ و معادله دیفرانسیل دسته منحنی های عمود بر آن معادله $y'=-\dfrac{\cos x}{y}$ خواهد بود و باید آن را حل کنیم. داریم $ydy=-\cos x dx$ و در نتیجه $y^2=-2\sin x+a$ و یا $y=\pm\sqrt{a-2\sin x}$ جواب مساله است.