عکس تبدیل لاپلاس :

می‌توان نشان داد که عکس تبدیل لاپلاس از رابطه‌ی زیر

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\,e^{st}\,ds$$

بدست می‌آید.

مسیر انتگرال‌گیری روی خط $Re\{s\}=\sigma$ که موازی محور موهومی می‌باشد، انجام می‌شود.

* در عمل از تجزیه به کسرهای جزئی و جداول تبدیل لاپلاس برای محاسبه تبدیل معکوس استفاده می‌کنیم.

توجه مهم -

$$X(s)=\frac{1}{s+\alpha}\ \xrightarrow{Re\{s\}>-\alpha}\ x_1(t)=e^{-\alpha t}u(t)$$

سیگنال راست‌سویی :

$$X(s)=\frac{1}{s+\alpha}\ \xrightarrow{Re\{s\}<-\alpha}\ x_2(t)=-e^{-\alpha t}u(-t)$$

سیگنال چپ‌سویی :

مثال ۱۰ -

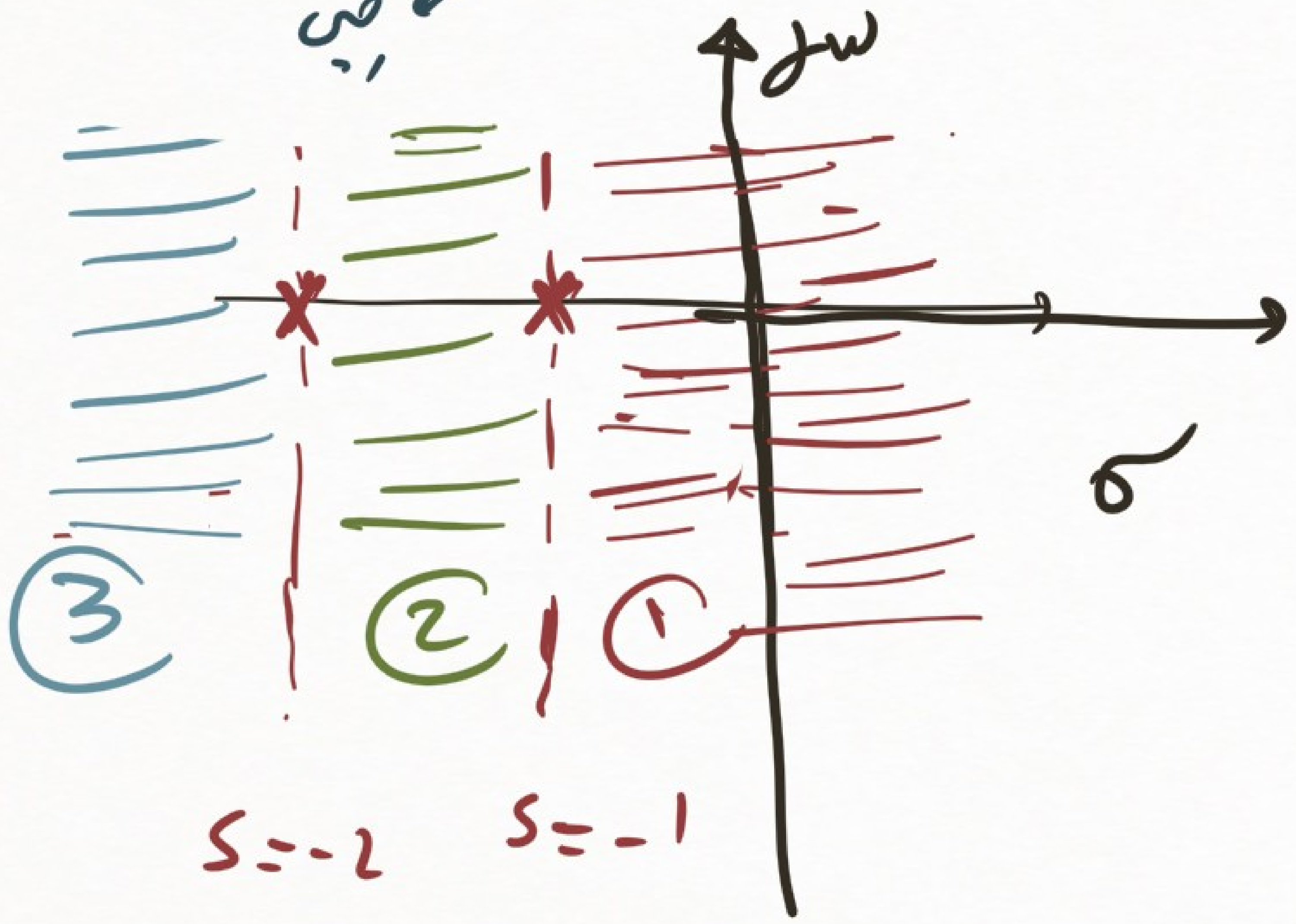
$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\Longrightarrow x(t)=?$$

برای محاسبه تبدیل معکوس از تجزیه به کسرهای جزئی استفاده می‌کنیم (درجه صورت از مخرج باید کوچکتر باشد و اگر نبود تقسیم می‌کنیم)

$$X(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

راستی / چپی

$$A = (s+1)X(s)\Big|_{s=-1} = \boxed{1}, \quad B = (s+2)X(s)\Big|_{s=-2} = \frac{1}{s+1}\Big|_{s=-2} = \boxed{-1}$$



چون دارا سه ناحیه همگرایی هستیم بنابراین دارا سه تبدیل معکوس هستیم.

① ناحیه $\Rightarrow$ (هردو راستی) $\rightarrow x(t) = Ae^{-t}u(t) + Be^{-2t}u(t)$, $\mathrm{Re}\{s\} > -1$

قطب ۱   قطب ۲

② ناحیه $\Rightarrow$ (قطب مربوط به B راستی و قطب مربوط به A چپی) $x(t) = -Ae^{-t}u(-t) + Be^{-2t}u(t)$, $-2 < \mathrm{Re}\{s\} < -1$

③ ناحیه $\Rightarrow$ (هردو چپی) $\longrightarrow x(t) = -Ae^{-t}u(-t) - Be^{-2t}u(-t)$; $\mathrm{Re}\{s\} < -2$

خواص تبدیل لاپلاس :

۱- خطی بودن :

$$x_1(t) \longleftrightarrow X_1(s) \quad ; \quad ROC = R_1$$

$$x_2(t) \longleftrightarrow X_2(s) \quad ; \quad ROC = R_2$$

$$a x_1(t) + b x_2(t) \longleftrightarrow a X_1(s) + b X_2(s) \quad , \quad ROC : R_1 \cap R_2 \quad \text{شامل}$$

مثال -

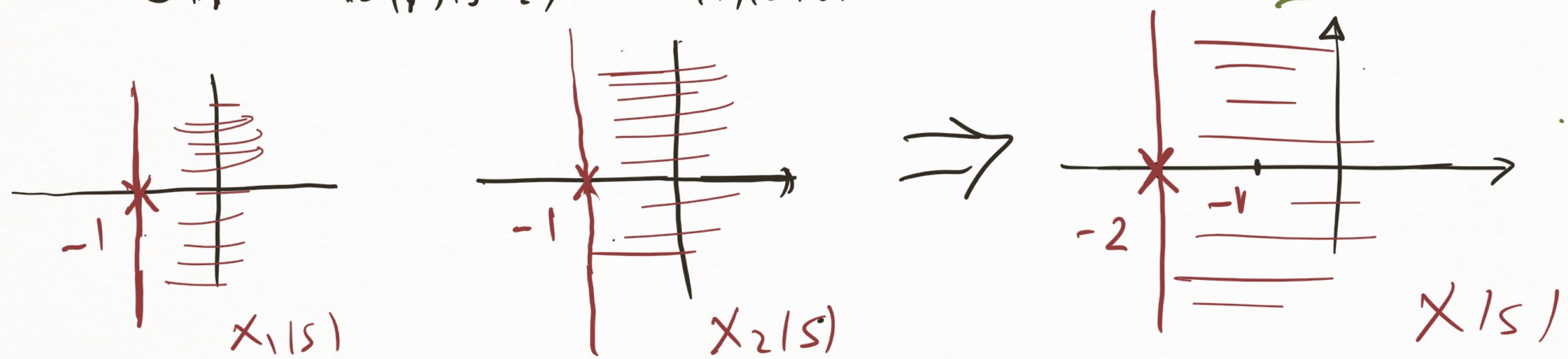
$$\begin{cases} x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) = \dfrac{1}{s+1} \quad ; \quad Re\{s\} > -1 \\ x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \quad ; \quad Re\{s\} > -1 \end{cases} \Longrightarrow x(t) = x_1(t) - x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = ?$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+2-1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \quad , \quad \boxed{Re\{s\} > -2}$$

حذف قطب و صفر با هم شده‌اند

ROC افزایش یافته است

شامل اشتراک است .

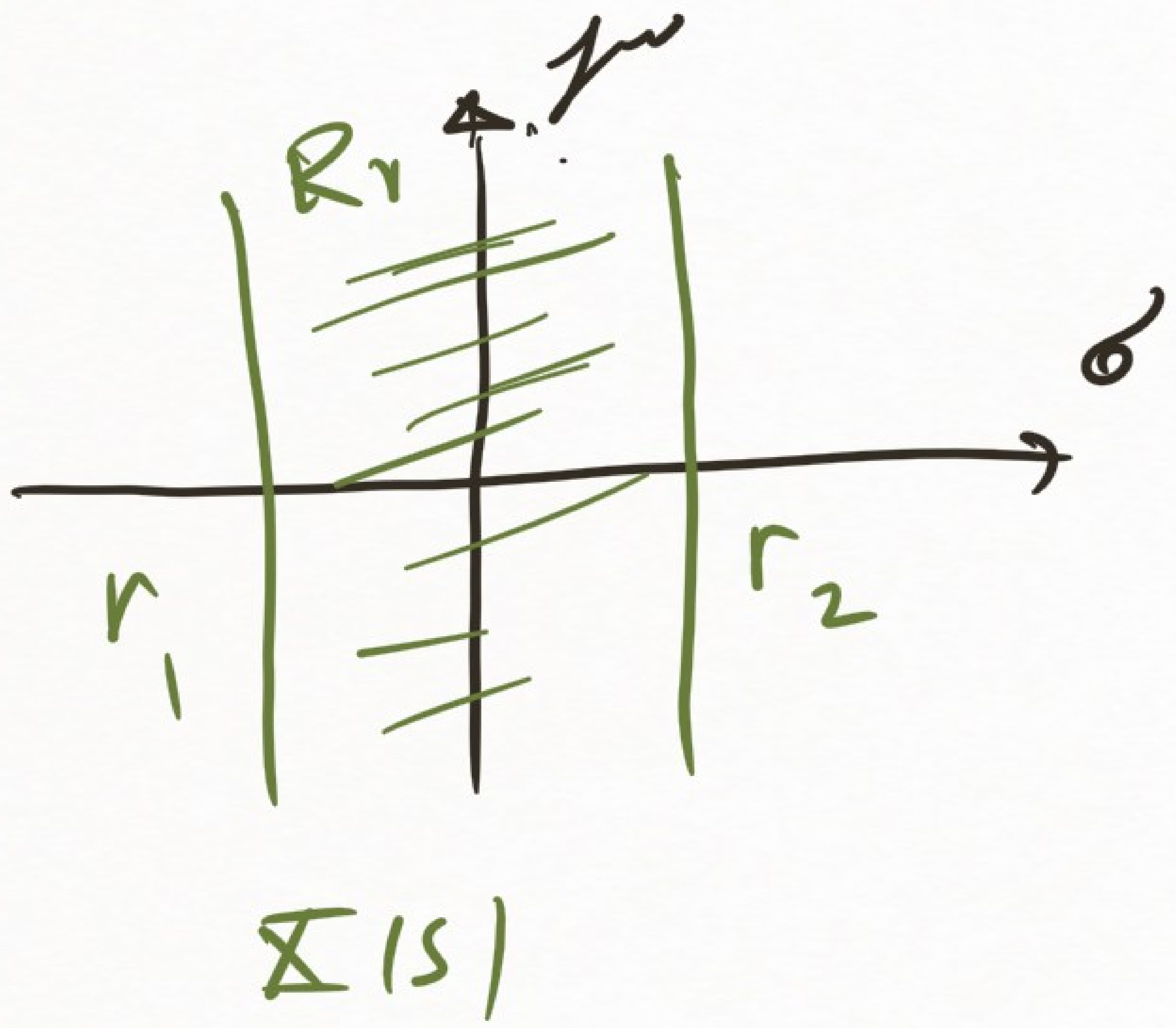


2- انتقال در زمان :

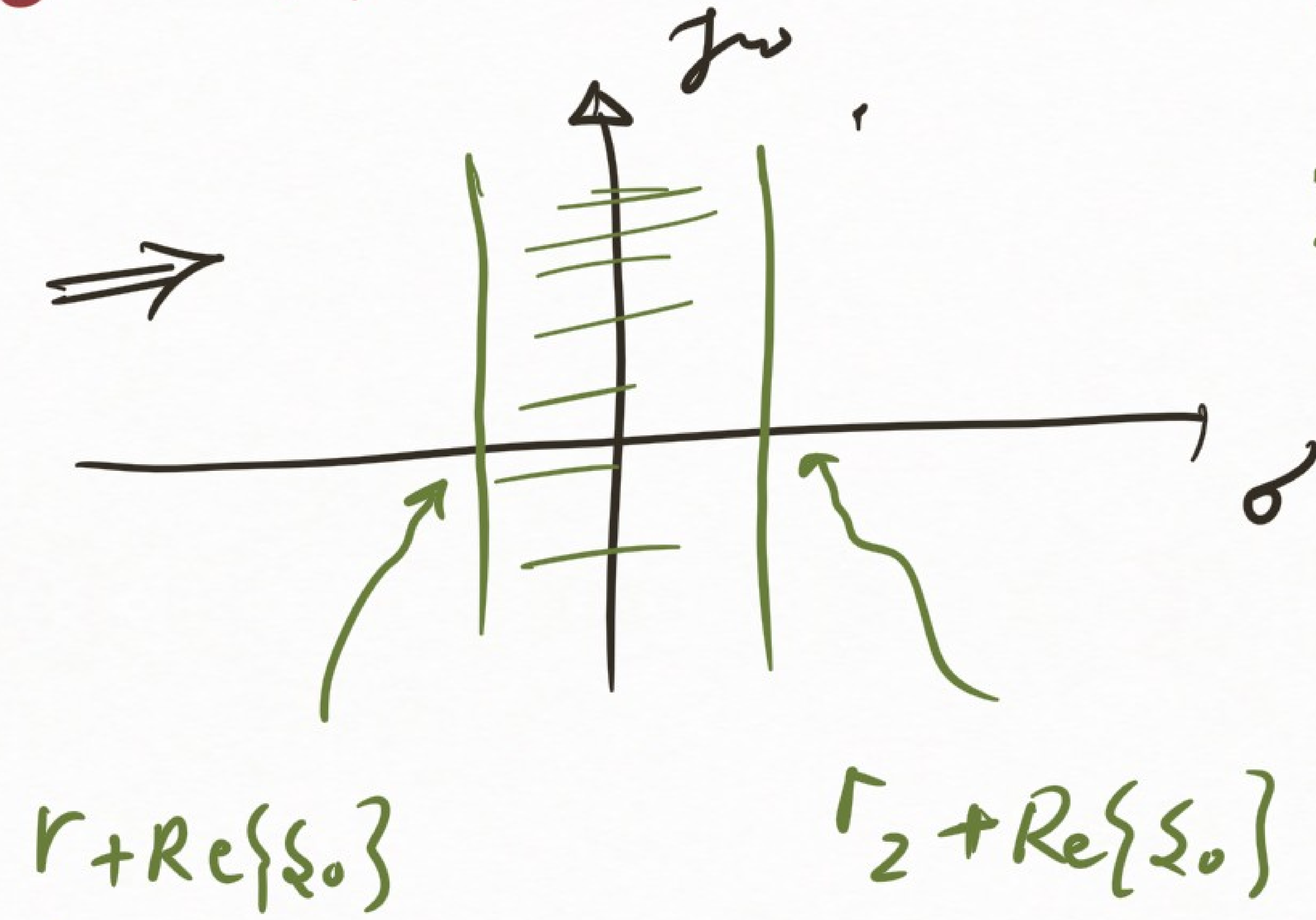
$$\begin{cases} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) , & ROC = R_1 \\ x(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} X(s) , & ROC = R_1 \end{cases}$$

3- انتقال در حوزه فرکانس :

$$e^{s_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s-s_0) , \quad ROC = R + Re\{s_0\}$$



$\Longrightarrow$



ناحیه همگرایی $X(s-s_0)$

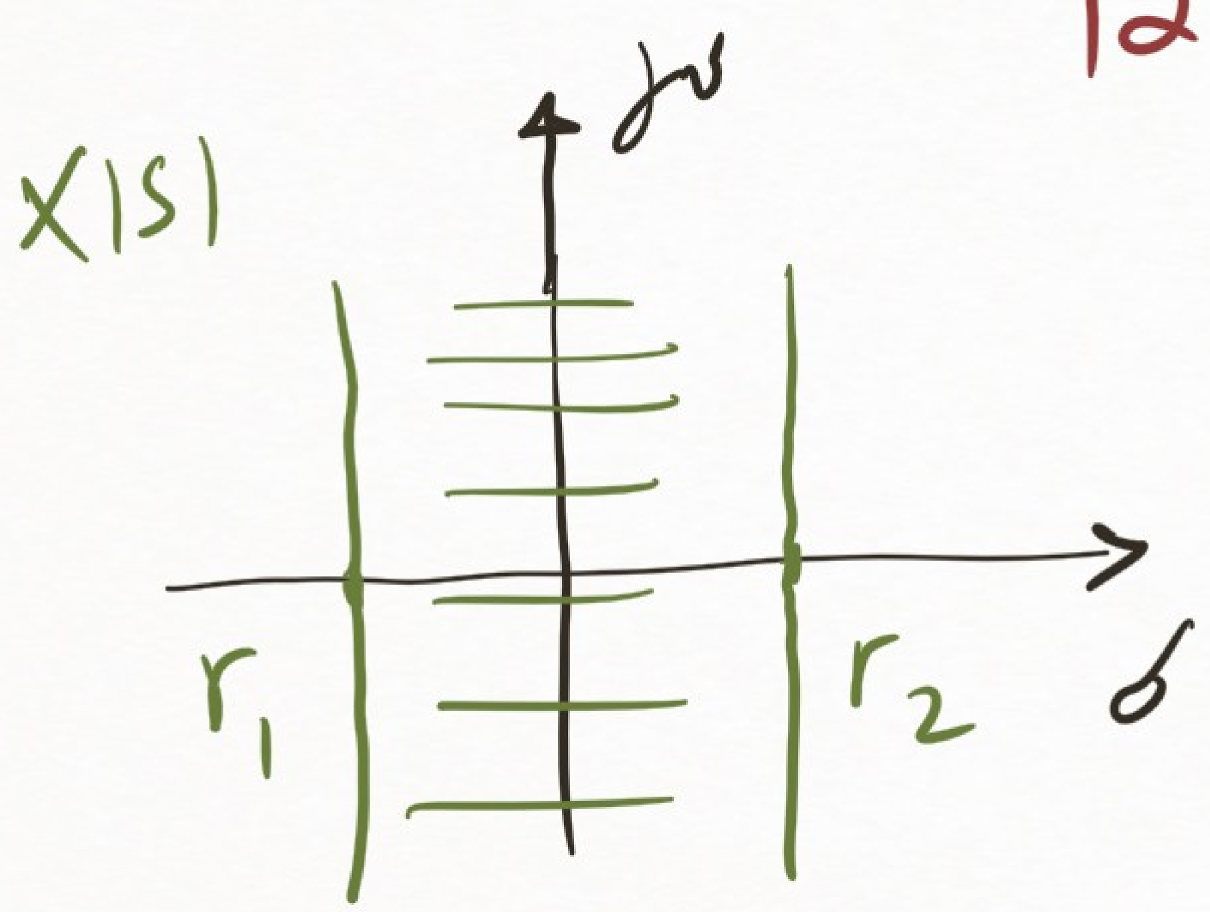
4- خاصیت مزدوج گیری :

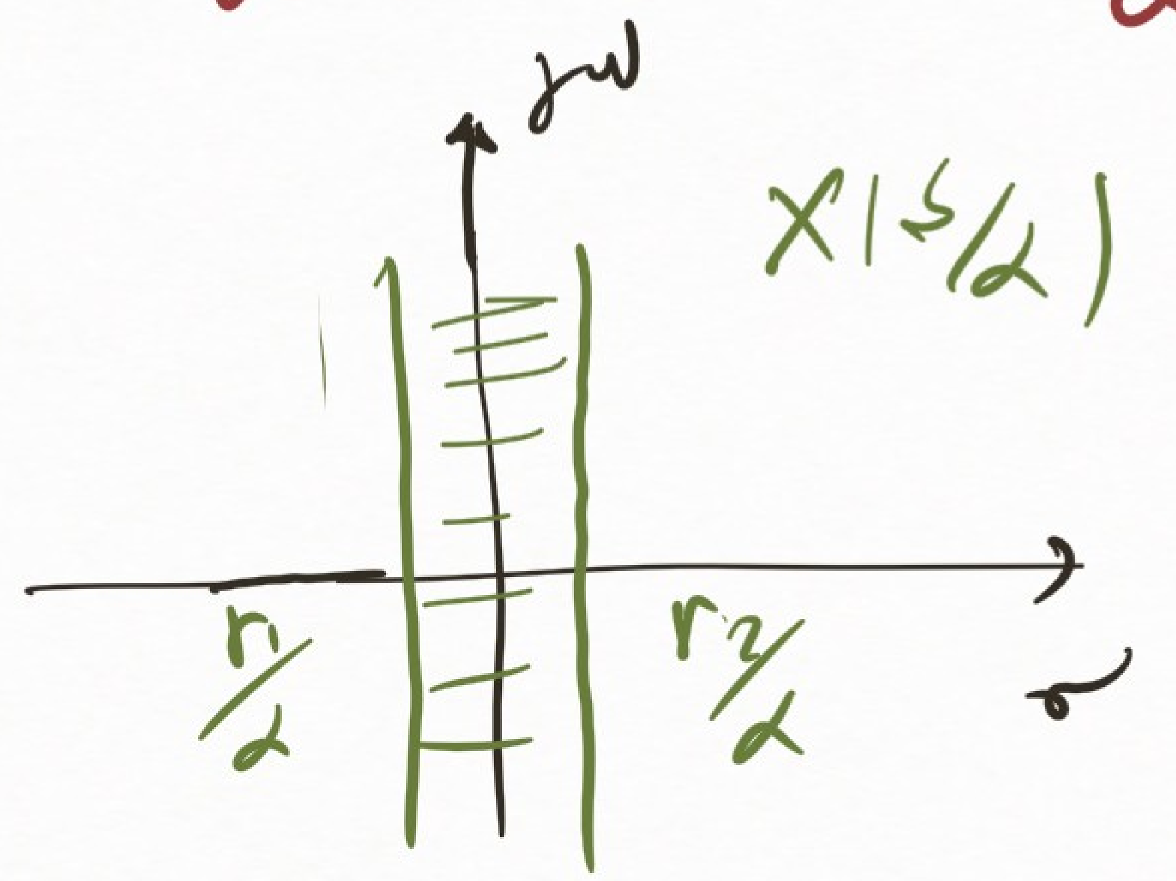
$$x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X^*(s^*) , \quad ROC = R_1$$

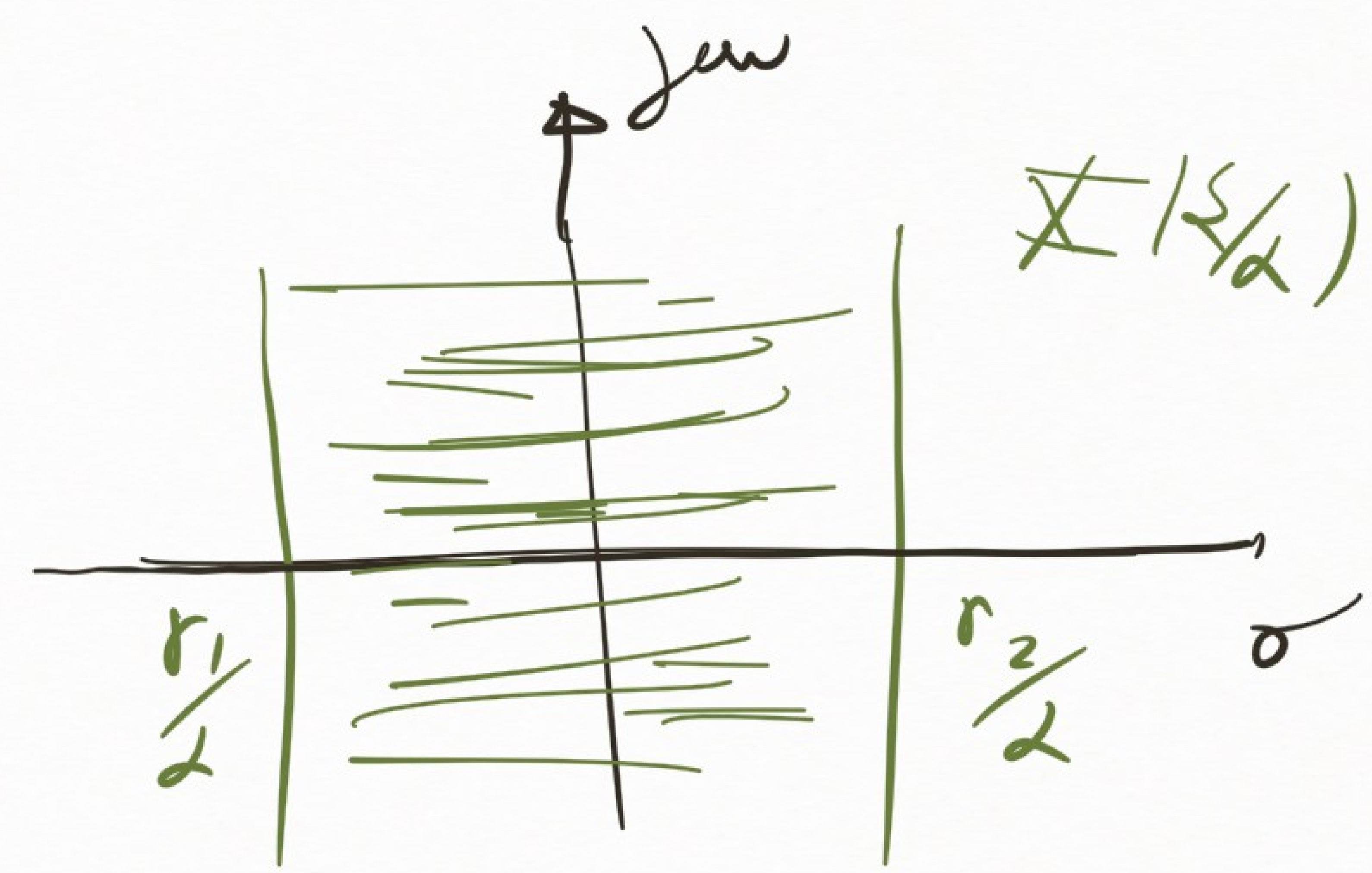
اگر $x(t)$ حقیقی باشد $\Longrightarrow X(s) = X^*(s^*)$

5- خاصیت تغییر مقیاس زمانی :

$$\begin{cases} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \ , \ RoC = R \\ x(\alpha t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{|\alpha|} X\left(\dfrac{s}{\alpha}\right) \ , \ RoC = \dfrac{R}{\alpha} \end{cases}$$



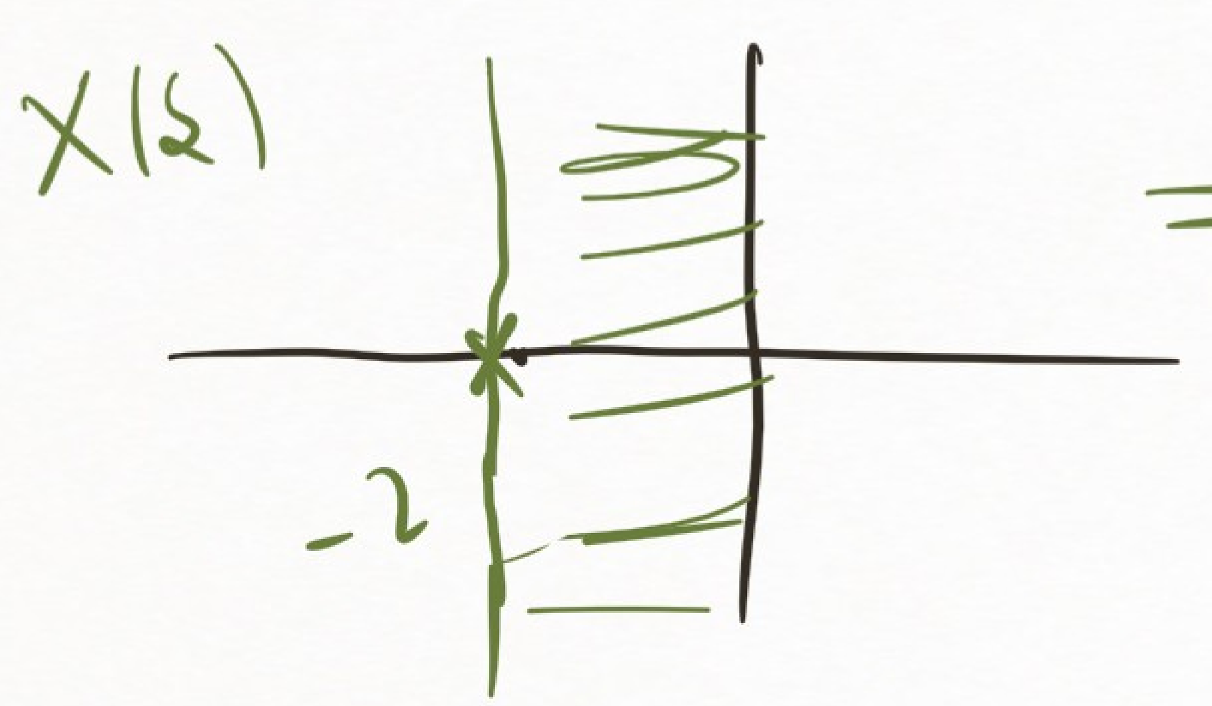




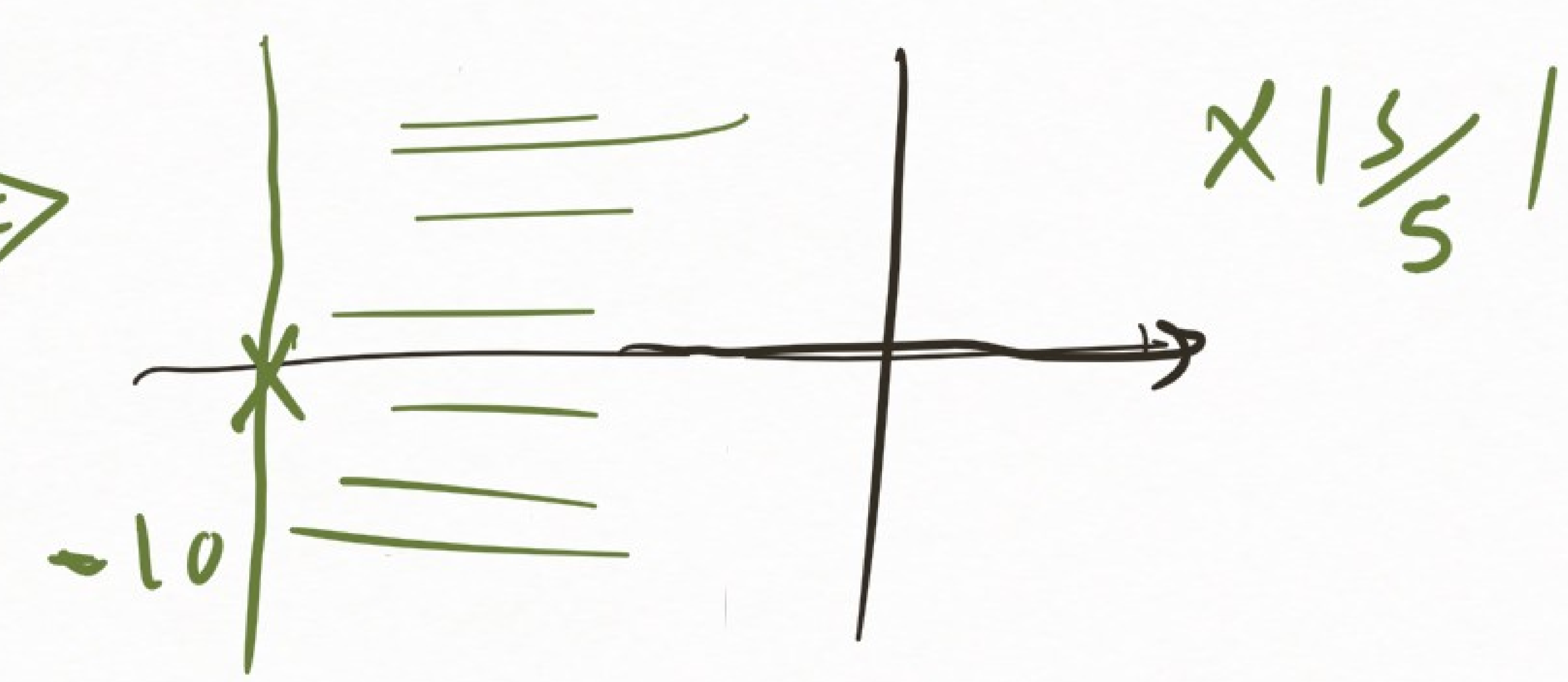
مثال:

$$x(t) = e^{-2t} u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+2} \ , \ Re\{s\} > -2$$

$$x_1(t) = x(5t) = e^{-10t} u(5t) \longleftrightarrow X_1(s) = \frac{1}{5} X\left(\frac{s}{5}\right) = \frac{1/5}{s/5 + 2} = \frac{1}{s+10} \ , \ \boxed{Re\{s\} > -10}$$



$\Longrightarrow$



۶- خاصیت کانولوشن:

$$\begin{cases} x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)\ ;\ ROC=R_1 \\ x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s)\ ;\ ROC=R_2 \end{cases} \Longrightarrow x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)\cdot X_2(s)\ ,\ ROC = \text{شامل } R_1 \cap R_2$$

مثال -

$$\begin{cases} x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) = \dfrac{s+1}{s+2}\ ;\ Re\{s\} > -2 \\ x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s) = \dfrac{s+2}{s+1}\ ;\ Re\{s\} > -1 \end{cases} \Longrightarrow X_1(s)\cdot X_2(s) = 1\ ,\ ROC = \text{تمام } s$$

$$x_1(t) * x_2(t) = \delta(t)$$

۷- مشتق‌گیری در حوزه زمان:

$$\begin{cases} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)\ ,\ ROC=R \\ \dfrac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sX(s)\ ,\ ROC = \text{شامل } R \end{cases}$$

با استفاده از تعریف معکوس لاپلاس اثبات می‌شود.

۸- مشتق‌گیری در حوزه s:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{-t\, x(t)}_{\mathcal{L}}\, e^{-st}\, dt \Longrightarrow -t\, x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dX(s)}{ds}\ ,\ ROC=R$$

مثال - می‌دانیم :

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+\alpha}$$

هدف :

$$x_1(t) = t e^{-\alpha t} u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s) = ?$$

$$t e^{-\alpha t} u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+\alpha}\right] = \frac{1}{(s+\alpha)^2}, \quad Re\{s\} > -\alpha$$

$$\frac{t^2}{2} e^{-\alpha t} u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+\alpha)^3}, \quad Re\{s\} > -\alpha$$

مثال -

$$X(s) = \frac{2s^2+5s+5}{(s+1)^2(s+2)}, \quad Re\{s\} > -1 \implies x(t) = ?$$

تجزیه به کسرهای جزئی

$$X(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+2}, \quad Re\{s\} > -1$$

(مشابه ضرایب تبدیل در تبدیل فوریه بیان شد)

$$A_2 = (s+1)^2 X(s)\Big|_{s=-1} = -1, \quad A_1 = \frac{d}{ds}\left((s+1)^2 X(s)\right)\Big|_{s=-1} = 2, \quad B = (s+2)X(s)\Big|_{s=-2} = 3$$

با شکل دیگری از عدد را استفاده کردیم

$$\Rightarrow x(t) = \left(-e^{-t} + 2te^{-t} + 3e^{-2t}\right)u(t)$$ ⇐ نتیجه این است $Re\{s\} > -1$ چون ناحیه همگرایی

۹- انتگرال گیری در حوزه زمان:

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s) \,, \quad ROC = R$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{X(s)}{s} \,, \quad ROC = R \cap \{Re\{s\} > 0\}$$ شامل

مشاهده می‌کنید که این خاصیت عکس خاصیت مشتق گیری در حوزه زمان است.

$$e^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha} \Rightarrow \text{اگر } \alpha = 0 \Rightarrow u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s}$$

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xRightarrow{\text{تبدیل لاپلاس}} X(s) \cdot \frac{1}{s} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau\right\}$$

$$x(t) * u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s} X(s)$$ ؛ ROC شامل اشتراک ناحیه همگرایی $X(s)$ و تبدیل لاپلاس $u(t)$ می باشد.

قضیه مقدار اولیه و نهایی :

* اگر $t<0$ ، $x(t)=0$ و $x(t)$ در مبدا تابع ضربه و توابع ضربه مرتبه بالاتر را نداشته باشد داریم :

قضیه مقدار نهایی $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$ ، قضیه مقدار اولیه $x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$

$t=0^+$

مثال - فرض کنید ولتاژ دو سر خازنی در حوزه s به صورت $V_c(s)=\dfrac{6s^2+10s+12}{s^3+4s^2+14s+20}$ باشد مقدار ولتاژ اولیه خازن در $t=0^+$ را بدست آورید.

$$v_c(t)\Big|_{t=0} = \lim_{s\to\infty} sV_c(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{6s^3+10s^2+12s}{s^3+4s^2+14s+20} = \boxed{6}$$

آنالیز سیستم های LTI توسط تبدیل لاپلاس :

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$y(t)=x(t)*h(t) \xRightarrow{\text{تبدیل لاپلاس}} Y(s)=X(s)\cdot H(s)$ و $H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}$ تابع تبدیل سیستم

مرور خاصیت علی بودن: می‌دانیم که اگر $h(t)=0 \ , \ t<0$ آنگاه سیستم علی است یعنی $h(t)$ سیگنال دست راستی است و

بنابراین ROC متناظر با تابع تبدیل یک سیستم علی، سمت راست یک نیم صفحه s است. (بشرطی که $H(s)$ آن گویا باشد)

مثال ۱- $h(t)=e^{-t}u(t)$ سیستم علی $\Rightarrow H(s)=\dfrac{1}{s+1} \ , \ Re\{s\}>-1$

مثال ۲- $h(t)=e^{-|t|} \ , \ -\infty<t<+\infty \Rightarrow$ چون $h(t)\neq 0$ به ازای $t<0$ لذا سیستم علی نیست

$H(s)=\dfrac{-2}{s^2-1} \ , \ -1<Re\{s\}<1 \Rightarrow$ یعنی ROC آن سمت راستی نیست یعنی سمت راست نیم صفحه آن قرار ندارد.

مثال ۳- $H(s)=\dfrac{e^{s}}{s+1} \ , \ Re\{s\}>-1$

ملاحظه می‌کنید که سیستم علی نیست ولی ROC آن سمت راستی است

زیرا: $e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{s+1} \Rightarrow h(t)=e^{-(t+1)}u(t+1) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{e^{s}}{s+1}$

$Re\{s\}>-1$

چون سیستم گویا نیست ولی اگر سیستم گویا باشد ROC سمت راستی معادل علیت است

برای خاصیت پایداری: یک سیستم وقتی پایدار است که ناحیه همگرایی $H(s)$ محور $j\omega$ را شامل شود.

مثال - دارای سه تابع سیستمی $h(t)$ هستیم

$$H(s)=\frac{s-1}{(s+1)(s-2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-2}=\frac{2/3}{s+1}+\frac{1/3}{s-2}\Rightarrow$$

$$h_1(t)=-\tfrac{2}{3}e^{-t}u(-t)-\tfrac{1}{3}e^{2t}u(-t)$$ ، سیستم نه علی و نه پایدار است

$$h_2(t)=\tfrac{2}{3}e^{-t}u(t)-\tfrac{1}{3}e^{2t}u(-t)$$ ، سیستم پایدار ولی غیر علی است

$$h_3(t)=\tfrac{2}{3}e^{-t}u(t)+\tfrac{1}{3}e^{2t}u(t)$$ ؛ سیستم پایدار نیست ولی علی است

نتیجه مهم - یک سیستم علی با تابع سیستم گویا $H(s)$ وقتی پایدار است که اگر و تنها اگر تمام قطب های آن سمت چپ محور $j\omega$ باشند.

مثال - سیستم شماره ③ هم علی و هم پایدار می باشد.

$$H(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$