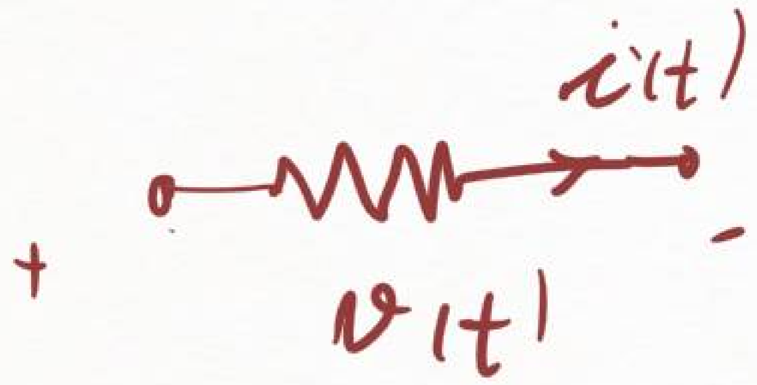
انرژی و توان سیگنال



توان لحظه‌ای مقاومت

$$p(t) = v(t)\,i(t) = \frac{v^2(t)}{R} = R\,i^2(t)$$

کل انرژی مصرف شده در فاصله زمانی (t_1, t_2)

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{v^2(t)}{R}\,dt$$

توان متوسط در این فاصله

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} \frac{v^2(t)}{R}\,dt$$

با توجه به روابط بالا برای سیگنال‌ها نیز انرژی و توان بصورت توان دوم تعریف شد :

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2\,dt$$

* انرژی سیگنال پیوسته در فاصله t_1 تا t_2
برای توان متوسط تقسیم بر فاصله زمانی t_2-t_1 شد

$$E = \sum_{n_1}^{n_2} |x(n)|^2$$

* انرژی سیگنال گسسته در فاصله n_1 تا n_2
برای توان متوسط تقسیم بر فاصله زمانی n_2-n_1+1 شد :

* انرژی نامحدود از فاصله $+\infty$ تا $-\infty$ بصورت زیر تعریف میشود :

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$E_\infty = \lim_{N\to\infty}\sum_{-N}^{N} |x[n]|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

* همچنین بصورت زیر توان متوسط از فاصله نامحدود :

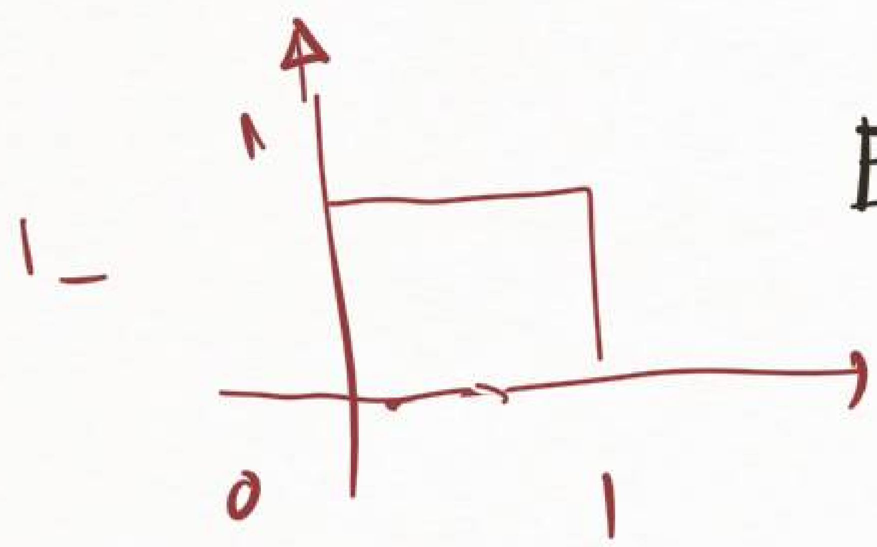
$$P_\infty = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt \quad \text{و} \quad P_\infty = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N} |x[n]|^2$$

با توجه به توضیحات فوق سیگنالها به سه دسته تقسیم میشوند.

1. انرژی کل محدود است $\boxed{E_\infty < \infty}$ ولی توان متوسط صفر
$$\boxed{P_\infty = \lim_{T\to\infty}\frac{E_\infty}{2T} = 0}$$

2. توان متوسط محدود $\boxed{P_\infty > 0}$ ولی $\boxed{E_\infty = \infty}$

3. P_∞ و E_∞ هر دو نامحدود هستند
$$\boxed{E_\infty = \infty} \quad \text{و} \quad \boxed{P_\infty = \infty}$$



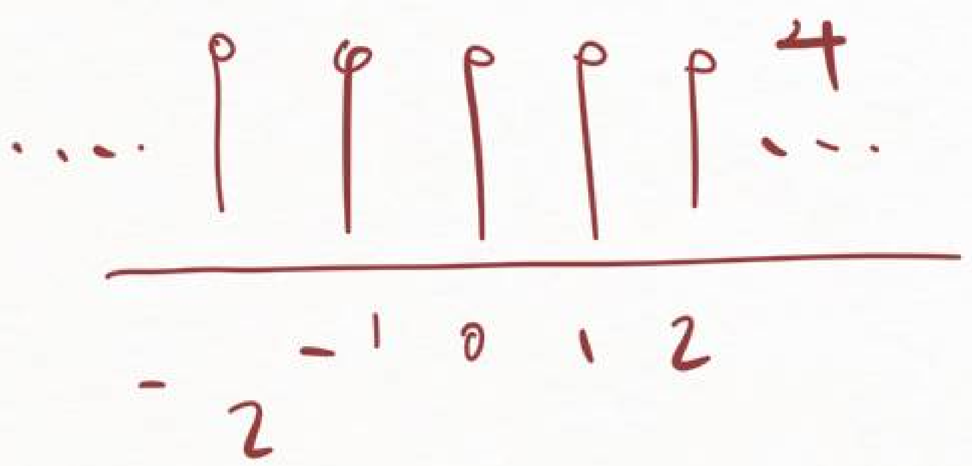
$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^1 |x(t)|^2 dt = \boxed{1}$$ محدود

مثال نوع اول.

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{E_\infty}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} = \boxed{0}$$

* اگر سیگنال‌ها غیر پریودیک انرژی باشند.

2- $x[n] = 4$



$$\Longrightarrow \quad E_\infty = \sum_{-\infty}^{+\infty} 4^2 = \boxed{\infty}$$

مثال نوع دوم.

* اغلب سیگنال‌ها پریودیک توان باشند.

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} 4^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{(2N+1)4^2}{(2N+1)} = 4^2 = \boxed{16}$$

مثال نوع سوم

3- $x(t) = t$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 dt = \infty \; ; \quad P_\infty = \infty$$

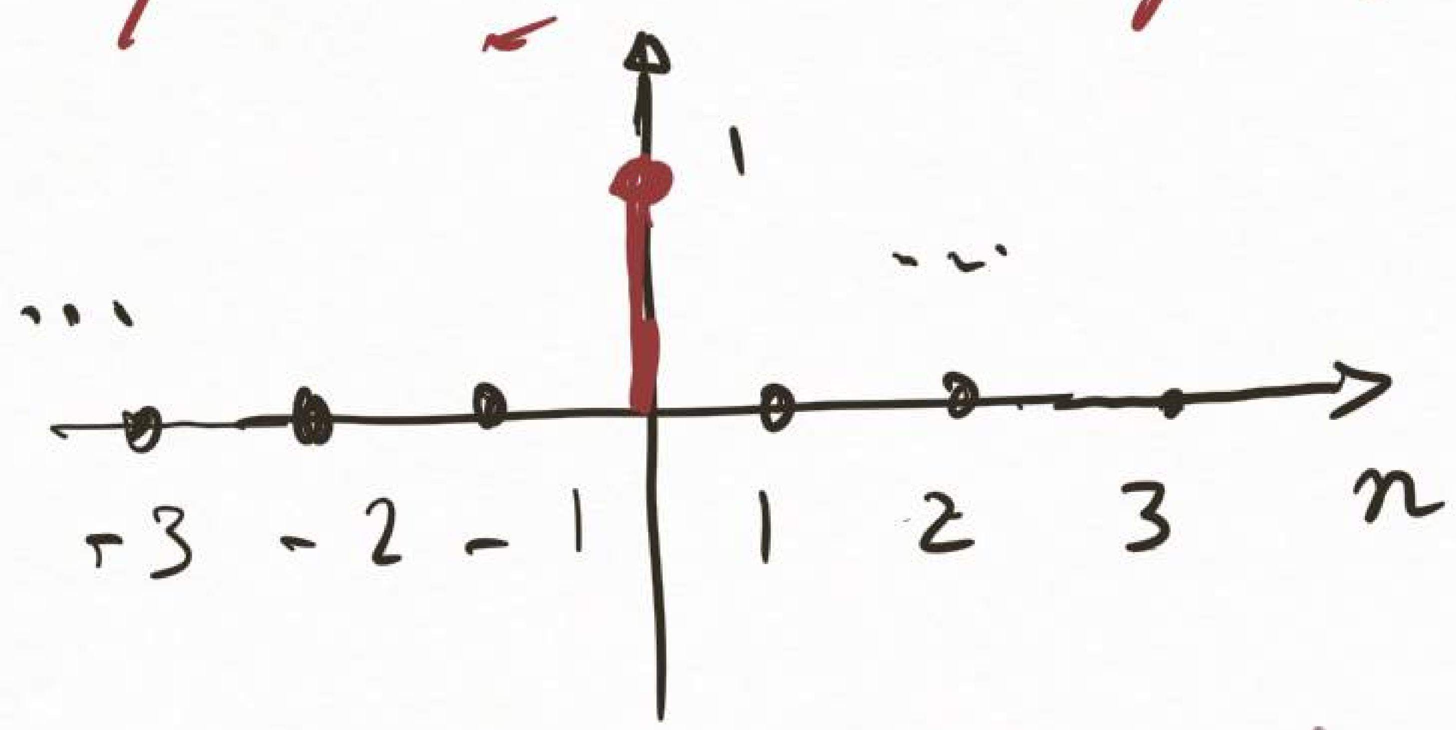
توجه: مثال‌ها به صورت مخلوط از سیگنال‌های گسسته و پیوسته زده شده است.

سیگنالهای اساسی در رابطه با دنباله‌ها

سیگنالهای اساسی گسسته: ۱- تابع ضربه واحد

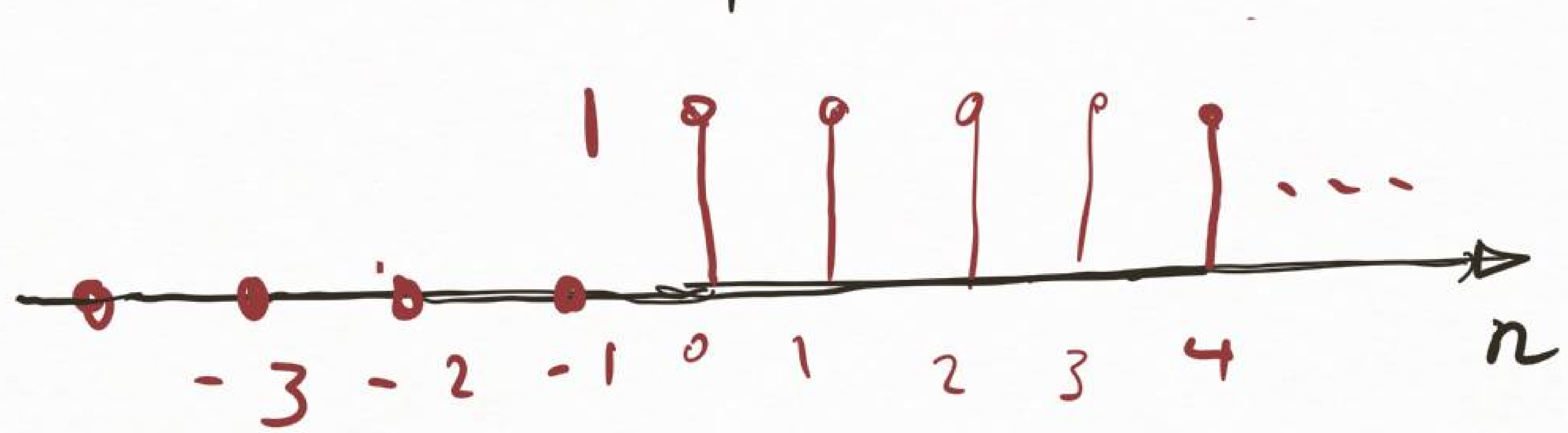
$\delta(n)$ (impulse یا unit sample)

$$\delta(n)=\begin{cases}1 ; & n=0\\ 0 ; & n\neq 0\end{cases} \Longrightarrow$$



۲- دنباله پله واحد

$$u(n)=\begin{cases}1 , & n\geq 0\\ 0 ; & n<0\end{cases}$$



رابطه بین تابع ضربه و پله:

$$\boxed{\delta[n]=u(n)-u(n-1)}$$

$$u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k] \quad \text{یا} \quad u(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\cdots$$

اگر $n-k=k' \Rightarrow u(n)=\sum_{k'=n}^{-\infty}\delta[k']=\sum_{k'=-\infty}^{n}\delta[k']$ یا

$$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]$$

$k=0 \rightarrow k'=n$

$k=\infty \rightarrow k'=-\infty$

ولی $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(n)=1$

توجه در سیگماگیری عددی اگر تابع ضربه در محدوده سیگما قرار بگیرد حاصل یک و گرنه صفر می‌شود.

ادامه مثال:

$$\sum_{0^-}^{0^+} \delta(n) = 1 \;,\; \sum_{n=-3}^{-1} \delta(n) = 0 \;;\; \sum_{n=2}^{10} \delta(n) = 0 \;,\; \sum_{n=0^-}^{0^+} \delta(n-1) = 0 \;,\; \sum_{1^-}^{1^+} \delta(n-1) = 1$$

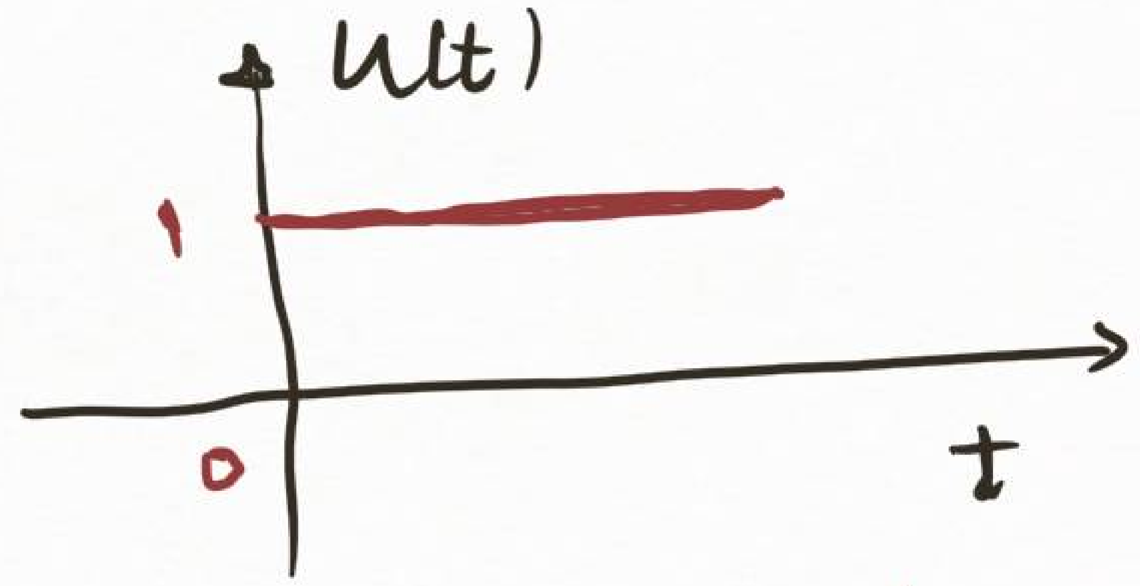
- ضرب تابع ضربه در یک سیگنال:

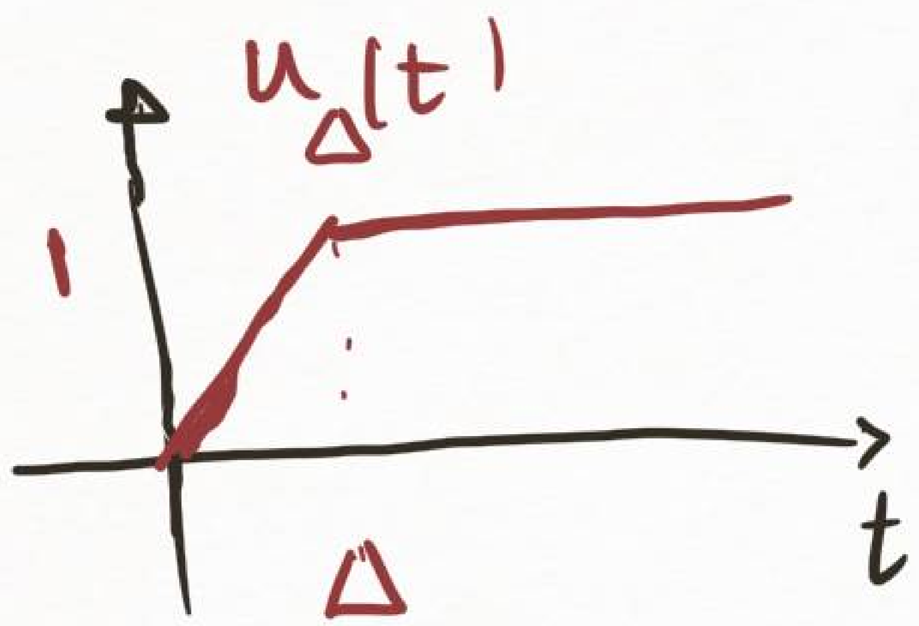
$$\begin{cases} x(n)\,\delta(n) = x(0)\,\delta(n) \\ x(n)\,\delta(n-n_0) = x(n_0)\,\delta(n-n_0) \end{cases}$$

- سیگنال‌های پیوسته: ۱- تابع پله پیوسته

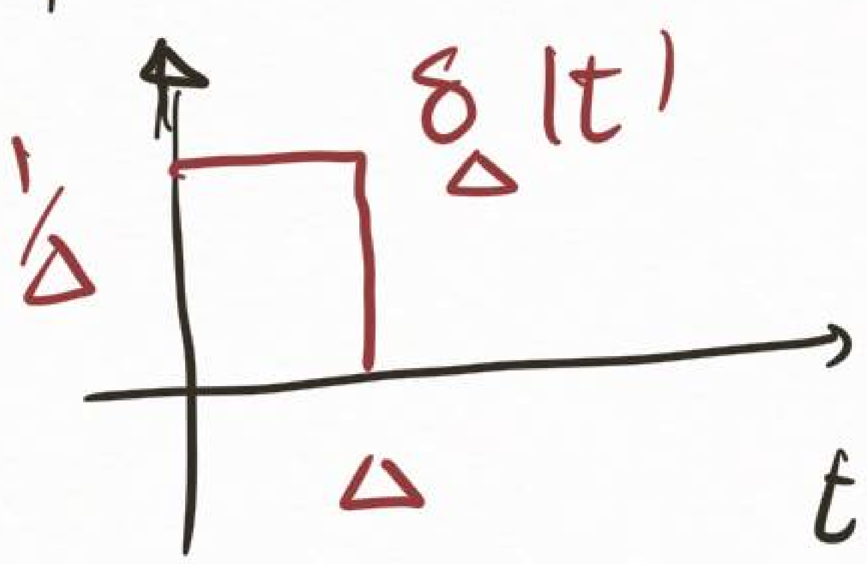
(u(t)) Continuous time unit step

$$u(t) = \begin{cases} 1 \;; & t \geq 0 \\ 0 \;; & t < 0 \end{cases}$$





مشتق گیری
$\Longrightarrow$

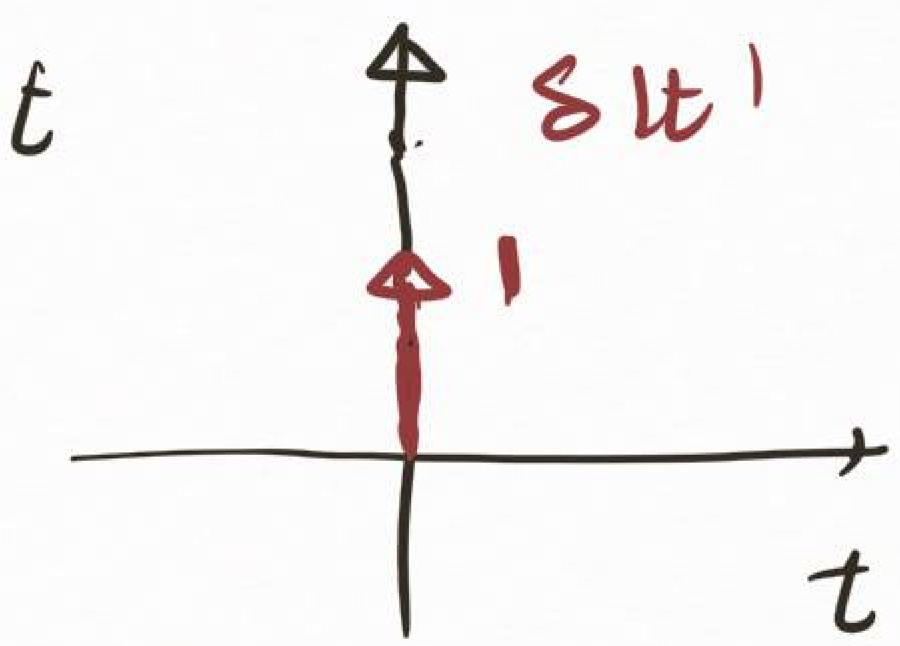


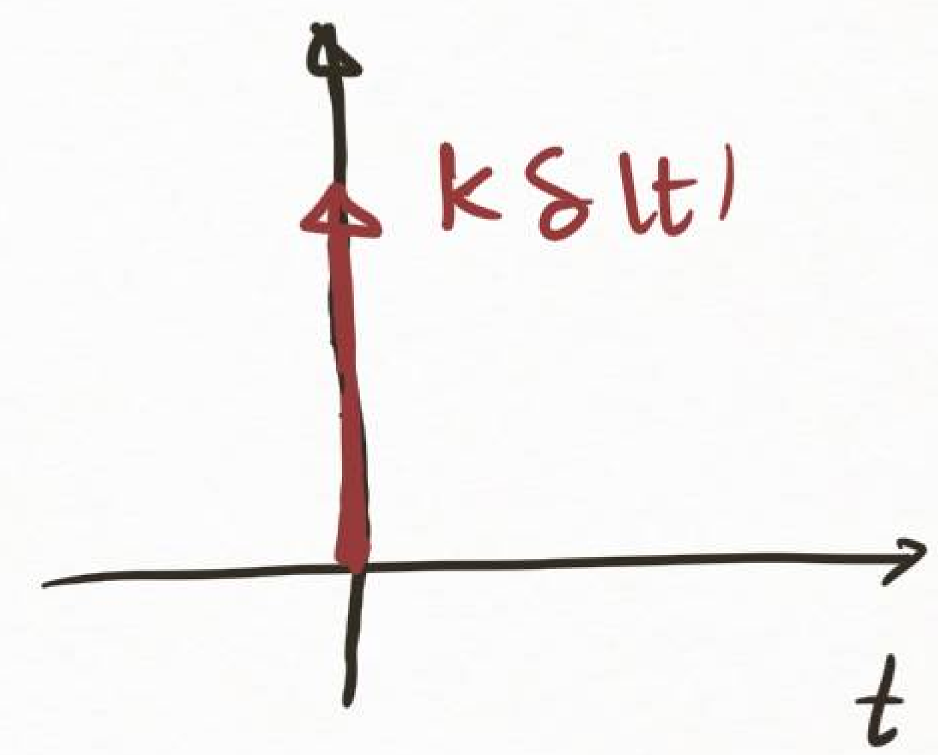
$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}$$

مقدار زیاد

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) = \begin{cases} \infty \;; & t = 0 \\ 0 \;; & t \neq 0 \end{cases}$$

۲- تابع ضربه





رابطه بین تابع ضربه و تابع پله :

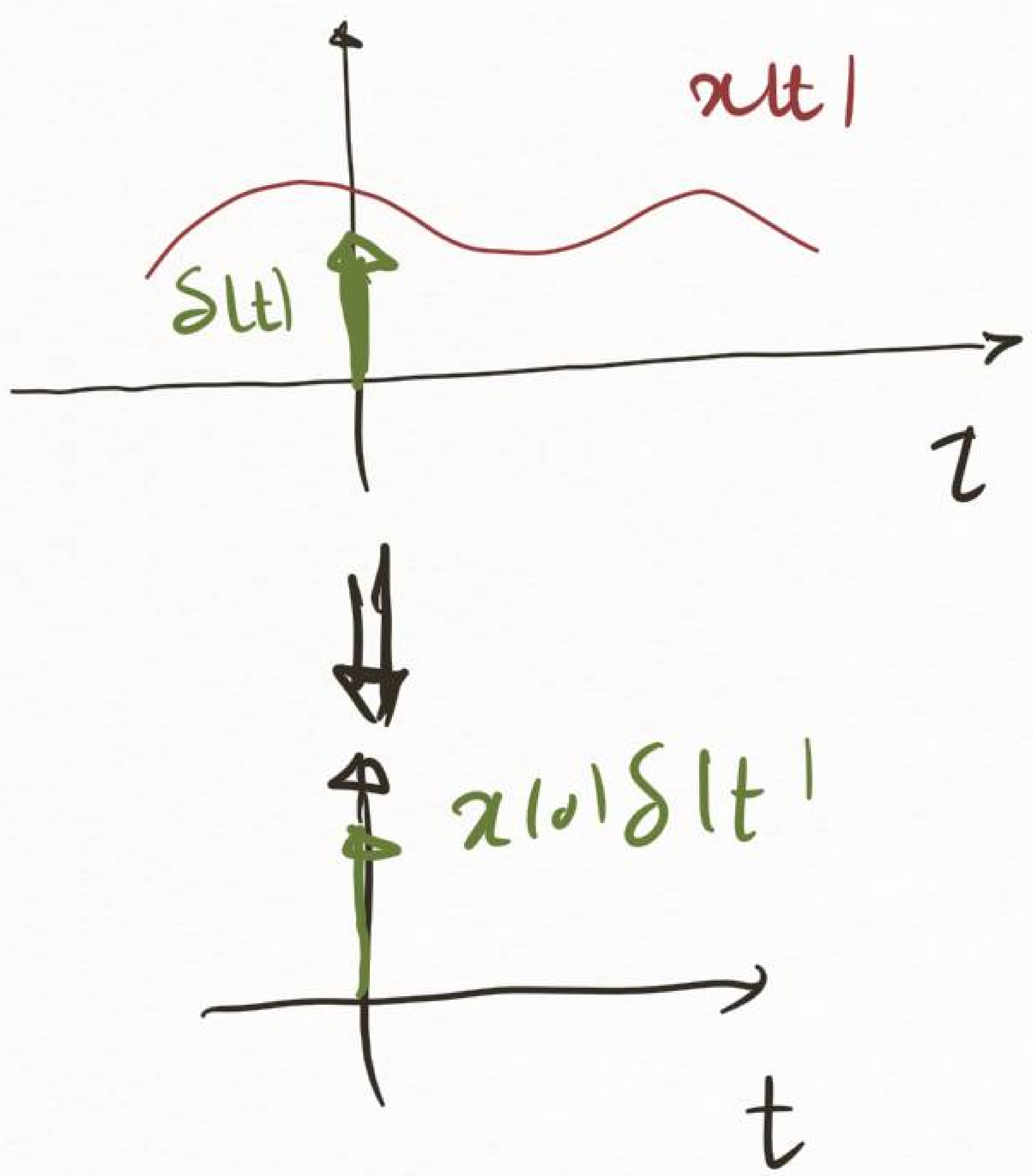
$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau \quad , \quad \delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

- نتیجه مهم :

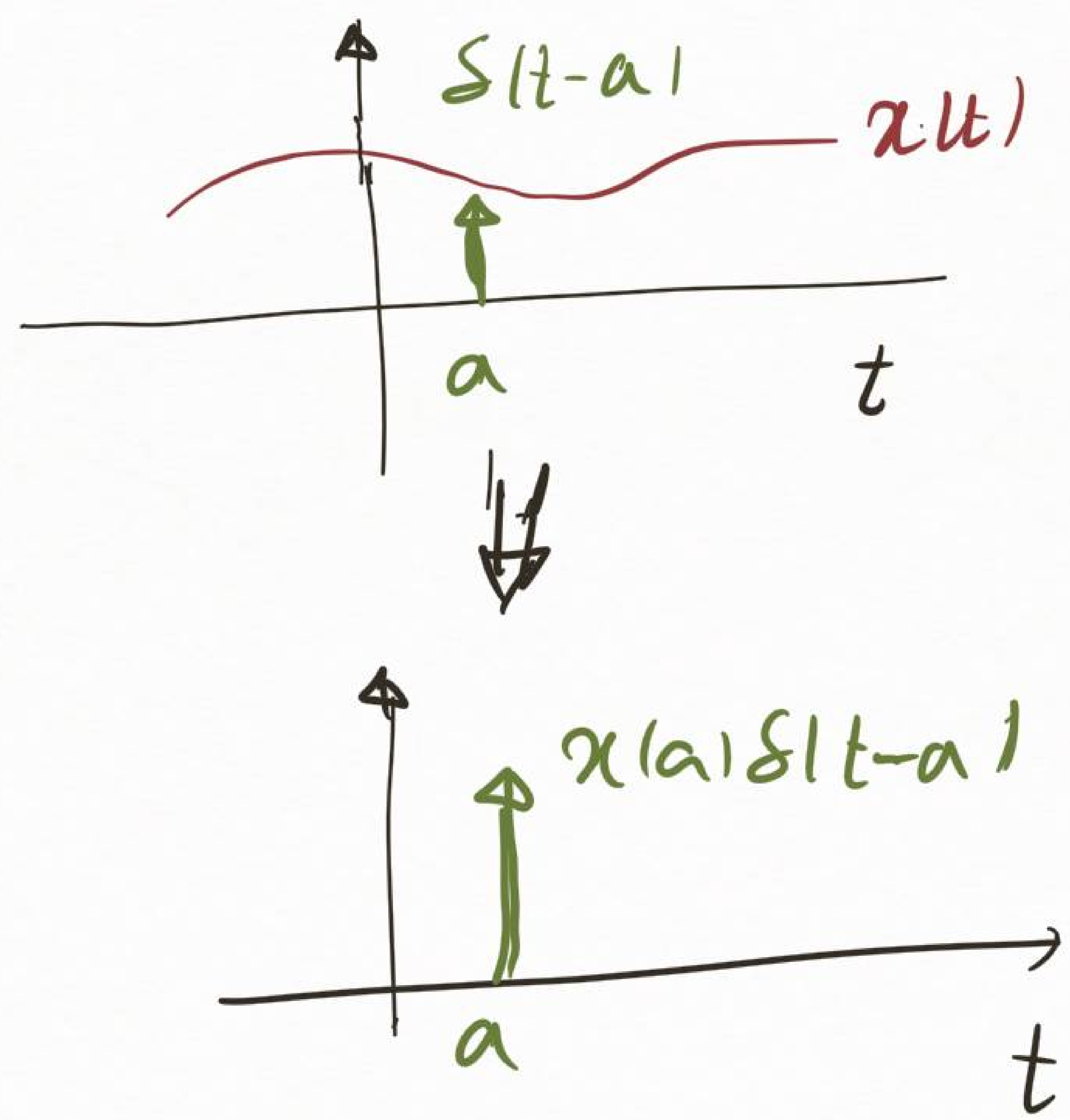
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,dt=1$$ (مساحت تابع ضربه را داره)

و $\int_{-4}^{0^-}\delta(t)\,dt=0$, $\int_{2}^{6}\delta(t)\,dt=0$

- ضرب تابع ضربه در یک سیگنال :



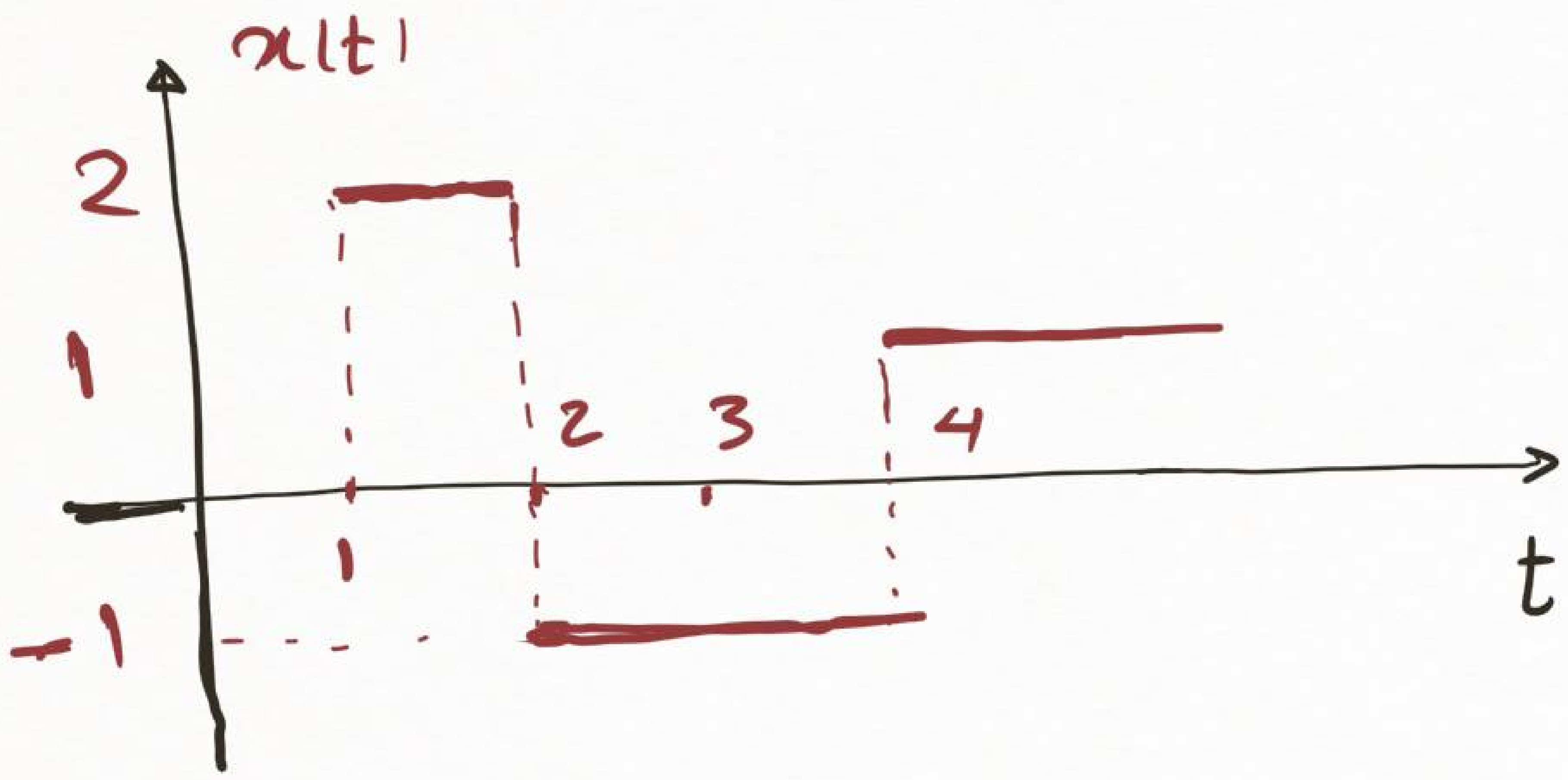
$$x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$$



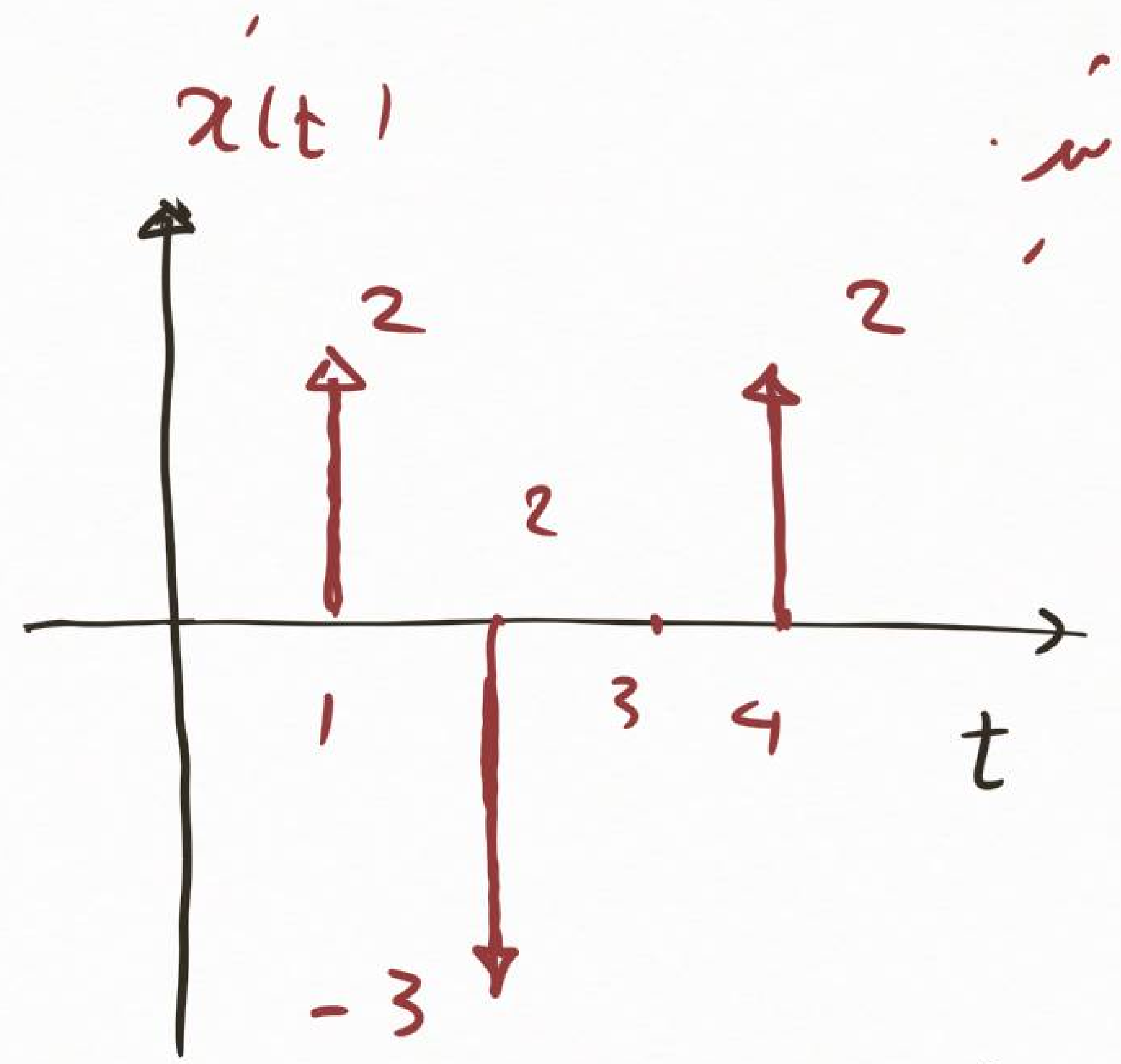
$$x(t)\delta(t-a)=x(a)\delta(t-a)$$

نتیجه :

$$\begin{cases}\delta(at)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t)\\[2ex] \delta[kn]=\delta[n]\end{cases}$$

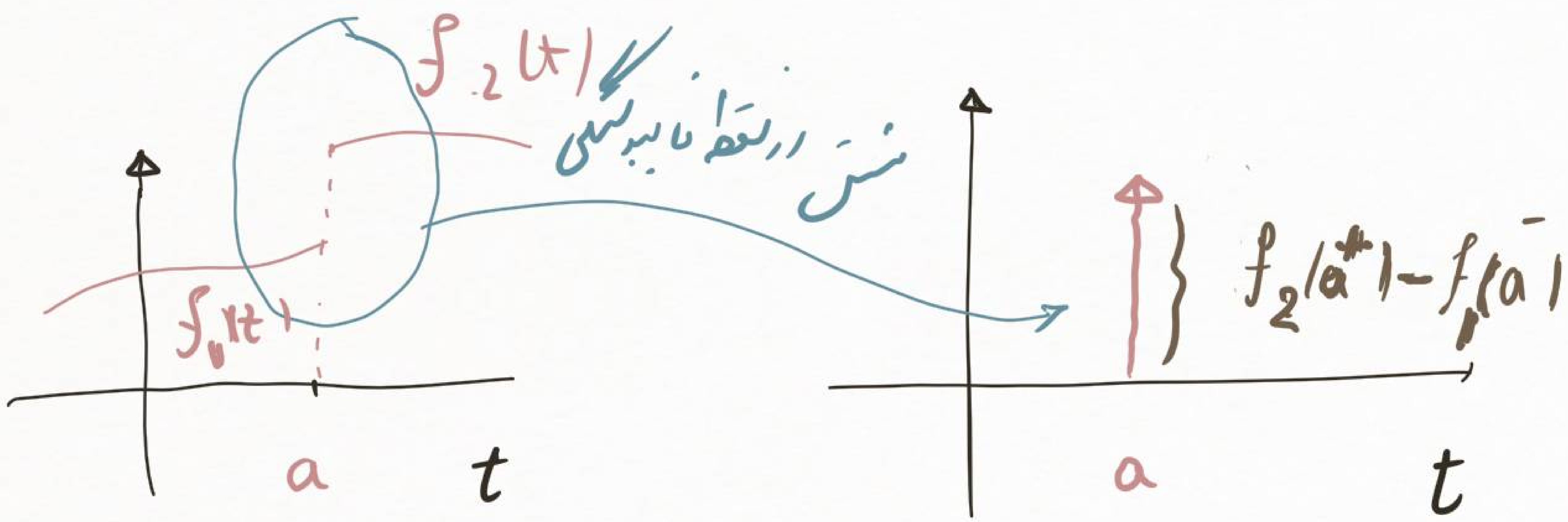


$\Longrightarrow$



مثال - مشتق شکل مقابل را رسم نمایید.

توجه: مشتق در نقطه ناپیوستگی تابع ضربه می‌گردد.



* حال اگر از x'(t) انتگرال بگیریم دوباره به x(t) می‌رسد.

$x(t)=\int_{-\infty}^{t} x'(\tau)d\tau \Longrightarrow t<1 \Longrightarrow$ ضربه داخل محدوده نیست $\Longrightarrow$ انتگرال $\boxed{=0}$

$1<t<2^- \Longrightarrow$ ضربه اول وجود دارد $\Longrightarrow$ انتگرال مساحت ضربه می‌باشد $\boxed{=2}$

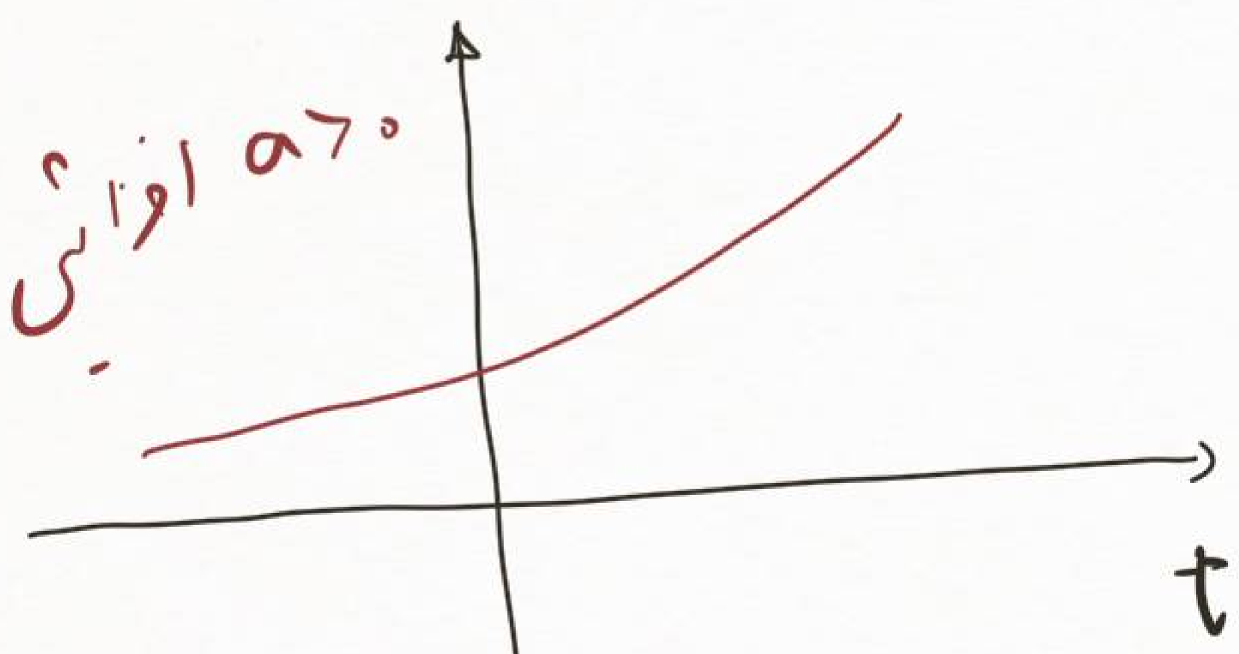
$2^-<t<4^- \Longrightarrow$ دو ضربه اول وجود دارند $\Longrightarrow$ مساحت دو ضربه $= 2-3 \boxed{=-1}$

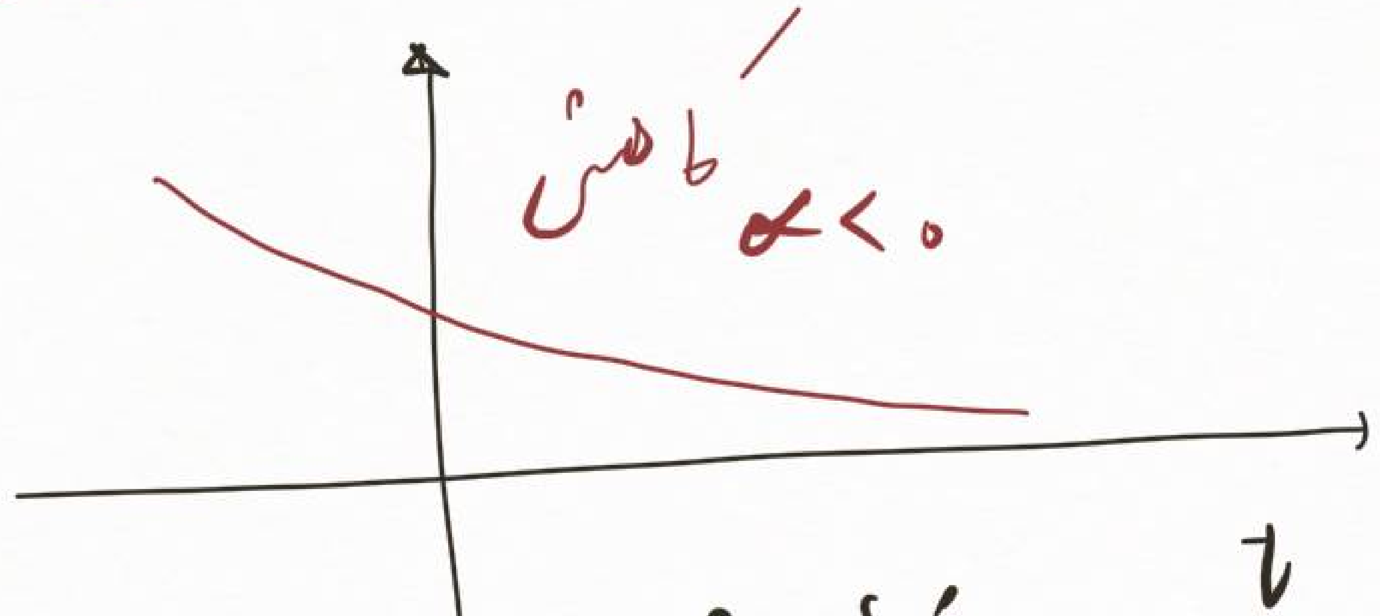
$t>4 \Longrightarrow$ هر سه ضربه وجود دارد $\Longrightarrow$ مساحت سه ضربه $= 2-3+2 \boxed{=1}$

سیگنال های پیوسته :

الف - α , c حقیقی باشند.

$$x(t) = Ce^{\alpha t}$$





ب - α موهومی و c حقیقی باشد.

$$x(t) = Ce^{j\omega_0 t} = C(\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t) \quad ; \quad e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)} = e^{j\omega_0 t}\cdot \underbrace{e^{j\omega_0 T}}_{1} \Longrightarrow \omega_0 T = 2k\pi$$

بخش حقیقی یک سیگنال کسینوسی

بخش موهومی یک سیگنال سینوسی

$$T = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$ ← پریود سیگنال

ج - α موهومی و c مختلط :

$$x(t) = Ce^{j\omega_0 t} \quad ; \quad C = Ae^{j\varphi} \Longrightarrow x(t) = Ae^{j\varphi}\cdot e^{j\omega_0 t} = Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)}$$

$$x(t) = A[\cos(\omega_0 t+\varphi) + j\sin(\omega_0 t+\varphi)]$$

بخش حقیقی یک کسینوسی با فاز φ

بخش موهومی یک سینوسی با فاز φ

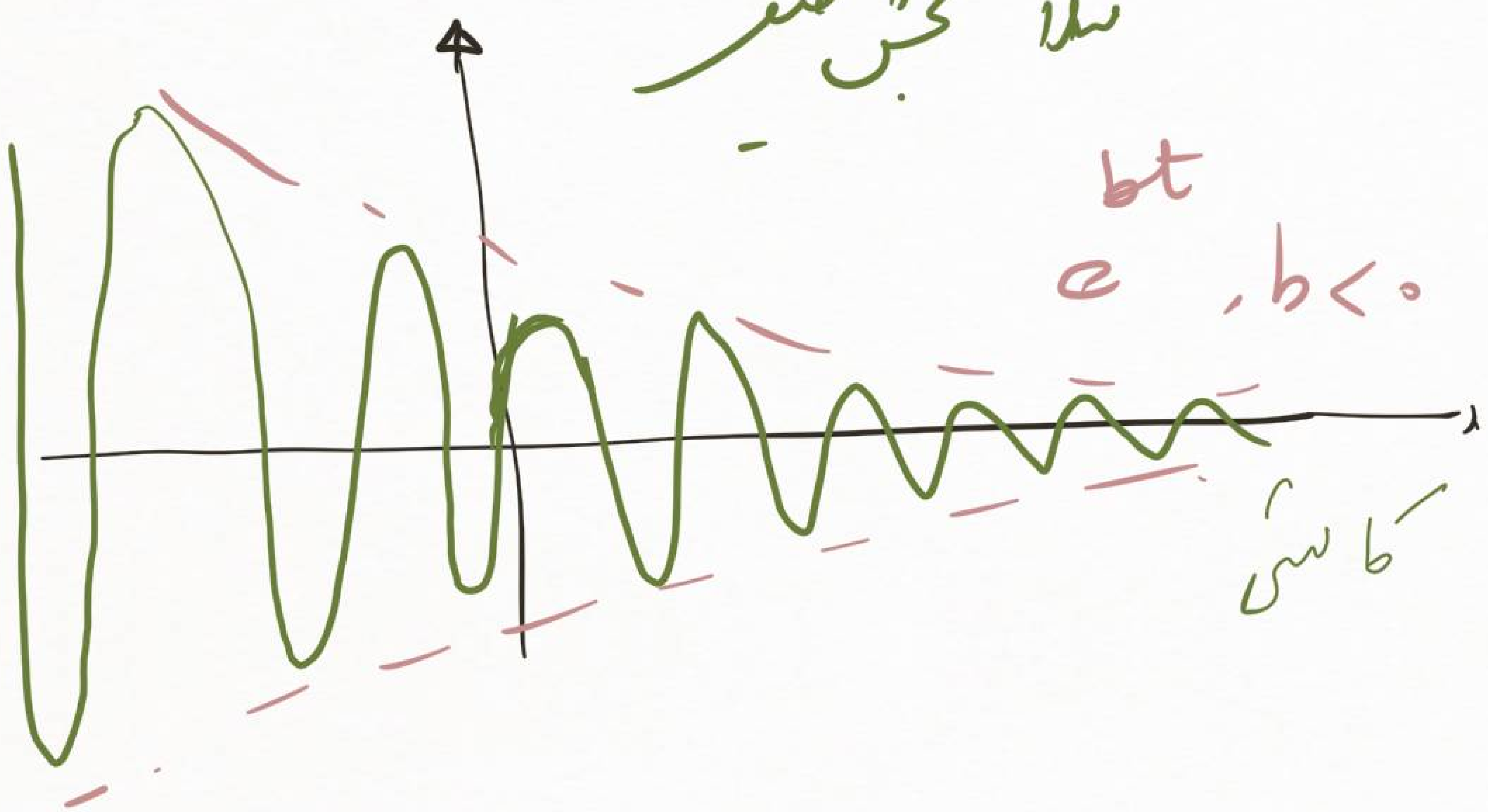
د - α ، c هردو مختلط باشند.

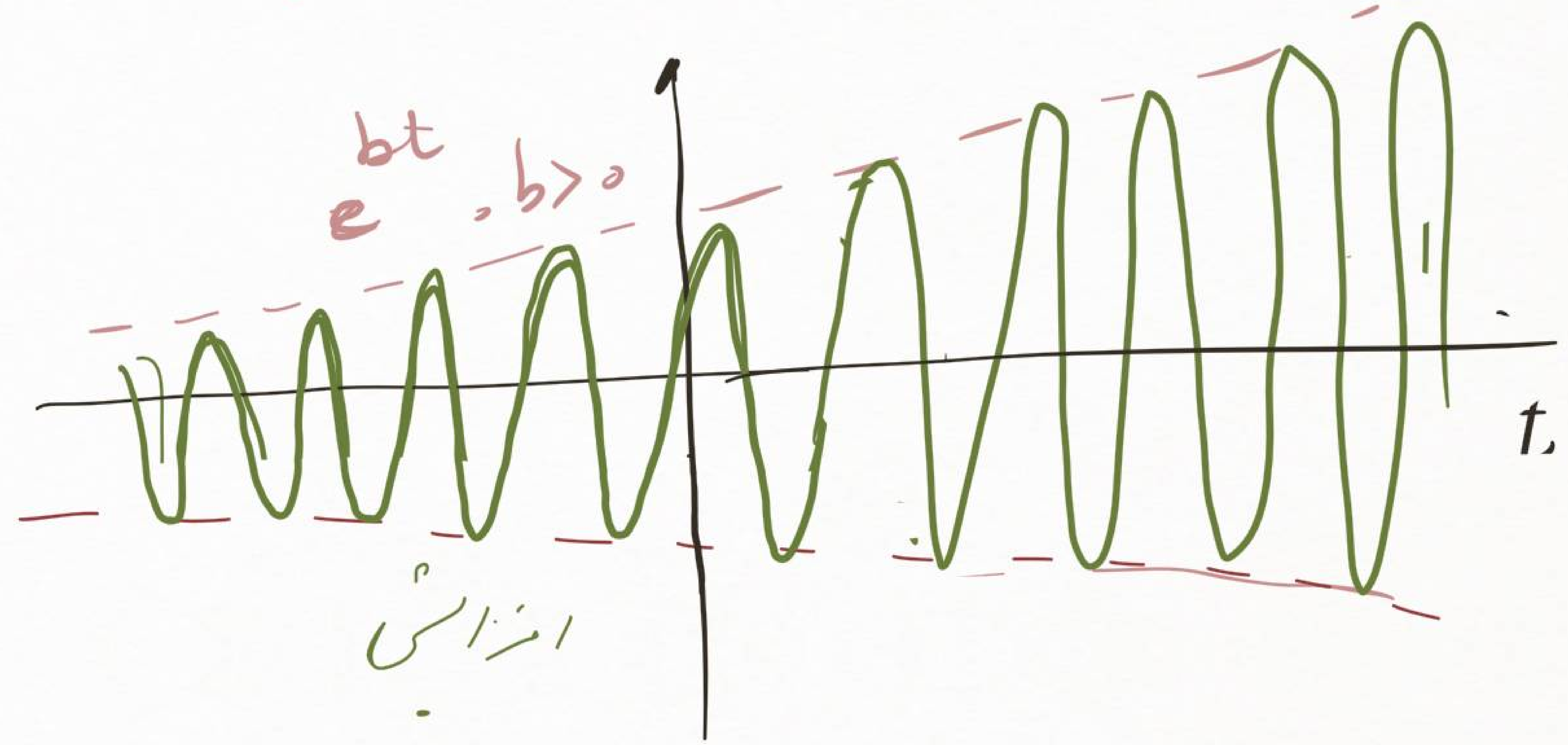
$\alpha = j\omega_0 + b \quad , \quad C = Ae^{j\varphi} \longrightarrow x(t) = Ae^{j\varphi} e^{(j\omega_0+b)t}$

$$x(t) = Ae^{bt} e^{j(\omega_0 t+\varphi)} = Ae^{bt}\cos(\omega_0 t+\varphi) + jAe^{bt}\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

بخش حقیقی

مثلا بخش حقیقی

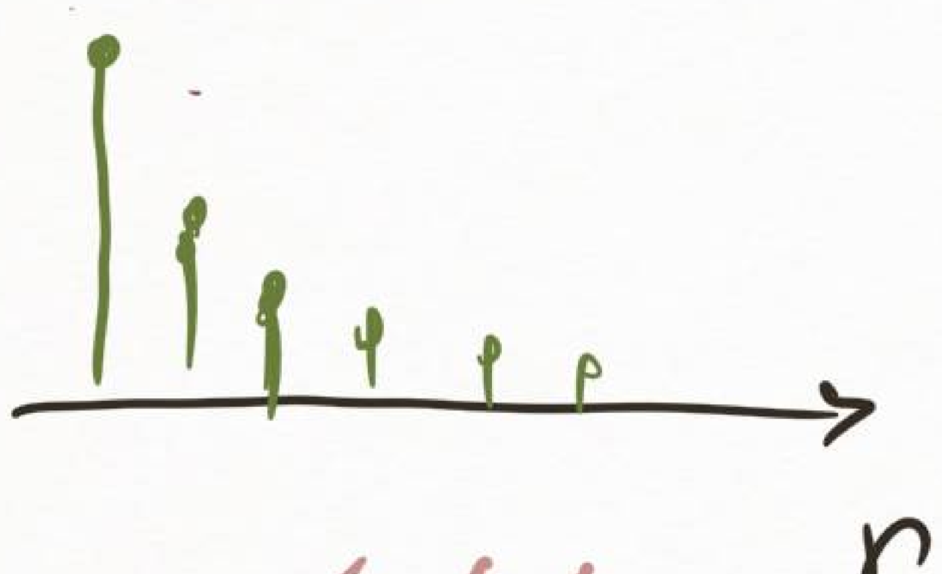




حالتی که α ، c حقیقی باشند.

$x(n) = C\alpha^n$

شکل های سیگنال :



$0<\alpha<1$

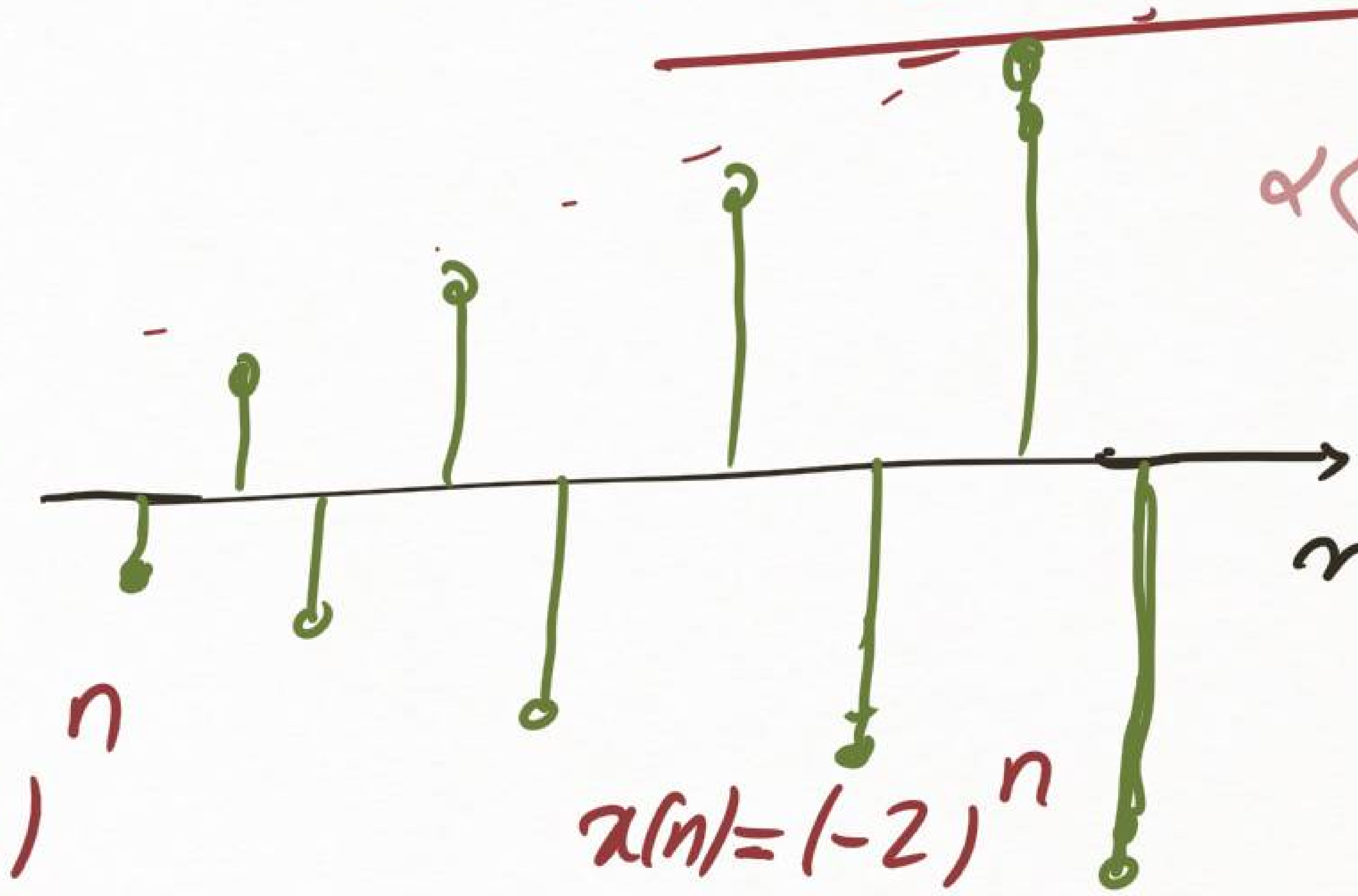
$x(n) = (1/2)^n$

$\alpha>1$

$x(n) = 2^n$

$-1<\alpha<0$

$x(n) = (-1/2)^n$



$\alpha<-1$

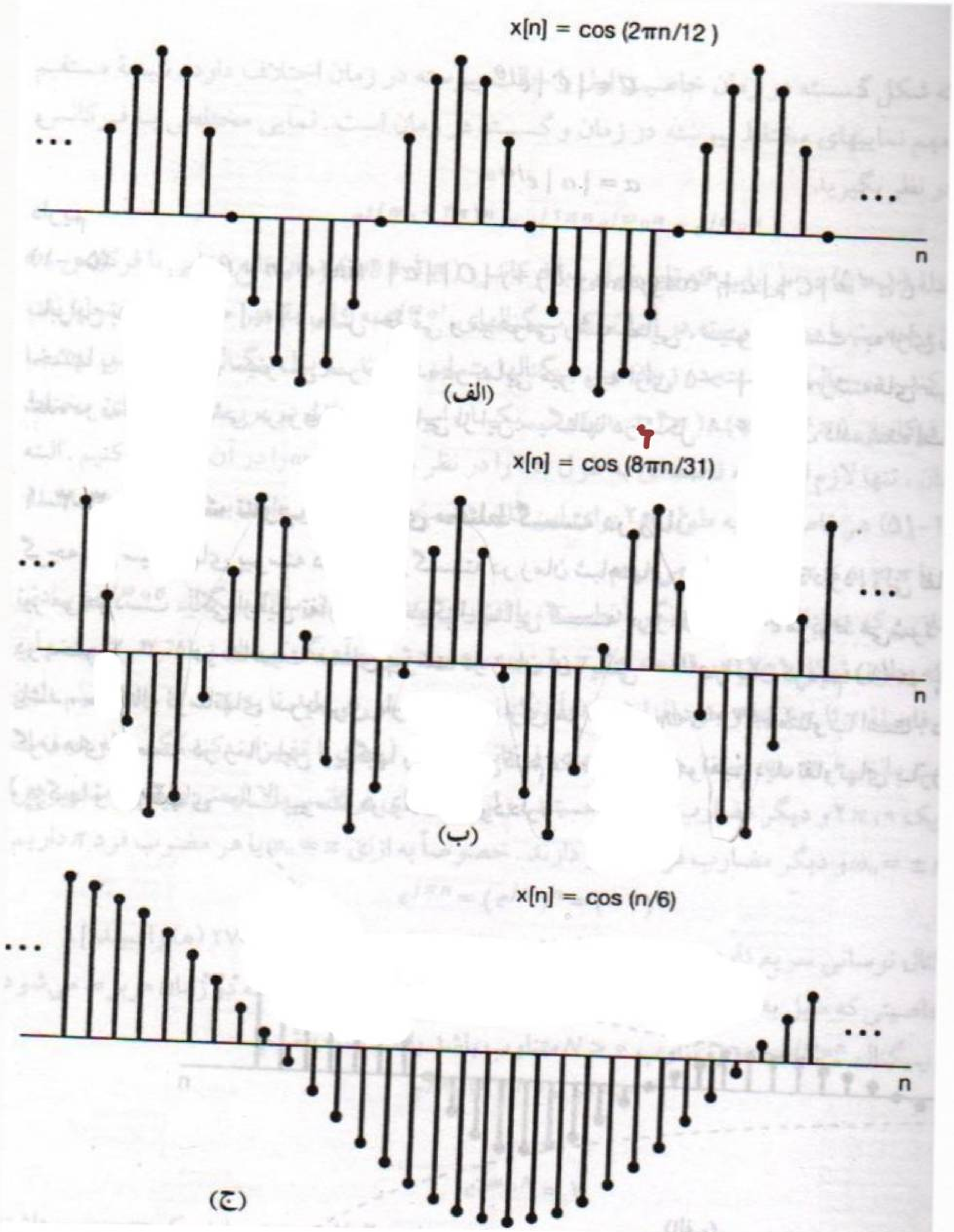
$x(n) = (-2)^n$

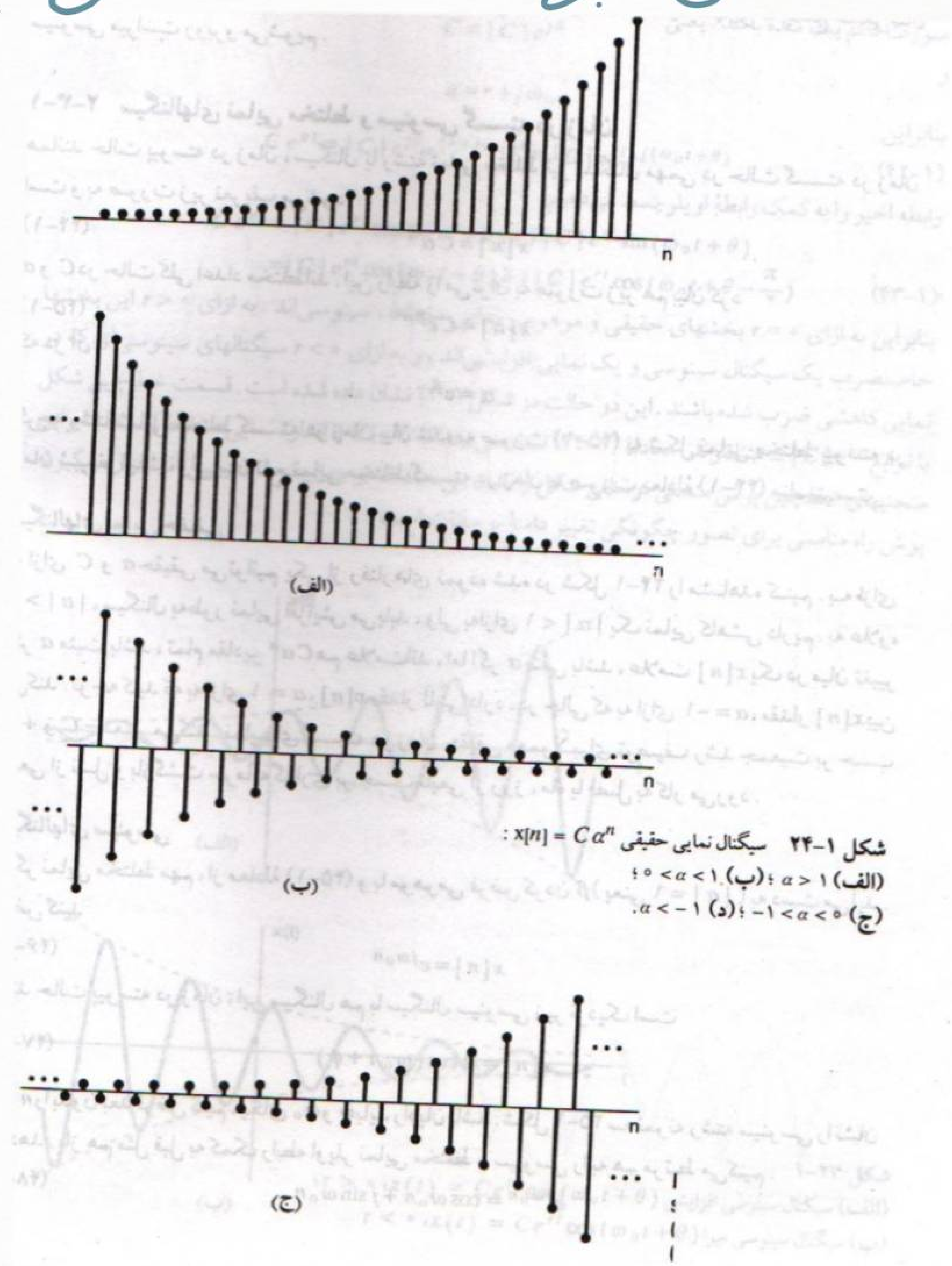
حالت دوم - $\alpha = e^{j\omega_0}$ ولی c حقیقی باشد.

بخش های حقیقی سیگنال‌های مثال بصورت کسینوسی و سینوسی خواهد بود.

شکل نمایش نقاط $x(n)$ که بخش حقیقی است

$$x(n) = ce^{j\omega_0 n} = c[\cos\omega_0 n + j\sin\omega_0 n]$$





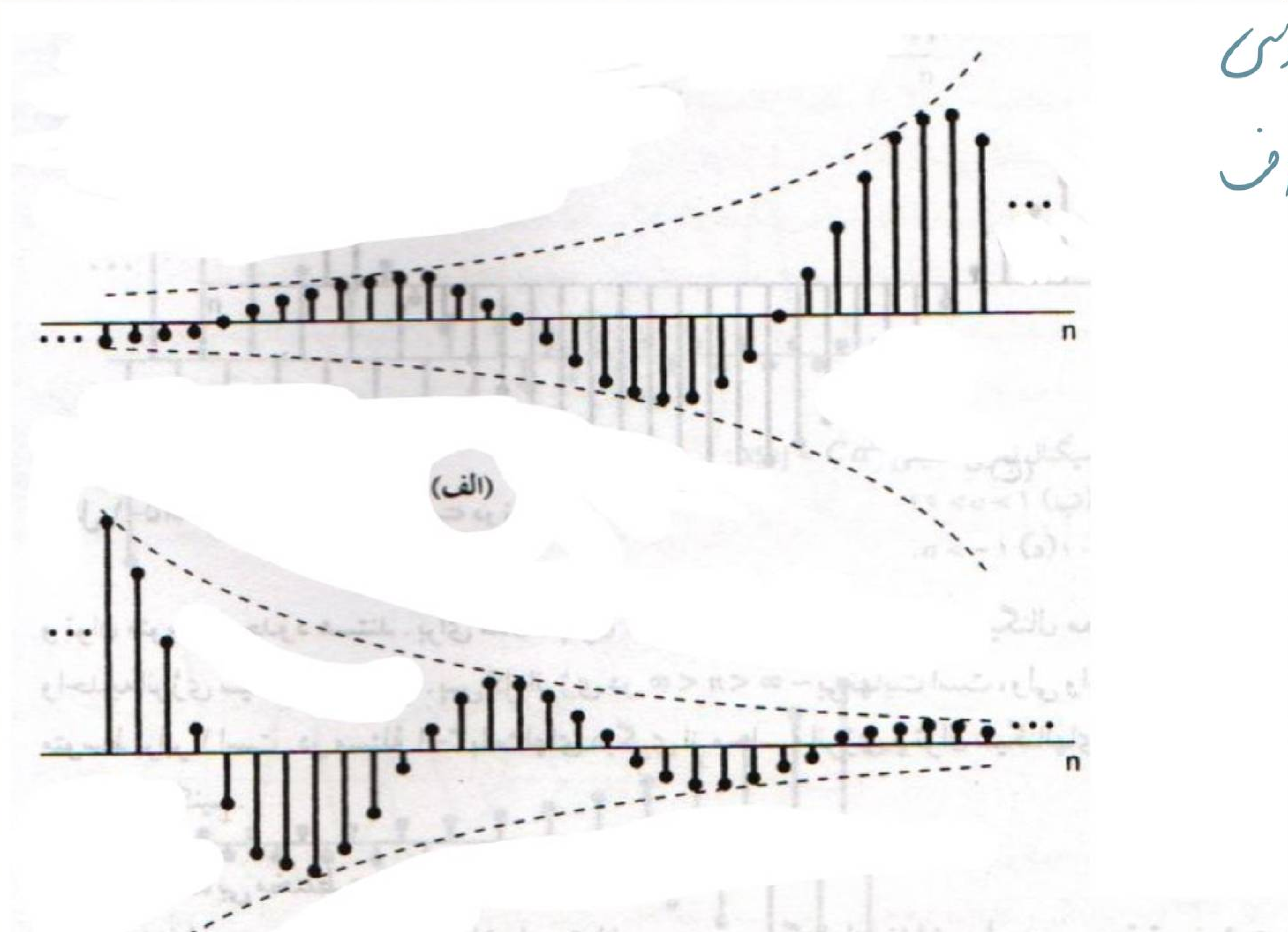
شکل ۱-۲۴ سیگنال نمایی حقیقی $x[n] = C\alpha^n$: (الف) $\alpha > 1$؛ (ب) $0 < \alpha < 1$؛ (ج) $-1 < \alpha < 0$؛ (د) $\alpha < -1$.

حالت سوم . α و c مختلط باشند:

$c = |k| e^{j\theta}$, $\alpha = |\alpha| e^{jw_0}$

$$x(n) = |c||\alpha|^n e^{j(w_0 n+\theta)} = |c||\alpha|^n \cos[w_0 n+\theta] + j|c||\alpha|^n \sin[w_0 n+\theta]$$

در این حالت بخش های حقیقی و موهومی به صورت سیگنال سینوسی افزایشی یا کاهشی در زمان که دارای اختلاف فاز θ است.



شکل ۱-۲۶ **(الف)** سیگنال سینوسی افزایشی گسسته در زمان؛ **(ب)** سینوسی میرای گسسته در زمان.

$|\alpha| > 1$ افزایشی

$|\alpha| < 1$ میرا یا کاهشی

تعریف سیگنال متناوب

پیوسته: $x(t+T)=x(t)$; T هر عددی می‌تواند باشد

گسسته: $x[n+N]=x[n]$; N فقط عدد صحیح است

نکته: کلیه شکل موج‌های سینوسی یا کسینوسی پیوسته همواره پریودیک بوده، در صورتی که اگر تابع گسسته است. ولی شکل موج‌های سینوسی یا کسینوسی گسسته ممکن است پریودیک نباشند.

$$\cos\left(\frac{2\pi}{12}(t+T)\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{12}t+\frac{2\pi}{12}T\right)$$

$\to 2\pi \Rightarrow T=12$

مثال-

1)

$$x(t)=\cos\frac{2\pi t}{12} \Longrightarrow x(t+T)=x(t)$$

$$x[n]=\cos\frac{2\pi n}{12} \Longrightarrow x[n+N]=\cos\left[\frac{2\pi}{12}(n+N)\right]=\cos\left[\frac{2\pi n}{12}+\frac{2\pi N}{12}\right]=\cos\left[\frac{2\pi n}{12}\right]$$

عدد صحیح $\to N=12$

2)

$$x(t)=\cos\left(\frac{8\pi t}{31}\right) \Longrightarrow T=31/4$$

$$x(t)=\cos\left(\frac{8\pi n}{31}\right) \Longrightarrow x[n+N]=\cos\left[\frac{8\pi}{31}(n+N)\right]=\cos\left[\frac{8\pi n}{31}+\frac{8\pi N}{31}\right]$$

$\to N=31$

این عدد باید به ازای یک N صحیح مضرب 2π گردد.

البته کوچکترین N صحیح

ادامه مثال -

③ $x(t) = \cos(t/6) \Rightarrow \cos\left(\frac{t+T}{6}\right) = \cos(t/6 + T/6)$ → $T/6 = 2\pi \Rightarrow T = 12\pi$

$x(n) = \cos(n/6) \Rightarrow \cos\left(\frac{n+N}{6}\right) = \cos(n/6 + N/6)$

عدد صحیح پیدا نمی کنیم که بعد مضرب 2π شود $\Longrightarrow$ سیگنال پریودیک نیست *

باید N صحیح باشد مضرب 2π گردد

خصوصیات سیگنال $e^{j\omega_0 n}$:

ابتدا $e^{j\omega_0 t}$ را می دانیم

با افزایش ω_0 فرکانس نوسان افزایش می یابد.

به ازای تمام مقادیر ω_0 سیگنال پریودیک است.

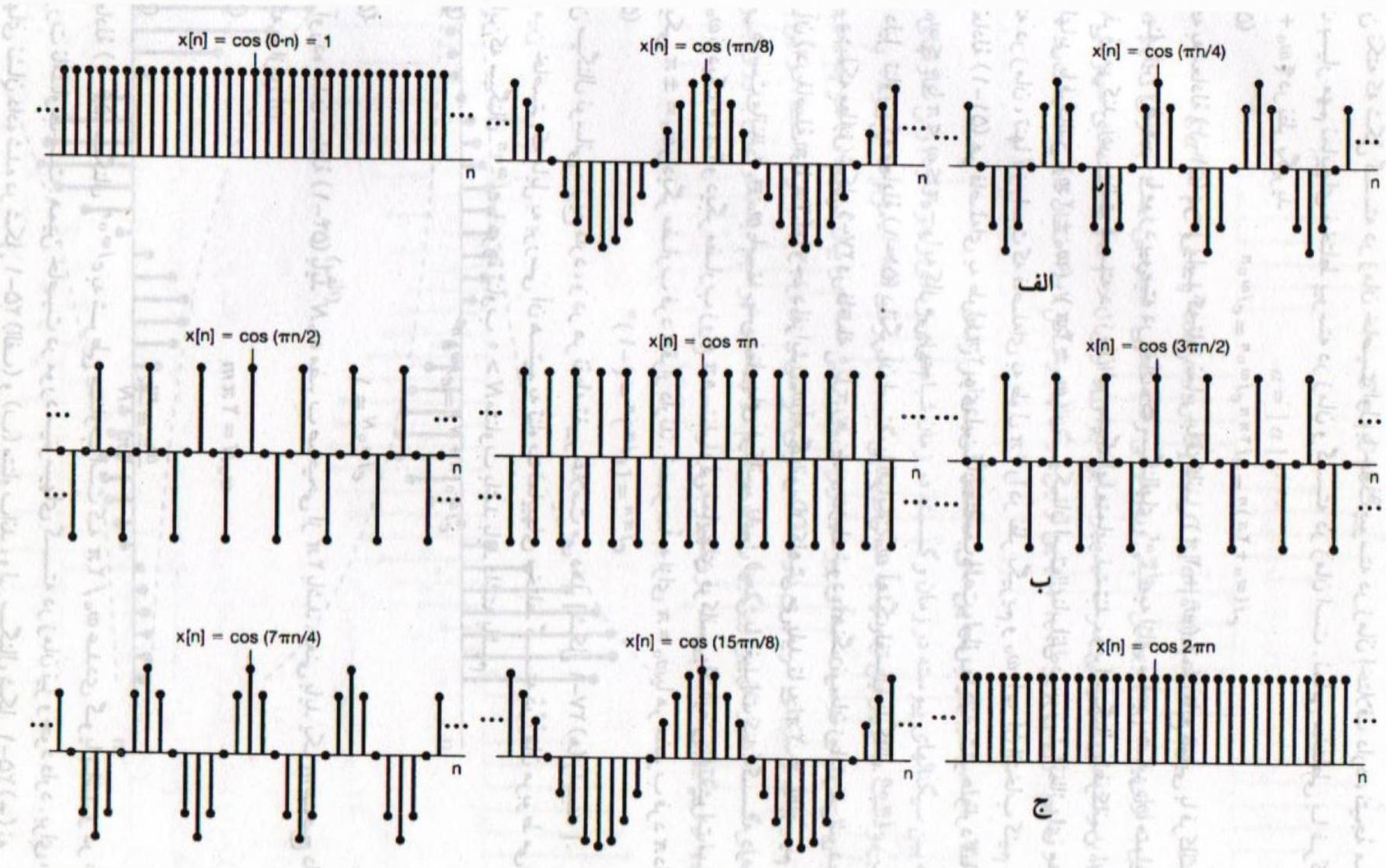
- در سیگنال $e^{j\omega_0 n}$ لزوماً به ازای هر مقدار ω_0 پریودیک نیست چون

ممکن است N صحیح پیدا نشود

$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}$

- با افزایش ω_0 { بین صفر تا π افزایش فرکانس داریم. بین π تا 2π کاهش فرکانس داریم.

برای بخش حقیقی $e^{j\omega_0 n}$، $\cos \omega_0 n$ را بررسی کنیم



$x[n] = \cos w_0 n$

$w_0 = 0 \Longrightarrow x[n] = \cos 0n = 1$

* کمترین فرکانس را دارد.

$w_0 = \pi/8 \uparrow$

$w_0 = \pi/4 \uparrow$

$w_0 = \pi/2 \uparrow$

$w_0 = \pi \rightarrow x[n] = \cos \pi n = (-1)^n$

* بیشترین فرکانس را دارد.

$w_0 = 3\pi/2 \downarrow$

$w_0 = 7\pi/4 \downarrow$

$w_0 = 15\pi/4 \downarrow$

$w_0 = 2\pi \Longrightarrow x[n] = \cos 2\pi n = 1 \downarrow$ ← در این حالت نیز کمترین فرکانس را دارد.