خواص

برخی از خواص مهم نمودار گذر سیگنال عبارتند از:

۱- نمودار گذر سیگنال فقط برای سیستم خطی بکار می‌رود.

۲- معادلاتی که از روی آن‌ها نمودار گذر سیگنال رسم می‌شود باید معادلاتی جبری بوده که بیانگر یک رابطه علت و معلولی نیز باشند.

۳- سیگنال‌ها بر روی شاخه‌ها و تنها در جهت پیکان‌های مشخص عبور می‌کنند.

۴- شاخه‌ای که از گره x به سوی گره y کشیده می‌شود وابستگی متغیر y را نسبت به x نمایش می‌دهد. به بیانی دیگر، جهت شاخه رابطه میان دو سیگنال را نشان می‌دهد و هر سیگنال تنها در جهت پیکان شاخه گذر می‌کند.

۵- یک گره، کلیه سیگنال‌های ورودی به آن را جمع می‌کند و این مجموع را به کلیه شاخه‌های خارج شده از آن انتقال می‌دهد.

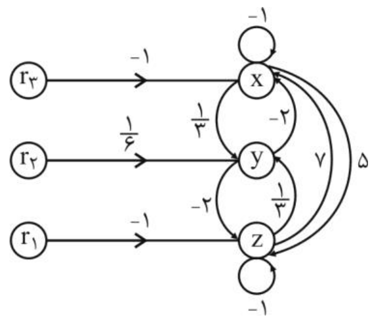
مثال: نمودار گذر سیگنال دستگاه معادلات جبری زیر را رسم کنید. (مؤلف)

$$۵x - ۲y - ۲z = r_۱$$
$$-۲x + ۶y - ۲z = r_۲$$
$$-۲x - ۲y + ۷z = r_۳$$

✍ **حل:**

برای نمایش به صورت گذر سیگنال ابتدا از دستگاه معادلات جبری x ، y و z را بدست می‌آوریم.

$$z = ۵x - ۲y - z - r_۱$$
$$y = \frac{۱}{۳}x + \frac{۱}{۳}z + \frac{۱}{۶}r_۲$$
$$x = -x - ۲y + ۷z - r_۳$$



اجزاء

۱- گره: نقطه‌ای است که یک متغیر یا یک سیگنال را نمایش می‌دهد.

۲- شاخه: پاره خط جهت‌داری است که دو گره را به یکدیگر وصل می‌کند.

۳- مسیر: مجموعه‌ای از چند شاخه پشت سر هم، پیوسته و در یک جهت می‌باشد.

۴- گره ورودی: گرهی که تنها یک شاخه از آن خارج می‌شود.

۵- گره خروجی: گرهی است که تنها یک شاخه به آن وارد می‌شود.

۶- حلقه: مسیری است بسته (از یک گره آغاز و به آن ختم شود) که از هیچ گرهی بیش از یک بار عبور نکند.

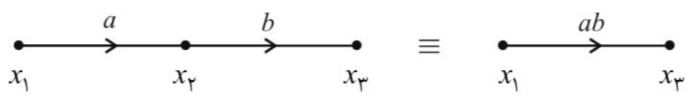
۷- مسیر پیش رو: مسیری است که از یک گره ورودی آغاز و به یک گره خروجی پایان پذیرد و از یک گره بیش از یک بار عبور نکند.

۸- بهره مسیر: حاصلضرب بهره‌های شاخه‌های موجود در مسیر می‌باشد.

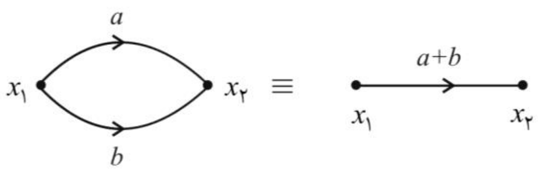
۹- بهره حلقه: حاصل ضرب بهره‌های شاخه‌های موجود در حلقه می‌باشد.

جبر نمودار گذر سیگنال

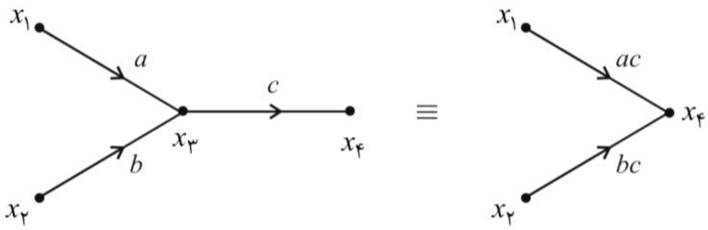
۱-



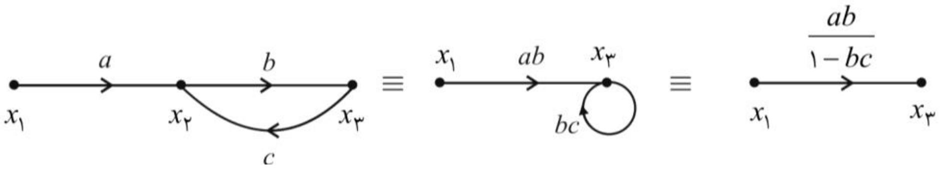
۲-



۳-



۴-



از خواص فوق می‌توان در محاسبه تابع تبدیل خروجی به ورودی یک سیستم (خطی) استفاده نمود.

قاعده میسون: این قاعده مفید برای محاسبه بهره کل در مورد نمودارهای گذر سیگنال استفاده می‌شود. فرمول کلی بهره چنین است:

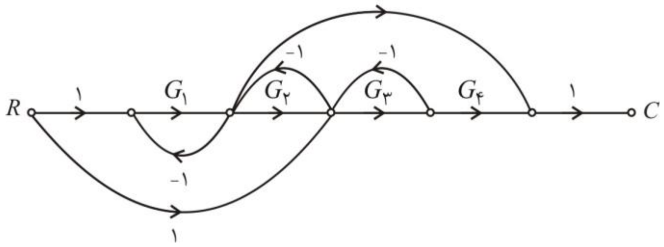
$$M = \frac{y_{out}}{y_{in}} = \frac{\sum_{k=1}^{N} p_k \Delta_k}{\Delta}$$

که در این فرمول y_{in} متغیر گره ورودی، y_{out} متغیر گره خروجی، M بهره کل بین y_{in} و y_{out}، N تعداد مسیرهای پیش‌رو از y_{in} به y_{out}، p_k بهره مسیر پیش رو k ام بین y_{in} و y_{out} و در نهایت Δ دترمینان نمودار گذر سیگنال است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Delta = 1 - \left(\text{مجموع بهره‌های تک تک حلقه‌ها}\right) + \left(\text{مجموع حاصل ضرب‌های بهره‌های همه ترکیب‌های دوتایی حلقه‌های مجزا}\right) - \left(\text{مجموع حاصل-ضرب‌های بهره‌های همه ترکیب‌های سه}\right) + \dots$$

Δ_k، عبارتست از دترمینان نمودار گذر سیگنال Δ برای قسمتی از نمودار گذر سیگنال که از مسیر پیش‌رو k ام مجزا باشد. برای تأکید بیان می‌کنیم که دو قسمت از نمودار گذر سیگنال (دو حلقه، دو مسیر یا حلقه و مسیر) را مجزا گویند هرگاه گره مشترکی نداشته باشند.

مثال: تابع تبدیل بین R و C را برای نمودار سیگنال زیر بدست آورید. (هسته‌ای ۷۶)



۱) $\dfrac{C}{R} = \dfrac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_3G_4 + G_3G_4 + G_1}{1+G_1+G_2+G_3}$

۲) $\dfrac{C}{R} = \dfrac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_3G_4 + G_3G_4}{1+G_1+G_2+G_3+G_1G_3}$

۳) $\dfrac{C}{R} = \dfrac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_3G_4 + G_3G_4 + G_1G_3 + G_1}{1+G_1+G_2+G_3+G_1G_3}$

۴) $\dfrac{C}{R} = \dfrac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_3G_4 + G_1G_3 + G_1}{1+G_1+G_2+G_3}$

✍ **حل**: گزینه «؟»

ابتدا حلقه‌ها را بدست می‌آوریم. $L_1 = -G_1 \qquad L_2 = -G_2 \qquad L_3 = -G_3$

سپس حلقه‌های دوبه دو مجزا را بدست می‌آوریم. $L_1L_3 = G_1G_3$

$$\Delta = 1-(L_1+L_2+L_3)+L_1L_3 = 1+G_1+G_2+G_3+G_1G_3$$

بنابراین یکی از گزینه‌های (۲) یا (۳) صحیح می‌باشد. حال مسیرهای پیش‌رو را محاسبه می‌کنیم.

$P_۱ = G_۱ \qquad \Delta_۱ = ۱ + G_۳$

$P_۲ = G_۱G_۲G_۳G_۴ \qquad \Delta_۲ = ۱$

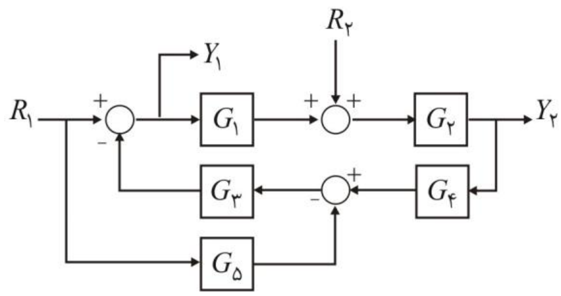
$P_۳ = G_۳G_۴ \qquad \Delta_۳ = ۱ + G_۱$

$P_۴ = ۱ \times (-۱) \times ۱ \times ۱ = -۱ \qquad \Delta_۴ = ۱$

بنابراین باید در صورت کسر، عامل (۱-) مربوط به $P_۴\Delta_۴$ وجود داشته باشد. در نتیجه گزینه صحیح وجود ندارد.

$$\frac{C}{R} = \frac{P_۱\Delta_۱ + P_۲\Delta_۲ + P_۳\Delta_۳ + P_۴\Delta_۴}{\Delta} = \frac{G_۱ + G_۱G_۳ + G_۱G_۲G_۳G_۴ + G_۳G_۴ + G_۱G_۳G_۴ - ۱}{۱ + G_۱ + G_۲ + G_۳ + G_۱G_۳}$$

مثال: در سیستم با نمودار جعبه‌ای شکل زیر تابع تبدیل $G = \frac{Y_۱}{R_۱}$ برابر است با: (مکاترونیک ۸۴)



۱) $G = \frac{۱}{۱ + G_۱G_۲G_۳G_۴ - G_۳G_۵}$

۲) $G = \frac{۱ + G_۳G_۵}{۱ + G_۱G_۲G_۳G_۴ + G_۳G_۵}$

۳) $G = \frac{۱}{۱ + G_۱G_۲G_۳G_۴ + G_۳G_۵}$

۴) $G = \frac{۱ + G_۳G_۵}{۱ + G_۱G_۲G_۳G_۴}$

حل: گزینه «۴»

با توجه به قضیه جمع آثار داریم: $R_۲ = ۰$

حلقه‌های مجزا عبارتند از: $L_۱ = -G_۱G_۲G_۴G_۳$

$\rightarrow \quad \Delta = ۱ - (L_۱) = ۱ + G_۱G_۲G_۳G_۴$

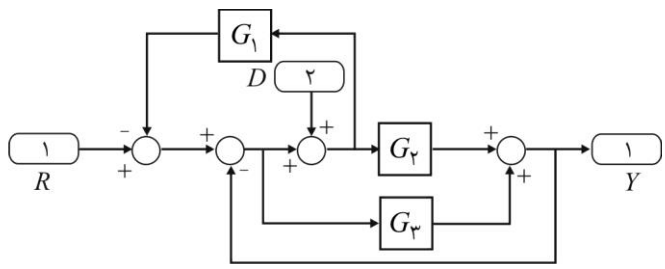
مسیرهای پیش‌رو عبارتند از:

$p_۱ = ۱ \qquad \Delta_۱ = ۱$

$p_۲ = G_۵G_۳ \qquad \Delta_۲ = ۱$

$$\Rightarrow \quad \frac{Y_۱}{R_۱} = \frac{p_۱\Delta_۱ + p_۲\Delta_۲}{\Delta} = \frac{۱ + G_۳G_۵}{۱ + G_۱G_۲G_۳G_۴}$$

مثال: تابع تبدیل بین D و Y عبارتست از: (مکانیک ۸۴)



۱) $\frac{G_۲}{۱ + G_۱ + G_۲ + G_۳}$

۲) $\frac{G_۲ - G_۱G_۲}{۱ + G_۱ + G_۲ + G_۳}$

۳) $\frac{G_۲ - G_۱G_۳}{۱ + G_۱ + G_۲ + G_۳}$

۴) $\frac{G_۲ - G_۱(G_۱ + G_۲)}{۱ + G_۱ + G_۲ + G_۳}$

حل: گزینه «۳»

با توجه به قضیه جمع آثار داریم: $R = ۰$

با توجه به گزینه‌ها کافیست مسیرهای پیش‌رو را محاسبه کنیم. داریم:

$P_۱ = G_۲ \qquad \Delta_۱ = ۱$

$P_۲ = -G_۱G_۳ \qquad \Delta_۲ = ۱$

بنابراین گزینه (۳) صحیح می‌باشد. حل کامل به صورت زیر است.

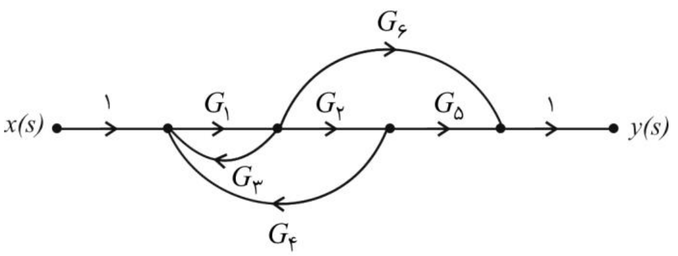
حلقه‌های مجزا عبارتند از: $L_۱ = -G_۱ \qquad L_۲ = -G_۲ \qquad L_۳ = -G_۳$

$$\rightarrow \quad \Delta=۱-(L_۱+L_۲+L_۳)=۱+G_۱+G_۲+G_۳$$

بنابراین:

$$\frac{Y}{D}=\frac{P_۱\Delta_۱+P_۲\Delta_۲}{\Delta}=\frac{G_۲-G_۱G_۳}{۱+G_۱+G_۲+G_۳}$$

مثال: تابع تبدیل سیستم کنترل با دیاگرام گذر سیگنال نشان داده شده در شکل زیر عبارتست از: (مکانیک ۸۲)



۱) $G=\dfrac{y}{x}=\dfrac{G_۱G_۲G_۵-G_۱G_۶}{۱-G_۱G_۳+G_۱G_۲G_۴}$

۲) $G=\dfrac{y}{x}=\dfrac{G_۱G_۲G_۵+G_۱G_۵}{۱+G_۱G_۶-G_۱G_۲G_۳}$

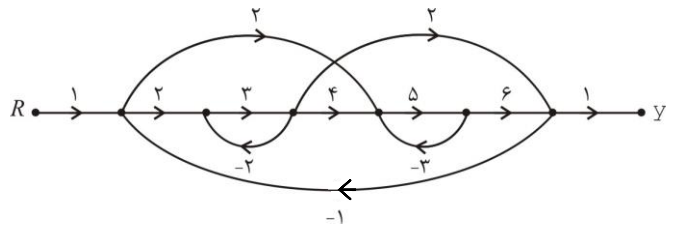
۳) $G=\dfrac{y}{x}=\dfrac{G_۱G_۲G_۵+G_۱G_۶}{۱+G_۱G_۳+G_۱G_۲G_۴}$

۴) $G=\dfrac{y}{x}=\dfrac{G_۱G_۲G_۵+G_۱G_۶}{۱-G_۱G_۳-G_۱G_۲G_۴}$

✍ **حل:** گزینه «۴»

حلقه‌های مجزا عبارتند از: $L_۱=G_۱G_۳ \qquad L_۲=G_۱G_۲G_۴ \quad \rightarrow \quad \Delta=۱-(L_۱+L_۲)=۱-G_۱G_۳-G_۱G_۲G_۴$

مثال: تابع تبدیل $\dfrac{Y}{R}$ در گراف گذر سیگنال *(Signal Flow Graph)* شکل زیر کدام است؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۲)



۱) $\dfrac{۱۳۳۲}{۱۴۴۴}$ ۲) $\dfrac{۷۹۲}{۹۰۴}$

۳) $\dfrac{۱۳۳۲}{۹۰۴}$ ۴) $\dfrac{۷۹۲}{۱۴۴۴}$

✍ **حل:** گزینه «۱»

با استفاده از بهره میسون داریم:

$$L_۱=۳(-۲) \qquad L_۲=۵(-۳) \qquad L_۳=۲\times۳\times۴\times۵\times۶\times(-۱)=-۷۲۰$$

$$L_۴=۲\times۵\times۶\times(-۱)=-۶۰ \qquad L_۵=۲\times۳\times۲\times(-۱)=-۱۲$$

$$\Delta=۱-(L_۱+L_۲+L_۳+L_۴+L_۵)+L_۱L_۲+L_۱L_۴+L_۲L_۵$$

$$=۱+۶+۱۵+۷۲۰+۶۰+۱۲+۶\times۱۵+۶۰\times۶+۱۲\times۱۵=۱۴۴۴$$

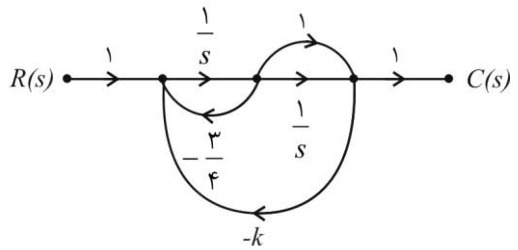
$$P_۱=۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶\times۱=۷۲۰ \qquad \Delta_۱=۱$$

$$P_۲=۱\times۲\times۵\times۶\times۱=۶۰ \qquad \Delta_۲=۱-L_۱=۱+۶=۷$$

$$P_۳=۱\times۲\times۳\times۲\times۱=۱۲ \qquad \Delta_۳=۱-L_۲=۱+۱۵=۱۶$$

$$\frac{Y}{R}=\frac{P_۱\Delta_۱+P_۲\Delta_۲+P_۳\Delta_۳}{\Delta}=\frac{۷۲۰\times۱+۶۰\times۷+۱۲\times۱۶}{۱۴۴۴} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y}{R}=\frac{۱۳۳۲}{۱۴۴۴}$$

مثال: نمودار گذر سیگنال *(Signal Flow Graph)* برای یک سیستم کنترل در شکل زیر رسم شده است. تابع تبدیل از R به C کدام است؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۳)



۱) $\dfrac{C}{R}=\dfrac{s+۱}{s^۲+(۳+۴k)s+۴k}$

۲) $\dfrac{C}{R}=\dfrac{s+۱}{s^۲+\frac{۳+۴k}{۴}s+k}$

۳) $\dfrac{C}{R}=\dfrac{۴(s+۱)}{s^۲+\frac{۳+۴k}{۴}s+k}$

۴) $\dfrac{C}{R}=\dfrac{۴(s+۱)}{s^۲+(۳+۴k)s+۱}$

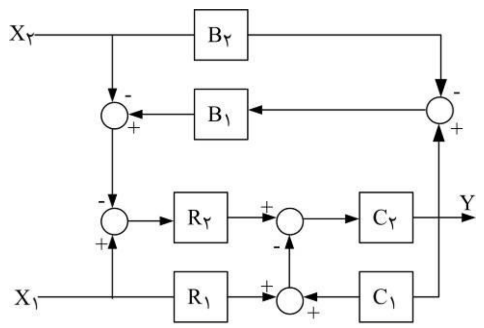
✍ **حل**: گزینه «۲»

از بهره میسون استفاده می‌کنیم.
$$L_۱=-\frac{۳}{۴}s^{-۱} \qquad L_۲=-ks^{-۱} \qquad L_۳=-ks^{-۲}$$

$$\Delta=۱-(L_۱+L_۲+L_۳)=۱+\frac{۳}{۴}s^{-۱}+ks^{-۱}+ks^{-۲}=۱+(\frac{۳+۴k}{۴})s^{-۱}+ks^{-۲}$$

$$\left.\begin{matrix} P_۱=s^{-۲} & \Delta_۱=۱ \\ P_۲=s^{-۱} & \Delta_۲=۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{C}{R}=\frac{P_۱\Delta_۱+P_۲\Delta_۲}{\Delta}=\frac{s^{-۲}+s^{-۱}}{۱+(\frac{۳+۴k}{۴})s^{-۱}+ks^{-۲}}=\frac{s+۱}{s^۲+(\frac{۳+۴k}{۴})s+k}$$

مثال: دیاگرام بلوکی سیستمی با دو ورودی و یک خروجی داده شده است. تابع تبدیل $\frac{Y(s)}{X_۱(s)}$ کدام است؟ (هسته‌ای ۸۳)



۱) $\dfrac{C_۲(R_۲-R_۱)}{۱+C_۱C_۲+B_۱R_۲C_۲}$

۲) $\dfrac{C_۲R_۲+C_۱R_۱}{۱+C_۱C_۲+R_۱R_۲+B_۱B_۲}$

۳) $\dfrac{R_۱R_۲+C_۱C_۲}{۱+R_۱R_۲+C_۱C_۲+B_۱B_۲}$

۴) $\dfrac{C_۲R_۲-C_۱R_۱}{۱+R_۱R_۲+C_۱C_۲+B_۱R_۲C_۲}$

✍ **حل**: گزینه «۱»

با توجه به این که $(-R_۱R_۲)$ حلقه نمی‌باشد، گزینه (۱) صحیح است. حل کامل به صورت زیر است.

با توجه به قضیه جمع آثار داریم: $X_۲=۰$

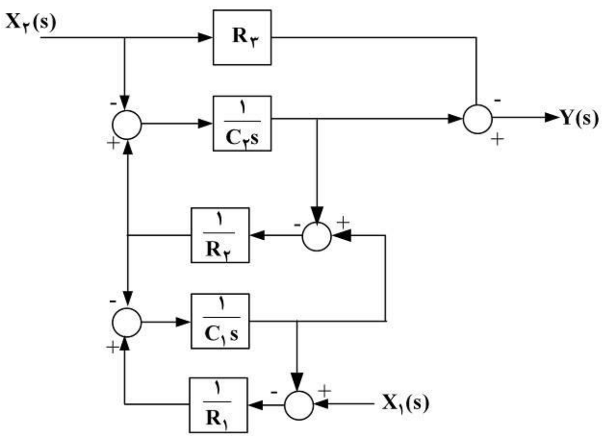
دترمینان عبارتست از: $L_۱=-C_۱C_۲ \qquad L_۲=-B_۱R_۲C_۲ \rightarrow \quad \Delta=۱-(L_۱+L_۲)=۱+C_۱C_۲+B_۱R_۲C_۲$

مسیرهای پیش‌رو عبارتند از:
$$P_۱=R_۲C_۲ \qquad \Delta_۱=۱$$
$$P_۲=-R_۱C_۲ \qquad \Delta_۲=۱$$

بنابراین داریم:
$$\frac{Y(s)}{X_۱(s)}=\frac{P_۱\Delta_۱+P_۲\Delta_۲}{\Delta}=\frac{R_۲C_۲-R_۱C_۲}{۱+C_۱C_۲+B_۱R_۲C_۲}$$

مثال: دیاگرام بلوکی یک سیستم دو ورودی و یک خروجی در شکل زیر نشان داده شده است. تابع تبدیل $\frac{Y(s)}{X_۱(s)}$ کدام است؟

(هسته‌ای ۷۷)



۱) $\dfrac{۱}{R_۱R_۲C_۱C_۲s^۲+(R_۱C_۱+R_۲C_۲)s+۱}$

۲) $\dfrac{۱}{R_۱R_۲C_۱C_۲s^۲+(R_۱C_۱+R_۲C_۲+R_۱C_۲)s+۱}$

۳) $\dfrac{۱}{R_۱R_۲C_۱C_۲s^۲+(R_۱C_۱+R_۲C_۲+R_۳C_۲)s+۱}$

۴) $\dfrac{۱}{R_۱R_۲C_۱C_۲s^۲+(R_۱C_۱+R_۲C_۲+R_۲C_۱)s+۱}$

حل: گزینه «۲»

$$L_1=\frac{-1}{R_1C_1s}\qquad L_2=\frac{-1}{R_2C_2s}\qquad L_3=\frac{-1}{R_2C_1s}$$

$$\Delta=1-(L_1+L_2+L_3)+L_1L_2=1+\frac{1}{R_1C_1s}+\frac{1}{R_2C_2s}+\frac{1}{R_2C_1s}+\frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2}$$

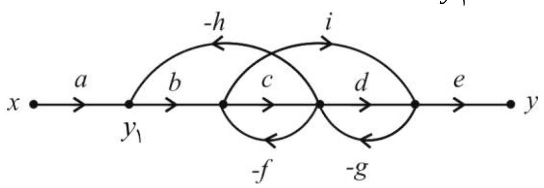
$$p_1=\frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2}\qquad \Delta_1=1$$

با جایگذاری در رابطه بهره کل و ساده‌سازی داریم:

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)}=\frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+1}$$

نکته: ***استفاده از فرمول بهره تنها میان گره ورودی و گره خروجی قابل استفاده است. به مثال زیر توجه کنید.***

مثال: در نمودار گذر سیگنال زیر تابع تبدیل $\frac{y}{y_1}$ کدام است؟ (مؤلف)



حل:

دقت کنید که y_1 گره ورودی نمی‌باشد. لذا به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\frac{y}{y_1}=\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y_1}{x}}$$

ابتدا به محاسبه $\frac{y}{x}$ می‌پردازیم:

$$L_1=-cf\qquad L_2=-dg\qquad L_3=fgi\qquad L_4=-bch\qquad L_5=bi(-g)(-h)$$

$$\Delta=1-(L_1+L_2+L_3+L_4+L_5)$$

$$p_1=abcde\qquad \Delta_1=1$$

$$p_2=abie\qquad \Delta_2=1$$

$$\rightarrow\quad \frac{y}{x}=\frac{p_1\Delta_1+p_2\Delta_2}{\Delta}=\frac{abcde+abie}{\Delta}\qquad (1)$$

حال $\frac{y_1}{x}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$p_1=a\qquad \Delta_1=1-(L_1+L_2+L_3)\ \rightarrow\ \frac{y_1}{x}=\frac{p_1\Delta_1}{\Delta}=\frac{a[1+cf+dg-fgi]}{\Delta}\qquad (2)$$

$$(2)\ ,\ (1)\rightarrow \frac{y}{y_1}=\frac{abcde+abie}{a[1+cf+dg-fgi]}$$

رسم نمودار بلوکی سیستم‌های فیزیکی

برای ترسیم نمودار بلوکی سیستم‌های فیزیکی، مراحل زیر را به ترتیب باید انجام دهیم.

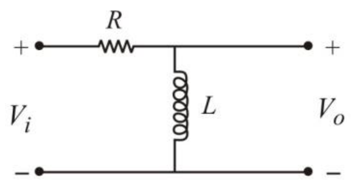
۱- نوشتن معادلات توصیف‌کننده رفتار فیزیکی عناصر

۲- گرفتن تبدیل لاپلاس از معادلات بدست‌آمده از مرحله ۱ با فرض صفر بودن شرایط اولیه

۳- رسم نمودار بلوکی هر کدام از معادلات حاصل از مرحله ۲

۴- ترکیب بلوک‌های حاصل از مرحله ۳

مثال: نمودار بلوکی مدار الکتریکی زیر را رسم کنید. (مؤلف)



✍ **حل:**

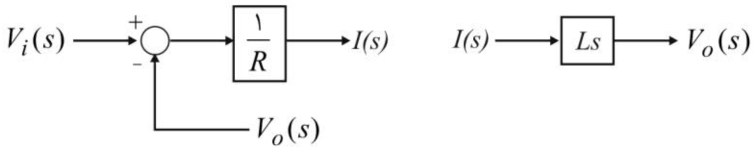
۱- معادلات مدار را می‌نویسیم.

$$i=\frac{V_i-V_o}{R} \quad ، \quad V_o=L\frac{di}{dt}$$

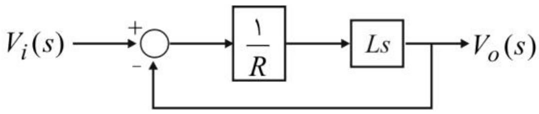
۲- از معادلات مرحله قبل تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

$$I(s)=\frac{V_i(s)-V_o(s)}{R} \quad ، \quad V_o(s)=LsI(s)$$

۳- نمودار بلوکی معادلات مرحله قبل را به طور جداگانه رسم می‌کنیم.



۴- بلوک‌های بدست آمده از مرحله ۳ را با یکدیگر ترکیب کرده، نتیجه زیر حاصل می‌شود:



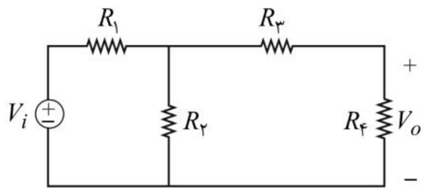
حال می‌توانیم تابع تبدیل مدار را محاسبه کنیم.

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{\frac{Ls}{R}}{1+\frac{Ls}{R}}=\frac{Ls}{R+Ls}$$

رسم نمودار گذر سیگنال برای سیستم‌های فیزیکی

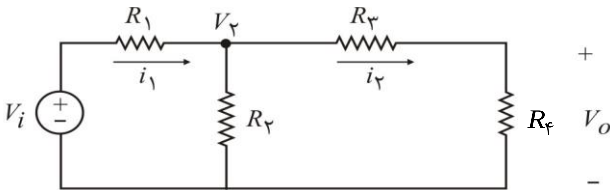
برای بررسی، تنها به ذکر یک مثال بسنده می‌کنیم.

مثال: نمودار گذر سیگنال مدار الکتریکی زیر را رسم کنید.



✍ **حل:**

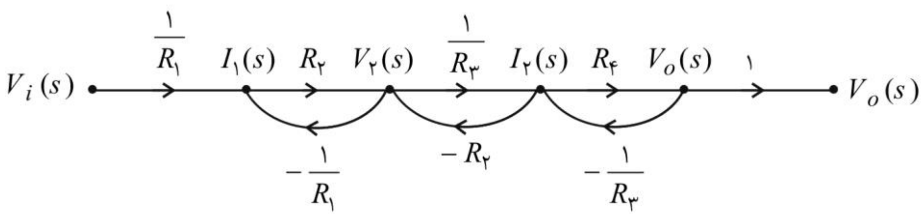
متغیرها در این گونه مسائل، ولتاژ گره‌ها و جریان شاخه‌های مستقل می‌باشند. حال مدار را با تعریف این متغیرها به صورت زیر در نظر بگیرید.



با نوشتن معادلات KCL و KVL داریم:

$$I_1(s)=\frac{V_i(s)-V_2(s)}{R_1} \quad ، \quad I_2(s)=\frac{V_2(s)-V_o(s)}{R_3} \quad ، \quad V_2(s)=R_2(I_1(s)-I_2(s)) \quad ، \quad V_o=R_4I_2(s)$$

با مرتب کردن متغیرهای $V_i(s)$، $I_1(s)$، $V_2(s)$، $I_2(s)$ و $V_o(s)$ از چپ به راست، نمودار گذر سیگنال مدار الکتریکی مفروض به شکل زیر خواهد بود.



۱-۷-٤ نمایش فضای حالت

متداول‌ترین نحوه نمایش برای سیستم‌های خطی عبارتند از: ۱- تابع تبدیل ۲- معادلات حالت

روش تابع تبدیل فقط برای سیستم‌های خطی و نامتغیر با زمان معتبر است. علاوه‌براین تابع تبدیل توصیف خارجی از سیستم می‌باشد، در حالی که توصیف فضای حالت نه تنها برای سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان معتبر است بلکه برای سیستم‌های غیرخطی و متغیر با زمان نیز قابل استفاده است. ضمن این که توصیف فضای حالت یک سیستم تصویر کاملی از ساختار داخلی سیستم را نشان می‌دهد و از اینرو به توصیف داخلی *(Internal Model)* از سیستم شناخته می‌شود. این توصیف داخلی توسط متغیرهای حالت صورت می‌پذیرد. چرا که ممکن است متغیر حالت، دینامیکی از سیستم را شامل باشد که در مدل ورودی ـ خروجی تابع تبدیل سیستم ظاهر نشده باشد. همچنین با این نمایش، مدل‌های سیستم‌های تک ورودی ـ تک خروجی را به سادگی به سیستم‌های چند ورودی ـ چند خروجی می‌توان تعمیم داد. در حالت کلی، می‌توان معادلات حالت را برای یک سیستم به صورت زیر نمایش داد:

$$\dot{X}(t) = f(x(t), U(t), t)$$
$$Y(t) = g(x(t), U(t), t)$$

$x(t)$ بردار حالت، $u(t)$ بردار ورودی‌های سیستم و $y(t)$ بردار خروجی‌های سیستم است. اگر سیستم را خطی فرض کنیم، داریم:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t)$$
$$Y(t) = C(t)X(t) + D(t)U(t)$$

$A(t)$ ماتریس حالت، $B(t)$ ماتریس ورودی، $C(t)$ ماتریس خروجی و $D(t)$ ماتریس انتقال مستقیم می‌باشد. اگر فرض نامتغیر با زمان بودن را نیز به خطی بودن اضافه نماییم، معادلات حالت برای سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases}$$

لازم به ذکر است که نمایش فضای حالت یک سیستم منحصر به فرد نمی‌باشد، به طوری که با تعریف متغیرهای حالت مختلف می‌توان نمایش‌های متفاوتی در فضای حالت ایجاد کرد. برای دستیابی به معادلات حالت از روی معادلات دیفرانسیل، سیستم خطی نامتغیر با زمان با معادله دیفرانسیل از مرتبه n را در نظر بگیرید.

$$\frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{dc(t)}{dt} + a_1 c(t) = b_0 r(t)$$

که در این معادله، $c(t)$ خروجی و $r(t)$ ورودی سیستم می‌باشد. برای نوشتن معادلات حالت بایستی معادله دیفرانسیل مرتبه n را به n معادله دیفرانسیل مرتبه یک تبدیل کنیم که بدین منظور همواره خروجی را اولین متغیر حالت گرفته و مشتقات آن را به ترتیب دومین، سومین و ... تا n امین متغیر حالت در نظر می‌گیریم. لذا، متغیرهای حالت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c(t) \\ x_2(t) &= \frac{dc(t)}{dt} \\ x_3(t) &= \frac{d^2 c(t)}{dt^2} \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} \end{aligned} \quad \Rightarrow \text{معادلات حالت} \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{(n-1)}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = -a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t) \dots - a_{n-1} x_{n-1}(t) - a_n x_n(t) + b_0 r(t) \end{cases}$$

که نمایش ماتریسی معادلات حالت اخیر به شکل زیر می‌باشد:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & \dots & -a_n \end{bmatrix}_{n\times n} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

به نحوه نمایش معادلات به شکل فوق، صورت متعارف متغیر فازی و به متغیرهای حالت آن، متغیرهای فاز می‌گویند.

مثال: اگر تابع تبدیل برای یک سیستم خطی مستقل از زمان به صورت $G(s)=\dfrac{2}{s^2+4s+9}$ باشد، معادلات حالت آن را بدست آورید. (مؤلف)

حل:

ابتدا معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم را بدست می‌آوریم:

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{2}{s^2+4s+9} \quad \to \quad (s^2+4s+9)C(s)=2R(s) \to \quad \frac{d^2c(t)}{dt^2}+4\frac{dc(t)}{dt}+9c(t)=2r(t)$$

با توجه به متن درس داریم:

$$x_1(t)=c(t)$$
$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=-9x_1(t)-4x_2(t)+2r(t)$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -9 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}r(t)$$

در حالتی که مشتقات ورودی در معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم وجود داشته باشد، نیاز به استفاده از تغییر متغیر داریم. برای آشنایی به مثال زیر توجه کنید.

مثال: فرض کنید که معادله دیفرانسیل حاکم بر یک سیستم خطی نامتغیر با زمان به صورت زیر باشد:

$$\frac{d^3c(t)}{dt^3}+a_2\frac{d^2c(t)}{dt^2}+a_1\frac{dc(t)}{dt}+a_0c(t)=b_2\frac{d^2u(t)}{dt^2}+b_1\frac{du(t)}{dt}+b_0u(t)$$

معادلات حالت حاکم بر سیستم را بدست آورید. (مؤلف)

حل:

به دلیل وجود مشتقات ورودی نیاز به استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$u(t)=\frac{d^3z(t)}{dt^3}+a_2\frac{d^2z(t)}{dt^2}+a_1\frac{dz(t)}{dt}+a_0z(t) \quad \to \quad c(t)=b_2\frac{d^2z(t)}{dt^2}+b_1\frac{dz(t)}{dt}+b_0z(t)$$

$$x_1(t)=z(t)$$
$$\dot{x}_1(t)=x_2(t) \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$\dot{x}_2(t)=x_3(t)$$
$$\dot{x}_3(t)=-a_0x_1-a_1x_2-a_2x_3+u$$

$$c(t)=b_0x_1+b_1x_2+b_2x_3 \qquad \Rightarrow \quad C(t)=\begin{bmatrix}b_0 & b_1 & b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}$$

❋ **نکته:** ***اگر از معادله دیفرانسیل مثال فوق ، تبدیل لاپلاس بگیریم، تابع تبدیل سیستم به صورت زیر بدست می‌آید:***

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$$

بنابراین می‌توان به راحتی با داشتن تابع تبدیل سیستم فوق، معادلات حالت سیستم را بدون محاسبه بدست آورد و یا برعکس. این موضوع در حالت کلی قابل تعمیم برای سیستم‌های اکیداً سره (سره) نیز می‌باشد.

مثال: تابع تبدیل سیستمی با معادلات حالت زیر کدام است؟ (هسته‌ای ۸۳)

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ -۶ & -۱۶ & -۸ \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}u \quad , \quad y(t)=\begin{bmatrix} ۶ & ۸ & ۲ \end{bmatrix}x$$

۱) $\dfrac{s^۲+۸s+۳}{s^۳+۶s^۲+۸s+۲}$

۲) $\dfrac{۶s^۲+۸s+۲}{s^۳+۸s^۲+۱۶s+۶}$

۳) $\dfrac{s^۲+s+۱}{۸s^۳+۱۶s^۲+۶s+۱}$

۴) $۲\dfrac{s^۲+۴s+۳}{s^۳+۸s^۲+۱۶s+۶}$

✍ **حل:** گزینه «۴»

بدون حل و با توجه به نکته ارائه شده، داریم:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{۲s^۲+۸s+۶}{s^۳+۸s^۲+۱۶s+۶}=۲\frac{(s^۲+۴s+۳)}{s^۳+۸s^۲+۱۶s+۶}$$

حل تشریحی با استفاده از رابطه $\dfrac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-۱}B+D$ خواهد بود (بعداً به آن اشاره خواهیم کرد) که بدون شک وقت‌گیر است.

مثال: تابع تبدیل یک سیستم LTI به صورت $G(s)=\dfrac{۳s^۲+۲s+۹}{s^۲+۳s+۵}$ است. معادلات فضای حالت را بدست آورید. (مؤلف)

✍ **حل:**

توجه داریم که تابع تبدیل سیستم سره است.

$$G(s)=۳+\frac{-۷s-۶}{s^۲+۳s+۵}$$

بنابراین طبق مطالب بیان شده برای $G_۱(s)=\dfrac{-۷s-۶}{s^۲+۳s+۵}$ داریم:

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۵ & -۳ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} -۶ & -۷ \end{bmatrix}$$

مقدار ثابت بیانگر ماتریس D خواهد بود ($D=۳$). بنابراین نمایش ماتریسی معادلات حالت به صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_۱ \\ \dot{x}_۲ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۵ & -۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}u \quad , \quad y=\begin{pmatrix} -۶ & -۷ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix}+۳u$$

مثال: سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_۱ \\ \dot{x}_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۲۵ & -۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲۵ \end{bmatrix}u \quad , \quad y=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}$$

تابع تبدیل سیستم کدام است؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۳)

۱) $\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{۲۵}{s^۲+۶s+۲۵}$

۲) $\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{۶}{s^۲+۲۵s+۶}$

۳) $\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{۲۵(s+۶)}{s^۲+۶s+۲۵}$

۴) $\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{۶(s+۲۵)}{s^۲+۲۵s+۶}$

✍ **حل:** گزینه «۱»

بدون حل و با توجه به نکته ارائه شده داریم:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{۲۵}{s^۲+۶s+۲۵}$$

حل تشریحی با استفاده از رابطه $\dfrac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-۱}B+D$ خواهد بود.

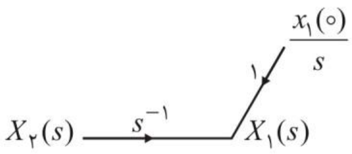
نمودار حالت: اجزاء اصلی نمودار حالت همان اجزاء اصلی نمودار گذر سیگنال است، به جز این که عملگر انتگرال‌گیری نیز به آن اضافه می‌شود. برای نشان دادن عملگر انتگرال‌گیری به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t) \quad \rightarrow \quad x_1(t)=\int_0^t x_2(\tau)d\tau+x_1(0)$$

با گرفتن لاپلاس از طرفین رابطه اخیر داریم:

$$X_1(s)=\frac{X_2(s)}{s}+\frac{x_1(0)}{s}$$

حال نمودار حالت به شکل زیر قابل نمایش است.



بنابراین به راحتی با داشتن معادلات دیفرانسیل می‌توان نمودار حالت را با در نظر گرفتن خروجی انتگرال‌گیرها به عنوان متغیرهای حالت رسم کرد.

❋ **نکته:** ***تعداد انتگرال‌گیرهای موجود برابر تعداد متغیرهای حالت است.***

مثال: معادله دیفرانسیل حاکم بر یک سیستم خطی نامتغیر با زمان به صورت $\frac{d^2c(t)}{dt^2}+3\frac{dc(t)}{dt}+2c(t)=r(t)$ است. نمودار حالت سیستم را با فرض شرایط اولیه صفر بدست آورید. (مؤلف)

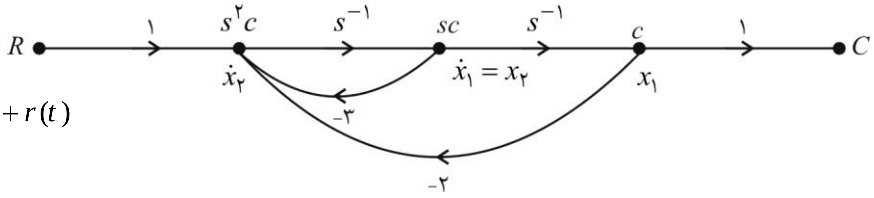
✍ **حل:**

ابتدا معادلات حالت را مطابق با متن درس، بدست می‌آوریم.

$$x_1(t)=c(t)$$

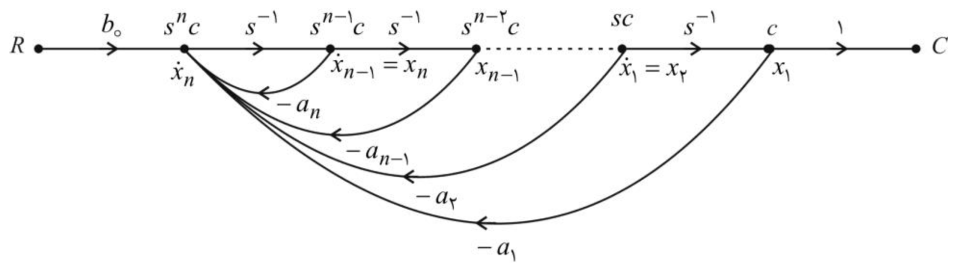
$$\dot{x}_1=x_2=\frac{dc(t)}{dt}$$

$$\dot{x}_2=\frac{d^2c(t)}{dt^2}=-2x_1(t)-3x_2(t)+r(t)$$



مشاهده می‌شود که گره‌ها از چپ به راست به ترتیب $R(s)$ ورودی، s^2c، sc و c نام‌گذاری شده و خروجی انتگرال‌ها به عنوان متغیرهای حالت در نظر گرفته شده است. این فرم در حالت کلی برای معادله دیفرانسیل زیر نیز برقرار است.

$$\frac{d^nc(t)}{dt^n}+a_n\frac{d^{n-1}c(t)}{dt^{n-1}}+...+a_2\frac{dc(t)}{dt}+a_1c(t)=b_0r(t)$$



۱-۸ خطی‌سازی حول نقطه تعادل

بسیاری از اجزاء و المان‌هایی که در سیستم‌های فیزیکی وجود دارند، دارای مشخصه‌های غیرخطی‌اند. لذا برای تحلیل سیستم‌های غیرخطی، ابتدا باید مدل ریاضی این سیستم‌ها را به صورت تقریبی به شکل خطی تغییر داد و سپس نظریه‌های موجود در مطالعه سیستم‌های کنترل خطی را بکار گرفت. ساده‌ترین و عملی‌ترین روش، خطی کردن حول نقطه تعادل یا کار *(Operation point)* می‌باشد.

۱-۸-۱ نقطه تعادل

نقطه تعادل یک سیستم، نقطه‌ای در فضای حالت است که اگر سیستم در آن نقطه قرار گیرد، همیشه در آن نقطه باقی بماند. بنابراین اگر معادلات سیستمی را به صورت $\dot{x}=f(x,t)$ فرض کنیم، حالت x_e را یک نقطه تعادل گوییم، اگر $f(x_e,t)=0 \quad \forall t$

آنچه حائز اهمیت است:

۱- امکان وجود یک یا چند نقطه تعادل در سیستم‌های غیرخطی است.

۲- هر نقطه تعادل را می‌توان با تبدیل مختصات به مبدأ انتقال داد یا به عبارتی به فرم $f(0,t)=0$ درآورد.

۳- اگر سیستم خطی و تغییر ناپذیر با زمان باشد، در این صورت $f(x,t)=Ax(t)$ است. چنانچه ماتریس A ناویژه $(\det(A)\neq 0)$ باشد، فقط یک نقطه تعادل داریم و اگرماتریس A ویژه باشد $(\det(A)=0)$، بی‌نهایت نقطه تعادل مجزا خواهیم داشت.

مثال: نقطه تعادل سیستم زیر را پیدا کنید. (مؤلف)

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + x_1$$
$$\dot{x}_2 = x_2^2 + x_1 x_2$$

حل:

با توجه به متن درس، نقاط تعادل از صفر قرار دادن $\dot{x}$ بدست می‌آیند.

$$\dot{x}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1^2 + x_1 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{یا} \quad x_1 = -1$$

$$\dot{x}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_2(x_2 + x_1) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} if \quad x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 0 \\ if \quad x_1 = -1 \rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$$

بنابراین سیستم دارای سه نقطه تعادل مجزا است.

$$x_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_{e_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_{e_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

۱-۸-۲ روش خطی‌سازی

به منظور توصیف عمل خطی‌سازی، معادله حرکت غیرخطی را حول نقطه تعادل با استفاده از سری تیلور بسط می‌دهیم. در این روش از کلیه جملات سری تیلور که مرتبه بزرگ‌تر از یک دارند، چشم‌پوشی می‌نماییم. اگر معادله حالت غیرخطی را به فرم کلی $\dot{x} = f(x,u,t)$ در نظر بگیریم که x و u بردار حالت و بردار ورودی هستند، فرم خطی شده آن به صورت $\dot{x} = \overset{*}{A}x + \overset{*}{B}u$ خواهد بود. یادآوری می‌کنیم که $\overset{*}{A}$ و $\overset{*}{B}$ در نقطه تعادل محاسبه می‌شوند.

$$\overset{*}{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad , \quad \overset{*}{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1} & \frac{\partial f_m}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial u_m} \end{bmatrix}$$

مثال: سیستم مفروض زیر را در نقطه تعادل داده شده خطی کنید. (مؤلف)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2^2 + x_1 x_2 + u \end{cases} \qquad x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

حل:

ابتدا ماتریس‌های $\overset{*}{A}$ و $\overset{*}{B}$ را در نقطه تعادل محاسبه می‌کنیم.

$$\overset{*}{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 1 & 0 \\ x_2 & 2x_2 + x_1 \end{bmatrix}\Bigg|_{x_e} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \overset{*}{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین سیستم غیرخطی به معادلات حالت خطی زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u$$

مثال: تعداد نقاط تعادل سیستم $\dot{x}=x[1-b(e^{x}-1)]$ به ازای $b>1$ چند تا است؟ (هسته‌ای ۸۴ ـ ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۴)

۱) فقط یک نقطه تعادل دارد که پایدار است.
۲) دو نقطه تعادل دارد و یکی پایدار است.
۳) فقط یک نقطه تعادل دارد که ناپایدار است.
۴) به ازای b مشخص شده نقطه تعادل ندارد.

✍ **حل:** گزینه «۲»

نقاط تعادل از قرار دادن $\dot{x}=0$ بدست می‌آیند.

$$\dot{x}=0 \ \rightarrow \ \begin{cases} x=0 \quad \rightarrow \quad x_e=0 \\ 1-b(e^{x}-1)=0 \ \rightarrow \ x_e=\ln(1+\frac{1}{b}) \end{cases}$$

برای بررسی پایداری، ماتریس $\overset{*}{A}$ را حساب می‌کنیم.

$$\overset{*}{A}=\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_e}=1-b(e^{x}-1)+x(-be^{x})$$

$$\overset{*}{A}_1\bigg|_{x_e=0}=1-b(1-1)+0=1$$

$$\overset{*}{A}_2\bigg|_{x_e=\ln(1+\frac{1}{b})}=1-b(1+\frac{1}{b}-1)+\ln(1+\frac{1}{b})[-b(1+\frac{1}{b})]=-(1+b)\ln(1+\frac{1}{b})$$

از طرفی می‌دانیم که معادله مشخصه در فضای حالت از رابطه $\Delta(s)=\det(sI-A)$ بدست می‌آید. بنابراین:

$\Delta_1(s)=s-1=0 \quad \rightarrow \quad s=1 \ \rightarrow$ سیستم ناپایدار است.

$\Delta_2(s)=s+(1+b)\ln(1+\frac{1}{b})=0 \quad \rightarrow \quad s=-(1+b)\ln(1+\frac{1}{b}) \ \rightarrow$ سیستم پایدار است.

۱-۹ ماتریس گذار حالت

بنابه تعریف، ماتریس گذار حالت $\phi(t)$، پاسخ سیستم است وقتی که تحریک فقط شرایط اولیه باشند. لذا این ماتریس در معادله حالت همگن خطی صدق می‌کند.

$$\dot{x}=Ax+Bu \xrightarrow{u=0} \dot{x}=Ax$$

برای محاسبه ماتریس گذار حالت به دو روش زیر می‌توان عمل کرد:

۱- استفاده از تبدیل لاپلاس

$$\dot{x}=Ax \xrightarrow{L} sX(s)-x(0)=AX(s)$$
$$X(s)=(sI-A)^{-1}x(0)$$
$$\phi(t)=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$$

۲- استفاده از سری توانی

روش دیگر حل معادله حالت همگن، استفاده از روش کلاسیک حل معادله‌های دیفرانسیل خطی است. بدین منظور جواب معادله حالت همگن $\dot{x}=Ax$ را به فرم $x(t)=e^{At}x(0)$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$\phi(t)=e^{At}=I+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\frac{A^3t^3}{3!}+\ldots$$

در کلیه محاسبات فوق برای بدست آوردن $\phi(t)$، زمان اولیه $t=0$ در نظر گرفته شده است.

اگر زمان اولیه t_0 باشد $(t_0\neq 0)$، حل معادله حالت همگن به صورت زیر خواهد بود:

$$x(t)=\phi(t-t_0)x(t_0)$$

ماتریس گذار حالت نشان می‌دهد که حالت‌ها از زمان اولیه t_0 تا هر زمان دلخواه t وقتی ورودی‌ها صفر باشند، چگونه تغییر می‌کنند.

خواص ماتریس گذار حالت

۱: $\phi(0)=I$ (I ماتریس واحد است.)

۲: $\phi'(0)=A$

۳: $\phi(-t)=\phi^{-1}(t)$

۴: $\phi(kt)=\phi^{k}(t)$

۵: $\phi(t_2-t_1)\phi(t_1-t_0)=\phi(t_2-t_0)$

۶: $\phi(t_1)\phi(t_2)=\phi(t_1+t_2)$

۱-۱۰ پاسخ معادلات حالت

فرم کلی معادلات حالت را برای یک سیستم LTI در نظر بگیرید. $\dot{x}=Ax+Bu$

طبق قضیه جمع آثار، پاسخ کامل معادلات حالت برابر است با مجموع پاسخ به شرایط اولیه و پاسخ به ورودی. پاسخ به شرایط اولیه را قبلاً تحت عنوان ماتریس گذار حالت محاسبه کرده‌ایم. حال پاسخ به ورودی را محاسبه می‌کنیم. در این حالت، شرایط اولیه صفر خواهند بود.

$$\dot{x}=Ax+Bu \xrightarrow{L} sX(s)=AX(s)+BU(s)$$
$$X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)$$

بنابراین، حل کامل معادلات حالت به صورت زیر است:

$$X(s)=(sI-A)^{-1}x(0)+(sI-A)^{-1}BU(s)$$
$$x(t)=\phi(t)x(0)+\int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

۱-۱۰-۱ محاسبه خروجی

می‌دانیم که $y(t)=Cx(t)+Du(t) \xrightarrow{L} Y(s)=CX(s)+DU(s)$

با جایگذاری حل کامل معادلات حالت در رابطه اخیر، خروجی محاسبه می‌شود.

$$Y(s)=C(sI-A)^{-1}x(0)+\{C(sI-A)^{-1}B+D\}U(s)$$
$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}$$

۱-۱۰-۲ محاسبه تابع تبدیل

طبق تعریف، نسبت لاپلاس خروجی سیستم به لاپلاس ورودی آن است زمانی که شرایط اولیه صفر در نظر گرفته شوند. طبق رابطه محاسبه خروجی در حوزه لاپلاس داریم:

$$x(0)=0 \quad \to \quad Y(s)=\{C(sI-A)^{-1}B+D\}U(s)$$
$$\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B+D$$

۱-۱۰-۳ محاسبه مقادیر ویژه ماتریس A (فرکانس‌های طبیعی)

از معادله مشخصه، مقادیر ویژه قابل محاسبه می‌باشند.

$$\Delta(s)=\det(sI-A)=0$$

در آینده پی خواهید برد که قطب‌های یک سیستم الزاماً برابر با فرکانس‌های طبیعی سیستم نمی‌باشند.

❋ **نکته:** ***اگر A یک ماتریس قطری باشد، ماتریس گذار حالت به سادگی قابل محاسبه است.***

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \vdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \phi(t)=e^{At}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ باشد، داریم: (مؤلف)

✍ **حل:**

طبق نکته اخیر داریم:

$$\phi(t)=e^{At}=\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

❋ **نکته:** *مقادیر ویژه ماتریس A و ترانهاده آن (A^T) یکسان می‌باشند.*

❋ **نکته:** *مقادیر ویژه ماتریس A^k برابر با مقادیر ویژه ماتریس A به توان k است.*

مثال: سیستمی با معادلات دیفرانسیل روبرو توصیف می‌شود:

$$\frac{dy}{dt}+y-2u+az=0$$
$$\frac{dz}{dt}-by+4u=0$$

که در آن y و z توابعی از زمان بوده و u ورودی است. ریشه‌های مشخصه این سیستم کدام است؟

(ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۲)

۱) $s=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{1-4ab}$

۲) $s=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{1-4ab}}{2}$

۳) $s=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{4ab-1}$

۴) $s=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{4ab-1}}{2}$

✍ **حل:** گزینه «۲»

با انتخاب $X=[y \quad z]^t$ به عنوان متغیرهای حالت، معادلات حالت به فرم زیر بدست می‌آید:

$$\dot{X}=\begin{bmatrix} -1 & -a \\ b & 0 \end{bmatrix}X+\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}u$$

معادله مشخصه برابر است با:

$$\Delta(s)=\det(sI-A)=s^2+s+ab \quad \Rightarrow \quad s_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4ab}}{2}$$

۱-۱۱ مفاهیم کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری

کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری مفاهیمی هستند که با ایده فضای حالت مطرح شده و مختص آن می‌باشند.

۱-۱۱-۱ مفهوم کنترل‌پذیری

سیستمی کنترل‌پذیر است که بتوان بر هر یک از متغیرهای حالت آن تأثیر گذاشت. به تعبیری دیگر، هر متغیر حالت آن از ورودی تأثیر پذیرد.

شرط کنترل‌پذیری: شرط لازم و کافی برای این که سیستم توصیف شده با فرم کلی معادلات حالت کنترل‌پذیر باشد این است که رتبه ماتریس کنترل‌پذیری s_c کامل باشد.

$$s_c=\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad , \quad \det(s_c)\neq 0$$

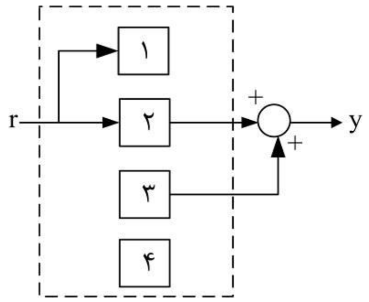
۱-۱۱-۲ مفهوم رویت‌پذیری

سیستمی رویت‌پذیر است که هر متغیر حالت آن را بتوان در خروجی مشاهده کرد. به عبارت دیگر، غالباً مطلوب است که با اندازه‌گیری خروجی‌ها و ورودی‌ها اطلاعاتی درباره متغیرهای حالت بدست آورد. اگر با اندازه‌گیری خروجی(ها) همه حالت‌ها را بتوان مشاهده کرد، سیستم رویت‌پذیر است.

شرط رویت‌پذیری: شرط لازم و کافی برای رویت‌پذیری سیستم توصیف شده به فرم کلی معادلات حالت این است که رتبه ماتریس رویت‌پذیری s_o کامل باشد.

$$S_o=[C \quad CA \quad \dots \quad CA^{n-1}]^T \quad , \quad \det(s_o)\neq 0$$

نتیجه:



۱- اگر سیستمی یک زیرسیستم کنترل‌ناپذیر داشته باشد، به آن کنترل‌ناپذیر گوییم.

۲- اگر سیستمی یک زیرسیستم رویت‌ناپذیر داشته باشد، به آن رویت‌ناپذیر گوییم.

۳- با توجه به دو مفهوم کنترل‌پذیر و رویت‌پذیری می‌توان فضای حالت را به چهار زیرسیستم تقسیم بندی کرد.

زیرسیستم (۱): کنترل‌پذیر ـ رویت‌ناپذیر

زیرسیستم (۲): کنترل‌پذیر ـ رویت‌پذیر (فضای تابع تبدیل)

زیرسیستم (۳): کنترل‌ناپذیر ـ رویت‌پذیر

زیرسیستم (۴): کنترل‌ناپذیر ـ رویت‌ناپذیر

بنابراین می‌توان پی برد که فضای تابع تبدیل زیرمجموعه فضای حالت می‌باشد. در صورتی این دو فضا با یکدیگر برابرند که سیستم، زیرسیستم رویت‌ناپذیر (شماره ۱) یا زیرسیستم کنترل‌ناپذیر (شماره ۳) یا زیرسیستم کنترل‌ناپذیر ـ رویت‌ناپذیر (شماره ۴) را نداشته باشد.

❋ **نکته:** ***۱- کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری کاملاً وابسته به تعریف متغیرهای حالت هستند. این امر به واسطه این است که فضای حالت یک سیستم منحصر به فرد نمی‌باشد. توجه شود که مقدار ویژه ماتریس A مقادیر ثابتی می‌باشند.***

۲- عبارات زیر معادل یکدیگر هستند.

الف) اگر درجه تابع تبدیل یک سیستم تک ورودی ـ تک خروجی کمتر از بعد فضای حالت آن باشد، آن گاه سیستم باید یک زیرسیستم رویت‌ناپذیر یا یک زیرسیستم کنترل‌ناپذیر یا این که هر دو زیرسیستم را دارا باشد. این واقعیت، معادل حذف صفر و قطب در تابع تبدیل است.

ب) اگر تابع تبدیل حذف صفر و قطب نداشته باشد، سیستم را همواره می‌توان با معادله‌های دینامیک به صورت یک سیستم کنترل‌پذیر و رویت‌پذیر نمایش داد.

ج) اگر تابع تبدیل حذف صفر و قطب داشته باشد، بسته به تعریف متغیرهای حالت سیستم، کنترل‌ناپذیر یا رویت‌ناپذیر یا کنترل‌ناپذیر و رویت‌ناپذیر می‌باشد.

۳- هر قطب تابع تبدیل یک مقدار ویژه ماتریس A می‌باشد ولی الزاماً به دلیل حذف صفر و قطب هر مقدار ویژه ماتریس A یک قطب تابع تبدیل نمی‌باشد.

برای درک بهتر مفاهیم فوق، به مثال زیر توجه کنید.

مثال: معادلات حالت برای یک سیستم LTI به صورت زیر است. در مورد کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری سیستم بحث کنید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} x$$ (مؤلف)

✍ **حل:**

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس A را پیدا می‌کنیم.

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & s+۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & s+۳ \end{bmatrix} = (s+۱)(s+۲)(s+۳) = ۰ \quad \Rightarrow \quad s = -۱, -۲, -۳$$

حال تابع تبدیل سیستم را محاسبه می‌کنیم.

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{s+3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{s+3}\quad\Rightarrow\ \Delta(s)=0\quad\rightarrow\quad s=-3$$

مشاهده می‌شود که مقادیر ویژه ۱- و ۲- در تابع تبدیل ظاهر نشده‌اند. به عبارتی دیگر، سیستم رویت‌ناپذیر یا کنترل‌ناپذیر و یا کنترل‌ناپذیر ـ رویت‌ناپذیر می‌باشد. در این مثال، مقدار ویژه ۱- کنترل‌ناپذیر و مقدار ویژه ۲- رویت‌ناپذیر است که در مورد دلایل این موضوع، در آینده بحث خواهیم کرد.

۱-۱۲ فیدبک حالت

با فیدبک کردن متغیرهای حالت از طریق یک ماتریس بهره ثابت k، می‌توان مقادیر ویژه ماتریس A را مقادیر مطلوب دلخواهی تعیین کرد. معادلات حالت را به فرم کلی در نظر بگیرید.

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

با فرض این که از $u=-kx$ استفاده کنیم، داریم:

$$\dot{x}=Ax+B(-kx)$$

$$\rightarrow\quad \dot{x}=(A-Bk)x$$

هدف از طراحی عبارتست از تعیین ماتریس بهره ثابت k به طوری که مقادیر ویژه ماتریس $(A-Bk)$، مقادیر مطلوب باشند. این مسأله به طراحی جایابی قطب از طریق فیدبک حالت معروف است. در این حالت، مقادیر ویژه از معادله مشخصه $\Delta(s)=\det(sI-A+Bk)=0$ بدست می‌آیند. وجود جواب برای طراحی جایابی قطب، به کنترل‌پذیری سیستم وابسته است به طوری که اگر سیستم مفروض کنترل‌پذیر باشد، یک ماتریس فیدبک k وجود دارد که انتخاب دلخواه مقادیر ویژه را ممکن می‌سازد.

❋ **نکته**: *صورت متعارف متغیر فازی یک سیستم، کنترل‌پذیر است.*

۱-۱۳ تحقق‌پذیری (تجزیه توابع تبدیل)

قبلاً اشاره گردید که نمایش سیستم توسط تابع تبدیل آن رفتار ورودی ـ خروجی را توصیف می‌کند در حالی که نمایش سیستم در حوزه زمانی توسط معادلات حالت و خروجی، علاوه بر اطلاعات فوق، اطلاعات جامعی از ساختار داخلی سیستم، ارتباط و اثرات زیرمجموعه‌های مختلف سیستم را در اختیار قرار می‌دهد.

$$\dot{X}=AX+BU \qquad (1)$$

$$Y=CX+DU \qquad (2)$$

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D \qquad (3)$$

سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا همیشه معادلات حالت به فرم (۱) و (۲) وجود دارند که تابع تبدیل آن‌ها با معادله (۳) نمایش داده شود؟ پاسخ این سؤال توسط قضیه اصلی تحقق‌پذیری داده می‌شود. این قضیه بیان می‌کند تابع تبدیل $G(s)$ توسط معادله دینامیکی سیستم حالت با ابعاد محدود تحقق‌پذیر است، اگر و فقط اگر $G(s)$ سره یا اکیداً سره باشد.

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\dots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1 s+a_0}$$

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

$m=n\ \rightarrow\ D=cte$ سیستم سره *(proper)*

$m<n\ \rightarrow\ D=0$ سیستم اکیداً سره *(strictly proper)*

$$if\quad G(s)=proper\quad\rightarrow\quad G(s)=\underbrace{\hat{G}(s)}_{\substack{strictly\\ proper}}+D$$

به سه حالت، تحقق‌پذیری سیستم‌ها انجام می‌گیرد. روش مستقیم، روش موازی و روش سری.

۱-۱۳-۱ روش مستقیم

با ذکر یک مثال به تشریح این روش می‌پردازیم. تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید.

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_2}$$

هدف بدست آوردن معادلات حالت سیستم است. مراحل انجام کار به صورت زیر است:

۱- تابع تبدیل مفروض را برحسب توان‌های منفی s بیان کنید.

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_2+b_1s^{-1}+b_0s^{-2}}{1+a_1s^{-1}+a_2s^{-2}}$$

۲- صورت و مخرج تابع تبدیل حاصل از مرحله (۱) را در متغیر فرضی $U(s)$ ضرب کنید.

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_2+b_1s^{-1}+b_0s^{-2}}{1+a_1s^{-1}+a_2s^{-2}}\,\frac{U(s)}{U(s)}$$

۳- صورت و مخرج طرفین تابع تبدیل حاصل از مرحله (۲) را برابر هم قرار دهید.

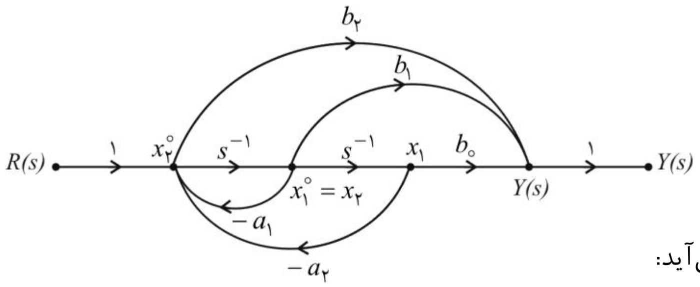
$$Y(s)=(b_2+b_1s^{-1}+b_0s^{-2})U(s)$$

$$R(s)=(1+a_1s^{-1}+a_2s^{-2})U(s)$$

۴- رسم نمودار حالت را با توجه به دو معادله حاصل از مرحله (۳) انجام دهید. توجه کنید برای رسم، همواره $U(s)$ را برحسب $R(s)$ به منظور ایجاد رابطه علت و معلولی محاسبه کنید.

$$U(s)=R(s)-(a_1s^{-1}+a_2s^{-2})U(s)$$

نمودار حالت مطابق با آن چه که قبلاً بیان شده است، به صورت زیر خواهد بود.



حال معادلات حالت بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}r \quad ، \quad y(t)=\begin{bmatrix}b_0-a_2b_2 & b_1-a_1b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+b_2r(t)$$

معادلات حالت بدست آمده به فرم متعارف متغیر فازی است.

نتیجه: در استفاده از روش مستقیم، معادله‌های حالت به فرم متعارف متغیر فازی بدست می‌آید که قطعاً کنترل‌پذیر خواهد بود. به بیانی دیگر، اگر معادلات حالت به فرم متعارف متغیر فازی باشند، آن حالت‌ها حتماً کنترل‌پذیرند.

۱-۱۳-۲ روش موازی

در این روش از تجزیه به کسرهای جزیی استفاده می‌کنیم. با ذکر یک مثال به تشریح این روش می‌پردازیم. تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید.

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{k(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)} \qquad p_1\neq p_2$$

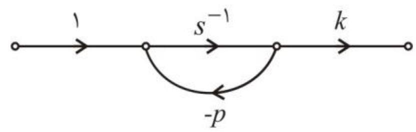
بدون از دست دادن کلیت مسأله، تابع تبدیل فوق را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=k_0+\frac{k_1}{s+p_1}+\frac{k_2}{s+p_2}$$

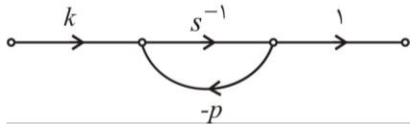
می‌دانیم که تابع تبدیل $\hat{G}(s)=\dfrac{k}{s+p}$ را به دو صورت زیر می‌توان در نظر گرفت:

$$\hat{G}(s)=\frac{ks^{-1}}{1+ps^{-1}}$$

فرم اول:

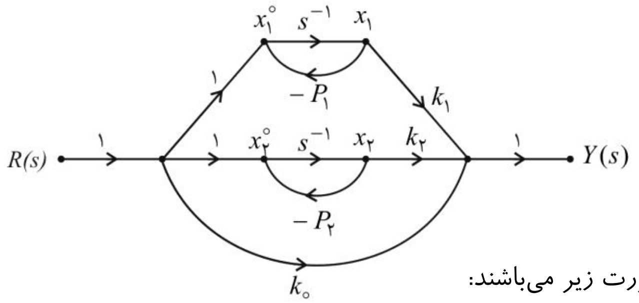


فرم دوم:



حال نمودار حالت را برای تابع تبدیل مفروض می‌توان به راحتی رسم کرد.

فرم اول:

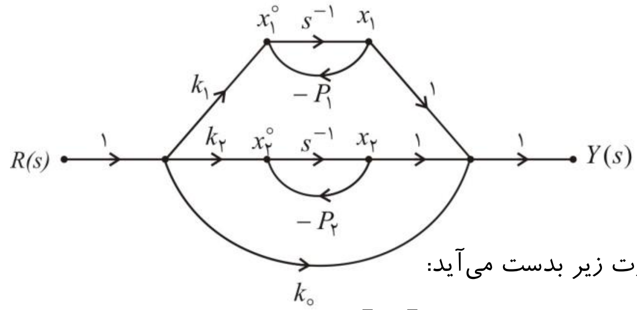


در این شرایط معادلات حالت به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_۱\\ \dot{x}_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-p_۱ & \circ\\ \circ & -p_۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}r \quad ، \quad y(t)=\begin{bmatrix}k_۱ & k_۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix}+k_\circ r$$

مشاهده می‌شود که ماتریس A، یک ماتریس قطری است که عناصر روی قطر اصلی آن را قطب‌های سیستم تشکیل می‌دهند. به راحتی می‌توان پی برد که اگر $k_i=\circ$ $(i=۱,۲)$ باشد، متغیر حالت موردنظر در خروجی ظاهر نشده و لذا سیستم رویت‌ناپذیر خواهد بود.

فرم دوم:



معادلات حالت در این شرایط به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_۱\\ \dot{x}_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-p_۱ & \circ\\ \circ & -p_۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_۱\\ k_۲\end{bmatrix}r \quad ، \quad y(t)=\begin{bmatrix}۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix}+k_\circ r$$

مشاهده می‌شود که ماتریس A، یک ماتریس قطری است که عناصر روی قطر اصلی آن را قطب‌های سیستم تشکیل می‌دهند. به راحتی می‌توان پی برد که اگر $k_i=\circ$ $(i=۱,۲)$ باشد، متغیر حالت موردنظر با ورودی در ارتباط نبوده و لذا سیستم کنترل‌ناپذیر خواهد بود.

❋ **نکته:** ***۱- استفاده از فرم موازی در مورد توابع تبدیل با قطب‌های ساده منجر به ماتریس A به صورت قطری می‌گردد که عناصر روی قطر اصلی آن را قطب‌های سیستم تشکیل می‌دهند.***

۲- در استفاده از فرم موازی به راحتی می‌توان متغیرهای حالت سیستم را که کنترل‌ناپذیر یا رویت‌ناپذیر می‌باشند را تشخیص داد (حذف صفر و قطب).

۳- اگر سیستم اکیداً سره باشد، ضریب $k_\circ$ برابر صفر خواهد بود.

مثال: معادلات حالت سیستم پیوسته خطی به شکل زیر است. تابع تبدیل سیستم عبارتست از: (مکانیک ۸۴)

$$A=\begin{bmatrix}-۴ & \circ & \circ & \circ\\ \circ & -۳ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & -۲ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & -۱\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}۵\\ \circ\\ ۲\\ ۷\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱ & \circ\end{bmatrix} \qquad D=\circ$$

۱) $G(s)=\dfrac{۱}{s+۴}+\dfrac{۱}{s+۳}$

۲) $G(s)=\dfrac{۵}{s+۴}+\dfrac{۲}{s+۲}$

۳) $G(s)=\dfrac{۷}{s+۳}+\dfrac{۲}{s+۴}$

۴) $G(s)=\dfrac{۵}{s+۷}+\dfrac{۴}{s+۲}$

✍ **حل:** گزینه «۲»

با توجه به نکات ارائه شده، گزینه (۴) نادرست است، زیرا (۷-) قطب سیستم نمی‌باشد. قطب‌های سیستم عبارتند از عناصر روی قطر اصلی ماتریس A، یعنی $s=-۱,-۲,-۳,-۴$. همچنین با توجه به نکات ارائه شده، قطب ۱- رویت‌ناپذیر و قطب ۳- کنترل‌ناپذیر است. لذا در تابع تبدیل نباید ظاهر شوند. بنابراین گزینه (۲) صحیح خواهد بود.
$$G(s)=\frac{۵}{s+۴}+\frac{۲}{s+۲}$$

فرم جردن

در روش موازی، چنانچه تابع تبدیل دارای قطب‌هایی با مرتبه چندگانه باشد، ماتریس A به صورت قطری نخواهد بود که به آن فرم جردن می‌گوییم. اگرچه در این حالت نیز، عناصر روی قطر اصلی ماتریس A، قطب‌های سیستم می‌باشند. به مثال زیر توجه کنید.

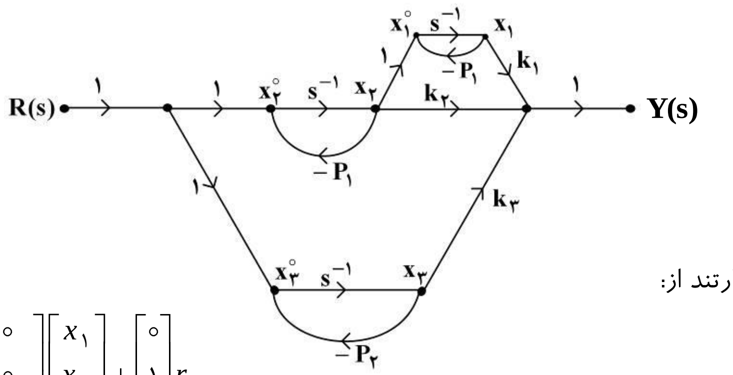
مثال: تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید. (مؤلف)

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{k(s+z_۱)(s+z_۲)}{(s+p_۱)^۲(s+p_۲)} \qquad p_۱\neq p_۲$$

بدون از دست دادن کلیت تابع تبدیل فوق را به شکل زیر به کسرهای جزیی تجزیه می‌کنیم.

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{k_۱}{(s+p_۱)^۲}+\frac{k_۲}{s+p_۱}+\frac{k_۳}{s+p_۲}$$

توجه کنید که تابع تبدیل مفروض از مرتبه سوم است. در حالی که مرتبه کل جملات در حالت تجزیه به کسرهای جزیی چهار می‌باشد که برای رفع این مشکل (استفاده از حداقل انتگرال‌گیرها)، از یک انتگرال‌گیر به طور مشترک بین دو کانال استفاده می‌کنیم. بنابراین نمودار حالت تابع تبدیل مفروض با حداقل انتگرال‌گیر به شکل زیر خواهد بود.



معادلات حالت سیستم عبارتند از:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_۱\\ \dot{x}_۲\\ \dot{x}_۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-p_۱ & ۱ & ۰\\ ۰ & -p_۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & -p_۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\\ x_۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\ ۱\\ ۱\end{bmatrix}r$$

مشاهده می‌شود که ماتریس A قطری نمی‌باشد ولی همچنان عناصرروی قطر اصلی آن را قطب‌های سیستم تشکیل می‌دهند.

۱-۱۳-۳ روش سری

از این روش زمانی می‌توان استفاده کرد که تابع تبدیل به صورت حاصل ضرب عوامل باشد. با ذکر یک مثال این روش را تشریح می‌کنیم.

مثال: تحقق تابع تبدیل $G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=k\,\frac{(s+z_۱)}{(s+p_۱)}\,\frac{(s+z_۲)}{(s+p_۲)}$ را به روش سری بدست آورید. (مؤلف)

✍ **حل:**

تابع تبدیل $\hat{G}(s)=\frac{s+z}{s+p}$ را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\hat{G}(s)=\frac{۱+zs^{-۱}}{۱+ps^{-۱}}$$