

۱ - (الف) با روش تکرار نقطه‌ی ثابت نشان دهید مقدار

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$$

برابر ۲ است.

(ب) تقریبی برای A با دقت 0.001 به دست آورید.

۲ - ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $f(x) = e^x - 1 - 2x = 0$ را با روش تکرار نقطه‌ی ثابت با دقت $\frac{1}{4} \times 10^{-4}$ به دست آورید.

۳ - معادله‌ی $5x - 4 \cos x = 0$ مفروض است.

(الف) - نشان دهید این معادله دارای تنها یک ریشه است و ریشه را با روش تکرار نقطه‌ی ثابت و دقت $\epsilon = 0.0001$ به دست آورید.

(ب) - جواب معادله را با روش Δ^2 - ایتن با همان دقت به دست آورید.

۴ - معادله‌ی $x^2 + e^x = 0$ را با روشی دلخواه حل کنید.

۵ - اولین ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $e^{-x} - \cos x = 0$ را با روش تکرار نقطه‌ی ثابت به دست آورید.

۶ - معادله‌ی $x^2 - \tan x + 1 = 0$ مفروض است. اولاً بازه‌ای که کوچکترین ریشه‌ی مثبت معادله را در بر دارد، مشخص کنید. ثانیاً، این ریشه را با روش تکرار نقطه‌ی ثابت با دقت $\epsilon = \frac{1}{4} \times 10^{-4}$ به دست آورید.

۷ - در مکانیک سماوی مسأله‌ی محاسبه‌ی موقعیت یک سیاره در مدارش به معادله‌ی متعالی زیر که معادله‌ی کپلر نامیده می‌شود، منجر می‌شود

$$m = x - E \sin x$$

که m و E اعداد مثبت معلوم هستند. به ازای $m = 0.8$ و $E = 0.2$ معادله را با روش تکرار نقطه‌ی ثابت حل کنید.

۸ - معادله‌ی $f(x) = e^x \sin x + 25x + 1 = 0$ مفروض است. نشان دهید این معادله دارای یک ریشه‌ی منفی در بازه $[-1, 0]$ است. این ریشه را به کمک روش دوبخشی با ۵ تکرار تقریب بزنید و خطای این تقریب را بر آورد کنید. همچنین این ریشه را با روش تکرار نقطه‌ی ثابت و با انتخاب نقطه‌ی آغازین $x_0 = 0$ با دقت $\epsilon = 10^{-4}$ به دست آورید.

۹ - معادله‌ی $f(x) = x^2 - 3x + e^x - 2 = 0$ دارای دو ریشه است، یکی مثبت و یکی منفی. ریشه‌ی منفی را با روش تکرار نقطه‌ی ثابت به دست آورید.

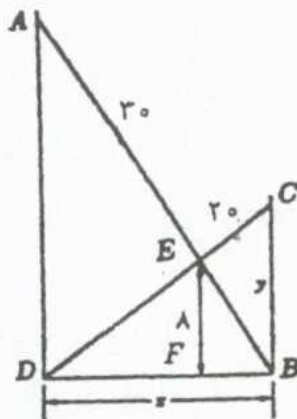
۱۰ - با استفاده از روش نیوتن - رافسون والگوریتم هرنر، تقریبی برای ریشه‌ی معادله‌ی $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ که در بازه‌ی $[0, 1]$ قرار دارد، به دست آورید. نقطه‌ی آغازین را $x_0 = 0.5$ بگیرید و دو تکرار انجام دهید.

۱۱ - کوچکترین ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $\tan x - x - 1 = 0$ را با روش نیوتن و با روش وترى به دست آورید.

۱۲ - با استفاده از روش نیوتن - رافسون و همچنین روش تکرار نقطه‌ی ثابت بزرگترین ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = (x - 2)^2 - \ln x = 0$ را با $x_0 = 3$ و $\epsilon = \frac{1}{4} \times 10^{-4}$ به دست آورید.

۱۳ - فرمول تکراری $x_{n+1} = x_n + ae^{-x_n} - 1$ ، فرمول نیوتن برای یافتن ریشه‌ای از معادله‌ی $f(x) = 0$ است. $f(x)$ را به دست آورید. به ازای $a = 2$ ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ را به دست آورید.

۱۴ - در شکل زیر $AB = 30\text{ cm}$ و $CD = 20\text{ cm}$ و $EF = 8\text{ cm}$. طول پاره خط DB را به دست آورید. ($\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$)



بافرض $BC = y$ و $DB = x$ ، نشان دهید y در معادله‌ی زیر صدق می‌کند

$$y^4 - 16y^3 + 500y^2 - 8000y + 32000 = 0$$

و از این جا $x = \sqrt{400 - y^2}$.

۱۵ - اولین ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $f(x) = x \sin x - 1 = 0$ را با روش نیوتن - رافسون به دست آورید.

۱۶ - کوچکترین ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $\tan x + \tanh x = 0$ را با روشی دلخواه و با دقت $\epsilon = \frac{1}{4} \times 10^{-4}$ به دست آورید.

۱۷ - معادله‌ی $f(x) = \cos x(1 - \sin x) = 0$ مفروض است.

(الف) - نشان دهید $x = \frac{\pi}{4}$ ریشه‌ی معادله و مرتبه‌ی تکرار آن ۳ است.

(ب) - این ریشه را با روش نیوتن - رافسون تصحیح شده با نقطه‌ی آغازین $x_0 = 0.5$

و با دقت $\epsilon = \frac{1}{4} \times 10^{-4}$ به دست آورید.

(پ) نشان دهید مرتبه‌ی همگرایی روش حداقل دواست.

۱۸ - با روش تکرار نقطه‌ی ثابت مقدار عبارت زیر را بیابید.

$$A = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

۱۹ - معادله‌ی $f(x) = 2x^2 - 1 - \sin x = 0$ را در نظر بگیرید.

(الف) - نشان دهید این معادله دارای یک ریشه‌ی مثبت در بازه‌ی $[0, 1]$ است.

(ب) - با استفاده از روش تکرار نقطه‌ی ثابت و $x_0 = 1$ ، این ریشه را با

دقت $\epsilon = \frac{1}{4} \times 10^{-2}$ به دست آورید.

(پ) - با روش نیوتن - رافسون و با $x_0 = 1$ و $\epsilon = \frac{1}{4} \times 10^{-2}$ این ریشه را به دست

آورید.

(ت) - اگر بخواهیم این ریشه را با روش دوبخشی و با همان دقت قسمت (پ) به دست

آوریم چند تکرار لازم است؟

۲۰ - معادله‌ی $P(x) = ax^2 + bx^2 + x - 2 = 0$ مفروض است.

(الف) a و b را طوری انتخاب کنید که $x = 1$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی فوق باشد.

(ب) این ریشه را با استفاده از روش نیوتن تصحیح شده و با دقت $\epsilon = \frac{1}{4} \times 10^{-4}$ به دست

آورید.

(پ) مرتبه‌ی همگرایی روش را به دست آورید.

۲۱ - فرمول تکراری زیر را در نظر بگیرید که در آن $r > 0$.

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3r)}{3x_n^2 + r}, \quad n = 0, 1, \dots$$

(الف) - حد دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ را در صورت وجود بیابید.

(ب) - حد دنباله، ریشه‌ی چه معادله‌ای است؟

(پ) - نشان دهید مرتبه‌ی همگرایی حداقل برابر دو است.

(ت) - با فرض $r = 3$ و $x_0 = 1$ ، ریشه‌ی معادله در قسمت (ب) را با دقت

$\epsilon = \frac{1}{4} \times 10^{-2}$ به دست آورید.

۲۲ - با روش نیوتن - رافسون نشان دهید دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تعریف شده با

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^2 + a}{3x_n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

همگرا به \sqrt{a} است.

۲۳ - ریشه‌ای از معادله‌ی $\cosh x + \cos x - 3 = 0$ را با روشی دلخواه به دست آورید.

۲۴- فرض کنید $k > 1$ یک عدد صحیح و a عدد حقیقی مثبت باشد و دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تعریف شده با

$$x_{n+1} = \frac{x_n^k + kax_n}{kx_n^{k-1} + a}, \quad n = 0, 1, \dots$$

همگرا باشد. اولاً حد دنباله را بیابید و مرتبه‌ی همگرایی را مشخص کنید. ثانیاً k را طوری تعیین کنید که مرتبه‌ی همگرایی حداقل دو باشد.

۲۵- برای یافتن کوچکترین ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $\tan x = x$ ، کدامیک از فرمولهای تکراری زیر مناسب است؟

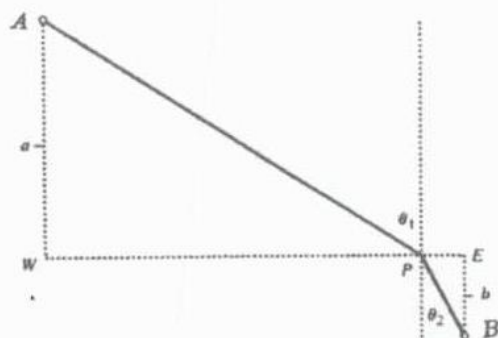
(الف) $x_{n+1} = \tan x_n$ (ب) $x_{n+1} = \arctan x_n$ (پ) $x_{n+1} = \pi + \arctan x_n$

کوچکترین ریشه‌ی مثبت را با دقت $\epsilon = 0.0001$ محاسبه کنید.

۲۶- شهرهای A و B مطابق شکل را در نظر بگیرید. پیمانکاری می‌خواهد بین دو شهر لوله‌گذاری نفت نماید. به دلیل تفاوت طبیعت زمین‌های اطراف این دو شهر، هزینه‌ی لوله‌گذاری در شمال WE ، c_1 میلیون دلار در هر مایل و در جنوب WE ، c_2 میلیون دلار است. لوله‌گذاری چگونه باید انجام شود تا هزینه مینیمم شود. با فرض $WP = x$ و در حالت خاص

$$WE = L = 4, \quad a = 3, \quad b = 1, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 2$$

نشان دهید x در معادله‌ی $3x^4 - 24x^3 + 83x^2 - 288x + 576 = 0$ صدق می‌کند، و $x = 3.5848$.



۲۷- نشان دهید معادله‌ی $f(x) = e^x - 3x^2 = 0$ دارای دو ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی است. ریشه‌های مثبت را با روش تکرار نقطه‌ی ثابت و ریشه‌ی منفی را با روش وتری با دقت $\epsilon = \frac{1}{4} \times 10^{-2}$ محاسبه کنید.

۲۸- کره‌ای به شعاع $r = 10^{cm}$ را که از ماده‌ای با چگالی $\rho = 0.636$ ساخته شده، در ظرف آبی قرار می‌دهیم. کره چه اندازه در آب فرو می‌رود؟

۲۹- فرض کنید معادله‌ی $x^2 + Ax + B = 0$ که در آن $B \neq 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی α و β باشد. نشان دهید روش تکراری

$$x_{k+1} = -\frac{Ax_k + B}{x_k}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

همگرا به α است، اگر $|\alpha| < |\beta|$. همچنین نشان دهید که

$$x_{k+1} = -\frac{B}{x_k + A}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

همگرا به α است، اگر $|\alpha| < |\beta|$.

۳۰- نشان دهید ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $e^x = Nx + 2$ که در آن N صحیح و مثبت است در بازه‌ی $[1, N+1]$ قرار دارد.

۳۱- کوچکترین ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $2 \cos(\pi x) - x = 0$ را با روش تکرار نقطه‌ی ثابت با دقت $\epsilon = 0.0001$ به دست آورید.