پاسخ تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم

۱- گزینه «۴» ـ (ساده)

با توجه به متن درس، تمام موارد صحیح است.

۲- گزینه «۴» ـ (دشوار)

تابع تبدیل حلقه‌بسته برابر است با $M(s)=\frac{20(1+T_d s)}{s(s+4)+20(1+T_d s)(1+K_h s)}$. برای حالت A، $M_A(s)=\frac{20}{s^2+4s+20}$ لذا $2\xi\omega_n=4 \Rightarrow \xi=\frac{2}{\sqrt{20}}=0.44$ و $\omega_n=\sqrt{20}$. برای حالت C، $M_C(s)=\frac{20}{s^2+8s+20}$ لذا $2\xi\omega_n=8 \Rightarrow \xi=\frac{4}{\sqrt{20}}=0.89$ و $\omega_n=\sqrt{20}$ و برای حالت B، $M_B(s)=\frac{20(1+0.2s)}{s^2+8s+20}$ سیستم صفری در ۵- دارد. پس با توجه به کوچکتر بودن نسبت میرایی حالت A نسبت به دو حالت دیگر، پاسخ حالت A متناظر با III است. از سویی هر دو حالت B و C قطب‌های یکسان دارند اما سیستم B قطعا با توجه به وجود صفر از سیستم C سریعتر است (زمان خیز کمتر دارد). لذا حالت Bمتناظر با I و حالت C متناظر با II است. برای درک بهتر موضوع به شکل ۲-۴ در فصل دوم مراجعه کنید. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۳- گزینه «۳» ـ (ساده)

تابع تبدیل سیستم حلقه بسته عبارتند از:

$$M(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{2(1-s)}{s^2+2(1-k)s+3+2k}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s[R(s)-C(s)]=\lim_{s\to 0}sR(s)[1-M(s)]=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{1}{s}[1-\frac{2(1-s)}{s^2+2(1-k)s+3+2k}]=1-\frac{2}{3+2k}$$

برای صفر شدن خطای حالت ماندگار داریم:

$$1-\frac{2}{3+2k}=0\to k=-\frac{1}{2}$$

توجه کنید خطای حالت ماندگار برای سیستم پایدار تعریف می‌شود که در این مسأله مقدار k حاصل در شرط پایداری صدق می‌کند که محدوده پایداری به کمک روش راث $-\frac{3}{2}<k<1$ بدست می‌آید.

۴- گزینه «۱» ـ (ساده)

با توجه به این که فیدبک مثبت است باید مکان هندسی مکمل ریشه‌ها (CRL) رسم شود، لذا گزینه (۱) صحیح است. در ادامه کافی است محل تلاقی با محور موهومی را بدست آوریم. با تشکیل جدول راث داریم:

$$\Delta(s)=s(s+1)(s+3)-k(s-1)=0\ \to\ \Delta(s)=s^3+4s^2+(3-k)s+k=0$$

یک سطر صفر کامل $\to\ 4(3-k)-k=0\to k=\frac{12}{5}$

از معادله کمکی داریم:

$$A(s)=4s^2+k=0\ \to\ 4s^2+\frac{12}{5}=0\to s=\pm j\sqrt{\frac{3}{5}}$$

۵- گزینه «۴» ـ (ساده)

با توجه به مفاهیم گذر سیگنال، $E(s)\neq L(s)$ می‌باشد. زیرا به گره $L(s)$ سه شاخه وارد می‌شود در حالی که طبق تعریف $E(s)=R(s)-C(s)$ باید دو شاخه به گره وارد شود. با توجه به این که خطا برای سیستم‌های پایدار تعریف می‌شود کافی است محدوده k را برای پایداری بدست آوریم. از روش بهره میسون، معادله مشخصه عبارتست از:

$$\Delta(s)=1-(-\frac{1}{s}-\frac{1}{s}-\frac{1}{s}-\frac{k}{s^3})+(-\frac{1}{s})(-\frac{1}{s})+(-\frac{1}{s})(-\frac{1}{s})=0\ \to\ \Delta(s)=1+\frac{3}{s}+\frac{k}{s^3}+\frac{2}{s^2}=0$$

$$\Rightarrow\ \Delta(s)=s^3+3s^2+2s+k=0$$

با استفاده از جدول راث، محدوده k برای پایداری $0<k<6$ بدست می‌آید. بنابراین گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

۶- گزینه «۲» ـ (متوسط)

می‌دانیم دترمینان نمودار گذر سیگنال در روش بهره میسون، معادله مشخصه را نشان می‌دهد. داریم:

$$L_۱=\frac{-۱}{s+۱}\quad,\quad L_۲=\frac{-۱}{s+p}\quad,\quad L_۳=\frac{-۱}{(s+۱)(s+p)}$$

$$\Delta=۱-(L_۱+L_۲+L_۳)+۰=۱+\frac{۱}{s+۱}+\frac{۱}{s+p}+\frac{۱}{(s+۱)(s+p)}=۰$$

$$\rightarrow \Delta(s)=(s+۱)(s+p)+(s+p)+(s+۱)+۱=۰\ \Rightarrow \Delta(s)=s^۲+(p+۳)s+۲p+۲=۰$$

شرط پایداری عبارتست از:

$$\begin{matrix} ۲p+۲>۰\rightarrow p>-۱ \\ p+۳>۰\rightarrow p>-۳ \end{matrix}\xrightarrow{\cap} p>-۱$$

۷- گزینه «۳» ـ (ساده)

با توجه به این که سیستم میرای بحرانی است داریم:

$$\zeta=۱\rightarrow H(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^۲}{(s+\omega_n)^۲}\ \rightarrow\ h(t)=\omega_n^۲te^{-\omega_m t}$$

$$S_{\omega_n}^{h(t)}=\frac{\omega_n}{h}\frac{\partial h}{\partial\omega_n}=(۲\omega_n te^{-\omega_n t}-\omega_n^۲t^۲e^{-\omega_n t})(\frac{\omega_n}{\omega_n^۲te^{-\omega_n t}})=\omega_n^۲te^{-\omega_n t}(\frac{۲-\omega_n t}{\omega_n^۲te^{-\omega_n t}})$$

$$\Rightarrow\qquad S_{\omega_n}^{h(t)}=۲-\omega_n t\xrightarrow{t=۱}S_{\omega_n}^{h(t=۱)}=۲-\omega_n$$

۸- گزینه «۱» ـ (ساده)

با توجه به این که قبل از اعمال ورودی سیستم در حالت تعادل قرار دارد و نیروی وزن با از پیش بار کردن فنرها به تعادل می‌رسد می‌توانیم در نوشتن معادلات از نیروی وزن صرف‌نظر کنیم. داریم:

$$\sum F=M\ddot{x}\rightarrow f(t)-B\dot{x}-kx=M\ddot{x}$$

با تبدیل لاپلاس از رابطه اخیر و با فرض $M=۱$ و $B=۱$ داریم:

$$\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{۱}{s^۲+s+k}$$

از قضیه مقدار نهایی و نمودار جابجایی خواهیم داشت:

$$x(\infty)=\frac{۱}{۴}=\lim_{s\to۰}sX(s)=\lim_{s\to۰}s(\frac{۱}{s})\cdot\frac{۱}{s^۲+s+k}=\frac{۱}{k}\quad\Rightarrow\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{k}\rightarrow k=۴$$

لذا معادله مشخصه تابع انتقال برابر است با:

$$\Delta(s)=s^۲+s+k=s^۲+s+۴=۰$$

با مقایسه با معادله مشخصه نوعی داریم:

$$\begin{cases}\omega_n^۲=۴\rightarrow\omega_n=۲\\ ۲\zeta\omega_n=۱\rightarrow\zeta=\dfrac{۱}{۲\omega_n}=\dfrac{۱}{۴}\end{cases}$$

۹- گزینه «۱» ـ (ساده)

$$M(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\dfrac{۲(۱-s)}{(s+۳)(s+۲)}}{۱+\dfrac{۲k(۱-s)}{(s+۳)(s+۲)}}=\frac{۲(۱-s)}{s^۲+(۵-۲k)s+۶+۲k}$$

طبق فرض مساله داریم:

$$E(s)=R(s)-C(s)=R(s)-M(s)R(s)=R(s)[۱-M(s)]$$

$$\rightarrow E(s)=\frac{۱}{s}\left[۱-\frac{۲(۱-s)}{s^۲+(۵-۲k)s+۶+۲k}\right]$$

لذا با استفاده از قضیه مقدار نهایی داریم:

$$e(\infty)=\lim_{s\to۰}sE(s)=۱-\frac{۲}{۶+۲k}=۰\rightarrow k=-۲$$

از سویی طبق قضیه مقدار نهایی باید $sE(s)$ هیچ قطبی سمت راست محور موهومی و روی آن نداشته باشد لذا چند جمله‌ای $s^۲ + (۵ - ۲k)s + ۶ + ۲k$ که همان معادله مشخصه سیستم حلقه بسته است باید پایدار باشد. بنابراین شرط پایداری عبارتست از:

$$\begin{matrix} ۶+۲k > ۰ \to k > -۳ \\ ۵-۲k > ۰ \to k < ۲/۵ \end{matrix} \xrightarrow{\cap} -۳ < k < ۲/۵$$

لذا $k = -۲$ قابل قبول می‌باشد. پس گزینه «۱» صحیح است.

۱۰- گزینه «۱» ـ (ساده)

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته بدون کنترل کننده عبارتست از:

$$\Delta(s) = ۱ + k_c \frac{۰/۱۲(-s+۰/۵)}{(s+۰/۱)(s+۰/۲)} = ۰ \to \Delta(s) = s^۲ + (۰/۳ - ۰/۱۲k_c)s + ۰/۰۲ + ۰/۰۶k_c = ۰$$

شرط نوسانی شدن عبارتست از:

$$۰/۳ - ۰/۱۲k_c = ۰ \to k_c = ۲/۵ \qquad (۱)$$

لذا فرکانس نوسانات برابر است با:

$$s^۲ + ۰/۰۲ + ۰/۰۶(k_c) = ۰ \xrightarrow{(۱)} \omega = ۰/۴۱$$

بنابراین :

$$K = \frac{k_c}{۲/۲} = \frac{۲/۵}{۲/۲} = ۱/۱۳۶ \simeq ۱/۱۴ \quad \text{و} \quad T = \frac{۱/۶۷\pi}{\omega} = \frac{۱/۶۷\pi}{۰/۴۱} = ۱۲/۷$$

۱۱- گزینه «۱» ـ (ساده)

با توجه به متن درس، اگر در جدول راث بیشتر از یک سطر صفر رخ دهد، سیستم ناپایدار خواهد بود. لذا گزینه «۱» صحیح است.

۱۲- گزینه «۴» ـ (ساده)

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s) = ۱ + \frac{k}{s(s+\alpha)(s+\beta)} = ۰ \to \Delta(s) = s^۳ + (\alpha+\beta)s^۲ + \alpha\beta s + k = ۰$$

طبق جدول راث داریم:

$$(\alpha+\beta)\alpha\beta = k \ \text{شرط نوسان} \qquad (۱)$$

$$(\alpha+\beta)s^۲ + k = ۰ \ \text{فرکانس نوسان} \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \to (\alpha+\beta)s^۲ + (\alpha+\beta)\alpha\beta = ۰ \ \Rightarrow \ \omega = \sqrt{\alpha\beta} \qquad (۳)$$

از سویی محل تلاقی مجانب‌ها عبارتست از:

$$\sigma = \frac{-\alpha-\beta}{۳} = -\frac{۱۱}{۹} \to \alpha+\beta = \frac{۱۱}{۳} \qquad (۴)$$

از طرفی نقطه شکست $s = -\frac{۴}{۹}$ باید در رابطه $\frac{dk}{ds} = ۰$ صدق کند پس:

$$\frac{dk}{ds} = \frac{d}{ds}[s(s+\alpha)(s+\beta)] = ۳s^۲ + ۲(\alpha+\beta)s + \alpha\beta = ۰$$

$$s = -\frac{۴}{۹} \xrightarrow{(۴)} ۳\left(-\frac{۴}{۹}\right)^۲ + ۲\left(\frac{۱۱}{۳}\right)\left(-\frac{۴}{۹}\right) + \alpha\beta = ۰ \ \Rightarrow \ \alpha\beta = \frac{۸}{۳} \qquad (۵)$$

$$(۳) \text{ و } (۵) \to \omega = \sqrt{\frac{۸}{۳}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$$

۱۳- گزینه «۲» ـ (متوسط)

با قرار دادن $u(t) = (-۱ \quad -۱)X(t)$، معادلات حالت به فرم زیر بدست می‌آید.

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & -\lambda \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}(-۱ \quad -۱)X(t) \ \Rightarrow \ \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & -۱-\lambda \end{pmatrix} X(t)$$

بنابراین معادله مشخصه عبارتست از:

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = \det\begin{pmatrix} s & ۱ \\ ۱ & s+۱+\lambda \end{pmatrix} = ۰ \ \Rightarrow \ \Delta(s) = s^۲ + (۱+\lambda)s + ۱ = ۰$$

برای ترسیم مکان هندسی ریشه‌ها به ازاء تغییرات λ ابتدا بایستی معادله مشخصه را به فرم استاندارد $\Delta(s)=1+\lambda GH(s)$ درآوریم. پس:

$$\Delta(s)=1+\lambda\frac{s}{s^2+s+1}=0$$

لذا تابع تبدیل حلقه باز دارای صفر در مبدأ و دو قطب مختلط با قسمت حقیقی منفی خواهد بود. بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست می‌باشند. از سویی چون مکان هندسی ریشه‌ها به ازاء تغییرات منفی λ مد نظر است گزینه‌ای صحیح است که محور حقیقی مثبت جزء مکمل مکان ریشه‌ها (CRL) باشد. لذا گزینه «۲» صحیح است.

۱۴- گزینه «۴» ـ (متوسط)

با توجه به محل صفرها و قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز و در نظر گرفتن تغییرات k، تنها گزینه‌های (۳) و (۴) به درستی مکمل مکان ریشه‌ها (CRL) را نمایش می‌دهند، لذا گزینه‌های «۱» و «۲» نادرست می‌باشند. برای یافتن پاسخ صحیح از بین دو گزینه دیگر کافی است نقاط شکست را بیابیم.

$$\frac{dk}{ds}=0\rightarrow\frac{d}{ds}\left[\frac{(s^2+6)(s^2-4)}{(s^2+5)(s^2-3)}\right]=\frac{d}{ds}\left[\frac{s^4+2s^2-24}{s^4+2s^2-15}\right]=0$$

$$\rightarrow\frac{d}{ds}\left[1-\frac{9}{s^4+2s^2-15}\right]=0\rightarrow\frac{d}{ds}\frac{9}{s^4+2s^2-15}=0$$

$$\Rightarrow 9(4s^3+4s)=0\rightarrow 36s(s^2+1)=0\rightarrow\begin{cases}s=0\\ s=\pm j\end{cases}$$

۱۵- گزینه «۲» ـ (متوسط)

تابع تبدیل حلقه بسته عبارتست از:

$$M(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\frac{1}{s(s+2\zeta)}}{1+\frac{k}{s(s+2\zeta)}}=\frac{1}{s^2+2\zeta s+k}\qquad(1)$$

و با توجه به تعریف خطا داریم:

$$E(s)=U(s)-Y(s)=U(s)-U(s)M(s)\Rightarrow E(s)=U(s)[1-M(s)]\rightarrow\frac{E(s)}{U(s)}=1-M(s)\qquad(2)$$

$$(1)\text{ و }(2)\rightarrow\frac{E(s)}{U(s)}=1+\frac{-1}{s^2+2\zeta s+k}$$

بنابراین با توجه به متن درس در فصل اول (صفحه ۲۰) داریم:

۱) مقدار ثابت بیانگر ماتریس d خواهد بود. لذا $d=1$. پس گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست می‌باشند.

۲) $c=[-1\quad 0]$ خواهد بود و لذا گزینه (۴) نادرست است.

۱۶- گزینه «۱» ـ (ساده)

ابتدا به محاسبه نقطه شکست می‌پردازیم.

$$\frac{dk}{ds}=0\ \Rightarrow\ \frac{d}{ds}\left[\frac{s^3}{(s+1)^2}\right]=0\ \Rightarrow\ s^2[s^2+4s+3]=0\ \Rightarrow\ s^2(s+1)(s+3)=0\ \Rightarrow\ s=0,-1,-2$$

لذا گزینه‌های «۳» و «۴» نادرست می‌باشند. برای تعیین پاسخ صحیح از میان دو گزینه دیگر، شرط برخورد با محور موهومی را بررسی می‌کنیم. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=1+kGH(s)=1+\frac{k(s+1)^2}{s^3}=0\ \Rightarrow\ \Delta(s)=s^3+ks^2+2ks+k=0$$

از جدول راث برای ایجاد یک سطر صفر کامل داریم: $k=\frac{1}{2}$

لذا مکان هندسی ریشه‌ها محور موهومی را قطع کرده و بنابراین گزینه «۱» صحیح است. لازم به ذکر است که با توجه به زاویه خروج از قطب $s=0$ نیز می‌توانید براحتی به برخورد مکان ریشه‌ها با محور موهومی پی ببرید. $\theta=\frac{180}{n}=\frac{180}{3}=60°$

۱۷- گزینه «۴» ـ (ساده)

سؤال مذکور، عیناً در سال ۸۳ نیز مطرح گردیده است.

تابع تبدیل سیستم عبارتست از: $G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\frac{2}{s^2+\alpha s+2}$

حال خروجی برابر است با: $Y(s)=G(s)R(s)=\frac{2}{s^2+\alpha s+2}R(s)$

بنابراین خطا عبارتست از: $E(s)=R(s)-Y(s)=R(s)[1-Y(s)]$

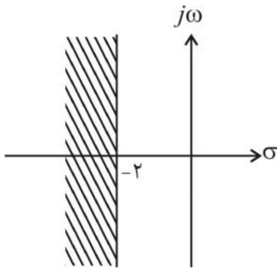
با جایگذاری $R(s)=\frac{1}{s^2}$, $Y(s)=\frac{2}{s^2+\alpha s+2}$ داریم:

$$\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s.\frac{1}{s^2}.[1-\frac{2}{s^2+\alpha s+2}]=\lim_{s\to 0}\frac{(s+\alpha)}{s^2+\alpha s+2}=\frac{\alpha}{2}$$

لذا با فرض $\alpha>0$، خطا $+\frac{\alpha}{2}$ خواهد بود.

۱۸- گزینه «۳» ـ (ساده)

$$t_s=\frac{4}{\sigma}<2 \Rightarrow \sigma>2$$



این بدان معنی است که قطب‌های سیستم حلقه بسته در سمت چپ $\sigma=-2$ قرار گیرند که در صفحه مختلط با هاشور نمایش داده شده است. بدین منظور از روش راث بهره می‌بریم به طوری که از تبدیل $s\to s-2$ در معادله مشخصه سیستم حلقه بسته استفاده می‌کنیم.

$$\Delta(s)=1+G(s)=1+\frac{k}{(s+1)(s+7)(s+10)}=0 \Rightarrow \Delta(s)=s^3+18s^2+87s+70+k=0$$

$$\Delta(s-2)=(s-2)^3+18(s-2)^2+87(s-2)+70+k=0 \Rightarrow \Delta(s-2)=s^3+12s^2+27s+k-40=0$$

شرایط پایداری از جدول راث بدست می‌آید.

$$\left.\begin{array}{l} k-40>0 \Rightarrow k>40 \\ 12\times 27>k-40 \Rightarrow k<364 \end{array}\right\}\xrightarrow{\cap} 40<k<364$$

تنها گزینه‌ای که در شرط پایداری صدق می‌کند گزینه «۳» می‌باشد.

۱۹- گزینه «۱» ـ (ساده)

معادله مشخصه حلقه بسته عبارتست از: $\Delta(s)=s^2+\frac{1}{\tau}s+\frac{1}{\tau}=0$

از مقایسه با معادله مشخصه به فرم استاندارد $\Delta(s)=s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2=0$ داریم:

$$\omega_n^2=\frac{1}{\tau} \Rightarrow \omega_n=\frac{1}{\sqrt{\tau}} \qquad (1)$$

$$2\xi\omega_n=\frac{1}{\tau}\xrightarrow{(1)}\xi=\frac{1}{2\sqrt{\tau}}$$

لذا با افزایش τ، مقدار ξ کاهش می‌یابد پس گزینه «۲» و «۴» نادرست می‌باشند. با افزایش τ به میزان ۱۰ درصد، مقدار ξ یه میزان ۵ درصد کاهش می‌یابد.

$$\frac{\Delta\xi}{\xi}=\frac{(\frac{۱}{۲\sqrt{۱/۱\tau}})-(\frac{۱}{۲\sqrt{\tau}})}{(\frac{۱}{۲\sqrt{\tau}})}=\frac{۱}{\sqrt{۱/۱}}-۱\cong-۰/۰۵$$

۲۰- گزینه «۴» ـ (دشوار)

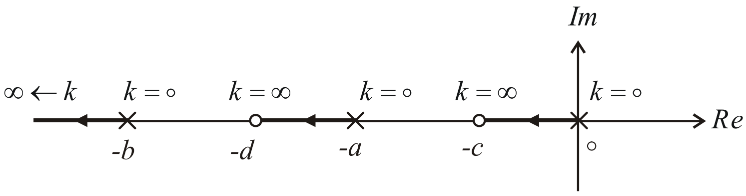
با توجه به مسأله می‌توان چنین فرض کرد که به ازاء تغییرات k از صفر تا بی‌نهایت، ریشه‌های معادله مشخصه مفروض همواره باید سمت چپ محور موهومی باشند. داریم:

$$\Delta(s)=s^۳+(a+b+k)s^۲+(ab+kc+kd)s+kcd=۰ \quad\Rightarrow\quad \Delta(s)=۱+\frac{k[s^۲+(c+d)s+cd]}{s[s^۲+(a+b)s+ab]}$$

لذا تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از:

$$GH(s)=\frac{k[s^۲+(c+d)s+cd]}{s[s^۲+(a+b)s+ab]}=\frac{k(s+c)(s+d)}{s(s+a)(s+b)}$$

با توجه به حقیقی و مثبت بودن ضرائب c,b,a و d کلیه صفرها و قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز حقیقی منفی می‌باشند. از سویی با در نظر گرفتن این واقعیت که مکان هندسی ریشه‌ها از قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز $(k=۰)$ شروع و به صفرهای آن $(k=\infty)$ ختم می‌شود، لذا برای برآورده شدن خواسته مسأله، گزینه «۴» پاسخ صحیح می‌باشد. در این حالت مکان هندسی ریشه‌ها برای تغییرات $k>۰$ به شکل زیر است:



۲۱- گزینه «۴» ـ (ساده)

معادله مشخصه سیستم عبارتست از:

$$\Delta(s)=s^۶+۴s^۵+۱۱s^۴+۳۲s^۳+۴۰s^۲+۶۴s+۴۸=۰$$

جدول راث را تشکیل می‌دهیم.

$s^۶$	۱	۱۱	۴۰	۴۸
$s^۵$	۱	۸	۱۶	
$s^۴$	۱	۸	۱۶	
$s^۳$	$\cancel{۰}^{۱}$	$\cancel{۰}^{۴}$	۰	
$s^۲$	۱	۴		
$s^۲$	$\cancel{۰}^{۲}$	۰		
$s^۰$	۴			

$$A_۱(s)=s^۴+۸s^۲+۱۶\rightarrow\frac{dA_۱(s)}{ds}=۴s^۳+۱۶s$$

$$A_۲(s)=s^۲+۴\rightarrow\frac{dA_۲(s)}{ds}=۲s$$

با توجه به متن درس، به دلیل برخورد مجدد با یک ردیف صفر دیگر پس از ردیف صفر اول در جدول راث، سیستم ناپایدار است. در محاسبه درایه‌های جدول راث، از ساده‌سازی استفاده کرده‌ایم. توجه کنید بدون تکمیل جدول راث نیز می‌توانید پاسخ صحیح را تعیین کنید. از آنجا که ریشه‌های معادله کمکی، ریشه‌های معادله اصلی‌اند، عبارت $A_۱(s)=s^۴+۸s^۲+۱۶$ فاکتور معادله مشخصه سیستم است. لذا به دلیل نقص شرط لازم برای پایداری (عدم وجود تمام ضرائب)، عبارت $A_۱(s)$ ناپایدار می‌باشد. از اینرو سیستم اصلی ناپایدار است. توجه کنید ریشه‌های معادله‌های کمکی (ریشه‌های موهومی مکرر) عبارتند از:

$$A_۱(s)=۰ \;\rightarrow\; (s^۲+۴)^۲=۰ \;\rightarrow\; s=\pm j۲,\pm j۲$$

۲۲- گزینه «۳» ـ (ساده)

برای برآورده شدن خواسته مسأله، بایستی سیستم حلقه بسته پایدار باشد. لذا معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=1+\frac{k(s+4)}{s(s-1)}=0\to\Delta(s)=s^2+(k-1)s+4k=0$$

لذا شرط پایداری عبارتست از:

$$\begin{cases}k>0\\k-1>0\to k>1\end{cases}\xrightarrow{\cap}k>1$$

۲۳- گزینه «۱» ـ (ساده)

ابتدا تابع تبدیل حلقه باز سیستم را بدست می‌آوریم.

$$G(s)=\frac{G_P(s)}{1+G_P(s)}=\frac{s+6}{s^3+6s^2+11s+6}\to G_P(s)=\frac{s+6}{s(s^2+6s+10)}\Rightarrow GH(s)=G_P(s)=\frac{s+6}{s(s^2+6s+10)}$$

بنابراین ثابت خطای ورودی شیب واحد عبارتست از:

$$k_V=\lim_{S\to 0}sGH(s)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

۲۴- گزینه «۳» ـ (متوسط)

ابتدا از بهره میسون معادله مشخصه سیستم را بدست می‌آوریم.

$$L_4=-s^{-3}\ \text{و}\ L_3=k_2s^{-2}\ \text{و}\ L_2=-s^{-1}\ \text{و}\ L_1=k_1s^{-1}$$

$$\Delta(s)=1-(L_1+L_2+L_3+L_4)+L_1L_2=1+(1-k_1)s^{-1}+(-k_1-k_2)s^{-2}+s^{-3}$$

$$\to\Delta(s)=s^3+(1-k_1)s^2+(-k_1-k_2)s+1=0$$

شرط نوسانی شدن، وجود یک سطر صفر در جدول راث است. داریم:

$$(1-k_1)(-k_1-k_2)-1\times1=0\to k_1+k_2=\frac{-1}{1-k_1}$$

از معادله کمکی، فرکانس نوسانات را بدست می‌آوریم.

$$(1-k_1)s^2+1=0\to s=\pm j\frac{1}{\sqrt{1-k_1}}$$

۲۵- گزینه «۲» ـ (متوسط)

ابتدا با توجه به مکان هندسی ریشه‌ها، معادله مشخصه سیستم حلقه بسته را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\Delta(s)=(s+3/5)(s^2+as+b)=s^3+(a+3/5)s^2+(b+3/5a)s+3/5b \qquad (1)$$

از سویی با توجه به مفروضات مسئله، معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=1+\frac{k}{s(s+1)(s+3)}=0\to s^3+4s^2+3s+k=0 \qquad (2)$$

از تساوی روابط (۱) و (۲) داریم:

$$a+3/5=4\to a=0/5 \qquad (3)$$

$$b+3/5a=3\xrightarrow{(3)}b=1/25 \qquad (4)$$

$$k=3/5b\xrightarrow{(4)}k=4/375$$

حال با توجه به وجود بی‌نهایت در پاسخ‌ها، ابتدا پایداری سیستم حلقه بسته را با فرض k بدست آمده، بررسی می‌کنیم، از جدول راث (تمام ضرایب مثبت مخالف صفر و $4/375<4\times3$)، سیستم حلقه بسته پایدار بوده و لذا گزینه (۴) نادرست است. از سویی تابع تبدیل حلقه باز سیستم برابر است با $GH(s)=\frac{4/375}{s(s+1)(s+3)}$. چون نوع سیستم یک می‌باشد، خطای حالت ماندگار به ورودی $0/5u(t)$ برابر صفر بوده و لذا کافی است فقط به محاسبه خطای حالت ماندگار به ورودی $2tu(t)$ بپردازیم.

$$k_V=\lim_{s\to 0}sGH(s)=\frac{4/375}{3}\Rightarrow e_{ss}=\frac{R}{k_V}=\frac{48}{35}$$

۲۶- گزینه «۴» ـ (متوسط)

تابع تبدیل حلقه بسته $M(s)$ برابر است با:

$$M(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{2/25(s+1)}{s^2+3s+2/25}$$

قطب‌های سیستم حلقه بسته عبارتند از: $\Delta(s)=s^{۲}+۳s+۲/۲۵=۰ \rightarrow s_{۱,۲}=-۱/۵,-۱/۵$

بنابراین رفتار سیستم میرای بحرانی است و لذا به نظر می‌رسد فراجهش صفر باشد، اما با توجه به متن درس، اضافه کردن صفر سمت چپ محور موهومی به صورت $(T_Z s+۱)$ به تابع تبدیل حلقه‌بسته سیستم مرتبه دوم نوعی، سبب تغییر مشخصات گذرای سیستم می‌شود به طوری که با افزایش T_Z، حداکثر فراجهش افزایش می‌یابد. بنابراین با درنظر گرفتن مقدار T_Z در فراجهش در پاسخ پله واحد سیستم مفروض وجود داشته ولی مقدار آن بسیار ناچیز خواهد بود. یادآوری می‌کنیم که اضافه کردن صفر سمت راست به تابع تبدیل حلقه بسته مرتبه دوم سبب ایجاد فروجهش *(undershoot)* می‌گردد.

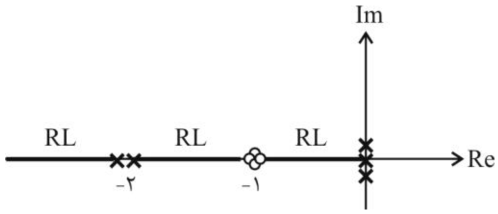
۲۷- گزینه «۴»ـ (دشوار)

برای تعیین پاسخ صحیح، کافیست ابتدا به محاسبه زاویه خروج از قطب $s=۰$ با مرتبه تکرار $۳\,(\theta_p)$ بپردازیم. داریم:

$$۰-۳\theta_p=\pm۱۸۰(۲k+۱) \rightarrow \theta_p=۶۰\,,-۶۰\,,۱۸۰$$

بنابراین مکان هندسی ریشه‌ها، محور موهومی را قطع می‌کند. پس گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست می‌باشند. حال به محاسبه زاویه ورود به صفر $s=-۱$ با مرتبه تکرار (θ_z) می‌پردازیم داریم: $۴\theta_z-۳\times۱۸۰=\pm۱۸۰(۲k+۱) \rightarrow \theta_z=۰\,,۹۰\,,۱۸۰\,,۲۷۰$

بنابراین با توجه به زوایای ورود به صفر $s=-۱$ گزینه «۴» صحیح است. توجه کنید



۱) از روش راث نیز می‌توانید به صحت این واقعیت (تلاقی با محور موهومی) پی‌ببرید که این شیوه، بسیار زمان‌بر است.

۲) با توجه به محل قرارگیری صفرها و قطب‌های تابع حلقه باز تمام محور حقیقی منفی جزء مکان ریشه‌ها *(RL)* می‌باشد. لذا به نادرست بودن گزینه (۳) بدین صورت نیز می‌توان پی برد.

۲۸- گزینه «۱» ـ (متوسط)

ابتدا با استفاده از بهره میسون به محاسبه تابع تبدیل $\frac{E(s)}{R(s)}$ می‌پردازیم. حلقه‌های مستقل عبارتند از:

$$L_۱=-s \quad , \quad L_۲=-\frac{۱}{s} \quad ، \quad L_۳=-\frac{k}{s^{۲}} \quad , \quad L_۱L_۲=۱$$

بنابراین دترمینان میسون برابر است با: $\Delta=۱-(L_۱+L_۲+L_۳)+L_۱L_۲=۱+s+\frac{۱}{s}+\frac{k}{s^{۲}}+۱$

از سوی مسیر پیش‌رو به صورت زیر می‌باشد: $P_۱=۱ \quad , \quad \Delta_۱=۱-(L_۱+L_۲)=۱+s+\frac{۱}{s}$

$$\Rightarrow \quad \frac{E(s)}{R(s)}=\frac{P_۱\Delta_۱}{\Delta}=\frac{۱+s+\frac{۱}{s}}{۱+s+\frac{۱}{s}+\frac{k}{s^{۲}}+۱}=\frac{s^{۲}+s+۱}{s^{۳}+۲s^{۲}+s+k}$$

از روش راث استفاده می‌کنیم. معادله مشخصه برابر است با: $\Delta(s)=s^{۳}+۲s^{۲}+s+k$

شرایط پایداری عبارتند از:

$$\begin{cases} k>۰ \\ \frac{۲-k}{۲}>۰ \rightarrow k<۲ \end{cases} \xrightarrow{\cap} ۰<k<۲$$

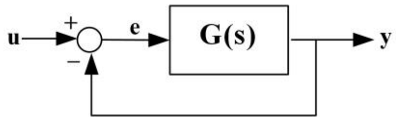
از طرفی می‌دانیم که شرط نوسانی بودن، یک سطر صفر در جدول راث می‌باشد. بنابراین: $\frac{۲-k}{۲}=۰ \quad \rightarrow \quad k=۲$

حال با استفاده از معادله کمکی، فرکانس نوسان را بدست می‌آوریم.

$$A(s)=۲s^{۲}+k=۰ \;\rightarrow\; ۲s^{۲}+۲=۰ \;\rightarrow\; s=\pm j$$

۲۹- گزینه «۳» ـ (متوسط)

ابتدا به محاسبه تابع تبدیل سیستم با توجه به معادلات فضای حالت داده شده می‌پردازیم.



$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\ ;\ B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\ ;\ C=[k\quad 0\quad 0]$$

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\frac{k(s+1)^2}{s(s+1)(s+3)}=\frac{k(s+1)}{s(s+3)}$$

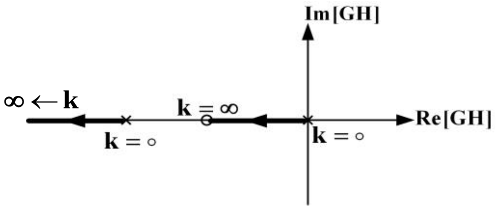
بنابراین گزینه (۲) نادرست است. گزینه (۱) نیز نادرست است، زیرا به ازاء تمامی مقادیر $k>0$ سیستم حلقه بسته پایدار است. این واقعیت با تشکیل جدول راث به راحتی قابل اثبات است.

$$\Delta(s)=s^2+(3+k)s+k=0$$

شرایط پایداری عبارتند از:

$$\begin{cases}3+k>0 \ \rightarrow\ k>-3\\ k>0\end{cases}\xrightarrow{\ \cap\ } k>0$$

گزینه (۴) نادرست است. این واقعیت با در نظر گرفتن مکان هندسی ریشه‌های سیستم کنترلی مفروض $GH(s)=\frac{k(s+1)}{s(s+3)}$ قابل اثبات است.



مشاهده می‌شود که با تغییرات k از ۰ تا ∞، سیستم حلقه بسته دارای دو ریشه حقیقی منفی نابرابر بوده و لذا حالت گذرای سیستم همواره میرای شدید است.

۳۰- گزینه «۲» ـ (متوسط)

معادله مشخصه سیستم حلقه باز عبارتست از:

$$\Delta(s)=s^3+2s^2+2s+k_2=0$$

از جدول راث شرایط پایداری عبارتند از:

$$\left.\begin{cases}2\times 2>k_2 \ \rightarrow\ k_2<4\\ k_2>0\end{cases}\right\}\xrightarrow{\ \cap\ } 0<k_2<4 \qquad (1)$$

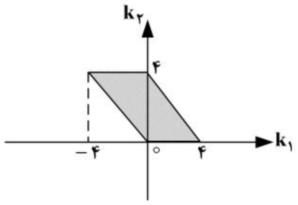
از طرفی معادله مشخصه سیستم حلقه بسته برابر است با:

$$\Delta(s)=s^3+2s^2+2s^2+k_2+k_1=0$$

از جدول راث شرایط پایداری عبارتند از:

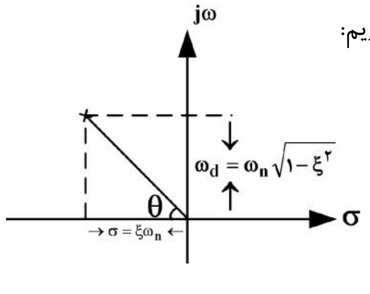
$$\left.\begin{cases}2\times 2>k_1+k_2 \ \rightarrow\ k_1+k_2<4\\ k_1+k_2>0\end{cases}\right\}\xrightarrow{\ \cap\ } 0<k_1+k_2<4 \qquad (2)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:



۳۱- گزینه «۱» ـ (ساده)

با توجه به مفروضات مسأله داریم:



$$\sigma=\xi\omega_n=\sqrt{3}\ \rightarrow\ t_s=\frac{4}{\xi\omega_n}=\frac{4}{\sqrt{3}}=2/3$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{3}$$

۳۲- گزینه «۴» ـ (ساده)

تابع تبدیل حلقه باز سیستم برابر است با $GH(s)=\frac{ks}{s+a}$. می‌دانیم اگر نوع سیستم برابر با یک باشد، خطای حالت دایمی سیستم به ورودی پله برابر صفر است. چون نوع سیستم برابر با صفر است، گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

$$k_P = \lim_{s \to ۰} GH(s) = ۰ \quad \Rightarrow \quad e_{ss} = \frac{R}{۱ + k_P} = \frac{۱}{۱ + ۰} = ۱$$

۳۳- گزینه «۳» ـ (ساده)

با توجه به متن درس، اضافه کردن صفر سمت چپ محور موهومی $(T_z s + ۱)$ به تابع تبدیل حلقه بسته سیستم مرتبه دوم نوعی سبب تغییر مشخصات گذرای سیستم می‌شود، به طوری که با افزایش T_z زمان خیز سیستم کاهش و حداکثر فراجهش افزایش می‌یابد.

۳۴- گزینه «۱» ـ (متوسط)

ابتدا معادله مشخصه را به فرم استاندارد $\Delta(s) = ۱ + kGH(s) = ۰$ درمی‌آوریم. بنابراین:

$$\Delta(s) = ۱ + \frac{(k-۱)(s+۲)}{s^۴(s+۲)} = ۰ \quad \to \quad \Delta(s) = ۱ + \frac{k-۱}{s^۴} = ۰ \quad \to \quad s^۴ + k - ۱ = ۰ \quad \to \quad ۱ + k\left(\frac{۱}{s^۴ - ۱}\right) = ۰$$

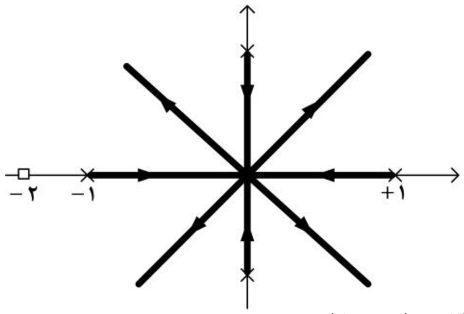
لذا تابع تبدیل حلقه باز سیستم برابر است با:

$$GH(s) = \frac{۱}{s^۴ - ۱}$$

قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز عبارتند از:

$$s^۴ - ۱ = (s^۲ - ۱)(s^۲ + ۱) = ۰ \quad \to \quad \begin{cases} s = \pm ۱ \\ s = \pm j \end{cases}$$

با توجه به حذف صفر و قطب $s = -۲$ در تابع تبدیل حلقه باز، گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست هستند. زیرا برای نمایش کامل قطب‌های سیستم حلقه بسته، بایستی قطب حذف شده را به مکان ریشه‌ها اضافه نمود. بنابراین مکان ریشه‌های سیستم حلقه بسته با تغییر پارامتر $k > ۰$ به صورت زیر خواهد بود.



محل تلاقی مجانب‌ها $\sigma = ۰$

زوایای مجانب‌ها $\theta = \frac{\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴}, \frac{۷\pi}{۴}$

نقاط شکست $\frac{dk}{ds} = ۰ \quad \to \quad \frac{d}{ds}(s^۴ - ۱) = ۰$

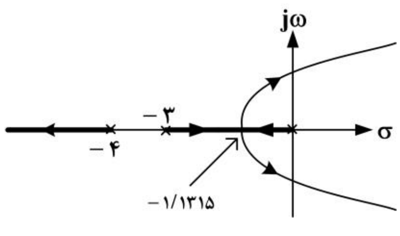
$$\to \quad ۴s^۳ = ۰ \quad \to \quad s = ۰$$

۳۵- گزینه «۳» ـ (متوسط)

می‌دانیم که حساسیت ریشه‌ها در نقاط شکست بینهایت است. بنابراین ابتدا به محاسبه نقاط شکست می‌پردازیم:

$$\Delta(s) = x^۳ + ۷x^۲ + ۱۲x + k = ۱ + \frac{k}{x^۳ + ۷x^۲ + ۱۲x} = ۰$$

$$\frac{dk}{dx} = ۰ \quad \to \quad ۳x^۲ + ۱۴x + ۱۲ = ۰ \quad \to \quad \begin{cases} x_۱ \approx -۱/۱۳۱۵ \\ x_۲ \approx -۳/۵۳۵۲ \ \text{(غیرقابل قبول)} \end{cases}$$



از معادله داریم:

$$k = -(x^۳ + ۷x^۲ + ۱۲x) \quad \Rightarrow \quad k\Big|_{x_۱} = -(x^۳ + ۷x^۲ + ۱۲x)\Big|_{x_۱} = ۶/۰۶$$

بنابراین با توجه به k حاصل برای نقطه شکست و با در نظر گرفتن حساسیت ریشه‌ها در نقطه شکست، هرچه k به مقدار k نقطه شکست نزدیک‌تر باشد، تغییرات در ریشه‌ها افزایش می‌یابد.

۳۶- گزینه «۲» ـ (متوسط)

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته برابر است با:

$$\Delta(s) = s^۲ + (k+۳)s + ۴k = ۰$$

با مقایسه رابطه اخیر با معادله مشخصه سیستم مرتبه دوم نوعی داریم:

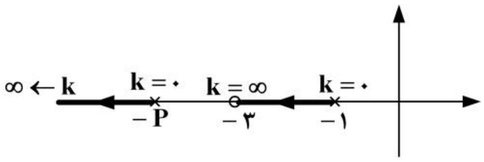
$$\left.\begin{array}{l} 2\xi\omega_n = k+3 \\ \omega_n^2 = 4k \ \rightarrow \ \omega_n = 2\sqrt{k} \end{array}\right\} \rightarrow \xi = \frac{k+3}{4\sqrt{k}}$$

چون حداکثر مقدار فراجهش فقط وابسته به نسبت میرایی ξ می‌باشد ($o.v = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$) کافیست از رابطه اخیر نسبت به k مشتق بگیریم. بنابراین:

$$\frac{d\xi}{dk} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{4\sqrt{k} - (3+k)\frac{2}{\sqrt{k}}}{(4\sqrt{k})^2} = 0$$

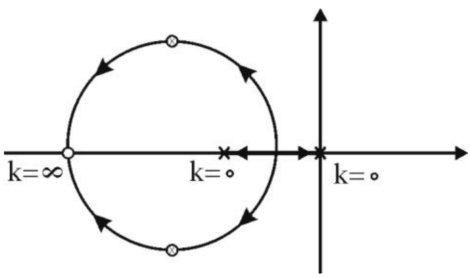
$$4\sqrt{k} - (3+k)\frac{2}{\sqrt{k}} = 0 \quad \rightarrow \quad 4k - 2(3+k) = 0 \quad \rightarrow \quad 2k = 6 \quad \rightarrow \quad k = 3$$

۳۷- گزینه «۲» ـ (متوسط)



می‌دانیم که در حالت میرای شدید ($1 < \xi$)، سیستم دو ریشه حقیقی منفی نابرابر دارد. برای برآورده کردن این شرط کافیست $p > 3$ انتخاب شود. این واقعیت با رسم مکان هندسی ریشه‌ها قابل اثبات است.

۳۸- گزینه «۱»ـ (متوسط)



برای ایجاد کمترین درجه نیاز به یک قطب حلقه باز داریم. این واقعیت به سادگی با ترسیم مکان هندسی ریشه‌ها قابل اثبات است.

۳۹- گزینه «۳» ـ (متوسط)

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته برابر است با:

$$\Delta(s) = 1 + \frac{2k}{(2s+1)^3} = 0 \quad \Rightarrow \Delta(s) = (2s+1)^3 + 2k = 8s^3 + 12s^2 + 6s + 1 + 2k = 0$$

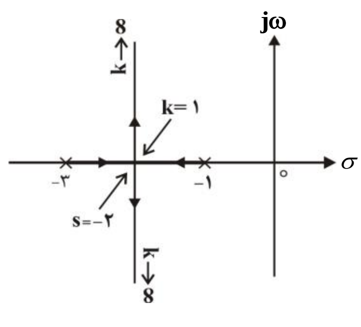
شرط نوسانی شدن، ایجاد یک سطر صفر کامل در جدول راث است. پس از معادله کمکی فرکانس نوسانات را بدست می‌آوریم.

$$64 - 16k = 0 \rightarrow k = 4$$

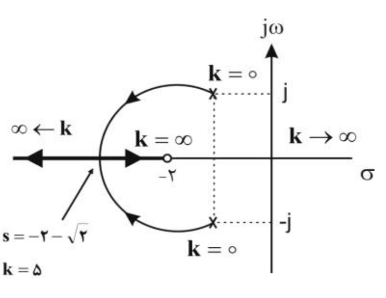
$$A(s) = 12s^2 + 1 + 2k = 0 \xrightarrow{k=4} s = \pm j\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴۰- گزینه «۲» ـ (دشوار)

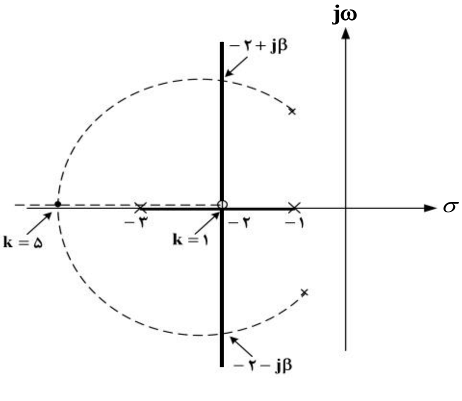
مکان ریشه‌های دو سیستم به صورت زیر می‌باشند.



شکل (۱): مکان ریشه سیستم ۱



شکل (۲): مکان ریشه سیستم۲



شکل (۳) : مکان ریشه‌های سیستم ۱ و ۲

بنابراین گزینه «۴» نادرست می‌باشد. نقطه شکست را برای شکل (۲) بدست می‌آوریم.

$$\frac{dk}{ds}=0 \;\rightarrow\; \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+2s+2}{s+2}\right)=0 \;\rightarrow\; 2(s+1)(s+2)-(s^2+2s+2)=0$$

$$\rightarrow\; s^2+4s+2=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} s=-2-\sqrt{2} \\ s=-2+\sqrt{2} \quad \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

معادله مشخصه شکل (۲) عبارتست از:

$$\Delta_2(s)=1+\frac{k(s+2)}{s^2+2s+2}=0 \;\rightarrow\; \Delta_2(s)=s^2+(k+2)s+2+2k=0 \;\rightarrow\; k=-\frac{(s+1)^2-1}{s+2}$$

با جایگذاری نقطه شکست در رابطه اخیر، مقدار k بدست می‌آید.

$$s=-2-\sqrt{2} \;\rightarrow\; k=\frac{-(-2-\sqrt{2}+1)^2-1}{-2-\sqrt{2}+2}=\frac{2(2+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=\frac{7}{1/4}=5$$

نقطه شکست برای شکل (۱) نیز به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\frac{dk}{ds}=0 \;\rightarrow\; \frac{d}{ds}[(s+1)(s+3)]=0 \;\rightarrow\; 2s+4=0 \;\rightarrow\; s=-2$$

با جایگذاری s حاصل در معادله مشخصه، k مربوطه بدست می‌آید.

$$\Delta_1(s)=1+\frac{k}{(s+1)(s+3)}=0 \;\rightarrow\; \Delta_1(s)=(s+1)(s+3)+k=0 \;\rightarrow\; k=-(s+1)(s+3)$$

$$s=-2 \;\rightarrow\; k=-(-2+1)(-2+3)=1$$

حال با توجه به مکان هندسی ریشه‌ها کافیست محل تلاقی دو مکان را بدست آوریم که عبارتست از:

$$s=-2\pm j\beta$$

بنابراین ریشه با قسمت حقیقی ۲− $(\mathrm{Re}(s)=-2)$ در معادله مشخصه شکل (۲) باید صدق کند. داریم:

$$\Delta_2(s)=s^2+(k+2)s+2k+2=0 \;\rightarrow\; (s+2)^2+(k-2)s+2(k-1)=0$$

بنابراین بایستی ضریب s برابر صفر گردد.

$$k-2=0 \;\rightarrow\; k=2$$

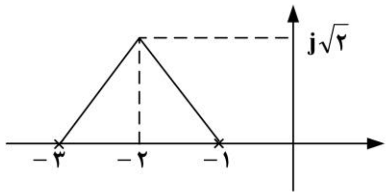
لذا برای مقدار $k=2$، خط $\mathrm{Re}(s)=-2$ را قطع می‌کند. با جایگذاری $k=2$ در معادله مشخصه شکل (۱) داریم.

$$\Delta_1(s)=s^2+4s+6=0 \;\rightarrow\; s_{1,2}=-2\pm j\sqrt{2}$$

حال به راحتی می‌توانیم بهره k را برای مکان ریشه‌های سیستم (۱) بدست آوریم.

$$k=\left.\frac{1}{|GH(s)|}\right|_{s=-2+j\sqrt{2}}$$

$$k=\sqrt{1+2}\sqrt{1+2}=3$$



پس در بهره $k=3$ مکان ریشه سیستم (۱) به نقطه تلاقی $-2\pm j\sqrt{2}$ می‌رسد که مکان ریشه‌های سیستم (۲) نیز از آن عبور می‌کند. پس برای $3<k<5$ نقطه تلاقی نداریم و لذا گزینه (۲) صحیح است. توجه کنید که نیازی به محاسبه حد بالای بهره $(k=5)$ با توجه به گزینه‌های پاسخ نمی‌باشد. برای کامل بودن حل، محاسبه حد بالای بهره نیز آورده شده است.

۴۱- گزینه «۱» ـ (متوسط)

از بهره میسون داریم:

$$L_1=\frac{-1}{s} \qquad L_2=\frac{-k}{s} \qquad L_3=\frac{-1}{s^2} \qquad L_4=-\frac{1}{s^3}$$

می‌دانیم که دترمینان بهره میسون همان معادله مشخصه سیستم است.

$$\Delta=1-(L_1+L_2+L_3+L_4)+L_1L_2=1+s^{-1}+ks^{-1}+s^{-2}+s^{-3}+ks^{-2}=1+(k+1)s^{-1}+(k+1)s^{-2}+s^{-3}$$

$$\Rightarrow\; \Delta(s)=s^3+(k+1)s^2+(k+1)s+1$$

شرایط پایداری عبارتند از:

$$\begin{cases} k+۱>۰ \quad \rightarrow \quad k>-۱ & (۱) \\ (k+۱)(k+۱)>۱=k(k+۲)>۰ \rightarrow \begin{cases} k>۰ \\ k<-۲ \end{cases} & (۲) \end{cases}$$

از اشتراک نواحی (۱) و (۲) داریم $k>۰$. بنابراین گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

۴۲- گزینه «۲» ـ (متوسط)

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=۱+G_c(s)\frac{۲}{s^۳+۴s^۲+۵s+۲}$$

با جایگذاری $G_c(s)=k_p+\frac{k_I}{s}$ داریم:

$$\Delta(s)=s^۴+۴s^۳+۵s^۲+۲(۱+k_p)s+۲k_I=۰$$

جدول راث را تشکیل می‌دهیم. شرایط پایداری عبارتند از:

$$\begin{array}{llll} s^۴ & ۱ & ۵ & ۲k_I \\ s^۳ & ۴ & ۲(۱+k_p) & \\ s^۲ & \dfrac{۲۰-۲(۱+k_p)}{۴} & ۲k_I & \\ s^۱ & \dfrac{۲\left[۵-\frac{۱}{۲}(۱+k_p)\right](۱+k_p)-۸k_I}{۵-\frac{۱}{۲}(۱+k_p)} & & \\ s^۰ & ۲k_I & & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} k_I>۰ \\ k_p<۹ \\ (۱+k_p)(۹-k_p)>۸k_I \end{cases}$$

از نامساوی‌های اخیر داریم:

$$k_p\rightarrow ۹ \quad \Rightarrow \quad k_I\rightarrow ۰$$
$$k_p\rightarrow -۱ \quad \Rightarrow \quad k_I\rightarrow ۰$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح می‌باشد. برای تأکید بیشتر داریم:

$$\frac{dk_I}{dk_p}=۱۰-۲(۱+k_p)=۰ \quad \rightarrow \quad k_p=۴ \quad \rightarrow \quad k_I=\frac{۲۵}{۸}$$

۴۳- گزینه «۱» ـ (متوسط)

از سیستم کنترلی مفروض با درنظر گرفتن $R(s)=۰$ داریم:

$$Y(s)=\frac{G(s)}{۱+GH(s)}N(s)$$

$$N(s)=\frac{۱}{s} \quad \rightarrow \quad Y(s)=\frac{G(s)}{۱+GH(s)}\cdot\frac{۱}{s}$$

از قضیه مقدار نهایی داریم:

$$y(\infty)=\lim_{s\to ۰}sY(s)=\lim_{s\to ۰}\frac{۱۰}{(s+۱)(s+۵)+۱۰H(s)}$$

بنابراین برای صفر شدن خطای حالت ماندگار ناشی از اغتشاش $N(s)$ بایستی شرط روبرو برقرار باشد: $\lim_{s\to ۰}H(s)=\infty$

۴۴- گزینه «۲» ـ (متوسط)

معادلات حالت و خروجی سیستم عبارتند از:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۲ & -a \end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \end{bmatrix}x(t)$$

بنابراین تابع تبدیل سیستم برابر است با:

$$\rightarrow \quad G(s)=C(sI-A)^{-۱}B=\frac{۲}{s^۲+as+۲}$$

حال خروجی عبارتست از:

$$Y(s)=G(s)R(s)=\frac{۲}{s^{۲}+as+۲}R(s)$$

بنابراین خطا برابر است با:

$$E(s)=R(s)-Y(s)=R(s)[۱-Y(s)]$$

با جایگذاری $R(s)=\frac{۱}{s^{۲}}$ و $Y(s)=\frac{۲}{s^{۲}+as+۲}$ داریم:

$$\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to ۰}sE(s)=\lim_{s\to ۰}s.\frac{۱}{s^{۲}}[۱-\frac{۲}{s^{۲}+as+۲}]=\lim_{s\to ۰}\frac{۱}{s}\frac{s(s+a)}{s^{۲}+as+۲}=\frac{a}{۲}$$

۴۵- گزینه «۱» ـ (متوسط)

دقت کنید که خطای حالت ماندگار برای یک سیستم حلقه باز برابر است با:

$$E(s)=R(s)-Y(s)$$

از دیاگرام بلوکی داده شده داریم:

$$Y(s)=\frac{۱۰۰(۱+ks)}{s(s+۱۰)+۱۰۰}R(s)$$

با جایگذاری داریم:

$$E(s)=R(s)[۱-\frac{۱۰۰(۱+ks)}{s(s+۱۰)+۱۰۰}]=R(s)\cdot\frac{s(s+۱۰-۱۰۰k)}{s(s+۱۰)+۱۰۰}$$

با استفاده از قضیه مقدار نهایی و برای $R(s)=\frac{۱}{s^{۲}}$ داریم:

$$\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to ۰}sE(s)=\lim_{s\to ۰}s\cdot\frac{۱}{s^{۲}}\cdot\frac{s(s+۱۰-۱۰۰k)}{s(s+۱۰)+k}=\frac{۱۰-۱۰۰k}{۱۰}$$

برای صفر شدن خطای حالت ماندگار داریم:

$$۱۰-۱۰۰k=۰\;\rightarrow\;k=۰/۱$$

۴۶- گزینه «۳» ـ (متوسط)

ثابت خطای شیب برابر است با:

$$k_v=\lim_{s\to ۰}sGH(s)=\lim_{s\to ۰}s\frac{k}{s(s+a)}=\frac{k}{a}$$

بنابراین خطای حالت ماندگار عبارتست از:

$$e_{ss}=\frac{R}{k_v}=\frac{a}{k}$$

داریم:

$$s_k^{e_{ss}}=\frac{\partial e_{ss}}{\partial k}\cdot\frac{k}{e_{ss}}=-۱\quad،\quad s_a^{e_{ss}}=\frac{\partial e_{ss}}{\partial a}\cdot\frac{a}{e_{ss}}=+۱$$

۴۷- گزینه «۱» ـ (متوسط)

با توجه به حرکت قطب‌های سیستم داریم:

الف) نسبت میرایی ثابت است.

$$۱)\;\theta=\cos^{-۱}\xi=cte\;\rightarrow\;\xi=cte$$

ب) فرکانس نامیرای طبیعی افزایش می‌یابد.

$$۲)\;\omega_n\uparrow$$

بنابراین:

۱- فراجهش ثابت خواهد بود.

$$\xi=cte\;\rightarrow\;o.v=e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{۱-\xi^{۲}}}}=cte$$

۲- زمان استقرار کاهش می‌یابد.

$$t_s=\frac{۴}{\xi\omega_n}\xrightarrow[\xi=cte]{\omega_n\uparrow}t_s\downarrow$$

۳- فرکانس میرای طبیعی افزایش می‌یابد.

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{۱-\xi^{۲}}\xrightarrow[\xi=cte]{\omega_n\uparrow}\omega_d\uparrow$$

۴- زمان خیز کاهش می‌یابد.

$$t_r=\frac{\pi-\cos^{-۱}\xi}{\omega_d}\xrightarrow[\xi=cte]{\omega_d\uparrow}t_r\downarrow$$

۴۸- گزینه «؟» ـ (متوسط)

با استفاده از دترمینان بهره میسون، معادله مشخصه سیستم حلقه بسته را بدست می‌آوریم. یادآوری می‌کنیم که دترمینان بهره میسون برابر با معادله مشخصه تابع تبدیل حلقه بسته سیستم است.

حلقه‌های مستقل عبارتند از:
$$L_۱ = \frac{-۱}{s+۳} \qquad L_۲ = \frac{-۱}{(s+۳)(s+۲)} \qquad L_۳ = \frac{-k}{(s+۳)(s+۲)(s+۱)}$$

بنابراین داریم:
$$\Delta(s) = ۱ - (L_۱ + L_۲ + L_۳) = ۰$$

با جایگذاری داریم:
$$\Delta(s) = s^۳ + ۷s^۲ + ۱۵s + ۹ + k = ۰$$

برای ایجاد یک سطر صفر کامل در جدول راث داریم:
$$۹۶ - k = ۰ \quad \rightarrow \quad k = ۹۶$$

از معادله کمکی داریم:
$$A(s) = ۷s^۲ + ۹ + k = ۰ \xrightarrow{k=۹۶} ۷s^۲ + ۱۰۵ = ۰ \rightarrow s = \pm j\sqrt{\frac{۱۰۵}{۷}} = \pm j\sqrt{۱۵}$$

۴۹- گزینه «۴» ـ (متوسط)

برای تشخیص پاسخ صحیح با توجه به یکسان بودن موقعیت صفر و قطب سیستم، از زوایای خروج از قطب‌ها و زوایای ورود به صفرها استفاده می‌کنیم. زاویه ورود به صفر $s_Z = ۱ + ۲j$ برابر است با:

$\angle s_Z = ۱۸۰ -$ [مجموع زوایای کلیه قطب‌ها نسبت به s_Z ـ مجموع زوایای سایر صفرها نسبت به s_Z]

$$= ۱۸۰ - [۹۰ - (۹۰ + \tan^{-۱}(\frac{۵}{۴}) - \tan^{-۱}(\frac{۱}{۴})] = ۱۸۰ + ۵۱/۳ - ۱۴ = ۲۱۷/۳^\circ$$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست می‌باشند. حال به طور مشابه زاویه خروج از قطب $s_p = +۳ - j$ را محاسبه می‌کنیم.

$\angle s_p = ۱۸۰ -$ [مجموع زوایای سایر قطب‌ها نسبت به s_p ـ مجموع زوایای صفرها نسبت به s_p] $= -۱۱۹^\circ$

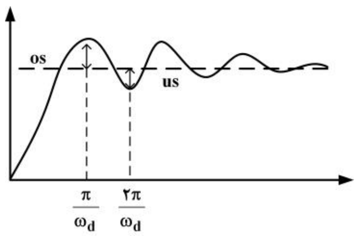
لذا گزینه (۴) صحیح است. توجه کنید که می‌توانیم با استفاده از نقطه شکست نیز به گزینه صحیح برسیم.

$$\frac{dk}{ds} = ۰ \rightarrow \frac{d}{ds}[\frac{(s-۱)(s^۲+۶s+۱۸)}{(s^۲-۲s+۵)}] = ۰ \rightarrow s^۴ - ۴s^۳ - ۷s^۲ + ۸۶s + ۱۴ = ۰ \rightarrow s \approx \begin{cases} -۰/۱۶ \\ -۳/۷ \\ ۳/۹۵ \pm j\,۲/۷۶ \quad \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

با توجه به نقاط شکست حاصل $s = -۰/۱۶$ و $s = -۳/۷$ صحت گزینه (۴) تأیید می‌شود.

۵۰- گزینه «۳» ـ (متوسط)

با توجه به متن درس، داریم:



$$\frac{os}{us} = \frac{e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{۱-\xi^۲}}}}{e^{\frac{-۲\pi\xi}{\sqrt{۱-\xi^۲}}}} = e^{\frac{\pi\xi}{\sqrt{۱-\xi^۲}}} = os^{-۱} \quad \rightarrow \quad us = (os)^۲$$

۵۱- گزینه «۲» ـ (ساده)

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:
$$\Delta(s) = ۱ + \frac{k(s+۴)}{s} \cdot \frac{۱}{s-۱} = ۰ \quad \rightarrow \quad \Delta(s) = s^۲ + (k-۱)s + ۴k = ۰$$

واضح است که برای مقادیر $k > ۱$ سیستم پایدار خواهد بود و خروجی سیستم به صفر میل خواهد کرد.

۵۲- گزینه «۲» ـ (متوسط)

جدول راث را تشکیل می‌دهیم.

$s^۵$ ۱ ۲ ۱

$s^۴$ ۱ ۲ ۱

$s^۳$ ۰ ۰ $\rightarrow$ اولین سطر صفر

از آنجا که ریشه‌های معادله کمکی، ریشه‌های معادله اصلی‌اند، عبارت $A_1(s)=s^4+2s^2+1$ فاکتور معادله مشخصه سیستم است. لذا به دلیل نقص شرط لازم برای پایداری (عدم وجود تمام ضرائب)، عبارت $A_1(s)$ ناپایدار می‌باشد. از اینرو سیستم اصلی ناپایدار است. توجه کنید ریشه‌های معادله‌های کمکی (ریشه‌های موهومی مکرر) عبارتست از:

$$A_1(s)=0 \;\rightarrow\; (s^2+1)^2=0 \;\rightarrow\; s=\pm j,\pm j$$

۵۳- گزینه «۴» ـ (متوسط)

ابتدا نقطه شکست را بدست می‌آوریم.

$$\frac{dk}{ds}=0 \;\rightarrow\; \frac{d}{ds}[s(s+4)^3]=0 \;\rightarrow\; (s+4)^3+3s(s+4)^2=0 \rightarrow (s+4)^2(4s+4)=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} s=-4 \\ s=-1 \end{cases}$$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست می‌باشند. حال زاویه خروج از قطب $s_p=-4$ را بدست می‌آوریم.

$$3\angle s_p=180 \;\rightarrow\; \angle s_p=60^\circ$$

۵۴- گزینه «۱» ـ (متوسط)

جدول راث را تشکیل می‌دهیم. دقت کنید که با ساده‌سازی ردیفی ضرائب جدول راث نوشته شده است. چون ریشه‌های معادله کمکی، ریشه‌های معادله اصلی‌اند، عبارت $A_1(s)=s^4+3s^2+2/25$ فاکتور معادله مشخصه سیستم است. لذا به دلیل نقص شرط لازم برای پایداری (عدم وجود تمام ضرائب)، عبارت $A_1(s)$ ناپایدار می‌باشد.

s^6	۱	$3+ak$	$2/25+3ak$	$2/25ak$	
s^5	۱	۳	۲/۲۵		
s^4	۱	۳	۲/۲۵		
s^3	۰	۰	$\rightarrow$		اولین سطر صفر

از اینرو سیستم همواره به ازاء همه مقادیر a و k ناپایدار خواهد بود.

۵۵- گزینه «۲» ـ (ساده)

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته برابر است با:

$$\Delta(s)=T_2s^3+s^2+kT_1s+k=0$$

از جدول راث شرایط پایداری عبارتند از:

$$\begin{cases} k>0 \\ T_2>0 \\ k(T_1-T_2)>0 \end{cases} \Rightarrow\; T_1>T_2>0 \;\;,\;\; k>0$$

۵۶- گزینه «۴» ـ (ساده)

تابع تبدیل سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$M(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{2-s}{s^2+3s+2}$$

با توجه به متن درس، حضور صفر سمت راست وجود *undershoot* در پاسخ پله سیستم را ضروری می‌سازد. لذا گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست می‌باشند. از طرفی رفتار سیستم را قطب‌های آن مشخص می‌کنند. بنابراین:

$$\Delta(s)=s^2+3s+2=(s+1)(s+2)=0 \;\rightarrow\; s_1=-1\;,\; s_2=-2$$

با توجه به این که سیستم دارای قطب‌های حقیقی منفی می‌باشد، گزینه (۴) صحیح است.

۵۷- گزینه «۲» ـ (متوسط)

از پاسخ پله واحد سیستم مفروض داریم:

۱- $t_s=3/394s$ ، ۲- $y_{ss}=0/4$ ، ۳- $o.v=0/438$

حال تابع تبدیل حلقه بسته را بدست می‌آوریم.

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{k_3}{k_2}\left(\frac{k_2}{s^2+k_1s+k_2}\right)}{1+\frac{k_3}{k_2}\cdot\frac{k_2}{s^2+k_1s+k_2}}=\frac{k_3}{s^2+k_1s+k_2+k_3}$$

از قضیه مقدار نهایی داریم: $y_{ss}=\lim_{s\to ۰} sY(s)=\frac{k_۳}{k_۲+k_۳} \rightarrow \frac{k_۳}{k_۲+k_۳}=۰/۴ \qquad (۱)$

از مقایسه معادله مشخصه سیستم با معادله مشخصه سیستم مرتبه دوم نوعی داریم:

$۲\xi\omega_n=k_۱ \qquad (۲)$

$\omega_n^۲=k_۲+k_۳ \qquad (۳)$

زمان استقرار عبارتست از: $t_s=\frac{۳}{\xi\omega_n}=۳/۳۹۴ \qquad (۴)$

ماکزیمم فراجهش برابر است با: $o.v=e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{۱-\xi^۲}}}=۰/۴۳۸ \rightarrow \xi=۰/۶ \qquad (۵)$

از روابط (۱) تا (۵) داریم: $k_۱=۱/۶۹۷ \;,\; k_۲=۱/۲ \;,\; k_۳=۰/۸$

۵۸- گزینه «۴» ـ (متوسط)

توجه کنید که در صورت پایداری سیستم حلقه بسته، خطای حالت ماندگار قابل بررسی است. بنابراین معادله مشخصه سیستم حلقه بسته را بدست می‌آوریم. $\Delta(s)=s^۳+۳s^۲+۲s+k=۰$

از روش راث شرایط پایداری عبارتند از: $k>۰ \;,\; ۳\times۲>k\times۱ \Rightarrow k<۶$

لذا شرط پایداری برابر است با $۰<k<۶$. لذا گزینه (۴) صحیح است. توجه کنید نوع سیستم یک می‌باشد.

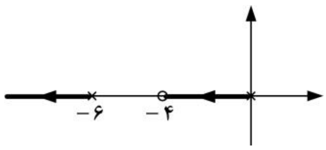
۵۹- گزینه «۱» ـ (متوسط)

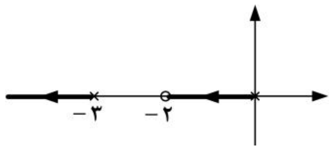
تابع تبدیل حلقه باز سیستم برابر است با $GH(s)=\frac{k(s+\frac{۸}{۷})}{s(s+۱)(s+۵)}$. با توجه به صفرها و قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز، گزینه (۲) نادرست می‌باشد. زیرا بخش مثبت محور حقیقی جزء RL نمی‌باشد. با توجه به گزینه‌های باقیمانده، تعیین نقاط شکست رهگشای تشخیص پاسخ صحیح مسأله است.

$$\frac{dk}{ds}=۰ \rightarrow \frac{d}{ds}[\frac{s(s+۱)(s+۵)}{(s+\frac{۸}{۷})}]=۰ \rightarrow ۲s^۳+\frac{۶۶}{۷}s^۲+\frac{۹۶}{۷}s+\frac{۴۰}{۷}=۰ \rightarrow s=-۲,-۲,-\frac{۵}{۷}$$

۶۰- گزینه «۴» ـ (دشوار)

گزینه‌های (۱) و (۲) قطعاً نادرست می‌باشند، زیرا با توجه به مکان هندسی ریشه‌های داده شده، هیچ وقت نمی‌توانند ریشه‌ای در $(-۱\pm j)$ داشته باشند. دقت کنید که از داده مربوط به خطای حالت دائمی ناشی از ورودی شیب به دلیل یکسان بودن در چهار گزینه، نمی‌توانیم در تشخیص پاسخ صحیح استفاده کنیم.





حال با توجه به دو گزینه باقیمانده، تابع تبدیل سیستم را در حالت کلی زیر در نظر می‌گیریم.

$$G(s)=\frac{k}{s(s^۲+۲as+b)}$$

چون دو ریشه از معادله مشخصه سیستم حلقه بسته باید در $(-۱\pm j)$ باشند، لذا عامل $(s^۲+۲s+۲)$ در معادله مشخصه سیستم حلقه بسته وجود دارد. داریم: $M(s)=\frac{G(s)}{۱+G(s)}=\frac{k}{s^۳+۲as^۲+bs+k}$

پس از تقسیم معادله مشخصه سیستم حلقه بسته بر عامل $(s^۲+۲s+۲)$ باید باقیمانده متحد با صفر باشد. لذا:

$$b-۲=۴(a-۱) \quad ، \quad \frac{۳}{۲}b=۴(a-۱)$$

از حل دو معادله اخیر بدست می‌آوریم $a=۲ \ , \ b=۶$. بنابراین گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

۶۱- گزینه «۴» ـ (متوسط)

خطای حالت ماندگار برای سیستم‌های پایدار قابل بررسی است. لذا با توجه به حضور بی‌نهایت در گزینه‌های پاسخ، ابتدا پایداری سیستم حلقه بسته را بررسی می‌کنیم. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=۱+\frac{۲۰۰}{s(s+۱)(s+۲)}=۰ \Rightarrow \Delta(s)=s^۳+۳s^۲+۲s+۲۰۰=۰$$

با توجه به عدم برقراری شرط $۲۰۰<۲\times۳$ در روش راث، سیستم حلقه بسته دارای دو قطب ناپایدار بوده و لذا خروجی سیستم با افزایش زمان به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. در نتیجه، خطای حالت ماندگار بی‌نهایت را به دنبال خواهد داشت. بنابراین گزینه (۴) صحیح است. یادآوری می‌کنیم که در سیستم‌های نوع یک، خطای حالت ماندگار به ورودی پله صفر می‌باشد ولی توجه کنید اگرچه سیستم از نوع یک می‌باشد ولی سیستم حلقه بسته پایدار نمی‌باشد.

۶۲- گزینه «۱» ـ (متوسط)

می‌دانیم که دترمینان در روش بهره میسون، معادله مشخصه سیستم حلقه بسته را نشان می‌دهد. داریم:

$$L_۱=-\frac{k(\frac{۲}{۷})}{s+۳} \quad L_۲=\frac{-k(\frac{۲}{۷})}{(s+۳)(s+۲)} \quad L_۳=\frac{-k}{s(s+۳)(s+۲)} \quad \rightarrow \quad \Delta(s)=۱-(L_۱+L_۲+L_۳)=۰$$

$$\rightarrow \Delta(s)=۷s^۳+(۳۵+۲k)s^۲+(۴۲+۶k)s+۷k=۰$$

از روش راث شرایط پایداری عبارتند از:

$$\begin{cases} ۷k>۰ \rightarrow k>۰ \\ ۳۵+۲k>۰ \\ ۴۲+۶>۰ \\ (۳۵+۲k)(۴۲+۶k)>۷(۷k) \end{cases}$$

لذا گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

۶۳- گزینه «۳» ـ (ساده)

ابتدا معادله مشخصه سیستم را به فرم استاندارد $\Delta(s)=۱+kGH(s)=۰$ درمی‌آوریم.

$$\Delta(s)=۱+\frac{۲}{(s+۱)(s+k)}=۰ \quad \rightarrow \quad s^۲+(k+۱)s+k+۲=۰ \rightarrow ۱+\frac{k(s+۱)}{s^۲+s+۲}=۰$$

بنابراین تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از:

$$GH(s)=\frac{s+۱}{s^۲+s+۲}$$

که با توجه به محل صفرها و قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز $(z=-۱ \ , \ p=-\frac{۱}{۲}\pm j\frac{\sqrt{۷}}{۲})$ گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

۶۴- گزینه «۴» ـ (متوسط)

معادله مشخصه سیستم عبارتست از:

$$\Delta(s)=s^۴+۴s^۳+ks^۲+ks+\frac{k}{۲}=۰$$

جدول راث را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{array}{llll} s^۴ & ۱ & k & \frac{k}{۲} \\ s^۳ & ۴ & k & \\ s^۲ & \frac{۳}{۴}k & \frac{k}{۲} & \\ s^۱ & k(\frac{۳}{۴}k-۲) & & \\ s^۰ & \frac{k}{۲} & & \end{array}$$

شرط پایداری عبارتست از $k>\frac{۸}{۳}$. لذا گزینه (۱) نادرست است. برای $k=۸$ داریم:

$$\Delta(s)=s^۴+۴s^۳+۸s^۲+۸s+۴=(s^۲+۲s+۲)^۲=۰$$

$$\rightarrow \quad s=-۱\pm j۱ \ , \ -۱\pm j۱$$

بنابراین گزینه (۲) نیز نادرست است.

از جدول راث به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که سیستم نمی‌تواند دارای فرکانس نوسانات $\omega = 2\dfrac{rad}{s}$ باشد. بنابراین گزینه (۴) صحیح می‌باشد که این موضوع به صورت زیر نیز قابل اثبات است. شرط زاویه را در نقطه $p = (-1 + j)$ بررسی می‌کنیم.

داریم: $-3\times 135 + 135 - 18/4349 + 108/4349 = -180$

لذا شرط زاویه برقرار است.

۶۵- گزینه «۳» ـ (ساده)

جدول راث را تشکیل می‌دهیم. به واسطه دو تغییر علامت در ستون اول جدول راث، سیستم دارای دو قطب سمت راست بوده و بقیه قطب‌های آن در سمت چپ محور موهومی قرار دارند.

$$\begin{array}{llll} s^5 & 1 & 2 & 2 \\ s^4 & 1 & 2 & 2 \\ s^3 & 1 & 1 & \\ s^2 & 1 & 2 & \\ s^1 & -1 & 0 & \\ s^0 & 2 & & \end{array} \qquad A(s) = s^4 + 2s^2 + 2 \quad \frac{dA(s)}{ds} = 4s^3 + 4s$$

با توجه به متن درس، یک سطر صفر در جدول راث می‌تواند در سه حالت مختلف ایجاد شود که در این تست به دلیل دو تغییرعلامت در ستون اول جدول راث پس از سطر صفر کامل، ریشه‌های مزدوج مختلط که نسبت به مبدأ متقارن هستند (حالت ج) رخ داده است. این حقیقت با درنظر گرفتن ریشه‌های معادله کمکی که ریشه‌های معادله اصلی هستند، قابل تحقیق است.

$$A(s) = s^4 + 2s^2 + 2 = (s^2+1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_{1,2} = 0/455 \pm j1/0986 \\ s_{3,4} = -0/455 \pm j1/0986 \end{cases}$$

۶۶- گزینه «۳» ـ (متوسط)

جدول راث را تشکیل می‌دهیم. دقت کنید که در تشکیل جدول راث از عملیات ساده‌سازی استفاده کرده‌ایم.

$$\begin{array}{llllll} s^8 & 1 & 5 & 9 & 7 & 2 \\ s^7 & 3 & 9 & 9 & 3 & \\ s^6 & 2 & 6 & 6 & 2 & \\ s^5 & 1 & 1 & 1 & & \\ s^4 & 2 & 4 & 2 & & \\ s^3 & 1 & 1 & 0 & & \\ s^2 & 2 & 2 & & & \\ s^1 & 1 & 0 & & & \\ s^0 & 2 & & & & \end{array}$$

$$\rightarrow A_1(s) = 2s^6 + 6s^4 + 6s^2 + 2 \qquad \frac{dA_1(s)}{ds} = 12s^5 + 24s^3 + 12s$$

$$\rightarrow A_2(s) = 4s^4 + 4s^2 + 2 \qquad \frac{dA_2(s)}{ds} = 8s^3 + 8s$$

$$\rightarrow A_3(s) = 2s^2 + 2 \qquad \frac{dA_3(s)}{ds} = 4s$$

از آنجاکه ریشه‌های معادله کمکی ریشه‌های معادله اصلی هستند، سه جفت ریشه موهومی داریم. لذا گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

توجه کنید که سیستم قطعاً ناپایدار است. $A_1(s) = 0 \rightarrow (s^2+1)^3 = 0 \Rightarrow s = \pm j$

۶۷- گزینه «۴» ـ (متوسط)

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & k & \frac{k}{2} \\ s^3 & 2 & k & \\ s^2 & \frac{k}{2} & \frac{k}{2} & \\ s^1 & k-2 & & \\ s^0 & \frac{k}{2} & & \end{array}$$

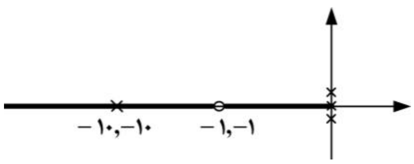
با نگاه به گزینه‌ها، بهترین و ساده‌ترین روش برای تعیین پاسخ صحیح استفاده از روش راث می‌باشد.

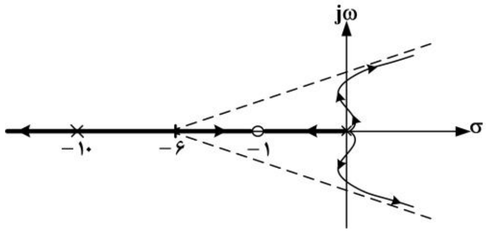
معادله مشخصه سیستم حلقه بسته برابر است با $\Delta(s) = s^4 + 2s^3 + ks^2 + ks + 0/5k = 0$.

شرط پایداری عبارتست از $2 < k$. بنابراین سیستم برای $0 < k < 2$ ناپایدار می‌باشد.

این مورد فقط در گزینه (۴) صدق می‌کند.

۶۸- گزینه «۳» ـ (ساده)





ابتدا با در نظر گرفتن صفرها و قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز به راحتی درمی‌یابیم که تمام محور حقیقی منفی جزء مکان ریشه‌ها (RL) می‌باشد. با توجه به زاویه مجانب‌های سیستم $(60^\circ, 180^\circ, 300^\circ)$ و همچنین نقطه شکست در مبدأ به واسطه مکرر بودن آن به راحتی تشخیص می‌دهیم که به ازاء $k \to 0$ و $k \to \infty$ سیستم حلقه بسته قطعاً دارای دو قطب ناپایدار می‌باشد. بنابراین گزینه (۳) صحیح است. مکان هندسی ریشه‌ها به صورت تقریبی به شکل روبرو است. توجه کنید که با استفاده از روش راث شرط پایداری سیستم حلقه بسته عبارتست از $0/09 < k < 159$ که صحت گزینه (۳) را تصدیق می‌کند.

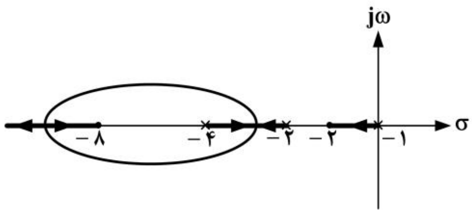
۶۹- گزینه «۱» ـ (متوسط)

با توجه به محل صفرها و قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز $(p = 0, \pm j \quad , \quad z = \pm j\,0/3)$ گزینه (۴) نادرست است. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از $\Delta(s) = s^3 + ks^2 + s + 0/1k = 0$. از روش راث شرط پایداری $k > 0$ می‌باشد. چون مکان ریشه‌ها برای $0 < k < \infty$ خواسته شده است، گزینه (۱) صحیح می‌باشد. زیرا تنها گزینه‌ای است که به ازاء همه مقادیر مثبت k پایدار می‌باشد.

۷۰- گزینه «۴» ـ (دشوار)

تابع تبدیل حلقه بسته سیستم برابر است با:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+GH(s)} = \frac{k(s+8)(s+4)}{s(s+2)(s+4)+k(s+8)(s+1)}$$



بهره DC سیستم عبارتست از $M(s)\big|_{s=0} = \frac{4\times 8\times k}{8\times k} = 4$. لذا گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست می‌باشند. از طرفی با توجه به مکان ریشه‌ها برای تابع تبدیل حلقه باز سیستم $\left(GH(s) = \frac{k(s+1)(s+8)}{s(s+2)(s+4)}\right)$ می‌توان دریافت که برای مقادیر بزرگ k، سیستم دارای ۳ ریشه حقیقی منفی است. این واقعیت با درنظر گرفتن مکان هندسی ریشه‌ها قابل اثبات است.

۷۱- گزینه «۲» ـ (متوسط)

برای این که پاسخ سیستم فراجهش نداشته باشد و سیستم سریع‌ترین پاسخ را دارا باشد بایستی $\xi = 1$ انتخاب شود. در این صورت سیستم دارای دو ریشه حقیقی منفی برابر خواهد بود. حال با مقایسه با سیستم استاندارد درجه دوم داریم:

$$\frac{2k}{s(s+4)} = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

$$2\xi\omega_n = 4 \xrightarrow{\xi=1} \omega_n = 2 \quad , \quad 2k = \omega_n^2 \;\to\; 2k = 4 \;\to\; k = 2 \Rightarrow t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{1\times 2} = 2$$

۷۲- گزینه «۴» ـ (ساده)

ابتدا قطب غیرغالب $(s = -10)$ را حذف کرده، سپس به اصلاح بهره DC می‌پردازیم. داریم:

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+10)} \;\to\; \hat{G}(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

۷۳- گزینه «۲» ـ (متوسط)

ابتدا به بررسی محل قطب‌ها در سمت چپ محور موهومی می‌پردازیم. با توجه به معادله مشخصه سیستم جدول راث را تشکیل می‌دهیم. بنابراین تمام ریشه‌های معادله مشخصه در سمت چپ محور موهومی قرار دارند.

$$\begin{array}{lll} s^{۳} & ۱ & ۱۱ \\ s^{۲} & ۵ & ۱۵ \\ s^{۱} & ۸ & ۰ \\ s^{۰} & ۱۵ & \end{array}$$

برای تشخیص تعداد ریشه‌های معادله مشخصه در ناحیه هاشورخورده، کافیست $\Delta(s-۲)=۰$ را تشکیل دهیم.

$$\Delta(s-۲)=(s-۲)^{۳}+۵(s-۲)^{۲}+۱۱(s-۲)+۱۵=۰ \ \rightarrow \ \Delta(s-۲)=s^{۳}-s^{۲}+۳s+۵=۰$$

جدول راث مربوطه را تشکیل می‌دهیم. با توجه به ۲ تغییر علامت در ستون اول جدول راث، ۲ تا از ریشه‌های معادله مشخصه مفروض در سمت راست خط $\sigma=-۲$ قرار دارند و با توجه به این که تمام ریشه‌های معادله مشخصه در سمت چپ محور موهومی قرار دارند، معادله مشخصه ۲ ریشه در ناحیه هاشورخورده خواهد داشت. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

$$\begin{array}{lll} s^{۳} & ۱ & ۳ \\ s^{۲} & -۱ & ۵ \\ s^{۱} & ۸ & \\ s^{۰} & ۵ & \end{array}$$

۷۴- گزینه «۳» ـ (متوسط)

از محل تلاقی مجانب‌ها، گزینه (۴) نادرست می‌باشد. با توجه به مرتبه تکرار دو برای قطب‌های مختلط بایستی دو شاخه مکان از آن‌ها خارج شود. لذا گزینه (۱) نادرست است. برای تشخیص پاسخ صحیح کافی است که زاویه خروج از قطب $(-۱+۲j)$ را بدست آوریم.

$$۲\theta=۱۸۰-(۲\times۹۰-۳۳/۶۹)=۳۳/۶۹^{\circ} \ \rightarrow \ \theta=۱۶/۸^{\circ}\simeq۱۷^{\circ}$$

۷۵- گزینه «۳» ـ (متوسط)

ابتدا معادله مشخصه را به فرم استاندارد درمی‌آوریم. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=۱+\frac{b+۱۶s}{s+b}\cdot\frac{۹}{s^{۲}}=۰ \ \rightarrow \ \Delta(s)=s^{۳}+۱۴۴s+b\,(s^{۲}+۹)=۰ \ \rightarrow \ \Delta(s)=۱+b\,\frac{(s^{۲}+۹)}{s(s^{۲}+۱۴۴)}=۰$$

لذا تابع تبدیل حلقه باز عبارتست از $GH(s)=\dfrac{s^{۲}+۹}{s\,(s^{۲}+۱۴۴)}$. نقاط شکست از رابطه $\dfrac{db}{ds}=۰$ محاسبه می‌شوند. داریم:

$$\frac{db}{ds}=\frac{d}{ds}[\frac{s\,(s^{۲}+۱۴۴)}{s^{۲}+۹}]=۰ \ \rightarrow \ s^{۴}-۱۱۷s^{۲}+۱۲۹۶=۰ \ \rightarrow \ s^{۲}=۱۰۴/۶\,,\,۱۲/۴$$

بنابراین با توجه به رابطه $b=\dfrac{-s\,(s^{۲}+۱۴۴)}{s^{۲}+۹}$، مقادیر $b=۲۵/۶$ و $b=۲۲/۴$ بدست می‌آید. لذا جواب (۳) صحیح است.

۷۶- گزینه «۴» ـ (ساده)

جدول راث را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{array}{lll} s^{۴} & ۱ & ۱\ ۱ \\ s^{۳} & k & ۱ \\ s^{۲} & \frac{k-۱}{k} & ۱ \\ s^{۱} & \frac{k-۱-k^{۲}}{k-۱} & \\ s^{۰} & k & \end{array} \ \Rightarrow \ \begin{cases} \left.\begin{cases} k>۰ \\ \frac{k-۱}{k}>۰ \ \rightarrow \ k>۱ \end{cases}\right\} \xrightarrow{\cap} k>۱ \\ \frac{k-۱-k^{۲}}{k-۱}>۰ \end{cases}$$

شرط پایداری، اشتراک نواحی فوق خواهد بود به طوری که کلیه درایه‌های ستون اول جدول راث مثبت باشند. برقراری همزمان شرایط بدست‌آمده امکان‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین سیستم همواره ناپایدار است.

۷۷- گزینه «۳» ـ (ساده)

ابتدا تابع تبدیل $G_p(s)$ را از روی معادلات حالت داده شده بدست می‌آوریم. $G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s(s+3)}$

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته برابر است با:

$$\Delta(s) = 1 + \frac{k}{s(s+2)(s+3)} = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta(s) = s^3 + 5s^2 + 6s + k = 0$$

جدول راث را تشکیل می‌دهیم. برای این که سیستم حلقه بسته دارای یک جفت قطب روی محور موهومی باشد، بایستی یک ردیف از جدول راث صفر گردد. لذا: $\frac{30-k}{5} = 0 \quad \rightarrow \quad k = 30$

۷۸- گزینه «۴» ـ (ساده)

تابع تبدیل حلقه بسته یک سیستم مرتبه دوم نوعی به صورت $M(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ می‌باشد. بنابراین با توجه به داده‌های مسأله می‌توانیم آن را تعیین کنیم.

$$o \cdot v = 0/3 = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad \rightarrow \quad \xi \approx 0/35$$

$$t_p = 0/01 = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \quad \rightarrow \quad \omega_n = 336 \quad \Rightarrow \quad M(s) = \frac{(336)^2}{s^2 + 240s + (336)^2}$$

۷۹- گزینه «۳» ـ (متوسط)

ابتدا تابع تبدیل حلقه باز را بدست می‌آوریم. $H(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{4(s+1)}{s^2(s+2)}$

چون نوع سیستم برابر ۲ است، خطای حالت ماندگار سیستم به ورودی پله و شیب صفر خواهد بود. بنابراین کافیست خطای حالت ماندگار سیستم را به ورودی $\frac{1}{4}t^2u(t)$ محاسبه کنیم. توجه کنید که دامنه ورودی در این حالت $R = \frac{1}{2}$ است.

$$r(t) = \frac{1}{4}t^2u(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2u(t)\right)$$

$$k_a = \lim_{s\to 0} s^2GH(s) = \lim_{s\to 0} s^2\frac{4(s+1)}{s^2(s+2)} = 2 \quad \rightarrow \quad e_{ss} = \frac{R}{k_a} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

طبق قضیه جمع آثار داریم: $e_{ss} = 0 + 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

۸۰- گزینه «۱» ـ (متوسط)

صورت کلی تابع تبدیل را می‌توان به صورت $G(s) = \frac{k}{s(s^2 + 2as + b)}$ نوشت. چون خطای حالت دائمی به ورودی شیب واحد برابر $\frac{3}{2}$ است، لذا: $e_{ss} = \frac{R}{k_v} = \frac{1}{k_v} = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad k_v = \frac{2}{3}$

$$k_v = \lim_{s\to 0} sGH(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{k}{s(s^2 + 2as + b)} = \frac{k}{b} = \frac{2}{3}$$

از طرفی چون دو ریشه از معادله مشخصه سیستم در $-1 \pm j$ قرار دارند. بنابراین عبارت $(s+1)^2 + 1 = s^2 + 2s + 2$ باید عاملی از معادله مشخصه حلقه بسته باشد. پس

$$\Delta(s)=1+G(s)=1+\frac{k}{s(s^2+2as+b)}=0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(s)=s^3+2as^2+bs+k=(s^2+2s+2)(s+p)$$

لذا بایستی باقیمانده تقسیم معادله مشخصه بر عبارت (s^2+2s+2) صفر باشد.

$$b-2=4(a-1) \quad , \quad \frac{2}{3}b=4(a-1)$$

از حل دو معادله اخیر داریم:

$$k=\frac{2}{3}b=\frac{2}{3}\times 6=4 \quad , \quad a=2 \quad , \quad b=6$$

۸۱- گزینه «۴» ـ (ساده)

با توجه به ناحیه CRL (چون $k<0$ است) گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست می‌باشند. از سویی با توجه به متن درس، بایستی مکان از قطب تابع حلقه باز شروع و به صفر آن ختم شود. (روش دوم در مورد انتخاب جهت مکان ریشه‌ها). بنابراین گزینه (۴) صحیح است. چنانچه از روش اول در مورد انتخاب جهت مکان استفاده کنیم (جهت مکان بر اساس افزایش k) گزینه (۳) صحیح خواهد بود.

۸۲- گزینه «۲» ـ (متوسط)

با توجه به مکان ریشه داده شده مشاهده می‌شود که برای پایداری سیستم، رفتار $k\to\infty$ مهم می‌باشد. این موضوع از طریق مجانب‌های مکان قابل بررسی است. نقطه تلاقی مجانب‌ها را بدست می‌آوریم.

$$\sigma=\frac{\text{(مجموع قطب‌ها)} - \text{(مجموع صفرها)}}{n-m}=\frac{-3-p+z}{2}$$

برای پایداری بایستی شرط $\sigma<0$ برقرار باشد. لذا $z-p<3$. اگر شرط فوق برقرار نباشد، سیستم ناپایدار خواهد بود.

۸۳- گزینه «۳» ـ (ساده)

ابتدا معادله مشخصه سیستم را بدست می‌آوریم.

$$\Delta(s)=\det(sI-A)=\det\begin{bmatrix} s & -k-1 \\ k+2 & s+2k+3\end{bmatrix}=s^2+(2k+3)s+(k+1)(k+2)=0$$

از روش راث شرایط پایداری عبارتند از:

$$2k+3>0 \;\rightarrow\; k>-\frac{3}{2}$$

$$(k+1)(k+2)>0 \;\rightarrow\; k>-1 \;\text{ یا }\; k<-2$$

بنابراین انتخاب $k>-1$ برای پایداری سیستم ضروری خواهد بود.

۸۴- گزینه «۱» ـ (ساده)

ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم.

$$\Delta(s)=T_2s^3+s^2+kT_1s+2k=0$$

از روش راث برای پایداری بایستی شرایط زیر برقرار باشد:

$$T_2>0 \qquad (1)$$

$$2k>0 \rightarrow k>0 \qquad (2)$$

$$kT_1>2kT_2 \xrightarrow{(1),(2)} T_1>2T_2$$

لازم به ذکر است که صورت تست در هر دو سال ذکر شده یکی است. فقط در گزینه‌ها با یکدیگر تفاوت دارند.

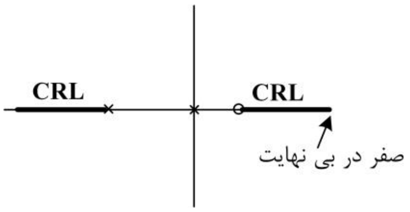
۸۵- گزینه «۲» ـ (ساده)

با توجه به متن درس، خطای حالت ماندگار برای سیستم پایدار قابل تعریف است. لذا محدوده k برای پایداری اولین گام برای حل مسأله است.

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{k(s+1)}{(k+1)s+(k-1)} \quad \Rightarrow \quad \Delta(s)=(k+1)s+(k-1)$$

شرط پایداری $k>1$ می‌باشد. بنابراین برای $k=0/5$ سیستم ناپایدار است و نمی‌توان خطای حالت ماندگار را محاسبه کرد.

۸۶- گزینه «۴» ـ (ساده)



با توجه به متن درس، باید عمل فاکتورگیری صورت گیرد تا ضریب بالاترین توان s در صورت مثبت شود. به عبارتی دیگر، باید مکان ریشه‌ها را برای $k < ۰$ رسم کنیم. تنها گزینه‌های (۳) و (۴) با توجه به مکمل مکان ریشه‌های (CRL) صحیح می‌باشند. از طرفی به دلیل حضور صفر در بی‌نهایت، بایستی یک نقطه شکست بین دو صفر متوالی وجود داشته باشد که این موضوع فقط در گزینه (۴) صدق می‌کند.

به راحتی نیز می‌توان نقاط شکست را محاسبه کرد.

$$\frac{dk}{ds}=۰ \quad \rightarrow \quad \frac{d}{ds}\left[\frac{s^۲(s+۲)}{(s-۱)}\right]=۰ \quad \rightarrow \quad \frac{s(۲s^۲-s-۴)}{(s-۱)^۲}=۰ \quad \rightarrow \quad \begin{cases} s=۰ \\ s=۱/۶۴ \end{cases}$$

۸۷- گزینه «۳» ـ (ساده)

$s^۴$	۱	۳	۲
$s^۳$	۳	a	
$s^۲$	$\frac{۹-a}{۳}$	۲	
$s^۱$	$\frac{(\frac{۹-a}{۳})a-۶}{(\frac{۹-a}{۳})}$		
$s^۰$	۲		

$\frac{۹-a}{۳}>۰ \rightarrow a<۹$

معادله مشخصه سیستم حلقه‌بسته برابر است با $\Delta(s)=s^۴+۳s^۳+۳s^۲+as+۲$.

با تشکیل جدول راث، شرایط پایداری عبارتند از:

$$\frac{۹-a}{۳}>۰ \rightarrow a<۹$$

$$\frac{(۹-a)a}{۳}-۶>۰ \quad \rightarrow \quad -a^۲+۹a-۱۸>۰ \quad \rightarrow \quad ۳<a<۶$$

اشتراک دو ناحیه فوق، ناحیه پایداری است. پس $۳<a<۶$.

از طرفی برای این که سیستم نوسان کند (یک جفت قطب روی محور موهومی)، بایستی یک سطر از جدول راث صفر شود. بنابراین:

$$-a^۲+۹a-۱۸=۰ \quad \rightarrow \quad a=۳ \ \text{یا} \ a=۶$$

۸۸- گزینه «۴» ـ (ساده)

تابع تبدیل حلقه بسته سیستم برابر است با:

$$M(s)=\frac{k_۲}{s^۲+(۱۰+k_۱k_۲)s+k_۲}=\frac{\omega_n^۲}{s^۲+۲\xi\omega_n s+\omega_n^۲}$$

$$t_s=۰/۳=\frac{۳}{\xi\omega_n}=\frac{۳}{۰/۵\omega_n} \quad \rightarrow \quad \omega_n=۲۰ \quad ، \quad k_۲=\omega_n^۲ \quad \rightarrow \quad k_۲=۴۰۰$$

$$۱۰+k_۱k_۲=۱۰+۴۰۰k_۱=۲\xi\omega_n \ \rightarrow \ ۱۰+۴۰۰k_۱=۲\times۰/۵\times۲۰ \rightarrow k_۱=۰/۰۲۵$$

۸۹- گزینه «۱» ـ (متوسط)

ابتدا بایستی تابع تبدیل حلقه باز سیستم را بدست آوریم.

$H(s)=۱$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{۱+G(s)} \rightarrow \quad G(s)=\frac{b_۰s^m+b_۱s^{m-۱}+...+b_{m-۱}s+b_m}{s^n+a_۱s^{n-۱}+...+(a_m-b_۰)s^m+...+(a_{n-۱}-b_{m-۱})s+(a_n-b_m)}$$

از طرفی می‌دانیم که برای صفر شدن خطای حالت ماندگار به ورودی شیب بایستی نوع سیستم دو باشد. لذا تابع تبدیل حلقه باز حداقل دو قطب باید در مبدأ داشته باشد. لذا:

$$a_n=b_m \quad ، \quad a_{n-۱}=b_{m-۱}$$

۹۰- گزینه «۴» ـ (متوسط)

از قانون جمع آثار استفاده می‌کنیم. ابتدا تابع تبدیل $\frac{C(s)}{L(s)}$ را پیدا می‌کنیم. با استفاده از قانون بهره میسون داریم:

$$R(s)=0 \;\rightarrow\; \frac{C(s)}{L(s)}=\frac{-\frac{1}{s}+G_c(s)\frac{k}{\tau s+1}\frac{1}{s}}{1+H(s)\frac{k}{\tau s+1}\frac{1}{s}}=\frac{-\tau s-1+kG_c(s)}{s(\tau s+1)+H(s)k}$$

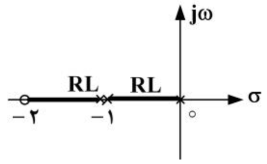
$$L(s)=\frac{1}{s} \;\rightarrow\; C(s)=\frac{-\tau s-1+kG_c(s)}{s(\tau s+1)+H(s)k}\frac{1}{s} \quad ، \quad c_{ss}=\lim_{s\to 0} sC(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{-\tau s-1+kG_c(s)}{s(\tau s+1)+H(s)k}\cdot\frac{1}{s}$$

برای صفر شدن خروجی حالت ماندگار بایستی داشته باشیم: $-1+G_c(0)k=0 \quad \rightarrow \quad G_c(0)=\frac{1}{k}$

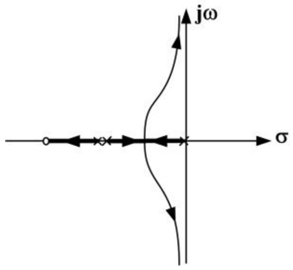
این شرط فقط در گزینه (۴) صدق می‌کند.

۹۱- گزینه «۳» ـ (متوسط)

با ایجاد فرم استاندارد برای معادله مشخصه داریم: $\Delta(s)=s^3+2s^2+s(1+k)+2k=0 \rightarrow \Delta(s)=1+\frac{k(s+2)}{s(s+1)^2}=0$



بنابراین تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از $GH(s)=\frac{k(s+2)}{s(s+1)^2}$. چون $k>0$، بازه $[-2,0]$ جزء مکان ریشه‌ها (RL) خواهد بود. لذا گزینه‌های (۲) و (۴) نادرست خواهند بود. حال به محاسبه مجانب‌ها می‌پردازیم.



محل تلاقی مجانب‌ها $\sigma=\frac{(-1-1)-(-2)}{3-1}=0$

زاویه مجانب‌ها $\theta=\frac{(2k+1)\pi}{2}=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2} \quad (k=0,1)$

۹۲- گزینه «۳» ـ (متوسط)

با $\xi=1$، رفتار سیستم میرای بحرانی است. لذا سیستم دارای دو ریشه حقیقی منفی برابر است. لذا شرط $\Delta=0$ در معادله مشخصه باید صدق کند.

$$\Delta=0 \;\rightarrow\; (2+4k)^2-4\times 2(1+k)=0 \;\rightarrow\; 4k^2+2k-1=0 \rightarrow k=0/31\;,\; k=-0/81$$

توجه کنید مقدار $k=-0/81$ به واسطه ناپایدار کردن سیستم غیر قابل قبول است. برای بهره بدست آمده از معادله مشخصه سیستم درجه دوم داریم:

$$\xi=1 \quad ، \quad \omega_n^2=\frac{2}{1+k}=1/53 \rightarrow 2\xi\omega_n=2/47 \quad \rightarrow \quad \xi\omega_n=1/24$$

$$T_s=\frac{4}{\xi\omega_n}=\frac{4}{1/24}=3/23$$

۹۳- گزینه «۱» ـ (ساده)

با نگاه به گزینه‌های پاسخ، به راحتی درمی‌یابیم که اختلاف کلیه گزینه‌ها در زاویه ورود به صفر مختلط است. لذا آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\theta=180-[90-(3\times 135^\circ+8/13)]=503/13 \quad \rightarrow \quad \theta=503/13-360=143/13$$

۹۴- گزینه «۴» ـ (متوسط)

واضح است با تغییر k از ۰ تا ∞، سیستم حداقل یک قطب در سمت راست محور موهومی دارد. پس سیستم همواره ناپایدار است. بنابراین سیستم پاسخ حالت دائمی سینوسی ندارد. لذا گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست است. حال کافیست زاویه خروج از قطب مختلط $p=-2+j2$ را بدست آوریم. $\theta=180-[(90+164/5)-135]\approx 61^\circ$

۹۵- گزینه «۲» ـ (متوسط)

شرایط پایداری از روش راث عبارتند از: $\tau>0 \quad , \quad k>0$

$$(\tau+۲)\times ۲ > (۲\tau)k \;\rightarrow\; \tau(k-۱) < ۲ \;\rightarrow\; \tau < \frac{۲}{k-۱} \;\Rightarrow\; \begin{cases} k \rightarrow ۱ \\ \tau \rightarrow \infty \end{cases} \begin{cases} k \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow ۰ \end{cases}$$

۹۶- گزینه «۴» ـ (متوسط)

$$t_s = \frac{۴}{\xi\omega_n} \le ۲ \;\rightarrow\; \xi\omega_n = \sigma \ge ۲$$

کافی است که با استفاده از روش راث از تبدیل $s \rightarrow s-۲$ در معادله مشخصه استفاده کنیم.

$$\Delta(s) = ۱ + GH(s) = s^{۳} + ۹s^{۲} + ۲۶s + ۲۴$$

$$\Delta(s-۲) = (s-۲)^{۳} + ۹(s-۲)^{۲} + ۲۶(s-۲) + ۲۴ + k = ۰ \;\rightarrow\; \Delta(s-۲) = s^{۳} + ۳s^{۲} + ۲s^{۲} + k = ۰$$

از روش راث شرایط پایداری عبارتند از:

$$\begin{cases} ۳\times ۲ \ge ۱\times k \;\rightarrow\; k \le ۶ \\ k \ge ۰ \end{cases} \xrightarrow{\;\bigcap\;} ۰ \le k \le ۶$$

۹۷- گزینه «۳» ـ (متوسط)

از قضیه جمع آثار استفاده می‌کنیم. ابتدا $R(s) = ۰$ را در نظر می‌گیریم.

$$E(s) = -\frac{G(s)}{۱ + kG(s)} D(s)$$

$$e_{ss} = -B = \lim_{s\rightarrow ۰} sE(s) = -\frac{G(۰)}{۱ + kG(۰)} \;\rightarrow\; B + BkG(۰) = G(۰) \;\rightarrow\; G(۰) = \frac{B}{۱ - Bk}$$

حال $D(s) = ۰$ را در نظر می‌گیریم.

$$E(s) = \frac{R(s)}{۱ + kG(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\rightarrow ۰} s\cdot\frac{۱}{s}\cdot\frac{۱}{۱ + kG(s)} = \frac{۱}{۱ + kG(۰)} = \frac{۱}{۱ + \dfrac{Bk}{۱ - k}} = ۱ - Bk$$

۹۸- گزینه «۱» ـ (متوسط)

ابتدا سیستم بدون فیدبک را بررسی می‌کنیم. بنابراین $k_t = ۰$. داریم:

$$k_v = \lim_{s\rightarrow ۰} s\frac{۴}{s(s + ۰/۴)} = ۱۰ \;\Rightarrow\; e_{ss} = \frac{۱}{k_v} = \frac{۱}{۱۰} = ۰/۱$$

$$o\cdot v = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{۱-\xi^{۲}}}} < ۰/۰۲ \;\rightarrow\; \xi \ge ۰/۸$$

در ادامه سیستم با فیدبک را بررسی می‌کنیم. تابع تبدیل حلقه باز سیستم مفروض به صورت $G(s) = \dfrac{۴}{s(s + ۰/۴ + ۴k_t)}$ بدست می‌آید. با مقایسه با تابع تبدیل حلقه باز مرتبه دوم استاندارد داریم:

$$\omega_n^{۲} = ۴ \;\rightarrow\; \omega_n = ۲$$

$$۲\xi\omega_n = ۰/۴ + ۴k_t \;\rightarrow\; \xi = ۰/۱ + k \;\rightarrow\; ۰/۸ = ۰/۱ + k_t \;\rightarrow\; k_t = ۰/۷$$

بنابراین تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از:

$$G(s) = \frac{۴}{s(s + ۳/۲)}$$

$$k_v = \lim_{s\rightarrow ۰} sG(s) = \lim_{s\rightarrow ۰} s\frac{۴}{s(s + ۳/۲)} = \frac{۱}{۰/۸} \;\Rightarrow\; e_{ss} = \frac{۱}{k_v} = ۰/۸$$

۹۹- گزینه «۱» ـ (ساده)

$$k_a = \lim_{s\rightarrow ۰} sGH(s) = \lim_{s\rightarrow ۰} s\frac{۳۰}{s(s + ۱)} = ۳۰ \;\Rightarrow\; e_{ss} = \frac{R}{k_a} = \frac{۲}{۳۰} = \frac{۱}{۱۵}$$

۱۰۰- گزینه «۲» ـ (ساده)

از قضیه جمع آثار استفاده می‌کنیم. با فرض $k(s)\overset{\Delta}{=}\dfrac{k}{1+2s}$ و $G(s)\overset{\Delta}{=}\dfrac{1}{s(1+4s)}$ داریم:

$$e_{ssL}=\lim_{s\to 0}\frac{-G(s)}{1+k(s)G(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{-1}{s(1+4s)+\dfrac{k}{1+2s}}=-\frac{1}{k}$$

$$e_{ssR}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+k(s)G(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+\dfrac{k}{1+2s}\,\dfrac{1}{s(1+4s)}}=0$$

توجه کنید که نوع سیستم برابر یک بوده و لذا e_{ssR} بدون محاسبه برابر صفر است.

۱۰۱- گزینه «۴» ـ (متوسط)

تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از $GH(s)=\dfrac{k}{s(s+1-k_g)}$. توجه کنید که حلقه داخلی دارای فیدبک مثبت است. با مقایسه این تابع با تابع تبدیل حلقه باز استاندارد برای سیستم مرتبه دو داریم:

$$GH(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

$$\omega_n^2=k\quad\to\quad\omega_n=\sqrt{k}\quad,\quad 2\xi\omega_n=1-k_g$$

از طرفی:

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s\,\dfrac{k}{s[s+(1-k_g)]}}=\frac{1-k_g}{k}=\frac{1}{100}\quad\to\quad 1-k_g=\frac{k}{100}\qquad(1)$$

$$\sigma=\xi\omega_n=0/05\quad\to\quad 2\xi\omega_n=0/1=1-k_g\qquad(2)$$

از حل (۱) و (۲) داریم:

$$k_g=\frac{9}{10}\quad,\quad k=10$$

۱۰۲- گزینه «۳» ـ (ساده)

با توجه به مکان هندسی ریشه‌ها، تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از:

$$GH(s)=\frac{k(s+0/5)}{s(s-2)(s^2+4s+8)}$$

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته برابر است با:

$$\Delta(s)=s(s-2)(s^2+4s+8)+k(s+0/5)=0\quad\Rightarrow\quad\Delta(s)=s^4+2s^3-16s^2+ks+0/5k=0$$

معادله مشخصه حلقه بسته سیستم شرط لازم برای پایداری را ندارد (کلیه ضرائب هم علامت نیستند). بنابراین سیستم همواره ناپایدار است.

۱۰۳- گزینه «۳» ـ (متوسط)

ابتدا محل تلاقی مجانب‌ها را بدست می‌آوریم.

$$\sigma=\frac{(2\times 0-4)-(-2)}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

لذا گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست می‌باشند. برای تعیین پاسخ صحیح از میان دو گزینه دیگر، شرط برخورد با محور موهومی را بررسی می‌کنیم. معادله مشخصه سیستم عبارتست از:

$$\Delta(s)=s^2(s+4)+k(s+2)=0\quad\Rightarrow\quad\Delta(s)=s^3+4s^2+ks+2k=0$$

از جدول راث ($4\times k=1\times 2k$)، تنها در $k=0$ مکان هندسی ریشه‌ها محور موهومی را قطع می‌کند.

۱۰۴- گزینه «۴» ـ (متوسط)

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=s^3+7s^2+12s+k=0$$

برای این که میرایی سیستم بیش از یک باشد، داریم:

$$\Delta(s-1)=(s-1)^3+7(s-1)^2+12(s-1)+k=0 \quad\Rightarrow\quad \Delta(s-1)=s^3+4s^2+s+k-6=0$$

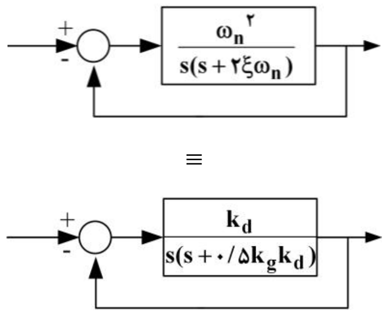
از روش راث شرایط پایداری عبارتند از:

$$\begin{cases} 4\times 1>k-6 \;\rightarrow\; k<10 \\ k-6>0 \;\rightarrow\; k>6 \end{cases} \xrightarrow{\;\cap\;} 6<k<10$$

۱۰۵- گزینه «۳» ـ (متوسط)

سیستم مفروض پس از ساده‌سازی به صورت زیر خواهد بود.

$$\omega_n^2=k_d \qquad , \qquad 2\xi\omega_n=0/5\,k_d\,k_g$$



$$o\cdot v=0/25=e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \;\rightarrow\; \xi=0/4$$

$$t_s=5=\frac{4}{\xi\omega_n} \;\rightarrow\; \xi\omega_n=\frac{4}{5} \;\rightarrow\; \omega_n=\frac{4}{5(0/4)}=2$$

بنابراین:

$$k_d=\omega_n^2=(2)^2=4$$

$$\left.\begin{aligned} 2\xi\omega_n&=2(\tfrac{4}{5})=\tfrac{8}{5} \\ 2\xi\omega_n&=0/5k_d\,k_g \end{aligned}\right\} \rightarrow\; k_g=0/8$$

۱۰۶- گزینه «۴» ـ (ساده)

با توجه به معادله مشخصه شرایط پایداری عبارتند از:

$$\alpha+\beta>0$$

$$\alpha\beta+k>0 \xrightarrow[\beta>0]{\alpha>0} k>-\alpha\beta$$

حال از تساوی معادله مشخصه سیستم مرتبه دوم استاندارد داریم:

$$\Delta(s)=s^2+(\alpha+\beta)s+\alpha\beta+k=s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$$

$$2\xi\omega_n=\alpha+\beta \qquad , \qquad \omega_n^2=\alpha\beta+k$$

از حذف ω_n از دو معادله اخیر داریم:

$$(\alpha+\beta)^2=4(\alpha\beta+k)\xi^2 \qquad (1)$$

$$\xi=\frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{(1)} k=\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$$

۱۰۷- گزینه «۴» ـ (ساده)

برای این که نقطه‌های $-1\pm j$ روی مکان هندسی ریشه‌ها باشند، بایستی در شرط اندازه و زاویه صدق کنند. از شرط زاویه داریم:

$$\angle GH(s)=\angle(s+\frac{1}{2})-2\angle s-\angle(s^2+4s+8)=\pm 180(2k+1)$$

با قرار دادن $s=-1+j$ داریم:

$$\angle GH(s)=\tan^{-1}(\frac{1}{-0/5})-2\tan^{-1}(\frac{1}{-1})-\tan^{-1}(\frac{2}{4})=116/5-2\times 135-26/5=-180$$

بنابراین نقطه $-1+j$ بر روی مکان هندسی ریشه‌ها قرار دارد و از خاصیت تقارن مکان هندسی ریشه‌ها نسبت به محور حقیقی نقطه $-1-j$ نیز بر روی مکان هندسی ریشه‌ها قرار دارد. برای تشخیص نقطه شکست بودن کافی است (s^2+2s+2) عاملی باشد که در معادله $\frac{dk}{ds}=0$ صدق کند.

$$\frac{dk}{ds}=0 \rightarrow s(3s^3+10s^2+14s+8)=s(s^2+2s+2)(3s+4)=0$$

بنابراین نقاط $s=-1\pm j$ نقاط شکست نیز می‌باشند.

۱۰۸- گزینه «۳» ـ (متوسط)

تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از: $GH(s)=\dfrac{k(s+۲)}{s(s^۲+۶s+۶۴)(s^۲+۵s+۶)}=\dfrac{k}{s(s^۲+۶s+۶۴)(s+۳)}$

از آنجا که سیستم حلقه باز دارای صفر در $s=-۲$ و قطب‌های حقیقی در $s=۰,-۲,-۳$ می‌باشد، بنابراین نقاط بین صفر و ۳- جزء مکان ریشه‌ها (RL) بوده و لذا گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست می‌باشند. برای پیدا کردن محدوده k به منظور پایداری سیستم، از روش راث استفاده می‌کنیم. $\Delta(s)=۱+GH(s)=۰ \Rightarrow \Delta(s)=s^۴+۹s^۳+۸۲s^۲+۱۹۲s+k=۰$

جدول راث را تشکیل می‌دهیم. داریم:

$$\begin{array}{llll} s^۴ & ۱ & ۸۲ & k \\ s^۳ & ۹ & ۱۹۲ & \\ s^۲ & ۶۰/۷ & k & \\ s^۱ & \dfrac{۱۱۴۶۸-۹k}{۶۰/۷} & & \\ s^۰ & k & & \end{array} \qquad \xrightarrow{\text{یک سطر صفر}} ۱۱۴۶۸-۹k=۰ \rightarrow k=۱۲۹۴/۲۲$$

بنابراین سیستم با $k=۱۲۹۴/۲۲$ پایدار مرزی خواهد بود. لذا گزینه (۳) صحیح خواهد بود.

۱۰۹- گزینه «۳» ـ (ساده)

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=s(s+۵)(s^۲+۲s+۵)+k(s+۲)=s^۴+۷s^۳+۱۵s^۲+(۲۵+k)s+۲k$$

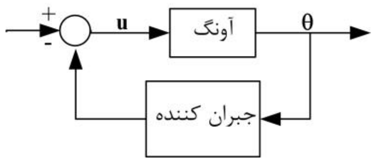
جدول راث را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{array}{llll} s^۴ & ۱ & ۱۵ & ۲k \\ s^۳ & ۷ & ۲۵+k & \\ s^۲ & \dfrac{۸۰-k}{۷} & ۲k & \\ s^۱ & \dfrac{۲۰۰۰-۴۳k-k^۲}{۸۰-k} & & \\ s^۰ & ۲k & & \end{array} \qquad \Rightarrow \begin{cases} ۸۰-k>۰ \\ ۲۰۰۰-۴۳k-k^۲>۰ \xrightarrow{\cap} ۰<k<۲۸/۱ \\ ۲k>۰ \end{cases}$$

۱۱۰- گزینه «۴» ـ (ساده)

ابتدا بلوک دیاگرام سیستم کنترلی را رسم می‌کنیم.

$$\ddot{\theta}+\omega_۰^۲\theta=u \xrightarrow{L} \frac{\theta(s)}{u(s)}=\frac{۱}{s^۲+\omega_۰^۲}$$



بنابراین معادله مشخصه سیستم عبارتست از:

$$\Delta(s)=۱+(\frac{s+\alpha}{s+\beta})(\frac{۱}{s^۲+\omega^۲})=۰ \Rightarrow \Delta(s)=s^۳+\beta s^۲+(۱+\omega_۰^۲)s+\beta\omega_۰^۲+\alpha=۰$$

از روش راث شرایط پایداری عبارتند از:

$$\begin{cases} \beta>۰ \\ \beta\omega_۰^۲+\alpha>۰ \rightarrow \alpha>-\beta\omega_۰^۲ \\ \beta(۱+\omega_۰^۲)>\beta\omega_۰^۲+\alpha \rightarrow \beta>\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \beta>۰ \\ \beta>\alpha>-\beta\omega_۰^۲ \end{array}$$

۱۱۱- گزینه «۴» ـ (ساده)

با توجه به متن درس، فقط نیاز به محاسبه ماتریس A می‌باشد. بنابراین:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ k & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

حال معادله مشخصه را بدست می‌آوریم.

$$\Delta(s)=\det(sI-A)=s^{۳}-۵s^{۲}+(۵-k)s+۵k-۱=۰$$

با توجه به این که ضریب $s^{۲}$، منفی است. بنابراین شرط لازم برای پایداری چندجمله‌ای برقرار نبوده و سیستم به ازاء کلیه مقادیر k ناپایدار خواهد بود.

۱۱۲- گزینه «۳» ـ (متوسط)

تابع تبدیل حلقه باز سیستم برابر است با:

$$G(s)=\frac{k(s+۱)}{s}\,\frac{e^{-s}}{(s+۱)}=\frac{ke^{-s}}{s}$$

با تقریب $e^{-s}=\frac{۱}{s+۱}$ داریم:

$$G(s)=\frac{k}{s(s+۱)}=\frac{\omega_n^{۲}}{s(s+۲\xi\omega_n)}$$

$$\begin{matrix}\omega_n^{۲}=k \\ ۲\xi\omega_n=۱\end{matrix} \Rightarrow \xi=\frac{۱}{۲\sqrt{k}} \quad , \quad o/v=۰/۰۵=e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{۱-\xi^{۲}}}} \Rightarrow \xi=۰/۶۹ \Rightarrow k=۰/۵$$

توجه شود که با انتخاب تقریب‌های دیگر برای e^{-s}، جواب‌های دیگری غیر از آن چه در گزینه‌های تست آمده است، بدست می‌آید.

۱۱۳- گزینه «۳» ـ (دشوار)

چون از $s=۰$ سه شاخه خارج شده است، لذا $s=۰$ ریشه مکرر مرتبه سه بوده و گزینه (۱) نادرست خواهد بود. با توجه به گزینه‌های دیگر، تابع تبدیل حلقه باز سیستم را به فرم کلی $GH(s)=\frac{k(s+a)(s+b)}{s^{۳}}$ در نظر می‌گیریم. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=s^{۳}+ks^{۲}+k(a+b)s+kab=۰$$

جدول راث را تشکیل می‌دهیم. محل تلاقی با محور موهومی دارای فرکانس $\omega=\sqrt{۲}$ و بهره $k=\frac{۲}{۳}$ است. لذا:

$$\begin{array}{lll} s^{۳} & ۱ & k(a+b) \\ s^{۲} & k & kab \\ s^{۱} & k(a+b)-ab & \\ s^{۰} & kab & \end{array} \xrightarrow{\text{یک سطر صفر}} k=\frac{ab}{a+b}=\frac{۲}{۳} \quad (۱)$$

از معادله کمکی داریم:

$$A(s)=s^{۲}+ab=۰ \Rightarrow s=\pm j\sqrt{۲}=\pm j\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab}=\pm j\sqrt{۲} \quad (۲)$$

از حل همزمان (۱) و (۲) داریم $a=۱$, $b=۲$. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۱۱۴- گزینه «۴» ـ (دشوار)

ابتدا تابع تبدیل حلقه باز سیستم را بدست می‌آوریم.

$$GH(s)=\frac{k(s^{۲}+۲s+۲)}{s^{۲}(s+۴)(s+۶)}$$

گزینه (۱) نادرست است، زیرا قطب $s=۰$ ریشه مکرر (مضاعف) است. بنابراین ناحیه $[۰,-۴]$ جزء مکان ریشه‌ها *(RL)* نمی‌باشد. حال از روش راث استفاده می‌کنیم تا شرط برخورد با محور موهومی را بررسی کنیم.

$$\Delta(s)=s^{۴}+۱۰s^{۳}+(k+۲۴)s^{۲}+۲ks+۲k=۰$$

$$\begin{array}{llll} s^{۴} & ۱ & k+۲۴ & ۲k \\ s^{۳} & ۱۰ & ۲k & \\ s^{۲} & \dfrac{۲۴۰+۸k}{۱۰} & ۲k & \\ s^{۱} & \dfrac{۲k(۸k+۲۴۰)-۲۰۰k}{۲۴۰+۸k} & & \\ s^{\circ} & ۲k & & \end{array} \xrightarrow{\text{یک سطر صفر}} \begin{array}{l} k=\circ \\ k=-\dfrac{۱۴۰}{۸}<\circ \end{array}$$

بنابراین مکان هندسی ریشه‌ها محور موهومی را قطع نمی‌کند. لذا گزینه (۳) نیز نادرست است. برای تعیین پاسخ صحیح از میان دو گزینه باقیمانده کافیست زاویه ورود به صفر مختلط $z=-۱+j$ را بدست آوریم.

$-۱+j$ زاویه ورود به صفر مختلط $=۱۸۰-[۹۰-(۲\times۱۳۵+\tan^{-۱}(\frac{۱}{۳})+\tan^{-۱}(\frac{۱}{۵}))]\approx ۳۰^{\circ}$

۱۱۵- گزینه «۳» ـ (متوسط)

$$\begin{bmatrix}\dot{\xi}(t)\\ \dot{\gamma}(t)\\ \dot{\omega}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & ۱ & \circ\\ -۲ & ۱ & \circ\\ \circ & \circ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \gamma(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱\\ ۱\\ \circ\end{bmatrix}u \Rightarrow \Delta(s)=\det(sI-A)=\det\begin{bmatrix}s-a & -۱ & \circ\\ ۲ & s-۱ & \circ\\ \circ & \circ & s+۱\end{bmatrix}=\circ$$

می‌دانیم که ریشه‌های معادله مشخصه قطب‌های سیستم هستند. بنابراین: $\Delta(s)=(s+۱)[s^{۲}-(۱+a)s+a+۲]=\circ$

برای پایداری بایستی چندجمله‌ای $s^{۲}-(۱+a)s+a+۲=\circ$ پایدار باشد. بنا بر روش راث داریم:

$$\begin{array}{l} -(۱+a)>\circ \to a<-۱ \\ a+۲>\circ \to a>-۲ \end{array} \xrightarrow{\cap} -۲<a<-۱$$

۱۱۶- گزینه «۳» ـ (متوسط)

جدول راث را تشکیل می‌دهیم. کلیه درایه‌های سطر $s^{۳}$ صفر هستند. با استفاده از معادله کمکی جدول راث را کامل می‌کنیم.

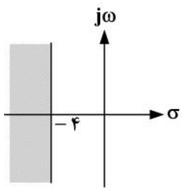
جدول راث را تشکیل می‌دهیم. کلیه درایه‌های سطر $s^{۳}$ صفر هستند. با استفاده از معادله کمکی جدول راث را کامل می‌کنیم.

$$\begin{array}{lllll} s^{۶} & ۱ & ۶ & ۱۱ & ۶ \\ s^{۵} & ۳ & ۱۲ & ۹ & \circ \\ s^{۴} & ۲ & ۸ & ۶ & \\ s^{۳} & \cancel{\circ}\ ۸ & \cancel{\circ}\ ۱۶ & & \\ s^{۲} & ۴ & ۶ & & \\ s^{۱} & ۴ & & & \\ s^{\circ} & ۶ & & & \end{array} \qquad A(s)=۲s^{۴}+۸s^{۲}+۶ \Rightarrow \frac{dA(s)}{ds}=۸s^{۳}+۱۶s$$

به دلیل وجود یک سطر صفر کامل در جدول راث بدون تغییرعلامت در ستون اول آن، سیستم پایدار مرزی است.

۱۱۷- گزینه «۴» ـ (متوسط)

$$t_s=\frac{۴}{\xi\omega_n}\le ۱ \Rightarrow \xi\omega_n=\sigma\ge ۴$$



این بدان معنی است که قطب‌های سیستم در سمت چپ $\sigma=-۴$ قرار گیرند که در صفحه s با هاشور نمایش داده شده است. بدین منظور، از روش راث با تبدیل $s\to s-۴$ در معادله مشخصه استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\Delta(s)=1+\frac{k}{s(s^2+12s+45)}=0 \;\rightarrow\; \Delta(s)=s^3+12s^2+45s+k=0$$

$$\Delta(s-4)=(s-4)^3+12(s-4)^2+45(s-4)+k=0 \;\Rightarrow\; \Delta(s-4)=s^3-3s-72+k$$

واضح است معادله مشخصه شرط لازم برای پایداری را ندارد. بنابراین زمان نشست سیستم نمی‌تواند کمتر از یک ثانیه باشد.

۱۱۸- گزینه «۲» ـ (متوسط)

با توجه به تعریف خطا در صورت تست، نمی‌توان از روش ثوابت خطا استفاده کرد. بنابراین مستقیماً تابع تبدیل خطا را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{1}{s(s+2)}}{1+\frac{1}{s(s+2)(s+1)}}=\frac{s+1}{s^3+3s^2+2s+1}$$

$$E(s)=R(s)-\frac{s+1}{s^3+3s^2+2s+1}R(s)=R(s)\cdot\frac{s(s^2+3s+1)}{s^3+3s^2+2s+1}$$

$$R(s)=\frac{1}{s^2} \;\Rightarrow\; e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s^2\cdot\frac{1}{s^2}\cdot\frac{s^2+3s+1}{s^3+3s^2+2s+1}=1$$

۱۱۹- گزینه «۱» ـ (متوسط)

تابع تبدیل حلقه بسته را با استفاده از قانون میسون بدست می‌آوریم.

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{20s^{-3}}{g_1s^{-3}+g_2s^{-2}+g_3s^{-1}+s^{-1}+1}=\frac{20}{s^3+(1+g_3)s^2+g_2s+g_1}$$

$$c_{ss}=\lim_{s\to 0} sC(s)=\lim_{s\to 0} sR(s)\frac{20}{s^3+(1+g_3)s^2+g_2s+g_1}$$

$$if \quad R(s)=\frac{1}{s} \;\Rightarrow\; c_{ss}=\frac{20}{g_1}$$

برای صفر شدن خطای حالت ماندگار بایستی خروجی در حالت ماندگار برابر یک شود. لذا: $c_{ss}=\frac{20}{g_1}=1 \;\rightarrow\; g_1=20$

از طرفی معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$s^3+(1+g_3)s^2+g_2s+20=[(s+1)^2+1](s+a)=s^3+(a+2)s^2+(2a+2)s+2a$$

با مساوی قرار دادن طرفین رابطه فوق داریم: $a=10 \;,\; g_2=22 \;,\; g_3=11$

۱۲۰- گزینه «۴» ـ (ساده)

با توجه به متن درس، اضافه کردن صفر به تابع تبدیل حلقه بسته افزایش ماکزیمم فراجهش را در پی دارد که این تأثیر با نزدیک‌تر شدن صفر به مبدأ بیشتر می‌شود. لذا درصد اضافه جهش بسیار بالا خواهد بود.

۱۲۱- گزینه «۲» ـ (متوسط)

ابتدا معادله مشخصه سیستم را با فرض $k=1$ به فرم استاندارد $\Delta(s)=1+aGH(s)$ درمی‌آوریم.

$$\Delta(s)=1+\frac{(s+2)}{(s+1)(s+a)}=0 \;\Rightarrow\; \Delta(s)=1+\frac{a(s+1)}{s^2+2s+2}=0$$

بنابراین تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از: $GH(s)=\frac{a(s+1)}{s^2+2s+2}$

با توجه به صفرها و قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز، گزینه (۲) صحیح خواهد بود.

قطب حلقه باز $p=-1\pm j$ ، صفر حلقه باز $z=-1$

توجه کنید که بدون حل نیز می‌توانید پاسخ صحیح را انتخاب کنید. گزینه (۱) به واسطه ترسیم مکان برحسب k نادرست است. گزینه‌های (۳) و (۴) نیز به واسطه این که $s=-a$ صفر تابع تبدیل حلقه باز در نظر گرفته شده است، نادرست هستند. زیرا مکان هندسی ریشه‌ها برحسب a به عنوان یک بهره رسم می‌شود.

۱۲۲- گزینه «۱» ـ (ساده)

تابع تبدیل سیستم برابر است با $G(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{۱}{s^{۲}-۳s+۲}$. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

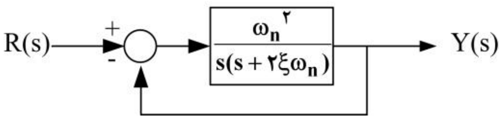
$$\Delta(s)=۱+(k_{۲}+k_{۱}s)\frac{۱}{s^{۲}-۳s+۲}=۰ \;\Rightarrow\; \Delta(s)=s^{۲}+(k_{۱}-۳)s+k_{۲}+۲=۰$$

از طرفی با توجه به قطب‌های مطلوب، معادله مشخصه سیستم حلقه بسته مطلوب برابر است با:

$$\Delta(s)=(s+۱)(s+۳)=s^{۲}+۴s+۳=۰ \;\Rightarrow\; \begin{cases} k_{۱}-۳=۴ \;\rightarrow\; k_{۱}=۷ \\ k_{۲}+۲=۳ \;\rightarrow\; k_{۲}=۱ \end{cases}$$

۱۲۳- گزینه «۳» ـ (ساده)

یادآوری می‌شود نمودار بلوکی سیستم مرتبه دوم استاندارد نوعی به صورت روبرو است. لذا یک قطب از سیستم حلقه باز همواره صفر خواهد بود. بنابراین گزینه‌های ۲ و ۴ نادرست می‌باشند. قطب دیگر برابر است با $s=-۲\xi\omega_n$ که با توجه به مقادیر داده شده در پاسخ پله قابل محاسبه است.



$$\begin{cases} o.v=۰/۱۶۳=e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{۱-\xi^{۲}}}} \;\rightarrow\; \xi=۰/۵ \\ t_p=۰/۴۲=\dfrac{\pi}{\omega_d}=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{۱-\xi^{۲}}}=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{۱-۰/۲۵}} \;\rightarrow\; \omega_n=۸/۶۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow s=-۲\xi\omega_n=-۲\times۰/۵\times۸/۴۶=-۸/۶۴$$

۱۲۴- گزینه «۲» ـ (ساده)

از مکان هندسی ریشه‌ها می‌توانیم تابع حلقه باز سیستم برابر است با: $GH(s)=\dfrac{k}{s(s+۱)(s+۲)}$

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از: $\Delta(s)=۱+\dfrac{k}{s(s+۱)(s+۲)}=۰ \;\rightarrow\; \Delta(s)=s^{۳}+۳s^{۲}+۲s+k=۰$

از جدول راث شرط پایداری را بدست می‌آوریم. داریم:

$$\begin{cases} ۳\times۲>۱\times k \\ k>۰ \end{cases} \xrightarrow{\;\cap\;} ۰<k<۶$$

۱۲۵- گزینه «۳» ـ (ساده)

معادله مشخصه سیستم برابر است با: $\Delta(s)=۱+\dfrac{as+b}{s^{۲}-۳s+۲}=۰ \Rightarrow \Delta(s)=s^{۲}+(a-۳)s+b+۲=۰$

برای نوسانی شدن (یک جفت ریشه موهومی) کافی است ضریب s صفر شود. لذا: $a-۳=۰ \;\Rightarrow\; a=۳$

همچنین برای برآورده کردن هدف مسأله باید $b+۲>۰$ باشد. لذا: $b>-۲$

۱۲۶- گزینه «۳» ـ (متوسط)

ابتدا تابع تبدیل حلقه داخلی را بدست می‌آوریم. $G_{۱}=\dfrac{\dfrac{۲۳۸}{۱+۰/۲۶۵s}}{۱+\dfrac{۲۳۸k}{۱+۰/۲۶۵s}}=\dfrac{۲۳۸}{۰/۲۶۵s+۱+۲۳۸k}$

تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از:

$$(۵/۶۴)(\frac{۲۳۸}{۰/۲۶۵s+۱+۲۳۸k})(\frac{۱}{۳۰s})=\frac{۱۶۸/۸}{s(s+\frac{۱+۲۳۸k}{۰/۲۶۵})}=\frac{\omega_n^۲}{s(s+۲\xi\omega_n)}$$

با مقایسه داریم:

$$\omega_n^۲=۱۶۸/۸ \rightarrow \omega_n \approx ۱۳$$

$$\omega_d=۱۰=\omega_n\sqrt{۱-\xi^۲} \rightarrow ۱۰=۱۳\sqrt{۱-\xi^۲} \rightarrow \xi=۰/۶۳$$

$$\frac{۱+۲۳۸k}{۰/۲۶۵}=۲\xi\omega_n \rightarrow \frac{۱+۲۳۸k}{۰/۲۶۵}=۲(۰/۶۳)(۱۳) \rightarrow k=۰/۰۱۴$$

۱۲۷- گزینه «۴» ـ (ساده)

ابتدا معادله مشخصه را به فرم استاندارد $\Delta(s)=۱+kGH(s)=۰$ درمی‌آوریم.

$$\Delta(s)=۱+k\frac{s}{s^۲+۲s+۴}=۰$$

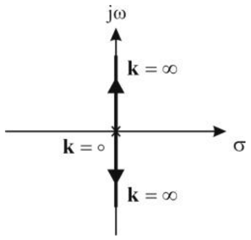
با توجه به صفرها و قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز، تنها گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

$$GH(s)=\frac{ks}{s^۲+۲s+۴}$$

$=۰$ صفر حلقه باز ، قطب حلقه باز $p=-۱\pm j\sqrt{۳}$

۱۲۸- گزینه «؟» ـ (ساده)

با در نظر گرفتن تابع تبدیل حلقه باز و محل صفرها و قطب‌های آن، گزینه صحیح وجود ندارد. شکل صحیح مکان هندسی ریشه‌ها به صورت زیر است. توجه کنید برای $k\geq۰$، مکان ریشه‌ها (RL) نمی‌تواند روی محور حقیقی باشد.



$$GH(s)=\frac{k}{s^۲}$$

محل تلاقی مجانب‌ها $\sigma=\frac{۰-۰}{۲}=۰$

زاویه مجانب‌ها $\theta=\frac{(۲k+۱)\pi}{۲}=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\ (k=۰,۱)$

۱۲۹- گزینه «۱» ـ (ساده)

ابتدا معادله مشخصه سیستم را با فرض $k=۱۲$ محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta(s)=s^۴+۶s^۳+۸s^۲+۱۲s+۱۲\alpha=۰$$

جدول راث را تشکیل می‌دهیم. حال شرط پایداری را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{array}{llll} s^۴ & ۱ & ۸ & ۱۲\alpha \\ s^۳ & \cancelto{۱}{۶} & \cancelto{۲}{۱۲} & \\ s^۲ & \cancelto{۱}{۶} & \cancelto{۲\alpha}{۱۲\alpha} & \\ s^۱ & ۲-۲\alpha & & \\ s^۰ & ۲\alpha & & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} ۲-۲\alpha>۰ \rightarrow \alpha<۱ \\ ۲\alpha>۰ \rightarrow \alpha>۰ \end{cases} \xrightarrow{\cap} ۰<\alpha<۱$$

۱۳۰- گزینه «۱» ـ (ساده)

کافی است که محدوده تغییرات ξ را پیدا کنیم. لذا ابتدا معادله مشخصه سیستم را بدست می‌آوریم.

$$\Delta(s)=۱+\frac{۷}{s^۲+۴s-۳}=s^۲+۴s+۴=۰ \Rightarrow \Delta(s)=(s+۲)^۲=۰ \Rightarrow s_{۱,۲}=-۲$$

با توجه به متن درس، دو ریشه حقیقی منفی برابر معادل $\xi=۱$ (میرای بحرانی) است. روش دیگر برای انتخاب گزینه صحیح محاسبه ξ می‌باشد.

$$\Delta(s)=s^۲+۴s+۴=۰$$

$$\omega_n^۲=۴ \Rightarrow \omega_n=۲$$

$$۲\xi\omega_n=۴ \xrightarrow{\omega_n=۲} \xi=۱ \rightarrow$$ سیستم میرای بحرانی است

۱۳۱- گزینه «۱» ـ (ساده)

ابتدا معادله مشخصه سیستم را بدست می‌آوریم. برای این کار تابع تبدیل حلقه داخلی را بدست می‌آوریم. توجه کنید که حلقه داخلی دارای فیدبک مثبت است.

$$G=\frac{\frac{۲۵}{s(s+۲)}}{۱-\frac{۲۵\alpha}{s(s+۲)}}=\frac{۲۵}{s^{۲}+۲s-۲۵\alpha}$$

تابع تبدیل حلقه بسته سیستم عبارتست از:

$$M(s)=\frac{G}{۱+G}=\frac{۲۵}{s^{۲}+۲s+۲۵(۱-\alpha)}$$

$$\Delta(s)=s^{۲}+۲s+۲۵(۱-\alpha)=\circ$$

$$۲\xi\omega_n=۲\ \rightarrow\ \xi\omega_n=۱\ \xrightarrow{\xi=\cdot/۶}\ \omega_n=\frac{۵}{۳}$$

$$\omega_n^{۲}=۲۵(۱-\alpha)=\frac{۲۵}{۹}\ \rightarrow\ \alpha=\cdot/۸۸$$

۱۳۲- گزینه «۴» ـ (ساده)

ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را بدست می‌آوریم. داریم:

$$M(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{k_۱}{s^{۲}+k_۲s+۸+k_۱}$$

$$c_{ss}=\lim_{s\to\circ}sC(s)=\lim_{s\to\circ}sR(s)\frac{k_۱}{s^{۲}+k_۲s+۸+k_۱}$$

$$R(s)=\frac{۱}{s}\ \Rightarrow\ c_{ss}=\cdot/۶=\frac{k_۱}{۸+k_۱}\ \Rightarrow\ k_۱=۱۲$$

$$t_s=\frac{۴}{\xi\omega_n}=۲\ \Rightarrow\ ۲\xi\omega_n=۴\ ,\ k_۲=۲\xi\omega_n\ \Rightarrow\ k_۲=۴$$

۱۳۳- گزینه «۳» ـ (ساده)

نوع سیستم از روی تابع تبدیل حلقه باز آن مشخص می‌شود. لذا ابتدا تابع تبدیل حلقه باز سیستم را بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases}M(s)=\frac{G(s)}{۱+GH(s)}\\ H(s)=۱\end{cases}\Rightarrow\ \frac{\omega_n^{۲}}{s^{۲}+۲\xi\omega_n s+\omega_n^{۲}}=\frac{G(s)}{۱+G(s)}\Rightarrow G(s)=GH(s)=\frac{\omega_n^{۲}}{s(s+۲\xi\omega_n)}$$

۱۳۴- گزینه «۲» ـ (متوسط)

با توجه به صفرها و قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز می‌توان معادله مشخصه سیستم را بدست آورد.

$$GH(s)=\frac{k}{s(s+۲)(s^{۲}+۴s+۸)}$$

$$\Delta(s)=۱+GH(s)=\circ\ \Rightarrow\ \Delta(s)=s(s+۲)(s+۴s+۸)+k=s^{۴}+۶s^{۳}+۱۶s^{۲}+۱۶s+k=\circ$$

برای بررسی پایداری از روش راث بهره می‌بریم. شرایط پایداری عبارتند از:

$$\begin{array}{llll} s^{۴} & ۱ & ۱۶ & k\\ s^{۳} & ۶ & ۱۶ & \\ s^{۲} & \frac{۸\cdot}{۶} & \frac{۶k}{۶} & \\ s^{۱} & \frac{۲۱۳/۳-۶k}{۱۳/۳} & & \\ s^{\circ} & k & & \end{array}$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}k>\circ\\ ۲۱۳/۳-۶k>\circ\ \rightarrow\ k<۳۵/۵\end{cases}\ \Rightarrow\ \circ<k<۳۵/۵$$

لذا برای $k=۴۰$ سیستم ناپایدار خواهد بود. بنابراین گزینه (۲) صحیح خواهد بود.