انتگرال کانولوشن در سیستم های LTI پیوسته.

مقدمه اول - نمایش یک سیگنال پیوسته توسط انتگرال توابع ضربه

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

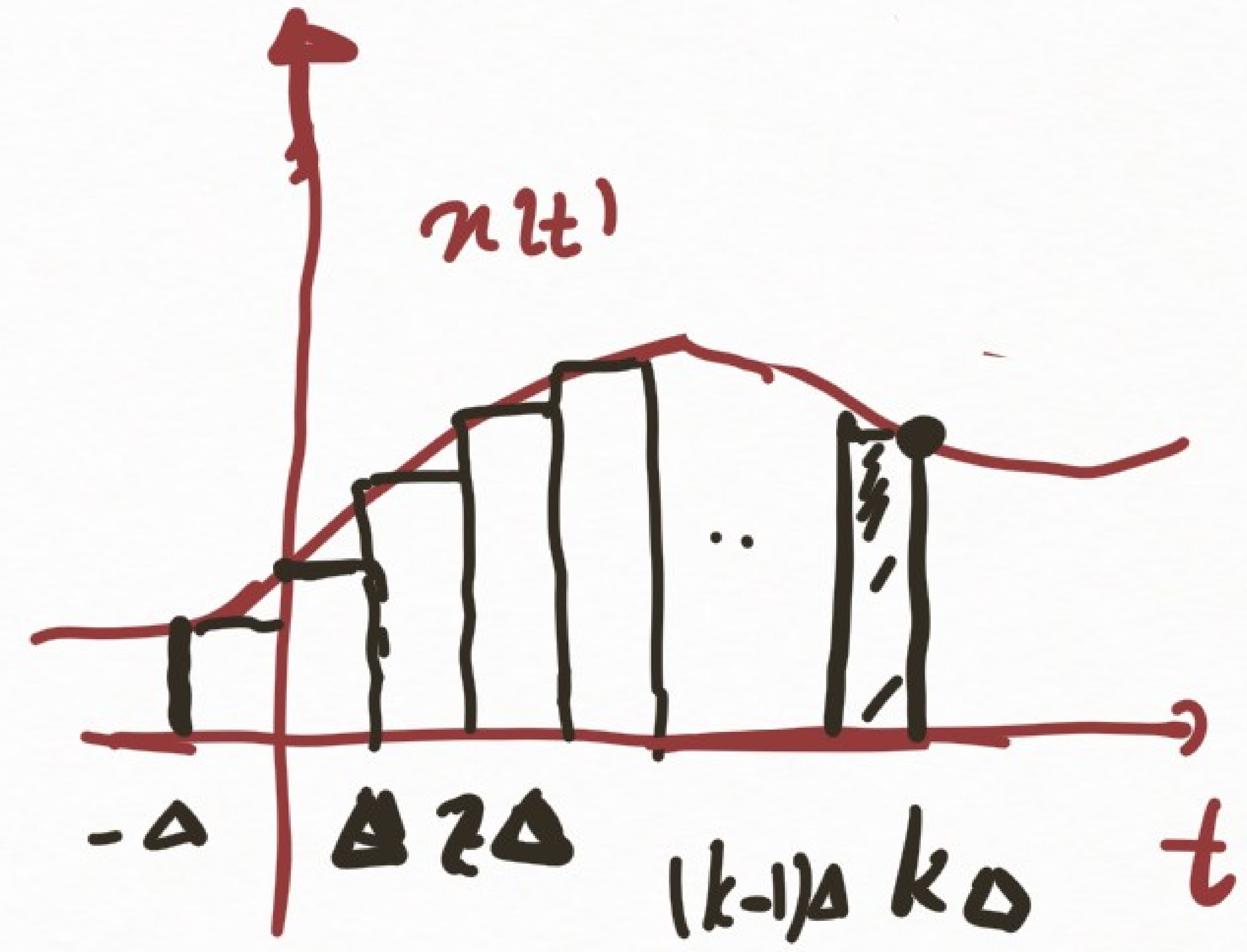
$$x(t)\delta(t-1) = x(1)\delta(t-1)$$

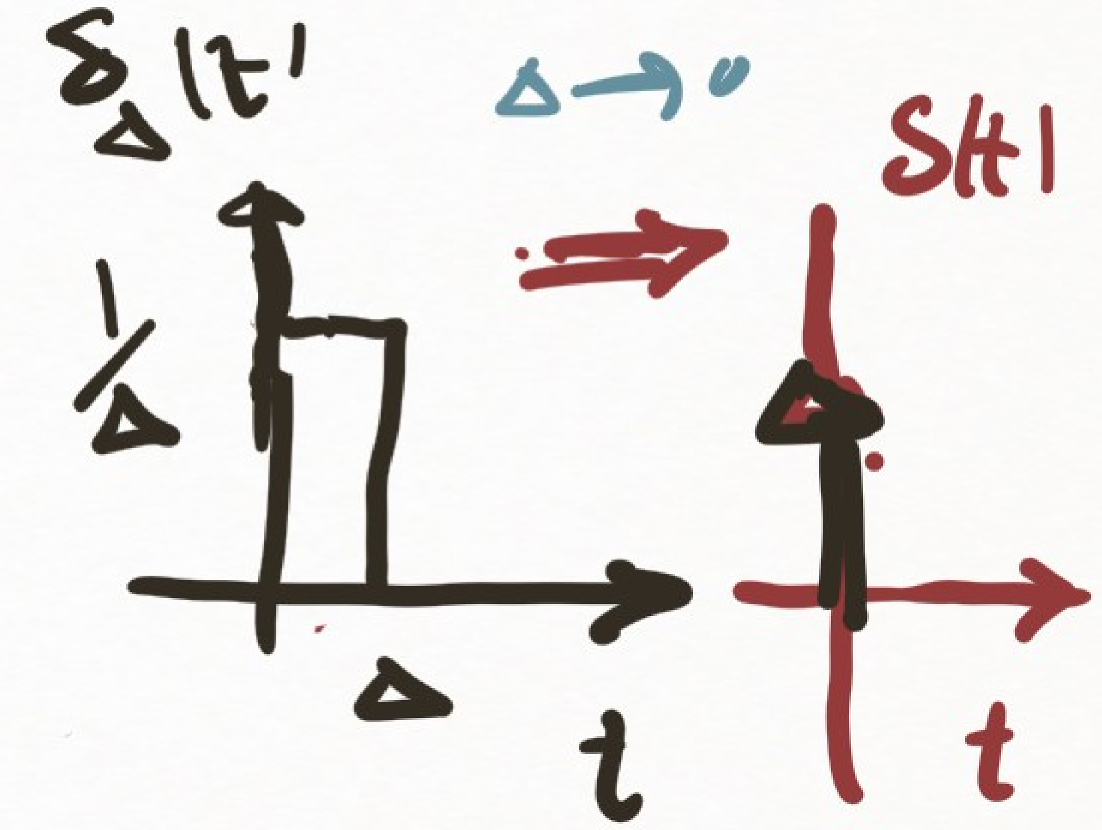
$$\vdots$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$$

$$x(t)\underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)\,d\tau}}_{1} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$$

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau}$$





$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

وقتی $\Delta \to 0$ تقریب $\hat{x}(t)$ بهتر شده و به $x(t)$ نزدیک‌تر می‌شود و

در حد به سمت $x(t)$ میل می‌کند پس

$$x(t) = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

$$k\Delta \to \tau \;,\; \Delta \to d\tau \;,\; \sum_{-\infty}^{+\infty} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$$

پس

مفهوم دوم - حال فرض کنیم که سیستم فقط خطی داریم.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{L}} \longrightarrow y(t) \qquad y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

$$\delta(t) \longrightarrow h_0(t) = \mathcal{L}\{\delta(t)\}$$

$$\delta(t-1) \longrightarrow h_1(t) = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\}$$

$$\delta(t-2) \longrightarrow h_2(t) = \mathcal{L}\{\delta(t-2)\}$$

$$\vdots$$

$$\delta(t-\tau) \longrightarrow h_\tau(t) = \mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\right\}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\underbrace{\mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\}}_{h_\tau(t)}\,d\tau$$

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h_\tau(t)\,d\tau}$$

پس اگر در یک سیستم فقط خطی پاسخ سیستم را به تابع ضربه $\delta(t-\tau)$ (shift یافته) یعنی $h_\tau(t)$ را داشته باشیم می‌توانیم با توجه به این تابع و مقدار ورودی $x(\tau)$ و انتگرال‌گیری مقدار خروجی یعنی $y(t)$ را محاسبه کنیم.

$$x(t) \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow y(t)$$

چون سیستم تغییرناپذیر با زمان است

$$\delta(t) \rightarrow h_0(t) = h(t)$$

$$\delta(t-1) \rightarrow h_1(t) = h(t-1)$$

$$\delta(t-2) \rightarrow h_2(t) = h(t-2)$$

$$\vdots$$

$$\delta(t-\tau) \rightarrow h_\tau(t) = h(t-\tau)$$

حال اگر یک سیستم LTI داشته باشیم:

- از برهم‌نهی داریم

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h_\tau(t)\, d\tau$$

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau}$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

این رابطه کانولوشن $x(t)$ با $h(t)$ گویند و این رابطه بیان می‌نماید که اگر ما پاسخ ضربه سیستم یعنی $h(t)$ را داشته باشیم با این رابطه می‌توان پاسخ به هر ورودی دلخواهی مثل $x(t)$ را به دست آورد.

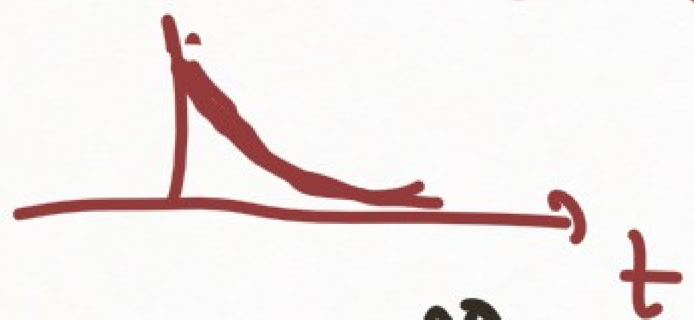
- اگر فرض کنیم $t-\tau=\tau'$ آنگاه متغیر را عوض کنیم

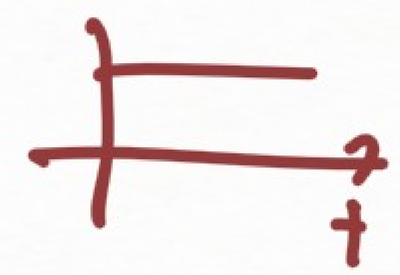
$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau}$$

حاصل خواهد شد. خاصیت جابجایی: $y(t) = h(t) * x(t)$

مثال

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t) \quad , \quad h(t) = u(t) \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) = ?$$

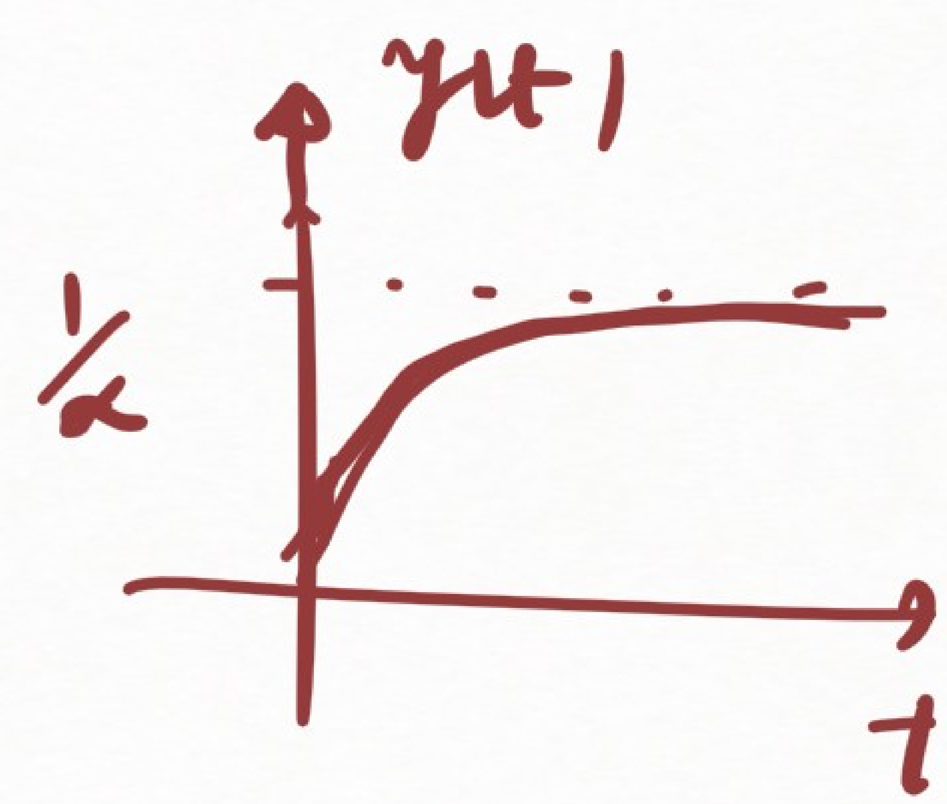




$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau} u(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} 1 \times e^{-\alpha\tau}\, d\tau$$

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1 \ ; & t > \tau \\ 0 \ ; & t < \tau \end{cases}$$

$$y(t) = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha\tau}\Big|_{0}^{t} = \boxed{\frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)}$$



$\delta(t-t_0)$ مثال ۲- پاسخ سیستم LTI با تابع چ؟

فرض اعمال $\tau = t - t_0$

$$y(t) = x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(\tau)\,\delta(t-t_0-\tau)}_{x(t-t_0)\,\delta(t-t_0-\tau)}\, d\tau = x(t-t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0-\tau)\, d\tau$$

$$\boxed{y(t) = x(t-t_0)}$$

محاسبه گرافیکی کانولوشن.

روش انجام کار شبیه حالت گسسته می باشد ولی به جای سیگما انتگرال استفاده میشود.

1- $h(\tau)$, $x(\tau)$ را رسم میکنیم.

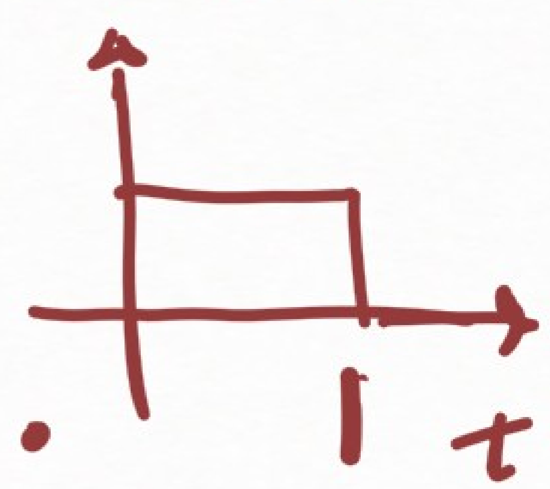
2- $h(-\tau)$ یا $x(-\tau)$

3- $h(t-\tau)$ یا $x(t-\tau)$

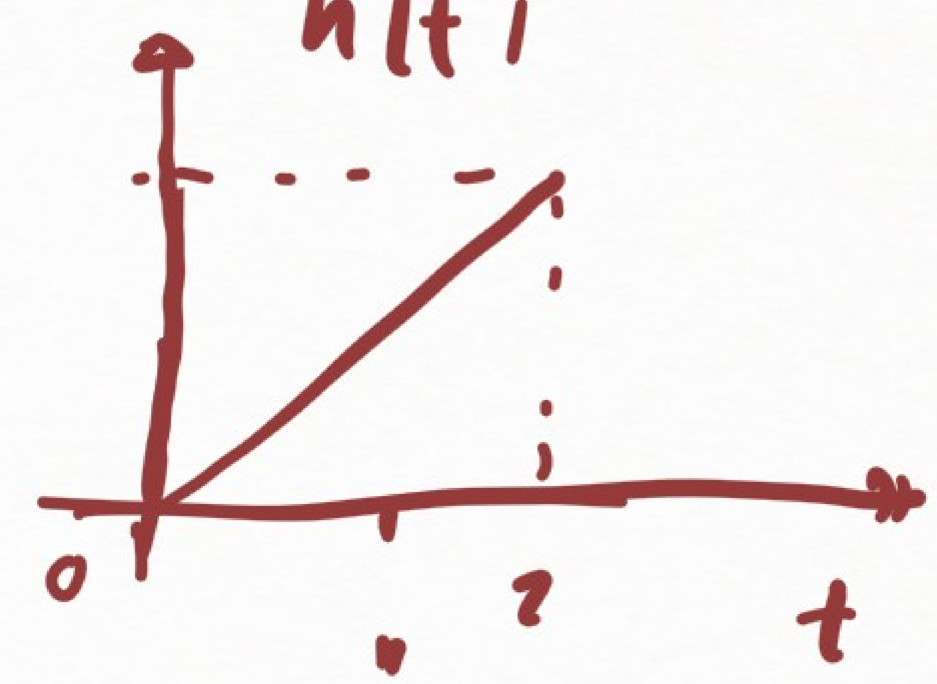
4- $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$ یا $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$ در فواصل مختلف محاسبه می‌شود

مثال -

$$x(t)=\begin{cases} 1 , & 0<t<1 \\ 0 , & \text{other} \end{cases}$$

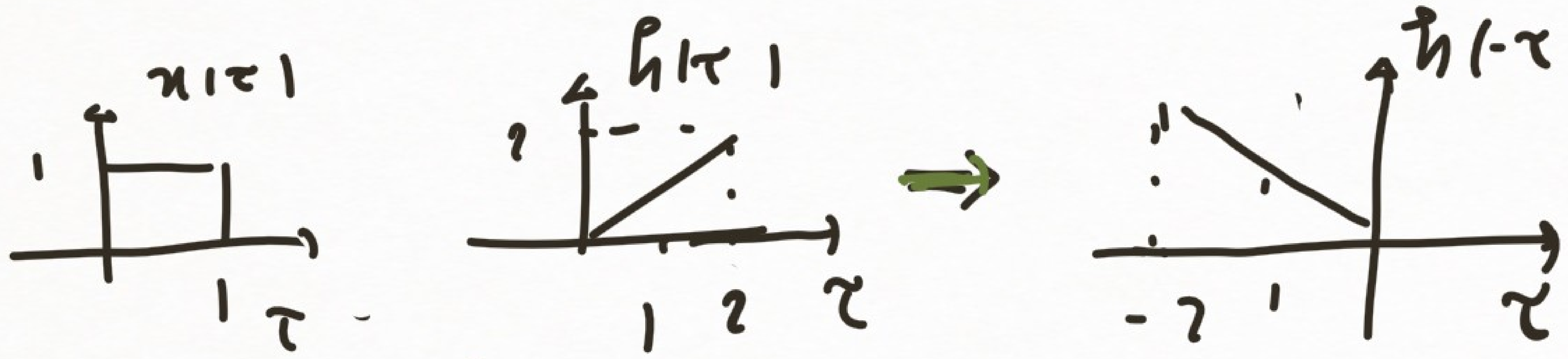


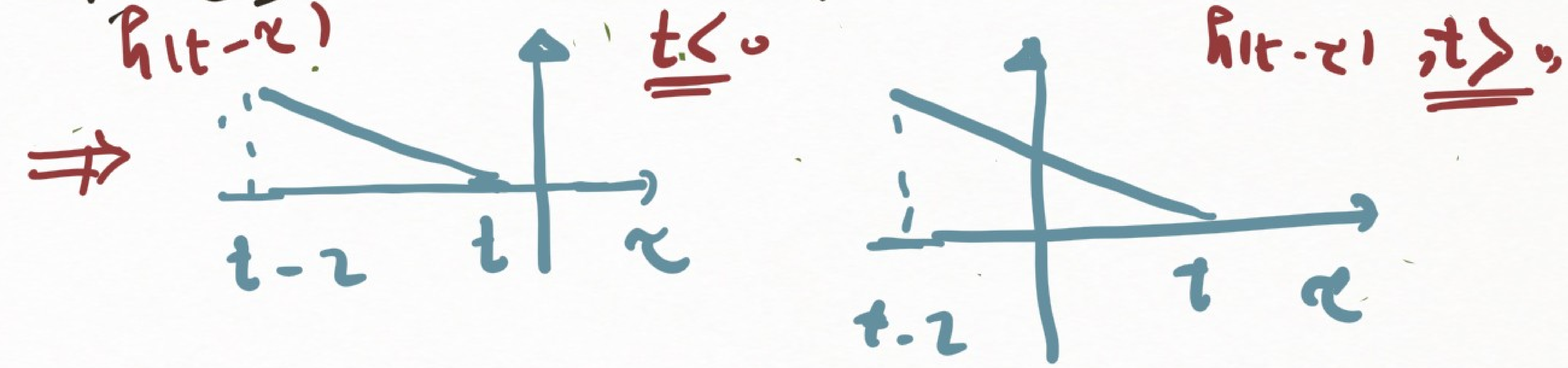
$$h(t)=\begin{cases} t ; & 0<t<2 \\ 0 ; & \text{other} \end{cases}$$



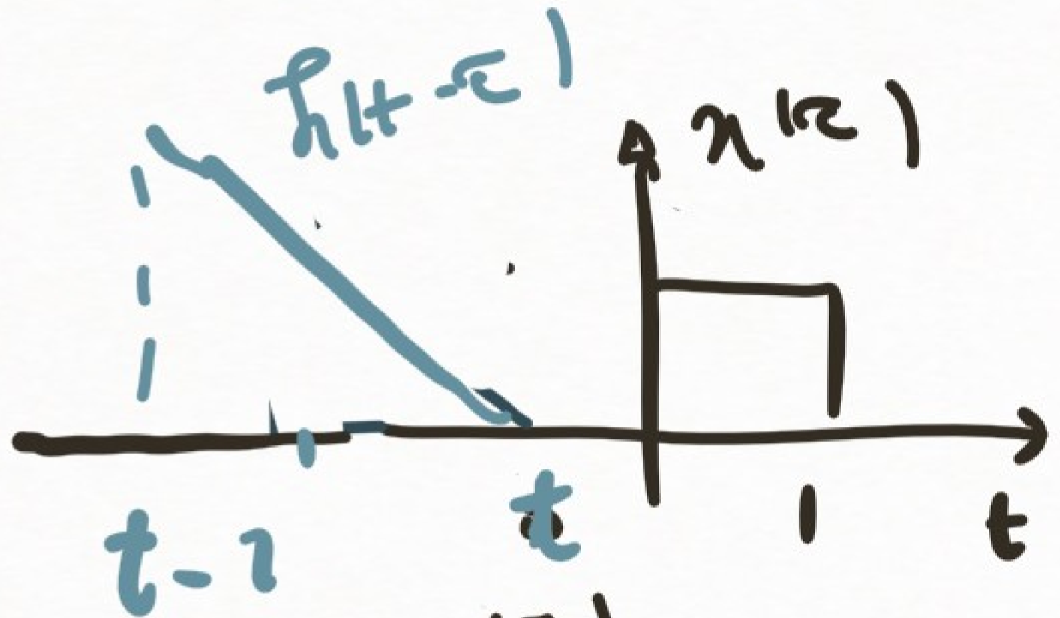
$$y(t)=x(t)*h(t)=?$$

ابتدا $h(\tau)$, $x(\tau)$ رسم میکنیم . $h(-\tau)$



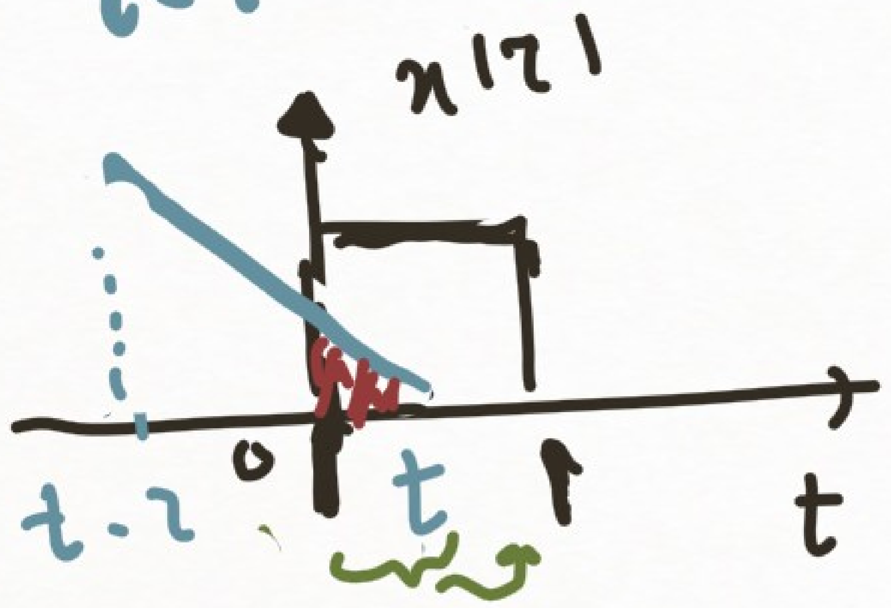


1



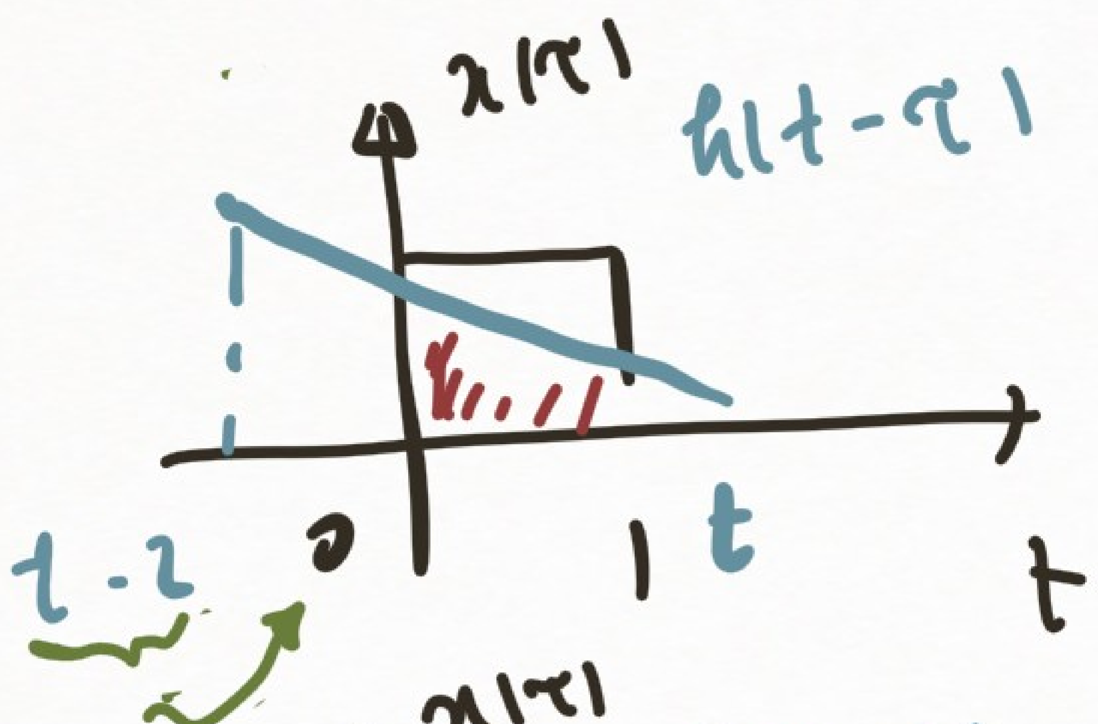
$t<0 \Longrightarrow y(t)=0$

2



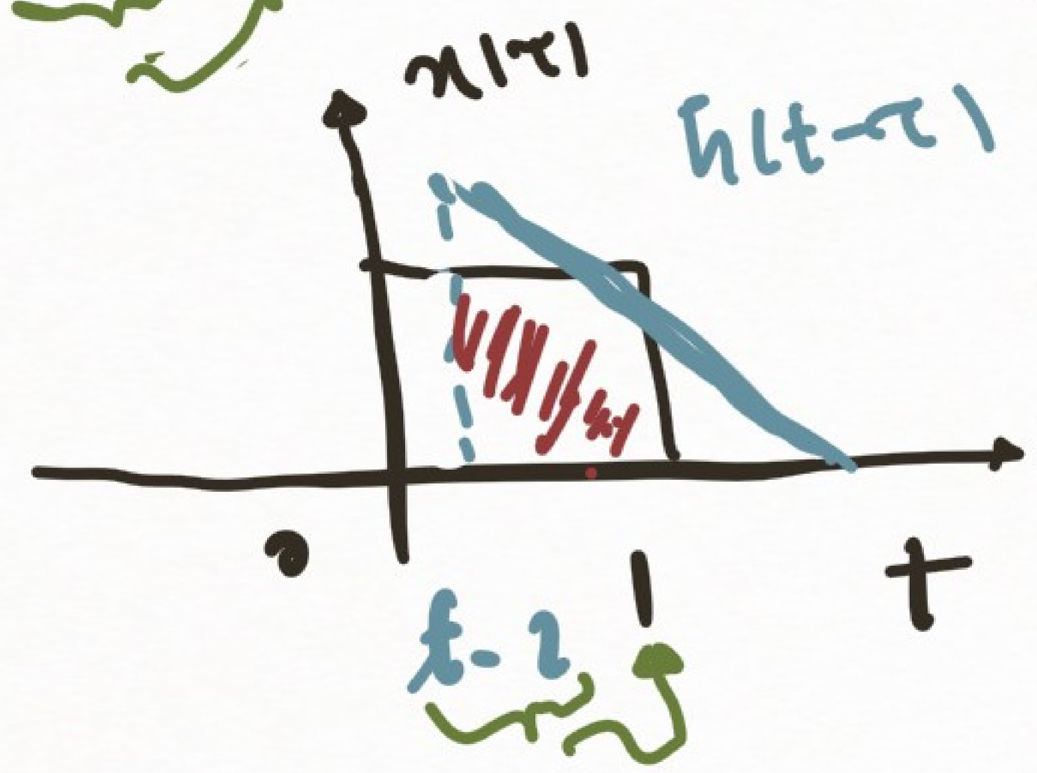
$0<t<1 \longrightarrow y(t)=\int_0^t x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau=\int 1\times(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}t^2$

3



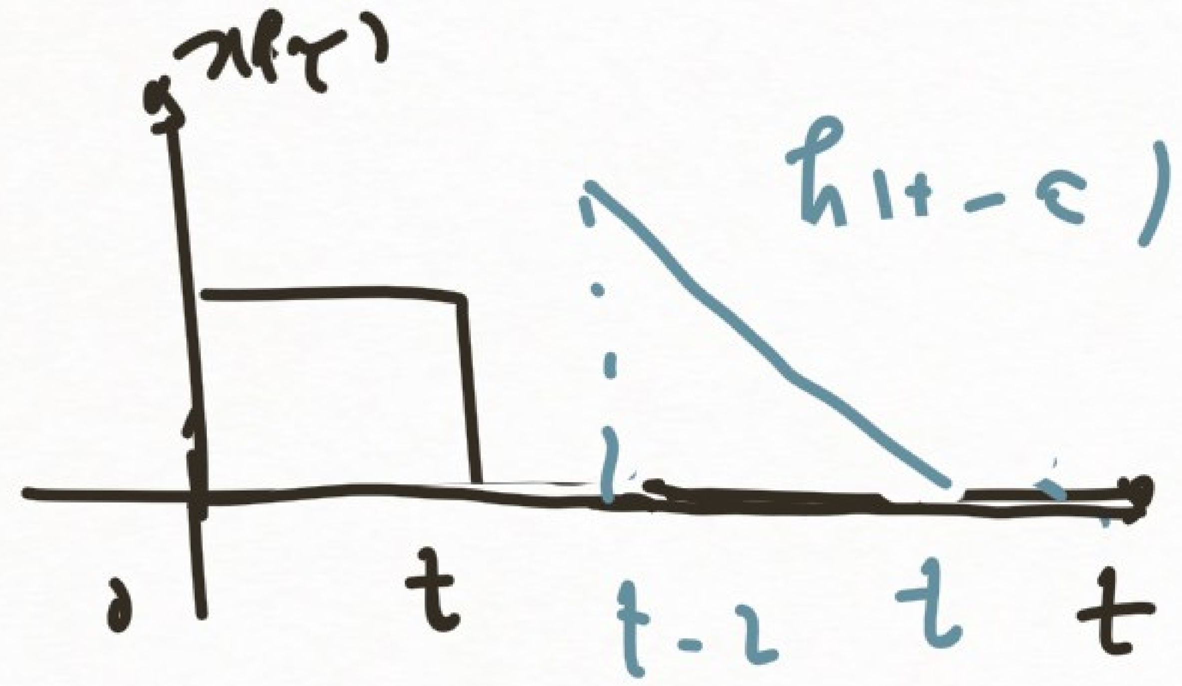
$1<t<2 \Longrightarrow y(t)=\int_0^1 1\times(t-\tau)\,d\tau = t-\frac{1}{2}$

4



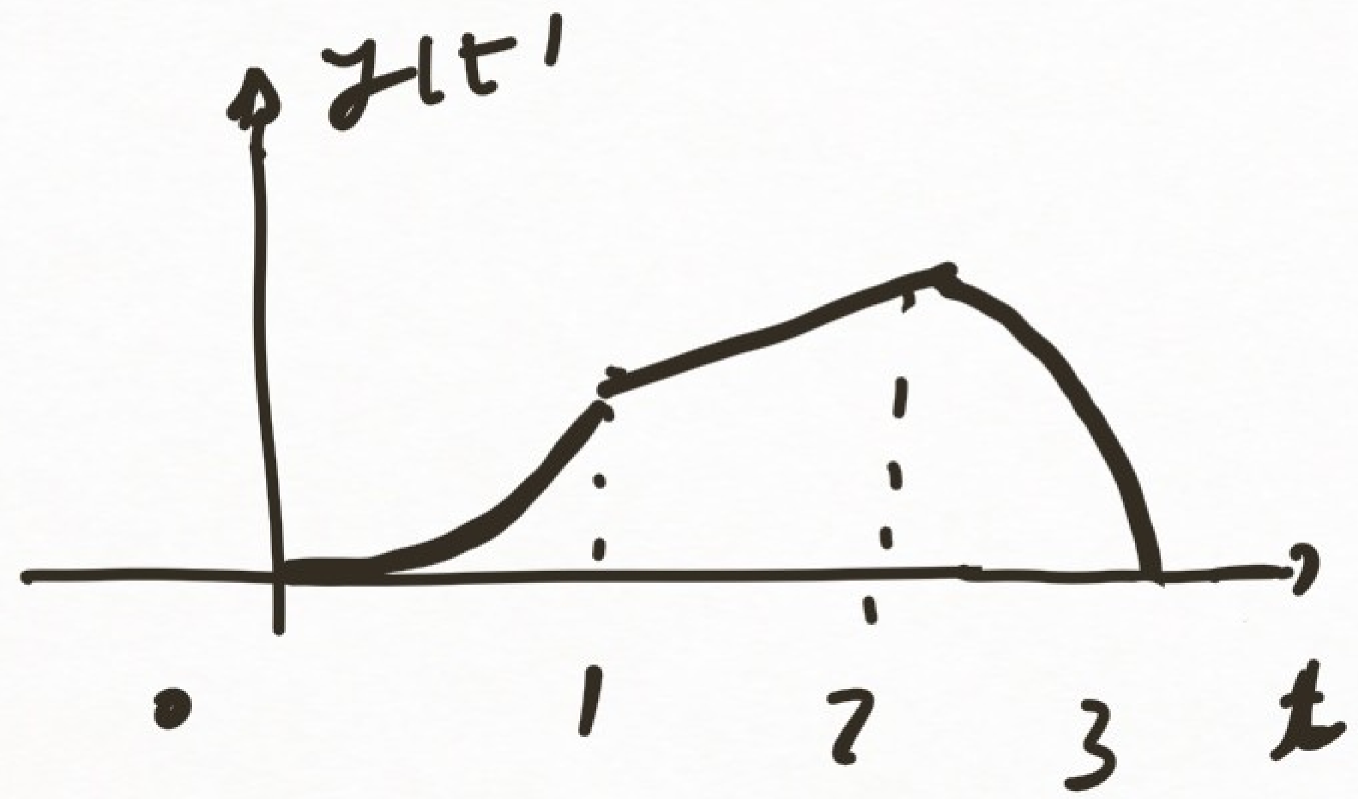
$2<t<3 \Longrightarrow y(t)=\int_{t-2}^1 1\times(t-\tau)\,d\tau = -\frac{1}{2}t^2+t+\frac{3}{2}$

⑤



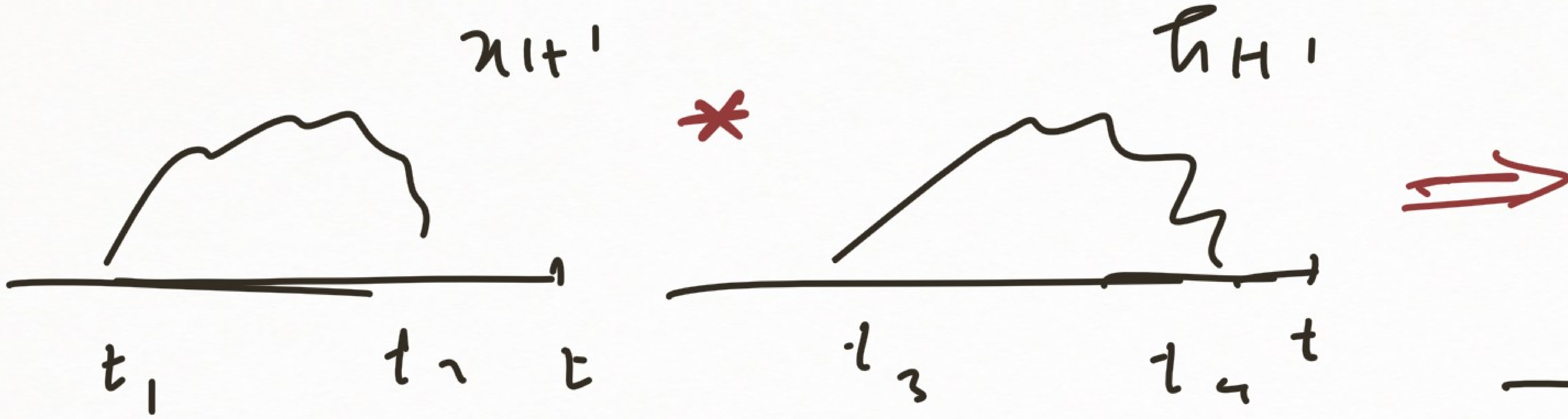
$$t > 3 \Longrightarrow y(t) = 0$$

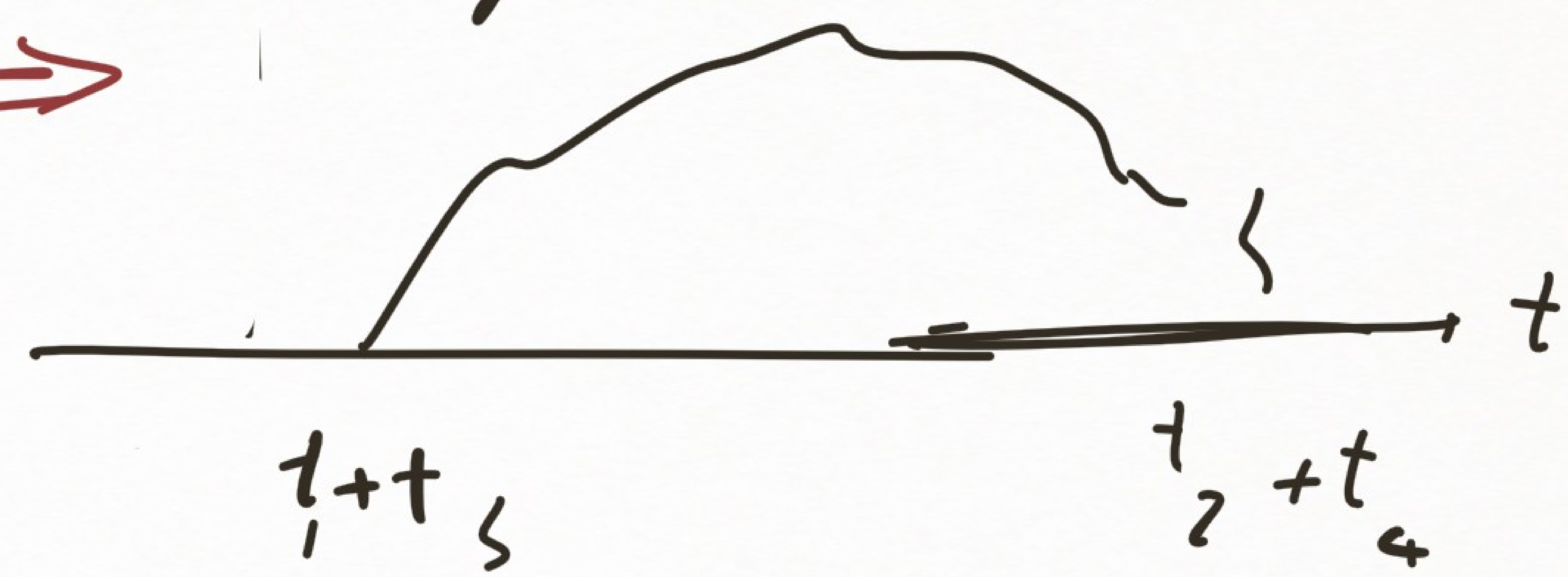
بنابراین :



توجه : شبیه حالت مقابل داریم :

$$y(t) = x(t) * h(t)$$



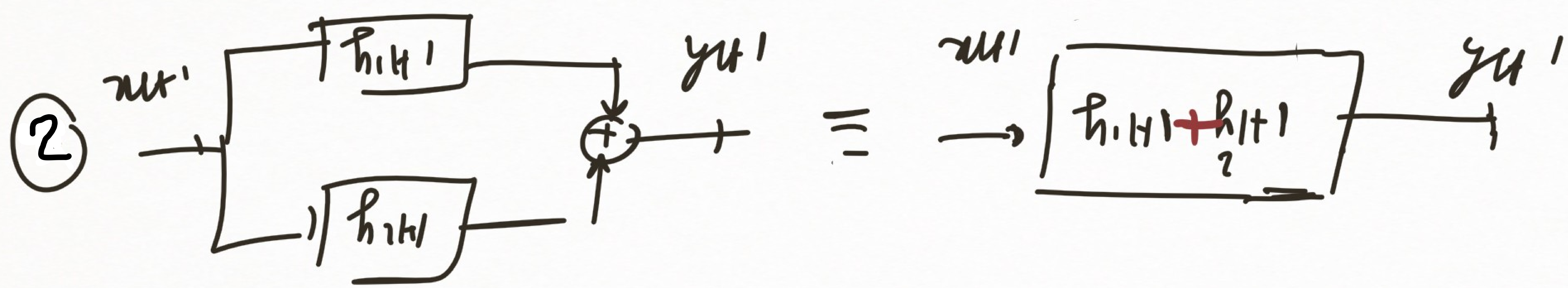


خواص کانولوشن (پیوسته و گسسته) :

1, $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$ خاصیت جابجایی پذیری $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$ با گسسته یکی

2, $x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$ و این جمع پذیر داریم / خاصیت پخش

3, $x(t) * h_1(t) * h_2(t) = (x(t) * h_2(t)) * h_1(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$ شرکت پذیر داریم.



بررسی سایر خصوصیات سیستم های LTI از روی پاسخ ضربه

۱- خاصیت حافظه دار بودن : اگر $h(t)=k\delta(t)$ یا $h(n)=k\delta(n)$ باشد سیستم بدون حافظه خواهد بود

مثال - $h(t)=5\delta(t+3) \leftarrow$ سیستم حافظه‌دار

$h(n)=10\delta(n) \leftarrow$ " بدون حافظه

۲- خاصیت پایداری : BIBO

$|x(n)|<B \Longrightarrow |y(n)|<\infty$

$$|y(n)|=|x(n)*h(n)|=\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)\right| \Rightarrow |y(n)| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(k)||x(n-k)|$$

فرض B

$$|y(n)| \leq B\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)|<\infty \Longrightarrow$$ برای پایداری باید

و به همین صورت برای پیوسته ثابت می‌شود که شرط پایداری

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < \infty$$ باید باشد.

✓ 1. $h[n] = (1/2)^n u[n]$ پایدار

2. $h[n] = 2^n u[n]$ ناپایدار

3. $h[n] = (1/2)^n u[-n]$ ناپایدار

✓ 4. $h[n] = 2^n u[-n]$ پایدار

مثال-

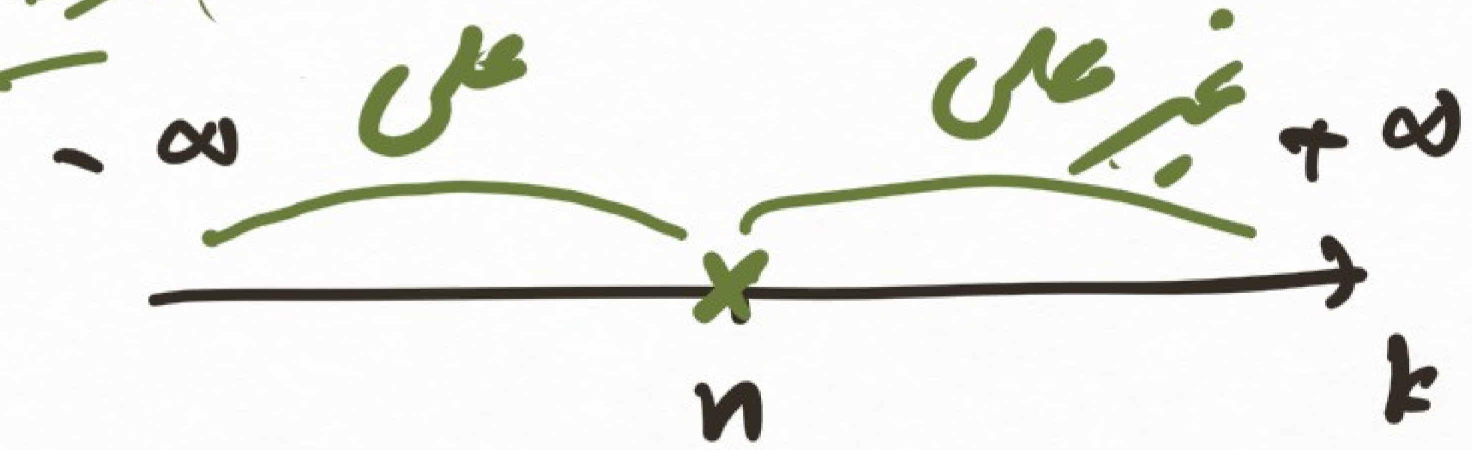
✓ 5. $h(t) = e^{-2t} u(t)$ پایدار

6. $h(t) = e^{2t} u(t)$ ناپایدار

7. $h(t) = e^{-2t} u(-t)$ ناپایدار

✓ 8. $h(t) = e^{2t} u(-t)$ پایدار

۳. خاصیت علی بودن:



شرط علی بودن:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-k]\, x[k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h\underbrace{[n-k]}_{k'}\, x[k] = \sum_{k'=+\infty}^{0} x[n-k']\, h[k'] = \sum_{k'=0}^{\infty} x[n-k']\, h[k']$$

ملاحظه شد که در صورتی سیستم علی باشد باید

$$h[n] = 0 \,, \quad n < 0$$

به همین صورت اثبات شد که در پیوسته هم نیز شرط علی بودن

$$h(t) = 0 \,, \quad t < 0$$

حل:

1. $h(t) = \delta(t+4)$ غیرعلی

2- $h(t) = u(t)$ علی

3- $h[n] = \delta[t-5]$ علی

۴- $h[n] = \delta[n+6]$ غیرعلی

۵- معکوس پذیری:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{h_2(t)} \longrightarrow x(t)$$

$$\begin{cases} y(t) = x(t) * h_1(t) \\ x(t) = y(t) * h_2(t) \end{cases} \longrightarrow y(t) = y(t) * \overbrace{h_1(t) * h_2(t)}^{\delta(t)}$$

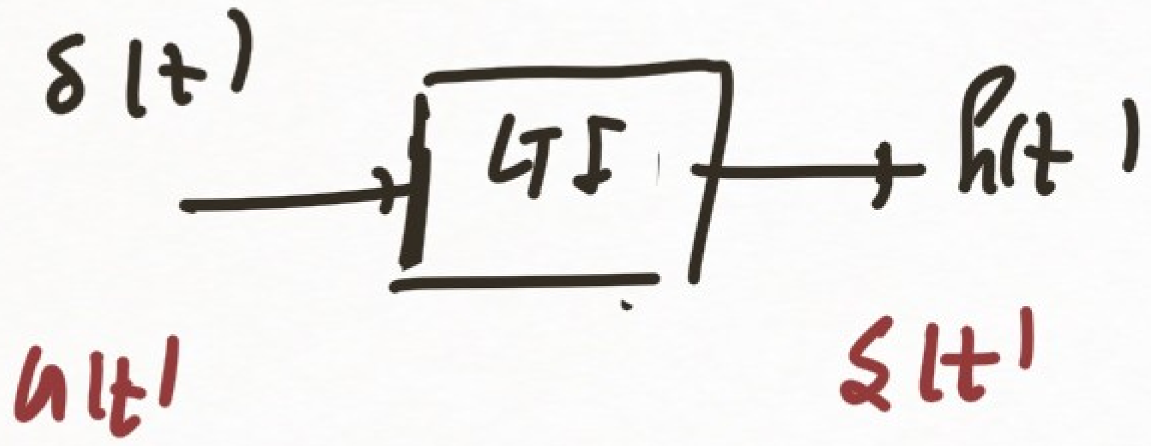
بنابراین شرط اینکه $h_2(t)$ معکوس سیستم $h_1(t)$ باشد این است که

$$\boxed{h_1(t) * h_2(t) = \delta(t)}$$

به همین صورت در سیستم های گسسته نیز شرط اینکه $h_2[n]$ معکوس $h_1[n]$ باشد این است که:

$$\boxed{h_1[n] * h_2[n] = \delta[n]}$$

پاسخ سیستم LTI به تابع پله: $u(t)$ و $u[n]$



پاسخ به سیستم LTI را با $s(t)$ و $s[n]$ نشان می‌دهیم.

همانطور که داریم:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau \quad , \quad \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$u[n] = \sum_{-\infty}^{n} \delta[k] \quad ; \quad \delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

حالا بین پاسخ ضربه ($h(t)$ یا $h[n]$) و پاسخ به پله ($s(t)$ یا $s[n]$) ارتباط زیر حاکم است

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau \quad ; \quad h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

$$u[n] = \sum_{-\infty}^{n} h[k] \quad ; \quad h[n] = s[n] - s[n-1]$$