۸.۲ تمرینهای درونیابی

۱ – تابع خطا به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$erf(x) = \frac{۲}{\sqrt{\pi}} \int_{۰}^{x} e^{-t^{۲}} dt$$

و مقادیر این تابع به‌صورت جدول زیر داده شده است

x	۰	۰.۱	۰.۲	۰.۳
$erf(x)$	۰	۰.۱۱۲۷	۰.۲۲۲۷	۰.۳۲۸۶

(الف) $erf(۰.۱۴)$ را با استفاده از درونیابی خطی تخمین بزنید.

(ب) $erf(۰.۱۴)$ را با استفاده از همه‌ی نقاط جدول تخمین بزنید.

۲– فرض کنید $f \in C^{۲}[x_{۰}, x_{۱}]$ و تابع خطی $P_{۱}(x)$ ، تابع f را در نقاط $x_{۰}$ و $x_{۱}$ درونیابی کند. نشان دهید

$$|f(x) - P_{۱}(x)| \leq \frac{h^{۲}}{۸} M$$

که $M = \max_{x_{۰} \leq x \leq x_{۱}} |f''(x)|$ و $h = x_{۱} - x_{۰}$.

۳ – فرض کنید $x_{۰}$ ، $x_{۱}$ ، … ، x_n نقاط متمایز و $L_i(x)$ ، $i = ۰, ۱, \ldots, n$ چندجمله‌ایهای لاگرانژ متناظر با این نقاط باشند. ثابت کنید

$$\sum_{i=۰}^{n} L_i(x) = ۱, \ \ \forall x$$

$$\sum_{i=۰}^{n} L_i(x) x_i^k = x^k, \ \ \forall x, \ \ \forall k \leq n$$

آیا رابطه‌ی دوم برای $k > n$ برقرار است ؟

۴ – مقادیر تابع $f(x) = \sin x$ (x بر حسب درجه) به‌صورت زیر داده شده است. حساب

کنید مقدار تقریبی $\sin 22^\circ$. همچنین کوچکترین کران را برای خطای $E(22^\circ)$ به‌دست آورید.

x	۲۰	۲۵	۳۰
$f(x)$	۰.۳۴۲۰۲	۰.۴۲۲۶۲	۰.۵۰۰۰۰

۵ — تابع $f(x)$ مفروض است. نشان دهید اگر چندجمله‌ای $P(x)$ تابع $f(x)$ را در نقاط x_1 ، x_2 ، … ، x_{n-1} درونیابی کند، و چندجمله‌ای $Q(x)$ تابع $f(x)$ را در نقاط x_2 ، x_3 ، … ، x_n درونیابی کند، آنگاه چندجمله‌ای

$$R(x) = P(x) + \frac{x - x_1}{x_n - x_1}\left[Q(x) - P(x)\right]$$

$f(x)$ را در نقاط x_1 ، x_2 ، … ، x_n درونیابی می‌کند. در حالت خاص، برای تابع $f(x) = \sin x$ و نقاط $x_1 = 0$، $x_2 = \frac{\pi}{6}$ و $x_3 = \frac{\pi}{2}$ ، چندجمله‌ای $R(x)$ را به‌دست آورید.

٦ — اگر $P(x)$ چندجمله‌ای باشد که تابع $f(x)$ را در نقاط متمایز x_0 ، x_1 ، … ، x_n درونیابی کند ، نشان دهید

$$f(x) - P(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(f(x) - f(x_i)\right) L_i(x)$$

که $L_i(x)$ ها چندجمله‌ایهای لاگرانژ متناظر با نقاط x_i ، $i = 0, 1, \dots, n$ هستند.

۷— ثابت کنید اگر z_0 ، z_1 ، … ، z_n ترتیب جدیدی از نقاط درونیابی x_0 ، x_1 ، … ، x_n باشد، آنگاه

$$f[z_0, z_1, \dots, z_n] = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

۸ — فرض کنید x_0 ، x_1 ، … ، x_n نقاط متمایز باشند و $L_j(x)$ ، $j = 0, 1, \dots, n$ چندجمله‌ایهای لاگرانژ متناظر با این نقاط باشند. ثابت کنید

$$L'_j(x_j) = \sum_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{1}{x_j - x_i}$$

۹ — تابع $f(x) = |x|$ را با یک چندجمله‌ای $P(x)$ از درجه ۴، تقریب بزنید به‌طوری که مقادیرش با مقادیر $f(x)$ در نقاط $x_0 = -2$ ، $x_1 = -1$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 1$ ، $x_4 = 2$ برابر باشد. نمودار $f(x)$ و $P(x)$ را در یک صفحه مختصات رسم کنید.

۱۰ — فرض کنید $P(x)$ چندجمله‌ای حداکثر از درجه‌ی n باشد که تابع $f(x) = e^x$ را در $n + 1$ نقطه‌ی متمایز که در بازه $[-1, 1]$ قرار دارند درونیابی کند و یکی از نقاط درونیابی $x = 0$ باشد. اولاً نشان دهید

$$|E(x)| = |f(x) - P(x)| \le \frac{2^n}{(n+1)!} e \;\; , \;\; -1 \le x \le 1$$

ثانیاً، در حالت خاص $n = 2$ ، و نقاط درونیابی $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $x_1 = 0$ و $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $P(x)$ را به‌دست آورید. همچنین $P(0.5)$ و $P'(0)$ را محاسبه کنید و با مقادیر $f(0.5)$ و $f'(0)$ مقایسه کنید.

۱۱ — فرض کنید $f(t)$ یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۳ باشد. نشان دهید

$$f[x,y,z] = \frac{1}{2} f''\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

که x، y و z متمایز هستند.

۱۲ — فرض کنید چندجمله‌ای درجه‌ی دوم $P_2(x)$ ، تابع $f(x)$ را در نقاط متمایز x_0 ، x_1 و x_2 درونیابی کند. نشان دهید

$$\begin{vmatrix} P_2(x) & 1 & x & x^2 \\ f_0 & 1 & x_0 & x_0^2 \\ f_1 & 1 & x_1 & x_1^2 \\ f_2 & 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

که $f_i = f(x_i)$ ، $i = 0, 1, 2$

۱۳ — فرض کنید x_0 ، x_1 ، $\ldots$ ، x_n نقاط متمایز باشند و $Q(x)$ یک چندجمله‌ای درجه‌ی k با ریشه‌های x_0 ، x_1 ، $\ldots$ ، x_{k-1} $(k \le n)$ باشد. نشان دهید

$$Q(x) = \sum_{i=k}^{n} Q(x_i) L_i(x)$$

۱۴ — تابع $f(x) = \log_2 x$ مفروض است. یک تابع قطعه— قطعه خطی با استفاده از گره‌های $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ و ۱ برای $f(x)$ به‌دست آورید.

۱۵ — آمار جمعیت کشور در ۴ دوره در جدول زیر آمده است

t	۱۳۳۵	۱۳۴۵	۱۳۵۵	۱۳۶۵
$P(t)$	۱۸۹۵۴۰۰۰	۲۵۷۸۸۰۰۰	۳۳۷۰۸۰۰۰	۴۹۴۴۵۰۰۰

بااستفاده از درونیابی :

(الف) جمعیت کشور را در سال ۱۳۶۰ برآورد کنید.

(ب) جمعیت کشور را در سال ۱۳۷۵ برآورد کنید.

۱۶ — نشان دهید اگر f در x_0 مشتق‌پذیر باشد، آنگاه

$$f[x_0, x_0, x_0] = \frac{1}{2} f''(x_0)$$

۱۷ — اگر $f(x) = x^3$ و x_0 ، x_1 ، x_2 و x_3 نقاط متمایز با شند، نشان دهید

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 1 \quad , \quad f[x_0, x_1, x_2] = x_0 + x_1 + x_2$$

۱۸ — نشان دهید تابع زیر یک اسپلاین مکعبی نیست.

$$s(x)=\begin{cases} x^3+(x+1)^3 & -1\le x<0 \\ (x+1)^3 & 0\le x\le 1 \\ (x-1)^3+12(x-1)+8 & 1\le x\le 5 \end{cases}$$

۱۹ — تابع $f(x)=\sin x$ بر بازه‌ی $[1,3]$ مفروض است. این بازه را حداقل به‌چند زیر بازه با طول مساوی باید تقسیم کرد به‌طوری که اگر $f(x)$ در یکی از این زیر بازه‌ها توسط یک تابع خطی درونیابی شود، خطای درونیابی خطی از $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$ بیشتر نباشد.

۲۰ — نشان دهید تابع تعریف شده به‌صورت زیر یک اسپلاین درجه‌ی ۲ است.

$$s(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 1 \\ 1+2(x-1)+7(x-1)^2 & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

۲۱ — یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۳ بیابید که مقادیر آن با مقادیر تابع $f(x)=\sin(\frac{\pi x}{2})$ در نقاط $x=0$ ، $x=1$ ، $x=2$ و $x=3$ برابر باشد.

۲۲ — فرض کنید $s(x)$ یک اسپلاین مکعبی طبیعی با گره‌های

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

باشد به‌طوری که تابع $f\in C^2[a,b]$ را در نقاط x_i ، $i=0,1,\ldots,n$ درونیابی کند. نشان دهید

$$\int_a^b (s''(x))^2\,dx \le \int_a^b (f''(x))^2\,dx$$

این یکی از ویژه‌گیهای اسپلاین‌های مکعبی است و آن را خاصیت می‌نیمم انحنا و همچنین خاصیت می‌نیمم انرژی توابع اسپلاین می‌نامند.

۲۳ — فرض کنید $f(x)$ یک تابع مفروض و x_0 ، x_1 ، ... ، و x_n نقاط متمایز باشند. تعریف می‌کنیم

$$g(x)=f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]$$

نشان دهید

$$g'(x)=f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x,x]$$

۲۴ — نشان دهید تابع زیر یک اسپلاین مکعبی است.

$$s(x)=\begin{cases} 1+x & 0\le x\le 2 \\ 1+x+(x-2)^3 & 2\le x\le 3 \end{cases}$$

۲۵ – مقادیر a ، b ، c و d را طوری تعیین کنید که تابع

$$s(x)=\begin{cases} ۶+۳x-۸x^{۳} & ۰\le x\le ۱\\ a+b(x-۱)+c(x-۱)^{۲}+d(x-۱)^{۳} & ۱\le x\le ۲\end{cases}$$

یک اسپلاین مکعبی با گرههای ۰ ، ۱ و ۲ باشد و $\int_{۰}^{۲}(s''(x))^{۲}dx$ می‌نیمم باشد.

۲۶ – به‌ازای چه مقادیری از k تابع زیر یک اسپلاین است ؟

$$s(x)=\begin{cases} x^{۳}+۲x^{۲}+۱ & -۱\le x\le ۰\\ -x^{۳}+kx^{۲}+۱ & ۰\le x\le ۱\end{cases}$$

۲۷ – با استفاده از تعریف ، معادلات اسپلاین مکعبی متناوب را بر بازه‌ی $[-۱,۱]$ و متناظر با گره‌های ۱– ، ۰ و ۱ به‌دست آورید به‌طوری که مقادیر تابع f مطابق جدول زیر را درونیابی کند.

x	-۱	۰	۱
$f(x)$	۱	۲	۱

۲۸ – ضرایب تابع

$$g(x)=a_{۱}+a_{۲}\cos x+a_{۳}\sin x$$

را طوری تعیین کنید که نمودار $g(x)$ از نزدیک نقاط داده‌شده در جدول زیر بگذرد.

x	۰	۱	۲	۳
y	۵	۵۴	۹۹	۱۸۱

۲۹ – بهترین منحنی به‌شکل $y=c\,e^{ax}$ بیابید که داده‌های جدول زیر را برازش کند.

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	۱	۳	۸	۲۲	۶۰

۳۰ – برای داده‌های جدول زیر ، خط کمترین توانهای دوم را به‌دست آورید.

x	-۲	-۱	۰	۱	۳
y	۱	۲	۳	۳	۴

۳۱ – با روش خطی سازی، بهترین منحنی (تابع هایپربولیک) به‌صورت

$$y=\frac{a}{x}+b$$

که داده‌های زیر را برازش می‌کند، بیابید.

x	۰.۵	۰.۸	۱.۲	۱.۵
y	۷.۰	۶.۰	۵.۸	۵.۶

۳۲ – بهترین منحنی به‌شکل $y = ax^۲$ که داده‌های زیر را برازش کند ، به‌دست آورید.

x	-۲	-۱	۲	۳
y	۱	۱	۳	۴

۳۳ – با استفاده از روش کمترین توانهای دوم، بهترین منحنی به‌شکل

$$y = ax^۲ + b$$

که داده‌های زیر را برازش کند، به‌دست آورید.

x	-۲	-۱	۲	۳
y	۱	۱	۳	۴

۳۴ – با روش خطی‌سازی ، بهترین منحنی (تابع هایپربولیک) به‌صورت

$$y = \frac{x}{a + bx}$$

که داده‌های زیر را برازش می‌کند، بیابید.

x	-۱	۰	۰.۵	۲	۳
y	۱	۰	۰.۲	۰.۵	۰.۶

۳۵ – در جدول زیر x را که متناظر با $f(x) = ۰.۳۹۸۷۵$ است ، تخمین بزنید. این فرایند، درونیابی **معکوس** نامیده می‌شود.

x	۲۰	?	۳۰
$f(x)$	۰.۳۴۲۰۲	۰.۳۹۸۷۵	۰.۵۰۰۰۰

اگر جدول مربوط به تابع $f(x) = \sin x$ باشد ، که در آن x برحسب درجه است ، خطای تخمین را محاسبه کنید.