یا لطیف

رضا آدینه پور
۹۸۱۴۳۰۳
تمرین سری ۳ محاسبات عددی
گروه ۳.

#3

$$\begin{cases} 5x - 4\cos x = 0 \\ \text{الف) بدست آوردن ریشه} \rightarrow \epsilon = 0.0001 \rightarrow \text{fix point روش} \\ \text{ب) با روش } \Delta^2 \text{-ایتکن} \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(x) = 5 + 4\sin x \longrightarrow$ (الیدا یکنوا) همواره مثبت است $\longrightarrow f(0) f(\frac{\pi}{2}) < 0 \longrightarrow$ فقط یک ریشه در این بازه دارد

$$\Rightarrow x = \frac{4}{5}\cos x \Rightarrow g(x) = 0.8\cos x$$

$$x_{n+1} = g(x_n) \Rightarrow x_{n+1} = 0.8\cos x_n \quad \rightarrow \quad x_0 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0.8 \\ x_2 = 0.55737 \\ x_3 = 0.67892 \\ x_{12} = 0.64108 \\ x_{13} = 0.64116 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x_{13} - x_{12}| = 0.00008 < 0.0001$$

$$\Rightarrow x_{13} = 0.64116 \cong \alpha$$

ب) $\tilde{x}_3 = x_0 - \frac{(\Delta x_0)^2}{\Delta^2 x_0} = 0.61383 \xrightarrow{x_3 = \tilde{x}_3}$

$$\begin{cases} x_4 = g(x_3) = 0.8\cos(0.61383) = 0.6540 \\ x_5 = g(x_4) = 0.8\cos(0.6540) = 0.6349 \end{cases}$$

$$\tilde{x}_6 = x_3 - \frac{(x_4 - x_3)^2}{x_5 - 2x_4 + x_3} = 0.64106$$

$\xrightarrow{\tilde{x}_6 = x_6}$
$$\begin{cases} x_7 = g(x_6) = 0.8\cos(0.64106) = 0.6412 \\ x_8 = g(x_7) = 0.8\cos(0.6412) = 0.6411 \end{cases} \Rightarrow \tilde{x}_9 = \frac{x_6 - (x_7 - x_6)^2}{x_8 - 2x_7 + x_6} = 0.64113$$

#9 $f(x) = x^2 - 3x + e^x - 2 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} f(-1) \simeq 2.36 \\ f(0) = -1 \end{cases} \longrightarrow f(0)f(-1) < 0 \longrightarrow$ در $(-1,0)$ یک ریشه داریم

$\Rightarrow x = \dfrac{e^x + x^2 - 2}{3} = g(x) \longrightarrow g'(x) = \dfrac{e^x + 2x}{3} \xrightarrow{-1 \le x \le 0} e^{-1} \le e^x \le 1$

$\dfrac{-2 + e^{-1}}{3} \le \dfrac{e^x + 2x}{3} \le \dfrac{1}{3} \Rightarrow |g'(x)| \le 0.5440 < 1 \Rightarrow x_{n+1} = \dfrac{e^{x_n} + x_n^2 - 2}{3}$

$\Rightarrow$

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
1	-0.33333	0.33333
2	-0.39079	0.05746
3	-0.39025	0.00054
4	-0.39027	0.00002

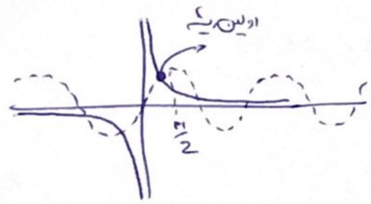
if $\varepsilon = 0.5 \times 10^{-3} \Rightarrow |x_4 - x_3| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$

$|\alpha - x_4| < |x_4 - x_3| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$; $L = 0.5440$

$\alpha =$ تا سه رقم اعشار درست $= x_4$

#15 $f(x) = x \sin x - 1 = 0 \longrightarrow$ اولین ریشه مثبت (نیوتون رافسون)

$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{x} \\ y = \sin x \end{cases} \longrightarrow y = \frac{1}{x}$



اولین ریشه مثبت در $(0, \frac{\pi}{2})$

$f'(x) = \sin x + x \cos x$

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n \sin x_n - 1}{\sin x_n + x_n \cos x_n} = \dfrac{x_n^2 \cos x_n + 1}{\sin x_n + x_n \cos x_n} = x_{n+1}$

if $\begin{cases} x_0 = 1 \\ |x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2} \times 10^{-4} \end{cases} \Rightarrow$

n	x_n	
0	1	—
1	1.114729	0.114729
2	1.114157	5.72×10^{-4}
3	1.114157	

#21 $x_{n+1} = \dfrac{x_n(x_n^2 + 3r)}{2x_n^2 + r}$ $\quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (r > 0)$

الف) $\lim_{n \to \infty} \{x_n\}_0^\infty \Rightarrow g(x) = \dfrac{x(x^2+3r)}{3x^2+r} \xrightarrow[\text{وجود دارد}]{\text{فرض می‌کنیم حد}} \lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$

$\Rightarrow \dfrac{\alpha(\alpha^2+3r)}{3\alpha^2+r} = \alpha \Rightarrow \alpha^2 - r = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \sqrt{r}}$

ب) $f(x) = x^2 - r$

ج) $g''(x) = \dfrac{(12x^3 - 12rx)(3x^2+r)^2 - (3x^4 - 6rx^2 + 3r^2)(12x)(3x^2+r)}{(3x^2+r)^4}$

$\Rightarrow g^{(3)}(\sqrt{r}) \neq 0 \rightarrow$ مرتبه همگرایی برابر با 3 است

د) if $r = 3 \rightarrow x_{n+1} = \dfrac{x_n(x_n^2+9)}{3x_n^2+3} \xrightarrow[|x_{n+1}-x_n| < \frac{1}{2}\times10^{-3}]{x_0 = 1}$

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
1	1.66667	6.6667×10^{-1}
2	1.732026	6.5359×10^{-2}
3	1.732050	2.4664×10^{-5}

---

27 $f(x) = e^x - 3x^2 = 0 \xrightarrow[\text{تابع پیوسته است}]{} \begin{cases} f(-1) < 0 \\ f(0) > 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \rightarrow$ یک ریشه در $(-1, 0)$ و یک ریشه در $(0, 1)$

$\begin{cases} f(3) < 0 \\ f(4) > 0 \end{cases} \rightarrow (3, 4)$ یک ریشه دیگر در

$\Rightarrow e^x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{e^x}{3}} = g(x) \Rightarrow x_{n+1} = g(x_n)$

if $\begin{cases} x_0 = 1 \\ |x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2}\times10^{-3} \end{cases} \Rightarrow$

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
1	0.95189	4.8110×10^{-2}
2	0.92927	2.2625×10^{-2}
3	0.91881	1.0453×10^{-2}
4	0.91402	4.7896×10^{-3}
5	0.91184	2.1863×10^{-3}
6	0.91084	9.9622×10^{-4}

محاسبه ریشه در $(3, 4)$ $\rightarrow e^x = 3x^2 \Rightarrow x = \ln(3x^2) = g(x) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{2}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq g'(x) \leq \frac{2}{3} \Rightarrow |g'(x)| < 1$

$x_0 = 3.5$:

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
1	3.6041	1.0414×10^{-1}
2	3.6628	5.8639×10^{-2}
3	3.9551	3.2278×10^{-2}
⋮		
8	3.7314	1.4684×10^{-3}
9	3.7322	7.872×10^{-4}

محاسبه ریشه در (-۱,۰)
به روش وتری :

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)} \longrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| x_{n+1} - x_n \right| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
2	-0.27532	2.7532×10^{-1}
3	-0.58820	3.1287×10^{-1}
4	-0.43936	1.4833×10^{-1}
5	-0.45711	1.7743×10^{-2}
6	-0.45899	1.8834×10^{-3}
7	-0.45896	2.9322×10^{-5}