SUBJECT: DATE: / /

* هر سیگنال پریودیک را می‌توان به صورت جمع یک سری سیگنال های سینوسی نوشت ← سری فوریه

* روابط سری فوریه:

پیوسته: $\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$

رابطه سنتز: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

رابطه آنالیز: $a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$

گسسته: $\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{N}\right)$

سنتز: $x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$

آنالیز: $a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$

تفاوت سری فوریه پیوسته و گسسته در این است که در پیوسته بی نهایت هارمونیک متمایز داریم (a_k) اما در گسسته تنها N هارمونیک متمایز داریم یعنی

$\varphi_k[n] = \varphi_{k+N}[n] = \varphi_{k+rN}[n]$ ← r عدد صحیح است

* شرایط دیریکله (همگرایی سری فوریه)

1- $\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$ (انرژی سیگنال محدود باشد)

2- تعداد نقاط ناپیوستگی $x(t)$ در هر پریود محدود باشد

3- تعداد نقاط اکسترمم در هر پریود محدود باشد

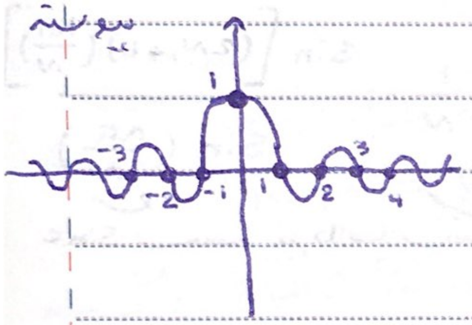
ECHN

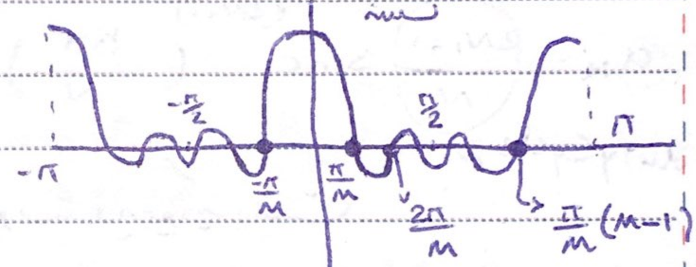
* تعریف تابع Sinc :

پیوسته : $\text{Sinc}(\lambda) = \dfrac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}$

گسسته : $\text{Sinc}^{(M)}(x) = \dfrac{1}{M} \cdot \dfrac{\sin Mx}{\sin x}$

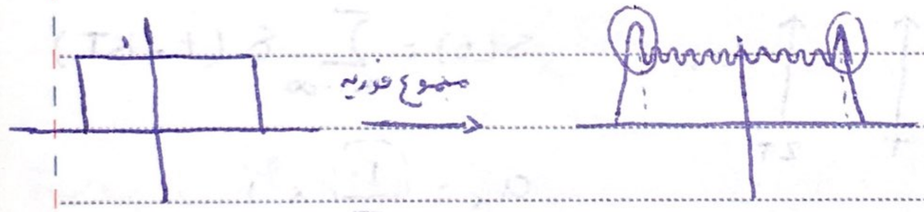
(نرمال شدن داده ر
نسبت گسسته به چیز
من درآوردیه)





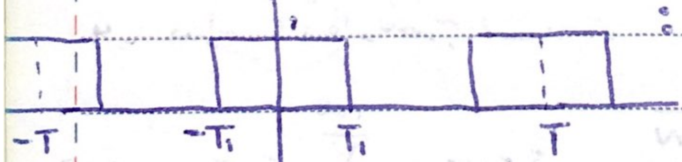
تابع Sinc گسسته برای M های فرد با پریود π پریودیک است

* پدیده گیبس :



* ضرایب سری فوریه توابع پایه :

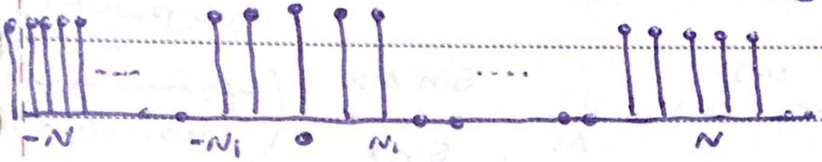
۱- ضرایب موج مربعی پیوسته :



$a_K = d \cdot \text{Sinc}(Kd)$, $d = \dfrac{\text{مدت زمانی که سیگنال High است}}{\text{کل پریود}}$

duty cycle ← در اینجا $\dfrac{2T_1}{T}$

2 - ضرایب موج مربعی گسسته:

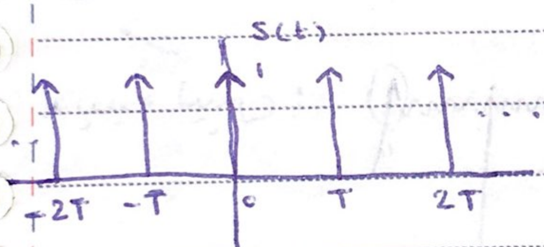


$$a_k = \frac{2N_1+1}{N}\, \text{Sinc}^{(2N+1)}\left(\frac{k\pi}{N}\right) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin\left[(2N_1+1)\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right]}{\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)}$$

dutyCycle

Sinc گسسته برخلاف سینک پیوسته، پریودیک است

3 - ضرایب قطار ضربه (impulse Train) : (پیوسته)

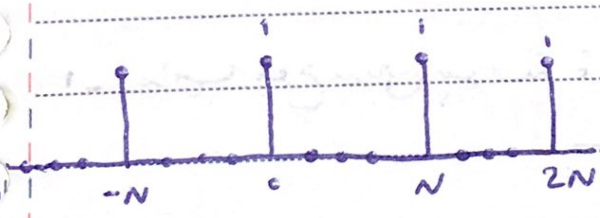


$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \times 1$$

دامنه ضربه

4 - ضرایب قطار ضربه گسسته:



$$s[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n-rN]$$

$$a_k = \frac{1}{N}$$

* انتقال سیگنال به بالا یا پایین فقط مقدار dc سیگنال (a_0) را تغییر می‌دهد و بقیه ضرایب تغییری نمی‌کنند

$$\underbrace{g(t)}_{a_k} = \underbrace{y(t-1)}_{c_k} - \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} k \neq 0 \Rightarrow a_k = c_k \\ k = 0 \Rightarrow a_0 = c_0 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{\underset{LTI}{H(j\omega)}} \longrightarrow y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}$$

SUBJECT: DATE: / /

پاسخ سیستم LTI به ورودی پریودیک به نسبت پاسخ فرکانسی

* خواص سری فوریه :

1) سری فوریه برای هر سیگنال unic است

2) خطی بودن :

پریود هر دو یکسان

پیوسته : $x(t) \xleftrightarrow{F.S} a_k$, $y(t) \xleftrightarrow{F.S} b_k$ $\Longrightarrow \underbrace{A x(t) + B y(t)}_{\text{پریودیک با همان پریود}} \xleftrightarrow{F.S} A a_k + B b_k$

گسسته : $x[n] \xleftrightarrow{F.S} a_k$, $y[n] \xleftrightarrow{F.S} b_k$ $\Longrightarrow \underbrace{A x[n] + B y[n]}_{\text{پریودیک با همان پریود}} \xleftrightarrow{F.S} A a_k + B b_k$

پریودها یکسان

3) شیفت زمانی (Time shifting) :

پیوسته : if $x(t) \xleftrightarrow{F.S} a_k \Longrightarrow x(t-t_0) \xleftrightarrow{F.S} e^{-jk\omega_0 t_0} \cdot a_k$

گسسته : if $x[n] \xleftrightarrow{F.S} a_k \Longrightarrow x[n-n_0] \xleftrightarrow{F.S} e^{-jk\frac{2\pi}{N} n_0} \cdot a_k$

4) معکوس شدن زمان (time reversal) : اگر سیگنال در زمان معکوس شود ، ضرایب سری فوریه آن هم معکوس می شود

پیوسته : $x(-t) \xleftrightarrow{F.S} a_{-k}$

گسسته : $x[-n] \xleftrightarrow{F.S} a_{-k}$

SUBJECT: DATE: / /

⑤ جابه‌جایی در ضرایب :

پیوسته :

if $x(t) \xleftrightarrow{F.S} a_k \Rightarrow e^{jw_0Mt} x(t) \xleftrightarrow{F.S} a_{k-M}$

گسسته : $e^{j\frac{2\pi}{N}nM} x[n] \xleftrightarrow{F.S} a_{k-M}$

⑥ Time scaling :

if $x(t) \xleftrightarrow{F.S} a_k \Rightarrow x(\alpha t) \xleftrightarrow{F.S} a_k$

ضرایب تغییر نمی‌کند، فقط w_0، α برابر می‌شود (T، $\frac{1}{\alpha}$ برابر)

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\alpha w_0)t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j(\alpha k)w_0 t}$$

دوره تناوب (یا فرکانس) تغییر می‌کند ← بلکه هارمونیک‌ها فرد صفر می‌شود

* به همین دلیل Time Saling را نداریم، تنها بایدا است که پریود جدید را محاسبه کنیم و آن را جایگذاری کنیم.

* برای حالت گسسته هم به همین صورت است.

⑦ ضرب (multipliction) : $\xleftarrow{\text{صفحه بعد}}$

$c_k = a_k \circledast b_k$

SUBJECT: پریودهای یکسان DATE: / /

پیوسته: $\left\{\begin{array}{l} x(t) \xleftrightarrow{F.S} a_k \\ y(t) \xleftrightarrow{F.S} b_k \end{array}\right. \Rightarrow x(t) \cdot y(t) \xleftrightarrow{F.S} c_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$

گسسته: $x[n] \cdot y[n] \xleftrightarrow{F.S} c_k = \sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l} = a_k \circledast b_k$

کانولوشن پریودیک

* اگر دو سیگنال در هم ضرب شوند، ضرایب سری فوریه آنها در هم کانوالو می‌شوند

⑧ مزدوج (Conjugation):

پیوسته: $x^*(t) \xleftrightarrow{F.S} a^*_{-k}$

نتیجه: If $x(t) = \text{Real} \rightarrow$
$$\left\{\begin{array}{l} 1)\ x(t) = x^*(t) \\ 2)\ a_k = a^*_{-k} \text{ یا } a_{-k} = a^*_k \\ 3)\ |a_k| = |a^*_{-k}| = |a_{-k}| \\ 4)\ Re\{a_k\} = Re\{a^*_{-k}\} = Re\{a_{-k}\} \\ 5)\ Im\{a_k\} = Im\{a^*_{-k}\} = -Im\{a_{-k}\} \\ 6)\ \measuredangle a_k = \measuredangle a^*_{-k} = -\measuredangle a_{-k} \end{array}\right.$$

3) دامنه تقارن زوج دارد

4) $Re\{x(t)\} = \frac{1}{2}(x(t) + x^*(t))$

6) فاز می‌تواند فرد انتخاب شود

If $x(t)$: Real and Even $\rightarrow$ ضرایب سری فوریه آن حقیقی و زوج است

If $x(t)$: Real and Odd $\rightarrow$ ضرایب سری فوریه آن موهومی خالص و فرد است

$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = \frac{\text{سطح زیر یک پریود}}{\text{پریود}} =$ مقدار dc سیگنال

* برای حالت گسسته هم دقیقاً همین روابط برقرار است

SUBJECT: DATE: / /

* برای سیگنال های حقیقی متناوبی لازم است که هارمونیک های مثبت را (ضرایب سری فوریه مثبت (K ها مثبت)) داشته باشیم ← هارمونیک های منفی طبق این رابطه ساخته می شوند : $a_K = a_{-K}^*$

اما برای سیگنال های مختلط متناوب لازم است که هارمونیک های منفی را هم داشته باشیم

⑨ رابطه پارسوال (Parseval) :

$$\underset{\text{در یک پریود}}{\overset{\text{توان متوسط}}{P_{av}}} = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \underbrace{|a_K|^2}_{\text{توان هارمونیک } K \text{ ام}}$$

توان سیگنال = $\sum$ (توان تک تک هارمونیک ها) ← در پیوسته و گسسته یکسان است

گسسته : $P_{av} = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2 = \sum_{K=\langle N\rangle} |a_K|^2$

* در حالت کلی اگر دو سیگنال x_1 و x_2 را باهم جمع کنیم ، توان آنها باهم جمع نمی شود اما برای سیگنال هایی که با سری فوریه ساخته می شوند این حرف (رابطه پارسوال) برقرار است.

⑩ مشتق :

پیوسته : $x'(t) \xleftrightarrow{F.S} (jK\omega_0)\, a_K$

ECHN

گسسته ← دیفرنس : $x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{F.S} (1 - e^{-jK\frac{2\pi}{N}})\, a_K$

SUBJECT: DATE: / /

(11) انتگرال: به شرطی که سطح زیر نمودار در یک پریود صفر باشد

← $a_0 = 0$ ← سیگنال مقدار DC نداشته باشد در غیر این صورت

حاصل انتگرال واگرا است

پیوسته: $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{F.S} \frac{a_k}{jk\omega_0}$

گسسته: running Sum: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \xleftrightarrow{F.S} \frac{a_k}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}$

جمع انباره‌ای

(12) کانولوشن پریودیک: گسسته: $\sum_{k=\langle N\rangle} x[k]\,y[n-k] \xleftrightarrow{F.S} N a_k b_k$

پیوسته: $x(t) \circledast y(t) = \int_T x(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau$

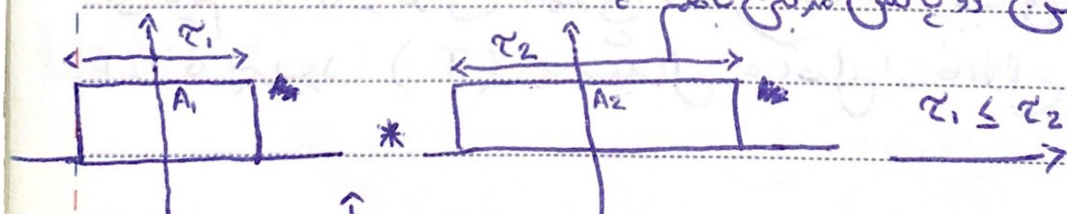
$x(t) \circledast y(t) \xleftrightarrow{F.S} T\, a_k \cdot b_k$

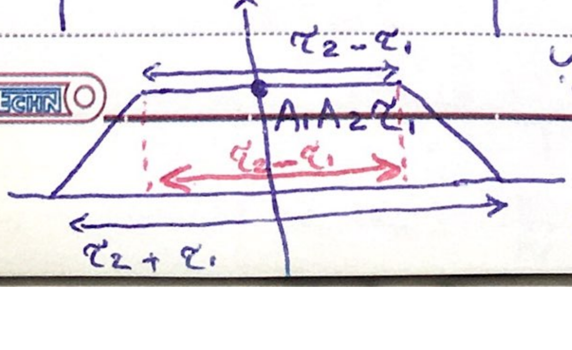
← پریودی که روی آن کانولوشن گرفته شده

اگر سیگنال‌ها در زمان باهم کانوال شوند ← ضرایب سری فوریه آنها درهم ضرب می‌شوند

اگر " " " درهم ضرب شوند ← " " " درهم کانوالو می‌شوند

* کانولوشن دو پالس مربعی باهم:





* اگر عرض هر دو پالس باهم برابر و برابر τ باشد، کانولوشن آنها یک مثلث با عرض 2τ است و رأس τ

SUBJECT: DATE: / /

* نکته‌ای برای محاسبه کانولوشن پریودیک :

هردو با پریود T پریودیک ⟵ $x_1(t)$ و $x_2(t)$: داریم

$\Rightarrow y(t) \overset{?}{=} x_1(t) \circledast x_2(t)$ می‌توان هر پریود دلخواهی * انتخاب شود

یک پریود دلخواه از $x_1(t)$ را انتخاب می کنیم : $\hat{x}_1(t) = \begin{cases} x_1(t) & ; -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & : \text{other} \end{cases}$

و یک پریود دلخواه از $x_2(t)$ را هم انتخاب می کنیم : $\hat{x}_2(t)$

$\Rightarrow \hat{y}(t) = \hat{x}_1(t) * \hat{x}_2(t)$ کانولوشن معمولی حساب می کنیم

در این صورت : $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{y}(t - kT)$

ترجمه بالا : یک پریود دلخواه از هردو سیگنال را انتخاب می کنیم ، و کانولوشن معمولی را روی آنها حساب می کنیم و بعد به اندازه پریود (T) ، سیگنال حاصل از کانولوشن را تکرار می کنیم