جلسه دهم

مثال جلسه قبل) آیا چندجمله ای های زیر برای فضای برداری P_k تشکیل یک پایه P می دهند؟

$P_1 = x - 3$ $\qquad P_2 = x^2 + 2x$ $\qquad P_3 = x^2 + 1$

(شرط ۱)

استقلال خطی $\rightarrow \quad c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3 = 0$

$$\rightarrow c_1(x-3) + c_2(x^2+2x) + c_3(x^2+1) = 0$$

$$\rightarrow (c_2 + c_3)x^2 + (c_1 + 2c_2)x + (-3c_1 + c_3) = 0$$

$$= 0x^2 + 0x + 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \\ -3c_1 + c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -1(1) + 1(6) = 5 \neq 0$$

شرط اول برقرار است؟

اسپن (شرط ۲) $\longrightarrow c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 = r_1x^2 + r_2x + r_3$

$$\longrightarrow (c_2 + c_3)x^2 + (c_1 + 2c_2)x + (-3c_1 + c_3) =$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow |A| \neq 0$$

لذا هر چندجمله‌ای مرتبه ۲ بصورت $r_1x^2 + r_2x + r_3$ را می‌توان بصورت ترکیب خطی از چندجمله‌ای های p_1، p_2 و p_3 نوشت.

پس چندجمله‌ای های p_1، p_2 و p_3 برای فضای برداری P_2 تشکیل پایه می‌دهند.

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

برای ماتریس $A_{n\times n}$ ، $|\lambda I - A| = 0$ مقادیر ویژه را می دهد.

به $|\lambda I - A|$ چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A گویند.

✓ تعداد مقادیر ویژه $= n$ تا

✓ مقادیر ویژه بصورت حقیقی و یا فرم مختلط مزدوج $\alpha \pm j\beta$ هستند.

✓ برای ماتریس $A_{n\times n}$ با مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ دترمینان و اثر ماتریس:
trace

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$\mathrm{trace}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + c_1\lambda + c_0$$

$$= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$$\xrightarrow{\lambda=0} \quad |A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

نکته) اگر λ یک مقدار ویژه برای A باشد، λ^{-1} مقدار ویژه A^{-1} خواهد بود.

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow |\lambda A^{-1}A - A| = |(\lambda A^{-1} - I)A|$$

$$= |\underbrace{\lambda A^{-1} - I}_{\lambda(A^{-1} - \lambda^{-1} I)}||A| = |\lambda||\underbrace{A^{-1} - \lambda^{-1} I}||A| = 0$$

$$|\lambda^{-1} I - A^{-1}| = 0$$

نکته) ضرایب معادله مشخصه یک ماتریس را می‌توان با استفاده از الگوریتم بازگشتی بدست آورد.

$$|\lambda I - A| = \lambda^{n} + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

$$c_{n-1} = -w_1 \qquad w_k = tr(A^k)$$

$$c_{n-2} = -\frac{1}{2}\left(c_{n-1}w_1 + w_2\right)$$

$$c_{n-3} = -\frac{1}{3}\left(c_{n-2}w_1 + c_{n-1}w_2 + w_3\right)$$

$$\vdots$$

$$c_0 = -\frac{1}{n}\left(c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_{n-1}w_{n-1} + w_n\right)$$

مثال) معادله مشخصه A را با استفاده از الگوریتم بازگشتی بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

$$c_2 = -W_1 = -tr(A) = \boxed{7}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}\left(c_2 W_1 + W_2\right) = -\frac{1}{2}\left(7\times(-7) + 39\right) = \boxed{5}$$

$$W_2 = tr(A^2) = 39$$

$$c_0 = -\frac{1}{3}\left(5\times(-7) + 7(39) + W_3\right) = \boxed{-1}$$

$$tr(A^3) = -235$$

$$\Rightarrow |\lambda I - A| = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 5\lambda - 1$$

نکته) یکی از راه‌های تعیین علامت ماتریس‌ها، از روی مقادیر ویژه است.

ماتریس متقارن باشد

- مقادیر ویژه مثبت ← مثبت معین
- " " منفی ← منفی معین
- " " مثبت و صفر ← مثبت نیمه معین
- " " منفی و صفر ← منفی نیمه معین

مثال) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ علامت A ؟!

روش ۱) $3 > 0$ ، $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 17 > 0$ ، $|A| = 46 > 0$

مثبت معین ✓

روش ۲) $|\lambda I - A| = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda-6 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-6 \end{vmatrix}$

$= \lambda^3 - 15\lambda^2 + 51\lambda - 46 = 0$ roots([1 -15 51 -46])

$\longrightarrow \lambda_1 = 2.9 \ , \ \lambda_2 = 1.49 \ , \ \lambda_3 = 10.59$

مثبت معین ✓

سؤال) اگر ماتریس A متقارن نباشد چه کنیم؟!

بردار ویژه

به بردارهای V_i غیرصفر که در رابطه $(\lambda_i I - A)V_i = 0$ صدق کنند، بردار ویژه ماتریس A گویند.

مثال) بردارهای ویژه $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

$$|\lambda I - A| = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} \lambda + 4 & -2 \\ -3 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda^2 + 9\lambda + 14 = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -7 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

$$(\lambda_i I - A)V_i = 0 \longrightarrow (\lambda_1 I - A)V_1 = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 + 4 & -2 \\ -3 & \lambda_1 + 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\lambda_1 = -7} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow -3x_1 - 2x_2 = 0$$

$$x_1 = -\frac{2}{3} x_2$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_2 I - A)\bar{v}_2 = 0 \xRightarrow{\lambda_2 = -2} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad 2x_3 - 2x_4 = 0 \Longrightarrow x_3 = x_4$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نکته) اگر یک ماتریس $A_{n\times n}$ دارای n مقدار ویژه متمایز $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ باشد آن‌گاه n بردار ویژه مستقل خطی $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ وجود خواهد داشت.

نکته) اگر ماتریس $A_{n\times n}$ یک مقدار ویژه تکراری از مرتبه K داشته باشد، آن‌گاه حداقل یک و حداکثر K بردار ویژه مستقل خطی متناظر با این مقدار ویژه تکراری λ_i وجود خواهد داشت. تعداد بردارهای مستقل خطی در این حالت برابر با $n - \text{rank}(A - \lambda_i I)$ است.

مثال) بردارهای ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

$$|\lambda I - A| = 0 \longrightarrow \lambda^3 - \lambda^2 - 16\lambda - 20 = 0$$

$$= (\lambda+2)^2(\lambda-5) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = -2 \\ \lambda_3 = \underline{5} \end{cases}$$

برای مقدار ویژه تکراری

$$\hookrightarrow \quad n - \operatorname{rank}(A - \lambda_i I) = 3 - \operatorname{rank}(A + 2I) = 1$$

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 8 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

یک بردار ویژه مستقل خطی برای $\lambda_{1,2} = -2$ وجود دارد.

$$\lambda_1 = -2 \longrightarrow (\lambda_1 I - A)v_1 = 0 \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -8 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad -x_1 + x_3 = 0 \longrightarrow \boxed{x_1 = x_3}$$

$$\cancel{-8x_1} - 4x_2 + \cancel{8x_3} = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{x_2 = 0} \longrightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 5 \longrightarrow (5I - A)V_3 = 0$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -4 & 8 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_5 = 0}$$

$$-x_4 + 8x_6 = 0 \Rightarrow \boxed{x_4 = 8x_6}$$

$$\Rightarrow V_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$