یا علی

تمرین سری ۹ سیگنال - تبدیل Z

1401/3/25

#1 ؟ RoC قطب‌ها و

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) & ; \ n \le 0 \\ 0 & ; \ n > 0 \end{cases} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[-n]$$

یادآوری: $\cos\theta = \frac{1}{2}e^{j\theta} + \frac{1}{2}e^{-j\theta}$ $\Rightarrow x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right] u[-n]$

$$\xrightarrow{Z} \bar{X}(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} z^{-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} z^{-n}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)^{-\infty} - \left(\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)^{1}}{1-\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}} \wedge \frac{1}{2}$$

$$+ \frac{\left(\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)^{-\infty} + \left(\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)^{+1}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}} = \frac{1}{2}\left[\frac{-\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}}\right] ; \ |z| < \frac{1}{3}$$

قطب‌ها: $\begin{cases} p_1 = \frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}} \\ p_2 = \frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}} \end{cases}$

#2 ؟ Z عکس تبدیل

$$\bar{X}(z) = \frac{1-\frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1+\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{8}z^{-2}\right)} \qquad \text{RoC}: |z| > \frac{1}{2}$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}jz^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}jz^{-1}\right) \qquad = \left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)$$

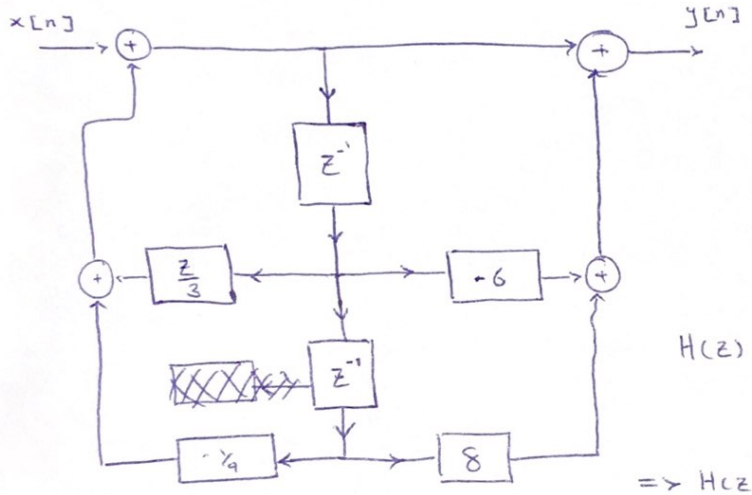
$$\bar{X}(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-2}}{\left(1+\frac{1}{2}jz^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}jz^{-1}\right)\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{A}{\left(1-\frac{1}{2}jz^{-1}\right)} + \frac{B}{\left(1+\frac{1}{2}jz^{-1}\right)} + \frac{C}{\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

$$+\frac{D}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})} \xrightarrow{\text{بس از بست آوردن}} \text{ضرایب } A, B, C, D$$

$$x[n] = A\left(\tfrac{1}{2}j\right)^n u[n] + B\left(-\tfrac{1}{2}j\right)^n u[n]$$

$$+ C\left(-\tfrac{3}{4}\right)^n u[n] + D\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

#3 سیستم علی است



الف) معادله دیفرنس؟

ب) stable or non stable?

$$H(z) = \frac{c + d z^{-1} + e z^{-2}}{1 + a z^{-1} + b z^{-2}}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1 - 6z^{-1} + 8z^{-2}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{9}z^{-2}}$$

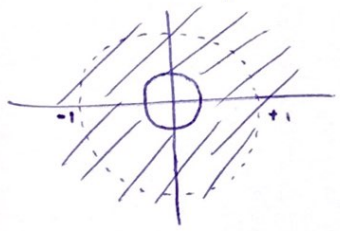
$$\Rightarrow Y(z)\left[1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{9}z^{-2}\right] = X(z)\left[1 - 6z^{-1} + 8z^{-2}\right]$$

$$\Rightarrow Y(z) - \frac{2}{3}Y(z)z^{-1} + \frac{1}{9}Y(z)z^{-2} = X(z) - 6X(z)z^{-1} + 8X(z)z^{-2} \xrightarrow{x[n-n_0] \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-n_0}X(z)}$$

$$\Rightarrow y[n] - \frac{2}{3}y[n-1] + \frac{1}{9}y[n-2] = x[n] - 6x[n-1] + 8x[n-2]$$

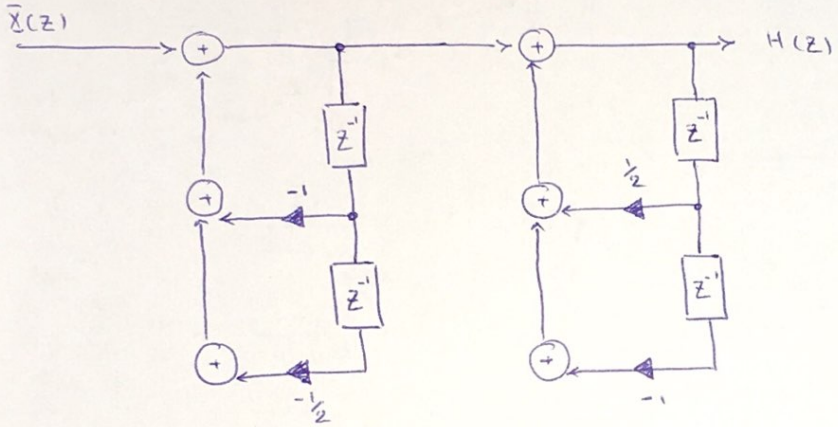
ب) چون سیستم علی است (ROC دست راستی) و چون دو قطب در $z = \frac{1}{3}$ داریم ← سیستم پایدار است

← ROC دایره واحد ($|z| = 1$) را شامل می‌شود



#4 نمایش جعبه‌ای؟

$$H(z) = \frac{1}{(1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2})(1-\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-2})} = \frac{1}{(1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2})} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-2})}$$



#5 $\bar{X}(z)$ & Roc?

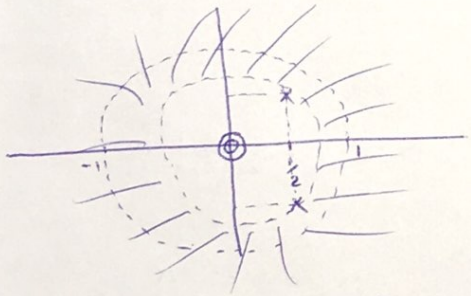
الف) $x[n]$ حقیقی و دست راستی

ب) $\bar{X}(z)$ دقیقا دو قطب دارد

ج) $\bar{X}(z)$ دو صفر در مبدا دارد

ت) $\bar{X}(z)$ در $z = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}$ یک قطب دارد

ث) $\bar{X}(1) = \frac{8}{3}$



$$\bar{X}(z) = \frac{A z^2}{(z-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1})(1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1})} \xrightarrow{\text{طبق خاصیت (ث)}} \bar{X}(1) = \frac{A}{(1-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}})(1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}})} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{4}} = \frac{A}{\frac{5}{4}-\cos(\frac{\pi}{3})} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{4}{3}A = \frac{8}{3} \Rightarrow \boxed{A = 2}$$

$$\bar{X}(z) = \frac{2z^2}{(1-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1})(1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1})} \quad ; \quad \text{Roc} : |z| > \frac{1}{2}$$

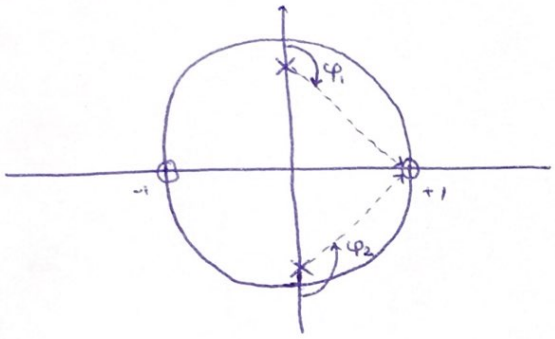
#6 سیستم LTI است ⟵

$z = \pm 1$

$p = \pm 0.9j$

$|\bar{x}|$ ، $\measuredangle \bar{x}$

آیا سیستم علی با شد آیا پایدار هم هست؟



$$|H(e^{jw})| = \frac{\prod_{i=1}^{M} (d_i)}{\prod_{i=1}^{M} (l_i)}$$

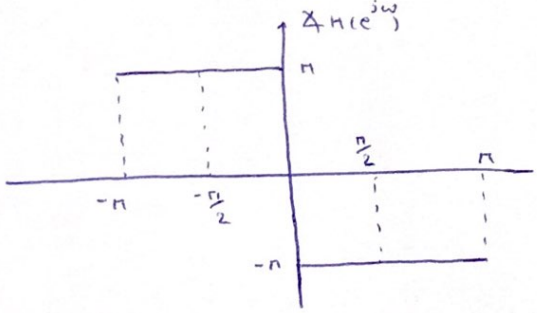
d_i: فاصله صفرها تا دایره واحد

l_i: فاصله قطب‌ها تا دایره واحد

$$\begin{cases} |H(e^{j0})| = \dfrac{0 \times 2}{1 + 0.81} = 0 \\ |H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = \dfrac{\sqrt{1+1} \times \sqrt{1+1}}{0.1 \times 0.9} = 10.5 \\ |H(e^{j\pi})| = 0 \end{cases}$$

$$\measuredangle H(e^{jw}) = \sum_{i=1}^{N} \psi_i - \sum_{i=1}^{M} \varphi_i$$

$$\begin{cases} \measuredangle H(e^{j0}) = -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\pi \\ \measuredangle H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = -(0 + \pi) = -\pi \end{cases}$$



ب) اگر سیستم علی باشد ($|z| > 0.9$) سیستم پایدار نیز هست چون ROC دایره واحد را هم پوشش می‌دهد.