محتوی درس: رسم نمودار بُد

Bode plaT

همان طوری که می‌دانیم پاسخ فرکانسی با قرار دادن $j\omega = s$ از تابع تبدیل بدست می‌آید و در رسم منحنی‌ها اندازه و فاز تابع تبدیل مورد نیاز است.

اندازه $|H(j\omega)|$ یا $|A_v(j\omega)|$ برحسب دسی بل (Decibel) تعریف می‌شود

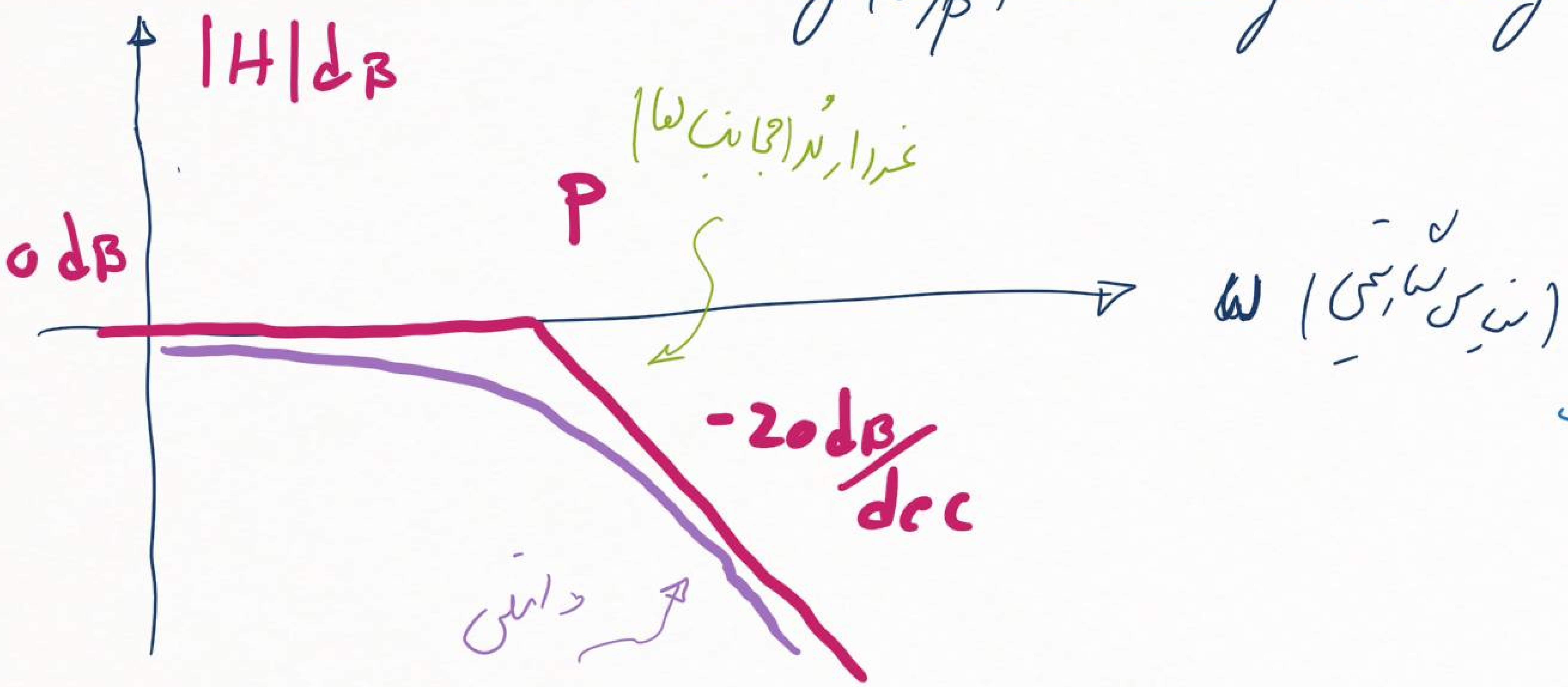
$$|A_v|_{dB} = 20\log_{10}|A_v|$$

① قطب ساده: $H(s) = \dfrac{1}{1+s/p}$ $\Leftarrow$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega/p} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2/p^2}}$$

رسم نمودار اندازه:

$$\Rightarrow 20\log|H(j\omega)| = \begin{cases} 0 & , \quad \omega \ll p \\ -20\log(\omega/p) = -20\log\omega - 20\log\frac{1}{p} & , \quad \omega \gg p \end{cases}$$



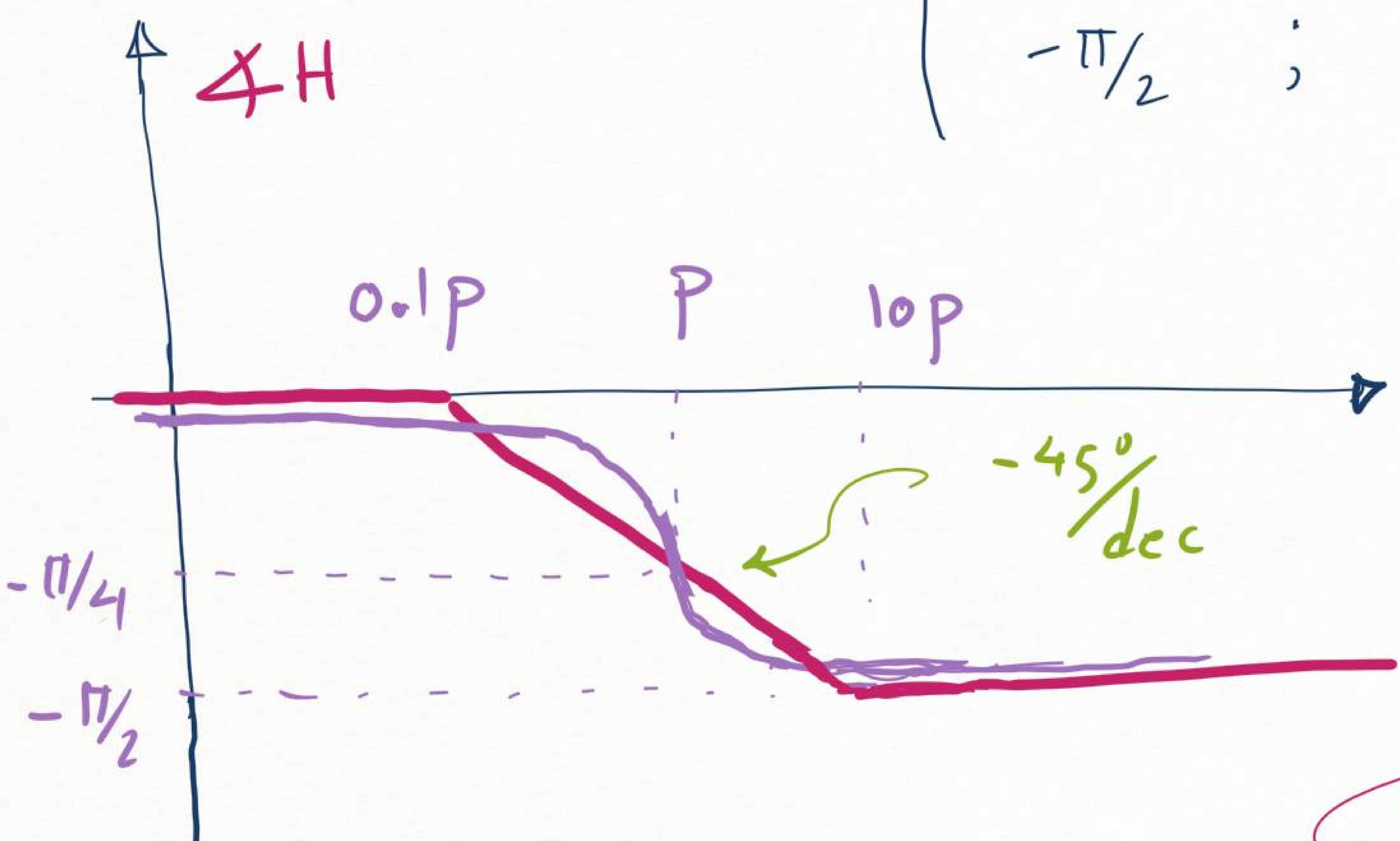
محل قطب

$$\boxed{\omega = p \Rightarrow 20\log|H(p)| = -10\log 2 \approx -3\,dB}$$

رسم نمودار فاز :

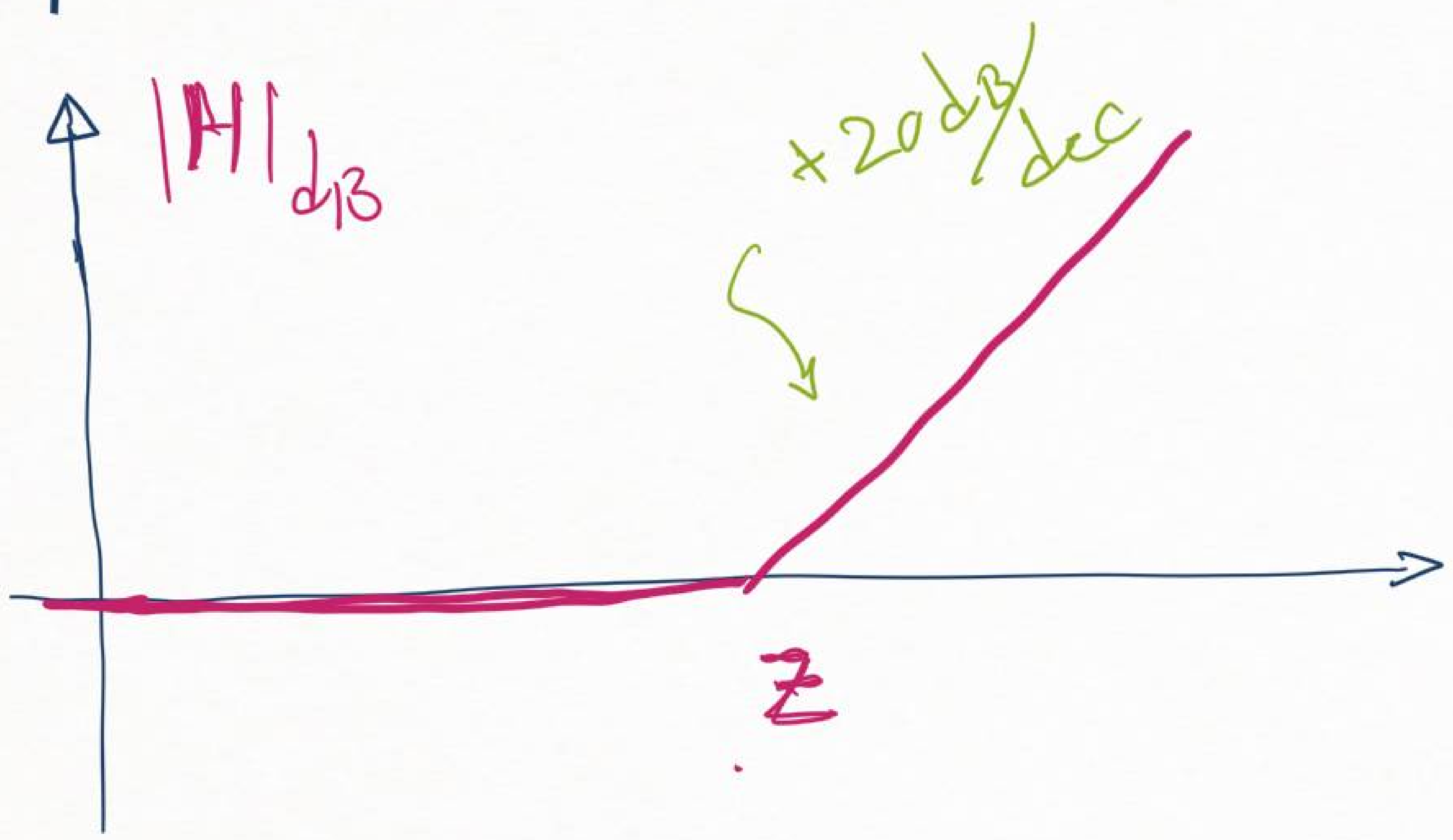
(چرا؟)

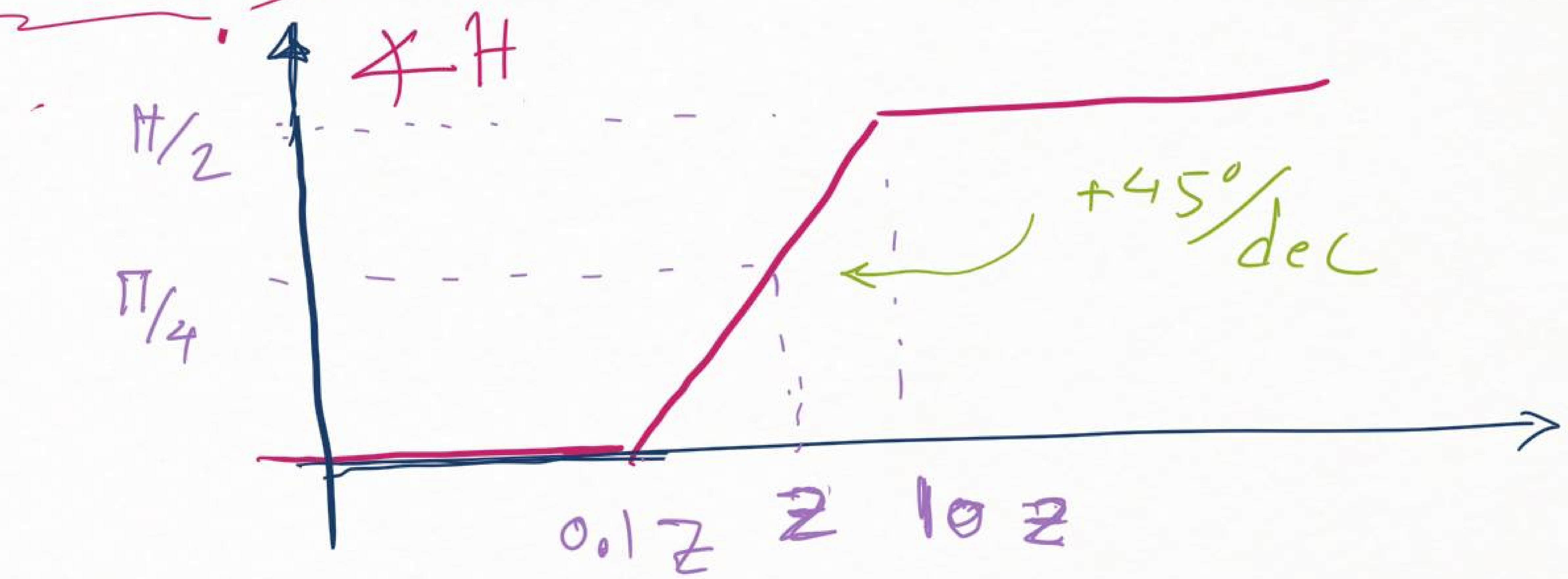
$$\measuredangle H(j\omega) = -\tan^{-1}\omega/p = \begin{cases} 0 \; ; & \omega < 0.1p \\ -\frac{\pi}{4}\left[\log(\omega/p) + 1\right] \; ; & 0.1p < \omega < 10p \\ -\pi/2 \; ; & \omega > 10p \; ; \quad \omega > 10p \end{cases}$$

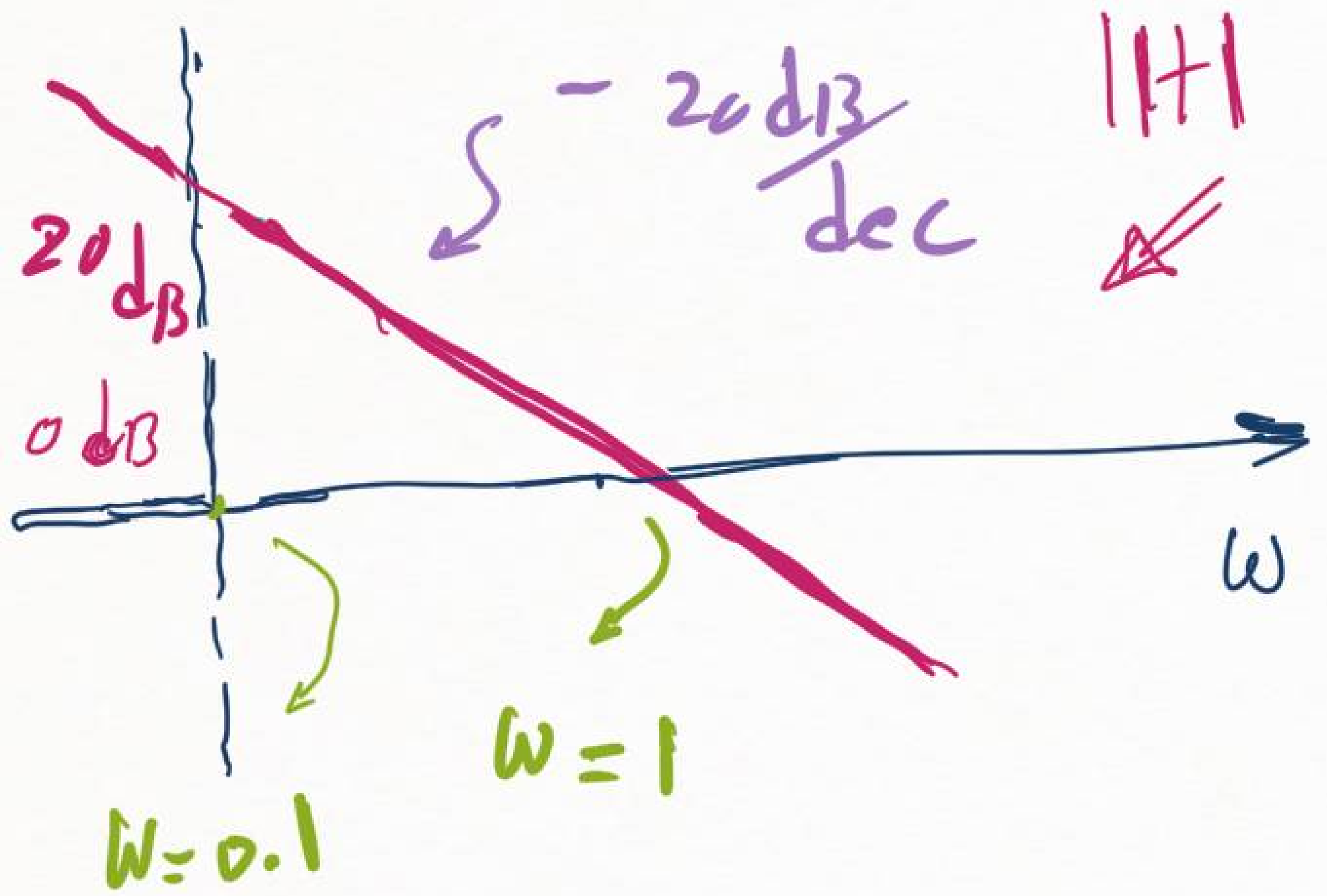


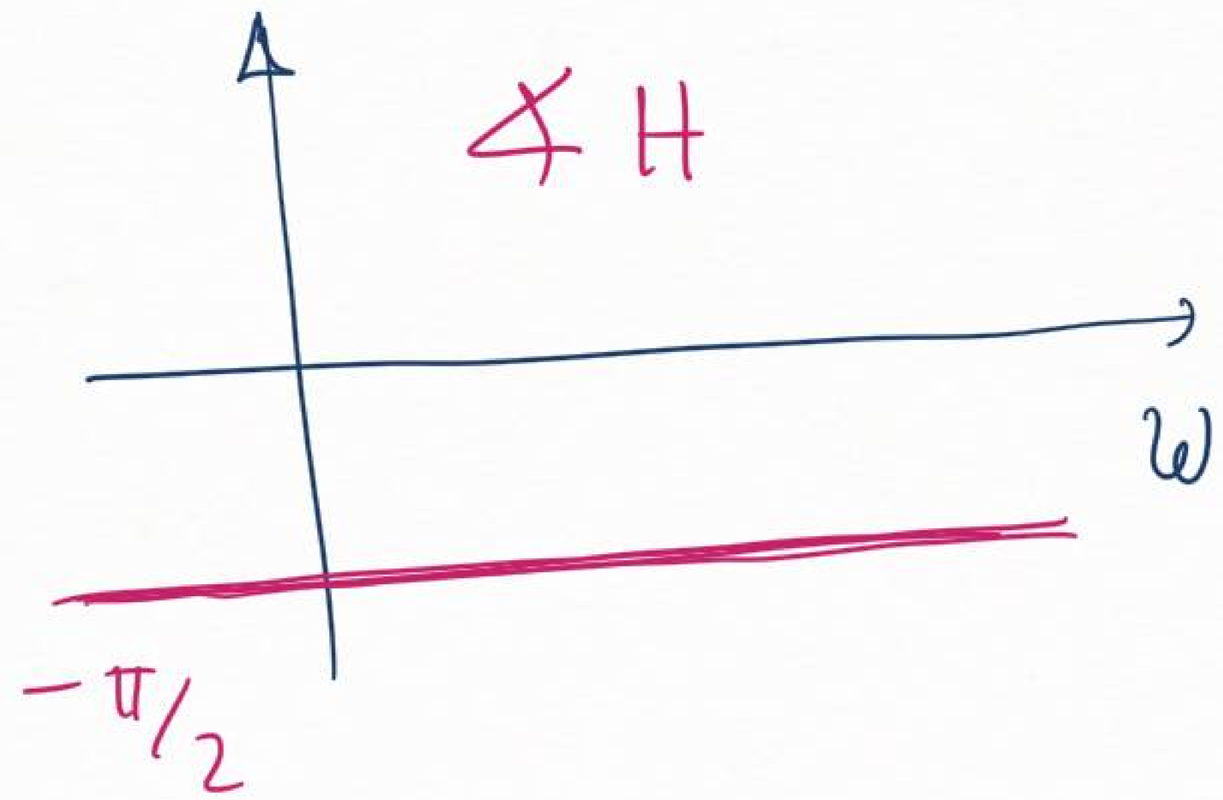
$$\boxed{\measuredangle H(jp) = -\frac{\pi}{4}}$$

۲ صفر ساده : $H(s) = 1 + s/z$ یا $H(j\omega) = 1 + j\omega/z$



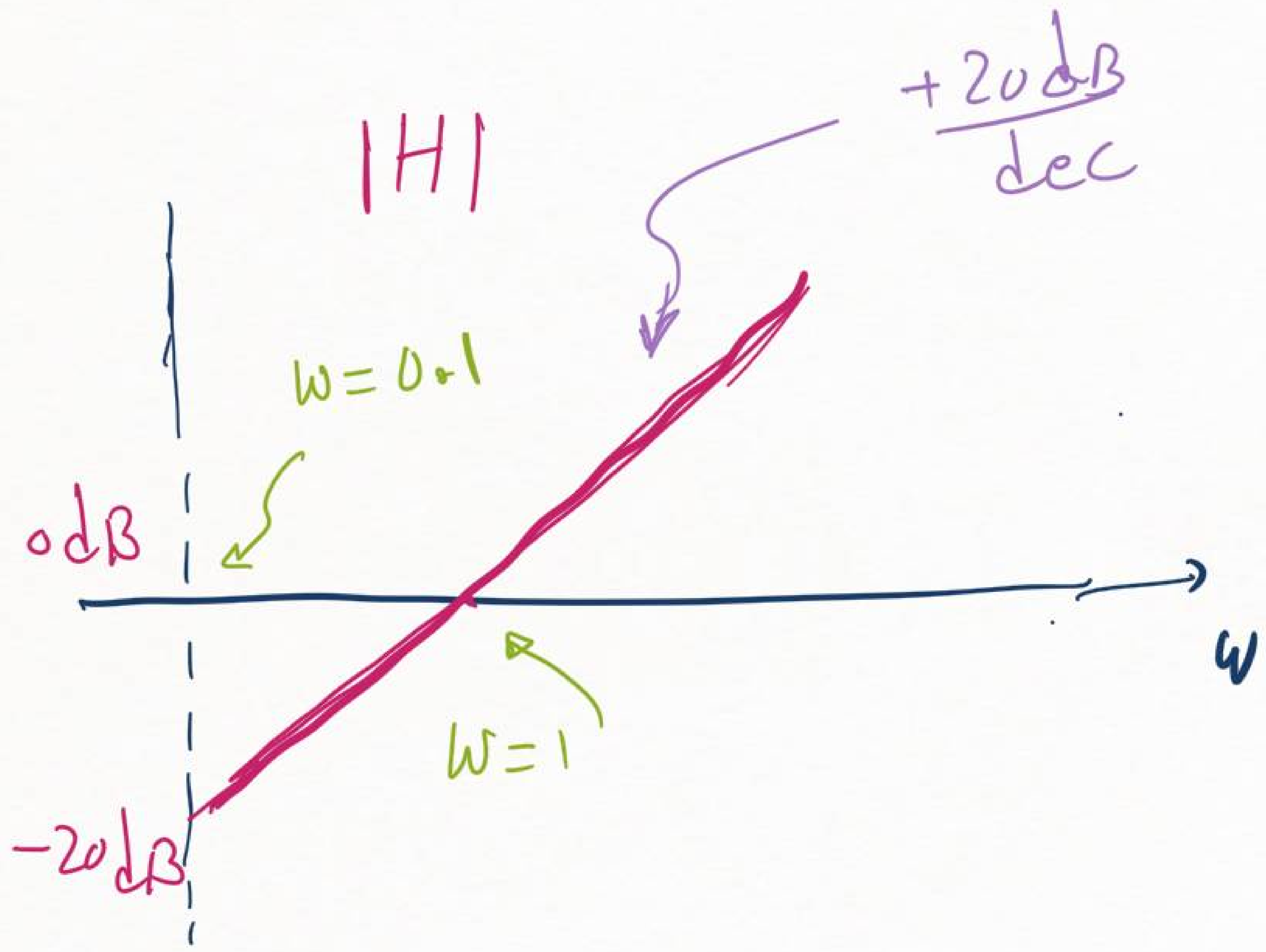


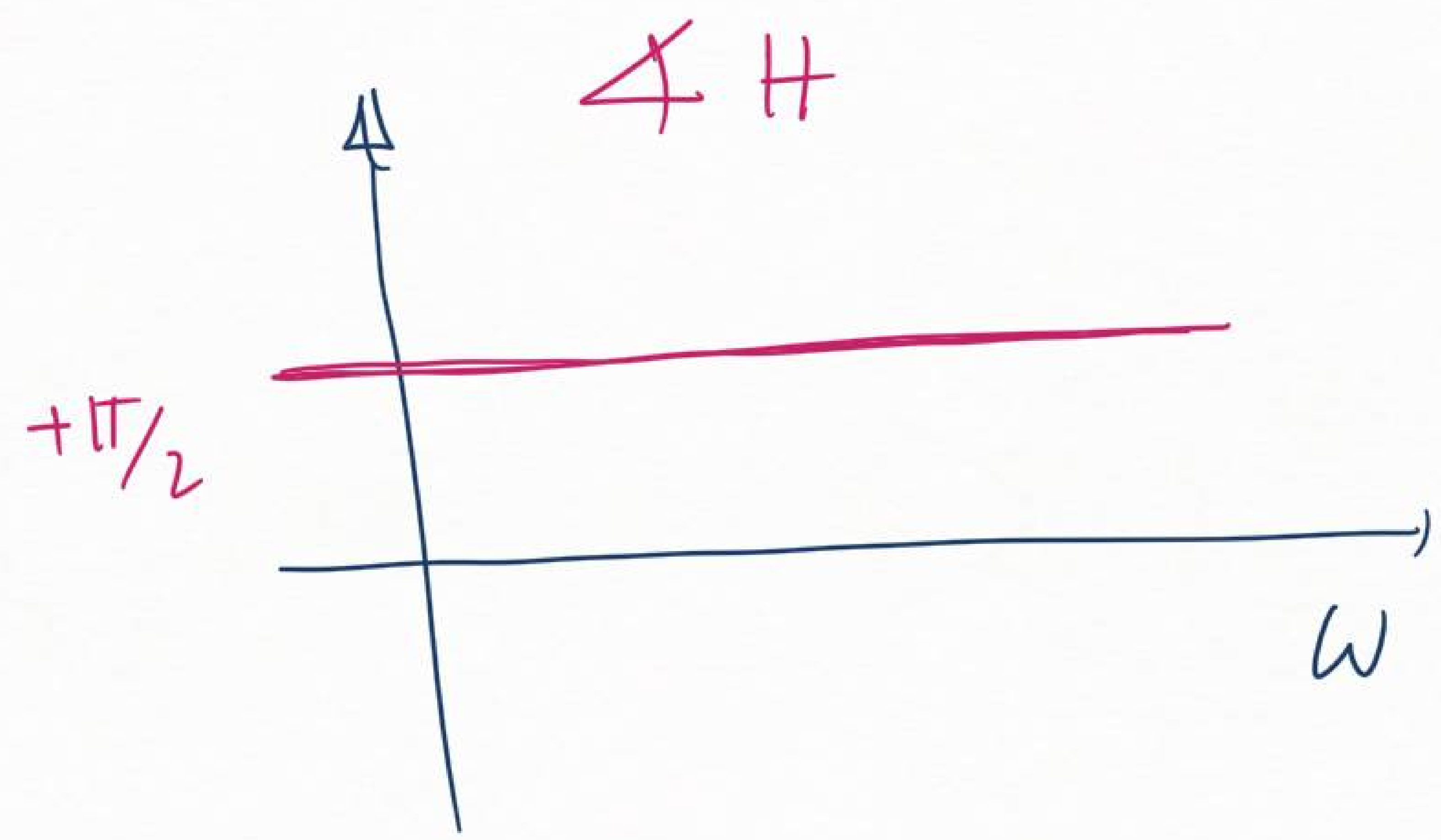




③ $H(s)=\frac{1}{s}$ یا $H(j\omega)=\frac{1}{j\omega}$

④ $H(s)=\frac{1}{s}$ یا $H(j\omega)=j\omega$





نکته: در صورتیکه درجات صفرها یا قطب‌ها از درجه N باشند شیب خطوط (این نکته در دامنه است) در عدد N ضرب شده

مثلاً $H(j\omega)=(1+j\omega/p)^N$ در این صورت شیب $20N\frac{dB}{dec}$ و خطای $+3N\,dB$ افزایش داریم.

۴) برای سیستم های درجه بالاتر (درصورتی که شکل قابل تبدیل به سیستم رتبه اول باشند) در این صورت برای این سیستم به صورت تکه به تکه نمودار را رسم کرده و با هم جمع می‌نماییم.

مثال -

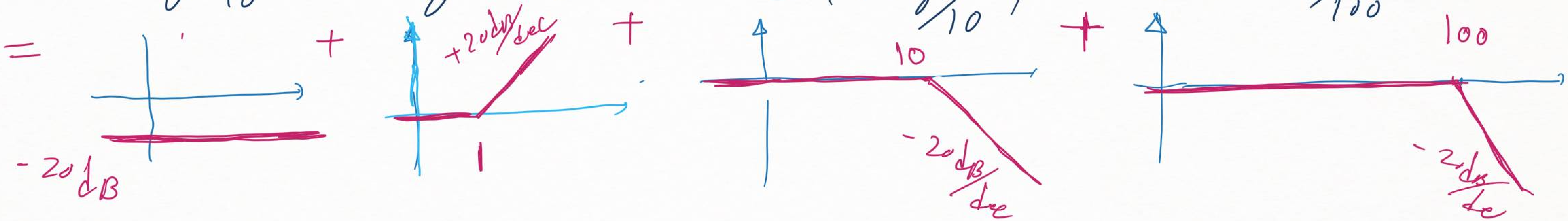
$$H(j\omega) = \frac{100(1+j\omega)}{(10+j\omega)(100+j\omega)}$$

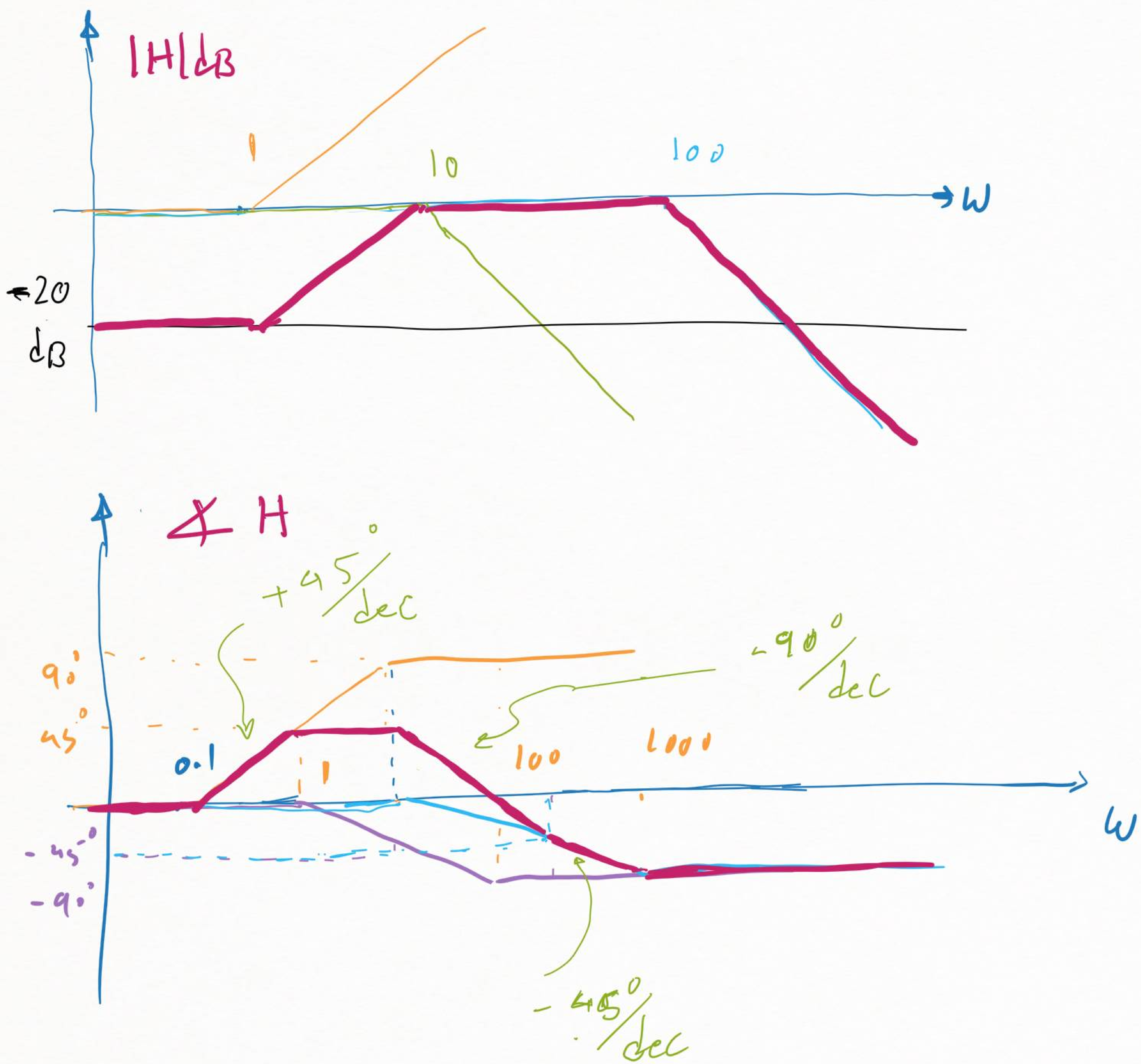
ابتدا، تمام فاکتورهای صورت و مخرج را باید به فرم $(1+j\omega/\omega_z)$ یا $\left(\frac{1}{1+j\omega/\omega_p}\right)$ در آوریم یعنی:

$$H(j\omega) = \frac{(1+j\omega)\times 100}{10\left(1+j\omega/10\right)100\left(1+j\omega/100\right)} = \frac{1}{10}(1+j\omega)\left(\frac{1}{1+j\omega/10}\right)\left(\frac{1}{1+j\omega/100}\right)$$

$$20\log H(j\omega) = 20\log\frac{1}{10} + 20\log(1+j\omega) + 20\log\left(\frac{1}{1+j\omega/10}\right) + 20\log\left(\frac{1}{1+j\omega/100}\right)$$

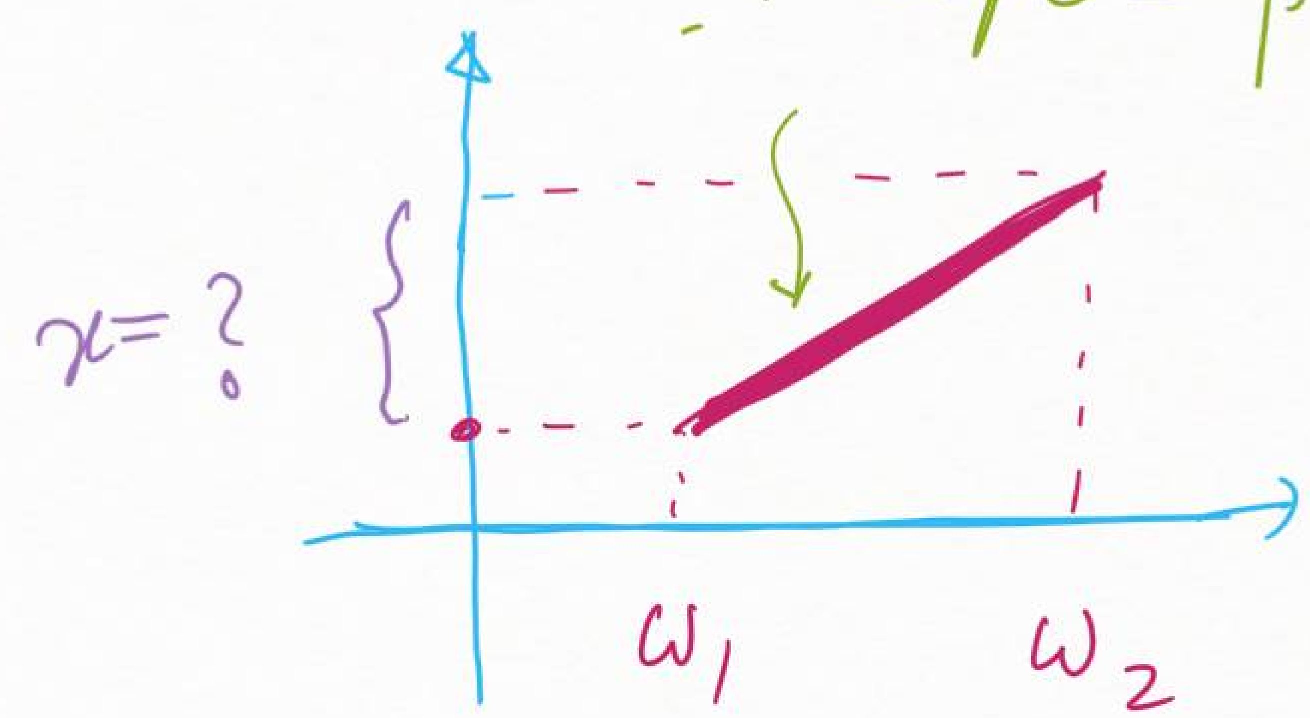
$|H|_{dB} =$





شیب خط slope = معلوم

توجه کنیم :



$$\left.\begin{array}{ll} 1^{\,dec} & \text{slope} \\ \log(\omega_2/\omega_1) & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \text{معلوم}$$

با وصل کردن هم در بخش مقدار اندازه، هم در بخش فاز نمودارها
و در هر کدام باید شیب درست آن‌ها داشته شود.

⑤ سیستم درجه دوم که ریشه‌های مختلط دارد. (ζ , ω_n اعداد ثابت)

(قطب مختلط) → (به ازای $1 > \zeta > 0$ ریشه مختلط داریم)

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n (j\omega) + \omega_n^2} = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + 1}$$

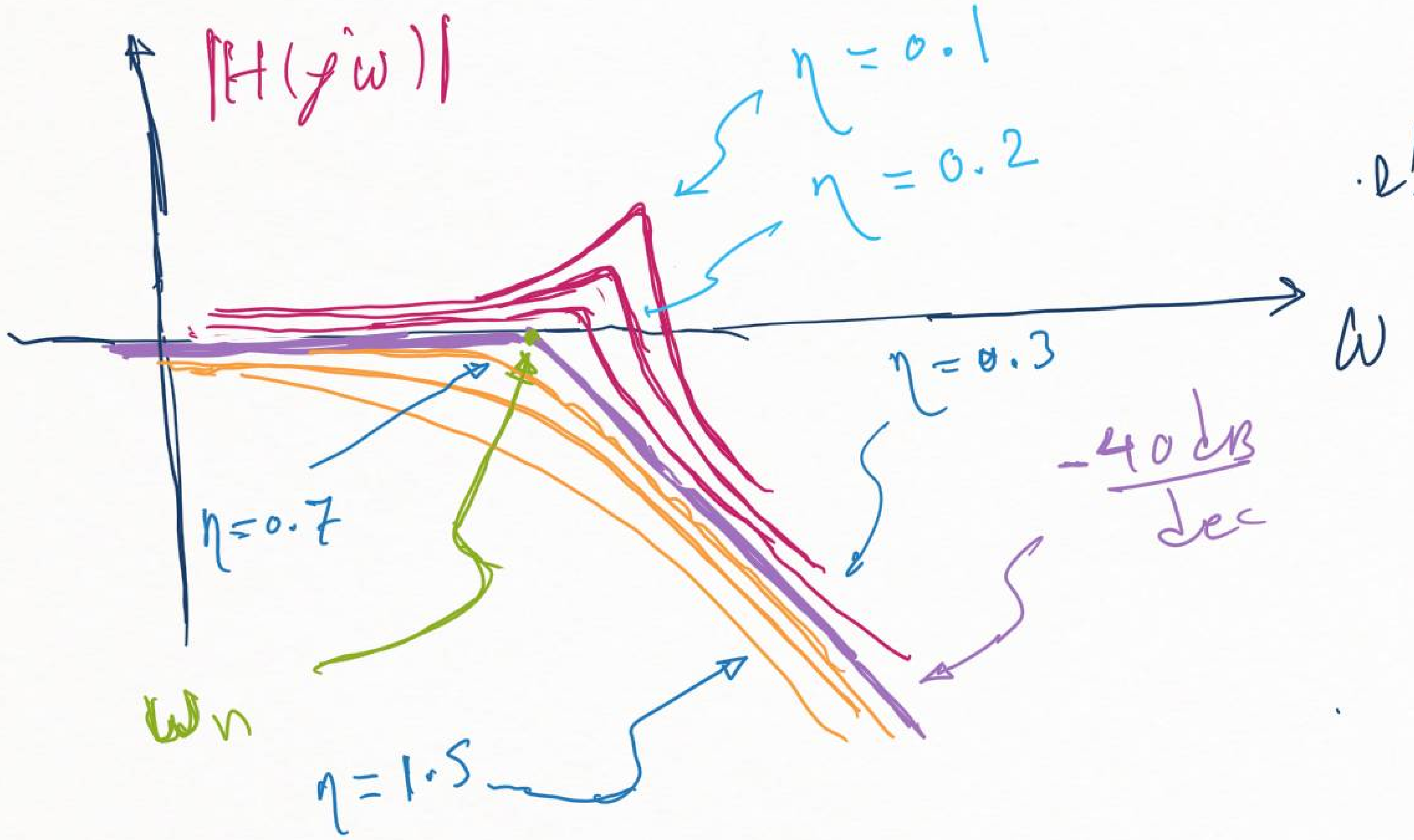
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \Longrightarrow 20\log|H(j\omega)| = -10\log\left\{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}$$

توجه: $1 - \cancel{2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4 + \cancel{4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \approx$

$\approx 1 + \frac{\omega^4}{\omega_n^4}$

به ω ها بیشتر از توان دوم
در نسبت با توان چهارم صرف‌نظر می‌کنیم.

$$20\log|H(j\omega)| = \begin{cases} 0 & ; \ \omega \ll \omega_n \\ -40\log\omega + 40\log\omega_n & ; \ \omega \gg \omega_n \end{cases}$$



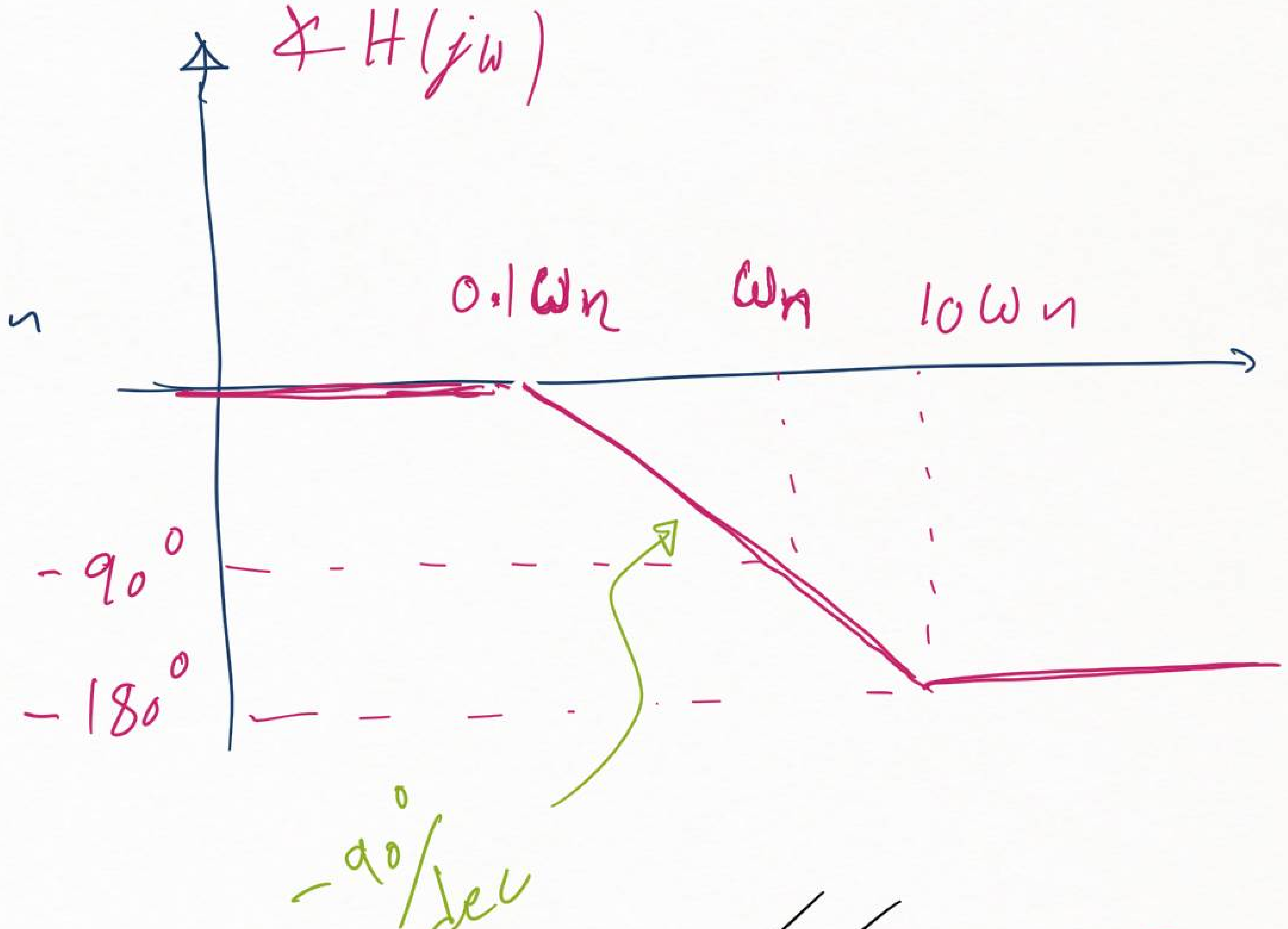
ملاحظه می‌شود که مقدار مجانب به η ربط ندارد ولی مقدار واقعی به η بستگی دارد.

برای $\omega = \omega_n$ به ازای $\eta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ماکزیمم دارد.

$$\omega_{max} = \omega_n\sqrt{1-2\eta^2} \quad , \quad |H(j\omega_{max})| = \frac{1}{2\eta\sqrt{1-\eta^2}}$$

$$\measuredangle H(j\omega) = \begin{cases} 0 & ; \quad \omega < 0.1\omega_n \\ -\pi/2\left[\log(\omega/\omega_n) + 1\right] & ; \quad 0.1\omega_n < \omega_n < 10\omega_n \\ -\pi & ; \quad \omega \geq 10\omega_n \end{cases}$$

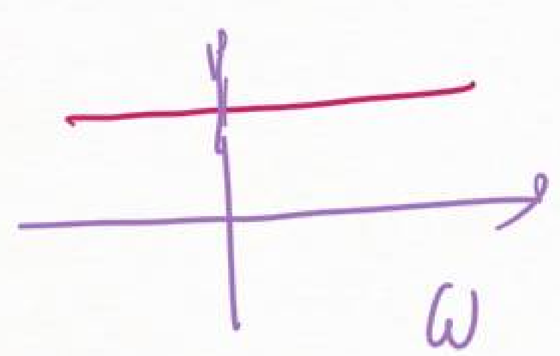
$$\measuredangle H = -\tan^{-1}\left[\frac{2\eta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right]$$

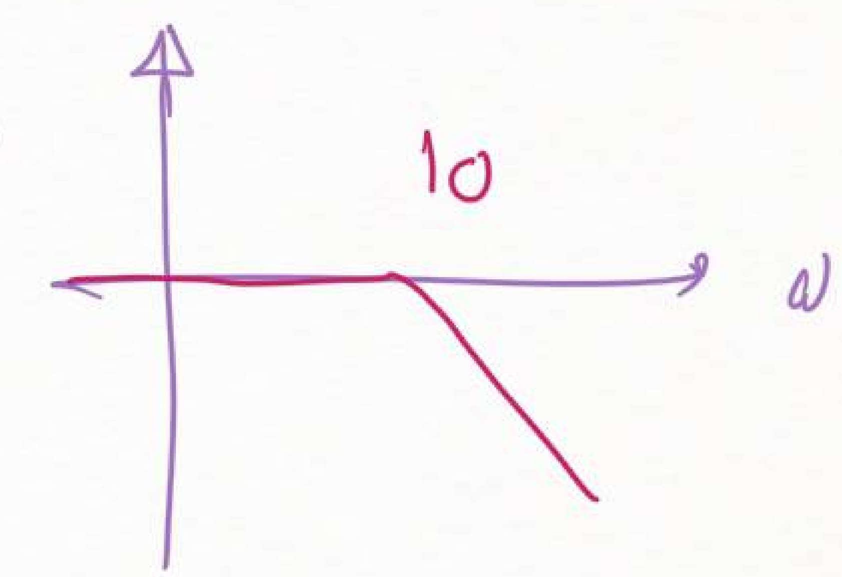


توجه: برای جاهایی که نیاز به تحلیل داشته باشیم مقدار واقعی را باید به دست آورد.

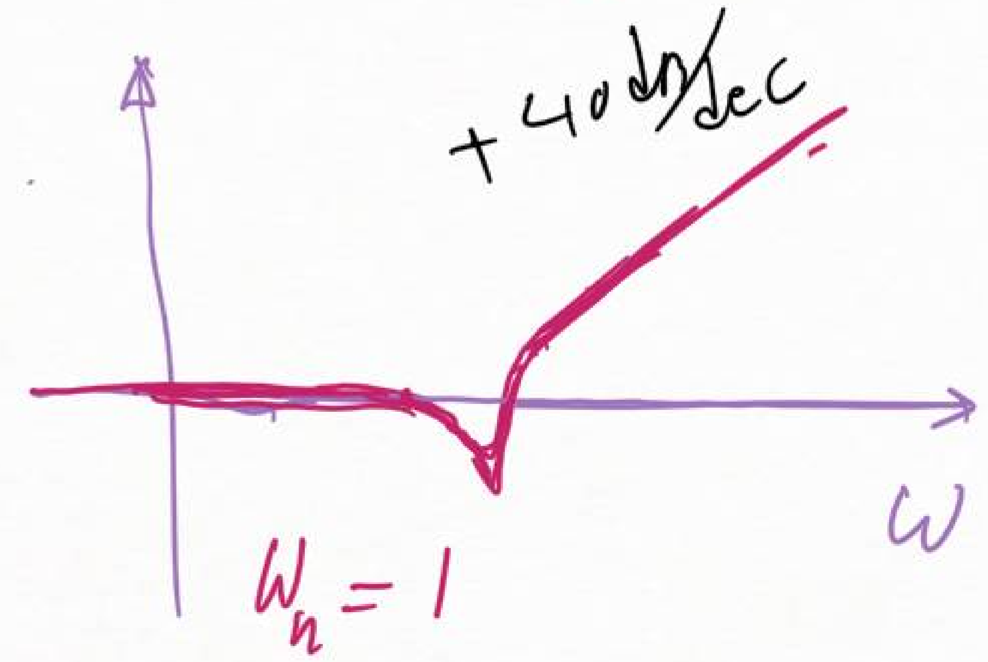
$$H(j\omega)=\frac{10+5j\omega+10(j\omega)^2}{1+j\omega/10}=10\left[\frac{(j\omega)^2+\frac{1}{2}(j\omega)+1}{1+j\omega/10}\right]$$

$$20\log|H|=20\log 10+20\log\left[(j\omega)^2+\tfrac{1}{2}(j\omega)+1\right]+20\log\left(\frac{1}{1+j\omega/10}\right)$$

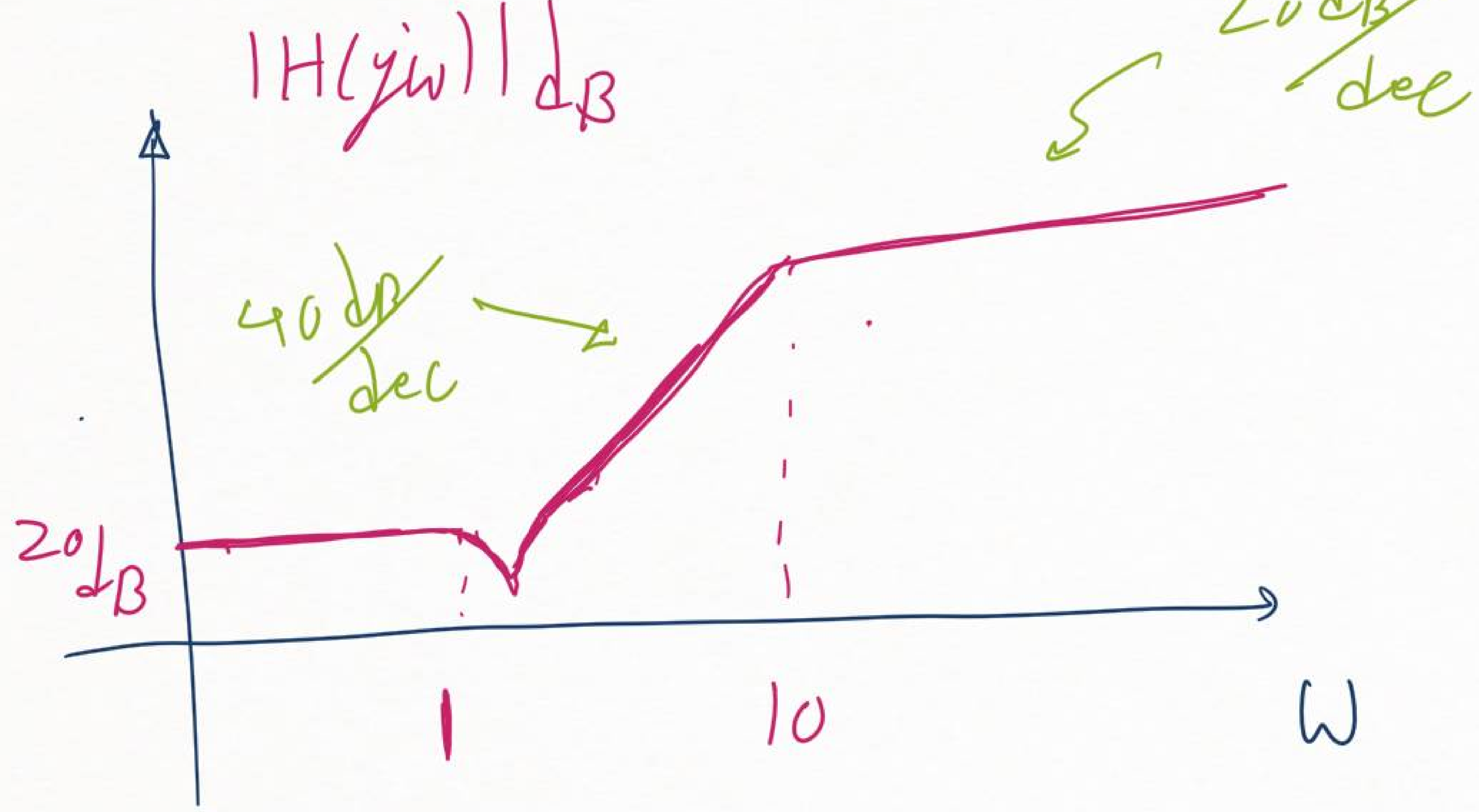


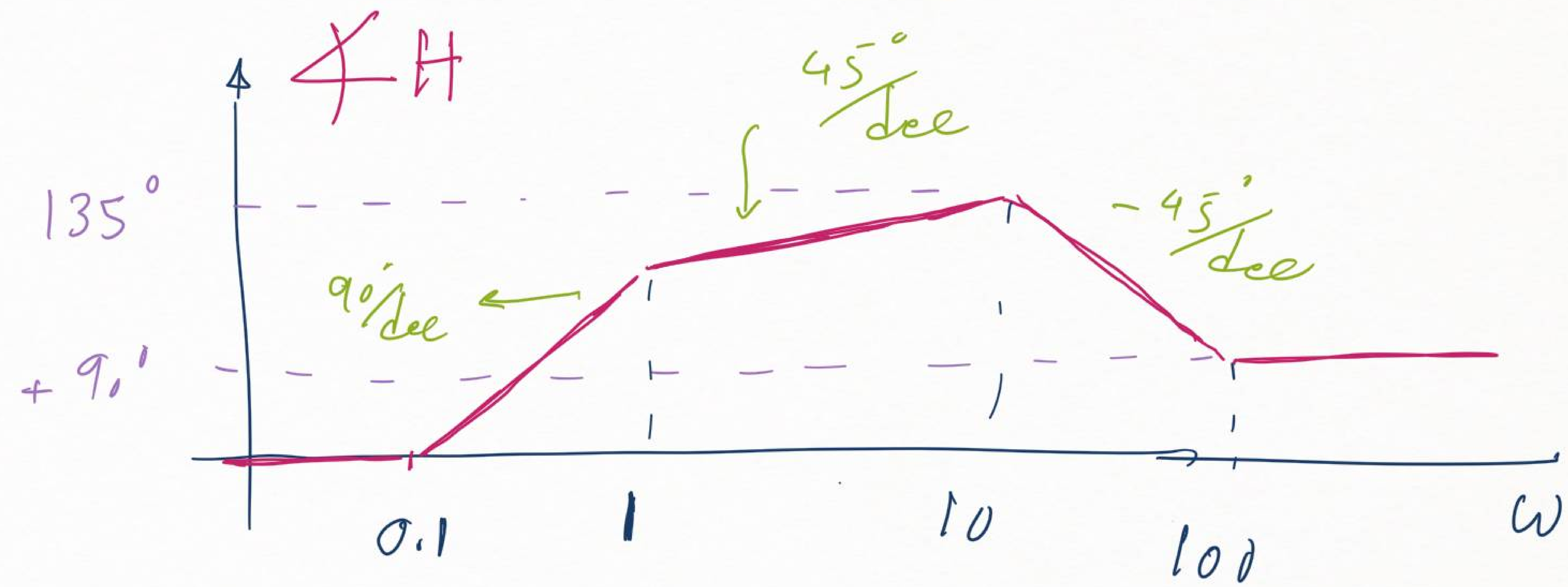


$$\leftrightarrow s^2+2\eta\omega_n s+1 \Rightarrow \eta=1/4,\ \omega_n=1$$



$$\begin{cases}\omega_{max}=\omega_n\sqrt{1-2\eta^2}=1\sqrt{1-2/16}\\[2mm] H=\dfrac{1}{2\eta\sqrt{1-\eta^2}}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{1-1/16}}\end{cases}$$





تخمین فرکانس قطع پایین از روی تابع انتقال (رابطه بین صفرها و قطب‌ها و فرکانس قطع پایین)

تابع را طور روبرو در نظر می‌گیریم.

$$A_L(s) = A_0 \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)} \Longrightarrow w_L = ?$$

$$A_L(jw) = A_0 \frac{(jw+z_1)(jw+z_2)}{(jw+p_1)(jw+p_2)} \Longrightarrow |A_L(jw)| = A_0 \sqrt{\frac{(w^2+z_1^2)(w^2+z_2^2)}{(w^2+p_1^2)(w^2+p_2^2)}}$$

$$|A(jw_L)| = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$$

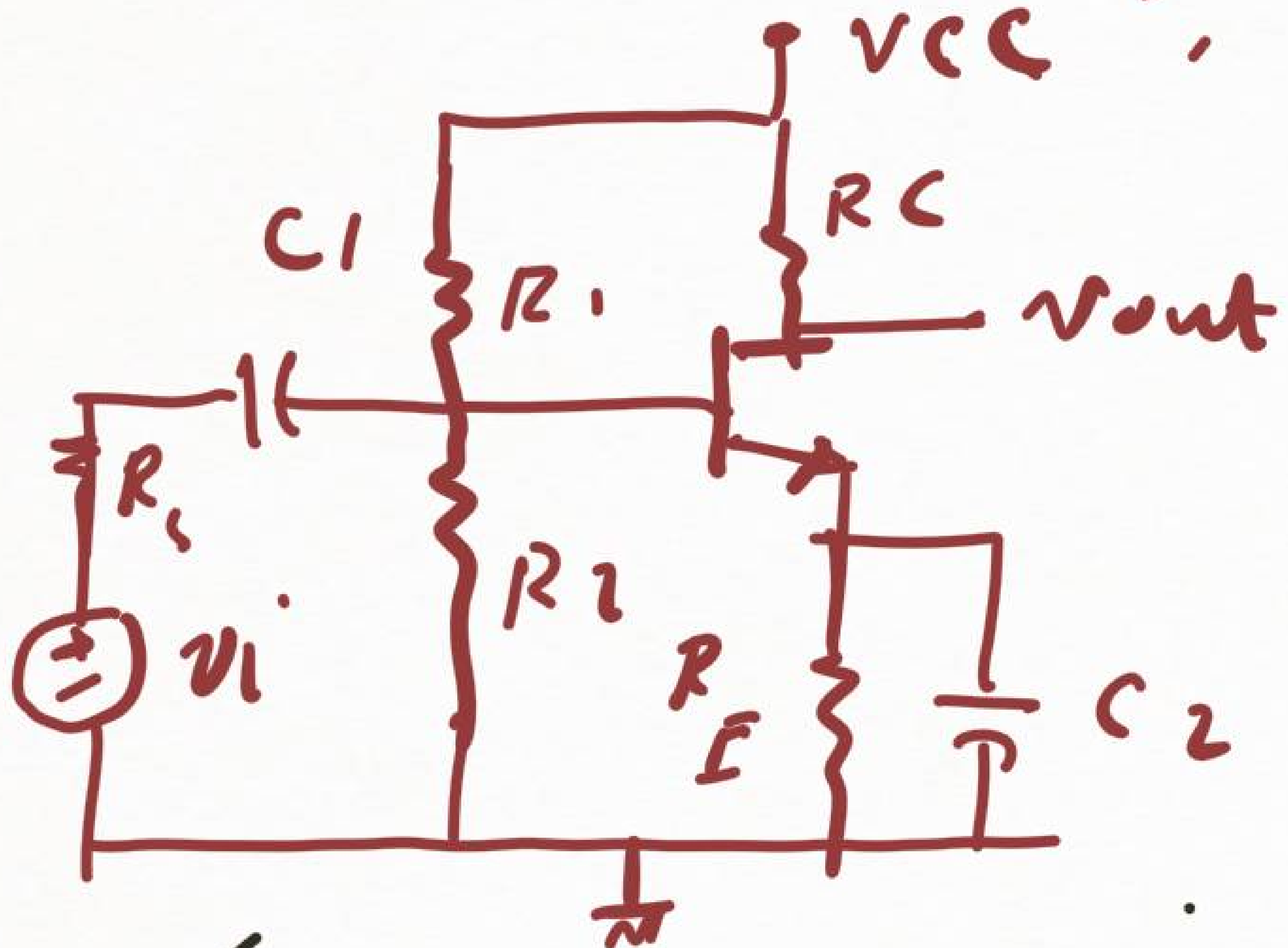
مقدار اندازه در فرکانس قطع

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{(w_L^2+z_1^2)(w_L^2+z_2^2)}{(w_L^2+p_1^2)(w_L^2+p_2^2)}} \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{w_L^4 + w_L^2(z_1^2+z_2^2) + z_1^2 z_2^2}{w_L^4 + w_L^2(p_1^2+p_2^2) + p_1^2 p_2^2}$$

با شرط بزرگ بودن w_L

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1 + \frac{1}{w_L^2}(z_1^2+z_2^2) + \cancel{\frac{z_1^2 z_2^2}{w_L^4}} \to 0}{1 + \frac{1}{w_L^2}(p_1^2+p_2^2) + \cancel{\frac{p_1^2 p_2^2}{w_L^4}} \to 0} \Longrightarrow \boxed{w_L \simeq \sqrt{p_1^2+p_2^2-2z_1^2-2z_2^2}}$$

مثال - با فرض اینکه تابع انتقال شکل نهایی تقویت‌کننده زیر باشد ω_L را پیدا نمایید.

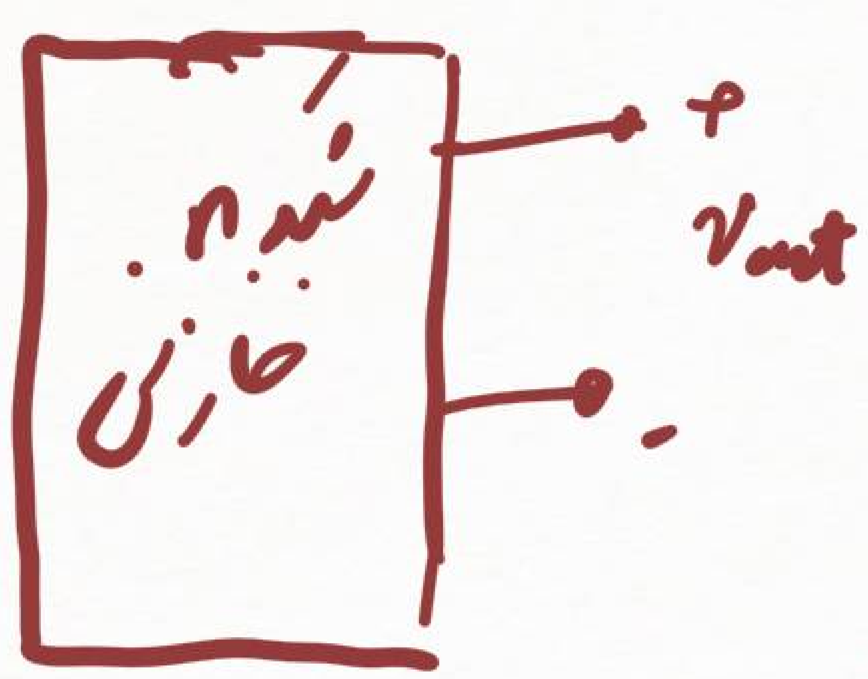


$$\Rightarrow A_L(s) = 100\,\frac{s(s+10)}{(s+100)(s+25)} \Rightarrow \omega_L = ?$$

$$\omega_L \approx \sqrt{p_1^2+p_2^2-2z_1^2-2z_2^2} = \sqrt{100^2+25^2-2\times 10^2} \cong \boxed{102\ \text{rad/s}}$$

توجه: البته بدون محاسبه نیز می‌توانستیم حدس بزنیم که قطب بزرگتر یعنی $p=100$ مال فرکانس قطع پایین تعیین کننده است.

تخمین فرکانس قطع پایین از روی شبکه:



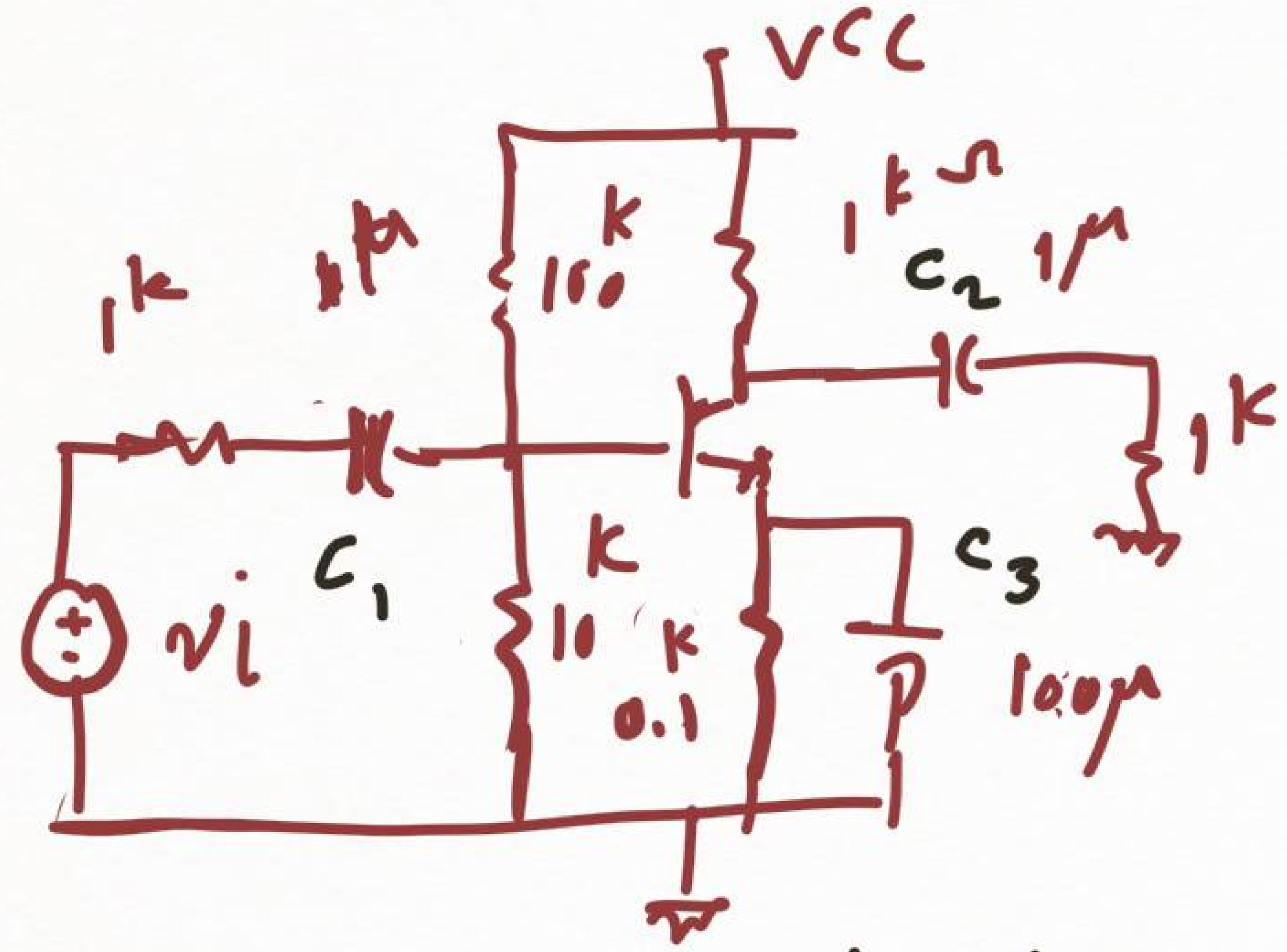
می‌توان نشان داد که فرکانس قطع پایین شبکه از رابطه:

$$\omega_L \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i R_{iS}}$$

محاسبه می‌شود.

$R_{iS} =$ مقاومت دیده شده از دو سر خازن iام وقتی بقیه خازن‌ها اتصال کوتاه باشند.

مثال - فرکانس قطع پائین مدار مقابل را بدست آورید



$\beta_0 = 100$

$r_\pi = 0.67^{k\Omega}$

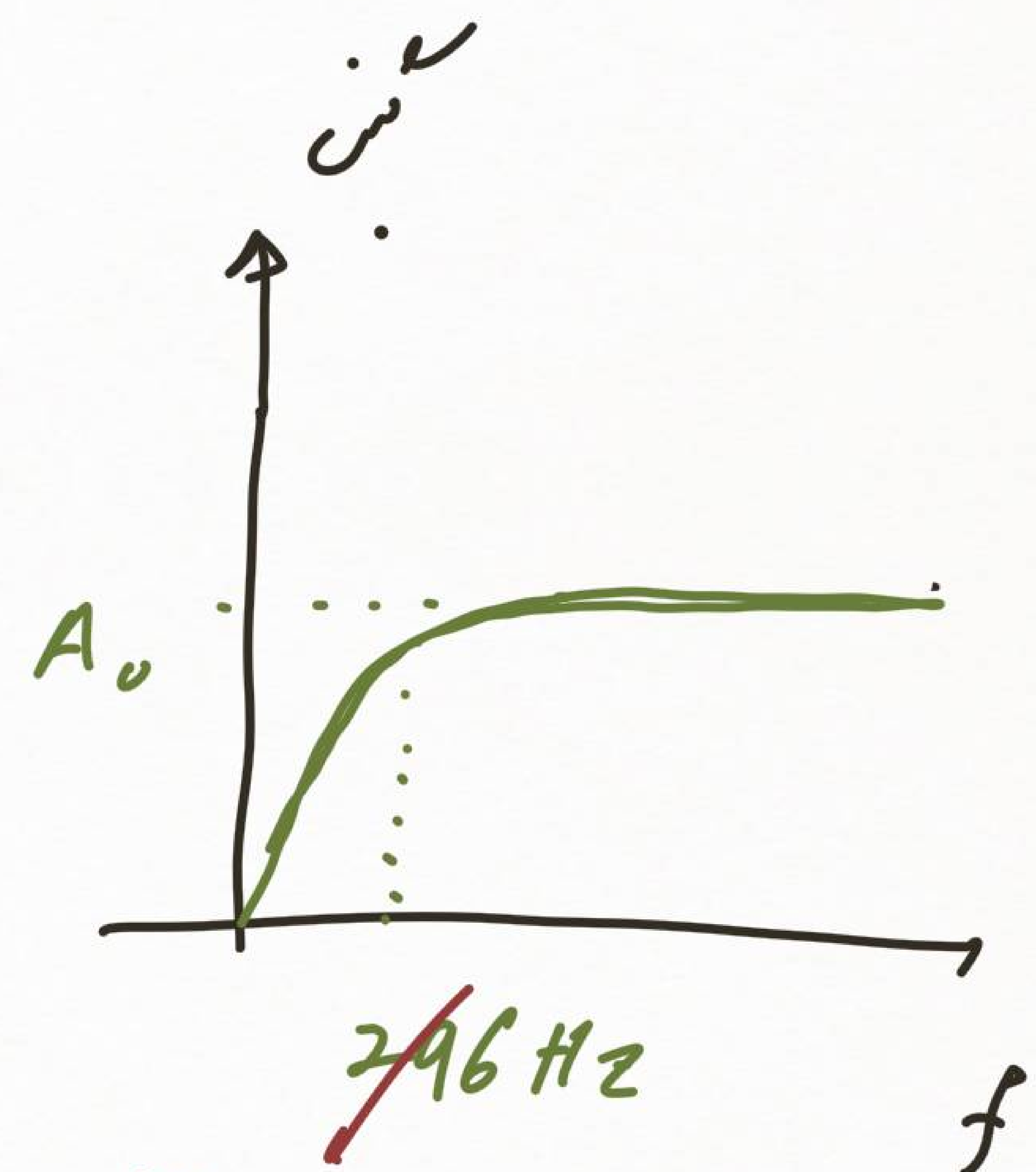
$$\omega_L \approx \frac{1}{R_{S_1}C_1} + \frac{1}{R_{S_2}C_2} + \frac{1}{R_{S_3}C_3} = \frac{1}{\tau_{S_1}} + \frac{1}{\tau_{S_2}} + \frac{1}{\tau_{S_3}}$$

$$R_{S_1} = (1^k + 100^k \parallel 10^k \parallel r_\pi) \quad , \quad \tau_{S_1} = R_{S_1}C_1 = 1.62\ msec$$

$$R_{S_2} = 1^k + 1^k = 2^{k\Omega} \quad , \quad \tau_{S_2} = R_{S_2}C_2 = 2\ msec$$

$$R_{S_3} = 0.1^{k\Omega} \parallel \left(\frac{r_\pi + 1^k \parallel 10^k \parallel 100^k}{1+\beta_0}\right) \quad ; \quad \tau_{S_3} = 1.35\ msec$$

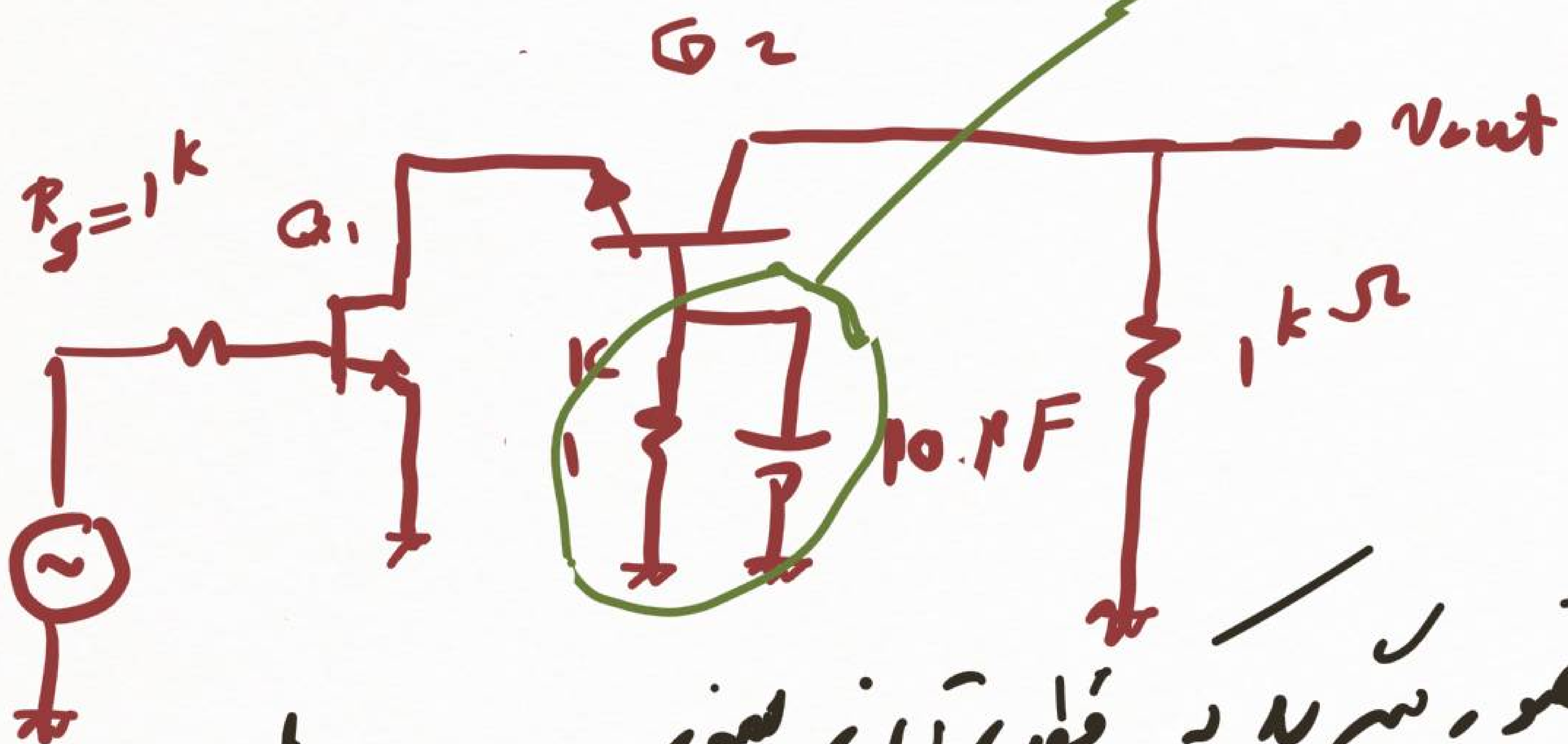
$$f_L = \frac{\omega_L}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{\tau_{S_1}} + \frac{1}{\tau_{S_2}} + \frac{1}{\tau_{S_3}}\right] \approx \boxed{296\ Hz}$$



W_L فرکانس قطع پائین شبکه

سؤال ۲- فرکانس قطع پایین مدار شکل را بدست آورید.

$Y(s) = 0 \longrightarrow$ فرکانس صفر



$r_\pi = 1k\Omega$

$\beta_0 = 100$

$r_0 = \infty$

اگر از این مسئله بدون دقت کامل نگاه بکنیم چون یک خازن داریم لذا تصور می‌شود که قطب آن یعنی $p = \frac{1}{RC}$ فرکانس قطع مدار بوده و داریم:

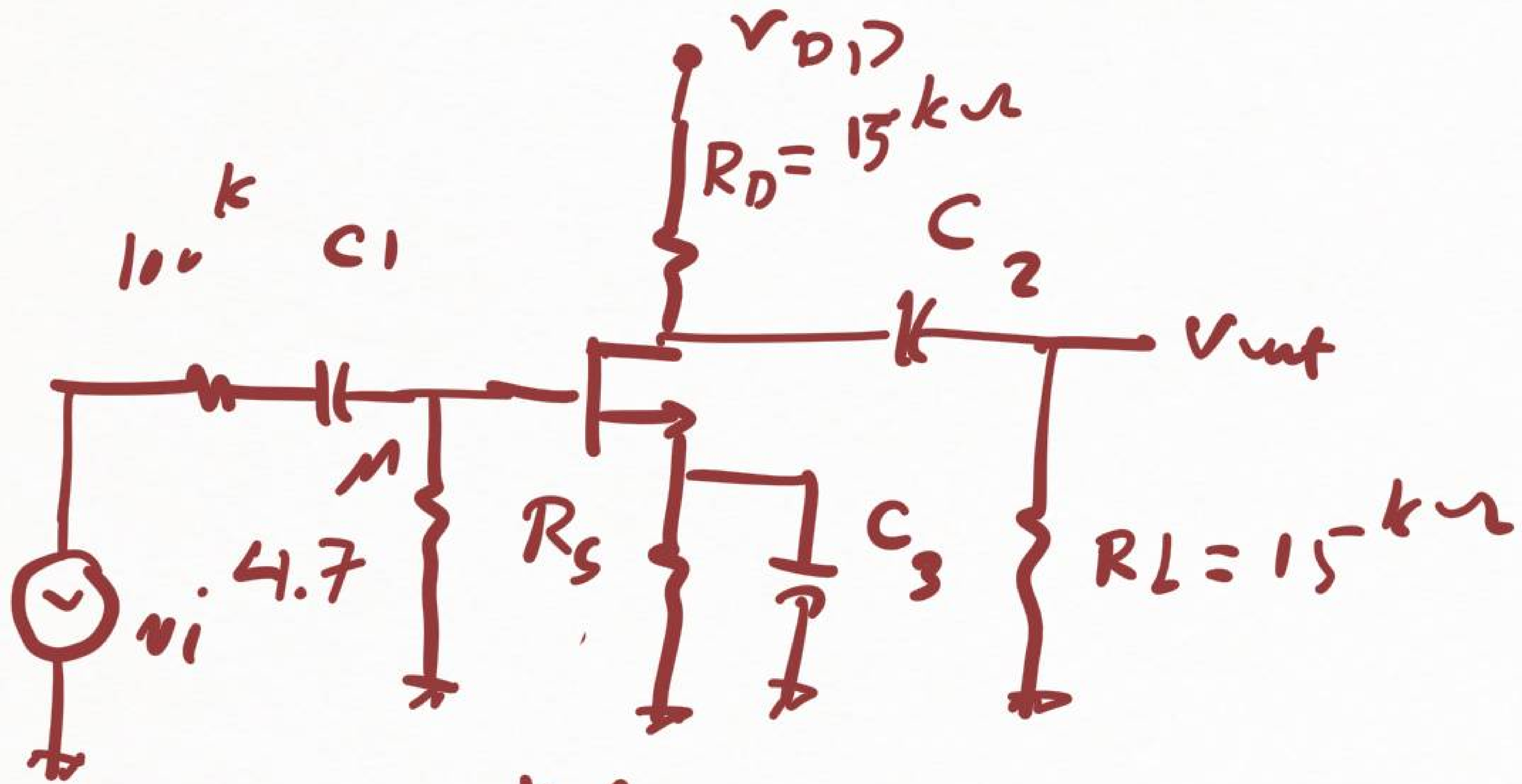
$$R_{S_1} = 1k\Omega \,\|\, (r_\pi + \overset{\infty}{\cancel{r_0}}) = 1k\Omega \quad , \quad \tau_{S_1} = R_{S_1} C_1 = 1k\Omega \times 10\mu F = 10\,ms \Longrightarrow \omega_L = \frac{1}{10}\,krad/s = 100\,rad/s$$

یعنی فرکانس قطع را $100\,rad/s$ در نظر بگیریم ولی اگر خوب دقت کرده متوجه می‌شود که مدار یک صفر هم دارد که مقدار آن هم $100\,rad/s$ می‌باشد چون:

$$Y(s) = 0 \Rightarrow Cs + \frac{1}{1k\Omega} = 0 \Rightarrow s = \frac{-1}{C \times 1} = \frac{1}{10}\,krad/s = \boxed{100\,rad/s}$$

بنابراین صفر و قطب مدار با هم خنثی شد، و فرکانس قطع پایین $\omega_L = 0$ می‌شود.

مثال: طراحی فرکانس قطع پایین مدار



$R_S = 20^{k\Omega}$

$g_m = 1\ mA/V$

$r_o = 150^{k\Omega}$

مقادیر C_1 ، C_2 ، C_3 را طوری بیابید تا فرکانس قطع پایین مدار $f_L = 100^{Hz}$ گردد.

$$f_L = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\tau_{s_1}} + \frac{1}{\tau_{s_2}} + \frac{1}{\tau_{s_3}}\right) \Longrightarrow 100 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{R_{s_1}C_1} + \frac{1}{R_{s_2}C_2} + \frac{1}{R_{s_3}C_3}\right)$$

$R_{s_1} = 100^k + 4.7^M = 4.8^M$

$R_{s_2} = 15^k + 15^k = 30^k$

$R_{s_3} = R_S \parallel \frac{1}{g_m} \approx \frac{1}{g_m} = 1^{k\Omega}$

مشاهده شد، چون ما یک معادله و سه مجهول (C_1 ، C_2 ، C_3) داریم، لذا جواب‌های زیادی خواهیم داشت. در عمل معمولاً مقادیر دو خازن را انتخاب کرده و مقدار خازن سوم محاسبه می‌شود. اما یک راه دیگر و سریع این است که چون نشان داده شد، اندازه خازن C_3 از بقیه کمتر است لذا بیشترین اثر را خازن C_3 دارد.

و در نتیجه به طور تقریب می‌توان $f_L \approx \dfrac{1}{2\pi R_{S_3} C_3} = 100 \Longrightarrow \boxed{C_3 = 1.6\mu F}$ انتخاب کرد و مقادیر دو خازن دیگر

یعنی C_1 و C_2 را یک کسر کوچکی از f_L مثلاً $\frac{1}{100}$ یا $\frac{1}{10}$ فرض کرد یعنی:

$$f_{C_1} = \frac{1}{10} f_L = 10^{Hz} \Longrightarrow f_{C_1} = \frac{1}{2\pi R_{S_1} C_1} \Longrightarrow \boxed{C_1 = 3.3\, nF}$$

$$f_{C_2} = \frac{1}{10} f_L = 10^{Hz} \Longrightarrow f_{C_2} = \frac{1}{2\pi R_{S_2} C_2} \Longrightarrow \boxed{C_2 = 0.53\, nF}$$