فصل ۱

مفاهیم بنیادی کنترل

خلاصه

این فصل به مفاهیم کلی در مورد سیستم‌های کنترل خطی اختصاص دارد. در ابتدا با هدف تعیین نگرش خود در مورد سیستم‌های کنترلی به مفاهیم بنیادی می‌پردازیم. این بدان معنی است که با چه نوع سیستم‌های کنترلی سروکار خواهیم داشت. سپس به شیوه‌های کنترلی سیستم‌ها و بیان مزایا و معایب آنها اشاره می‌کنیم. در ادامه مدل‌های سیستم‌های کنترل را مورد بررسی قرار می‌دهیم و در انتها توصیف فضای حالت را برای سیستم‌های کنترلی بحث خواهیم کرد.

۱- مفاهیم بنیادی

۱-۱ تعاریف اولیه

سیگنال: تابعی از یک یا چند متغیر که اطلاعاتی را در خود دارند، سیگنال می‌نامند.

سیستم: به مجموعه‌ای از عناصر مرتبط با هم که هدف معینی را دنبال می‌کنند، به طوری که انجام این کار توسط هیچ‌کدام از عناصر به تنهایی امکان‌پذیر نباشد را سیستم می‌نامند.

کنترل: در لغت به معنای تحت اختیار درآوردن، رهبری کردن و تنظیم کردن است.

ورودی سیستم: به مجموعه‌ای از سیگنال‌های وارده به سیستم، ورودی می‌گویند.

خروجی سیستم: به مجموعه‌ای از سیگنال‌های دریافتی از سیستم یا به تعبیری دیگر، پاسخ یا واکنش سیستم در قبال ورودی آن، خروجی نامیده می‌شود.

اغتشاش: سیگنال‌هایی که بر روی خروجی سیستم آثار نامطلوب دارند را اغتشاش می‌نامیم.

۱-۲ انواع سیستم‌ها

سیستم‌ها بسته به نوع نگرش طبقه‌بندی می‌شوند. به عنوان مثال

ـ بسته به روش تحلیل و طراحی

۱- خطی و غیرخطی ۲- متغیر با زمان و نامتغیر با زمان

ـ بسته به نوع سیگنال‌های موجود در سیستم

۱- داده پیوسته یا داده گسسته ۲- مدوله شده یا مدوله نشده

ـ بسته به نوع سیگنال ورودی

۱- تنظیم *(Regulating)* ۲- تعقیب *(Tracking)*

ـ بسته به تعداد ورودی ـ خروجی

۱- تک ورودی ـ تک خروجی *(SISO)* ۲- تک ورودی ـ چند خروجی *(SIMO)*

۳- چند ورودی ـ تک خروجی *(MISO)* ۴- چند ورودی ـ چند خروجی *(MIMO)*

در این درس بحث ما در مورد سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان داده پیوسته می‌باشد. در این سیستم‌ها، اصل جمع آثار صادق بوده، پارامترها و مشخصه‌های سیستم با زمان تغییر پیدا نمی‌کنند و سیگنال‌ها به صورت تابعی پیوسته از زمان می‌باشند.

۱-۳ اهداف کنترل

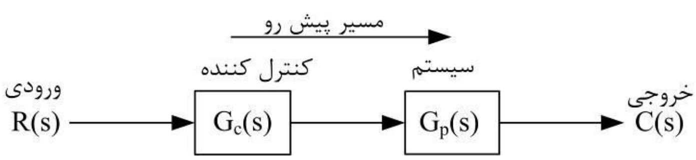
به بیانی ساده می‌توان هدف از کنترل یک سیستم را در تبعیت خروجی سیستم از ورودی آن در حضور اغتشاش و عدم قطعیت در پارامترهای سیستم تعبیر کرد. در حالت کلی، هدف از کنترل یک سیستم عبارتست از:

۱- سیستم پایدار باشد. ۲- خروجی از سیستم تبعیت نماید. ۳ـ اثر اغتشاش در خروجی ناچیز باشد. ۴ـ اثر عدم قطعیت در پارامترهای سیستم در خروجی ناچیز باشد. ۵ـ تلاش کنترلی *(control effort)* بهینه باشد.

۱-٤ شیوه‌های کنترلی

برای دستیابی به اهداف کنترلی ذکر شده در بخش قبل، از دو شیوه کنترلی استفاده می‌کنیم. یکی حلقه باز و دیگری حلقه بسته.

حلقه باز: در این شیوه کنترلی، خروجی تأثیری بر روی ورودی ندارد. شکل ۱-۱، نمونه‌ای از یک سیستم حلقه باز را نشان می‌دهد که ورودی از طریق مسیر پیش رو *(forward path)* با خروجی در ارتباط است.



شکل (۱-۱) : سیستم حلقه باز و اجزاء آن

شیوه کنترلی حلقه باز ساده‌ترین روش کنترلی است که هدف آن تعیین کنترل‌کننده به گونه‌ای است که خروجی از ورودی تبعیت نماید. در نگاه اول، $G_c(s) = G_p^{-1}(s)$ به عنوان یک انتخاب مطرح می‌گردد. این انتخاب مناسب نیست. زیرا:

۱- اگر $G_p(s)$ یک سیستم ناپایدار باشد، به هیچ وجه امکان پایدار کردن کل سیستم با این روش وجود ندارد.

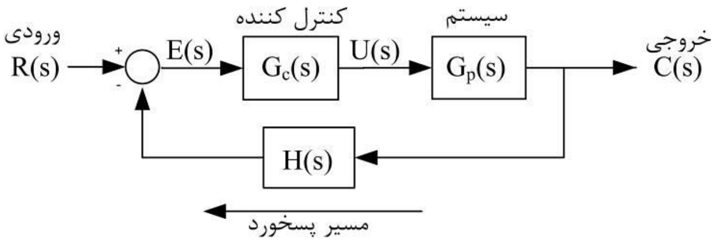
۲- چون $G_p(s)$ دقیق نمی‌باشد (خطای مدلسازی) بنابراین $G_p^{-1}(s)$ دقیق نبوده و لذا خروجی نمی‌تواند ورودی را دنبال نماید.

۳- چون در این شیوه کنترلی، از خروجی هیچ اطلاعی در دسترس نمی‌باشد، وجود عوامل مزاحم (اغتشاش) سبب تغییر خروجی می‌شود. بنابراین اثر اغتشاش در خروجی ظاهر و این شیوه، هیچ عکس العملی از خود نشان نمی‌دهد.

۴- در برخی موارد ساخت $G_p^{-1}(s)$ (تحقق‌پذیری) مشکل است.

حلقه بسته (فیدبک‌دار): در این شیوه کنترلی، خروجی بر روی ورودی مؤثر است (ورودی وابسته به خروجی است). بدین منظور برای ایجاد ارتباط میان خروجی و ورودی از یک مسیر پسخورد (فیدبک) استفاده می‌شود.

شکل ۱-۲ نمونه نوعی از یک سیستم کنترلی حلقه بسته را نشان می‌دهد.

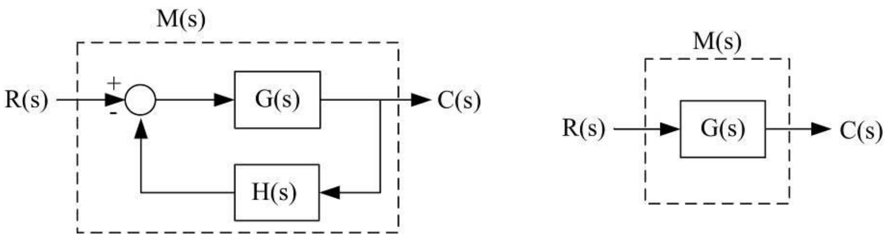


شکل (۱-۲) : سیستم حلقه بسته و اجزاء آن

در این شیوه کنترلی، $H(s)$ بیانگر المان پسخورد می‌باشد که در عمل عموماً سنسورها می‌باشند. اگر $H(s)=۱$ باشد، سیستم کنترلی را سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد می‌نامیم. $E(s)$ نمایانگر خطای سیستم و $U(s)$ سیگنال کنترلی نامیده می‌شود. اگر سیگنال برگشتی از خروجی با ورودی جمع شود، فیدبک را مثبت و اگر کسر شود، فیدبک را منفی می‌نامیم.

۵-۱ مقایسه شیوه‌های کنترلی

برای مقایسه بهتر است ابتدا به آثار و اهمیت پسخورد اشاره کنیم. کاهش خطای سیستم تنها یکی از آثار مهم فیدبک است و می‌تواند بر مشخصه‌های دیگری چون بهره کل، پایداری، حساسیت و نسبت سیگنال به نویز اثر داشته باشد. برای مقایسه دو ساختار زیر را برای سیستم کنترلی حلقه باز و حلقه بسته در نظر بگیرید.



ب) حلقه بسته **الف) حلقه باز**

شکل (۱-۳): ساختار کنترلی حلقه باز و حلقه بسته

۱- اثر بهره کل: با توجه به شکل۱-۳ مشاهده می‌شود که در حالت کلی فیدبک سبب کاهش بهره کل می‌گردد که این امر با ضریب $(۱+GH)^{-۱}$ ظاهر می‌شود.

حلقه بسته : $\frac{C}{R}=\frac{G}{۱+GH}=G(۱+GH)^{-۱}$ حلقه باز : $\frac{C}{R}=G$

۲- اثر بر حساسیت: در اینجا اثر فیدبک بر حساسیت را نسبت به تغییر پارامترها بررسی می‌کنیم. قبل از بررسی ابتدا حساسیت متغیر C نسبت به متغیر G را تعریف می‌کنیم.

$$\text{حساسیت}\quad S_G^C \overset{\Delta}{=} \frac{C \text{ درصد تغییرات متغیر}}{G \text{ درصد تغییرات متغیر}} = \frac{\frac{\Delta C}{C}}{\frac{\Delta G}{G}} = \frac{G}{C}\frac{\partial C}{\partial G}$$

حال فرض کنید که G یک پارامتر بهره باشد که ممکن است تغییر کند. حساسیت بهره کل سیستم(M) نسبت به تغییرات G به صورت زیر در دو حالت حلقه باز و حلقه بسته با توجه به شکل ۱-۳ قابل محاسبه است.

$$S_G^M = \frac{\partial M}{\partial G}\,\frac{G}{M}$$

حلقه باز : $M = G \quad \rightarrow \quad S_G^M = ۱$ حلقه بسته : $M = \frac{G}{۱+GH} \quad \rightarrow \quad S_G^M = \frac{۱}{۱+GH}$

با توجه به این که یک سیستم کنترلی باید نسبت به تغییرات پارامترها کاملاً غیرحساس و نسبت به فرمان‌های ورودی حساس باشد، مشاهده می‌شود که سیستم حلقه بسته، حساسیت نسبت به تغییر پارامترها را کاهش می‌دهد. نتایج زیر به راحتی قابل استنتاج است:

۱- تغییرات یک سیستم حلقه باز نسبت به تغییر پارامترهای آن برابر واحد است.

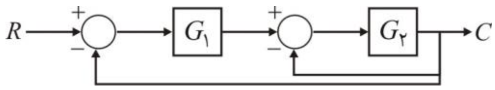
۲- در یک سیستم حلقه بسته به منظور کاهش حساسیت بایستی بهره را تا حد ممکن افزایش داد.

$$S_G^M = \frac{۱}{۱+GH} \qquad if \quad GH >> ۱ \quad \Rightarrow \quad S_G^M \rightarrow ۰$$

❋ **نکته:** ***۱- حساسیت برای سیستم‌های پایدار تعریف می‌گردد.***

۲- در محاسبه حساسیت می‌توان از قاعده زنجیره‌ای استفاده کرد. $S_G^T = S_{G_۱}^T\, S_{G_۲}^{G_۱} \ldots S_G^{G_n}$

مثال: سیستم کنترلی زیر را در نظر بگیرید.



حساسیت تابع تبدیل سیستم حلقه بسته به تغییرات در پارامتر p در تابع تبدیل $G_۱$ کدام است؟ (برق ـ تست‌های نمونه)

۱) $\frac{p}{G_۱}\cdot\frac{\partial G_۱}{\partial p}\cdot\frac{۱+G_۲}{۱+G_۲+G_۱G_۲}$

۲) $\frac{p}{G_۱}\cdot\frac{\partial G_۱}{\partial p}$

۳) $\frac{p}{G_۱}\cdot\frac{\partial G_۱}{\partial p}\cdot\frac{۱+G_۱}{۱+G_۱+G_۱G_۲}$

۴) $\frac{\partial G_۱}{\partial p}\cdot\frac{۱+G_۲}{۱+G_۱+G_۲}$

✍ **حل:** گزینه «۱»

از قاعده زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم.

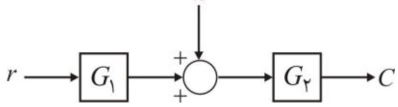
$$S_p^M = S_{G_۱}^M\, S_p^{G_۱}$$

$$M = \frac{C}{R} = \frac{G_۱G_۲}{۱+G_۱G_۲+G_۲} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial G_۱} = \frac{G_۲(۱+G_۲)}{(۱+G_۲+G_۱G_۲)^۲}$$

$$S_{G_۱}^M = \frac{\partial M}{\partial G_۱}\,\frac{G_۱}{M} = \frac{G_۲(۱+G_۲)}{(۱+G_۲+G_۱G_۲)^۲}\times G_۱\times\frac{۱+G_۲+G_۱G_۲}{G_۱G_۲} = \frac{۱+G_۲}{۱+G_۲+G_۱G_۲}$$

$$\Rightarrow \quad S_p^M = S_p^{G_۱}\,\frac{۱+G_۲}{۱+G_۲+G_۱G_۲} = \frac{p}{G_۱}\,\frac{\partial G_۱}{\partial p}\,\frac{۱+G_۲}{۱+G_۲+G_۱G_۲}$$

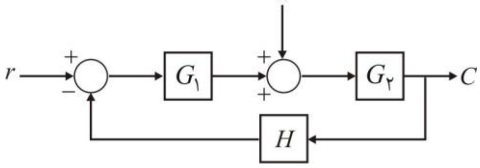
۳- اثر بر نویز: سیستم حلقه باز زیر را در نظر بگیرید که در آن n سیگنال نویز می‌باشد. خروجی در این حالت برابر با مجموع خروجی ناشی از نویز n و ورودی r می‌باشد. (اصل جمع آثار)



$$C = G_۱G_۲r + G_۲n = C_r + C_n$$

نسبت سیگنال به نویز $= \frac{C_r}{C_n} = G_۱\frac{r}{n}$

مشاهده می‌گردد که $G_۲$ نقشی در نسبت سیگنال به نویز ندارد. همچنین به منظور افزایش نسبت سیگنال به نویز باید $G_۱$ را افزایش دهیم. حال سیستم حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید.



$$C = \frac{G_۱G_۲}{۱+G_۱G_۲H}r + \frac{G_۲}{۱+G_۱G_۲H}n = C_r + C_n$$

$$\text{نسبت سیگنال به نویز} = \frac{C_r}{C_n} = G_1 \frac{r}{n}$$

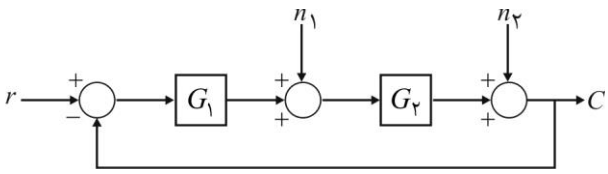
همانطور که ملاحظه می‌شود نسبت سیگنال به نویز در حالت حلقه بسته هیچ تفاوتی با حالت حلقه باز ندارد. آنچه حائز اهمیت است، امکان اصلاح نسبت سیگنال به نویز در شرایطی خاص می‌باشد. به منظور بررسی فرض کنید که مقدار G_1 به G_1' و r به r' تغییر یابد و سایر پارامترها ثابت بمانند. خروجی ناشی از سیگنال ورودی به تنهایی دارای همان مقدار در حالت حلقه باز است.

$$C = C_r + C_n = G_1 G_2 r + \frac{G_2}{1+G_1' G_2 H} n \quad \Rightarrow \quad \text{نسبت سیگنال به نویز} = \frac{C_r}{C_n} = (1+G_1' G_2 H) G_1 \frac{r}{n}$$

مشاهده می‌شود که نسبت سیگنال به نویز در حالت حلقه بسته نسبت به حالت حلقه باز $(1+G_1' G_2 H)$ برابر شده است.

❋ **نکته**: ***بهبود یافتن نسبت سیگنال به نویز به محل وارد شدن نویز به سیستم وابسته است. به مثال زیر توجه کنید.***

مثال : سیستم کنترلی زیر را در نظر بگیرید. داریم:



$$C = C_r + C_{n_1} + C_{n_2}$$

$$C_r = \frac{G_1 G_2}{1+G_1 G_2} r \qquad C_{n_1} = \frac{G_2}{1+G_1 G_2} n_1 \qquad C_{n_2} = \frac{1}{1+G_1 G_2} n_2$$

$$\frac{C_r}{C_{n_1}} = G_1 \frac{r}{n_1} \quad (1) \qquad \frac{C_r}{C_{n_2}} = G_1 G_2 \frac{r}{n_2} \quad (2)$$

از مقایسه (۱) و (۲) درمی‌یابیم که

۱- نسبت سیگنال به نویز به محل وارد شدن نویز وابسته است.

۲- برای حذف اثر نویز n_1 در خروجی باید G_1 افزایش یابد و برای حذف اثر نویز n_2 در خروجی باید $G_1 G_2$ افزایش یابد.

۴- اثر بر پایداری: فیدبک می‌تواند پایداری را بهبود بخشد، ولی اگر به طور نامناسبی بکار رود، ممکن است پایداری سیستم را کاهش داده و یا حتی از بین ببرد. به بیانی‌دیگر، فیدبک قابلیت پایدارسازی یک سیستم ناپایدار را داردکه این مورد مشمول سیستم حلقه باز نمی‌شود.

۱-۶ مبانی ریاضی مورد نیاز

برای دستیابی به اهداف کنترلی در این درس، از دو حوزه زمان و فرکانس استفاده می‌کنیم که در جای خود مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند. در حوزه فرکانس از تبدیل لاپلاس بهره می‌بریم که به طور مختصر به تعریف و بررسی ویژگی‌های آن می‌پردازیم.

تعریف تبدیل لاپلاس

با فرض این که تابع $f(t)$ در بازه $[0,\infty)$ تعریف شده باشد، تبدیل لاپلاس آن $F(s)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^t f(t) e^{-st} \, dt$$

L عملگر لاپلاس و s یک متغیر مختلط است. به رابطه فوق، تبدیل لاپلاس یک‌طرفه می‌گوییم. فرض صفر بودن تابع برای زمان‌های کمتر از صفر، محدودیتی در مسائل مورد بررسی ما ایجاد نمی‌کند، زیرا از یک سو در عمل سیستم‌ها علی بوده و از سویی دیگر، در بررسی‌های حوزه زمانی، مبنای محاسبات لحظه شروع $(t=0)$ است. دو قضیه بسیار مهم در تبدیل لاپلاس داریم که در این درس کاربرد فراوانی دارند.

قضیه مقدار اولیه: $$f(t=0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

قضیه مقدار نهایی: $$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

مقدار نهایی برای تابع $f(t)$ به شرطی قابل محاسبه است که $sF(s)$ قطبی روی محور موهومی یا نیمه راست صفحه s نداشته باشد. بنابراین محل قطب‌های تابع در محاسبه مقدار نهایی آن مؤثر می‌باشند.

با توجه به مطالب فوق می‌توان نتیجه گرفت که:

۱- مقدار اولیه برای هر تابع قابل محاسبه است، در حالی که قضیه مقدار نهایی، برای هر تابع قابل محاسبه نمی‌باشد.

۲- مقدار نهایی برای توابع سینوسی قابل استفاده نمی‌باشد.

خواص تبدیل لاپلاس در جدول (۱-۱) آورده شده است.

جدول (۱-۱): خواص تبدیل لاپلاس

خاصیت	تبدیل لاپلاس
۱- خطی بودن	$L\{k_1 f_1(t) \pm k_2 f_2(t)\} = k_1 F(s) \pm k_2 F_2(s)$
۲- مشتق‌گیری در حوزه زمان	$L\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
	$L\{\frac{d}{dt} f(t)\} = s F(s) - f(0)$ $L\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\} = s^2 F(s) - s f(0) - f^{(1)}(0)$
۳- انتگرال	$L\{\int_0^t f(\tau) d\tau\} = \frac{F(s)}{s}$
۴- انتقال در حوزه زمان	$L\{f(t-T)\} = e^{-Ts} F(s)$
۵- انتقال در حوزه فرکانس	$L\{e^{-s_0 t} f(t)\} = F(s+s_0)$
۶- تغییر مقیاس	$L\{f(at)\} = \frac{1}{\|a\|} F(\frac{s}{a})$
۷- مشتق‌گیری در حوزه فرکانس	$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
۸- کانولوشن	$L\{f(t) * g(t)\} = F(s) G(s)$

مثال: پاسخ ضربه واحد سیستمی $G(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 4s + 4}$ دارای چه مقدار اولیه و مقدار نهایی است؟

(ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۲)

۱) مقدار اولیه صفر و مقدار نهایی $\frac{1}{2}$ است.

۲) مقدار اولیه صفر و مقدار نهایی قابل تعریف نیست.

۳) مقدار نهایی $\frac{1}{2}$ و مقدار اولیه قابل تعریف نیست.

۴) مقادیر خواسته شده در حوزه زمان است و از تابع تبدیل که در حوزه فرکانس بیان می‌شود، قابل حصول نیست.

✍ **حل:** گزینه «۲»

با توجه به متن درس، مقدار اولیه برای هر تابعی قابل تعریف است. لذا گزینه (۳) نادرست است. گزینه (۴) نیز با توجه به خواص تبدیل لاپلاس (قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی) نادرست است. بنابراین با توجه به گزینه‌های باقیمانده نیازی به محاسبه مقدار اولیه و مقدار نهایی نیز نمی‌باشد. فقط کافی است که شرط قضیه مقدار نهایی بررسی شود. بدین منظور از روش راث استفاده می‌کنیم.

$$sG(s) = \frac{s(s^2 + 3s + 2)}{s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 4s + 4} \quad \Rightarrow \quad \Delta(s) = s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 4s + 4$$

یک سطر صفر در روش راث بدون تغییر علامت در ستون اول آن نشان دهنده یک جفت ریشه موهومی است. این واقعیت با تشکیل جدول راث قابل بررسی است. لذا $sG(s)$ دارای قطبی روی محور موهومی بوده و مقدار نهایی برای آن قابل تعریف نیست. روش راث در فصل دوم به طور کامل توضیح داده می‌شود.

s^4	۱	۴	۴
s^3	۲	۴	
s^2	۲	۴	
s^1	۰	۰	
s^0	۴		

برای حل کامل، مقدار اولیه برابر است با:

$$g(0)=\lim_{s\to\infty} sG(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s(s^2+3s+2)}{s^4+2s^3+4s^2+4s+4}=0$$

۱-۷ نمایش سیستم‌های کنترل

همواره نخستین گام در کنترل سیستم‌ها توسط روش‌های کلاسیک، شناسایی این سیستم‌ها می‌باشد. شناسایی به معنی تعیین روابط حاکم بر سیستم است که دربرگیرنده تمام مشخصات آن باشد که نهایتاً منجر به تعیین تابع تبدیل (برای سیستم‌های خطی) و تابع توصیفی (برای سیستم‌های غیرخطی) می‌گردد. نکته حائز اهمیت این است که آیا مدل بدست آمده از سیستم بر رفتار آن کاملاً منطبق است یا خیر؟ عواملی چون غیرخطی بودن، متغیر با زمان بودن و ... از جمله عوامل متعددی هستند که ما را در شناسایی سیستم و بدست آوردن مدل دقیق محدود می‌کنند. برای نمایش سیستم‌های کنترل خطی، روش‌های متفاوتی وجود دارد که عبارتند از:

۱- نمایش تابع تبدیل　　۲- نمایش بلوکی　　۳- نمودار گذر سیگنال　　۴- نمایش فضای حالت

۱-۷-۱ نمایش تابع تبدیل

۱-۱-۷-۱ تعریف

می‌دانیم که روابط حاکم بر یک سیستم خطی مستقل از زمان *(LTI)* را می‌توان به صورت یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت حقیقی نمایش داد. فرض کنید که معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه *n* بین ورودی سیستم *r(t)* و خروجی سیستم *C(t)* به صورت زیر باشد:

$$\frac{d^n c(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{dc^{n-1}(t)}{dt^{n-1}}+\dots+a_1\frac{dc(t)}{dt}+a_0c(t)=\dots\dots=b_m\frac{dr^m(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{dr^{m-1}(t)}{dt^{m-1}}+\dots+b_1\frac{dr(t)}{dt}+b_0r(t)$$

تابع تبدیل سیستم $G(s)$ را نسبت تبدیل لاپلاس خروجی به تبدیل لاپلاس ورودی زمانی که همه شرایط اولیه صفر باشند، تعریف می‌کنیم.

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\text{تبدیل لاپلاس خروجی}}{\text{تبدیل لاپلاس ورودی}}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\dots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1s+a_0}$$

بنابراین تابع تبدیل یک سیستم *LTI* تابعی گویا از s بوده و به صورت نسبت دو چندجمله‌ای نمایش داد.

$$G(s)\overset{\Delta}{=}\frac{N(s)}{D(s)}$$

یادآوری

تابع تبدیل یک سیستم *LTI* را تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه آن با شرایط اولیه صفر تعریف می‌کنند. به تابع تبدیل، توصیف خارجی *(external model)* نیز می‌گویند، زیرا فقط رابطه میان ورودی و خروجی را مشخص کرده و اطلاعاتی از ساختار داخلی سیستم نمی‌دهد، به طوری که با فرض معلوم بودن تابع تبدیل، می‌توان پاسخ سیستم را به هر ورودی دلخواه بدست آورد. توجه کنید

ـ به ریشه‌های چندجمله‌ای مخرج $D(s)$، قطب‌های سیستم و به ریشه‌های چندجمله‌ای صورت $N(s)$، صفرهای سیستم می‌گوییم.

ـ به معادله‌ای که از صفر قرار دادن چندجمله‌ای مخرج $D(s)$ بدست می‌آید، معادله مشخصه می‌گوییم. زیرا ریشه‌های آن (که قطب‌های سیستم می‌باشند) رفتار پاسخ زمانی آن را مشخص می‌کنند. $\Delta(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1s+a_0=0$ خواهید آموخت که پایداری سیستم‌های تک ورودی ـ تک خروجی *LTI* کاملاً به ریشه‌های معادله مشخصه بستگی دارد. همچنین با استفاده از فیدبک می‌توان قطب‌های سیستم را جابجا کرد، در حالی که نمی‌توان صفرهای آن را تغییر داد.

ـ با در نظر گرفتن درجه چندجمله‌ای صورت m و چندجمله‌ای مخرج n در تابع تبدیل، سه نوع تابع تعریف می‌شود:

۱- تابع سره *(proper)*: در این حالت $m=n$ می‌باشد. بنابراین $\lim\limits_{s\to\infty} G(s)=k \quad (k\neq ۰)$

۲- تابع اکیداً سره *(strictly proper)* : در این حالت $m<n$ می‌باشد. بنابراین $\lim\limits_{s\to\infty} G(s)=۰$

۳- تابع ناسره *(improper)* : در این حالت $m>n$ می‌باشد. بنابراین $\lim\limits_{s\to\infty} G(s)\to\infty$

فرض می‌کنیم فقط با سیستم‌هایی سروکار داریم که درجه چندجمله‌ای صورت تابع تبدیل آنها از درجه چندجمله‌ای مخرج بزرگ‌تر نباشد. البته در اکثر سیستم‌های فیزیکی $m<n$ می‌باشد، زیرا در یک سیستم فیزیکی عموماً تغییر ناگهانی در ورودی باعث تغییر ناگهانی در خروجی نمی‌شود. به بیانی دیگر، پاسخ پله یک سیستم فیزیکی نمی‌تواند در $t=۰$ ناپیوستگی داشته باشد. برای برقراری این خاصیت، باید شرط $m<n$ برقرار باشد. این رابطه برای مشتق iام پاسخ پله سیستم به صورت $m<n-i$ و برای انتگرال iام پاسخ پله سیستم به صورت $m<n+i$ می‌باشد. همچنین طبق تعریف، چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج تابع تبدیل سیستم نباید ریشه مشترکی داشته باشند، زیرا در غیر این صورت می‌توان صورت و مخرج را در هر چندجمله‌ای دلخواه ضرب نمود، بدون آن که تغییری در تابع تبدیل حاصل شود.

مثال: پاسخ ضربه کدام یک از سیستم‌های زیر در $t=۰$ پیوسته است؟ (مؤلف)

۱) $\dfrac{۲}{s+۳}$ ۲) $\dfrac{۱}{s^۲+s+۱}$ ۳) $\dfrac{s+۱}{s^۲+s+۱}$ ۴) $\dfrac{s-۲}{s^۲+s+۱}$

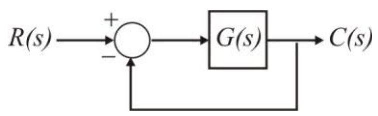
✍ **حل:** گزینه «۲»

از متن درس، تنها گزینه (۲) شرط $m<n-۱$ را داراست.

$$m=۰\ ,\ n=۲ \ \Rightarrow\ ۰<(۲-۱)=۱$$

۱-۷-۱-۲ بررسی صفرها و قطب‌های سیستم حلقه باز و حلقه بسته

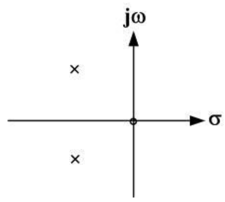
شکل زیر را در نظر بگیرید که $G(s)$ تابعی گویا از s بوده و اکیدا سره است.

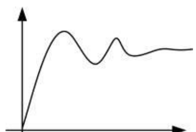
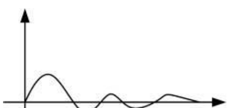
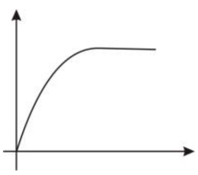
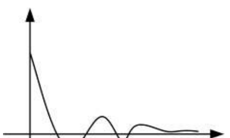


$$M(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{۱+G(s)}$$
$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)} \qquad \rightarrow\ M(s)=\frac{N(s)}{N(s)+D(s)}$$

به راحتی می‌توان دریافت که صفرهای سیستم حلقه باز $G(s)$ و صفرهای سیستم حلقه بسته $M(s)$ با یکدیگر برابرند. در حالی که قطب‌های آنها با یکدیگر متفاوت می‌باشد.

مثال: اگر نمودار صفر و قطب زیر، مربوط به یک سیستم خطی مستقل از زمان باشد، پاسخ پله این سیستم در حوزه زمان برابر کدام گزینه است؟ (مؤلف)



۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

✍ **حل:** گزینه «۲»

ابتدا با توجه به نمودار صفر و قطب می‌توانیم تابع تبدیل سیستم را پیدا کنیم.

$$G(s)=\frac{ks}{(s+a)^۲+b^۲}$$

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)} \ \rightarrow\ C(s)=R(s)G(s)=\frac{۱}{s}G(s)=\frac{k}{(s+a)^۲+b^۲}$$

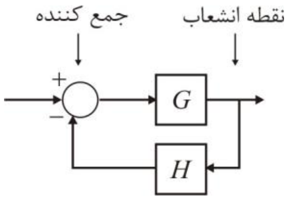
حال از قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{t\to 0} c(t) = \lim_{s\to\infty} sC(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{ks}{(s+a)^2+b^2} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{s\to 0} sC(s) = \lim_{s\to 0} \frac{ks}{(s+a)^2+b^2} = 0$$

۱-۷-۲ نمایش بلوکی

به طور کلی در نمایش بلوکی سعی در ایجاد یک فرم استاندارد داریم که به راحتی بتوان تابع تبدیل سیستم کلی را از روی آن بدست آورد. این فرم استاندارد در زیر نشان داده شده است. عناصر تشکیل دهنده عبارتند از: بلوک‌ها، نقاط جمع‌کننده، نقاط انشعاب و پیکان جهت‌دار که نشان‌دهنده جریان انشعاب می‌باشد. برای رسیدن به فرم استاندارد، عملیات ساده‌سازی باید صورت گیرد به طوری که:



۱- کلیه بلوک‌هایی که به صورت سری به یکدیگر متصل شده‌اند، معادل‌گذاری شوند.

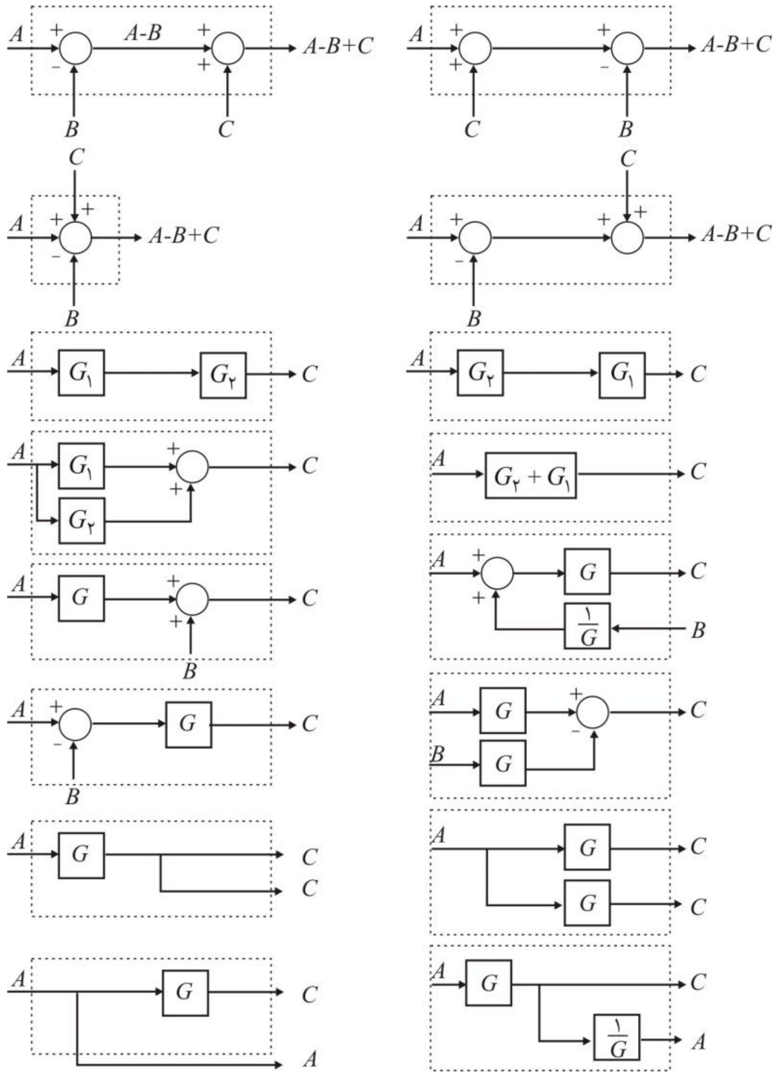
۲- کلیه بلوک‌هایی که به صورت موازی به یکدیگر متصل شده‌اند، معادل‌گذاری شوند.

۳- حلقه‌های فیدبک کوچک‌تر معادل‌گذاری شوند.

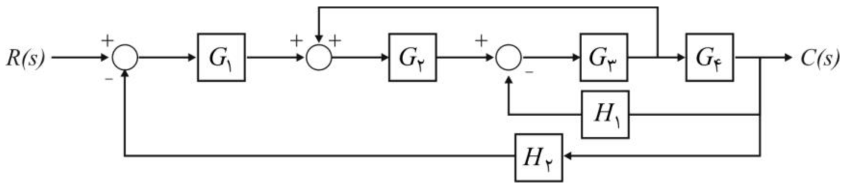
۴- نقاط جمع به سمت چپ و نقاط انشعاب به سمت راست حلقه بزرگ‌تر انتقال داده شوند.

۵- تکرار مراحل فوق تا بلوک دیاگرام حاصله به فرم استاندارد درآید.

شکل‌های زیر، قواعد ساده‌سازی را نمایش می‌دهند.

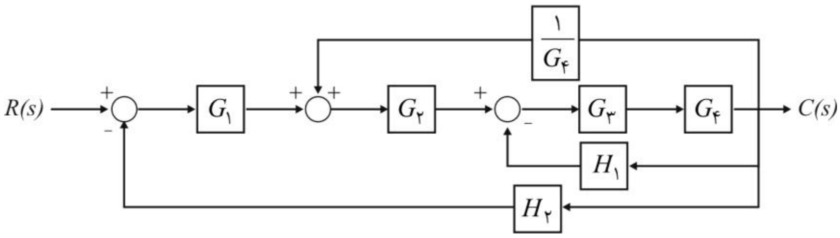


مثال: در شکل زیر تابع تبدیل $M(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}$ را با روش ساده‌سازی بلوکی بدست آورید. (مؤلف)

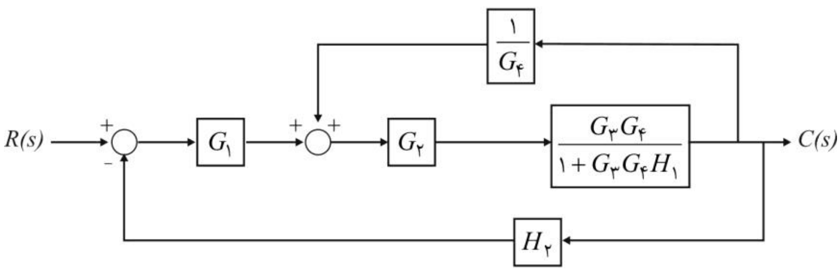


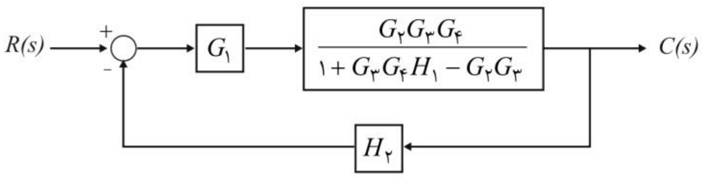
✍ **حل:**

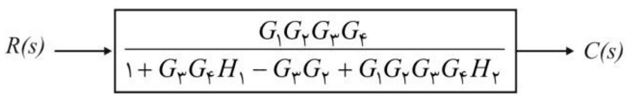
برای حل ابتدا انشعاب در سمت چپ بلوک G_4 را به سمت راست منتقل می‌کنیم.



مراحل بعدی ساده‌سازی به ترتیب در ذیل آورده شده است.







لازم به ذکر است که در مسائل به دلیل پیچیدگی و صرف زمان زیاد غالباً از روش ساده‌سازی بلوکی استفاده نمی‌کنیم.

۱-۷-۳ نمایش گذر سیگنال

تعریف: نمودار گذر سیگنال را می‌توان به منزله صورت ساده شده نمودار بلوکی به حساب آورد. طبق تعریف، نمودار گذر سیگنال وسیله‌ای است ترسیمی برای نمایش روابط ورودی و خروجی میان متغیرهای یک دستگاه معادلات جبری. برای نمایش به فرم گذر سیگنال، هر متغیر را به عنوان یک گره و ارتباط میان آن‌ها را با یک شاخه جهت‌دار نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال: