



دکتر علیرضا احمدی فرد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی شهرورد- موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

تبدیل لاپلاس دو طرفه: نمایی فکلط \mathcal{L} تراجم ورژن سیستم های خنی تغییر پاسخ با زمان هستند

در فعل های فعل دیگر رسمی و معمولی از سیالها را تو ان رفع برتر کنیم کای $e^{\omega t}$ بیان کرد یعنی $x = e^{\omega t} \tilde{x}$ تبدیل فوریه بود.

بهینه آن سیالها و سیستم ها را به حوزه حرکاتی منتقل کرده و کنل آن را در حوزه انتشار داریم. $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x(\omega) d\omega$

تبدیل فوریه فضای سیستم های پایه را کنیم می باشد لذا رفتار سیستم های نایابدا را نمی توان بدینکنیم که آن کنل کرده است. از طریق سیالها

با مریم نادری تبدیل فوریه نمایم

که داشتن کنی های جامع تر سطحی می بینیم تراجم ورژن \mathcal{L} د نمایی (نامنی موصوفی) می تواند سیاری از کدریت ها را بردارد بهینه لاپلاس چنی احتمانی از حرامی سازد. $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x(\omega) d\omega$ تبدیل لاپلاس



دکتر علیرضا احمدی فرد - دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی شهرورد - موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

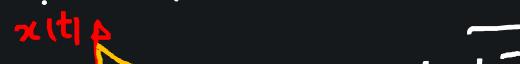
$$x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad \text{تبدیل فوریه حالت حاصل از تبدیل لاپلاس است}$$

رابطه تبدیل موری و تبدیل لاپلاس:

$$x(s) = x(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) e^{-\sigma t}) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} dt$$

$$s = \sigma + j\omega$$

بعی تبدیل لاپلاس سینال $x(t)$ برای راست با تبدیل موری $x(t) e^{-\sigma t}$ تغییر چشمی کرده است. کمی موثری کمی چشمی



$$x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma t} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma+s)t} dt = \frac{-1}{\sigma+s} e^{-(\sigma+s)t} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{-1}{\sigma+s} \left[e^{-(\sigma+s)\infty} - e^{-(\sigma+s)(-\infty)} \right]$$

$$e^{-(\sigma+s)\infty} = e^{-(\sigma+\sigma_j j\omega)\infty} = e^{-(\sigma+j\omega)\infty} = e^{-j\omega\infty} \quad \text{آنچه شاهروندی میگذرد}$$

$$\boxed{x(s) = \frac{1}{s+\sigma}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -\sigma}$$



مسئل: تبدیل لاپلاس

left-sided
استجواب



$$x(t) = -e^{-at} u(-t)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-at} u(-t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{-(a+s)t} dt = \frac{1}{s+a} e^{-(a+s)t} \Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s+a} \left(\frac{-e^{-(a+s)\infty}}{1} - e^{-(a+s)0} \right)$$

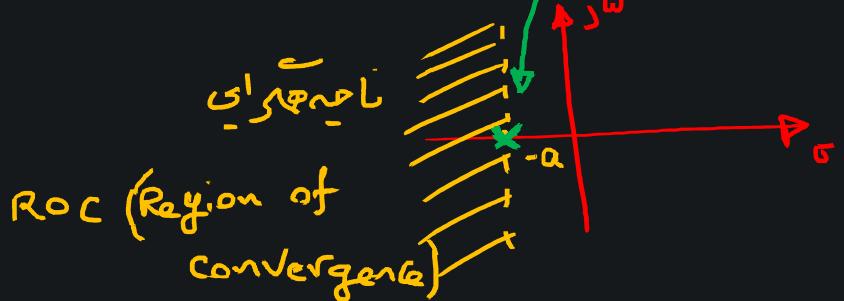
$$e^{(a+s)\infty} = e^{(a+\sigma)\infty} e^{j\omega\infty}$$

$$\begin{aligned} e^{(a+\sigma)\infty} &= e^{\sigma\infty} e^{j\omega\infty} \\ &\text{برای طبقه ای} \\ &\sigma + \sigma < 0 \\ &\text{Re}\{s\} < -a \end{aligned}$$

↗

$$X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} < -a$$

s = -a پایه همچون (قف)





دکتر علیرضا احمدی فرد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی شهرورد- موضوع تبدیل لابلاس دو طرفه

$$x(t) = e^{-at} u(t)$$

right-sided



$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}\{s\} > -a$$

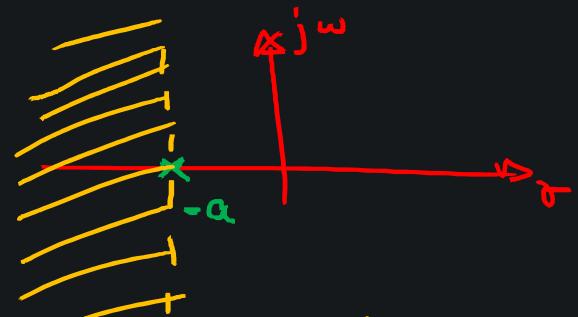


ناحیه همایی است ری بین خط موازی کسر ساز

$$x(t) = -e^{-at} u(-t) \Rightarrow$$

left-sided

$$X(s) = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}\{s\} < -a$$



ناحیه همایی است په بین خط موازی کسر ساز



دکتر علیرضا احمدی فرد - دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی شهرورد - موضوع تبدیل لپلاس دو طرفه

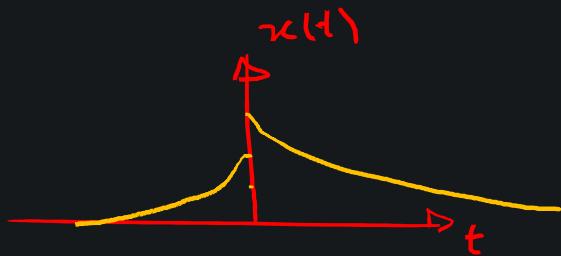
$$\text{محل: } x(t) = 3e^{-2t} u(t) + 2e^{3t} u(-t)$$

$e^{-2t} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2}, \operatorname{Re}\{s\} > -2$

$e^{3t} u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{-1}{s-3} \quad \operatorname{Re}\{s\} < 3$

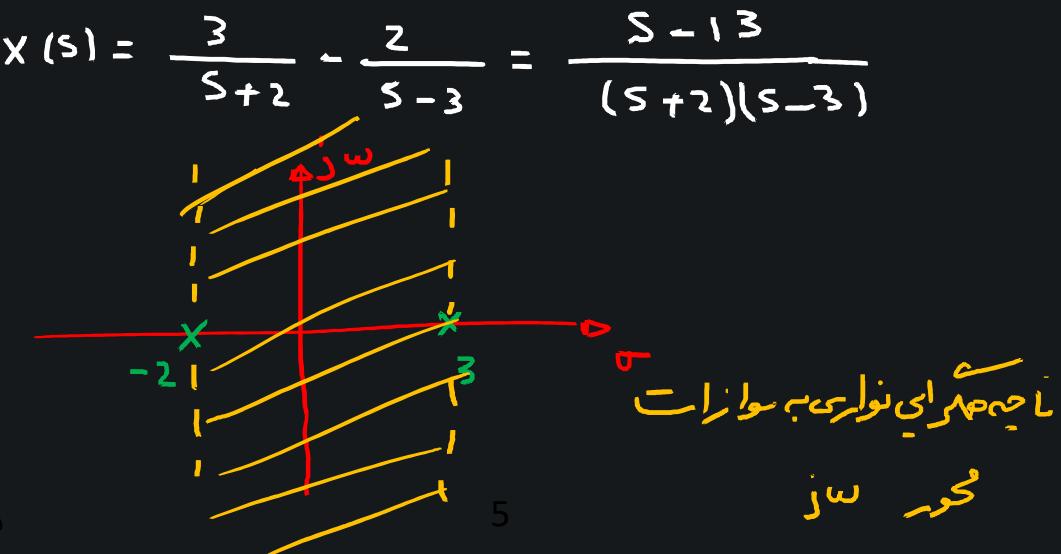
$$X(s) = 3 \times \frac{1}{s+2} - 2 \times \frac{1}{s-3}$$

$$\operatorname{Re}\{s\} > -2 \cap \operatorname{Re}\{s\} < 3$$



Double - sided

دانشگاه صنعتی شهرورد





دکتر علیرضا احمدی فرد - دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی شهرورد - موضوع تبدیل لابلاس دو طرفه



محدود در زمان

مثال: سیستم لابلاس $x(t) = e^t(u(t) - u(t-2))$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^t (u(t) - u(t-2)) e^{-st} dt = \int_0^2 e^t \cdot e^{-st} dt$$



$$X(s) = \int_0^2 e^{(1-s)t} dt = \frac{1}{1-s} e^{(1-s)t} \Big|_0^2 = \frac{e^{2(1-s)} - e^0}{1-s} = \frac{e^{2(1-s)} - 1}{1-s}$$

قبل

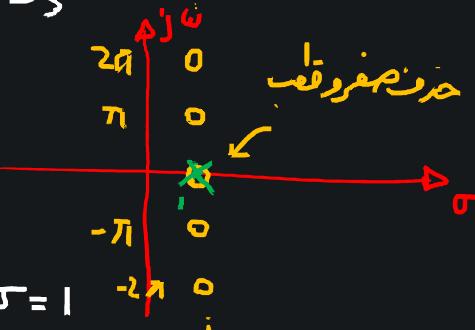
$$(1-s)=0 \Rightarrow s=1$$

سینه معین

بعد

$$e^{2(1-s)} = 1 \Rightarrow e^{2(1-1-\omega)} = e^0 = e^{j2k\lambda}$$

دانشگاه صنعتی شهرورد



6

$$\sigma = 1 \quad -2 \quad \omega = -k\lambda \quad \Rightarrow \omega = -k\lambda$$



دکتر علیرضا احمدی فرد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی شهرورد- موضوع تبدیل لایل اس دو طرفه

صفر قطب های تبدیل لایل اس در تقریب برید، سبدیل لایل اس سطحی ای (۱۱) رعایت نماید
 (۱۲) چندین های از ک ریهورست رمح کسر (۱۳) باشد.

ریسمان های رمح (۱۴) X یعنی جایی است که قطب های تبدیل لایل اس می گردند
 ریسمان های صورت (۱۵) X یعنی جایی است که از مردم رای تبدیل لایل اس می گردند

نکته: قطب های تو اسد رایه همراهی تبدیل لایل اس متر آرایید.

نکته: صفرها معنی است رسانایه همراهی با وارای تبدیل لایل اس خواهند

نکته: مردم رایه همراهی با قطب ها مخفف می شود یعنی روی مردم رایه همراهی همچنان باشد حداکثر بیقص بقرار راسته باشد.



دکتر علیرضا احمدی فرد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی شهرورد- موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

حواله ماجه هنر ای تبدیل لاپلاس:

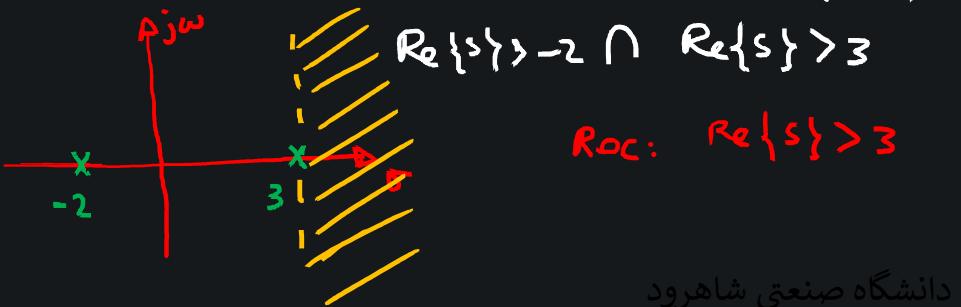
(۱) ROC را صنعته که از خواهای موادی با خود را تبدیل می‌سود.

(۲) ROC تبدیل لاپلاسی کو یا همچو قاعی را شامل نمی‌سورد.

(۳) اگر $x(t)$ در زمان محدود باشد و قدر طبق آن انتگرال محور راسته ROC نام صنعته کارست.

(۴) اگر $x(t)$ راست راستی باشد آنها ماجه هنر ای تبدیل لاپلاس (۵) می‌نمایند راست راست ترین قطب تبدیل لاپلاس است.

$$X(s) = -\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s-3} = \frac{s+7}{(s+2)(s-3)} \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = -e^{-2t} u(t) + 2e^{3t} u(t)$$



دانشگاه صنعتی شهرورد





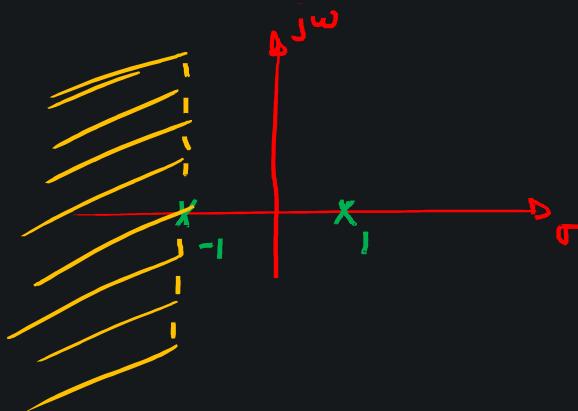
دکتر علیرضا احمدی فرد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی شهرورد- موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

۱۵) اگر $x(t)$ رست چیزی باشد تابع هذلای سیدل لاپلاس آن رست چیزی چیزی قلب خواهد بود.

مسئل: $x(t) = e^t u(-t) + 3e^{-t} u(-t)$ این چیزی که از زیر است.

$$X(s) = \frac{-1}{s-1} - \frac{3}{s+1} = \frac{-4s+2}{(s-1)(s+1)}$$

$$\operatorname{Re}\{s\} < 1 \cap \operatorname{Re}\{s\} < -1 \Rightarrow \text{ROC: } \operatorname{Re}\{s\} < -1$$





دکتر علیرضا احمدی فرد - دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی شهرورد - موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

۶) اگر $x(t)$ در معرفه باشد ناحیه همراهی موادی ساخت محاسبه ز است.

۷) اگر سینال لاپلاس $x(t)$ نباید باشد، R_{oc} آن باید قطب گزندی سوریا باشد و همچنین اربع طاهر R_{oc} قرار گیرد.

مثال: سینال لاپلاس سینال پله وله را بدست آورید.

$$x(t) = \delta(t) \rightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-sx_0} dt$$

جون مالکی در \mathbb{C} ای داد X و مورخه در ناحیه همراهی نام $s = 1$

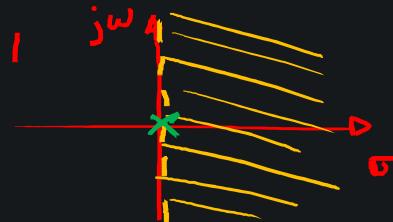
مثال: سینال لاپلاس سینال پله وله را بدست آورید.

$$x(t) = u(t) \rightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{1}{s} \left(e^{-s\infty} - e^0 \right) = \frac{1}{s}, \text{Re}\{s\} > 0.$$

$$e^{-s\infty} = e^{-(\sigma+j\omega)\infty} = e^{-\sigma\infty} \cdot e^{-j\omega\infty}$$

دانشگاه صنعتی شهرورد

$$\rightarrow \sigma > 0, \text{Re}\{s\} > 0$$





دکتر علیرضا احمدی فرد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی شهرود- موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

$$X(s) = \mathcal{F} \{ x(t) e^{-\sigma t} \} \Rightarrow x(t) e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1} \{ X(s) \} = \mathcal{F}^{-1} \{ X(\sigma + j\omega) \}$$

$$x(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) e^{j\omega t} dw \rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} e^{\sigma t} \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) e^{j\omega t} dw$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) e^{(\sigma+j\omega)t} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} \frac{ds}{j} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

$$s = \sigma + j\omega \rightarrow ds = j\omega dw$$

که حقیقی هر کدام در رابطه σ در نمایم σ باشد.



دکتر علیرضا احمدی فرد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی شهرورد- موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

$$x(s) = \sum_{k=0}^M B_k s^k + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s+a_k}$$

روز دوم: چنانچه $x(s)$ کو باشد یعنی آرایه ای از معادلات دارد

اگر درجه $D(s)$ متراد (M) باشد $B_k = 0$ خواهد بود.

اگر درجه $D(s)$ را M نام بخواهد $B_k \neq 0$ و قیمت B_k معرف خواهد شد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(t) \xrightarrow{L} 1 \\ \delta'(t) \xrightarrow{L} s \\ \delta''(t) \xrightarrow{L} s^2 \\ \frac{d^k \delta(t)}{dt^k} \xrightarrow{L} s^k \end{array} \right.$$

علس سبدی لاپلاس $\frac{A_k}{s+a_k}$ را دارد که مرتبت قطب $-a_k$ - رتبه تاخیم خواهد داشت.

اگر تاخیم خواهد داشت رسمت راست قطب $-a_k$ - باشد علس سبدی لاپلاس $\frac{A_k}{s+a_k}$ را داشت.

$$\frac{A_k}{s+a_k} \xleftrightarrow{L^{-1}} A_k e^{-a_k t}$$

$$\frac{A_k}{s+a_k} \xleftrightarrow{L^{-1}} -A_k e^{-a_k t} u(-t)$$

12

دانشگاه صنعتی شهرورد



دکتر علیرضا احمدی فرد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی شهرورد- موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

مُلّا: علیس سَدِيل لاپلاس $\Rightarrow -3 < \operatorname{Re}\{s\} < -2$

$$X(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 5s + 6}$$

$$\frac{s^2 + 1}{s^2 + 5s + 6} = 1 - 5 \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = 1 + \frac{5}{s+2} + \frac{-10}{s+3}$$

$$x(t) = 5u(t) - 5e^{-2t}u(-t) - 10e^{-3t}u(t)$$

نامه همایی برتر قطب -3
ماعنی همایی سمت پی قطب -2

سینال دو طرفه





دکتر علیرضا احمدی فرد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی شهرورد- موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

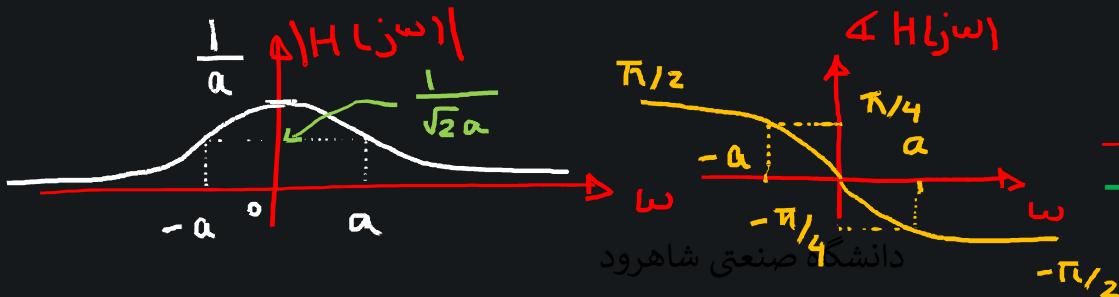
محاسبه تبدیل لاپلاس مکار حضور تغییراتی تبدیل لاپلاس:

$$x(s) = \frac{1}{j\omega + a}$$

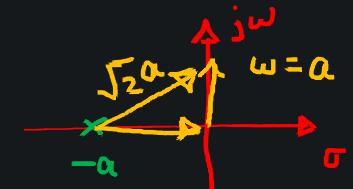
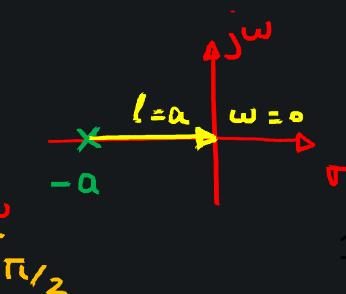
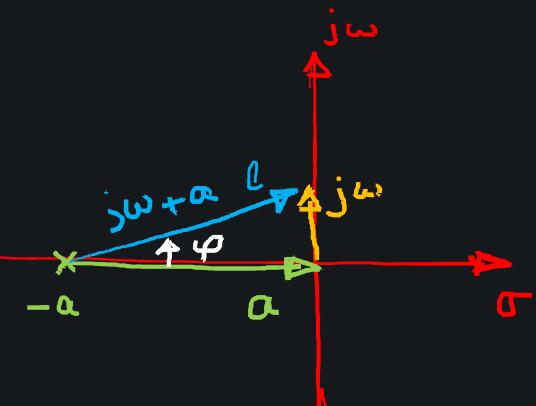
$$|x(j\omega)| = \frac{1}{|j\omega + a|} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} = \frac{1}{\rho}$$

طبول کرداری نقطه را به حور
دوار متعالی کن

$$\angle x(j\omega) = \angle \frac{1}{j\omega + a} = \angle 1 - \angle(j\omega + a) = 0 - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) = -\varphi$$



$$x(s) = \frac{1}{s+a}$$





دکتر علیرضا احمدی فرد - دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی شهرورد - موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

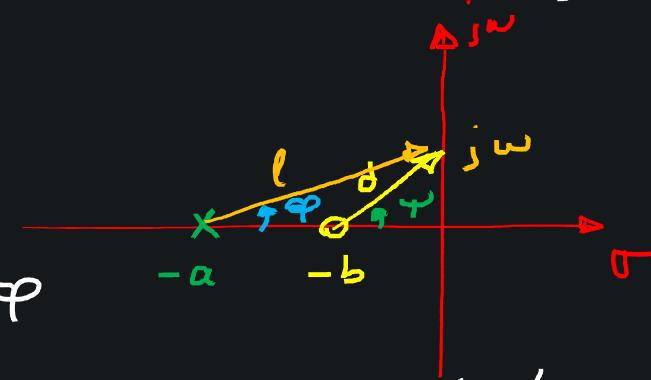
$$x(j\omega) = \frac{a+j\omega}{j\omega+a}$$

✓ سدیل لاپلاس دارای یک صفر ریک قطب.

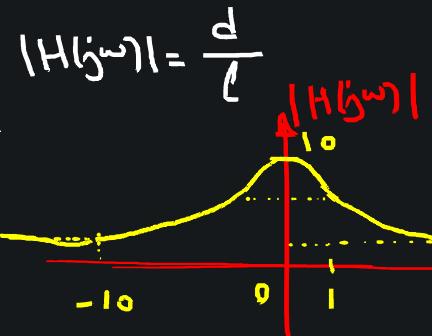
$$X(s) = \frac{s + b}{s + a}$$

$$|x(j\omega)| = \frac{|a+j\omega|}{\sqrt{\omega^2+a^2}} = \frac{\sqrt{\omega^2+b^2}}{\sqrt{\omega^2+a^2}} = \frac{b}{l}$$

$$\angle x(j\omega) = \angle(j\omega) - \angle \frac{\omega}{a} = \psi - \varphi = \psi - \angle(j\omega + a)$$



نمودار: پاسخ مزدوجی سیستم با تابع سدیل $H(s) = \frac{s+10}{s+1}$ حمل صفر ریک ریت آرید.

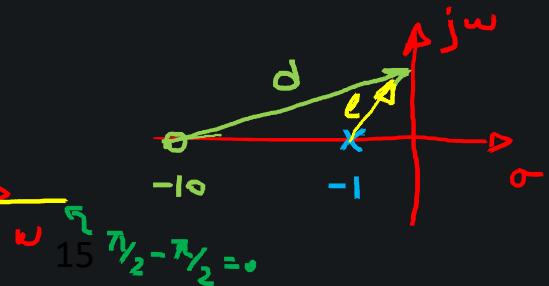
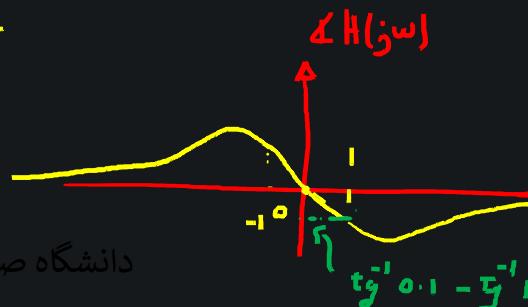


$$|H(j0)| = 10$$

$$|H(j10)| = \sqrt{100+1} \approx 10\sqrt{2}$$

$$|H(j15)| = \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{101}} \approx \sqrt{2}$$

دانشگاه صنعتی شهرورد





✓ سیل لاپلاس دارای چندین صفر و یک:

$$X(s) = \frac{(s+b_1)(s+b_2) \cdots (s+b_M)}{(s+a_1)(s+a_2) \cdots (s+a_N)}$$

$$|X(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + b_1^2} \sqrt{\omega^2 + b_2^2} \cdots \sqrt{\omega^2 + b_M^2}}{\sqrt{\omega^2 + a_1^2} \sqrt{\omega^2 + a_2^2} \cdots \sqrt{\omega^2 + a_N^2}}$$

$$\text{حاصل فرآیند طول بردار حایی} \rightarrow \text{حمره ها را به سلسله کسر کنید} \\ \text{حاصل فرآیند طول بردار حایی} \rightarrow \text{قطب ها را به سلسله کسر کنید}$$

$$\angle X(j\omega) = \left(t_j^{-1} \frac{\omega}{b_1} + t_j^{-1} \frac{\omega}{b_2} + \cdots + t_j^{-1} \frac{\omega}{b_M} \right) - \left(t_j^{-1} \frac{\omega}{a_1} + t_j^{-1} \frac{\omega}{a_2} + \cdots + t_j^{-1} \frac{\omega}{a_N} \right) \\ = \sum_{i=1}^M \varphi_i - \sum_{i=1}^N \varphi_i$$



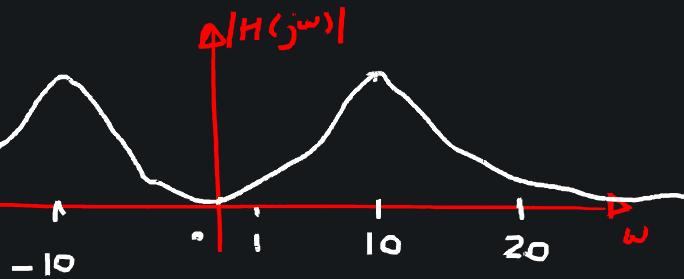
دکتر علیرضا احمدی فرد - دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی شهرورد - موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

مثال: کامپیوچر می سیستم به مردم
سیستم چه عددی می باشد؟

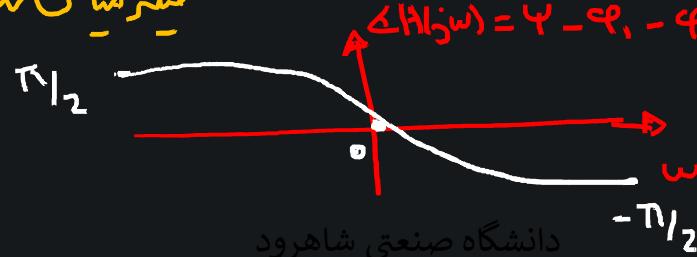
$$H(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 101}$$

$$s = -2 \pm \sqrt{4 - 404} = -1 \pm 10$$

$$|H(j\omega)| = \frac{2\omega}{\ell_1 \times \ell_2}, \quad |H(j0)| = \frac{0}{\ell_1 \times \ell_2} = 0, \quad |H(j\infty)| = \frac{2}{\sqrt{8^2} \sqrt{122}} = 0.02$$



فلتر میانگذر حول مرکزی منی



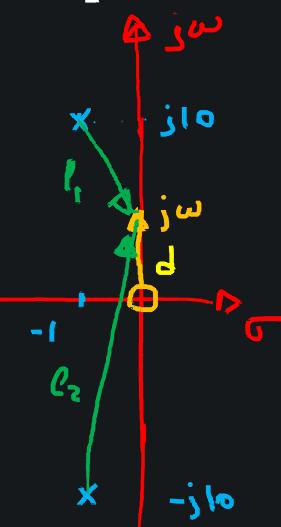
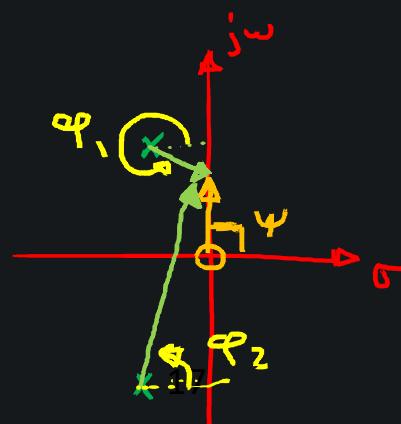
دانشگاه صنعتی شهرورد

$$|H(j10)| = \frac{2 \times 10}{1 \times \sqrt{401}} \approx 1$$

$$|H(j20)| = \frac{2 \times 20}{\sqrt{101} \sqrt{401}} \approx 0.2$$

$$|H(j\infty)| = \frac{2 \times \infty}{\infty \times \infty} = 0$$

$$\angle H(j\omega) = \Psi - \varphi_1 - \varphi_2$$





طراس تبدیل لاپلاس :

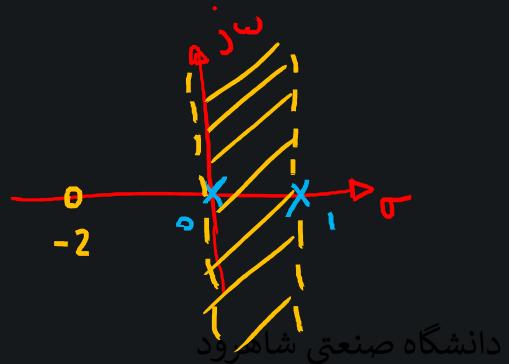
$$\alpha x(t) + b w(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha X(s) + b W(s)$$

$$R_{OC} = R_{OC_x} \cap R_{OC_w}$$

$$x(s) = \frac{2}{s} - \frac{3}{s-1} = \frac{-s-2}{s(s-1)}$$

مُدّ: دو مقدار سریع و ساده را برای $x(t) = 2u(t) + 3e^{t-u}(1-t)u(1-t)$ دریابید.

$\Re\{s\} > 0 \cap \Re\{s\} < 1$





دکتر علیرضا احمدی فرد - دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی شهرورد - موضوع تبدیل لابلاس دو طرفه

هایجایی در رمان: (2)

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{L} e^{-st_0} X(s)$$

$$ROC = ROC_x$$

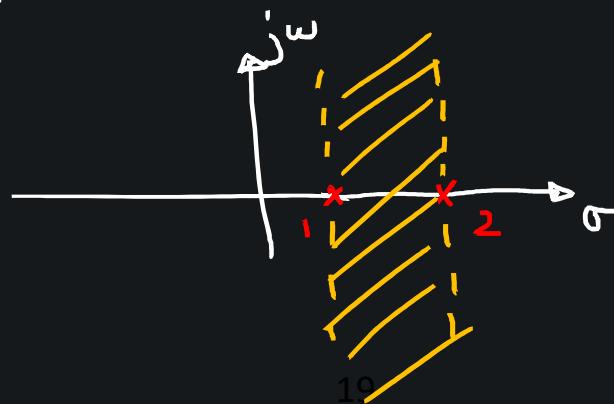
مثال: سریل ۲ ممکن است از این دو حالت باشد.

$$x(t) = 2e^{-4(t-2)} u(t-2) + e^{2(t-1)} u(-(t-1))$$

$$X(s) = 2e^{-4} \times e^{-2s} \times \frac{1}{s+1} - e^2 \times e^{-s} \times \frac{1}{s-2}$$

$$\operatorname{Re}\{s\} > 1 \quad \cap \quad \operatorname{Re}\{s\} < 2$$

✓
 $ROC: 1 < \operatorname{Re}\{s\} < 2$





دکتر علیرضا احمدی فرد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی شهرورد- موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

$$e^{s_0 t} x(t) \Leftrightarrow X(s - s_0)$$

جاایی در حوزه ک (3)

$$R_{oc} = R_x + Re\{s_0\}$$

$$\text{مثال) تبدیل لاپلاس} \quad x(t) = e^{-3t} u_2(t) \quad \text{ایمپلیکت آدری}.$$

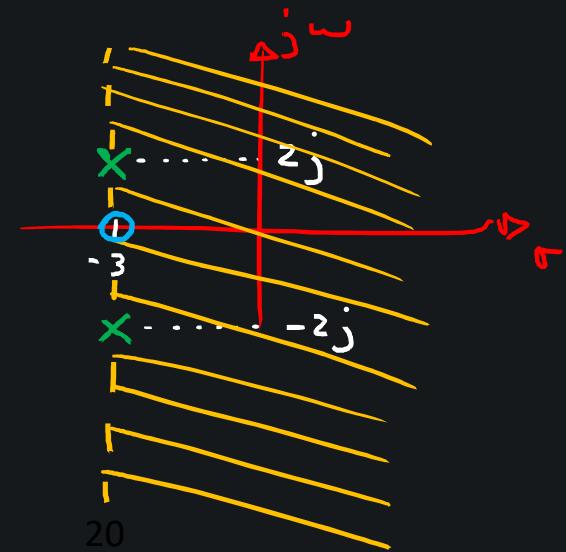
$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega t} (e^{-3t} u(t)) + \frac{1}{2} e^{-j\omega t} (-e^{-3t} u(t))$$

$$X(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{(s - j\omega) + 3} + \frac{1}{2} \frac{1}{(s + j\omega) + 3} = \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + \omega^2}$$

$$Re\{s\} > -3 + \underset{0}{Re\{j\omega\}} \cap Re\{s\} > -3 + \underset{0}{Re\{-j\omega\}}$$

$$Re\{s\} > -3$$

دانشگاه صنعتی شهرورد





دکتر علیرضا احمدی فرد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی شهرورد- موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

۴) تغییر میاس زمانی:

$$x(at) \xrightarrow{\text{L}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

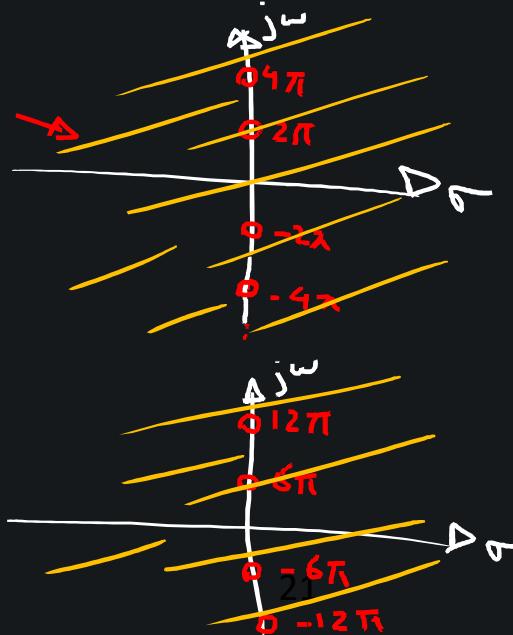
$$R_{0C} = R_x \cdot a$$

مثال: سدیل لاپلاس $x(-3t) + x(t) = u(t) - u(t-1)$

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-s} = \frac{1}{s(1-e^{-s})} \quad R_{0C} = \text{نمایم}$$

$$\begin{aligned} x(-3t) &\xrightarrow{\text{L}} \frac{1}{|-3|} X\left(\frac{s}{-3}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{s} e^{s/3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{-3}{s} (1 - e^{-s/3}) \right) \end{aligned}$$

دانشگاه صنعتی شهرورد





مروع لیری:

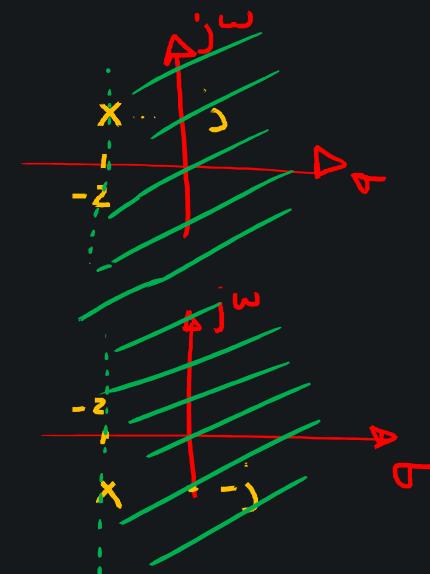
$$x^*(t) \leftrightarrow x^*(s^*) \quad ROC = R_x$$

مثال: تبدیل لاپلاس $x(t) = e^{(-2+j)t} u(t)$ و سردهج آن را درست آورید.

$$x(t) \leftrightarrow \frac{1}{s - (-2 + j)} \quad \text{Re}\{s\} > \text{Re}\{-2 + j\}$$

$$\text{Re}\{s\} > -2$$

$$x^*(t) \leftrightarrow \left(\frac{1}{s^* - (-2 + j)} \right)^* = \frac{1}{s + 2 + j} \quad \text{Re}\{s\} > -2$$





دکتر علیرضا احمدی فرد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی شهرورد- موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

نتهی: برای بسط معمولی حقیقی صفرهای محملات مزدوج مذکور و قطب‌های محملات مزدوج هم هستند

$$x(t) = x^*(t) \rightarrow x(s) = x^*(s^*)$$

اگر $x(t)$ حقیقی

$$x(p) = x^*(p^*) = \infty \rightarrow x(s^*) = \infty$$

اگر p قطب از $(s)x$ باشد باشد $x(p) = \infty$

پس s^* هم قطب دیگر $(s)x$ است

بطوری اگر z یک صفر از $(s)x$ باشد $x(z) = 0$

$$x(z) = x^*(z^*) = 0 \rightarrow x(z^*) = 0$$

پس z^* صفر دیگر $(s)x$ است.



$$x(t) * h(t) \xleftarrow{L} X(s) \cdot H(s) \quad (6) \text{ کانولوشن.}$$

$$R_{\text{OC}} = R_X \cap R_H$$

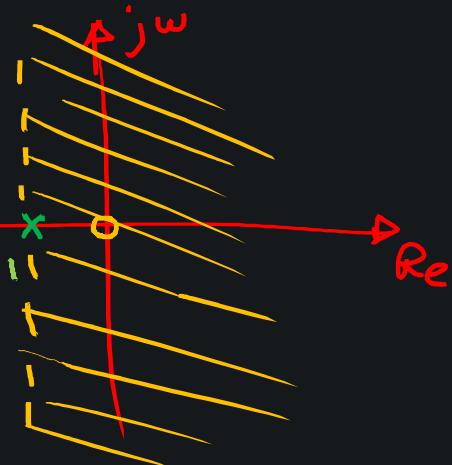
مثال: پاسخ یک سیستم مداری $x(t) = 2e^{-3t} u(t)$ و $h(t) = \delta(t) - e^{-t} u(t)$ باشد.

$$H(s) = 1 - \frac{1}{s+1} = \frac{s}{s+1} \quad \operatorname{Re}\{s\} > -1 \quad , \quad X(s) = \frac{2}{s+3} \quad \operatorname{Re}\{s\} > -3$$

تابع ستدی سمع

$$\gamma(s) = X(s) \cdot H(s) = \frac{s}{s+1} \times \frac{2}{s+3}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

$$\gamma(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+3} \longrightarrow \gamma(t) = -e^{-t} u(t) + 3e^{-3t} u(t)$$





دکتر علیرضا احمدی فرد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی شهرورد- موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\text{L}} sX(s), \text{ROC} = R_x$$

آن قطبی را همی باشد با این که
ابینی می ردد (حد نصف دفعه)

سؤال: تبدیل لاپلاس $(u(t))$ از زیرین تبدیل لاپلاس $(u(t))$ درست است آری.

$$u(t) \xrightarrow{\text{L}} \frac{1}{s}, \text{ROC} = \{s\}$$

$$u(t) = \frac{du(t)}{dt} \xrightarrow{\text{L}} s \cdot \frac{1}{s} = 1, \text{ROC} = \text{صفحه ۲۵}$$



دکتر علیرضا احمدی فرد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی شهرورد- موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

$$8) \text{ مُتَقَبِّل رَحْمَوْزَه } \leftarrow \frac{dX(s)}{ds}, \quad \text{Re} s = R_x : \quad -tx(t) \leftrightarrow$$

مُهَاجِر: عَلَى سَهْلِ لَابِلَاس

$$-e^{-zt} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2} \quad \text{Re}\{s\} > -2 \quad \text{را بَسَّ أَوْ بَرِّيْ.}$$

$$-t e^{-zt} u(t) \leftrightarrow \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+2} \right) = \frac{-1}{(s+2)^2}$$



$$-t^2 e^{-zt} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+2)^2}, \quad \text{Re}\{s\} > -2$$



دکتر علیرضا احمدی فرد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی شهرورد- موضوع تبدیل لالپاس دو طرفه

دیگر ممکن است:

$$e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}\{s\} > -a$$

$$t^{-at} e^{ut} u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^2}, \quad \cdots$$

$$-\frac{t^2}{2} e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^3}, \quad \cdots$$

$$(-1)^n \frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!} u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^n}, \quad \cdots$$



دکتر علیرضا احمدی فرد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی شهرورد- موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

$$(6) \text{ انتگرال بیری روحوز رمان: } \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \xrightarrow{\text{F}} \frac{1}{s} X(s), \quad \text{ROC} = R_x \cap (\text{Re}\{s\} > 0)$$

$$x(t) \xrightarrow{\boxed{u(t)}} \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \quad h(t) = u(t), \text{ لازم است با پاسخ صریح}$$

$$\int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda = x(t) * u(t) \xleftarrow{\text{L}} X(s) \cdot \frac{1}{s} \quad R_x \cap (\text{Re}\{s\} > 0)$$

مثال: سینال لامپون (انتگرال سینا) را درست ازیرد:

$$x(t) \xleftarrow{\text{L}} \frac{3}{s+1} - \frac{2}{s-3} = \frac{s-11}{(s+1)(s-3)}, \quad -1 < \text{Re}\{s\} < 3$$

$$\int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \xleftarrow{\text{L}} \frac{1}{s} \cdot \frac{s-11}{(s+1)(s-3)}, \quad 0 < \text{Re}\{s\} < 3$$



دکتر علیرضا احمدی فرد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی شهرورد- موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

۳) قضاای سعدا راوله و سعدارنایی:

قضیه سعدا راویه: اگر $\mathcal{L}X(s)$ صفر باشد (معنی عتی باشد) و در مبدأ $s=0$ ممکن است $X(s)$ صفر باشد

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

$$s \rightarrow \infty$$

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = 3$$

مثال: سبد لاپلاس پیشنهاد علی $\mathcal{L}X(s) = \frac{3s+1}{s^2+s+2}$ است $x(t)$ را بحث آرایه حل

قضیه سعدارنایی:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = 0$$

دانشگاه شهرورد

مثال: سعدا $(+)\mathcal{L}X$ در مثال بالا رسمی رنگ حفظ راست؟ حل



دکتر علیرضا احمدی فرد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی شهرورد- موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

جدول تبدیل لاپلاس برخی توابع متدائل:

ROC	تبدیل	سینگنال	ردیف
تمام صفحه	۱	$\delta(t)$	۱
$\Re\{s\} > 0$	$\frac{1}{s}$	$u(t)$	۲
$\Re\{s\} < 0$	$\frac{1}{s}$	$-u(-t)$	۳
$\Re\{s\} > 0$	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	۴
$\Re\{s\} < 0$	$\frac{1}{s^n}$	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	۵
$\Re\{s\} > -\alpha$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}u(t)$	۶
$\Re\{s\} < -\alpha$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$-e^{-\alpha t}u(-t)$	۷
$\Re\{s\} > -\alpha$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$	۸
$\Re\{s\} < -\alpha$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(-t)$	۹
تمام صفحه	e^{-sT}	$\delta(t-T)$	۱۰
$\Re\{s\} > 0$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$[\cos \omega_0 t]u(t)$	۱۱
$\Re\{s\} > 0$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$[\sin \omega_0 t]u(t)$	۱۲
$\{\Re s\} > -\alpha$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}$	$[\cos \omega_0 t]u(t)$	۱۳
$\{\Re s\} > -\alpha$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}$	$[\sin \omega_0 t]u(t)$	۱۴
تمام صفحه	s_n	$u_n(t) = \frac{d^n \delta(t)}{dt^n}$	۱۵
$\Re\{s\} > 0$	$\frac{1}{s^n}$	$u_{-n}(t) = \underbrace{u(t) * \dots * u(t)}_{j+n}$	۱۶



دکتر علیرضا احمدی فرد - دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی شهرورد - موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

حوالی سیستم‌های LT با نمودار خالی لاپلاس:

علی بودن: نظر آنکه برای یک سیستم علی $t < 0$ لذا $h(t) = 0$ سیگنال رست است و با مرور زمان اکت. لذا راجح سیستم (۱)

سیگنال لاپلاس پاسخ هر می باشد عنوانی را که حمله ای رست چیزی یا نواری بسوارات گفته سز راسته باشد.

مثال: تابع تبدیل یک سیستم LT برابر با $H(s) = \frac{s}{s^2 + 5s + 6}$ است. ۸ پاک هر را طبق علی بودن حل:

$$P_2 = -3, P_1 = -2 \quad s^2 + 5s + 6 = 0$$

$$H(s) = \frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3}, ROC: \operatorname{Re}\{s\} > -2$$

$$h(t) = -2e^{-2t} u(t) + 3e^{-3t} u(t)$$

پاسخ حمله سیستم علی



دانشگاه صنعتی شهرورد



دکتر علیرضا احمدی فرد - دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی شهرورد - موضوع تبدیل لپلاس دو طرفه

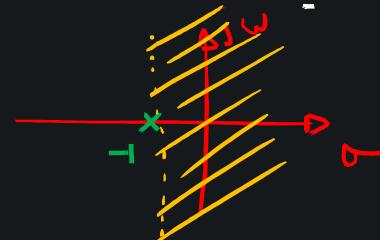
آیا هر سیستم دارای تبدیل لپلاس آن رت راست را مسد علی است؟ خیر اگر $H(s) = \frac{1}{s+1}$ کو یا باشد و ناحیه حقیری رت راست را مسد سیستم علی است



مثال: $h_1(t) = e^{-t+1} u(t+1)$ ب سیستم نیز علی است. حون $h_1(t)$ برای صل صفر، برای باصری مسد است.

$$H_1(s) = e^{\frac{s}{s+1}}$$

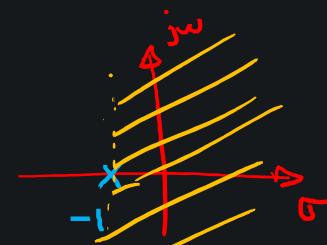
عکس
عکس



مثال: $h_2(t) = e^{-(t-1)} u(t-1)$ ب سیستم علی است.

$$H_2(s) = e^{\frac{-s}{s+1}}$$

عکس
عکس



دانشگاه صنعتی شهرورد



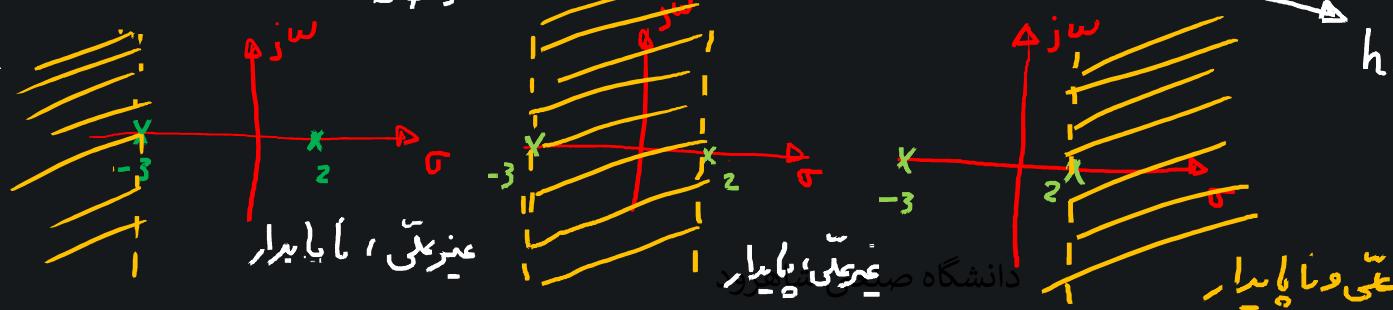
دکتر علیرضا احمدی فرد - دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی شهرورد - موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

پایداری سیستم LT2: پایداری $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$ برقرار است اگر $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$ باشد سلسله $h(t)$ همچنانیست. از طرفی اگر سلسله $h(t)$ همچنانیست باشد $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$ باشد. سلسله $h(t)$ همچنانیست اگر $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$ باشد.

خط لارم رخانی رای پایداری یک سیستم LT2 آن است که محور سود را چهارهایی تابع تبدیل سیستم $H(s)$ باشد.

مثال: تابع تبدیل یک سیستم LTI بازیابی سامانه چهارهایی تابع خوب سیستم پایدار نیست اورید.

$$H(s) = \frac{2/5}{s-2} + \frac{3/5}{s+3}$$



$$h(t) = -\frac{2}{5} e^{2t} u(-t) + \frac{3}{5} e^{-3t} u(t)$$



دکتر علیرضا احمدی فرد - دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی شهرورد - موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

نتیجه: یک سیستم علی با ماتریس های دویا پایدار است اگر و تنها اگر تمام قطب های سیستم سمت چپ محور سر باشد

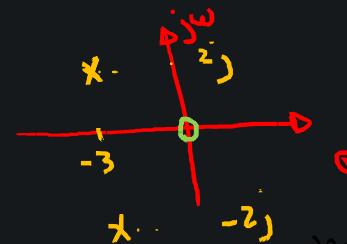
چون: بدليل علی بودن سیستم ماتریس های $A(s)$ پایدار است راسی باشد از طرفی چون سیستم پایدار است پایدار است چهار سر را ماتریس $H(s)$ فراز نماید . با توجه به اینچه هیچ قطبی در ماتریس $H(s)$ تواند واقع شود لذا باید تمام قطب های سمت چپ محور سر باشد .

مثال: کدامیک از سیستم های زیری سواد علی و پایدار باشد ؟

$$H_1(s) = \frac{s-1}{s^2+4}$$



$$P_2 = -2, P_1 = 2$$



$$P_2 = -3 - 2j, P_1 = -3 + 2j$$

$$H_2(s) = \frac{s}{s^2 + 6s + 13}$$

اگر $\text{Re}\{s\} > -3$ می تواند علی و پایدار باشد



دکتر علیرضا احمدی فرد - دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی شهرورد - موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

سیستم‌های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل حلقی با هم زیب نگات:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\} \rightarrow \sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^M b_k s^k X(s)$$

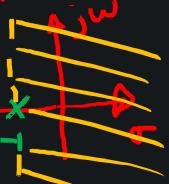
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$$

مکل سیستم با مرتب ریاضی می‌باشد - $\frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 4y(t) = \frac{dx}{dt}$ داده می‌شود است

تبدیل لاپلاس سیستم و با عصر هم سیستم را با مرتب علی بودن سیستم برش او برآورده کرده ایم

$$H(s) = \frac{1 \times s^1}{1 \times s^2 + 5 \times s^1 + 4s^0} = \frac{s}{s^2 + 5s + 4} = \frac{-1/3}{s+1} + \frac{4/3}{s+4}$$

$\Re\{s\} > -1$
چون همی است



$$y(t) = -1/3 e^{-t} u(t) + 4/3 e^{-4t} u(t)$$

محاسبه ریاضی سیستم با پیروز است



سایر جمعی ای سیستم ها:

$$x(s) \rightarrow [1/s] \rightarrow \frac{1}{s} x(s)$$

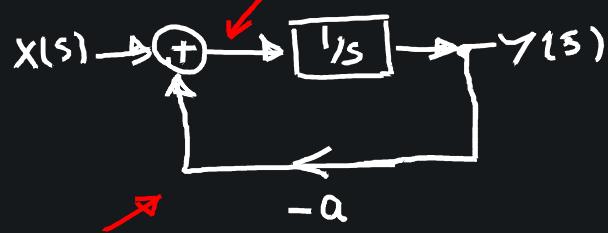
$$x_1(s) \rightarrow [+] \rightarrow x_1(s) + x_2(s)$$

$$x(s) \rightarrow [\alpha] \rightarrow \alpha x(s)$$

سیستم نسبتی

$$H(s) = \frac{1}{s+a}$$

$$x(s) - \alpha y(s)$$



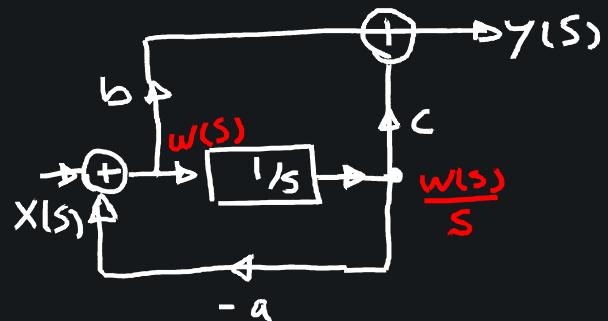
$$y(s) = (x(s) - \alpha y(s)) \times \frac{1}{s}$$

$$y(s) \left(1 + \frac{\alpha}{s}\right) = \frac{1}{s} x(s)$$

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{1/s}{1 + \frac{\alpha}{s}} = \frac{1}{s + \alpha}$$



دکتر علیرضا احمدی فرد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی شهرورد- موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه



$$H(s) = \frac{bs + c}{s + a}$$

سیستم با یک مغزوبیت قوه:

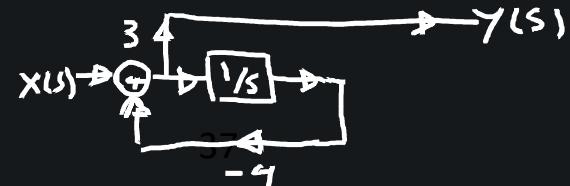
$$w(s) = x(s) - a \frac{w(s)}{s} \rightarrow w(s) = \frac{x(s)}{1 + a/s}$$

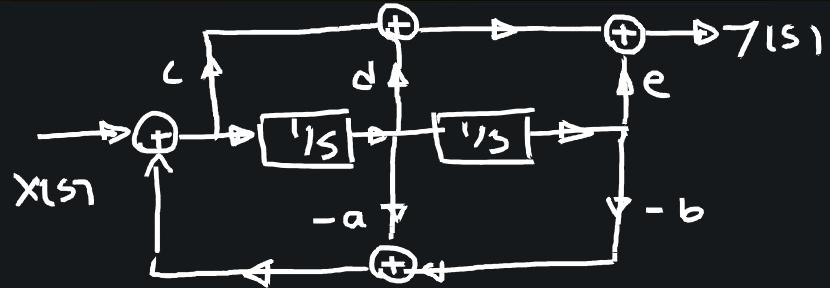
$$y(s) = b w(s) + c \frac{w(s)}{s} \rightarrow y(s) = \left(b + \frac{c}{s} \right) \cdot w(s) = y(s) = \left(b + \frac{c}{s} \right) \cdot \frac{x(s)}{1 + a/s}$$

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{bs + c}{s + a}$$

دانشگاه صنعتی شهرورد

$H(s) = \frac{3s}{s+4}$ سیستم با یک مغزوبیت





$$H(s) = \frac{Cs^2 + ds + e}{s^2 + as + b}$$

ملوک دیاکرام سیستم‌های درجه ۲: (روُس سیتم)

استاتیکال مولک دیاکرام ها مدلی ای باشد.

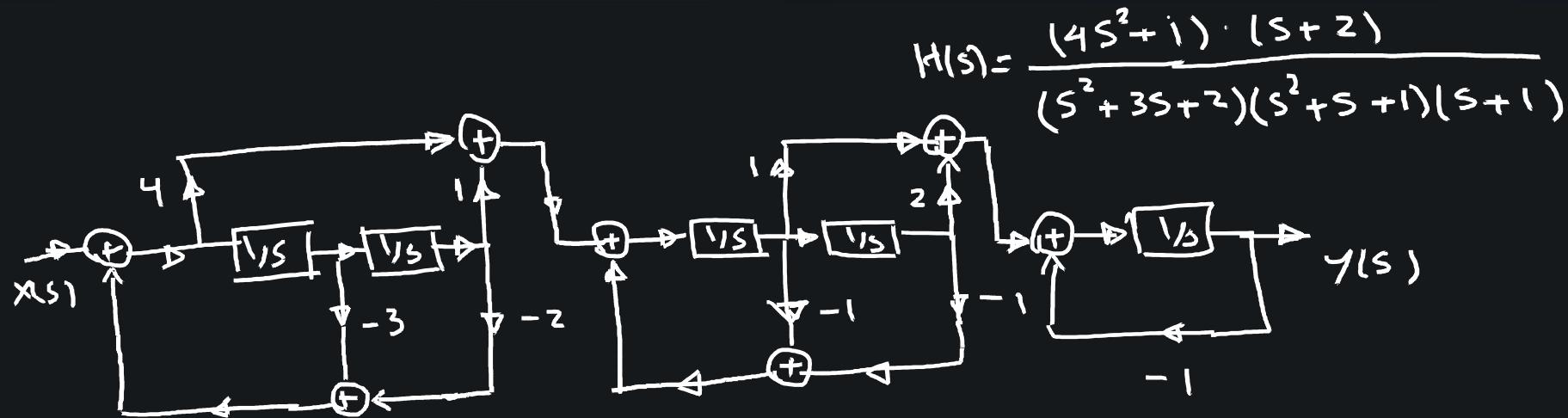
مکر ریا کار مسیم‌های مرتبه بالاتر:

روُس سیتم: می‌توان این سیستم‌های را لغورت پشت سرهم بین سیستم‌های مرتبه اوپریونت.

مُلکاً / یک سیستم درجه ۵ را می‌توان از توالی روُس سیتم درجه ۳ و یک سیستم درجه ۲ ترسیم نمود.

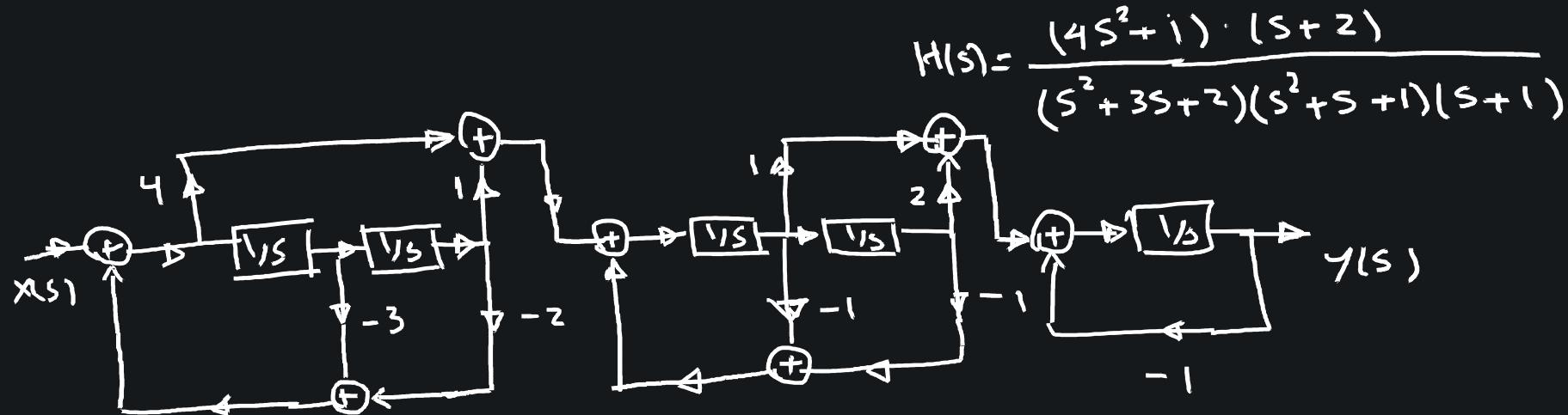


مثال





مثال

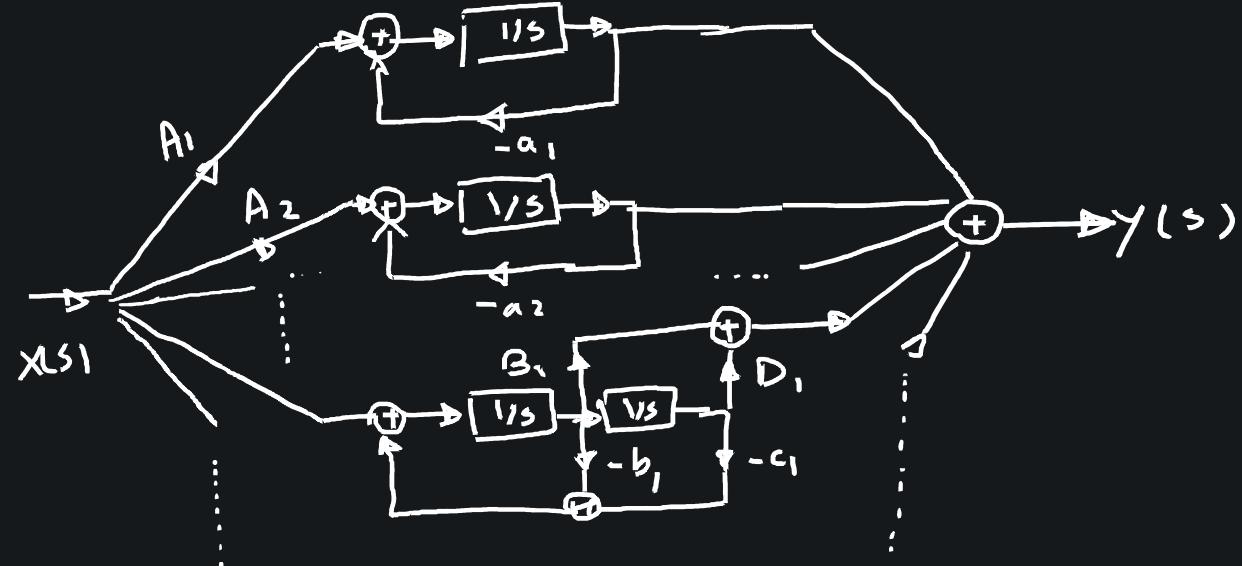




دکتر علیرضا احمدی فرد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی شهرورد- موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

پاره سازی سلوب دیا درام به معنی بواری:

$$H(s) = \frac{N_1(s)}{D(s)} = \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{s + a_k} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k s + D_k}{s^2 + b_k s + c_k}$$





دکتر علیرضا احمدی فرد - دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی شهرود - موضوع تبدیل لاپلاس دو طرفه

سؤال: سریل لاپلاس کب سیم برابر با

$$H(s) = \frac{2s^2 + 3}{(s^2 + 4s + 4)(s + 5)}$$

$$H(s) = \frac{As + B}{s^2 + 4s + 4} + \frac{C}{s + 5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A + C = 2 \\ 5A + B + 4C = 3 \\ 5B + C = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = -\frac{7}{6} \\ C = \frac{53}{6} \\ A = -\frac{41}{6} \end{array} \right.$$

