یالطیف

تمرین سری 7 سیگنال - تبدیل فوریه

① برای هر یک از سیگنال های زیر، تبدیل فوریه را محاسبه کنید.

a) $\delta(t+1)+\delta(t-3)$

b) $1+\cos(7\pi t+\frac{\pi}{8})$

c) $e^{-2|t-1|}$

یادآوری :
$$\begin{cases} \text{رابطه سنتز} : x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \\ \text{رابطه آنالیز} : X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt \end{cases}$$

a) $x(t)=\delta(t+1)+\delta(t-3) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\delta(t+1)+\delta(t-3))e^{-j\omega t}\,dt$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\delta(t+1)}_{t=-1}e^{-j\omega t}\,dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\delta(t-3)}_{t=3}e^{-j\omega t}\,dt \xrightarrow[x(t)\cdot\delta(t-t_0)=x(t_0)]{\text{طبق قانون غربال تابع ضربه}} e^{j\omega t}+e^{-j\omega\times 3}$$

b) $x(t)=1+\cos(7\pi t+\frac{\pi}{8}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2}e^{j(7\pi t+\frac{\pi}{8})}+\frac{1}{2}e^{-j(7\pi t+\frac{\pi}{8})}\right)e^{-j\omega t}\,dt$

$\hookrightarrow x(t)=1+\frac{1}{2}e^{j(7\pi t+\frac{\pi}{8})}+\frac{1}{2}e^{-j(7\pi t+\frac{\pi}{8})}$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}\,dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{j(7\pi t+\frac{\pi}{8})}\cdot e^{-j\omega t}\,dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-j(7\pi t+\frac{\pi}{8})}\cdot e^{-j\omega t}\,dt$$

OR :
$$\begin{cases} x(t)=1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)=2\pi\delta(\omega) \\ x(t)=\cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0) \\ x(t)=\sin(\omega_0 t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)=\frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_0)-\frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_0) \end{cases}$$

$$\cos(7\pi t+\frac{\pi}{8}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega-7\pi)e^{j\pi/8}+\pi\delta(\omega+7\pi)e^{j\pi/8}$$

$$X(j\omega)=2\pi\delta(\omega)+\pi\delta(\omega-7\pi)e^{j\pi/8}+\pi\delta(\omega+7\pi)e^{j\pi/8}$$

c) $e^{-2|t-1|} \longleftrightarrow X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2|t-1|}\cdot e^{j\omega t}\,dt \xrightarrow[t=\tau+1]{t-1=\tau} X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2|\tau|}\cdot e^{j\omega(\tau+1)}\,d\tau$

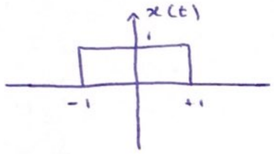
$$=\int_{-\infty}^{0}e^{-2(-\tau)}\cdot e^{j\omega(\tau+1)}\,d\tau+\int_{0}^{\infty}e^{-2(\tau)}\cdot e^{j\omega(\tau+1)}\,d\tau=\int_{-\infty}^{0}e^{2\tau}\cdot e^{j\omega\tau}\cdot e^{j\omega}\,d\tau$$

$$+\int_{0}^{\infty}e^{-2\tau}\cdot e^{j\omega\tau}\cdot e^{j\omega}\,d\tau=e^{j\omega}\int_{-\infty}^{0}e^{(2+j\omega)\tau}\,d\tau+e^{j\omega}\int_{0}^{\infty}e^{(-2+j\omega)\tau}\,d\tau$$

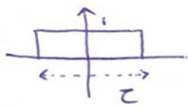
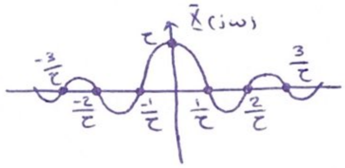
$$= e^{j\omega}\left[\frac{1}{2+j\omega}e^{(2+j\omega)\tau}\right]_{-\infty}^{0} + e^{j\omega}\left[\frac{1}{-2+j\omega}e^{(-2+j\omega)\tau}\right]_{0}^{\infty}$$

$$= e^{j\omega}\left[\frac{1}{2+j\omega}\left(\cancel{e^{(2+j\omega)\cdot-\infty}} - e^{(2+j\omega)0}\right)\right] + e^{j\omega}\left[\frac{1}{-2+j\omega}\left(e^{(-2+j\omega)\times 0} - \cancel{e^{(-2+j\omega)\infty}}\right)\right]$$

$$= \frac{e^{j\omega}}{2+j\omega}\cdot\left[-1\right] + \frac{e^{j\omega}}{-2+j\omega}\left[1\right] = e^{j\omega}\cdot\left[\frac{-1}{2+j\omega} + \frac{1}{-2+j\omega}\right]$$

d) 

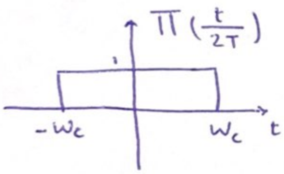
$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad X(j\omega) = \int_{-1}^{+1} 1\cdot e^{-j\omega t}\,dt = 2\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

حفظ شود :  $\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$ 

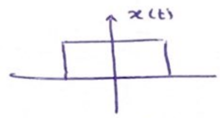
$$X(j\omega) = \tau\,\mathrm{sinc}(f\tau)$$
$$\omega = 2\pi f$$

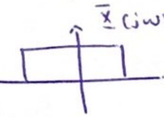
---

② با استفاده از خاصیت دوگانی تبدیل فوریه نشان دهید تبدیل فوریه پالس زیر عبارت زیر است :



$$\frac{\sin W_c t}{\pi t}$$

می‌دانیم :  $\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$ $X(j\omega) = \tau\,\mathrm{Sinc}(f\tau)$

 $\longleftrightarrow$ $x(t) = \frac{\omega}{2\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega t}{2\pi}\right) = \frac{\sin W_c t}{\pi t}$

دوگانی : if $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} g(\omega) \Rightarrow g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-\omega)$

$$\text{if}\quad x(t) = \frac{\sin W_c t}{\pi t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2T}\right), \quad T = W_c$$

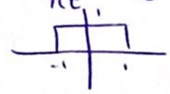
$$x(t) = \frac{\sin W_c t}{\pi t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-W_c}^{+W_c}\Pi\left(\frac{\omega}{2T}\right)e^{j\omega t}\,d\omega \xrightarrow{\times 2\pi} \frac{2\pi\sin W_c t}{\pi t} = \int_{-W_c}^{W_c}\Pi\left(\frac{\omega}{2T}\right)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi\sin W_c(-t)}{\pi t} = \int_{-W_c}^{+W_c}\Pi\left(\frac{\omega}{2T}\right)e^{-j\omega t}\,d\omega \Rightarrow \frac{2\sin W_c t}{\pi t} = \int_{-W_c}^{+W_c}\Pi\left(\frac{\omega}{2T}\right)e^{-j\omega t}\,d\omega$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left\{\Pi\left(\frac{\omega}{2T}\right)\right\} = \frac{\sin W_c t}{\pi t}$$

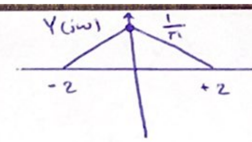
---

③ با استفاده از خواص تبدیل فوریه، تبدیل فوریه سیگنال $x(t) = t\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2$

می‌دانیم : $\frac{\sin t}{\pi t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}}$ تابع مربعی می‌شود : 

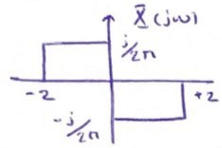
طبق خاصیت کانولوشن دو سیگنال مربعی با هم می‌دانیم که حاصل کانولوشن دو سیگنال مربعی، سیگنال مثلثی می‌شود.

$\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2 \xleftrightarrow{\mathcal{F}}$ (سیگنال مربعی * سیگنال مربعی) $\times \frac{1}{2\pi}$:



طبق خاصیت مشتق می‌دانیم: اگر سیگنال در زمان در t ضرب شود، در فرکانس از آن مشتق گرفته می‌شود

$\Rightarrow t\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2 \xleftrightarrow{\mathcal{F}}$



$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega \cdot X(j\omega)$

$$t\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = j\frac{d}{d\omega}\left(Y(j\omega)\right) = \begin{cases} \frac{j}{2\pi} & ; \ -2 \leq \omega < 0 \\ -\frac{j}{2\pi} & ; \ 0 < \omega \leq 2 \\ 0 & ; \ \text{otherwise} \end{cases}$$

---

(4) تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید؟

$$x(t) = \begin{cases} 1+\cos\pi t & ; \ |t| \leq 1 \\ 0 & ; \ |t| > 1 \end{cases}$$

$$x(t) = 1+\cos\pi t = 1 + \frac{1}{2}e^{j\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega-\pi) + \pi\delta(\omega+\pi)$$

---

(5) با استفاده از خواص تبدیل فوریه، تبدیل فوریه سیگنال $te^{-|t|}$ را حساب کنید و با استفاده از خاصیت دوگانی تبدیل فوریه سیگنال $\frac{4t}{(1+t^2)^2}$ را حساب کنید.

می‌دانیم : $x(t) = e^{-|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$

طبق خاصیت مشتق : $te^{-|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{2}{1+\omega^2}\right] = \frac{-4j\omega}{(1+\omega^2)^2}$

یادآوری : $Q = \frac{p}{q} \Rightarrow Q' = \frac{p'q - q'p}{q^2}$

طبق خاصیت دوگانی : اگر $g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \Rightarrow G(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi g(j\omega)$

داریم : $te^{-|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{-4j\omega}{(1+\omega^2)^2} \xrightarrow{\omega \to t} \frac{-4jt}{(1+t^2)^2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\omega e^{-|\omega|} \xrightarrow{\times j}$

$$\frac{4t}{(1+t^2)^2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j2\pi\omega e^{-|\omega|}$$

---

(6) عکس تبدیل فوریه را برای هر یک از سیگنال های زیر محاسبه کنید.

a) $X(j\omega) = \frac{2\sin(3\overbrace{(\omega-2\pi)}^{\text{تأثیر در حوزه زمان}})}{\omega-2\pi}$

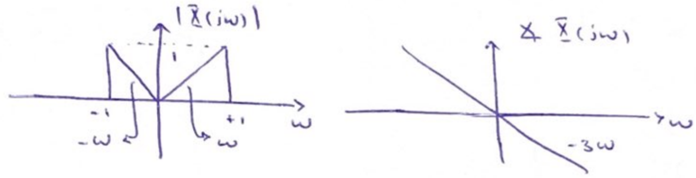
می‌دانیم : $\frac{\sin \omega T}{\omega T} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Pi\left(\frac{t}{2T}\right) \Rightarrow x(t) = \Pi\left(\frac{t}{6}\right) \cdot e^{j2\pi t} = \begin{cases} e^{j2\pi t} & ; \ |t| < 3 \\ 0 & ; \ \text{ow} \end{cases}$

b) $X(j\omega) = 2\left[\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)\right] + 3\left[\delta(\omega-2\pi) + \delta(\omega+2\pi)\right]$

یادآوری :
$$\begin{cases} \cos\omega_0 t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0) \\ \sin\omega_0 t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_0)-\frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_0) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(t)=\frac{2j}{\pi}\sin t+\frac{3}{\pi}\cos(2\pi t)$$

سیگنالی با اندازه و فاز روبه رو :



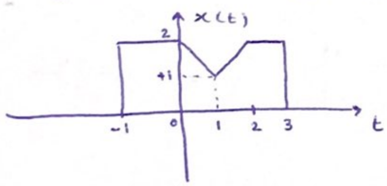
$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|\cdot e^{j\measuredangle X(j\omega)}\cdot e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-1}^{0}-\omega\cdot e^{-j3\omega}\cdot e^{j\omega t}d\omega+\int_{0}^{1}\omega e^{-j3\omega}\cdot e^{j\omega t}d\omega\right]=\frac{1}{2\pi}\left[-\int_{-1}^{0}\omega e^{j\omega(-3+t)}d\omega+\int_{0}^{1}\omega e^{j\omega(-3+t)}d\omega\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(t-3)}{t-3}+\frac{\cos(t-3)-1}{(t-3)^2}\right]$$

---

7) سیگنال $x(t)$ به شکل زیر داده شده است. موارد خواسته شده را بدون یافتن $X(j\omega)$ محاسبه کنید.



الف) فاز $X(\omega)$

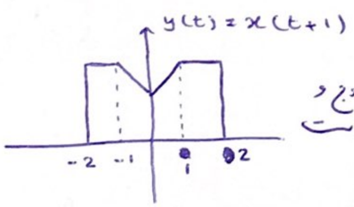
ب) مقدار $X(0)$

ج) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)d\omega$

د) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}d\omega$

و) $\int_{-\infty}^{+\infty}|X(\omega)|^2 d\omega$

ه) عکس تبدیل فوریه $Re\{X(j\omega)\}$



سیگنال زوج و حقیقی است $\xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega)$: حقیقی و زوج است $\Rightarrow \measuredangle Y(j\omega)=0$

$$\Rightarrow y(t)=x(t+1)\xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega)=X(j\omega)e^{j\omega}$$

$\Rightarrow$ پس : $\measuredangle X(j\omega)=-\omega$

$$\text{b) } X(0)=? \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega}_{(I)}, \quad \underbrace{X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt}_{(II)}$$

$$\text{c) } \int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)d\omega$$

for b : $(II) \Rightarrow \omega=0$: $X(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,dt \equiv$ مساحت زیر نمودار

$$=\underbrace{[4\times 2]}_{\text{مساحت مستطیل}}-\underbrace{\left[\frac{1}{2}\times 2\times 1\right]}_{\text{مساحت مثلث}}=8-1=\boxed{7}$$

for c : $(I) \Rightarrow t=0$: $2\pi x(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)\,d\omega=2\pi(2)=\boxed{4\pi}$

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{X}(j\omega)\, \frac{2\sin\omega}{\omega}\, e^{j2\omega}\, d\omega$: اگر $Y(j\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega} e^{j2\omega} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} y(t) = \begin{cases} 1 & ; -3<t<-1 \\ 0 & ; o.w \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{X}(j\omega) Y(j\omega)\, d\omega = 2\pi \big(x(t) * y(t) \big)$$

یادآوری : خاصیت ضرب در زمان : $x(t)\, y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \big(\underline{X}(j\omega) * Y(j\omega) \big)$

طبق خاصیت دوگانی : $\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{X}(j\omega) Y(j\omega) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \big(x(t) * y(t) \big) \Big|_{t=0} = \boxed{7\pi}$

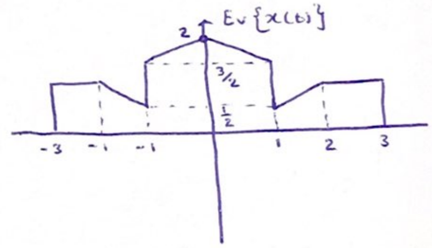
چون ضریب $e^{j\omega t}$ را در انتگرال نمی‌بینیم

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{X}(j\omega)|^2\, d\omega = ?$ رابطه پارسوال : $E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{X}(j\omega)|^2 d\omega$

$$\xrightarrow{\times 2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{X}(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = 2\pi \left[\int_{-1}^{0} 4\, dt + \int_{0}^{1} (-t+2)^2 dt + \int_{1}^{2} t^2 dt + \int_{2}^{3} 4\, dt \right]$$

$$= \frac{76}{3}\pi$$

f) $\mathcal{F}^{-1}\Big\{ Re\{\underline{X}(j\omega)\} \Big\} = ? \equiv Ev\{x(t)\} = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$:



⑧ با استفاده از خواص تبدیل فوریه اگر $y(t) = x(t) * h(t)$, $g(t) = x(3t) * h(3t)$ نشان دهید که $g(t)$ بصورت $g(t) = Ay(Bt)$ است.

یادآوری : Time scaling : $x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} \underline{X}\left(\frac{j\omega}{a}\right)$

$$x(3t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{3} \underline{X}\left(j\frac{\omega}{3}\right) \quad , \quad h(3t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{3} H\left(j\frac{\omega}{3}\right)$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \mathcal{F}\Big\{ x(3t) * h(3t) \Big\} = \frac{1}{9} \underline{X}\left(j\frac{\omega}{3}\right) H\left(j\frac{\omega}{3}\right) \quad (I)$$

از طرفی : $Y(j\omega) = \mathcal{F}\Big\{ x(t) * h(t) \Big\} = \underline{X}(j\omega) \cdot H(j\omega) \xrightarrow{\omega \to \frac{\omega}{3}} Y\left(j\frac{\omega}{3}\right) = \underline{X}\left(j\frac{\omega}{3}\right) H\left(j\frac{\omega}{3}\right) \quad (II)$

$$\xrightarrow{(II) \text{ in } (I)} G(j\omega) = \frac{1}{9} Y\left(j\frac{\omega}{3}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} g(t) = \frac{1}{3} y(3t) \equiv A y(Bt) \quad \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = 3 \end{cases}$$

(۹) ورودی و خروجی یک سیستم با رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

$\updownarrow \mathcal{F}$

الف) پاسخ ضربه سیستم را بیابید

ب) خروجی این سیستم به ازای ورودی te^{-2t} را بیابید.

$$(j\omega)^2 Y(j\omega) + 6(j\omega)Y(j\omega) + 8Y(j\omega) = 2X(j\omega)$$

$$Y(j\omega)\left[-\omega^2 + 6j\omega + 1\right] = 2X(j\omega) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{2}{-\omega^2 + 2j\omega + 8} = \frac{2}{(j\omega+2)(j\omega+4)}$$

$$= \frac{A}{(j\omega+2)} + \frac{B}{(j\omega+4)} \Rightarrow \begin{cases} A = (j\omega+2)H(j\omega)\Big|_{j\omega=-2} = \cancel{(j\omega+2)} \times \dfrac{2}{\cancel{(j\omega+2)}(j\omega+4)}\Big|_{j\omega=-2} \\ = \dfrac{2}{-2+4} = 1 \\ B = (j\omega+4)H(j\omega)\Big|_{j\omega=-4} = \cancel{(j\omega+4)}\dfrac{2}{\cancel{(j\omega+4)}(j\omega+2)}\Big|_{j\omega=-4} \\ = \dfrac{2}{-4+2} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{2}{-\omega^2+2j\omega+8} = \frac{1}{j\omega+2} + \frac{-1}{j\omega+4} \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h(t) = e^{-2t}u(t) \ast - e^{-4t}u(t)$$

یادآوری: $x(t) = e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \dfrac{1}{a+j\omega}$

b) $\mathcal{F}\; x(t) = te^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \dfrac{1}{(2+j\omega)^2}$ یادآوری: $te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{1}{(a+j\omega)^2}$

$\hookrightarrow y(t) = ?$

می‌دانیم: $y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$

روش اول: محاسبه کانولوشن

روش دوم: (1): محاسبه $Y(j\omega)$ $\longrightarrow$ محاسبه تبدیل فوریه معکوس

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)^2} \times \left[\frac{1}{j\omega+2} + \frac{-1}{j\omega+4}\right] = \frac{1}{(2+j\omega)^2} \times \frac{2}{-\omega^2+2j\omega+8}$$

$$= \frac{1}{(2+j\omega)^2} \times \frac{2}{(2+j\omega)(4+j\omega)} = \frac{A}{(2+j\omega)} + \frac{B}{(2+j\omega)^2} + \frac{C}{(2+j\omega)^3} + \frac{D}{(4+j\omega)}$$

$$A = (2+j\omega)\times Y(j\omega)\Big|_{j\omega=-2} = \frac{1}{4}, \quad B = (2+j\omega)^2 Y(j\omega)\Big|_{j\omega=-2} = -\frac{1}{2}$$

$$C = (2+j\omega)^3 \times Y(j\omega)\Big|_{j\omega=-2} = 1, \quad D = (4+j\omega)Y(j\omega)\Big|_{j\omega=-4} = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = \frac{\frac{1}{4}}{(2+j\omega)} + \frac{-\frac{1}{2}}{(2+j\omega)^2} + \frac{1}{(2+j\omega)^3} + \frac{-\frac{1}{4}}{(4+j\omega)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} y(t) = \frac{1}{4}e^{-2t}u(t) \ast -\frac{1}{2}te^{-2t}u(t) + t^2e^{-2t}u(t) - \frac{1}{4}e^{-4t}u(t)$$

۱۰ پاسخ ضربه سیستم را بیابید؟

$$\begin{cases} x(t) = \left(e^{-t} + e^{-3t}\right) u(t) \\ y(t) = \left(2e^{-t} - 2e^{-4t}\right) u(t) \end{cases}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{3+j\omega} \quad , \quad Y(j\omega) = \frac{1}{2+j\omega} - \frac{1}{4+j\omega}$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{3(3+j\omega)}{(4+j\omega)(2+j\omega)} = \frac{A}{4+j\omega} + \frac{B}{(2+j\omega)}$$

$$A = (4+j\omega)H(j\omega)\Big|_{j\omega=-4} = (\cancel{4+j\omega}) \times \frac{3(3+j\omega)}{(\cancel{4+j\omega})(2+j\omega)}\Big|_{j\omega=-4} = \frac{3(3-4)}{2-4} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$B = (2+j\omega)H(j\omega)\Big|_{j\omega=-2} = (\cancel{2+j\omega}) \times \frac{3(3+j\omega)}{(\cancel{3+j\omega})(4+j\omega)}\Big|_{j\omega=-2} = \frac{3(3-2)}{4-2} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{\frac{3}{2}}{4+j\omega} + \frac{\frac{9}{2}}{2+j\omega} \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h(t) = \frac{3}{2}e^{-4t}u(t) + \frac{9}{2}e^{-2t}u(t)$$