تبدیل z برای سیگنال‌های گسسته زمان: مشابه آنچه برای تبدیل لاپلاس در حوزه پیوسته زمان گفته شد.

تبدیل z فرم تعمیم یافته تبدیل فوریه گسسته زمان تعریف و به جای محدود کردن $z = e^{j\omega}$ در تبدیل فوریه به دایره‌ای به شعاع واحد در صفحه z است تبدیل z برای هر نقطه در صفحه مختلط z به صورت $z = re^{j\omega}$ شرط همگرایی قابل تحلیل می‌باشد.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

مثال: تبدیل z سیگنال دست راستی $x[n] = a^n u[n]$ را بدست آورید.

شرط همگرایی: طول بردار رو به صفر شود.

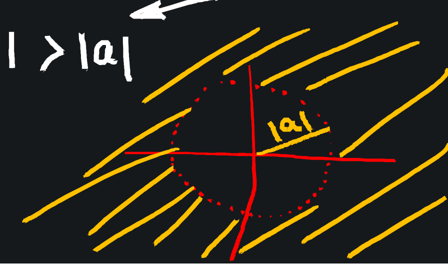
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

$$|ar^{-1}| < 1 \to |r| > |a|$$

$$X(z) = \frac{(az^{-1})^0 - (az^{-1})^{\infty+1}}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$(az^{-1})^\infty = (ar^{-1}e^{-j\omega})^\infty = (ar^{-1})^\infty e^{-j\omega\infty}$$

$$|z| > |a|$$



$|z| > |a|$ شرط همگرایی

رابطه تبدیل فوریه و تبدیل Z :

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, Z^{-n}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(e^{j\omega}) = X(Z)\Big|_{Z=e^{j\omega}}}$$

تبدیل فوریه حالت خاصی از تبدیل Z است وقتی $Z=e^{j\omega}$ باشد یعنی در صفحه Z بر روی دایره ای به مرکز مبدا و شعاع یک حرکت کنیم

از طرفی داریم :

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,(re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x[n]\, r^{-n}\right) e^{-j\omega n} \longrightarrow \boxed{X(Z) = \mathcal{F}\{x[n]\, r^{-n}\}}$$

یعنی تبدیل Z یک سیگنال گسسته برابر است با تبدیل فوریه همان سیگنال اگر در r^{-n} ضرب شده باشد. r بخش اندازه Z می باشد.

مثال: تبدیل Z سیگنال $x[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$ چیست؟ به کمک رابطه اخیر داریم:

$$X(Z)=\mathcal{F}\left\{(\tfrac{1}{2})^n r^{-n}u[n]\right\} = \mathcal{F}\left\{(\tfrac{1}{2r})^n u[n]\right\} = \frac{1}{1-\frac{1}{2r}e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}r^{-1}e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}Z^{-1}}$$

مثال. تبدیل فوریه سیگنال دست چپی $x[n] = -a^n u[-n-1]$ را بدست آورید:

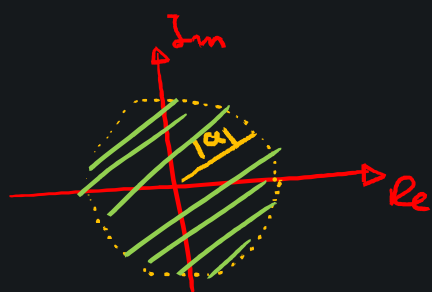
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} -a^n u[-n-1] z^{-n} = \sum_{-\infty}^{-1} -(a z^{-1})^n = -\frac{(az^{-1})^{-\infty} - (az^{-1})^{\cancel{-1+1}}}{1-az^{-1}}$$

$$(az^{-1})^{-\infty} = (ar^{-1})^{-\infty} e^{+j\omega\infty}$$

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$|r|<|a|$

ناحیه همگرایی



$|ar^{-1}|>1$

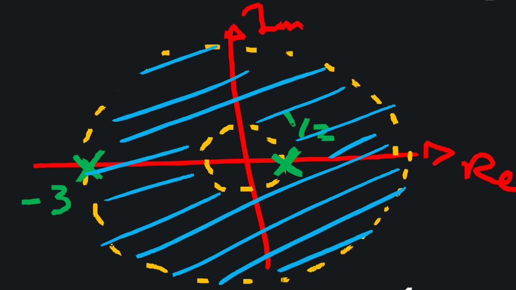
$|r|<|a|$

شرط همگرایی تبدیل Z آن است که طول این بردار صفر گردد.

مثال: تبدیل Z سیگنال معرفی شده $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] + (-3)^n u[-n-1]$ را بدست آورید.

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1+3z^{-1}} = \frac{\frac{7}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+3z^{-1})}$$

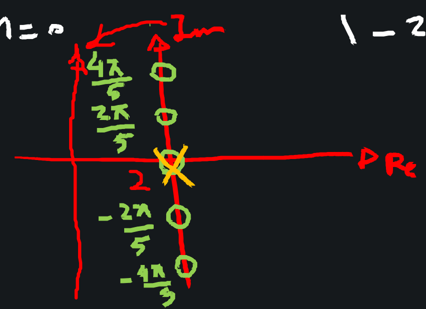
$$|z|>1/2 \quad \cap \quad |z|<3 \qquad\qquad 1/2<|z|<3$$



مثال: تبدیل Z سیگنال محدود در زمان $x[n] = 2^n\{u[n]-u[n-5]\}$ را بدست آورید.

$$X(z) = \sum_{n=0}^{4} 2^n z^{-n} = \frac{(2z^{-1})^0 - (2z^{-1})^5}{1-2z^{-1}} = \frac{1-(2z^{-1})^5}{1-2z^{-1}}$$

تمام صفحه در شرط همگرایی صدق می‌کند



صفرهای $X(z)$:

$$1 = (2z^{-1})^5$$

$$e^{j2k\pi} = (2r^{-1})^5 e^{-j\omega 5}$$

$$1 = (2r^{-1})^5 \Rightarrow \boxed{r=2}$$

$$2k\pi = -5\omega \rightarrow \boxed{\omega = \frac{2k\pi}{5}}$$

قطب $X(z)$: $\boxed{z=2}$

خواص ناحیه همگرایی تبدیل Z :

۱) ناحیه همگرایی حلقه‌ای است به مرکز مبدا در صفحه Z

۲) هیچ قطبی در ناحیه همگرایی قرار نمی‌گیرد.

۳) اگر $x[n]$ طول محدود داشته باشد ROC تمام صفحه Z است بجز احتمالاً $z=0$ یا $z=\infty$

مثال: اگر $x[n]$ ترسیم شده باشد $X(z)$ را بیابید.

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}=3z^{1}+2z^{0}+(-1)z^{-1}+1\times z^{-2}$$

$$=3z+2-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=\frac{3z^3+2z^2-z+1}{z^2}$$

سه صفر محدود

دو قطب در مبدا

یک قطب در بی‌نهایت

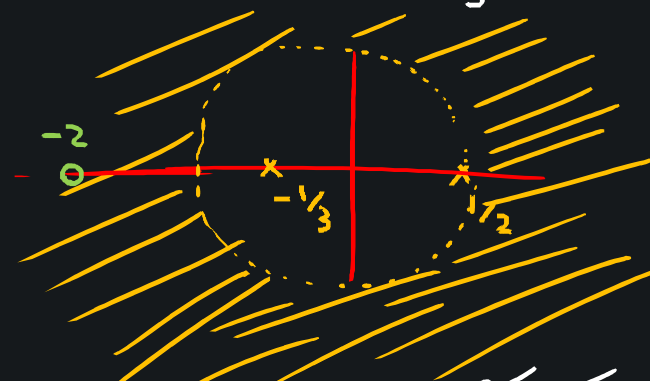
ناحیه همگرایی تمام صفحه است ولی مبدا و بی‌نهایت جزء نواحی همگرایی نیستند

۴) اگر $x[n]$ یک سیگنال راست راستی باشد ناحیه همگرایی خارج دایره ای است که دورترین قطب از مبدا بر روی آن است.

مثال: $x[n] = 3(1/2)^n u[n] - 2(-\frac{1}{3})^n u[n]$

$$X(z) = \frac{3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{2}{1+1/3\, z^{-1}} = \frac{1+2z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+1/3\, z^{-1})}$$

$|z| > 1/2 \;\cap\; |z| > 1/3 \qquad |z| > 1/2$



۵) اگر $x[n]$ یک سیگنال رست چپی باشد ناحیه همگرایی داخل دایره ای است که نزدیکترین قطب از مبدا بر روی آن قرار دارد.

مثال: تبدیل Z سیگنال $x[n] = 2(-3)^n u[-n-1] + (\frac{1}{2})^n u[-n- \ ]$ را بدست آورید.

$$X(z) = \frac{-2}{1+3z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{-3-2z^{-1}}{(1+3z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$|z|<3 \quad \cap \quad |z|<1/2 \qquad\qquad |z|<1/2$$

۶) اگر x[n] سیگنال دوطرفه باشد ناحیه همگرایی واشری است، توسط یک دایره داخلی و یک دایره بیرونی تعیین می‌شود.

مثال: تبدیل Z سیگنال

$$x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 3(2)^n u[-n-1] + (1/3)^n u[n]$$

$$X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{3}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{1-1/3\, z^{-1}}$$

$$|z|>1/2 \quad \cap \quad |z|<2 \quad \cap \quad |z|>1/3$$

$$1/2 < |z| < 2$$

۷) اگر تبدیل Z سیگنال $x[n]$ گویا باشد، ROC به قطب‌ها یا بی‌نهایت محدود می‌شود.

۸) اگر تبدیل Z $x[n]$ گویا باشد و $x[n]$ علّی باشد ناحیه همگرایی خارج دایره‌ای است، در بیرونی‌ترین قطب از مبدأ به سوی آن قرار دارد و بی‌نهایت جزء ناحیه همگرایی می‌شود.

۹) اگر تبدیل Z $x[n]$ گویا باشد و $x[n]$ ضدعلّی باشد ناحیه همگرایی داخل دایره‌ای است، در داخلی‌ترین قطب نامبدأ به سوی آن قرار دارد و مبدأ جزء ناحیه همگرایی می‌شود.

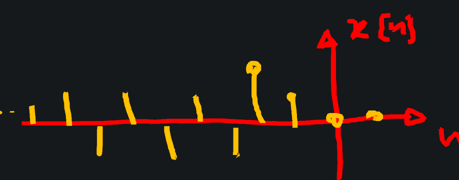
مثال:

علّی است.

$$X(z) = x[0]z^{0} + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots$$

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x[0]$$ ← محدود است ← بی‌نهایت در ناحیه همگرایی است

مثال:



ضدعلّی است

$$X(z) = \cdots + x[-3]z^{3} + x[-2]z^{2} + x[-1]z^{1}$$

$$\lim_{z\to 0} X(z) = 0$$ ← مبدأ در ناحیه همگرایی است

عکس تبدیل Z :

الف) روش مستقیم :

$$X(Z) = \mathcal{F}\{x[n] r^{-n}\}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(Z)\} = x[n] r^{-n} \longrightarrow x[n] = r^{n} \mathcal{F}^{-1}\{X(Z)\} = r^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(Z) e^{j\omega n} d\omega$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(Z) \, r e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(Z) Z^{n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \oint X(Z) Z^{n} \frac{dZ}{jre^{j\omega}}$$

$$Z = re^{j\omega} \xrightarrow{\text{مشتق}} dZ = jre^{j\omega} d\omega$$

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(Z) Z^{n-1} dZ}$$

ب) روش تجزیه کسر:

اگر $X(z)$ گویا باشد می‌توان آن را بصورت روبرو تجزیه کرد

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum_{k=0}^{M} B_k z^{k} + \sum_{k=0}^{N} \frac{A_k}{1-a_k z^{-1}}$$

اگر درجه صورت $X(z)$ از مخرج آن کمتر باشد B_k صفر هستند.

اگر درجه صورت و مخرج $X(z)$ برابر باشند $B_0 \neq 0$ و بقیه B_k ها صفر هستند.

$$\delta[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} 1$$

$$\delta[n+1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} z$$

$$\vdots$$

$$\delta[n+k] \overset{Z}{\longleftrightarrow} z^{k}$$

$$\frac{A_k}{1-a_k z^{-1}}$$

قطب a_k به مبدا نزدیکتر از ناحیه همگرایی تا مبدا است $\longrightarrow A_k (a_k)^n u[n]$

قطب a_k تا مبدا دورتر از سایر نقاط ناحیه همگرایی تا مبدا است $\longrightarrow -A_k (a_k)^n u[-n-1]$

مثال : عکس تبدیل z

$$X(z) = \frac{z}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$$ را بیابید

$$\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$$

$$z \;\Big|\; 1-\tfrac{5}{6}z^{-1}+\tfrac{1}{6}z^{-2}$$

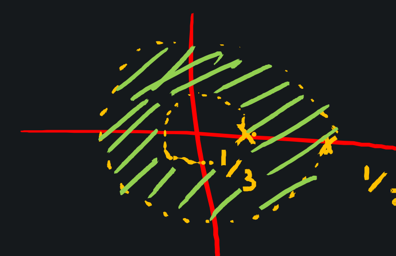
$$z$$

$$z-\tfrac{5}{6}+\tfrac{1}{6}z^{-1}$$

$$+\tfrac{5}{6}-\tfrac{1}{6}z^{-1}$$

$$\rightarrow X(z) = z + \frac{\frac{5}{6}-\frac{1}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

$$X(z) = z + \frac{3/2}{1-\frac{1}{2}z^{-2}} + \frac{-2/3}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$



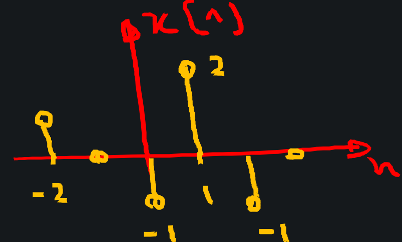
$$x[n] = \delta[n+1] - \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]$$

ج) سری‌های توانی:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}$$

مثال: $X(z)=z^{2}-3+2z^{-1}-z^{-2}$ ، $x[n]$ را بیابید.

$x[-2]=1$ ، $x[0]=-1$ ، $x[1]=2$ ، $x[2]=-1$

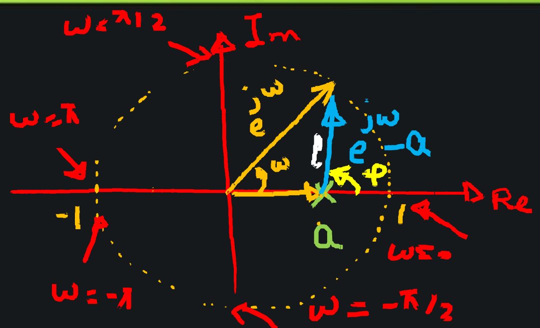


مثال: اگر $X(z)=\log(1+az^{-1})$ باشد، $x[n]$ را بیابید.

$|z|>|a|$

$$\log(1+v)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}v^{n}}{n},\quad |v|<1 \longrightarrow X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^{n}z^{-n}}{n}$$

$$x[n]=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n+1}a^{n}}{n} & n\geq 1\\ 0 & n<1\end{cases}$$



تبدیل فوریه سیگنال ها از روی محل صفر و قطب های تبدیل Z :

تبدیل Z تک قطبی : اگر تبدیل Z سیگنال $x[n]$ دارای قطب در محل $p = a$ باشد

$$X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} \rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a}$$

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{|e^{j\omega} - a|}$$

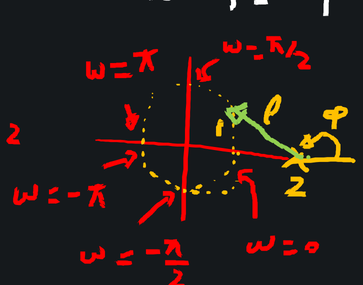
$$\measuredangle X(e^{j\omega}) = \measuredangle 1 - \measuredangle(1 - a e^{-j\omega})$$

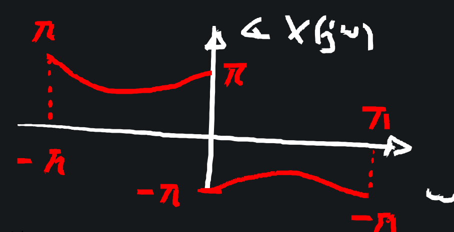
$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\text{طول برداری که قطب را به محل } \omega \text{ روی دایره به شعاع ۱ وصل می کند}}$$

$$\measuredangle X(e^{j\omega}) = -\varphi = \text{منفی زاویه ای که قطب را به محل } e^{j\omega} \text{ وصل می کند}$$

مثال

$a = 2$

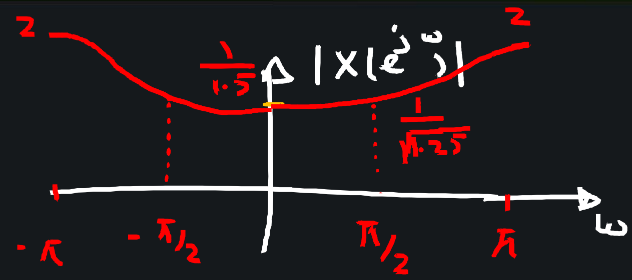


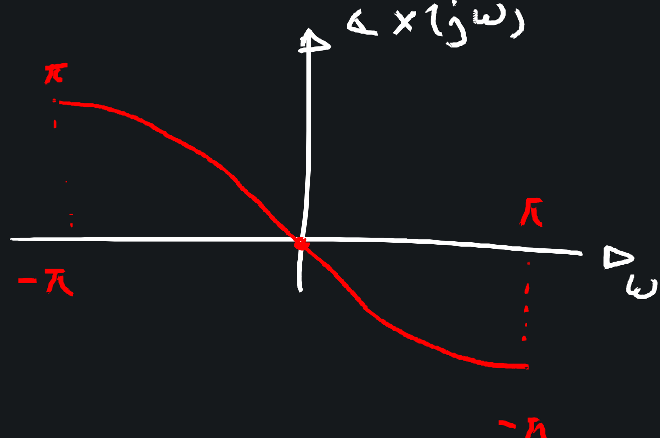


[redacted]

$$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

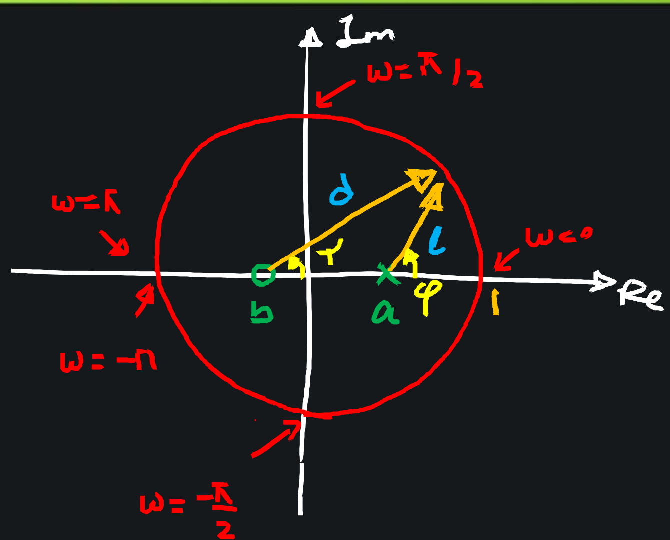
مثال: $a = -0.5$





تبدیل Z با یک صفر و یک قطب :

$$X(z) = \frac{1 - b z^{-1}}{1 - a z^{-1}}$$

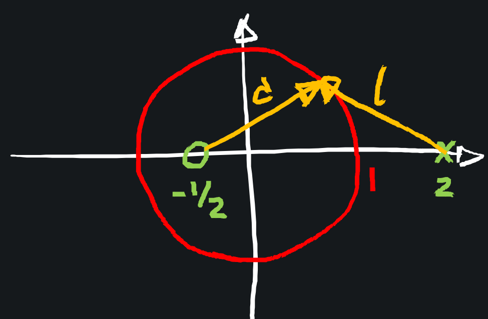


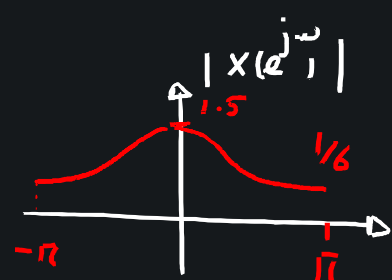
$$X(z) = \frac{z-b}{z-a} \longrightarrow |X(e^{j\omega})| = \frac{|e^{j\omega} - b|}{|e^{j\omega} - a|} = \frac{d}{\ell}$$

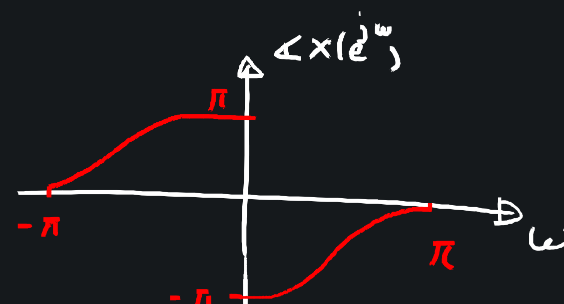
$$\measuredangle X(e^{j\omega}) = \psi - \varphi$$

مثال :

$$X(z) = \frac{1 - 2 z^{-1}}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}$$





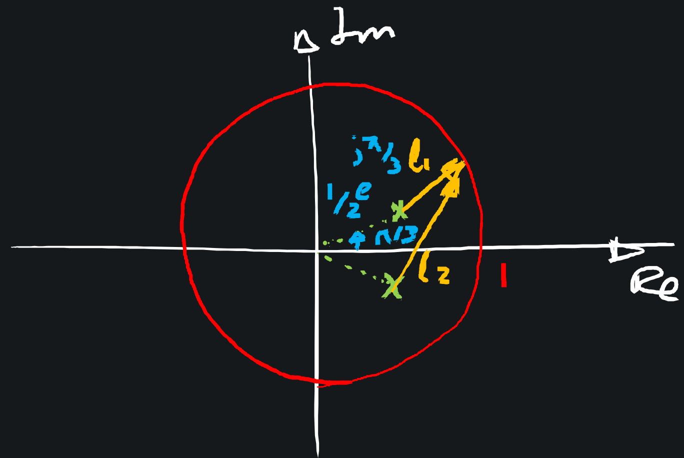


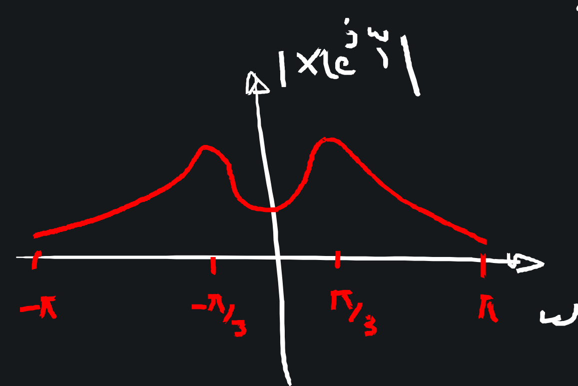
وجود چند قطب و صفر در $X(z)$:

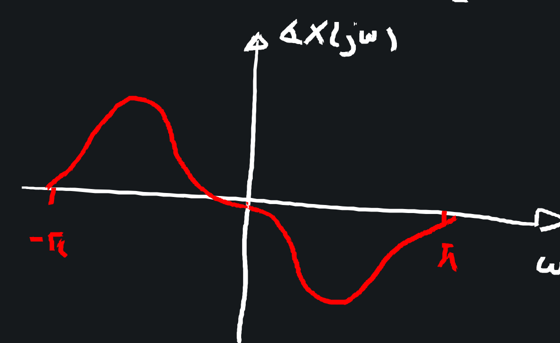
$$|X(e^{j\omega})| = \frac{\prod_{i=1}^{M} d_i}{\prod_{i=1}^{N} l_i} \qquad \measuredangle X(e^{j\omega}) = \sum_{i=1}^{M} \gamma_i - \sum_{i=1}^{N} \varphi_i$$

مثال:

$$X(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{j\pi/3}z^{-1})(1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/3}z^{-1})}$$







خواص تبدیل Z :

۱) خاصیت خطی :

$$ax[n]+bw[n] \xleftrightarrow{Z} aX(z)+bW(z)$$

$$ROC = R_x \cap R_w$$

۲) جابجایی در زمان :

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0}X(z)$$

$$ROC : R_x$$

اگر n_0 مثبت باشد قطب در مبدا اضافه می شود. اگر منفی باشد صفر در مبدا اضافه می شود.

۳) تغییر مقیاس در Z :

$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z/z_0)$$

اگر P قطب $X(z)$ باشد

$P\cdot z_0$ قطب $X(z/z_0)$ است

$$ROC = R_x \cdot |z_0|$$

مثال :

$$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u[n-1]$$

$$\updownarrow$$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\cdot z^{-1} \quad , \quad |z|>1/3$$

مثال :

$$x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$x[n]=\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}e^{j\omega n}}}_{z_{01}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}e^{-j\omega n}}}_{z_{02}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_{01}}\right)^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_{02}}\right)^{-1}}$$

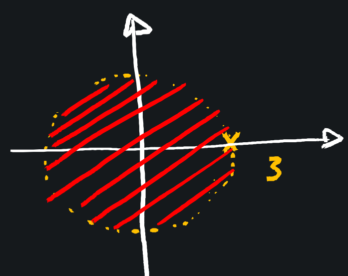
$$|z|>\frac{1}{2}\cdot|z_{01}| \rightarrow |z|>1/4$$

۴) وارونگی در زمان :

$x[-n] \xleftrightarrow{Z} X(\frac{1}{z})$ و $ROC = \frac{1}{R_x}$

مثال : تبدیل z وارون $x[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$ را بدست آورید .

$w[n] = x[-n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-\frac{1}{3}z}$ $\quad |z| < 3$



۵) انبساط زمانی :

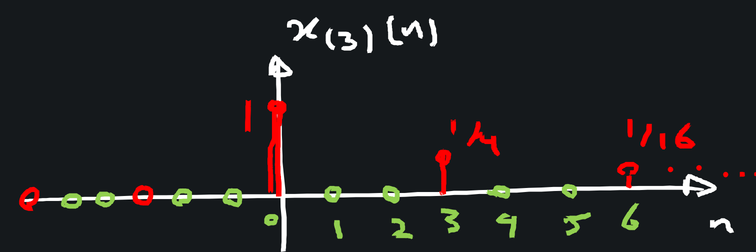
$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{Z} X(z^k)$

$ROC = R_x^{1/k}$

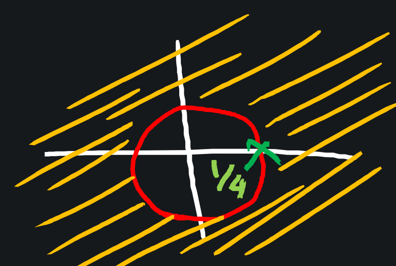
قطب و صفرهای $X(z)$ به ریشه k ام آنها تبدیل می‌شوند .

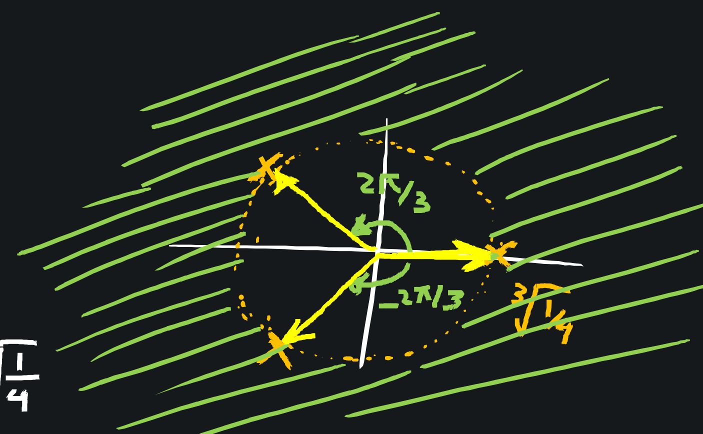
مثال: سیگنال $x[n] = (1/4)^n u[n]$ است، تبدیل Z $w[n] = x_{(3)}[n]$ را بدست آورید.

$\longrightarrow$



$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} \qquad |z| > 1/4$$





$$W(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} (z^3)^{-1}}$$

$$\frac{1}{4} (z)^{-3} = 1$$

$$\frac{1}{4} r^{-3} e^{-j3\omega} = e^{j2k\pi}$$

$$\rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

$$\omega = -\frac{2k\pi}{3} \rightarrow 0, -\frac{2\pi}{3}, 2\pi/3$$

۶) مزدوج گیری :

$$x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*)$$

$$ROC = R_x$$

اگر $x[n]$ حقیقی باشد آنگاه $x[n]=x^*[n] \Longleftarrow X(z)=X^*(z^*)$

نتیجه این است اگر p یک قطب مختلط برای $X(z)$ باشد p^* نیز قطب دیگر $X(z)$ است .

" z_0 یک صفر " " " " z_0^* " صفر " " " .

مثال : $x[n]$ یک سیگنال حقیقی دو قطب دارد یکی در $P=\frac{1}{2}e^{j\pi/4}$ است . $X(0)=0$ و $X(1)=1$ است . $X(z)$ را بیابید .

$$X(z)=\frac{kz}{(z-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})(z-\frac{1}{2}e^{+j\frac{\pi}{4}})} \rightarrow X(1)=\frac{k}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})(1-\frac{1}{2}e^{+j\frac{\pi}{4}})}=\frac{k}{1+\frac{1}{4}-\cos\frac{\pi}{4}}=1 \Rightarrow k=\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۷) خاصیت کانولوشن :

$$x[n]*w[n] \xleftrightarrow{Z} X(Z).W(Z)$$

$$ROC = R_x \cap R_w$$

مثال: پاسخ ضربه یک سیستم LTI برابر $h[n]=2\delta[n]+(\frac{1}{2})^n u[n-1]$ است. پاسخ سیستم به ورودی $x[n]=2(-1/3)^n u[n]$ چیست

$$H(Z) = 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}Z^{-1}}\cdot Z^{-1} = \frac{2-Z^{-1}+1/2\,Z^{-1}}{1-1/2\,Z^{-1}} = \frac{2-1/2\,Z^{-1}}{1-1/2\,Z^{-1}} \qquad |Z|>1/2$$

$$X(Z) = \frac{2}{1+\frac{1}{3}Z^{-1}} \qquad |Z|>1/3$$

$$\Rightarrow Y(Z) = \frac{2}{1+1/3\,Z^{-1}}\cdot\frac{2-1/2\,Z^{-1}}{1-1/2\,Z^{-1}} \qquad |Z|>1/2$$

$$Y(Z) = \frac{14/5}{1+1/3\,Z^{-1}} + \frac{6/5}{1-1/2\,Z^{-1}} \longrightarrow y[n] = 14/5\,(-1/3)^n u[n] + \frac{6}{5}(1/2)^n u[n]$$

۸) مشتق‌گیری در حوزه Z :

$$n x[n] \xleftrightarrow{Z} -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad ROC = R_x$$

با مشتق‌گیری از $X(z)$ قطب‌های آن تکرار می‌شوند ولی قطب جدید اضافه نمی‌شود.

مثال: عکس تبدیل z

$$X(z) = \frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

را بدست آورید.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

$$n\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longleftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right)$$

$$'' \longleftrightarrow -z \times \frac{\frac{1}{2}z^{-2}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2} \Rightarrow -2(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2}$$

۹) قضیه مقدار اولیه: اگر $x[n]$ علّی باشد یعنی $x[n]=0 \quad n<0$ آنگاه $x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$

چون:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = x[0] + x[1] z^{-1} + x[2] z^{-2} + \dots$$

علّی

$$\lim_{z \to \infty} X(z) = x[0]$$

تحلیل و توصیف سیستم های LTI گسسته زمان با تبدیل Z :

خاصیت علّی بودن : یک سیستم LTI گسسته زمان علّی است اگر و تنها اگر ROC تابع سیستم $(H(Z))$ آن خارج یک دایره و شامل بی نهایت باشد .

< این ناحیه همگرایی شامل بی نهایت باشد یعنی $H(z)$ در بی نهایت قطب نداشته باشد بدین معنی است که درجه صورت از درجه مخرج $(H(Z))$ بیشتر نباشد >

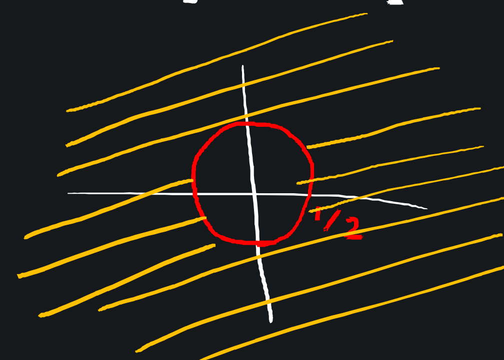
مثال: سیستم LTI با $h[n]=(\frac{1}{2})^n u[n+1]$ داده شده است. آیا علّی است؟ تبدیل Z و ناحیه همگرایی آن را پیدا کنید.

حل:

چون $h[-1]$ غیرصفر است پس سیستم علّی نیست.

$$H(z)=\mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+1]\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right\}$$

$$H(z)=2\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\times z=2\,\frac{z^2}{z-\frac{1}{2}}\qquad |z|>\frac{1}{2}$$

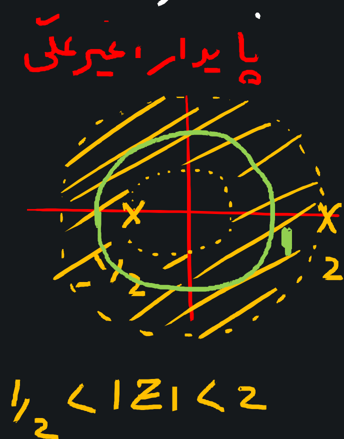


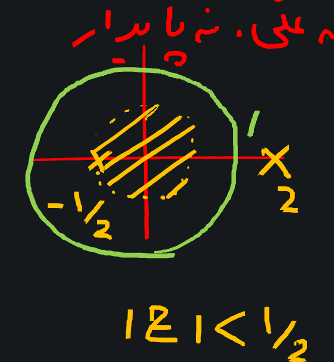
چون درجه صورت از مخرج بیشتر است سیستم علّی نیست گرچه ناحیه همگرایی $H(z)$ خارج دایره است.

خاصیت پایداری: یک سیستم LTI گسسته پایدار است اگر و تنها اگر ROC ناحیه همگرایی تابع سیستم $H(z)$ شامل دایره با شعاع واحد $|z|=1$ باشد.

مثال: یک سیستم LTI دارای قطب های مقابل است به ازای چه ناحیه همگرایی سیستم پایدار، علی می باشد.

حل: سه حالت برای ناحیه همگرایی این سیستم وجود دارد.





مهم: یک سیستم LTI علی با تابع سیستم گویا، پایدار است اگر تمام قطب های سیستم داخل دایره واحد باشند. (اندازه قطب ها کوچکتر از یک باشد)

مثال: در مثال صفحه قبل قطب ها $P_1=-1/2$ و $P_2=2$ بودند، چون قطب P_2 اندازه بیشتر از یک دارد نمی تواند همزمان علی و پایدار باشد.

بدست آوردن تابع سیستم :

۱) به کمک معادله دیفرانسیل سیستم :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$\mathcal{Z}\left\{\sum a_k y[n-k]\right\} = \mathcal{Z}\left\{\sum b_k x[n-k]\right\}$$

$$\sum a_k \mathcal{Z}\{y[n-k]\} = \sum b_k \mathcal{Z}\{x[n-k]\}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{z=0}^{M} b_k z^{-k} X(z) \longrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

مثال: تبدیل Z سیستمی با معادله تفاضلی $y[n-2]-\frac{1}{2}y[n-1]+y[n]=3x[n-1]$ را بدست آورید. حل:

$$z^{-2}Y(z)-\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)+Y(z)=3z^{-1}X(z) \Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{3z^{-1}}{z^{-2}-\frac{1}{2}z^{-1}+1}$$

۲) به کمک پاسخ سیستم به یک ورودی:

$$x_1[n] \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow y_1[n] \Rightarrow H(z)=\frac{Y_1(z)}{X_1(z)}$$

مثال: پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u[n]-\frac{1}{2}u[n-1]\right)$ برابر $y[n]=\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]$ است، تابع سیستم را بدست آورید: حل:

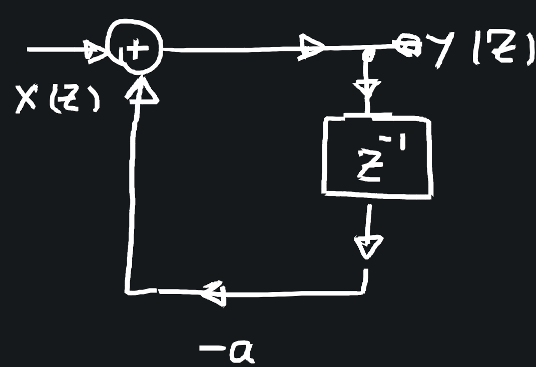
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\frac{1}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{1}{4}z^{-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$$|z|>\frac{2}{3}$$

نمایش جعبه ای سیستم ها:

۱) یک سیستم تک قطبی:

$$H(z) = \frac{1}{1+az^{-1}}$$

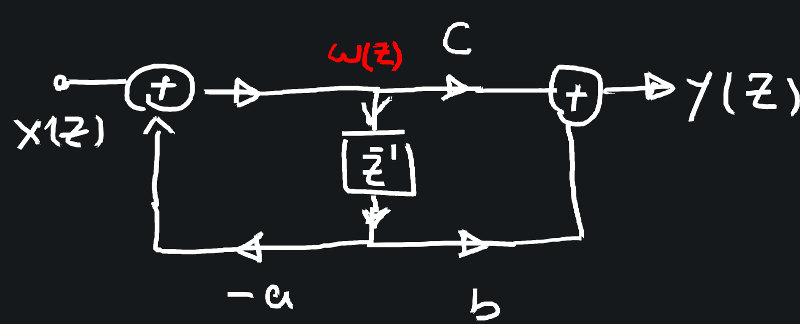


اثبات:

$$X(z) + (-a)\,z^{-1}Y(z) = Y(z) \rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1+az^{-1}}$$

۲) سیستم با یک صفر و یک قطب:

$$H(z)=\frac{1+bz^{-1}}{1+az^{-1}}$$



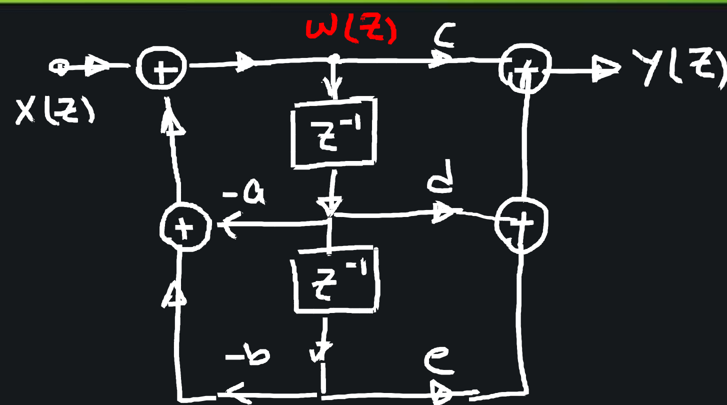
اثبات:

$$W(z)=X(z)-a\,z^{-1}W(z)\;\rightarrow\;W(z)=\frac{X(z)}{1+az^{-1}}$$

$$Y(z)=C\,W(z)+b\,z^{-1}W(z)\;\rightarrow\;Y(z)=(c+bz^{-1})\cdot\frac{X(z)}{1+az^{-1}}\;\rightarrow\;H(z)=\frac{c+bz^{-1}}{1+az^{-1}}$$

۳) سیستم‌های مرتبه ۲ :

$$H(z) = \frac{c + d z^{-1} + e z^{-2}}{1 + a z^{-1} + b z^{-2}}$$



اثبات

$$X(z) - a z^{-1} W(z) - b z^{-2} W(z) = W(z)$$

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 + a z^{-1} + b z^{-2}}$$

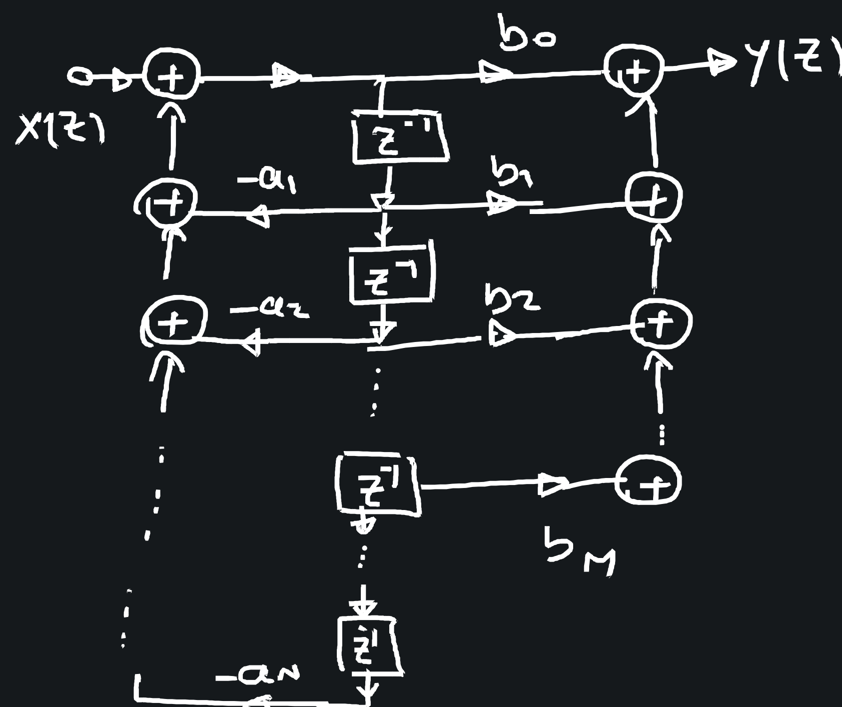
$$Y(z) = c W(z) + d z^{-1} W(z) + e z^{-2} W(z)$$

$$Y(z) = (c + d z^{-1} + e z^{-2}) \cdot W(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{c + d z^{-1} + e z^{-2}}{1 + a z^{-1} + b z^{-2}}$$

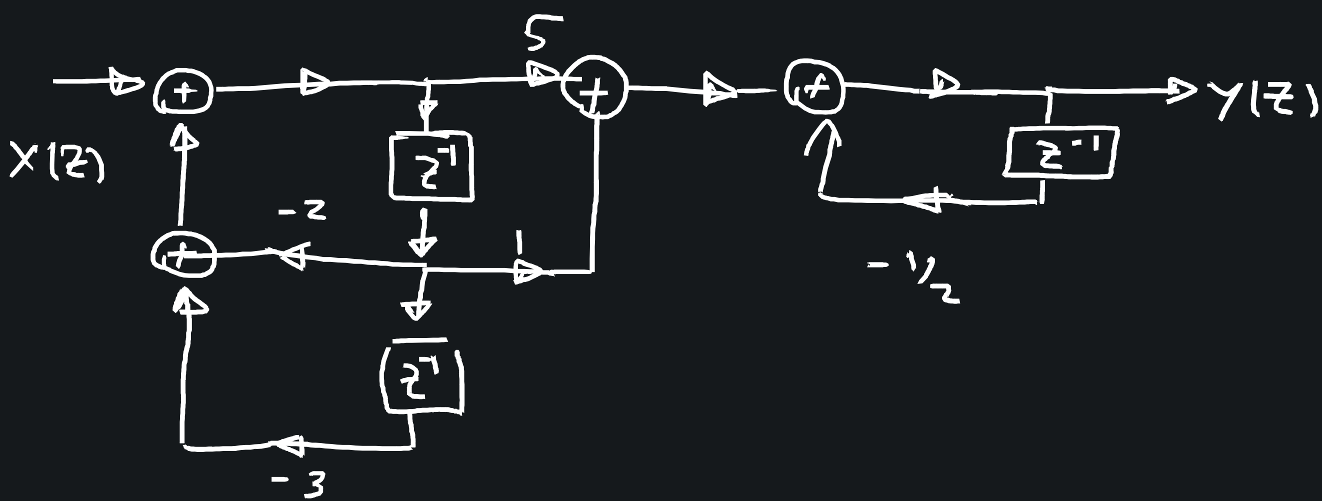
۴) سیستم‌های مرتبه بالاتر : (تحقق مستقیم)

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Nz^{-N}}$$



۵) پیاده‌سازی بصورت سری (Cascade) :

$$H(z) = \frac{5 + z^{-1}}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}$$



۲) پیاده سازی به روش موازی (parallel)

$$H(z) = \frac{2 + z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}} + \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + 4z^{-1}}$$