15

- تعدیل (Equalization)

از نظر تئوری میتوان اعوجاج خطی کانال $H_c(f)$ را به کمک یک سیستم تعدیل کننده $H_{eq}(f)$ که بطور سری با کانال قرار می‌گیرد اصلاح کرد :

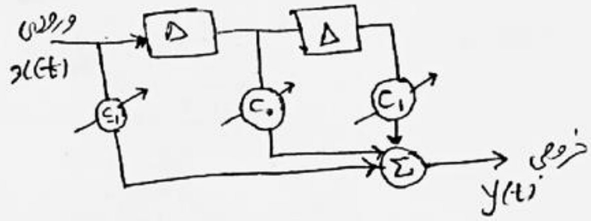
$$x(t) \longrightarrow \underset{\text{کانال}}{\boxed{H_c(f)}} \longrightarrow \underset{\text{تعدیل کننده}}{\boxed{H_{eq}(f)}} \longrightarrow y(t)$$

شرط حذف اعوجاج خطی این است که :

$$H_c(f)\,H_{eq}(f) = Ke^{-j\omega t_d}$$

$$\Rightarrow H_{eq}(f) = \frac{Ke^{-j\omega t_d}}{H_c(f)} \quad \to H_c(f) \neq 0$$ در فرکانسهایی که باشد

- همانطور که گفته شد در تئوری فقط میتوان چنین سیستم تعدیل کننده دقیقی طراحی کرد. در عمل باید تابع انتقال $H_{eq}(f)$ در رابطه اخیر را تقریب زد. یک راه استفاده از فیلترهای FIR بنام transversal filter یا تعدیل کننده خط تاخیر (tapped-delay-line equalizer) است :



ضرائب c_{-1} تا c_1 ضرائب قابل تنظیم هستند لذا علامت فلش روی آنها قرار داده شده است.

$$\Rightarrow y(t) = c_{-1}x(t) + c_0x(t-\Delta) + c_1x(t-2\Delta) \Rightarrow H_{eq}(f) = c_{-1} + c_0e^{-j\omega\Delta} + c_1e^{-j\omega 2\Delta} =$$

$$(c_{-1}e^{j\omega\Delta} + c_0 + c_1e^{-j\omega\Delta})\,e^{-j\omega\Delta} = \left(\sum_{m=-1}^{1} c_m e^{-j\omega m\Delta}\right)e^{-j\omega\Delta}$$

حال اگر تعداد ضرائب بجای سه ضریب، $2M+1$ ضریب باشد (یعنی $2M$ واحد تاخیر Δ داشته باشیم) :

$$H_{eq}(f) = \underbrace{\left(\sum_{m=-M}^{M} c_m e^{-j\omega m\Delta}\right)}_{(*)} e^{-j\omega M\Delta}$$

ملاحظه می‌کنید که عبارت (*) در رابطه فوق یک سری فوریه است (همان) بنابراین روال طراحی فیلتر transversal اینگونه است که ابتدا تعیین می‌کنید برای چه پهنای باندی می‌خواهید تعدیل کننده کار کند. فرض کنیم می‌خواهیم برای فرکانسهای $|f| < W$ کانال را تعدیل کنیم. مقدار Δ در عبارت (*) با توجه به سری فوریه باید از جنس عکس فرکانس باشد بنابراین باید $\frac{1}{\Delta} \geq W$ باشد. (بعبارت دیگر پریود تابع تقریب زده شده باید از پریود تابع اصلی بزرگتر باشد. در اینجا پریود از جنس زمان نیست بلکه از جنس فرکانس است زیرا می‌خواهیم در حوزه فرکانس تقریب بزنیم) در مرحله بعد تعیین می‌کنیم که چند ضریب سری فوریه برای تقریب تابع انتقال کانال در محدوده فرکانسی مذکور کافی است. هرچه تعداد ضرائب بیشتری انتخاب کنیم، تقریب دقیقتری خواهیم داشت.

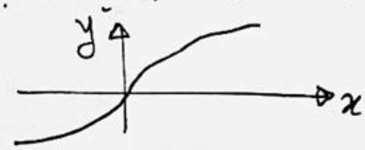
تعداد ضرائبی که انتخاب می‌کنیم $(2M+1)$ تعداد واحدهای تاخیر ($2M$) را بدست می‌دهند. حال می‌توانیم فیلتر را ساخته و ضرائب آن را برابر ضرائب سری فوریه محاسبه شده قرار دهیم. (مثال 3.2-2 ص 86 کتاب)

(16)

پیاده‌سازی فیلتر میتوانیم دو روش انتخاب کنیم :

- دیجیتال : به کمک میکروکنترلر - میکروپروسسور - شیفت رجیستر (برای هر دو نوع فیلتر با ضرایب ثابت یا متغیر (با ضرایب وفقی)
- آنالوگ : برای فیلتر ثابت میتوانیم از SAW (surface acoustic wave) یا CCD (Charge coupled device) استفاده کنیم.
  برای فیلتر وفقی میتوانیم از CCD استفاده کنیم.

اعوجاج غیرخطی : اعوجاج غیرخطی ناشی از یک سیستم غیرخطی است. چنین سیستمی تابع انتقال (transfer function) ندارد. بلکه برای آن میتوان مشخصه انتقال (transfer characteristic) بصورت $y(t)=T[x(t)]$ در نظر گرفت. علیرغم اینکه تابع انتقال نداریم اما میتوان طیف خروجی را محاسبه کرد. برای این کار ابتدا ~~بسط تیلور~~ (تقریب چندجمله‌ای) $y(t)$ را برحسب $x(t)$ می‌نویسیم :



$$y(t)=a_1x(t)+a_2x^2(t)+a_3x^3(t)+\dots$$

حال میتوان از طرفین تبدیل فوریه گرفت :

$$\Rightarrow Y(f)=a_1X(f)+a_2X*X(f)+a_3X*X*X(f)+\dots$$

از رابطه فوق میتوان نتیجه گرفت که اگر ورودی باند محدود (Band limited) باشد برخلاف سیستمهای خطی، خروجی باند محدود نخواهد بود.

حال در سیستم غیرخطی فوق چند مورد را در نظر می‌گیریم :

الف- ورودی یک موج سینوسی خالص باشد : $x(t)=\cos\omega_0 t$

$$\Rightarrow y(t)=\left(\frac{a_2}{2}+\frac{3a_4}{8}+\dots\right)+\overbrace{\left(a_1+\frac{3a_3}{4}+\dots\right)}^{A_1}\cos\omega_0 t+\underbrace{\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_4}{4}+\dots\right)}_{A_2}\cos 2\omega_0 t+\dots$$

از این حالت برای تعیین میزان اعوجاج حاصل از هارمونیکهای فرکانس اصلی ω_0 استفاده می‌شود. بطور مثال اعوجاج ناشی از هارمونیک دوم برابر است با :

$$HD_2=\text{second harmonic distortion}=\left|\frac{\frac{a_2}{2}+\frac{a_4}{4}+\dots}{a_1+\frac{3a_3}{4}+\dots}\right|\times 100=\frac{|A_2|}{|A_1|}\times 100$$

$$HD_3=\text{third harmonic distortion}=\frac{|A_3|}{|A_1|}\times 100\ ,\ \dots$$

از تمامی این اعوجاجهای هارمونیکی با رابطه‌ای بنام اعوجاج هارمونیکی کل (Total Harmonic Distortion: THD) محاسبه می‌شود :

$$THD=\sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty}|A_n|^2}{|A_1|^2}}\times 100=\frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty}|A_n|^2}}{|A_1|}\times 100$$

صورت کلی‌تر عبارت THD به اینصورت است که اگر بسط سری فوریه خروجی را نوشته و ضرایب آن را a_n و b_n بنامیم. آنگاه :

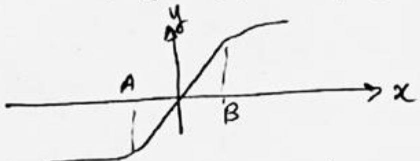
$$THD=\sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty}a_n^2+b_n^2}{a_1^2+b_1^2}}$$

(17)

ب - دو ~~...~~ سینوسی با فرکانسهای مختلف f_1 و f_2 را باهم جمع و بعنوان ورودی به سیستم غیرخطی می‌دهیم.
در این حالت واضح است که در خروجی فرکانسهای $mf_1 \pm nf_2$ علاوه بر فرکانسهای اصلی f_1 و f_2 موجود خواهند داشت.
به این نوع اعوجاج، intermodulation گفته می‌شود.

ج - حال اگر ورودی بصورت $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ باشد که $x_1(t)$ و $x_2(t)$ ممکن است طیفهای جدا از هم داشته باشند، با تعمیم حالت قبل میتوان دید که در طیف خروجی عبارتهایی بصورت $X_1(f)\star X_2(f)$، $X_1\star X_2\star X_2(f)$، $X_1\star X_1\star X_2(f)$ و ... وجود خواهند داشت که ممکن است با طیف هر کدام سیگنالهای ورودی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ همپوشانی داشته باشند. در این حالت پدیدهٔ همشنوایی (crosstalk) اتفاق افتاده است.

ایدهٔ مقابله با اعوجاج غیرخطی این است که نگذاریم ورودی وارد ناحیه غیرخطی سیستم شود. بطور مثال در مشخصهٔ انتقال روبرو و در فاصلهٔ [A,B] سیستم خطی عمل می‌کند.



حال اگر $x(t)$ مقادیری بزرگتر از B یا کوچکتر از A بخواهد اختیار کند از واحد compressor قبل از ابتدای سیستم غیرخطی (کانال) و واحد Expander بعد از سیستم غیرخطی (یا کانال) استفاده می‌کنیم. یک compressor مشخصه عملکردی مانند شکل فوق دارد. در شکل فوق ملاحظه کنید که محدودهٔ تغییرات x (ورودی compressor) بسیار زیاد است اما محدوده تغییرات y (خروجی compressor) بسیار محدود است. لذا سیگنال y را میتوان به کانال غیرخطی داد تا در محدودهٔ خطی کانال قرار بگیرد. حال آنکه اگر x را مستقیماً به کانال بدهیم وارد ناحیه غیرخطی کانال شده و اعوجاجات بررسی شده بوجود خواهند آمد. در انتهای کانال باید مجدداً از expander برای برگرداندن سیگنال به حالت اولیه خود استفاده کنیم. لذا expander مشخصه عملکردی دقیقاً مانند واحد compressor دارد ولی با این تفاوت که جای محور ورودی و خروجی عوض شود. به استفاده همزمان از compressor و expander مطابق با روال گفته شده، companding (برگرفته شده از دو کلمه compressor و expander) گفته میشود.

اتلاف توان در انتقال: (Transmission Loss)

یک سیستم ~~...~~ انتقال، علاوه بر اعوجاج معمولاً توان سیگنال را نیز کاهش می‌دهد. این کاهش توان را میتوان با تقویت‌کننده‌ها توان جبران کرد اما اگر کاهش توان از حدی بیشتر باشد نویز موجود در سیگنال مانع بازیابی کامل و تقویت سیگنال می‌شود.

گین توان: در سیستم LTI بدون ... اگر توان متوسط ورودی P_{in} و سیستم بدون اعوجاج باشد آنگاه توان متوسط خروجی ~~...~~ متناسب با P_{in} است:

$$P_{in} \longrightarrow \boxed{g} \longrightarrow P_{out} \qquad P_{out} = g\cdot P_{in}$$

که g گین توان سیستم است: $g \triangleq \frac{P_{out}}{P_{in}}$

از آنجاییکه مقدار g در سیستمهای متداول بسیار زیاد است مرسوم است که آن را بصورت زیر برحسب دسی بل (dB) (decibel) بیان می کنند:

$$g = 10^{(g_{dB}/10)} \Longleftrightarrow g_{dB} \triangleq 10 \log_{10} g$$

با این شیوه اعمال ضرب گینها (حاصل سری کردن چند سیستم) به جمع تبدیل می شود. مثلا اگر $g = 10^m$ باشد،

$g_{dB} = m \times 10$

- اگر $g \le 1 = 10^0$ باشد g_{dB} منفی و یا صفر می شود ($g_{dB} \le 0$ dB)

- دسی بل همواره برای سنجش نسبت توانها است. میتوان خود مقادیر توانها (برحسب وات یا میلی وات) را نیز بصورت لگاریتمی بیان کرد:

$$P_{dBW} = 10 \log_{10} \frac{P}{1W}$$

$$P_{dBm} = 10 \log_{10} \frac{P}{1mW}$$

بنابراین برای سیستم LTI مذکور داریم:

$$P_{out\,dBm} = g_{dB} + P_{in\,dBm}$$

بنابراین کار کردن با اعداد آسانتر می شود.

- توجه شود که توان همواره نسبت به یک بار (یا امپدانس) سنجیده می شود. بنابراین مقایسه توان ورودی و خروجی در صورتی درست است که امپدانسها در ورودی و خروجی باهم برابر باشند. با این فرض اگر به سیستم LTI مذکور یک موج سینوسی با دامنه A_x با تابع انتقال $H(f)$ بدهیم و دامنه موج سینوسی خروجی A_y باشد آنگاه:

$$P_x = \frac{A_x^2}{2},\ P_y = \frac{A_y^2}{2},\ A_y = |H(f)| A_x \Rightarrow P_y = |H(f)|^2 \cdot P_x \Rightarrow \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{P_y}{P_x} = |H(f)|^2$$

اگر $H(f) = K e^{-j\omega t_d}$ باشد:

$$\Rightarrow \text{گین توان}\ g = |H(f)|^2 = K^2 \qquad (*)$$

اگر امپدانسهای ورودی و خروجی با هم برابر نباشند گین توان دیگر برابر K^2 نیست بلکه متناسب با K^2 می شود.

- از رابطه (*) ملاحظه می شود که اگر تابع انتقال با فرکانس تغییر کند، آنگاه گین تابعی از فرکانس می شود. به همین دلیل بسیار مفید است که وابستگی فرکانسی را برحسب توان سیگنال نشان می دهد تعریف و استفاده می کنند:

$$g_{dB} \quad |H(f)|_{dB} \triangleq 10 \log_{10} |H(f)|^2 = 20 \log_{10} |H(f)|$$

۱. اتلاف توان و تکرار کننده ها: در یک سیستم پسیو توان خروجی کمتر از توان ورودی است: $P_{out} < P_{in}$ لذا برای سنجش میزان تضعیف یا اتلاف توان در انتقال، کمیتی بصورت زیر تعریف و استفاده می کنند:

$$L \triangleq \frac{1}{g} = \frac{P_{in}}{P_{out}} \Rightarrow L_{dB} = -g_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_{in}}{P_{out}}$$

$$\Rightarrow P_{out} = \frac{P_{in}}{L} \quad \text{یا} \quad P_{out\,dBm} = P_{in\,dBm} - L_{dB}$$

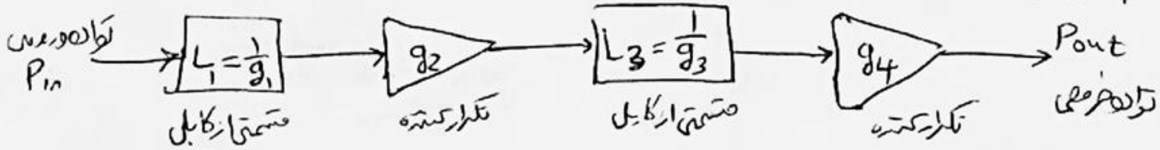
مثال: در خطوط انتقال، کابلهای کواکسیال و موجبرها توان خروجی بصورت نمایی با فاصله کاهش می یابد:

$$P_{out} = 10^{-\frac{\alpha l}{10}} \cdot P_{in}$$

$l =$ طول مسیر $\alpha =$ ضریب تضعیف برحسب $\frac{dB}{\text{واحد طول}}$

(19) $\rightarrow L=10^{\frac{\alpha l}{10}}$, $L_{dB}=\alpha l$ ← یعنی تضعیف (dB) متناسب با فاصله است.

بنابراین باید در طول مسیر از تقویت کننده‌هایی برای جلوگیری از تضعیف بیش از حد سیگنال استفاده کنیم. این تقویت کننده‌ها را تکرار کننده (Repeater) نیز گویند. نحوه استفاده از آنها در شکل زیر نشان داده شده است:



همبستگی (correlation) و چگالی طیفی (spectral Density): مهم

- اینها ابزارهای دیگری برای تحلیل سیگنال هستند. سیگنال مورد تحلیل لزومی ندارد که تبدیل فوریه داشته باشد به همین دلیل این ابزارها دسته وسیعتری از سیگنالها بویژه سیگنالهای تصادفی را میتوانند تحلیل کنند.

* (توابع چگالی طیفی، تبدیل فوریه توابع همبستگی هستند. در عین حال)

- در اینجا این ابزارها را برای سیگنالهای غیرتصادفی استفاده می‌کنیم اما در فصل 5 آنها را برای سیگنالهای تصادفی استفاده می‌کنیم.

همبستگی سیگنالهای توان: فرض کنیم $v(t)$ یک سیگنال توان باشد (لزومی ندارد حقیقی یا متناوب نیز باشد)، یعنی توان متوسط برای آن تعریف شده باشد:

$$P_v \triangleq \langle |v(t)|^2 \rangle = \langle v(t)\, v^*(t) \rangle \geq 0$$

که در حالت کلی ←

$$\langle z(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} z(t)\, dt$$

عملگر $\langle\ \rangle$ خواص زیر را دارد:

1-) $\langle z^*(t) \rangle = \langle z(t) \rangle^*$

2-) $\langle z(t-t_d) \rangle = \langle z(t) \rangle \quad \forall t_d$

3-) $\langle a_1 z_1(t) + a_2 z_2(t) \rangle = a_1 \langle z_1(t) \rangle + a_2 \langle z_2(t) \rangle$

تعریف ضرب داخلی یا ضرب اسکالر دو سیگنال: اگر $v(t)$ و $w(t)$ دو سیگنال توان باشند آنگاه ضرب داخلی آنها بصورت $\langle v(t)\, w^*(t) \rangle$ تعریف می‌شود. حاصل این ضرب یک عدد حقیقی یا مختلط است که بیانگر میزان شباهت دو سیگنال به هم است. نامساوی شوارتز رابطه بین ضرب داخلی و توانهای P_v و P_w را چنین بیان می‌کند:

$$|\langle v(t)\, w^*(t) \rangle|^2 \leq P_v P_w$$

حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که $v(t)=a\,w(t)$ باشد که a یک ثابت دلخواه است. بعبارت دیگر حاصلضرب داخلی دو سیگنال زمانی ماکزیمم است (بعبارت دیگر زمانی بیشترین شباهت را با هم دارند) که دو سیگنال متناسب با هم باشند.

تابع همبستگی متقابل (cross correlation) دو سیگنال توان: برای دو سیگنال توان $v(t)$ و $w(t)$:

$$R_{vw}(\tau) \triangleq \langle v(t)\, w^*(t-\tau) \rangle = \langle v(t+\tau)\, w^*(t) \rangle$$

برخی خواص تابع $R_{vw}(\tau)$:

1-) $|R_{vw}(\tau)|^2 \le P_v P_w = R_v(0)\cdot R_w(0)$

2-) $R_{wv}(\tau) = R_{vw}^*(-\tau) \xrightarrow[\text{در حالت کلی}]{\text{به عبارت دیگر}} R_{wv}(\tau) \neq R_{vw}(\tau)$

از تعریف ضرب داخلی ملاحظه می‌شود که تابع همبستگی متقابل $R_{vw}(\tau)$ در حقیقت میزان شباهت دو سیگنال $v(t)$ و $w(t)$ را زمانی که با اندازه τ نسبت به هم شیفت داشته باشند، بیان می‌کند.

تابع خودهمبستگی (autocorrelation) :

$$R_v(\tau) \triangleq R_{vv}(\tau) = \langle v(t)\, v^*(t-\tau)\rangle = \langle v(t+\tau)\, v^*(t)\rangle$$

این تابع میزان شباهت تابع $v(t)$ را با خودش شیفت یافته خودش با اندازه τ، بیان می‌کند. بنابراین می‌توان حدس زد که تابع خودهمبستگی یک سیگنال متناوب، خود متناوب است.

برخی خواص تابع خودهمبستگی:

1-) $R_v(0) = P_v$

2-) $|R_v(\tau)| \le R_v(0)$ → یعنی شبیه‌ترین سیگنال به $v(t)$ خود $v(t)$ است نه شیفت یافته‌های آن ، → همچنین اینکه ماکزیمم تابع R_v همواره در مبدأ است.

3-) $R_v(-\tau) = R_v^*(\tau)$ → خاصیت تقارن هرمیتی (hermitian symmetry)

4-) $v(t)^* = v(t)$ یعنی حالت حقیقی $\Rightarrow \begin{cases} R_v(\tau) = R_v^*(\tau) \\ R_v(-\tau) = R_v(\tau) \end{cases}$ $R_v(\tau)$ حقیقی و زوج است

- دو سیگنال $v(t)$ و $w(t)$ را ناهمبسته (uncorrelated) گوییم هرگاه $R_{vw}(\tau) = R_{wv}(\tau) = 0$

- اگر $v(t)$ و $w(t)$ دو سیگنال توان دلخواه باشند و

$$z(t) = v(t) \pm w(t) \Rightarrow R_z(\tau) = R_v(\tau) + R_w(\tau) \pm [R_{vw}(\tau) + R_{wv}(\tau)]$$

حال اگر این دو سیگنال ناهمبسته نیز باشند آنگاه:

$$\Rightarrow R_z(\tau) = R_v(\tau) + R_w(\tau) \xrightarrow{\tau=0} P_z = P_v + P_w \rightarrow$$

یعنی اصل جمع آثار در صورتی برای توان نیز صادق است که دو سیگنال ناهمبسته باشند.

همبستگی سیگنالهای انرژی: در مورد سیگنالهای انرژی نمی‌توان از متوسط‌گیری استفاده کرد زیرا توان متوسط سیگنالهای انرژی صفر است. بجای آن از تعریف انرژی کل استفاده می‌کنیم:

$$E_v \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, v^*(t)\, dt \ge 0$$

حال می‌توان توابع همبستگی متقابل و خودهمبستگی را برای سیگنالهای انرژی چنین تعریف کرد:

$$R_{vw}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, w^*(t-\tau)\, dt \quad (\mathrm{I}) \quad , \quad R_v(\tau) \triangleq R_{vv}(\tau)$$

- توجه کنید که تمام روابطی که تاکنون برای سیگنالهای توان بدست آورده‌ایم در مورد سیگنالهای انرژی نیز صادق‌اند. کافی است در آنجا بجای توان P از انرژی E و بجای متوسط $\langle z(t)\rangle$ از انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} z(t)dt$ استفاده کنیم. حال به طور مثال داریم:

$$|R_{vw}(\tau)|^2 \le E_v E_w$$

رابطه همبستگی سیگنالهای انرژی، رابطه (I)، شبیه عملیات کانولوشن است. درحقیقت

اگر $z(t) = w^*(-t)$ تعریف کنیم آنگاه:

$$R_{vw}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, w^*(t-\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)\, z(\tau-\lambda) = v(\tau) \star z(\tau)$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{vw}(\tau) = v(\tau) \star w^*(-\tau)} \xrightarrow{\text{بطور مشابه}} \boxed{R_v(\tau) = v(\tau) \star v^*(-\tau)}$$

- روابط زیر از قضیه پارسوال قابل استنتاج است:

$$1\text{-)}\quad R_v(0) = E_v = \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2\, df$$

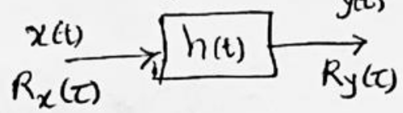
$$2\text{-)}\quad R_{vw}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, w^*(t)\, dt = \int_{-\infty} V(f)\, W^*(f)\, df$$

حال با ترکیب دو رابطه فوق با رابطه $|R_{vw}(0)|^2 \le E_v E_w = R_v(0) R_w(0)$ ، نامساوی شوارتز در حوزه فرکانس را بدست می‌آوریم:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} V(f)\, W^*(f)\, df \right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |W(f)|^2 df .$$

(تساوی مجدداً زمانی حاصل می‌شود که $V(f)$ و $W(f)$ باهم متناسب باشند)

توابع همبستگی ورودی - خروجی در یک سیستم LTI: ($x(t)$ و $y(t)$ سیگنالهای توان یا انرژی می‌توانند باشند) البته $x(t)$ و $y(t)$ از نوع $x(t)$ است حالا فرض با این ادعا کنیم



می‌دانیم:

$$y(t) = h(t) \star x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\, x(t-\lambda)\, d\lambda$$

با توجه به رابطه فوق و تعریف توابع همبستگی می‌توان روابط زیر را بدست آورد:

$$1\text{-)}\quad R_{yx}(\tau) = h(\tau) \star R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, R_x(\tau-\lambda)\, d\lambda$$

$$2\text{-)}\quad R_y(\tau) = h^*(-\tau) \star R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(-\lambda)\, R_{yx}(\tau-\lambda)\, d\lambda$$

$$3\text{-)}\quad R_y(\tau) = h^*(-\tau) \star h(\tau) \star R_x(\tau)$$

اثبات:

$$R_{yx}(\tau) = \langle y(t)\, x^*(t-\tau) \rangle ,\quad y(t) = h(t) \star x(t) \Rightarrow$$

با جابجایی عمل گرهای انتگرال و متوسط گیری

$$R_{yx} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \langle x(t-\lambda)\, x^*(t-\tau) \rangle\, d\lambda$$

میدانیم $\langle z(t) \rangle = \langle z(t+\lambda) \rangle \Rightarrow \langle x(t-\lambda)\, x^*(t-\tau) \rangle = \langle x(t+\lambda-\lambda)$.

$$x^*(t+\lambda-\tau) \rangle = \langle x(t)\, x^*[t-(\tau-\lambda)] \rangle = R_x(\tau-\lambda) \Rightarrow$$

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, R_x(\tau-\lambda)\, d\lambda = \boxed{h(\tau) \star R_x(\tau)}$$

همین روال را در مورد $R_y(\tau) = \langle y(t)\, y^*(t-\tau) \rangle$ انجام می‌دهیم و به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\lambda) \langle y(t)\, x^*(t-\tau-\lambda) \rangle\, d\lambda \quad \text{(I)}$$

که: $\langle y(t)\, x^*(t-\tau-\lambda) \rangle = R_{yx}(\tau+\lambda)$ (II) با جایگذاری (II) در (I) و استفاده از $\lambda = -\mu$

به رابطه شماره 2 می‌رسیم.

توابع چگالی طیفی : تابع چگالی طیفی یک سیگنال انرژی یا توان معرف چگونگی توزیع انرژی یا توان در طیف سیگنال است $G_v(f)$

دو ویژگی اساسی تابع چگالی $G_v(f)$ چنین است : 1) $\int_{-\infty}^{\infty} G_v(f)\,df = R_v(0)$ یعنی سطح زیر منحنی $G_v(f)$ انرژی کل سیگنال یا توان متوسط آن را بدست می‌دهد 2) چگالی طیف ورودی و خروجی در یک سیستم LTI با رابطه $G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$ به یکدیگر مربوط می‌شوند. زیرا همانطور که می‌دانیم $|H(f)|^2$ گین توان یا انرژی در فرکانس f است.

- ترکیب دو ویژگی مذکور با رابطه زیر انجام می‌شود :

$$R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{|H(f)|^2 G_x(f)}^{G_y(f)}\, df$$

تعبیر رابطه فوق چنین است که انرژی کل یا توان متوسط سیگنال برابر با انتگرال کمیتی است که میتوان آن را بعنوان چگالی انرژی یا توان (بعبارت دیگر مقدار انرژی یا توان در واحد فرکانس) در نظر گرفت. لذا به همین دلیل به تابع $G(f)$ «چگالی طیفی» توان یا انرژی گفته می‌شود. همچنین از آنجا که توان یا انرژی کمیتی حقیقی هستند پس تابع چگالی نیز با توان یا انرژی نیز باید حقیقی باشد.

- طبق قضیه وینر-کنشاین (Wiener_Kinchine theorem) توابع همبستگی و چگالی طیفی تشکیل یک زوج تبدیل فوریه می‌دهند ;

$$R_v(\tau) \longleftrightarrow G_v(f)$$

یعنی :

$$\begin{cases} G_v(f) = \mathcal{F}[R_v(\tau)] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} R_v(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \\ R_v(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[G_v(f)] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} G_v(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df \end{cases}$$

- اگر $v(t)$ یک سیگنال انرژی باشد می‌دانیم که $R_v(\tau) = v(\tau) \star v^*(-\tau)$ پس : $G_v(f) = |V(f)|^2$ چگالی طیفی انرژی

- اگر $v(t)$ یک سیگنال توان ~~...~~ از نوع سیگنال‌های متناوب باشد میتوان بسط سری فوریه آن را چنین نوشت :

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j2\pi n f_0 t} \to f_0 = \frac{1}{T_0}$$

دوره تناوب اصلی

در نتیجه چگالی طیفی توان $v(t)$ چنین بدست می‌آید :

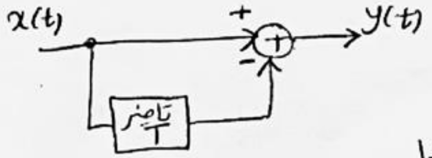
$$G_v(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta(f - nf_0)$$

ملاحظه می‌کنید که چگالی طیفی توان سیگنال‌های متناوب ~~...~~ بصورت قطارهای ضربه در مضارب صحیحی از فرکانس اصلی سیگنال می‌باشد.

- بیان دیگری از قضیه پارسوال :

$$\begin{cases} G_v(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta(f - nf_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} G_v(f)\, df = R_v(0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, v^*(t)\, dt \end{cases} \rightarrow \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, v^*(t)\, dt}$$

مثال: فیلتر شانه‌ای (Comb filter): یکی از کاربردهای این فیلتر در سیستم‌های تلویزیونی است.



طرح این فیلتر در شکل زیر نشان داده شده است.

پاسخ ضربه این فیلتر:
$$h(t)=\delta(t)-\delta(t-T)$$

و تابع انتقال آن:
$$H(f)=1-e^{-j2\pi fT}$$

در نتیجه چگالی طیف توان یا انرژی برابر می‌شود با:

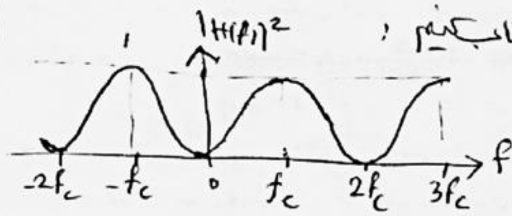
$$|H(f)|^2=(1-e^{-j2\pi fT})(1-e^{j2\pi fT})=2-e^{-j2\pi fT}-e^{j2\pi fT}=2-(\cos 2\pi fT-j\sin 2\pi fT)$$
$$-(\cos 2\pi fT+j\sin 2\pi fT)=2-2\cos 2\pi fT=2-2(1-2\sin^2\pi fT)=4\sin^2\pi fT$$

حال اگر $f_c=\frac{2}{T}$ انتخاب کنیم:

$$\Rightarrow \boxed{|H(f)|^2=4\sin^2\left(2\pi\frac{f}{f_c}\right)}$$

$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{f}{f_c}$

$\frac{1}{2T}$



ملاحظه می‌کنید که شکل آن شبیه یک شانه است.

اگر چگالی طیفی ورودی $G_x(f)$ را بدانیم آنگاه:

$$\begin{cases} G_y(f)=4\sin^2 2\pi\frac{f}{f_c}\cdot G_x(f) \\ R_y(\tau)=\mathcal{F}^{-1}[G_y(f)] \end{cases}$$

و اگر تابع خودهمبستگی ورودی یا $R_x(\tau)$ را نیز بدانیم آنگاه:

$$G_y(f)=|H(f)|^2\cdot G_x(f)\Rightarrow \boxed{R_y(\tau)=\mathcal{F}^{-1}[|H(f)|^2]*R_x(\tau)}$$

در این مثال:

$$|H(f)|^2=4\sin^2 2\pi\frac{f}{f_c}=2-e^{-j2\pi fT}-e^{j2\pi fT}\Rightarrow$$

$$\mathcal{F}^{-1}[|H(f)|^2]=2\delta(t)-\delta(t-T)-\delta(t+T)\Rightarrow$$

$$\boxed{R_y(\tau)=2R_x(\tau)-R_x(\tau-T)-R_x(\tau+T)}$$

توان یا انرژی خروجی نیز برابر است با:

$$R_y(0)=2R_x(0)-R_x(-T)-R_x(T)$$

فصل پنجم: **نویز**: به سیگنال‌های الکتریکی ناخواسته نویز گفته می‌شود.

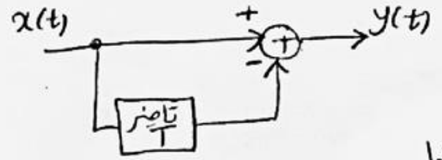
منابع تولید نویز:
1- انسان و محصولات ساخت بشر
2- عوامل طبیعی

- برخی منابع نویز را می‌توان با تمهیدات خاص از بین برد یا ضعیف کرد. اما برخی دیگر را نمی‌توان زیرا بطور ذاتی در پدیده‌ها وجود دارند مانند نویز حرارتی که ناشی از حرکت الکترونها است.

نویز حرارتی: ناشی از حرکت تصادفی ذرات باردار است.

مثال: فیلتر شانه‌ای (Comb filter): یکی از کاربردهای این فیلتر در سیستمهای تلویزیونی است.

طرح این فیلتر در شکل زیر نشان داده شده است.



پاسخ ضربه‌ی فیلتر: $h(t)=\delta(t)-\delta(t-T)$

و تابع انتقال آن: $H(f)=1-e^{-j2\pi fT}$

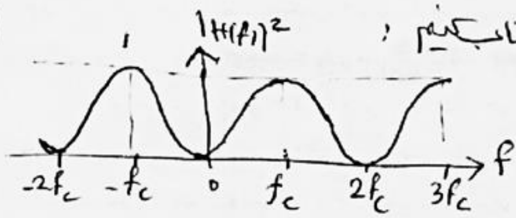
در نتیجه چگالی توان یا انرژی برابر می‌شود با:

$$|H(f)|^2=(1-e^{-j2\pi fT})(1-e^{j2\pi fT})=2-e^{-j2\pi fT}-e^{j2\pi fT}=2-(\cos 2\pi fT-j\sin 2\pi fT)$$
$$-(\cos 2\pi fT+j\sin 2\pi fT)=2-2\cos 2\pi fT=2-2(1-2\sin^2\pi fT)=4\sin^2\pi fT$$

حال اگر $f_c=\frac{2}{T}$ انتخاب کنیم: $\frac{1}{2T}$

$$\Rightarrow \boxed{|H(f)|^2=4\sin^2\left(2\pi\frac{f}{f_c}\right)}$$

$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{f}{f_c}$



ملاحظه می‌کنید که شکل آن شبیه یک شانه است.

اگر چگالی طیفی ورودی $G_x(f)$ را بدانیم آنگاه:

$$\begin{cases} G_y(f)=4\sin^2 2\pi\frac{f}{f_c}\cdot G_x(f) \\ R_y(\tau)=F^{-1}[G_y(f)] \end{cases}$$

و اگر تابع خودهمبستگی ورودی یعنی $R_x(\tau)$ را نیز بدانیم آنگاه:

$$\cancel{R_y(\tau)}\ G_y(f)=|H(f)|^2\cdot G_x(f)\Rightarrow \boxed{R_y(\tau)=F^{-1}[|H(f)|^2]*R_x(\tau)}$$

در این مثال:

$$|H(f)|^2=4\sin^2 2\pi\frac{f}{f_c}=2-e^{-j2\pi fT}-e^{j2\pi fT}\Rightarrow$$

$$F^{-1}[|H(f)|^2]=2\delta(t)-\delta(t-T)-\delta(t+T)\Rightarrow$$

$$\boxed{R_y(\tau)=2R_x(\tau)-R_x(\tau-T)-R_x(\tau+T)}$$

آنگاه توان خروجی نیز برابر است با:

$$R_y(0)=2R_x(0)-R_x(-T)-R_x(T)$$

فصل پنجم: **نویز**: به سیگنالهای الکتریکی ناخواسته نویز گفته می‌شود.

منابع تولید نویز: ۱- انسان و محصولات ساخت بشر، ۲- عوامل طبیعی

- برخی منابع نویز را می‌توان با تمهیدات خاصی از بین برد یا تضعیف کرد. اما برخی دیگر را نمی‌توان زیرا بطور ذاتی در پدیده‌ها وجود دارند مانند نویز حرارتی که ناشی از حرکت الکترونها ~~...~~ است.

نویز حرارتی: ناشی از حرکت تصادفی ذرات باردار است.

(24) انرژی متوسط یک ذره در دمای مطلق T $\propto KT$ $\quad K=$ ثابت بولتزمن (Boltzmann constant)

هرچه انرژی حرکتی ذره بیشتر شود نویز بیشتری نیز تولید می‌شود بنابراین انتظار داریم که در عبارات مربوط به نویز حرارتی، جمله KT نیز وجود داشته باشد.

نویز حرارتی موجود در یک مقاومت فلزی R را نویز جانسون (Johnson Noise) یا نویز مقاومتی نیز گویند. این نویز چون شامل ترکیب بی‌شمار حرکت تصادفی الکترونها است طبق قضیه حد مرکزی (Central Limit Theorem) توزیع گوسی با متوسط صفر و واریانس $E[v^2]=\overline{v^2}=\sigma_v^2=\frac{2(\pi KT)^2}{3h}R \quad (V^2)$ دارد که:

$K=$ ثابت بولتزمن $=1.37\times10^{-23}$ J/°K

$h=$ ثابت پلانک $=6.62\times10^{-34}$ J.sec یا J.s

$T=$ دما برحسب درجه کلوین

دانسیته طیفی نویز حرارتی مذکور نیز چنین است:

$$G_v(f)=\frac{2Rh|f|}{\exp\left(\frac{h|f|}{KT}\right)-1} \quad (V^2/Hz)$$

که اگر فرکانسها پائین باشد، $|f| \ll \frac{KT}{h}$، چنین تقریب زده می‌شود:

$$G_v(f)\simeq 2RKT\left(1-\frac{h|f|}{2KT}\right)$$

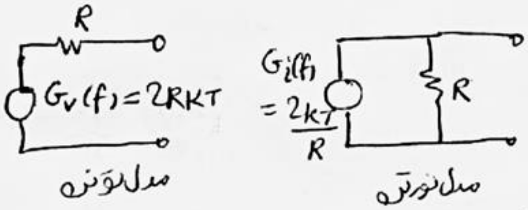
(با کمک تقریب $e^x \simeq 1+x+\frac{x^2}{2}$ بدست آمده)

اما حد فوق برای تقریب، یعنی $\frac{KT}{h}$، عدد بسیار بزرگی است. بطوریکه برای $\underline{0.1}$ آن یعنی $0.1\frac{KT_0}{h}$ تا میتوان $G_v(f)$ را تقریباً ثابت فرض کرد داریم! $0.1K\frac{T_0}{h}\simeq10^{12}$ Hz

که این فرکانس در حوزه نور مادون قرمز است و بسیار فراتر از حوزه امواج رادیویی مورد استفاده است

لذا به راحتی و با دقت خوبی میتوان نوشت: $\boxed{G_v(f)=2RKT \quad V^2/Hz}$

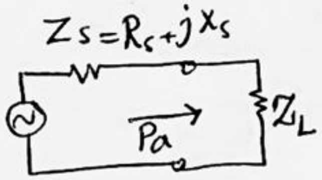
ـ بنابراین هر مقاومت فلزی را میتوان بصورت زیر با یک مدل تونن یا نورتن مدل کرد. (زیرا مقاومت در حقیقت یک تولیدکننده ولتاژ یا جریان است!)



$$\longrightarrow G_i(f)=\frac{G_v(f)}{R^2}=\frac{2KT}{R}$$

ـ توجه کنید که داخل دایره‌های مربوط به منابع $G_v(f)$ و $G_i(f)$ فلش قرار داده نشده تا ماهیت تصادفی بودن ولتاژ یا جریان مشخص شود.

قضیه انتقال توان ماکزیمم: کل توان موجود (Available power: یعنی ماکزیمم توانی که یک منبع با مقاومت ثابت غیرصفر می‌تواند به مقاومت بار تحویل دهد) زمانی به بار منتقل می‌شود که مقاومت بار با مقاومت منبع تطبیق یافته (matched) باشد. یعنی:

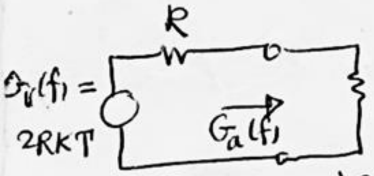


$$\xrightarrow{\text{باید}} Z_L=Z_s^*=R_s-jX_s$$

در این صورت توان موجود، P_a، برابر می‌شود با:

$$\underbrace{P_a}_{\text{ماکزیمم مقدار توان انرژی در واحد زمان}}=\frac{\langle[\frac{v_s(t)}{2}]^2\rangle}{R_s}=\frac{\overbrace{\langle v_s^2(t)\rangle}^{\text{میزان انرژی منبع در واحد زمان}}}{4R_s}$$

حال قضیه فوق را می‌توان برای یک مقاومت فلزی که مدل تونن آن را دیدیم، به کار برد و مفهوم «چگالی طیفی موجود» (Available Spectral Density) را به جای «توان موجود» به کار برد:



ماکزیمم مقدار توان/انرژی در واحد فرکانس

$$G_a(f)=\frac{G_v(f)}{4R}=\frac{1}{2}KT \quad (W/Hz)$$

$G_a(f)$، میزان انرژی/توان منبع در واحد فرکانس

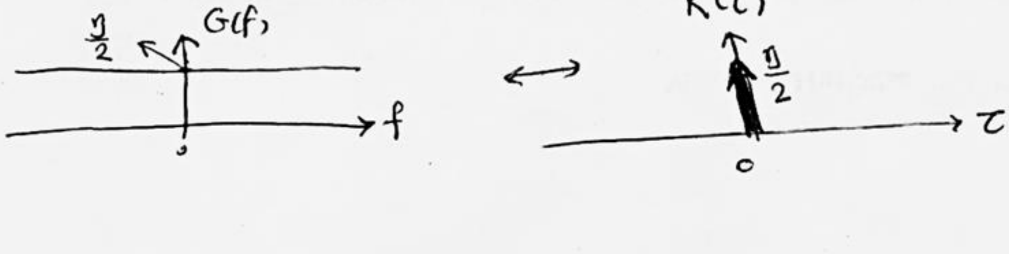
همانطور که ملاحظه می‌کنید چگالی طیفی موجود یک مقاومت R فقط به دما بستگی دارد به عبارت دیگر یک مقاومت حرارتی همیشه چگالی طیفی $\frac{KT}{2}$ را به یک بار تطبیق یافته منتقل می‌کند. (مستقل از مقدار مقاومت آن)

- کار کردن با $G_a(f)$ بجای $G_v(f)$ محاسبات را سرراست‌تر و ساده‌تر می‌کند.

- غیر از مقاومت‌های حرارتی، منابع دیگری نیز هستند که نویز گوسی‌ای تولید می‌کنند که در محدوده فرکانسی وسیعی مقدار ثابت دارد. به اینگونه نویزها که در محدوده فرکانسی وسیعی ثابت هستند نویز سفید (white noise) گفته می‌شود. چگالی طیفی نویزهای سفید را در حالت کلی بصورت $G(f)=\frac{\eta}{2}$ می‌نویسیم.

(ضریب $\frac{1}{2}$ بخاطر لحاظ کردن فرکانس‌های مثبت است. درحقیقت رابطه فوق می‌گوید که نصف چگالی طیفی برای فرکانس‌های مثبت و نصف دیگر برای فرکانس‌های منفی است) برای $G(f)$ فوق میتوانیم $R(\tau)$ را چنین بدست آوریم:

$$R(\tau)=\mathcal{F}^{-1}\{G(f)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta}{2}e^{j\omega\tau}d\tau=\frac{\eta}{2}\delta(\tau)$$



در شکل کلی $G(f)=\frac{\eta}{2}$ را برابر هر کدام از $G_v(f)$، $G_i(f)$ و $G_a(f)$ قرار دهیم:

$$\Rightarrow \eta_v = 4RkT \quad , \quad \eta_i = \frac{4kT}{R} \quad , \quad \eta_a = kT$$

اندیسی که برای هر کدام از η در نظر گرفته شده نوع منبع نویز را نشان می‌دهد.

- منابع نویز دو دسته اند:
  1- حرارتی: مربوط با حرارت هستند ← برای همه منابع نویز حرارتی داریم $\eta_a = kT$
  2- غیرحرارتی: هیچ ارتباطی با دمای فیزیکی ندارند.

- می‌توان برای تمام منابع نویز (چه حرارتی و چه غیرحرارتی) دمای نویز در نظر گرفت. به این صورت که دمای نویز (noise Temperature) T_N را برای هر منبع دلخواهی چنین تعریف می‌کنیم:

$$T_N \triangleq \frac{2G_a(f)}{k} = \frac{\eta_a}{k}$$

که فرض شده $\frac{\eta_a}{2}$ ماکزیمم توان نویزی است که منبع در هر واحد فرکانس می‌تواند به بار منتقل کند.

بنابراین اگر دمای نویز منبعی را داده باشند می‌توان η_a آن را محاسبه کرد: $\eta_a = kT_N$

- توجه کنید که T_N لزوماً تعبیر فیزیکی ندارد مثلاً برخی منابع الکترونیکی تولید نویز دمای حدود $T_N = 10T_0 = 3000°K$ دارند.

نویز سفید گوسی $x(t)$ با $G_x(f)=\frac{\eta}{2}$: $\quad x(t) \rightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow y(t)$

- برخی روابط مربوط به اعمال نویز سفید گوسی به یک سیستم LTI:

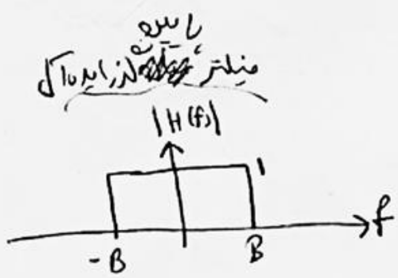
$$G_y(f) = \frac{\eta}{2}|H(f)|^2 \quad (1)$$

$$R_y(\tau) = \frac{\eta}{2}\mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\} \quad (2)$$

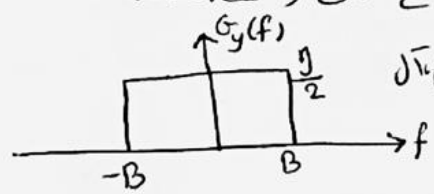
$$\overline{y^2} = \frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2 df \quad (3)$$

- رابطه (1) نشان می‌دهد که چگالی طیفی نویز فیلتر شده، شکل $|H(f)|^2$ را به خود می‌گیرد. لذا دیگر نویز فیلتر شده، سفید نیست بلکه به اصطلاح رنگی (Colored) است.

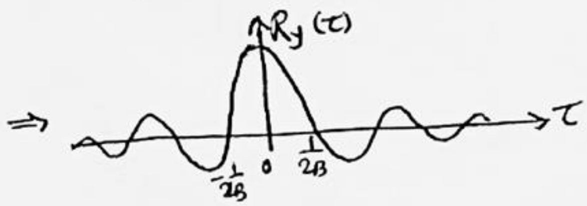
<u>مثال 1</u>- فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

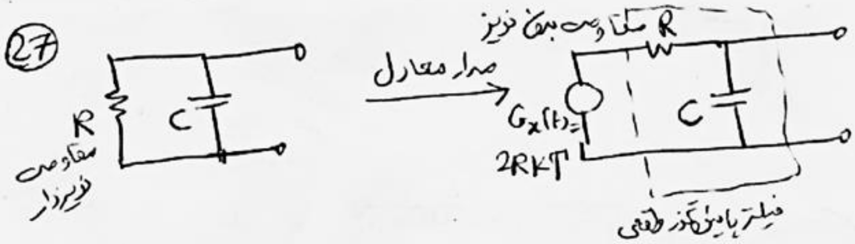


$$\begin{cases} G_y(f) = \frac{\eta}{2}\Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \\ R_y(\tau) = \eta B \operatorname{sinc} 2B\tau \end{cases}$$

→ ملاحظه می‌کنید که نویز خروجی در فاصله‌های زمانی $\frac{1}{2B}$ همبستگی ندارد.

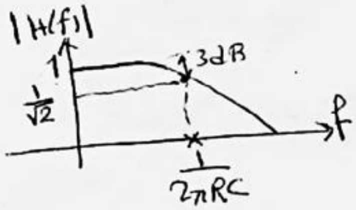
توان نویز خروجی $\overline{y^2} = \eta B$ → متناسب با پهنای باند فیلتر پایین‌گذر است

<u>مثال 2</u>: فیلتر پایین‌گذر واقعی



$$|H(f)|^2 = \left|\frac{1}{1+j2\pi fRC}\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{f}{B}\right)^2} \quad \text{که} \quad B=\frac{1}{2\pi RC}$$

پهنای باند 3dB



$$G_y(f) = |H(f)|^2 \cdot G_x(f) = \frac{2RKT}{1+\left(\frac{f}{B}\right)^2} \quad ①$$

$$\rightarrow R_y(\tau) = 2RKT\pi B e^{-2\pi B|\tau|} = \frac{KT}{C} e^{-\frac{|\tau|}{RC}} \quad ②$$

توان نویز خروجی $\overline{y^2} = R_y(0) = \frac{KT}{C}$ (3)

- از رابطه (2) ملاحظه می‌کنیم که نویز خروجی در فاصله‌های زمانی برابر ثابت زمانی مدار یعنی RC، همبستگی دارد.

- از رابطه (3) ملاحظه می‌کنید که علیرغم اینکه نویز خروجی ناشی از مقاومت حرارتی R است اما توان نویز خروجی به C بستگی دارد نه به R! (علت در انتهای همین صفحه خواهد آمد)

<u>پهنای باند معادل نویز</u>:

$$N = \overline{y^2} = \frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \eta \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df$$

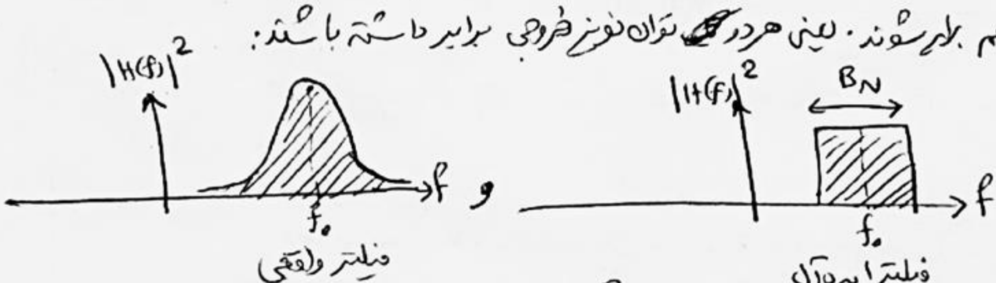
پهنای باند معادل نویز $B_N \triangleq \frac{1}{g}\int_0^{\infty} |H(f)|^2 df \rightarrow g = |H(f)|^2_{max}$

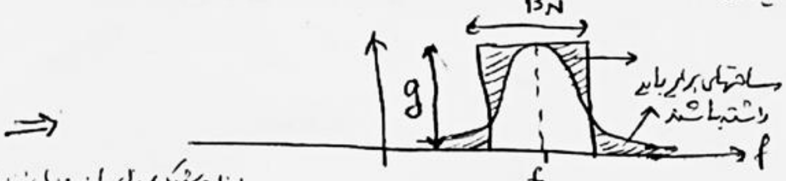
یعنی $\sqrt{g}$ گین ولتاژ در فرکانس مرکزی فیلتر است.

توان نویز خروجی $\Rightarrow N = g\eta B_N$

برای یک فیلتر میان‌گذر

- ملاحظه می‌کنید که پهنای باند معادل نویز، مقداری است که مساحت‌ها در مربع فیلترهای میان‌گذر ایده‌آل و واقعی (مطابق شکل زیر) با هم برابر شوند. یعنی هر دو توان نویز خروجی برابر داشته باشند:





ملاحظه می‌شود که پهنای باند معادل نویز برای فیلترهای واقعی $\frac{\pi}{2}$ برابر پهنای باند 3dB آنهاست

- مثال: در فیلتر پایین‌گذر RC که قبلاً دیدیم میتوان نوشت:

$$g = |H(0)|^2 = 1$$

$$\Rightarrow B_N = \int_0^{\infty} \frac{df}{1+\left(\frac{f}{B}\right)^2} = \frac{\pi}{2}B = \frac{1}{4RC}$$

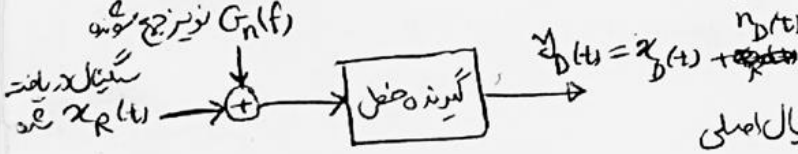
- حال علت اینکه در مدار RC توان نویز خروجی مستقل از مقدار R و فقط وابسته به

$$N=\overline{y^2}=y\cdot B_N=(4KTR)\times\left(\frac{1}{4RC}\right)$$

است مشخص شده است. از آنجا که C هرچه مقدار R بزرگتر شود چگالی نویز y بیشتر شود اما به همان نسبت پهنای باند معادل نویز نیز کاهش می یابد لذا توان خروجی که حاصلضرب ایندو کمیت است مستقل از R می شود.

– پهنای باند معادل نویز برای فیلترهای ایده آل همان ~~[illegible]~~ پهنای باند قطعی آنها است ولی همانطور که دیدیم برای فیلترهای واقعی پهنای باند معادل نویز بیشتر از پهنای باند 3dB آنهاست.

<u>انتقال سیگنال با وجود نویز:</u> درحالت کلی در یک سیستم نویز در نقاط مختلف ممکن است به سیگنال اصلی اضافه شود که به آن نویز جمع شونده (Additive Noise) گفته می شود. برای سادگی فرض کنید نویز در یک نقطه فشرده شده و فقط در همان نقطه به سیگنال اصلی اضافه می شود. چنین طرحی برای یک گیرنده در زیر نشان داده شده است:



– در این طرح این نکته تاکید شده که حساس ترین نقطه در گیرنده، نقطه ورودی است زیرا سیگنال اصلی ضعیف ترین سطح ممکن خود را دارد. همچنین منابع نویز موجود در نقاط دیگر را نیز می توان به ورودی سیستم می توان به ورودی ارجاع کرد (~~[illegible]~~ اثر آنها را منتقل کرد)

– چون سیستم خطی است پس خروجی را می توان به صورت مجموع پاسخهای هر کدام از دو جزء ورودی نوشت:

$$y_D(t)=x_D(t)+n_D(t)$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\Rightarrow y_D^2(t)=x_D^2(t)+2x_D(t)\cdot n_D(t)+n_D^2(t)$$

دو فرض درمورد نویز در نظر می گیریم:

1-) نویز تولید شده، متوسط صفر دارد و نیز مشخصات آماری آن با زمان تغییر نمی کند (مشخصات آماری مانند متوسط، واریانس و ...)

2-) نویز و سیگنال اصلی از نظر فیزیکی مستقل از هم هستند لذا با هم هیچ همبستگی ندارند (ناهمبسته هستند) آماری (یا اصطلاحاً)

با در نظر گرفتن دو فرض فوق از طرفین رابطه اخیر متوسط می گیریم:

$$\Rightarrow E[y_D^2(t)]=E[x_D^2(t)]+2E[x_D(t)\cdot n_D(t)]+E[n_D^2(t)]\Rightarrow$$

$$\overset{\text{فرض استقلال آماری (فرض شماره 2)}}{=}E[x_D^2(t)]+2E[x_D(t)]\cdot E[n_D(t)]+E[n_D^2(t)]$$

$$\overset{\text{فرض شماره 1 (متوسط صفر)}}{=}E[x_D^2(t)]+2E[x_D(t)]\times 0+E[n_D^2(t)]=E[x_D^2(t)]+E[n_D^2(t)]$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{y_D^2(t)}=\overline{x_D^2(t)}+\overline{n_D^2(t)}}$$

یعنی اصل جمع آثار برای توان درحالت مستقل و ناهمبسته بودن سیگنال و نویز صادق است.

رضوانی سربندان

(29) اگر تعریف کنیم $S_D \triangleq \overline{x_D^2(t)}$ و $N_D \triangleq \overline{n_D^2(t)}$ $\xrightarrow{\text{آنگاه}}$ $\overline{y_D^2} = S_D + N_D$

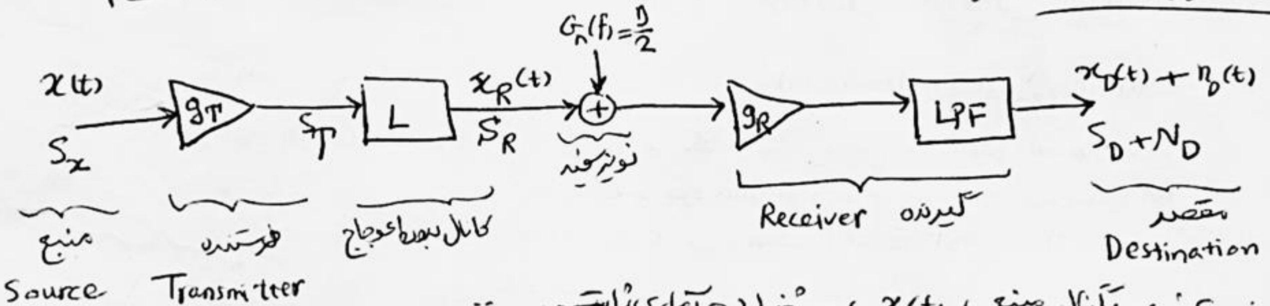
نسبت سیگنال به نویز (SNR): طبق تعریف برابر است با نسبت توان سیگنال به توان نویز. بطور مثال اگر این نسبت را بخواهیم در خروجی محاسبه کنیم می‌توانیم بنویسیم:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D \triangleq \frac{S_D}{N_D} = \frac{\overline{x_D^2(t)}}{\overline{n_D^2(t)}}$$

- اگر فرض کنیم نویز سفید با $G_n(f) = \frac{\eta}{2}$ باشد و گیرنده بهره g_R و پهنای باند معادل نویز B_N داشته باشد:
$\hookrightarrow N_D = g_R \cdot \eta \cdot B_N$ ، $\eta = KT_N = KT_0(T_N/T_0) \simeq 4\times10^{-21}(T_N/T_0)\left(\frac{W}{Hz}\right)$ (دمای مرجع T_0)

- این نسبت معیاری است از اینکه سیگنال اصلی تا چه حد آغشته به نویز شده است. (البته به شرطی که اصل جمع آثار برای توانها صادق باشد)

انتقال باند پایه آنالوگ: یک سیستم ساده انتقال باند پایه آنالوگ در شکل زیر نشان داده شده است:



- فرض می‌کنیم سیگنال منبع، $x(t)$، مشخصات آماری ثابت و مستقل از زمان داشته باشد (اصطلاحاً ارگودیک باشد) و پهنای باند آن نیز محدود، W، باشد یعنی برای $|f| > W$ مولفه‌های فرکانسی نداشته باشد.
- کانال بدون اعوجاج فرض می‌شود پس: $x_D(t) = K\,x(t - t_d)$ که K بیانگر کل تقویت سیستم و t_d تاخیر زمانی سیستم است.

$$\begin{cases} S_x \triangleq \overline{x^2} \\ S_T = g_T\overline{x^2} = g_T S_x \\ S_R = \overline{x_R^2} = \frac{S_T}{L} \\ S_D = \overline{x_D^2} = g_R S_R \\ N_D = g_R \eta W \quad \longleftarrow \text{بخاطر ایده‌آل بودن فیلتر LPF با فرض } B_N = B = W \end{cases} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_R}{\eta W}} \quad (I)$$

رابطه (I) رابطه مهمی است که سه پارامتر تاثیرگذار بر نسبت SNR را نشان می‌دهد. یعنی توان سیگنال ورودی S_R، چگالی نویز در نقطه ورودی η و پهنای باند سیگنال پیام، W. البته طرح رابطه (I) را می‌توان بعنوان توان نویز متناظر با پهنای باند پیام قبل از تقویت نیز تعبیر کرد. به همین دلیل سیگنالهای باند وسیع نسبت به سیگنالهای باند باریک بیشتر از نویز آسیب می‌بینند.

- معمولاً $\left(\frac{S}{N}\right)_D$ را برحسب دسی بل (dB) بیان می‌کنند. برای اینکار توانها را برحسب dBm بیان می‌کنند.

$$\Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{D_{dB}} = 10\log_{10}\left(\frac{S_R}{kT_N W}\right) = S_{R_{dBm}} + 174 - 10\log_{10}\left(\frac{T_N}{T_0}\cdot W\right)$$

(30)

- ساده شناسی شود که گین گیرنده تأثیری روی SNR خروجی ندارد بلکه فقط سطح سیگنال را تا حد مناسب بالا می برد.
(نویز نیز به همان نسبت بالا می آید لذا SNR مستقل از گین است)

- کلیه گین ها یا ~~افت~~ تضعیف های که قبل از اضافه شدن نویز در سیستم انتقال ~~وجود~~ حضور دارند در مقدار SNR تاثیر دارند. مثلاً:

$$S_R = \frac{S_T}{L} \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_T}{L\eta W}$$

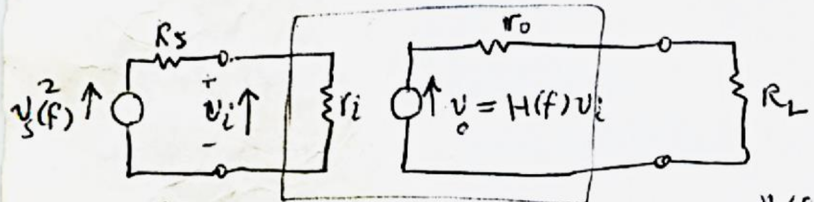
بنابراین SNR خروجی متناسب با توان ارسالی S_T که فرستنده و متناسب معکوس با تضعیف کانال L، است.

<u>نویز تقویت کننده</u>: معمولاً از دو کمیت (معیار) برای بررسی و اندازه گیری نویز در تقویت کننده ها استفاده می شود

1- دمای موثر نویز effective noise temper.
2- عدد نویز Noise figure

| که هر کدام ~~را~~ را بررسی می کنیم.

فرض کنیم مدل یک تقویت کننده بدون نویز (یعنی خودش نویز اضافه نمی کند) چنین باشد:



$v_s^2(f)$ چگالی ولتاژ سیگنال یا نویز است.

توان موجود (منبع) منبع برابر است با:

$$\eta_s(f) = \frac{v_s^2(f)}{4R_s}$$

توان موجود در خروجی v_o برابر:

$$\eta_o(f) = \frac{v_o^2(f)}{4r_o} = \frac{|H(f)|^2 v_i^2(f)}{4r_o} = \frac{|H(f)|^2}{4r_o}\left(\frac{r_i}{R_s + r_i}\right)^2 v_s^2(f)$$

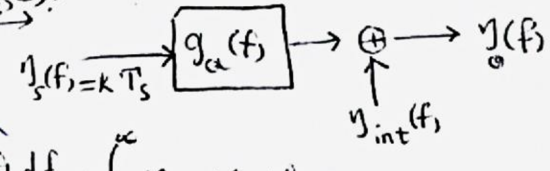
$$\Rightarrow \text{گین توان موجود} \quad ① \ \boxed{g_a(f) \triangleq \frac{\eta_o(f)}{\eta_s(f)}} = \left(\frac{|H(f)|\, r_i}{R_s + r_i}\right)^2 \frac{R_s}{r_o}$$

حال فرض کنیم که منبع مورد بررسی، منبع نویز سفید با دمای نویز T_s باشد یعنی $\eta_s(f) = KT_s$ و

$$\eta_o(f) = g_a(f)\eta_s(f) = g_a(f)KT_s$$

حال اگر ~~سیگنال~~ تقویت کننده نویزی هم باشد یعنی خودش یک نویز داخلی تولید کند که مستقل از نویز منبع باشد آنگاه میتوان نوشت:

$$\text{Ⅱ} \quad \eta_o(f) = \underbrace{g_a(f)KT_s}_{\eta_o'} + \eta_{int}(f) \quad \xrightarrow{\text{بلوک دیاگرام}}$$



$$\xRightarrow{\text{انتگرالگیری}} \quad \text{کل توان نویز موجود در خروجی} \quad N_o = \int_0^\infty \eta_o(f)\,df = \overbrace{KT_s\int_0^\infty g_a(f)\,df}^{N_o'} + \int_0^\infty \eta_{int}(f)\,df$$

اگر تقویت کننده مورد بررسی، حداکثر گین توان g و پهنای باند معادل نویز B_N داشته باشد:

$$\text{Ⅲ} \quad gB_N = \int_0^\infty g_a(f)\,df \Leftarrow \overbrace{gKT_sB_N = \underbrace{\int_0^\infty \eta_o'(f)\,df}_{N_o'\ \text{کل توان}} = KT_s\int_0^\infty g_a(f)\,df}^{\text{Ⅰ}} \Leftarrow \eta_o'(f) = KT_s\, g_a(f) \Leftarrow \eta_s(f) = KT_s \text{ و } ①$$

و همینطور دمای موثر نویز تقویت کننده چنین تعریف شود:

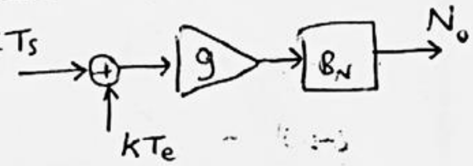
$$T_e \triangleq \frac{1}{g k B_N} \int_0^{\infty} \eta_{int}(f)\, df \quad \text{IV}$$

با توجه به رابطه I

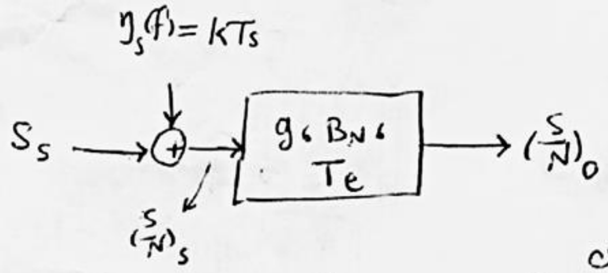
$$\Rightarrow N_0 = kT_s g B_N + g k B_N T_e = \boxed{gk(T_s + T_e) B_N} \xrightarrow{\text{دیاگرام}}$$

اثبات

$$N_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{2}\eta_o\, df \overset{\text{II}}{\Longrightarrow} = \int_0^{\infty} kT_s g\, df + \int_0^{\infty} \eta_{int}\, df \overset{\text{III}}{\underset{\text{IV}}{\Longrightarrow}} = kT_s g B_N + g k T_e B_N$$



حال دیاگرام زیر را برای یک تقویت کننده نویزی در نظر بگیرید:



$$S_0 = gS_s \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{gS_s}{N_0} = \frac{S_s}{k(T_s+T_e)B_N} \quad \text{I}$$

اگر چه نویز منبع لزوماً پهنای باند مشخصی ندارد اما میتوان

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s \triangleq \frac{S_s}{kT_s B_N} \quad \text{II}$$

چنین تعریف کرد:

$$\text{II و I} \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{1}{1+\frac{T_e}{T_s}} \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_s \quad \text{III}$$

ملاحظه می کنید که: ۱- همواره $\left(\frac{S}{N}\right)_0 \leq \left(\frac{S}{N}\right)_s$

۲- افت SNR ورودی در خروجی، فقط به نسبت $\frac{T_e}{T_s}$ بستگی دارد.

دمای موثر نویز تقویت کننده

* در این معیار، عدد نویز (Noise Figure) است. که چنین تعریف می شود:

$$\boxed{F \triangleq \frac{(\frac{S}{N})_s}{(\frac{S}{N})_0}} \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{1}{F}\left(\frac{S}{N}\right)_s$$

F همواره بزرگتر مساوی 1 است. هر چه F بزرگتر شود تقویت کننده نویزی تر است، حال:

$$S_0 = gS_s, \quad \left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{S_s}{kT_0B_N} \rightarrow (T_s = T_0) \Rightarrow \begin{cases} F = \dfrac{N_0}{gkT_0B_N} = 1 + \dfrac{T_e}{T_0} \\ T_e = (F-1)T_0 \end{cases}$$

F را معمولاً برحسب dB بیان می کنند.

اگر چندین سیستم با دماهای موثر نویز $T_1, T_2, \ldots$ و عددهای نویز $F_1, F_2, \ldots$ و گین‌های $g_1, g_2, \ldots$ بصورت سری به هم متصل شوند آنگاه

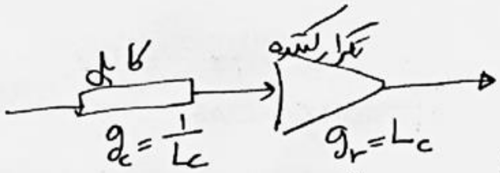
دمای موثر نویز کل سیستم و نیز عدد نویز کل سیستم چنین خواهد بود:

$$\begin{cases} T_e = T_1 + \dfrac{T_2}{g_1} + \dfrac{T_3}{g_1 g_2} + \cdots \rightarrow \text{فرمول فریز (Friis' Formula)} \\ F = F_1 + \dfrac{F_2 - 1}{g_1} + \dfrac{F_3 - 1}{g_1 g_2} + \cdots \end{cases}$$

* از هر دو رابطه فوق اهمیت طبقه اول مشخص می شود.

استفاده از تکرارکننده‌ها در کابل‌های انتقال: یک سیستم تکرارکننده شامل m بخش یکسان است که هر بخش از

از یک تکه کابل و یک تکرارکننده مطابق شکل زیر تشکیل شده است:



$g_c = \frac{1}{L_c}$ $\quad g_r = L_c$

$T_{amb} = T_0$ $\quad F_r$

$F_c = L_c$

برای یک بخش از m بخش:

تقویت کل $g_{cr} = \frac{1}{L_c} \cdot g_r = 1$

عدد نویز کل $F_{cr} = F_c + \frac{F_r - 1}{\left(\frac{1}{L_c}\right)} = L_c + L_c(F_r - 1) = L_c F_r$

$\Rightarrow$ عدد نویز برای کل m بخش $F = mF_{cr} - (m-1) \underset{\text{اگر } F_{cr} \gg 1}{\simeq} mF_{cr}$

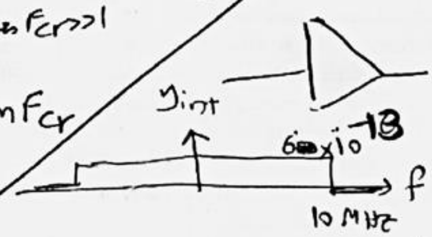
$\Rightarrow \quad T_e = (F-1)T_0 \simeq mF_{cr}T_0$

مثال:

$B_N = 1\,MHz$

$A_0 = 10^4$

$k = 10^{-23}$



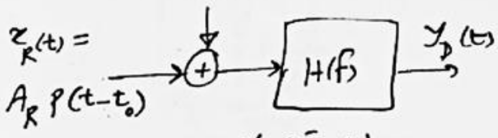
$\Rightarrow \begin{cases} T_e = ? \\ F = ? \end{cases}$

$F_c = \frac{S_s}{S_o} \times \frac{N_o}{N_s} = L_c \times 1$

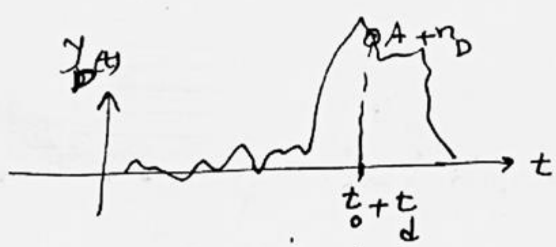
آشکارسازی پالس و فیلترهای تطبیق یافته (Matched Filter):

پالسی که شکل صحیح آن را داریم فرستادیم، شکل صحیح برگشتی که آغشته به نویز سفید است را دریافت می‌کنیم. می‌خواهیم تشخیص یافته

در هر لحظه از زمان تعیین کنیم که آیا پالسی وجود دارد یا خیر؟ چون شکل صحیح پالس را داریم برای آشکارسازی زمان ورود پالس دریافتی می‌توان فیلترهای بهینه متناسب با شکل صحیح پالس ارسالی طراحی کرد که به این فیلترها، فیلترهای تطبیق یافته گفته می‌شود.



مدل سیستم آشکارسازی پالس



یک نمونه خروجی فیلتر

پالس دریافتی شکل صحیح معلوم $p(t)$ دارد (دامنه A_R و زمان ورود t_0 آن نامعلوم است). لذا:

$x_R(t) = A_R\,p(t-t_0) \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} X_R(f) = A_R P(f) e^{-j\omega t_0}$

سیگنال انرژی

انرژی کل پالس دریافتی $E_R = \int_{-\infty}^{\infty} |X_R(f)|^2 df = A_R^2 \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df$

ایده کار چنین است که فیلتری طراحی کنیم که انرژی پالس را در یک نقطه متمرکز کرده و میزان انرژی نویز خروجی را مینیمم کند.
(A دامنه پیک پالس)

فرض کنیم زمان مشاهده پیک پالس مذکور $t = t_0 + t_d$ باشد. لذا شکل موج خروجی مشابه آنچه که در شکل اخیر آمده می‌باشد. حال به دنبال $H(f)$ فیلتری می‌گردیم که هدف مذکور را تحقق دهد. توابع $p(t)$ و $G_n(f)$ معلوم فرض می‌شوند.

$$\text{مقدار پیک } A = \mathcal{F}^{-1}\{Y_D(f)\}\Big|_{t=t_0+t_d} = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)X_R(f)\}\Big|_{t=t_0+t_d} = A_R\int_{-\infty}^{\infty} H(f)P(f)e^{j\omega t_d}\,df$$

متوسط نویز خروجی صفر فرض می‌شود و طبیعتی $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 G_n(f)\,df$

ما به دنبال ماکزیمم کردن نسبت زیر هستیم:

$$\left(\frac{A}{\sigma}\right)^2 = A_R^2\,\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f)P(f)e^{j\omega t_d}\,df\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2 G_n(f)\,df}$$

از نامساوی شوارتز می‌دانیم:

$$\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} V(f)W^*(f)\,df\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}|V(f)|^2\,df} \le \int_{-\infty}^{\infty}|W(f)|^2\,df \qquad (\star)$$

حال با انتخاب $V(f)$ و $W(f)$ بصورت زیر:

$$V(f) = H(f)\cdot\sqrt{G_n(f)}$$

$$W^*(f) = A_R\,\frac{H(f)P(f)e^{j\omega t_d}}{V(f)} = \frac{A_R P(f)e^{j\omega t_d}}{\sqrt{G_n(f)}}$$

می‌دانیم که زمانی تساوی در رابطه $(\star)$ محقق می‌شود که $V(f)$ متناسب با $W(f)$ باشد پس اگر انتخاب کنیم $V(f) = \frac{KW(f)}{A_R}$ (K عدد دلخواه) آنگاه مقدار ماکزیمم را چنین میتوان بدست آورد:

$$\left(\frac{A}{\sigma}\right)^2_{max} = A_R^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|P(f)|^2}{G_n(f)}\,df$$

تابع تبدیل فیلتر بهینه $\Rightarrow$ $H_{opt}(f) = K.\frac{P^*(f)e^{-j\omega t_d}}{G_n(f)} \longrightarrow$

ملاحظه می‌کنیم که فیلتر بهینه فرکانسهایی که سیگنال طیف قوی دارد تقویت کرده (زیرا متناسب با $|P(f)|$ است) و جاهایی که نویز طیف قوی دارد تضعیف می‌کند (زیرا متناسب معکوس با $G_n(f)$ است)

— اگر نویز مورد بررسی سفید باشد:

$$\left(\frac{A}{\sigma}\right)^2_{max} = \frac{2A_R^2}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty}|P(f)|^2\,df = \frac{2E_R}{\eta}$$

یعنی هرچه انرژی پالس ارسالی بیشتر باشد آشکارسازی پالس دریافتی آسانتر است.

پاسخ ضربه فیلتر بهینه چنین بدست می‌آید:

$$h_{opt}(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2K}{\eta} P^*(f)\, e^{-j\omega t_d}\right\} = \frac{2K}{\eta}\, p(t_d - t)$$

ملاحظه می‌کنید که شکل پاسخ ضربه همان شکل پالس ارسال را دارد. لذا به همین دلیل نام فیلتر <u>تطبیق‌یافته</u> را انتخاب کرده‌اند. (t_d زمان تأخیر بین لحظه ورود پالس و لحظه وقوع پیک است)

- ممکن است $h_{opt}(t)$ غیرسببی و در نتیجه غیرقابل تحقق شود. در این گونه مواقع t_d را به اندازه کافی بزرگ فرض می‌کنند و برای زمان‌های منفی پاسخ ضربه را صفر تقریب می‌زنند.

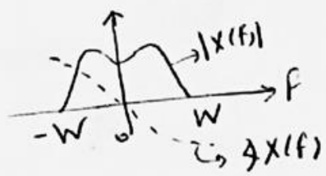
فصل ششم : مدولاسیون پیوسته خطی

(تمرین سری دوم : فصل 5 مسایل 5.2-12 و 5.2-13 و 5.3-1 و 5.3-7 و 5.3-10، 5.4-3، 5.4-6، 5.4-10، 9.4-5، 9.4-8، 9.5-9)

می‌خواهیم سیگنال تصادفی $x(t)$ که پیام نیز نامیده می‌شود را مدوله کنیم. یعنی طیف فرکانسی آن را در حوزه فرکانس به فرکانسهای بالاتر منتقل کنیم تا مناسب انتقال روی کانال باشند. در گیرنده عکس عمل مدولاسیون یعنی دمدولاسیون انجام می‌شود یعنی طیف سیگنال به جای اولیه خود منتقل می‌شود.

معمولاً فرض می‌کنیم پهنای باند $x(t)$، W باشد: $X(f)=0 \quad f>W$

(در اینجا $x(t)$ یک سیگنال انرژی است)



همچنین $x(t)$ را نرمالیزه می‌کنیم تا در صورت توان بودن سیگنال $x(t)$، توان متوسط آن کمتر از واحد باشد:

$$|x(t)|\le 1 \Rightarrow S_x = \langle x^2(t)\rangle \le 1$$

البته برخی اوقات تحلیل ریاضی با $x(t)$ سخت و حتی غیرممکن است لذا ممکن است در تحلیل‌ها از حالت تک‌تن یا سینوسی استفاده کنیم: $x(t)=A_m\cos\omega_m t ,\ A_m\le 1 ,\ f_m<W$

الف) مدولاسیون AM : در این مدولاسیون، پوش (envelope) سیگنال مدوله شده به شکل سیگنال پیام $x(t)$ را دارد.

سیگنال مدوله شده $x_c(t) = \underbrace{A_c[1+\mu x(t)]}_{\text{پوش سیگنال مدوله شده}}\cos\omega_c t$

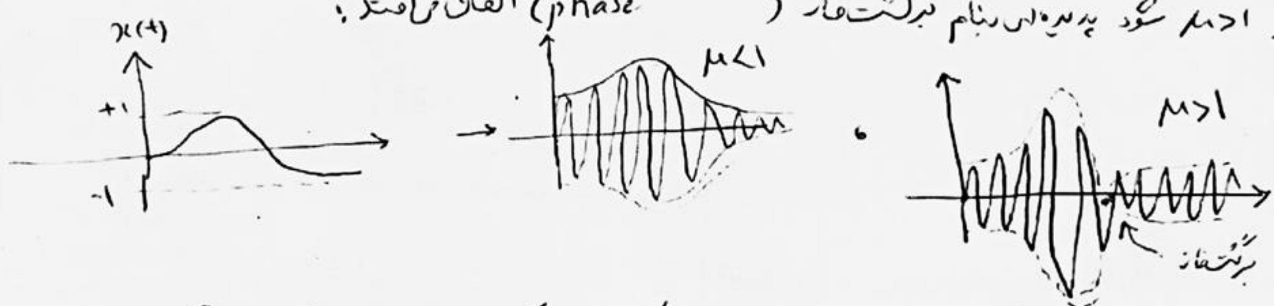
μ اندیس یا شاخص مدولاسیون نام دارد.

– برای اینکه بتوان از پوش سیگنال مدوله شده، سیگنال اولیه را استخراج کرد دو شرط باید برقرار باشد:

1- $\mu<1$

2- $f_c \gg W$

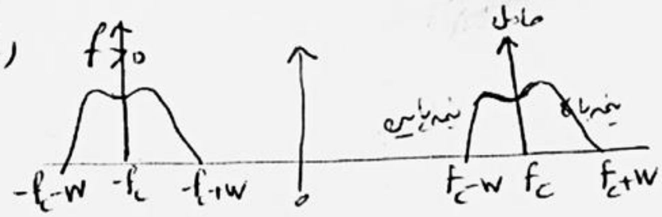
اگر $\mu>1$ شود پدیده‌ای بنام برگشت فاز (phase reversal) اتفاق می‌افتد:



شرط دوم هم تضمین می‌کند که موج سینوسی $A_c\cos\omega_c t$ که حامل (کریر Carrier) نامیده می‌شود در مقایسه با سیگنال پیام $x(t)$ تغییرات بسیار بیشتری دارد تا بتوان برای سیگنال مدوله شده، پوش تصور کرد.

تعیین پهنای باند و توان مدولاسیون AM :

$$X_c(f) = \frac{1}{2}A_c\delta(f-f_c) + \frac{\mu}{2}A_c X(f-f_c) \quad f \geq 0$$



$\Rightarrow B_T = 2W \rightarrow$ یعنی پهنای باند ۲ برابر

سیگنال ارسالی AM، دو برابر پهنای باند سیگنال اولیه است.

متوسط توان ارسالی : $S_T \triangleq \langle x_c^2(t)\rangle \Rightarrow S_T = \frac{1}{2}A_c^2\langle 1+2\mu x(t) + \mu^2 x^2(t)\rangle +$

$$\frac{1}{2}A_c^2 \underbrace{\langle [1+\mu x(t)]^2 \cos 2\omega_c t\rangle}_{\text{به فرض تغییرات آرام } x(t) \text{ در مقایسه با } \cos\omega_c t \text{ این متوسط صفر است}} \xrightarrow[\langle x^2(t)\rangle = S_x]{\text{فرض } \langle x(t)\rangle = 0} S_T = \frac{1}{2}A_c^2(1+\mu^2 S_x) =$$

$$P_c = \frac{1}{2}A_c^2$$

$$= \frac{1}{2}A_c^2 + \frac{1}{2}A_c^2\mu^2 S_x = P_c + 2P_{sb} \longrightarrow P_{sb} = \frac{1}{4}\mu^2 A_c^2 S_x = \frac{1}{2}\mu^2 S_x P_c$$

P_c توان ناشی از مولفه سیگنال حامل است که اطلاعاتی حمل نمی‌کند

P_{sb} ~~توان~~ مربوط به هر کدام از دو طرف باند، یا سایدهای طیف سیگنال است.

$$|\mu x(t)| \leq 1 \Rightarrow \mu^2 S_x \leq 1 \Rightarrow P_{sb} \leq \frac{1}{2}P_c \Rightarrow P_c \geq 2P_{sb} \Rightarrow 2P_{sb} \leq \frac{1}{2}S_T$$

یعنی حداقل 50 درصد توان ارسالی S_T مربوط به حامل است که حامل هیچ اطلاعاتی نیست و تلف می‌شود.

ب) مدولاسیون DSB : (Double SideBand Suppressed-carrier) یا DSB-SC

$$x_c(t) = A_c x(t)\cos\omega_c t$$

$$\Rightarrow X_c(f) = \frac{1}{2}A_c X(f-f_c) \quad f \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} ① \; B_T = 2W \\ ② \; \text{طیف مانند طیف AM است که دیگر ضربه ناشی از مولفه سیگنال حامل را ندارد.} \end{cases}$$

پوش $A(t) = A_c|x(t)|$

فاز $\phi(t) = \begin{cases} 0 & x(t) > 0 \\ \pm 180° & x(t) < 0 \end{cases}$

در این مدولاسیون پوش دیگر $x(t)$ نیست بلکه $|x(t)|$ است.

لذا دیگر نمی‌توان به طور ساده، فقط با یک آشکارساز پوش سیگنال اصلی را بازیابی کرد. بلکه به مدارات پیچیده‌تری نیاز است. اما مزیتی که این نوع مدولاسیون دارد بازدهی بالای آن نسبت به AM است:

$$S_T = 2P_{sb} = \frac{1}{2}A_c^2 S_x$$

یعنی DSB نسبت به AM از توان موجود فرستنده بهتر استفاده می‌کند.

اما فرستنده‌ها معمولاً محدودیتی روی توان حاصل از حداکثر دامنه سیگنال (یعنی A_{max}^2) نیز اعمال می‌کنند.

لذا برای مقایسه عملکرد روشهای مدولاسیون باید $\frac{P_{sb}}{A_{max}^2}$ آنها را باهم مقایسه کرد. در این حالت چون در AM $A_{max}=2A_c$ و در DSB، $A_{max}=A_c$ است داریم:

$$\frac{P_{sb}}{A_{max}^2} = \begin{cases} \frac{S_x}{4} & DSB \\ \frac{S_x}{16} & AM \to \mu=1 \end{cases}$$

یعنی بازای یک A_{max}^2 مشخص و ثابت، توان باند جانبی DSB چهار برابر AM است. (یعنی از لحاظ بازدهی توان، DSB چهار برابر بهتر از AM عمل می‌کند)

مدولاتور: مداری (سیستمی) است که عمل مدولاسیون را انجام می‌دهد.

سه نوع مدولاتور:

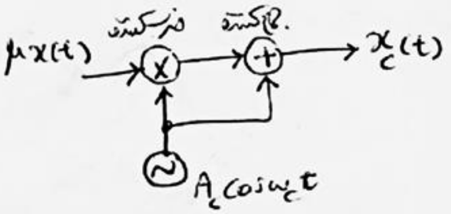
1- مدولاتورهای ضربی (یا ضرب کننده) (Product Modulator)

2- مدولاتورهای قانون مجذور (Square-law Mod.) و متعادل (Balanced Mod.)

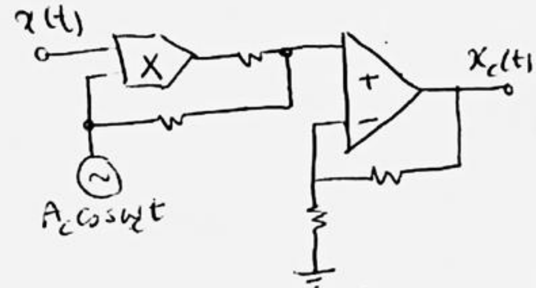
3- مدولاتورهای سوئیچی (Switching Mod.)

1) مدولاتورهای ضرب کننده:

برای AM:

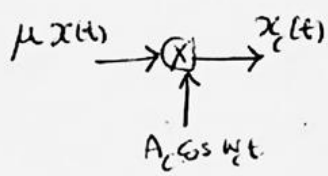


(الف) بلوک دیاگرام

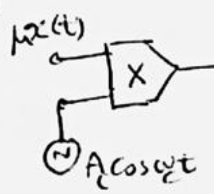


ب- شماتیک (طرح) مدار

برای DSB:

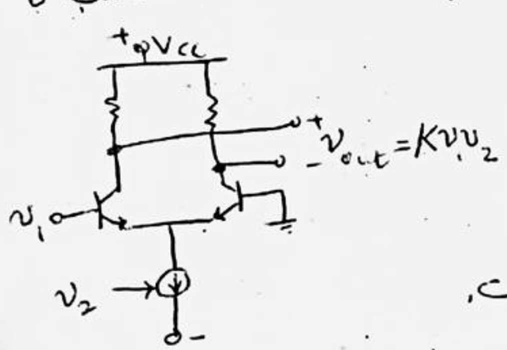


(الف)



(ب)

مدارات مختلفی را میتوان بعنوان ضرب کننده آنالوگ استفاده کرد. از جمله تقویت کننده‌ها که خروجی آنها متناسب با سیگنالهاست.



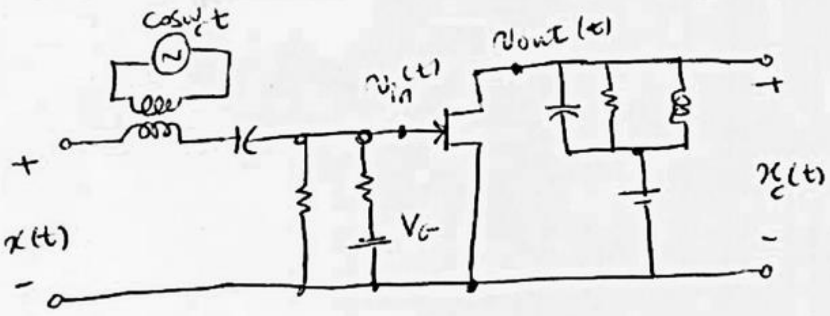
محدودیت این نوع مدولاتورها توان خروجی کم و محدودیت فرکانسی آنهاست.

2- مدولاتورهای قانون مجذور و مدولاتورهای متعادل :

برای رفع محدودیت فرکانسی می‌توان از این نوع مدولاتورها استفاده کرد که از یک عنصر غیرخطی به‌عنوان ضرب کننده استفاده می‌شود :

$$v_{out} = a_1 v_{in} + a_2 v_{in}^2 \quad (*)$$

به‌عنوان یک نمونه از چنین عنصر غیرخطی که رابطه (*) را تحقق دهد می‌توان از JFET استفاده کرد. به‌طور مثال در مدار زیر :



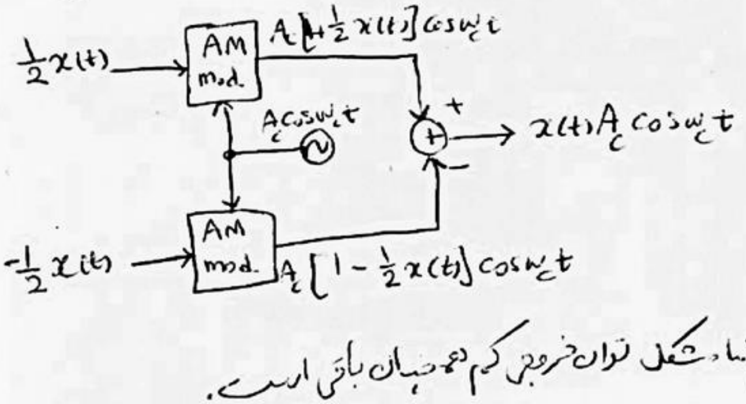
در این مدار، مدار تشدید LC خروجی نقش یک فیلتر میان‌گذر را ایفا می‌کند.

$$v_{in}(t) = x(t) + \cos\omega_c t \Rightarrow v_{out}(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_2 \cos^2\omega_c t +$$

$$\underbrace{\underset{A_c}{a_1}\left[1 + \underset{\mu}{\frac{2a_2}{a_1}} x(t)\right] \cos\omega_c t}_{\text{این جمله توسط فیلتر جدا می‌شود}}$$

← با توجه به تبدیل فوریه رابطه فوق می‌توان نشان داد که باید $f_c > 3W$ باشد تا فیلتر میان‌گذر بتواند بطور صحیح طیف مناسب را استخراج کند.

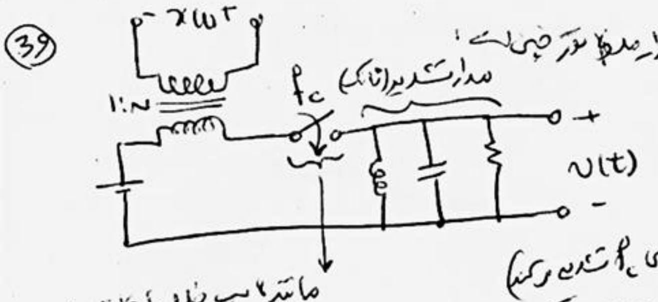
مدار فوق برای داشتن AM مناسب است. برای DSB باید $a_1 = 0$ شود یعنی عنصری باید داشته باشیم که $v_{out} = a_2 v_{in}^2$ باشد که در عمل بسیار کمیاب است. لذا برای داشتن DSB از مدولاتور متعادل مانند شکل زیر استفاده می‌کنند (ملاحظه می‌کنید که یک مدولاتور متعادل در حقیقت یک ضرب کننده است)



پس تاکنون مشکل محدودیت فرکانسی را حل کرده‌ایم اما مشکل توان خروجی کم همچنان باقی است.

3- مدولاتورهای سوئیچی : مدولاتورهایی که تاکنون دیدیم اصطلاحاً مدولاسیون سطح پایین بودند یعنی توان خروجی آنها چندان زیاد نیست. برای داشتن توان بالا باید از تقویت‌کننده‌های RF غیرخطی استفاده کنیم که مسائل خاص خودشان را دارند.

راه دیگر استفاده از مدولاسیون سطح بالا است که نمونه مدار مدولاتور چنین است:

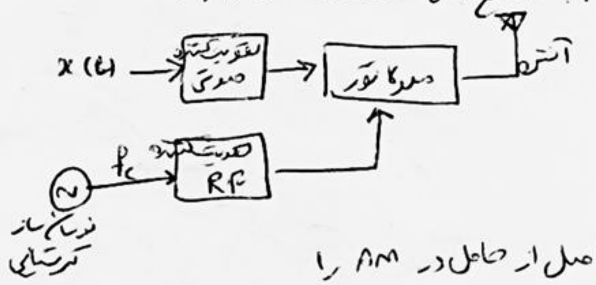


$\rightarrow$ پوش سیگنال $v(t) = V + N\,x(t)$

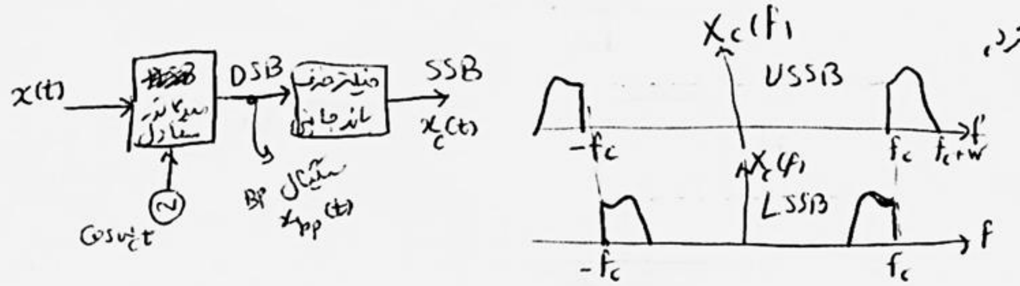
(که روی f_c تشدید می‌کند)

کلید با فرکانس f_c قطع و وصل می‌شود لذا هر $\frac{1}{f_c}$ ثانیه، مدار تشدید تحریک می‌شود. بنابراین خروجی $v(t)$ یک موج سینوسی با فرکانس f_c است که دامنه لحظه‌ای آن متناسب با اندازه تحریک (انرژی داده شده) یعنی $V + N\,x(t)$ است. حال چون فرکانس f_c نسبت به پهنای باند $x(t)$ بسیار بزرگ است، پوش سیگنال $v(t)$ همان $V + N\,x(t)$ خواهد شد.

حال از مدولاتور فوق به صورت زیر برای مدولاسیون AM سطح بالا استفاده می‌کنیم:



ج- مدولاسیون SSB: در مدولاسیون DSB، انرژی حامل در AM را حذف کردیم لذا توان ارسالی مفیدتر شد. اما پهنای باند همچنان 2W است. برای کاهش پهنای باند از SSB یا VSB استفاده می‌شود. در SSB یک نیمه باند به طور کامل حذف می‌شود اما در VSB قسمتی از نیمه باند حذف می‌شود. علت حذف یک نیمه باند این است که به دلیل تقارن، اطلاعات سیگنال را از یک نیمه باند نیز می‌توان استخراج کرد.



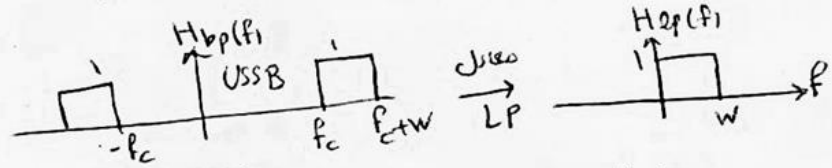
$$\Rightarrow \quad B_T = W \;, \quad S_T = P_{sb} = \frac{1}{4} A_c^2 S_x$$

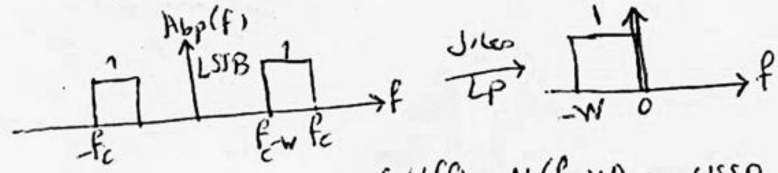
تحلیل در حوزه زمان برخلاف حوزه فرکانس چندان ساده نیست. برای حالت تک سینوسی در حوزه زمان می‌توان سیگنال SSB را چنین نوشت:

$$x_c(t) = \frac{1}{2} A_c A_m \cos(\omega_c \pm \omega_m)t \rightarrow \begin{matrix} USSB \\ LSSB \end{matrix}$$

برای تحلیل سیگنال‌های پیام دلخواه $x(t)$ از روش تحلیل پایین‌گذر برای تحلیل سیگنال‌های میان‌گذر استفاده می‌کنیم. در این روش همه سیگنال‌ها و فیلترها را به اندازه f_c به فرکانس‌های پایین منتقل می‌کنیم.

$$x_{bp}(t) = A_c\, x(t) \cos \omega_c t \xrightarrow[\text{پایین‌گذر}]{\text{معادل}} x_{lp}(t) = \frac{1}{2} A_c\, x(t) \quad , \quad X_{lp}(f) = \frac{1}{2} A_c\, X(f)$$



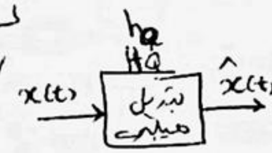


$$H_{bp}(f) \Rightarrow H_{lp}(f) = \begin{cases} u(f) - u(f-W) & \text{USSB} \\ u(f+W) - u(f) & \text{LSSB} \end{cases} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \operatorname{sgn}(f)\right) \quad |f| \leq W$$

$$\xrightarrow{\text{خروجی فیلتر}} Y_{lp}(f) = H_{lp}(f) X_{lp}(f) = \frac{1}{4} A_c \left[X(f) \pm (\operatorname{sgn} f) X(f)\right]$$

می‌دانیم $-j \operatorname{sgn} f = \mathcal{F}\{\underbrace{\hat{x}(t)}_{}\} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\{(\operatorname{sgn} f) X(f)\} = j\,\hat{x}(t) \Rightarrow \boxed{y_{lp}(t) = \frac{1}{4} A_c [x(t) \pm j\,\hat{x}(t)]}$

تبدیل هیلبرت $x(t)$



$$H_Q(f) = -j \operatorname{sgn} f = \begin{cases} -j & f > 0 \\ +j & f < 0 \end{cases}$$

$$h_Q(t) = \frac{1}{\pi t}$$

$$\hat{x}(t) \triangleq x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\lambda)}{t-\lambda}\, d\lambda$$

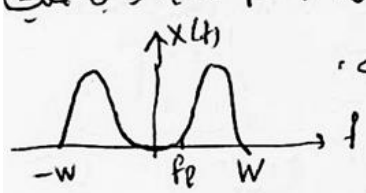
حال به معادل پایین‌گذر ~~خروجی~~ خروجی SSB را بدست آوردیم آن را دوباره به محل فرکانسی اولیه خود بر می‌گردانیم تا سیگنال اصلی SSB بدست آید:

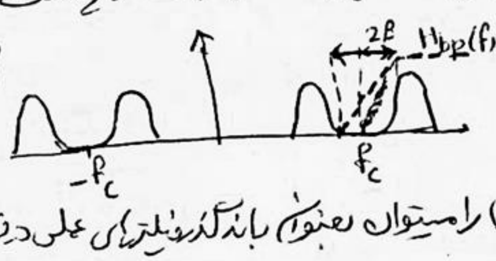
$$\Rightarrow \underset{\text{SSB}}{\text{سیگنال}}\ x_c(t) = y_{bp}(t) = 2\,\mathrm{Re}\{y_{lp}\, e^{j\omega_c t}\} = \boxed{\underline{\frac{1}{2} A_c}\left[x(t) \cos \omega_c t \mp \hat{x}(t) \sin \omega_c t\right]}$$

- پوش سیگنال SSB با توجه به رابطه فوق چنین بدست می‌شود:

$$A(t) = \frac{1}{2} A_c \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}$$

مدارات تولید سیگنال SSB : می‌دانیم که برای داشتن SSB باید فیلتر ایده‌آل (یعنی در f_c کاملاً تیز) داشته باشیم که در عمل ممکن نیست. زیرا فیلترهای عملی همیشه یک باند گذر غیر صفر دارند. اما خوشبختانه بسیاری از سیگنالهای $x(t)$ در عمل محتوای فرکانسی پایینی آنها کم اهمیت یا بی‌اهمیت است مانند سیگنال صحبت. لذا همواره طیف سیگنال $x(t)$ بصورت زیر است.



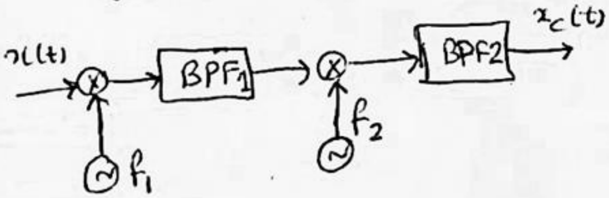


که در اثر مدولاسیون DSB چنین خواهد شد:

ملاحظه می‌کنید که با اندازه 2β محدوده فرکانسی را می‌توان بعنوان باند گذر فیلترهای عملی در نظر گرفت و استفاده کرد.

41

اما معمولاً $2B$ برابر 1 درصد فرکانس قطع فیلتر است به عبارت دیگر با محدودیت $f_{c0} < 200B$ مواجه هستیم. $2B$ توسط ماهیت سیگنال $x(t)$ مشخص میشود و تحت کنترل ما نیست. بنابراین فرکانس قطع فیلتر طبق محدودیت فوق از حدی نمی‌تواند بزرگتر باشد (فرکانس قطع فیلتر = فرکانس حامل f_c) یعنی فرکانس حامل را نمی‌توان به دلخواه بزرگ انتخاب کرد و این یک عیب مهم محسوب می‌شود. برای حل این مشکل میتوان از دو یا چند مرحله مطابق شکل زیر برای تولید سیگنال SSB استفاده کرد. (نحوه حل شکل را توضیح دهید)

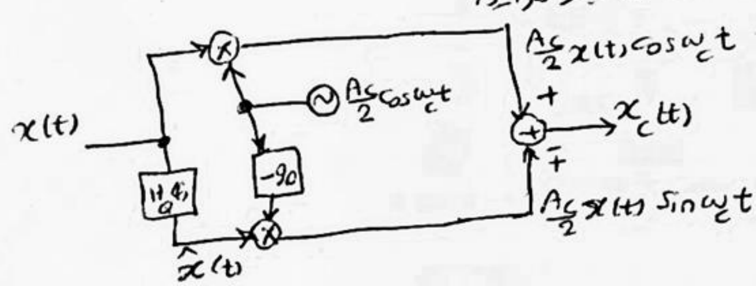


(در این طرح، فرکانس حامل برابر $f_c=f_1+f_2$ خواهد بود. f_1 برابر فرکانس قطع پایینی BPF1 و f_2 فرکانس قطع پایینی فیلتر BPF2 است)

راه دوم برای تولید سیگنال SSB استفاده مستقیم از رابطه سیگنال SSB خروجی است:

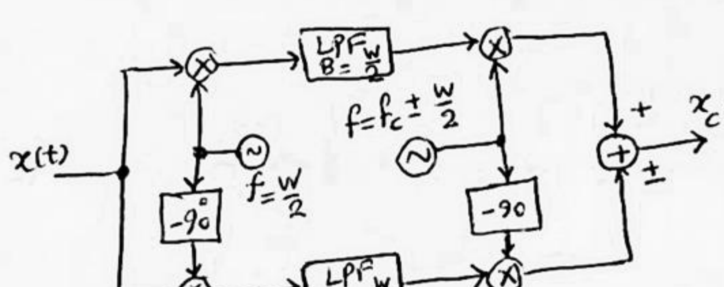
$$x_c(t) = \underbrace{\tfrac{1}{2}A_c x(t)\cos\omega_c t}_{\text{DSB سیگنال}} \mp \underbrace{\tfrac{1}{2}A_c \hat{x}(t)\cos(\omega_c t - 90^\circ)}_{\text{DSB سیگنال}}$$

یعنی سیگنال SSB را میتوان از ترکیب دو سیگنال DSB به دست آورد. این روش، روش شیفت فاز نامیده می‌شود و دیگر نیازی به فیلترهای با مشخصات خاص نیاز ندارد:



یک عیب این روش این است که خود تبدیل هیلبرت را نمی‌توان در عمل بطور دقیق پیاده سازی کرد و باید آن را تقریب زد. لذا مناسب سیگنالهایی است که محدوده فرکانسهای پایینی آنها بی‌اهمیت باشد.

یک راه دیگر (راه سوم) برای تولید سیگنال SSB استفاده از مدولاتور Weaver است مطابق طرح زیر. (نحوه کار آن را برای حالت کلی توضیح دهید)



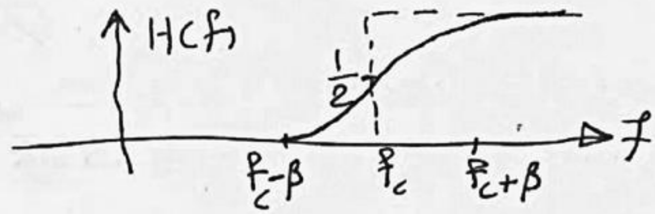
①

مدولاسیون VSB (نشانه‌ای)

Vestigual Side Band

درمواردی که پهنای باند سیگنال پیام بزرگ و مولفه‌های فرکانس پایین مهم وجود دارد مانند سیگنال‌های تلویزیونی، ویدیوئی و سیگنال‌های داده سرعت بالا (high speed data signal) بهتر است از VSB استفاده شود نه SSB و DSB.

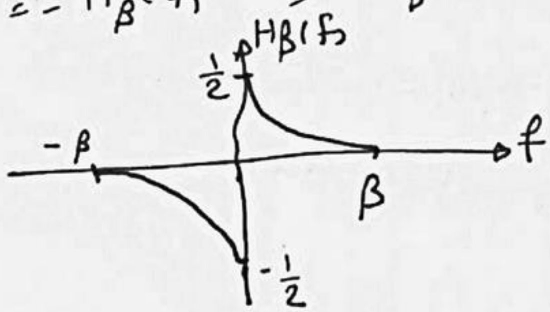
در VSB، سیگنالی که DSB یا AM شده است به گونه‌ای فیلتر می‌شود که یک باند جانبی "تقریباً کامل" عبور داده شود و در عین حال اثر یا نشانه‌ای از باند دیگر نیز در خروجی فیلتر وارد شود. بنابراین فیلتر استفاده شده بسیار مهم است. نمونه‌ای از این فیلتر بصورت زیر است:



شکل دقیق این فیلتر مهم نیست اما مهم است که تقارن فرد حول f_c داشته و مقدار آن در f_c برابر $\frac{1}{2}$ باشد (شکل فوق). بنابراین در حالت فقط باند جانبی بالایی داریم:

$$H(f) = u(f-f_c) - H_\beta(f-f_c) \quad f>0$$

که در آن $\longrightarrow$ $H_\beta(-f) = -H_\beta(f)$ و $H_\beta(f) = 0 \quad |f|>\beta$



پهنای باند انتقال در VSB: $B_T = W + \beta \simeq W$ $\xrightarrow{\text{زیرا}}$ معمولاً $\beta \ll W$ $\Rightarrow$

طیف VSB و SSB خیلی شبیه به هم هستند. در حوزه زمان (نیز) هم همینطور. پس می‌توان سیگنال $x_c(t)$ را در این حالت مشابه با حالت SSB نوشت:

$$x_c(t) = \frac{1}{2}A_c\left[x(t)\cos\omega_c t - x_q(t)\sin\omega_c t\right] \quad (*)$$

که در آن $\longrightarrow$ $x_q(t) = \hat{x}(t) + x_\beta(t)$ و $x_\beta(t) = j2\int_{-\beta}^{\beta} H_\beta(f)X(f)e^{j\omega t}\,df$

②

اگر $\beta \ll W$ باشد VSB به SSB نزدیک شده و $x_\beta(t) \simeq 0$ می‌شود.

برعکس اگر β خیلی بزرگ باشد VSB به DSB نزدیک شده و $x_q(t) = \hat{x}(t) + \tilde{x}_\beta(t) \simeq 0$ می‌شود.

توان ارسالی S_T در VSB نیز بین مقادیر متناظر در SSB و DSB است:

$$\frac{1}{4} A_c^2 S_x \leq S_T \leq \frac{1}{2} A_c^2 S_x$$

محاسبه دقیق S_T مشکل است.

فرض کنید موج AM وارد فیلتر شکل‌دهی VSB شود. به این نوع مدولاسیون VSB+C گفته شده و در انتقال ویدیوی تلویزیون استفاده می‌شود. وجود حامل در اینجا کمک می‌کند از روش آشکارسازی پوش استفاده کنیم (یک مزیت) و در عین حال در پهنای باند نیز صرفه‌جویی کنیم (مزیت دیگر).

برای تحلیل پوش VSB+C، یک جمله مربوط به حامل را در رابطهٔ (*) وارد می‌کنیم:

$$x_c(t) = A_c \{ [1 + \mu x(t)] \cos \omega_c t - \mu x_q(t) \sin \omega_c t \}$$

$$= x_{ci}(t) \cos \omega_c t - x_{cq}(t) \sin \omega_c t \rightarrow \begin{cases} x_{ci}(t) = A_c [1 + \mu x(t)] \\ x_{cq}(t) = A_c \mu x_q(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{پوش سیگنال} \quad A(t) = \sqrt{x_{ci}^2(t) + x_{cq}^2(t)}$$

$$= A_c [1 + \mu x(t)] \sqrt{1 + \left[\frac{\mu x_q(t)}{1 + \mu x(t)} \right]^2}$$

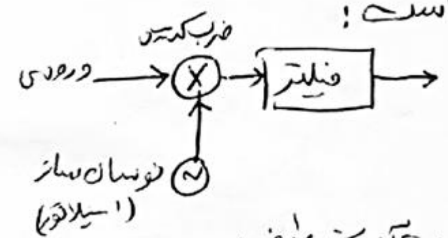
اگر μ چندان بزرگ و β چندان کوچک نباشد $|\mu x_q(t)| \ll 1$ شده و داریم:

$$A(t) \simeq A_c [1 + \mu x(t)] \longrightarrow$$ پس آشکارساز پوش مفید واقع می‌شود.

تبدیل فرکانسی: یعنی انتقال در محور فرکانس. این کار با ضرب در یک موج سینوسی انجام می‌شود. بطور مثال اگر سیگنال DSB یعنی $x(t)\cos\omega_1 t$ را در $\cos\omega_2 t$ ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$x(t)\cos\omega_1 t\,\cos\omega_2 t = \frac{1}{2}x(t)\cos(\omega_1+\omega_2)t + \frac{1}{2}x(t)\cos(\omega_1-\omega_2)t$$

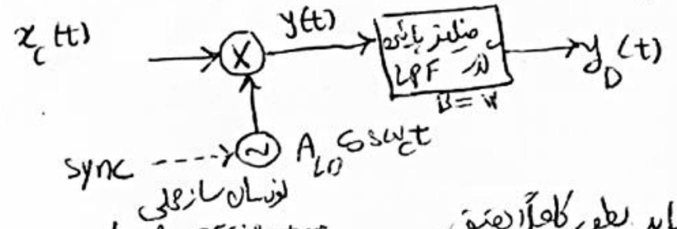
ملاحظه می‌کنید که فرکانس‌های مجموع (f_1+f_2) و تفاضل ($|f_1-f_2|$) در خروجی ایجاد شده است که با فیلترکردن مناسب می‌توان فرکانس بالایی (که تبدیل به بالا نامیده می‌شود up-converting) یا فرکانس پایینی (که تبدیل به پایین نامیده می‌شود down-converting) را انتخاب کرد. عناصری که عمل مذکور (یعنی ضرب در سینوسی و فیلتر کردن) را انجام می‌دهند مبدل فرکانسی یا میکسر (mixer) نامیده می‌شوند و به عمل انجام شده میکس کردن یا هتروداین کردن گفته می‌شود. پس دیاگرام یک میکسر چنین است:



دمدولاسیون (Demodulation): یعنی عکس عمل مدولاسیون و بدست آوردن طیف اولیه سیگنال پیام از روی طیف مدوله شده. دمدولاسیون برای مدولاسیون‌های AM، DSB و SSB در حقیقت نوعی انتقال یا تبدیل فرکانسی است. پس تبدیل فرکانسی یک حالت کلی است که دمدولاسیون را هم شامل می‌شود.

دو دسته کلی دمدولاسیون:
- آشکارسازهای سنکرون (synchronous detectors)
- آشکارسازهای پوش (envelope detectors)

الف) آشکارسازی سنکرون: در این روش از دیاگرام زیر برای دمدولاسیون همه انواع مدولاسیون‌های خطی (شامل AM، DSB، SSB و VSB) استفاده می‌شود:



- پهنای باند فیلتر LPF بزرگتر یا مساوی پهنای باند سیگنال پیام $x(t)$ (یعنی W) باید باشد.
- سیگنال سینوسی حاصل از نوسان ساز محلی (LO) باید بطور کاملاً دقیق هم از لحاظ فاز و هم از لحاظ فرکانس سنکرون با سیگنال حامل باشد. به همین دلیل است که نام آشکارسازی سنکرون یا آشکارسازی همدوس (coherent detection) انتخاب شده است.

برای تحلیل سیگنال $x_c(t)$ را در حالت کلی خود بصورت زیر می‌نویسیم تا همه انواع مدولاسیون‌های خطی را شامل شود:

$$x_c(t) = [K_c + K_\mu x(t)]\cos\omega_c t - K_\mu x_q(t)\sin\omega_c t$$

در نتیجه ورودی فیلتر پایین گذر چنین است:

$$x_c(t)A_{LO}\cos\omega_c t = \frac{1}{2}A_{LO}\left\{[K_c+K_\mu x(t)] + [K_c+K_\mu x(t)]\cos 2\omega_c t - K_\mu x_q(t)\sin 2\omega_c t\right\}$$

(43)

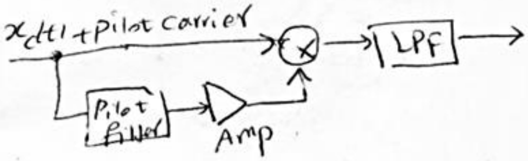
چون w در f_c و فیلتر پایین‌گذر فرکانسهای بالاتر از W را حذف می‌کند پس خروجی فیلتر پایین‌گذر چنین است:

$$y_D(t) = K_D\left[K_c + K_\mu x(t)\right]$$

والبته dc خود سیگنال $x(t)$

می‌توان مقدار dc یعنی $K_D K_c$ را به کمک استفاده از ترانسفورمر یا خازنهای کوپلاژ حذف کرد.

- یکی از مسایل اساسی در دمدولاسیون این است که سیگنال سینوسی استفاده شده باید بطور کامل با سیگنال حامل موجود در گیرنده سنکرون باشد. این مسئله یا شکل در دمدولاسیونهایی که سیگنال حامل را حذف کرده‌اند جدی است. برای حل این مشکل در این گونه سیستمها مقدار کوچکی از سیگنال حامل را در طیف سیگنال مدوله شده قرار می‌دهند که به آن حامل راهنما (carrier pilot) گفته می‌شود. در گیرنده این حامل راهنما به کمک یک فیلتر میان‌گذر باند باریک جدا و تقویت می‌شود، پس از آن در یک نوسان‌ساز محلی برای تولید موج سینوسی سنکرون با سیگنال دریافت شده استفاده می‌شود. به چنین سیستمی که طرح آن در زیر نشان داده شده است آشکارسازی هوموداین (homodyne detection) گفته می‌شود.



- در این روش و دیگر روشهای سنکرون کردن باز هم صورت احتمالی مقداری غیر سنکرون بودن وجود دارد. لذا به بررسی دریفت (drift) فرکانس یا فاز در سیستمهای مدولاسیون DSB و SSB می‌پردازیم.

$$\text{سیگنال نوسان‌ساز محلی} = \cos(w_c t + w' t + \phi') \longrightarrow$$

ϕ' و w' خطاهای فاز و فرکانس نسبت به سیگنال حامل اصلی که به آرامی با زمان تغییر می‌کنند.

برای DSB با مدولاسیون تن →

$$y_D(t) = K_D \cos w_m t \cos(w' t + \phi') = \begin{cases} \frac{1}{2}K_D\left[\cos(w_m + w')t + \cos(w_m - w')t\right] & \phi' = 0 \\ K_D \cos w_m t \cos\phi' & w' = 0 \end{cases}$$

برای SSB با

$$x_c(t) = \cos(w_c \pm w_m)t \longrightarrow y_D(t) = K_D\cos\left[w_m t \mp (w' t + \phi')\right] = \begin{cases} K_D\cos(w_m \mp w')t & \phi' = 0 \\ K_D\cos(w_m t \mp \phi') & w' = 0 \end{cases}$$

فرکانسی که در مقایسه با W قابل ملاحظه باشد

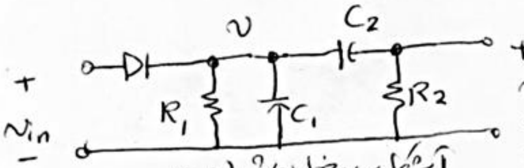
ملاحظه می‌کنیم که در هر دو مدولاسیون DSB و SSB حضور دریفت، سیگنال آشکارسازی شده را به شدت تحت تاثیر قرار می‌دهد. تاثیر آن برای DSB بیشتر است زیرا دو تُن $f_m \pm f'$ بوجود آمده است. در مورد دریفت فاز هم مدولاسیون DSB

44

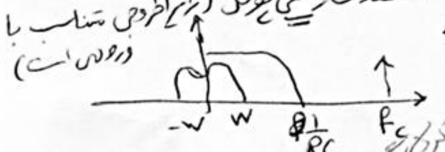
حساس‌تر از SSB است. زیرا با ازای مثلاً $\varphi' = 90^\circ$ سیگنال آشکارسازی شده DSB کاملاً از بین می‌رود.

در مورد SSB وجود دریفت فاز منجر به اعوجاج فاز می‌شود و چنانچه که می‌دانیم گوش انسان چندان به اعوجاج فاز حساس نیست. لذا دریفت فاز در سیستم‌های SSB صوتی چندان مسئله‌ساز نیست.

آشکارسازی پوش: روش‌های دمدولاسیون که تشریح شد برای AM نیز کار می‌کنند اما آشکارسازی AM به خاطر سادگی با آشکارسازهای پوش انجام می‌شود. به طور مثال:



آشکارساز خطی پوش (زیرا خروجی متناسب با ورودی است)



v_{in} یکسو شده $= v$

$R_1 C_1 =$ یک فیلتر پایین‌گذر طوری که $W \ll \frac{1}{RC_1} \ll f_c$

پوش تا حد امکان تغییر نکند

LPF نتواند فلشر را تعقیب کند

ثابت زمانی در دنبال کردن سیگنال

جدا کند

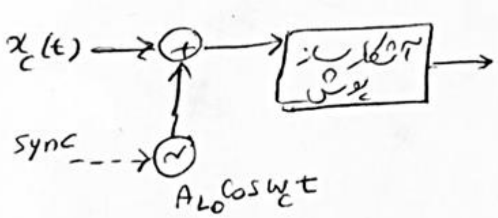
ریپل کوچکتر و در نتیجه شکل موج هموارتری بدست آید

لذا چون $W \ll f_c$ می‌شود لبه پوش قابل تعریف است.

زیرا در بین دو قله متوالی خازن C_1 مقدار بسیار کمی دشارژ می‌شود و v تقریباً همان پوش سیگنال می‌شود. برای حذف dc سیگنال v از فیلتر R_2C_2 استفاده شده است. اما این فیلتر بالاگذر فرکانس‌های پایین سیگنال را نیز دستخوش تغییر و اعوجاج می‌کند لذا برای کاربردهایی که محتویات فرکانس پایین سیگنال مهم هستند، مناسب نیست.

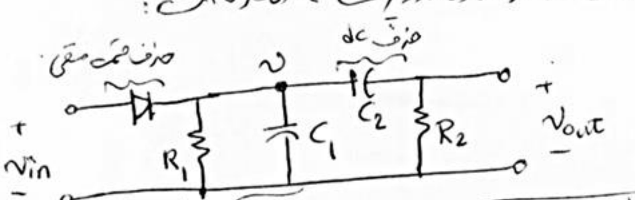
$\to \begin{matrix} SSB + C \\ DSB + C \end{matrix}$

بعضی از دمدولاتورهای SSB و DSB از روش بازسازی پوش که طرح آن در زیر نشان داده شده است استفاده می‌کنند. در این روش یک سیگنال نوسان‌ساز محلی که دامنه بزرگی هم دارد به سیگنال ورودی اضافه شده و سپس سیگنال حاصل شده به مدار آشکارساز پوش داده می‌شود.



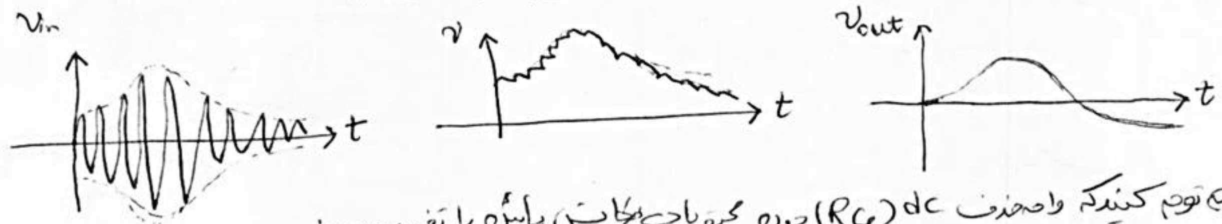
آشکارسازی پوش :

برای دمدولاسیون AM از روش آشکارسازی پوش استفاده می‌شود زیرا ساده است و مستقل از فرکانس و فاز سیگنال حامل به راحتی کار می‌کند. یک آشکارساز مدار ساده در زیر نشان داده شده است:



فیلتر LP برای گرفتن پوش سیگنال ⟵ باید $\boxed{W \ll \frac{1}{R_1C_1} \ll f_c}$ ⟵ یعنی کیفیت فیلتر LP باید خوب باشد

تا هم پوش را آشکار کند و هم طیف سیگنال پیام را دچار اعوجاج نکند.



البته توجه کنید که واحد حذف dc (R_2C_2) محتویات فرکانس پایین را تغییر می‌دهند
لذا برای آشکارسازی سیگنالهایی که محتویات فرکانس پایین مهمی دارند مدار فوق مناسب نیست.

مدولاسیون موج پیوسته نمایی (Exponential CW Modulation)

سه ویژگی اساسی مدولاسیون خطی:
1- طیف سیگنال مدوله شده همان شکل طیف سیگنال پیام را دارد که شیفت پیدا کرده است
2- پهنای باند سیگنال مدوله شده از دو برابر پهنای باند سیگنال پیام بیشتر نمی‌شود
3- می‌توان نشان داد که SNR سیگنال دمدوله شده نمی‌تواند از SNR سیگنال پیام بیشتر شود مگر اینکه توان سیگنال ارسالی بیشتر شود.

مدولاسیون نمایی ویژگیهای متفاوتی با موارد فوق دارد:
- طیف آن در حالت کلی هیچ شباهتی به طیف سیگنال پیام ندارد.
- پهنای باند آن بیشتر از دو برابر پهنای باند سیگنال پیام است.
- بدون نیاز به افزایش توان سیگنال ارسالی، SNR سیگنال گیرنده می‌تواند از SNR سیگنال پیام بیشتر شود

بنابراین در کل معاوضه‌ای بین توان ارسالی و پهنای باند انجام شده است.

دو نوع اساسی مدولاسیون نمایی: FM و PM است.

سیگنال مدوله شده زیر را در نظر بگیرید:

$$x_c(t)=A_c\cos(\omega_c t+\phi(t))$$

$$\rightarrow \text{زاویه لحظه‌ای کل} = \theta_c(t) \triangleq \omega_c t+\phi(t) \Rightarrow x_c(t)=A_c\cos\theta_c(t)=A_c\,\mathrm{Re}\{e^{j\theta_c(t)}\}$$

لذا اگر $\phi(t)$ حاوی اطلاعات سیگنال پیام باشد مدولاسیونی انجام داده‌ایم که مدولاسیون نمایی نامیده می‌شود.

مدولاسیون PM: فاز لحظه‌ای متناسب با سیگنال است:

$$\phi(t) \triangleq \phi_\Delta \cdot \underbrace{x(t)}_{|x|\le 1}, \quad \phi_\Delta \le 180^\circ$$

$$\Rightarrow x_c(t)=A_c\cos[\omega_c t+\phi_\Delta x(t)]$$

که ϕ_Δ ماکزیمم شیفت فازی است که $x(t)$ میتواند ایجاد کند.

همانطور که در مدولاسیون AM باید $|\mu| \le 1$ می بود تا مدولاسیون صحیح انجام شود در اینجا هم $\phi_\Delta \le 180$ باید باشد

لذا به ϕ_Δ شاخص مدولاسیون فاز یا انحراف فاز (phase deviation) نیز گفته می‌شود

$x(t)$ فرکانس لحظه‌ای $\quad f(t) \triangleq \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt}\theta_c(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{d\phi(t)}{dt} \quad (1)$

منظور از فرکانس لحظه‌ای این نیست که در هر لحظه $x(t)$ یک سینوسی خالص با یک فاز متغیر است. بعبارت دیگر فرکانس در کلمه «فرکانس لحظه‌ای» با فرکانس در کلمه «طیف فرکانسی» متفاوت است.

مدولاسیون FM: فرکانس لحظه‌ای متناسب با سیگنال $x(t)$ است:

$$f(t) \triangleq f_c + f_\Delta \cdot x(t) \;,\; f_\Delta < f_c \quad (2)$$

$f_\Delta =$ انحراف فرکانسی

بخاطر اینکه فرکانس لحظه‌ای همواره مثبت باشد البته در عمل بخاطر محدودیت پهنای باند $f_\Delta \ll f_c$ است.

$$\xRightarrow{(2),(1)} \frac{d\phi(t)}{dt} = 2\pi f_\Delta x(t) \Rightarrow \phi(t) = 2\pi f_\Delta \int_{t_0}^{t} x(\lambda)\, d\lambda + \phi(t_0) \quad t \geq t_0$$

اگر t_0 طوری باشد که: $\phi(t_0) = 0 \Rightarrow \phi(t) = 2\pi f_\Delta \int^{t} x(\lambda)\, d\lambda$

سیگنال مدوله شده FM $\Rightarrow \quad x_c(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int^{t} x(\lambda)\, d\lambda\right]$

ملاحظه می‌کنید که باید این فرض را هم در نظر بگیریم که سیگنال $x(t)$ مولفه dc نداشته باشد زیرا در غیر اینصورت حامل تکراری همواره مثبت شود و دیگر فرکانس لحظه‌ای کم و زیاد نمی‌شود بلکه همواره زیاد می‌شود. وجود این مولفه dc در حقیقت معادل شیفت دادن فرکانس حامل به اندازه $f_\Delta\langle x(t)\rangle$ است. زیرا $x(t)$ را با در نظر گرفتن یک مولفه dc میتوان چنین نوشت:

$$x(t) = x_{dc} + x_{ac}(t) = \langle x(t)\rangle + x_{ac}(t)$$

$\Rightarrow$ فرکانس لحظه‌ای $\quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\theta_c(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\left(\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int^{t}\left[\underbrace{\langle x(\lambda)\rangle}_{\text{ثابت}} + x_{ac}(\lambda)\right] d\lambda\right)$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\left(\omega_c t + 2\pi f_\Delta \langle x(t)\rangle . t + 2\pi f_\Delta \int^{t} x_{ac}(\lambda)\, d\lambda\right)$$

$$= \underbrace{f_c + f_\Delta\langle x(t)\rangle}_{\text{جمله ثابت}} + f_\Delta x_{ac}(t) = \underbrace{f_c'}_{\text{فرکانس حامل جدید}} + f_\Delta x_{ac}(t)$$

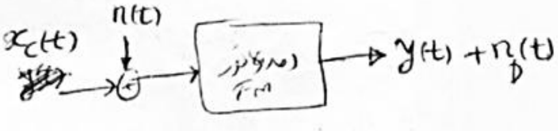
به طور خلاصه برای مقایسه PM و FM داریم:

	فاز لحظه‌ای $\phi(t)$	فرکانس لحظه‌ای $f(t)$
PM	$\phi_\Delta x(t)$	$f_c + \frac{1}{2\pi}\phi_\Delta \dot{x}(t)$
FM	$2\pi f_\Delta \int^t x(\lambda)d\lambda$	$f_c + f_\Delta x(t)$

ملاحظه می‌کنید که تفاوت این دو در یک مشتق گرفتن یا انتگرال گرفتن است. لذا اگر مدولاسیون FM و PM یک سیگنال سینوسی (مدولاسیون تن) را بررسی کنیم شکل موج‌های آنها تفاوتی از لحاظ ~~شکل~~ ظاهری با هم ندارند (چرا ؟)

- در مدولاسیون‌های FM و PM دامنه سیگنال مدوله شده (برخلاف مدولاسیون‌های خطی) ثابت است، پس توان سیگنال ارسال شده ~~FM~~ FM و PM همواره برابر است با: $S_T = \frac{1}{2}A_c^2$ توان ارسالی که مستقل از ~~[illegible]~~ سیگنال $x(t)$ است.

- FM و PM در بسیاری از موارد شبیه هم هستند اما رفتار آنها در مورد نویز متفاوت است. ~~[illegible]~~ خاصیت کاهش نویز FM بیشتر و معتبرتر از PM است. برای این کار یک دمدولاتور FM را در نظر بگیرید که سیگنال $f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$ را تولید می‌کند. ملاحظه می‌کنید که سیگنال خروجی $y(t)$ به f_Δ بستگی دارد. هرچه f_Δ بزرگتر شود دامنه سیگنال خروجی نیز بیشتر می‌شود بدون اینکه نیاز به افزایش توان ارسالی باشد. حال دمدولاتور فوق که به صورت سیستمی در روبرو نشان داده شده است، نسبت SNR خروجی



همان نسبت توان $y(t)$ به توان $n_D(t)$ است. ~~[illegible]~~ با فرض ثابت ~~[illegible]~~ بودن توان $n_D(t)$ ملاحظه می‌کنید که با افزایش f_Δ می‌توان توان $y(t)$ را افزایش داد (بدون افزایش توان $n_D(t)$) پس SNR خروجی افزایش می‌یابد (بدون اینکه توان ارسالی S_T در سیستم افزایش یافته باشد) البته توجه کنید که این افزایش SNR خروجی به بهای پهنای باند بیشتر بدست آمده است. هرچه پهنای باند بیشتری در نظر گرفته شود می‌توان SNR خروجی را افزایش ~~[illegible]~~ داد.

FM و PM باند باریک: (Narrowband PM and FM)

سیگنال $x_c(t)$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x_c(t) = x_{ci}(t)\cos\omega_c t - x_{cq}(t)\sin\omega_c t \quad (*)$$

$$x_{ci}(t) = A_c\cos\phi(t) = A_c\left[1 - \frac{1}{2!}\phi^2(t) + \cdots\right]$$

$$x_{cq}(t) = A_c\sin\phi(t) = A_c\left[\phi(t) - \frac{1}{3!}\phi^3(t) + \cdots\right]$$

حال شرط ساده‌کننده ① $|\phi(t)| \ll 1$ را فرض می‌کنیم. بنابراین:

$$x_{ci}(t) \simeq A_c \quad \text{و} \quad x_{cq}(t) \simeq A_c\phi(t)$$

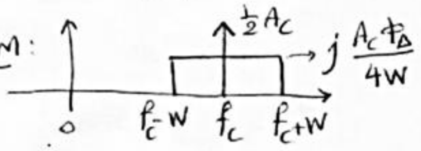
$$\Rightarrow X_c(f) = \frac{1}{2}A_c\delta(f-f_c) + \frac{j}{2}A_c\Phi(f-f_c) \quad f>0 \quad \text{که}$$

45

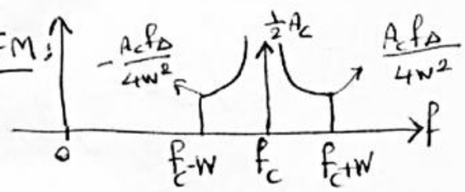
$$\Phi(f) = \mathcal{F}\{\phi(t)\} = \begin{cases} \phi_\Delta X(f) & PM \\ -j f_\Delta \dfrac{X(f)}{f} & FM \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنید که اگر $W \ll f_c$ باشد ~~...~~ طیف سیگنال FM و PM میان‌گذر و با پهنای باند $2W$ خواهد بود. البته به شرطی که فرض ① صادق باشد در غیر اینصورت جمله‌های $\phi^2(t)$ ، $\phi^3(t)$ و ... را نیز باید در نظر گرفت که منجر به افزایش پهنای باند خواهند شد. لذا ~~...~~ در صورت در نظر گرفتن فرض ① عبارت FM یا PM باند باریک (NBFM و NBPM) نامیده می‌شود. مثال: اگر $x(t) = \text{sinc}\, 2Wt$ باشد $X(f) = \frac{1}{2W}\Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$ می‌شود و طیف‌های NBPM و NBFM مربوطه چنین خواهند شد:

NBPM:



NBFM:



مدولاسیون تُن: برای سادگی تحلیل فرض کنید:

$$x(t) = \begin{cases} A_m \sin\omega_m t & PM \\ A_m \cos\omega_m t & FM \end{cases}$$

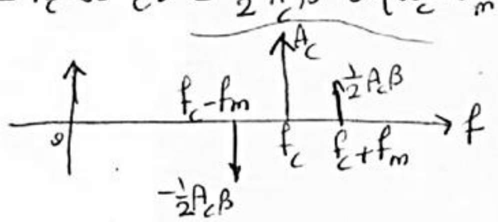
$$\Rightarrow \phi(t) = \beta \sin\omega_m t \xrightarrow{\text{که}} \beta \triangleq \begin{cases} \phi_\Delta A_m & PM \\ \dfrac{A_m}{f_m} \cdot f_\Delta & FM \end{cases}$$

پارامتر β را شاخص مدولاسیون FM و PM در حالت مدولاسیون تُن گوییم. در حالت مدولاسیون باند باریک $\beta \ll 1$ است لذا رابطه (*) را بصورت زیر می‌توان نوشت:

$$x_c(t) \simeq A_c \cos\omega_c t - A_c\beta \sin\omega_m t \cdot \sin\omega_c t$$

$$\simeq A_c \cos\omega_c t - \frac{1}{2}A_c\beta \cos(\omega_c-\omega_m)t + \frac{1}{2}A_c\beta\cos(\omega_c+\omega_m)t$$

$\Rightarrow$



حال بدون در نظر گرفتن شرط باند باریک بودن (یعنی $\beta \ll 1$) و با β دلخواه، چنین می‌نویسیم:

$$x_c(t) = A_c\left[\cos\phi(t) \cdot \cos\omega_c t - \sin\phi(t)\sin\omega_c t\right]$$

$$= A_c\left[\cos(\beta\sin\omega_m t)\cos\omega_c t - \sin(\beta\sin\omega_m t)\sin\omega_c t\right] \quad (2)$$

(49)

از چیرمثلثاتی میتوان نوشت :

$$\begin{cases} \cos(\beta \sin \omega_m t) = J_0(\beta) + \sum_{n \text{ زوج}}^{\infty} 2 J_n(\beta) \cos n\omega_m t \\ \sin(\beta \sin \omega_m t) = \sum_{n \text{ فرد}}^{\infty} 2 J_n(\beta) \sin n\omega_m t \end{cases}$$

$$J_n(\beta) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin\lambda - n\lambda)} \, d\lambda$$

که ⟸ تابع بسل نوع اول از مرتبه n

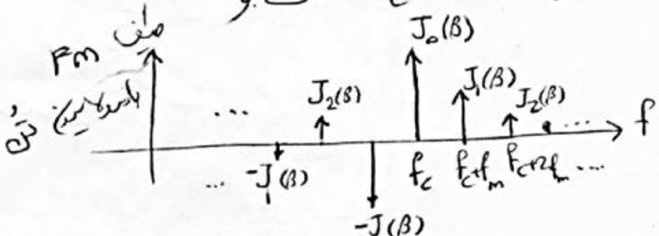
① طیف نامحدود است
② طیف شامل خطوط ضربه با فاصله f_m است
③ اندازه ضربه در $f_c \pm nf_m$ برابر $J_n(\beta)$ است
④ نکته ① زیر
⑤ تحلیل شکلهای صد 239
⑥ نکته ② زیر
⑦ نکته ③ زیر
⑧ نکته شکل صفحه بعد

با جایگذاری معادلات فوق در (2) ⟹

$$x_c(t) = A_c J_0(\beta) \cos \omega_c t + \sum_{n \text{ فرد}}^{\infty} A_c J_n(\beta) [\cos(\omega_c + n\omega_m)t - \cos(\omega_c - n\omega_m)t] + \sum_{n \text{ زوج}}^{\infty} A_c J_n(\beta) [\cos(\omega_c + n\omega_m)t + \cos(\omega_c - n\omega_m)t] \quad (3)$$

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta) \xRightarrow{\text{با کمک فرد و زوج}} \boxed{x_c(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_c + n\omega_m) t} \quad (4)$$

ملاحظه می‌شود که طیف FM شامل تعداد بی‌شماری مولفه در فرکانسهای $f_c \pm nf_m$ است و اندازه هر مولفه در فرکانس $f_c \pm nf_m$ برابر $|J_n(\beta)|$ است.



چند نکته در مورد توابع بسل :

1-) اندازه مولفه واقع در f_c برابر $J_0(\beta)$ است که β همان اندیس مدولاسیون و وابسته به سیگنال است. پس برخلاف سیستمهای مدولاسیون خطی، در اینجا مولفه واقع در فرکانس f_c حاوی اطلاعات است (مفید است). همچنین مواقعی پیش می‌آید که این مولفه صفر می‌شود. مثلاً بازاء $\beta = 2.4, 5.5, \ldots$.

2-) تعداد خطوط باند جانبی که اندازه نسبی دامنه هایشان قابل توجه است نیز به β بستگی دارد. اگر $\beta \ll 1$ باشد فقط J_0 و J_1 مهم هستند و بنا براین همانطور که در مورد NBFM و NBPM دیدیم طیف شامل دو خط جانبی است. اما اگر $\beta \gg 1$ باشد طیف شامل مولفه‌های بسیار زیادی خواهد بود. و پهنای باند به همان نسبت بزرگتر می‌شود.

3-) شکلهای مربوط به $J_n(\beta)$ یکی برحسب β و دیگری برحسب $\frac{n}{\beta}$ مفید هستند. ملاحظه می‌کنید که برای $\frac{n}{\beta} > 1$ ، $J_n(\beta)$ ها بطور یکنوا کاهش پیدا می‌کنند و برای $|\frac{n}{\beta}| \gg 1$ ، $|J_n(\beta)| \ll 1$ می‌شود. پس در نتیجه پهنای باند (n) مقدار β تعیین کننده است. بنابراین بطور تقریب میتوان پهنای باند BW (که در حالت کلی $n_{bw} f_m$ است) را برابر βf_m در نظر گرفت. (زیرا باید $\frac{n_{bw}}{\beta} = 1$ شود پس $BW = n_{bw} f_m = \beta f_m$)

صفحه $\underline{240}$ شکل 7-1-7

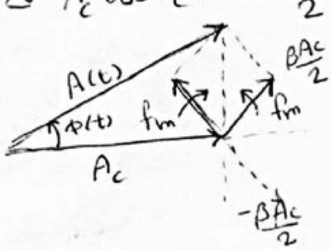
طیف FM یا PM در دو حالت در شکل‌های زیر نشان داده شده است. در حالت اول که هم برای FM و هم برای PM مناسب است f_m ثابت بوده و β تغییر می‌کند. در حالت دوم که مناسب تحلیل فقط FM است $A_m f_\Delta$ ثابت است و با افزایش (کاهش) f_m، β کاهش (افزایش) می‌یابد. خطوط نقطه‌چین پهنای باند را نشان می‌دهند.

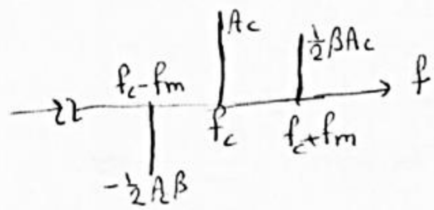
بررسی فازوری مدولاسیون زاویه‌ای در حالت تک تن: ابتدا حالت باند باریک را بررسی می‌کنیم:

$$\underline{\underline{NB}}: \ x_c(t) \simeq A_c \cos \omega_c t - A_c \beta \sin \omega_m t \ \sin \omega_c t$$

$$\simeq A_c \cos \omega_c t - \frac{A_c \beta}{2} \cos (\omega_c - \omega_m) t + \frac{A_c \beta}{2} \cos (\omega_c + \omega_m) t$$

نمایش فازوری:





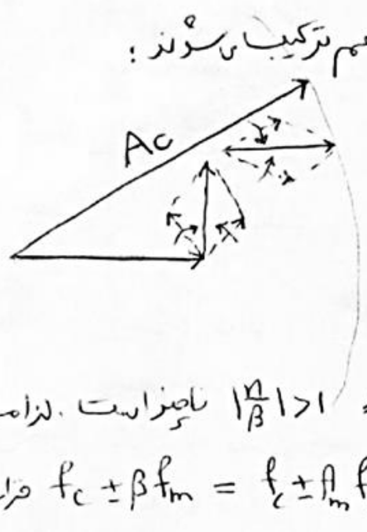
$$\text{پوش} \quad A(t) \simeq \sqrt{A_c^2 + \left(2\frac{\beta}{2} A_c \sin \omega_m t\right)^2} \simeq A_c\left[1 + \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} \cos 2\omega_m t\right]$$

$$\text{فاز} \quad \phi(t) \simeq \tan^{-1}\left[\frac{2(\frac{\beta}{2}) A_c \sin \omega_m t}{A_c}\right] \simeq \beta \sin \omega_m t$$

شرط NB: $\underline{\underline{\beta \ll 1}}$

ملاحظه می‌کنید که فاز همانگونه است که باید می‌بود اما دامنه بجای اینکه ثابت باشد متغیر است (اعوجاج)

در حالت β دلخواه تعداد بسیار زیادی فازور با مرتبه‌های فرد و زوج داریم که با هم ترکیب می‌شوند:



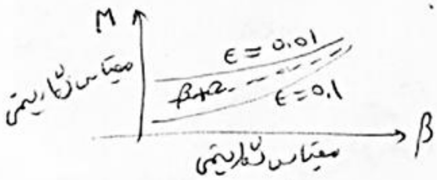
مرتبه‌های فرد پاسخ فاز مناسب و مرتبه‌های زوج پاسخ دامنه مناسب را ایجاد می‌کنند.

محاسبه پهنای باند FM: همانطور که گفته شد برای $\beta \gg 1$، $J_n(\beta)$ تا زمانی که $|\frac{n}{\beta}| < 1$ ناچیز است. لذا مولفه‌های مهم در $|n| \le \beta = \frac{A_m f_\Delta}{f_m}$ یا به عبارت دیگر در محدوده فرکانسی $f_c \pm A_m f_\Delta = f_c \pm \beta f_m$ قرار دارند.

اگر $\beta \ll 1$ باشد تمام مولفه‌ها در مقایسه با حامل ناچیز هستند اما ما حداقل یکی از این مولفه‌ها را نگه داشته و بعنوان طیف (پهنای باند) در نظر می‌گیریم زیرا در غیر اینصورت خود حامل به تنهایی معرف مدولاسیون زاویه‌ای نخواهد بود. پس برای β کوچک مولفه‌های مهم را در فاصله $f_c \pm f_m$ فرض می‌کنیم. در حالت کلی می‌توان نوشت:

$$\text{پهنای باند} \quad B = 2M(\beta) f_m \quad , M(\beta) \geqslant 1$$

که $M(\beta)$ عدد طبیعی است که بازای آن $J_M(\beta)>\epsilon$ و $J_{M+1}(\beta)<\epsilon$ است که ϵ یک مقدار آستانه است (وابسته به کاربرد بین 0.01 تا 0.1 است). این عدد همانطور که دیدیم تابعی از β است لذا بصورت $M(\beta)$ نوشته می‌شود. بازای $\epsilon=0.01$ پهنای باند خیلی سخت‌گیرانه و بازای $\epsilon=0.1$ پهنای باند نسبتاً بدون احتیاط (همراه با اعوجاج) انتخاب شده است. لذا معمولاً بین این دو انتخاب می‌شود. نمودار $M(\beta)$ برحسب β در دو حالت مذکور در شکل 7.2-1 نشان داده شده است.



(توجه کنید که B زمانی همان پهنای باند انتقال است که β جزئی ماکزیمم فرکانس موجود در سیگنال محاسبه شده باشد) و با ماکزیمم دامنه

$$M(\beta) \simeq \beta+2 \Rightarrow B \cong 2(\beta+2)f_m = 2(A_m f_\Delta + 2f_m) \Rightarrow$$

پهنای باند انتقال $(A_m=1, f_m=W)$ $\boxed{B_T \cong 2(f_\Delta + 2W)} \Longrightarrow \beta>2$

توجه کنید که در رابطه B_T، β متناظر با ماکزیمم فرکانس است بزرگترین β نیست. ولی تمام مولفه‌های دیگر پهنای باندی کمتر از B_T خواهند داشت.

- اگرچه در حالت مدولاسیون زاویه‌ای نمی‌توان از اصل جمع آثار استفاده کرد اما همانطور که در تحلیل قبلی خود در مورد مدولاسیون چندتُنی (multi-tone) دیدیم پهنای باند تحت تاثیر فرکانس غالب قرار دارد. لذا در حالت سیگنال دلخواه $x(t)$ با پهنای باند W، پهنای باند B_T را در شرایط بدترین حالت (بزرگترین مولفه فرکانسی $x(t)$) بدست می‌آوریم. بنابراین با تعمیم مدولاسیون تک‌تُن به سیگنال دلخواه $x(t)$، نسبت انحراف (deviation ratio) را چنین تعریف می‌کنیم:

$$D \triangleq \frac{f_\Delta}{W}$$

ملاحظه می‌کنید که D برابر تقسیم بیشترین انحراف فرکانسی به بیشترین مولفه فرکانسی موجود در سیگنال است. از نتایج تحلیل می‌توان پهنای باند انتقال B_T را چنین نوشت:

$$\rightarrow \quad B_T = 2M(D)W$$

D معادل β است.

برای تقریب $M(D)$ معمولاً از رابطه زیر استفاده می‌شود: در حالتهای حدی

$$B_T = \begin{cases} 2DW = 2f_\Delta & D \gg 1 \rightarrow WB \\ 2W & D \ll 1 \rightarrow NB \end{cases}$$

دو نتیجه فوق را می‌توان در رابطه زیر باهم ترکیب کرد:

$$B_T \simeq 2(f_\Delta + W) = 2(D+1)W \quad \begin{cases} D \gg 1 \\ D \ll 1 \end{cases}$$

قاعده کارسون (Carson's rule)

در عمل مخصوصاً برای سیستم‌های FM، $2 < D < 10$ است لذا تقریب فوق چندان مناسب نیست. در حقیقت تقریب فوق مقداری کمتر از مقدار واقعی را بدست می‌دهد (underestimate). در این حالت یک تقریب بهتر چنین است: $D > 2$

$$B_T \simeq 2(f_\Delta + 2W) = 2(D+2)W$$

که از آن می‌توان برای محاسبه پهنای باند 3dB تقویت‌کننده‌های FM استفاده کرد.

- همانطور که در مورد FM از پارامتر D استفاده کردیم در مورد PM نیز می‌توان از ϕ_Δ در رابطه B_T استفاده کرد:

$$B_T = 2M(\phi_\Delta)W \qquad M(\phi_\Delta) \geq 1$$

معادل قاعده کارسون در این حالت چنین می‌شود:

$$B_T \simeq 2(\phi_\Delta + 1)W$$

نکته‌ای که در این حالت باید به آن اشاره کرد این است که برخلاف D که به W وابستگی داشت، ϕ_Δ در اینجا مستقل از W است.

$$\left.\begin{matrix} NBFM: D \ll 1 \\ NBPM: \phi_\Delta \ll 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow B_T \simeq 2W$$

FM باند وسیع: (WBFM)

$$WBFM: D \gg 1 \rightarrow B_T \simeq 2f_\Delta \gg W \qquad D = \frac{f_\Delta}{W}$$

WBPM وجود ندارد زیرا همیشه $\phi_\Delta \le \pi$ است.

اعوجاج خطی : در اثر عبور سیگنال FM یا PM از یک شبکه خطی ممکن است روی دهد:

$$x_c(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y_c(t)$$

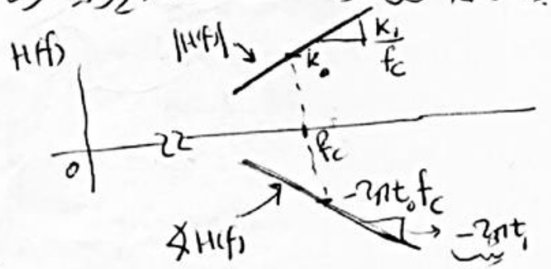
فرض کنید:

$$x_c(t) = \frac{1}{2}A_c e^{j(\omega_c t+\phi(t))} \xRightarrow{\text{معادل پایین گذر}} x_{lp}(t) = \frac{1}{2}A_c e^{j\phi(t)}$$

$$\text{معادل پایین گذر } H(f) = H(f+f_c)u(f+f_c) \Rightarrow Y_{lp}(f) = H(f+f_c)u(f+f_c)X_{lp}(f) \xrightarrow[\text{میان گذر}]{\text{تبدیل به حالت}}$$

$$\Rightarrow y_c(t) = 2Re[y_{lp}(t)e^{j\omega_c t}]$$

در عمل محاسبه‌ی $Y_{lp}(f)$ و $X_{lp}(f)$ بسیار مشکل است. برای ادامه تحلیل خود حالت ساده زیر را در نظر می‌گیریم:



$$\Rightarrow H(f+f_c)u(f+f_c) = (K_0 + \frac{K_1}{f_c}f)e^{-j2\pi(t_0 f_c + t_1 f)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_{lp}(f) = K_0 e^{-j\omega_c t}[X_{lp}(f)e^{-j2\pi t_1 f}] + \frac{K_1}{j\omega_c}e^{-j\omega_c t}[(j2\pi f)X_{lp}(f)e^{-j2\pi t_1 f}]$$

$$\Rightarrow y_{lp}(t) = K_0 e^{-j\omega_c t} \cdot x_{lp}(t-t_1) + \frac{K_1}{j\omega_c}e^{-j\omega_c t} \cdot \dot{x}_{lp}(t-t_1)$$

که $\dot{x}_{lp}(t-t_1) = \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}A_c e^{j\phi(t-t_1)}] = \frac{j}{2}A_c\dot{\phi}(t-t_1)e^{j\phi(t-t_1)}$

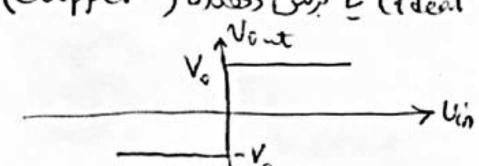
$$\Rightarrow \begin{cases} y_c(t) = A(t)\cos[\omega_c(t-t_0)+\phi(t-t_1)] \rightarrow \text{اعوجاج خطی} \\ A(t) = A_c[K_0 + \frac{K_1}{\omega_c}\dot{\phi}(t-t_1)] \end{cases}$$

در حالت FM ، $\dot{\phi}(t) = 2\pi f_\Delta x(t)$ است لذا:

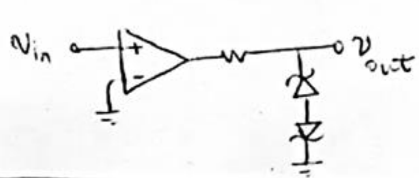
$$A(t) = A_c[K_0 + \frac{K_1 f_\Delta}{f_c}x(t-t_1)]$$

ملاحظه می‌کنید که رابطه مربوط به مدولاسیون AM با $\mu = \frac{K_1 f_\Delta}{f_c K_0}$ است. بنابراین سیستم خطی فوق باعث تبدیل FM به AM شده است.

اعوجاج فوق را می‌توان به کمک یک محدودکننده سخت ایده‌آل (ideal hard limiter) یا برش دهنده (clipper) از بین برده و دوباره موج FM بدست آورد:



مشخصه انتقالی یک برش دهنده $v_{out} = T[v_{in}(t)]$



(54)

برای تحلیل از سری فوریه $v_{out}(t)$ استفاده می‌کنیم. اگر ورودی را بصورت $v_{in}(t) = A(t)\cos\theta_c(t)$ بنویسیم ملاحظه می‌شود که خروجی و ورودی هر دو با دوره 2π متناوب هستند. بسط سری فوریه خروجی:

$$\begin{cases} v_{out}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} |2a_n| \cos(n\theta_c(t) + \measuredangle a_n) \quad , \quad a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} T[v_{in}]\, e^{-jn\theta_c}\, d\theta_c \end{cases}$$

نتیجه نهایی چنین خواهد شد:

$$v_{out}(t) = \frac{4V_0}{\pi}\cos(\omega_c t + \phi(t)) - \frac{4V_0}{3\pi}\cos(3\omega_c t + 3\phi(t)) + \dots$$

حال به کمک یک BPF میتوان مولفه مورد نظر را جدا کرد و موج FM را بدست آورد.

تولید مستقیم FM:

- در فرکانسهای بالا: به کمک VCO مانند لامپ کلیسترون (Klystron tube) $(f > 1\,GHz)$
- در فرکانسهای پایین:
  1- انتقال نتیجه قبلی به فرکانسهای پایین (down-convert)
  2- تغییر امپدانس با سیگنال، بطور مثال در یک مدار LC داریم:

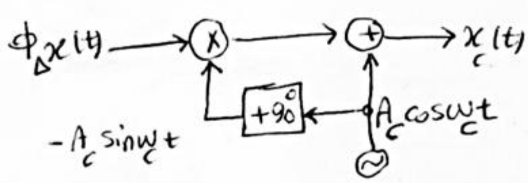
$$C(t) = C_0 - C\,x(t) \xrightarrow{\text{خروجی نوسان‌ساز}} x_c(t) = A_c\cos\theta_c(t) \quad \text{که}$$

$$\dot\theta_c(t) = \frac{1}{\sqrt{LC(t)}} = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}\left[1 - \frac{C}{C_0}x(t)\right]^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{با فرض}} \begin{cases} \omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \\ \left|\frac{C}{C_0}x(t)\right| << 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\dot\theta_c(t) \simeq \omega_c\left[1 + \frac{C}{2C_0}x(t)\right] \Rightarrow \theta_c(t) \simeq 2\pi f_c t + 2\pi\frac{C}{2C_0}f_c\int^t x(\lambda)\,d\lambda$$

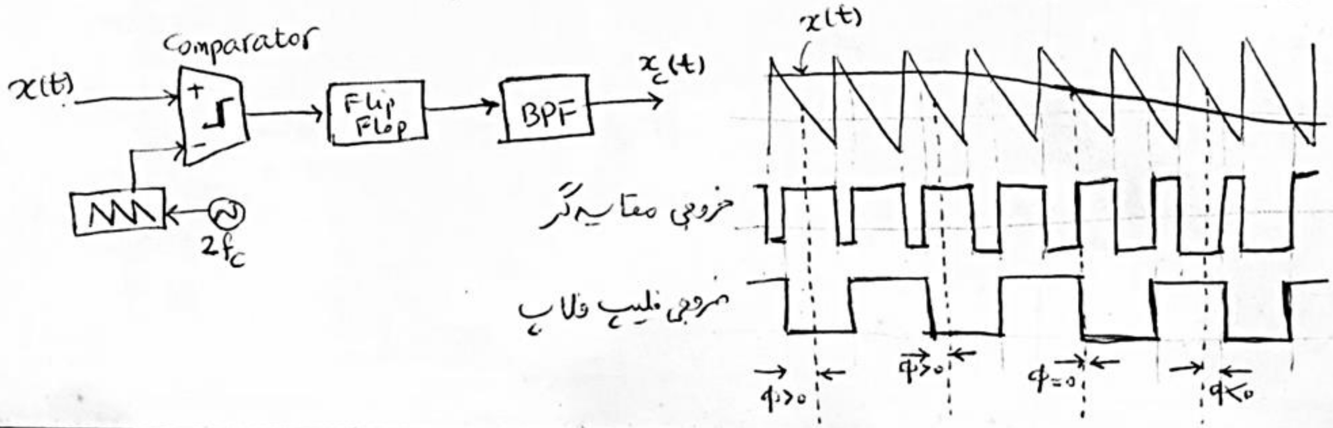
که همان مدولاسیون فرکانسی با $f_\Delta = \frac{C}{2C_0}\cdot f_c$ است.

تولید PM ؛ 1- NBPM : با توجه به رابطه $x_c(t) \simeq A_c\cos\omega_c t - A_c\phi_\Delta x(t)\sin\omega_c t$ طرح مدولاتور NBPM چنین است:

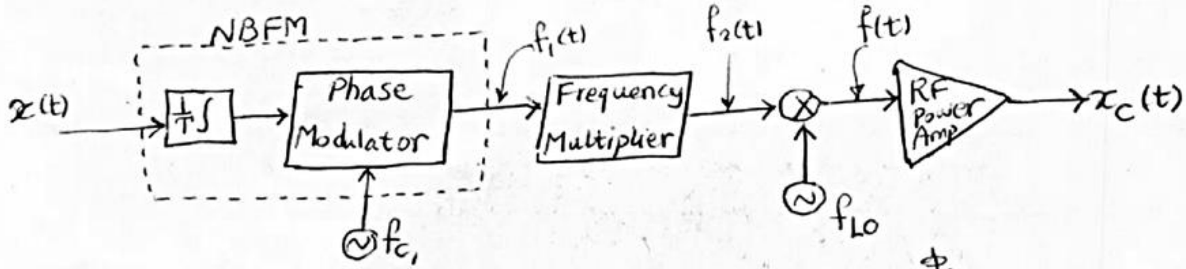


$$\rightarrow |\phi_\Delta x(t)| << 1$$

2- تولید PM : برای داشتن شیفت فازهای بزرگتر میتوان از طرح زیر استفاده کرد:



تولید غیرمستقیم FM : ابتدا NBFM و سپس FM می‌سازیم. برای این کار میتوان از طرح زیر استفاده کرد :



$$f_1(t) = f_{c_1} + \frac{\phi_\Delta}{2\pi T} x(t) \Rightarrow \text{انحراف فرکانسی اولیه}\quad f_{\Delta_1} = \frac{\phi_\Delta}{2\pi T}$$

انحراف فرکانس نهایی که مطلوب ما است f_Δ است. مقدار f_{Δ_1} را به کمک ضرب کننده فرکانسی به f_Δ می‌رسانیم. لذا خروجی واحد مذکور دارای فرکانس لحظه‌ای زیر است :

$$f_2(t) = n f_1(t) = n f_{c_1} + f_\Delta x(t) \xrightarrow{\text{که}} f_\Delta = n \cdot \frac{\phi_\Delta}{2\pi T}$$

ملاحظه می‌کنید که فرکانس حامل نیز در n ضرب شده است که ممکن است بزرگتر از مقدار مورد نظر ما باشد. برای بدست آوردن فرکانس حامل مطلوب f_c، از شیفت یا تبدیل فرکانسی (freq. conversion) استفاده می‌کنیم. فرکانس نوسان‌ساز محلی f_{LO} طوری تعیین می‌شود که $f_c = |n f_{c_1} \pm f_{LO}|$ شود. در این حالت، فرکانس لحظه‌ای خروجی، $f(t)$، برابر می‌شود با :

$$f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$$

آشکارسازی فرکانسی : یک آشکارساز فرکانس (freq. detector) یا مجزاساز (discriminator) باید ولتاژ خروجی آن متناسب با فرکانس لحظه‌ای سیگنال ورودی باشد. دسته‌های مختلف آشکارسازی فرکانسی عبارتند از :

1- تبدیل FM به AM
2- مجزاسازی بر مبنای شیفت فاز (Phase-shift discrimination)
3- آشکارسازی عبور از صفر (Zero-crossing detection)
4- فیدبک فرکانسی

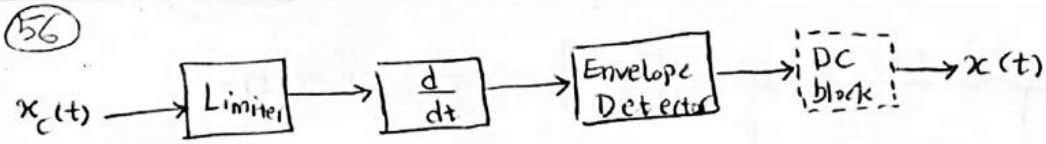
که سه دسته اول بررسی می‌شوند.

دسته اول : در این دسته خروجی مشتق زمانی ورودی است. با این کار همانطور که دیدیم FM به AM تبدیل می‌شود.

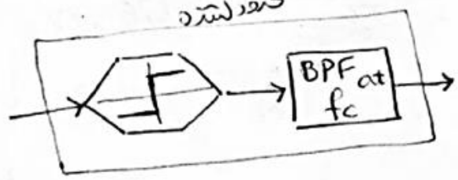
$$x_c(t) = A_c \cos\theta_c(t) \;,\; \dot\theta_c(t) = 2\pi[f_c + f_\Delta x(t)] \Rightarrow \dot x_c(t) = -A_c \dot\theta_c(t) \sin\theta_c(t) =$$

$$= 2\pi A_c [\underbrace{f_c + f_\Delta x(t)}_{f(t)}] \sin(\theta_c(t) \pm 180^\circ)$$

حال میتوان از یک آشکارساز پوش برای بدست آوردن فرکانس لحظه‌ای $f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$ استفاده کرد. بلوک دیاگرام این روش چنین است :

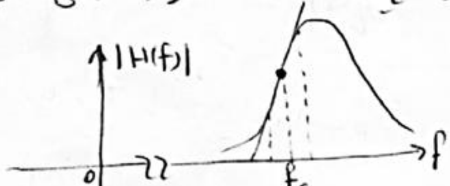


ورودی $x_c(t)$ ابتدا به یک محدود کننده (limiter) داده می‌شود تا تغییرات ناخواسته و ناهنجاری‌های دامنه سیگنال $x_c(t)$ حذف شود. واحد محدودکننده معمولاً چنین است:

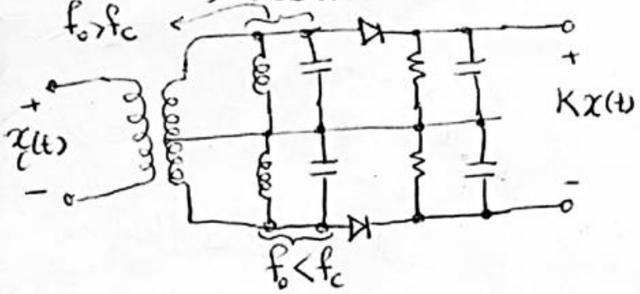


واحد حذف DC نیز برای حذف مولفه DC ناشی از حامل است.

همانطور که می‌دانیم یک مشتق‌گیر حول نقطه کار خود پاسخ فرکانسی به صورت $|H(f)| = 2\pi f$ دارد. همانطور که در زیر نشان داده شده یک مدار تشدید معمولی نیز در قسمتی از پاسخ خود چنین رفتاری دارد (رفتار خطی = خاصیت مشتق‌گیری)

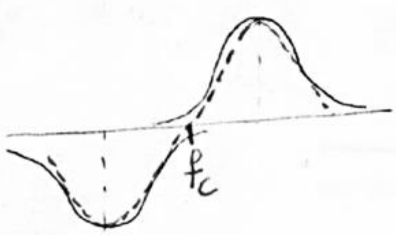


اما محدوده خطی مذکور کوچک است. برای افزایش محدوده خطی می‌توان مطابق شکل زیر از مدار جداساز متعادل (balanced discriminator) استفاده کرد:



ملاحظه می‌کنید که مدار فوق از دو مدار تشدید که یکی با بالای f_c و دیگری پایین f_c تنظیم شده تشکیل شده است.

خروجی برابر تفاضل پاسخ دو مدار تشدید است.



در این حالت نیازی به واحد حذف DC نداریم زیرا در حین تفاضل‌گیری مقادیر DC از هم کم می‌شوند.

دسته دوم: آشکارسازهای بر مبنای شیفت فاز پاسخ فاز خطی دارند. (برخلاف دسته قبل که پاسخ دامنه خطی داشتند)

اصول کار آنها بر مبنای رابطه زیر است:

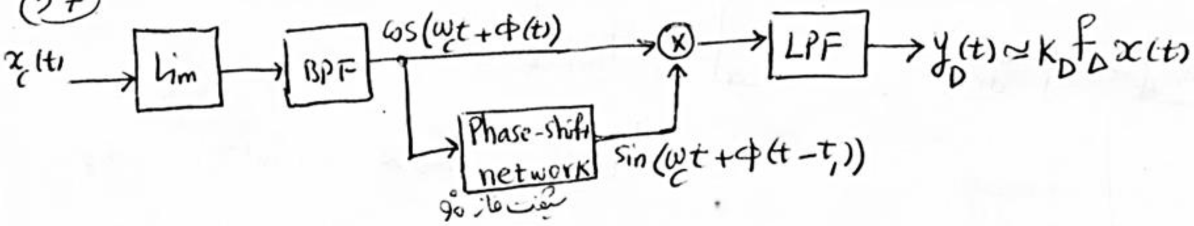
$$\frac{dv}{dt} = \dot{v}(t) \simeq \frac{1}{t_1}[v(t) - v(t-t_1)]$$

برای t_1 به اندازه کافی کوچک

حال اگر $v(t)$ سیگنال FM با $\dot{\phi}(t) = 2\pi f_\Delta x(t)$ باشد داریم:

$$\phi(t) - \phi(t-t_1) \simeq t_1 \dot{\phi}(t) = 2\pi f_\Delta t_1 x(t)$$

شکل زیر چنین طرحی را نشان می‌دهد.



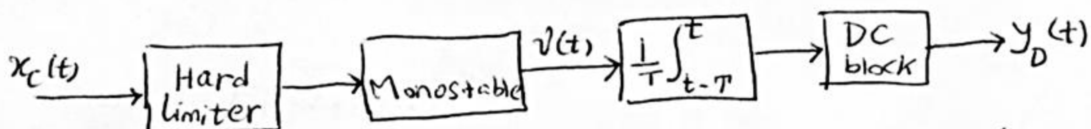
خروجی LPF در حقیقت چنین است:

$$\sin[\phi(t)-\phi(t-t_1)] \simeq \phi(t)-\phi(t-t_1)$$

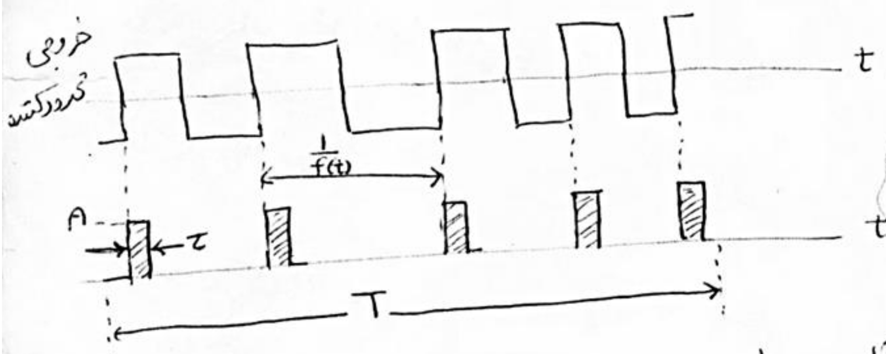
به شرط t_1 کوچک : $|\phi(t)-\phi(t-t_1)| \ll \pi$

$$\Rightarrow y_D(t) \simeq K_D f_\Delta x(t)$$

<u>دسته سوم</u>: شکل زیر اصول عملکرد آشکارساز عبور از صفر را نشان می‌دهد:



زمان T را طوری انتخاب می‌کنیم که $W \ll \frac{1}{T} \ll f_c$. لذا سیگنال $v(t)$



برای اینکه تغییرات فرکانس زیاد نباشد تا تغییرات ~~[illegible]~~ سیگنال را بتوان دنبال کرد.

برای اینکه تعداد پالسها به حد کافی باشد تا تقریب دقیقتر شود.

قطار پالسی با دوره تناوب تقریباً ثابت $\frac{1}{f(t)}$ است. تعداد پالسها در زمان T برابر $n_T \simeq Tf(t)$ است لذا:

$$\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} v(\lambda)d\lambda = \frac{1}{T} n_T A\tau \simeq A\tau f(t)$$

$$\Rightarrow y_D(t) \simeq K_D f_\Delta x(t)$$

محدوده کاری آشکارساز فوق بین 1^{Hz} تا 10^{MHz} است. برای افزایش محدوده کاری میتوان از یک شمارنده تقسیم بر <u>10</u> بعد از واحد محدودکننده سخت استفاده کرد تا محدوده کاری تا 100^{MHz} نیز افزایش یابد.

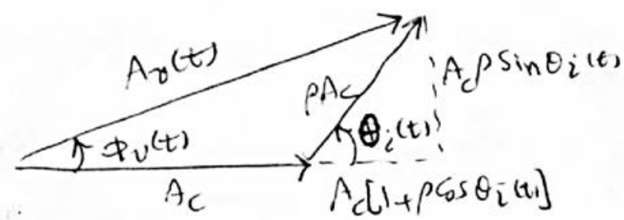
<u>تداخل</u> (Interference): به ترکیب یک سیگنال مفید حاوی اطلاعات با سیگنال دیگری که معمولاً ناشی از یک منبع انسانی است گفته می‌شود. بطور مثال در آنتن گیرنده که همزمان چندین سیگنال روی یک محدوده فرکانسی دریافت می‌شوند. یا دریافت یک سیگنال مشخص از چند مسیر مختلف با تاخیرهای متفاوت.

بررسی تداخل در حالت تُن : فرض کنید کل سیگنال دریافتی یک گیرنده که روی f_c تنظیم شده چنین باشد:

$$v(t) = \underbrace{A_c \cos\omega_c t}_{\text{سیگنال مطلوب}} + \underbrace{A_i \cos[(\omega_c+\omega_i)t + \phi_i]}_{\text{سیگنال تداخل کننده}}$$

$$= A_v(t)\cos[\omega_c t + \phi_v(t)] \quad , \quad \rho \triangleq \frac{A_i}{A_c} \quad , \quad \theta_i(t) \triangleq \omega_i t + \phi_i$$

$$\Rightarrow A_i = \rho A_c$$



$$\Rightarrow \begin{cases} A_v(t) = A_c\sqrt{1+\rho^2+2\rho\cos\theta_i(t)} \\ \phi_v(t) = \tan^{-1}\dfrac{\rho\sin\theta_i(t)}{1+\rho\cos\theta_i(t)} \end{cases}$$

→ هم مدولاسیون دامنه و هم فاز داریم

$$\text{if } \rho \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} A_v(t) \simeq A_c[1+\rho\cos(\omega_i t+\phi_i)] \\ \phi_v(t) \simeq \rho\sin(\omega_i t+\phi_i) \end{cases}$$

شبیه مدولاسیون AM با $\mu=\rho$ و مدولاسیون PM, FM با $\beta=\rho$ است.

$$\text{if } \rho \gg 1 \Rightarrow \begin{cases} A_v(t) \simeq A_i[1+\rho^{-1}\cos(\omega_i t+\phi_i)] \\ \phi_v(t) \simeq \omega_i t+\phi_i \end{cases}$$

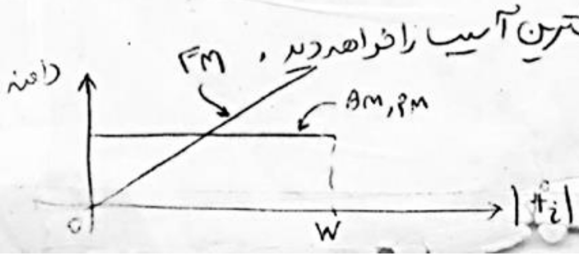
→ پوشش همچنان مدولاسیون AM دارد

حال اگر $v(t)$ را به یک دمدولاتور AM ، یک دمدولاتور فرکانسی با ثابت K_D اعمال کنیم به فرض $\rho \ll 1$ و $\phi_i=0$ بدست خواهیم آورد:

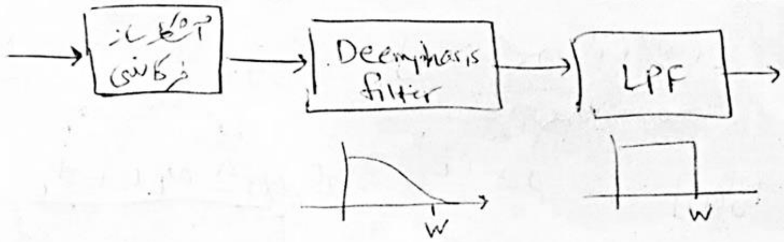
$$y_D(t) \simeq \begin{cases} K_D(1+\rho\cos\omega_i t) & AM \\ K_D\rho\sin\omega_i t & PM \\ K_D\rho f_i\cos\omega_i t & FM \end{cases}$$

→ به شرط $f_i \le W$ → تا توسط فیلتر LP حذف نشود

ملاحظه می‌کنید که یک سیگنال ناخواسته بوجود آمده که متناسب با ρ است. در PM, AM در FM علاوه بر ρ به f_i نیز بستگی دارد. پس اگر سیگنال تداخل‌کننده سیگنال هم‌کانال با سیگنال اصلی و با همان فرکانس حامل باشد FM ($f_i=0$) مصون از سیگنال ناخواسته خواهد بود و کمترین آسیب را خواهد دید. اما اگر سیگنال ناخواسته متعلق به کانال مجاور باشد FM ($f_i \neq 0$) بیشترین آسیب را خواهد دید.



فیلترهای Deemphasis و Preemphasis :



فیلتر dee.. باعث کاهش اثر اعوجاج ناشی از سیگنال ناخواسته می‌شود.

برای جبران اثر فیلتر dee.. روی سیگنال مطلوب، در فرستنده باید سیگنال اصلی را از یک فیلتر که عکس منفی فیلتر dee.. است و فیلتر preemphasizing یا predistorting نام دارد عبور دهیم:

$$H_{pe}(f) = \frac{1}{H_{de}(f)} \quad |f| \leq W$$

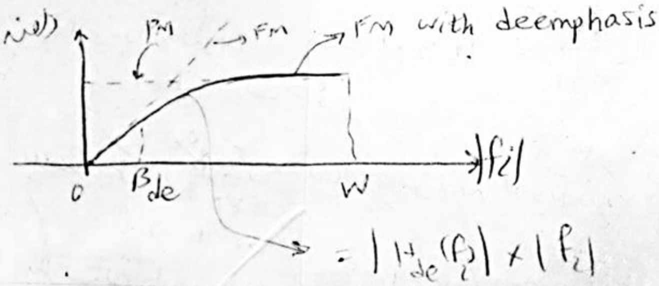
معرفی:

$$H_{de}(f) = \left[1 + j\left(\frac{f}{B_{de}}\right)\right]^{-1} \simeq \begin{cases} 1 & |f| \ll B_{de} \\ \frac{B_{de}}{jf} & |f| \gg B_{de} \end{cases}$$

که B_{de} به طور قابل ملاحظه‌ای کمتر از W است.

$$H_{pe}(f) = \left[1 + j\left(\frac{f}{B_{de}}\right)\right] \simeq \begin{cases} 1 & |f| \ll B_{de} \\ \frac{jf}{B_{de}} & |f| \gg B_{de} \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنید که مشتق از سیگنال مدولاسیون FM از سیگنال مشتق گرفته می‌شود و این در حقیقت مدولاسیون فاز است. لذا preemphasized FM در حقیقت ترکیبی از FM و PM است.



مدولاسیون تک آهنگ همان مدولاسیون تن است.

فصل 6 : نمونه برداری و مدولاسیون پالسی

- یک منحنی پیوسته را می‌توان با نقاط نمونه آن توصیف کرد کافی است نقاط نمونه به حد کافی به هم نزدیک انتخاب شده باشند.

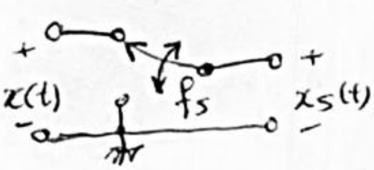
- یک سیگنال الکتریکی هم از این قاعده مستثنی نمی‌باشد.

- به کمک نمونه برداری می‌توان سیگنال پیام را بصورت مدولاسیون پالسی و نه پیوسته مخابره کرد

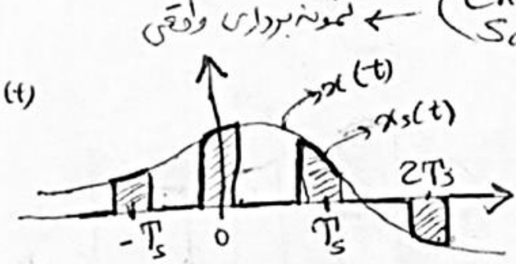
- عمر پالسها در مقایسه با فاصله بین آنها کم است لذا امواج مدوله شده پالسی در اکثر مواقع در خاموشی است. این ویژگی دو مزیت (در مقایسه با روشهای مدولاسیون CW) در پی دارد: ① توان ارسالی را می‌توان به جای منتشر ساختن مدام، در زمانهای کوتاهی متمرکز ساخت. بدین ترتیب دست طراح در انتخاب وسایل و ادوات بازتر است و از ابزارهایی مانند لیزر و لامپهای مایکروویو که بر مبنای پالس کار می‌کنند می‌توان استفاده کرد. ② از زمان بین پالسها می‌توان برای ارسال نمونه‌های یک سیگنال دیگر (یا سیگنالهای دیگر) استفاده کرد (به این فرآیند، مالتی‌پلکس تقسیم زمانی یا TDM، گفته می‌شود)

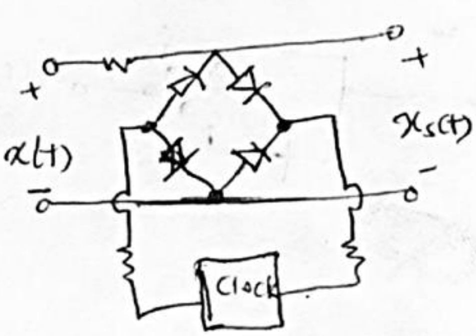
- در مقابل عیب مدولاسیون پالسی نیاز آن به پهنای باندی بسیار بزرگتر از پهنای باند سیگنال پیام است لذا روشهای مدولاسیون پالس آنالوگ عمدتاً به منظور پردازش پیام جهت TDM و یا قبل از مدولاسیون CW استفاده می‌شوند. در مقابل روشهای مدولاسیون پالس دیجیتال (یا کد شده) مشکل نیاز به پهنای باند را جبران و حل کرده اند.

نمونه برداری برشی (چاپر Chopper Sampling) ← نمونه برداری واقعی

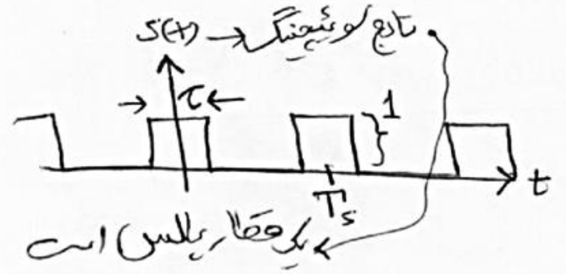


$$f_s = \frac{1}{T_s} \ (HZ)$$



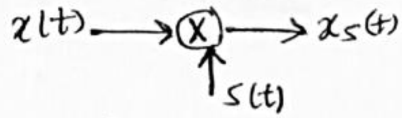


– این نوع نمونه‌برداری را تک سر (Single-Ended) یا تک‌قطبی (unipolar) نامیده می‌شود.



اکنون محاسبه $x_s(t)$ از روی $x(t)$:

$$\Rightarrow x_s(t)=s(t).x(t) \quad (1)$$



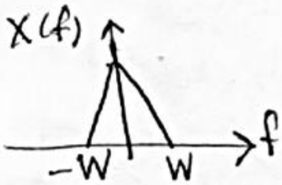
با استفاده از سری فوریه قطار پالس و نتایج حاصل از یکی از مثالها :

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s\tau\,\mathrm{sinc}(nf_s\tau).e^{j2\pi nf_s t}$$
$$=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}2c_n\cos n\omega_s t \quad (2)$$

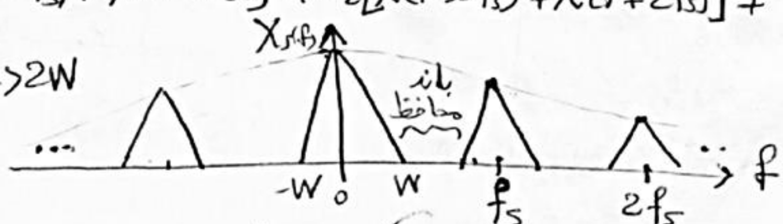
$$\rightarrow \omega_s=2\pi f_s \quad , \quad c_n=f_s\tau\,\mathrm{sinc}(nf_s\tau) \quad , \quad c_0=f_s\tau=\frac{\tau}{T_s}$$

$$\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} x_s(t)=c_0x(t)+2c_1x(t)\cos\omega_s t+2c_2x(t)\cos 2\omega_s t+\dots \quad (3)$$

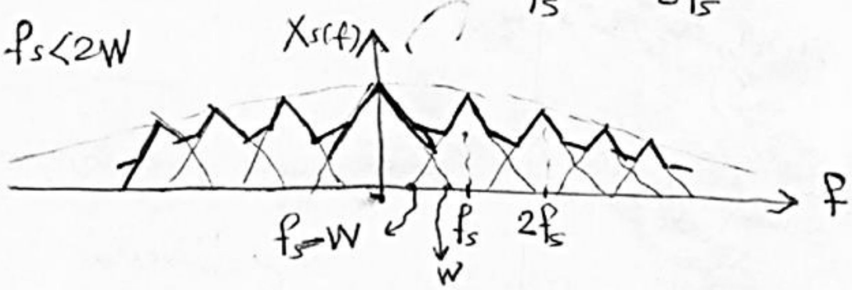
$$\Rightarrow X_s(f)=c_0X(f)+c_1[X(f-f_s)+X(f+f_s)]+c_2[X(f-2f_s)+X(f+2f_s)]+\dots \quad (4)$$



$\Rightarrow$ الف) اگر $f_s>2W$



ب) اگر $f_s<2W$



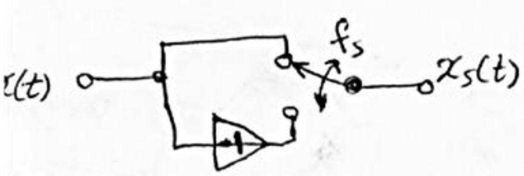
همپوشانی (aliasing) رخ داده است.

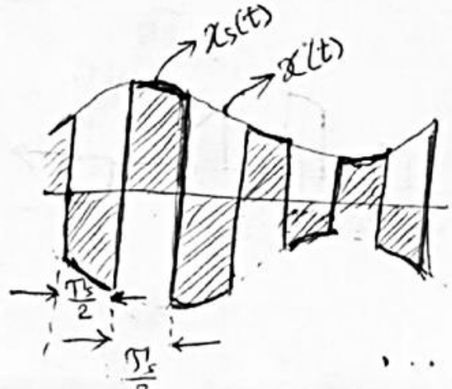
– به شرط $f_s>2W$ به کمک یک فیلتر پایین‌گذر می‌توان سیگنال پیام $x(t)$ را بازسازی کرد.

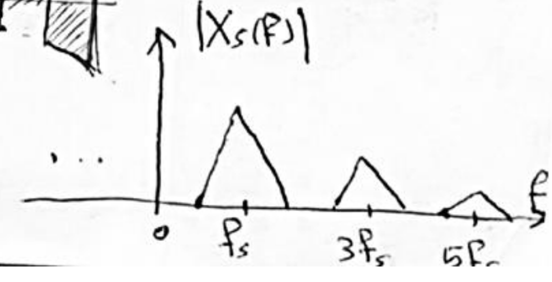
– $f_s=2W$ را نرخ (آهنگ) نایکوئیست می‌نامند.

– پهنای باند فیلتر پایین‌گذر، B : $\quad W<B<f_s-W$

برشگر دوقطبی :







- تابع سوئیچینگ $s(t)$ یک تابع متناوب مربعی است که بین $+1$ و -1 نوسان می‌کند.

- با توجه به بسط سری $s(t)$ داریم:

$$x_s(t) = x(t)s(t) = \frac{4}{\pi}x(t)\cos\omega_s t - \frac{4}{3\pi}x(t)\cos 3\omega_s t + \frac{4}{5\pi}x(t)\cos 5\omega_s t - \cdots$$

- حالا دیگر نمی‌توان $x(t)$ را با کمک فیلتر پایین گذر بازیابی کرد.

- اگر $x_s(t)$ را به یک BPF با فرکانس مرکزی واقع در یک هارمونیک فرد، $(2n+1)f_s$، بدهیم خروجی متناسب با $x(t)\cdot\cos(2n+1)\omega_s t$ خواهد شد. یعنی یک شکل موج دوباندجانبی فاقد حامل (two-sideband suppressed carrier)

- برشگر دوقطبی یک مدولاتور متعادل است.

- اگر ورودی برشگر دوقطبی یک سیگنال DSB یا SSB باشد و خروجی آن از یک LPF عبور داده شود، یک آشکارساز سنکرون (همزمان) خواهیم داشت.

نمونه برداری ایده‌آل و بازیابی آن: - نمونه برداری ایده‌آل یعنی نمونه برداری لحظه‌ای

- در حالت ایده‌آل باید مقدار τ در برشگر تک قطبی به صفر میل کند تا مقادیر لحظه‌ای را بگیرد.

اما در این حالت: if $\tau \to 0 \Rightarrow f_s\tau \to 0 \Rightarrow x_s(t) \to 0$

برای حل مشکل به‌نظر باید $x_s(t)$ را در $\frac{1}{\tau}$ ضرب کرد پس در این صورت: $\tau \to 0$ و $\frac{1}{\tau} \to \infty$

پس تابع $s(t)$ و شکل موج نمونه برداری شده به یک قطار ضربه تبدیل می‌شوند.

واقعی $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t-kT_s}{\tau}\right) \Rightarrow$ ایده‌آل $s_\delta(t) \triangleq \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_s)$

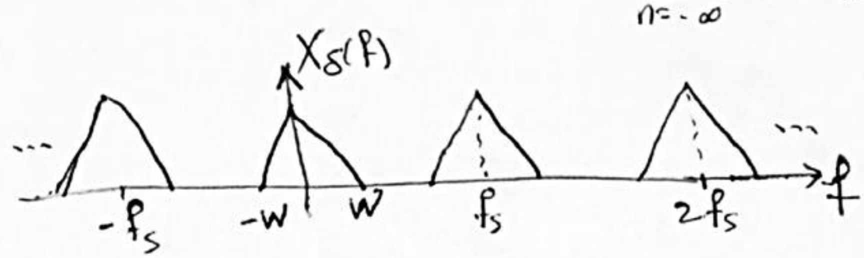
$\Rightarrow$ شکل موج نمونه برداری شده $x_\delta(t) \triangleq x(t)\cdot s_\delta(t) = x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT_s)\delta(t-kT_s)$

در معادله (4) به ازای $\tau = 0$ داریم: $c_n/\tau\big|_{\tau=0} = f_s$ از طرفی $\frac{1}{\tau}X_s(f) \to X_\delta(f)$

پس:

$$X_\delta(f) = f_sX(f) + f_s[X(f-f_s)+X(f+f_s)] + \dots = f_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(f-nf_s) \quad (10)$$

برای $f_s>2W$:



(4) $x_\delta(t) = x(t)s(t) \Rightarrow X_\delta(f) = X(f) * S_\delta(f)$ (1) محاسبهٔ $S_\delta(f)$:

مقایسه

(10) $\Rightarrow X_\delta(f) = X(f) * \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s\delta(f-nf_s)\right]$ (2) $\longrightarrow S_\delta(f) = f_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_s)$ (11)

یعنی قطار ضربه واحد در فرکانس با ضریبهایی به فواصل $f_s = \frac{1}{T_s}$ از هم

$W < B < f_s - W$

<u>بازسازی</u> : با توجه به شکل (صفر)، از یک فیلتر LPF با بهره K، زمان تاخیر t_d و پهنای باند B به عبورت $H(f) = K\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)e^{-j\omega t_d}$ استفاده کنیم (برای فیلتر کردن $x_\delta(t)$)

$$Y(f) = H(f)X_\delta(f) = Kf_sX(f)e^{-j\omega t_d} \Rightarrow \boxed{y(t) = Kf_s x(t-t_d)}$$

<u>تحلیل بیشتر</u>: پاسخ ضربه فیلتر $h(t) = 2BK\,\mathrm{sinc}\,2B(t-t_d) \Rightarrow y(t) = h(t) * x_\delta(t)$

$$= 2BK\sum_{K=-\infty}^{\infty} x(KT_s)\,\mathrm{sinc}\,2B(t-t_d-KT_s)$$

برای سادگی فرض کنید : $B = \frac{f_s}{2}$ ، $K = \frac{1}{f_s}$ ، $t_d = 0$:

$$\Rightarrow y(t) = \sum_{K'} x(K'T_s)\,\mathrm{sinc}(tf_s - K') \Rightarrow$$

(1) در خود زمانهای نمونه برداری یعنی لحظات $t = KT_s$ عمل بازسازی به درستی مقدار $x(t=KT_s)$ را به دست میدهد. زیرا بازای $t = KT_s$ تمام سیگنالها به جز یکی صفر میشوند.

(2) در زمانهایی بین زمانهای نمونه برداری $KT_s < t < (K+1)T_s$ ، سیگنال $x(t)$ از طریق جمع تمام توابع سینک گذشته و آینده درونیابی میشود. لذا فیلتر LP را گاهاً <u>فیلتر درونیابی</u> و پاسخ ضربه آن را <u>تابع درونیابی</u> می‌گویند.

در حالت ساده شده $K = T_s$ و $t_d = 0$ چون $\overbrace{y(t) = x(t)}^{\text{بدلیل بازسازی کامل}}$ است داریم :

(14) $$\boxed{x(t) = 2BT_s\sum_{K=-\infty}^{\infty} x(KT_s)\,\mathrm{sinc}\,2B(t-KT_s)} \xrightarrow{\text{به شرط}} \begin{cases} T_s \le \frac{1}{2W} \\ W < B < f_s - W \end{cases}$$

اهمیت رابطه فوق این است که هر موج مشابه با سیگنال متناوب و شبیه سیگنال نوری تا یک سیگنال باند محدود را میتوان بطور کامل از روی نمونه هایش توصیف (و بازسازی) نمود.

نمونه برداری واقعی (عملی) و روی‌هم‌افتادگی : (یا درهم روی)

تفاوت نمونه برداری ایده‌آل و واقعی:

1. نمونه‌های گرفته شده از سیگنال بجای ضربه، شکل یک پالس با دامنه و عرض محدود دارند.
2. فیلترهای بازسازی ایده‌آل نمی‌باشند.
3. سیگنال‌ها کاملاً باند- محدود نمی‌باشند.

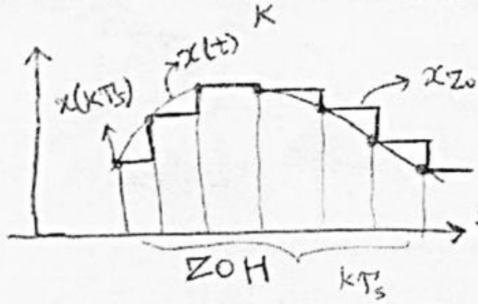
- دو شکل اول تا حدی قابل اغماض است. اما شکل سوم جدی‌تر بوده و به روی‌هم‌افتادگی (Aliasing) معروف است.

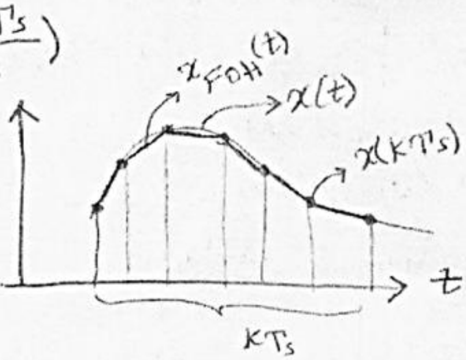
- عمل بازسازی با کمک درونیابی بین نمونه‌ها انجام می‌شود. فیلتر LPF ایده‌آل نوعی درونیابی کامل انجام می‌دهد. در واقعیت و عمل می‌توان سیگنال را با استفاده از نگهدارنده مرتبه صفر (Zero Order Hold ، ZOH) درونیابی و بازسازی کرد:

$$y(t) = \sum_{K} x(KT_s)\,\Pi\left(\frac{t-KT_s}{T_s}\right)$$

همچنین می‌توان از نگهدارنده مرتبه یک (FOH) استفاده کرد:

$$y(t) = \sum_{K} x(KT_s)\,\Lambda\left(\frac{t-KT_s}{T_s}\right)$$



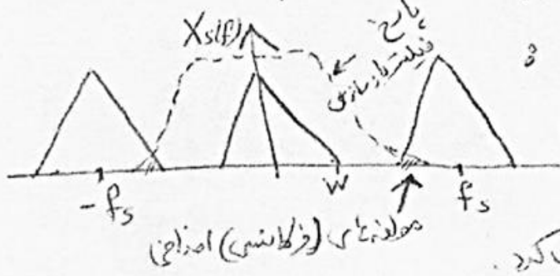


پاسخ فرکانسی فیلترهای پایین گذر FOH و ZOH:

$$|H_{FOH}(f)| = T_s\sqrt{1+(2\pi f T_s)^2}\cdot \text{sinc}^2(fT_s)$$

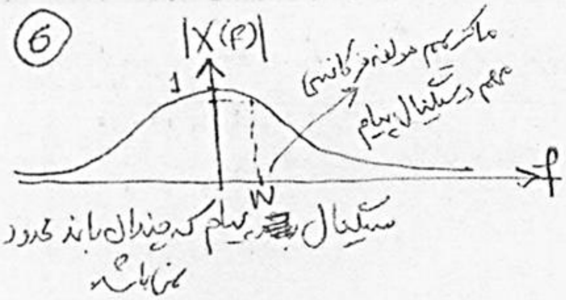
$$|H_{ZOH}(f)| = |T_s\,\text{sinc}(fT_s)|$$

- ملاحظه می‌شود که در هر دو از حالت فیلتر LPF ایده‌آل (پاسخ فرکانسی) فاصله گرفته‌ایم و این در شکل طیف $x(t)$ را تغییر می‌دهند (خطای پنجره‌ای یا aperture error)



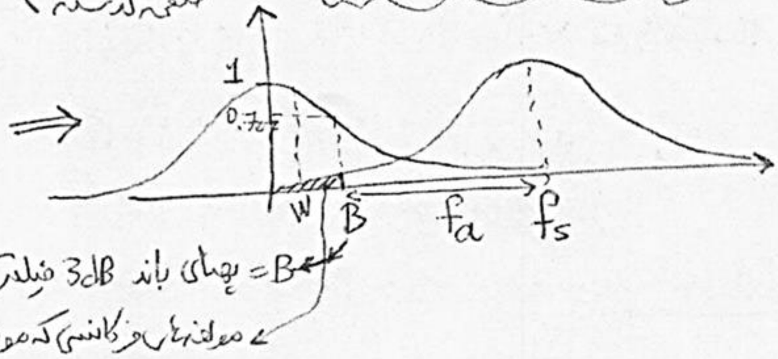
اگر ایده‌آل نبودن فیلترهای بازسازی (بالا مورد 2):

- مولفه‌های فرکانسی اضافی به صورت نویز یا نفوذ فرکانس بالا شنیده می‌شوند. برای حذف این مولفه‌ها می‌توان از یک فیلتر دقیق بازسازی استفاده کرد و/یا $f_s > 2W$ انتخاب کرد.



اثر روی هم افتادگی (یا درهم روی): (صورت ③ در ابتدای صفحه گذشته)

⟹



معمولاً $B >> W$ انتخاب می‌شود تا فیلتر اثر اعوجاج روی اطلاعات مفید سیگنال نداشته باشد اما همین امر موجب تشدید اثر روی هم افتادگی شده و ساحت هاشورزده بیشتر و در نتیجه اثر عمقی روی هم افتادگی نیز بیشتر می‌شود.

- با افزایش f_s (فرکانس نمونه برداری) و/یا بکارگیری فیلترهای LPF ایده‌آل‌تر می‌توان اثر روی هم افتادگی را کاهش داد (ساحت هاشورزده شده کمتر می‌شود)

- اثر روی هم افتادگی بسیار جدی‌تر از اثر فرکانسهای اضافی است زیرا فرکانسهای اضافی در خارج از باند پیام هستند اما مولفه‌های فرکانسی روی هم افتادگی داخل باند پیام هستند.

- اگر فیلتر بازسازی یک فیلتر پایین‌گذر مرتبه اول با پهنای باند 3dB با B باشد آنگاه ماکزیمم درصد خطای روی هم افتادگی در باند عبور فیلتر عبارت است از:

$$\text{درصد خطا} = 100 \times \sqrt{\frac{2}{1+(f_a/B)^2}} \xrightarrow{\text{که}} f_a = f_s - B$$

B پهنای باند 3dB و یا فرکانس نصف توان نامیده می‌شود. (دامنه $\sqrt{2}$ برابر کاهش یافته توان 2 برابر کاهش می‌یابد)

- در تکنولوژی VLSI جهت پردازش سیگنالهای دیجیتال ابتدا باید از سیگنال آنالوگ نمونه برداری کنیم. چون در این تکنولوژی ساخت مقادیر بزرگ R و C مشکل است به جای آن فرکانس نمونه برداری را تا چندین برابر نرخ نایکوئیست افزایش می‌دهند (f_s بزرگ) یعنی فیلتر RC را با مقادیر ممکن موجود ساخته، سیگنال را فیلتر کرده، سپس نمونه برداری اضافی یا فرانمونه برداری (oversampling) می‌کنند. حال از فیلترهای دیجیتال جهت کاهش مولفه‌های فرکانسی خارج از باند پیام (W) استفاده می‌کنیم. در ادامه به کمک نمونه برداری کاهشی (Undersampling) فرکانس نمونه برداری موثر را به نرخ نایکوئیست می‌رسانیم.

⑦ مثال: در VLSI فرض کنید $R_{max} = 10^{K\Omega}$ و $C_{max} = 100pF$ باشد. می خواهیم از صدا با کیفیت خط تلفن نمونه برداری کنیم طوری که مولفه های حاصل از روی هم افتادگی حداقل 30dB کمتر از سیگنال مطلوب باشد.

با استفاده از رابطه اخیر:

$$B = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi\times10^{4}\times10^{-12}} = 159\,KHz$$

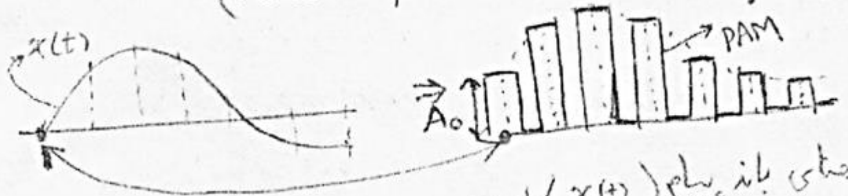
$$\Rightarrow 30dB \equiv 5\% \quad \left(20\log\frac{A_{sig}}{A_{alias}} = 30\,dB \Rightarrow \frac{A_{sig}}{A_{alias}}\% = 5\%\right)$$

$$5\% = \sqrt{\frac{2}{(1+f_a/159KHz)^2}} \xrightarrow{\times 100} f_a = 4.49\,MHz$$

$$\Rightarrow f_s = f_a + B = 4.65\,MHz$$

یعنی با فیلتر پایین گذر RC و $f_s = 4.65\,MHz$ تمام مولفه های حاصل از روی هم افتادگی در فرکانس $(B =).159\,KHz$ از 5 درصد سیگنال واقعی در فرکانس نصف توان (3dB) کوچکتر است، صدا البته سطح روی هم افتادگی در پهنای باند تلفن (یعنی $B = 3.2^{KHz}$) بسیار کمتر از 5 درصد است.

مدولاسیون دامنه پالس (Pulse Amplitude Modulation: PAM)

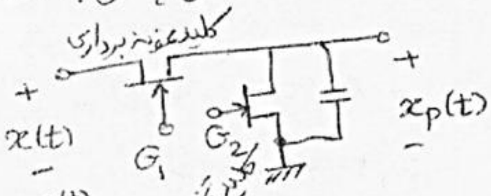


① سیگنال PAM مولفه dc بزرگی دارد

② پهنای باند آن بسیار بزرگتر از پهنای باند پیام ($x(t)$) است.

نمونه برداری سرصاف (flat-top Sampling)

- برای تولید PAM متداول است که از مدارات نمونه بردار - نگه دار (S/H : Sample & Hold) استفاده شود تا پالسهای سرصاف تولید شود (به جای پالسهای سرگرد در حالت برشگر)
- در مدار S/H زیر اعمال پالس به G1 موجب نمونه برداری سیگنال توسط خازن و اعمال پالس به G2 موجب تخلیه خازن (و صفر کردن ولتاژ) می شود.



- با اعمال متناوب پالسهای G1 و G2 داریم:

$$x_p(t) = \sum_{-KT_s} x(KT_s)\,P(t-KT_s) \quad ①$$

$$p(t-KT_s) = p(t) * \delta(t-KT_s) \Rightarrow$$

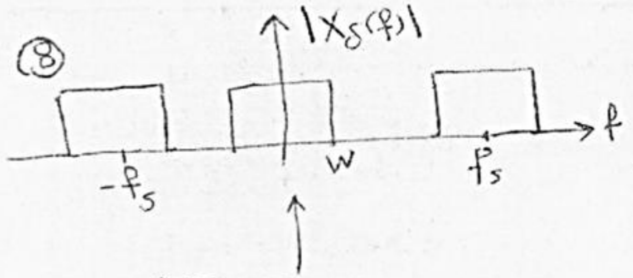
$$x_p(t) = p(t) * \left[\sum_K x(KT_s)\,\delta(t-KT_s)\right] = p(t) * x_\delta(t)$$

$$= P(f)\,X_\delta(f) \quad ②$$

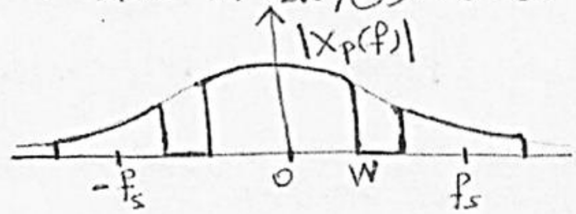
$$\Rightarrow X_p(f) = P(f)\left[f_s\sum_n X(f-nf_s)\right]$$

⑧

برای شکل به فرض : $X(f)=\Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$



$\Rightarrow$



– ملاحظه می‌کنید که نمونه برداری سرصاف معادل گذراندن یک موج نمونه برداری شده ایده‌آل از شبکه‌ای با پاسخ فرکانسی $H(f)=P(f)=F\{p(t)\}$ است.

– با توجه به اینکه پاسخ فرکانسی اشاره شده رفتاری پایین گذر داشته و بخش بالای طیف پیام را تضعیف می‌کند، به این پدیده (از دست رفتن محتویات فرکانس بالا)، اثر روزنه (aperture effect) گفته می‌شود. هرچه عرض پالس (τ) بزرگتر باشد این اثر شدیدتر می‌شود. برای اصلاح اثر روزنه می‌توان از یک معادل ساز به صورت مقابل استفاده کرد :

$$H_{eq}(f)=\frac{Ke^{-j\omega t_d}}{P(f)}$$

مدولاسیون PAM سرصاف یک قطبی : $x_p(t)=\sum_K A_0[1+\mu x(kT_s)]\,p(t-kT_s)$

تا یک قطبی بودن شکل موج تضمین شود. $\longrightarrow 1+\mu x(t)>0 \xrightarrow{\text{باید}}$ μ : شاخص مدولاسیون

– برای تولید مدولاسیون PAM کافی است سیگنال $A_0(1+\mu x(t))$ را به یک مدار S&H داد.

– طیف سیگنال PAM شبیه به طیف $|X_p(f)|$ در بالای همین صفحه است اما باید به جای $X(f)$ از $F\{A_0[1+\mu x(t)]\}=A_0[\delta(f)+\mu X(f)]$ استفاده کرد.

– بنابراین طیف PAM در تمام هارمونیکهای f_s و $f=0$ ضربه دارد. لذا برای بازیابی $x(t)$ از $x_p(t)$ باید علاوه بر فیلتر پایین گذر و معادل ساز، یک حذف کنندهٔ dc نیز استفاده کرد.

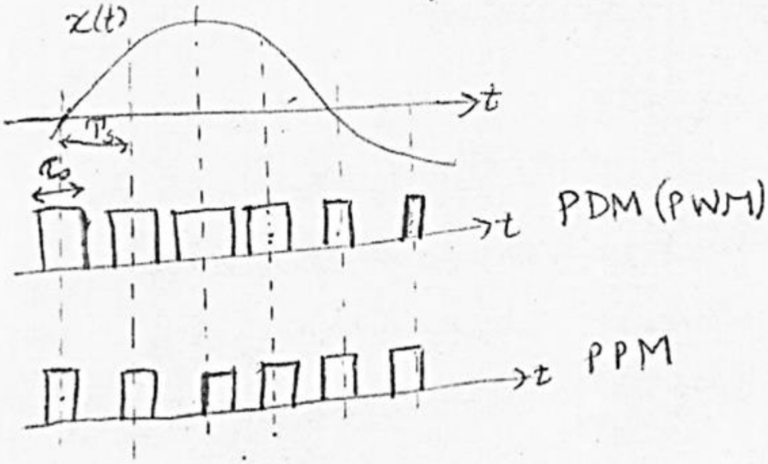
– مدولاسیون PAM شباهتهای بسیاری با AM دارد (شاخص مدولاسیون، ضربه در طیف و حذف کننده dc). در واقع به کمک یک BPF می‌توان از PAM یک موج AM بدست آورد.

– تفاوت PAM و AM در این است که طیف PAM از dc تا چندین هارمونیک f_s گسترده بوده و بنابراین پهنای باند بسیار بیشتری دارد.

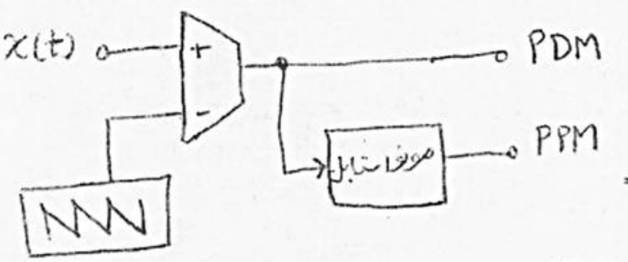
مدولاسیون زمان - پالس (Time-Pulse Modulation)

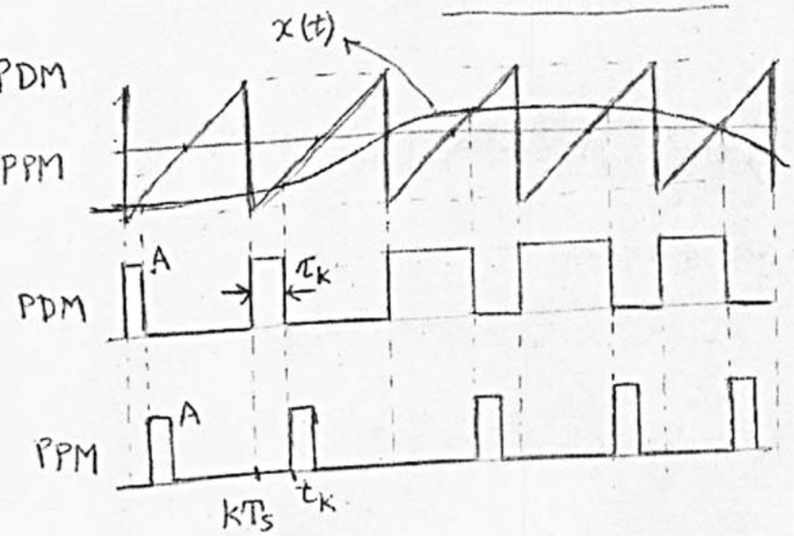
① مدولاسیون عرض پالس (Duration / Width → PWM یا PDM)

② " مکان پالس (Position → PPM)



تولید PDM و PPM :





- ملاحظه می‌شود که عرض یا محل پالسهای مدوله شده به مقدار پیام در زمانهای t_k بستگی دارد نه kT_s لذا فاصله نمونه‌ها یکنواخت نمی‌باشد.

- اگر بخواهیم نمونه برداری یکنواخت باشد می‌توانیم در ورودی یک مدار S&H قرار دهیم.

- در عمل که عرض پالسها کوچک است (یعنی $t_k - kT_s << T_s$) بین دو نوع نمونه برداری تفاوت چندانی نمی‌باشد.

- عرض پالس k ام در PDM : $\tau_k = \tau_0 [1 + \mu x(kT_s)]$

- زمان شروع پالس k ام در PPM : $t_k = \underbrace{kT_s + t_d}_{\text{زمان شروع پالس متناظر با } x(kT_s)=0} + t_0 x(kT_s)$

t_0 ← ثابتی جهت کنترل جابجایی پالس مدوله شده

(رابطه فوق به نوعی با استفاده از این واقعیت که $t_k = kT_s + \tau_k$ است قابل توجیه است)