ص۱

حل تمرین های سری چهارم - آمار و احتمال مهندسی

۱) الف) تعداد گوی هایی که از ظرف برمی داریم $X+Y+1$ خواهد بود که آخری گوی سفید است:

$$f_{XY}(x,y)=\underbrace{\frac{\binom{1}{x}\binom{2}{y}\binom{1}{0}}{\binom{4}{x+y}}}_{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2,\ 0\le x+y\le 3}\times\frac{1}{4-(x+y)}$$

احتمال اینکه در $x+y$ انتخاب اول x گوی آبی، y گوی قرمز و هیچ گوی سفیدی انتخاب نشود

احتمال آنکه در انتخاب $(x+y+1)$ ام گوی سفید انتخاب شود

$$f_{XY}(x,y)=\frac{\frac{1!}{x!(1-x)!}\times\frac{2!}{y!\times(2-y)!}\times 1}{\frac{4!}{(x+y)!(4-x-y)!}}\times\frac{1}{4-(x+y)}=\frac{(x+y)!(3-x-y)!}{x!y!(1-x)!(2-y)!}\times\frac{2!}{4!}$$

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{12}\times\frac{(x+y)!(3-x-y)!}{x!y!(1-x)!(2-y)!}\qquad 0\le x\le 1\qquad 0\le y\le 2$$

Y \ X	0	1	$f_Y(y)$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
$f_X(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

برای اینکه اطمینان پیدا کنیم تابع چگالی احتمال توأم درست است، جمع مؤلفه های آن در جدول را بدست می آوریم:

$$\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{2}f_{XY}(x,y)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\boxed{1}$$

توابع چگالی احتمال کناری را بدست می آوریم

$$f_X(x)=\sum_{y=0}^{2}f_{XY}(x,y)\qquad f_Y(y)=\sum_{x=0}^{1}f_{XY}(x,y)$$

ب) ابتدا با استفاده از توابع چگالی احتمال کناری، میانگین و واریانس X و Y را بدست می آوریم:

$$E(X)=\sum_{x=0}^{1}x f_X(x)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}\qquad E(X^2)=\sum_{x=0}^{1}x^2 f_X(x)=0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$E(Y^2)=\sum_{y=0}^{2}y^2 f_Y(y)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}=\boxed{\frac{5}{3}}\qquad var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\boxed{\frac{1}{4}}$$

$$var(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\boxed{\frac{2}{3}}$$

$$E(Y)=\sum_{y=0}^{2}y f_Y(y)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}=\boxed{1}$$

ص ۲

ادامه حل ۱ - ب) حال $E(XY)$ و $cov(X,Y)$ را محاسبه می‌کنیم :

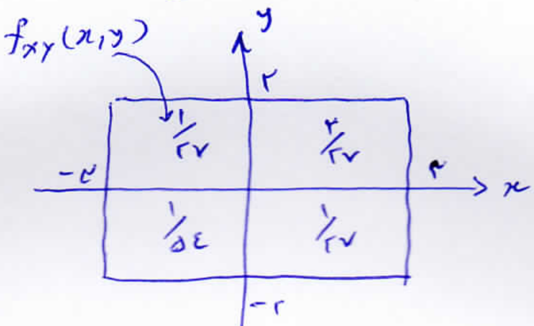
$$E(XY)=\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{2} xy\, f_{XY}(x,y) = 1\times1\times\frac{1}{6}+2\times1\times\frac{1}{4}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

$$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\times1=\boxed{\frac{1}{6}}$$

در انتها با گذاشتن مقادیر بدست آمده در رابطه ضریب همبستگی آنرا بدست می‌آوریم :

$$\rho(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)\,var(Y)}}=\frac{1/6}{\sqrt{\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}}$$

۲) تابع چگالی احتمال در نواحی مختلف صفحه xy بصورت زیر داده شده است :

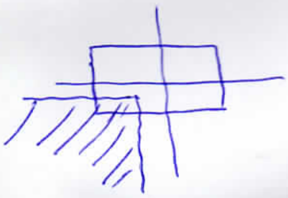


برای یافتن تابع توزیع تجمعی $F_{XY}(x,y)$ باید انتگرال دوگانه را برای نواحی مختلف در صفحه xy بدست آوریم :

ناحیه یک : $x<-3$ یا $y<-2$ $\qquad F_{XY}(x,y)=0$

ناحیه دو : $-3\le x<0\ ,\ -2\le y<0$

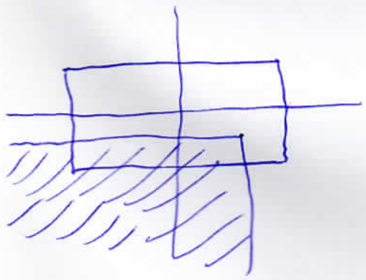
$$F_{XY}(x,y)=\int_{\alpha=-3}^{x}\int_{\beta=-2}^{y}\frac{1}{54}\,d\alpha\, d\beta=\frac{(x+3)(y+2)}{54}$$



ناحیه سه : $0\le x<3\ ,\ -2\le y<0$

$$F_{XY}(x,y)=\int_{\alpha=-3}^{0}\int_{\beta=-2}^{y}\frac{1}{54}\,d\alpha\, d\beta+\int_{\alpha=0}^{x}\int_{\beta=-2}^{y}\frac{1}{27}\,d\alpha\, d\beta$$

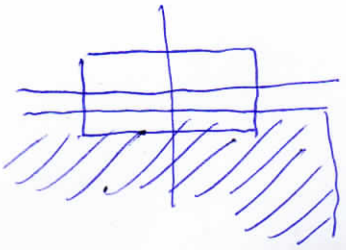
$$F_{XY}(x,y)=\frac{3(y+2)}{54}+\frac{x(y+2)}{27}=\frac{(2x+3)(y+2)}{54}$$



ص

ناحیه چهار : $x \geq 4 \quad , \quad -2 \leq y < 0$

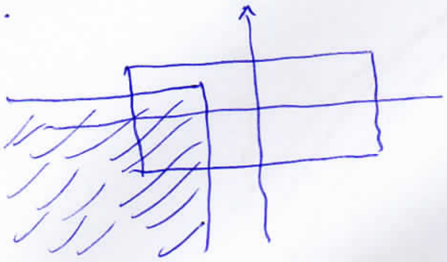
$$F_{xy}(x,y) = \int_{\alpha=-4}^{0} \int_{\beta=-2}^{y} \frac{1}{54}\, d\alpha\, d\beta + \int_{\alpha=0}^{4} \int_{\beta=-2}^{y} \frac{1}{27}\, d\alpha\, d\beta$$



$$F_{xy}(x,y) = \frac{3(y+2)}{54} + \frac{4(y+2)}{27} = \frac{y+2}{6}$$

ناحیه پنج : $-4 \leq x < 0 \quad , \quad 0 \leq y < 2$

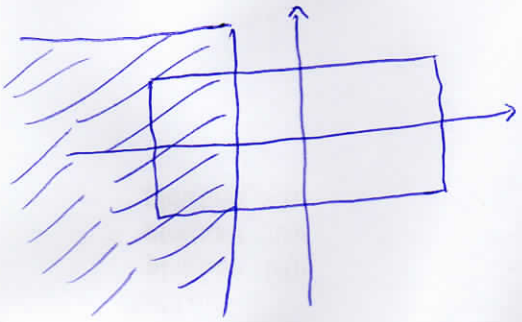
$$F_{xy}(x,y) = \int_{\alpha=-4}^{x} \int_{\beta=-2}^{0} \frac{1}{54}\, d\alpha\, d\beta + \int_{\alpha=-4}^{x} \int_{\beta=0}^{y} \frac{1}{27}\, d\alpha\, d\beta$$



$$F_{xy}(x,y) = \frac{(x+4)\times 2}{54} + \frac{(x+4)y}{27} = \frac{(x+4)(y+1)}{27}$$

ناحیه شش : $-4 \leq x < 0 \quad , \quad y \geq 2$

$$F_{xy}(x,y) = \int_{\alpha=-4}^{x} \int_{\beta=-2}^{0} \frac{1}{54}\, d\alpha\, d\beta + \int_{\alpha=-4}^{x} \int_{\beta=0}^{2} \frac{1}{27}\, d\alpha\, d\beta$$

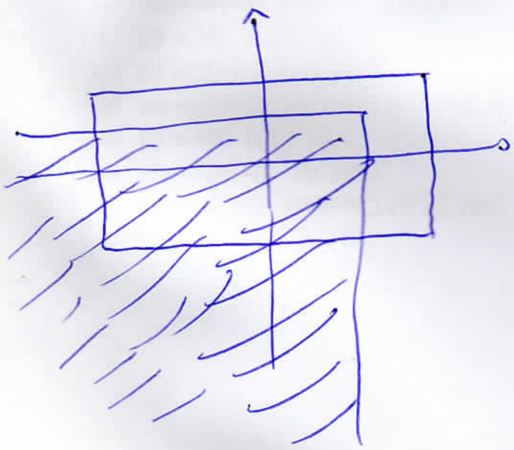


$$F_{xy}(x,y) = \frac{(x+4)\times 2}{54} + \frac{(x+4)\times 2}{27} = \frac{x+4}{9}$$

ناحیه هفت : $0 \leq x < 4 \quad , \quad 0 \leq y < 2$

$$F_{xy}(x,y) = \int_{\alpha=-4}^{0} \int_{\beta=-2}^{0} \frac{1}{54}\, d\alpha\, d\beta + \int_{\alpha=0}^{x} \int_{\beta=-2}^{0} \frac{1}{27}\, d\alpha\, d\beta$$

$$+ \int_{\alpha=-4}^{0} \int_{\beta=0}^{y} \frac{1}{27}\, d\alpha\, d\beta + \int_{\alpha=0}^{x} \int_{\beta=0}^{y} \frac{2}{27}\, d\alpha\, d\beta$$

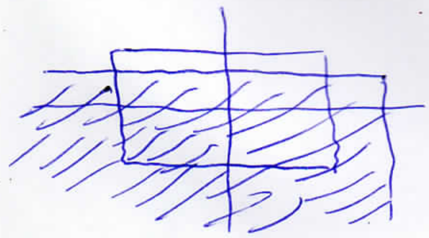


$$F_{xy}(x,y) = \frac{4\times 2}{54} + \frac{2x}{27} + \frac{4y}{27} + \frac{2xy}{27}$$

$$F_{xy}(x,y) = \frac{(2x+4)(y+1)}{27}$$

ناحیه هشت : $x \geq 4 \quad , \quad 0 \leq y < 2$

$$F_{xy}(x,y) = \int_{\alpha=-4}^{0} \int_{\beta=-2}^{0} \frac{1}{54}\, d\alpha\, d\beta + \int_{\alpha=0}^{4} \int_{\beta=-2}^{0} \frac{1}{27}\, d\alpha\, d\beta$$

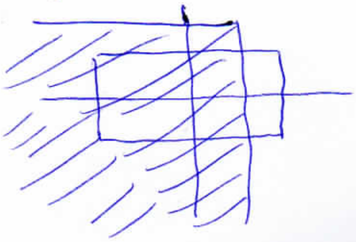


$$+ \int_{\alpha=-4}^{0} \int_{\beta=0}^{y} \frac{1}{27}\, d\alpha\, d\beta + \int_{\alpha=0}^{2} \int_{\beta=0}^{y} \frac{2}{27}\, d\alpha\, d\beta =$$

$$\frac{2\times 4}{54} + \frac{2\times 4}{27} + \frac{3y}{27} + \frac{6y}{27} = \frac{y+1}{4}$$

ص ۴

ناحیه ۴: $0 \le x \le 3 ,\ y \ge 2$

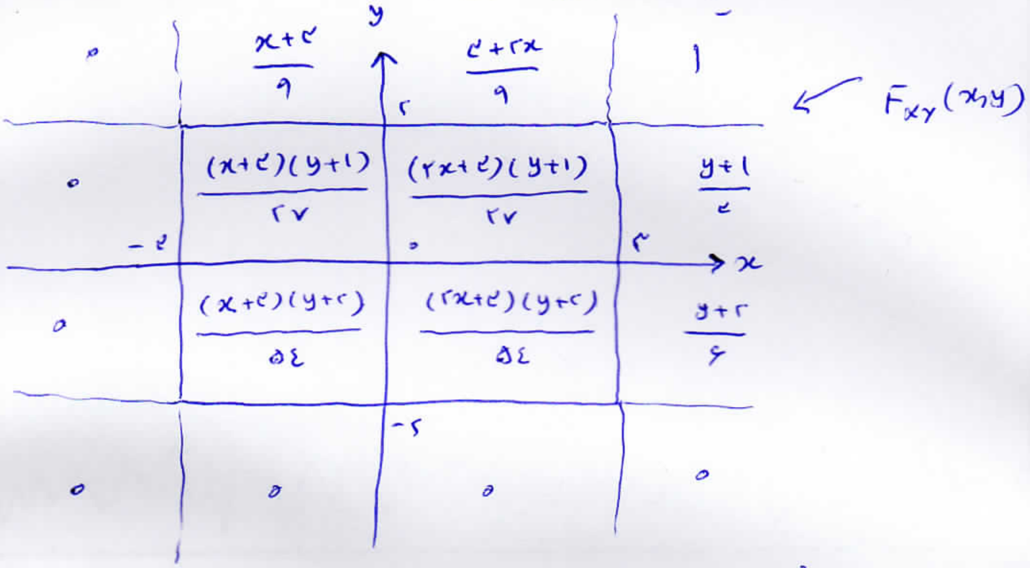


$$F_{XY}(x,y)=\int_{\alpha=-3}^{0}\int_{\beta=-2}^{0}\frac{1}{54}\,d\alpha\,d\beta+\int_{\alpha=-3}^{0}\int_{\beta=0}^{2}\frac{1}{27}\,d\alpha\,d\beta+\int_{\alpha=0}^{x}\int_{\beta=-2}^{0}\frac{1}{27}\,d\alpha\,d\beta+\int_{\alpha=0}^{x}\int_{\beta=0}^{2}\frac{2}{27}\,d\alpha\,d\beta$$

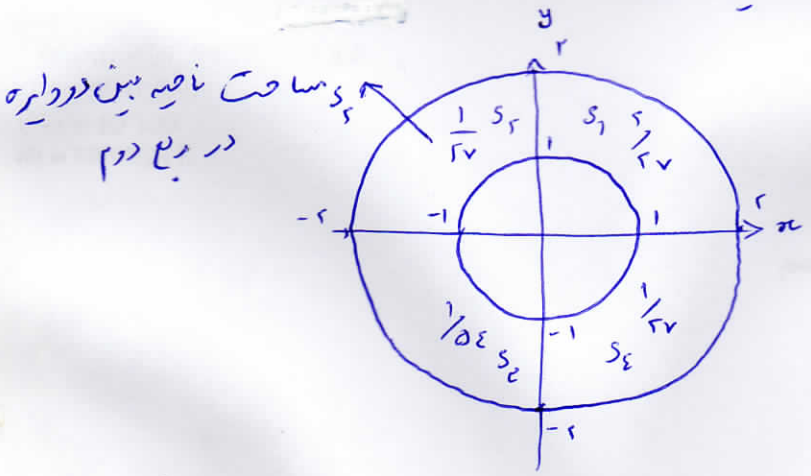
$$=\frac{2\times 3}{54}+\frac{2\times 3}{27}+\frac{2x}{27}+\frac{4x}{27}=\frac{3+2x}{9}$$

ناحیه ۵: $x \ge 3 ,\ y \ge 2 \qquad F_{XY}(x,y)=1$

نتایج بدست آمده در شکل زیر آورده شده است:



۲-ب- ناحیه مورد نظر بصورت زیر است:



$$S_1=S_2=S_3=S_4=\frac{1}{4}\left(\pi\times 2^2-\pi\times 1^2\right)=\frac{3\pi}{4}$$

$$\Pr\left(1\le X^2+Y^2\le 4\right)=\frac{2}{27}S_1+\frac{1}{27}S_2+\frac{1}{54}S_3+\frac{1}{27}S_4=\frac{1}{6}\times\frac{3\pi}{4}=\boxed{\frac{\pi}{8}}$$

۲-ج

$$\Pr\{-1\le X\le 2,\ -1<Y\le 2\}=F_{XY}(2,2)+F_{X}(-1,-1)-F_{XY}(-1,2)-F_{XY}(2,-1)$$

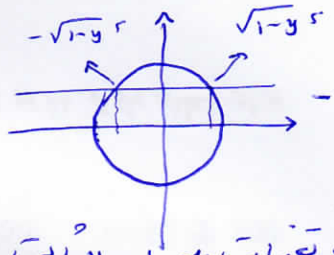
$$=\frac{3+2\times 2}{9}+\frac{2\times 1}{54}-\frac{2\times 3}{27}-\frac{7\times 1}{54}=\frac{25}{54}$$

۳ - الف - بخاطر ناحیه تعریف دایره‌ای شکل تابع چگالی احتمال بهتر است از دستگاه مختصات قطبی برای محاسبه سطح زیر رویه $f_{XY}(x,y)$ کمک بگیریم:

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} c\left(r^2+\tfrac{1}{2}\right) r\,dr\,d\theta = c\left[\theta\right]_0^{2\pi}\left[\tfrac{1}{4}r^4+\tfrac{1}{4}r^2\right]_0^1 = \pi c = 1$$

$$\rightarrow \boxed{c=\frac{1}{\pi}}$$

ب -



حدود تغییرات x برای y ثابت

$$f_Y(y)=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}(x^2+y^2+1)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{1-y^2}}(x^2+y^2+1)\,dx$$

بخاطر زوج بودن تابع زیر انتگرال

$-1\le y\le 1$

$$f_Y(y)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}+y^2x+x\right]_0^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}\left(\frac{1}{3}(1-y^2)+y^2+1\right) = \boxed{\frac{4\sqrt{1-y^2}}{3\pi}(2-y^2)} \quad -1\le y\le 1$$

$$E(Y)=\int_{-1}^{1} y f_Y(y)\,dy = \int_{-1}^{1} y\frac{4\sqrt{1-y^2}}{3\pi}(2-y^2)\,dy = 0$$

تابع زیر انتگرال فرد است و در بازه متقارن انتگرالش صفر خواهد بود.

ج -

$$E(XY)=\iint_{x^2+y^2\le 1} \overset{r\cos\theta}{x}\,\overset{r\sin\theta}{y}\,\overset{\frac{1}{\pi}(r^2+\frac{1}{2})}{f_{XY}(x,y)}\,\overset{r\,dr\,d\theta}{dx\,dy} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r^2\sin\theta\cos\theta\,\frac{1}{\pi}\left(r^2+\tfrac{1}{2}\right) r\,dr\,d\theta$$

$$E(XY)=\int_{\theta=0}^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_{r=0}^{1}\frac{r^5+\frac{1}{2}r^3}{\pi}\,dr = \left[\tfrac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{2\pi}\left[\frac{\frac{1}{6}r^6+\frac{1}{8}r^4}{\pi}\right]_0^1 = 0$$

$$E(X)=E(Y)=0 \rightarrow \boxed{cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0}$$

۴ - الف - برای محاسبه وزن احتمال از رابطه زیر کمک می‌گیریم:

$$f_{XY}(x,y)=F_{XY}(x,y)+F_{XY}(x^-,y^-)-F_{XY}(x,y^-)-F_{XY}(x^-,y)$$

که x^- مقدار قبلی x و y^- مقدار قبلی y در جدول توزیع تجمعی است، با اعمال رابطه فوق جدول تابع چگالی احتمال توأم $f_{XY}(x,y)$ بصورت جدول آورده شده در صفحه بعد خواهد بود:

$X \backslash Y$	۱	۳	۵	۷	$f_X(x)$
۲	۷/۱۲۰	۱۰/۱۲۰	۱۲/۱۲۰	۶/۱۲۰	۳۵/۱۲۰
۴	۲۱/۱۲۰	۹/۱۲۰	۱۴/۱۲۰	۱۱/۱۲۰	۵۵/۱۲۰
۶	۴/۱۲۰	۱۷/۱۲۰	۳/۱۲۰	۶/۱۲۰	۳۰/۱۲۰
$f_Y(y)$	۳۲/۱۲۰	۳۶/۱۲۰	۲۹/۱۲۰	۲۳/۱۲۰	

توابع چگالی احتمال کناری را بدست می‌آوریم

$$E(X) = ۲\times\frac{۳۵}{۱۲۰} + ۴\times\frac{۵۵}{۱۲۰} + ۶\times\frac{۳۰}{۱۲۰} = \frac{۴۷}{۱۲}$$

$$E(X^۲) = ۲^۲\times\frac{۳۵}{۱۲۰} + ۴^۲\times\frac{۵۵}{۱۲۰} + ۶^۲\times\frac{۳۰}{۱۲۰} = \frac{۳۵}{۲}$$

$$var(X) = E(X^۲) - E^۲(X) = \frac{۳۵}{۲} - \left(\frac{۴۷}{۱۲}\right)^۲ = \frac{۳۱۱}{۱۴۴}$$

$$E(Y) = ۱\times\frac{۳۲}{۱۲۰} + ۳\times\frac{۳۶}{۱۲۰} + ۵\times\frac{۲۹}{۱۲۰} + ۷\times\frac{۲۳}{۱۲۰} = \frac{۲۲۳}{۶۰}$$

$$var(Y) = E(Y^۲) - E^۲(Y) = \frac{۹۲}{۵} - \left(\frac{۲۲۳}{۶۰}\right)^۲ = \frac{۱۶۵۱۱}{۳۶۰۰}$$

$$E(Y^۲) = ۱^۲\times\frac{۳۲}{۱۲۰} + ۳^۲\times\frac{۳۶}{۱۲۰} + ۵^۲\times\frac{۲۹}{۱۲۰} + ۷^۲\times\frac{۲۳}{۱۲۰} = \frac{۹۲}{۵}$$

$$E(XY) = ۱\times۲\times\frac{۷}{۱۲۰} + ۱\times۴\times\frac{۲۱}{۱۲۰} + ۱\times۶\times\frac{۴}{۱۲۰} + ۳\times۲\times\frac{۱۰}{۱۲۰} + ۳\times۴\times\frac{۹}{۱۲۰} + ۳\times۶\times\frac{۱۷}{۱۲۰} + ۵\times۲\times\frac{۱۲}{۱۲۰} +$$
$$۵\times۴\times\frac{۱۴}{۱۲۰} + ۵\times۶\times\frac{۳}{۱۲۰} + ۷\times۲\times\frac{۶}{۱۲۰} + ۷\times۴\times\frac{۱۱}{۱۲۰} + ۷\times۶\times\frac{۶}{۱۲۰} = \frac{۱۷۳۰}{۱۲۰}$$

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{۱۷۳}{۱۲} - \frac{۴۷}{۱۲}\times\frac{۲۲۳}{۶۰} = ۰/۱۴۰۳$$

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)var(Y)}} = \frac{۰/۱۴۰۳}{\sqrt{\frac{۳۱۱}{۱۴۴}\times\frac{۱۶۵۱۱}{۳۶۰۰}}} = \boxed{۰/۰۴۴۶}$$

۵ -

$H_n =$ {تعداد شیر در n بار} $\qquad D_n = |H_n - T_n|$ قدر مطلق اختلاف تعداد شیر و خط در n بار پرتاب

در جدول زیر حالات مختلف ممکن برای پرتاب دو سکه آورده شده است که در هر حالت H_n , D_n هم محاسبه شده‌اند

حالت	TT	TH	HT	HH
احتمال	۱/۴	۱/۴	۱/۴	۱/۴
H_n	۰	۱	۱	۲
D_n	۲	۰	۰	۲

تابع وزن احتمال توأم $f_{HD}(h,d)$ با توجه به جدول قبل بصورت زیر خواهد بود:

$n=2$

$D_2 \backslash H_2$	0	1	2	$f_D(d)$
0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$f_H(h)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

$$E(D_2)=\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 2=\boxed{1}$$

$$var(D_2)=2-1^2=\boxed{1}$$

$$E(D_2^2)=\frac{1}{2}\times 0^2+\frac{1}{2}\times 2^2=\boxed{2}$$

$$E(H_2)=\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{4}\times 2=\boxed{1}$$

$$var(H_2)=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$E(H_2^2)=\frac{1}{4}\times 0^2+\frac{1}{2}\times 1^2+\frac{1}{4}\times 2^2=\boxed{\frac{3}{2}}$$

$$E(H_2D_2)=\frac{1}{4}\times 2\times 2=\boxed{1} \longrightarrow cov(H_2,D_2)=E(H_2,D_2)-E(H_2)E(D_2)=1-1=\boxed{0}$$

$$\rho(H_2,D_2)=\frac{cov(H_2,D_2)}{\sqrt{var(H_2)var(D_2)}}=0$$

در جدول زیر حالات مختلف برای پرتاب ۵ بار سکه آورده شده است:

حالت	پنج خط	چهار خط و یک شیر	سه خط و دو شیر	دو خط و سه شیر	یک خط و چهار شیر	پنج شیر
احتمال	$(\frac{1}{2})^5$	$\binom{5}{1}(\frac{1}{2})^5$	$\binom{5}{2}(\frac{1}{2})^5$	$\binom{5}{3}(\frac{1}{2})^5$	$\binom{5}{4}(\frac{1}{2})^5$	$(\frac{1}{2})^5$
H_5	0	1	2	3	4	5
D_5	5	3	1	1	3	5

تابع وزن احتمال توأم $f_{H_5D_5}(h,d)$ با توجه به جدول قبل بصورت زیر خواهد بود:

$D_5 \backslash H_5$	0	1	2	3	4	5	$f_{D_5}(d)$
1	0	0	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	0	0	$\frac{20}{32}$
3	0	$\frac{5}{32}$	0	0	$\frac{5}{32}$	0	$\frac{10}{32}$
5	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{2}{32}$
$f_{H_5}(h)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	

$$E(D_5)=1\times\frac{10}{16}+3\times\frac{5}{16}+5\times\frac{1}{16}$$

$$E(D_5)=\frac{30}{16}=\boxed{\frac{15}{8}}$$

$$E(D_5^2)=1^2\times\frac{10}{16}+3^2\times\frac{5}{16}+5^2\times\frac{1}{16}$$

$$E(D_5^2)=\frac{80}{16}=\boxed{5}$$

$$var(D_5)=5-\left(\frac{15}{8}\right)^2=\frac{95}{64}$$

$$E(H_5)=\frac{1}{32}(0+5)+\frac{5}{32}(1+4)+\frac{10}{32}(2+3)=\frac{80}{32}=\frac{5}{2}$$

$$var(H_5)=\frac{15}{2}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

$$E(H_5^2)=\frac{1}{32}(0^2+5^2)+\frac{5}{32}(1^2+4^2)+\frac{10}{32}(2^2+3^2)=\frac{15}{2}$$

$$cov(H_5,D_5)=\frac{25}{8}-\frac{15}{8}\times\frac{5}{2}=-\frac{25}{16}$$

$$E(H_5D_5)=1\times 3\times\frac{5}{32}+3\times 4\times\frac{5}{32}+5\times 5\times\frac{1}{32}=\frac{25}{8}$$

$$\rho_{H_5D_5}=\frac{cov(H_5,D_5)}{\sqrt{var(H_5)var(D_5)}}=-\frac{5}{\sqrt{114}}=-0.46829$$

ص ۸

در جدول زیر حالات مختلف برای آزمایش ۸ بار پرتاب سکه آورده شده است:

حالت	$n_T=8$	$n_T=7$	$n_T=6$	$n_T=5$	$n_T=4$	$n_T=3$	$n_T=2$	$n_T=1$	$n_T=0$
احتمال	$(\frac{1}{2})^8$	$\binom{8}{1}(\frac{1}{2})^8$	$\binom{8}{2}(\frac{1}{2})^8$	$\binom{8}{3}(\frac{1}{2})^8$	$\binom{8}{4}(\frac{1}{2})^8$	$\binom{8}{5}(\frac{1}{2})^8$	$\binom{8}{6}(\frac{1}{2})^8$	$\binom{8}{7}(\frac{1}{2})^8$	$(\frac{1}{2})^8$
H_8	0	1	2	3	4	5	6	7	8
D_8	8	6	4	2	0	2	4	6	8

تابع وزن احتمال توأم $f_{H_8D_8}(h,d)$ با توجه به جدول فوق بصورت زیر خواهد بود:

$D_8 \backslash H_8$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$f_{D_8}(d)$
0	0	0	0	0	$\frac{70}{256}$	0	0	0	0	$\frac{70}{256}$
2	0	0	0	$\frac{56}{256}$	0	$\frac{56}{256}$	0	0	0	$\frac{112}{256}$
4	0	0	$\frac{28}{256}$	0	0	0	$\frac{28}{256}$	0	0	$\frac{56}{256}$
6	0	$\frac{8}{256}$	0	0	0	0	0	$\frac{8}{256}$	0	$\frac{16}{256}$
8	$(\frac{1}{2})^8$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{256}$	$\frac{2}{256}$
$f_{H_8}(h)$	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$	

$$E(D_8)=\frac{112}{256}\times 2+\frac{56}{256}\times 4+\frac{16}{256}\times 6+\frac{2}{256}\times 8=\boxed{\frac{35}{16}}$$

$$E(D_8^2)=\frac{112}{256}\times 2^2+\frac{56}{256}\times 4^2+\frac{16}{256}\times 6^2+\frac{2}{256}\times 8^2=\boxed{8}$$

$$var(D_8)=8-\left(\frac{35}{16}\right)^2=\frac{823}{256}$$

$$E(H_8)=\frac{1}{256}\times(0+8)+\frac{8}{256}(1+7)+\frac{28}{256}(2+6)+\frac{56}{256}(3+5)+\frac{70}{256}\times 4=\boxed{4}$$

$$E(H_8^2)=\frac{1}{256}(0^2+8^2)+\frac{8}{256}(1^2+7^2)+\frac{28}{256}(2^2+6^2)+\frac{56}{256}(3^2+5^2)+\frac{70}{256}\times 4^2=\boxed{18}$$

$$var(H_8)=18-(4)^2=\boxed{2}$$

$$E(D_8H_8)=(2\times 3+2\times 5)\frac{56}{256}+(4\times 2+4\times 6)\frac{28}{256}+(6\times 1+6\times 7)\frac{8}{256}+8\times 8\,\frac{1}{256}=\frac{35}{4}$$

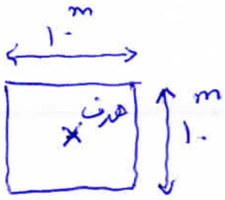
$$cov(D_8,H_8)=E(D_8H_8)-E(D_8)E(H_8)=\frac{35}{4}-\frac{35}{16}\times 4=0$$

$$\rightarrow \boxed{\rho(D_8,H_8)=0}$$

۶) الف -

$$\int_{t=-0.02\pi}^{0.02\pi}\int_{r=1200}^{1700} k r\,dr\,dt=1 \rightarrow k\,[t]_{-0.02\pi}^{0.02\pi}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{1200}^{1700}=1 \rightarrow k\times 0.04\pi\times 6\ldots=1 \rightarrow \boxed{k=\frac{1}{29000\pi}}$$

ب - باید احتمال ورود توپ در یک المان سطح بصورت زیر را بدست آوریم:



$$P_r(\text{انهدام هدف}) = \iint_S f_{RT}(r,t)\,ds = KS = 100 \times \frac{1}{36000\pi} = \frac{1}{360\pi}$$

ج - ابتدا باید تابع چگالی احتمال کناری $f_T(t)$, $f_R(r)$ را بدست آوریم:

$$f_T(t) = \int_r f_{RT}(r,t)\, r\, dr = \int_{r=1200}^{1700} K r\, dr = K\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{1200}^{1700} = \frac{1}{36000\pi} \times \frac{1}{2}(1700^2 - 1200^2) = \frac{50}{4\pi}$$

$$-0.04\pi < t < 0.04\pi$$

$$f_R(r) = \int_t f_{RT}(r,t)\, r\, dt = \int_{-0.04\pi}^{0.04\pi} K r\, dt = Kr\left[t\right]_{-0.04\pi}^{0.04\pi} = \frac{0.08\pi r}{36000\pi} = \frac{r}{600000} \qquad 1200 < r < 1700$$

$$E(T) = \int_{-0.04\pi}^{0.04\pi} t f_T(t)\, dt = 0$$ با توجه به فرد بودن تابع زیر انتگرال

$$E(T^2) = \int_{-0.04\pi}^{0.04\pi} t^2 f_T(t)\, dt = 2\int_0^{0.04\pi} t^2 \times \frac{50}{4\pi}\, dt = \frac{50}{4\pi} \times \frac{2}{3}(0.04\pi)^3 = \frac{9\pi^2}{20000}$$

$$var(T) = \frac{9\pi^2}{20000} \longrightarrow \sigma_T = \sqrt{var(T)} = \frac{3\pi}{100\sqrt{2}} = \boxed{0.0666}\ \text{rad}$$

$$E(R) = \int_{1200}^{1700} \frac{r^2}{600000}\, dr = \frac{1}{600000}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_{1200}^{1700} = \boxed{1509^m}$$

$$E(R^2) = \int_{1200}^{1700} \frac{r^3}{600000}\, dr = \frac{1}{600000}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_{1200}^{1700} = 916\ldots{}^{m^2}$$

$$var(R) = 916\ldots - (1509)^2 = 6858919\, m^2 \longrightarrow \sigma_R = \boxed{2624.5^m}$$

۲) $m_x = 1 \quad var(x) = 3 \quad m_y = 2\ ,\ var(y) = 4 \quad \rho_{xy} = -0.2$

الف - $E[z] = E[2x - y + 1] = 2E[x] - E[y] + 1 = 2m_x - m_y + 1 = 2 - 2 + 1 = \boxed{1}$

$$var[z] = var[2x - y + 1] = var[2x - y] = 2^2 var(x) + (-1)^2 var(y) - 2\times 2\, \underbrace{cov(x,y)}_{\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y}$$

$$= 4\times 3 + 4 - 4\times(-0.2)\times\sqrt{3\times 4} = 16 + 0.8\cdot 2\sqrt{3} = \boxed{18.77}$$

ب - $E[U] = mE[x] + E[y] = m + 2 \qquad E[V] = E[x - my] = E[x] - mE[y]$

$$E[V] = 1 - 2m$$

$$E[UV] = E[(mx + y)(x - my)] = E[mx^2 - m^2xy + yx - my^2] = mE[x^2] + (1 - m^2)E[xy] - mE[y^2]$$

$$= m\left[m_x^2 + var(x)\right] + (1 - m^2)\rho_{xy}\sqrt{var(x)\,var(y)} - m\left(m_y^2 + var(y)\right)$$

ص ۱۰

$$E[UV] = m[۱^۲+۳] - ۰/۲\sqrt{۳}\times ۴(۱-m^۲) - m(۲^۲+۴) = ۴m - ۰/\overbrace{۴\sqrt{۳}}^{۶,۹۲۸۲}(۱-m^۲) - ۸m$$

$$= ۶/۹۲۸۲\, m^۲ - ۴m - ۶,۹۲۸۲$$

$$\operatorname{cov}(u,v) = ۰ \longrightarrow E[UV] = E[U]E[V] \Rightarrow ۶,۹۲۸۲\, m^۲ - ۴m - ۶,۹۲۸۲ = (m+۲)(۱-۲m)$$

$$۸,۹۲۸۲\, m^۲ - m - ۸,۹۲۸۲ = ۰ \longrightarrow m = \frac{۱ \pm \sqrt{۱+۴\times(۸,۹۲۸۲)^۲}}{۲\times ۸,۹۲۸۲} \Longrightarrow \begin{cases} m_۱ = ۱,۰۵۷۶ \\ m_۲ = -۰,۹۴۵۶ \end{cases}$$

۸)

$$x + ۲y - ۱ = ۰ \longrightarrow y = \tfrac{۱}{۲}(۱-x) \longrightarrow \operatorname{var}(y) = \tfrac{۱}{۴}\operatorname{var}(x) = \boxed{۱}$$

$$\operatorname{cov}(x,y) = \operatorname{cov}\left(\tfrac{۱}{۲} - \tfrac{۱}{۲}x, x\right) = \operatorname{cov}\left(\tfrac{۱}{۲}, x\right) - \tfrac{۱}{۲}\underbrace{\operatorname{cov}(x,x)}_{\operatorname{var}(x)}$$

$$\operatorname{cov}\left(\tfrac{۱}{۲}, x\right) = \underbrace{E\left[\tfrac{۱}{۲}x\right]}_{\frac{۱}{۲}E[x]} - \underbrace{E\left[\tfrac{۱}{۲}\right]}_{\frac{۱}{۲}}E[x] = ۰$$

$$\operatorname{cov}(x,y) = ۰ - \tfrac{۱}{۲}\operatorname{var}(x) = -\tfrac{۱}{۲}\times ۴ = \boxed{-۲}$$

$$\rho(x,y) = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sqrt{\operatorname{var}(x)\operatorname{var}(y)}} = \frac{-۲}{\sqrt{۴\times ۱}} = \boxed{-۱}$$

یعنی x و y بطور کامل هم وابسته هستند

و تغییرات آنها در خلاف جهت یکدیگر است