ص۱

Subject : حل تمرین های سری دوم آمار و احتمال مهندسی

Year. Month.

۱ ـ $P_1 = K \quad P_2 = \frac{K}{2} \quad P_3 = \frac{K}{3} \quad P_4 = \frac{K}{4} \quad P_5 = \frac{K}{5} \quad P_6 = \frac{K}{6}$

$$\sum_{i=1}^{6} P_i = 1 \longrightarrow K + \frac{K}{2} + \frac{K}{3} + \frac{K}{4} + \frac{K}{5} + \frac{K}{6} = 1 \qquad \frac{(60+30+20+15+12+10)K}{60} = 1$$

$$\boxed{K = \frac{60}{147}}$$

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	جمع
$\frac{60}{147}$	$\frac{30}{147}$	$\frac{20}{147}$	$\frac{15}{147}$	$\frac{12}{147}$	$\frac{10}{147}$	$\frac{147}{147}=1$

$$Pr(E = \text{عدد فرد}) = Pr(X=1) + Pr(X=3) + Pr(X=5) = \frac{60}{147} + \frac{20}{147} + \frac{12}{147} = \frac{92}{147}$$

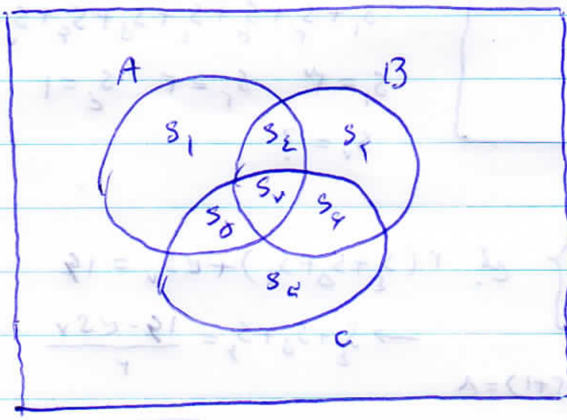
$$Pr(X<4) = Pr(X=1) + Pr(X=2) + Pr(X=3) = \frac{60}{147} + \frac{30}{147} + \frac{20}{147} = \frac{110}{147}$$

۲ ـ ابتدا شعاع دایره به مساحت $0/5\pi$ را بدست می آوریم:

$$\pi R^2 = 0.5\pi \Longrightarrow R = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Pr(S < 0.5\pi) = Pr\left(R < \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1/\sqrt{2}}{1} = 0.707$$

۳ ـ



$Pr(A \cup B \cup C) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7$

$Pr(A \cap B) = S_4 + S_7$

$Pr(A) = S_1 + S_4 + S_5 + S_7$

$Pr(B) = S_2 + S_4 + S_7 + S_6$

$Pr(C) = S_3 + S_5 + S_6 + S_7$

$Pr(A \cap B \cap C) = S_7$

$Pr(A \cap C) = S_5 + S_7$

$Pr(B \cap C) = S_6 + S_7$

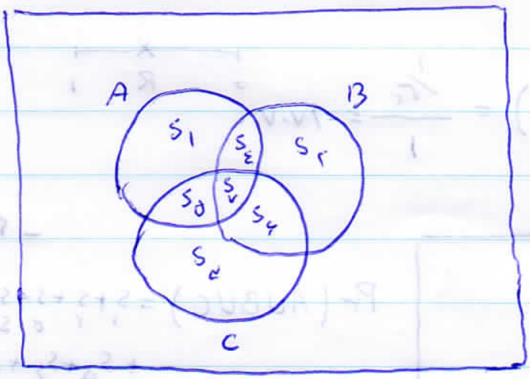
$$Pr(A)+Pr(B)+Pr(C) = s_1+s_4+s_5+s_7 + s_2+s_4+s_6+s_7 + s_3+s_5+s_6+s_7$$

$$s_1+s_2+s_3+2(s_4+s_5+s_6)+3s_7 = (s_1+s_2+s_3+s_4+s_5+s_6+s_7)+(s_4+s_7)+(s_5+s_7)+(s_6+s_7)-s_7$$

$$\to Pr(A)+Pr(B)+Pr(C) = Pr(A\cup B\cup C)+Pr(A\cap B)+Pr(A\cap C)+Pr(B\cap C)-Pr(A\cap B\cap C)$$

$$\to Pr(A\cap B\cap C) = Pr(A\cup B\cup C)+Pr(A\cap B)+Pr(A\cap C)+Pr(B\cap C)-Pr(A)-Pr(B)-Pr(C)$$

۴ - از نمودار ون شکل ۳ کمک می‌گیریم A رویداد عضو بسیج بودن B رویداد عضو انجمن علمی بودن و C رویداد عضو گروه سرود بودن



$$s_1+s_4+s_5+s_7 = 7$$
$$s_2+s_4+s_6+s_7 = 9$$
$$s_3+s_5+s_6+s_7 = 6$$
$$s_1+s_2+s_3+s_4+s_5+s_6+s_7 = 20-6$$
$$s_1 = 3 \quad s_2 = 2 \quad s_3 = 1$$
$$s_7 = ?$$

$$\left.\begin{aligned} s_4+s_5+s_7 &= 7-3 = 4\\ s_4+s_6+s_7 &= 9-2 = 7\\ s_5+s_6+s_7 &= 6-1 = 5\end{aligned}\right\} \text{جمع}\quad 2(s_4+s_5+s_6)+3s_7 = 16$$

$$\to s_4+s_5+s_6 = \frac{16-3s_7}{2}$$

$$s_4+s_5+s_6+s_7 = 14-(3+2+1) = 8$$

$$\frac{16-3s_7}{2}+s_7 = 8 \to -\frac{1}{2}s_7 = 8-8 = 0 \to \boxed{s_7 = 0}$$

$$\left\{\begin{aligned} s_4+s_5 &= 4\\ s_4+s_6 &= 7\\ s_5+s_6 &= 5\end{aligned}\right. \quad s_4-s_5 = 2 \to \left\{\begin{aligned} s_4 &= 3\\ s_5 &= 1\\ s_6 &= 4\end{aligned}\right.$$

Subject :
Year. Month.

الف - چون $S_7 = 0$ پس احتمال $Pr(A \cap B \cap C) = 0$

ب - $Pr(\text{عضویت در دو گروه}) = \frac{S_4 + S_5 + S_6}{20} = \frac{3+1+4}{20} = \boxed{0/4}$

ج - $Pr(A \cap C \cap B') = \frac{S_5}{20} = \frac{1}{20} = \boxed{0/05}$

۵ - دور سه کتاب بندی می‌بندیم. خود این سه کتاب در داخل بند $n_1 = 3! = 6$ حالت جایگشت مختلف دارند. حال با فرض جایگشت معلوم برای سه کتاب آنرا با شش کتاب دیگر باید در ۷ جایگاه مرتب کنیم که $n_2 = 7! = 5040$ حالت مختلف برای آن وجود دارد. بنابراین بطور کلی

تعداد کل حالات ممکن $n_1 \times n_2 = 6 \times 5040 = 30240$

۶ - جمعیت دوازده نفره زنها را به دو گروه یکی ۱۰ نفره متاهل و یک گروه ۲ نفره مجرد تقسیم می‌کنیم و جمعیت مردها همگی متاهل هستند.

حالت اول - دو خواهر مجرد باشند و یک خواهر متاهل، تعداد حالات مختلف انتخاب دو زن مجرد برابر است با: $n_1 = \binom{3}{2} \times \binom{9}{0} = 3$

حال با فرض مشخص بودن دو زن مجرد انتخاب مردان برای همسر بصورت زیر خواهد بود:

مرد ۱۰	مرد ۹	مرد ۸	مرد ۷	مرد ۶	مرد ۵	مرد ۴	مرد ۳	برادر ۲	برادر ۱
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۸	۹

$n_2 = 9 \times 8 \times 8 \times 8! \Rightarrow N_1 = n_1 \cdot n_2 = 216 \times 8! = 8{,}709{,}120$

حالت دوم - یک خواهر مجرد و دو خواهر متاهل، تعداد حالات انتخاب دو زن مجرد برابر خواهد بود با: $n_1 = \binom{3}{1} \times \binom{9}{1} = 27$

ص۴

Subject :

Year. Month.

حال با فرض مشخص بودن زنان مجرد، تعداد حالات ممکن برای انتخاب همسر مردان بصورت زیر بدست می‌آید:

برادر ۱	برادر ۲	مرد ۳	...	مرد ۱۰
۸	۷	۸		۱

$\Rightarrow n_2 = 56\times 8!$

$N_2 = n_1 n_2 = 27\times 56\times 8! = 60,963,840$

حالت ۳: هیچیک از سه خواهر مجرد نباشند، تعداد حالات ممکن برای انتخاب دو زن مجرد بصورت زیر خواهد بود:

$$n_1 = \binom{3}{0}\binom{9}{2} = \frac{9\times 8}{2} = 36$$

حال با فرض مشخص بودن وضعیت زنان مجرد، تعداد حالات ممکن برای انتخاب همسران مردان بصورت زیر بدست می‌آید:

برادر ۱	برادر ۲	مرد ۳	...	مرد ۱۰
۷	۶	۸		۱

$\Rightarrow n_2 = 42\times 8!$

$N_3 = n_1 n_2 = 36\times 42\times 8! = 60,963,840$

بنابراین تعداد کل حالات از جمع حالات سه‌گانه بدست می‌آید:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 8,709,120 + 60,963,840 + 60,963,840$$

$$\boxed{N = 130,636,800}$$

۷- در حالت اول که جنسیت افراد مهم نیست باید ۸ نفر را در ۵ طبقه توزیع کنیم، مسأله گوی و کیسه برای ۸ گوی و ۵ کیسه را حل می‌کنیم:

$$n = \binom{8+5-1}{8} = \frac{12!}{8!\times 4!} = \frac{12\times 11\times 10\times 9}{4\times 3\times 2\times 1} = 495$$

در حالت دوم که ۵ مرد و ۳ زن باید در ۵ طبقه پیاده شوند، باید تعداد حالات

Subject :
Year. Month.

چینش ۵ مرد، ۳ زن و ۵-۱ حائل در یک صف را حل کنیم:

$$N=\binom{5+3+5-1}{5\quad 3\quad 4}=\frac{12!}{5!\times 3!\times 4!}=\frac{6\times7\times8\times9\times10\times11\times12}{3\times2\times1\times4\times3\times2\times1}=27720$$

۸ – برنده شدن آقای حسنی E اولین مهره قرمز در بار iام درآید R_i

$$Pr(E)=\sum_{i=0}^{3}Pr(R_{2i+1})\qquad Pr(R_i)=Pr(B_{i-1})\times Pr(R'_i\mid B_{i-1})$$

B_{i-1} رویداد سیاه بودن $(i-1)$ گوی انتخاب شده

R'_i انتخاب قرمز بودن گوی iام

$$Pr(B_{i-1})=\frac{\binom{7}{i-1}\binom{3}{0}}{\binom{10}{i-1}}=\frac{\frac{7!}{(i-1)!\,(7-i+1)!}}{\frac{10!}{(i-1)!\,(10-i+1)!}}=\frac{(11-i)!\times 7!}{(8-i)!\times 10!}$$

$$Pr(B_{i-1})=\frac{(11-i)\times(10-i)\times(9-i)}{10\times9\times8}\qquad i=2,\dots,8$$

اگر $i-1$ گوی سیاه از جعبه خارج شده باشد در کیسه ۳ مهره قرمز و $8-i$ مهره سیاه داریم که احتمال خروج مهره قرمز در انتخاب iام برابر خواهد بود:

$$Pr(R'_i\mid B_{i-1})=\frac{3}{11-i}\qquad i=1,2,\dots,8$$

$$Pr(R_i)=\frac{(11-i)(10-i)(9-i)}{10\times9\times8}\times\frac{3}{11-i}=\frac{(10-i)(9-i)}{240}$$

$$Pr(E)=Pr(R_1)+Pr(R_3)+Pr(R_5)+Pr(R_7)$$

$$Pr(E)=\frac{9\times8}{240}+\frac{7\times6}{240}+\frac{5\times4}{240}+\frac{3\times2}{240}=\frac{72+42+20+6}{240}=\frac{140}{240}=\frac{7}{12}$$

SINACO

Subject :
Year. Month.

۹ـ N رویداد شب بودن و R رویداد بارندگی

$Pr(R|N)=0.17$ $\quad Pr(R|\bar N)=0.09$ $\quad Pr(N)=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$

$Pr(\bar N|R)=?$

$$Pr(\bar N|R)=\frac{Pr(R|\bar N)Pr(\bar N)}{Pr(R|\bar N)Pr(\bar N)+Pr(R|N)Pr(N)}$$

$$=\frac{0.09\times(1-\frac{7}{12})}{0.09\times(1-\frac{7}{12})+0.17\times\frac{7}{12}}=\frac{5\times0.09}{5\times0.09+7\times0.17}=0.274$$

۱۰ـ E رویداد اتصال داشتن A, B ؛ C_i بسته بودن کلید i

الف ـ $Pr(E|C_5)=Pr\big((C_1\cup C_2)\cap(C_3\cup C_4)|C_5\big)$

با توجه به مستقل بودن رویدادهای $C_1\cup C_2|C_5$ و $C_3\cup C_4|C_5$ داریم:

$$Pr(E|C_5)=Pr(C_1\cup C_2|C_5)\times Pr(C_3\cup C_4|C_5)$$

از طرفی $C_1\cup C_2$ و $C_3\cup C_4$ مستقل از C_5 هستند، لذا:

$$Pr(E|C_5)=Pr(C_1\cup C_2)\times Pr(C_3\cup C_4)$$

$$Pr(C_1\cup C_2)=Pr(C_1)+Pr(C_2)-Pr(C_1\cap C_2)$$

$$Pr(C_3\cup C_4)=Pr(C_3)+Pr(C_4)-Pr(C_3\cap C_4)$$

از طرفی C_1، C_2 و همچنین C_3، C_4 مستقل هستند بنابراین

$Pr(C_1\cap C_2)=Pr(C_1)\times Pr(C_2)$ $\quad Pr(C_3\cup C_4)=Pr(C_3)\times Pr(C_4)$

$$\Rightarrow Pr(E|C_5)=(9+9-9\times9)^2=(1.8-0.81)^2=0.9801$$

SINACO

Subject :
Year. Month.

ب - $Pr(E|\bar{e}_5) = Pr\left((e_1 \cap e_2) \cup (e_3 \cap e_4) \,|\, \bar{e}_5\right)$

$= Pr(e_1 \cap e_2 | \bar{e}_5) + Pr(e_3 \cap e_4 | \bar{e}_5) - Pr(e_1 \cap e_2 \cap e_3 \cap e_4 | \bar{e}_5)$

امّا با توجه به مستقل بودن e_i ها داریم:

$Pr(e_1 \cap e_2 | \bar{e}_5) = Pr(e_1 \cap e_2) = Pr(e_1)Pr(e_2) = q^2$

$Pr(e_3 \cap e_4 | \bar{e}_5) = Pr(e_3 \cap e_4) = Pr(e_3)Pr(e_4) = q^2$

$Pr(e_1 \cap e_2 \cap e_3 \cap e_4 | \bar{e}_5) = Pr(e_1 \cap e_2 \cap e_3 \cap e_4) = Pr(e_1)Pr(e_2)Pr(e_3)Pr(e_4) = q^4$

$\Rightarrow Pr(E|\bar{e}_5) = q^2 + q^2 - q^4 = 2(0/9)^2 - (0/9)^4 = 0/9639$

ج - $Pr(E) = Pr(E|e_5)Pr(e_5) + Pr(E|\bar{e}_5)Pr(\bar{e}_5)$

$= 0/9801 \times 0/9 + 0/9639 \times (1 - 0/9) = \boxed{0/97848}$