دانشگاه صنعتی شاهرود **دانشکده علوم ریاضی**

سری ششم تمرینات درس معادلات دیفرانسیل **تاریخ تحویل: ۹۹/۳/۲۹**

معادلات انتگرالی زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید:

(۱) $y'(x) + 2y(x) + \int_0^x y(t)dt = 0, \quad y(0) = 1$

(۲) $y(t) = e^{-t} + \int_0^t u^2 y''(t-u)du,\ y(0) = 1, y'(0) = 0$

مطلوبست محاسبه:

(۳) $L[e^{-t}\int_0^t (cos^2 x)dx]$

(۴) $L[H(t-\frac{\pi}{2})(e^{3t}(2sint + cos2t))]$

(۵) $L(t^2 e^{-t} cost)$

(۶) $L^{-1}[Ln(1+\frac{1}{s^2})]$

(۷) $L^{-1}[\frac{e^{-\pi s}}{(s-1)^4 - 16}]$

(۸) جواب مساله مقدار اولیه زیر را بیابید:

$$x'' + x = t[1 - H(t-2)],\ t \geq 0,\ x(0) = x'(0) = 0.$$

موفق باشید.

پاسخ سری ششم تمرینات درس معادلات دیفرانسیل		۱۳۹۹/۳/۲۹

$$y' + ۲y + \int_{۰}^{x} y(t)dt = ۰ \ , \ \ y(۰) = ۱ \qquad (۱)$$

روش اول : تبدیل لاپلاس

$$L[y' + ۲y + \int_{۰}^{x} y(t)dt] = ۰ \quad \to \quad sL[y] - ۱ + ۲L[y] + \frac{۱}{s}L[y] = ۰$$

$$\to \quad (s + ۲ + \frac{۱}{s})L[y] = ۱ \quad \to \quad L[y] = \frac{s}{s^{۲} + ۲s + ۱} = \frac{۱}{s+۱} - \frac{۱}{(s+۱)^{۲}}$$

$$\to \quad y(x) = L^{-۱}[\frac{۱}{s+۱} + (\frac{۱}{s+۱})'] = e^{-x} - xe^{-x} \qquad \to \quad y(x) = (۱ - x)e^{-x}$$

روش دوم : تبدیل معادله به معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

ابتدا توجه می کنیم که با توجه به صورت مساله داریم : $y'(۰) + ۲y(۰) + \int_{۰}^{۰} y(t)dt = ۰$ یعنی $y'(۰) = -۲$.

ازطرفین معادله مشتق می‌گیریم و به معادله مرتبه دوم با شرایط اولیه زیر می رسیم:

$$y'' + ۲y' + y = ۰ \ , \ \ y(۰) = ۱, y'(۰) = -۲$$

این معادله، یک معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت است. معادله مشخصه آن برابر است با $m^{۲} + ۲m + ۱ = ۰$ که ریشه مضاعف $m = -۱$ دارد. پس جواب معادله به صورت $y = (at + b)e^{-t}$ خواهد بود و با توجه به شرایط اولیه معادله داریم $b = ۱ \ , \ a - b = -۲$ که نتیجه می دهد $a = -۱$ و جواب نهایی معادله عبارت است از :

$$y = (۱ - t)e^{t}$$

$$y(t) = e^{-t} + \int_{۰}^{t} u^{۲} y''(t - u)du \ , \quad y(۰) = ۱, y'(۰) = -۱ \qquad (۲)$$

تذکر : در این معادله انتگرالی ، شرایط اولیه داده شده در صورت مساله ضروری نیستند و به کمک خود معادله می توان به این شرایط دست پیدا کرد. اگر در صورت معادله قرار دهیم $t = ۰$ خواهیم داشت :

$$y(۰) = e^{۰} + \int_{۰}^{۰} u^{۲} y''(۰ - u)du \ \to \ y(۰) = ۱ + ۰ = ۱$$

اگر تابع دارای مشتق سوم باشد آنگاه با مشتق‌گیری از طرفین معادله خواهیم داشت :

$$y'(t) = -e^{-t} + t^{۲} y''(۰) + \int_{۰}^{t} u^{۲} y'''(t - u)du$$

اکنون اگر در این تساوی مقدار $t = ۰$ را قرار دهیم داریم :

$$y'(۰) = -e^{۰} + ۰^{۲} y''(۰) + \int_{۰}^{۰} u^{۲} y'''(۰ - u)du \qquad \to \qquad y'(۰) = -۱$$

و اگر تابع $y(t)$ دارای مشتق مرتبه چهارم باشد می توان $y''(۰)$ را هم به همین روش پیدا کرد و . . .

پاسخ سری ششم تمرینات درس معادلات دیفرانسیل ۱۳۹۹/۳/۲۹

روش اول : تبدیل لاپلاس $L[y(t)]=L[e^{-t}+\int_{0}^{t}u^{2}y''(t-u)du]$

$$L[y]=L[e^{-t}]+L[t^{2}]L[y''] \;\rightarrow\; L[y]=\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s^{3}}\times(s^{2}L[y]-s+1)$$

$$\rightarrow(1-\frac{2}{s})L[y]=\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s^{2}}+\frac{2}{s^{3}} \;\rightarrow\; L[y]=\frac{s^{3}-2s^{2}+2}{s^{2}(s+1)(s-2)}=\frac{1}{3(s+1)}+\frac{1}{6(s-2)}-\frac{1}{s^{2}}+\frac{1}{2s}$$

$$\rightarrow\; y(t)=L^{-1}[\frac{1}{3(s+1)}+\frac{1}{6(s-2)}-\frac{1}{s^{2}}+\frac{1}{2s}] \;\rightarrow\; y(t)=1+\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{2t}-t+\frac{1}{2}$$

روش دوم : حذف انتگرال و رسیدن به معادله دیفرانسیل مرتبه اول

به کمک روش انتگرالگیری جزء به جزء داریم :

$$\int_{0}^{t}u^{2}y''(t-u)du=-u^{2}y'(t-u)\big|_{0}^{t}+2\int_{0}^{t}uy'(t-u)du=-t^{2}y'(0)\big|_{0}^{t}+2\int_{0}^{t}uy'(t-u)du$$

$$=t^{2}+2\int_{0}^{t}uy'(t-u)du$$

با استفاده مجدد از روش انتگرالگیری جزء به جزء داریم :

$$\int_{0}^{t}uy'(t-u)du=-uy(t-u)\big|_{0}^{t}+\int_{0}^{t}y(t-u)du=-y(0)t+\int_{0}^{t}y(t-u)du=-t+\int_{0}^{t}y(t-u)du$$

بنابر این $\int_{0}^{t}u^{2}y''(t-u)du=t^{2}-2t+2\int_{0}^{t}y(t-u)du$ و معادله به صورت زیر نوشته می شود.

$$y(t)=e^{-t}+t^{2}-2t+2\int_{0}^{t}y(t-u)du=e^{-t}+t^{2}-2t+2\int_{0}^{t}y(t)du$$

اکنون از طرفین تساوی مشتق می گیریم : $y'(t)=-e^{-t}+2t-2+2y(t)$

این یک معادله مرتبه اول خطی با شرط اولیه $y(0)=1$ است و به راحتی حل می شود.

$$y(t)=e^{\int 2dt}(c+\int(-e^{-t}+2t-2)e^{-\int 2dt}dt)=e^{2t}(c+\int(-e^{-t}+2t-2)e^{-2t}dt)$$

$$=e^{2t}(c+\int(-e^{-3t}+2(t-1)e^{-2t})dt)=e^{2t}(c+\frac{1}{3}e^{-3t}+(-t+\frac{1}{2})e^{-2t})$$

$$=ce^{2t}+\frac{1}{3}e^{-t}-t+\frac{1}{2}$$

با توجه به شرط اولیه $y(0)=1$ داریم $c=\frac{1}{6}$ و جواب نهایی معادله عبارت است از :

$$y(t)=\frac{1}{6}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{-t}-t+\frac{1}{2}$$

پاسخ سری ششم تمرینات درس معادلات دیفرانسیل		۱۳۹۹/۳/۲۹

---

(۳)
$$L[\int_{۰}^{t}\cos^{۲}x\,dx]=\frac{۱}{s}L[\cos^{۲}x]=\frac{۱}{۲s}L[۱+\cos ۲x]=\frac{۱}{۲s}(\frac{۱}{s}+\frac{s}{s^{۲}+۴})=\frac{s^{۲}+۲}{s^{۲}(s^{۲}+۴)}$$
$$L[e^{-t}\int_{۰}^{t}\cos^{۲}x\,dx]=\frac{(s+۱)^{۲}+۲}{(s+۱)^{۲}((s+۱)^{۲}+۴)}$$

(۴)
$$L[۲\cos t-\cos ۲t]=\frac{۲s}{s^{۲}+۱}-\frac{s}{s^{۲}+۴}=\frac{s(s^{۲}+۷)}{(s^{۲}+۱)(s^{۲}+۴)}$$

$$F(s)=L[H(t-\frac{\pi}{۲})(e^{۳t}(۲\sin t+\cos ۲t))]=e^{-\frac{\pi}{۲}s}L[e^{۳(t+\frac{\pi}{۲})}(۲\sin(t+\frac{\pi}{۲})+\cos ۲(t+\frac{\pi}{۲}))]$$
$$=e^{-\frac{\pi}{۲}s}L[e^{۳(t+\frac{\pi}{۲})}(۲\cos t-\cos ۲t)]=e^{\frac{\pi}{۲}(۳-s)}L[e^{۳t}(۲\cos t-\cos ۲t)]$$
$$=\frac{(s-۳)((s-۳)^{۲}+۷)}{((s-۳)^{۲}+۱)((s-۳)^{۲}+۴)}e^{\frac{\pi}{۲}(۳-s)}$$

(۵)
$$L[\cos t]=\frac{s}{s^{۲}+۱}\quad\rightarrow\quad L[t^{۲}\cos t]=(\frac{s}{s^{۲}+۱})''=\frac{۲s(s^{۲}-۳)}{(s^{۲}+۱)^{۳}}$$
$$L[t^{۲}e^{-t}\cos t]=\frac{۲(s+۱)((s+۱)^{۲}-۳)}{((s+۱)^{۲}+۱)^{۳}}$$

(۶) چون $(\ln(۱+\frac{۱}{s^{۲}}))'=\frac{۲s}{s^{۲}+۱}-\frac{۲}{s}$ و $L^{-۱}[\frac{۲s}{s^{۲}+۱}-\frac{۲}{s}]=۲(\cos t-۱)$ بنابر این
$$L^{-۱}[\ln(۱+\frac{۱}{s^{۲}})]=L^{-۱}[\int_{s}^{\infty}(\frac{۲s}{s^{۲}+۱}-\frac{۲}{s})ds]=\frac{۱}{t}L^{-۱}[\frac{۲s}{s^{۲}+۱}-\frac{۲}{s}]=\frac{۲}{t}(\cos t-۱)$$

(۷)
$$L^{-۱}[\frac{۱}{(s-۱)^{۴}-۱۶}]=L^{-۱}[\frac{۱}{(s+۱)(s-۳)((s-۱)^{۲}+۴)}]$$
$$=\frac{۱}{۳۲}L^{-۱}[\frac{-۱}{s+۱}+\frac{۱}{s-۳}-\frac{۴}{(s-۱)^{۲}+۴}]=\frac{۱}{۳۲}(-e^{-t}+e^{۳t}-۲e^{t}\sin ۲t)$$

پاسخ سری ششم تمرینات درس معادلات دیفرانسیل　　　　۱۳۹۹/۳/۲۹

$$x''+x=t[1-H(t-2)]\ ,\ t\geq 0,\ x(0)=x'(0)=0 \tag{8}$$

روش اول : تبدیل لاپلاس

$$L[x''+x]=L[t[1-H(t-2)]] \quad\rightarrow\quad (s^2+1)L[x]=-L'[1-H(t-2)]$$

$$\rightarrow\quad (s^2+1)L[x]=-\left(\frac{1-e^{-2s}}{s}\right)'=-\frac{-1+(2s+1)e^{-2s}}{s^2}$$

$$\rightarrow\quad L[x]=\frac{1-(2s+1)e^{-2s}}{s^2(s^2+1)} \quad\rightarrow\quad L[x]=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}-e^{-2s}\left(\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}-\frac{2s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$\rightarrow\quad L[x]=L[t-\sin t]-e^{-2s}L[2+t-2\cos t-\sin t]$$

$$\rightarrow\quad x(t)=t-\sin t-H(t-2)[2+(t-2)-2\cos(t-2)-\sin(t-2)]$$

$$\rightarrow\quad x(t)=t-\sin t+H(t-2)[-t+2\cos(t-2)+\sin(t-2)]$$

روش دوم : معادله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم.

$$x''+x=\begin{cases} t & 0\leq t<2 \\ 0 & 2\leq t \end{cases} \quad ,\ x(0)=x'(0)=0$$

با شرط $0\leq t<2$ داریم $x''+x=t$ که جواب عمومی آن به صورت $x(t)=A\sin t+B\cos t+t$ خواهد بود و با توجه به شرایط اولیه مساله داریم : $x(t)=t-\sin t \quad ,\ 0\leq t<2$

اما با شرط $t\geq 2$ داریم $x''+x=0$ که جواب عمومی آن به صورت $x(t)=A\sin t+B\cos t$

تا اینجا داریم : $x(t)=\begin{cases} t-\sin t & 0\leq t<2 \\ A\sin t+B\cos t & 2\leq t \end{cases}$ و $x'(t)=\begin{cases} 1-\cos t & 0\leq t<2 \\ A\cos t-B\sin t & 2\leq t \end{cases}$

برای پیدا کردن پارامترهای A و B توجه می کنیم که تابع $x(t)$ باید در نقطه $t=2$ مشتقپذیر و در نتیجه پیوسته باشد. با توجه به این دو شرط، دستگاه معادله $\begin{cases} A\sin 2+B\cos 2=2-\sin 2 \\ A\cos 2-B\sin 2=1-\cos 2 \end{cases}$ ساخته می شود.

از حل این دستگاه داریم : $A=2\sin 2+\cos 2-1 \quad , \quad B=-\sin 2+2\cos 2$

و در نتیجه :

$$\begin{aligned} A\sin t+B\cos t &=(2\sin 2+\cos 2-1)\sin t+(-\sin 2+2\cos 2)\cos t \\ &=2(\sin 2\sin t+\cos 2\cos t)+\sin t\cos 2-\sin 2\cos t-\sin t \\ &=2\cos(t-2)+\sin(t-2)-\sin t \end{aligned}$$

جواب نهایی معادله عبارت است از :

$$x(t)=\begin{cases} t-\sin t & 0\leq t<2 \\ 2\cos(t-2)+\sin(t-2)-\sin t & 2\leq t \end{cases}$$