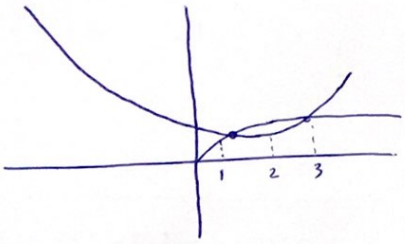
یا علی

رضا ادینه پور
۹۸۱۴۳۰۳
امتحان پایانترم محاسبات عددی
گروه ۲

#1 $(x-2)^2 - \ln(x) = 0$

$\varepsilon = 0.01$ → در نظر گرفته شده است



=>

با رسم هردو منحنی مشاهده می‌شود که در فاصله $[0,3]$ دو ریشه مثبت موجود است

ابتدا ریشه کوچکتر را پیدا می‌کنیم : $[1,2]$ → $f(a)=1$, $f(b)=-0.6$ => $f(a)f(b)<0$

a b

→ پس در این بازه حتما یک ریشه داریم

$c_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5$ → $f(1)f(c_1)<0$ → بازه بعدی : $[1, 1.5]$

$c_2 = \frac{a+c_1}{2} = 1.25$ → $f(1)f(c_2)<0$, $c_3 = \frac{a+c_2}{2} = 1.375$ → $f(1)f(c_3)<0$

K	a	b	c
0	1	2	1.5
1	1	1.5	1.25
2	1.25	1.5	1.375
3	1.375	1.5	1.437
4	1.375	1.437	1.406
5	1.406	1.437	1.421
6	1.406	1.421	1.414 ✓ → $f(c_6) = -0.003$

ریشه بزرگتر : $[2, 3.5]$ → $f(a) = -0.69$, $f(b) = 0.99$ → $f(a)f(b)<0$ ریشه داریم

a b

$c_1 = \frac{a+b}{2} = 2.75$ → $f(a)f(c_1)<0$

$c_2 = \frac{c_1+b}{2} = 3.125$ → $f(c_2)f(b)<0$

$c_3 = \frac{c_2+b}{2} = 2.93$ → $f(b)f(c_3)<0$

⋮

K	a	b	c
0	2	3.5	2.75
1	2.75	3.5	3.125
2	2.75	3.125	2.93
3	2.93	3.125	3.03
4	3.03	3.125	3.08
5	3.03	3.08	3.05
6	3.05	3.07	3.06
7	3.05	3.06	3.06 ✓ → $f(c_7) = 0.006$

بالطبع

رضا ادینه پور
۹۸۱۴۳۰۳
امتحان پایانترم محاسبات عددی
گروه ۲

#2 $I = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$ $\quad h = 0.2$

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$f(x)$	0	0.16	0.26	0.32	0.35	0.36

$$I \approx \frac{0.2}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_4 + f_5\right) = 0.1\left(0 + 2(0.16) + 2(0.26) + 2(0.32) + 2(0.35) + 0.36\right) \approx 0.254$$

$$ET = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi) = -\frac{(0.2)^2}{12}f''(\xi) = \frac{-1}{300}f''(\xi), \quad 0 < \xi < 1$$

$$\Rightarrow |ET| \le \frac{1}{300}\max_{0\le x\le 1}|f''(\xi)|$$

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$$

$$f''(x) = xe^{-x} - 2e^{-x} \rightarrow |f''| = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{|ET| \le \frac{1}{30}}$$

اگر بازه انتگرال به N قسمت تقسیم شود $\rightarrow h = \frac{1}{N} \Rightarrow |ET| = \frac{h^2}{12}|f''(\xi)| \le \frac{1}{12N^2}\max_{0\le x\le 1}|f''(x)|$

$$\le \frac{1}{12N^2} \le \frac{1}{2}\times 10^{-6} \Longrightarrow N \ge \frac{500\sqrt{6}}{3} > 408$$ نقطه

یاالطیف

رضا ادینه پور
۹۸۱۴۳۰۳
امتحان پایانترم محاسبات عددی
گروه ۲

#3 $\begin{cases} f(x,y) = x^3 + y^2 \ , \ y(0) = 0.5 \\ [0, 0.3] \\ h = 0.1 \end{cases}$

تیلور مرتبه ۳

$$y(x_1) \approx y(x_0) + h y'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_0)$$

$$\begin{cases} y' = x^3 + y^2 \ , \ y'(0) = 1 \\ y'(0) = 0.25 \\ y'' = 3x^2 + 2yy' \longrightarrow y''(0) = 0.25 \\ y''' = 6x + 2\left((y')^2 + yy''\right) \longrightarrow y'''(0) = 0.375 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(0.1) \approx 0.5 + 0.1(0.25) + \frac{(0.1)^2}{2!}(0.25) + \frac{(0.1)^3}{3!}(0.375) \simeq 0.526$$

$$\begin{cases} y'(0.1) = (0.1)^3 + \left(y(0.1)\right)^2 = 0.001 + (0.526)^2 = 0.277676 \\ y''(0.1) = 3(0.1)^2 + 2y(0.1)\,y'(0.1) = 0.342107 \\ y'''(0.1) = 6(0.1) + 2\left(\left(y'(0.1)\right)^2 + y(0.1)\,y''(0.1)\right) = 0.93415 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(0.2) = 0.526 + 0.1(0.277676) + \frac{(0.1)^2}{2!}(0.342107) + \frac{(0.1)^3}{3!}(0.93415) = 0.555$$

$$\begin{cases} y'(0.2) = (0.2)^3 + \left(y(0.2)\right)^3 = 0.1789 \\ y''(0.2) = 3(0.2)^2 + 2y(0.2)\,y'(0.2) = 0.222 \\ y'''(0.2) = 6(0.2) + 2\left(\left(y'(0.2)\right)^2 + y(0.2)\,y''(0.2)\right) = 1.510 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(0.3) \approx 0.555 + 0.1(0.1789) + \frac{(0.1)^2}{2!}(0.222) + \frac{(0.1)^3}{3!}(1.510) = 0.574$$

یاالطیف

رضا ادینه پور
۹۸۱۴۳۰۳
امتحان پایانترم محاسبات عددی

#4

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 6y + t \quad ; \quad x(0) = 5 \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y + 4 \quad ; \quad y(0) = -4 \\ h = 0.1 \ , \ [0, 0.2] \ , \ \text{رانگ کوتا مرتبه 4} \end{cases}$$

$$f(t, y, x) = x + 3y + 4$$
$$g(t, y, x) = -3x + 6y + t$$
$$\Rightarrow$$

$$k_1 = h(x_i + 3y_i + 4)$$
$$k_2 = h\left((x_i + \frac{k_1}{2}) + 3(y_i + \frac{l_1}{2}) + 4\right)$$
$$k_3 = h\left((x_i + \frac{k_2}{2}) + 3(y_i + \frac{l_2}{2}) + 4\right)$$
$$k_4 = h\left((x_i + k_3) + 3(y_i + l_3) + 4\right)$$

$$l_1 = h(-3x_i + 6y_i + t_i)$$
$$l_2 = h\left(-3(x_i + \frac{k_1}{2}) + 6(y_i + \frac{l_1}{2}) + t\right)$$
$$l_3 = h\left(-3(x_i + \frac{k_2}{2}) + 6(y_i + \frac{l_2}{2}) + t\right)$$
$$l_4 = h\left(-3(x_i + k_3) + 6(y_i + l_3) + t\right)$$

$$\Rightarrow \quad x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4)$$

t_k	y_k	x_k
0	-4	5
0.1	-4.927	9.088
0.2	-6.167	16.494