پاسخ تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول

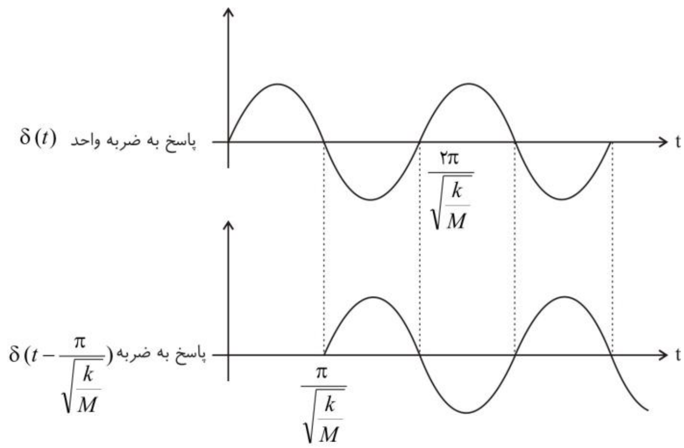
۱- گزینه «۲» ـ (متوسط)

تابع انتقال سیستم عبارتست از: $F = M\ddot{x} \to f - kx = M\ddot{x} \to \dfrac{X(s)}{F(s)} = \dfrac{1}{Ms^2 + k}$

قطب‌های سیستم عبارتند از $Ms^2 + k = 0 \to s = \pm j\sqrt{\dfrac{k}{M}}$ و لذا پریود نوسانات برابر است با: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{M}}}$

چون نسبت میرایی صفر است، پاسخ سیستم نامیرا است. پس اگر نیروی ضربه‌ای در همان جهت نیروی اولیه و با دامنه برابر در لحظه‌ای که جسم مجددا در همان موقعیت 0^+ قرار گیرد به سیستم اعمال شود، سیستم متوقف می‌شود. لذا لحظه اعمال ضربه عبارتست از: $t_0 = (2n-1)\dfrac{T}{2} = \dfrac{(2n-1)\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{M}}}\ ;\ n = 1,2,3,\cdots \quad \to \quad t_0 = \dfrac{\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{M}}}, \dfrac{3\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{M}}}, \cdots$

برای درک بهتر، شکل زیر را درنظر بگیرید.



توجه کنید اگر نیروی ضربه در خلاف جهت و با دامنه برابر مطرح می‌گردید، لحظه اعمال ضربه برابر است با: $t_0 = \dfrac{2n\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{M}}}\ ;\ n = 1,2,3,\cdots$

۲- گزینه «۳» ـ (ساده)

با استفاده از قضیه مقدار اولیه داریم $g_2(0^+) = \lim\limits_{s\to\infty} sG_2(s) = 1$. تنها گزینه‌ای که در این شرط صدق می‌کند، گزینه (۳) می‌باشد.

۳- گزینه «۲» ـ (ساده)

با توجه به معادلات حالت داریم:

$$y = x_1 + x_2 - x_3$$
$$\to \dot{y} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 - \dot{x}_3 = (x_1 - x_2) + (-x_1 + x_3) - (-x_1 + x_2 + x_3)$$
$$\to \dot{y} = x_1 - 2x_2$$

بنابراین داریم: $$Z = \begin{pmatrix} x_1 \\ y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

۴- گزینه «۲» ـ (ساده)

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=1+GH(s)=1+\frac{k(s+a)}{(s+1)(s+2)(s+b)}=0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(s)=s^3+(b+3)s^2+(k+3b+2)s+2b+ka=0 \quad (1)$$

از سویی بنا بر فرض داریم:

$$\Delta(s)=[(s+1)^2+4](s+\alpha)=s^3+(\alpha+2)s^2+(2\alpha+5)s+5\alpha=0 \qquad (2)$$

از تساوی روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} b+3=\alpha+2 \quad \Rightarrow \quad \alpha=b+1 & (3) \\ k+3b+2=2\alpha+5 \xrightarrow{(3)} k+b=5 & (4) \\ 2b+ka=5\alpha \xrightarrow{(3)} ka-3b=5 & (5) \end{cases}$$

تنها گزینه‌ای که در شرط‌های (۴) و (۵) صدق می‌کند، گزینه «۲» می‌باشد. توجه دارید که اگر $-1+j2$ قطب سیستم حلقه بسته باشد مزدوج آن $-1-j2$ نیز قطب سیستم حلقه بسته خواهد بود. به همین دلیل، معادله مشخصه سیستم حلقه بسته دارای عامل $[(s+1)^2+4]$ می‌باشد.

۵- گزینه «۲» ـ (ساده)

تجزیه تابع تبدیل به کسرهای ساده همان تحقق‌پذیری به روش موازی است.

$$G(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}+\frac{3}{s+3}$$

بنابر مطالب فصل اول بخش ۱ـ۱۳ـ۲، چون قطب‌های تابع تبدیل $G(s)$ مکرر نبوده لذا:

۱- ماتریس A قطری است که عناصر روی قطر آن، همان قطب‌های $G(s)$ می‌باشند.

۲- با در نظر گرفتن فرم اول، عناصر ماتریس B همواره برابر یک بوده (سیستم کنترل‌پذیر و رویت‌پذیر است) بنابراین به نظر می‌رسد که گزینه (۱) صحیح است.

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}u \quad , \quad y=[1 \quad 2 \quad 3]X$$

اما چون r ورودی سیستم می‌باشد، با جایگزینی $u=r-y$ به گزینه (۲) خواهیم رسید.

$$u=r-[1 \quad 2 \quad 3]X \quad \Rightarrow \quad \dot{X}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}(r-[1 \quad 2 \quad 3]X)=\begin{bmatrix}-2&-2&-3\\-1&-4&-3\\-1&-2&-6\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}r$$

۶- گزینه «۱»ـ (دشوار)

حلقه‌ها عبارتند از:

$$L_1=4(-1)=-4 \quad , \quad L_2=5(-2)=-10 \quad , \quad L_3=1(-2)(8)(-1)=16$$

حلقه‌های مجزا عبارتند از:

$$L_1L_2=(-4)(-10)=40$$

لذا دترمینان کلی برابر است با:

$$\Delta=1-(L_1+L_2+L_3)+L_1L_2=1-(-4-10+16)+40=39$$

مسیرهای پیشرو و دترمینان مربوط به هر یک عبارتند از:

$$P_1=1\times2\times4\times6\times1=48 \qquad \Delta_1=1-L_2=11$$

$$P_2=1\times2\times1\times7\times1=14 \qquad \Delta_2=1$$

$$P_3=1\times3\times8\times6=144 \qquad \Delta_3=1$$

$$P_4=1\times3\times5\times7=105 \qquad \Delta_4=1-L_1=5$$

$$P_5=1\times2\times1\times(-2)\times8\times6=-192 \qquad \Delta_5=1$$

$$P_6=1\times3\times8\times(-1)\times1\times7=-168 \qquad \Delta_6=1$$

بنابراین داریم:

$$\frac{C}{R}=\frac{\sum_{k=1}^{6}P_k\Delta_k}{\Delta}=\frac{48\times 11+14\times 1+144\times 1+105\times 5+(-192)\times 1+(-168)\times 1}{39}=\frac{851}{39}$$

۷- گزینه «۲»ـ (ساده)

منظور پاسخ ورودی صفر سیستم است.

$$x(t)=\phi(t)x(0)=\phi(t)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

از سویی

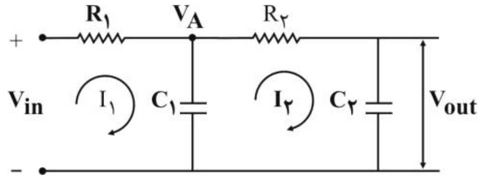
$$\phi(t)=L^{-1}(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\\ -\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-3t}\end{bmatrix}$$

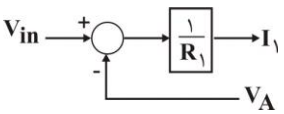
بنابراین داریم:

$$x_1(t)=-x_2(t)$$

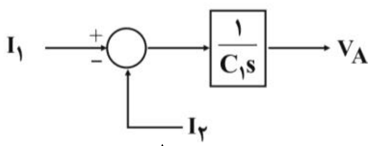
۸- گزینه «۴»ـ (متوسط)

از متن درس (رسم نمودار بلوکی سیستم‌های فیزیکی) داریم:

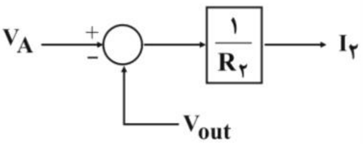




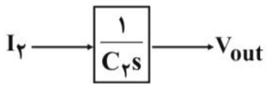
$$I_1=\frac{V_{in}-V_A}{R_1}$$



$$V_A=\frac{1}{C_1 s}(I_1-I_2)$$



$$I_2=\frac{V_A-V_{out}}{R_2}$$



$$V_{out}=\frac{1}{C_2 s}I_2$$

با ترکیب بلوک‌های فوق، به صحت گزینه (۱) پی می‌بریم.

۹- گزینه «۲»ـ (ساده)

تابع تبدیل حلقه بسته سیستم کنترلی عبارتست از:

$$M(s)=\frac{\frac{k_1}{s(s+p)}}{1+\frac{k_1k_2s}{s(s+p)}}=\frac{k_1}{s(s+p)+k_1k_2s}=\frac{k_1}{s^2+(k_1k_2+p)s}$$

با در نظر گرفتن تعریف تابع حساسیت داریم:

$$S_p^M=\frac{\partial M}{\partial p}\times\frac{p}{M}=\frac{-k_1s}{[s^2+(k_1k_2+p)s]^2}\times p\times\frac{s^2+(k_1k_2+p)s}{k_1}=\frac{-ps}{s^2+(k_1k_2+p)s}=\frac{-p}{s+k_1k_2+p}$$

۱۰- گزینه «۴»ـ (ساده)

می‌دانیم که ماتریس گذار حالت دارای خواص زیر است:

$$1)\ \phi^{-1}(t)=\phi(-t)$$

$$2)\ \phi(t_1)\phi(t_2)=\phi(t_1+t_2)$$

بنابراین:

$$\phi(-2t)\phi(-3t)\overset{(2)}{=}\phi(-5t)\overset{(1)}{=}\phi^{-1}(5t)$$

$$\phi(t)+\phi^{-1}(t)\overset{(1)}{=}\phi^{-1}(-t)+\phi(-t)$$

$$\phi(3t)\phi(4t)\overset{(2)}{=}\phi(7t)=\phi(2t)\phi(5t)$$

۱۱- گزینه «۴»ـ (متوسط)

با توجه به بلوک دیاگرام داده شده و متغیرهای حالت مفروض داریم:

$$X_4 = -X_1 + U \qquad (1)$$

$$X_2 = \frac{X_4}{s} \xrightarrow{(1)} X_2 = \frac{-X_1 + U}{s} \rightarrow sX_2 = -X_1 + U \xrightarrow{L^{-1}} \dot{x}_2 = -x_1 + u \qquad (2)$$

$$X_3 = 3X_2 + U \qquad (3)$$

$$X_1 = \frac{X_3}{s+2} \xrightarrow{(3)} X_1 = \frac{3X_2 + U}{s+2} \rightarrow sX_1 + 2X_1 = 3X_2 + U \xrightarrow{L^{-1}} \dot{x}_1 + 2x_1 = 3x_2 + u \qquad (4)$$

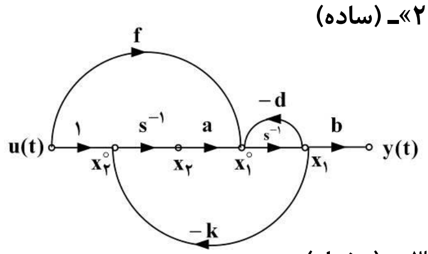
با نوشتن روابط (۲) و (۴) به فرم ماتریسی داریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

دقت کنید که با توجه به گزینه‌ها، نیازی به محاسبه خروجی نمی‌باشد. برای حل کامل داریم:

$$Y = X_1 \xrightarrow{L^{-1}} y = x_1 \quad \Rightarrow \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

۱۲- گزینه «۲»ـ (ساده)



$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -dx_1 + ax_2 + fu \\ \dot{x}_2 &= -kx_1 + u \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d & a \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \\ 1 \end{bmatrix} u$$

۱۳- گزینه «۳»ـ (دشوار)

از بهره میسون داریم:

$$L_1 = -10 \quad , \quad L_2 = -2 \quad , \quad L_3 = -50 \quad , \quad L_4 = -20 \quad , \quad L_5 = -0/5$$

$$L_1L_4 = (-10)(-20) \quad , \quad L_1L_5 = (-10)(-0/5) \quad , \quad L_2L_5 = (-2)(-0/5) \quad , \quad L_3L_5 = (-50)(-0/5)$$

$$\rightarrow \quad \Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) + L_1L_4 + L_1L_5 + L_2L_5 + L_3L_5$$

$$P_1 = 1 \times 5 \times 10 \times 1 \times 1 = 50 \qquad \Delta_1 = 1 - L_5 = 1 + 0/5 = 1/5$$

$$P_2 = 1 \times 10 \times 2 \times 1 = 20 \qquad \Delta_2 = 1 - L_1 = 1 + 10 = 11$$

بنابراین داریم:

$$\frac{Y}{R} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{50 \times 1/5 + 20 \times 11}{1 + (10 + 2 + 50 + 20 + 0/5) + (-20)(-10) + (-10)(-0/5) + (-2)(-0/5) + (-50)(-0/5)}$$

$$= \frac{295}{314/5} = \frac{590}{629}$$

۱۴- گزینه «۴»ـ (متوسط)

معادلات دیفرانسیل را برای سیستم مفروض با توجه به رابطه $\Sigma T = j\ddot{\theta}$ می‌نویسیم:

$$T - k(\theta_2 - \theta_1) - B(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) = j_2\ddot{\theta}_2$$

$$k(\theta_2 - \theta_1) + B(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) = j_1\ddot{\theta}_1$$

از معادلات اخیر با فرض صفر بودن شرایط اولیه و گرفتن تبدیل لاپلاس داریم:

$$T(s) - k[\theta_2(s) - \theta_1(s)] - Bs[\theta_2(s) - \theta_1(s)] = s^2 J_2 \theta_2(s)$$

$$k[\theta_2(s) - \theta_1(s)] + Bs[\theta_2(s) - \theta_1(s)] = s^2 J_1 \theta_1(s)$$

با ساده کردن معادلات داریم:

$$T(s)+(k+Bs)\theta_1(s)=(J_2s^2+Bs+k)\theta_2(s)$$

$$(k+Bs)\theta_2(s)=(J_1s^2+Bs+k)\theta_1(s)$$

با حذف $\theta_2(s)$ بدست می‌آوریم:

$$\frac{\theta_1(s)}{T(s)}=\frac{Bs+k}{s^2[J_1J_2s^2+(J_1+J_2)Bs+k(J_1+J_2)]}$$

۱۵- گزینه «۱» ـ (متوسط)

خروجی سیستم برابر است با:

$$Y(s)=\frac{\frac{s+1}{s+2}}{1-\frac{s+1}{s+2}\cdot\frac{1}{s+\alpha}}r=\frac{(s+1)(s+\alpha)}{s^2+(\alpha+1)s+2\alpha-1}r$$

دقت کنید که فیدبک مثبت می‌باشد. حال تابع حساسیت y نسبت به α برابر است با:

$$s_\alpha^y=\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\alpha}{y}=\frac{-\alpha(s^2+2s+1)}{(s^2+(\alpha+1)s+2\alpha-1)(s^2+(\alpha+1)s+\alpha)}$$

با قرار دادن مقدار نامی $\alpha=1$ بدست می‌آوریم:

$$s_\alpha^y=\frac{-(s^2+2s+1)}{(s^2+2s+1)(s^2+2s+1)}=\frac{-1}{s^2+2s+1}=\frac{-1}{(s+1)^2}$$

واضح است که با افزایش فرکانس، s_α^y به سمت صفر میل می‌کند.

۱۶- گزینه «۲»ـ (ساده)

از بهره میسون می‌دانیم که دترمینان گراف، چندجمله‌ای مخرج تابع تبدیل را مشخص می‌کند. با توجه به آن چه که در متن درس بیان شد، اگر حذف صفر و قطب رخ ندهد، چندجمله‌ای مخرج تابع تبدیل نشان دهنده کلیه قطب‌های سیستم خواهد بود.

۱۷- گزینه «۳»ـ (دشوار)

با توجه به متن درس، قطب‌های سیستم عبارتند از ۱- و ۰ که فقط قطب $s=0$ کنترل‌پذیر است. همچنین می‌دانیم که فیدبک حالت به شرط کنترل‌پذیری سیستم قابل استفاده است. چون بنابر فرض مسأله، فقط قطب $s=0$ (که کنترل‌پذیر است) توسط فیدبک حالت به قطب $s=-8$ تبدیل می‌شود، لذا می‌توانیم از فیدبک حالت استفاده کنیم. داریم:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u\quad,\quad u=-kx=\begin{bmatrix}-k_1&-k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\Rightarrow\dot{x}=\begin{bmatrix}-1&0\\-k_1&-k_2\end{bmatrix}x$$

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=\det(SI-A)=\det\begin{bmatrix}s+1&0\\k_1&s+k_2\end{bmatrix}=(s+1)(s+k_2)$$

با مقایسه رابطه اخیر با معادله مشخصه مطلوب $\Delta(s)=(s+1)(s+8)$ داریم: $k_2=8$

مشاهده می‌کنید که k_1 در تعیین قطب‌های حلقه بسته نقشی ندارد و با تعیین k_2 می‌توان قطب $s=0$ را به هر قطب مطلوب دلخواه تغییر داد.

۱۸- گزینه «۴»ـ (متوسط)

می‌دانیم که نقاط تعادل از صفر شدن مشتقات متغیرهای حالت بدست می‌آیند. لذا:

$$\dot{x}_1^*=\dot{x}_2^*=\dot{x}_3^*=0$$

$$\dot{x}_2^*=0\rightarrow f(x_3^*)=0\quad(1)$$

که با توجه به شکل داده شده، تابع f در نقاط زیر صفر می‌شود:

$$x_3^*=1/5\quad,\quad x_3^*=0\quad,\quad x_3^*=-2$$

بنابراین گزینه (۲) نادرست است. از معادلات دوم و سوم داریم:

$$\dot{x}_1^*=0\xrightarrow{(1)}x_2^*=0$$

$$\dot{x}_3^*=0\xrightarrow{(1)}x_1^*=-x_3^*$$

۱۹- گزینه «۱»ـ (متوسط)

از بلوک دیاگرام داده و استفاده از عکس تبدیل لاپلاس داریم:

$$x_1=\frac{r-x_2}{s+1}\rightarrow\dot{x}_1=-x_1-x_2+r\qquad(1)$$

$$x_3 = sx_2 \quad \to \quad \dot{x}_2 = x_3 \qquad (2)$$

$$x_2 = \frac{x_1 - x_3}{(s+1)^2} \quad \to \quad \ddot{x}_2 + 2\dot{x}_2 + x_2 = x_1 - x_3 \qquad (3)$$

با جایگذاری (۲) در (۳) داریم:

$$\dot{x}_3 = x_1 - x_2 - 3x_3 \qquad (4)$$

با بازنویسی معادلات (۱) ، (۲) و (۴) بدست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

۲۰- گزینه «۴»ـ (متوسط)

با استفاده از بهره میسون داریم:

$$L_1 = -G_2G_3H_3 \qquad L_2 = -G_2H_2$$

$$L_3 = -G_2H_1G_1 \qquad L_4 = -G_1G_2G_1$$

$$\to \quad \Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) = 1 + G_2G_3H_3 + G_2H_2 + G_1G_2H_1 + G_1G_2G_3$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح می‌باشد. توجه کنید که با توجه به گزینه‌های داده شده نیازی به محاسبه مسیرهای پیش‌رو و دترمینان‌های آن نمی‌باشد. برای حل کامل داریم:

$$P_1 = G_2G_3 \quad , \quad \Delta_1 = 1$$

۲۱- گزینه «۱»ـ (متوسط)

می‌دانیم که درصد ماکزیمم فرا جهش به پله واحد برابر است با:

$$M_P = 100 e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

لذا، حساسیت درصد ماکزیمم فراجهش نسبت به ξ عبارتست از:

$$S_\xi^{M_P} = \frac{\partial M_P}{\partial \xi} \cdot \frac{\xi}{M_P} = \frac{-\pi\xi}{(1-\xi^2)\sqrt{1-\xi^2}}$$

با قرار دادن مقدار نامی $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ بدست می‌آوریم:

$$S_\xi^{M_P} = -2\pi$$

۲۲- گزینه «۲»ـ (دشوار)

از بهره میسون داریم:

$$L_1 = -G_1G_4H_1H_2 \qquad L_2 = -G_1G_2G_3H_1H_2$$

$$L_3 = -G_1G_2G_3 \qquad L_4 = -G_1H_3$$

$$\to \quad \Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) = 1 + G_1G_4H_1H_2 + G_1G_2G_3H_1H_2 + G_1G_2G_3 + G_1H_3$$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست می‌باشند.

$$P_1 = -G_3H_1 \qquad \Delta_1 = 1 - L_4 = 1 + G_1H_3$$

$$P_2 = G_3G_1G_4H_1 \qquad \Delta_2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{C_2(s)}{R_2(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{-G_3H_1(1+G_1H_3) + G_3G_1G_4H_1}{1 + G_1G_4H_1H_2 + G_1G_2G_3H_1H_2 + G_1G_2G_3 + G_1H_3}$$

۲۳- گزینه «۳»ـ (متوسط)

معادلات دیفرانسیل حاکم بر گراف گذر سیگنال عبارتند از:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 + 2x_2 - 2x_1$$

$$\dot{x}_2 = r - \dot{x}_1 - x_1 - x_2$$

با جایگذاری برای $\dot{x}_1$ و $\dot{x}_2$ به ترتیب داریم:

$$\dot{x}_1 = -\dot{x}_1 - 3x_1 + x_2 + r$$

$$\dot{x}_2 = -\dot{x}_2 + x_1 - 3x_2 + r$$

و لذا پس از ساده‌سازی داریم:

$$\dot{x}_1 = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{r}{2}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_1}{2} - \frac{3}{2}x_2 + \frac{r}{2}$$

علاوه‌براین خروجی سیستم برابر است با:

$$y=\dot{x}_1+\dot{x}_2=-\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}+\frac{r}{2}$$

۲۴- گزینه «۲»ـ (متوسط)

تابع تبدیل حلقه بسته سیستم برابر است با:

$$T=\frac{G(s)}{1+GH(s)}$$

حساسیت T نسبت به P را از قاعده زنجیره‌ای بدست می‌آوریم:

$$S_P^T=S_G^T\ .S_P^G=\frac{\partial T}{\partial G}\cdot\frac{G}{T}\cdot S_P^G=\frac{1}{(1+GH)^2}.(1+GH).S_P^G=\frac{1}{1+GH}\cdot S_P^G$$

۲۵- گزینه «۴»ـ (متوسط)

با استفاده از بهره میسون، خروجی سیستم برابر است با:

$$C(s)=\frac{\frac{4}{s}\times 12/5\times\frac{1}{2}e^{-5s}}{1+(\frac{-36}{s^2}-4\times 12/5)}R(s)$$

$$r(t)=\delta(t)\quad\rightarrow\quad R(s)=1$$

بنابراین پاسخ ضربه عبارتست از:

$$L^{-1}\{C(s)\}=-\frac{25}{49}\cos\frac{6}{7}(t-5)u(t-5)$$

۲۶- گزینه «۱»ـ(متوسط)

با استفاده از قضیه جمع آثار داریم:

$$M_1(s)\Big|_{T_2=0}=\frac{k_2(s+10)}{s[(s+10)(s+1)+k_1k_2]}$$

$$M_2(s)\Big|_{T_1=0}=\frac{(s+1)(s+10)}{(s+1)(s+10)+k_1k_2}$$

بنابراین برای کاهش اثر اغتشاش T_1 باید k_2 را کوچک انتخاب نماییم و برای کاهش اثر اغتشاش T_2 باید k_1k_2 را بزرگ انتخاب نماییم.

۲۷- گزینه «۳»ـ (متوسط)

با توجه به قانون دوم نیوتن $\Sigma F=M\ddot{x}$ داریم:

$$M\frac{d^2y}{dt^2}+B\frac{d}{dt}(y-x)+k(y-x)=0$$

با فرض شرایط اولیه صفر و استفاده از تبدیل لاپلاس داریم:

$$Ms^2Y(s)+Bs(Y(s)-X(s))+k(Y(s)-X(s))=0$$

با ساده‌سازی رابطه اخیر داریم:

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{Bs+k}{Ms^2+Bs+k}$$

۲۸- گزینه «۱»ـ (دشوار)

از بهره میسون، تابع تبدیل سیستم حلقه بسته را بدست می‌آوریم. داریم:

$$L_1=-\frac{1}{s}\qquad L_2=-\frac{2}{s}\quad\rightarrow\quad\Delta=1-(L_1+L_2)+L_1L_2=1+\frac{1}{s}+\frac{2}{s}+\frac{2}{s^2}$$

$$P_1=\frac{2}{s}\qquad\Delta_1=1-L_2=1+\frac{2}{s}\quad,\quad P_2=1\qquad\Delta_2=\Delta=1+\frac{1}{s}+\frac{2}{s}+\frac{2}{s^2}$$

$$P_3=\frac{1}{s}\qquad\Delta_3=1-L_1=1+\frac{1}{s}\quad,\quad P_4=-\frac{1}{s^2}\qquad\Delta_4=1$$

$$\Rightarrow\quad\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2+P_3\Delta_3+P_4\Delta_4}{\Delta}$$

با جایگذاری داریم:

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{s^2+6s+6}{s^2+3s+2}$$

حال با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس از رابطه فوق داریم:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{d^2r(t)}{dt^2}+6\frac{dr(t)}{dt}+6r(t)$$

۲۹- گزینه «۲»ـ (دشوار)

با استفاده از بهره میسون، تابع تبدیل سیستم حلقه بسته برابر است با:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\dfrac{۸۰}{s(s+۵)(s+۲)}}{۱+\dfrac{۴۰}{s+۵}\times\dfrac{۷}{۴۰}+\dfrac{۸۰}{s(s+۲)(s+۵)}+\dfrac{۸۰}{(s+۲)(s+۵)}\times\dfrac{۳}{۱۰}}=\frac{۸۰}{s^۳+۱۴s^۲+۴۸s+۸۰}$$

با در نظر گرفتن گزینه‌ها درمی‌یابیم که بهره dc در هر چهار پاسخ یکسان می‌باشد و برابر با ۱ است (بهره dc سیستم از رابطه $\lim\limits_{s\to ۰}\dfrac{Y(s)}{U(s)}$ بدست می‌آید). همچنین $(s+۱۰)$ یک ریشه معادله مشخصه سیستم است. از تقسیم معادله مشخصه بر $(s+۱۰)$ داریم:

$$\Delta(s)=s^۳+۱۴s^۲+۴۸s+۸۰=(s+۱۰)(s^۲+۴s+۸)$$

از محاسبه مانده در قطب $s=-۱۰$ ، ضریب عامل $e^{-۱۰t}$ در پاسخ زمانی بدست می‌آید. لذا داریم:

$$\text{مانده در قطب } -۱۰ = \lim_{x\to -۱۰}(s+۱۰)\cdot\frac{۸۰}{(s+۱۰)(s^۲+۴s+۸)}\cdot\frac{۱}{s}=\frac{-۲}{۱۷}$$

۳۰- گزینه «۳»ـ (متوسط)

ابتدا تابع تبدیل مفروض را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$G(s)=\frac{-۳۰s^۲-۵۰s}{s^۳+۳s^۲+۵s+۱}+۱۰$$

با فرض $\tilde{G}(s)=\dfrac{-۳۰s^۲-۵۰s}{s^۳+۳s^۲+۵s+۱}$، با توجه به متن درس، داریم:

$$A=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\\ -۱ & -۵ & -۳\end{bmatrix}\ ،\ B=\begin{bmatrix}۰\\ ۰\\ ۱۰\end{bmatrix}\ ،\ C=\begin{bmatrix}۰ & -۵ & -۳\end{bmatrix}$$

همچنین مقدار ثابت ۱۰ نشان‌دهنده ماتریس D می‌باشد.

۳۱- گزینه «۴» ـ (ساده)

ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را بدست می‌آوریم.

$$M(s)=\frac{k}{\tau s+۱+kh}$$

سپس حساسیت سیستم حلقه بسته را به تغییرات τ محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$S_\tau^M=\frac{\partial M}{\partial \tau}\,\frac{\tau}{M}=-\frac{\tau s}{\tau s+۱+kh}$$

$$if\quad s\to ۰\ \Rightarrow\ S_\tau^M\to ۰\qquad ،\qquad if\quad s\to\infty\ \Rightarrow\ S_\tau^M\to -۱$$

۳۲- گزینه «۱» ـ (دشوار)

ابتدا بهره‌های حلقه‌های گراف را بدست می‌آوریم.

$$(۲)(-۱)\ ,\ (۳)(-۱)\ ,(۴)(-۱)\ ,\ (۵)(-۱)\ ,\ (۳)(-۱)(-۱)\ ,\ (-۲)(۴)(۵)$$
$$(-۲)(-۱)(-۱)(۶)\ ,\ (-۱)(-۱)(-۱)(-۱)(۶)$$

که مجموع آن‌ها برابر ۵۷- است. حال بهره‌های حلقه‌های دو به دو مجزا را بدست می‌آوریم.

$$(-۲)(-۴)\ ,\ (-۲)(-۵)\ ,\ (-۳)(-۵)\ ,\ (-۴۰)(-۲)\ ,\ (۳)(-۵)$$

که مجموع آن‌ها برابر ۹۸ است. بنابراین دترمینان گراف برابر است با:

$$\Delta=۱-(-۵۷)+۹۸=۱۵۶$$

تعداد مسیرهای پیش‌رو ۳ تا می‌باشد. بنابراین:

$$P_۱=۲\times۳\times۴\times۵=۱۲۰\qquad \Delta_۱=۱$$

$$P_۲=۳\times۴\times۵=۶۰\qquad \Delta_۲=۱$$

$$P_۳=۶\qquad \Delta_۳=۱-(-۳-۴)=۸$$

بنابراین بهره کل برابر است با:

$$M=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{P_۱\Delta_۱+P_۲\Delta_۲+P_۳\Delta_۳}{\Delta}=\frac{۲۲۸}{۱۵۶}=\frac{۱۹}{۱۳}$$

۳۳- گزینه «۲» ـ (ساده)

ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را بدست می‌آوریم.

$$T_۱=\frac{k_۱k_۲}{۱+۰/۰۰۹۹k_۱k_۲}$$

سپس حساسیت $T_۱$ نسبت به $k_۱$ را محاسبه می‌کنیم.

$$S_{k_۱}^{T_۱}=\frac{\partial T_۱}{\partial k_۱}\frac{k_۱}{T_۱}=\frac{k_۲(۱+۰/۰۰۹۹k_۱k_۲)-۰/۰۰۹۹k_۲(k_۱k_۲)}{(۱+۰/۰۰۹۹k_۱k_۲)^۲}\frac{k_۱}{T_۱}=\frac{۱}{۱+۰/۰۰۹۹k_۱k_۲}$$

با جایگذاری مقادیر $k_۱=k_۲=۱۰۰$ داریم:

$$S_{k_۱}^{T_۱}=۰/۰۱$$

۳۴- گزینه «۴» ـ (ساده)

با توجه به قضیه جمع آثار داریم:

$$R=۰$$

$$L_۱=-G_۴H_۱\quad,\quad L_۲=-G_۲G_۳G_۴G_۵H_۲\quad,\quad L_۳=-G_۲G_۶H_۲\quad\Rightarrow\quad \Delta=۱-(L_۱+L_۲+L_۳)+L_۱L_۳$$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست می‌باشند.

$$P_۱=۱\quad و \quad \Delta_۱=۱-L_۱=۱+G_۴H_۱$$

۳۵- گزینه «۳» ـ (ساده)

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}۱&۱\\۰/۵&۰/۵\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}۱\\۰/۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۱\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}۱&۱\\۰/۵&۰/۵\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-۱&۱\\-۰/۵&۰/۵\end{bmatrix}x\;\rightarrow\;\dot{x}=\begin{bmatrix}۰&۲\\۰&۱\end{bmatrix}x$$

$$\phi(t)=L^{-۱}\{(sI-A)^{-۱}\}=L^{-۱}\left\{\begin{bmatrix}s&-۲\\۰&s-۱\end{bmatrix}^{-۱}\right\}=L^{-۱}\left\{\frac{\begin{bmatrix}s-۱&۲\\۰&s\end{bmatrix}}{s(s-۱)}\right\}=L^{-۱}\left\{\begin{bmatrix}\frac{۱}{s}&\frac{۲}{s(s-۱)}\\۰&\frac{۱}{s-۱}\end{bmatrix}\right\}$$

بنابراین درایه (۱,۱) از ماتریس گذار حالت برابر است با:

$$L^{-۱}\{\frac{۱}{s}\}=۱$$

۳۶- گزینه «۴» (ساده)

ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته سیستم را بدست می‌آوریم.

$$M(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{۰/۴k}{s+۰/۱+۰/۰۲k}\;\Rightarrow\;S_k^M=\frac{\partial M}{\partial k}\frac{k}{M}=\frac{۰/۴s+۰/۰۴}{۰/۴(s+۰/۱+۰/۰۲k)}$$

برای مقدار $k=۵$ داریم:

$$S_k^M=\frac{۰/۴s+۰/۰۴}{۰/۴(s+۰/۲)}$$

$$if\quad s=۰\rightarrow S_k^M=۰/۵\quad ،\quad if\quad s=\infty\rightarrow S_k^M=۱$$

۳۷- گزینه «۱» ـ (دشوار)

ابتدا تابع تبدیل سیستم حلقه بسته را بدست می‌آوریم.

$$L_۱=\frac{-h(s)}{s+۱}\quad,\quad L_۲=-(s+۳)\quad,\quad L_۳=\frac{-(s+۳)}{(s+۱)(s+۲)}\quad,\quad L_۴=\frac{-(s+۳)}{(s+۱)}$$

$$\rightarrow\quad \Delta=۱-(L_۱+L_۲+L_۳+L_۴)+L_۱L_۲$$

$$P_۱=\frac{(s+۳)f(s)}{(s+۱)(s+۲)}\quad \Delta_۱=۱\quad و \quad P_۲=\frac{(s+۳)f(s)}{s+۱}\quad \Delta_۲=۱$$

$$\rightarrow\quad M(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\{\frac{s+۳}{s+۱}+\frac{s+۳}{(s+۱)(s+۲)}\}f(s)}{۱+\frac{s+۳}{s+۱}+\frac{s+۳}{(s+۱)(s+۲)}+(s+۳)+\frac{h(s)}{s+۱}+\frac{(s+۳)}{(s+۱)}h(s)}$$

$$\rightarrow\; C(s)=R(s)M(s)=\frac{۱}{s}M(s)$$

با توجه به قضیه مقدار نهایی داریم:

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{s\to ۰} sC(s) = \lim_{s\to ۰} s.\frac{۱}{s}M(s) = M(۰)$$

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = ۱ \quad \to \quad M(۰) = \frac{(۳+\frac{۳}{۲})f(۰)}{۱+۳+\frac{۳}{۲}+۳+h(۰)+۳h(۰)} = ۱$$

$$\frac{۴/۵f(۰)}{۸/۵+۴h(۰)} = ۱ \quad \to \quad f(۰) = \frac{۱}{۴/۵}[۸/۵+۴h(۰)] = \frac{۱}{۴/۵}[۸/۵+۴\times۱] = \frac{۱۲/۵}{۴/۵} = \frac{۲۵}{۹}$$

توجه کنید $h(۰)$ در هر چهار گزینه برابر یک است. لذا تنها گزینه‌ای که $f(۰) = \frac{۲۵}{۹}$ در آن صدق می‌کند، گزینه (۱) می‌باشد.

۳۸- گزینه «۱» ـ (متوسط)

با جایگذاری داریم:

$$u = r - \omega = r - \dot{x}_۱ - y = r - x_۲ - \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = r - \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}$$

با قرار دادن u در معادلات حالت داده شده، بدست می‌آوریم:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}(r - \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \end{bmatrix}x) = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}r - \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}x \;\to\; \dot{x} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}r$$

معادله خروجی تغییر نمی‌کند. لذا:

$$g(s) = C(sI - A)^{-۱}B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & -۱ \\ ۱ & s+۲ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\to \quad g(s) = \frac{s+۱}{(s+۱)^۲} = \frac{۱}{s+۱}$$

$$y = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \end{bmatrix}x$$

۳۹- گزینه «۱» ـ (ساده)

با توجه به قضیه جمع آثار داریم:

$$R_۱ = ۰$$

$$L_۱ = -G_۱G_۲G_۳G_۴ \quad \to \quad \Delta = ۱ + G_۱G_۲G_۳G_۴$$

$$P_۱ = -G_۲G_۳G_۴ \quad \Delta_۱ = ۱ \quad \Rightarrow \quad T_{R_۲C_۱} = \frac{P_۱\Delta_۱}{\Delta} = \frac{-G_۲G_۳G_۴}{۱+G_۱G_۲G_۳G_۴}$$

دقت کنید با توجه به این که تنها حلقه موجود در دیاگرام بلوکی $-G_۱G_۲G_۳G_۴$ می‌باشد، بدون حل نیز می‌توانید پاسخ صحیح را تشخیص دهید.

۴۰- گزینه «۴» ـ (ساده)

به دلیل عدم مشاهده عبارت $k_۱k_۲$ در معادلات حالت، گزینه (۴) بدون حل جواب صحیح خواهد بود. حال اگر فرض کنیم که $k_۱k_۲ = ۱$ باشد، با استفاده از بسط به کسرهای جزیی داریم:

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{\frac{۱}{RB}}{s} + \frac{\frac{-L^۲}{R(BL-JR)}}{sL+R} + \frac{\frac{J_۲}{B(LB-RJ)}}{B+Js}$$

بنابراین با در نظر گرفتن متغیرهای حالت تعریف شده در مسأله معادلات حالت به فرم زیر بدست می‌آید:

$$\dot{x}_۱(t) = v(t)$$

$$\dot{x}_۲(t) = -\frac{R}{L}x_۲(t) + \frac{۱}{L}v(t)$$

$$\dot{x}_۳(t) = -\frac{B}{J}x_۳(t) + \frac{۱}{J}v(t)$$

۴۱- گزینه «۴» ـ (متوسط)

ابتدا با توجه به تعریف متغیرهای حالت داده شده، معادلات حالت سیستم را بدست می‌آوریم:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + u$$
$$\rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

با جایگزینی $u = r - g_1 x_1 - g_2 x_2 = r - \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ در معادلات فوق داریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-g_1 & -2-g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

حال قطب‌های سیستم از رابطه زیر بدست می‌آیند.

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1+g_1 & s+2+g_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad s^2 + (2+g_2)s + 1 + g_1 = 0$$

از طرفی با توجه به قطب‌های مطلوب، معادله مشخصه باید به صورت $\Delta(s) = (s+2)(s+3) = s^2 + 5s + 6$ باشد، با مقایسه داریم:

$$2 + g_2 = 5 \quad \rightarrow \quad g_2 = 3$$
$$1 + g_1 = 6 \quad \rightarrow \quad g_1 = 5$$

۴۲- گزینه «۳» ـ (ساده)

از قانون بهره میسون استفاده می‌کنیم.

$$L_1 = -g \qquad L_2 = -\frac{1}{s} \quad \rightarrow \quad \Delta = 1 - (L_1 + L_2) = 1 + g + \frac{1}{s}$$

$$P_1 = 1 \times 1 \times \frac{1}{s} \times s = 1 \quad , \quad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = 1 \times 1 = 1 \quad , \quad \Delta_2 = \Delta$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{1 + 1 + g + \frac{1}{s}}{1 + g + \frac{1}{s}} = \frac{(2+g)s + 1}{(1+g)s + 1}$$

با معادل قرار دادن $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s+2}{s+2}$ داریم:

$$g = \frac{1}{s}$$

۴۳- گزینه «۳» ـ (ساده)

ابتدا معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم را می‌نویسیم.

$$M\ddot{x} + kx = f(t) \qquad (1)$$

با تعریف متغیرهای حالت $x_1 = x$ و $\dot{x}_1 = x_2$ و $f(t) = 0$ در این حالت داریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

و خروجی برابر است با $y = x$. بنابراین:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

پس گزینه صحیح (۳) می‌باشد. اگرچه نیازی به تعیین رفتار نمی‌باشد، با این حال آن را محاسبه می‌کنیم.

معادله مشخصه $\Delta(s) = Ms^2 + k = 0 \quad \rightarrow \quad s = \pm j\sqrt{\frac{k}{M}}$

با توجه به قطب‌های موهومی، سیستم نوسانی است.

۴۴- گزینه «۱» ـ (ساده)

$$L_1=-G_1G_2G_3H_2 \qquad L_2=-G_1G_2H_1 \qquad L_3=-G_1G_2G_4H_2$$

$$\rightarrow \quad \Delta=1-(L_1+L_2+L_3)=1+G_1G_2G_3H_2+G_1G_2H_1+G_1G_2G_4H_2$$

$$\begin{matrix} P_1=G_2G_3 & \Delta_1=1 \\ P_2=G_2G_4 & \Delta_2=1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{C(s)}{T(s)}=\frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2}{\Delta}=\frac{G_2G_3+G_2G_4}{1+G_1G_2G_3H_2+G_1G_2H_1+G_1G_2G_4H_2}$$

۴۵- گزینه «۳» ـ (ساده)

در نگاه اول گزینه (۴) نادرست است، زیرا خروجی y برابر متغیر x_1 است. داریم:

$$y=x_1=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$$

تابع تبدیل حلقه بسته سیستم برابر است با:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^2+s+1}$$

با توجه به فرم متغیر فازی بدون حل، گزینه (۳) صحیح خواهد بود.

راه تشریحی: معادله دیفرانسیل را بدست می‌آوریم.

$$\ddot{y}+\dot{y}+y=u$$

$$x_1=y \quad \rightarrow \quad \begin{cases}\dot{x}_1=\dot{y}=x_2 \\ \dot{x}_2=\ddot{y}=-x_1-x_2+u\end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}u$$

۴۶- گزینه «۴» ـ (ساده)

تابع تبدیل $G(s)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$G(s)=\frac{H(s)}{s}=\frac{100k}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$G(s)$ یک تابع تبدیل استاندارد درجه دوم است. چون $h(t)$ مشتق پاسخ ضربه $G(s)$ است، لذا

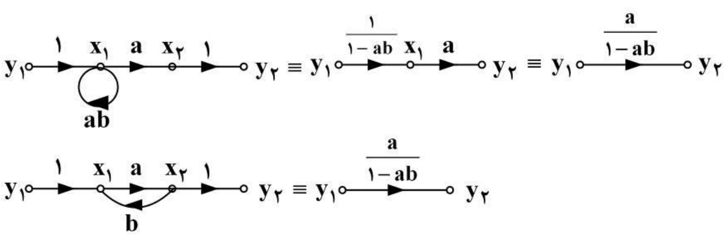
$$h(t)=g'(t)=g(0)\,\delta(t)+g'(t)\big|_{t>0}$$

بنابراین داریم:

$$g(0)=0 \;\Leftrightarrow\; k=0$$

۴۷- گزینه «۲» ـ (ساده)

گزینه (۱) نادرست است، زیرا متغیر فیدبک شده توسط شاخه d در هر دو گراف متفاوت است. بنابراین گزینه (۴) نیز نادرست است. همچنین به دلیل این که ورودی y'_1 را نمی‌توان به صورت نشان داده شده در گزینه (۳) حذف نمود، گزینه (۳) نیز نادرست است. بنابراین گزینه (۲) با توجه به جبر نمودار گذر سیگنال صحیح است.



۴۸- گزینه «۳» ـ (ساده)

ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را بدست می‌آوریم:

$$M(s)=\frac{\dfrac{e^{-Ts}}{s+1}\cdot\dfrac{1}{s+k}}{1+\dfrac{e^{-Ts}}{s+1}\cdot\dfrac{1}{s+k}}=\frac{e^{-Ts}}{(s+1)(s+k)+e^{-Ts}}$$

$$S_T^M=\frac{\partial M}{\partial T}\times\frac{T}{M}=\frac{-se^{-Ts}[(s+1)(s+k)+e^{-Ts}]+(se^{-Ts})e^{-Ts}}{[(s+1)(s+k)+e^{-Ts}]^2}\times\frac{T}{M}$$

$$=\frac{-se^{-Ts}[(s+1)(s+k)+e^{-Ts}-e^{-Ts}]}{[(s+1)(s+k)+e^{-Ts}]^2}\times T\times\frac{(s+1)(s+k)+e^{-Ts}}{e^{-Ts}}=\frac{-sT(s+k)(s+1)}{(s+1)(s+k)+e^{-Ts}}$$

۴۹- گزینه «۲» ـ (ساده)

کافی است در هر حالت تابع تبدیل اغتشاش به خروجی را بدست آوریم. بنابراین:

برای کاهش اثر اغتشاش باید k_1 را خیلی بزرگ انتخاب کنیم.

$$\text{شکل (۱)}: \quad \frac{C(s)}{N(s)}=\frac{1}{1+k_1G(s)H(s)}$$

برای کاهش اثر اغتشاش باید k_2 را خیلی کوچک انتخاب کنیم.

$$\text{شکل (۲)}: \quad \frac{C(s)}{N(s)}=-\frac{k_2G(s)H(s)}{1+k_2G(s)H(s)}$$

۵۰- گزینه «۴» ـ (ساده)

ابتدا معادلات حالت را بدست می‌آوریم.

$$X_1=\frac{X_2}{s} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1=x_2$$

$$\left.\begin{aligned} &u=3[r-(X_1-X_2)] \\ &X_2=\frac{u}{s+3} \end{aligned}\right\} \rightarrow \dot{x}_2=-3x_1+3r \Rightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}r$$

$$\phi(t)=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3}\begin{bmatrix}s & 1\\ -3 & s\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}\cos\sqrt{3}t & \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\\ -\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t & \cos\sqrt{3}t\end{bmatrix}$$

۵۱- گزینه «۴» ـ (ساده)

ابتدا تابع تبدیل سیستم را بدست می‌آوریم.

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1\\ \omega^2 & s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\frac{\begin{bmatrix}s & 1\\ -\omega^2 & s\end{bmatrix}}{s^2+\omega^2}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{s^2+\omega^2}$$

سپس پاسخ را به ورودی موردنظر که پله واحد است، بدست می‌آوریم.

$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{1}{s^2+\omega^2}\times\frac{1}{s}=\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega^2}\right) \Rightarrow y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$$

۵۲- گزینه «۲» ـ (دشوار)

برای محاسبه ماتریس انتقال حالت به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\phi(t,0)=I+\int_0^t A(\tau)d\tau+\int_0^t A(\tau_1)\left[\int_0^{t_1} A(\tau_2)d\tau_2\right]d\tau_1+\cdots$$

دو جمله اول رابطه فوق عبارتند از:

$$\int_0^t A(\tau)d\tau=\int_0^t\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & \tau\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}0 & t\\ 0 & \frac{t^2}{2}\end{bmatrix}$$

$$\int_0^t\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \tau_1\end{bmatrix}\left\{\int_0^{\tau_1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & \tau_2\end{bmatrix}d\tau_2\right\}d\tau_1=\begin{bmatrix}0 & \frac{t^3}{6}\\ 0 & \frac{t^4}{8}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & t+\frac{t^3}{6}+\ldots\\ 0 & 1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{8}+\ldots\end{bmatrix}$$

۵۳- گزینه «۴» ـ (ساده)

از بهره میسون داریم:

$$L_1=\frac{15}{s^2} \qquad L_2=30 \quad \rightarrow \quad \Delta=1-(L_1+L_2)=1-\frac{15}{s^2}-30=-29-\frac{15}{s^2}$$

$$P_1=\frac{15}{s}e^{-5s} \qquad \Delta_1=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{P_1\Delta_1}{\Delta}=\frac{\frac{15}{s}e^{-5s}}{-29-\frac{15}{s^2}}=\frac{-15se^{-5s}}{29(s^2+\frac{15}{29})}$$

۵۴- گزینه «۱» ـ (ساده)

با توجه به قضیه جمع آثار داریم: $R_{2}=0$

از روش میسون داریم:

$$L_{1}=-G_{1}G_{2}G_{3}G_{4} \quad \rightarrow \quad \Delta=1+G_{1}G_{2}G_{3}G_{4}$$

$$P_{1}=1 \qquad \Delta_{1}=1 \qquad \text{و} \qquad P_{2}=G_{3}G_{5} \qquad \Delta_{2}=1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{C_{1}(s)}{R_{1}(s)}=\frac{P_{1}\Delta_{1}+P_{2}\Delta_{2}}{\Delta}=\frac{1+G_{3}G_{5}}{1+G_{1}G_{2}G_{3}G_{4}}$$

۵۵- گزینه «۱» ـ (ساده)

از تعریف خطا برای این سیستم داریم:

$$e(t)=\begin{cases}1-t & 0\leq t\leq 1\\ 0 & t>1\end{cases}$$

توجه کنید که سیستم حلقه باز است. بنابراین به محاسبه خطا برای هر یک از گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$I_{1}=\int_{0}^{1}t(1-t)^{2}\,dt=\int_{0}^{1}(t-2t^{2}+t^{3})dt=\frac{1}{12}$$

$$I_{2}=\int_{0}^{1}t(1-t)dt=\left(\frac{t^{2}}{2}-\frac{t^{3}}{3}\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{6}$$

$$I_{3}=\int_{0}^{1}(1-t)dt=\left(t-\frac{t^{2}}{2}\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{2}$$

$$I_{4}=\int_{0}^{1}(1-t)^{2}\,dt=\int_{0}^{1}(t^{2}-2t+1)dt=\frac{1}{3}$$