$= P(n)$ ✓

زیرفضای برداری :

فرض کنید V یک فضای برداری بر روی میدان F و

S یک زیر مجموعه غیرتهی از V باشد؛ S را یک

زیرفضا از V می‌نامند اگر :

$$1)\ \forall \vec{s},\vec{t} \in S \longrightarrow s+t \in S$$

$$2)\ \forall \vec{s} \in S\ ,\ \forall a \in F \longrightarrow a\vec{s} \in S$$

اسکالر

مثال) نشان دهید در فضای برداری دو بعدی R^2 ، هر خط راستی که از مبداء عبور کند ، یک زیر فضای برداری از R^2 است :

$$S = \{(x,y) \in R^2 : \underline{ax+by} = 0\}$$

1) $(x,y) \in S \rightarrow ax+by=0$

$(u,v) \in S \rightarrow au+bv=0$

$$\rightarrow a(\underbrace{x+u}_{X}) + b(\underbrace{y+v}_{Y}) = 0$$

$$\rightarrow aX + bY = 0$$

چون فرم رابطه حفظ شد شرط اول برقرار است :

$(x+u, y+v) \in S$ ✓

2) $(x, y) \in S \longrightarrow ax + by = 0$

$$\longrightarrow a(\underbrace{Cx}_{X}) + b(\underbrace{Cy}_{Y}) = 0$$

$$\longrightarrow aX + bY = 0 \quad \checkmark$$

مثال) آیا مجموعه S یک زیرفضا از $M_{2\times 2}(R)$ است؟! خیر.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \text{تمامی ماتریس‌ها به فرم} \right\}$$

1) $\forall\, A, B \in S \longrightarrow A + B \in S$

$$A+B=\begin{bmatrix} ۲ & a_{۱۲} \\ ۰ & a_{۲۲} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ & b_{۱۲} \\ ۰ & b_{۲۲} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۴ & a_{۱۲}+b_{۱۲} \\ ۰ & a_{۲۲}+b_{۲۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underline{۴} & c_{۱۲} \\ ۰ & c_{۲۲} \end{bmatrix}$$

$$\notin S$$

۲) $\forall\ A\in S,\ \forall\ c\in R \rightarrow cA\in S$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \underline{۲c} & ca_{۱۲} \\ \underline{۰} & ca_{۲۲} \end{bmatrix}$$

برای هر c صدق نمی کند لذا شرط دوم نیز برقرار نیست.

زیرفضای ستون های یک ماتریس :

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

یک ستون از A

$$\rightarrow \quad C(A) = \left\{ \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n \right\}$$

زیرفضای ستون های ماتریس — زیرفضای ستون های ماتریس $\equiv$ ترکیب خطی از ستون های ماتریس

مثال) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$: آیا $C(A)$ یک زیرفضا از R^3 است !

$$C(A) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

1) $\forall A, B \in S \longrightarrow A + B \in S$

$$\alpha \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۴ \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + ۳\beta \\ ۲\alpha + ۳\beta \\ ۴\alpha + \beta \end{bmatrix} \in \underbrace{C(A)}_{S}$$

$$\gamma \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۴ \end{bmatrix} + Q \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma + ۳Q \\ ۲\gamma + ۳Q \\ ۴\gamma + Q \end{bmatrix} \in C(A)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overbrace{(\alpha + \gamma)}^{m} + ۳\overbrace{(\beta + Q)}^{n} \\ ۲(\alpha + \gamma) + ۳(\beta + Q) \\ ۴(\alpha + \gamma) + (\beta + Q) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} m + 2n \\ 3m + 2n \\ 4m + n \end{bmatrix} \in C(A) \checkmark$$

(فرمت عوض نشده)

۲) $\forall A \in S,\ \forall c \in R \rightarrow cA \in S$

$$c \begin{bmatrix} \alpha + 2\beta \\ 2\alpha + 2\beta \\ 4\alpha + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{c\alpha}^{k} + 2(\overbrace{c\beta}^{L}) \\ 2(c\alpha) + 2(c\beta) \\ 4(c\alpha) + (c\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k + 2L \\ 2k + 2L \\ 4k + L \end{bmatrix} \in C(A) \checkmark$$

لذا $C(A)$ یک زیرفضا از فضای برداری R^2 است.

اسپن (span):

اگر $S = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \}$ مجموعه‌ای از بردارها در

فضای برداری $\vec{V}$ و W مجموعه کلیه ترکیب‌های خطی از

بردارهای $\vec{v}_1$، ...، $\vec{v}_n$ باشد، در این صورت W

یک اسپن از بردارهای $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ است که به صورت

زیر نمایش داده می‌شود:

$$W = sp(S) \quad \text{یا} \quad W = sp\{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$$

$$W = \{ c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n \;:\; c_1, c_2, \dots, c_n \in R \}$$

مثال) آیا بردارهای زیر فضای برداری R^3 را اسپن می‌کنند؟!

۱) $u=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\ \bar{v}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ w=\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}$

$$au+bv+cw=r$$

$$a\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a+b\\2a+b+2c\\a+b-c\end{bmatrix}=r_{3\times 1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&2\\1&1&-1\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$$

چون $m=n$ (تعداد سطر و ستون ماتریس A)

← اگر $|A| \neq 0$ باشد جواب منحصر به فرد دارد.

$$|A| = 1(-1-2) - 1(-2-2)$$

$$= 1 \neq 0 \quad \checkmark$$

لذا برای هر بردار دلخواه r ، می‌توان یک جواب پیدا کرد.

پس بردارهای u ، v و w فضای برداری R^3 را اسپن می‌کنند.

۲)

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$au + bv + cw = a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a + ۳b - ۳c \\ ۲a - b + ۸c \\ -a + b - ۵c \end{bmatrix} = r_{۳\times۱}$$

$$\longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۳ \\ ۲ & -۱ & ۸ \\ -۱ & ۱ & -۵ \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_۱ \\ r_۲ \\ r_۳ \end{bmatrix}$$

$$|A| = ۱\overset{-۳}{(۵ - ۸)} - ۳\overset{۲}{(-۱۰ + ۸)} - ۳(۲ - ۱) = ۰$$

از آنجایی که $|A| = ۰$ می‌باشد لذا این دستگاه یک جواب منحصر به فرد ندارد. پس بردارهای مذکور فضای برداری $\mathbb{R}^۳$ را اسپن نمی‌کند.

استقلال خطی بردارها :

بردارهای $u_1 , \dots , u_n$ را مستقل خطی گویند اگر معادله $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_n\vec{u}_n = 0$ فقط به ازای $c_1 = \dots = c_n = 0$ برقرار باشد. در غیر این صورت، u_1 تا u_n را وابسته خطی گویند.

نکته) شرط لازم و کافی برای مستقل خطی بودن بردارهای u_1 تا u_n که هر یک دارای n تا عنصر هستند آن است که دترمینان ماتریس ضرایب $n \times n$ مخالف صفر باشد.

مثال) استقلال خطی را بررسی کنید.

$$u_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow c_۱ \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix} + c_۲ \begin{bmatrix} -۱ \\ -۳ \end{bmatrix} + c_۳ \begin{bmatrix} ۴ \\ -۲ \end{bmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} R_۱ \\ R_۲ \end{array} \begin{bmatrix} -۲c_۱ - c_۲ + ۴c_۳ \\ c_۱ - ۳c_۲ - ۲c_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ ۲\times R_۲ \end{array} \begin{cases} \cancel{-۲c_۱} - c_۲ + \cancel{۴c_۳} = ۰ \\ \cancel{۲c_۱} - ۶c_۲ - \cancel{۴c_۳} = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow -۷c_۲ = ۰ \Rightarrow \boxed{c_۲ = ۰}$$

$$\rightarrow ۲c_۱ = ۴c_۳ \Rightarrow \boxed{c_۱ = ۲c_۳}$$

لذا بردارهای $u_۱$ و $u_۲$ و $u_۳$ وابسته خطی هستند.

(باید فقط $c_i = ۰$ شود که استقلال خطی داشته باشند)

مثال) $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ و $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ استقلال خطی ؟!

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = 0$$

$$\rightarrow \quad c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \quad 2c_1 - \cancel{2c_2} + \cancel{2c_3} = 0 \quad ✓$$

$$\begin{cases} -2c_1 + 3c_2 + c_3 = 0 \\ 3c_1 + 4c_2 - 2c_3 = 0 \\ -4c_1 + 2\cancel{c_2} - 2\cancel{c_3} = 0 \quad ✓ \end{cases} \rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

$$\begin{cases} -2c_1 + 3c_2 + c_3 = 0 \\ 3c_1 + 4c_2 - 2c_3 = 0 \end{cases} \qquad \boxed{c_1 \to 0}$$

$$\begin{cases} 3c_2 + c_3 = 0 \xrightarrow{\times 2} 6c_2 + \cancel{2c_3} = 0 \\ 4c_2 - 2c_3 = 0 \qquad\qquad 4c_2 - \cancel{2c_3} = 0 \end{cases}$$

$$10c_2 = 0 \to \boxed{c_2 = 0} \to \boxed{c_3 = 0}$$

لذا u_1، u_2 و u_3 مستقل خطی اند.

مثال) به ازای چه مقدار λ ، بردارهای زیر مستقل خطی هستند!

$$u = \begin{bmatrix} -1 \\ \lambda \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} \lambda \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$c_1 u + c_2 v + c_3 w = 0$$

$$\rightarrow c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ \lambda \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \lambda \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix} = 0_{3\times 1}$$

طبق نکته عمل می‌کنیم ← ۳ بردار که هرکدام ۳ درایه دارد؛

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -1(-\lambda - 1) - \lambda(\lambda^2 - 1)$$
$$-1(-\lambda - 1)$$
$$= 2(\lambda + 1) - \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda-2)$$

$$= -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

لذا برای مستقل خطی بودن $\lambda \neq 2$ و $\lambda \neq -1$ ؛ ✓

پایه :

در یک فضای برداری مانند V ، مجموعه بردارهای $u_1, u_2, \dots, u_n$ ، $u_1, u_2, \dots, u_n$ تشکیل یک پایه می‌دهند اگر ۲ شرط زیر را داشته باشند :

۱ـ آن فضای برداری را اسپن کنند $V = Sp\{u_1, \dots, u_n\}$

۲ـ بردارهای $u_1, u_2, \dots, u_n$ مستقل خطی باشند .

مثال) آیا بردارهای زیر برای فضای برداری R^3 تشکیل یک پایه می‌دهند؟

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

شرط ۱) اسپن:

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = r$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1(-1) + ۳(-۲-۱) = -۱۰$$

$$\neq ۰ \checkmark$$

لذا $u_۱$، $u_۲$ و $u_۳$ فضای برداری $R^۳$ را اسپن می‌کنند.

شرط ۲ : استقلال خطی

$$c_۱ u_۱ + c_۲ u_۲ + c_۳ u_۳ = ۰$$

if $c_۱ = c_۲ = c_۳ = ۰ \longrightarrow$ مستقل $\checkmark$

$$\begin{bmatrix} 1 & ۰ & ۳ \\ -1 & 1 & ۰ \\ 1 & ۲ & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_۱ \\ c_۲ \\ c_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

↳ $|A| \neq ۰$ $\checkmark$ $u_۱$، $u_۲$ و $u_۳$ مستقل خطی

لذا بردارهای مذکور برای فضای برداری $R^۳$ تشکیل یک پایه می‌دهند.

صورت کلی یک دستگاه معادلات جبرخطی با m معادله و n مجهول

بصورت زیر است:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$\longrightarrow \underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{X} = \underset{m\times 1}{b}$$

در یک دستگاه معادلات جبرخطی $m\times n$ که m تعداد معادلات

و n تعداد مجهولات است حالتهای زیر را می‌توان در نظر گرفت:

۱- حالت $m=n$: دستگاه را همواره معین گویند.

اگر $|A| \neq 0$ باشد، دستگاه معادلات سازگار است و یک جواب منحصر به فرد دارد.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

اگر $|A| = 0$ باشد و دستگاه سازگار باشد بی‌شمار جواب دارد

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ 6x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases} \xrightarrow{\times -2} \begin{matrix} \cancel{-6x_1} \cancel{-4x_2} = \cancel{-10} \\ \cancel{6x_1} + \cancel{4x_2} = \cancel{10} \end{matrix}$$

$$0 = 0$$

اگر $|A| = 0$ باشد و دستگاه ناسازگار باشد اصلاً جواب ندارد.

$$\begin{matrix} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ 6x_1 + 4x_2 = 5 \end{matrix} \xrightarrow{\times -2} \begin{matrix} \cancel{-6x_1} \cancel{-4x_2} = -10 \\ \cancel{6x_1} + \cancel{4x_2} = 5 \end{matrix}$$

$$0 = -5 \quad \times$$

۲_ حالت $m < n$: دستگاه را فرومعین می‌گویند.

این دستگاه بی‌شمار جواب دارد!

۳_ حالت $m > n$: دستگاه را فرامعین می‌گویند.

درصورت سازگار بودن می‌تواند یک جواب منحصر به فرد داشته باشد.

مثال) آیا بردارهای زیر برای فضای برداری R^3 تشکیل یک پایه می‌دهند؟

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

شرط ۱) $c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4 = r$

$$\Rightarrow c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -c_2 + c_3 - c_4 = r_1 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = r_2 \\ c_1 + 2c_2 - c_3 - c_4 = r_3 \end{cases}$$

۳ معادله ، ۴ مجهول ⟵ $m<n$ ⟵ بی‌شمار جواب دارد.

شرط یک برقرار است ✓

شرط ۲) $c_1 u_1 + c_2 a_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4 = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{3\times 4} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}}_{4\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{3\times 1}$$

$$\begin{cases} -c_2 + c_3 - c_4 = 0 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 - c_3 - c_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{-R_1 + R_3}$$

$$c_1 + 3c_2 - \cancel{2c_3} = 0$$

$$c_1 + c_2 + \cancel{2c_3} = 0$$

$$\rightarrow 2c_1 + 4c_2 = 0 \rightarrow \boxed{c_1 = -2c_2}$$

c_2 متغیر آزاد

بی شمار جواب دارد لذا مستقل خطی نیستند.

لذا تشکیل پایه نمی دهند.

مثال) آیا چندجمله ای های زیر برای فضای برداری P_2 تشکیل یک پایه می دهند!؟

$$P_1 = x - 3$$

$$P_2 = x^2 + 2x$$

$$P_3 = x^2 + 1$$

شرط مستقل خطی بودن :

$$c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3 = 0$$

$$c_1(x-3) + c_2(x^2+2x) + c_3(x^2+1) = 0$$

$$\Rightarrow (c_2+c_3)x^2 + (c_1+2c_2)x + (-3c_1+c_3)$$

$$= 0 = 0x^2 + 0x + 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \\ -3c_1 + c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -1(1) + 1(6) = 5 \neq 0$$

مستقل خطی ✓

شرط اسپن بودن:

$$c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3 = r_1 x^2 + r_2 x + r_3$$

$$\Rightarrow (c_2 + c_3) x^2 + (c_1 + 2c_2) x + (-3c_1 + c_3)$$

$$= r_1 x^2 + r_2 x + r_3$$

$$|A| \neq 0$$

لذا هر چندجمله‌ای مرتبه دوم به صورت $r_1 x^2 + r_2 x + r_3$ را می‌توان

به صورت ترکیب خطی از چندجمله‌ای های P_1، P_2 و P_3 نوشت.

پس چندجمله‌ای های P_1، P_2 و P_3 برای فضای برداری P_2 (چندجمله‌ای مرتبه دو)

تشکیل پایه می‌دهند.

محاسبه رتبه یک ماتریس :

$$A_{m\times n} \longrightarrow R(A) \leq \min(m,n)$$

اگر $R(A) = \min(m,n)$ باشد، A یک ماتریس با رتبه کامل نامیده می‌شود.

نحوه محاسبه R :

از کوچکترین کهاد 1×1 شروع می‌کنیم و به سمت کهاد $i\times i$ حرکت می‌کنیم که i همان $\min(m,n)$ است.

کافیست حداقل یک کهاد غیرصفر در هر مرحله پیدا شود.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

کهاد 1×1 :

حداقل یک کهاد 1×1 غیرصفر داریم (1 ، -2)

$$i = \min(m,n) = \min(2,2) = 2$$

کهاد 2×2 :

$$|A| = 0$$

لذا حداقل یک کهاد 2×2 غیر صفر وجود ندارد پس رتبه A همان یک است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad i = \min(4, 2) = 2$$

کهاد 1×1 : 1 ، -1 ، 2 ، -2 $\longrightarrow$ $R = 1$

کهاد 2×2 :

$$\overset{0}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} \text{ و } \overset{0}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}} \text{ و } \overset{0}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} \text{ و }$$

$$\overset{0}{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}$$

لذا رتبه ماتریس همان یک باقی ماند.

$$\boxed{R = 1}$$

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ -۲ & -۳ & ۱ \\ ۳ & ۵ & ۰ \end{bmatrix} \qquad i = \min(۳,۳) = ۳$$

کهاد ۱×۱ : $R = ۱$ ✓

کهاد ۲×۲ : $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ -۲ & -۳ \end{vmatrix} \neq ۰$ ✓ $R = ۲$

کهاد ۳×۳ :

$$|A| = ۱(۰ - ۵) - ۲(۰ - ۳) + ۱(-۱۰ + ۹)$$

$$-۵ + ۶ - ۱ = ۰ \quad \times$$

لذا رتبه ماتریس <u>۲</u> است.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$i = \min(m, n) = \min(۳, ۴) = ۳$$

$R = ۱$ ✓ : ۱×۱ کهاد

$\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & -۲ \end{vmatrix} \neq ۰ \quad R = ۲$ ✓ : ۲×۲ کهاد

: ۳×۳ کهاد

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۱ \\ ۳ & ۵ & -۲ \end{vmatrix}$$

$$= ۱(۴-۵) + ۱(-۳) = -۴ \neq ۰$$

$$\Rightarrow \boxed{R = ۳}$$ ✓