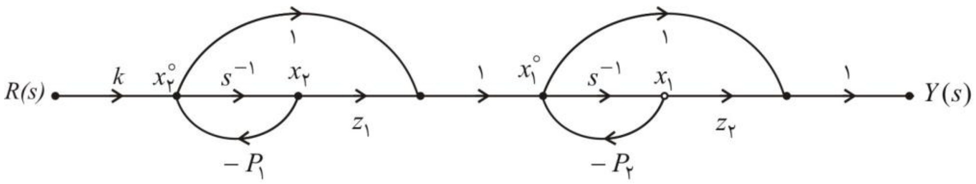
بنابراین نمودار حالت تابع تبدیل مفروض به صورت زیر بدست می‌آید:



معادلات حالت به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_۱\\ \dot{x}_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-p_۲ & z_۱-p_۱\\ ۰ & -p_۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k\\ k\end{bmatrix}r \quad ، \quad y(t)=[z_۲-p_۲ \quad z_۱-p_۱]\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix}+k\,r$$

مزیت استفاده از روش سری در این است که در نمودار حالت، صفرها و قطب‌های سیستم به صورت بهره‌های شاخه‌های مجزا ظاهر می‌شوند. لذا به هنگام تغییر صفرها و قطب‌های سیستم، بررسی سیستم با این روش به سهولت قابل انجام است.

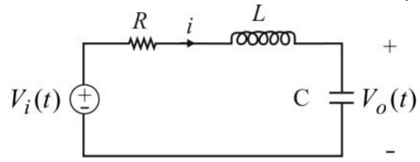
۱-۱٤ مدل‌سازی سیستم‌های فیزیکی

در این بخش به طور خلاصه به مدل‌سازی سیستم‌های الکتریکی و سیستم‌های مکانیکی می‌پردازیم.

۱-۱٤-۱ مدل‌سازی سیستم‌های الکتریکی

راه متداول برای مدل‌سازی سیستم‌های الکتریکی بر اساس قوانین کیرشهف می‌باشد که به دلیل این که معادلات حلقه و گره برای محاسبات کامپیوتری مناسب نمی‌باشند، از روش معادلات حالت استفاده می‌کنیم که در مباحث قبلی در مورد چگونگی نوشتن معادلات حالت بر اساس معادله دیفرانسیل مرتبه n خطی صحبت کرده‌ایم. بنابراین به ذکر یک مثال برای مدل‌سازی سیستم‌های الکتریکی بسنده می‌کنیم.

مثال: سیستم الکتریکی زیر را در نظر بگیرید.



مدل فضای حالت این سیستم کدام است؟ (برق ـ تست‌های نمونه)

۱) $$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}۰ & \frac{۱}{C}\\ -\frac{۱}{L} & \frac{R}{L}\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}۰\\ \frac{۱}{L}\end{bmatrix}v_i(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}۰ & ۱\end{bmatrix}x(t)$$

۲) $$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}۰ & \frac{۱}{C}\\ -\frac{۱}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}۰\\ \frac{۱}{L}\end{bmatrix}v_i(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}۰ & ۱\end{bmatrix}x(t)$$

۳) $$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}۰ & \frac{۱}{C}\\ -\frac{۱}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}۰\\ \frac{۱}{L}\end{bmatrix}v_i(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}۱ & ۰\end{bmatrix}x(t)$$

۴) $$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}\frac{۱}{C} & ۰\\ -\frac{R}{L} & -\frac{۱}{L}\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}\frac{۱}{L}\\ ۰\end{bmatrix}v_i(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}۱ & ۰\end{bmatrix}x(t)$$

✍ **حل:** گزینه «۳»

می‌دانیم که در مدارهای الکتریکی متغیرهای حالت، جریان سلف‌ها و ولتاژ خازن‌ها می‌باشند. داریم:

$$i(t)=i_L(t)=i_C(t)$$

$$\rightarrow \begin{cases} i(t)=C\dfrac{dV_C(t)}{dt} \\ L\dfrac{di(t)}{dt}+V_C(t)+Ri(t)=V_i(t) \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{V}_C(t) \\ \dot{i}_L(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}V_i(t)$$

با توجه به این که خروجی همان ولتاژ خازن است، بنابراین:

$$V_o(t)=V_C(t) \quad \rightarrow \quad y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}$$

۱-۱٤-۲ مدل‌سازی سیستم‌های مکانیکی

به دلیل وجود اجزاء مکانیکی علاوه بر اجزاء الکتریکی، نیاز به مدل‌سازی آن‌ها داریم. از نظر ریاضی می‌توان نشان داد که برای هر قطعه الکتریکی، معمولاً یک قطعه مکانیکی وجود دارد و برعکس. به طور کلی، حرکت اجزاء مکانیکی در ابعاد مختلف را می‌توان به صورت حرکت انتقالی، حرکت دورانی و یا ترکیبی از این دو حرکت توصیف کرد. بنابراین ابتدا به توصیف هر یک از حرکت‌های مذکور می‌پردازیم.

۱-۱٤-۲-۱ حرکت انتقالی

حرکت انتقالی، حرکت جسم در امتداد یک خط مستقیم تعریف می‌شود. این حرکت با متغیرهایی چون موقعیت، سرعت و شتاب توصیف شده و از قانون دوم نیوتن به عنوان مبنای نوشتن معادلات حرکت انتقالی استفاده می‌کنیم. این قانون بیان می‌کند که برآیند نیروهای وارد بر یک جسم برابر است با حاصل ضرب شتاب جسم در جرم آن. $\Sigma F=M\ddot{x}=Ma$

a شتاب جسم، M جرم جسم و ΣF نشان دهنده برآیند نیروهای وارد بر جسم (نیروهای مخالف و موافق حرکت) می‌باشد.

برای بررسی حرکت انتقالی نیاز به شناخت اجزاء آن داریم که عبارتند از:

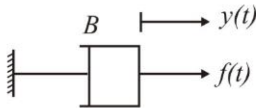
۱- اصطکاک

جزء لاینفک سیستم‌های مکانیکی اصطکاک می‌باشد که در سیستم‌های واقعی عموماً سه نوع اصطکاک وجود دارد:

۱- اصطکاک ویسکوز ۲- اصطکاک استاتیک ۳- اصطکاک کولنی

اصطکاک ویسکوز: این اصطکاک نیروی بازدارنده‌ای است که دارای یک رابطه خطی میان سرعت و نیروی اعمالی است.

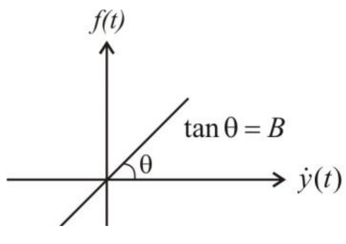
در نمودارها برای نمایش این نوع اصطکاک از ضربه‌گیر (شکل ۱-۴) استفاده می‌شود که در آن B ضریب اصطکاک ویسکوز است.



شکل (۱-۴): ضربه‌گیر برای نمایش اصطکاک ویسکوز

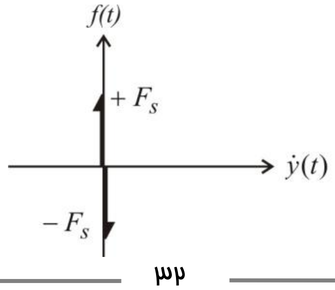
رابطه ریاضی و نمودار مربوط به این نوع اصطکاک عبارتست از:

$$f(t)=B\frac{dy(t)}{dt}$$

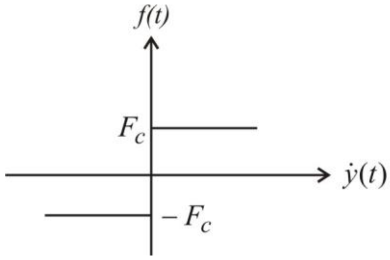


اصطکاک استاتیک: این اصطکاک نیروی بازدارنده‌ای است که مانع از حرکت جسم در ابتدا می‌گردد، به طوری که پس از شروع حرکت، اثر آن از بین می‌رود. نیروی اصطکاک استاتیک را می‌توان با رابطه زیر بیان کرد که در آن F_s بیانگر ضریب اصطکاک استاتیک است.

$$f(t)=\pm F_s\Big|_{\dot{y}=0}$$



اصطکاک کولنی: این اصطکاک، نیروی بازدارنده‌ای است که دامنه آن نسبت به تغییرات سرعت ثابت ولی علامتش با تغییر جهت سرعت، عوض می‌شود. رابطه ریاضی اصطکاک کولنی به صورت زیر است که در آن F_C بیانگر ضریب اصطکاک کولنی است.

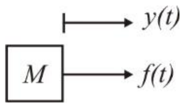


$$f(t)=F_C\frac{\frac{dy(t)}{dt}}{\left|\frac{dy(t)}{dt}\right|}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، تنها اصطکاک ویسکوز دارای رابطه خطی می‌باشد. با توجه به این که بحث ما محدود به سیستم‌های خطی است، در مدل‌سازی فقط این نوع اصطکاک را در نظر می‌گیریم.

۲- جرم

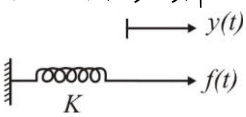
خاصیتی از جسم است که انرژی جنبشی حرکت انتقالی را ذخیره می‌کند. شکل زیر وضعیتی را نشان می‌دهد که در آن جسمی به جرم M تحت اثر نیروی f قرار گرفته است. معادله دینامیکی حاکم بر جسم عبارتست از:



$$f(t)=Ma=M\frac{d^{۲}y(t)}{dt^{۲}}$$

۳- فنر (خطی)

فنر المانی است که انرژی پتانسیل را در خود ذخیره می‌کند. با توجه به این که بررسی ما محدود به سیستم‌های خطی است، در مدل‌سازی از رابطه خطی برای فنر (قانون هوک) استفاده می‌کنیم. شکل زیر نشان دهنده وضعیتی است که فنر با ثابت فنری k تحت تأثیر نیروی f قرار گرفته است. معادله دینامیکی حاکم بر فنر عبارتست از:



$$f(t)=ky(t)$$

رابطه فوق زمانی که فنر دارای کشش اولیه T باشد، به صورت $f(t)-T=ky(t)$ نوشته می‌شود.

۱-۱۴-۲-۲ حرکت دورانی

حرکت دورانی، حرکت جسم حول یک محور ثابت تعریف می‌شود. این حرکت با متغیرهایی چون گشتاور، سرعت زاویه‌ای ω و جابجایی زاویه‌ای θ توصیف می‌شود و از تعمیم قانون حرکت نیوتن به عنوان مبنای نوشتن معادلات حرکت دورانی استفاده می‌کنیم. به طوری که بیان می‌کند جمع جبری گشتاورها حول محوری ثابت برابر است با حاصل ضرب سختی و شتاب زاویه‌ای جسم حول محورش.

$$\Sigma T=j\,\alpha$$

α شتاب زاویه‌ای، j لختی جسم و ΣT نشان دهنده جمع جبری گشتاورهای وارد بر جسم (گشتاورهای موافق و مخالف) می‌باشد.

برای بررسی حرکت دورانی نیاز به شناخت اجزاء آن داریم که عبارتند از:

۱- اصطکاک

مشابه حرکت انتقالی، سه نوع اصطکاک برای این حرکت وجود دارد که عبارتند از:

۱- اصطکاک ویسکوز

$$T(t)=B\frac{d\theta(t)}{dt}$$

۲- اصطکاک استاتیک

$$T(t)=\pm F(s)\Big|_{\dot{\theta}=۰}$$

۳- اصطکاک کولنی

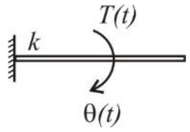
$$T(t)=F_C\frac{\frac{d\theta(t)}{dt}}{\left|\frac{d\theta(t)}{dt}\right|}$$

۲- سختی

خاصیتی از جسم است که انرژی جنبشی حرکت دورانی را ذخیره می‌کند.

۳- فنر (پیچشی)

مشابه فنر خطی برای حرکت‌های انتقالی، ثابت فنر پیچشی k برحسب گشتاور نیرو بر جابجایی زاویه‌ای واحد را می‌توان به عنوان نمایش حالتی از یک میله یا محور وقتی تحت تأثیر یک گشتاور نیرو قرار می‌گیرد، بکار برد. شکل زیر یک سیستم ساده گشتاور ـ فنر را نشان می‌دهد. معادله دینامیکی حاکم بر فنر عبارتست از:



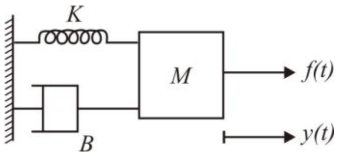
$$T(t)=k\theta(t)$$

اگر به فنر گشتاور اولیه $T_\circ$ اعمال شود، رابطه فوق به صورت $T(t)-T_\circ=k\theta(t)$ نوشته می‌شود.

مثال:

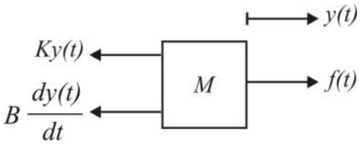
۱- معادلات دیفرانسیل سیستم مکانیکی روبرو را بنویسید. (مؤلف)

۲- تابع تبدیل $\frac{Y(s)}{F(s)}$ را بدست آورید.



حل:

۱- ابتدا دیاگرام آزاد جسم را ترسیم می‌کنیم.



با توجه به قانون دوم نیوتن داریم:

$$\Sigma F=M\frac{d^{۲}y(t)}{dt^{۲}}$$

$$f(t)-Ky(t)-B\frac{dy(t)}{dt}=M\frac{d^{۲}y(t)}{dt^{۲}}\quad\rightarrow\quad\frac{d^{۲}y(t)}{dt^{۲}}+\frac{B}{M}\frac{dy(t)}{dt}+\frac{K}{M}y(t)=\frac{۱}{M}f(t)$$

۲- کافیست از معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم تبدیل لاپلاس بگیریم.

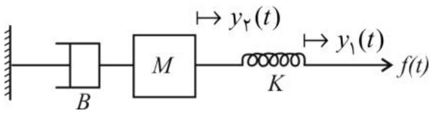
$$(s^{۲}+\frac{B}{M}s+\frac{K}{M})Y(s)=\frac{۱}{M}F(s)$$

$$\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{\frac{۱}{M}}{s^{۲}+\frac{B}{M}s+\frac{K}{M}}$$

مثال:

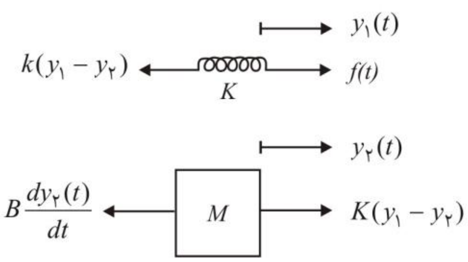
۱- معادلات دیفرانسیل سیستم مکانیکی زیر را بنویسید. (مؤلف)

۲- تابع تبدیل $\frac{Y_۱(s)}{F(s)}$ را بدست آورید.



حل:

۱- ابتدا دیاگرام آزاد جسم را رسم می‌کنیم.



با توجه به قانون دوم نیوتن داریم: $\Sigma F = M \dfrac{d^{۲}y(t)}{dt^{۲}}$

برای فنر : $f(t) - K(y_{۱} - y_{۲}) = ۰ \;\rightarrow\; f(t) = K(y_{۱} - y_{۲}) \quad (I)$

برای جرم : $K(y_{۱} - y_{۲}) - B\dfrac{dy_{۲}(t)}{dt} = M\dfrac{d^{۲}y_{۲}(t)}{dt^{۲}} \;\rightarrow\; \dfrac{d^{۲}y_{۲}(t)}{dt^{۲}} + \dfrac{B}{M}\dfrac{dy_{۲}(t)}{dt} = \dfrac{K}{M}(y_{۱} - y_{۲}) \quad (II)$

۲- ابتدا از طرفین روابط (I) و (II) تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

$$(I) \rightarrow F(s) = K(Y_{۱}(s) - Y_{۲}(s))$$

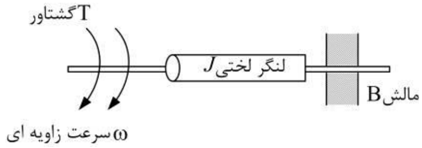
$$(II) \rightarrow (s^{۲} + \frac{B}{M}s)Y_{۲}(s) = \frac{K}{M}(Y_{۱}(s) - Y_{۲}(s))$$

با حذف $Y_{۲}(s)$ از دو رابطه اخیر داریم:

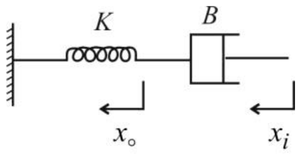
$$\frac{Y_{۱}(s)}{F(s)} = \frac{(s^{۲} + \frac{B}{M}s + \frac{K}{M})}{Ks(s + \frac{B}{M})}$$

مثال: چهار سیستم مکانیکی به همراه توابع تبدیل آن‌ها در زیر نشان داده شده است. کدام یک از توابع تبدیل نادرست است؟ (هسته‌ای ۷۷)

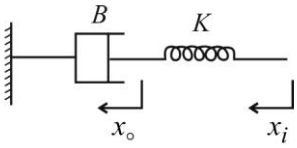
۱) $\dfrac{\omega(s)}{T(s)} = \dfrac{۱}{s(Js+B)}$



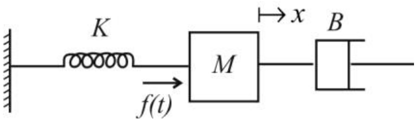
۲) $\dfrac{X_{\circ}(s)}{X_i(s)} = \dfrac{Bs}{Bs+K}$



۳) $\dfrac{X_{\circ}(s)}{X_i(s)} = \dfrac{K}{Bs+K}$



۴) $\dfrac{X(s)}{F(s)} = \dfrac{۱}{Ms^{۲}+Bs+K}$



✍ **حل:** گزینه «۱»

ابتدا معادلات دینامیکی را برای هر گزینه محاسبه کرده و سپس تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

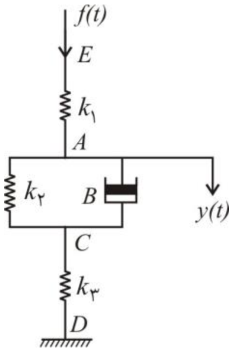
گزینه (۱) : $T(t) - B\dfrac{d\theta(t)}{dt} = J\dfrac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}} \xrightarrow{L} T(s) = s(Js+B)\theta(s) \rightarrow \dfrac{s\theta(s)}{T(s)} = \dfrac{\omega(s)}{T(s)} = \dfrac{۱}{Js+B}$

گزینه (۲): $Kx_{\circ}(t) + B(\dfrac{dx_{\circ}(t)}{dt} - \dfrac{dx_i(t)}{dt}) = ۰ \xrightarrow{L} KX_{\circ}(s) + Bs(X_{\circ}(s) - X_i(s)) = ۰ \rightarrow \dfrac{X_{\circ}(s)}{X_i(s)} = \dfrac{Bs}{Bs+K}$

گزینه (۳): $B\dfrac{dx_{\circ}(t)}{dt} + K(x_{\circ}(t) - x_i(t)) = ۰ \xrightarrow{L} BsX_{\circ}(s) + K(X_{\circ}(s) - X_i(s)) = ۰ \rightarrow \dfrac{X_{\circ}(s)}{X_i(s)} = \dfrac{K}{Bs+K}$

گزینه (۴): $f(t)-Kx(t)-B\frac{dx(t)}{dt}=M\frac{d^{2}x(t)}{dt^{2}} \xrightarrow{L} \frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{Ms^{2}+Bs+K}$

مثال: در سیستم مکانیکی شکل مقابل، ورودی نیروی $f(t)$ و پاسخ، تغییر مکان $y(t)$ نقطه A است. تابع تبدیل این سیستم $G(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}$ کدام است؟ (هسته‌ای ۷۸)



۱) $\frac{k_3(k_2+k_3+Bs)}{k_2+Bs}$

۲) $\frac{k_2+k_3+Bs}{k_3(k_2+Bs)}$

۳) $\frac{k_2+Bs}{k_3(k_2+k_3+Bs)}$

۴) $\frac{k_3(k_2+Bs)}{k_2+k_3+Bs}$

✍ **حل:** گزینه «۲»

اگر جابجایی نقطه C را با $x(t)$ و جابجایی نقطه E را با $x_1(t)$ نمایش دهیم، معادلات دینامیکی حاکم بر سیستم به شکل زیر خواهد بود:

$$f(t)=k_1(x_1(t)-y(t)) \xrightarrow{L} F(s)=k_1[X_1(s)-Y(s)] \qquad (1)$$

$$k_1(x_1(t)-y(t))=k_2[y(t)-x(t)]+B[\frac{dy(t)}{dt}-\frac{dx(t)}{dt}]$$

$$\xrightarrow{L} k_1[X_1(s)-Y(s)]=k_2[Y(s)-X(s)]+Bs[Y(s)-X(s)] \qquad (2)$$

$$k_2[y(t)-x(t)]+B[\frac{dy(t)}{dt}-\frac{dx(t)}{dt}]=k_3x(t) \xrightarrow{L} k_2[Y(s)-X(s)]+Bs[Y(s)-X(s)]=k_3X(s) \qquad (3)$$

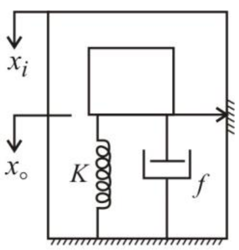
از روابط (۱) و (۲) و (۳) داریم:

$$\begin{cases}F(s)=k_2[Y(s)-X(s)]+Bs[Y(s)-X(s)]\\ F(s)=k_3X(s)\end{cases} \to F(s)=k_2[Y(s)-\frac{F(s)}{k_3}]+Bs[Y(s)-\frac{F(s)}{k_3}]$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{k_2+k_3+Bs}{k_3(k_2+Bs)}$$

❋ ***نکته:*** ***به راحتی می‌توان پی برد که نیروی اعمالی در گره E با نیروی موجود در گره A و C برابر است. این مطلب با در نظر گرفتن $f(t)$ به عنوان یک منبع جریان و شاخه‌های CD، AC و EA همانند شاخه‌های یک مدار الکتریکی قابل درک است، که این واقعیت را در بخش بعدی تحت عنوان مدل جریان ـ نیرو شرح می‌دهیم.***

مثال: تابع تبدیل سیستم شتاب سنج مقابل کدام است؟ (هسته‌ای ۸۱)



$y=x_\circ-x_i$

۱) $\frac{Y(s)}{X_i(s)}=\frac{s}{s^{2}+\frac{f}{m}s+\frac{K}{m}}$

۲) $\frac{Y(s)}{X_i(s)}=\frac{s^{2}}{s^{2}+\frac{f}{m}s+\frac{K}{m}}$

۳) $\frac{Y(s)}{X_i(s)}=\frac{-s}{s^{2}+\frac{f}{m}s+\frac{K}{m}}$

۴) $\frac{Y(s)}{X_i(s)}=\frac{-s^{2}}{s^{2}+\frac{f}{m}s+\frac{K}{m}}$

✍ **حل:** گزینه «۴»

معادلات دینامیکی حاکم بر سیستم را می‌نویسیم. طبق قانون دوم نیوتن داریم:

$$-f(\dot{x}_\circ-\dot{x}_i)-K(x_\circ-x_i)=m\ddot{x}_\circ$$

$$m(\ddot{x}_\circ-\ddot{x}_i)+f(\dot{x}_\circ-\dot{x}_i)+K(x_\circ-x_i)=-m\ddot{x}_i$$

$$\xrightarrow{L} (ms^2+f_s+K)Y(s)=-ms^2X_i(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{X_i(s)}=\frac{-s^2}{s^2+\frac{f}{m}s+\frac{K}{m}}$$

۱-۱۵ معادل الکتریکی سیستم‌های مکانیکی

به واسطه سهولت در ترسیم و بررسی نتایج تجربی مدارهای الکتریکی، سیستم‌های مکانیکی را با مدار الکتریکی معادل آن‌ها نمایش می‌دهیم. این کار به دو صورت انجام می‌پذیرد:

۱-۱۵-۱ معادل ولتاژ ـ نیرو (تشابه مستقیم)

در این نوع معادل‌سازی، ولتاژ حکم نیرو را دارد و جریان حکم تغییرات موقعیت (سرعت) را دارد. به عبارتی

$$F \simeq V \quad , \quad \dot{x} \simeq i$$

حال عناصر موجود در سیستم‌های مکانیکی را بررسی می‌کنیم.

۱- جرم

$$F=M\ddot{x} \rightarrow V=M\frac{di}{dt} \rightarrow M \square L$$

معادل جرم در ولتاژ نیرو، یک سلف می‌باشد.

۲- فنر

$$F=kx \rightarrow V=k\int i\,dt \rightarrow C \square \frac{1}{k}$$

معادل فنر در ولتاژ نیرو، یک خازن می‌باشد.

۳- دمپر

$$F=B\dot{x} \rightarrow V=Bi \rightarrow B \square R$$

معادل دمپر در ولتاژ نیرو، یک مقاومت می‌باشد. به طور خلاصه، جدول (۱-۲) معادل ولتاژ نیرو را برای سیستم‌های مکانیکی نشان می‌دهد.

۱-۱۵-۲ معادل جریان نیرو (تشابه معکوس)

در این نوع معادل‌سازی، نیرو حکم جریان را دارد و ولتاژ حکم تغییرات موقعیت (سرعت) را دارا می‌باشد. به عبارتی

$$F \simeq i \quad , \quad \dot{x} \simeq V$$

حال به بررسی معادل الکتریکی اجزاء در این حالت می‌پردازیم.

۱- جرم

$$F=M\ddot{x} \rightarrow i=M\frac{dv}{dt} \rightarrow M \square C$$

معادل جرم در جریان نیرو، یک خازن می‌باشد.

۲- فنر

$$F=kx \rightarrow i=k\int v dt \rightarrow k \square \frac{1}{L}$$

معادل فنر در جریان نیرو، یک سلف می‌باشد.

۳- دمپر

$$F=B\dot{x} \rightarrow i=BV \rightarrow B \square \frac{1}{R}$$

معادل فنر در جریان نیرو، ادمتیانس می‌باشد. به طور خلاصه، جدول (۳-۱) معادل جریان نیرو را برای سیستم‌های مکانیکی نشان می‌دهد.

جدول (۱ـ۲): معادل ولتاژ ـ نیرو

سیستم الکتریکی	سیستم مکانیکی
V	F
i	$\dot{x}$
L	M
$\frac{1}{C}$	k
R	B

جدول (۱ـ۳): معادل جریان ـ نیرو

سیستم الکتریکی	سیستم مکانیکی
i	F
V	$\dot{x}$
C	M
$\frac{1}{L}$	k
$\frac{1}{R}$	B

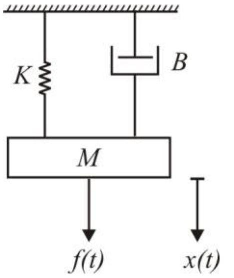
به راحتی می‌توان با مقایسه معادل ولتاژ نیرو و جریان نیرو به نتایج زیر دست یافت:

۱- معادل ولتاژ نیرو، معادل تونن در مدارهای الکتریکی است.

۲- معادل جریان نیرو، معادل نورتن در مدارهای الکتریکی است.

۳- معادل ولتاژ نیرو و جریان نیرو، دوگان یکدیگر می‌باشند.

مثال: معادل ولتاژ نیرو و جریان نیرو را برای سیستم مکانیکی روبرو بنویسید. (مؤلف)



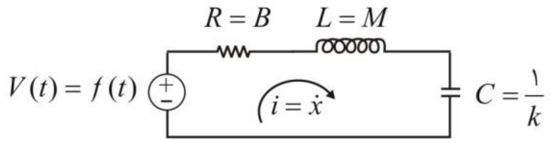
حل:

ابتدا معادلات دینامیکی حاکم بر جسم را می‌نویسیم.

$$M\frac{d^{2}x(t)}{dt^{2}}+B\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=f(t)$$

سپس معادل الکتریکی آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

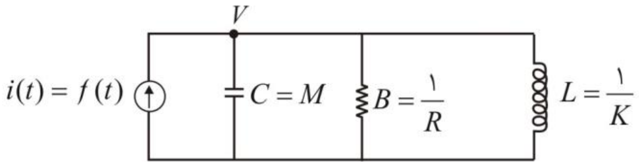
الف- معادل ولتاژ نیرو



با نوشتن KVL در حلقه موردنظر داریم:

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{c}\int i(t)dt=V(t)$$

ب ـ معادل جریان نیرو



با نوشتن KCl در گره موردنظر داریم:

$$C\frac{d^{2}v(t)}{dt^{2}}+\frac{1}{R}\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{L}v(t)=\frac{di(t)}{dt}$$

با توجه به مثال فوق به راحتی می‌توان یک قاعده کلی برای معادل الکتریکی سیستم‌های مکانیکی بدست آورد.

قاعده کلی در معادل‌سازی

در معادل ولتاژ نیرو برای سیستم‌های مکانیکی دو قاعده زیر وجود دارد:

۱- عناصر مکانیکی موازی در سیستم به صورت سری در مدار معادل الکتریکی قرار می‌گیرند.

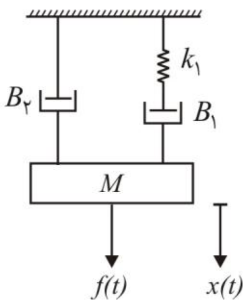
۲- عناصر مکانیکی سری در سیستم به صورت موازی در مدار معادل الکتریکی قرار می‌گیرند.

در معادل جریان نیرو برای سیستم‌های مکانیکی دو قاعده فوق برعکس می‌شود.

۱- عناصر مکانیکی موازی در سیستم به صورت موازی در مدار معادل الکتریکی قرار می‌گیرند.

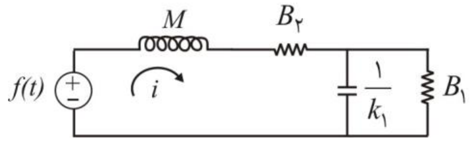
۲- عناصر مکانیکی سری در سیستم به صورت سری در مدار معادل الکتریکی قرار می‌گیرند.

مثال: مدار معادل ولتاژ نیرو و جریان نیرو برای سیستم مکانیکی داده شده را بدست آورید. (مؤلف)

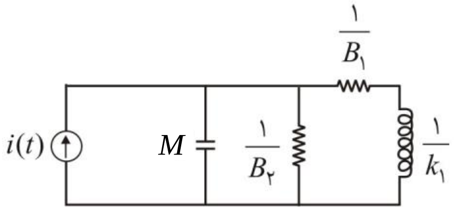


✍ **حل**:

با توجه به قواعد کلی گفته شده داریم:

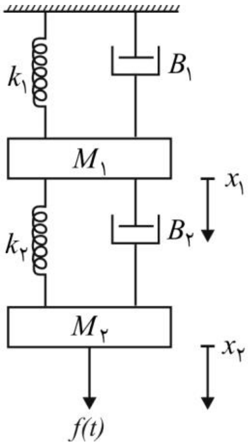


معادل ولتاژ نیرو

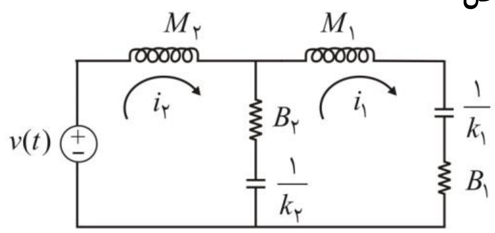


معادل جریان نیرو (دوگان ولتاژ نیرو)

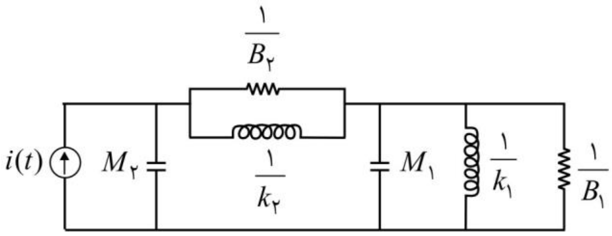
مثال: مدار معادل ولتاژ نیرو و جریان نیرو را برای سیستم مکانیکی زیر بدست آورید. (مؤلف)



✍ **حل**:

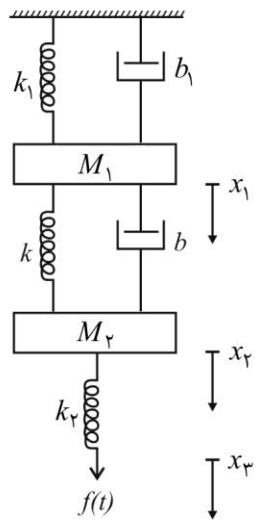


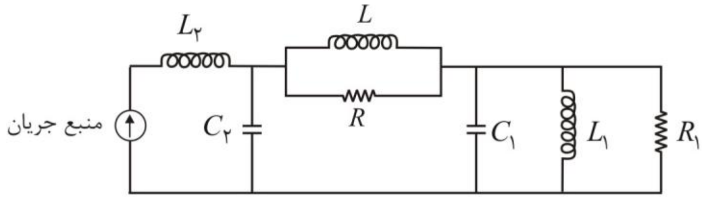
معادل ولتاژ نیرو

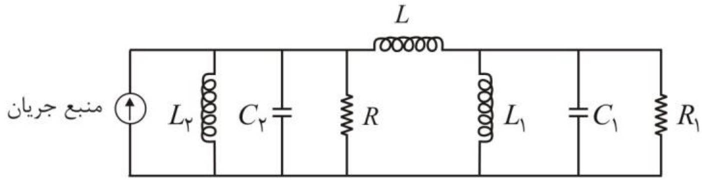


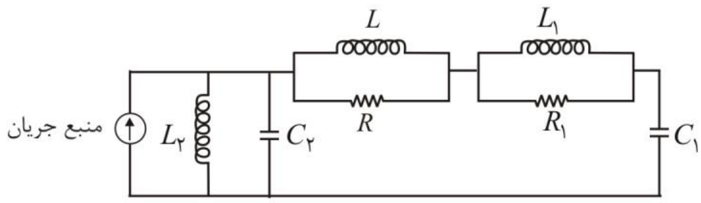
معادل جریان نیرو

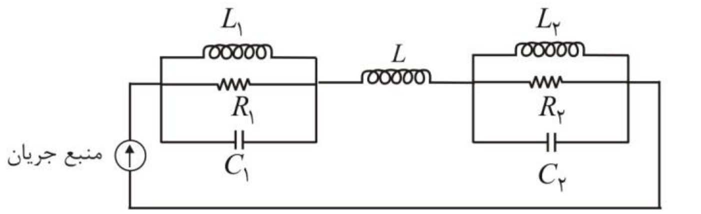
مثال: مدار الکتریکی معادل، تشابه معکوس، سیستم مکانیکی زیر کدام است؟ (نیروی $f(t)$ ورودی سیستم است) (مکانیک ۸۱)



۱)


۲)


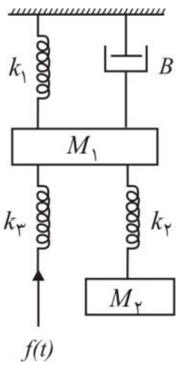
۳)


۴)


✍ **حل:** گزینه «۱»

با توجه به قواعد کلی داده شده برای معادل جریان نیرو بایستی دمپر b و فنر k به صورت موازی در مدار الکتریکی معادل قرار داشته باشند. لذا گزینه‌های (۲) و (۴) نادرست است. از سویی دیگر، بایستی دمپر b_1 و فنر k_1 نیز به صورت موازی در مدار الکتریکی معادل قرار داشته باشند. لذا گزینه (۱) صحیح خواهد بود.

مثال: در سیستم مکانیکی روبرو باید کدام یک از شرایط زیر برقرار باشند تا جرم M_1 تحت نیروی $f = \sin\omega_0 t$ نوسان نکند؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۴ ـ هسته‌ای ۸۴)



۱) $\omega_0^2 = \dfrac{k_2}{M_1}$

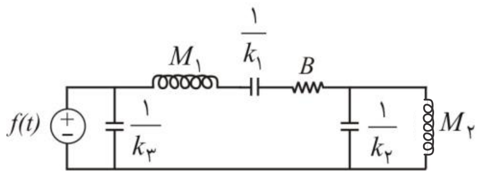
۲) $\omega_0^2 = \dfrac{k_2}{M_2}$

۳) $\omega_0^2 = \dfrac{k_3}{M_2}$

۴) $B = 0\ ,\ \omega_0^2 = \dfrac{k_1}{M_1}$

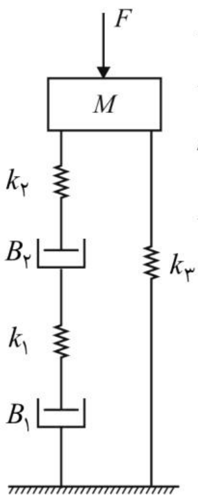
✍ **حل:** گزینه «۲»

ابتدا معادل ولتاژ نیروی سیستم مکانیکی داده شده را رسم می‌کنیم. برای برآورده شدن خواسته مسأله، بایستی سلف M_2 و خازن $\dfrac{1}{k_2}$ در حالت تشدید قرار گیرند. بنابراین:



$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{(\frac{1}{k_2})M_2} = \frac{k_2}{M_2}$$

مثال: معادل الکتریکی سیستم مکانیکی زیر بر اساس نیرو ـ ولتاژ کدام است؟ (مکانیک ۸۳)



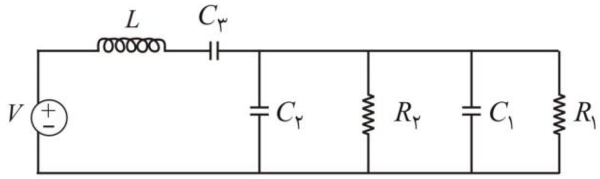
$F \rightarrow V$

$M \rightarrow L$

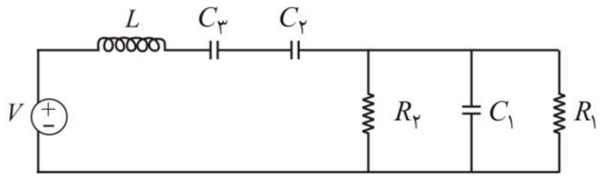
$k \rightarrow \dfrac{1}{C}$

$B \rightarrow R$

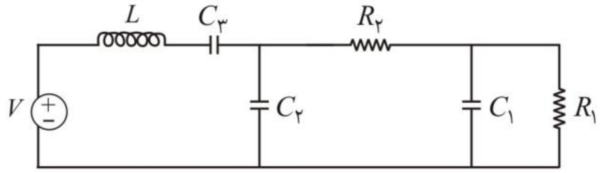
۱)



۲)



۳)



۴)