

مثال: فرض کنید ۳ نفر A و B و C به ترتیب با احتمال ۰.۴، ۰.۷ و ۰.۵، یک مسئله را حل کنند.

الف) احتمال آنکه فقط یکی مسئله را حل کند؟

ب) احتمال آنکه مسئله حل شود؟

حل:

فرضیات

$$\begin{cases} P(A) \leq 0.4 \\ P(B) \leq 0.7 \\ P(C) \leq 0.5 \end{cases}$$

الف) حکم: حل مسئله توسط یکی از ۳ نفر

احتمال مکمل:

$$A \text{ یا } B \text{ یا } C \Rightarrow AB'C' + A'BC' + AB'C'$$

احتمال آنکه A حل کند
احتمال آنکه B و C حل نکنند.

$$\left[0.4(1-0.7)(1-0.5) \right] + \left[(1-0.4)(0.7)(1-0.5) \right] + \left[(1-0.4)(1-0.7)(0.5) \right]$$

$$\boxed{0.34}$$

ب)

$$P = 1 - \left[(1-0.5)(1-0.7)(1-0.4) \right] = \boxed{0.91}$$

احتمال اینکه B و C مسئله را حل نکنند

SALEH

تعبیر دیگر: احتمال آنکه حداقل یک نفر مسئله را حل کند؟
احتمال تفاضل

مثال: یک شرکت حفاری نفت امکانات لازم برای حفر دو چاه دارد. اگر در اولین

چاه به نفت برس کار تمام است وگرنه چاه دوم را حفاری کند.

اگر احتمال اینکه در حفر هر چاه به نتیجه برسد ۰٫۲ باشد احتمال اینکه شرکت حفاری

به نتیجه نرسد چقدر است؟ (حفرهای چاه به طور مستقل از هم صورت می گیرند.)

$$10 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{شرکت در حفاری} \\ \text{اول به نتیجه} \\ \text{نرسد} \end{array} \right. \quad p = 0.2 \quad \text{فرض}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{موفقیت در} \\ \text{حفاری اول} \end{array} \right] p + \left[\begin{array}{l} \text{موفقیت در} \\ \text{حفاری دوم} \end{array} \right] p - \left[\begin{array}{l} \text{موفقیت در} \\ \text{حفاری اول و دوم} \end{array} \right] p = \text{حکم}$$

$$15 \quad \boxed{0.2 + (0.2)(1 - 0.2) = 0.36}$$

اصل ضرب احتمال:

می دانیم بر اساس تعریف احتمال شرطی

$$\begin{cases} P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} & \text{وجه ششایه} \\ P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} & \text{وجه تمانیز} \end{cases}$$

از وجه ششایه $\xrightarrow{10}$ در احتمال شرطی

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) & \text{از فرمول اول} \\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) & \text{از فرمول دوم} \end{cases}$$

~~احتمال ضرب~~
اصل ضرب احتمال

$$P(A \cap B) \triangleq P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

تکمیل اصل ضرب احتمال:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) \cdot P[C | (A \cap B)]$$

با تغییر متغیر به صورت زیر داریم

$$P(D|C) \downarrow (A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = \{P(A) \cdot P(B|A)\} \cdot P[C | (A \cap B)]$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \triangleq P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | (A_1 \cap A_2)) \cdot \dots$$

احتمال ضرب n حادثه

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$

از فرمول ضرب احتمال

$$P(A_n | (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}))$$

5

مثال: اگر دو سیاه‌مد و B مفروض باشند و بدانیم احتمال وقوع $\frac{1}{3}$ است $P(A)$ است

$$P(A|B) = \frac{1}{3}$$

10

$$P(B|A') = \frac{1}{8}$$

مطلوبست: محاسبه $P(B)$ ؟

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = \frac{1}{3} P(B)$$

15

$$P(B|A') = \frac{P(A' \cap B)}{P(A')} \Rightarrow P(A' \cap B) = P(B|A') \cdot P(A')$$

$$\frac{1}{8} \left[1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

20

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{1}{3} P(B) + \frac{1}{12}$$

$$P(B) = \frac{1}{14}$$

☆ ☆ احتمال شرطی: (conditional probability)

هر ف. ب. دست آوردن احتمال یک شیء مثل A با علم به اینکه شیء دیگری مثل B رخ داده است.

این احتمال را {A به شرط B} می نامیم و می نویسیم $P(A|B)$

- بنابراین تعریف احتمال وقوع A به شرط آنکه بدانیم حادثه B رخ داده

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

نقطه تکیه گاه احتمال شرطی

- به دلیل مشابه احتمال وقوع B به شرط آنکه بدانیم حادثه A رخ داده

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

نقطه تکیه گاه احتمال شرطی

حوادث A و B مستقل - ناسازگار - وابسته

$$P(A|B) = \begin{cases} \text{ناسازگار: } P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A|B) = \frac{0}{P(B)} = 0 \end{cases}$$

$$\text{مستقل: } P(A \cap B) = P(A)P(B) \rightarrow P(A|B) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\text{وابسته: } P(A \cap B) \neq 0$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) \Rightarrow$$

$$\text{ناسازگار} \rightarrow P(B|A) = 0$$

$$\text{مستقل} \rightarrow P(B|A) = P(B)$$

$$\text{وابسته} \rightarrow P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

احتمال تفاضل شرطی:

$$P(A|B) =$$

احتمال آنکه A رخ بدهد بشرط آنکه B رخ داده است

$$P(A'|B) =$$

احتمال آنکه A رخ ندهد بشرط آنکه B رخ داده است

$$P(A'|B) \triangleq 1 - P(A|B)$$

مثال: با فرض آنکه احتمال برف آمدن در امروز ۰,۲ باشد و فردا ۰,۲۲ احتمال برف آمدن فردا به شرط آنکه امروز برف نیاید ۰,۷ است.

احتمال برف نیامدن فردا به شرط آنکه امروز برف نیاید چقدر است؟

حل:

$$\begin{cases} A \leq 0,2 & \text{برف آمدن در امروز} \\ B \leq 0,22 & \text{برف آمدن فردا} \end{cases}$$

$$P(B|A) \leq 0,7$$

$$P(B'|A') = ? \text{ حکم}$$

$$P(B'|A') \triangleq \frac{P(A' \cap B')}{P(A')}$$

$$P(A') = 1 - P(A) \Rightarrow 1 - 0,2 \leq 0,8$$

$$P(B|A) \triangleq \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 0,7$$

مثال

$$\Rightarrow 0,7 \leq \frac{P(A \cap B)}{0,2} \Rightarrow P(A \cap B) \leq 0,14$$

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &\leq P(A \cup B)' \\ &= [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]' \\ &\leq 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(A' \cap B') = 1 - [0,2 + 0,22 - (0,12)] = \underline{0,72}$$

$$\stackrel{\text{سب}}{\Rightarrow} P(B' | A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{0,72}{0,8} = \underline{0,9}$$