تجزیه مقادیر منفرد (Singular value)

برای ماتریس حقیقی $A_{m\times n}$ ، اگر $m<n$ باشد جذر مقادیر ویژه AA^T و اگر $m>n$ باشد جذر مقادیر ویژه A^TA را مقادیر منفرد A گویند.

برای ماتریس مختلط 〃 〃 〃 〃 AA^* 〃 〃

〃 〃 〃 A^*A 〃 〃 .

مثال) مقادیر منفرد A چیست؟

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix} \qquad m<n \longrightarrow |\lambda I - AA^T| = 0$$

$$AA^T = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11 & 1\\ 1 & 11\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix}\lambda-11 & -1\\ -1 & \lambda-11\end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \lambda^2 - 22\lambda + 120 = 0$$

$$\lambda_1 = 10 \longrightarrow \sigma_1 = \sqrt{10}$$

$$\lambda_2 = 12 \longrightarrow \sigma_2 = \sqrt{12}$$

رتبه ماتریس: تعداد مقادیر منفرد غیرصفر ماتریس.

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow |\lambda I - A^TA| = 0$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-6 & -1 \\ -1 & \lambda-6 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 35 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\delta_1 = \sqrt{5}\ ,\ \delta_2 = \sqrt{7}}$$

$$\boxed{R(A) = 2}$$

محاسبه نرم ۲ و عدد حالت ماتریس :

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}}$$

$$\rightarrow |A^T A - \lambda I| = 0$$

$$\|A\|_2 = \delta_{max} \quad ✓$$

$$k = \|A\| . \|A^{-1}\|$$

$$K = \frac{\delta_{max}}{\delta_{min}}$$

$k >> 1$ ill

$K \geq 1$ ✓

تمرین) به کمک SVD ، وضعیت ماتریس زیر را مشخص کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 0 & -100 \\ 0 & 100 & -100 \\ -100 & -100 & 200 \end{bmatrix}$$

تجزیه ماتریس ها بر اساس مقادیر منفرد:

$$A_{m\times n} = U \Sigma V^T$$

که $U_{m\times m} = [u_1, \dots, u_m]$ و

$V_{n\times n} = [v_1, \dots, v_n]$ ماتریس های متعامد هستند.

* ستون های ماتریس $U_{m\times m}$ از بردارهای ویژه یکامتعامد AA^T و ستون های ماتریس $V_{n\times n}$ از بردارهای ویژه یکامتعامد A^TA تشکیل میشوند.

$\Sigma_{m\times n}$ یک ماتریس قطری و نه مربعی است که عناصر

روی قطر آن مقادیر منفرد غیر صفر ماتریس AA^T یا

A^TA است. (بسته به $m>n$ یا $n>m$)

$$\Sigma_{m\times n} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$$

مثال) ماتریس $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ را توسط مقادیر منفرد تجزیه نمایید.

$$A_{2\times 3} = U_{2\times 2}\, \Sigma_{2\times 3}\, V^T_{3\times 3}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} \longrightarrow |\lambda I - AA^T| = 0$$

$$\lambda_1 = 12, \quad \lambda_2 = 10$$

دو مقدار ویژه حقیقی و متمایز؛

$$(\lambda_1 I - AA^T)\, u_1 = 0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 11 & -1 \\ -1 & \lambda - 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda_1 = 12}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای $\lambda_2 = 10$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

محاسبه $V_{3\times 3}$:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow |\lambda I - A^TA| = 0$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 12, \quad \lambda_2 = 10, \quad \lambda_3 = 0$$

$$(\lambda_1 I - A^TA)\, v_1 = 0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-10 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-10 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda_1 = 12}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_{۲} = ۱۰$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۰ & -۴ \\ -۲ & -۴ & ۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{۲۱} \\ v_{۲۲} \\ v_{۲۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$-۲ v_{۲۳} = ۰ \rightarrow v_{۲۳} = ۰$ ✓

$-۲ v_{۲۱} - ۴ v_{۲۲} + \cancel{۸ v_{۲۳}} = ۰ \rightarrow v_{۲۱} = ۲$

$v_{۲۲} = -۱$

$$\rightarrow v_{۲} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix} ✓$$

$$\lambda_{۳} = ۰ \rightarrow \begin{bmatrix} -۱۰ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۱۰ & -۴ \\ -۲ & -۴ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{۳۱} \\ v_{۳۲} \\ v_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow v_{۳} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ -۵ \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

$$\leftarrow m < n \qquad \therefore \Sigma_{2\times 3}$$

$$|\lambda I - AA^T| = 0$$

$$\hookrightarrow \lambda_1 = 12 \qquad \sigma_1 = \sqrt{12}$$

$$\lambda_2 = 10 \longrightarrow \sigma_2 = \sqrt{10}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$$

تمرین) تجزیه مقادیر منفرد

H. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$