دانشگاه صنعتی شاهرود **دانشکده علوم ریاضی**

سری پنجم تمرینات درس معادلات دیفرانسیل **تاریخ تحویل: ۹۹/۳/۲۳**

---

(۱) در معادله دیفرانسیل زیر نقاط عادی، تکین منظم و تکین نامنظم را مشخص کنید.

$$x^3(1-x^2)y'' + (2x-3)y' + xy = 0.$$

(۲) جواب عمومی معادله زیر را در مجاورت نقطه $x_0 = -3$ بدست آورید.

$$y'' - 2(x+3)y' - 3y = 0.$$

(۳) یک جواب معادله زیر را در مجاورت نقطه $x_0 = 0$ بدست آورید و فرم کلی جواب دوم آن را (بدون بدست آوردن ضرایب) بنویسید.

$$x^2y'' + xy' - (x+4)y = 0.$$

(۴) تبدیل معکوس لاپلاس توابع زیر را بیابید.

الف. $F(s) = \frac{s+3}{s^3-s}$

ب. $F(s) = \frac{s+1}{s^4+5s^2+4}$

(۵) جواب مسائل مقدار اولیه زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس بیابید.

الف. $x'' + 4x' + 3x = e^t,\ x(0) = 3,\ x'(0) = -3$

ب. $x'' - 3x' + 2x = 24cosht,\ x(0) = 6,\ x'(0) = -3$

موفق باشید.

پاسخ سری پنجم تمرینات درس معادلات دیفرانسیل ۱۳۹۹/۳/۲۳

---

(۱) معادله را به صورت $y''+\frac{2x-3}{x^3(1-x^2)}y'+\frac{1}{x^2(1-x^2)}y=0$ بازنویسی می کنیم. اکنون داریم :

$$q(x)=\frac{1}{x^2(1-x^2)} \quad \text{و} \quad p(x)=\frac{2x-3}{x^3(1-x^2)}$$

این دو تابع در سه نقطه $x_1=0$ ، $x_2=1$ و $x_3=-1$ تعریف نشده اند پس این معادله سه نقطه تکین $-1,0,1$ دارد و بقیه نقاط، نقاط عادی معادله هستند.

چون $\lim_{x\to 1}(x-1)p(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x-3)}{x^3(1-x^2)}=\frac{1}{2}$ و $\lim_{x\to 1}(x-1)^2q(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x^2(1-x^2)}=0$

بنابر این $x_2=1$ یک نقطه تکین منظم معادله است.

چون $\lim_{x\to -1}(x+1)p(x)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x-3)}{x^3(1-x^2)}=\frac{-5}{2}$ و $\lim_{x\to -1}(x+1)^2q(x)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2}{x^2(1-x^2)}=0$

بنابر این $x_3=-1$ یک نقطه تکین منظم معادله است.

اما چون حد $\lim_{x\to 0}xp(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2x-3}{x^2(1-x^2)}$ وجود ندارد پس $x_1=0$ یک نقطه تکین نامنظم معادله است.

(۲)
$$y''-2(x+3)y'-3y=0$$

نقطه $x_0=-3$ یک نقطه عادی معادله است. بنابر این معادله یک جواب به صورت سری توانی

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+3)^n=a_0+a_1(x+3)+a_2(x+3)^2+a_3(x+3)^3+\cdots$$

دارد. این جواب را در معادله قرار می دهیم.

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x+3)^{n-2}-2(x+3)\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x+3)^{n-1}-3\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+3)^n=0$$

ابتدا ضریب هر زیگما را در عبارت داخل زیگما ضرب می کنیم.

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x+3)^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}2na_n(x+3)^n-\sum_{n=0}^{\infty}3a_n(x+3)^n=0$$

اکنون توان $(x+3)$ در تمام زیگماها را یکسان می کنیم

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)((n+1)a_{n+2}(x+3)^n-\sum_{n=1}^{\infty}2na_n(x+3)^n-\sum_{n=0}^{\infty}3a_n(x+3)^n=0$$

کرانهای زیگماها را یکسان می کنیم

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)((n+1)a_{n+2}(x+3)^n-\sum_{n=0}^{\infty}2na_n(x+3)^n-\sum_{n=0}^{\infty}3a_n(x+3)^n=0$$

اکنون داریم
$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)((n+1)a_{n+2}-(2n+3)a_n](x+3)^n=0$$

و در نتیجه :
$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-(2n+3)a_n=0 \quad , \quad n=0,1,2,\cdots$$

و یا
$$a_{n+2}=\frac{(2n+3)}{(n+2)(n+1)}a_n \quad , \quad n=0,1,2,\cdots$$

با توجه به این رابط بازگشتی داریم :

$$a_2=\frac{3}{2}a_0 \quad , \quad a_3=\frac{5}{6}a_1 \quad , \quad a_4=\frac{7}{12}a_2=\frac{7}{8}a_0 \quad , \quad a_5=\frac{9}{20}a_3=\frac{3}{8}a_1$$
$$a_6=\frac{11}{60}a_0 \quad , \quad a_7=\frac{77}{240}a_1$$

اکنون ۸ جمله اولیه جواب عمومی معادله مشخص شده است.

$$y=a_0+a_1(x+3)+\frac{3}{2}a_0(x+3)^2+\frac{5}{6}a_1(x+3)^3+\frac{7}{8}a_0(x+3)^4$$
$$+\frac{3}{8}a_1(x+3)^5+\frac{11}{60}a_0(x+3)^6+\frac{77}{240}a_1(x+3)^7+\cdots$$
$$y=a_0(1+\frac{3}{2}(x+3)^2+\frac{7}{8}(x+3)^4+\frac{11}{60}(x+3)^6+\cdots)$$
$$+a_1((x+3)+\frac{5}{6}(x+3)^3+\frac{3}{8}(x+3)^5+\frac{77}{240}(x+3)^7+\cdots)$$

(۳)
$$x^2y''+xy'-(x+4)y=0$$

نقطه $x_0=0$ یک نقطه تکین منظم معادله است و داریم : $\lim_{x\to 1}xp(x)=1$ و $\lim_{x\to 1}x^2q(x)=-4$

معادله مشخصه به صورت $r^2-4=0$ است که دو ریشه حقیقی و متمایز $r_1=2$ و $r_2=-2$ دارد.

این معادله، جوابی به صورت سری فروبنیوس $a_0\neq 0 \quad , \quad y_1=x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ دارد و چون $r_1-r_2=4$ عددی

طبیعی است بنابر این جواب دوم معادله به صورت $y_2=cy_1\ln x+x^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ دارد که c عددی ثابت است.

برای پیدا کردن y_1 آن را در معادله قرار می دهیم.

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_nx^n+x\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_nx^{n+1}-(x+4)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}=0$$

پاسخ سری پنجم تمرینات درس معادلات دیفرانسیل　　　　۱۳۹۹/۳/۲۳

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n x^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_n x^{n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+3}-\sum_{n=0}^{\infty}4a_n x^{n+2}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n x^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_n x^{n+2}-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1} x^{n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}4a_n x^{n+2}=0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[n(n+4)a_n-a_{n-1}]x^{n+2}=0$$

$$n(n+4)a_n-a_{n-1}=0 \quad , \quad n=1,2,3,\cdots \qquad \to \quad a_n=\frac{1}{n(n+4)}a_{n-1} \quad , \quad n=1,2,3,\cdots$$

$$a_1=\frac{1}{5}a_0 \ \ , a_2=\frac{1}{60}a_0 \ \ , \ a_3=\frac{1}{1260}a_0 \ \ , \quad a_4=\frac{1}{35280}a_0 \ \ , \ \ \cdots$$

اکنون ۵ جمله اولیه تابع y_1 مشخص شده است.

$$y_1=a_0x^2(1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{60}x^2+\frac{1}{1260}x^3\,\frac{1}{35280}x^4+\cdots)$$

$$=a_0(x^2+\frac{1}{5}x^3+\frac{1}{60}x^4+\frac{1}{1260}x^5\,\frac{1}{35280}x^6+\cdots) \ \ , a\neq 0$$

(۴) الف)

$$F(s)=\frac{s+3}{s^3-s}=\frac{-3}{s}+\frac{2}{s-1}+\frac{1}{s+1} \ \ \to \ \ L^{-1}[F(s)]=-3+2e^{t}+e^{-t}$$

ب)

$$F(s)=\frac{s+1}{s^4+5s^2+4}=\frac{1}{3}(\frac{s+1}{s^2+1}-\frac{s+1}{s^2+4})=\frac{1}{3}(\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{s^2+4})$$

$$\to \ \ L^{-1}[F(s)]=\frac{1}{6}(2\cos t+2\sin t-2\cos 2t-\sin 2t)$$

(۵) الف)

$$x''+4x'+3x=e^{t} \ \ ; \ \ x(0)=3, x'(0)=-3$$

تبدیل لاپلاس دو طرف معادله را محاسبه می کنیم.

$$L[x''+4x'+3x]=L[e^{t}] \quad \to \quad s^2L[x]-3s+3+4sL[x]-12+3L[x]=\frac{1}{s-1}$$

$$(s^2+4s+3)L[x]=3s+9+\frac{1}{s-1} \quad \to \quad L[x]=\frac{3s^2+6s-8}{(s^2+4s+3)(s-1)}$$

اکنون به کمک تبدیلات معکوس لاپلاس تابع $x(t)$ را پیدا کنیم.

پاسخ سری پنجم تمرینات درس معادلات دیفرانسیل ۱۳۹۹/۳/۲۳

$$L[x]=\frac{3s^2+6s-8}{(s^2+4s+3)(s-1)}=\frac{1}{8(s+3)}+\frac{11}{4(s+1)}+\frac{1}{8(s-1)}$$

$$x(t)=\frac{1}{8}L^{-1}[\frac{1}{s+3}+\frac{22}{s+1}+\frac{1}{s-1}]=\frac{1}{8}(e^{-3t}+22e^{-t}+e^{t})$$

ب)

$$x''-3x'+2x=24\cosh t \;\; ; \;\; x(0)=6, x'(0)=-3$$

$$L[x''-3x'+2x]=L[24\cosh t]=L[12e^{t}+12e^{-t}]$$

$$\rightarrow \; s^2L[x]-6s+3-3sL[x]+18+2L[x]=\frac{12}{s-1}+\frac{12}{s+1}$$

$$(s^2-3s+2)L[x]=6s-21+\frac{24s}{s^2-1}=\frac{6s^3-21s^2+18s+21}{s^2-1}$$

$$L[x]=\frac{6s^3-21s^2+18s+21}{(s^2-3s+2)(s^2-1)}=\frac{7}{s-2}+\frac{2}{s+1}-\frac{3}{s-1}-\frac{12}{(s-1)^2}$$

$$x(t)=L^{-1}[\frac{7}{s-2}+\frac{2}{s+1}-\frac{3}{s-1}-\frac{12}{(s-1)^2}]=7e^{2t}+2e^{-t}-3e^{t}-12te^{t}$$