نام و نام خانوادگی : . . . .

شماره دانشجویی : . . . .

نام مدرس : . . . .

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۳۹۴/۲/۳**

وقت : **۷۵** دقیقه

دانشکده ریاضی

امتحان میان ترم درس : **ریاضی۲-فنی (۱۳ گروه هماهنگ)**

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۳۹۴- ۱۳۹۳**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال۱ - رویه های $x^۲+y^۲+z-۲x+۴y=۴$ و $x+y+z=۱$ را در یک دستگاه مختصات رسم کرده و اشتراک آنها را در شکل مشخص کنید. ۱۵ نمره

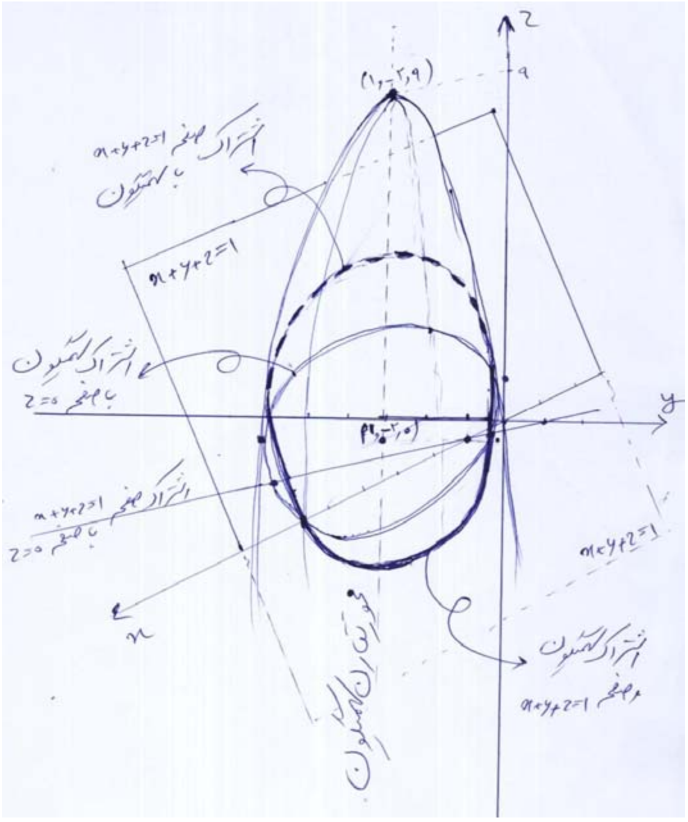
سوال۲ - معادله دایره بوسان (دایره انحناء) منحنی $x=-y^۲+y$ در نقطه $(۰,۱)$ را بنویسید. ۱۵ نمره

سوال۳ - اگر بردار یکه قائم بر سطح $\cos x - x^۲y + e^{xz} + yz = ۴$ در نقطه $(۰,۱,۲)$ را $\vec{u}$ بنامیم، ۱۵ نمره
مقدار مشتق سویی تابع $f(x,y,z)=x^۲-yz+xz^۲$ را در نقطه $(۲,-۱,۲)$ و در امتداد $\vec{u}$ محاسبه کنید.

سوال۴ - تابع $f(x,y)$ در معادله $f_{xx}+f_{yy}=۰$ صدق می کند.
اگر $g(u,v)=f(u^۲-v^۲,۲uv)$ مقدار عبارت $g_{uu}+g_{vv}$ را محاسبه کنید. ۱۵ نمره

سوال۵ - مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+۳\ln z$ را
روی سطح $x^۲+y^۲+z^۲=۵\ ,\ x,y,z>۰$ بیابید. ۱۵ نمره

موفق باشید



جواب سوال۱ : برای جواب به این سوال یک شکل تقریبی مانند شکل مقابل کفایت می کند اما برای تجسم بهتر شکل ، می‌توانیم به موارد زیر اشاره کنیم.

معادله رویه $x^2 + y^2 - 2x + 4y + z = 4$ را به صورت $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 - z$ می‌نویسیم.

این رویه یک سهمیگون دوار یکپارچه است و بالاترین نقطه آن نقطه $(1,-2,9)$ است. اشتراک آن با صفحه xy دایره $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ است که در شکل مقابل رسم شده است. اگر در دستگاه

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2-2x+4y+z=4 \end{cases}$$

z را حذف کنیم داریم : $x^2 + y^2 - 3x + 3y = 3$ که معادله یک دایره است :

$$(x-\frac{3}{2})^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = \frac{15}{2}$$

این دایره که در شکل مقابل رسم نشده است ، تصویر مقطع صفحه $x+y+z=1$ با سهمیگون -که یک منحنی بسته روی رویه است - بر روی صفحه xy است.

جواب سوال۲ :

قرار می‌دهیم $x = -t^2 + t\ ,\ y = t\ ,\ z = 0$ و در نتیجه $r(t) = (-t^2 + t, t, 0)$

$$r'(t) = (-2t+1,1,0) \ \rightarrow r''(t) = (-2,0,0)$$

$$r'(1) = (-1,1,0) \ \rightarrow r''(1) = (-2,0,0) \ \rightarrow \ r'(1)\times r''(1) = (0,0,2)$$

$$|r'(1)\times r''(1)| = 2 \ , \ \ |r'(1)| = \sqrt{2} \quad \rightarrow \qquad k(1) = \frac{2}{(\sqrt{2})^3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad R(1) = \sqrt{2}$$

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{(-2t+1)^2+1}}(-2t+1,1,0)$$

$$\rightarrow T'(t) = \frac{2(-2t+1)}{(\sqrt{(-2t+1)^2+1})^3}(-2t+1,1,0) + \frac{1}{\sqrt{(-2t+1)^2+1}}(-2,0,0)$$

$$T'(1) = \frac{-2}{2\sqrt{2}}(-1,1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(-2,0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,0) \quad N(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,0)$$

$$O(1) = r(1) + R(1)N(1) = (0,1,0) + \sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,0) = (-1,0,0)$$

معادله دایره بوسان عبارت است از : $(x+1)^2 + y^2 = 2$

جواب سوال۳ : چون معادله رویه $\cos x - x^{۲}y + e^{xz} + yz = ۴$ به صورت ضمنی داده شده است بردار قائم آن ازرابطه $grad\,(\cos x - x^{۲}y + e^{xz} + yz - ۴)$ به دست می آید.

$$grad\,(\cos x - x^{۲}y + e^{xz} + yz - ۴) = (-\sin x - ۲xy + ze^{xz}\,, -x^{۲} + z\,, xe^{xz} + y)$$

در نقطه $(۰,۱,۲)$ بردار گرادیان برابر است با $(۲,۲,۱)$ و در نتیجه $\vec{u} = \frac{۱}{۳}(۲,۲,۱)$

برای محاسبه مشتق سویی f ابتدا گرادیان آن را محاسبه می‌کنیم. $\nabla f(x,y,z) = (۲x + z^{۲}, -z, -y + ۲xz)$ و در نتیجه $\nabla f(۲,-۱,۲) = (۸,-۲,۷)$. اکنون مقدار مشتق سویی خواسته شده برابر است با :

$$D_{\vec{u}} f(۲,-۱,۲) = (۸,-۲,۷)\cdot\frac{۱}{۳}(۲,۲,۱) = \frac{۱۹}{۳}$$

جواب سوال۴ :

$$g_u = ۲uf_x + ۲vf_y \quad \to \quad g_{uu} = ۲f_x + ۴u^{۲}f_{xx} + ۴uvf_{xy} + ۴uvf_{yx} + ۴v^{۲}f_{yy}$$
$$g_v = -۲vf_x + ۲uf_y \quad \to \quad g_{vv} = -۲f_x + ۴v^{۲}f_{xx} - ۴uvf_{xy} - ۴uvf_{yx} + ۴u^{۲}f_{yy}$$
$$g_{uu} + g_{vv} = ۴(u^{۲} + v^{۲})(f_{xx} + f_{yy}) = ۰$$

جواب سوال۵ : برای استفاده از روش ضرایب لاگرانژ تابع $\varphi(x,y,z) = \ln x + \ln y + ۳\ln z - \lambda(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} - ۵)$ را در نظر می‌گیریم. در نقاط اکسترمم نسبی باید داشته باشیم :

$$\varphi_x = \frac{۱}{x} - ۲\lambda x = ۰\,,\quad \varphi_y = \frac{۱}{y} - ۲\lambda y = ۰\,,\quad \varphi_z = \frac{۳}{z} - ۲\lambda z = ۰\,,\quad \varphi_\lambda = x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} - ۵ = ۰$$

یعنی $x^{۲} = y^{۲} = \frac{z^{۲}}{۳} = \frac{۱}{۲\lambda} \;\to\; \frac{۵z^{۲}}{۳} - ۵ = ۰ \;\to\; z = \sqrt{۳}\,,\ x = y = ۱$

اکنون داریم $f(۱,۱,\sqrt{۳}) = ۳\ln\sqrt{۳} = \frac{۳}{۲}\ln ۳$ و می توان دید که این مقدار ، ماکزیمم نسبی f است.

سیدرضا موسوی