کد فرم : FR/FY/11
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

دانشگاه صنعتی شاهرود

گروه آموزشی : **ریاضی**	امتحان درس : **ریاضی ۲ (ریاضی)**	نیمسال (اول/**دوم**) **۸۹-۱۳۸۸**	نام مدرس: **سیدرضا موسوی**
نام و نام خانوادگی :	شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۳۸۹/۴/۱**	وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :
از نوشتن با مداد خودداری نمایید.
استفاده از هیچگونه ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.
در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال۱- سطح محصور به منحنی تابع $f(x)=\dfrac{\cos ۲x}{\sin(x+\pi/۴)}$ ، خط $x=\pi/۶$ و محورهای مختصات را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۲- انتگرال معین $\displaystyle\int_۰^{\pi/۲}\frac{۳\sin x-\sin ۳x}{۱+\cos x}\,dx$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

سوال۳- به ازای چه مقادیری از x دترمینان زیر برابر صفر است ؟ **۱۰ نمره**

$$\begin{vmatrix} ۱ & x & -۱ & ۲ \\ ۱ & x^۲ & ۱ & -۴ \\ ۲ & ۲x & -۲ & ۴ \\ -۱ & -x & ۱ & -۲ \end{vmatrix}$$

سوال۴- اگر A ، B و C سه بردار دلخواه در $R^۳$ باشند ، نشان دهید : **۱۵ نمره**

$$(A\times B)\times C+(B\times C)\times A+(C\times A)\times B=۰$$

سوال۵- اگر $f,g:R\to R^۳$ دو تابع برداری باشند نشان دهید که : **۱۵ نمره**

$$\frac{d}{dt}(f\times g)=f\times\frac{dg}{dt}+\frac{df}{dt}\times g$$

سوال۶- تابع برداری $f(t)=(t\cos t,t\sin t,t^۲)$ را در نظر بگیرید.

الف) طول منحنی این تابع را در بازه $t\in[۰,۴]$ بیابید. **۱۵ نمره**

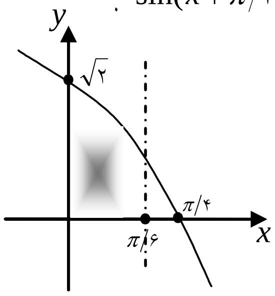
ب) بردارهای یکه مماس، قائم و قائم دوم آن را در نقطه $t=۰$ بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۷- معادله دایره بوسان (انحناء) منحنی تابع $y=x^۲$ در نقطه $(۱,۱)$ را بنویسید. **۲۰ نمره**

موفق باشید

پاسخ سوالات امتحان پایان ترم درس ریاضی۲(ریاضی) – نیمسال دوم ۸۹-۱۳۸۸

سوال۱- $\int_{\cdot}^{\pi/۶}\frac{\cos ۲x}{\sin(x+\pi/۴)}dx=\int_{\cdot}^{\pi/۶}\frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\sin x\cos\pi/۴+\sin\pi/۴\cos x}dx=\int_{\cdot}^{\pi/۶}\frac{\sqrt{۲}(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\sin x+\cos x}dx=$ ،



$$=\int_{\cdot}^{\pi/۶}\sqrt{۲}(\cos x-\sin x)dx=\sqrt{۲}(\sin x+\cos x)\Big|_{\cdot}^{\pi/۶}=\sqrt{۲}(\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۱)=\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۲}}$$

سوال۲- $\int_{\cdot}^{\pi/۲}\frac{۳\sin x-\sin ۳x}{۱+\cos x}dx=\int_{\cdot}^{\pi/۲}\frac{۴\sin^۳ x}{۱+\cos x}dx=۴\int_{\cdot}^{\pi/۲}\frac{\sin x\sin^۲ x}{۱+\cos x}dx$

$$=۴\int_{\cdot}^{\pi/۲}\sin x(۱-\cos x)dx=-۴\cos x+۲\cos^۲ x\Big|_{\cdot}^{\pi/۲}=۲$$

سوال۳- به ازای هر مقدار x دترمینان برابر صفر است. اگر ۲ برابر سطر چهارم را به سطر سوم اضافه کنیم یک سطر برابر صفر خواهیم داشت.

سوال۴- روش اول : می دانیم $(A\times B)\times C=-(B\cdot C)A+(A\cdot C)B$ و همچنین $u\cdot v=v\cdot u$ بنابر این

$$(A\times B)\times C+(B\times C)\times A+(C\times A)\times B=-(B\cdot C)A+(A\cdot C)B-(C\cdot A)B+(B\cdot A)C-(A\cdot B)C+(C\cdot B)A=۰$$

روش دوم : اگر $A=(a_۱,a_۲,a_۳)$ ، $B=(b_۱,b_۲,b_۳)$ و $C=(c_۱,c_۲,c_۳)$ پس $A\times B=(a_۲b_۳-a_۳b_۲,a_۳b_۱-a_۱b_۳,a_۱b_۲-a_۲b_۱)$

و $(A\times B)\times C=(a_۲b_۳c_۳-a_۳b_۲c_۳-a_۳b_۱c_۲+a_۱b_۳c_۲,a_۱b_۲c_۱-a_۲b_۱c_۱-a_۲b_۳c_۳+a_۳b_۲c_۳,a_۲b_۳c_۲-a_۳b_۲c_۲-a_۳b_۱c_۱+a_۱b_۳c_۱)$

دو حاصلضرب دیگر بطور مشابه نوشته می شوند و از جمع آنها نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.

سوال۵- اگر $f(t)=(f_۱(t),f_۲(t),f_۳(t))\ ,\ g(t)=(g_۱(t),g_۲(t),g_۳(t))$ آنگاه

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f\times g)&=\frac{d}{dt}(f_۲g_۳-f_۳g_۲,f_۳g_۱-f_۱g_۳,f_۱g_۲-f_۲g_۱)\\&=(f_۲'g_۳+f_۲g_۳'-f_۳'g_۲-f_۳g_۲',f_۳'g_۱+f_۳g_۱'-f_۱'g_۳-f_۱g_۳',f_۱'g_۲+f_۱g_۲'-f_۲'g_۱-f_۲g_۱')\\&=(f_۲g_۳'-f_۳g_۲',f_۳g_۱'-f_۱g_۳',f_۱g_۲'-f_۲g_۱')+(f_۲'g_۳-f_۳'g_۲,f_۳'g_۱-f_۱'g_۳,f_۱'g_۲-f_۲'g_۱)\\&=f\times\frac{dg}{dt}+\frac{df}{dt}\times g\end{aligned}$$

سوال۶- الف)

$$f'(t)=(\cos t-t\sin t,\sin t+t\cos t,۲t)\ \to\ |f'(t)|=\sqrt{۱+۵t^۲}\ \to l=\int_{\cdot}^{۴}\sqrt{۱+۵t^۲}dt$$

با تغییر متغیر $\sqrt{۵}t=\sinh u$ داریم : $l=\int\sqrt{۱+۵t^۲}dt=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\int\cosh^۲ u\,du=\frac{۱}{۲\sqrt{۵}}\int(۱+\cosh ۲u)\,du=\frac{۱}{۲\sqrt{۵}}(u+\frac{۱}{۲}\sinh ۲u)$

$$=\frac{۱}{۲\sqrt{۵}}(\sinh^{-۱}(\sqrt{۵}t)+\sqrt{۵}t\sqrt{۱+۵t^۲})_{t=۰}^{۴}=\frac{۱}{۲\sqrt{۵}}(\sinh^{-۱}(۴\sqrt{۵})+۳۶\sqrt{۵})=\frac{۱}{۲\sqrt{۵}}(\ln(۴\sqrt{۵}+۹)+۳۶\sqrt{۵})$$

ب) $f'(t)=(\cos t-t\sin t,\sin t+t\cos t,۲t)\ \to T(t)=\frac{۱}{\sqrt{۱+۵t^۲}}(\cos t-t\sin t,\sin t+t\cos t,۲t)\ \to T(۰)=(۱,۰,۰)$

$$T'(t)=\frac{-۵t}{(\sqrt{۱+۵t^۲})^۳}(\cos t-t\sin t,\sin t+t\cos t,۲t)+\frac{۱}{\sqrt{۱+۵t^۲}}(-۲\sin t-t\cos t,۲\cos t-t\sin t,۲)$$

$$T'(۰)=(۰,۲,۲)\ \to\ N(۰)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(۰,۱,۱)\ \ \to\ B(۰)=T(۰)\times N(۰)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(۰,-۱,۱)$$

سوال۷- داریم $y'=۲x\ ,\ y''=۲$ بنابر این $k(۱)=\frac{|y''(۱)|}{(\sqrt{۱+(y'(۱))^۲})^۳}=\frac{۲}{۵\sqrt{۵}}$ در ضمن $T(۱)=\frac{۱}{\sqrt{۵}}(۱,۲)$ و $N(۱)=\frac{۱}{\sqrt{۵}}(-۲,۱)$.

شعاع دایره بوسان برابر است با $R=\frac{۱}{k}=\frac{۵\sqrt{۵}}{۲}$ و مرکز آن برابر است با $O(۱)=(۱,۱)+\frac{۵\sqrt{۵}}{۲}\times\frac{۱}{\sqrt{۵}}(-۲,۱)=(-۴,\frac{۷}{۲})$

و بالاخره معادله دایره بوسان عبارت است از : $(x+۴)^۲+(y-\frac{۷}{۲})^۲=\frac{۱۲۵}{۴}$

سیدرضا موسوی – ۱۳۸۹/۴/۱