نام و نام خانوادگی : . . . .

شماره دانشجویی : . . . .

نام مدرس : . . . .

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۳۹۴/۱/۲۷**

وقت : **۸۰** دقیقه

دانشکده ریاضی

امتحان میان ترم درس : **معادلات دیفرانسیل (۱۳ گروه هماهنگ)**

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۳۹۴- ۱۳۹۳**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

<u>در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.</u>

سوال۱ – معادله دیفرانسیل دسته دایره هایی را بنویسید که مرکز آنها روی محور xها واقع است. ۱۵ نمره

سوال۲ – معادله مرتبه اول $y' = \dfrac{x+2y-4}{2x+y-5}$ را حل کنید. ۱۵ نمره

سوال۳ – معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید : ۱۵ نمره

$$(4x^2y^3 - 2y)dx + (3x^3y^2 - x)dy = 0$$

سوال۴ – معادله دیفرانسیل با مقدار اولیه $y(2) = \dfrac{-1}{2}$, $x(x^2-1)y' - y = x^3y^2$ را حل کنید. ۱۵ نمره

سوال۵ – معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را به کمک روش ضرایب نامعین حل کنید : ۲۰ نمره

$$y'' + y = (6x+14)e^x + 4\sin x$$

موفق باشید

دانشکده ریاضی

۱۳۹۴/۱/۲۷

پاسخ سوالات امتحان میان ترم درس معادلات دیفرانسیل (۱۳ گروه هماهنگ)

نیمسال دوم ۹۴-۱۳۹۳

جواب سوال۱ : معادله یک دایره که مرکز آن بر روی محور xها واقع باشد به صورت $(x-a)^۲ + y^۲ = r^۲$ است.

برای پیدا کردن معادله دیفرانسیل این دسته از دایره ها دو مرتبه از طرفین تساوی مشتق می گیریم

$$۲(x-a)+۲yy'=۰ \quad \to \quad ۲+۲(y')^۲+۲yy''=۰ \quad \to \boxed{yy''+(y')^۲+۱=۰}$$

جواب سوال۲ : برای تبدیل این معادله به یک معادله همگن ، تغییر متغیر $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$ را اعمال می کنیم.

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+۲Y+(a+۲b-۴)}{۲X+Y+(۲a+b-۵)} \quad \to \quad \begin{cases} a+۲b-۴=۰ \\ ۲a+b-۵=۰ \end{cases} \to \begin{cases} a=۲ \\ b=۱ \end{cases}$$

با توجه به این مقادیر ، به معادله همگن $\frac{dY}{dX} = \frac{X+۲Y}{۲X+Y}$ می رسیم.

با تغییر متغیر $Y = Xu$ داریم :
$$u+X\frac{du}{dX} = \frac{X+۲Xu}{۲X+Xu} \;\to\; X\frac{du}{dX} = \frac{۱+۲u}{۲+u}-u = \frac{۱-u^۲}{۲+u} \;\to\; \frac{۲+u}{۱-u^۲}du = \frac{dX}{X}$$

از طرفین انتگرال میگیریم.

$$\int \frac{۲+u}{۱-u^۲}du = \int \frac{dX}{X} \;\to\; \frac{۱}{۲}\int (\frac{۱}{۱+u}+\frac{۳}{۱-u})du = \int \frac{dX}{X} \;\to\; \frac{۱}{۲}[\ln(۱+u)-۳\ln(۱-u)] = \ln(AX)$$

و در نتیجه داریم $\ln\frac{۱+u}{(۱-u)^۳} = \ln(AX)^۲$ و یا $۱+\frac{Y}{X} = (AX)^۲(۱-\frac{Y}{X})^۳ \;\to\; X+Y = a(X-Y)^۳$

و بالاخره جواب نهایی عبارت است از : $x-۲+y-۱ = a(x-۲-y+۱)^۳ \;\to \boxed{x+y-۳ = a(x-y-۱)^۳}$

جواب سوال۳ : داریم : $M = ۴x^۲y^۳-۲y \;,\; N = ۳x^۳y^۲-x \;\to\; M_y = ۱۲x^۲y^۲-۲ \;,\; N_x = ۹x^۲y^۲-۱$

این معادله کامل نیست اما چون $\frac{M_y-N_x}{N} = \frac{۳x^۲y^۲-۱}{۳x^۳y^۲-x} = \frac{۱}{x}$ مستقل از y است بنابر این یک عامل انتگرالساز یک متغیره بر حسب x دارد. داریم : $\mu = e^{\int \frac{۱}{x}dx} = x$ و با ضرب این عامل انتگرالساز در طرفین معادله داریم :

$$(۴x^۳y^۳-۲xy)dx+(۳x^۴y^۲-x^۲)dy=۰$$

که یک معادله کامل است و جواب آن عبارت است از : $\boxed{x^۴y^۳-x^۲y=c}$

جواب سوال۴ : معادله $x(x^۲-۱)y'-y=x^۳y^۲$ یک معادله برنولی است. طرفین معادله را در $y^{-۲}$ ضرب می‌کنیم.

$$x(x^۲-۱)\frac{y'}{y^۲}-\frac{۱}{y}=x^۳$$

با تغییر متغیر $u=\frac{۱}{y}$ خواهیم داشت $u'=-\frac{y'}{y^۲}$ و در نتیجه $x(x^۲-۱)(-u')-u=x^۳$ و یا $u'+\frac{۱}{x(x^۲-۱)}u = \frac{-x^۲}{x^۲-۱}$

که یک معادله خطی مرتبه اول است و جواب آن برابر است با : $u = e^{-\int\frac{۱}{x(x^۲-۱)}dx}(c+\int\frac{-x^۲}{x^۲-۱}e^{\int\frac{۱}{x(x^۲-۱)}dx}dx)$

داریم : $\int\frac{۱}{x(x^۲-۱)}dx = \frac{۱}{۲}\int(\frac{-۲}{x}+\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x+۱})dx = \frac{۱}{۲}(-۲\ln x+\ln(x+۱)+\ln(x-۱)) = \frac{۱}{۲}\ln\frac{x^۲-۱}{x^۲}$

و در نتیجه $e^{\int \frac{1}{x(x^2-1)}dx} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ و $e^{-\int \frac{1}{x(x^2-1)}dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ بنابر این :

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\left(c + \int \frac{-x^2}{x^2-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\left(c - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\left(c - \sqrt{x^2-1}\right)$$

اکنون داریم $y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x(c-\sqrt{x^2-1})}$. با توجه به شرط اولیه داریم : $y(2) = \frac{-1}{2} \to \frac{-1}{2} = \frac{\sqrt{4-1}}{2(c-\sqrt{4-1})} \to c = 0$

جواب نهایی معادله عبارت است از : $\boxed{y = \frac{-1}{x}}$

جواب سوال۵ : ابتدا معادله همگن نظیر آن را حل می‌کنیم یعنی $y'' + y = 0$ معادله مشخصه آن ، $m^2 + 1 = 0$ دو ریشه مختلط $\pm i$ دارد و جواب همگن عبارت است از : $y_h = A\sin x + B\cos x$

جواب خصوصی معادله را در دو مرحله محاسبه می‌کنیم.

به ازای $h_1(x) = 4\sin x$ و با توجه به جواب همگن، جواب خصوصی را به صورت $y_{p_1} = x(a\sin x + b\cos x)$ در نظر می‌گیریم.

داریم : $y''_{p_1} = -x(a\sin x + b\cos x) + 2(a\cos x - b\sin x)$

و $y''_{p_1} + y_{p_1} = 2(a\cos x - b\sin x) = 4\sin x$ که نتیجه می‌دهد $a = 0\ , b = -2$ یعنی : $y_{p_1} = -2x\cos x$

به ازای $h_2(x) = (6x+14)e^x$ جواب خصوصی را به صورت $y_{p_2} = (cx+d)e^x$ در نظر می‌گیریم.

داریم $y''_{p_2} = (cx + 2c + d)e^x$ و $y''_{p_2} + y_{p_2} = (2cx + 2c + 2d)e^x = (6x+14)e^x$

که نتیجه می‌دهد $c = 3\ , b = 4$ یعنی $y_{p_2} = (3x+4)e^x$

و بالاخره جواب عمومی معادله عبارت است از : $\boxed{y_g = A\sin x + B\cos x + (3x+4)e^x - 2x\cos x}$

سیدرضا موسوی