چند جمله‌ای ها و توابع ماتریسی

در حالت کلی یک چند جمله‌ای ماتریسی از یک ماتریس مربعی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_n A^n$$

که α_i ها مقادیر اسکالر هستند.

مثال) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $f(x) = 2x^3 + 3x - 4$ ، $f(A)$ ؟

$$f(A) = 2A^3 + 3A - 4I = \dots$$

قضیه کیلی - همیلتون: هر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ در معادله مشخصه خود صدق می‌کند.

فرض کنید: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$\Delta(A) = A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

نکته) یکی از کاربردهای قضیه فوق، محاسبه ماتریس معکوس است:

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = \Delta(\lambda)$$

$$\Rightarrow A^{n} + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$$

$$\Rightarrow A\left(A^{n-1} + \alpha_{n-1} A^{n-2} + \cdots + \alpha_1 I\right) = -\alpha_0 I$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\alpha_0} A\left(A^{n-1} + \alpha_{n-1} A^{n-2} + \cdots + \alpha_1 I\right) = I = A A^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{-1}{\alpha_0}\left(A^{n-1} + \alpha_{n-1} A^{n-2} + \cdots + \alpha_1 I\right)}$$

مثال) با استفاده از قضیه کیلی - همیلتون، A^{-1} ؟!

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -16 \\ 1 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

$$\Rightarrow A^2 - 2A - 8I = 0 \quad \Rightarrow A^2 - 2A = 8I$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}\underbrace{\left(A^2 - 2A\right)}_{A(A-2I)} = I = A A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{8}(A - 2I) = \frac{1}{8}\left(\begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \checkmark$$

محاسبه چندجمله‌ای ماتریسی :

در حالت کلی یک چندجمله‌ای مرتبه m ماتریسی بصورت زیر است :

$$P(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_m A^m$$

راه حل ۱ : جایگذاری $A \longrightarrow$ طولانی X

راه حل ۲ : استفاده از قضیه کیلی _ همیلتون :

فرض کنید $P(\lambda)$ یک چندجمله‌ای مرتبه m , $Q(\lambda)$ چندجمله‌ای مشخصه ماتریس $A_{n\times n}$ باشد ؛ حاصل $\dfrac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}$:

$$\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} = \underbrace{F(\lambda)}_{\text{خارج قسمت}} + \frac{\overbrace{R(\lambda)}^{\text{باقی مانده}}}{Q(\lambda)}$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = F(\lambda)\,Q(\lambda) + R(\lambda)$$

حال اگر $\lambda = \lambda_i$ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد . $Q(\lambda_i) = 0$ خواهد بود :

$$P(\lambda_i) = R(\lambda_i) \xrightarrow{\text{قضیه فوق}} \underbrace{P(A)}_{\text{مرتبه } m} = \underbrace{R(A)}_{\text{مرتبه } n-1}$$

یعنی بجای محاسبه $P(A)$ از مرتبه m ، حاصل $R(A)$ از مرتبه n-1 را محاسبه می‌کنیم .

(شکل حاصل $P(A) = A^{5} + 16A^{4} + 32A^{3} + 16A^{2} + 4A + I$ برای $A = \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$.۴

$$n = 2 \longrightarrow R(\lambda) = c_1\lambda + c_0$$

$$|\lambda I - A| = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -16 \\ 1 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^{2} - 2\lambda - 8 = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

$$P(\lambda_i) = R(\lambda_i) \longrightarrow \begin{cases} 4c_1 + c_0 = P(4) = 7441 \\ -2c_1 + c_0 = P(-2) = 25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_0 = 2497 \quad , \quad c_1 = 1236$$

$$R(\lambda) = 1236\lambda + 2497$$

$$P(A) = R(A) = 1236A + 2497I = \dots$$

مثال) $P(A) = A^5 + 16A^4 + 32A^3 + 16A^2 + 4A + I$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$n = 3 \longrightarrow R(\lambda) = c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

$$|\lambda I - A| = 0 \longrightarrow \lambda_{1,2,3} = 2$$

$$P(\lambda_i) = R(\lambda_i) \to \lambda_1 = 2 \to 4c_2 + 2c_1 + c_0 = P(2) \quad (1)$$

چون مقادیر ویژه تکراری هستند معادله جدیدی بدست نمی‌آید لذا باید از مشتقات $R(\lambda)$ استفاده کنیم:

$$\dot{P}(\lambda_i) = \dot{R}(\lambda_i) \longrightarrow 2c_2\lambda_i + c_1 = \dot{P}(\lambda_i)$$

$$\Rightarrow 4c_2 + c_1 = \dot{P}(2) \quad (2)$$

$$\ddot{P}(\lambda_i) = \ddot{R}(\lambda_i) \longrightarrow 2c_2 = \ddot{P}(2) \quad (3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4c_2 + 2c_1 + c_0 = 617 \\ 4c_2 + c_1 = 1044 \\ 2c_2 = 1344 \longrightarrow c_2 = 672 \end{cases} \qquad c_0 = -4189, \quad c_1 = -1644$$

$$R(\lambda) = 672\lambda^2 - 1644\lambda - 4189$$

$$p(A) = R(A) = \underbrace{۶۷۲\,A^{۲} - ۱۶۴۴\,A - ۴۱۵۹\,I}_{= \dots}$$

محاسبه توابع ماتریسی : مثلاً A یک ماتریس است و به شما می‌گویند e^{A} ، $\sin(A)$ ، ... را محاسبه کنید $\xleftarrow{\text{کیلی همیلتون}}$

$$f(A) = R(A)$$

مثال) $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۲ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}$ ، $\sin(A)$ ؟

$$R(\lambda) = c_1 \lambda + c_0$$

$$|\lambda I - A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda + ۲ & -۲ \\ -۱ & \lambda + ۳ \end{vmatrix} = \lambda^{۲} + ۵\lambda + ۴ = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -۱ \,,\quad \lambda_2 = -۴$$

$$f(\lambda_1) = R(\lambda_1) \xRightarrow{\lambda_1 = -۱} \sin(-۱) = -c_1 + c_0$$

$$f(\lambda_2) = R(\lambda_2) \xRightarrow{\lambda_2 = -۴} \sin(-۴) = -۴c_1 + c_0$$

$$\Rightarrow \checkmark\; c_0 = -\frac{۱}{۳}\left(\sin(-۴) - ۴\sin(-۱)\right)$$

$$،\; c_1 = -\frac{۱}{۳}\left(\sin(-۴) - \sin(-۱)\right)$$

$$f(\lambda) = R(\lambda) \Longrightarrow f(A) = R(A)$$

$$\Rightarrow P_{1}(A) = \underline{c_1 A} + \underline{c_0 I} = \dots$$

؟ e^A ، $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ (مثال

$$R(\lambda) = c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0 \quad \checkmark$$

فرم جردن $\longrightarrow \lambda_{1,2,3} = 2$

$$f(\lambda) = R(\lambda)$$

$$\rightarrow f(2) = 4c_2 + 2c_1 + c_0$$

$$\dot{f}(2) = 2c_2 \lambda + c_1 = 4c_2 + c_1$$

$$\ddot{f}(2) = 2c_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4c_2 + 2c_1 + c_0 = e^2 \\ 4c_2 + c_1 = e^2 \\ 2c_2 = e^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{1}{2} e^2}$$

$$\boxed{c_1 = -e^2} \quad , \quad \boxed{c_0 = e^2}$$

$$f(A) = R(A) = \frac{1}{2}e^2 A^2 - e^2 A + e^2 I$$

$$\Rightarrow e^A = \frac{1}{2}e^2 \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - e^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$+ e^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & \frac{1}{2}e^2 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}$$

تمرین) برای ماتریس های زیر e^{At} را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$