

#۱ الف $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\lambda) d\lambda$

① این سیستم حافظه دار است چون خروجی سیستم به ورودی از $-\infty$ تا $2t$ وابسته است

② علت \leftarrow این سیستم علی نیست \leftarrow به آینده بستگی دارد $(2t)$

$$\int_{-\infty}^{2t} x(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2} x^2(\lambda) \Big|_{-\infty}^{2t}$$

$$= \frac{1}{2} (x^2(2t) - x^2(-\infty))$$

③ خطی بودن :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{همبندی : } ax(t) \rightarrow ay(t) \quad , \quad a \int_{-\infty}^{2t} x(\lambda) d\lambda \rightarrow a \int_{-\infty}^{2t} x(\lambda) d\lambda \quad \checkmark \\ \text{جمع پذیری : } x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{2t} x_1(\lambda) d\lambda \\ \int_{-\infty}^{2t} x_2(\lambda) d\lambda \end{array} \right. \oplus \Rightarrow \int_{-\infty}^{2t} x_1(\lambda) d\lambda + \int_{-\infty}^{2t} x_2(\lambda) d\lambda = y_1(t) + y_2(t) \quad \checkmark$$

پس سیستم خطی است

④ تغییر پذیر بازمان : $x(\lambda - t_0) = \int_{-\infty}^{2t} x(\lambda - t_0) d\lambda$, $y(t - t_0) = \int_{-\infty}^{2(t-t_0)} x(\lambda - t_0) d(\lambda - t_0)$

$= \int_{-\infty}^{2(t-t_0)} x(\lambda) d\lambda \rightarrow$ تغییر پذیر بازمان نیست

⑤ پایدار : $\rightarrow \int_{-\infty}^{2t} x(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2} x^2(\lambda) \Big|_{-\infty}^{2t} = \frac{1}{2} (x^2(2t) - x^2(-\infty))$

\leftarrow سیستم پایدار نیست

ب) $y(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2) & ; \quad x(t) \geq 0 \end{cases}$

① چون به اثر لحظه t خروجی به t ها و گذشته \rightarrow سیستم حافظه دار \rightarrow حافظه

② خروجی به t و همان لحظه و لحظات قبل \rightarrow سیستم علی است

③ خطی بودن : $\begin{cases} \text{همگنی} : \alpha x(t) + \alpha x(t-2) = \alpha (x(t) + x(t-2)) = \alpha y(t) \quad \checkmark \\ \text{جمع پذیری} : x_1(t) + x_1(t-2) + x_2(t) + x_2(t-2) = y_1(t) + y_2(t) \quad \checkmark \end{cases}$

→ سیستم خطی است

④ تغییر ناپذیری با زمان : $x(t) < 0, x(t) > 0 \rightarrow$ سیستم تغییر ناپذیر با زمان است

⑤ پایدار : $x(t) \leq Bx \rightarrow y(t) = \begin{cases} 0 \leq Bx \\ x(t) + x(t-2) \leq Bx \end{cases} \Rightarrow$ سیستم پایدار است

ج) $y[n] = nx[n]$

① در هر لحظه n به ضریب در همان لحظه وابسته است → بدون حافظه است

② علی : سیستم علی است →

③ خطی بودن : $\begin{cases} \text{همگنی} : n(\alpha x[n]) = \alpha \underbrace{(nx[n])}_{y[n]} = \alpha y[n] \quad \checkmark \\ \text{جمع پذیری} : nx_1[n] + nx_2[n] = n(x_1[n] + x_2[n]) = n(y_1[n] + y_2[n]) \end{cases}$
→ سیستم خطی است

④ تغییر ناپذیری با زمان : $x[n-n_0] : nx[n-n_0], y[n-n_0] = (n-n_0) \cdot x[n-n_0]$

→ سیستم تغییر ناپذیر با زمان است

⑤ پایدار : $x[n] = 1 \leq Bx \rightarrow y[n] = n \leq Bx$

د) $E_v \{x[n-1]\} = \frac{x[n-1] + x[-n+1]}{2} = \frac{1}{2} (x[n-1] + \underbrace{x[-n+1]}_{\text{تغییر مقیاس داریم}})$

① بدون تغییر مقیاس داریم → سیستم حافظه دار است : حافظه

② علیت : علی نیست →

③ خطی بودن : $\begin{cases} \text{همگنی} : \frac{1}{2} (\alpha x[n-1] + \alpha x[-n+1]) = \frac{\alpha}{2} (x[n-1] + x[-n+1]) \quad \checkmark \\ \text{جمع پذیری} : \frac{1}{2} (x_1[n-1] + x_1[-n+1]) + \frac{1}{2} (x_2[n-1] + x_2[-n+1]) = \frac{1}{2} (x_1[n-1] + x_2[n-1] + x_1[-n+1] + x_2[-n+1]) = \frac{1}{2} (y_1[n-1] + y_2[n-1] + y_1[-n+1] + y_2[-n+1]) = \frac{1}{2} (y_1[n] + y_2[n]) \end{cases}$
→ سیستم خطی است

④ تغییر ناپذیری با زمان : $x[n-n_0] \rightarrow \frac{1}{2} (x[n-1-n_0] + x[-n+1-n_0])$

$\Rightarrow y[n-n_0] = \frac{1}{2} (x[n-n_0-1] + x[-(n-n_0)+1]) \Rightarrow x[n-n_0] \neq y[n-n_0]$

→ سیستم تغییر ناپذیر با زمان است

⑤ پایدار : $x[n-1] + x[-n+1] \leq Bx \rightarrow y[n] \leq Bx$

#2 الف) $y[n] = n x[n] \xrightarrow[\text{است}]{\text{عکس‌پذیر}}$ $x[n] = \frac{1}{n} y[n]$

ب) $y[n] = x[n] \cdot x[n-1] \rightarrow \xrightarrow[\text{است}]{\text{عکس‌پذیر نیست}} \begin{cases} n = \lambda \\ n-1 = \lambda \Rightarrow n = \lambda + 1 \end{cases} \times$

ج) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k]$

د) $y[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{2}] & ; \text{زوج } n \\ 0 & ; \text{فرد } n \end{cases} \xrightarrow[\text{است}]{\text{عکس‌پذیر نیست}} \begin{aligned} \frac{n}{2} = \lambda &\Rightarrow n = 2\lambda \Rightarrow y[2\lambda] = x[\lambda] \\ \Rightarrow y[n] &= x[2n] \end{aligned} \quad \text{عکس‌پذیر نیست}$

ه) $y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} x(2t-1) & ; t \leq 0 \\ \sqrt[3]{x(t)} & ; t > 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{نفسیت}]{\text{عکس‌پذیر نیست}} \begin{aligned} 2t-1 = \lambda &\Rightarrow t = \frac{1}{2}(\lambda+1) \xrightarrow{t \leq 0} \\ \boxed{\lambda \leq -1} \end{aligned}$

$\Rightarrow x(\lambda) = 2y\left(\frac{1}{2}(\lambda+1)\right), \quad y(\lambda) = \sqrt[3]{x(\lambda)} \rightarrow x(\lambda) = y^3(\lambda) = (y(\lambda))^3$

$\xrightarrow{t > 0} \lambda > 0 \Rightarrow x(\lambda) = \begin{cases} 2y\left(\frac{1}{2}(\lambda+1)\right) & ; \lambda \leq -1 \\ (y(\lambda))^3 & ; \lambda > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{فاصله } (-1, 0) \text{ ندارد} \\ &\text{پس سیستم وارون‌پذیر نیست} \end{aligned}$

#3