سری دوم تمرین های سیگنال :

سوال ۱) a

$$y(t)=x(t-2)+x(-\tfrac{1}{2}t+2)$$

سیستم حافظه دار است چون برای محاسبه خروجی مثلاً در لحظه صفر به لحظات دیگر ورودی نیاز داریم :

$$y(0)=x(-2)+x(2)$$

✓ سیستم علّی نیست چون جمله $x(-\tfrac{1}{2}t+2)$ تغییر مقیاس دارد

در $y(0)$ بالا دیدیم که $x(2)$ نیاز است که لحظه 2 آینده نسبت به لحظه صفر محسوب می‌شود پس سیستم علّی نیست

✓ سیستم تغییرپذیر با زمان است چون $x(-\tfrac{1}{2}t+2)$ تغییر مقیاس دارد

$$x(t-t_0) \to \boxed{\text{سیستم}} \to x(t-t_0-2)+x(-\tfrac{1}{2}t-t_0+2)$$

$$y(t-t_0)=x((t-t_0)-2)+x(-\tfrac{1}{2}(t-t_0)+2) \neq$$

✓

$$|y(t)| = |x(t-2)| + |x(-\tfrac{1}{2}t+2)|$$

$$|y(t)| \leq B_x + B_x = 2B_x$$

سیستم پایدار است چون $|y(t)|$ محدود شد به $2B_x$

سیستم خطی است چون هم همگنی و هم جمع پذیری در آن برقرار است.

$$\alpha x(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow \alpha x(t-2) + \alpha x(-1/2 t + 2)$$

$$\alpha\big(x(t-2) + x(-1/2 t + 2)\big)$$

$$\alpha y(t) \qquad \text{همگنی}$$

$$x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow \big(x_1(t-2) + x_2(t-2)\big)$$

$$\big(x_1(-1/2 t + 2) + x_2(-1/2 t + 2)\big)$$

$$= \underbrace{\big(x_1(t-2) + x_1(-1/2 t + 2)\big)}_{y_1} + \underbrace{\big(x_2(t-2) + x_2(-1/2 t + 2)\big)}_{y_2}$$

جمع پذیری

$$y(t) = x(t-2) + x(-1/2 t + 2)$$

خاصیت معکوس پذیری را دارد که به فصل آن با پایانی خواهیم رسید

به کمک تبدیل لاپلاس دو طرف می‌توان معکوس سیستم را بدست آورد.

$$Y(s) = e^{-2s} X(s) + \frac{1}{|-1/2|} X(s)\, e^{+2s}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-2s} + 2e^{2s} \longrightarrow H_I(s) = \frac{1}{e^{-2s} + e^{2s}}$$

تابع تبدیل سیستم

تابع تبدیل سیستم معکوس

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau-1)\, d\tau$$ (b

الف) سیستم حافظه دار، چون به زمان های دیگر غیر از لحظه t برای

محاسبه خروجی نیاز است

$$y(3) = \int_{-\infty}^{6} x(\tau-1)\, d\tau$$

مثلاً برای محاسبه y در لحظه t=3 نیاز به x تا لحظه (τ-1)

6

یعنی تا لحظه 5 داریم که نشان می دهد سیستم حافظه دار است

ب) سیستم غیر علی است. چون طبق مثال بالا برای محاسبه

y(3) نیاز به x(5) داریم که زمان آینده محسوب می شود

پ) سیستم تغییر پذیر با زمان است

$$x(t-t_0) \longrightarrow \boxed{\text{سیستم}} \longrightarrow \int_{-\infty}^{2t} x(\tau-1-t_0)\, d\tau$$

$$\tau - t_0 = \gamma$$

$$= \int_{-\infty}^{2t-t_0} x(\gamma-1)\, d\gamma$$

$$\neq \int_{-\infty}^{2(t-t_0)} x(\tau-1)\, d\tau = y(t-t_0)$$

ت) سیستم ناپایدار است چون

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{2t} x(\tau-1)\, d\tau \right|$$

$$\le \int_{-\infty}^{2t} |x(\tau-1)|\, d\tau$$

$$\le \int_{-\infty}^{2t} B_x\, d\tau = B_x \int_{-\infty}^{2t} d\tau$$

$$= B_x(\tau)\Big|_{-\infty}^{2t}$$

$$= B_x(2t+\infty)$$

چون خروجی نامحدودی تولید سیستم ناپایدار است.

ه) خطی است

$$\alpha x(t) \to \boxed{\text{سیستم}} \to \int_{-\infty}^{2t} \alpha x(\tau-1)\, d\tau$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{2t} x(\tau-1)\, d\tau = \alpha y(t)$$

$$\int_{-\infty}^{2t} \big(x_1(\tau-1) + x_2(\tau-1)\big)\, d\tau = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau-1)\, d\tau + \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau-1)\, d\tau$$

$$= y_1(t) + y_2(t)$$

و)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\underbrace{\tau-1}_{\gamma})\, d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t-1} x(\gamma)\, d\gamma$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(2t-1)$$

$$x(2t) = \frac{dy(t+1)}{dt}$$

$$x(t) = \frac{d}{dt} y(t/2+1)$$

اگر $y(t)$ دارای نقطه ثابت باشد با مشتق گیری از بین می رود و این اطلاعات در $x(t)$ ظاهر نمی شود پس نمی توان $x(t)$ را بطور کامل بدست آورد لذا معکوس پذیر نمی باشد.

c)

$$y(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ x(t)+x(t-2) & t\geq 0\end{cases}$$

الف) سیستم حافظه دار است مثلا برای $t=2$

$$y(2)=x(2)+x(0)$$

ب) سیستم علّی است چون برای محاسبه خروجی نیاز به داشتن لحظات آینده $x(t)$ نمی باشد

پ) سیستم تغییرپذیر با زمان است: چون در زمان های مختلف رفتار سیستم عوض می شود ($t<0$ و $t\geq 0$)

ت) سیستم پایدار است

$$|y(t)|=\begin{cases}|0| & t<0\\ |x(t)+x(t-2)| & t\geq 0\end{cases}$$

پس $|y(t)|$ کراندار است:

$$|y(t)|\leq\begin{cases}0 & t<0\\ 2B_x & t\geq 0\end{cases}$$

ه) خطی است

$\alpha x(t)$  $\begin{cases} \alpha 0 & t<0 \\ \alpha\big(x(t)+x(t-2)\big) & t\geq 0 \end{cases}$

$$= \alpha \begin{cases} 0 & t<0 \\ x(t)+x(t-2) & t\geq 0 \end{cases}$$

پس خاصیت همگنی دارد.

$x_1(t)+x_2(t) \rightarrow$  $\begin{cases} 0 & t<0 \\ x_1(t)+x_2(t)+x_1(t-2)+x_2(t-2) & t\geq 0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 & t<0 \\ x_1(t)+x_1(t-2) & t\geq 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 & t<0 \\ x_2(t)+x_2(t-2) & t\geq 0 \end{cases}$$

$$= y_1(t)+y_2(t)$$

و) معکوس پذیر نمی باشد

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ x(t) + x(t-2) & t \geq 0 \end{cases}$$

برای زمان های $t<0$ ، $y(t)=0$ است و ربطی به $x(t)$ ندارد لذا برای $t<0$ نمی توان از روی خروجی ورودی را بدست آورد پس سیستم معکوس پذیر نمی باشد

ط) $y[n] = x[n]\, x[n-1]$

الف) سیستم حافظه دار است

$y[0] = x[0]\, x[-1]$

به لحظه ۱- از ورودی هم نیاز داریم

ب) علّی است چون خروجی به آینده ورودی مربوط نمی گردد

پ) تغییر ناپذیر با زمان است.

$x[n-n_0] \rightarrow \boxed{\text{سیستم}}\ x[n-n_0]\, x[n-1-n_0]$

$$y[n-n_0] = x[n-n_0] \cdot x[n-n_0-1] \Rightarrow =$$

پس سیستم تغییرناپذیر با زمان است

ت) پایدار است.

$$|y[n]| = |x[n]\,x[n-1]|$$

$$\leq |x[n]| \cdot |x[n-1]|$$

$$\leq B_x \cdot B_x \leq B_x^2$$

پس خروجی کراندار است و لذا سیستم پایدار است.

ه) خطی نیست

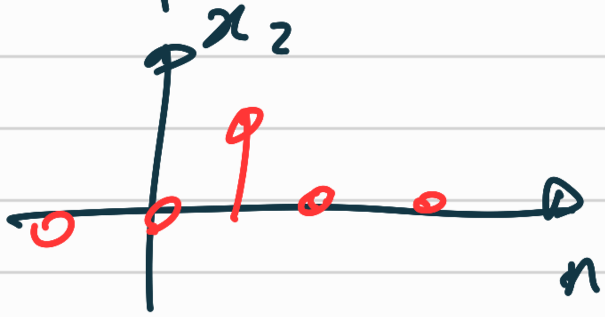
$$\alpha x[n] \rightarrow \boxed{\text{سیستم}} \rightarrow (\alpha x[n])(\alpha x[n-1])$$

$$\alpha^2 x[n]\,x[n-1]$$

$$\neq \alpha y[n]$$

خاصیت همگنی را ندارد

و) معکوس پذیر نمی‌باشد



$x_1[n] \rightarrow \boxed{\text{سیستم}} \rightarrow x_1[n]x_1[n-1]=0$

برای همه لحظه‌ها

$x_2[n] \rightarrow \boxed{\text{سیستم}} \rightarrow x_2[n]x_2[n-1]=0$

برای همه لحظه‌ها

به ازای دو ورودی مختلف خروجی صفر شده است پس از روی خروجی نمی‌توان ورودی را پیدا کرد لذا سیستم معکوس پذیر نمی‌باشد

e) $y[n] = \mathcal{E}_v\{x[n-1]\}$

$$y[n] = \frac{x[n-1]+x[-n-1]}{2}$$

الف) سیستم حافظه دار است

مثال $y[0] = \dfrac{x[-1] + x[-1]}{2}$

ب) سیستم علّی نیست. چون تغییر مقیاس $x[-n-1]$ دارد

$$y[-2] = \frac{x[-3] + x[1]}{2}$$

آینده

ج) تغییرپذیر با زمان است: چون تغییر مقیاس دارد

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{سیستم}} \rightarrow \frac{x[n-n_0-1] + x[-n-n_0-1]}{2}$$

$$y[n-n_0] = \frac{x[n-n_0-1] + x[-(n-n_0)-1]}{2}$$

ت) پایدار است

$$|y[n]| = \frac{|x[n-1] + x[-n-1]|}{2}$$

$$|y[n]| \leq \frac{|x[n-1]| + |x[-n-1]|}{2}$$

$$|y[n]| \leq \frac{B_x + B_x}{2} = B_x$$

پس سیستم پایدار است.

ه) خطی است :

$$\alpha x[n] \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow \frac{\alpha x[n-1] + \alpha x[-n-1]}{2}$$

$$= \alpha \left(\frac{x[n-1] + x[-n-1]}{2} \right)$$

$$= \alpha y[n]$$

$$x_1[n] + x_2[n] \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow$$

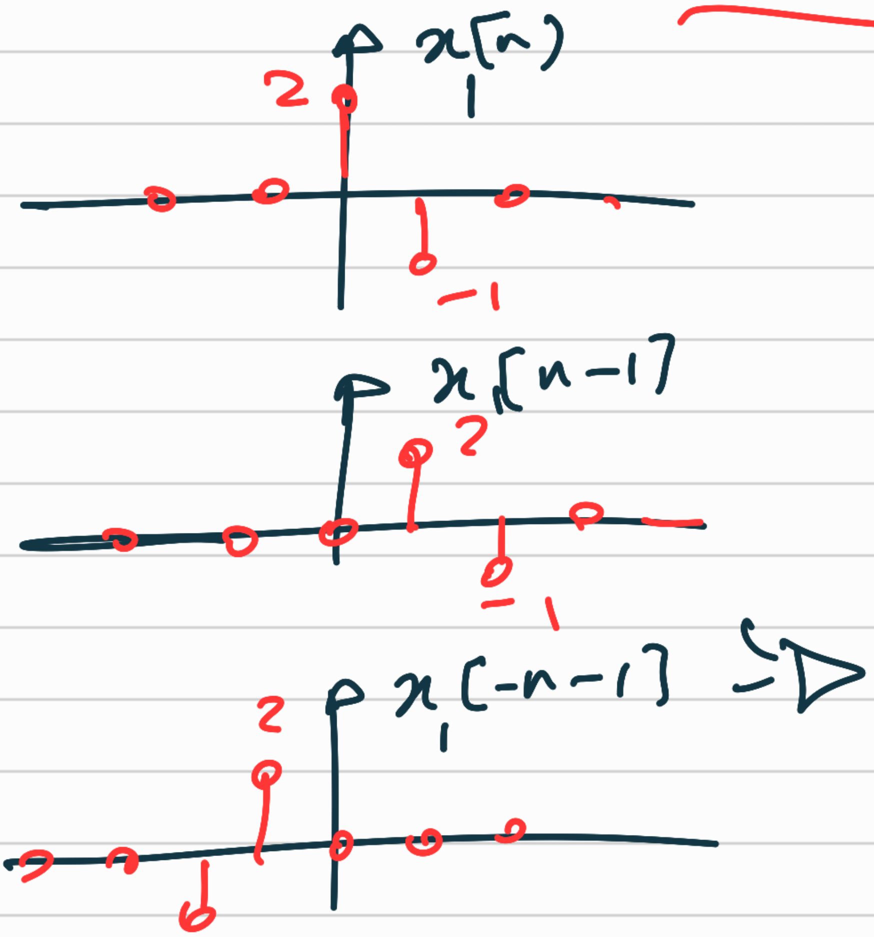
$$\frac{x_1[n-1] + x_2[n-1] + x_1[-n-1] + x_2[-n-1]}{2}$$

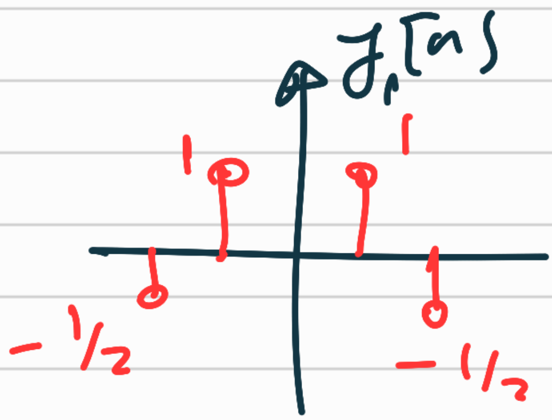
$$= \frac{x_1[n-1] + x_1[-n-1]}{2} + \frac{x_2[n-1] + x_2[n-1]}{2}$$

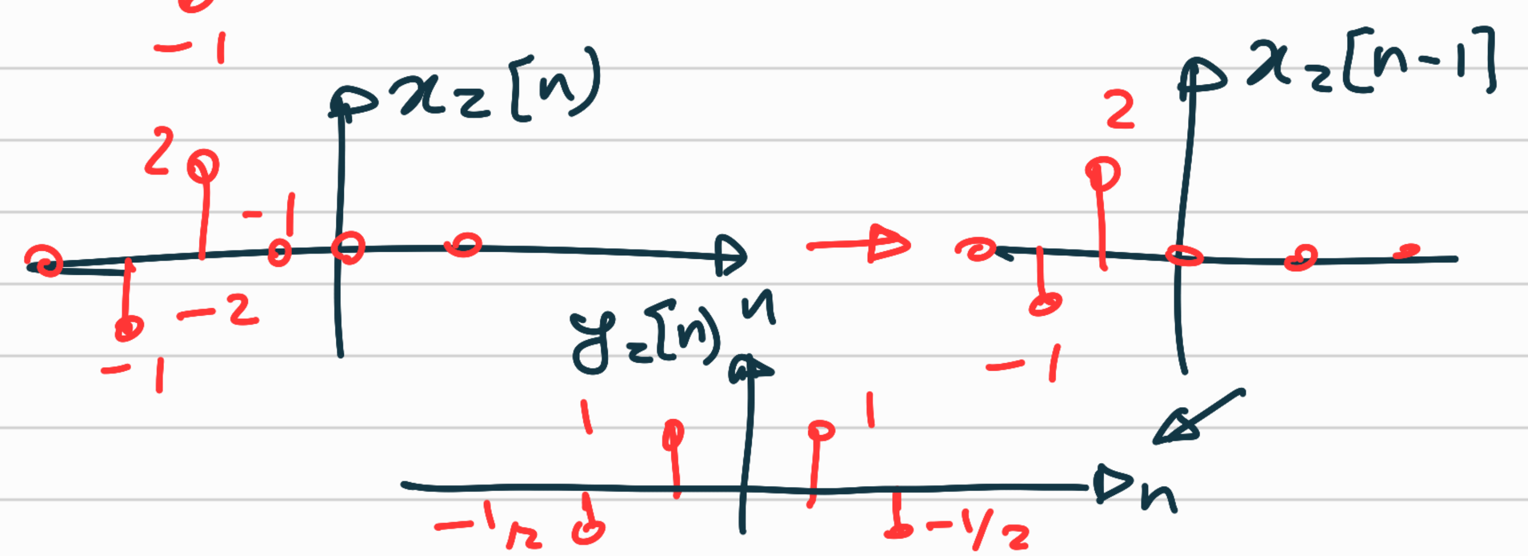
$$= y_1[n] + y_2[n]$$

ع) معکوس پذیر نمی باشد

مثال







$y_1[n]=y_2[n]$ ولی $x_1[n]\neq x_2[n]$

پس از روی خروجی نمی‌توان ورودی را بدست آورد

سیستم معکوس‌پذیر نمی‌باشد

$$y[n]=\begin{cases} x[n-1] & n\geq 1 \\ 0 & n=0 \\ x[n] & n\leq 0 \end{cases}$$ (f

الف) ناپایدار است ب) علّی است

پ) تغییرپذیر با زمان است ه) خطی است

ت) پایدار است و) معکوس‌پذیر نمی‌باشد چون

برای لحظه $n=0$ همواره خروجی $y[n]=0$ است

لذا از روی خروجی $y[0]=0$ نمی‌توان $x[0]$ را بدست آورد.

پس معکوس‌پذیر نمی‌باشد

g)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k]$$

الف) حافظه دار است چون به لحظات دیگری از ورودی نیاز است

ب) علّی است: چون به گذشته $x[n]$ ربط دارد و به آینده $x[n]$ ورودی وابسته نمی‌شود

پ) تغییرناپذیر با زمان:

$$x[n-n_0] \longrightarrow \boxed{\text{سیستم}}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k-n_0]$$

$k - n_0 = m$

$$= \sum_{m=-\infty}^{n-n_0} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m-n_0} x[m]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{n-n_0} (1/2)^{n-n_0-m} x[m]$$

ب) پایدار نیز باشد.

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-k} x[k] \right|$$

$$\le \sum_{k=-\infty}^{n} \left| \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-k} \right| \, |x[k]|$$

$$\le B_x \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=-\infty}^{n} 2^{k}$$

$$\le B_x \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n} \frac{\cancel{2^{-\infty}} - 2^{n+1}}{1-2}$$

$$= B_x \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n} 2^{n+1} = B_x \times 2$$

$$= 2B_x$$

پس پایدار است.

ه) خطی است

$$\alpha x[n] \longrightarrow \boxed{\text{سی}} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-k} \alpha x[k]$$

$$= \alpha \sum_{k=-\infty}^{n} (1/2)^{n-k} x[k] = \alpha y[n] \checkmark$$

خاصیت همگنی

$$x_1[n] + x_2[n] \rightarrow \boxed{\Sigma} \rightarrow$$

$$\sum (1/2)^{n-k} \left(x_1[k] + x_2[k]\right)$$

$$= \sum (1/2)^{n-k} x_1[k] + \sum (1/2)^{n-k} x_2[k]$$

$$= y_1[n] + y_2[n]$$ جمع پذیری

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} (1/2)^{n-k} x[k]$$

$$y[n] = (1/2)^{n} \sum_{k=-\infty}^{n} (1/2)^{-k} x[k]$$

$$y[n-1] = (1/2)^{n-1} \sum_{k=-\infty}^{n-1} (1/2)^{k} x[k]$$

$$1/2\, y[n-1] = (1/2)^{n} \sum_{k=-\infty}^{n-1} (1/2)^{k} x[k]$$

$$y[n] - \tfrac{1}{2} y[n-1] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-k} x[k] - \sum_{k=-\infty}^{n-1} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-k} x[k] \right\}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n} \left\{ \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-n} x[n] \right\}$$

$$= x[n]$$

$$x[n] = y[n] - \tfrac{1}{2} y[n-1]$$

سیستم معکوس پذیر است چون از روی خروجی می توان ورودی را بدست آورد.

$$y(t) = \sin(2t-1)\,x(t)$$ (h

الف) حافظه دار نیست خروجی در هر لحظه فقط به ورودی
در همان لحظه نیاز دارد.

ب) سیستم علّی است چون حافظه دار نیست

پ) سیستم تغییر پذیر با زمان است چون تابعی از
زمان به صورت ضربی در x وجود دارد.

$$x(t-t_0) \longrightarrow \boxed{\text{سیستم}} \longrightarrow \sin(2t-1)\,x(t-t_0) \neq y(t-t_0)$$

$$y(t-t_0) = \sin\big(2(t-t_0)-1\big)\,x(t-t_0)$$

ت) سیستم پایدار است.

$$|y(t)| = |\sin(2t-1)\cdot x(t)|$$
$$\leq |\sin(2t-1)|\cdot|x(t)|$$
$$\leq 1\cdot B_x = B_x$$ سیستم پایدار است

و) سیستم معکوس پذیر نمی باشد.

$$y(t) = \sin(2t-1)\, x(t)$$

$$x(t) = \frac{y(t)}{\sin(2t-1)}$$

در لحظاتی که $\sin(2t-1)$ صفر می شود

مخرج کسر صفر و کسر مبهم است لذا در آن زمان

$x(t)$ را نمی توان بدست آورد پس سیستم معکوس پذیر

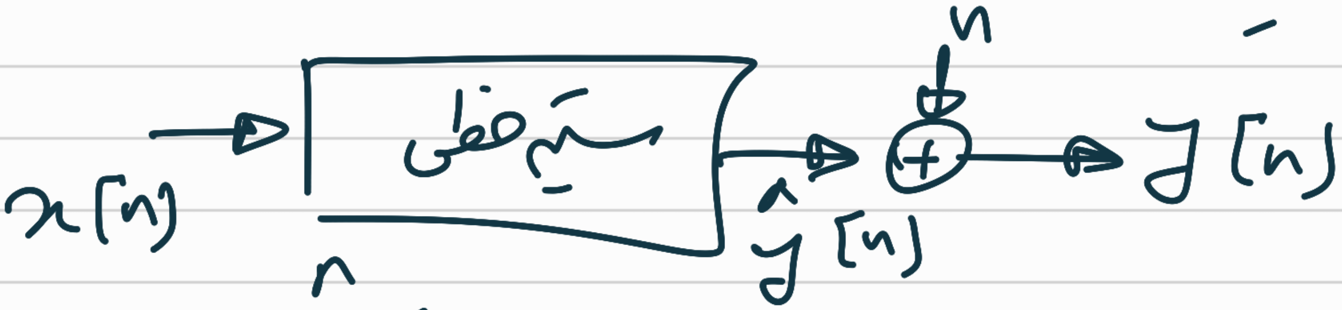
نمی باشد.

$$t = 1/2 \longrightarrow x(1/2) = \frac{y(1/2)}{0}$$

۲) نشان دهید سیستم با تعریف

$$y[n] = n + x[n] + 2x[n+4]$$

افزایشی خطی است.



$$\hat{y}[n] = x[n] + 2x[n+4]$$

روش دوم :

$$x_1[n] \rightarrow \boxed{\text{سیستم}} \rightarrow n + x_1[n] + 2x_1[n+4] = y_1$$

$$x_2[n] \rightarrow \boxed{\text{سیستم}} \rightarrow n + x_2[n] + 2x_2[n+4] = y_2$$

$$\underbrace{y_1[n] - y_2[n]}_{y[n]} = \overbrace{(x_1[n] - x_2[n])}^{x[n]} + 2\underbrace{(x_1[n+4] - x_2[n+4])}_{x[n+4]}$$

$$y[n] = x[n] + 2x[n+4]$$

رابطه $x[n]$, $y[n]$ نشان دهنده یک سیستم خطی است

لذا سیستم اولیه افزایشی خطی می باشد