

آمار و احتمال مهندسی - تمرین سری پنجم-مبحث توزیع احتمال مشروط

(۱) متغیرهای تصادفی X, Y دارای چگالی احتمال توأم زیر هستند:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2.4(x+y)(1-x) & 0 < x, y < 1 \\ 0 & \text{etc} \end{cases}$$

الف) توابع چگالی احتمال کناری $f_X(x)$, $f_Y(y)$ را مشخص کنید.

ب) توابع چگالی احتمال مشروط $f_{Y|X}(y|x)$, $f_{X|Y}(x|y)$ را مشخص کنید.

ج) احتمالات زیر را بدست آورید:

$$\Pr\left(\frac{1}{3} < Y < \frac{2}{3} \mid X = \frac{1}{2}\right) \quad \Pr\left(\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2} \mid Y = \frac{2}{3}\right) \quad \Pr\left(\frac{1}{2} < X+Y < \frac{3}{2}\right) \quad \Pr\left(X > \frac{1}{2} \mid Y < \frac{1}{2}\right)$$

(۲) در ظرفی ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه داریم، تاسی را میریزیم و به تعداد عدد روی تاس مهره از ظرف بدون جایگذاری و بطور تصادفی برمی داریم. تعداد مهره های سیاه انتخاب شده را X و تعداد مهره های سفید انتخاب شده را Y نامگذاری می کنیم. ضریب همبستگی X, Y را بیابید. (راهنمایی: عدد روی تاس را n ثابت فرض کنید و محاسبات را برای آن انجام دهید و امید ریاضی ضریب همبستگی بدست آمده را که تابعی از n می شود بدست آورید.)

(۳) تابع وزن احتمال مشروط متغیر تصادفی گسسته Y به شرط مشخص بودن مقدار متغیر تصادفی پیوسته X با تابع چگالی احتمال ثابت یک در بازه تغییرات صفر و یک بصورت زیر است:

$$f_{Y|X}(y|x) = \binom{5}{y} x^5 (1-x)^{5-y} \quad y = 0, 1, \dots, 5$$

الف- میانگین و واریانس Y را با فرض معلوم بودن X بدست آورید.

ب- تابع وزن احتمال کناری $f_Y(y)$ $y = 0, 1, \dots, 5$ را یافته و با کمک آن میانگین و واریانس Y را محاسبه کنید.

ج- آیا راه دیگری برای محاسبه مقدار میانگین و واریانس Y بدون نیاز به یافتن وزن احتمال کناری آن می توانید پیشنهاد بدهید؟

(۴) متغیرهای تصادفی X, Y دارای چگالی احتمال توأم زیر هستند:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k(x+y) & 0 < x < 1 \quad -(x-1)^2 < y < (x-1)^2 \\ 0 & \text{etc} \end{cases}$$

الف) نشان دهید X, Y مستقل نیستند.

ب) مقدار عبارات زیر را بدست آورید:

$$E(Y|X=x) \quad E(X|Y=y)$$

۵) تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی نرمال توأم با پارامترهای زیر را بنویسید:

$$\mu_x = -1 \quad \mu_y = 0 \quad \sigma_x^2 = 1 \quad \sigma_y^2 = 9 \quad r_{xy} = -0.5$$

و توابع چگالی احتمال مشروط زیر را بدست آورید:

$$f_{Y|X}(y|x) \quad f_{X|Y}(x|y)$$