دانشگاه صنعتی شاهرود | **دانشکده علوم ریاضی**
سری دوم تمرینات درس ریاضی عمومی ۲ | **تاریخ تحویل: ۹۹/۲/۲۵**

---

(۱) مشخص کنید نمودار معادلات زیر در فضای R^3، معرف چه رویه هایی می باشند و آنها را (به طور تقریبی) ترسیم کنید.

الف. $(z-1)^2=(x-2)^2+(y-3)^2+4$

ب. $x^2+4z^2=4$

ج. $x^2=6-2y^2-3z^2$

د. $x+1=2(y-2)^2+3(z+2)^2$

(۲) نقاطی از فضای R^3 که مختصات استوانه ای آنها در معادلات زیر صدق می کنند را توصیف کنید.

الف. $r=2,\ \theta=\frac{\pi}{8}$

ب. $r^2+z^2=1$

ج. $z^2=r^2cos2\theta$

د. $z-r^2=3$

(۳) معادله رویه ای در دستگاه مختصات کروی به صورت $\rho=4sin\varphi cos\theta$ داده شده است. معادله این رویه را در دستگاه مختصات استوانه ای و دکارتی نوشته، نوع رویه را تشخیص دهید و آن را به طور تقریبی رسم کنید.

(۴) مقطع حاصل از رویه های زیر را بدست آورده و آن را توصیف کنید.

الف. $x^2+y^2=1, \quad z=x+y$

ب. $x^2+y^2+z-2x+4y=4, \quad x+y+z=1$

ج. $x^2+2y^2+3z^2=6, \quad y=1$

(۵) ناحیه زیر را در فضای R^3 توصیف کنید.

$$V=\{(x,y,z)\in R^3 |\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}\leq 1,\ x\geq 0, y\geq 0, 0\leq z\leq 2\}$$

(۶) معادله کره ای به مرکز $A(2,3,5)$ و مماس بر صفحه $2x+2y-z+7=0$ را بدست آورده و ناحیه داخل کره را توصیف کنید.

موفق باشید.

مدرس: آل هوز

پاسخ سوال ۱:

الف)

$$(z-1)^2=(x-2)^2+(y-3)^2+4$$

$$\longrightarrow (z-1)^2-(x-2)^2-(y-3)^2=4$$

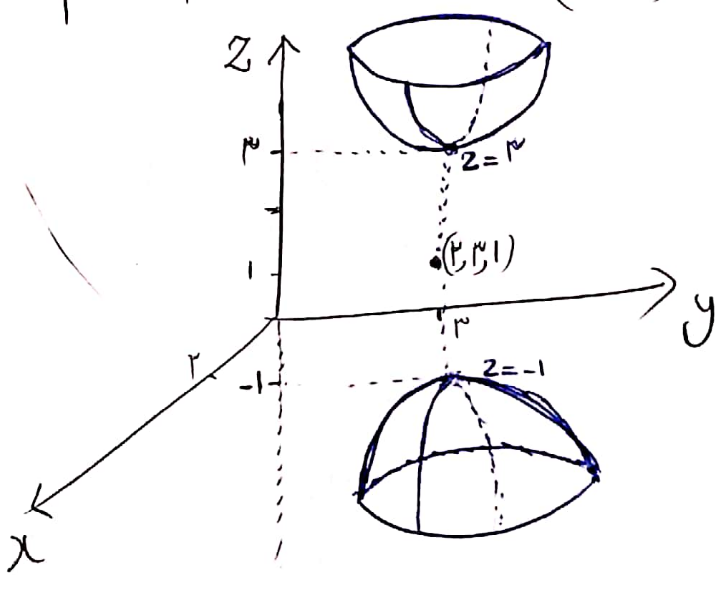
$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۴}} \frac{(z-1)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{4}=+1$$

لذا با یک هذلولی‌گون ۲ پارچه سروکار داریم که در آن مرکز رویه به نقطه‌ی $(2,3,1)$ منتقل شده است. بنابراین مرکز (تقارن) این هذلولی‌گون دو پارچه نقطه‌ی $(2,3,1)$ و محور تقارن آن خط $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ و می‌باشد.

تصویر رویه‌ی فوق بر صفحه‌ی xy $(z=0)$ تهی می‌باشد (چرا؟!)

تصویر رویه‌ی فوق بر صفحه‌ی xz $(y=0)$ هذلولی به معادله‌ی $\frac{(z-1)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{4}=+1$ می‌باشد.

تصویر رویه‌ی فوق بر صفحه‌ی yz $(x=0)$ هذلولی به معادله‌ی $\frac{(z-1)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{4}=+1$ می‌باشد.



مدرس: آل هوز

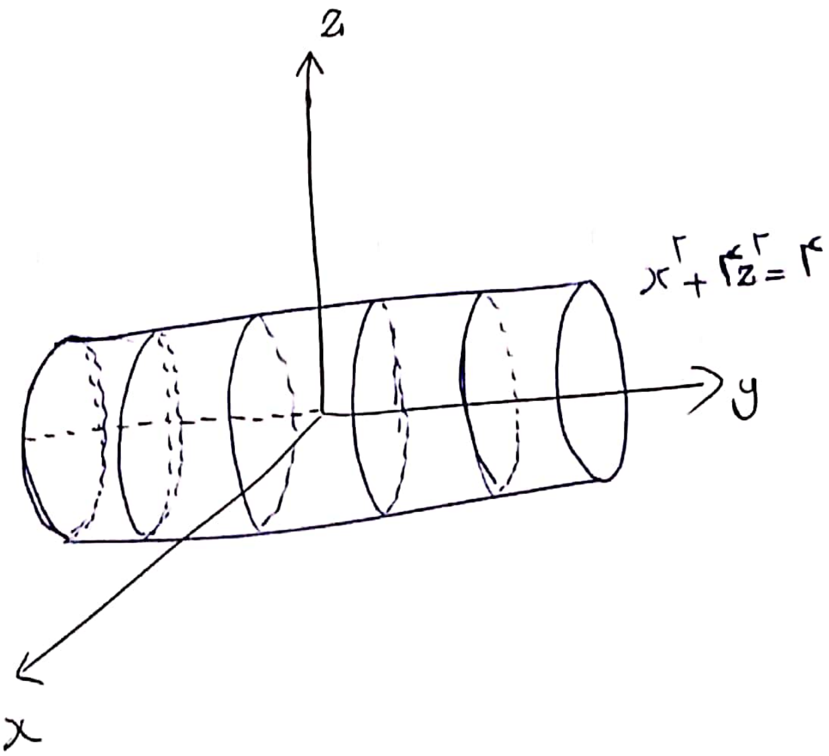
ب)

$$x^2+4z^2=4$$

معادله‌ی $x^2+4z^2=4$ در صفحه‌ی xz بیانگر یک بیضی به صورت $\frac{x^2}{4}+z^2=1$ می‌باشد. اما در فضای $\mathbb{R}^3$ ما با یک استوانه بیضوی (استوانه با سطح مقطع بیضی) سروکار داریم که مکان هندسی تمام خطوطی در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد که موازی محور yها بوده و می‌گذرند از بیضی $\frac{x^2}{4}+z^2=1$.

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x^2+4z^2=4 \\ \text{و } y \text{ آزاد} \end{array}\right\}$$

محور استوانه بیضوی فوق، محور yها می‌باشد.



مدرس: آل هوز

ج)

$$x^2 = 6 - 2y^2 - 3z^2$$

$$\longrightarrow \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$$

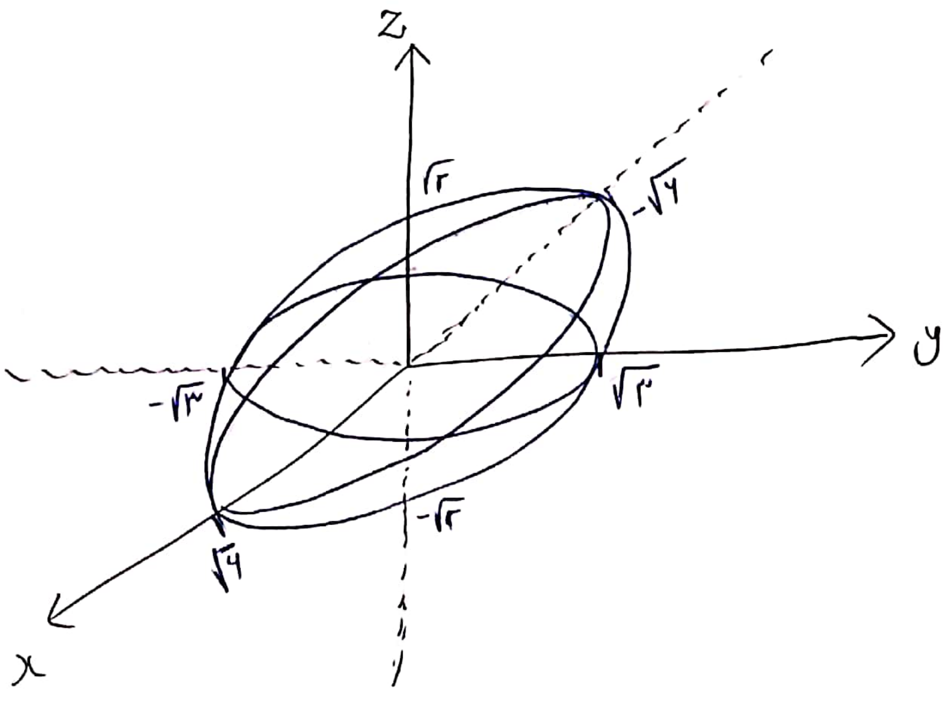
$$\longrightarrow \quad \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{2} = +1$$

لذا با یک بیضی‌گون سروکار داریم که مرکز آن مبدا مختصات، یعنی نقطه‌ی (۰،۰،۰) می‌باشد. این بیضی‌گونه محور xها را در نقاط $x=\sqrt{6}$ و $x=-\sqrt{6}$، محور yها را در نقاط $y=\sqrt{3}$ و $y=-\sqrt{3}$، و محور zها را در نقاط $z=\sqrt{2}$ و $z=-\sqrt{2}$ قطع می‌کند.

تصویر رویه بر صفحه‌ی xy $(z=0)$، بیضی به معادله‌ی $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ می‌باشد.

تصویر رویه بر صفحه‌ی xz $(y=0)$، بیضی به معادله‌ی $\frac{x^2}{6}+\frac{z^2}{2}=+1$ می‌باشد.

تصویر رویه بر صفحه‌ی yz $(x=0)$، بیضی به معادله‌ی $\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{2}=+1$ می‌باشد.



مدرس: آل هوز

د)

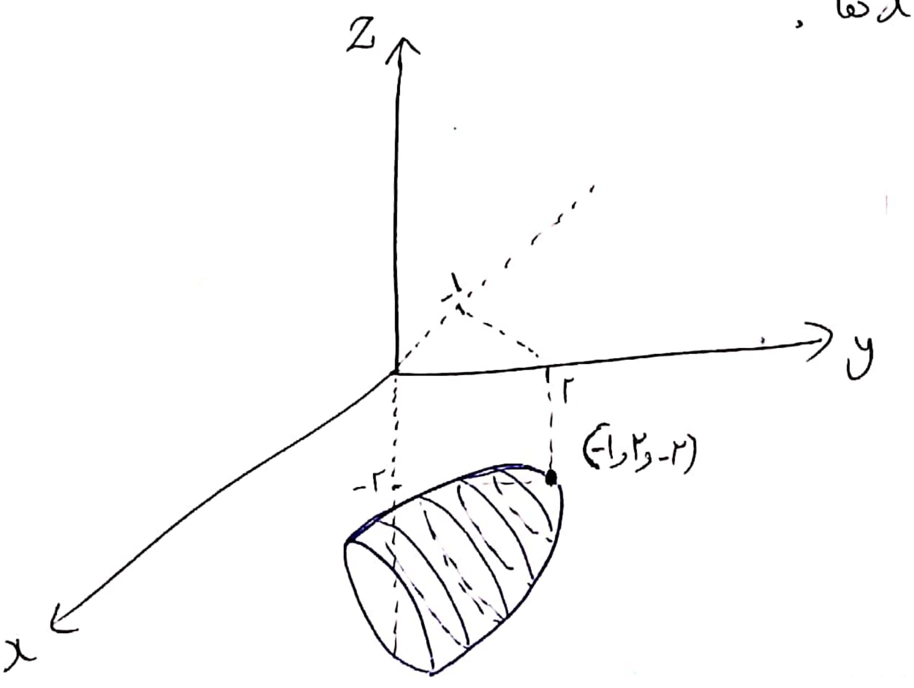
$$x+1=2(y-2)^2+3(z+2)^2$$

می دانیم در حالت کلی معادله‌ای به فرم $x=ay^2+bz^2$ که در آن $a>0$ و $b>0$ ($ab>0$ a و b هم علامت) بیانگر یک سهمی‌گون می‌باشد که در آن محور xها محور رویه بوده و دهانه سهمی‌گون به سمت مثبت محور xها می‌باشد. حال اگر یک انتقال برای سهمی‌گون رخ دهد یعنی مرکز رویه از مبدا مختصات به نقطه‌ی دیگری مانند (α,β,γ) در فضای $\mathbb{R}^3$ منتقل شود، آنگاه با معادله‌ای به فرم

$$(x-\alpha)=a(y-\beta)^2+b(z-\gamma)^2$$

سروکار داریم که در آن $a>0$ و $b>0$ ($ab>0$).

لذا معادله‌ی فوق که بیانگر یک سهمی‌گون در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد که مرکز آن نقطه‌ی $(-1,2,-2)$ می‌باشد و محور سهمی‌گون به موازات محور xها بوده و دهانه‌ی آن به سمت مثبت محور xها.



مدرس: آل هوز

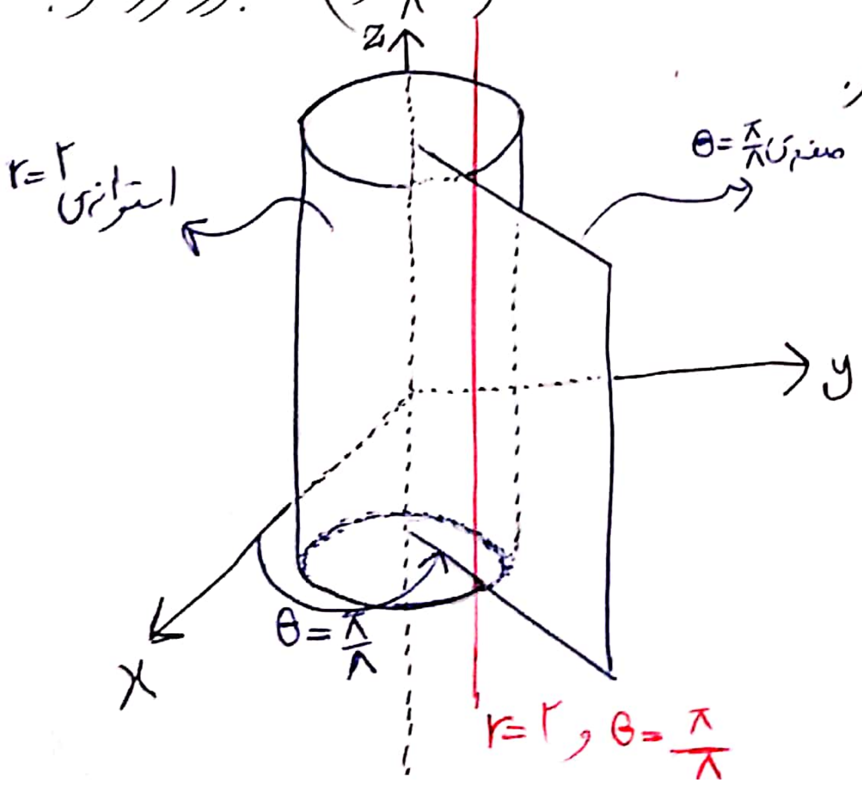
پاسخ سوال ۲ :

الف) $\theta = \frac{\pi}{8}$ و $r = 2$

معادله‌ی $r = 2$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای، بیانگر استوانه‌ای کامل حول محور zها می‌باشد که سطح مقطع آن با هر صفحه‌ی موازی صفحه‌ی xy (و خود صفحه‌ی xy)، دایره‌ای به شعاع ۲ است.

از طرف دیگر، معادله‌ی $\theta = \frac{\pi}{8}$ توصیف کننده‌ی صفحه‌ای است که شامل محور zها بوده و زاویه‌ای به اندازه $\frac{\pi}{8}$ رادیان با قسمت مثبت محور xها می‌سازد.

لذا نقاطی از فضای $\mathbb{R}^3$ که برای آن‌ها $r = 2$ و $\theta = \frac{\pi}{8}$، خطی را تشکیل می‌دهند که مقطع (اشتراک) استوانه‌ی $r = 2$ با قسمتی از صفحه‌ی $\theta = \frac{\pi}{8}$ است که در آن r مثبت می‌باشد. به وضوح این خط از نقطه‌ی $(2, \frac{\pi}{8}, 0)$ با مختصات (r, θ, z) عبور کرده و با محور zها موازی می‌باشد.

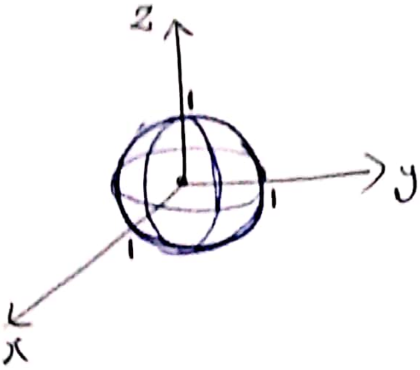


Scanned by CamScanner

مدرس: آل هوز

ب) $r^2+z^2=1$

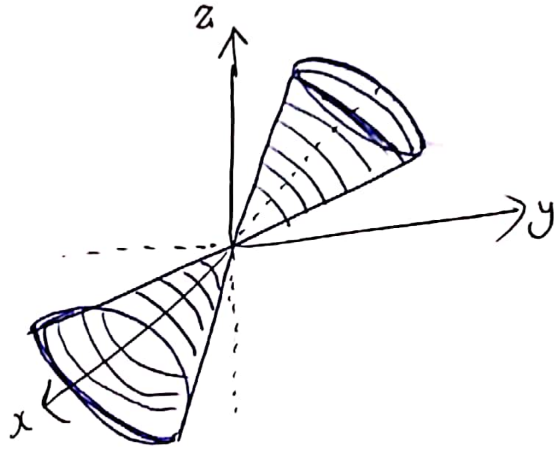
$$r=\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow r^2+z^2=x^2+y^2+z^2=1$$



معادل این کره ای به مرکز مبدا مختصات و به شعاع ۱

ج) $z^2=r^2\cos(2\theta)$

$$\begin{aligned} z^2 &= r^2\cos(2\theta) \\ &= r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \\ &= r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta \\ &= x^2-y^2 \end{aligned}$$



$$\longrightarrow z^2=x^2-y^2$$

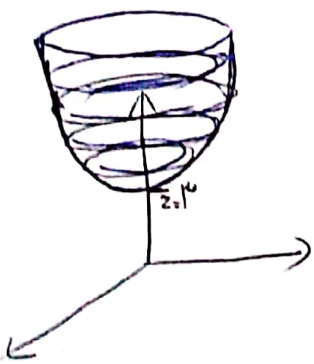
$$\longrightarrow z^2+y^2-x^2=0$$

یک مخروط در فضای $\mathbb{R}^3$ که محور آن محور xها می باشد و راس مخروط در مبدا مختصات قرار دارد.

د) $z-r^2=3$

$$z-r^2=3 \xrightarrow{r^2=x^2+y^2} z-x^2-y^2=3$$

$$\longrightarrow z=3+x^2+y^2$$



یک سهمی گون در فضای $\mathbb{R}^3$ که محور آن محور zها بوده، دهانه سهمی گون به سمت مثبت محور zها و پایین ترین نقطه آن نقطه (۳،۰،۰) می باشد.

مدرس: آل‌اهور

پاسخ سوال ۳:

کروی (ρ,Φ,θ) $\longleftrightarrow$ دکارتی (x,y,z)

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi=\cos^{-1}\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = tg^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \\ \theta=tg^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$\boxed{\rho=4\sin\varphi\cos\theta}$$

$\xrightarrow[\text{ضرب طرفین در } \rho]{}$ $\rho^2=4\rho\sin\varphi\cos\theta$

$\xrightarrow[\rho\sin\varphi\cos\theta=x]{\rho^2=x^2+y^2+z^2}$ $x^2+y^2+z^2=4x$

$\longrightarrow$ $x^2-4x+y^2+z^2=0$

$\longrightarrow$ $\boxed{(x-2)^2+y^2+z^2=4}$ معادله رویه در دستگاه دکارتی

که معادله کره‌ای به مرکز $(2,0,0)$ و به شعاع 2 می‌باشد.

حال برای به دست آوردن معادله رویه در دستگاه استوانه‌ای (r,θ,z)، از روابط‌های زیر بهره می‌بریم:

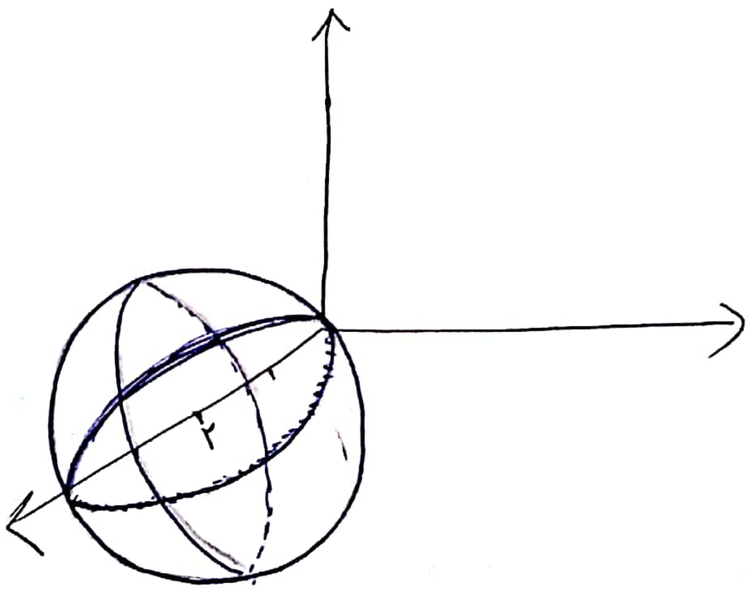
$r=\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow \rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{r^2+z^2}$

$r=\rho\sin\varphi$

بنابراین داریم:

$\rho^2=4\rho\sin\varphi\cos\theta$

$\longrightarrow$ $\boxed{r^2+z^2=4r\cos\theta}$ معادله رویه در دستگاه استوانه‌ای



مدرس: آل هوز

پاسخ سوال ۴ :

الف) $z = x + y$ و $x^2 + y^2 = 1$

معادله‌ی $z = x + y$ یا به عبارتی $x + y - z = 0$ که معادله‌ی صفحه‌ای در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد که بردار نرمال آن $\vec{n} = (1, 1, -1)$ بوده و این صفحه گذرا از مبدا مختصات می‌باشد.

معادله‌ی $x^2 + y^2 = 1$ در فضای $\mathbb{R}^3$ بیانگر یک استوانه‌ای می‌باشد که تصویر آن در صفحه‌ی xy یک دایره‌ای به مرکز $(0,0)$ و به شعاع 1 است و محور استوانه محور zها می‌باشد.

مقطع حاصل از برخورد صفحه‌ی $z = x + y$ با استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ یک بیضی می‌باشد که مرکز این بیضی در مبدا مختصات بوده و رئوس کانونی بیضی به صورت $F_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ و $F_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$ می‌باشند.

مدرس: آل هرز

ب) $x+y+z=1$ و $x^2+y^2+z-2x+4y=4$

معادله $x+y+z=1$، معادله صفحه‌ای در فضای $\mathbb{R}^3$ با بردار نرمال $\vec{n}=(1,1,1)$ بوده که از نقطه $(1,0,0)$ می‌گذرد.

معادله $x^2+y^2+z-2x+4y=4$، معادله یک سهمی‌گون دوار یکپارچه می‌باشد که محور سهمی‌گون موازی محور zها بوده و دهانه سهمی‌گون رو به پایین (دهانه به سمت جهت منفی zها) و بالاترین نقطه سهمی‌گون نقطه $A\left|\begin{matrix}1\\-2\\9\end{matrix}\right.$ می‌باشد و حاصل تقاطع (اشتراک) این سهمی‌گون با صفحه xy ($z=0$)، دایره $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ می‌باشد.

$$x^2+y^2+z-2x+4y=4$$

مربع کامل کردن $\longrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=9-z$

حال برای تقاطع صفحه $x+y+z=1$ و سهمی‌گون دوار $x^2+y^2+z-2x+4y=4$،

با حذف z از ۲ معادله داریم

$$x^2+y^2-3x+3y=3$$

$$\longrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{15}{2}$$

لذا حاصل تقاطع دایره‌ای به مرکز $\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ و به شعاع $\sqrt{\frac{15}{2}}$ می‌باشد.

مدرس: آل‌هفوز

ج) $y=1$ و $x^2+2y^2+3z^2=6$

معادلهٔ $y=1$، معادلهٔ صفحه‌ای موازی با صفحهٔ xz $(y=0)$ در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد.

معادلهٔ $x^2+2y^2+3z^2=6$، یا به عبارتی $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{2}=1$،

معادلهٔ یک بیضی‌گون در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد.

حاصل تقاطع صفحهٔ $y=1$ با بیضی‌گون $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{2}=1$، یک

بیضی در صفحهٔ $y=1$ است که تصویر آن در صفحهٔ xz دارای

معادلهٔ $x^2+3z^2=4$ می‌باشد.

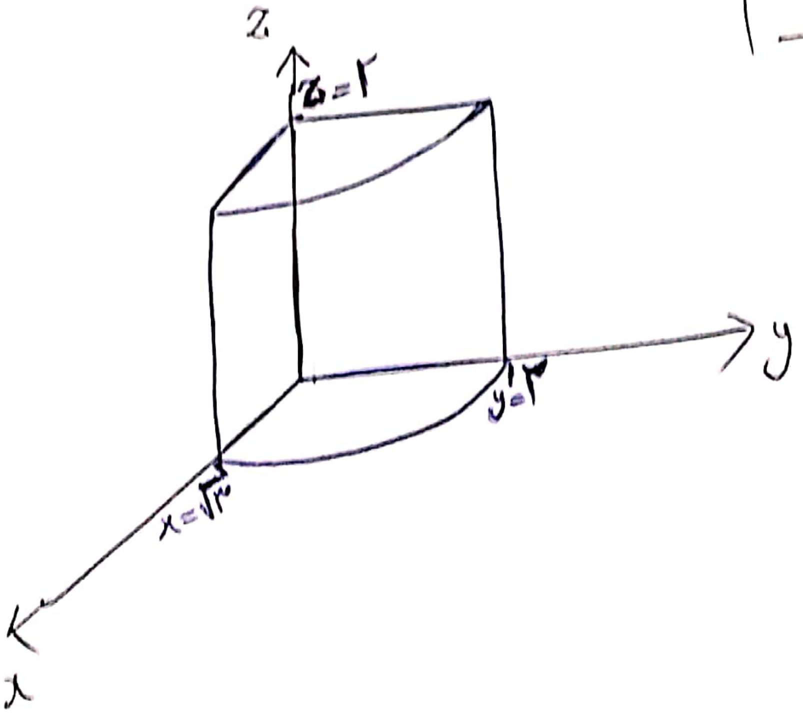
Scanned by CamScanner

مدرس: آل معز

پاسخ سوال ۵ :

$$V=\left\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}\le 1 \;,\; x\ge 0 \;,\; y\ge 0 \;,\; 0\le z\le 2\right\}$$

می دانیم معادله‌ی $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ در فضای $\mathbb{R}^3$ معرف یک استوانه‌ی بیضوی (استوانه با قاعده‌ی بیضی) می‌باشد. لذا ناحیه‌ی V داده شده، قسمتی از داخل استوانه‌ی بیضوی $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ می‌باشد که در ناحیه‌ی اول دستگاه مختصات واقع شده است (در $\frac{1}{8}$ اول، زیرا $x\ge 0$ و $y\ge 0$ و $z\ge 0$) و به صفحات مختصات و صفحه‌ی $z=2$ محدود می‌باشد. لذا داریم:



مدرس: آل اهوز

پاسخ سوال ۶ :

از آنجایی که کره مفروض بر صفحه‌ی $2x+2y+7-z=0$ مماس می‌باشد

لذا شعاع کره برابر است با فاصله‌ی نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}2\\3\\5\end{vmatrix}$ (که مرکز کره می‌باشد) از

صفحه‌ی $2x+2y-z+7=0$. بنابراین داریم :

$$r=\frac{\left|(2\times 2)+2(3)-5+7\right|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{12}{3}=4$$

بنابراین شعاع کره برابر است با $r=4$. لذا معادله کره به صورت زیر است :

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=16$$

و نقاط داخل کره

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2\leq 16\right\}$$