کد فرم : **FR/FY/11**
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : معادلات دیفرانسیل **(۱۴ گروه هماهنگ)** نیمسال **(~~اول~~/ دوم)** ۹۵-۱۳۹۴ نام مدرس:	
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۳۹۵/۳/۲۳** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از هرگونه ماشین حساب ممنوع است.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- معادله دیفرانسیل مرتبه دوم مقابل را حل کنید : $yy'' = (y')^2$ **۱۵ نمره**

سوال۲- یک جواب معادله همگن متناظر معادله زیر داده شده است.
جواب عمومی معادله را با استفاده از روش تغییر پارامترها به دست آورید. **۲۰ نمره**

$$xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = 2e^x \quad , \quad y_1 = e^x$$

سوال۳- معادله مرتبه دوم زیر را به کمک عملگر D حل کنید : **۱۵ نمره**

$$(D^2 + 4D + 5)y = 6\, e^{-2x} \cos x$$

سوال۴- یک جواب برای معادله دیفرانسیل $x^2 y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = 0$
حول نقطه $x = 0$ و به ازاء ریشه بزرگتر معادله مشخصه به دست آورید. **۱۵ نمره**

سوال۵- دستگاه معادلات مقابل را حل کنید : **۱۵ نمره**

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = \ \ 1 \end{cases}$$

سوال۶- معادله دیفرانسیل با مقدار اولیه زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید. **۲۰ نمره**

$$t\,x'' + (3t-1)x' - (4t+9)x = 0 \quad ; \quad x(0) = x'(0) = 0$$

سوال۷- محاسبه کنید : **۲۰ نمره**

$$F(s) = L\{ \int_0^t (t-\tau)^3 \sin\tau \, d\tau \} \quad ; \quad f(t) = L^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{s^2 + 4s + 7}\}$$

موفق باشید

جواب سوال ۱- روش اول : این معادله فاقد x است. با تغییر متغیر $y'=u$ داریم و $y''=u\dfrac{du}{dy}$ در نتیجه $yuu'=u^{۲}$

اکنون اگر $u=۰$ داریم $y'=۰$ یعنی $y=c$ یک جواب معادله است.

اما اگر $u\neq ۰$ آنگاه $yu'=u$ که یک معادله جدایی‌پذیر است و $\dfrac{du}{u}=\dfrac{dy}{y}$

که یک معادله مرتبه اول جدایی پذیر است. $\dfrac{du}{u}=\dfrac{dy}{y}\to\int\dfrac{du}{u}=\int\dfrac{dy}{y}\to\ln u=\ln(ay)\to u=ay\to y'=ay$

دو مرتبه به یک معادله جدایی پذیر رسیده ایم. $\dfrac{dy}{y}=adx\to\int\dfrac{dy}{y}=\int adx\to\ln y=ax+b\to\quad y=e^{ax+b}$

جواب نهایی را می‌توان به شکل ساده تر نوشت : $y=c\,e^{ax}$

روش دوم : اگر $y'=۰$ آنگاه $y=c$ جواب معادله است. اگر $y'\neq ۰$ آنگاه

$$\frac{y''}{y'}=\frac{y'}{y}\to\int\frac{y''}{y'}dx=\int\frac{y'}{y}dx\to\ln y'=\ln(ay)\to y'=ay\to y=be^{ax}$$

جواب سوال ۲- ابتدا معادله همگن را حل می‌کنیم یعنی : $xy''+۲(۱-x)y'+(x-۲)y=۰$

جواب دوم معادله همگن را به صورت $y_{۲}=e^{x}v$ حدس می‌زنیم و در معادله قرار می‌دهیم.

$$x(v''+۲v'+v)e^{x}+۲(۱-x)(v'+v)e^{x}+(x-۲)ve^{x}=۰$$

بعد از ساده کردن عبارتها داریم $xv''+۲v'=۰$ که یک معادله فاقد v است و با تغییر متغیر $v'=u$ خواهیم داشت $xu'+۲u=۰$ که یک معادله جدایی‌پذیر است.

$$\frac{du}{u}=\frac{-۲dx}{x}\to\int\frac{du}{u}=\int\frac{-۲dx}{x}\to\ln u=-۲\ln x+\ln a\to u=\frac{a}{x^{۲}}\to v'=\frac{a}{x^{۲}}\to v=\frac{-a}{x}$$

اکنون داریم $y_{۲}=\dfrac{-e^{x}}{x}$ و در نتیجه جواب همگن عبارت است از : $y_h=(c_{۱}+\dfrac{c_{۲}}{x})e^{x}$

البته از فرمول آبل هم می‌توانستیم استفاده کنیم یعنی :

$$y_{۲}=y_{۱}\int\frac{۱}{y_{۱}^{۲}}e^{-\int\frac{۲(۱-x)}{x}dx}dx=e^{x}\int\frac{۱}{e^{۲x}}e^{-۲\ln x+۲x}dx=e^{x}\int e^{-۲\ln x}dx=e^{x}\int\frac{۱}{x^{۲}}dx=\frac{-e^{x}}{x}$$

برای پیدا کردن جواب خصوصی معادله با استفاده از روش تغییر پارامتر قرار می‌دهیم $y_{۱}=e^{x}$ و $y_{۲}=\dfrac{e^{x}}{x}$ و در نتیجه $w(y_{۱},y_{۲})=\dfrac{-e^{۲x}}{x^{۲}}$

و چون $h(x)=\dfrac{۲e^{x}}{x}$ داریم : $\dfrac{y_{۱}h(x)}{w}=-۲x\ ,\ \dfrac{y_{۲}h(x)}{w}=-۲$

پس جواب خصوصی معادله عبارت است از :

$$y_p=-y_{۱}\int\frac{y_{۲}h(x)}{w}dx+y_{۲}\int\frac{y_{۱}h(x)}{w}dx=e^{x}\int ۲dx-\frac{e^{x}}{x}\int ۲xdx=۲xe^{x}-xe^{x}=xe^{x}$$

و در نهایت جواب عمومی معادله : $y_g=y_h+y_p=(c_{۱}+\dfrac{c_{۲}}{x})e^{x}+xe^{x}$

جواب سوال ۳- ابتدا معادله همگن را حل می‌کنیم. $(D^{۲}+۴D+۵)y=۰$ ریشه های معادله مشخصه $D^{۲}+۴D+۵=۰$ عبارتند از $r=-۲\pm i$ و جواب همگن به صورت $y_h=e^{-۲x}(A\sin x+B\cos x)$ به دست می‌آید.

اکنون داریم : $y_p=\dfrac{۱}{D^{۲}+۴D+۵}(۶e^{-۲x}\cos x)=\dfrac{۱}{D^{۲}+۴D+۵}(۶e^{-۲x}\,\mathrm{Re}(e^{ix}))$

$$y_p=\frac{1}{D^2+4D+5}\mathrm{Re}(6e^{-2x}e^{ix})=\mathrm{Re}(\frac{6}{(D+2)^2+1}e^{(-2+i)x})=\mathrm{Re}(e^{(-2+i)x}\frac{6}{(D-2+i+2)^2+1}(1))$$

$$=\mathrm{Re}(e^{(-2+i)x}\frac{6}{D^2+2iD}(1))=\mathrm{Re}(e^{(-2+i)x}\frac{6}{D(D+2i)}(1))=\mathrm{Re}(e^{(-2+i)x}\frac{6}{D}(\frac{1}{2i}-\frac{D}{(2i)^2}+\cdots)(1))$$

$$=\mathrm{Re}(e^{(-2+i)x}\frac{6}{D}(\frac{1}{2i}))=\mathrm{Re}(\frac{3x}{i}e^{(-2+i)x})=\mathrm{Re}(\frac{3x}{i}e^{-2x}(\cos x+i\sin x))=3xe^{-2x}\sin x$$

پس جواب خصوصی معادله عبارت است از : $y_p=3xe^{-2x}\sin x$

چون جواب معادله همگن عبارت است از $y_h=e^{-2x}(A\sin x+B\cos x)$ بنابر این جواب عمومی معادله برابر است با :

$$y_g=y_h+y_p=e^{-2x}(A\sin x+B\cos x)+3xe^{-2x}\sin x$$

جواب سوال۴- نقطه $x_0=0$ یک نقطه تکین معادله دیفرانسیل است اما چون $\lim_{x\to 0}x\times\frac{-2x}{x^2}=-2$ و $\lim_{x\to 0}x^2\times\frac{2-x^2}{x^2}=2$ این نقطه یک نقطه تکین منظم است.

معادله مشخصه عبارت است از $r(r-1)-2r+2=0$ و یا $r^2-3r+2=0$ و ریشه بزرگتر آن برابر است با $r_1=2$

معادله جوابی به صورت سری فروبنیوس $y_1=x^2\sum_0^\infty a_nx^n\ ,\ a_0\neq 0$ خواهد داشت. این جواب را در معادله قرار می دهیم.

$$x^2\sum_0^\infty(n+2)(n+1)a_nx^n-2x\sum_0^\infty(n+2)a_nx^{n+1}+(2-x^2)\sum_0^\infty a_nx^{n+2}=0$$

$$\sum_0^\infty(n+2)(n+1)a_nx^{n+2}-\sum_0^\infty 2(n+2)a_nx^{n+2}+\sum_0^\infty 2a_nx^{n+2}-\sum_0^\infty a_nx^{n+4}=0$$

$$\sum_0^\infty[(n+2)(n+1)-2(n+2)+2]a_nx^{n+2}-\sum_0^\infty a_nx^{n+4}=0$$

$$\sum_0^\infty n(n+1)a_nx^{n+2}-\sum_0^\infty a_nx^{n+4}=0\quad\to\quad\sum_0^\infty n(n+1)a_nx^{n+2}-\sum_2^\infty a_{n-2}x^{n+2}=0$$

$$2a_1x^3+\sum_2^\infty n(n+1)a_nx^{n+2}-\sum_2^\infty a_{n-2}x^{n+2}=0\quad\to\quad 2a_1x^3+\sum_2^\infty[n(n+1)a_n-a_{n-2}]x^{n+2}=0$$

$$2a_1=0\quad,\quad n(n+1)a_n-a_{n-2}=0\ ,\quad n=2,3,4,\cdots$$

$$a_1=0\ ,\quad ,\quad a_n=\frac{1}{(n+1)n}a_{n-2}\ ,\quad n=2,3,4,\cdots\qquad\to\quad a_1=a_3=a_5=a_7=\cdots=0$$

$$a_2=\frac{1}{2\times 3}a_0=\frac{1}{3!}a_0\ ,\ a_4=\frac{1}{4\times 5}a_2=\frac{1}{2\times 3\times 4\times 5}a_0=\frac{1}{5!}a_0\ \to\quad a_{2n}=\frac{1}{(2n+1)!}a_0\ ,\quad n=0,1,2,\cdots$$

اکنون با پیدا شدن ضرایب سری می‌توانیم سری را بنویسیم : $y_1=x^2(a_0+\frac{1}{3!}a_0x^2+\frac{1}{5!}a_0x^4+\frac{1}{7!}a_0x^6+\cdots)$

و با فرض $a_0=1$ بنویسیم :

$$y_1=x^2\sum_{n=0}^\infty\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}=x\sinh x$$

جواب سوال۵- روش اول : معادله مشخصه دستگاه همگن عبارت است از $\begin{vmatrix}3-\lambda & -2\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+1=0$ که دو ریشه تکراری $\lambda=1$ دارد. بنابر این جواب همگن به صورت $\begin{cases}x_h=(a+bt)e^t\\ y_h=(a'+b't)e^t\end{cases}$ است که اگر آن را در یکی از معادلات – مثلا معادله دوم دستگاه – قرار دهیم داریم :

$$(a'+b'+b't)e^t=(2a-a'+(2b-b')t)e^t$$

که نتیجه می‌دهد $b'=2b-b'$, $a'+b'=2a-a'$ و یا : $a'=a-\frac{b}{2}$, $b=b'$

و جواب معادله به صورت مقابل به دست می‌آید : $x_h=(a+bt)e^t$, $y_h=(a-\frac{b}{2}+bt)e^t$

اکنون شرایط اولیه معادله را در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $t=0$ و داریم $-1=a$, $1=a-\frac{b}{2}$ که نتیجه می‌دهد : $a=-1$, $b=-4$

و بالاخره جواب دستگاه داده شده برابر است با : $x_h=(-1-4t)e^t$, $y_h=(1-4t)e^t$

روش دوم : (روش حذفی و یا استفاده از عملگر D) دستگاه را به کمک عملگر D بازنویسی می‌کنیم.
$$\begin{cases}(D-3)x+2y=0\\ 2x-(D+1)y=0\end{cases}$$

تابع y را حذف می‌کنیم :
$$\begin{matrix}(D+1)\\ 2\end{matrix}\begin{cases}(D-3)x+2y=0\\ 2x-(D+1)y=0\end{cases}\to (D^2-2D+1)x=0$$

به یک معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت رسیده ایم. معادله مشخصه آن یعنی $D^2-2D+1=0$ دو ریشه تکراری ۱ دارد.

بنابر این $x_h=(a+bt)e^t$ و اگر این جواب را در معادله اول دستگاه قرار دهیم داریم : $y_h=(a-\frac{b}{2}+bt)e^t$

اکنون شرایط اولیه معادله را در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $t=0$ و داریم $-1=a$, $1=a-\frac{b}{2}$ که نتیجه می‌دهد : $a=-1$, $b=-4$

و بالاخره جواب دستگاه داده شده برابر است با : $x_h=(-1-4t)e^t$, $y_h=(1-4t)e^t$

جواب سوال ۶-

$$L\{tx''+(3t-1)x'-(4t+9)x\}=0\to L\{tx''\}+3L\{tx'\}-L\{x'\}-4L\{tx\}-9L\{x\}=0$$
$$-L'\{x''\}-3L'\{x'\}-L\{x'\}+4L'\{x\}-9L\{x\}=0$$
$$-\frac{d}{ds}[s^2L\{x\}]-3\frac{d}{ds}[sL\{x\}]-sL\{x\}+4L'\{x\}-9L\{x\}=0$$
$$-2sL\{x\}-s^2L'\{x\}-3L\{x\}-3sL'\{x\}-sL\{x\}+4L'\{x\}-9L\{x\}=0$$
$$-(s^2+3s-4)L'\{x\}-(3s+12)L\{x\}=0\to\frac{L'\{x\}}{L\{x\}}=-\frac{3s+12}{s^2+3s-4}=-\frac{3s+12}{(s-1)(s+4)}$$
$$\frac{L'\{x\}}{L\{x\}}=-\frac{3}{s-1}\to\int\frac{L'\{x\}}{L\{x\}}ds=-\int\frac{3}{s-1}ds\to\ln L\{x\}=-3\ln(s-1)+\ln a$$
$$L\{x\}=\frac{a}{(s-1)^3}\to x(t)=aL^{-1}\{\frac{1}{(s-1)^3}\}=ae^tL^{-1}\{\frac{1}{s^3}\}=\frac{a}{2}t^2e^t\to x(t)=bt^2e^t$$

جواب سوال ۷-

$$\frac{1}{s^2+4s+7}=\frac{1}{(s+2)^2+3}=L\{\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-2t}\sin(\sqrt{3}\ t)\}$$
$$f(t)=L^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{s^2+4s+7}\}=H(t-2)(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-2(t-2)}\sin(\sqrt{3}\ (t-2))$$
$$f(t)=\frac{e^4}{\sqrt{3}}H(t-2)e^{-2t}\sin(\sqrt{3}\ (t-2))$$
$$F(s)=L\{\int_0^t(t-\tau)^3\sin\tau\,d\tau\}=L\{t^3*\sin t\}=L\{t^3\}L\{\sin t\}=\frac{6}{s^4}\times\frac{1}{s^2+1}=\frac{6}{s^4(s^2+1)}$$