سوال آخر امتحان میانترم :

$f_1 = \sin^2 x$

$f_2 = \cos^2 x$

$f_3 = \cos 2x$

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0$$

$$c_1 \sin^2 x + c_2 \cos^2 x + c_3 \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$c_1 = -1$

$c_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad = 0 \longrightarrow$ وابسته خطی

$c_3 = 1$

جلسه ۱۵

تقطری سازی :

۱ـ همه مقادیر ویژه متمایز و حقیقی باشند :

$$T = [v_1 \; v_2 \; \cdots \; v_n]$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

۲ـ مقادیر ویژه مختلط باشند :

$$T = [Re\{v_1\} \;\; Im\{v_1\}] \qquad \lambda_{1,2} = \delta \pm j\omega$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta & \omega \\ -\omega & \delta \end{bmatrix} & \\ & \ddots \end{bmatrix}$$

۳ـ مقادیر ویژه تکراری : $\longrightarrow$ فرم قطری از نوع کانونیکال جردن است.

$$J_p = \begin{bmatrix} J_{p_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{p_n} \end{bmatrix} \qquad J_{p_i} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$$

تعداد بلوک جردن = تعداد بردار ویژه مستقل خطی = $n - \operatorname{rank}(\lambda I - A)$

$$(\lambda_i I - A) v_i = 0$$

$$(\lambda_1 I - A) v_1 = 0$$

$$(\lambda_1 I - A) Q_1 = v_1$$

$$(\lambda_1 I - A) Q_2 = Q_1$$

$$\vdots$$

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & Q_1 & Q_2 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$J = \Lambda = T^{-1} A T$$

مثال) فرم کانونیکال جردن $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ را بیابید.

$$|\lambda I - A| = 0 \longrightarrow (\lambda - 1)^3 = 0 \longrightarrow \lambda_{1,2,3} = 1$$

تعداد بلوک جردن $= n - \operatorname{rank}(\lambda I - A) = 3 - 2 = 1$

$\lambda = 1$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda I - A) v_1 = 0 \longrightarrow (I - A) v_1 = 0$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 - x_2 = 0$
$x_1 - x_2 = 0$
$-x_1 = 0$

$$x_1 = 0 \ ، \ x_1 = x_2 = 0 \longrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I) Q_1 = v_1$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$-x_4 + x_5 = 0$
$x_4 = 1 \longrightarrow x_5 = 1$

$$\longrightarrow Q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I) Q_2 = Q_1$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x_7 + x_8 = 1$$

$$x_7 = 0 \longrightarrow x_8 = 1$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow T^{-1} \times A \times T = J$$

مثال) فرم قطری ماتریس را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -0/5 & -3 & 1 & 0/5 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_{1,2} = 4 \longrightarrow$ یک بلوک $\rightarrow \overset{4}{n} - \text{rank}(4I - A)$

$\lambda_{3,4} = -2 \longrightarrow$ دو بلوک $\rightarrow n - \text{rank}(\underbrace{-2I - A}_{2I + A})$

$$\Lambda = J = \left[\begin{array}{cc|c|c} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

مرتبه بلوک جردن متناظر با $\lambda = 4$

↓

2

مرتبه 〃 〃 〃 با $\lambda = -2$

↓

1 , 1

مثال) اگر در یک ماتریس A مقادیر ویژه بصورت:

λ_1 و λ_1 و λ_1 و λ_1 و λ_1 و λ_6 و λ_7 باشند و برای پنج مقدار ویژه تکراری

فقط ۲ بردار ویژه مستقل خطی داشته باشیم آنگاه فرم جردن می‌تواند:

$$J = \left[\begin{array}{ccc|cc|c|c}
\lambda_1 & 1 & 0 & & & & \\
0 & \lambda_1 & 1 & & & 0 & \\
0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\
\hline
 & & & \lambda_1 & 1 & & \\
 & & & 0 & \lambda_1 & & \\
\hline
 & 0 & & & & \lambda_6 & \\
\hline
 & & & & & & \lambda_7
\end{array}\right]$$

تمرین) فرم قطری !? $T = ?$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -1 \\ \lambda_{3,4} = -1 \pm j \end{cases}$$

$\lambda_{3,4}$

$$\Lambda = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & & \\ -1 & -1 & & \\ \hline & & -1 & ? \\ & & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$\lambda_{1,2}$

if one block $\rightarrow$? = 1

else (two) $\rightarrow$? = 0