(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)

دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**	امتحان درس : **ریاضی۱-فنی (۸ گروه هماهنگ)**	نیمسال (~~اول~~/ **دوم**) **۹۵-۱۳۹۴** نام مدرس:
نام و نام خانوادگی :	شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۳۹۵/۳/۲۲** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از هرگونه ماشین حساب ممنوع است.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- نشان دهید تابع $f(x)=\int_{1}^{x}\sqrt{1+t^{4}}\,dt$ یک به یک است و مقدار $(f^{-1})'(0)$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۲- انتگرال نامعین $\int\frac{5x^{2}-6x-18}{(x-2)^{2}(x^{2}+2x+2)}dx$ را حل کنید. **۲۰ نمره**

سوال۳- مساحت ناحیه محدود به منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ و محورهای مختصات را بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۴- ناحیه محدود به منحنی $y=\frac{8}{x^{2}+4}$ در بازه $[0,2]$ حول محور xها دوران می‌کند. حجم جسم دوار حاصل را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۵- همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره $\int_{1}^{\infty}\frac{1+e^{-x}}{x}dx$ را مشخص کنید. **۱۵ نمره**

سوال۶- همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\cosh n}$ را مشخص کنید. **۱۵ نمره**

سوال۷- سری مک لورن تابع $y=\frac{1}{(1+x)^{2}}$ را بنویسید. (پنج جمله غیر صفر اول کافی است.) **۱۵ نمره**

موفق باشید

جواب سوال۱- روش اول : نشان می‌دهیم که تابع صعودی اکید است بنابر این یک به یک است. $f(x)=\int_1^x \sqrt{1+t^4}\,dt$

چون $f'(x)=\sqrt{1+x^4}>0$ پس مشتق تابع همه جا مثبت است یعنی همه جا صعودی اکید است و در نتیجه تابع یک به یک خواهد بود.

روش دوم : اگر $f(a)=f(b)$ آنگاه $\int_1^a \sqrt{1+t^4}\,dt=\int_1^b \sqrt{1+t^4}\,dt=\int_1^a \sqrt{1+t^4}\,dt+\int_a^b \sqrt{1+t^4}\,dt$

که نتیجه می‌دهد $\int_a^b \sqrt{1+t^4}\,dt=0$ اما چون تابع داخل انتگرال مثبت است سطح محدود به منحنی و محور x ها در فاصله a و b وقتی برابر صفر می‌شود که $a=b$. بنابر این تابع f یک به یک است.

برای محاسبه $(f^{-1})'(0)$ از فرمول $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ استفاده می‌کنیم.

چون $f(1)=0$ پس $f^{-1}(0)=1$ بنابر این : $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))}=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

جواب سوال۲ – ابتدا باید کسر را به کسرهای ساده‌تر تجزیه کنیم. حدس می‌زنیم :

$$\frac{5x^2-6x-18}{(x-2)^2(x^2+2x+2)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{(x-2)^2}+\frac{cx+d}{x^2+2x+2}$$

$$\frac{5x^2-6x-18}{(x-2)^2(x^2+2x+2)}=\frac{(a+c)x^3+(b-4c+d)x^2+(-2a+2b+4c-4d)x+(-4a+2b+4d)}{(x-2)^2(x^2+2x+2)}$$

اکنون باید داشته باشیم : $a+c=0\ ,\ b-4c+d=5\ ,\ -2a+2b+4c-4d=-6\ ,\ -4a+2b+4d=-18$

از معادله های اول داریم $a=-c$. با جایگذاری در بقیه معادله ها داریم :

$$b-4c+d=5\ ,\ b+3c-2d=-3\ ,\ b+2c+2d=-9$$

اکنون معادله اول را در -1 ضرب کرده با دو معادله دیگر جمع می کنیم. $7c-3d=-8\ ,\ 6c+d=-14$

با ضرب معادله دوم در ۳ و جمع آن با معادله اول داریم $c=-2$ و در نتیجه $d=-2$ و $b=-1$ و $a=2$

اکنون داریم : $$\int\frac{5x^2-6x-18}{(x-2)^2(x^2+2x+2)}dx=\int\left(\frac{2}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\right)dx$$

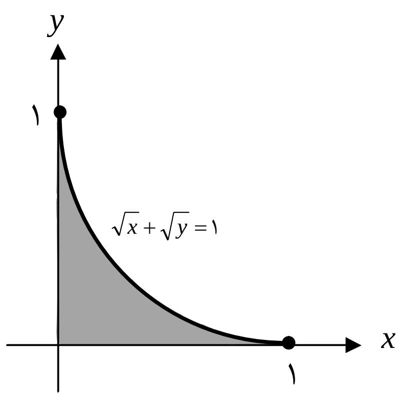
و بالاخره داریم : $$\int\frac{5x^2-6x-18}{(x-2)^2(x^2+2x+2)}dx=2\ln(x-2)+\frac{1}{x-2}-\ln(x^2+2x+2)+c$$

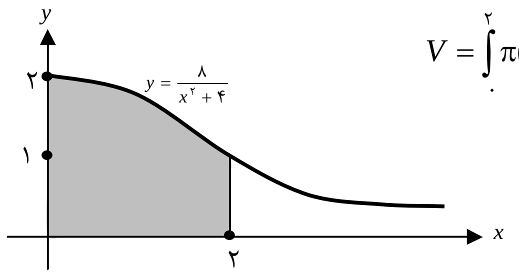
جواب سوال۳- با توجه به ضابطه تابع داریم $0\le x,y\le 1$

$$\sqrt{y}=1-\sqrt{x}\ \rightarrow\ y=1-2\sqrt{x}+x$$

$$S=\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)dx$$

$$=\left[x-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$





جواب سوال۴- با توجه به شکل ، حجم خواسته شده برابر است با : $V=\int_0^2\pi(\frac{8}{x^2+4})^2dx$

با اعمال تغییر متغیر $x=2\tan t$ داریم :

$$V=\int_0^2\pi(\frac{8}{x^2+4})^2dx=64\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2(1+\tan^2t)}{(4\tan^2t+4)^2}dt$$

$$V=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos^2t\,dt=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos2t)dt=4\pi[t+\frac{1}{2}\sin2t]_0^{\frac{\pi}{4}}=4\pi(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2})=\pi(\pi+2)$$

جواب سوال۵- چون $e^{-x}>0$ داریم $\int_1^\infty\frac{1+e^{-x}}{x}dx>\int_1^\infty\frac{1}{x}dx=\ln x|_1^\infty=\infty$ یعنی انتگرال ناسره داده شده واگراست.

جواب سوال۶- دنباله $\{\frac{1}{\cosh n}\}$ یک دنباله مثبت نزولی است که به صفر همگراست. کافی است نشان دهیم که سری کراندار است.

روش اول : (آزمون مقایسه) چون $e^{-n}>0$ داریم : $\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{\cosh n}=\sum_{n=0}^\infty\frac{2}{e^n+e^{-n}}\le\sum_{n=0}^\infty\frac{2}{e^n}=2\sum_{n=0}^\infty(\frac{1}{e})^n=\frac{2}{1-1/e}=\frac{2e}{e-1}$

روش دوم : (آزمون انتگرال) دنباله $\{\frac{1}{\cosh n}\}$ یک دنباله مثبت و نزولی است که به صفر همگراست بنابر این می‌توانیم از آزمون انتگرال استفاده کنیم :

$$\int_0^\infty\frac{dx}{\cosh x}=\int_0^\infty\frac{2dx}{e^x+e^{-x}}=\int_0^\infty\frac{2e^xdx}{e^{2x}+1}=2\arctan e^x|_0^\infty=2(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}$$

چون انتگرال ناسره همگراست پس سری هم همگرا خواهد بود.

روش سوم : در روش قبل لازم نیست مقدار دقیق انتگرال را محاسبه کنیم. کافی است ثابت کنیم انتگرال ناسره همگراست.

$$\int_0^\infty\frac{dx}{\cosh x}=\int_0^\infty\frac{2dx}{e^x+e^{-x}}\le\int_0^\infty\frac{2dx}{e^x}=2e^{-x}|_0^\infty=2$$

جواب سوال۷- روش اول : از فرمول حد مجموع تصاعد هندسی نزولی داریم : $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots$

از طرفین مشتق می گیریم : $\frac{-1}{(1+x)^2}=-1+2x-3x^2+4x^3-5x^4+6x^5-\cdots$

و در نتیجه : $\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+\cdots$

روش دوم : از فرمول حد مجموع تصاعد هندسی نزولی داریم : $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots$

بنابر این : $y=\frac{1}{(1+x)^2}=(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots)^2=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+\cdots$

روش سوم : (استفاده از فرمول اصلی)

$$y=\frac{1}{(1+x)^2}\ ,\quad y'=\frac{-2}{(1+x)^3}\ ,\quad y''=\frac{6}{(1+x)^4}\ ,\quad y'''=\frac{-24}{(1+x)^5}\ ,\quad y^{(4)}=\frac{120}{(1+x)^6}\ ,\quad y^{(5)}=\frac{-720}{(1+x)^7}$$

$$y(0)=1\ ,\quad y'(0)=-2\ ,\quad y''(0)=6\ ,\quad y'''(0)=-24\ ,\quad y^{(4)}(0)=120\ ,\quad y^{(5)}(0)=-720$$

$$y=\frac{1}{(1+x)^2}=1-\frac{2}{1!}x+\frac{6}{2!}x^2-\frac{24}{3!}x^3+\frac{120}{4!}x^4-\frac{720}{5!}x^5+\cdots=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+\cdots$$