فضاهای برداری

میدان :

یک میدان مجموعه‌ای از اسکالرهاست بطوریکه همراه با ۲ عمل جمع و ضرب شرایط زیر را برآورده می‌سازد :

۱- برای هر اسکالر a و b متعلق به میدان F یک اسکالر متناظر a+b در F وجود دارد که مجموع a و b نامیده می‌شود (بسته بودن نسبت به جمع)

۲- برای هر اسکالر a و b متعلق به میدان F یک اسکالر متناظر ab در F وجود دارد که حاصل ضرب a و b نامیده می‌شود. (بسته بودن نسبت به ضرب)

۳- برای هر اسکالر a، b و c متعلق به میدان F قوانین زیر برقرار می‌باشند :

1) $a+b=b+a$ و $ab=ba$

2) $(a+b)+c=a+(b+c)$

3) $a(b+c)=ab+ac$

4) $\forall a\in F, \exists 0\in F \rightarrow a+0=a$

5) $\forall a\in F, \exists 1\in F \rightarrow 1\times a=a$

6) $\forall a\in F, \exists b\in F \rightarrow a+b=0$

7) $\forall a\in F, \exists b\in F \rightarrow ab=1$

* مجموعه اعداد صحیح Z چون شرط ۷ را نقض می‌کند تشکیل میدان نمی‌دهد.

$$2 \in Z \to \frac{1}{2} \notin Z$$

فضای برداری

یک فضای برداری مانند V بر روی میدان F ، مجموعه‌ای از بردارهاست که با دو عمل جمع و ضرب شرایط زیر را برآورده می‌سازد:

1) $\forall\, u, v \in V \to u+v \in V$

2) $\forall\, \vec{u} \in V ,\ \forall\, c \in F \to cu \in V$

اسکالر

3) $\forall\, u, v \in V \to u+v = v+u$

4) $\forall\, u, v, w \in V \to u+(v+w) = (u+v)+w$

5) $\forall\, u \in V ,\ \exists\, \vec{0} \in V \to u+0 = 0+u$

6) $\forall\, u \in V ,\ \exists\, -u \in V \to u+(-u) = (-u)+u = 0$

7) $\forall\, u, v \in V ,\ \forall\, a, b \in F$

$\to (a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u} ,\ a(u+v) = au + av$

8) $\forall u \in V, \quad \forall a, b \in F$

$$\rightarrow a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$$

9) $\forall u \in V, \quad \exists 1 \in F \rightarrow 1u = u$

مثال) ثابت کنید مجموعه R^n که شامل تمام بردارهای n تایی به شکل $u=[u_1, \dots, u_n]$ است، بر روی میدان R تشکیل یک فضای برداری می دهند.

برعهدهٔ خواننده ← هر ۹ شرط فوق بررسی شود:

بطور مثال شرط V :

الف

$$(a+b)\vec{u} = (a+b)[u_1, \dots, u_n]$$

$$= [(a+b)u_1, \dots, (a+b)u_n]$$

$$= [au_1 + bu_1, \dots, au_n + bu_n]$$

$$= [au_1, \dots, au_n] + [bu_1, \dots, bu_n]$$

$$= a\vec{u} + b\vec{u}$$

ب) $a(\vec{u}+\vec{v}) =$

$$a[u_1+v_1, \dots, u_n+v_n]$$

$$= [a(u_1+v_1), \dots, a(u_n+v_n)]$$

$$= [au_1+av_1, \dots, au_n+av_n]$$

$$= [au_1, \dots, au_n] + [a\vec{v}_1, \dots, a\vec{v}_n]$$

$$= a\vec{u} + a\vec{v}$$

سوال) ثابت کنید مجموعه P_k که شامل تمام چندجمله ای های است که به فرم زیر می باشند، بر روی میدان R تشکیل یک فضای برداری می دهد.

$$p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_k x^k$$

$$(p_0, p_1, \ldots, p_k \in R, \quad k \in N)$$

$$q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_k x^k$$ شرط ۱)

$$p(x) + q(x) = (\underbrace{p_0 + q_0}_{p_0}) + (\underbrace{p_1 + q_1}_{p_1}) x + (\underbrace{p_2 + q_2}_{\bar{p}_2}) x^2 + \cdots + (\underbrace{p_k + q_k}_{\bar{p}_k}) x^k$$

$$c\,p(x) = \underbrace{c p_0}_{\bar{p}_0} + \underbrace{c p_1}_{\bar{p}_1} x + \cdots + \underbrace{c p_k}_{\bar{p}_k} x^k$$ شرط ۲)

$$p(x) + q(x)$$ [illegible]

$$= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)x + \cdots + (p_k + q_k)x^k$$

$$= (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)x + \cdots + (q_k + p_k)x^k$$

$$= (q_0 + q_1 x + \cdots + q_k x^k) + (p_0 + p_1 x + \cdots + p_k x^k)$$

$$= q(x) + p(x) \quad \checkmark$$

$$p(x) + (q(x) + r(x))$$ [illegible]

$$= (p(x) + q(x)) + r(x) \quad \checkmark$$

شرط ۶)

$$p(x) + 0$$

$$= (p_0 + 0) + (p_1 + 0)x + \cdots + (p_k + 0)x^k$$

جابجایی صفر : $0 + 0x + \cdots + 0x^k$

$$\Rightarrow (0 + p_0) + (0 + p_1)x + \cdots + (0 + p_k)x^k = 0 + p(x) \checkmark$$

شرط ۷)

$$p(x) + (-p(x))$$

$$= (p_0 + (-p_0)) + (p_1 + (-p_1))x + \cdots + (p_k + (-p_k))x^k$$

$$= 0 + 0x + \cdots + 0x^k$$

$$= (-p_0 + p) + (-p_1 + p_1)x$$

$$+ \cdots + (-p_k + p_k)x^k$$

$$= -(p_0 + p_1 x + \cdots + p_k x^k)$$

$$+ (p_0 + p_1 x + \cdots + p_k x^k)$$

$$= -p(x) + p(x) \checkmark$$

الف)

$(a+b)p(x)$ شرط ۷)

$$= (a+b)p_0 + (a+b)p_1 x + \cdots$$

$$+ (a+b)p_k x^k$$

$$= (ap_0 + ap_1 x + \cdots + ap_k x^k)$$

$$+\left(bp_0+bp_1x+\dots+bp_kx^k\right)$$

$$=ap(x)+bp(x)$$

ب) $a\left(p(x)+q(x)\right)$

$$=a\left((p_0+q_0)+(p_1+q_1)x+\dots+(p_k+q_k)x^k\right)$$

$$=(ap_0+aq_0)+(ap_1+aq_1)x+\dots$$
$$+(ap_k+aq_k)x^k$$

$$=\left(ap_0+ap_1x+\dots+ap_kx^k\right)$$

$$+\left(aq_0+aq_1x+\dots+aq_kx^k\right)$$

$$= a\,p(x) + a\,q(x) \quad \checkmark$$

(۸ b [illegible]

$$(ab)\,p(x) =$$

$$(ab)p_0 + (ab)p_1 x + \dots + (ab)p_k x^k$$

$$= a(bp_0) + a(bp_1)x + \dots$$

$$+ a(bp_k)x^k$$

$$= a(bp_0 + bp_1 x + \dots + bp_k x^k)$$

$$= a(b\,p(x)) \quad \checkmark$$

(۹ b [illegible]

$$1\,p(x) = 1\,p_0 + 1\,p_1 x + \dots$$

$$+ 1\,p_k x^k = p_0 + p_1 x + \dots + p_k x^k$$

$= P(x)$ ✓

زیرفضای برداری :