FR/FY/11 : کد فرم
ویرایش : ۱

(فرم طرح سوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**	امتحان درس : **ریاضی ۲ (ریاضی)**	نیمسال (**اول**/دوم) **۹۰-۱۳۸۹**	نام مدرس: **سیدرضا موسوی**
نام و نام خانوادگی :	شماره دانشجویی :	تاریخ : **۱۳۸۹/۱۱/۴**	وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال۱- انتگرال معین مقابل را محاسبه کنید : $\int_1^2 \frac{dx}{(x^2-2x+4)^{3/2}}$ **۱۵ نمره**

سوال۲- الف) ضرایب عددی a ، b ، c و d را طوری بیابید که : **۱۵ نمره**

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)^2}=\left(\frac{ax+b}{x^2+2x+2}\right)'+\frac{cx+d}{x^2+2x+2}$$

ب) انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$ را محاسبه کنید. **۱۰ نمره**

سوال۳- طول قوس منحنی $y=e^x$ را در بازه $[\ln\sqrt{3},\ln\sqrt{8}]$ بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۴- فرمول انحنا و تاب منحنی $f(t)=(\cos t,\sin t,\cosh t)$ را بنویسید. **۱۵ نمره**

سوال۵- مرکز دایره بوسان منحنی $x^2=2ay\ ,\ x^3=6a^2z$ در نقطه‌ای با طول $x=a$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۶- معادله خطوط مماس و قائم و معادله صفحه بوسان منحنی $x=t,y=t^2,z=t^3$ را در نقطه $M=(-1,+1,-1)$ متعلق به آن بنویسید. **۲۰ نمره**

سوال۷- انتگرال منحنی الخط $I=\int_C xdy-ydx$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

C قسمتی از نمودار تابع $y=e^{-x}$ است که در ناحیه اول دستگاه مختصات قرار دارد و در جهت افزایش x پیموده می شود.

موفق باشید

سوال۱- از تغيير متغير $x-1=\sqrt{3}\tan t$ استفاده می‌کنیم.

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x^2-2x+4)^{3/2}}=\int_1^2 \frac{dx}{((x-1)^2+3)^{3/2}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(1+\tan^2 t)dt}{(3\tan^2 t+3)^{3/2}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}(1+\tan^2 t)dt}{(3\tan^2 t+3)^{3/2}}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{(\tan^2 t+1)^{1/2}}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos t\, dt=\frac{1}{3}\sin t\,|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{6}$$

سوال۲- الف)

$$\left(\frac{ax+b}{x^2+2x+2}\right)'+\frac{cx+d}{x^2+2x+2}=\frac{-ax^2-2bx+(2a-2b)}{(x^2+2x+2)^2}+\frac{cx+d}{x^2+2x+2}$$

$$=\frac{cx^3+(-a+2c+d)x^2+(-2b+2c+2d)x+(2a-2b+2d)}{(x^2+2x+1)^2}=\frac{1}{(x^2+2x+1)^2}$$

$$\to c=0,\ -a+2c+d=0\ ,\ \ -2b+2c+2d=0\quad 2a-2b+2d=1\ \to\ a=b=d=\frac{1}{2}$$

سوال۲- ب) روش اول (به کمک قسمت (الف)) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{x+1}{x^2+2x+2}\right)'+\frac{1}{x^2+2x+2}\right]dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x+1}{x^2+2x+2}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx$$

$$=0+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2+1}dx=\frac{1}{2}\arctan(x+1)\,|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

روش دوم : به کمک تغيير متغير $x+1=\tan t$ انتگرال را حل می‌کنیم.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{((x+1)^2+1)^2}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{(1+\tan^2 t)dt}{(1+\tan^2 t)^2}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{dt}{1+\tan^2 t}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}\right]=\frac{\pi}{2}$$

سوال۳- طول قوس منحنی $y=e^x$ در بازه $[\ln\sqrt{3},\ln\sqrt{8}]$ برابر است با : $\quad l=\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

از تغيير متغير $u^2=1+e^{2x}$ استفاده می‌کنیم پس $2udu=2e^{2x}dx$ يعنی $dx=\frac{u\,du}{u^2-1}$

$$l=\int_2^3\frac{u^2\,du}{u^2-1}=\int_2^3\left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)du=\frac{1}{2}\int_2^3\left(2+\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du=\frac{1}{2}\left(2u+\ln\frac{u-1}{u+1}\right)|_2^3=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

سوال۴- $f'(t)=(-\sin t,\cos t,\sinh t)\ \to\ f''(t)=(-\cos t,-\sin t,\cosh t)\ \to f'''(t)=(\sin t,-\cos t,\sinh t)$

$$\to |f'(t)|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+\sinh^2 t}=\cosh t$$

$$\to\ f'(t)\times f''(t)=(\cos t\cosh t+\sin t\sinh t,\sin t\cosh t-\cos t\sinh t,1)\to\ (f'(t)\times f''(t))\cdot f'''(t)=2\sinh t$$

$$\to |f'(t)\times f''(t)|=\sqrt{\cosh^2 t+\sinh^2 t+1}=\sqrt{\cosh 2t+1}=\sqrt{2}\cosh t$$

$$\to k(t)=\frac{\sqrt{2}\cosh t}{\cosh^3 t}=\frac{\sqrt{2}}{\cosh^2 t}\quad,\quad \rho(t)=\frac{2\sinh t}{2\cosh^4 t}=\frac{\sinh t}{\cosh^4 t}$$

سوال۵- معادله منحنی را به صورت تابع برداری می نویسیم $f(t)=(t,\frac{t^۲}{۲a},\frac{t^۳}{۶a^۲})$

اکنون داریم

$$f'(t)=(۱,\frac{t}{a},\frac{t^۲}{۲a^۲})\ \to |f'(t)|=\sqrt{۱+\frac{t^۲}{a^۲}+\frac{t^۴}{۴a^۴}}=۱+\frac{t^۲}{۲a^۲}\ ,\ |f'(a)|=\frac{۳}{۲},\ f''(t)=(۰,\frac{۱}{a},\frac{t}{a^۲})$$

$$f'(a)\times f''(a)=(۱,۱,\frac{۱}{۲})\times(۰,\frac{۱}{a},\frac{۱}{a})=\frac{۱}{a}(\frac{۱}{۲},-۱,۱)\ \to\ |f'(a)\times f''(a)|=\frac{۳}{۲a}\ ,\ k(a)=\frac{۴}{۹a}$$

$$\to T(t)=\frac{۱}{t^۲+۲a^۲}(۲a^۲,۲at,t^۲)\ \to T'(t)=\frac{-۲t}{(t^۲+۲a^۲)^۲}(۲a^۲,۲at,t^۲)+\frac{۱}{t^۲+۲a^۲}(۰,۲a,۲t)$$

$$\to T'(a)=\frac{-۲}{۹a^۳}(۲a^۲,۲a^۲,a^۲)+\frac{۱}{۳a^۲}(۰,۲a,۲a)=\frac{۲}{۹a}(-۲,۱,۲)\ \to\ N(a)=\frac{۱}{۳}(-۲,۱,۲)$$

و بالاخره مرکز دایره بوسان در نقطه $f(a)=a(۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۶})$ عبارت است از $O(a)=f(a)+\frac{۱}{k(a)}N(a)=a(-\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۴},\frac{۵}{۳})$

سوال۶- معادله منحنی را به صورت تابع برداری می نویسیم $f(t)=(t,t^۲,t^۳)$ و داریم

$$f'(t)=(۱,۲t,۳t^۲)\ \to T(t)=\frac{۱}{\sqrt{۱+۴t^۲+۹t^۴}}(۱,۲t,۳t^۲)\ \to T(-۱)\,||\,(۱,-۲,۳)$$

$$T'(t)=\frac{-۴t-۱۸t^۳}{(\sqrt{۱+۴t^۲+۹t^۴})^۳}(۱,۲t,۳t^۲)+\frac{۱}{\sqrt{۱+۴t^۲+۹t^۴}}(۰,۲,۶t)\to T'(-۱)=\frac{۲۲}{(\sqrt{۱۴})^۳}(۱,-۲,۳)+\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}(۰,۲,-۶)$$

$$T'(-۱)=\frac{۱}{۱۴\sqrt{۱۴}}(۲۲,-۱۶,-۱۸)\ \to N(-۱)\,||\,(۱۱,-۸,-۹)$$

$$\to\ B(-۱)=T(-۱)\times N(-۱)\,||\,(۴۲,۴۲,۱۴)\to\ B(-۱)\,||\,(۳,۳,۱)$$

معادله خط مماس: $\frac{x+۱}{۱}=\frac{y-۱}{-۲}=\frac{z+۱}{۳}$ معادله قائم اصلی: $\frac{x+۱}{۱۱}=\frac{y-۱}{-۸}=\frac{z+۱}{-۹}$ معادله صفحه بوسان: $۳x+۳y+z=-۱$

سوال۷- $I=\int_C xdy-ydx=\int_۰^{+\infty}(xd(e^{-x})-e^{-x}dx)=\int_۰^{+\infty}(-xe^{-x}-e^{-x})dx=xe^{-x}+۲e^{-x}\,|_۰^{+\infty}=-۲$

سیدرضا موسوی – ۱۳۸۹/۱۱/۴