خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان :

۱- خطی بودن

$$x_1(t) \xleftrightarrow{FT} X_1(j\omega), \quad x_2(t) \xleftrightarrow{FT} X_2(j\omega) \Longrightarrow a x_1(t) + b x_2(t) \xleftrightarrow{FT} a X_1(j\omega) + b X_2(j\omega)$$

به عنوان تمرین رابطه فوق را اثبات نمایید.

۲. انتقال در حوزه زمان :

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) \Longrightarrow x(t-t_0) \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

اثبات :

$$f(t) = x(t-t_0) \Longrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{x(t-t_0)} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) e^{-j\omega(t_1+t_0)} dt_1 = e^{-j\omega t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1}_{X(j\omega)}$$

$$t_1 = t - t_0 \rightarrow t = t_1 + t_0, \quad dt = dt_1$$

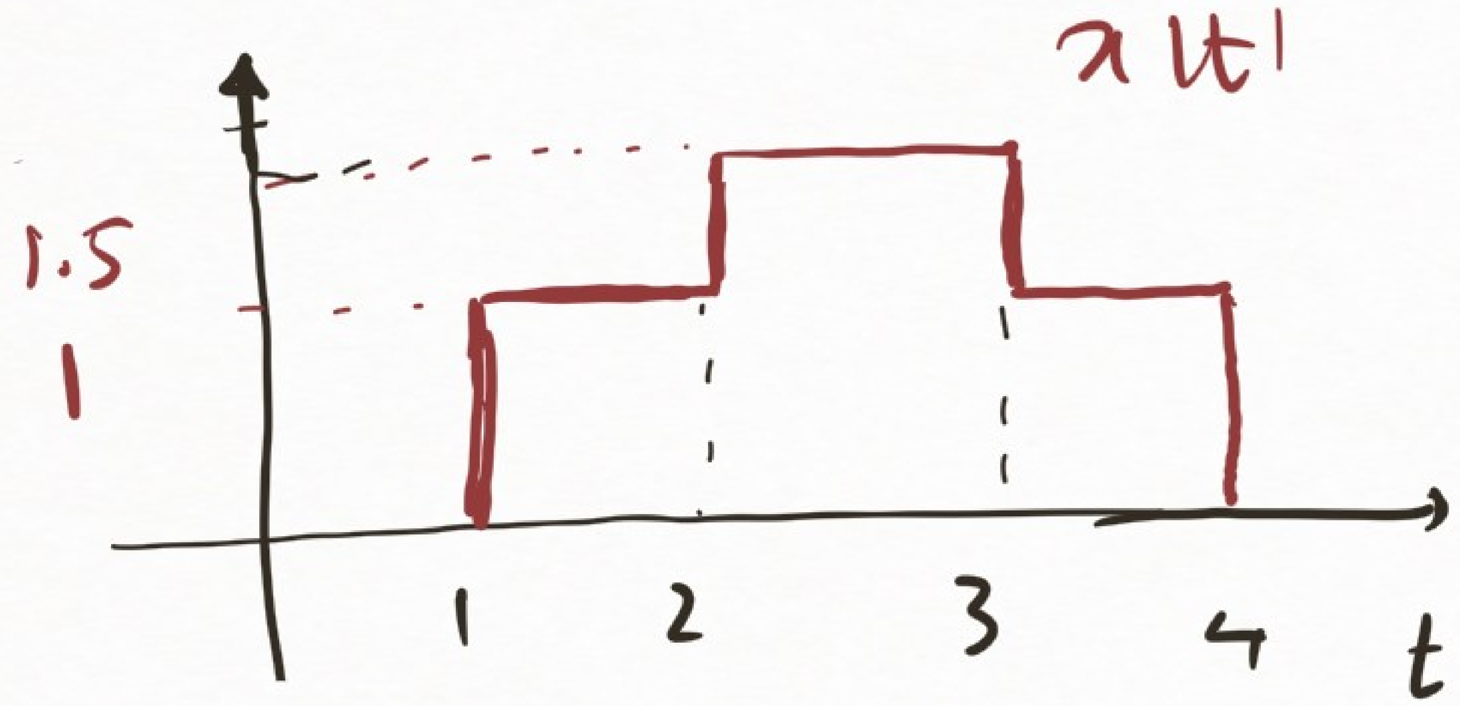
$$\Longrightarrow \boxed{F(\omega) = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)}$$

توجه مهم :

$$|F(\omega)| = \cancelto{1}{|e^{-j\omega t_0}|} \, |X(j\omega)| = |X(j\omega)|$$

یعنی اثر جابجایی زمان در تبدیل فوریه فقط بر فاز آن تأثیر دارد. و فاز را تغییر میدهد Phase shift

مثال -



$$\Longrightarrow X(j\omega)=?$$

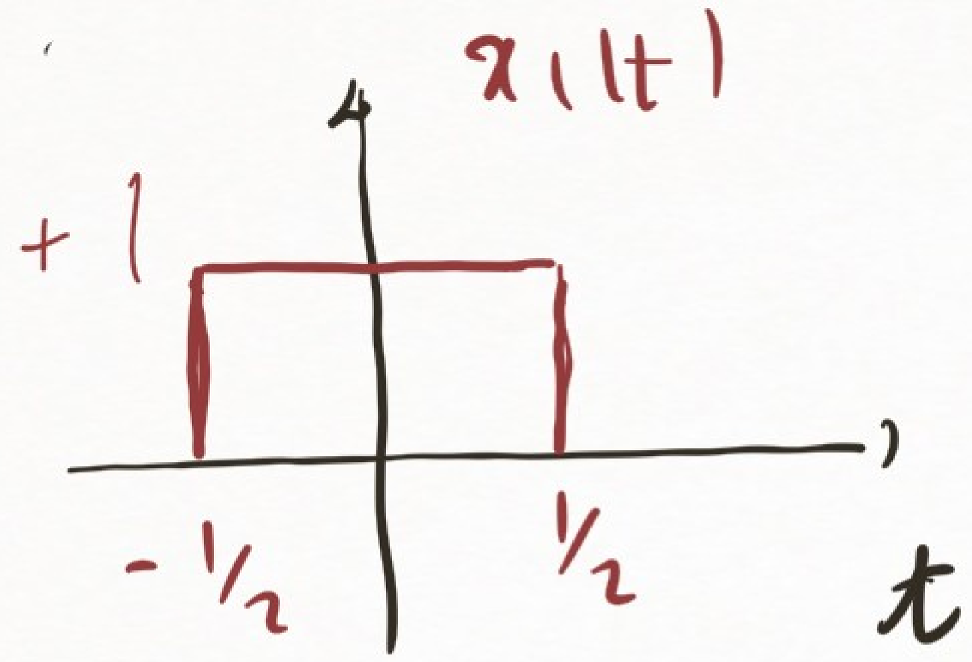
روش اول - روش مستقیم با تعریف تبدیل فوریه:

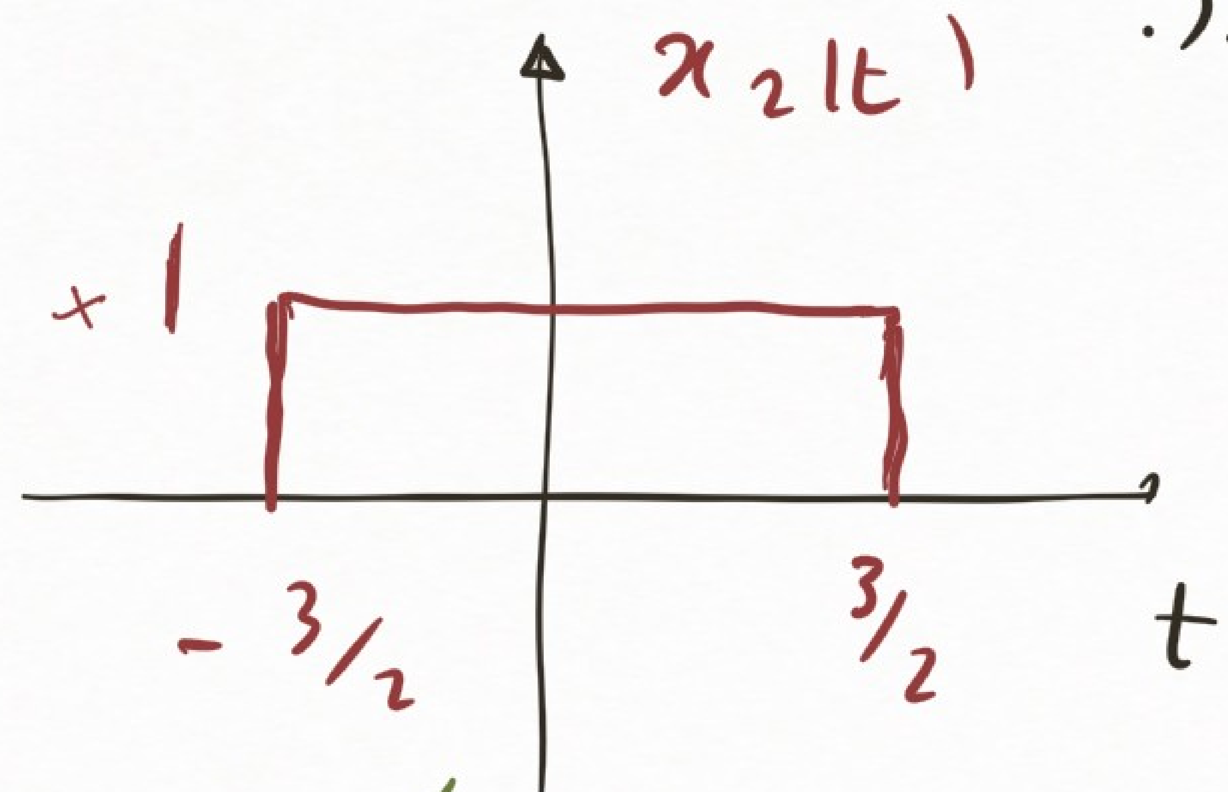
$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt=\int_{1}^{2}1\times e^{-j\omega t}\,dt+\int_{2}^{3}1.5\,e^{-j\omega t}\,dt+\int_{3}^{4}1\times e^{-j\omega t}\,dt=\dots$$

روش دوم - استفاده از خواص تبدیل فوریه:

سیگنال $x(t)$ را می‌توان بصورت ترکیب خطی از دو سیگنال $x_1(t)$, $x_2(t)$

بصورت $\boxed{x(t)=\frac{1}{2}x_1(t-2.5)+x_2(t-2.5)}$ نمایش داد.





حال با توجه به روابط قبلی:

$$X_1(\omega)=\frac{2\sin(\omega/2)}{\omega}$$

$$X_2(j\omega)=\frac{2\sin(3\omega/2)}{\omega}$$

$$X(j\omega)=e^{-j2.5\omega}\left[\frac{1}{2}X_1(\omega)+X_2(\omega)\right]$$

$$\boxed{X(j\omega)=e^{-j2.5\omega}\left[\frac{\sin(\omega/2)+2\sin(3\omega/2)}{\omega}\right]}$$

۳- خاصیت مزدوج برای تبدیل فوریه

$$x^*(t) \longleftrightarrow X^*(-j\omega)$$

اثبات:

$$x_1(t) = x^*(t) \Longrightarrow$$

$$X_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt = \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{+j\omega t} dt}_{X(-j\omega)} \Big)^* = X^*(-j\omega)$$

نتایج حاصله از خاصیت فوق :

$x(t)$ حقیقی باشد $\Longrightarrow$ 1- $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$

2- $x(t) = \overset{\text{زوج}}{x_e(t)} + \overset{\text{فرد}}{x_o(t)} \xrightarrow{FT} X(j\omega) = Re\{X(j\omega)\} + j\, Im\{X(j\omega)\}$

$x_e(t) \xrightarrow{FT} Re\{X(j\omega)\}$, $x_o(t) \xrightarrow{FT} j\, Im\{X(j\omega)\}$

3- $|X(j\omega)| = |X(-j\omega)|$ $\Longleftarrow$ اندازه $X(j\omega)$ بر حسب ω زوج

$\measuredangle X(j\omega) = -\measuredangle X(-j\omega)$ $\Longleftarrow$ فاز $X(j\omega)$ فرد

$Re\{X(j\omega)\} = -Re\{X(-j\omega)\}$ $\Longleftarrow$ بخش حقیقی زوج

$Im\{X(j\omega)\} = -Im\{X(-j\omega)\}$ $\Longleftarrow$ بخش موهومی فرد

مثال - ۵ حالا تبدیل فوریه $x_1(t)=e^{-\alpha|t|}$ را با استفاده از خاصیت جمع تبدیل از روی تبدیل فوریه سیگنال $\boxed{x(t)=e^{-\alpha t}u(t)}$ بدست آوریم :

می‌دانیم که :

$$x_1(t)=e^{-\alpha|t|} = e^{\alpha t}u(-t)+e^{-\alpha t}u(t) = 2\left[\frac{e^{\alpha t}u(-t)+e^{-\alpha t}u(t)}{2}\right]$$

$$x_1(t)=2\left[\frac{x(-t)+x(t)}{2}\right] = 2x_e(t)$$

بخش زوج سیگنال $x(t)$

پس بنابراین :

$$X_1(j\omega) = 2\,Real\{X(j\omega)\} = \frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}$$

یادآوری -

$$x(t)=e^{-\alpha t}u(t) \longleftrightarrow X(j\omega)=\frac{1}{j\omega+\alpha} = \underbrace{\frac{\alpha}{\omega^2+\alpha^2}}_{Real\{X(j\omega)\}} - \underbrace{\frac{j\omega}{\omega^2+\alpha^2}}_{Im\{X(j\omega)\}}$$

۴- خاصیت مشتق و انتگرال‌گیری :

خاصیت مشتق‌گیری -

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega X(j\omega)$$

تبدیل فوریه است

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{+j\omega t}\,d\omega \xRightarrow{\text{مشتق}} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

خاصیت انتگرال‌گیری :

به ازای مقدار ثابت یا dc حاصل از انتگرال‌گیری

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

مثال - می‌خواهیم از خاصیت فوق تبدیل تابع $u(t)$ را به دست آوریم :

$$x(t) = u(t) \Longrightarrow X(j\omega) = ?$$

$$g(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(\omega) = 1$$

می‌دانیم

$$\int_{-\infty}^{t} g(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau = u(t) \longleftrightarrow X(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega)$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$f(t) = u(t) \xleftrightarrow{F} F(w) = \frac{1}{jw} + \pi\delta(w)$$

حل - فرض کنیم

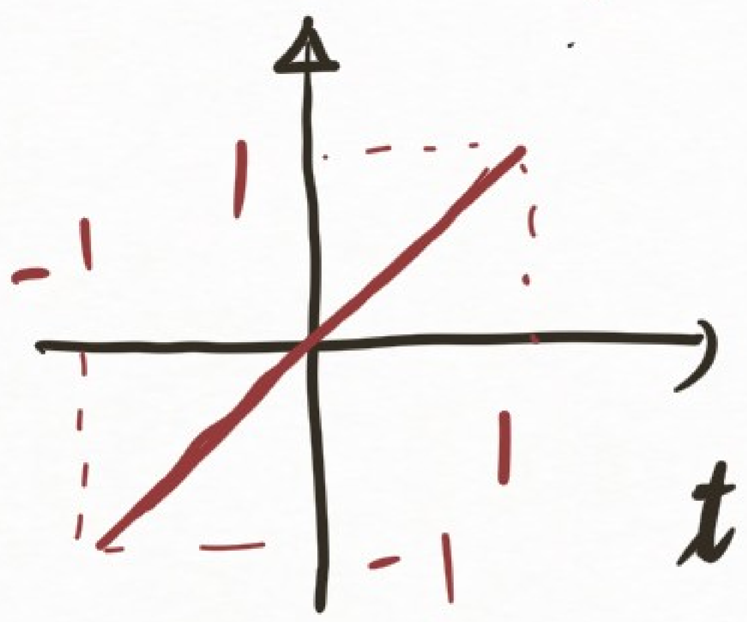
$$x(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{F} X(jw) = ?$$

حال میخواهیم تبدیل فوریه تابع ضربه را بدست آوریم.

$$x(t) = \delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} X(jw) = jwF(w) = jw\left(\frac{1}{jw} + \pi\delta(w)\right) = 1 + \cancel{\pi jw\delta(w)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1}$$

$x(t)$



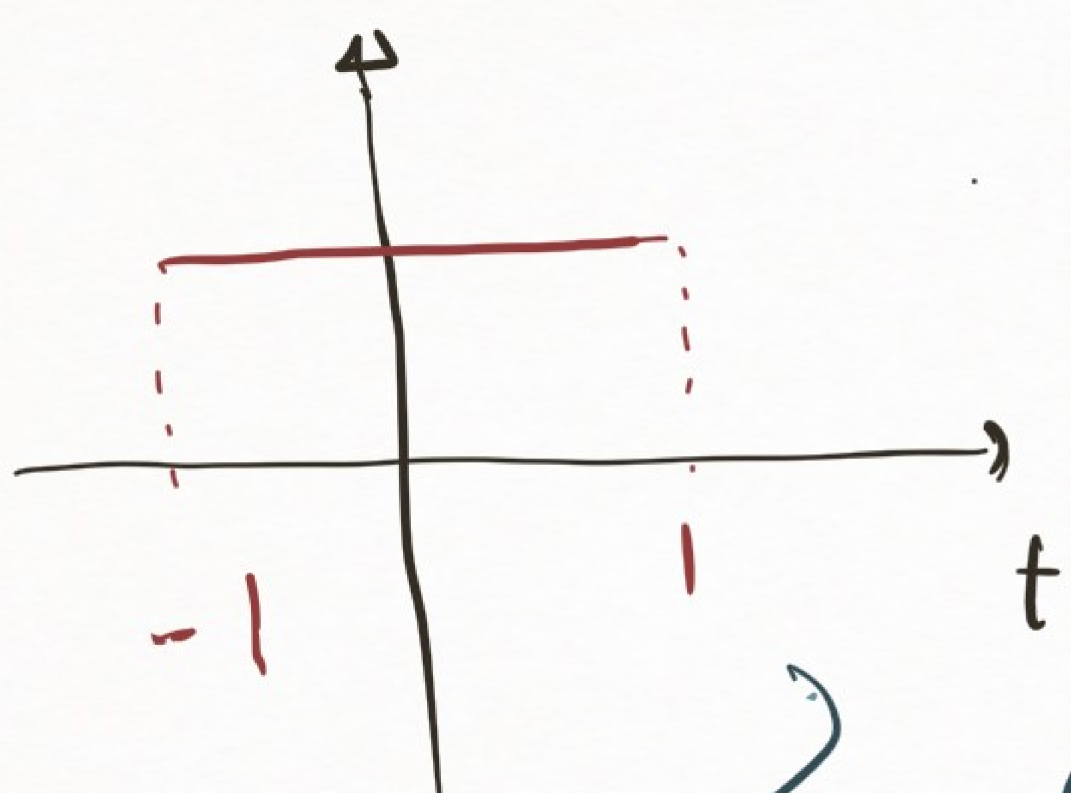
$$g(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

مشتق

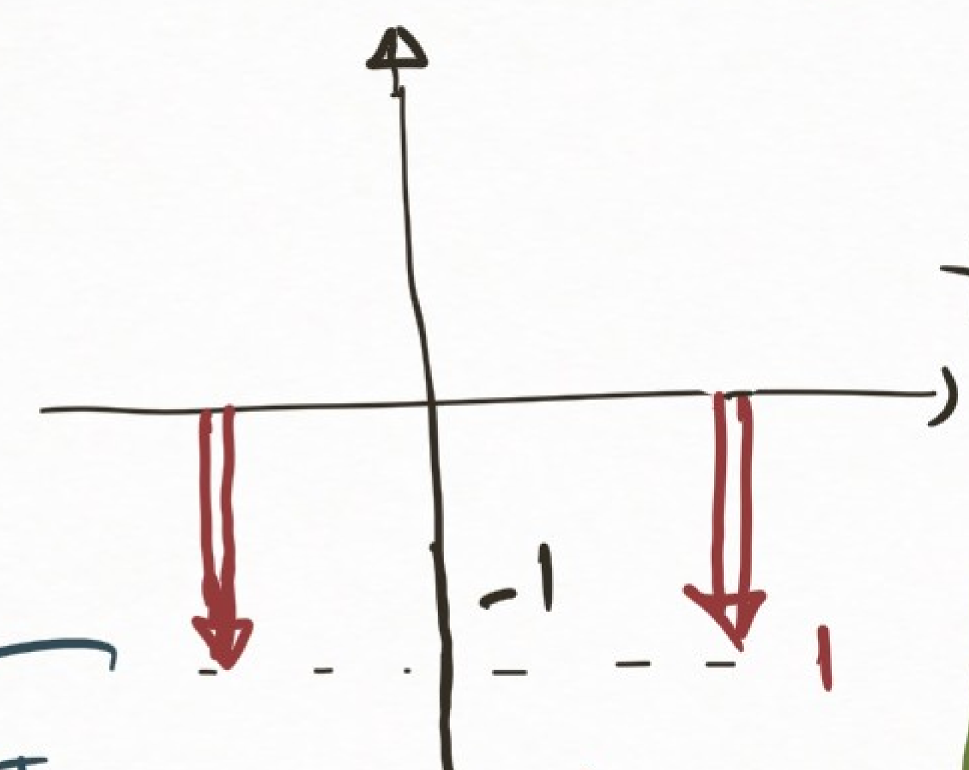
$$\Longrightarrow X(jw) = ?$$

-حل

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \longrightarrow \delta(t-1) \longleftrightarrow e^{-jw}$$ یادآوری



$+$



$$\Longrightarrow$$

$$\frac{2\sin w}{w} \qquad -e^{jw} - e^{-jw}$$

$$G(jw) = \frac{2\sin w}{w} - e^{+jw} - e^{-jw} = \frac{2\sin w}{w} - 2\cos w$$

$$\boxed{X(jw) = \frac{G(jw)}{jw} + \pi G(0)\delta(w) = \frac{2\sin w}{jw^2} - \frac{2\cos w}{jw}}$$

حل - میخواستیم تبدیل فوریه $x(t)$ را داشته باشیم

۵- تغییر مقیاس زمانی در زمان :

$$x(\alpha t) \longleftrightarrow X\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

اثبات :

$$x_1(t) = x(\alpha t) \longrightarrow X_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(\alpha t)}_{t_1} e^{-j\omega t}\, dt = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)\, e^{-j(\frac{\omega}{\alpha})t_1}\, dt_1 , & \alpha > 0 \\ -\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)\, e^{-j(\frac{\omega}{\alpha})t_1}\, dt_1 ; & \alpha < 0 \end{cases}$$

توجه :

$$t_1 = \alpha t$$

$$dt_1 = \alpha\, dt \rightarrow dt = \frac{1}{\alpha}\, dt_1$$

$$t = +\infty \Longrightarrow t_1 \begin{cases} +\infty & , \alpha > 0 \\ -\infty & ; \alpha < 0 \end{cases}$$

$$t = -\infty \Longrightarrow t_1 \begin{cases} -\infty & , \alpha > 0 \\ +\infty & ; \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\int_{+\infty}^{-\infty} = \int_{-\infty}^{\infty}$$

$$\Longrightarrow x(\alpha t) \longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|}\, X\left(\frac{j\omega}{\alpha}\right)$$

حالت خاص :

$$x(-t) \longleftrightarrow X(-j\omega)$$

Duality ۴- خاصیت دوگانی یا

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega) \implies X(t) \longleftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{+j\omega t}\, d\omega$$

$t \to \omega \quad , \quad dt = d\omega \quad , \quad \omega \to t$

$$x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\, e^{j\omega t}\, dt$$

$$2\pi x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\, e^{j\omega t}\, dt$$

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

[illegible]

مثال:

-مثال

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega + \alpha}$$

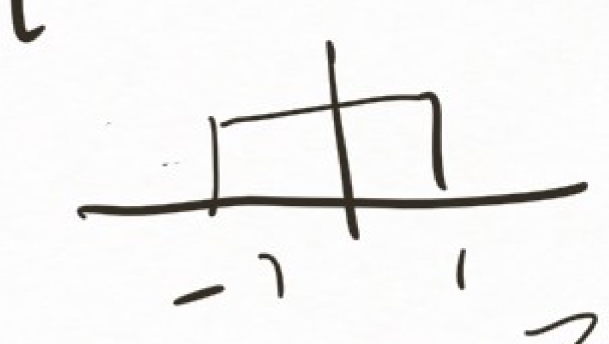
$$\frac{1}{jt + \alpha} \xleftrightarrow{FT} 2\pi e^{+\alpha\omega} u(-\omega)$$

$$x(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{FT} 1$$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi \delta(-\omega) = 2\pi \delta(\omega)$$

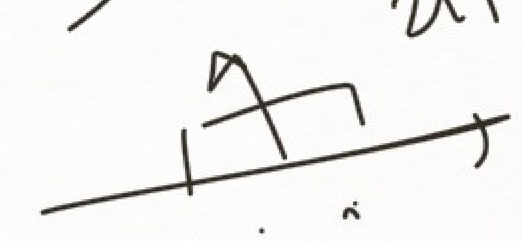
$$x(t) = e^{-2|t|} \xleftrightarrow{FT} X(\omega) = \frac{4}{4 + \omega^2}$$

$$\frac{4}{4 + t^2} \xleftrightarrow{FT} 2\pi e^{-2|\omega|}$$



$\longleftrightarrow 2 \sin\omega / \omega$

$2Sa(t) \longleftrightarrow$



تمرین - الف - تبدیل فوریه (انجام عملیات)

$$x(t) = \text{sign}\, t$$

ب - به کمک تبدیل بند الف تبدیل فوریه

$$x_1(t) = \frac{1}{t}$$

ج - به کمک بند ب، تبدیل فوریه (لگاریتم طبیعی)

$$x_2(t) = \ln t$$

۷- با توجه به روابط خواص زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} -jtx(t) \xleftrightarrow{FT} \dfrac{dX(j\omega)}{d\omega} \\ e^{j\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j(\omega-\omega_0)) \\ -\dfrac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \xleftrightarrow{FT} \displaystyle\int_{-\infty}^{\omega} X(j\eta)\,d\eta \end{cases}$$

۸- خاصیت پارسوال:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega)X_2^*(j\omega)\,d\omega$$

در حالت خاص :

$$x_1(t)=x_2(t)=x(t) \Longrightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt}_{\text{انرژی کل سیگنال}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega \qquad (*)$$

اثبات :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\underbrace{x_2^*(t)}_{\text{مقدار مزدوج}}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\,\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_2^*(j\omega)\,e^{-j\omega t}d\omega}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_2^*(j\omega)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)e^{-j\omega t}dt}_{X_1(j\omega)}\,d\omega$$

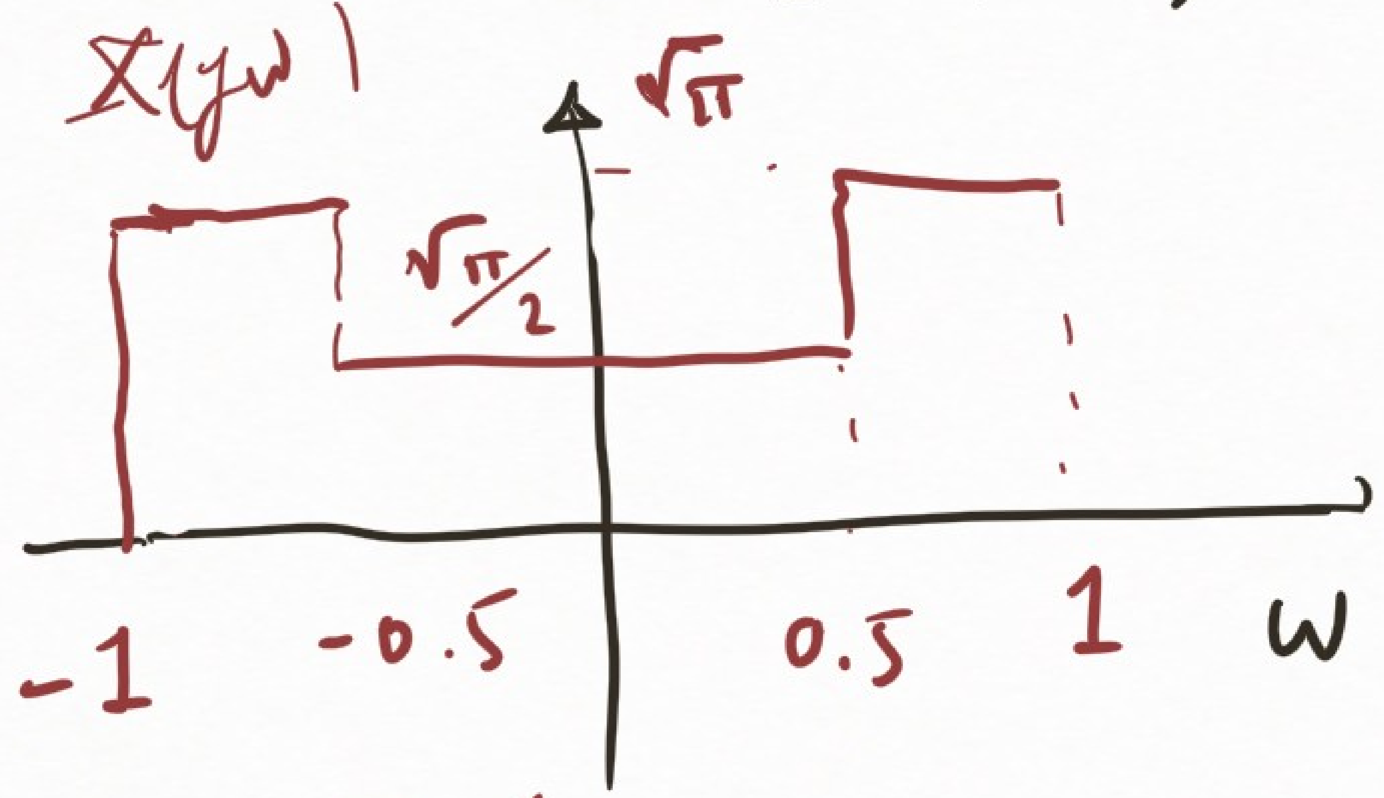
$$\begin{cases} x_2(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_2(j\omega)e^{+j\omega t}d\omega \\ x_2^*(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_2^*(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega \end{cases}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_1(j\omega)\,X_2^*(j\omega)\,d\omega}$$

رسیدن به طرف دوم

توجه : کمیت سمت چپ معادله فوق $(*)$ انرژی کل سیگنال $x(t)$ است لذا با توجه به رابطه پارسوال مقدار انرژی را می‌توان از روی $X(j\omega)$ تبدیل فوریه آن نیز محاسبه کرد. $|X(j\omega)|^2$ را طیف چگالی انرژی می‌گویند.

شکل ۱



شکل ۲

مثال - برای سیگنال‌های شکل مقادیر زیر را بدست آورید.

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt \quad , \quad D=\frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0}$$

می‌خواهیم پارامترها مربوط به زمان صفحه قبل را بدون محاسبه تبدیل معکوس یعنی $x(t)$

به دست آوریم. طبق رابطه پارسوال داریم:

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=?$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega \Longrightarrow \text{①شکل} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0}|-j\sqrt{\pi}|^2d\omega+\int_{0}^{1}|j\sqrt{\pi}|^2d\omega=\boxed{1}$$

$$\text{②شکل} = \int_{-1}^{0.5}|1/\sqrt{\pi}|^2d\omega+\int_{-0.5}^{0.5}|\sqrt{\pi}/2|^2d\omega+\int_{0.5}^{1}|\sqrt{\pi}|^2d\omega=\boxed{\frac{5}{8}}$$

برای محاسبه D داریم:

$$D=\frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0}=?$$

$$g(t)=\frac{dx(t)}{dt}\xleftrightarrow{F}j\omega X(j\omega)=G(j\omega)$$

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(j\omega)e^{+j\omega t}d\omega \Longrightarrow g(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(j\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}j\omega X(j\omega)d\omega$$

[illegible]

که این مقادیر را می‌توان برای دو شکل صفحه قبل به راحتی محاسبه نمود.

۹_ خاصیت کانولوشن :

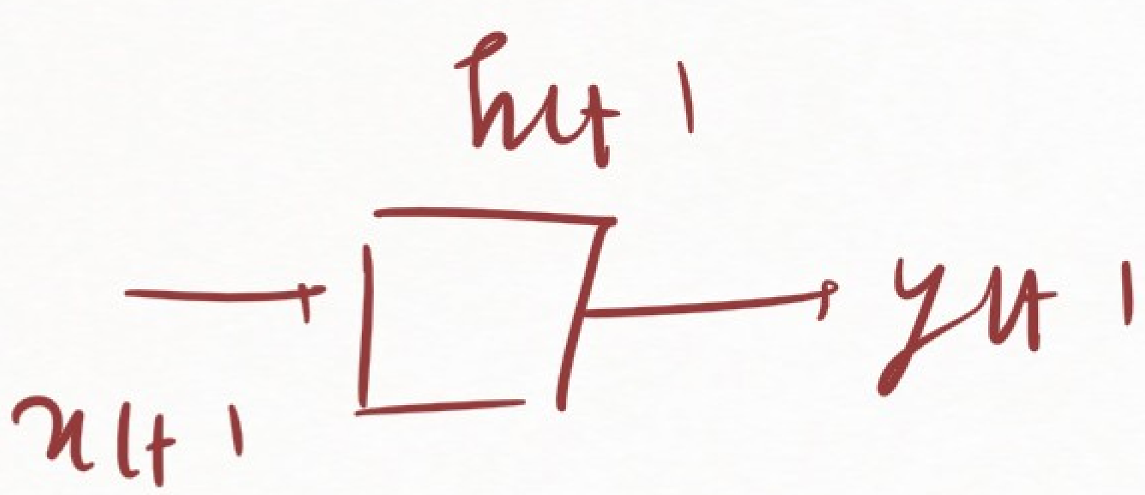
$$y(t) = x(t) * h(t) \longleftrightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)\, H(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\underbrace{t-\tau}_{t_1})\, h(\tau)\, d\tau \Big)\, e^{-j\omega t}\, \underbrace{dt}_{dt_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1)\, h(\tau)\, d\tau\, e^{-j\omega(t_1+\tau)}\, dt_1$$

$t \to t_1 + \tau$

$$t - \tau = t_1$$
$$dt = dt_1$$
$$t = t_1 + \tau$$

$$Y(j\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)\, e^{-j\omega t_1}\, dt_1}_{X(j\omega)} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j\omega \tau}\, d\tau}_{H(j\omega)} = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$



$\alpha, b > 0$

مثال :

$$x(t) = e^{-bt} u(t) \quad , \quad h(t) = e^{-\alpha t} u(t) \longrightarrow y(t) = ?$$

این مسئله را به کمک تبدیل فوریه حل می‌کنیم

$$x(t) = e^{-bt} u(t) \longleftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + b}$$

$$h(t) = e^{-\alpha t} u(t) \longleftrightarrow H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + \alpha}$$

$$\longrightarrow Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)} \cdot \frac{1}{(b+j\omega)} = \frac{A}{a+j\omega} + \frac{B}{b+j\omega}$$

A و B از تجزیه به کسر های جزئی محاسبه میشود .

$$\begin{cases} A = (a+j\omega)\, Y(j\omega) \Big|_{j\omega=-a} = \dfrac{1}{b-a} = -B \\[2ex] B = (b+j\omega)\, Y(j\omega) \Big|_{j\omega=-b} \end{cases}$$

بنابراین تبدیل معکوس $Y(j\omega)$ را پیدا میکنیم :

$$\longrightarrow \boxed{y(t) = A e^{-at} u(t) + B e^{-bt} u(t)}$$

در صورتی که $a=b$ باشد خواهیم داشت :

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)^2} \longrightarrow y(t) = ?$$

در این حالت به طور مستقیم نیست . در اینجا داریم :

میدانیم

$$\begin{cases} f(t) = e^{-\alpha t} u(t) \longrightarrow F(j\omega) = \dfrac{1}{\alpha + j\omega} \\[2ex] \cancel{-j} t e^{-\alpha t} u(t) \longleftrightarrow \dfrac{d F(j\omega)}{d\omega} = \dfrac{\cancel{-j}}{(\alpha + j\omega)^2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow t e^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$$

فرمول

بنابراین خواهیم

$$\boxed{y(t) = t e^{-at} u(t)}$$

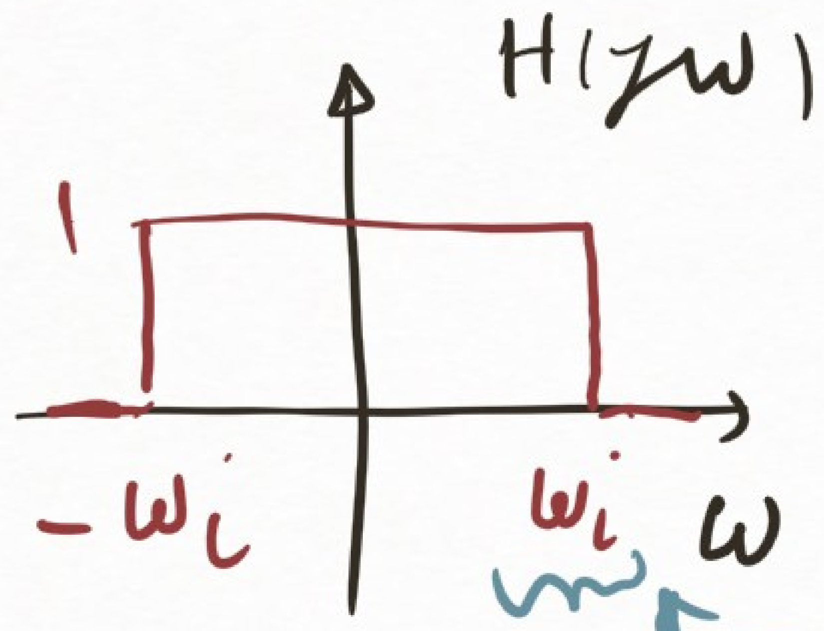
حل -

$$, \quad h(t) = \frac{\sin \omega_i t}{\pi t} \quad , \quad x(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} \Longrightarrow y(t) = ?$$

می‌دانیم

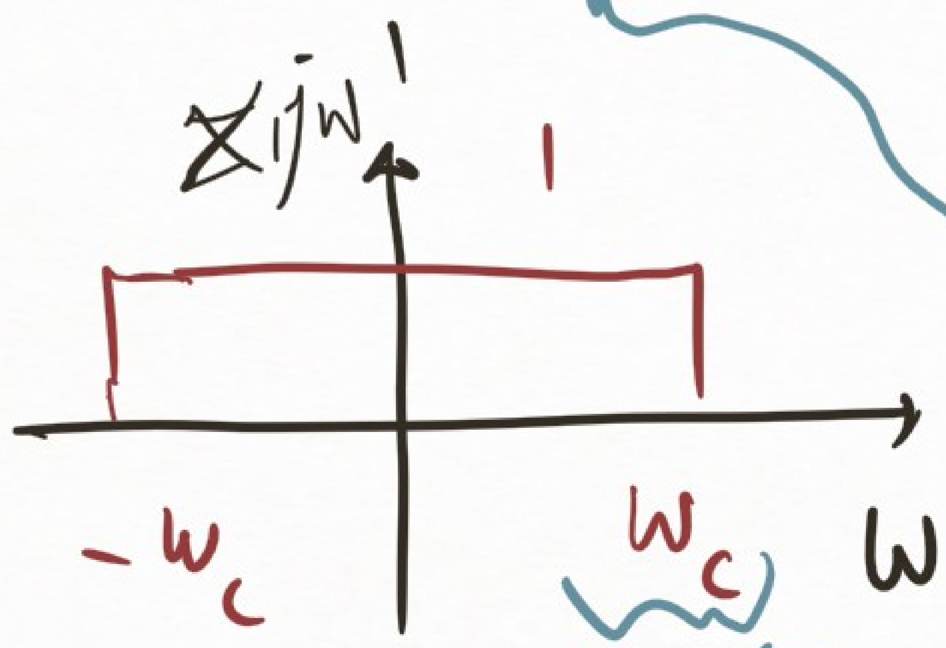
$$y(t) = x(t) * h(t) \longleftrightarrow Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

$$h(t) = \frac{\sin \omega_i t}{\pi t} \Longrightarrow$$



تبدیل فوریه

$$x(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} \Longrightarrow$$



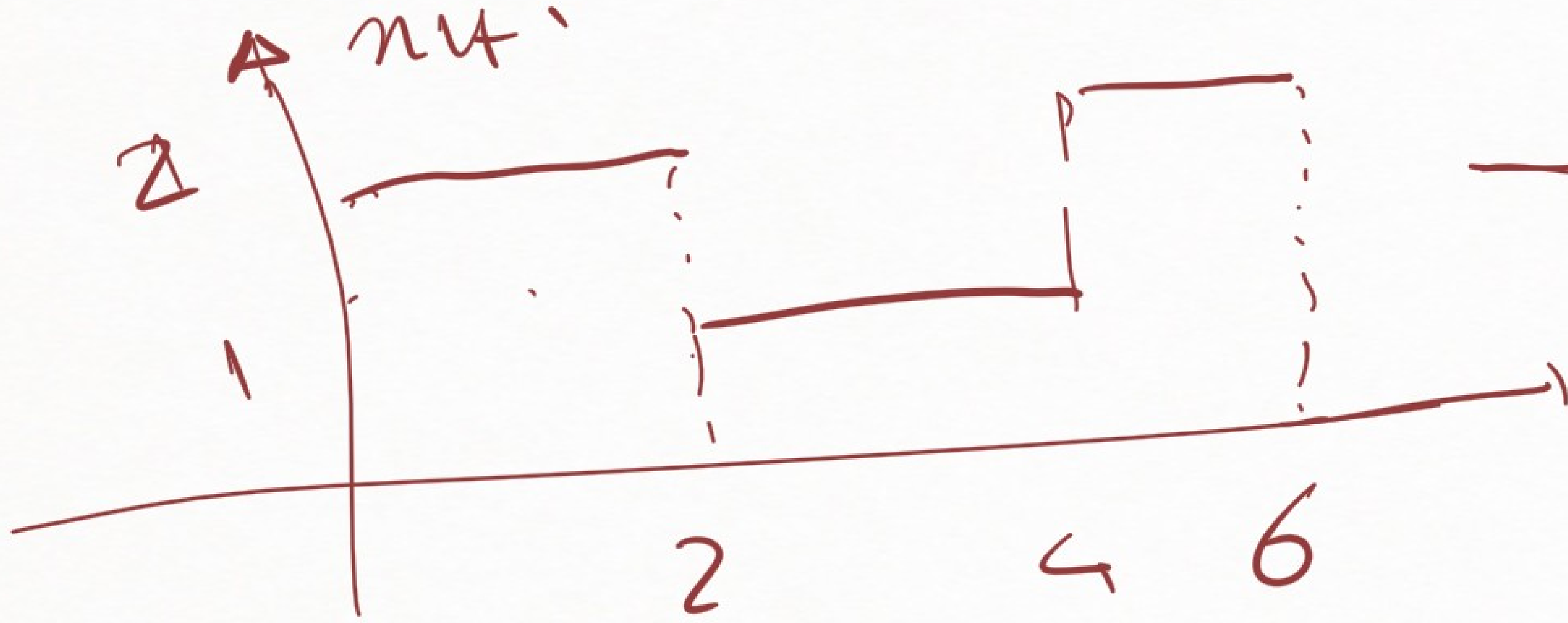
$$\Longrightarrow \begin{cases} Y(j\omega) = H(j\omega) & , \ \omega_i < \omega_c \\ Y(j\omega) = X(j\omega) & ; \ \omega_i > \omega_c \end{cases}$$

تبدیل معکوس

$$\Longrightarrow \begin{cases} y(t) = h(t) = \dfrac{\sin \omega_i t}{\pi t} & ; \ \omega_i < \omega_c \\ y(t) = x(t) = \dfrac{\sin \omega_c t}{\pi t} & ; \ \omega_i > \omega_c \end{cases}$$

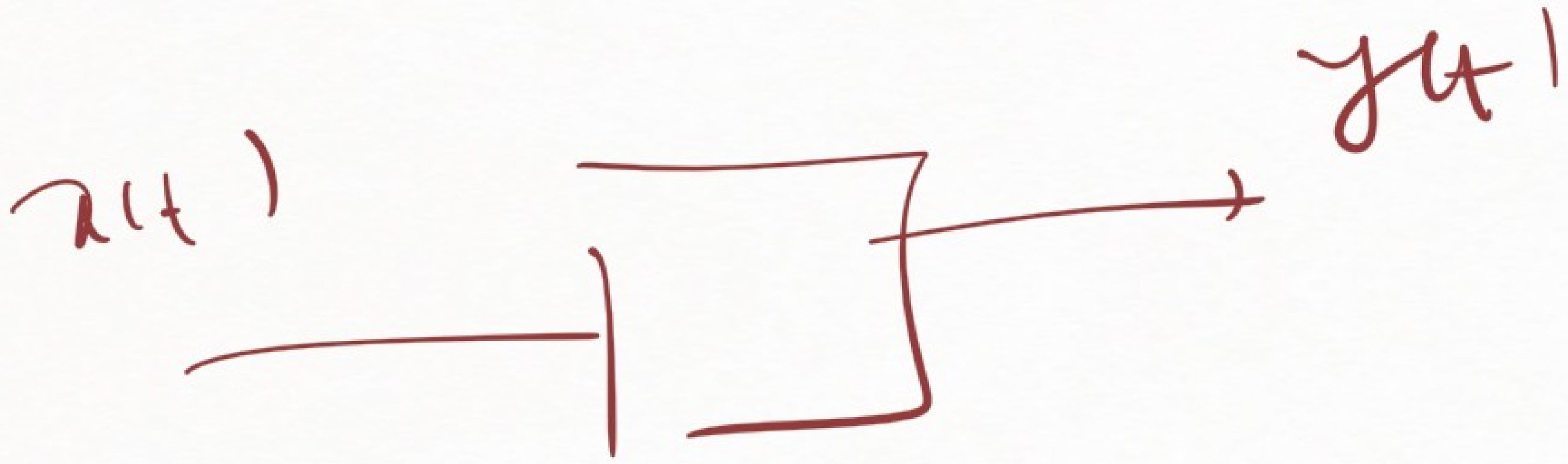
ملاحظه شد که در این شرایط خروجی سیستم در حوزه زمان، هم آنکه کمتر فرکانس از دو تابع $(x(t), h(t))$ نسبت است.

$$X(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+2)^3} \longrightarrow x(t) = ?$$ ①



$\longrightarrow X(j\omega) = ?$ ②

③



$$h(t) = e^{-3t}u(t)$$

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \longrightarrow y(t) = ?$$

$$x(t) = 2e^{-2t}u(t) + 5e^{-3t}u(t) \longrightarrow y(t) = ?$$

$$x(t) = \cos 5t \longrightarrow y(t) = ?$$