باللطیف

پاسخ تمرین سری 2 سیگنال سیستم

#1
بدون حافظه؟
خطی؟
تغییر ناپذیر با زمان؟
علیت؟
پایداری؟

الف) $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\lambda)\, d\lambda$

این سیستم حافظه‌دار است $\longrightarrow$ خروجی سیستم به لحظات گذشته هم وابسته است به دلیل کران انتگرال

بررسی خطی بودن:

additivity (جمع‌پذیری) : $x_1(t) + x_2(t) \xrightarrow{T} y_1(t) + y_2(t)$

scaling (همگنی) : $a x(t) \xrightarrow{T} a y(t)$

$$x(\lambda) \longrightarrow a x(\lambda) \longrightarrow \int_{-\infty}^{2t} a x(\lambda)\, d\lambda = a \int_{-\infty}^{2t} x(\lambda)\, d\lambda$$

$$a y(t) = a \int_{-\infty}^{2t} x(\lambda)\, d\lambda = a x(t)$$

$\Rightarrow$ سیستم خطی است

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{2t} x_1(\lambda)\, d\lambda \\ \int_{-\infty}^{2t} x_2(\lambda)\, d\lambda \end{cases} \longrightarrow \int_{-\infty}^{2t} x_1(\lambda)\, d\lambda + \int_{-\infty}^{2t} x_2(\lambda)\, d\lambda = y_1(t) + y_2(t)$$

بررسی تغییر ناپذیری با زمان: $\forall t_0 : x(t) \xrightarrow{T} y(t) \Rightarrow x(t-t_0) \xrightarrow{T} y(t-t_0)$

$$x(t-t_0) = \int_{-\infty}^{2t} x(\lambda - t_0)\, d\lambda \longrightarrow \lambda - t_0 = \tau \Rightarrow \lambda = \tau + t_0 \ , \ d\lambda = d\tau$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{2t-t_0} x(\tau)\, d\tau$$

$\neq$ پس سیستم تغییرپذیر با زمان است

$$y(t-t_0) = \int_{-\infty}^{2(t-t_0)} x(\lambda)\, d\lambda$$

علیت: سیستم علی نیست چون به دلیل کران انتگرال خروجی سیستم به آینده هم بستگی دارد

پایداری: $\int_{-\infty}^{2t} x(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2} x^2(\lambda) \Big|_{-\infty}^{2t} = \frac{1}{2}\left(x^2(2t) - x^2(-\infty)\right) \longrightarrow$ سیستم ناپایدار است

ب) $y(t) = \begin{cases} 0 & ; \; x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2) & ; \; x(t) \geq 0 \end{cases}$

I) حافظه : حافظه دار است → خروجی سیستم به گذشته بستگی دارد

II) علیت : علی است → خروجی سیستم فقط به همان لحظه و لحظات قبل وابسته است

III) خطی : سیستم خطی است

$\begin{cases} 1) \text{ additivity}: x_1(t) + x_2(t) = x_1(t) + x_1(t-2) + x_2(t) + x_2(t-2) = y_1(t) + y_2(t) \\ 2) \text{ scalling}: a\,x(t) = a\,x(t) + a\,x(t-2) = a\,y(t) \end{cases}$

IV) تغییرناپذیری با زمان : تغییرپذیر با زمان است → چون رفتار سیستم به کلی در $t=0$ عوض شده است

V) پایداری : $x(t) \leq B_x \longrightarrow y(t) = \begin{cases} 0 \leq B_x \\ x(t) + x(t-2) \leq B_x \end{cases}$ سیستم پایدار است

ج) $y[n] = n\,x[n]$

I) حافظه : بدون حافظه است → خروجی در هر لحظه تنها به ورودی در همان لحظه وابسته است

II) علیت : علی است → هر سیستمی که بدون حافظه باشد، قطعاً علی است

III) خطی بودن : خطی است

IV) تغییرناپذیری با زمان : $x[n-n_0] : n\,x[n-n_0] \quad , \quad y[n-n_0] = (n-n_0)\,x[n-n_0]$ سیستم تغییرپذیر با زمان است

V) پایداری : ناپایدار است → if $x[n] = 1 \longrightarrow y[n] = n$

د) $y[n] = Ev\left\{ x[n-1] \right\} = \dfrac{x[n-1] + x[-n+1]}{2} = \dfrac{1}{2}\left(x[n-1] + \underbrace{x[-n+1]}_{\text{تغییر مقیاس داریم}} \right)$

I) حافظه : حافظه دار است → در هر سیستمی که تغییر مقیاس داشته باشیم حافظه دار است

II) علیت : غیرعلی → چون تغییر مقیاس داریم

III) خطی بودن : خطی است

IV) تغییرناپذیری با زمان : $x[n-n_0] : \frac{1}{2}\left(x[n-n_0-1] + x[-n-n_0+1] \right) \neq$ سیستم تغییرپذیر با زمان است

$y[n-n_0] : \frac{1}{2}\left(x[n-n_0-1] + x[-(n-n_0)+1] \right)$

V) پایداری : پایدار است $\longrightarrow x[n-1] + x[-n+1] < B_x \longrightarrow y[n] < B_x$

ه) $y(t) = x(t-2) + x(-\frac{1}{2}t+2)$

I) حافظه : حافظه دارا است $\longrightarrow$ خروجی در هر لحظه وابسته به ورودی در همان لحظه نیست

II) علیت : غیر علی $\longrightarrow$ چون خروجی سیستم به آینده بستگی دارد

III) خطی بودن : خطی است

IV) تغییرناپذیری با زمان : تغییرپذیر با زمان است

V) پایداری : پایدار است

#2

کدام یک از سیستم ها معکوس پذیرند. معکوس آنها را بدست آورید.

الف) $y[n] = n\,x[n] \longrightarrow x[n] = \frac{1}{n} y[n] \longrightarrow$ if $n=0$?? $\longrightarrow$ معکوس پذیر نیست

ب) $y[n] = x[n].x[n-1] \longrightarrow \begin{cases} n=\lambda \\ n-1=\lambda \to n=\lambda+1 \end{cases}$ $\longrightarrow$ به ازای λهای متفاوت n متفاوت است $\longrightarrow$ سیستم معکوس پذیر نیست

ج) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} (\frac{1}{2})^{n-k} x[k] \longrightarrow$ معکوس پذیر است $\longrightarrow x[n] = y[n] - \frac{1}{2} y[n-1]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} (\tfrac{1}{2})^{n} (\tfrac{1}{2})^{-k} x[k]$$

$$= (\tfrac{1}{2})^{n} \sum_{k=-\infty}^{n} (\tfrac{1}{2})^{-k} x[k]$$

$$= (\tfrac{1}{2})^{n} \cdot \left[\cdots + (\tfrac{1}{2})^{-(n-1)} x[n-1] + (\tfrac{1}{2})^{-n} x[n] \right]$$

$$y[n-1] = (\tfrac{1}{2})^{n-1} \sum_{k=-\infty}^{n-1} (\tfrac{1}{2})^{-k} x[k]$$

$$\hookrightarrow (\tfrac{1}{2})^{n} \cdot (\tfrac{1}{2})^{-1} \cdot \left[\cdots + (\tfrac{1}{2})^{-(n-2)} \cdot x[n-2] + (\tfrac{1}{2})^{-(n-1)} x[n-1] + 0 \right]$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2} y[n-1] = (\tfrac{1}{2})^{n} \cdot \left[\cdots + (\tfrac{1}{2})^{-(n-1)} x[n-1] + 0 \right]$$

$$y[n] - \tfrac{1}{2} y[n] = (\tfrac{1}{2})^{n} \times (\tfrac{1}{2})^{-n} x[n]$$

$$\Rightarrow y[n] = x[n] - \tfrac{1}{2} x[n-1]$$

د) $y[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{2}] & ; n: \text{even} \\ 0 & ; n: \text{odd} \end{cases}$

معکوس پذیر است

if $\frac{n}{2} = \lambda \longrightarrow n = 2\lambda \Rightarrow y[2\lambda] = x[\lambda]$

$\Rightarrow \boxed{y[n] = x[2n]}$

ه) $y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} x(2t-1) & ; t \leq 0 \\ \sqrt[3]{x(t)} & ; t > 0 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{معکوس پذیر نیست}}$ if $2t-1 = \lambda \longrightarrow t = \frac{\lambda+1}{2} \leq 0$

$\longrightarrow \boxed{\lambda \leq -1}$

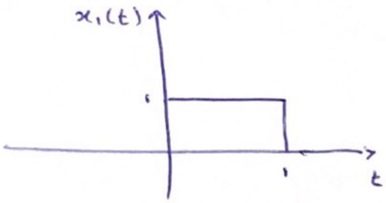
$\Rightarrow y(\frac{\lambda+1}{2}) = \frac{1}{2} x(\lambda) \xrightarrow{\times 2} x(\lambda) = 2y(\frac{\lambda+1}{2})$

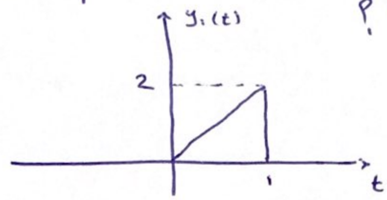
$y(\lambda) = \sqrt[3]{x(\lambda)} \Rightarrow x(\lambda) = y^3(\lambda)$

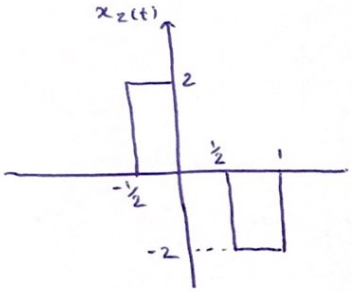
$t > 0 \longrightarrow \lambda > 0$

$\Rightarrow x(\lambda) = \begin{cases} 2y(\frac{\lambda+1}{2}) & ; \lambda \leq -1 \\ y^3(\lambda) & ; \lambda > 0 \end{cases}$ در بازه $(-1,0)$ ضابطه ندارد، پس سیستم وارون پذیر نیست

#3. به کمک خواص سیستم های خطی و تغییر ناپذیر با زمان، اگر بدانیم پاسخ به $x_1(t)$ برابر با $y_1(t)$ است، پاسخ به $x_2(t)$ ، $x_3(t)$ چیست؟

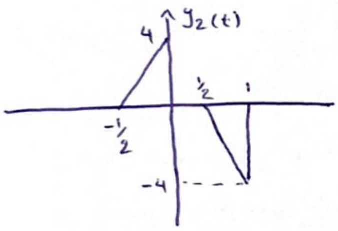


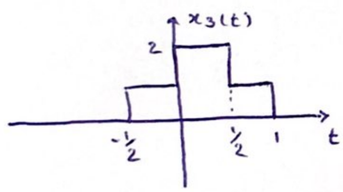




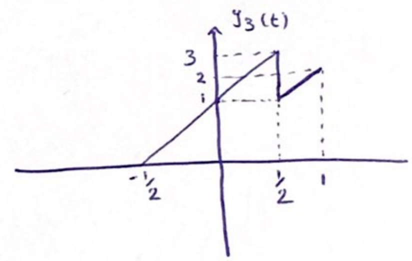
$$x_2(t) = 2x_1(2t+1) - 2x_1(2t-1)$$

چون سیستم خطی و تغییر ناپذیر با زمان است داریم : $y_2(t) = 2y_1(2t+1) - 2y_1(2t-1)$





$\longrightarrow y_3(t) = y_1(t+\frac{1}{2}) + y_1(t)$

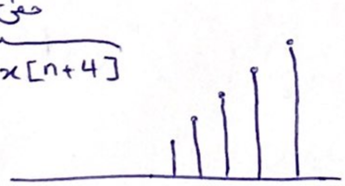


$$x_3(t) = x_1(t+\tfrac{1}{2}) + x_1(t)$$

#4 نشان دهید سیستم زیر افزایشی خطی است:

$$y[n] = \underbrace{n}_{\text{افزایشی}} + \underbrace{x[n] + 2x[n+4]}_{\text{خطی}}$$

$y[n] = n \longrightarrow$



$y[n] = 2x[n+4] + x[n]$ همگن ✓ ، جمع پذیری ✓