# فصل ۳

# تحلیل سیستم‌ها در حوزه فرکانس

**خلاصه**

در این فصل ابتدا به بررسی مشخصه‌های حوزه فرکانس پرداخته و  بر اساس آنها کیفیت عملکرد سیستم را در حوزه فرکانس توصیف می‌کنیم. سپس به روش‌هایی اشاره خواهیم کرد که بتوانیم علاوه‌بر بررسی پایداری سیستم حلقه بسته، میزان آن را نیز مشخص کنیم. به بیانی صریح‌تر، پایداری نسبی سیستم را تعیین نماییم. این روش‌ها عبارتند از: نمودار بود (نمودار لگاریتمی)، نمودار نایکوئیست (نمودار قطبی) و نمودار لگاریتم دامنه برحسب فاز (نمودار نیکولز). در تمام این روش‌ها از تابع تبدیل حلقه باز استفاده خواهیم کرد.

## ۳-۱ مقدمه

پیشتر گفته شد که عملکرد یک سیستم کنترلی از روی مشخصه‌های حوزه زمانی‌اش، پاسخ آن را به طرز واقع گرایانه‌تری در عمل مشخص می‌کند ولی به دلایلی از جمله:

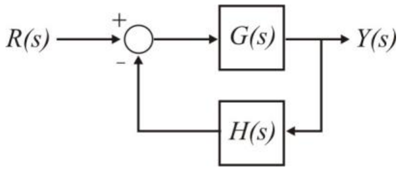
۱- دشوار بودن بیان تحلیلی برای پاسخ زمانی سیستم‌های کنترلی با مرتبه بالا به دلیل عدم وجود روش واحد برای رسیدن به سیستمی با مشخصات مناسب ($t_r$, $M_p$, $t_s$,...).

۲- بیشتر سیگنال‌هایی که باید پردازش شوند یا در اصل سینوسی‌اند و یا می‌توان آن‌ها را با مؤلفه‌های سینوسی نمایش داد.

۳- اهمیت حوزه فرکانس در طرح و تحلیل سیستم‌های مخابراتی.

بایستی به تجزیه و تحلیل سیستم‌ها در حوزه فرکانس نیز بپردازیم. نقطه شروع این تجزیه و تحلیل، تابع انتقال می‌باشد و کلید بحث، بررسی سیستم‌ها در حالت دائمی سینوسی است. این بدان معنی است که از رابطه $s = j\omega$ استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب تابع تبدیل دارای مشخصه فاز و اندازه خواهد بود که به آن نمودار قطبی می‌گوییم.

به عنوان مثال، سیستم حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید.




تابع تبدیل حلقه بسته سیستم عبارتست از:

$$M(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{۱+G(s)H(s)}$$

در حالت دائمی سینوسی داریم $s=j\omega$. لذا:

$$M(j\omega)=\frac{G(j\omega)}{۱+G(j\omega)H(j\omega)}$$

$$M(j\omega)=|M(j\omega)|\angle M(j\omega)$$

$$\text{مشخصه دامنه}\quad |M(j\omega)|=\frac{|G(j\omega)|}{|۱+G(j\omega)H(j\omega)|}\qquad (*)$$

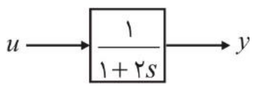
$$\text{مشخصه فاز}\quad \angle M(j\omega)=\angle G(j\omega)-\angle ۱+G(j\omega)H(j\omega)$$

به $|M(j\omega)|$ و $\angle M(j\omega)$ در فرکانس‌های مختلف، پاسخ فرکانسی می‌گوییم. به راحتی نتیجه می‌شود که $|M(j\omega)|$ و $\angle M(j\omega)$ در مشخصات فیلتر کردن سیگنال ورودی مؤثرند.

❋ **نکته:** ***یادآوری می‌کنیم که اگر ورودی یک سیستم LTI، سینوسی با فرکانس معین $\omega_\circ$ باشد، خروجی نیز سینوسی با همان فرکانس $\omega_\circ$ خواهد بود.***

$$if\quad r(t)=A\sin(\omega_\circ t+\theta)\quad\rightarrow\quad y(t)=A\,|M(j\omega_\circ)|\sin(\omega_\circ t+\theta+\angle M(j\omega_\circ))$$

**مثال:** برای سیستم شکل زیر ماکزیمم دامنه خروجی سیستم $y(t)$ را در حالت ماندگار *(Steady-state)* در برابر ورودی $u(t)=\sin\sqrt{۲}t+۲\cos\sqrt{۲}t$ بدست آورید. (مکاترونیک ۸۴)




۱) $\frac{۱}{۲}$　　　۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$　　　۴) صفر (چون سیستم پایدار است و قطب سمت چپ صفحه دارد.)

✍ **حل:** گزینه «۳»

$$M(s)=\frac{۱}{۱+۲s}\quad\Rightarrow\quad M(j\omega)=\frac{۱}{۱+۲j\omega}\quad\Rightarrow\quad |M(j\omega)|=\frac{۱}{\sqrt{۱+۴\omega^{۲}}}$$

$$u_{۱}(t)=\sin\sqrt{۲}t\quad\Rightarrow\quad A_{m_۱}=\frac{۱}{\sqrt{۱+۴\omega^{۲}}}\Bigg|_{\omega=\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۹}}=\frac{۱}{۳}$$

$$u_{۲}(t)=۲\cos t\sqrt{۲۲}\quad\Rightarrow\quad A_{m_۲}=\frac{۲}{\sqrt{۱+۴\omega^{۲}}}\Bigg|_{\omega=\sqrt{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۹}}=\frac{۲}{۳}$$

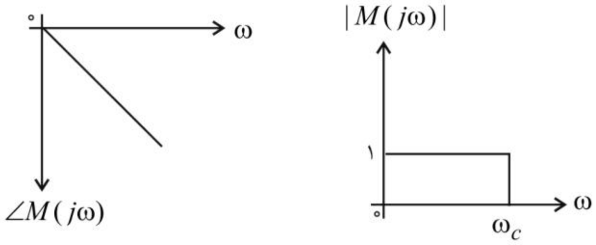
$$\Rightarrow\quad A_m=\sqrt{A_{m_۱}^{۲}+A_{m_۲}^{۲}}=\sqrt{(\frac{۱}{۳})^{۲}+(\frac{۲}{۳})^{۲}}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

حال به اهمیت مشخصه دامنه و فاز می‌پردازیم. اگر بخواهیم خروجی $Y(j\omega)$ در کلیه فرکانس‌ها با ورودی سیستم $R(j\omega)$ یکسان باشد، باید $|M(j\omega)|$ در همه فرکانس‌ها مساوی یک باشد ولی رابطه (*) نشان می‌دهد که $|M(j\omega)|$ تنها در صورتی می‌تواند مساوی یک باشد که $|G(j\omega)|$ (مقدار تابع تبدیل حلقه باز سیستم) بی‌نهایت بزرگ بوده و $|H(j\omega)|$ متناهی و مخالف صفر باشد. شکی نیست که دستیابی به اندازه بی‌نهایت برای $G(j\omega)$ از یک سو عملاً غیرممکن است و از سویی دیگر، مطلوب نیز نمی‌باشد. زیرا:

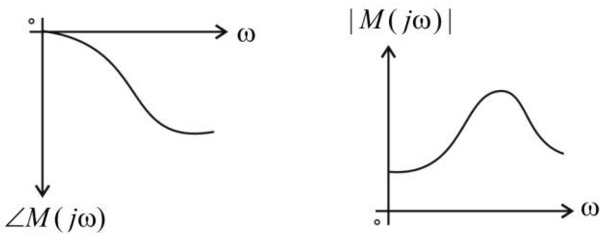
ـ اغلب سیستم‌های کنترلی وقتی ضریب تقویت حلقه آن‌ها خیلی بزرگ شود، ناپایدار می‌شوند.

ـ هر سیستم کنترلی در معرض نویز می‌باشد. لذا علاوه‌بر پاسخ به سیگنال ورودی، باید قادر به حذف (تضعیف) نویز و سیگنال‌های ناخواسته نیز باشد.

بنابراین، پاسخ فرکانسی یک سیستم کنترلی باید مشخصه‌ای پائین‌گذر و حتی گاهی میان‌گذر داشته باشد. علاوه‌براین، مشخصه فاز نیز حائز اهمیت است. وضعیت ایده‌آل این است که در محدوده فرکانس‌های موردنظر، فاز سیستم تابعی خطی از فرکانس باشد. شکل ۳ـ۱، مشخصه‌های فاز و بهره یک فیلتر ایده‌آل را نشان می‌دهد که به طور فیزیکی قابل تحقق نمی‌باشند. شکل ۳ـ۲، منحنی‌های بهره و فاز یک سیستم کنترل نوعی را در عمل نشان می‌دهد.




**شکل (۳ ـ ۱): مشخصه‌های بهره و فاز یک فیلتر ایده‌آل**




**شکل (۳ ـ ۲): مشخصه‌های بهره و فاز برای یک سیستم حلقه بسته نوعی**

توجه شود واقعیت این است که دسته وسیعی از سیستم‌های کنترلی دارای مشخصه‌های فیلتر پائین‌گذر هستند و در نتیجه با افزایش فرکانس، بهره کاهش می‌یابد.

## ۳-۲ مشخصه‌های حوزه فرکانس

در طرح یک سیستم کنترلی، تنها پایدار بودن آن کافی نیست. علاوه‌بر پایداری مطلق، به خصوصیات دیگری نیازمندیم که کیفیت سیستم را در حوزه فرکانس توصیف می‌کنند که عبارتند از: اوج تشدید ($M_p$)، فرکانس تشدید ($\omega_p$)، پهنای باند ($B\omega$) و سرعت قطع.

### ۳-۲-۱ اوج تشدید ($M_p$)

بیشترین مقدار $|M(j\omega)|$ را اوج تشدید می‌گویند. به طور کلی مقدار $M_p$ نشانه‌ای از پایداری نسبی یک سیستم کنترلی حلقه‌بسته است.

❋ **نکته:** ***۱- $M_p$ بزرگ، متناظر با بزرگ بودن حداکثر فراجهش پاسخ پله در حوزه زمان است.***

***۲- مقدار قابل قبول $M_p$ در اکثر طراحی‌ها بین ۱/۱ تا ۱/۵ می‌باشد.***

### ۳-۲-۲ فرکانس تشدید ($\omega_p$)

به فرکانسی که در آن اوج تشدید رخ می‌دهد، فرکانس تشدید می‌گویند که با $\omega_p$ نیز نمایش می‌دهند.

### ۳-۲-۳ پهنای باند ($B\omega$)

بنا به تعریف، فرکانسی است که در آن مقدار $|M(j\omega)|$ به ۷۰/۷ درصد مقدارش در فرکانس صفر برسد. یا به عبارت دیگر به ۳ $dB$ زیر مقدارش در فرکانس صفر برسد. به طور کلی پهنای باند یک سیستم کنترلی معیاری برای مشخصه‌های پاسخ گذرای آن است، به طوری که

ـ پهنای باند بزرگ متناظر با زمان خیز کمتر می‌باشد.

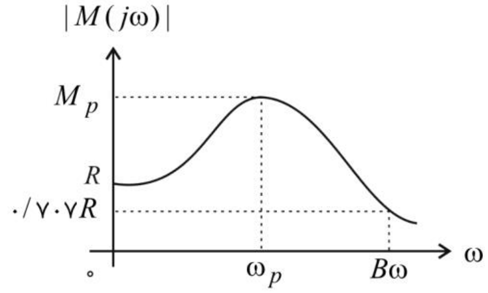
ـ پهنای باند بزرگ متناظر با حضور بیشتر نویز می‌باشد.

### ۳-۲-٤ سرعت قطع

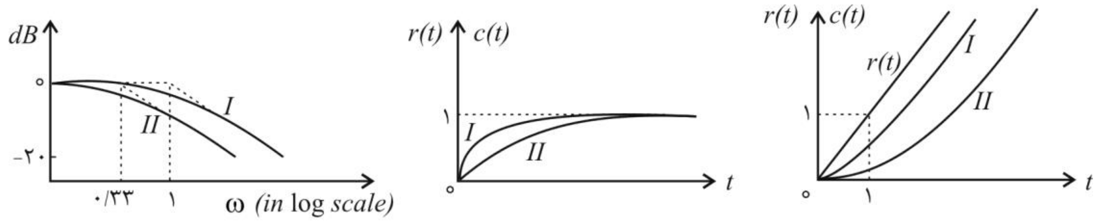
آهنگ قطع برابر است با شیب فرکانسی که در آن نسبت اندازه بیش از فرکانس قطع ($\omega_c$) کاهش یابد. علت تعریف آهنگ قطع این است که اغلب پهنای باند به تنهایی برای نشان دادن مشخصات سیستم میان سیگنال و نویز کافی نیست، به طوری که لازم است سرعت قطع پاسخ فرکانسی نیز در فرکانس‌های بالا مشخص شود.

❋ **نکته**: ***۱- آهنگ قطع، توانایی سیستم در تشخیص سیگنال از نویز را نشان می‌دهد.***

***۲- یک مشخصه قطع تند می‌تواند با یک اوج تشدید بزرگ همراه باشد که مربوط به سیستمی با حاشیه پایداری کم است.***



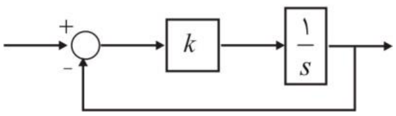

برای درک بهتر پهنای باند با سرعت پاسخ یک سیستم کنترلی، در زیر مشخصه اندازه دو سیستم به همراه پاسخ زمانی آن‌ها به ورودی پله واحد و شیب واحد نشان داده شده است.




**شکل (۳ ـ ۳): مقایسه مشخصه عملکردی دو سیستم کنترل نوعی**

مشاهده می‌شود که پهنای باند سیستم $I$، تقریباً سه برابر پهنای سیستم $II$ است و لذا سرعت پاسخ زمانی سیستم $I$ از سیستم $II$ بیشتر است. این امر چه در پاسخ به ورودی پله‌ای واحد و چه در پاسخ به ورودی شیب واحد به وضوح مشاهده می‌شود.

**مثال**: در سیستم مدار بسته زیر، پهنای باند سیستم حلقه بسته $B\omega$ کدام است؟ (هسته‌ای ۷۴)




۱) $\infty$ ۲) $k$

۳) $\frac{1}{k}$ ۴) ۱

✍ **حل**: گزینه «۲»

$$M(s)=\frac{\frac{k}{s}}{1+\frac{k}{s}}=\frac{k}{s+k}\quad\Rightarrow\quad |M(0)|=1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{k}{\sqrt{\omega^2+k^2}}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{2}=\frac{k^2}{\omega^2+k^2}\quad\Rightarrow\quad\omega^2=k^2\quad\Rightarrow\quad B\omega=k$$

علاوه‌بر مشخصه‌های فوق، دو مشخصه مهم دیگر در حوزه فرکانس وجود دارد که به واسطه آن‌ها پایداری نسبی و یا ناپایداری نسبی سیستم‌های کنترل را تشخیص می‌دهیم که عبارتند از حد بهره و حد فاز.

### ۳-۲-۵ حد بهره (Gain Margin)

معیاری است از پایداری نسبی و بنا به تعریف مقدار بهره‌ای است که می‌توان به سیستم اضافه کرد تا همچنان پایدار بماند و از معکوس اندازه تابع تبدیل حلقه باز در فرکانس گذر فاز محاسبه می‌شود.

$$GM = \frac{1}{|GH(\omega_\pi)|}$$

که در آن $\omega_\pi$ فرکانس گذر فاز است و به صورت روبرو تعیین می‌شود.

$$\angle GH(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_\pi} = -180$$

همان‌طور که از نام حاشیه بهره پیداست، تنها از پایداری یک سیستم حلقه بسته نسبت به بهره حلقه اطلاعاتی را در اختیار قرار می‌دهد و قاعدتاً سیستمی که دارای حاشیه بهره بزرگ‌تری باشد، از پایداری نسبی بیشتری برخوردار خواهد بود. متأسفانه با تغییر سایر پارامترهای سیستم به جز بهره، حاشیه بهره نمی‌تواند به تنهایی ملاک تعیین پایداری نسبی سیستم قرار گیرد. لذا به تعریف معیار دیگری می‌پردازیم.

### ۳-۲-۶ حد فاز (Phase Margin)

معیاری است از پایداری نسبی و بنا به تعریف مقدار فازی است که می‌توان به سیستم اضافه کرد تا همچنان پایدار بماند و از رابطه روبرو قابل محاسبه است.

$$PM = 180 + \angle GH(j\omega_1)$$

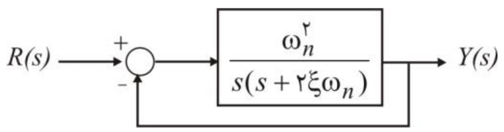
که در آن $\omega_1$ فرکانس گذر بهره نامیده می‌شود و بنا به تعریف فرکانسی است که در آن اندازه تابع تبدیل حلقه باز برابر یک گردد.

$$|GH(j\omega)|_{\omega=\omega_1} = 1$$

در مورد حد بهره و حد فاز به تفصیل صحبت خواهیم کرد. به دلیل اهمیت سیستم‌های مرتبه دوم در حوزه زمان، ضروری است که به بررسی مشخصه‌های حوزه فرکانس در مورد این سیستم‌ها بپردازیم تا از رابطه بین مشخصه‌های حوزه زمان و حوزه فرکانس آگاه شویم.

## ۳-۳ بررسی سیستم‌های مرتبه دو در حوزه فرکانس

سیستم کنترلی زیر را در نظر بگیرید. تابع تبدیل آن عبارتست از:




$$M(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

در حالت دائمی سینوسی داریم:

$$M(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + j2(\frac{\omega}{\omega_n})\xi - (\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

با تعریف $u = \frac{\omega}{\omega_n}$ به عنوان فرکانس نرمالیزه، معادله اخیر به صورت زیر ساده می‌شود.

$$M(ju) = \frac{1}{1 + j2u\xi - u^2} \quad \Rightarrow \quad |M(ju)| = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2\xi u)^2}} \qquad (1)$$

$$\angle M(ju) = -\tan^{-1}\frac{2\xi u}{1-u^2}$$

با مشتق‌گیری از $|M(ju)|$ نسبت به $u$، فرکانس تشدید $\omega_p$ بدست می‌آید.

$$\frac{d|M(u)|}{du} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_p = 0 \\ u_p = \sqrt{1-2\xi^2} \qquad \xi \le \frac{\sqrt{2}}{2} = 0/707 \end{cases}$$

این بدان معنی است که برای همه مقادیر $\xi$ بزرگ‌تر از ۰/۷۰۷، ماکزیمم مطلق در $u_p = 0$ است. لذا فرکانس تشدید برابر است با:

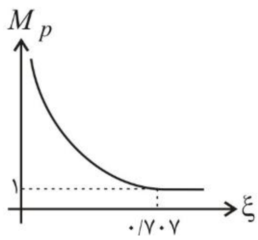
$$u=\frac{\omega}{\omega_n} \quad \Rightarrow \quad \omega_p=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \qquad\qquad \xi \le \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

از (۱) و (۲) ، اوج تشدید $M_p$ بدست می‌آید.

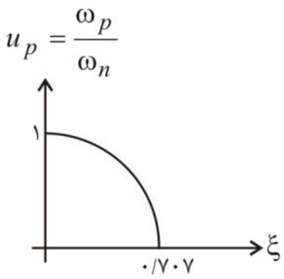
$$M_p=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \qquad\qquad \xi \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

روابط اخیر نشان می‌دهند که:

۱- برای همه مقادیر $\xi$ بزرگ‌تر از $\frac{\sqrt{2}}{2}$، فرکانس تشدید $\omega_p=0$ و اوج تشدید $M_p=1$ خواهد بود.




شکل (۳ ـ ۴) : اوج تشدید برحسب نسبت میرایی

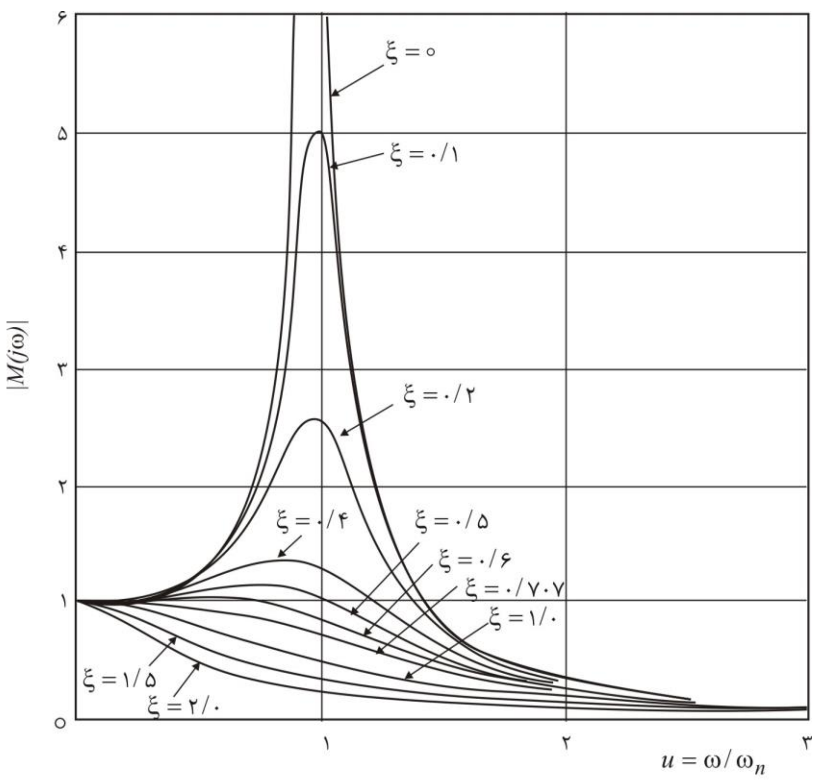



شکل (۳ ـ ۵): فرکانس نرمالیزه برحسب نسبت میرایی

۲- $M_p$ منحصراً تابعی از $\xi$ می‌باشد. بنابراین می‌توان با محاسبه $\xi$ از روی مشخصه $M_p$، مقدار ماکزیمم فراجهش ($o.v$) در حوزه زمان را محاسبه کرد.

$$M_p=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \qquad\qquad o.v=e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

بنابراین می‌توان انتظار داشت که نحوه تغییرات $M_p$ برحسب $\xi$ در حوزه فرکانس متناسب با نحوه تغییرات $o.v$ برحسب $\xi$ در حوزه زمان باشد. شکل ۳-۶، نحوه تغییرات $|M(j\omega)|$ برحسب $\xi$ را در حوزه فرکانس نشان می‌دهد.

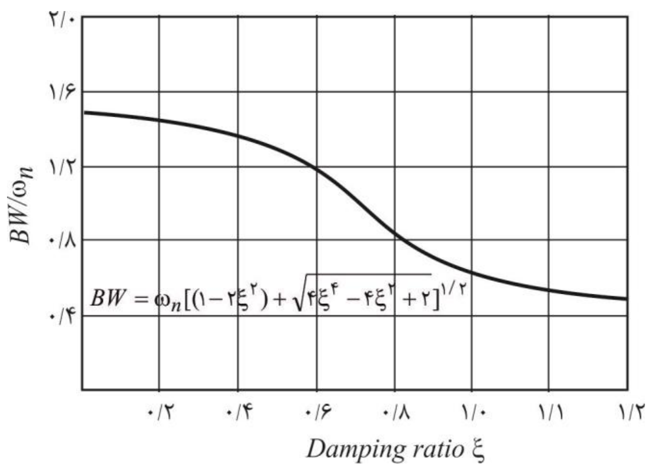



شکل (۳ ـ ۶) : نحوه تغییرات $|M(j\omega)|$ برحسب $\xi$

و اما محاسبه پهنای باند. بنا به تعریف داریم:

$$|M(u)| = ۰/۷۰۷ \quad \Rightarrow \quad Bw = \omega_n \sqrt{(۱-۲\xi^۲)+\sqrt{۴\xi^۴-۴\xi^۲+۲}}$$

شکل ۳-۷، نحوه تغییرات پهنای باند برحسب میرایی سیستم را نشان می‌دهد.




**شکل (۳-۷): نحوه تغییرات پهنای باند برحسب** $\xi$

به راحتی می‌توان دریافت که هرچه $\xi$ کمتر باشد، پهنای باند سیستم بیشتر است.

بنابراین ارتباط میان مشخصه‌های حوزه زمان و مشخصه‌های حوزه فرکانس برای سیستم‌های مرتبه دو را به صورت زیر می‌توان جمع‌بندی کرد.

۱- حداکثر فراجهش $(o.v)$ و اوج تشدید $(M_p)$ فقط به نسبت میرایی $\xi$ بستگی دارند، به طوری که کاهش $\xi$، افزایش $o.v$ و $M_p$ را به دنبال خواهد داشت. به عبارتی دیگر، اوج تشدید بزرگ در حوزه فرکانس متناظر با حداکثر فراجهش بزرگ در حوزه زمان است.

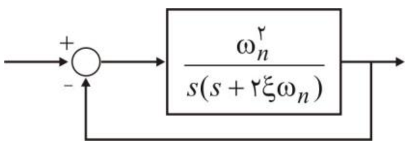
۲- پهنای باند بزرگ در حوزه فرکانس متناظر با زمان خیز کوچک در حوزه زمان است. به عبارتی دیگر، هرچه پهنای باند بزرگ‌تر باشد، سرعت پاسخ سیستم در حوزه زمان سریع‌تر خواهد بود.

۳- از مقایسه فرکانس تشدید در حوزه فرکانس $\omega_p$ با فرکانس میرای طبیعی $\omega_d$ در حوزه زمان می‌توان نتیجه گرفت که در سیستم‌های با نسبت میرایی کم این دو کمیت تقریباً با یکدیگر معادل هستند.

$$\begin{matrix} \omega_d = \omega_n\sqrt{۱-\xi^۲} \\ \omega_p = \omega_n\sqrt{۱-۲\xi^۲} \end{matrix} \xrightarrow{\text{کوچک } \xi} \omega_d \approx \omega_p$$

۴- حد فاز $P.M$ و نسبت میرایی $\xi$ با یکدیگر نسبت مستقیم دارند. به عبارتی دیگر، هرچه حد فاز در حوزه فرکانس بزرگ‌تر باشد، ماکزیمم فراجهش به ورودی پله در حوزه زمان کمتر خواهد بود.

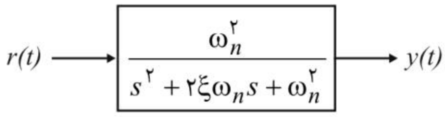
در سیستم کنترلی از مرتبه دوم نوعی داریم:

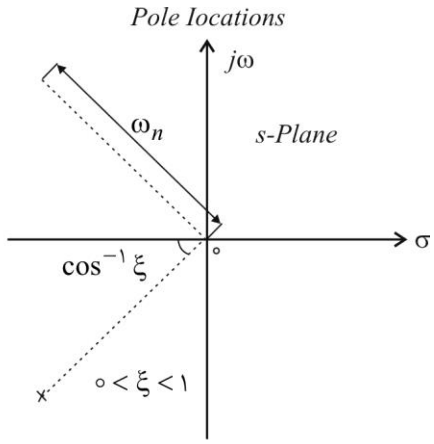



$$\text{حدفاز} = P.M = \tan^{-۱}\frac{۲\xi}{\sqrt{-۲\xi^۲+\sqrt{۱+۴\xi^۴}}}$$

رابطه تقریبی به صورت $PM = ۱۰۰\xi$ می‌باشد. بنابراین به عنوان مثال، حاشیه فاز ۵۰ درجه معادل با نسبت میرایی ۰/۵ می‌باشد.

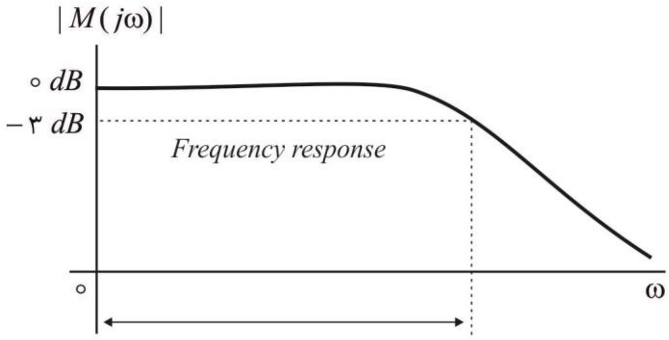
شکل زیر ارتباط بین موقعیت قطب‌ها، پاسخ پله واحد و دامنه پاسخ فرکانسی را برای یک سیستم مرتبه دوم نوعی نشان می‌دهد.




**۱- افزایش $\omega_n$ سبب دوری قطب‌ها از مبدأ می‌شود.**

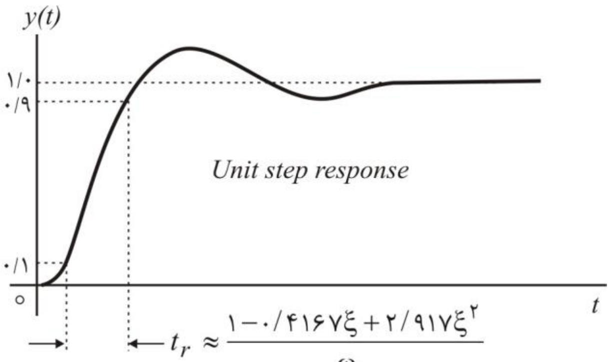
**۲- افزایش $\xi$ سبب کاهش زاویه با محور حقیقی منفی می‌شود.**




$$BW = \omega_n[(۱-۲\xi^۲)+\sqrt{۴\xi^۴-۴\xi^۲+۲}]^{۱/۲}$$

**۱- با افزایش $\omega_n$، پهنای باند افزایش می‌یابد.**

**۲- با افزایش $\xi$، پهنای باند کاهش می‌یابد.**




$$t_r \approx \frac{۱-۰/۴۱۶۷\xi+۲/۹۱۷\xi^۲}{\omega_n}$$

**۱- با افزایش $\omega_n$، زمان خیز کوچک شده و سرعت پاسخ سیستم سریع‌تر می‌شود.**

**۲- با افزایش $\xi$، $t_r$ بزرگ‌تر شده و سرعت پاسخ سیستم کندتر می‌شود.**

**جمع‌بندی**

۱- پهنای باند و زمان خیز نسبت معکوس با یکدیگر دارند.

۲- افزایش $\omega_n$، افزایش پهنای باند و کاهش زمان خیز را به دنبال دارد.

۳- افزایش $\xi$، کاهش پهنای باند و افزایش زمان خیز را به دنبال دارد.

## ۳-٤ آثار اضافه کردن صفر و قطب سمت چپ به تابع تبدیل حلقه باز

اگرچه در فصل قبل به اثرات افزودن صفر و قطب سمت چپ به تابع تبدیل حلقه باز با استفاده از مکان هندسی ریشه‌ها اشاره کرده‌ایم، این بار از دید مشخصه‌های حوزه فرکانس آنها را بررسی می‌کنیم.

**۱- افزودن صفر**: به طور کلی اضافه کردن صفر سمت چپ به تابع تبدیل حلقه باز سبب افزایش پهنای باند سیستم حلقه بسته می‌شود. بنابراین سرعت سیستم افزایش (زمان خیز کاهش) می‌یابد.

**۲- افزودن قطب**: به طور کلی اضافه کردن قطب سمت چپ به تابع تبدیل حلقه باز سبب کاهش پهنای باند سیستم حلقه بسته می‌شود. توجه کنید که:

۱- کاهش یا افزایش پهنای باند مستقیماً با کاهش یا افزایش اثرات نویز در سیستم مرتبط است.

۲- آثار دیگر افزودن صفر و قطب به تابع تبدیل حلقه باز به ترتیب عبارتند از بهبود پایداری و تخریب پایداری سیستم حلقه بسته. این نتایج در فصل قبل از روش مکان هندسی ریشه‌ها بدست آمده است.

## ۳-۵ ارتباط میان مشخصه‌های حوزه زمان و مشخصه‌های حوزه فرکانس برای سیستم‌های مرتبه بالا

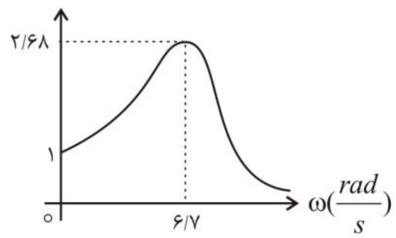
به راحتی می‌توان همبستگی میان پاسخ پله و پاسخ فرکانسی را برای سیستم‌های مرتبه بالا نیز بدست آورد. چنانچه بتوان سیستم مرتبه بالا را با یک قطب مزدوج غالب تقریب زد، روابط زیر بین پاسخ گذرای پله و پاسخ فرکانسی برقرار است.

۱- مقدار $M_p$ پایداری نسبی را نشان می‌دهد. عملکرد رضایت بخش وقتی است که $۰ < M_p < ۱/۴$ باشد که با نسبت میرایی $۰/۴ < \xi < ۰/۷$ متناظر است.

۲- مقدار فرکانس تشدید $\omega_p$، سرعت پاسخ گذرای سیستم را نشان می‌دهد، به طوری که هرچه $\omega_p$ بزرگ‌تر باشد، پاسخ زمانی سیستم سریع‌تر است. به عبارت دیگر، با زمان خیز نسبت عکس دارد. $\omega_p \propto \frac{۱}{t_r}$

۳- در سیستم‌هایی با نسبت میرایی کم، فرکانس تشدید $\omega_p$ و فرکانس میرای طبیعی $\omega_d$ پاسخ پله بسیار به یکدیگر نزدیک هستند.

**مثال**: پاسخ فرکانسی حلقه بسته $|M(j\omega)|$ برحسب فرکانس برای یک سیستم مرتبه دوم نوعی به شکل زیر است. ضمن بدست آوردن تابع تبدیل حلقه بسته، زمان خیز، زمان استقرار و ماکزیمم فراجهش را برای ورودی پله واحد بدست آورید. (مؤلف)




✍ **حل**:

از نمودار پاسخ فرکانسی داریم:

$$M_p = ۲/۶۸ = \frac{۱}{۲\xi\sqrt{۱-\xi^۲}} \quad \Rightarrow \quad \xi = ۰/۱۹$$

توجه کنید که $\xi = ۰/۹۶۸$ در نظر گرفته نمی‌شود، زیرا بزرگ‌تر از ۰/۷۰۷ است.

$$\omega_p = ۶/۷ = \omega_n\sqrt{۱-۲\xi^۲} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = ۶/۸۲ \, \frac{rad}{s}$$

بنابراین تابع تبدیل حلقه بسته سیستم را می‌توان بدست آورد.

$$M(s) = \frac{\omega_n^۲}{s^۲ + ۲\xi\omega_n s + \omega_n^۲} \approx \frac{۴۶/۵}{s^۲ + ۲/۶s + ۴۶/۵}$$

$$t_s = \frac{۴}{\xi\omega_n} = \frac{۴}{۰/۱۹ \times ۶/۸۲} \approx ۳/۱$$ با معیار ۲٪

$$o.v = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{۱-\xi^۲}}} = ۰/۵۴ \quad , \quad t_r = \frac{\pi-\theta}{\omega_n\sqrt{۱-\xi^۲}} = \frac{\pi-\cos^{-۱}\xi}{\omega_n\sqrt{۱-\xi^۲}} = ۰/۲۶$$

## ۳-٦ معیار پایداری نایکوئیست

### ۳-٦-۱ مقدمه

معیار پایداری نایکوئیست، روشی مؤثر است که مبتنی بر پاسخ فرکانسی تابع تبدیل حلقه باز سیستم است. تاکنون برای پایداری سیستم‌های حلقه بسته روش‌های راث و مکان ریشه‌ها را بررسی کردیم. روش راث با بهره‌گیری از معادله مشخصه سیستم حلقه بسته پایداری مطلق را نشان می‌دهد، در حالی که روش مکان ریشه‌ها با بهره‌گیری از تابع تبدیل حلقه باز پایداری نسبی سیستم حلقه بسته را علاوه‌بر پایداری مطلق آن نشان می‌داد. عیب هر دو روش، مشکل بودن بررسی پایداری سیستم‌های تأخیردار به کمک روش‌های مذکور می‌باشد. معیار پایداری نایکوئیست روشی است که نه تنها پایداری مطلق را همانند روش‌های قبلی (راث و مکان ریشه‌ها) تعیین می‌کند، بلکه پایداری نسبی یا ناپایداری نسبی (همانند مکان ریشه‌ها) را نیز تعیین می‌کند. علاوه‌براین، بررسی پایداری سیستم‌های تأخیردار به کمک این روش آسان است.

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته را در حالت کلی در نظر بگیرید.

$$\Delta(s) = ۱ + GH(s) = ۱ + k\,\frac{N(s)}{D(s)} = ۰$$ معادله مشخصه

$$GH(s) = k\,\frac{N(s)}{D(s)}$$ تابع تبدیل حلقه باز

به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که:

۱- قطب‌های معادله مشخصه همان قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز هستند.

۲- قطب‌های تابع تبدیل حلقه بسته همان صفرهای معادله مشخصه می‌باشند.

از این نتایج در آینده استفاده خواهیم کرد.

### ۳-٦-۲ تعاریف اولیه

**مسیر بسته:** مسیر بسته در صفحه مختلط عبارتست از یک منحنی پیوسته که از یک نقطه شروع و به همان نقطه ختم شود.

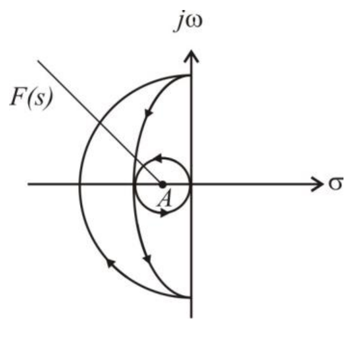
**دور زدن:** نقطه‌ای در صفحه مختلط را یک مسیر بسته دور می‌زند، اگر این نقطه داخل آن مسیر باشد.

**تعداد دور زدن:** یک مسیر بسته در صفحه مختلط نقطه‌ای مثل $A$ را $n$ دور می‌زند، به شرطی که اگر یک خط شعاعی از نقطه $A$ رسم شود، تعداد دفعاتی که این خط مسیر را قطع می‌کند، $n$ بار باشد. تعریف می‌کنیم

۱- $n > ۰$ اگر دور زدن در جهت عقربه‌های ساعت باشد.

۲- $n < ۰$ اگر دور زدن در خلاف جهت عقربه‌های ساعت باشد.

بنابراین توجه داشته باشید که تعداد کل دور زدن $N$ جمع جبری تعداد دور زدن‌ها در جهت و خلاف جهت عقربه‌های ساعت خواهد بود.




به عنوان مثال مسیر بسته زیر را در صفحه مختلط در نظر بگیرید. نقطه $A$ توسط مسیر بسته $F(s)$ یک بار در جهت عقربه‌های ساعت و دو بار در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دور زده می‌شود. بنابراین تعداد کل دور زدن $N = ۱ - ۲ = -۱$ می‌باشد. یادآوری می‌کنیم که علامت منفی به معنای دور زدن در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است.

### ۳-٦-۳ خواص نگاشت‌ها

چون در معیار پایداری نایکوئیست از نگاشت صفحه $s$ به صفحه $GH(s)$ استفاده می‌کنیم، ضروری است که از خواص آن آگاه شویم. خواص نگاشت‌های مورد استفاده در این معیار عبارتند از:

۱- این نگاشت‌ها تک مقداری هستند.

۲- هر مسیر بسته در صفحه $s$ به یک مسیر بسته در صفحه $GH(s)$ نگاشت می‌شود.

۳- مسیرهای صفحه $s$ از نقاط تکین $GH(s)$ نباید عبور کنند.

۴- $GH(s)$ یک نگاشت همدیس است.

۵- نگاشت $GH(s)$ از اصل آرگومان پیروی می‌کند.

### ۳-٦-٤ اصل آرگومان

فرض کنید مسیر بسته $\mu_s$ در صفحه $s$، توسط تابع $F(s)$ به مسیر بسته $\mu_F$ نگاشت شود. این اصل بیان می‌کند که تعداد دور زدن‌های مبدأ، توسط مسیر بسته $\mu_F$ در صفحه $F(s)$ برابر است با تفاضل تعداد صفرها و قطب‌های $F(s)$ که توسط مسیر بسته $\mu_s$ دور زده می‌شود.

$$N_\circ = z_\circ - p_\circ$$

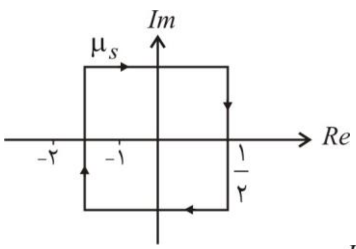
$N_\circ$ تعداد دور زدن‌های مبدأ توسط مسیر بسته $F_s$، $z_\circ$ تعداد صفرهای تابع $F(s)$ درون مسیر بسته و $p_\circ$ تعداد قطب‌های تابع $F(s)$ درون مسیر بسته. توجه کنید:

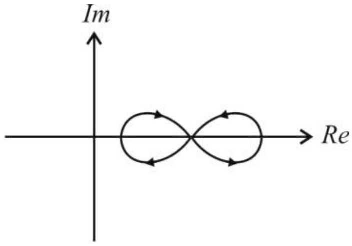
۱- اگر $N_\circ > \circ$ باشد، تعداد دور زدن‌ها در همان جهت مسیر $\mu_s$ خواهد بود.

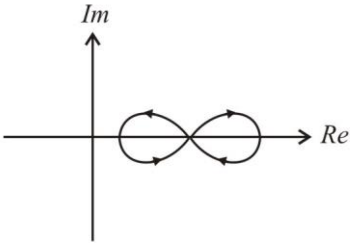
۲- اگر $N_\circ < \circ$ باشد، تعداد دورزدن‌ها در خلاف جهت مسیر $\mu_s$ خواهد بود.

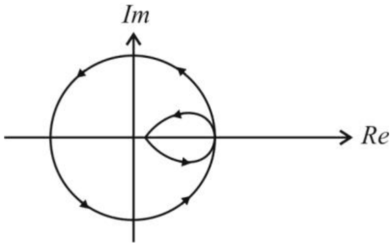
۳- در شمارش صفرها و قطب‌ها مرتبه تکرار آن‌ها در نظر گرفته شود.

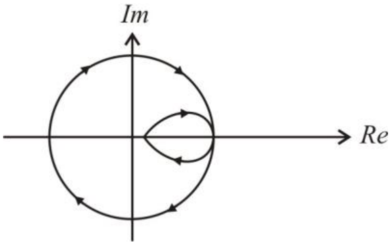
**مثال:** اگر مسیر مستطیلی $\mu_s$ توسط تابع $F(s) = \dfrac{s+۱}{(s+۲)(s+۳)}$ به صفحه $F(s)$ نگاشت داده شود، کدام مسیر $\mu_F$ بدست می‌آید؟ (هسته‌ای ۷۸)




۱)



۲)



۳)



۴)


✍ **حل**: گزینه «۴»

بنا به اصل آرگومان داریم:

$p_{\circ} = \circ \ , \quad z_{\circ} = ۱$

$N_{\circ} = z_{\circ} - p_{\circ} = ۱ - \circ = ۱$

بنابراین گزینه‌ای صحیح خواهد بود که مبدأ را یک بار در جهت $\mu_S$ (عقربه‌های ساعت) دور بزنند.

### ۳-۶-۵ نمودار قطبی (نمودار نایکوئیست)

تابع انتقال $M(s)$ را در حالت دائمی سینوسی $s = j\omega$ به سه فرم می‌توان نمایش داد:

۱- فرم اولر:
$$M(j\omega) = |M(j\omega)|(\cos\angle M(j\omega) + j\sin\angle M(j\omega))$$

۲- فرم قطبی:
$$M(j\omega) = |M(j\omega)|\angle M(j\omega)$$

۳- فرم مختلط:
$$M(j\omega) = \text{Re}\, M(j\omega) + j\, \text{Im}\, M(j\omega)$$

نمودار قطبی (نمودار نایکوئیست) عبارتست از ترسیم $\text{Im}\, M(j\omega)$ برحسب $\text{Re}\ M(j\omega)$ در بخش محدود از صفحه $M(j\omega)$ برای $-\infty < \omega < +\infty$. توجه کنید که مکان هندسی $M(j\omega)$ در مختصات قائم و قطبی یکسان است.

### ۳-۶-۶ خواص نمودارهای قطبی

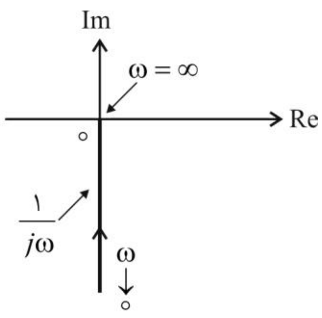
۱- نمودار قطبی برای $M(j\omega) + a$ که در آن $a$ ثابت مختلط دلخواه است، با نمودار $M(j\omega)$ که در آن مبدأ مختصات به نقطه $-a = -\text{Re}a - j\,\text{Im}a$ جابجا شود، یکسان است.

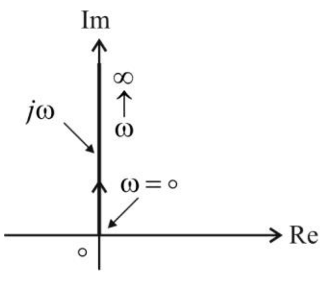
۲- نمودار قطبی تابع تبدیل یک سیستم $LTI$ به فرم مزدوج متقارن است. به عبارتی دیگر، نمودار برای $-\infty \le \omega < \circ$ تصویر آئینه‌ای نمودار برای $\circ \le \omega < \infty$ حول محور افقی است.

مزیت نمودارهای قطبی (نایکوئیست) این است که مشخصات پاسخ فرکانسی سیستم را در تمام گستره فرکانسی روی یک نمودار نشان می‌دهد. ولی عیب آن این است که اثر هر عامل تشکیل دهنده تابع تبدیل حلقه باز را به وضوح نشان نمی‌دهد.

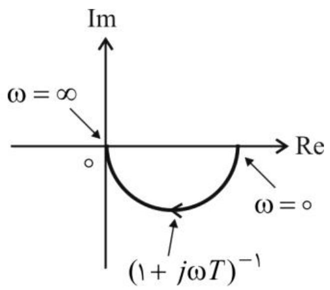
نمودار قطبی برای عوامل مختلف تشکیل دهنده تابع تبدیل به صورت زیر می‌باشد.

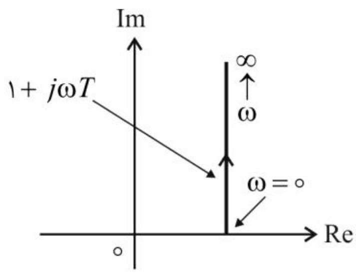
۱- عوامل انتگرال‌گیر و مشتق‌گیر $(j\omega)^{\pm ۱}$



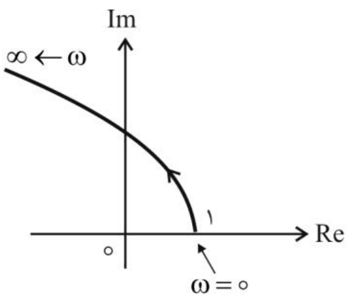




۲- عوامل درجه اول $(۱ + j\omega T)^{\pm ۱}$

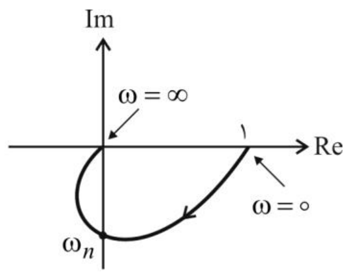


۳- عوامل درجه دوم $[1+2\xi(\frac{j\omega}{\omega_n})+(\frac{j\omega}{\omega_n})^2]^{\pm1}$

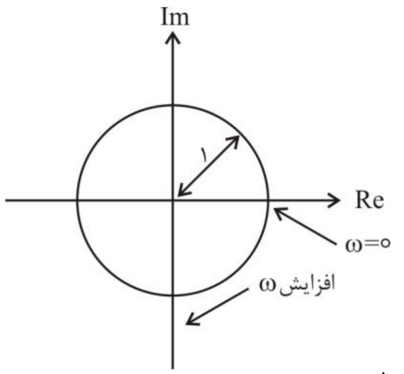



$[1+2\xi(\frac{j\omega}{\omega_n})+(\frac{j\omega}{\omega_n})^2]$

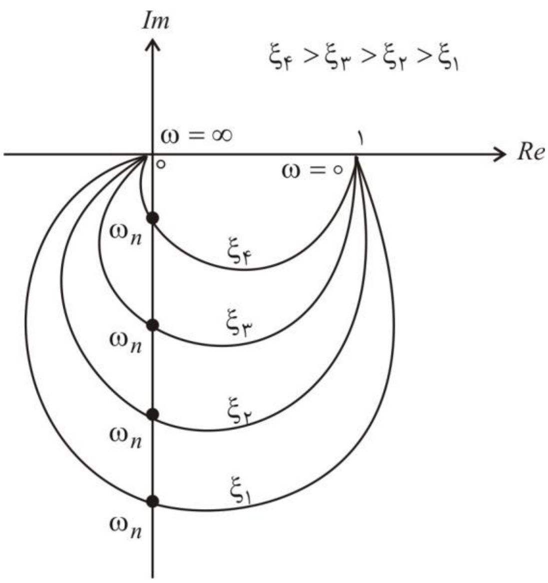



$[1+2\xi(\frac{j\omega}{\omega_n})+(\frac{j\omega}{\omega_n})^2]^{-1}$

۴- تأخیر زمانی $e^{-Ts}$




آنچه در مورد نمودارهای قطبی $\frac{1}{1+2\xi(\frac{j\omega}{\omega_n})+(\frac{j\omega}{\omega_n})^2}$ اهمیت دارد این است که شکل دقیق نمودار قطبی به مقدار نسبت میرایی $\xi$ کاملاً بستگی دارد. این واقعیت در شکل ۳-۸ برای $0<\xi$ نشان داده شده است.




**شکل (۳-۸): نمودار قطبی** $\frac{1}{1+2\xi(j\frac{\omega}{\omega_n})+(j\frac{\omega}{\omega_n})^2}$

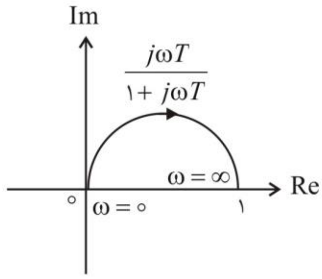
توجه کنید:

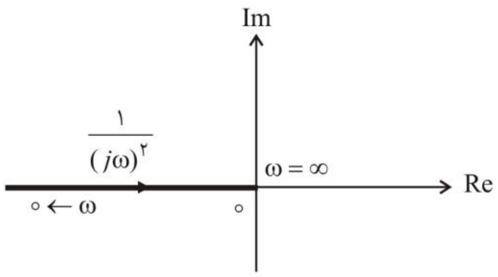
۱- برای حالت زیرمیرا در $\omega=\omega_n$ داریم: $G(j\omega_n)=\frac{۱}{j۲\xi}\quad,\quad \angle G(j\omega_n)=-۹۰^\circ$

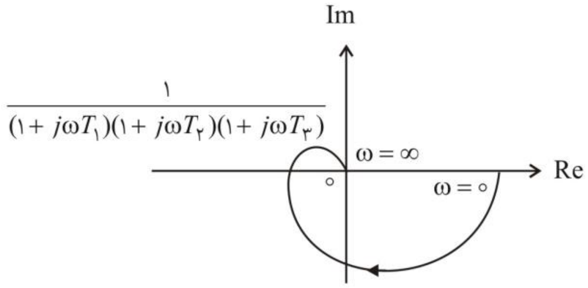
بنابراین فرکانسی که به ازاء آن مکان هندسی $G(j\omega)$ محور موهومی را قطع می‌کند، فرکانس نامیرای طبیعی $\omega_n$ است.

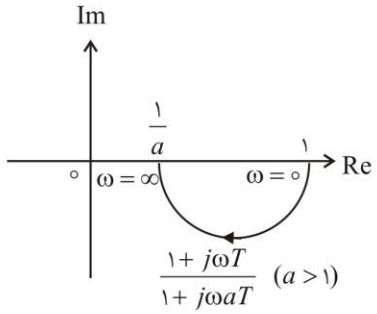
۲- برای حالت فوق میرا، مکان هندسی $G(j\omega)$ به یک نیم دایره نزدیک می‌شود.

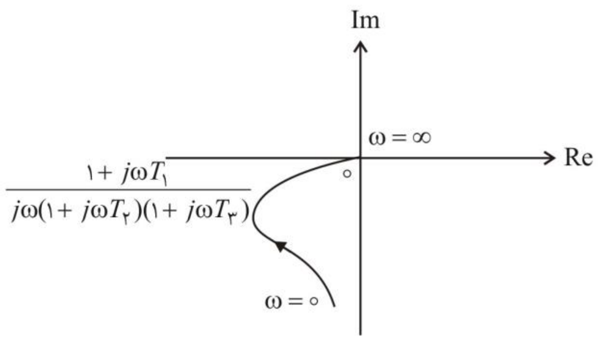
در ادامه به عنوان مثال، تعدادی نمودار قطبی برای توابع تبدیل ساده آورده شده است.

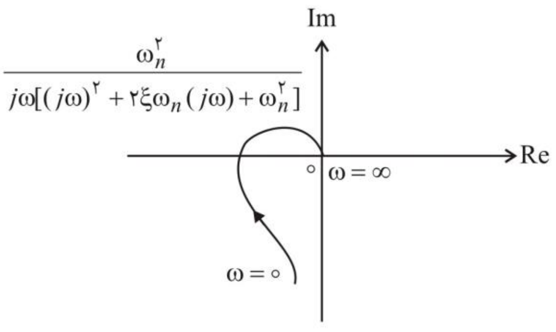


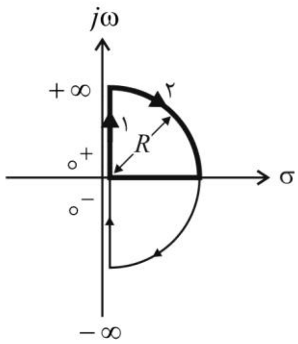




### ۳-۶-۷ مسیر نایکوئیست

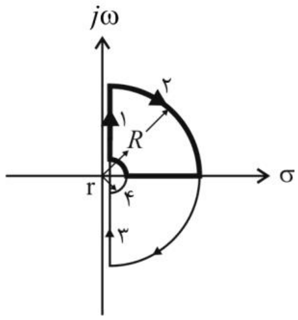
برای یک سیستم پایدار، بایستی ریشه‌های معادله مشخصه $\Delta(s)=۰$ در نیمه چپ صفحه $s$ باشند. به عبارتی دیگر، حضور ریشه‌ها در نیمه راست صفحه $s$ نشانگر ناپایداری سیستم است. این حقیقت به همراه اصل آرگومان مبنای معیار پایداری نایکوئیست است. بر این اساس مسیر نایکوئیست به نحوی ساخته می‌شود که تمام نیمه راست صفحه $s$ را در بر گیرد تا بتوان حضور قطب‌هایی که دارای قسمت حقیقی مثبت‌اند را تشخیص داد. این مسیر شامل محور موهومی از $\omega=-\infty$ تا $\omega=+\infty$ و نیم دایره‌ای به شعاع بی‌نهایت در نیمه راست صفحه $s$ است. بنابراین با توجه به خواص نگاشت‌ها، مسیر نایکوئیست نبایستی از نقاط تکین عبور کند. به منظور عدم عبور مسیر نایکوئیست از نقاط تکین روی محور موهومی از نیم دایره‌های کوچکی استفاده می‌کنیم.

در ادامه چند مسیر نایکوئیست به طور نمونه ذکر گردیده است.




مسیر (۱) : $s = j\omega \qquad \omega: -\infty \to +\infty$

مسیر (۲) : $s = Re^{j\theta} \qquad R \to \infty \qquad \theta: \frac{\pi}{2} \to -\frac{\pi}{2}$




مسیر (۱) : $s = j\omega \qquad \omega: 0^+ \to +\infty$

مسیر (۲) : $s = Re^{j\theta} \qquad R \to \infty \qquad \theta: \frac{\pi}{2} \to -\frac{\pi}{2}$

مسیر (۳) : $s = j\omega \qquad \omega: -\infty \to 0^-$

مسیر (۴) : $s = re^{j\theta} \qquad r \to 0 \qquad \theta: -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$

با درنظر گرفتن خواص نمودارهای قطبی کافیست فقط برای $0 \le \omega < \infty$ نمودار قطبی رسم گردد (که در شکل‌های فوق پررنگ نمایش داده شده است) و سپس از خاصیت تقارن (خاصیت دوم نمودارهای قطبی) برای رسم بقیه نمودار استفاده کنیم.

### ۳-۶-۸ معیار پایداری نایکوئیست

از خاصیت اول نمودارهای قطبی و با در نظر گرفتن معادله مشخصه سیستم حلقه بسته $\Delta(s) = 1 + GH(s) = 0$، برای سهولت در تعیین پایداری سیستم حلقه بسته می‌توان از نقطه $(-1 + j0)$ به جای مبدأ به عنوان نقطه بحرانی استفاده کرد.

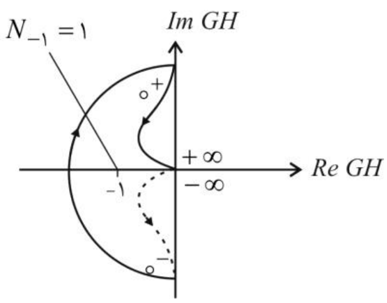
معیار پایداری نایکوئیست بیان می‌کند که:

«سیستم کنترلی حلقه بسته با تابع تبدیل حلقه باز $GH(s)$ پایدار است اگر و تنها اگر به تعداد قطب‌های سمت راست تابع تبدیل حلقه باز، منحنی نایکوئیست نقطه بحرانی $(-1 + j0)$ را $N$ بار در خلاف جهت مسیر نایکوئیست دور بزنند.»

بنابراین اگر جهت مسیر نایکوئیست در جهت عقربه‌های ساعت باشد، به منظور پایداری تعداد دور زدن‌ها بایستی در خلاف جهت عقربه‌های ساعت باشد و بالعکس. به مثال زیر توجه کنید.

**مثال:** نمودار نایکوئیست زیر مربوط به یک سیستم کنترلی است که تبدیل حلقه باز آن دارای یک قطب سمت راست محور موهومی می‌باشد. بنابر معیار نایکوئیست، این سیستم با داشتن دو قطب سمت راست محور موهومی، ناپایدار است. (مؤلف)

$p = 1$
$N_{-1} = 1$
$\to z = 2$




حال کمیت‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

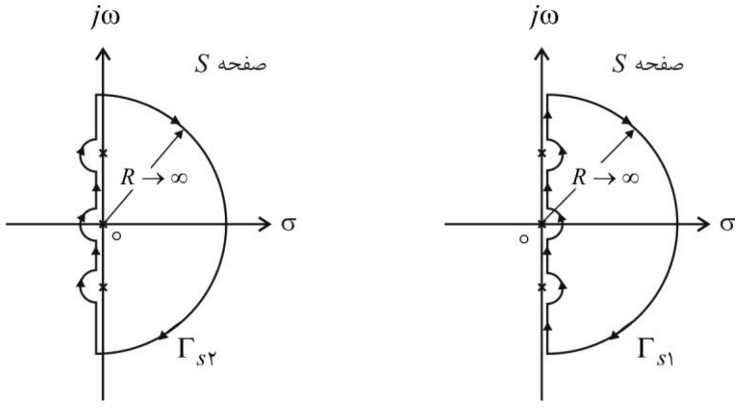
$N_{-1}$ : تعداد دور زدن‌های نقطه بحرانی $(-1 + j0)$

$z$ : تعداد قطب‌های سمت راست تابع تبدیل حلقه بسته

$p$ : تعداد قطب‌های سمت راست تابع تبدیل حلقه باز

$p_\omega$ : تعداد قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز روی محور موهومی

با توجه به نحوه عبور مسیر نایکوئیست از نقاط تکین تابع تبدیل حلقه باز، می‌توان دو مسیر نایکوئیست نوعی در نظر گرفت که در زیر نشان داده شده‌اند.




مسیر (۲) مسیر (۱)

عموماً از مسیر (۱) به عنوان مسیر نایکوئیست استفاده می‌شود.

معیار پایداری نایکوئیست برای مسیرهای فوق به صورت زیر است:

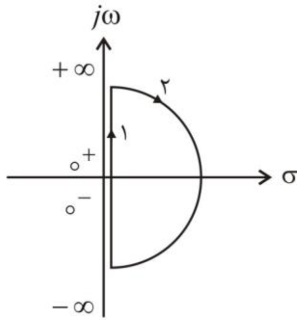
۱- برای مسیر اول: $N_{-۱} = z - p$

۲- برای مسیر دوم: $N_{-۱} = z - p - p_\omega$

برای فهم بیشتر مطالب اخیر، در ادامه چند مثال را به طور کامل حل می‌کنیم. قبل از بررسی مثال‌ها، توصیه می‌گردد که از خاصیت تقارن در نمودارهای قطبی فقط برای مسیرهای موجود بر روی محور موهومی استفاده شود.

**مثال:** نمودار قطبی را برای توابع تبدیل حلقه باز زیر رسم کنید. سپس پایداری سیستم حلقه بسته را بررسی نمایید. (مؤلف)

۱) $GH(s) = \dfrac{k}{۱+\tau s}$ $\quad k > ۰ \quad \tau > ۰$




با توجه به مسیر نایکوئیست داریم:

(۱) مسیر : $s = j\omega \qquad \omega : ۰^+ \to +\infty$

$$GH(j\omega) = \frac{k}{۱+\tau j\omega} \quad \Rightarrow \quad |GH(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{۱+(\tau\omega)^۲}} \qquad \angle GH(j\omega) = -\tan^{-۱}\tau\omega$$

$$\omega = ۰^+ \quad \Rightarrow \quad |GH(j\omega)| = k \quad , \quad \angle GH(j\omega) = ۰$$

$$\omega = +\infty \quad \Rightarrow \quad |GH(j\omega)| = ۰ \quad , \quad \angle GH(j\omega) = -\frac{\pi}{۲}$$

(۲) مسیر : $S = \underset{R\to\infty}{\mathrm{Re}^{j\theta}} \qquad \theta : \dfrac{\pi}{۲} \to -\dfrac{\pi}{۲}$

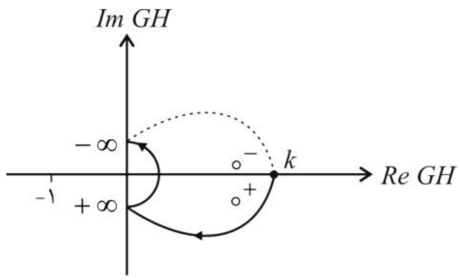
$$GH(\mathrm{Re}^{j\theta}) = \frac{k}{۱+\tau \mathrm{Re}^{j\theta}} \approx \frac{k}{\tau \mathrm{Re}^{j\theta}} = \underset{r\to ۰}{re^{-j\theta}} \qquad \Delta\theta : -\frac{\pi}{۲} \to \frac{\pi}{۲}$$

بنابراین نمودار قطبی به شکل زیر خواهد بود. قسمت نقطه چین با استفاده از خاصیت تقارن رسم شده است.

$P = 0$

$N_{-1} = 0$

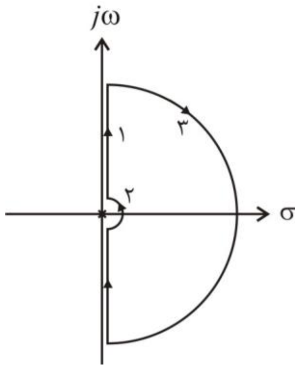
$Z = 0 \;\rightarrow$ سیستم پایدار است




**نتیجه**

همان‌طور که مشاهده می‌شود، مسیر (۲) روی مسیر نایکوئیست به نیم دایره کوچکی حول مبدأ نگاشته شده است. این موضوع برای کلیه سیستم‌های اکیداً سره صادق است. از این به بعد با توجه به این که نقطه بحرانی مبدأ نمی‌باشد، از رسم آن صرف نظر می‌کنیم.

۲) $GH(s) = \dfrac{k}{s(1+\tau s)} \qquad \tau > 0 \qquad k > 0$




ابتدا به دلیل وجود قطب در مبدأ، مسیر نایکوئیست را به صورت فوق در نظر می‌گیریم. یادآوری می‌شود بنابر نتیجه اخیر، مسیر (۳) (نیم دایره بزرگ) را رسم نمی‌کنیم.

مسیر (۱) $\quad s = j\omega \qquad \omega : 0^+ \rightarrow \infty$

$$GH(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1+\tau j\omega)} \qquad |GH(j\omega)| = \frac{k}{\omega\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} \qquad \angle GH(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\tau\omega$$

$$\omega = 0^+ \Rightarrow |GH(j\omega)| = \infty \qquad \angle GH(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega = \infty \Rightarrow |GH(j\omega)| = 0 \qquad \angle GH(j\omega) = -\pi$$

مسیر (۲) $\quad s = \underset{r\rightarrow 0}{re^{j\theta}} \qquad \theta = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$

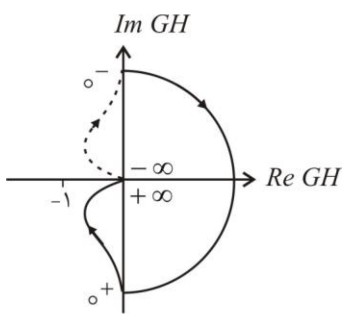
$$GH(re^{j\theta}) = \frac{k}{re^{j\theta}(1+\tau re^{j\theta})} \approx \frac{k}{re^{j\theta}} = \underset{R\rightarrow\infty}{\mathrm{R}e^{-j\theta}} \qquad \Delta\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

بنابراین نمودار قطبی به شکل زیر خواهد بود. قسمت نقطه‌چین با استفاده از خاصیت تقارن رسم شده است.

$P = 0$

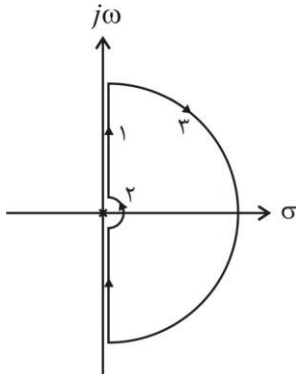
$N_{-1} = 0$

$Z = 0 \;\rightarrow$ سیستم پایدار است



**نتیجه**

همان‌طور که مشاهده می‌شود، نیم دایره کوچک (مسیر (۲)) به نیم دایره بزرگی نگاشت داده می‌شود. این موضوع برای کلیه سیستم‌های اکیداً سره قابل تعمیم است.




۳) $GH(s)=\dfrac{k}{s(\tau s-1)}$ $\quad k>0 \quad \tau>0$

مسیر (۱) : $s=j\omega \qquad \omega=0^+\to\infty$

$$GH(j\omega)=\frac{k}{j\omega(\tau j\omega-1)}$$

$$|GH(j\omega)|=\frac{k}{\omega\sqrt{\tau^2\omega^2+1}} \qquad \angle GH(j\omega)=-\frac{\pi}{2}-(\pi-\tan^{-1}\omega\tau)$$

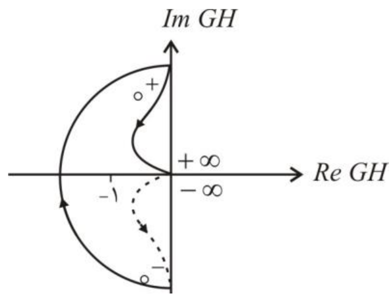
$$\omega=0^+ \;\to\; |GH(j\omega)|=\infty \qquad \angle GH(j\omega)=-3\frac{\pi}{2}$$

$$\omega=\infty \;\to\; |GH(j\omega)|=0 \qquad \angle GH(j\omega)=-\pi$$

مسیر (۲) : $\underset{r\to 0}{s=re^{j\theta}} \qquad \theta:-\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$

$$GH(re^{j\theta})=\frac{k}{re^{j\theta}(\tau re^{j\theta}-1)}\approx\frac{-k}{re^{j\theta}}=-\underset{R\to\infty}{\mathrm{Re}^{-j\theta}}=\underset{R\to\infty}{\mathrm{Re}^{-j\pi}}e^{-j\theta} \qquad \Delta\theta:-\frac{\pi}{2}\to-\frac{3\pi}{2}$$

بنابراین نمودار قطبی به شکل زیر خواهد بود. قسمت نقطه‌چین با استفاده از خاصیت تقارن رسم شده است.




$P=1$

$N_{-1}=1$

$Z=2 \;\to$ سیستم ناپایدار است

✵ **نکته:** ***با توجه به این که $GH(j\omega)=\mathrm{Re}\,GH(j\omega)+j\,\mathrm{Im}\,GH(j\omega)$ می‌باشد، در صورت لزوم برای بدست آوردن محل تلاقی با محور حقیقی و محور موهومی کافیست به ترتیب $\mathrm{Im}\,GH(j\omega)=0$ و $\mathrm{Re}\,GH(j\omega)=0$ محاسبه گردد.***

### ۳-۶-۹ توابع تبدیل می‌نیمم فاز

به توابع تبدیلی که هیچ صفر یا قطبی از آن‌ها در سمت راست محور موهومی در صفحه $s$ نباشند، توابع تبدیل می‌نیمم فاز گویند. در غیر این صورت، توابع تبدیل را نامی‌نیمم فاز می‌گویند.

بنابراین مثال اخیر با تابع تبدیل $GH(s)=\dfrac{k}{s(\tau s-1)}$ نامی‌نیمم فاز است. زیرا قطب $s=\dfrac{1}{\tau}$ در سمت راست محور موهومی قرار دارد.

### ۳-۶-۱۰ خواص توابع می‌نیمم فاز

توابع تبدیل می‌نیمم فاز خواص منحصر به فردی دارند که به طور خلاصه به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

۱- بین مشخصه‌های اندازه و فاز آن‌ها رابطه منحصر به فردی وجود دارد. این بدان معنی است که برای یک تابع می‌نیمم فاز وقتی مشخصه اندازه آن معلوم باشد (به شرط مشخص بودن علامت بهره)، مشخصه فاز آن کاملاً تعریف شده است و برعکس.

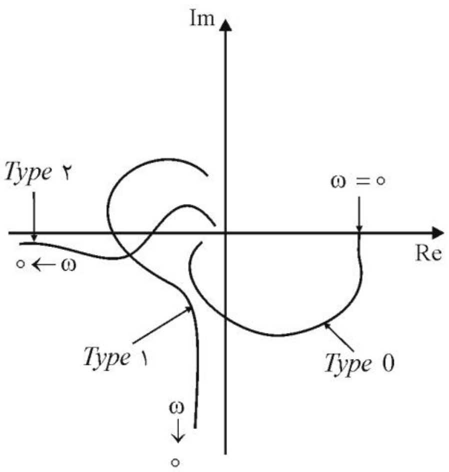
۲- مقدار یک تابع می‌نیمم فاز در هیچ فرکانس غیرصفر متناهی نمی‌تواند صفر یا بی‌نهایت شود.

۳- در یک تابع تبدیل می‌نیمم فاز، وقتی فرکانس از ۰ تا $\infty$ تغییر می‌کند، همواره جابجایی فاز منفی است.

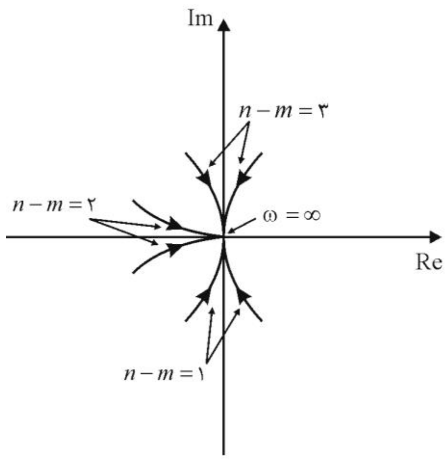
۴- از رفتار فرکانس پائین $(\omega=0)$ می‌توانیم نوع سیستم و از رفتار فرکانس بالا $(\omega=\infty)$ تفاضل درجه صورت و مخرج سیستم را تشخیص دهیم. بدین منظور تابع تبدیل حلقه باز سیستم را به فرم کلی زیر در نظر بگیرید که در آن درجه چندجمله‌ای مخرج $n$ بزرگ‌تر از درجه چندجمله‌ای صورت $m$ است.

$$G(j\omega)=\frac{k(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\dots}{(j\omega)^{\lambda}(1+j\omega T_a)(1+j\omega T_b)\dots}=\frac{b_m(j\omega)^m+b_{m-1}(j\omega)^{m-1}+\dots}{a_n(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\dots}$$

در حالت کلی می‌توانیم رفتار فرکانس بالا و فرکانس پائین را به صورت زیر نمایش دهیم.



الف) نمودار قطبی در گستره فرکانس پائین



ب) نمودار قطبی در گستره فرکانس بالا

**شکل (۳-۹): نمودار قطبی در گستره فرکانسی بالا و پائین**

$$\lambda=0 \;\rightarrow\; \angle G(j\omega)\Big|_{\omega=0}=0$$

$$\lambda=1 \;\rightarrow\; \angle G(j\omega)\Big|_{\omega=0}=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lambda=2 \;\rightarrow\; \angle G(j\omega)\Big|_{\omega=0}=-\pi$$

$$n-m=0 \;\rightarrow\; \angle G(j\omega)\Big|_{\omega=\infty}=0$$

$$n-m=1 \;\rightarrow\; \angle G(j\omega)\Big|_{\omega=\infty}=-\frac{\pi}{2}$$

$$\vdots$$

$$n-m=N \;\rightarrow\; \angle G(j\omega)\Big|_{\omega=\infty}=N\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

### ۳-۶-۱۱ محاسبه حد فاز و حد بهره از روی نمودار نایکوئیست

همان‌طور که در ابتدای فصل مطرح گردید، حد بهره و حد فاز دو معیار برای تشخیص پایداری نسبی یا ناپایداری نسبی سیستم‌ها می‌باشند. در روش مکان هندسی ریشه‌ها، پایداری نسبی با دوری و نزدیکی قطب‌های تابع تبدیل حلقه بسته نسبت به محور موهومی با تغییرات بهره $k$ تعیین می‌شود، در حالی که پایداری نسبی در نمودار نایکوئیست (نمودار قطبی) بر اساس دوری و نزدیکی نسبت به نقطه بحرانی $(-1+j0)$ سنجیده می‌شود. هرچه نمودار نایکوئیست به نقطه بحرانی $(-1+j0)$ نزدیک‌تر شود، پاسخ سیستم نوسانی‌تر می‌شود. نحوه محاسبه حد فاز و حد بهره از روی نمودار نایکوئیست به طور جداگانه در شکل‌های ۳ـ۱۰ و ۳ ـ۱۱ نشان داده شده است.