حل مثال

۱- شرایط P.D :

کهادهای اصلی مقدم :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -b & -b \\ -b & 1 & b \\ -b & b & 1 \end{pmatrix}$$

$1 > 0$ ✓

$$\begin{vmatrix} 1 & -b \\ -b & 1 \end{vmatrix} = 1 - b^2 > 0 \longrightarrow \boxed{-1 < b < 1}$$

$$|A| = 1(1-b^2) + b(-b+b^2) - b(-b^2+b)$$

$$= (1-b)(1+b) - b^2(1-b) - b^2(1-b)$$

$$= (1-b)\Big(\underbrace{1+b-b^2-b^2}_{1+b-2b^2}\Big) = (b-1)^2(2b+1) > 0$$

$$\boxed{b > -\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{2} < b < 1}$$ ✓

۲- به ازای کدام a ، A نیمه معین مثبت خواهد بود؟

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \end{array}$$

a_{11} ✓ ، a_{22} ✓ ، $a_{33} \geq 0$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geq 0$$ ✓

$$\begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{pmatrix} , A \downarrow$$

$$a-1 \geq 0 \qquad\qquad a-1 \geq 0$$

$$a \geq 1$$

$$|A| = \underline{1}\,\underline{(a-1)} \underline{+1}\,(\underline{-a+1}) \underline{+1}\,\cancel{(1-1)} = 0 \ \checkmark$$

$$\Rightarrow \boxed{a \geq 1} \ \checkmark$$

۳- تعیین علامت :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\text{متقارن}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\text{پادمتقارن}}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 0.5 \\ 1.5 & 4 & 1.5 \\ 0.5 & 1.5 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow |A_1| = 0$$

$1 > 0$ ✓

$4 > 0$ ✓

$1 > 0$ ✓

$$\begin{vmatrix} 1 & 1.5 \\ 1.5 & 4 \end{vmatrix} > 0 \text{ و } \begin{vmatrix} 4 & 1.5 \\ 1.5 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{vmatrix} > 0 \longrightarrow S.P.D \ \checkmark$$

۴- الف) شرط منفرد بودن ماتریس !؟

ب) اگر $a=1$ ← $k=?$

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & ۲ \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 \longrightarrow (1+a)(-1) - 1(1) + ۲(1) = 0$$

$$= -1 - a - 1 + ۲ = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 0}$$

$$k = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{max}}$$

$$\longrightarrow |A^T A - \lambda I| = 0$$

$$\longrightarrow \lambda_1 = ۱۱/۰۱ \quad , \quad \lambda_۲ = ۱/۹۴ \quad , \quad \lambda_۳ = ۰/۰۴۶۷$$

$$\|A\| = \sqrt{۱۱/۰۱}$$

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{min}}} = \frac{1}{\sqrt{۰/۰۴۶۷}} \Rightarrow \boxed{k \simeq ۱۵/۳۵}$$

خوش حالت

-۵

$$A=\begin{pmatrix} a & -۳ & c \\ 1 & ۳ & -1 \\ b & ۹ & -۳ \end{pmatrix}$$

اگر بخواهیم $R(A)=۳$ شود $\longrightarrow$ $|A|\neq ۰$

$$|A| = a\underbrace{\cancel{(-۹+۹)}}_{۰} + ۳(-۳+b) + c(۹-۳b) \neq ۰$$

$$= (۳b-۹) - c(۳b-۹) \neq ۰$$

$$= (۳b-۹)(1-c) \neq ۰$$

$\boxed{c \neq 1}$ و $\boxed{b \neq ۳}$

اگر بخواهیم $R(A)=۲$ باشد:

$$A=\begin{pmatrix} a & -۳ & 1 \\ 1 & ۳ & -1 \\ ۳ & ۹ & -۳ \end{pmatrix}$$

$۳a+۳ \neq ۰ \rightarrow \boxed{a \neq -1}$

$۹-۳b \neq ۰ \rightarrow \boxed{b \neq ۳}$ یا

$۳-۳c \neq ۰ \rightarrow \boxed{c \neq 1}$ یا

اگر $a=-1$ و $b=3$ و $c=1$ باشند

کهاد 2×2 غیر صفر تولید نمی‌شود $\longleftarrow$ $R(A)=1$ می‌ماند.

۶- $R(A)$ ؟!

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \qquad R \leq \underbrace{\min(3,4)}_{3}$$

1×1 ✓

2×2 ✓

3×3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 1(32-36)-2(16-18)+2(12-12)=0$$

$R(A)=2$ $\longleftarrow$ کهاد غیرصفر 3×3 ندارد

۷- اسپن :

Span

Spam

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = r$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$|A| \neq 0 \Rightarrow 4(0+2) - 2(4) + 1(-4) \neq 0$$

لذا بردارهای مذکور فضای برداری R^3 را اسپن می‌کنند.

۸- پایه؟!

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

شرط یک اسپن:

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4 = r$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

چون تعداد مجهولات بیشتر از معادلات است لذا بیشمار جواب دارد

لذا ۴ بردار مذکور فضای برداری R^3 را اسپن می کنند.

شرط دوم) استقلال خطی:

$$c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3+c_4u_4=0$$

چون بیشمار جواب دارد لذا فقط به ازای $c_i=0$ برقرار نیست پس مستقل خطی

نمی باشند ⟵ پایه نیستند.

۶- نُرم:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max(\underbrace{1+2+0}_{3},\ \underbrace{3+1+1}_{5}) = 5$$

$$\|A\|_\infty = \max(1+3,\ 2+1,\ 0+1) = 4$$

$$\|A\|_F = \sqrt{tr(A^TA)} \ \text{یا}\ \sqrt{|a_{11}|^2+|a_{12}|^2+\cdots}$$

$$=\sqrt{1+9+4+1+0+1}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}}$$

$$\hookrightarrow |A^T A - \lambda I| = 0$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & -5 \\ -5 & 11-\lambda \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 13{,}8 \\ \lambda_2 = 2{,}169 \end{array}$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{13{,}8}$$