

در ریاضیات همه متغیرها

متغیرهای تصادفی

متغیرهای تصادفی پیوسته  
continuous

متغیرهای تصادفی گسسته  
discrete

هر فاصله زمانی یا مکانی بین دو نقطه  
دلخواه  $(a, b)$

تعداد نقاط ممتنهای یا نامتناهی  
شمارش پذیر

مدت زمان لازم برای رسیدن  
دانشجو از خوابگاه به دانشگاه

تعداد دانشجویان حاضر در دانشگاه برق  
در ساعت ۸ صبح

بر اساس متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته

تابع توزیع متغیر تصادفی

تابع توزیع احتمال گسسته

فرض کنیم متغیر تصادفی گسسته  $x$  را داریم

تابع توزیع احتمال آن را با  $f_x(x)$  نشان می دهیم که دارای خواص ذیل است:

$$\textcircled{1} f_x(x) \leq P(X \leq x)$$

تابع چگالی احتمال

Rashen-s

$$\textcircled{2} \sum_x f_x(x) = \sum P(X \leq x) \leq 1$$

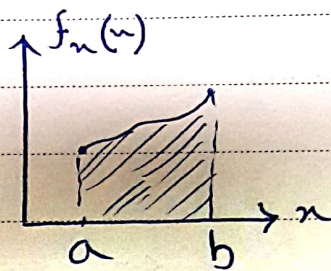
## تابع توزیع احتمال پیوسته

فرض کنیم متغیر تصادفی پیوسته  $x$  را داریم تابع توزیع احتمال آن را با  $f_n(x)$  نشان می دهیم که دارای خواص ذیل است:

①. تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته  $f_n(x) \geq 0$   
 $x$  در یک بازه پیوسته مشخص  
 $[a, b]$

②.  $\int_a^b f_n(x) dx \leq 1$

مساحت کل زیر منحنی در بازه  $a$  تا  $b$



③. به ازای هر نقطه پیوسته  $x \leq d$   
احتمال در هر نقطه پیوسته صفر است.

احتمال  $p(x \leq d) = f_n(d) = 0$

تصادفی پیوسته باشد.

④. احتمال پیوسته متغیر تصادفی در هر فاصله معین انتگرال آن فاصله است.

احتمال متغیر  $p(\alpha \leq x \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx$

تصادفی پیوسته

سطح زیر منحنی بین  $\alpha$  و  $\beta$



مثال: با توجه به جدول احتمال ذیل مقادیر خواسته شده را محاسبه نمایید.

$x_i$	0	1	2	3
$f_n(x_i)$	0,1	0,2	0,2	0,3

مطلوبست محاسبه:

~~$P(X > 0)$~~  (ت)  $\leftarrow$  0,3

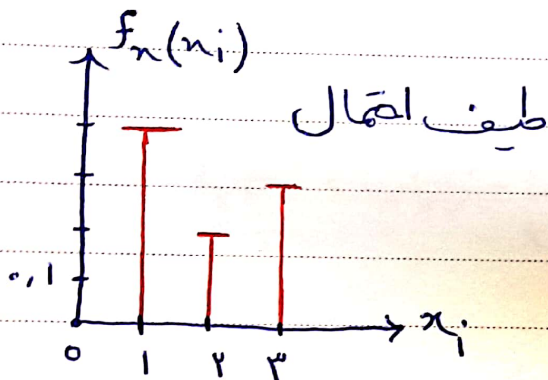
~~$P(X > 1)$~~  (ب)  $\leftarrow$  0,3

~~$P(X \leq 3)$~~  (ب)  $\leftarrow$  0,3

~~$P(X = 2)$~~  (الف)  $\leftarrow$  0,2

~~$P(1,5 < X < 2,5)$~~  (ب)  $\leftarrow$  0,2

~~$P(X < 0)$~~  (ت)  $\leftarrow$  0



در الگرم متغیر تصادفی گسسته

مثال: تابع احتمال متغیر تصادفی به صورت ذیل تعریف شده است مقدار  $k$  را

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{k} & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

به دست آورید؟

حل: متغیر تصادفی پیوسته

$$\int_0^4 \frac{x}{k} dx = 1 \Rightarrow \left[ \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} x^2 \right]_0^4 = 1$$

Rashen-s

$k \leq 8$

مثال: تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی  $x$  به صورت ذیل است:

$$f_n(u) = \begin{cases} x & ; 0 \leq u \leq 1 \\ k-u & ; 1 \leq u \leq 2 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

مطلوبست مقدار  $k$ ؟

$$\int f_n(u) du = 1$$

$$\int_0^1 u du + \int_1^2 (k-u) du = 1$$

$$\frac{1}{2} u^2 \Big|_0^1 + \left( ku - \frac{1}{2} u^2 \right) \Big|_1^2 = 1$$

$$\frac{1}{2} + \left[ (2k - 2) - \left( k - \frac{1}{2} \right) \right] = 1$$

$$\frac{1}{2} + [1k - 1,5] = 1 \Rightarrow \underline{k = 2}$$

تابع توزیع تجمعی، (CDF)

هرگاه  $x$  یک متغیر تصادفی باشد آنگاه تابع توزیع آن را با  $f_n(x)$  نشان

$$f_n(u) = p(x \leq u)$$

می‌دهیم،

تابع توزیع احتمال تجمعی  
برای متغیر تصادفی گسسته

$$①. F_x(n) = \sum_{t \leq n} f_n(t)$$



②. خاصیت  $\begin{cases} F_X(+\infty) \leq 1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(n) \leq 1 \\ F_X(-\infty) \leq 0 \leq \lim_{n \rightarrow -\infty} F_X(n) \leq 0 \end{cases}$

پس  $0 \leq F_X(n) \leq 1$

خاصیت ② تابع تجمعی  $F_X(n)$  غیر نزولی است.

خاصیت ③ تابع تجمعی  $F_X(n)$  همواره از سمت راست پیوسته است و  
لذاً از چپ پیوسته نیست.

خاصیت ④  $f_X(n) = F_X(n) - \lim_{t \rightarrow n^-} F_X(t)$

تابع توزیع احتمال تجمعی برای متغیر تصادفی پیوسته

$F_X(n) \triangleq \int_{-\infty}^n f_X(t) dt$

غیر نزولی  $0 \leq F_X(n) \leq 1$

از سمت راست پیوسته و از سمت چپ لزوماً پیوسته نیست.

$f_X(n) \triangleq \frac{d}{dn} F_X(n)$

تابع تجمعی تابع چگالی

Subject :

Year . Month . Date . ( )

مثال: جدول احتمال ذیل مفروض است مقدار تابع توزیع تجمعی را در  $x=2$  محاسبه نمایید.

$x_i$	-1	0	1	2	3	4
$f_x(x)$	0,1	0,2	0,1	0,4	0,1	0,1

حکم:  $F_x(x \leq \infty) = 1$   
 تعریف:  $F_x(x) = \sum_{t \leq x} f_x(t)$

$$\begin{aligned} F_x(x \leq 2) &= \sum_{t \leq 2} f_x(t) \\ &= P(X \leq -1) + P(X \leq 0) + P(X \leq 1) + P(X \leq 2) \\ &= 0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,4 = 0,8 \end{aligned}$$

مثال: کمیت تصادفی  $X$  در بازه  $(2, 3)$  تعریف شده است تابع چگالی احتمال آن به صورت ذیل است تابع توزیع تجمعی آن را بیابید؟

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 2 \\ \frac{1}{10} & ; 2 < x \leq 3 \\ 0 & ; x > 3 \end{cases}$$

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{10} du \Rightarrow \frac{1}{10} x \Big|_2^x \Rightarrow \frac{x-2}{10}$$

حل:

مثال: اگر تابع توزیع تجمعی تصادفی  $n$  به صورت ذیل باشد:

$$F_X(n) = \begin{cases} 0 & ; n < 0 \\ \frac{n}{10} & ; 0 < n \leq 10 \\ 1 & ; n > 10 \end{cases}$$

تابع تجمعی

احتمال  $P(2 < n < 8)$  را محاسبه نمایید.

طبق تعریف

$$P(a < n < b) \triangleq F_X(b) - F_X(a)$$

تابع تجمعی - تابع تجمعی

حل:

$$P(2 < n < 8) = F_X(8) - F_X(2)$$

$$\frac{8}{10} - \frac{2}{10} = \frac{6}{10}$$