با توجه به دیاگرام بود داریم:

$$\angle G(j\omega_1) = -140^\circ \quad \rightarrow \; P.M = 180 + \angle G(j\omega_1) = 40^\circ$$

$$G.M = -20\log|G(j\omega_\pi)| = 20dB$$

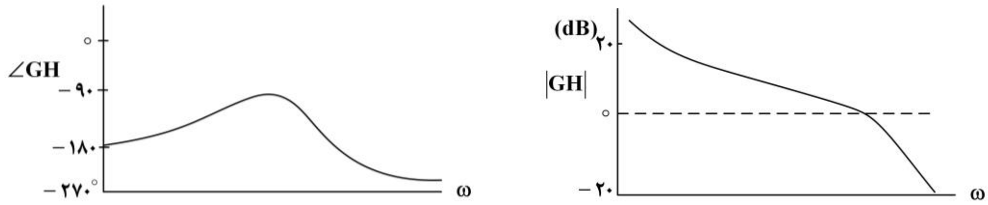
مثال: دیاگرام بود *(Bode)* برای تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترلی در شکل نشان داده شده است. کدام یک از جملات زیر برای این سیستم صحیح است؟ (مکاترونیک ۸۴)

۱) سیستم پایدار است چون حاشیه بهره منفی است.

۲) سیستم ناپایدار است چون حاشیه بهره منفی است.

۳) سیستم پایدار است چون حاشیه فاز مثبت است.

۴) سیستم نوسانی است چون حاشیه بهره و حاشیه فاز هر دو صفر هستند.



✍ **حل:** گزینه «۲»

با توجه به نمودار فاز و اندازه بودی، حد بهره و حد فاز سیستم منفی می‌باشند. لذا سیستم ناپایدار می‌باشد.

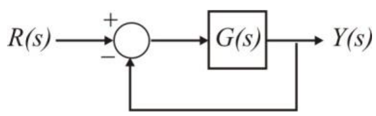
۳-۸ نمودار دامنه ـ فاز (نمودار نیکولز)

آموختیم نمودار بودی، مشخصه‌های پاسخ فرکانسی سیستم حلقه باز را نشان می‌دهد که از روی این مشخصه می‌توان پایداری نسبی سیستم حلقه بسته را با محاسبه حد فاز و حد بهره تعیین کرد. عیب این روش این است که به صورت مستقیم نمی‌توان مشخصات سیستم حلقه بسته نظیر ω_p، M_p و $B\omega$ را بدست آورد.

برای برطرف کردن این عیب، از نمایش ترسیمی نمودار بهره برحسب فاز که اصطلاحاً نمودار نیکولز نامیده می‌شود، استفاده می‌کنیم. در این روش برخلاف روش بودی که نمودار دامنه و فاز برحسب فرکانس به طور جداگانه ترسیم می‌شوند، مشخصات پاسخ فرکانسی از نمودار لگاریتمی دامنه برحسب دسیبل به ازاء تغییر زاویه فاز در گستره فرکانسی موردنظر می‌آیند. مزیت دیگر نمودار دامنه ـ فاز این است که با تغییر بهره حلقه $G(j\omega)$، مکان در امتداد محور قائم جابجا می‌شود. همچنین، زمانی که فاز ثابتی به $G(j\omega)$ اضافه می‌شود، مکان در جهت افقی جابجا می‌شود، بدون این که در شکل مکان اعوجاجی صورت پذیرد.

سؤالی که مطرح می‌شود این است که چگونه می‌توان پاسخ فرکانسی سیستم حلقه بسته را از روی پاسخ فرکانسی سیستم حلقه باز بدست آورد؟ پاسخ این است که به کمک مکان‌های دامنه ثابت و مکان‌های فاز ثابت این امر صورت می‌پذیرد.

سیستم کنترلی زیر را در نظر بگیرید.



تابع تبدیل حلقه بسته سیستم عبارتست از:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

در حالت دائمی سینوسی $G(s) = G(j\omega)$ و $G(j\omega)$ عبارتست از:

$$G(j\omega) = \mathrm{Re}G(j\omega) + j\,\mathrm{Im}G(j\omega) = x + jy$$

که x مؤلفه حقیقی $G(j\omega)$ و y مؤلفه موهومی آن است.

۳-۸-۱ مکان هندسی دامنه ـ ثابت (دوایر M)

برای یافتن مکان هندسی نقاطی که دامنه حلقه بسته آن‌ها ثابت است، به صورت زیر عمل می‌کنیم. تابع تبدیل حلقه بسته در حالت دائمی سینوسی عبارتست از:

$$M(j\omega)=\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}=\frac{x+jy}{1+x+jy}$$

بنابراین اندازه تابع تبدیل حلقه بسته برابر است با:

$$M=\left|\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}\right|=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(1+x)^2+y^2}}$$

$$\rightarrow\quad M^2=\frac{x^2+y^2}{(1+x)^2+y^2}\quad\rightarrow\quad x^2(1-M^2)-2M^2x-M^2+(1-M^2)y^2=0$$

دو حالت رخ می‌دهد:

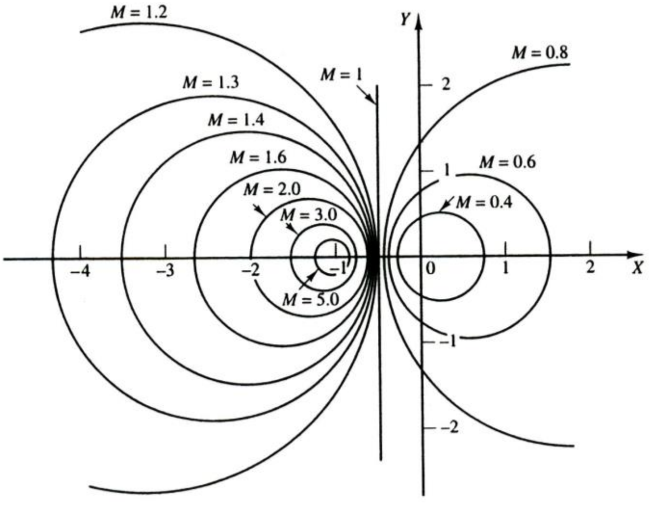
۱- اگر $M=1$ باشد، رابطه اخیر نشان‌دهنده معادله خطی است که با محور y موازی است و از نقطه $(-\frac{1}{2},0)$ می‌گذرد. به عبارتی دیگر:

$$x=-\frac{1}{2}$$

۲- اگر $M\neq 1$ باشد، با انجام عملیات مرتب‌سازی و ساده‌سازی به معادله زیر می‌رسیم.

$$\left(x-\frac{M^2}{1-M^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{M}{1-M^2}\right)^2$$

معادله اخیر نشان‌دهنده دوایری به مرکز $x=\frac{M^2}{1-M^2}$ و $y=0$ و شعاع $R=\left|\frac{M}{1-M^2}\right|$ می‌باشند. وقتی M مقادیر مختلفی اختیار کند، یک دسته دوایر در صفحه $G(j\omega)$ بدست می‌آید که به آن‌ها مکان‌های هندسی دامنه ـ ثابت (مکان M ثابت) می‌گویند.



شکل (۳ ـ ۱۹): دوایر M ـ ثابت در مختصات قطبی

وقتی M بی‌نهایت شود، دایره به صورت نقطه‌ای واقع در نقطه بحرانی $(-1+j0)$ درمی‌آید. این واقعیت با عبور نمودار نایکوئیست از نقطه بحرانی $(-1+j0)$ که نشان‌دهنده پایداری مرزی بودن سیستم و M_p بی‌نهایت است، مطابقت دارد. مکان‌های M-ثابت دارای خواص زیر می‌باشند:

۱- مکان‌های M ـ ثابت در صفحه $G(j\omega)$ نسبت به خط $M=1$ و محور حقیقی متقارن هستند.

۲- دوایر سمت چپ خط $M=1$ مربوط به مقادیر M بزرگ‌تر از یک و دوایر سمت راست آن مربوط به مقادیر M کوچک‌تر از یک می‌باشند.

۳- هرچه M از یک بزرگ‌تر شود، دوایر M- ثابت کوچک‌تر شده و به نقطه $(-1+j0)$ میل می‌کنند.

۴- هرچه M از یک کوچک‌تر شود، دوایر M– ثابت کوچک‌تر شده و به مبدأ همگرا می‌شوند.

۵- $M=1$ مکان هندسی نقاطی است که از مبدأ و نقطه $(-1+j0)$ به یک فاصله‌اند.

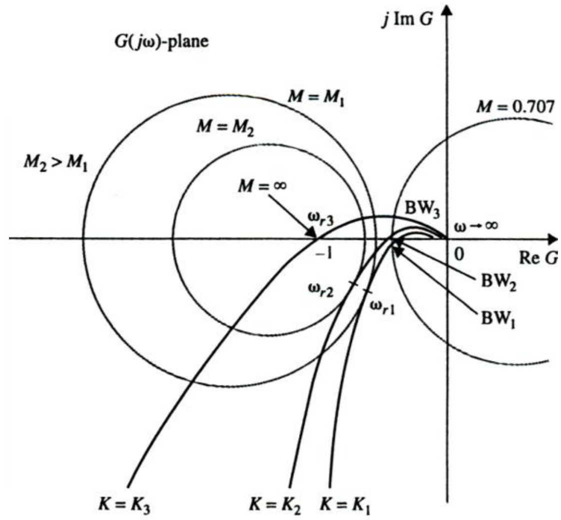
۳-۸-۲ محاسبه M_p ، ω_p و $B\omega$ از روی مکان‌های M- ثابت

به طور ترسیمی، نقاط تقاطع منحنی $G(j\omega)$ با مکان‌های M– ثابت، مقدار M را در فرکانسی که روی منحنی $G(j\omega)$ مشخص می‌شود را بدست می‌دهد. لذا اگر بخواهیم مقدار M_p کمتر از مقدار مشخصی باشد، منحنی $G(j\omega)$ نباید دایره M مربوطه را در هیچ نقطه‌ای قطع کند و در عین حال نباید نقطه $(-1+j0)$ را هم محصور کند. بنابراین:

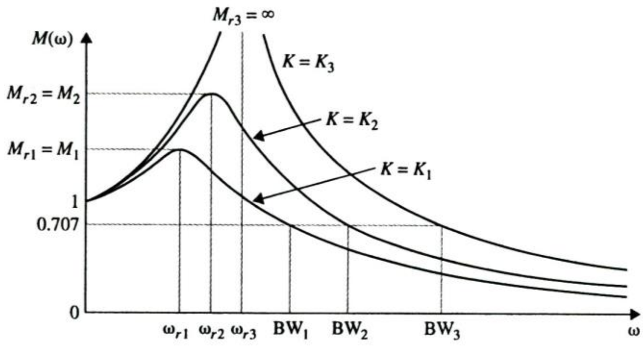
۱- دایره M ثابتی که کوچک‌ترین شعاع را داشته و بر منحنی $G(j\omega)$ مماس باشد، اندازه M_p را مشخص می‌کند و ω_p در نقطه تماس از روی منحنی $G(j\omega)$ قابل تعیین است.

۲- پهنای باند $(B\omega)$ در فرکانس تماس با دایره $M=0/707$ بدست می‌آید.

برای درک صحیح ارتباط میان نمودار نایکوئیست با مکان‌های M– ثابت، شکل ۳-۲۰ را در نظر بگیرید.



الف) نمودار نایکوئیست $G(s)$ و مکان‌های ثابت ـ M



ب) منحنی‌های مقدار مربوطه

شکل (۳-۲۰): مقایسه مکان‌های M- ثابت و نمودار نایکوئیست مربوطه

همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش بهره حلقه از مقدار k_1 به k_2 چنانچه سیستم هنوز پایدار باشد، دایره M–ثابتی با شعاع کوچک‌تر که مربوط به M بزرگ‌تر است، وجود دارد که بر منحنی $G(j\omega)$ مماس باشد و لذا M_p بزرگ‌تر می‌شود. با افزایش بهره تا مقدار k_3، نمودار نایکوئیست از نقطه $(-1+j0)$ عبور می‌کند، لذا سیستم پایدار مرزی است و M_p بی‌نهایت می‌شود.

۳ـ۸ـ۳ مکان هندسی فاز ـ ثابت (دوایر N)

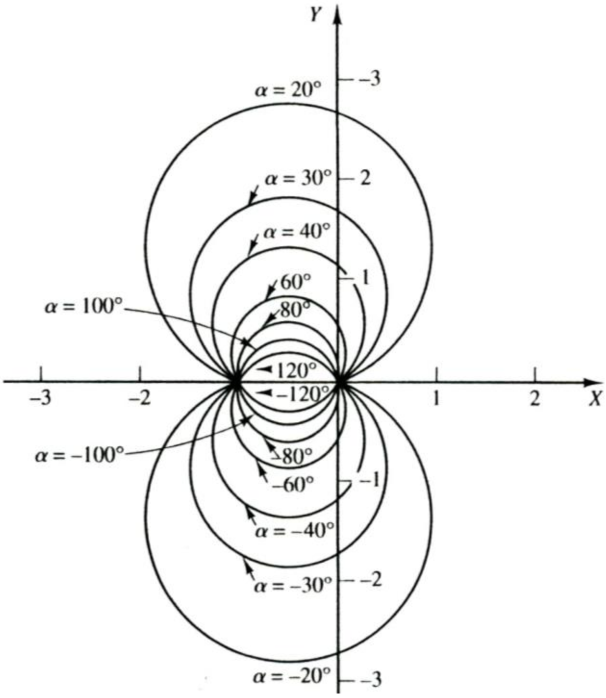
مکان هندسی فاز ـ ثابت سیستم حلقه بسته مفروض را می‌توان به روش مشابه با مکان هندسی دامنه ـ ثابت در صفحه $G(j\omega)$ بدست آورد. اگرچه در تحلیل عملکرد سیستم به دامنه و فاز پاسخ فرکانسی حلقه بسته نیازمندیم، اما اطلاعات مربوط به M_p، ω_p و $B\omega$ از منحنی دامنه بدست می‌آیند و لذا مکان‌های فاز ـ ثابت در عمل کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

$$\alpha = \angle M(j\omega) = \angle\left(\frac{x+jy}{1+x+jy}\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y}{1+x}\right)$$

تعریف می‌کنیم $N=\tan\alpha$. بنابراین پس از ساده‌سازی داریم:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4N^2}$$

معادله اخیر نشان‌دهنده دوایری به مرکز $y=\frac{۱}{۲N}$ و $x=-\frac{۱}{۲}$ و شعاع $R=\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴N^{۲}}}$ می‌باشد. این دوایر در صفحه $G(j\omega)$ به مکان‌های هندسی N–ثابت یا دوایر N–ثابت (شکل ۳-۲۱) شناخته می‌شوند. بنابراین با استفاده از دوایر M–ثابت و دوایر N–ثابت و بدون محاسبه دامنه و فاز تابع تبدیل حلقه بسته در فرکانس‌های مختلف، می‌توانیم پاسخ فرکانسی سیستم حلقه بسته را از روی پاسخ فرکانسی سیستم حلقه باز $G(j\omega)$ بدست آوریم. نقاط برخورد و مکان هندسی $G(j\omega)$ و دوایر M–ثابت و N–ثابت به ترتیب مقادیر M و N را به ازای فرکانس روی $G(j\omega)$ بدست می‌دهند.



شکل (۳ ـ ۲۱): دوایر N– ثابت در مختصات قطبی

۳-۸-٤ نمودار نیکولز (چارت نیکولز)

یک نقص عمده در کار با نمودار قطبی برای $G(j\omega)$ این است که چنانچه تغییر ساده‌ای مثل تغییر بهره حلقه در سیستم ایجاد شود، منحنی شکل کلی اولیه خود را حفظ نخواهد کرد. از سویی دیگر، در مسائل طراحی عموماً نه تنها بهره حلقه باید تغییر یابد، بلکه لازم است کنترل‌کننده‌هایی به صورت سری یا فیدبک به سیستم اضافه شوند و لذا رسم مجدد $G(j\omega)$ امری اجتناب ناپذیر است. از اینرو استفاده از نمودار بودی و نمودار اندازه برحسب فاز (نمودار نیکولز) در مسائل طراحی توصیه می‌شود. در بحث قبلی به نمودار بودی پرداختیم.

نمودار نیکولز که از مکان‌های هندسی M و N در صفحه لگاریتم دامنه برحسب فاز تشکیل می شود دارای خواص زیر است:

۱- اگر $N>۰$ باشد مرکز دوایر در بالای محور حقیقی و اگر $N<۰$ مرکز دوایر در پایین محور حقیقی قرار دارد.

۲- نمودار نیکولز نسبت به محور -۱۸۰° متقارن است.

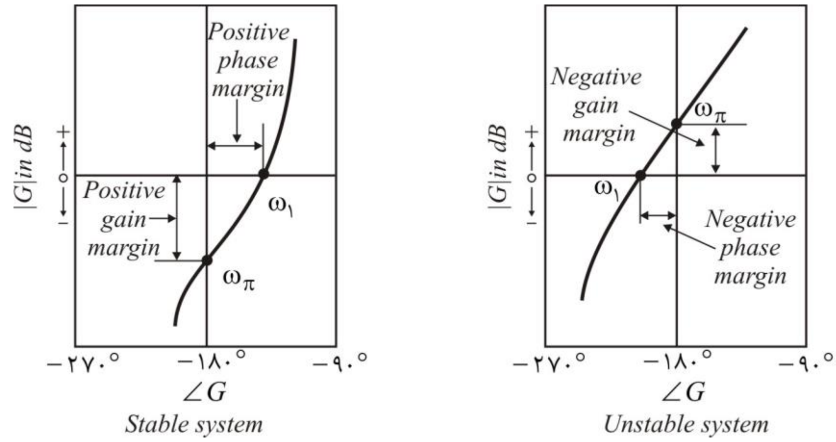
۳- مکان M و N در هر ۳۶۰° تکرار شده و در هر فاصله ۱۸۰°، تقارن وجود دارد.

۴- مکان‌های هندسی M حول نقطه بحرانی $(۰dB, -۱۸۰^{\circ})$ متمرکز می‌شوند.

توجه کنید نقطه بحرانی $(-۱+j۰)$ در نمودار نیکولز به نقطه $(۰dB, -۱۸۰^{\circ})$ نگاشته می‌شود. همچنین مکان هندسی N ـ ثابت برای یک φ_m معین تمام دایره نیست، بلکه تنها کمانی از آن است.

۳-۸-۵ محاسبه حد فاز و حد بهره از روی نمودار نیکولز

برای تعیین حد فاز و حد بهره نیازمند تعیین فرکانس گذر بهره (ω_1) و فرکانس گذر فاز (ω_π) می‌باشیم. این موضوع در شکل ۳-۲۲ برای دو سیستم پایدار و ناپایدار نشان داده شده است. یادآوری می‌کنیم که برای این که یک سیستم می‌نیمم فاز پایدار باشد، این است که حد فاز و حد بهره آن مثبت باشد. در ادامه برای فهم عمیق‌تر در مورد مفاهیم حد فاز و حد بهره برای سیستم‌های پایدار و ناپایدار، نمودارهای بود، قطبی و نیکولز مربوط به این سیستم‌ها به صورت گرافیکی در شکل ۳-۲۳ آورده شده است.

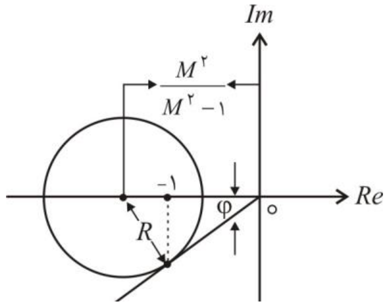


شکل (۳ ـ۲۲) : تعیین حد بهره و حد فاز از روی نمودار نیکولز

۳-۸-۶ تنظیم بهره

ابتدا محاسبه M_p به روش هندسی را فرا می‌گیریم. شکل زیر را در نظر بگیرید. مشاهده می‌کنید که خط مماس رسم شده از مبدأ به هر دایره مطلوب $M = M_p$ ، اگر M_p بزرگتر از یک باشد، دارای زاویه φ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\dfrac{M}{M^{۲}-۱}\right|}{\left|\dfrac{M^{۲}}{M^{۲}-۱}\right|} = \frac{۱}{M}$$

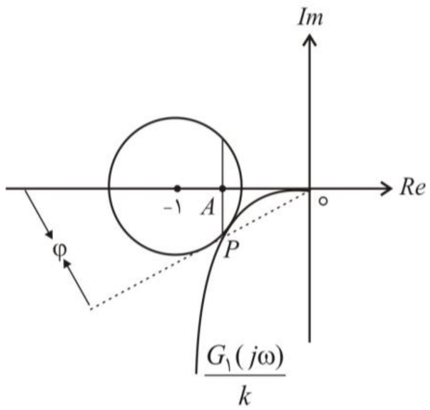


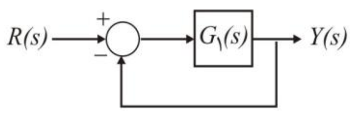
به سادگی می‌توان اثبات کرد که خطی که از نقطه p عمود بر محور حقیقی منحنی رسم می‌شود، از نقطه $(-۱+j۰)$ عبور می‌کند.

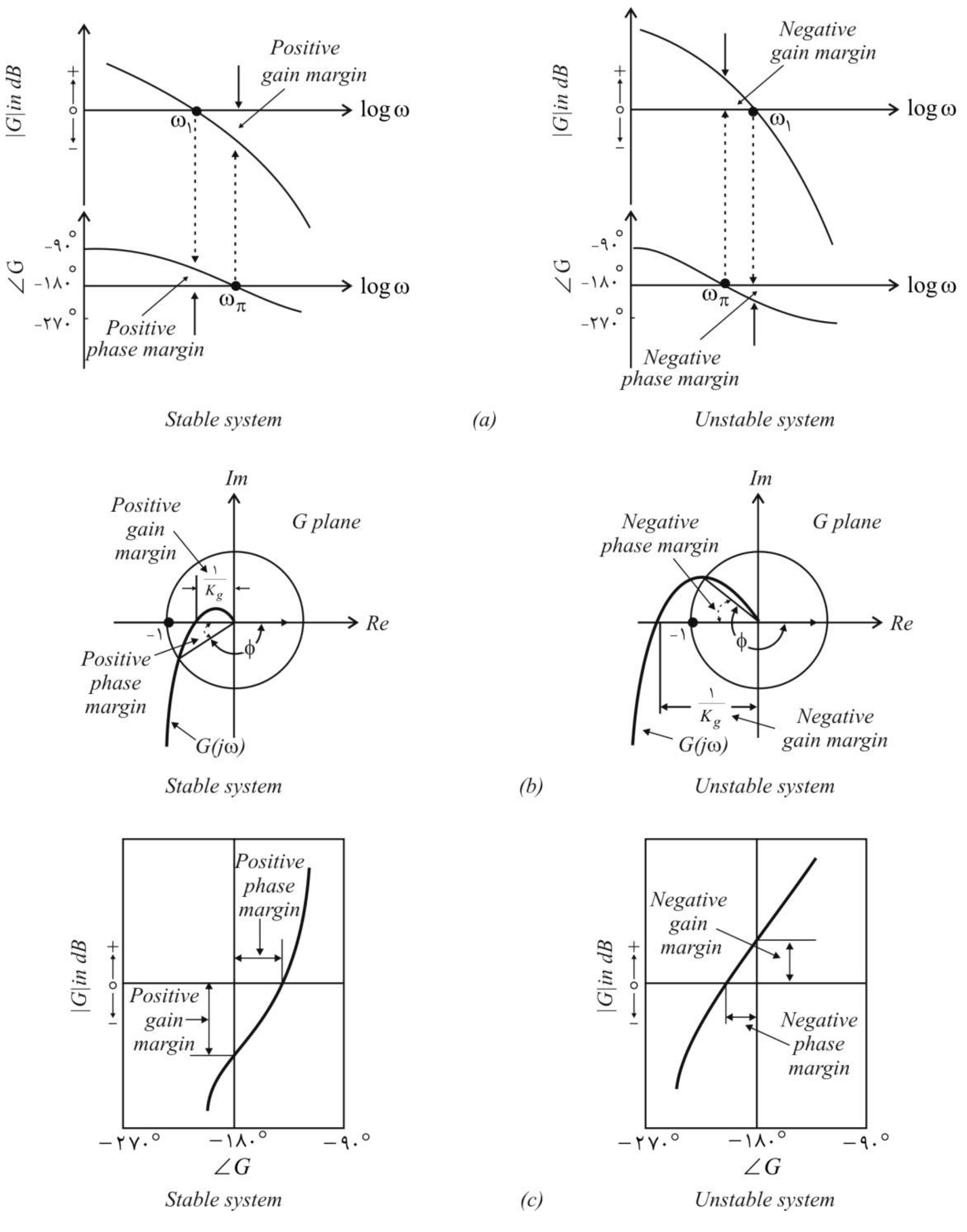
حال مفهوم دوایر M را در مورد طراحی سیستم‌های کنترلی استفاده می‌کنیم. برای رسیدن به عملکرد مطلوب عموماً تنظیم بهره نخستین معیاری است که مورد ملاحظه قرار می‌گیرد که ممکن است بر مقدار مطلوبی برای اوج تشدید مبتنی باشد. بنابراین برای سیستم کنترلی زیر، محاسبه بهره k که طی آن $G_1(j\omega) = kG(j\omega)$ بتواند مقدار M_p مطلوبی $(M_p > ۱)$ داشته باشد، چنین است:

$$k = \frac{۱}{\overline{OA}}$$

$$\sin\varphi = \frac{۱}{M_p}$$







شکل (۳-۲۳): **حد فاز و حد بهره مربوط به سیستم‌های پایدار و ناپایدار**

a) دیاگرام بود   b) نمودار قطبی   c) نمودار نیکولز

به بیان دیگر، گام‌های زیر را باید انجام دهیم:

۱- رسم نمودار قطبی تابع تبدیل حلقه باز نرمالیزه.

$$G(j\omega)=\frac{G_1(j\omega)}{k}$$

۲- رسم خطی از مبدأ که با محور حقیقی منفی زاویه $\varphi=\sin^{-1}\frac{1}{M_p}$ بسازد.

۳- رسم دایره‌ای که مرکزش روی محور حقیقی منفی باشد و بر مکان $G(j\omega)$ و خط op مماس باشد.

۴- رسم خط عمود بر محور حقیقی منفی از نقطه p، محل تلاقی را A می‌نامیم.

۵- مقدار مطلوب بهره مقداری است که مقیاس را طوری تغییر دهد که نقطه A، نقطه $(-۱+j۰)$ شود. لذا $k=\frac{۱}{OA}$.

۳-۸-۷ بررسی حساسیت در حوزه فرکانس

یادآوری می‌کنیم که مزیت بررسی سیستم‌های کنترل خطی در حوزه فرکانس این است که تجزیه و تحلیل سیستم‌های مرتبه بالا در این حوزه نسبت به حوزه زمان آسان‌تر است. همچنین به کمک نمودارهای حوزه فرکانسی، حساسیت سیستم نسبت به تغییرات پارامترها را می‌توان آسان‌تر بررسی کرد. تابع تبدیل یک سیستم کنترل خطی با فیدبک واحد را در نظر بگیرید:

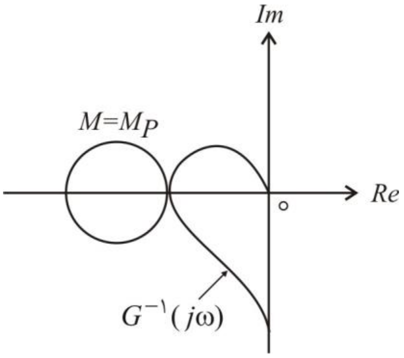
$$M(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{۱+G(s)} \qquad (۱)$$

حساسیت $M(s)$ نسبت به $G(s)$ عبارتست از:

$$S_G^M(s)=\frac{\partial M}{\partial G}\times\frac{G}{M}=\frac{۱}{۱+G(s)}=\frac{G^{-۱}(s)}{۱+G^{-۱}(s)}$$

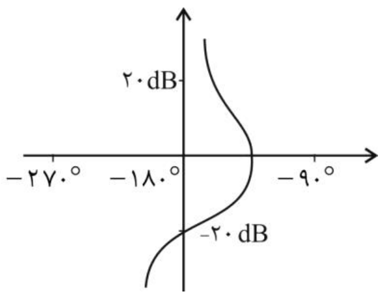
توجه کنید که حساسیت تابعی از متغیر مختلط s است. حال بحث طراحی در مورد حساسیت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$|S_G^M(j\omega)|=\frac{۱}{|۱+G(j\omega)|}=\frac{|G^{-۱}(j\omega)|}{|۱+G^{-۱}(j\omega)|}\le k \qquad (۲)$$



k عددی حقیقی و مثبت است. این معیار علاوه‌بر معیارهای پایداری نسبی و خطای حالت ماندگار می‌باشد. از رابطه اخیر می‌توان دریافت که این رابطه همان مقدار تابع تبدیل حلقه بسته $|M(j\omega)|$ در رابطه (۱) است که در آن $G^{-۱}(j\omega)$ به جای $G(j\omega)$ قرار می‌گیرد. در نتیجه، می‌توان با رسم $G^{-۱}(j\omega)$ در مختصات قطبی به همراه دوایر M ـ ثابت (نمودار نیکولز)، حساسیت را محاسبه کرد. به طوری که حداکثر حساسیت توسط مکان هندسی M ـ ثابت که بر منحنی $G^{-۱}(j\omega)$ مماس باشد، بدست می‌آید.

مثال: در یک سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی نمودار نیکولز *(log magnitude-phase)*، $GH(s)$ به صورت زیر داده شده است: (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۳ ـ هسته‌ای ۷۹)



۱) حد فاز -۴۵° و حد بهره $-۲۰dB$ است و سیستم حلقه بسته ناپایدار است.

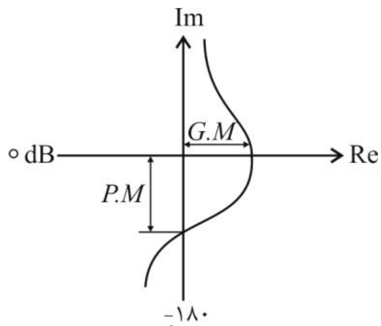
۲) حد فاز -۱۳۵° و حد بهره $+۲۰dB$ است و سیستم حلقه بسته پایدار است.

۳) حد فاز $+۴۵^\circ$ و حد بهره $-۲۰dB$ است و سیستم حلقه بسته ناپایدار است.

۴) حد فاز ۴۵° و حد بهره $+۲۰dB$ است و سیستم حلقه بسته پایدار است.

✍ **حل:** گزینه «۴»

طبق مطالب ارائه شده در متن داریم:



$$P.M=+۴۵^\circ$$
$$G.M=+۲۰dB$$

چون حد فاز و حد بهره مثبت می‌باشند، سیستم حلقه بسته پایدار است.