دانشگاه صنعتی شاهرود | **دانشکده علوم ریاضی**

سری ششم تمرینات درس ریاضی عمومی ۲ | **تاریخ تحویل: ۹۹/۳/۲۹**

---

(۱) از تابع $f(x,y,z)=x^2+z^2$ روی خم $C(t)=(e^t,t,e^t)$ در فاصله $[0,2]$ انتگرال بگیرید.

(۲) یک قاب سیمی به شکل بیضی با معادله $3x^2+4y^2=1$ را از درون یک سیال با جریان $\mathbf{F}=(x^3+2x-4\sin y)\mathbf{i}+(e^x-\cosh(xz))\,\mathbf{j}-\left(e^y z+3x^2 z\right)\mathbf{k}$ عبور می دهیم. شار برونسوی عبوری این سیال را از قاب فوق محاسبه کنید.

(۳) از میدان برداری $\mathbf{F}=\left(x^2y-ze^x\right)\mathbf{i}+\left(\dfrac{1}{3}x^3+\cos z\right)\mathbf{j}-\left(y\sin z+e^x\right)\mathbf{k}$ روی پاره خط واصل از نقطه $(1,2,0)$ تا نقطه $(-1,1,\pi)$ انتگرال بگیرید.

(۴) فرض کنید D ناحیه ای در ربع اول $\mathbf{R}^2$ محدود به تابع $y=x^3$ و خط $x=1$ باشد. مطلوبست محاسبه $\oint_C \mathbf{F}\cdot dr$ که در آن $\mathbf{F}=\left(y^2+xy-e^{x^2}\right)\mathbf{i}+\left(x^2+xy+\dfrac{2}{y^2+1}\right)\mathbf{j}$ میدان برداری و C مرز D است که پادساعتگرد جهت دار شده است.

(۵) صورت قضیه دیورژانس را برای میدان برداری $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ گذرنده از سطح خارجی رویه S متشکل از نیم مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ محدود به صفحه $z=2$ بررسی کنید.

(۶) فرض کنید S نیمه بالایی بیضیگون $x^2+\dfrac{4}{9}y^2+5z^2=4$ باشد و $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}+2x^2\mathbf{j}+\left(3^{xyz}-3\sin^2 z^4\right)(x^2+y^2+z^2)\mathbf{k}$ یک میدان برداری در $\mathbf{R}^3$ باشد. مقدار انتگرال $\iint_S curl\mathbf{F}\cdot n\,d\sigma$ را محاسبه کنید (توجه شود $curl\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{F}$).

1-

$$f(c(t)) = 2e^{2t}$$

$$c'(t) = (e^t, 1, e^t) \rightarrow \|c'(t)\| = \sqrt{1+e^{2t}}$$

$$I = \int_C f\,ds = \int_0^2 f(c(t))\,\|c'(t)\|\,dt = \int_0^2 2e^{2t}\sqrt{1+2e^{2t}}\,dt$$

قرار دهیم $u = 1+2e^{2t}$ بنابراین $du = 4e^{2t}dt$

t	0	2
u	3	$1+2e^4$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+2e^{2t}}\,(4e^{2t}dt) = \frac{1}{2}\int_3^{1+2e^4} \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}u^{3/2}\Big|_3^{1+2e^4}$$

$$= \frac{1}{3}\left((1+2e^4)^{3/2} - 3\sqrt{3}\right)$$

۲- مؤلفه سوم میدان در محاسبات دخالتی ندارد. خم مورد نظر را به فرم پارامتری می‌نویسیم

$$c(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t, \frac{1}{2}\sin t\right) \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

~~[illegible]~~ از صورت شار قضیه گرین استفاده می‌کنیم

$$I = \oint_C F\cdot n\,ds = \iint_D \operatorname{div} F\,dA$$

D ناحیه درون بیضی است.

$$\operatorname{div} F = 3x^2 + 2$$

با تبدیل $x = \frac{1}{\sqrt{3}} r\cos\theta$ و $y = \frac{1}{2} r\sin\theta$ بیضی فوق به دایره $r=1$ تبدیل می‌شود.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta & -\frac{1}{\sqrt{3}} r\sin\theta \\ \frac{1}{2}\sin\theta & \frac{1}{2} r\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \det J = \frac{1}{2\sqrt{3}} r$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(3\times\frac{1}{3} r^2\cos^2\theta + 2\right) r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^3\cos^2\theta + 2r)\,dr\,d\theta = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}r^4\cos^2\theta + r^2\right)\Big|_0^1 d\theta$$

(۲)

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} \cos^4\theta + 1 \right) d\theta$$

برای محاسبه انتگرال $\cos^4\theta$ از اتحاد $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ استفاده می‌کنیم

$$\int \cos^4\theta \, d\theta = \int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta = \frac{1}{4} \sin\theta \cos^3\theta + \frac{3}{8} \sin\theta \cos\theta + \frac{3}{8}\theta$$

$$\Rightarrow I = \frac{35}{32\sqrt{3}} \pi$$

۴- طبق ضابطه میدان برداری داریم:

$$P = x^2 y - z e^x \qquad Q = \frac{1}{3} x^3 + \cos z \qquad R = -y \sin z - e^x$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -\sin z = \frac{\partial Q}{\partial z} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = -e^x = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = x^2 = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \nabla \times F = 0$$

میدان پایستار است

و کار انجام شده به مسیر بستگی ندارد. تابع پتانسیل را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} \textcircled{1} \quad \phi_x = x^2 y - z e^x \\ \textcircled{2} \quad \phi_y = \frac{1}{3} x^3 + \cos z \\ \textcircled{3} \quad \phi_z = -y \sin z - e^x \end{cases}$$

$$\textcircled{1} : \phi = \int (x^2 y - z e^x) dx = \frac{1}{3} x^3 y - z e^x + f(y, z)$$

حال ϕ را در معادله ② جایگذاری می‌کنیم

$$\cancel{\phi_y = \frac{1}{3} x^3 y - z e^x + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3} x^3 + \cos z}$$

$$\phi_y = \frac{1}{3} x^3 + \cos z = \frac{1}{3} x^3 - z e^x + \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \cos z + z e^x \Rightarrow$$

۴

$$\Rightarrow f = \int (\cos z + z e^{x})\, dy = y\cos z + y z e^{x} + g(z)$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{1}{3}x^{3}y - z e^{x} + y\cos z + y z e^{x} + g(z)$$

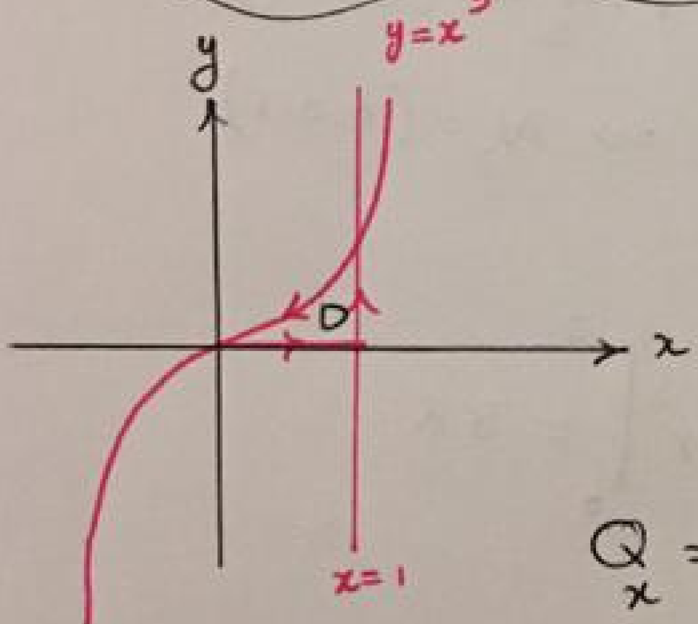
حال ϕ را در معادله ③ قرار دهیم

$$\phi_z = \cancel{-y\sin z} - e^{x} = \cancel{-e^{x}} - y\sin z + y e^{x} + g'(z)$$

$$\Rightarrow g'(z) = -y e^{x} \Rightarrow g = -y z e^{x}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{1}{3}x^{3}y - z e^{x} + y\cos z + C$$

$$\int_{(1,2,0)}^{(-1,1,\pi)} F\cdot ds = \phi(-1,1,\pi) - \phi(1,2,0) = -4 - \pi e^{-1}$$



۴- از صورت گردشی قضیه گرین استفاده می‌کنیم

$$P = y^{2} + xy + e^{x^{2}}$$

$$Q = x^{2} + xy + \frac{2}{y^{2}+1}$$

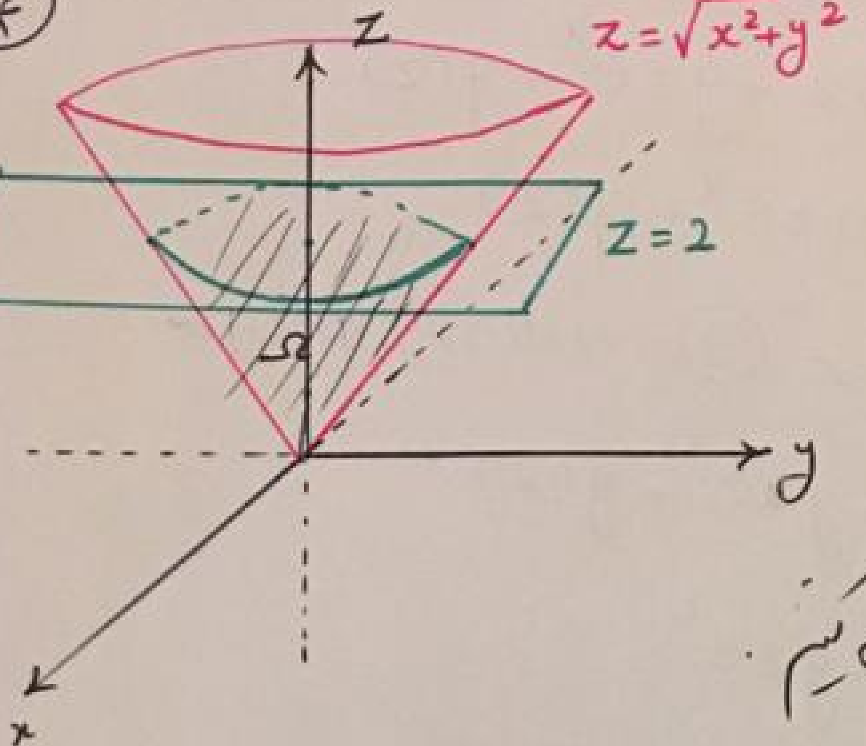
$$Q_x = 2x + y \qquad P_y = 2y + x$$

$$\oint_C F\cdot dr = \iint_D (Q_x - P_y)\, dA = \int_0^1\int_0^{x^3} (x-y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(xy - \frac{1}{2}y^{2}\right)\Big|_0^{x^3} dx = \int_0^1 \left(x^{4} - \frac{1}{2}x^{6}\right) dx$$

$$= \frac{1}{5}x^{5} - \frac{1}{14}x^{7}\Big|_0^1 = \frac{9}{70}$$

(۴)



۵- سطح خارجی جسم از دو قسمت تشکیل شده است

S_1: نیم مخروط

S_2: $z=2$ صفحه

مقدار انتگرال $\iint_{S_1} F\cdot N_1\, d\sigma$ را حساب می‌کنیم.

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2 \Rightarrow \nabla f=(2x,2y,-2z)$$

$$\Rightarrow N_1=\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}=\frac{(2x,2y,-2z)}{\sqrt{\underbrace{4x^2+4y^2}_{4z^2}+4z^2}}=\frac{(x,y,-z)}{\sqrt{2}\,z}$$

$$F\cdot N_1=\frac{1}{\sqrt{2}z}\underbrace{(x^2+y^2-z^2)}_{=0}=0 \Rightarrow \iint_{S_1} F\cdot N_1\, d\sigma=0$$

حال مقدار $\iint_{S_2} F\cdot N_2\, d\sigma$ را محاسبه می‌کنیم.

$$g(x,y,z)=z-2 \Rightarrow \nabla g=(0,0,1) \Rightarrow N_2=(0,0,1)$$

$$F\cdot N_2=z=2$$

$$\iint_{S_2} F\cdot N_2\, d\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^2 2r\,dr\,d\theta=2\pi r^2\Big|_0^2=8\pi$$

پس

$$\oiint_S F\cdot N\, d\sigma=\iint_{S_1} F\cdot N_1\, d\sigma+\iint_{S_2} F\cdot N_2\, d\sigma$$

$$=8\pi$$

اما:

$$\operatorname{div} F=1+1+1=3$$

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} F\, dv=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 3\,dz\,r\,dr\,d\theta=\cdots=8\pi$$

۶- ابتدا معادله بیضوی را استاندارد می‌کنیم

$$x^2+\frac{4}{9}y^2+5z^2=4 \xRightarrow{\div 4} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{5}{4}z^2=1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}+\frac{z^2}{(2/\sqrt{5})^2}=1$$

مرز نیم‌بیضوی با قرار دادن $z=0$ در معادله بیضوی بدست می‌آید

$$z=0 \Rightarrow \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1 \Rightarrow c(t)=(2\cos t, 3\sin t, 0)$$

$$0 \le t \le 2\pi$$

$$\iint_S \nabla\times F\cdot n\, d\sigma = \oint_C F\cdot ds = \int_0^{2\pi} F(c(t))\cdot c'(t)\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi} (-12\sin^2 t\cos t + 24\cos^3 t)\,dt$$

$$= -12\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos t\,dt}_{I_1} + 24\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^3 t\,dt}_{I_2}$$

برای محاسبه I_1 قرار می‌دهیم $u=\sin t$ آنگاه $I_1=0$.

برای محاسبه I_2 قرار می‌دهیم

$$I_2=\int_0^{2\pi} \cos^2 t\cdot\cos t\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(1-\underbrace{\sin^2 t}_{u})\cos t\,dt=0$$

$$\iint_S \nabla\times F\cdot n\,d\sigma = 0$$