محاسبات عددی

دانشگاه صنعتی شاهرود -دانشکده برق
مدرس: هادی گرایلو

منبع درسی

محاسبات عددی برای دانشجویان علوم و مهندسی

تالیف دکتر اصغر کرایه چیان

انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد

فصل دوم: درونیابی

فصل ۲ — درونیابی

$2a+3b=?$

۱.۲ مقدمه

موشکی از سطح زمین بطور عمودی به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. جدول زیر سرعت موشک را برحسب مایل در ثانیه در چند زمان مختلف نشان می‌دهد.

$t\ (sec)$	۰	۶۰	۱۲۰	۱۸۰	۲۴۰	۳۰۰
$v\ (mile/sec)$	۰.۰۰۰۰	۰.۰۸۲۴	۰.۲۷۴۷	۰.۶۵۰۲	۱.۳۸۵۱	۳.۲۲۲۹

در صورتی که رابطه سرعت و زمان در دست نباشد، چگونه می‌توان سرعت موشک را در $t =$ ۱۴۰ تخمین زد؟ تخمین سرعت در زمانی بین $t =$ ۰ و $t =$ ۳۰۰ یک مسأله‌ی درونیابی، و در زمانی خارج از این بازه، یک مسأله‌ی برونیابی نامیده می‌شود.

ابتدا مسأله را در حالت خاص، یعنی درونیابی خطی بررسی می‌کنیم.

۲.۲ درونیابی خطی

فرض کنید $f(x_i)$ و $f(x_{i+۱})$ به‌ترتیب مقادیر f در نقاط x_i و $x_{i+۱}$ باشند. تابع خطی $P(x)$ که نمودار آن از دو نقطه‌ی $(x_i, f(x_i))$ و $(x_{i+۱}, f(x_{i+۱}))$ می‌گذرد، عبارت‌است از

$$P(x) = \frac{x - x_{i+۱}}{x_i - x_{i+۱}} f(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+۱} - x_i} f(x_{i+۱}) \qquad (۱)$$

زیرا بسادگی می‌توان دید که

$$P(x_{i+۱}) = f(x_{i+۱}) \quad \text{و} \quad P(x_i) = f(x_i)$$

اکنون برای هر x که $x_i < x < x_{i+۱}$، داریم $f(x) \approx P(x)$.

در مثال موشک، اگر $x_i = ۱۲۰$ و $x_{i+۱} = ۱۸۰$ و $x = ۱۴۰$ بگیریم، آنگاه از(۱) نتیجه می‌شود که

$$P(۱۴۰) = \frac{۱۴۰ - ۱۸۰}{۱۲۰ - ۱۸۰}(۰.۲۷۴۷) + \frac{۱۴۰ - ۱۲۰}{۱۸۰ - ۱۲۰}(۰.۶۵۰۲) = ۰.۳۹۹۸$$

که نشان دهنده مقدار تقریبی سرعت موشک در $t = ۱۴۰$ است.

۳.۲ درونیابی چندجمله‌ای

فرض کنید مقادیر یک تابع f در نقاط متمایز x_0، x_1، ...، x_n به‌صورت جدول زیر در دست باشد. مسأله عبارت‌است از یافتن مقدار تقریبی $f(x)$ که x نقطه‌ای است بین نقاط x_0 تا x_n و $x \neq x_i$، $i = 0, 1, ..., n$.

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_n)$

برای این منظور یک چندجمله‌ای $P(x)$ بنا می‌کنیم که از $n+1$ نقطه‌ی $(x_i, f(x_i))$، $i = 0, 1, ..., n$ بگذرد، که در این‌صورت $P(x_i) = f(x_i)$. حال برای $x \neq x_i$، داریم $f(x) \approx P(x)$.

قضیه‌ی ۱ — فرض کنید نقاط $(x_i, f(x_i))$، $i = 0, 1, ..., n$ که x_i ها متمایز هستند، مفروض باشند. آنگاه یک و تنها یک چندجمله‌ای $P(x)$، حداکثر از درجه‌ی n، وجود دارد به‌طوری که

$$P(x_i) = f(x_i) \quad , i = 0, 1, \ldots, n \tag{۲}$$

چندجمله‌های لاگرانژ

$$\boxed{L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}}, \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{۳}$$

این چندجمله‌ایها از درجه‌ی n هستند و خاصیت زیر را دارند.

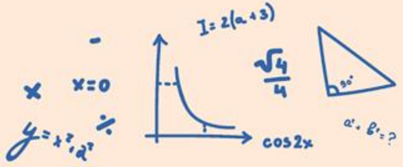
$$L_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

حال چندجمله‌ای $P(x)$ را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم

چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ $\longrightarrow$

$$\boxed{P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)} \tag{۴}$$

$P(x)$ از درجه‌ی حداکثر n است و بسادگی می‌توان دید که شرط (۲) برقرار است. به‌این



مثال ۱ — مقادیر یک تابع f به‌صورت جدول زیر داده شده است. اولاً چندجمله‌ای درونیاب این تابع را به‌دست آورید. ثانیاً به‌کمک آن $f(۷)$ را تخمین بزنید.

x	۱	۲	۴	۸
$f(x)$	۱	۳	۷	۱۱

حل — در این‌جا $n = ۳$ و داریم

$$L_۰(x) = \frac{(x-۲)(x-۴)(x-۸)}{(۱-۲)(۱-۴)(۱-۸)} = -\frac{۱}{۲۱}(x-۲)(x-۴)(x-۸)$$

$$L_۱(x) = \frac{(x-۱)(x-۴)(x-۸)}{(۲-۱)(۲-۴)(۲-۸)} = \frac{۱}{۱۲}(x-۱)(x-۴)(x-۸)$$

$$L_۲(x) = \frac{(x-۱)(x-۲)(x-۸)}{(۴-۱)(۴-۲)(۴-۸)} = -\frac{۱}{۲۴}(x-۱)(x-۲)(x-۸)$$

$$L_۳(x) = \frac{(x-۱)(x-۲)(x-۴)}{(۸-۱)(۸-۲)(۸-۴)} = \frac{۱}{۱۶۸}(x-۱)(x-۲)(x-۴)$$

بنابراین

$$P(x) = \sum_{i=۰}^{۳} L_i(x) f(x_i) = L_۰(x) + ۳L_۱(x) + ۷L_۲(x) + ۱۱L_۳(x)$$

و از این‌جا به‌دست می‌آوریم

$$P(۷) = \frac{۷۶}{۷}$$

لذا $f(۷) \approx P(۷) = ۱۰.۸۵۷۱۴$

۴.۲ خطا در چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ

اگر مقادیر یک تابع مفروض $f(x)$ در $n+1$ نقطه‌ی متمایز $x_i \in [a,b]$ ، $i=0,1,\dots,n$ معلوم و برابر $f(x_i)$ باشد، آنگاه به‌طوری که دیدیم یک و تنها یک چندجمله‌ای $P(x)$ ، حداکثر از درجه‌ی n ، می‌توان بنا نمود به‌طوری که $P(x_i)=f(x_i)$. سئوالی که مطرح می‌شود این‌است که برای سایر نقاط $x\in[a,b]$ ، $P(x)$ چه اندازه به $f(x)$ نزدیک است ، به عبارت دیگر اگر تابع خطا را به‌صورت

$$E(x)=f(x)-P(x),\quad a\le x\le b \qquad (5)$$

تعریف کنیم یک کران بالا برای $E(x)$ چیست ؟ قضیه‌ی زیر پاسخی به‌این سئوال است.

قضیه‌ی ۲ — اگر چندجمله‌ای $P(x)$ تابع $f\in C^{n+1}[a,b]$ را در نقاط $x_i\in[a,b]$ ، $i=0,1,\dots,n$ ، درونیابی کند، آنگاه خطای درونیابی عبارت‌است از

$$E(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c(x)) \qquad (6)$$

که $c(x)$ نقطه‌ای است در بازه‌ی شامل نقاط x_i و نقطه‌ی x .

نماد $C^{n+1}[a,b]$ نشان دهنده‌ی فضای همه‌ی توابعی است که مشتق تا مرتبه‌ی $n+1$ آنها بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته هستند.

مثال ۲ — چندجمله‌ای $P(x)$ از درجه‌ی ۲ را چنان بیابید که مقادیرش در سه نقطه‌ی $x_0=0$ ، $x_1=\frac{1}{6}$ و $x_2=\frac{1}{2}$ با مقادیر تابع $f(x)=\sin\pi x$ در این نقاط، برابر باشد. اگر قرار دهیم $E(x)=P(x)-f(x)$ ، کران بالایی برای $E(x)$ به‌دست آورید.

$\cos 2x$

حل — می‌خواهیم $P(x)$ که مقادیر $f(x)$ را مطابق جدول زیر درونیابی می‌کند، به‌دست آوریم.

x	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1

داریم

$$P(x)=L_0(x)f(0)+L_1(x)f(\tfrac{1}{6})+L_2(x)f(\tfrac{1}{2})=\frac{1}{2}L_1(x))+L_2(x)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-0)(x-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{6}-0)(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})}=-9x(2x-1)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-0)(x-\frac{1}{6})}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})}=x(6x-1)$$

پس از جایگذاری خواهیم داشت

$$P(x)=-3x^2+\frac{7}{2}x$$

داریم

$$E(x)=\frac{(x-0)(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})}{3!}f'''(c)$$

$$f'(x)=\pi\cos\pi x,\quad f''(x)=-\pi^2\sin\pi x,\quad f'''(x)=-\pi^3\cos\pi x$$

بنابراین

$$|E(x)|\le\frac{\pi^3}{6}|x(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})|\le\frac{\pi^3}{6}\max_{0\le x\le 0.5}|x(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})|$$

فرض کنید

$$g(x)=x(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})$$

و $M=\max_{0\le x\le 0.5}|g(x)|$. با استفاده از مشتق تابع g و انجام محاسبات لازم در می‌یابیم که $M\approx 0.00978061<0.01$. لذا

$$|E(x)|\le\frac{\pi^3}{6}M<\frac{\pi^3}{600}$$

الگوریتم درونیابی لاگرانژ

فرض کنید مقادیر یک تابع f در $n+1$ نقطه‌ی متمایز x_i معلوم و برابر $f(x_i) = f_i$ ، $i = 0, 1, \ldots, n$ ، باشد. برای تعیین مقدار تقریبی $f(z)$ که $z \neq x_i$ ، می‌توان از الگوریتم زیر استفاده نمود.

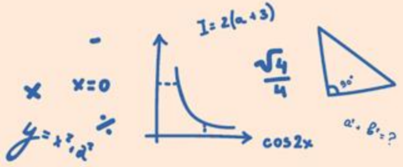
$$Input \;\; z \;,\; (x_i, f(x_i)), i = 0, 1, \ldots, n$$

$$p = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}
For \; i = 0, 1, \ldots, n \;,\; do: \\
c = f_i \\
\left[\begin{array}{l}
For \; j = 0, 1, \ldots, n (j \neq i) \;,\; do: \\
c = c * \frac{z - x_j}{x_i - x_j} \\
End \; j
\end{array}\right. \\
p = p + c \\
End \; i
\end{array}\right.$$

در این‌صورت p مقدار چندجمله‌ای درونیاب به‌ازای z است ، به‌عبارت دیگر $f(z) \approx p$

تکلیف کامپیوتری



۵.۲ تفاضلات تقسیم شده و چندجمله‌ای درونیاب نیوتن

تفاضلات تقسیم شده

فرض کنید $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط متمایز و $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ مقادیر تابع f د
این نقاط باشند. تفاضلات تقسیم شده مرتبه‌ی صفر تابع f را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$f[x_k] = f(x_k), \; k = 0, 1, \dots, n$$

و تفاضلات تقسیم شده مرتبه‌ی اول تابع $f(x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}, \; k = 0, 1, \dots, n-1$$

همین‌طور تفاضلات تقسیم شده مرتبه‌ی دوم به‌شکل زیر تعریف می‌شوند

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}, \; k = 0, 1, \dots, n-2$$

به‌طورکلی، تفاضلات تقسیم شده مرتبه‌ی j چنین است

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+j}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, \dots x_{k+j}] - f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+j-1}]}{x_{k+j} - x_k}$$

$$j = 1, 2, \dots, n \;, k = 0, 1, \dots, n-j$$

تعریف ۳ — اگر f در x_0 مشتق‌پذیر باشد، تعریف می‌کنیم

$$f[x_0, x_0] = \lim_{h \to 0} f[x_0, x_0 + h] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

جدول تفاضلات تقسیم شده

x	$f(x)$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$

مثال ۳ — جدول تفاضلات تقسیم شده برای تابع f که مقادیر آن به‌صورت

x	۱	۲	۴	۸
$f(x)$	۱	۳	۷	۱۱

داده شده، چنین است

x	$f(x)$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
۱	۱			
۲	۳	۲		
۴	۷	۲	۰	
۸	۱۱	۱	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{42}$

چندجمله‌ای درونیاب نیوتن

قضیه‌ی ۳ — فرض کنید $f(x_i)$ ، مقادیر تابع f ، در $n+۱$ نقطه‌ی متمایز x_i ، $i = ۰, ۱, \ldots, n$ در دست باشد. چندجمله‌ای $P(x)$ ، حداکثر از درجه‌ی n ، که $f(x)$ را در نقاط x_i درونیابی می‌کند، چنین است

$$P(x) = f(x_۰) + (x - x_۰) f[x_۰, x_۱] + (x - x_۰)(x - x_۱) f[x_۰, x_۱, x_۲] + \ldots$$
$$+ (x - x_۰)(x - x_۱)\ldots(x - x_{n-۱}) f[x_۰, x_۱, \ldots, x_n] \qquad (۹)$$

تذکر مهم — اگرچه شکل ظاهری چندجمله‌ایهای درونیاب لاگرانژ و نیوتن متفاوت هستند، ولی از آن‌جایی که چندجمله‌ای درونیاب یکتا است ، برای یک تابع مفروض این دو چندجمله‌ای در حقیقت یکسان هستند.

مثال ۴ — چندجمله‌ای درونیاب نیوتن که مقادیر تابع f مطابق جدول زیر را درونیابی می‌کند، به‌دست آورید.

x	۱	۲	۴	۸
$f(x)$	۱	۳	۷	۱۱

حل — در مثال قبل، جدول تفاضلات تقسیم شده این تابع را به‌صورت زیر به‌دست آوردیم

x	$f(x)$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
۱	۱			
۲	۳	۲		
۴	۷	۲	۰	
۸	۱۱	۱	$-\frac{۱}{۶}$	$-\frac{۱}{۴۲}$

با توجه به (۹) و این‌که در این‌جا $n = ۳$ ، داریم

$$P(x) = ۱ + (x-۱)(۲) + (x-۱)(x-۲)(۰) + (x-۱)(x-۲)(x-۴)(-\frac{۱}{۴۲})$$

یا

$$P(x) = -۱ + ۲x - \frac{۱}{۴۲}(x-۱)(x-۲)(x-۴)$$

همین چندجمله‌ای را قبلاً با روش لاگرانژ به‌دست آوردیم. البته با توجه به یکتایی چندجمله‌ای درونیاب ، انتظار چنین نتیجه‌ای را داشتیم.

تذکر — با توجه به رابطه‌ی (۹)، ملاحظه می‌شود که اگر چندجمله‌ای $P_{n-۱}(x)$ تابع f را در n نقطه‌ی متمایز $x_۰$، $x_۱$ ، … ، $x_{n-۱}$ و چندجمله‌ای $P_n(x)$ ، f را در $x_۰$، $x_۱$، … ، x_n درونیابی کند، آنگاه رابطه بازگشتی زیر را داریم

$$P_n(x) = P_{n-۱}(x) + (x - x_۰)(x - x_۱)\ldots(x - x_{n-۱}) f[x_۰, x_۱, \ldots, x_n]$$

ازاین خاصیت نتیجه می‌شود که اگر مقادیر یک تابع را به‌صورت جدولی داشته باشیم و چندجمله‌ای درونیاب نیوتن متناظر را به‌دست آورده باشیم، آنگاه با افزودن یک نقطه به انتهای جدول، چندجمله‌ای درونیاب جدید را می‌توان با استفاده از اطلاعات قبلی به‌دست آورد. این خاصیت در چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ وجود ندارد.

خطا در چندجمله‌ای درونیاب نیوتن

اگر $P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب نیوتن تابع مفروض $f(x)$ باشد و $E(x) = f(x) - P(x)$ تابع خطا باشد، آنگاه با توجه به‌این که چندجمله‌ای درونیاب یکتاست ، $P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ نیز هست. لذا $E(x)$ همان خطای درونیاب لاگرانژ است که با فرمول (۶) داده می‌شود.

مثال ۵ — بافرض آن‌که

$$\log ۵ = ۰.۶۹۸۹۷ \,, \log ۶ = ۰.۷۷۸۱۵ \,,\ \log ۸ = ۰.۹۰۳۰۹ \,,\ \log ۹ = ۰.۹۵۴۲۴$$

با استفاده از چندجمله‌ای درونیاب نیوتن ، $\log ۷$ را تخمین بزنید و کران بالایی برای خطا به‌دست آورید.

حل — تابع $f(x) = \log x$ را در نظر می‌گیریم. مقادیر این تابع در نقاط $x_۰ = ۵$ ، $x_۱ = ۶$ ، $x_۲ = ۸$ ، $x_۳ = ۹$ در دست است. جدول تفاضلات این تابع را تشکیل می‌دهیم.

x	$\log x$	$f[.,.]$	$f[.,.,.]$	$f[.,.,.,.]$
۵	۰.۶۹۸۹۷			
۶	۰.۷۷۸۱۵	۰.۰۷۹۱۸		
۸	۰.۹۰۳۰۹	۰.۰۶۲۴۷	−۰.۰۰۵۵۷	
۹	۰.۹۵۴۲۴	۰.۰۵۱۱۵	−۰.۰۰۳۷۷	۰.۰۰۰۴۵

پس، چندجمله‌ای درونیاب نیوتن چنین است

$$P(x) = ۰.۶۹۸۹۷ + (x-۵)(۰.۰۷۹۱۸) + (x-۵)(x-۶)(-۰.۰۰۵۵۷) +$$
$$(x-۵)(x-۶)(x-۸)(.۰۰۰۴۵)$$

لذا

$$\log ۷ \approx P(۷) = ۰.۸۴۵۳۰$$

با پنج رقم با معنی داریم $\log ۷ = ۰.۸۴۵۱۰$. بنابراین خطا برابر است با

$$|E(۷)| = |\log ۷ - P(۷)| = ۰.۰۰۰۲$$

اکنون با استفاده از فرمول خطای درونیابی لاگرانژ، کران بالایی برای خطا می‌یابیم. داریم

$$E(۷) = \frac{(۷-۵)(۷-۶)(۷-۸)(۷-۹)}{۴!} f^{(۴)}(\xi)$$

$$f(x) = \log x = \frac{\ln x}{\ln ۱۰} = ۰.۴۳۴۲۹ \ln x$$

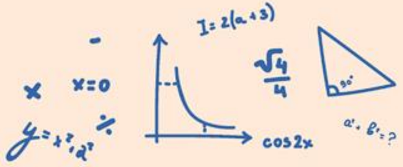
پس

$$f^{(۴)}(x) = ۰.۴۳۴۲۹(-\frac{۶}{x^۴})$$

و

$$|E(۷)| \leq (۰.۴۳۴۲۹) \max_{۵ \leq x \leq ۹} (\frac{۱}{x^۴}) = ۰.۰۰۰۶۹۴۸۶$$

همان‌طور که در این مثال هم دیده می‌شود کرانهایی که برای خطا از فرمول لاگرانژ به‌دست می‌آیند عموماً خیلی بزرگتر از خطای واقعی است.



تفاضلات متناهی

فرض کنید یک تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و مقادیر آن در نقاط هم فاصله‌ی

$$x_i = a+ih, \quad i=0,1,\dots n\,, \quad h=\frac{b-a}{n}$$

معلوم باشد. تعریف می‌کنیم

$$\Delta f_i = f_{i+1}-f_i\,, i=0,1,\dots,n-1$$

$$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1}-\Delta f_i,\ , i=0,1,\dots,n-2$$

و به‌طورکلی

$$\Delta^{k+1} f_i = \Delta^k f_{i+1}-\Delta^k f_i\,, k=0,1,\dots,n-1\,, i=0,1,\dots n-k-1$$

اعداد $\Delta^k f_i$ را تفاضلات پیشروی تابع f می‌نامند.

متشابهاً تفاضلات پسروی تابع f به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}\,, i=1,2,\dots,n$$

$$\nabla^2 f_i = \nabla f_i - \nabla f_{i-1},\ , i=2,3,\dots,n$$

و به‌طورکلی

$$\nabla^{k+1} f_i = \nabla^k f_i - \nabla^k f_{i-1}\,, k=0,1,\dots,n-1\,, i=k+1,k+2,\dots,n$$

دو جدول زیر جدولهای تفاضلات تابع f (برای $n=3$) هستند.

جدول تفاضلات پیشرو

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
x_0	f_0			
		Δf_0		
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$	
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$	
		Δf_2		
x_3	f_3			

جدول تفاضلات پسرو

x	$f(x)$	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$
x_0	f_0			
		∇f_1		
x_1	f_1		$\nabla^2 f_2$	
		∇f_2		$\nabla^3 f_3$
x_2	f_2		$\nabla^2 f_3$	
		∇f_3		
x_3	f_3			

تذکر— برای یک تابع مفروض، اعداد دو جدول تفاضل پیشرو و تفاضل پسرو یکسان هستند و تفاوت تنها در این است که اعداد با نمادهای مختلف نوشته می‌شوند. برای مثال، $\Delta f_0 = \nabla f_1$ و $\Delta^2 f_1 = \nabla^2 f_3$

مثال ٦ــ جدول تفاضلات پیشروی تابع $f(x) = 2x^3$ ، برای نقاط $x_0 = -1$ ، $x_1 = 0$ ، $x_2 = 1$ ، $x_3 = 2$ ، $x_4 = 3$ به‌صورت زیر است.

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
−۱	−۲				
		۲			
۰	۰		۰		
		۲		۱۲	
۱	۲		۱۲		۰
		۱۴		۱۲	
۲	۱٦		۲۴		
		۳۸			
۳	۵۴				

توجه کنید در این مثال که f یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۳ است ، ستون سوم تفاضلات ثابت و ستون چهارم صفر است. این مطلب در حالت کلی درست است، یعنی ، برای یک چندجمله‌ای درجه‌ی n ، ستون nام جدول تفاضلات ثابت و ستون $n+1$ام برابر صفر است.(ثابت کنید)

چندجمله‌ای درونیاب پیشروی نیوتن

به‌طوری که دیدیم چندجمله‌ای درونیاب نیوتن به‌صورت زیر است

$$P(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]$$
$$+ \ldots + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\ldots x_n]$$

که در آن x_i ها لزوماً هم فاصله نیستند. حال فرض کنید این نقاط هم فاصله باشند. پس به قضیه‌ی بالا داریم

$$f[x_0,x_1] = \frac{\Delta f_0}{h},\quad f[x_0,x_1,x_2] = \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2},\ldots, f[x_0,x_1,\ldots,x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n} \qquad (۱۰)$$

قرار می‌دهیم

$$\frac{x-x_0}{h} = s \qquad (۱۱)$$

پس

$$\begin{aligned}(x-x_0) &= sh\\ (x-x_1) = (x-x_0-h) &= sh-h = (s-1)h\\ (x-x_2) = (x-x_1-h) &= (s-1)h-h = (s-2)h\\ &\vdots\\ (x-x_{n-1}) &= (s-n+1)h\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

باقرار دادن از (۱۰) و (۱۲) در چندجمله‌ای درونیاب نیوتن خواهیم داشت

$$P(x_s) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \qquad (۱۳)$$

چندجمله‌ای (۱۳) را چندجمله‌ای درونیاب پیشروی نیوتن می‌نامند، و آن را به‌صورت زیر نیز می‌نویسند

$$P(x_s) = f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_0 + \ldots + \binom{s}{n}\Delta^n f_0$$

که در آن نماد ( ) ضریب دو جمله‌ای نیوتن است.

متشابهاً، می‌توان نشان داد که چندجمله‌ای درونیاب پسروی نیوتن به‌شکل زیر است.(نشان دهید)

$$P(x_s) = f_n + s\nabla f_n + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \ldots + \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f_n \qquad (۱۴)$$

که در آن

$$\frac{x-x_n}{h} = s \qquad (۱۵)$$

برای درونیابی در نقاط ابتدای جدول از چندجمله‌ای درونیاب پیشرو، و برای درونیابی در نقاط انتهای جدول از چندجمله‌ای درونیاب پسروی نیوتن استفاده می‌شود.

خطا در چندجمله‌ای درونیاب پیشرو نیوتن

قبلاً نشان دادیم که خطا در چندجمله‌ای درونیاب نیوتن (لاگرانژ) چنین است

$$E(x) = \frac{(x - x_۰)(x - x_۱)\dots(x - x_n)}{(n + ۱)!} f^{(n+۱)}(c(x))$$

حال اگر x_i ها هم فاصله باشند و قرار دهیم $s = \frac{x - x_۰}{h}$، آنگاه با توجه به روابط (۱۲) فرمول خطا به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$E(x_s) = \frac{s(s - ۱)(s - ۲)\dots(s - n)}{(n + ۱)!} h^{n+۱} f^{(n+۱)}(c(x_s))$$

مثال ۷ — با استفاده از داده‌های جدول زیر $f(۰.۳)$ را تقریب بزنید.

x	۰	۰.۲	۰.۴	۰.۶	۰.۸
$f(x)$	۰	۰.۱۹۹	۰.۳۸۹	۰.۵۶۵	۰.۷۱۷

حل — جدول تفاضلات (پیشرو و پسرو) تابع به‌صورت زیر است

x	$f(x)$				
۰	۰				
		۰.۱۹۹			
۰.۲	۰.۱۹۹		−۰.۰۰۹		
		۰.۱۹۰		−۰.۰۰۵	
۰.۴	۰.۳۸۹		−۰.۰۱۴		−۰.۰۰۵
		۰.۱۷۶		−۰.۰۱۰	
۰.۶	۰.۵۶۵		−۰.۰۲۴		
		۰.۱۵۲			
۰.۸	۰.۷۱۷				

فرض کنید بخواهیم $f(۰.۳)$ را با استفاده از چندجمله‌ای درونیاب پیشروی نیوتن تقریب بزنیم. داریم $x_۰ = ۰$. لذا

$$\boxed{s = \frac{x - x_۰}{h}} = \frac{۰.۳ - ۰}{۰.۲} = ۱.۵$$

پس با توجه به فرمول (۱۳) و جدول بالا، خواهیم داشت

$$f(۰.۳) \approx P(۰.۳) = ۰ + (۱.۵)(۰.۱۹۹) + \frac{(۱.۵)(۰.۵)}{۲}(-۰.۰۰۹)$$

$$+\frac{(۱.۵)(۰.۵)(-۰.۵)}{۶}(-۰.۰۰۵) + \frac{(۱.۵)(۰.۵)(-۰.۵)(-۱.۵)}{۲۴}(-۰.۰۰۵) = ۰.۲۹۵$$

حال $f(۰.۳)$ را به‌کمک چندجمله‌ای درونیاب پسروی نیوتن تقریب می‌زنیم. در این مثال $n = ۴$ و $x_۴ = ۰.۸$. لذا

$$s = \frac{x - x_۴}{h} = \frac{۰.۳ - ۰.۸}{۰.۲} = -۲.۵$$

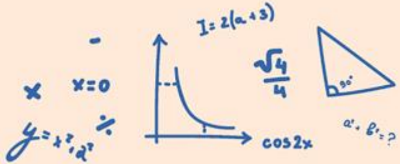
پس با استفاده از فرمول (۱۴) و جدول بالا، داریم

$$f(۰.۳) \approx P(۰.۳) = ۰.۷۱۷ + (-۲.۵)(۰.۱۵۲) + \frac{(-۲.۵)(-۱.۵)}{۲}(-۰.۰۲۴) + \frac{(-۲.۵)(-۱.۵)(-۰.۵)}{۶}(-۰.۰۱۰) + \frac{(-۲.۵)(-۱.۵)(-۰.۵)(۰.۵)}{۲۴}(-۰.۰۰۵) = ۰.۲۹۵$$

جدول داده شده مربوط به تابع $f(x) = \sin x$ است. داریم

$$f(۰.۳) = \sin(۰.۳) = ۰.۲۹۶$$

ملاحظه می‌شود که مقادیر به‌دست آمده توسط چندجمله‌ایهای درونیاب به مقدار واقعی نزدیک هستند .



۶.۲ درونیابی با اسپلاین‌ها

تعریف ۴ — تابع s تعریف شده بر بازه‌ی $[a,b]$ یک اسپلاین درجه‌ی k با گره‌های $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ نامیده می‌شود، هرگاه

(الف) — در هر زیر بازه‌ی $[x_i, x_{i+1}]$ ، $i = 0, 1, \ldots, n-1$ ، s یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه‌ی k باشد.

(ب) — s ، s' ، s'' ، ... ، $s^{(k-1)}$ بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشند، به‌عبارت دیگر $s \in C^{k-1}[a,b]$.

پس ، یک اسپلاین درجه‌ی k تابعی‌است قطعه قطعه چندجمله‌ای درجه‌ی k که $k-1$ بار بر $[a,b]$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است. از این‌رو می‌نویسیم

$$s(x) = s_i(x) \;,\; x \in [x_i, x_{i+1}]$$

که هر مؤلفه‌ی s_i یک چندجمله‌ای درجه‌ی k است.

مثال ۸ — توابع زیر را در نظر بگیرید

(الف)

$$s(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 3 - 2x & 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

(ب)

$$s(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x < 2 \\ 6 + 2(x-2) + 3(x-2)^2 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

(پ)

$$s(x) = \begin{cases} x^3 + (x+1)^3 & -1 \le x < 0 \\ 1 + 3x + 3x^2 & 0 \le x < 1 \\ 7 + 9(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3 & 1 \le x \le 5 \end{cases}$$

تابع تعریف شده در (الف) در $x = 1$ پیوسته است و هر دو مؤلفه‌ی آن خطی است ، و لذا یک اسپلاین خطی بر بازه‌ی $[0,3]$ است.

تابع تعریف شده در (ب) اسپلاین نیست، زیرا در $x = 2$ پیوسته نیست.

تابع تعریف شده در (پ) هر مؤلفه‌اش یک تابع حداکثر درجه‌ی ۳ است ، و می‌توان نشان داد که s ، s' و s'' در گره‌های درونی ۰ و ۱ پیوسته هستند. پس یک اسپلاین درجه‌ی ۳ بربازه‌ی $[-1,5]$ است.

درونیابی با اسپلاین‌های درجه‌ی سه

اغلب برای درونیابی از اسپلاین‌های درجه‌ی سه استفاده می‌شود. بنابراین، فرض کنید مقادیر یک تابع f در $n+1$ نقطه‌ی (گره) $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ در دست و برابر f_i ، $i=0,1,\ldots,n$ باشد. می‌خواهیم اسپلاین درجه‌ی ۳، $s(x)$ را به‌دست آوریم به‌طوری که

1

$$s(x_i)=f(x_i)\ ,\ i=0,1,\ldots,n-1$$

و علاوه براین، تابع $s(x)$ شرایط زیر را داشته باشد

2

$$s(x)=s_i(x)\ ,\ x\in[x_i,x_{i+1}]\ ,\ i=0,1,\ldots n-1$$

که $s_i(x)$ یک چند جمله‌ای درجه‌ی ۳ است.

در گره x_i که مشترک در دو بازه‌ی $[x_{i-1},x_i]$ و $[x_i,x_{i+1}]$ است برای پیوستگی و همواری اسپلاین باید برای $i=1,2,\ldots,n-1$ شرایط زیر بر قرار باشد

3

(الف) $s_{i-1}(x_i)=s_i(x_i)$

(ب) $s'_{i-1}(x_i)=s'_i(x_i)$

(پ) $s''_{i-1}(x_i)=s''_i(x_i)$

از آن‌جایی که در بازه‌ی $[x_i,x_{i+1}]$ ، $s''_i(x)$ یک تابع خطی است، بنا به فرمول لاگرانژ داریم

$$s''_i(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}s''_i(x_i)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}s''_i(x_{i+1})\ ,\ x\in[x_i,x_{i+1}] \qquad (16)$$

قرار می‌دهیم

$$m_i=\frac{1}{6}s''_i(x_i)\quad ,\ h_i=x_{i+1}-x_i$$

پس

$$s''_i(x)=-\frac{6(x-x_{i+1})}{h_i}m_i+\frac{6(x-x_i)}{h_i}m_{i+1} \qquad (17)$$

با دو بار انتگرال‌گیری داریم

$$s'_i(x)=-\frac{3(x-x_{i+1})^2}{h_i}m_i+\frac{3(x-x_i)^2}{h_i}m_{i+1}+c_i \qquad (18)$$

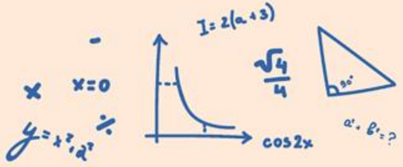
$$s_i(x)=-\frac{(x-x_{i+1})^3}{h_i}m_i+\frac{(x-x_i)^3}{h_i}m_{i+1}+c_i(x-x_i)+d_i \qquad (19)$$

از معادله‌ی (۱۹) و شرط درونیابی نتیجه می‌شود که

$i=0,1,\ldots,n-1$

$$s_i(x_i)=h_i^2m_i+d_i=f_i$$

$$s_i(x_{i+1})=h_i^2m_{i+1}+c_ih_i+d_i=f_{i+1}$$



درونیابی با اسپلاین‌های درجه‌ی سه

از این‌جا

$$\begin{cases} d_i = f_i - h_i^2 m_i \\ c_i = \frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} + h_i(m_i - m_{i+1}) \ , \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases} \qquad (۲۰)$$

اگر m_i و m_{i+1} معلوم باشند، آنگاه $s(x)$ در بازه‌ی $[x_i, x_{i+1}]$ به‌صورت معادله‌ی (۱۹) است که c_i و d_i با روابط (۲۰) داده می‌شوند.

برای یافتن این کمیتها، از شرط پیوستگی مشتق در نقاط گره‌ای، یعنی شرط (ب) استفاده می‌کنیم. پس، از (۱۸)

$$s'_{i-1}(x) = -\frac{3(x-x_i)^2}{h_{i-1}} m_{i-1} + \frac{3(x-x_{i-1})^2}{h_{i-1}} m_i + c_{i-1} \ , \ x \in [x_{i-1}, x_i] \qquad (۲۱)$$

حال از (۱۸)، (۲۰)، (۲۱) و شرط (ب) پس از اختصار نتیجه می‌شود که

$$h_{i-1} m_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i) m_i + h_i m_{i+1} = f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i] \ , i = 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (۲۲)$$

دستگاه (۲۲) یک دستگاه خطی شامل $n-1$ معادله و $n+1$ مجهول m_0، m_1، ...، و m_n است. برای آن که تعداد معادلات و مجهولات برابر باشند دو معادله‌ی دیگر لازم است. این دومعادله را معمولاً به‌یکی از سه طریق زیر تعریف می‌کنند:

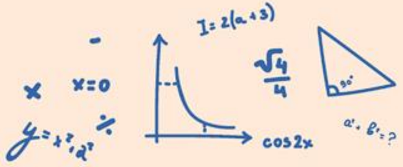
(الف) — $m_0 = m_n = 0$، یعنی $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$. در این‌صورت اسپلاین را، اسپلاین مکعبی **طبیعی** می‌نامند.

(ب) — اسپلاین را طوری تعیین می‌کنیم که $s'(a) = f'(a)$ و $s'(b) = f'(b)$. در این‌صورت اسپلاین را **مقید** می‌نامند. البته در این حالت $f'(a)$ و $f'(b)$ مفروض هستند.

(پ) — $s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b)$، $k = 0, 1, 2$. در این‌صورت اسپلاین را **متناوب** می‌نامند. توجه کنید که در این حالت شرط $f(a) = f(b)$ لزوماً باید برقرار باشد.

قضیه‌ی ۵ — برای مجموعه نقاط مفروض $\{(x_i, f(x_i))\}$، $i = 0, 1, \ldots, n$ که $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$، یک و تنها یک اسپلاین مکعبی طبیعی وجود دارد به‌طوری که $s(x_i) = f(x_i)$، $i = 0, 1, \ldots, n$.

می‌توان نشان داد که اسپلاین مقید و اسپلاین متناوب وجود دارند و یکتا هستند.



اسپلاین طبیعی در حالت خاص

اگر گره‌ها در بازه‌ی $[a,b]$ هم فاصله باشند، و $h = x_{i+1} - x_i$ ، $\forall i$ ، آنگاه دستگاه (۲۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = 2f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] = \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_{i-1} \,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (23)$$

مثال ۹ — مقادیر تابع f به‌صورت جدول زیر در دست است

x	-1	0	1
$f(x)$	0	1	0

معادلات اسپلاین مکعبی طبیعی

حل — دراین مثال $n = 2$ ، و گره‌ها هم فاصله هستند، و $h = 1$. لذا دستگاه (۲۳) به‌صورت زیر است

$$m_0 + 4m_1 + m_2 = \Delta^2 f_0$$

برای اسپلاین طبیعی، $m_0 = m_2 = 0$. داریم

$$\Delta^2 f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0 = -2$$

لذا $m_1 = -\frac{1}{2}$. از معادلات (۲۰) داریم

$$d_0 = 0 \,,\; c_0 = \frac{3}{2} \,,\; d_1 = \frac{3}{2} \,,\; c_1 = -\frac{3}{2}$$

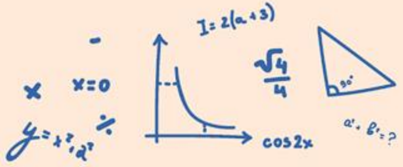
حال از معادلات (۱۹) داریم

$$s_0(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^3 + \frac{3}{2}(x+1)$$

$$s_1(x) = \frac{1}{2}(x-1)^3 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

لذا

$$s(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x+1)^3 + \frac{3}{2}(x+1) & -1 \le x < 0 \\ \frac{1}{2}(x-1)^3 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$



تکلیف کامپیوتری

الگوریتم محاسبه‌ی اسپلاین مکعبی

گام ۱— $(x_i, f(x_i))$ ، $i = 0, 1, \dots, n$ و نقطه‌ی درونیابی ، z ، را وارد کنید.

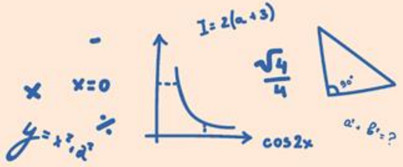
گام ۲— دستگاه سه‌قطری (۲۲) را برای یافتن m_i ها ، $i = 1, 2, \dots, n-1$ حل کنید.

گام ۳— i را طوری تعیین کنید که $z \in [x_i, x_{i+1}]$.

گام ۴— c_i و d_i را از (۲۰) به‌دست آورید.

گام ۵— $s(z)$ را از (۱۹) محاسبه کنید.

در این‌صورت $s(z) \approx f(z)$.



۷.۲ برازش داده‌ها

مقادیر یک تابع به‌صورت جدولی داده شده و می‌دانیم داده‌ها نتیجه یک آزمایش بوده و دارای خطا هستند. در این حالت اگر داده‌ها را به‌صورت نقاطی در صفحه در نظر بگیریم ، یافتن یک چندجمله‌ای که از همه‌ی این نقاط بگذرد توجیهی ندارد ، زیرا مکان نقاط در صفحه دقیق نیست. در این حالت ، تابعی به‌دست می آورند که نمودار آن از نزدیک نقاطداده شده بگذرد ، یا به‌عبارت دیگر مناسب داده ها باشد. این فرایند را **برازش داده ها** می‌نامند ، که در این بخش مورد بحث ما است .

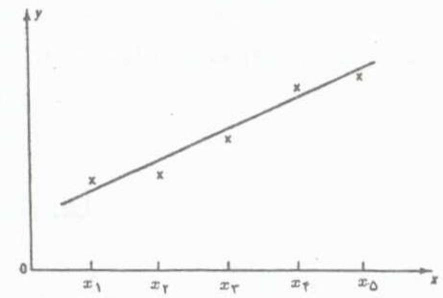
مثال ۱۱ — فرض کنید نتیجه‌ی یک آزمایش مجموعه‌ای از داده‌ها به‌صورت نقاط

$$\{(x_i, y_i)\},\ ,i = ۱, ۲, \ldots, ۵$$

باشد که y_i مقدار اندازه‌گیری شده‌ی کمیت مورد آزمایش به‌ازای x_i است. فرض می‌شود که x_i ها دقیق ، ولی y_i هادر معرض خطا هستند. نقاط در صفحه با $\times$ مشخص شده‌اند. در این‌جا می‌توان حدس زد که بهترین و ساده‌ترین منحنی مناسب داده‌ها خط راست به‌صورت

$$Y = f(x) = a + bx \qquad (۲۴)$$

است. بنابراین مسأله تعیین a و b می‌باشد.



به‌طورکلی، فرض کنید نتیجه‌ی یک آزمایش مجموعه‌ای از داده‌ها به‌صورت نقاط

شرط لازم برای آن‌که تابع دو متغیری $E(a,b)$ در نقطه‌ی (a,b) دارای یک می‌نیمم (موضعی) باشد، آن است که

$$\frac{\partial E}{\partial a} = -۲\sum_{i=۱}^{N}(y_i - (a + bx_i)) = ۰$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = -۲\sum_{i=۱}^{N}x_i\,(y_i - (a + bx_i)) = ۰$$

دستگاه دو معادله‌ی فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=۱}^{N} ۱\right) a + \left(\sum_{i=۱}^{N} x_i\right) b = \sum_{i=۱}^{N} y_i \\ \left(\sum_{i=۱}^{N} x_i\right) a + \left(\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲\right) b = \sum_{i=۱}^{N} x_i y_i \end{cases} \qquad (۲۵)$$

این دو معادله را **معادلات نرمال** می‌نامند. از حل این دستگاه a و b ، و در نتیجه خط کمترین توانهای دوم به‌دست می‌آید. می‌توان نشان داد که به‌ازای a و b حاصل از این دستگاه، $E(a,b)$ می‌نیمم مطلق است.

تعریف ۵ — خط کمترین توانهای دوم خطی است به‌صورت (۲۴) که به‌ازای آن $E_۲$ می‌نیمم شود. برای یافتن این خط ، تعریف می‌کنیم

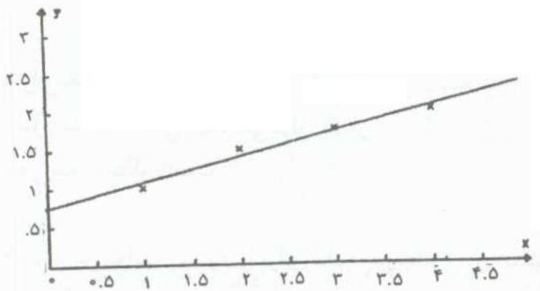
$$E(a,b) = \sum_{i=۱}^{N}|y_i - Y_i|^۲ = \sum_{i=۱}^{N}(y_i - (a + bx_i))^۲$$

$y = x^2, a^2$ cos2x

مثال ۱۲ — خط کمترین توانهای دوم را برای دادهای جدول زیر بیابید.

x	۱	۲	۳	۴
y	۱	۱.۵	۱.۷۵	۲

نمودار این خط و وضعیت آن نسبت به نقاط داده شده در شکل نشان داده شده است.



حل — در این‌جا $N = 4$. جدول زیر را برای محاسبه‌ی ضرایب دستگاه (۲۵) تشکیل می‌دهیم

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
۱	۱	۱	۱
۲	۱.۵	۴	۳
۳	۱.۷۵	۹	۵.۲۵
۴	۲	۱۶	۸
$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i^2$	$\sum x_i y_i$

داریم

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 10 \;,\; \sum_{i=1}^{4} y_i = 6.25 \;,\; \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 30 \;,\; \sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 17.25$$

بنابراین، دستگاه زیر را داریم

$$\begin{cases} 4a + 10b = 6.25 \\ 10a + 30b = 17.25 \end{cases}$$

بااستفاده از دستور کرامر داریم

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 6.25 & 10 \\ 17.25 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{vmatrix}} = 0.75 \;,\; b = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 6.25 \\ 10 & 17.25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{vmatrix}} = 0.325$$

پس، بهترین خط مناسب داده‌ها چنین است

$$Y = 0.75 + 0.325x$$

برازش داده‌ها با چندجمله‌ای

روش کمترین توانهای دوم را می‌توان برای برازش توسط چندجمله‌ایها توسعه داد. فرض کنید داده‌ها

$$\{(x_i, y_i)\} \;,\; i = 1, 2, \ldots, N$$

باشند، و بخواهیم بهترین چندجمله‌ای مناسب داده ها به‌صورت

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

را بیابیم که $N > m + 1$. همان‌طور که در مورد خط راست دیدیم باید تابع

$$E(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{N} |y_i - P(x_i)|^2$$

می‌نیمم شود. پس باید

$$\frac{\partial E}{\partial a_k} = 0 \;,\; k = 0, 1, \ldots, m$$

و از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^k (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_m x_i^m - y_i) = 0 \;,\; k = 0, 1, \ldots, m$$

یا

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^{k+j} = \sum_{i=1}^{N} x_i^k y_i \;,\; k = 0, 1, \ldots, m \qquad (۲۶)$$

معادلات (۲۶) معادلات نرمال هستند که یک دستگاه خطی شامل $m+1$ معادله $m+1$ مجهول a_0 ، a_1 ، … و a_m است. این دستگاه به‌شکل ماتریسی چنین است

$$\begin{bmatrix} \sum 1 & \sum x_i & \sum x_i^2 & \ldots & \sum x_i^m \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \ldots & \sum x_i^{m+1} \\ \vdots & & & \vdots & \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \sum x_i^{m+2} & \ldots & \sum x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^m y_i \end{bmatrix} \qquad (۲۷)$$

توجه کنید که ماتریس ضرایب این دستگاه متقارن است. می‌توان نشان داد که اگر x_i ها متمایز باشند این دستگاه دارای جواب یکتا است(ثابت کنید) ، و لذا می‌توان روش حذفی گاوس را برای حل آن به‌کار برد.

مثال ۱۳ — چندجمله‌ای درجه‌ی دو که داده‌های جدول زیر را برازش می‌کند، به‌دست آورید.

x	۱	۳	۴	۵	۶	۷
y	۲	۷	۸	۱۰	۱۱	۱۱

حل — در این مثال $N = 6$ و $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. درایه‌های ماتریس دستگاه (۲۷) و بردار طرف دوم را به‌کمک جدول زیر محاسبه می‌کنیم

i	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	$x_i^2y_i$	x_i^3	x_i^4
۱	۱	۲	۲	۱	۲	۱	۱
۲	۳	۷	۲۱	۹	۶۳	۲۷	۸۱
۳	۴	۸	۳۲	۱۶	۱۲۸	۶۴	۲۵۶
۴	۵	۱۰	۵۰	۲۵	۲۵۰	۱۲۵	۶۲۵
۵	۶	۱۱	۶۶	۳۶	۳۹۶	۲۱۶	۱۲۹۶
۶	۷	۱۱	۷۷	۴۹	۵۳۹	۳۴۳	۲۴۰۱
$\sum$	۲۶	۴۹	۲۴۸	۱۳۶	۱۳۷۸	۷۷۶	۴۶۶۰

دستگاه (۲۷) در این‌جا چنین است

$$\begin{bmatrix} 6 & 26 & 136 \\ 26 & 136 & 776 \\ 136 & 776 & 4660 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 \\ 248 \\ 1378 \end{bmatrix}$$

جواب این دستگاه با روش حذفی گاوس عبارت‌است از

$$a_0 = -1.03 \ , \ \ a_1 = 3.24 \ , \ \ a_2 = -0.21$$

پس چندجمله‌ای مطلوب به‌صورت زیر است

$$P(x) = -1.03 + 3.24x - 0.21x^2$$

برازش نمایی

گاهی داده‌های تجربی (x_i, y_i) طوری هستند که رابطه‌ی بین x_i ها و y_i ها نمایی است. به‌عبارت دیگر، تابعی که این کمیتها را بهم ربط می‌دهد نمودارش نزدیک به نمودار تابعی به‌صورت

$$y = c\,e^{bx} \qquad (۲۸)$$

است. در این حالت نیز می‌توان با روش کمترین توانهای دوم ، بهترین منحنی به‌صورت (۲۸) که داده‌ها را برازش کند ، به‌دست آورد. اما در این حالت دستگاه معادلات حاصل برای یافتن b و c غیرخطی است. برای رفع این مشکل می‌توان از فرایند خطی‌سازی استفاده کرد. به‌این صورت که با گرفتن لگاریتم از رابطه (۲۸)، خواهیم داشت

$$\ln y = \ln c + bx$$

حال قرار می‌دهیم

$$Y = \ln y \ , \quad a = \ln c$$

در این‌صورت خواهیم داشت

$$Y = a + bx \qquad (۲۹)$$

که معادله‌ی یک خط راست در دستگاه تبدیل یافته است. اکنون روش کمترین توانهای دوم را برای یافتن بهترین خط به‌صورت (۲۹) که داده‌های تبدیل یافته $(x_i, \ln y_i)$ را برازش کند به‌کار می‌بریم تا a و b ، و از آن‌جا منحنی به‌صورت (۲۸) به‌دست آید.

مثال ۱۴ — تابعی نمایی به‌صورت $y = c\,e^{bx}$ بیابید که مناسب داده‌های زیر باشد.

x	۱	۳	۴	۶	۹	۱۵
y	۴.۰	۳.۵	۲.۹	۲.۵	۲.۷۵	۲.۰

حل — داده‌های تبدیل یافته مطابق جدول زیر هستند

x	۱	۳	۴	۶	۹	۱۵
$Y = \ln y$	۱.۳۹	۱.۲۵	۱.۰۶	۰.۹۲	۱.۰۱	۰.۶۹

بنابر آنچه دیدیم

i	x_i	Y_i	$x_i^۲$	x_iY_i
۱	۱	۱.۳۹	۱	۱.۳۹
۲	۳	۱.۲۵	۹	۳.۷۵
۳	۴	۱.۰۶	۱۶	۴.۲۴
۴	۶	۰.۹۲	۳۶	۵.۵۲
۵	۹	۱.۰۱	۸۱	۹.۰۹
۶	۱۵	۰.۶۹	۲۲۵	۱۰.۳۵
$\sum$	۳۸	۶.۳۲	۳۶۸	۳۴.۳۴

داریم

$$\begin{cases} ۶a + ۳۸b = ۶.۳۲ \\ ۳۸a + ۳۶۸b = ۳۴.۳۴ \end{cases}$$

و از این‌جا

$$a = ۱.۳۴ \ , \quad b = -۰.۰۴۵ \Rightarrow c = e^a = e^{۱.۳۴} = ۳.۸۲$$

پس

$$y = ۳.۸۲e^{-۰.۰۴۵x}$$

پایان فصل دوم

تقریب توابع

تابع

$$y = e^x \quad , \quad ۰ \leq x \leq ۱$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید بخواهیم این تابع را با یک چندجمله‌ای درجه‌ی دو به‌صورت

$$P(x) = a + bx + cx^۲$$

تقریب بزنیم. باز هم می‌توان از روش کمترین توانهای دوم استفاده نمود. اگر بازه‌ی $[۰, ۱]$ را به $N + ۱$ قسمت مساوی تقسیم کنیم و N نقطه‌ی x_i $(i = ۱, ۲, \ldots, N)$ را در این بازه انتخاب کنیم ، آنگاه N داده به‌صورت نقاط (x_i, y_i) که $y_i = e^{x_i}$ ، خواهیم داشت. بنابر آنچه در مورد برازش چندجمله‌ای دیدیم a ، b و c از دستگاه زیر به‌دست می آیند.

$$\begin{bmatrix} \sum ۱ & \sum x_i & \sum x_i^۲ \\ \sum x_i & \sum x_i^۲ & \sum x_i^۳ \\ \sum x_i^۲ & \sum x_i^۳ & \sum x_i^۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^۲ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum e^{x_i} \\ \sum x_i e^{x_i} \\ \sum x_i^۲ e^{x_i} \end{bmatrix} \qquad (۳۰)$$

طرفین (۳۰) را بر N تقسیم نموده ، و آنگاه وقتی $N \to \infty$ ، با توجه به تعریف انتگرال

$$\int_۰^۱ \begin{bmatrix} ۱ & x & x^۲ \\ x & x^۲ & x^۳ \\ x^۲ & x^۳ & x^۴ \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \int_۰^۱ \begin{bmatrix} ۱ \\ x \\ x^۲ \end{bmatrix} e^x dx$$

با محاسبه‌ی انتگرالهای دو طرف ، به‌دست می آوریم

$$\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e - ۱ \\ ۱ \\ e - ۲ \end{bmatrix}$$

از حل دستگاه خواهیم داشت

$$a = ۱.۰۱۳۰ \quad , \quad b = ۰.۸۵۱۳ \quad , \quad c = ۰.۸۳۹۰$$

لذا

$$P(x) = ۱.۰۱۳۰ + ۰.۸۵۱۳x + ۰.۸۳۹۰x^۲$$

با رسم نمودار معادلات

$$y = e^x \quad , \quad y = ۱.۰۱۳۰ + ۰.۸۵۱۳x + ۰.۸۳۹۰x^۲$$

در بازه‌ی $[۰, ۱]$ ، میزان دقت روش مشخص می‌شود.