

آمار و احتمال مهندسی - تمرین سری چهارم-مبحث متغیر تصادفی توأم

(۱) در ظرفی دو گوی قرمز، یک گوی آبی و یک گوی سفید وجود دارد. گوی های این ظرف را بطور تصادفی و بدون جایگذاری یکی یکی برمی داریم تا وقتی که گوی سفید از ظرف خارج شود. اگر تعداد گوی های آبی و قرمز برداشته شده از ظرف را به ترتیب X و Y بنامیم: الف) تابع چگالی احتمال توأم را بصورت یک جدول مشخص کنید. ب) ضریب همبستگی $\rho(X, Y)$ را بدست آورید.

(۲) متغیرهای تصادفی X, Y دارای چگالی احتمال توأم زیر هستند:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{27} & 0 < x < 3 \quad 0 < y < 2 \\ \frac{1}{27} & 0 < x < 3 \quad -2 < y < 0 \\ \frac{1}{27} & -3 < x < 0 \quad 0 < y < 2 \\ \frac{1}{54} & -3 < x < 0 \quad -2 < y < 0 \\ 0 & |x| > 3 \quad |y| > 2 \end{cases}$$

الف) تابع توزیع تجمعی توأم را مشخص کنید. ب) احتمال قرار گرفتن نقطه (X, Y) بین دو دایره به شعاع یک و دو را پیدا کنید. ج) با استفاده از تابع توزیع تجمعی توأم احتمال آنکه هر دو متغیر از منهای یک بیشتر باشند و از دو کمتر باشند را بدست آورید.

(۳) متغیرهای تصادفی X, Y دارای چگالی احتمال توأم زیر هستند:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c(x^2 + y^2 + \frac{1}{2}) & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

الف) مقدار C را مشخص کنید. ب) چگالی احتمال کناری Y و امید ریاضی آن را پیدا کنید. ج) کوواریانس X, Y را بدست آورید.

(۴) در جدول زیر تابع توزیع تجمعی دو متغیر تصادفی گسسته X, Y آورده شده است. الف- جدول وزن احتمال توأم X, Y را بدست آورید. ب- ضریب همبستگی $\rho(X, Y)$ را بدست آورید:

$X \backslash Y$	۱	۳	۵	۷
۲	$7/120$	$17/120$	$29/120$	$35/120$
۴	$28/120$	$47/120$	$73/120$	$90/120$
۶	$32/120$	$68/120$	$97/120$	$120/120$

(۵) یک سکه ساله را n بار پرتاب کرده ایم. تعداد شیرها و قدر مطلق اختلاف شیر و خطها را به ترتیب H_n, D_n را نامیده ایم. جدول وزن احتمال، میانگین قدر مطلق اختلاف تعداد شیر و خطها و ضریب همبستگی را برای $n = 2, 5, 8$ بدست آورید.

(۶) یک توپ جنگی به سمت هدفی که در فاصله ۱۵۰۰ متری آن قرار دارد هدفگیری شده است. برد توپ متغیر تصادفی R و زاویه آن با هدف متغیر تصادفی T است و داریم:

$$f_{R,T}(r,t) = \begin{cases} k & 1300 \leq |r| \leq 1700, \quad |t| \leq 0.03\pi \\ 0 & \text{etc} \end{cases}$$

الف) k را بیابید. ب) اگر گلوله توپ در فاصله کمتر از ۵ متری هدف فرود آید، آترا منهدم می کند. احتمال انهدام این هدف چقدر است؟ ج) میانگین و انحراف معیار R, T را بدست آورید.

(۷) متغیر تصادفی X با میانگین ۱ و واریانس ۳ و متغیر Y با میانگین ۲ و واریانس ۴ را در نظر بگیرید. ضریب همبستگی ایندو منفی ۰,۲ است. الف- میانگین و واریانس متغیر تصادفی $Z=2X-Y+1$ را بدست آورید. ب- مقدار پارامتر m را به نحوی بدست آورید که دو متغیر تصادفی $U=mX+Y$ و $V=X-mY$ نا همبسته شوند.

(۸) بین دو متغیر تصادفی X, Y رابطه خطی $X+2Y-1=0$ برقرار است. اگر واریانس X چهار باشد کوواریانس و ضریب همبستگی X, Y را بدست آورید.