باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی برق و رباتیک

درس مدارهای الکتریکی (۱) - گزارش پروژه شماره ۲

موضوع پروژه:

آشنایی با مدارهای مرتبه دوم و انواع آن‌ها، آشنایی با تحلیل زمانی (Time Domain)

دانشجویان:

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا اشرف

تاریخ تهیه و ارائه:

خردادماه ۱۳۹۷

فهرست

مقدمه ای از مدارهای مرتبه دوم

وجود هم‌زمان القاگر و خازن در یک مدار الکتریکی حداقل یک سیستم مرتبه دوم پدید می‌آورد؛ یعنی مداری که با یک معادله دیفرانسیل خطی دارای مشتق دوم، یا با دو معادله دیفرانسیل خطی هم‌زمان دارای مشتق اول بیان می‌شود. این ازدیاد درجه محاسبه دو ثابت را لازم می‌سازد. از این گذشته باید شرط اولیه مشتق را هم تعیین کنیم. این‌گونه مدارها که غالباً مدارهای RLC نامیده می‌شوند، نه تنها بسیار متداول هستند، بلکه برای مدل کردن سیستم‌های دیگر هم مفیدند. مثلاً مدار RLC می‌تواند سیستم تعلیق خودرو، رفتار کنترل‌کننده دمای رشد بلورهای نیم‌رسانا و حتی پاسخ سیستم کنترل شهپر هواپیما را مدل کند.

همان‌گونه که گفته شد در حالت کلی هنگام حل مدارهای مرتبه دوم به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با شکل کلی زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)+2\alpha\frac{d}{dt}y(t)+\omega_0 y(t)=b$$

که ضرایب α در این معادله به عنوان ثابت میرایی (Damping constant) و ω_0 به عنوان فرکانس نوسانات (رزونانس) تعریف می‌شود که مقادیرشان به نوع عناصر به کار رفته در مدار و همچنین به نحوه قرار گرفتن آن‌ها در مدار بستگی دارد.

همچنین کمیتی به نام ضریب کیفیت (Quality factor) از تقسیم ضریب فرکانس نوسانات به ضریب مشتق اول حاصل می‌شود؛ که مقدار آن برابر است با: $Q=\frac{\omega_0}{2\alpha}$

همچنین مقدار b نیز همان ورودی مدار می‌باشد که بنابر شرایط می‌تواند برابر یا مخالف صفر باشد.

پس از حل مدار و تشکیل معادله دیفرانسیل فوق با توجه با مقادیر مختلف ممکن برای α و ω_0 چهار گونه متفاوت برای پاسخ عمومی معادله حاصل می‌شود؛ داریم:

۱) میرای شدید (Over damp): $\alpha>\omega_0 \Rightarrow Q<\frac{1}{2}$

۲) میرای بحرانی (Critically damp): $\alpha=\omega_0 \Rightarrow Q=\frac{1}{2}$

۳) میرای ضعیف (Under damp): $\alpha<\omega_0 \Rightarrow Q>\frac{1}{2}$

۴) نوسان‌ساز یا بی اتلاف (Lossless): $\alpha=0 \Rightarrow Q=\infty$

و البته پاسخ خصوصی معادله دیفرانسیل فوق همواره برابر با $y_p = \dfrac{b}{{\omega_0}^2}$ می‌باشد که معادل پاسخ حالت دائمی مدار نیز می‌باشد.

اما برای یافتن پاسخ عمومی در حالت های مختلف ابتدا باید به صورت زیر معادله مشخصه (Characteristic) را تشکیل دهیم و سپس با توجه به معادله مشخصه و چهار حالت فوق جواب را بیابیم؛ داریم:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)+2\alpha\frac{d}{dt}y(t)+\omega_0 y(t)=b \Rightarrow s^2+2\alpha s+{\omega_0}^2=0 \quad \text{معادله مشخصه}$$

$$\Delta = 4\alpha^2-4{\omega_0}^2 \Rightarrow s_1,s_2=\frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2-4{\omega_0}^2}}{2}=-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-{\omega_0}^2}$$

1) $\alpha > \omega_0 \Rightarrow y(t)=K_1e^{s_1t}+K_2e^{s_2t}$

2) $\alpha = \omega_0 \Rightarrow s_1,s_2=-\alpha \Rightarrow y(t)=K_1e^{-\alpha t}+K_2e^{-\alpha t}$

3) $\alpha < \omega_0 \Rightarrow s_1,s_2=-\alpha \pm jw_d \Rightarrow y(t)=e^{-\alpha t}(K_1\cos(w_dt)+K_2\sin(w_dt))$
$w_d=\sqrt{{\omega_0}^2-\alpha^2}$

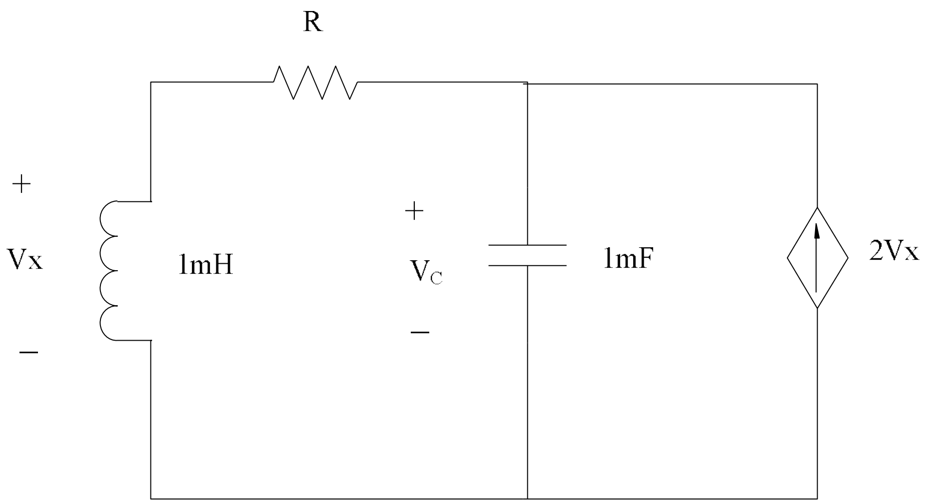
4) $\alpha = 0 \Rightarrow s_1,s_2=\pm jw_0 \Rightarrow y(t)=K_1\cos(w_0t)+K_2\sin(w_0t)$

برای تعیین ضرایب K_1,K_2 نیاز به شرایط اولیه $y(t=0),\frac{d}{dt}y(t=0)$ داریم که معمولاً یا توسط صورت‌مسئله اطلاع داده می‌شود یا این‌که از طریق حل مدار در زمان صفر یا انتگرال‌گیری از طرفین معادله دیفرانسیل به دست آمده محاسبه می‌شود.

پس از محاسبه ضرایب فوق، پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل که مقدار همان کمیت موردنظر در مدار می‌باشد به دست آمده است.

تحلیل تئوری مدار

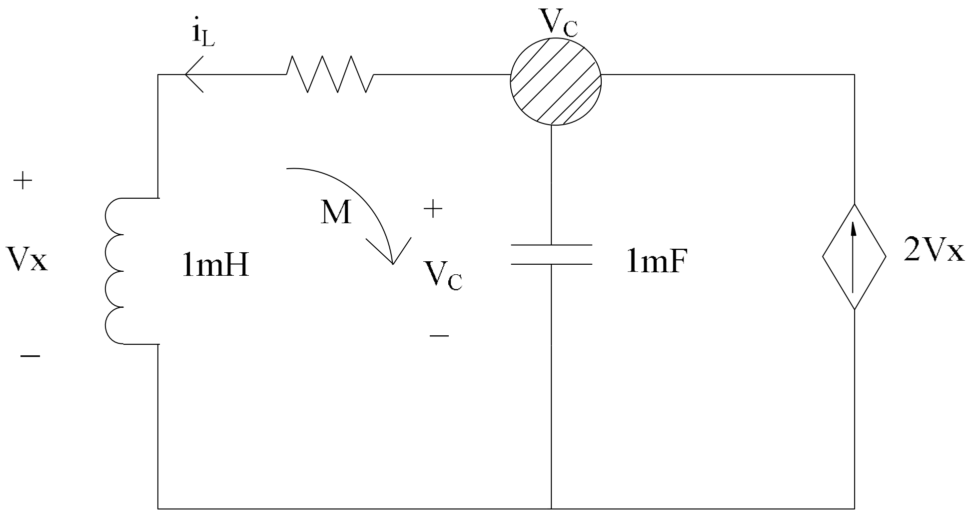
در این بخش به کمک تحلیل تئوری و مباحث بیان شده در مقدمه، می‌خواهیم حالت‌های متفاوت میرایی را در این مدار الکتریکی مرتبه دوم RLC سری ببینیم.



شکل۱- مدار مسئله

مسئله: در مدار فوق (شکل۱) مقدار R را طوری به دست آورید که مدار یک نوسان‌ساز باشد. مقدار R به دست آمده را R_0 بنامید. فرکانس نوسانات را به دست آورده و ولتاژ دو سر خازن را به دست آورید. ولتاژ اولیه خازن را ۱ ولت و جریان اولیه سلف را صفر در نظر بگیرید.

برای به دست آوردن ولتاژ خازن دو مرتبه از KCL در گره‌های V_C و V_X استفاده می‌کنیم و مطابق محاسبات زیر پس از ساده کردن روابط و جای‌گذاری معادلات مختلف در یک‌دیگر به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم برای ولتاژ خازن می‌رسیم؛ داریم:



شکل۲- مدار مسئله هنگام حل

$$KCL@V_C: i_R + i_C - 2V_X = \frac{V_C - V_X}{R} + 1\times10^{-3}\frac{d}{dt}V_C - 2V_X = 0(I)$$

$$KCL@V_X: i_L + i_R = \frac{V_X - V_C}{R} + 10^3\int V_X dt = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{1}{R}\frac{d}{dt}V_X - \frac{1}{R}\frac{d}{dt}V_C + 10^3 V_X = 0(II)$$

$$(I):(\frac{1}{R}-2)V_X = \frac{1}{R}V_C + 10^{-3}\frac{d}{dt}V_C \Rightarrow V_X = \frac{\frac{1}{R}V_C + 10^{-3}\frac{d}{dt}V_C}{(\frac{1}{R}-2)} = \frac{1}{1+2R}V_C + \frac{10^{-3}R}{1+2R}\frac{d}{dt}V_C(III)$$

$$(III)in(II): \frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+2R}V_C + \frac{10^{-3}R}{1+2R}\frac{d}{dt}V_C\right) - \frac{1}{R}\frac{d}{dt}V_C + 10^3\left(\frac{1}{1+2R}V_C + \frac{10^{-3}R}{1+2R}\frac{d}{dt}V_C\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R+2R^2}\frac{d}{dt}V_C + \frac{10^{-3}}{1+2R}\frac{d^2}{dt^2}V_C - \frac{1}{R}\frac{d}{dt}V_C + \frac{10^3}{1+2R}V_C + \frac{R}{1+2R}\frac{d}{dt}V_C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{10^{-3}}{1+2R}\frac{d^2}{dt^2}V_C + \left(\frac{1}{R+2R^2} - \frac{1}{R} + \frac{R}{1+2R}\right)\frac{d}{dt}V_C + \frac{10^3}{1+2R}V_C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{10^{-3}}{1+2R}\frac{d^2}{dt^2}V_C + \frac{R-2}{1+2R}\frac{d}{dt}V_C + \frac{10^3}{1+2R}V_C = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2}{dt^2}V_C + (R-2)10^3\frac{d}{dt}V_C + 10^6 V_C = 0}$$

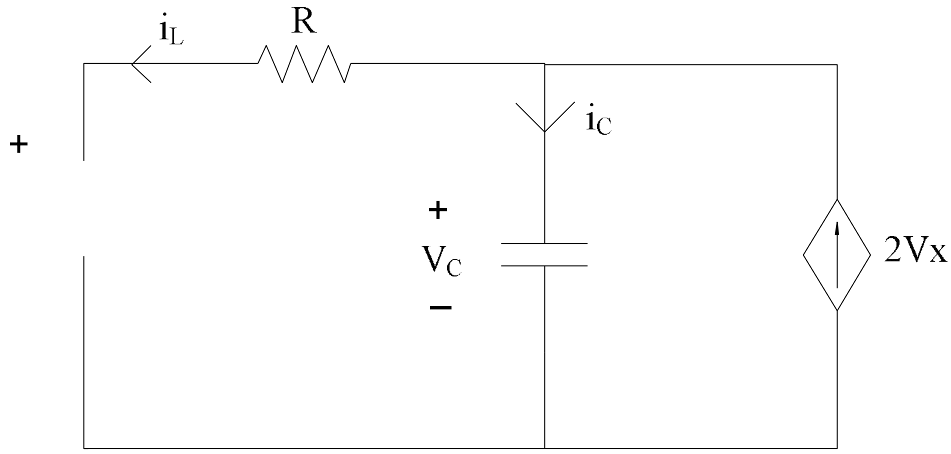
حال با توجه به معادله به دست آمده $\alpha = \frac{(R-2)10^3}{2}$ و $\omega_0 = \sqrt{10^6} = 10^3$ حاصل می‌شوند. با توجه به این‌که می‌خواهیم مدار نوسان‌ساز باشد، مطابق مقدمه بیان شده باید ثابت میرایی یا همان α برابر با صفر باشد؛ پس داریم:

$$\alpha = \frac{(R-2)10^3}{2} = 0 \Rightarrow R-2=0 \Rightarrow \boxed{R = R_0 = 2}$$

و بنابراین ولتاژ خازن در این حالت که همان پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل به دست آمده می‌باشد به صورت زیر خواهد بود:

$$V_C(t) = K_1\cos(\omega_0 t) + K_2\sin(\omega_0 t) \Rightarrow \boxed{V_C(t) = K_1\cos(10^3 t) + K_2\sin(10^3 t)}$$

حال برای محاسبه ضرایب K_1, K_2 به مقدار ولتاژ خازن در لحظه صفر و همچنین مشتق اول ولتاژ خازن در لحظه صفر نیاز داریم. مقدار ولتاژ اولیه خازن که همان ولتاژ در لحظه صفر می‌باشد به ما گزارش شده و برابر ۱ ولت می‌باشد. اما برای یافتن مشتق اول ولتاژ خازن باید مدار را در لحظه صفر حل کنیم تا مقدار آن را به دست آوریم، در این حالت جریان سلف برابر صفر است و بنابراین سلف اتصال باز می‌شود؛ داریم:



شکل۳- مدار معادل مسئله در لحظه صفر

$$i_L(t=0) = 0 \Rightarrow i_C(t=0) = 2V_X(t=0) = 2V_C(t=0) = 2$$

$$i_C = C\frac{d}{dt}V_C \Rightarrow \frac{d}{dt}V_C(t=0) = \frac{i_C(t=0)}{C} = \frac{2}{10^{-3}} = \underline{2\times10^3}$$

حال که مقادیر مورد نیاز را داریم به محاسبه ضرایب مجهول K_1, K_2 می‌پردازیم؛ داریم:

$$V_C(t=0)=1 \Rightarrow \boxed{K_1=1}$$

$$\frac{d}{dt}V_C(t=0)=2\times10^3 \Rightarrow 10^3 K_2 = 2\times10^3 \Rightarrow \boxed{K_2=2}$$

درنتیجه معادله ولتاژ خازن برابر است با:

$$\boxed{V_C(t)=\cos(10^3 t)+2\sin(10^3 t)}$$

حال برای این‌که مدار میرای ضعیف باشد باید $\alpha<\omega_0$ باشد؛ داریم:

$$\alpha<\omega_0 \Rightarrow \frac{(R-2)10^3}{2}<10^3 \Rightarrow \frac{(R-2)}{2}<1 \Rightarrow R-2<2 \Rightarrow \boxed{R<4}$$

و برای این‌که مدار میرای بحرانی باشد باید $\alpha=\omega_0$ باشد؛ داریم:

$$\alpha=\omega_0 \Rightarrow \frac{(R-2)10^3}{2}=10^3 \Rightarrow \frac{(R-2)}{2}=1 \Rightarrow R-2=2 \Rightarrow \boxed{R=4}$$

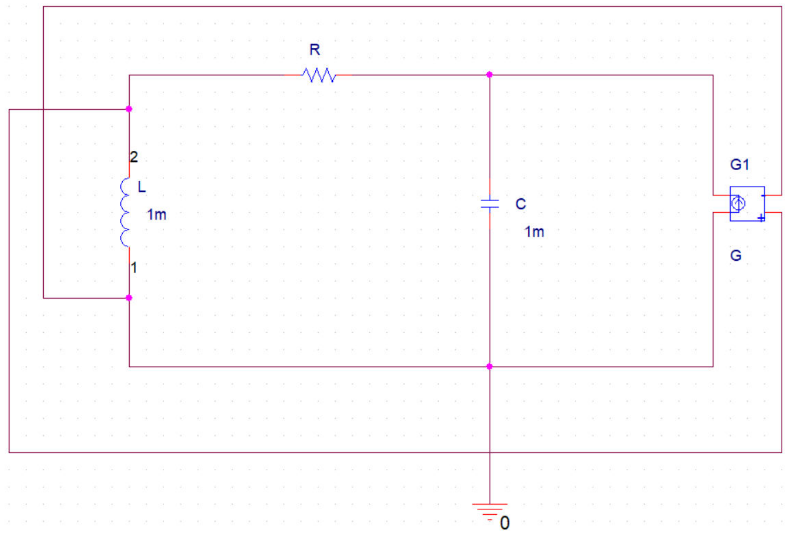
و برای این‌که مدار میرای شدید باشد باید $\alpha>\omega_0$ باشد؛ داریم:

$$\alpha>\omega_0 \Rightarrow \frac{(R-2)10^3}{2}>10^3 \Rightarrow \frac{(R-2)}{2}>1 \Rightarrow R-2>2 \Rightarrow \boxed{R>4}$$

بنابراین ما مقادیر متفاوتی که باعث به وجود آمدن حالت‌های مختلف میرایی در مدار می‌شوند را به دست آوردیم. در بخش بعدی می‌خواهیم مدار را در نرم‌افزار PSpice شبیه سازی کرده و شکل موج ولتاژ خازن را در حالات مختلف میرایی ببینیم و درستی محاسبات تئوری خود را تحقیق کنیم.

شبیه‌سازی و تحلیل مدار با استفاده از نرم افزار PSpice، مقایسه و نتیجه‌گیری

پس از بررسی تئوری مدار مورد مسئله در بخش قبل، نوبت به شبیه‌سازی و تحلیل به کمک نرم‌افزار می‌رسد. نرم افزار مورد استفاده ما در این‌جا Capture CIS یا همان Orcad PSpice می‌باشد. به این منظور ابتدا شماتیک مدار را با رعایت نکات لازم در نرم‌افزار رسم می‌کنیم و سپس از تحلیل زمانی (Time Domain) برای به دست آوردن نمودار ولتاژ خازن استفاده می‌کنیم.

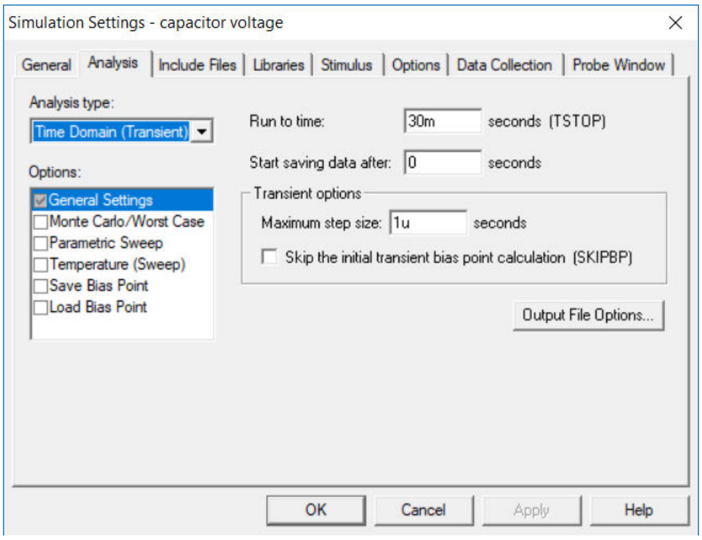


شکل۴- شماتیک مدار شبیه‌سازی شده در نرم‌افزار

از جمله نکات قابل توجه هنگام رسم شماتیک مدار در نرم افزار، قرار دادن صحیح منبع جریان وابسته به ولتاژ و اتصال صحیح آن به سر مثبت و منفی سلف می‌باشد. همچنین تعیین بهره منبع جریان وابسته، تعیین ولتاژ اولیه خازن و نیز جریان اولیه سلف برای نتیجه گرفتن و درستی تحلیل و شبیه‌سازی حائز اهمیت می‌باشد.

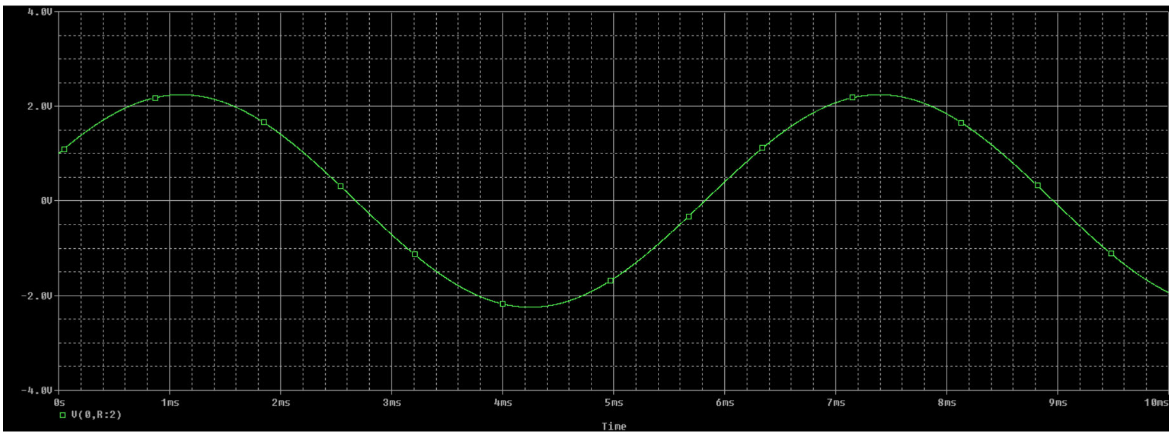
نکته مهم دیگر صحیح قرار دادن پروب در سر مثبت و منفی خازن می‌باشد که تاثیر آن هنگام رسم نمودار مشخص می‌گردد.

پس از رسم شماتیک نوبت به انتخاب تحلیل زمانی می‌رسد. در این زمینه رعایت نکاتی از جمله تعیین دامنه متناسب (نه بسیار بزرگ، نه بسیار کوچک) و نیز تعیین گام مناسب برای ذخیره داده‌ها هنگام رسم نمودار باید مورد توجه قرار گیرد. چرا که در صورت انتخاب اشتباه ممکن است رسم نمودار با مشکل مواجه شود.



شکل۵- نمونه تنظیم صحیح در بخش آنالیز و تحلیل زمانی

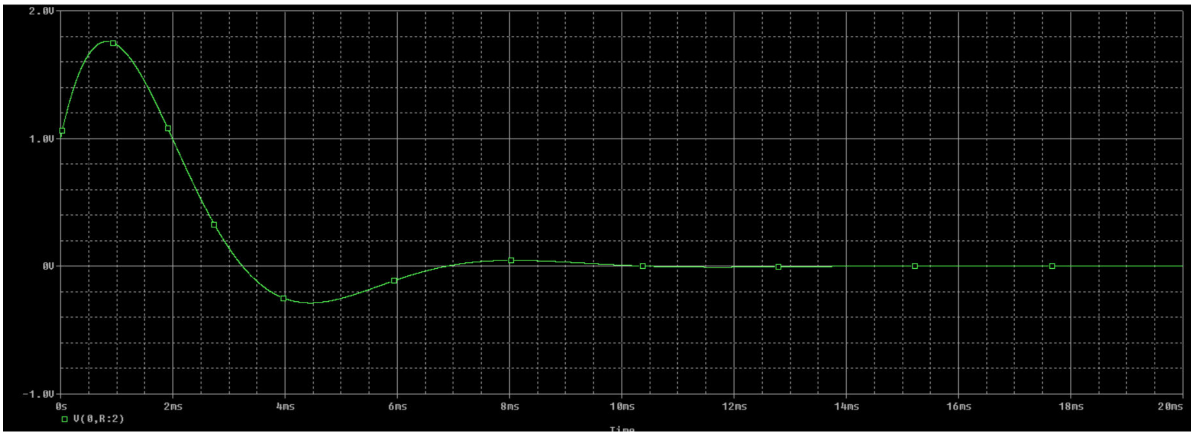
پس از اتمام رسم شماتیک و انتخاب تحلیل زمانی با توجه به توضیحات فوق، ابتدا به سراغ تحلیل زمانی حالتی می‌رویم که در آن مقدار مقاومت را ۲ فرض کردیم. پس از شبیه‌سازی و تحلیل زمانی، نمودار زیر برای ولتاژ خازن به دست آمد:



شکل۶- نمودار ولتاژ-زمان خازن با مقاومت ۲ اهم

که این نمودار تحلیل تئوری ما را تایید می‌کند چرا که ولتاژ اولیه خازن برابر با ۱ ولت بوده و اختلاف فاز اولیه‌ای مطابق نمودار ایجاد می‌کند و نیز شکل موج ولتاژ خازن سینوسی می‌باشد که این به معنای حالت نوسان‌ساز یا بی‌اتلاف در مدار می‌باشد.

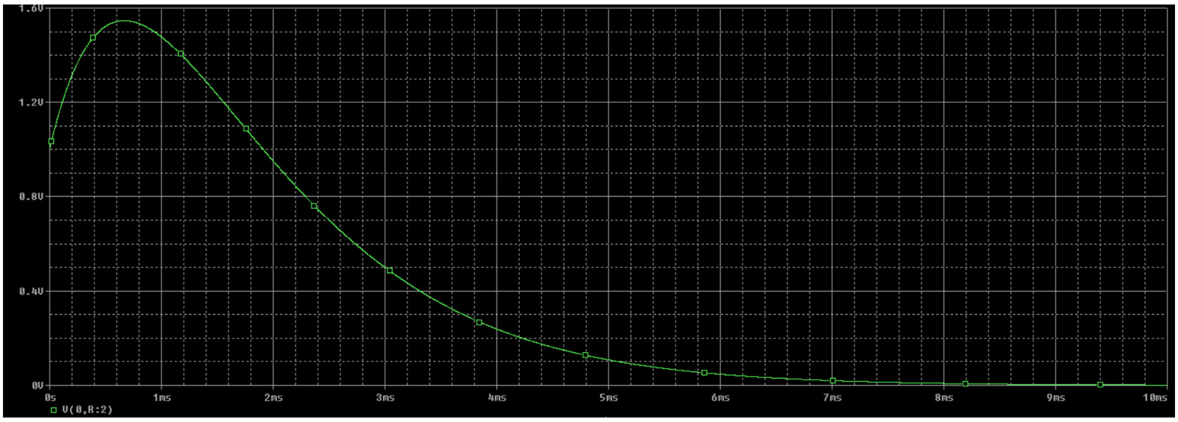
حال به شبیه‌سازی و بررسی حالتی می‌پردازیم که در آن مقاومت را کمتر از ۴ اهم (برای مثال ۳ اهم) درنظر گرفتیم. در این حالت پس از شبیه‌سازی و تحلیل زمانی نمودار زیر برای ولتاژ خازن به دست آمد:



شکل۷- نمودار ولتاژ-زمان خازن با مقاومت ۳ اهم

که این نمودار نیز تحلیل تئوری ما را تایید می‌کند چرا که ما پیش‌بینی کرده بودیم در حالتی که مقدار مقاومت کمتر از ۴ اهم باشد مدار میرای ضعیف باشد که شکل موج ولتاژ خازن این پیش‌بینی را تایید می‌کند.

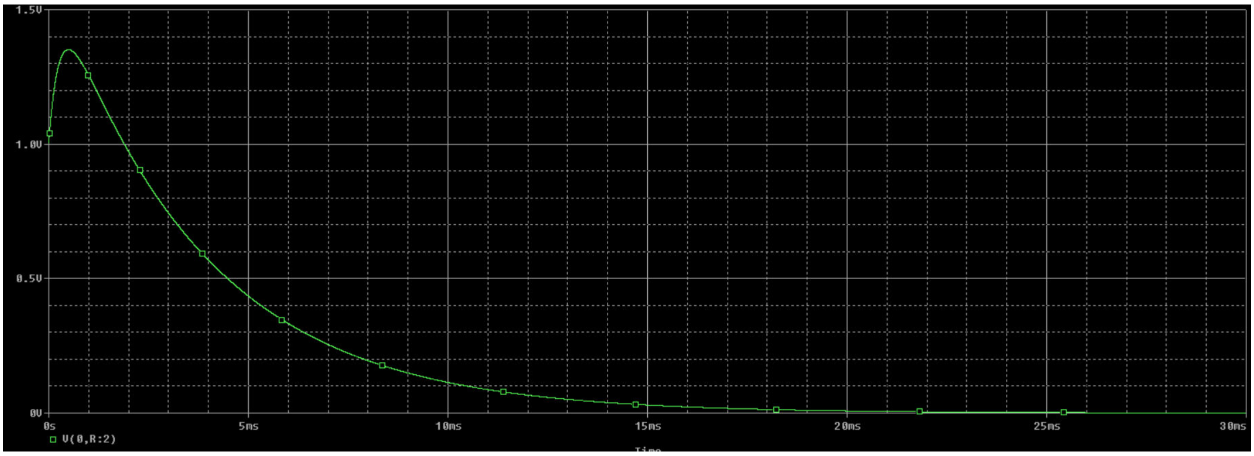
پس از این دو حالت به شبیه‌سازی و بررسی حالتی می‌پردازیم که مقدار مقاومت را ۴ اهم درنظر گرفتیم. در این حالت پس از شبیه‌سازی و تحلیل زمانی نمودار زیر برای ولتاژ خازن به دست آمد:



شکل۸- نمودار ولتاژ-زمان خازن با مقاومت ۴ اهم

این نمودار نیز تحلیل تئوری ما را تایید می‌کند. زیرا ما پس از محاسبات به این نتیجه رسیده بودیم که در حالتی که مقدار مقاومت در مدار برابر با ۴ اهم باشد، مدار میرای بحرانی خواهد بود؛ این نمودار نیز مربوط به حالت میرای بحرانی می‌باشد.

و در حالت آخر به شبیه‌سازی و بررسی حالتی می‌پردازیم که مقدار مقاومت را بیشتر از ۴ اهم (برای مثال ۶ اهم) درنظر گرفتیم. در این حالت پس از شبیه‌سازی و تحلیل زمانی نمودار زیر برای ولتاژ خازن به دست آمد:



شکل۹- نمودار ولتاژ-زمان خازن با مقاومت ۶ اهم

این نمودار نیز بر درست بودن تحلیل تئوری ما در بخش قبل گواهی می‌دهد. زیرا ما با انجام محاسبات دریافته بودیم که در حالتی که مقاومت بیشتر از ۴ اهم باشد (که در این‌جا ۶ اهم می‌باشد)، باید مدار میرای شدید باشد؛ نمودار فوق برای ولتاژ خازن این نکته را اثبات می‌کند.

مراجع مورد استفاده

- نظریه اساسی مدارها و شبکه ها (جلد اول)،ارنست کوه - چارلز دسور، ترجمه دکتر پرویز جبه‌دار مارالانی، چاپ بیست و دوم، ۱۳۸۹
- تحلیل مهندسی مدار، ویلیام هیت – جک کمرلی – استیون دوربن، ترجمه محمود دیانی، چاپ هفتم، ویراست ششم، ۱۳۸۵
- جزوه کلاسی مدارهای الکتریکی(۱)
- Orcad PSpice version 9.2