فصل چهارم - تبدیل فوریه برای سیگنال‌های پیوسته

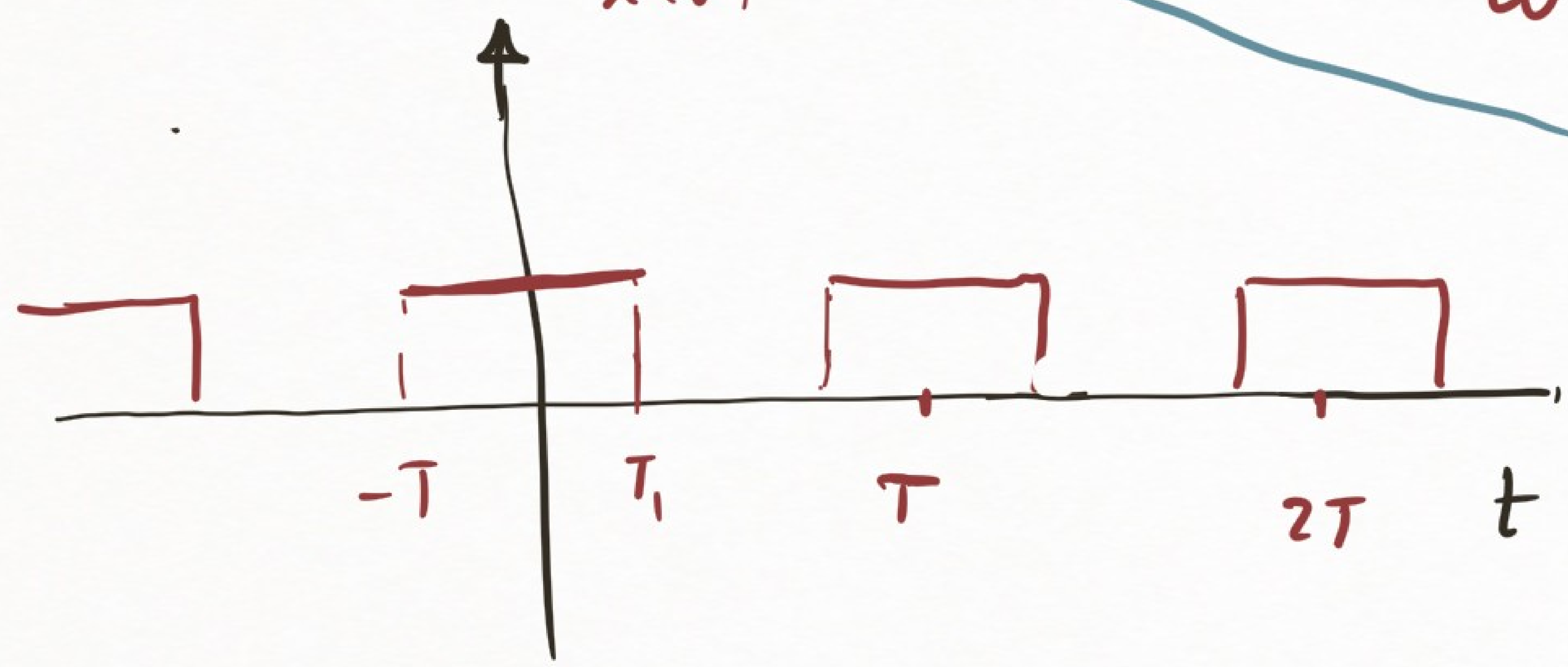
$$x(t) = \begin{cases} 1 \ ; & |t| < T_1 \\ 0 \ ; & T_1 < |t| < T/2 \end{cases} \Rightarrow a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

$$T a_k = \frac{2\sin \omega T_1}{\omega}\Bigg|_{\omega = k\omega_0}$$

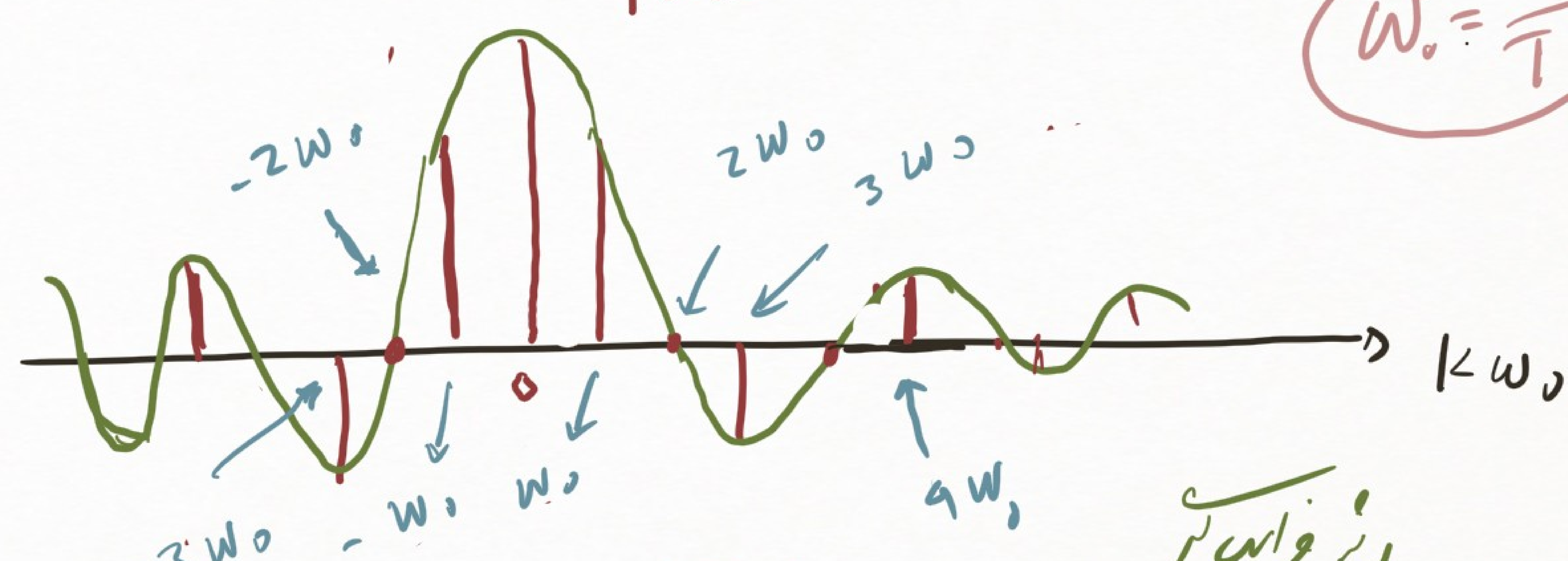
توجه: { سیگنال پریودیک ← نمایش آن بصورت سری فوریه
سیگنال غیرپریودیک ← نمایش آن بصورت تبدیل فوریه }

هم

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

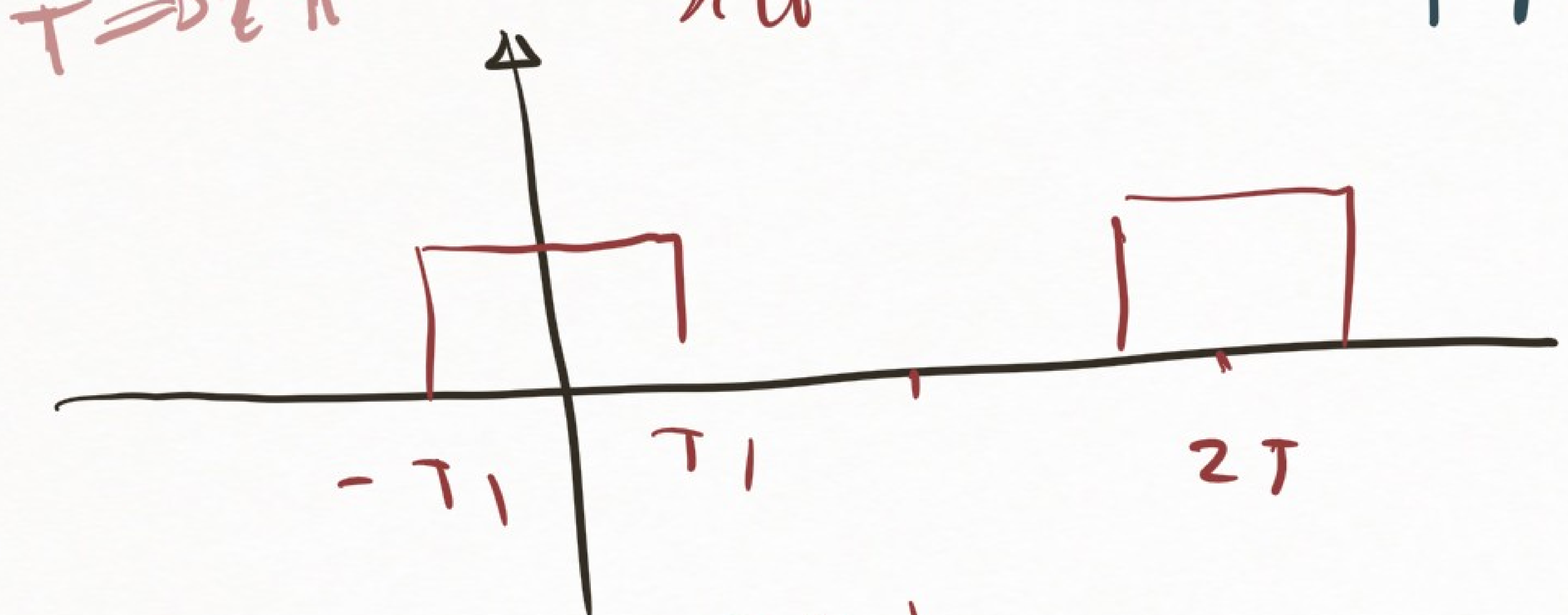


$\Rightarrow$

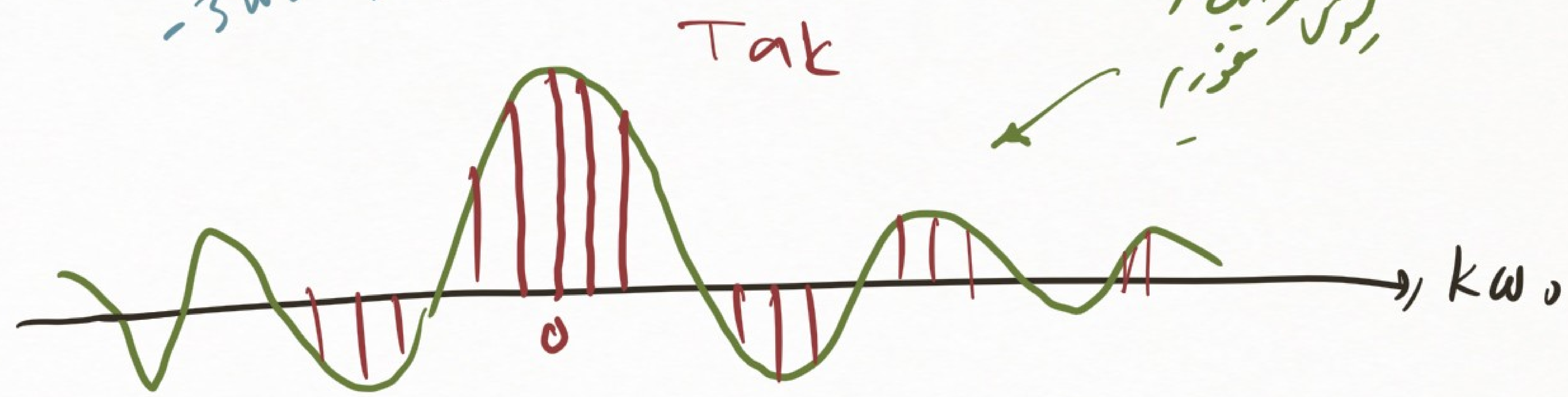


$T\uparrow \Rightarrow \omega_0 \downarrow$

$T \Rightarrow 2T$

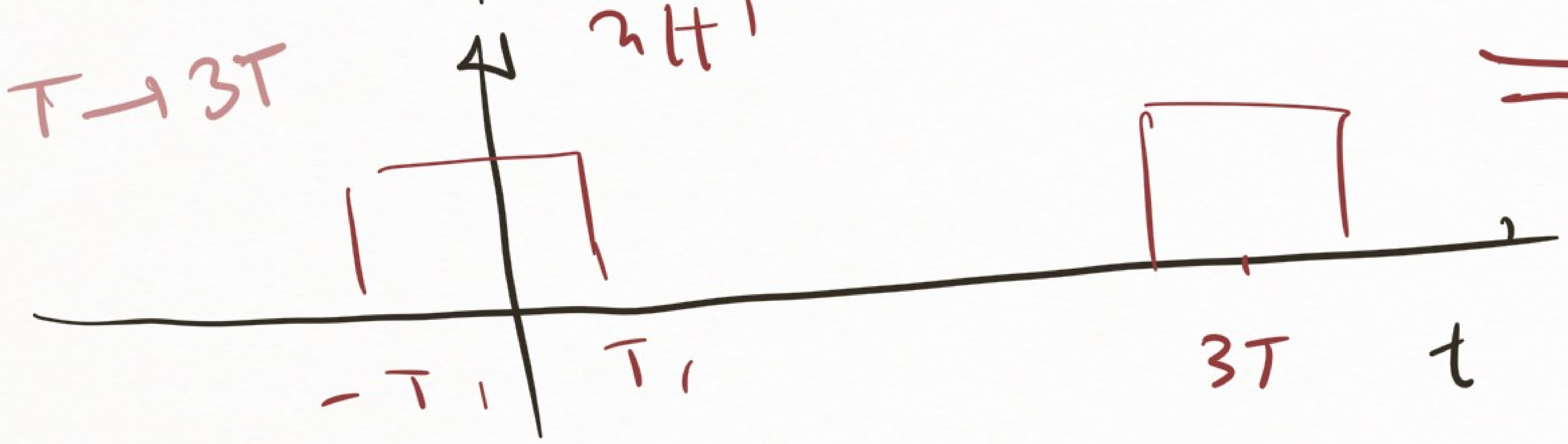


$\Rightarrow$

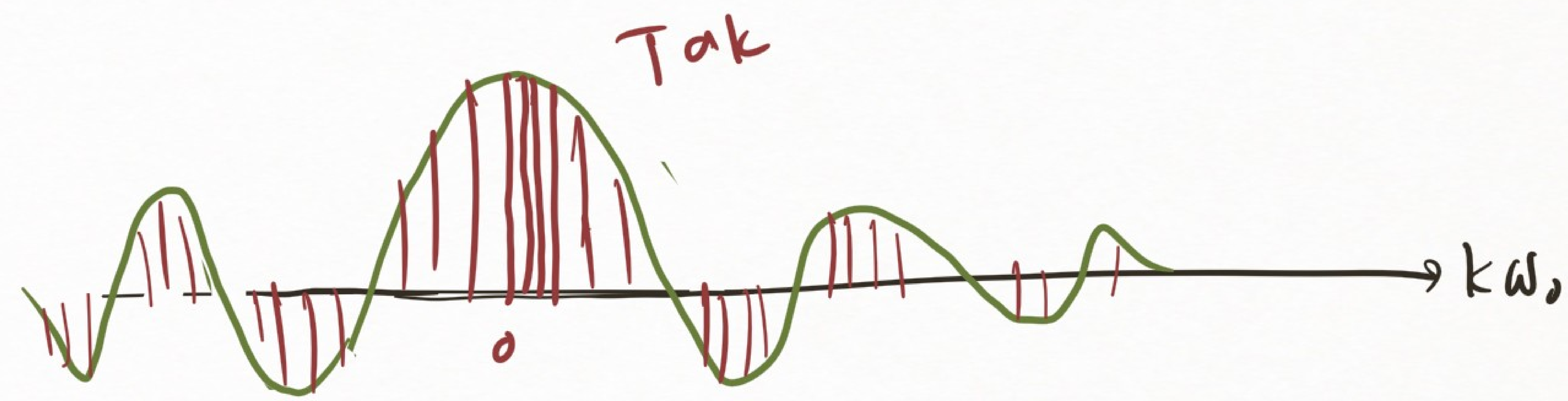


پوش فوریه‌ای که
عوض نمی‌شود

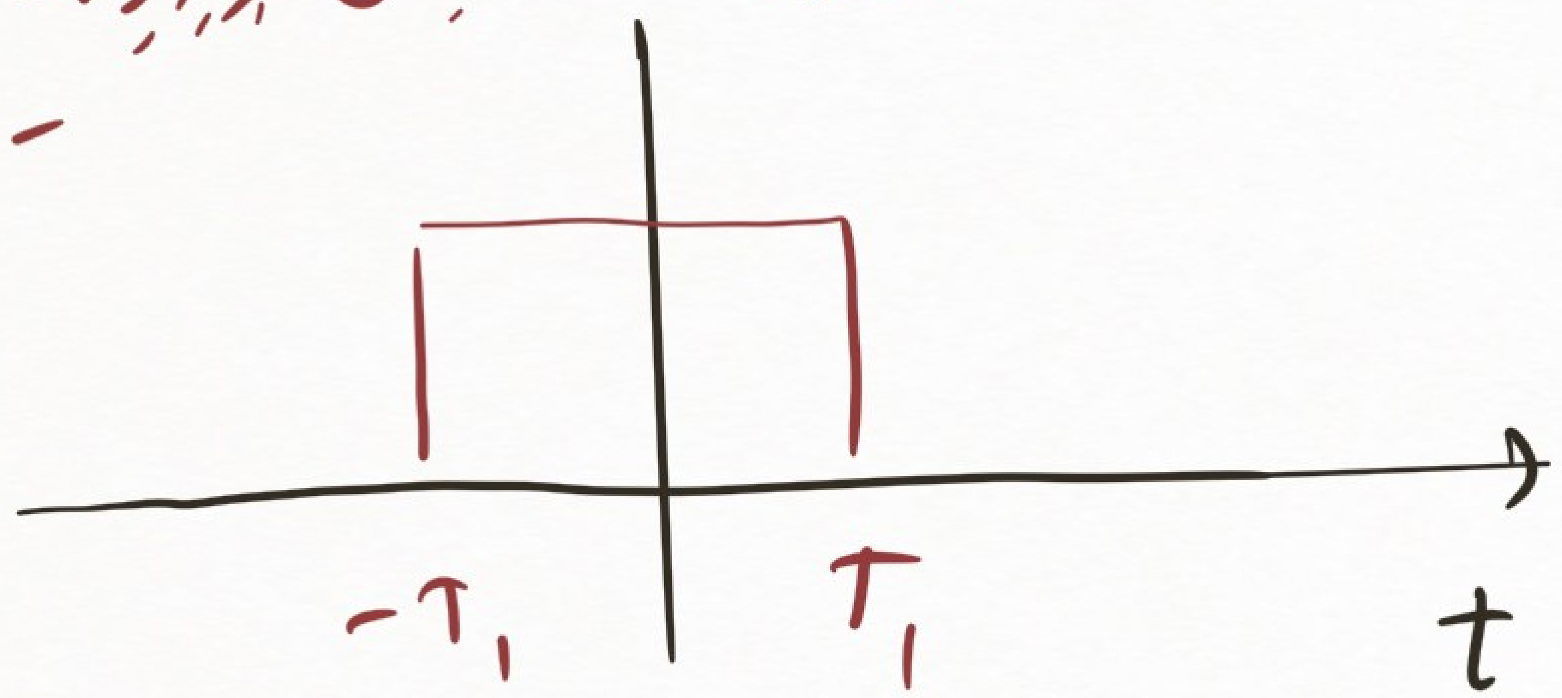
$T \rightarrow 3T$



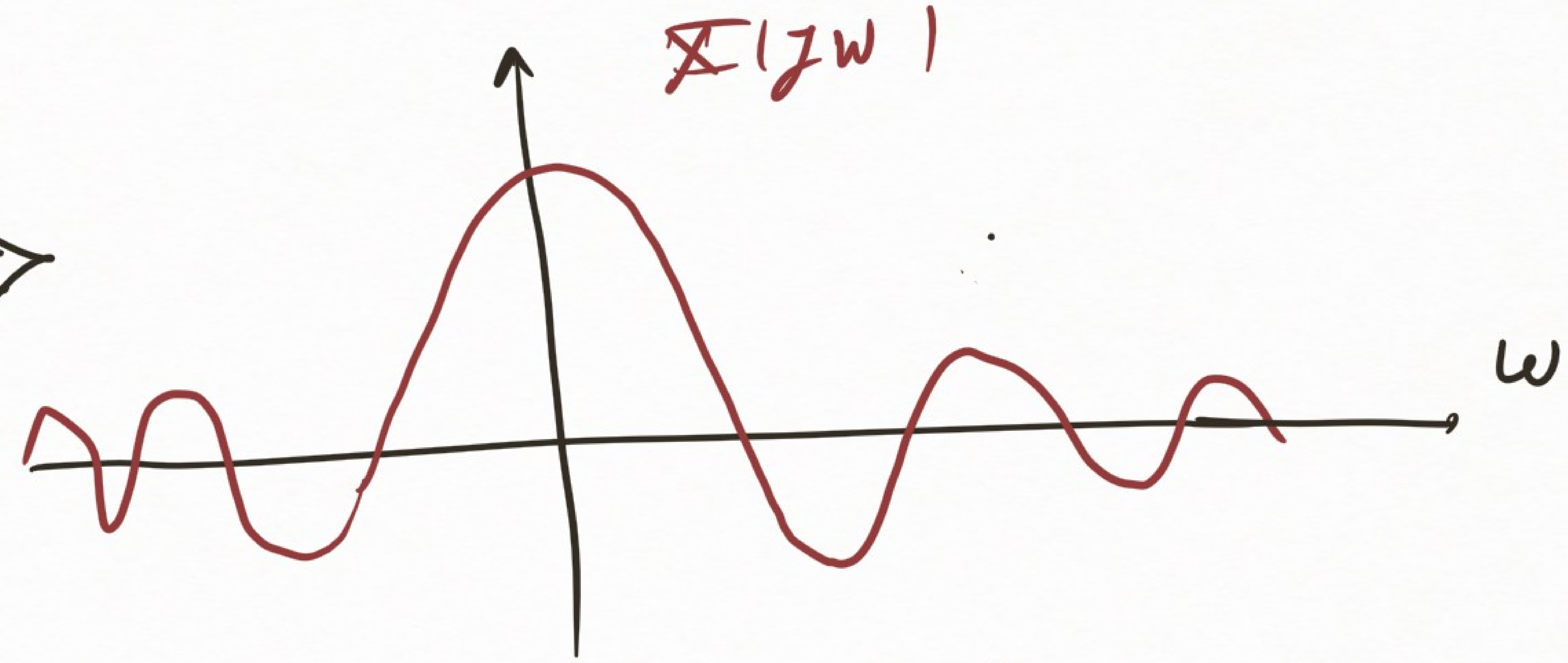
$\Rightarrow$



سیگنال غیر پریودیک $x(t)$ $\quad T \to \infty$



$\Longrightarrow$



پس ملاحظه می‌کنید با افزایش T و بی‌نهایت شدن آن سیگنال $x(t)$ پریودیک تبدیل به یک سیگنال غیر پریودیک شده و شکل سری فوریه ضرایب سری فوریه نیز به شکل پیوسته که همان تبدیل فوریه است تبدیل گردید.

ملاحظه می‌کنید که

$$Ta_k = X(jk\omega_0) \Longrightarrow a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0)$$

نتیجه مهم: اگر یک سیگنال $x(t)$ را با پریود T پریودیک کنیم ضرایب سری فوریه سیگنال پریودیک حاصل $\frac{1}{T}$ نمونه‌برداری شده از تبدیل فوریه $x(t)$ در نقاط $k\omega_0$ می‌باشد.

استفاده از سری فوریه به تبدیل فوریه از روی فرمول :

اگر $\tilde{x}(t)$ یک سیگنال پریودیک باشد داریم $\Leftarrow$

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad , \quad a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

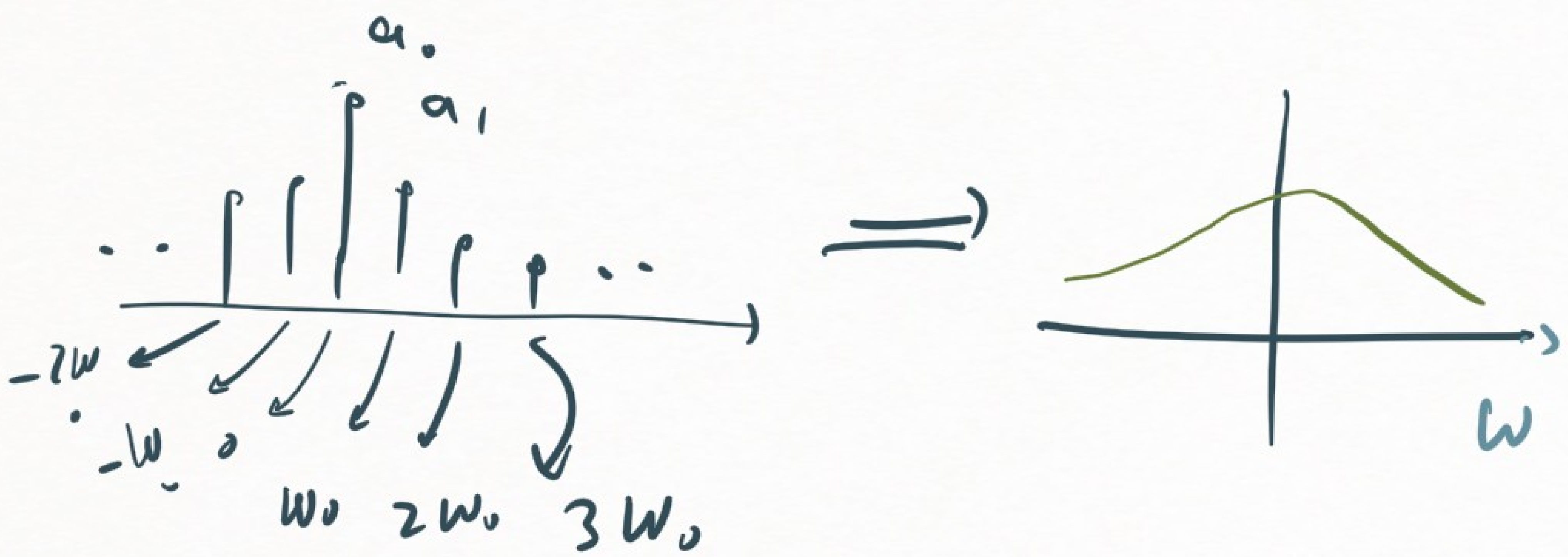
با توجه به اینکه در سیگنال غیر پریودیک را می‌توان یک سیگنال پریودیک با پریود بی‌نهایت فرض کرد بنابراین سری فوریه را برای $x(t)$ با فرض $T\to\infty$ نوشت :

$$x(t)=\lim_{T\to\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\right]=\lim_{T\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t_1)\, e^{-jk\omega_0 t_1}\, dt_1}_{a_k}\right)e^{jk\omega_0 t}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overset{d\omega}{\Delta\omega}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)\, e^{-j\omega t_1}\, dt_1\, e^{j\omega t}$$

حال وقتی که $T\to\infty$ میل میکند

$\sum_{-\infty}^{+\infty}\longrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}$, $k\omega_0\longrightarrow\omega$ متغیر پیوسته , $\Delta\omega\longrightarrow d\omega$ (فاصله بین a_k کم میشود) , $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\Delta\omega\Longrightarrow\frac{1}{T}=\frac{d\omega}{2\pi}$

در حقیقت اسم اندازه a_k . فاصله a_k کم و حتی گسسته تبدیل به پیوسته میشود.



و بنابراین :

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)\, e^{-j\omega t_1}\, dt_1}_{X(j\omega)}\right)e^{j\omega t}\, d\omega$$

تا اینجا:

تعریف تبدیل فوریه :

عکس تبدیل فوریه :

زوج تبدیل فوریه

$$\begin{cases} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \\ x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{+j\omega t}\, d\omega \end{cases}$$

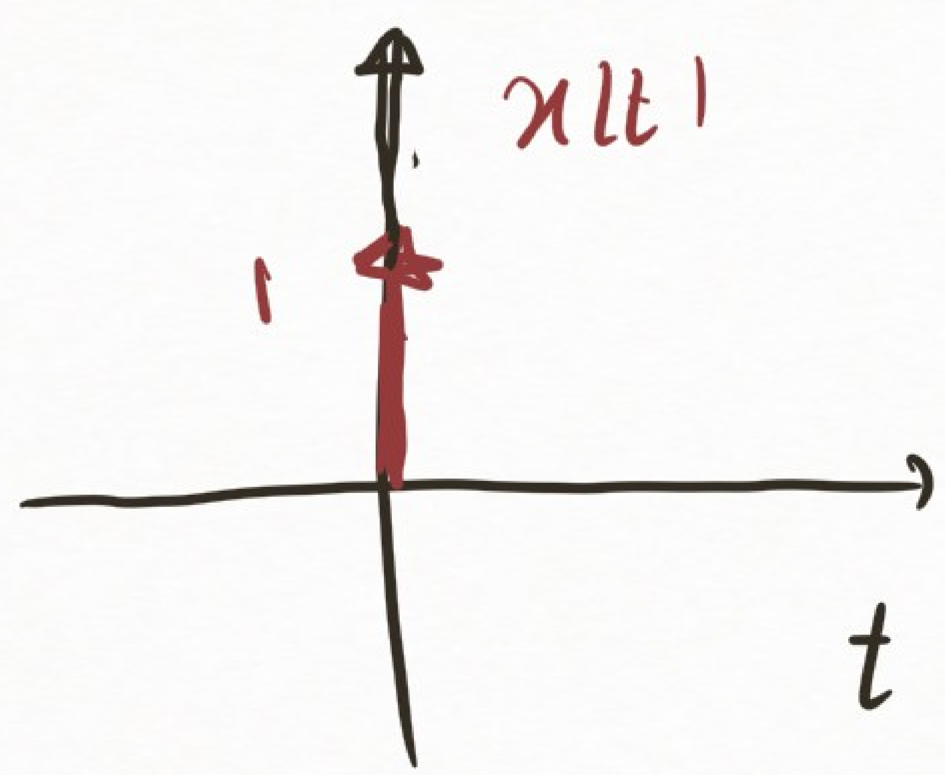
تعریف ضرایب سری فوریه به کمک تبدیل فوریه می‌توان نوشت :

$$a_k = \frac{1}{T} X(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0}$$

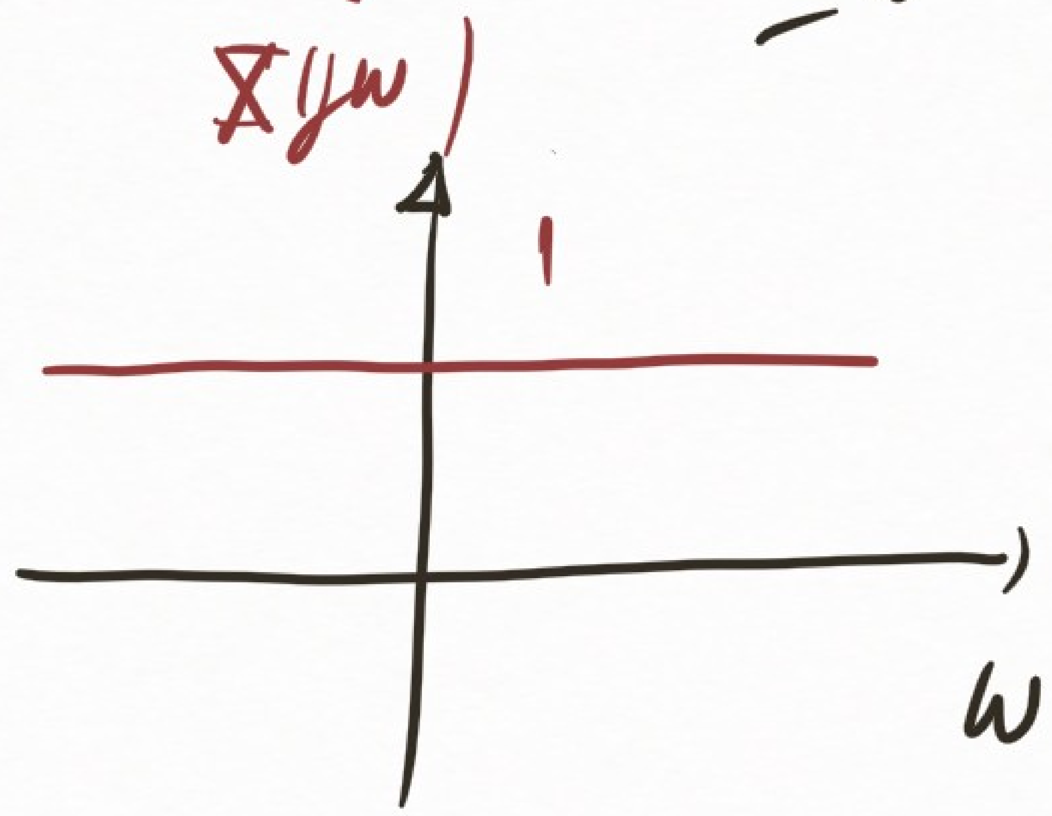
مثال -1

$$x(t) = \delta(t) \longrightarrow X(j\omega) = ?$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, x(0)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



$\Longrightarrow$



* تبدیل فوریه ضربه به ازای فرکانس‌ها مقدار یک
مستقل می‌باشد. یعنی همه فرکانس‌ها را با هم داشته
این سیگنال ما می‌باشد.

$$|X(j\omega)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt\right|<\infty \;\not\Rightarrow$$

شرایط در تبدیل فوریه :

۱- $x(t)$ مطلقاً انتگرال پذیر باشد یعنی $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\,dt<\infty$

۲- در هر فاصله محدود باید تعداد ناپیوستگی های $x(t)$ محدود باشد. به علاوه، مقدار هر یک از ناپیوستگی ها هم محدود باشد.

۳- تعداد ماکزیمم و مینیمم در هر فاصله محدود نیز محدود باشند. این شرایط کافی برای وجود تبدیل فوریه است.

نکته: سیگنال های متناوب شرط مطلقاً انتگرال پذیر را ندارند لذا از تعریف تبدیل نمی توان برای آنها تبدیل فوریه، با کمک حد روی تبدیل فوریه برای آنها پیدا می کنیم.

مثال ۲ -

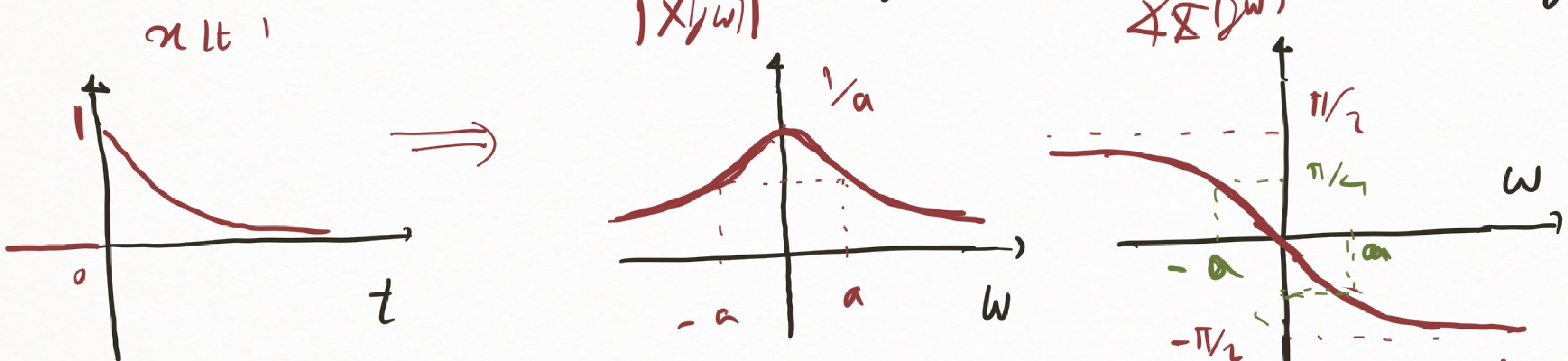
$$x(t)=e^{-at}u(t) \longrightarrow X(j\omega)=?$$

عدد مختلط

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}\,dt=\int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,dt=\frac{1}{-(a+j\omega)}e^{-(a+j\omega)t}\Big|_{0}^{\infty}=\boxed{\frac{1}{a+j\omega}}$$

اندازه / فاز

$$|X|=\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \qquad \angle X=-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



(بر حسب ω زوج) (بر حسب ω فرد)

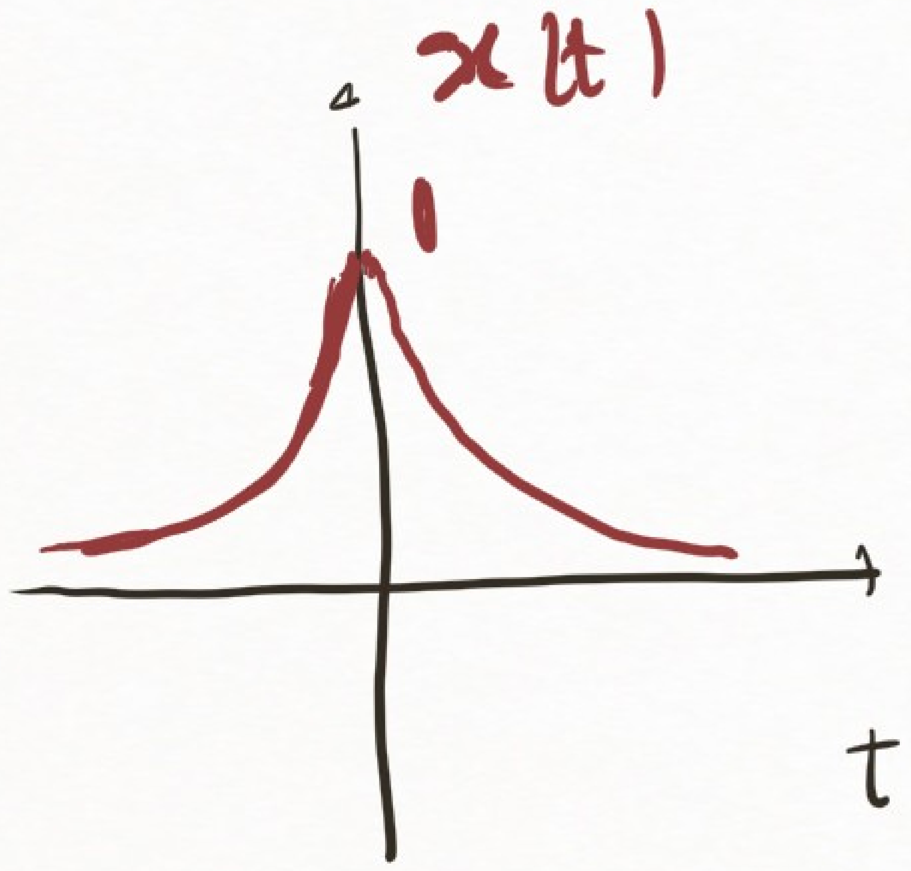
مثال -۳

$$x(t)=e^{-a|t|}\ ,\ a>0 \Longrightarrow X(j\omega)=?$$

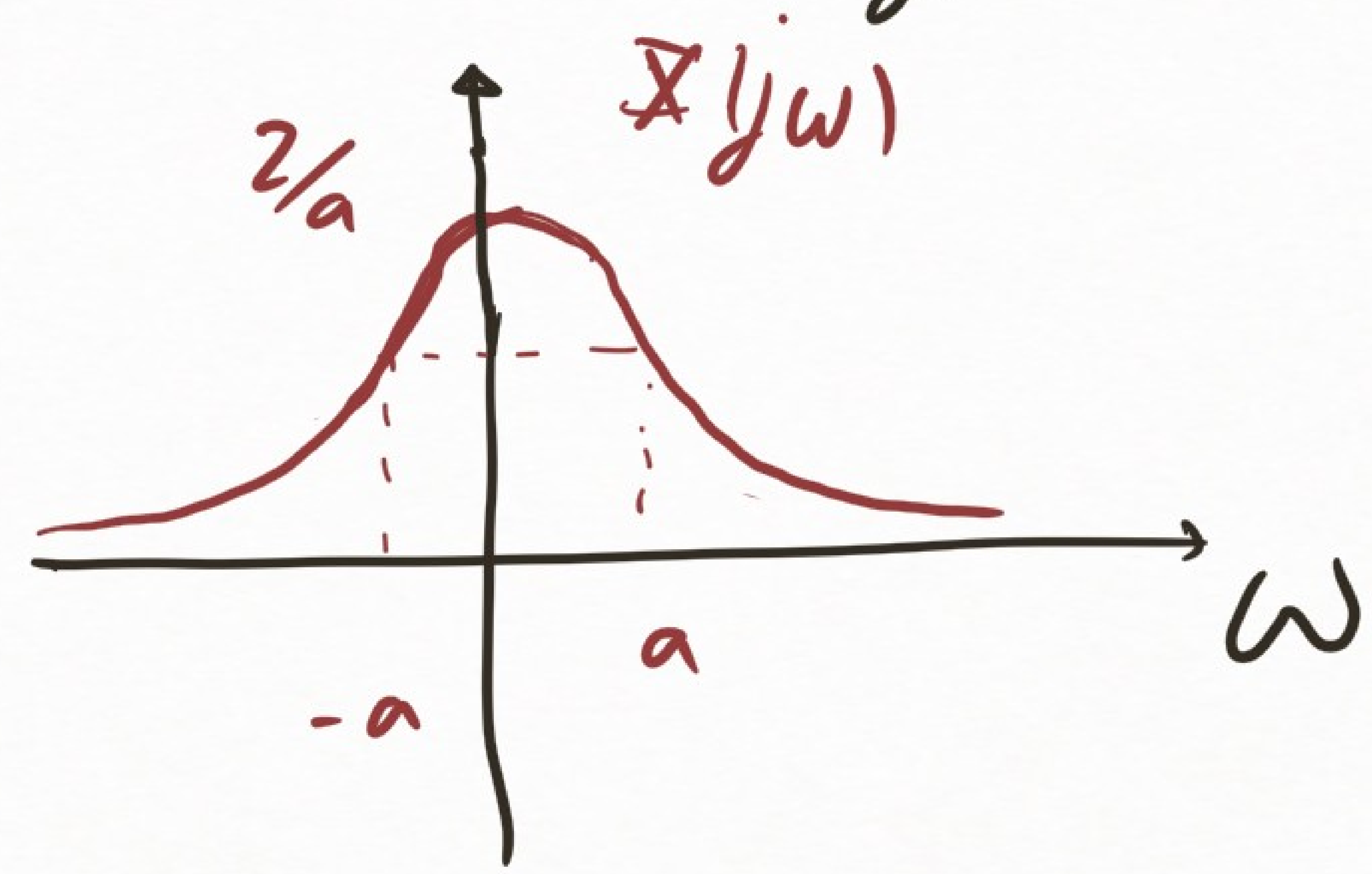
$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{0} e^{+at}e^{-j\omega t}\,dt+\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{j\omega t}\,dt=\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}=\boxed{\frac{2a}{\omega^2+a^2}}$$

عدد حقیقی است

چون $x(t)$ زوج است.



$\Longrightarrow$

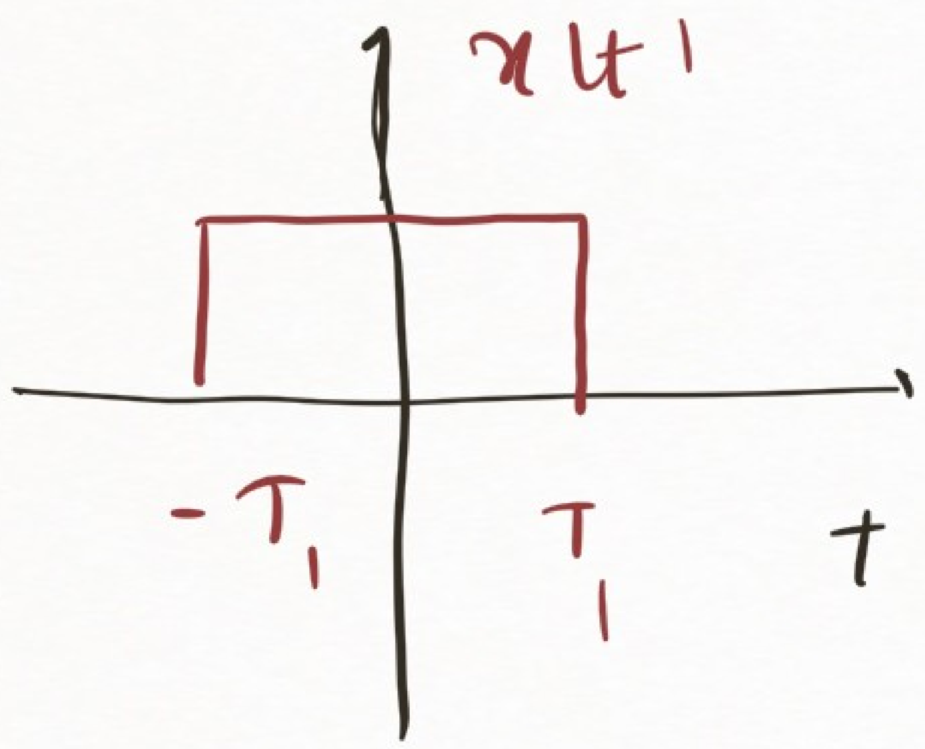


مثال -۴

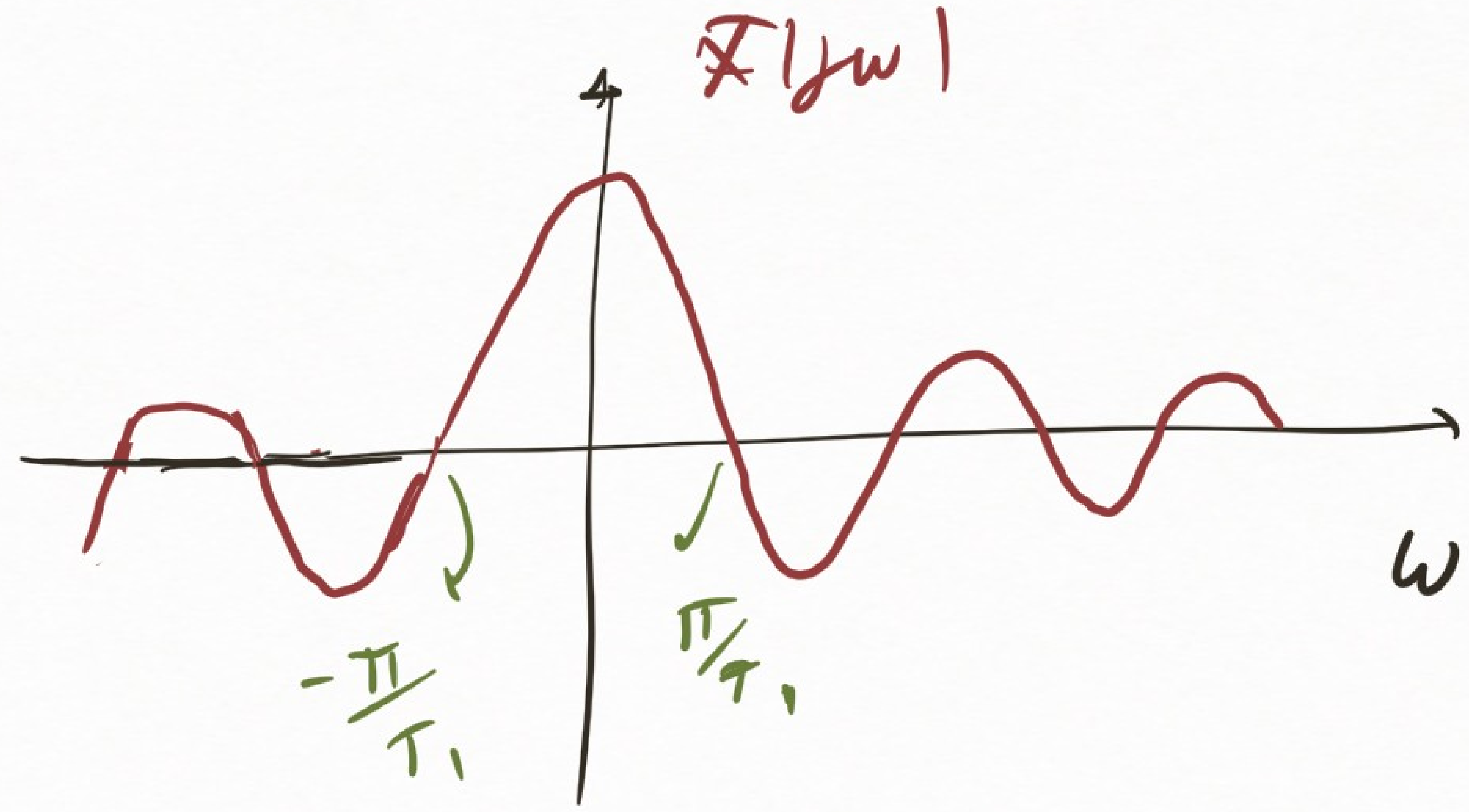
$$x(t)=\begin{cases}1 & ; \ |t|<T_1\\ 0 & , \ |t|>T_1\end{cases} \Longrightarrow X(j\omega)=?$$

$$X(j\omega)=\int_{-T_1}^{T_1} 1\times e^{-j\omega t}\,dt=\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{T_1}^{T_1}=\frac{-1}{j\omega}\left(e^{-j\omega T_1}-e^{+j\omega T_1}\right)=\boxed{\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}}$$

هم عدد حقیقی است.



$\Longrightarrow$



شبیه تابع سینک است :

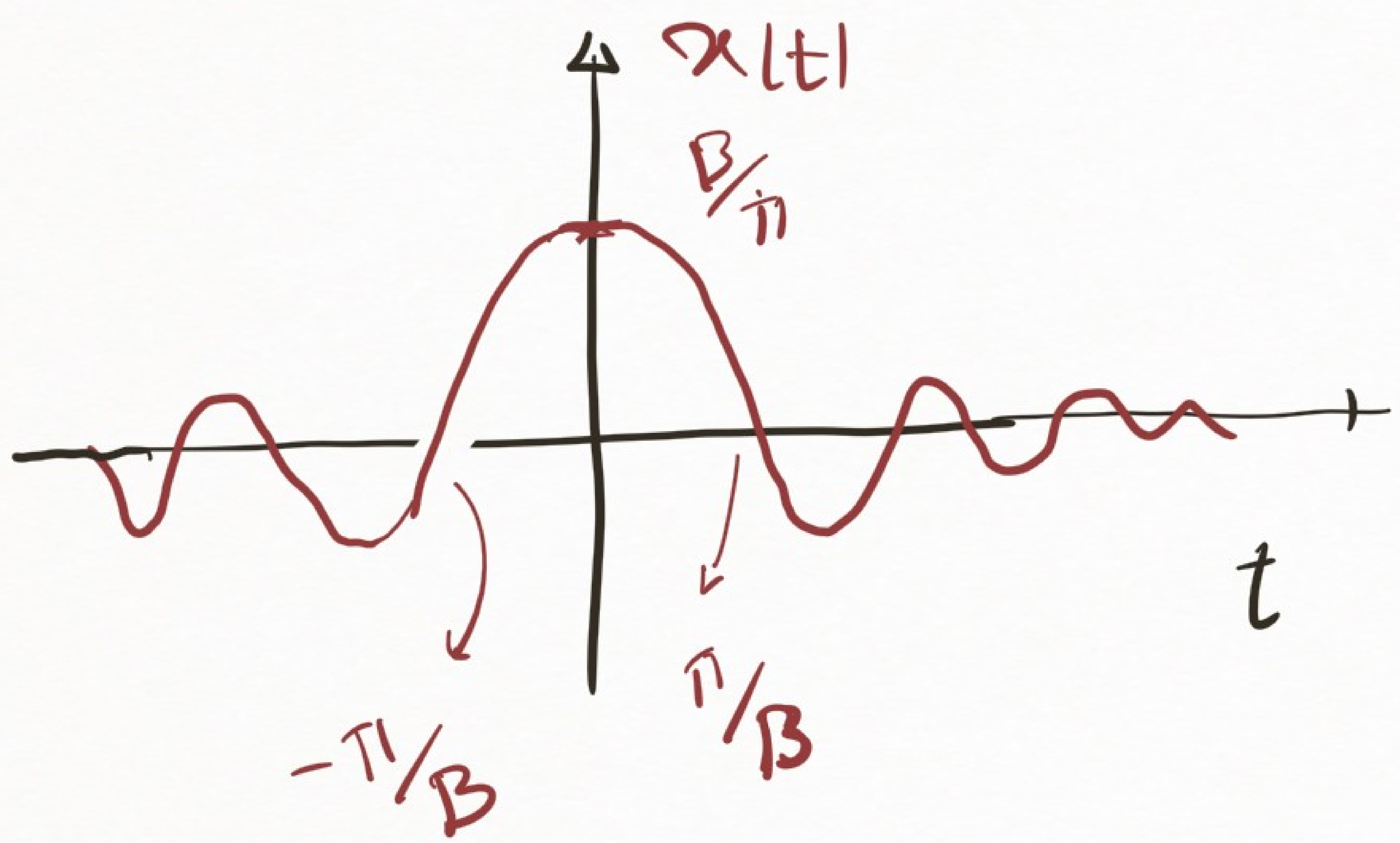
$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \mathrm{sinc}(x)$$

مثال ۵ - در این مثال شکل زمانی را میخواهیم.

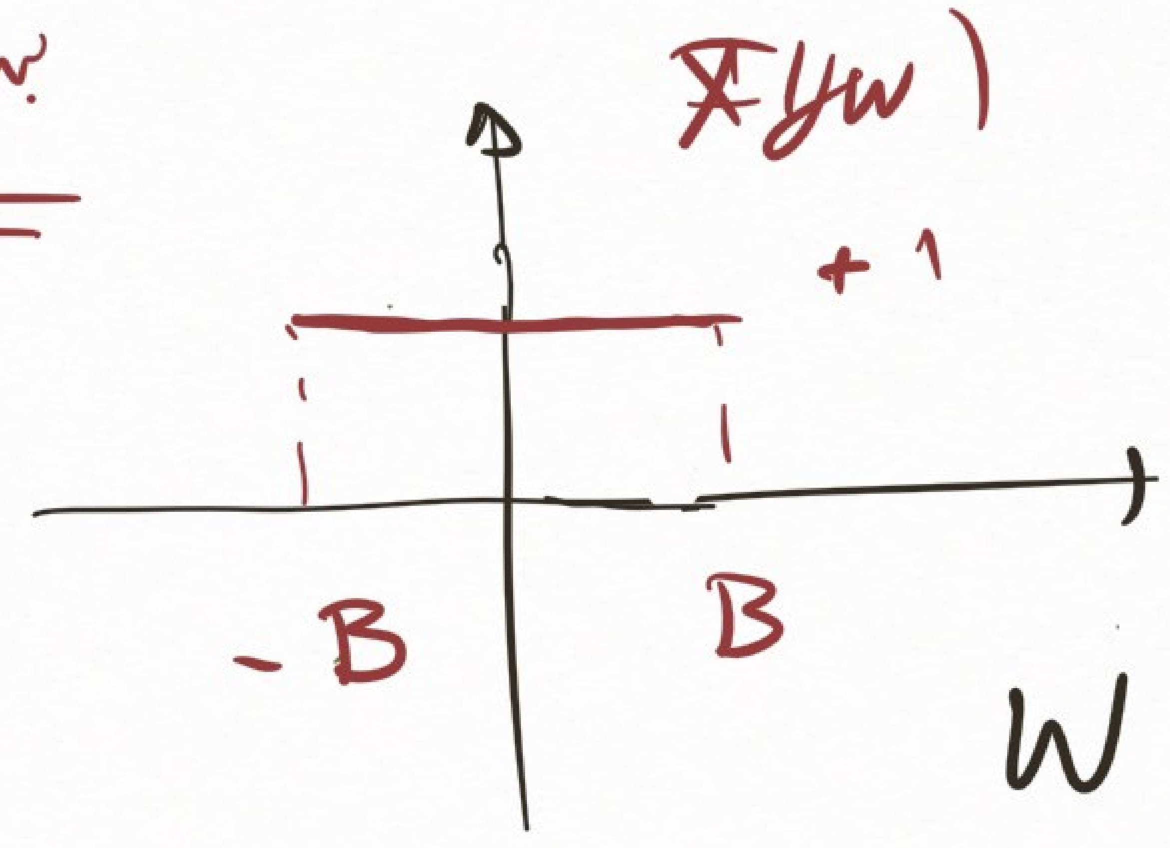
$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < B \\ 0, & |\omega| > B \end{cases} \Longrightarrow x(t) = ?$$

از تعریف تبدیل معکوس فوریه استفاده می کنیم.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{+j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} 1 \times e^{+j\omega t}\, d\omega = \boxed{\frac{\sin Bt}{\pi t}}$$



تبدیل معکوس $\Longleftarrow$



تبدیل فوریه سیگنال‌های متناوب :

مثال: فرض می‌کنیم :

$$X(j\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0) \Longrightarrow x(t)=?$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{+j\omega t}\,d\omega=\frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cancel{2\pi}\,\delta(\omega-\omega_0)\,e^{j\omega t}\,d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega_0 t}\,d\omega$$

$\omega=\omega_0$

$$x(t)=e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\delta(\omega-\omega_0)\,d\omega}_{1}=\boxed{e^{j\omega_0 t}}$$

پس : $e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

مثال: $x(t)=1 \Longrightarrow X(j\omega)=2\pi\delta(\omega)$

حال فرض کنیم یک سیگنال متناوب مثل $x(t)$ داریم و می‌خواهیم تبدیل فوریه آن را پیدا کنیم :

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}=\cdots+a_{-1}e^{-j\omega_0 t}+a_0e^{j0}+a_1e^{+j\omega_0 t}+a_2e^{2j\omega_0 t}+\cdots$$

تبدیل فوریه

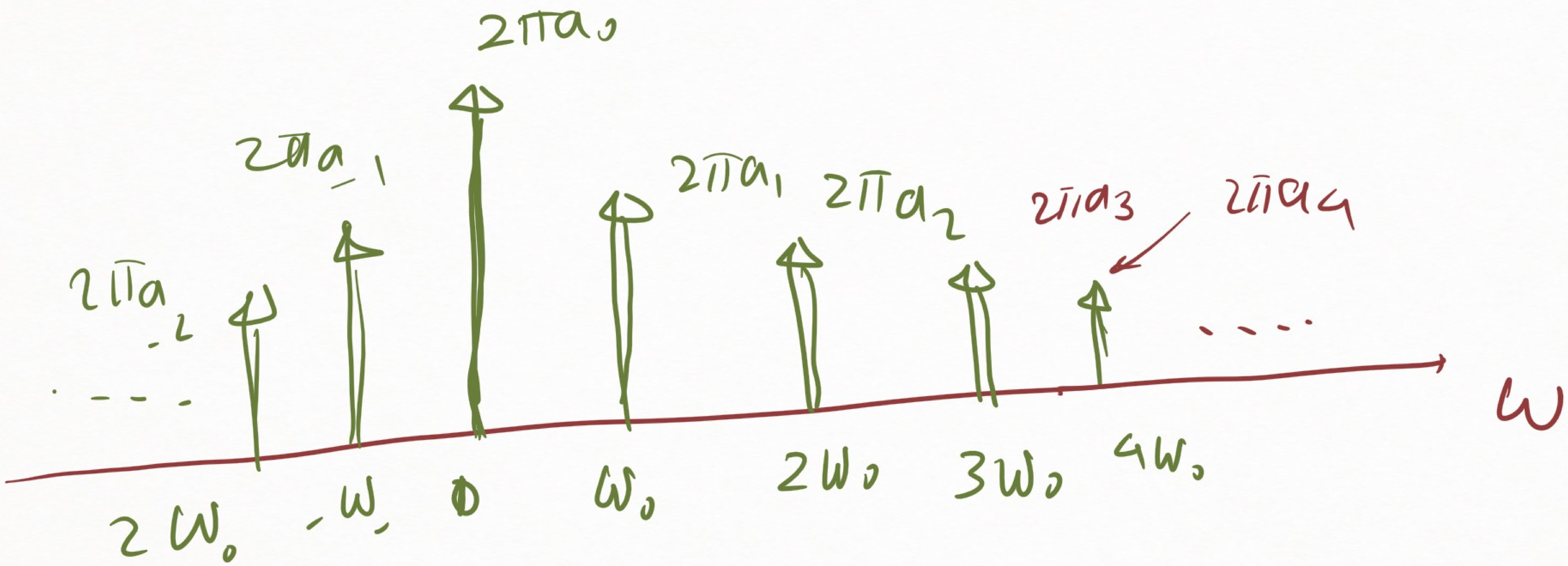
$$X(\omega)=\cdots+a_{-1}2\pi\delta(\omega+\omega_0)+a_0 2\pi\delta(\omega-0)+a_1 2\pi\delta(\omega-\omega_0)+a_2 2\pi\delta(\omega-2\omega_0)+\cdots$$

$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

پس تبدیل فوریه یک سیگنال پریودیک یک قطار ضربه است که دامنه توابع ضربه: $2\pi a_k$ و محل ضربه‌ها در $k\omega_0$ است.

تبدیل فوریه یک سیگنال پریودیک:

قطار ضربه

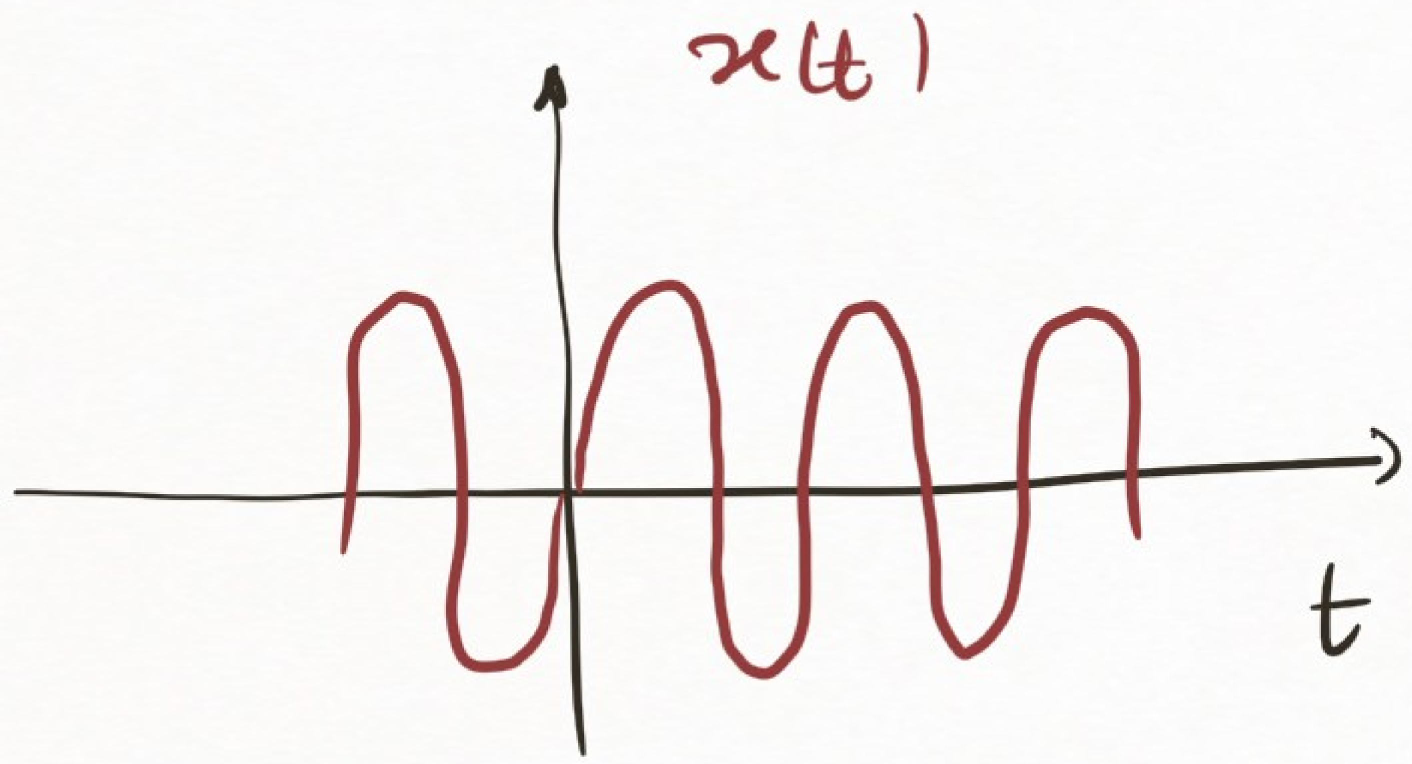


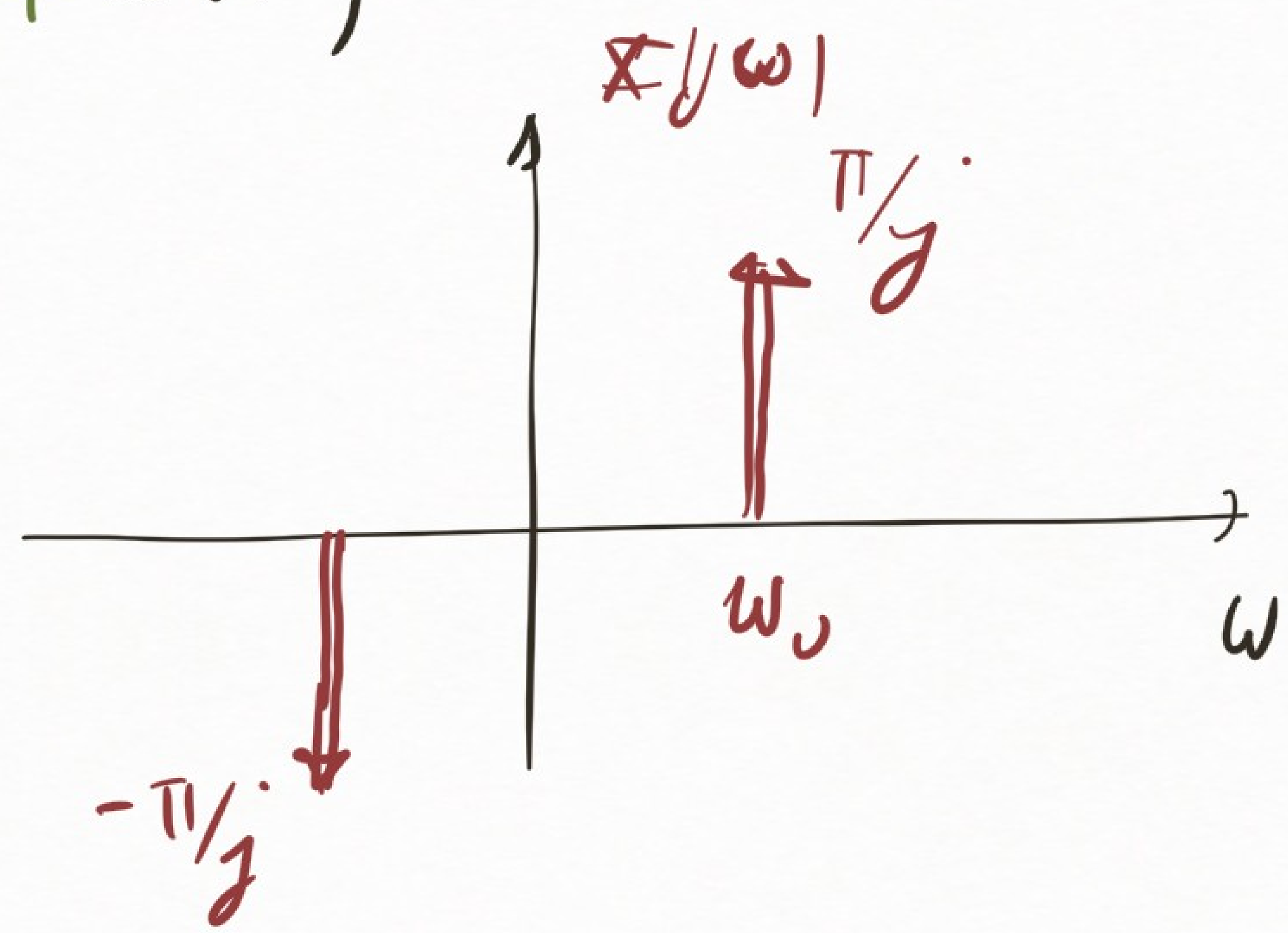
مثال

$x(t) = \sin \omega_0 t \longrightarrow X(j\omega) = ?$

$a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = \frac{-1}{2j} \Longrightarrow X(j\omega) = 2\pi \left[\frac{1}{2j} \delta(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2j} \delta(\omega + \omega_0) \right]$

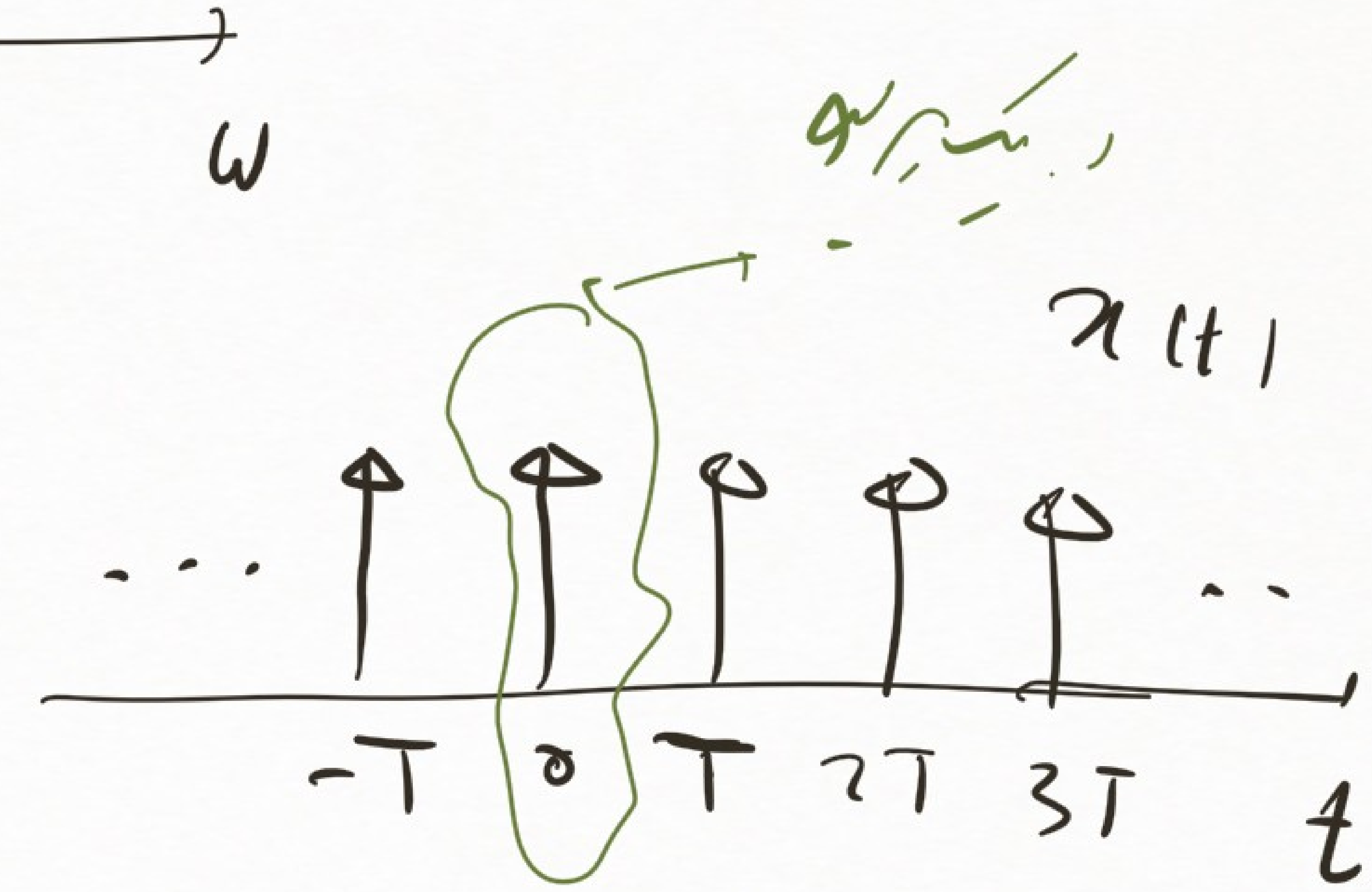
$X(j\omega) = \pi/j \left[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0) \right]$



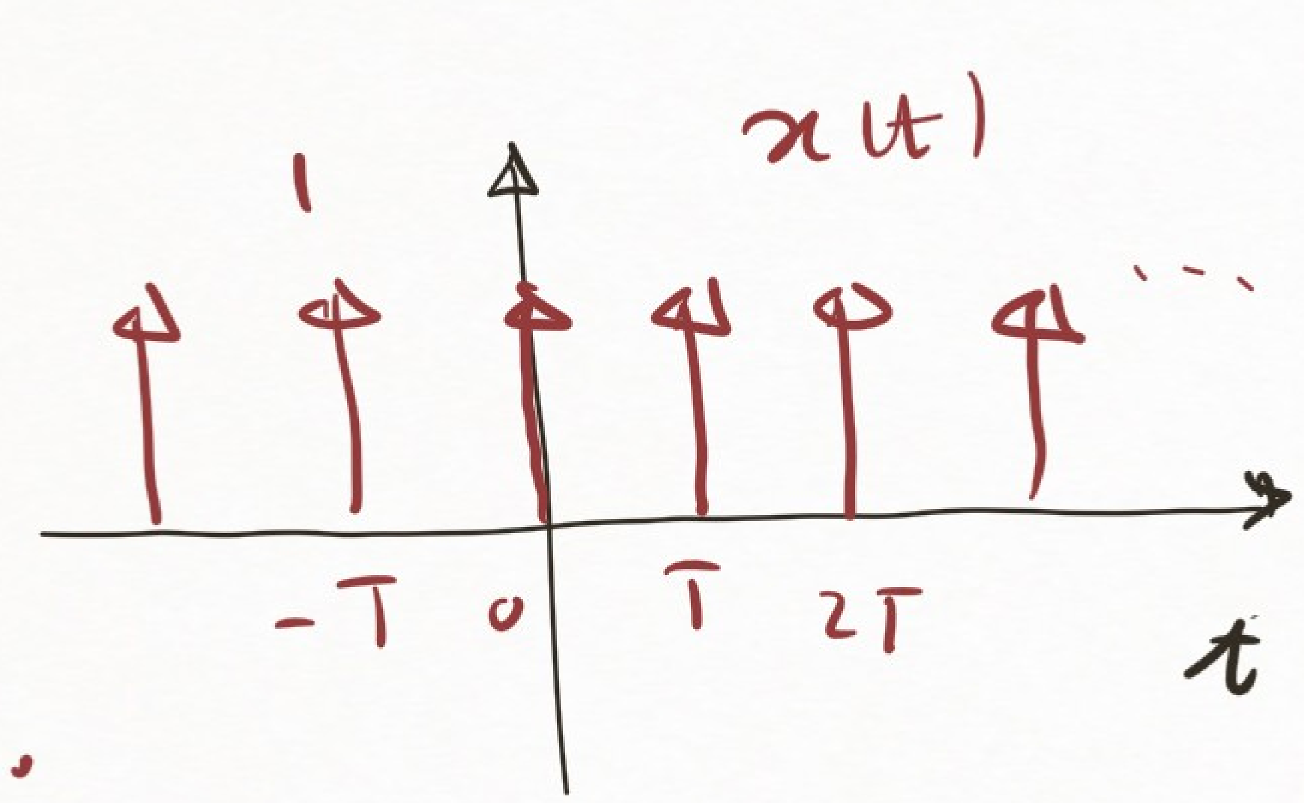


مثال

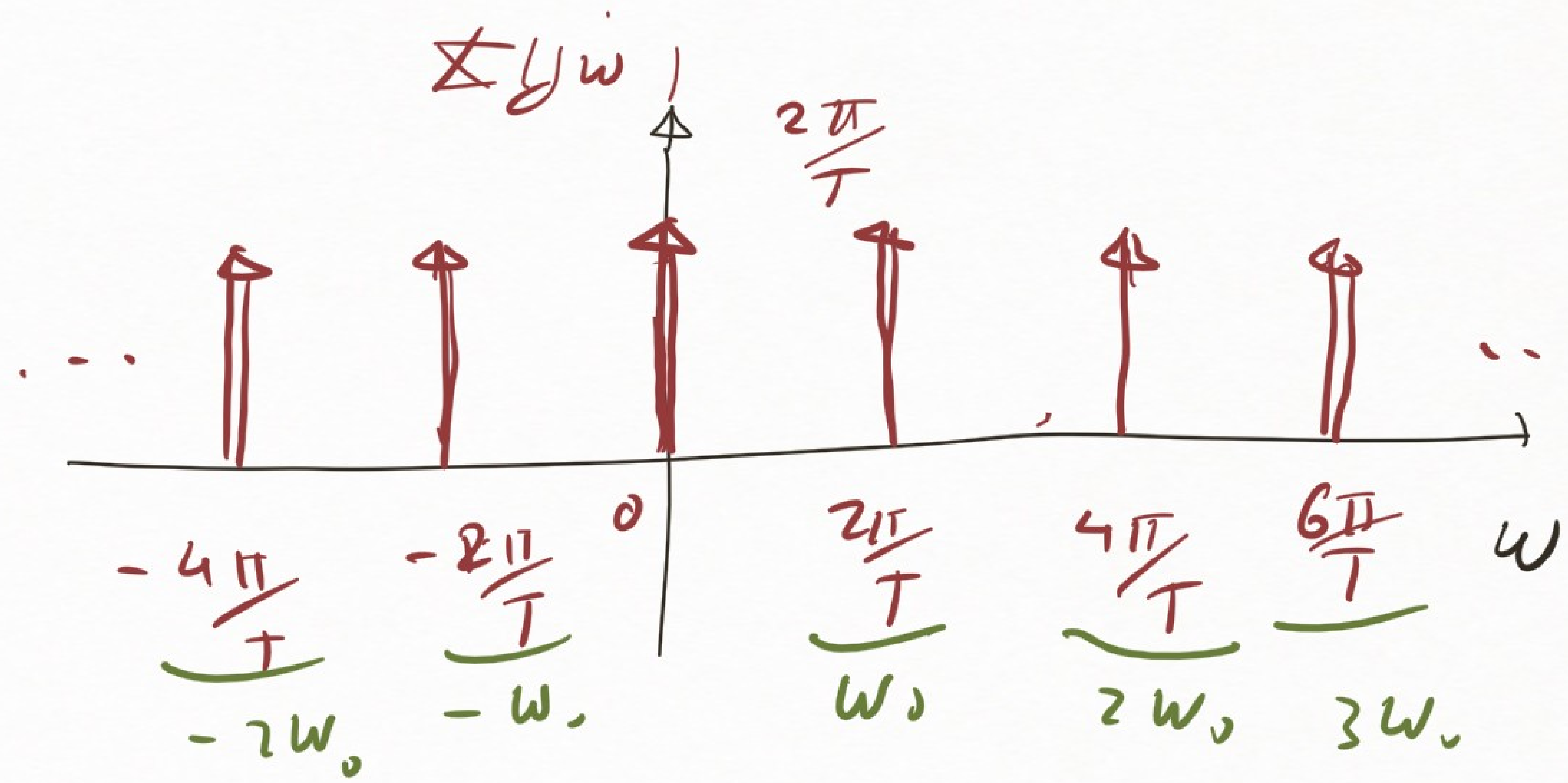
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \longrightarrow X(j\omega) = ?$



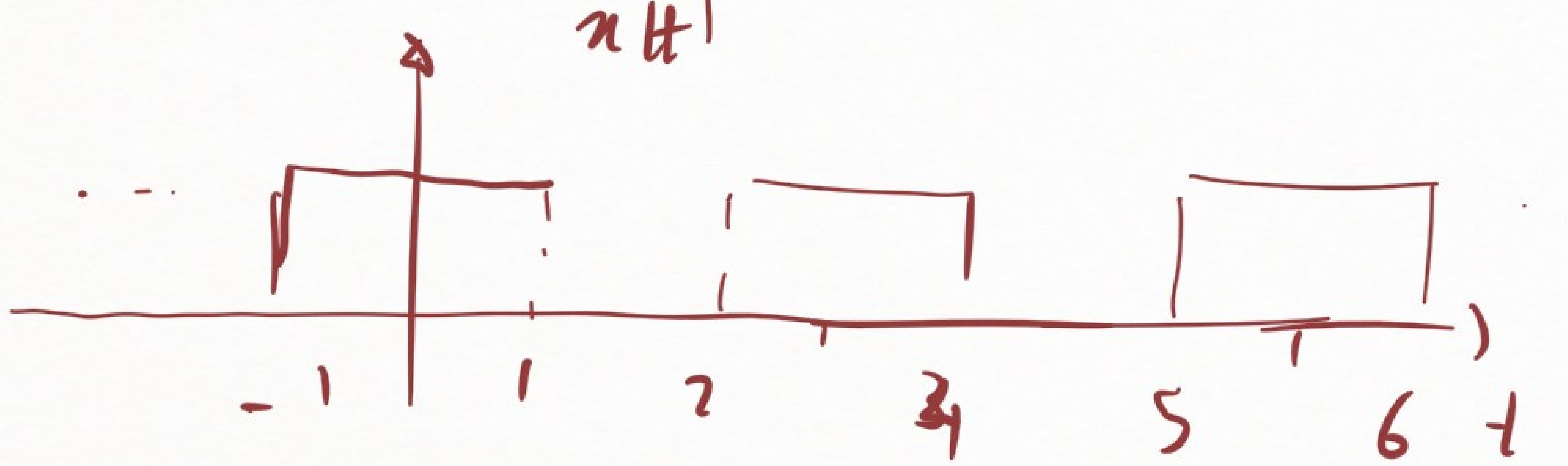
$a_k = \frac{1}{T} \int_{0^-}^{T^-} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{0^-}^{T^-} \delta(t) dt = \boxed{\frac{1}{T}}$



$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ $\Longrightarrow$

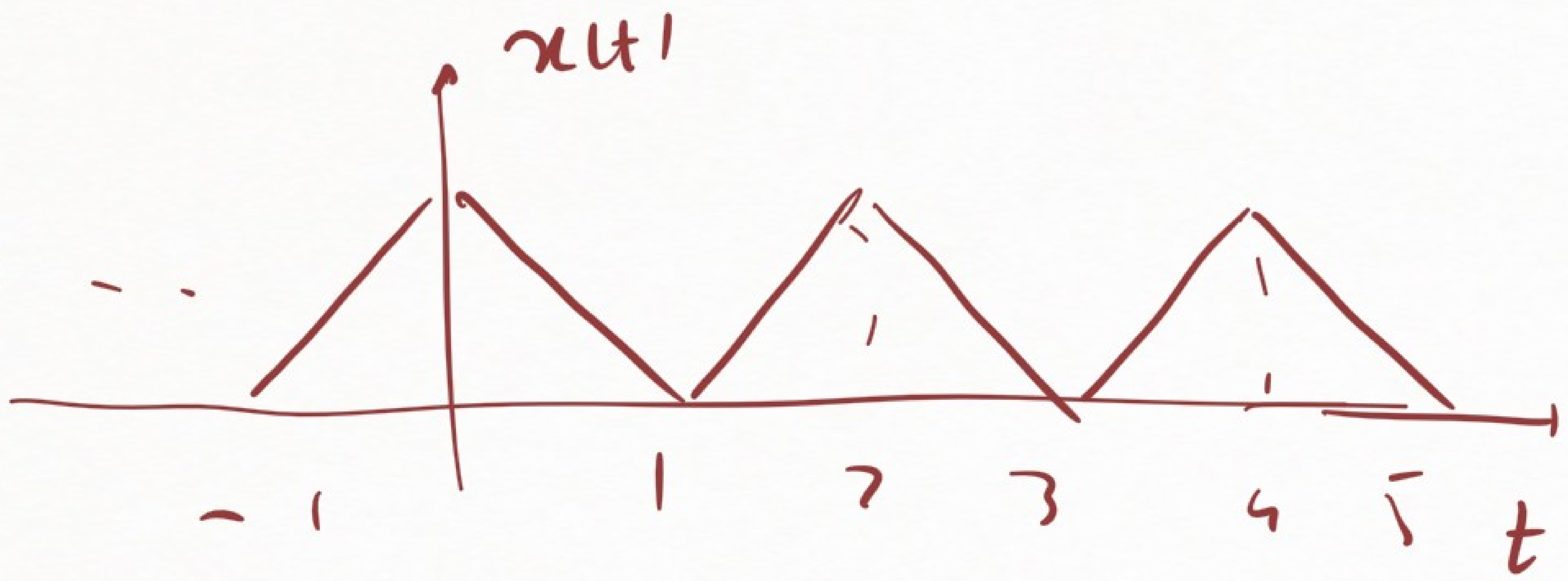


1)



$\Longrightarrow$ $X(j\omega) = ?$

2)



$\longrightarrow$ $X(j\omega) = ?$

3) $x(t) = \delta(t-3) + \frac{1}{4}\delta(t+2)$ $\longrightarrow$ $X(j\omega) = ?$

4) $x(t) = \cos 5t + \sin 3t$ $\longrightarrow$ $X(j\omega) = ?$