اما انحراف معیار $\quad \delta_{new} = \delta_{x+3000} = \delta_x = 3000$

مثال: جدول داده‌های آماری ذیل مفروض است واریانس داده‌ها را حساب کنید.

x_i	F_i
-1	2
0	3
1	4
2	1

فراوانی مطلق داده‌های آماری

$\sum F_i = n = 10$

حل:

$$\delta_x^2 = \frac{\sum F_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum F_i x_i}{n}\right)^2$$

$$\delta_x^2 = \left[\frac{2(-1)^2+3(0)^2+4(1)^2+1(2)^2}{10}\right] - \left[\frac{(-1)(2)+(0)(3)+(4)(1)+(2)(1)}{10}\right]^2$$

مثال: با توجه به جدول آماری ذیل سرمایه‌گذاری در کدام شرکت مناسب است؟

معیار سنجش	شرکت A	شرکت B	شرکت C
میانگین سود	7	5	7
انحراف معیار سود	2	1	2

حل:
شرکت B، چون انحراف معیار (واریانس) میانگین داده‌ها از خود داده کم‌تر است.

تعبیر ساده‌تر: می‌توانیم به سوددهی در این شرکت بیشتر اعتماد داشته باشیم.

سرمایه‌گذاری در شرکت A و C نسبت به B با ریسک مواجه است.

Subject
Date

حالت اول:
یک جامعه آماری داشتیم

جامعه آماری $\Leftarrow$ (σ_x , σ_x^2) : ترکیب دوگانه

حالت دوم:
فرض کنید چند جامعه آماری مفروض باشد

جامعه آماری 1 $\;(\sigma_1^2 , \sigma_1) , \mu_1$

اگر k جامعه با تعداد مشاهدات $n_1 , n_2 , \dots , n_k$ و با میانگین

$\mu_1 , \mu_2 , \dots , \mu_k$ دارای واریانس $\sigma_1^2 , \sigma_2^2 , \dots , \sigma_k^2$

جامعه آماری k $\;(\sigma_k^2 , \sigma_k) , \mu_k$

هدف: محاسبه میانگین و واریانس کل جامعه‌های مفروض

$$\begin{cases} \mu_{\text{کل جامعه}} \triangleq \dfrac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2 + \dots + n_k\mu_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \\[2ex] \sigma^2_{\text{کل جامعه}} \triangleq \dfrac{\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 n_i + \sum_{i=1}^{k} n_i (\mu_i - \mu_{\text{کل جامعه}})^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \end{cases}$$

مثال: میانگین نمرات آمار و واریانس در دو کلاس به شرح ذیل است: میانگین و

نمرات تمامی دانشجویان دو کلاس را محاسبه نمایید.

کلاس	۱	۲
تعداد دانشجو	۲۰	۳۰
میانگین	۱۵	۱۰
واریانس	۱۷	۱۲

Subject

Date

حل:

$$\mu_{total} = \frac{n_1\mu_1+n_2\mu_2}{n_1+n_2} \Rightarrow \frac{20(15)+30(10)}{20+30} = \boxed{12}$$

$$\delta^2_{\text{کل جامعه}} = \frac{\left[\delta_1^2 n_1+\delta_2^2 n_2\right] + \left[n_1(\mu_1-\mu_{\text{کل}})^2 + n_2(\mu_2-\mu_{\text{کل}})^2\right]}{n_1+n_2}$$

$$\Rightarrow \delta^2_{\text{کل جامعه}} = \frac{\left[17(20)+(12)(30)\right] + \left[20(15-\mu_{\text{کل}})^2 + 30(10-\mu_{\text{کل}})^2\right]}{20+30} = \boxed{20}$$

نکته مهم: از رابطه واریانس چند جامعه آماری می توانیم نتیجه بگیریم، هرگاه چند جامعه آماری ترکیب یک جامعه بدهد واریانس این جامعه بزرگتر از میانگین واریانس جوامع تشکیل دهند آن است.

استثنا: درصورتی که میانگین جوامع باهم برابر باشند ; $\mu_1=\mu_2=\dots=\mu_k$; $k=1,\dots,n$

دراینصورت واریانس کل جامعه با میانگین واریانس جوامع تشکیل دهنده آن برابر خواهد بود.

$$\delta^2_{\text{کل جامعه}} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i\delta_i^2}{n} \; ; \; n=n_1+n_2+\dots+n_k$$

نیم‌واریانس:

- یکی از شاخص پراکندگی نیم‌واریانس
- برای استخراج انحرافات نامناسب و نامطلوب به کار می‌رود.
- در داده‌های مربوط به سود مقادیر کوچک‌تر از میانگین و در داده‌های مربوط به زیان مقادیر بزرگ‌تر از میانگین نامطلوب هستند.

$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$

زیان	سود
داده‌های بیش‌تر از میانگین نامطلوب	داده‌های کم‌تر از میانگین نامطلوب

شاخص نیم‌واریانس

که عبارت از متوسط مجذور مقادیر نامطلوب

$S.V = S_{emi} - Variance$

$$S.V \triangleq \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i-\mu)^2}{k}$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$

مشاهدات موجود در جامعه آماری باشند. تا n

در این فرمول k تا نامطلوب داریم.

ضریب تغییرات CV :
یا ضریب پراکندگی

در شرایط ذیل از معیار پراکندگی ضریب تغییرات استفاده می کنیم [که میانگین و واریانس

ما قدران ماست.]

① ـ دو یا چند جامعه در مقایسه با هم دارای مشاهدات ناهمگن از نظر تعداد واحد اندازه گیری باشند.

جامعه ۱ برحسب متر (m)

جامعه ۲ برحسب اینچ (inch)

جامعه ۱ و جامعه ۲ $\xrightarrow[\text{اندازه گیری}]{\text{شاخص}}$ C.V ؟

② ـ گاهی اوقات صفات یکسان هستند ولی بزرگی مشاهدات به طور قابل ملاحظه ای

تفاوت دارد.

③ ـ زمانی که ۲ یا چند جامعه آماری دارای میانگین متفاوتی باشند.

شرط لازم اما کافی نیست

۱- ضریب تغییرات / پراکندگی از میانگین

$$CV_{\mu} \triangleq \frac{\sum \frac{|x_i - \mu|}{n}}{\bar{X}}$$

نرمالیزاسیون (نسبت به متغیر پایه) تغییرات تثبیت می‌کند.

کاربرد: منطق فازی Fuzzy logic

۲- ضریب تغییرات / پراکندگی از میانه

$$CV_{md} \triangleq \frac{\sum \frac{|x_i - md|}{n}}{md}$$

۳- ضریب تغییرات / پراکندگی از مُد یا نما

$$CV_{Mo} = \frac{\sum \left| \frac{x_i - Mo}{n} \right|}{Mo}$$

۴- واریانس نسبی:

$$CV_{\text{نسبی}} \triangleq \frac{\delta^2}{(\bar{X})^2}$$

۵ مهم:

به منظور کلی از ضریب تغییرات: $CV \triangleq \frac{\delta}{\bar{X}}$ ضریب تغییرات

$$CV = \frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}}$$

(پراکندگی داده ها را نسبت به مرکز ثقل داده نرمالیزه کنیم.)

همواره ضریب تغییرات با بیان درصد همراه است.

$$CV\% \triangleq \frac{\delta}{\bar{X}} \times 100\%$$

ضریب تغییرات (CV):

ویژگی های CV:

① ـ اگر $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1$ مشاهدات موجود در یک جامعه آماری باشد.

a: عدد ثابت

$$CV_{ax} = \frac{\delta_{ax}}{\bar{X}_{ax}} = CV_x$$

② ـ

$$CV_{x\pm a} = \frac{\delta_{x\pm a}}{\bar{X}_{x\pm a}} = \frac{\delta_x}{\bar{X}_{x+a}}$$

مثال: میانگین سن یک گروه ۱۲ ~~امر~~ سال و ضریب تغییرات سن آنها ۲۰٪ است انحراف معیار بین آنها چقدر است؟

حل:

$$0{,}2 = CV = \frac{\delta}{\bar{X}} \Rightarrow \delta = 0{,}2 \times 12$$

$\bar{X} = 12$

Subject
Date

مثال: متوسط درآمد ماهانه کارگران کارخانه A، ۱۷ هزار تومان با واریانس ۴ می باشد.

در کارخانه B متوسط درآمد ماهانه ۲۵۰ هزار ریال با واریانس ۹۰۰ می باشد اختلاف درآمد در کدام کارخانه بیشتر است.

حل:

شرط لازم نیست که متناظر CV
① - واحدهای اندازه گیری یکسان نیست
② - میانگین ها برابر نیست

بنابراین برای مقایسه بین دو جامعه از ضریب تغییرات استفاده کنیم.

$$\begin{cases} CV_A = \dfrac{\delta_A}{\bar{X}_A} = \dfrac{\sqrt{۴}}{۱۷} = \dfrac{۲}{۱۷} = ۱۱,۷۶\% \\[2ex] CV_B = \dfrac{\delta_B}{\bar{X}_B} = \dfrac{\sqrt{۹۰۰}}{۲۵۰} = \dfrac{۳۰}{۲۵۰} = ۱۲\% \end{cases}$$