$\boxed{\text{* تبدیل } Z}$

* تبدیل لاپلاس برای سیگنال های گسسته به تبدیل Z معروف است. یا به عبارتی دیگر تعمیمی از تبدیل فوریه گسسته زمان است

در تبدیل فوریه داشتیم :

$$e^{j\omega_0 n} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow \underbrace{H(\omega_0)}_{\text{تبدیل فوریه}} e^{j\omega_0 n}$$

حالت کلی برای هر سیگنال (تبدیل Z) :

$$Z_0^{\,n} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow \underbrace{H(Z_0)}_{\text{تبدیل } Z} Z_0^{\,n}$$

* تعریف تبدیل Z سیگنال $x[n]$:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] Z^{-n}$$

* رابطه تبدیل فوریه و تبدیل Z :

تبدیل فوریه = تبدیل Z روی دایره واحد $\Longrightarrow \bar{X}(e^{j\omega}) = \bar{X}(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$

یا :

$$\begin{cases} \bar{X}(e^{j\omega}) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\ \bar{X}(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \end{cases} \xrightarrow{z = re^{j\omega}}$$

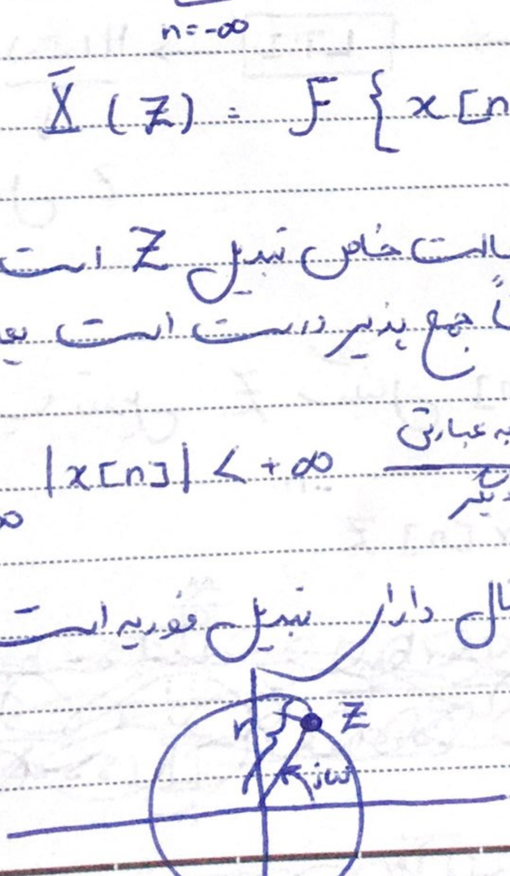
$$\bar{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow \bar{X}(z) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}$$

* اینکه می‌گوییم تبدیل فوریه حالت خاص تبدیل Z است، فقط برای سیگنال‌های مطلقاً جمع‌پذیر درست است یعنی سیگنال‌هایی که :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < +\infty \xrightarrow[\text{دیگر}]{\text{یا به عبارتی}}$$

اگر دایره واحد ($e^{j\omega}$) داخل ROC باشد، سیگنال دارای تبدیل فوریه است



SUBJECT: DATE: /   /

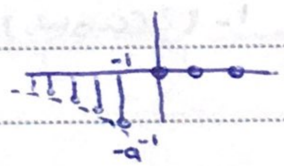
*** تبدیل Z های معروف :**

1) $x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} X(Z) = \dfrac{1}{1-aZ^{-1}}$ $|Z|>|a|$

$0<a<1$ ROC:

2) $x[n] = -(a)^n u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} X(Z) = \dfrac{1}{1-aZ^{-1}}$ $|Z|<|a|$

$0<a<1$ ROC: داخل دایره به شعاع a



3) $n a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} X(Z) = \dfrac{aZ^{-1}}{(1-aZ^{-1})^2}$ $|Z|>|a|$

4) $-na^n u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} X(Z) = \dfrac{aZ^{-1}}{(1-aZ^{-1})^2}$ $|Z|<|a|$

5) $x[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{Z} X(Z) = 1$ تمام صفحه

6) $x[n] = u[n] \xleftrightarrow{Z} X(Z) = \dfrac{1}{1-Z^{-1}}$ $|Z|>1$

7) $-u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} X(Z) = \dfrac{1}{1-Z^{-1}}$ $|Z|<1$

8) $\delta[n-m] \xleftrightarrow{Z} X(Z) = Z^{-m}$

تمام صفحه به جز صفر (اگر $m>0$) یا ∞ (اگر $m<0$)

SUBJECT: DATE: / /

9) $(\cos \omega_0 n)u[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \dfrac{1-(\cos\omega_0)z^{-1}}{1-(2\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$ $|z|>1$

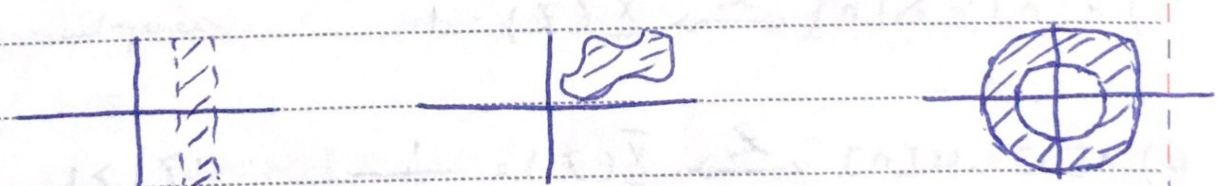
10) $(\sin \omega_0 n)u[n] \xleftrightarrow{Z} \dfrac{(\sin\omega_0)z^{-1}}{1-(2\overset{\cos}{\cancel{\sin}}\,\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$ $|z|>1$

11) $(r^n\cos \omega_0 n)u[n] \xleftrightarrow{Z} \dfrac{1-(r\cos\omega_0)z^{-1}}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$ $|z|>r$

12) $(r^n\sin \omega_0 n)u[n] \xleftrightarrow{Z} \dfrac{(r\sin\omega_0)z^{-1}}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$ $|z|>r$

* خواص ROC:

(1): ROC شامل حلقه‌هایی به مرکز مبدأ مختصات است



(2): ROC شامل هیچ قطبی نیست

SUBJECT: DATE: / /

③ نکته: اگر $x[n]$ دوره محدود داشته باشد، آنگاه کل ROC صفحه است به جز احتمالا $Z=0$ یا $Z=\infty$

سیگنال دست راستی

if $x[n]=0 \quad \forall n<0 \rightarrow Z=+\infty \in ROC$

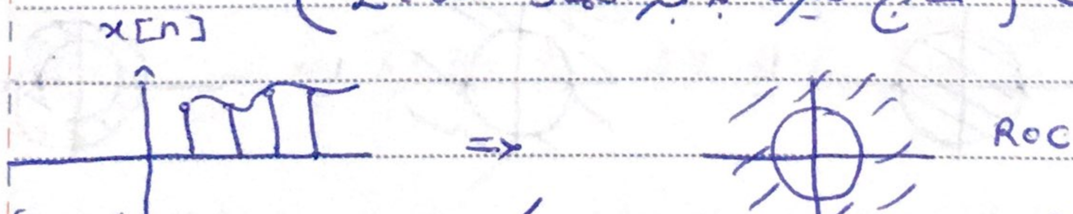
if $x[n]=0 \quad \forall n>0 \rightarrow Z=0 \in ROC$

سیگنال دست چپی

یا
- درجه صورت > درجه مخرج → در بی‌نهایت قطب داریم → $+\infty \notin ROC$
- درجه صورت < درجه مخرج → در بی‌نهایت صفر داریم

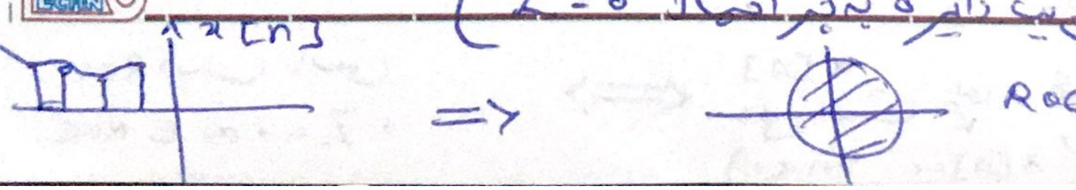
* اگر سیگنال هم قبل از صفر و هم بعد از صفر مقدار داشته باشد، $Z=0$ و $Z=\infty$ جزء ROC نیستند.

④ نکته: اگر $x[n]$ دست راستی باشد ⟷ ROC نیز دست راستی است (خارج دایره به جز احتمالا $Z=\infty$)



* تنها وقتی $Z=\infty$ داخل ROC است که $x[n]$ دست راست از صفر باشد

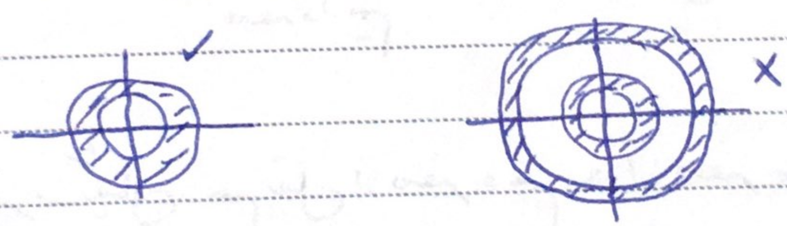
⑤ نکته: اگر $x[n]$ دست چپی باشد ⟷ ROC هم دست چپی است (داخل یک دایره به جز احتمالا $Z=0$)



* تنها وقتی $Z = 0$ داخل ROC است که $x[n]$ دست چپ صفر باشد.

سیگنال علی است (دست راستی صفر است) $\Longleftrightarrow$ ROC: دست راستی و $Z = \infty \in ROC$!! : نکته مهم

6 : اگر $x[n]$ دوطرفه باشد ← ROC یا تهی است و یا یک حلقه است



غلط است (دوتا حلقه نداریم)

7 : اگر $X(Z)$ گویا باشد، مرز ROC توسط قطب ها تعیین می شود یا ROC تا بی نهایت می رود.

8 : برای $X(Z)$ های گویا:

می دانیم: $x[n]$ دست راستی ها $\Longleftrightarrow$ ROC دست راستی

حالا 8 : $x[n]$ علی است یعنی $(x[n]=0 \ \forall n<0)$ $\Longleftrightarrow$ ROC دست راستی و $Z = +\infty \in ROC$

9) برای $X(Z)$ های گویا:

می دانیم: اگر $x[n]$ دست چپی $\Longleftrightarrow$ ROC دست چپی

حالا: $x[n]$ ضد علی است $\Longleftrightarrow$ ROC: دست چپی و $Z=0 \in ROC$

($x[n]=0 \ \forall n>0$ ← دست چپی است)

$\boxed{\text{* بدست آوردن عکس تبدیل } Z \ (Z^{-1}):}$

* روش های بدست آوردن Z^{-1}:
  - الف) روش مستقیم
  - ب) روش بسط به کسرهای جزئی
  - ج) بسط سری توانی (تیلور یا مکلورن) ← معادلی در حالت پیوسته ندارد

دقیقا مشابه به تبدیل لاپلاس

الف) روش مستقیم:

هر دایره دلخواه درون ROC

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(Z)\, Z^{n-1}\, dZ = \sum \left(\text{مانده های } X(Z)Z^{n-1} \text{ در قطب های درون منحنی} \right)$$

← زیاد از این فرمول استفاده نمی کنیم ← چون دهنمون صاف میشه تا انتگرال حساب کنیم ☺

SUBJECT: DATE: / /

پ) روش تجزیه به سری های جزئی :

$$\bar{X}(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)} = \sum_{k=0}^{M} B_k Z^{k} + \sum_{k=0}^{N} \frac{A_k}{1 - a_k Z^{-1}}$$

اگر

- درجه صورت $\bar{X}(Z)$ < درجه مخرج $\Rightarrow B_k = 0$
- درجه صورت > درجه مخرج $\Rightarrow$ صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم
- درجه صورت = درجه مخرج $\Rightarrow B_0 \neq 0$ و بقیه B_k ها $= 0$

$$\frac{A_k}{1 - a_k Z^{-1}}$$

- ROC دست راستی $\Rightarrow x[n] = A_k (a_k)^n u[n]$
- ROC دست چپی $\Rightarrow x[n] = -A_k (a_k)^n u[-n-1]$

ج) روش سری های توانی :

$$\bar{X}(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] Z^{-n} = \dots x[-2] Z^{2} + x[-1] Z^{1} + x[0] + x[1] Z^{-1} + x[2] Z^{-2} + \dots$$

* مثال:

$$\bar{X}(Z) = \frac{1}{1 - aZ^{-1}} \qquad |Z| > |a|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - aZ^{-1}} = \underbrace{1}_{x[0]} + \underbrace{a}_{x[1]} Z^{-1} + a^{2} Z^{-2} + \dots$$

$$\Rightarrow x[n] = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} = a^n u[n]$$

مثال: $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ $\quad |z|<|a|$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \underbrace{-a^{-1}}_{x[-1]} z^{1} \underbrace{-a^{-2}}_{x[-2]} z^{2} \underbrace{-a^{-3}}_{x[-3]} z^{3} + \dots$$

$$\Rightarrow x[n] = \begin{cases} -a^{n} & n \le 1 \\ 0 & n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x[n] = -a^{n} u[-n-1]$$

$\boxed{\text{* خواص تبدیل } Z \text{ :}}$

① خطی بودن:

$$a x_1[n] + b x_2[n] \xleftrightarrow{Z} a X_1(z) + b X_2(z)$$

② شیفت زمانی:

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z)$$

R = ROC ← تغییر نمی‌کند مگر
اگر n_0 مثبت باشد در مبدأ قطب اضافه می‌شود و اگر n_0 منفی باشد در مبدأ صفر اضافه می‌شود

③ scaling در حوزه Z :
$$z_0^{n_0} x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

$ROC = |z_0| R$

ROC = R : و قطب ها به اندازه ω_0 جا به جای شوند

SUBJECT: DATE: / /

*حالت های خاص

1) $e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{Z} \underline{X}(e^{-j\omega_0} z)$ ← مثل صفرها

2) $a^n x[n] \xleftrightarrow{Z} \underline{X}(a^{-1} z)$ ROC: $|a| R$

④ معکوس شدن در زمان :

$x[-n] \xleftrightarrow{Z} \underline{X}\left(\frac{1}{z}\right)$ ROC: R^{-1}

⑤ باز شدن در زمان :

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r] & ; n = rk \\ 0 & ; n \neq rk \end{cases} \xleftrightarrow{Z} \underline{X}(z^k)$$

ROC: $R^{\frac{1}{k}}$

* صفر و قطب های $\underline{X}(z)$ به ریشه k ام آنها تبدیل می شوند

⑥ مزدوج گیری :

$x^*[n] \xleftrightarrow{Z} \underline{X}^*(z^*)$ ROC = R

اگر $x[n]$ حقیقی باشه ← $x[n] = x^*[n]$ ← $\underline{X}(z) = \underline{X}^*(z^*)$

یعنی
1) اگر d یک قطب برای $\underline{X}(z)$ باشه ← d^* هم قطب است
2) " z_n " صفر " " ← z_n^* هم صفر است

* صفرها و قطب ها مزدوج هم هستند (البته اگر $x[n]$ حقیقی باشه)

SUBJECT: DATE: / /

(7) کانولوشن :

$$x[n] * y[n] \xleftrightarrow{Z} X(Z)\, Y(Z) \qquad ROC: R_x \cap R_y \subseteq R$$

(8) مشتق در حوزه Z :

$$n\, x[n] \xleftrightarrow{Z} -Z \frac{dX(Z)}{dZ} \qquad ROC = R$$

← با مشتق‌گیری قطب جدید اضافه نمی‌شود و تنها قطب‌ها مکرر می‌شوند

(9) دیفرنس :

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{Z} (1 - Z^{-1})\, X(Z)$$

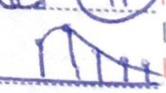
$$ROC: R \cap \{|Z| > 0\} \subseteq ROC$$

(10) اکومولیشن :

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{X(Z)}{1 - Z^{-1}} \qquad ROC: R \cap \{|Z| > 1\} \subseteq ROC$$

(11) مقدار اولیه :

if $x[n] \rightarrow$ علی باشد $\xrightarrow{\text{یعنی}}$ $x[n] = 0 \quad \forall_n < 0$



$$\Longrightarrow \quad x[0] = \lim_{Z \to \infty} X(Z)$$

از (11) نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} x[1] = \lim_{Z \to \infty} Z^{1} \left(X(Z) - x[0] \right) \\ x[2] = \lim_{Z \to \infty} Z^{2} \left(X(Z) - x[0] - x[1] Z^{-1} \right) \end{cases}$$

12) مقدار نهایی: اگر $x[n]$ دست راستی باشد و به سمت یک نقطه میل کند (یعنی: $\lim_{n\to\infty} x[n]$ وجود داشته باشد)

آنگاه $\Rightarrow$ $\underbrace{x[+\infty]} = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1}) X(z)$

$= \lim_{n\to\infty} x[n]$

$\boxed{\text{سیستم های LTI توصیف شونده با تبدیل Z :}}$

$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$

$y[n] = x[n] * h[n] \xrightarrow{Z} Y(z) = X(z)\,\underbrace{H(z)}$

system function

OR Transfer function

$\boxed{\text{* علیت :}}$

$h[n]$ علی است (دست راستی است) $\Longleftrightarrow$ ROC دست راستی باشد و $z = \infty \in ROC$

(در بی نهایت قطب نداشته باشیم)

درجه صورت از مخرج بیشتر نشه

SUBJECT: DATE: / /

در حالت $\bar{X}(Z)$ گویا: (دست راستی)

$h[n]$ علی است $\Longleftrightarrow$ ROC بیرون بیرونی‌ترین قطب
و $\lim_{Z \to \infty} \bar{X}(Z)$ وجود داشته باشد

یا به عبارتی دیگر: درجه صورت ≯ درجه مخرج

* پایداری:

پایدار $\Longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \Longleftrightarrow$ دایره واحد ($|Z|=1$) جزو ROC $H(Z)$ باشد.

نتیجه --> یک سیستم LTI علی با $H(Z)$ گویا فقط وقتی پایدار است که تمام قطب‌های سیستم داخل دایره واحد باشند

* سیستم‌های توصیف‌شونده با معادلات دیفرانسیل:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \xrightarrow{\text{از طرفین تبدیل Z می‌گیریم}}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k Z^{-k} Y(Z) = \sum_{k=0}^{M} b_k Z^{-k} \bar{X}(Z)$$

$$\Rightarrow H(Z) = \frac{Y(Z)}{\bar{X}(Z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k Z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k Z^{-k}}$$

* نمایش جعبه‌ای سیستم‌ها در تبدیل لاپلاس :

یادآوری :

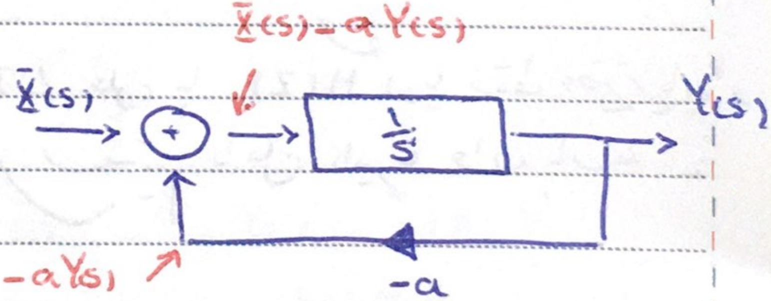
$$\bar{X}(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s}} \longrightarrow \frac{1}{s}\bar{X}(s)$$

$$\bar{X}_1(s) \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \bar{X}_2(s)}}{\textcircled{+}} \longrightarrow \bar{X}_1(s) + \bar{X}_2(s) \quad \text{(Adder)}$$

$$\bar{X}(s) \xrightarrow{\quad a \quad} a\bar{X}(s) \quad \text{(gain)}$$

① نمایش سیستم درجه ۱ تک قطبی :

$H(s) = \dfrac{1}{s+a}$:



اثبات //

$$Y(s) = \left(\bar{X}(s) - aY(s)\right) \times \frac{1}{s}$$

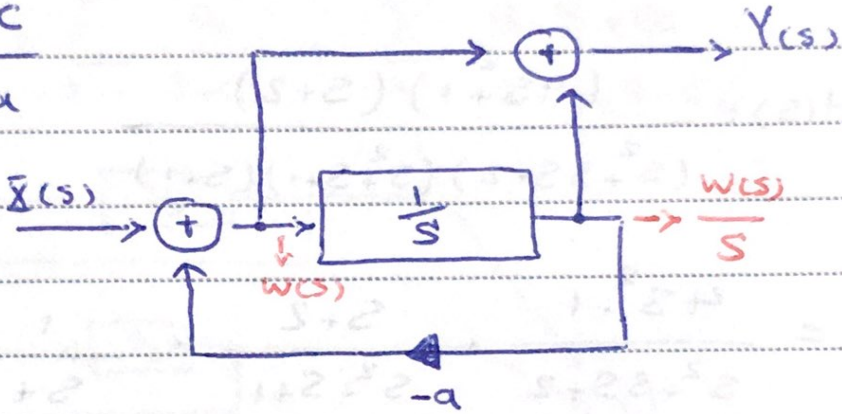
$$Y(s)\left(1 + \frac{a}{s}\right) = \frac{1}{s}\bar{X}(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{\bar{X}(s)} = \frac{1/s}{1 + \frac{a}{s}} = \frac{1}{s+a}$$

SUBJECT: DATE: / /

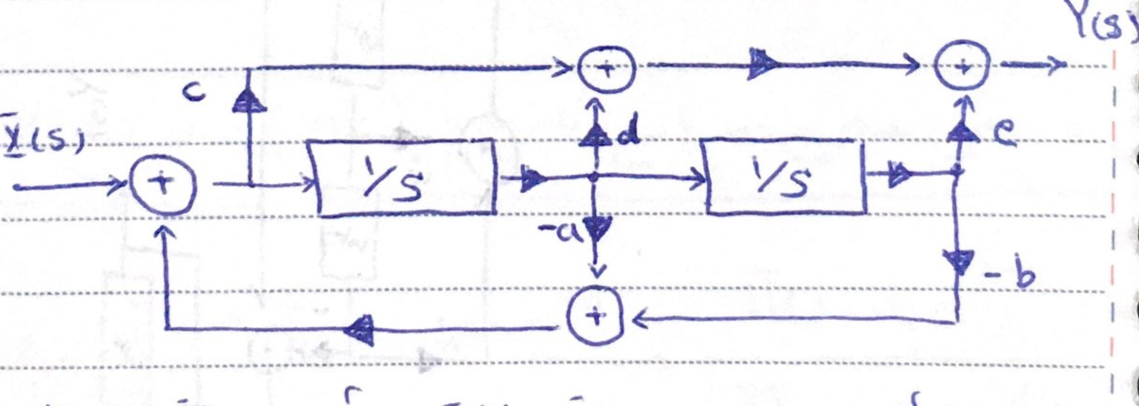
* نمایش سیستم مرتبه ۱ با یک صفر و یک قطب :

$$H(s) = \frac{bs+c}{s+a}$$



* نمایش سیستم های درجه 2 به روش مستقیم :

$$H(s) = \frac{cs^2+ds+e}{s^2+as+b}$$



* برای نمایش سیستم های مرتبه بالاتر به روش مستقیم می توان از کنار هم بستن متوالی سیستم های مرتبه ۱ و ۲ آنها را ساخت

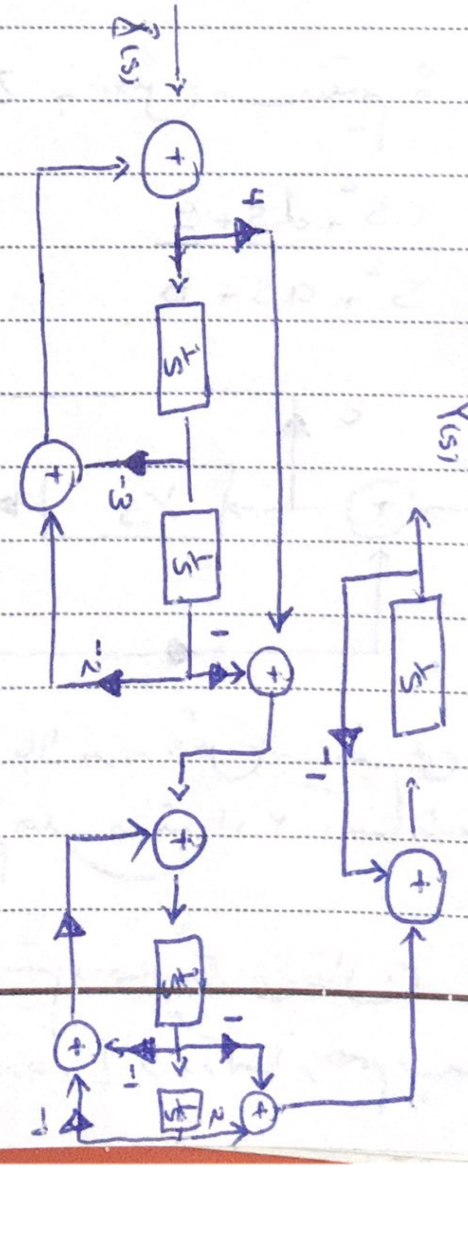
برای مثال برای نمایش یک سیستم درجه 5 می توان دو سیستم درجه 2 و یک سیستم درجه 1 را در کنار هم بست

SUBJECT: DATE: / /

برای مثال ؛ سیستم روبه رو را از اتصال سری سیستم ها نمایش دهید ؛

$$H(s) = \frac{(4s^2+1)(s+2)}{(s^2+3s+2)(s^2+s+1)(s+1)}$$

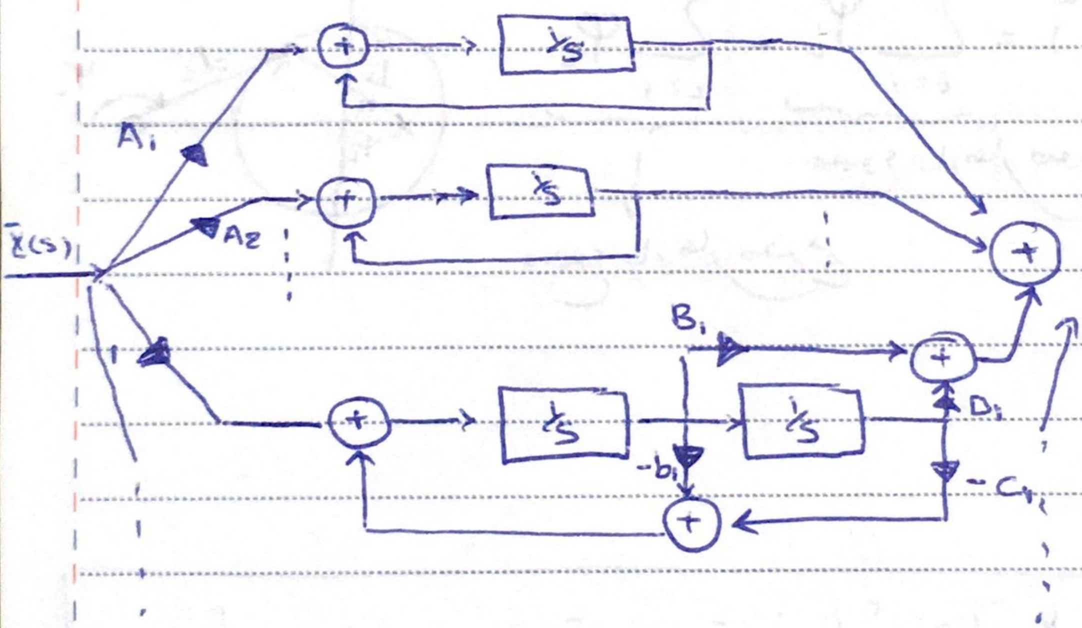
$$= \frac{4s^2+1}{s^2+3s+2} \times \frac{s+2}{s^2+s+1} \times \frac{1}{s+1}$$



SUBJECT: DATE: / /

* نمایش سیستم ها به روش موازی :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{S+a_k} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k S + D_k}{s^2 + b_k S + C_k}$$



* روش هندسی رسم پاسخ فرکانسی $(H(e^{j\omega}))$ از روی $H(Z)$:

$$H(Z) = \frac{\prod 1 - a_i Z_i^{-1}}{\prod 1 - b_i Z_i^{-1}} \xrightarrow{Z = e^{j\omega}} \frac{\prod (1 - a_i e^{-j\omega})}{\prod (1 - b_i e^{-j\omega})}$$

$$= \frac{\prod (e^{j\omega} - a_i)}{\prod (e^{j\omega} - b_i)} =$$

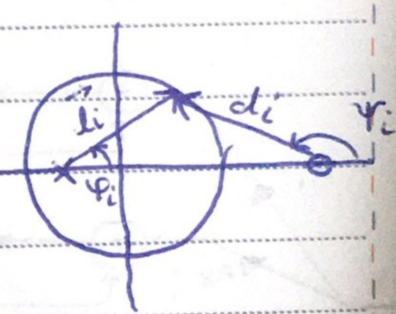
SUBJECT: DATE:

$$* \; |H(e^{j\omega})| = \frac{\prod (e^{j\omega} - a_i)}{\prod (e^{j\omega} - b_i)} = \frac{\prod d_i}{\prod l_i}$$

حاصل ضرب طول بردار هایی که صفرها را به دایره واحد ($e^{j\omega}$) وصل می کند

حاصل ضرب طول بردار هایی که قطب ها را به دایره واحد ($e^{j\omega}$) وصل می کند

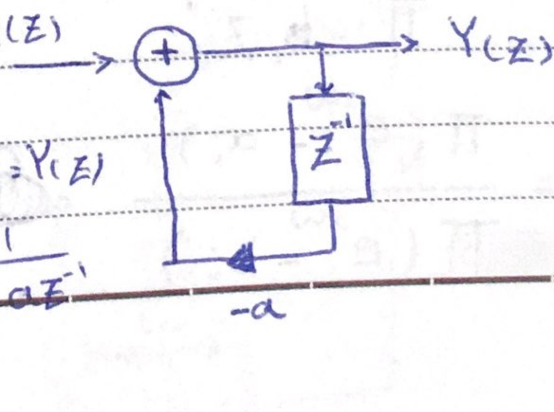
$$\measuredangle H(e^{j\omega}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{M} \psi_i}_{\text{مجموع فازهای صورت}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \varphi_i}_{\text{مجموع فازهای مخرج}}$$



$\boxed{\text{* نمایش جعبه ای سیستم های توصیف شونده با تبدیل Z :}}$

① نمایش سیستم مرتبه یک قطبی :

$$H(Z) = \frac{1}{1 + aZ^{-1}}$$

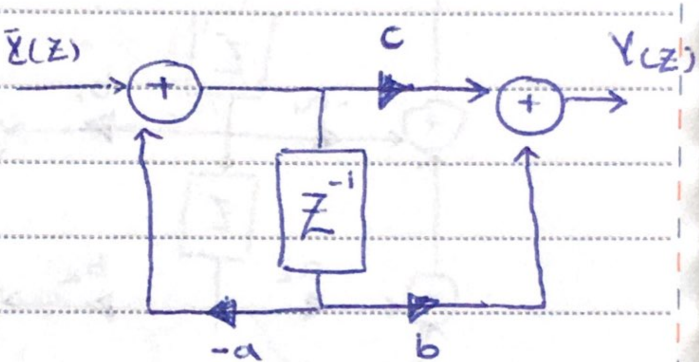


اثبات // $X(Z) + (-a) Z^{-1} Y(Z) = Y(Z)$

$$\Rightarrow H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1}{1 + aZ^{-1}}$$

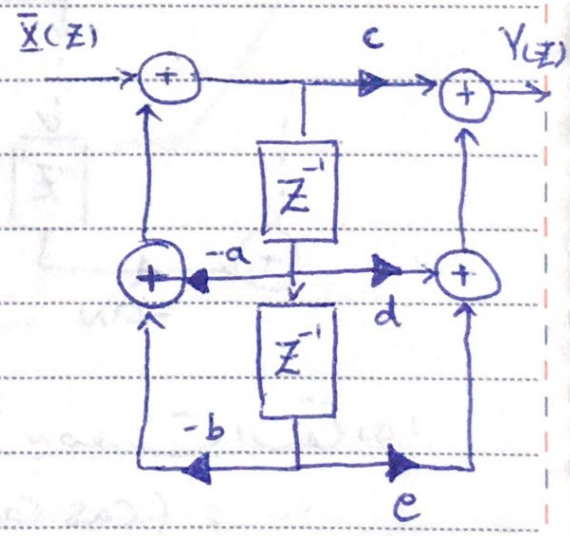
2 سیستم مرتبه ۱ با یک صفر و یک قطب :

$$H(Z) = \frac{1+bZ^{-1}}{1+aZ^{-1}}$$



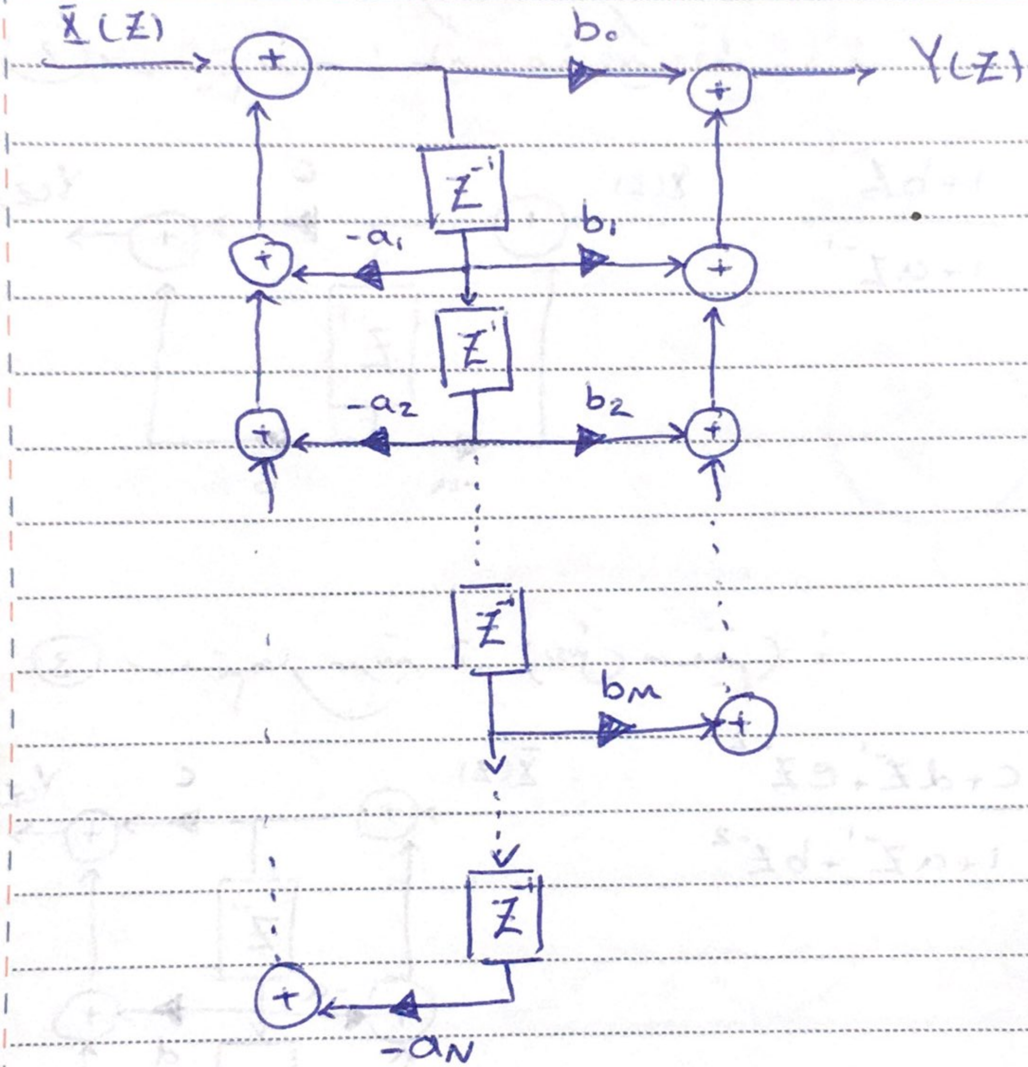
3 سیستم های مرتبه 2 (روش مستقیم) :

$$H(Z) = \frac{c+dZ^{-1}+eZ^{-2}}{1+aZ^{-1}+bZ^{-2}}$$



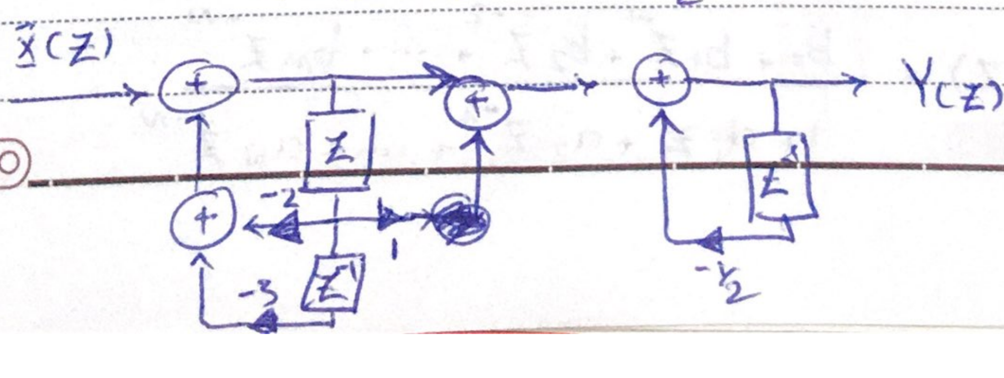
4 سیستم های مرتبه بالاتر (روش مستقیم) :

$$H(Z) = \frac{b_0+b_1Z^{-1}+b_2Z^{-2}+\dots+b_MZ^{-M}}{1+a_1Z^{-1}+a_2Z^{-2}+\dots+a_NZ^{-N}}$$



5) پیاده سازی سیستم های مرتبه بالاتر به صورت استفاده از سیستم های مرتبه ۱ و 2 : (cascade) :

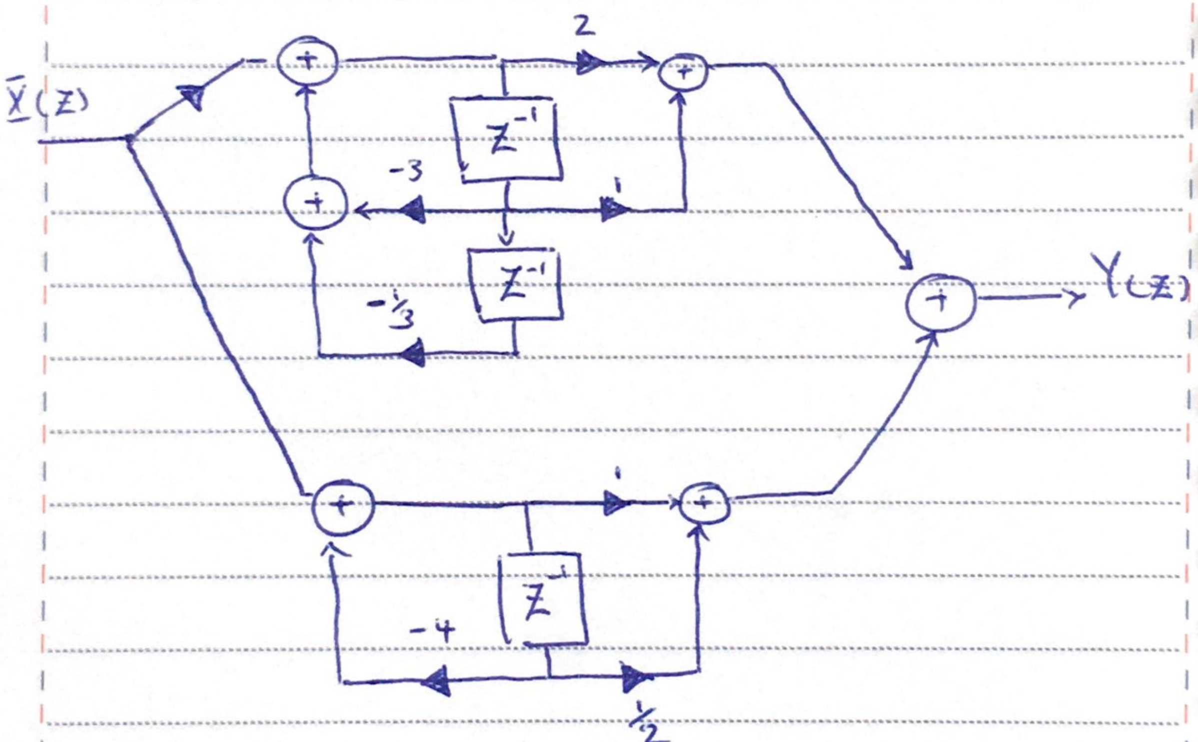
مثال: $H(Z) = \dfrac{5 - Z^{-1}}{1 + 2Z^{-1} + 3Z^{-2}} \times \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}Z^{-1}}$ → استفاده از یک سیستم مرتبه ۱ و 2



6) پیاده سازی به روش موازی :

مثال

$$H(Z)=\frac{2+Z^{-1}}{1+3Z^{-1}+\frac{1}{3}Z^{-2}}+\frac{1+\frac{1}{2}Z^{-1}}{1+4Z^{-1}}$$



* برای بررسی علیت در تبدیل Z علاوه بر چک کردن ROC (که باید دست راستی باشد)، درجه صورت و مخرج هم حتما چک شود

if درجه صورت > درجه مخرج ← در بی‌نهایت قطب داریم و سیستم علی نیست

if $H=\frac{a}{b} \Rightarrow a \,|\, \frac{b}{d},\ c \Rightarrow H=d+\frac{c}{b}$