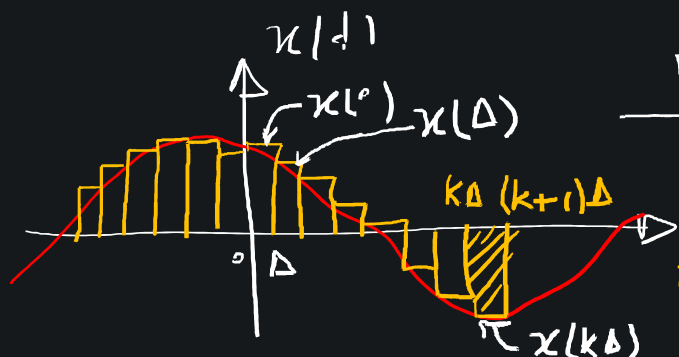
هر سیگنال پیوسته زمانی مثل $x(t)$ را می توان بصورت مجموعه ای از ضربه های وزن دار نوشت:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\,d\lambda$$



اثبات: حد مجموع پالس های $\Delta\delta_\Delta(t-k\Delta)$ با وزن $x(k\Delta)$ وقتی Δ به سمت صفر میل کند به انتگرال منجر می گردد.

$$x(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum x(k\Delta)\,\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\;sys\;} \longrightarrow y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

حال به پاسخ سیستم خطی به ورودی $x(t)$ می پردازیم.

اپراتور سیستم

$$y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\,d\lambda\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}\{x(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\}\,d\lambda$$

خاصیت جمع پذیری سیستم ها خطی

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\,\mathcal{L}\{\delta(t-\lambda)\}\,d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\,h_\lambda(t)\,d\lambda$$

خاصیت همگنی

پاسخ سیستم به ورودی ضربه واقع در لحظه λ

$$\delta(t-\lambda) \longrightarrow \boxed{\;sys\;} \longrightarrow h_\lambda(t)$$

مثال: پاسخ یک سیستم خطی با ورودی یک ضربه در محل λ برابر با $e^{-(\lambda+2t)}u(t)$ است. پاسخ این سیستم

به ورودی $x(t)=u(t)-u(t-5)$ را بدست آورید.

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\,h_\lambda(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}[u(\lambda)-u(\lambda-5)]\,e^{-(\lambda+2t)}u(t)\,d\lambda$$

$$=e^{-2t}u(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u(\lambda)e^{-\lambda}d\lambda-\int_{-\infty}^{+\infty}u(\lambda-5)e^{-\lambda}d\lambda\right)$$

$$=e^{-2t}u(t)\left(\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda}d\lambda-\int_{5}^{\infty}e^{-\lambda}d\lambda\right)=e^{-2t}u(t)\left[1-e^{-5}\right]$$

پاسخ سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان: Linear Time Invariant (LTI)

$$\delta(t) \to \boxed{sys} \to h_0(t)$$

$$\delta(t-\lambda) \to \boxed{sys} \to h_\lambda(t) = h(t-\lambda)$$

به شرط تغییرناپذیری با زمان

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda$$

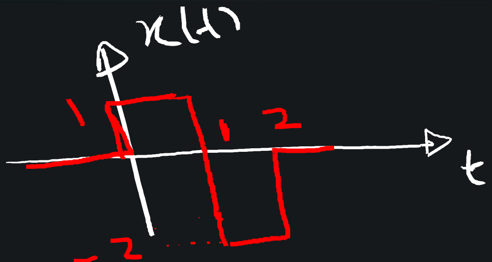
انتگرال کانولوشن

سه مهم

$h(t)$ پاسخ سیستم LTI به ورودی ضربه می باشد.

لذا در یک سیستم LTI با دانستن پاسخ ضربه سیستم پاسخ به هر ورودی دیگری قابل محاسبه است

مثال: پاسخ یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = e^{-2t}u(t)$ به ورودی



را بدست آورید.

حل: $x(t) = u(t) - 3u(t-1) + 2u(t-2)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda) e^{-2(t-\lambda)} u(t-\lambda)\, d\lambda - 3\int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda-1) e^{-2(t-\lambda)} u(t-\lambda)\, d\lambda + 2\int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda-2) e^{-2(t-\lambda)} u(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$= \int_0^t e^{-2(t-\lambda)} d\lambda - 3\int_1^t e^{-2(t-\lambda)} d\lambda + 2\int_2^t e^{-2(t-\lambda)} d\lambda = e^{-2t}\left[\int_0^t e^{2\lambda} d\lambda - 3\int_1^t e^{2\lambda} d\lambda + 2\int_2^t e^{2\lambda} d\lambda\right]$$

$$= e^{-2t}\left[\tfrac{1}{2}(e^{2t}-1)u(t) - \tfrac{3}{2}(e^{2t}-e^{2})u(t-1) + (e^{2t}-e^{4})u(t-2)\right]$$

خواص کانولوشن: ۱) خاصیت جابجایی

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\lambda)h(\lambda)\,d\lambda$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

مفهوم سیستمی جابجایی:

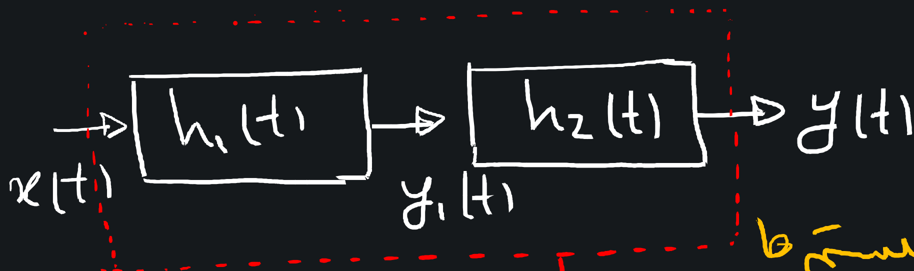
$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

$$=$$

$$h(t) \longrightarrow \boxed{x(t)} \longrightarrow y(t) = h(t) * x(t)$$

۲) خاصیت شرکت پذیری:

$$x(t)*(h_1(t)*h_2(t)) = (x(t)*h_1(t))*h_2(t)$$



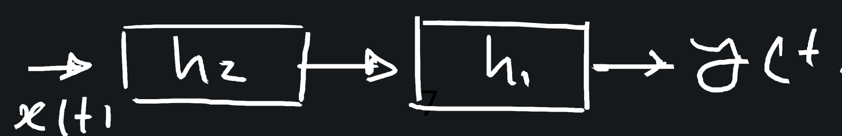
$$h(t)=h_1(t)*h_2(t)$$

خاصیت مهم: در سیستم های پشت سرهم LTI ترتیب قرارگرفتن سیستم ها اهمیت ندارد.

اثبات:

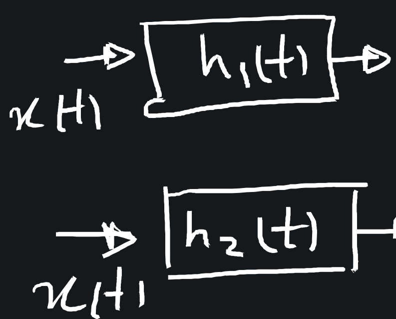
$$x(t)*(h_1(t)*h_2(t)) = x(t)*(h_2(t)*h_1(t))$$

با توجه به خاصیت جابجایی در کانولوشن



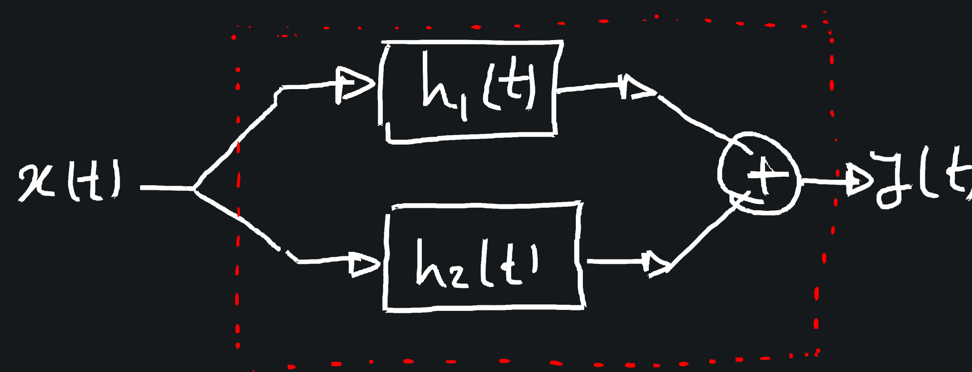
۲) خاصیت توزیع پذیری کانولوشن نسبت به جمع:

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$



$$y_1(t) = x(t) * h_1(t)$$

$$y_2(t) = x(t) * h_2(t)$$



$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

خواص علّی، بدون حافظه بودن، معکوس پذیری و پایداری در سیستم های LTI :

علّی بودن: چون در یک سیستم علّی پاسخ در هر لحظه فقط وابسته به لحظه حال و یا گذشته ورودی است پاسخ ضربه این سیستم ها برای $t<0$ باید صفر باشد. $h(t)=0 \quad t<0$

چرا که ورودی ضربه برای لحظات $t<0$ برابر صفر است.

مثال: $h(t)=e^{-t}u(t+1)$ | $h(t)=e^{-2t}u(t)-\frac{1}{3}e^{-t}u(t)$

$h(t)\neq 0 \quad -1<t<0 \Rightarrow$ سیستم غیر علّی | $h(t)=0 \quad t<0 \Rightarrow$ سیستم علّی است

بدون حافظه بودن: یک سیستم بدون حافظه است اگر خروجی در هر لحظه فقط به ورودی در همان لحظه وابسته باشد. چنانچه ورودی صفر باشد خروجی فقط در لحظه صفر می تواند مقدار غیر صفر داشته باشد.

لذا پاسخ ضربه یک سیستم LTI بدون حافظه بصورت $h(t)=k\delta(t)$ می باشد. اگر k برابر یک باشد سیستم را همانی می گویند در چنین حالتی ورودی و خروجی سیستم با هم برابرند.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\overset{h(t)=k\delta(t)}{LTI}} \longrightarrow y(t) = \int x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$= \int x(\lambda)\, k\delta(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$= \int x(t)\, k\delta(t-\lambda)\, d\lambda = k x(t) \int \delta(t-\lambda)\, d\lambda = k x(t)$$

سیستم معکوس پذیر: سیستمی معکوس پذیر است که بتوان از خروجی ورودی سیستم را بدست آورد. سیستمی که عکس سیستم اولیه رفتار می کند را معکوس سیستم می گویند

$$x(t) \to \underset{h(t)}{\boxed{sys}} \to y(t) \to \underset{h_I(t)}{\boxed{Invsys}} \to x(t) \Rightarrow h(t) * h_I(t) = \delta(t)$$

مانند یک سیستم همانی

مثال: نشان دهید سیستم های اکومولاتور و تفاضل گیر معکوس هم هستند.

$$\underset{sys1}{y[n] = x[n] - x[n-1]} \to h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \to h_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] = u[n]$$

ثابت شد دو سیستم معکوس یکدیگرند

$$h_1[n] * h_2[n] = (\delta[n] - \delta[n-1]) * u[n] = u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

پایداری: سیستمی پایدار است که به ازای هر ورودی محدودی خروجی سیستم محدود باشد.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\lambda)h(\lambda)\,d\lambda$$

$$|x(t)| \le B_x \rightarrow |y(t)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\lambda)h(\lambda)\,d\lambda \le \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t-\lambda)|\,|h(\lambda)|\,d\lambda$$

$$\le B_x \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\lambda)|\,d\lambda}_{\text{محدود}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\lambda)|\,d\lambda < \infty$$

شرط پایداری یک سیستم LTI

مثال: بررسی کنید که سیستم انتگرال گیر پایدار است یا خیر:

$$x(t) \rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{t}} \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda \xrightarrow[\text{پاسخ ضربه}]{} h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)\,d\lambda = u(t)$$

آیا $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\lambda)|\,d\lambda < \infty$ $\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda)\,d\lambda = \infty \Rightarrow$ انتگرال گیر یک سیستم ناپایدار است

برای یک سیستم LTI گسسته پایدار داریم:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[m]| < \infty$$

پاسخ پله در سیستم های LTI :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\lambda)\, h(\lambda)\, d\lambda \longrightarrow S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\lambda)\, h(\lambda)\, d\lambda$$

$x(t) = u(t)$ پله

$$S(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\lambda)\, d\lambda$$

در سیستم های LTI پیوسته زمان پاسخ پله انتگرال پاسخ ضربه است

$$h(t) = \frac{dS(t)}{dt}$$

بطور مشابه برای حالت گسسته زمان داریم:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n-m]\, h[m] \rightarrow S[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u[n-m]\, h[m] = \sum_{m=-\infty}^{n} h[m]$$

پاسخ پله جمع انباره ای پاسخ ضربه است

$$h[n] = S[n] - S[n-1]$$

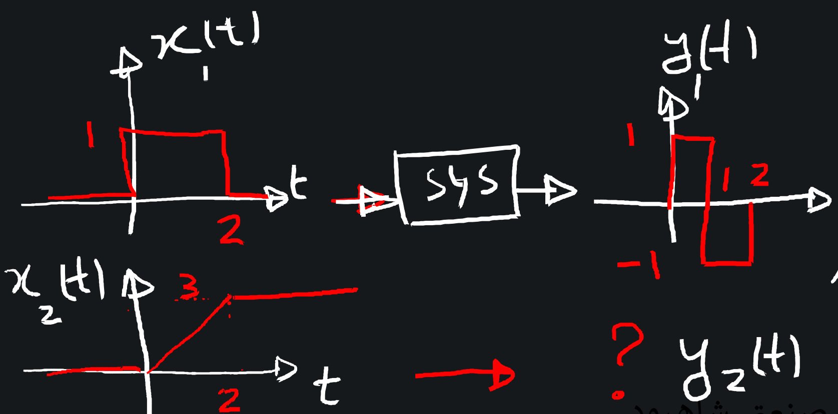
در بدست آوردن خروجی سیستم های LTI چند نکته را باید توجه کرد:

خواص قابل استفاده

۱) خاصیت همگنی ۲) خاصیت جمع پذیری ۳) خاصیت تغییر ناپذیری با زمان ۴) اگر ورودی مشتق گرفته شود خروجی نیز مشتق گرفته خواهد شد ۵) اگر ورودی انتگرال گرفته شود خروجی نیز انتگرال گرفته می شود

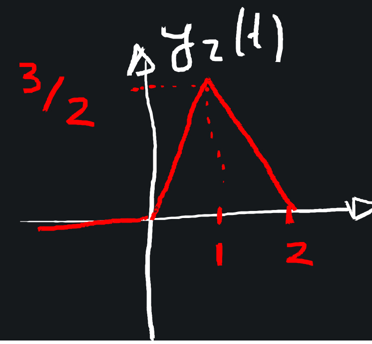
22

مثال:

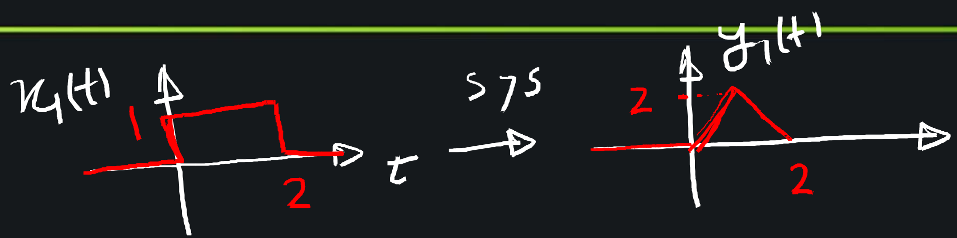


$$x_2(t) = 3/2 \int_{-\infty}^{t} x_1(\lambda)\, d\lambda$$

$$y_2(t) = 3/2 \int_{-\infty}^{t} y_1(\lambda)\, d\lambda$$



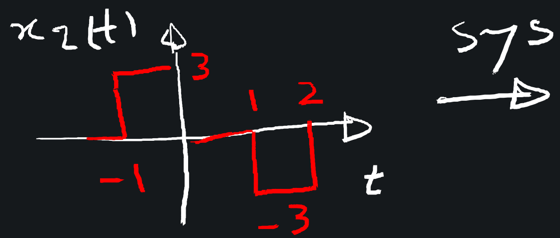
مثال :

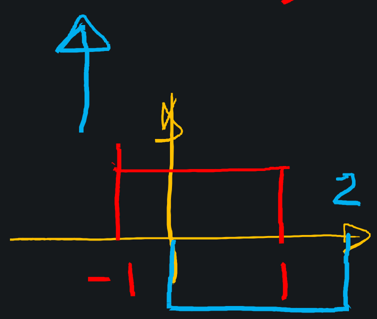


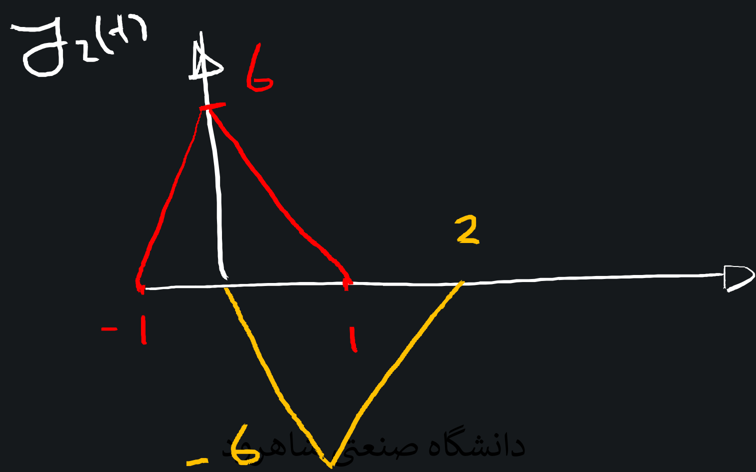
$$\Rightarrow x_2(t) = 3[x_1(t+1) - x_1(t)]$$

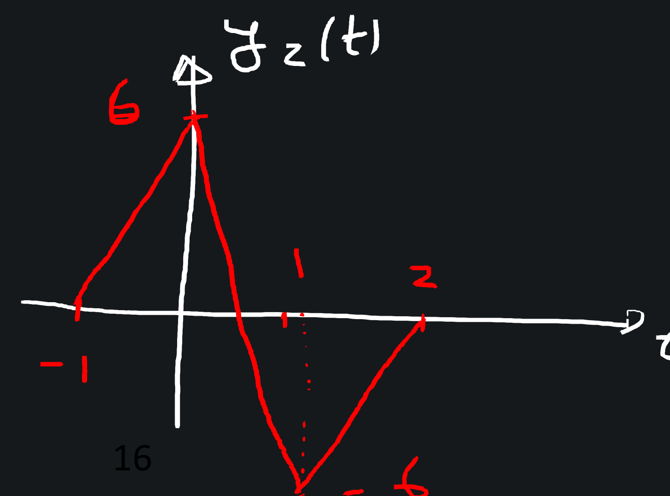
$$\downarrow$$

$$y_2(t) = 3[y_1(t+1) - y_1(t)]$$









مثال: خروجی پاسخ سیستم LTI به ورودی $x(t) = 2e^{-(t+1)}u(t)$ برابر $y(t)$ باشد پاسخ ضربه سیستم را بدست آورید.

$$2e^{-(t+1)}u(t) \rightarrow \boxed{sys} \rightarrow y(t)$$

22

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2e^{-2(t+1)}u(t) + 2e^{-(t+1)}\delta(t) \rightarrow \boxed{sys} \rightarrow \frac{dy}{dt}(t)$$

$$= -2e^{-2(t+1)}u(t) + 2e^{-1}\delta(t)$$

$$x(t) + \frac{dx}{dt}(t) = 2e^{-1}\delta(t) \rightarrow \boxed{sys} \rightarrow y(t) + \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\delta(t) \rightarrow \boxed{sys} \rightarrow \frac{1}{2}e\left(y(t) + \frac{dy}{dt}(t)\right) = h(t)$$

معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \longrightarrow y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

شرایط اولیه

$$y(0^+),\ \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^+},\ \left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=0^+},\ \ldots,\ \left.\frac{d^{k-1}y(t)}{dt^{k-1}}\right|_{t=0^+}$$

مثال: پاسخ سیستم با معادله دیفرانسیل $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$ به ورودی $x(t)=3e^{-3t}u(t)$ را به دست آورید.

شرایط اولیه را سکون در نظر بگیرید

معادله مشخصه $s^2+3s+2=0 \Rightarrow s_1=-1,\ s_2=-2 \longrightarrow y_h=k_1e^{-t}u(t)+k_2e^{-2t}u(t)$

$$y_p(t)=Ae^{-3t}u(t) \rightarrow \frac{d^2}{dt^2}Ae^{-3t}+3\frac{d}{dt}Ae^{-3t}+2Ae^{-3t}=3e^{-3t} \longrightarrow A=3/2$$

$$y(t)=k_1e^{-t}u(t)+k_2e^{-2t}u(t)+3/2\,e^{-3t}u(t) \rightarrow \begin{cases} y(0^+)=0 \\ \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^+}=0 \end{cases} \Rightarrow k_1=3/2 \quad k_2=-3$$

حل معادلات دیفرانسیل برای سیستم های گسسته زمان:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

شرایط اولیه $y[-1], y[-2], \ldots, y[-N+1]$

روش کلاسیک: $y[n] = y_h[n] + y_p[n]$

$$y_h[n] = \sum_{i=1}^{N} k_i (z_i)^n \longrightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = 0$$

z_i ها ریشه های معادله مشخصه هستند.

$y_p[n]$ مطابق شکل ورودی $x[n]$ می باشد مثلاً برای $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ بصورت $y_p[n] = A\left(\frac{1}{2}\right)^n$ است

و ضرایب k_1 و k_2 و ... و k_n مشابه حالت پیوسته زمان از شرایط اولیه پیدا می شوند

حل بازگشتی معادله دیفرنسی:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$a_0 y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \Rightarrow \boxed{y[n] = \frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right]}$$

مثال: پاسخ سیستمی با معادله دیفرنسی $x[n]$: $y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]$ را به ورودی پله بدست آورید. $y[-1]=0$

$$y[n] = \frac{1}{1}\left[x[n] + \frac{1}{2} y[n-1]\right]$$

$$n=0 \Rightarrow y[0] = x[0] + \frac{1}{2}\cancel{y[-1]} = 1$$

$$n=1 \Rightarrow y[1] = x[1] + \frac{1}{2}\cancel{y[0]} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$n=2 \Rightarrow y[n] = x[2] + \frac{1}{2} y[1] = 1 + \frac{3}{4}$$

پس بطور کلی می توان قاعده زیر را نوشت

$$y[n] = \frac{\left[2^{n+1} - 1\right]}{2^n} u[n]$$

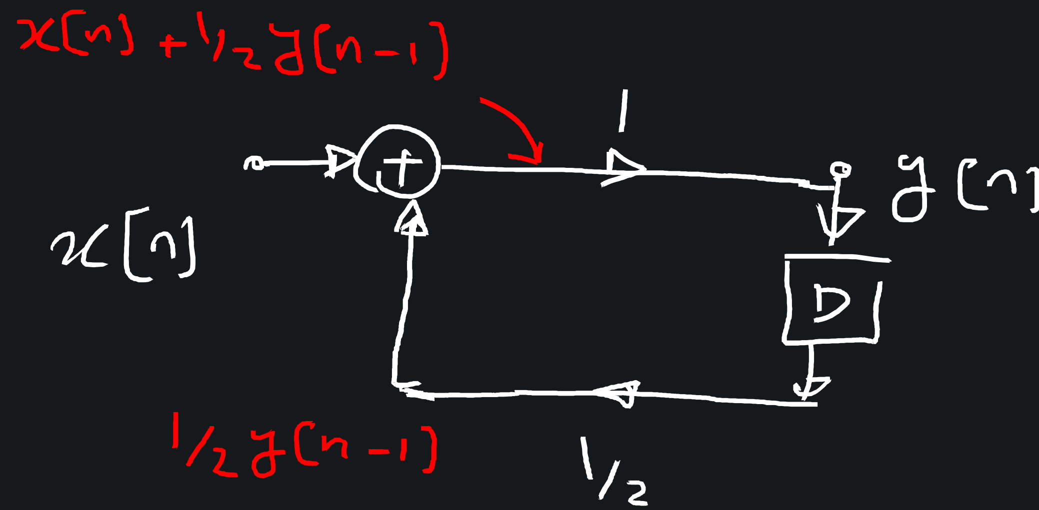
نمایش جعبه‌ای سیستم‌های گسسته زمان :

$$x[n] \rightarrow \boxed{D} \rightarrow x[n-1]$$

$$x[n] \xrightarrow{a} a\,x[n]$$

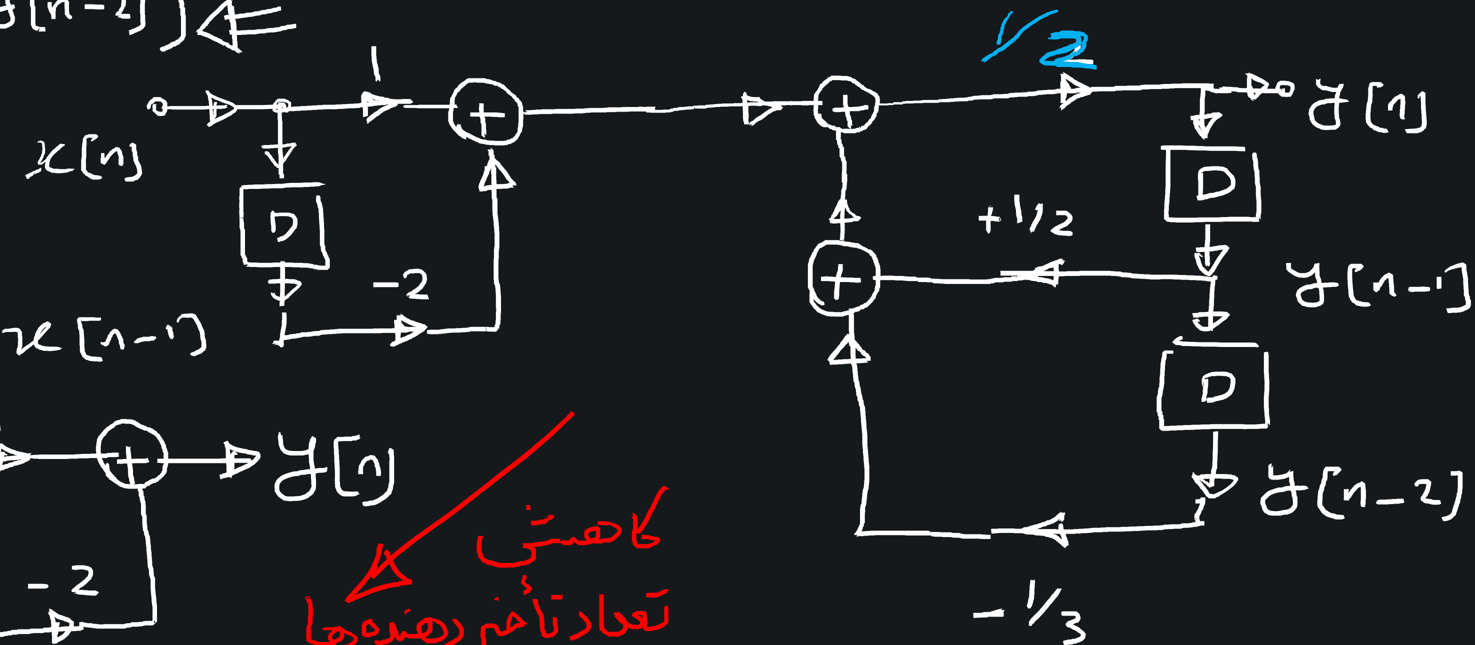
$$x_1[n] \rightarrow \oplus \rightarrow x_1[n]+x_2[n], \quad x_2[n] \uparrow$$

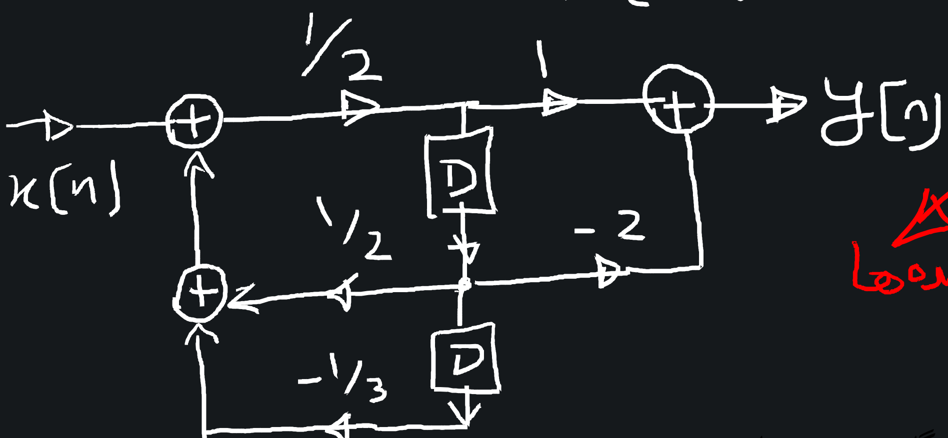
مثال $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$



$$2y[n] - \tfrac{1}{2}y[n-1] + \tfrac{1}{3}y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]$$

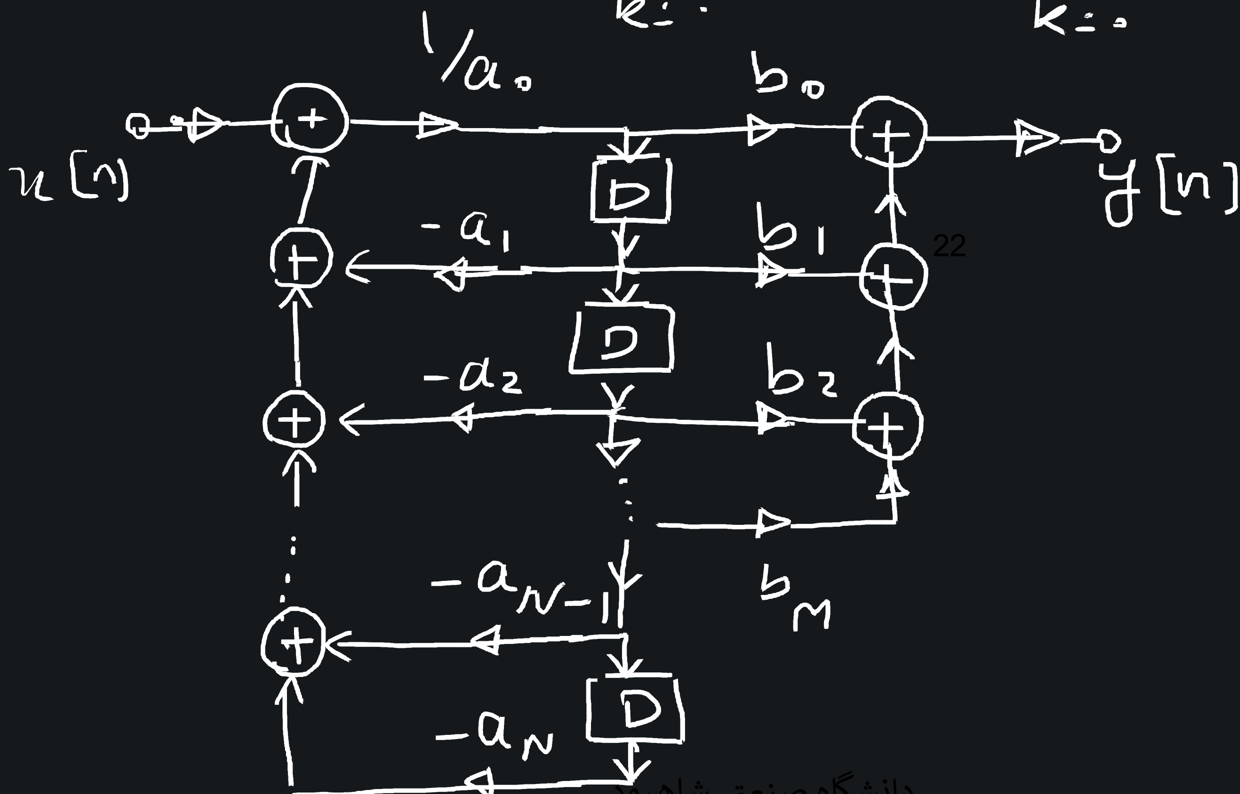
$$y[n] = \frac{1}{2}\left[x[n] - 2x[n-1] + \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{3}y[n-2]\right]$$





کاهش
تعداد تأخیردهنده‌ها

بطور کلی برای یک سیستم با معادله تفاضلی $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$ می توان دیاگرام زیر را در نظر گرفت



22

بطور مشابه برای حالت پیوسته زمان

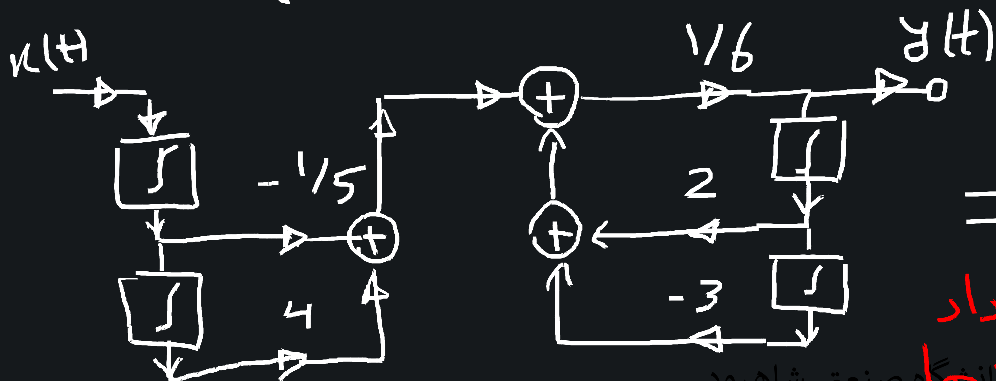
$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

از بلوک های انتگرال گیر، جمع رو سیگنال و ضرب در عدد ثابت استفاده می شود.

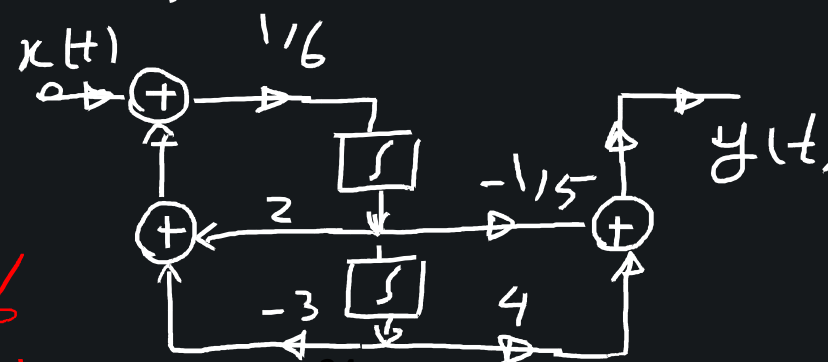
مثال:

$$6\frac{d^2 y}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + 3y(t) = 4x(t) - \frac{1}{5}\frac{dx(t)}{dt}$$

$$y(t) = \frac{1}{6}\left[4\iint x\,dt - \frac{1}{5}\int x\,dt + 2\int y\,dt - 3\iint y\,dt\right]$$



$\Rightarrow$



کاهش تعداد انتگرال گیرها