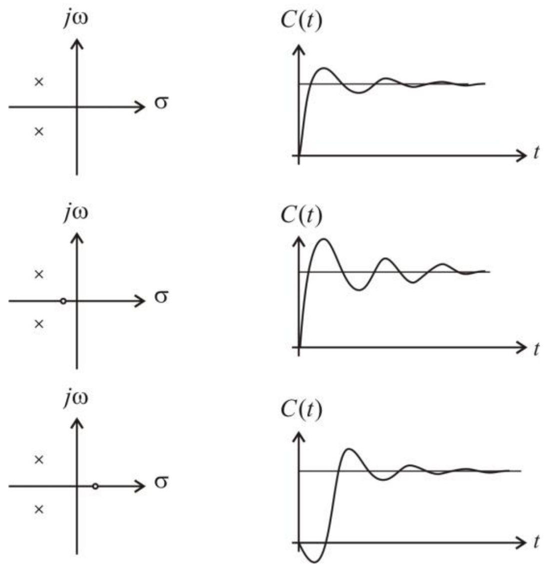
ب) اضافه کردن صفر سمت راست

تابع تبدیل حلقه بسته جدید را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$M(s)=\frac{\omega_n^{۲}(۱-T_z s)}{(s^{۲}+۲\xi\omega_n s+\omega_n^{۲})}\qquad T_z>۰$$

با توجه به توضیحات قبلی، واضح است که بر اثر اضافه کردن صفر، مقدار مشتق از پاسخ مربوط به سیستم درجه دوم نوعی $c_{۰}(t)$ کم می‌شود که این واقعیت، کند شدن سیستم (افزایش زمان خیز) و کاهش ماکزیمم فراجهش را به دنبال خواهد داشت. این سیستم‌ها چون فاز زیادی از سیستم کم می‌کنند، نامینیمم فاز *(Non-Minimum Phase)* نامیده می‌شوند. مشخصه اصلی در پاسخ اینگونه سیستم‌ها آن است که در ابتدا به علت علامت منفی، پاسخ منفی است (در خلاف جهت خواهد بود) که اصطلاحاً فروجهش (*Undershoot*) نامیده می‌شود. هرچه T_z افزایش یابد، فروجهش بیشتر خواهد شد. همچنین، هر چه T_z کمتر باشد (صفر سمت راست دور از محور $j\omega$ باشد) اثرش کمتر است و در اصطلاح *Weakly Non-Minimum phsae* گفته می‌شود.

در ادامه تاثیر اضافه کردن صفر سمت راست و سمت چپ به صورت نمادین با توجه به محل قرار گرفتن آن‌ها نشان داده شده است.



۲-۸-۲-۲ افزودن قطب

تابع تبدیل سیستم حلقه بسته جدید را به صورت روبرو در نظر بگیرید. $T_p>۰$

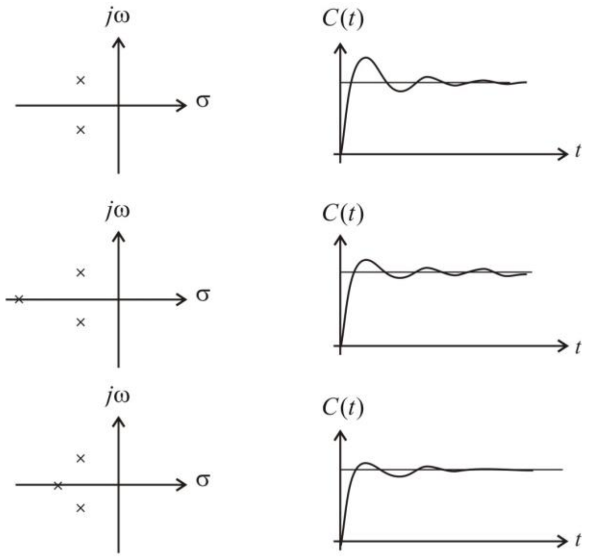
$$M(s)=\frac{\omega_n^{۲}}{(s^{۲}+۲\xi\omega_n s+\omega_n^{۲})(۱+T_p s)}$$

دو حالت رخ خواهد داد:

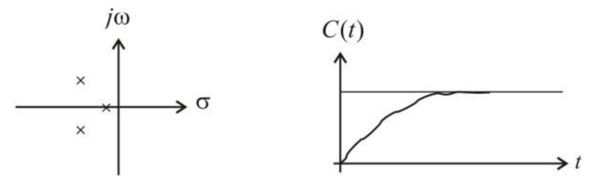
۱) $s=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{۱-\xi^{۲}}$ قطب‌های غالب باشند. در این صورت $s=-\frac{۱}{T_p}$ در پاسخ سیستم تأثیری نخواهد داشت، چرا که حالت گذرای آن سریع از بین می‌رود.

۲) $s=-\frac{۱}{T_p}$ قطب غالب باشد. در این حالت سیستم همانند یک سیستم مرتبه اول عمل کرده و لذا سبب کند شدن سرعت سیستم (افزایش زمان خیز) و کاهش ماکزیمم فراجهش می‌گردد. به بیانی دیگر، با افزایش مقدار T_p (حرکت کردن قطب به سمت مبدأ یا محور موهومی)، سرعت سیستم کاهش می‌یابد (زمان خیز افزایش می‌یابد).

به صورت نمادین اضافه کردن قطب به تابع تبدیل حلقه بسته دوم نوعی و پاسخ زمانی آن‌ها را در ذیل آورده‌ایم.

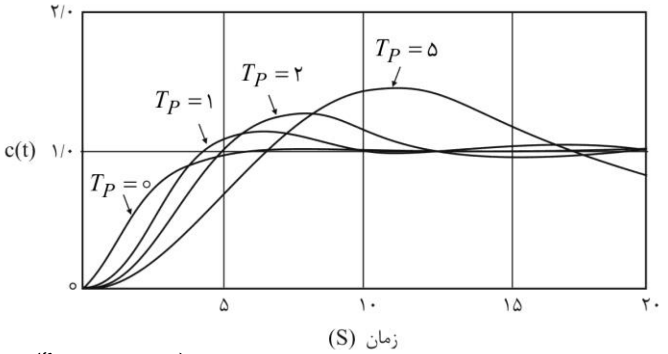


قطب‌های مزدوج، قطب غالب هستند.

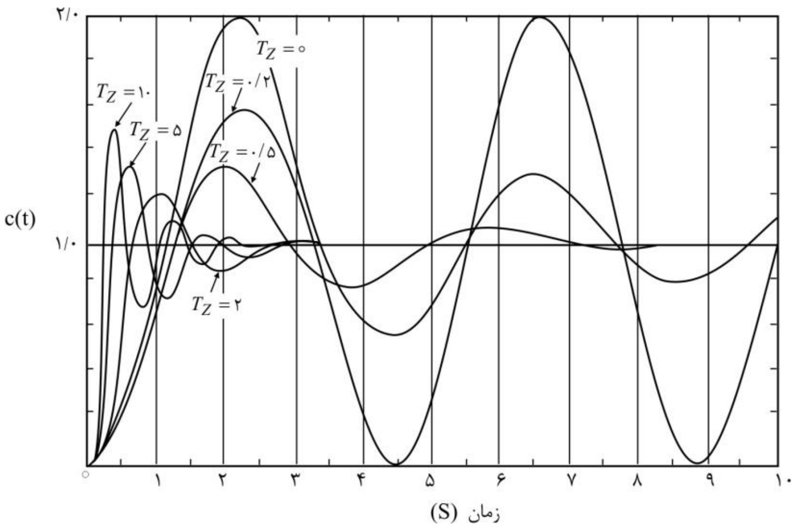


قطب ساده، قطب غالب می‌باشد.

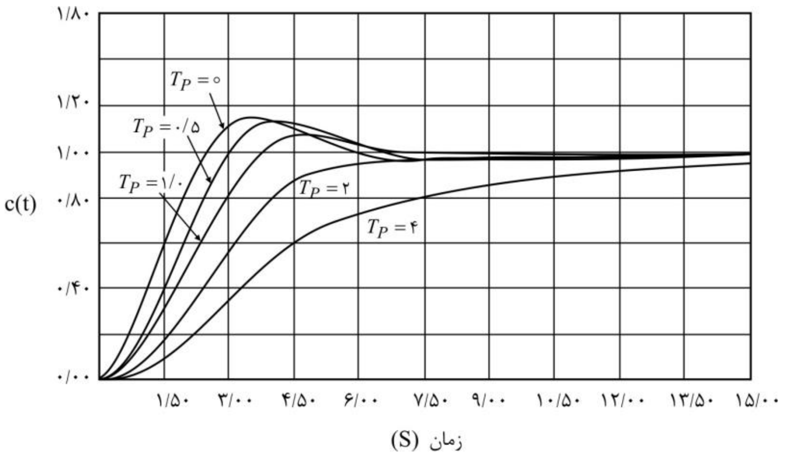
برای درک بیشتر اثرات اضافه کردن صفر و قطب به توابع تبدیل حلقه باز و حلقه بسته، پاسخ پله‌ای واحد را برای سیستم مرتبه دو نوعی رسم کرده‌ایم.



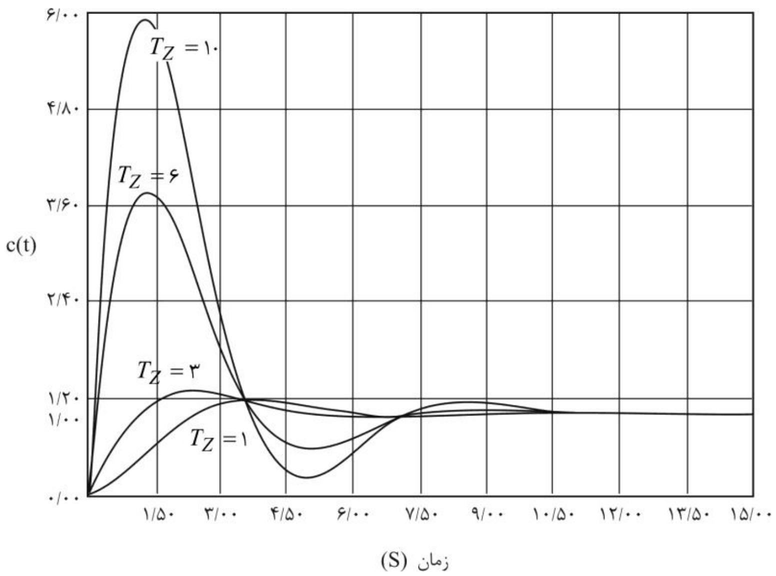
شکل (۲-۵): اثر اضافه کردن قطب به تابع تبدیل حلقه باز $(\xi = ۱ , \omega_n = ۱)$



شکل (۲-۶): اثر اضافه کردن صفر به تابع تبدیل حلقه باز



شکل (۲-۷): اثر اضافه کردن قطب به تابع تبدیل حلقه بسته $(\xi = ۰/۵ , \omega_n = ۱)$



شکل (۲-۸): اثر اضافه کردن صفر به تابع تبدیل حلقه بسته $(\xi = ۰/۵ , \omega_n = ۱)$

مثال: پاسخ سیستمی با تابع تبدیل: $G_۱(s) = \dfrac{۱}{s^۲ + ۱/۲s + ۱}$

به ورودی پله دارای جهش ۱۰٪ و زمان نشست تقریبی ۶ sec با معیار ۲٪ است. در این صورت برای پاسخ سیستم $G_۲(s) = \dfrac{(۲s + ۱)}{s^۲ + ۱/۲s + ۱}$ به ورودی پله‌ای می‌توان گفت: (مکانیک ۷۸)

۱) دارای جهش کمتر از ۱۰٪ و زمان نشست کمتر از ۶ ثانیه است.

۲) دارای جهش بیشتر از ۱۰٪ و زمان نشست بیشتر از ۶ ثانیه است.

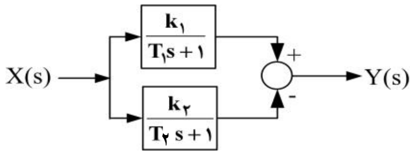
۳) دارای جهش بیشتر از ۱۰٪ و زمان نشست ۶ ثانیه است.

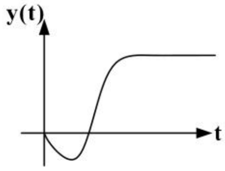
۴) دارای جهش ۱۰٪ و زمان نشست کمتر از ۶ ثانیه است.

✍ **حل:** گزینه «۲»

با توجه به متن درس، اثر اضافه کردن صفر به تابع تبدیل حلقه بسته، افزایش ماکزیمم فراجهش و کاهش زمان خیز است و از اینرو زمان نشست پاسخ پله افزایش می‌یابد.

مثال: دیاگرام جعبه‌ای یک سیستم و منحنی پاسخ آن به یک ورودی پله‌ای واحد در شکل زیر داده شده است. کدام یک از روابط زیر در مورد پارامترهای این سیستم صادق است؟ (مؤلف)





۱) $T_1 < T_2 \quad , \quad k_2 > k_1$

۲) $\frac{k_2}{T_2} > \frac{k_1}{T_1} \quad , \quad k_1 > k_2$

۳) $T_1 < T_2 \quad , \quad k_1 > k_2$

۴) $\frac{T_2}{k_2} < \frac{T_1}{k_1} \quad , \quad k_2 > k_1$

حل: گزینه «۲»

$$Y(s) = \left(\frac{k_1}{T_1 s+1} - \frac{k_2}{T_2 s+1}\right) X(s) = \frac{(k_1 T_2 - k_2 T_1)s + k_1 - k_2}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} X(s) \quad , \quad X(s) = \frac{1}{s}$$

از منحنی پاسخ سیستم درمی‌یابیم که پاسخ در حالت ماندگار مثبت است، لذا از قضیه مقدار نهایی داریم:

$$y_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{(k_1 T_2 - k_2 T_1)s + k_1 - k_2}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} \frac{1}{s} = k_1 - k_2 > 0 \quad \to \quad k_1 > k_2$$

از طرفی سیستم با توجه به داشتن فروجهش (*undershoot*)، باید صفری در سمت راست محور موهومی داشته باشد که با توجه به شرط $k_1 > k_2$ داریم:

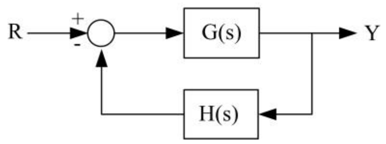
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(k_1 T_2 - k_2 T_1)s + k_1 - k_2}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} \quad \to \quad s = \frac{k_2 - k_1}{k_1 T_2 - k_2 T_1} > 0$$

$$k_1 T_2 - k_2 T_1 < 0 \quad \to \quad \frac{k_2}{T_2} > \frac{k_1}{T_1}$$

۲-۹ مکان هندسی ریشه‌ها

مقدمه

در بخش‌های قبلی، به اهمیت صفرها و قطب‌های تابع تبدیل حلقه بسته یک سیستم کنترل خطی پرداختیم. دانستیم قطب‌های تابع تبدیل حلقه بسته که ریشه‌های معادله مشخصه‌اند، پایداری سیستم را مشخص می‌کنند. روش راث را که روشی ساده برای بررسی پایداری مطلق سیستم‌ها به کمک معادله مشخصه است، بیان کردیم. یکی از مسائل اساسی در سیستم‌های کنترل خطی، بررسی نحوه تغییرات ریشه‌های معادله مشخصه بر اساس تغییر یک پارامتر خاص می‌باشد که روش راث قادر به انجام این خواسته نیست. روش مکان هندسی ریشه‌ها، روشی است برای پاسخ‌گویی به این خواسته، سیستم کنترلی زیر را در نظر بگیرید.



تابع تبدیل حلقه باز سیستم را به صورت $GH(s) = k\frac{N(s)}{D(s)}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s) = 1 + GH(s) = 0$$

$$\Delta(s) = 1 + k\frac{N(s)}{D(s)} \quad \to \quad \Delta(s) = D(s) + kN(s) = 0$$

واضح است که با تغییر مقدار k، موقعیت ریشه‌های معادله مشخصه تغییر می‌کند. رسم مکان هندسی ریشه‌ها در صفحه s به عنوان تابعی از k، مکان ریشه‌ها نامیده می‌شود.

اگر $k=0$ را در معادله مشخصه قرار دهیم، ریشه‌های چندجمله‌ای $D(s)$ که همان قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز سیستم کنترلی می‌باشند، قطب‌های تابع تبدیل حلقه بسته نیز خواهند بود. همچنین با قرار دادن $k=\infty$، ریشه‌های معادله مشخصه به ریشه‌های چندجمله‌ای $N(s)$ که همان صفرهای تابع تبدیل حلقه باز هستند، نزدیک می‌شوند. در نتیجه، با افزایش k از صفر به سمت بی‌نهایت، مکان ریشه‌ها از قطب‌های تابع حلقه باز شروع و به صفرهای آن ختم می‌شوند و بالعکس برای $-\infty<k<0$. بنابراین، مزیت استفاده از مکان هندسی ریشه‌ها در این است که می‌توان صفرها و قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز را بگونه‌ای تصحیح کرد که پاسخ سیستم، مشخصات مطلوب را دارا باشد. همچنین، این روش برای دستیابی سریع به نتایج تقریبی مناسب است. با توجه به محدوده تغییرات k مکان‌های ریشه‌ها را به صورت زیر تقسیم‌بندی می‌کنیم:

۱- مکان‌های ریشه‌ها (RL) : بخشی از مکان ریشه‌هاست وقتی که k از 0 تا ∞ تغییر می‌کند. به عبارتی دیگر، k مثبت می‌باشد.

۲- مکمل مکان ریشه‌ها (CRL) : بخشی از مکان ریشه‌هاست وقتی که k از $-\infty$ تا 0 تغییر می‌کند. به عبارتی دیگر، k منفی می‌باشد.

۳- مکان‌های ریشه‌های کامل: به مجموع مکان‌های ریشه‌ها و مکان‌های ریشه‌های مکمل گفته می‌شود. به عبارتی دیگر، محدوده تغییرات k از $-\infty$ تا $+\infty$ می‌باشد.

۲-۹-۱ معیار اندازه و زاویه

شرط این که ریشه‌ای روی مکان هندسی ریشه‌ها قرار گرفته باشد، این است که در معیار اندازه و زاویه صدق نماید. معادله مشخصه سیستم کنترلی مفروض را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\Delta(s)=1+kGH(s)=0 \quad \rightarrow \quad GH(s)=-\frac{1}{k}$$

بنابراین با توجه به مختلط بودن $GH(s)$ می‌توان معادله اخیر را به صورت قطبی (اندازه و فاز) نمایش داد.

شرط اندازه:

$$|GH(s)|=\frac{1}{k}$$

شرط زاویه:

$$\angle GH(s)=\begin{cases}(2l+1)\pi & l\geq 0\\ 2l\pi & l\leq 0\end{cases}$$

که در آن $l=0,\pm1,\pm2,...$.

با فرض این که تابع تبدیل حلقه باز سیستم به صورت نسبت دو چندجمله‌ای باشد، داریم:

$$GH(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{(s+z_1)(s+z_2)...(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)}$$

صفرها و قطب‌های $GH(s)$ می‌توانند حقیقی یا مزدوج مختلط باشند. حال برای این که s_1 نقطه‌ای روی مکان ریشه‌ها باشد، باید در شرط اندازه و زاویه صدق کند.

شرط اندازه برابر است با:

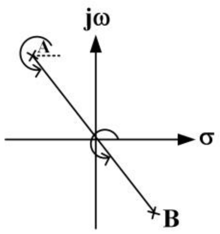
$$\frac{1}{|k|}=\frac{|s_1+z_1||s_1+z_2|...|s_1+z_m|}{|s_1+p_1||s_1+p_2|...|s_1+p_n|}$$

شرط زاویه برابر است با:

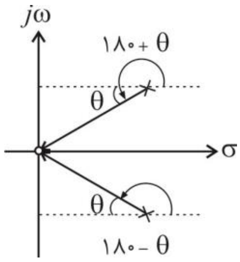
$$\angle GH(s_1)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s_1+z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s_1+p_j)=\begin{cases}(2l+1)\pi & l\geq 0\\ 2l\pi & l\leq 0\end{cases}$$

آنچه قابل ذکر می‌باشد، نحوه محاسبه زاویه است که نسبت به جهت مثبت محور افقی (σ) سنجیده می‌شود. به مثال زیر دقت کنید.

$$A=-1+j$$
$$B=1-j$$
$$\angle A=\pi-\tan^{-1}1=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$
$$\angle B=2\pi-\tan^{-1}1=-\frac{\pi}{4}$$



✵ **نکته**: *صفرها و قطب‌های مختلط در محاسبه زاویه نقاط روی محور حقیقی نقشی ندارند.*



به مثال توجه کنید.

اثر زاویه قطب‌های مختلط برابر است با $180+\theta+180-\theta=360$.

۲-۹-۲ قواعد کلی رسم مکان ریشه‌ها

۱- نوشتن معادله مشخصه سیستم به فرم استاندارد $\Delta(s)=1+k\dfrac{N(s)}{D(s)}=0$ برای محاسبه تابع تبدیل حلقه باز سیستم

$$GH(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

۲- تعیین قطب‌ها و صفرهای تابع تبدیل حلقه باز سیستم و مشخص کردن آن‌ها در صفحه s. قطب‌ها را با × و صفرها را با ○ نمایش می‌دهیم.

مثال: فرض کنید معادله مشخصه سیستمی به صورت روبرو باشد: $\Delta(s)=s^3+(2k+1)s^2+ks+1=0$

✍ **حل:**

برای رسم مکان هندسی ریشه‌ها برحسب پارامتر k بایستی آن را به فرم استاندارد $\Delta(s)=1+k\dfrac{N(s)}{D(s)}$ درآوریم. لذا:

$$\Delta(s)=(s^3+s^2+1)+ks(2s+1)=0 \quad\rightarrow\quad \Delta(s)=1+\frac{ks(2s+1)}{s^3+s^2+1}$$

بنابراین تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از: $GH(s)=\dfrac{s(2s+1)}{s^3+s^2+1}$

۳- تعیین مکان هندسی بر روی محور حقیقی

ـ اگر $k>0$ باشد، قسمتی از مکان را شامل می‌شود که سمت راست آن تعداد کل صفرها و قطب‌های حقیقی فرد باشد که طبق تعریف RL خواهد بود.

ـ اگر $k<0$ باشد، قسمتی از مکان را شامل می‌شود که سمت راست آن تعداد کل صفرها و قطب‌های حقیقی زوج باشد که طبق تعریف CRL خواهد بود.

❋ **نکته:** ***صفرها و قطب‌های مختلط در تعیین مکان هندسی بر روی محور حقیقی نقشی ندارند.***

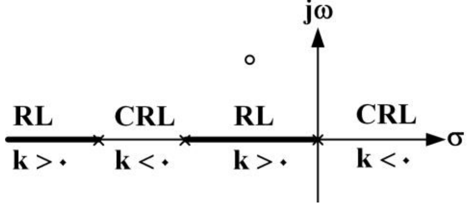
❋ **نکته:** ***مکان ریشه‌ها نسبت به محور حقیقی متقارن است.***

❋ **نکته:** ***مکان هندسی ریشه‌ها نسبت به محور تقارن صفرها و قطب‌ها متقارن است.***

❋ **نکته:** ***چنانچه تابع تبدیل حلقه‌باز سره یا اکیدا سره باشد به تعداد قطب‌های آن شاخه مکان داریم. اگر تابع تبدیل حلقه‌باز ناسره باشد به تعداد صفرهای آن شاخه مکان داریم.***

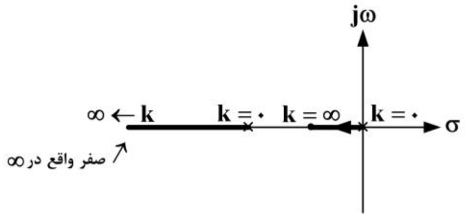
❋ **نکته:** ***اگر حذف صفر و قطب در تابع تبدیل حلقه باز رخ دهد، به منظور نمایش کامل قطب‌های سیستم حلقه بسته باید قطب حذف شده تابع تبدیل حلقه باز را به نمودار مکان هندسی ریشه‌ها اضافه کنیم.***

مثال: تابع تبدیل حلقه باز سیستمی را به صورت $GH(s)=\dfrac{k(s^2+2s+2)}{s(s+3)(s+4)}$ در نظر بگیرید. (مؤلف)



۴- همانطور که در مقدمه بیان گردید، برای $k=\circ$ مکان هندسی ریشه‌های سیستم حلقه بسته از قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز سیستم شروع و در $k=\infty$ به صفرهای تابع تبدیل حلقه باز ختم می‌شود و برای $k<\circ$ به طور برعکس. توجه داشته باشید که این قانون شامل قطب‌ها و صفرهای واقع در ∞ نیز می‌باشد.

مثال: تابع تبدیل حلقه باز سیستمی را به صورت $GH(s)=\dfrac{k(s+۱)}{s(s+۲)}$ در نظر بگیرید. (مؤلف)



۵- تعداد مجانب‌ها و محل برخورد آن‌ها:

اگر برای تابع تبدیل حلقه باز سیستم تعداد صفرهای متناهی را با m و تعداد قطب‌های متناهی را با n نمایش دهیم، تعداد مجانب‌های مکان هندسی ریشه‌ها برابر با تفاضل تعداد قطب‌ها و صفرهای متناهی است.

تعداد مجانب‌ها $=n-m$

زاویه مجانب‌ها $\theta=\begin{cases}\dfrac{(۲l+۱)\pi}{n-m} & l\geq\circ\\[2mm] \dfrac{۲l\pi}{n-m} & l\leq\circ\end{cases}\qquad l=\circ,۱,۲,\ldots,n-m-۱$

محل تلاقی مجانب‌ها $\sigma=\dfrac{\text{(مجموع قطب‌ها) - (مجموع صفرها)}}{n-m}$

❋ ***نکته:*** *مجانب‌ها، جهت حرکت مکان قطب‌های تابع تبدیل حلقه بسته را به طرف ∞ نمایش می‌دهند. چنان‌چه تابع تبدیل حلقه باز ناسره باشد مجانب‌ها خطوطی هستند که امتداد آن‌ها در ∞ محل قطب‌های نامحدود تابع تبدیل حلقه باز را نشان می‌دهد.*

❋ ***نکته:*** *تعداد شاخه‌هایی که از مکان هندسی ریشه‌ها به بی‌نهایت ختم می‌شوند برابر با تفاضل صفرها و قطب‌های متناهی تابع تبدیل حلقه باز می‌باشد.*

❋ ***نکته:*** *چون صفرها و قطب‌های مختلط مزدوج می‌باشند، همواره σ (محل تلاقی مجانب‌ها) کمیتی حقیقی است. به بیانی دیگر، محل برخورد مجانب‌ها همواره با محور حقیقی است.*

مثال: تابع تبدیل حلقه باز سیستمی را به صورت $GH(s)=\dfrac{k}{(s+۱)(s+۳)}$ در نظر بگیرید. (مؤلف)

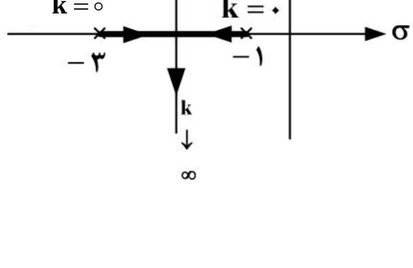
$\left.\begin{array}{l}n=۲\\ m=\circ\end{array}\right\}\rightarrow n-m=۲$ تعداد مجانب‌ها

$k>\circ\ \rightarrow\ \theta=\dfrac{(۲l+۱)\pi}{n-m}\qquad l=\circ,۱,\ldots,n-m-۱$

$\rightarrow\ \theta=\dfrac{(۲l+۱)\pi}{۲}\qquad(l=\circ,۱)$

$\rightarrow$ زاویه مجانب‌ها $\theta=\dfrac{\pi}{۲},\dfrac{۳\pi}{۲}$

محل تلاقی مجانب‌ها $\sigma=\dfrac{(-۱+-۳)-\circ}{۲}=-۲$



۶- تعیین نقاط شکست:

نقاط شکست نقاطی از صفحه s هستند که به واسطه وجود ریشه‌های مکرر معادله مشخصه ایجاد می‌شوند. این بدان معنی است که یک یا چند شاخه از مکان به یکدیگر نزدیک شده و سپس از هم دور می‌شوند. نقاط شکست به دو صورت *Break in* و *Break out* می‌باشند.

❋ **نکته:** *نقاط شکست می‌توانند بیش از یکی باشند.*

❋ **نکته:** *نقاط شکست می‌توانند حقیقی یا مزدوج مختلط باشند.*

❋ **نکته** *زاویه دور شدن یا نزدیک شدن به نقطه شکست برابر است با $\frac{۱۸۰}{n}$ که در این رابطه n تعداد اجزاء مستقل از مکان است که به نقطه شکست وارد یا خارج می‌شوند.*

❋ **نکته:** *بین هر دو صفر متوالی یا هر دو قطب متوالی حتماً نقطه شکست داریم.*

❋ **نکته:** *تعداد اجزاء مستقل مکان که به نقطه شکست وارد می‌شوند، مرتبه تکرار ریشه معادله مشخصه را نشان می‌دهند.*

❋ **نکته:** *نقاط شکست واقع بر مکان‌های ریشه‌های کامل با یافتن ریشه‌های $\frac{dk}{ds} = ۰$ بدست می‌آیند، که این امر، شرط لازم است. این بدان معنی است که تمام ریشه‌های $\frac{dk}{ds} = ۰$ نقاط شکست نیستند.*

❋ **نکته:** *شرط کافی برای این که نقطه‌ای به عنوان نقطه شکست باشد، این است که آن نقطه روی مکان باشد. این بدان معنی است که هر ریشه حقیقی $\frac{dk}{ds} = ۰$ نقطه شکست خواهد بود اگر روی مکان هندسی ریشه‌ها باشد. شرط کافی برای ریشه‌های حقیقی به راحتی قابل تعیین است، بدین صورت که برای $k > ۰$، مکان هندسی ریشه‌ها را رسم می‌کنیم. چنان چه ریشه حقیقی $\frac{dk}{ds} = ۰$ روی مکان ریشه‌ها (RL) باشد، نقطه شکست خواهدبود. شرط کافی برای ریشه‌های مزدوج مختلط نیز با استفاده از معیار اندازه و زاویه تعیین می‌شود.*

❋ **نکته:** *حساسیت ریشه‌ها در نقاط شکست بی‌نهایت است.*

در ادامه، چند مثال به منظور فهم بیشتر نکات در مورد نقاط شکست آورده شده است.

مثال:

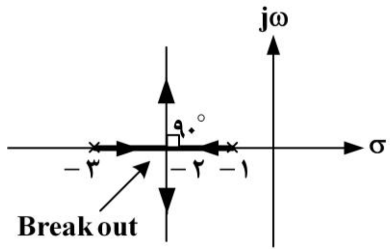
(مؤلف)

$$GH(s) = \frac{k}{(s+۱)(s+۳)}$$

$s = -۲$ ریشه مضاعف

$s = -۲$ نقطه شکست بین دو قطب متوالی

$\frac{۱۸۰}{۲} = ۹۰^\circ$ زاویه خروج

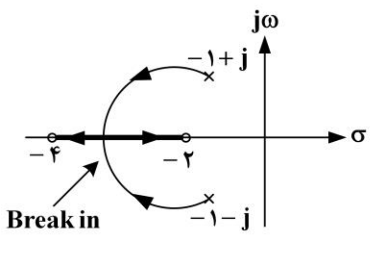


مثال:

(مؤلف)

$$GH(s) = \frac{k(s+۲)(s+۴)}{s^۲ + ۲s + ۲}$$

$s = -۲/۶۱۸$ نقطه شکست بین دو صفر متوالی (ریشه مضاعف)

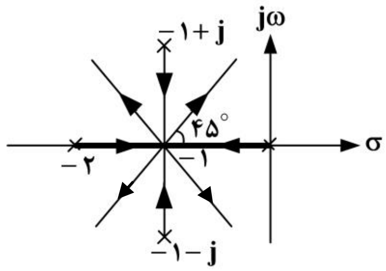


مثال: (مؤلف)

$$GH(s)=\frac{k}{s(s+۲)(s^۲+۲s+۲)}$$

$s=-۱$ نقطه شکست از مرتبه ۴

زاویه خروج از نقطه شکست $\frac{۱۸۰}{۴}=۴۵^\circ$



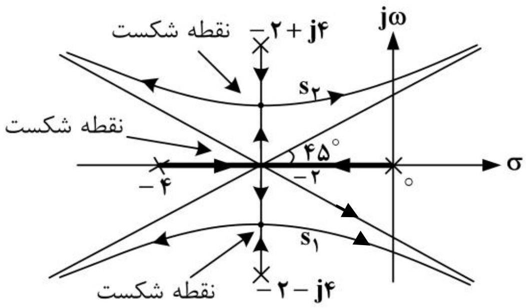
مثال:

$$GH(s)=\frac{k}{s(s+۴)(s^۲+۴s+۲۰)}$$

سه نقطه شکست

$s=-۲$ نقطه شکست حقیقی

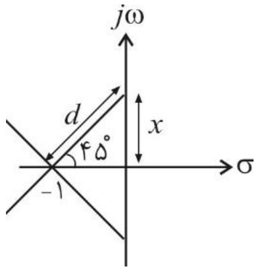
$s=-۲\pm j۲/۵$ نقطه شکست مزدوج مختلط



مثال: محدوده k برای پایداری سیستم حلقه‌بسته با فیدبک واحد منفی و با تابع تبدیل حلقه‌باز $k>۰$, $\frac{k}{(s+۱)^۴}$ را بیابید. (مولف)

$$\tan ۴۵=۱=\frac{x}{۱}\to x=۱ \Rightarrow d=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow k=\frac{۱}{|GH(s)|}=(\sqrt{۲})^۴=۴ \Rightarrow ۰<k<۴$$



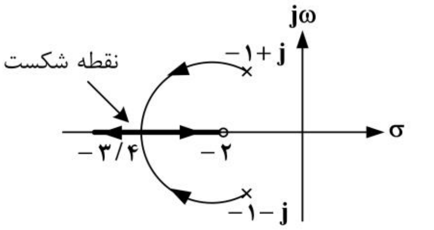
مثال: نقاط شکست برای مکان هندسی ریشه‌ها برای $k>۰$ برای تابع تبدیل حلقه باز $GH(s)=\frac{k(s+۲)}{s^۲+۲s+۲}$ عبارتست از:

(مؤلف)

شرط لازم: $\frac{dk}{ds}=۰ \quad \to \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{s^۲+۲s+۲}{s+۲}\right)=۰ \quad \to \quad ۲(s+۱)(s+۲)-(s^۲+۲s+۲)=۰$

$\to \quad s^۲+۴s+۲=۰ \quad \to \quad s_۱=-۳/۴$ ، $s_۲=-۰/۶$ (غیرقابل قبول)

نقطه شکست $s_۲=-۰/۶$ شرط کافی را ندارد. زیرا روی مکان ریشه‌ها (RL) نمی‌باشد.



۸- محل تلاقی با محور موهومی:

به کمک روش راث می‌توان فرکانس ω و بهره k $(-\infty<k<\infty)$ را در نقاط تلاقی مکان هندسی ریشه‌ها با محور موهومی بدست آورد. یادآوری می‌کنیم بدین منظور بایستی یک ردیف در جدول راث مساوی صفر باشد. روش دیگر قرار دادن $s=j\omega$ در معادله مشخصه است.

❋ ***نکته:*** ***در صورت عدم برقراری شرایط برای ایجاد یک ردیف صفر در روش راث، مکان هندسی ریشه‌ها محور موهومی را قطع نخواهد کرد.***

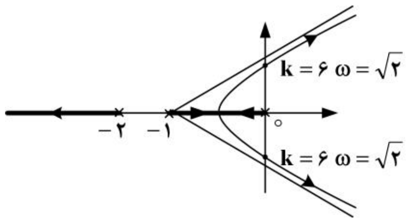
مثال: تابع تبدیل حلقه باز سیستمی را به صورت $GH(s)=\dfrac{k}{s(s+1)(s+2)}$ و $k>0$ در نظر بگیرید. محل تلاقی مکان هندسی ریشه‌ها با محور موهومی را بدست آورید. (مؤلف)

✍ **حل:**

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از: $\Delta(s)=s(s+1)(s+2)+k=0 \Rightarrow s^3+3s^2+2s+k=0$

روش راث را استفاده می‌کنیم. برای این که محل تلاقی با محور موهومی را بدست آوریم، کافیست در جدول راث یک سطر را برابر صفر قرار دهیم. لذا داریم: $2\times 3=k\times 1 \rightarrow k=6>0$

روش دوم: $\Delta(s=j\omega)=(k-3\omega^2)+j\omega(2-\omega^2)=0+j0 \Rightarrow \begin{cases}\omega=0\ ,\ \sqrt{2}\\ k=3\omega^2=3(2)=6\end{cases}$



بنابراین مکان هندسی ریشه‌ها، محور موهومی را قطع خواهد کرد.

برای محاسبه ω از معادله کمکی استفاده می‌کنیم.

$$A(s)=3s^2+k=0$$

$$if\quad k=6 \Rightarrow 3s^2+6=0 \Rightarrow s=\pm j\sqrt{2}$$

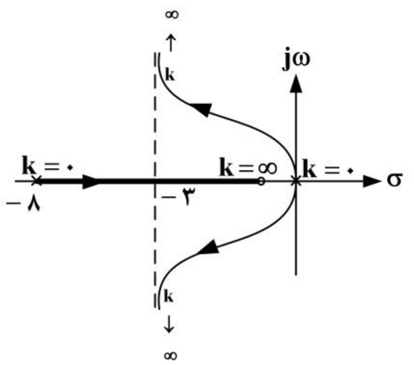
مثال: تابع تبدیل حلقه باز سیستمی به صورت $GH(s)=\dfrac{k(s+2)}{s^2(s+8)}$ و $k>0$ را در نظر بگیرید. (مؤلف)

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از: $\Delta(s)=1+GH(s)=s^3+8s^2+ks+2k$

روش راث را استفاده می‌کنیم. داریم:

$$8\times k=2k\times 1 \rightarrow k=0$$

مکان هندسی ریشه‌ها، محور موهومی را فقط در $k=0$ قطع می‌کند که این واقعیت به واسطه وجود قطب مضاعف $s=0$ رخ می‌دهد.



۹- زوایای ورود و خروج

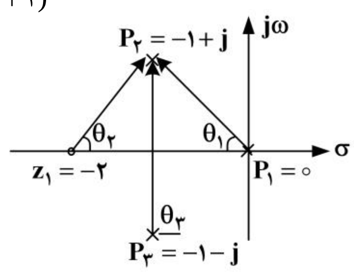
با فرض $k>0$ می‌دانیم که مکان هندسی از قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز شروع و به صفرهای آن ختم می‌شود. لذا برای ترسیم دقیق مکان هندسی باید زوایای خروج از قطب‌ها یا ورود به صفرها را بیابیم.

زاویه خروج از قطب = ۱۸۰ ـ [(مجموع زوایای قطب‌های دیگر نسبت به قطب موردنظر) ـ (مجموع زوایای صفرها نسبت به قطب موردنظر)]

زاویه ورود به صفر = ۱۸۰ ـ [(مجموع زوایای صفرهای دیگر نسبت به صفر موردنظر) ـ (مجموع زوایای قطب‌ها نسبت به صفر موردنظر)]

یادآوری می‌کنیم که زوایا نسبت به جهت مثبت محور حقیقی سنجیده می‌شوند. همچنین توجه داشته باشید که اگر قطبی یا صفری از مرتبه n باشد، برای محاسبه زوایای خروجی یا ورودی، باید نتایج حاصل از فرمول‌های مذکور را بر n تقسیم کنیم.

مثال: تابع تبدیل حلقه باز سیستمی را به صورت $GH(s)=\dfrac{k(s+2)}{s(s^2+2s+2)}$ و $k>0$ را در نظر بگیرید. (مؤلف)



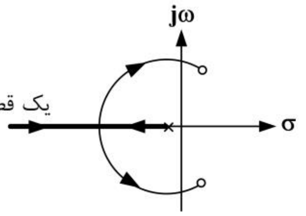
$\theta_1=45$

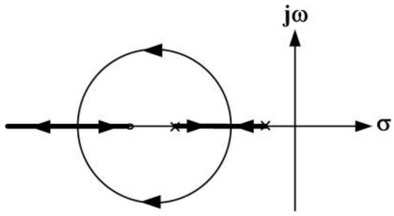
$\theta_2=45$

$\theta_3=90$

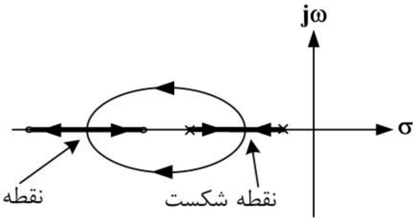
p_2 زاویه خروج از $=180-\{[\underbrace{(180-45)+90}_{\text{زوایای سایر قطب‌ها}}]-\underbrace{45}_{\text{زاویه صفر}}\}=0$

✵ **نکته:** *مکان هندسی ریشه‌ها در شرایطی که تعداد صفرها و قطب‌ها ۳ باشد، دایره (بیضی) خواهد بود اگر*
ـ بین دو قطب، صفر نباشد (دو قطب و یک صفر).
ـ بین دو صفر، قطب نباشد (دو صفر و یک قطب).





✵ **نکته:** *مکان هندسی در شرایطی که بعد از یک نقطه شکست، بلافاصله نقطه شکست دیگری باشد، بیضی است. چنانچه فاصله‌ها متقارن باشد، مکان دایره خواهد بود.*

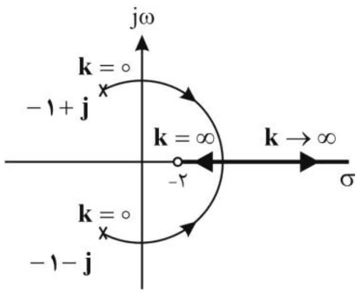


✵ **نکته:** *توجه داشته باشید که به منظور جهت‌دار نمودن مکان، دو روش در کتب مختلف بیان شده است.*
الف) جهت افزایش k جهت مکان در نظر گرفته می‌شود.
در این حالت، برای $k < 0$، مکان از صفرهای تابع تبدیل حلقه باز شروع و به قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز ختم می‌شود.
ب) قدرمطلق تغییرات k جهت مکان در نظر گرفته می‌شود.
در این حالت، برای $k < 0$ نیز، مکان از قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز شروع و به صفرهای تابع تبدیل حلقه باز (مشابه با $k > 0$) ختم می‌شود. در این حالت، حتماً باید ضریب بالاترین درجه صورت و مخرج مثبت باشد. در غیر این صورت، با عمل فاکتورگیری، این فرم را ایجاد می‌کنیم.
در این درس، از روش (ب) استفاده می‌کنیم.

مثال: تابع تبدیل حلقه باز سیستمی را به صورت $GH(s) = \frac{k(-s+2)}{s^2+2s+2}$ و $k > 0$ را در نظر بگیرید. (مؤلف)

برای رسم مکان هندسی ریشه‌ها بنا بر آنچه گفته شد، باید عمل فاکتورگیری را انجام دهیم. $GH(s) = \frac{-k(s-2)}{s^2+2s+2}$

بنابراین رسم مکان ریشه‌ها برای $k \geq 0$، معادل رسم مکان ریشه‌ها برای $-\infty < -k \leq 0$ خواهد بود. به بیانی دیگر، باید برای بهره‌های منفی مکان هندسی ریشه‌ها رسم گردد. بنابراین مکان ریشه‌ها روی محور حقیقی، CRL خواهد بود.



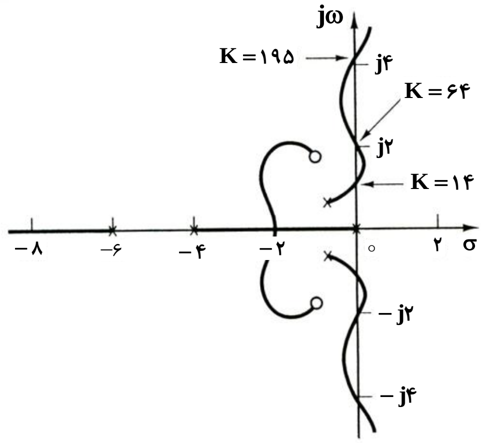
۲-۹-۳ سیستم‌های پایدار مشروط

همانطور که بیان شد، محل تلاقی با محور موهومی نشان‌دهنده حد بهره k برای پایداری سیستم حلقه بسته است. بنابراین، اگر مکان هندسی ریشه‌های یک سیستم کنترلی با اعمال قواعد ذکر شده، محور موهومی را بیش از یک بار قطع کند، بنا به تعریف به آن سیستم پایدار مشروط می‌گویند.

مثال: سیستم کنترلی با تابع تبدیل حلقه باز

$$GH(s)=\frac{k(s^{۲}+۲s+۴)}{s(s+۴)(s+۶)(s^{۲}+۱/۴s+۱)}\quad (k>۰)$$

را درنظر بگیرید. این سیستم پایدار مشروط است. مکان هندسی ریشه‌های این سیستم به صورت روبرو است. مشاهده می‌شود که سیستم حلقه بسته برای محدوده‌های $۱۴>k>۰$ و $۱۹۵>k>۶۴$ پایدار است، در حالی که برای محدوده‌های $۶۴>k>۱۴$ و $k>۱۹۵$ ناپایدار می‌باشد.



۲-۹-٤ مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستم‌های تأخیر زمانی

معادله مشخصه این گونه سیستم‌ها در حالت کلی به دو صورت زیر قابل نمایش است.

$$\Delta(s)=۱+GH(s)e^{-Ts}=۰\quad\Rightarrow\quad \Delta(s)=D(s)+kN(s)e^{-Ts}=۰$$

پرداختن به رسم مکان هندسی ریشه‌ها با توجه به حضور عامل e^{-Ts} امری مشکل است که خارج از حوصله بحث می‌باشد. برای رفع این معضل و سهولت در رسم مکان هندسی ریشه‌ها، یک روش استفاده از تقریب عامل e^{-Ts} می‌باشد. با استفاده از بسط تیلور برای e^{x} داریم:

$$e^{x}=۱+\frac{x}{۱!}+\frac{x^{۲}}{۲!}+\dots$$

اگر x مقدار کوچکی باشد، می‌توان از درجات بالای x صرف‌نظر کرد و نوشت: $e^{x}\approx ۱+x$

بنابراین اگر T (زمان تأخیر) مقدار کوچکی باشد، می‌توان یکی از تقریب‌های زیر را استفاده کرد.

$$۱)\ e^{-Ts}\approx ۱-Ts$$

$$۲)\ e^{-Ts}=\frac{۱}{e^{Ts}}\approx\frac{۱}{۱+Ts}$$

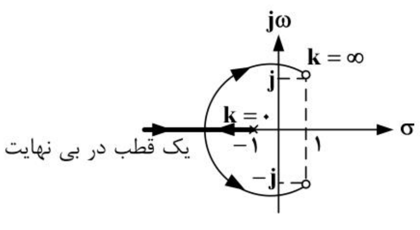
$$۳)\ e^{-Ts}=\frac{e^{-\frac{Ts}{۲}}}{e^{\frac{Ts}{۲}}}=\frac{۱-\frac{Ts}{۲}}{۱+\frac{Ts}{۲}}$$

هرچه درجات s افزایش یابد، به دلیل افزایش صفر (قطب) به تابع تبدیل حلقه باز دقت بالاتر رفته ولی رسم مکان هندسی مشکل‌تر خواهد شد.

مثال: سیستم کنترلی با تابع تبدیل حلقه باز $GH(s)=k\dfrac{e^{-s}}{s+۱}$ و $k>۰$ را در نظر بگیرید. (مؤلف)

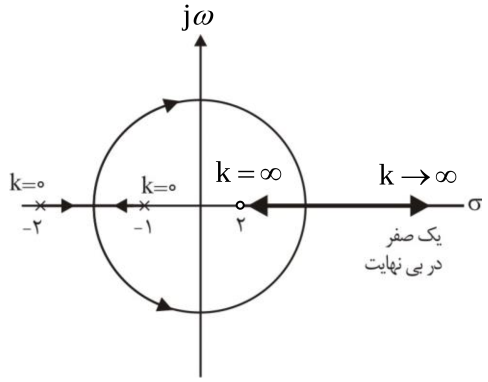
الف) با فرض $e^{-s}\approx ۱-s+\dfrac{s^{۲}}{۲}$ مکان هندسی ریشه‌های سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$GH(s)=\frac{k(۱-s+\frac{s^{۲}}{۲})}{(s+۱)}$$



ب) با فرض $e^{-s} \approx \dfrac{۱-\frac{s}{۲}}{۱+\frac{s}{۲}}$ مکان ریشه‌های سیستم حلقه بسته عبارتست از:

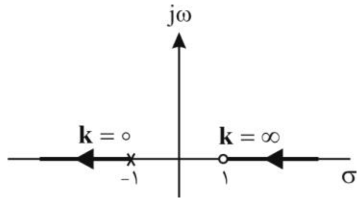
$$GH(s)=\frac{k\,(۱-\frac{s}{۲})}{(s+۱)(۱+\frac{s}{۲})}$$



توجه شود که برای ایجاد ضریب مثبت در صورت بایستی عمل فاکتورگیری انجام گیرد.

ج) با فرض $e^{-s} \approx ۱-s$ مکان ریشه‌های سیستم حلقه بسته عبارتست از:

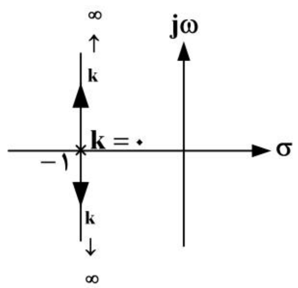
$$GH(s)=\frac{k\,(۱-s)}{(s+۱)}$$



توجه شود که برای ایجاد ضریب مثبت در صورت بایستی عمل فاکتورگیری انجام گیرد.

د) با فرض $e^{-s} \approx \dfrac{۱}{۱+s}$ مکان ریشه‌های سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$GH(s)=\frac{k}{(s+۱)^{۲}}$$



برای درک کامل از رسم مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستم‌های تاخیردار، قواعد آن را به‌طور خلاصه در ادامه بیان می‌کنیم.

شرط اندازه و زاویه:

$$\left|ke^{-Ts}GH(s)\right|=\left|ke^{-T(\sigma+j\omega)}GH(s)\right|=e^{-T\sigma}GH(s)=∘$$

$$\angle ke^{-Ts}GH(s)=\begin{cases}(۲k+۱)۱۸∘+\omega T, & K>∘\\ (۲k+۱)۱۸∘+\omega T, & K<∘\end{cases}$$

آنچه در ترسیم مکان هندسی ریشه‌ها در این حالت باید توجه داشت:

۱- نقاط $K=∘$ علاوه‌بر قطب‌های $GH(s)$ در $\sigma=-\infty$ نیز قرار دارند.

۲- نقاط $K=\infty$ علاوه‌بر صفرهای $GH(s)$ در $\sigma=\infty$ قرار دارند.

۳- تعداد شاخه‌های مکان بینهایت است.

۴ - مکان هندسی ریشه‌ها بر روی محور حقیقی همانند حالت بدون تاخیر بوده و نسبت به محور حقیقی متقارن است.

۵- تعداد مجانب‌ها بینهایت بوده و همگی موازی محور حقیقی هستند و از رابطه $\omega=\frac{۱۸۰N}{T}$ بدست می‌آیند که N از جدول زیر قابل محاسبه است:

k	$n-m$	مجانب‌ها برای $K=۰$	مجانب‌ها برای $K=\infty$
≥ ۰	زوج	$N=\pm۱,\pm۳,...$	$N=\pm۱,\pm۳,...$
≥ ۰	فرد	$N=\pm۰,\pm۲,...$	$N=\pm۱,\pm۳,...$
≤ ۰	زوج	$N=\pm۰,\pm۲,...$	$N=\pm۰,\pm۲,...$
≤ ۰	فرد	$N=\pm۱,\pm۳,...$	$N=\pm۰,\pm۲,...$

۶ - نقاط شکست از رابطه $\frac{dGH(s)e^{-Ts}}{ds}=۰$ بدست می‌آیند.

۷ -زوایای ورود به صفرها و خروج از قطب‌ها از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\theta_{P_i}=(۱۸۰+\omega T)+\angle(s-p_i)GH(s)\Big|_{s=p_i}$$

$$\theta_{z_i}=(۱۸۰+\omega T)+\angle(s-z_i)GH(s)\Big|_{s=z_i}$$

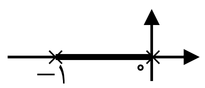
مثال: مکان هندسی ریشه‌ها را برای سیستم کنترلی با تابع تبدیل حلقه باز $GH(s)=\frac{Ke^{-s}}{s(s+۱)}, K\geq ۰$ ترسیم کنید.

نقاط $K=۰$ عبارتند از قطب‌های $GH(s)$ $(s=۰,-۱)$ و $\sigma=-\infty$ در حالی که نقاط $K=\infty$ عبارتند از $\sigma=\infty$. مجانب‌ها عبارتند از:

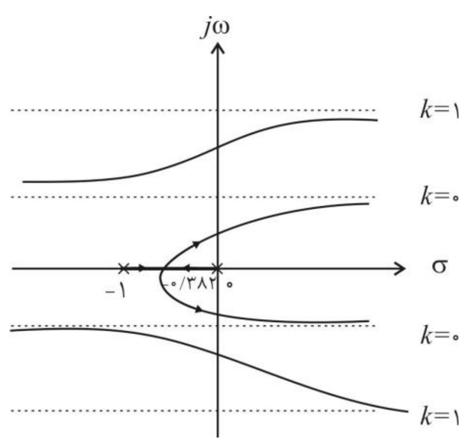
$n-m=۲-۰=۲ \quad$ (زوج)

$$\omega=\frac{\pi N}{T}, N=\pm۱,\pm۳,...\Rightarrow \omega=\pm\frac{\pi}{T},\pm\frac{۳\pi}{T},...(K=۰,K=\infty)$$

مکان بر روی محور حقیقی به صورت زیر است.



نقاط شکست عبارتند از $s=-۰/۳۸۲(K>۰)$ و $s=-۲/۶۱۸(K<۰)$.



در ادامه به منظور درک بهتر تأثیر زمان تأخیر بر مکان ریشه‌ها ضروری است اثرات افزودن صفر و قطب بر تابع تبدیل حلقه باز را بررسی کنیم. اگرچه در حوزه فرکانس نیز در مورد اثرات زمان تأخیر بر روی عملکرد سیستم بحث خواهیم کرد.