٤-٤ مقایسه جبران‌سازها

۱- جبران‌ساز پس‌فاز مشابه کنترل‌کننده PI می‌باشد. تنها تفاوت آن‌ها در این است که کنترل‌کننده PI دارای یک قطب در مبدأ بوده و لذا با افزایش نوع سیستم، خطای حالت ماندگار به سیگنال آزمون مفروض را صفر می‌کند. در نتیجه اثر جبران‌ساز پس‌فاز در خطای حالت ماندگار نسبت به کنترل‌کننده PI کمتر است.

۲- جبران‌ساز پیش‌فاز مشابه کنترل‌کننده PD می‌باشد.

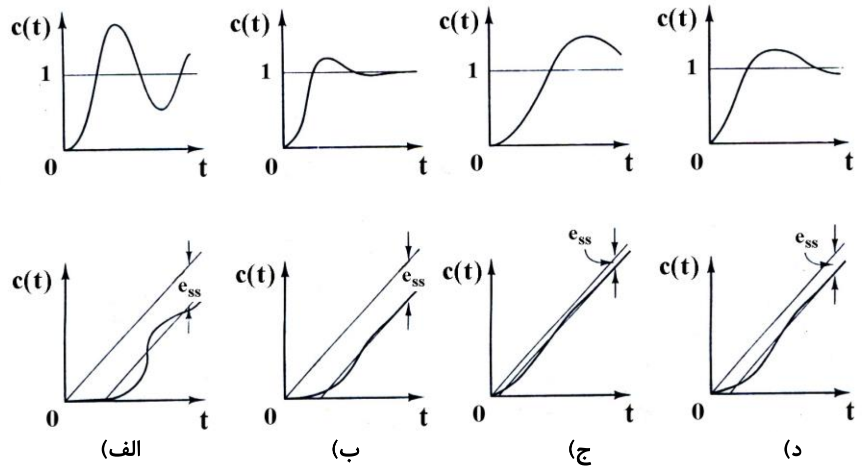
۳- جبران‌ساز پیش‌فاز اساساً بهبود قابل ملاحظه‌ای در پاسخ گذرا ایجاد کرده که به کمک جبران اثر فاز به این هدف می‌رسیم. در حالی که در جبران‌ساز پس‌فاز با تضعیف دامنه در فرکانس بالا به هدف مطلوبمان می‌رسیم. یعنی برای رسیدن به اهداف کنترلی از منحنی فاز جبران‌ساز پیش‌فاز و از منحنی اندازه جبران‌ساز پس‌فاز استفاده می‌کنیم.

۴- جبران‌ساز پیش‌فاز عموماً برای بهبود پایداری نسبی بکار می‌رود. فرکانس گذر بهره‌ای که در جبران‌ساز پیش‌فاز حاصل می‌شود، بزرگ‌تر از نتیجه جبران‌سازی با جبران‌ساز پس‌فاز می‌باشد. بزرگ‌تر بودن فرکانس گذر بهره به معنای پهنای باند بزرگ‌تر می‌باشد. لذا این جبران‌ساز با افزایش پهنای باند سیستم، زمان خیز و زمان استقرار سیستم را کاهش می‌دهد و لذا سرعت پاسخ سریع‌تر می‌شود، ولی در عین حال سبب وارد شدن نویز به سیستم می‌گردد.

۵- جبران‌ساز پس‌فاز بهره فرکانس بالای سیستم را کاهش می‌دهد، بدون این که تغییری در بهره سیستم در فرکانس‌های پایین ایجاد نماید. این جبران‌ساز به دلیل کاهش پهنای باند سیستم، سرعت پاسخ سیستم را کم می‌کند. همچنین سبب تضعیف نویزهای فرکانس بالا می‌شود و خطای حالت ماندگار را کاهش می‌دهد.

۶- اگر بخواهیم پاسخی سریع و خطای حالت ماندگار کمی داشته باشیم، از جبران‌ساز پیش‌فاز ـ پس‌فاز استفاده می‌کنیم.

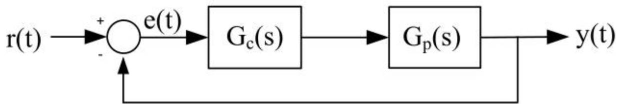
برای درک صحیح از مفاهیم مطرح شده، در شکل ۴ ـ ۱۶ منحنی‌های پاسخ پله و پاسخ شیب برای سیستم جبران شده و جبران نشده رسم شده است.



شکل (۴ـ۱۶): منحنی‌های پاسخ پله و شیب الف) سیستم جبران نشده ب) سیستم جبران شده با جبران‌ساز پیش‌فاز ج) سیستم جبران شده با جبران‌ساز پس‌فاز د) سیستم جبران شده با جبران‌ساز پیش‌فاز ـ پس‌فاز

٥-٤ حذف صفر و قطب سیستم و جبران‌ساز

می‌دانیم که تابع تبدیل معادل دو عنصر سری، حاصل ضرب توابع تبدیل آن‌هاست، بنابراین در جبران‌سازی سری، می‌توانیم به کمک جبران‌ساز برخی از صفرها و قطب‌های نامطلوب را حذف نماییم. بدین منظور باید قطب‌ها و صفرهای جبران‌ساز را طوری انتخاب نماییم که صفرها و قطب‌های نامطلوب را حذف کند.



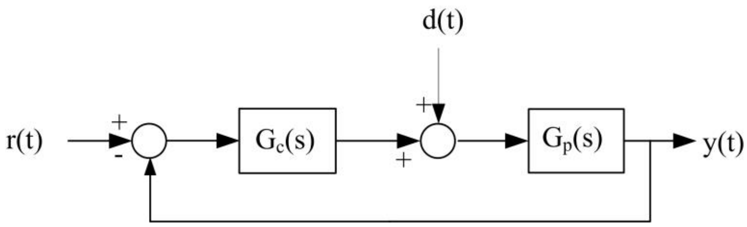
شکل (۴-۱۷): جبران‌ساز سری

آنچه اهمیت دارد، این است که اگر قطب نامطلوب در سمت راست محور موهومی قرار داشته باشد، نمی‌توان از این طرح برای حذف قطب نامطلوب استفاده کرد، زیرا اگرچه حذف قطب نامطلوب با اضافه کردن یک صفر از لحاظ ریاضی ممکن است ولی از لحاظ فیزیکی حذف دقیق به خاطر خطای مدلسازی امکان‌پذیر نمی‌باشد.

❋ **نکته:** ***حذف صفر و قطب سمت راست و روی محور موهومی سیستم و جبران‌ساز سبب ناپایداری (داخلی) سیستم می‌گردد.***

البته لازم به ذکر است که حذف صفر و قطب سیستم و جبران‌ساز در سمت چپ محور موهومی نیز باید با احتیاط صورت پذیرد، که بحث در این مورد خارج از حوصله این کتاب می‌باشد.

حال به بررسی پایداری سیستم کنترلی زیر می‌پردازیم.



یادآوری می‌کنیم که برای سیستم‌های علی که توابع تبدیل آن‌ها تابعی گویا از s می‌باشند، پایداری از نظر ورودی ـ خروجی معادل این است که تمامی ریشه‌های معادله مشخصه سیستم حلقه بسته در سمت چپ محور موهومی قرار داشته باشند.

بنا به تعریف سیستم کنترلی مفروض پایدار (داخلی) است اگر و فقط اگر ۴ تابع تبدیل زیر به طور همزمان پایدار باشند که به دسته ۴تایی‌ها (*Gang of Four*) معروف هستند. در این توابع تبدیل، $S(s)$ تابع حساسیت و $T(s)$ تابع مکمل حساسیت می‌باشند.

$$M_1(s)=\frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)}=T(s) \quad M_2(s)=\frac{G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)}=G_p(s)S(s)$$

$$M_4(s)=\frac{G_c(s)}{1+G_c(s)G_p(s)}=G_c(s)S(s) \quad M_3(s)=\frac{1}{1+G_c(s)G_p(s)}=S(s)$$

با توجه به آنچه که بیان شد، به راحتی می‌توان حذف صفر و قطب روی محور موهومی یا سمت راست محور موهومی سیستم ($G_p(s)$) و جبران‌ساز ($G_c(s)$) را که قبلاً به آن اشاره کردیم، اثبات کنیم. بدین صورت که اگر حذف صفر و قطب سمت راست محور موهومی سیستم و جبران‌ساز صورت گیرد، صفر سیستم که به وسیله قطب جبران‌ساز حذف شده است، به صورت قطب‌های تابع تبدیل $M_3(s)$ ظاهر خواهند شد. بنابراین شرط پایداری (داخلی) برای سیستم کنترلی برقرار نخواهد بود.

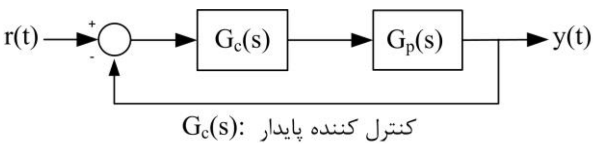
تنها به ذکر این نکته بسنده می‌کنیم که سیستم کنترلی مفروض از نظر ورودی ـ خروجی پایدار است، اگر سیستم ساده شده از هر ورودی مستقل (با فرض صفر بودن ورودی‌های دیگر) به هر خروجی قابل تعریف در سیستم حلقه بسته از نظر ورودی ـ خروجی پایدار باشد. این واقعیت برای سیستم کنترلی مفروض، با چهار تابع تبدیل $M_1(s)$ تا $M_4(s)$ بیان می‌شود.

٤-٦ پایدارسازی با استفاده از جبران‌سازهای پایدار

منظور از پایدارسازی با استفاده از جبران‌سازهای پایدار این است که ممکن است سیستم‌هایی وجود داشته باشند که به هیچ عنوان نمی‌توان آن‌ها را با یک جبران‌ساز پایدار، پایدار نمود. بحث بیشتر در این مورد، خارج از حوصله این کتاب است. این واقعیت را با مطرح کردن قضیه زیر خاتمه می‌دهیم.

قضیه: پایدارسازی یک سیستم ناپایدار با یک کنترل‌کننده پایدار تنها در صورتی امکان‌پذیر است که در بین هر جفت صفرهای ناپایدار سیستم (شامل صفر در بی‌نهایت) تعداد زوجی از قطب‌های ناپایدار آن قرار گیرد.

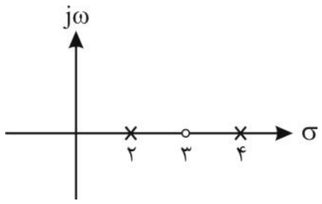
مثال: کدام یک از سیستم‌های زیر را نمی‌توان توسط یک کنترل‌کننده پایدار کنترل و پایدار نمود؟ (برق ۸۴)



۱) $\frac{s-1}{(s-2)(s-4)}$ ۲) $\frac{s+1}{(s-2)(s-4)}$

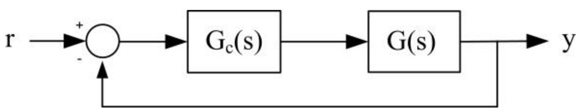
۳) $\frac{s-3}{(s-2)(s-4)}$ ۴) هر سه سیستم

✍ **حل:** گزینه «۳»



با توجه به متن درس، پایدارسازی یک سیستم ناپایدار با یک کنترل‌کننده پایدار در صورتی امکان‌پذیر است که بین هر جفت صفرهای ناپایدار سیستم (شامل صفر در بی‌نهایت)، تعداد زوجی از قطب‌های ناپایدار آن قرار داشته باشد. این واقعیت در مورد گزینه (۳) صادق نمی‌باشد.

مثال: چنانچه در بلوک دیاگرام شکل زیر $G(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}$ باشد، کدام کنترل‌کننده خطای ماندگار به ورودی $(t^2+0/5t)u(t)$ را صفر می‌کند؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۲)



۱) P ۲) PI

۳) PD ۴) PID

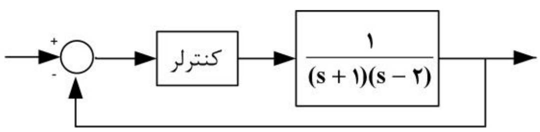
✍ **حل:** گزینه «۴»

با توجه به مطلوب مسأله که صفر کردن خطای حالت ماندگار می‌باشد، باید نوع سیستم را یک مرتبه افزایش دهیم. لذا گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست می‌باشند. اگر کنترل‌کننده PI انتخاب شود، سیستم حلقه بسته ناپایدار خواهد بود. بنابراین نیاز به کنترل‌کننده PID داریم.

$$G_c(s)=k_p+\frac{k_I}{s}\rightarrow \Delta(s)=1+G_c(s)G(s)=\rightarrow \ \Delta(s)=s^4+s^3+k_p s+k_I=0$$

چندجمله‌ای فوق همواره ناپایدار است. زیرا کلیه توان‌های s موجود نمی‌باشند (عدم برقراری شرط لازم برای پایداری).

مثال: سیستم کنترل حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید. کدام یک از کنترل‌کننده‌های داده شده می‌تواند سیستم مدار بسته را پایدار نماید؟ (مکانیک ۷۸ ـ هسته‌ای ۷۶)



۱) k ۲) ks

۳) $k(1+\frac{1}{Ts})$ ۴) $k(1+Ts)$

✍ **حل:** گزینه «۴»

از روش راث استفاده می‌کنیم.

گزینه (۱) : $\Delta(s)=1+\frac{k}{(s+1)(s-2)}=0 \rightarrow \ \Delta(s)=s^2-s+k-2=0$

شرط لازم برای پایداری را ندارد.

گزینه (۲) : $\Delta(s)=1+\frac{ks}{(s+1)(s-2)}=0 \rightarrow \ \Delta(s)=s^2+(k-1)s-2=0$

شرط لازم برای پایداری را ندارد.

گزینه (۳) : $\Delta(s)=1+\frac{k(Ts+1)}{Ts(s^2-s-2)}=0 \rightarrow \ \Delta(s)=Ts^3-Ts^2-2Ts+kTs+k=0$

شرط لازم برای پایداری را ندارد.

مثال: تابع تبدیل سیستمی به صورت $G(s)=\dfrac{۱}{s^{۲}(s+۴)}$ داده شده است. حد فاز این سیستم با استفاده از نمودار بود (مجانب‌ها) چیست؟ اگر بخواهیم حد فاز سیستم را به ۴۵° برسانیم چه کنترل‌کننده‌ای لازم است؟

(ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۳)

۱) ۱۸- و جبران‌ساز پیش‌فاز *(Lead)* ۲) ۱۸- و جبران‌ساز پس‌فاز *(Lag)*

۳) ۱۸ و جبران‌ساز پیش‌فاز *(Lead)* ۴) ۱۸ و جبران‌ساز پس‌فاز *(Lag)*

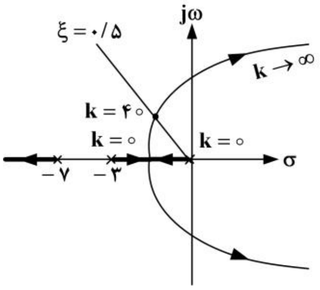
✍ **حل:** گزینه «؟»

$$|G(j\omega_۱)|=۱\rightarrow \omega_۱^{۶}+۱۶\omega_۱^{۴}-۱=۰\rightarrow \omega_۱=۰/۴۹۸۱$$

$$\angle G(j\omega_۱)=-۱۸۰-\tan^{-۱}\frac{\omega_۱}{۴}\rightarrow PM=۱۸۰+\angle G(j\omega_۱)=-\tan^{-۱}\frac{\omega_۱}{۴}=-\tan^{-۱}\frac{۰/۴۹۸۱}{۴}\cong -۷/۱^{\circ}<۰$$

بنابراین در درج پاسخ‌ها اشتباه رخ داده است. توجه کنید برای بهبود حد فاز نیاز به جبرانساز پیش‌فاز می‌باشد.

مثال: نمودار مکان ریشه‌های معادله مشخصه یک سیستم جبران نشده در شکل ترسیم شده است. می‌خواهیم پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته دارای نسبت میرایی $\xi=۰/۵$ و ضریب خطای سرعت $k_v=۴۰$ باشد. جبران‌کننده درجه یک پیشنهادی شما از چه نوعی است و نسبت صفر به قطب آن کدام است؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۳)



۱) از نوع پیش‌فاز با نسبت صفر به قطب ۲۱

۲) از نوع پیش‌فاز با نسبت صفر به قطب $\dfrac{۱}{۲۱}$

۳) از نوع پس‌فاز با نسبت صفر به قطب ۲۱

۴) از نوع پس‌فاز با نسبت صفر به قطب $\dfrac{۱}{۲۱}$

✍ **حل:** گزینه «۳»

از روی نمودار مکان هندسی ریشه‌ها داریم:

$$G_p(s)=\frac{k}{s(s+۳)(s+۷)} \quad , \quad G_c(s)=\frac{s+z}{s+p}$$

$$k_v=\lim_{s\to ۰} sG_p(s)G_c(s)=\lim_{s\to ۰} s\frac{k}{s(s+۳)(s+۷)}\,\frac{s+z}{s+p}=\frac{kz}{۲۱p}=۴۰ \quad \rightarrow \quad \frac{z}{p}=۲۱$$

چون نیازی به تغییر مشخصات گذرا نمی‌باشد، لذا احتیاج به جبران‌کننده پیش‌فاز نداریم. بنابراین با استفاده از یک کنترل‌کننده پس‌فاز با نسبت صفر به قطب ۲۱ می‌توانیم به ضریب خطای سرعت مطلوب برسیم.

مثال: اگر یک قطب در $s=-۲$ به سیستم کنترلی که تابع تبدیل حلقه باز آن با معادله $G(s)H(s)=\dfrac{k(s+۳)}{s^{۲}}$ داده شده است، اضافه نماییم، در $k>۰$ کدام یک از تغییرات زیر در مورد سیستم اتفاق خواهد افتاد؟ (مکانیک ۷۷)

۱) از نوسانی به پایدار ۲) از ناپایدار به پایدار

۳) از پایدار به نوسانی ۴) از پایدار به ناپایدار

✍ **حل:** گزینه «۴»

معادله مشخصه سیستم اصلی عبارتست از:

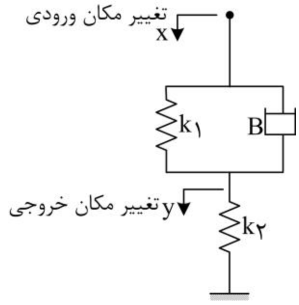
$$\Delta(s)=s^{۲}+ks+۳k=۰$$

که سیستم اصلی برای $k>۰$ همواره پایدار است. حال معادله مشخصه را با اضافه کردن قطب $s=-۲$ در نظر می‌گیریم.

$$\Delta(s)=s^{۲}(s+۲)+k(s+۳)=s^{۳}+۲s^{۲}+ks+۳k=۰$$

از روش راث با توجه به عدم برقراری شرط کافی برای پایداری ($۲\times k > ۱\times ۳k$)، سیستم به ازای $k > ۰$ همواره ناپایدار است.

مثال: سیستم مکانیکی زیر را به عنوان کدام یک از کنترلرهای داده شده می‌توان بکار برد؟ (مکانیک ۷۷)



۱) فیلتر *Phase-Lag*

۲) فیلتر *Phase-Lead*

۳) کنترلر *PD*

۴) کنترلر *PI*

✍ **حل:** گزینه «۲»

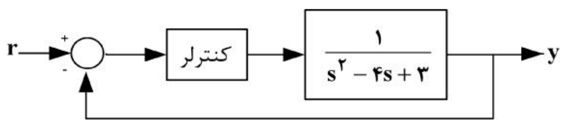
معادلات دینامیکی حاکم بر سیستم را می‌نویسیم. داریم:

$$-k_۲ y - k_۱(y-x) - B(\dot{y}-\dot{x}) = ۰ \xrightarrow{L} \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k_۱ + Bs}{(k_۱+k_۲)+Bs} = \frac{k_۱}{k_۱+k_۲}\,\frac{(۱+\frac{B}{k_۱}s)}{(۱+\frac{B}{k_۱+k_۲}s)}$$

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{\Delta}{=} \dfrac{k_۱}{k_۱+k_۲} < ۱ \\ T \overset{\Delta}{=} \dfrac{B}{k_۱} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = a\,\frac{(۱+Ts)}{(۱+aTs)}$$

بنابراین سیستم مکانیکی مفروض، یک فیلتر پیش‌فاز *(Lead)* می‌باشد.

مثال: سیستم مدار بسته مقابل را توسط کدام کنترلرها می‌توان پایدار کرد؟ (مکانیک ۷۶)



۱) تناسبی

۲) تناسبی + مشتق‌گیر

۳) تناسبی + انتگرال‌گیر

۴) هیچ کنترلری نمی‌تواند.

✍ **حل:** گزینه «۲»

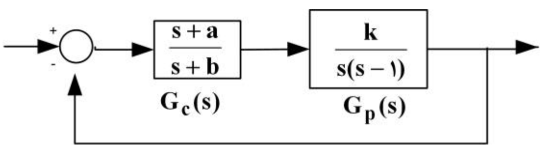
از روش راث استفاده می‌کنیم. لذا گزینه‌های (۱) و (۳) نمی‌توانند سیستم ناپایدار فوق را پایدار سازند. حال کنترل‌کننده را تناسبی ـ مشتق‌گیر *(PD)* انتخاب می‌کنیم.

$$G_C(s) = k_p + k_D s$$

$$\Delta(s) = ۱ + G_C(s)G_p(s) = ۱ + \frac{(k_p + k_D s)}{s^۲ - ۴s + ۳} = ۰ \rightarrow \Delta(s) = s^۲ + (k_D - ۴)s + (۳ + kp) = ۰$$

با انتخاب $k_p > ۰$ و $k_D > ۴$ می‌توان سیستم حلقه بسته فوق را پایدار کرد.

مثال: کنترل‌کننده $G_C(s) = \frac{s+a}{s+b}$ برای پایدار کردن سیستم $G_p(s) = \frac{k}{s(s-۱)}$ بکار گرفته شده است. مقادیر مناسب a و b و k کدام است؟ (هسته‌ای ۷۸)



۱) $k = ۲۵ \;,\; b = ۲ \;,\; a = ۱$

۲) $k = ۲۳ \;,\; b = ۱ \;,\; a = ۲$

۳) $k = ۲۲ \;,\; b = ۵ \;,\; a = ۳$

۴) $k = ۲۴ \;,\; b = ۳ \;,\; a = ۴$

✍ **حل:** گزینه «۳»

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

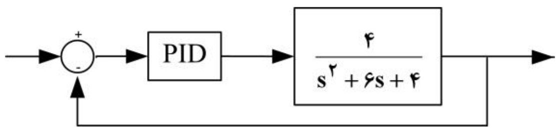
$$\Delta(s)=s(s-۱)(s+b)+k(s+a)=۰ \quad \rightarrow \quad \Delta(s)=s^۳+(b-۱)s^۲+(k-b)s+ka=۰$$

از روش راث شرایط پایداری عبارتند از:

$$\begin{cases} b-۱>۰ \\ k-b>۰ \\ ka>۰ \\ (b-۱)(k-b)-ka>۰ \end{cases}$$

که شرایط فوق فقط توسط گزینه (۳) برآورده می‌شود.

مثال: کنترل‌کننده PID با تابع تبدیل $k_p+k_D s+\dfrac{k_I}{s}$ را چنان طراحی کنید که سیستم نشان داده شده در شکل مقابل دارای یک ریشه حقیقی در ۱۰- بوده و نسبت میرایی $\xi=۰/۸$ و فرکانس طبیعی $\omega_n=۲$ باشد؟ (هسته‌ای ۷۸)



۱) $k_I=۱۰ \;,\; k_D=۲ \;,\; k_p=۸$

۲) $k_I=۱۰ \;,\; k_D=۱/۸ \;,\; k_p=۸$

۳) $k_I=۱۲ \;,\; k_D=۱/۸ \;,\; k_p=۹$

۴) $k_I=۱۲ \;,\; k_D=۲ \;,\; k_p=۹$

✍ **حل:** گزینه «۲»

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=s(s^۲+۶s+۴)+۴(k_D s^۲+k_p s+k_I)=۰ \quad \rightarrow \quad \Delta(s)=s^۳+(۶+۴k_D)s^۲+۴(۱+k_p)s+۴k_I=۰$$

با توجه به مفروضات مسأله ($\omega_n=۲\,,\,\xi=۰/۸$) معادله مشخصه مطلوب سیستم برابر است با:

$$\Delta(s)=(s+۱۰)(s^۲+۲\xi\omega_n s+\omega_n^۲)=s^۳+۱۳/۲s^۲+۳۶s+۴۰=۰$$

از تساوی دو معادله مشخصه داریم:

$$\begin{cases} ۶+۴k_D=۱۳/۲ & \rightarrow \quad k_D=۱/۸ \\ ۴(۱+k_p)=۳۶ & \rightarrow \quad k_p=۸ \\ ۴k_I=۴۰ & \rightarrow \quad k_I=۱۰ \end{cases}$$

مثال: کدام یک از بیان‌های زیر در مورد اثرات اضافه شدن قطب و صفر در تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترل همواره معتبر است؟

۱) اگر قطب یا صفر اضافه شده در سمت چپ محور $j\omega$ باشد، اثری بر پایداری ندارد. (هسته‌ای ۷۹)

۲) اضافه شدن صفر باعث پایداری بیشتر و اضافه شدن قطب باعث پایداری کمتر می‌شود.

۳) اضافه شدن صفر باعث پایداری کمتر و اضافه شدن قطب و باعث پایداری بیشتر می‌شود.

۴) بستگی به تابع تبدیل حلقه باز سیستم کنترل دارد.

✍ **حل:** گزینه «۲»

طبق مطالب ارائه شده در متن، اضافه کردن قطب به تابع تبدیل حلقه باز سبب کشیدن شدن مکان هندسی ریشه‌ها به سمت راست محور موهومی شده و لذا سبب کاهش پایداری سیستم می‌شود و افزودن صفر به تابع تبدیل حلقه باز سبب کشیده شدن مکان هندسی ریشه‌ها به سمت چپ محور موهومی شده و لذا سبب افزایش پایداری می‌شود.

مثال: تابع انتقال (تبدیل) یک فرآیند به صورت $p(s)=\dfrac{۲}{s(s-۱)}$ است. کدام یک از کنترلرهای زیر می‌تواند سیستم مدار بسته را (با فیدبک واحد) پایدار سازد؟ (مکانیک ۷۹)

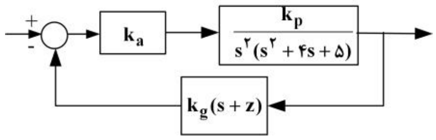
۱) تناسبی ۲) انتگرال‌گیر ۳) تناسبی + انتگرال‌گیر ۴) تناسبی + مشتق‌گیر

✍ **حل**: گزینه «۴»

از روش راث استفاده می‌کنیم. واضح است با انتخاب $k_p > 0$ و $k_D > 1$ سیستم پایدار می‌گردد.

$$\Delta(s) = 1 + G_c(s)G_p(s) = 1 + (k_p + k_D s)\frac{2}{s(s-2)} = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta(s) = s^2 + 2(k_D - 1)s + 2k_p = 0$$

مثال: در سیستم کنترل شکل مقابل کدام بیان زیر نادرست است؟ (هسته‌ای ۷۹)



۱) سیستم حلقه بسته به ازای همه صفرهای جبران‌ساز پایدار، پایدار است و با انتخاب مناسب آن می‌توان عملکرد سیستم حلقه بسته را بهبود بخشید.

۲) با افزایش هر کدام از بهره‌های k_a و k_p و k_c سیستم حلقه بسته ناپایدار می‌شود.

۳) با نزدیک‌تر شدن صفر جبران‌ساز به مبدأ، پایداری سیستم حلقه بسته بهبود می‌یابد.

۴) اگر صفر جبران‌ساز از مبدأ خیلی دور شود ($z \to \infty$) سیستم حلقه بسته به ازاء تمامی بهره‌های مثبت ناپایدار است.

✍ **حل**: گزینه «۱»

تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارتست از:

$$GH(s) = \frac{k(s+z)}{s^2(s^2+4s+5)} \quad , \quad k \overset{\Delta}{=} k_a k_p k_c$$

لذا معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s) = s^4 + 4s^3 + 5s^2 + ks + kz = 0$$

با استفاده از روش راث شرایط لازم و کافی برای پایداری عبارتند از:

$$\left.\begin{array}{l} k > 0 , kz > 0 \\ k - 20 < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 < k < 20 \\ z > 0 \end{array}\right. \qquad (1)$$

$$-k^2 - 16kz + 20k > 0 \rightarrow z < \frac{20-k}{16} \qquad (2)$$

$$\longrightarrow \quad 0 < z < \frac{20-k}{16}$$

با توجه به محدوده بدست آمده واضح است که به ازاء تمام صفرهای پایدار، سیستم حلقه‌بسته پایدار نیست.

مثال: می‌دانیم تابع تبدیل کنترل‌کننده پیش‌فاز به صورت $G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$ و $a > 1$ می‌باشد. در چه فرکانسی زاویه فاز این کنترل‌کننده حداکثر می‌شود و حداکثر مقدار این زاویه کدام است؟ (هسته‌ای ۸۰)

۱) $\frac{1}{a\sqrt{T}} \quad , \quad \sin^{-1}(\frac{\sqrt{2a}}{a+1})$

۲) $\frac{1}{a\sqrt{T}} \quad , \quad \sin^{-1}(\frac{a-1}{a+1})$

۳) $\frac{1}{T\sqrt{a}} \quad , \quad \sin^{-1}(\frac{\sqrt{2a}}{a+1})$

۴) $\frac{1}{T\sqrt{a}} \quad , \quad \sin^{-1}(\frac{a-1}{a+1})$

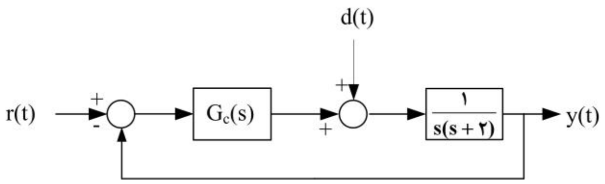
✍ **حل**: گزینه «۴»

از متن درس داریم:

$$\omega_m = \sqrt{zp} = \sqrt{(-\frac{1}{aT})(-\frac{1}{T})} = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$

$$\sin\varphi_m = \frac{a-1}{a+1} \quad \rightarrow \quad \varphi_m = \sin^{-1}(\frac{a-1}{a+1})$$

مثال: در سیستم داده شده، کنترل‌کننده‌ای که خطای ماندگار به اغتشاش $d(t)=\sin t$ را صفر می‌کند، کدام است؟ به ازای چه نوع ورودی مرجع خطای ماندگار در این حالت صفر خواهد بود؟ (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۴)



۱) $G_c(s)=\dfrac{s}{s^۲+۱}$ ، پله و $\sin t$

۲) $G_c(s)=\dfrac{s+۲}{s^۲+۱}$ ، پله و $\sin t$

۳) $G_c(s)=\dfrac{-s+۰/۱}{s^۲+۱}$ ، پله و $\sin t$

۴) $G_c(s)=\dfrac{-s+۰/۱}{s^۲+۱}$ ، پله و شیب

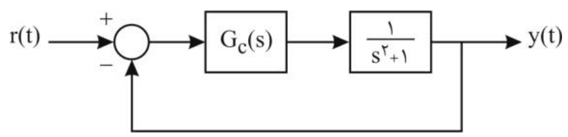
حل: گزینه «۳»

گزینه (۱) به واسطه حذف صفر و قطب روی مبدأ سیستم و کنترل‌کننده نادرست است. گزینه (۲) نیز نادرست است، زیرا سیستم حلقه بسته با کنترل‌کننده مفروض ناپایدار است. این امر با معادله مشخصه سیستم حلقه بسته قابل تحقیق است.

$\Delta(s)=s(s^۲+۱)+۱=s^۳+s+۱=۰ \quad \rightarrow$ شرط لازم برای پایداری را ندارد.

به راحتی می‌توان گزینه صحیح را از بین دو گزینه (۳) و (۴) تشخیص داد. گزینه (۴) نادرست است، زیرا برای صفر شدن خطای ماندگار به ورودی شیب بایستی نوع سیستم دو باشد که با توجه به کنترل‌کننده مفروض این امر محقق نمی‌شود. لذا گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

مثال: کنترل‌کننده PID با تابع تبدیل $G_c(s)=k\dfrac{(s+a)(s+b)}{s}$ را با فرض $k>۰$، $۰<a<۱$ و $۰<b<۱۰$ طوری طراحی نمایید که قطب‌های غالب سیستم حلقه بسته $-۱\pm j\sqrt{۳}$ باشند. (ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۴ ـ هسته‌ای ۸۴)



۱) $a=۰/۱۴\ ,\ b=۱/۳۵\ ,\ k=۲/۱$

۲) $a=۰/۱۸\ ,\ b=۱/۷۵\ ,\ k=۳/۴$

۳) $a=۰/۱۲\ ,\ b=۱/۱۵\ ,\ k=۴/۱$

۴) $a=۰/۱۶\ ,\ b=۲/۳۵\ ,\ k=۱/۸$

حل: گزینه «۱»

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته برابر است با:

$$\Delta(s)=۱+\frac{k[s^۲+(a+b)s+ab]}{s(s^۲+۱)}=۰ \quad \rightarrow \quad \Delta(s)=s^۳+ks^۲+(ka+kb+۱)s+kab=۰$$

با توجه به این که $s=-۱\pm j\sqrt{۳}$ قطب (غالب) می‌باشند. بنابراین $(s^۲+۲s+۴)$ عامل معادله مشخصه بوده و باقیمانده حاصل تقسیم بر آن برابر صفر می‌باشد.

$$\begin{array}{l|l} s^۳+ks^۲+(ka+kb+۱)s+kab & s^۲+۲s+۴ \\ \cline{2-2} -s^۳-۲s^۲-۴s & s+(k-۲) \\ \hline (k-۲)s^۲+(ka+kb-۳)s+kab & \\ -(k-۲)s^۲-۲(k-۲)s-۴(k-۲) & \\ \hline (ka+kb-۲k+۱)s+kab-۴k+۸ \ \rightarrow \text{باقیمانده} & \end{array}$$

باقیمانده را برابر صفر قرار داده و داریم:

$$\begin{cases} k(a+b-۲)+۱=۰ \\ k(ab-۴)+۸=۰ \end{cases}$$

تنها گزینه‌ای که شرط‌های فوق را به صورت تقریبی برآورده می‌کند، گزینه (۱) می‌باشد.