پاسخ سری اول تمرینات درس معادلات دیفرانسیل

۱- معادله دیفرانسیل خانواده دو پارامتری $y=\ln\cos(x-c_1)+c_2$ را بیابید.

$$y=\ln\cos(x-c_1)+c_2 \quad\rightarrow\quad y'=-\tan(x-c_1)$$

$$\rightarrow\quad \arctan y'=-x+c_1 \quad\rightarrow\quad \frac{y''}{1+(y')^2}=-1 \quad\rightarrow\quad y''+(y')^2+1=0$$

۲- معادله دیفرانسیل همه دوایر در صفحه به شعاع ۱ را بیابید.

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=1 \quad\rightarrow\quad 2(x-c_1)+2y'(y-c_2)=0$$

$$\rightarrow\quad y'=-\frac{x-c_1}{y-c_2} \quad,\quad 1+(y')^2=\frac{1}{(y-c_2)^2}$$

$$\rightarrow\quad y''=\frac{-1}{y-c_2}+\frac{x-c_1}{(y-c_2)^2}y' \rightarrow\quad y''=\pm(1+(y')^2)\sqrt{1+(y')^2}$$

$$\rightarrow\quad (y'')^2=(1+(y')^2)^3$$

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۳- $$(x^2y+xy-y)dx+(x^2y-2x^2)dy=0$$

این معادله یک معادله جدایی پذیر است. $$\frac{x^2+x-1}{x^2}dx=-\frac{y-1}{y}dy$$

$$(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})dx=(-1+\frac{1}{y})dy \quad\rightarrow\quad \int(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})dx=\int(-1+\frac{1}{y})dy$$

$$\rightarrow\quad x+\ln x+\frac{1}{x}=-y+\ln y+c$$

۴- $$y'=\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

این معادله یک معادله همگن است. $$\xrightarrow{y=xu}\quad u+xu'=u-\sqrt{1+u^2}$$

$$x\frac{du}{dx}=-\sqrt{1+u^2} \quad\rightarrow\quad \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{-dx}{x} \quad\rightarrow\quad \int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\int\frac{-dx}{x}$$

پاسخ سری اول تمرینات درس معادلات دیفرانسیل

$$\to \quad \ln(u+\sqrt{1+u^2}) = \ln\frac{c}{x} \quad \to \quad \frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2} = \frac{c}{x}$$

$$\to \quad y+\sqrt{x^2+y^2} = c$$

۵- $$y(x+y+1)dx + x(x+3y+2)dy = 0$$

$$M = y(x+y+1) \ , \quad N = x(x+3y+2)$$
$$M_y = x+2y+1 \ , \ N_x = 2x+3y+2$$
$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{x+y+1}{y(x+y+1)} = \frac{1}{y} \quad \to \quad \mu = e^{\int \frac{1}{y}dy} = y$$

$$y^2(x+y+1)dx + xy(x+3y+2)dy = 0$$
$$f(x,y) = \int y^2(x+y+1)dx = \frac{1}{2}x^2y^2 + xy^3 + xy^2 + h(y)$$
$$f_y = N \quad \to \quad x^2y + 3xy^2 + 2xy + h'(y) = xy(x+3y+2)$$
$$h'(y) = 0 \quad \to \quad h(y) = 0 \quad \to \quad f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + xy^3 + xy^2$$
$$\to \qquad xy^2(x+2y+2) = c$$

۶- $$(x - y\ln y + y\ln x)dx + x(\ln y - \ln x)dy = 0$$

$$M = x - y\ln y + y\ln x \quad , \quad N = x(\ln y - \ln x)$$
$$M_y = -\ln y - 1 + \ln x \quad , \quad N_x = \ln y - \ln x - 1$$
$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2(\ln x - \ln y)}{x(\ln y - \ln x)} = \frac{2}{x} \quad \to \quad \mu = e^{\int \frac{-2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{x - y\ln y + y\ln x}{x^2}dx + \frac{\ln y - \ln x}{x}dy = 0$$
$$f(x,y) = \int \frac{x - y\ln y + y\ln x}{x^2}dx = \ln x + \frac{y\ln y}{x} - \frac{y\ln x}{x} - \frac{y}{x} + h(y)$$

پاسخ سری اول تمرینات درس معادلات دیفرانسیل

$$f_y = N \rightarrow \frac{\ln y}{x} + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + h'(y) = \frac{\ln y - \ln x}{x}$$

$$h'(y) = 0 \quad \rightarrow h(y) = 0 \quad \rightarrow f(x,y) = \ln x + \frac{y}{x}(\ln y - \ln x - 1)$$

$$\rightarrow \qquad \ln x + \frac{y}{x}(\ln y - \ln x - 1) = c$$

۷- $$(\sin^2 x - y)dx - \tan x dy = 0$$

$$M = \sin^2 x - y \quad , \quad N = -\tan x \quad \rightarrow M_y = -1 \quad , \quad N_x = -1 - \tan^2 x$$

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{\tan^2 x}{-\tan x} = -\tan x \quad \rightarrow \quad \mu = e^{\int(-\tan x)dx} = e^{\ln\cos x} \cos x$$

$$\cos x(\sin^2 x - y)dx - \sin x dy = 0$$

$$f(x,y) = \int \cos x(\sin^2 x - y)dx = \frac{1}{3}\sin^3 x - y\sin x + h(y)$$

$$f_y = N \rightarrow -\sin x + h'(y) = -\sin x$$

$$h'(y) = 0 \quad \rightarrow h(y) = 0 \quad \rightarrow f(x,y) = \frac{1}{3}\sin^3 x - y\sin x$$

$$\rightarrow \qquad \sin^3 x - 3y\sin x = c$$

۸- $$xy' + 2y + (\sin x)y^{\frac{1}{2}} = 0$$

این معادله یک معادله برنولی است.

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{2}{x}\sqrt{y} = \frac{-\sin x}{x}$$

$$\xrightarrow{u=\sqrt{y}} 2u' + \frac{2}{x}u = \frac{-\sin x}{x} \quad \rightarrow \quad u' + \frac{1}{x}u = \frac{-\sin x}{2x}$$

$$u = e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(c + \int \frac{-\sin x}{2x} e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right) = \frac{1}{x}\left(c + \int\frac{-\sin x}{2}dx\right)$$

$$u = \sqrt{y} = \frac{1}{x}\left(c + \frac{1}{2}\cos x\right) \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{1}{x^2}\left(c + \frac{1}{2}\cos x\right)^2$$

پاسخ سری اول تمرینات درس معادلات دیفرانسیل

۹- $x^۳ y' \sin y + ۲y = xy'$

اگر x را تابعی از y در نظر بگیریم یک معادله خطی مرتبه اول است.

$$x^۳ \sin y + ۲yx' = x$$

$$\to \quad x' - \frac{۱}{۲y}x = -\frac{x^۳ \sin y}{۲y} \quad \to \quad \frac{x'}{x^۳} - \frac{۱}{۲y} \times \frac{۱}{x^۲} = -\frac{\sin y}{۲y}$$

$$\xrightarrow{u=\frac{۱}{x^۲}} \quad -\frac{u'}{۲} - \frac{۱}{۲y}u = -\frac{\sin y}{۲y} \quad \to \quad u' + \frac{۱}{y}u = \frac{\sin y}{y}$$

$$u = e^{-\int \frac{۱}{y}dy}\left(c + \int \frac{\sin y}{y} e^{\int \frac{۱}{y}dy} dy\right) = \frac{۱}{y}\left(c + \int \sin y\, dy\right)$$

$$u = \frac{۱}{x^۲} = \frac{۱}{y}(c - \cos y) \qquad \to \qquad y = x^۲(c - \cos y)$$

۱۰- برای معادله دیفرانسیل زیر عامل انتگرالسازی به فرم $\mu = x^m y^n$ بیابید.

$$(۴x^۳y^۲ + \frac{۱}{x})dx + (۳x^۴y + \frac{۱}{y})dy = ۰$$

$$M = ۴x^{m+۳}y^{n+۲} + x^{m-۱}y^n \qquad , \qquad N = ۳x^{m+۴}y^{n+۱} + x^m y^{n-۱}$$

$$M_y = ۴(n+۲)x^{m+۳}y^{n+۱} + nx^{m-۱}y^{n-۱} \quad , \quad N_x = ۳(m+۴)x^{m+۳}y^{n+۱} + mx^{m-۱}y^{n-۱}$$

$$M_y = N_x \quad \to \quad ۴(n+۲) = ۳(m+۴)\ , \quad n = m \quad \to \quad m = n = ۴$$

$$(۴x^۷y^۶ + x^۳y^۴)dx + (۳x^۸y^۵ + x^۴y^۳)dy = ۰$$

$$f(x,y) = \int (۴x^۷y^۶ + x^۳y^۴)dx = \frac{۱}{۲}x^۸y^۶ + \frac{۱}{۴}x^۴y^۴ + h(y)$$

$$f_y = N \quad \to \quad ۳x^۸y^۵ + x^۴y^۳ + h'(y) = ۳x^۸y^۵ + x^۴y^۳$$

$$\to \quad h'(y) = ۰ \quad \to \quad h(y) = ۰$$

$$f(x,y) = \frac{۱}{۴}x^۴y^۴(۲x^۴y^۲ + ۱) \qquad \to \qquad x^۴y^۴(۲x^۴y^۲ + ۱) = C$$