کد فرم : FR/FY/11
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **معادلات دیفرانسیل (۱۳ گروه هماهنگ)** نیمسال (اول/ **دوم**) **۹۴**-۱۳۹۳ نام مدرس :

نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۹۴/۳/۲۶** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از هرگونه ماشین حساب ممنوع است.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را حل کنید : **۱۵ نمره**

$$y'' = y'(y'+y)\ ;\ y(۰)=۰\ ,\ y'(۰)=-۱$$

سوال۲- جواب عمومی معادله اویلر $x^۲ y'' + ۴xy' - ۴y = \sqrt{x}$ را بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۳- جواب خصوصی دستگاه معادلات مرتبه اول زیر را به کمک عملگر D بیابید : **۲۰ نمره**

$$\begin{cases} x' = ۲x + y + t\sin t \\ y' = x + ۲y + ۳e^t \end{cases}$$

سوال۴- یک جواب معادله دیفرانسیل $x^۲ y'' + xy' + (x^۲ - ۱)y = ۰$ را حول نقطه $x=۰$ بنویسید. **۲۰ نمره**

سوال۵- معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید : **۱۵ نمره**

$$y'' - ۲y' - ۳y = ۴e^{۳x}\ \ ;\ y(۰)=۱\ ,\ y'(۰)=۴$$

سوال۶- معادله انتگرالی $x(t) + ۴\int_۰^t x(u)(t-u)\,du = e^t$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

سوال۷- محاسبه کنید : الف) $L^{-۱}\{\frac{s\,e^{-۲s}}{s^۲+۱}\}$ ب) $L\{\frac{\sin t}{t}\}$ **۱۵ نمره**

موفق باشید

جواب سوال ۱- این معادله فاقد x است و با تغییر متغیر $u=y'$ و $u\dfrac{du}{dy}=y''$ داریم $u\dfrac{du}{dy}=u(u+y)$

و یا $u'-u=y$ که یک معادله خطی مرتبه اول است. $u=e^{y}(c+\int ye^{-y}dy)=e^{y}(c-ye^{-y}-e^{-y})=ce^{y}-y-۱$

اکنون داریم $y'=ce^{y}-y-۱$ که یک معادله جدایی‌پذیر است زیرا $\dfrac{dy}{ce^{y}-y-۱}=dx$ که ظاهرا حل آن ممکن نیست.

اما به کمک شرایط اولیه داریم : $y'(۰)=ce^{y(۰)}-y(۰)-۱ \;\rightarrow\; -۱=c-۰-۱ \;\rightarrow c=۰$

بنابر این معادله جدایی‌پذیر به صورت $\dfrac{dy}{-y-۱}=dx$ در می‌آید. پس داریم : $-\ln(y+۱)=x+b$

به کمک شرط اولیه $y(۰)=۰$ خواهیم داشت $b=۰$ یعنی $-\ln(y+۱)=x$ و یا : $\boxed{y=e^{-x}-۱}$

جواب سوال ۲- روش اول : ابتدا معادله همگن را حل می‌کنیم. $x^{۲}y''+۴xy'-۴y=۰$

معادله مشخصه آن عبارت است از $r(r-۱)+۴r-۴=۰$ یعنی $r^{۲}+۳r-۴=۰$ که دو ریشه $r_۱=۱$ و $r_۲=-۴$ دارد پس جواب معادله همگن عبارت است از : $y_h=ax+\dfrac{b}{x^{۴}}$

برای استفاده از روش تغییر پارامتر قرار می‌دهیم $y_۱=x$ و $y_۲=\dfrac{۱}{x^{۴}}$ و در نتیجه $w(y_۱,y_۲)=\dfrac{-۵}{x^{۴}}$ و چون $h(x)=\dfrac{۱}{x\sqrt{x}}$ پس جواب خصوصی معادله عبارت است از :

$$y_p=-y_۱\int\frac{y_۲h(x)}{w}dx+y_۲\int\frac{y_۱h(x)}{w}dx=-x\int\frac{\frac{۱}{x^{۴}}\times\frac{۱}{x\sqrt{x}}}{\frac{-۵}{x^{۴}}}dx+\frac{۱}{x^{۴}}\int\frac{x\times\frac{۱}{x\sqrt{x}}}{\frac{-۵}{x^{۴}}}dx$$

$$=\frac{x}{۵}\int\frac{۱}{x\sqrt{x}}dx-\frac{۱}{۵x^{۴}}\int x^{۳}\sqrt{x}dx=\frac{x}{۵}(\frac{-۲}{\sqrt{x}})-\frac{۱}{۵x^{۴}}(\frac{۲}{۹}x^{۴}\sqrt{x})=\frac{-۲\sqrt{x}}{۵}-\frac{۲\sqrt{x}}{۴۵}=-\frac{۲۰\sqrt{x}}{۴۵}=-\frac{۴}{۹}\sqrt{x}$$

و جواب عمومی معادله عبارت است از : $\boxed{y_g=ax+\dfrac{b}{x^{۴}}-\dfrac{۴}{۹}\sqrt{x}}$

<u>روش دوم</u> : در معادله اویلر داده شده تغییر متغیر $x=e^{t}$ را اعمال می‌کنیم. یعنی قرار می‌دهیم : $xy'=\dfrac{dy}{dt}\,,\; x^{۲}y''=\dfrac{d^{۲}y}{dt^{۲}}-\dfrac{dy}{dt}$

$$x^{۲}y''+۴xy'-۴y=\sqrt{x} \;\rightarrow\; \frac{d^{۲}y}{dt^{۲}}-\frac{dy}{dt}+\frac{dy}{dt}-y=\sqrt{e^{t}} \;\rightarrow\; y''+۳y'-۴y=e^{\frac{t}{۲}}$$

این یک معادله غیر همگن با ضرایب ثابت است. معادله مشخصه معادله همگن نظیر آن عبارت است از $m^{۲}+۳m-۴=۰$

که دو ریشه $m_۱=۱$ و $m_۲=-۴$ دارد. جواب معادله همگن عبارت است از : $y_h=ae^{t}+be^{-۴t}$

برای استفاده از روش تغییر پارامتر قرار می‌دهیم. $y_۱=e^{t}$ و $y_۲=e^{-۴t}$ و در نتیجه $w(y_۱,y_۲)=-۵e^{-۳t}$

و چون $h(t)=e^{\frac{t}{۲}}$ جواب خصوصی معادله عبارت است از :

$$y_p=-y_۱\int\frac{y_۲h(t)}{w}dt+y_۲\int\frac{y_۱h(t)}{w}dt=-e^{t}\int\frac{e^{-۴t}e^{\frac{t}{۲}}}{-۵e^{-۳t}}dt+e^{-۴t}\int\frac{e^{t}e^{\frac{t}{۲}}}{-۵e^{-۳t}}dt$$

$$=\frac{e^{t}}{۵}\int e^{-\frac{t}{۲}}dt-\frac{e^{-۴t}}{۵}\int e^{\frac{۹t}{۲}}dt=\frac{e^{t}}{۵}(-۲e^{-\frac{t}{۲}})-\frac{e^{-۴t}}{۵}(\frac{۲}{۹}e^{\frac{۹t}{۲}})=\frac{-۲}{۵}e^{\frac{t}{۲}}-\frac{۲}{۴۵}e^{\frac{t}{۲}}=\frac{-۴}{۹}e^{\frac{t}{۲}}$$

پس جواب عمومی معادله غیر همگن با ضرایب ثابت عبارت است از : $y_g=ae^{t}+be^{-۴t}-\dfrac{۴}{۹}e^{\frac{t}{۲}}$

و چون $x=e^{t}$ جواب معادله اویلر داده شده برابر است با : $\boxed{y_g=ax+\dfrac{b}{x^{۴}}-\dfrac{۴}{۹}\sqrt{x}}$

توجه : جواب خصوصی معادله $y''+3y'-4y=e^{\frac{t}{2}}$ را به کمک روش ضرایب نامعین و یا روش عملگر D هم می توان پیدا کرد.

$$y_p=\frac{1}{D^2+3D-4}e^{\frac{t}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-4}e^{\frac{t}{2}}=-\frac{4}{9}e^{\frac{t}{2}}$$

جواب سوال ۳-

$$\begin{cases}Dx=2x+y+t\sin t\\ Dy=x+2y+3e^t\end{cases}\rightarrow\ (D-2)\begin{cases}(D-2)x-y=t\sin t\\ -x+(D-2)y=3e^t\end{cases}\rightarrow\ (D^2-4D+3)y=t\sin t-3e^t$$

$$y_p=\frac{1}{D^2-4D+3}(t\sin t-3e^t)\quad\rightarrow\quad y_p=\frac{1}{D^2-4D+3}(t\sin t)+\frac{-3}{D^2-4D+3}e^t$$

هر قسمت را جداگانه محاسبه می کنیم :

$$y_{p_1}=\frac{1}{D^2-4D+3}(t\sin t)=t\frac{1}{D^2-4D+3}(\sin t)-\frac{2D-4}{(D^2-4D+3)^2}(\sin t)$$

$$=t\frac{1}{(-1)-4D+3}(\sin t)-\frac{2D-4}{((-1)-4D+3)^2}(\sin t)=t\frac{1}{2(1-2D)}(\sin t)-\frac{2D-4}{4(1-2D)^2}(\sin t)$$

$$=t\frac{(1-2D)}{2(1-4D+4D^2)}(\sin t)-\frac{2D-4}{4(1-4D+4D^2)}(\sin t)=t\frac{(1-2D)}{2(1-4D+4(-1))}(\sin t)-\frac{2D-4}{4(1-4D+4(-1))}(\sin t)$$

$$=t\frac{(1-2D)}{-2(3+4D)}(\sin t)-\frac{2D-4}{-4(3+4D)}(\sin t)=t\frac{(1-2D)(3-4D)}{-2(3+4D)(3-4D)}(\sin t)+\frac{(2D-4)(3-4D)}{4(3+4D)(3-4D)}(\sin t)$$

$$=t\frac{8D^2-10D+3}{-2(9-16D^2)}(\sin t)+\frac{-8D^2+22D-12}{4(9-16D^2)}(\sin t)=t\frac{8(-1)-10D+3}{-2(9-16(-1))}(\sin t)+\frac{-8(-1)+22D-12}{4(9-16(-1))}(\sin t)$$

$$=t\frac{-10D-5}{-50}(\sin t)+\frac{22D-4}{100}(\sin t)\quad\rightarrow\quad y_{p_1}=\frac{t}{10}(\sin t+2\cos t)+\frac{1}{50}(-2\sin t+11\cos t)$$

برای محاسبه $y_{p_1}=\frac{1}{D^2-4D+3}(t\sin t)$ می توانستیم از اعداد مختلط کمک هم بگیریم :

$$y_{p_1}=\frac{1}{D^2-4D+3}(t\sin t)=\frac{1}{D^2-4D+3}\mathrm{Im}(te^{it})=\mathrm{Im}(\frac{1}{D^2-4D+3}(te^{it}))$$

$$=\mathrm{Im}(e^{it}\frac{1}{(D+i)^2-4(D+i)+3}(t))=\mathrm{Im}(e^{it}\frac{1}{D^2+(2i-4)D+(2-4i)}(t))$$

$$=\mathrm{Im}(e^{it}(\frac{2+4i}{20}+\frac{-2+11i}{50}D+\cdots)(t))=\mathrm{Im}(e^{it}(\frac{1+2i}{10}t+\frac{-2+11i}{50}))$$

$$=\mathrm{Im}((\cos t+i\sin t)[(\frac{1}{10}t-\frac{2}{50})+(\frac{2}{10}t+\frac{11}{50})i])=(\frac{1}{10}t-\frac{2}{50})\sin t+(\frac{2}{10}t+\frac{11}{50})\cos t$$

$$\rightarrow\quad y_{p_1}=\frac{t}{10}(\sin t+2\cos t)-\frac{1}{50}(2\sin t-11\cos t)$$

$$y_{p_2}=\frac{-3}{D^2-4D+3}e^t=-3e^t\frac{1}{(D+1)^2-4(D+1)+3}(1)=-3e^t\frac{1}{D^2-2D}(1)$$

$$=-3e^t\frac{1}{D(D-2)}(1)=-3e^t\frac{1}{D}(-\frac{1}{2}-\frac{D}{4}-\cdots)(1)=-3e^t\frac{1}{D}(\frac{-1}{2})\qquad\rightarrow\qquad y_{p_2}=\frac{3te^t}{2}$$

اکنون داریم :

$$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}=\frac{t}{10}(\sin t+2\cos t)-\frac{1}{50}(2\sin t-11\cos t)+\frac{3te^t}{2}$$

از معادله دوم دستگاه داریم $x=y'-2y-3e^t$ و چون

$$y'=\frac{t}{10}(-2\sin t+\cos t)+\frac{1}{50}(-6\sin t+8\cos t)+\frac{3(t+1)e^t}{2}$$

خواهیم داشت :

$$\boxed{\begin{cases} x_p = -\dfrac{t}{۱۰}(۴\sin t + ۳\cos t) - \dfrac{۱}{۲۵}(\sin t + ۷\cos t) - \dfrac{۳(t+۱)e^t}{۲} \\ y_p = \dfrac{t}{۱۰}(\sin t + ۲\cos t) - \dfrac{۱}{۵۰}(۲\sin t - ۱۱\cos t) + \dfrac{۳te^t}{۲} \end{cases}}$$

جواب سوال۴- $x=۰$ یک نقطه تکین منظم معادله است زیرا داریم : $p(x)=\dfrac{۱}{x}\,,\ q(x)=\dfrac{x^۲-۱}{x^۲}$

p و q در $x=۰$ حد ندارند اما $\lim\limits_{x\to ۰} xp(x)=۱\,,\ \lim\limits_{x\to ۰} x^۲q(x)=-۱$

معادله مشخصه عبارت است از $r(r-۱)+r-۱=۰$ که دارای دو ریشه $r_۱=۱$ و $r_۲=-۱$ است.

این معادله یک ریشه به صورت سری فروبنیوس حول نقطه $x=۰$ و به ازای ریشه بزرگتر دارد. $y_۱ = x\sum\limits_{n=۰}^{\infty} a_n x^n\ ,\ a_۰ \neq ۰$

این جواب را در معادله قرار می دهیم.

$$x^۲\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)na_n x^{n-۱} + x\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)a_n x^n + (x^۲-۱)\sum_{n=۰}^{\infty}a_n x^{n+۱} = ۰$$

$$\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)na_n x^{n+۱} + \sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)a_n x^{n+۱} + \sum_{n=۰}^{\infty}a_n x^{n+۳} - \sum_{n=۰}^{\infty}a_n x^{n+۱} = ۰$$

$$\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۲)na_n x^{n+۱} + \sum_{n=۲}^{\infty}a_{n-۲}x^{n+۱} = ۰ \ \to\ ۳a_۱x^۲ + \sum_{n=۲}^{\infty}[(n+۲)na_n + a_{n-۲}]x^{n+۱} = ۰$$

$$a_۱=۰\ ,\ (n+۲)na_n + a_{n-۲}=۰\ ,\ n=۲,۳,۴,\cdots \ \to\ a_n = \frac{-a_{n-۲}}{(n+۲)n}\ ,\ n=۲,۳,۴,\cdots$$

$$۰=a_۱=a_۳=a_۵=\cdots \quad , \quad a_۲=\frac{-a_۰}{۴\times ۲}\,,\ a_۴=\frac{-a_۲}{۶\times ۴}=\frac{a_۰}{۲^۶\times ۳}\ ,\ a_۶=\frac{-a_۴}{۸\times ۶}=\frac{-a_۰}{۲^{۱۰}\times ۳^۲}$$

$$\boxed{y_۱ = a_۰\left(x - \frac{۱}{۸}x^۳ + \frac{۱}{۱۹۲}x^۵ - \frac{۱}{۹۲۱۶}x^۷ + \cdots\right)}$$

در این مساله می توان ضابطه جمله عمومی a_n را نیز به دست آورد. برای هر $n=۰,۱,۲,\ldots$ داریم $a_{۲n+۱}=۰$ و

$$a_{۲n} = \frac{-۱}{(۲n+۲)(۲n)}\times\frac{-۱}{۲n(۲n-۲)}\times\frac{-۱}{(۲n-۲)(۲n-۴)}\times\cdots\times\frac{-۱}{۶\times ۴}\times\frac{-۱}{۴\times ۲}a_۰ = \frac{(-۱)^n}{۲^{۲n}(n+۱)!\,n!}a_۰$$

اگر $a_۰=۱$ انگاه یک جواب معادله عبارت است از : $y_۱ = x\sum\limits_{n=۰}^{\infty}\dfrac{(۱)^n}{۲^{۲n}(n+۱)!\,n!}x^{۲n} = x\sum\limits_{n=۰}^{\infty}\dfrac{(۱)^n}{(n+۱)!\,n!}\left(\dfrac{x}{۲}\right)^{۲n}$

جواب سوال۵-

$$L\{y''-۲y'-۳y\}=L\{۴e^{۳x}\} \ \to\ L\{y''\}-۲L\{y'\}-۳L\{y\}=۴L\{e^{۳x}\}$$

$$s^۲L\{y\}-s-۴-۲sL\{y\}+۲-۳L\{y\}=\frac{۴}{s-۳} \ \to\ (s^۲-۲s-۳)L\{y\}=\frac{۴}{s-۳}+s+۲=\frac{s^۲-s-۲}{s-۳}$$

$$L\{y\}=\frac{s^۲-s-۲}{(s-۳)(s^۲-۲s-۳)} \ \to\ L\{y\}=\frac{(s+۱)(s-۲)}{(s+۱)(s-۳)^۲}=\frac{s-۲}{(s-۳)^۲}=\frac{۱}{s-۳}+\frac{۱}{(s-۳)^۲}=\frac{۱}{s-۳}-\left(\frac{۱}{s-۳}\right)'$$

$$L\{y\}=L\{e^{۳x}\}-L'\{e^{۳x}\}=L\{e^{۳x}+xe^{۳x}\} \quad \to \quad \boxed{y=(۱+x)e^{۳x}}$$

جواب سوال۶- روش اول : به کمک تبدیلات لاپلاس داریم : $L\{x(t)\}+4L\{\int_0^t x(u)(t-u)du\}=L\{e^t\}$

$$L\{x\}+4L\{x\}L\{t\}=L\{e^t\} \quad \to \quad L\{x\}(1+\frac{4}{s^2})=\frac{1}{s-1}$$

$$L\{x\}=\frac{s^2}{(s-1)(s^2+4)}=\frac{1}{5}(\frac{1}{s-1}+\frac{4s+4}{s^2+4}) \to \boxed{x(t)=\frac{1}{5}(e^t+4\cos 2t+2\sin 2t)}$$

روش دوم : از طرفین معادله مشتق می گیریم : $x'(t)+4\int_0^t x(u)du=e^t$

اکنون داریم $x'(0)=1$ از طرفین این معادله هم مشتق می گیریم. یک معادله مرتبه دوم با شرایط اولیه داریم :

$$x''(t)+4x(t)=e^t \ ; \ \ x(0)=x'(0)=1$$

جواب همگن این معادله عبارت است از : $x_h=A\sin 2t+B\cos 2t$

جواب خصوصی آن به کمک روش ضرایب نامعین به دست می آید. $x_p=\frac{1}{5}e^t$

اکنون داریم $x_g=A\sin 2t+B\cos 2t+\frac{1}{5}e^t$ با توجه به شرایط اولیه پارامترهای A و B محاسبه می شوند :

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{5}(2\sin 2t+4\cos 2t+e^t)}$$

جواب سوال۷- الف) $L^{-1}\{\frac{s\,e^{-2s}}{s^2+1}\}=L^{-1}\{L\{u_2(t)\cos(t-2)\}\}=u_2(t)\cos(t-2)=\begin{cases}0 & t<2\\ \cos(t-2) & 2\le t\end{cases}$

ب) $L\{\frac{\sin t}{t}\}=\int_s^\infty L\{\sin t\}ds=\int_s^\infty \frac{1}{1+s^2}ds=\arctan s\,|_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\arctan s$

۱۳۹۴/۳/۲۶