

حل تمرین های سری اول درس آمار و احتمال مهندسی - بحث آمار توصیفی

۶ - داده های از نوع پیوسته و با دقت $p = -1.1$ ثبت شده اند. برای تشکیل جدول فراوانی ابتدا تعداد رده ها را با بازه آنها را تعیین می کنیم :

الف - تعداد داده های جدول $n = 80$ است و از دستور استورکس تعداد رده ها را بدست می آوریم :

$$K = \lceil 1 + \sqrt[4]{80} \rceil = \lceil 7.128 \rceil = 8$$

ب - کمترین و بیشترین داده ثبت شده در جدول را می یابیم : $\min = 1,20$ $\max = 12,80$

حال طول بازه رده ها را محاسبه می کنیم :

$$w = \left\lceil \frac{\max - \min + p}{K} \right\rceil_p = \left\lceil \frac{12,80 + (-1.1) - 1,20}{8} \right\rceil_{-1.1} = \left\lceil 1,45125 \right\rceil_{-1.1} = 1,46$$

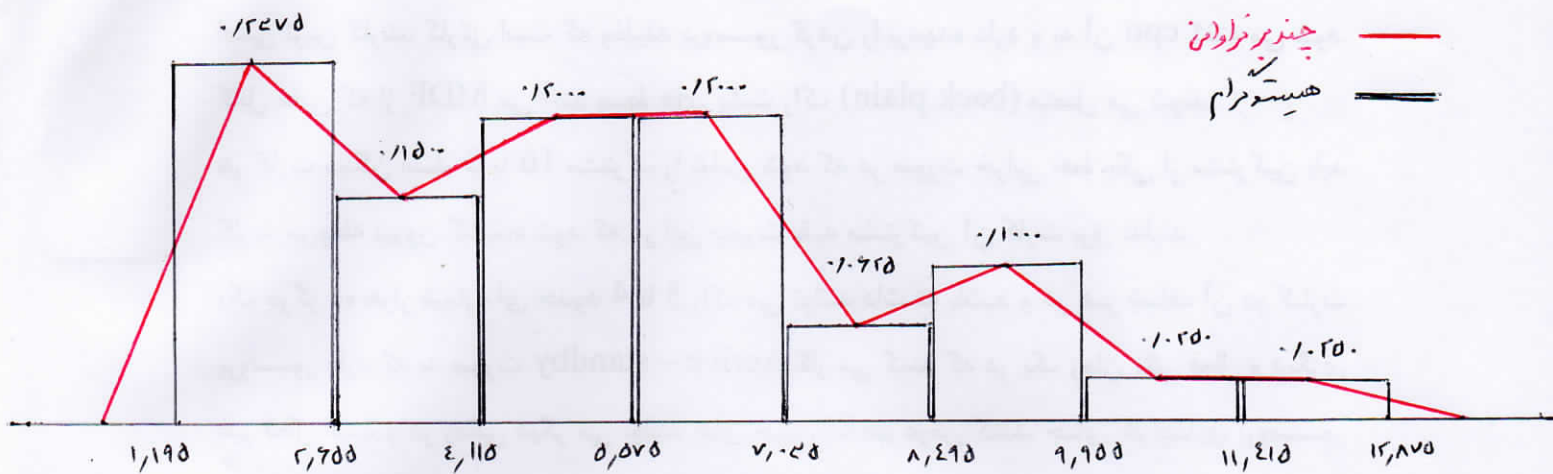
ج - محدوده رده ها را بدست می آوریم : $L_1 = \min - \frac{p}{r} + (j-1)w = 1,20 - \frac{-1.1}{r} + (1-1)w = 1,195$

شماره رده	حد پایین	حد بالا	حد بالا + حد پایین = میانگین
۱	۱,۱۹۵	۲,۶۵۵	۱,۹۲۵
۲	۲,۶۵۵	۴,۱۱۵	۳,۳۸۵
۳	۴,۱۱۵	۵,۵۷۵	۴,۸۴۵
۴	۵,۵۷۵	۷,۰۳۵	۶,۳۰۵
۵	۷,۰۳۵	۸,۴۹۵	۷,۷۶۵
۶	۸,۴۹۵	۹,۹۵۵	۹,۲۲۵
۷	۹,۹۵۵	۱۱,۴۱۵	۱۰,۶۸۵
۸	۱۱,۴۱۵	۱۲,۸۷۵	۱۲,۱۴۵

د - با توجه به رده های بدست آمده جدول فراوانی را بصورت زیر می نویسیم :

رده ها	خود نشان	میانگین	فراوانی	فراوانی نسبی	فراوانی نسبی جمع	فراوانی نسبی جمع
۱,۱۹۵ - ۲,۶۵۵		۱,۹۲۵	۱۹	۰.۲۳۷۵	۱۹	۰.۲۳۷۵
۲,۶۵۵ - ۴,۱۱۵		۳,۳۸۵	۱۲	۰.۱۵۰۰	۳۱	۰.۳۸۷۵
۴,۱۱۵ - ۵,۵۷۵		۴,۸۴۵	۱۶	۰.۲۰۰۰	۴۷	۰.۵۸۷۵
۵,۵۷۵ - ۷,۰۳۵		۶,۳۰۵	۱۶	۰.۲۰۰۰	۶۳	۰.۷۸۷۵
۷,۰۳۵ - ۸,۴۹۵		۷,۷۶۵	۵	۰.۰۶۲۵	۶۸	۰.۸۵۰۰
۸,۴۹۵ - ۹,۹۵۵		۹,۲۲۵	۸	۰.۰۱۰۰	۷۶	۰.۹۵۰۰
۹,۹۵۵ - ۱۱,۴۱۵		۱۰,۶۸۵	۲	۰.۰۲۵۰	۷۸	۰.۹۷۵۰
۱۱,۴۱۵ - ۱۲,۸۷۵		۱۲,۱۴۵	۲	۰.۰۲۵۰	۸۰	۱
جمع			۸۰	۱		

۶ - قیمت ب (هیستوگرام و چندبر فراوانی



۷ - تعداد رده $k = \left\lceil 1 + 4.22 \log_{10} 1500 \right\rceil = \left\lceil 11.227 \right\rceil = 12$ تعداد داده $n = 1500$

$\min = 1.18$ $\max = 11.9$ $p = 0.1$ $w = \left\lceil \frac{\max - \min + p}{k} \right\rceil_p = \left\lceil \frac{11.9 - 1.18 + 0.1}{12} \right\rceil_{0.1} = \left\lceil 0.91 \right\rceil_{0.1} = 1$

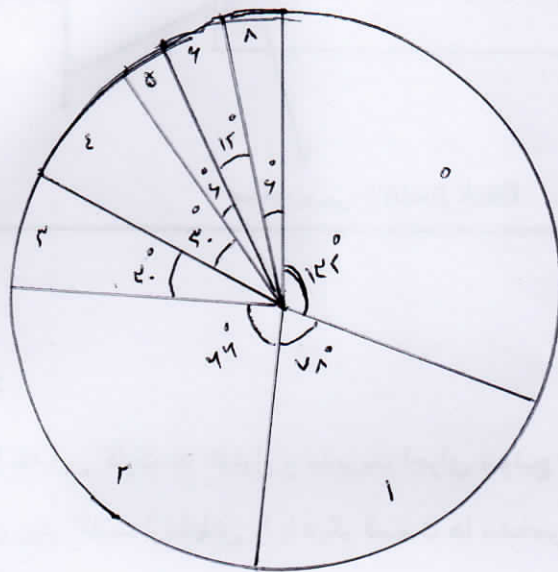
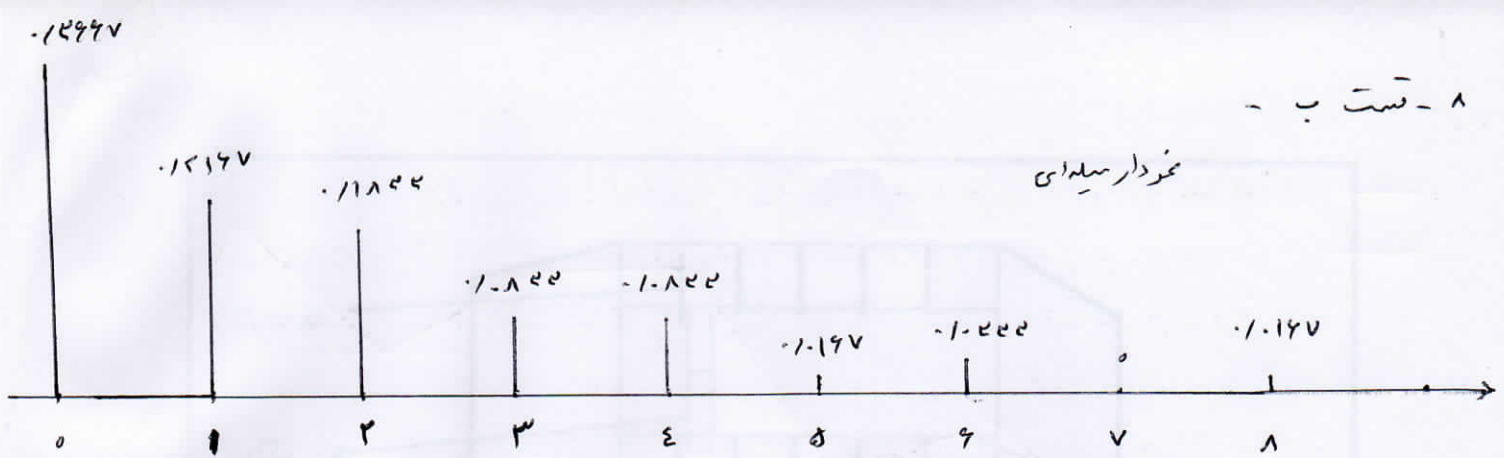
۸ - الف - داده که گسسته هستند و تعداد ترف k قیمتی عددی است و نیاز می به کرد گذاری نداریم - جدول فراوانی بصورت زیر تشکیل می شود:

دسته بندی	فراوانی	فراوانی نسبی	فراوانی تجمعی	فراوانی تجمعی نسبی
۰	۲۲	۰.۱۴۶۶۷	۲۲	۰.۱۴۶۶۷
۱	۱۳	۰.۱۲۱۶۷	۳۵	۰.۱۵۸۳۳
۲	۱۱	۰.۱۱۸۳۳	۴۶	۰.۱۷۶۶۷
۳	۵	۰.۱۰۸۳۳	۵۱	۰.۱۸۵۰۰
۴	۵	۰.۱۰۸۳۳	۵۶	۰.۱۹۳۳۳
۵	۱	۰.۱۰۱۶۷	۵۷	۰.۱۹۵۰۰
۶	۲	۰.۱۰۳۳۳	۵۹	۰.۱۹۸۳۳
۷	۰	۰.۱۰۰۰۰	۵۹	۰.۱۹۸۳۳
۸	۱	۰.۱۰۱۶۷	۶۰	۱.۰۰۰۰۰
جمع	۶۰	۱		

ب - رسم نمودار که در صفحه بعد آورده شده است.

ج - با مراجعه به جدول فراوانی، فراوانی تجمعی برای ۳، ۰.۱۸۵۰۰ است یعنی نسبت ترف k بیش از سه بار ۱-۰.۱۸۵۰۰ خواهد بود.

۸ - تست ب -



مقدار دایره ای

۹ - الف - محاسب میانگین

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k f_i \cdot x_i$$

$$\bar{x} = \frac{1}{6} (0 \times 1 + 1 \times 12 + 2 \times 5 + 2 \times 4 + 2 \times 2 + 5 \times 2 + 6 \times 2) = \frac{70}{6} = 11.667$$

محاسب میانگین باید داده ۳ و ۴ را در داده های مرتب شده از کوچک به بزرگ بیدانیم:

۲۱ داده نخست صفر و ۱۵ تا ی بعدی ۱ هستند بنابراین داده شماره ۳۶ هر دو یک است و داریم:

$$m = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

محاسبه نمائید: با مراجعه به جدول مشاهده شد که داده ضربه بیشترین فراوانی را دارد، لذا $M=0$

ب - محاسبه واریانس

$$\sum f_i x_i = 70$$

از تست الف

$$\sum f_i x_i^2 = 0^2 \times 1 + 1^2 \times 12 + 2^2 \times 5 + 2^2 \times 4 + 2^2 \times 2 + 5^2 \times 2 + 6^2 \times 2 = 248$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum f_i x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum f_i x_i \right)^2 \right] = \frac{1}{59} \left[248 - \frac{1}{6} \times 70^2 \right] = 2.192$$

صفت

محاسبه انحراف معیار

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2,8192} = 1,679$$

۱۴ - داده که از توزیع پیوسته و با دقت $p = 0.1 \dots 1$ ثبت شده اند. تعداد داده $n = 50$

تقسیم تعداد داده به بازه رده $K = \left\lceil 1 + 2,22 \log_{10} 50 \right\rceil = \left\lceil 4,27 \right\rceil = 7$ تعداد رده

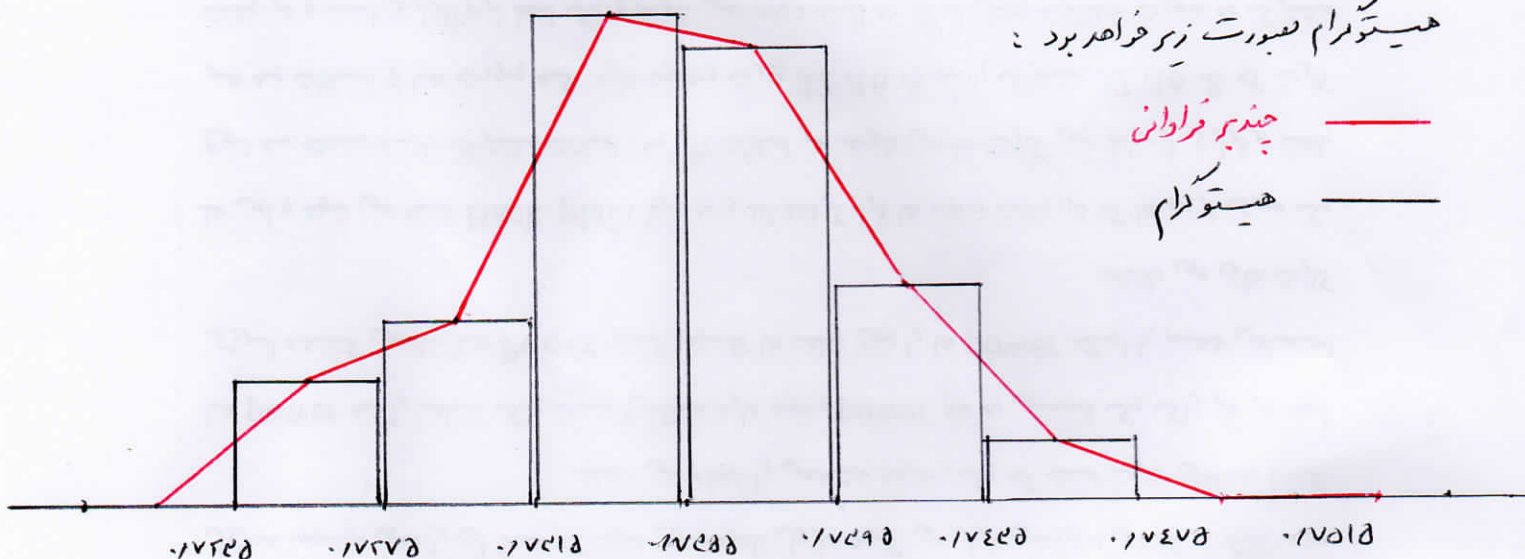
$$\max = 0,1748 \quad \min = 0,1724 \quad w = \left\lceil \frac{\max - \min + p}{K} \right\rceil_p = \left\lceil \frac{0,1748 - 0,1724 + 0,1 \dots 1}{7} \right\rceil_{0,1 \dots 1} = 0,1 \dots 8$$

$$L_1 = \min - \frac{p}{r} = 0,1724 - 0,1 \dots 8 = 0,1725$$

جدول فراوانی بصورت زیر خواهد بود :

رده	خط نشان	نماینده	فراوانی	فراوانی نسبی	فراوانی تجمعی	فراوانی تجمعی نسبی
$0,1725 - 0,1728$		$0,1725$	4	0,08	4	0,08
$0,1728 - 0,1731$		$0,1729$	5	0,12	9	0,18
$0,1731 - 0,1734$		$0,1732$	16	0,32	25	0,50
$0,1734 - 0,1737$		$0,1735$	15	0,30	40	0,80
$0,1737 - 0,1740$		$0,1738$	7	0,14	47	0,94
$0,1740 - 0,1743$		$0,1741$	2	0,04	49	0,98
$0,1743 - 0,1746$		$0,1744$	0	0	49	1,00
			50	1		

هیستوگرام بصورت زیر خواهد بود :



چندبر فراوانی
هیستوگرام

ب - محاسبه میانگین

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i f_i = \frac{1}{50} (0,1725 \times 4 + 0,1729 \times 5 + 0,1732 \times 16 + 0,1735 \times 15 + 0,1738 \times 7 + 0,1741 \times 2 + 0,1744 \times 0)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{50} (89,79) = 0,17558$$

محاسبه میانگین : با رجوع به جدول فراوانی رده سوم یعنی رده با بازه $0,1731 - 0,1734$ و نماینده $0,1732$ رده

$$f_{15} = 16 \quad g_{15} = 0,32 \quad L_{15} = 0,1731$$

در نتیجه میانگین معیاری زیر محاسبه خواهد شد:

$$m = L_{10} + \frac{(.10n - g_{10})}{f_{10}} w = .17418 + \frac{20 - 10}{19} \times .1004 = \underline{.174525}$$

محاسبه m : با مراجعه به جدول فراوانی، رده‌ها یعنی رده‌ای با بیشترین فراوانی رده سوم است، لذا داریم:

$$L_m = .17418 \quad D_1 = .142 - .115 = .12 \quad D_2 = .142 - .12 = .12$$

$$M = L_m + \frac{D_1}{D_1 + D_2} w = .17418 + \frac{.12}{.12 + .12} \times .1004 = \underline{.1745124}$$

محاسبه واریانس و انحراف معیار

از روش تبدیل داده استفاده می‌کنیم:

$$a = \text{میانبر رده} = .1745 \quad b = .1004$$

x_i	f_i	$y_i = \frac{x_i - .1745}{.1004}$	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
.17455	4	-2	-8	16
.17498	6	-1	-6	6
.17428	16	0	0	0
.17475	18	1	18	18
.17415	7	2	14	28
.17455	2	3	6	18
.17498	0	4	0	0
جمع.	50		21	86

$$s_y^2 = \frac{1}{49} \left[86 - \frac{1}{50} (21)^2 \right] = 1.5149 \rightarrow s_y = 1.2308$$

$$s_x = b s_y = .1004 \times 1.2308 = \underline{.1236}$$

ج. بازه $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ محاسبه است یا $(.174582 - .1236, .174582 + .1236)$

یا $(.174582, .174582)$ می‌شود که با سهم‌های داده‌های که در این بازه قرار می‌گیرند عدد

$n = 45$ بدست می‌آید. یعنی ۴۵ درصد داده‌ها در بازه شعاعی انحراف معیار قرار دارند.

بازه $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ محاسبه است یا $(.174582 - 2 \times .1236, .174582 + 2 \times .1236)$

یا $(.174582, .174582)$ می‌شود که با سهم‌های داده‌های که در این بازه قرار می‌گیرند عدد $n = 49$

بدست می‌آید یعنی ۹۸ درصد داده‌ها در بازه دوبرابر شعاع انحراف معیار مقدار میانگین قرار دارند.

۱۷ - با توجه به طول رده ۵ که از تقاطع حد بالا و پایین رده یک یا رده دو به دست می آید، سایر رده ها را در جدول اضافه کرده طول رده به حد بالا و پایین رده قبلی به دست می آوریم و نماینده هر رده را با گرفتن میانگین حد بالا و پایین می بینیم. برای رده یک فراوانی نسبی ۰.۱۰۶ داده شده که با ضرب آن در ۵۰ تعداد داده که فراوانی آن برابر ۵۲ حاصل می شود. فراوانی تجربی رده یک در ترتیب ۲، ۱۰ خواهد بود. باکم کردن فراوانی تجربی رده سوم از رده دوم ۱۹-۱۰=۹ فراوانی نسبی رده سوم به دست می آید. فراوانی که تجربی رده ای یک تا سه به ترتیب ۰.۱۰۶، ۰.۱۲ و ۰.۲۸ خواهد بود. باکم کردن فراوانی تجربی رده چهارم از رده سوم فراوانی نسبی رده چهارم ۰.۱۲۶ و فراوانی آن ۱۴=۰.۱۲۶x۵۰ و فراوانی تجربی آن ۲۴ به دست می آید. با مشخص بودن فراوانی نسبی رده پنجم فراوانی فراوانی تجربی و فراوانی نسبی آن به ترتیب ۰.۱۱۶x۵۰=۵۸، ۰.۱۸+۰.۲۴=۰.۴۲ به دست می آید. برای رده ششم فراوانی تجربی ۴۶ است که باکم کردن آن از فراوانی تجربی رده قبلی فراوانی این رده ۶=۴۶-۴۰ به دست می آید و فراوانی نسبی ۰.۱۱۲=۰.۰۶/۵ و فراوانی تجربی نسبی ۰.۱۱۲=۰.۰۶/۵ خواهند بود. برای رده ششم فراوانی را باکم کردن تعداد کل داده ها از فراوانی تجربی رده قبلی یعنی ۴۶ به دست می آوریم که ۴=۵۰-۴۶ خواهد بود و فراوانی نسبی ۰.۰۸=۴/۵ و فراوانی نسبی ۰.۱۰۸=۰.۰۸/۵ خواهند بود.

رده	x_i	f_i	r_i	g_i	s_i
۲۵.۵-۳۰.۵	۲۷	۴	۰.۱۰۶	۴	۰.۱۰۶
۳۵.۵-۴۰.۵	۳۸	۷	۰.۱۱۴	۱۰	۰.۱۲۰
۴۰.۵-۴۵.۵	۴۲	۹	۰.۱۲۸	۱۹	۰.۱۴۱
۴۵.۵-۵۰.۵	۴۸	۱۴	۰.۱۳۶	۳۳	۰.۱۹۴
۵۰.۵-۵۵.۵	۵۲	۸	۰.۱۱۶	۴۰	۰.۲۱۰
۵۵.۵-۶۰.۵	۵۸	۶	۰.۱۱۲	۴۶	۰.۲۹۲
۶۰.۵-۶۵.۵	۶۲	۴	۰.۱۰۸	۵۰	۱.۰۰۰
Σ		۵۰	۱.۰۰۰		

ب - محاسب میانگین $\bar{x} = \frac{1}{50} (44 \times 2 + 38 \times 7 + 42 \times 9 + 48 \times 14 + 52 \times 8 + 58 \times 6 + 62 \times 4) = 47.8$

محاسب میانگین به جدول رده چهارم خواهد بود که داریم $L_{-10} = 45.5, g_{-10} = 19, f_{-10} = 14$

$$m = L_{-10} + \frac{10n - g_{-10}}{f_{-10}} w = 45.5 + \frac{(25 - 19) \times 5}{14} = 47.8$$

محاسب نما : با مراجعه به جدول رده چهارم خواهد بود داریم $L_M = 45.5, D_1 = 0.126 - 0.118 = 0.008$

$$D_2 = 0.126 - 0.116 = 0.01, M = L_M + \frac{D_1}{D_1 + D_2} w = 45.5 + \frac{0.008}{0.01 + 0.008} \times 5 = 47.72$$

محاسبه واریانس و انحراف معیار : از روش تبدیل داده استفاده می‌کنیم :

x_i	f_i	$y_i = \frac{x_i - \bar{x}}{h}$	$f_i \cdot y_i$	$f_i \cdot y_i^2$
۴۴	۲	-۲	-۴	۸
۴۸	۷	-۲	-۱۴	۲۸
۵۲	۹	-۱	-۹	۹
۵۸	۱۲	۰	۰	۰
۶۲	۸	۱	۸	۸
۶۸	۶	۲	۱۲	۲۴
۷۲	۴	۳	۱۲	۳۶
جمع	۵۰		۰	۱۴۴

$$S_y^2 = \frac{1}{n} \left[144 - \frac{1}{n} (0)^2 \right] = 2,88 \rightarrow S_y = \sqrt{S_y^2} = 1,697$$

$$S_x = h S_y = 5 \times 1,697 = 8,485 \text{ kg}$$

انحراف استاندارد

✓