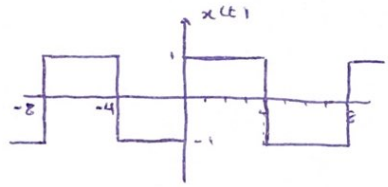
یا لطیف

تمرین سری ۶ سیگنال سیستم.

① یک سیستم LTI پیوسته زمان با پاسخ فرکانسی زیر را درنظر بگیرید. ورودی این سیستم، سیگنال متناوب x(t) با دوره تناوب $T=8$ است. ضرایب سری فوریه خروجی را محاسبه نمایید.

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,dt=\frac{\sin(4\omega)}{\omega}$$

$$x(t)=\begin{cases}1 & ; \ 0\le t<4\\ -1 & ; \ 4\le t<8\end{cases}$$



x(t) is Real and odd $\Rightarrow a_k$ is purely imaginary and odd $\Rightarrow a_0=0$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{8}\int_0^8 x(t)e^{-jk(\frac{2\pi}{8})t}dt=\frac{1}{8}\int_0^4 1\cdot e^{-jk(\frac{\pi}{4})t}dt-\frac{1}{8}\int_4^8 1\cdot e^{-jk(\frac{\pi}{4})t}dt$$

$$=\frac{1}{j\pi k}\cdot\left[1-e^{-j\pi k}\right] \Rightarrow a_k=\begin{cases}0 & ; \text{ for } k=\text{even}\\ \frac{2}{j\pi k} & ; \text{ for } k=\text{odd}\end{cases}$$

$$\text{if } T \text{ is LTI}: \ y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow \begin{cases}\omega_0=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}\\ H(jk\omega_0)=H(jk(\frac{\pi}{4}))=\frac{\sin(k\pi)}{k\frac{\pi}{4}}\end{cases}$$

فقط ضرایب فرد غیرصفر است

به ازای ضرایب K=odd، صفر است

پس: $\boxed{y(t)=0}$

② قطار ضربه $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-4k]$ ورودی یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ است و خروجی سیستم $y[n]=\cos(\frac{5\pi}{2}n+\frac{\pi}{4})$ می‌باشد. مقادیر $H(e^{jk\frac{\pi}{2}})$ را به ازای $k=0,1,2,3$ بدست آورید.

x[n] Periodic with N=4

$$a_k=\frac{1}{T}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

$$y[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k H(e^{jk(\frac{2\pi}{N_0})})e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}=\sum_{k=0}^{3} a_k H(e^{j(\frac{2\pi}{4})k})e^{j(\frac{2\pi}{4})nk}=\underbrace{\frac{1}{4}H(e^{j0})e^{j0}}_{\text{if } k=0}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{4}H(e^{j\frac{\pi}{2}})e^{j\frac{\pi}{2}}}_{\text{if } k=1}+\underbrace{\frac{1}{4}H(e^{j\frac{3\pi}{2}})e^{j\frac{3\pi}{2}}}_{\text{if } k=3}+\underbrace{\frac{1}{4}H(e^{j\pi})e^{j\pi}}_{\text{if } k=2}$$

داریم
$$\Rightarrow y[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\cos(\theta)=\cos(\theta-\frac{\pi}{2})} = \cos\left(\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)n + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right)$$

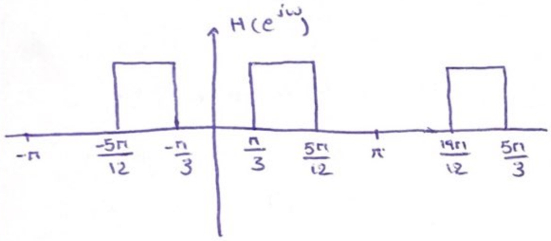
یادآوری : $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}e^{j(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4})} + \frac{1}{2}e^{-j(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4})}$

$$= \frac{1}{2}e^{j(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4})} + \frac{1}{2}e^{+j(\frac{3\pi}{2}n - \frac{\pi}{4})} \Rightarrow H(e^{j0}) = H(e^{j\pi}) = 0$$

and $H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = 2e^{j\frac{\pi}{4}}$, $H(e^{j3\pi/2}) = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}$

---

③ خروجی فیلتر زیر را به ورودی های متناوب زیر بیابید ؟



a) $x_1[n] = (-1)^n = (e^{j\pi})^n = e^{j\pi n} \Rightarrow$ Periodic with $N=2$ and a_0, a_1

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{1} a_k H(e^{j\frac{2k\pi}{2}}) e^{k(\frac{2\pi}{2})} = 0 + a_1 H(e^{j\pi}) e^{j\pi} = 0$$

b) $x_2[n] = 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{8}n + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$ Periodic with $N=16$

$$x_2[n] = e^{j(\frac{2\pi}{16})0n} - \left(\frac{j}{2}\right)e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j(\frac{2\pi}{16})3n} + \left(\frac{j}{2}\right)e^{-j(\frac{\pi}{4})} e^{-j(\frac{2\pi}{16})3n}$$

$$= e^{j(\frac{2\pi}{16})0n} - (j/2)e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j(\frac{2\pi}{16})3n} + \left(\frac{j}{2}\right)e^{-j(\frac{\pi}{4})} e^{j(\frac{2\pi}{16})13n}$$

ضرایب غیر صفر $x_2[n]$: $a_0 = 1$, $a_3 = -\left(\frac{j}{2}\right)e^{j(\frac{\pi}{4})}$, $a_{13} = \left(\frac{j}{2}\right)e^{-j(\frac{\pi}{4})}$

$$y_2[n] = \sum_{k=0}^{15} a_k H(e^{j\frac{2k\pi}{16}}) e^{k\frac{2\pi}{16}} = 0 - \left(\frac{j}{2}\right)e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{2\pi}{16}3n} + \left(\frac{j}{2}\right)e^{-j(\frac{\pi}{4})} \cdot e^{j(\frac{2\pi}{16})13n}$$

$$= \sin\left(\frac{3\pi}{8}n + \frac{\pi}{4}\right)$$

c) $x_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4k} \cdot u[n-4k] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n]\right] * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-4k] = g[n] * r[n]$

$r[n]$ Periodic with $N=4 \xleftrightarrow{F.S} a_k = \frac{1}{4}$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{3} a_k H(e^{j\frac{2k\pi}{4}}) e^{j\frac{2k\pi}{4}} = (\tfrac{1}{4})(H(e^{j0})e^{j0} + H(e^{j(\frac{\pi}{2})})e^{j\frac{\pi}{2}} + H(e^{j\pi})e^{j\pi}$$

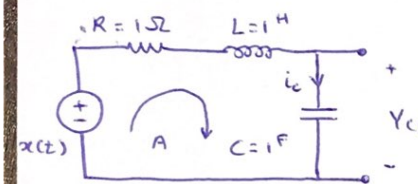
$$+ H(e^{j\frac{3\pi}{2}})e^{j\frac{3\pi}{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad y_3[n] = q[n] * g[n] = 0$$

---

(4) یک سیستم LTI علی به صورت مدار RLC ساخته شده است. ورودی منبع ولتاژ $x(t)$ است. ولتاژ $y(t)$ روی خازن را خروجی سیستم را در نظر بگیرید. a) معادله دیفرانسیل مرتبط کننده $y(t)$ و $x(t)$ را بیابید

b) پاسخ فرکانسی این سیستم را با در نظر گرفتن خروجی به ازای ورودی $x(t)=e^{j\omega t}$ بدست آورید.

c) خروجی $y(t)$ را به ازای ورودی $x(t) = \sin(t)$ را بیابید.



یادآوری؛
$$\begin{cases} i_c = C\dfrac{dV_c}{dt} \\ V_c = \dfrac{1}{C}\int i_c(t)\,dt \end{cases} \qquad \begin{cases} V_L = L\dfrac{di_L}{dt} \\ i_L = \dfrac{1}{L}\int V_L(t)\,dt \end{cases}$$

a) KVL ؛ $-x(t) + RI + L\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{1}{C}\int I(t)\,dt = 0 \xrightarrow{\text{مشتق}} -\dfrac{dx(t)}{dt} + \dfrac{d(RI)}{dt} + L\dfrac{d^2I(t)}{dt} + \dfrac{1}{C}I(t) = 0$

$$i_c = I = C\frac{dV_c}{dt} = C\frac{dy(t)}{dt} \Rightarrow x(t) = RC\frac{dy(t)}{dt} + LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t)$$

b)
$$\Rightarrow x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = (j\omega)^2 Y(j\omega) + (j\omega)Y(j\omega) + Y(j\omega)$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = Y(j\omega)\left[-\omega^2 + j\omega + 1\right] \Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{-\omega^2 + j\omega + 1}$$

c)
$$x(t) = \sin(t) = \frac{1}{2j}e^{j(t)} - \frac{1}{2j}e^{-jt} \xleftrightarrow{F.S} a_1 = a_{-1}^* = \frac{1}{2j}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 t} = a_1 H(j)e^{jt} - a_{-1}H(-j)e^{-jt} = (\tfrac{1}{2j})\cdot\left(\tfrac{1}{j}e^{jt} - \tfrac{1}{-j}e^{-jt}\right)$$

$$= (-\tfrac{1}{2})\cdot(e^{jt} + e^{-jt}) = -\cos(t)$$

---

(5) یک سیستم علی LTI گسسته درزمان با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ با معادله تفاضلی $y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n]$ توصیف شده است. ضرایب سری فوریه $y[n]$ را بدست آورید.

a) $x[n] = \sin(\frac{3\pi}{4}n)$

$$e^{j\omega n} \longrightarrow \boxed{LTI} \xrightarrow{H(j\omega)e^{j\omega n}} \Rightarrow H(j\omega)e^{j\omega n} - \tfrac{1}{4}e^{-j\omega}e^{j\omega n}H(j\omega) = e^{j\omega}$$

$$H(j\omega)\left(e^{j\omega} - \tfrac{1}{4}e^{-j\omega}e^{j\omega n}\right) = e^{j\omega} \Rightarrow H(j\omega) = H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$y[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k H(e^{j\frac{2k\pi}{N}})e^{j\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\begin{cases} a)\ N=4 \Rightarrow \text{ضرایب غیر صفر} ؛ \ a_3 = a_{-3}^* = \dfrac{1}{2j} \\ \Rightarrow b_3 = a_1 H(e^{j\frac{3\pi}{4}}) = \dfrac{1}{2j\left[1 - (\frac{1}{4})e^{-j\frac{3\pi}{4}}\right]} \\ b_{-3} = a_{-1}H(e^{-j\frac{3\pi}{4}}) = \dfrac{-1}{2j\left[1 - (\frac{1}{4})e^{j\frac{3\pi}{4}}\right]} \end{cases}$$

b) $N=8 \longrightarrow$ ضرایب غیرصفر : $a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$, $a_2 = a_{-2} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = a_1 H(e^{j\frac{\pi}{4}}) = \dfrac{1}{2\left(1-(\frac{1}{4})e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)} \quad , \quad b_{-1} = a_{-1} H(e^{-j\frac{\pi}{4}}) = \dfrac{1}{2\left(1-(\frac{1}{4})e^{j\frac{\pi}{4}}\right)} \\ b_2 = a_2 H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \dfrac{1}{\left(1-(\frac{1}{4})e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)} \quad , \quad b_{-2} = a_{-2} H(e^{-j\frac{\pi}{2}}) = \dfrac{1}{\left(1-(\frac{1}{4})e^{j\frac{\pi}{2}}\right)} \end{cases}$$

---

6) یک سیستم LTI گسسته در زمان با پاسخ ضربه $h[n] = (\frac{1}{2})^{|n|}$ در نظر بگیرید. نمایش سری فوریه $y[n]$ را به ازای ورودی زیر به دست آورید.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n-4k) \xleftrightarrow{F.S} a_k = \frac{1}{4} \quad \text{with } N=4$$

به دست آمد : $H(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \dfrac{1}{1-2e^{-j\omega}}$

$$b_k = a_k H(e^{j\frac{2k\pi}{N}}) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi k}{2}}} - \frac{1}{1-2e^{-j\frac{k\pi}{2}}}\right]$$