به نام خدا

تمرین سری ۱ سیگنال سیستم

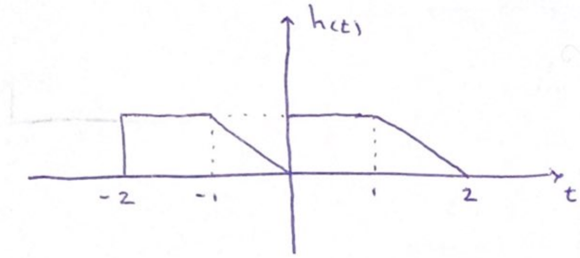
① برای سیگنال $h(t)$ داده شده موارد خواسته شده را رسم کنید.

1) $x(2-\frac{t}{3})$

2) $x(2t+2)$

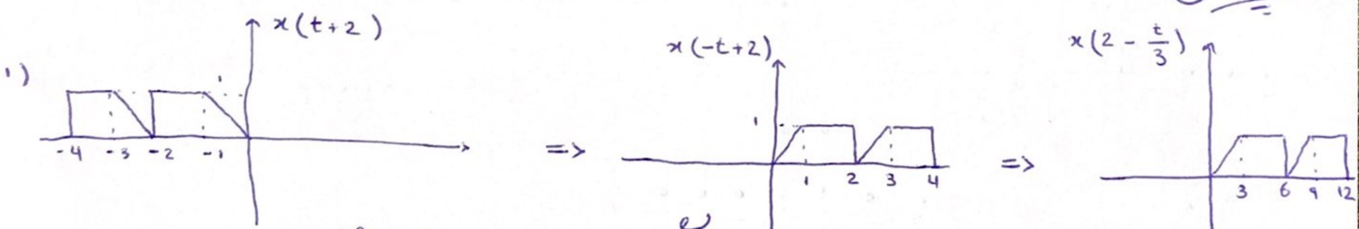
3) $x(t)\left\{\delta(t+\frac{3}{2})+\delta(t-\frac{3}{2})\right\}$

4) $x(2t+1)\,u(t-\frac{1}{2})$



یادآوری: ابتدا شیفت به راست یا چپ را اعمال می‌کنیم $(x(t\pm t_0))$ سپس تغییر scale $(x(at))$

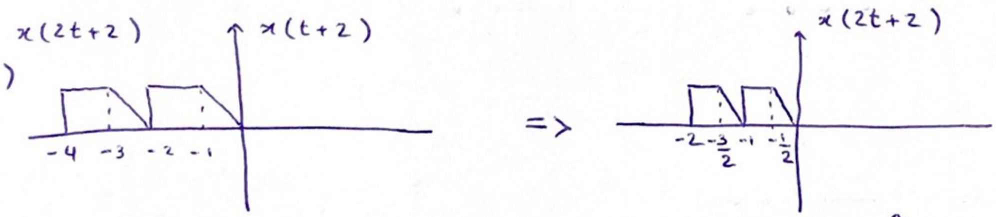
1)



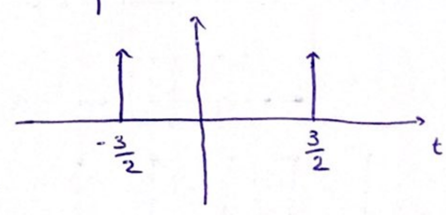
$x(at)$ → if $|a|>1$ → فشردگی

$x(at)$ → if $|a|<1$ → انبساط

2)



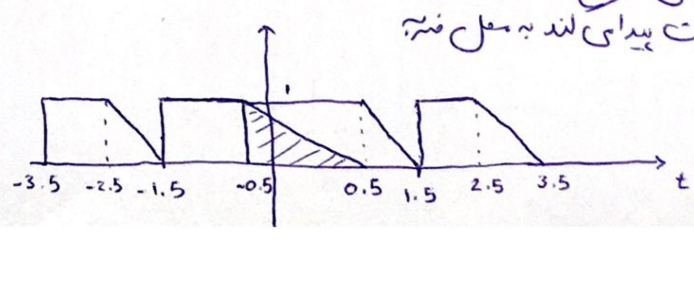
3) $x(t)\cdot\left\{\delta(t+\frac{3}{2})+\delta(t-\frac{3}{2})\right\}$ =>



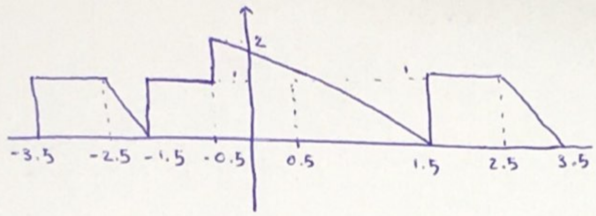
طبق خاصیت ضربی تابع ضربه می‌دانیم: $x(t)\cdot\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$

هر تابعی در تابع ضربه ضرب شود شیفت پیدا می‌کند به محل ضربه

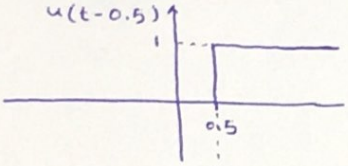
$\Rightarrow x(t+\frac{3}{2})+x(t-\frac{3}{2})$

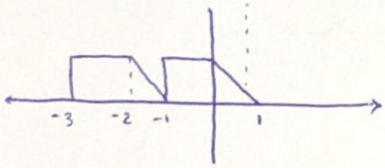


$\Rightarrow$

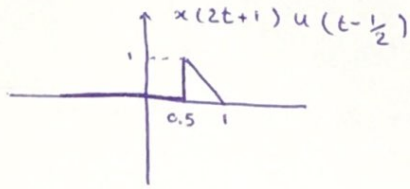


4) $x(2t+1)\,u(t-\frac{1}{2})$:



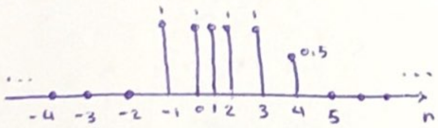


$\Rightarrow$



---

② برای سیگنال $x[n]$ داده شده موارد خواسته شده را رسم کنید.



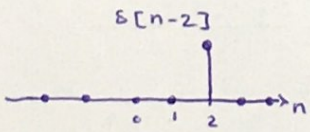
یادآوری : $x[\alpha n]$
- if $|\alpha| > 1$ → down sampling
- if $|\alpha| < 1$ → up sampling

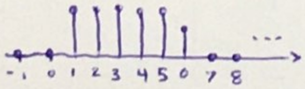
1) $x[\underset{\uparrow\alpha}{3}n]$:

به ازای $n \pm \alpha$ مقدار آن نمونه را قرار داده و بقیه نمونه‌ها صفر شود

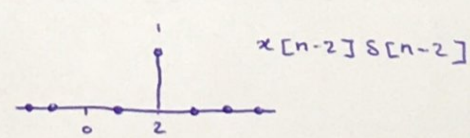
2) $x[n-3]$:

3) $x[n-2]\,\delta[n-2]$

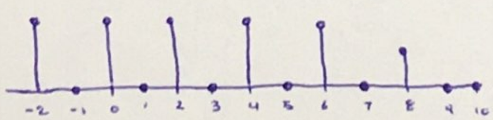




$\Rightarrow$

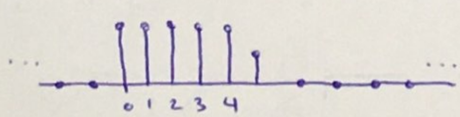


4) $x[\frac{n}{2}]$:



هر سمپل از سیگنال اصلی در فاصله α برابر قرار می‌گیرد

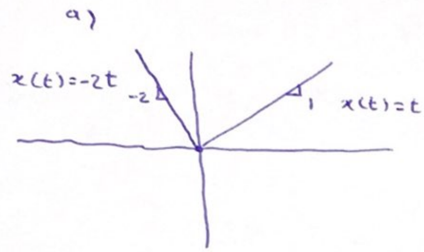
5) $x[(n-1)^2]$:

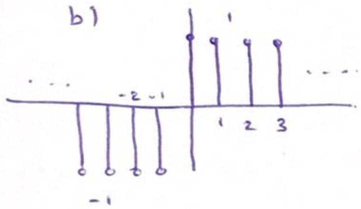


$= x[n-1]$

چون نمونه منفی نداریم

③ بخش زوج و فرد سیگنال های داده شده را بدست آورید؟



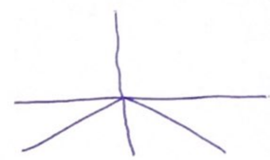


یادآوری : $Ev\{x(t)\} = \dfrac{x(t)+x(-t)}{2}$

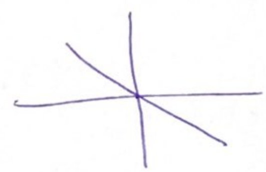
$odd\{x(t)\} = \dfrac{x(t)-x(-t)}{2}$

a) $x(t) = \begin{cases} t & ; t>0 \\ -2t & ; t<0 \end{cases} \Rightarrow x(-t) = \begin{cases} -t & ; t<0 \\ 2t & ; t>0 \end{cases}$

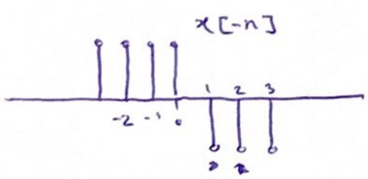
$Ev\{x(t)\} = \begin{cases} \dfrac{-2t-t}{2} & ; t<0 \\ \dfrac{t+2t}{2} & ; t>0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-3t}{2} & ; t<0 \\ \dfrac{3t}{2} & ; t>0 \end{cases}$



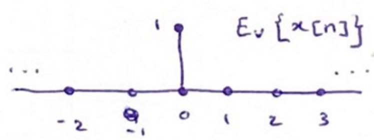
$odd\{x(t)\} = \begin{cases} \dfrac{-2t-(-t)}{2} & ; t<0 \\ \dfrac{t-2t}{2} & ; t>0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-t}{2} & ; t<0 \\ \dfrac{-t}{2} & ; t>0 \end{cases}$

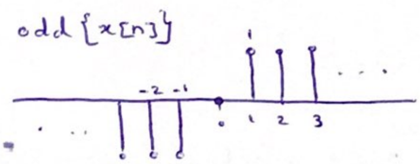


b)



$\Rightarrow$





---

④ مشخص کنید هر کدام یک از سیگنال های زیر متناوب است. برای سیگنال های متناوب دوره تناوب را بدست آورید؟

a) $x(t) = e^{(-j+\sin\frac{\pi}{2})t} \xrightarrow{\sin\frac{\pi}{2}=j} x(t) = e^{(-j+j)t} = e^{0t} = 1 \Rightarrow$ متناوب نیست

b) $x(t) = \cos(3jt+1) \Rightarrow \cos(3jt+1) = \cos(3j(t+T)+1) \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{3j}$

روش دوم : $x(t) = \cos(\omega t+\varphi) \Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$\Rightarrow \omega = 3jt \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{3j}$

c) $x(t) = \left(\cos\left(3t - \frac{\pi}{3}\right)\right)^2 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{\omega = 3} T = \frac{2\pi}{3}$

d) $x[n] = \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{3}n}}_{(I)} + \underbrace{e^{j\frac{4\pi}{3}n}}_{(II)}$

$$\begin{cases} I)\ e^{-j\frac{\pi}{3}n} = e^{-j\frac{\pi}{3}(n+N_1)} \Rightarrow \cancel{e^{-j\frac{\pi}{3}n}} = \cancel{e^{-j\frac{\pi}{3}}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}N_1} \Rightarrow e^{-j\frac{\pi}{3}N_1} = e^{j2\pi} \\ \Rightarrow N_1 = 6N_0 \\ II)\ e^{j\frac{4\pi}{3}n} = e^{j\frac{4\pi}{3}(n+N_2)} \Rightarrow N_2 = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \text{kmm}\{3, 6\} = \boxed{6}$

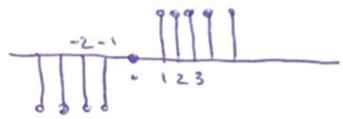
روش سوم: برای پیدا کردن دوره تناوب یک سیگنال گسسته اگر بتوان ω_0 را به صورت کسری نوشت به نحوی که m , N ساده نشوند (به عبارت دیگر ω_0 باید مضرب کسری از π باشد) آنگاه N پریود اصلی است

if $x[n] = e^{j\omega_0 N} \Rightarrow \omega_0 = 2\pi\left(\frac{m}{N}\right)$

e) $x(t) = \underbrace{\sin\frac{4}{5}t}_{(I)} + \underbrace{\cos\frac{3}{4}t}_{(II)}$

$$\begin{cases} I)\ T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\frac{4}{5}} = \frac{10}{4}\pi \\ II)\ T_2 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3}\pi \end{cases} \Rightarrow \text{kmm}\left\{\frac{10}{4}\pi, \frac{8}{3}\pi\right\} = 480\pi$$

f) $x[n] = u[n] - u[-n] \Rightarrow$



پریودیک نیست

g) $x[n] = e^{j\left(\frac{n+0.5}{5}\right)} \Rightarrow \cancel{e^{j\frac{n}{5}}} \cdot \underbrace{e^{j\frac{0.5}{5}}}_{= e^{j0.1}} = e^{j\left(\frac{n+N+0.5}{5}\right)} = \cancel{e^{j\frac{n}{5}}} \cdot e^{j\frac{N}{5}} \cdot \cancel{e^{j0.1}}$

$\Rightarrow e^{j\frac{N}{5}} = e^{j2\pi} \Rightarrow \frac{N}{5} = 2\pi \Rightarrow \boxed{N = 10\pi}$

h) $x[n] = e^{j\pi\left(\frac{n+0.5}{5}\right)} = e^{j\pi\left(\frac{n+N+0.5}{5}\right)} \Rightarrow \cancel{e^{j\frac{\pi n}{5}}} \cdot \cancel{e^{j\pi 0.1}} = \cancel{e^{j\frac{\pi n}{5}}} \cdot e^{j\pi\frac{N}{5}} \cdot \cancel{e^{j\pi 0.1}}$

$\Rightarrow e^{j\pi\frac{N}{5}} = 1 = e^{j2\pi} \Rightarrow 2\cancel{\pi} = \cancel{\pi}\frac{N}{5} \Rightarrow \boxed{N = 10}$

---

5) سیگنال های $x(t)$, $x[n]$ به ترتیب با دوره اصلی $T=5$, $N=3$ متناوب می باشند. دوره تناوب اصلی دو سیگنال $y(t)$, $y[n]$ را بیابید.

$y[n] = \underbrace{x\left[\frac{n}{2}\right]}_{(I)} + \underbrace{x[2n]}_{(II)}$

(I) : منبسط با ضریب 2 $\Rightarrow T_1 = 10$

(II) : انقباض با ضریب $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow T_2 = \frac{5}{2}$

$\text{kmm}\left\{10, \frac{5}{2}\right\} = 10$

⑥ انرژی و توان کل سیگنال های زیر را بدست آورید؟

a) $x(t) = \begin{cases} 3e^{j(t+2)-t} & ; \ t \geq 0 \\ 0 & ; \ t < 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{T = 2\pi}$

$$E_\infty = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^\infty |3e^{j(t+2)-t}|^2 dt = \int_0^\infty 3^2 dt = \int_0^\infty 9\, dt$$

$$= 9t \Big]_0^\infty = (\infty - 0) = \infty \quad \Rightarrow E_T = 9t \Big]_0^{2\pi} = 9(2\pi - 0) = \boxed{18\pi}$$

$P_\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt \Rightarrow$ توان در سیگنال های پریودیک $=$ $\frac{E_\infty \text{ (در یک پریود)}}{T} = \frac{18\pi}{2\pi} = \boxed{9}$

b) $x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n & ; \ n \geq 0 \\ 0 & ; \ n < 0 \end{cases}$

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{1} |x[n]|^2 = 1 + \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P_\infty = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2 \xrightarrow{N=0} \sum_{n=0}^{1} \left(\tfrac{1}{2} + j\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 1 + \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

---

⑦ تساوی های زیر را اثبات کنید؟

a) $\delta[n^2 - n] = \delta[n] + \delta[n-1]$

یادآوری : $\delta[n] = \begin{cases} 1 & ; \ n = 0 \\ 0 & ; \ n \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \delta[n^2 - n] = \begin{cases} 1 & ; \ n^2 - n = 0 \\ 0 & ; \ n^2 - n \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & ; \ n=0, \ n=1 \\ 0 & ; \ \text{other} \end{cases}$

$$= \underbrace{\delta[n]}_{(\mathrm{I})} + \underbrace{\delta[n-1]}_{(\mathrm{II})} \qquad (\mathrm{I}) \begin{cases} 1 & ; \ n = 0 \\ 0 & ; \ n \neq 0 \end{cases} + \ \mathrm{II}) \begin{cases} 1 & ; \ n = 1 \\ 0 & ; \ n \neq 1 \end{cases}$$

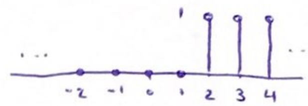
b) $u[-2n-1] = u[-n-1]$

یادآوری : $u[n] = \begin{cases} 1 & ; \ n \geq 0 \\ 0 & ; \ n < 0 \end{cases} \Rightarrow u[-2n-1] = \begin{cases} 1 & ; \ -2n-1 \geq 0 \\ 0 & ; \ -2n-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & ; \ n \leq \frac{-1}{2} \\ 0 & ; \ n > \frac{-1}{2} \end{cases}$

$$u[-n-1] = \begin{cases} 1 & ; \ -n-1 \geq 0 \\ 0 & ; \ -n-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & ; \ n \leq -1 \\ 0 & ; \ n > -1 \end{cases} \quad \times$$

c) $\sum_{n=2}^{7} \sin\frac{\pi}{6} n \cdot \delta[n-1] = 0 \xrightarrow{\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}} 0.5 \sum_{n=2}^{7} \cancel{\delta[n-1]}^{\,0} = 0$

d) $\sum_{k=3}^{\infty} \delta[n+1-k] = u[n-2] \Rightarrow \begin{cases} \text{if } k=3 : \delta[n-2] \\ \text{if } k=4 : \delta[n-3] \\ \text{if } k=5 : \delta[n-4] \\ \vdots \end{cases}$



e) $\int_{t-5}^{t} w^2 \delta(2w-6)\,dw = \frac{9}{2}\left(u(t-3) - u(t-8)\right)$

$$\begin{cases} 2w-6 = t \Rightarrow 2w = t+6 \Rightarrow w = \frac{1}{2}(t+6) = \frac{t}{2}+3 \\ dw = d(\frac{t}{2}+3) = \frac{1}{2}dt + \cancel{d(3)}^{\,0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{t-5}^{t} \left(\frac{t}{2}+3\right)^2 dt = \frac{1}{24}\left(15t^2 + 105t + 215\right)$$