یالطیف

تمرین سری 4 سیگنال سیستم

① توابع زیر، پاسخ های ضربه سیستم های LTI هستند. برای هر سیستم علی و پایدار بودن را بررسی کنید.

یادآوری: سیستم علی است اگر و تنها اگر:
$$\begin{cases} h(t)=0 \ ; \ \forall t<0 \\ h[n]=0 \ ; \ \forall n<0 \end{cases}$$

پایدار است اگر و تنها اگر:
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| < \infty \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \end{cases}$$

a) $h[n] = (\frac{1}{5})^n u[n]$

I) علی است $\longrightarrow h[n]=0$ for $n<0$

II) پایدار است $\longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{5})^n = \frac{(\frac{1}{5})^0 - (\frac{1}{5})^{\infty+1}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4} < \infty$

b) $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[-n]$

I) علی نیست $\longrightarrow h[n] \neq 0$ for $n<0$

II) پایدار نیست $\longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{0} (\frac{1}{2})^n = \frac{(\frac{1}{2})^{-\infty} - (\frac{1}{2})^1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\infty - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \infty$

c) $h[n] = n(\frac{1}{3})^n u[n-1]$

I) علی است $\longrightarrow h[n]=0$ for $n<0$

II) پایدار نیست $\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{3})^n = \infty$

d) $h[n] = 5^n u[3-n]$

I) علی نیست $\longrightarrow h[n] \neq 0$ for $n<0$

II) پایدار $\longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{3} 5^n = \frac{5^{-\infty} - 5^{+4}}{1-5} = -156.25 < \infty$

e) $h[n] = e^{2n} u[-1-n]$

I) علی نیست $\longrightarrow h[n] \neq 0$ for $n<0$

II) پایدار است $\longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{2n} = \frac{e^{-\infty} - e^0}{1-e} = \frac{1}{1-e} \simeq -0.58 < \infty$ ($e \to 2.7$)

f) $h(t) = e^{-4t} u(t-2)$

I) علی است $\longrightarrow h(t)=0$ for $t<0$

II) پایدار است $\longrightarrow \int_2^{\infty} e^{-4t} dt = -\frac{1}{4} e^{-4t} \Big|_2^{\infty} = -\frac{1}{4}(\cancel{e^{-4(\infty)}}^{\,0} - e^{-4(2)}) < \infty$

g) $h(t) = e^{-2t} u(t+50)$

I) علی نیست $\longrightarrow h(t) \neq 0$ for $t<0$

II) پایدار است $\longrightarrow \int_{50}^{\infty} e^{-2t} dt = -\frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_{50}^{\infty} < \infty$

h) $h(t) = t e^{-t} u(t)$

I) علی است $\longrightarrow h(t)=0$ for $t<0$

II) پایدار است $\longrightarrow \int_0^{\infty} t e^{-t} dt = 1 < \infty$

i) $h(t) = e^{-(1-2j)t} u(t)$

I) علی $\longrightarrow h(t) = 0$ for $t<0$

II) پایدارت $\longrightarrow \int_0^{\infty} e^{-(1-2j)t} dt = -\frac{1}{1-2j} e^{-(1-2j)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1-2j}$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{1-2j} \right| = \frac{|1|}{|1-2j|} = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}} < \infty$$

---

(2) یک سیستم LTI علی را درنظر بگیرید که ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ آن با معادله تفاضلی زیر به هم مربوط می شوند

برای $x[n] = \delta[n]$ ، $y[n]$ را حساب کنید

$$\begin{cases} y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n] \\ x[n] = \delta[n] \end{cases} \Rightarrow y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + \delta[n]$$

می دانیم : $x[n] = \delta[n] = \begin{cases} 1 & ; n=0 \\ 0 & ; \text{other} \end{cases}$

if $n=0$: $y[0] = \frac{1}{2} \overset{a}{\cancel{y}}[-1] + \overset{1}{\cancel{\delta}}[0]$

$\Rightarrow y[0] = \frac{a}{2} + 1$

if $n=1$: $y[1] = \frac{1}{2}[0] + \overset{0}{\cancel{\delta}}[1]$

$\Rightarrow y[1] = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+1\right) = \frac{a}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+1\right)$

if $n=2$: $y[2] = \frac{1}{2} y[1] + \overset{0}{\cancel{\delta}}[2]$

$\Rightarrow y[2] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+1\right)\right] = \frac{a}{8} + \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ if $n=n$: $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}a + 1\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n y[0]$

* برای n های منفی هم حساب شود *

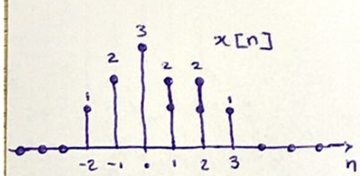
---

(3) سیستم LTI با شرط سکون اولیه توصیف شده با معادله تفاضلی زیر را درنظر بگیرید . پاسخ این سیستم به ورودی نشان داده شده در شکل زیر را بیان کنید.

$$y[n] = -2y[n-1] + x[n] + 2x[n-2]$$

یادآوری: شرط سکون اولیه (initial rest) یعنی : اگر ورودی به ازای $n<n_0$ ، صفر باشد $(x[n]=0 \text{ for } n<n_0)$

آنگاه خروجی سیستم ها به ازای همان n ها صفر است $\longleftarrow y[n]=0 \text{ for } n<n_0$



$x[n] = 0$ for $n<-2 \Longrightarrow y[n] = 0$ for $n<-2$

$y[n] = x[n] + 2x[n-2] - 2y[n-1]$

if $n=-3$: $y[-3] = x[-3] + 2x[-5] - 2y[-4] = 0$

if $n=-2$: $y[-2] = x[-2] + 2\overset{0}{\cancel{x}}[-4] - 2\overset{0}{\cancel{y}}[-3] \Rightarrow y[-2] = x[-2] = 1$

if $n=-1$: $y[-1] = \overset{2}{\cancel{x}}[-1] + 2\overset{0}{\cancel{x}}[-3] - 2\overset{1}{\cancel{y}}[-2] \Rightarrow y[-1] = 0$

if $n=0$: $y[0] = \overset{3}{\cancel{x}}[0] + 2x\overset{1}{\cancel{[-2]}} - 2\overset{0}{\cancel{y}}[-1] \Rightarrow y[0] = 5$

if $n=1$: $y[1] = \overset{2}{\cancel{x}}[1] + 2x\overset{2}{\cancel{[-1]}} - 2\overset{5}{\cancel{y}}[0] \Rightarrow y[1] = -6$

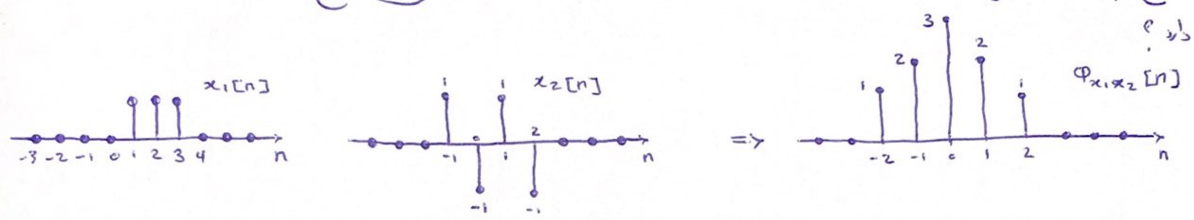
$\vdots$

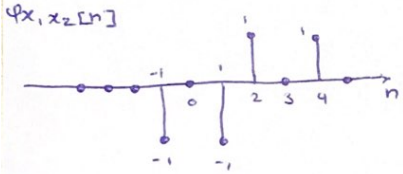
$n=5$: $y[5] = x[5] + 2x[3] - 2y[4] \Rightarrow y[5] = -110 \Rightarrow y[n] = -110(-2)^{n-5}$ for $n \geq 5$

④ تابع همبستگی سیگنال گسسته $x[n]$ و همبستگی متقابل دو سیگنال $x[n]$, $y[n]$ به صورت های زیر تعریف می شود

$$\varphi_{xy} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m+n]\, y[m] \quad , \quad \varphi_{xx}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m+n]\, x[m]$$

الف) تابع همبستگی سیگنال های $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را بدست آورید. چه رابطه ای بین تابع خود همبستگی و کانولوشن وجود دارد؟





ب) تابع همبستگی متقابل دو سیگنال $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را بدست آورید؟