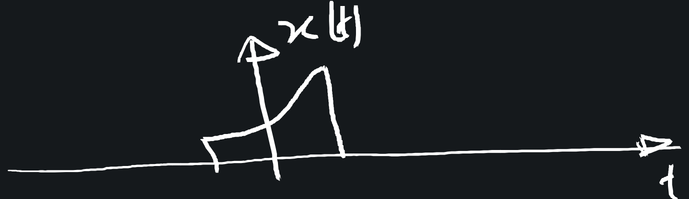
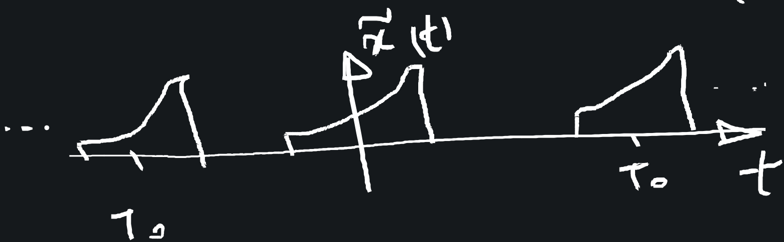
تبدیل فوریه پیوسته زمان: سیگنال پیوسته $x(t)$ را در صورت وجود، در حالت کلی با یک تبدیل فوریه به صورت روبرو بیان می‌کنند.

$$X(j\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$





سؤال: چه رابطه‌ای بین ضرایب سری فوریه $\tilde{x}(t)$ و $X(j\omega)$ وجود دارد؟

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0} = T_0 a_k \Rightarrow \boxed{X(jk\omega_0) = T_0 a_k}$$

مثال: تبدیل فوریه تابع پنجره

رابطه با سری فوریه:

حل:

$$X(jk\omega_0) = T_0 \times \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{\pi k}$$

$$X(j\omega) = 2\frac{\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

تبدیل فوریه

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$T_0 \to \infty$

$$T_0 a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \longrightarrow X(jk\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \longrightarrow \boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, d\omega}$$

تبدیل فوریه

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow[T_0 \to \infty]{} x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t} = \lim_{\omega_0 \to 0} \sum \frac{\omega_0}{2\pi} X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega}$$

عکس تبدیل فوریه

شرطهای تبدیل فوریه: ۱) انرژی $x(t)$ محدود باشد $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt<\infty$ 2) تعداد اکسترمم های $x(t)$ قابل شمارش باشد

۳) تعداد ناپیوستگی های $x(t)$ قابل شمارش باشد.

مثال: تبدیل فوریه تابع پنجره را بدست آورید:

$$X(j\omega)=\int_{-T_1}^{T_1}1\times e^{-j\omega t}dt=\frac{-1}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-T_1}^{T_1}=\frac{e^{j\omega T_1}-e^{-j\omega T_1}}{j\omega}=\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

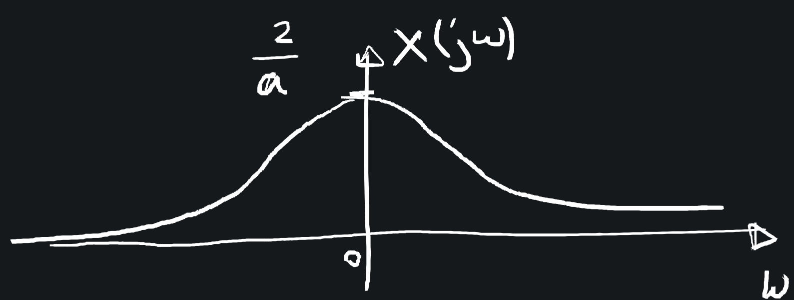
مثال: تبدیل فوریه $x(t)=e^{-at}u(t)$ را بدست آورید:

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-(a+j\omega)t}dt=\frac{-1}{a+j\omega}e^{-(a+j\omega)t}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{a+j\omega}$$

مثال: تبدیل فوریه سیگنال $x(t) = e^{-a|t|}$ را بدست آورید.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{+at} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{a-j\omega} e^{(a-j\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{-1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$



خواص تبدیل فوریه:

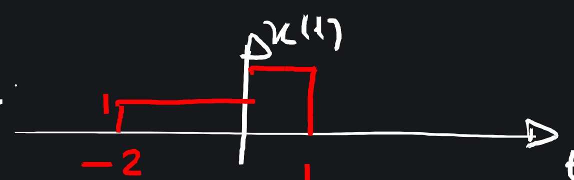
۱) خاصیت خطی:

$$Ax(t)+Bw(t) \xleftrightarrow{F} AX(j\omega)+BW(j\omega)$$

۲) جابجایی در زمان:

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

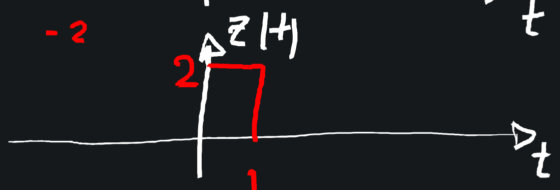
مثال: تبدیل فوریه



را بدست آورید:

$$x(t)=w(t)+z(t)$$

$$\xleftrightarrow{F} \frac{2\sin(\omega)}{\omega}e^{+j\omega}$$



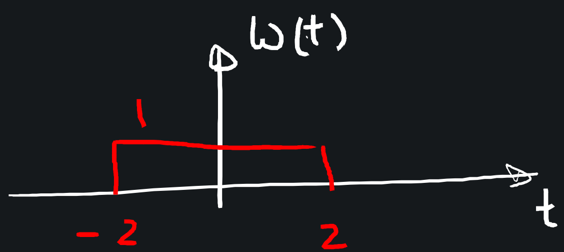
$$\xleftrightarrow{F} \frac{4\sin(\omega/2)}{\omega}e^{-j\omega/2}$$

$$\Rightarrow X(j\omega)=\frac{2}{\omega}\left[\sin(\omega)e^{j\omega}+2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\omega/2}\right]$$

۲) جابجایی در فرکانس:

$$e^{j\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{F} X(j(\omega-\omega_0))$$

مثال: تبدیل فوریه $x(t)=w(t)\cos 3t$ را بدست آورید.



$$x(t) = w(t)\frac{e^{j3t}}{2} + w(t)\frac{e^{-j3t}}{2} \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}W(j(\omega-3)) + \frac{1}{2}W(j(\omega+3))$$

$$W(j\omega) = \frac{2\sin(2\omega)}{\omega} \Rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{2}\frac{\sin(2(\omega-3))}{\omega-3} + \frac{1}{2}\frac{\sin(2(\omega+3))}{\omega+3}$$

۴) مشتق‌گیری در زمان:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$$

۵) انتگرال‌گیری در زمان

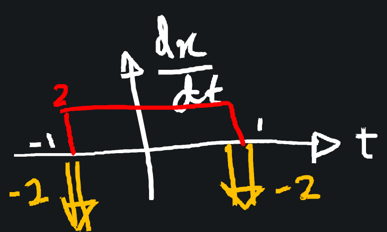
$$\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi\delta(\omega)X(0)$$

مثال: تبدیل فوریه تابع پله را بیابید:

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)\,d\lambda \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}\times 1 + \pi\delta(\omega)\times 1 = \frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$\delta(t)\xleftrightarrow{F}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{0}\,dt = 1$$

مثال: تبدیل فوریه را بیابید:



$$\xleftrightarrow{F} \frac{4\sin\omega}{\omega} - 2e^{-j\omega} - 2e^{+j\omega} \Rightarrow x(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}\left(\frac{4\sin\omega}{\omega} - 4\cos\omega\right)$$

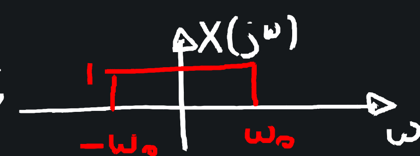
۶) تغییر مقیاس: $x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$

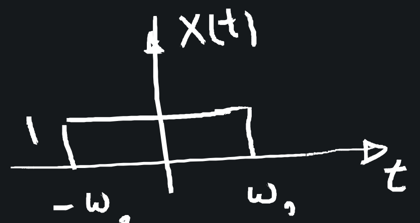
وارونگی در زمان: $x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-j\omega)$

۷) همزادی: $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$

$X(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi\, x(-\omega)$

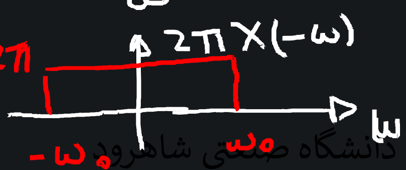
مثال: $X(j\omega)$ بصورت روبرو تبدیل فوریه چه سیگنالی است؟





$\xleftrightarrow{F} \frac{2\sin(\omega\omega_0)}{\omega}$

$\frac{2\sin(\omega_0 t)}{t} \xleftrightarrow{F}$



$\longrightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\sin(\omega_0 t)}{t}\right) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t}$

مثال: تبدیل فوریه $\frac{1}{t^2+a^2}$ را بدست آورید:

ی دانیم $e^{-a|t|} \xleftrightarrow{F} \frac{2a}{\omega^2+a^2}$

$$\frac{2a}{t^2+a^2} \xleftrightarrow{F} e^{-a|-\omega|} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{t^2+a^2} \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2a} e^{-a|\omega|}$$

همزادی در خواص:

۸) مشتق گیری در فرکانس:

$$-jt\,x(t) \xleftrightarrow{F} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

۹) انتگرال گیری در فرکانس:

$$-\frac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \xleftrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\omega} X(j\lambda)\,d\lambda$$

۱۰) قضیه پارسوال:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

۱۱) خاصیت کانولوشن:

$$x(t) * h(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)\cdot H(j\omega)$$

مثال: پاسخ سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=2\delta(t)+e^{-t}u(t)$ به ورودی $x(t)=3e^{-2t}u(t)$ را بدست آورید:

$$H(j\omega)=2+\frac{1}{j\omega+1}$$

$$X(j\omega)=3\times\frac{1}{j\omega+2}$$

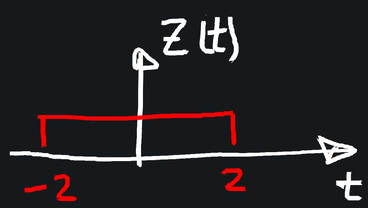
$$\Rightarrow Y(j\omega)=X(j\omega)\cdot H(j\omega)=\frac{3\times 2}{j\omega+2}+\frac{3}{(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

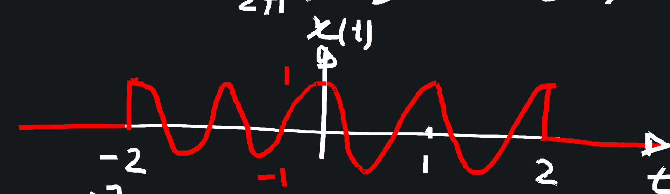
$$Y(j\omega)=\cancel{\frac{6}{j\omega+2}}+\frac{3}{j\omega+1}+\cancel{\frac{-3}{j\omega+2}} \rightarrow y(t)=3e^{-t}u(t)+3e^{-2t}u(t)$$

۱۲) خاصیت ضرب:

$$x(t)\cdot z(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}\left(X(j\omega)*Z(j\omega)\right)$$

مثال: تبدیل فوریه





$$x(t)=z(t)\cos(2\pi t) \xleftrightarrow{F} \frac{1\times 2\sin(2\omega)}{2\pi\,\omega} * \pi\left[\delta(\omega-2\pi)+\delta(\omega+2\pi)\right] = \frac{\sin(2(\omega-2\pi))}{\omega-2\pi}+\frac{\sin(2(\omega+2\pi))}{\omega+2\pi}$$

۱۳) تقارن هرمیتی برای تبدیل فوریه سیگنالهای حقیقی:

تقارن هرمیتی $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$ $\qquad x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$

برای سیگنال حقیقی $x(t)$:

دامنه تبدیل فوریه تقارن زوج دارد $|X(j\omega)| = |X(-j\omega)|$

فاز تبدیل فوریه تقارن فرد دارد $\measuredangle X(j\omega) = -\measuredangle X(-j\omega)$

بخش حقیقی تقارن زوج دارد $Re\{X(j\omega)\} = Re\{X(-j\omega)\}$

بخش موهومی تقارن فرد دارد $Im\{X(j\omega)\} = -Im\{X(-j\omega)\}$

اگر $x(t)$ حقیقی و زوج باشد تبدیل فوریه آن حقیقی و تقارن زوج دارد.

اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد تبدیل فوریه آن موهومی خالص و تقارن فرد دارد.

تبدیل فوریه سیگنال های متناوب: سیگنال های متناوب دارای انرژی نامحدود هستند لذا شرط اول دیریکله در همگرایی را ندارند. لذا تبدیل فوریه آنها شامل ضربه خواهد بود.

تبدیل فوریه فازور $x(t)=e^{j\omega_0 t}$ **برابر با** $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ **است (اثبات):**

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega_0 t}\,d\omega$$

$$x(t)=e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0)\,d\omega=e^{j\omega_0 t}$$

مثال: تبدیل فوریه $x(t)=A\cos\omega_0 t$ را بدست آورید:

$$x(t)=\frac{A}{2}e^{j\omega_0 t}+\frac{A}{2}e^{-j\omega_0 t}\xleftrightarrow{F}X(j\omega)=\frac{A}{2}\left[2\pi\delta(\omega-\omega_0)+2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$X(j\omega)=A\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

تبدیل فوریه سیگنال متناوب $x(t)$:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega-k\omega_0)$$

مثال: تبدیل فوریه قطار پالس

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_0)$$

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_0)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\delta(t)e^{j0}dt$$

$$a_k=\frac{1}{T_0} \Rightarrow X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)=\frac{2\pi}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

مثال: عکس تبدیل فوریه $X(j\omega)=\dfrac{j\omega\, e^{j\omega}}{(2+j\omega)^2}$ را بدست آورید:

داریم $\quad e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{2+j\omega}$

خواص

$$-te^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{2+j\omega}\right)$$

$$-te^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{-j}{(2+j\omega)^2}$$

$$-jte^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(2+j\omega)^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(-jte^{-2t}u(t)\right) \xleftrightarrow{F} j\omega\cdot\frac{1}{(2+j\omega)^2}$$

$$-je^{-2t}u(t)+2jte^{-2t}u(t)-j\underbrace{\cancel{te^{-2t}}}_{0}\delta(t) \xleftrightarrow{F} \,//$$

$$je^{-2t}u(t)(-1+2t) \xleftrightarrow{F} \frac{j\omega}{(2+j\omega)^2}$$

$$\underbrace{je^{-2(t+1)}u(t+1)(-1+2(t+1))}_{x(t)} \xleftrightarrow{F} \frac{j\omega\, e^{j\omega}}{(2+j\omega)^2}$$

پاسخ فرکانسی سیستم‌های LTI: همانطور که گفته شد

$$x(t) * h(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

$H(j\omega)$ پاسخ فرکانسی سیستم LTI می‌باشد. چندین روش برای بدست آوردن پاسخ فرکانسی یک سیستم وجود دارد

۱) تبدیل فوریه $h(t)$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

۲) اگر پاسخ سیستم LTI به ازای یک ورودی مشخص داده شده باشد می‌توان نوشت:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

۳) اگر معادله دیفرانسیل سیستم داده شده باشد

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega) \longrightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

مثال: پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t)=e^{-2t}u(t)$ برابر $y(t)=\delta(t)-e^{-3t}u(t)$ است. پاسخ فرکانسی سیستم را بدست آورید:

$$X(j\omega)=\frac{1}{j\omega+2} \quad \text{و} \quad Y(j\omega)=1-\frac{1}{j\omega+3}=\frac{j\omega+2}{j\omega+3}$$

$$\rightarrow H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{1}{j\omega+3}$$

مثال: پاسخ فرکانسی سیستمی با معادله دیفرانسیل

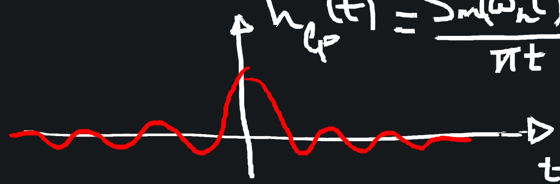
$$\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+6y(t)=2\frac{dx}{dt}$$

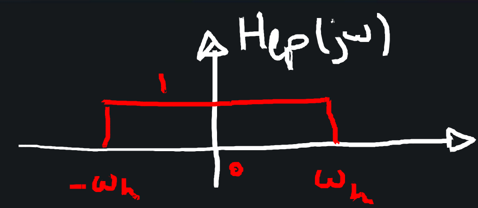
$$H(j\omega)=\frac{\sum b_k (j\omega)^k}{\sum a_k (j\omega)^k}=\frac{2(j\omega)}{(j\omega)^2+5(j\omega)+6}=\frac{2(j\omega)}{(6-\omega^2)+5j\omega}$$

انواع فیلترها:

۱) فیلتر پایین گذر lowpass

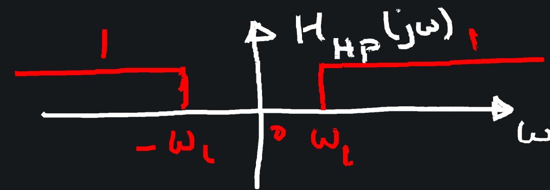
$h_{lp}(t) = \frac{\sin(\omega_h t)}{\pi t}$





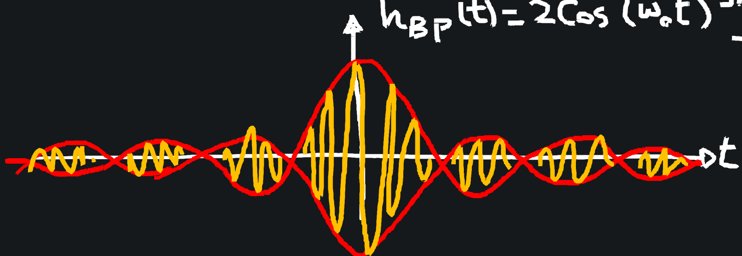
۲) فیلتر بالا گذر Highpass

$h_{Hp}(t) = \delta(t) - \frac{\sin(\omega_l t)}{\pi t}$



۳) فیلتر میان گذر Bandpass

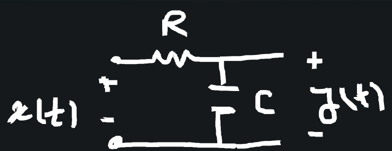
$h_{BP}(t) = 2\cos(\omega_0 t)\frac{\sin(\frac{\Delta\omega}{2}t)}{\pi t}$



۴) فیلتر میان نگذر Band reject

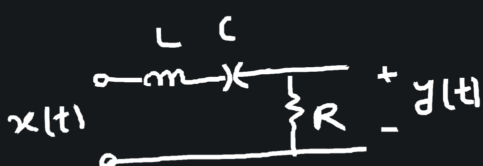
$h_{Br}(t) = \delta(t) - 2\cos(\omega_0 t)\frac{\sin(\frac{\Delta\omega}{2}t)}{\pi t}$

نمونه‌هایی از فیلترهای واقعی:

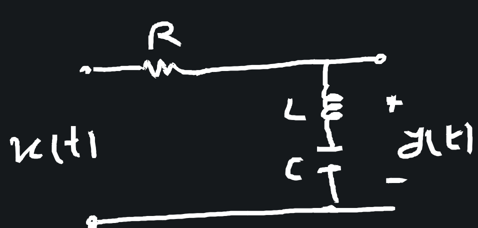


$$\rightarrow H_{lp}(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega RC} \rightarrow h_{lp}(t)=\frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t)$$

$$\rightarrow H_{hp}(j\omega)=\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC} \rightarrow h_{hp}(t)=\frac{d}{dt}\left(e^{-t/RC}u(t)\right)=\frac{-1}{RC}e^{-t/RC}u(t)+\delta(t)$$



$$\rightarrow H_{Bp}(j\omega)=\frac{R}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)} \rightarrow h_{Bp}(t)=e^{-\frac{R}{2L}t}\left[\frac{R}{L}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\,t\right)u(t)-\frac{R^2}{2L^2}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}\sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\,t\right)u(t)\right]$$



$$\rightarrow H_{Br}(j\omega)=\frac{j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)} \rightarrow h_{Br}(t)=\delta(t)-h_{Bp}(t)$$