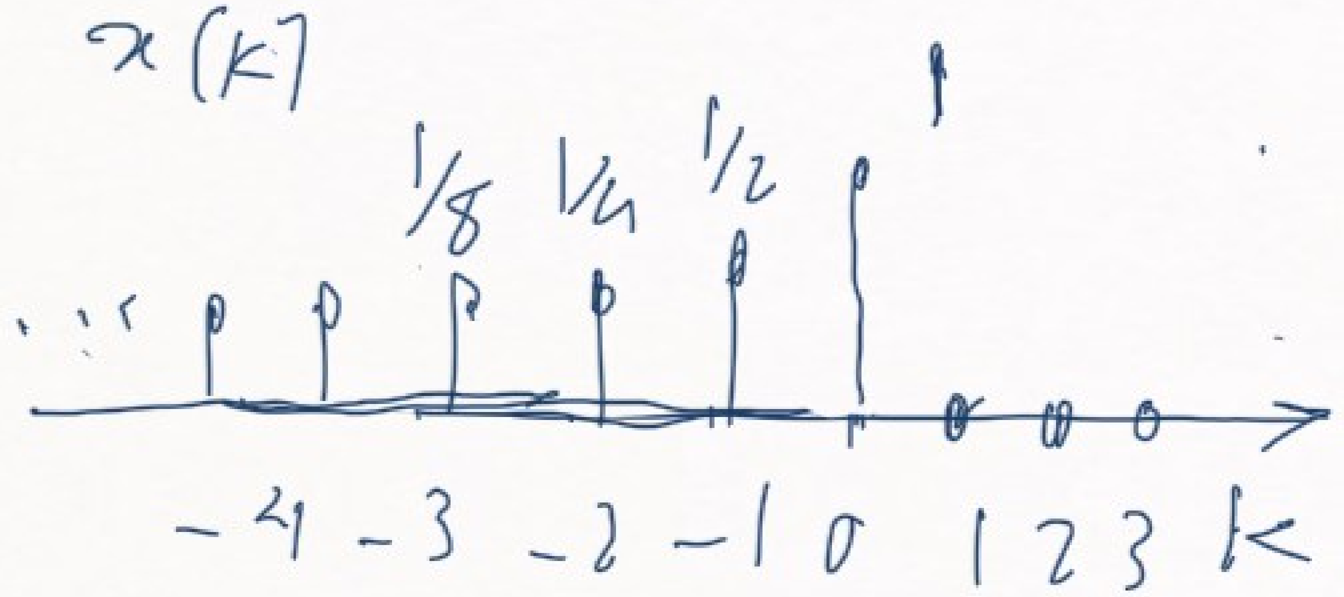
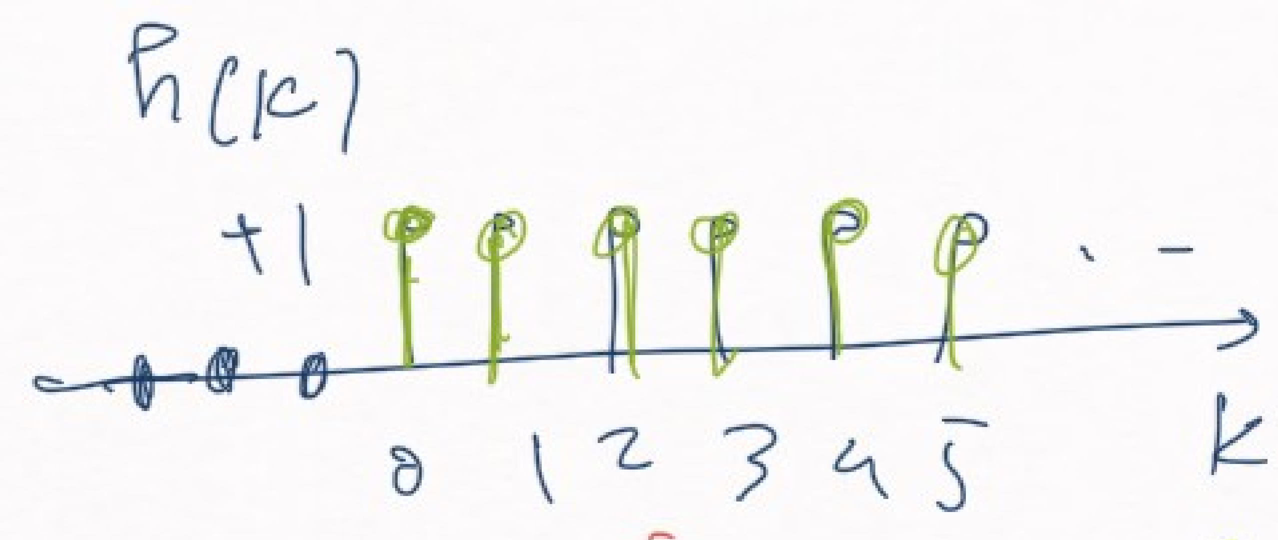
حل چند مثال

$$y[n]=\sum_{-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k] = \sum_{k=-\infty} x[n-k]\,h[k]$$

مثال ۱

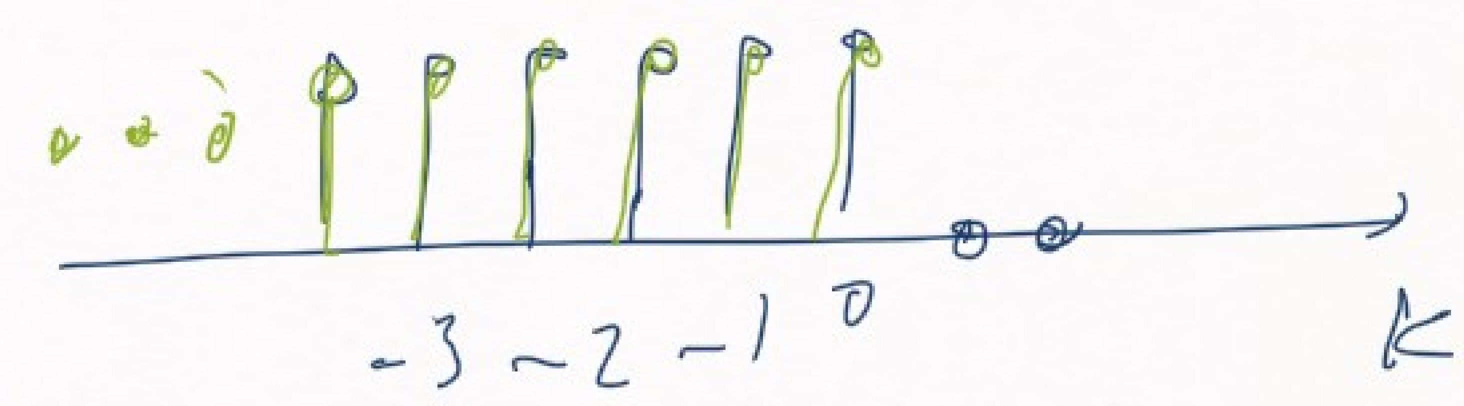
$$x[n]=2^{n}u[-n]\ ,\quad h[n]=u[n] \longrightarrow y[n]=x[n]*h[n]=\ ?$$

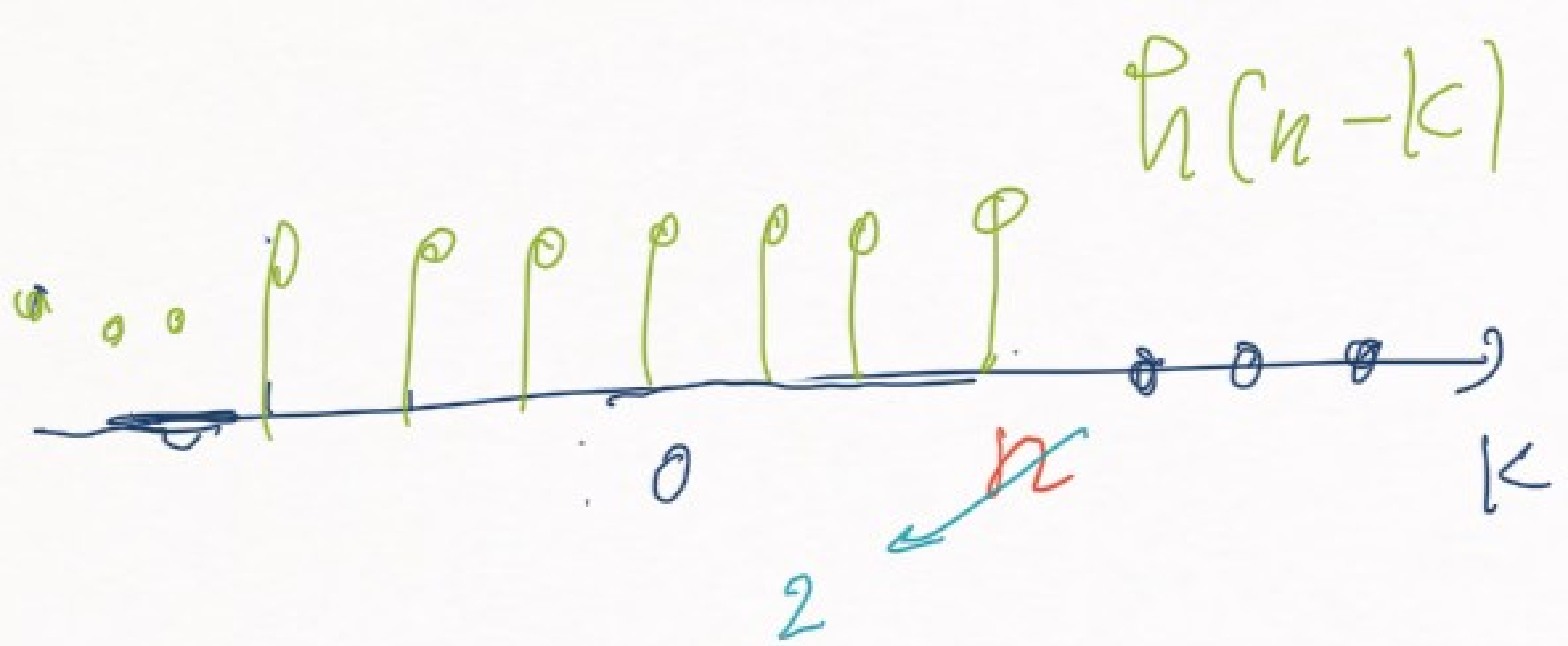


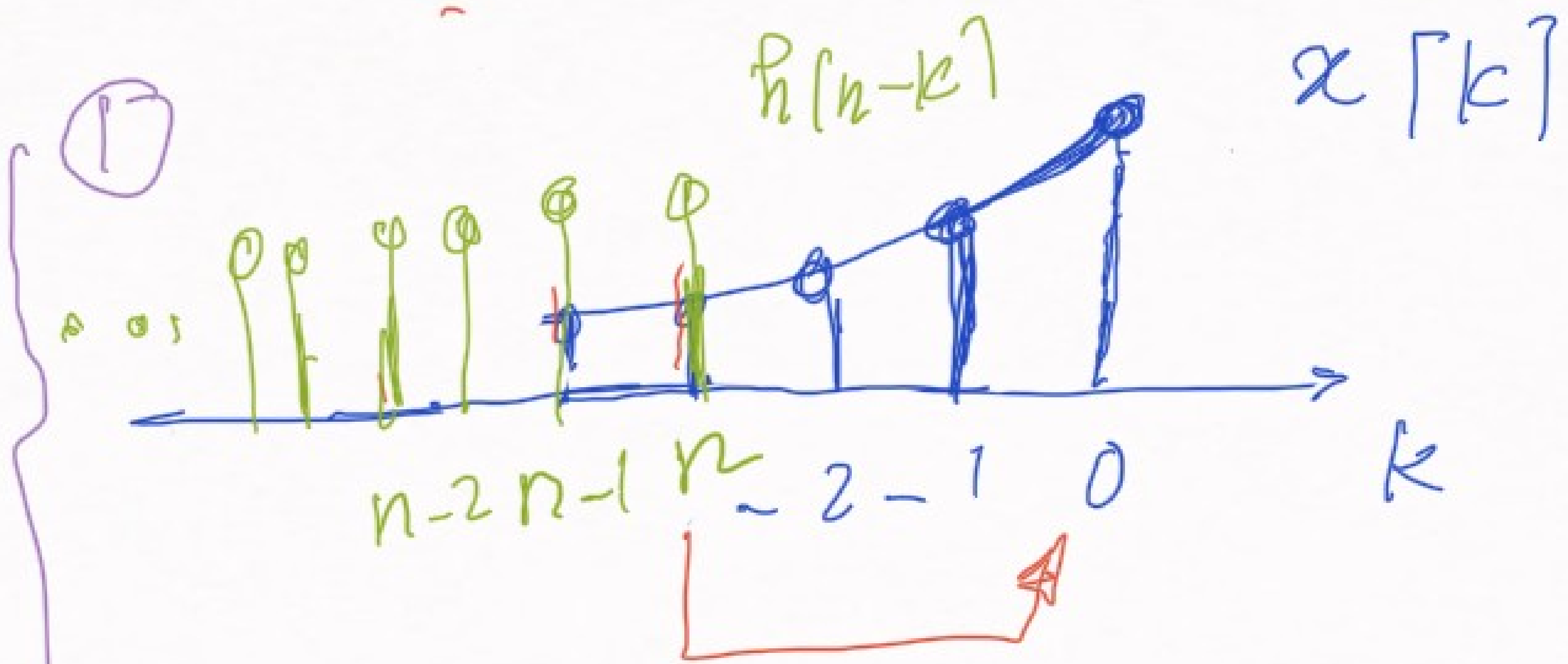


$\Longrightarrow$

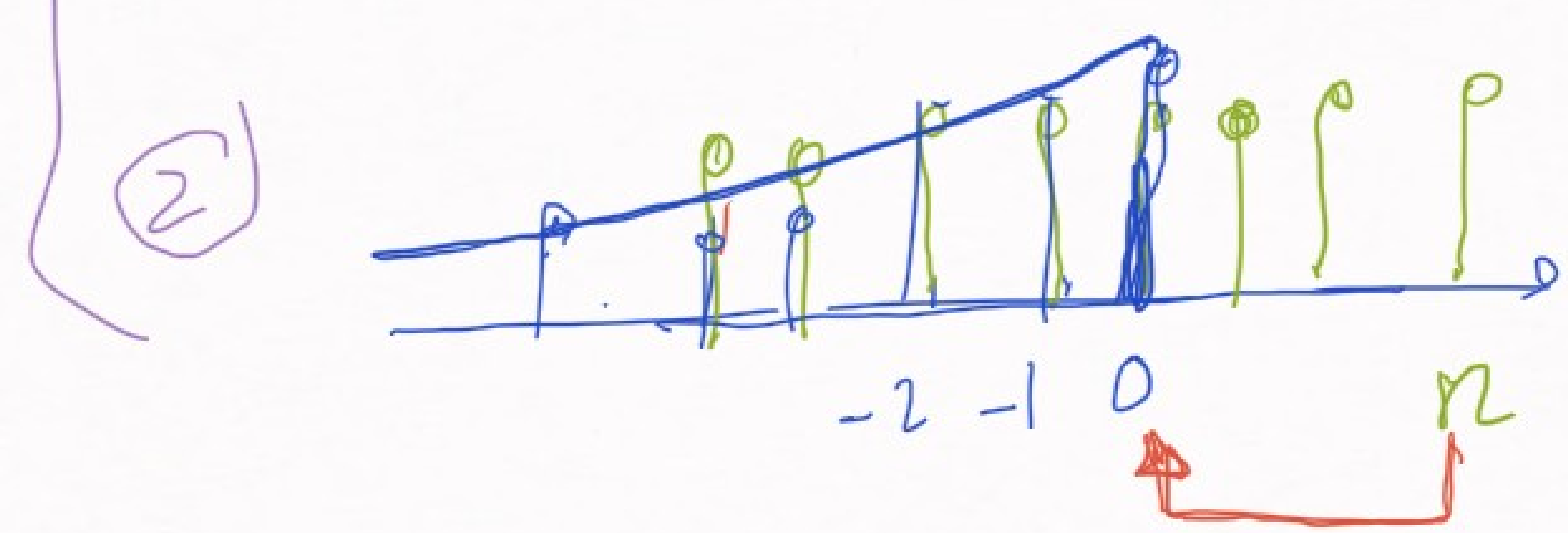
$u[-k]=h[-k]$







$$n<0 \Longrightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} 1\times 2^{k}$$



$$n>0 \Longrightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{0} 1\times 2^{k}$$

توجه: معادله $x[k]$ برای $k<0$ برابر 2^k است.

$$① \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^{k} = \sum_{m=+\infty}^{0} 2^{n-m} = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{n-m} = 2^{n} \sum_{m=0}^{\infty} (1/2)^{m} = 2^{n}\left(\frac{1}{1-1/2}\right)$$

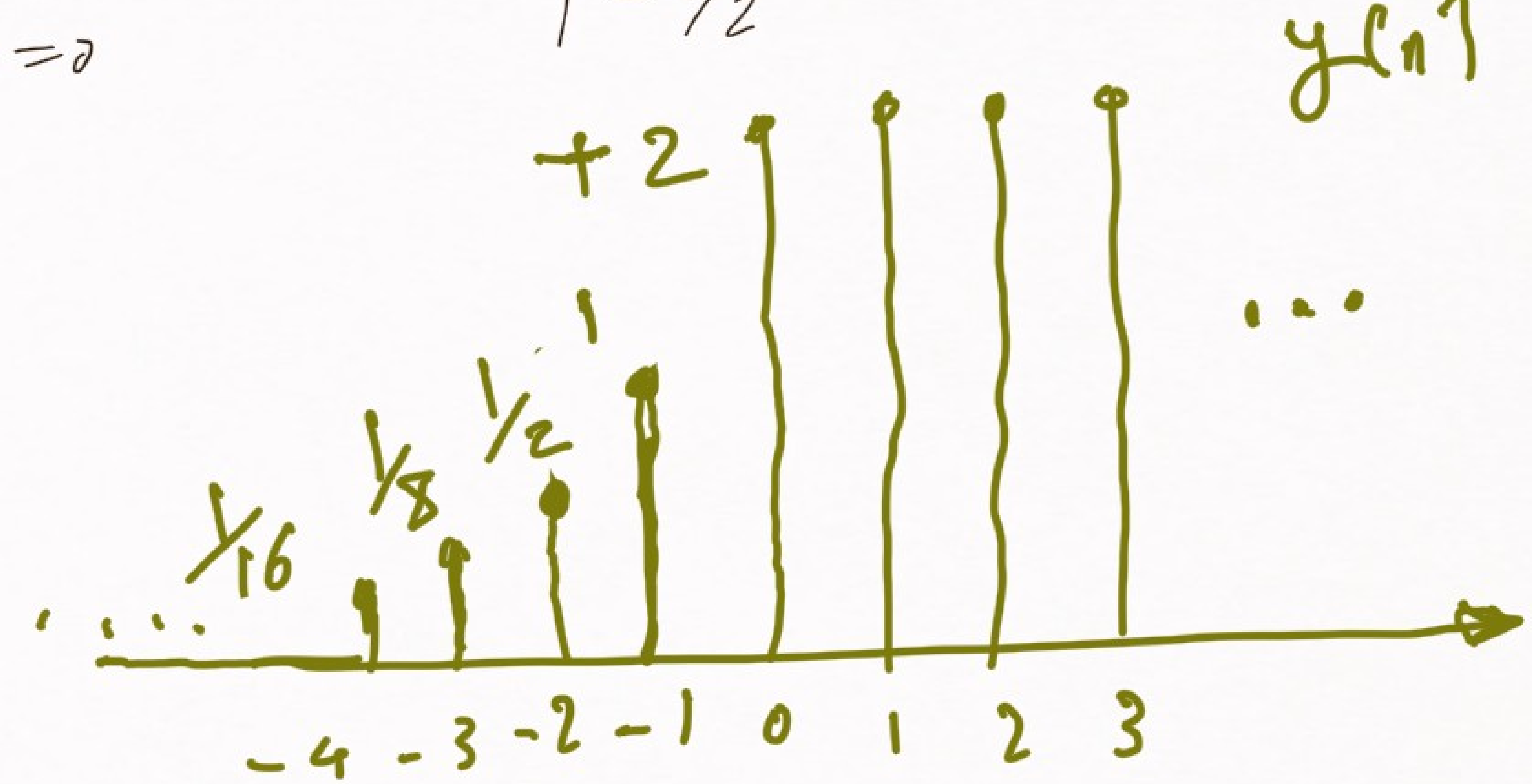
$$m = n-k \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = +\infty \end{cases}$$

$$k = n-m$$

$$\Longrightarrow \boxed{y[n] = 2^{n+1}} \rightarrow \text{for } n<0$$

$$② \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{0} 2^{k} = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty} (1/2)^{m} = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

$$\Longrightarrow \boxed{y[n] = 2} \rightarrow \text{for } n \geq 0$$



مثال ۲.

$$\begin{cases} x[n] = (1/2)^n u[n] + 2^n u[-n] \\ h[n] = u[n] \end{cases} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n] = ?$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = u[n] * \left[(1/2)^n u[n] + 2^n u[-n]\right]$$

$$y[n] = \underbrace{u[n] * (1/2)^n u[n]}_{y_1[n]} + \underbrace{u[n] * 2^n u[-n]}_{y_2[n]}$$

$y_2[n] \longrightarrow$ مثل قسمت قبل حل میشه.

$$y_1[n] = u[n] * (1/2)^n u[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[n-k]\,(1/2)^k u[k] = \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k \underbrace{u[n-k]}$$

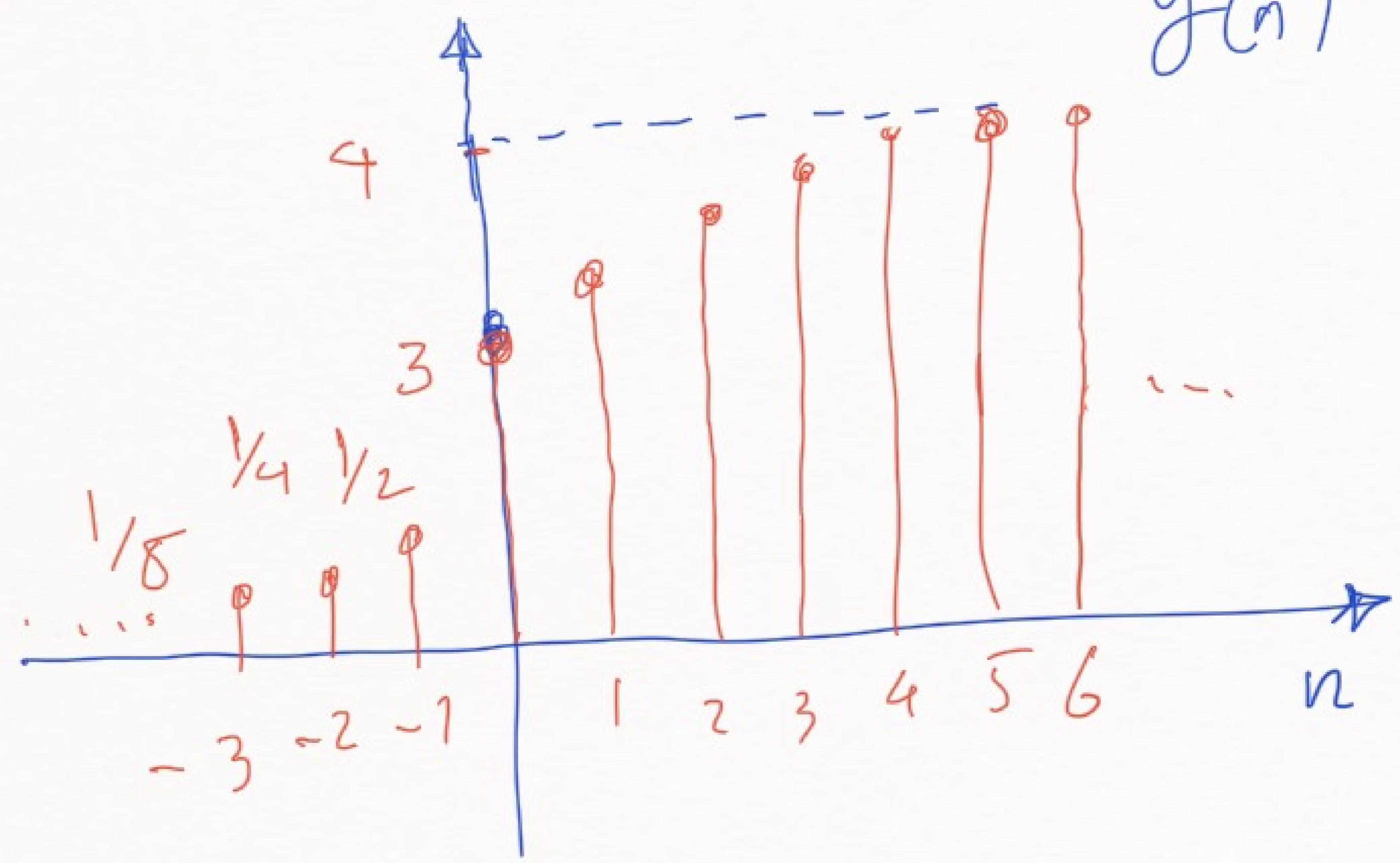
$$u[n-k] = \begin{cases} 1, & n \geq k \\ 0, & n < k \end{cases}$$

پس سیگما تا n می‌شود.

$$\boxed{y_1[n] = \sum_{k=0}^{n} (1/2)^n = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}} \quad \text{for } n \geq 0$$

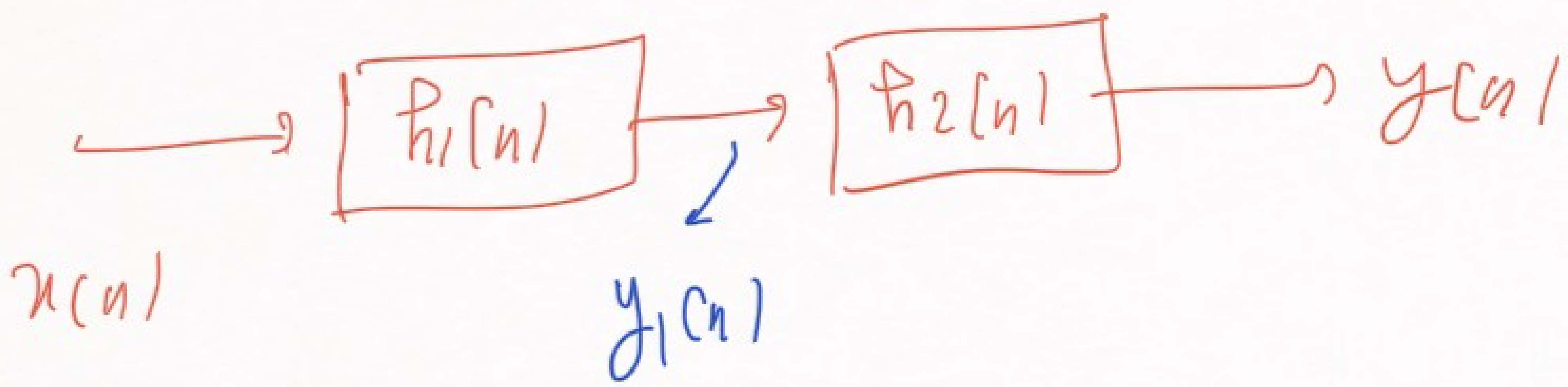
تا اینجا!

$y[n] = y_1[n] + y_2[n]$



مثال ۳ـ

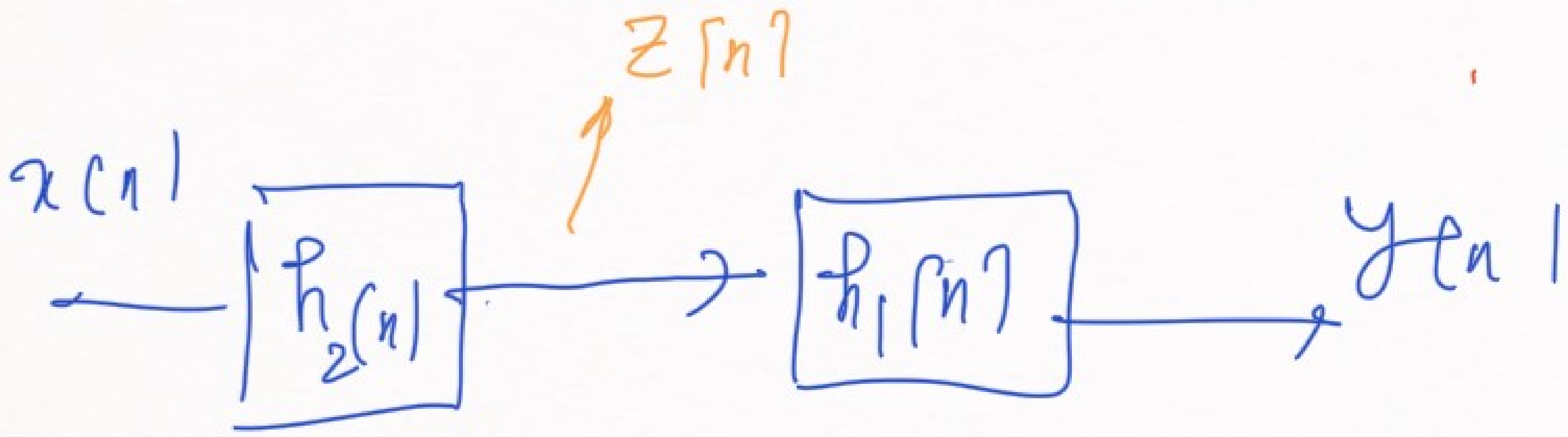
$$\begin{cases} x[n] = (1/8)^n u[n] \\ h_1[n] = \cos 3n + \sin 3n \\ h_2[n] = \delta[n] - 1/8\, \delta(n-1) \end{cases} \longrightarrow y[n] = ?$$



$$\begin{cases} y_1[n] = x[n] * h_1[n] = (1/8)^n u[n] * (\cos 3n + \sin 3n) \\ y[n] = y_1[n] * h_2[n] \end{cases}$$

اگر مسئله را این صورت بخواهیم حل کنیم سخته

احتیاج: می‌بینیم که ولی اگر از خواص کانولوشن استفاده کنیم.



ابتدا $y_1[n]=x[n]*h_1[n]$ را پیدا کنیم نسبت به ۰ است

shift پیدا نمی‌کند

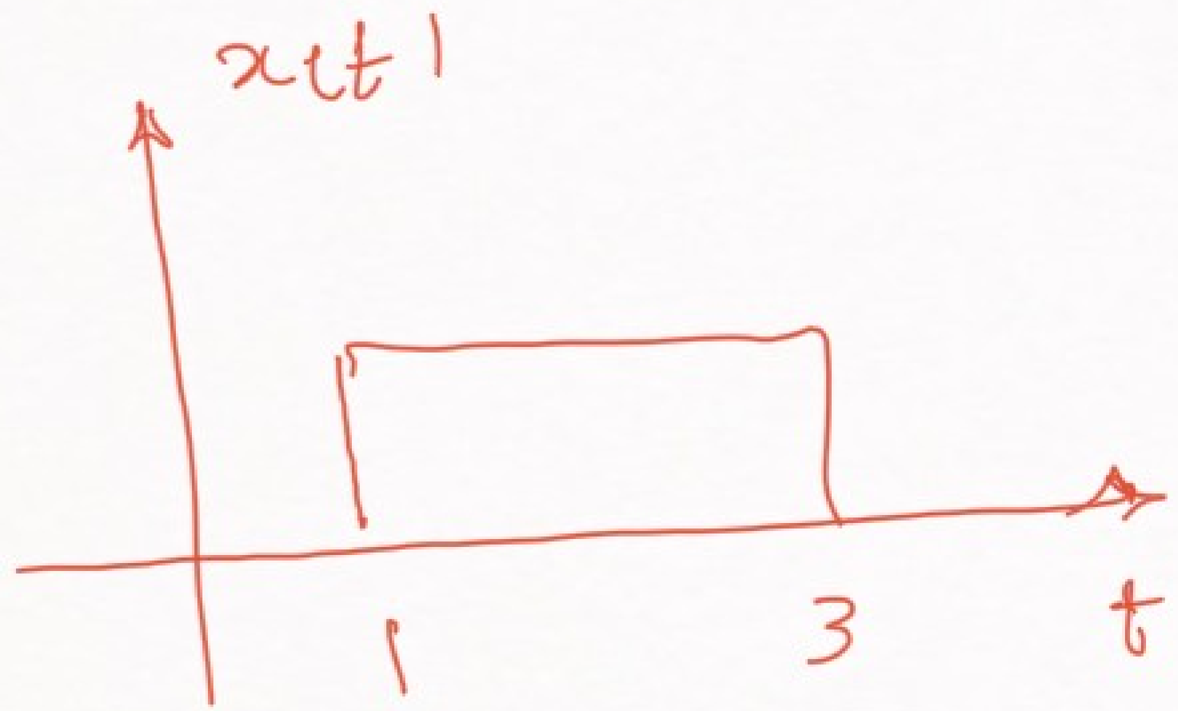
$$z[n]=x[n]*h_2[n]=\left(\tfrac{1}{8}\right)^n u[n]*\left[\delta[n]-\tfrac{1}{8}\delta[n-1]\right]=\left(\tfrac{1}{8}\right)^n u[n]*\delta[n]-\left(\tfrac{1}{8}\right)^n u[n]*\tfrac{1}{8}\delta[n-1]$$

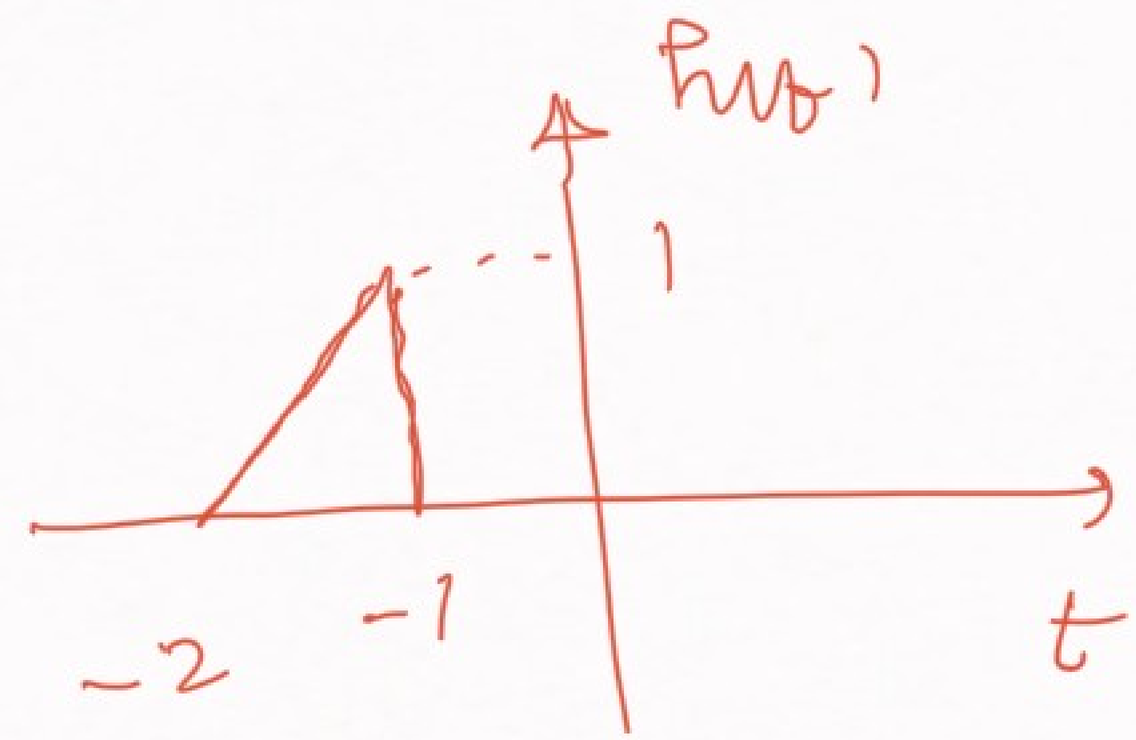
$$z[n]=\left(\tfrac{1}{8}\right)^n u[n]-\left(\tfrac{1}{8}\right)\left[\left(\tfrac{1}{8}\right)^{n-1} u[n-1]\right]=\left(\tfrac{1}{8}\right)^n \big(\underbrace{u[n]-u[n-1]}_{\delta[n]}\big)=\left(\tfrac{1}{8}\right)^n \delta[n]=$$

$$\Longrightarrow z[n]=\left(\tfrac{1}{8}\right)^n \delta[n]=\left(\tfrac{1}{8}\right)^0 \delta[n]=\delta[n]$$

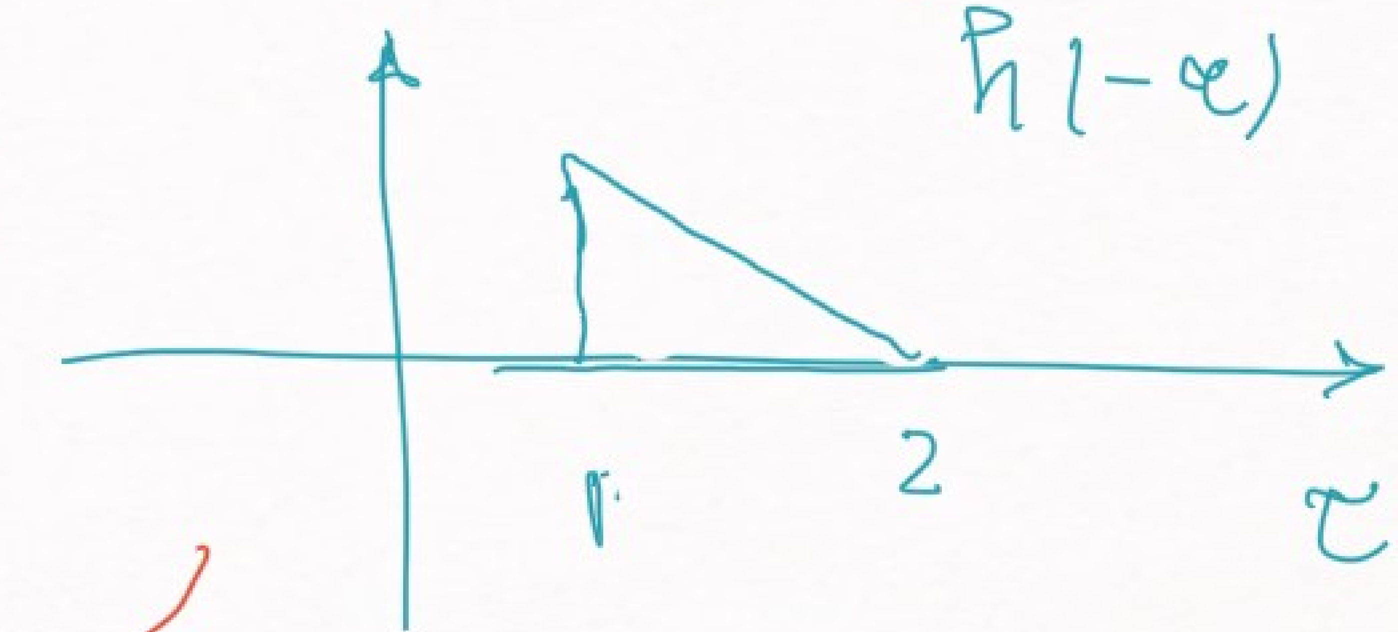
$$\Longrightarrow y[n]=z[n]*h_1[n]=\delta[n]*(\cos 3n+\sin 3n)=\boxed{\cos 3n+\sin 3n}$$

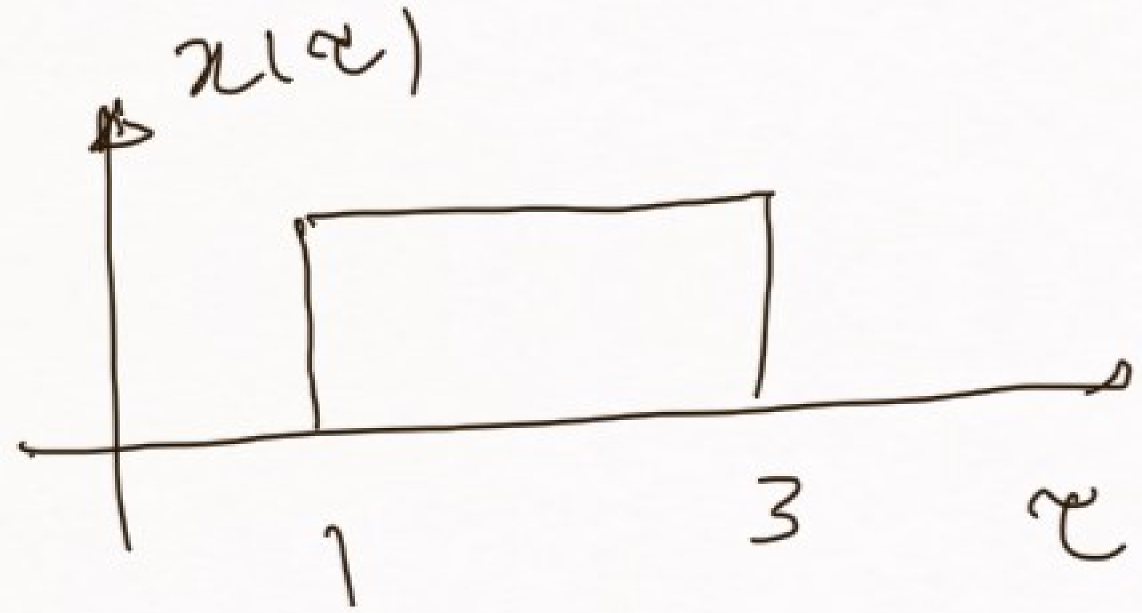
مثال ۴-

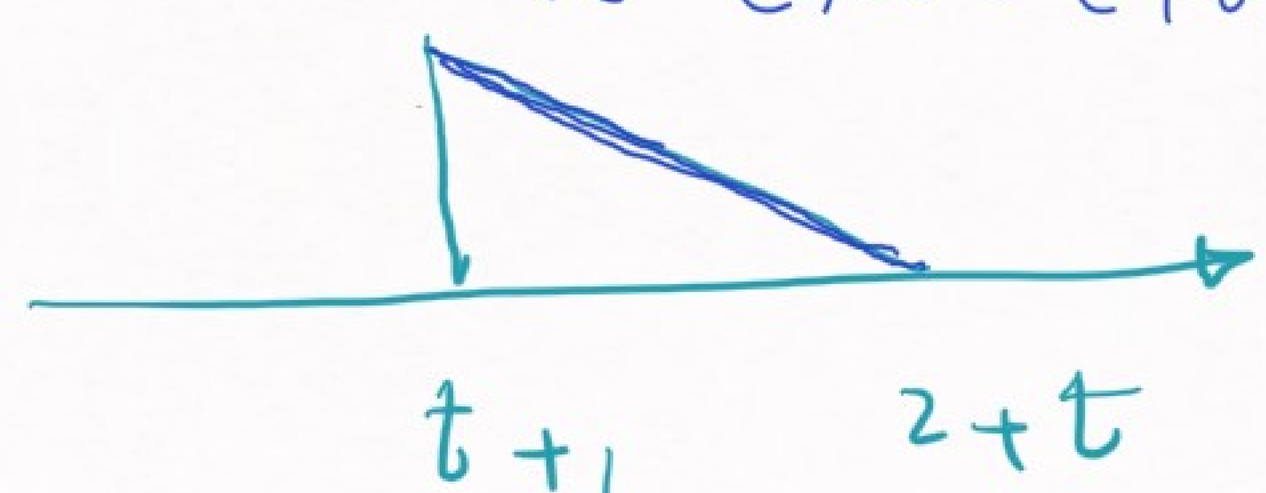




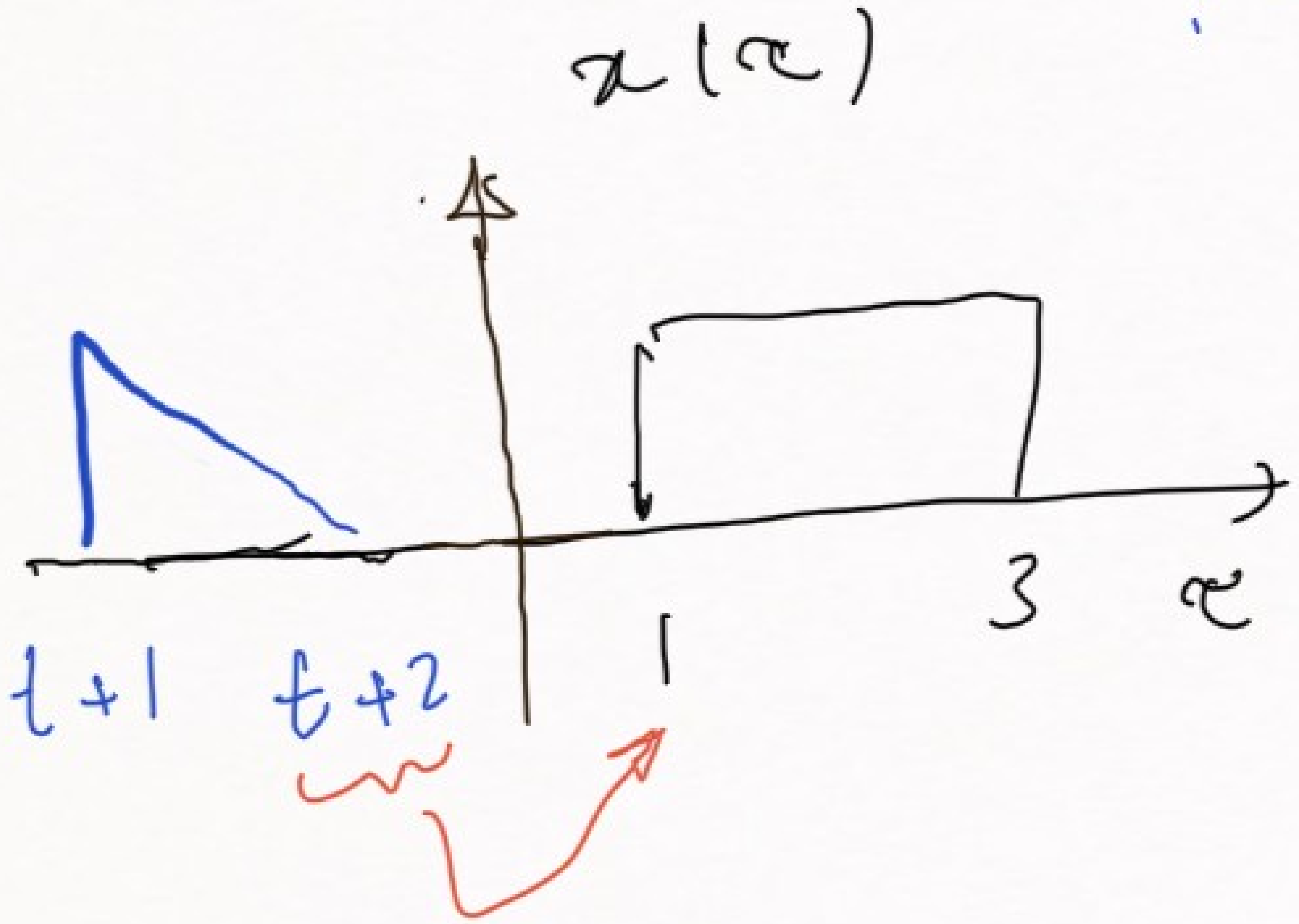
$$\rightarrow y(t) = x(t) * h(t) = ?$$







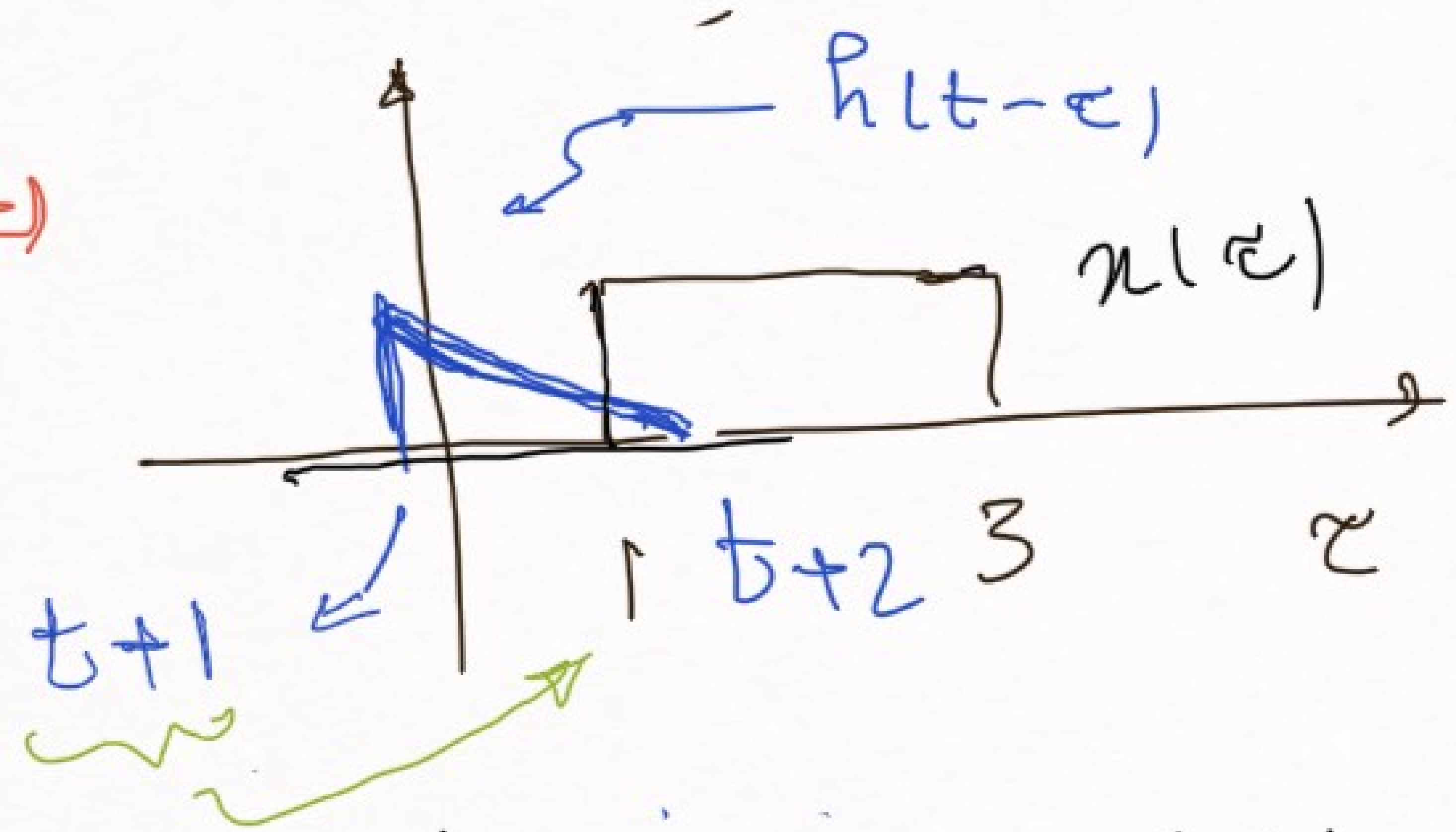
حال $h(t-\tau)$ را به ازای مقادیر مختلف t در شکل $x(\tau)$ می لغزانیم و خواهیم داشت:



① $t+2=1 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow t<-1 \Rightarrow$

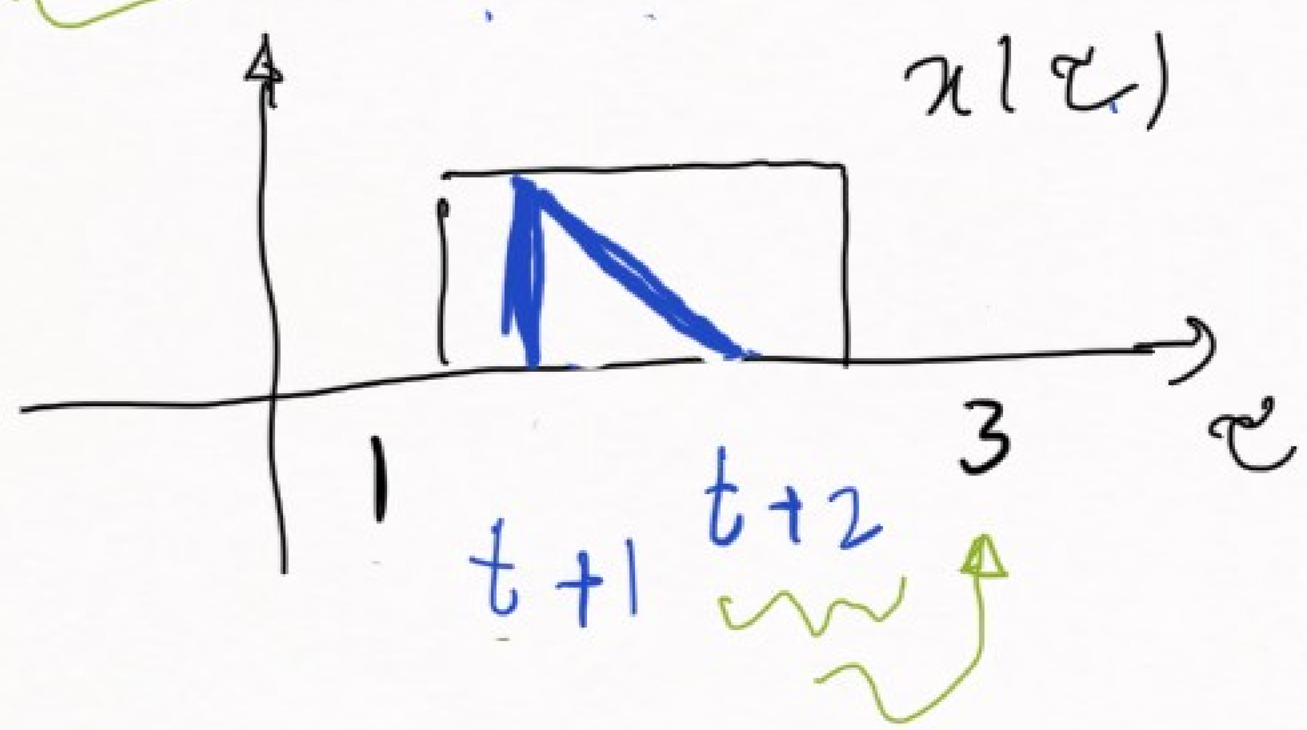
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = 0$$

2 ⟹



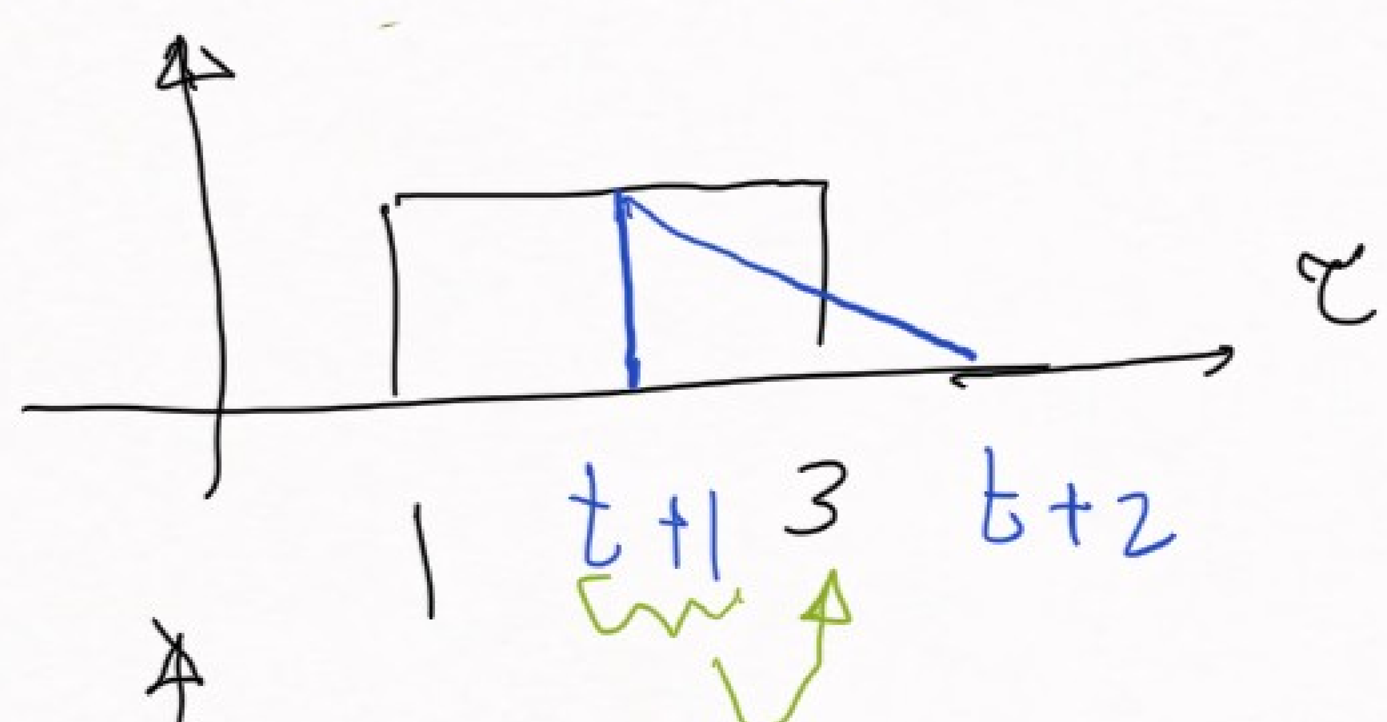
$-1<t<0 \Longrightarrow y(t)=\int_{1}^{t+2} 1\times(-\tau+t+2)\,d\tau = \boxed{\frac{1}{2}(t+1)^2}$

3 ⟹



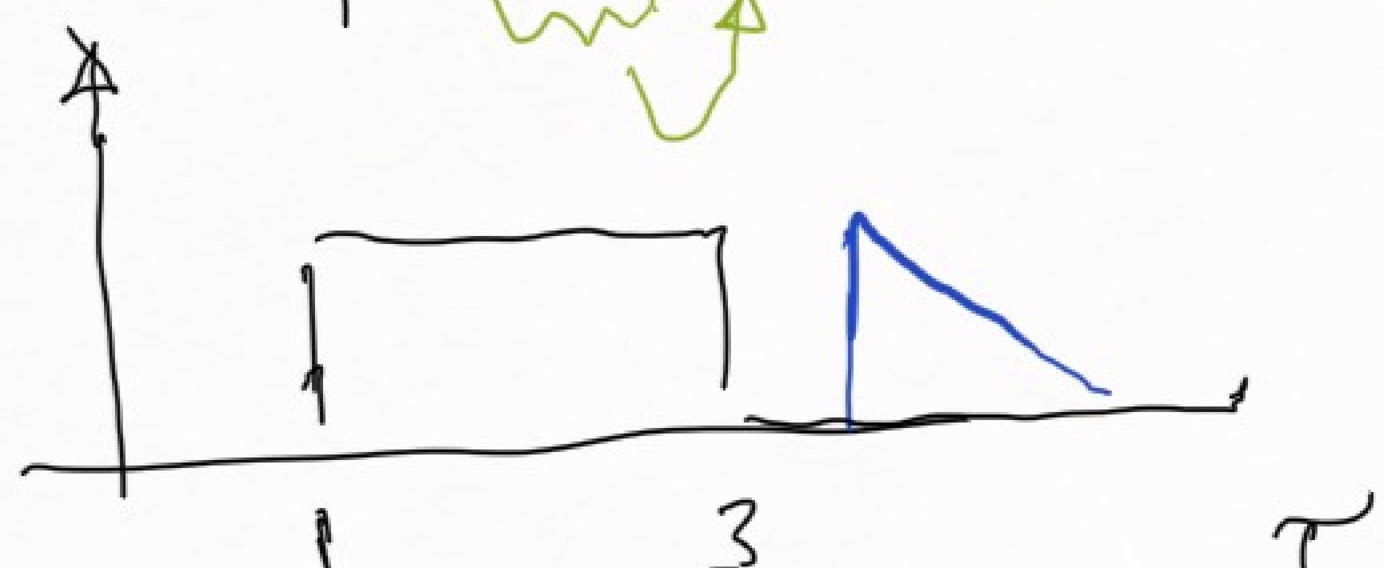
$0<t<1 \rightarrow y(t)=\int_{t+1}^{t+2}(-\tau+t+2)\,d\tau = \boxed{\frac{1}{2}}$

4 ⟹



$1<t<2 \rightarrow y(t)=\int_{t+1}^{3}(-\tau+t+2)\,d\tau = \boxed{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(t-1)^2}$

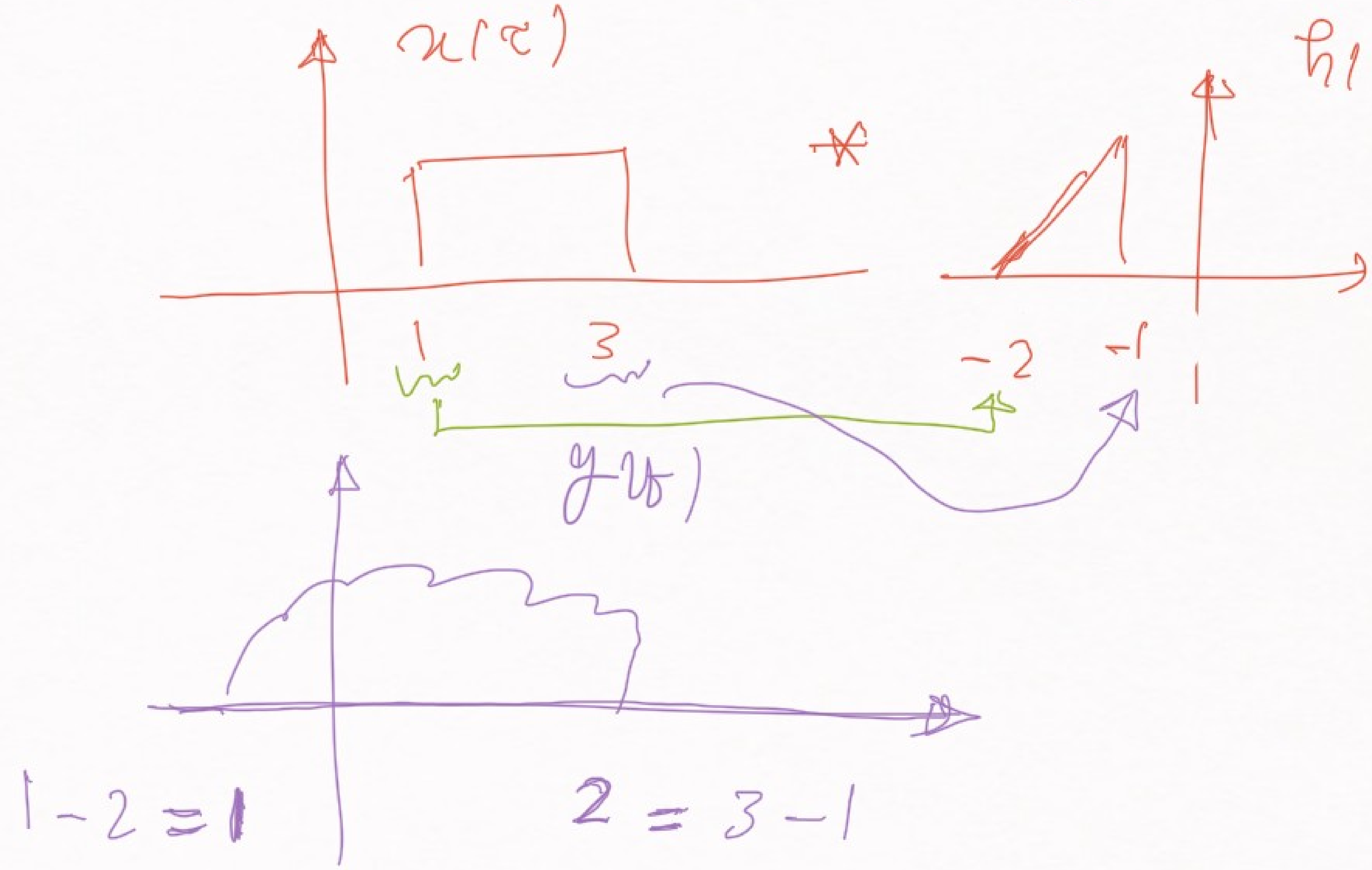
5 ⟹



$t>2 \rightarrow \boxed{y(t)=0}$

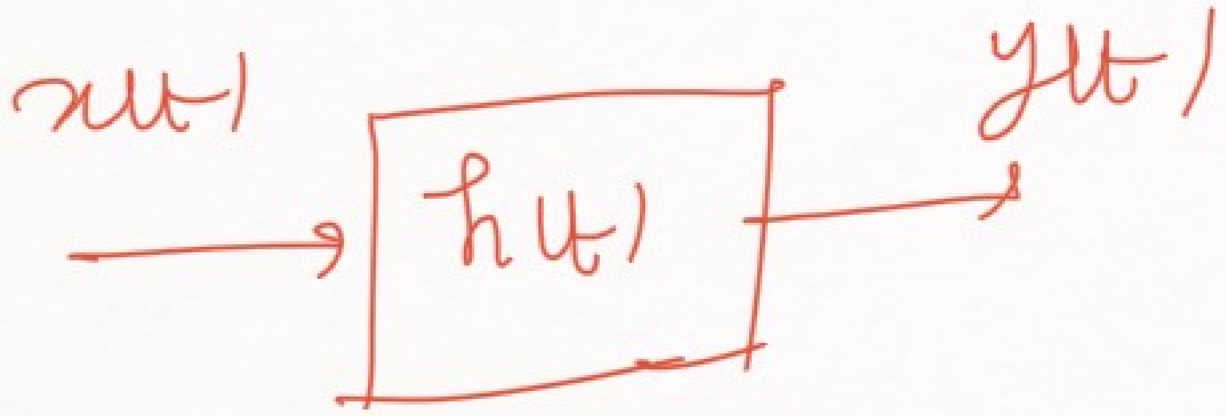
$$
y(t) = \begin{cases} 0 , & t < -1 \\ \frac{1}{2}(t+1)^2 ; & -1 < t < 0 \\ \frac{1}{2} ; & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(t-1)^2 ; & 1 < t < 2 \\ 0 ; & t > 2 \end{cases}
$$

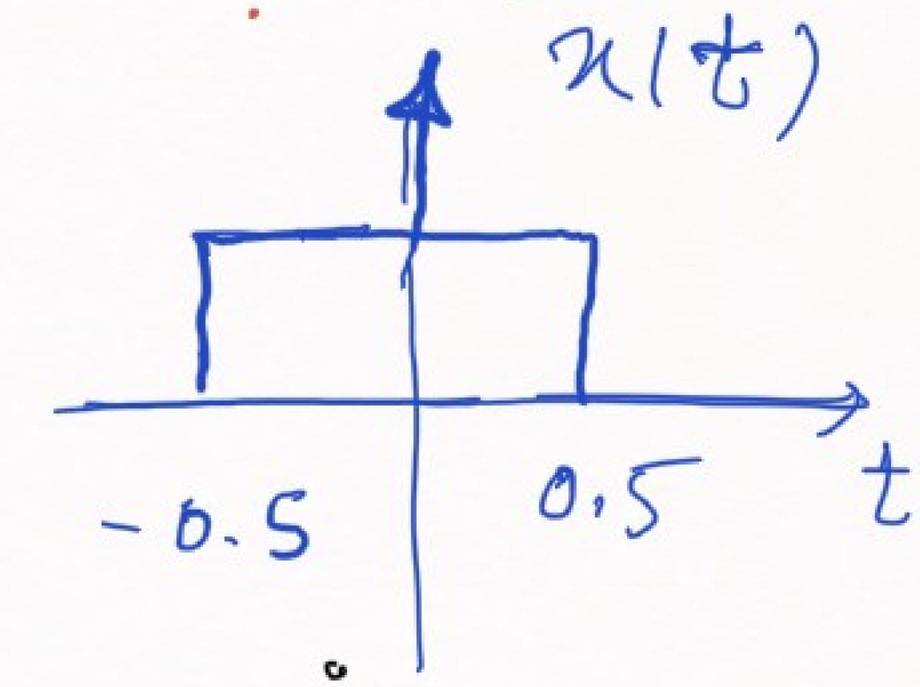
یادآوری - شیفت معکوس!



تمرین ۵- فرض کنید $x(t)=u(t+0.5)-u(t-0.5)$ ورودی یک سیستم با پاسخ ضربه $h(t)=e^{j\omega_0 t}$

مقدار ω_0 را طوری پیدا نمایید که خروجی $y(t)=0$ باشد. آیا تنها مقدار ω_0 همین می‌باشد؟



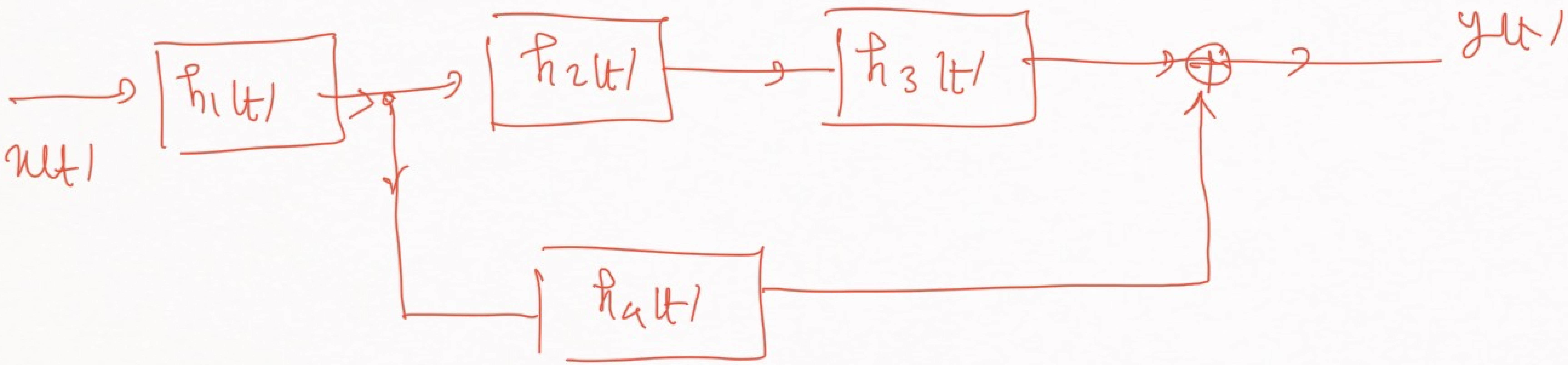


$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau=\int_{-0.5}^{0.5} 1\times e^{j\omega_0(t-\tau)}\,d\tau$$

$$=e^{j\omega_0 t}\int_{-0.5}^{0.5} e^{-j\omega_0\tau}\,d\tau=e^{j\omega_0 t}\left(\frac{e^{-j\omega_0\tau}}{-j\omega_0}\Bigg|_{-0.5}^{0.5}\right)=e^{j\omega_0 t}\left[\frac{e^{-j\omega_0/2}-e^{j\omega_0/2}}{-j\omega_0}\right]$$

$$\Longrightarrow y(t)=e^{j\omega_0 t}\left(\frac{\sin\omega_0/2}{\omega_0/2}\right)\longrightarrow \sin\omega_0/2=0\Longrightarrow \boxed{\omega_0=2\pi,\ldots}$$

مسئله ۶ -



پاسخ ضربه کلی سیستم را بدست آورید.

$$h_1(t) = e^{-t}u(t)$$

$$h_2(t) = u(t)$$

$$h_3(t) = e^{-3t}u(t)$$

$$h_4(t) = e^{-3t}u(t)$$

$$h(t) = h_1(t) * [h_2(t) * h_3(t) + h_4(t)]$$

$$h_2(t) * h_3(t) = u(t) * e^{-3t}u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)e^{-3\tau}u(\tau)\,d\tau$$

$$= \cdots = \tfrac{1}{3}(1-e^{-3t})u(t)$$

$$h(t) = \tfrac{1}{3}(1-e^{-3t})u(t)$$

بقیه را خودتان انجام دهید:

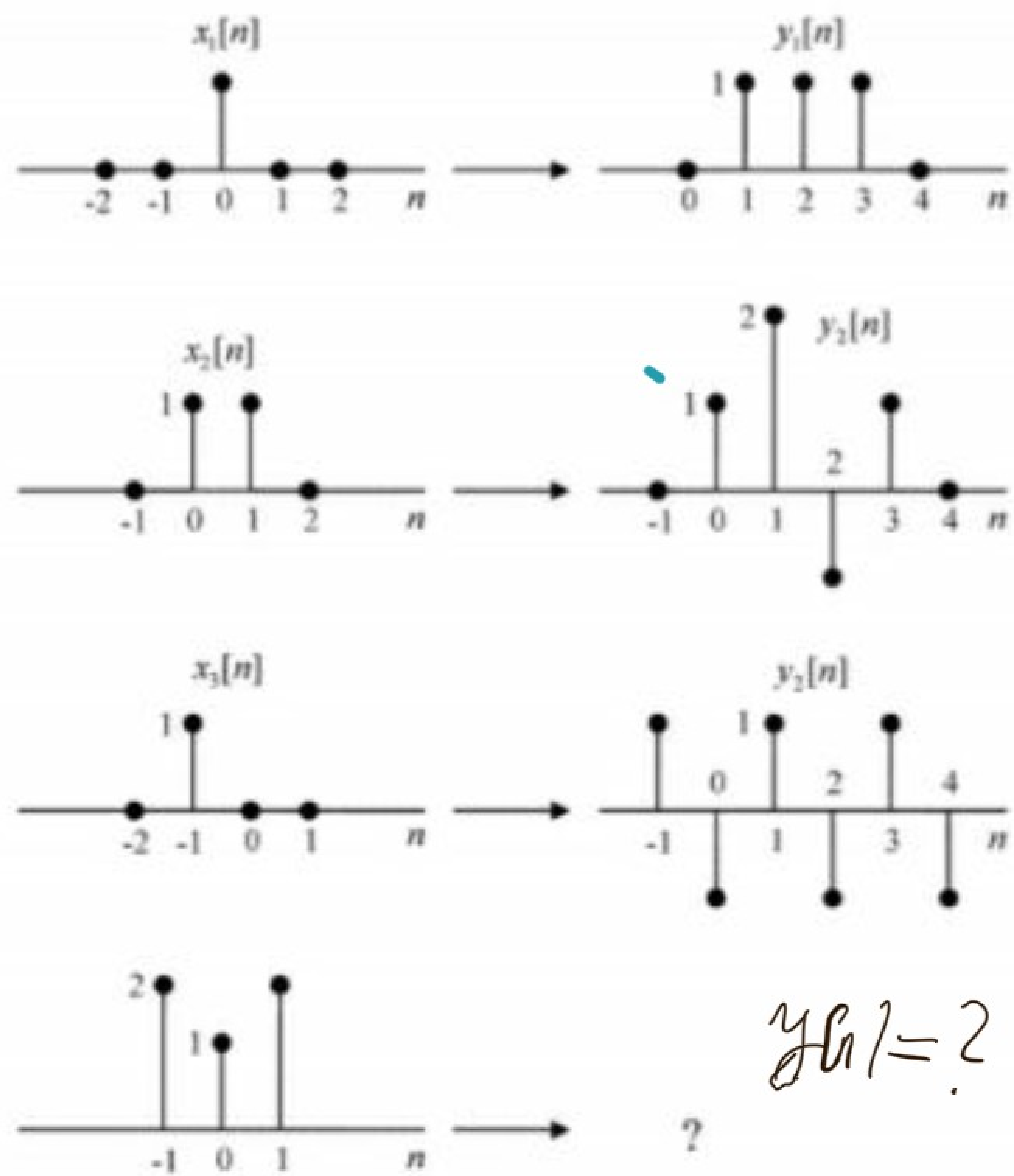
مثال ۷-

$x[n] \rightarrow \boxed{?} \rightarrow y[n]$

می‌خواهیم سیستم خطی مقابل را شناسایی کنیم. سیگنال‌های $x_1[n]$ و $x_2[n]$ و $x_3[n]$ به سیستم وارد شده و خروجی‌های مربوطه بدست آمده‌اند.

الف) آیا سیستم علاوه بر خطی می‌تواند مستقل از زمان هم باشد؟

ب) پاسخ سیستم به $x(n)$ را بدست آورید.



$x(n)$

$y(n) = ?$

الف) اگر سیستم مستقل از زمان هم باشد در این صورت:

$x_1[n] = \delta[n] \longrightarrow y_1[n]$

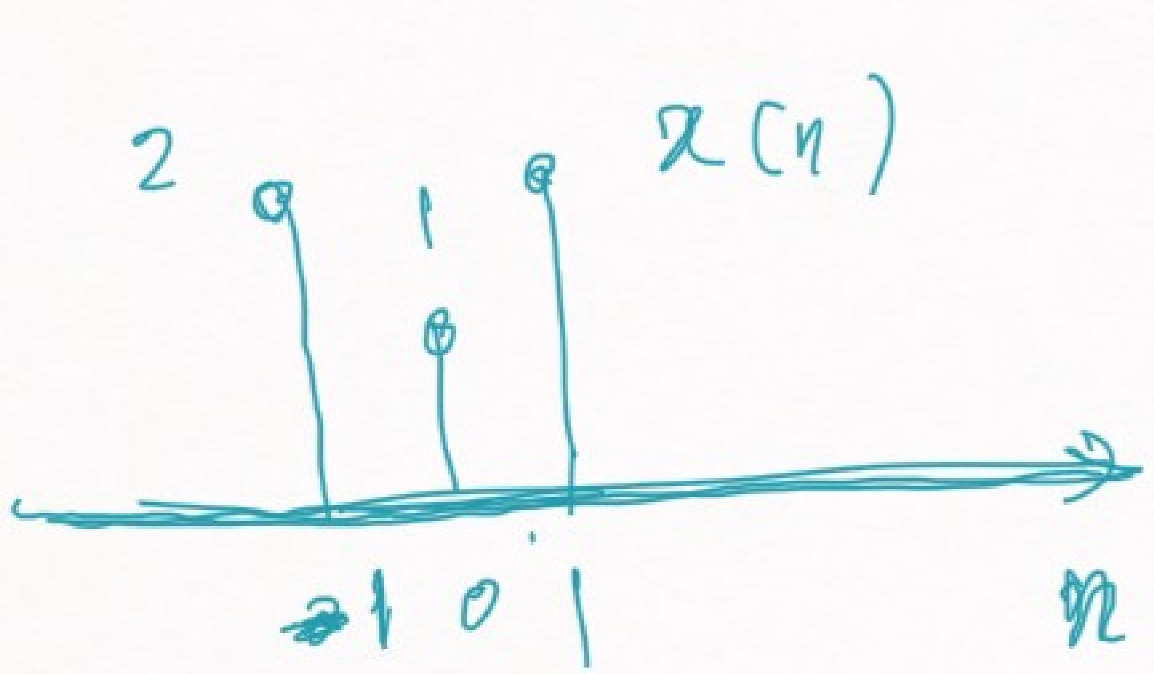
اگر ... آنگاه:

$x_3[n] = \delta[n+1] \longrightarrow y_3[n] = y_1[n+1]$

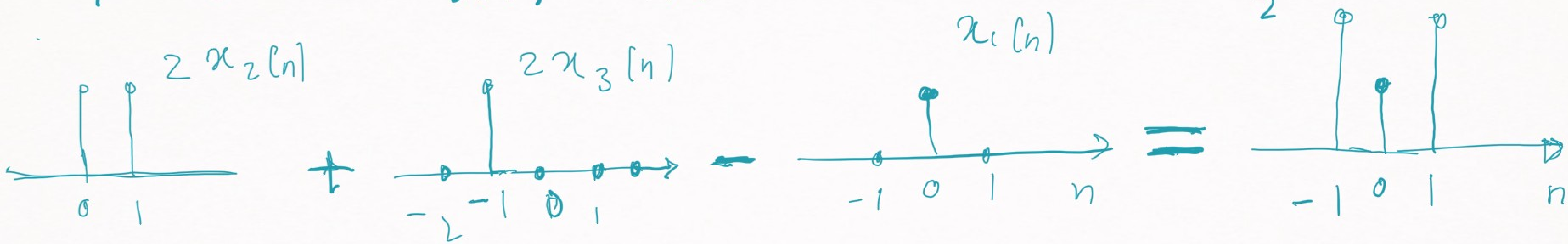
ولی $y_3[n] \neq y_1[n+1]$

بنابراین سیستم مستقل از زمان نیست

ثانیاً - برای پیدا کردن پاسخ سیستم به ورودی $x[n]$ می‌توان $x[n]$ را ترکیب خطی سه ورودی $x_1[n]$ ، $x_2[n]$ و $x_3[n]$ به صورت زیر در نظر گرفت یعنی:



$$x[n] = 2\left[x_2[n] + x_3[n]\right] - x_1[n]$$



$$\boxed{y[n] = 2\left[y_2[n] + y_3[n]\right] - y_1[n]}$$

با توجه به اینکه سیستم خطی است ـــ بنابراین خروجی می‌شود