تبدیل فوریه سیگنال گسسته زمان: سیگنال گسسته زمان $x[n]$ به شرط اینکه دارای انرژی کمی باشد دارای تبدیل فوریه همگرا می‌باشد. تبدیل فوریه سیگنال از رابطه $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ به دست می‌آید.

عکس تبدیل فوریه: از روی تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ می‌توان به کمک رابطه $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ به سیگنال حوزه زمان $x[n]$ رسید.

خاصیت مهم: تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ متناوب با دوره تناوب 2π است (اثبات)

$$X(e^{j\omega+2\pi}) \overset{?}{=} X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j(\omega+2\pi)n} = \sum x[n] e^{-j\omega n} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi n}}_{1} = X(e^{j\omega})$$

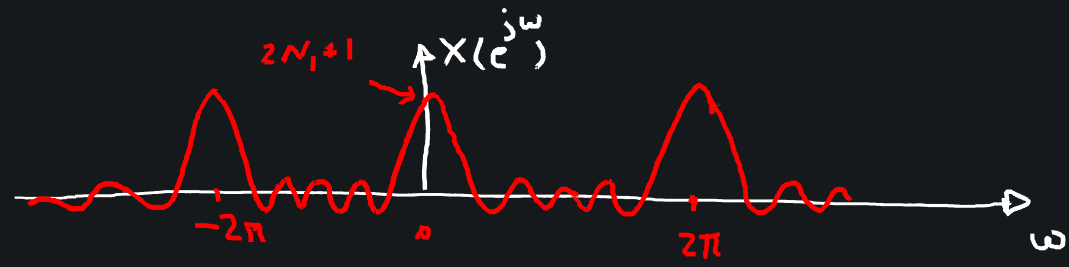
مثال: تبدیل فوریه سیگنال پنجره را بدست آورید.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} 1 \times e^{-j\omega n} = \frac{(e^{-j\omega})^{-N_1} - (e^{-j\omega})^{N_1+1}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega \times \frac{1}{2}} \left[e^{+j\omega(N_1+\frac{1}{2})} - e^{-j\omega(N_1+\frac{1}{2})} \right]}{e^{-j\omega \times \frac{1}{2}} \left[e^{+j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}} \right]} = \frac{\sin(\omega(N_1+\frac{1}{2}))}{\sin(\omega/2)}$$

قاعده هوپیتال

$$X(e^{j0}) = 2N_1+1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]$$



مثال: تبدیل فوریه $x[n]=a^n u[n]$ را بدست آورید.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{(ae^{-j\omega})^0 - (ae^{-j\omega})^{\infty+1}}{1-ae^{-j\omega}}$$

اگر $|a|<1$

$$= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

مثال: تبدیل فوریه $x[n]=-a^n u[-n-1]$ را بدست آورید.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n e^{-j\omega n} = -\frac{(ae^{-j\omega})^{-\infty} - (ae^{-j\omega})^0}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

اگر $|a|>1$

مثال: تبدیل فوریه $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$ را بدست آورید.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} e^{-j\omega n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{-1}{1-2e^{-j\omega}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{\frac{1}{2}e^{-j\omega} - \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}(e^{j\omega}-e^{-j\omega}) + \frac{1}{4}} = \frac{3/4}{\frac{5}{4} - \cos(\omega)}$$

تبدیل فوریه سیگنالهای متناوب: نشان دهید $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ دارای تبدیل فوریه $X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-\omega_0-2k\pi)$ است.

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi \sum \delta(\omega-\omega_0-2k\pi)\, e^{j\omega n}\, d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega-\omega_0)\, e^{j\omega_0 n}\, d\omega$$

$$= e^{j\omega_0 n}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega-\omega_0)\, d\omega = e^{j\omega_0 n}$$

حال سیگنال متناوب $x[n]$ که بصورت سری فوریه $x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$ قابل بیان است دارای تبدیل فوریه زیر است

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \, 2\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi m) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

مثال: تبدیل فوریه سیگنال $x[n]=2\cos\frac{\pi}{7}n - 3\sin\frac{3\pi}{5}n$ را بدست آورید.

$$N = \text{kmm}\{14, 10\} = 70$$

$$x[n] = 2\left[\frac{e^{j5\frac{2\pi}{70}n} + e^{-j5\frac{2\pi}{70}n}}{2}\right] - 3\left[\frac{e^{j21\frac{2\pi}{70}n} - e^{-j21\frac{2\pi}{70}n}}{2j}\right]$$

$$\begin{cases} a_k = 0 & \text{سایر} \\ a_5 = a_{-5} = 1 \\ a_{21} = -a_{-21} = \frac{-3}{2j} \end{cases}$$

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega + \frac{2\pi 5}{70} - 2\pi m\right) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi 5}{70} - 2\pi m\right) - \frac{3}{2j}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega + \frac{2\pi\times 21}{70} - 2\pi m\right) + \frac{3}{2j}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi\times 21}{70} - 2\pi m\right)\right]$$

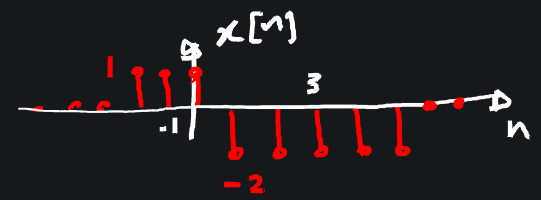
خواص تبدیل فوریه گسسته :

۱) خاصیت خطی : $Ax[n] + Bw[n] \xleftrightarrow{F} AX(e^{j\omega}) + BW(e^{j\omega})$

۲) خاصیت جابجایی زمان: $x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

۳) خاصیت جابجایی فرکانس: $e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

مثال : تبدیل فوریه



را بدست آورید.

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\sin(1+1/2)\omega}{\sin \omega/2} e^{j\omega} - 2\frac{\sin(2+1/2)\omega}{\sin(\omega/2)} e^{-j3}$$

مثال: تبدیل فوریه $z[n] = x[n]\cos\frac{2\pi}{7}n$ را بدست آورید.

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$\xleftrightarrow{F} \quad X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$z[n] = \frac{1}{2}x[n]e^{j\frac{2\pi}{7}n} + \frac{1}{2}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{7}n}$$

$$\xleftrightarrow{F} \quad Z(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}X\left(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{7})}\right) + \frac{1}{2}X\left(e^{j(\omega+\frac{2\pi}{7})}\right)$$

$$Z(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(\omega-\frac{2\pi}{7})}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(\omega+\frac{2\pi}{7})}}\right] = \frac{1-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{7}\times e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{7}e^{-j\omega}+\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}$$

۴) مزدوج گیری

$$x^*[n] \xleftrightarrow{F} X^*(e^{-j\omega})$$

تقارن هرمیتی: برای سیگنال‌های حقیقی داریم $x[n] = x^*[n]$ $\Leftarrow$ $\boxed{X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})}$ تقارن هرمیتی

- اگر $x[n]$ حقیقی و زوج باشد تبدیل فوریه آن هم حقیقی و زوج است.

$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$ تقارن زوج

- اگر $x[n]$ حقیقی و فرد باشد تبدیل فوریه آن موهومی خالص و فرد است.

$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$ تقارن فرد

$Re\{X(e^{j\omega})\} = Re\{X(e^{-j\omega})\}$ تقارن زوج

$Im\{X(e^{j\omega})\} = -Im\{X(e^{-j\omega})\}$ تقارن فرد

۵) وارونگی در زمان :

$$x[-n] \xleftrightarrow{F} X(e^{-j\omega})$$

۶) تفاضل‌گیری در زمان :

$$x[n]-x[n-1] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) - e^{-j\omega}X(e^{-j\omega})$$

$$(1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

۷) جمع اندازه‌ای در زمان :

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2k\pi)$$

مثال : تبدیل فوریه تابع پله را بدست آورید .

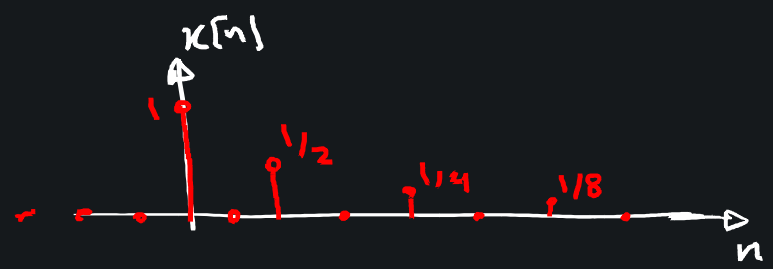
$$u[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta[m] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-e^{-j\omega}}\times 1 + \pi\times 1\times\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2k\pi)$$

۸) انبساط زمانی:

$$x_{(m)}[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{jm\omega})$$

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] & n \text{ مضرب } m \\ 0 & \text{غیره} \end{cases}$$

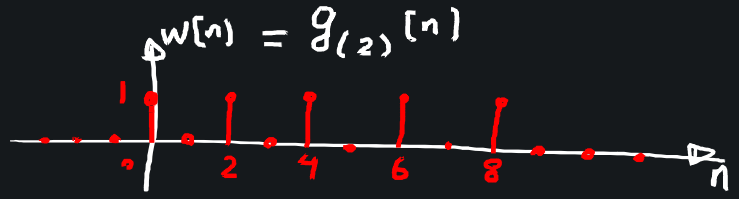
مثال: اگر $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ باشد تبدیل فوریه $x_{(2)}[n]$ را بدست آورید.



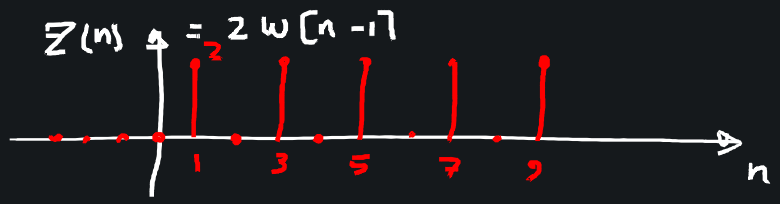
$$x_{(2)}[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j2\omega}}$$

مثال: تبدیل فوریه $x[n]$ را در فرم مختصر بدست آورید

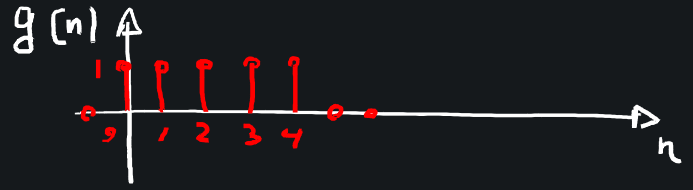
$$\xleftrightarrow{F} e^{-j4\omega}\left(1+2e^{-j\omega}\right)\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$



$$\xleftrightarrow{F} e^{-j4\omega}\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$



$$\xleftrightarrow{F} 2e^{-j\omega}e^{-j4\omega}\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$



$$\xleftrightarrow{F} e^{-j2\omega}\frac{\sin(2+1/2)\omega}{\sin(\omega/2)} = e^{-j2\omega}\frac{\sin(5/2\,\omega)}{\sin(\omega/2)}$$

۹) مشتق‌گیری در فرکانس:

$$n x[n] \xleftrightarrow{F} j \frac{d X(e^{j\omega})}{d\omega}$$

مثال: عکس تبدیل فوریه $X(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{(1+\frac{1}{3}e^{-j2\omega})^2}$ را بدست آورید

$$z[n] = \left(\frac{-1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$$z_{(2)}[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1+\frac{1}{3}e^{-j2\omega}}$$

$$n z_{(2)}[n] \xleftrightarrow{F} j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}e^{-j2\omega}}\right)$$

$$'' \xleftrightarrow{F} j\,\frac{j\times 2/3\, e^{-j2\omega}}{(1+\frac{1}{3}e^{-j2\omega})}$$

$$-3/2\, n z_{(2)}[n] \xleftrightarrow{F} \frac{e^{-j2\omega}}{(1+1/3\, e^{-j2\omega})^2}$$

$$-\frac{3}{2}(n+2) z_{(2)}[n+2] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(1+1/3\, e^{-j2\omega})^2}$$

۱۰) قضیه پارسوال:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

مثال: مقدار انتگرال $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\omega}{10/9 + 2/3 \cos\omega}$ را بدست آورید

$$\frac{1}{10/9 + 2/3 \cos\omega} = \frac{1}{|1 + \frac{1}{3} e^{-j\omega}|^2}$$

$$z[n] = (-1/3)^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1 + \frac{1}{3} e^{-j\omega}}$$

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} u[n] = \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{(1/9)^0 - (1/9)^{\infty+1}}{1 - 1/9} = \frac{1}{8/9} = 9/8$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\omega}{10/9 + 2/3 \cos\omega} = 2\pi \times 9/8$$

۱۱) خاصیت کانولوشن:

$$x[n] * h[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

مثال: پاسخ سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n] = \delta[n] - \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ به ورودی $x[n] = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ را بدست آورید.

$$H(e^{j\omega}) = 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} = \frac{-1/3\, e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} \quad ,$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{3}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

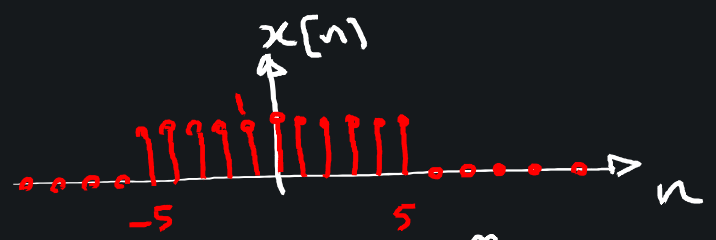
$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) = \frac{-e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{-6}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{6}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} \longrightarrow y[n] = -6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 6\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

۱۲) خاصیت ضرب:

$$x[n]\cdot w[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})\, W(e^{j(\omega-\theta)})\, d\theta$$

مثال: تبدیل فوریه سیگنال $Z[n]=x(n)\cos(\frac{\pi}{5}n)$ را بدست آورید:



$$\cos(\frac{\pi}{5}n) \xleftrightarrow{F} \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\delta(\omega-\frac{\pi}{5}-2k\pi)+\delta(\omega+\frac{\pi}{5}-2k\pi)\right)$$

$$x[n] \xleftrightarrow{F} \frac{\sin(5+1/2)\omega}{\sin \omega/2} = \frac{\sin\frac{11}{2}\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

$$Z(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{11}{2}(\omega-\frac{\pi}{5})}{\sin(\omega-\frac{\pi}{5})} + \frac{\sin\frac{11}{2}(\omega+\frac{\pi}{5})}{\sin(\omega+\frac{\pi}{5})}\right]$$

$$Z(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{11}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\pi\delta(\omega-\theta-\pi/5)\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{11}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\pi\delta(\omega-\theta+\frac{\pi}{5})\,d\theta$$

پاسخ فرکانسی سیستم های گسسته LTI : تبدیل فوریه پاسخ ضربه سیستم پاسخ فرکانسی سیستم نامیده می‌شود

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

روش های یافتن پاسخ فرکانسی سیستم :

۱) تبدیل فوریه $h[n]$ محاسبه گردد : $H(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h[n]\}$

۲) با داشتن پاسخ خروجی به ازای یک ورودی مشخص :

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) \longrightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

مثال) پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ برابر با $y[n] = 3\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ است پاسخ فرکانسی سیستم را بدست آورید

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{3 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}} = 3\,\frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

۳) تبدیل فوریه گرفتن از معادله دیفرنس سیستم:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$\sum a_k e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega}) = \sum b_k e^{-j\omega k} X(e^{j\omega}) \rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$$

مثال: پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI با معادله دیفرنس $y[n] - \frac{5}{6} y[n-1] + \frac{1}{6} y[n-2] = x[n-1]$ را بدست آورید. پاسخ ضربه سیستم و چند

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 \times e^{-j\omega}}{1 - \frac{5}{6} e^{-j\omega} + \frac{1}{6} e^{-2j\omega}}$$

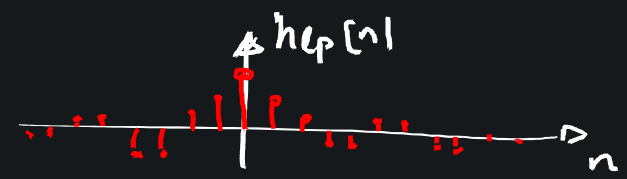
$$H(e^{j\omega}) = \frac{6}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}} + \frac{-6}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\omega}} \longrightarrow h[n] = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

معرفی فیلترهای ایده‌آل در سیستم های گسسته :

۱) فیلتر پایین گذر:

$$h_{lp}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{lp}(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$h_{lp}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_h}^{\omega_h} e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{j\omega_h n} - e^{-j\omega_h n}}{jn}\right) = \frac{\sin(\omega_h n)}{\pi n}$$



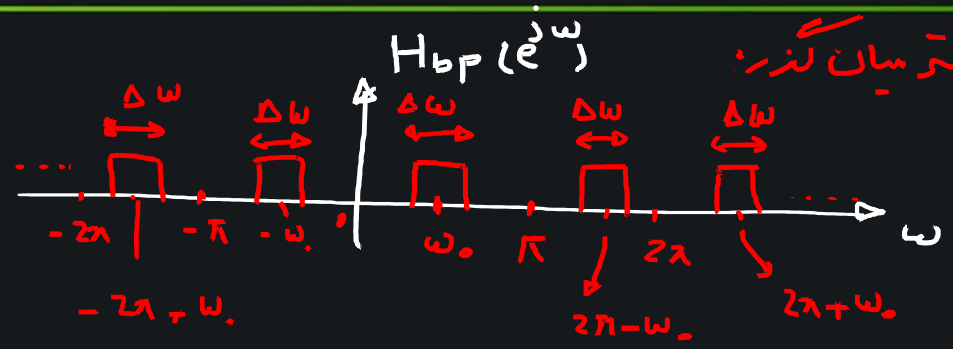
۲) فیلتر بالا گذر:

$$h_{hp}[n] = \mathcal{F}^{-1}\{H_{hp}(e^{j\omega})\}$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\{1 - H_{lp}(e^{j\omega})\}$$

$$h_{hp}[n] = \delta[n] - \frac{\sin(\omega_l n)}{\pi n}$$

۳) فیلتر میان گذر:



$$H_{bp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\omega_0)}) + H_{lp}(e^{j(\omega+\omega_0)})$$

$$h_{bp}[n] = e^{j\omega_0 n} h_{lp}[n] + e^{-j\omega_0 n} h_{lp}[n]$$

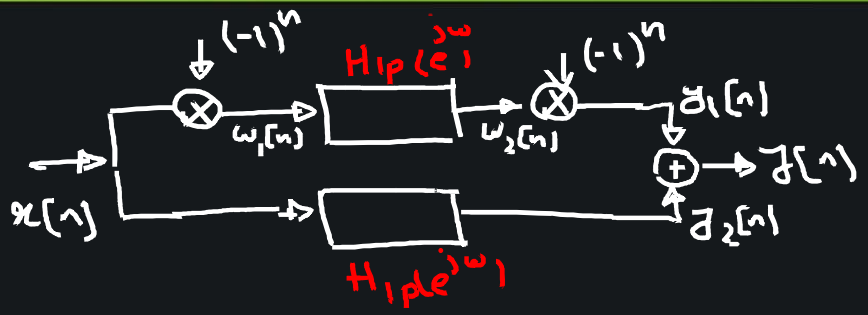
$$h_{bp}[n] = 2\cos(\omega_0 n)\,\frac{\sin(\frac{\Delta\omega}{2}n)}{\pi n}$$

۴) فیلتر میان نگذر:

$$H_{br}(e^{j\omega}) = 1 - H_{bp}(e^{j\omega})$$

$$h_{br}[n] = \delta[n] - h_{bp}[n] = \delta[n] - 2\cos(\omega_0 n)\,\frac{\sin(\frac{\Delta\omega}{2}n)}{\pi n}$$

مثال: پاسخ فرکانسی سیستم روبرو را برحسب H_{lp} بدست آورید:



$$w_1[n] = x[n]\,(-1)^n = x[n]\,e^{j\pi n} \longrightarrow W_1(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$$

$$W_2(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j(\omega-\pi)})$$

$$\Rightarrow Y_1(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) \cdot X(e^{j(\omega-2\pi)})$$

$$y_1[n] = w_2[n]\,(-1)^n = w_2[n]\,e^{j\pi n} \longrightarrow Y_1(e^{j\omega}) = W_2(e^{j(\omega-\pi)})$$

$$Y_2(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})$$

$$\Downarrow$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \left[H_{lp}(e^{j\omega}) + H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})\right] \longleftarrow Y(e^{j\omega}) = Y_1(e^{j\omega}) + Y_2(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot \left[H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})\right]$$