توزیع حاشیه‌ای یا کناره‌ای برای متغیرهای تصادفی x و y :

از مثال جلسه قبل داریم،

$y \backslash x$	۰	۱	۲	۳	$f_Y(y)$ تابع حاشیه‌ای یا کناره‌ای
۰					: جمع
۱					
۲					
$f_X(x)$	: جمع				1 ✓

تابع حاشیه‌ای یا کناره‌ای

تابع توامان یا چگالی احتمال توام x و y

اما

تابع حاشیه‌ای یا کناره‌ای در توزیع توامان x و y فقط برای یک متغیر تعریف می‌شود.

متغیر تصادفی

پیوسته | گسسته

پیوسته:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\,dx$$

گسسته:

$f_X(x)$: تابع حاشیه‌ای یا کناره‌ای X

$$f_X(x) = \sum_{\forall y} f_{X,Y}(x,y)$$

تابع حاشیه‌ای X تمام ناحیه تغییرات متغیر دیگر را در نظر می‌گیرد.

$f_Y(y)$: تابع حاشیه‌ای یا کناره‌ای Y

$$f_Y(y) = \sum_{\forall x} f_{X,Y}(x,y)$$

نکته: اگر متغیرهای تصادفی x و y مستقل باشند $\Leftrightarrow$ $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$

شرط استقلال دو متغیر تصادفی x و y

مثال: استقلال x و y را برای تابع توزیع توأمان x ، y را چک کنید؟

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & 0<x<y<1 \\ 0 & \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_x^1 (2)\,dy$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 2[1-x] & ; 0<x<1 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_0^y f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^y (2)\,dx = \begin{cases} 2y & ; 0<y<1 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

صحت شرط استقلال $= f_{X,Y}(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$

$$2 \neq 2(1-x)\,2y \quad \times$$

Hw: شرط استقلال x و y را چک کنید؟ #n

n>1

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} & ; x>0 ; y>0 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

چگالی های شرطی برای متغیر تصادفی x و y:

فرض کنید x و y دو متغیر تصادفی مفروض باشند با چگالی یا توزیع توام $f_{X,Y}(x,y)$

هدف: تابع چگالی شرطی x به شرط $Y=y$

$$\begin{cases} f_{X|Y}(x|y) \triangleq \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \; ; \; f_Y(y) \neq 0 \\ \\ \text{هم‌ارز}: P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \end{cases}$$

$f_Y(y)$: تابع حاشیه‌ای y

$$f_{Y|X}(y|x) \triangleq \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \; ; \; f_X(x) \neq 0$$

$f_X(x)$: تابع حاشیه‌ای x

خاصیت های چگالی شرطی:

تابع چگالی شرطی خود یک تابع چگالی است پس خواص تابع چگالی را داراست

1) $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)\,dx = 1$ یا $\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x)\,dy = 1$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: اگر تابع توام

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & ; 0<x<y<1 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

مطلوبست محاسبه الف) $f_{X|Y}(x|y) = ?$

ب) $f_{Y|X}(y|x) = ?$

حل:

الف) طبق تعریف: $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{\text{تابع چگالی توام}}{\text{تابع حاشیه‌ای } y}$

$$f_Y(y) = \int_0^y f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^y 2\,dx = \begin{cases} 2y & ; 0<y<1 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

مهم: براساس تغییرات x

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{2}{2y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} & ; 0<x<y \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

تابع چگالی شرطی x مشروط بر اینکه $Y=y$

ب) طبق تعریف: $f_{Y|\frac{1}{2}}(y|\tfrac{1}{2}) = \dfrac{f_{X,Y}(\frac{1}{2},y) = 2}{f_X(\frac{1}{2}) = ?}$

تابع چگالی شرطی y مشروط بر اینکه $X=\frac{1}{2}$

تابع حاشیه‌ای x

$$f_X(x) = \int_x^1 f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_x^1 2\,dy = \begin{cases} 2(1-x) & ; 0<x<1 \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$

$$f_X\left(x=\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 2\left(1-\frac{1}{2}\right) & ; 0<x<1 \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$

پس : $f_{Y|\frac{1}{2}}\left(y|\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{2\left(1-\frac{1}{2}\right)} & ; \frac{1}{2}<y<1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

HW ± n : تابع توزیع توامان x و y به صورت مقابل تعریف شده است ،
n>1

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy & ; 0\leqslant x\leqslant 1 \\ & \quad 0\leqslant y\leqslant x \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$

مطلوبست : الف) چگالی های شرطی

$f_{X|Y}(x|y) = ?$

$f_{Y|X}(y|x) = ?$

ب) $P\left(\frac{1}{2}<x<\frac{2}{3} \,\middle|\, y=\frac{1}{3}\right) = ?$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

امید شرطی :

یادآوری : برای متغیر تصادفی x $\quad E(x) = \mu$

امید شرطی y به شرط $X = x$ باشد برابر است با

گسسته :

$$E(y|X=x) = \sum_{\forall y} y \cdot \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

پیوسته :

$$E(y|X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}\, dy$$

گسسته :

$$E(x|y=y) = \sum_{\forall x} x \cdot \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

پیوسته :

$$E(x|y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

نکته : تابع چگالی شرطی : $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

تابع تجمعی شرطی : $F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x | Y \leq y)$

گسسته :

$$\sum_{t \leq x} f_{X|Y}(t|y)$$

پیوسته :

$$\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(t|y)\, dt$$

این تابع خواص تابع توزیع را داراست .

$$f_{Y|X}(y|x) \triangleq \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

تابع تجمعی شرطی $F_{Y|X}(y|x) = P(Y \leqslant y \mid X \leqslant x)$

گسسته: $\sum_{t \leqslant y} f_{Y|X}(t|x)$

پیوسته: $\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(t|x)\,dt$

کواریانس یا هم‌پراش:

$$\operatorname{cov}(x,y) = \delta_{xy} = \delta p_{xy}$$

- کواریانس بین دو متغیر، سومین امید ریاضی خاص است.

- تعریف: فرض کنید x و y دو متغیر تصادفی باشند، آنگاه کواریانس x و y را با $\operatorname{cov}(x,y)$ نشان داده و داریم:

مفهوم: کواریانس، بیانگر تغییرات دو متغیر تصادفی x و y نسبت به یکدیگر

$$\mathrm{cov}(x,y) = \delta_{x,y} = E\left[(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right]$$

$$\overset{\text{یا}}{\Rightarrow} \mathrm{cov}(x,y) = E(xy) - E(x)E(y)$$

$$\overset{\text{یا}}{\Rightarrow} \mathrm{cov}(x,y) = E(xy) - \mu_x \mu_y$$

$\mathrm{cov}(x,y) > 0 \Rightarrow$ تغییرات x و y در یک جهت است.

$\mathrm{cov}(x,y) < 0 \Rightarrow$ در خلاف

① . $-\infty < \mathrm{cov}(x,y) < \infty$

② . تحلیل کوواریانس : اگر $\mathrm{cov}(x,y) > 0$ ، بین x و y رابطه مستقیم داریم یعنی با افزایش x ، y زیاد می‌شود.

اگر $\mathrm{cov}(x,y) < 0$ ، بین x و y رابطه معکوس داریم

اگر $\mathrm{cov}(x,y) = 0$ ، آنگاه x و y مستقل است.

۳. $cov(x,y)=0 \Leftarrow$ اگر x و y مستقل باشند

اما عکس این مطلب لزوماً صحیح نیست

۴. $cov(x,y) = cov(y,x)$

$cov(x,x) = var(x) = \delta_x^2$

$cov(x,a) = cov(a,x) = 0$; a عدد ثابت

$cov(x_1 + x_2 + \dots , y) = cov(x_1,y) + cov(x_2,y) + \dots$

$cov(ax \pm b , cy \pm d) = ac\, cov(x,y)$

۵. مهم

$$\begin{cases} var(ax \pm by \pm cz \pm d) = a^2 var(x) + b^2 var(y) + c^2 var(z) \pm 2ab\, cov(x,y) \pm 2ac\, cov(x,z) \pm 2bc\, cov(y,z) \\ var(ax \pm by \pm c) = a^2 var(x) + b^2 var(y) + 2ab\, cov(x,y) \end{cases}$$

به عبارت دیگر

در این تعریف اگر x و y مستقل از هم باشند.

$cov(x,y) = 0$

پس $\Rightarrow var(ax \pm by \pm c) = a^2 var(x) + b^2 var(y) \pm 0$