محاسبات عددی

دانشگاه صنعتی شاهرود -دانشکده برق
مدرس: هادی گرایلو

منبع درسی

محاسبات عددی برای دانشجویان علوم و مهندسی

تالیف دکتر اصغر کرایه چیان

انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد

فصل سوم

فصل ۳ — معادلات غیرخطی

هدف فصل

تعیین یک یا چند ریشه از معادله‌ی

$$f(x) = 0$$

یکی از متداولترین مسایلی است که در علوم و مهندسی با آن مواجه می‌شویم. در اغلب موارد یافتن جواب واقعی امکان پذیر نیست ، و از این رو روشهایی را بررسی می‌کنیم که بتوانند جواب معادله را با دقت خوبی به‌دست دهند. به‌عنوان مثال ، حل معادلاتی به‌صورتهای زیر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم

$$x^{10} + x - 1 = 0$$

$$x = e^{-x}$$

$$2x - \tan x = 0$$

$$e^{-x} = \sin x$$

معادله‌ی اول را یک معادله‌ی **چندجمله‌ای** و بقیه را معادلات **متعالی** می‌نامیم.

۲.۳ روش دوبخشی

فرض کنید تابع $f(x)$ بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b) < 0$.

الگوریتم روش دوبخشی

گام ۱ — قرار می‌دهیم $c = \frac{a+b}{2}$

گام ۲ — اگر $f(c) = 0$ ، آنگاه c ریشه‌ی معادله است و به‌گام ۵ می رویم.

گام ۳ — اگر $|b-a| < \epsilon$ ، c تقریبی برای α است و به‌گام ۵ می‌رویم.

گام ۴ — اگر $f(a)f(c) < 0$ ، α در بازه‌ی $[a,c]$ است. قرار می‌دهیم $b = c$ و به گام ۱ می‌رویم. در غیراین‌صورت α در بازه‌ی $[c,b]$ است. قرار می‌دهیم $a = c$ ، و به‌گام ۱ می‌رویم

گام ۵ — c را به‌عنوان تقریبی برای α چاپ می‌کنیم.

در گام ۳، وقتی شرط $|b-a| < \epsilon$ محقق شود، آنگاه $|\alpha - c| < \frac{|b-a|}{2}$

قضیه‌ی ۱ — روش دوبخشی همیشه همگرا است.

مثال ۱ — تقریبی برای ریشه‌ی معادله‌ی زیر با دقت $\epsilon = 10^{-3}$ به‌دست آورید.

$$x^5 + x - 1 = 0$$

حل — تعریف می‌کنیم $f(x) = x^5 + x - 1$. این تابع پیوسته است و داریم

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = 1 > 0$$

لذا معادله‌ی $f(x) = 0$ در این بازه دارای یک ریشه است. با توجه به‌این که $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$ ، تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[0,1]$ اکیداً صعودیست ، و از این رو معادله‌ی داده شده در بازه‌ی $[0,1]$ تنها یک ریشه دارد. داریم

$$c = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = -\frac{15}{32} < 0$$

از آن‌جایی که $f(\frac{1}{2})f(1) < 0$ ، ریشه در بازه‌ی $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ قرار دارد. مجدداً قرار می‌دهیم

$$c = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow f(\frac{3}{4}) < 0$$

پس ریشه در بازه‌ی $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$ قرار دارد. با ادامه‌ی این روند، جدول زیر نتیجه می‌شود.

k	a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$
۱	۰.۰۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰	۰.۵۰۰۰۰۰	−	+	−
۲	۰.۵۰۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰	۰.۷۵۰۰۰۰	−	+	−
۳	۰.۷۵۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰	۰.۸۷۵۰۰۰	−	+	+
⋮						⋮
۹	۰.۷۵۳۹۱	۰.۷۵۷۸۱	۰.۷۵۵۸۶	−	+	+
۱۰	۰.۷۵۳۹۱	۰.۷۵۵۸۶	۰.۷۵۴۸۸	−	+	+
۱۱	۰.۷۵۳۹۱	۰.۷۵۴۸۸	۰.۷۵۴۳۹	−	+	−

در تکرار ۱۱ ، $c = 0.75439$ تقریب مطلوب برای ریشه است ، زیرا در این گام شرط $|b-a| < 0.001$ برقرار می‌شود. اگر α ریشه‌ی واقعی معادله باشد ، آنگاه یک کران بالا برای خطا(حداکثر خطای ممکن) چنین است

$$|\alpha - 0.75439| < \frac{|b-a|}{2} < 0.5 \times 10^{-3}$$

مثال ۲ — ریشه‌ی مثبت معادله‌ی زیر را با روش دوبخشی با چهار رقم اعشار درست به‌دست آورید.

$$f(x) = x^{۲} - ۴\sin x = ۰$$

نمودارهای دو منحنی نشان می‌دهد که معادله تنها دارای یک ریشه مثبت است و این ریشه در بازه‌ی $[۱,۲]$ قرار دارد. این مطلب با توجه به روابط زیر نیز روشن است.

$$f(۱) < ۰\ ,\quad f(۲) > ۰$$

با انتخاب $\epsilon = ۱۰^{-۴}$ ، نتایج به‌صورت جدول زیر است.

k	a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$
۱	۱.۰۰۰۰۰۰	۲.۰۰۰۰۰۰	۱.۵۰۰۰۰۰	−	+	−
۲	۱.۵۰۰۰۰۰	۲.۰۰۰۰۰۰	۱.۷۵۰۰۰۰	−	+	−
۳	۱.۷۵۰۰۰۰	۲.۰۰۰۰۰۰	۱.۸۷۵۰۰۰	−	+	−
⋮						⋮
۱۳	۱.۹۳۳۵۹	۱.۹۳۳۸۴	۱.۹۳۳۷۲	−	+	−
۱۴	۱.۹۳۳۷۲	۱.۹۳۳۸۴	۱.۹۳۳۷۸	−	+	+
۱۵	۱.۹۳۳۷۲	۱.۹۳۳۷۸	۱.۹۳۳۷۵	−	+	−

با ۱۵ تکرار، $c = ۱.۹۳۳۷۵$ تقریبی برای ریشه با چهار رقم اعشار درست است ، زیرا داریم

$$|\alpha - ۱.۹۳۳۷۵| < \frac{|۱.۹۳۳۷۸ - ۱.۹۳۳۷۲|}{۲} < ۰.۵ \times ۱۰^{-۴}$$

۳.۲ روش تکرار نقطه‌ی ثابت

تعریف ۱ — فرض کنید تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده باشد. اگر $x_\circ$ ای در این بازه باشد به‌طوری که $f(x_\circ)=x_\circ$ ، آنگاه $x_\circ$ را **نقطه‌ی ثابت تابع** $f(x)$ می‌نامند.

مثال ۴ — تابع $f(x)=x^2-3x+4$ را در نظر بگیرید. برای این تابع داریم $f(2)=2$ پس $x_\circ=2$ یک نقطه‌ی ثابت این تابع است.

فرض کنید $\alpha\in[a,b]$ ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ باشد. در روش تکرار نقطه‌ی ثابت برای تعیین α ، ابتدا معادله را به‌صورت $x=g(x)$ می‌نویسیم ، یعنی تابع $g(x)$ را طوری تعریف می‌کنیم که اگر $f(\alpha)=0$ ، آنگاه $g(\alpha)=\alpha$ و برعکس. در این‌صورت یافتن ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ ، معادل با یافتن نقطه‌ی ثابت تابع $g(x)$ است.

برای به‌دست آوردن نقطه‌ی ثابت $g(x)$ ، یعنی α ، نقطه‌ی $x_\circ$ را به‌عنوان تقریبی برای آن انتخاب نموده و دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x_{n+1}=g(x_n)\ ,\ n=0,1,\dots \tag{1}$$

تحت شرایط مناسب این دنباله دارای حد است و

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha$$

به‌عبارت دیگر، حد دنباله نقطه‌ی ثابت g یا ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ است.

آزمون توقف — اگر شرایط قضیه‌ی تکرار نقطه‌ی ثابت برقرار باشد، آنگاه در تولید جملات دنباله توسط رابطه‌ی $x_{n+1}=g(x_n)$ ، $n=0,1,\dots$ ، تکرارها را تا آن‌جا ادامه می‌دهیم که به‌ازای m ای داشته باشیم

$$|x_m-x_{m-1}|<\epsilon$$

که $\epsilon>0$ از قبل انتخاب می‌شود. در این‌صورت x_m را تقریبی برای ریشه‌ی معادله با دقت ϵ می‌نامیم.

شرایط تابع g

قضیه‌ی ۲ — (الف) فرض کنید تابع $g(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و مشتق پذیر باشد و به‌ازای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم $g(x)\in[a,b]$ ، یعنی تابع g بازه‌ی $[a,b]$ را به‌خودش نقش کند.

(ب) عددی مانند $0<k<1$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$|g'(x)|\le k<1\ ,\quad \forall x\in[a,b]$$

مثال ۵ — معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$f(x) = 3x - 2e^{-x} = 0$$

حل — داریم $f(0) = -2 < 0$ و $f(1) = 3 - \frac{2}{e} > 0$. پس ریشه‌ای از معادله در بازه‌ی $[0, 1]$ قرار دارد. نمودارهای معادله‌های $y = \frac{3}{2}x$ و $y = e^{-x}$ نشان می‌دهند که معادله تنها یک ریشه دارد.

حال معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$x = \frac{2}{3}e^{-x}$$

در این‌جا $g(x) = \frac{2}{3}e^{-x}$. این تابع در بازه‌ی $[0, 1]$ پیوسته و مشتق پذیر است و

$$|g'(x)| = \frac{2}{3}e^{-x} \leq \frac{2}{3} < 1 \;, \;\; \forall x \in [0, 1]$$

تابع $g(x)$ در بازه‌ی $[0, 1]$ نزولی است و داریم $g(0) = \frac{2}{3} \in [0, 1]$ و $g(1) = \frac{2}{3e} \in [0, 1]$. لذا

$$g(x) \in [0, 1] \;, \;\; \forall x \in [0, 1]$$

بنابراین شرایط قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت بر قرار است. با انتخاب $x_0 = 0.5$ که در بازه‌ی $[0, 1]$ است ، تعریف می‌کنیم

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}e^{-x_n} \;, \; n = 0, 1, \ldots$$

هریک از جملات دنباله تقریبی برای ریشه‌ی معادله است . این تقریبها به‌صورت جدول زیرند.

n	x_n	n	x_n
۱	۰.۴۰۴۳۵	۶	۰.۴۳۲۹۹
۲	۰.۴۴۴۹۴	۷	۰.۴۳۲۳۸
۳	۰.۴۲۷۲۴	۸	۰.۴۳۲۶۴
۴	۰.۴۳۴۸۷	۹	۰.۴۳۲۵۳
۵	۰.۴۳۱۵۷	۱۰	۰.۴۳۲۵۸

در این مثال تقریب به‌دست آمده در تکرار ۱۰، یعنی $x_{10} = 0.43258$ ، دارای دقت ۰.۰۰۰۱ است. به‌این معنی که

$$|x_{10} - x_9| < 0.0001$$

آهنگ همگرایی روش تکرار نقطه‌ی ثابت

فرض کنید α نقطه‌ی ثابت تابع g یا ریشه‌ی معادله‌ی $x = g(x)$ باشد، و g در بازه‌ی $[a,b]$ در شرایط قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت صدق کند. داریم $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$

فرض کنید g' در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و $g'(x) \neq 0$ ، $\forall x \in [a,b]$

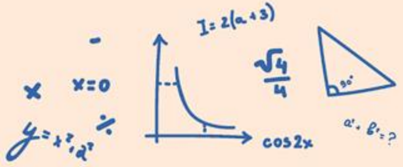
$$e_{n+1} \approx g'(\alpha) e_n$$

که نشان می‌دهد خطا در هر گام متناسب است با خطا در گام قبلی. در چنین حالتی گفته می‌شود که همگرایی از مرتبه‌ی اول یا خطی است. هرقدر $|g'(\alpha)|$ کوچکتر باشد ، e_n سریعتر به‌سمت صفر میل می‌کند. به‌ویژه، سریعترین حالت وقتی است که $g'(\alpha) = 0$. در این صورت برای تعیین مرتبه‌ی همگرایی ، فرض کنید g'' در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد. بنا

اگر $g''(\alpha) \neq 0$ ، آنگاه می‌توان گفت که

$$e_{n+1} \approx \frac{1}{2} g''(\alpha) e_n^2$$

در این حالت همگرایی را از مرتبه‌ی دوم می‌نامند. به‌همین ترتیب می‌توان همگرایی از مرتبه‌های بالاتر را تعریف نمود.



۴.۳ روند Δ^2 − ایتکن

به‌طوری که دیدیم همگرایی روش تکرار نقطه‌ای ثابت عموماً از مرتبه‌ی یک است ، و لذا سرعت همگرایی روش نسبتاً کند می‌باشد. روند Δ^2 − ایتکن راهکاری است که برای شتاب دادن به سرعت همگرایی روش تکرار نقطه‌ی ثابت به‌کار می رود. و اساس آن پیش بینی نقطه‌ی ثابت α با استفاده از سه تکرار متوالی x_n ، x_{n+1} و x_{n+2} است.

در روش تکرار نقطه‌ی ثابت دیدیم که اگر $g'(\alpha) \neq 0$ ، آنگاه

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} \approx g'(\alpha)$$

متشابهاً

$$\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} \approx g'(\alpha)$$

بنابراین

$$\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} \approx \frac{e_{n+1}}{e_n}$$

یا

$$\frac{x_{n+2}-\alpha}{x_{n+1}-\alpha} \approx \frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}$$

از این‌جا

$$\alpha \approx x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$$

ملاحظه می‌شود که با سه تکرار متوالی تقریبی برای α به‌دست می‌آید. از این تقریب می‌توان برای تکرار بعدی استفاده نمود. پس، تعریف می‌کنیم

$$\boxed{\hat{x}_{n+2} = x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n} \quad , \quad n = 0, 3, 6, \ldots} \qquad (۳)$$

یا با نماد تفاضلات متناهی

$$\hat{x}_{n+2} = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

اکنون با استفاده از $\hat{x}_{n+2}$ که تقریبی برای α است ، می‌توان تقریبهای $x_{n+3} = g(\hat{x}_{n+2})$ ، $x_{n+4} = g(x_{n+3})$ و $x_{n+5} = g(x_{n+4})$ را به‌دست آورد ، و سپس با سه تکرار x_{n+3} ، x_{n+4} ، x_{n+5} از فرمول (۳) ، $\hat{x}_{n+5}$ را به‌دست آورد و به‌همین ترتیب ادامه داد. می‌توان نشان داد دنباله‌ی $\{\hat{x}_{n+2}\}$ که از (۳) به‌دست می‌آید نیز همگرا به α است ، اما آهنگ همگرایی آن خیلی سریعتر است.

قضیه‌ی ۳ — فرض کنید دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تولید شده توسط $x_{n+1} = g(x_n)$ همگرا به α ، نقطه‌ی ثابت g باشد و همگرایی آن خطی باشد. در این‌صورت دنباله‌ی $\{\hat{x}_{n+2}\}$ تعریف شده با (۳) نیز همگرا به α ، و تحت شرایط مناسب همگرایی آن از مرتبه‌ی دو است.

مثال ۸ — ریشه‌ی منفی معادله‌ی $x^۲ + x - ۲ = ۰$ را به‌دست آورید.

حل — ریشه‌ی منفی معادله $x = -۲$ است. معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$x = \frac{۲}{x} - ۱$$

تعریف می‌کنیم $g(x) = \frac{۲}{x} - ۱$. بسادگی می‌توان نشان داد که این تابع در بازه‌ی $[-۲.۵, -۱.۵]$، شرایط قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت را دارد. با انتخاب $x_۰ = -۱.۵$ از فرمول

$$x_{n+۱} = g(x_n) = \frac{۲}{x_n} - ۱ \ , n = ۰, ۱, \ldots$$

نتایج با $\epsilon = \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$ به‌صورت جدول زیر حاصل می‌شود.

n	x_n	e_n
۱	−۲.۳۳۳۳	۰.۳۳۳۳
۲	−۱.۸۵۷۱	۰.۱۴۲۹
۳	−۲.۰۷۶۹	۰.۰۷۶۹
۴	−۱.۹۶۳۰	۰.۰۳۷۰
۵	−۲.۰۱۸۹	۰.۰۱۸۹
⋮	⋮	⋮
۱۱	−۲.۰۰۰۳	۰.۰۰۰۳
۱۲	−۱.۹۹۹۹	۰.۰۰۰۱

در این جدول $e_n = |-۲ - x_n|$. با توجه به ستون آخر ملاحظه می‌شود که همگرایی خطی است و خطا در هر گام تقریباً نصف می‌شود.

اکنون با روش ایتکن مسأله را حل می‌کنیم. داریم

$$x_۱ = g(x_۰) = \frac{۲}{-۱.۵} - ۱ = -۲.۳۳۳۳۳ \ , x_۲ = g(x_۱) = -۱.۸۵۷۱۴$$

حال از فرمول (۳) داریم

$$\hat{x_۲} = -۱.۵ - \frac{(-۲.۳۳۳۳۳ + ۱.۵)^۲}{-۱.۸۵۷۱۴ - ۲(-۲.۳۳۳۳۳) - ۱.۵} = -۲.۰۳۰۳۰$$

$$x_۳ = g(\hat{x_۲}) = \frac{۲}{-۲.۰۳۰۳۰} - ۱ = -۱.۹۸۵۰۷$$

$$x_۴ = g(x_۳) = \frac{۲}{-۱.۹۸۵۰۷} - ۱ = -۲.۰۰۷۵۲$$

$$x_۵ = g(x_۴) = \frac{۲}{-۲.۰۰۷۵۲} - ۱ = -۱.۹۹۶۲۵$$

از فرمول (۳) داریم

$$\hat{x_۵} = -۱.۹۸۵۰۷ - \frac{(-۲.۰۰۷۵۲ + ۱.۹۸۵۰۷)^۲}{-۱.۹۹۶۲۵ - ۲(-۲.۰۰۷۵۲) - ۱.۹۸۵۰۷} = -۲.۰۰۰۰۲$$

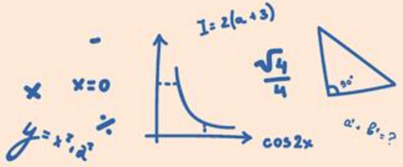
$$x_۶ = g(\hat{x_۵}) = -۱.۹۹۹۹۹ \ , x_۷ = g(x_۶) = -۲.۰۰۰۰۰ \ , \ x_۸ = g(x_۷) = -۲.۰۰۰۰۰$$

$$\hat{x_۸} = -۲.۰۰۰۰۰$$

خلاصه‌ی نتایج روش ایتکن با همان دقت $\epsilon = \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$ ، مطابق جدول زیر است.

n	$\hat{x_n}$	e_n
۲	−۲.۰۳۰۳۰	۰.۰۳۰۳۰
۵	−۲.۰۰۰۰۲	۰.۰۰۰۰۲
۸	−۲.۰۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰۰

توجه کنید که در این‌جا خطا در هر گام متناسب با مربع خطا در گام قبلی است ، یعنی همگرایی از مرتبه‌ی دوم است.



۵.۳ روش نیوتن — رافسون

فرض کنید α ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)$ و x_0 تقریبی برای آن باشد. با فرض آن که f در یک همسایگی x_0 شامل α مشتق‌پذیر باشد، بنابر فرمول تیلور می‌توان نوشت

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(\eta)\ ,\quad x_0 < \eta < x \tag{۴}$$

در (۴) قرار می‌دهیم $x = \alpha$ ، آنگاه

$$0 = f(\alpha) = f(x_0) + (\alpha - x_0)f'(x_0) + \frac{(\alpha - x_0)^2}{2!}f''(\eta)\ ,\quad x_0 < \eta < \alpha$$

یا اگر $f'(x_0) \neq 0$ ، می‌توان نوشت

$$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = (\alpha - x_0) + \frac{(\alpha - x_0)^2}{2!}\frac{f''(\eta)}{f'(x_0)} \tag{۵}$$

اگر x_0 به‌اندازه‌ی کافی به α نزدیک باشد، می‌توان از جمله‌ی دوم طرف راست (۵) چشم پوشی نمود، و در نتیجه خواهیم داشت

$$\alpha - x_0 \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

یا

$$\alpha \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

پس ، $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ تقریب دیگری برای α است. اگر آن را x_1 بنامیم ، داریم

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{۶}$$

عموماً x_1 تقریب بهتری از x_0 است. با قرار دادن x_1 به‌جای x_0 در (۴) به‌دلیل مشابه خواهیم داشت

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

و با ادامه‌ی این روند، فرمول نیوتن — رافسون زیر به‌دست می‌آید

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ ,\ n = 0, 1, \ldots} \tag{۷}$$

تحت شرایط مناسب برای تابع f ، دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ، تعریف شده با (۷) همگرا به α است ، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

مثال ۹ — ریشه‌های معادله‌ی زیر را با روش نیوتن — رافسون محاسبه کنید.

$$x^4 - x = 10$$

حل — ریشه‌های معادله طولهای نقاط تلاقی دو منحنی $y = x + 10$ و $y = x^4$ هستند. با رسم این منحنیها معلوم می‌شود که معادله دارای یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی است. تعریف می‌کنیم

$$f(x) = x^4 - x - 10$$

داریم $f(1) = -10$ و $f(2) = 4$. پس ریشه‌ی مثبت در بازه‌ی $[1, 2]$ قرار دارد. همچنین $f(-1) = -8$ و $f(-2) = 8$ ، و لذا ریشه‌ی منفی در بازه‌ی $[-2, -1]$ است. داریم

$$f'(x) = 4x^3 - 1$$

فرمول نیوتن — رافسون در این‌جا چنین است

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - x_n - 10}{4x_n^3 - 1} = \frac{3x_n^4 + 10}{4x_n^3 - 1}, n = 0, 1, \ldots$$

برای ریشه‌ی مثبت نقطه‌ی آغازین را $x_0 = 2$ و برای ریشه‌ی منفی $x_0 = -1.5$ انتخاب می‌کنیم. اگر $\epsilon = 10^{-4}$ بگیریم، نتایج به‌صورت جدولهای زیرند.

n	x_n
۰	۲
۱	۱.۸۷۰۹۶۸
۲	۱.۸۵۵۷۸۱
۳	۱.۸۵۵۵۸۵
۴	۱.۸۵۵۵۸۵

n	x_n
۰	−۱.۵
۱	−۱.۷۳۷۰۶۹
۲	−۱.۶۹۸۷۴۵
۳	−۱.۶۹۷۴۷۳
۴	−۱.۶۹۷۴۷۲

تقریب با دقت مطلوب برای هر دو ریشه پس از ۴ تکرار به‌دست می‌آید، یعنی برای هر دو ریشه داریم

① $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$

$$|x_4 - x_3| < 0.0001$$

② $|f(x_n)| < \epsilon$

همچنین داریم

③ ① + ② $< \epsilon$ ④ $\{$ ① ، ②

$$|f(1.855585)| = 6.488033 \times 10^{-7} < 10^{-6}$$

$$|f(-1.697472)| = 4.888836 \times 10^{-7} < 10^{-6}$$

که حاکی از دقت خوب تقریبهای به‌دست آمده است.

توجه کنید که شرط $|x_4 - x_3| < 0.0001$ بیانگر این نیست که خطا در تقریبهای به‌دست آمده کمتر یا برابر با 0.0001 است. همین‌طور $|f(x_4)| < 10^{-6}$ نیز اندازه‌ی خطای تقریب را مشخص نمی‌کند.

فرمول خطای روش نیوتن

$$e_{n+1} = -\frac{f''(\xi_n)}{۲f'(x_n)}\, e_n^{۲}$$

همگرایی روش نیوتن

قضیه‌ی ۵ — فرض کنید α ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = ۰$ باشد، و f ، f' و f'' در یک همسایگی از α مانند $I \subset \mathbb{R}$ پیوسته باشند، و $f'(\alpha) \neq ۰$. در این‌صورت اگر نقطه‌ی آغازین $x_۰$ به‌قدر کافی به α نزدیک انتخاب شود، دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=۰}^{\infty}$ تولید شده توسط فرمول نیوتن همگرا به α است، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \qquad (۸)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+۱}|}{|e_n|^{۲}} = \frac{|f''(\alpha)|}{۲|f'(\alpha)|}$$

که نشان می‌دهد مرتبه‌ی همگرایی روش نیوتن حداقل برابر ۲ است.

حل معادلات چندجمله‌ای با روش نیوتن — رافسون

فرض کنید بخواهیم ریشه‌ای از معادله‌ی $P(x) = 0$ را بیابیم که $P(x)$ یک چندجمله‌ای به‌صورت زیر است

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (10)$$

با استفاده از فرمول نیوتن ،

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k)}{P'(x_k)}\ ,\ k = 0, 1, \ldots$$

در هر تکرار باید $P(x_k)$ و $P'(x_k)$ که هردو چندجمله‌ای هستند، به‌ازای k ای محاسبه شوند که اگر n بزرگ باشد، به تعداد عمل ضرب زیادی نیاز خواهد بود. روشی کارا به‌نام روش هُرنر برای محاسبه‌ی یک چندجمله‌ی به‌ازای یک نقطه‌ی مفروض وجود دارد که آن را تشریح می‌کنیم.

فرض کنید بخواهیم مقدار چندجمله‌ای $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ را به‌ازای $x = x_0$ محاسبه کنیم. می‌توان نوشت

$$P(x_0) = ((a_3 x_0 + a_2)\, x_0 + a_1)\, x_0 + a_0$$

اگر قرار دهیم

$$b_3 = a_3$$

$$b_2 = b_3 x_0 + a_2$$

$$b_1 = b_2 x_0 + a_1$$

$$b_0 = b_1 x_0 + a_0$$

آنگاه داریم

$$P(x_0) = b_0$$

الگوریتم هُرنر

$Input\ \ a_k\ , k = 0, 1, \ldots, n$

$Input\ \ x_0$

$b_n = a_n$

$For\ k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0\ do:$

$b_k = b_{k+1} x_0 + a_k$

$End\ k$

برای محاسبه‌ی $P'(x_0)$ $\quad$ $P'(x_0) = Q(x_0)$

$$\begin{cases} C_n = b_n \\ C_{n-1} = C_n x_0 + b_{n-1} \\ C_{n-2} = C_{n-1} x_0 + b_{n-2} \\ \vdots \\ C_0 = C_1 x_0 + b_0 \end{cases} \Rightarrow Q(x_0) = C_0$$

مثال ۱۱ – اگر $P(x) = ۲x^{۴} - ۳x^{۲} + ۳x - ۴$ ، پیدا کنید $P(-۲)$ و $P'(-۲)$ را با روش هرنر.

حل – داریم

$$a_{۴} = ۲ \ , a_{۳} = ۰ \ , a_{۲} = -۳ \ , a_{۱} = ۳, a_{۰} = -۴$$

برطبق الگوریتم هُرنر داریم

$$b_{۴} = a_{۴} = 2$$
$$b_{۳} = ۲(-۲) + ۰ = -۴$$
$$b_{۲} = (-۴)(-۲) - ۳ = ۵$$
$$b_{۱} = ۵(-۲) + ۳ = -۷$$
$$b_{۰} = (-۷)(-۲) - ۴ = ۱۰$$

پس $P(-۲) = ۱۰$. حال داریم

$$Q(x) = ۲x^{۳} - ۴x^{۲} + ۵x - ۷$$

ضرایب $Q(x)$ را به‌صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم

$$a_{۳} = ۲ \ , a_{۲} = -۴ \ , a_{۱} = ۵ \ , a_{۰} = -۷$$

قرار می‌دهیم

$$b_{۳} = a_{۳} = ۲$$
$$b_{۲} = ۲(-۲) - ۴ = -۸$$
$$b_{۱} = (-۸)(-۲) + ۵ = ۲۱$$
$$b_{۰} = ۲۱(-۲) - ۷ = -۴۹$$

بنابراین $P'(-۲) = Q(-۲) = -۴۹$.

امتیاز روش هُرنر بر روش معمولی

برای محاسبه‌ی مقدار چندجمله‌ای $P(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \ldots + a_{۱} x + a_{۰}$ به‌ازای $x = x_{۰}$ باروش معمولی، تعداد عمل ضرب مورد نیاز برابر است با

$$۱ + ۲ + \ldots + (n - ۱) + n = \frac{n(n + ۱)}{۲}$$

زیرا در محاسبه‌ی $a_{۱} x_{۰}$ به یک عمل ضرب و در محاسبه‌ی $a_{۱} x_{۰}^{۲}$ به دو عمل ضرب و … و برای $a_n x_{۰}^{n}$ به n عمل ضرب نیاز است. از طرفی با توجه به الگوریتم هُرنر ، در محاسبه‌ی هر b_k به یک عمل ضرب نیاز است ، و در نتیجه کل عمل ضرب مورد نیاز برابر n است. پس ، برای مثال ، اگر $n = ۱۰۰$ ، آنگاه با روش معمولی در حدود ۵۰۰۰ ضرب و با روش هُرنر ۱۰۰ عمل ضرب لازم است. از آن‌جایی که انجام هر عمل ضرب توسط کامپیوتر زمان بر است ، امتیاز روش هُرنر بر روش معمولی آشکار می‌شود.

محاسبه‌ی ریشه‌های تکراری با روش نیوتن

تعریف ۴ — گفته می‌شود که α ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ با مرتبه‌ی تکرار m است هرگاه

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$$

اما $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

اگر α ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ و مرتبه‌ی تکرار آن m باشد، در این‌صورت باز هم می‌توان نشان داد که دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تعریف شده با فرمول نیوتن

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\ ,\ k = 0, 1, \ldots$$

با شرایط ذکر شده در قضیه همگرا است، ولی سرعت همگرایی از مرتبه‌ی دوم نبوده، بلکه همگرایی خطی است. برای آن که در حالت ریشه‌های تکراری همگرایی از مرتبه‌ی دوم باشد، می‌توان از فرمول نیوتن تصحیح شده

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\ ,\ k = 0, 1, \ldots}$$

استفاده نمود، که در آن m مرتبه‌ی تکرار ریشه است.

مثال ۱۲ — معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 4 = \left(x^2 - 2\right)^2 = 0$$

یک ریشه‌ی این معادله $\sqrt{2}$ و مرتبه تکرار آن دو است. تقریبی برای این ریشه با روش نیوتن استاندارد و روش نیوتن تصحیح شده به‌دست می‌آوریم. با روش استاندارد داریم

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\left(x_k^2 - 2\right)^2}{4x_k\left(x_k^2 - 2\right)}$$

یا

$$x_{k+1} = \frac{3x_k^2 + 2}{4x_k}\ ,\ k = 0, 1, \ldots$$

با انتخاب $x_0 = 1.5$ و $\epsilon = 10^{-4}$ نتایج به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

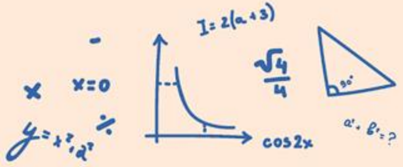
n	x_n	e_n
۰	۱.۵	8.578644×10^{-2}
۱	۱.۴۵۸۳۳۳	4.411981×10^{-2}
۲	۱.۴۳۶۶۰۷	2.239356×10^{-2}
۳	۱.۴۲۵۴۹۸	1.128409×10^{-2}
۴	۱.۴۱۹۸۷۸	5.664324×10^{-3}
⋮	⋮	⋮
۹	۱.۴۱۴۳۹۱	1.777169×10^{-4}
۱۰	۱.۴۱۴۳۰۲	8.890593×10^{-5}

$N_1 =$ ۱۰

در جدول بالا $e_n = |\sqrt{2} - x_n|$ ، خطا در هر تکرار است. ملاحظه می‌شود که سرعت همگرایی کند است و خطا در هر تکرار تقریباً نصف می‌شود. می‌توان نشان داد (تمرین) که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{1}{2}$$

به‌عبارت دیگر همگرایی خطی است و جواب با دقت مطلوب پس از ۱۰ تکرار به‌دست می‌آید. در حقیقت داریم $|x_{10} - x_9| < \epsilon$. در ضمن با توجه به این که $\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$ ، تقریب x_{10} تنها سه رقم اعشار درست دارد.



اکنون تقریبی برای ریشه با روش نیوتن تصحیح شده به‌دست می‌آوریم. داریم

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2\left(x_k^2 - 2\right)^2}{4x_k\left(x_k^2 - 2\right)}$$

یا

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 2}{2x_k} \quad ; k = 0, 1, \ldots$$

$\sqrt{N_2}$

با انتخاب $x_0 = 1.5$ و $\epsilon = 10^{-4}$ نتایج به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

n	x_n	e_n
0	1.5	8.578644×10^{-2}
1	1.416667	2.450365×10^{-3}
2	1.414216	2.121564×10^{-6}
3	1.414214	2.420323×10^{-8}

$N_2 = 3$

ملاحظه می‌شود که با این روش جواب با دقت مطلوب با سه تکرار به‌دست می‌آید، یعنی $\mid x_3 - x_2 \mid < \epsilon$. به‌بیان دیگر، سرعت همگرایی تند است ، و به‌طوری که ملاحظه می‌شود خطا در هر تکرار متناسب با مربع خطا در تکرار قبل است. در حقیقت می‌توان نشان داد (تمرین) که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

یعنی همگرایی مرتبه‌ی دو است. در این‌جا تقریب x_3 دارای شش رقم اعشار درست است.

۶.۳ روش وتری

به‌طوری که دیدیم روش نیوتن سریعاً همگرا است ، ولی نقص عمده‌ی این روش آن است که در هر تکرار به محاسبه‌ی دو تابع نیاز است یکی f و دیگری f' . این امر حجم محاسبات را افزایش می‌دهد ضمن آن که ممکن است محاسبه‌ی مشتق هم پیچیده باشد. یک راه برای آن که نیازی به محاسبه‌ی مشتق نباشد و در عین حال روشی با سرعت همگرایی بالا داشته باشیم، آن است که مشتق را به‌صورت زیر تقریب بزنیم

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

در این‌صورت با قرار دادن در فرمول نیوتن خواهیم داشت

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{h}{f(x_n) - f(x_n - h)}\right) f(x_n)$$

یا اگر قرار دهیم $x_n - h = x_{n-1}$ ، آنگاه

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \quad , n = 1, 2, \ldots} \qquad (13)$$

فرمول (۱۳) را به‌صورت زیر هم می‌توان نوشت

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad , n = 1, 2, \ldots} \qquad (14)$$

فرمولهای (۱۳) و (۱۴) را فرمولهای وتری می‌نامند.

پس، در روش وتری دو تقریب اولیه‌ی x_0 و x_1 برای α ، ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ ، انتخاب نموده و دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ را توسط فرمول (۱۳) یا (۱۴) تولید می‌کنیم. تحت شرایط مناسب دنباله همگرا به α خواهد بود.

مثال ۱۳ — تقریبی برای $\sqrt{2}$ به‌دست آورید.

حل — $\sqrt{2}$ ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = x^2 - 2 = 0$ است. تقریبهای اولیه $x_0 = 1$ و $x_1 = 2$ را انتخاب می‌کنیم. بنا به فرمول وتری (۱۳) داریم

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n^2 - x_{n-1}^2}\left(x_n^2 - 2\right)$$

یا

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} + 2}{x_n + x_{n-1}} \quad , n = 1, 2, \ldots$$

از این‌جا

$$x_2 = 1.333333 \quad , x_3 = 1.400000 \quad , \ldots$$

نتایج در جدول زیر داده می‌شود.

n	x_{n+1}	e_{n+1}
۱	۱.۳۳۳۳۳۳	۰.۰۸۰۸۸۰
۲	۱.۴۰۰۰۰۰	۰.۰۱۴۲۱۴
۳	۱.۴۱۴۶۳۴	۰.۰۰۰۴۲۱
۴	۱.۴۱۴۲۱۱	۰.۰۰۰۰۰۲
۵	۱.۴۱۴۲۱۴	۰.۰۰۰۰۰۰

که $e_n = |\sqrt{2} - x_n|$. در این مثال $\epsilon = 0.0001$ و از آزمون توقف

$$|f(x_{n+1})| < \epsilon \, , \quad |x_{n+1} - x_n| < \epsilon$$

استفاده شده است ، که در تکرار ۵ این دو شرط تواماً برقرار می‌شود.

قضیه‌ی ۷ — فرض کنید α ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ باشد، و f ، f' و f'' در یک همسایگی α مانند I پیوسته باشند، و $f'(x) \neq 0$ ، $\forall x \in I$. دراین‌صورت اگر تقریبهای x_0 و x_1 به‌قدر کافی نزدیک به α انتخاب شوند، دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تعریف شده با فرمول وتری

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \quad ,n = 1, 2, \ldots$$

همگرا به α است، و

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C$$

که $C \neq 0$ ثابت و $p = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. به‌عبارت دیگر مرتبه‌ی همگرایی روش $p \approx 1.6$ است.

پایان فصل سوم