۳-۷ نمودار لگاریتمی (بود)

نمودار بود از دو نمودار مجزا تشکیل می‌شود. یکی منحنی دامنه برحسب فرکانس و دیگری منحنی فاز برحسب فرکانس که عموماً منحنی‌های دامنه و فاز برحسب لگاریتم فرکانس رسم می‌شوند. نمودار بود را نمودار گوشه‌ای یا نمودار مجانبی نیز می‌نامند. علت این نام‌گذاری این است که نمودار بود را می‌توان با استفاده از صورت‌های تقریبی متشکل از خط‌های مستقیم که مجانب نمودار اصلی هستند، رسم کرد. نمودار بود ویژگی‌های زیر را دارد:

۱- چون دامنه $G(j\omega)$ در نمودار بود برحسب dB است، عوامل ضرب و تقسیم در $G(j\omega)$ به ترتیب به صورت جمع و تفریق درمی‌آیند. فازها نیز به صورت جبری به هم افزوده و از هم کاسته می‌شوند.

۲- منحنی دامنه نمودارهای بود $G(j\omega)$ را می‌توان با پاره‌خط‌های مستقیمی تقریب زد که به این ترتیب می‌توان نمودار بود را بدون محاسبات زیاد به سادگی رسم کرد.

۳- به دلیل سادگی در رسم نمودار بود با استفاده از خطوط مستقیم می‌توان اطلاعات لازم برای نمودارهای دیگر در حوزه فرکانس از جمله نمودار قطبی و نمودار نیکولز را از نمودار بود بدست آورد. تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید.

$$G(s)=\frac{k(s+z_۱)(s+z_۲)\dots(s+z_m)}{s^j(s+p_۱)(s+p_۲)\dots(s+p_n)}e^{-T_d s}$$

که در آن k ، T_d ثوابت حقیقی و p_i و z_i ها می‌توانند اعداد حقیقی یا مختلط باشند. برای استفاده از نمودار بود باید از فرم استاندارد توابع تبدیل استفاده کرد. این فرم استاندارد از عوامل زیر تشکیل یافته است.

۱- ضریب ثابت: k

۲- قطب‌ها و صفرهایی در مبدأ با مرتبه p : $(s)^{\pm p}$

۳- عوامل درجه اول با مرتبه q : $(۱+sT)^{\pm q}$

۴- عوامل درجه دوم با مرتبه r : $[۱+۲\xi Ts+T^۲s^۲]^{\pm r}$

۵- تأخیر زمانی خالص: $e^{-T_d s}$

به عنوان نمونه، تابع تبدیل زیر، یک تابع تبدیل استاندارد برای استفاده از روش نمودار بود می‌باشد.

$$G(s)=\frac{k(۱+T_۱s)(۱+T_۲s)}{s(۱+۲\xi Ts+T^۲s^۲)}e^{-T_d s}$$

به $\frac{۱}{T}$ فرکانس گوشه‌ای می‌گوییم. بنابراین ابتدا بایستی تابع تبدیل مربوطه را بر اساس عوامل فوق به فرم استاندارد درآورده، سپس به جای $s=j\omega$ قرار دهیم.

در ادامه برای رسم دیاگرام بود، اندازه و فاز هر یک از عوامل را رسم کرده و سپس با هم جمع جبری می‌کنیم. بدین منظور هر یک از عوامل را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم.

۱- بهره ثابت k

اندازه:

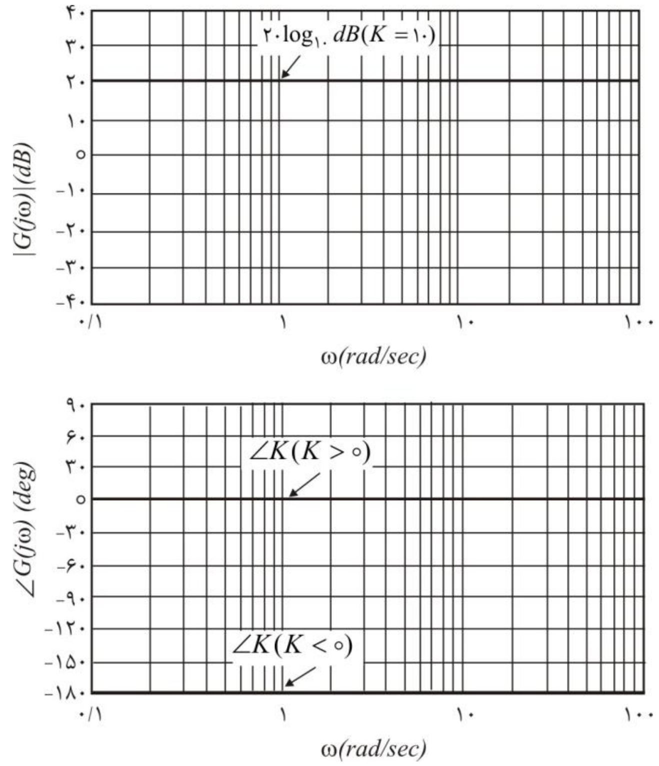
$$|G(j\omega)|_{dB}=k_{dB}=۲۰\log_{۱۰}k$$

فاز:

$$\angle k=\begin{cases}۰ & k>۰\\ -۱۸۰ & k<۰\end{cases}$$

توجه کنید

$$k>۱\rightarrow ۲۰\log k>۰$$
$$۰<k<۱\rightarrow ۲۰\log k<۰$$

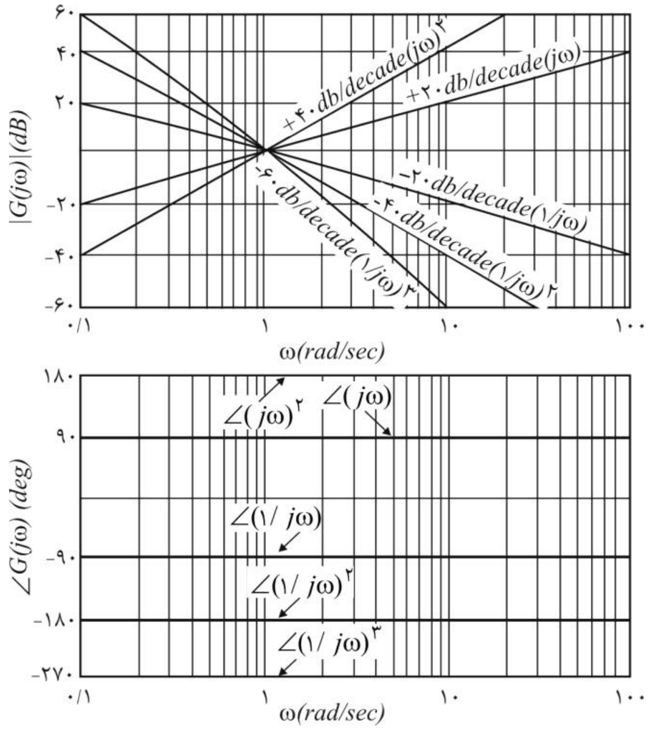


شکل (۳ ـ ۱۲): نمودارهای بود K

۲- صفرها و قطب‌ها در مبدأ $G(s) = (s)^{\pm p}$

اندازه: $|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|(j\omega)^{\pm p}| = \pm 20\, p\log_{10}\omega$

فاز: $\angle(j\omega)^{\pm} = \pm p\,\dfrac{\pi}{2}$



شکل (۳ ـ ۱۳): نمودارهای بود $(j\omega)^{\pm p}$

۳- صفر ساده $G(s)=1+Ts$

اندازه: $|G(j\omega)|_{dB}=20\log_{10}|G(j\omega)|=20\log_{10}\sqrt{1+\omega^2T^2}$

در فرکانس‌های بسیار پایین: $\omega<<\frac{1}{T} \quad \rightarrow \quad |G(j\omega)|_{dB}=0$

در فرکانس بسیار بالا: $\omega>>\frac{1}{T} \quad \rightarrow \quad |G(j\omega)|_{dB}\approx 20\log\omega T$

فاز: $\angle G(j\omega)=\tan^{-1}\omega T$

$\omega=0 \;\rightarrow\; \angle G(j\omega)=0$

$\omega=\infty \;\rightarrow\; \angle G(j\omega)=\frac{\pi}{2}$

۴- قطب ساده $G(s)=\frac{1}{1+Ts}$

اندازه: $|G(j\omega)|_{dB}=-20\log_{10}|G(j\omega)|=-20\log\sqrt{1+\omega^2T^2}$

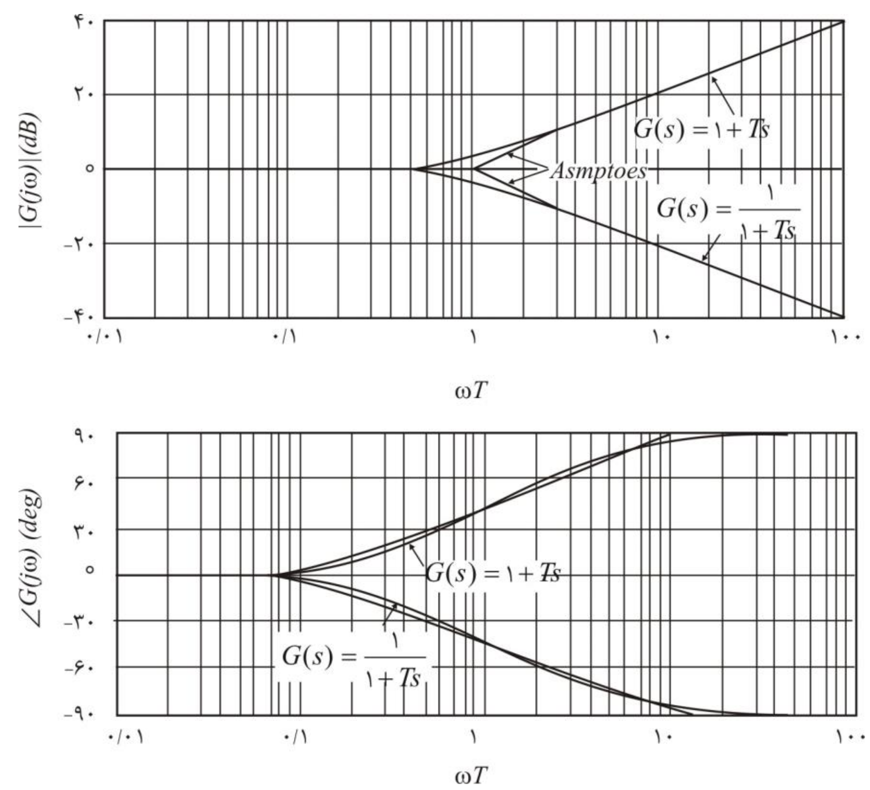
در فرکانس‌های بسیار پایین: $\omega<<\frac{1}{T} \quad \rightarrow \quad |G(j\omega)|_{dB}=0$

در فرکانس‌های بسیار بالا: $\omega>>\frac{1}{T} \quad \rightarrow \quad |G(j\omega)|_{dB}=-20\log\omega T$

فاز: $\angle G(j\omega)=-\tan^{-1}\omega T$

$\omega=0 \quad \rightarrow \quad \angle G(j\omega)=0$

$\omega=\infty \quad \rightarrow \quad \angle G(j\omega)=-\frac{\pi}{2}$



شکل (۳ ـ ۱۴): نمودارهای بود $G(s)=1+Ts$ و $G(s)=\frac{1}{1+Ts}$

۵- عوامل درجه دوم $G(s)=(1+2\xi Ts+T^2s^2)^{\pm 1}$

عوامل درجه دوم ناشی از عوامل صفر یا قطب مختلط مزدوج می‌باشند. به عبارتی دیگر، تنها حالتی موردنظر است که $0<\xi<1$ باشد. زیرا در غیر این صورت $G(s)$ دو صفر یا دو قطب حقیقی نابرابر دارد و می‌توان آن را به صورت حاصل‌ضرب دو تابع تبدیل با صفرها یا قطب‌های ساده در نظر گرفت. توجه کنید که برای مقادیر کوچک ξ، تقریب مجانب‌های پاسخ فرکانسی دقیق نمی‌باشد.

۵-۱ اثر قطب مختلط مزدوج $G(s)=(1+2\xi Ts+T^2s^2)^{-1}$

دامنه:
$$|G(j\omega)|_{dB}=-20\log\sqrt{(1-(\omega T)^2)^2+4\xi^2(T\omega)^2}$$

در فرکانس‌های بسیار کم:
$$\omega<<\frac{1}{T}\quad\rightarrow\quad|G(j\omega)|_{dB}=0$$

در فرکانس‌های بسیار بالا:
$$\omega>>\frac{1}{T}\quad\rightarrow\quad|G(j\omega)|_{dB}\approx-20\log\sqrt{(\omega^2T^2)^2}=-40\log_{10}\omega T$$

فاز:
$$\angle G(j\omega)=-\tan^{-1}\frac{2\xi T\omega}{1-(T\omega)^2}$$

سیستم حلقه بسته مرتبه دوم نوعی را در نظر بگیرید.
$$M(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

با ساده‌سازی داریم:
$$G(j\omega)=\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+2\xi\frac{s}{\omega_n}+1}$$

با مقایسه رابطه اخیر با $G(s)=(1+2\xi Ts+T^2s^2)^{-1}$ داریم:
$$T=\frac{1}{\omega_n}$$

شکل ۳-۱۵، نمودار بود را برای قطب مزدوج به ازای ξهای مختلف نشان می‌دهد.

۵-۲ اثر صفر مختلط مزدوج $G(s)=1+2\xi Ts+T^2s^2$

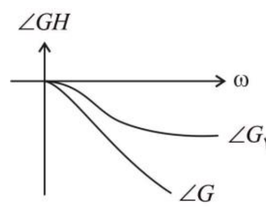
منحنی‌های اندازه و فاز در این حالت از معکوس کردن منحنی‌های اندازه و فاز مربوط به قطب مزدوج مختلط بدست می‌آیند.

۶- تأخیر زمانی خالص $G(s)=e^{-T_d s}$

$$G(j\omega)=e^{-j\omega T_d}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}|G(j\omega)|_{dB}=20\log 1=0\\ \angle G(j\omega)=-\omega T_d\,(rad)=-57/3\,\omega T_d\ \text{درجه}\end{cases}$$

بنابراین تأخیر زمانی تنها روی نمودار فاز اثر گذاشته و روی نمودار دامنه اثری ندارد.

❋ **نکته:** ***۱- عدم وجود مجانب افقی در فرکانس‌های بالا در منحنی فاز دلیل بر وجود تأخیر زمانی است.***

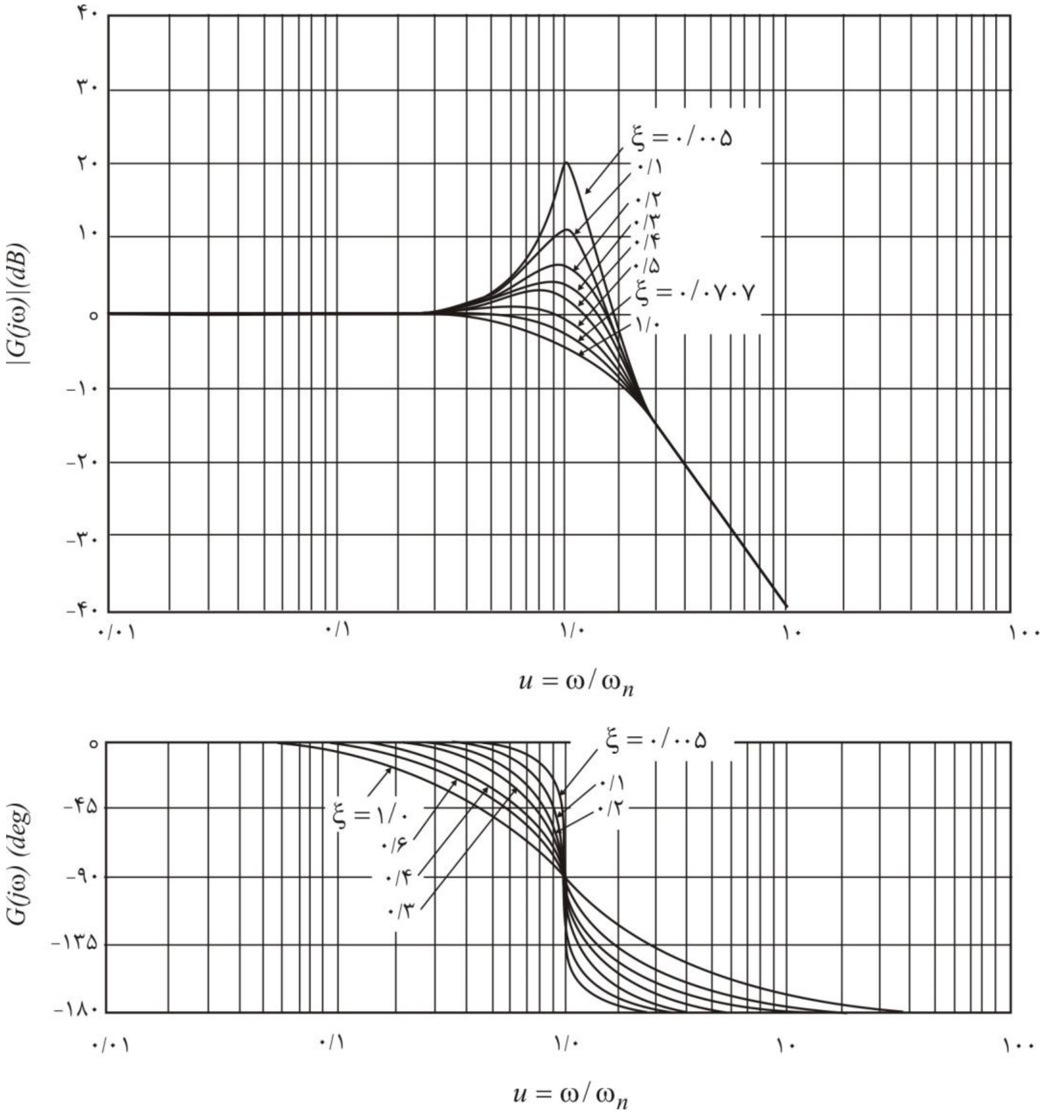


۲- در رسم نمودار بودی $G(j\omega)=G_1(j\omega)e^{-sT_d}$، نمودار دامنه $|G(j\omega)|_{dB}$ همان نمودار دامنه $|G_1(j\omega)|_{dB}$ می‌باشد. در حالی که نمودار فاز $G(j\omega)$ با کاستن ωT_d از منحنی فاز $G_1(j\omega)$ در ω های مختلف بدست می‌آید. به عبارتی دیگر، فرکانس گذر بهره $G(j\omega)$ و $G_1(j\omega)$ برابر می‌باشند. در حالی که حد فاز $G(j\omega)$ کمتر از $G_1(j\omega)$ می‌باشد.

۳- اثر تغییرات فاز از ۰/۱ تا ۱۰ برابر فرکانس گوشه‌ای است.

۴- در نمودارهای بودی علاوه‌بر $\frac{dB}{dec}$ (یک دهه تغییر در ω) از $\frac{dB}{oct}$ (یک هشته تغییر در ω) نیز استفاده می‌نمایند. به طوری که هر $20\frac{dB}{dec}$ معادل $6\frac{dB}{oct}$ می‌باشد.

$$\pm 20\frac{dB}{dec}=\pm 6\frac{dB}{oct}$$



شکل (۳ ـ ۱۵) : **نمودارهای بود** $G(s)=\dfrac{1}{[1+2\xi(sT)+(sT)^2]}$

مثال: نمودار بود تابع تبدیل $G(s)=\dfrac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$ را رسم کنید. (مؤلف)

✍ **حل:**

اولین گام نوشتن تابع تبدیل مربوط به فرم استاندارد می‌باشد. لذ تابع تبدیل حلقه باز استاندارد برابر است با:

$$G(s)=\frac{7/5(\frac{s}{3}+1)}{s(\frac{s}{2}+1)(1+\frac{s}{2}+\frac{s^2}{2})}$$

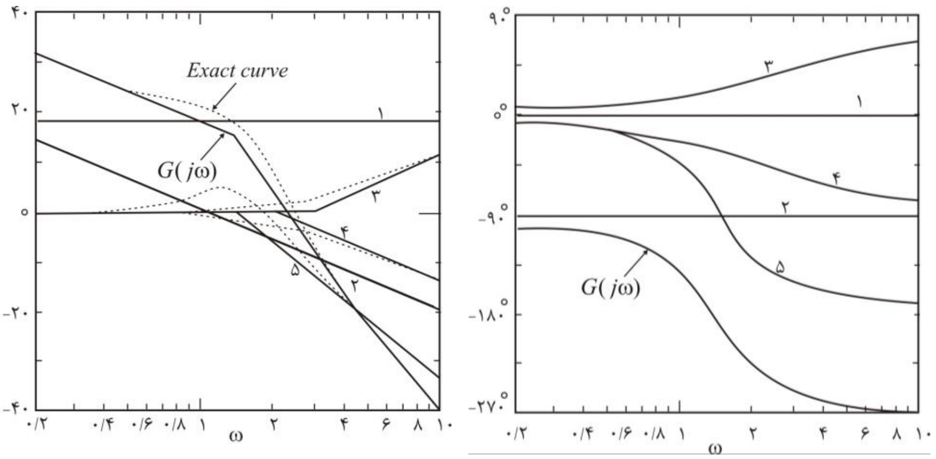
لذا فرکانس‌های گوشه‌ای عبارتند از:

$$s=\frac{1}{T}\quad\Rightarrow\quad 3\ ,\ 2,\sqrt{2}$$

توجه کنید نسبت میرایی برای عامل درجه دوم $\xi=0/3536$ می‌باشد. با نمایش عوامل مربوطه به صورت

$$G_1(s)=7/5\quad,\quad G_2(s)=s^{-1}\quad,\quad G_3(s)=1+\frac{s}{3}\quad,\quad G_4(s)=(1+\frac{s}{2})^{-1}\quad,\quad G_5(s)=(1+\frac{s}{2}+\frac{s^2}{2})^{-1}$$

نمودار بود تابع تبدیل $G(s)$ به شکل زیر است. توجه کنید به خاطر لگاریتمی بودن نمی‌توان منحنی‌ها را از فرکانس صفر رسم کرد ($\log 0 = -\infty$). لذا از فرکانس ۰/۰۱ یا ۰/۱ عموماً استفاده می‌کنیم.



۳-۷-۱ بررسی سیستم‌های می‌نیمم فاز و نامی‌نیمم فاز

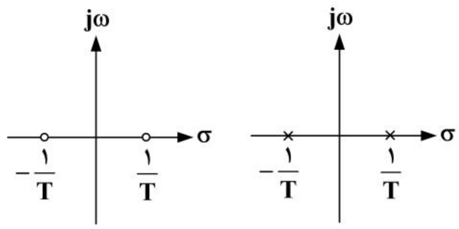
یادآوری می‌کنیم که توابع تبدیلی که در نیمه راست صفحه s صفر یا قطبی نداشته باشند، می‌نیمم فاز و توابع تبدیلی که در نیمه راست صفحه s قطب یا صفر دارند، نامی‌نیمم فاز می‌نامیم. برای درک بهتر اثرات صفر و قطب نیمه سمت راست صفحه s بر روی نمودار بود، حالتی را در نظر بگیرید که قطب و صفر در طرفین محور $j\omega$ به یک فاصله قرار داشته باشند. $(T > 0)$

$$G_1(s)=\frac{1}{1+Ts} \quad \rightarrow \quad G_1(j\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \quad \angle G_1(j\omega)=-\tan^{-1}T\omega$$

$$G_2(s)=1-Ts \quad \rightarrow \quad G_2(j\omega)=\sqrt{1+T^2\omega^2} \quad \angle G_2(j\omega)=-\tan^{-1}T\omega$$

$$G_3(s)=\frac{1}{1-Ts} \quad \rightarrow \quad G_3(j\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \quad \angle G_3(j\omega)=\tan^{-1}T\omega$$

$$G_4(s)=1+Ts \quad \rightarrow \quad G_4(j\omega)=\sqrt{1+T^2\omega^2} \quad \angle G_4(j\omega)=\tan^{-1}T\omega$$



به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که

۱- قطب سمت راست از لحاظ اندازه مثل قطب سمت چپ محور $j\omega$ عمل کرده و از لحاظ زاویه مثل صفر سمت چپ محور $j\omega$ عمل می‌کند.

۲- صفر سمت راست از لحاظ اندازه مثل صفر سمت چپ محور $j\omega$ عمل کرده و از لحاظ زاویه مثل قطب سمت چپ محور $j\omega$ عمل می‌کند.

به طور خلاصه چنین می‌گوییم: «صفر سمت راست همانند قطب سمت چپ محور $j\omega$ عمل می‌کند و برعکس.»

❋ **نکته:** ***با فرض این که m و n به ترتیب درجه صورت و مخرج تابع تبدیل سیستمی باشند:***

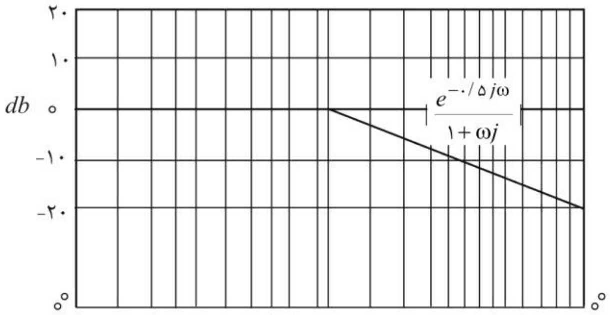
۱- در یک سیستم (می‌نیمم فاز یا غیرمی‌نیمم فاز) شیب منحنی لگاریتمی در مجانب بالایی نمودار دامنه $-20(n-m)dB$ می‌باشد.

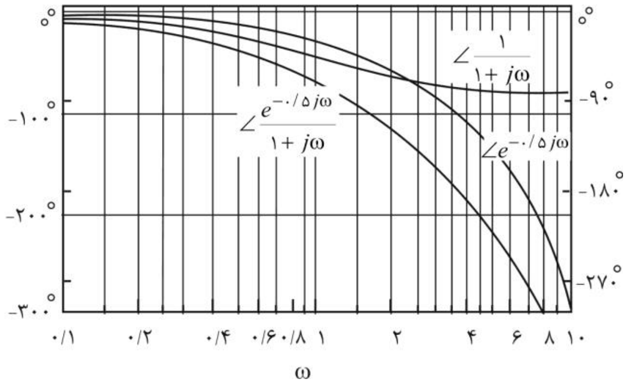
۲- فقط در سیستم می‌نیمم فاز زاویه فاز در $\omega=\infty$ برابر $-90(n-m)^\circ$ می‌باشد.

۳- وجود تأخیر زمانی خالص، نشان‌دهنده رفتار نامی‌نیمم فاز می‌باشد. به مثال زیر دقت کنید.

مثال: نمودار بود تابع تبدیل $G(s)=\dfrac{e^{-\cdot/\Delta s}}{1+s}$ را رسم کنید. (مؤلف)

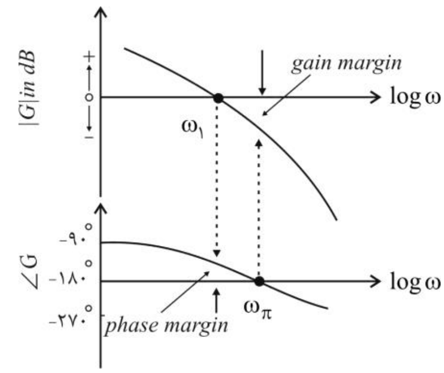
$$G(j\omega)=\frac{e^{-\cdot/\Delta j\omega}}{1+j\omega} \Rightarrow |G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \quad , \quad \angle G(j\omega)=-\cdot/\Delta\omega-\tan^{-1}\omega$$



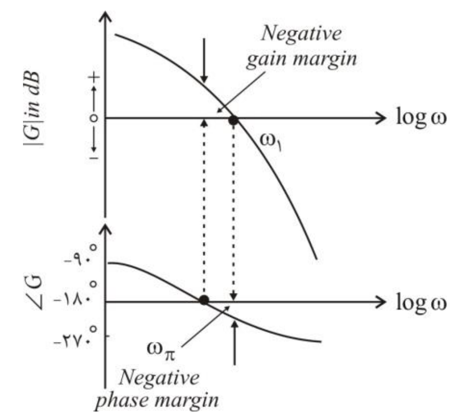


۳-۷-۲ محاسبه حد فاز و حد بهره از روی نمودار بود

محاسبه حد فاز و حد بهره از روی نمودار بود به صورت گرافیکی در شکل ۳-۱۶ آورده شده است که در آن ω_1 فرکانس گذر بهره (محل تلاقی منحنی اندازه با خط $\circ dB$) و ω_π فرکانس گذر فاز (محل تلاقی منحنی فاز با خط -180°) می‌باشد. یادآوری می‌کنیم که محاسبه حد فاز و حد بهره به روش فوق برای سیستم‌های می‌نیمم‌فاز صادق می‌باشد. اگر حد فاز و حد بهره مثبت باشد، سیستم پایدار است. بنابراین نمودار بودی شکل ۳-۱۶ مربوط به یک سیستم پایدار می‌باشد. نمودار بودی مربوط به یک سیستم ناپایدار نوعی در شکل ۳-۱۷ آورده شده است.



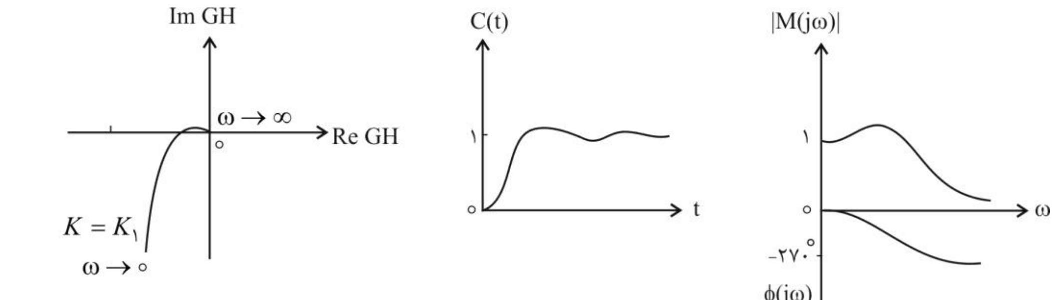
شکل (۳-۱۶) تعیین حدفاز و حدبهره در نمودار بود



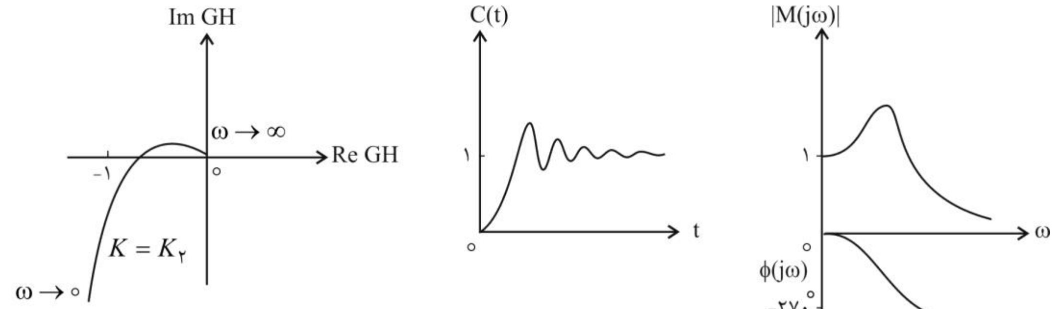
شکل (۳-۱۷): نمودار بودی یک سیستم ناپایدار

۳-۷-۳ مقایسه گرافیکی نمودار قطبی، نمودار بودی و پاسخ پله

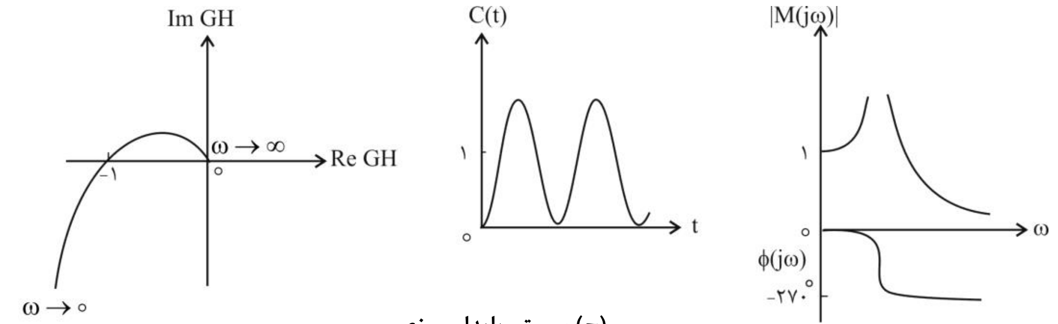
همان‌طور که قبلاً بیان شد، علاقمندیم که میزان پایداری سیستم‌ها را که در اصطلاح پایداری نسبی نامیده می‌شود، تعیین کنیم. در حوزه زمان، پایداری نسبی یک سیستم کنترلی برحسب پارامترهایی چون ماکزیمم فراجهش و نسبت میرایی سنجیده می‌شود. در حالی که پایداری نسبی در حوزه فرکانس، از اوج تشدید M_p، حد فاز و حد بهره در نمودار بود و یا از دوری و نزدیکی نمودار قطبی سیستم از نقطه بحرانی $(-1+j\circ)$ تعیین می‌گردد. برای تشریح بهتر مفهوم پایداری نسبی، نمودار قطبی (نایکوئیست)، نمودار بودی و پاسخ پله‌ای برای یک سیستم کنترل نوعی در شکل ۳-۱۸ آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نزدیک‌تر شدن نمودار قطبی به نقطه بحرانی $(-1+j\circ)$ معادل افزایش ماکزیمم فراجهش، تندتر شدن شیب منحنی فاز در نمودار بودی و کاهش پایداری سیستم می‌باشد.



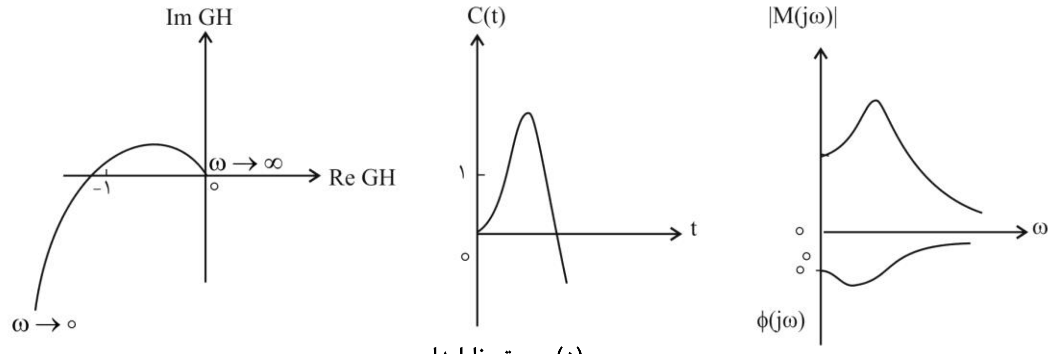
(الف) سیستم پایدار و با میرایی خوب



(ب) سیستم پایدار اما نوسانی



(ج) سیستم پایدار مرزی



(د) سیستم ناپایدار

شکل (۳-۱۸)؛ رابطه بین نمودار نایکوئیست، پاسخ پله و نمودار بودی

۳-۷-٤ تعیین ثوابت خطا از روی نمودار بود

به طور کلی رفتار فرکانس بالای سیستم معرف حالت گذرای آن و رفتار فرکانس پایین آن معرف حالت ماندگار آن می‌باشد. بنابراین به راحتی می‌توان از روی شیب منحنی دامنه در فرکانس‌های پایین ضمن تشخیص نوع سیستم، ثابت خطا و در نتیجه خطای حالت ماندگار را تعیین کرد. یادآوری می‌کنیم

۱- ثابت خطای پله (k_p) برای سیستم‌های از نوع صفر وجود دارد.

۲- ثابت خطای شیب (k_v) برای سیستم‌های از نوع ۱ وجود دارد.

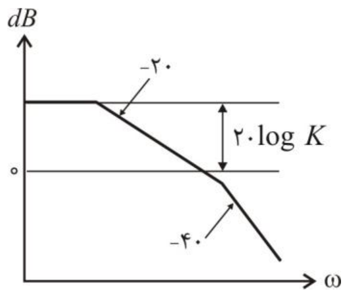
۳- ثابت خطای سهموی (k_a) برای سیستم‌های از نوع ۲ وجود دارد.

در ادامه به نحوه محاسبه ثابت خطا در سیستم‌های نوع صفر، یک و دو می‌پردازیم.

۱- سیستم نوع صفر ($\lambda = 0$)

منحنی اندازه بودی یک سیستم نوع صفر نمونه به صورت زیر است که در آن شیب منحنی در فرکانس‌های پایین $0 \dfrac{dB}{dec}$ می‌باشد. توجه کنید در این حالت خطای حالت ماندگار به ورودی شیب و سهمی، بی‌نهایت می‌باشد.

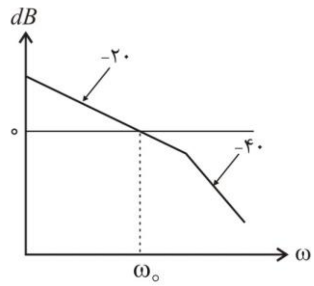
$$k_p = \lim_{s \to 0} GH(s) = k$$

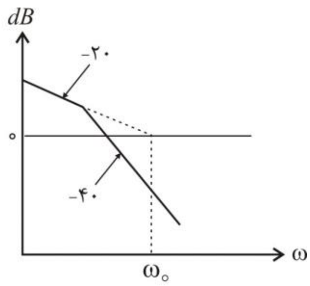


۲- سیستم نوع یک ($\lambda = 1$)

منحنی اندازه بودی یک سیستم نوع یک نمونه به صورت زیر است که در آن شیب منحنی در فرکانس‌های پایین $-20\dfrac{dB}{dec}$ می‌باشد. ثابت خطای شیب از محل تلاقی پاره‌خط اولیه با شیب $-20\dfrac{dB}{dec}$ یا امتداد آن با خط $0dB$ بدست می‌آید.

$$k_v = \lim_{s \to 0} sGH(s) = \omega_0$$



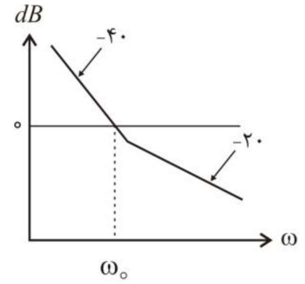


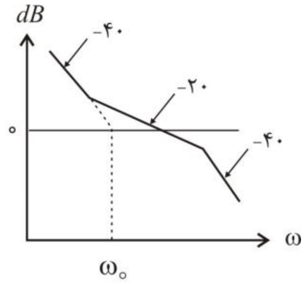
توجه کنید در این حالت خطای حالت ماندگار به ورودی پله صفر و به ورودی سهمی، بی‌نهایت می‌باشد.

۳- سیستم نوع دو ($\lambda = 2$)

منحنی اندازه بودی یک سیستم نوع دو نمونه به صورت مقابل است که در آن شیب منحنی در فرکانس‌های پایین $-40\dfrac{dB}{dec}$ می‌باشد. ثابت خطای شتاب از محل تلاقی پاره‌خط اولیه با شیب $-40\dfrac{dB}{dec}$ یا امتداد آن با خط $0dB$ بدست می‌آید.

$$k_a = \lim_{s \to 0} s^2 GH(s) = \omega_0^2$$

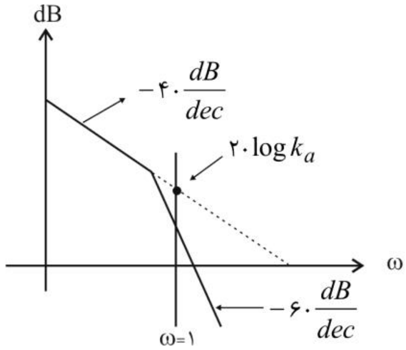


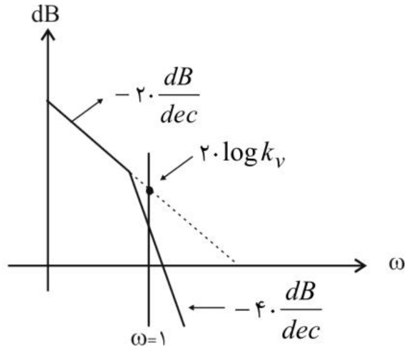


توجه کنید در این حالت، خطای حالت ماندگار به ورودی پله و ورودی شیب برابر صفر است.

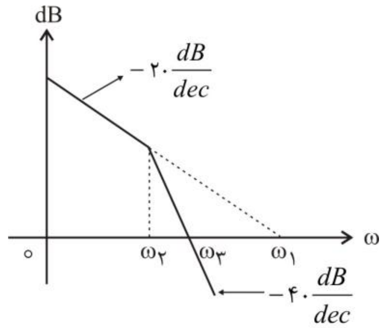
❋ **نکته:** ۱- *در سیستم نوع دو محل تلاقی پاره‌خط اولیه با شیب* $-۴۰\frac{dB}{dec}$ *یا امتداد آن با خط* $\omega=۱$*، دامنه* $۲۰\log k_a$ *را نشان می‌دهد.*

۲- *در سیستم نوع یک محل تلاقی پاره خط اولیه با شیب* $-۲۰\frac{dB}{dec}$ *یا امتداد آن با خط* $\omega=۱$*، دامنه* $۲۰\log k_v$ *را نشان می‌دهد.*





۳- *سیستم نوع یک نمونه زیر را در نظر بگیرید. در این حالت داریم:*



۱) $k_v = \omega_۱$

۲) $\omega_۳ = \sqrt{\omega_۱\omega_۲}$

۳) $\xi = \frac{\omega_۲}{۲\omega_۳}$ (ξ نسبت میرایی)

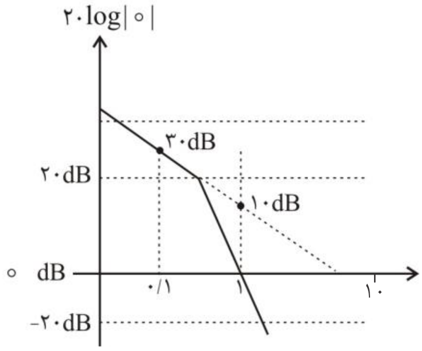
مثال: منحنی دامنه بودی برای سیستم نوع یک با فیدبک واحد منفی و تابع تبدیل حلقه باز $G(s)=\frac{k}{s(Js+B)}$ را در نظر بگیرید.

در این صورت داریم:

$$k_v = \lim_{s\to ۰} sGH(s) = \frac{k}{F} = \omega_۱$$

$$\omega_۲ = \frac{B}{J} \quad , \quad \omega_۳^۲ = \frac{k}{J} \quad , \quad \xi = \frac{B}{۲\sqrt{kJ}} = \frac{\omega_۲}{۲\omega_۳}$$

مثال: دیاگرام بود (دامنه) مربوط به بهره حلقه *(Loop Gain)* سیستم حداقل فازی در شکل داده شده است. با توجه به آن نوع سیستم و ثابت خطای آن را مشخص کنید. (هسته‌ای ۸۴ ـ ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۴)



۱) سیستم نوع ۱ و k_v برابر $\sqrt{۱۰}$ است.

۲) سیستم نوع ۲ و k_a برابر $\sqrt{۱۰}$ است.

۳) سیستم نوع صفر و k_p برابر $\sqrt{۱۰}$ است.

۴) اطلاعات داده شده برای تعیین نوع سیستم کافی نیست.

✍ **حل**: گزینه «۱»

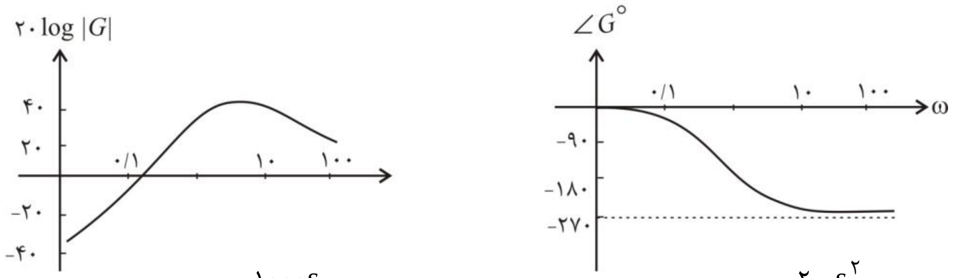
با توجه به متن درس، نوع سیستم برابر یک است. زیرا شیب منحنی اندازه نمودار بودی در فرکانس‌های پایین $-۲۰\dfrac{dB}{dec}$ است.

همچنین محل تلاقی امتداد پاره‌خط با شیب $-۲۰\dfrac{dB}{dec}$ با خط $\omega=۱$، نشان‌دهنده $۲۰\log k_v$ می‌باشد. لذا:

$$۲۰\log k_v = ۱۰ \quad \rightarrow \quad \log k_v = \frac{۱}{۲} \quad \rightarrow \quad k_v = \sqrt{۱۰}$$

مثال: نمودار بود یک سیستم در شکل زیر نشان داده شده است. در رابطه با این سیستم کدام مورد صحیح می‌باشد؟

(ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۳)



۱) $G(s)=\dfrac{۲۰۰s^۲}{s^۳+۱۴s^۲+۴۴s+۴۰}$

۲) $G(s)=\dfrac{-۱۰۰۰s}{s^۳+۱۳s^۲+۳۲s+۲۰}$

۳) $G(s)=\dfrac{-۲۰۰s^۲}{s^۳+۱۴s^۲+۴۴s+۲۰}$

۴) $G(s)=\dfrac{۱۰۰۰s}{s^۳+۱۳s^۲+۳۲s+۲۰}$

✍ **حل**: گزینه «۳»

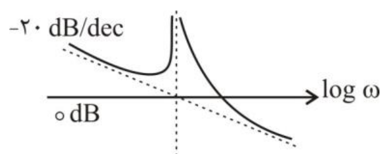
با توجه به می‌نیمم‌فاز بودن پاسخ‌ها، گزینه‌های (۱) و (۴) قطعاً نادرست هستند. زیرا فاز آن‌ها در $\omega=\infty$ به ترتیب عبارتند از -۹۰° و -۱۸۰°. با توجه به این که $-۱=e^{-j\pi}$ می‌باشد $(\angle-۱=-\pi)$ بنابراین گزینه (۳) صحیح است. زیرا تغییرات فاز آن از $\omega=۰^+$ تا $\omega=\infty$، -۲۷۰° می‌باشد.

$$\begin{cases}\varphi=\angle G(j\omega)\Big|_{۰}=-\pi+۲(\frac{\pi}{۲})=۰\\ \varphi=\angle G(j\omega)\Big|_{\infty}=-\pi-(۳-۲)\frac{\pi}{۲}=-\frac{۳\pi}{۲}\end{cases} \quad \rightarrow \quad \Delta\varphi=-۲۷۰^\circ$$

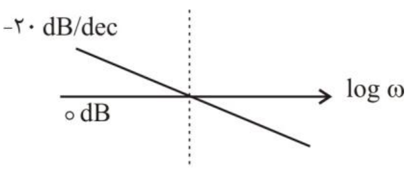
مثال: کدام گزینه نمایش دیاگرام بود (دامنه) تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)=\dfrac{s^۲+۱}{s(s+۱)^۲}$ است؟

(هسته‌ای ۸۴ ـ ابزار دقیق و اتوماسیون ۸۴)

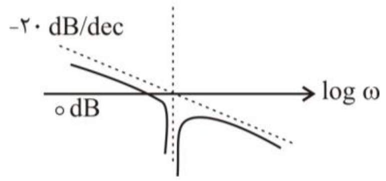
۱)



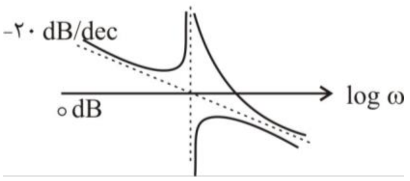
۲)



۳)



۴)



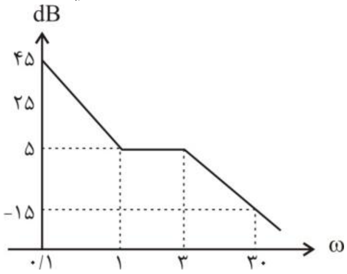
✍ **حل**: گزینه «۳»

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{۱-\omega^{۲}}{j\omega(۱+j\omega)^{۲}} \rightarrow |G(j\omega)H(j\omega)|=\frac{۱-\omega^{۲}}{\omega(۱+\omega^{۲})}$$

$$\omega=۱ \quad \rightarrow \quad ۲۰\log|GH(j\omega)|_{\omega=۱}=۲۰\log ۰=-\infty$$

توجه کنید شیب در قبل و بعد از فرکانس $\omega=۱$ به واسطه قطب در مبدا و دو قطب در $s=-۱$ ثابت و برابر $-۲۰\frac{dB}{dec}$ است.

مثال: با توجه به شکل روبرو، دیاگرام بود $Bode$ مربوط به کدام تابع تبدیل می‌باشد؟ (مکانیک ۸۳)



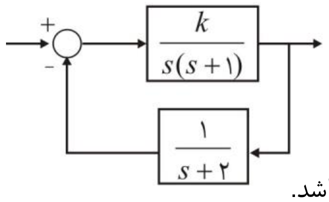
۱) $G(s)=\frac{k(s+۱)}{s(s+۳)^{۲}}$ ۲) $G(s)=\frac{k(s^{۲}+s+۱)}{s^{۲}(s+۳)}$

۳) $G(s)=\frac{k(s^{۲}+۳s+۹)}{s^{۲}(s+۱)}$ ۴) $G(s)=\frac{k(s+۱)}{s(s^{۲}+s+۹)}$

✍ **حل:** گزینه «۲»

شیب $-۴۰\frac{dB}{dec}$ در فرکانس‌های پایین نشان‌دهنده نوع سیستم است. لذا $\lambda=۲$. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست می‌باشند. با توجه به این که فرکانس‌های گوشه‌ای (که عبارتند از ۱ و ۳) و تغییرات شیب در منحنی اندازه، گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

مثال: کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد سیستم کنترل روبرو صحیح می‌باشد؟ (مکانیک ۸۲)



۱) به ازاء $k=۶$ حد فاز ۹۰° و مقدار ماکزیمم جهش سیستم $M_p=۱۰۰\%$ می‌باشد.

۲) به ازاء $k=۶$ حد فاز صفر درجه و مقدار ماکزیمم جهش سیستم $M_p=۰$ می‌باشد.

۳) به ازاء $k=۶$ حد فاز ۹۰° و مقدار ماکزیمم جهش سیستم $M_p=۰$ می‌باشد.

۴) به ازاء $k=۶$ حد فاز صفر درجه و مقدار ماکزیمم جهش سیستم $M_p=۱۰۰\%$ می‌باشد.

✍ **حل:** گزینه «۴»

تابع تبدیل حلقه باز سیستم برابر است با $GH(s)=\frac{k}{s(s+۱)(s+۲)}$. لذا معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$\Delta(s)=۱+\frac{k}{s(s+۱)(s+۲)}=۰ \quad \rightarrow \quad \Delta(s)=s^{۳}+۳s^{۲}+۲s+k=۰$$

با تشکیل جدول راث، برای $k=۶$ یک سطر صفر کامل در جدول راث رخ می‌دهد. لذا برای $k=۶$ سیستم پایدار مرزی است. پس حد فاز و حد بهره، صفر می‌باشد. از سویی دیگر، بهره حلقه بسته در این حالت دارای پیک بی‌نهایت می‌باشد (مراجعه به بخش رابطه گرافیکی میان نمودار قطبی، نمودار بودی و پاسخ پله). بنابراین $M_p=۱۰۰\%$ خواهد بود.

مثال: مقدار حاشیه بهره برای یک سیستم کنترل با پاسخ فرکانسی زیر عبارتست از:

فرکانس زاویه ای	ω	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶
نسبت دامنه‌ها	AR	۱/۰۵	۰/۸	۰/۵	۰/۲
اختلاف فاز بر حسب درجه	φ	−۱۲۰	−۱۴/۳	−۱۶۰	−۱۸۰

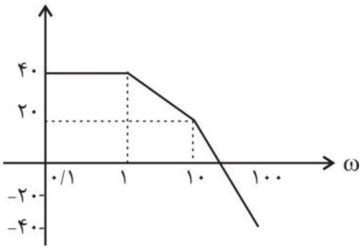
۱) ۱/۶ ۲) ۱/۲ ۳) ۰/۶۲۵ ۴) هیچ‌کدام

✍ **حل:** گزینه «۴»

طبق تعریف حد بهره داریم:

$$\left.\begin{matrix}\varphi=-۱۸۰\\ \omega_{\pi}=۱/۶\end{matrix}\right\} \Rightarrow AR=۰/۲ \quad \Rightarrow \quad G.M=\frac{۱}{AR}=\frac{۱}{۰/۲}=۵$$

مثال: در شکل مقابل دیاگرام $Bode$ یک سیستم کنترل $G(s)$ نشان داده شده است. کدام کسر معادل تابع تبدیل $G(s)$ است؟ (مکانیک ۷۶)



۱) $\frac{۱۰۰}{(s+۱)(s+۰/۱)}$ ۲) $\frac{۱۰۰۰}{s(s+۱)(s+۱۰)}$

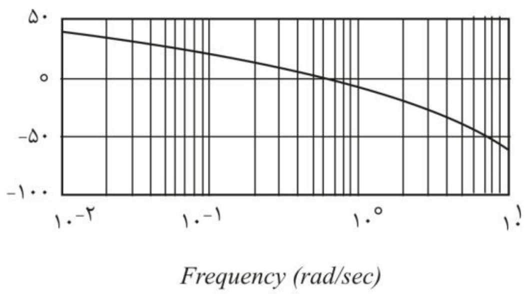
۳) $\frac{۱۰۰۰}{(s+۱)(s+۱۰)}$ ۴) $\frac{۱۰۰}{(s+۱)(s+۱۰)}$

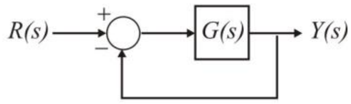
حل: گزینه «۳»

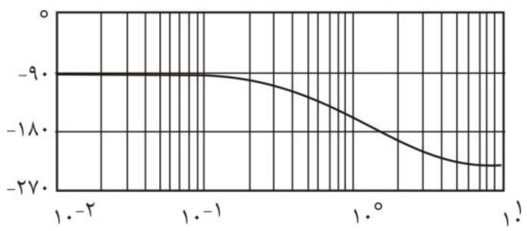
با توجه به فرکانس‌های گوشه‌ای $ω=۱$ و $ω=۱۰$، گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست می‌باشند. از اندازه $۴۰dB$ در فرکانس پایین و در نظر گرفتن فرم استاندارد توابع تبدیل، بایستی $k=۱۰۰$ باشد.

$$\frac{۱۰۰}{(s+۱)(\frac{s}{۱۰}+۱)}=\frac{۱۰۰۰}{(s+۱)(s+۱۰)}$$

مثال: دیاگرام $Bode$ تابع تبدیل مدار باز یک سیستم مدار بسته با فیدبک واحد منفی در شکل مقابل نشان داده شده است. پاسخ سیستم مدار بسته به ورودی $r(t)=t$ دارای: (مکانیک ۷۹)







۱) خطا نامحدود است.

۲) خطای ماندگار صفر است.

۳) خطای ماندگار $e_{ss}=۱$ است.

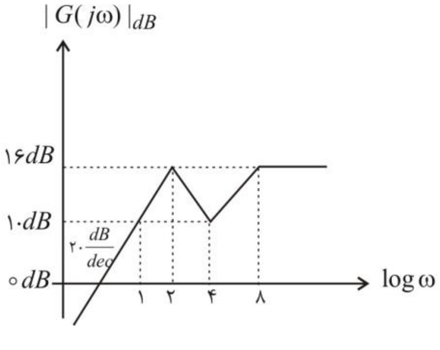
۴) خطای ماندگار محدود است. لیکن با استفاده از اطلاعات داده شده نمی‌توان مقدار خطا را محاسبه کرد.

حل: گزینه «۳»

با توجه به منحنی‌های اندازه و فاز، حد بهره و حد فاز مثبت بوده، لذا سیستم پایدار است. همچنین نوع سیستم یک می‌باشد ($λ=۱$). همچنین با امتداد شیب $-۲۰\frac{dB}{dec}$ و تقاطع آن با محور $۰dB$ داریم:

$$ω=k_v=۱ \Rightarrow e_{ss}=\frac{R}{k_v}=\frac{۱}{۱}=۱$$

مثال: منحنی مجانبی بودی تابع تبدیل $G(s)$ در شکل مقابل داده شده است. تابع تبدیل این سیستم کدام است؟ (هسته‌ای ۷۹)



۱) $\frac{۳/۱۶(s+۴)}{(s+۲)(s+۸)}$

۲) $\frac{(۶/۳۲)s(s+۴)^۲}{(s+۲)(s+۸)^۲}$

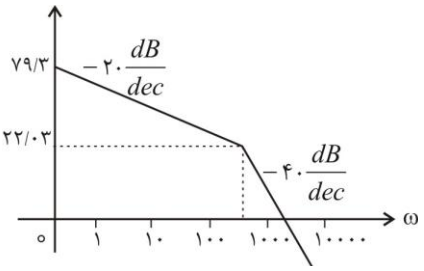
۳) $\frac{(۶/۳۲)s(s+۴)^۲}{(s+۲)^۲(s+۸)}$

۴) $\frac{(۳/۱۶)s(s+۴)}{(s+۲)^۲(s+۸)^۲}$

✍ **حل**: گزینه «۳»

شیب $+۲۰dB$ در فرکانس‌های پایین نشان‌دهنده حضور صفر در مبدأ (s) می‌باشد. لذا گزینه (۱) نادرست است. از تغییرات دامنه درمی‌یابیم که تابع تبدیل سیستم دارای عوامل $(s+۲)^۲$ و $(s+۸)$ در مخرج و عامل $(s+۴)^۲$ در صورت می‌باشد.

مثال: منحنی اندازه $Bode$ تابع تبدیل $G(s)$ در شکل مقابل رسم شده است. این $G(s)$ برابر کدام است؟ (هسته‌ای ۷۷)



۱) $\frac{۶۷۳\times ۱۰^۴}{s(۱+۷۳۰s)}$

۲) $\frac{۶۷۳\times ۱۰^۴}{s(s+۷۳۰)}$

۳) $\frac{۹۲۲۵}{s(s+۷۳۰)}$

۴) $\frac{۹۲۲۵}{s(۱+۷۳۰s)}$

✍ **حل**: گزینه «۲»

با توجه به این که فرکانس گوشه‌ای بین ۱۰۰ و ۱۰۰۰ می‌باشد، گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست می‌باشند.

$$G(s)=\frac{k}{s(\frac{s}{۷۳۰}+۱)}=\frac{۷۳۰k}{s(s+۷۳۰)}$$

$$۲۰\log k=۷۹/۳ \quad\rightarrow\quad k=۹۲۲۵ \quad\Rightarrow\quad G(s)=\frac{۶۷۳\times ۱۰^۴}{s(s+۷۳۰)}$$

مثال: پاسخ فرکانسی یک تابع تبدیل از قسمت‌های زیر تشکیل شده است:

الف) یک خط با شیب $-۲۰\frac{dB}{dec}$ برای فرکانس‌های پایین‌تر از ۰/۱ رادیان بر ثانیه.

ب) یک خط با شیب $-۴۰\frac{dB}{dec}$ برای فرکانس‌های بین ۰/۱ تا ۱/۵ رادیان بر ثانیه.

پ) یک خط با شیب $-۲۰\frac{dB}{dec}$ برای فرکانس‌های بین ۱/۵ تا ۱۸ رادیان بر ثانیه.

ت) یک خط با شیب $-۶۰\frac{dB}{dec}$ برای فرکانس‌های بالاتر از ۱۸ رادیان بر ثانیه.

ث) در فرکانس ۱۰ رادیان بر ثانیه، اندازه تابع تبدیل برابر یک می‌باشد.

اگر این تابع را به عنوان تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترل حلقه بسته با پس‌خور منفی واحد در نظر بگیریم، مقدار خطای حالت دائمی سیستم حلقه بسته را برای ورودی $r(t)=(۵+۳t)u(t)$ بدست آورید. (هسته‌ای ۷۵)

۱) ۱/۵۱۵ ۲) ۰/۰۱۵۵ ۳) ۰/۱۵۵ ۴) ۰/۰۰۱۵۵

✍ **حل**: گزینه «۲»

با توجه به مفروضات مسأله داریم:

$$GH(s)=\frac{k(s+۱/۵)}{s(s+۰/۱)(s+۱۸)^۲}$$

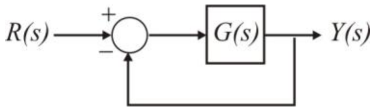
$$|G(j۱۰)|=۱ \quad\rightarrow\quad \frac{k\sqrt{۱۰۰+۱/۵^۲}}{۱۰\sqrt{۱۰۰+(۰/۱)^۲}\,(\sqrt{۱۰۰+(۱۸)^۲})^۲}=۱ \quad\rightarrow\quad k\approx ۴۱۹۳/۱$$

$$\Rightarrow\quad GH(s)=\frac{۴۱۹۳/۱(s+۱/۵)}{s(s+۰/۱)(s+۱۸)^۲}$$

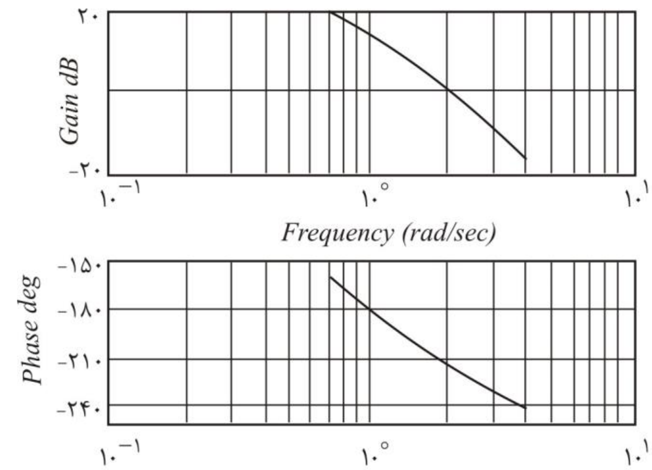
چون نوع سیستم یک است لذا خطای ماندگار به ورودی $5u(t)$ صفر می‌باشد. برای ورودی $3tu(t)$ داریم:

$$k_v = \lim_{s\to ۰} sGH(s) = ۱۹۳/۵۴ \quad \Rightarrow \quad e_{ss} = \frac{R}{k_v} = \frac{۳}{۱۹۳/۵۴} = ۰/۰۱۵۵$$

مثال: نمودار $Bode$ مدار باز یک سیستم مداربسته با فیدبک واحد منفی:



برای محدوده فرکانس $۰/۷ < \omega < ۴\frac{rad}{s}$ در شکل زیر نشان داده شده است. پاسخ سیستم مدار بسته به ورودی $r(t) = \sin ۲t$: (مکانیک ۷۸)



۱) نامحدود خواهد شد.
۲) دارای دامنه ۱ و اختلاف فاز حدوداً ۲۲۰- است.
۳) دارای دامنه ۰ و اختلاف فاز حدوداً ۲۲۰− است.
۴) از روی نمودار قابل محاسبه نیست.

✍ **حل:** گزینه «۱»

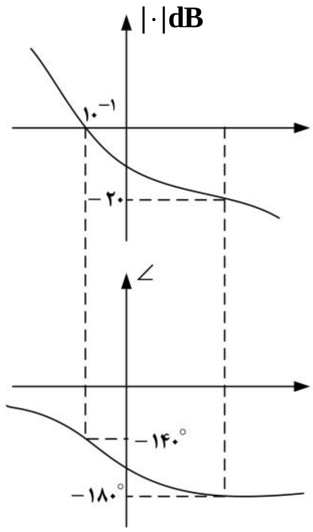
با توجه به نمودار بود داده شده حد فاز و حد بهره سیستم منفی بوده و لذا سیستم ناپایدار می‌باشد.

$$\omega_\pi = ۱ \quad \rightarrow \quad G\cdot M = -۲۰\log|G(j\omega_\pi)| \approx -۱۸dB$$

$$\omega_۱ = ۲ \quad \rightarrow \quad \angle G(j\omega_۱) \approx -۲۲۰$$

$$P.M = ۱۸۰ + \angle G(j\omega_۱) = ۱۸۰ - ۲۲۰ = -۴۰ < ۰$$

مثال: دیاگرام بود یک سیستم کنترلی در شکل روبرو رسم شده است. مقادیر حد فاز *(Phase Margin)* و حد تقویت *(Gain Margin)* برای این سیستم کنترلی برابر است با: (مکانیک ۸۲)



۱) $-۲۰db \ , \ -۴۰^\circ$
۲) $۲۰db \ , \ ۴۰^\circ$
۳) $-۲۰db \ , \ -۱۴۰^\circ$
۴) $۲۰db \ , \ ۱۴۰^\circ$

✍ **حل:** گزینه «۲»