ج) ماتریس ها با مقادیر ویژه تکراری :

$$(\lambda I - A) v_1 = 0$$

$$(\lambda I - A) Q_1 = v_1$$

$$(\lambda I - A) Q_2 = Q_1$$

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس مقادیر ویژه تکراری داشته باشد ممکن است

مجموعه کاملی از n بردار ویژه مستقل خطی نداشته باشد.

تعداد بردار ویژه مستقل خطی :

$$n - \mathrm{rank}(\lambda_i I - A)$$

$$(\lambda_i I - A) v_i = 0$$

$$(A - \lambda I) Q_1 = v_1$$

$$(A - \lambda I) Q_2 = Q_1$$

$$\vdots$$

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & Q_1 & Q_2 & \cdots \end{bmatrix}$$

تعمیم یافته (وابسته)

لذا $T^{-1}AT$ به فرم کانونیکال جردن در می‌آید.

$$J_{k\times k} = \begin{bmatrix} J_{p_1} & & & & & \\ & J_{p_2} & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & J_{p_\alpha} & & \\ & 0 & & & \lambda_{k+1} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

خود ماتریس‌های $p_i \times p_i$ هستند

$$J_{p_i} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

۱- کلیه عناصر قطر اصلی ماتریس مقادیر ویژه A هستند.

۲- « « زیر قطر اصلی صفر هستند.

۳- عناصر موازی بالای قطر اصلی تماما یک هستند.

* ۴- تعداد بلوک جردن متناظر با یک مقدار ویژه مانند λ_i

$$n - \operatorname{rank}(\lambda_i I - A)$$

تعداد بلوک جردن متناظر با λ_i = تعداد بردار ویژه مستقل خطی متناظر با λ_i

مثال) فرم قطری ماتریس A را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = 0 \rightarrow (\lambda - 1)^3 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2,3} = 1$$

تعداد بردار ویژه مستقل خطی متناظر با $\lambda = 1$ را محاسبه میکنیم:

$$n - \operatorname{rank}(I - A) = 3 - 2 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

یک بلوک جردن داریم؛

$$\Lambda = J_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\Lambda = T^{-1} A T$$

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & q_1 & q_2 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_1 I - A) v_1 = 0 \xrightarrow{\lambda = 1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = 1 \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda I)Q_1 = V_1$$

$\lambda = 1$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = 1 \quad , \quad x_5 = 1 \quad , \quad x_6 = 0$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda I)Q_2 = Q_1$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x_7 = 0}$$

$$-x_7 + x_8 = 1 \rightarrow \boxed{x_8 = 1}$$

x_9 آزاد

$$\rightarrow Q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T^{-1} A T = \Lambda$$

مثال) فرم قطری ؟!!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -0.5 & -2 & 1 & 0.5 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_{1,2} = 4 \longrightarrow$ یک بلوک

$\lambda_{3,4} = -2 \longrightarrow$ دو بلوک

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

نکته) فرض کنید معادله مشخصه $(\lambda-\lambda_1)^3 = 0$ را داریم. حالتهای مختلف فرم قطری - بلوکی:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$ ۱ بردار ویژه مستقل خطی

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$ ۲ بردار ویژه مستقل خطی

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

n بردار ویژه مستقل خطی

مثال) مقادیر ویژه A ؟ تعداد بردار ویژه مستقل خطی

وقتشم نگفته!!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$\lambda_{1,2,3} = 3 \rightarrow$ ۲ مجهول $\rightarrow$ ۲ بردار مستقل

۱ تعمیم یافته

$\lambda_{4,5,6,7} = 4 \rightarrow$ ۲ مجهول $\rightarrow$ ۲ مستقل

۲ تعمیم یافته

مثال) فرم قطری ؟!

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow |\lambda I - A| = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -3$$

$$\lambda_3 = 6$$

تعداد بردار ویژه مستقل متناظر با $\lambda_{1,2}$:

$$n - \operatorname{rank}(-3I - A) = 3 - 1 = 2$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda I - A) v_1 = 0 \longrightarrow (3I + A) v_1 = 0$$

$\lambda = 3$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

✓ $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \longrightarrow \boxed{x_3 = 2x_2 - 2x_1}$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda I - A) v_3 = 0 \longrightarrow (6I - A) v_3 = 0$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

✓ $\Lambda = T^{-1} A T$

تمرین) عدم قطری؟!

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$