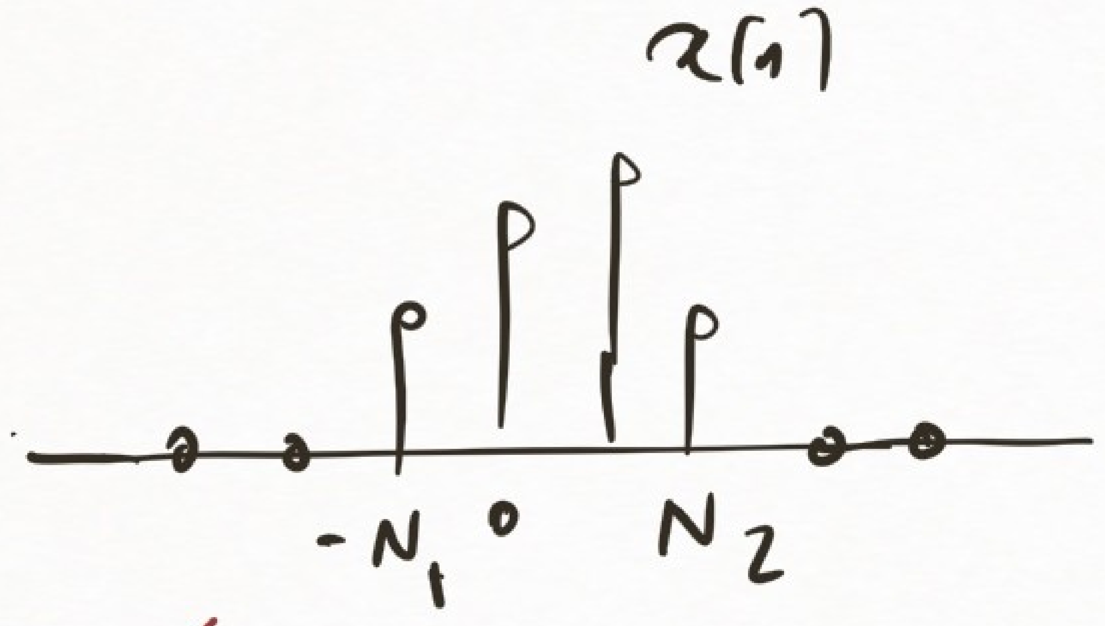
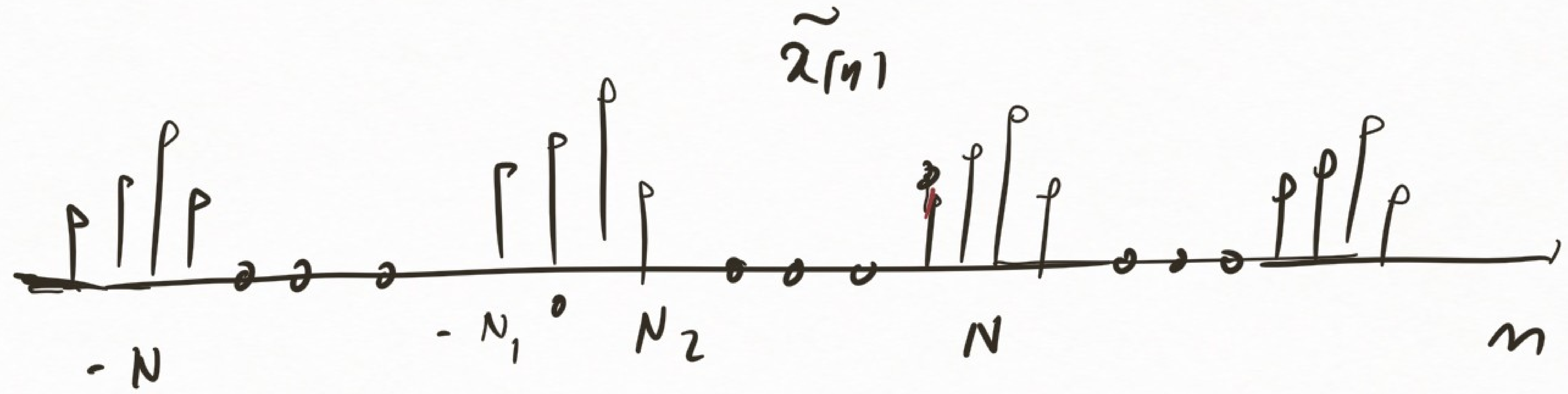
فصل پنجم - تبدیل فوریه برای سیگنال‌های گسسته در زمان



سیگنال غیر پریودیک

$\Longrightarrow$



سیگنال پریودیک

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N} \qquad (*)$$

چون $\tilde{x}[n] = x[n]$, for $-N_1 < n < N_2$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_2} \tilde{x}[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

تعریف $X(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \Longrightarrow \boxed{a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})} \quad (**)$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow \frac{1}{N} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$(*)$ & $(**)$ $\Longrightarrow$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=\langle N\rangle} \omega_0 X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}$$

حال با فرض اینکه N را ∞ بگیریم $\tilde{x}[n]$ به $x[n]$ تبدیل شده و داریم:

$$N\to\infty \Rightarrow \tilde{x}[n]\to x[n]\ ,\ \omega_0=\Delta\omega\to d\omega\ ,\ k\omega_0\to\omega\ \text{و}\ \sum\to\int_0^{2\pi}$$

گسسته — پیوسته

چون جمع روی N فاصله متوالی به عرض $\omega_0=\frac{2\pi}{N}$ می‌باشد حین انتگرال‌گیری $N(\frac{2\pi}{N})=2\pi$ می‌شود. بنابراین رابطه صفحه قبل

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=\langle N\rangle} X(e^{jk\omega_0})\,e^{jk\omega_0 n}\,\omega_0 \Longrightarrow x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(e^{j\omega})\,e^{j\omega n}\,d\omega$$

معکوس تبدیل

با این دو رابطه زوج تبدیل فوریه را بر حسب ω پیوسته کردیم

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,e^{-j\omega n}$$

در رابطه فوق

تبدیل فوریه

نکات مهم

1- متناوب بودن $X(e^{j\omega})$ بر حسب ω است با پریود 2π یعنی: (چرا؟)

$$X(e^{j(\omega+2\pi)})=X(e^{j\omega})$$

2- $\omega=0$ معادل فرکانس کم، $\omega=\pi$ معادل فرکانس زیاد

3- $X(e^{j\omega})$ یک تابع پیوسته می‌باشد

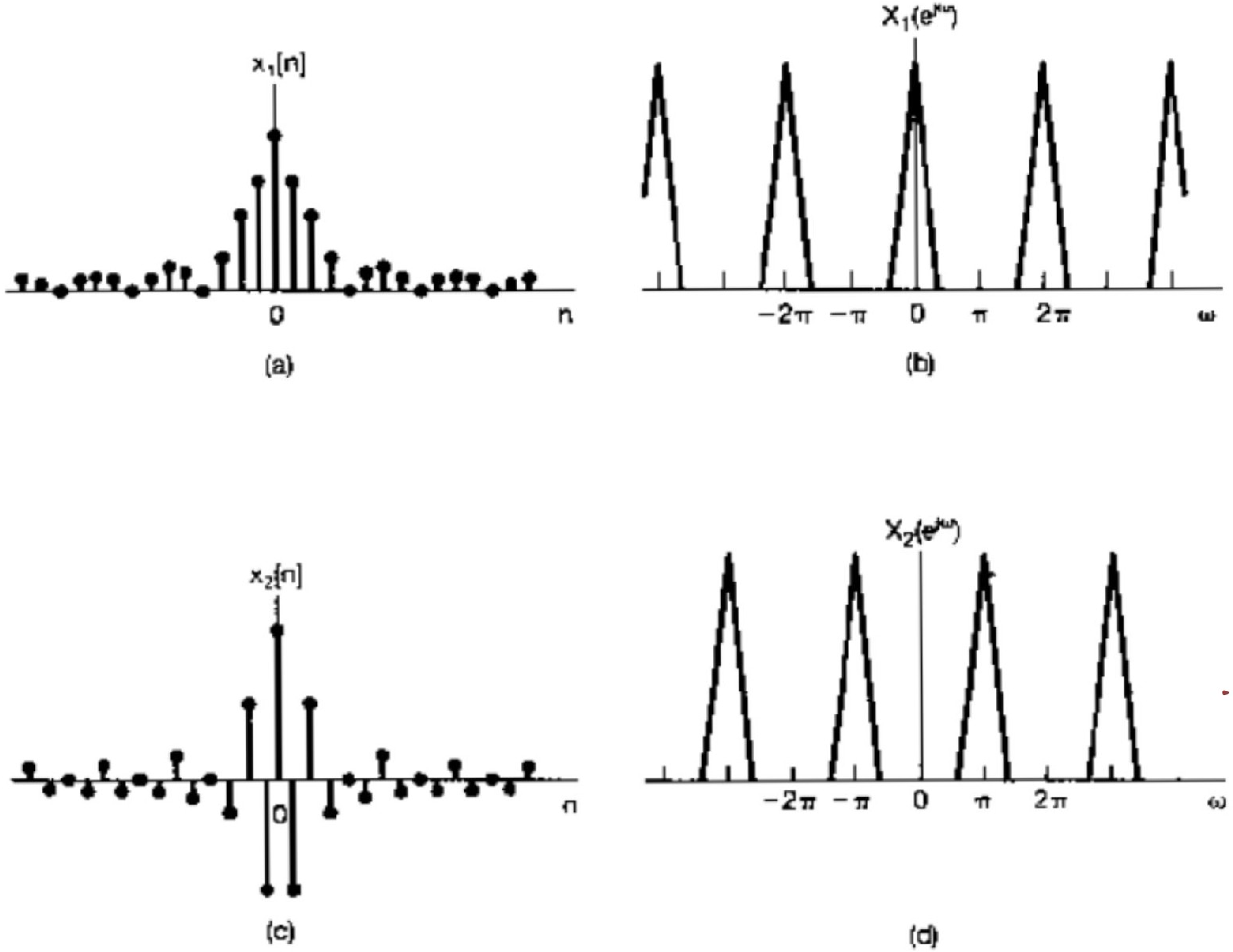


Figure 5.3 (a) Discrete-time signal $x_1[n]$. (b) Fourier transform of $x_1[n]$. Note that $X_1(e^{j\omega})$ is concentrated near $\omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ (c) Discrete-time signal $x_2[n]$. (d) Fourier transform of $x_2[n]$. Note that $X_2(e^{j\omega})$ is concentrated near $\omega = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$

سیگنال $x_1(n)$ یک سیگنال فرکانس پایین است

$w = 0, \pm 2\pi, \pm 2k\pi$

فرکانس پایین * مقادیر نزدیک $2k\pi$

سیگنال $x_2(n)$ یک سیگنال فرکانس بالا است.

$w = \pi, \pm (2k+1)\pi$

* مقادیر نزدیک فرد π

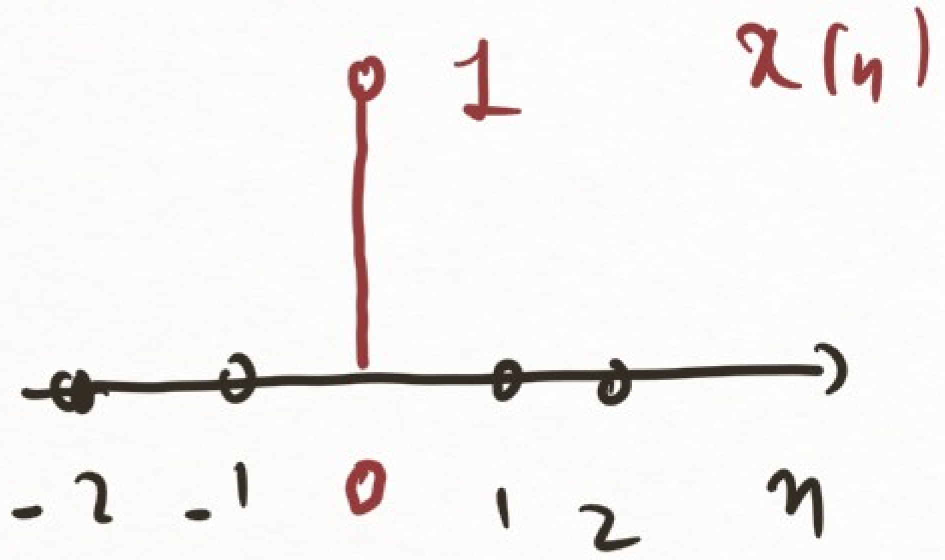
مثال ۱-

$$x(n) = \delta(n) \longrightarrow X(e^{j\omega}) = ?$$

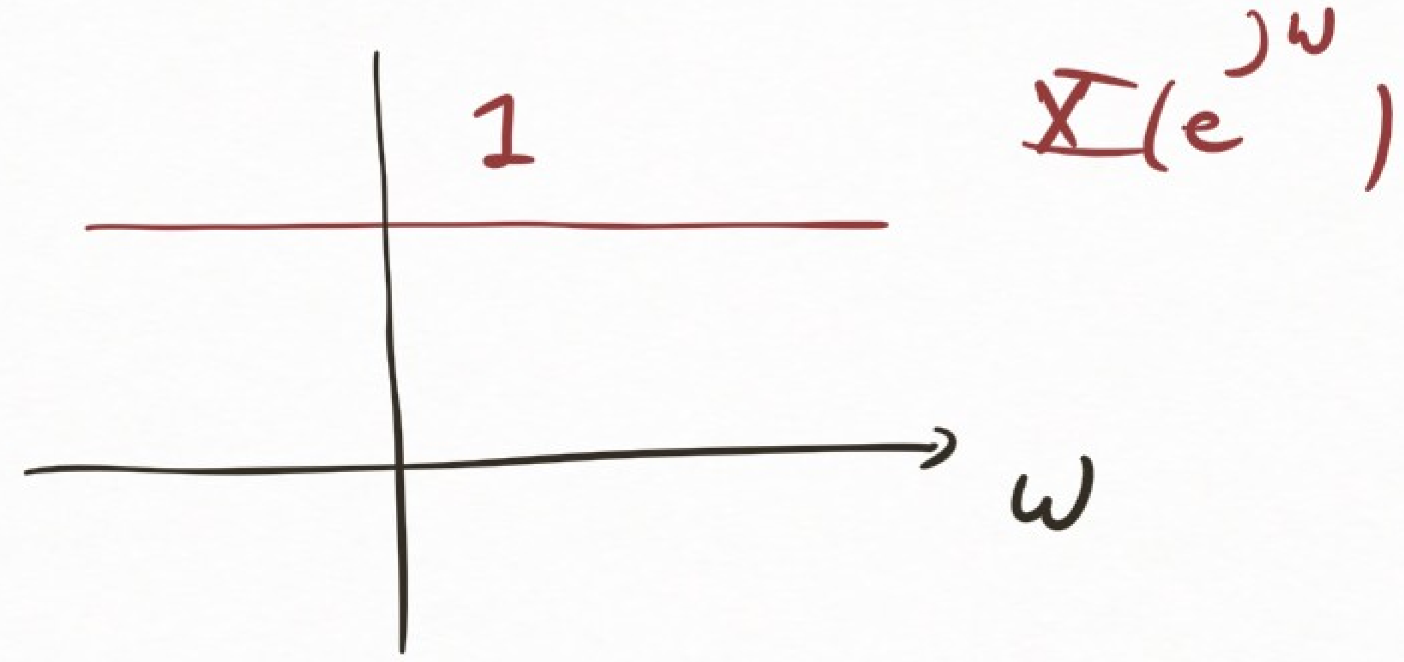
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n)\, e^{-j\omega n} = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) = 1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n} = \frac{1}{1-\alpha}$$

$|\alpha|<1$ تصاعد هندسی



$\Longrightarrow$



مثال ۲-

تصاعد هندسی قدر نسبت کوچکتر از یک

$$x(n) = (\alpha)^{n} u(n), \quad |\alpha|<1 \longrightarrow X(e^{j\omega}) = ?$$

$$\beta \Longrightarrow |\beta| = \alpha$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{(\alpha e^{-j\omega})}^{\beta}{}^{n} = \boxed{\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}}$$

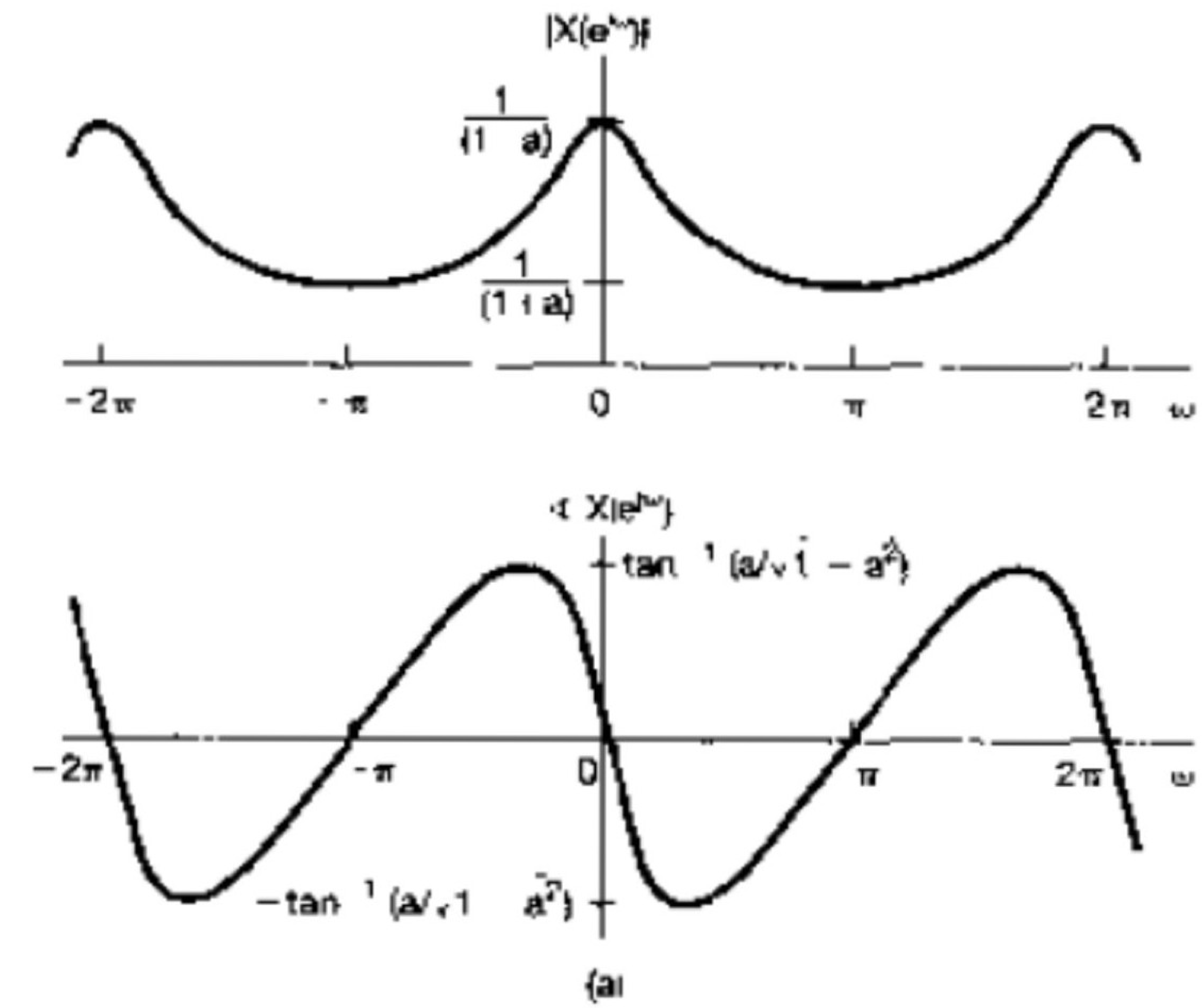
یک عدد مختلط است

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1+\alpha \cos\omega - j\alpha \sin\omega} = \frac{1}{(1+\alpha\cos\omega) - j\alpha\sin\omega)}$$

$$\to |X(e^{j\omega})| =$$

$$\to \angle X(e^{j\omega}) =$$

اندازه و فاز تبدیل فوریه   اما رسم شده به ازاء دو مقدار $a>0$ و $a<0$



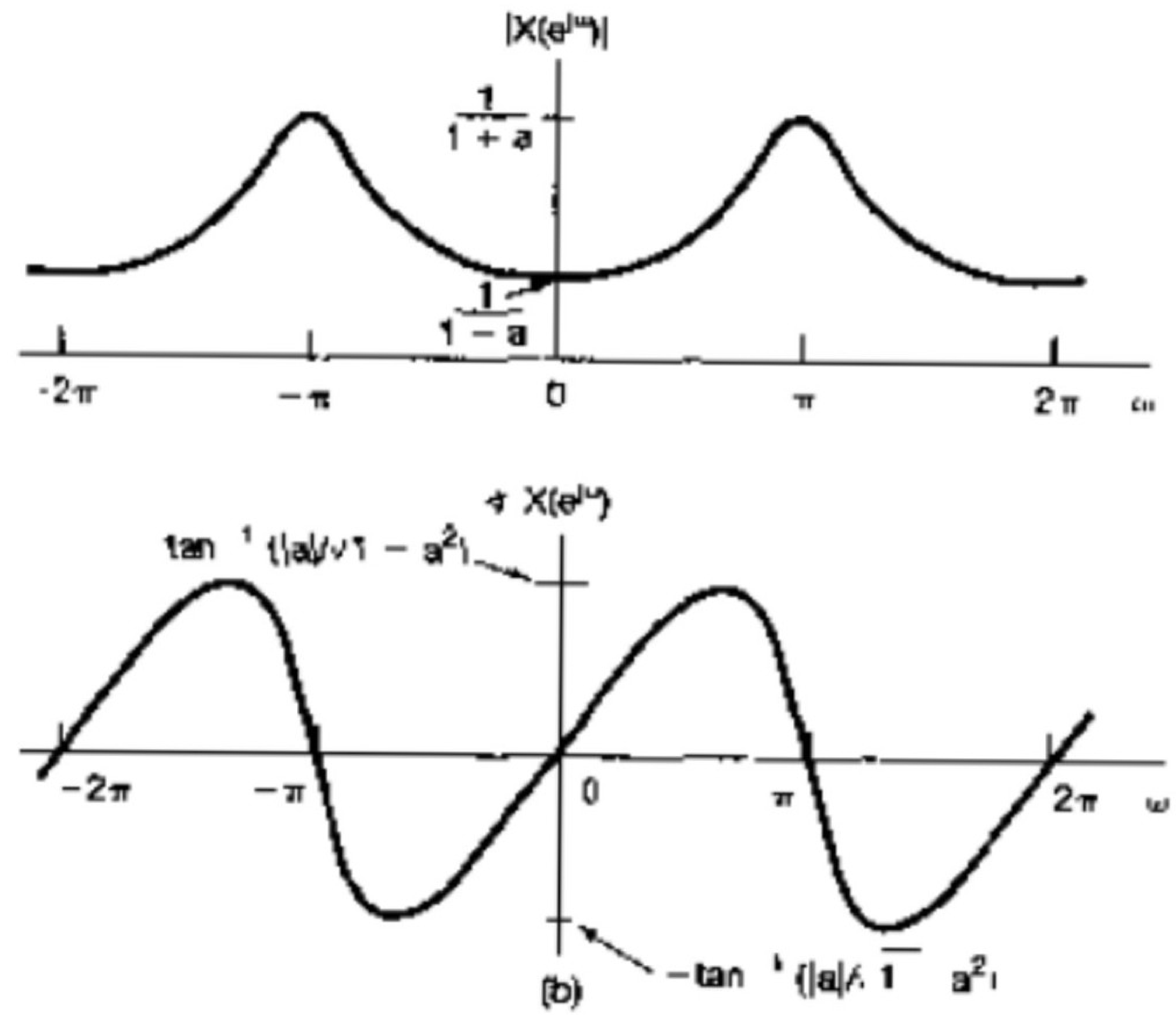


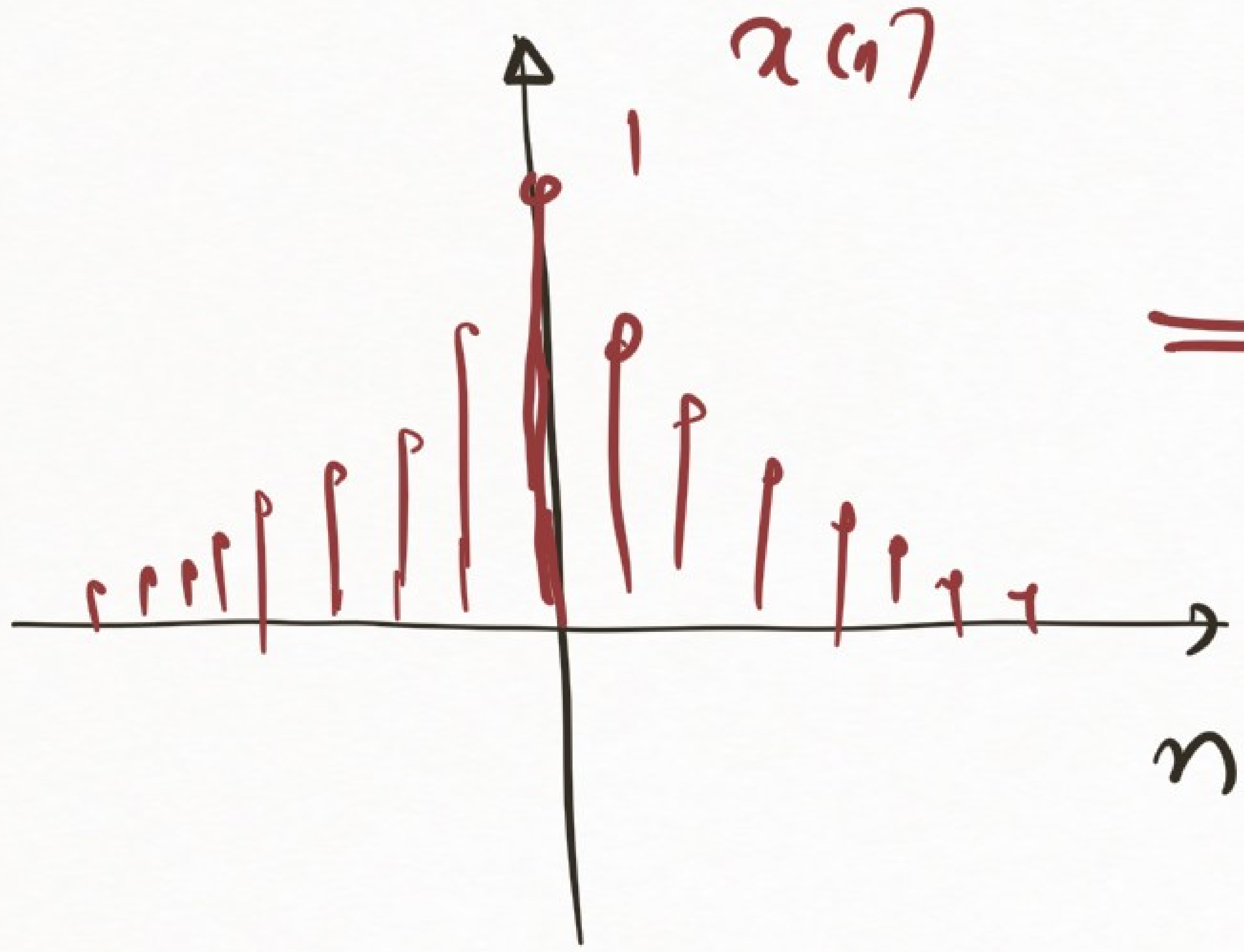
Figure 5.4 Magnitude and phase of the Fourier transform of Example 5.1 for (a) $a > 0$ and (b) $a < 0$

مثال ۳-

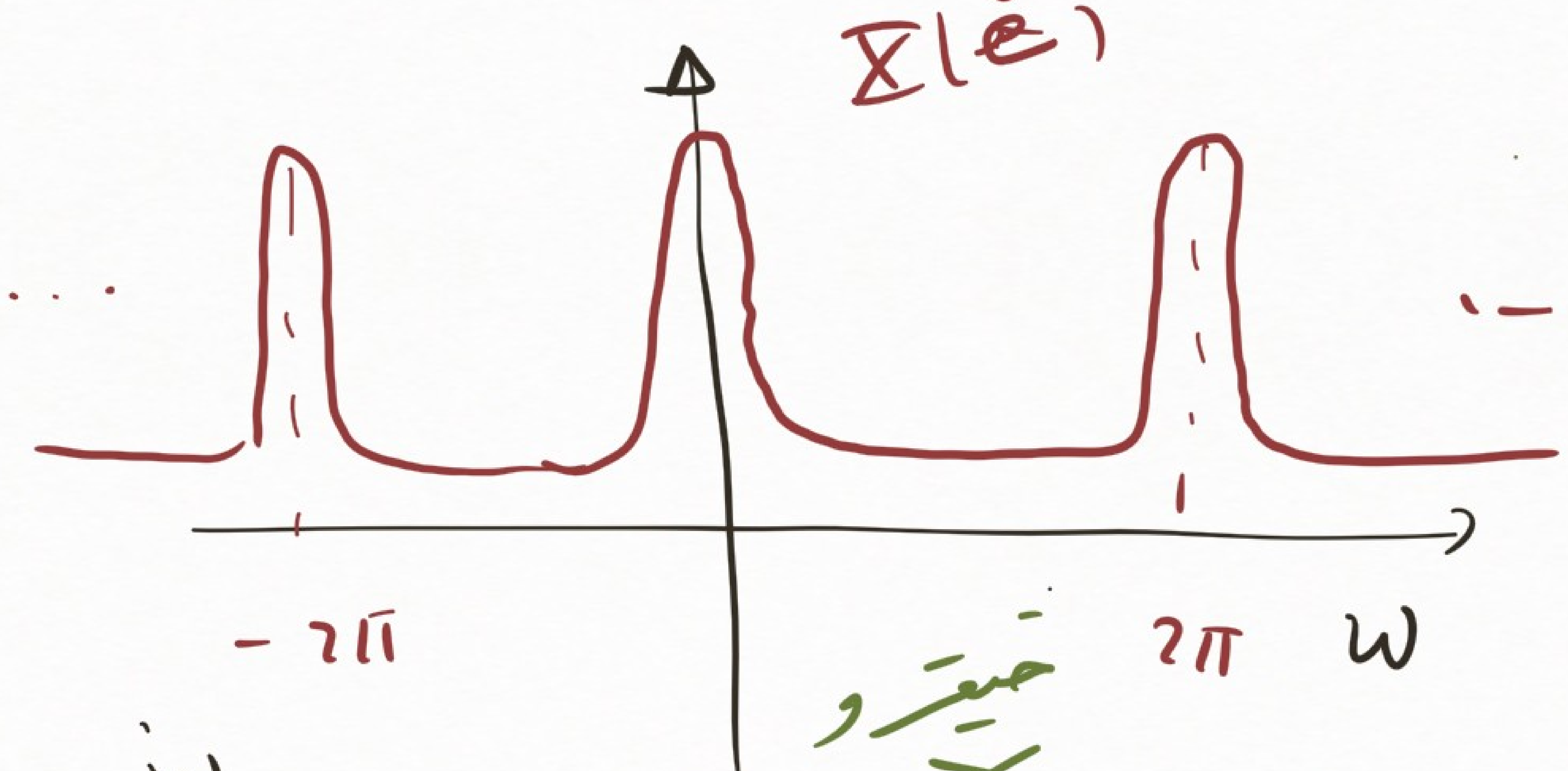
$$x(n)=\alpha^{|n|}\ ,\ |\alpha|<1 \Longrightarrow X(e^{j\omega})=?$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha^{|n|}e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^{n}e^{-j\omega n}+\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}\alpha^{-n}e^{-j\omega n}}_{m=-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\big(\overbrace{\alpha e^{-j\omega}}^{|\beta|<1}\big)^{n}+\underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha e^{j\omega})^{m}}_{\sum_{m=0}^{\infty}(\alpha e^{j\omega})^{m}-1}$$

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}+\frac{\alpha e^{j\omega}}{1-\alpha e^{j\omega}}=\boxed{\frac{1-\alpha^{2}}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^{2}}}$$



$\Longrightarrow$



توجه مهم - ملاحظه می‌کنید در مثال ۱- سیگنال $x(n)$ زوج بنابراین $X(e^{j\omega})$ حقیقی است.

در مثال ۲- سیگنال $x(n)$ نه فرد نه زوج $X(e^{j\omega})$ مختلط است.

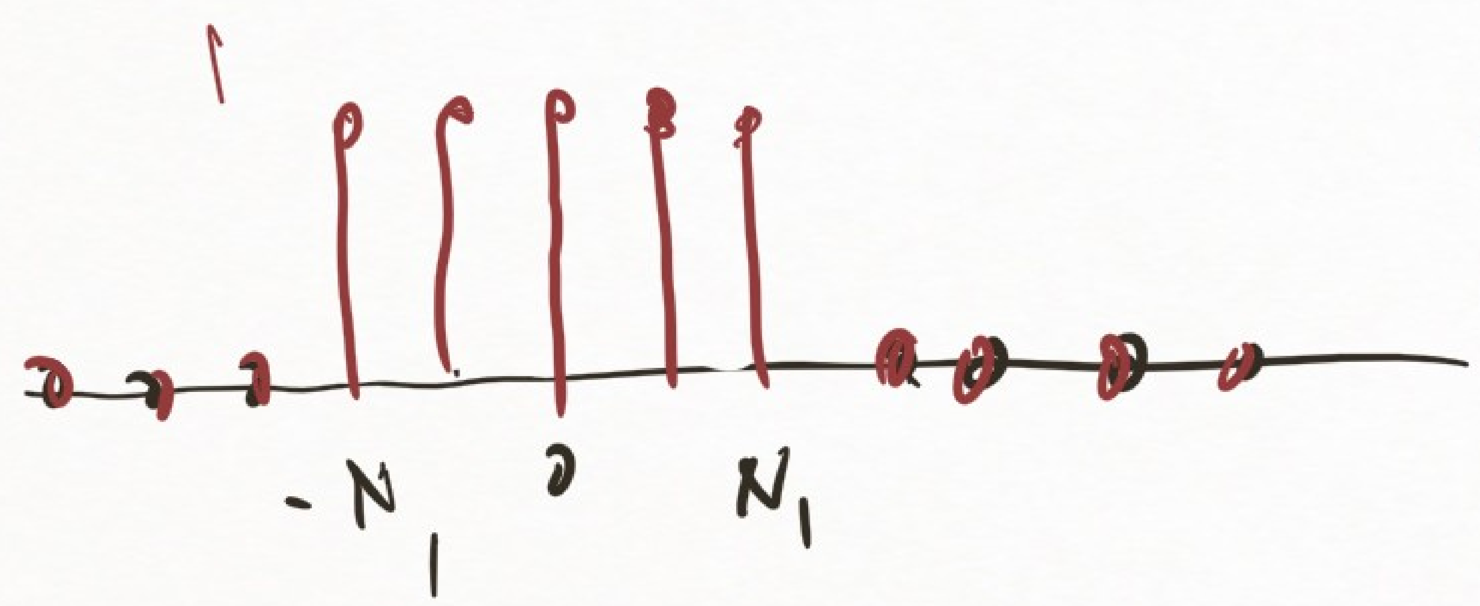
در مثال ۳- " " زوج بنابراین $X(e^{j\omega})$ حقیقی است.

مثال ۴-

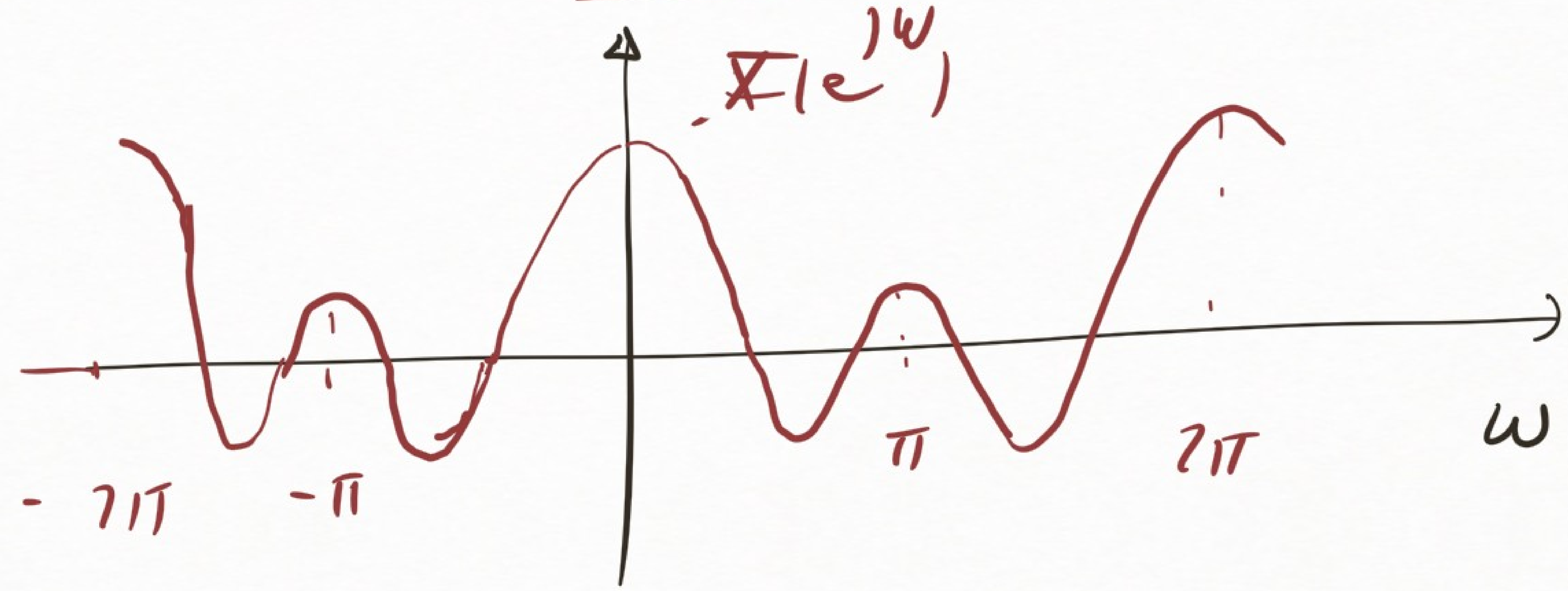
$$x(n)=\begin{cases}1 \;; & |n|>N_1\\ 0 \;; & |n|<N_1\end{cases} \Longrightarrow X(e^{j\omega})=?$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-N_1}^{N_1} 1\times e^{-j\omega n}=\boxed{\frac{\sin\omega(N_1+1/2)}{\sin(\omega/2)}}$$

تمرین- رابطه بدست آمده را ثابت کنید.
(راهنمایی قواعد هندسی)



$\Longrightarrow$



شرط همگرایی تبدیل فوریه:

$$|X(e^{j\omega})|=\left|\sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}\right|<\infty \Longrightarrow |X(e^{j\omega})|<\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x(n)e^{-j\omega n}\right|<\infty$$

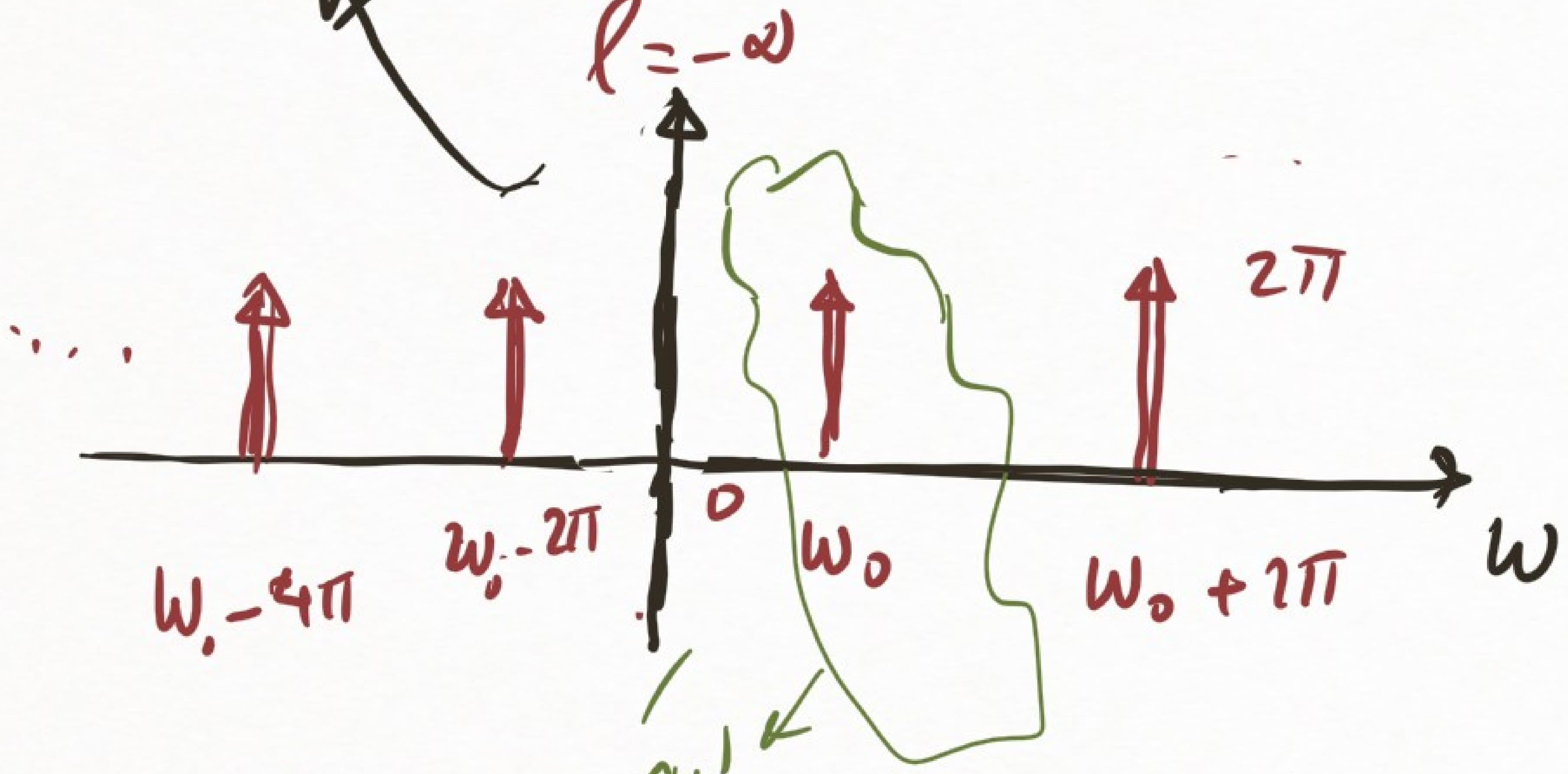
$$\Longrightarrow |X(e^{j\omega})|<\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|\,\cancelto{1}{|e^{-j\omega n}|}<\infty \Longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|<\infty$$

توجه: سیگنال های پریودیک در شرط فوق صدق نمی‌کنند پس تبدیل فوریه بطور مستقیم قابل محاسبه نیست

تبدیل فوریه ی سیگنال های پریودیک گسسته :

مقدمه - می خواهیم تبدیل معکوس سیگنال زیر را بیابیم :

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0-2\pi l) \longrightarrow x(n) = ?$$



در این بازه

طبق تبدیل معکوس داریم :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{-j\omega n}\, d\omega$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)\, e^{-j\omega n}\, d\omega = e^{-j\omega_0 n}\cancel{\int_0^{2\pi}\delta(\omega-\omega_0)\,d\omega} \quad 1$$

$\omega = \omega_0$

$$\Rightarrow x(n) = e^{j\omega_0 n}$$

تبدیل معکوس

* تبدیل فوریه یک سیگنال نمایی قطار ضربه است و ضربه اصلی در $\omega=\omega_0$ و بقیه ضربه ها در $\omega_0 \pm 2k\pi$ است .

$$x(n) = 1 \Rightarrow X(e^{j\omega}) = ? \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 1 \times e^{-j\omega n} = \infty$$

* توجه کنیم - با استفاده از تعریف تبدیل نمی توان محاسبه نمود .

ولی از رابطه فوق :

$$\begin{cases} e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0-2\pi l) \\ 1 \longleftrightarrow 2\pi \sum \delta(\omega-2\pi l) \end{cases}$$

حال می‌خواهیم تبدیل فوریه یک سیگنال پریودیک $x(n)$ که به صورت سری فوریه‌اش داریم بدست آوریم:

بسط سری فوریه

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = a_0 + a_1 e^{j\omega_0 n} + a_2 e^{j2\omega_0 n} + \cdots + a_{N-1} e^{j(N-1)\omega_0 n} \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

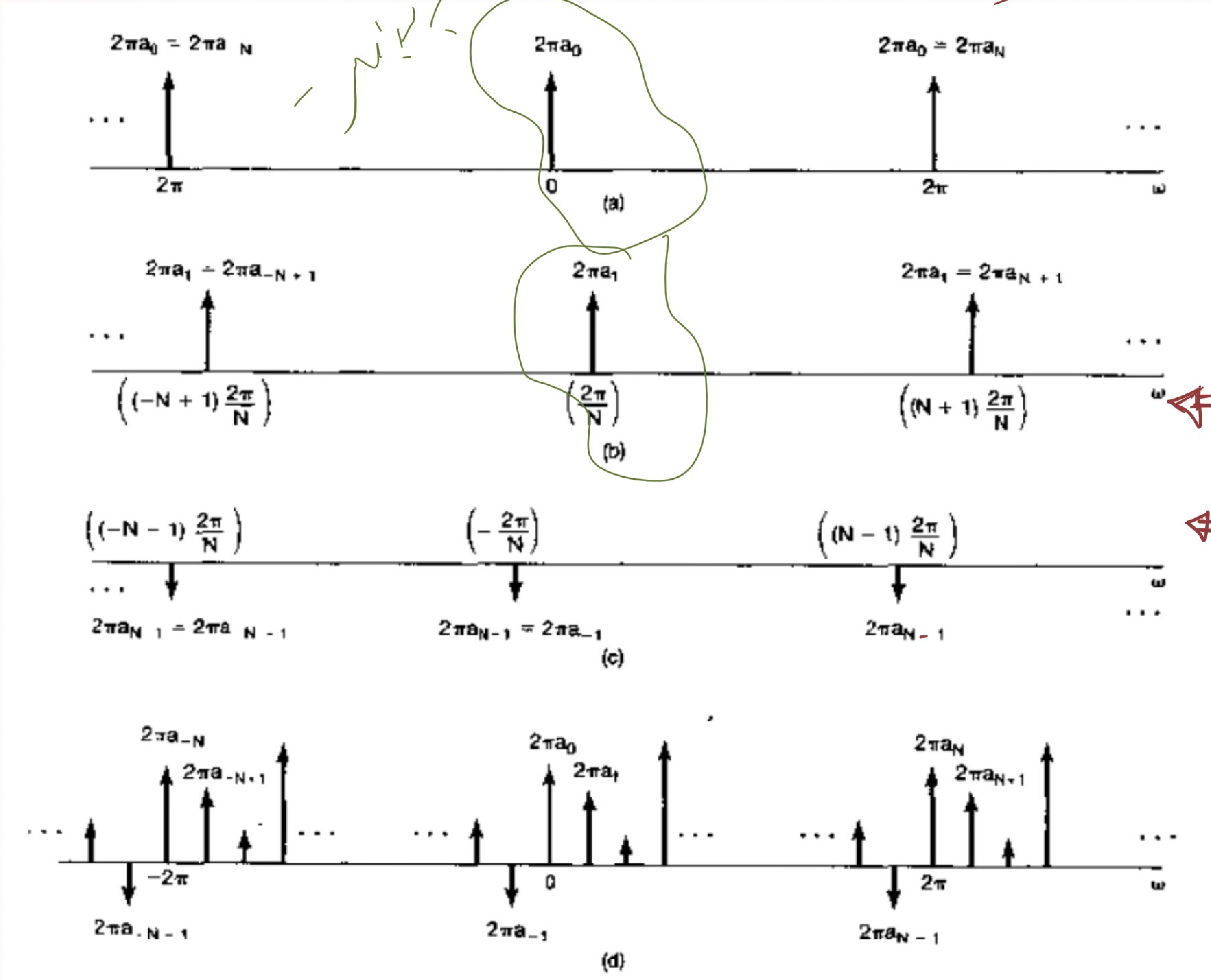
$$\Big\downarrow \mathcal{F}$$

$$X(e^{j\omega}) = \underbrace{2\pi a_0 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi l)} + \underbrace{2\pi a_1 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)} + \underbrace{2\pi a_2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\omega_0 - 2\pi l)} + \cdots$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \, \delta(\omega - k\omega_0) \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

یعنی تبدیل فوریه سیگنال پریودیک یک قطار ضربه خواهد شد که پریود اصلی این قطار ضربه، عبارت از ضربه‌هایی با دامنه $2\pi a_0$, $2\pi a_1$, ... , $2\pi a_{N-1}$ و محل ضربه‌ها نیز در $\omega = 0, \omega_0, 2\omega_0, \ldots, (N-1)\omega_0$ خواهد بود، و این الگو هم دوباره با پریود 2π تکرار شود.

تبدیل فوریه شکل سیگ بالایی



تبدیل فوریه اولین جمله سری

a_0

$a_1 e^{j\omega_0 n}$

تبدیل فوریه جمله دوم سری

$a_{N-1} e^{j(N-1)\omega_0 n}$

تبدیل فوریه جمله آخر سری

تبدیل فوریه کل سیگنال !

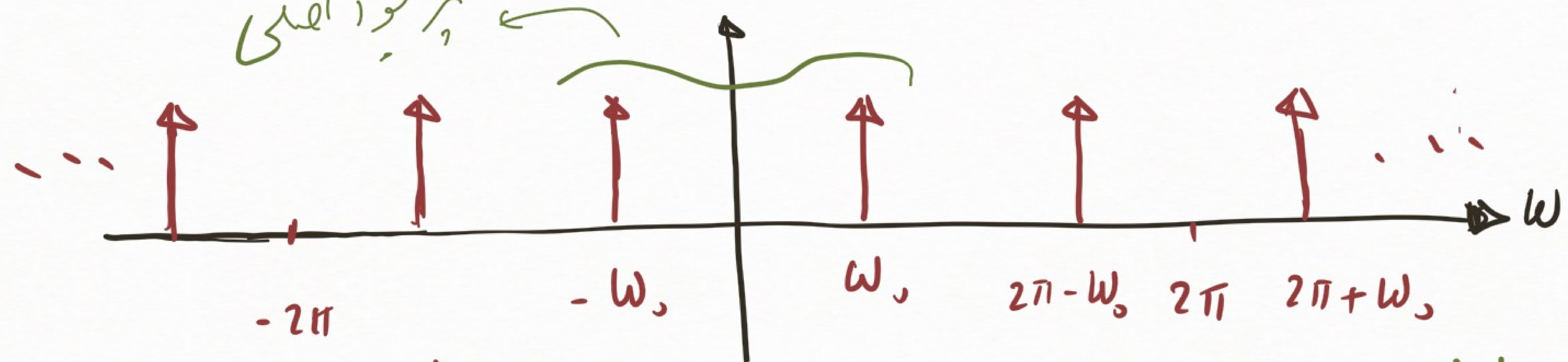
حل ۵ -

$x[n] = \cos \omega_0 n \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{5} \implies X(e^{j\omega}) = ?$

$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2} \implies X(e^{j\omega}) = \cancel{\tfrac{1}{2}} \left[\cancel{2}\pi\, \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5}\right) + \cancel{2}\pi\, \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5}\right) \right] \quad , \quad -\pi < \omega < \pi$ در یک پریود

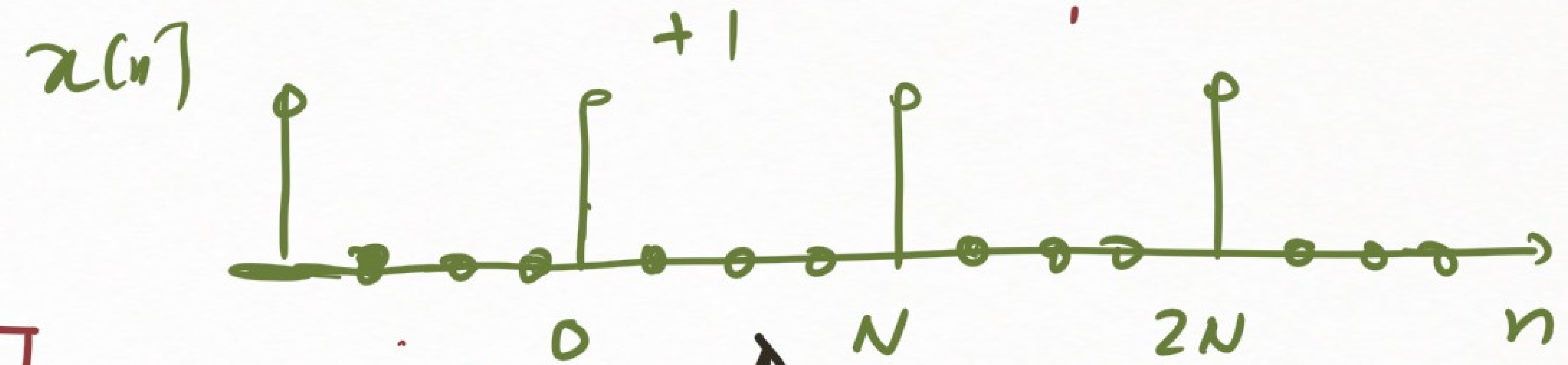
$$\implies X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi\, \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5} - 2\pi l\right) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi\, \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5} - 2\pi l\right)$$

پریود اصلی



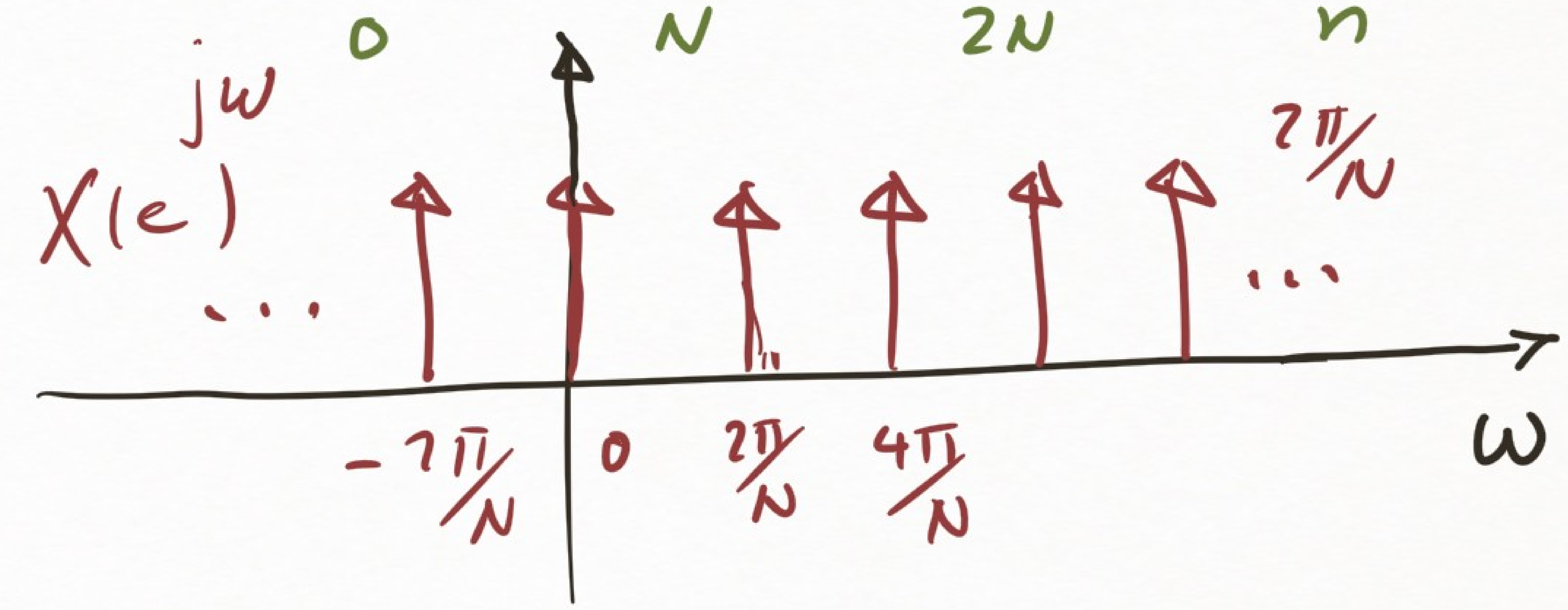
مثال ۶ - قطار ضربه:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] \longrightarrow X(e^{j\omega}) = ?$$



$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n]\, e^{-jk\omega_0 n} = \boxed{\frac{1}{N}}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$



خواص تبدیل فوریه گسسته در زمان:

۱- خاصیت پریودیک بودن:

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) \quad , \quad X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x(n)\} \quad , \quad X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

2- خاصیت خطی بودن:

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(e^{j\omega}) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(e^{j\omega}) \end{cases} \Longrightarrow a x_1(n) + b x_2(n) \longleftrightarrow a X_1(e^{j\omega}) + b X_2(e^{j\omega})$$

اثبات: براحتی انجام می‌شود.

3- خاصیت انتقال در حوزه زمان و فرکانس:

$$\begin{cases} x(n-n_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega}) \\ e^{j\omega_0 n} x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \end{cases}$$

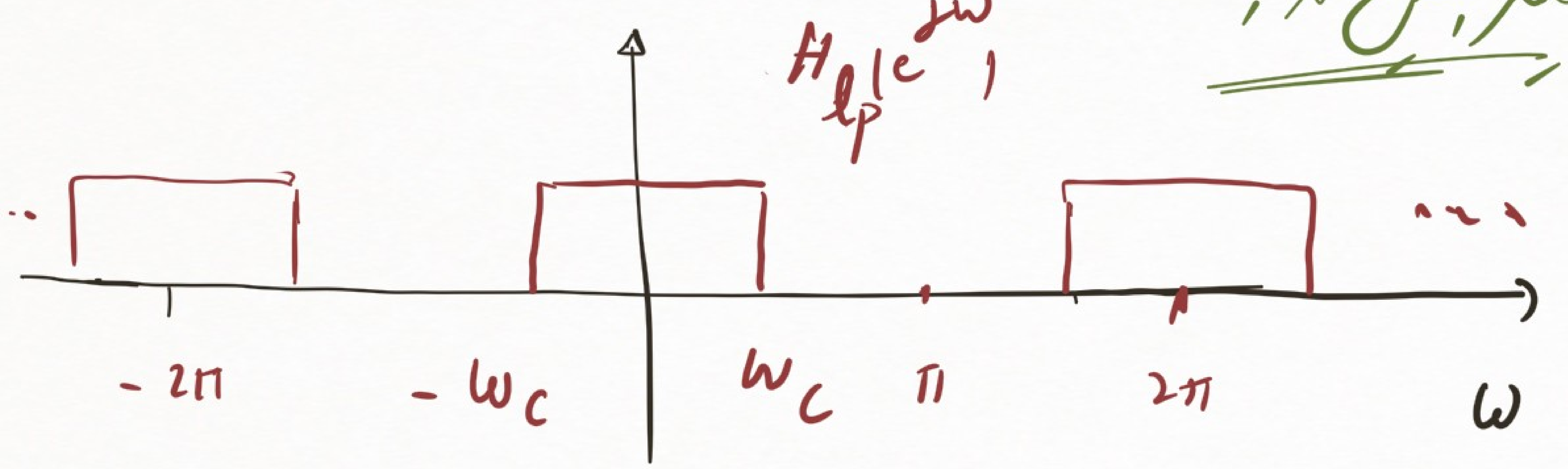
اثبات انتقال در حوزه زمان -

$$x_1(n) = x(n-n_0) \longrightarrow X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(\underbrace{n-n_0}_{n-n_0=n_1}) e^{-j\omega n} = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} x(n_1) e^{-j\omega(n_1+n_0)}$$

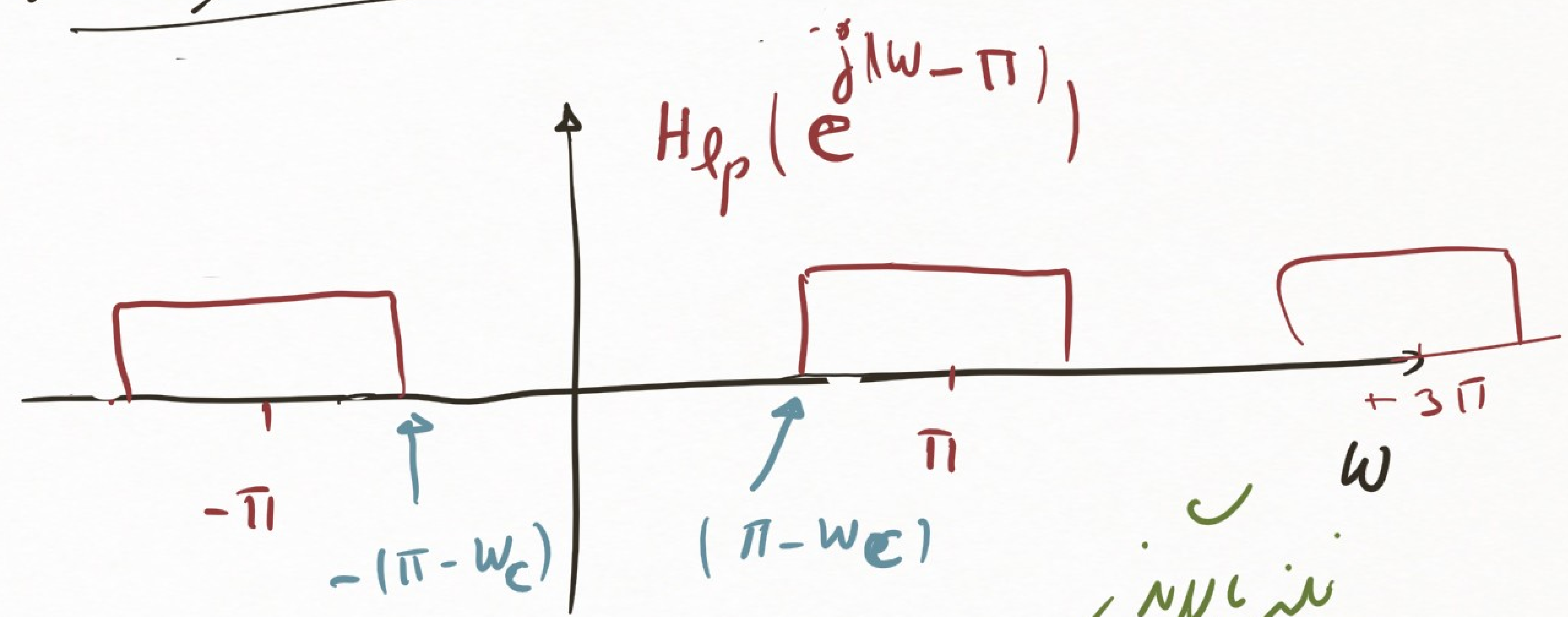
$$X_1(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} \underbrace{\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} x(n_1) e^{-j\omega n_1}}_{X(e^{j\omega})} = \boxed{e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})}$$

مثال - shift فیلتر پایین گذر :

فیلتر پایین گذر



$\Longrightarrow$



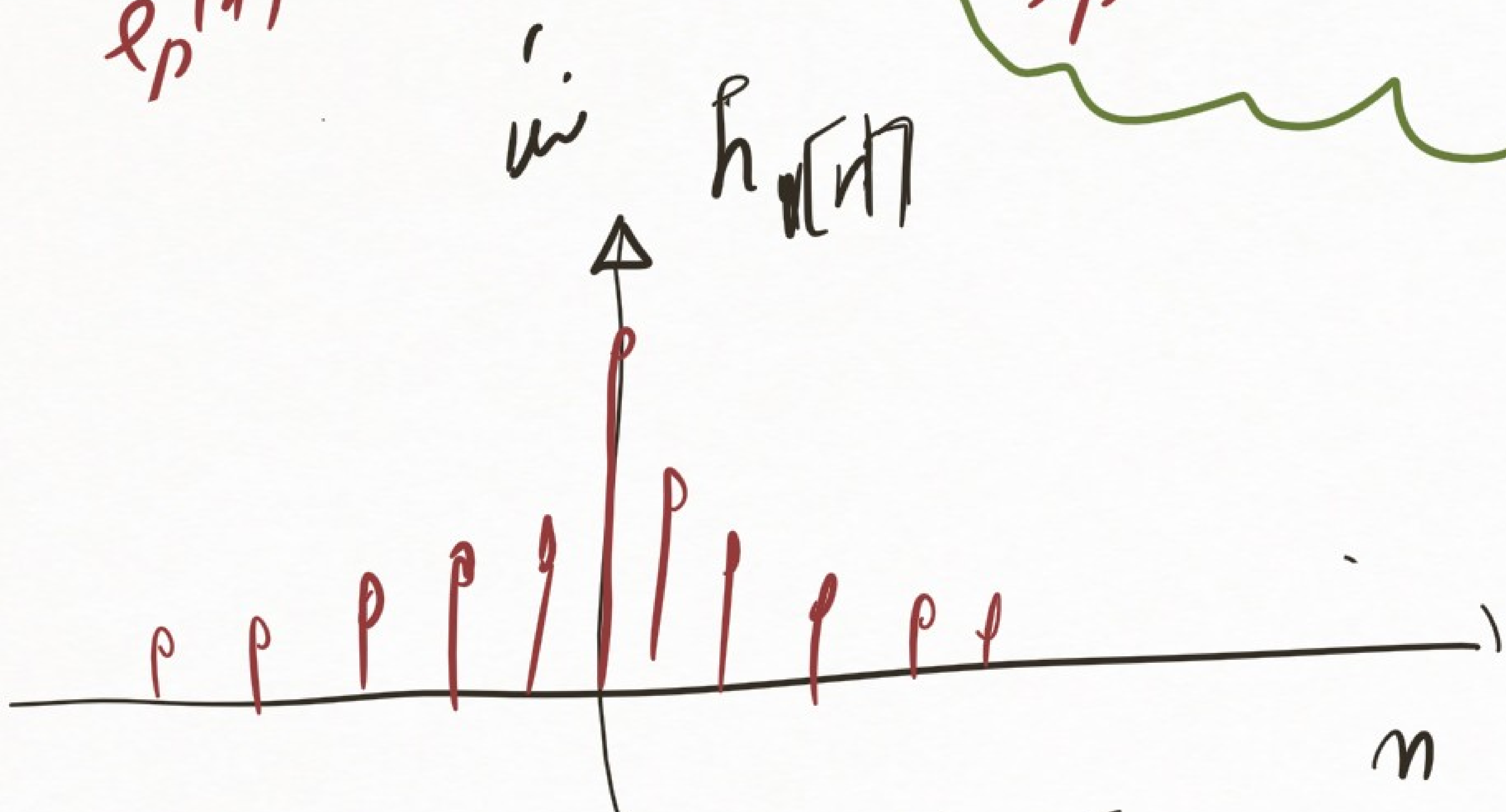
فیلتر بالا گذر

$$H_{lp}(e^{j\omega}) \Longrightarrow H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) = H_{hp}(e^{j\omega})$$

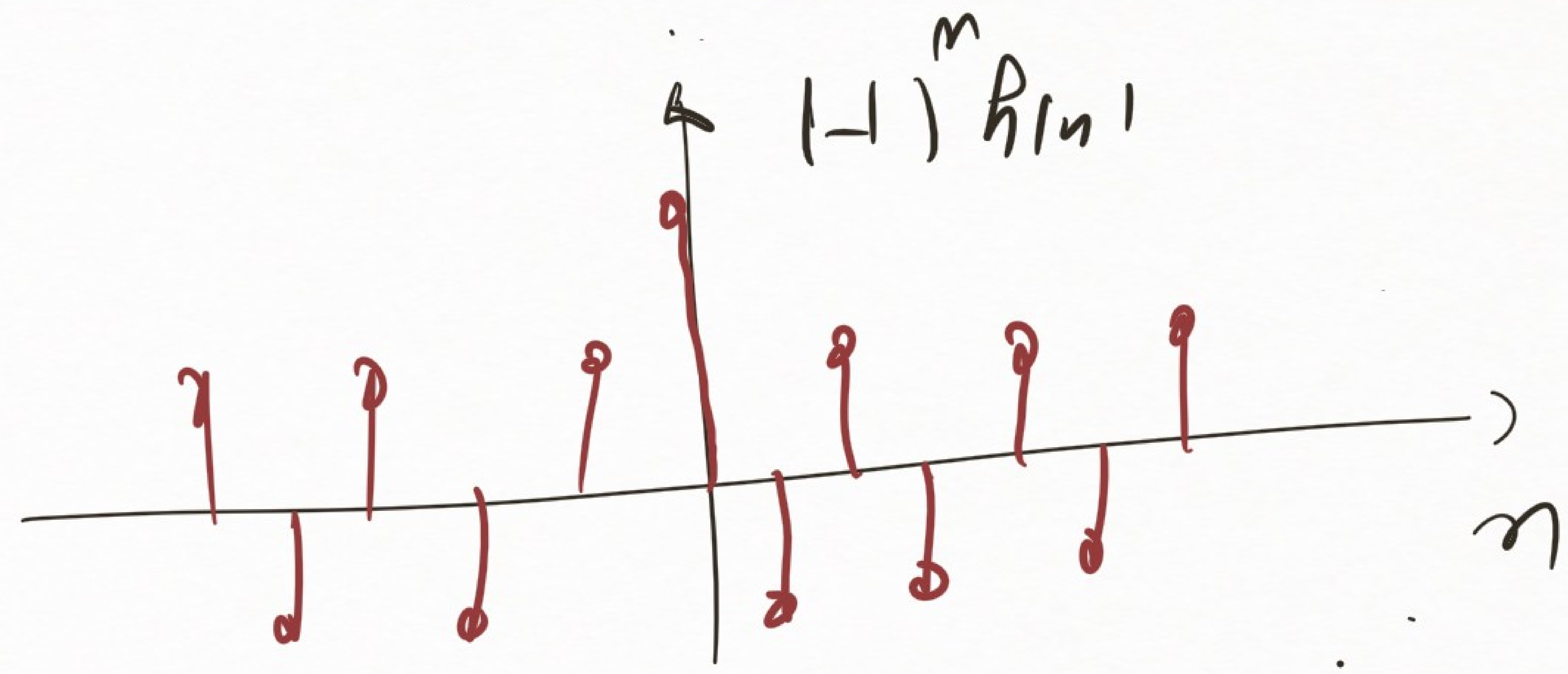
$$h_{lp}[n] \qquad h_{lp}[n]\, e^{-jn\pi} = h_{hp}[n]$$

یا

$$h_{hp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n]$$



تغییرات $h(n)$ کم است.



تغییرات نمونه‌ها خیلی زیاد است.

۳- خاصیت مزدوج :

$$x^*[n] \longleftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$$

اگر $x[n]$ حقیقی :

$x[n]$ حقیقی $\Longrightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$,
$$\begin{cases} \text{even}\{x[n]\} \longleftrightarrow \text{Re}\{X(e^{j\omega})\} \\ \text{od}\{x[n]\} \longleftrightarrow j\,\text{Im}\{X(e^{j\omega})\} \end{cases}$$

$\begin{cases} |X(e^{j\omega})| & \text{تابع زوج برحسب } \omega \\ \text{Re}\{X(e^{j\omega})\} & \text{تابع زوج} \end{cases}$
$\begin{cases} \measuredangle X(e^{j\omega}) & \text{تابع فرد} \\ \text{Im}\{X(e^{j\omega})\} & \text{تابع فرد} \end{cases}$

۴- تفاضل و جمع کننده :

$$\begin{cases} x[n]-x[n-1] \longleftrightarrow (1-e^{-j\omega})\,X(e^{j\omega}) \\ y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \longleftrightarrow \dfrac{1}{1-e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \end{cases}$$

مثال - می‌دانیم که $\underline{g[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{F} 1}$ می‌خواهیم تبدیل فوریه $u[n]$ را به کمک خاصیت بالا بدست آوریم.

$$g[n] = \delta[n]$$

$$x[n] = u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] = \sum_{m=-\infty}^{n} g[m] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} \underbrace{G(e^{j\omega})}_{1} + \pi \underbrace{G(e^{j0})}_{1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$$

۵- خاصیت وارونی زمان

$$x[-n] \longleftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

$$x_1[n] = x[-n] \longrightarrow X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[\underbrace{-n}_{m}] e^{-j\omega n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] e^{+j\omega m}$$

$$\Rightarrow X_1(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] e^{-j(-\omega)m} = X(e^{-j\omega})$$