محاسبات عددی

دانشگاه صنعتی شاهرود -دانشکده برق
مدرس: هادی گرایلو

منبع درسی

محاسبات عددی برای دانشجویان علوم و مهندسی

تالیف دکتر اصغر کرایه چیان

انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد

سرفصل

قضیه‌ی تیلور — فرض کنید $f(x)$ و مشتقهای آن تا مرتبه‌ی $n+1$ بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشند و $x_0 \in [a,b]$. آنگاه برای هر $x \in [a,b]$، عددی مانند $\xi(x)$ بین x_0 و x وجود دارد به‌طوری که

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \qquad (1)$$

که

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

و

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(x))$$

$P_n(x)$ چندجمله‌ای تیلور مرتبه‌ی n تابع $f(x)$ در مجاورت نقطه x_0، و $R_n(x)$ جمله باقیمانده یا خطای برشی متناظر با $P_n(x)$ نامیده می‌شود. در حالت $x_0 = 0$، این قضیه را قضیه ماکلورن نیز می‌نامند.

وقتی $n \to \infty$ آنگاه اگر در (۱) $R_n(x) \to 0$ در این‌صورت

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \ldots$$

سری تیلور تابع $f(x)$ در مجاورت x_0 نامیده می‌شود. همین‌طور

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \ldots$$

سری ماکلورن تابع $f(x)$ در مجاورت $x = 0$ است.

مثال ۱ — با استفاده از فرمول تیلور، $(1.1)^{\frac{1}{5}}$ را با دقت چهار رقم اعشار محاسبه کنید.

حل — تعریف می‌کنیم

$$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{5}}$$

می‌خواهیم $f(0.1)$ را محاسبه کنیم. داریم

$$f(0.1) = f(0) + 0.1f'(0) + \frac{(0.1)^2}{2}f''(0) + \frac{(0.1)^3}{3!}f'''(\xi)\ , \quad 0 < \xi < 0.1$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}(x+1)^{-\frac{4}{5}}\ , \quad f''(x) = -\frac{4}{25}(x+1)^{-\frac{9}{5}}\ , \quad f'''(x) = \frac{36}{125}(x+1)^{-\frac{14}{5}}$$

از طرفی $0 < (x+1)^{-\frac{14}{5}} < 1$ ، $\forall x > 0$. لذا می‌توان باقیمانده را در فرمول تیلور تخمین زد. به‌ازای $n = 2$ داریم

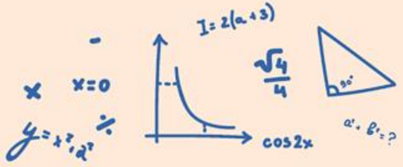
$$R_2 = \frac{36}{125}(\xi+1)^{-\frac{14}{5}}\frac{(0.1)^3}{3!} < \frac{6}{125}(0.1)^3 = 0.000048 < \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

پس با استفاده از سه جمله‌ی اول داریم

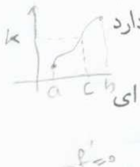
$$f(0.1) = (1.1)^{\frac{1}{5}} \approx 1 + \frac{1}{50} - \frac{8}{10000} = 1.0192$$

در حقیقت

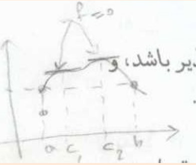
$$1.0192 < (1.1)^{\frac{1}{5}} < 1.019248$$



قضیه‌ی مقدار میانی برای توابع پیوسته — فرض کنید تابع $f(x)$ بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و k عددی باشد به‌طوری که $f(a)<k<f(b)$. آنگاه عددی مانند $c\in(a,b)$ وجود دارد به‌طوری که $f(c)=k$.



در حالت خاص از این قضیه نتیجه می‌شود که اگر $f(a)<۰<f(b)$ ، آنگاه به‌ازای c ای که $c\in(a,b)$ داریم $f(c)=۰$.



قضیه‌ی رُل — اگر تابع $f(x)$ بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و بربازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد، و $f(a)=f(b)$ ، آنگاه عددی مانند $c\in(a,b)$ وجود دارد به‌طوری که $f'(c)=۰$.

قضیه‌ی رُل تعمیم یافته — فرض کنید تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و در بازه‌ی (a,b) ، n بارمشتق‌پذیر باشد. اگر $f(x)$ در $n+۱$ نقطه‌ی متمایز $x_۰$ ، $x_۱$ ، ... و x_n در $[a,b]$ صفر شود ، آنگاه عددی مانند $c\in(a,b)$ وجود دارد که $f^{(n)}(c)=۰$.

قضیه‌ی مقدار متوسط — اگر تابع $f(x)$ بر بازه‌ی $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد ، آنگاه عددی مانند $c\in(a,b)$ وجود دارد، به‌طوری که

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

مثال ۲ — نشان دهید معادله‌ی $x^{۳}+۲x+a=۰$ که در آن a یک عدد حقیقی‌است ، بیش از یک ریشه‌ی حقیقی ندارد.

حل — فرض کنید معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی $x_۱$ و $x_۲$ باشد. تعریف می‌کنیم

$$f(x)=x^{۳}+۲x+a$$

داریم $f(x_۱)=f(x_۲)=۰$. لذا، بنا به‌قضیه‌ی رُل باید به‌ازای c ای که $x_۱<c<x_۲$ داشته باشیم $f'(c)=۰$ اما $f'(x)=۳x^{۲}+۲\neq ۰$ ، $\forall x$. این تناقض نشان می‌دهد که معادله تنها یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

مثال ۳ — اگر $۰<a<b$ ، ثابت کنید

$$۱-\frac{a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b}{a}-۱$$

حل — تابع $f(x)=\ln x$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)\ ,\ a<c<b$$

یا

$$\ln b-\ln a=\frac{(b-a)}{c}\quad\Rightarrow\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$$

قضیه‌ی مقدار اکسترمم — فرض کنید تابع $f(x)$ بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد. آنگاه نقاط $\alpha, \beta \in [a,b]$ وجود دارند به‌طوری که

یعنی هر تابع هم مینیمم و هم ماکسیمم دارد.

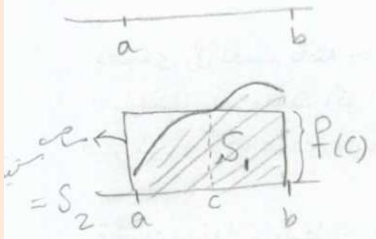
$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) \quad ,\forall x \in [a,b]$$

نقاط α و β یا در نقاط انتهایی بازه هستند ، یا درصورتی که f بر بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد، جایی هستند که $f'(x) = ۰$.

قضیه‌ی مقدار متوسط وزن دار — اگر $f(x)$ و $g(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته و $g(x)$ در این بازه تغییر علامت ندهد ، آنگاه وجود دارد c ای در بازه‌ی (a,b) به‌طوری که

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

در حالت خاص اگر $g(x) = ۱$ ، آنگاه



$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

یا

$$\boxed{f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}}$$

$f(c)$ مقدار میانگین f بر بازه $[a,b]$ نامیده می‌شود.

قضیه — اگر f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و $x_۱$ ، $x_۲$ ، … ، و x_n نقاط متمایزی در $[a,b]$ باشند ، آنگاه نقطه‌ای مانند $x^* \in [a,b]$ وجود دارد به‌طوری که

$$f(x^*) = \frac{f(x_۱) + f(x_۲) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

قضیه‌ی سریهای متناوب — سری متناوب

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}a_i = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{i+1}a_i + \dots$$

که در آن $a_i > 0$ ، $\forall i$ همگرا است، هرگاه

(الف) $a_{i+1} \le a_i$ ، $\forall i$

(ب) $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$

در این صورت اگر قرار دهیم

$$s = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}a_i \,, \quad s_N = \sum_{i=1}^{N}(-1)^{i+1}a_i$$

آنگاه

$$|s - s_N| \le a_{N+1}$$

یعنی خطا

مثال ۴ — سری متناوب همگرای زیر را در نظر بگیرید

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

اگر بخواهیم مجموع سری را با دقت $\epsilon = 0.001$ به‌دست آوریم، چند جمله از سری لازم است ؟

حل — اگر از M جمله‌ی اول سری استفاده شود، خطا از حیث قدر مطلق از $\frac{1}{2M+1}$ کمتر است. پس، برای دقت مورد نظر باید داشته باشیم

$$\frac{1}{2M+1} < 0.001 \Rightarrow M \ge 499.5$$

لذا حداقل ۵۰۰ جمله‌ی اول از سری لازم است.

نماد O ی بزرگ

در حالت خاص که $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ ، و $g(x) = x^p$ می‌نویسیم $f(x) = O(x^p)$ ، هرگاه K ی مثبتی باشد به‌طوری که برای همه‌ی مقادیر به‌قدرکافی کوچک x و $|x| > 0$

$$|f(x)| \le K|x^p|$$

مثال ۵ — می‌دانیم بنا به فرمول تیلور

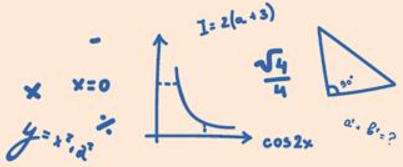
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\cos\xi \,, \quad 0 < \xi(x) < x$$

پس برای $x \neq 0$ و به‌قدرکافی کوچک، داریم

$$\left|\frac{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1}{x^4}\right| = \frac{1}{24}|\cos\xi| \le \frac{1}{24} = K$$

لذا،

$$\cos x + \frac{x^2}{2} - 1 = O(x^4)$$



قضیه‌ی سریهای متناوب — سری متناوب

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}a_i = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{i+1}a_i + \ldots$$

که در آن $a_i > 0$ ، $\forall i$ همگرا است، هرگاه

(الف) $a_{i+1} \leq a_i$ ، $\forall i$

(ب) $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$

در این‌صورت اگر قرار دهیم

$$s = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}a_i \ , \ s_N = \sum_{i=1}^{N}(-1)^{i+1}a_i$$

آنگاه

$$\boxed{|s - s_N| \leq a_{N+1}}$$

یعنی خطا

. $N+1$ ... تعیین کرد

مثال ۴ — سری متناوب همگرای زیر را در نظر بگیرید

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$$

اگر بخواهیم مجموع سری را با دقت $\epsilon = 0.001$ به‌دست آوریم، چند جمله از سری لازم است ؟

حل — اگر از M جمله‌ی اول سری استفاده شود، خطا از حیث قدر مطلق از $\frac{1}{2M+1}$ کمتر است. پس، برای دقت مورد نظر باید داشته باشیم

$$\frac{1}{2M+1} < 0.001 \quad \Rightarrow M \geq 499.5$$

لذا حداقل 500 جمله‌ی اول از سری لازم است.

نماد o ی کوچک

تعریف ۲ — فرض کنید f تابعی باشد که در یک همسایگی صفر تعریف شده باشد. وقتی $x \to 0$، می‌نویسیم

$$f(x) = o(x^n)$$

هرگاه

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^n} = 0$$

یعنی وقتی $x \to 0$ ، $|f(x)|$ سریعتر از $|x|^n$ به‌سمت صفر میل کند.

مثال ۷ — برای x کوچک داریم $1 - \cos x = o(x)$ ، زیرا

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

توجه کنید که

$$1 - \cos x = O(x^2)$$

۴.۱ خطا در روشهای عددی

دو منبع اساسی خطا در روشهای عددی وجود دارد:

(الف) خطای برشی — این نوع خطا بواسطه تقریبهایی که در فرمولهای ریاضی به‌کار برده می‌شود، پیش می آیند.

مثال ۱۱ — تقریبی برای $\sqrt{e}$ به‌دست آورید

حل — بنا به فرمول ماکلورن می‌توانیم بنویسیم

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+۱}}{(n+۱)!}e^{\,\xi(x)}\ ,\quad ۰ < \xi(x) < x$$

اگر در این فرمول $n = ۳$ و $x = \frac{۱}{۲}$ انتخاب کنیم، خواهیم داشت

$$\sqrt{e} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۴۸} + TE$$

که در آن TE برابر است با

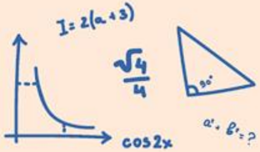
$$TE = \frac{e^{\,\xi}}{۳۸۴}\ ,\ ۰ < \xi < ۰.۵$$

باچشم‌پوشی از TE ، که **خطای برشی** نامیده می شود، خواهیم داشت

$$\sqrt{e} \approx ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۴۸} = \frac{۷۹}{۴۸}$$

می‌توانیم یک کران بالا برای خطای برشی $TE = \sqrt{e} - \frac{۷۹}{۴۸}$ به‌دست آوریم. از آن‌جایی که $e^{\,\xi} < e < ۳$ ، داریم

$$TE < \frac{۳}{۳۸۴} = \frac{۱}{۱۲۸} = ۰.۷۸۱۲۵ \times ۱۰^{-۲}$$



(ب) خطای گردشده — این نوع خطاها همانگونه که گفتیم بواسطه محدودیتی که در نمایش اعداد در کامپیوترها وجود دارد، رخ می‌دهند. برای سادگی در تحلیل این نوع خطا، کامپیوتری در نظر بگیرید که محاسبات را در سیستم اعشاری انجام می‌دهد. حال فرض کنید عدد حقیقی مفروض x به‌عنوان یک متغیر ورودی به کامپیوتر داده شود. ابتدا عدد را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$x = \pm 0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots \times 10^n \qquad (۴)$$

که $1 \le d_1 \le 9$ و $0 \le d_i \le 9$ ، $i = 2, 3, \dots, \cancel{9}$ K+1 . فرض کنید این کامپیوتر از حساب k رقمی استفاده کند ، به‌عبارت دیگر مانتیس آن در شکل ممیز شناور نرمال شده k رقم داشته باشد. در این‌صورت عدد به‌شکل زیر ذخیره می‌شود

$$fl(x) = \pm 0.d_1 d_2 \dots d_k \times 10^n \qquad (۵)$$

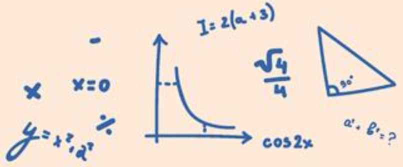
در ذخیره شدن x ، به‌شکل (۵) ، کامپیوترها به دو صورت زیر عمل می‌کنند:

برش زدن — k رقم اول در (۴) حفظ ، و بقیه ارقام حذف می‌شوند.
گرد کردن — اگر در (۴) ، $d_{k+1} \ge 5$ ، یک واحد به d_k اضافه، و سپس از برش زدن استفاده می‌شود؛ در غیر این‌صورت تنها از برش زدن استفاده می‌شود.

مثال ۱۵ — شکل ممیز شناور نرمال شده عدد $x = \frac{8}{3}$ در کامپیوتر با مانتیس ۷ رقم چنین است

با برش زدن : 0.2666666×10^1
با گرد کردن : 0.2666667×10^1

تعریف ۳ — هر یک از ارقام d_1 ، d_2 ، … ، d_k در (۵) را **ارقام بامعنی** x می‌نامند. درجه‌ی اهمیت این ارقام از چپ به راست کم می‌شود به‌طوری که d_1 با اهمیت ترین ، و d_k کم اهمیت ترین ارقام بامعنی هستند.



خطای مطلق – خطای نسبی – خطای درصد

فرض کنید x یک عدد حقیقی و x^* تقریبی برای آن باشد. این خطاها به ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

خطای مطلق :

$$e = |x - x^*|$$

خطای نسبی :

$$Re = \frac{|x - x^*|}{|x|}, \quad x \neq ۰$$

خطای درصد :

$$۱۰۰ \times Re$$

مثال ۱۹ – اگر $x = \frac{۱}{۳}$ و $x^* = ۰.۳۳۳۳$ تقریبی برای آن باشد ، آنگاه خطای مطلق برابر است با

$$e = |\frac{۱}{۳} - ۰.۳۳۳۳| = \frac{۱}{۳} - ۰.۳۳۳۳ = \frac{۱}{۳}(۱ - ۰.۹۹۹۹) = \frac{۱}{۳} \times ۱۰^{-۴}$$

و خطای نسبی چنین است

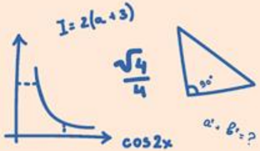
$$Re = \frac{|e|}{|x|} = \frac{\frac{۱}{۳} \times ۱۰^{-۴}}{\frac{۱}{۳}} = ۱۰^{-۴}$$

و خطای درصد

$$۱۰^{-۴} \times ۱۰۰ = ۰.۰۱$$

یا ۰.۰۱ % است.

تذکر – وقتی با اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک سروکار داریم ، خطای نسبی اهمیت بیشتری پیدا می‌کند.



مثال ۲۰ — خطایی به اندازه $۱۰^{۶}$ در عدد $۱۰^{۱۵}$ ناچیز است ، زیرا خطای نسبی آن عبارت است از

$$Re = \frac{۱۰^{۶}}{۱۰^{۱۵}} = ۱۰^{-۹}$$

یا $۱۰^{-۷}$ ٪ است . در حالی که خطایی به اندازه ۰.۰۰۰۱ در عدد ۰.۰۰۰۵ بزرگ است ، زیرا خطای نسبی آن عبارت است از

$$Re = \frac{۰.۰۰۰۱}{۰.۰۰۰۵} = ۰.۲$$

یعنی خطا ۲۰ ٪ است.

ارقام اعشار درست

فرض کنید x^* تقریبی برای x باشد. اگر k بزرگترین عدد صحیح نامنفی باشد به‌طوری که

$$| x - x^* | < \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-k}$$

آنگاه گفته می‌شود که x^* دارای k رقم اعشار درست است. همچنین گفته می‌شود که x^* و x تا k رقم اعشار باهم مطابقت دارند.

مثال ۲۱ — هر یک از اعداد $x = \frac{۲۲}{۷}$ و $y = \frac{۳۵۵}{۱۱۳}$ تقریبی برای عدد $\pi = ۳.۱۴۱۵۹۲۶۵۴\ldots$ هستند. این تقریبات چند رقم اعشار درست دارند؟

حل — داریم

$$\frac{۲۲}{۷} = ۳.۱۴۲۸۵۷۱۴۲\ldots$$

پس

$$| \pi - \frac{۲۲}{۷} | = ۰.۰۰۱۲۶۴۴۹\ldots < ۰.۰۰۵ = \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۲}$$

که نشان می‌دهد که x دارای ۲ رقم اعشار درست است. همچنین

$$| \pi - \frac{۳۵۵}{۱۱۳} | = ۰.۰۰۰۰۰۰۲۷ = ۰.۲۷ \times ۱۰^{-۶} < \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۶}$$

بنابراین y دارای ۶ رقم اعشار درست است.

ارقام بامعنی درست

فرض کنید x^* تقریبی برای x باشد. اگر s بزرگترین عدد صحیح نامنفی باشد به‌طوری که

$$\frac{|x-x^*|}{|x|} < ۵ \times ۱۰^{-s} \ , \ x \neq ۰$$

آنگاه گفته می‌شود که x^* دارای s رقم بامعنی درست است. همچنین گفته می‌شود که x^* و x تا s رقم بامعنی باهم مطابقت دارند.

مثال ۲۳ – فرض کنید $x = ۱۲۳.۴۵$ و $x^* = ۱۲۴.۳۵$. آنگاه دو عدد تا دو رقم بامعنی با هم مطابقت دارند، زیرا

$$\frac{|x-x^*|}{|x|} = \frac{۰.۹}{۱۲۳.۴۵} < ۵ \times ۱۰^{-۲}$$

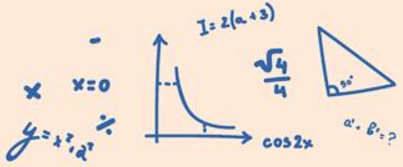
همین‌طور اعداد $x = ۰.۰۱۲۳۴۵$ و $y = ۰.۰۱۲۴۳۵$ تا دو رقم بامعنی باهم مطابقت دارند. توجه کنید که رقم ۰ پس از نقطه‌ی اعشار در x و y رقم بامعنی نیست.

مثال ۲۴ – عدد $x^* = \frac{۳۵۵}{۱۱۳}$ یک تقریب برای عدد $\pi = ۳.۱۴۱۵۹۲۶۵۴...$ است. این تقریب دارای چند رقم بامعنی درست است ؟

حل – داریم

$$\frac{|\pi - x^*|}{\pi} = ۸.۴۷۹۷۷۵۳۶۸ \times ۱۰^{-۸} < ۵ \times ۱۰^{-۷}$$

لذا x^* دارای هفت رقم بامعنی درست است.



۵.۱ پایداری و حساسیت

پایداری

الگوریتم یا روشی را که برای حل یک مسأله مورد استفاده قرار می‌گیرد **پایدار** می‌نامند هرگاه خطاهای کوچکی که در مرحله‌ای از محاسبات رخ می‌دهند، مثلاً در اثر گرد شدن اعداد، در مراحل بعدی رشد نکنند. در غیر این‌صورت الگوریتم **ناپایدار** نامیده می‌شود.

مثال ۲۵ — محاسبه‌ی انتگرالهای زیر را در نظر بگیرید

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx \;,\; n = 0, 1, \ldots, 10$$

داریم

$$I_n + 5I_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n + 5x^{n-1}}{x+5}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+5)}{x+5}\,dx = \int_0^1 x^{n-1}dx = \frac{1}{n}$$

بنابراین رابطه‌ی بازگشتی زیر نتیجه می‌شود

$$I_n = \frac{1}{n} - 5I_{n-1} \;\;,\; n = 0, 1, \ldots, \qquad (7)$$

داریم

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+5}\,dx = \ln 6 - \ln 5 \approx 0.182$$

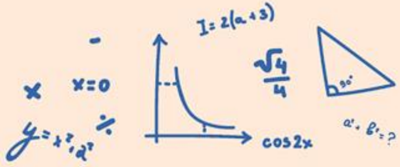
$$I_1 = 1 - 5I_0 = 1 - 0.910 = 0.090$$

$$I_2 = \frac{1}{2} - 5I_1 = 0.050$$

$$I_3 = \frac{1}{3} - 5I_2 = 0.083$$

$$I_4 = \frac{1}{4} - 5I_3 = -0.165$$

واضح است که الگوریتم (۷) برای محاسبه‌ی انتگرالها ناپایدار است ، چرا که $I_3 > I_2$ و $I_4 < 0$ نتایج نادرست هستند.



اکنون برای آن که انتگرالها را با استفاده از یک الگوریتم پایدار محاسبه کنیم ، (۷) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$I_{n-۱} = \frac{۱}{۵n} - \frac{I_n}{۵} \quad ,n = ۱۰, ۹, \ldots, ۱ \tag{۸}$$

به این ترتیب اگر تقریبی برای $I_{۱۰}$ در دست باشد ، می‌توان $I_۹$ ، $I_۸$ ، ... ، $I_۰$ را به‌طور تقریبی محاسبه نمود. با توجه به‌این که با افزایش n ، I_n کاهش می‌یابد، و نیز

$$I_۰ > I_۱ > \ldots > I_۹ > I_{۱۰}$$

قرار می‌دهیم $I_{۱۰} \approx I_۹$. در این‌صورت داریم

$$I_۹ + ۵I_۹ \approx \frac{۱}{۱۰}$$

و از این‌جا

$$I_۹ \approx \frac{۱}{۶۰} \approx .۰۱۷$$

حال داریم

$$I_۸ = \frac{۱}{۴۵} - \frac{I_۹}{۵} \approx ۰.۰۱۹$$

$$I_۷ = \frac{۱}{۴۰} - \frac{I_۸}{۵} \approx ۰.۰۲۱$$

$$I_۶ \approx ۰.۰۲۵$$

$$I_۵ \approx ۰.۰۲۸$$

$$I_۴ \approx ۰.۰۳۴$$

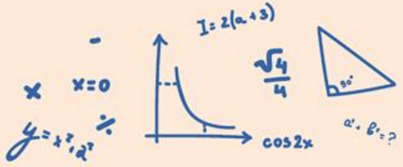
$$I_۳ \approx ۰.۰۴۳$$

$$I_۲ \approx ۰.۰۵۸$$

$$I_۱ \approx ۰.۰۸۸$$

$$I_۰ \approx ۰.۱۸۲$$

توجه کنید که تقریب به‌دست آمده برای $I_۰$ تقریب درستی است ، و لذا الگوریتم (۸) پایدار است .



از دقت کامپیوتر است. مثال زیر از ویلکینسون است.

مثال ۲۶ — چندجمله‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$P(x) = (x-۱)(x-۲)\ldots(x-۲۰) = x^{۲۰} - ۲۱۰x^{۱۹}\ldots + ۲۰!$$

صفرهای $P(x)$ عبارتند از ۱ ، ۲ ، ... ، ۲۰ . حال فرض کنید ضریب $x^{۱۹}$ ، برای مثال ، به‌اندازه‌ی $۱۰^{-۷}$ تغییر یابد. در این‌صورت تغییرات بسیار زیادی در ریشه‌ها به‌وجود می‌آید به‌طوری که چندجمله‌ای جدید دارای ۵ زوج ریشه‌ی مختلط خواهد بود. این تغییر عمده ربطی به خطای گردکردن یا الگوریتم حل مسأله ندارد ؛ این خاصیت خود مسأله است.

مثال ۲۷ — دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$x + y = ۱$$
$$۱.۱x + y = ۲$$

جواب این دستگاه $x = ۱۰$ و $y = -۹$ است. حال ضریب x را در معادله‌ی دوم به ۱.۰۵ تغییر می‌دهیم ، یعنی دستگاه زیر را در نظر می‌گیریم

$$x + y = ۱$$
$$۱.۰۵x + y = ۲$$

جواب این دستگاه $x = ۲۰$ و $y = -۱۹$ است. ملاحظه می‌شود که ۵ % تغییر در یک ضریب ، سبب ۱۰۰ % تغییر در جواب می‌شود.

well conditioned

تعریف ۴ — مسأله‌ای را خوش وضع می نامیم هرگاه تغییرات کوچک در داده‌ها ، تغییرات کوچک را در جواب (خروجی) سبب شود، و در غیر این‌صورت مسأله را بد وضع می‌نامند. دو مثال بالا نمونه‌هایی از مسایل بد وضع هستند.

ill Conditioned

حساسیت

بعضی از مسایل نسبت به تغییرات کوچک در داده‌ها بسیار حساس هستند. این خاصیت مستقل از الگوریتمی است که برای حل مسأله مورد استفاده قرار می‌گیرد، و همچنین مستقل

پایان فصل اول