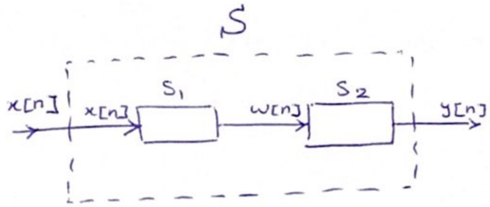
یا لطیف

پاسخ تمرینات سری 4 سیگنال سیستم

1401/1/17

سوال ①

$$\begin{cases} S_1: w[n] = \frac{1}{2} w[n-1] + x[n] \\ S_2: y[n] = \alpha y[n-1] + \beta w[n] \\ y[n] = -\frac{1}{8} y[n-2] + \frac{3}{4} y[n-1] + x[n] \\ \text{الف)}\ \alpha, \beta = ? \qquad \text{ب)}\ h[n] = ? \end{cases}$$



باید سیستم S رو طوری نوشت که فقط برحسب $x[n]$, $y[n]$ باشد

$$y[n] = \alpha y[n-1] + \beta w[n] \xrightarrow{\div\beta} w[n] = \frac{1}{\beta} y[n] + \frac{\alpha}{\beta} y[n-1] \quad (I)$$

$$w[n-1] = \frac{1}{\beta} y[n-1] + \frac{\alpha}{\beta} y[n-2] \quad (II)$$

(II), (I) را در S_1 جایگذاری می کنیم : $\frac{1}{\beta} y[n] + \frac{\alpha}{\beta} y[n-1] = \frac{1}{2\beta} y[n-1] + \frac{\alpha}{2\beta} y[n-2] + x[n] \xrightarrow{\times\beta}$

$$\Rightarrow y[n] + \alpha y[n-1] = \frac{1}{2} y[n-1] + \frac{\alpha}{2} y[n-2] + \beta x[n]$$

$$\Rightarrow y[n] = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) y[n-1] + \frac{\alpha}{2} y[n-2] + \beta x[n] \xrightarrow[\text{داده شده در صورت سوال}]{\text{از مقایسه با } y[n]} \begin{cases} \boxed{\beta = 1} \\ \frac{1}{2} - \alpha = \frac{3}{4} \\ \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{1}{4}}$$

ب)
$$\begin{cases} S_1: w[n] = \frac{1}{2} w[n-1] + x[n] \\ S_2: -\frac{1}{4} y[n-1] + w[n] \end{cases}$$

طبق خواص سیستم های LTI می دانیم :

$$y[n] = Kx[n] \longleftrightarrow h[n] = K\delta[n]$$

شرایط اولیه : $w[-1] = 0$

S_1. $w[n] = x[n] + \frac{1}{2} w[n-1] \Rightarrow n=0: w[0] = x[0] + \frac{1}{2} w[-1] = K$

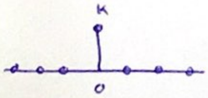
$n=1: w[1] = \underset{0}{\cancel{x[1]}} + \frac{1}{2} w[0] = \frac{1}{2} K$

$n=2: w[2] = x[2] + \frac{1}{2} w[1] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 K$

⋮

$y[n] = x[n] + \frac{1}{2} w[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot K$

فرض شود $x[n] = K\delta[n]$



$$\Rightarrow h_1[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] \quad , \quad h_2[n] = \left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$\Rightarrow h[n] = h_1[n] * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k]\, h_2[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k} u[n-k]$$

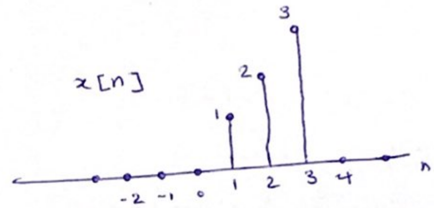
$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \left(\tfrac{1}{4}\right)^{-k} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n - 2^{1-n} \cdot \left(1 - 2^n\right)$$

سوال ۲

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] + 2x[n-2]$$

$$x[n] = n\left(u[n] - u[n-4]\right)$$

شرایط اولیه = سکون = $y[n] = 0$



$$y[n] = -2y[n-1] + x[n] + 2x[n-2]$$

if $n=0 \rightarrow y[0] = -2y[-1] + \cancel{x[0]} + 2\cancel{x[-2]} \Rightarrow y[0] = y[-1] = 0$

if $n=1 \rightarrow y[1] = -2y[0] + \cancel{x[1]} + 2\cancel{x[-1]} \Rightarrow y[1] = 1$

if $n=2 \rightarrow y[2] = -2y[1] + \cancel{x[2]} + 2\cancel{x[0]} \Rightarrow y[2] = -2$

if $n=3 \rightarrow y[3] = -2y[2] + \cancel{x[3]} + 2\cancel{x[1]} \Rightarrow y[3] = 8$

if $n=4 \rightarrow y[4] = -2y[3] + x[4] + 2\cancel{x[2]} \Rightarrow y[4] = -12$

if $n=5 \rightarrow y[5] = -2y[4] + x[5] + 2x[3] \Rightarrow y[5] = 30$

if $n=6 \rightarrow y[6] = -2y[5] + \cancel{x[6]} + 2\cancel{x[4]} \Rightarrow y[6] = -60$

$$\boxed{y[n] = -2y[n-1] \quad ; \quad \text{for } n \geq 6}$$

سوال ۳ بررسی خواص علیت و پایداری :

الف) $h[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[-n]$

- غیرعلی $\rightarrow h[n] \neq 0 \; ; n \leq 0$
- ناپایدار $\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \infty$

ب) $h(t) = t e^{-t} u(t)$

- علی $\rightarrow h(t) = 0$ for $t<0$
- پایدار $\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left| t e^{-t} u(t) \right| < \infty$

ج) $h[n] = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + \underbrace{(1.01)^n u[n-1]}$

- علی $h[n] = 0 \; ; n<0$
- ناپایدار $\leftarrow$ به دلیل ترم دوم

$\hookrightarrow$ if $n \rightarrow \infty \rightarrow \infty$

یادآوری

سیستم علی است اگر و تنها اگر : $h[n] = 0 \; ; \forall n<0$, $h(t) = 0 \; ; \forall t<0$

سیستم پایدار است اگر و تنها اگر : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| < \infty$

سوال 4

$$x(t) = e^{t+1}u(t) \longrightarrow \boxed{h} \xrightarrow{y(t)}$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$h(t) = ?$$

یادآوری

اگر داشته باشیم: $y(t) = x(t) * h(t)$

اگر بخواهیم از طرفین مشتق بگیریم، خروجی به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x(t) * h(t)\right) = \begin{cases} x(t) \cdot \dfrac{dh(t)}{dt} \\ \text{OR} \\ \dfrac{dx(t)}{dt} \cdot h(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \cdot h(t)$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{\frac{dy(t)}{dt}}{\frac{dx(t)}{dt}} = \boxed{\frac{\frac{dy(t)}{dt}}{e^{t+1}u(t) + e^{t+1}\delta(t)}}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{t+1}u(t)\right) = \frac{d}{dt}(e^{t+1})\,u(t) + \frac{d}{dt}(u(t))\,e^{t+1}$$

$$= e^{t+1}u(t) + e^{t+1} \cdot \delta(t)$$

سوال 5

$x_1 \xleftrightarrow{FS} a_k$ periodic with T_1 $\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)$

$$x_2(t) = \underbrace{2x_1(1-t)}_{(I)} - \frac{1}{3}x_1(2t-1) \longrightarrow \begin{cases} T = ? \\ b_k = ? \end{cases}$$

$$\text{if } x_1(t) \xleftrightarrow{F.S} a_k \Rightarrow x_1(t+1) \xleftrightarrow{F.S} a_k e^{+jk\omega_1 \times 1}$$

$$\text{if } x(t) \xleftrightarrow{F.S} a_k \Rightarrow x_1(-t+1) = x(1-t) \xleftrightarrow{F.S} a_{-k} e^{+jk\omega_1}$$

$$x(t-1) \xleftrightarrow{F.S} a_k e^{-jk\omega_1} \quad , \quad x(2t-1) \xleftrightarrow{F.S} a_k e^{-jk2\omega_1}$$

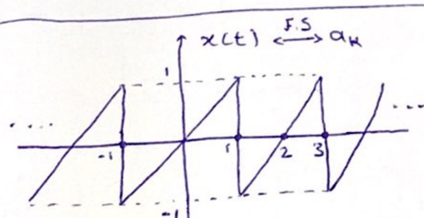
ضرایب تغییر نمی‌کند

فقط ω_1، 2 برابر می‌شود ⟵ (T نصف می‌شود)

$$\Rightarrow \boxed{a_k = 2a_{-k}e^{jk\omega_1} - \frac{1}{3}a_k e^{-jk2\omega_1}}$$

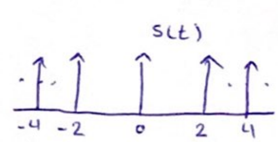
$$\begin{cases} 2x_1(1-t) \longrightarrow T_1 \\ -\frac{1}{3}x_1(2t-1) \longrightarrow \frac{T_1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Kmm}\left\{T_1, \frac{T_1}{2}\right\} = T_1$$

سوال 6



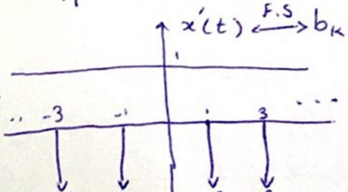
روش اول ⟵ استفاده از خواص

می‌دانیم:



$$S(t) \xleftrightarrow{F.S} d_k = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}$$

مشتق بگیریم



$$x'(t) = -2\delta(t-1) + 1$$

$$\to (jk\omega_0)a_k = -2e^{-jk\omega_0 \times 1} \times \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{= d_k} \;\to\; a_k = \frac{-1}{jk\omega_0} e^{-jk\omega_0} \xrightarrow{\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi}$$

$$\boxed{a_k = \frac{-1}{jk\pi} e^{-jk\pi} = \frac{j}{k\pi}(-1)^k \quad \text{for } k \neq 0}$$

روش دوم ← فرمول آنالیز : $a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt \xrightarrow{T=2} a_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \underbrace{t\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-t}{jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-1}^{+1} + \frac{1}{(jk\omega_0)^2} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-1}^{+1} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-jk\omega_0}\left(\frac{1}{(k\omega_0)^2} - \frac{1}{jk\omega_0}\right) - e^{jk\omega_0}\left(\frac{1}{(k\omega_0)^2} + \frac{1}{jk\omega_0}\right) \right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(k\omega_0)^2}\left(e^{jk\omega_0} - e^{-jk\omega_0}\right) + \left(e^{jk\omega_0} + e^{-jk\omega_0}\right)\frac{1}{jk\omega_0} \right]$$

مشتق	انتگرال
t	$e^{-jk\omega_0 t}$
1	$\frac{-1}{jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t}$
0	$\frac{-1}{(jk\omega_0)^2} e^{-jk\omega_0 t}$

سوال 7

$T = 3$

a) $a_k = a_{k+2}$

b) $a_k = a_{-k}$

c) $\int_{-0.5}^{0.5} x(t)\, dt = 1$

d) $\int_{0.5}^{1.5} x(t)\, dt = 2$

$x(t) = ?$

طبق خواص سری فوریه می‌دانیم : $x(-t) \xleftrightarrow{F.S} a_{-k}$

پس از خاصیت b می‌توان فهمید که : $\boxed{x(t) = x(-t)}$

طبق خاصیت جابه‌جایی در فرکانس : $e^{j\omega_0 M t} x(t) \xleftrightarrow{F.S} a_{k-M}$

← از خاصیت a می‌توان فهمید که : $\underbrace{x(t) = x(t) e^{-j\frac{4\pi}{3}t}}$

← فقط در ضرایب $\Rightarrow t = 0, \pm 1.5, \pm 3, \pm 4.5, \pm 6, \ldots$

$t = \pm 1.5t$ مقدار غیرصفر دارد به طوری که شرط a را ارضا کند

$\overset{\text{باید}}{\Longrightarrow} e^{-j\frac{4\pi}{3}t} = 1$ شود تا a صحیح باشد

از خاصیت c می‌توان فهمید که : $x(t) = \delta(t) \;;\; -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$

همچنین از خاصیت d می‌توان فهمید : $x(t) = 2\delta(t-1.5) \;;\; 0.5 < t < 1.5$

بنابراین می‌توان نوشت : $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-3k) + 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-1.5-3k)$

سوال 8

if $x(t) \xleftrightarrow{F.S} a_k$

$$Z(t) = \underbrace{\cos(M\omega_0 t)}_{(III)} \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{x(t-t_0)}_{(I)}\Big)}_{(II)} \xleftrightarrow{F.S} ?$$

I) $x(t-t_0) \xleftrightarrow{F.S} a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$

II) $\frac{d}{dt}\big(x(t-t_0)\big) \xleftrightarrow{F.S} jk\omega_0 \left(a_k e^{-jk\omega_0 t_0}\right)$

III) $\cos(M\omega_0 t) : \xleftrightarrow{F.S} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(e^{jM\omega_0 t} + e^{-jM\omega_0 t}\right)$

یادآوری : $\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right)$

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} \Rightarrow b_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{\omega_0}{4\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} e^{j\omega_0 t} e^{-jk\omega_0 t}\, dt + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} e^{-j\omega_0 t} \cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{\omega_0}{4\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} e^{j(\omega_0 - k\omega_0)t}\, dt + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} e^{-j(\omega_0 + k\omega_0)t}\, dt$$

$$= \frac{\omega_0}{4\pi}\left(\frac{2\pi}{\omega_0} e^{j(\omega_0 - k\omega_0)} + \frac{2\pi}{\omega_0} e^{-j(\omega_0 + k\omega_0)}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{j(\omega_0 - k\omega_0)} + e^{-j(\omega_0 + k\omega_0)}\right)}_{\text{ضرایب سری فوریه } \cos(\omega_0 t)}$$

$$\Rightarrow \cos(M\omega_0 t) \xleftrightarrow{F.S} \frac{1}{2}\left(e^{j(M\omega_0 - k\omega_0 M)} + e^{-j(M\omega_0 + kM\omega_0)}\right)$$

$$\Rightarrow Z(t) \xleftrightarrow{F.S} C_k = \frac{jk\omega_0}{2}\left(a_k e^{-jk\omega_0 t_0}\right) \cdot \left(e^{jM(\omega_0 - k\omega_0)} + e^{-jM(\omega_0 + k\omega_0)}\right)$$

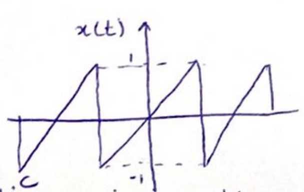
سوال 9

$$w(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \big(\delta(t - 0.5 - 2k) - \delta(t + 0.5 - 2k)\big)$$

یادآوری :

$x(t) \circledast y(t) = \int_T x(\tau) y(t-\tau)\, d\tau$

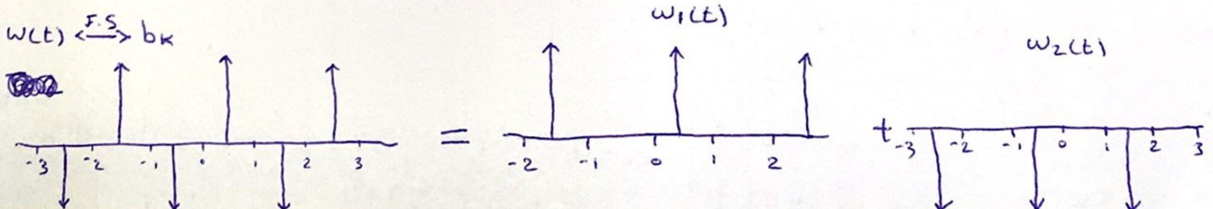
$x(t) \circledast y(t) \xleftrightarrow{F.S} T a_k b_k$



$\xleftrightarrow{a_k}$

ضرایب سری فوریه این سیگنال در سوال 6 بدست آورده شد

$w(t) \xleftrightarrow{F.S} b_k$



$$\Rightarrow w(t) = w_1(t) + w_2(t) \xleftrightarrow{F.S} b_k = c_k + d_k$$

$$w_1(t) \xleftrightarrow{F.S} \frac{1}{2} e^{-jk\frac{\pi}{2}}$$

$$w_2(t) \xleftrightarrow{F.S} -\frac{1}{2} e^{jk\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{1}{2}\left(e^{-jk\frac{\pi}{2}} - e^{jk\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$x(t) \xleftrightarrow{F.S} a_k = \frac{-1}{jk\pi} e^{-jk\pi} \Rightarrow T a_k b_k = 2 \times \frac{1}{2}\left(e^{-jk\frac{\pi}{2}} - e^{jk\frac{\pi}{2}}\right) \times \frac{-1}{jk\pi} e^{-jk\pi}$$

$$= \underbrace{\frac{-1}{jk\pi} e^{-jk\pi}\left(e^{-jk\frac{\pi}{2}} - e^{jk\frac{\pi}{2}}\right)}_{(I)} \Rightarrow x(t) \circledast y(t) = FS^{-1}\{I\}$$

روش دوم : $x(t) \circledast y(t) = \int_T x(\tau)\, y(t-\tau)$

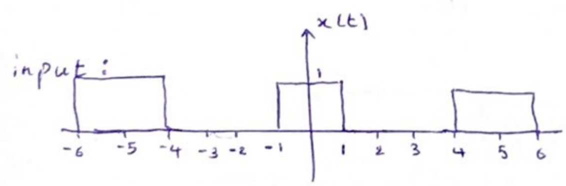
تفاوت کانولوشن پریودیک با کانولوشن معمولی تنها در بازه انتگرال گیری است.

سوال 10

یادم باشه :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 3\frac{dx(t)}{dt}$$

input :



$$x(t) = e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow H(j\omega)e^{j\omega t} = y(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\left(H(j\omega)e^{j\omega t}\right) - 5\left(H(j\omega)e^{j\omega t}\right) + 6H(j\omega)e^{j\omega t} = 3e^{j\omega t}$$

$$= (j\omega)^2 H(j\omega)e^{j\omega t} - 5(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t} + 6H(j\omega)e^{j\omega t} = 3e^{j\omega t}$$

$$= -\omega^2 H(j\omega)e^{j\omega t} - 5j\omega H(j\omega)e^{j\omega t} + 6H(j\omega)e^{j\omega t} = 3e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow H(j\omega)\left(-\omega^2 e^{j\omega t} - 5j\omega e^{j\omega t} + 6e^{j\omega t}\right) = 3e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{3e^{j\omega t}}{6e^{j\omega t} - 5j\omega e^{j\omega t} - \omega^2 e^{j\omega t}} = \frac{3\cancel{e^{j\omega t}}}{\cancel{e^{j\omega t}}(6 - 5j\omega - \omega^2)} = \frac{3}{-\omega^2 - 5j\omega + 6}$$

$$\Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{a_k H(jk\omega_0)}_{= b_k} e^{jk\omega_0 t} \quad , \quad x(t) \xleftrightarrow{F.S} a_k = \underbrace{d}_{\text{duty cycle}} . \operatorname{Sinc}(kd) = \frac{2}{5}\operatorname{Sinc}\left(\frac{2k}{5}\right)$$

$$\boxed{\text{می‌دانیم: راه دوم} \quad y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{F.T} Y(j\omega) = X(j\omega)\, H(j\omega)}$$

$$a_0 = \frac{2}{5} \qquad a_2 = \frac{2}{5}\operatorname{Sinc}\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$a_1 = \frac{2}{5}\operatorname{Sinc}\left(\frac{2}{5}\right) \qquad a_3 = \frac{2}{5}\operatorname{Sinc}\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{2}{5}H(0)e^{j0} + \frac{2}{5}\left(\operatorname{Sinc}\left(\frac{2}{5}\right)H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} + \operatorname{Sinc}\left(\frac{4}{5}\right)H(2j\omega_0)e^{j\omega_0 t} + \dots\right)$$