ماتریس ها

۱

$$AB \neq BA$$

۲

$$\text{if } AB = BA \longrightarrow$$ جابجایی پذیر

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

۳

$$(AB)C = A(BC)$$

۴

$$ABCD = (AB)(CD)$$

$$= A(BCD)$$

$$= (ABC)D$$

۵

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$$

مشتق و انتگرال در ماتریس‌ها :

$$A = \begin{bmatrix} 1+t & e^{-t} \\ -2 & t^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} A(t) = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 0 & 2t \end{bmatrix}$$

$$\int A(t)\, dt = \begin{bmatrix} t + \frac{t^2}{2} & -e^{-t} \\ -2t & \frac{t^3}{3} \end{bmatrix}$$

trace

اگر یک ماتریس مربعی : مجموع درایه‌های قطر اصلی

$$\operatorname{trace}(A) = \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$:

$$tr(\alpha A) = \alpha\, tr(A)$$

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$$

if $A_{n\times m}$, $B_{m\times n}$:

$$tr(AB) = tr(BA)$$

دترمینان

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

A_{ij} یک ماتریس مربعی است که از حذف سطر i ام و ستون j ام بدست می‌آید.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right)$$

$$- a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right)$$

$$+ a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right)$$

خواص دترمینان

۱- اگر جای دو سطر (یا دو ستون) با یکدیگر عوض شوند علامت دترمینان تغییر خواهد کرد.

۲- اگر یک سطر (یا یک ستون) را با یک سطر (یا ستون) دیگر جمع کنیم مقدار دترمینان تغییری نخواهد کرد.

۳- اگر یک ماتریس دو سطر (یا دو ستون) یکسان داشته باشد دترمینان صفر می‌شود.

۴- $|AB| = |A| \cdot |B| = |BA|$

ل- اگر یک سطر (یا یک ستون) در یک عدد اسکالر k ضرب شود ← دترمینان ماتریس در k ضرب می‌شود.

ح- اگر تمام درایه‌های یک ماتریس $A_{n \times n}$ در یک اسکالر k ضرب شود ← دترمینان ماتریس در k^n ضرب می‌شود.

ماتریس منفرد

یک ماتریس مربعی $A_{n \times n}$ را غیرمنفرد (ناویژه) گویند اگر یک ماتریس مربعی $B_{n \times n}$ وجود داشته باشد که $AB = BA = I$ باشند.

آن ماتریس را با A^{-1} نمایش می دهند.

اگر معکوس A وجود نداشته باشد، ماتریس A منفرد یا ویژه است.

اگر $|A|$ غیر صفر باشد A^{-1} وجود دارد.

$$|AA^{-1}| = 1$$

$$\rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1$$

$$\rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj}(A)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}$$

$$\left[\begin{matrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \\ - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \\ \ldots \end{matrix} \right.$$

ماتریس الحاقی : هر عنصر ترانهاده آن از دترمینان
ماتریس متناظر با حذف سطر iام و ستون jام

بدست آمده است.

مثال) اگر A غیر منفرد باشد ثابت کنید

$$A(\mathrm{adj}(A)) = (\mathrm{adj}(A))A = |A|\, I$$

$$* \; AA^{-1} = I \longrightarrow A\,\frac{\mathrm{adj}(A)}{|A|} = I$$

$$\Longrightarrow A\,\mathrm{adj}(A) = \underline{|A|\, I}$$

$$* \; A^{-1}A = I \longrightarrow \frac{\mathrm{adj}(A)}{|A|}\,A = I$$

$$\Longrightarrow \mathrm{adj}(A)\,A = \underline{|A|\, I}$$

✓

نرم ماتریس‌ها

۱- نرم یک :

$$\|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i}^{n} |a_{ij}| \right)$$

بزرگترین مقدار مجموع قدرمطلق‌های عناصر ستون‌های ماتریس است.

۲- نرم بی‌نهایت :

$$\|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j}^{n} |a_{ij}| \right)$$

بزرگترین مقدار مجموع قدرمطلق عناصر سطرهای ماتریس است.

۳_ نرم ۲ :

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}}$$

بزرگترین عددی است که $A^TA - \lambda I$ منفرد شود.

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{min}}}$$

۴_ نرم فروبنیوس : (Frobenius)

$$\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{trace}(A^TA)}$$

مثال) برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ نرم های لازم را

$$\|A\|_1 = \max(6+2,\ 4+0) = 8$$

$$\|A\|_\infty = \max(6+4,\ 2+0) = 10$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}}$$

$$A^T A - \lambda I$$

$$\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 40 & -24 \\ -24 & 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۴۰-\lambda & -۲۴ \\ -۲۴ & ۱۶-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \lambda = ۲۸ \pm ۶\sqrt{۵}$$

$$\|A\|_۲ = \sqrt{۲۸ + ۶\sqrt{۵}}$$

$$\|A\|_F = \sqrt{۵۶}$$