(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)

دانشکده ریاضی

کد فرم : FR/FY/11

ویرایش : صفر

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **ریاضی۲-فنی (۱۳ گروه هماهنگ)** نیمسال (~~اول~~/ دوم) **۹۵-۱۳۹۴** نام مدرس:

نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۹۵/۳/۲۹** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از هرگونه ماشین حساب ممنوع است.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال۱- مقدار انتگرال دوگانه $\iint_D \frac{y}{x^۲+y^۲}dxdy$ را محاسبه کنید که در آن : **۱۵ نمره**

$$D=\{(x,y): x^۲+y^۲\le ۴ \,,\, x^۲+(y-۲)^۲\le ۴ \,,\, x\ge ۰\}$$

سوال۲- انتگرال $\iiint_V z\,dV$ را محاسبه کنید که در آن ، V ناحیه ای است که از بالا به کره $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ و از پایین به رویه $z=\sqrt{۳(x^۲+y^۲)}$ محدود است. **۱۵ نمره**

سوال۳- ماکزیمم تابع $f(x,y,z)=xyz$ را تحت شرایط $x+y+z=۴$ و $x-y-z=۳$ بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۴- مساحت قسمتی از رویه $z=۵-x^۲-y^۲$ را بیابید که بالای صفحه $z=-۴$ واقع است. **۱۵ نمره**

سوال۵- مسیر C قسمتی از منحنی $r(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+(۱+\sin t)\vec{k}$ به ازای $t\in[۰,\frac{\pi}{۲}]$ است. انتگرال منحنی الخط زیر را محاسبه کنید : **۲۰ نمره**

$$\int_C xe^{۲y}dx+(x^۲e^{۲y}+۲y\cot z)dy-y^۲(۱+\cot^۲ z)dz$$

سوال۶- سطح S قسمتی از صفحه $x+z=۲$ است که درون استوانه $x^۲+y^۲=۴$ قرار دارد و C مرز S است. درستی قضیه استوکس را برای میدان برداری $\vec{F}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ با استفاده از سطح S و مرز C بررسی کنید. یعنی نشان دهید انتگرالهای $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ و $\iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}dS$ با هم برابرند. **۲۰ نمره**

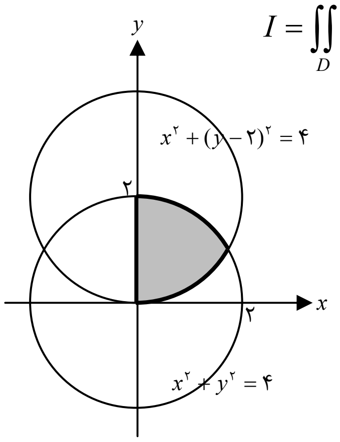
سوال۷- S سطح خارجی رویه $z=\sqrt{۱-x^۲-y^۲}$ است و **۲۰ نمره**

$$\vec{F}=z^۲x\vec{i}+(\frac{۱}{۳}y^۳+\tan z)\vec{j}+(x^۲z+y^۲)\vec{k}$$

مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ را بیابید.

موفق باشید

جواب سوال۱- روش اول : (با استفاده از مختصات قطبی)



$$I=\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy=\int_{\theta=0}^{\pi/6}\int_{r=0}^{4\sin\theta}\frac{r\sin\theta}{r^2}\,rdrd\theta+\int_{\theta=\pi/6}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2}\frac{r\sin\theta}{r^2}\,rdrd\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{\pi/6}\int_{r=0}^{4\sin\theta}\sin\theta drd\theta+\int_{\theta=\pi/6}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2}\sin\theta drd\theta=\int_{\theta=0}^{\pi/6}4\sin^2\theta d\theta+\int_{\theta=\pi/6}^{\pi/2}2\sin\theta d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{\pi/6}2(1-\cos 2\theta)d\theta+\int_{\theta=\pi/6}^{\pi/2}2\sin\theta d\theta=2[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta]_0^{\pi/6}+[-2\cos\theta]_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$=2(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})+\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

روش دوم : (با استفاده از مختصات دکارتی)

$$I=\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy=\int_{x=0}^{\sqrt{3}}\int_{y=2-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\frac{y}{x^2+y^2}\,dydx=\int_{x=0}^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_{y=2-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x=0}^{\sqrt{3}}(\ln 4-\ln(8-4\sqrt{4-x^2}))dx=-\frac{1}{2}\int_{x=0}^{\sqrt{3}}\ln(2-\sqrt{4-x^2})dx=$$

اکنون به کمک انتگرالگیری جزء به جزء خواهیم داشت :

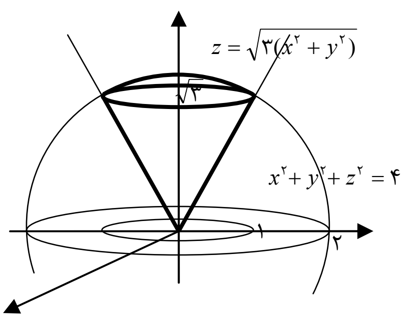
$$u=\ln(2-\sqrt{4-x^2})\quad,\quad dv=dx\quad\rightarrow\quad du=\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}(2-\sqrt{4-x^2})}\;,\;v=x$$

$$I=-\frac{1}{2}[x\ln(2-\sqrt{4-x^2})\,|_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}(2-\sqrt{4-x^2})}]=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}(2-\sqrt{4-x^2})}$$

به کمک تغییر متغیر مثلثاتی $x=2\sin t$ خواهیم داشت :

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\frac{8\sin^2 t\cos t\,dt}{2\cos t(2-2\cos t)}=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin^2 t\;dt}{1-\cos t}=\int_0^{\pi/3}(1+\cos t)dt=[t+\sin t]_0^{\pi/3}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

جواب سوال۲- روش اول : (با استفاده از مختصات کروی)



$$\iiint_V z\,dV=\int_{\varphi=0}^{\pi/6}\int_{\rho=0}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}(\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi d\theta d\rho d\varphi$$

$$=\pi\int_{\varphi=0}^{\pi/6}\int_{\rho=0}^{2}\rho^3\sin 2\varphi d\rho d\varphi=4\pi\int_{\varphi=0}^{\pi/6}\sin 2\varphi d\varphi=2\pi[-\cos 2\varphi]_0^{\pi/6}=\pi$$

روش دوم : (با استفاده از مختصات استوانه ای)

$$\iiint_V z\,dV=\int_{r=0}^{1}\int_{z=\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}}\int_{\theta=0}^{2\pi}zrd\theta dzdr=2\pi\int_{r=0}^{1}\int_{z=\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}}zrdzdr$$

$$=2\pi\int_{r=0}^{1}\frac{r}{2}z^2\,\Big|_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}}dr=4\pi\int_{r=0}^{1}r(1-r^2)dr=-\pi(1-r^2)^2\,|_0^1=\pi$$

جواب سوال۳- روش اول : از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می کنیم. تابع زیر را تعریف می کنیم :

$$g(x,y,z,\lambda,\mu)=xyz-\lambda(x+y+z-4)-\mu(x-y-z-3)$$

مشتقات جزئی مرتبه اول g را برابر صفر قرار می دهیم.

$$g_x=yz-\lambda-\mu=0,\ \ g_y=xz-\lambda+\mu=0,\ \ g_z=xy-\lambda+\mu$$

$$g_\lambda=x+y+z-4=0,\ \ g_\mu=x-y-z-3=0$$

از معادلات دوم و سوم داریم $xz=xy$. اگر $x=0$ آنگاه معادلات چهارم و پنجم ناسازگار هستند پس $x\neq 0$ یعنی $y=z$.

اکنون از معادلات چهارم و پنجم داریم $x-2y=3$, $x+2y=4$ که نتیجه می‌دهد $x=\frac{7}{2}$ و $y=z=\frac{1}{4}$

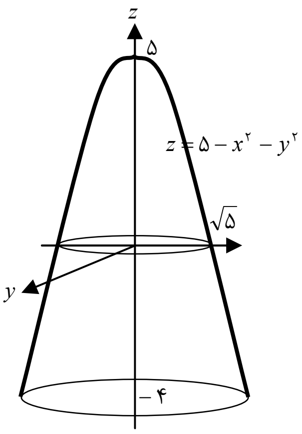
و ماکزیمم تابع f برابر است با : $\max f(x,y,z)=f(\frac{7}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})=\frac{7}{32}$

روش دوم : اگر هر دو شرط برقرار باشد آنگاه داریم $x=\frac{7}{2}$ و $y+z=\frac{1}{2}$ و تابع f به صورت یک تابع دو متغیره $h(y,z)=\frac{7}{2}yz$ در می‌آید و می‌توان از روش ضرایب لاگرانژ با یک شرط استفاده کرد.

روش سوم : اگر هر دو شرط برقرار باشد آنگاه داریم $x=\frac{7}{2}$ و $z=\frac{1}{2}-y$ و تابع f به صورت تابع یک متغیره $g(y)=\frac{7}{2}y(\frac{1}{2}-y)$ در می‌آید که $g'(y)=-7y+\frac{7}{4}$ و اگر $g'(y)=0$ خواهیم داشت $y=\frac{1}{4}$ و

$$\max f(x,y,x)=\max g(y)=g(\frac{1}{4})=f(\frac{7}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})=\frac{7}{32}$$

جواب سوال۴- روش اول : تصویر سطح مورد نظر بر روی صفحه $z=0$ دایره $r=3$ است.



بردار گرادیان سطح برابر است با : $\vec{n}=\frac{(2x,2y,1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$

بنابر این مقدار مساحت خواسته شده برابر است با :

$$\iint_S dS=\iint_S\sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dxdy=\int_{r=0}^{3}\int_{\theta=0}^{2\pi}r\sqrt{4r^2+1}\,d\theta dr$$

$$=2\pi\int_{r=0}^{3}r\sqrt{4r^2+1}\,dr=\frac{2\pi}{12}(\sqrt{4r^2+1})^3\,\Big|_0^3=\frac{\pi}{6}(37\sqrt{37}-1)$$

روش دوم : رویه مورد نظر را با استفاده از مختصات استوانه ای پارامتری می کنیم.

$$R(r,\theta)=r\cos\theta\,\vec{i}+r\sin\theta\,\vec{j}+(5-r^2)\vec{k}\qquad;\ 0\le r\le 3\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

$$R_r=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}-2r\vec{k}\qquad,\qquad R_\theta=-r\sin\theta\,\vec{i}+r\cos\theta\,\vec{j}$$

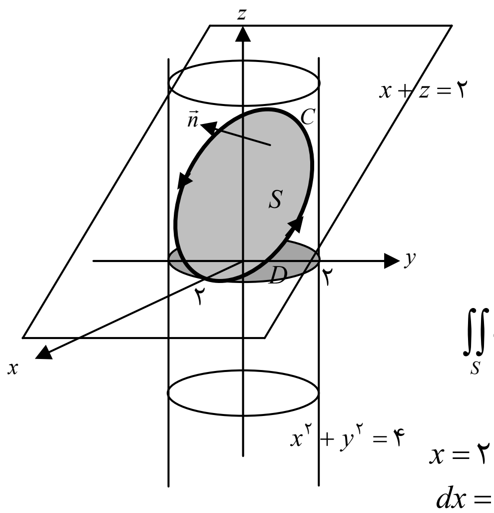
$$R_r\times R_\theta=2r^2\cos\theta\,\vec{i}+2r^2\sin\theta\,\vec{j}+r\vec{k}\qquad\to\qquad dS=r\sqrt{4r^2+1}\,drd\theta$$

$$\iint_S dS=\int_{r=0}^{3}\int_{\theta=0}^{2\pi}r\sqrt{4r^2+1}\,d\theta dr=2\pi\int_{r=0}^{3}r\sqrt{4r^2+1}\,dr=\frac{2\pi}{12}(\sqrt{4r^2+1})^3\,\Big|_0^3=\frac{\pi}{6}(37\sqrt{37}-1)$$

جواب سوال۵- مشاهده می کنیم که تابع برداری $F=(xe^{2y},x^2e^{2y}+2y\cot z,-y^2(1+\cot^2 z))$

بردار گرادیان تابع $f(x,y,z)=x^2e^{2y}+y^2\cot z$ است و انتگرالگیری از نقطه $r(0)=(1,0,1)$ تا نقطه $r(\frac{\pi}{2})=(0,1,2)$ است.

بنابر این داریم : $\int_C xe^{2y}dx+(2x^2e^{2y}+2y\cot z)dy-y^2(1+\cot^2 z)dz=[x^2e^{2y}+y^2\cot z]_{(1,0,1)}^{(0,1,2)}=\cot(2)-1$



جواب سوال۶- سطح S یک بیضی است. جهت رو به بالای آن را در نظر می‌گیریم.

بردار یکه قائم برابر است با $\vec{n} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(۱,۰,۱)$

تصویر S روی صفحه $z = ۰$ دایره $x^۲ + y^۲ = ۴$ است که ناحیه داخل آن را D می‌نامیم.

چون $curl\vec{F} = (-۱,-۱,-۱)$ و $dS = \sqrt{۲}dxdy$ داریم :

$$\iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iint_D -۲dxdy = -۲\int_{r=۰}^{۲}\int_{\theta=۰}^{۲\pi} r\,d\theta\,dr = -۴\pi\int_{r=۰}^{۲} r\,dr = -۸\pi$$

برای محاسبه انتگرال روی C ، متغیرها را بر حسب θ می‌نویسیم.

$$x = ۲\cos\theta \quad , \quad y = ۲\sin\theta \quad , \quad z = ۱ - x = ۱ - ۲\cos\theta$$

و در نتیجه :

$$dx = -۲\sin\theta\, d\theta \quad , \quad dy = ۲\cos\theta\, d\theta \quad , \quad dz = ۲\sin\theta\, d\theta$$

اکنون داریم :

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C ydx + zdy + xdz = \int_{\theta=۰}^{۲\pi}(-۴\sin^۲\theta + ۲\cos\theta - ۴\cos^۲\theta + ۴\sin\theta\cos\theta)d\theta$$

$$= \int_{\theta=۰}^{۲\pi}(-۴ + ۲\cos\theta + ۴\sin\theta\cos\theta)d\theta = [-۴\theta + ۲\sin\theta + ۲\sin^۲\theta]_۰^{۲\pi} = -۸\pi$$

و بالاخره نتیجه گرفتیم که $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}dS$ یعنی قضیه استوکی در مورد تابع برداری ، سطح و مرز داده شده درست است.

جواب سوال۷- روش اول (قضیه دیورژانس) : سطح S یک سطح بسته نیست اما اگر سطح محدود به دایره $x^۲ + y^۲ = ۱$ واقع در صفحه $z = ۰$ را S' بنامیم آنگاه $S \cup S'$ یک سطح بسته است و ناحیه درون آن را V می‌نامیم. طبق دیورژانس داریم :

$$\iint_{S\cup S'} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_V divF dV$$

از طرف دیگر داریم : $\iint_{S\cup S'} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{S'} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ یعنی : $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_V divF dV - \iint_{S'} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$

اکنون دو انتگرال $\iiint_V divF dV$ و $\iint_{S'} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ را حل می‌کنیم.

چون $divF = x^۲ + y^۲ + z^۲$ داریم : $\iiint_V divF dV = \iiint_V (x^۲ + y^۲ + z^۲)dV$

به کمک مختصات کروی داریم :

$$\iiint_V divF dV = \int_{\rho=۰}^{۱}\int_{\varphi=۰}^{\pi/۲}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\rho^۴\sin\varphi d\theta d\varphi d\rho = ۲\pi\int_{\rho=۰}^{۱}\int_{\varphi=۰}^{\pi/۲}\rho^۴\sin\varphi d\varphi d\rho = ۲\pi\int_{\rho=۰}^{۱}\rho^۴ d\rho = \frac{۲\pi}{۵}$$

برای سطح S' داریم $z = ۰$ ، $\vec{n} = (۰,۰,-۱)$ و $dS = dxdy$. در نتیجه $\vec{F}\cdot\vec{n} = -y^۲$ بنابر این داریم $\iint_{S'} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = -\iint_{S'} y^۲dxdy$

به کمک مختصات قطبی داریم :

$$\iint_{S'} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = -\int_{r=۰}^{۱}\int_{\theta=۰}^{۲\pi} r^۳\sin^۲\theta d\theta dr = -\pi\int_{r=۰}^{۱} r^۳ dr = -\frac{\pi}{۴}$$

بالاخره داریم :

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_V divF dV - \iint_{S'} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{۲\pi}{۵} - (-\frac{\pi}{۴}) = \frac{۱۳}{۲۰}\pi$$

روش دوم (اثبات مستقیم) معادله رویه را می‌توان به صورت $x^2+y^2+z^2=1$ نوشت. بردار گرادیان رویه برابر است با $(2x,2y,2z)$ و بردار یکه قائم بر سطح عبارت است از $\vec{n}=(x,y,z)$. تصویر سطح S روی صفحه $z=0$ دایره $x^2+y^2\le 1$ است که آن را D می‌نامیم.

اکنون داریم $dS=\dfrac{dxdy}{z}$ و همچنین : $\vec{F}\cdot\vec{n}=2x^2z^2+\dfrac{1}{3}y^4+y\tan z+y^2z$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_S (2x^2z^2+\frac{1}{3}y^4+y\tan z+y^2z)\frac{dxdy}{z}$$

$$=\iint_D (2x^2\sqrt{1-x^2-y^2}+\frac{1}{3}\frac{y^4}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\frac{y\tan\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+y^2)dxdy$$

با استفاده مختصات قطبی خواهیم داشت :

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_D (2r^2\cos^2\theta\sqrt{1-r^2}+\frac{1}{3}\frac{r^4\sin^4\theta}{\sqrt{1-r^2}}+\frac{r\sin\theta\tan\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-r^2}}+r^2\sin^2\theta)rdrd\theta$$

$$=\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}(2r^3\cos^2\theta\sqrt{1-r^2}+\frac{1}{3}\frac{r^5\sin^4\theta}{\sqrt{1-r^2}}+\frac{r^2\sin\theta\tan\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-r^2}}+r^3\sin^2\theta)d\theta dr$$

$$=\int_{r=0}^{1}(2r^3\sqrt{1-r^2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta+\frac{1}{3}\frac{r^5}{\sqrt{1-r^2}}\int_{\theta=0}^{2\pi}\sin^4\theta\,d\theta+\frac{r^2\tan\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-r^2}}\int_{\theta=0}^{2\pi}\sin\theta d\theta+r^3\int_{\theta=0}^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta)dr$$

چون داریم :

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\sin\theta d\theta=[-\cos\theta]_{\theta=0}^{2\pi}=0$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\sin^2\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}(1-\cos2\theta)d\theta=\frac{1}{2}[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta]_{\theta=0}^{2\pi}=\pi$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\sin^4\theta d\theta=\frac{1}{4}\int_{\theta=0}^{2\pi}(1-\cos2\theta)^2d\theta=\frac{1}{4}\int_{\theta=0}^{2\pi}(1-2\cos2\theta+\cos^2 2\theta)d\theta=\frac{1}{8}\int_{\theta=0}^{2\pi}(3-4\cos2\theta+\cos4\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{8}[3\theta-2\sin2\theta+\frac{1}{4}\sin4\theta]_{\theta=0}^{2\pi}=\frac{3\pi}{4}$$

می‌توانیم بنویسیم : $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\int_{r=0}^{1}(2\pi r^3\sqrt{1-r^2}+\frac{\pi}{4}\frac{r^5}{\sqrt{1-r^2}}+\pi r^3)dr$

با تغییر متغیر $1-r^2=u^2$ خواهیم داشت : $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\frac{\pi}{4}\int_{r=0}^{1}(8(1-u^2)u^2+(1-u^2)^2+4u^3)du$

$$=\frac{\pi}{4}\int_{r=0}^{1}(-7u^4+4u^3+6u^2+1)du=\frac{\pi}{4}(-\frac{7}{5}+1+2+1)=\frac{13}{20}\pi$$