پاسخ سیستم های خطی و تغییرناپذیر با زمان گسسته به ورودی :

همانطور که اشاره شد خطی و تغییرناپذیر با زمان بودن یک سیستم جزء خواص مهم آن می باشد.

می خواهیم پاسخ یک سیستم گسسته خطی و تغییرناپذیر با زمان را به ورودی $x[n]$ بدست آوریم.

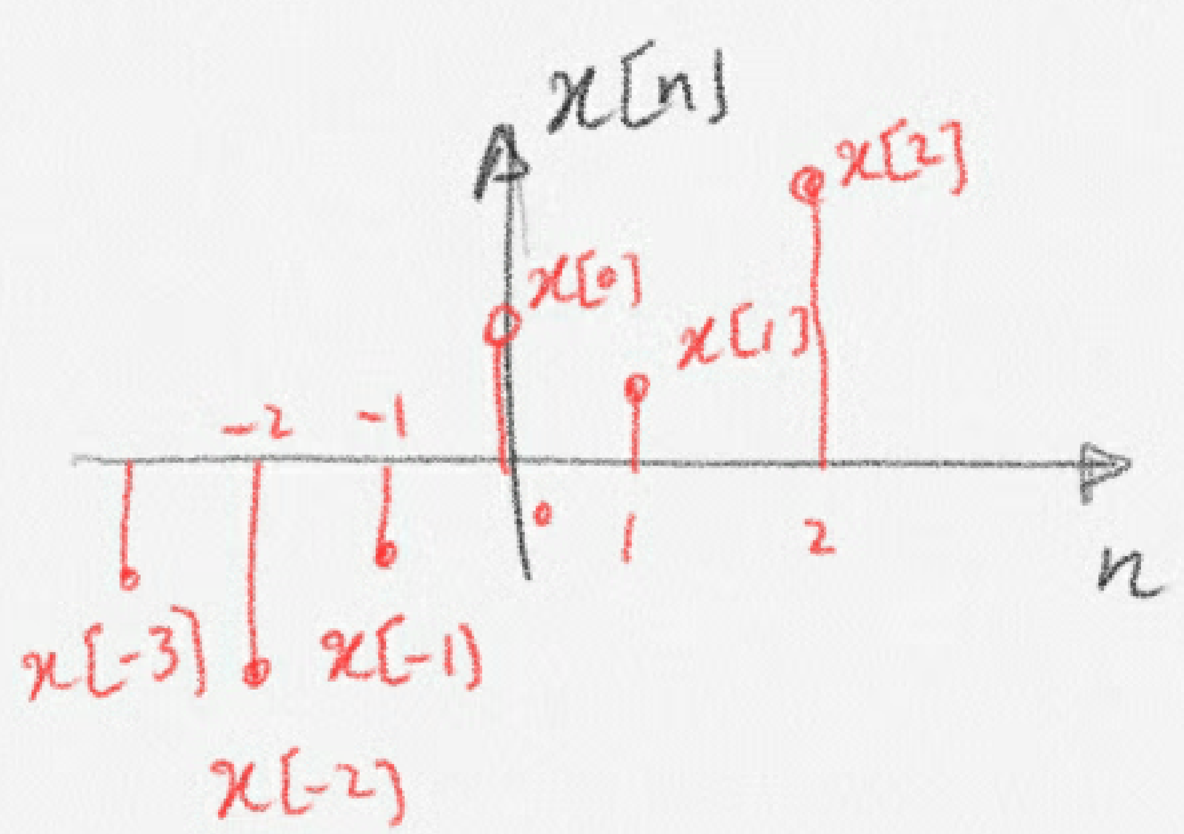
سیستم های خطی :

ابتدا فرض کنیم تنها خاصیت خطی برای سیستم وجود داشته باشد و می خواهیم پاسخ سیستم به یک ورودی گسسته را بدست آوریم.

$$\underbrace{y[n]}_{\text{خروجی سیستم}} = \underbrace{\mathcal{L}}_{\text{عملگر پاسخ}}\{\underbrace{x[n]}_{\text{ورودی سیستم}}\}$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{سیستم خطی}} \longrightarrow y[n]$$

هر سیگنال گسسته ای را می توان برحسب مجموع ضربه های وزن دار جابجا شده نوشت.



$$\begin{aligned} x[n] = {} & x[-3]\,\delta[n+3] \\ & + x[-2]\,\delta[n+2] \\ & + x[-1]\,\delta[n+1] \\ & + x[0]\,\delta[n] \\ & + x[1]\,\delta[n-1] \\ & + x[2]\,\delta[n-2] \end{aligned}$$

به طور کلی می توان نوشت:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

حال سیستم را به دست می آوریم:

$$y[n] = \mathcal{L}\{x[n]\} = \mathcal{L}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k] \right\}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}\{x[k]\,\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\mathcal{L}\{\delta[n-k]\}$$

خاصیت جمع‌پذیری

خاصیت همگنی

$$\mathcal{L}\{\delta[n-k]\} = h_k[n]$$

پاسخ سیستم به ورودی

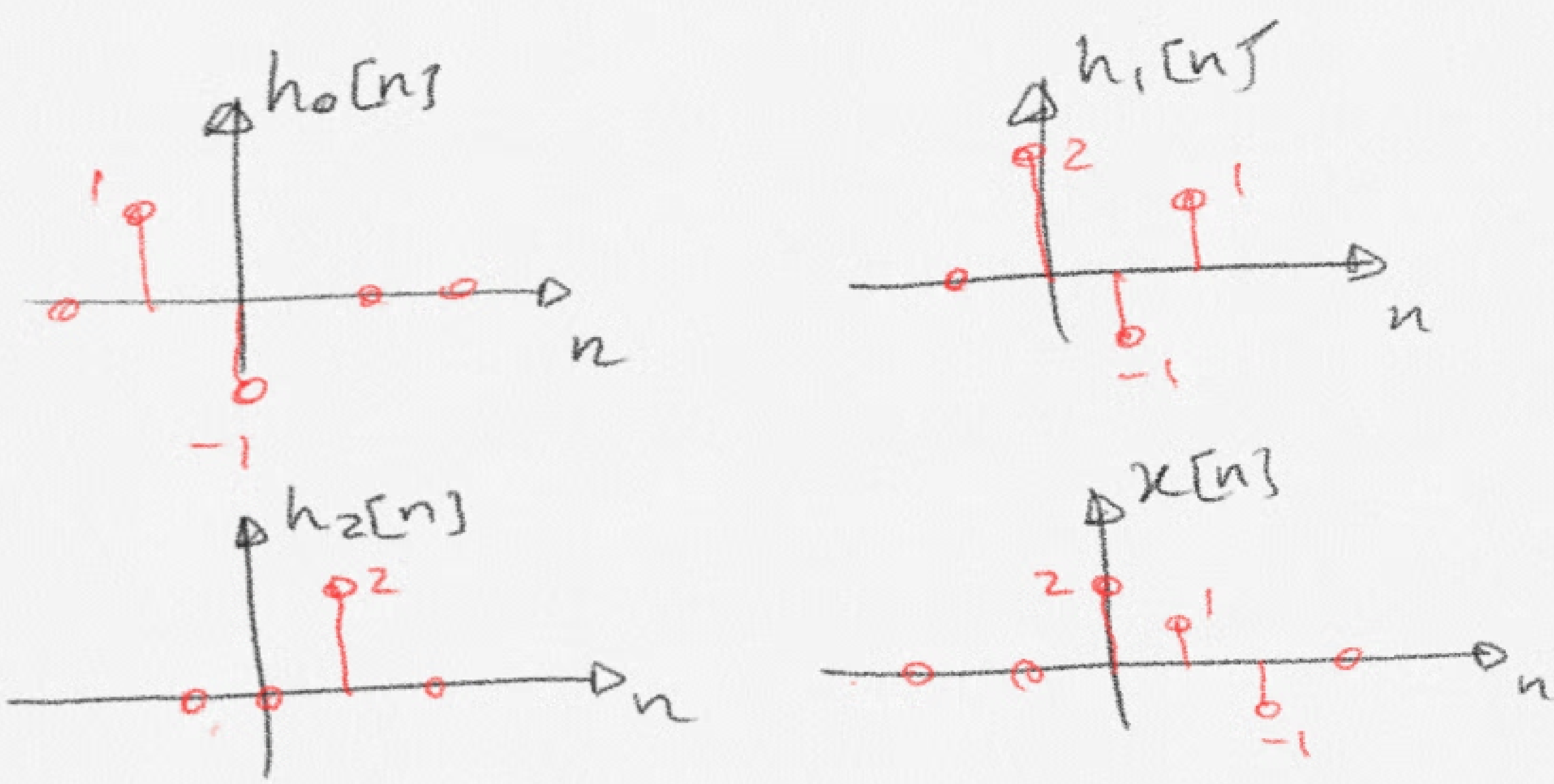
ضربه در محل k

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]\,h_k[n]$$

مجموع کانولوشن

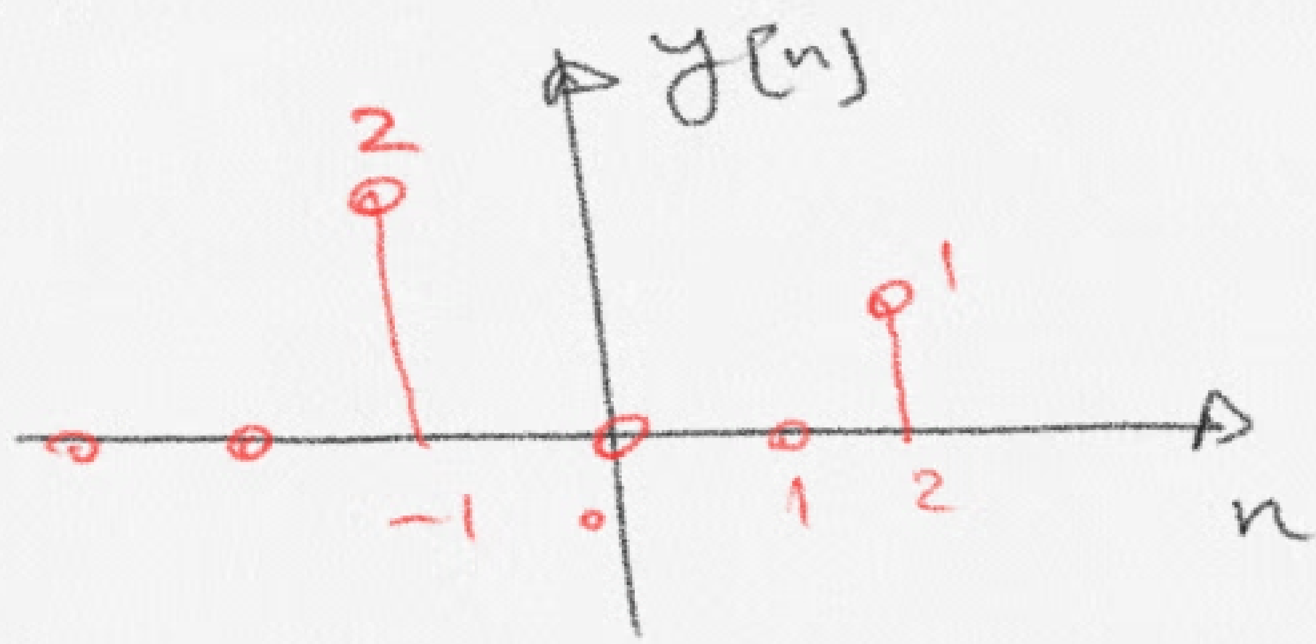
مثال: اگر پاسخ یک سیستم خطی به ضربه‌های $\delta[n]$, $\delta[n-1]$ ، $\delta[n-2]$ برابر با $h_0[n]$, $h_1[n]$, $h_2[n]$ باشد پاسخ سیستم به ورودی $x[n]$ را بدست آورید:

حل:



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h_k[n] = x[0]h_0[n] + x[1]h_1[n] + x[2]h_2[n]$$

$$y[n] = 2h_0[n] + 1 \times h_1[n] + (-1)h_2[n]$$



مثال: در یک سیستم خطی گسسته پاسخ به ضربه $\delta[n-k]$ برابر با $e^{-kn}u[n]$ است. پاسخ سیستم به ورودی پله واحد را بدست آورید.

حل:

$$h_k[n] = e^{-kn}u[n]$$

$$x[n] = u[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\{u[k]e^{-kn}u[n]\}$$

$$= u[n]\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-kn}) = u[n]\frac{(e^{-n})^0 - (e^{-n})^{\infty+1}}{1-e^{-n}}$$

$$y[n] = u[n]\frac{1-0}{1-e^{-n}} = \frac{u[n]}{1-e^{-n}}$$

پاسخ در سیستم های خطی و تغییرپذیر با زمان:

$$\delta[n] \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow h_0[n]$$

$$\delta[n-k] \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow h_0[n-k] = h_k[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$h[n]$ پاسخ ضربه سیستم است

مثال: پاسخ یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان (LTI)

Linear Time Invariant

به ورودی ضربه واحد برابر با $h[n] = e^{-2n}u[n]$ است. پاسخ سیستم به ورودی $x[n] = u[n] - u[n-5]$ را بدست آورید.

حل:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (u[k] - u[k-5])e^{-2(n-k)}u[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]e^{-2(n-k)}u[n-k] - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k-5]e^{-2(n-k)}u[n-k]$$

$$y(n) = e^{-2n}\sum_{k=0}^{n} e^{2k} - e^{-2n}\sum_{k=5}^{n} e^{2k} = e^{-2n}\left(\frac{(e^2)^0 - (e^2)^{n+1}}{1-e^2}\right)u[n]$$

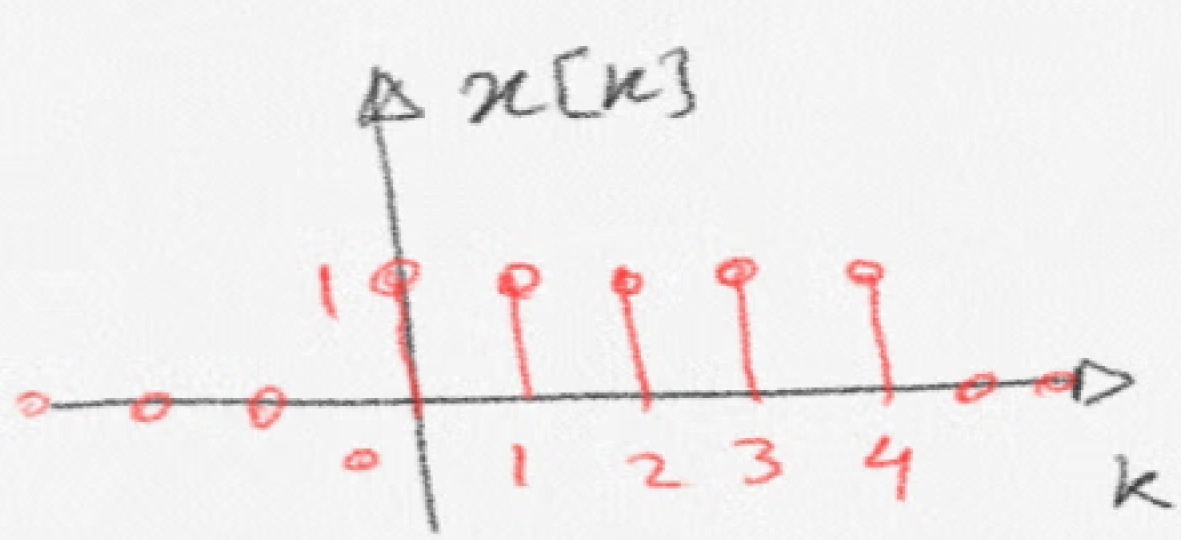
$$- e^{-2n}\frac{(e^2)^5 - (e^2)^{n+1}}{1-e^2}u[n-5]$$

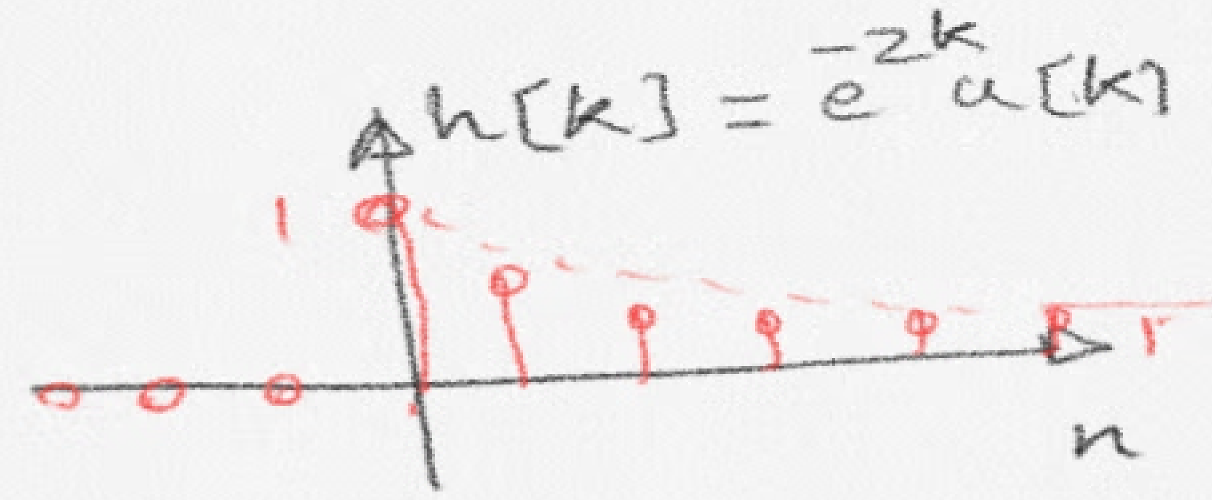
$$y[n] = e^{-2n}\left(\frac{1-e^{2(n+1)}}{1-e^2}u[n] - \frac{e^{10} - e^{2(n+1)}}{1-e^2}u[n-5]\right)$$

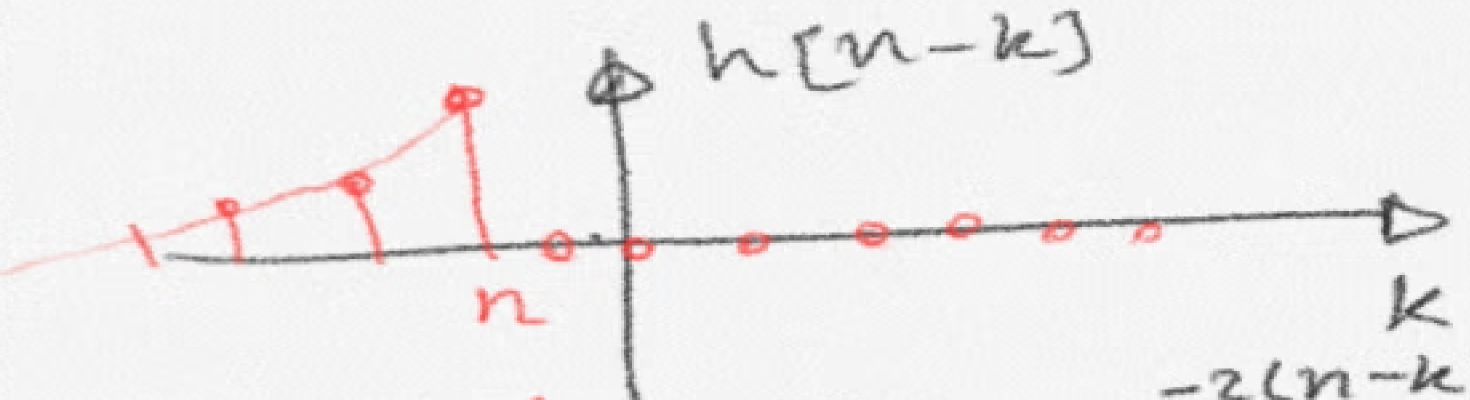
نکته: کانولوشن دارای خاصیت جابجایی است یعنی:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

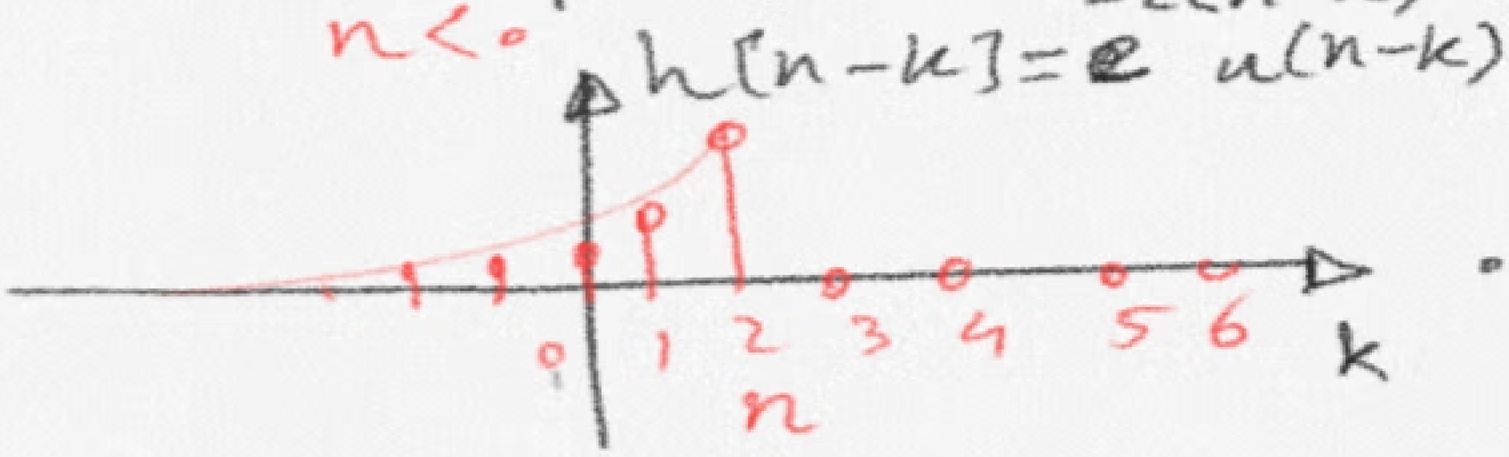
حل مثال قبلی به روش ترسیمی :







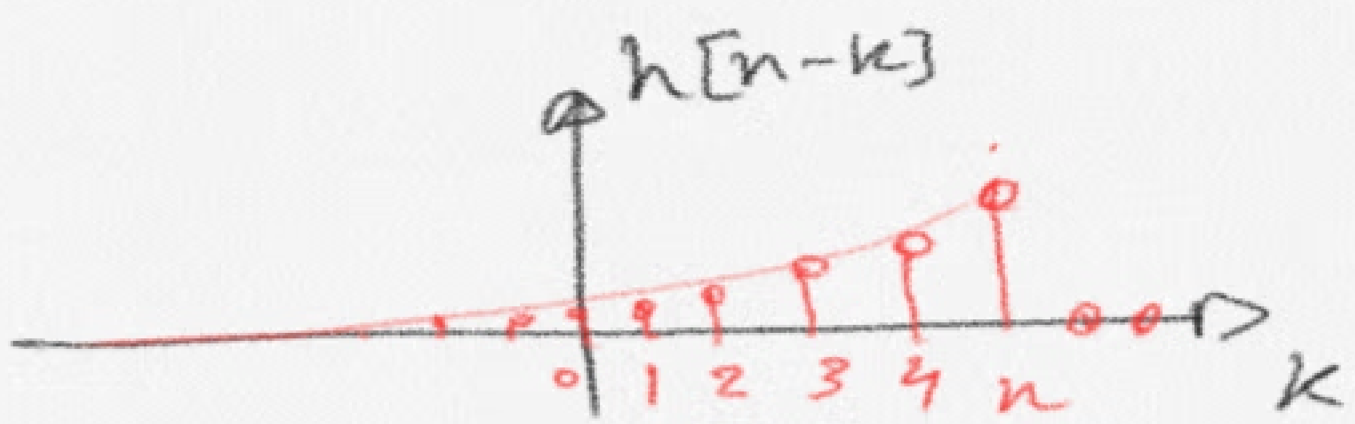
$n<0 \Rightarrow y[n]=0$



$0 \le n \le 4 \Rightarrow y[n]=\sum_{k=0}^{n} e^{-2(n-k)}$

$y[n]=e^{-2n}\sum_{k=0}^{n} e^{2k}$

$0 \le n \le 4 \rightarrow y[n]=e^{-2n}\left(\frac{e^{2\times 0}-e^{2(n+1)}}{1-e^{2}}\right)$



$n>4 \longrightarrow y[n]=\sum_{k=0}^{4} 1\times e^{-2(n-k)} = e^{-2n}\sum_{k=0}^{4} e^{2k}$

$n>4 \rightarrow y[n]=e^{-2n}\times\frac{\left(e^{2\times 0}-e^{2(4+1)}\right)}{1-e^{2}}$