ادامه خواص تبدیل فوریه برای سیگنال های گسسته

۶- خاصیت انبساط زمانی:

قبلاً برای پیوسته داشتیم:
$$x(\alpha t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|\alpha|} X(j\omega/\alpha)$$

ولی برای حالت گسسته:

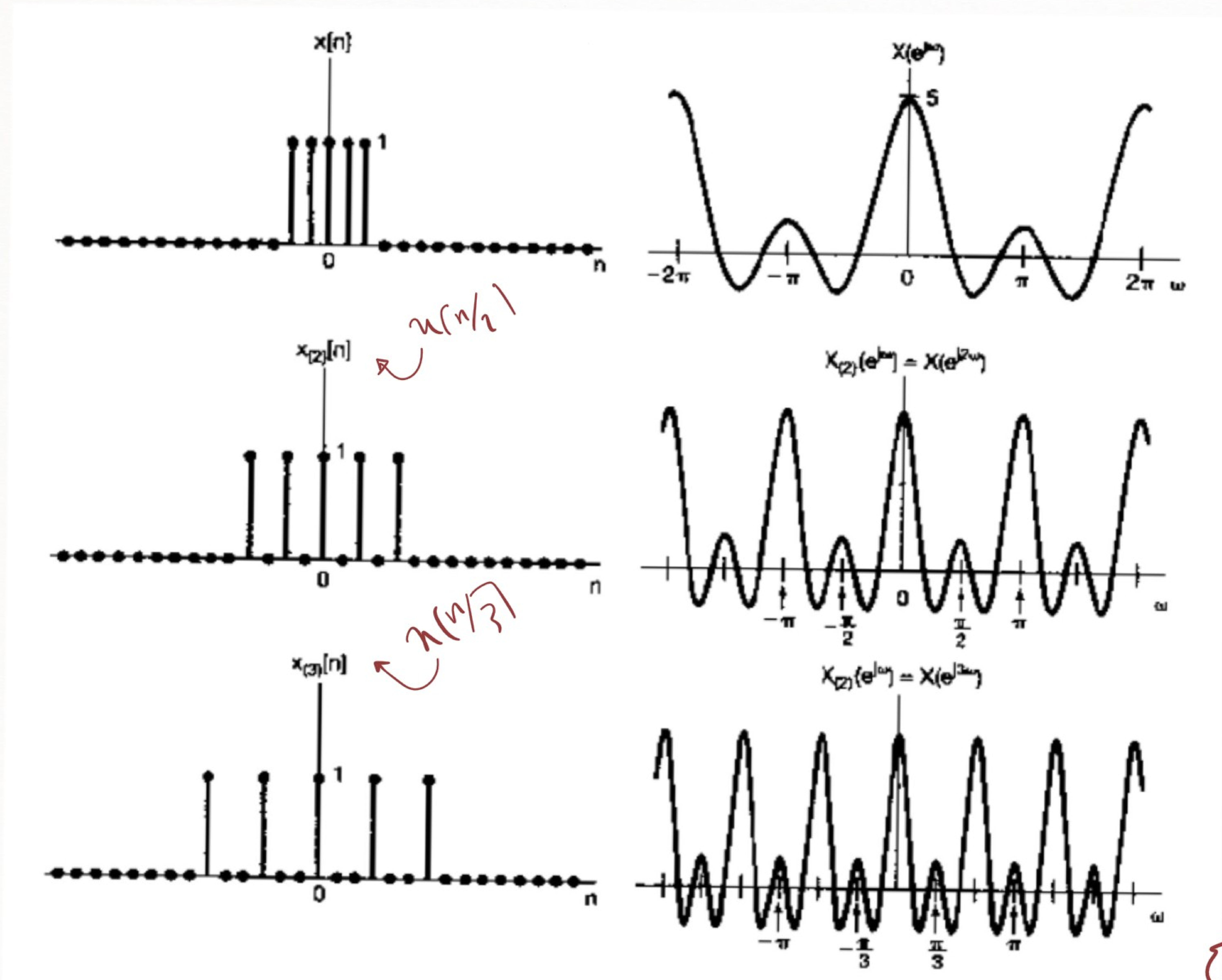
① برای $k>1$: $x[kn] \longrightarrow$ مسئله حل نمی‌شود

② برای $k<1$ ⟸
$$x_k[n] = \begin{cases} x[n/k] & \text{باشد } k \text{ مضرب } n \\ 0 & \text{نباشد } k \text{ مضرب } n \end{cases}$$

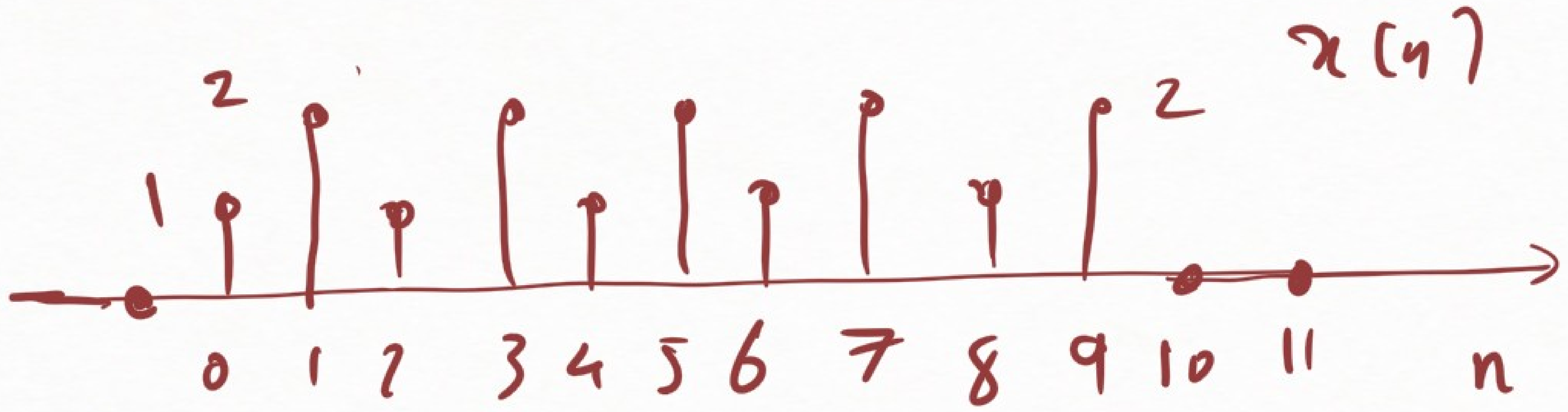
$$\Rightarrow X_k(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_k[n] e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_k[rk] e^{-j\omega rk}$$

$$X_k(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r] e^{-j(k\omega)r} = X(e^{jk\omega})$$

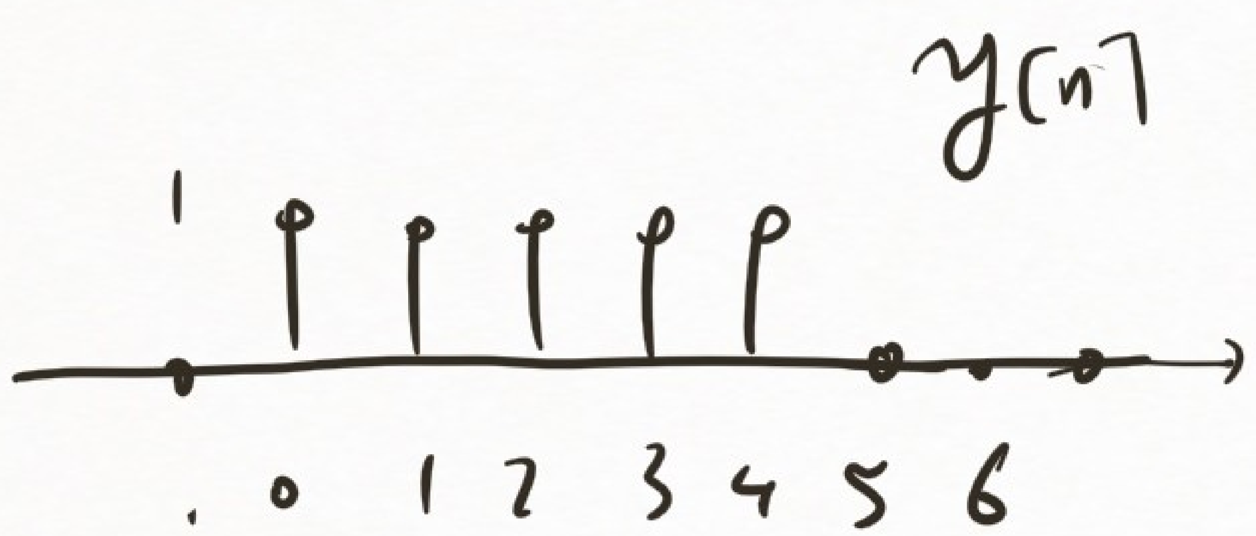
$$\Rightarrow \boxed{x_k[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{jk\omega})}$$



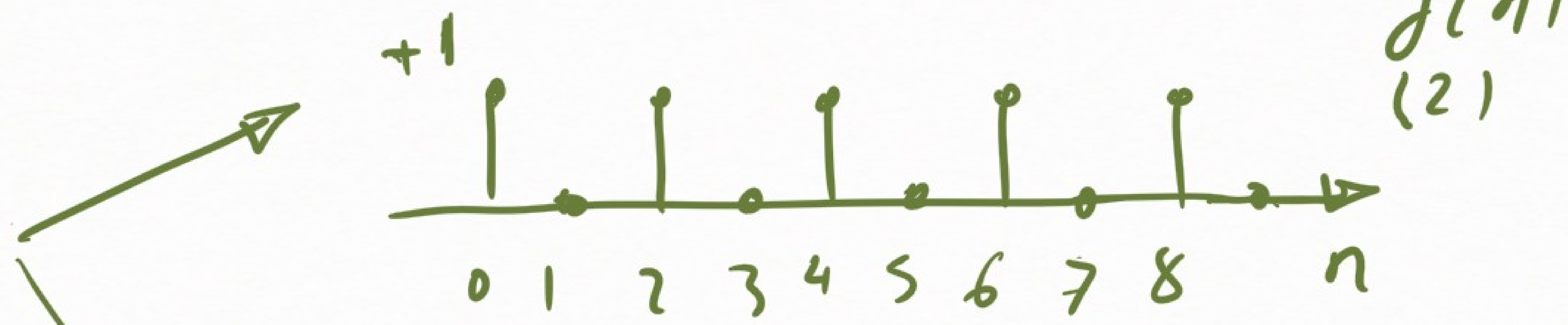
مثال - $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = ?$



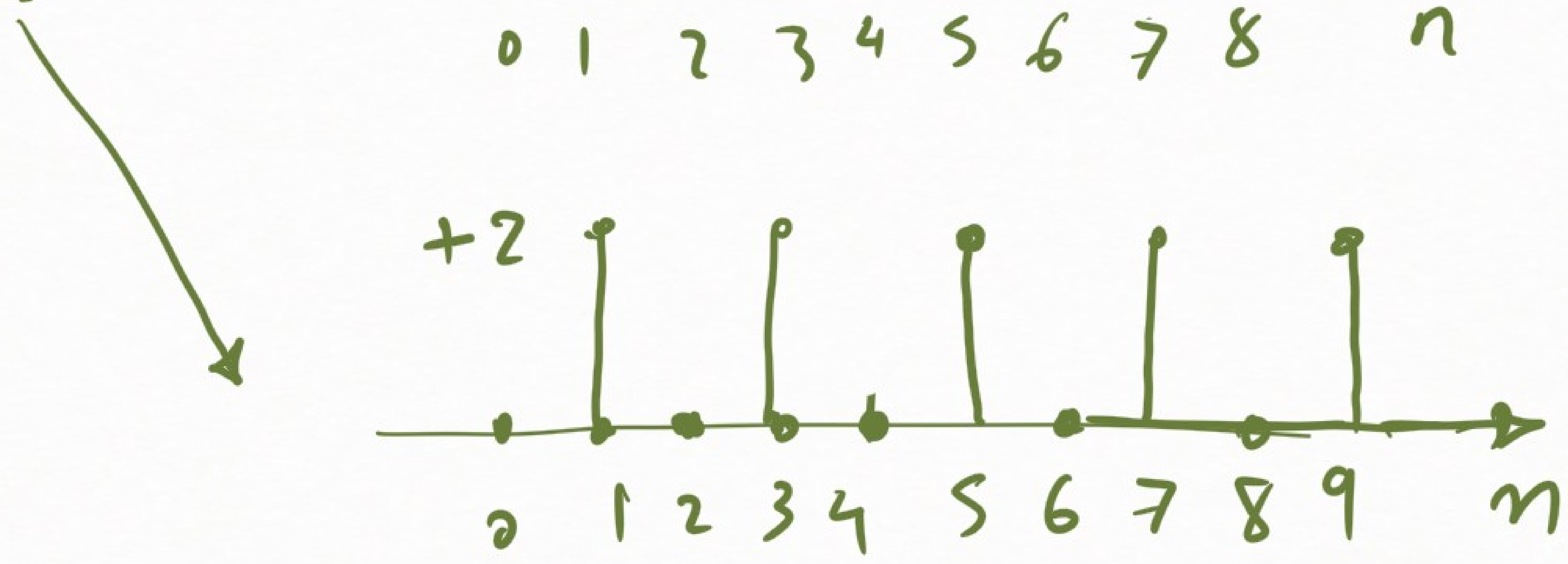
حل - یک سیگنال $y[n]$ تعریف می‌کنیم



$y_{(2)}[n] \longleftrightarrow e^{-j4\omega}\dfrac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$



$2y_{(2)}[n-1] \longleftrightarrow 2e^{-j5\omega}\dfrac{\sin 5\omega}{\sin \omega}$



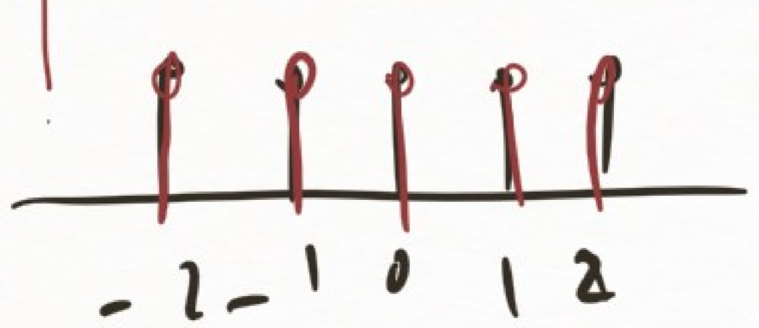
مستقیماً ترکیب کن

$$x[n] = y_{(2)}[n] + 2y_{(2)}[n-1] \quad (*)$$

اثبات جلسه قبل

پالس مستطیلی

$g[n]$



$$g[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(e^{j\omega}) = \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

$$y[n] = g[n-2] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega}) = e^{-2j\omega}\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

$$(*) \Longrightarrow X(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega}\left(1+2e^{-j\omega}\right)\left(\frac{\sin 5\omega}{\sin \omega}\right)$$

۷- خاصیت مشتق‌گیری در حوزه فرکانس :

$$n x(n) \longleftrightarrow j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

اثبات -

تبدیل معکوس

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} \Longrightarrow \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -jn\,x[n]\, e^{-j\omega n} \Longrightarrow j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n x(n) e^{-j\omega n}$$

۸- خاصیت کانولوشن

$$y(n) = x(n) * h(n) \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k) h[k] e^{-j\omega n} \right) = \dots$$

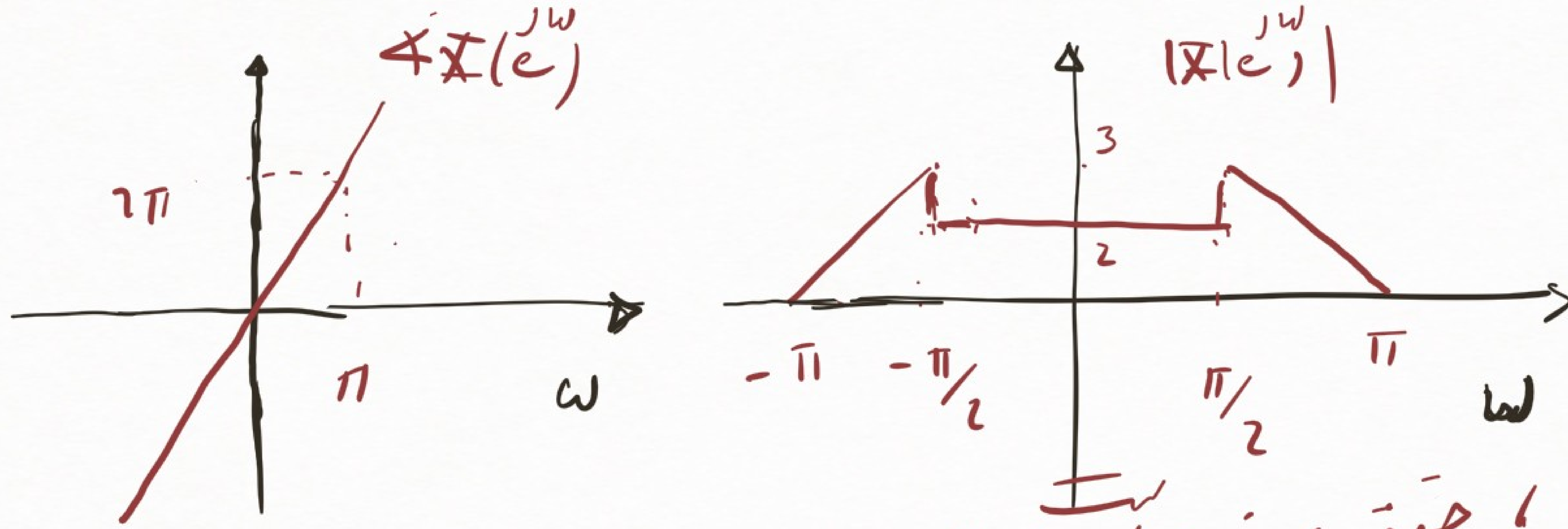
تمرین - رابطه را اثبات نمایید .

۹- رابطه پارسوال :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_1(e^{j\omega}) X_2^*(e^{j\omega})\, d\omega$$

حالت خاص $x_1(n) = x_2(n) = x(n) \Longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$

طرف اول $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) x_2^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_2^*(e^{j\omega}) e^{-j\omega n} d\omega}_{x_2^*(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_2^*(e^{j\omega}) \Big(\overbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) e^{-j\omega n}}^{X_1(e^{j\omega})} \Big) d\omega =$ طرف دوم



مثال -

سیگنال $x(n)$ دارای تبدیل فوریه به صورت مقابل است. میخواهیم تعیین کنیم که آیا $x(n)$ متناوب، حقیقی، زوج و یا انرژی محدودی دارد؟

* اگر $x(n)$ متناوب باشد تبدیل فوریه آن ضربه در مضارب فرکانس پایه خواهد داشت که چون $X(e^{j\omega})$ چنین نیست لذا $x(n)$ متناوب نیست.

* چون اندازه $X(e^{j\omega})$ بر حسب ω زوج و فاز آن فرد است لذا $x(n)$ حقیقی است.

* اگر حقیقی و زوج باشد تبدیل فوریه آن حقیقی و زوج است پس $x(n)$ زوج نیست.

* طبق رابطه پارسوال: $\text{محدود} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|^2 =$ مقدار انرژی سیگنال ← پس سیگنال $x(n)$ انرژی محدود دارد.

مثال -

$x(n) \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow y(n)$

$|\alpha|, |\beta| < 1$

$x(n) = \beta^n u(n) \ , \ h(n) = \alpha^n u(n) \ , \longrightarrow y(n) = ?$

و $y(n) = x(n) * h(n) = ?$

$$x(n)=\beta^n u(n) \longleftrightarrow X(e^{jw})=\frac{1}{1-\beta e^{-jw}}$$

$$h(n)=\alpha^n u(n) \longleftrightarrow H(e^{jw})=\frac{1}{1-\alpha e^{-jw}}$$

$$\Longrightarrow Y(e^{jw})=X(e^{jw})\cdot H(e^{jw})=\frac{1}{(1-\alpha e^{-jw})(1-\beta e^{-jw})}$$

حال از $Y(e^{jw})$ تبدیل معکوس می‌گیریم و تجزیه به کسرهای جزئی می‌کنیم

$$Y(e^{jw})=\frac{A}{1-\alpha e^{-jw}}+\frac{B}{1-\beta e^{-jw}}$$

با فرض $v=e^{-jw}$ ،

$$\Longrightarrow Y(v)=\frac{A}{1-\alpha v}+\frac{B}{1-\beta v} \Longrightarrow$$

$$A=(1-\alpha v)\,Y(v)\Big|_{v=1/\alpha}=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}$$

$$B=(1-\beta v)\,Y(v)\Big|_{v=\frac{1}{\beta}}=\frac{-\beta}{\alpha-\beta}$$

$$\Longrightarrow y(n)=\underbrace{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}_{A}(\alpha)^n u(n)-\underbrace{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}_{B}(\beta)^n u(n)$$

* حالتی که $\alpha=\beta$ باشد $\Longleftarrow$

$$Y(e^{jw})=\frac{1}{(1-\alpha e^{-jw})^2}$$

خواسته شده باید تبدیل معکوس این سیگنال را پیدا کنیم.

$y(n)=?$

$$nx[n] \longleftrightarrow j\frac{dX(e^{jw})}{dw}$$

جواب درست

$$\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-\alpha e^{-jw}} \Longrightarrow n\alpha^n u[n] \longleftrightarrow j\frac{d}{dw}\left[\frac{1}{1-e^{-jw}}\right] \Longrightarrow$$

$$n\alpha^n u[n] \longleftrightarrow \frac{\alpha e^{-jw}}{(1-\alpha e^{-jw})^2} \Longrightarrow (n+1)\alpha^{n+1} u[n+1] \longleftrightarrow \frac{\alpha e^{jw} \cdot e^{-jw}}{(1-\alpha e^{-jw})^2}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{(n+1)\alpha^n u[n+1]}_{(n+1)\alpha^n u[n]} \longleftrightarrow \frac{1}{(1-\alpha e^{-jw})^2} \Longrightarrow \boxed{(n+1)\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(1-\alpha e^{-jw})^2}}$$

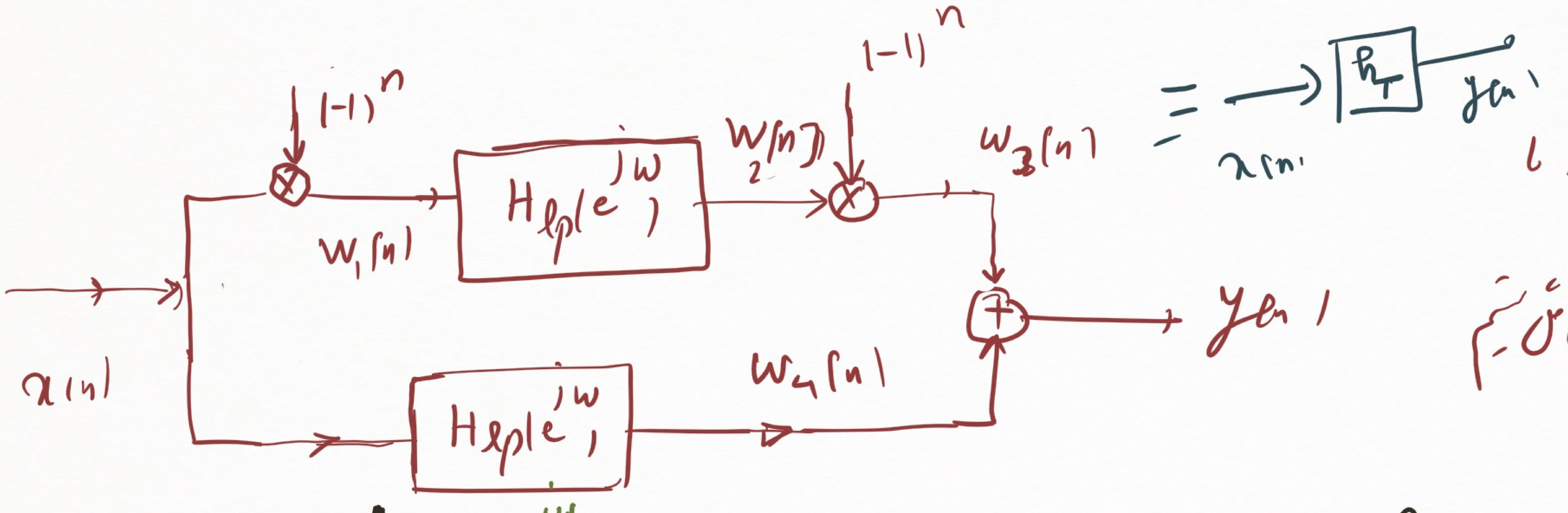
توجه: $u[n+1]$ از $n=-1$ شروع شد ولی چون $(n+1)$ را ضرب شد.

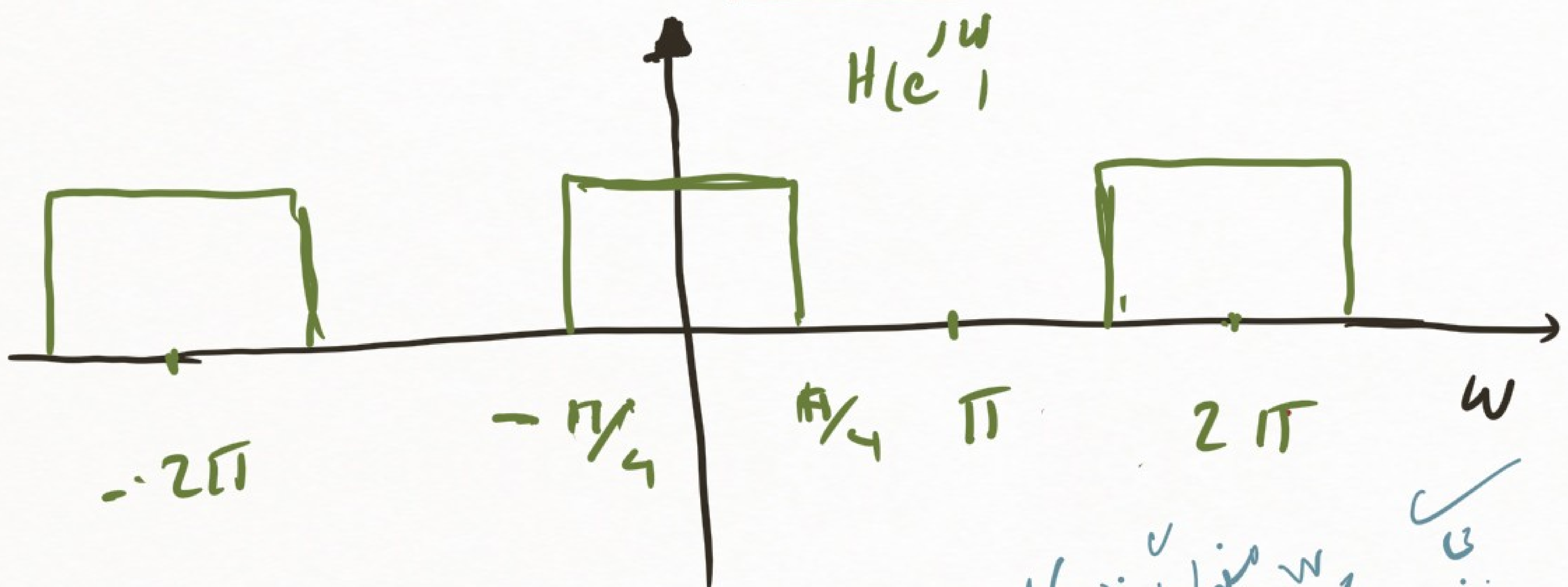
بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که

$$\boxed{y[n] = (n+1)\alpha^n u[n]}$$

تمرین - تبدیل معکوس $X(e^{jw}) = \frac{1}{(1-\alpha e^{-jw})^3}$ را بدست آورید.

مثال- در سیستم شکل زیر $H_{lp}(e^{jw})$ یک فیلتر پایین‌گذر با فرکانس قطع $\pi/4$ می‌باشد. پاسخ فرکانسی سیستم را بدست آورید.





$$w_1(n) = (-1)^n x(n) = e^{-jn\pi} x(n)$$

$$W_1(e^{jw}) = X(e^{j(w-\pi)})$$

$$w_2(n) = w_1(n) * h_{lp}(n) = X(e^{j(w-\pi)})\, H_{lp}(e^{jw})$$

$$w_3(n) = w_2(n)(-1)^n = w_2(n) \cdot e^{-jn\pi} \Longrightarrow$$

یک w_2 مقدار ندارد

$$\Longrightarrow W_3(e^{jw}) = W_2(e^{j(w-\pi)}) = X(e^{j(w-2\pi)})\, H_{lp}(e^{j(w-\pi)}) = X(e^{jw})\, \boxed{H_{lp}(e^{j(w-\pi)})}$$

$$W_4(e^{jw}) = X(e^{jw})\, \boxed{H(e^{jw})} \Longrightarrow y(n) = w_3(n) + w_4(n) \Longrightarrow$$

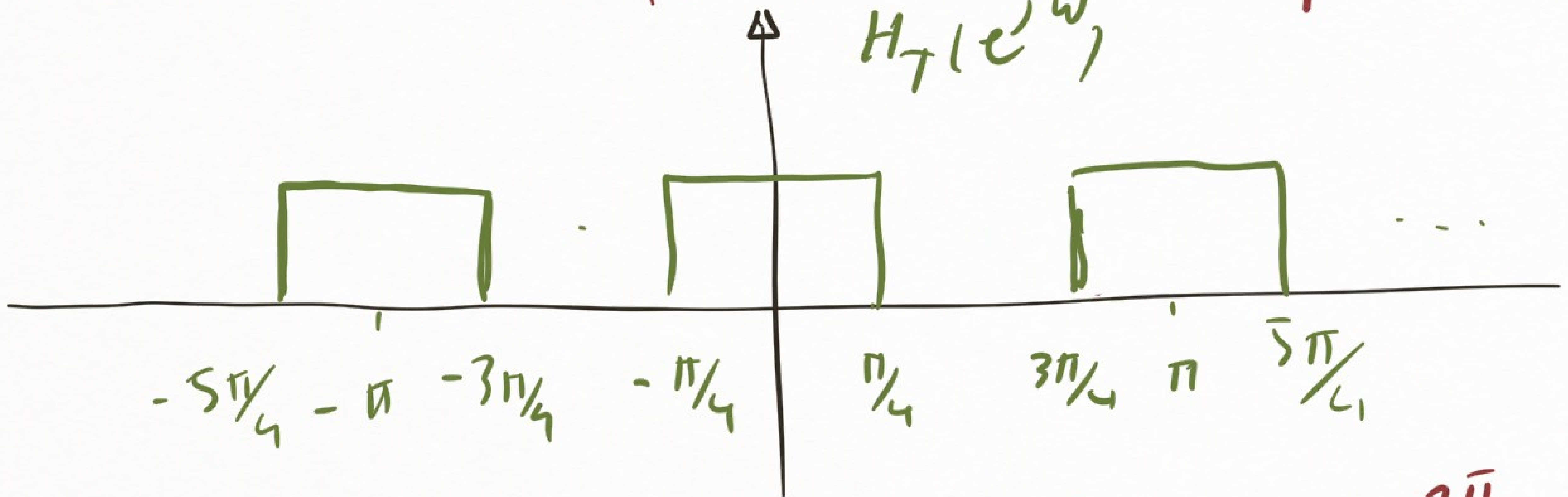
$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\underbrace{\left[H(e^{j(\omega-\pi)}) + H(e^{j\omega})\right]}_{H_T(e^{j\omega})}$$

فیلتر بالاگذر

فیلتر پایین گذر

$H_T(e^{j\omega}) \to$ تابع فرکانسی کل سیستم

حاصل جمع دو فیلتر میان گذر



۱۰- خاصیت ضرب

$$y(n) = x_1(n)\,x_2(n) \xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X_1(e^{j\theta})\,X_2(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta \longrightarrow$$ کانولوشن پریودیک پیوسته

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)\,e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n)\,x_2(n)\,e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X_1(e^{j\theta})\,e^{j\theta n}\,d\theta\right) x_2(n)\,e^{-j\omega n}$$

$$x_1(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X_1(e^{j\theta})\,e^{j\theta n}\,d\theta$$

$\omega \to \theta$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X_1(e^{j\theta})\Bigg[\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n)\,e^{-j(\omega-\theta)n}}_{X_2(e^{j(\omega-\theta)})}\Bigg]\,d\theta$$

آنالیز سیستم های LTI با معادله تفاضلی توسط تبدیل فوریه گسسته :

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \sum_{k=0}^{N} a_k \left(e^{-j\omega k}\right) Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k \left(e^{-j\omega k}\right) X(e^{j\omega}) \Longrightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$

مثال -

$$y(n) - \frac{3}{4} y(n-1) + \frac{1}{8} y(n-2) = 2x(n)$$

الف - $H(e^{j\omega})$ و $h(n)$

ب - پاسخ سیستم به ورودی $x(n) = (1/4)^n u(n)$

از معادله تفاضلی تبدیل فوریه میگیریم :

$$\xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} Y(e^{j\omega}) - \frac{3}{4} e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{8} e^{-2j\omega} Y(e^{j\omega}) = 2X(e^{j\omega})$$

$$\Longrightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{2}{1 - \frac{3}{4} e^{-j\omega} + \frac{1}{8} e^{-2j\omega}} \quad , \quad e^{-j\omega} = v \Longrightarrow$$

$$H(v) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4} v + \frac{1}{8} v^2} \Longrightarrow H(v) = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2} v)(1 - \frac{1}{4} v)}$$

$$H(z) = \frac{A}{1-\frac{1}{2}z} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}z}$$

$$A = (1-\tfrac{1}{2}z)H(z)\Big|_{z=2} = \boxed{4}$$

$$B = (1-\tfrac{1}{4}z)H(z)\Big|_{z=4} = \boxed{-2}$$

$$\Longrightarrow h[n] = 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$x[n] = \left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n] \longrightarrow X(e^{jw}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-jw}} \Longrightarrow Y(e^{jw}) = H(e^{jw})X(e^{jw})$$

معمولی = تکراری = ب - مکرر =

$$Y(e^{jw}) = \frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-jw})(1-\frac{1}{4}e^{-jw})} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{4}e^{-jw})} = \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}} + \frac{B_1}{(1-\frac{1}{4}e^{-jw})} + \frac{B_2}{(1-\frac{1}{4}e^{-jw})^2}$$

$$Y(z) = \frac{A}{1-\frac{1}{2}z} + \frac{B_1}{1-\frac{1}{4}z} + \frac{B_2}{(1-\frac{1}{4}z)^2} \Longrightarrow A = (1-\tfrac{1}{2}z)Y(z)\Big|_{z=2} \Rightarrow$$

$$A = \cancel{(1-\tfrac{1}{2}z)}\frac{2}{\cancel{(1-\frac{1}{2}z)}(1-\frac{1}{4}z)^2}\Big|_{z=2} = \boxed{8}$$

$$B_2 = (1-\tfrac{1}{4}v)^2\, Y(v)\Big|_{v=4} = \boxed{-2}$$

توجه: البته برای محاسبه B_1 بجای مشتق‌گیری می‌توان از روش عددگذاری استفاده کرد که اغلب ساده‌تر حل می‌شود.

دقت شود.

$$B_1 = (-4)\,\frac{d}{dv}\left[(1-\tfrac{1}{4}v)^2\, Y(v)\right]\Big|_{v=4} = \boxed{-4}$$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{8}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{-4}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{-2}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y[n] = 8(\tfrac{1}{2})^n u[n] - 4(\tfrac{1}{4})^n u[n] - 2(n+1)(\tfrac{1}{4})^n u[n]$$

تمرین -

$x[n] = (1/3)^n$

$y[n] = ?$

توجه مهم - در تجزیه به کسرهای جزئی در صورتی که مثلا $H(z)$ یا $Y(z)$ را بدست آورده‌ایم و درجه صورت با مخرج مساوی یا بزرگتر از آن بود، شبیه حالت پیوسته باید صورت را ابتدا به مخرج تقسیم کنیم.

مثال -

$$y[n] + \tfrac{5}{6}y[n-1] + \tfrac{1}{6}y[n-2] = x[n] + 3x[n-1] + \tfrac{11}{6}x[n-2] + \tfrac{1}{3}x[n-3]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1+3e^{-j\omega} + \frac{1}{6}e^{-2j2\omega} + \frac{1}{3}e^{-j3\omega}}{1+\frac{5}{6}e^{-j\omega} + \frac{1}{6}e^{-j2\omega}} \quad , \quad v = e^{-j\omega} \Rightarrow H(v) = \frac{1+3v+\frac{1}{6}v^2+\frac{1}{3}v^3}{1+\frac{5}{6}v+\frac{1}{6}v^2}$$

$$H(v) = 1+2v+\frac{\frac{1}{6}v}{1+\frac{5}{6}v+\frac{1}{6}v^2} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = 1+2e^{-j\omega}+\frac{\frac{1}{6}e^{-j\omega}}{1+\frac{5}{6}e^{+j\omega}+\frac{1}{6}e^{+2j\omega}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \underbrace{1}_{\text{ضربه}} + \underbrace{2e^{-j\omega}}_{\text{ضربه شیفت}} + \underbrace{\frac{\frac{1}{6}e^{-j\omega}}{(1+\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega})}}_{G(e^{j\omega})}$$

نمایی

نمایی

تجزیه به کسر جزئی

$$\frac{A}{1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$A = (1+\tfrac{1}{3}v)\,G(v)\Big|_{v=-3} \quad \boxed{=1}$$

$$B = (1+\tfrac{1}{2}v)\,G(v)\Big|_{v=-2} \quad \boxed{=-1}$$

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + (1/3)^n u[n] - (1/2)^n u[n]$$

رابطه دوالیتی یا همزادی :

* قبلاً دیدیم با توجه به شباهت فرمول‌ها تبدیل فوریه و عکس تبدیل فوریه پیوسته بین $x(t)$ و $X(jw)$ یک دوالیتی وجود داشت.

$$\begin{cases} X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt \\ x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{+jwt}\, dw \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t) \xleftrightarrow{FT} X(jw) \\ X(t) \xleftrightarrow{FT} 2\pi\, x(-w) \end{cases}$$

مثال $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} e^{-\alpha t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{jw+\alpha} \\ \frac{1}{jt+\alpha} \longleftrightarrow 2\pi\, e^{+\alpha w} u(-w) \end{cases}$$

* دوالیتی در سری فوریه گسسته :

$$\begin{cases} x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k\, e^{jk\omega_0 n} \\ a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x[n] \xleftrightarrow{F_s} f[k] = a_k \\ f[n] \longleftrightarrow \frac{1}{N}\, x[-k] \end{cases}$$

توجه: ۱) با توجه به عدم شباهت فرمول‌ها حالت سری فوریه پیوسته، پس سیگنال پیوسته به سری تبدیل لذا دوالیتی در سری فوریه پیوسته نداریم.

۲) « « « « تبدیل فوریه گسسته و عکس تبدیل فوریه گسسته لذا دوالیتی در تبدیل فوریه گسسته نداریم.

۳) با توجه به شباهت فرمول سری فوریه پیوسته و تبدیل فوریه گسسته لذا دوالیتی بین سری فوریه پیوسته، تبدیل گسسته داریم.

(صفحه بعد)

دوگانی بین تبدیل فوریه گسسته در زمان و سری فوریه پیوسته در زمان:

1/ $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$

2/ $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \, d\omega$

3/ $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

4/ $a_k = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} \, dt$

① ③ شباهت ساختاری و فرمی

② ④ شباهت ساختاری و فرمی

$$f[n] = a_{-k}\Big|_{k=n}$$

از لحاظ شکلی شبیه هستند.