

## ۶.۱ تمرینهای فصل ۱

- ۱-  $\sqrt[3]{7}$  را با استفاده از فرمول تیلور تقریب بزنید.
- ۲- با استفاده از فرمول ماکلورن،  $\sin ۱۰^\circ$  را با چهار رقم اعشار درست محاسبه کنید.

۳ - نشان دهید  $\sin h = h - \frac{h^3}{3!} + O(h^5)$ .

۴ - با استفاده از سه جمله‌ی اول سری ماکلورن تابع  $\cos x$ ،  $\cos(0.5)$  را تقریب بزنید، و خطای تقریب را به دست آورید. نوع خطا را مشخص کنید. همچنین با استفاده از باقیمانده‌ی سری، یک کران بالا برای خطا به دست آورید.

۵ - نشان دهید برای هر  $x$  و  $y$  حقیقی

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

و در حالت خاص  $\forall x, |\sin x| \leq |x|$ .

۶ - فرض کنید  $P_2(x) = x - \frac{x^2}{1!}$  تقریبی برای  $\sin x$  باشد، و  $E(x) = \sin x - P_2(x)$ . یک کران بالا برای  $E(\frac{\pi}{4})$  به دست آورید.

۷ - تقریب تابع  $f(x) = e^x$  را در بازه‌ی  $[-1, 1]$  با چندجمله‌ای تیلور آن،  $P_n(x)$ ، در نظر بگیرید. مطلوبست تعیین  $n$  به قسمی که

$$|e^x - P_n(x)| \leq 10^{-6}, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

۸ - نشان دهید اگر در چندجمله‌ای  $P(x) = x^n + ax + b$ ،  $n$  زوج باشد، آنگاه معادله‌ی  $P(x) = 0$  حداکثر دارای دو ریشه است. اگر  $n$  فرد باشد، معادله می‌تواند حداکثر سه ریشه داشته باشد.

۹ - می‌دانیم

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

چند جمله از سری لازم است تا تقریبی برای  $\ln 2$  با خطایی کمتر از  $0.5 \times 10^{-2}$  به دست آید؟

۱۰ - نشان دهید بین هر دو ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی  $e^x \sin x = 1$ ، یک ریشه‌ی حقیقی از معادله‌ی  $e^x \cos x = -1$  قرار دارد (راهنمایی: قضیه‌ی رُل را برای تابع  $f(x) = e^{-x} - \sin x = 0$  به کار ببرید).

۱۱ - نشان دهید اگر معادله‌ی

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x = 0$$

دارای یک ریشه‌ی مثبت  $x = r$  باشد، آنگاه معادله‌ی

$$nx^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0$$

یک ریشه‌ی مثبت کمتر از  $\pi$  دارد.

۱۲ - نشان دهید

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5(1+\xi)^5}, \quad 0 < \xi < x$$

و  $\ln(1.1)$  را با خطایی کمتر از  $0.5 \times 10^{-6}$  تقریب بزنید.

۱۳ - تعبیر عبارتهای زیر چیست؟

$$f(x) = o(1) \quad , \quad f(x) = O(1)$$

۱۴ - نشان دهید وقتی  $x \rightarrow 0^+$  ،

$$\ln(1+x) = x + O(x^2)$$

۱۵ - مقدار  $f(x) = e^x - x - 1$  را به ازای  $x = 0.01$  در حساب ۵ رقمی محاسبه کنید.

۱۶ - نشان دهید برای  $f$  و  $g$  نامنفی

$$O(f) + O(g) = O(f+g)$$

۱۷ - نشان دهید

$$O(h^m)O(h^n) = O(h^{m+n})$$

۱۸ - بسط  $f(x, y) = \sin(x+y)$  را حول نقطه‌ی  $(0, 0)$  تا جملات شامل درجه‌ی ۳ از  $x$  و  $y$  بنویسید. نتیجه را با نتیجه‌ی حاصل از نوشتن  $\sin u \approx u - \frac{u^3}{6}$  ، و قرار دادن  $u = x+y$  مقایسه کنید.

۱۹ - کامپیوتری اعشاری در نظر بگیرید که از حساب ۵ رقمی استفاده می‌کند. در این کامپیوتر  $1 - \cos 5^\circ$  را با پنج رقم محاسبه کنید.

۲۰ - حساب کنید  $A = \tan(\frac{\pi}{180}) - \sin(\frac{\pi}{180})$  را در کامپیوتری که محاسبات را با ۵ رقم انجام می‌دهد.

۲۱ - کامپیوتری را در نظر بگیرید که محاسبات را در سیستم اعشاری و با ۸ رقم انجام می‌دهد. فرض کنید بخواهیم  $0.33333333$  را چهار بار با خودش جمع کنیم. نتیجه چیست و چه نوع خطایی رخ می‌دهد؟

۲۲ - یک تقریب برای  $\sqrt{2}$  ، عدد  $\frac{577}{408}$  است. این تقریب چند رقم اعشار درست و چند رقم با معنی درست دارد؟

۲۳ - فرض کنید  $x = 3.1415$  و  $x^*$  تقریبی برای  $x$  با سه رقم با معنی درست باشد.

$x^*$  در چه بازه‌ای می‌تواند تغییر کند؟

۲۴ - اگر  $x = e^{-16}$ ، و  $x^* = 0$  تقریبی برای آن باشد، خطای مطلق و خطای نسبی را در حساب ۸ رقمی محاسبه کنید.

۲۵ - توابع  $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$  و  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$  را در نظر بگیرید که از نظر جبری معادلند.  $f(500)$  و  $g(500)$  را با کامپیوتری که محاسبات را با ۵ رقم انجام می‌دهد، به دست آورید. کدام نتیجه دقیق‌تر است؟ چرا؟

۲۶ - معادله  $x^2 + 242.14x + 6.2949 = 0$  را با استفاده از کامپیوتری اعشاری که از حساب ممیز شناور ۵ رقمی استفاده می‌کند، حل کنید.

۲۷ - ۱.۵ را در مبنای ۲ بنویسید.

۲۸ - انتگرالهای زیر را در نظر بگیرید

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

اولاً نشان دهید

$$I_n = 1 - nI_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ثانیاً نشان دهید الگوریتم فوق برای محاسبه‌ی انتگرالها ناپایدار است.

۲۹ - اگر  $x = 314.16$  تقریبی برای  $100\pi$  باشد، خطای مطلق و خطای نسبی را محاسبه کنید. این تقریب چند رقم اعشار درست و چند رقم بامعنی درست دارد؟  
۳۰ - عدد  $0.00285714285714285714 \dots$  و تقریبهای زیر را برای آن در نظر بگیرید

$$x^* = 0.0028571, \quad y^* = 0.0028574, \quad z^* = 0.0028551$$

نشان دهید

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} < 5 \times 10^{-5}$$

$$\frac{|x - y^*|}{|x|} < 5 \times 10^{-4}$$

$$\frac{|x - z^*|}{|x|} < 5 \times 10^{-3}$$

تعداد رقمهای با معنی، و تعداد رقمهای با معنی درست را در هر یک از این تقریبها مشخص کنید. توجه کنید اگر چه تعداد رقمهای بامعنی هر سه تقریب یکسان است، ولی تعداد رقمهای با معنی درست آنها متفاوت است.