توصیف سیستم های LTI با معادله دیفرانسیل یا معادله تفاضلی:

برخی از سیستم های LTI پیوسته: توسط یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت بیان می‌گردند

گسسته: ، ، ، دیفرانس خطی با ضرایب ثابت بیان می‌گردند.

برای حالت پیوسته

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \xRightarrow{\text{مثلا}} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 4\frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

برای حالت گسسته

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k) \xLeftrightarrow{\text{مثلا}} 6y(n-2) + 3y(n-1) + y(n-1) = x[n-7] + 2x[n-1] + 8x(n)$$

(اساساً ابزاریسی)

این سیستم ها برای توصیف پدیده های فیزیکی متنوعی بکار برده می‌شوند. مثلا حرکت فنر و یا مدار RLC زیر

نکته مهم - شرط اینکه معادله دیفرانسیل علی و LTI باشند این است

که شرایط اولیه صفر باشند

for $t<t_0$, $x(t)=0 \Longrightarrow$

$y(t)=0$

$y(t_0) = y'(t_0) = \cdots = y^{(n-1)}(t_0) = 0$

برای حل معادله دیفرانسیل

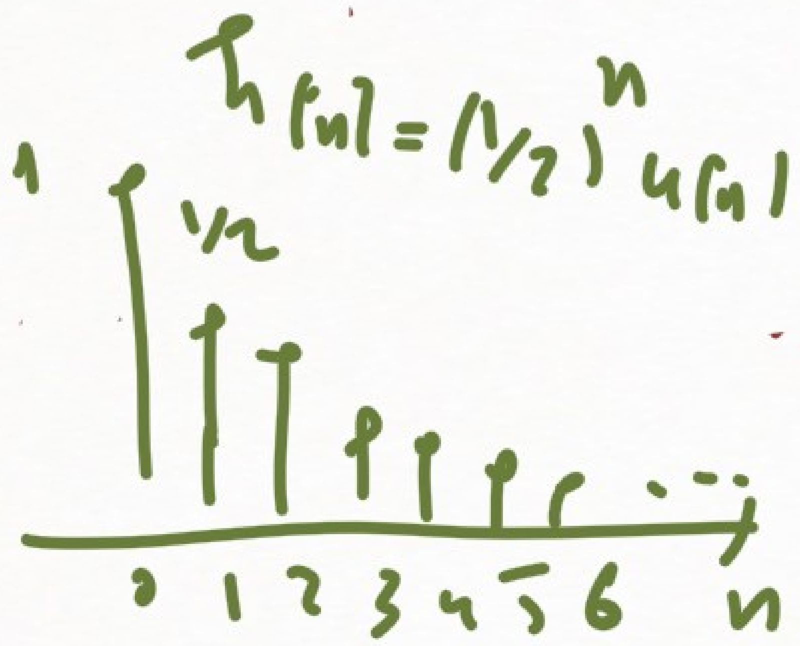
$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

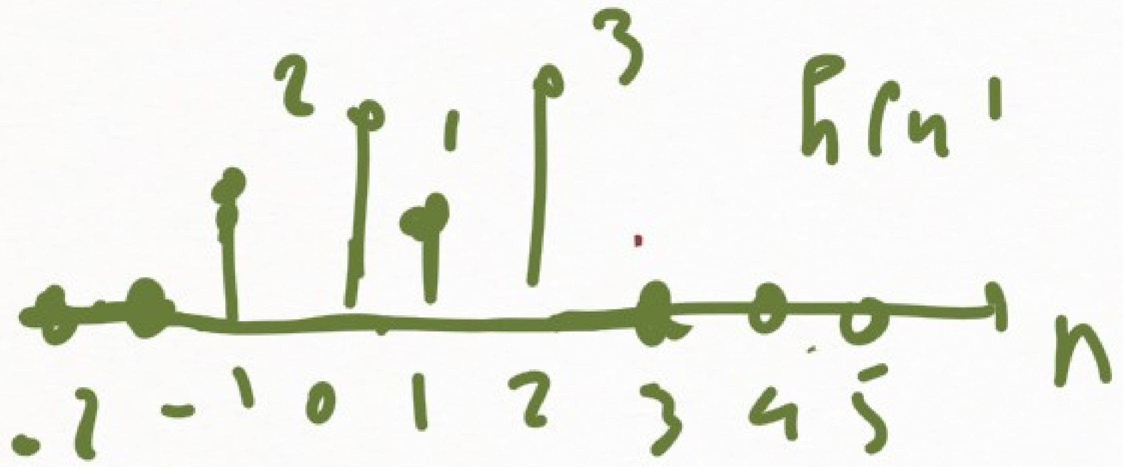
جواب همگن

جواب خصوصی از نوع x

در این معادلات برابر شده است.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad : \text{معادله تفاضلی (زانبرس)}$$





معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

① IIR - پاسخ ضربه نامحدود $h[n]$ نامحدود | بازگشتی

② FIR - پاسخ ضربه محدود | $h[n]$ محدود | غیربازگشتی

① بازگشتی : برای محاسبه $y[n]$ احتیاج به $y[n-1], y[n-2], \ldots, y[n-N]$ داریم.

$N \neq 0$

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{ \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] \right\}$$

مثل
$$\begin{cases} y[n] + 5y[n-1] = x[n] + 3x[n-1] \\ y[n] - y[n-1] = x[n] \end{cases}$$

* $h[n]$ این سیستم ها براحتی محاسبه نمی‌شود.

② غیربازگشتی : (فقط یک y داریم)

$N = 0$

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

مثل $y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$ سیستم میانگین‌گیر متحرک $\longrightarrow h[n] = \frac{1}{3}(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2])$

$y[n] = 4x[n] + 6x[n-1] + 13x[n-2] + 8x[n-3] \longrightarrow h[n] = 4\delta[n] + 6\delta[n-1] + 13\delta[n-2] + 8\delta[n-3]$

* $h[n]$ این سیستم ها براحتی محاسبه می‌شود.

حل معادله تفاضلی سیستم ها IIR (Infinite impulse response)

روش اول - عدد گذاری و روش بازگشتی - مثال

$$y[n] - \tfrac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

$$y[-1] = a \quad , x[n] = k\delta[n] \longrightarrow y[n] = ?$$

حل - از معادله $y[n]$ را بر حسب بقیه به دست می آوریم و عدد گذاری می کنیم:

for $n \geq 0 \Longrightarrow$

$$y[n] = x[n] + \tfrac{1}{2}y[n-1]$$

$$y[0] = x[0] + \tfrac{1}{2}y[-1] = k + \tfrac{1}{2}a$$

$$y[1] = x[1] + \tfrac{1}{2}y[0] = 0 + \tfrac{1}{2}[k + \tfrac{1}{2}a]$$

$$y[2] = x[2] + \tfrac{1}{2}y[1] = 0 + (\tfrac{1}{2})^2(k + \tfrac{1}{2}a)$$

$$\vdots$$

$$y[n] = x[n] + \tfrac{1}{2}y[n-1] = (\tfrac{1}{2})^n(k + \tfrac{1}{2}a)$$

$$\Longrightarrow \boxed{y[n] = (\tfrac{1}{2})^n k + (\tfrac{1}{2})^{n+1} a \ ; \ n \geq 0}$$

for $n < 0 \Longrightarrow y[n-1] = 2[y[n] - x[n-1]] \quad , \quad x[n] = 0 \ , \ n < 0$

$$y[-2] = 2[y[-1] - x[-1]] = 2a$$

$$y[-3] = 2[y[-2] - x[-2]] = 2^2 a$$

$$y[-4] = 2[y[-3] - x[-3]] = 2^3 a \ \ldots$$

$$\Longrightarrow \boxed{y[n] = (\tfrac{1}{2})^{n+1} a \ ; \ \text{for } n \leq -1}$$

روش دوم _ روش نوشتن حل معادله تفاضلی

بفرض مثال تفاضلی سیستم درجه دو در نظر می‌گیریم ، این روش برای سیستم‌های با درجه بالاتر نیز به همین صورت تکرار می‌شود

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = b_2 x(n-2) + b_1 x(n-1) + b_0 x(n)$$

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

سهم جواب همگن

سهم جواب خصوصی

پاسخ خصوصی : از نوع ورودی می‌باشد . مثلا ورودی تابع پله باشد بنابراین خروجی $y(n) = K u(n)$ باشد

$\alpha^n u(n)$ ، فرم $y(n) = K(\alpha)^n u(n)$ ⟸

$y_p(n) =$ ضریبی از جنس ورودی

پاسخ همگن : ورودی صفر باشد $x(n) = 0$ تا بتوان پاسخ را $y_h(n) = z^n$ داخل معادله قرار دهیم :

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} = 0 \Longrightarrow z^{n-2} \underbrace{(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)}_{=0} = 0$$

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} z_1 , z_2 \Longrightarrow y_h(n) = A z_1^n + B z_2^n \\ z_1 = z_2 \longrightarrow y_h(n) = A z_1^n + B n (z_1)^n \end{cases}$$

A ، B از شرایط اولیه داده شد ، محاسبه می‌گردد .

مثال عددی -

$$\begin{cases} y[n]+y[n-1]-6y[n-2]=x[n] & , \quad x[n]=8u[n] \\ y[-1]=1 \;,\; y[-2]=-1 & , \quad y[n]=? \end{cases}$$

حل - جواب خصوصی: $y_p[n]=Ku[n]$ در معادله قرار می‌دهیم k را پیدا می‌کنیم. توجه $u[n]=1$ $n\geq 0$ برای

$$K+K-6K=8 \Longrightarrow \boxed{K=-2} \Longrightarrow y_p[n]=-2u[n]$$

جواب همگن:

$$y_h[n]=z^n \Longrightarrow z^n+z^{n-1}-6z^{n-2}=0 \Longrightarrow z^{n-2}(z^2+z-6)=0$$

$$\Longrightarrow (z+3)(z-2)=0 \Longrightarrow z_1=-3 \;,\; z_2=2 \Longrightarrow y_h[n]=A_1(-3)^n+A_2(2)^n$$

پاسخ کل:

$$\boxed{y[n]=A_1(-3)^n+A_2(2)^n-2}$$

با جایگذاری در معادله و اعمال شرایط اولیه داریم:

$$n=0 \Longrightarrow y[0]+y[-1]-6y[-2]=x[0]$$

$$A_1+A_2-2+1-6(1-1)=8 \Longrightarrow \boxed{A_1+A_2=8}$$

$$n=1 \Longrightarrow y[1]+y[0]-6y[-1]=x[1]$$

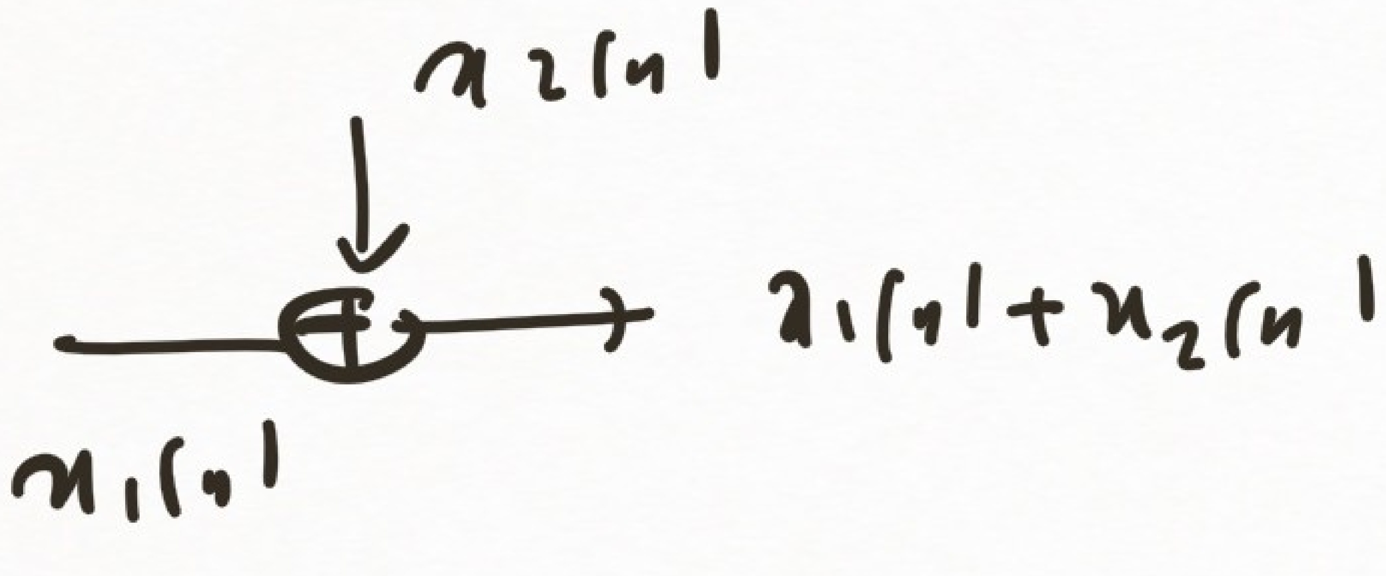
$$A_1(-3)+A_2(2)-2+A_1+A_2-2-6(1)=8 \Longrightarrow \boxed{-2A_1+3A_2=18}$$

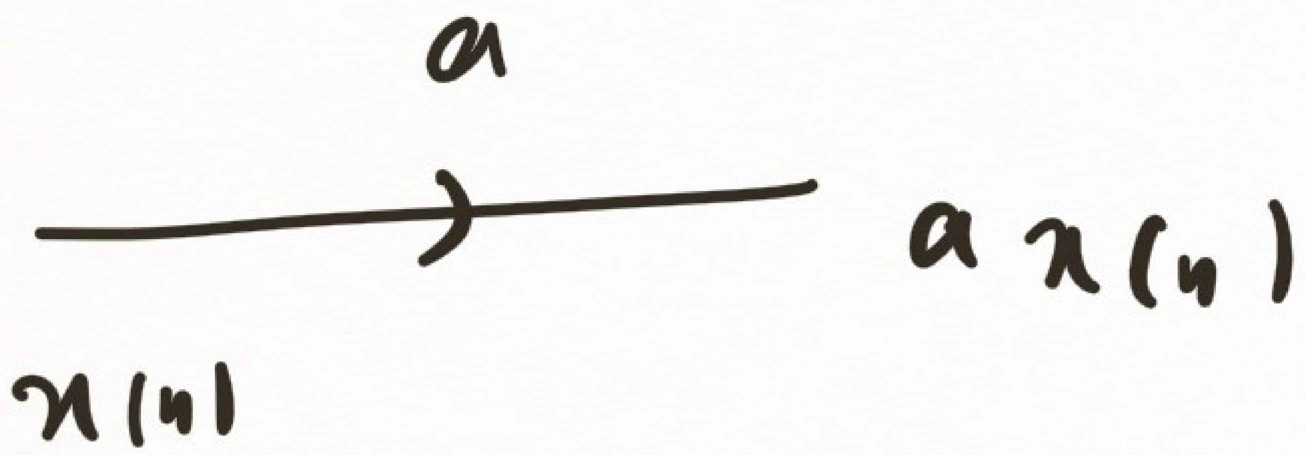
$$\Longrightarrow A_1=-1.8 \;,\; A_2=4.8$$

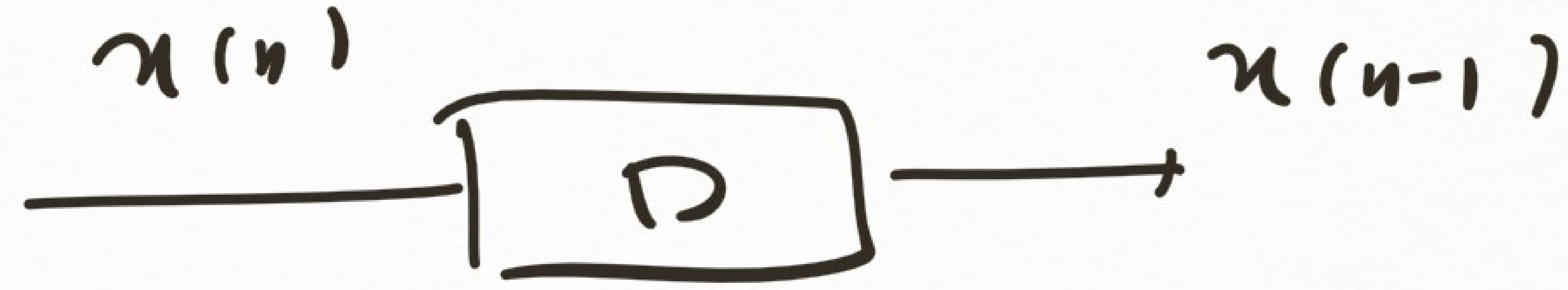
$$\Longrightarrow \boxed{y[n]=-1.8(-3)^n+4.8(2)^n-2} \longleftarrow n\geq 0$$

مدل سازی سیستم ها LTI

الف - مدل سازی سیستم ها که با معادله تفاضلی بیان میشود.



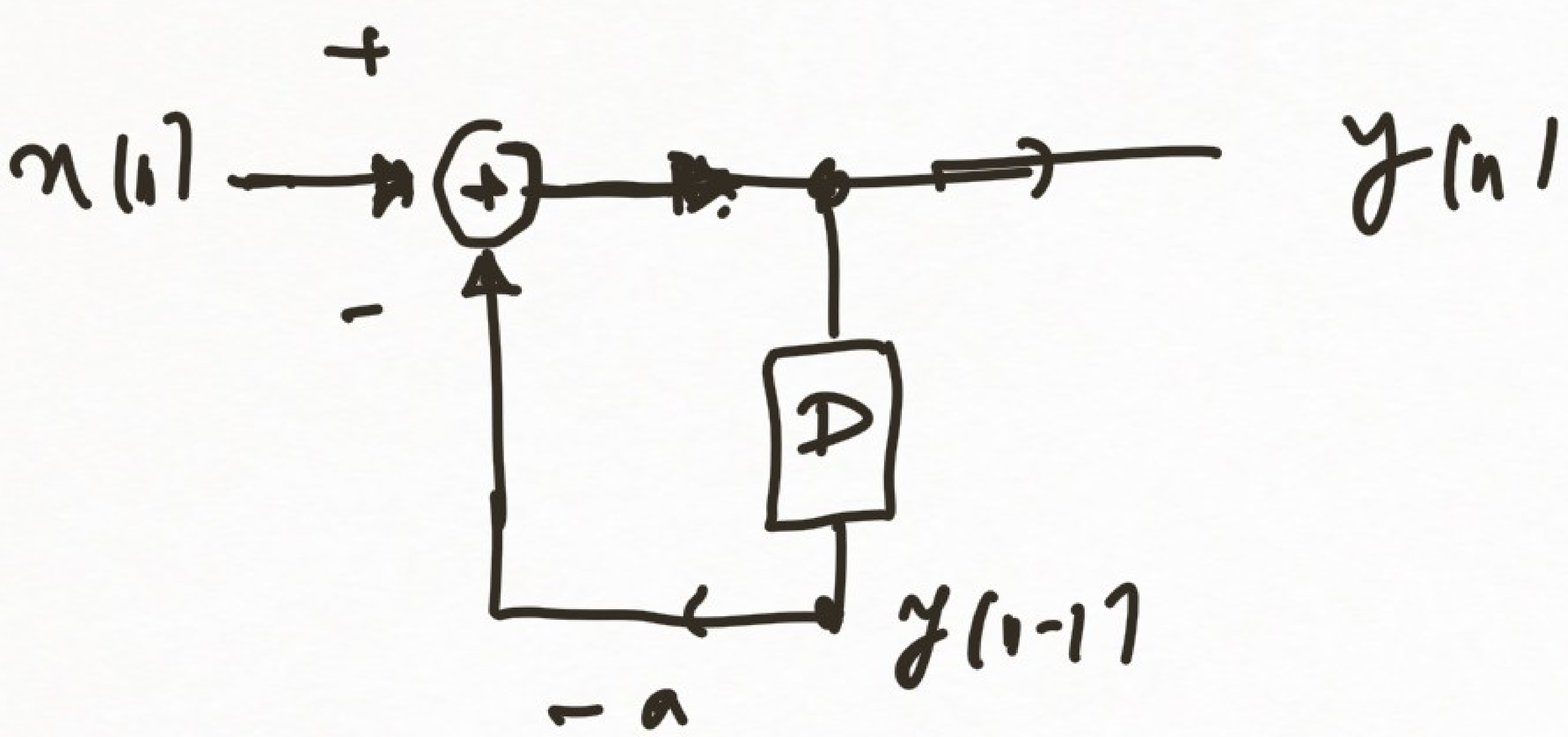




تاخیر دهنده

نمی -

$$y(n)-a\,y(n-1)=x(n) \implies y(n)=a\,y(n-1)+x(n)$$



روش اول ایراد میگیرد.

مدل سازی سیستم

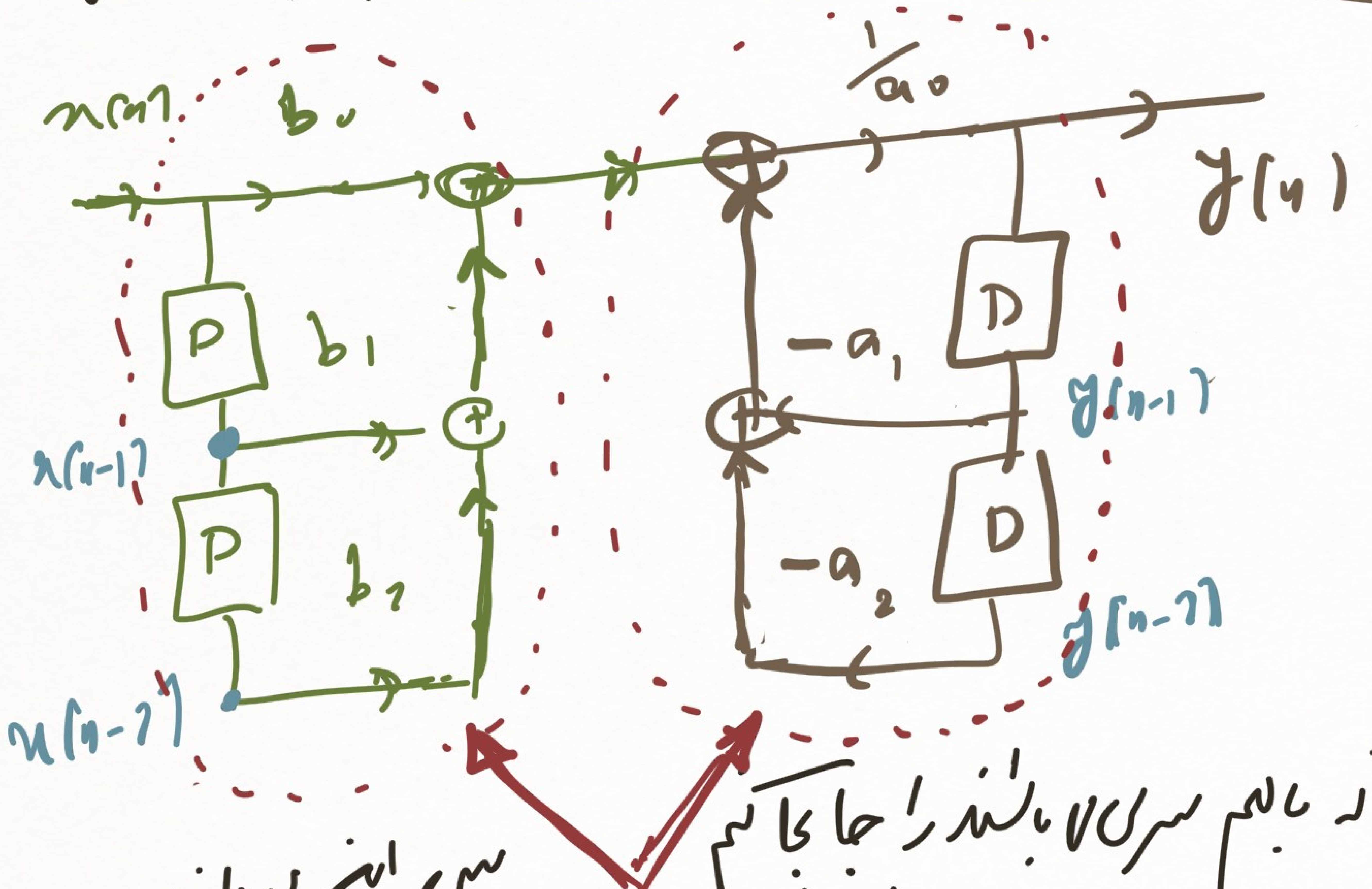
- نوع I
- نوع II
- سری
- موازی
- Lattice

* پیاده سازی نوع I مستقیم بسته :

مثال - سیستم مرتبه ۲

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$$

$$y(n) = \frac{1}{a_0}\left\{ \underline{b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)} \; \underline{- a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2)} \right\}$$



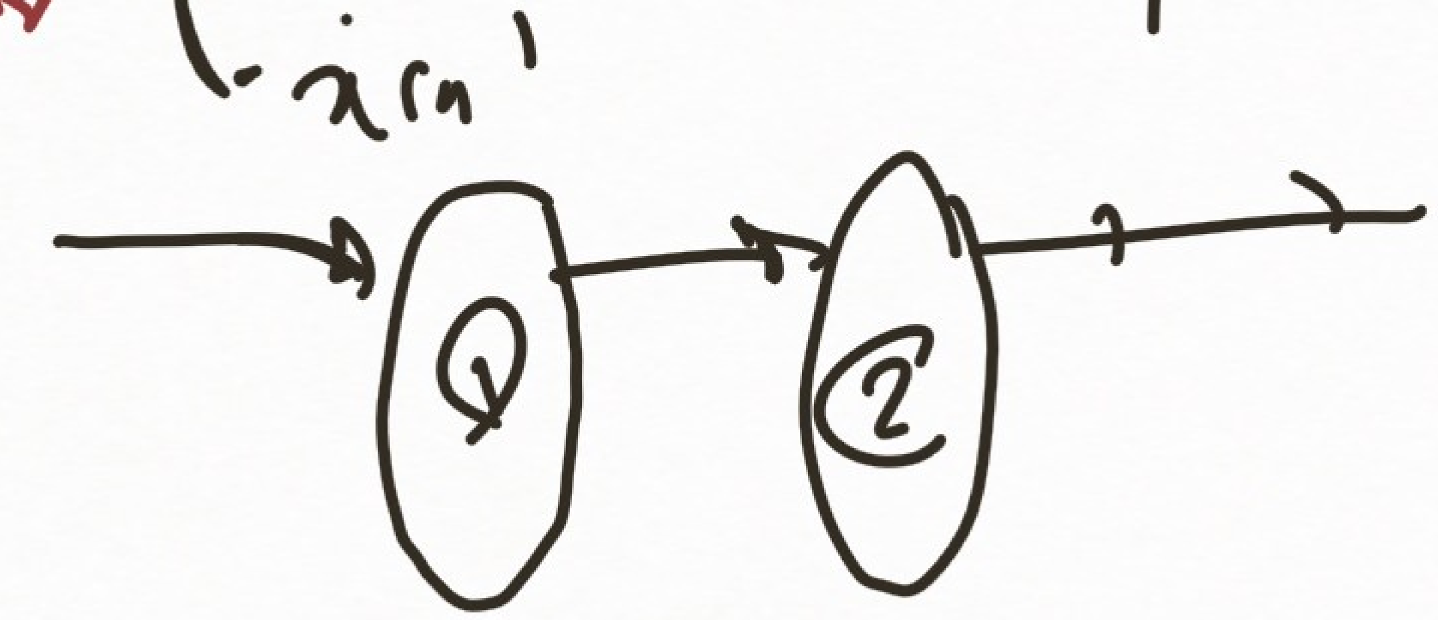
به این صورت سیستم کلی به سادگی قابل گسترش است.

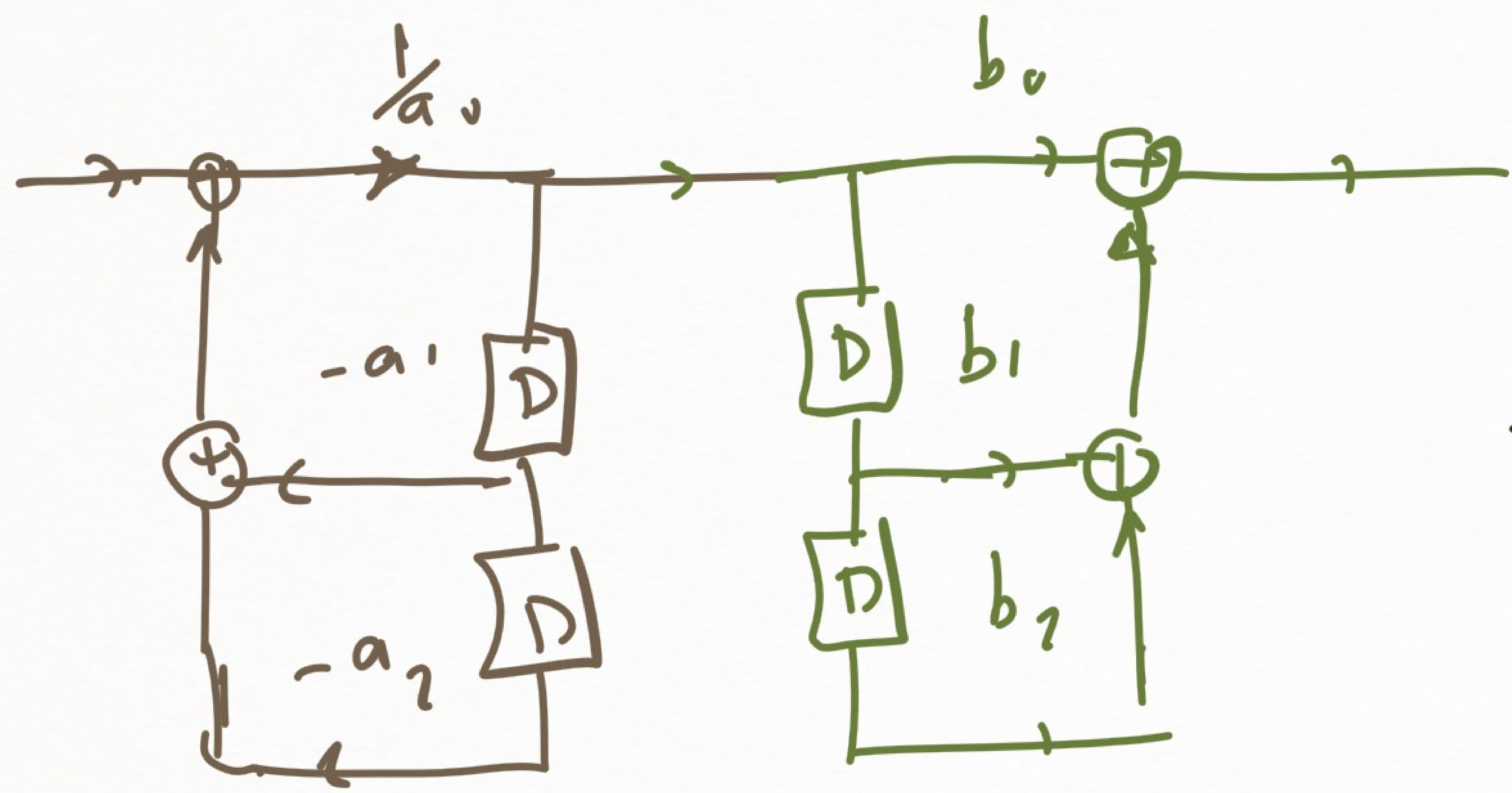
جای این دو بازو

* پیاده سازی نوع II مستقیم بسته

اگر در پیاده سازی نوع اول جای دو شکل بالا که با هم سری هستند را جابجا کنیم

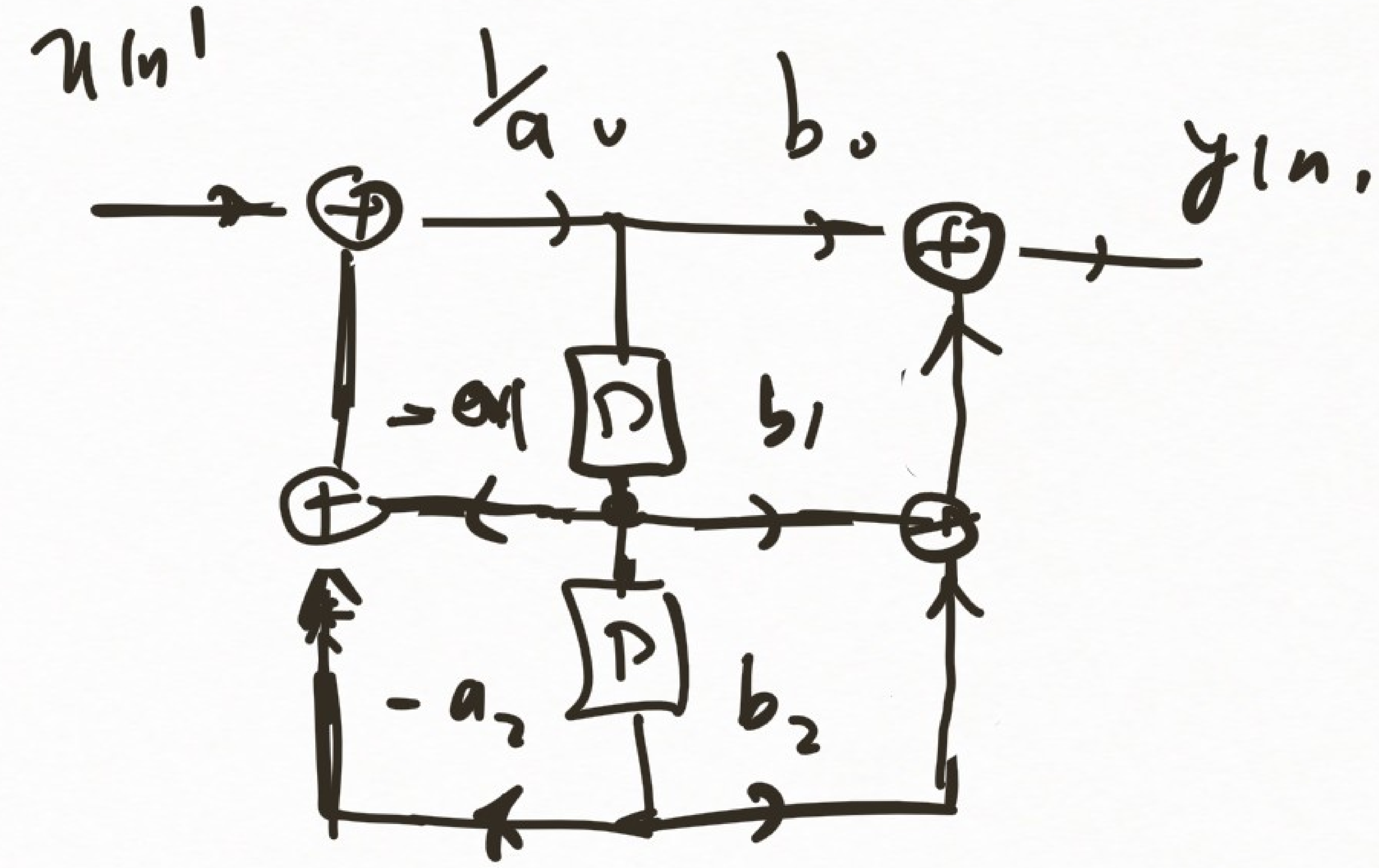
جابجا شوند در صفحه بعد خواهیم داشت :





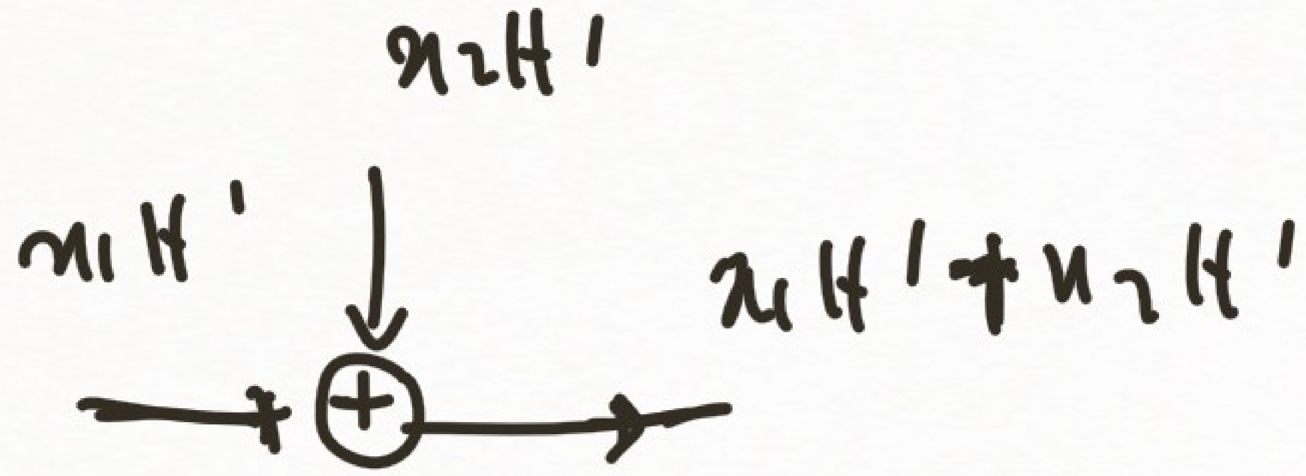
فقط یک سری تأخیر اشتراکی می‌شود

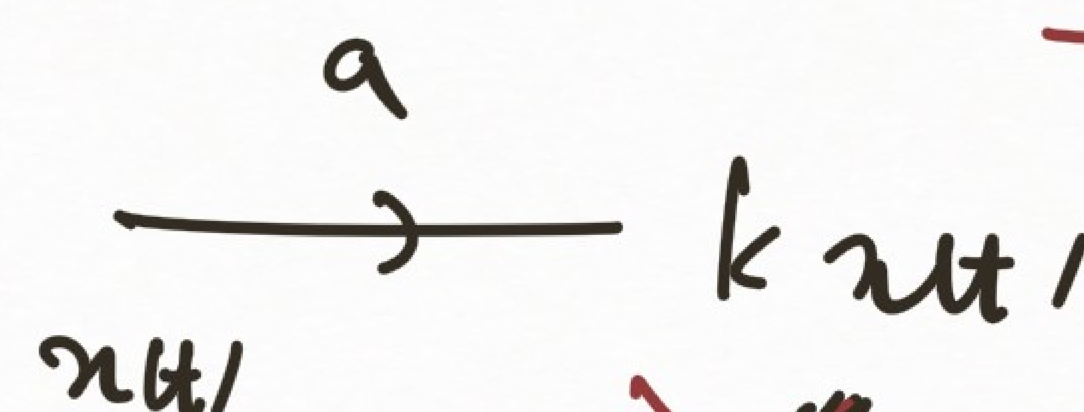
$\equiv$

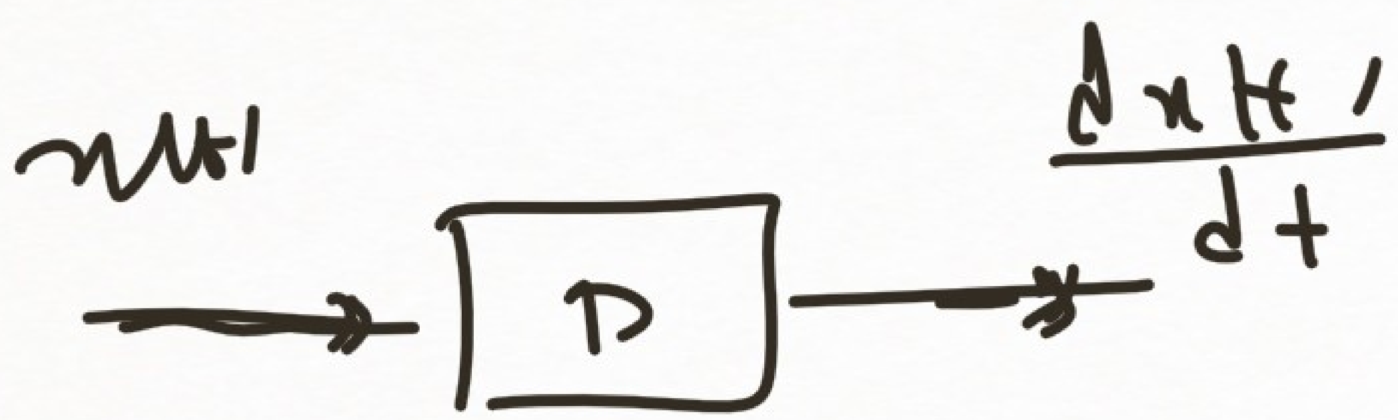


سیستم نوع II - تعداد D نسبت به هم کاهش می‌یابد.

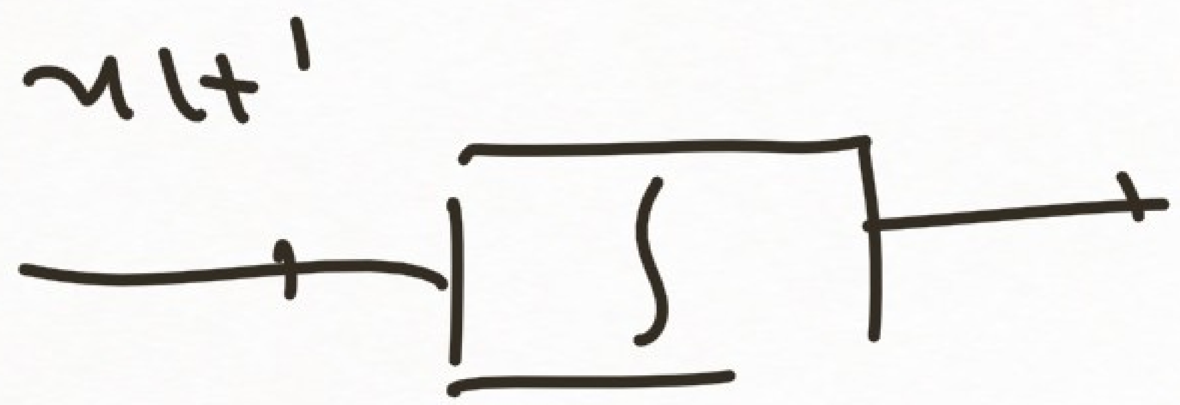
با پیاده‌سازی سیستم‌ها پیوسته:





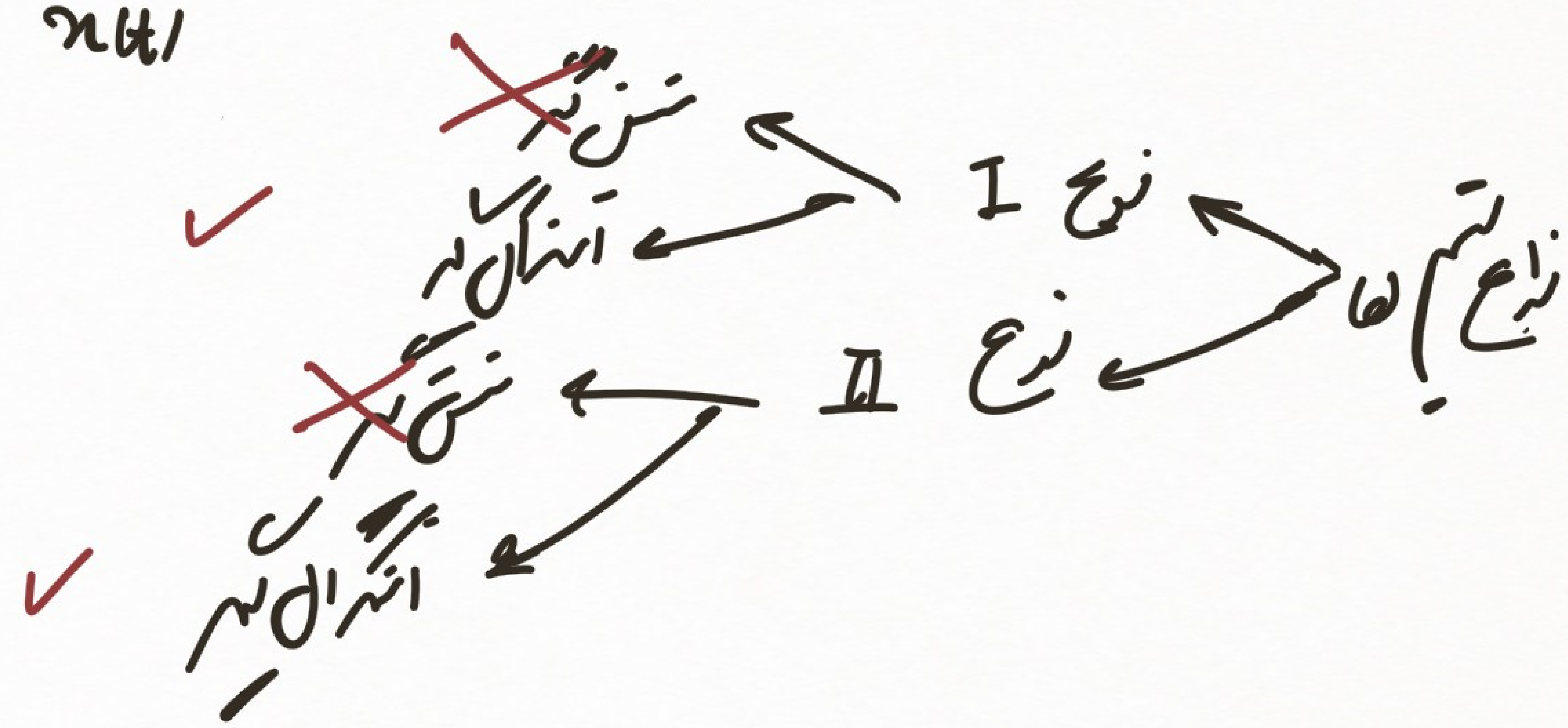


سیستم مشتق‌گیر



$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$ محل

سیستم انتگرال‌گیر

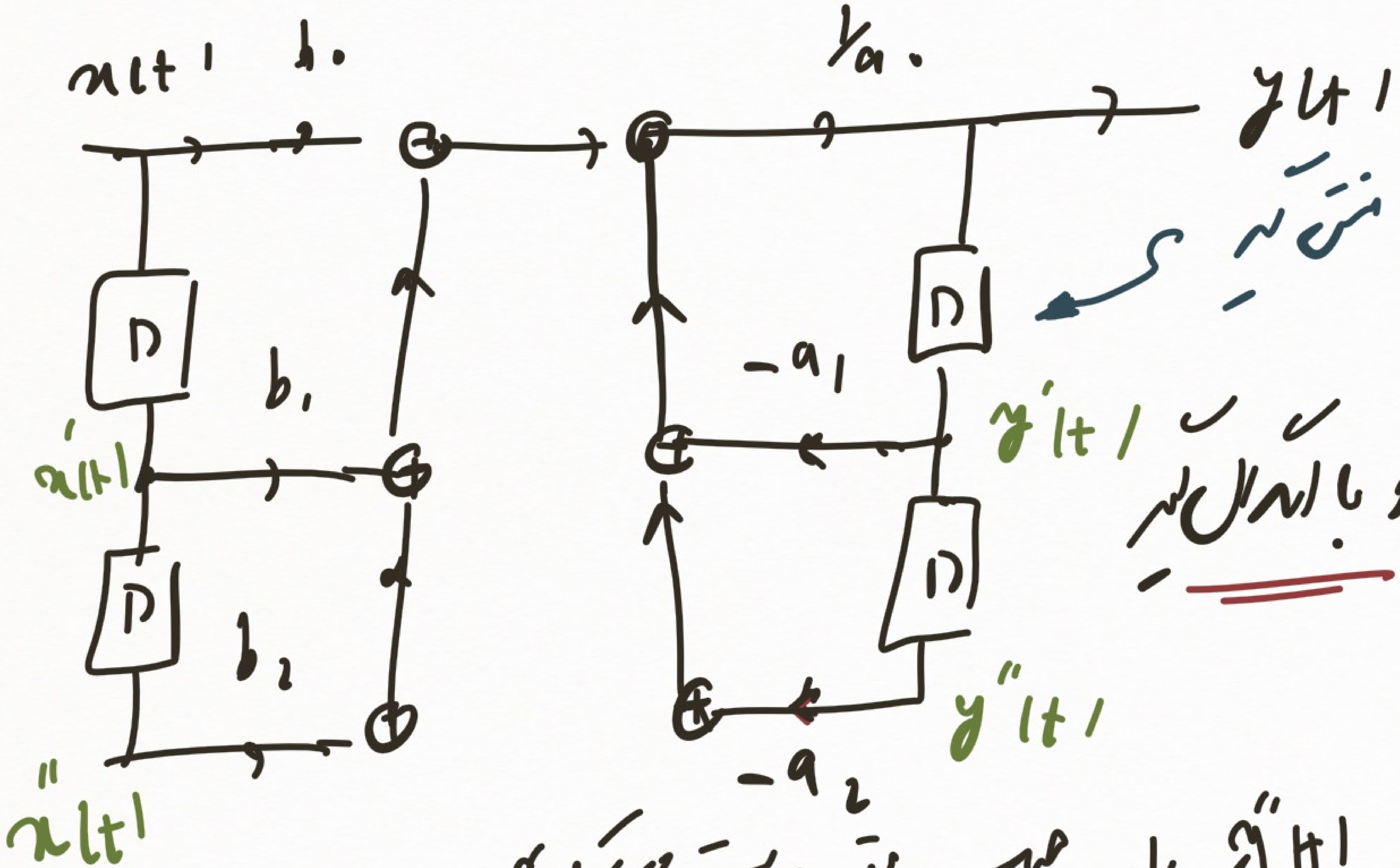


مدل سازی با مشتق‌گیر خیلی شبیه حالت گسسته می‌باشد که به جای بلوک D بلوک مشتق‌گیر داریم.

مثال - سیستم درجه ۲

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t) + b_1 x'(t) + b_2 x''(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{a_0}\{b_0 x(t) + b_1 x'(t) + b_2 x''(t) - a_2 y''(t) - a_1 y'(t)\}$$



سیستم نوع I که به جای نوع II نیز
میتوان تبدیل انجام بدهیم.

اما معمولا مدل سازی سیستم‌ها با مشتق‌گیر زیاد کاربرد ندارند و با انتگرال‌گیر
ساخته می‌شوند.

مدل سازی با انتگرال‌گیر:

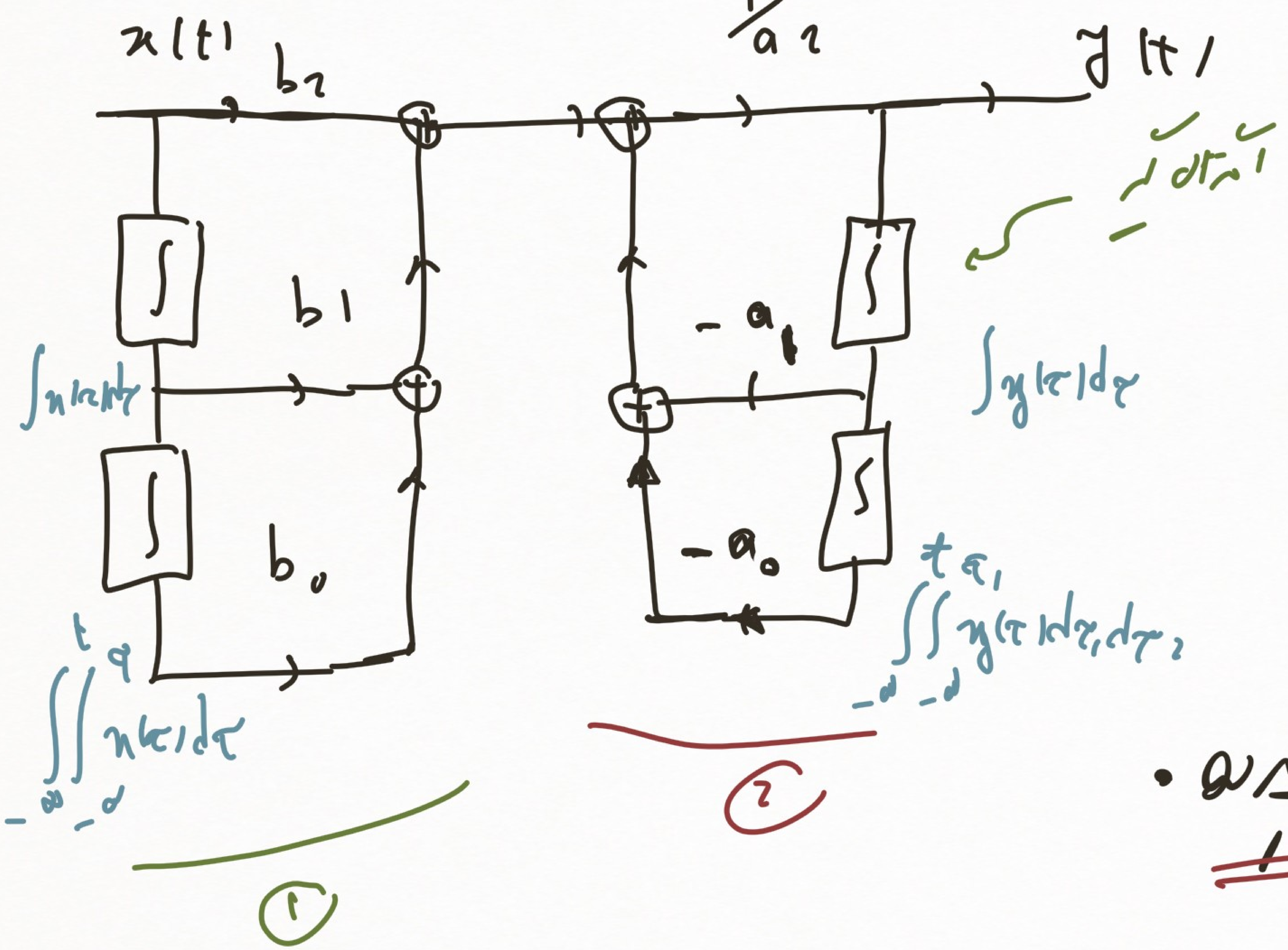
در این حالت بالاترین درجه مشتق y(t) یعنی y''(t) را بر حسب بقیه به دست می‌آوریم.

$$y''(t) = \frac{1}{a_2}\{b_0 x(t) + b_1 x'(t) + b_2 x''(t) - a_1 y'(t) - a_0 y(t)\}$$

از طرفین انتگرال دوگانه می‌گیریم خواهیم داشت:

$$y(t)=\frac{1}{a_2}\Big\{\underbrace{b_0\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau_1} x(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2+b_1\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau+b_2\,x(t)}_{1}\underbrace{-a_1\int_{-\infty}^{t}y(\tau)\,d\tau-\overset{a_0}{}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau_1}y(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2}_{2}\Big\}$$

حال رابطه فوق را مدل سازی می‌کنیم. خواهیم داشت:



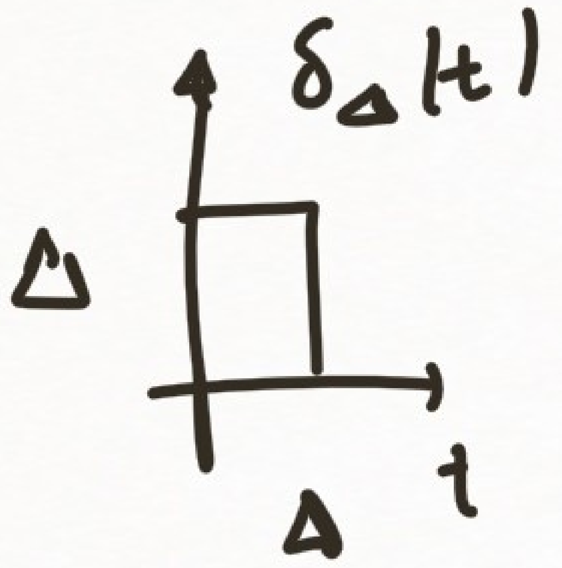
شبیه حالت قبل می‌توان با جابجایی

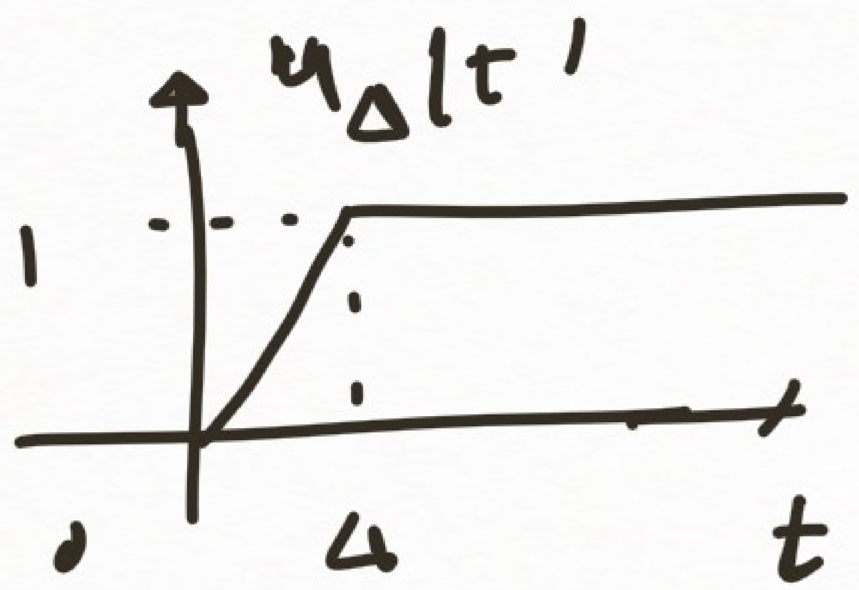
بلوک‌های حالت چپ یعنی ① و ②

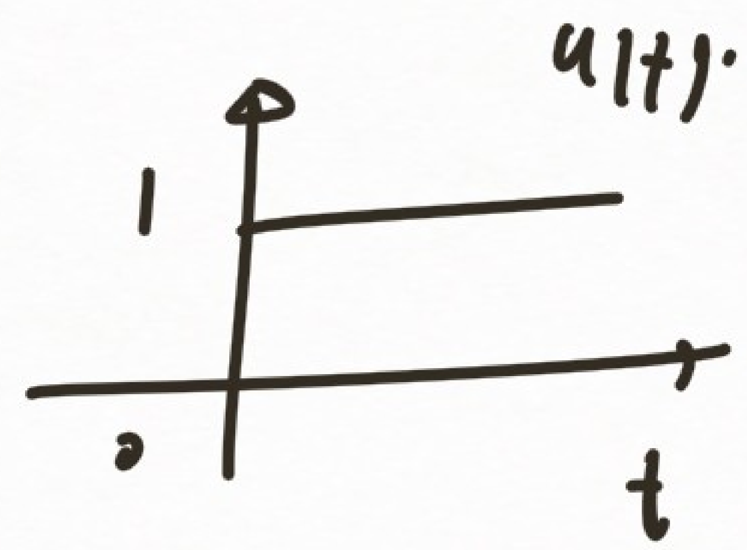
به سیستم نوع II با انتگرال گیر کمتر رسید که

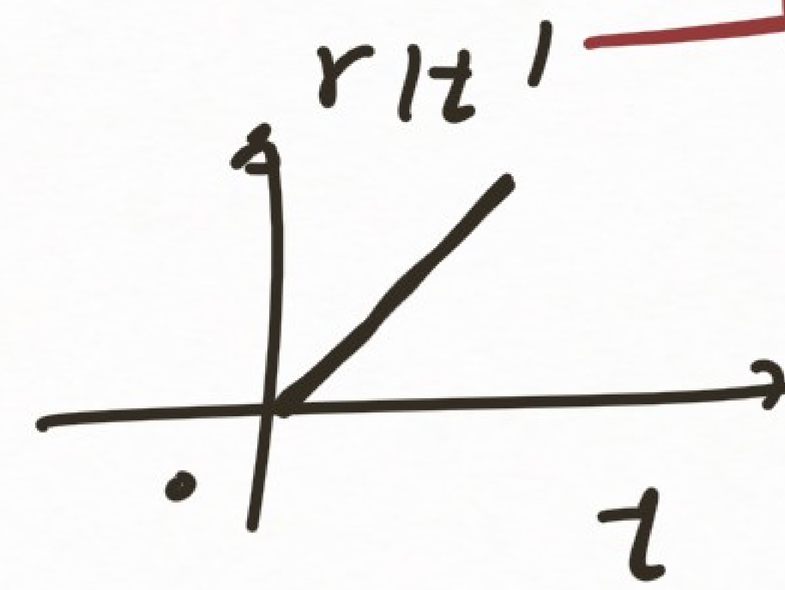
نسبت به نوع یک تعداد انتگرال گیرها حدوداً نصف می‌شود.

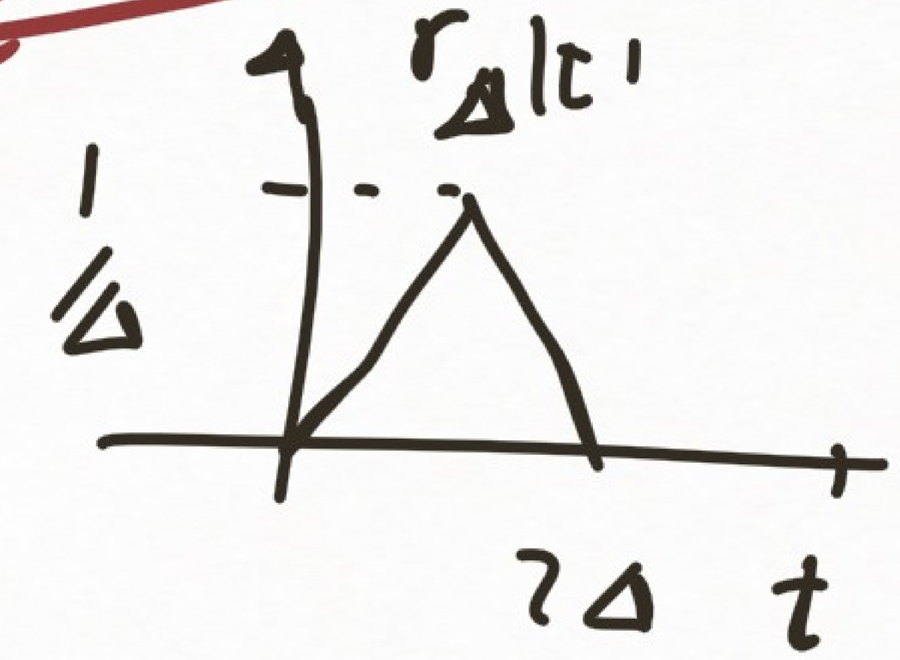
توابع خاص :











$\delta'''(t) = u_3(t)$

$\delta''(t) = u_2(t)$; $r_\Delta(t) = \delta_\Delta(t) * \delta_\Delta(t)$

$\delta'(t) = u_1(t)$

$\delta(t) = u_0(t)$

$u(t) = u_{-1}(t)$

$r(t) = u_{-2}(t) = t\,u(t)$

$u_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} u(t)$

$$\begin{cases} u_2(t) = u_1(t) * u_1(t) \\ \delta''(t) = \delta'(t) * \delta'(t) \end{cases}$$

می‌توان نشان داد:

$$\begin{cases} x(t) * u_1(t) = x(t) * \delta'(t) = \frac{dx(t)}{dt} \\ x(t) * u_0(t) = x(t) * \delta(t) = x(t) \\ x(t) * u_{-1}(t) = x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \end{cases}$$

← کانولوشن با مشتق ضربه معادل مشتق سیگنال

← کانولوشن با تابع ضربه، خود سیگنال

← کانولوشن با تابع پله معادل انتگرال سیگنال

$$\begin{cases} u_k(t) = \overbrace{u_1(t) * u_1(t) \cdots * u_1(t)}^{k \text{ مرتبه}} \\ u_{-k}(t) = u_{-1}(t) * u_{-1}(t) \cdots * u_{-1}(t) \end{cases}$$

توجه!

$u_k(t) * u_r(t) = u_{k+r}(t)$