یالطیف

تمرین سری 7 سیگنال

1401/12/28

\# 1 تبدیل فوریه سیگنال های زیر؟

a) $x_1[n] = 2^{+n} u[-n] \xleftrightarrow{F} X_1(e^{j\omega}) = ?$

می دانیم : $2^n u[n] \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{1 - 2e^{-j\omega}} \xRightarrow[\text{معکوس در زمان}]{\text{طبق خاصیت}} \boxed{X_1(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1 - 2e^{j\omega}}}$

یادآوری : $x[-n] \xleftrightarrow{F} X(e^{-j\omega})$

b) $x_2[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \Rightarrow x_2'[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \xleftrightarrow{F} X_2'(e^{j\omega}) = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4} - \cos\omega}$

می دانیم : $x[n] = a^{|n|} \xleftrightarrow[\text{به ازای } |a|<1]{F} X(e^{j\omega}) = \dfrac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\omega + a^2}$

طبق خاصیت مشتق زمانی : $-jn x[n] \xleftrightarrow{F} \dfrac{d}{d\omega} X(e^{j\omega}) \xRightarrow{\times j} n x[n] = j \dfrac{d}{d\omega} X(e^{j\omega})$

$$\Rightarrow X_2(e^{j\omega}) = j\frac{d}{d\omega} X_2'(e^{j\omega}) = j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4} - \cos\omega}\right] = \boxed{-j \times \frac{12\sin\omega}{25 + 16\cos^2\omega - 40\cos\omega}}$$

c) $x_3[n] = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n}_{x_4[n]} \underbrace{\delta(n - 3k)}_{x_5[n]} \xleftrightarrow{F} X_3(e^{j\omega}) = ?$

می دانیم : $x[n] = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \dfrac{2\pi}{N} \cdot \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k\dfrac{2\pi}{N}\right)$ ، $N = 3$

و $x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$

$$x_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_4[n] \cdot x_5[n]$$

$$X_4(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \quad , \quad X_5(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{3} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{3})$$

$$\Rightarrow X_3(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \times \frac{2\pi}{3}\,\delta(\omega - k\frac{2\pi}{3})$$

d) $$x_4[n] = \overbrace{\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{\pi n}\right)}^{x_5[n]} \cdot \overbrace{\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{\pi n}\right)}^{x_6[n]} \xleftrightarrow{F} X_4(e^{j\omega}) = ?$$

می‌دانیم: $$x[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & ; |\omega| < \omega_c \\ 0 & ; |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\omega_c = \frac{\pi}{2}} X_5(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & ; |\omega| < \frac{\pi}{2} \approx 1.57 \\ 0 & ; |\omega| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad , \quad X_6(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & ; |\omega| < \frac{\pi}{4} \approx 0.78 \\ 0 & ; |\omega| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_4(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & ; |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0 & ; |\omega| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

#2 عکس تبدیل فوریه؟

یادآوری: $$\begin{cases} \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \end{cases}$$

a) $$X(e^{j\omega}) = \cos^2(\omega) = \frac{1+\cos 2\omega}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega \xrightarrow{\cos x = \frac{1}{2}e^{jx} + \frac{1}{2}e^{-jx}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{j2\omega} + \frac{1}{2}e^{-j2\omega}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{j2\omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\omega} \xleftrightarrow{F^{-1}}$$

$$x_1[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-2] + \frac{1}{4}\delta[n+2]$$

b) $$X(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{6}e^{-j\omega} - \frac{1}{6}e^{-j2\omega}} \Rightarrow X_1(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$\Rightarrow \frac{A(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}) + B(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})}{\cancel{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega})}} = \frac{e^{-j\omega}}{\cancel{1+\frac{1}{6}e^{-j\omega} - \frac{1}{6}e^{-j2\omega}}} \Rightarrow A(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}) + B(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}) = e^{-j\omega}$$

$$A + \frac{1}{2}Ae^{-j\omega} + B - \frac{1}{3}Be^{-j\omega} = e^{-j\omega} \Rightarrow e^{-j\omega}\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{3}B\right) + (A+B) = e^{-j\omega}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}A - \frac{1}{3}B = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}A + \frac{1}{3}A = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{6}{5}}, \quad \boxed{B = -\frac{6}{5}} \\ A + B = 0 \Rightarrow A = -B \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{5/6}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \frac{-5/6}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \xleftrightarrow{F^{-1}} x[n] = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

#3 $\xrightarrow{x[n]}$ $\boxed{LTI}$ $\xrightarrow{y[n]}$

$$\begin{cases} x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \\ y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \end{cases}$$

الف) پاسخ ضربه , پاسخ فرکانسی = ?

ب) معادله دیفرانسیل ?

$$y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]e^{-j\omega} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}\left[1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right]$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \cdot \left[1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right]} = \frac{6(2 - e^{-j\omega})}{(3 - e^{-j\omega})(4 - e^{-j\omega})}$$

$$= \frac{6(2 - e^{-j\omega})}{12 - 7e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}} = \frac{\frac{1}{2}(2 - e^{-j\omega})}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} = \frac{A}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{9}{7} \\ B = \frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{9/7}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{2/7}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \xleftrightarrow{F^{-1}} h[n]$$

$$h[n] = \frac{9}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

ب) می‌دانیم: $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \xleftrightarrow{F} \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k} X(e^{j\omega})$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}} \Rightarrow y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] + y[n] - \frac{1}{3}y[n-1] = \frac{9}{7}x[n] + \frac{2}{7}x[n]$$

$$\Rightarrow 2y[n] - \frac{7}{12}y[n-1] = \frac{11}{7}x[n]$$

\# 4 $\quad x[n] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow Y(e^{j\omega}) = 2X(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) - \frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$

الف) آیا سیستم خطی است؟ بله ⟵ چون به ازای یک ورودی $x[n]$ در خروجی صرفاً شیفت زمانی ($e^{-j\omega}$) و مشتق فرکانسی ($n\,x[n]$) داریم

ب) آیا سیستم تغییرناپذیر با زمان است؟ خیر، زیرا به ازای ورودی $x[n]$ در خروجی $x[n-1]$ داریم.

ج) پاسخ سیستم به ورودی ضربه؟

if $x[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 1$

$$Y(e^{j\omega}) = 2(1) + e^{-j\omega}(1) - \cancel{\frac{d}{d\omega}(1)}^{\,0} = \boxed{2 + e^{-j\omega}}$$

\#5 $\quad$ فرض $x[n]$ داده شده است : ناقص