جلسه چهارم

نکته مربوط به ضرب داخلی توابع (جلسه ۲) :

$$|\langle f, g\rangle| = \left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right|$$

$$\leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

ادامه نرم ماتریس ها

ب)

$$A = I \longrightarrow Ax = x \longrightarrow \|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$= \max_{x\neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1 \checkmark$$

ج) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_1^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|A\| = 1} \checkmark$$

د) $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$

$\|A\| = ?$

$$Ax = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 \\ \alpha_2 x_2 \\ \vdots \\ \alpha_n x_n \end{pmatrix}$$

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\sqrt{\alpha_1^2 x_1^2 + \dots + \alpha_n^2 x_n^2}}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}$$

$$= \max \{ |\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_n| \}$$

فرض کنید:

اثبات:

$$\alpha_1^2 \geq \alpha_2^2 \geq \dots \geq \alpha_n^2 \rightarrow |\alpha_1| = \max_i \{ |\alpha_i| \}$$

$$x \neq 0 \rightarrow \alpha_1^2 x_1^2 + \alpha_2^2 x_2^2 + \dots + \alpha_n^2 x_n^2$$

$$\leq \alpha_1^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2)$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\alpha_1^2 x_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 x_n^2} \leq |\alpha_1| \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{\alpha_1^2 x_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 x_n^2}}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} \leq |\alpha_1|$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\max \left\{ \frac{\sqrt{\alpha_1^2 x_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 x_n^2}}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} \right\}}_{\|A\|} = |\alpha_1|$$

$$\|A\| = \max \left\{ |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n| \right\}$$

تعریف دیگر از نرم ماتریس : $(A_{n\times n})$

$$\|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

۱- اگر $p=1$ باشد:

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_{j} \left(\sum_{i} |a_{ij}| \right)$$

که در واقع همان بزرگترین مقدار مجموع قدرمطلق های عناصر ستون های ماتریس است.

۲- اگر $p=2$ باشد:

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}}$$

که λ_{max} بزرگترین مقدار عددی است که سبب می شود $A^T A - \lambda I$ منفرد شود.

۳ـ اگر $p=\infty$ باشد:

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_i \left(\sum_j^n |a_{ij}| \right)$$

که در واقع همان بزرگترین مقدار مجموع قدرمطلق عناصر سطرهای ماتریس است.

* نُرم فروبینیوس (F): $A_{m\times n}$

$$\|A\|_F = \sqrt{tr(A^TA)} = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

مثال: برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ نُرم لازم ؟!

$$\|A\|_1 = \max_j \left(|a_{1j}| + |a_{2j}| \right)$$

$$= \max \left(|a_{11}| + |a_{21}| \; , \; |a_{12}| + |a_{22}| \right)$$

$$6+2 \; , \; 4+0$$

$$\Rightarrow \|A\|_{۱} = \max(۸, ۴) = ۸ \quad \checkmark$$

$$\|A\|_{\infty} = \max_{i} \left(|a_{i۱}| + |a_{i۲}| \right)$$

$$= \max \left(|a_{۱۱}| + |a_{۱۲}| , |a_{۲۱}| + |a_{۲۲}| \right)$$

$$۶ + ۴ \quad , \quad ۲ + ۰$$

$$= \max(۱۰, ۲) = ۱۰ \quad \checkmark$$

$$\|A\|_{۲} = ? \quad \sqrt{\lambda_{max}}$$

$$\underline{A^{T}A - \lambda I} = \begin{bmatrix} -۶ & -۲ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۶ & ۴ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$- \lambda \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴۰ - \lambda & -۲۴ \\ -۲۴ & ۱۶ - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |A^TA - \lambda I| = ۰ \rightarrow \underline{\lambda = ۲۸ \pm ۶\sqrt{۵}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|A\|_{۲} = \sqrt{۲۸ + ۶\sqrt{۵}}} \checkmark$$

$$\|A\|_F = ? \sqrt{tr(A^TA)}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} ۴۰ & -۲۴ \\ -۲۴ & ۱۶ \end{bmatrix} \rightarrow tr(A^TA) = ۵۶$$

$$\xrightarrow{\text{روش اول}} \boxed{\|A\|_F = \sqrt{۵۶}}$$

$$\xrightarrow{\text{روش دوم}} \|A\|_F = \sqrt{|a_{۱۱}|^۲ + |a_{۱۲}|^۲ + |a_{۲۱}|^۲ + |a_{۲۲}|^۲}$$

$$= \sqrt{۳۶ + ۱۶ + ۴ + ۰} = \sqrt{۵۶} \checkmark$$

تمرین

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ نُرم های مختلف؟

معکوس ماتریس :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj}(A)$$

ماتریس الحاقی : هر عنصر ترانهاده‌ٔ آن از دترمینان ماتریس متناظر با حذف سطر iاُم و ستون jاُم بدست آمده است .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} a_{22} & (-1)^{1+2} a_{12} \\ (-1)^{2+1} a_{21} & (-1)^{2+2} a_{11} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} X$$

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

پایان جلسه ۴