یا لطیف

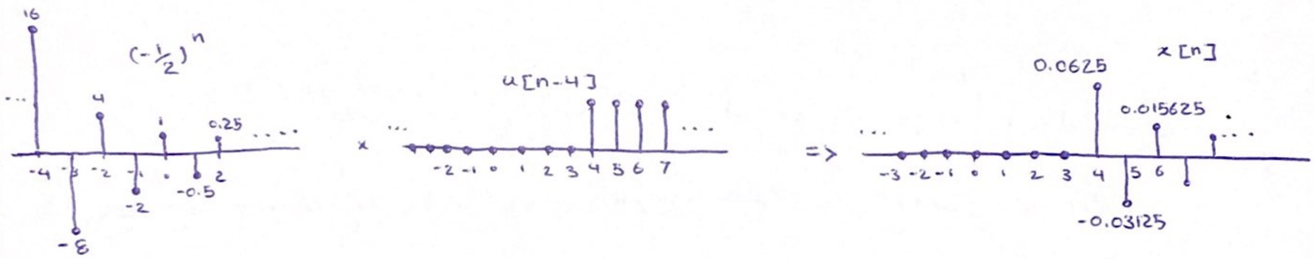
تمرین سری 3 سیگنال سیستم

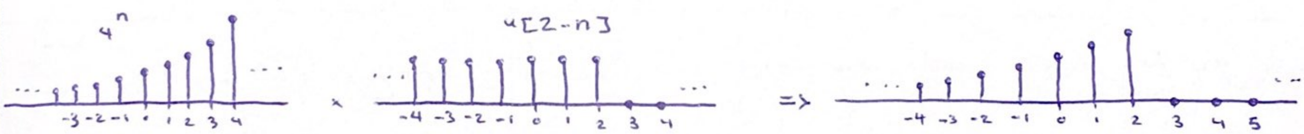
① کانولوشن $y[n] = x[n] * h[n]$ را برای $x[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n-4]$ و $h[n] = 4^n u[2-n]$ بدست آورید؟

$$\begin{cases} x[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n-4] \\ h[n] = 4^n u[2-n] \\ y[n] \overset{?}{=} x[n] * h[n] \end{cases}$$

- روش اول ← ترسیمی

- روش دوم ← فرمولی ✓





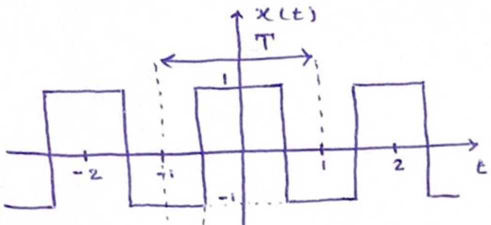
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]\, h[k]$$

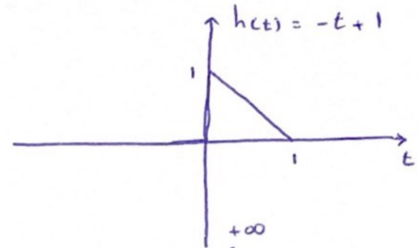
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{(-\tfrac{1}{2})^k u[k-4]\right\} \cdot \left\{4^{n-k} \cdot u[2-n+k]\right\} = \sum_{k=4}^{n-2} (-\tfrac{1}{2})^k \cdot (4^{n-k}) = \sum_{k=4}^{n-2} (-\tfrac{1}{2})^k \cdot 4^n \cdot 4^{-k}$$

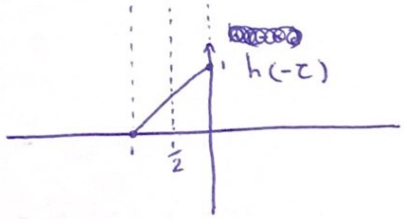
$$= 4^n \cdot \sum_{k=4}^{n-2} (-\tfrac{1}{2})^k \cdot (\tfrac{1}{4})^k = 4^n \cdot \sum_{k=4}^{n-2} (\tfrac{-1}{8})^k = 4^n \left[\frac{(\frac{-1}{8})^4 - (\frac{-1}{8})^{n-1}}{1 + \frac{1}{8}}\right]$$

یادآوری : $\displaystyle\sum_{n=n_1}^{n_2} a^n = \frac{a^{n_1} - a^{n_2+1}}{1-a}$

② به کمک انتگرال کانولوشن پاسخ سیستمی با $h(t)$ و $x(t)$ زیر را بدست آورید؟







$$\Rightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

$$y_1 = \int_{t-1}^{-0.5} -1\left(-(t-\tau)+1\right) d\tau = \int_{t-1}^{-0.5} (t-\tau-1)\, d\tau + \int_{-0.5}^{t} \left(-(t-\tau)+1\right) d\tau = \frac{1}{4} + t - t^2 \quad \text{for } -\tfrac{1}{2} < t < \tfrac{1}{2}$$

$$y_2 = \int_{t-1}^{\frac{1}{2}} \left(-(t-\tau)+1\right) d\tau + \int_{0.5}^{t} -1\left(-(t-\tau)+1\right) d\tau = t^2 - 3t + \frac{7}{4} \quad \text{for } \tfrac{1}{2} < t < \tfrac{3}{2}$$

انتگرال فوق در یک پریود انجام شده است ← در هر پریود دلخواه دیگر هم می توان انجام داد.

---

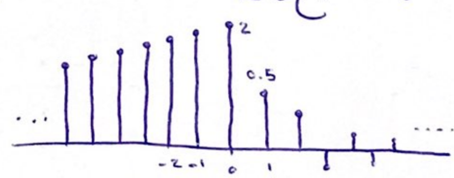
③ سیستم های LTI با پاسخ ضربه زیر داده شده اند. در خصوص هر یک از خواص پایداری و علی بودن این سیستم ها بحث کنید.

a) $h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (1.01)^n u[1-n]$

یادآوری: سیستم علی است اگر و تنها اگر $\Longleftrightarrow \begin{cases} h[n] = 0 \;;\; \forall n < 0 \\ h(t) = 0 \;;\; \forall t < 0 \end{cases}$

سیستم پایدار است اگر و تنها اگر $\Longleftrightarrow \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| < \infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ absolutely summable (مطلقاً جمع پذیر باشد)

a) سیستم غیر علی است $\longrightarrow$ $h[n] = 0 \;;\; \forall n < 0$; چون $\Rightarrow$



پایدار است $\longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=-\infty}^{1} (1.01)^n = \left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^0 - \left(-\frac{1}{2}\right)^\infty}{1+\frac{1}{2}}\right] + \left[\frac{(1.01)^{-\infty} - (1.01)^2}{1-1.01}\right]$

$$= \frac{1-0}{\frac{3}{2}} + \frac{0 - 1.0201}{-0.01} = \frac{2}{3} + 102.01 = 102.67 < \infty$$

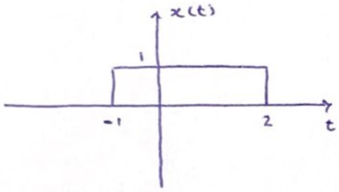
b) $h(t) = \left(2e^{-t} - 1e^{-\left(\frac{t-100}{100}\right)}\right) u(t)$

I) علّی است : $h(t) = 0 \ ; \ \forall t<0$

II) ناپایدار : $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| \, dt = \infty \Rightarrow \int_{0}^{\infty} (2+1)\, dt = 3\int_{0}^{\infty} dt = 3t \Big]_{0}^{\infty} = \infty$

---

(4) ورودی و خروجی یک سیستم LTI با رابطه زیر به هم مرتبط شده‌اند. a) پاسخ ضربه سیستم؟ b) پاسخ سیستم به ورودی $x(t)$ را بدست آورید.



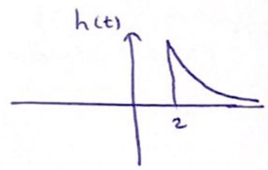
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} \cdot x(\underbrace{\tau-2}_{=\lambda})\, d\tau \Rightarrow \tau - 2 = \lambda \Rightarrow \tau = \lambda + 2$$

$$d\tau = d\lambda$$

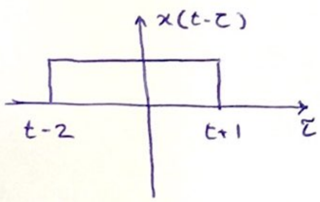
می‌دانیم: $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) h(\tau)\, d\tau$

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\lambda+2} \underbrace{e^{-(t-\lambda-2)}}_{h(t-\lambda)} x(\lambda)\, d\lambda \Rightarrow h(t) = h(t-\lambda+\lambda) = e^{-(t-\lambda-2+\lambda)} = e^{-(t-2)}$$

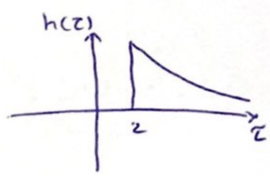
$$\Rightarrow h(t) = e^{-(t-2)} \cdot u(t-2)$$



b) $y = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) h(\tau)\, d\tau = \int_{2}^{\infty} e^{-(\tau-2)} \cdot \Big(u(t-\tau+1) - u(t-\tau-2) \Big)\, d\tau$



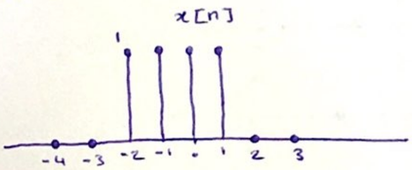
$*$



$$= \begin{cases} 0 & ; \ t<1 \\ \int_{2}^{t+1} e^{-(\tau-2)}\, d\tau = 1 - e^{-(t-1)} & ; \ 1<t<4 \\ \int_{t-2}^{t+1} e^{-(t-2)}\, d\tau = e^{-(t-4)}(1-e^{-3}) & ; \ t>4 \end{cases}$$

---

(5) سیستم LTI حالت سکون با معادله دیفرانسیل $y[n] + 2y[n-1] = x[n] + 2x[n-2]$ مشخص می‌شود. پاسخ سیستم به ورودی $x[n]$ را بدست آورید.



* یادآوری: شرط سکون اولیه (inital rest) یعنی، اگر ورودی به ازای $n<n_0$ صفر باشد $(x[n]=0 : \text{for } n<n_0)$، آنگاه خروجی سیستم به ازای همان n ها صفر است

$y[n] = 0$ for $n<n_0$

$x[n] = 0 \quad \text{for} \quad n < 2 \implies y[n] = 0 \quad \text{for} \quad n < 2$

$y[n] = x[n] + 2x[n-2] - 2y[n-1]$

if $n = -3$: $y[-3] = 0$

if $n = -2$: $y[-2] = x[-2] + 2\cancel{x[-4]} - 2\cancel{y[-3]} = 1$

if $n = -1$: $y[-1] = x[-1] + 2\cancel{x[-3]} - 2\cancel{y[-2]} = 0$

if $n = 0$: $y[0] = x[0] + 2x[-2] - 2\cancel{y[-1]} = 3$

if $n = 1$: $y[1] = x[1] + 2x[-1] - 2y[0] = -3$

if $n = 2$: $y[2] = x[2] + 2x[0] - 2y[1] = 8$

if $n = 3$: $y[3] = \cancel{x[3]} + 2x[1] - 2y[2] = 2 - (2 \times 8) = -14$

if $n = 4$: $y[4] = \cancel{x[4]} + 2\cancel{x[2]} - 2y[3] = -2(14) = -28$

if $n = 5$: $y[5] = \cancel{x[5]} + 2\cancel{x[3]} - 2y[4] = -2\left(-2(14)\right) = +56$

⋮

if $n = n_0$: $y[n_0] = (-1)^{n_0} \cdot 2^{n_0 - 3} (14) \implies \boxed{y[n] = (-1)^n \cdot 2^{n-3} \times 14 \quad \text{for } n \geq 3}$

---

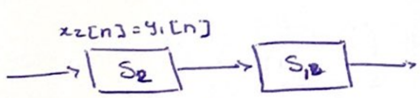
6) یک سیستم LTI با معادله $2y[n] - y[n-1] + y[n-3] = x[n] - 5x[n-4]$ داده شده است.

a) نشان دهید این سیستم را می‌توان با اتصال سری دو سیستم S_1 و S_2 بدست آورد.

b) نمودار جعبه‌ای سیستم را رسم کنید.

$S_1 : 2y_1[n] = x_1[n] - 5x_1[n-4]$

$S_2 : y_2[n] - \frac{1}{2} y_2[n-1] + \frac{1}{2} y_2[n-3] = x_2[n]$



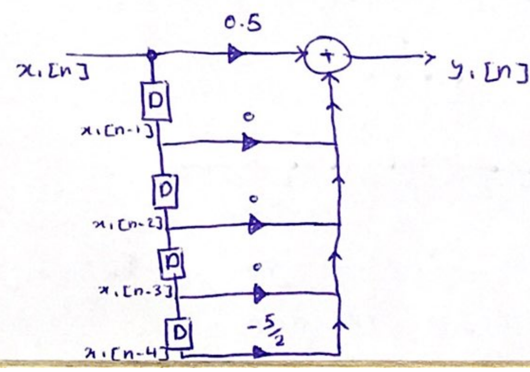
$\boxed{\text{if } y_1[n] = x_2[n]}$

$S_1 : 2y_2[n] - y_2[n-1] + y_2[n-3] = x_1[n] - 5x_1[n-4]$

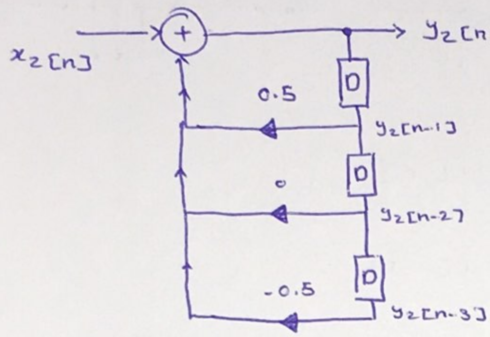
دقیقاً معادله دیفرنس داده شده در صورت سوال است.

Block Diagram :

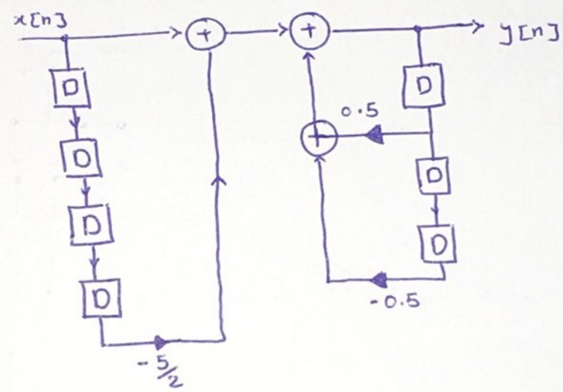
$S_1 : y_1[n] = 0.5\, x_1[n] - \frac{5}{2} x_1[n-4]$:



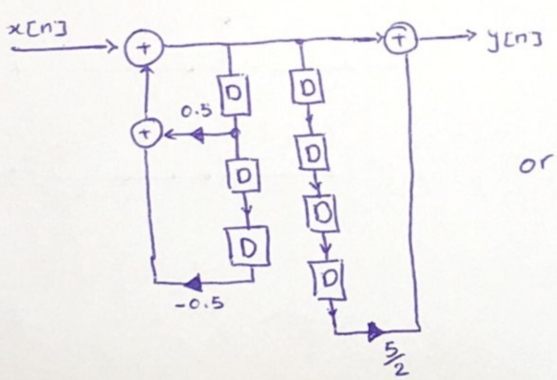
S_2 : $y_2[n] = 0.5\,y_2[n-1] - 0.5\,y_2[n-3] + x_2[n]$



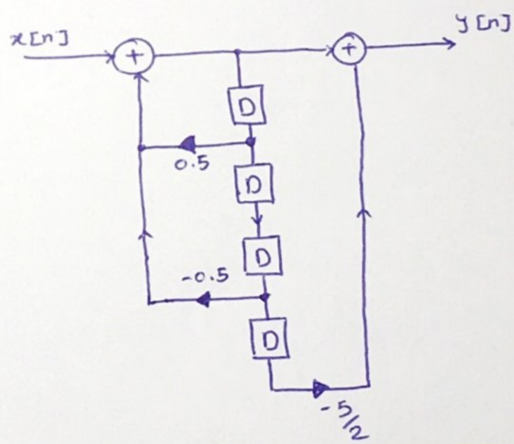
Cascade Connection :



OR :

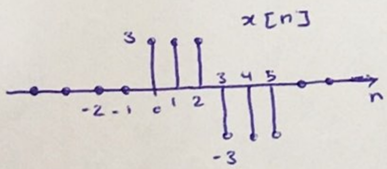


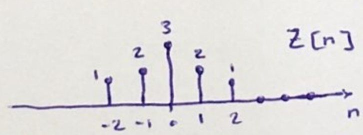
or



---

⑦ اگر پاسخ یک سیستم LTI گسسته زمان به ورودی x[n] به صورت زیر برابر با y[n] باشد، پاسخ سیستم به ورودی z[n] برحسب y[n] چیست؟

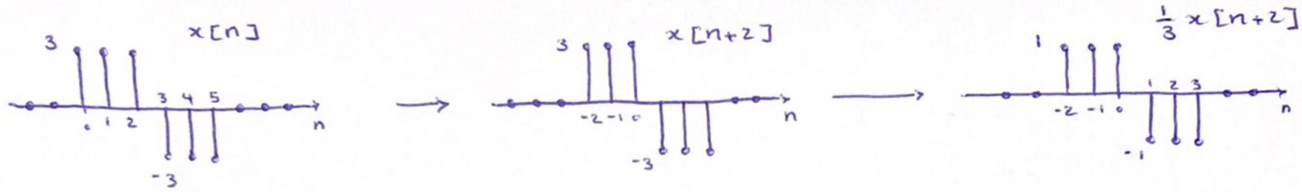




$x[n] \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y[n]$

$z[n] \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow \hat{y}[n] = ?$

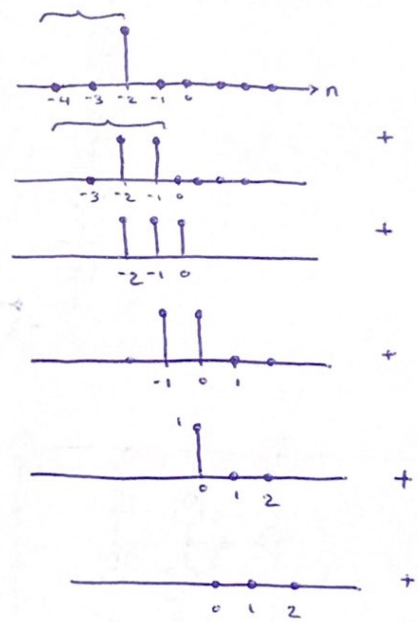
باید z[n] را برحسب x[n] نوشت. چون سیستم LTI است می توان براساس خاصیت همگنی و جمع پذیری خروجی سیستم به ورودی z[n] را نوشت.



$$\frac{1}{3}x[n+2] = \hat{x}_1[n] + \hat{x}_2[n] \qquad \begin{cases} \hat{x}_1[n] = \frac{1}{3}x[n+2]\cdot u[-n] \\ \hat{x}_2[n] = \frac{1}{3}x[n+2]\cdot u[n-1] \end{cases}$$

$$\Rightarrow x[n+2] = 3\hat{x}_1[n] + 3\hat{x}_2[n] \longrightarrow x[n] = 3\hat{x}_1[n-2] + 3\hat{x}[n-2]$$

$\hat{x}_1[n]$:  $\Rightarrow$ $Z[n]$:



$$Z[n] = \sum_{N=3} \hat{x}_1[n] \longrightarrow y[n] = \sum_{N=3} \hat{x}_1[n]$$