مثال

$\vec{u} = \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۳ \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} ۲-j۳ \\ j \\ -۱ \end{pmatrix}$

$\langle u, v \rangle = ?$

$\|u - ۲v\| = ?$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=۱}^{۳} \bar{u}_i v_i = (۱)(۲-j۳) - j + ۳(-۱) = -۱ - j۴$$

$$\langle v, u \rangle = \sum_{i=۱}^{۳} \bar{v}_i u_i = (۲+j۳)(۱) - j(-۱) - ۳ = -۱ + j۴$$

$$\|u - ۲v\| = \left\| \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۳ \end{pmatrix} - ۲ \begin{pmatrix} ۲-j۳ \\ j \\ -۱ \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -۳+j۱۲ \\ -۱-j۲ \\ ۵ \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{|x_۱|^۲ + |x_۲|^۲ + |x_۳|^۲}$$

$$\sqrt{۹ + ۱۴۴}$$

$$= \sqrt{۱۵۳ + ۵ + ۲۵}$$

$$= \sqrt{۱۸۳}$$

ادامه بحث نُرم

تعریف نُرم در حالت کلی:

$$\|u\|_p = \left(\sum_{i=۱}^{n} |u_i|^p \right)^{\frac{۱}{p}} = \left(|u_۱|^p + |u_۲|^p + \dots + |u_n|^p \right)^{\frac{۱}{p}}$$

L_p

$۱ \leq p < \infty$

نرم 1 یا L_1

$$\|u\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i| = |u_1| + \dots + |u_n|$$

نرم بی نهایت یا L_∞

$$\|u\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{p \to \infty} \left(|u_1|^p + |u_2|^p + \dots + |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{p \to \infty} \left(\max |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \max_{1 \le i \le n} \{ |u_i| \}$$

مثال برای بردار $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 - j2 \\ 1 \end{pmatrix}$ L_1 , L_2 , L_∞ را؟

$$\checkmark\ \|u\|_1 = \sum_{i=1}^{3} |u_i| = |u_1| + |u_2| + |u_3|$$

$$= 3 + \sqrt{16+4} + 1 = 4 + 2\sqrt{5}$$

$$\checkmark\ \|u\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{3} |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(|u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (9 + 20 + 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{30}$$

$$\checkmark\ \|u\|_\infty = \max\{ \underbrace{|u_1|}_{3}, \underbrace{|u_2|}_{\sqrt{20}}, \underbrace{|u_3|}_{1} \} = \sqrt{20}$$

$$\boxed{\|u\|_\infty < \|u\|_2 < \|u\|_1}$$

دو بردار متعامد

$\langle u , v \rangle = 0$ ✓ → orthogonal

$$\boxed{\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u+v\|^2 = \|u-v\|^2}$$

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \cancel{2\underbrace{\langle u , v \rangle}_{0}}$$

$$\|u-v\|^2 = \underline{\|u\|^2 + \|v\|^2} - 2\underbrace{\langle u , v \rangle}_{0}$$

نکته) اگر علاوه بر متعامد بودن، نُرم بردارها برابر یک شود، به آن بردارها، یکامتعامد گفته می‌شود.

→ orthonormal

نکته) اگر مجموعه‌ای مانند S شامل بردارهایی باشد که تمامی آن ها ۲ به ۲ متعامد باشند، به آن مجموعه متعامد گفته می‌شود.
حال اگر در یک مجموعه متعامد، نرم تمامی بردارها یک شود، مجموعه را یکامتعامد می‌گویند.

مثال

$$S = \{ v_1 = (2, 0, -1) , v_2 = (0, -1, 0) , v_3 = (2, 0, 4) \}$$

الف) متعامد بودن:

$\langle v_1 , v_2 \rangle = 0$ ✓

$\langle v_2 , v_3 \rangle = 0$ ✓

$\langle v_1 , v_3 \rangle = 4 + 0 - 4 = 0$ ✓

مجموعه S متعامد است ✓

ب) یکامتعامد بودن:

متعامد ✓

بررسی نرم بردار؟

$\|v_1\| = \sqrt{5}$ ✗

$\|v_2\| = 1$ ✓

$\|v_3\| = \sqrt{20}$ ✗

$\longrightarrow$ یکامتعامد نیست

ج) مجموعه S را به یک مجموعه یکا متعامد تبدیل کنید:

اگر هر یک از بردارها را به نُرم خودش تقسیم کنیم [illegible] بدست می آید.

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2, 0, -1) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$u_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2 = \frac{1}{1} (0, -1, 0)$$

$$u_3 = \frac{1}{\|v_3\|} v_3 = \frac{1}{2\sqrt{5}} (2, 0, 4) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

بررسی یکا متعامد بودن u_1، u_2 و u_3:

۱ ـ متعامد بودن ←

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = 0 \checkmark$$

۲ ـ بررسی نرم بردارها

$$\|u_1\| = \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{1}{5}} = 1 \checkmark$$

$$\|u_2\| = 1 \checkmark$$

$$\|u_d\| = \sqrt{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}} = 1 \checkmark$$

ضرب داخلی و نرم توابع پیوسته

$$f(x)\,,\ g(x) \longrightarrow [a,b]$$

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \checkmark$$

۱ $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)f(x)\,dx = \langle g,f\rangle$$

۲ $\langle f+g, h\rangle = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$

۳ $\langle cf, g\rangle = c\langle g,f\rangle$

۴ $\langle f,f\rangle = \int_a^b f(x)f(x)\,dx$

$$= \int_a^b f^2(x)\,dx \longrightarrow \begin{cases} f = 0 \to \langle f, f \rangle = 0 \\ f \neq 0 \to \langle f, f \rangle > 0 \end{cases}$$

<u>مثال</u> ضرب داخلی دو تابع زیر را محاسبه نمایید.

$$f(x) = \sin x - \cos x \qquad [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$g(x) = \sin x + \cos x$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\underbrace{\sin^2 x - \cos^2 x}_{\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos 2x\,dx}\big)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

f و g متعامد هستند.

نرم توابع

$$L_1: \quad \|f\|_1 = \int_0^\infty |f(t)|\,dt$$

$$L_2: \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^\infty f^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$L_\infty: \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |f(t)|$$

(کوچکترین کران بالا)

مثال

$$f(t) = t - 0/5 \qquad 0 < t < 1$$

① $$\|f\|_1 = \int_0^\infty |f(t)|\,dt = \int_0^1 |t - 0/5|\,dt$$

$$= \int_0^{0/5} (-t + 0/5)\,dt + \int_{0/5}^1 (t - 0/5)\,dt = \frac{1}{4}$$

(۲) $$\|f\|_2 = \left(\int_0^\infty f^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 (t-0.5)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

(۳) $$\|f\|_\infty = \sup_{t\geq 0} |f(t)| = \sup_{0<t\leq 1} |t-0.5|$$

$0.5 \qquad 0.5$

$$= \boxed{0.5}$$

پایان جلسه ۲