محاسبات عددی

دانشگاه صنعتی شاهرود -دانشکده برق
مدرس: هادی گرایلو

منبع درسی

محاسبات عددی برای دانشجویان علوم و مهندسی

تالیف دکتر اصغر کرایه چیان

انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد

فصل پنجم

فصل ۵ — حل عددی معادلات دیفرانسیل

۱.۵ مقدمه
۲.۵ روشهای گام به گام
۳.۵ روش اویلر بهسازی شده
۴.۵ روشهای رانگ — کوتا
۵.۵ روشهای چندگامی
۶.۵ روشهای ضمنی
۷.۵ روش پیش بینی — تصحیح
۸.۵ حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل
۹.۵ معادلات تفاضلی
۱۰.۵ همگرایی و پایداری
۱۱.۵ تمرینهای فصل ۵

۱.۵ مقدمه

در این فصل روشهایی را برای محاسبه‌ی مقادیر عددی جوابهای معادلات دیفرانسیل به‌صورت

$$y' = f(x,y) \qquad (۱)$$

$$y(x_\circ) = y_\circ \qquad (۲)$$

بررسی می‌کنیم. معادله‌ی (۱) همراه با شرط (۲) را یک مسأله‌ی مقدار اولیه می‌نامند.

چرا باید روشهای عددی را به‌کار بریم ؟

1- جواب تحلیلی امکان پذیر نیست.
2- جواب عملاً قابل استفاده نیست.
3- یافتن جواب مشکل/وقت گیر است.

$$y' = x^۲ + y^۲ \quad , \; y(\circ) = ۱ \qquad (۳)$$

$$y' = x(۱ + x^۲)\sec^۲ y \quad , \; y(\circ) = \circ \qquad (۴)$$

یافتن جواب تحلیلی مسأله‌ی (۳) امکان‌پذیر نیست، اگرچه می‌توان نشان داد که این مسأله دارای جواب است. جواب مسأله‌ی (۴) به‌صورت ضمنی چنین است

$$۲y + \sin ۲y = x^۲(۲ + x^۲)$$

این جواب عملاً قابل استفاده نیست، زیرا اگر بخواهیم ، برای مثال ، y را به‌ازای $x = ۱$ به‌دست آوریم، باید معادله‌ی متعالی

$$۲y + \sin ۲y = ۳$$

را حل کنیم که برای این منظور باید روشهای حل معادلات غیرخطی را مورد استفاده قرار دهیم. پس، برای این گونه مسایل جواب تقریبی عددی به‌دست می آوریم.

۲.۵ روشهای گام به گام

روش سری تیلور

فرض کنید $y = y(x)$ جواب تحلیلی مسأله‌ی (۱) و (۲) باشد. با فرض آن‌که $y(x)$ در نقطه‌ی $x_\circ$ به‌قدرکافی مشتق‌پذیر باشد، بنا به‌فرمول تیلور می‌توان نوشت

$$y(x) = y(x_\circ) + (x - x_\circ)y'(x_\circ) + \ldots + \frac{(x - x_\circ)^n}{n!}y^{(n)}(x_\circ)$$

$$+\frac{(x - x_\circ)^{n+۱}}{(n + ۱)!}y^{(n+۱)}(\xi) \quad , \; x_\circ < \xi < x \qquad (۵)$$

اگر $x_۱$ نزدیک به $x_\circ$ باشد، و $x_۱ - x_\circ = h$ ، آنگاه از (۵) داریم

$$y(x_۱) = y(x_\circ) + hy'(x_\circ) + \frac{h^۲}{۲!}y''(x_\circ) + \ldots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_\circ)$$

$$+\frac{h^{n+۱}}{(n + ۱)!}y^{(n+۱)}(\xi) \qquad (٦)$$

اگر در (٦) از جمله‌ی آخر که باقیمانده سری است چشم پوشی کنیم، خواهیم داشت

$$y(x_۱) \approx y(x_\circ) + hy'(x_\circ) + \frac{h^۲}{۲!}y''(x_\circ) + \ldots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_\circ) \qquad (۷)$$

فرمول (۷)، فرمول تیلور مرتبه‌ی n نامیده می‌شود. اکنون با داشتن تقریبی برای جواب در $x_۱$ ، از فرمول زیر که مشابه (۷) است ، می‌توان تقریبی برای جواب در نقطه‌ی $x_۲ = x_۱ + h$ به‌دست آورد.

$$y(x_۲) \approx y(x_۱) + hy'(x_۱) + \frac{h^۲}{۲!}y''(x_۱) + \ldots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_۱)$$

به‌این ترتیب به‌صورت گام به گام می‌توان جواب را تا هر نقطه‌ای که مورد نیاز باشد، به‌دست آورد.

تعریف ۲ — عبارت $E = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi)$

که خطای برشی فرمول (۷) می‌باشد، **خطای موضعی** روش سری تیلور مرتبه‌ی n نامیده می‌شود، که در حقیقت خطا در یک گام است. ملاحظه کنید که خطا در یک گام، $O(h^{n+1})$ است.

مثال ۱ — جواب مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را از $x = 0$ تا $x = 0.2$ با طول گام $h = 0.1$ و با استفاده از فرمول تیلور مرتبه‌ی ۳ به‌دست آورید.

$$y' = x^2 + y^2 \ , \quad y(0) = 1$$

حل — داریم $y'(0) = 1$ و $y'' = 2x + 2yy' \Rightarrow y''(0) = 2$

$$y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy'' \Rightarrow y'''(0) = 8$$

از فرمول (۷) به‌ازای $n = 3$ داریم

$$y(0.1) \approx 1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2!}(2) + \frac{(0.1)^3}{3!}(8) = 1.111333$$

حال جواب را در $x = 0.2$ تقریب می‌زنیم. داریم

$$y'(0.1) = (0.1)^2 + (y(0.1))^2 = 1.245061$$

$$y''(0.1) = 2(0.1) + 2(1.111333)(1.245061) = 2.967355$$

$$y'''(0.1) = 2 + 2(1.245061)^2 + 2(1.111333)(2.967355) = 11.69579$$

بنابراین از فرمول (۷)

$$y(0.2) \approx y(0.1) + (0.1)y'(0.1) + \frac{(0.1)^2}{2!}y''(0.1) + \frac{(0.1)^3}{3!}y'''(0.1)$$

$$= 1.252626$$

روش سری تیلور را نمی‌توان یک روش اکیداً عددی دانست ، به‌دلیل آن که مشتقهای نسبی f باید به‌صورت دستی محاسبه شوند. اهمیت این روش از آن جهت است که با بسیاری از روشهای عددی که بررسی خواهیم نمود مرتبط است.

روش اویلر

بنا به فرمول تیلور می‌توان نوشت

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^{۲}}{۲}y''(\xi) \quad , x < \xi < x+h$$

با چشم پوشی از جمله‌ی باقیمانده داریم

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x, y(x)) \qquad (۸)$$

در (۸) قرار می‌دهیم $x = x_{۰}$. در این‌صورت با توجه به این‌که $y(x_{۰}) = y_{۰}$ معلوم است، می‌توان جواب معادله را در $x_{۱} = x_{۰} + h$ به‌طور تقریبی به‌دست آورد. پس

$$y_{۱} = y_{۰} + hf(x_{۰}, y_{۰})$$

با ادامه‌ی این روند فرمول اویلر زیر نتیجه می‌شود

$$y_{i+۱} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad , i = ۰, ۱, ۲, \dots, N - ۱ \qquad (۹)$$

که در آن h طول گام است.

خطای موضعی یا خطا در هر گام روش اویلر $O(h^{۲})$ است، یعنی اگر $y(x_{i-۱})$ جواب واقعی مسأله در نقطه‌ی $x_{i-۱}$ و y_i را از فرمول اویلر

$$y_i = y(x_{i-۱}) + hf(x_{i-۱}, y(x_{i-۱}))$$

محاسبه کنیم، آنگاه $e_i = y(x_i) - y_i = O(h^{۲})$ خطا در گام i ام است. از این رو روش اویلر روش دقیقی نیست مگر آن که h خیلی کوچک باشد. از طرفی با انتخاب h کوچک حجم محاسبات افزایش می‌یابد که به‌تبع آن اثر خطاهای گرد کردن افزایش می‌یابد. بنابراین خطای کل، که خطای سراسری نامیده می‌شود می‌تواند قابل ملاحظه باشد.

مثال ۲ — جواب مساله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را به‌دست آورید.

$$y' = y + x^{۲} \quad , \quad y(۰) = ۱ \quad , ۰ \le x \le ۱$$

حل — در این مثال $f(x,y) = y + x^{۲}$ ، $x_{۰} = ۰$ ، $y_{۰} = ۱$. با انتخاب $h = ۰.۲$ داریم

$$y(۰.۲) \approx y_{۱} = y_{۰} + hf(x_{۰}, y_{۰}) = ۱ + ۰.۲(۱ + ۰) = ۱.۲$$

$$y(۰.۴) \approx y_{۲} = y_{۱} + hf(x_{۱}, y_{۱}) = ۱.۲ + ۰.۲f(۰.۲, ۱.۲) = ۱.۴۴۸۰$$

با ادامه‌ی این روند نتایج به‌صورت جدول زیر به‌دست می آید.

k	x_k	y_k	Y
۰	۰	۱	۱
۱	۰.۲	۱.۲۰۰۰	۱.۲۲۴۲
۲	۰.۴	۱.۴۴۸۰	۱.۵۱۵۵
۳	۰.۶	۱.۷۶۹۶	۱.۹۰۶۴
۴	۰.۸	۲.۱۹۵۵	۲.۴۳۶۶
۵	۱	۲.۷۶۲۶	۳.۱۵۴۸

در این مثال جواب تحلیلی عبارت است از $Y = ۳e^{x} - x^{۲} - ۲x - ۲$ و مقادیر آن در جدول جهت مقایسه با جوابهای تقریبی نشان داده شده است. داریم

$$Y(۱) = ۳.۱۵۴۸$$

پس خطا در $x = ۱$ چنین است $E = Y(۱) - ۲.۷۶۲۶ = ۰.۳۹۲۲$

بنابراین، خطای نسبی $\frac{۰.۳۹۲۲}{۳.۱۵۴۸} \approx ۰.۱۲$ یا تقریباً ۱۲ درصد است . ملاحظه می‌شود که خطا زیاد است.

اگر در این مثال طول گام، $h = ۰.۱$ انتخاب شود، تقریبها بهتر می‌شوند، همان‌طور که جدول زیر نشان می‌دهد.

x_k	y_k	x_k	y_k
۰.۱	۱.۱۰۰۰	۰.۶	۱.۸۳۱۸
۰.۲	۱.۲۱۱۰	۰.۷	۲.۰۵۱۰
۰.۳	۱.۳۳۶۱	۰.۸	۲.۳۰۵۱
۰.۴	۱.۴۷۸۷	۰.۹	۲.۵۹۹۶
۰.۵	۱.۶۴۲۶	۱	۲.۹۴۰۶

می‌توان نشان داد که در روش اویلر وقتی $h \to ۰$ جواب تقریبی در هر نقطه به‌سمت جواب واقعی در آن نقطه میل می‌کند.

۳.۵ روش اویلر بهسازی شده

اگر در فرمول اویلر $y_۱ = y_۰ + hf(x_۰, y_۰)$ به‌جای $f(x_۰, y_۰)$ که شیب منحنی جواب مساله در نقطه‌ی $(x_۰, y_۰)$ است ، میانگین شیبها را در دو نقطه‌ی $(x_۰, y_۰)$ و $(x_۱, y(x_۱))$ قرار دهیم ، خواهیم داشت

$$y_۱ = y_۰ + \frac{h}{۲}[f(x_۰, y_۰) + f(x_۱, y(x_۱))]$$

که **فرمول اویلر بهسازی شده** نامیده می‌شود. در این فرمول $y(x_۱)$ معلوم نیست، اما می‌توان مقدار تقریبی آن را از فرمول ساده اویلر به‌دست آورد. $y(x_۱) \approx y_۱ = y_۰ + hf(x_۰, y_۰)$

پس می‌توان نوشت

$$y_۱ = y_۰ + \frac{h}{۲}[f(x_۰, y_۰) + f(x_۱, z_۱)]$$

که

$$z_۱ = y_۰ + hf(x_۰, y_۰)$$

مثال ۳ — جواب مساله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را با روش اویلر بهسازی شده و با طول $h = ۰.۱$ به‌دست آورید. $y' = y + x^۲ \;,\; y(۰) = ۱ \;,\; ۰ \le x \le ۱$

حل — با توجه به الگوریتم فوق داریم

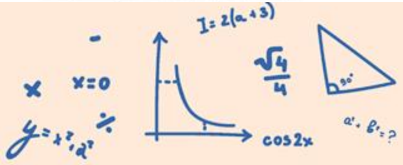
$$z_۱ = y_۰ + hf(x_۰, y_۰) = ۱ + ۰.۱(۱ + ۰) = ۱.۱$$

$$y_۱ = y_۰ + \frac{h}{۲}[f(x_۰, y_۰) + f(x_۱, z_۱)] =$$

$$۱ + \frac{۰.۱}{۲}[۱ + f(۰.۱, ۱.۱)] = ۱ + \frac{۰.۱}{۲}(۱ + ۱.۱۱) = ۱.۱۰۵۵$$

نتایج در نقاط بعدی و برای k ی زوج مطابق جدول زیر است. دو ستون آخر، y_k و Y ، به‌ترتیب مقادیر تقریبی و واقعی مسأله را نشان می‌دهند.

k	x_k	z_k	y_k	Y
۲	۰.۲	۱.۲۱۷۰	۱.۲۲۴۱	۱.۲۲۴۲
۴	۰.۴	۱.۵۰۴۳	۱.۵۱۵۰	۱.۵۱۵۵
۶	۰.۶	۱.۸۹۰۰	۱.۹۰۵۲	۱.۹۰۶۴
۸	۰.۸	۲.۴۱۲۵	۲.۴۳۴۲	۲.۴۳۶۶
۱۰	۱	۳.۱۲۳۰	۳.۱۵۰۴	۳.۱۵۴۸



تحلیل خطا در روش اویلر بهسازی شده

در این روش خطای برشی موضعی $O(h^3)$ می‌باشد در حالی که در روش اویلر ساده $O(h^2)$ است.

۴.۵ روشهای رانگِ — کوتا

به‌طوری که دیدیم در روش اویلر برای به‌دست آوردن جوابهای دقیق‌تر، طول گام h باید کوچک انتخاب شود. در روشهای رانگِ — کوتا، فرمولهایی برای جواب تقریبی مساله‌ی

$$y' = f(x,y) \quad , \; a \le x \le b \qquad (10)$$
$$y(x_0) = y_0$$

جستجو می‌کنیم که از دقت بالا برخوردار بوده، بدون این که نیازی به انتخاب طول گام h خیلی کوچک باشد، و یا نیازی به‌محاسبه‌ی مشتقهای نسبی تابع f باشد

روش رانگِ — کوتای مرتبه‌ی دو

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$
$$k_1 = hf(x_i, y_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1$$
$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1)$$

خطای موضعی این روش $O(h^3)$ است.

فرمول رانگِ — کوتای مرتبه‌ی دو همان فرمول اویلر بهسازی شده است

مثال ۴ — جواب مساله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را با روش رانگِ — کوتای مرتبه‌ی دو با طول گام $h = 0.1$ به‌دست آورید.

$$y' = y + x^2 \quad , \; y(0) = 1 \quad , 0 \le x \le 1$$

حل — در اینجا $f(x,y) = y + x^2$. داریم

$$k_1 = 0.1 f(x_0, y_0) = 0.1 f(0, 1) = 0.1$$
$$k_2 = 0.1 f(x_0 + h, y_0 + k_1) = 0.1 f(0.1, 1 + 0.1) = 0.111$$
$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 1 + \frac{1}{2}(0.1 + 0.111) = 1.1055$$

تقریبات بعدی و جواب واقعی در جدول زیر داده شده است .

k	x_k	y_k	Y
۲	۰.۲	۱.۲۲۴۱	۱.۲۲۴۲
۴	۰.۴	۱.۵۱۵۰	۱.۵۱۵۵
۶	۰.۶	۱.۹۰۵۲	۱.۹۰۶۴
۸	۰.۸	۲.۴۳۴۲	۲.۴۳۶۶
۱۰	۱	۳.۱۵۰۴	۳.۱۵۴۸

توجه کنید که همین نتایج را با فرمول اویلر بهسازی شده به‌دست آوردیم.

روش رانگِ — کوتای مرتبه‌ی چهار

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \qquad (14)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}) \qquad i = 0, 1, \dots N-1$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

خطای برشی این روش $O(h^5)$ می‌باشد
و به‌همین دلیل نتایج حاصل از این روش بسیار دقیق است

مثال ۵ — جواب مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را با روش رانگِ — کوتای مرتبه‌ی چهار با طول گام $h = 0.2$ به‌دست آورید.

$$y' = y + x^2 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , 0 \leq x \leq 1$$

حل — داریم $f(x, y) = y + x^2$ و $k_1 = 0.2f(x_0, y_0) = 0.2f(0, 1) = 0.2$

$$k_2 = 0.2f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) = 0.2f(0.1, 1 + 0.1) = 0.222$$

$$k_3 = 0.2f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}) = 0.2f(0.1, 1 + 0.111) = 0.2242$$

$$k_4 = 0.2f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.2f(0.2, 1 + 0.2242) = 0.25284$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) =$$

$$1 + \frac{1}{6}[0.2 + 2(0.222) + 2(0.2242) + 0.25284] = 1.22421$$

تقریبات بعدی مطابق جدول زیر است.

k	x_k	$y_k(EU)$	$y_k(RK4)$	Y
۱	۰.۲	۱.۲۰۰۰۰	۱.۲۲۴۲۱	۱.۲۲۴۲۱
۲	۰.۴	۱.۴۴۸۰۰	۱.۵۱۵۴۷	۱.۵۱۵۴۷
۳	۰.۶	۱.۷۶۹۶۰	۱.۹۰۶۳۴	۱.۹۰۶۳۶
۴	۰.۸	۲.۱۹۵۵۲	۲.۴۳۶۶۰	۲.۴۳۶۶۲
۵	۱	۲.۷۶۲۶۲	۳.۱۵۴۸۱	۳.۱۵۴۸۵

در این جدول EU ، $RK4$ و Y به‌ترتیب نشان دهنده تقریبات اویلر ، رانگِ — کوتای مرتبه‌ی چهار و جواب واقعی هستند. ملاحظه کنید که تقریبات رانگِ — کوتا بسیار دقیق می‌باشند.

۵.۵ روشهای چندگامی

روشهای اویلر و رانگِ – کوتا روشهای تک گامی نامیده می‌شوند، به‌این دلیل که برای یافتن تقریبی برای جواب مسأله در x_{i+1}، داشتن تقریبی از جواب در x_i کفایت می‌کند. اگر برای یافتن تقریبی برای جواب در نقطه‌ی x_{i+1}، از تقریبها در نقاط x_i، x_{i-1}، x_{i-2}، ... استفاده شود، آنگاه روش را **چندگامی** می‌نامند. نتایج حاصل از روشهای چندگامی عموماً از دقت خوبی بر خوردارند.

مساله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \quad , \quad a \le x \le b$$

فرض کنید $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ افراز یکنواختی از بازه‌ی $[a,b]$ باشد و $h = x_{i+1} - x_i$

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی دیفرانسیل در بازه‌ی $[x_i, x_{i+1}]$ داریم

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y(x))\,dx$$

یا

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y(x))\,dx \qquad (15)$$

انتگرال طرف دوم در (۱۵) را نمی‌توان محاسبه کرد، زیرا تابع $y(x)$ که جواب مسأله است در دست نیست. اما می‌توان این انتگرال را با روش ذوزنقه‌ای تقریب زد. به‌این ترتیب که فرض می‌کنیم که $P(x_s)$ تابع خطی درونیاب پسروی نیوتن باشد که تابع $f(x,y(x))$ را در نقاط x_{i-1} و x_i درونیابی کند. داریم

$$P(x_s) = f_i + s \nabla f_i$$

که $s = \frac{x-x_i}{h}$ و $f_i = f(x_i, y(x_i))$. پس

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f_i + s\nabla f_i)dx = h\int_0^1 (f_i + s\nabla f_i)\,ds$$

$$= \frac{h}{2}\left(3f(x_i,y_i) - f(x_{i-1},y_{i-1})\right)$$

بنابراین

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[3f(x_i,y_i) - f(x_{i-1},y_{i-1})] \quad , i = 1, 2, \dots N-1 \qquad (16)$$

فرمول (۱۶)، **فرمول آدامس – بشفورتس دوگامی** نامیده می‌شود که به‌اختصار آن را $(AB2)$ می‌نامند. خطای موضعی این فرمول $O(h^3)$ است ، زیرا این خطا در حقیقت خطای انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای ساده است.

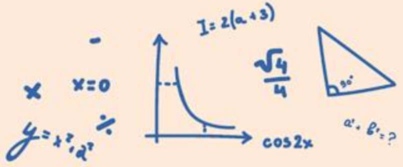
متشابهاً اگر در انتگرال (۱۵)، $P(x_s)$ را چندجمله‌ای درجه دوی درونیاب پسروی نیوتن بگیریم که از سه نقطه‌ی $(x_i, y'(x_i))$ ، $(x_{i-1}, y'(x_{i-1}))$ و $(x_{i-2}, y'(x_{i-2}))$ می‌گذرد، داریم

$$P(x_s) = f_i + s\nabla f_i + \frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f_i$$

بنابراین

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f_i + s\nabla f_i + \frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f_i\right)\,dx$$

پس از محاسبه‌ی انتگرال خواهیم داشت



مثال ۶ — مساله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را با روش $(AB2)$ حل کنید.

$$y' = -y^2 \ , \ y(1) = 1 \ , \ 1 \le x \le 2 \ , \ h = 0.2$$

در این مثال $f(x,y) = -y^2$ ، و $h = \frac{2-1}{N} = \frac{1}{N}$ ، ولذا $N = 5$. پس

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[3f(x_i,y_i) - f(x_{i-1},y_{i-1})] \quad , i = 1,2,3,4$$

ابتدا y_1 را از فرمول رانگ — کوتای مرتبه‌ی دو محاسبه می‌کنیم.

$$k_1 = hf(x_0,y_0) = 0.2f(1,1) = -0.2$$

$$k_2 = hf(x_0+h, y_0+k_1) = 0.2f(1.2, 1-0.2) = -(0.2)(0.8)^2 = -0.128$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1+k_2) = 1 + \frac{1}{2}(-0.2-0.128) = 1 - 0.164 = 0.836$$

حال

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}[3f(x_1,y_1) - f(x_0,y_0)] =$$

$$0.836 + 0.1\left[-3(0.836)^2 + 1\right] = 0.72633$$

نتایج بعدی به‌صورت جدول زیر است.

k	x_k	y_k	Y
۱	۱.۲	۰.۸۳۶۰۰	۰.۸۳۳۳۳
۲	۱.۴	۰.۷۲۶۳۳	۰.۷۱۴۲۹
۳	۱.۶	۰.۶۳۷۹۵	۰.۶۲۵۰۰
۴	۱.۸	۰.۵۶۸۶۱	۰.۵۵۵۵۶
۵	۲	۰.۵۱۲۳۲	۰.۵۰۰۰۰

جواب تحلیلی $Y = \frac{1}{x}$ است و مقادیر آن جهت مقایسه با مقادیر تقریبی نشان داده شده است.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}[23f(x_i,y_i) - 16f(x_{i-1},y_{i-1}) + 5f(x_{i-2},y_{i-2})]$$

$$i = 2,3,\dots N-1 \qquad (17)$$

که فرمول آدامس — بشفورتس سه‌گامی ، یا $(AB3)$ است. خطای موضعی این فرمول $O(h^4)$ است.

به‌عنوان تمرین نشان دهید فرمول آدامس — بشفورتس چهارگامی به‌صورت زیر است ، و خطای موضعی آن $O(h^5)$ می‌باشد.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}[55f(x_i,y_i) - 59f(x_{i-1},y_{i-1}) + 37f(x_{i-2},y_{i-2}) -$$

$$9f(x_{i-3},y_{i-3})] \ , \quad i = 3,4,\dots N-1$$

یک نقص عمده‌ی روشهای چندگامی ، به‌ویژه روشهای آدامس — بشفورتس، این است که خود — آغاز نیستند، یعنی، برای مثال ، اگر بخواهیم از فرمول آدامس — بشفورتس دوگامی استفاده کنیم، دو مقدار آغازین y_0 و y_1 لازم هستند که تنها y_0 معلوم است. لذا y_1 باید از یک روش تک گامی نظیر رانگ — کوتا محاسبه شود. به‌طورکلی، هر روش آدامس — بشفورتس با یک روش تک گامی که خطای موضعی آنها یکسان باشند همراه است. برای مثال، روش آدامس — بشفورتس چهارگامی با روش رانگ — کوتای مرتبه‌ی چهار به‌کار می‌رود، زیرا هردو دارای خطای موضعی $O(h^5)$ هستند.

امتیاز روشهای آدامس — بشفورتس بر روشهای تک گامی آن است که در هر تکرار تنها یکبار به‌محاسبه‌ی تابع $f(x,y)$ نیاز است. برای مثال، در روش $(AB2)$ برای محاسبه‌ی y_{i+1} کافی است تنها $f(x_i,y_i)$ محاسبه شود، زیرا $f(x_{i-1},y_{i-1})$ در تکرار قبل محاسبه شده است. در حالی‌که برای مثال، در روش تک گامی اویلر بهسازی شده در هر تکرار نیاز به دوبار محاسبه‌ی $f(x,y)$ و در روش رانگ — کوتای مرتبه‌ی چهار نیاز به چهار بار محاسبه‌ی $f(x,y)$ است، و این امر در اکثر مسایل کار محاسباتی زیادی را می‌طلبد.

روش نقطه‌ی میانی

مساله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$y' = f(x,y) \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

فرض کنید $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ افراز یکنواختی از بازه‌ی $[a,b]$ باشد، و $h = x_{i+1} - x_i$

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی دیفرانسیل در بازه‌ی $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ داریم

$$y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\, dx$$

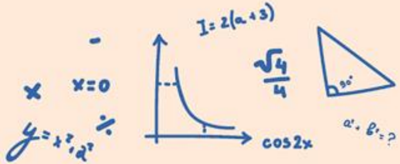
انتگرال را با استفاده از دستور نقطه‌ی میانی ساده تقریب می‌زنیم. خواهیم داشت

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i) \qquad (۱۸)$$

فرمول دوگامی (۱۸) را فرمول یا روش **نقطه‌ی میانی** می‌نامند و خطای موضعی آن $O(h^3)$ است.

۶.۵ روشهای ضمنی

روشهای تک گامی اویلر و رانگ — کوتا، و همچنین روشهای چندگامی آدامس — بشفورتس ، روشهای صریح هستند، به‌این معنی که در هر گام از تقریبات به‌دست آمده در گامهای قبل استفاده می‌شود. یک نقص روشهای چند گامی صریح ، ناپایداری است که گاهی در این روشها دیده می‌شود. این مشکل در روشهای ضمنی وجود ندارد.



برای یافتن یک فرمول ضمنی، فرض می‌کنیم در انتگرال (۱۵) تابع خطی $P(x)$ ، تابع $f(x,y(x))$ را در x_i و x_{i+1} درونیابی کند. داریم

$$P(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} y'(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y'(x_{i+1})$$

در این‌صورت

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)\, dx$$

یا پس از محاسبه‌ی انتگرال

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right] \quad , \quad i = 0, 1, \ldots N-1 \qquad (۱۹)$$

که $y_i \approx y(x_i)$.

فرمول (۱۹)، فرمول آدامس — مولتون دوگامی $(AM2)$ نامیده می‌شود. خطای موضعی آن $O(h^3)$ است. این فرمول را ضمنی می‌نامند ، زیرا مجهول y_{i+1} در طرف دوم رابطه‌ی (۱۹) نیز وجود دارد. اگر f نسبت به y خطی نباشد، آنگاه (۱۹) بر حسب y_{i+1} یک معادله‌ی غیرخطی است به‌صورت $y_{i+1} = g(y_{i+1})$. این معادله را می‌توان با روش تکرار نقطه‌ی ثابت که در فصل ۳ بیان شد، حل نمود. به‌این ترتیب که فرض می‌کنیم $y_{i+1}^{(0)}$ تقریبی برای y_{i+1} باشد. قرار می‌دهیم

$$y_{i+1}^{(n+1)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(n)})\right] \quad n = 0, 1, \ldots \qquad (۲۰)$$

و تکرار را ادامه می‌دهیم تا وقتی که به‌ازای $\epsilon > 0$ داده شده‌ای و به‌ازای k ای داشته باشیم

$$\left| \frac{y_{i+1}^{(k)} - y_{i+1}^{(k-1)}}{y_{i+1}^{(k)}} \right| < \epsilon \qquad \text{یا} \qquad | y_{i+1}^{(k)} - y_{i+1}^{(k-1)} | < \epsilon$$

روش انتخاب تقریب اولیه‌ی $y_{i+1}^{(0)}$ را در بخش بعدی خواهیم دید.

مشابه فرمولهای آدامس — بشفورتس، می‌توان فرمولهای آدامس — مولتون سه‌گامی و چهارگامی و به‌طورکلی m گامی به‌دست آورد. برای یافتن فرمول سه‌گامی فرض کنید، $P(x_s)$ چندجمله‌ای درونیاب پسروی نیوتن باشد که $f(x,y(x))$ را در سه نقطه‌ی x_{i+1}، x_i و x_{i-1} درونیابی کند. در این‌صورت انتگرال (۱۵) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f_{i+1} + s\nabla f_{i+1} + \frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f_{i+1}\right) dx$$

که پس از محاسبه‌ی انتگرال، فرمول سه نقطه‌ای آدامس — مولتون $(AM3)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\left[5f(x_{i+1},y_{i+1}) + 8f(x_i,y_i) - f(x_{i-1},y_{i-1})\right] \qquad (21)$$

خطای برشی فرمول (۲۱) $E = -\frac{h^4}{24}y^{(4)}(\eta) = O(h^4)$

خطای برشی فرمول $(AM4)$ $E = -\frac{19h^5}{720}y^{(5)}(\eta)$ است.

۷.۵ روش پیش بینی — تصحیح

در فرمول تکراری (۲۰)، تقریب اولیه‌ی $y_{i+1}^{(0)}$ را از یک فرمول صریح تک — گامی، برای مثال، از فرمول اویلر

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i,y_i) \qquad (22)$$

به‌دست می آوریم، وسپس به‌کمک فرمول تکراری

$$y_{i+1}^{(n+1)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i) + f(x_{i+1},y_{i+1}^{(n)})\right] \quad n = 0,1,\ldots \qquad (23)$$

این تقریب را تصحیح می‌کنیم. فرمول (۲۲) را فرمول پیش بینی و فرمول (۲۳) را فرمول تصحیح می‌نامند.

مثال ۷ — مساله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را با روش پیش بینی — تصحیح حل کنید.

$$y' = -y\ln y \;,\quad y(0) = 0.5 \;,\; 0 \le x \le 1$$

حل — بازه‌ی $[0,1]$ را به ۵ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، و در این‌صورت $h = 0.2$ در این‌جا $f(x,y) = -y\ln y$. از فرمول پیش بینی (۲۲) داریم

$$y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0,y_0) = 0.5 + (0.2)(-0.5)\ln(0.5) = 0.56931$$

حال از فرمول تصحیح (۲۳) داریم

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0,y_0) + f(x_1,y_1^{(0)})\right] =$$
$$0.5 + 0.1\left[(-0.5)\ln(0.5) + (-0.56931)\ln(0.56931)\right] = 0.56673$$
$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0,y_0) + f(x_1,y_1^{(1)})\right] =$$
$$0.5 + 0.1\left[(-0.5)\ln(0.5) + (-0.56673)\ln(0.56673)\right] = 0.56684$$

داریم $|y_1^{(2)} - y_1^{(1)}| < 0.0005$

چون دو تقریب تا سه رقم اعشار باهم مطابقت دارند ، پس $y_1^{(2)} = 0.56684$ را به‌عنوان تقریبی برای $y(0.2)$ می‌پذیریم. حال مجددا از فرمول پیش بینی داریم

$$y_2^{(0)} = y_1 + hf(x_1,y_1) =$$
$$0.56684 + (0.2)(-0.56684)\ln(0.56684) = 0.63120$$

مانند گام قبلی این تقریب را به‌کمک فرمول (۲۳) تصحیح می‌کنیم.
با ادامه‌ی این کار جدول زیر نتیجه می‌شود.

x_k	y_k	Y
۰.۲	۰.۵۶۶۸۴	۰.۵۶۶۹۴
۰.۴	۰.۶۲۸۲۳	۰.۶۲۸۳۷
۰.۶	۰.۶۸۳۴۶	۰.۶۸۳۵۸
۰.۸	۰.۷۳۲۳۰	۰.۷۳۲۳۸
۱	۰.۷۷۴۹۰	۰.۷۷۴۹۲

جواب تحلیلی مساله $Y = e^{(-\ln 2)e^{-x}}$ و مقادیر آن جهت مقایسه با مقادیر تقریبی نشان داده شده‌اند.

تذکر — توصیه می‌شود فرمولهایی که به‌عنوان یک جفت پیش بینی — تصحیح استفاده می‌شوند، مرتبه یکسان داشته باشند. برای مثال، از روشهای رانگ — کوتای مرتبه‌ی دو و $(AM2)$ به ترتیب به‌عنوان یک جفت پیش‌بینی — تصحیح می‌توان استفاده نمود. همچنین ازفرمولهای $(AB4)$ و $(AM4)$ به‌عنوان یک جفت پیش بینی — تصحیح استفاده می‌شود. بهرحال مرتبه‌ی فرمول تصحیح کننده نباید از مرتبه‌ی فرمول پیش‌بینی پایین‌تر باشد.

۸.۵ حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_m)\\
\frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_m)\\
&\vdots\\
\frac{dy_m}{dt} &= f_m(t, y_1, y_2, \dots, y_m)
\end{aligned} \tag{24}$$

که در آن هدف یافتن توابع $y_1(t)$ ، $y_2(t)$ ، ... و $y_m(t)$ بر روی بازه‌ای مانند $[a,b]$ است با شرایط اولیه‌ی

$$y_1(t_0) = c_1 \quad , y_2(t_0) = c_2 \quad , \dots, y_m(t_0) = c_m \tag{25}$$

که c_i ، $i = 1, 2, \dots m$ ثابتهای مفروض هستند، و $t_0 = a$.

معادلات (۲۴) و (۲۵) را می‌توان به‌شکل برداری زیر نوشت

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad a \le t \le b \tag{26}$$

$$y(t_0) = c \tag{27}$$

که $y = (y_i)$, $f = (f_i)$, $c = (c_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$

روشهای عددی نظیر اویلر و روشهای رانگ — کوتا را می‌توان برای دستگاههای مرتبه‌ی اول تعمیم داد. برای مثال فرمول اویلر برای مساله‌ی (۲۶) و (۲۷) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$y_{j+1} = y_j + hf(t_j, y_j) \quad , \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

که در آن $y_0 = c$ و $h = \frac{b-a}{N}$

همین‌طور، فرمول رانگ — کوتای مرتبه‌ی چهار برای مساله‌ی بالا چنین است

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_j, y_j)\\
k_2 &= hf\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_1}{2}\right)\\
k_3 &= hf\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_2}{2}\right)\\
k_4 &= hf(t_j + h, y_j + k_3)\\
j &= 0, 1, \dots, N-1
\end{aligned}$$

دستگاههای دو معادله با دو مجهول

در حالت خاص یک دستگاه دو معادله با دو مجهول $x = x(t)$ و $y = y(t)$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y) \ , \quad x(t_0) = x_0$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t, x, y) \ , \quad y(t_0) = y_0$$

که $t_0 = a$ و $a \le t \le b$.

فرمولهای اویلر و رانگِ — کوتا برای این دستگاه عبارتند از

اویلر:

$$x_{j+1} = x_j + hf(t_j, x_j, y_j)$$

$$y_{j+1} = y_j + hg(t_j, x_j, y_j)$$

رانگِ — کوتای مرتبه‌ی دو:

$$x_{j+1} = x_j + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$$

$$k_1 = hf(t_j, x_j, y_j) \qquad l_1 = hg(t_j, x_j, y_j)$$

$$k_2 = hf(t_j + h, x_j + k_1, y_j + l_1) \quad l_2 = hg(t_j + h, x_j + k_1, y_j + l_1)$$

رانگِ — کوتای مرتبه‌ی چهار:

$$x_{j+1} = x_j + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

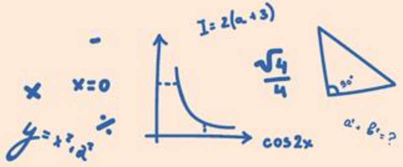
$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

$$k_1 = hf(t_j, x_j, y_j) \qquad l_1 = hg(t_j, x_j, y_j)$$

$$k_2 = hf(t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_1}{2}, y_j + \frac{l_1}{2}) \quad l_2 = hg(t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_1}{2}, y_j + \frac{l_1}{2})$$

$$k_3 = hf(t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_2}{2}, y_j + \frac{l_2}{2}) \quad l_3 = hg(t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_2}{2}, y_j + \frac{l_2}{2})$$

$$k_4 = hf(t_j + h, x_j + k_3, y_j + l_3) \quad l_4 = hg(t_j + h, x_j + k_3, y_j + l_3)$$



مثال ۸ — جواب مساله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را با روشهای اویلر و $(RK4)$ و با طول گام $h = 0.1$ به‌دست آورید.

$$\frac{dx}{dt} = -2x - 3y + t\ , \quad x(0) = 6$$

$$\frac{dy}{dt} = x + 2y + 3\ , \qquad y(0) = -5$$

که $0 \leq t \leq 1$

نتایج با روش اویلر در جدول ۱، و با روش $(RK4)$ در جدول ۲ نشان داده شده است.

جدول ۱

t_k	x_k	y_k	x	y
۰.۲	۶.۵۸۰۰۰۰	−۵.۱۹۰۰۰۰	۶.۵۶۱۲۰	−۵.۱۷۹۹۳
۰.۴	۷.۰۸۳۸۰	−۵.۳۳۹۹۰	۷.۰۴۸۶۱	−۵.۳۱۸۹۳
۰.۶	۷.۵۱۷۰۶	−۵.۴۴۸۵۰	۷.۴۶۵۷۲	−۵.۴۱۴۵۳
۰.۸	۷.۸۸۲۵۰	−۵.۵۱۲۹۷	۷.۸۱۳۲۴	−۵.۴۶۲۵۶
۱	۸.۱۸۰۱۱	−۵.۵۲۸۷۹	۸.۰۸۹۰۴	−۵.۴۵۶۹۲

جدول ۲

t_k	x_k	y_k	x	y
۰.۲	۶.۵۶۱۲۰	−۵.۱۷۹۹۳	۶.۵۶۱۲۰	−۵.۱۷۹۹۳
۰.۴	۷.۰۴۸۶۱	−۵.۳۱۸۹۳	۷.۰۴۸۶۱	−۵.۳۱۸۹۳
۰.۶	۷.۴۶۵۷۲	−۵.۴۱۴۵۴	۷.۴۶۵۷۲	−۵.۴۱۴۵۳
۰.۸	۷.۸۱۳۲۴	−۵.۴۶۲۵۷	۷.۸۱۳۲۴	−۵.۴۶۲۵۶
۱	۸.۰۸۹۰۴	−۵.۴۵۶۹۲	۸.۰۸۹۰۴	−۵.۴۵۶۹۲

جواب تحلیلی مساله چنین است

$$x = 8 + 2t - \frac{1}{2}e^{t} - \frac{3}{2}e^{-t}$$

$$y = -6 - t + \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t}$$

با مقایسه جوابهای واقعی و تقریبی در دو جدول ، برتری روش رانگِ — کوتای مرتبه‌ی چهار از لحاظ دقت بر روش اویلر روشن می‌شود.

مثال ۹ — جواب مساله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را با روش رانگ — کوتای مرتبه‌ی چهار به‌دست آورید.

$$y'' + (y')^3 - 8xy = 2, \quad 0 \le x \le 1$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

حل — قرار می‌دهیم $y' = z$ ، آنگاه دستگاه زیر را خواهیم داشت

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z \\ \frac{dz}{dx} = 2 - z^3 + 8xy, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0 \end{cases}$$

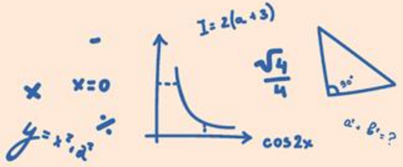
اگر بازه‌ی $[0, 1]$ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، آنگاه $h = 0.1$ ، و نتایج کامپیوتری به‌صورت جدول زیر است

x_i	y_i	z_i	y
۰.۲	۰.۰۴۰۰۴	۰.۴۰۰۱۳	۰.۰۴۰۰۰
۰.۴	۰.۱۶۰۰۸	۰.۸۰۱۸۱	۰.۱۶۰۰۰
۰.۶	۰.۳۶۰۵۶	۱.۲۰۶۰۷	۰.۳۶۰۰۰
۰.۸	۰.۶۴۱۷۵	۱.۶۱۱۱۵۰	۰.۶۴۰۰۰
۱	۱.۰۰۳۵۵	۲.۰۱۵۹۳	۱.۰۰۰۰۰

توجه کنید که جواب تحلیلی مساله $y = x^2$ است، و در جدول مقادیر این تابع و مقادیر تقریبی جهت مقایسه نشان داده شده است.

۹.۵ معادلات تفاضلی

اگر y_n تابعی از متغیر صحیح n باشد، معادله‌ای برحسب y_n ، y_{n+1} ، y_{n+2} ، ... یک رابطه‌ی بازگشتی یا معادله‌ی تفاضلی نامیده می‌شود .
مرتبه‌ی یک معادله‌ی تفاضلی، اختلاف بین بزرگترین و کوچکترین اندیس متغیر وابسته است .



معادلات خطی

شکل کلی معادلات تفاضلی خطی مرتبه‌ی اول، مرتبه‌ی دوم و مرتبه‌ی سوم به‌ترتیب عبارتند از:

$$a_n y_{n+1} + b_n y_n = f_n;$$

$$a_n y_{n+2} + b_n y_{n+1} + c_n y_n = f_n;$$

$$a_n y_{n+3} + b_n y_{n+2} + c_n y_{n+1} + d_n y_n = f_n$$

دنباله‌های a_n ، b_n ، c_n و d_n ضرایب معادلات هستند که ثابت یا تنها به n بستگی دارند. دنباله‌ی f_n نیز تنها به n بستگی دارد و تابع ورودی نامیده می‌شود. اگر در هر یک از معادلات بالا، $f_n \equiv 0$ ، معادله همگن و در غیراین صورت ناهمگن است.

مثال ۱۰ — معادلات زیر نمونه‌هایی از معادلات تفاضلی هستند.

(الف) $y_{n+1} - 3y_n = \frac{2}{n+2}$

(ب) $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$

(پ) $y_{n+2} - 3y_{n+1} + \frac{1}{n}y_n = n^2$

(ت) $y_{n+3} - 3y_{n+1} + y_n^2 = 3$

معادله‌ی (الف) مرتبه‌ی اول خطی، معادله‌ی (ب) مرتبه‌ی دوم خطی همگن با ضرایب ثابت، معادله‌ی (پ) مرتبه‌ی دوم خطی همگن با ضرایب متغیر، و معادله‌ی (ت) مرتبه‌ی دوم غیرخطی است.

معادلات خطی مرتبه‌ی دوم همگن با ضرایب ثابت

این معادلات به‌شکل کلی زیرند

$$ay_{n+2}+by_{n+1}+cy_n=0 \quad (28)$$

نظریه‌ی معادلات تفاضلی خطی مرتبه‌ی دوم خیلی شبیه به معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی دوم است. لذا در حل این معادلات از روشهای مشابه‌ی حل معادلات دیفرانسیل استفاده خواهیم نمود. در این‌جا جوابهای (۲۸) به‌صورت $y_n=\lambda^n \quad (29)$ هستند. برای یافتن λ ، (۲۹) را در (۲۸) جایگزین می‌کنیم، نتیجه می‌شود

$$a\lambda^2+b\lambda+c=0 \quad (30)$$

معادله‌ی (۳۰) را معادله‌ی کمکی می‌نامند. اگر λ_1 و λ_2 جوابهای (۳۰) باشند، آنگاه λ_1^n و λ_2^n جوابهای (۲۸) هستند، و بسادگی می‌توان دید که هر ترکیب خطی از این دو جواب نیز جواب است. اگر λ_1 و λ_2 متمایز باشند، آنگاه

$$y=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n$$

که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواه هستند، جواب عمومی معادله (۲۸) است.

اگر $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ ، آنگاه جواب عمومی (۲۸) چنین است

$$y_n=c_1\lambda^n+c_2 n\lambda^n$$

مثال ۱۱ — جواب عمومی معادله‌ی زیر را بیابید.

$$y_{n+2}-5y_{n+1}+6y_n=0$$

حل — معادله‌ی کمکی چنین است $\lambda^2-5\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda_1=2 \ , \ \lambda_2=3$

پس جواب عمومی $y_n=c_1 2^n+c_2 3^n$

حال فرض کنید بخواهیم جوابی برای این معادله به‌دست آوریم که در شرایط $y_0=3$ و $y_1=8$ صدق کند. در این‌صورت c_1 و c_2 باید در دستگاه زیر صدق کنند.

$$c_1+c_2=3$$

$$2c_1+3c_2=8$$

جواب این معادلات عبارت‌است از $c_1=1$ و $c_2=2$. لذا

$$y_n=2^n+2.3^n$$

مثال ۱۲ — جواب معادله‌ی زیر را با شرایط داده شده، بیابید.

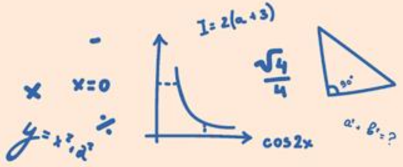
$$y_{n+2}-4y_{n+1}+4y_n=0 \ , \ y_0=1 \ , \ y_1=3 \ , \ n\geq 0$$

حل — داریم $\lambda^2-4\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=2$

جواب عمومی $y_n=c_1 2^n+c_2 n2^n$

از شرایط اولیه نتیجه می‌شود که $c_1=1$ و $c_2=\frac{1}{2}$ بنابراین

$$y_n=2^n+\frac{1}{2}n2^n$$



مثال ۱۳ — جواب عمومی معادله‌ی زیر را بیابید.

$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 0$

حل — داریم $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1+i \;,\; \lambda_2 = 1-i$

شکل قطبی اعداد λ_1 و λ_2 چنین اند

$\lambda_1 = re^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \;,\; \lambda_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

پس جواب عمومی عبارت‌است از

$$y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n =$$

$$(\sqrt{2})^n \left[c_1\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\ \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) + c_2\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i\ \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\right]$$

و می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت

$$y_n = (\sqrt{2})^n \left(A\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + B\ \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

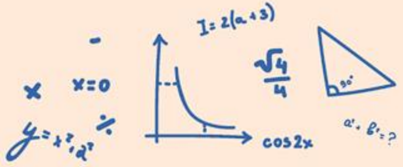
که A و B ثابتهای دلخواه هستند.

معادلات خطی مرتبه‌ی دوم ناهمگن با ضرایب ثابت

این معادلات به‌صورت کلی زیرند

$$ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = f\ ,\ n \geq 0 \qquad (31)$$

همانند معادلات دیفرانسیل برای یافتن جواب عمومی (۳۱)، ابتدا جواب عمومی معادله‌ی همگن متناظر، یعنی معادله‌ی $ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = 0$ را به‌دست می‌آوریم، و آن را با یک جواب خصوصی معادله‌ی (۳۱) جمع می‌کنیم.



مثال ۱۴ — جواب عمومی معادله‌ی زیر را بیابید.

$y_{n+2} - 4y_n = 2.3^n + 5^n \quad n \geq 0$

حل — جواب عمومی معادله‌ی همگن چنین است

$$y_n^{(g)} = c_1\ 2^n + c_2\ (-2)^n$$

جواب خصوصی را با توجه به تابع طرف دوم به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$y_n^{(p)} = A\ 3^n + B\ 5^n$$

با جایگزین کردن $y_n^{(p)}$ در معادله‌ی داده شده خواهیم داشت

$$A\ 3^{n+2} + B\ 5^{n+2} - 4(A\ 3^n + B\ 5^n) = 2.3^n + 5^n$$

یا برحسب 3^n و 5^n داریم

$$(9A - 4A)3^n + (25B - 4B)5^n = 2.3^n + 5^n$$

از مقایسه‌ی ضرایب در دو طرف نتیجه می‌شود $A = \frac{2}{5}\ ,\ B = \frac{1}{21}$

پس جواب خصوصی چنین است $y_n^{(p)} = (\frac{2}{5})3^n + (\frac{1}{21})5^n$

و جواب عمومی

$$y_n = y_n^{(g)} + y_n^{(p)} = c_1\ 2^n + c_2\ (-2)^n + (\frac{2}{5})3^n + (\frac{1}{21})5^n$$

مثال ۱۵ — جواب عمومی معادله‌ی زیر را بیابید.

$$y_{n+۲} - ۵y_{n+۱} + ۶y_n = ۳n + ۱$$

حل — در مثال (۱۱) جواب عمومی را به‌صورت زیر به‌دست آوردیم.

$$y_n^{(g)} = c_۱ ۲^n + c_۲ ۳^n$$

جواب خصوصی به‌شکل زیر است

$$y_n^{(p)} = An + B$$

در معادله‌ی داده شده قرار می‌دهیم، خواهیم داشت

$$A(n+۲) + B - ۵A(n+۱) - ۵B + ۶An + ۶B = ۳n + ۱$$

از مقایسه‌ی ضرایب داریم

$$۲A = ۳,\ -۳A + ۲B = ۱ \quad \Rightarrow A = \frac{۳}{۲}\ ,\quad B = \frac{۱۱}{۴}$$

پس جواب عمومی چنین است

$$y_n = c_۱ ۲^n + c_۲ ۳^n + \frac{۳}{۲}n + \frac{۱۱}{۴}$$

تمرین — دنباله‌ی $\{y_n\}_{n=۰}^{\infty}$ تعریف شده با رابطه‌ی بازگشتی

$$y_n = y_{n-۱} + y_{n-۲} \quad , n \geq ۲$$

دنباله‌ی فیبوناچی نامیده می‌شود. با فرض $y_۰ = ۱$ و $y_۱ = ۱$ ، y_n را محاسبه کنید.

۱۰.۵ همگرایی و پایداری این قسمت حذف است

پایان فصل پنجم