چندجمله‌ای ها و توابع ماتریسی :

در حالت کلی یک چندجمله‌ای ماتریسی از یک ماتریس مربعی به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_n A^n$$

که α ها اسکالر هستند.

مثال) اگر $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ و $f(x) = 2x^3 + 3x - 4$ ، $f(A)$ ؟

$$f(A) = 2A^3 + 3A - 4I = \cdots$$

قضیه کیلی همیلتون : هر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ در معادله مشخصه خود صدق می‌کند.

مثال) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$\rightarrow A^2 - 3A + 2I = 0_{2\times 2}$$

نکته) یکی از کاربردهای قضیه فوق محاسبه معکوس ماتریس است :

$$A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$$

$$\Rightarrow A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A = -\alpha_0 I$$

$$\Rightarrow A\left(A^{n-1} + \alpha_{n-1} A^{n-2} + \cdots + \alpha_1 I\right) = -\alpha_0 I$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\alpha_0} A\left(A^{n-1}+\alpha_{n-1}A^{n-2}+\dots+\alpha_1 I\right) = I = AA^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0}\left(A^{n-1}+\alpha_{n-1}A^{n-2}+\dots+\alpha_1 I\right)$$

مثال) $A=\begin{bmatrix}6&16\\-1&-4\end{bmatrix}$ ، A^{-1} ؟!

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda-6 & -16\\ 1 & \lambda+4\end{vmatrix} = \lambda^2-2\lambda-8$$

$$A^2-2A-8I=0 \Rightarrow A^2-2A=8I$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}\left(A^2-2A\right)=I=AA^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}A\left(A-2I\right)=AA^{-1} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{8}\left(A-2I\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}0.5&2\\-\frac{1}{8}&-\frac{3}{4}\end{bmatrix} \longleftarrow \frac{1}{8}\begin{bmatrix}4&16\\-1&-6\end{bmatrix}$$

محاسبه چندجمله ای های ماتریسی:

در حالت کلی یک چندجمله‌ای مرتبه m ماتریس بصورت زیر است:

$$P(A)=\alpha_0 I+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2+\dots+\alpha_m A^m$$

راه حل ۱: جایگذاری ← طولانی ...

راه حل ۲: استفاده از قضیه کیلی همیلتون

فرض کنید $p(\lambda)$ یک چندجمله‌ای مرتبه m و $Q(\lambda)$ چندجمله‌ای مشخصه ماتریس $A_{n\times n}$ باشد: $\frac{p(\lambda)}{Q(\lambda)} = ?$

$$\frac{p(\lambda)}{Q(\lambda)} = F(\lambda) + \frac{R(\lambda)}{Q(\lambda)}$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = F(\lambda)Q(\lambda) + R(\lambda)$$

حال اگر $\lambda = \lambda_i$ یک مقدار ویژه A باشد $Q(\lambda_i)=0$ خواهد بود و داریم:

$$p(\lambda_i) = R(\lambda_i)$$

$$\xrightarrow{\text{تعمیم}} \underbrace{p(A)}_{\text{مرتبه } m} = \underbrace{R(A)}_{\text{مرتبه } n-1}$$

یعنی بجای محاسبه $p(A)$ از مرتبه m، $R(A)$ از مرتبه $n-1$ را محاسبه کنید.

مثال) برای $A=\begin{pmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{pmatrix}$ ،

$$P(A)=A^5+16A^4+32A^3+16A^2+4A+I$$

را محاسبه کنید.

راه یک) جایگذاری ← ...

راه دو) استفاده از قضیه کیلی همیلتون:

↓

روش یک) تقسیم:

۱- بدست آوردن $Q(\lambda)$

۲- تقسیم $\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}$ ، باقیمانده $R(\lambda)$

۳- $P(A)=R(A)$

* روش دو) مرتبه $R(\lambda)$ ، $n-1$ است:

$$R(\lambda)=c_1\lambda+c_0$$

$$|\lambda I-A|=0 \longrightarrow \begin{vmatrix}\lambda-6 & -16\\ 1 & \lambda+4\end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = ۴ \quad , \quad \lambda_۲ = -۲$

$P(\lambda_i) = R(\lambda_i) \longrightarrow$

$\lambda_1 = ۴ \longrightarrow ۴c_1 + c_0 = P(۴) = ۷۴۴۱$

$\lambda_۲ = -۲ \longrightarrow -۲c_1 + c_0 = P(-۲) = ۲۵$

$\Rightarrow \begin{matrix} c_0 = ۲۴۹۷ \\ c_1 = ۱۲۳۶ \end{matrix} \Rightarrow R(\lambda) = ۱۲۳۶\lambda + ۲۴۹۷$

$P(A) = R(A) = ۱۲۳۶A + ۲۴۹۷I = \ldots$

$\Rightarrow ۱۲۳۶\begin{bmatrix} ۶ & ۱۶ \\ -۱ & -۴ \end{bmatrix} + ۲۴۹۷\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹۹۱۳ & ۱۹۷۷۶ \\ -۱۲۳۶ & -۲۴۴۷ \end{bmatrix}$

تمرین) معکوس ماتریس A و $P(A) = A^۵ + ۲A^۳ + ۴A + ۸I$

را محاسبه کنید.

$A = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۱ & ۸ \end{bmatrix}$

مثال) $P(A) = A^5 + 16A^4 + 32A^3 + 16A^2 + 4A + I$ را برای $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ را حساب کنید.

$$R(\lambda) = c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

چون $\longrightarrow \lambda_{1,2,3} = 2$

$$P(\lambda_i) = R(\lambda_i)$$

$$\lambda_1 = 2 \longrightarrow 4c_2 + 2c_1 + c_0 = P(2)$$

چون مقادیر ویژه تکراری است معادله جدیدی بدست نمی آید؛ باید از مشتقات $R(\lambda)$ استفاده کنیم:

$$\dot{R}(\lambda_1) = \dot{P}(\lambda_1) \longrightarrow 2c_2\lambda + c_1 \longrightarrow 4c_2 + c_1 = \dot{P}(2)$$

$$\ddot{R}(\lambda_1) = \ddot{P}(\lambda_1) \longrightarrow 2c_2 = \ddot{P}(2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4c_2 + 2c_1 + c_0 = 617 \\ 4c_2 + c_1 = 1044 \\ 2c_2 = 1344 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} c_0 &= -4159 \\ c_1 &= -1644 \\ c_2 &= 672 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R(\lambda) = ۶۷۲\lambda^{۲} - ۱۲۴۴\lambda - ۴۱۵۹$$

$$\Rightarrow P(A) = R(A) = ۶۷۲A^{۲} - ۱۲۴۴A - ۴۱۵۹I = ۰$$

محاسبه توابع ماتریسی :

A یک ماتریس است ← e^{A} یا $\sin(A)$ ؟!