شبکه‌های عصبی و یادگیری عمیق

دکتر صفابخش

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی کامپیوتر

رضا آدینه پور ۴۰۲۱۳۱۰۵۵

تمرین اول
شبکه Perceptron و Adalin

۲ فروردین ۱۴۰۳

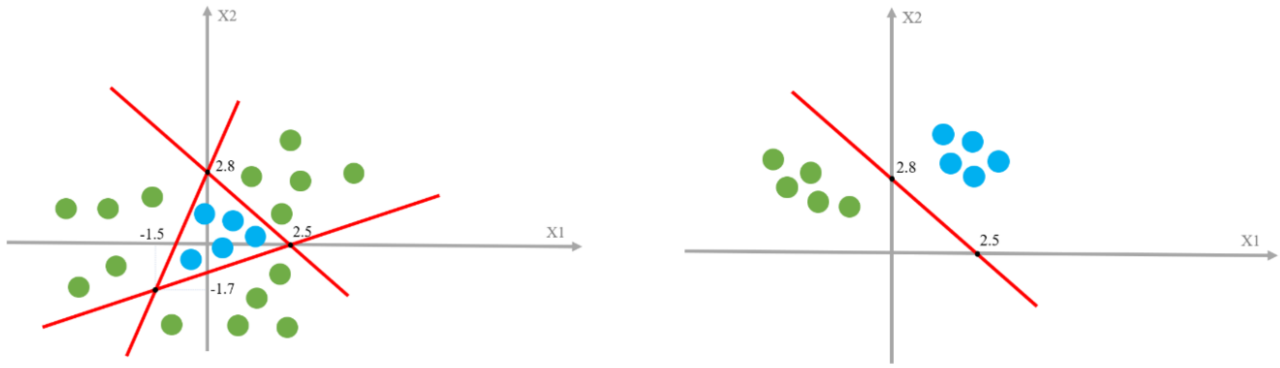
شبکه‌های عصبی و یادگیری عمیق

تمرین اول

رضا آدینه پور ۴۰۲۱۳۱۰۵۵

سوال اول - نظری

همانگونه که در کلاس درس آشنا شده‌اید، واحد پردازشی پرسپترون و آدالاین امکان دریافت ورودی، توان‌های متعدد آن و حاصل ضرب ورودی ها را داشته و می‌تواند مسئله دسته‌بندی خطی را حل نمایند. در این سوال، قصد بدست آوردن وزن‌های یک نرون پردازشی پرسپترونی را به صورت نظری و با محاسبات دستی داریم.



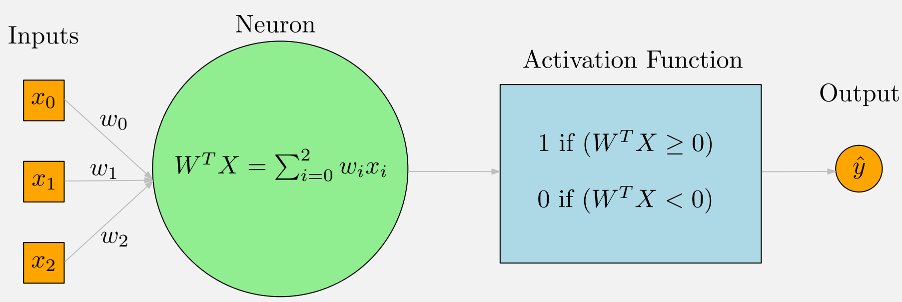
شکل ۱-a شکل ۱-b

شکل ۱: مسئله مورد بحث

۱. شکل a-1 را برای دسته بندی مسئله دودویی درنظر بگیرید. معماری نورون مورد نظر را توضیح داده و وزن‌های آن را بدست آورید.

پاسخ

به دلیل آنکه داده های این قسمت جداپذر خطی هستند، می‌توان برای طبقه بندی آنها، از شبکه پرسپترون تک لایه استفاده کرد.
معماری این شبکه به صورت «شکل ۲» است.



شکل ۲: معماری شبکه پرسپترون تک لایه

پاسخ

در این شبکه، ورودی/خروجی ها با مربع های نارنجی، نورون ها با دایره سبز و تابع فعال ساز با مربع آبی نشان داده شده است. تعداد دیتا ورودی شبکه ۲ است. x_1 و x_2. بایاس این شبکه با x_0 نشان داده شده است. وزن های شبکه نیز با w نشان داده شده است. بنابر این بردار ورودی و وزن‌های شبکه به صورت زیر است:

$$X = \begin{bmatrix} x_0 = 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

طبق تئوری شبکه‌های عصبی می‌دانیم خروجی نرون به صورت زیر محاسبه می‌شود: (در اینجا برای انجام محاسبات ساده، تابع فعال‌ساز درنظر گرفته نشده است)

$$\hat{y} = W^T X = \sum_{i=0}^{2} w_i x_i = w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 \xrightarrow{x_0=1} w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2$$

طبق شکل a-1 دو نقطه از خط جدا کننده دو کلاس را داریم. بنابراین می‌توان معادله خط را به صورت زیر نوشت. می‌دانیم معادله خط به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

که در آن m شیب خط است و به صورت زیر $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تعریف می‌شود. با جاگذاری یک از نقاط در معادله خط، می‌توان معادله خط را بدست آورد.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.8 \end{bmatrix}$$

$$m = \frac{2.8 - 0}{0 - 2.5} = -1.12 \rightarrow y - 0 = -1.12(x - 2.5) \rightarrow \boxed{y = -1.12x + 2.8}$$

حالا اگر معادله خروجی نورون را به صورت زیر مرتب کنیم، می‌توان از مقایسه با مقادله خط بدست آمده وزن‌های شبکه را تعیین کرد.

$$x_1 = \frac{-w_2}{w_1} x_2 - \frac{w_0}{w_1}, \quad x_2 = \frac{-w_1}{w_2} x_1 - \frac{w_0}{w_2}$$

در اینجا به دلیل آنکه دو معادله و ۳ مجهول (w_0, w_1, w_2) داریم، نیاز است که یکی از وزن ها را فرض کرده و دو وزن دیگر را بدست آورد.

$$\frac{-w_2}{w_1} = -1.12 \rightarrow w_2 = 1.12 w_1$$
$$\frac{-w_0}{w_1} = 2.8 \rightarrow w_0 = -2.8 w_1$$
$$\rightarrow \begin{cases} w_2 - 1.12 w_1 = 0 \\ -2.8 w_1 - w_0 = 0 \end{cases} \quad \text{assume} \quad w_0 \quad = 2.8 \rightarrow w_1 = -1, w_2 = -1.12$$

ذکر این نکته الزامیست که این جواب، یکتا نمی‌باشد و برحسب اینکه مقدار w_0 را چه انتخاب کنیم، مقدار ۲ وزن دیگر متفاوت می‌شود.

۲. حال شکل b-1 را درنظر بگیرید. چرا مسئله جداپذیر خطی نیست؟ چگونه می‌توان آن را در قالب حل چند مسئله خطی حل نمود؟ معماری پیشنهادی خودتان را رسم و وزن‌های موجود در آن را با انجام محاسبات بدست آورید. معماری شما می‌تواند حاصل از کنار هم چیدن و پشت هم چیدن یک یا چند نورون پرسپترونی باشد.

پاسخ

به مسائلی جداپذیر خطی گفته می‌شود که بتوان داده‌ها (کلاس‌ها) را با استفاده از فقط یک خط از هم جدا کرد. در این مثال، دو کلاس آبی و سبز را نمی‌توان فقط با یک خط از هم جدا کرد. بنابراین این مسئله **جداپذیر خطی نمی‌باشد.** برای حل این مسئله، چندین روش وجود دارد که در ادامه آنها را توضیح خواهم داد.

(آ) **افزایش ابعاد ویژگی های مسئله:**
یعنی در این مثال که مسئله مورد بحث ما دو بعدی است، یک بعد به آن اضاف کنیم و آن را به عنوان یک مسئله ۳ بعدی حل کنیم و تلاش کنیم که یک صفحه برای جدا کردن دو کلاس پیدا کنیم.

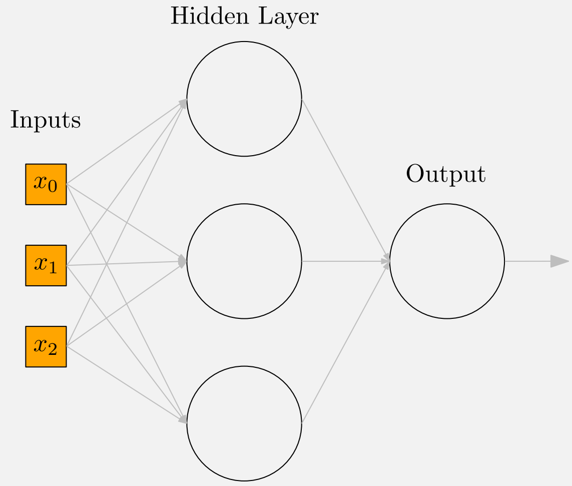
(ب) **دادن ورودی هایی با توان بالا به عنوان ورودی شبکه:**
در صورتی می‌توان از این روش استفاده کرد که مقدار دقیق تمام نمونه ها را داشته باشیم. در این صورت می‌توان ورودی ها را به توان های بالا (۲ و ۳ و...) رساند و امیدوار باشیم فضای قرارگیری ویژگی های جدید در صفحه به صورت جداپذیر خطی باشد. «این کار در سوال دوم همین سری تمرین انجام شده است و با به توان ۲ رساندن ویژگی های ورودی شبکه، مسئله ای که جداپذیر خطی نبود به جداپذیر خطی تبدیل می‌شود.» در این مسئله به دلیل نداشتن موقعیت دقیق نمونه های هرکلاس نمی‌توان از این روش استفاده کرد.

(ج) **اضاف کردن لایه مخفی:**
در اضاف کردن تعداد لایه های مخفی شبکه، آزاد هستیم اما باید به این نکته توجه داشت که اگر بیشتر از یک لایه مخفی به شبکه اضاف کنیم، حل مسئله از نظر خطی بودن خارج شده و نواحی تصمیم گیری شامل خط راست نمی‌شود و نواحی پیچیده تری مانند منحنی ها را در بر می‌گیرد. اما اگر فقط یک لایه مخفی ۳ نورونی به شبکه اضاف کنیم، می‌توان مسئله ای که ذاتا جداپذیر خطی نیست را به وسیله ۳ خط جدا کننده که تعداد این خط ها برابر است با تعداد نورون های لایه مخفی، حل نمود. ساختار این مدل در «شکل ۳» آورده شده است.

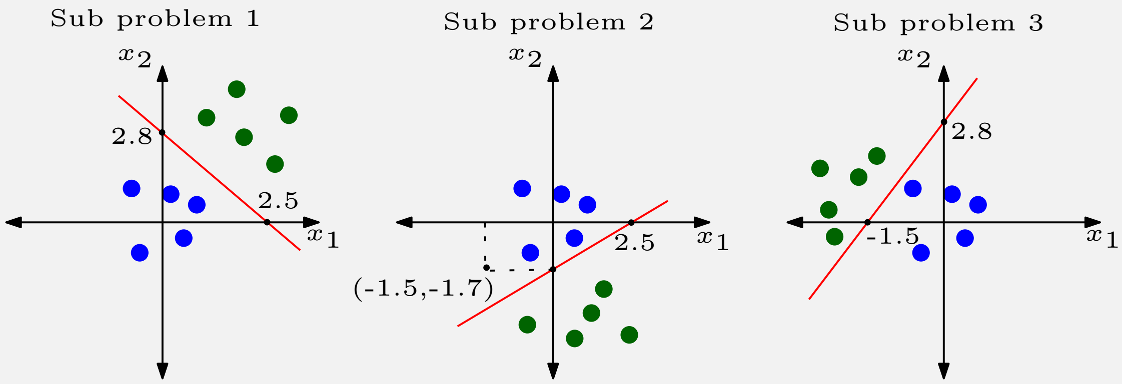
اما مشکلی که وجود دارد آن است که در صورت سوال از ما خواسته شده وزن های شبکه را بدست آوریم، اگر از این ساختار برای حل استفاده کنیم، به دلیل نداشتن مقدار ورودی ها نمی‌توان ۳ وزن لایه متصل به خروجی را بدست آورد.

(د) **شکستن مسئله به ۳ زیرمسئله خطی:**
برای حل این سوال از این روش استفاده شده است. در قسمت قبل دیدیم که یک نورون پرسپترونی می‌تواند یک خد جدا کننده در صفحه رسم کنید. در این مثال، برای جدا کردن این دو کلاس به ۳ خط نیاز داریم. پس داده‌های ورودی مسئله را به ۳ بخش جداپذیر خطی تقسیم می‌کنیم. «شکل ۴» اکنون می‌توان همانند قسمت قبل، وزن ها را برای هر سه زیرمسئله بدست آورد. در این قسمت ساختار و معماری شبکه همان ساختار قسمت a-1 است. «شکل ۲»

پاسخ



شکل ۳: معماری شبکه ۳ لایه پیشنهادی



شکل ۴: داده های شکسته شده به سه بخش

زیر مسئله شماره ۱ در قسمت قبل حل شده است و وزن های آن به صورت زیر بدست آورده شد:

$$w_0 = 2.8, \quad w_1 = -1, \quad w_2 = -1.12$$

برای دو زیر مسئله دیگر هم، همانند قسمت قبل وزن‌ها را بدست می‌اوریم.

$$\begin{aligned}
P_1 = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0 \end{bmatrix} P_2 &= \begin{bmatrix} -1.5 \\ 1.7 \end{bmatrix} \rightarrow m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1.5 - 2.5}{-1.7 - 0} = \frac{-4}{-1.7} = \boxed{2.35} \\
y - 0 &= 2.35(x - 2.5) \rightarrow \boxed{y = 2.35x - 5.88} \\
\rightarrow x_1 &= \frac{-w_2}{w_1} x_2 - \frac{w_0}{w_1} \rightarrow \begin{cases} \frac{-w_2}{w_1} = 2.35 \rightarrow w_2 = -2.35 w_1 \\ \frac{-w_0}{w_1} = -5.88 \rightarrow w_0 = 5.88 w_1 \end{cases} \\
\text{Assume} \qquad w_0 &= 5.88 \rightarrow w_1 = 1, w_2 = -2.35
\end{aligned}$$

پاسخ

$$
\begin{aligned}
P_1 = \begin{bmatrix}-1.5\\-1.7\end{bmatrix} P_2 &= \begin{bmatrix}0\\2.8\end{bmatrix} \rightarrow m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0+1.5}{2.8+1.7} = \frac{1.5}{4.5} = \boxed{0.33}\\
y - 2.8 &= 0.33(x-0) \rightarrow \boxed{y = 0.33x + 2.8}\\
\rightarrow x_1 &= \frac{-w_2}{w_1}x_2 - \frac{w_0}{w_1} \rightarrow \begin{cases} \frac{-w_2}{w_1} = 0.33 \rightarrow w_2 = -0.33w_1\\ \frac{-w_0}{w_1} = 2.8 \rightarrow w_0 = -2.8w_1 \end{cases}\\
\text{Assume} \quad w_0 &= 2.8 \rightarrow w_1 = -1, w_2 = 0.33
\end{aligned}
$$

۳. شگرد هسته[1] چیست و چگونه می‌توان قسمت قبل را با آن حل نمود؟ توضیح دهید.

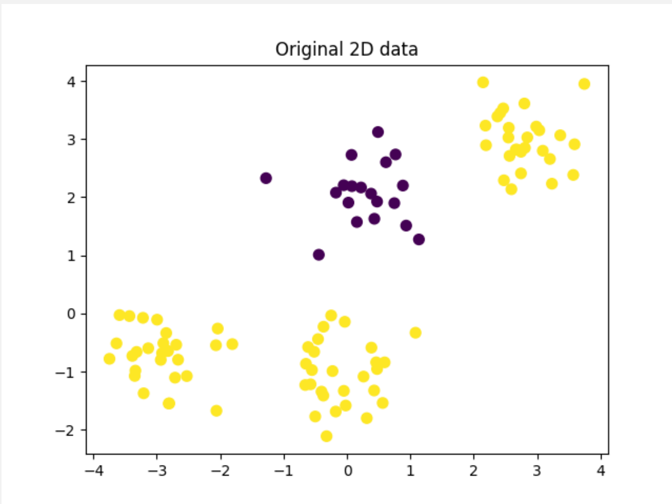
پاسخ

این تکنیک به عنوان یکی از روش های حل مسئله قبل معرفی شد و توضیح مختصری در مورد آن داده شد. در این قسمت توضیحات کامل آن را بیان خواهیم کرد.

روش شگرد هسته، یکی از چندین روش موجود برای حل مسائل جداناپذیر خطی با روش های خطی است. بدین صورت که اگر ابعاد ویژگی های مسئله را R در نظر بگیریم و داده ها در R بعد جداناپذیر خطی باشند، ممکن است با افزایش بعد ویژگی ها (R+n) و اضاف کردن ویژگی ای جدید، داده ها جداپذیر خطی شوند و بتوان مسئله را با یک شبکه خطی حل نمود.

در این سوال، ویژگی های ورودی ۲ بعدی هستند و داده ها در ۲ بعد جداناپذیر خطی هستند. بنابر این می‌توان یک ویژگی جدید در بعد سوم به ورودی ها اضاف کرد و خروجی را نمایش داد تا شاید داده ها جداپذیر خطی شوند.

این کار را انجام دادیم و اثباط کردیم که با افزایش بعد این مسئله، داده ها جداپذیر خطی می‌شوند. شکل زیر را به عنوان داده های ورودی مسئله در نظر بگیریم:



شکل ۵: داده های ورودی مسئله در ۲ بعد

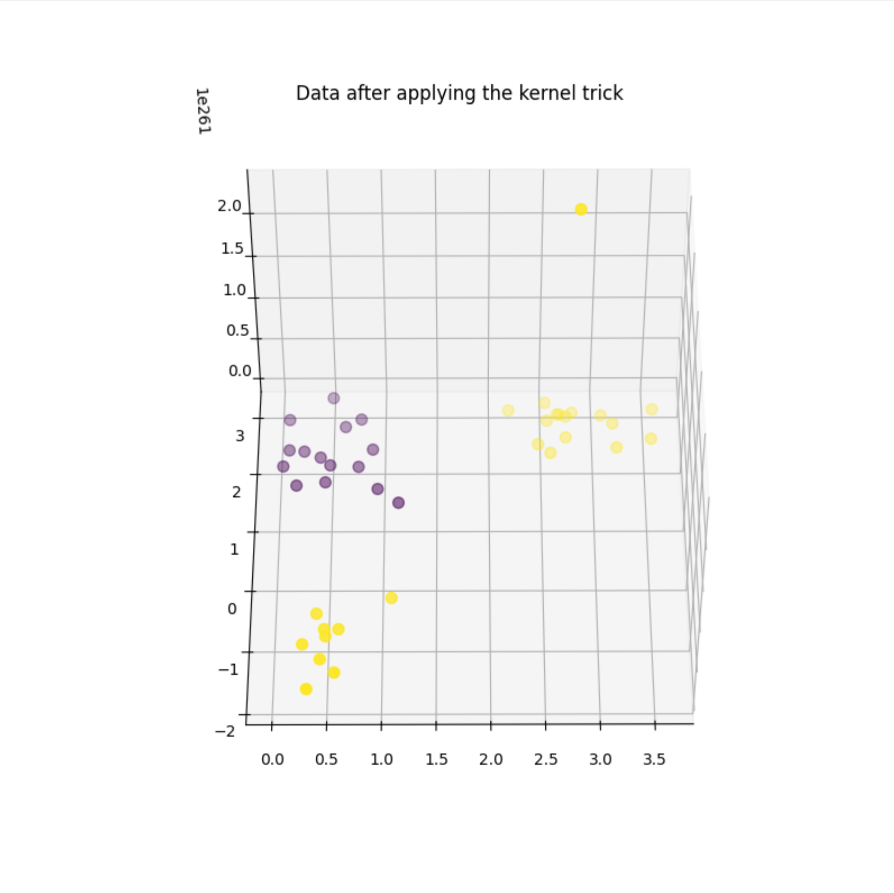
برای افزودن بعد سوم به این داده های ۲ بعدی، تابع زیر را نوشته ایم.

[1] Kernel trick

پاسخ

```
def kernel_trick(x):
return np.append(x, np.expand_dims(x[:, 0]**2 ** x[:, 1]**2,
axis=1), axis=1)
```

این تابع ویژگی جدید $(x_0^2)^{x_1^2}$ را به داده های ورودی به عنوان بعد سوم اضافه می‌کند. بنابر در فضای ویژگی جدید، هر نقطه از بردار ویژگی شامل ۳ عضو است. **(این نکته لازم به ذکر است که ویژگی جدید تولید شده، با سعی و خطا بدست آمده است و می‌توان به جای آن هر ویژگی جدید دیگری را قرار داد)**
پس از رسم فضای ویژگی جدید، مشاهده می‌شود که داده ها جداپذیر خطی شده اند و می‌توان آنها را با یک صفحه از هم جدا نمود.



شکل ۶: فضای ویژگی های جدید در ۳ بعد