شبکه‌های عصبی و یادگیری عمیق

دکتر صفابخش

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی کامپیوتر

رضا آدینه پور ۴۰۲۱۳۱۰۵۵

تمرین اول

شبکه Perceptron و Adalin

۴ فروردین ۱۴۰۳

شبکه‌های عصبی و یادگیری عمیق

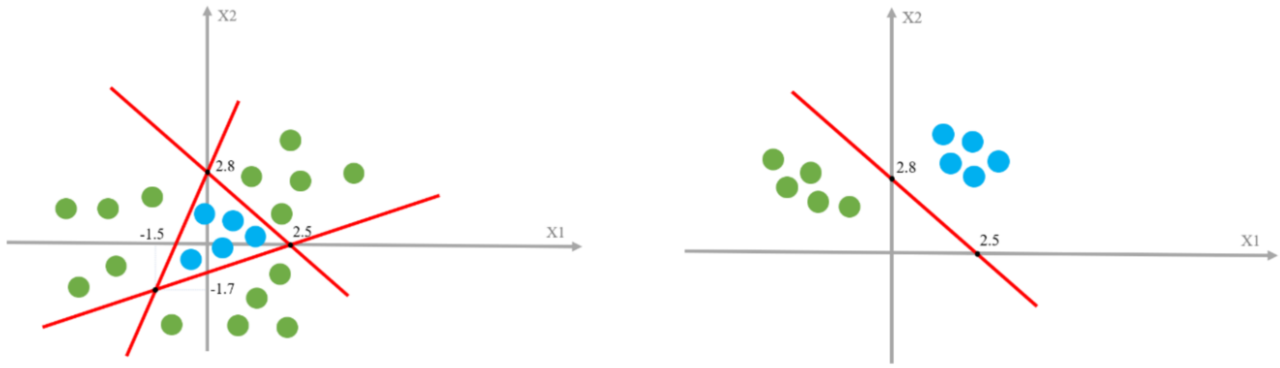
تمرین اول

رضا آدینه پور ۴۰۲۱۳۱۰۵۵

دانشکده مهندسی کامپیوتر

سوال اول - نظری

همانگونه که در کلاس درس آشنا شده‌اید، واحد پردازشی پرسپترون و آدالاین امکان دریافت ورودی، توان‌های متعدد آن و حاصل ضرب ورودی ها را داشته و می‌تواند مسئله دسته‌بندی خطی را حل نمایند. در این سوال، قصد بدست آوردن وزن‌های یک نرون پردازشی پرسپترونی را به صورت نظری و با محاسبات دستی داریم.



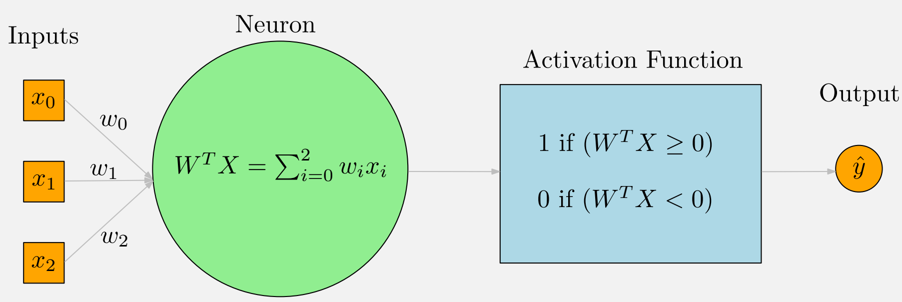
شکل ۱-b　　　　شکل ۱-a

شکل ۱: مسئله مورد بحث

۱. شکل a-1 را برای دسته بندی مسئله دودویی درنظر بگیرید. معماری نورون مورد نظر را توضیح داده و وزن‌های آن را بدست آورید.

پاسخ

به دلیل آنکه داده های این قسمت جداپذر خطی هستند، می‌توان برای طبقه بندی آنها، از شبکه پرسپترون تک لایه استفاده کرد.
معماری این شبکه به صورت «شکل ۲» است.



شکل ۲: معماری شبکه پرسپترون تک لایه

پاسخ

در این شبکه، ورودی/خروجی ها با مربع های نارنجی، نورون ها با دایره سبز و تابع فعال ساز با مربع آبی نشان داده شده است. تعداد دیتا ورودی شبکه ۲ است. x_1 و x_2. بایاس این شبکه با x_0 نشان داده شده است. وزن های شبکه نیز با w نشان داده شده است. بنابر این بردار ورودی و وزن‌های شبکه به صورت زیر است:

$$X = \begin{bmatrix} x_0 = 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

طبق تئوری شبکه‌های عصبی می‌دانیم خروجی نرون به صورت زیر محاسبه می‌شود: (در اینجا برای انجام محاسبات ساده، تابع فعال‌ساز درنظر گرفته نشده است)

$$\hat{y} = W^T X = \sum_{i=0}^{2} w_i x_i = w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 \xrightarrow{x_0=1} w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2$$

طبق شکل a-1 دو نقطه از خط جدا کننده دو کلاس را داریم. بنابراین می‌توان معادله خط را به صورت زیر نوشت. می‌دانیم معادله خط به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

که در آن m شیب خط است و به صورت زیر $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تعریف می‌شود. با جاگذاری یک از نقاط در معادله خط، می‌توان معادله خط را بدست آورد.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.8 \end{bmatrix}$$

$$m = \frac{2.8 - 0}{0 - 2.5} = -1.12 \to y - 0 = -1.12(x - 2.5) \to \boxed{y = -1.12x + 2.8}$$

حالا اگر معادله خروجی نورون را به صورت زیر مرتب کنیم، می‌توان از مقایسه با مقادله خط بدست آمده وزن‌های شبکه را تعیین کرد.

$$x_1 = \frac{-w_2}{w_1} x_2 - \frac{w_0}{w_1}, \quad x_2 = \frac{-w_1}{w_2} x_1 - \frac{w_0}{w_2}$$

در اینجا به دلیل آنکه دو معادله و ۳ مجهول (w_0, w_1, w_2) داریم، نیاز است که یکی از وزن ها را فرض کرده و دو وزن دیگر را بدست آورد.

$$\frac{-w_2}{w_1} = -1.12 \to w_2 = 1.12 w_1$$

$$\frac{-w_0}{w_1} = 2.8 \to w_0 = -2.8 w_1$$

$$\to \begin{cases} w_2 - 1.12 w_1 = 0 \\ -2.8 w_1 - w_0 = 0 \end{cases} \quad \text{assume} \quad w_0 \quad = 2.8 \to w_1 = -1, w_2 = -1.12$$

ذکر این نکته الزامیست که این جواب، یکتا نمی‌باشد و برحسب اینکه مقدار w_0 را چه انتخاب کنیم، مقدار ۲ وزن دیگر متفاوت می‌شود.

۲. حال شکل b-1 را درنظر بگیرید. چرا مسئله جداپذیر خطی نیست؟ چگونه می‌توان آن را در قالب حل چند مسئله خطی حل نمود؟ معماری پیشنهادی خودتان را رسم و وزن‌های موجود در آن را با انجام محاسبات بدست آورید. معماری شما می‌تواند حاصل از کنار هم چیدن و پشت هم چیدن یک یا چند نورون پرسپترونی باشد.

پاسخ

به مسائلی جداپذیر خطی گفته می‌شود که بتوان داده‌ها (کلاس‌ها) را با استفاده از فقط یک خط از هم جدا کرد. در این مثال، دو کلاس آبی و سبز را نمی‌توان فقط با یک خط از هم جدا کرد. بنابراین این مسئله **جداپذیر خطی نمی‌باشد.** برای حل این مسئله، چندین روش وجود دارد که در ادامه آنها را توضیح خواهم داد.

(آ) **افزایش ابعاد ویژگی های مسئله:**
یعنی در این مثال که مسئله مورد بحث ما دو بعدی است، یک بعد به آن اضاف کنیم و آن را به عنوان یک مسئله ۳ بعدی حل کنیم و تلاش کنیم که یک صفحه برای جدا کردن دو کلاس پیدا کنیم.

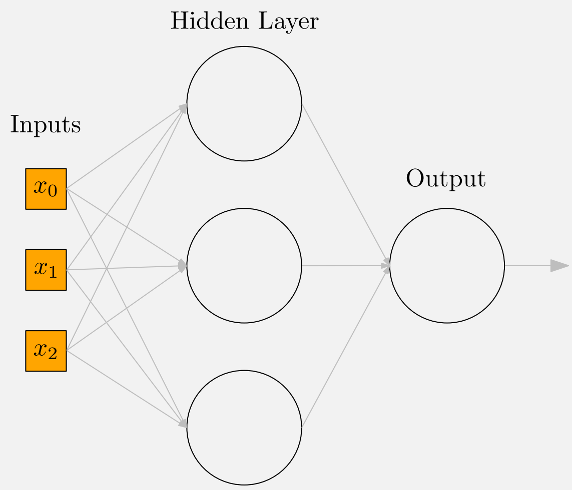
(ب) **دادن ورودی هایی با توان بالا به عنوان ورودی شبکه:**
در صورتی می‌توان از این روش استفاده کرد که مقدار دقیق تمام نمونه ها را داشته باشیم. در این صورت می‌توان ورودی ها را به توان های بالا (۲ و ۳ و...) رساند و امیدوار باشیم فضای قرارگیری ویژگی های جدید در صفحه به صورت جداپذیر خطی باشد. «این کار در سوال دوم همین سری تمرین انجام شده است و با به توان ۲ رساندن ویژگی های ورودی شبکه، مسئله ای که جداپذیر خطی نبود به جداپذیر خطی تبدیل می‌شود.» در این مسئله به دلیل نداشتن موقعیت دقیق نمونه های هرکلاس نمی‌توان از این روش استفاده کرد.

(ج) **اضاف کردن لایه مخفی:**
در اضاف کردن تعداد لایه های مخفی شبکه، آزاد هستیم اما باید به این نکته توجه داشت که اگر بیشتر از یک لایه مخفی به شبکه اضاف کنیم، حل مسئله از نظر خطی بودن خارج شده و نواحی تصمیم گیری شامل خط راست نمی‌شود و نواحی پیچیده تری مانند منحنی ها را در بر می‌گیرد. اما اگر فقط یک لایه مخفی ۳ نورونی به شبکه اضاف کنیم، می‌توان مسئله ای که ذاتا جداپذیر خطی نیست را به وسیله ۳ خط جدا کننده که تعداد این خط ها برابر است با تعداد نورون های لایه مخفی، حل نمود. ساختار این مدل در «شکل ۳» آورده شده است.

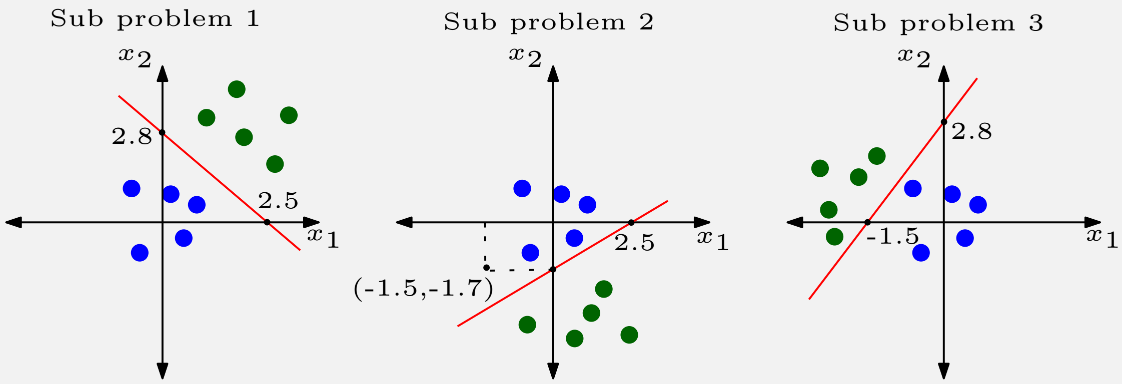
اما مشکلی که وجود دارد آن است که در صورت سوال از ما خواسته شده وزن های شبکه را بدست آوریم، اگر از این ساختار برای حل استفاده کنیم، به دلیل نداشتن مقدار ورودی ها نمی‌توان ۳ وزن لایه متصل به خروجی را بدست آورد.

(د) **شکستن مسئله به ۳ زیرمسئله خطی:**
برای حل این سوال از این روش استفاده شده است. در قسمت قبل دیدیم که یک نورون پرسپترونی می‌تواند یک خد جدا کننده در صفحه رسم کنید. در این مثال، برای جدا کردن این دو کلاس به ۳ خط نیاز داریم. پس داده‌های ورودی مسئله را به ۳ بخش جداپذیر خطی تقسیم می‌کنیم. «شکل ۴» اکنون می‌توان همانند قسمت قبل، وزن ها را برای هر سه زیرمسئله بدست آورد. در این قسمت ساختار و معماری شبکه همان ساختار قسمت a-1 است. «شکل ۲»

پاسخ



شکل ۳: معماری شبکه ۳ لایه پیشنهادی



شکل ۴: داده های شکسته شده به سه بخش

زیر مسئله شماره ۱ در قسمت قبل حل شده است و وزن های آن به صورت زیر بدست آورده شد:

$$w_0 = 2.8, \quad w_1 = -1, \quad w_2 = -1.12$$

برای دو زیر مسئله دیگر هم، همانند قسمت قبل وزن‌ها را بدست می‌اوریم.

$$\begin{aligned}
P_1 = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0 \end{bmatrix} P_2 &= \begin{bmatrix} -1.5 \\ 1.7 \end{bmatrix} \to m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1.5 - 2.5}{-1.7 - 0} = \frac{-4}{-1.7} = \boxed{2.35} \\
y - 0 &= 2.35(x - 2.5) \to \boxed{y = 2.35x - 5.88} \\
\to x_1 &= \frac{-w_2}{w_1} x_2 - \frac{w_0}{w_1} \to \begin{cases} \frac{-w_2}{w_1} = 2.35 \to w_2 = -2.35 w_1 \\ \frac{-w_0}{w_1} = -5.88 \to w_0 = 5.88 w_1 \end{cases} \\
\text{Assume} \qquad w_0 &= 5.88 \to w_1 = 1, w_2 = -2.35
\end{aligned}$$

پاسخ

$$
\begin{aligned}
P_1 = \begin{bmatrix}-1.5\\-1.7\end{bmatrix} P_2 &= \begin{bmatrix}0\\2.8\end{bmatrix} \to m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0+1.5}{2.8+1.7} = \frac{1.5}{4.5} = \boxed{0.33} \\
y - 2.8 &= 0.33(x-0) \to \boxed{y = 0.33x + 2.8} \\
\to x_1 &= \frac{-w_2}{w_1}x_2 - \frac{w_0}{w_1} \to \begin{cases} \frac{-w_2}{w_1} = 0.33 \to w_2 = -0.33w_1 \\ \frac{-w_0}{w_1} = 2.8 \to w_0 = -2.8w_1 \end{cases} \\
\text{Assume} \qquad w_0 &= 2.8 \to w_1 = -1, w_2 = 0.33
\end{aligned}
$$

۳. شگرد هسته[۱] چیست و چگونه می‌توان قسمت قبل را با آن حل نمود؟ توضیح دهید.

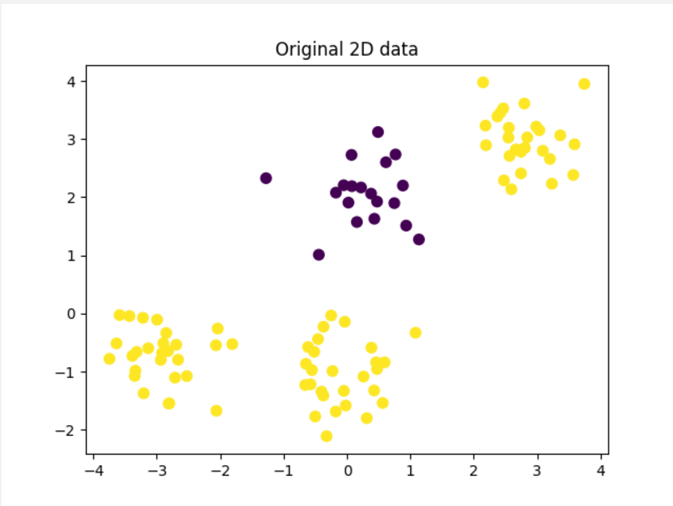
پاسخ

این تکنیک به عنوان یکی از روش های حل مسئله قبل معرفی شد و توضیح مختصری در مورد آن داده شد. در این قسمت توضیحات کامل آن را بیان خواهیم کرد.

روش شگرد هسته، یکی از چندین روش موجود برای حل مسائل جداناپذیر خطی با روش های خطی است. بدین صورت که اگر ابعاد ویژگی های مسئله را R در نظر بگیریم و داده ها در R بعد جداناپذیر خطی باشند، ممکن است با افزایش بعد ویژگی ها (R+n) و اضاف کردن ویژگی ای جدید، داده ها جداپذیر خطی شوند و بتوان مسئله را با یک شبکه خطی حل نمود.

در این سوال، ویژگی های ورودی ۲ بعدی هستند و داده ها در ۲ بعد جداناپذیر خطی هستند. بنابر این می‌توان یک ویژگی جدید در بعد سوم به ورودی ها اضاف کرد و خروجی را نمایش داد تا شاید داده ها جداپذیر خطی شوند.

این کار را انجام دادیم و اثباط کردیم که با افزایش بعد این مسئله، داده ها جداپذیر خطی می‌شوند. شکل زیر را به عنوان داده های ورودی مسئله در نظر بگیریم:



شکل ۵: داده های ورودی مسئله در ۲ بعد

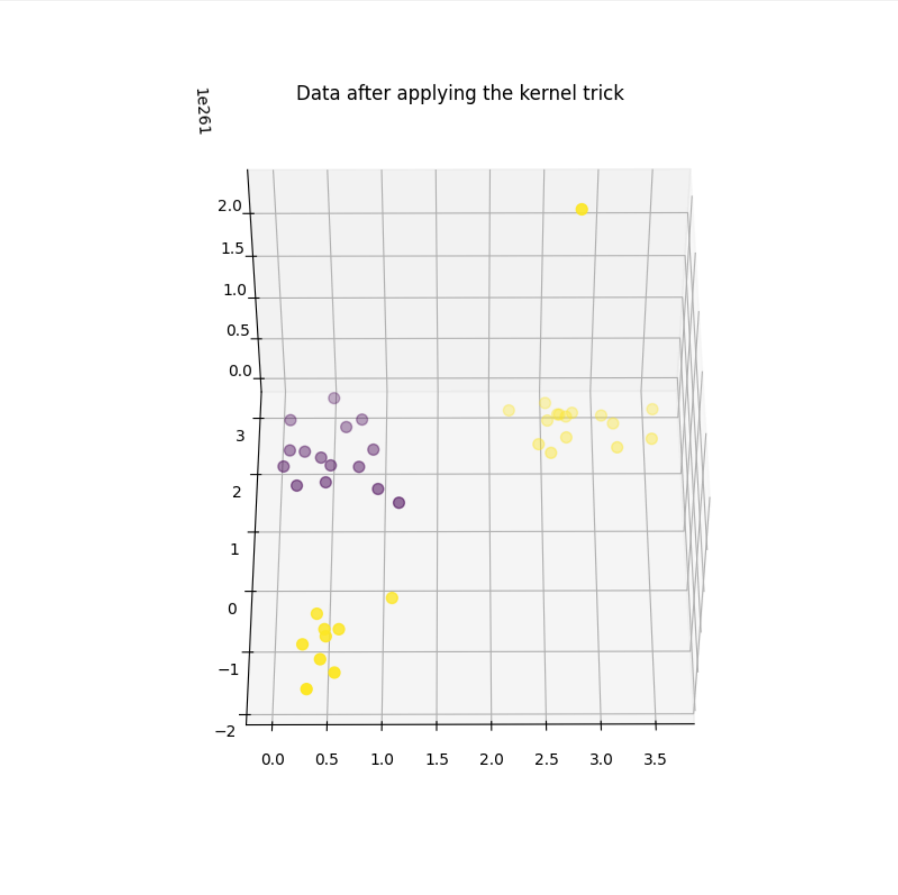
برای افزودن بعد سوم به این داده های ۲ بعدی، تابع زیر را نوشته ایم.

[۱] Kernel trick

پاسخ

```
def kernel_trick(x):
return np.append(x, np.expand_dims(x[:, 0]**2 ** x[:, 1]**2,
axis=1), axis=1)
```

این تابع ویژگی جدید $(x_0^2)^{x_1^2}$ را به داده های ورودی به عنوان بعد سوم اضافه می‌کند. بنابر در فضای ویژگی جدید، هر نقطه از بردار ویژگی شامل ۳ عضو است. **(این نکته لازم به ذکر است که ویژگی جدید تولید شده، با سعی و خطا بدست آمده است و می‌توان به جای آن هر ویژگی جدید دیگری را قرار داد)**
پس از رسم فضای ویژگی جدید، مشاهده می‌شود که داده ها جداپذیر خطی شده اند و می‌توان آنها را با یک صفحه از هم جدا نمود.



شکل ۶: فضای ویژگی های جدید در ۳ بعد

سوال دوم - عملی

مجموعه داده ضمیمه شده را بارگزاری کرده و آن را نمایش دهید. تفکیک مجموعه داده را با نسبت ۱:۲:۷ به‌ترتیب برای آموزش، آزمون و اعتبارسنجی درنظر بگیرید.

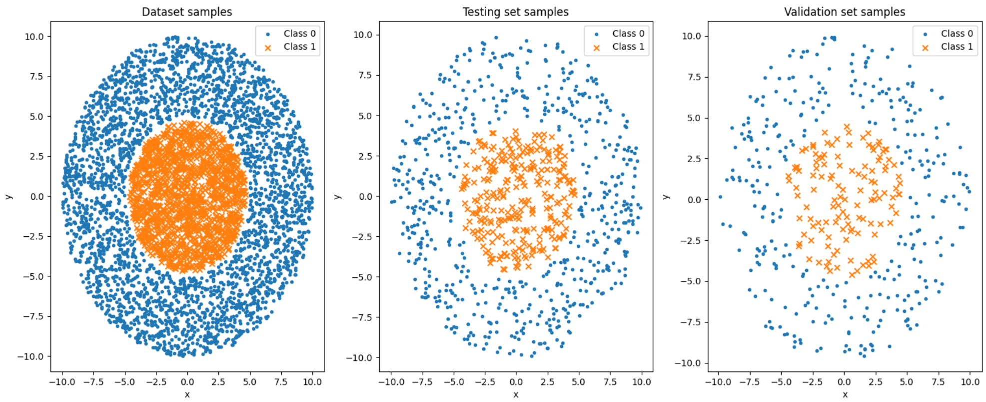
تمامی کدهای سوالات عملی پیوست شده است. همچنین می‌توانید کدها را از گیتهاب بنده به لینک زیر مشاهده و بررسی کنید:

github.com/rezaAdinepour/Deep-Learning-Homework

همچنین به دلیل آنکه تمامی کد ها در فایل های notebook به طور کامل توضیح داده شده است، در این گزارش به دلیل جلوگیری از طولانی شدن آن، از آوردن کد پرهیز کرده ایم.

پاسخ

پس از load کردن دیتاست و تقسیم کردن آن به ۳ دسته آموزش، تست و اعتبار سنجی، آن را رسم کردیم. خروجی به صورت زیر است:



شکل ۷: دیتاست مسئله

همانطور که مشاهده می‌شود، داده ها جداپذیر خطی نیستند پس نمی‌توان به صورت معمولی آن را با شبکه پرسپترون حل نمود. در این سوال تلاش خواهیم کرد با روش‌های معرفی شده در سوال ۱، به صورت عملی با شبکه پرسپترون، یک مسئله غیر خطی را حل نماییم.

۱. با یک نورون پرسپترونی و صرفا بر اساس ویژگی های ورودی، وزن‌های نورون خود را با آموزش بدست آورید و دسته‌بندی را انجام دهید. و معیار های صحت[۲] و امتیاز F1 را به ازای هر دسته‌گزارش نمایید. همچنین در نهایت وزن‌های معماری‌تان را به همراه طرحواره آن گزارش کنید.

[۲] Accuracy

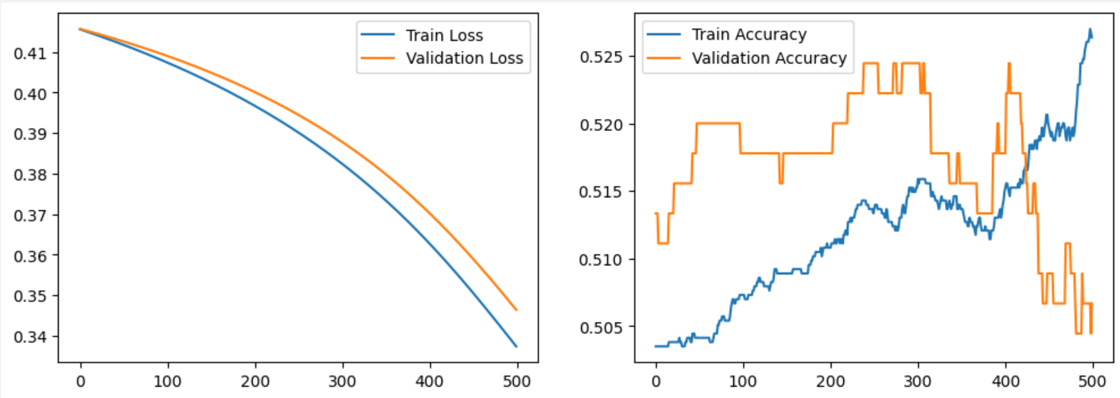
پاسخ

شبکه پرسپترون تک لایه با استفاده از کتابخانه PyTorch تعریف شده است. از تابع Sigmoid به عنوان تابع فعال‌ساز استفاده شده است. در این شبکه از تابع بهینه‌ساز stochastic gradient descent استفاده شده است و برای محاسبه خطا، از mean squared error به عنوان تابع هزینه استفاده شده است.

پس از ۵۰۰ ایپاک آموزش شبکه، خروجی شبکه به صورت زیر شده است:

```
Epoch 500/500, Loss: 0.3373, Accuracy: 0.5263, F1 Score: 0.5115
---------------------------------------------------------------
Validation Loss: 0.3900, Validation Accuracy: 0.5173, Validation F1
Score: 0.4689
---------------------------------------------------------------
```

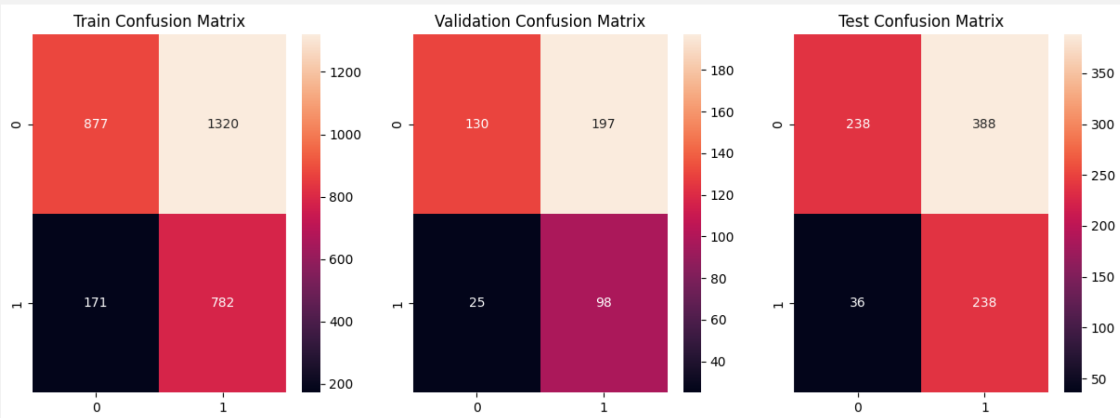
همچنین نمودارهای دقت و خطا بر حسب تعداد Epoch به صورت زیر شده است:



شکل ۸: نمودار های خطا و دقت

همانطورکه از نمودار ها و خروجی شبکه مشاهده می‌شود، نشان از نوسان بالا در شبکه را دارد که کاملا طبیعیست چرا که داده ها جداپذیر خطی نیستند و شبکه هرچه تلاش می‌کند تا دو کلاس را از هم تفکیک کند نمی‌تواند و دچار نوسان می‌شود. مقدار Loss از ۰/۳ پایین تر نمی‌آید همچنین مشاهده می‌شود دقت روی مجموعه داده اعتبارسنجی بعد از ایپاک ۳۰۰ به شدت افت شده است.

ماتریس پراکندگی[a] برای مجموعه داده‌های آموزش، تست و اعتبارسنجی به صورت زیر شده است:



شکل ۹: ماتریس پراکندگی

[a] Confusion matrix

پاسخ

از خروجی ماتریس‌های پراکندگی نیز مشاهده می‌شود که تعداد نمونه های که اشتباه شناسایی شده اند (نمونه های روی قطر فرعی) زیاد هستند که نشان از عدم آموزش شبکه دارد.

پس از فاز آموزش شبکه، نوبت به تست شبکه آموزش داده شده به وسیله مجموعه داده‌های تست می‌رسد. خروجی شبکه بر روی داده های تست به صورت زیر شده است:

```
Test loss: 0.3493, Test Accuracy: 0.5289, Test F1 Score: 0.5289
```

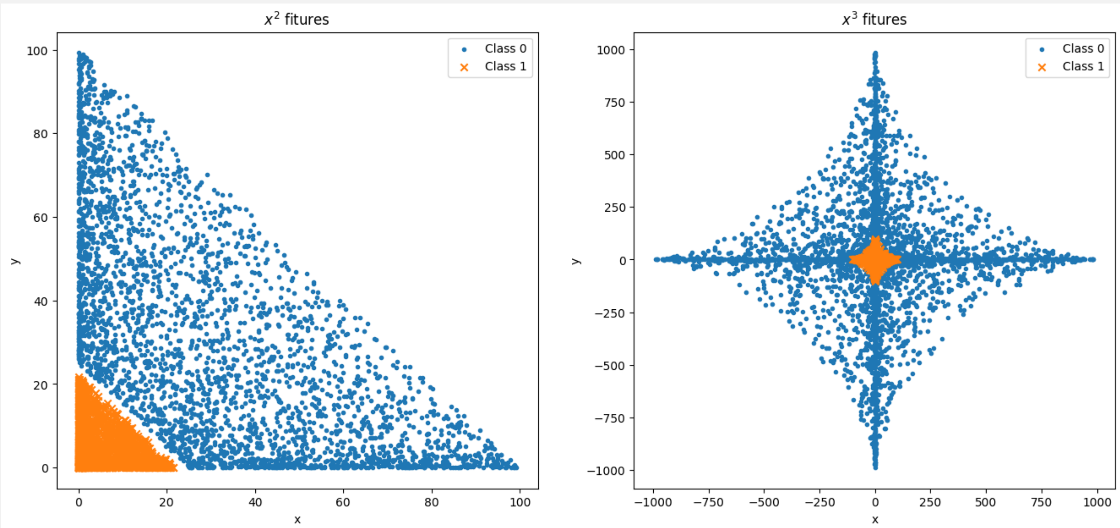
وزن‌های نهایی شبکه پس از آموزش به صورت زیر به‌دست آمده است:

```
Final weights: tensor([[ 0.1273, -0.1831]], device='cuda:0')
```

۲. به ورودی قسمت قبل، توان بالای ورودی ها تا توان سوم را افزوده و نتیجه حاصل را ضمن گزارش تحلیل نموده و توجیه کنید.

پاسخ

در این قسمت، ابتدا توان دوم و سوم ورودی را محاسبه می‌کنیم و هر دو آن را به شبکه می‌دهیم. بر اساس آنچه که در سوال اول توضیح دادیم، ممکن است با به توان رساندن ویژگی های ورودی داده هایی که جداپذیر خطی نیستند، جداپذیر خطی شوند. در این مثال داده هارا پس از به توان رساندن رسم کردیم:



شکل ۱۰: ویژگی های به توان رسانده شده

همانطورکه از «شکل ۱۰» مشاهده می‌شود، توان دوم داده‌های ورودی جداپذیر خطی شده است و امکان حل آن با یک نرون پرسپترون وجود دارد اما توان سوم داده‌های ورودی همچنان جداناپذیر خطی است. توان چهارم نیز تست شد، آن هم جداناپذیر خطی بود اما به دلیل آنکه در صورت سوال خواسته نشده است. گزارش آن آورده نشده است.

انتظار داریم اگر به ورودی شبکه، توان دوم داده‌های دیتاست را بدهیم، شبکه بتواند مسئله را حل نماید و مقدار Loss آن مینیمم و Accuracy آن ماکزیمم شود. این‌بار داده‌های جدید را با همان شبکه قبلی مجدد Train می‌کنیم و خروجی‌های آن را گزارش می‌دهیم.

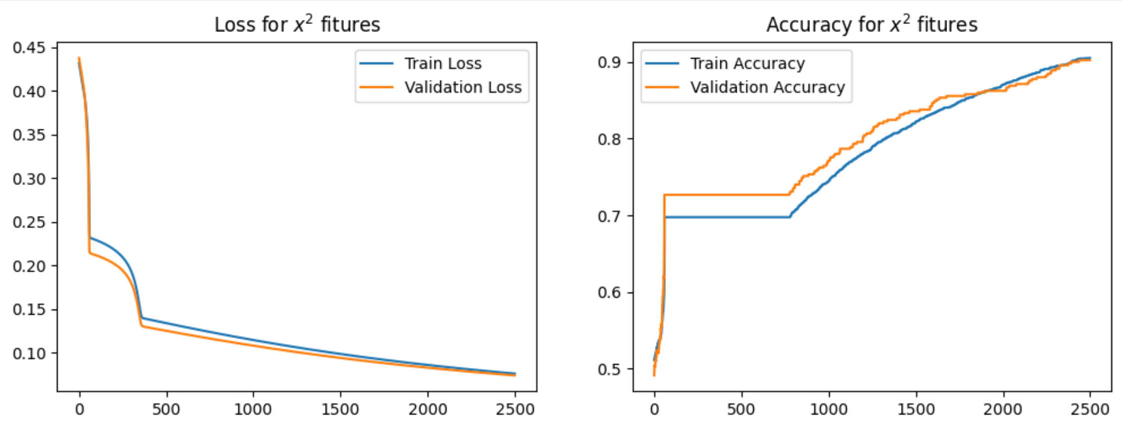
پس از آموزش شبکه با ویژگی های جدید، خروجی شبکه به صورت زیر به‌دست آمده است:

```
Epoch 500/500, Loss: 0.0760, Accuracy: 0.9051, F1 Score: 0.8139
```

پاسخ

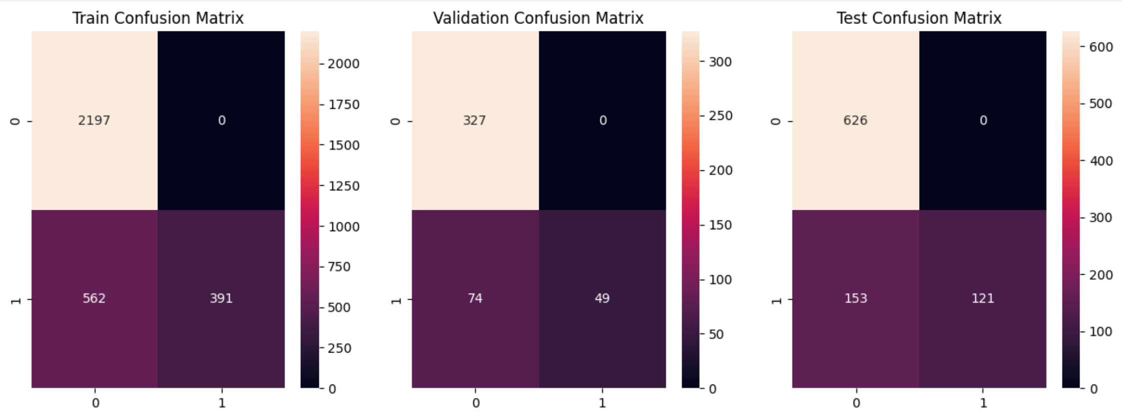
```
------------------------------------------------------------
Validation Loss:  0.1162, Validation Accuracy:  0.7977, Validation F1
Score:  0.7822
------------------------------------------------------------
```

مشاهده می‌شود که مقدار Loos گزارش شده بر روی داده های آموزش بسیار کوچکتر از حالت قبل است و تقریبا نزدیک به صفر. همچنین Accuracy شبکه نیز نسبت به حال قبل مقدار ۴۰ درصد افزایش یافته است. مقادیر گزارش شده بر روی داده‌های اعتبارسنجی نیز نسبت به حال قبل بهبود یافته اند.
نمودار Loss و Accuracy خروجی شبکه به صورت زیر گزارش می‌شود:



شکل ۱۱: نمودارهای خطا و دقت

نوسانات کمتری نسبت به قسمت قبل در نمودار Accuracy مشاهده می‌شود و دیگر دقت برای مجموعه داده های اعتبارسنجی افت نکرده است. همچنین مقدار خطا نیز با شیب بیشتری نسبت به حالت قبل کاهش پیدا کرده است.
خروجی ماتریس پراکندگی شبکه نیز به صورت زیر است:



شکل ۱۲: ماتریس پراکندگی

مشاهده می‌شود که نمونه های درست طبقه‌بندی شده (نمونه های روی قطر اصلی) نسبت به حال قبل بیشتر است و همچنین نمونه های اشتباه نیز به مراتب کمتر از حالت قبل است.

پاسخ

خروجی شبکه بر روی مجموعه داده‌های Test به صورت زیر شده است:

```
Test loss: 0.0965, Test Accuracy: 0.8300, Test F1 Score: 0.6127
```

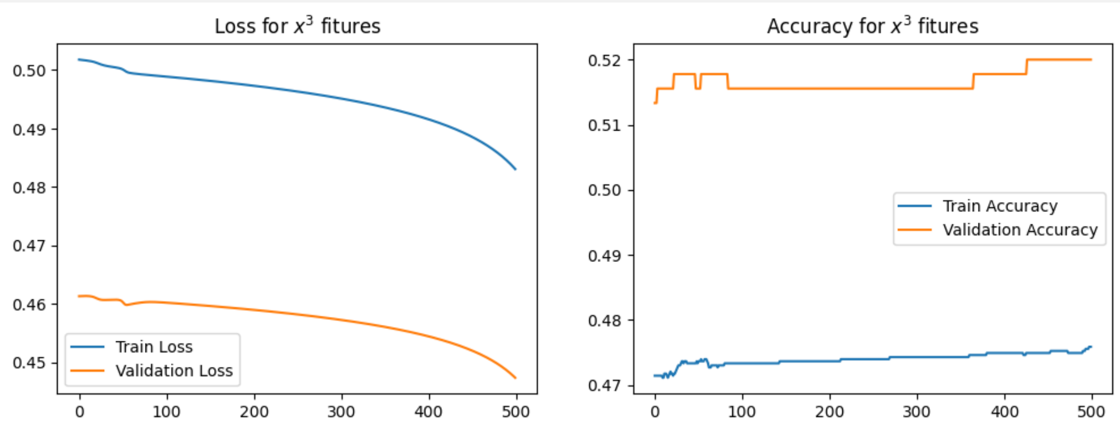
خروجی شبکه بر روی داده های تست نیز بهبود زیادی نسبت به حالت قبل داشته است.
همچنین وزن‌های نهایی شبکه به صورت زیر گزارش می‌شود:

```
Final weights: tensor([[-0.0438, -0.0453]], device='cuda:0')
```

مجددا تمام مراحل را برای توان سوم داده‌های ورودی تکرار می‌کنیم. مطابق با «شکل ۱۰» انتظار داریم خروجی شبکه پس از آموزش تقریبا همانند توان اول داده ها باشد، چرا که در هر دو حالت داده‌ها جداناپذیر خطی هستند.
خروجی شبکه آموزش دیده بر روی توان سوم داده‌های ورودی به صورت زیر گزارش می‌شود:

```
Epoch 500/500, Loss: 0.4831, Accuracy: 0.4759, F1 Score: 0.3548
---------------------------------------------------------------
Validation Loss: 0.4572, Validation Accuracy: 0.5167, Validation F1
Score: 0.3793
```

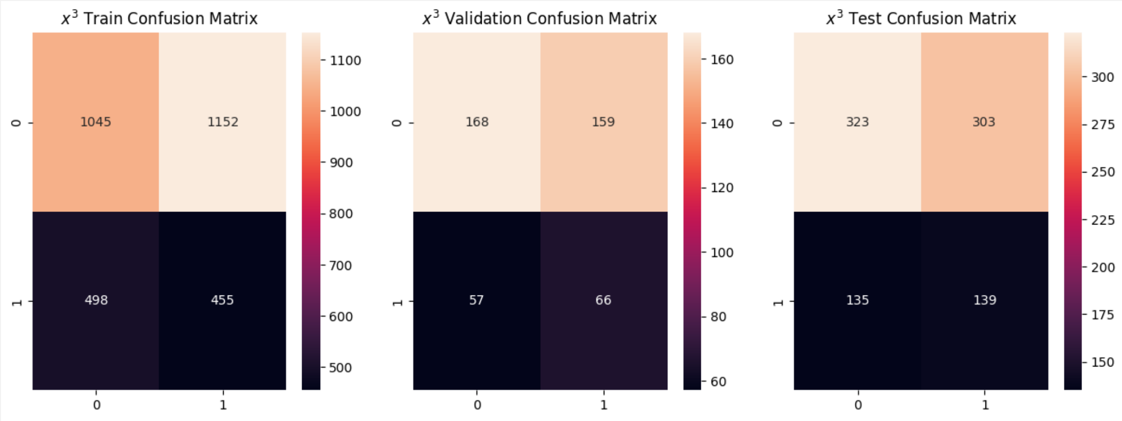
با توجه به نتایج بدست آمده، پیش‌بینی ما درست است. چرا که مقدار خطا نسبت به حالت دوم، مجددا افزایش یافته و دقت نیز کاهش یافته است. نمودار های خروجی نیز مطابق با شکل زیر گزارش می‌شود:



شکل ۱۳: نمودارهای خطا و دقت

از نمودار ها نیز می‌توان نتیجه گرفت که شبکه به درستی آموزش ندیده است چرا که در ۵۰۰ تکرار مقدار خطا خیلی نرم و با شیب کمی کاهش یافته است همچنین مقدار دقت نیز در طول فرایند آموزش تقریبا ثابت بوده است.
خروجی ماتریس‌های پراکندگی نیز به صورت زیر گزارش می‌شود:

پاسخ



شکل ۱۴: ماتریس پراکندگی

در این حالت نیز مجددا نمونه های روی قطر غیر اصلی ماتریس افزایش یافته است که نشان از عدم طبقه‌بندی درست مسئله دارد.
خروجی شبکه بر روی مجموعه دادگان تست به صورت زیر گزارش می‌شود:

```
Test loss: 0.4470, Test Accuracy: 0.5133, Test F1 Score: 0.3883
```

شبکه بر روی داده‌های تست نیز خروجی مطلوبی ندارد و مقدارLoss و Accuracy آن نسبت به حالت قبل افت کرده است.
وزن‌های نهایی شبکه به صورت زیر گزارش می‌شود:

```
Final weights: tensor([[0.0587, 0.1524]], device='cuda:0')
```

۳. حال حاصل ضرب ورودی‌های قسمت قبل برای مثال $(x_1x_2, x_1x_2^2, x_1^3x_2)$ را به ورودی پرسپترون افزوده و مجددا نتیجه حاصل را ضمن گزارش تحلیل نموده و توجیه کنید. به جهت ریاضیاتی و هندسی، این جمله‌ها بیانگر افزودن چه ویژگی‌هایی هستند؟

پاسخ

برای بدست ویژگی های جدید این قسمت، ازکلاس PolynomialFeatures درکتابخانه sklearn استفاده کرده ایم. این کلاس ویژگی های ورودی را می‌گیرد و بر اساس درجه ای که برای آن مشخص می‌کنیم، تمام ترکیبات چند جمله ای تا آن درجه را تولید می‌کند. برای مثال اگر ماتریس ویژگی‌های ما به صورت زیر باشد:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

با فراخوانی کلاس PolynomialFeatures و فیت کردن داده ها با تابع fit_transform به صورت زیر برای ساختن ویژگی‌های چند جمله ای حداکثر تا توان ۲:

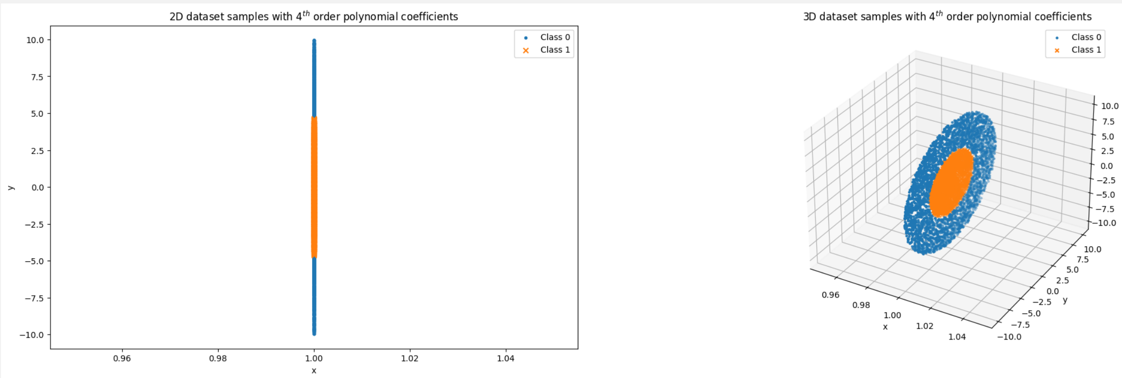
```
poly = PolynomialFeatures(degree=2, include_bias=True)
X_poly = poly.fit_transform(X)
```

خروجی (ماتریس ویژگی‌های جدید) به صورت زیر خواهد بود:

پاسخ

$$X_{new} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 5 & 16 & 20 & 25 \end{bmatrix}$$

در ویژگی جدید، علاوه بر دو مقدار قبل، در درایه اول هر سطر، بایاس با مقدار ۱ اضاف می‌شود، همچنین در درایه های ۳ تا ۶ در هر سطر، به ترتیب ویژگی های a^2, ab, b^2 حساب شده است.
تعریف رسمی این کلاس در داکیومنت `sklearn` به صورت زیر است:
Generate a new feature matrix consisting of all polynomial combinations of the feaxtures with degree less than or equal to the specified degree. For example, if an input sample is two dimensional and of the form [a, b], the degree-2 polynomial features are $[1, a, b, a^2, ab, b^2]$.
در این مثال، `degree` را برابر با ۴ قرار دادیم. یعنی چندجمله‌ای هایی حداکثر تا درجه ۴ را به عنوان ویژگی تولید می‌کنیم. ابعاد دیتاست ورودی مسئله $(4500, 3)$ است. پس از تولید ویژگی های جدید ابعاد مسئله به $(4500, 15)$ افزایش می‌یابد. بنابر این تعداد نورون های ورودی مسئله نیز از ۳ عدد به ۱۵ افزایش پیدا می‌کند و وزن‌های نهایی باید شامل ۱۵ عدد وزن باشد.
فضای جدید ویژگی ها را به صورت ۲بعدی و ۳ بعدی رسم کرده‌ایم و خروجی‌آن به صورت زیر شده است:



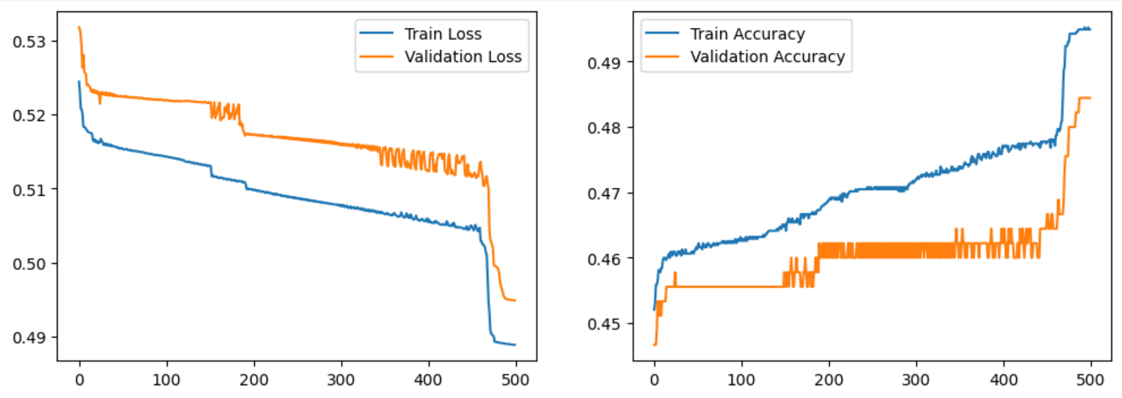
شکل ۱۵: فضای جدید ویژگی‌ها

همانطورکه مشاهده می‌شود، ویژگی های جدید بدست آمده جداناپذیر خطی هستند و انتظار داریم با آموزش شبکه بر روی این ویژگی ها، خروجی ای همانند حالت توان سوم ویژگی‌ها حاصل شود و شبکه به درستی آموزش نبیند. به این دلیل داده ها در توان‌های بالا جداناپذیر خطی می‌شوند که مقدار اغلب داده‌های خام کوچکتر از ۱ هستند. به همین دلیل توان‌های بالای آنها مقدار بسیار کوچکی می‌شود و باعث فشرده شدن و روی هم افتادن داده‌ها می‌شود. اگر بخواهیم از داده‌های خطی برای حل مسائل غیرخطی استفاده کنیم، طبیعتا نباید انتظار داشت خروجی مطلوبی حاصل شود. ورودی‌های توان بالا و چندجمله‌ای ها این امکان را برای شبکه فراهم می‌کنند تا تلاش کند با داده‌های غیر خطی (توان‌های دوم و سوم ورودی و حاصل ضرب آنها) آموزش ببیند تا شاید بتواند مسئله غیرخطی‌مان را حل نماید.
برای آنکه مطمئن شویم، شبکه را با داده‌های جدید Train می‌کنیم و خروجی را گزارش می‌کنیم.
خروجی شبکه پس از آموزش با داده‌های جدید به صورت زیر است:

پاسخ

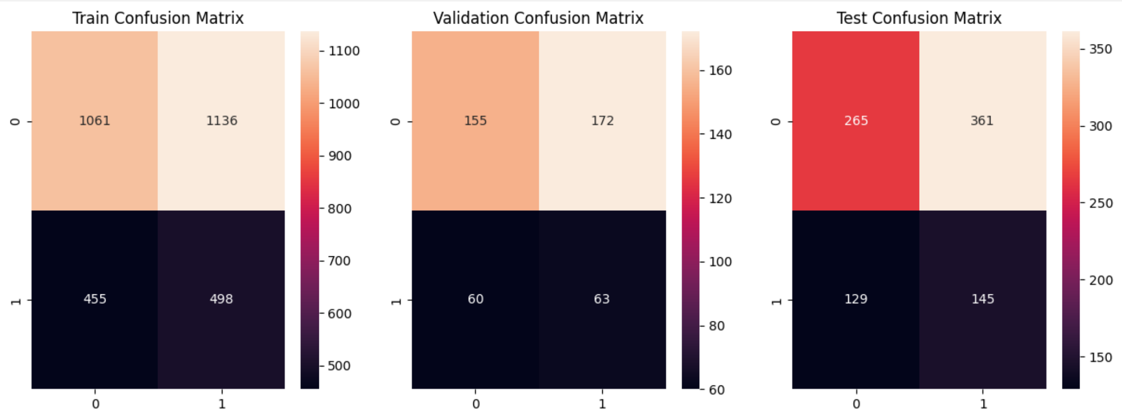
```
Epoch 500/500, Loss: 0.4888, Accuracy: 0.4949, F1 Score: 0.3850
---------------------------------------------------------------
Validation Loss: 0.5167, Validation Accuracy: 0.4607, Validation F1
Score: 0.3520
---------------------------------------------------------------
```

از نتایج مشخص است که شبکه نتوانسته به درستی آموزش ببیند و مقدار Loss و Accuracy بدست آمده تقریبا همانند قسمت اول (آموزش با داده‌های خام) است. نمودارهای Loss و Accuracy نیز این حرف را توجیه می‌کنند/ چرا که بسیار نوسانی بوده و مقادیر آنها از یک حد کمتر یا بیشتر نشده است و این امر نشان از عدم آموزش صحیح شبکه دارد. خروجی نمودار های به صورت زیر گزارش می‌شود:



شکل ۱۶: نمودارهای خطا و دقت

ماتریس پراکندگی داده ها به صورت زیر گزارش می‌شود:



شکل ۱۷: ماتریس پراکندگی

همچنین تست شبکه بر روی مجموعه داده‌های تست و وزن‌های نهایی شبکه نیز به صورت زیر گزارش می‌شود:

```
Test loss: 0.5271, Test Accuracy: 0.4556, Test F1 Score: 0.3718
Final weights: tensor([[-0.0076, 0.1363, 0.1950, -0.0310, 0.1818,
-0.0550, -0.1191, 0.0098, -0.0858, 0.2467, 0.2740, 0.1114, -0.0028,
0.1657, -0.1999]], device='cuda:0')
```

سوال سوم - عملی

فرض کنید می‌خواهیم تابع $f(x) = sin(x) + 3x^{17} - 5x^2$ را با یک نورون پرسپترونی تخمین و درصورت امکان محاسبه نماییم.

۱. با تحقیق و مطالعه کافی توضیح دهید چگونه می‌توان از سری تیلور برای تخمین توابع استفاده نمود؟

پاسخ

سری تیلور بیان می‌کند که ما می‌توانیم هر تابع n بار مشتق‌پذیری را بر اساس یک مجموع بی‌نهایت از مشتق‌های آن حول نقطه صفر بنویسیم. فرمول بسط تیلور به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$

آقای مکلورن این تقریب را به صورت عمومی گسترش داد و بیان کرد که می‌توان توابع مختلف n بار مشتق‌پذیر را حول هر نقطع مشخصی بسط داد و فرمول تیلور را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

بنابر این هر تابع n بار مشتق‌پذیری را با داشتن مشتق‌های آن و مقدار آن تابع در نقطه مورد نظر، تقریب زد. برای مثال، تابع e^x، n بارمشتق‌پذیر است پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \rightarrow f'(x) = f''(x) = f'''(x) = f^{(4)}(x) = ... = f^{(n)}(x) = e^x \\ if \quad a &= 0 \rightarrow e^x \approx e^0 + \frac{e^0}{1!}(x) + \frac{e^0}{2!}(x)^2 + \frac{e^0}{3!}(x)^3 + ... + \frac{e^0}{n!}(x)^n \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \end{aligned}$$

طبیعتا هرچقدر تعداد جملات بیشتری را در مجموع باهم جمع کنیم، تقریب دقیق تری از تابع حاصل می‌شود اما بار محاسباتی سنگین تر می‌شود و نیازمند محاسبه مشتق‌هایی با مرتبه‌های بالا هستیم.

۲. با استتفاده از سری تیلور، تخمین تابع یاد شده را تا ۱۰ جمله محاسبه و بدست آورید. فرایند محاسبه را در گزارش بنویسید.

پاسخ

تابع داده شده از ۲ ترم تشکیل شده است. ترمی سینوسی و ترم چندجمله ای. به دلیل آنکه از چندجمله ای تبلور استفاده می‌کنیم برای تقریب و $a = 0$ است، مقادیر این ترم و مشتقات آن در نقطه صفر، صفر خواهد بود. بنابر این این دو ترم چند جمله ای را که در پایین با آبی مشخص شده است را با تقریب تیلور محاسبه نمی‌کنیم و فقط ترم سینوسی را با استفاده از سری تیلور حساب می‌کنیم. مشتقات تابع سینوسی (تا مرتبه ۹) رامحاسبه می‌کنیم و مقادیر آنها در نقطه صفر محاسبه کرده و آن‌ها را در فرمول سری تیلور قرار می‌دهیم. درنهایت ترم چند جمله ای را عینا به تابع تقریب زده شده اضاف می‌کنیم. محاسبات را به صورت زیر انجام داده ایم:

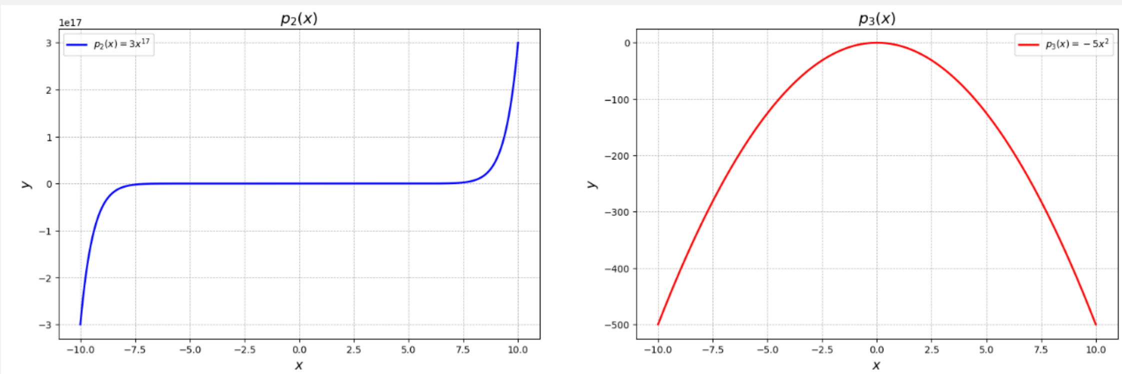
پاسخ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= sin(x) + 3x^{17} - 5x^2 \\
f_1(x) &= sin(x) : a = 0 \rightarrow \sum_{0}^{9} \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} x^n = f_1(0) + \frac{f_1'(0)}{1!} x^1 + ... + \frac{f_1^{(9)}(0)}{9!} x^9 \\
f_1(x) &= sin(x) \rightarrow f_1(0) = 0 \\
f_1'(x) &= cos(x) \rightarrow f_1'(0) = 1 \\
f_1''(x) &= -sin(x) \rightarrow f_1''(0) = 0 \\
f_1'''(x) &= -cos(x) \rightarrow f_1''(0) = -1 \\
f_1^{(4)}(x) &= sin(x) \rightarrow f_1^{(4)}(0) = 0 \\
&. \\
&. \\
&. \\
f_1^{(9)}(x) &= cos(x) \rightarrow f_1^{(9)}(0) = 1 \\
\rightarrow &= 0 + \frac{1}{1!} x^1 + \frac{0}{2!} x^2 + \frac{-1}{3!} x^3 + \frac{0}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5 + \frac{0}{6!} x^6 + \frac{-1}{7!} x^7 + \frac{0}{8!} x^8 + \frac{1}{9!} x^9 \\
&= x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + \frac{1}{362880} x^9 = f(\hat{x})
\end{aligned}
$$

برای آنکه بتوانیم تمام ترم های تابع را رسم نماییم، آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= p_1(x) + p_2(x) + p_3(x) \\
p_1(x) &= sin(x) = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + \frac{1}{362880} x^9 \\
p_2(x) &= 3x^{17} \\
p_3(x) &= -5x^2
\end{aligned}
$$

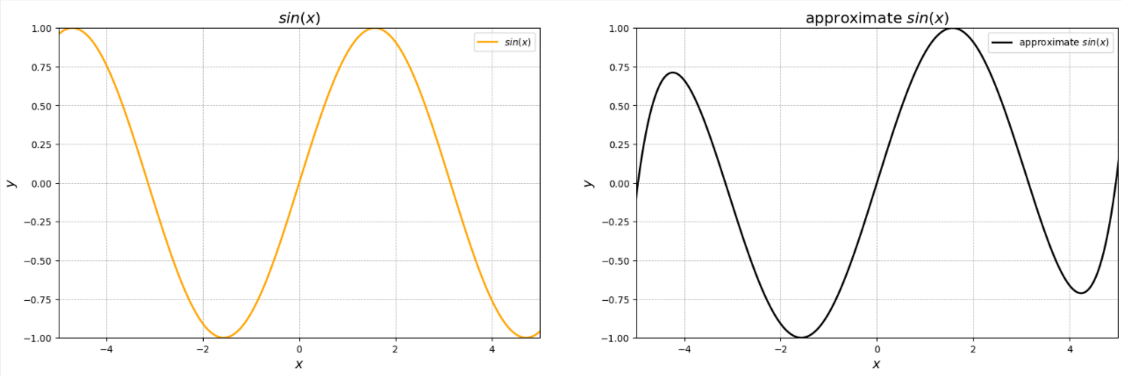
با فرمت نوشته شده توابه را رسم می‌کنیم. $p_2(x)$ و $p_3(3)$ به‌صورت زیر است:



شکل ۱۸: ترم‌های چند جمله‌ای تابع

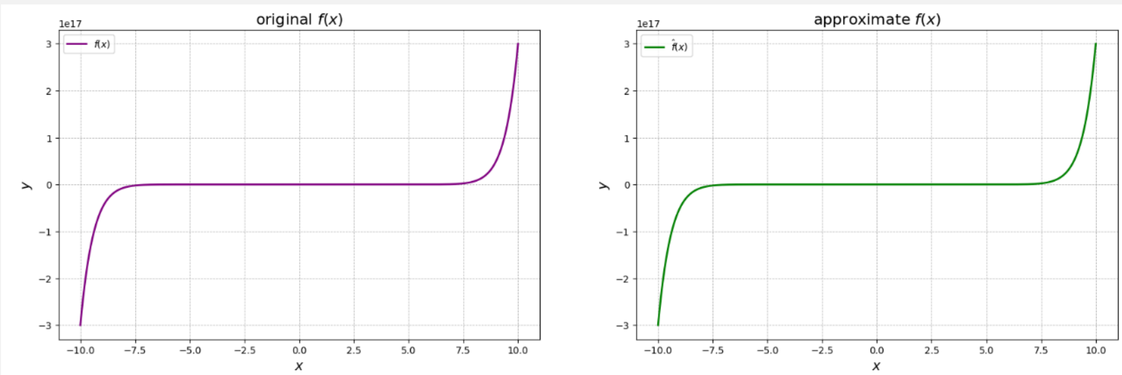
پاسخ

ترم سینوسی اصلی و سینوسی تقریب زده شده با سری تیلور به صورت زیر گزارش می‌شود:



شکل ۱۹: ترم سینوسی اصلی و تقریب زده شده

در نهایت تابع $f(x)$ و تابعی که با ۱۰ جمله از سری تیلور تقریب زده ایم ($\hat{f(x)}$) به صورت زیر گزارش می‌شود:



شکل ۲۰: تابع اصلی و تابع تقریب زده شده

۳. حال یک نرون پرسپترونی طراحی نمایید که بتواند تابع فوق را با جملات سری تیلور محاسبه کند (وزن‌های نورون را با محاسبات بدست‌آورده و در گزارش خود بیان کنید.) در یک نمودار، تابع و تخمین‌های آن را به ازای استفاده از جملات ۱ تا ۱۰ رسم کنید (خروجی ۱۱ منحنی خواهد بود). در یک جدول خطای حاصل از تقریب را به ازای استفاده از جملات مختلف با تابع MSE گزارش کنید.

توجه مهم: ورودی نورون‌های طراحی شده‌تان صرفا بایستی توانی از ویژگی‌های اصلی یا حاصل ضرب توانی از ویژگی‌ها باشد و فرم دیگری قابل قبول نیست. برای مثال اگر یک ویژگی x باشد، $sin(x)$ یا e^x نمی‌تواند ورودی یک نورون باشد.

پاسخ

حقیقتا بنده این قسمت را دقیق متوجه نشدم. به همین دلیل از نوشتن این قسمت خودداری کردم.