شبکه‌های عصبی و یادگیری عمیق

دکتر صفابخش

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی کامپیوتر

رضا آدینه پور ۴۰۲۱۳۱۰۵۵

تمرین سری اول

۲ فروردین ۱۴۰۳

شبکه‌های عصبی و یادگیری عمیق

تمرین سری اول

رضا آدینه پور ۴۰۲۱۳۱۰۵۵

مروری بر نمونه برداری

در این سوال قصد داریم صرفا مروری بر مفاهیم اولیه نمونه برداری داشته باشیم. در ابتدا ضرایب سری فوریه قطار ضربه ای با تناوب T را بدست آورید سپس با استفاده از ضرایب سری فوریه آن تبدیل فوریه این سیگنال را بدست آورید.

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \qquad \text{periodic in T} \\ a_k &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{jk(2\pi/T)t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{jk(2\pi/T)t}dt \xrightarrow{n=0} \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{jk(2\pi/T)t}dt = \frac{1}{T} \qquad\qquad a_k = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

تابع متناوب است و سری فوریه دارد، پس تبدیل فوریه آن همان سری فوریه آن به صورت جمع ضربه هاست.

$$P(j\omega) = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T}) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

با توجه به اینکه با استفاده از این سیگنال نمونه برداری قطار ضربه از یک سیگنال پیوسته زمان انجام میدهیم و با استفاده نتیجه بدست آمده در قسمت قبل تبدیل فوریه سیگنال بدست آمده حاصل از ضرب این سیگنال در سیگنال دلخواه $x(t)$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned} x_p(t) &= x(t)\times p(t) \Rightarrow X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P(\tau)X(\omega-\tau)d\tau \\ X_p(j\omega) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{T}\delta(\tau - k\frac{2\pi}{T})X(j(\omega-\tau))d\tau = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\frac{2\pi}{T})) \end{aligned}$$

حال نتیجه بدست آمده از قسمت قبل را با تبدیل فوریه گسسته سیگنال نمونه برداری شده $x[n] = x(nT)$ مقایسه کنید.
حال شرطی روی نرخ نمونه برداری $F_s = \frac{1}{T_s}$ بدست آورید که تمام محتوای فرکانسی سیگنال اولیه پس از نمونه برداری حفظ شود. (شرط نایکوییست)

پاسخ بدست آمده متناوب است، پس میتوان آن را به صورت یک سری فوریه نوشت. یعنی داریم که : $X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0\omega}$

$$\begin{aligned} X_p(j\omega) &= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\frac{2\pi}{T})) \xrightarrow{\text{periodic in } \frac{2\pi}{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnT\omega} \\ C_n &= \frac{1}{2\pi/T}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_p(j\omega)e^{jnT\omega}d\omega = \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T}\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\frac{2\pi}{T}))e^{jnT\omega}d\omega \\ &= \xrightarrow{k=0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(j\omega)e^{jnT\omega}d\omega \end{aligned}$$

حال اگر داشتیم که $X(j\omega)\{|\omega| \le \frac{\pi}{T}\} = 0$

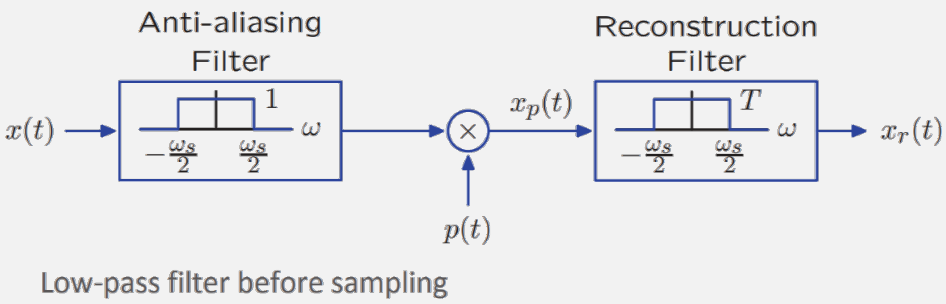
$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(j\omega)e^{jnT\omega}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{jnT\omega}d\omega = x(nT) \\ X_p(j\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnT\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{jnT\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{jnT\omega} = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\omega T} \end{aligned}$$

که این به ما شرط نایکوییست را میدهد. به صورتی که:

اگر داشته باشیم : $\forall\omega \ge \omega_s = \frac{\pi}{T} : X(j\omega) = 0 \Longrightarrow X_p(j\omega) = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\omega T}$

فرض کنید به علت محدودیت هایی که داریم شرط نایکوییست برقرار نباشد در این حالت روشی پیشنهاد دهید که محتوای فرکانسی کمتری از سیگنال در اثر نمونه برداری از بین برود.

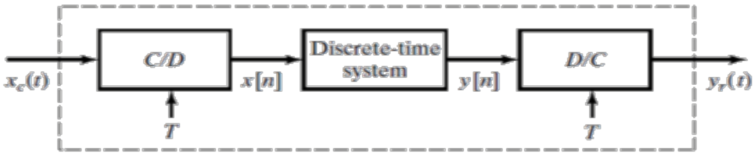
ناچار ایم که مقداری اطلاعات از دست بدهیم، زیرا در حالت خالص نمونه برداری، شرط نایکوییست برقرار نیست و دچار اعوجاج فرکانسی هستیم.
میتوانیم قبل از نمونه برداری اطلاعات فرکانسی را کم کنیم، اینگونه اطلاعات از بین رفته و فرکانسی اطلاعات کاهش میابد، ولی حداقل اعوجاج فرکانسی نداریم و نویز با فرکانس پایین ایجاد نمیکنیم.
به این کار Anti–Aliasing میگوییم. به این صورت که قبل از نمونه برداری، یک low-pass filter استفاده میکنیم.



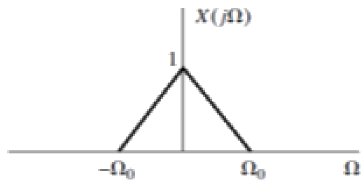
شکل ۱: anti aliasing diagram

نمونه برداری

سیستم زیر را در نظر بگیرید:



سیگنال ورودی $x_c(t)$ دارای تبدیل فوریه ی زیر است.



که در آن :

$$\Omega_0 = 2\pi 1000 rad/s$$

سیستم گسسته زمان یک فیلتر پایین گذر ایده آل با پاسخ فرکانسی زیر است.

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف) کمینه نرخ نمونه برداری که در آن aliasing رخ نمیدهد چقدر است؟

کمینه نرخ نمونه برداری از حد نایکوییست بدست میاید بدین صورت که:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq \omega_{nq} = 2\omega_{max} = 2\Omega_0 \Rightarrow T_s \leq \frac{\pi}{\Omega_0} = \frac{1}{2000}s = 0.5ms$$

ب) اگر $\omega_c = \pi/2$ کمینه نرخ نمونه برداری به طوری که $y_t(t) = x_c(t)$؟

اگر شرط نایکوییست ارضا شود، خواهیم داشت که:

$$X(e^{j\Omega}) = X_p(j\omega)\Big|_{\Omega=\omega T}$$

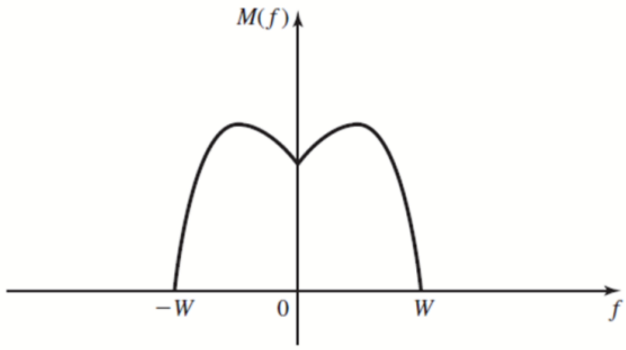
حال میخواهیم بعد از گسسته شدن، فیلتر اثری روی سیگنال نگذارد، یعنی کل محتوای فرکانسی زیر ω_c باشد. آنگاه:

$$\Omega_{max} = \omega_{max}T = \Omega_0 T \leq \omega_c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T \leq \frac{\pi}{2\Omega_0} = \frac{1}{4000}s = 0.25ms$$

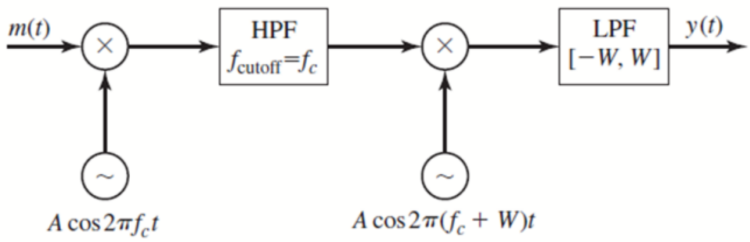
که این شرط محدودیت بیشتری از شرط نایکوییست اعمال میکند.

مدولاسیون دامنه

سیگنال پیغام $m(t)$ تبدیل فوریه ای به شکل زیر دارد:

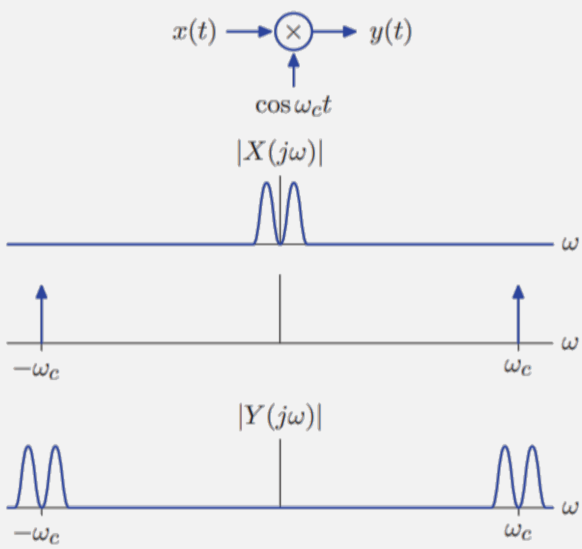


این سیگنال به عنوان ورودی به سیستم زیر داده میشود.



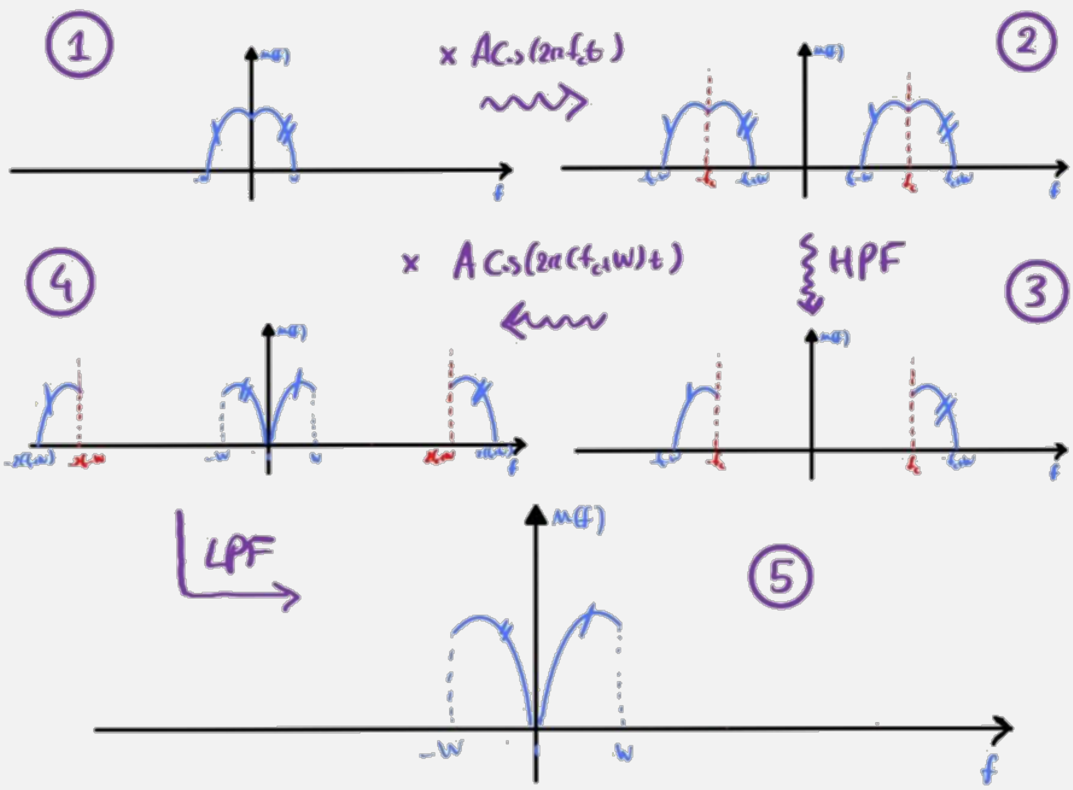
الف) تبدیل فوریه ی سیگنال خروجی، $Y(f)$ را رسم کنید
ب) نشان دهید اگر خروجی این سیستم را به عنوان ورودی به همین سیستم بدهیم سیگنال پیام را میتوانیم بازیابی کنیم.

مدولاسیون ناشی از ضرب در کسینوس را در نظر میگیریم:



شکل ۲: مدولاسیون با کسینوس

سپس فرایند را با نمودار توصیف میکنیم.



شکل ۳: نتیجه مدولاسیون

که در مرحله آخر شکل ۳ نتیجه یعنی همان $Y(f)$ را میبینیم.

ب) نشان دهید اگر خروجی این سیستم را به عنوان ورودی به همین سیستم بدهیم سیگنال پیام را میتوانیم بازیابی کنیم.

از فرایند توصیف شده در شکل ۳ واضح است که سیستم طراحی شده، سیگنال ای با بیشینه فرکانس W را میگیرد و سمت چپ و راست را در حوزه فرکانس جابجا میکند، به صورت معادله میتوان نوشت که:

$$Y(f) = \begin{cases} M(-W+f) & 0 \le f \le W \\ M(W+f) & -W \le f \le 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

بدیهی است که اگر این سیستم را دو بار اعمال کنیم، باز هم سمت راست و جپ سیگنال در حوزه فرکانس جابجا شده و به سیگنال اصلی میرسیم.

تبدیل فوریه دو بعدی

الف) در ابتدا بررسی کنید برای توابع دومتغیره جدایی پذیر $(f(x,y) = f(x)g(y))$ میتوان گفت که تبدیل فوریه آن ها جدایی پذیر و برابر با $F(u,v) = F(u)G(v)$ است؟

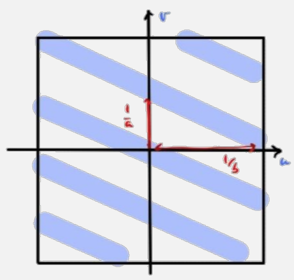
$$\begin{aligned}
F(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy \\
&= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx\right)}_{F(u)}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-j2\pi vy}dy\right)}_{G(v)} = F(u)G(v)
\end{aligned}$$

ب) تبدیل فوریه و تبدیل فوریه معکوس سیگنال های زیر را محاسبه کنید. و در هر مورد شکل متناسب با پارامتر های مسئله را رسم کنید.

محاسبه تبدیل فوریه یا معکوس

- $f(x,y) = \frac{1}{2}\left(\delta(x-b,y-a) + \delta(x+b,y+a)\right)$

$$\begin{aligned}
F(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\delta(x-b,y-a)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy \\
\ldots &+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\delta(x+b,y+a)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy \\
&= \frac{1}{2}e^{-j2\pi(ux+vy)}\Big|_{x=b,y=a} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi(ux+vy)}\Big|_{x=-b,y=-a} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{j2\pi(ub+va)} + e^{-j2\pi(ub+va)}\right) \\
&= \cos(2\pi(ub+va)) = F(u,v) \Longrightarrow \qquad F(u,v) = \cos(2\pi(ub+va))
\end{aligned}$$

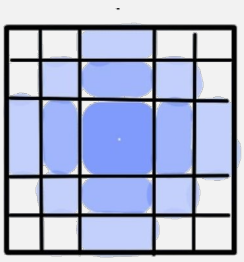


- $f(x,y) = \begin{cases} e^{-|x|-|y|} & -1 \leq x \leq 1 \text{and} -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{-|x|-|y|}e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy \\
&= \underbrace{\left(\int_{-1}^{1} e^{-|x|-j2\pi ux}dx\right)}_{g(u)}\underbrace{\left(\int_{-1}^{1} e^{-|y|-j2\pi vy}dy\right)}_{g(v)} = g(y)g(v) \\
g(m) &= \int_{-1}^{1} e^{-|t|-j2\pi mt}dt = \int_{0}^{1} e^{-t-j2\pi mt}dt + \int_{-1}^{0} e^{t-j2\pi mt}dt \\
&= \frac{1}{1+j2\pi m}\left(1-e^{-1-j2\pi m}\right) + \frac{1}{1-j2\pi m}\left(1-e^{-1+j2\pi m}\right) \\
&= \frac{2}{1+4\pi^2m^2} - e^{-1}\frac{(1-j2\pi m)e^{-j2\pi m}+(1+j2\pi m)e^{j2\pi m}}{1+4\pi^2m^2} \\
g(m) &= \frac{2\left(1-e^{-1}\cos(2\pi m)+e^{-1}2\pi m\sin(2\pi m)\right)}{1+4\pi^2m^2} \Rightarrow \\
F(u,v) &= \frac{4\left[1-e^{-1}(\cos(2\pi v)-2\pi v\sin(2\pi v))\right]\left[1-e^{-1}(\cos(2\pi u)-2\pi u\sin(2\pi u))\right]}{(1+4\pi^2v^2)(1+4\pi^2u^2)}
\end{aligned}
$$

$$F(u,v) = \frac{4\left[1-e^{-1}(\cos(2\pi v)-2\pi v\sin(2\pi v))\right]\left[1-e^{-1}(\cos(2\pi u)-2\pi u\sin(2\pi u))\right]}{(1+4\pi^2v^2)(1+4\pi^2u^2)}$$

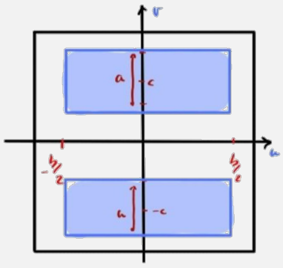
شمای دقیق کشیدن بسیار دشوار بوده، در فواصل دور به تقریب شبیه ۲ تا sinc میباشد.



- $F(u,v) = ab\cos(2\pi cv)\mathrm{sinc}(\pi av)\mathrm{sinc}(\pi bu)$

$$
\begin{aligned}
G(u,v) &= ab\mathrm{sinc}(\pi av)\mathrm{sinc}(\pi bu) \qquad F(u,v) = G(u,v)\times\cos(2\pi cv) \\
F(u,v) &= \frac{1}{2}e^{j2\pi cv}G(u,v) + \frac{1}{2}e^{-j2\pi cv}G(u,v), \quad g(x,y)\leftrightarrow G(u,v) \Rightarrow \\
f(x,y) &= \frac{1}{2}g(x,y+c) + \frac{1}{2}g(x,y-c) \\
G(u,v) &= \underbrace{(a\ \mathrm{sinc}(\pi av))}_{H(a,v)}\underbrace{(b\ \mathrm{sinc}(\pi bu))}_{H(b,u)} \xrightarrow{\text{قسمت الف}} g(x,y) = h(a,u)\times h(b,x) \\
H(a,v) &= a\ \mathrm{sinc}(\pi av) \Rightarrow h(a,y) = \sqcap_a(y) \Rightarrow g(x,y) = \sqcap_a(y)\sqcap_b(x) \\
f(x,y) &= \frac{1}{2}\left(\sqcap_a(y-c)+\sqcap_a(y+c)\right)\sqcap_b(x) = f(x,y), \quad \sqcap_{x_0}(x) = \begin{cases} 1 & |x|\le\frac{1}{2}x_0 \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}
\end{aligned}
$$

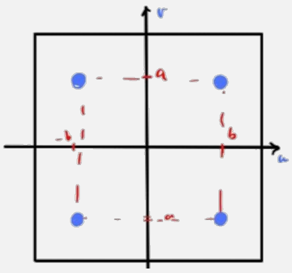
مقدار در نواحی رنگی $\frac{1}{2}$ و در باقی نواحی صفر است.



- $F(u,v) = \cos(2\pi av)\cos(2\pi bu)$

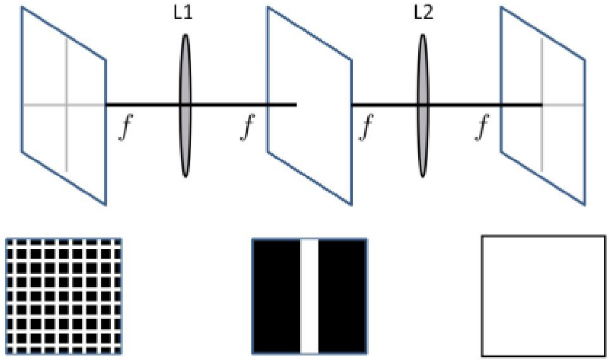
$$\begin{aligned}
F(u,v) &= \underbrace{\cos(2\pi av)}_{G(a,v)}\underbrace{\cos(2\pi bu)}_{G(b,u)} \xrightarrow{\text{قسمت الف}} f(x,y) = g(a,y)g(b,x) \\
G(a,v) &= \cos(2\pi av) = \frac{1}{2}\left(e^{j2\pi av} + e^{-j2\pi av}\right) \Rightarrow g(a,y) = \frac{1}{2}\left(\delta(y-a) + \delta(y+a)\right) \\
f(x,y) &= g(a,y)g(b,x) = \frac{1}{4}\left(\delta(y-a) + \delta(y+a)\right)\left(\delta(x-b) + \delta(x+b)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\delta(x-b,y-a) + \delta(x-b,y+a) + \delta(x+b,y-a) + \delta(x+b,y+a)\right) \\
&= \frac{1}{4}\delta\left(|x|-|b|,|y|-|a|\right) \qquad \text{ساده سازی برای نمایش، مرحله قبل توصیفی تر بوده}
\end{aligned}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\delta\left(|x|-|b|,|y|-|a|\right)$$

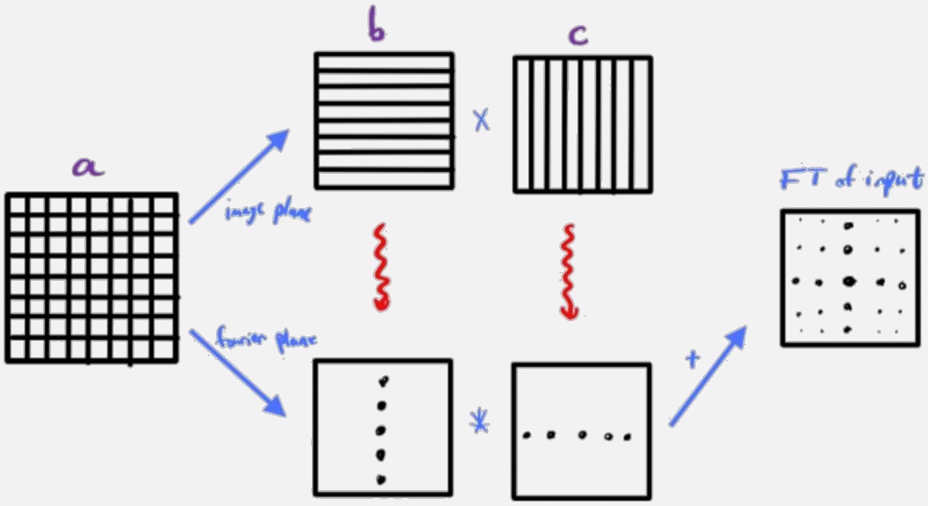


پردازش تصویر دوبعدی

شکل ۴: قسمت اول

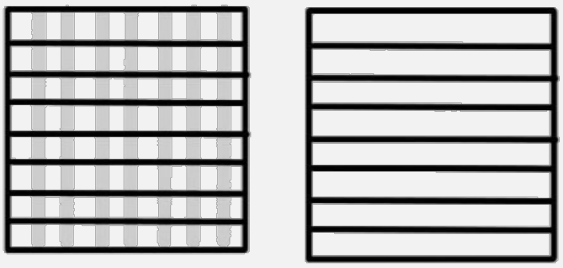


تصویری که به فیلتر میرسد، تبدیل فوریه ورودی ما است، ابتدا این تبئیل فوریه را حساب میکنیم.



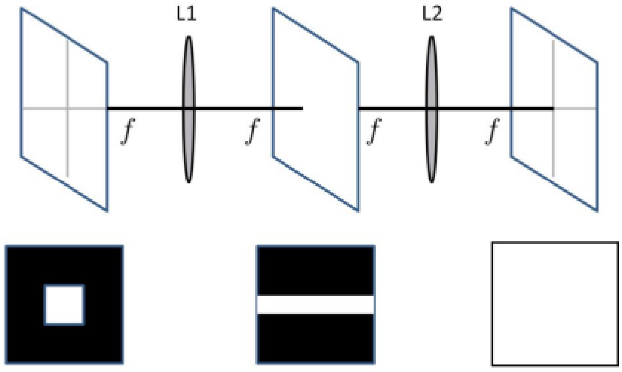
شکل ۵: تبدیل فوریه ورودی

حال اگر فیلتر پایین گذر ما به اندازه کافی محدود کننده باشد، یعنی فرکانس قطع آن پایین تر از فرکانس خطوط باشد، شکل نهایی ما تبدیل به شکلی مانند شکل b در شکل ۵ میشود، اگر نه به طور محو تر خطوط عمودی را میبینیم.

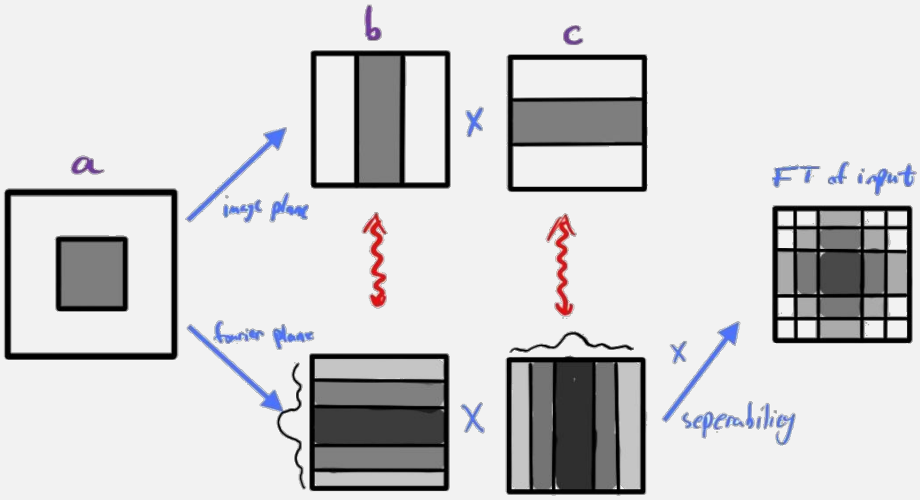


شکل ۶: سمت راست فیلتر با فرکانس قطع پایین و سمت چپ با فرکانس قطع بالا

شکل ۷: قسمت دوم

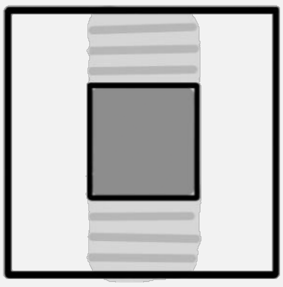


تصویری که به فیلتر میرسد، تبدیل فوریه ورودی ما است، ابتدا این تبئیل فوریه را حساب میکنیم.



شکل ۸: تبدیل فوریه ورودی

حال جواب شکل ۸ را با یک فیلتر ایده آل فیلتر میکنیم، این فیلتر در حوزه مکان شبیه به تبدیل فوریه قسمت c در شکل ۸ میباشد.
پس انگار شکل اولیه ما با یک sinc، کانوالو میشود که شکل نهایی خروجی تقریبا به شکل زیر است.



شکل ۹: شمای تقریبی خروجی