مثال) تعداد تکرار حلقه زیر برابر چیست؟

```
i=1;
while(i<n)
{write('*')
 i=i×2;
}
```

$n=4 \Rightarrow$ ۳ بار اجرا شد $\Rightarrow$ ۱ و ۲ رو می‌شود

$n=5 \Rightarrow$ " " " $\Rightarrow$ گرد شد ۳ رو می‌شود

۱- $\lceil \lg n \rceil$ ۳- $\lceil \lg n \rceil + 1$

۲- $\lfloor \lg n \rfloor$ ۴- $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ ✓

مثال) کامپیوتری در واحد زمان مسئله‌ای به اندازه ۱۶ را که الگوریتم آن از مرتبه $n \times 2^n$ است حل می‌کند، اگر سرعت کامپیوتر ۱۳۱۰۷۲ برابر شود این کامپیوتر همان مسئله را با چه اندازه‌ای در واحد زمان حل می‌کند؟

$$\text{زمان اجرا} = c \times n \times 2^n$$

* سرعت و زمان عکس هم است

$$1 = c \times 16 \times 2^{16} \Rightarrow c = 2^{-20}$$

$$\frac{c \times n \times 2^n}{2^{17}} = 1 \Rightarrow 2^{-20} \times n \times 2^n = 2^{17} \Rightarrow n \times 2^n = 2^{37} \Rightarrow \boxed{n=32}$$

$$\overset{n=32}{\Rightarrow} 32 \times 2^{32} = 2^5 \times 2^{32} = 2^{37}$$

نکته)

$$\frac{O(n_1)}{O(n_2)} = \frac{V_1}{V_2} \times \frac{t_1}{t_2} \Rightarrow \frac{16 \times 2^{16}}{n_2 \times 2^{n_2}} = \frac{1}{2^{17}} \times \frac{1}{1} \Rightarrow n_2 \times 2^{n_2} = 2^{37}$$

رشد توابع: منظور از رشد توابع در توابع صعودی یعنی اگر n را به سمت ∞ ببریم کدام تابع زودتر به سمت ∞ می‌رود و منظور از رشد توابع در توابع نزولی یعنی اگر n را به سمت ∞ ببریم کدام تابع دیرتر به ۰ میل می‌کند

رشد n^2 > رشد n^3

رشد n^{23} > رشد 2^n

رشد $(0/8)^n$ > رشد $(0/9)^n$

$$\left(\frac{8}{10}\right)^2 = \frac{64}{100} \qquad \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{81}{100}$$

$$\left(\frac{8}{10}\right)^3 = \frac{512}{1000}$$

نکته) رشد هر تابع صعودی از هر تابع نزولی بیشتر است.

مثال) توابع n^3 و 2^n را از لحاظ رشد با هم مقایسه کنید

تابع \ n	1	2	4	8	16	32
n^3	1	8	64	512	4096	32768
2^n	2	4	16	256	65536	4294967296

نکته) برای تشخیص رشد توابع استفاده از روش عددگذاری کار صحیحی نیست، چون رشد اصلا به معنا بزرگتر بودن نیست و رشد به این معنی است که سرعت رشد چه کسی بیشتر است

مثال) در دو تابع $2n$ و $3n$، تابع $3n$ به ازای تمامی nهای طبیعی همیشه مقدارش از تابع $2n$ بیشتر است، اما رشد $3n$ از $2n$ بیشتر نیست و این دو هم رشد اند.

نکته) ضریب ثابت هیچ تاثیری در رشد ندارد

دقیق ترین و درست ترین ابزار بررسی رشد دو تابع نسبت به هم حد است.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\begin{cases}0 \longleftrightarrow \text{رشد f < رشد g}\\ \infty \longleftrightarrow \text{رشد f > رشد g}\\ 0<K<\infty \longleftrightarrow \text{رشد f = رشد g}\end{cases}$$

توجه) در بحث رشد توابع فرض می‌کنیم داریم صحبت اعداد مان، اعداد طبیعی است

$N=\{0,1,2,\ldots\}$

توجه) ما همیشه در مورد توابع + صحبت می‌کنیم و برای رشد توابع تابع منفی نداریم، یعنی برای رشد توابع منفی بودن بی معناست. مثلا ما تابعی مانند $f(n)=-n^5$ در بحث رشد نداریم، یا تابعی شکل $f(n)=\sin\frac{n\pi}{4}$

مثال) با استفاده از حد رشد دو تابع $f(n)=n^3$ و $g(n)=n^2$ را با هم مقایسه کنید

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3}\xrightarrow{Hop}\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n^2}\xrightarrow{Hop}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{6n}=0\Rightarrow$$

زور مخرج بیشتر است

رشد n^3 > رشد n^2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g} = \frac{0}{0} \text{ OR } \frac{\infty}{\infty} \xRightarrow{Hop} \lim_{n\to\infty} \frac{f'}{g'}$$

نکته) $n^a > n^b$ اگر $a > b$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{1/n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2}$$

سوال) با استفاده از حد، رشد دو تابع $f(n)=0/8^n$ و $g(n)=0/9^n$ را مقایسه کنید.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(0/8)^n}{(0/9)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0 \Rightarrow$$ رشد $0/8^n <$ رشد $0/9^n$

نکته)
$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & : a>1 \\ 0 & : 0<a<1 \\ 1 & : a=1 \end{cases}$$

رشد $0/8^n <$ رشد 3^n

رشد $2^n <$ رشد 3^n

رشد $0/8^n <$ " " $0/9^n$

نکته) $a^n > b^n$ اگر $a > b$ ؛

a و b ثابت

مثال) رشد دو تابع $f(n)=n^2$, $g(n)=2^n$ را با هم مقایسه کنید

نکته) $(a^n)' = a^n \times Ln\, a$

$(n^a)' = a n^{a-1}$

$(uv)' = u'v + v'u$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} \xrightarrow{Hop} \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2^n\, Ln 2} \xrightarrow{Hop} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2^n \times Ln2 \times Ln2} = 0 \Rightarrow$$ زور مخرج بیشتر

نکته) رشد نمایی ها از چندجمله ای ها بیشتر است

نتیجه) اگر a و b ثابت باشند (عدد باشند) و $a>1$ آنگاه رشد $n^b <$ رشد a^n

چون اگر $a>1$ باشد a^n تصاعدی می شود و رشد هر تابع صعودی از رشد هر تابع تساوی بیشتر است

n به توان ثابت از ثابت به توان n رشد کمتری دارد (>1)

سوال) رشد دو تابع $f(n)=n^3$ و $g(n)=0/9^n$ را با هم مقایسه کنید

سوال) رشد $f(n)=3^n$ را با رشد تابع $g(n)=n\times 2^n$ مقایسه کنید

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n\times 2^n}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{Hop}\lim_{n\to\infty}\frac{3^n \ln 3}{2^n+2^n\times \ln 2\times n}$$

صورت و مخرج را بر 2^n تقسیم کنیم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{3}{2})^n}{n}\xrightarrow{Hop}\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{3}{2})^n\times\ln\frac{3}{2}}{1}=\infty$$ زور صورت بیشتر است

رشد $3^n >$ رشد $n\times 2^n$

نتیجه) $a^n > n^b\times c^n$: اگر $a>c$

نکته) $(a^u)'=u'\times a^u\times \ln a$

$$(\log_a^n)'=\frac{1}{n\ln a}\xleftarrow{\text{جزئی‌تر}}(\log_a^u)'=\frac{u'}{u\ln a}$$

$$\ln u=\log_e^u \quad e\simeq 2.7 \Rightarrow (\ln u)'=\frac{u'}{u\ln e}\to \log_e^e=1$$

مثال) رشد $n^{\frac{1}{3}}$ را با $(0.7)^n$ مقایسه کنید؟

$n^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{n} \qquad (0.7)^n<n^{\frac{1}{3}}$

یادآوری : $\sqrt[b]{u^a}=u^{\frac{a}{b}}$

مثال) رشد دو تابع $f(n)=\log_2^n$ و $g(n)=\log_5^n$ را با هم مقایسه کنید ؟

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2^n}{\log_5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\cancel{\log_7^n}}{\log_7^2}}{\frac{\cancel{\log_7^n}}{\log_7^5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_7^5}{\log_7^2}=\lim_{n\to\infty}\log_2^5=2.3$$

نکته) $$\log_b^a=\frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

نکته) اگر $a,b>1$ باشند و ثابت باشند $\log_a^n\simeq\log_b^n$

$$\log_{\frac{1}{2}}^{32}=-5\Rightarrow(\frac{1}{2})^{-5}=\frac{1}{2^{-5}}=2^5$$

توجه = $\log_b^a=c\longleftrightarrow a=b^c$

مثال) رشد دو تابع $f(n)=\sqrt{n}$ و $g(n)=\lg n$ را باهم مقایسه کنید.

$(n^{1/2})' = 1/2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\lg n} \xrightarrow{Hop} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n\ln 2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{n}^{\sqrt{n}\times\sqrt{n}}\times\ln 2}{2\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\times\ln 2}{2} = \infty$$

$$(n^{1/2})' = \frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}n^{-1/2} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{n^{1/2}} = \frac{1}{2\times\sqrt{n}}$$

رشد $\sqrt{n}$ > رشد $\lg n$

نتیجه: $n^a > (\log n)^b$: a و b عدد ثابت باشند (ثابت باشند) و $a>0$

** n بتوان ثابت مثبت از لگاریتم n به هر توان ثابتی رشدش بیشتر است.

سوال: $n^{0/01}$? $\log^2 n$ OR $\log n^a$ OR $(\log n)^{200}$

$= \sqrt[100]{n}$

$\log n^a = a\log n \simeq \log n$

$\log^a n = (\log n)^a$

$\sin^a n = (\sin n)^a$

$n^{\frac{1}{14}}$? $\log^3 n$

$= \sqrt[14]{n}$

نکته) در نتیجه بالا می توانیم به جای n هر تابع صعودی که دوست داریم بگذاریم. حال من به جای n، $\log n$ قرار میدهم، بنابراین خواهیم داشت

$(\log n)^a > (\log\log n)^b$

* $\log$ کوچک کننده است.

مثال $(\lg\lg n)^6$? $\sqrt[5]{\lg n} \Rightarrow (\log n)^{1/5}$

سوال) رشد دو تابع $\lg^2\lg n$ و $\lg\lg^2 n$ را مقایسه کنید؟

$\lg^2\lg n = (\lg\lg n)^2 = \lg\lg n \times \lg\lg n$

$\lg\lg^2 n = \lg(\lg n)^2 = 2\lg\lg n$

$\Rightarrow (\lg\lg n)^2 > \lg\lg^2 n$

سوال) رشد دو تابع زیر را مقایسه کنید $f(n)=n^3$ و

$g(n) = 4^{\log_2 n}$?

نکته) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

نکته) $a^{\log_a b} = b$ ← با توجه به نکته قبلی $b^{\log_a a} = b$

$g(n) = 4^{\lg n_2} = n^{\cancel{\lg 4}\,2} = n^2 \Rightarrow n^2 ?\, n^3 \Rightarrow$ رشد n^3 > رشد n^2

مثال) $f(n) = \lg n$, $g(n) = n^{\frac{1}{\lg n}}$ را از لحاظ رشد مقایسه کنید

روش ۱) $g(n) = n^{\frac{1}{\lg n}} = n^{\frac{\lg 2}{\lg n}} = n^{\log_n 2} = 2 \Rightarrow$ رشد $f(n)$ بیشتر است

روش ۲) $g(n) = n^{\frac{1}{\lg n}} = n^{\log_n 2} = 2$

نکته) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

روش ۳) $2^{\lg n} = n \xrightarrow[\text{می رسانیم } \frac{1}{\lg n}]{\text{طرفین را به توان}} (2^{\lg n})^{\frac{1}{\lg n}} = n^{\frac{1}{\lg n}} = 2$

نکته) در بحث رشد داریم $\log n! = n \lg n$

توجه) دقت کنید که این دو تابع از لحاظ ریاضی مساوی هم نیستند

توجه) $(\log n)!$ را با $\log n!$ اشتباه نگیرید

* برای اثبات اینکه ۲ تابع هم رشدند راه های گوناگونی وجود دارد

۱- با استفاده از حد (نشان دهیم حد دو تابع برابر عدد ثابت میشود)

$f(n) \in O(g(n))$, $f(n) \in \Omega(g(n)) \Rightarrow f(n) \in \Theta(g(n))$

۲-