ساختمان داده

رابین رضوی

نکته) $\log a\times b = \log a + \log b$

می‌خواهیم نشان دهیم که $\log n! \in \Theta(n\lg n)$

۱- نشان دهیم $\log n! \in O(n\lg n)$:

$$\lg n! = \lg n\times(n-1)\times(n-2)\times \cdots \times 1 = \lg n + \lg n-1 + \cdots + \lg 1 < \lg n + \lg n + \cdots + \lg n = n\lg n$$

$$\Rightarrow \lg n! < n\lg n \Rightarrow \lg n! \in O(n\lg n) \quad (1)$$

۲- نشان دهیم که $\lg n! \in \Omega(n\lg n)$

$$\lg n! = \lg n\times n-1\times \cdots \times \lg 1 = \lg n + \lg n-1 + \cdots + \lg \tfrac{n}{2} + \underbrace{\lg \tfrac{n}{2}-1 + \cdots + \lg 1}_{\text{اینها را کنار می‌گذاریم}} >$$

$$\underbrace{\lg \tfrac{n}{2} + \lg \tfrac{n}{2} + \cdots + \lg \tfrac{n}{2}}_{\text{تعداد اینها } n/2 \text{ است}} = \tfrac{n}{2}\lg \tfrac{n}{2} = \tfrac{n}{2}(\lg n - \lg 2)$$

$$\tfrac{n}{2}(\lg n - 1) = \tfrac{n}{2}\lg n - \tfrac{n}{2} \Rightarrow \lg n! > \overbrace{\tfrac{n}{2}\lg n - \tfrac{n}{2}}^{\in\Theta(n\lg n)} \Rightarrow \lg n! \in \Omega(n\lg n) \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \lg n! \in O(n\lg n)\ \&\ \lg n! \in \Omega(n\lg n) \rightarrow \lg n! \in \Theta(n\lg n)$$

روش ۲ اثبات :

استرلینگ ، $n! = \sqrt{2\pi n}\times\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$$\lg n! = \tfrac{1}{2}\lg 2\pi n + \overbrace{n\underbrace{\lg \tfrac{n}{e}}_{\lg n - \lg e}}^{\Theta(n\lg n)} + \lg\left(1+\Theta\left(\tfrac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow \lg n! \in \Theta(n\lg n)$$

نکته بسیار مهم و بسیار کاربردی: اگر f و g دو تابع صعودی باشند و بزرگتر از ۱ باشند و $\log f$ از $\log g$ رشد بیشتری داشته باشد آن‌گاه رشد f نیز از رشد g بیشتر است

- در بررسی رشد دو تابع اگر نتوانستیم با استفاده از نکاتی که بلدیم رشدشان را مقایسه کنیم، ابتدا می‌رویم و رشد logهایشان را با هم مقایسه می‌کنیم، در اینصورت آن کسی که رشد logاش بیشتر است رشد خودش هم بیشتر است، اما اگر رشد logهای دو تابع یکسان بود (هم رشد بودند) نمی‌توانیم نتیجه‌ای بگیریم

$\text{رشد } \log f > \text{رشد } \log g \Rightarrow \text{رشد } f > \text{رشد } g$

〃 = 〃 $\Rightarrow$ نمی‌توانیم نتیجه‌ای بگیریم

توجه) عکس این موضوع لزوما برقرار نیست

$\text{رشد } f > \text{رشد } g$ ⟨ $\text{رشد } \log f > \text{رشد } \log g$ / 〃 = 〃

$3^n \ ? \ 4^n \xrightarrow{\lg} \lg 3^n \ ? \ \lg 4^n \Rightarrow n\lg 3 = n\lg 4 \Rightarrow$ رشد هر ۲، n است

$n^4 \ ? \ n^2 \xrightarrow{\lg} \lg n^4 \ ? \ \lg n^2 \Rightarrow 4\lg n = 2\lg n$

$n^2 \ ? \ 2^n \xrightarrow{\lg} \lg n^2 \ ? \ \lg 2^n \Rightarrow 2\lg n \ \underset{<}{?} \ n\lg 2 \Rightarrow \text{رشد } n^2 < \text{رشد } 2^n$

$n^n \ ? \ n! \xrightarrow{\lg} \lg n^n \ ? \ \lg n! \Rightarrow n\lg n \ ? \ \lg n! \Rightarrow n\lg n = \lg n!$

$\underbrace{n\times n\times \cdots \times n}_{n \text{ تا}} < n\times (n-1)\times \cdots \times 1$

مثال) رشد دو تابع $f(n)=(\lg n)^n$ و $g(n)=n^{\lg n}$ را با هم مقایسه کنید.

$\lg f = \lg(\lg n)^n = n\lg\lg n$

$\lg g = \lg n^{\lg n} = \lg n \times \lg n = (\lg n)^2$

$\Rightarrow \text{رشد } \lg f > \text{رشد } \lg g \Rightarrow \text{رشد } f > \text{رشد } g$

مثال) رشد دو تابع $\underset{f}{n^3}$ و $\underset{g}{(\log n)^{\log n}}$ را با هم مقایسه کنید

راه ۱)

$\lg f = \lg n^3 = 3\lg n$

$\lg g = \lg (\lg n)^{\lg n} = \lg n \times \lg\lg n$ ⇒ رشد $\lg f$ < رشد $\lg g$ ⇐ رشد f < رشد g

راه ۲) نکته: $a^{\log_c b} = b^{\log_c a} \Rightarrow (\log n)^{\log n} = n^{\log\log n}$

$n^{\lg\lg n}$? $n^3 \longrightarrow$ رشد n^3 < رشد $n^{\lg\lg n} = (\lg n)^{\lg n}$

سوال) توابع زیر را از نظر رشد از کوچک به بزرگ مرتب کنید

$n^2,\ n!,\ n^{\lg n},\ n^{\lg\lg n},\ 2^n,\ n\lg\lg n,\ n\lg n,\ (\lg n)^{\lg n},\ n^n,\ (\lg n)^n$

$n\lg\lg n < n\lg n < n^2 < n^{\lg\lg n} = (\lg n)^{\lg n} < n^{\lg n} < 2^n < (\lg n)^n < n! < n^n$

$n^{\lg n}\ ?\ 2^n \Rightarrow \lg n^{\lg n}\ ?\ \lg 2^n \Rightarrow (\lg n)^2\ ?\ n\lg 2 \Rightarrow 2^n > n^{\lg n}$

$(\lg n)^n\ ?\ 2^n \Rightarrow \lg(\lg n)^n\ ?\ \lg 2^n \Rightarrow \cancel{n}\lg\lg n\ ?\ \cancel{n}\lg 2 \Rightarrow (\lg n)^n > 2^n$

$(\lg n)^n\ ?\ n! \Rightarrow \lg(\lg n)^n\ ?\ \lg n! \Rightarrow \cancel{n}\lg\lg n\ ?\ \cancel{n}\lg n \Rightarrow n! > (\lg n)^n$

نکته) اگر در دو تابع صعودی پایه‌ها برابر بود برای مقایسه رشد دو تابع می‌توانید توان‌هایشان را با هم مقایسه کنید و اگر توان‌ها برابر بود می‌توانید پایه‌هایشان را با هم مقایسه کنید.

سوال) درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید

الف) if $f \in O(g)$ then $\log f \in O(\lg g)$

رشد f < رشد g ، $f \in O(g)$ ⟨ رشد $\log f$ < رشد $\lg g$ ، رشد $\log f$ = رشد $\lg g$ ⟩ $\Rightarrow \log f \in O(\lg g)$

خیر این صحبت ها درست نیست و در صورتی درست است که شرط زیر برقرار باشد

$f(n) = 2$ و $g(n) = 1 \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$ ✓
$2 \in O(1)$

شروط : $\lg(g(n)) \geq 1$ و $f(n) \geq 1$

این شرط به معنا صعودی بودن f است، چون اگر f نزولی باشد رودی می رشد که با بزرگ کردن n مقدار تابع از 1 کمتر شود.

$\rightarrow \lg 2 \;?\; \lg 1$
$\;\;\;\;\; = 1 \;\;\;\; = 0 \Rightarrow \underbrace{1 \in O(0)}$
چنین چیزی در رشد توابع نداریم

مثال) رشد دو تابع $f(n) = 2^{\frac{1}{n^2}}$ و $g(n) = 2^{\frac{1}{n}}$ را با هم مقایسه کنید

$\frac{1}{n} \;?\; \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ رشد $\frac{1}{n}$ > رشد $\frac{1}{n^2}$ $\longrightarrow$ رشد g > رشد f

راه ۱) غلط است . زیرا دو تابع نزولی است .

راه ۲)

$\lg f \;?\; \lg g \Rightarrow \lg 2^{\frac{1}{n^2}} \;?\; \lg 2^{1/n} \Rightarrow \frac{1}{n^2}\lg 2 \;?\; \frac{1}{n}\lg 2 \Rightarrow$ رشد f > رشد g

بررسی رشد دو تابع $\frac{1}{n}$ و $\frac{1}{n^2}$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \times n^{\cancel{2}}}{\cancel{n} \times 1} = \infty \Rightarrow$ رشد $\frac{1}{n}$ > رشد $\frac{1}{n^2}$

راه ۳)

$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n^2}}}{2^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ رشد f = رشد g

سوال) از لحاظ ریاضی آیا عبارت $(\lg n)!$ درست است؟ $(\lg 5)! = (۲/\ldots)!$

توجه: پشت فاکتوریل فقط عدد طبیعی می آید

در ریاضیات برای درست کردن این نمایش بصورت زیر عمل می کنند: $\lfloor \lg n \rfloor !$ or $\lceil \lg n \rceil !$

سوال) رشد دو تابع $\lceil \lg n \rceil !$ و n^3 را با هم مقایسه کنید

$n \lg n$

آیا رشد تابع $\lceil \lg n \rceil !$ محدود به چند جمله ای است؟

$\lg \underbrace{\lceil \lg n \rceil}_{n} ! \; ? \; \lg n^3 \Rightarrow \lceil \lg n \rceil \lg \lceil \lg n \rceil \; ? \; 3\lg n \Rightarrow \cancel{\lg n} \times \lg\lg n \underset{>}{?} \cancel{\lg n} \; 1$

رشد $\lceil \lg n \rceil ! > n^3$ رشد $\Rightarrow$ رشد $\lceil \lg n \rceil !$ از رشد هر n^k ای بیشتر است $\Rightarrow$

بنابراین رشد $\lceil \lg n \rceil !$ محدود به چند جمله ای نیست

این سوال را از خودمان می پرسیم: آیا پیدا می شود n^k ای که k ثابت باشد و $\lceil \lg n \rceil ! < n^k$

اگر پیدا شود و جواب بله باشد می گیم $\lceil \lg n \rceil !$ محدود به چند جمله ای است و اگر پیدا نشود می گیم

محدود به چند جمله ای نیست

$\lg \lceil \lg n \rceil ! \; ? \; \lg n^k \Rightarrow \cancel{\lg n} \times \lg\lg n \underset{>}{?} k \cancel{\lg n}$

آیا $\lceil \lg n \rceil !$ محدود به نمایی است: آیا پیدا می شود یک b^n ای که b ثابت و $\lceil \lg n \rceil ! < b^n$

اگر جواب بله بود می نویسیم محدود به نمایی است و اگر خیر می نویسیم به نمایی ها نیز محدود نیست

$\lceil \lg n \rceil ! \; ? \; b^n \xrightarrow{\lg} \lg n \times \underbrace{\lg\lg n}_{\lg n} \; ? \; n \lg b$

$\underbrace{(\lg n)^2}_{\lg n} \underset{<}{?} n \Rightarrow$ $\lceil \lg n \rceil !$ محدود به نمایی است

نتیجه: $\overset{\text{constant}}{n^{a}} < \lceil \lg n \rceil ! < b^n,\ b > 1$

مثال) آیا $\lceil \lg\lg n \rceil !$ محدود به چند جمله‌ای است؟

$$\lceil \lg\lg n \rceil ! \;?\; n^k \Rightarrow \lg \lceil \lg\lg n \rceil ! \;?\; \lg n^k \Rightarrow \lceil \lg\lg n \rceil \lg \lceil \lg\lg n \rceil \;?\; \lg n$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lg\lg n \times \underbrace{\lg\lg\lg n}_{\lg\lg n}}_{} \;?\; \lg n$$

$$(\lg\lg n)^2 \;\underset{<}{?}\; \lg n \Rightarrow$$ رشد $n^k <$ رشد $\lceil \lg\lg n \rceil !$ ⇐ $\lceil \lg\lg n \rceil !$ محدود به چند جمله‌ای است

$\lg^* n$: برابر است با حداقل تعداد باری که باید از n لگاریتم بگیریم تا حاصل 1 یا کمتر از 1 بشود

مثال) $\lg^* 1000$ برابر چند است؟

$\lg\ \lg\ \lg\ \lg 1000 \Rightarrow \lg^* 1000 = 4$

9,

3,

1,

0,

* توجه) پایه $\lg^*$ همیشه ۲ است.

$\lg^* 65536$ برابر چند است؟

$\lg\ \lg\ \lg\ \lg 65536 \Rightarrow \lg^* 65536 = 4$

16

4

2

1

نتیجه) $\lg^*$ یک تابع صعودی است ولی رشد بسیار بسیار کندی دارد.

$1 < n \le 2 \longrightarrow \lg^* n = 1$

$2 < n \le 4 \longrightarrow \lg^* n = 2$

$4 < n \le 16 \longrightarrow \quad " = 3$

$16 < n \le 65536 \longrightarrow \quad " = 4$

$2^{16} < n \le 2^{65536} \longrightarrow \quad " = 5$

سوال) رشد دو تابع $n^{1/3}$ و $\lg^* n$ را با هم مقایسه کنید؟

$>$

هر تابع صعودی از تمامی توابع توانی رشدش بیشتر است

$n=16 \quad \lg^* 16 = 3$

نکته) $\underbrace{\lg^* \lg \cancel{n}^{4}}_{2} = \underbrace{(\lg^* n) - 1}_{3-1}$

$\lg^* \underbrace{\lg 16}_{4} = \lg^* 4 = 2 \qquad \underbrace{\lg \underbrace{\lg 4}_{2}}_{1}$

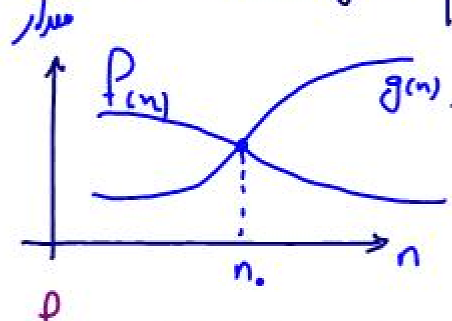
سوال) رشد دو تابع $\lg^*(\lg n)$ و $\lg(\lg^* n)$ را با هم مقایسه کنید؟

$\lg^* \lg n = (\lg^* n) - 1 \simeq \lg^* n \quad \overset{?}{>} \quad \lg(\lg^* n)$

$n > \lg n$ می دانیم $\longrightarrow \lg^* n > \lg \lg^* n$

نمادهای مجانبی : برای بیان زمان اجرا الگوریتم و حافظه مصرفی از نمادهای O و Ω و o و ω و Θ استفاده می کنند

big O: گوییم تابع $f(n)$ از مرتبه $O(g(n))$ است و می نویسیم $f(n) \in O(g(n))$ یا $f(n) = O(g(n))$ هرگاه رشد f کمتر مساوی رشد g باشد



$f(n) \in O(g(n)) \longrightarrow \exists c, n_0 > 0, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \underline{0 \leq} f(n) \leq c \cdot g(n)$

رشد برای توابع منفی معنا ندارد

اگر مساوی اینجا نباشد این تعریف باز هم تعریف O بزرگ است.

تست) به ازای چه مقادیری از c و n_0 عبارت $\overbrace{3n^2+4n+6}^{f(n)} \in O(\overset{g(n)}{n^2})$ درست است؟

۱- $c=3, n_0=4$ ×
۲- $c=2, n_0=7$ ×
۳- $c=4, n_0=6$
۴- $c=4$ و $n_0=4$

$3n^2+4n+6 \leqslant c\times n^2 \Rightarrow$

$c=1 \Rightarrow 2n^2+4n+6 \leqslant 0$ ✗

⋮

$c=3 \Rightarrow 4n+6 \leqslant 0$ ✗

$c=4 \Rightarrow n^2 \geqslant 4n+6 \Rightarrow n_0=3 \Rightarrow 9 \geqslant 12+6$ ✗

$n_0=4 \Rightarrow 16 \geqslant 16+6$ ✗

$n_0=5 \Rightarrow 25 \geqslant 26$ ✗

$n_0=6 \Rightarrow 36 \geqslant 30$ ✓

$n_0=7 \Rightarrow 49 \geqslant 34$

$5n^2+2n-7 \rightarrow O(n^4)$

$5n^2+2n-7 \rightarrow O(n! \text{ OR } n^n \text{ OR } 2^n)$

$5n^2+2n-7 \rightarrow O(n^2)$

$5n^2+2n-7 \rightarrow \notin O(n\lg n \text{ OR } n \text{ OR } \sqrt{n} \text{ OR } \frac{1}{n^2} \text{ OR } \ldots)$

توجه) O بزرگ کران بالا را برای ما مشخص می‌کند

تعریف Ω: $f(n) \in \Omega(g(n)) \Rightarrow$ رشد $f(n)$ بزرگتر مساوی رشد $g(n)$ است

توجه) Ω کران پایین را برای ما مشخص می‌کند

$5n^2+3n-7 \rightarrow \in \Omega(n^2 \text{ OR } n\lg n \text{ OR } \lg n \text{ OR } \sqrt{n} \text{ OR } n\lg n \text{ OR } \ldots)$

$5n^2+3n-7 \rightarrow \notin \Omega(n^3 \text{ OR } 2^n \text{ OR } n! \text{ OR } n^n \text{ OR } \ldots)$

تعریف small o : $f(n) \in o(g(n)) \Rightarrow$ رشد f از رشد g کمتر است.

توجه) o کران بالا اکید را به ما میدهد

$5n^2+3n-7 \rightarrow \in o(n^3 \text{ OR } 2^n \text{ OR } \ldots)$

$5n^2+3n-7 \rightarrow \notin o(n^2 \text{ OR } n\lg n \text{ OR } \ldots)$

تعریف ریاضی small o :

$\forall c>0, \exists n_0>0, \forall n \geqslant n_0 \rightarrow 0 \leqslant f(n) < c\cdot g(n)$

مثال) آیا $3n^2+4n+6 \in o(n^2)$ هست یا نیست؟

در اینجا باید به ازای تمامی c ها این نامساوی برقرار باشه تا بتوانیم بگوییم بله هست. $\Rightarrow 3n^2+4n+6 \leqslant c \cdot n^2$

$c=1 \Rightarrow 2n^2+4n+6 \leqslant 0 \quad \times$

تعریف ω: رشد $f(n)$ بیشتر از $g(n)$ است. $f(n) \in \omega(g(n)) \Rightarrow$

توجه) ω کران پایین اکید را به ما میدهد

تعریف Θ:

$$\exists c_1, c_2, n_0 > 0 ,\ \forall n \geqslant n_0 \Rightarrow c_2\, g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_1 \cdot g(n)$$

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \longrightarrow g(n) \in \Theta(f(n)) \Rightarrow \text{رشد } g(n) = \text{رشد } f(n)$$