



سایت کافه تدریس و استاد رضوی هیچ رضایتی نسبت به استفاده غیرمجاز از ویدئوها ندارند. استفاده غیرمجاز از این فیلم کاملاً حرام و پیگرد قانونی دارد.

ساختمان داده

@konkurcomputer
www.konkurcomputer.ir

رایین رضوی

$$۸- \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \approx \ln n \in \Theta(\lg n)$$

یا بلوری: $\log_e n = \ln n$

$$\approx 2.302585092994046$$

نکته: $\log_2 n = \lg n$

$$\log_a n \approx \log_b n \approx \log_c n$$

نکته: گاهی هم پایه ثابتی دارند با هم هم می‌روند.

for (i=1 to n)

for (j=1 to i)

write('*');

نشان: در قطعه برنامه زیر تعداد اجرا جمله را بدست آورید.

$$i=1 \quad i=2 \quad \dots \quad i=n$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \in \Theta(n^2)$$

$$\text{مجموع هدر اجرا} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 1 = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

جمله لایلی

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} =$$

نشان: حاصل عبارت زیر برابر چیست؟

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{i} = \sum_{i=1}^n i^{\frac{1}{2}} \in \Theta(n^{\frac{1}{2}+1}) = \Theta(n^{\frac{3}{2}}) = \Theta(n\sqrt{n})$$

نشان: مرتبه زمان اجرا این قطعه که را بدست بیاورید؟

for (i=1 to n)

for (j=1 to i)

for (k=1 to j)

write('*');

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^j 1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i j = \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 + i = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n i \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \in \Theta(n^3) = \binom{n+2}{3}$$

یادآوری: سیمای و انگرال روی جمع تعریف

خاصیت بعضی دارند

$$\int a f(x) \pm b g(x) = a \int f(x) \pm b \int g(x)$$



سایت کافه تدریس و استاد رضوی هیچ رضایتی نسبت به استفاده غیرمجاز از ویدئوها ندارند. استفاده غیرمجاز از این فیلم کاملاً حرام و پیگرد قانونی دارد.

ساختن داده

@konkurcomputer
www.konkurcomputer.ir

راین رضوی

نکته: تعداد اجراهای $write(*)$ در k حلقه وابسته به i است زیرا برابر است با $(n-1 + \text{تعداد حلقه وابسته})$ که از مرتبه $\Theta(n)$ است.

for (j=1 to n)
for (j₂=1 to j₁)

مثال for (i=1 to n)

for (j=1 to i)

for (k=1 to j)

$write(*) \Rightarrow \binom{n+3-1}{3}$

for (j_k=1 to j_{k-1})

$write(*) \Rightarrow \text{تعداد اجراهای} = \binom{n+k-1}{k}$

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3!7!} = 120$$

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

یادآوری:

for (i=1 to n*n)

for (j=i to i+n)

for (k=1 to j)

$write(*)$

تعداد حسابی

$$\sum_{i=1}^{n^2} \sum_{j=i}^{i+n} \sum_{k=1}^j 1 = \sum_{i=1}^{n^2} (i + (i+1) + (i+2) + \dots + (i+n))$$

$$\Theta(n^2) - 1$$

$$\Theta(n^3) - 2$$

$$\Theta(n^4) - 3$$

$$\Theta(n^5) - 4$$

$$= \sum_{i=1}^{n^2} (n+1)i + \frac{n(n+1)}{2} = (n+1) \underbrace{\sum_{i=1}^{n^2} i}_{\frac{n^2(n^2+1)}{2}} + \underbrace{\frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n^2} 1}_{\Theta(n^4)} \in \Theta(n^5)$$



سایت کافه تدریس و استاد رضوی هیچ رضایتی نسبت به استفاده غیرمجاز از ویدئوها ندارند. استفاده غیرمجاز از این فیلم کاملاً حرام و پیگرد قانونی دارد.

ساختن داده

@konkurcomputer
www.konkurcomputer.ir

رایین رضوی

```
for (i=1; i ≤ n³; i++)
```

```
for (j=1; j ≤ i; j++)
```

```
for (k=1; k ≤ i; k++)
```

```
write('*');
```

مثال) $\sum_{i=1}^{n^3} \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i 1 = n^3 \sum_{i=1}^{n^3} i$

$$\Rightarrow 12n \sum_{i=1}^{n^3} i = 12n \times \frac{n^3 \times (n^3 + 1)}{2}$$

```
for (i=1; i ≤ n; i *= 2)
```

$\log n$

```
for (j=1; j ≤ n; j++)
```

n

```
write('*');
```

$\Theta(n \log n)$

مثال)

```
i = n;
```

```
while i > 1 do
```

```
{ j = 1;
```

```
while j < n do
```

```
{ j = j * 5;
```

```
write('*');
```

```
}
```

```
i = i / 2;
```

```
}
```

```
for (i=1; i ≤ n; i++)
```

```
for (j=1; j ≤ n; j++)
```

```
{ write('*');
```

```
} n--;
```

جمع تعداد اجرا $= \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \dots$

$$n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = n \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = n$$

مثال) مرتبه زمانی بعد گذر را به دست آورید؟

$n^2 - 1$

$n - 2$

$\log n - 3$

$n \log n - 2$



$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = x$$

$$-aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n = xq$$

$$a - aq^n = x(1 - q) \rightarrow x = a \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

مهندسی ۸۹: یک فرس قطبی n تا یکدگ گوشت با شماره n آتا n درون یک غار محفی کرده، اندازه هر قطعه گوشت برابر شماره آن است، این فرس هر روز یک یکدگ گوشت به طرد تصادفی بر می دارد و اگر شماره آن گوشت فرد بود، گوشت را کامل می خورد و اگر زوج بود نصف اش را می خورد و نصف اش را دوباره ذخیره می کند، هر وقت که این گوشت تمام شوند خریده می میرد، این فرس حدوداً چند روز زنده است؟

(۱) n روز (۲) $2n$ روز (۳) n روز (۴) $3n$ روز

مثال برابر $n=8$

۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱

۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱

۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱

۵ ۴ ۳ ۲ ۱

۴ ۳ ۲ ۱

۳ ۲ ۱

۲ ۱

۱

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \text{تعداد روزی که فرس زنده می ماند}$$

$$n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \dots = n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = n \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2n$$

```
for(i=1; i<=n; i++)
    for(j=1; j<=n; j++)
```

آسانی ۸۶: مرتبه زمانی شبد که زیر را بدست آورید؟

$x = x + 1$
 $\{ n = n - 1 \}$
write مجموع تعداد اجرا = $n + n - 1 + \dots + n - (n/2 - 1) = n/2 + 1$

$i=1 \quad i=2 \quad \dots \quad i=n/2$



$$\text{write} \text{ مقدار اجرا} = \frac{n/2 \times (n/2 + 1 + n)}{2} = \frac{3n^2 + 2n}{8} \in \Theta(n^2)$$

for (i=1; i ≤ n; i++)

for (j=1; j ≤ n; j+=i)

write('*');

$$a += b \Rightarrow a = a + b$$

$$a -= b \Rightarrow a = a - b$$

(سوال)

$$\text{write} \text{ مقدار اجرا} = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \dots + \frac{n}{n} = n(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})$$

$$= n \ln n \in \Theta(n \lg n)$$

for (i=1; i ≤ n; i++)

for (j=i; j ≤ n; j+=i);

write('*');

$$\text{write} \text{ مقدار اجرا} = \sum_{i=1}^n \frac{n-i}{i}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} - 1 = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^n 1$$

$$n \lg n - n \in \Theta(n \lg n)$$

(سوال)

تعداد تکرار جمله اصلی را در کد زیر بدست آورید

(سوال)

i = n;
while i > 1 do

{ j = 1;
while j < n do
{ j = j * 3;
i = i / 2;
write('*');
}

می‌خواهم ببینم در هر بار تکرار حلقه بیرونی i چند بار تقسیم

$$\text{بر } 2 \text{ می‌شود؟} \quad 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^{\log_2 n} = \log_2 n$$

در هر بار اجرا حلقه بیرونی تقسیم بر $2^{\log_2 n}$ می‌شود تا وقتی $1 \leq i$ شود



سایت کافه تدریس و استاد رضوی هیچ رضایتی نسبت به استفاده غیرمجاز از ویدئوها ندارند. استفاده غیرمجاز از این فیلم کاملاً حرام و پیگرد قانونی دارد.

@konkurcomputer
www.konkurcomputer.ir

ساختمان داده

رایین رضوی

بنا بر این حلقه خارجی \log_2^n بار ابرامی شود.

$$\text{write} = \log_2^n \times \log_3^n = \frac{1}{\log_3^n} \times \log_2^n \times \log_3^n = \log_2^n$$

$$\log_b a^n = \frac{n}{m} \log_b a$$

مثال) مرتبه زمانی قطعه که زیر را بدست آورید

for (i=1; i ≤ n; i = i * 2) $\log_2 n$

for (j=1; j ≤ n; j = j * 2)

for (k=1; k ≤ j; k++)

write('*');

$$\Rightarrow \text{مرتبه زمانی} \in \Theta(n \log n)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{for (j=1; j ≤ n; j = j * 2)} \\ \text{for (k=1; k ≤ j; k++)} \end{array} \right\} \Theta(n)$$

j=1
j=2
j=4
j=8
⋮
j=2^K ≤ n

$$2^K \in \Theta(n)$$

$$\text{write مجموع اجرا} = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^K = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^K = 2^{K+1} - 1 = 2 \times 2^K - 1 \in \Theta(n)$$

i=n
while (i > 1)

{ write('*')

i = i / 2

$$\left. \begin{array}{l} \text{while (i > 1)} \\ \text{{ write('*')} } \\ \text{i = i / 2} \end{array} \right\} \text{مرتبه زمانی} \in \Theta(n)$$

مثال)



مثال ۱
 $2^K \approx n \Rightarrow \log_2^K = \lg n \Rightarrow K = \lg n$
 $i = 1$
 while ($i < n$)
 { write('*');
 $i = i * 2$;
 }
 write به ازای چه i می شود
 $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^K < n$
 $\Rightarrow K+1$ بار write اجرا می شود
 $\Theta(\lg n)$ تعداد اجرا write

مثال ۲
 $i = 2$
 while ($i < n$)
 { write('*');
 $i = i * i$;
 }
 write به ازای چه i های اجرا می شود
 $2, 4, 16, 256, \dots$
 $2^1, 2^2, 2^4, 2^8, \dots$
 $2^{2^0}, 2^{2^1}, 2^{2^2}, 2^{2^3}, \dots, 2^{2^K} < n$
 $2^{2^K} = n \xrightarrow{\lg} \log_2(2^{2^K}) = \lg n$
 $2^K = \lg n \xrightarrow{\lg} K = \lg \lg n$
 $\Rightarrow K+1$ بار write اجرا می شود

مثال ۳
 $i = 2$
 while ($i < n$)
 { write('*');
 $i = i * i * i$;
 }
 write به ازای چه i های اجرا می شود
 $2, 8, 512, \dots$
 $2^1, 2^3, 2^9, \dots$
 $2^{3^0}, 2^{3^1}, 2^{3^2}, \dots, 2^{3^K} < n$
 $2^{3^K} = n \xrightarrow{\lg} 3^K = \lg n \xrightarrow{\lg_3} K = \log_3 \lg n \in \Theta(\lg \lg n)$