



جبر خطی کاربردی

نیمسال دوم ۹۸-۹۷

مدرس: دکتر امیر مزلقانی



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

تمرین اول (معادلات خطی در جبر خطی)

توجه !!!

- سوالات زیر مربوط به فصل اول درس جبر خطی کاربردی با موضوع ((معادلات خطی در جبر خطی)) می باشد که شامل ۱۰ سوال تئوری و ۲ سوال عملی است
- سوالات را به دقت و مطالعه و به صورت خوانا و مرتب بنویسید
- برای قسمت پیاده سازی گزارشی دقیق از عملکرد خود بنویسید.
- در صورت وجود هرگونه مشکل یا ابهام در ارتباط با سوالات از طریق

ala.spring2019@gmail.com

با رعایت مواردی که در قوانین ارسال تمرین آماده است سوال خود را بپرسید.

- پاسخ های خود را در قالب یک فایل zip به صورت الگوی زیر آپلود کنید:

9531000_Gabriel_Batistuta_HW1.zip

- مهلت ارسال این تمرین ساعت ۲۳:۵۵ روز یکشنبه ۹۷/۱۲/۱۹ می باشد.

تمرین:

۱. برای دستگاه معادلات زیر پس تشکیل ماتریس افزوده و اعمال عملیات سطری پلکانی کاهش یافته و مشخص کردن درایه های محوری تعداد جواب های آن ها بررسی کرده و مشخص کنید و در صورت امکان آن ها را به صورت پارامتریک برداری نشان دهید.

$$\begin{array}{rclcl} 2u & - & v & & = & 0 \\ -u & + & 2v & - & w & = & 0 \\ & & -v & + & 2w & - & z & = & 0 \\ & & & & -w & + & 2z & = & 5 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} u & + & v & + & w & = & 6 \\ u & + & 2v & + & 2w & = & 11 \\ 2u & + & 3v & - & 4w & = & 11 \end{array}$$

۲. ثابت کنید دو ماتریس زیر هم ارز سطری نیستند.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

۳. با استفاده از روش حذفی سطری به سوالات زیر پاسخ دهید:

۱. برای اینکه هریک از حالت های بدون جواب بودن، فقط یک جواب داشتن و بی نهایت داشتن برای معادلات زیر رخ دهد k و h باید چه مقادیری داشته باشند؟

$$\begin{array}{rcl} x_1 + hx_2 & = & 2 \\ 4x_1 + 8x_2 & = & k \end{array} \quad \begin{array}{rcl} -2x_1 + hx_2 & = & 1 \\ 6x_1 + kx_2 & = & -2 \end{array}$$

۲. به ازای چه مقادیری از λ دستگاه معادلات زیر جواب غیر صفر دارد؟

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 & = & 0 \end{array}$$

۳. مقادیر $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ را به گونه ای تعریف کنید که به ازای هر Y ، $AX = Y$ تنها یک جواب داشته باشد.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

۴. به دستگاه معادلاتی که تعداد معادلات کمتر از مجهول ها باشد فرومعی *underdetermined* و به دستگاه معادلاتی که تعداد معادلات آن بیش از مجهول ها باشد فرامعی *overdetermined* گفته می شود. ثابت کنید دستگاه فرومعی در صورت سازگار بودن دارای تعداد جواب بی نهایت است همچنین مشخص کنید آیا یک دستگاه فرامعی می تواند سازگار باشد؟ وجود یا عدم وجود این موضوع را با دستگاهی با ۳ معادله و ۲ مجهول نشان دهید.

۵. نشان دهید اگر $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ بردار هایی مستقل خطی باشند آنگاه $\{v_1, v_1 + v_2, \dots, v_1 + v_2 + \dots + v_n\}$ مستقل خطی و $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1\}$ نیز برای n های فرد مستقل خطی است. برای n های زوج چطور؟ آیا عکس حکم های بالا برقرار است؟ در صورت برقراری ثابت کنید در غیر اینصورت مثال نقض بزنید.

۶. درستی یا نادرستی گزاره های زیر ثابت کنید. (در صورت درستی اثبات و در صورت نادرست بودن مثال نقض بزنید)

۱. اگر $\forall i \ v_i \in \mathbb{R}^n$ و $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک مجموعه وابسته خطی باشد، هریک از v_i ها را می توان به صورت یک ترکیب خطی از بقیه اعضا نوشت.

۲. تساوی $Ax = b$ سازگار است اگر ماتریس افزوده $[A \ b]$ در هر سطرش درایه محوری داشته باشد.

۳. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ و b یک بردار در \mathbb{R}^n باشد با این شرط که $Ax = b$ جواب یکتا دارد. در این صورت ستون های A فضای \mathbb{R}^n را تولید می کنند.

۴. اگر $S \subseteq \mathbb{R}^n$ مستقل خطی باشد و $v \in (\mathbb{R}^n - \text{span}(S))$ آنگاه $S \cup \{v\}$

۵. اگر x یک جواب غیر بدیهی $Ax = 0$ باشد آنگاه تمامی مولفه های x غیر صفر است.

۶. فرض کنید ماتریس A یک ماتریس $m \times n$ باشد که n ستون محوری دارد. برای هر b در \mathbb{R}^n ، $Ax = b$ حداکثر یک جواب دارد.

۷. اگر T یک تبدیل خطی باشد $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی است اگر و فقط اگر $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ مستقل خطی باشد.

۸. اگر S_1 و S_2 زیر مجموعه هایی از بردار های \mathbb{R}^n باشند که $\text{span}(S_1) = \text{span}(S_2)$ آنگاه $S_1 = S_2$

۷. فرض کنید S مجموعه بردار هایی در \mathbb{R}^n باشد که دارای دقیقاً دو مولفه غیر صفرند و این مولفه های غیر صفر هر دو یک باشند نشان دهید S یک مجموعه مستقل خطی از بردار ها است اگر و تنها اگر $n \leq 3$.

۸. در (۱) و (۲) فرض کنید مجموعه بردار ها مستقل خطی باشند در مورد f, a, \dots چه می توان گفت؟

۱.

$$\begin{bmatrix} a \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ c \\ \cdot \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

۲.

$$\begin{bmatrix} a \\ ۱ \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ c \\ ۱ \\ \cdot \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \\ ۱ \end{bmatrix}$$

۹. فرض کنید u و v بردار هایی مستقل خطی در \mathbb{R}^3 باشند و فرض کنید P صفحه ای باشد که از این دو بردار و مرکز مختصات می گذرد. نقاط P را به صورت پارامتری اینگونه نشان می دهیم $x = su + tv$. نشان دهید تبدیل خطی $P, T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ را یا به یک صفحه گذرنده از مبدا یا یک خط گذرنده از مبدا یا به خود مبدا مختصات نگاشت می کند. برای اینکه تصویر P نیز یک صفحه باشد $T(u), T(v)$ باید چه شرایط داشته باشند؟

۱۰. مشخص کنید هریک از تبدیلات زیر خطی هستند یا نه، در صورتی که خطی باشند ماتریس استاندارد آن ها را نیز بیابید.

(الف)

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{\tan(x)}{\tan(x)} + 3x, 2y \right)$$

(ب)

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (2x + y, -y)$$

(ج) اگر تبدیل خطی زیر به شکل:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(v_1, v_2) \mapsto \left(\frac{v_1 + v_2}{2}, \frac{v_1 + v_2}{2} \right)$$

آنگاه در مورد $f(f(v_1, v_2))$ چه می توان گفت؟ (مشخص کنید خطی هست یا نه و در صورت خطی بودن ماتریس استاندارد آن را بیابید.)

مسائل پیاده سازی و شبیه سازی

۱. برنامه ای بنویسید که ویژگی های زیر را داشته باشد.

- (آ) ماتریس $A_{n \times n}$ و بردار $b_{n \times 1}$ را به عنوان ورودی بگیرد.
 (ب) برای دستگاه معادلات $Ax = b$ ماتریس افزوده $[A|b]$ را نمایش دهد.
 (ج) دستگاه معادلات $Ax = b$ را با روش حذفی سطری حل نماید.
 (د) وضعیت ماتریس را در هر مرحله از عملیات سطری نمایش دهد.
 (ه) در نهایت جواب دستگاه معادلات $AX = b$ یعنی بردار x و فرم بالا مثلثی ماتریس افزوده را نمایش دهد.
۲. برنامه خود را برای حل دو دستگاه معادلات زیر امتحان نمایید و نتیجه را ارائه دهید.

(آ)

$$\begin{array}{rcccccccl} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 & + & 3x_5 & = & -3 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & + & 4x_5 & = & 19 \\ & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & + & x_5 & = & -2 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & - & 7x_5 & = & -11 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 8x_3 & + & 6x_4 & + & x_5 & = & 4 \end{array}$$

(ب)

$$\begin{array}{rcccl} 3x_1 - 2x_2 & = & 1 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 & = & -1 \\ -2x_2 + \frac{5}{3}x_3 - 2x_4 & = & -\frac{1}{3} \\ -2x_3 + 3x_4 - 2x_5 & = & -1 \\ -2x_4 + 3x_5 - 2x_6 & = & -1 \\ -2x_5 + 3x_6 & = & 1 \end{array}$$