به نام خدا

تمرین سری **دوم** درس **بهینه‌سازی**

(نیمسال دوم ۹۷-۹۸)

زمان تحویل: ۱۳۹۸/۲/۱۸

۱- مساله‌ی بهینه‌سازی به فرم زیر مفروض است.

$$\min \quad \frac{f_0(x)}{c^T x + d}$$

$$subject\ to: \quad f_i(x) \le 0, i = 1, \dots, m$$

$$Ax = b$$

که در آن $f_0, f_1, \dots, f_m$ توابعی محدب هستند و دامنه‌ی تابع هدف نیز به‌صورت $\{x \in \boldsymbol{dom}\, f_0 \mid c^T x + d > 0\}$ تعریف می‌شود.

در تمرین سری قبلی نشان داده شد که این مساله یک مساله‌ی بهینه‌سازی quasiconvex است.

نشان دهید که مساله‌ی بهینه‌سازی فوق معادل با مساله‌ای است که در ادامه آورده شده است.

$$minimize\ g_0(y, t)$$

$$subject\ to\ \ g_i(y, t) \le 0, i = 1, \dots, m$$

$$Ay = bt$$

$$c^T y + dt = 1$$

در این مساله g_i نشان‌دهنده‌ی perspective تابع f_i است. همچنین $y \in \mathbb{R}^n$ و $t \in \mathbb{R}$ است.

یادآوری: اگر تابع f به‌صورت $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ باشد آن‌گاه perspective تابع f تابعی به فرم $g: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ است و مطابق با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود.

$$g(x, t) = tf(\frac{x}{t})$$

دامنه‌ی این تابع نیز به فرم زیر است (برای جزئیات بیشتر به بخش 3.2.6 از کتاب بوید مراجعه شود).

$$\boldsymbol{dom}\ g = \left\{(x, t) \middle| \frac{x}{t} \in \boldsymbol{dom}\, f, t > 0\right\}$$

۲- پاسخی تحلیلی برای مساله‌ی LP زیر ارائه دهید.

$$minimize\ c^T x$$
$$subject\ to{:}\ l \preccurlyeq x \preccurlyeq u$$

لازم به‌ذکر است در مساله‌ی فوق همواره $l \preccurlyeq u$ برقرار است.

۳- مسائل زیر را به فرم LP بازنویسی نمایید.

a) $minimize\ \|Ax-b\|_1$

b) $minimize \|Ax-b\|_1 + \|x\|_1$

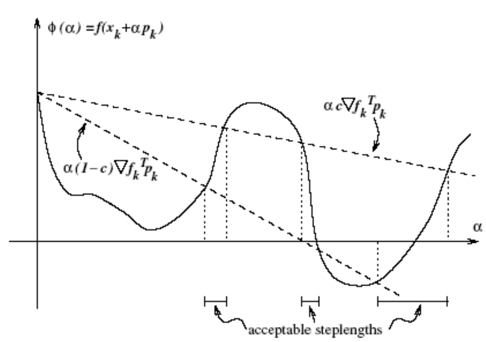
۴- تابع $f(x_1,x_2) = (x_1 + x_2^2)^2$ را درنظر بگیرید. هدف یافت min این تابع با استفاده از یک روش line search است. اگر در یک گام در نقطه‌ی $x_k = (1,0)^T$ قرار داشته باشیم، نشان دهید در این نقطه جهت $p_k = (-1,1)^T$ یک جهت کاهشی است. اگر قصد حرکت در جهت مشخص شده را داشته باشیم طول گام بهینه را مشخص کنید.

۵- نشان دهید که مینیمایزر یک بعدی[۱] یک تابع کوادراتیک قویا محدب[۲] همواره شروط Goldstein را برآورده می‌کند.

شرط Goldstein مطابق با رابطه‌ی زیر بیان می‌شود:

$$f(x_k) + (1-c)\alpha_k \nabla f_k^T p_k \le f(x_k + \alpha_k p_k) \le f(x_k) + c\alpha_k \nabla f_k^T p_k$$

این شرط در واقع بیان می‌کند α_k هایی مناسب هستند که به ازای آن‌ها، مقدار تابع همانند شکل زیر بین دو خط قرار گیرد.



۱ One-dimensional minimizer

۲ Strongly convex

۶- فرض کنید الگوریتم steepest descent با یک روش line search به تابع کوادراتیک محدب زیر اعمال شده است. نشان دهید که اگر نقطه‌ی شروع اولیه طوری باشد که بردار $x_0 - x^*$ موازی یکی از بردارهای ویژه‌ی ماتریس Q باشد، آنگاه روش steepest descent تنها در یک گام پاسخ این مساله را پیدا خواهد کرد.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x - b^T x$$

۷- نشان دهید که اگر $0 < c_2 < c_1 < 1$ باشد ممکن است هیچ اندازه قدمی وجود نداشته باشد که بتواند شروط ولف را برآورده سازد.

بخش پیاده‌سازی

۸- الگوریتم‌های steepest descent، Newton و BFGS را با بهره‌گیری از متد backtracking line search (الگوریتم ۳,۱ کتاب Nocedal) پیاده‌سازی نمایید و از آن‌ها برای بهینه‌سازی تابع Rosenbrock استفاده نمایید. مقدار اولیه‌ی اندازه قدم را به‌صورت $\alpha_0 = 1$ مقداردهی نمایید. در حین اجرای هرکدام از الگوریتم‌ها اندازه‌ی قدمی که در هر گام به‌دست می‌آید را در خروجی چاپ کنید. خروجی این الگوریتم‌ها را برای نقطه‌های شروع $x_0 = (1.2, 1.2)^T$ و $x_0 = (-1.2,1)^T$ محاسبه کنید و در گزارش خود نتایج را مقایسه نمایید.

توجه: تابعی که رابطه‌ی آن در ادامه آورده شده است تحت عنوان تابع Rosenbrock شناخته می‌شود.

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

۹- برای بهینه‌سازی تابع Rosenbrock، الگوریتم Trust Region را پیاده‌سازی نمایید و برای حل زیرمساله‌ی ناحیه‌ی اطمینان از دو روش Cauchy Point و Dog Leg استفاده نمایید. سپس به سوالات زیر پاسخ دهید.

a) برای انتخاب ماتریس B_k آیا ماتریس هسین ماتریس مناسبی است؟ دلایل خود را توضیح دهید.

b) در هر تکرار از الگوریتم ρ_k را برحسب k رسم نمایید.

۱۰- از الگوریتم‌های BFGS و Trust Region برای حل مساله‌ی $min\|Ax-b\|_2^2$ استفاده کنید. که در آن $b\in\mathbb{R}^n$ برداری است که تمام عناصر آن مقدار ۱ دارد و $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریسی است که درایه‌ی a_{ij} آن با استفاده از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود (این ماتریس تحت عنوان ماتریس هیلبرت شناخته می‌شود).

$$a_{ij}=\frac{1}{i+j-1},\qquad i,j=1,2,\dots,n$$

این مساله را برای $n=100,400$ حل کنید. نمودار $(|f(x_{k+1})-f(x_k)|)$ را برحسب تکرارهای هر الگوریتم رسم کنید، سپس این الگوریتم‌ها را بر اساس سرعت همگرایی با یکدیگر مقایسه کنید. همچنین این مساله را با استفاده از تولباکس انتخابی خود در تمرین قبل نیز حل کنید و پاسخ حاصل از آن را با پاسخ‌های به دست آمده از این قسمت مقایسه کنید.

فرمت گزارش:

گزارش بایستی حاوی تمام نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی‌های کامپیوتری در قالب فایل PDF باشد.

درصورتی که تمرینات را به‌صورت دستنویس حل می‌کنید. فایل‌های عکس تمرینات را با کیفیت مناسب و به ترتیب سوالات در یک فایل pdf قرار دهید و درنهایت این فایل را آپلود نمایید.

فایل گزارش خود را به شکل « StdNum_HWNum.pdf» نام‌گذاری کنید. (مانند 9272203_HW2.pdf)

فرمت کدها:

برای هر تمرین شبیه‌سازی کامپیوتری بایستی فایل کد جداگانه در محیط MATLAB، Python یا R تهیه شود.

هر فایل کد خود را به شکل « CS2_k » نام‌گذاری کنید. که k بیانگر شماره سوال شبیه‌سازی خواهد بود.

نحوه تحویل:

فایلهای کد و گزارش خود را که طبق فرمت‌های فوق تهیه شده‌اند، در قالب یک فایل فشرده در سایت درس بارگذاری نمایید. فایل فشرده را به شکل «StdNum_HW2.zip» نام‌گذاری کنید. (مانند 9272203_HW2.zip)

تذکر:

- در صورتیکه پارامتر خاصی در سوالات مشخص نشده با توجه به اطلاعاتی که در ارتباط با محدوده پارامتر دارید، مقدار دلخواهی انتخاب کنید و آن را در گزارش توضیح دهید.
- ارسال هر تمرین تا دو روز تاخیر بلامانع است و پس از آن به ازای هر روز تاخیر ۵٪ از نمره تمرین کسر می‌گردد. لازم به‌ذکر است که مجموع تاخیرها به ازای تمامی تمرینات نیز نباید از ۶ روز تجاوز کند.
- در صورت شبیه بودن تمارین دانشجویان، نمره تمرین بین دانشجویان با تمرین مشابه تقسیم خواهد شد.
- در صورت وجود هرگونه سوال یا ابهام با یکی از ایمیل‌های b.roshanfekr@yahoo.com و یا mkhalooei90@gmail.com ارتباط برقرار کنید.