Dasar-Dasar Teori Graf

Sistem Informasi

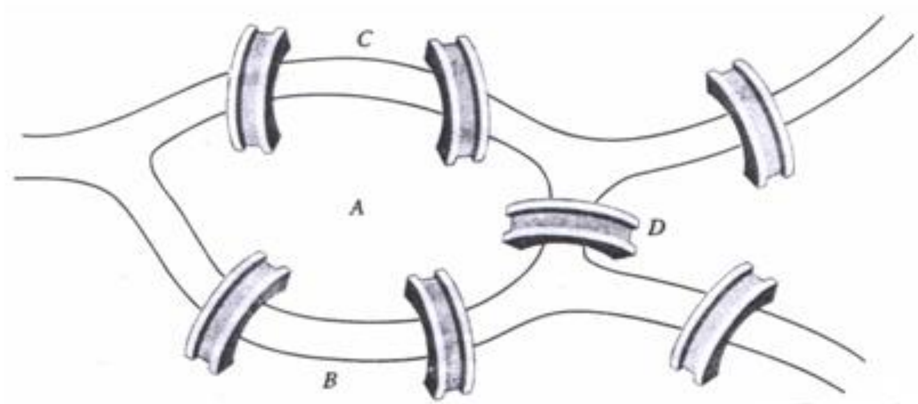
Universitas Gunadarma

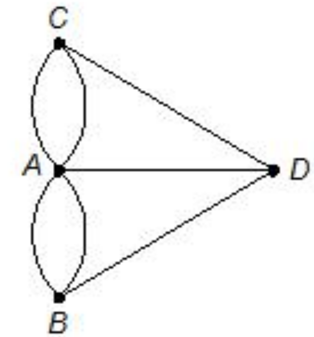
2012/2013

Teori Graf

- Teori Graf mulai dikenal saat matematikawan kebangsaan Swiss bernama **Leonhard Euler**, yang berhasil mengungkapkan *Misteri Jembatan Koningsberg* tahun 1736.
- Di kota Koningsberg mengalir sungai Pregel, di sungai mengalir 2 pulau dan diantaranya terdapat jembatan yang menghubungkan, jumlah jembatan tersebut sebanyak 7 buah.

Teori Graf





- Graf yang merepresentasikan jembatan Konigsberg adalah :

1. **Simpul (*vertex*)**, menyatakan daratan.
2. **Sisi (*edge*)**, menyatakan jembatan.

Teori Graf

- **Graf** adalah bagan yang memuat informasi yang diinterprestasikan secara tepat.
- **Graf** digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.
- Tujuan graf adalah untuk visualisasi objek agar mudah dimengerti.
- Jenis graf yaitu graf berarah dan graf tidak berarah.
- Graf terdiri dari 2 himpunan berhingga yaitu v(G) dan e(G).

Teori Graf

- Titik dikatakan **terhubung (Adjacent)** jika ada garis yang menghubungkan keduanya.
- **Graf Kosong** : Graf yang tidak mempunyai titik.
- **Graf Berarah (Digraph)** : Graf yang semua garisnya berarah.
- **Graf Tidak Berarah** : Graf yang semua garisnya tidak berarah.

Teori Graf

- **Titik Ujung** : Garis yang berhubungan dengan satu atau dua titik.
- **Loop** : Garis yang berhubungan dengan satu titik ujung.
- **Garis Paralel** : Dua garis berbeda menghubungkan titik yang sama.
- **Titik Terasing** : Titik yang tidak mempunyai garis yang berhubungan dengannya.

Jenis-Jenis Graf

- Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf.

  1. **Graf sederhana** (*simple graph*)

     Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana.

  2. **Graf tak-sederhana** (*unsimple-graph*)

     Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak-sederhana (*unsimple graph*).

Jenis-Jenis Graf

- Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf.

1. **Graf berhingga** (*limited graph*)

    Graf berhingga adalah graf yang jumlah simpulnya *n* berhingga.

2. **Graf tak-berhingga** (*unlimited graph*)

    Graf yang jumlah simpulnya *n* tidak berhingga banyaknya disebut **graf tak-berhingga**.

Jenis-Jenis Graf

- Berdasarkan orientasi arah pada sisi.

1. **Graf tak-berarah** (*undirected graph*)

   Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah.

2. **Graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)

   Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah.

Subgraf

- Graf H dikatakan subgraf dari G jika semua titik dan garis graf H merupakan titik dan garis dalam graf G.
- Misalkan G adalah suatu graf. Graf H dikatakan subgraf dari G bila dan hanya bila :

1. $V(H) \subseteq V(G)$
2. $E(H) \subseteq E(G)$
3. Setiap garis dalam H memiliki titik ujung yang sama dengan garis tersebut dalam G.
4. Di dalam subgraf posisi titik dan garis tidak berpengaruh.

Derajat Graf

- Derajat graf adalah jumlah dari derajat simpul-simpulnya.

  Derajat simpul adalah banyaknya ruas yang incidence (terhubung) ke simput tersebut.

- Berdasarkan derajat simpul, sebuah simpul dapat disebut :

1. Simpul Ganjil ; bila derajat simpulnya merupakan bilangan ganjil.
2. Simpul Genap ; bila derajat simpulnya merupakan bilangan genap.
3. Simpul Bergantung/Akhir ; bila derajat simpulnya adalah 1.
4. Simpul Terpencil ; bila derajat simpulnya adalah 0.

Derajat Graf

- Misal titik v adalah suatu titik dalam graf G. **Derajat titik v** (simbol **d(v)**) adalah *jumlah garis yang berhubungan dengan titik v.*

  Derajat titik yang berhubungan dengan sebuah loop adalah **2** (garis suatu loop di hitung 2 kali).

- Derajat simpul v atau d(v) adalah banyaknya ruas yang menghubungi v. Karena setiap ruas dihitung dua kali ketika menentukan derajat suatu graf, maka :

  “ Jumlah derajat semua simpul suatu graf (derajat) = dua kali banyaknya ruas graf (size)”

Derajat Graf

- **Derajat total** suatu graf G adalah **jumlah derajat semua titik dalam G.**

  Derajat total suatu graf selalu **genap.**

- Dalam sembarang graf **jumlah titik yang berderajat ganjil selalu genap.**

- Jumlah derajat semua simpul sama dengan genap disebut dengan **Euler Graf.**

- Suatu simpul disebut genap/ganjil tergantung apakah derajat simpul tersebut genap/ganjil.

Keterhubungan Graf

- **Walk atau perjalanan** dalam graf G adalah barisan simpul dan ruas berganti-ganti : V_1, e_1, V_2, e_2, . . . , e_{n-1}, V_n
- Ruas e_i menghubungkan simpul V_i dan V_{i+1}.
- Banyaknya ruas disebut **panjang walk**. Walk ditulis dengan deretan ruas : e_1, e_2, . . . , e_{n-1} atau deretan simpul : V_1, V_2, . . . , V_n
- Walk disebut tertutup bila $V_1 = V_n$

  Dimana, V_1 = simpul awal

  V_n = simpul akhir

Keterhubungan Graf

- **Graf Terhubung** dan **Graf Tidak Terhubung**
- Misalkan G adalah suatu graf, titik v dan w dalam graf G terhubung bila dan hanya bila ada walk dari v ke w.
- Graf G dikatakan terhubung jika 2 titik di dalam G saling terhubung dan dikatakan tidak terhubung jika 2 titik di dalam G tidak saling terhubung.

Keterhubungan Graf

- Dalam keterhubungan sebuah graf, dikenal istilah seperti berikut :

1. **Walk** ; barisan simpul dan ruas.
2. **Trail** ; walk dengan semua ruas dalam barisan adalah berbeda.
3. **Path/Jalur** ; walk yang semua simpul dalam barisan adalah berbeda. Jadi suatu **Path** pasti sebuah **Trail**.
4. **Cycle/Sirkuit** ; trail tertutup dengan derajat setiap simpul = 2.

Operasi pada Graf

- Operasi-operasi di dalam graf. Bila diketahui 2 buah graf : $G_1(V_1, E_1)$ dan G_2 (V_2, E_2) maka :

1. Gabungan $G_1 \cup G_2$ adalah graf dengan himpunan V nya = $V_1 \cup V_2$ dan himpuna E nya = $E_1 \cup E_2$
2. Irisan $G_1 \cap G_2$ adalah graf dengan himpunan V nya = $V_1 \cap V_2$ dan himpunan E nya = $E_1 \cap E_2$
3. Selisih G_1-G_2 adalah graf dengan himpunan V nya = V_1 dan himpunan E nya = E_1-E_2, Selisih G_2-G_1 adalah graf dengan himpunan V nya = V_2 dan himpunan E nya = E_2-E_1
4. Penjumlahan Ring G_1G_2 adalah graf yang dihasilkan dari $(G_1 \cup G_2) – (G_1 \cap G_2)$ atau $(G_1$-$G_2) \cup (G_2$-$G_1)$

Matriks dan Graf

- Graf dapat disajikan dalam bentuk matriks. Matriks-matriks yang dapat menyajikan model graf tersebut antara lain :

1. Matriks Ruas
2. Matriks Adjacency (Matriks Ketetanggaan)
3. Matriks Incidence (Matriks Bersisian)

Matriks Ruas

- Setiap simpul dan ruas yang terhubung menjadi baris atau kolom matriks.
- Hubungan setiap simpul dan ruas hanya bernilai 1 tidak bisa bolak balik.
- Setiap hubungan simpul dan ruas yang sudah menjadi matriks tidak dapat didefinisikan lagi.

Matriks Adjacency

- Baris dan kolom menunjukkan urutan simpul-simpul.
- Elemen matriks = 1 jika terdapat ruas antara simpul baris dan simpul kolom.
- Elemen matriks = 0 jika tidak terdapat ruas antara simpul baris dan simpul kolom.

Matriks Adjacency

$A = [a_{ij}]$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ jika simpul } i \text{ dan } j \text{ bertetangga} \\ 0, \text{ jika simpul } i \text{ dan } j \text{ tidak bertetangga} \end{cases}$$

Derajat tiap simpul i

(a) Untuk graf tak-berarah,

$$d(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

(b) Untuk graf berarah,

$$d_{in}(v_j) = \text{jumlah nilai pada kolom } j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

$$d_{out}(v_i) = \text{jumlah nilai pada baris } i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

Matriks Incidence

- Baris menunjukkan simpul.
- Kolom menunjukkan ruas.
- Elemennya = 1 jika terdapat ruas yang incident ke suatu simpul.
- Elemennya = 0 dalam hal lain.

$$A = [a_{ij}],$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ bersisian dengan sisi } j \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ tidak bersisian dengan sisi } j \end{cases}$$

TERIMA KASIH