G: رخداد برنده شدن در گروه عمومی   W: رخداد برنده شدن

M: رخداد برنده شدن در گروه دارای master   سوال اول :

a)

سال ۲۰۲۱:

شانس اول $P(G) = \frac{65000}{308613} \approx 0.21$ شانس دوم $P(M) = \frac{20000}{121000} \approx 0.16$

← تعداد کل افرادی مدرک ندارند   ← تعداد کل افرادی مدرک دارند

$P(W_{2021}) = 1 -$ (احتمال برنده نشدن تو گروه عمومی) (احتمال برنده نشدن تو گروه مدرک ندارند)

با توجه به اینکه شانس برنده شدن در هر ۲ گروه رو داره

$P(W_{2021}) = 1 - \left((1-0.21)(1-0.16)\right) \approx 0.34 \longrightarrow$

سال ۲۰۲۲:

$P(G) = \frac{65000}{483927} \approx 0.13$ $P(M) = \frac{20000}{127400} \approx 0.15$

$P(W_{2022}) = 1 - \left((1-0.13)(1-0.15)\right) \approx 0.26$

سال ۲۰۲۳:

$P(G) = \frac{65000}{780884} \approx 0.08$ $P(M) = \frac{20000}{314000} \approx 0.06$

$P(W_{2023}) = 1 - \left((1-0.08)(1-0.06)\right) = 0.14$

احتمال رخداد اینکه در سال ۲۰۲۲ برنده شه، در سال ۲۰۲۱ نشه مستقل هست پس از فرمول داریم

$$P(W_{2022} \mid \neg W_{2021}) = \frac{P(W_{2022} \cap \neg W_{2021})}{P(\neg W_{2021})} = \frac{P(W_{2022})\cancel{P(\neg W_{2021})}}{\cancel{P(\neg W_{2021})}} = P(W_{2022})$$

$$\Rightarrow P(W_{\text{در ۳ سال اینده}}) = 1 - \left((1-P(W_{2021}))(1-P(W_{2022}))(1-P(W_{2023}))\right) = 1-(1-0.34)(1-0.26)(1-0.14) \approx 0.6$$

⇐ ۶۰٪ احتمال دریافت ویزا در ۳ سال

b)

NS: رخداد اینکه STEM نباشی

2021: $P(\neg W_{2021}) = 1 - \frac{65000}{308613} \approx 0.79$

2022: $P(\neg W_{2022}) = 1 - \frac{65000}{483927} = 0.87$

2023: $P(\neg W_{2023}) = 1 - \frac{65000}{780884} \approx 0.92$

$P(W_{\text{در یکی از ۳ سال}}) = 1 - (0.79 \times 0.87 \times 0.92) = 0.37$

۳۷ درصد شانس برنده شدن

کلا احتمال برنده شدن خیلی کم، شانس کمی داره و اگر برنده نشه باید از کشور بیرون بره ریسک هست

c) با توجه به احتمال ازدواج ۱۵ درصدی در یک سال احتمال ازدواج در ۳ سال $(\frac{85}{100})^3$ است احتمال ازدواج کردن در ۳ سال $1-(\frac{85}{100})^3$

G : رویداد Green card

a : رویداد ... در قسمت a سوال

احتمال ازدواج در یکی از ۳ سال $= 1-(0.85)^3 = 0.38$

$P(a) = 0.6$

قسمت a.1 سوال

$$\Rightarrow P(a\cup G) = P(a) + P(G) - \underbrace{\underbrace{P(a\cap G)}_{P(a)P(G)}}_{0.152} \simeq 0.62$$

سوال ۲: a)

$$P(N) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^N}{N!} \quad , \quad P(N_1, N_2) = P(N_1)P(N_2) \rightarrow$$ مستقل از هم هستند

$$\Rightarrow P(N_1,N_2) = \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^{N_1}}{N_1!} \times \frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{N_2}}{N_2!} \quad , \quad PMF = \sum_K^N P(N_1,N_2)$$

$$\Rightarrow \sum_{K=0}^{n} \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^K}{K!} \times \frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{n-K}}{(n-K)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_K^n \underbrace{\frac{\lambda_1^K}{K!} \times \frac{\lambda_2^{n-K}}{(n-K)!}}_{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!} \; *$$

بسط دوجمله‌ای توی صورت داریم

توزیع پواسن با پارامتر $\underline{\underline{\lambda_1+\lambda_2}}$

b)

$$f_{T_1}(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \qquad f_{T_2} = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$$

$$f_T(t) = \int_0^t f_{T_1}(x) f_{T_2}(t-x)dx = \int \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2(t-x)} dx = \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \int_0^t e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x} dx \quad ①$$

$$\xrightarrow{\text{داریم}} \int_0^t e^{\lambda_2-\lambda_1 x} dx = \frac{e^{\lambda_2-\lambda_1 x}}{\lambda_2-\lambda_1}\Big|_0^t = \frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}-1}{\lambda_2-\lambda_1} \quad ②$$

$$\xrightarrow{②,①} f_T(t) = \frac{\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \times (e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}-1)}{\lambda_2-\lambda_1} = PdF$$

سوال ۳: a) در توزیع یکنواخت و متقارن با فرض وجود نقطه‌ای مانند M که در مرکز قرار گرفته، میانه، میانگین، مد هم تراز می‌شوند

زیرا می‌دانیم میانه یعنی نصف داده‌ها کمتر از میانه هستند نصف دیگر بیشتر و چون توی توزیع متقارن میانه همون M مرکزی می‌شود

همچنین غالب یا مد که یعنی بیشترین فراوانی، در همان نقطه M قرار می‌گیرد چون توی توزیع یکنواخت متقارن مقادیر در اطراف M

به طور یکسان توزیع شده است. همچنین باز با توجه به یکنواخت و متقارن بودن توزیع البته بیشتر متقارن بودن مقادیر اطراف M

در میانگین گیری خنثی شده، میانگین همان M می‌شود ⇐ میانگین = مد = غالب

b) در توزیع‌های multimodal با وجود متقارن بودن دارای چند نقطه max و min (قله) هست که صرفاً میانگین و میانه

برابر هستند ولی دیگر مد (mode) برابر ندارند

hw1/problem-3-b.py

جواب گرافیکی در فایل

از توزیع uniform استفاده کردم

سوال ۴: a)

$f_X(x) = \int_y f_{X,Y}(x,y)\,dy \quad , \quad f_Y(y) = \int_x f_{X,Y}(x,y)\,dx \qquad$ مساحت بیضی $= \pi ab \qquad$ چگالی $= \dfrac{1}{\pi ab}$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \underbrace{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}_{y_1} < y < \underbrace{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}_{y_2} \quad , \quad -a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} < x < +b\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{\pi ab}\,dy = \frac{y_2}{\pi ab} - \frac{y_1}{\pi ab} = \frac{1}{\pi ab}\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} - \left(-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)\right) = \frac{2}{\pi a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

مثل $f_X(x)$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{2}{\pi b}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$$

b) $f_{X,Y}(x,y)$ برای چگالی نقاط درون بیضی داریم:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi ab} & \text{if } \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

c)

$$|y| \leq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad , \quad f_Y(y) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = 2\int_0^{\frac{a}{2}} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx \xrightarrow[\text{استفاده کردم}]{\text{از ابزار برای انتگرال}}$$

$$|x| \leq \frac{a}{2}$$

$$= 2ab\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}\right)$$

سوال ۵: a) 1. طبق نابرابری مارکوف $P(X \geq a) \leq \dfrac{E[X]}{a} \Rightarrow P(X \geq 10) \leq \dfrac{E(X)}{10} = \dfrac{5}{10}$

2. این نابرابری تنها می‌تواند یک حد بالا ارائه دهد و نمی‌تواند مقدار دقیق احتمال را بگوید چون بر اساس E یعنی همان میانگین متغیر تصادفی است. فقط می‌توان فهمید که اگر مقادیر موجود کوچک باشند احتمال وجود اعداد بزرگ کم می‌شود. مثلاً وقتی میانگین عددی ۲۰ باشد احتمال اینکه اعداد بیشتر از ۱۰۰ وجود داشته باشد کم است.

3. اگر $P(X=0) = 0.9 \quad , \quad P(X=40) = 0.1$

$$E(X) = 40 \times 0.1 + 0 \times 0.9 = 4$$

$$P(X \geq 10) = \frac{E(X)}{10} = \frac{4}{10}$$

مارکوف در این مثال کران بالای اعداد بزرگتر از ۱۰ را با احتمال ۰٫۴ می‌آید ولی احتمال واقعی $X=40$ برابر ۰٫۱ هست

b) نابرابری chebyshev : 1.

$E(X) = 20 \quad , \quad Var(X) = 36$

$$(1)\ P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\mu = E(X) = 20 \qquad \sigma = \sqrt{36} = 6$$

داریم $\Rightarrow P(|X-20| \geq 12) \overset{(1)}{\Rightarrow} k\overset{6}{\sigma} = 12 \Rightarrow k = 2$

داریم $\quad P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \dfrac{1}{k^2} \Rightarrow P(|X-20| \geq 12) \leq \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{1}{4}$

ادامه سوال ۵ قسمت b ، 2. در اول $k\sigma=۱۲$ انتخاب شد تا با داشتن $\sigma=۶$ ، $k=۲$ بدست آید. چون ۱۸ ...
این نامساوی تأثیری نذارد مد، مناسب است چون در مخرج داریم $\frac{1}{k^2}$ هرچی k بیشتر شود، احتمال کم می شود

c) نامساوی شوارتز

1. $E(XY)^2 \leqslant E(X^2)\,E(Y^2) = ۸\times۱۲ = ۹۶ \Rightarrow E(XY) \leqslant \sqrt{۹۶} \simeq ۹٫۷$

2. این نامساوی فرض می کند X ، Y مستقل نیستند اگر باشند داریم

$E(XY) = E(X)\,E(Y) = ۲\times۲ = ۴ \rightarrow$ مقدار بدست آمده خیلی کمتر است از ۹٫۷ در قسمت 1.

سوال ۶ : a) با توجه به نتایج بدست آمده quick sort پایدارتر است زیرا دارای کمترین انحراف معیار می باشد که یعنی با توجه به ۱۰۰ ورودی رندم زمان اجرای نزدیک به هم داشته است
bubble sort الگوریتم نوسان دار می باشد زیرا بیشترین انحراف معیار بوده. یعنی در ۱۰۰ بار اجرا در بعضی مواقع زمان اجرا خیلی بیشتر طول کشیده.

b) کورتوسیس به تراکم توزیع داده ها می پردازد. در نتایج بدست آمده quick sort دارای کورتوسیس کم می باشد که یعنی دارای اجرای با زمان نسبتاً یکنواخت می باشد و تحت تأثیر ورودی قرار نمی گیرد
با توجه به اینکه مقادیر skewed مثبت هستند و یعنی شکل متقارن ندارند (منحنی ها متقارن هستند.) که دارای کجی بودگی مثبت هستند

c) با توجه به نمودار بدست آمده bubble sort تفاوت بیشتری دارد چون در هر اجرا زمان های متفاوتی داشته.

سوال ۷ : b) تحلیل
uniform : برای درصدهای پایین یعنی ۲۰، ۳۰ درصد تخریب زیادی روی عکس نداشته ولی با افزایش درصد یعنی ۶۰ و ۷۵ درصد تخریب زیاد شده است و ۱۰۰ درصد سیاه
gaussian : در همه ی درصد ها به طور میانگین ۹۵ درصد تخریب داشته و نشان دهنده حساسیت بالای این نویز است
Exponential : در درصد پایین ۲۵ درصد تخریب صفر درصد داشته ولی برای باقی درصد ها تخریب ۱۰۰ درصد
نتیجه کلی : گوسی و غایی درصد تخریب بیشتری نسبت به یکنواخت دارند.

c) استفاده فیلتر میانه به بهبود تصویر در توزیع یکنواخت و غایی تا حد خوبی توانست نویزها را حذف کند ولی نویز گوسی را نتوانسته برگرداند زیرا تغییرات تدریجی بیشتری دارند (پراکندگی تدریجی در گوسی بیشتر است)
در نتیجه نوع نویز تأثیر زیادی در برگرداندن تصویر دارد و این روش بیشتر به درد روش های یکنواخت و غایی می خورد

سؤال هشتم : a) برای نشان دادن استقلال ۲ رخداد داریم : ۳۶ حالت ممکن → $P(A\cap B) = \frac{1}{36}$ $\quad P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

A: رخداد ۶ آمدن تاس اول $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$

B: رخداد ۵ آمدن تاس دوم $\quad P(B) = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow P(A)\times P(B) = \frac{1}{36} = P(A\cap B)$ مستقل هستند

b) رویدادهایی که جمع ۲ عدد تاس از ۱۰ بیشتر باشد $(6,6),(6,5),(5,6)$ که ۳ رخداد می‌شود.

A: رخداد تاس اول ۶ شود $\quad P(A) = \frac{1}{3}$

B: " " دوم ۶ شود $\quad P(B) = \frac{1}{3}$

$P(A\cap B) = \frac{1}{3}$ $\quad \Rightarrow \frac{1}{3} \neq \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$ مستقل نیستند

c)

A: رخداد ۱ آمدن

B: رخداد ۱ و 2 آمدن

C: رخداد ۱، ۲، ۳ آمدن

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \neq$$

$$P(A|C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(C)} \neq P(A)$$

$$P(B|C) = \frac{P(B\cap C)}{P(C)} = \frac{P(B)}{P(C)} \neq P(B)$$

⇒ وقتی یک رویداد زیرمجموعه‌ای از رویداد دیگر باشد نمی‌توان استقلال را با ۱ حالت شرطی بدست آورد

d) روش کای دو : از این روش می‌توان به عنوان استقلال یا عدم استقلال ۲ متغیر صحبت کرد. در این روش با مقایسه‌ی فراوانی مشاهدات واقعی و مورد انتظار در جدول فراوانی عمل می‌کند که اگر مقدار کای دو محاسبه شده بیشتر از مقدار بحرانی باشد نشان‌دهنده عدم استقلال ۲ متغیر است

راه دیگر همچنین استقلال می‌تواند صفر بودن ضریب همبستگی باشد

سؤال نهم : a) اثبات ۲ خاصیت مهم که دارد. 1. $\sum P(x)=1$ و $0 \le P(x) \le 1$ این ۲ مورد را برای این توزیع بررسی می‌کنیم

$$P(X=x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0,1,2,\dots$$

1. اثبات اینکه این توزیع هیچ‌گاه منفی نمی‌شود یعنی $P(x)<0$ نمی‌شود :

با توجه به اینکه λ که همان نرخ میانگین رخدادهاست همواره بزرگتر از صفر است یعنی $\lambda>0$ و همچنین $e^{-\lambda}$ نیز مثبت بوده

همچنین با توجه به اینکه مقادیر ممکن x نیز مثبت بوده پس $x!$ نیز مثبت بوده و کل عبارت بزرگتر از صفر است

2. اثبات $\sum_{x=0}^{\infty} P(X) = 1$:

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(X=x) = \sum_{x=0} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{x=0} \frac{\lambda^x}{x!}}_{e^{\lambda} \text{ بسط تیلور}} = e^{-\lambda} \times e^{\lambda} = 1$$

b)

توزیع Binomial: $P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 1,2,\dots$

اگر $p = \lambda/n \Rightarrow P(X=x) = \binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$

$\binom{n}{k} \simeq \dfrac{n^k}{k!}$ می‌دانیم برای n های بزرگ

$$\Rightarrow P(X=x) = \frac{n^x}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \quad ① \qquad \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad ②$$

$$\xrightarrow{②,①} P(X=x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \Rightarrow$$ توزیع پواسن

سؤال دهم:

$$P(X=x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1,2,\dots$$

$$P(X > n+k-1 \mid X > n-1) = \frac{P(X>n+k-1 \cap X>n-1)}{P(X>n-1)} = \frac{P(X>n+k-1)}{P(X>n-1)} \quad ②$$

$P(X>k) =$ احتمال k شکست

$$P(X>k) = \underbrace{(1-p)(1-p)(1-p)\dots}_{k\text{ بار}} = (1-p)^k \quad ①$$

$$P(X>n+k-1) \overset{①}{=} (1-p)^{n+k-1}$$

$$P(X>n-1) \overset{①}{=} (1-p)^{n-1}$$

$$\overset{②}{\Rightarrow} \frac{(1-p)^{n+k-1}}{(1-p)^{n-1}} = (1-p)^k = P(X>k)$$

سؤال یازدهم:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx \qquad F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(x) \leq y)$$

$$F_Y(y) = P(g(x) \leq y) \overset{g^{-1}}{=} P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X(g^{-1}(y)) = \frac{d}{dy}g^{-1}(y)\, f_X(g^{-1}(y))$$

$$E_Y(y) = \int y f_Y(y)\,dy = \int \underbrace{y}_{g(x)} \frac{d}{dy}g^{-1}(y)\, f_X(\underbrace{g^{-1}(y)}_{x})\,\underbrace{dy}_{g'(x)dx} = \int g(x) \times \frac{1}{\cancel{g'(\underbrace{g^{-1}(y)}_{x})}} \times f_X(x)\,\cancel{g'(x)}\,dx$$

$$\Rightarrow E_Y(y) = \int g(x) f(x)\,dx = E(g(x)) \overset{g(x)=Y}{\Rightarrow} E_Y[Y] = E_X[X]$$

سؤال دوازدهم: طبق صورت سؤال $X \sim N(0,1)$ با توجه به اینکه تابع encoder، $En(X)$ ماسک بردار نهان با نمونه های

از توزیع نمایی با $\lambda = En(X)$ تغییر می‌کنند و در توزیع نمایی داریم $f(y) = \lambda e^{-\lambda y}$

در توزیع نمایی $E(Y) = \dfrac{1}{\lambda}$ ①

در صورت سؤال گفته شده این فضای نهان از توزیع نمایی با پارامتر $En(x)$ پیروی می‌کند پس

طبق ① $E(\text{بردار نهان}) = \dfrac{1}{En(X)}$ = میانگین بردار نهان

سوال سیزدهم : مزرعه یک مثلث می باشد که راس های آن (۰،۰) (۱،۰) و (۰،۱) می باشد

دشمن در محور X در بازه ی $[0,1]$ حرکت کرده، و در محور Y در بازه $[0, X-1]$ حرکت می کند

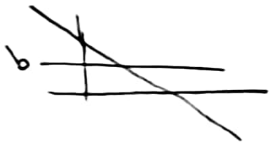
کاری که کشاورز باید بکند کشیدن خطی است که یا عمودی است یا افقی

① اگر خطی عمودی باشد یعنی $X = a$ در نتیجه یک مثلث کوچکتر ایجاد شده که مساحت آن $\frac{a \times 1}{2}$ می باشد

و با توجه به اینکه دشمن می تواند با توزیع یکنواخت در $[0,1]$ قرار بگیرد احتمال قرارگیری دشمن در آن مثلث $P(X \leqslant a)$

که برابر مساحت آن یعنی $\frac{(a-1)(1-a)}{2}$ می باشد، کشاورز به دنبال حداکثر کردن مساحت است

② اگر خط افقی باشد یعنی $Y = b$ حدود داریم مساحت مثلث ایجاد شده برابر است با



$\frac{(1-b)(1-b)}{2} \rightarrow$ باید max شود

عبارت های گفته شده برای کشاورز بود برای دشمن مساحت کل مثلث منهای مساحت های بدست آمده احتمال پیروزی دشمن بدست می آید

اگر همپوشانی بین مساحت کشاورز و دزد را کم کنیم در نتیجه برخورد بین کشاورز و دشمن کم شده و میشه گفت

اگر a و b را $\frac{1}{2}$ قرار دهیم کشاورز در یک مساحت بهینه امن قرار می گیرد