سؤال اول : الف)

$$\text{confidence Interval} = \left(\bar{X}_n - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{X} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{۲۵}{\sqrt{۱۰۰}} = \frac{۲۵}{۱۰} = ۲٫۵$$

$$\Rightarrow CI = (۷۵۳۴۸ - ۱٫۹۶ \times ۲٫۵ , ۷۵۳۴۸ + ۱٫۹۶ \times ۲٫۵)$$

$$\Rightarrow CI = (۷۵۳۴۳٫۱ , ۷۵۳۵۲٫۹)$$

ب) i) غلط چون این بازه برای میانگین کل جامعه هست نه میانگین ۱۰۰ نمونه.

* ii) درست بازه اطمینان برای میانگین کل جامعه (μ) که همان فشار واقعی خط لوله است، فقط راهی برای تخمین این مقدار ایجاد می‌کند

iii) غلط چون بازه‌ی اطمینان برای میانگین واقعی یا کل جامعه (μ) بوده و نه برای اندازه‌گیری نمونه یعنی بازه اطمینان نمی‌گوید کدام اندازه‌گیری‌ها در چه محدوده‌ای قرار دارد.

iv) غلط مانند قسمت قبل

ج) خیر نمی‌توانیم زیرا در این مثال فقط μ، σ را داریم اما نمی‌دانیم این ۱۰۰ بار آزمایش واقعاً چه مقداری داشتند و توزیع آنها چگونه بوده است و در نتیجه بدون داشتن داده‌ها نمی‌توانیم هیستوگرام دقیق رسم کنیم. ولی می‌توان یک هیستوگرام فرضی رسم کرد.

د) وقتی می‌گوید مهندس می‌خواهد میانگین فشار در حدود 1 پاسکالی از فشار واقعی باشد یعنی خطا 1 پاسکال $e=1$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{Z_{\alpha/2} \sigma}{e} \right)^2 \Rightarrow n = \left(\frac{۱٫۹۶ \times ۲۵}{۱} \right)^2 = ۲۴۰۱$$

سؤال دوم : الف) با استفاده از بازه CI میانگین را تخمین می‌زنیم ($\hat{\mu}$)

$$\hat{\mu} = \frac{۱۲۶٫۴۵ + ۱۲۸٫۵۵}{۲} = ۱۲۷٫۵$$

$$\text{margin of error} = ۱۲۸٫۵۵ - ۱۲۶٫۴۵ = ۲٫۱ \, N$$

از طرفی می‌دانیم me برابر است با ① $Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$① \Rightarrow \sigma = \frac{۲٫۱ \times \sqrt{۶۲۵}}{۲٫۵۷۶} = \frac{۲٫۱ \times ۲۵}{۲٫۵۷۶} \approx ۲۰٫۳۷ \, N$$

حال باید محاسبه کنیم چه مقدار از توزیع نرمال مربوط به مقادیر بیشتر از N ۱۴۰ است که باید Z حساب کنیم زیرا به دنبال پیدا کردن بازه اطمینان برای احتمال معیوب بودن فنرها هستیم همچنین باید $P(X>۱۴۰)$ هم حساب کنیم

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{۱۴۰ - ۱۲۷٫۵}{۲۰٫۳۷} = \frac{۱۲٫۵}{۲۰٫۳۷} \approx ۰٫۶۱۴ \qquad P(X>۱۴۰) = ۱ - P(X \leq ۱۴۰) = ۰٫۲۷۰۹$$

طبق جدول Z score ۰٫۶۱۴ تقریبا معادل ۰٫۷۲۹۱ است

$$\Rightarrow \hat{p} \mp Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \Rightarrow ۰٫۲۷۰۹ \mp ۱٫۶۴۵ \times \sqrt{\frac{(۰٫۲۷۰۹)(۰٫۷۲۹۱)}{۶۲۵}} \approx ۰٫۲۷۰۹ \mp ۰٫۰۲۹۱$$

ب) بله با توجه به اینکه می‌توان تخمین میانگین و انحراف معیار می‌توان بازه‌ی اطمینان برای درصد فنرهای معیوب را بدست آورد زیرا فشار فنرها یک توزیع نرمال دارد پس اینجا هم می‌توان Z-score را حساب کرد. ولی اگر در قسمت الف σ حساب نمی‌شد نمی‌توانستیم حساب کنیم

سؤال سوم: اگر فرض کنیم 1 ... n تعداد سرباز
۲. p احتمال رسیدن به مرز
و X_i ها با توزیع برنولی می‌باشد

الف) با توجه به قانون LLN داریم S_n که از مجموع سربازان که مرز می‌رسند که دارای خاصیت iid می‌باشد پس ۲ موضوع بررسی شود

1. استقلال: هر مسیر به صورت مستقل بسته می‌شود پس احتمال موفقیت هر سرباز مستقل از دیگری است ⇐ X_i ها مستقل هستند

2. توزیع مشابه: سربازها از مسیرهای متفاوت فرستاده می‌شوند و با احتمال p پیروز، $1-p$ شکست می‌خورند و همه دارای توزیع یکسان هستند

در نتیجه با توجه به اینکه در توزیع برنولی امید ریاضی برابر با احتمال پیروزی (p) اگر $n \to \infty$ میانگین سربازانی که به مرز می‌رسند طبق قانون اعداد بزرگ به p همگرا می‌شوند. قانون بزرگ برقرار است

ب) 1. استقلال: در اینجا استقلال نداریم زیرا سربازها جفت جفت می‌شوند و اگر یک سرباز شکست بخورد سرباز جفت هم شکست می‌خورد در نتیجه استقلال ندارند

2. توزیع مشابه: دارای توزیع یکسان هستند چون هر $\frac{n}{2}$ سرباز از مسیر متفاوتی رفته و توزیع پیروزی یا شکست همان برنولی می‌باشد و هر جفت دارای توزیع یکسان است چون هر جفت مسیر یکسان می‌روند

در کل در اینجا قانون اعداد بزرگ برقرار نیست (استقلال نداریم)

ج) استقلال: در اینجا استقلال وجود ندارد زیرا اگر یک سرباز در یک گروه شکست بخورد، کل گروه شکست می‌خورد ۲ گروه نسبت به هم استقلال دارند ولی اعضای گروه استقلال ندارند.

توزیع مشابه: همچنان مانند موارد بالا دارای توزیع مشابه هستند X_i ها

با توجه به عدم استقلال ⇐ LLN پیروی نمی‌کند توزیع p برای هر فرد یا گروه همان برنولی است

چون اگر یک فرد در گروه شکست بخوره میشه $1-p$، احتمال شکست گروه هم $1-p$ می‌شود.

د) در اینجا نیز برقرار نیست چون استقلال نداریم اگر یک سرباز شکست بخورد همه شکست می‌خورند

سؤال چهارم:

تخمین میانگین

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum X_i \quad , \quad \mu = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\text{مساحت دایره}}{\text{مساحت مربع}}$$

اگر هر X_i به این صورت باشد که اگر دارت داخل دایره باشد 1 و اگر نباشد صفر ⇐ توزیع برنولی و طبق نسبت مساحت دایره به مربع احتمال آن برابر با $\frac{\pi}{4}$ است

$$\mathrm{Var}(X) = p(1-p) = \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$ توزیع برنولی ، داریم $$\mathrm{Var}(\hat{\mu}) = \frac{\mathrm{Var}(X_i)}{n} = \frac{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{n} \Rightarrow \sigma_{\hat{\mu}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{n}}$$

بازه اطمینان ۹۵٪: $$Z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0.01 \Rightarrow 1.96 \times \frac{\sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{n}\sqrt{n}} \leq 0.01 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (1.96)^2 \frac{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{n^2} < 0.01$$

$$\Rightarrow 3.8416 \times \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) \times \frac{1}{n^2} \leq 10^{-4} \Rightarrow n^2 \geq \frac{3.8416 \times \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{10^{-4}}$$

$$\Rightarrow n \geq \sqrt{\frac{3.8416 \times \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{10^{-4}}}$$

سؤال پنجم :

الف)

$$f(x,\alpha)=\frac{x}{\alpha^2}e^{-x/\alpha}$$

$$MLE=\prod f(x_i,\alpha)=\prod \frac{x_i}{\alpha^2}e^{-x_i/\alpha}=\prod_1^n \frac{x_i}{\alpha^2}\prod_1^n e^{-x_i/\alpha}$$

$\frac{1}{\alpha^2}$ n بار ضرب در خودش

$$=\left(\frac{1}{\alpha^{2n}}\prod x_i\right)\times e^{-\sum\frac{1}{\alpha}x_i}$$

مشتق نسبت به α

$$\log \Rightarrow \log\frac{1}{\alpha^{2n}}+\sum\log x_i+\left(-\frac{1}{\alpha}\sum x_i\right)=-2n\log\alpha+\sum\log x_i-\frac{1}{\alpha}\sum x_i$$

$$\frac{d\log(MLE)}{d\alpha}=-2n\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\sum x_i=0 \Rightarrow \frac{-10}{\alpha}+\frac{7}{\alpha^2}=0 \xRightarrow{\text{ضرب } \alpha^2} -10\alpha+7=0$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha=0.7}$$

$$n=5:\ \sum x_i=0.25+0.75+1.5+2.5+2=7$$

ب) برای بدست آوردن α از روش تخمین ممان :

* ممان اول برابر میانگین و میانگین $E(x)$

$$E(x)=\int_0^\infty x\frac{x}{\alpha^2}e^{-x/\alpha}dx=\int_0^\infty\frac{x^2}{\alpha^2}e^{-x/\alpha}dx$$

$$u=\frac{x}{\alpha}\Rightarrow du=\frac{1}{\alpha}dx\Rightarrow dx=\alpha du\Rightarrow I=\int_0^\infty(\alpha u)^2e^{-u}\alpha du=\alpha^3\int u^2e^{-u}du$$

محاسبه با استفاده از ابزار

$$\Rightarrow E(x)=\frac{1}{\alpha^2}2\alpha^3=2\alpha$$

$$\bar{X}=\frac{7}{5}=1.4 \quad\Rightarrow 2\alpha=1.4\quad\Rightarrow \underline{\alpha=0.7}$$

سؤال ششم : ۶)

$$E(x)=\frac{18}{38}\times1+(-1)\frac{20}{38}=\frac{18}{38}-\frac{20}{38}=-\frac{2}{38}=-\frac{1}{19}$$ برای یک دور

برای N دور $$E(S_n)=N\times E(x)=\frac{-N}{19}$$

$$var(x)=\underbrace{\left(\frac{18}{38}\times1^2+(-1)^2\frac{20}{38}\right)}_{1}-(E(x))^2=1-\frac{1}{361}=\frac{360}{361}$$

$$var(S_n)=N\times var(x)=\frac{360N}{361}\Rightarrow\sigma=\sqrt{n\times\frac{360}{361}}$$

۵) محاسبه واریانس با توجه به اینکه مقادیر X ۱ یا ۱- هستند $E(X)=0$ زیرا احتمال برنده شدن و بازنده شدن مساوی است

$$var(X)=E(X^2)-E(X)^2=1^2\times p+(-1)^2$$

بقیه تحلیل های سؤال تو کاغذ نوشته شد.

سؤال هشتم: الف)

① $x_n = \theta + \frac{Z_n}{\sqrt{n}}$, $Var(Z_n)=1$, $E(Z_n)=0$

$(X_n-\theta)^2 \overset{①}{=} \left(\theta+\frac{Z_n}{\sqrt{n}}-\theta\right)^2 = \frac{Z_n^2}{n} \Rightarrow E[(X_n-\theta)^2] = E\left[\frac{Z_n^2}{n}\right] \overset{②}{=} \frac{1}{n}E[Z_n^2] = \frac{1}{n}$ *

$Var(Z_n) = E(Z_n^2) - (\overset{0}{E(Z_n)})^2 \Rightarrow Var(Z_n) = E(Z_n^2) = 1$ ②

* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

ب)

$\lim P(|X_n-\theta|>\varepsilon)=0$

$X_n = \theta + \frac{Z_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[X_n]{\text{جایگذاری}} \lim P\left(\left|\theta+\frac{Z_n}{\sqrt{n}}-\theta\right|>\varepsilon\right)=0 \Rightarrow P\left(\left|\frac{Z_n}{\sqrt{n}}\right|>\varepsilon\right)=0$

$\Rightarrow P(|Z_n|>\varepsilon\sqrt{n}) = 1-\varphi(\varepsilon\sqrt{n}) \xrightarrow[\text{یک میشود}]{1\ cdf\ n\to\infty} 1-1=0$

ج)

$X_n-\theta = \frac{Z_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow$ باید توزیع $\frac{Z_n}{\sqrt{n}}$ را بررسی کنیم

برای توزیع Z_n :

طبق سؤال توزیع Z_n برابر است با $N(0,1)$ ⇐

$\frac{Z_n}{\sqrt{n}} \sim N\left(0,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$n\to\infty : Var\left(\frac{Z_n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n}Var(Z_n) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow X_n-\theta \to 0 , n\to\infty$

در نتیجه x در بینهایت به ثابت θ همگرا میشود

سؤال نهم: الف)

$L(\alpha,\beta_1,\beta_0) = \prod f_T(T_i,\alpha,\beta_1,\beta_0) \Rightarrow L = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{T_i}{\beta_1T_i+\beta_0}\right)\exp\left(-\frac{T_i}{\beta_1T_i+\beta_0}\right)$

$\Rightarrow L = \frac{1}{(\Gamma(\alpha))^n}\prod\left(\frac{T_i}{\beta_1T_i+\beta_0}\right)^{\alpha-1}\exp\left(-\frac{T_i}{\beta_1T_i+\beta_0}\right) \xRightarrow{\log} -n\log\Gamma(\alpha)+(\alpha-1)\sum\log\frac{T_i}{\beta_1T_i+\beta_0}-\sum\frac{T_i}{\beta_1T_i+\beta_0}$

ب)

$\frac{\partial L}{\partial\alpha} = -n\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\Gamma(\alpha)+\sum\log\frac{T_i}{\beta_1T_i+\beta_0} = -n\psi(\alpha)+\sum\log\frac{T_i}{\beta_1T_i+\beta_0}=0$

$\frac{\partial L}{\partial\beta_0} : -n\log\Gamma(\alpha)\frac{\partial}{\partial\beta_0}=0$

$\frac{\partial}{\partial\beta_0}\sum\log\left(\frac{T_i}{\beta_0+\beta_1T_i}\right) = \frac{1}{\frac{T_i}{\beta_0+\beta_1T_i}}\times\left(-\frac{T_i}{(\beta_1T_i+\beta_0)^2}\right) = -\sum\frac{1}{\beta_1T_i+\beta_0}$

$-\frac{\partial}{\partial\beta_0}\sum\frac{T_i}{\beta_1T_i+\beta_0} = -\sum\frac{T_i}{(\beta_1T_i+\beta_0)^2}$

$\Rightarrow -\sum\frac{1}{\beta_1T_i+\beta_0}-\sum\frac{T_i}{(\beta_1T_i+\beta_0)^2}$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_1} = \frac{\partial}{\partial \beta_1} - n \log \Gamma(\alpha) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1} \sum \log \frac{T_i}{\beta_1 T_i + \beta_0} = \sum \frac{-T_i}{\beta_0 + \beta_1 T_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1} \sum \frac{T_i}{\beta_1 T_i + \beta_0} = \sum - \frac{T_i^2}{(\beta_0 + \beta_1 T_i)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \beta_1} = -\sum \frac{T_i}{\beta_1 T_i + \beta_0} - \sum \frac{T_i^2}{(\beta_1 T_i + \beta_0)^2} = 0$$

ج)

$$I(\alpha, \beta_1, \beta_0) = -E\left[\frac{\partial^2 L(\alpha, \beta_1, \beta_r)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -n\psi(\alpha) + \sum_{i=1} \log \frac{T_i}{\beta_1 T_i + \beta_0} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \alpha^2} = -n\psi'(\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \beta_0} = -(\alpha - 1) \sum - \frac{T_i}{(\beta_0 + \beta_1 T_i)^2} \qquad \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta_1} = (\alpha - 1) \sum \frac{T_i^2}{(\beta_1 T_i + \beta_0)^2}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial^2 \beta_0} = (\alpha - 1) \sum \frac{1}{(\beta_0 + \beta_1 T_i)^2} - 2 \sum \frac{T_i}{(\beta_1 T_i + \beta_0)^2} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial^2 \beta_0} = (\alpha - 1) \sum \frac{T_i^2}{(\beta_1 T_i + \beta_0)^2} - 2 \sum \frac{T_i^3}{(\beta_1 T_i + \beta_0)^3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_0 \beta_1} = \frac{\partial L}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} = -(\alpha - 1) \sum \frac{T_i}{(\beta_0 + \beta_1 T_i)^2}$$

اگر از منفی در عبارات بالا E بگیریم به I می‌رسیم

د)

$$I = \begin{bmatrix} I_{\alpha\alpha} & I_{\alpha\beta_0} & I_{\alpha\beta_1} \\ I_{\beta_0\alpha} & I_{\beta_0\beta_0} & I_{\beta_0\beta_1} \\ I_{\beta_1\alpha} & I_{\beta_1\beta_0} & I_{\beta_1\beta_1} \end{bmatrix} \Rightarrow I^{-1} = \frac{1}{}$$

۵) نرخ خرابی سیستم که برابر $\beta(t) = \beta_1 t + \beta_0$ می‌باشد نشان دهنده‌ی تغییرات نرخ خرابی با گذشت زمان است. اگر $\beta_1 > 0$ باشد نرخ خرابی با گذشت زمان افزایش می‌یابد که نشان دهنده‌ی فرسایش سیستم است و نیاز به نگهداری بیشتر است. اگر $\beta_1 < 0$ باشد نرخ خرابی کاهش می‌یابد و نگهداری اولیه باید بیشتر باشد یعنی در مراحل اولیه عمر سیستم بیشتر باید به نگهداری توجه کرد. و اگر $\beta_1 = 0$ باشد یعنی می‌توان برنامه نگهداری منظم و ثابتی داشت.

سوال دهم : الف)

$$f_T(t,\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$L(T) = \prod \lambda e^{-\lambda t} \xrightarrow{\log} \log L(T) = \sum \log \lambda e^{-\lambda t} = \underbrace{\sum \log \lambda}_{\log \lambda^n} + \sum e^{-\lambda t} = \boxed{n\log\lambda + (-\lambda)\sum_{i=1}^{n} T_i}$$

ب)

i)

$$\frac{\partial^2 L}{\partial^2 \lambda} = \frac{\partial^2 n\log\lambda - \lambda\sum T_i}{\partial^2\lambda^2} = \frac{\partial \frac{n}{\lambda} - \sum T_i}{\partial\lambda} = -\frac{n}{\lambda^2} \Rightarrow \boxed{I(\lambda) = -E\left[-\frac{n}{\lambda^2}\right] = \frac{n}{\lambda^2}}$$

ii)

$$\underset{cramer}{var}(T) = \frac{1}{I(T)} = \boxed{+\frac{\lambda^2}{n}}$$

ج)

تابع $L(T) = \prod(\lambda_1 T_i + \lambda_0)\exp(-\int_0^T \lambda(t)dt$

$$\int_0^T \lambda(t)dt = \int \lambda_1 t + \lambda_0 dt = \frac{\lambda_1 T_i^2}{2} + \lambda_0 T_i$$

$$\xrightarrow[\log\ \text{گرفتن}]{\text{جایگذاری}} \sum\left[\log(\lambda_1 T_i + \lambda_0) - \left(\frac{\lambda_1 T_i^2}{2} + T_i\lambda_0\right)\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = \sum\left[\frac{1}{\lambda_1 T_i + \lambda_0} - T_i\right] \Rightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_0^2} = \boxed{-\sum\frac{1}{(\lambda_1 T_i + \lambda_0)^2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \sum\left[\frac{T_i}{\lambda_1 T_i + \lambda_0} - \frac{T_i^2}{2}\right] \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1^2} = \frac{T_i^2}{(\lambda_1 T_i + \lambda_0)^2}}$$

$$I_{\lambda_0} = \sum E\left[-\frac{1}{(\lambda_1 T_i + \lambda_0)^2}\right] , \quad I_{\lambda_1} = \sum E\left[-\frac{T_i^2}{(\lambda_1 T_i + \lambda_0)^2}\right]$$

$$\underset{cramer}{var}(\lambda_0) = \frac{1}{\sum E\left[-\frac{1}{(\lambda_1 T_i + \lambda_0)^2}\right]} \qquad \underset{cramer}{var}(\lambda_1) = \frac{1}{\sum E\left[\frac{T_i^2}{(\lambda_1 T_i + \lambda_0)^2}\right]}$$

سوال یازدهم : الف)

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad M_x(t) = \int e^{tx} f_x(x)dx$$

$$\Rightarrow M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} = tx - \frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{\mu x}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} = x\left(t + \frac{\mu}{\sigma^2}\right) - \frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} = (x - (\mu + t\sigma^2))^2$$

$$\Rightarrow tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} = -\frac{1}{2\sigma^2}\left((x-(\mu+t\sigma^2))^2 - (t\sigma^2)^2\right)$$

$$\Rightarrow M_x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-(\mu+t\sigma^2)\right)^2+\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)dx$$

$$\Rightarrow M_x(t)=\exp\left(\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)\times e^{\mu t}$$

می‌دانیم $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{(x-(\mu+t\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right)=1$

$$M_x(t)=\exp\left(\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)=\exp\left(0.08t+\tfrac{1}{2}\times 0.04\times t^2\right)=\boxed{\exp(0.08t+0.02t^2)}$$

ب)

$$E(X)=M'_x(0)\Rightarrow M'_x(t)=(0.08+0.04t)\exp(0.08t+0.02t^2)\xrightarrow{t=0}\boxed{1\times 0.08=0.08}$$

$$Var(X)=M''_x(0)-(M'_x(0))^2\Rightarrow M''_x(t)=(0.08+0.04t)(0.08+0.04t)\exp(0.08t+0.02t^2)$$
$$+(0.04+0.08t)\exp(0.08t+0.02t^2)$$

$$\xrightarrow{t=0}(0.08)^2\times 1+0.04=\boxed{0.0464}$$

$$\Rightarrow\boxed{Var(X)=0.0464-(0.08)^2=0.04}$$

ج)

$$M'''_x(t)=\left[(0.08+0.04t)+(0.08+0.04t)(0.08+0.04t)\right]\underbrace{\exp(0.08t+0.02t^2)}_{1}$$
$$+\left[\underbrace{(0.08+0.04t)}_{0.08}\left(\underbrace{(0.04+0.08t)}_{0.04}\underbrace{(0.08+0.04t)^2}_{0.0064}\right)\right]\underbrace{\exp(0.08t+0.02t^2)}_{1}=0.0864$$

$$\text{Skewness}=\frac{E[x^3]-3E(x)\times var(x)-E(x)^3}{\sqrt[2]{var(x)^3}}=\frac{0.0864-(3)(0.08)(0.04)-(0.08)^3}{(0.04)^{3/2}}$$

سؤال دوازدهم:

الف)

$$L=\prod\frac{\beta^{\omega}x_i^{4}e^{-\beta x_i}}{\Gamma(\omega)}=\frac{\beta^{\omega n}(\prod x_i^{4})e^{-\beta\sum x_i}}{\Gamma(\omega)^n}\overset{\log}{\Longrightarrow}\omega n\log\beta+4\sum\log x_i-\beta\sum x_i-n\log\Gamma(\omega)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\beta}=\frac{\omega n}{\beta}-\sum^{n}x_i=0\Rightarrow\hat\beta=\frac{\omega n}{\sum x_i}\quad,\quad\bar X_n=\frac{1}{n}\sum x_i\Rightarrow\sum x_i=n\bar X_n$$

$$\Rightarrow\hat\beta=\frac{\omega}{\bar X_n}$$

$$\frac{\partial^2L}{\partial\beta^2}=-\frac{\omega n}{\beta^2}\Rightarrow I(\beta)=-E\left(-\frac{\omega n}{\beta^2}\right)=\frac{\omega n}{\beta^2}=\frac{\omega n}{\left(\frac{\omega}{\bar X_n}\right)^2}=\frac{n\bar X^2}{\omega}$$

ب)

$$\underbrace{posterior(\beta)}_{(1)} \propto Likelihood(\beta) \cdot Prior(\beta)$$

$$L(\beta) = \beta^{5n} \exp(-\beta \sum x_i)$$

$$Prior(\beta) \propto \beta^{\alpha_0 - 1} e^{-\beta/\beta_0} \xrightarrow{\alpha_0 = 2,\ \beta_0 = 1} \propto \beta e^{-\beta}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب}} \beta^{5n} \exp(-\beta \sum x_i)\, \beta e^{-\beta}$$

$$\Rightarrow \underbrace{P(\beta / x_1, \dots x_n)}_{(1)} \propto \beta^{5n+1} \exp(-\beta(1 + \sum x_i)) \Rightarrow \alpha_{post} = 5n+2$$

$$\beta_{post} = 1 + \sum x_i$$

$$\Rightarrow posterior(\beta) \propto Gamma(5n+2,\ 1 + \sum x_i) \Rightarrow I_{post} = \frac{\alpha_{post}}{(\beta_{post})^2} = \frac{5n+2}{(1+\sum x_i)^2}$$

ج)

$$SE(\hat{\beta}) = \frac{1}{\sqrt{I(\hat{\beta})}} = \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{5n}} \quad , \quad \hat{\beta} \pm \overset{95\%}{1.96} \times SE(\hat{\beta})$$

$$n = 200 \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{5}{\bar{x}} \ , \ I(\hat{\beta}) = \frac{5 \times 200}{\hat{\beta}^2} \quad SE(\hat{\beta}) = \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{5 \times 200}} \Rightarrow \hat{\beta} \mp 1.96 \times \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{5 \times 200}}$$

$$n = 1000 \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{5}{\bar{x}} \ , \ I(\hat{\beta}) = \frac{5 \times 1000}{\hat{\beta}^2} \quad SE(\hat{\beta}) = \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{5 \times 1000}} \Rightarrow \hat{\beta} \mp 1.96 \times \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{5 \times 1000}}$$

Posterior:

از ۲.۵ percentile درصد و ۹۷.۵ درصد استفاده کنیم

به ۹۵ درصد credible interval برسیم پس.

$$P(Lower \leq \beta \leq upper) = 0.95 \Rightarrow$$

به‌صورت کد که [illegible] کردم

به همین چیزی حساب کردم

$$[\,Gamma(0.025,\ \alpha_{post},\ \beta_{post}),\ Gamma(0.975,\ \alpha_{post},\ \beta_{post})$$

که α و post. β را در قسمت ب بدست آوردیم

سؤال سیزدهم: الف)

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f_x(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \xrightarrow[\text{قسمت الف حساب شد}]{\text{در سؤال ۱۱}} M_x(t) = \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \ldots$$

$$\Rightarrow M_x(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

ب)

$$M'_x(t) = \frac{d}{dt}\left[\exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)\right] = (\mu + \sigma^2 t) \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

$$M'_x(0) = (\mu)\exp(0) = \mu \Rightarrow E(x) = \mu$$

$$M_x''(t)=\frac{d}{dt}\left((\mu+\sigma^2t)\exp(\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2})\right)=\left[(\mu+\sigma^2t)\exp(\mu t+\sigma^2t)\right](\mu+\sigma^2t)+\sigma^2\exp(\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}$$

$$\Rightarrow M_x''(t)=\left[(\mu+\sigma^2t)^2+\sigma^2\right]\exp(\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2})$$

$$M_x''(0)=\left[(\mu)^2+\sigma^2\right]\exp(0)=\mu^2+\sigma^2$$

$$\Rightarrow var(x)=\mu^2+\sigma^2-\mu^2=\sigma^2$$

ج)

$$Skewness=\frac{E[x^3]-3\mu\sigma^2-\mu^3}{\sigma^3}$$

$$M_x'''(t)=\frac{d}{dt}\left[\left[(\mu+\sigma^2t)^2+\sigma^2\right]\exp(\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2})\right]=\left[\frac{d}{dt}\left[\exp(\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2})\right]\right]\cdot\left[(\mu+\sigma^2t)^2+\sigma^2\right]$$

$$+\frac{d}{dt}\left[(\mu+\sigma^2t)^2+\sigma^2\right]\exp(\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2})$$

$$(\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2})'=\exp(\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2})(\mu+\sigma^2t)$$

$$((\mu+\sigma^2t)^2+\sigma^2)'=2\sigma^2(\mu+\sigma^2t)$$

$$\Rightarrow M_x'''(t)=\exp(\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2})\left[(\mu+\sigma^2t)\left[(\mu+\sigma^2t)^2+\sigma^2\right]+2\sigma^2(\mu+\sigma^2t)\right]$$

$$=\exp(\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2})\left[(\mu+\sigma^2t)\left[(\mu+\sigma^2t)^2+\sigma^2+2\sigma^2\right]\right]$$

$$M_x'''(0)=\exp(0)\left[(\mu)(\mu)^2+3\sigma^2\mu\right]=\mu^3+3\sigma^2\mu$$

$$Skewness=\frac{(\mu^3+3\sigma^2\mu)-3\sigma^2\mu-\mu^3}{\sigma^3}=0$$

سؤال چهاردهم: هدف گلادیاتور این هست که آن قسمت که دشمن نمی‌تواند خسارت وارد کند را بیشتر کند
پس مساحت موفقیت آمیز را در دو حالت X و Y حساب می‌کنیم

$$X+Y=1$$
$$0\le x\le 1$$
$$0\le Y\le 1-x$$

به ازای X: باید مساحت یک مثلث را حساب کنیم که برابر $\frac{1}{2}x(1-x)$ است

برای محاسبه امید مساحت داریم

$$E(A_x)=\int_0^1\frac{1}{2}x(1-x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{2}(x-x^2)\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{12}$$

به ازای Y: باید مساحت

$$E(A_y)=\int_0^1\frac{1}{2}y(1-y)\,dy=\int_0^1\frac{1}{2}(y-y^2)\,dy=\frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{12}$$