سوال اول : الف)

$H_0: \theta = \theta_0$
$H_1: \theta = \theta_1$

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2}\right)$$

$$\text{likelihood-Ratio} = \lambda(x) = \frac{L_{\theta\in\theta_0}(\theta|x)}{L_{\theta\in\theta_1}(\theta|x)} \Rightarrow L(\theta|x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right)$$

$$\Rightarrow \lambda(x) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}\sum(x_i-\theta_0)^2)}{\exp(-\frac{1}{2}\sum(x_i-\theta_1)^2)} = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum(x_i-\theta_0)^2 - \sum(x_i-\theta_1)^2\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum(x_i^2-2x_i\theta_0+\theta_0^2) - \sum(x_i^2-2x_i\theta_1+\theta_1^2)\right)\right)$$

$$= \sum x_i^2 - \sum x_i^2 - 2\theta_0\sum x_i + 2\theta_1\sum x_i + n(\theta_0^2-\theta_1^2)$$

$$= -2\theta_0\sum x_i + 2\theta_1\sum x_i + n(\theta_0^2-\theta_1^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(-2(\theta_0-\theta_1)\sum x_i + n(\theta_0^2-\theta_1^2)\right)\right) = \exp\left(n(\theta_1-\theta_0)\bar{x}_n - \frac{n}{2}(\theta_1^2-\theta_0^2)\right)$$

ب) فرض H_0 را در مقابل فرض H_1 رد می کنیم اگر $\lambda(x) < C$ باشد

$$\Rightarrow \exp\left(n(\theta_1-\theta_0)\bar{x} - \frac{n}{2}(\theta_1^2-\theta_0^2)\right) < C$$

$$\xrightarrow{Ln} n(\theta_1-\theta_0)\bar{x} - \frac{n}{2}(\theta_1^2-\theta_0^2) < \ln C \Rightarrow \text{Rejected Region} = \bar{x} > \frac{\ln C + \frac{n}{2}(\theta_1^2-\theta_0)}{n(\theta_1-\theta_0)}$$

ج)

$\theta_0 = 0 \quad \theta_1 = 1 \quad \alpha = 0.05$

R = Reject
A = Accept

$$P(\lambda(x) < c \mid H_0) = 0.05 \quad , \alpha = 0.05 \Rightarrow Z_\alpha = 1.645$$

$$H_0: \bar{X} \sim N(\theta, \tfrac{1}{n}) = N(0, \tfrac{1}{n})$$

$$RR = \bar{X} > C \Rightarrow P(\bar{X} > C \mid H_0) = 0.05 \Rightarrow C = \varphi^{-1}(0.95)\frac{1}{\sqrt{n}} = 1.645\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$H_1: \bar{x} \sim N(1, \tfrac{1}{n})$$

سوال دوم : الف)

$$f(x_i;\lambda) = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} , x_i \quad ; L = \prod \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = \frac{\lambda^{\sum x_i} e^{-n\lambda}}{\prod x_i!}$$

$$\text{Log} L = \sum x_i \log\lambda - n\lambda - \sum \log x_i!$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{\sum x_i}{\lambda} - n = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum x_i \Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{X}$$

ب)

$$\text{var}(\hat{\lambda}) = \frac{1}{n^2}\sum \text{var}(x_i) = \frac{1}{n^2} n\lambda = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow SD(\hat{\lambda}) = \sqrt{\frac{\lambda}{n}}$$

ج)

$H_0: \lambda = \lambda_0$
$H_1: \lambda = \lambda_1$

$$Z = \frac{\hat{\lambda}-\lambda_0}{SE(\hat{\lambda})}$$

با فرض $\lambda = \lambda_0$ $\quad Z = \dfrac{\hat{\lambda}-\lambda_0}{\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}}$

تحت H_0 داریم: $\hat{\lambda} \sim N(\lambda_0, \frac{\lambda_0}{n})$, تحت H_0 $\quad Z \sim (0,1)$

ناحیه رد فرضیه در سطح α توسط مقادیر بحرانی توزیع نرمال تعیین می شود پس

$$|Z| > Z_{\alpha/2}$$

سؤال سوم: الف)

1. فرض مقابل $H_1 = f_1(x)$ فرض صفر $H_0 = f_0(x)$

2. تعریف خطای نوع اول: فرض صفر رد می‌شود در حالی که درست است

" " نوع دوم: فرض صفر رد نمی‌شود در حالی که فرض مقابل درست است

3. likelihood Ratio test: $\Lambda(x) = \frac{f_0(x)}{f_1(x)}$ ، λ مرز تصمیم که $\lambda \leq \Lambda(x)$ فرض صفر رد نمی‌شود

اگر $\lambda > \Lambda(x)$ فرض صفر رد می‌شود

4. برای کمینه کردن $\alpha+\beta$ باید λ به گونه‌ای انتخاب شود که این ۲ خطا به حداقل برسند، در واقع α و β به تعادل برسند یعنی α, β برابر یا نزدیک به هم باشند

5. خطای نوع اول $\alpha = P(R\ H_0 \mid H_0 \text{ is } T) = \int_{\Lambda(x)<\lambda} f_0(x)\,dx$

خطای نوع دوم $\beta = P(A\ H_0 \mid H_1 \text{ is } T) = \int_{\Lambda(x)\geq\lambda} f_1(x)\,dx$

ج) استفاده از "likelihood Ratio test" $f_0(x)$ تابع چگالی احتمال برای توزیع H_0

$f_1(x)$ تابع چگالی احتمال برای توزیع H_1

$$\Lambda(x) = \frac{f_0(x)}{f_1(x)}$$

$f_0(x)$ = بیمار سالم است

$f_1(x)$ = بیمار واقعاً بیمار است

که اگر $\Lambda(x)$ بیشتر از c^* باشد فرض صفر رد می‌شود که یعنی بیمار، واقعاً بیمار است

$$\alpha = P(R\ H_0 \mid H_0 \text{ is true}) = \int_{c^*}^{\infty} f_0(x)\,dx$$

$$\beta = P(A\ H_0 \mid H_1 \text{ is true}) = \int_{-\infty}^{c^*} f_1(x)\,dx$$

expected Risk:

$$R_1\alpha + R_2\beta = R_1\int_{c^*}^{\infty} f_0(x)\,dx + R_2\int_{-\infty}^{c^*} f_1(x)\,dx$$

برای کمینه کردن ریسک باید مرز c^* به گونه‌ای انتخاب شود که تابع $\Lambda(x)$ کمینه شود یعنی باید نسبت احتمال به گونه‌ای باشد که هزینه‌ها متناسب با ریسک‌ها باشند یعنی

$\frac{f_0(c^*)}{f_1(c^*)} = \frac{R_1}{R_2}$ زیرا

$$\frac{d}{dc}\left[R_2\int_{-\infty}^{c^*} f_1(x)\,dx + R_1\int_{c^*}^{\infty} f_0(x)\,dx\right] = 0$$

$$-R_2 f_1(c^*) + R_1 f_0(c^*) = 0$$

سوال چهارم :

$H_0: \theta = \theta_0$

$H_1: \theta < \theta_0$

$$L = \prod \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n \prod x_i^{\theta-1}$$

$$\log L = n \log \theta + (\theta-1) \sum \log x_i$$

$$\lambda(x) = \frac{L_{\theta=\theta_0}}{L_{\theta<\theta_0}} = \frac{\theta_0^n \prod x_i^{\theta_0-1}}{\hat{\theta} \prod x_i^{\hat{\theta}-1}} = \left(\frac{\theta_0}{\hat{\theta}}\right)^n \prod x_i^{\theta_0-\hat{\theta}}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum \log x_i = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = -\frac{n}{\sum \log x_i}$$

با توجه به اینکه λ رابطه معکوس با $T = -\sum \log x_i$ دارد بنابراین این آزمون فرض صفر را برای مقادیر کوچک T رد می‌کند (منفی $\sum$)

در آزمون UMP براساس آماره T ناحیه‌ی رد به صورت $C \geqslant T$ می‌شود که C مقدار بحرانی)

$$P(T \leqslant c \mid H_0) = \alpha$$

سؤال پنجم: a)

$$H_0: \theta_1 = \theta_2 = \theta \quad , \quad \theta_3 = \theta_4 = \sigma^2 \Rightarrow N(\theta, \sigma^2)$$

$$f_X(x_i;\theta,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad f_Y(y_i;\theta,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(y_i-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)$$

L_0: ضرب ۲ عبارت بالا

$$L_0 = \prod_i^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}\right) \times \prod_j^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(y_j-\theta)^2}{2\sigma^2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^{m+n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum (x_i-\theta)^2 + \sum_j (y_j-\theta)^2\right]\right)$$

H_1: هرکدام X, Y دارای σ جدای خود داشته باشند:

$$L_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum^n (x_i-\bar{x})^2\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}\right)^m \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2} \sum_j^m (y_j-\bar{y})^2\right)$$

ادامه سوال پنجم) ادامه (a

$$\mu = \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n+m}, \quad \Lambda = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{m+n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_i (x_i-\mu)^2 + \sum_j (y_j-\mu)^2\right]\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum^n (x_i-\bar{x})^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\right)^m \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum^m (y_i-\bar{y})^2\right)}$$

از ادعای a که $\bar{x}$, $\bar{y}$ تخمین unbiased θ هستند داریم $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

$$\Lambda = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_i^n (x_i-\mu)^2 + \sum_j^m (y_j-\mu)^2\right]\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum (x_i-\bar{x})^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum (y_j-\bar{y})^2\right)} =$$

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_i (x_i-\mu)^2 + \sum_j (y_j-\mu)^2 - \sum_i (x_i-\bar{x})^2 - \sum (y_j-\bar{y})^2\right]\right)$$

این عبارت ساده شده همون عبارت صورت سوال میشه

b)

$H_0: \theta_1 = \theta_2 = \theta \qquad H_1: \theta_1 \neq \theta_2 \qquad L = \prod^n f_x(x_i;\theta_1,\theta_3) \prod f_y(y_i;\theta_2,\theta_4)$

$$\Rightarrow L = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_3}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\theta_3}\sum (x_i-\theta_1)^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_4}}\right)^m \exp\left(-\frac{1}{2\theta_4}\sum (y_i-\theta_2)^2\right)$$

$H_0: \theta_1 = \theta_2 = \theta, \quad \theta_3 = \theta_4 = \sigma^2$

استفاده $\frac{L_{H_0}}{L_{H_1}} = \Lambda$

$$\Rightarrow L_{H_0} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{m+n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum^n (x_i-\theta)^2 + \sum (y_i-\theta)^2\right)\right)$$

سؤال ششم : ۱) احتمال خطای نوع اول :

$H_0: \theta = 2$ reject H_0: $x \leq 0.1$ یا $x \geq 1.9$

uniform dist: $\theta = 2 \Rightarrow pdf\ X = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{2}$

Rejected Region: $P(R\ H_0) = P(x \leq 0.1 \text{ or } x \geq 1.9) \Rightarrow P(X \leq 0.1) = \frac{0.1}{2} = 0.05$

uniform: $[0, 2]$ $P(X \geq 1.9) = \frac{2 - 1.9}{2} = \frac{0.1}{2} = 0.05$

$P(R\ H_0) = 0.05 + 0.05 = 0.1$

۲) احتمال خطای نوع دوم :

$\theta = 2.5$ $f_x(x) = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{2.5}$ $0 \leq x \leq 2.5$

$P(0.1 < X < 1.9) = \frac{1.9 - 0.1}{2.5} = \frac{1.8}{2.5} = 0.72$

$\beta = 1 - P(R\ H_0) = 1 - 0.72 = 0.28$

۳) $\alpha = 0.05$

$P(X \leq c_1 \text{ or } X \geq c_2) = 0.05$ $P(X \leq c_1) = \frac{c_1}{2}$, $P(X \geq c_2) = \frac{2 - c_2}{2}$ $\Rightarrow \frac{c_1}{2} + \frac{2 - c_2}{2} = 0.05$

$\Rightarrow c_1 + (2 - c_2) = 0.1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1.9$

با فرض متقارن بودن آستانه ها : $2c_1 = 1.9 \Rightarrow c_1 = 0.95$ و $c_2 = 2 - 0.95 = 1.05$

بنابراین قانون تصمیم گیری فرض صفر را اگر $X \leq 0.95$ یا $X \geq 1.05$ باشد رد می کند

قدرت آزمون احتمال رد H_0 در صورتی که مقدار واقعی θ از ۲ متفاوت باشد، هرچه آستانه را کوچکتر کنیم قدرت آزمون افزایش می یابد اما احتمال خطای نوع اول نیز بیشتر می شود

۴) زمانی که θ افزایش یابد احتمال خطای نوع دوم کاهش می یابد زیرا هرچه θ بزرگتر شود pdf نیز بیشتر می شود، همپوشانی بین ناحیه رد و پذیرش کاهش می یابد به صورت ریاضی هم می توان نشان داد هرچه θ بزرگتر شود ناحیه پذیرش برای X بزرگتر می شود

۵) برای توزیع یکنواخت از نابرابری مارکوف می توان استفاده کرد تا حد بالایی برای احتمال خطای نوع اول بدست آوریم

$P(X \geq a) \leq \frac{E(x)}{a}$

ادامه سوال ششم :

۶) برای بدست آوردن حد بالای برای احتمال خطای نوع دوم (حتی β) هست می توانیم از نامساوی چرنوف استفاده می کنیم تا حد بالایی برای احتمالات توزیع های دهند. برای زمانی که محاسبات پیچیده می شوند مفید هستند

نامساوی چرنوف

$$P(X\geq t)\leq \exp\left(-\frac{(t-E(X))^2}{2Var(X)}\right)$$

سوال هفتم : اگر $\bar{x}_1$, $\bar{X}_2$ میانگین نمونه ای باشد

s_1^2 , s_2^2 واریانس نمونه ای باشد

n_1 , n_2 سایز نمونه ها باشد

$$t=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

a) طبق فرض صفر که داریم $\mu_1=\mu_2$ فرض می کنیم تفاوت بین میانگین های نمونه ها یعنی $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ ناشی از خطای تصادفی است و انتظار داریم این تفاوت نزدیک به صفر باشد

$$\leftarrow S_p=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

آماره

واریانس وزنی یا تجمعی ۲ متغیر تصادفی را براساس با

رد فرض صفر: برای رد این فرض باید statistic test t به اندازه ی کافی بزرگ یا کوچک باشد تا در ناحیه ی بحرانی قرار بگیرد که این ناحیه بحرانی از توزیع t با درجه آزادی (df) n_1+n_2-2 (با فرض برابر واریانس ها)

حال مقدار t_{α} را از جدول توزیع t پیدا کرده، و بازه اطمینان $1-\alpha$ را پیدا می کنیم اگر $|t|>t_{\alpha/2}$ ⇐ فرض صفر رد (در ناحیه بحرانی ...)

$|t|<t_{\alpha/2}$ ⇐ فرض صفر رد نمی شود در ناحیه غیر بحرانی

b) برای بدست آوردن بازه اطمینان داریم :

$$SE(\bar{X}_1-\bar{X}_2)=\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}} \Rightarrow (\bar{X}_1-\bar{X}_2)\mp t_{\alpha/2,df}\times SE$$

می کنیم طبق اسلاید ، $df=n_1+n_2-2$, $\alpha/2$ ⇐ مقدار بحرانی از توزیع t بدست می آید و هرچه مقدار بحرانی بزرگ تر باشد (یعنی $t_{\alpha/2,df}$) نشان دهنده ی عدم قطعیت می باشد

سؤال هشتم : a)

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}=\frac{11-10}{\frac{2}{\sqrt{16}}}=\frac{1}{2/4}=\boxed{2}$$

برای آزمون دو طرفه با سطح $\alpha=0.05$ مقادیر بحرانی را برای توزیع t با درجه آزادی $n-1$ یعنی ۱۵ پیدا می کنیم یعنی $t_{\alpha/2}=t_{0.025}$

که طبق جدول توزیع t برای $\alpha=0.05$ و درجه آزادی ۱۵ مقداری برابر تقریباً ۲٫۱۳ است

درنتیجه مقادیر بحرانی $\pm$۲٫۱۳ هست و با توجه به اینکه مقدار t برابر با ۲ شد و کوچکتر است از ۲٫۱۳ درنتیجه فرض صفر رد نمی شود

b) $H_1: \mu > 10$ چون در اینجا آزمون یک طرفه داریم با $\alpha=0.05$ باید مقدار بحرانی برای توزیع t با ۱۵ درجه آزادی در $\alpha=0.05$ پیدا کنیم که با توجه به جدول برابر با ۱٫۷۵۳ که با توجه به اینکه کوچکتر از $t=2$ هست ما فرض صفر را رد می کنیم

c) در آزمون دو طرفه ناحیه بحرانی در دو طرف توزیع تقسیم شده است که باعث می شود رد کردن فرض صفر سخت تر باشد چون باید آماره در یکی از دو طرف قرار بگیرد که ناحیه کمتری دارند ولی در آزمون یک طرفه ناحیه بحرانی در یک طرف قرار داشته و ناحیه بیشتری داشته ، درنتیجه راحت تر رد می شود

سوال یازدهم: ۹) A : $N=۴۳$ اندازه نمونه کافی است زیرا بیشتر از ۳۰ هست و با توجه به اینکه در این شکل تقریباً نرمال هست

ولی اندازه نمونه بیشتر از ۳۰ هست می‌توان گفت شرایط برای آزمون t برقرار هست

B : $N=۷$ اندازه نمونه‌ای کم هست ولی توزیع تقریباً نرمال است ⇐ شرایط آزمون t برقرار هست

C : $N=۱۴$ تعداد نمونه کم و توزیع نرمال نیست ⇐ شرایط آزمون t برقرار نیست

D : $N=۳۶$ تعداد نمونه بیشتر از ۳۰ ولی توزیع نرمال نیست ولی می‌توان با توجه $n>۳۰$ گفت آزمون t برقرار هست

b) فرضیه ساده معمولاً زمانی استفاده می‌شود که در آزمون فقط یک مقدار مشخص از یک پارامتر را می‌خواهیم بررسی کنیم و در اینجا مدیر می‌خواهد بفهمد آیا میانگین برابر ۲۵۰ گرم هست یا نه ولی فرضیه composite وقتی در نظر گرفته می‌شود که بخواهیم مقادیر بیشتری بررسی کنیم مثلاً $\mu \neq ۲۵۰$ یا $\mu > ۲۵۰$

c) در این نوع آزمون که نیاز هست میانگین یک متغیر تصادفی در ۲ حالت مختلف برای یک شرکت کننده واحد انجام شود و در نهایت مقایسه‌ای بین میزان انعطاف پذیری قبل و بعد از انجام برنامه انجام می‌شود که می‌توان از آزمون Paired-t استفاده کرد

H_0: میانگین تغییر در انعطاف پذیری برابر با صفر هست (برنامه تاثیری در انعطاف پذیری ندارد)

H_1: میانگین تغییر در انعطاف پذیری $\neq ۰$ است

سوال دوازدهم: a) اگر X_1 , X_2 , X_3 اندازه‌گیری‌های سرعت با توزیع $N(۰, ۵^۲)$ باشد

چون نرمال $(۰, ۵^۲)$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{۳} = \frac{۰+۰+۰}{۳} = ۰$$

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N(۰, ۱۷,۳۳)$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{var(X_i)}{n} = \frac{۲۵}{۳} \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{۵}{\sqrt{۳}}$$

در نهایت با توجه به ۲ فرض H_0 و H_1 می‌توان از آزمون t استفاده کرد، بررسی کرد که آیا میانگین اندازه‌گیری‌ها از ۴۰ بیشتر هست یا نه

$H_0: \mu = ۴۰$

$H_1: \mu > ۴۰$

b) 1. در اینجا فرض می‌کنیم توزیع $N(۴۰, ۱۷,۳۳)$ هست در واقع میانگین ۴۰ هست نه صفر

$$Threshold = ۴۰ + Z \times \sqrt{\frac{۲۵}{۳}} = ۴۰ + ۱,۷۵ \times ۲,۹۴ \cong ۴۰ + ۵,۱ \approx ۴۵,۱$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{.۹۶} = ۱,۷۵$$

2. توزیع $\bar{X}$ با توجه به فرض صفر $N(۴۰, ۱۷,۳۳)$ است و ناحیه رد که به صورت یک طرفه هست به این صورت است که اگر $\bar{X} > ۴۷,۲۸$ باشد فرض صفر رد می‌شود

3. برای بدست آوردن احتمال اینکه فردی که جریمه شده، سرعت نداشته

$$P(\text{سرعت نداشتن} \mid \text{جریمه}) = \frac{P(\text{جریمه} \mid \text{سرعت نداشتن})\, P(\text{سرعت نداشتن})}{P(\text{جریمه})}$$

این عبارت برابر است با خطای نوع دوم

خطای نوع اول

$$P(\bar{X} > ۴۷,۲۸ \mid \mu = ۴۰) = P\left(Z > \frac{۴۵,۱ - ۴۰}{\sqrt{\frac{۲۵}{۹}}}\right) \Rightarrow P\left(Z > \frac{۵,۱}{۳}\right) = P(Z > ۱,۷) = P(\text{جریمه} \mid \text{سرعت نداشتن})$$

***بقیه موارد رو نداریم مگر تقریبی حدس بزنیم، فرض کنیم همه رانندگان قانون‌مند هستند و $P(\text{سرعت نداشتن}) = ۱$ باشد

4. ۸۱٪ همه افراد با سرعت ۴۰ حرکت کنند همه بلیت‌های صادر شده اشتباه خواهد بود که درصد جریمه‌های اشتباهی همان خطای نوع اول می‌شود که

$$P(Z > ۱,۷) = ۱ - P(Z < ۱,۷) = ۱ - ۰,۹۵۵۴ = \boxed{۰,۰۴۴}$$

ادامه سوال دوازدهم : c) با توجه به آستانه‌ی بدست آمده که تقریباً برابر با ۴۵.۱ شد توزیع واقعی تحت برابر $N \sim (45, \frac{25}{3})$ است

$$Pow = P(\bar{X} > 45.1 \mid \mu = 45) = 0.9 \Rightarrow P\left(Z > \frac{45.1 - 45}{\sqrt{\frac{25}{3}}}\right) = 0.0347 \Rightarrow P(Z > 0.0347)$$

$$= 1 - P(Z < 0.0347) = \ldots$$

تعداد دوره‌های لازم برای توان $= 0.9$

$$Z_{.9} = 1.28 \Rightarrow 1.28 = \frac{45.1 - 45}{\sqrt{\frac{25}{n}}} = \frac{\sqrt{n} \times 0.1}{5} = 1.28$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = 1.28 \times 50 = 64 \Rightarrow \boxed{n = 64^2}$$

سوال سیزدهم : a) برای مقایسه زمان تهیه سفارش‌ها در ۲ شعبه مختلف اگر به این صورت فرض شود که هر فرد را که می‌پرسیم نظرش را از هر ۲ کانه بپرسد با این شرایط می‌توان از paired t test استفاده می‌کنیم ولی اگر اینطور نباشد و از های مشتری‌ها از ۲ شعبه بپرسیم می‌توان از t تست مستقل استفاده کرد

برای طعم دستور قهوه نیز همان شرایط برقرار است و از همان ۲ آزمون استفاده شود

b)

$$H_0: \mu_d = 0 \qquad H_1: \mu_d < 0 \qquad d = [-1, 1, 0, 0, -3, 2, -5, -2, -1, -2, -2, -2]$$

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{-16}{12} = -1.33$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} \Rightarrow \sum (d_i - \bar{d})^2 = 0.1089 + 5.428 + 1.7689 + 1.7689 + 2.7889 + 11.0889 + 13.4689$$

$$+ 0.4489 + 0.1089 + 0.4489 + 0.4489 + 0.4489 = 37.736$$

$$\Rightarrow s_d = \sqrt{\frac{37.736}{12-1}} = \sqrt{3.429} \approx 1.85 \qquad t = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} = \frac{-1.33}{\frac{1.85}{\sqrt{12}}} = \frac{-1.33}{0.536} \approx -2.48$$

برای $\alpha = 0.05$ و درجه آزادی $12-1=11$ t طبق جدول برابر -1.796 و چون t بدست آمده کمتر است از -1.796 پس فرض صفر رد می‌شود

c)

$$H_0: \mu_A = \mu_B \quad , \quad H_1: \mu_B > \mu_A \qquad d = [1, -1, 0, 2, -2, 1, 4, 2, 2, 2, 4, -1] \qquad \bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{13}{12} = 1.08$$

A دستور ، B دستور

$$\sum d_i = 0.0064 + 4.3264 + 1.1664 + 0.8464 + 9.4864 + 0.0064 + 8.5264 + 0.0064 + 0.8464 + 0.8464 + 8.5264 + 4.3264$$

$$= 38.68$$

$$s_d = \sqrt{\frac{38.68}{11}} = 2.02 \qquad t = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} = \frac{38.68}{\frac{2.02}{\sqrt{12}}} \approx 1.85$$

طبق $\alpha = 0.05$ و درجه آزادی $n-1=11$ مقدار t از جدول $+1.796$ می‌شود و چون t بدست آمده بیشتر از آن است

در نتیجه فرض صفر رد می‌شود