۱ نقطهٔ $(۱, -۲)$ رأس یک سهمی است. معادلهٔ خطی که از این نقطه و یکی از ریشه‌ها می‌گذرد، $y = ۴x - ۶$ است. عرض نقطهٔ برخورد این سهمی با محور عرض‌ها کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۴
۳) ۸
۴) ۶

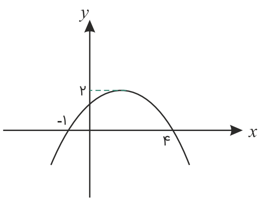
۲ نمودار سهمی $f(x) = (mx - ۴)(۴ + ۲x)$ بر محور xها مماس است. مقدار m چه عددی است؟

۱) -۴
۲) ۲
۳) -۲
۴) ۴

۳ خط به معادلهٔ $y = -\frac{۵}{۲}$ محور تقارن منحنی تابع با ضابطهٔ $y = \frac{۱}{۲}x^۲ - ۳x + a$ را بر روی خود منحنی قطع می‌کند. a کدام است؟

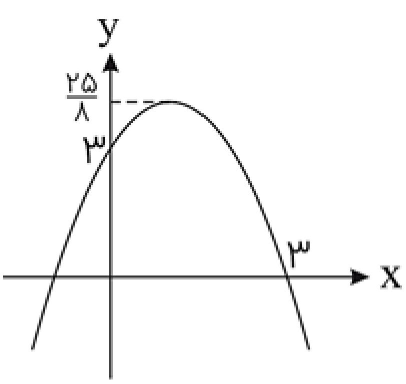
۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

۴ در سهمی شکل زیر، محل تلاقی نمودار با محور عرض‌ها کدام است؟



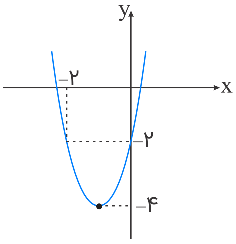
۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) $\frac{۳۲}{۲۵}$
۴) $\frac{۱۶}{۲۵}$

۵ شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ است. a کدام است؟



۱) $-\frac{۲}{۹}$
۲) $-\frac{۱}{۹}$
۳) $-\frac{۱}{۲}$
۴) $-\frac{۲}{۵}$

۶ نمودار زیر مربوط به سهمی $y = f\ (x)$ است. مجموع مربعات جواب‌های معادلهٔ $f\ (x) = ۰$ کدام است؟



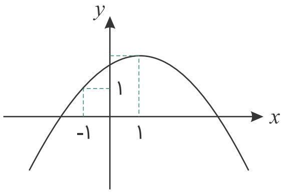
۱) ۵

۲) ۶

۳) ۷

۴) ۸

۷ در سهمی شکل زیر به معادلهٔ $f(x) = ax^{۲} + bx + c$، اگر $a - b = -۳$، آنگاه $f(۱)$ کدام است؟



۱) -۴

۲) صفر

۳) ۴

۴) ۵

۸ صفرهای تابع درجهٔ دومی، دو عدد زوج متوالی است. اگر طول رأس ۳ و محل تلاقی منحنی با محور عرض‌ها ۴- باشد، آنگاه ماکزیمم تابع کدام است؟

۱) ۰/۵

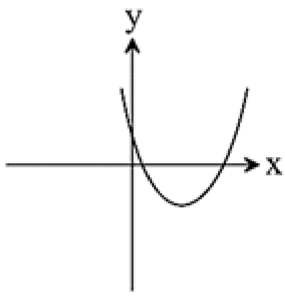
۲) ۷/۵

۳) ۹/۵

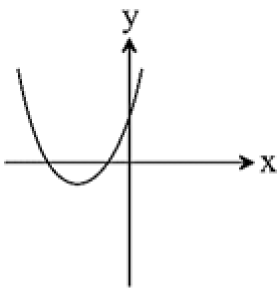
۴) ۱۰/۵

۹ اگر در سهمی $y = ax^{۲} + bx + c$، ضرایب a، b و c هر سه مثبت باشند، در این صورت کدام گزینه می‌تواند نمودار این سهمی باشد؟

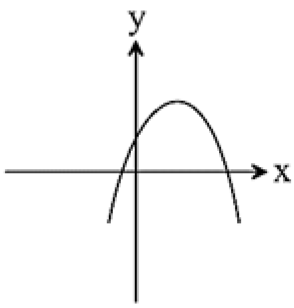
۱)



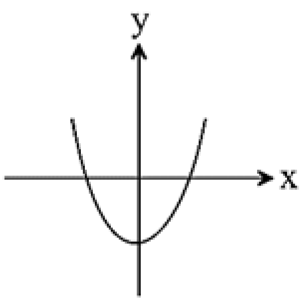
۲)



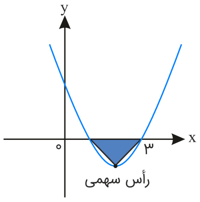
۳)



۴)



۱۰ باتوجه‌به نمودار تابع درجهٔ دوم $y=۳x^۲+ax+۱۸$، مساحت مثلث سایه‌زده کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۸}$

۴) $\frac{۳}{۱۶}$

۱۱ رأس سهمی به معادلهٔ $y=x^۲+mx-\frac{۱}{۴}$، روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم محورهای مختصات واقع است. اگر این سهمی محور xها را در نقاط A و B قطع کند، طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۲ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $mx^۲-x+m=۳$ باشند و داشته باشیم: $\alpha<۱<\beta<۲$، محدودهٔ m کدام است؟

۱) $۰<m<۱$ ۲) $۱<m<۲$

۳) $-۱<m<۰$ ۴) $-۲<m<-۱$

۱۳ خط $y=a$ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^۲-۲x & ;x\geq ۰\\ x-۱ & ;x<۰\end{cases}$ را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. حدود a کدام است؟

۱) $[-۱,۰)$ ۲) $(-\infty,-۱]$

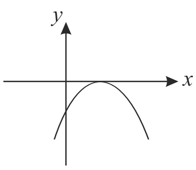
۳) $(-\infty,-۱)\cup[۰,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۱]\cup(۰,+\infty)$

۱۴ اگر منحنی به معادلهٔ $y=(a-۱)x^۲+x+۳$ نسبت به خط $x=۲$ متقارن باشد، این منحنی محور xها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۶

۱۵ شکل زیر، نمودار تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^۲+bx-۱$ است. کدام دوتایی برای (a,b) قابل قبول است؟



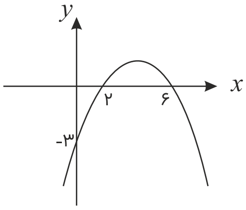
۱) $(۱,-۲)$

۲) $(-۲,-۱)$

۳) $(-۱,۴)$

۴) $(-۱,۲)$

۱۶ نمودار سهمی $f(x) = ax^۲ + bx + c$ به‌صورت زیر است. $f(۴)$ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۷ اگر نمودار سهمی $f(x) = ax^۲ + ۴x + a - ۳$، محور xها را در دو نقطهٔ متمایز با طول مثبت قطع کند، رأس سهمی به ازای کدام مقادیر a، زیر محور xها قرار دارد؟

۱) $(-۱, ۰)$
۲) $\varnothing$

۳) $(-\infty, ۰)$
۴) $(-\frac{۱}{۲}, ۰)$

۱۸ به‌ازای چه مقادیری از a، سهمی به معادلهٔ $y = (a-۱)x^۲ + (۲a-۱)x + a$ فقط از ناحیهٔ اول محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) $[۰, +\infty)$
۲) $(-\infty, ۰]$

۳) $(-\infty, ۱)$
۴) $\varnothing$

۱۹ نقطهٔ $(۳, ۴)$ رأس یک سهمی درجه دوم است که نمودار آن، پاره‌خطی به طول ۸ روی محور xها جدا می‌کند. نمودار این منحنی محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۷}{۴}$
۲) $\frac{۷}{۲}$

۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۵}{۳}$

۲۰ اگر هر دو سهمی $f(x) = x^۲ - ۲x + ۴$ و $g(x) = ax^۲ + bx + \frac{۸}{۳}$ در نقطهٔ رأس مشترک باشند، آنگاه صفرهای سهمی $g(x)$ کدام است؟

۱) ۴- و ۲
۲) ۴ و ۲-

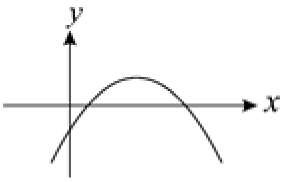
۳) ۳ و ۱-
۴) ۵ و ۳-

۲۱ به ازای کدام مقدار a کمترین مقدار تابع $y = x^۲ + ax + a^۲ - ۱۲$ روی محور xها است؟

۱) ۴
۲) -۴

۳) ± ۴
۴) $\pm ۲\sqrt{۳}$

۲۲ نمودار تابع $f(x) = mx^۲ + ۸x - ۲$ به شکل زیر است. m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟



۱) ۷

۲) ۸

۳) ۹

۴) ۱۰

۲۳ دیوار یک ورزشگاه بیش از صد متر طول دارد. اگر بخواهیم با ۸۰ متر تور سیمی، روبه‌روی دیوار ورزشگاه، محوطه‌ای مستطیلی‌شکل با بیشترین مساحت ممکن جهت محیطی برای انتظار تماشاگران تا باز شدن درب ورزشگاه ایجاد کنیم، مساحت قسمت ایجادشده چند مترمربع است؟

۱) ۸۰۰ ۲) ۸۰۰۰

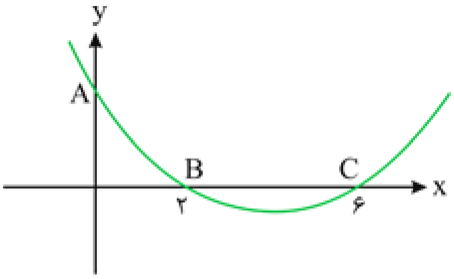
۳) ۱۶۰۰ ۴) ۶۴۰۰

۲۴ اگر $x = ۱$ بین مقادیر دو ریشهٔ معادلهٔ $x^۲ + kx + ۲k = ۰$ قرار داشته باشد، محدودهٔ k کدام گزینهٔ زیر است؟

۱) $(-\frac{۱}{۳}, +\infty)$ ۲) $(\frac{۱}{۳}, +\infty)$

۳) $(-\infty, \frac{۱}{۳})$ ۴) $(-\infty, -\frac{۱}{۳})$

۲۵ شکل زیر، نمودار یک سهمی است که محورهای مختصات را در نقاط A، B و C قطع می‌کند. اگر مساحت مثلث ABC برابر با ۶ باشد، کمترین مقدار سهمی کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۲}$

۲) $-\frac{۳}{۲}$

۳) -۲

۴) -۱

۲۶ به ازای چه حدودی از a نمودار تابع درجه‌دوم $y = ax^۲ - (a - ۴)x + \frac{۹}{۴}$ فقط از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $-۱ < a < ۰$ ۲) $-۲ < a < -۱$

۳) $۱ < a < ۲$ ۴) $۰ < a < ۱$

۲۷ به ازای چه مقادیری از m، سهمی $y = mx^۲ - ۲mx + ۱$ از نواحی اول و دوم صفحهٔ مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $m < ۰$ ۲) $-۱ < m < ۰$

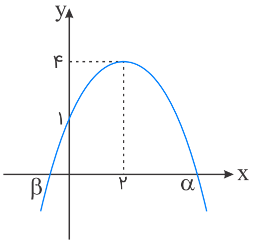
۳) $۰ < m < ۱$ ۴) $\{\}$

۲۸ به ازای چه مقادیری از a، نمودار تابع $f(x) = (a^۲ - ۴)x^۲ + (a^۲ - ۹)x + ۱$ از هر ۴ ناحیهٔ دستگاه مختصات عبور می‌کند؟

۱) $(-۳, ۳)$ ۲) $(-۲, ۲)$

۳) $\mathbb{R} - (-۲, ۲)$ ۴) $\mathbb{R} - [-۳, ۳)$

۲۹ شکل زیر مربوط به تابع درجهٔ دوم $y=f(x)$ است. حاصل $\alpha^{۳}+\beta^{۳}$ کدام است؟



۱) ۶۰

۲) ۷۰

۳) ۸۰

۴) ۹۰

۳۰ حدود m چقدر باشد تا نمودار تابع $y=(۲m+۱)x^{۲}+(۳m+۴)x+m+۴$ حداقل از ۳ ناحیهٔ مختصاتی بگذرد؟

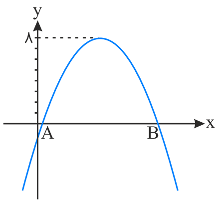
۱) $m\leq ۰$ یا $m\geq ۱۲$

۲) $۰<m<۱۲$

۳) $m<۰$ یا $m>۱۲$

۴) $۰\leq m\leq ۱۲$

۳۱ نمودار $y=-۲x^{۲}+ax+b$ به‌صورت زیر است. اندازهٔ قطعه‌ای که نمودار روی محور xها ایجاد می‌کند (طول پاره‌خط AB)، کدام است؟



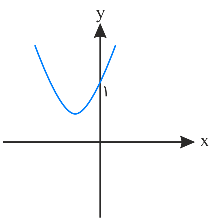
۱) ۴

۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۳

۳۲ حدود a کدام باشد تا نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+(۳-a)x+b$ به‌صورت زیر باشد؟



۱) $a>۱$

۲) $a<۳$

۳) $۰<a<۳$

۴) $۱<a<۳$

۳۳ نمودار یک سهمی از نقاط $(۱,-۲)$ و $(۲,-۳)$ می‌گذرد و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. کدام‌یک از نقاط زیر روی این سهمی قرار دارد؟

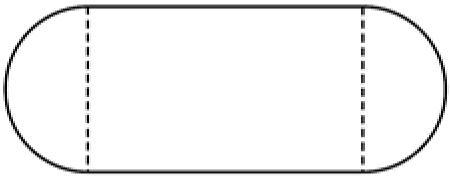
۱) $(-۱,۶)$

۲) $(-۲,۱۰)$

۳) $(۳,۲)$

۴) $(۴,-۱)$

۳۴ استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، طول مستطیل چقدر باشد تا مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن شود؟



۱) ۷۵۰

۲) ۳۷۵

۳) $\frac{۷۵۰}{\pi}$

۴) $\frac{۳۷۵}{\pi}$

۳۵ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، کمترین مقدار تابع $f(x) = ax^{۲} + ۲(x+a) - ۱$ در ربع سوم قرار دارد؟

۱) $-۱ < a < \frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲} < a < ۱$

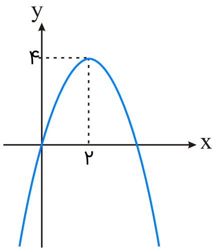
۳) $۰ < a < ۱$ ۴) $a > ۰$

۳۶ به ازای کدام مقادیر a، سهمی به معادلهٔ $y = ax^{۲} - (a+۲)x$ از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $a \leq -۲$ ۲) $a > -۲$

۳) $a > ۰$ ۴) $-۲ \leq a < ۰$

۳۷ نمودار تابع $f(x) = ax^{۲} + bx$ به‌صورت زیر است. حاصل $f(۵)$ کدام است؟



۱) -۲

۲) -۳

۳) -۴

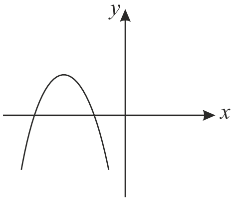
۴) -۵

۳۸ اگر سهمی‌هایی به‌صورت $y = x^{۲} + ax + b$ بر خط $y = -۴$ مماس باشند، آنگاه قدر مطلق تفاضل صفرهای این سهمی از هم کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ریشه ندارد.

۳۹ کدام ضابطه می‌تواند مربوط به سهمی شکل زیر باشد؟



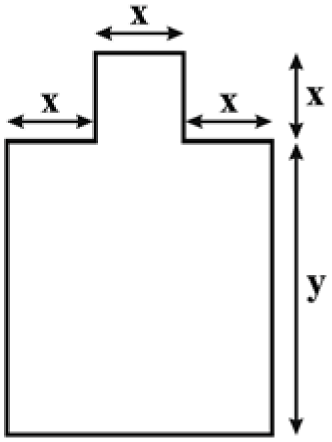
۱) $y = -x^{۲} + ۲x + ۴$

۲) $y = -x^{۲} - ۲x - ۴$

۳) $y = -x^{۲} + ۴x - ۲$

۴) $y = -x^{۲} - ۴x - ۲$

۴۰ پنجره‌ای به شکل زیر است. اگر محیط پنجره ۱۶ متر باشد، مقدار x چقدر باشد تا پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد؟



۱) $\frac{12}{11}$

۲) ۱

۳) $\frac{24}{11}$

۴) ۲

۱

گزینه ۴

$$y = ۴\alpha - ۶ \Rightarrow ۴\alpha - ۶ = ۰ \Rightarrow \alpha = \frac{۳}{۲}$$

پس یکی از ریشه‌ها $\frac{۳}{۲}$ است. $x = ۱$ محور تقارن سهمی است، بنابراین:

$$\frac{\alpha + \beta}{۲} = ۱ \Rightarrow \beta = \frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow y = a\left(x - \frac{۱}{۲}\right)\left(x - \frac{۳}{۲}\right)$$

با قرار دادن مختصات رأس سهمی در معادلهٔ آن $a = ۸$ به دست می‌آید؛ بنابراین:

$$\Rightarrow y = ۸x^۲ - ۱۶x + ۶ \Rightarrow \text{عرض نقطهٔ برخورد} = ۶$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ تابستان ۱۳۹۸

۲

گزینه ۳

نکته: برای آنکه نمودار سهمی $y = f(x)$ بر محور xها مماس باشد، باید معادلهٔ $f(x) = ۰$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد.
باتوجه‌به نکتهٔ بالا، باید معادلهٔ $f(x) = ۰$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، یعنی باید ریشهٔ هر دو پرانتز یکسان باشد.

$$\begin{cases} mx - ۴ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۴}{m} \\ ۴ + ۲x = ۰ \Rightarrow x = -۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{۴}{m} = -۲ \Rightarrow m = -۲$$

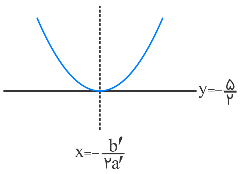
گزینه دو علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸
گزینه دو ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

۳

گزینه ۴

باتوجه‌به مفروضات مسئله $y=\frac{-۵}{۲}$ عرض نقطهٔ مینیمم منحنی است. به شکل زیر توجه کنید.

$$-\frac{۵}{۲}=-\frac{\Delta}{۴a'}\Rightarrow\frac{۵}{۲}=\frac{۹-۲a}{۲}\Rightarrow a=۲$$



قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

۴

گزینه ۳

به دلیل آنکه سهمی محور xها را در نقاطی به طول ۱− و ۴ قطع می‌کند، معادلهٔ کلی سهمی به این فرم است:

$y=a(x+۱)(x-۴)$

همچنین مختصات رأس سهمی $S(\frac{۳}{۲},۲)$ است.

$$f(\frac{۳}{۲})=۲\Rightarrow ۲=a\underbrace{(\frac{۳}{۲}+۱)(\frac{۳}{۲}-۴)}_{-\frac{۲۵}{۴}}\Rightarrow a=\frac{-۸}{۲۵}$$

$$\Rightarrow y=\frac{-۸}{۲۵}(x+۱)(x-۴)$$

محل تلاقی نمودار با محور عرض‌ها $f(۰)=\frac{-۸}{۲۵}(۱)(-۴)=\frac{۳۲}{۲۵}$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

۵ گزینه ۳

$$f(۰) = ۳ \Rightarrow c = ۳ \Rightarrow f(x) = ax^۲ + bx + ۳$$

یکی از ریشه‌ها $x = ۳$ است، پس $f(۳) = ۰$ است:

$$۹a + ۳b + ۳ = ۰ \xrightarrow{\div ۳} ۳a + b + ۱ = ۰$$

عرض رأس سهمی هم $\frac{۲۵}{۸}$ است:

$$\frac{-\Delta}{۴a} = \frac{۲۵}{۸} \Rightarrow -\frac{b^۲ - ۴a(۳)}{۴a} = \frac{۲۵}{۸} \Rightarrow -b^۲ + ۱۲a = \frac{۲۵}{۲}a$$
$$\xrightarrow{\times ۲} -۲b^۲ + ۲۴a = ۲۵a \Rightarrow a = -۲b^۲$$

به‌جای a در معادلهٔ $۳a + b + ۱ = ۰$ مقدار $-۲b^۲$ را قرار می‌دهیم.

$$۳(-۲b^۲) + b + ۱ = ۰ \Rightarrow -۶b^۲ + b + ۱ = ۰ \Rightarrow ۶b^۲ - b - ۱ = ۰$$

$$b = \frac{۱ \pm \sqrt{۱ + ۲۴}}{۲(۶)} = \frac{۱ \pm ۵}{۱۲} = \begin{cases} \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۴}{۱۲} = -\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

چون $a < ۰$ و طول رأس سهمی $(-\frac{b}{۲a})$ هم مثبت است، پس باید $b > ۰$ باشد و $b = -\frac{۱}{۳}$ قابل‌قبول نیست.

$$b = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -۲b^۲ = -۲(\frac{۱}{۲})^۲ = -\frac{۱}{۲}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۷

۶ گزینه ۲

ضابطهٔ تابع را به‌صورت $f(x) = ax^۲ + bx + c$ در نظر می‌گیریم:

$$f(۰) = -۲ \Rightarrow c = -۲$$

باتوجه‌به اینکه $f(-۲) = f(۰) = -۲$ است، طول رأس سهمی میانگین صفر و ۲− یعنی ۱− است.

$$\Rightarrow x_s = \frac{-b}{۲a} = -۱ \Rightarrow b = ۲a \quad (۱)$$
$$f(-۱) = a - b - ۲ = -۴ \Rightarrow a - b = -۲ \quad (۲)$$
$$\xrightarrow{(۱),(۲)} a = ۲ \ , \ b = ۴ \Rightarrow f(x) = ۲x^۲ + ۴x - ۲$$

اگر جواب‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$ را α و β در نظر بگیریم، داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -۲ \ , \ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -۱$$
$$\Rightarrow \alpha^۲ + \beta^۲ = (\alpha + \beta)^۲ - ۲\alpha\beta = S^۲ - ۲P = (-۲)^۲ - ۲(-۱) = ۶$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۸

۷ گزینه ۴

باتوجه‌به شکل سؤال، می‌توان نوشت:

$$(-۱,۱) \in f \Rightarrow f(-۱) = ۱ \Rightarrow a(-۱)^۲ + b(-۱) + c = ۱$$

$$\Rightarrow a - b + c = ۱ \xrightarrow{a-b=-۳} c = ۴$$

$$\frac{-b}{۲a} = ۱ \Rightarrow b + ۲a = ۰ \xrightarrow{a-b=-۳} a = -۱ \Rightarrow b = ۲$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^۲ + ۲x + ۴$$

$$\Rightarrow f(۱) = -۱ + ۲ + ۴ = ۵$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۴

۸ گزینه ۱

چون تابع درجهٔ دوم نسبت به محور تقارن که همان طول رأس است، متقارن است؛ پس صفرهای تابع $x = ۲\,,\,۴$ است. ضابطهٔ تابع درجهٔ دوم $y = a(x-۲)(x-۴)$ است و از نقطهٔ $(۰,-۴)$ می‌گذرد.

$$-۴ = a(۰-۲)(۰-۴) \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}x^۲ + ۳x - ۴$$

$$\text{ماکزیمم تابع} = -\frac{\Delta}{۴a} = -\frac{۹ - ۴(-\frac{۱}{۲})(-۴)}{۴(-\frac{۱}{۲})} = \frac{۱}{۲}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

۹ گزینه ۲

باتوجه‌به اینکه $a > ۰$ است، بنابراین دهانهٔ سهمی باید روبه‌بالا باشد؛ لذا گزینهٔ "۳" رد می‌شود.
از طرفی باتوجه‌به اینکه $c > ۰$، پس نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها بالاتر از مبدأ مختصات قرار دارد؛ بنابراین گزینهٔ "۴" نیز رد می‌شود.
حال بنا بر فرض مسئله نتیجه می‌گیریم $۰ < \frac{-b}{a}$ است. لذا حاصل‌جمع ریشه‌ها (در صورت وجود) باید مقداری منفی باشد، پس گزینهٔ "۱" نیز رد می‌شود و نمودار گزینهٔ "۲" می‌تواند نمودار سهمی موردنظر باشد.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۷

۱۰ گزینه ۳

$$y(۳) = ۰ \Rightarrow ۰ = ۳(۳)^۲ + a(۳) + ۱۸ \Rightarrow ۳a = -۴۵ \Rightarrow a = -۱۵$$

$$\Rightarrow y = ۳x^۲ - ۱۵x + ۱۸ = ۳(x-۲)(x-۳) \xrightarrow{y=۰} \begin{cases} x = ۲ \\ x = ۳ \end{cases}$$

$$y = ۳x^۲ - ۱۵x + ۱۸ \Rightarrow y_{\text{رأس}} = -\frac{\Delta}{۴a} = -\frac{۹}{۴ \times ۳} = -\frac{۳}{۴}$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{۱}{۲} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۴} \times ۱ = \frac{۳}{۸}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

۱۱ گزینه ۱

رأس هر سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c, \ (a \neq ۰)$، نقطهٔ $S(\frac{-b}{۲a}, \frac{-\Delta}{۴a})$ است.
رأس این سهمی روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم مختصات، یعنی خط $y = x$ واقع است، پس داریم:

$$y = x^۲ + mx - \frac{۱}{۴} \ , \ y_S = x_S \Rightarrow \frac{-b}{۲a} = \frac{-\Delta}{۴a}$$

$$\Rightarrow \frac{-m}{۲} = \frac{-(m^۲+۱)}{۴} \Rightarrow ۲m = m^۲ + ۱ \Rightarrow (m-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow m = ۱$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ سهمی} : y = x^۲ + x - \frac{۱}{۴}$$

می‌دانیم اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، آنگاه: $|x_۱ - x_۲| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$
طول پاره‌خط AB برابر با قدر مطلق تفاضل جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ + x - \frac{۱}{۴} = ۰$ است، پس:

$$AB = |x_۱ - x_۲| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{۲}}{۱} = \sqrt{۲}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

۱۲ گزینه ۲

باتوجه‌به صورت سؤال مشخص است که α و β ریشه‌های معادلهٔ $p(x) = mx^۲ - x + (m-۳) = ۰$ هستند. باتوجه‌به آنکه $x = ۱$ بین دو ریشه و $x = ۲$ خارج دو ریشه قرار دارد، پس علامت $P\ (۱)$ و $P\ (۲)$ متفاوت است:

$$\begin{cases} p(۱) = m - ۱ + (m-۳) = ۲m - ۴ = ۲\,(m-۲) \\ p(۲) = ۴m - ۲ + (m-۳) = ۵m - ۵ = ۵\,(m-۱) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{p(۱)p(۲)<۰} ۱۰\,(m-۱)\,(m-۲) < ۰ \xrightarrow{\text{بین دو ریشه}} ۱ < m < ۲$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

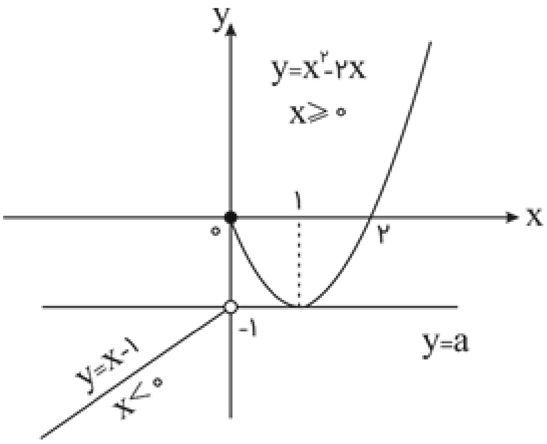
۱۳ گزینه ۴

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم؛ بنابراین:

$$f(x) = x(x-۲) : x \geq ۰ \ , \quad x_s = \frac{-b}{۲a} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

x	۰	۱
$y = x^۲ - ۲x$	۰	-۱

x	-۱	۰
$y = x - ۱$	-۲	-۱



طبق شکل واضح است که $a \leq -۱$ یا $a > ۰$ باشد.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

۱۴

گزینه ۴

معادلهٔ محور تقارن سهمی $y = a'x^2 + b'x + c'$ از رابطهٔ $x = -\frac{b'}{2a'}$ به دست می‌آید.

$$x = -\frac{1}{2(a-1)} = 2 \Rightarrow a - 1 = -\frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$$

در تلاقی با محور xها، $y = 0$ است، پس:

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases}$$

پس سهمی در نقطه به طول مثبت ۶ محور xها را قطع می‌کند.

قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۶
قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۶

۱۵

گزینه ۴

تابع ماکزیمم‌دار است؛ بنابراین $a < 0$، ازطرفی:

$$\text{محور تقارن} : x = -\frac{b}{2a} > 0 \xrightarrow{a<0} b > 0$$

پس یکی از گزینه‌های ۳ یا ۴ می‌تواند درست باشد، ازطرفی، در معادلهٔ آن $\Delta = 0$ است، پس:

$$\Delta = b^2 + 4a = 0 \Rightarrow b^2 = -4a$$

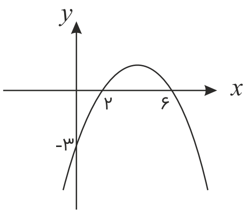
با کنترل گزینه‌ها، گزینهٔ (۴) درست است.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ تابستان ۱۳۹۸

۱۶

گزینه ۱

ابتدا ضابطهٔ سهمی را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} f(0) = -3 \Rightarrow c = -3 \\ f(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b - 3 = 0 \\ f(6) = 0 \Rightarrow 36a + 6b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3 \Rightarrow f(4) = -\frac{1}{4} \times 16 + 2(4) - 3 = 1$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ تابستان ۱۳۹۸

۱۷

گزینه ۲

اولاً نمودار سهمی، محور xها را در دو نقطهٔ متمایز با طول مثبت قطع کرده است، پس باید داشته باشیم:

$$1)\ \Delta > 0 \Rightarrow 16 - 4a(a-3) > 0$$

$$\xrightarrow{+(-4)} \underbrace{a^2 - 3a - 4}_{(a-4)(a+1)} < 0 \Rightarrow -1 < a < 4$$

$$2)\ P > 0 \Rightarrow \frac{a-3}{a} > 0 \Rightarrow a < 0 \ \text{یا}\ a > 3$$

$$3)\ S > 0 \Rightarrow \frac{-4}{a} > 0 \Rightarrow a < 0$$

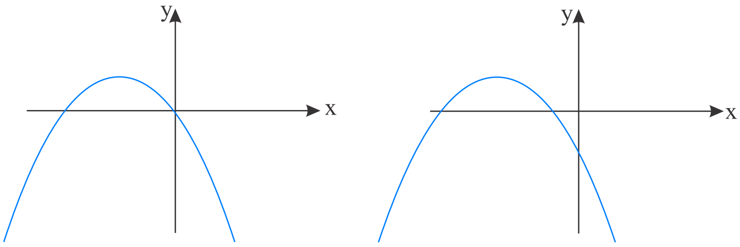
اشتراک ۳ شرط فوق برابر $-1 < a < 0$ می‌شود. ثانیاً باید رأس سهمی زیر محور xها باشد؛ یعنی $y_s < 0$ داریم:

$$y_s < 0 \Rightarrow \frac{-\Delta}{4a} < 0 \xrightarrow{\Delta > 0} a > 0 \xrightarrow{-1<a<0\ \text{اشتراک با شرط}} a \in \varnothing$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۶

۱۸ گزینه ۲

نمودار سهمی مورد نظر باید به یکی از دو صورت زیر باشد:



پس اولاً ضریب $x^۲$ باید منفی باشد:

$$a-۱<۰ \Rightarrow a<۱ \quad (۱)$$

طول محل برخورد نمودار با محور xها را به دست می‌آوریم:

$$y=(a-۱)x^۲+(۲a-۱)x+a=۰$$

$$\Delta=(۲a-۱)^۲-۴(a-۱)a=۱$$

$$x=\frac{-(۲a-۱)\pm ۱}{۲(a-۱)} \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=\dfrac{a}{۱-a} \end{cases}$$

طبق نمودار سهمی، باید $\frac{a}{۱-a}$ نامثبت باشد، پس:

$$\frac{a}{۱-a}\leq ۰ \Rightarrow a\leq ۰ \text{ یا } a>۱ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} a\leq ۰$$

قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۸

۱۹ گزینه ۱

طول پاره‌خطی که روی محور xها جدا شده است، ۸ واحد است. چون رأس سهمی وسط پاره‌خط است، پس یک نقطه روی محور xها ۴ واحد جلوتر از ۳ و یک نقطه ۴ واحد عقب‌تر از ۳ است.

$$\begin{cases} x_۱=۳-۴=-۱ \\ x_۲=۳+۴=۷ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ سهمی}} y=a(x+۱)(x-۷) \xrightarrow{\text{نقطهٔ (۳,۴) در منحنی صدق می‌کند}} a(۳+۱)(۳-۷)=۴ \Rightarrow -۱۶a=۴ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow y=-\frac{۱}{۴}(x+۱)(x-۷) \xrightarrow{\text{عرض از مبدأ}} -\frac{۱}{۴}(۰+۱)(۰-۷)=\frac{۷}{۴}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۷

۲۰ گزینه ۲

برای سهمی $f(x) = a'x^{۲} + b'x + c'$، مختصات رأس را محاسبه می‌کنیم:

$$S\left|\begin{array}{l} -\dfrac{b'}{۲a'} = -\dfrac{-۲}{۲} = ۱ \\ f(-\dfrac{b'}{۲a'}) = f(۱) = ۱^{۲} - ۲ + ۴ = ۳ \end{array}\right.$$

نقطهٔ $S(۱, ۳)$ رأس سهمی $g(x)$ نیز می‌باشد.

$$g(x) = ax^{۲} + bx + \frac{۸}{۳} \Rightarrow S\left|\begin{array}{l} -\dfrac{b}{۲a} = ۱ \Rightarrow b = -۲a \\ g(۱) = ۳ \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{b=-۲a} g(x) = ax^{۲} - ۲ax + \frac{۸}{۳}$$

$$\xrightarrow[\text{در معادلهٔ آن صدق می‌کند}]{\text{مختصات رأس سهمی}} ۳ = a \times ۱^{۲} - ۲a \times ۱ + \frac{۸}{۳}$$

$$\Rightarrow -a = \frac{۱}{۳} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۳} \xrightarrow{b=-۲a} b = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{۱}{۳}x^{۲} + \frac{۲}{۳}x + \frac{۸}{۳}$$

$$\xrightarrow[g(x)=۰]{\text{صفرهای سهمی } g(x)} -\frac{۱}{۳}x^{۲} + \frac{۲}{۳}x + \frac{۸}{۳} = ۰$$

$$\xrightarrow{\times(-۳)} x^{۲} - ۲x - ۸ = ۰ \Rightarrow (x - ۴)(x + ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴ \\ x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

۲۱ گزینه ۳

از اتحاد مربع کامل استفاده می‌کنیم:

$$y = x^{۲} + ax + a^{۲} - ۱۲, \Rightarrow y = \left(x + \frac{a}{۲}\right)^{۲} - \frac{a^{۲}}{۴} + a^{۲} - ۱۲$$

می‌دانیم y وقتی کمترین مقدار است که جملهٔ مربع کامل برابر صفر باشد پس کمترین مقدار y به‌صورت $\frac{۳a^{۲}}{۴} - ۱۲$ است. اگر کمترین مقدار روی محور xها باشد الزاماً $\frac{۳a^{۲}}{۴} - ۱۲ = ۰$ یا $a^{۲} = ۱۶$ یا $a = \pm۴$ است.

آزمایشی سنجش ریاضی و فیزیک چهارم مرحله دوم ۱۳۹۳

۲۲

گزینه ۱

باتوجه‌به نمودار تابع می‌توان گفت تابع ماکزیمم دارد $(m<۰)$ و معادلهٔ $mx^{۲}+۸x-۲=۰$ دارای دو جواب مثبت است، پس داریم:

$$\begin{cases} \Delta > ۰ \Rightarrow ۶۴ + ۸m > ۰ \Rightarrow m > -۸ \\ \frac{c}{a} > ۰ \Rightarrow -\frac{۲}{m} > ۰ \Rightarrow m < ۰ \\ m < ۰ \end{cases} \qquad \Rightarrow -۸ < m < ۰$$

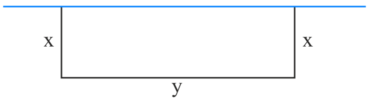
بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح $-۷, -۶, \ldots, -۱$ را داشته باشد.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

۲۳

گزینه ۱

درواقع محیط ایجادشده برابر خواهد بود با:



$۲x + y = ۸۰$, ماکزیمم شود $x.y$

$y = ۸۰ - ۲x \Rightarrow x.y = x(۸۰ - ۲x) = ۸۰x - ۲x^{۲}$

$\Rightarrow z = -۲x^{۲} + ۸۰x$

ازآنجاکه مقدار ماکزیمم در رأس سهمی رخ می‌دهد، خواهیم داشت:

$$x_{max} = \frac{-۸۰}{۲(-۲)} = ۲۰$$

$\Rightarrow x = ۲۰,\ y = ۸۰ - ۴۰ = ۴۰$

ماکزیمم مساحت $= x.y = ۲۰ \times ۴۰ = ۸۰۰$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

۲۴ گزینه ۴

معادله باید دو جواب داشته باشد، یعنی $\Delta > ۰$ باشد:

$$\Delta = k^۲ - ۸k > ۰ \Rightarrow k < ۰ \text{ یا } k > ۸ \quad (۱)$$

حال برای اینکه $x = ۱$، بین دو ریشه قرار بگیرد، علامت عبارت موردنظر به ازای $x = ۱$، مخالف علامت ضریب $x^۲$ باشد؛ یعنی:

$$(۱)^۲ + k(۱) + ۲k < ۰ \Rightarrow ۳k + ۱ < ۰ \Rightarrow k < -\frac{۱}{۳} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} k \in \left(-\infty, -\frac{۱}{۳}\right)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

۲۵ گزینه ۴

مساحت مثلث برابر است با:

$$\frac{y_A \times ۴}{۲} = ۶ \Rightarrow y_A = ۳$$

چون عرض از مبدأ سهمی برابر با ۳ می‌شود، پس $y = ax^۲ + bx + ۳$ معادلهٔ منحنی خواهد بود.

$$۲ \times ۶ = \frac{c}{a} \Rightarrow ۱۲ = \frac{۳}{a} \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}$$

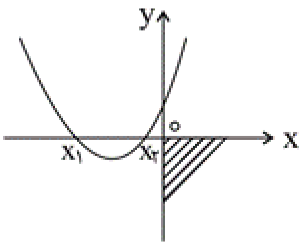
$$۲ + ۶ = \frac{-b}{a} = ۸ \Rightarrow -\frac{b}{\frac{۱}{۴}} = ۸ \Rightarrow b = -۲$$

$$f(x) = y = \frac{۱}{۴}x^۲ - ۲x + ۳ \Rightarrow y_{min} = -\frac{\Delta}{۴a} = -\frac{۴ - ۴(\frac{۱}{۴})(۳)}{۴(\frac{۱}{۴})} = -۱$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

۲۶ گزینه ۴

باتوجه‌به شکل زیر، برای اینکه نمودار فقط از ناحیهٔ چهارم نگذرد باید حالت زیر رخ دهد، باتوجه‌به این حالت:



تابع محور عرض‌ها را بالای مبدأ قطع می‌کند، پس باید: $f(0) = \frac{9}{4}$

تابع باید مینیمم داشته باشد، پس: $a > 0 \ (\mathrm{I})$

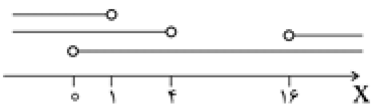
$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0 \xrightarrow{a>0} a - 4 < 0 \Rightarrow a < 4 \ \ (\mathrm{II})$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0 \xrightarrow{a>0} c > 0 \Rightarrow \frac{9}{4} > 0 \quad \text{همواره برقرار است}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow \Delta = (a-4)^2 - 9a = a^2 - 17a + 16 > 0$$

$$(a-1)(a-16) > 0 \Rightarrow a < 1 \ \text{یا} \ a > 16 \ \ (\mathrm{III})$$

$$\xrightarrow{(\mathrm{I})\cap(\mathrm{II})\cap(\mathrm{III})} 0 < a < 1$$



قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۴

۲۷ گزینه ۴

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac \le 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m \le 0 \Rightarrow 4m(m-1) \le 0 \Rightarrow 0 \le m \le 1 \ \ (1) \\ a < 0 \Rightarrow m < 0 \ \ (2) \end{cases}$$

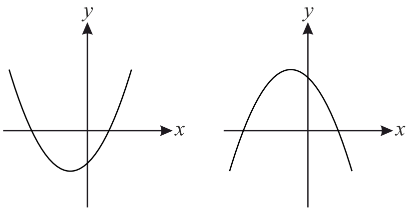
$$(1) \cap (2) = \varnothing = \{\}$$

یعنی به ازای هیچ مقداری برای m، شرط گفته‌شده برقرار نیست.

قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۸

۲۸ گزینه ۲

برای اینکه نمودار $f(x)$ از هر ۴ ناحیه عبور کند، باید معادلهٔ $f(x)=0$ دارای ۲ ریشهٔ مختلف‌العلامت باشد. (به شکل دقت کنید)
بنابراین باید حاصل‌ضرب ریشه‌ها منفی باشد:



$$\frac{c}{a}<0\Rightarrow\frac{1}{a^2-4}<0\Rightarrow a^2-4<0\Rightarrow a^2<4$$
$$\Rightarrow -2<a<2\Rightarrow a\in(-2,2)$$

دقت کنید اگر $\frac{c}{a}<0$، آنگاه $ac<0$، پس $-4ac>0$ درنتیجه $\Delta=b^2-4ac>0$ و دیگر نیازی به بررسی شرط $\Delta>0$ نیست.

گزینه دو علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

۲۹ گزینه ۳

معادلهٔ سهمی با رأس (x_S,y_S) به‌صورت $f(x)=a(x-x_S)^2+y_S$ است. چون رأس سهمی نقطهٔ $(2,4)$ است، پس معادلهٔ آن به‌صورت $f(x)=a(x-2)^2+4$ است. نقطهٔ $(0,1)$ روی نمودار این سهمی قرار دارد، پس:

$$f(0)=1\Rightarrow 4a+4=1\Rightarrow a=-\frac{3}{4}$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت زیر است:

$$f(x)=-\frac{3}{4}(x-2)^2+4\Rightarrow f(x)=-\frac{3}{4}x^2+3x+1$$

α و β ریشه‌های معادلهٔ $-\frac{3}{4}x^2+3x+1=0$ هستند. مقدار S و P را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} S=-\frac{b}{a}=\frac{-3}{-\frac{3}{4}}=4 \\ P=\frac{c}{a}=\frac{1}{-\frac{3}{4}}=-\frac{4}{3} \end{cases}$$

پس:

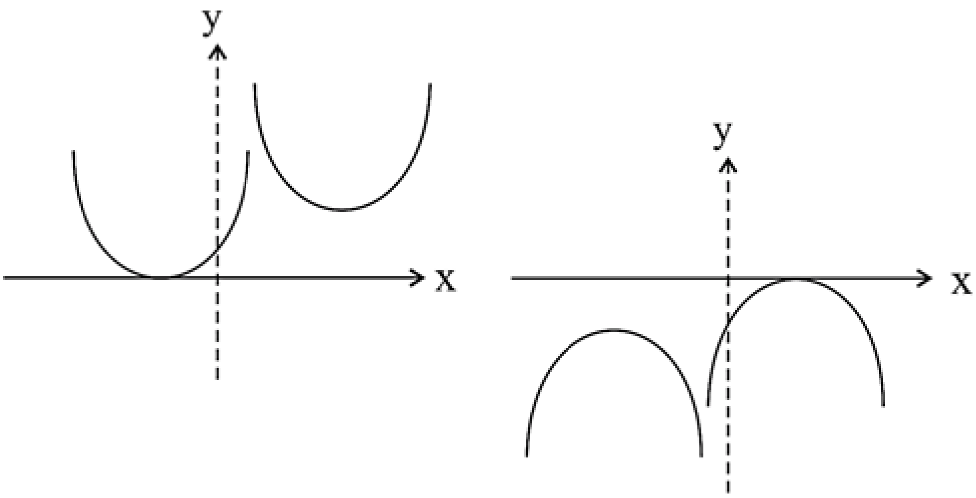
$$\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS=4^3-3(-\frac{4}{3})(4)=64+16=80$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۸

۳۰

گزینه ۳

اگر نمودار سهمی بخواهد حداقل از ۳ ناحیهٔ مختصاتی بگذرد، تنها چهار موقعیت زیر را نسبت به محور xها نمی‌تواند داشته باشد:



برای اینکه این چهار حالت رخ ندهد، کافی است شرط $\Delta > ۰$ را اعمال کنیم:

$$\Delta > ۰ \Rightarrow ۹m^۲ + ۲۴m + ۱۶ - ۴(۲m + ۱)(m + ۴) > ۰$$

$$\Rightarrow m^۲ - ۱۲m > ۰ \Rightarrow m(m - ۱۲) > ۰ \Rightarrow m > ۱۲ \text{ یا } m < ۰$$

توجه کنید که به ازای $m = -\frac{۱}{۲}$، تابع خطی خواهد شد و از سه ناحیهٔ محورهای مختصات عبور خواهد کرد.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۷

۳۱

گزینه ۱

می‌دانیم مختصات رأس یک سهمی به‌صورت $S(-\frac{b}{۲a}, \frac{-\Delta}{۴a})$ است، پس:

$$\Rightarrow ۸ = \frac{-\Delta}{۴a} \xrightarrow{a=-۲} ۸ = \frac{-\Delta}{-۸} \Rightarrow \Delta = ۶۴$$

ازطرفی $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = |x_۱ - x_۲| = |AB|$ یعنی؛

$$\Rightarrow |AB| = \frac{\sqrt{۶۴}}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

۳۲

گزینه ۴

باید $a > ۰$ باشد، چون دهانهٔ سهمی روبه‌بالا است. به‌علاوه عرض از مبدأ سهمی $b = ۱$ است؛ پس داریم:

$$f(x) = ax^۲ + (۳ - a)x + ۱$$

به‌علاوه طول رأس سهمی منفی است:

$$\frac{-(۳-a)}{۲a} < ۰ \Rightarrow \frac{۳-a}{۲a} > ۰ \xrightarrow{a>۰} ۳ - a > ۰ \Rightarrow a < ۳$$

شرط آخر هم این است که $\Delta < ۰$ باشد:

$$\Delta = (۳-a)^۲ - ۴(a)(۱) = ۹ + a^۲ - ۶a - ۴a = a^۲ - ۱۰a + ۹$$
$$= (a-۹)(a-۱) < ۰ \Rightarrow ۱ < a < ۹$$

از اشتراک شرط‌های به‌دست‌آمده $۱ < a < ۳$ می‌شود.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

۳۳

گزینه ۱

فرض کنیم معادلهٔ سهمی به‌صورت $f(x) = ax^۲ + bx + c$ باشد. طبق فرض، سهمی از نقاط $(۱, -۲)$، $(۲, -۳)$ و $(۰, ۱)$ می‌گذرد، پس این نقاط در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند.

$$\begin{cases} (۰,۱) \text{ روی سهمی است} \Rightarrow f(۰) = ۱ \Rightarrow a \times (۰)^۲ + b \times (۰) + c = ۱ \Rightarrow c = ۱ \\ (۱,-۲) \text{ روی سهمی است} \Rightarrow f(۱) = -۲ \Rightarrow a \times (۱)^۲ + b(۱) + c = -۲ \Rightarrow a + b = -۳ \quad (۱) \\ (۲,-۳) \text{ روی سهمی است} \Rightarrow f(۲) = -۳ \Rightarrow f(۲) = a(۲)^۲ + b(۲) + c = -۳ \Rightarrow ۴a + ۲b = -۴ \quad (۲) \end{cases}$$

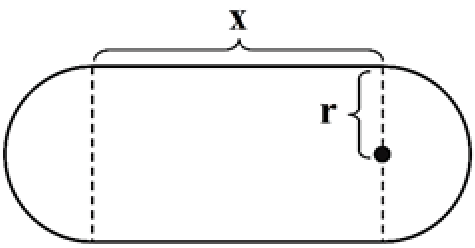
با حل دستگاه شامل معادلات (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} a + b = -۳ \\ ۴a + ۲b = -۴ \end{cases} \Rightarrow a = ۱\,,\ b = -۴ \Rightarrow y = x^۲ - ۴x + ۱$$

بنابراین ضابطهٔ این سهمی به‌صورت $f(x) = x^۲ - ۴x + ۱$ است. در بین گزینه‌ها، تنها نقطهٔ گزینهٔ ۱ روی این سهمی قرار دارد.

گزینه دو ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۷

۳۴ گزینه ۲



اگر طول مستطیل را x و شعاع نیم‌دایره را r بنامیم، محیط استادیوم برابر با $۲x + ۲(\frac{۱}{۲} \times ۲\pi r)$ خواهد بود که طبق فرض برابر با ۱۵۰۰ است؛ پس:

$$۲x + ۲\pi r = ۱۵۰۰ \Rightarrow x + \pi r = ۷۵۰ \Rightarrow x = ۷۵۰ - \pi r \quad (*)$$

طول مستطیل برابر با x و عرض آن برابر با 2r است، پس مساحت آن عبارت است از:

$$S = x(۲r) = ۲xr \xrightarrow{(*)} S = ۲(۷۵۰ - \pi r)r = -۲\pi r^۲ + ۱۵۰۰r$$

تابع $S(r) = -۲\pi r^۲ + ۱۵۰۰r$ که مساحت مستطیل است، یک سهمی روبه‌پایین است. ماکزیمم این سهمی در رأس آن حاصل می‌شود:

$$r_{max} = \frac{-۱۵۰۰}{-۴\pi} = \frac{۳۷۵}{\pi} \xrightarrow{(*)} x = ۷۵۰ - \pi r = ۷۵۰ - \pi(\frac{۳۷۵}{\pi}) = ۷۵۰ - ۳۷۵ = ۳۷۵$$

گزینه دو علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۷

۳۵ گزینه ۳

چون تابع دارای مینیمم است، پس $a > ۰$. ازطرفی کمترین مقدار در ربع سوم قرار دارد، پس $y = ۰$ دارای دو ریشه است، پس $\Delta > ۰$.

$$۴ - ۴a(۲a - ۱) > ۰ \Rightarrow ۸a^۲ - ۴a - ۴ < ۰ \Rightarrow ۲a^۲ - a - ۱ < ۰$$
$$\Rightarrow (۲a + ۱)(a - ۱) < ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} < a < ۱ \xrightarrow{a>۰} ۰ < a < ۱$$

$-\frac{b}{۲a} = \frac{-۲}{۲a} < ۰$ به ازای $۰ < a < ۱$ بدیهی است

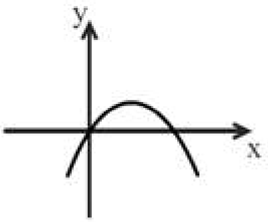
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۶

۳۶ گزینه ۱

نمودار از مبدأ گذشته (نقطهٔ $(\circ,\circ)$ در معادلهٔ آن صدق می‌کند) و از ناحیهٔ دوم عبور نمی‌کند، بنابراین شکل آن به‌صورت زیر خواهد بود.

سهمی رو به پایین باز می‌شود، پس ضریب $x^۲$ منفی است؛ درنتیجه: $a < \circ$

از طرفی محور تقارن آن نامنفی است، لذا:



$$x = -\frac{b}{۲a} \geq \circ \Rightarrow \frac{a+۲}{۲a} \geq \circ$$

در نامساوی بالا، ازآن‌جایی که مخرج کسر منفی است، باید صورت کسر کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد تا کسر بزرگ‌تر یا مساوی صفر شود:

$$a + ۲ \leq \circ \Rightarrow a \leq -۲$$

قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۶

قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۶

۳۷ گزینه ۴

نقطهٔ $(۲,۴)$ نقطهٔ ماکزیمم سهمی $f(x) = ax^۲ + bx$ است، پس مختصات آن در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند و طول این نقطه همواره $x = -\frac{b}{۲a}$ است، داریم:

$$\begin{cases} ۴ = ۴a + ۲b \\ -\frac{b}{۲a} = ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + ۲a = ۲ \\ b = -۴a \end{cases} \Rightarrow -۲a = ۲ \Rightarrow a = -۱, b = ۴$$

$$f(x) = -x^۲ + ۴x \Rightarrow f(۵) = -۲۵ + ۲\circ = -۵$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

۳۸ گزینه ۳

وقتی سهمی بر خط $y = -۴$ مماس است یعنی عرض رأس سهمی ۴- است.

$$-\frac{\Delta}{۴a'} = -۴ \Rightarrow \Delta = ۱۶(a') = ۱۶(۱) = ۱۶$$

قدر مطلق تفاضل صفرهای تابع درجهٔ دوم برابر است با:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a'|} = \frac{\sqrt{۱۶}}{۱} = ۴$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

۳۹ گزینه ۴

نکته: در نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ اگر $a > ۰$، جهت سهمی روبه‌بالا و اگر $a < ۰$، جهت سهمی روبه‌پایین است.
نکته: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، آنگاه داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad , \quad \alpha.\beta = \frac{c}{a}$$

باتوجه‌به نمودار، تابع دارای دو ریشهٔ منفی است؛ پس اگر α و β صفرهای تابع باشند، مطابق نکات باید سه شرط $\Delta > ۰$، $\alpha\beta > ۰$ و $\alpha + \beta < ۰$ برقرار باشد. تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینهٔ ۱} : \alpha\beta = \frac{۴}{-۱} < ۰ \quad \times$$
$$\text{گزینهٔ ۲} : \Delta = ۴ - ۱۶ < ۰ \quad \times$$
$$\text{گزینهٔ ۳} : \alpha + \beta = \frac{-۴}{-۱} > ۰ \quad \times$$

$$\text{گزینهٔ ۴} : \begin{cases} \Delta = ۱۶ - ۸ > ۰ \\ \alpha\beta = \dfrac{-۲}{-۱} > ۰ \\ \alpha + \beta = \dfrac{۴}{-۱} < ۰ \end{cases} \quad \checkmark$$

بنابراین گزینهٔ "۴"پاسخ است.

گزینه دو ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷

۴۰ گزینه ۱

$$\text{مساحت}: S = \overbrace{3xy}^{\text{مساحت مستطیل}} + \overbrace{x^2}^{\text{مساحت مربع}}$$

$$\text{محیط}: P = 16 \Rightarrow 3x + 2x + 3x + 2y = 16$$

$$\Rightarrow 8x + 2y = 16 \xrightarrow{\div 2} 4x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - 4x$$

$$S = 3x(8 - 4x) + x^2 \Rightarrow S = -11x^2 + 24x$$

عبارت فوق یک تابع درجه دوم است که حداکثر مقدار S در $x = \frac{-b}{2a}$ رخ می‌دهد، پس:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-24}{2 \times (-11)} = \frac{12}{11}$$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۷