پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ **۲** ۳ ۴

$$[x^2+x]=-1 \Rightarrow -1 \le x^2+x<0 \begin{cases} x^2+x<0 \Rightarrow x(x+1)<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1<x<0 \\ -1 \le x^2+x \Rightarrow x^2+x+1 \ge 0 \xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{a>0\ ,\ \Delta<0} x \in R \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -1<x<0$$

$$-1<x<0 \xrightarrow{\text{توان } 20} 0<x^{20}<1 \Rightarrow [x^{20}]=0$$

۲ **۱** ۲ ۳ ۴ **روش اول: چون n عددی طبیعی است واضح است که داریم:**

$$8n^3<8n^3+6n^2+1<8n^3+12n^2+6n+1$$

$$\to (2n)^3<8n^3+6n^2+1<(2n+1)^3 \to \sqrt[3]{(2n)^3}<\sqrt[3]{8n^3+6n^2+1}<\sqrt[3]{(2n+1)^3}$$

$$\to 2n<\sqrt[3]{8n^3+6n^2+1}<2n+1 \to \left[\sqrt[3]{8n^3+6n^2+1}\right]=2n$$

روش دوم: یک عدد طبیعی دلخواه انتخاب می‌کنیم.

$$n=1 \to \left[\sqrt[3]{8+6+1}\right]=\left[\sqrt[3]{15}\right]=[2/\cdots]=2$$

گزینه‌ای که به‌جای n آن عدد یک قرار دهیم و حاصل ۲ شود جواب تست است (گزینه‌ی اول)

۳ **۱** ۲ ۳ ۴ **اگر $[x]=1$ باشد آن‌گاه $1 \le x<2$ است.**

$$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}=\underbrace{|x-1|}_{+}+\underbrace{|x-2|}_{-}=x-1+2-x=1$$

۴ **۱** ۲ ۳ ۴ **اگر $x^2+x<0$ باشد، نتیجه می‌گیریم که $-1<x<0$ است.**

$$x^2+x<0 \Rightarrow x(x+1)<0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -1 & & 0 & & +\infty \\ \hline \text{عبارت} <0 & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array} \Rightarrow -1<x<0$$

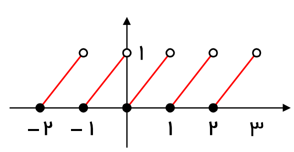
حال برای تعیین حاصل $[x]+[x^2]+[x^3]+[x^4]$ کافی است حدود عبارت‌های داخل جزء صحیح را مشخص کنیم. داریم:

$$\begin{cases} -1<x<0 \Rightarrow [x]=-1 \\ -1<x<0 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} 0<x^2<1 \Rightarrow [x^2]=0 \\ -1<x<0 \xrightarrow{\text{به توان ۳ می‌رسانیم}} -1<x^3<0 \Rightarrow [x^3]=-1 \\ -1<x<0 \xrightarrow{\text{به توان ۴ می‌رسانیم}} 0<x^4<1 \Rightarrow [x^4]=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [x]+[x^2]+[x^3]+[x^4]=(-1)+0+(-1)+0=-2$$

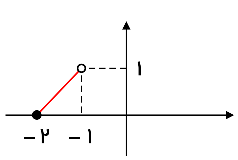
۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

نمودار تابع $y=x-[x]$ به صورت زیر است واضح است در فاصله‌ی $[-2,3)$، ۵ پاره‌خط به اندازه‌ی $\sqrt{2}$ وجود دارد.



اینگونه توابع به توابع دندان اره‌ای معروف هستند.

توجه:



$$\text{طول پاره‌خط}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

۶ ۱ **۲** ۳ ۴

$$f(x)=x^۲-۲[x]\Rightarrow f(\sqrt{۳})=۳-۲[\sqrt{۳}]=۳-۲[۱/۷]=۳-۲(۱)=۱$$

$$f(\frac{-۱}{۲}f(\sqrt{۳}))\xlongequal{f(\sqrt{۳})=۱}f(\frac{-۱}{۲})=(\frac{-۱}{۲})^۲-۲[\frac{-۱}{۲}]=\frac{۱}{۴}-۲(-۱)=۲/۲۵$$

۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\left.\begin{array}{l}-۱<۱-\sqrt{۳}<۰\Rightarrow -۱<(۱-\sqrt{۳})^۳<۰\Rightarrow\left[(۱-\sqrt{۳})^۳\right]=-۱\\ ۰<\sqrt{۲}-۱<۱\Rightarrow ۰<(\sqrt{۲}-۱)^۴<۰\Rightarrow\left[(\sqrt{۲}-۱)^۴\right]=۰\end{array}\right\}\rightarrow -۱+۰=-۱$$

۸ ۱ ۲ ۳ **۴** عدد صحیح از داخل جزءصحیح بیرون می‌آید و $۰\le x-[x]<۱$ است.

$$f(x)=۵[x-۲]-۵x+۴\rightarrow f(x)=۵[x]-۱۰-۵x+۴\rightarrow f(x)=۵[x]-۵x-۶$$

می‌دانیم: $۰\le x-[x]<۱\rightarrow -۱<[x]-x\le ۰\xrightarrow{\times ۵}-۵<۵[x]-۵x\le ۰\rightarrow -۱۱<۵[x]-۵x-۶\le -۶\rightarrow -۱۱<f(x)\le -۶$

۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

می‌دانیم: $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in Z\\ -۱ & x\notin Z\end{cases}$

$$f(x)=[x]+[-x]+۲\begin{cases}\xrightarrow{x\in Z}f(x)=۰+۲=۲\\ \xrightarrow{x\notin Z}f(x)=-۱+۲=۱\end{cases}$$

پس برد تابع $\{۱,۲\}$ است.

۱۰ ۱ ۲ **۳** ۴ نامعادله را به این صورت می‌نویسیم: $x^۲-x<۰$ و سپس مجموعه جواب را بدست می‌آوریم:

$$x(x-۱)<۰\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc}x&-\infty&۰&&۱&+\infty\\\hline &+&۰&-&۰&+\end{array}\rightarrow ۰<x<۱$$

چون $x\in(۰,۱)$، کافی است یک مقدار برای x در این بازه انتخاب کنیم مثلا $x=\frac{۱}{۲}$، حال این x را در عبارت جزء صحیح خواسته شده قرار می‌دهیم:

$$[x]+[x^۳]+[x^۵]=[\frac{۱}{۲}]+[(\frac{۱}{۲})^۳]+[(\frac{۱}{۲})^۵]=۰+۰+۰=۰$$

۱۱ ۱ **۲** ۳ ۴

$$x^۲-۵x+۶<۰\rightarrow(x-۲)(x-۳)<۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}۲<x<۳\rightarrow[x]=۲$$

می‌دانیم عدد صحیح از داخل جزءصحیح بیرون می‌آید.

$$[x+۱]+[x+۲]+\cdots+[x+۳۰]=[x]+۱+[x]+۲+\cdots+[x]+۳۰=۳۰[x]+۱+۲+\cdots+۳۰\xlongequal{۱+۲+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}}۳۰(۲)+\frac{۳۰\times ۳۱}{۲}$$

$$=۶۰+۴۶۵=۵۲۵$$

۱۲ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\left[\frac{۵x+۳}{۴}\right]=۶\rightarrow ۶\le\frac{۵x+۳}{۴}<۷\rightarrow ۲۴\le ۵x+۳<۲۸\rightarrow ۲۱\le ۵x<۲۵\rightarrow ۴/۲\le x<۵$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}۱۷/۶۴\le x^۲<۲۵\rightarrow ۵۲/۹۲\le ۳x^۲<۷۵\rightarrow ۵۴/۹۲\le ۳x^۲+۲<۷۷$$

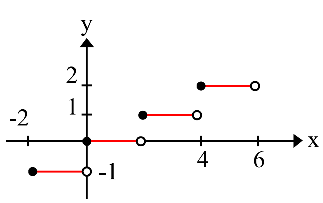
پس جزءصحیح $۳x^۲+۲$ می‌تواند $۵۴,۵۵,\cdots,۷۶$ باشد که ۲۳ مقدار مختلف دارد.

۱۳ ۱ **۲** ۳ ۴

$$y=۲[\frac{x}{۲}]+۱\quad x\in[-۲,۶)$$

کافی است تعداد پاره‌خط‌های تابع $y=[\frac{x}{۲}]$ را در بازه $[-۲,۶)$ به‌دست آوریم زیرا ضریب پشت جزء صحیح و عدد ۱ تأثیری روی تعداد پاره‌خط‌ها ندارند برای این‌که ضریب، عرض‌ها را دو برابر کرده و عدد یک، شکل را یک واحد بالا می‌برد.

توجه کنید در تابع $y=[nx]$ اگر $n>۰$ باشد پلکان صعودی و طول هر پله $\frac{۱}{|n|}$ و ارتفاع پله‌ها یک واحد است.



۱۴ ۱ ۲ ۳ **۴** می‌دانیم که $|f(x)|\le k\xrightarrow{k>۰}-k\le f(x)\le k$ است.

ابتدا از $|۳x+۴|<۵$ حدود x را پیدا می‌کنیم:

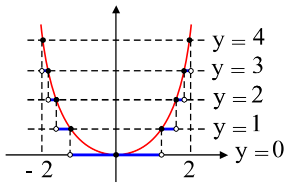
براکت

$|۳x+۴|<۵ \Rightarrow -۵<۳x+۴<۵ \rightarrow -۹<۳x<۱ \rightarrow -۳<x<\frac{۱}{۳}$

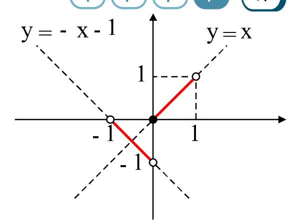
$\Rightarrow \begin{cases} -۳<x<-۲ \Rightarrow [x]=-۳ \\ -۲\leq x<-۱ \Rightarrow [x]=-۲ \\ -۱\leq x<۰ \Rightarrow [x]=-۱ \\ ۰<x<\frac{۱}{۳} \Rightarrow [x]=۰ \end{cases} \Rightarrow$ $[x]$ می‌تواند چهار مقدار $-۳, -۲, -۱, ۰$ را داشته باشد.

۱۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، تابع $y=[x^۲]$ روی بازه‌ی $(-۲,۲)$، از ۷ پاره‌خط تشکیل شده است.



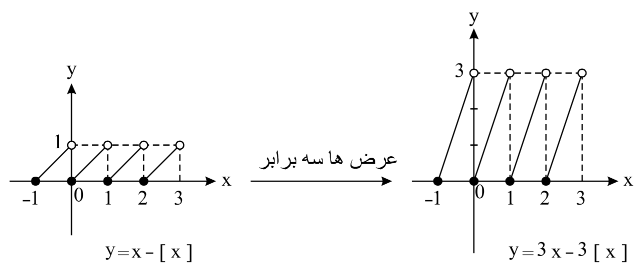
۱۶ ۱ ۲ ۳ **۴**



$-۱<x<۰ \xrightarrow{\text{داخل قدرمطلق منفی و } [x]=-۱} y=-x-۱ \xrightarrow{\text{برای رسم}} \left|\begin{matrix}۰\\-۱\end{matrix}\right. , \left|\begin{matrix}-۱\\۰\end{matrix}\right.$

$۰\leq x<۱ \xrightarrow{\text{داخل قدرمطلق مثبت و } [x]=۰} y=x \xrightarrow{\text{برای رسم}} \left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right. , \left|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}\right.$

۱۷ **۱** ۲ ۳ ۴



اندازهٔ پاره‌خط‌ها $=\sqrt{۳^۲+۱^۲}=\sqrt{۱۰}$

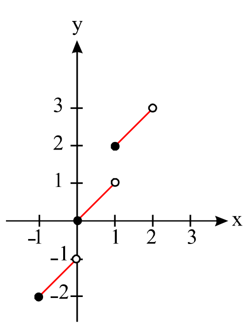
تابع داده شده در بازهٔ $[-۱,۳)$ از ۴ پاره‌خط به‌طول $\sqrt{۱۰}$ تشکیل شده است.

۱۸ ۱ ۲ **۳** ۴ بازهٔ $[-۱,۲)$ را به زیر بازه‌هایی به طول یک واحد تقسیم می‌کنیم و نمودار تابع را در هر بازه رسم می‌کنیم.

$-۱\leq x<۰ \xrightarrow{[x]=-۱} y=x-۱ \xrightarrow{\text{برای رسم}} \left|\begin{matrix}-۱\\-۲\end{matrix}\right. , \left|\begin{matrix}۰\\-۱\end{matrix}\right.$

$۰\leq x<۱ \xrightarrow{[x]=۰} y=x \xrightarrow{\text{برای رسم}} \left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right. , \left|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}\right.$

$۱\leq x<۲ \xrightarrow{[x]=۱} y=x+۱ \xrightarrow{\text{برای رسم}} \left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right. , \left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right.$

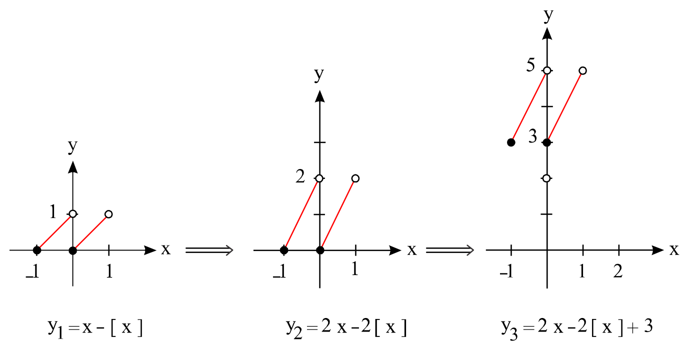


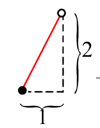
همان‌طور که مشخص است نمودار تابع از سه پاره‌خط مساوی به اندازهٔ $\sqrt{۲}$ تشکیل شده است $(\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲})$ که مجموع آن‌ها $۳\sqrt{۲}$ می‌شود.

۱۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

$f(x)=۲x-۲[x-۱]+۱ \Rightarrow f(x)=۲x-۲[x]+۲+۱ \rightarrow f(x)=۲(x-[x])+۳$

کافیست تابع $y=x-[x]$ را رسم کرده وعرض نقاط را ۲ برابر کنیم و سپس شکل را ۳ واحد به سمت بالا ببریم.



$\Rightarrow$ 

$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} x^2 = (2)^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$

دو پاره‌خط به طول $\sqrt{5}$ داریم $\Leftarrow$ $2\sqrt{5} = \sqrt{5} \times 2 =$ مجموع طول پاره‌خط‌ها

۲۰) (۴) (۳) (۲) **(۱)**

$[3x-2] = -4 \Rightarrow [3x] - 2 = -4 \Rightarrow [3x] = -2$

در نتیجه $-2 \le 3x < -1$ پس $\frac{-2}{3} \le x < \frac{-1}{3}$ یا بازه‌ی $[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ جواب معادله است.

۲۱) (۴) (۳) (۲) **(۱)**

$[8x-2] + [3x+1] = x+5 \to [8x] - 2 + [3x] + 1 = x+5 \to \underbrace{[8x]}_{\text{صحیح}} + \underbrace{[3x]}_{\text{صحیح}} = x+6$

سمت چپ معادله صحیح است پس سمت راست معادله هم باید صحیح باشد، بنابراین x هم باید صحیح باشد؛ در این صورت $8x$ و $3x$ هم صحیح هستند و از داخل جزءصحیح بیرون می‌آیند.

$8x + 3x = x + 6 \to 10x = 6 \to x = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ **غ ق ق (غیرصحیح است.)**

بنابراین معادله ریشه ندارد.

۲۲) (۴) (۳) (۲) **(۱)** **می‌دانیم که** $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ **است.**

در این معادله باید $x \notin \mathbb{Z}$ باشد (چون اگر $x \in \mathbb{Z}$ باشد مخرج صفر می‌شود و کسر تعریف نشده است.)

$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow 5x^2 - 3x - 1 = \frac{-1}{-1} \Rightarrow 5x^2 - 3x - 1 = 1 \Rightarrow 5x^2 - 3x - 2 = 0$

$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x_1 = 1 & \text{غ ق ق (چون صحیح است)} \\ x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{5} & \text{ق ق} \end{cases}$

۲۳) (۴) (۳) **(۲)** (۱)

$[\frac{5x-2}{x}] = 3 \to [\frac{5x}{x} - \frac{2}{x}] = 3 \to [5 - \frac{2}{x}] = 3 \xrightarrow{\text{عدد صحیح از داخل جزءصحیح بیرون می‌آید.}} [-\frac{2}{x}] + 5 = 3 \to [-\frac{2}{x}] = -2 \to -2 \le -\frac{2}{x} < -1$

$\xrightarrow{\text{معکوس}} -1 < -\frac{x}{2} \le -\frac{1}{2} \xrightarrow{\times(-2)} 2 > x \ge 1 \to 1 \le x < 2 \to x \in [1, 2) \to a + b = 3$

توجه کنید اگر طرفین یک نامساوی که هم‌علامت هستند را معکوس کنیم نسبت نامساوی عوض می‌شود.

۲۴) (۴) **(۳)** (۲) (۱)

$[x + \frac{1}{2}] - [x - \frac{1}{2}] + [5x + \frac{1}{2}] = 3 \to [x + 1 - \frac{1}{2}] - [x - \frac{1}{2}] + [5x + \frac{1}{2}] = 3 \xrightarrow{\text{عدد صحیح از داخل جزءصحیح بیرون می‌آید.}} [x - \frac{1}{2}] + 1 - [x - \frac{1}{2}] + [5x + \frac{1}{2}] = 3$

$\to [5x + \frac{1}{2}] = 2$

$\to 2 \le 5x + \frac{1}{2} < 3 \to \frac{3}{2} \le 5x < \frac{5}{2} \to \frac{3}{10} \le x < \frac{1}{2}$

این بازه شامل هیچ عدد صحیحی نمی‌باشد.

۲۵) (۴) (۳) **(۲)** (۱) **می‌دانیم که** $[x] = n\,,\ n \in \mathbb{Z} \to n \le x < n + 1$ **است.**

$[4x^2 - 3x] = 0 \to 0 \le 4x^2 - 3x < 1 \to \begin{cases} 4x^2 - 3x \ge 0 \to x(4x-3) \ge 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \le 0 \text{ یا } x \ge \frac{3}{4} \\ 4x^2 - 3x < 1 \to 4x^2 - 3x - 1 < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -\frac{1}{4} < x < 1 \end{cases}$

براکت

از اشتراک جواب‌های به‌دست آمده به جواب $-\frac{۱}{۴} < x \leq ۰ \cup \frac{۳}{۴} \leq x < ۱$ می‌رسیم.

$$\begin{cases} -\frac{۱}{۴} < x \leq ۰ \rightarrow [x] = -۱, ۰ \\ \frac{۳}{۴} \leq x < ۱ \rightarrow [x] = ۰ \end{cases} \rightarrow [x] = -۱, ۰$$

براکت