

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Определим процесс бернуллиевского града, падающего на горячую поверхность (Bernoulli Nail on a Hot Ground). Пусть время дискретно, и поверхность представляет из себя целочисленную прямую \mathbb{Z} . Предположим, что в каждый момент времени $n \in \mathbb{Z}_+$ в каждую точку $i \in \mathbb{Z}$ поверхности, с вероятностью p , независимо от других параметров системы, приходит клиент, обозначаемый $\{i, i+1\}$ (клиент типа i) и ждет обслуживания. Каждому клиенту необходимо h единиц времени ($h = 1$), чтобы завершить его. Обслуживание клиентов происходит в порядке FIFO (first in first out). Однако, в один момент времени, не может происходить обслуживание клиентов, стоящих рядом. В случае, если в один момент времени в систему пришли клиенты типа i и $i+1$, то их порядок определяется случайным образом, а именно с вероятностью $1/2$ кто-то из них окажется первым. Построим граф $G(p)$, определяющий порядок обслуживания клиентов. Сперва рассмотрим случай $p = 1$ и затем, на его основе, опишем граф для произвольного значения p . Узлами данного графа являются элементы множества $\{(i, n) : i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+\}$. Ребро вида $(i_1, n_1) \rightarrow (i_2, n_2)$ означает, что клиент типа i_1 , пришедший в момент времени n_1 , не начнет обслуживание, пока клиент типа i_2 , пришедший в момент времени n_2 , не завершит его. Таким образом, учитывая ограничения модели, в каждой точке (i, n) , будем строить граф следующим образом:

1. Строим ребро $(i+1, n) \rightarrow (i, n)$ с вероятностью $1/2$, либо ребро $(i, n) \rightarrow (i+1, n)$ иначе.
2. Строим ребра $(i, n) \rightarrow (i-1, n-1)$, $(i, n) \rightarrow (i, n-1)$, $(i, n) \rightarrow (i+1, n-1)$ для всех $n \geq 2$.

Теперь опишем граф $G(p)$, при $0 \leq p < 1$.

1. Закрасим каждый узел графа $G(1)$ с вероятностью $1-p$ в белый цвет и с вероятностью p в черный
2. Если узел (i, n) белый, то удалим все смежные с ним ребра, кроме ребра $(i, n) \rightarrow (i, n-1)$.

Заметим, что, для данного графа справедливо **свойство монотонности**, то есть, при $p \leq q$, верно включение $G(p) \subseteq G(q)$.

Пусть $(i_1, n_1), (i_2, n_2), \dots, (i_m, n_m)$ — последовательно соединенные узлы графа $G(p)$ (все ребра направлены вправо). Назовем данную последовательность **путем** длины m , начинающийся в узле (i_1, n_1) . Определим **высоту** пути как суммарное время обслуживания вдоль данного пути. Пусть теперь $H_n^i = H_n^i(p)$ — максимальная высота среди всех путей, начинающихся в узле (i, n) в графе $G(p)$. Покажем, что $H_n^i(p)$ ограничена. Учитывая свойство монотонности модели, а также однородность по пространству, достаточно это показать для $H_n^0(1)$. Пусть

$$t_{n,n}^+ = \min\{i \geq 1 : (i, n) \rightarrow (i-1, n)\},$$

и для $m = n-1, n-2, \dots, 1$ определим

$$t_{m,n}^+ = \min\{i > t_{m+1,n}^+ + 1 : (i, n) \rightarrow (i-1, n)\}.$$

Аналогично, пусть

$$t_{n,n}^- = \max\{i \leq -1 : (i, n) \rightarrow (i+1, n)\},$$

и для $m = n - 1, n - 2, \dots, 1$

$$t_{m,n}^- = \max\{i < t_{m,n}^- - 1 : (i, n) \rightarrow (i + 1, n)\}.$$

Тогда получим следующую оценку

$$H_n^0 \leq \sum_{i=1}^n (t_{i,n}^+ - t_{i,n}^-) + n \quad (1)$$

Теперь, с помощью полученной оценки, оценим математическое ожидание H_n^i . Сперва найдем распределения случайных величин $\{t_{m,n}^+\}$, при $n \geq 1$ и $1 \leq m \leq n$ (для $\{t_{m,n}^-\}$ рассуждение аналогично). Сперва заметим, что

$$t_{m,n}^+ - (t_{m+1,n}^+ + 1) \stackrel{d}{=} t_{m,m}^+.$$

Тогда ясно, что

$$t_{m,n}^+ \stackrel{d}{=} \sum_{k=0}^{m-n} t_{m+k,m+k}^+ + (n - m).$$

Найдем распределение $t_{m,m}^+$. Так как

$$\{t_{m,m}^+ = k\} = \{(0, m) \rightarrow (1, m), (1, m) \rightarrow (2, m), \dots, (k-2, m) \rightarrow (k-1, m), (k-1, m) \leftarrow (k, m)\},$$

где $k \geq 1$, получим следующее распределение случайной величины $t_{m,m}^+$

$$\mathbb{P}(t_{m,m}^+ = k) = 2^{-k}.$$

Тогда, для математического ожидания случайной величины $t_{m,m}^+$ получим

$$\mathbb{E} t_{m,m}^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(t_{m,m}^+ \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2 \quad (2)$$

Итого, учитывая формулы (1) и (2), для математического ожидания H_n^0 получим

$$\mathbb{E} H_n^0 \leq \sum_{i=1}^n 6(n - i + 1) + n = O(n^2) \quad (3)$$

2. ВОПРОСЫ

1. Оценка производных для приближения по формуле Тейлора?
2. Возможно ли построить каплинг для данной модели со свойствами суб/супер аддитивности?
3. Можно ли получить оценки для предельных констант в случае, если вместо исходной поверхности будем рассматривать окружность с тремя точками? С произвольным количеством точек?
4. Можно ли комбинаторными методами найти распределение H_n^i , при некоторых допущениях для модели?
5. Провести компьютерную симуляцию модели.

3.1. Рассмотрим сперва случай $p = 1$. В силу правил построения ребер на одном временном уровне ($t - Fix$), а также определения величины $H_n^i(p)$ ясно, что максимальная длина очереди на каждом временном уровне равна 3, а также, так как от каждого черного узла будет выходить три ребра на нижестоящий уровень, то ни один клиент, пришедший в момент времени n не будет обслужен, пока не закончат обслуживания клиенты на уровне $n - 1$. Таким образом, легко выписать распределение для $H_n^i(1)$, где $i = 1, 2, 3$ и $n \geq 0$.

$$H_n^i = \begin{cases} 3n - 2, & \text{prob} = 1/3 \\ 3n - 1, & \text{prob} = 1/3 \\ 3n, & \text{prob} = 1/3 \end{cases} \quad (4)$$

Пусть теперь $0 < p < 1$. Аналогично предыдущему случаю, можно заметить, что клиенты, пришедшие в момент времени n не будут обслужены, пока не завершится обслуживание клиентов, пришедших на уровень $n - 1$. Таким образом, искомую случайную величину H_n^i можно выразить в виде суммы двух независимых случайных величин ξ_n^i – длина очереди на уровне n и $B(3n - 3, p)$ – биномиальная случайная величина с параметрами $3n - 3$ и p . Итого получим

$$H_n^i = \xi_n^i + B(3n - 3, p) \quad (5)$$

Распределение ξ_n^i легко находится обычным перебором, поэтому приведем только результат вычислений

$$\xi_n^i = \begin{cases} 0, & \text{prob} = 1 - p \\ 1, & \text{prob} = p - p^2 + \frac{1}{4}p^3 \\ 2, & \text{prob} = p^2(1 - p/2) \\ 3, & \text{prob} = \frac{1}{4}p^3 \end{cases} \quad (6)$$

Распределение H_n^i несложно найти, например, по формуле полной вероятности. Коэффициент линейного роста можно найти из формулы 5, с помощью закона больших чисел. Итого получим

$$H_n^i/n \rightarrow 3p \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

4.1 Найдем оценку для распределения H_n^0 "напрямую". Для этого воспользуемся следующими рассуждениями

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_n^0 = k) &= \mathbb{P}(\exists \text{ путь длины } k \text{ и } \neg \exists \text{ пути длины } k + 1) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\neg \exists \text{ пути длины } k \text{ или } \exists \text{ путь длины } k + 1) \\ &\geq 1 - \mathbb{P}(\neg \exists \text{ пути длины } k) - \mathbb{P}(\exists \text{ путь длины } k + 1) \\ &= \mathbb{P}(\exists \text{ путь длины } k) - \mathbb{P}(\exists \text{ путь длины } k + 1) \end{aligned}$$

Теперь найдем вероятность событий $\{\exists \text{ путь длины } k\}$ для всех $k \geq 0$. Сперва заметим, что если мы зафиксируем точку откуда путь будет "стартовать" (пусть $(0, m)$), а также длину пути k , то количество различных конфигураций пути с заданными параметрами зависит от количества вариантов разложения числа k в сумму из m слагаемых n_1, n_2, \dots, n_m , где n_i можно интерпретировать как длину части исходного пути на i -ом временном уровне, и количества вариантов разложить заданную конфигурацию частей пути. Обозначим далее через

l_i – части исходного пути, то есть $l_1 + l_2 + \dots + l_m = H_m^0$. Найдем вероятность события $\{l_1 = n_1, l_2 = n_2, \dots, l_m = n_m\}$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(l_1 = n_1, l_2 = n_2, \dots, l_m = n_m) \\ &= p 2^{I(n_m > 1)} \mathbb{P}(l_m = n_m) \cdot 3^{I(n_{m-1} > 0)} 2^{I(n_{m-1} > 1)} \mathbb{P}(l_{m-1} = n_{m-1}) \cdot \dots \\ & \quad \cdot 3^{I(n_1 > 0)} 2^{I(n_1 > 1)} \mathbb{P}(l_1 = n_1). \end{aligned}$$

Заметим, что l_1, l_2, \dots, l_m – независимые одинаково распределенные случайные величины. Найдем распределение l_1

$$\mathbb{P}(l_1 = n_1) = p^{n_1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_1-1} \left((1-p)^2 + 2\frac{1}{2}(1-p) + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{2}\right)^{n_1} (3-2p)$$

Таким образом, получим

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(l_1 = n_1, l_2 = n_2, \dots, l_m = n_m) \\ &= p 3^{\sum_{i=1}^m I(n_i > 0)} 2^{\sum_{i=1}^m I(n_i > 1)} 2^m \left(\frac{p}{2}\right)^{\sum_{i=1}^m n_i} \left(1 - \frac{p}{2}\right)^{2 \sum_{i=1}^m I(n_i > 0)} (1-p)^{\sum_{i=1}^m I(n_i = 0)} \end{aligned} \quad (8)$$

Для события $\{\exists \text{ путь длины } k\}$ имеем

$$\mathbb{P}(\exists \text{ путь длины } k) = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_m = k} \mathbb{P}(l_1 = n_1, l_2 = n_2, \dots, l_m = n_m)$$

Разобьем множество $A = \{n_1, n_2, \dots, n_m : n_1 + n_2 + \dots + n_m = k\}$ на такие подмножества, что на каждом из них индикаторные функции в выражении (8) принимают фиксированные значения. Обозначим через $Z_i^m = \{n_1, n_2, \dots, n_m : i \text{ слагаемых равны нулю и } n_1 + n_2 + \dots + n_m = k\} = \{n_1, n_2, \dots, n_{m-i} : n_1 + n_2 + \dots + n_{m-i} = k\}$, а также $O_i^m = \{n_1, n_2, \dots, n_m : i \text{ слагаемых равны 1 и } n_1 + n_2 + \dots + n_m = k\} = \{n_1, n_2, \dots, n_{m-i} : n_1 + n_2 + \dots + n_{m-i} = m - i\}$. Тогда, при условии, что значение k и m достаточно велики и $k > m$, для события A имеем следующее разложение

$$A = \bigsqcup_{i=0}^{m-1} \bigsqcup_{j=0}^{m-i-1} A \cap Z_i^m \cap O_j^{m-i-1}$$

Найдем мощность каждого подмножества в разложении. Для этого сперва заметим, что задача нахождения мощности множества $A \cap Z_i^m \cap O_j^{m-i-1}$ для некоторых i, j сводится к комбинаторной задаче о количестве вариантов распределить $k - 2(m-1-i-j) - j$ шаров по $m-1-i-j$ ящикам. Таким образом получаем

$$\begin{aligned} |A \cap Z_i^m \cap O_j^{m-i-1}| &= C_{m-1}^i C_{m-1-i}^j C_{k-2(m-1-i-j)-j+m-1-i-j-1}^{m-1-i-j-1} \\ &= C_{m-1}^i C_{m-1-i}^j C_{k-m+i}^{m-i-j-2} \end{aligned}$$

Теперь заметим, что на множестве $A \cap Z_i^m \cap O_j^{m-i-1}$ для некоторых i, j имеем

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(l_1 = n_1, l_2 = n_2, \dots, l_m = n_m) \\ &= p 3^{m-i} 2^{m-i-j} 2^m \left(\frac{p}{2}\right)^k \left(1 - \frac{p}{2}\right)^{2(m-i)} (1-p)^i \end{aligned}$$

Итого для события $\{\exists \text{ путь длины } k\}$ получим

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\exists \text{ путь длины } k) &= \sum_{n_1+n_2+\dots+n_m=k} \mathbb{P}(l_1 = n_1, l_2 = n_2, \dots, l_m = n_m) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-i-1} C_{m-1}^i C_{m-1-i}^j C_{k-m+i}^{m-i-j-2} p 3^{m-i} 2^{m-i-j} 2^m \left(\frac{p}{2}\right)^k \left(1 - \frac{p}{2}\right)^{2(m-i)} (1-p)^i \end{aligned}$$

4.2 Пусть теперь в системе всего $k+1$ сервер. Обозначим h_t – максимальная длина пути на временном уровне t . Тогда ясно, что справедлива следующая оценка

$$H_n^i \leq \sum_{t=1}^n h_t \quad i = 0, 1, \dots, k. \quad (9)$$

Легко понять, что $\{h_t\}_{t=0}^\infty$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Таким образом, чтобы получить оценку сверху для искомого коэффициента линейного роста, с помощью закона больших чисел, достаточно найти математическое ожидание h_1 . Для этого воспользуемся следующей формулой

$$\mathbb{E} h_1 = \sum_{j=0}^k \mathbb{P}(h_1 \geq j).$$

Можно заметить, что

$$\mathbb{P}(h_1 \geq j) = \mathbb{P}(\{\exists \text{ путь длины } j\}).$$

Найдем вероятность события $\{\exists \text{ путь длины } j\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\exists \text{ путь длины } j\}) &= 2(p/2)^{k+1} + 4(p/2)^k(1-p/2) + 6(p/2)^{k-1}(1-p/2)^2 \\ &\quad + 8(p/2)^{k-2}(1-p/2)^2 + \dots + 2(k-j+2)(p/2)^j(1-p/2)^2 \\ &= 2(p/2)^{k+1} + 4(p/2)^k(1-p/2) + \sum_{i=2}^{k-j+1} 2(i+1)(p/2)^{k-i+1}(1-p/2)^2 \\ &= 2(p/2)^{k+1} + 4(p/2)^k(1-p/2) + 2(p/2)^{k+1}(1-p/2)^2 \sum_{i=2}^{k-j+1} (i+1)(p/2)^{-i} \end{aligned}$$

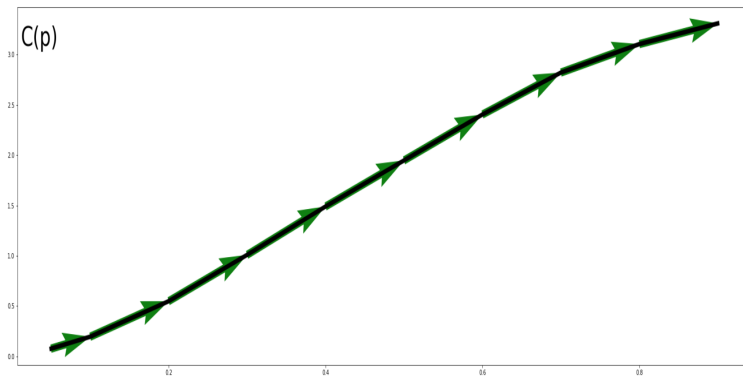
Посчитаем последнюю сумму отдельно

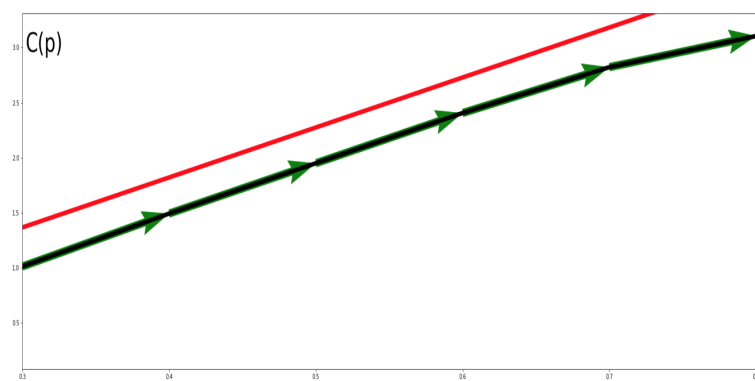
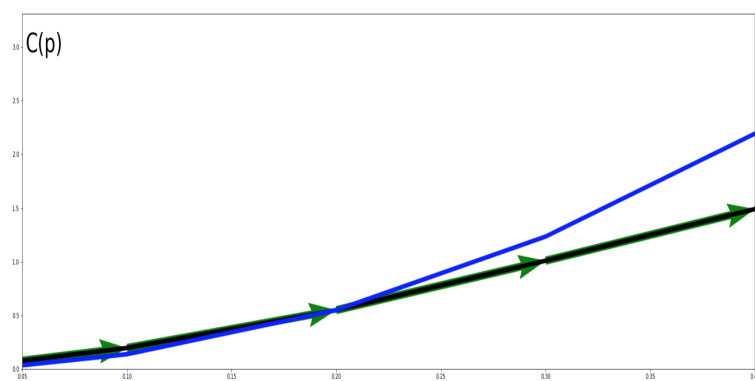
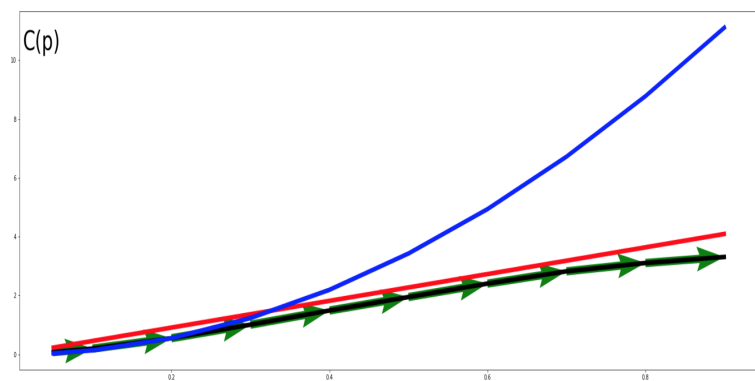
$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{k-j+1} (i+1)(p/2)^{-i} &= (p/2)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{k-j} i(p/2)^{-i} + 2 \sum_{i=1}^{k-j} (p/2)^{-i} \right) \\
&= (p/2)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{k-j} \sum_{s=i}^{k-j} (p/2)^{-s} + 2 \sum_{i=1}^{k-j} (p/2)^{-i} \right) \\
&= (p/2)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{k-j} (p/2)^{-i} \frac{(1 - (p/2)^{-(k-j+1-i)})}{(1 - (p/2)^{-1})} + 2(p/2)^{-1} \frac{(1 - (p/2)^{-(k-j)})}{(1 - (p/2)^{-1})} \right) \\
&= \frac{(p/2)^{-1}}{(1 - (p/2)^{-1})} \left(\sum_{i=1}^{k-j} (p/2)^{-j} - \sum_{i=1}^{k-j} (p/2)^{-(k-j+1)} + 2(p/2)^{-1} (1 - (p/2)^{-(k-j)}) \right) \\
&= \frac{(p/2)^{-2}}{(1 - (p/2)^{-1})} \left(\frac{1 - (p/2)^{-(k-j)}}{1 - (p/2)^{-1}} - (k-j)(p/2)^{-(k-j)} + 2(1 - (p/2)^{-(k-j)}) \right)
\end{aligned}$$

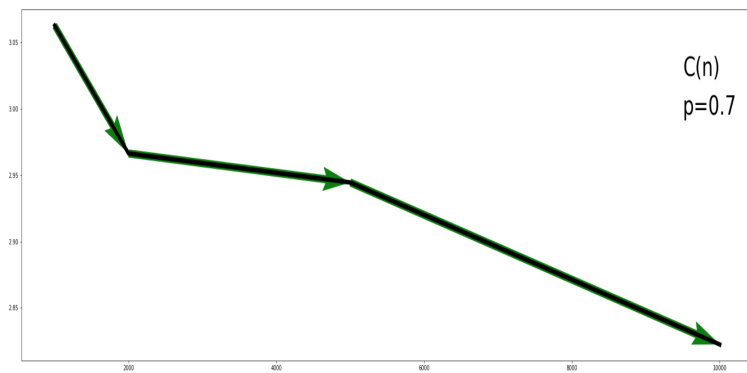
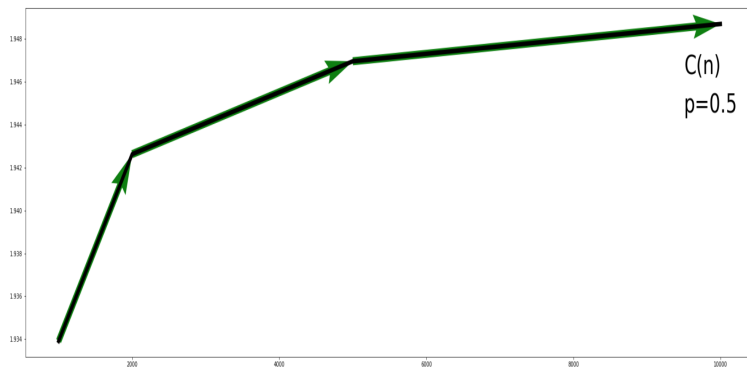
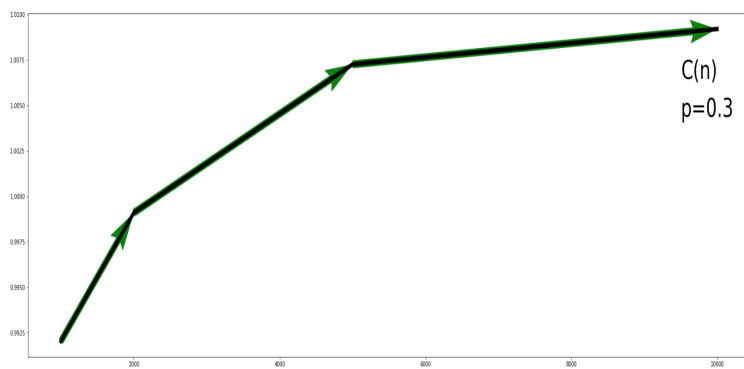
Таким образом, итогом для распределения имеем

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\exists \text{ путь длины } j\}) &= 2(p/2)^{k+1} + 4(p/2)^k(1 - p/2) + 2(p/2)^{k+1}(1 - p/2)^2 \frac{(p/2)^{-2}}{(1 - (p/2)^{-1})} \\
&\quad \cdot \left(\frac{1 - (p/2)^{-(k-j)}}{1 - (p/2)^{-1}} - (k-j)(p/2)^{-(k-j)} + 2(1 - (p/2)^{-(k-j)}) \right)
\end{aligned}$$

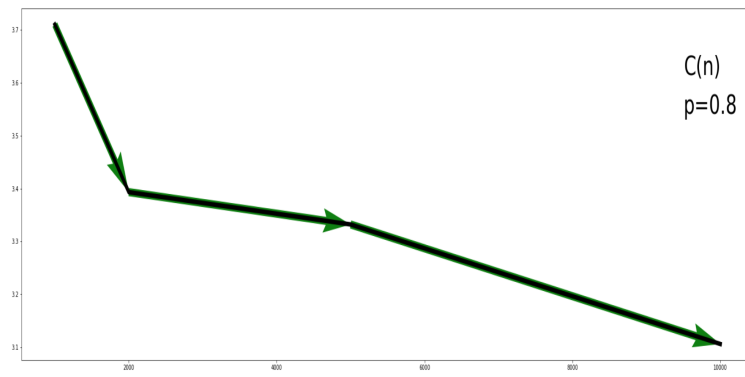
5. Для компьютерной симуляции использовались языки программирования python и c++. Задача состояла в реализации алгоритма вычисления H_n^0 . Однако в силу ограничения компьютерных мощностей, вместо инициализации множества узлов $\{(i, t) : i \in \mathbb{Z}, 0 \leq t \leq m\}$ для некоторого $m > 0$, производилась инициализация множества $\{(i, t) : i \in [-k, k], 0 \leq t \leq m\}$ для некоторого $k > 0$. В данной задаче Python используется для визуализации данных, однако его производительность сравнительно низкая, поэтому для вычисления алгоритма при больших значениях k и m используется c++, а python только вызывает скомпилированный код. Сперва рассмотрим графики средних значений на 100 реализациях функции $H_n^0(p)/n$ при фиксированном значении $n = 10^4$ и значениях $p = 0.05, 0.1, 0.2, \dots, 0.9$.







8



ALEXANDR VADIMOVICH REZLER
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY
2, PIROGOVA STR.
Email address: rezlers123@gmail.com

MIKHAIL GEORGIEVICH CHEBUNIN
KARLSRUHE INSTITUTE OF TECHNOLOGY,
INSTITUTE OF STOCHASTICS,
KARLSRUHE, 76131, GERMANY,
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
2, PIROGOVA STR.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA.
Email address: chebuninmikhail@gmail.com