

1 Понятие субстанциальной и локальной производных.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) - \text{субстанциальная}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} - \text{локальная}$$

2 Уравнение неразрывности для сжимаемой и несжимаемой жидкости.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0,$$

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 - \text{для несжимаемой} (\operatorname{div}(\vec{v}) = 0)$$

3 Уравнение Эйлера в векторной форме и в проекциях на оси в декартовой системе координат.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + f_i$$

4 Закон сохранения энергии идеальной жидкости. Поток энергии.

$$\oint_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\rho v^2}{2} + W \right) \vec{v} \right] dV = 0, \text{ где}$$

$W = \rho \varepsilon + p$ - энтальпия

или в дифференциальной форме

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{N} = 0, \text{ где}$$

$$E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon - \text{плотность энергии}$$

$$\vec{N} = \left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon + p \right] \vec{v} - \text{вектор плотности потока энергии}$$

5 Закон сохранения импульса идеальной жидкости. Тензор плотности потока импульса и его представление в декартовой системе координат.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V p \vec{v} dV = - \oint_S [p \vec{n} + \rho \vec{v}(\vec{v} \vec{n})] d\sigma$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = - \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i$$

$\Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k$ - тензор ППИ

6 Уравнение гидростатики.

$$\operatorname{grad} p = \rho \vec{f}, p = p(\rho)$$

7 Частота Брента-Вяйсяля.

$$N = \sqrt{\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}}$$

8 Теорема Бернулли для потенциальных и непотенциальных, стационарных и нестационарных течений.

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - gz = \text{const} - \text{потенциальное безвихревое} (\text{const во всём объёме})$$

$$\frac{v^2}{2} + W - gz = \text{const} - \text{стационарное вихревое} (\text{const на линии тока})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - gz = \text{const} - \text{нестационарное безвихревое}$$

9 Теорема Томсона.

Циркуляция скорости вдоль замкнутого контура, перемещающегося в идеальной жидкости, остается постоянной.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_L d \left(\frac{v^2}{2} - W - u \right) = 0$$

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} d\vec{r} - \text{циркуляция}$$

10 Потенциальные течения идеальной несжимаемой жидкости. Основные уравнения, граничные условия.

$$\Delta \varphi = 0, \vec{v} = \operatorname{grad}(\varphi)$$

граничное условие не проникания:

$$\vec{v} \vec{n}|_s = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \vec{v}_0 \vec{n}$$

Граничное условие на бесконечности?

11 Парадокс Д'Аламбера-Эйлера.

Ф1. При обтекании тела с гладкой поверхностью идеальной несжимаемой жидкостью сила лобового сопротивления, действующая на тело со стороны потока, равна нулю.

Ф2. Для тела, движущегося равномерно в идеальной несжимаемой жидкости постоянной плотности без границ, сила сопротивления равна нулю.

$$\vec{F} = - \oint_s p_s \vec{n} dS = 0$$

12 Понятие присоединенной массы. Присоединенная масса сферы и единицы длины бесконечного кругового цилиндра.

$$F - F_{\text{сопр}} = ma$$

$$M = F_{\text{сопр}}/a$$

$$F = (M + m)a$$

$$M_{\text{сферы}} = \frac{2}{3} \rho \pi R^3$$

$$M_{\text{цилиндра}} = \rho \pi R^2$$

13 Функция тока и ее свойства.

Для плоского потенциального течения несжимаемой идеальной жидкости:

$$\psi = \psi(x, y, t); v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v_y dx + v_x dy$$

14 Комплексный потенциал.

$F(z) = \phi + i\Psi$ (действительная часть потенциал, мнимая – функция тока)

15 Линии тока и эквипотенциальные линии.

Линия тока - это линия, касательные к которой в данный момент времени и в каждой точке совпадают с вектором скорости \vec{v}

$\Psi = \text{const}$ - линии тока (постоянная функция тока)

$\varphi = \text{const}$ - эквипотенциальные линии (постоянный потенциал)

16 Формула Жуковского.

$$F_y = - \int p_n y dl = \rho \Gamma v_0$$

17 Точечные вихри и их взаимодействия.

хз что тут хотят

18 Поверхностные гравитационные волны (длинные, короткие, гравитационно-капиллярные) и их основные свойства (траектории движения частиц, дисперсионные уравнения, фазовые и групповые скорости).

Траектории и описываются:

$$\frac{\xi^2}{a_\xi^2} + \frac{\eta^2}{a_\eta^2} = 1, \quad a_\xi = \frac{a \operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH}, \quad a_\eta = \frac{a \operatorname{sh} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH}$$

Где ξ и η смещения частицы по вертикали и горизонтали соответственно.

$$\xi = -\frac{a}{\operatorname{sh} kH} \operatorname{ch} k(z+H) \sin(kx - \omega t)$$

$$\eta = \frac{a}{\operatorname{sh} kH} \operatorname{sh} k(z+H) \cos(kx - \omega t)$$

Дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = (gk + \gamma k^3) \operatorname{th} kH$$

Фазовая скорость:

$$v_\Phi^2 = \omega^2 k^2 = gk + \gamma k$$

$k_* = \sqrt{gk}$ - минимум v_Φ

Групповая скорость:

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} \Rightarrow v_{\text{гр}} = \frac{v_\Phi k_*^2 + 3k^2}{2 k_*^2 + k^2}$$

Если $k \gg k_*$, это капиллярные волны. Если $H \ll k \ll k_*$, то это гравитационные короткие волны (дно ещё не чувствуется). Если же $k \ll H$, то это длинные гравитационные волны.

19 Уравнение Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости в векторной форме и в проекциях на оси в декартовой системе координат.

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \xi \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}$$

проекция...

20 Тензор вязких напряжений, физический смысл, представление в декартовой системе координат.

Общий вид тензора вязких напряжения (при относительном смещении слоёв жидкости, зависимость $\sim \eta$ линейна, жидкость будем считать изотропной):

$$\sigma_{ik} = a \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + c \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + b \sum_l \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik}$$

Переобозначим константы $a = \eta$, $b = \xi$. Тогда тензор вязких напряжений переписывается как

$$\sigma_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \xi \sum_l \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik}$$

21 Граничные условия для несжимаемой вязкой жидкости на поверхности твердого тела и свободной поверхности.

В случае вязкой жидкости на поверхности твердого неподвижного тела модуль скорости на поверхности равна нулю:

$$\vec{v} = (v_x(y), 0, 0)$$

При рассмотрении гидродинамики слоя жидкости на верхней границе жидкости

$$f_i = \sigma_{ik} n_k = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

22 Формула Пуазейля для расхода жидкости.

$$Q = 2\pi \int_0^R v(r) r dr = \frac{\pi}{8\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) R^4$$

23 Скин-слой.

Поскольку среда вязкая, возмущения передаются наверх, но затухают на характерном масштабе толщины скин-слоя. Второй сомножитель описывает запаздывание.

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

24 Числа Рейнольдса, Фруда, Струхала и их физический смысл.

$$Re = \frac{v_0 l}{\mu} = \frac{2v_0 R}{\mu} = \frac{V_{\text{ср}} H}{\nu}$$

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \text{ - кинематический коэффициент вязкости}$$

Число Рейнольдса показывает относительное влияние нелинейных эффектов. Если Re мало, то можно пренебречь в уравнении движения вязкой жидкости всем, кроме давления.

$$Fr = \frac{v_0^2}{gl}$$

Число Фруда описывает отношение кинетической энергии жидкости к потенциальной (энергии гравитационных сил).

$$Sh = \frac{v_0 T}{l}$$

Число Струхала характеризует стационарность. Если $Sh \gg 1$ можно пренебречь нестационарностью.

25 Формула Стокса.

$$F = 6\pi\eta Rv_0, \quad Re \ll 1$$

$$F = 6\pi\eta Rv_0 \left(1 + \frac{3}{16} Re\right)$$

26 Зависимость ширины пограничного слоя от параметров.**27 Уравнения линейной акустики. Волновое уравнение.****28 Монохроматические волны, уравнение Гельмгольца****29 Закон сохранения энергии (звуковой волны)**