Базовые понятия

Фазовое пространство — совокупность всех начальных точек X или всех возможных состояний системы. Фазовая траектория — кривая в фазовом пространстве, составленная из точек, представляющих состояние динамической системы в последовательные моменты времени в течение всего времени эволюции.

Эволюция системы соответствует движению изображающей точки у фазовой плоскости вдоль траектории $\Gamma = \bigcup_t G^t X_0$. Для динамической системы с непрерывным временем траектории— непрерывные кривые для динамической системы с дискретным временем, траектория— дискретные, подмножество фазовой плоскости.

Динамическая система с непрерывным временем задается системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = F(x)$. Она позволяет найти состояние в любой момент времени по начальному состоянию. Если правая часть явно от времени не зависит, то динамическая система - автономная, иначе - не автономная.

Динамическая система с дискретным временем: $x(n+1) = F(x(n))$.

1 Определение динамической системы

Рассмотрим систему, состояние которой определяется вектором $x(t) \in R^n$. Предположим, что эволюция системы определяется одно-параметрическим семейством операторов $G^t, t \in R$ или $t \in Z$, таких, что состояние системы в момент t: $x(t, x_0 = G^t x_0)$ где x_0 – начальное состояние (начальная точка). Предположим также, что эволюционные операторы удовлетворяют двум следующим свойствам, отражающим детерминистический характер описываемых процессов.

Первое свойство: G^0 – тождественный оператор, т.е. $x(0, x_0) = x_0$, для любых x_0. Это свойство означает, что состояние системы не может изменяться самопроизвольно.

Второе свойство эволюционных операторов имеет вид: $x(t_1 + t_2, x_0) = x(t_1, x(t_2, x_0)) = x(t_2, x(t_1, x_0))$ Согласно ему, система приходит в одно и то же финальное состояние независимо от того, достигается ли оно за один временной интервал $t_1 + t_2$, или за несколько последовательных интервалов t_1 и t_2, суммарно равных $t_1 + t_2$.

Совокупность всех начальных точек или всех возможных состояний системы называется фазовым пространством, а пара (X, G^t), где семейство эволюционных операторов удовлетворяют условиям выше – динамической системой (ДС).

Иначе говоря, динамическая система — объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния, как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задан закон эволюции начального состояния с течением времени. По этому закону можно прогнозировать будущее состояние динамической системы.

2 Условия грубости динамических систем на плоскости

Так как динамические системы изменяются вместе со входящими в них параметрами, но при малости изменений качественные черты поведения сохраняются, вводится свойства грубости. Грубость — устойчивость структуры разбиения фазовой плоскости динамических систем на траектории по отношению к малым изменениям динамической системы.

Для плоскости: пусть есть система:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \quad \text{где } P \text{ и } Q \text{ - гладкие функции, система диссипативна.}$$

Система — грубая, если существует число $\delta > 0$, что все динамические системы вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) + p(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) + q(x,y) \end{cases}$$

в которых аналитические функции удовлетворяют условию

$$|p(x,y)| + |q(x,y)| + \left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial p}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right| < \delta,$$

имеют такую же структуру разбиения на положительные полутраектории, что и начальная система.

Переход от одной грубой ДС к другой происходит через негрубую ДС.

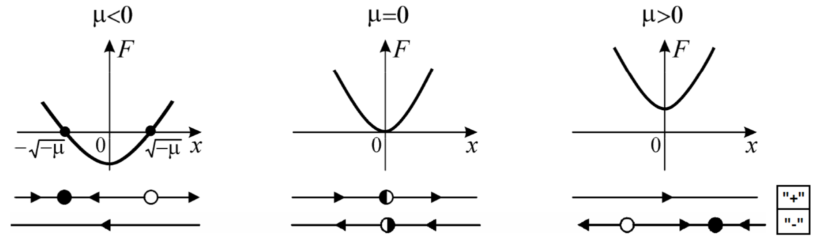
ДС на прямой грубая (структурно устойчива), если для всех состояний равновесия $\lambda_i(\mu) \neq 0$.

3 Бифуркация состояний равновесия динамических систем на прямой

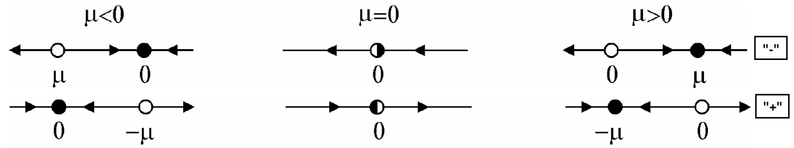
Значение параметра, при котором ДС является негрубой, называется бифуркационным.

Пусть есть динамическая система на прямой общего вида $\dot{x} = F(x, \mu)$. $F(x)$ - взаимооднозначная, обеспечивающая выполнение теорем существования и единственности решений. Тогда состояния равновесия будут определяться как $F(x, \mu) = 0$

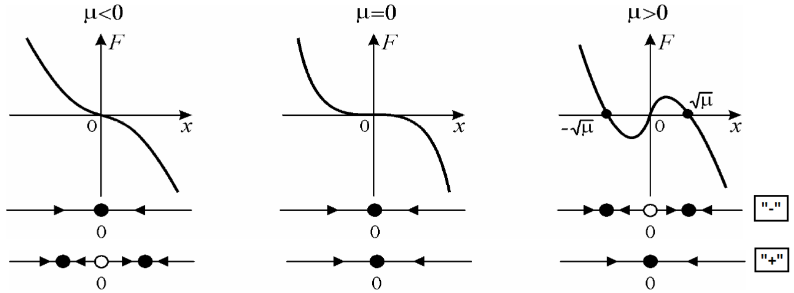
※ Двукратное равновесие: $\dot{x} = \mu \pm x^2$. При $\mu = 0$ - двукратное состояние равновесия, которое при изменении параметра либо распадается на два, либо исчезает



※ Транскритическая бифуркация: $\dot{x} = \mu x \pm x^2$. При изменении параметра наблюдается изменение устойчивости состояний равновесия



※ Трехкратное равновесие: $\dot{x} = \mu x \pm x^3$. Состояния равновесия появляются и исчезают парами



4 Метод линеаризации определения устойчивости состояний равновесия

Рассматриваем систему n-ого порядка: $\dot{x} = F(x), x \in R^n, F(x)$ - гладкая вектор-функция. Пусть система имеет состояние равновесия $x = x^*$

Введем малое возмущение $\xi(t) = x(t) - x^*$, тогда система примет вид $\dot{\xi} = F(x^* + \xi)$. Разложим правую часть в ряд Тейлора: $\dot{\xi} = A\xi + \dots$, где A - $n \times n$ - матрица Якоби с элементами $a_{ik} = \dfrac{\partial F_i}{\partial x_k}|_{x=x^*}$, и отбросим все нелинейные по ξ слагаемые. Этим мы линеаризовали систему.

Решения ищем в виде $\xi = Ce^{\lambda t}$, C - матрица-столбец. Подставив это решение в линеаризованное уравнение мы перейдем к системе линейных однородных уравнений, которая имеет нетривиальное решение, если $det(A - \lambda E) = 0$. Это уравнение эквивалентно $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$ - характеристическому уравнению. Его корни - характерестические показатели состояния равновесия $x = x^*$

1. Все корни имеют отрицательные вещественные части $(Re\lambda_i < 0)$ - состояние равновесия системы асимптотически устойчиво

2. Среди корней есть хотя бы один корень с $Re > 0$ - состояние равновесия неустойчиво по Ляпунову

3. Среди корней нет значений с $Re > 0$**, но есть корень с** $Re = 0$ - состояние равновесия может быть как устойчивым, так и неустойчивым

5 Линейный осциллятор. Основные свойства

Осциллятор - простейшая динамическая система с двумерным фазовым портретом

Уравнение ЛО: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad 2\delta = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

δ - потери, ω_0 - частота собственных колебаний

1. Без потери энергии

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases} \qquad \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$

Состояние равновесия в начале координат - центр

Свойства:

⋇ Гармонические колебания происходят с частотой ω_0, амплитудой $A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{y_0^2}{\omega_0^2}}$ и фазой $tg\varphi = \dfrac{\omega_0 x_0}{\omega_0^2}$ (x_0 и y_0 - значения в момент T)
⋇ Колебания изохронны - не зависят от начальных условий
⋇ Энергия системы сохраняется

2. С потерями энергии ($\delta \neq 0$)

$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\delta y - \omega_0^2 x \end{cases}$ $\quad \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$ - характерестическое ур-е

⋇ Затухающий процесс ($\delta > 0, \delta^2 < \omega_0^2$):
$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega_0$
Состояние равновесия - устойчивый фокус, затухающие колебания с изоклиной - экспонентой
⋇ Затухающий апериодический процесс ($\delta > 0, \delta^2 > \omega_0^2$):
$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$, состояние равновесия - устойчивый узел
⋇ Отрицательное затухание ($\delta < 0$): энергия растет во времени, состояние равновесия - неустойчивый фокус при $\delta^2 < \omega_0^2$ или неустойчивый узел при $\delta^2 \geqslant \omega_0^2$

6 Резонанс в линейном осцилляторе

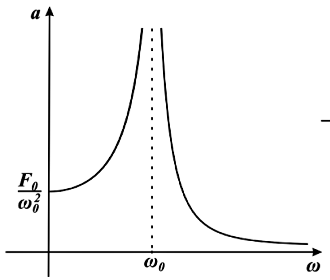
Резонанс — неограниченное возрастание амплитуды вынужденных колебаний, когда частота внешней силы близка к собственной частоте линейного осциллятора. Вынужденные колебания – это колебания, возникающие в результате действия на систему внешнего (силового) воздействия. Характерной особенностью вынужденных колебаний является то, что их свойства зависят не только от параметров системы, но и от параметров внешней силы.

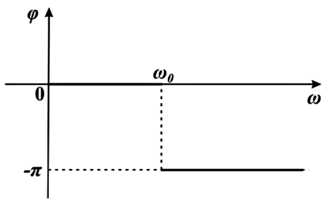
$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\delta y - \omega_0^2 x + F_0 cos(\omega t) \end{cases}$ - ЛО, на который действует гармоническая сила

1. Консервативный случай (без потери энергии)

W - не диссипирует. $a = \dfrac{F_0}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$ - амплитуда вынужденных колебаний переменной x(t).

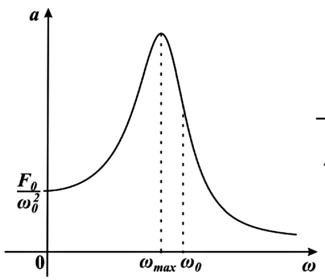
При резонансе изменение переменных во времени - непереодическое: $x(t) = t\dfrac{F_0}{2\omega_0} sin(\omega_0 t)$

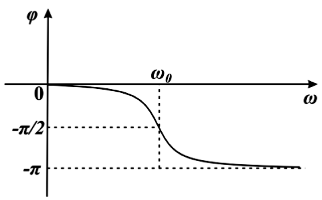




2. Диссипативный случай (с потерями энергии)

$a_{max} \to \omega_{max} < \omega_0, \quad \omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \quad a_{max} = \dfrac{F_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}, \quad \delta \uparrow a_{max} \downarrow$





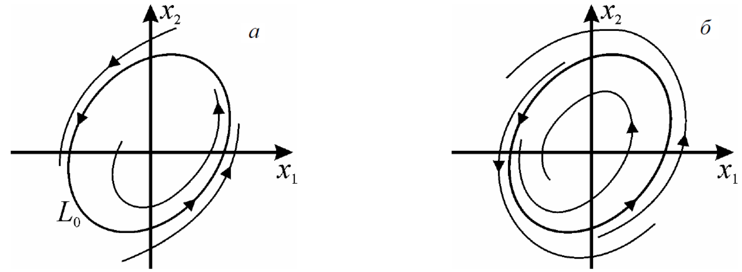
Характеристики резонансных свойств

Добротность - $Q = \dfrac{\pi}{d} = \dfrac{\omega_0}{2\delta}$

Логарифмический коэффициент затухания - $d = \delta T = \dfrac{2\pi\delta}{\omega}$

7 Определение предельного цикла. Характеристики

Предельный цикл — замкнутая изолированная фазовая траектория. Замкнутая фазовая траектория называется изолированный, если существует достаточно малая кольцеобразная окрестность этой траектории, внутри которой нет других замкнутых траекторий.
Предельному циклу соответствует периодический процесс.



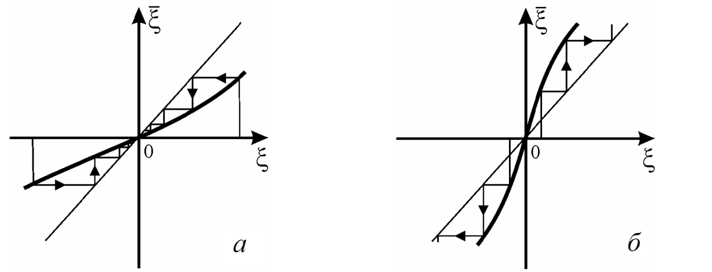
Предельные циклы: устойчивый (*а*); неустойчивый (*б*).

Характеристики:

⋇ Мультипликатор: $S < 1$ - ПЦ устойчивый, $S > 1$ - ПЦ неустойчивый. Всегда $S > 0$
⋇ Характеристический показатель: $\lambda < 0$ - ПЦ устойчивый, $\lambda > 0$ - ПЦ неустойчивый. λ можем получить в уравнении при линеаризации системы

Связь характеристик: $\lambda = \dfrac{1}{T_0} ln(S)$

Качественный вид отображения Пуанкаре в окрестности устойчивого (а) и неустойчивого (б) предельных циклов:



8 Автоколебания и автоколебательная система. Мягкий и жесткий режимы возбуждения

Автоколебательная система — диссипативная система, совершающая незатухающие колебания при отсутствии колебательного воздействия извне. В этих системах возникает баланс между действиями диссипативных потерь и внутренних механизмов, компенсирующих потери. Автоколебания — незатухающие колебания в нелинейной диссипативной системе, форма и свойства которых в определенных пределах не зависят от начальных условий и определяется параметрами самой системы.

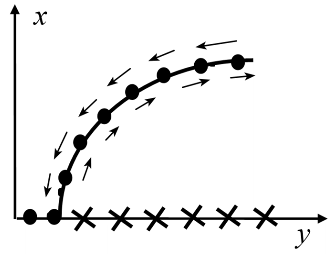
1. Мягкий режим

$\gamma < 0$ - автоколебаний нет, $\gamma = 0$ - суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа ($\lambda_i < 0$), $\gamma > 0$ - неустойчивое состояние равновесия + появление одного устойчивого предельного цикла на фазовой плоскости. $\quad \gamma \uparrow A \uparrow$
Состояние равновесия $\gamma = 0$ - безопасная граница устойчивости, то есть при ее нарушении система переходит в качественно новое состояние, но не покидает при $0 < \gamma \ll 1$ окрестности предыдущего состояния.

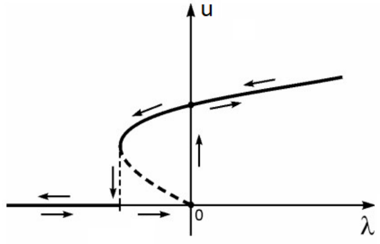
2. Жесткий режим

$\lambda < 0$ - состояние равновесия локально устойчиво, $\lambda = 0$ - состояние равновесия теряет устойчивость $\to$ автоколебания возникают скачком (жестко), $\lambda \uparrow A \uparrow$, затем квазистатически $\lambda \downarrow A \uparrow$ при $\lambda > 0$, а потом совсем исчезают скачком. Рождение и исчезновение АК происходит при разных λ

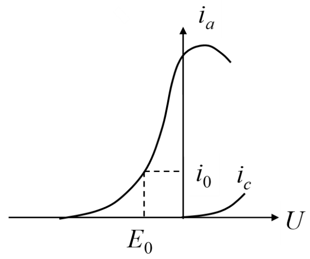
- наблюдается гестерезис. $\lambda = 0$ - опасная граница устойчивости состояния равновесия, так как поведение системы меняется резко



Мягкий режим



Жесткий режим

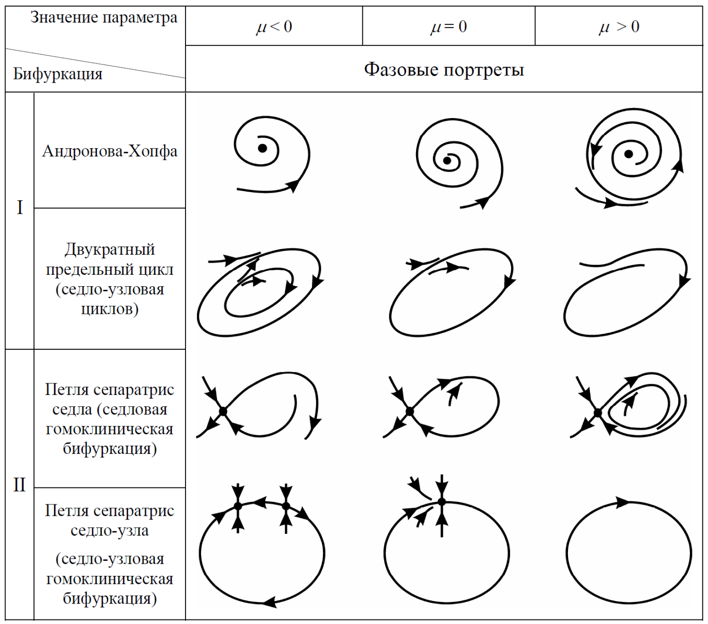


ВАХ

Свойства автоколебательных систем

※ Источник энергии для компенсации диссипации — постоянен и находится внутри самой системы
※ Система содержит колебательную подсистему и активный нелинейный элемент
※ В изолированной колебательной системе происходят затухающие колебательные процессы, а активный элемент может усиливать колебания и их нелинейно ограничивать
※ Между колебательной подсистемой и активным элементом существует обратная связь, регулирующая поступление энергии от источника
※ Автоколебания в определенных пределах не зависят от начальных условиях и определяются параметрами системы
※ Математическим образом периодических автоколебаний является предельной цикл

9 Бифуркационные сценарии рождения периодических движений динамических систем на плоскости

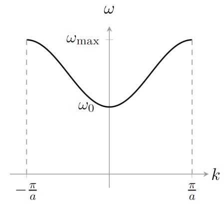


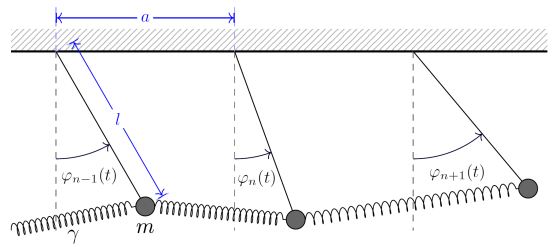
10 Дисперсия, ее физическая природа и проявления

Дисперсия — зависимость фазовой скорости волны от ее частоты. Связь между частотой и волновым числом гармонической волны определяется пространственными и временными масштабами среды и называется дисперсионным соотношением.

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4\gamma}{m} sin^2(\frac{ka}{2})$$

a - расстояние между маятниками
γ - жесткость пружины
k - действительное волновое число

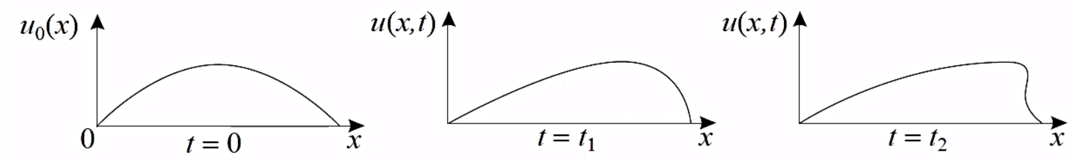




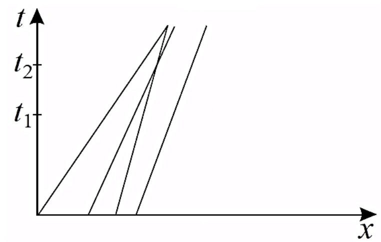
У каждой компоненты волнового пакета (суперпозиции двух и большего числа волн с различными частотами) будет своя $V_ф$, возникает его деформация. Наличием собственных масштабов объясняется эффект частичного непропускания волны
Область прозрачности: $k \in Re$ - распространение без искажения гармонической волны
Область непрозрачности: $k \in Im$ - нераспространение.

11 Простые волны. Основные свойства и условия существования

$U_t + C(U)U_x = 0$ — нелинейное уравнение простой волны. $C(U)$ — дифференцируемая функция (скорость от состояния среды). Характеристики — линии, вдоль которых переменная $U(x,t)$ будет оставаться постоянной и равной по значению для каждого соответствующего значения x.



В точке пересечения характеристик их значения одинаковы — появится точка разрыва (производная равна ∞) - градиентная катастрофа.
На переднем фронте образуется ударная волна. Уравнение перестает работать после точки разрыва.



Градиентная катастрофа наблюдается в нелинейных средах. При наличии в среде дисперсии и диссипации градиентная катастрофа наблюдаться не будет.
На переднем фронте если $\frac{dC}{dU} > 0$ (холмик справа), и на заднем, если $\frac{dC}{dU} < 0$

12 Параметрические системы. Основные свойства

Параметрические системы — системы, где внешнее воздействие находится внутри системы и может изменять ее параметры.
Резонансные. Период изменения параметров находится в целочисленном соотношении с периодом собственных колебаний. В такт с изменением энергии, соответствующей собственным колебаниям, вносится энергия, вызванная работой внешнего воздействия. При определенных условиях может привести к эффекту раскачки колебаний за счет накапливающейся в системе энергии. Пример - маятник с переменной длиной нити
Нерезонансные. Параметры изменяются очень быстро или очень медленно в сравнении с характерными временными масштабами изменения переменных системы.
Свойства.
1. Параметрическая система, находящаяся в начальный момент в состоянии равновесия, останется в этом состоянии при $t > 0$ (дергая за нитку, маятник нельзя раскачать)
2. Состояния равновесия параметрической системы могут быть как устойчивы, так и неустойчивы
3. Если параметры системы таковы, что она неустойчива и система выведена из состояния равновесия, то в ней возникают колебания, амплитуда которых $\uparrow exp$. Процесс возрастания размаха в колебаний при периодическом нарастании колебаний — параметрический резонанс.

Явления.
1. Параметрический резонанс
2. Параметрические колебания - ограниченные колебания (периодические или квазипереодические)
3. Граница между параметрическим резонансом и параметрическими колебаниями неустойчива

Траектории системы порождают порождают точечное линейное отображение через период (с помощью функции Флоке)

13 Релаксационные колебания

Имеем систему:

$$\begin{cases}\dot{x} = P(x,y)\\ \mu\dot{y} = Q(x,y)\end{cases} \qquad 0 < \mu \ll 1$$

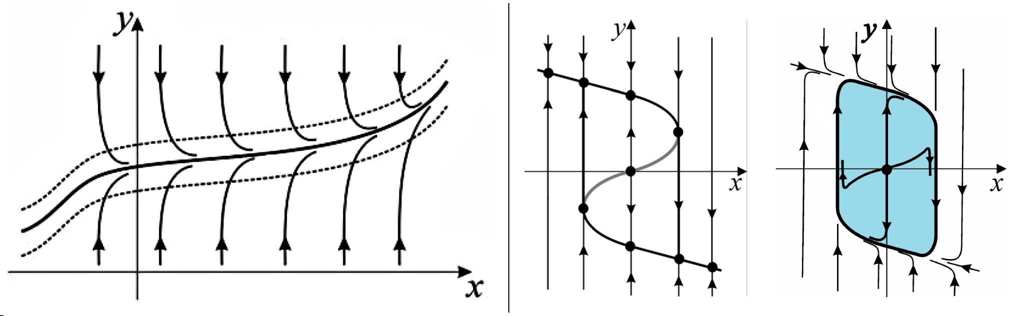
От расположения параметра μ в системе уравнений (либо около x, либо около y) зависит направление прямых на фазовом портрете. Если параметр расположен около x – прямые горизонтальные, если около y – вертикальные.

СМД: $\begin{cases}\mu\dot{x} = P(x,y)\\ 0 = Q(x,y)\end{cases}$

1. Первое уравнение остается неизменным
2. Кладём параметр $\mu = 0$ – получаем 2-е уравнение. Затем, решая уравнение, находим точки пересечения с осью, после берём производную от полученного выше выражения, кладём её равной 0 и находим состояния равновесия.

СБД: $\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial t} = P(x,y)\\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{1}{\mu}Q(x,y)\end{cases} \Rightarrow \dfrac{\partial x}{\partial y}\mu\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)} \Rightarrow x = const \Rightarrow \begin{cases}x = x_0\\ \dot{y} = \dfrac{1}{\mu}Q(x_0,y)\end{cases}$

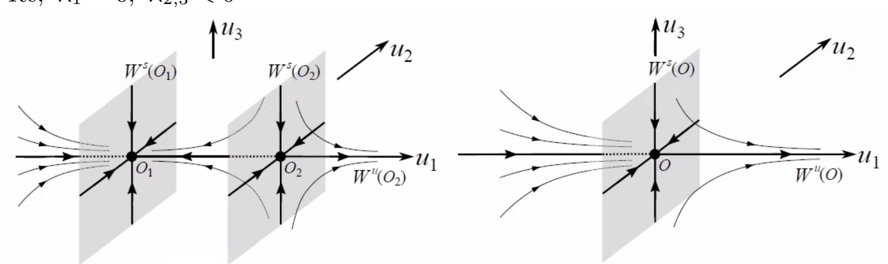
1. Делим уравнение с параметром на сам параметр – получаем 1-е уравнение
2. Делим одно уравнение исходной системы на второе и выявляем, что в данном случае является константой (например $x = x_0 = const$) – получаем 2-е уравнение.



В ходе решения задачи мы переходим от двумерной системы к двум одномерным системам, что намного упрощает анализ исходной системы

14 Локальные бифуркации состояний равновесия трехмерных систем

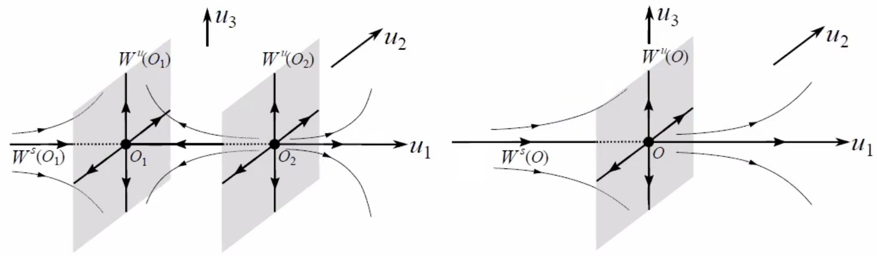
1. $\lambda_{1,2,3}$ – Re, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} < 0$



$\mu < 0$, O_1 - устойчивый узел, O_2 - седло

$\mu = 0$, O - седло-узел с устойчивой узловой и неустойчивой седло-узловой областями

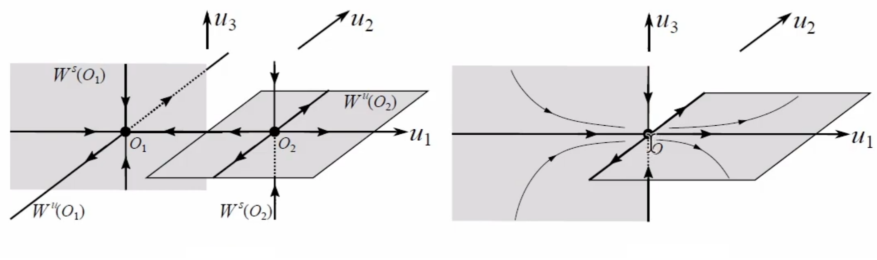
2. $\lambda_{1,2,3}$ – Re, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} > 0$



$\mu < 0$, O_1 - седло, O_2 - неустойчивый узел

$\mu = 0$, O - седло-узел

3. $\lambda_{1,2,3}$ – Re, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$

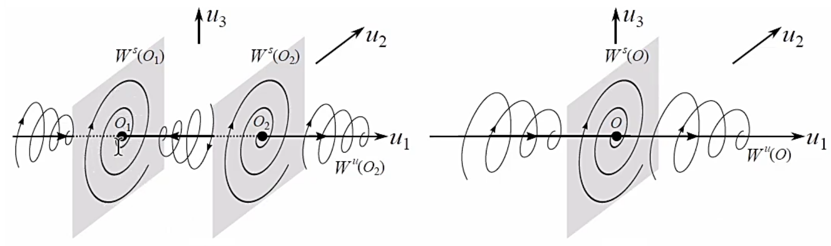


$\mu < 0$, $O_{1,2}$ - седла

$\mu = 0$, O - ?

4. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$

(a) $\alpha(\mu) < 0$

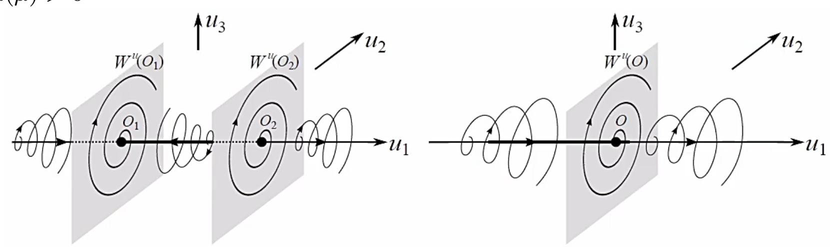


$\mu < 0$, O_1 - устойчивый фокус,
O_2 - седло-фокус

$\mu = 0$, ???

При $\mu > 0$ - точка исчезает

(b) $\alpha(\mu) > 0$



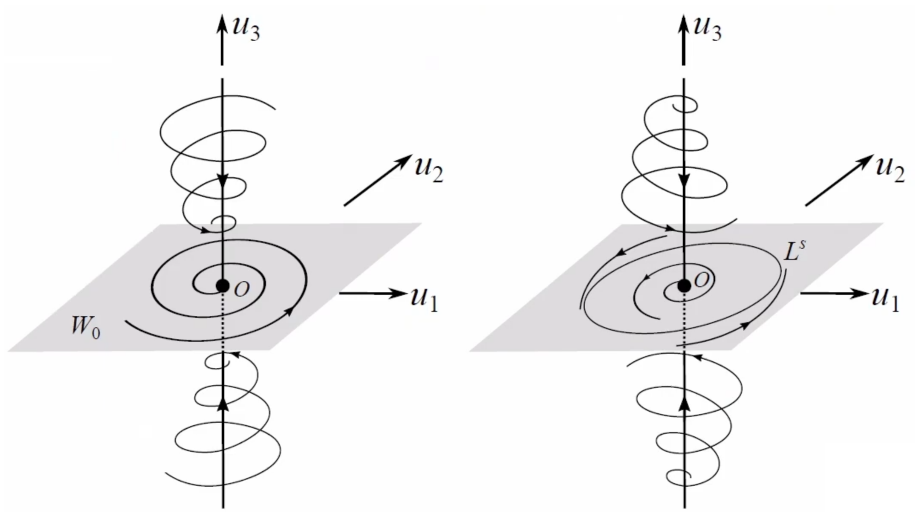
$\mu < 0$, O_1 - седло-фокус,
O_2 - не устойчивый фокус

$\mu = 0$, ???

При $\mu > 0$ - равновесие исчезает

5. **Суперкритическая бифуркация Андронова Хопфа**

   $L(\mu) < 0$ -первая Ляпуновская величина отрицательна

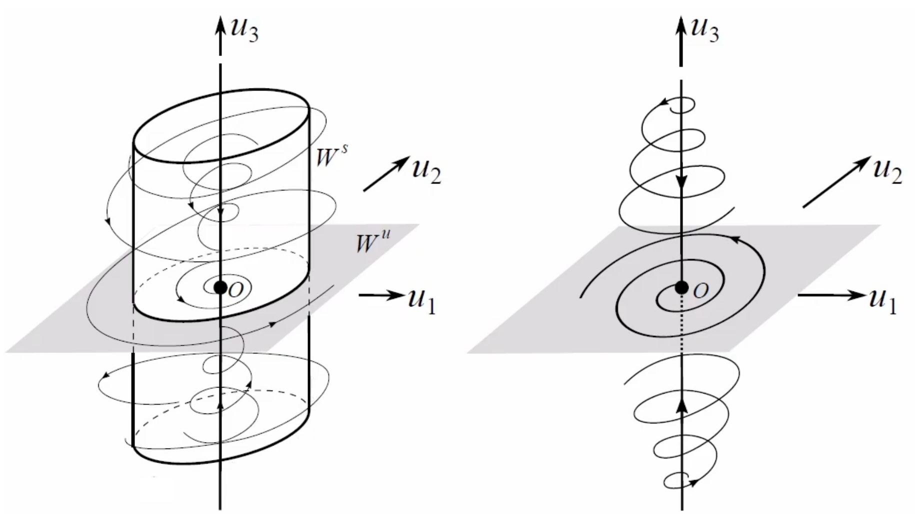


$\mu < 0$, O - устойчивый фокус $\quad$ $\mu > 0$, L^S - устойчивый предельный цикл

При $\mu = 0$ - сложный фокус

6. **Субкритическая бифуркация Андронова Хопфа**

   $L(\mu) > 0$ - первая Ляпуновская величина положительна

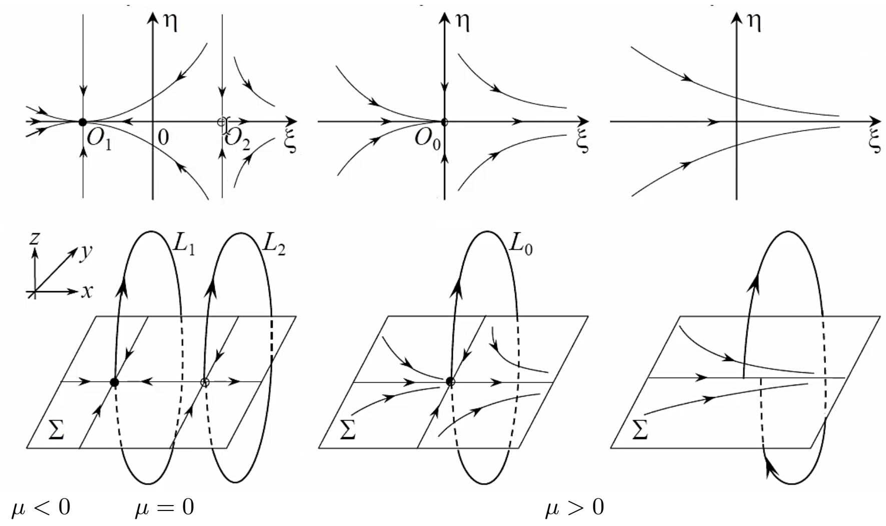


$\mu < 0$, O - седловой предельный цикл $\quad$ $\mu > 0$, O - седлофокус

При $\mu = 0$ - сложный седлофокус

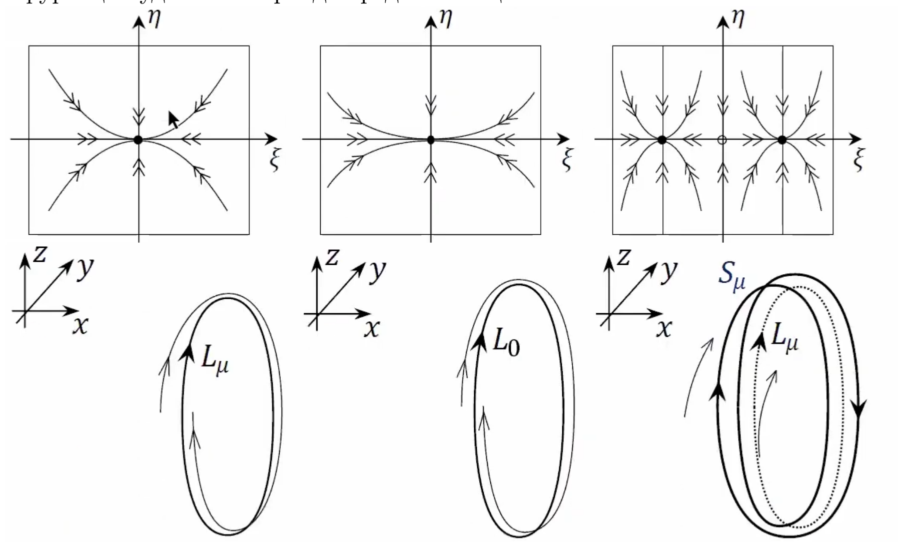
15 Локальные бифуркации периодических движений трехмерных систем

1. Седло-узловая бифуркация предельных циклов



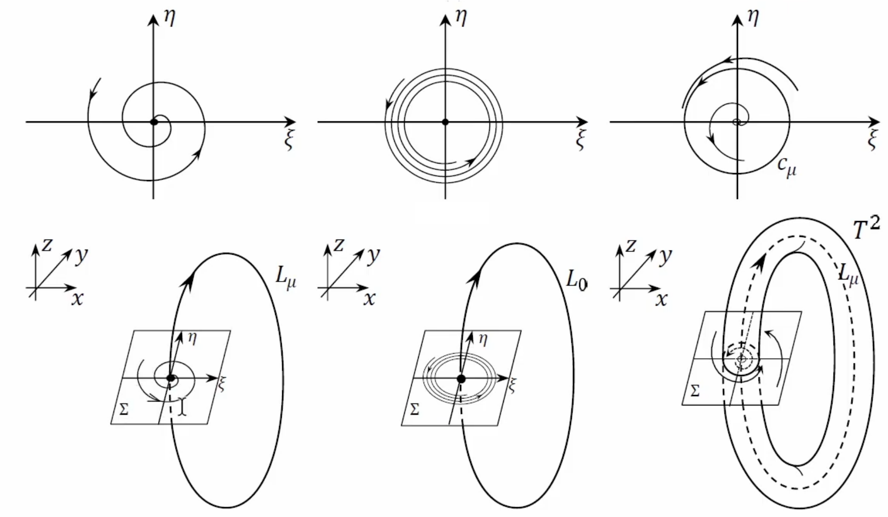
В бифуркации образуется двукратный предельный цикл с мультипликаторам $S_x = 1$ - негрубый цикл, который либо распадается на 2 грубых, либо исчезает

2. Бифуркация удвоения периода предельных циклов



$\mu < 0$ $\quad$ $\mu = 0$ $\quad$ $\mu > 0$

3. Бифуркация рождения инвариантного тора



$\mu < 0$ $\mu = 0$ $\mu > 0$