

## 1 Постулаты Эйнштейна

### 1.1 Постулат относительности

**Законы природы одинаковы во всех ИСО.** Другими словами, законы природы **ковариантны** по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной СО к другой. Это значит, что уравнения, описывающие некоторый закон природы и выраженные через координаты и время различных ИСО, имеют один и тот же вид.

### 1.2 Постулат постоянства скорости света

**Скорость света не зависит от движения источника и равна во всех ИСО и по всем направлениям.**

## 2 Каноническая форма уравнений Максвелла в вакууме: 4-потенциал и 4-плотность тока в 4-пространстве

$$\bar{x} = (x, y, z, ict)$$

$$\square \bar{A} = -\frac{4\pi}{c} \bar{j}, \quad \text{div} \bar{A} = 0, \quad \text{div} \bar{j} = 0 \quad \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \sum_{s=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} = \square \right)$$

$\bar{A} = (A_x, A_y, A_z, i\phi)$  - четырёхпотенциал,  $\bar{j} = (j_x, j_y, j_z, ic\rho)$  - четырёхплотность тока

## 3 Интервал между мировыми координатами двух событий в ИСО. Инвариантность интервала

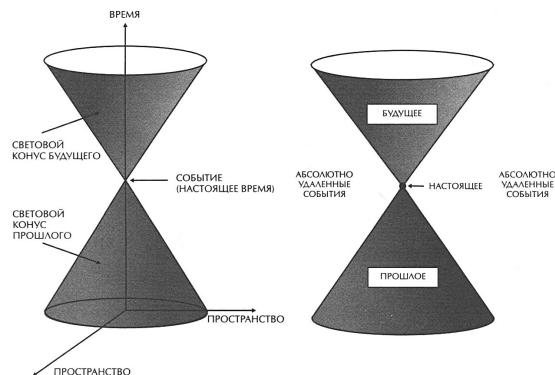
Интервал является инвариантом по отношению к преобразованию Лоренца. Это значит, что два события, разделённые пространственно-подобным интервалом в одной ИСО, разделены пространственно-подобным интервалом такой же величины и в любой другой ИСО. Аналогично два события, разделённые времени-подобным интервалом в одной СО, разделены таким же времени-подобным интервалом в любой иной ИСО.

### 4 Преобразования Лоренца

(частный случай, движение только по  $z$ )

$$x = x', \quad y = y', \quad z = \frac{z' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} z'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Leftrightarrow z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} z}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

## 5 Световой конус и мировые линии в 4-мерном пространстве



## 6 Относительность одновременности двух событий

События, одновременные в ИСО К - разновременные в ИСО К'. Два одновременных события не могут быть причинно-следственно связаны.

### 7 Собственное время объекта

**Собственное время объекта** - время которое показывают часы двигающиеся вместе с объектом.

СО связана с часами неинерциальная. Разбиваем траекторию на маленькие кусочки где СО будет инерциальной, тогда:

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow dt' = dt \sqrt{1 - \beta^2} \Rightarrow t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \beta^2} dt$$

(связь собственными ( $t'$ ) и неподвижными ( $t$ ) часами)

## 8 Лоренцево сокращение длины движущегося масштаба

$$z'_1 = \frac{z_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad z'_2 = \frac{z_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (t_1 = t_2) - \text{концы движутся вместе}$$

$$z'_2 - z'_1 = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

## 9 Закон сложения скоростей

$$V_{\text{отн}} = \frac{V + V'}{1 + \frac{VV'}{c^2}}$$

## 10 Эффект Доплера

$$\omega' = \frac{\omega - (k_z V)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad k'_z = \frac{k_z - ((\omega V)/c^2)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

## 11 Действие и функция Лагранжа свободной материальной частицы в ИСО

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad S_d = \int_{t_1}^{t_2} L(U^2) dt, \quad L = L(\vec{U}^2) = T - U - \text{функция Лагранжа}$$

$U$  не зависит от  $\vec{r}$ , так как пространство однородное,  $U$  и  $T$  не зависят от времени, так как оно однородно,  $L$  и  $T$  зависят только от  $\vec{V}$ ,  $L$  зависит только от направления  $\vec{V}$

Действие  $S_d$  - инвариант, так как во всех СО все явления должны происходить одинаково, и не существует какой-либо выделенной СО

## 12 Импульс и энергия свободной материальной частицы

$$\vec{P} = \nabla_{\vec{v}} L = \frac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad L = T - U$$

$$W = (\vec{P} \vec{V}) - L = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

При  $V = 0$  получим конечную величину  $W_0 = m_0 c^2$  - энергия покоя

## 13 Уравнение движения релятивистской частицы в 3-мерном пространстве

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{m_0 \vec{V}}{c^2 (\sqrt{1 - \beta^2})^3} \vec{V} \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f}$$

Первое слагаемое - перпендикулярная к скорости компонента силы, второе - продольная

## 14 4-скорость и 4-импульс свободной материальной частицы

4-х скорость - закон преобразования скорости при повороте системы координат:

$$\vec{U} = \left( \frac{\vec{V}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \frac{\vec{R}}{d\tau}, \quad \vec{U} \neq 0, \quad (\vec{U} \vec{U}) = -c^2$$

$$4\text{-х импульс} - \text{параллелен } 4\text{-х скорости: } \vec{P} = m_0 \vec{U} = \left( \frac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, i \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$$

$\tau$  - собственное время объекта

## 15 Ковариантная форма уравнения движения частицы в ИСО и 4-сила Минковского

$$\frac{d\vec{P}}{d\tau} = \vec{F}, \quad \vec{F} = \left( \frac{\vec{f}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, i \frac{(\vec{f} \vec{V})}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \right)$$

## 16 Тензор электромагнитного поля и ковариантная форма уравнений электродинамики в вакууме

$$F = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{bmatrix} - \text{тензор электромагнитного поля; } a_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\sum_k \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_i, \quad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} = 0 - \text{уравнения Максвелла в ковариантной форме}$$

$$F_{ik} = a_{kl} a_{im} F_{lm}$$

**17 Форма и содержание закона преобразования полей**

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \quad \vec{B}'_{\perp} = \frac{B_{\perp} - \frac{[\vec{V} \times \vec{E}]}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\vec{V} \times \vec{B}]}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

**18 Инварианты тензора электромагнитного поля**

$$1. F_{ij} \cdot F_{ij} = inv \Rightarrow \vec{E}^2 - \vec{B}^2 = inv$$

$$2. F_{ij} \cdot \vec{F}_{ij} = inv \Rightarrow (\vec{E} \cdot \vec{B}) = inv$$

Следствия:

\* Если в некоторой СО  $E > B$  - выполняется в любой СО

\* Если в некоторой СО  $\vec{E} \perp \vec{B}$  - выполняется в любой СО

\* Если в некоторой СО  $(\vec{E} \cdot \vec{B})$  - то существует СО, где или  $\vec{E} = 0$ , или  $\vec{B} = 0$

\* Если в некоторой СО или  $\vec{E} = 0$ , или  $\vec{B} = 0$  - то в любой другой  $\vec{E} \perp \vec{B}$

**19 4-вектор плотности силы Лоренца и его связь с тензором электромагнитного поля**

$$\vec{f} = \rho(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V} \times \vec{B}]) - \text{плотность силы Лоренца}$$

$$\vec{f} = (\vec{f}, \frac{i}{c}(\vec{f} \cdot \vec{V})) - 4\text{-х вектор плотности силы Лоренца}$$

$$\vec{f} = \frac{1}{c}(\vec{f} \cdot \vec{V}), \quad \hat{F} - \text{тензор э/м поля}, \quad f_i = \frac{1}{c} \sum_k F_{ik} j_k, \quad \vec{j} = \rho \vec{V}$$

**20 4-вектор плотности силы Лоренца и его связь с электромагнитным тензором энергии-импульса**

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & -\frac{iS_x}{c} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & -\frac{iS_y}{c} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & -\frac{iS_z}{c} \\ -\frac{iS_x}{c} & -\frac{iS_y}{c} & -\frac{iS_z}{c} & \omega \end{pmatrix} - \text{э/м тензор энергии-импульса}$$

$$S = \frac{1}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}] - \text{вектор Пойтнинга}, \quad \omega = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) - \text{плотность энергии}$$

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} (E_{\alpha} E_{\beta} + B_{\alpha} B_{\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2))$$

$$\vec{f} = (\vec{f}, \frac{i}{c}(\vec{f} \cdot \vec{V})) - 4\text{-вектор плотности силы Лоренца}$$

$$f_i = \sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} - \text{связь с тензором}$$

**21 Закон сохранения энергии в электродинамике**

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{div} \vec{S} + (\vec{j} \cdot \vec{E}) = 0, \quad (\vec{j} \cdot \vec{E}) - \text{джоулевы потери}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}] - \text{вектор Пойтнинга}, \quad \omega = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) - \text{плотность энергии}$$

**22 Закон сохранения импульса в электродинамике**

$$\frac{d}{dt}(\vec{P} + \vec{G}) = \oint_S \vec{T} d\vec{S} - 3\text{СИ}$$

$$\vec{G} = \frac{1}{c^2} \iiint \vec{S} dV = \iiint \vec{g} dV - \text{э/м импульс}, \quad \vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2} - \text{плотность э/м импульса}$$

$$\vec{P} + \vec{G} = \text{const} - \text{закон сохранения полного импульса}$$

**23 Действие и функция Лагранжа заряженной частицы в заданном электромагнитном поле**

$$dS_g = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} dt + (q/c(\vec{A} \cdot \vec{V}) - q\varphi) dt - \text{действие заряженной частицы}$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} + q/c(\vec{A} \cdot \vec{V}) - q\varphi - \text{функция Лагранжа}$$

**24 Импульс заряженной частицы в заданном электромагнитном поле**

$$\vec{P}_q = (\frac{\partial L}{\partial \vec{V}_q}) = \frac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{q}{c} \vec{A} - \text{обобщенный импульс}$$

$$\vec{P} = \vec{P} + \frac{q}{c} \vec{A}, \quad \vec{P} - \text{обычный импульс}$$

**25 Энергия заряженной частицы в заданном электромагнитном поле**

$$W_q = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + q\varphi = W + q\varphi$$

**26 Уравнение движения заряженной частицы в заданном электромагнитном поле**

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - q \nabla \varphi + \frac{q}{c} [\vec{V} \times \text{rot} \vec{A}], \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = qE + \frac{q}{c} [\vec{V} \times \vec{B}]$$

**27 Поле равномерно движущегося заряда**

$$\vec{E}_{\uparrow} = \frac{-|e| \Delta z_{21}}{s^3 \sqrt{1 - \beta^2}} \vec{z}_0; \quad \vec{E}_{\perp} = \frac{-|e|}{s^3 \sqrt{1 - \beta^2}} [\vec{x}_0 \Delta x_{21} + \vec{y}_0 \Delta y_{21}];$$

$$\vec{B}_{\uparrow} = 0; \quad \vec{B}_{\perp} = \frac{-|e| \beta}{s^3 \sqrt{1 - \beta^2}} [-\vec{x}_0 \Delta y_{21} + \vec{y}_0 \Delta x_{21}].$$

**28 Потенциалы Льеона-Вихерта неравномерно движущегося заряда. Выражение для поля излучения**

$$\vec{A} = \frac{-|e| \beta}{R[1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})]}; \quad i\varphi = \frac{-|e|}{R[1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})]} - \text{Потенциалы Льеона-Вихерта.}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_{\varphi} + \vec{E}_A = \frac{-|e|(\vec{e} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{R^2[1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})]^3} + \frac{-|e|/c[\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]]}{R^2[1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})]^3} = \vec{E}_{st} + \vec{E}_{rd};$$

$$\vec{B} = [\vec{n} \times \vec{E}] \equiv [\vec{n} \times (\vec{E}_{st} + \vec{E}_{rd})] \equiv \vec{B}_{st} + \vec{B}_{rd}.$$

**29 Излучение неравномерно движущегося на малой скорости заряда (формула Лармора)****30 Тормозное излучение заряда****31 Синхротронное (магнитотормозное) излучение заряда****32 Излучение Вавилова-Черенкова****33 Гипотезы теории электромагнитной массы и радиус электрона****34 Сила реакции излучения и уравнение Абрагама-Лоренца**

Задачи электродинамики можно разделить на 2 класса: известны источники и вычисляются результирующие электромагнитные поля, и задается внешнее электромагнитное поле и определяется движение заряженных частиц в нем. При рассмотрении тормозного излучения задача носит комбинированный поэтапный характер: сначала определяется траектория движения заряженной частицы в заданном внешнем поле (без учета излучения), а затем вычислялось излучение, возникающее при ее ускоренном движении по полученной траектории - это приближение, так как ускоренное движение заряженных частиц во внешних силовых полях неизбежно сопровождается излучением. Возникающее излучение приводит к потере энергии, импульса и момента количества движения и поэтому влияет на последующее движение заряженных частиц. Поэтому необходимо включать учёт реакции излучения на движение частицы.

$$m_e^0(\dot{\vec{V}} - \tau \ddot{\vec{V}}) = F_e - \text{уравнение Абрагама - Лоренца, учитывающее реакцию излучения}$$

$$\tau - \text{запаздывание распространения э/м поля от центра до края электрона}, \quad F_e - \text{внешняя сила}$$