

Базовые понятия

Фазовое пространство — совокупность всех начальных точек X или всех возможных состояний системы. Фазовая траектория — кривая в фазовом пространстве, составленная из точек, представляющих состояние динамической системы в последовательные моменты времени в течение всего времени эволюции.

Эволюция системы соответствует движению изображающей точки y фазовой плоскости вдоль траектории $\Gamma = \bigcup_t G^t X_0$. Для динамической системы с непрерывным временем траектории — непрерывные кривые для динамической системы с дискретным временем, траектория — дискретные, подмножество фазовой плоскости.

Динамическая система с непрерывным временем задается системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = F(x)$. Она позволяет найти состояние в любой момент времени по начальному состоянию. Если правая часть явно от времени не зависит, то динамическая система — автономная, иначе — не автономная.

Динамическая система с дискретным временем: $x(n+1) = F(x(n))$.

1 Определение динамической системы

Рассмотрим систему, состояние которой определяется вектором $x(t) \in R^n$. Предположим, что эволюция системы определяется одно-параметрическим семейством операторов $G^t, t \in R$ или $t \in Z$, таких, что состояние системы в момент t : $x(t, x_0 = G^t x_0)$ где x_0 — начальное состояние (начальная точка). Предположим также, что эволюционные операторы удовлетворяют двум следующим свойствам, отражающим детерминистический характер описываемых процессов.

Первое свойство: G^0 — тождественный оператор, т.е. $x(0, x_0) = x_0$, для любых x_0 . Это свойство означает, что состояние системы не может изменяться самопроизвольно.

Второе свойство эволюционных операторов имеет вид: $x(t_1 + t_2, x_0) = x(t_1, x(t_2, x_0)) = x(t_2, x(t_1, x_0))$. Согласно ему, система приходит в одно и то же финальное состояние независимо от того, достигается ли оно за один временной интервал $t_1 + t_2$, или за несколько последовательных интервалов t_1 и t_2 , суммарно равных $t_1 + t_2$.

Совокупность всех начальных точек или всех возможных состояний системы называется фазовым пространством, а пара (X, G^t) , где семейство эволюционных операторов удовлетворяют условиям выше — динамической системой (ДС).

Иначе говоря, динамическая система — объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния, как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задан закон эволюции начального состояния с течением времени. По этому закону можно прогнозировать будущее состояние динамической системы.

2 Условия грубости динамических систем на плоскости

Так как динамические системы изменяются вместе со входящими в них параметрами, но при малости изменений качественные черты поведения сохраняются, вводятся свойства грубости. Грубость — устойчивость структуры разбиения фазовой плоскости динамических систем на траектории по отношению к малым изменениям динамической системы.

Для плоскости: пусть есть система:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad \text{где } P \text{ и } Q - \text{гладкие функции, система диссипативна.}$$

Система — грубая, если существует число $\delta > 0$, что все динамические системы вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) + p(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) + q(x, y) \end{cases}$$

в которых аналитические функции удовлетворяют условию

$$|p(x, y)| + |q(x, y)| + \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial p}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| < \delta,$$

имеют такую же структуру разбиения на положительные полутраектории, что и начальная система.

Переход от одной грубой ДС к другой происходит через негрубую ДС.

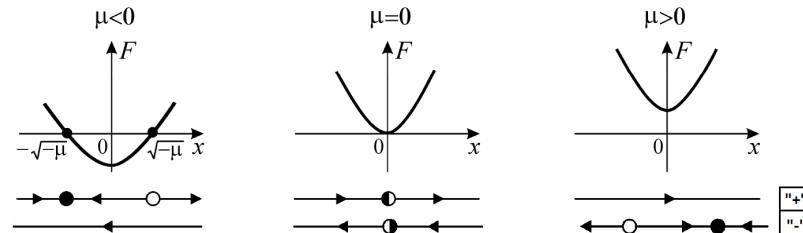
ДС на прямой грубая (структурно устойчива), если для всех состояний равновесия $\lambda_i(\mu) \neq 0$.

3 Бифуркация состояний равновесия динамических систем на прямой

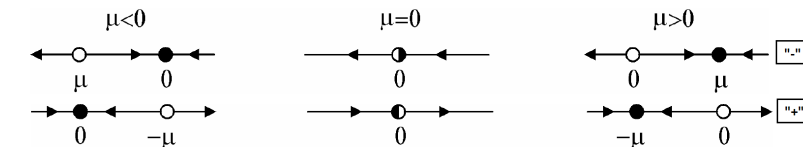
Значение параметра, при котором ДС является негрубой, называется бифуркационным.

Пусть есть динамическая система на прямой общего вида $\dot{x} = F(x, \mu)$. $F(x)$ — взаимнооднозначная, обеспечивающая выполнение теорем существования и единственности решений. Тогда состояния равновесия будут определяться как $F(x, \mu) = 0$

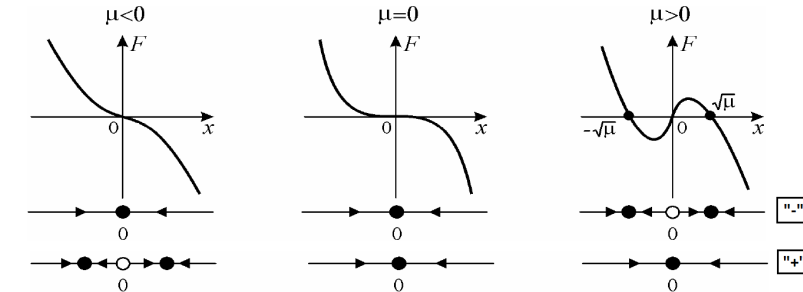
* Двукратное равновесие: $\dot{x} = \mu \pm x^2$. При $\mu = 0$ — двукратное состояние равновесия, которое при изменении параметра либо распадается на два, либо исчезает



* Транскритическая бифуркация: $\dot{x} = \mu x \pm x^2$. При изменении параметра наблюдается изменение устойчивости состояний равновесия



* Трехкратное равновесие: $\dot{x} = \mu x \pm x^3$. Состояния равновесия появляются и исчезают парами

**4 Метод линеаризации определения устойчивости состояний равновесия**

Рассматриваем систему n -ого порядка: $\dot{x} = F(x), x \in R^n, F(x)$ — гладкая вектор-функция. Пусть система имеет состояние равновесия $x = x^*$

Введем малое возмущение $\xi(t) = x(t) - x^*$, тогда система примет вид $\dot{\xi} = F(x^* + \xi)$. Разложим правую часть в ряд Тейлора: $\dot{\xi} = A\xi + \dots$, где A — $n \times n$ — матрица Якоби с элементами $a_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \big|_{x=x^*}$, и отбросим все нелинейные по ξ слагаемые. Этим мы линеаризовали систему.

Решения ищем в виде $\xi = C e^{\lambda t}$, C — матрица-столбец. Подставив это решение в линеаризованное уравнение мы перейдем к системе линейных однородных уравнений, которая имеет нетривиальное решение, если $\det(A - \lambda E) = 0$. Это уравнение эквивалентно $a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$ — характеристическому уравнению. Его корни — характеристические показатели состояния равновесия $x = x^*$

1. Все корни имеют отрицательные вещественные части ($Re \lambda_i < 0$) — состояние равновесия системы асимптотически устойчиво

2. Среди корней есть хотя бы один корень с $Re > 0$ — состояние равновесия неустойчиво по Ляпунову

3. Среди корней нет значений с $Re > 0$, но есть корень с $Re = 0$ — состояние равновесия может быть как устойчивым, так и неустойчивым

5 Линейный осциллятор. Основные свойства

Осциллятор — простейшая динамическая система с двумерным фазовым портретом

$$\text{Уравнение ЛО: } \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad 2\delta = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

δ — потери, ω_0 — частота собственных колебаний

1. Без потери энергии

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases} \quad \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$

Состояние равновесия в начале координат — центр

Свойства:

* Гармонические колебания происходят с частотой ω_0 , амплитудой $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{y_0^2}{\omega_0^2}}$ и фазой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_0 x_0}{\dot{x}_0} \quad (x_0 \text{ и } y_0 - \text{значения в момент } T)$$

* Колебания изохронны - не зависят от начальных условий

* Энергия системы сохраняется

2. С потерями энергии ($\delta \neq 0$)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\delta y - \omega_0^2 x \end{cases} \quad \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 - \text{характеристическое ур-е}$$

* Затухающий процесс ($\delta > 0, \delta^2 < \omega_0^2$):

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega$$

Состояние равновесия - устойчивый фокус, затухающие колебания с изоклиной - экспонентой

* Затухающий аperiодический процесс ($\delta > 0, \delta^2 > \omega_0^2$):

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad \text{состояние равновесия - устойчивый узел}$$

* Отрицательное затухание ($\delta < 0$): энергия растет во времени, состояние равновесия - неустойчивый фокус при $\delta^2 < \omega_0^2$ или неустойчивый узел при $\delta^2 \geq \omega_0^2$

6 Резонанс в линейном осцилляторе

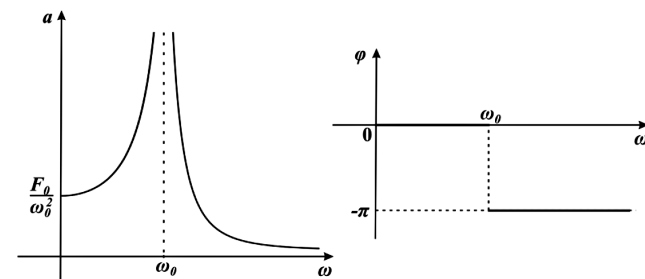
Резонанс — неограниченное возрастание амплитуды вынужденных колебаний, когда частота внешней силы близка к собственной частоте линейного осциллятора. Вынужденные колебания — это колебания, возникающие в результате действия на систему внешнего (силового) воздействия. Характерной особенностью вынужденных колебаний является то, что их свойства зависят не только от параметров системы, но и от параметров внешней силы.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\delta y - \omega_0^2 x + F_0 \cos(\omega t) \end{cases} - \text{ЛО, на который действует гармоническая сила}$$

1. Консервативный случай (без потери энергии)

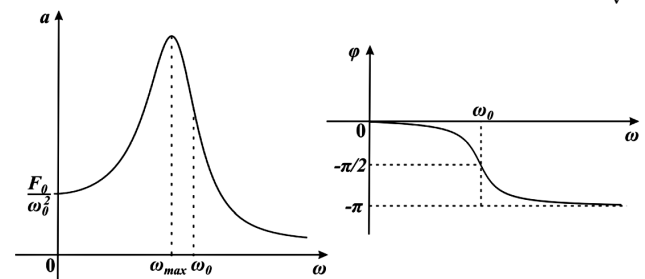
W - не диссипирует. $a = \frac{F_0}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$ - амплитуда вынужденных колебаний переменной $x(t)$.

При резонансе изменение переменных во времени - непериодическое: $x(t) = t \frac{F_0}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t)$



2. Диссипативный случай (с потерями энергии)

$$a_{\max} \rightarrow \omega_{\max} < \omega_0, \quad \omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \quad a_{\max} = \frac{F_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}, \quad \delta \uparrow a_{\max} \downarrow$$



Характеристики резонансных свойств

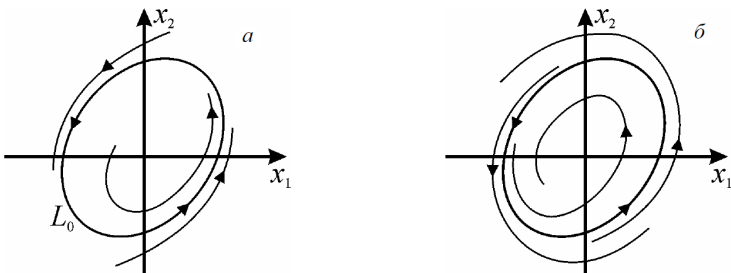
$$\text{Добротность} - Q = \frac{\pi}{d} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

$$\text{Логарифмический коэффициент затухания} - d = \delta T = \frac{2\pi\delta}{\omega}$$

7 Определение предельного цикла. Характеристики

Предельный цикл — замкнутая изолированная фазовая траектория. Замкнутая фазовая траектория называется изолированной, если существует достаточно малая кольцеобразная окрестность этой траектории, внутри которой нет других замкнутых траекторий.

Предельному циклу соответствует периодический процесс.



Предельные циклы: устойчивый (а); неустойчивый (б).

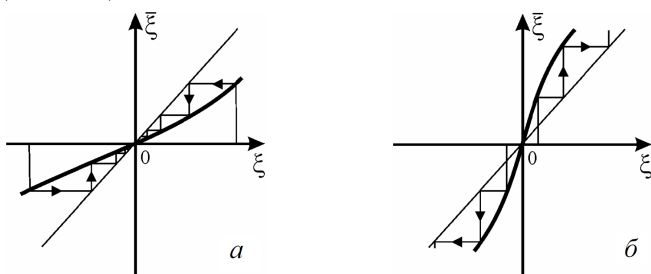
Характеристики:

* Мультипликатор: $S < 1$ - ПЦ устойчивый, $S > 1$ - ПЦ неустойчивый. Всегда $S > 0$

* Характеристический показатель: $\lambda < 0$ - ПЦ устойчивый, $\lambda > 0$ - ПЦ неустойчивый. λ можем получить в уравнении при линеаризации системы

$$\text{Связь характеристик: } \lambda = \frac{1}{T_0} \ln(S)$$

Качественный вид отображения Пуанкаре в окрестности устойчивого (а) и неустойчивого (б) предельных циклов:



8 Автоколебания и автоколебательная система. Мягкий и жесткий режимы возбуждения

Автоколебательная система — диссипативная система, совершающая незатухающие колебания при отсутствии колебательного воздействия извне. В этих системах возникает баланс между действиями диссипативных потерь и внутренних механизмов, компенсирующих потери. Автоколебания — незатухающие колебания в нелинейной диссипативной системе, форма и свойства которых в определенных пределах не зависят от начальных условий и определяется параметрами самой системы.

1. Мягкий режим

$\gamma < 0$ - автоколебаний нет, $\gamma = 0$ - суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа ($\lambda_i < 0$), $\gamma > 0$ - неустойчивое состояние равновесия + появление одного устойчивого предельного цикла на фазовой плоскости. $\gamma \uparrow A \uparrow$

Состояние равновесия $\gamma = 0$ - безопасная граница устойчивости, то есть при ее нарушении система переходит в качественно новое состояние, но не покидает при $0 < \gamma \ll 1$ окрестности предыдущего состояния.

2. Жесткий режим

$\lambda < 0$ - состояние равновесия локально устойчиво, $\lambda = 0$ - состояние равновесия теряет устойчивость \rightarrow автоколебания возникают скачком (жестко), $\lambda \uparrow A \uparrow$, затем квазистатически $\lambda \downarrow A \uparrow$ при $\lambda > 0$, а потом совсем исчезают скачком. Рождение и исчезновение АК происходит при разных λ

- наблюдается гистерезис. $\lambda = 0$ - опасная граница устойчивости состояния равновесия, так как поведение системы меняется резко



Свойства автоколебательных систем

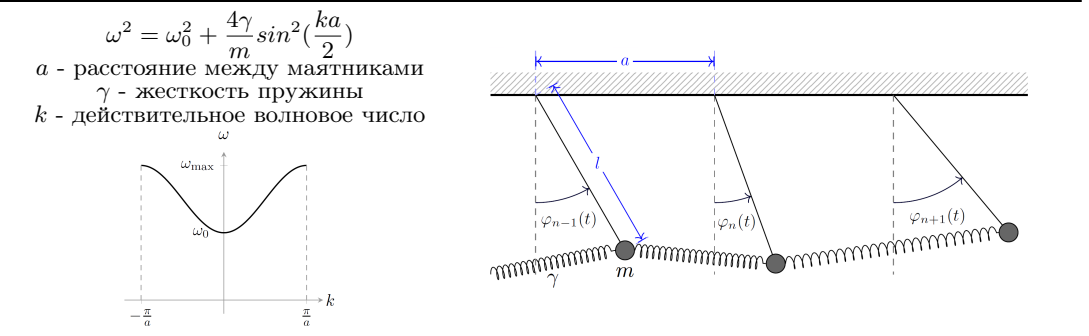
- * Источник энергии для компенсации диссипации — постоянен и находится внутри самой системы
- * Система содержит колебательную подсистему и активный нелинейный элемент
- * В изолированной колебательной системе происходят затухающие колебательные процессы, а активный элемент может усиливать колебания и их нелинейно ограничивать
- * Между колебательной подсистемой и активным элементом существует обратная связь, регулирующая поступление энергии от источника
- * Автоколебания в определенных пределах не зависят от начальных условий и определяются параметрами системы
- * Математическим образом периодических автоколебаний является предельной цикл

9 Бифуркационные сценарии рождения периодических движений динамических систем на плоскости

| Значение параметра | | $\mu < 0$ | $\mu = 0$ | $\mu > 0$ |
|--------------------|--|------------------|-----------|-----------|
| Бифуркация | | Фазовые портреты | | |
| I | Андронова-Хопфа | | | |
| | Двукратный предельный цикл (седло-узловая циклов) | | | |
| II | Петля сепаратрис седла (седловая гомоклиническая бифуркация) | | | |
| | Петля сепаратрис седло-узла (седло-узловая гомоклиническая бифуркация) | | | |

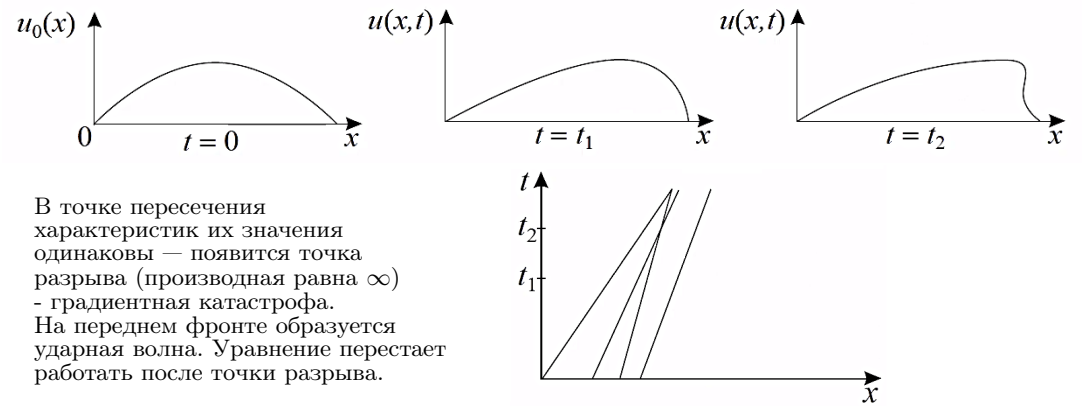
10 Дисперсия, ее физическая природа и проявления

Дисперсия — зависимость фазовой скорости волны от ее частоты. Связь между частотой и волновым числом гармонической волны определяется пространственными и временными масштабами среды и называется дисперсионным соотношением.



У каждой компоненты волнового пакета (суперпозиции двух и большего числа волн с различными частотами) будет своя V_{ϕ} , возникает его деформация. Наличием собственных масштабов объясняется эффект частичного непропускания волны
Область прозрачности: $k \in Re$ - распространение без искажения гармонической волны
Область непрозрачности: $k \in Im$ - нераспространение.

11 Простые волны. Основные свойства и условия существования
 $U_t + C(U)U_x = 0$ — нелинейное уравнение простой волны. $C(U)$ — дифференцируемая функция (скорость от состояния среды). Характеристики — линии, вдоль которых переменная $U(x, t)$ будет оставаться постоянной и равной по значению для каждого соответствующего значения x .



В точке пересечения характеристик их значения одинаковы — появится точка разрыва (производная равна ∞) - градиентная катастрофа. На переднем фронте образуется ударная волна. Уравнение перестает работать после точки разрыва.

Градиентная катастрофа наблюдается в нелинейных средах. При наличии в среде дисперсии и диссипации градиентная катастрофа наблюдаться не будет.

На переднем фронте если $\frac{dC}{dU} > 0$ (холмик справа), и на заднем, если $\frac{dC}{dU} < 0$

12 Параметрические системы. Основные свойства
Параметрические системы — системы, где внешнее воздействие находится внутри системы и может изменять ее параметры.
Резонансные. Период изменения параметров находится в целочисленном соотношении с периодом собственных колебаний. В такт с изменением энергии, соответствующей собственным колебаниям, вносится энергия, вызванная работой внешнего воздействия. При определенных условиях может привести к эффекту раскачки колебаний за счет накапливающейся в системе энергии. Пример - маятник с переменной длиной нити
Нерезонансные. Параметры изменяются очень быстро или очень медленно в сравнении с характерными временными масштабами изменения переменных системы.
Свойства.

1. Параметрическая система, находящаяся в начальный момент в состоянии равновесия, останется в этом состоянии при $t > 0$ (дергая за нитку, маятник нельзя раскачать)
2. Состояния равновесия параметрической системы могут быть как устойчивы, так и неустойчивы
3. Если параметры системы таковы, что она неустойчива и система выведена из состояния равновесия, то в ней возникают колебания, амплитуда которых $\uparrow exp$. Процесс возрастания размаха в колебаниях при периодическом нарастании колебаний — параметрический резонанс.

Явления.

- 1. Параметрический резонанс
- 2. Параметрические колебания - ограниченные колебания (периодические или квазипериодические)
- 3. Граница между параметрическим резонансом и параметрическими колебаниями неустойчива

Траектории системы порождают точечное линейное отображение через период (с помощью функции Флоке)

13 Релаксационные колебания

Имеем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \mu \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad 0 < \mu \ll 1$$

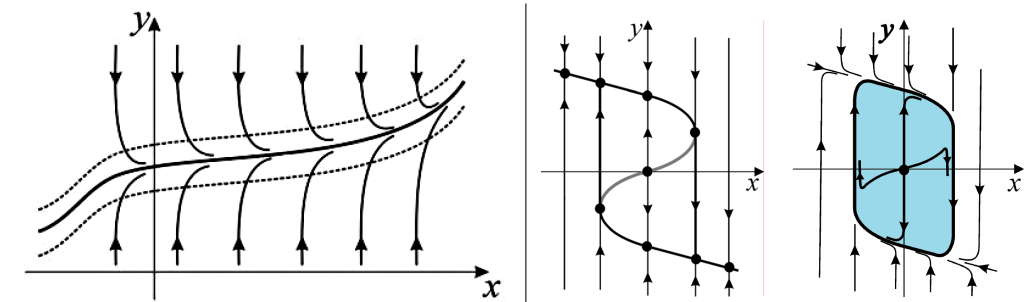
От расположения параметра μ в системе уравнений (либо около x , либо около y) зависит направление прямых на фазовом портрете. Если параметр расположен около x – прямые горизонтальные, если около y – вертикальные.

СМД:
$$\begin{cases} \mu \dot{x} = P(x, y) \\ 0 = Q(x, y) \end{cases}$$

- 1. Первое уравнение остается неизменным
- 2. Кладём параметр $\mu = 0$ – получаем 2-е уравнение. Затем, решая уравнение, находим точки пересечения с осью, после берём производную от полученного выше выражения, кладём её равной 0 и находим состояния равновесия.

СБД:
$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = P(x, y) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} Q(x, y) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial y} \mu \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \Rightarrow x = const \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{y} = \frac{1}{\mu} Q(x_0, y) \end{cases}$$

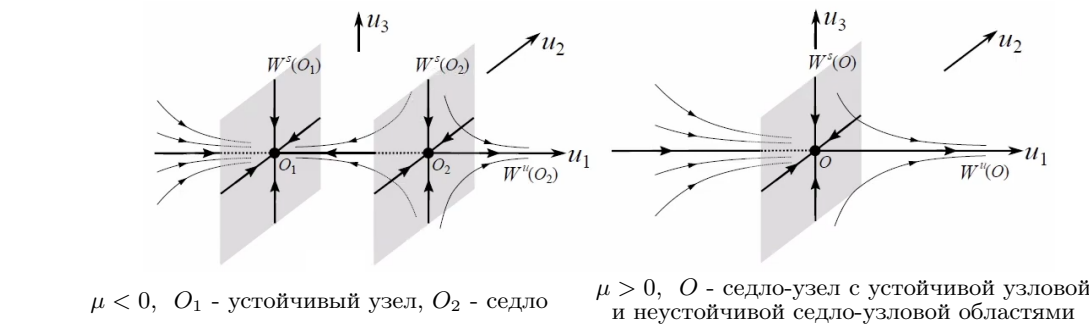
- 1. Делим уравнение с параметром на сам параметр – получаем 1-е уравнение
- 2. Делим одно уравнение исходной системы на второе и выявляем, что в данном случае является константой (например $x = x_0 = const$) – получаем 2-е уравнение.



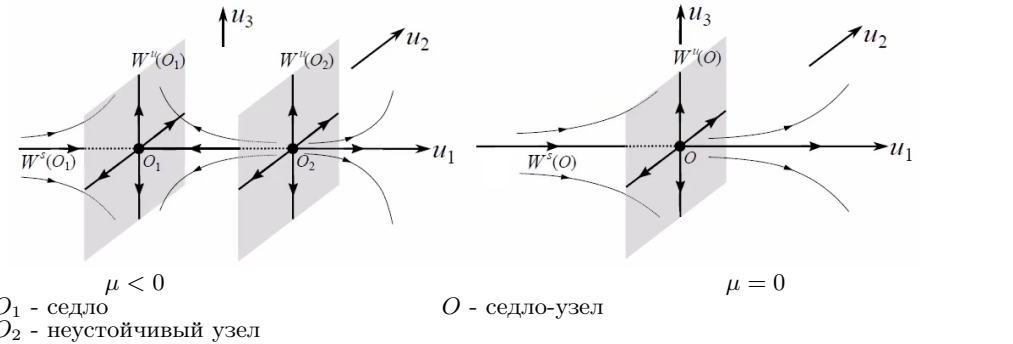
В ходе решения задачи мы переходим от двумерной системы к двум одномерным системам, что намного упрощает анализ исходной системы

14 Локальные бифуркации состояний равновесия трехмерных систем

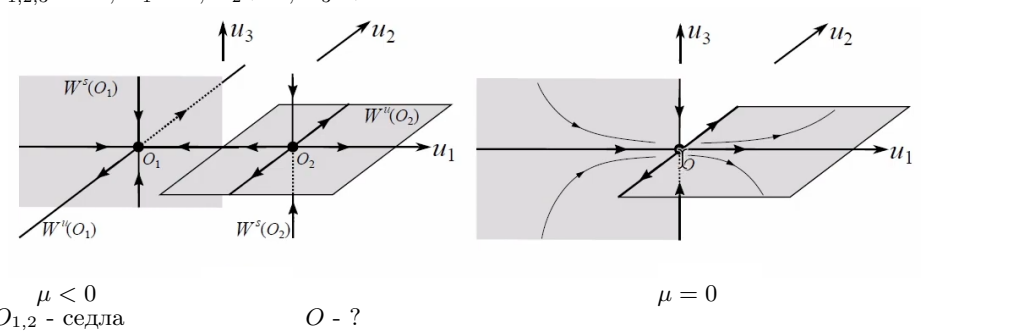
- 1. $\lambda_{1,2,3} - \text{Re}, \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} < 0$



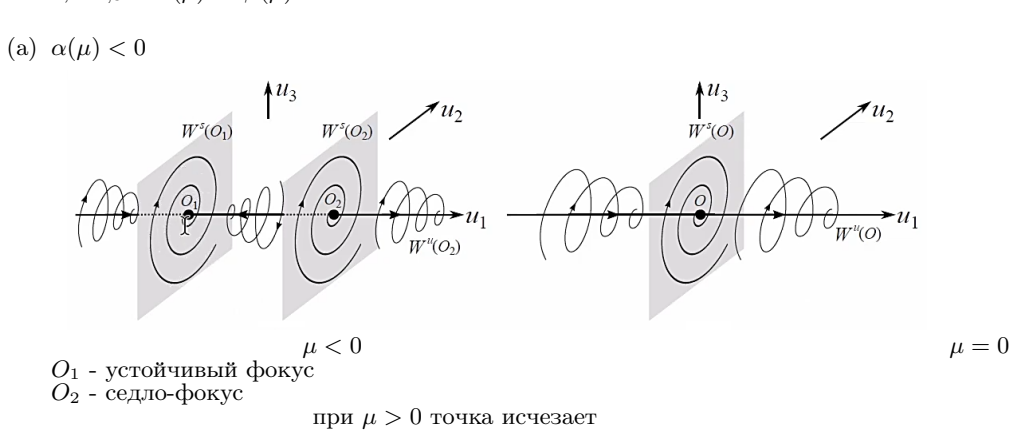
- 2. $\lambda_{1,2,3} - \text{Re}, \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} > 0$



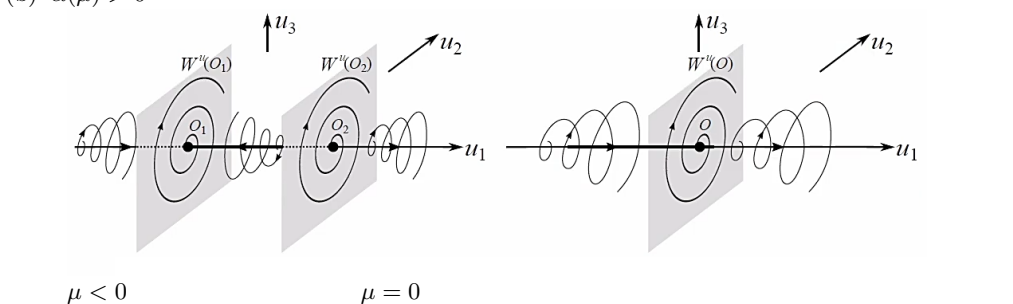
- 3. $\lambda_{1,2,3} - \text{Re}, \lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$



- 4. $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$

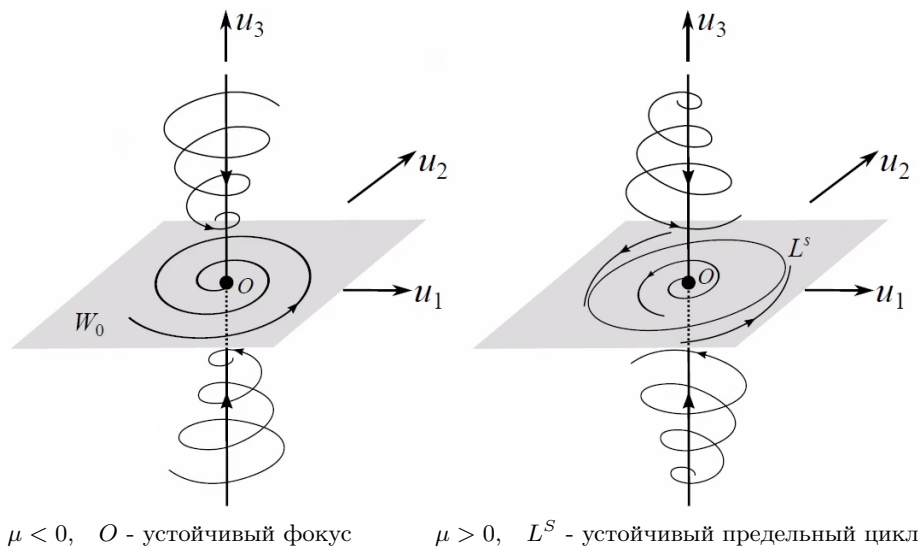


- (b) $\alpha(\mu) > 0$



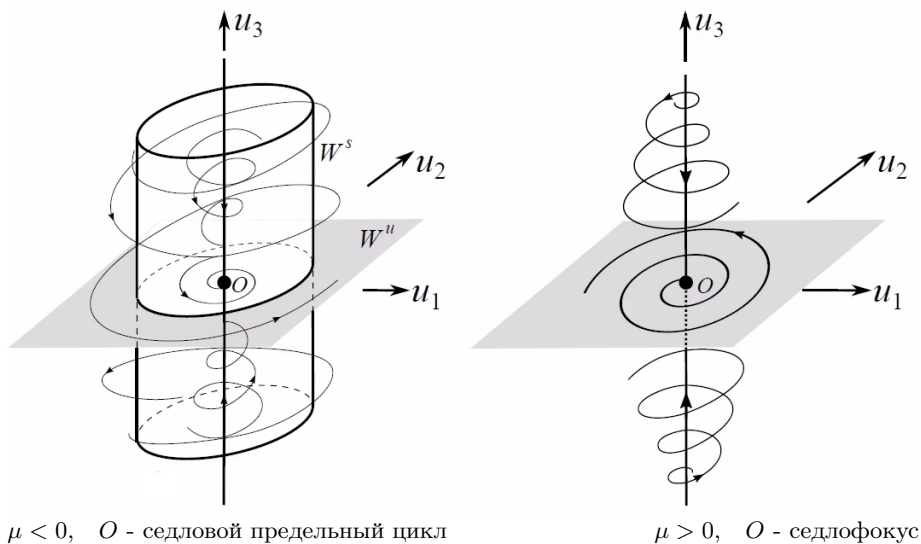
O_1 - седло-фокус, O_2 - устойчивый фокус. При $\mu > 0$ равновесие исчезает

5. Бифуркация Андронова Хопфа
 $L(\mu) < 0$ - суперкритическая бифуркация



При $\mu = 0$ - сложный фокус

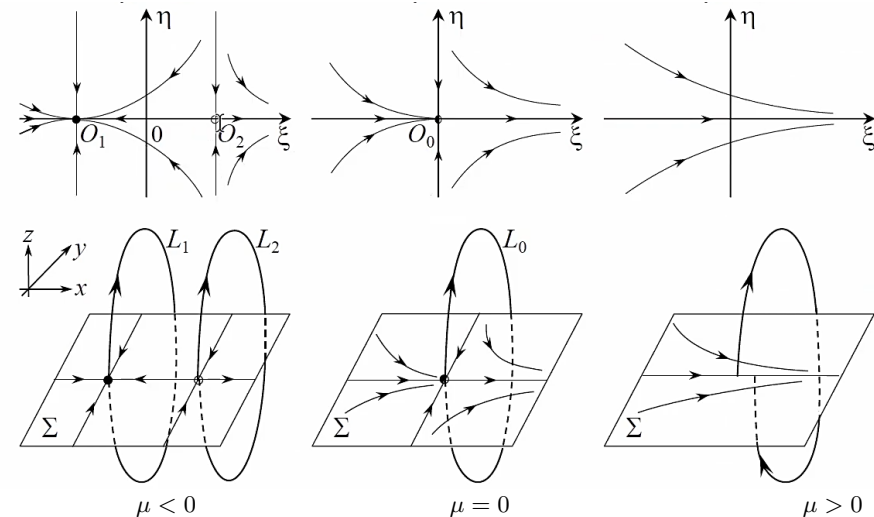
6. Субкритическая бифуркация
 $L(\mu) > 0$ - первая Ляпуновская величина



При $\mu = 0$ - сложный седлофокус

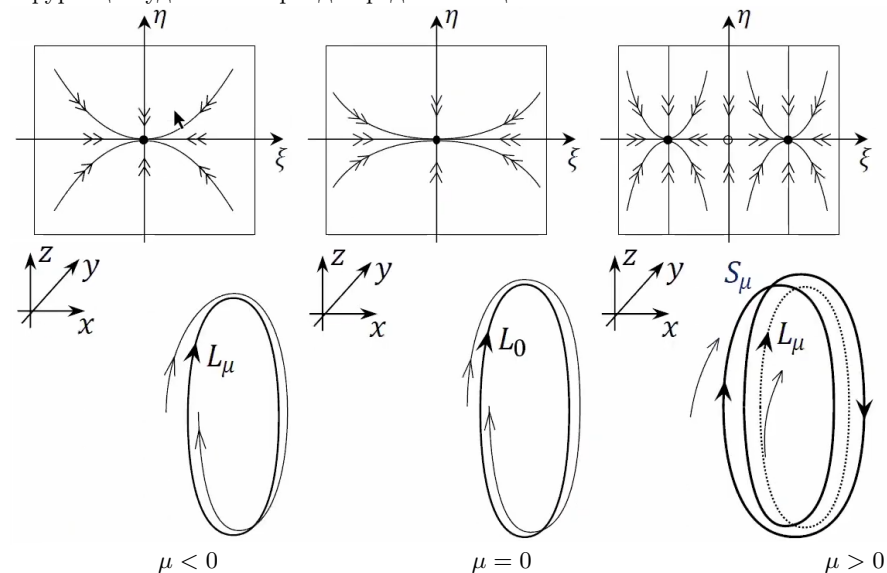
15 Локальные бифуркации периодических движений трехмерных систем

1. Седло-узловая бифуркация предельных усиков



В бифуркации образуется предельный цикл с мультипликаторами $S_x = 1$ - не грубый цикл, он либо распадается на 2 грубых, либо исчезает

2. Бифуркация удвоения периода предельных циклов



3. Бифуркация рождения инвариантного тора

