

## 1 Плоская монохроматическая волна

Волна — изменение состояния среды, распространяющееся в данной среде и переносящее с собой энергию. С понятием волны тесно связано понятие физического поля. Поле характеризуется некоторой функцией, определенной в заданной области пространства и времени. Изменение в пространстве и времени большинства полей представляют собой волновой процесс. Монохроматической волной называется волна, в которой поле зависит от времени  $t$

$U(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi)$ , где  $A$  - действительная амплитуда,  $\omega$  - циклическая частота,  $\varphi$  - начальная фаза,  $\vec{k}$  - заданный волновой вектор ( $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$ ),  $\theta = (\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi)$  - полная фаза поля

## 2 Волновое уравнение

$\Delta U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = 0$  - волновое уравнение без поглощения

$\Delta U - \beta \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = 0$  - волновое уравнение с поглощением

Описывает распространение волн различной природы в среде без диссипации.  $U$  - компонента электрического поля / магнитного поля / скорость / потенциал,  $c$  - имеет смысл фазовой скорости волны,  $\beta$  - коэффициент диссипации (учитывает, например, потери в вязкой среде или на нагрев)

Решение - в виде плоской монохроматической волны  $U = U_0 e^{(i\omega t - i\vec{k}\vec{r})}$ , если выполнено  $\frac{\omega^2}{k^2} = c^2$ .

## 3 Фазовая и групповая скорости

$\vec{V}_\Phi = \frac{\omega}{k^2} \vec{k} = \frac{\omega}{k} \vec{k}$  - фазовая скорость (скорость перемещения поверхности постоянной фазы)

$\vec{V}_{гр} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \Big|_{\vec{k}_0}$  - групповая скорость в точке  $\vec{k}_0$  (скорость перемещения огибающей квазимонохроматического волнового пакета);  $\vec{k}_0$  - несущий волновой вектор - максимум спектра квазимонохроматического сигнала.

матического сигнала.

## 4 Уравнение непрерывности и уравнение Эйлера

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$  - уравнение непрерывности (выражает закон сохранения массы)

$\vec{V}(\vec{r}, t)$  - поле скоростей среды,  $[\rho] = \left[ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$

$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} \right) = \vec{f} - \nabla p$  - уравн. Эйлера (движение идеал. жидкости в поле внешней силы)

$\rho$  - плотность жидкости,  $p$  - давление,  $\vec{V}$  - вектор скорости,  $\vec{f}$  - плотность объемной силы.

## 5 Скорость звука. Вектор Умова. Плотность энергии в звуковой волне

$\sqrt{\frac{\gamma k T_0}{m}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \Big|_{\rho_0} = C_s = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$  - адиабатическая скорость звука ( $V_\Phi$  для звуковой волны)

$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  - показатель адиабаты для идеального газа,  $T_0$  - равновесное значение температуры,

$M$  - молярная масса,  $R$  - универсальная газовая постоянная  $\left( 8.31 \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right] \right)$ ,  $k$  - постоянная

Больцмана ( $1.38 \cdot 10^{-23}$  [Дж · К])

$W = \frac{\rho_0 V^2}{2} + \frac{p_1^2}{2\rho_0^2}$  - плотность энергии звуковых волн СИ:  $\left[ \frac{\text{Дж}^2}{\text{м}^3} \right]$

$\rho_0$  - равновесное значение плотности,  $p_1$  - добавочное значение давления:  $p = p_0 + p_1$ ,  $\vec{V}$  - скорость распространения возмущения

$\vec{P} = p_1 \vec{V}$  - плотность потока энергии (вектор Умова) СИ:  $\left[ \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} \right] = \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]$

$P$  - количество энергии, переносимое акустической волной через единичную площадку, перпендикулярную направлению переноса энергии ( $\perp \vec{k}$  или  $\perp \vec{V}$ ) в единицу времени (закон сохранения энергии в дифференциальном виде). Направление вектора Умова - вдоль переноса энергии. Абсолютная величина  $p$  равна количеству энергии, переносимому за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению потока энергии.

## 6 Уравнение Ламэ

$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla \text{div} \vec{U} + \mu \Delta \vec{U}$  - уравнение движения физически бесконечно малого объема изотропного (движение в любых направлениях) упругого тела при малых деформациях  $\rho_0$  - плотность до деформации,  $\mu$  - модуль сдвига,  $\lambda = K - \frac{2}{3}\mu$  - коэффициент Ламэ,  $K$  - модуль всестороннего сжатия,  $\vec{U}(\vec{r}, t)$  - вектор смещения элемента сплошной среды при деформации,  $\mu$  и  $K$  - переобозначения модулей упругости Юнга и Пуассона.

## 7 Уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной формах

|   | Дифференциальная форма  | Интегральная форма   |
|---|---|--|
| 1 | $\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$                         | $\oint_L \vec{E} d\vec{L} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$                   |
| 2 | $\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ | $\oint_L \vec{H} d\vec{L} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S}$ |
| 3 | $\text{div} \vec{D} = 4\pi \rho$  | $\oint_S \vec{D} d\vec{s} = 4\pi Q$  |
| 4 | $\text{div} \vec{B} = 0$  | $\oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0$   |

1. Вихревое электрическое поле поражается переменным магнитным полем.
2. Вихревое магнитное поле порождается токами проводимости и переменным эл. полем.
3. Потенциальное электрическое поле порождается электрическими зарядами.
4. Магнитное поле имеет вихревой характер и не имеет сосредоточенных зарядов как ист. поля.

## 8 Граничные условия для векторов ЭМ поля

Для нормали из среды 1 в среду 2:

$$\left[ \vec{n}_{12} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \right] = 0 \quad \left| \quad \left( \vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \right) = 0 \right.$$

$$\left[ \vec{n}_{12} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \right] = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{пов}} \quad \left| \quad \left( \vec{n}_{12} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \right) = 4\pi \rho_{\text{пов}} \right.$$

## 9 Вектор Пойнтинга. Плотность энергии ЭМ поля в вакууме

$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div} \vec{S} = -(\vec{j} \vec{E})$  - теорема Пойнтинга

$W = \frac{1}{8\pi} (\mathcal{E} E^2 + \mu H^2)$  - плотность энергии ЭМ поля СИ:  $\left[ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right]$

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$  - плотность потока энергии СИ:  $\left[ \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} \right] = \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]$

$|S|$  - энергия, переносимая ЭМ волной через единичную площадку ( $\perp S$ ) в единицу времени.

## 10 Основные параметры плазмы (плазменная частота и дебаевский радиус)

$r_{De} = \sqrt{\frac{kT_e T_i}{4\pi N e^2 (T_e + T_i)}} = \sqrt{\frac{kT}{4\pi N e^2}}$  - расстояние, за которое волна спадет в  $e$  раз при прохождении через плазму / расстояние, которое проходит  $\vec{e}$  в плазме за время, порядка  $\tau_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$

$T_e$  - температура электронного газа,  $T_i$  - температура ионного газа,  $N$ ,  $e$  и  $m$  - концентрация электронов, заряд и масса соответственно,  $k$  - постоянная Больцмана

$\omega_p = \frac{4\pi e^2 N}{m}$  - плазменная частота СИ, СИ:  $\left[ \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$

Это частота собственных продольных колебаний пространственного заряда в однородной плазме в отсутствие магнитного поля.

## 11 Комплексная диэлектрическая проницаемость холодной изотропной плазмы

Диэлектрическая проницаемость показывает, во сколько раз сила взаимодействия двух электрических зарядов в конкретной среде меньше, чем в вакууме, для которого она равна 1

$\mathcal{E}(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - i\nu_e)}$ , где комплексная составляющая отвечает за усиление или затухание волны.

Вводятся абсолютная ( $\mathcal{E}_a$ ) и относительная ( $\mathcal{E}_r$ ) проницаемости. Величина  $\mathcal{E}_r$  безразмерна, а  $\mathcal{E}_a$

по размерности совпадает с электрической постоянной  $\mathcal{E}_0$  - СИ:  $\left[ \frac{\text{фарад}}{\text{м}} \right]$

Эта величина связывает напряженность и индукцию поля:  $D = \mathcal{E} E$ .