Базовые понятия
Фазовое пространство — совокупность всех начальных точек X или всех возможных состояний системы. Фазовая траектория — кривая в фазовом пространстве, составленная из точек, представляющих состояние динамической системы в последовательные моменты времени в течение всего времени эволюции.
Эволюция системы соответствует движению изображающей точки у фазовой плоскости вдоль траектории $\Gamma = \bigcup_t G^t X_0$. Для динамической системы с непрерывным временем траектории— непрерывные кривые для динамической системы с дискретным временем, траектория— дискретные, подмножество фазовой плоскости.
Динамическая система с непрерывным временем задается системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = F(x)$. Она позволяет найти состояние в любой момент времени по начальному состоянию. Если правая часть явно от времени не зависит, то динамическая система - автономная, иначе - не автономная.
Динамическая система с дискретным временем: $x(n+1) = F(x(n))$.

1 Определение динамической системы

Свойства.Состояние системы не изменяется самопроизвольно тождественный оператор.Система приходит финальное состояние как за, так и за последовательной интервалы.

2 Условия грубости динамических систем на плоскости

Так как динамические системы изменяются вместе со входящими в них параметрами, но при малости изменений качественные черты поведения сохраняются, вводится свойства грубости.
Грубость — устойчивость структуры разбиения фазовой плоскости динамических систем на траектории по отношению к малым изменениям динамической системы.
Для плоскости: пусть есть система:
$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases}$$
где P и Q - гладкие функции, система диссипативна.
Система — грубая, если существует число $\delta > 0$, что все динамические системы вида:
$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) + p(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) + q(x,y) \end{cases}$$
в которых аналитические функции удовлетворяют условию $|p(x,y)| + |q(x,y)| + \left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial p}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right| < \delta$, имеют такую же структуру разбиения на положительные полутраектории, что и начальная система.
Переход от одной грубой ДС к другой происходит через негрубую ДС.
ДС на прямой устойчива (структурно грубая), если для всех состоянии равновесия $\lambda_i(\mu) \neq 0$.

3 Бифуркация состояний равновесия динамических систем на прямой

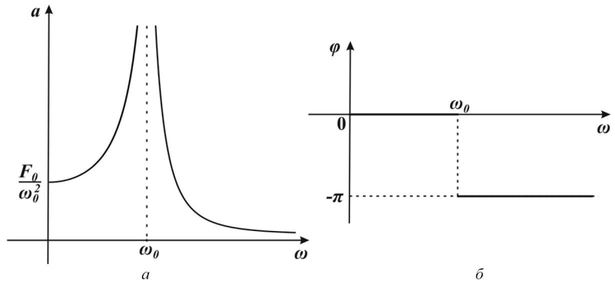
Значение параметра, при котором ДС является негрубой, называется бифуркационным.

4 Метод линеаризации определения устойчивости состояний равновесия

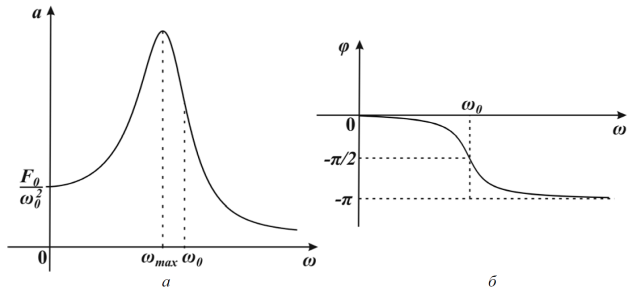
5 Линейный осциллятор. Основные свойства

6 Резонанс в линейном осцилляторе

Резонанс — неограниченное возрастание амплитуды вынужденных колебаний, когда частота внешней силы близка к собственной частоте, линейного осциллятора.
1. Консервативный случай (без потери энергии)
W - не диссипирует. $a = \frac{F_0}{|{\omega_0}^2 - \omega^2|}$ - амплитуда вынужденных колебаний переменной x(t).
При резонансе измерение переменных во времени - непереодическое: $x(t) = t\frac{F_0}{2\omega_0} sin(\omega_0 t)$



2. Диссипативный случай (с потерями энергии)
$a_{max} \to \omega_{max} < \omega_0, \quad \omega_{max} = sqrt({\omega_0}^2 - 2\delta^2), \quad a_{max} = \frac{F_0}{2\delta sqrt({\omega_0}^2 - 2\delta^2)}, \quad \delta \uparrow a_{max} \downarrow$



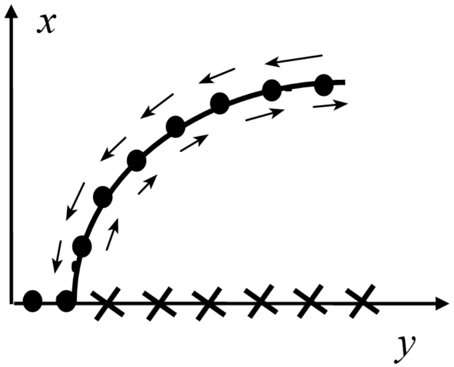
Характеристики резонансных свойств
Добротность - $Q = \frac{\pi}{d} = \frac{\omega_0}{2\delta}$
Логарифмический коэффициент затухания - $d = \delta T = \frac{2\pi\delta}{\omega}$

7 Определение предельного цикла. Характеристики

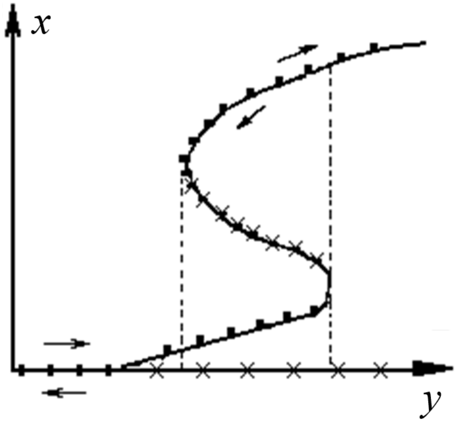
Предельный цикл — замкнутая изолированная фазовая траектория. Замкнутая фазовая траектория называется изолированный, если существует достаточно малое кольцеобразная окрестность этой траектории, внутри которой нет других замкнутых траекторий.
Предельному циклу соответствует периодический процесс.

8 Автоколебания и автоколебательная система. Мягкий и жесткий режимы возбуждения

Автоколебательная система — диссипативная система, совершающая незатухающие колебания при отсутствии колебательного воздействия извне. В этих системах возникает баланс между действиями диссипативных потерь и внутренних механизмов, компенсирующих потери. Автоколебания — незатухающие колебания в нелинейной диссипативной системе, форма и свойства которых в определенных пределах не зависит от начальных условий и определяется параметрами самой системы.
1. Мягкий режим
$\gamma < 0$ - автоколебаний нет, $\gamma = 0$ - суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа ($\lambda_i < 0$),
$\gamma > 0$ - неустойчивое состояние равновесия + появление одного устойчивого предельного цикла на фазовой плоскости. $\gamma \uparrow A \uparrow$



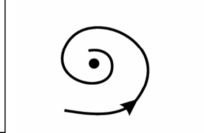
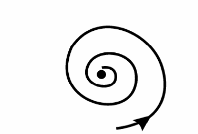
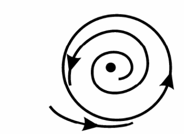
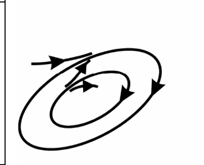
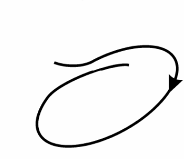
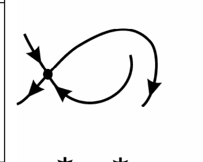
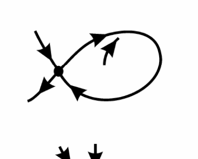
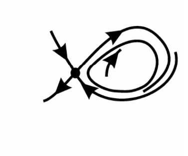
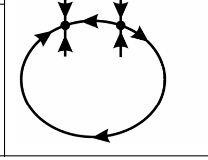
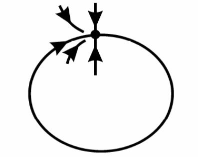
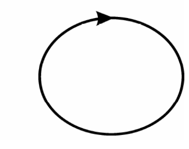
Состояние равновесия $\gamma = 0$ - безопасная граница устойчивости, то есть при ее нарушении система переходят в качественно новое состояние, но не покидает при $0 < \gamma \ll 1$ окрестности предыдущего состояния. 2. Жесткий режим



Свойства автоколебательных систем

※ Источник энергии для компенсации диссипации — постоянен и находится внутри самой системы
※ Система содержит колебательную подсистему и активный нелинейный элемент
※ В изолированной колебательной системе происходят затухающие колебательные процессы, а активный элемент может усиливать колебания и их нелинейно ограничивать
※ Между колебательной подсистемой активным элементом существует обратная связь, регулирующая поступление энергии от источника
※ Автоколебания в определенных пределах не зависят от начальных условиях и определяются параметрами системы
※ Математическим образом периодических автоколебаний является предельной цикл

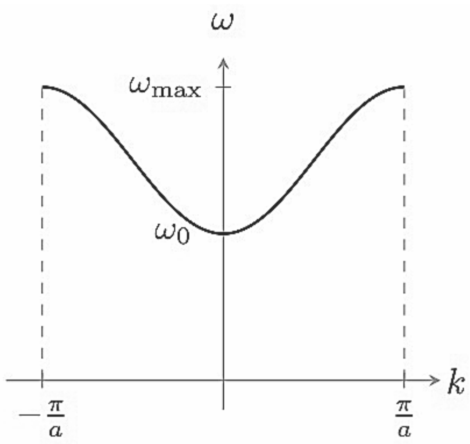
9 Бифуркационные сценарии рождения периодических движений динамических систем на плоскости

Значение параметра / Бифуркация		$\mu < 0$	$\mu = 0$	$\mu > 0$
		Фазовые портреты		
I	Андронова-Хопфа			
I	Двукратный предельный цикл (седло-узловая циклов)			
II	Петля сепаратрис седла (седловая гомоклиническая бифуркация)			
II	Петля сепаратрис седло-узла (седло-узловая гомоклиническая бифуркация)			

10 Дисперсия, ее физическая природа и проявления

Дисперсия — зависимость фазовой скорости волны от ее частоты. Связь между частотой и волновым числом гармонической волны определяется пространственными и временными масштабами среды и называется дисперсионным соотношением.

$\omega^2 = {\omega_0}^2 + \frac{4\gamma}{m} sin^2(\frac{ka}{A})$
a - расстояние между маятниками
γ - жесткость пружины
k - действительное волновое число



У каждой компоненты волнового пакета будет своя $V_{ф}$, возникает его деформация. Наличием собственных масштабов объясняется эффект частичного непропускания волны
Область прозрачности: $k \in Re$ - распространение без искажения гармонической волны
Область непрозрачности: $k \in Im$ - нераспространение.

11 Простые волны. Основные свойства и условия существования

$U_t + C(U)U_x = 0$ — нелинейное уравнение простой волны. $C(U)$ — дифференцируемая функция (скорость от состояния среды). Характеристики — линии, вдоль которых переменная $U(x, t)$ будет оставаться постоянной и равной по значению для каждого соответствующего значения x. В точке пересечения характеристик их значения одинаковы — появится точка разрыва (производная равна $infty$) - градиентная катастрофа. На переднем фронте образуется ударная волна. Уравнение перестает работать после точки разрыва.

12 Параметрические системы. Основные свойства

Параметрически системы — системы, где внешнее воздействие находится внутри системы и может изменять ее параметры.

Резонансные. Период изменения параметров находится в целочисленном соотношении с периодом собственных колебаний. В такт с изменением энергии, соответствующей собственным колебаниям, вносится энергия, вызванная работой внешнего воздействия. При определенных условиях может привести к эффекту раскачки колебаний за счет накапливающейся в системе энергии.

Нерезонансные. Параметры изменяются очень быстро или очень медленно в сравнении с характерными временными масштабами изменения переменных системы.

Свойства.

1. Параметрическая система, находящаяся в начальный момент в состоянии равновесия, останется в этом состоянии при $t > 0$ (дергая за нитку, маятник нельзя раскачать)
2. Состояния равновесия параметрической системы могут быть как устойчивы, так и неустойчивы
3. Если параметры системы таковы, что она неустойчива и система выведена из состояния равновесия, то в ней возникают колебания, амплитуда которых $\uparrow exp$. Процесс возрастания размаха в колебаний при периодическом нарастании колебаний — параметрический резонанс.

13 Релаксационные колебания

14 Локальные бифуркации состояний равновесия трехмерных систем

15 Локальные бифуркации периодических движений трехмерных систем