

1 Плоская монохроматическая волна

Волна — изменение состояния среды, распространяющееся в данной среде и переносящее с собой энергию. С понятием волны тесно связано понятие физического поля. Поле характеризуется некоторой функцией, определенной в заданной области пространства и времени. Изменение в пространстве и времени большинства полей представляют собой волновой процесс.

Монохроматической волной называется волна, в которой поле зависит от времени t

$U(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi)$, где A - действительная амплитуда, ω - циклическая частота, φ - начальная фаза, \vec{k} - заданный волновой вектор ($\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$), $\theta = (\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi)$ - полная фаза поля

2 Волновое уравнение

$\Delta U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = 0$ - волновое уравнение без поглощения

$\Delta U - \beta \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = 0$ - волновое уравнение с поглощением

Описывает распространение волн различной природы в среде без диссипации. U - компонента электрического поля / магнитного поля / скорость / потенциал, c - имеет смысл фазовой скорости волны, β - коэффициент диссипации (учитывает, например, потери в вязкой среде или на нагрев)

Решение - в виде плоской монохроматической волны $U = U_0 e^{(i\omega t - i\vec{k}\vec{r})}$, если выполнено $\frac{\omega^2}{k^2} = c^2$.

3 Фазовая и групповая скорости

$\vec{V}_\phi = \frac{\omega}{k^2} \vec{k} = \frac{\omega}{k}$ - фазовая скорость (скорость перемещения поверхности постоянной фазы)

$\vec{V}_{\text{гп}} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \right|_{\vec{k}_0}$ - групповая скорость в точке \vec{k}_0 (скорость перемещения огибающей квазимонохроматического волнового пакета); \vec{k}_0 - несущий волновой вектор - максимум спектра квазимонохроматического сигнала.

4 Уравнение непрерывности и уравнение Эйлера

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$ - уравнение непрерывности (выражает закон сохранения массы)

$\vec{V}(\vec{r}, t)$ - поле скоростей среды, $[\rho] = \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$

$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} \right) = \vec{f} - \nabla p$ - уравн. Эйлера (движение идеал. жидкости в поле внешней силы)

ρ - плотность жидкости, p - давление, \vec{V} - вектор скорости, \vec{f} - плотность объемной силы.

5 Скорость звука. Вектор Умова. Плотность энергии в звуковой волне

$\sqrt{\frac{\gamma k T_0}{m}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \Big|_{\rho_0} = C_s = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$ - адиабатическая скорость звука (V_ϕ для звуковой волны)

$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ - показатель адиабаты для идеального газа, T_0 - равновесное значение температуры, M - молярная масса, R - универсальная газовая постоянная ($8.31 \left[\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right]$), k - постоянная Больцмана

($1.38 \cdot 10^{-23} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{К}} \right]$)

$W = \frac{\rho_0 V^2}{2} + \frac{p_1^2}{2\rho_0 C_s^2}$ - плотность энергии звуковых волн СИ: $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right]$

ρ_0 - равновесное значение плотности, p_1 - добавочное значение давления: $p = p_0 + p_1$, \vec{V} - скорость распространения возмущения

$\vec{\Pi} = p_1 \vec{V}$ - плотность потока энергии (вектор Умова) СИ: $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} \right] = \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]$

Π - количество энергии, переносимое акустической волной через единичную площадку, перпендикулярную направлению переноса энергии ($\perp \vec{k}$ или $\perp \vec{V}$) в единицу времени (закон сохранения энергии в дифференциальном виде). Направление вектора Умова - вдоль переноса энергии. Абсолютная величина p равна количеству энергии, переносимому за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению потока энергии.

6 Уравнение Ламэ

$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla \text{div} \vec{U} + \mu \Delta \vec{U}$ - уравнение движения физически бесконечно малого объема изотропного (движение в любых направлениях) упругого тела при малых деформациях

ρ_0 - плотность до деформации, μ - модуль сдвига, $\lambda = K - \frac{2}{3}\mu$ - коэффициент Ламэ, K - модуль всестороннего сжатия, $\vec{U}(\vec{r}, t)$ - вектор смещения элемента сплошной среды при деформации, μ и K - переобозначения модулей упругости Юнга и Пуассона.

7 Уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной формах

	Дифференциальная форма	Интегральная форма
1	$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\Rightarrow \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$
2	$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\Rightarrow \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S}$
3	$\text{div} \vec{D} = 4\pi \rho$	$\Rightarrow \oint_S \vec{D} d\vec{S} = 4\pi Q$
4	$\text{div} \vec{B} = 0$	$\Rightarrow \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$

1. Вихревое электрическое поле поражается переменным магнитным полем.
2. Вихревое магнитное поле порождается токами проводимости и переменным эл. полем.
3. Потенциальное электрическое поле порождается электрическими зарядами.
4. Магнитное поле имеет вихревой характер и не имеет сосредоточенных зарядов как источников поля.

8 Граничные условия для векторов ЭМ поля

Для нормали из среды 1 в среду 2:

$$\left[\vec{n}_{12} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \right] = 0 \quad \left[\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \right] = 0$$

$$\left[\vec{n}_{12} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \right] = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{пов}} \quad \left[\vec{n}_{12} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \right] = 4\pi \rho_{\text{пов}}$$

9 Вектор Пойнтинга. Плотность энергии ЭМ поля в вакууме

$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div} \vec{S} = -(\vec{j} \vec{E})$ - теорема Пойнтинга

$W = \frac{1}{8\pi} (\mathcal{E} E^2 + \mu H^2)$ - плотность энергии ЭМ поля СИ: $\left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3} \right]$ СИ: $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right]$

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$ - плотность потока энергии СИ: $\left[\frac{\text{эрг}}{\text{с} \cdot \text{см}^2} \right]$ СИ: $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} \right] = \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]$

$|S|$ - энергия, переносимая ЭМ волной через единичную площадку ($\perp S$) в единицу времени.

10 Основные параметры плазмы (плазменная частота и дебаевский радиус)

$r_{De} = \sqrt{\frac{k T_e T_i}{4\pi N e^2 (T_e + T_i)}} = \sqrt{\frac{k T}{4\pi N e^2}}$ - расстояние, за которое волна спадет в e раз при прохождении через плазму / расстояние, которое проходит \vec{e} в плазме за время, порядка $\tau_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$

T_e - температура электронного газа, T_i - температура ионного газа, N , e и m - концентрация электронов, заряд и масса соответственно, k - постоянная Больцмана

$\omega_p = \frac{4\pi e^2 N}{m}$ - плазменная частота СИ, СИ: $\left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$

Это частота собственных продольных колебаний пространственного заряда в однородной плазме в отсутствие магнитного поля.

11 Комплексная диэлектрическая проницаемость холодной изотропной плазмы

Диэлектрическая проницаемость показывает, во сколько раз сила взаимодействия двух электрических зарядов в конкретной среде меньше, чем в вакууме, для которого она равна 1

$\mathcal{E}(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - i\nu_e)}$, где ν_e - частота соударений электронов. Эта величина связывает напряженность и индукцию поля: $D = \mathcal{E} E$, комплексная ее составляющая отвечает за усиление или затухание волны. Вводятся абсолютная (\mathcal{E}_a) и относительная (\mathcal{E}_r) проницаемости. Величина \mathcal{E}_r безразмерна, а \mathcal{E}_a по размерности совпадает с электрической постоянной \mathcal{E}_0 - СИ: $\left[\frac{\text{фарад}}{\text{м}} \right]$