

### Базовые понятия

Фазовое пространство — совокупность всех начальных точек  $X$  или всех возможных состояний системы. Фазовая траектория — кривая в фазовом пространстве, составленная из точек, представляющих состояние динамической системы в последовательные моменты времени в течение всего времени эволюции.

Эволюция системы соответствует движению изображающей точки  $y$  фазовой плоскости вдоль траектории  $\Gamma = \bigcup_t G^t X_0$ . Для динамической системы с непрерывным временем траектории — непрерывные кривые для динамической системы с дискретным временем, траектория — дискретные, подмножество фазовой плоскости.

Динамическая система с непрерывным временем задается системой дифференциальных уравнений  $\dot{x} = F(x)$ . Она позволяет найти состояние в любой момент времени по начальному состоянию. Если правая часть явно от времени не зависит, то динамическая система — автономная, иначе — не автономная.

Динамическая система с дискретным временем:  $x(n+1) = F(x(n))$ .

### 1 Определение динамической системы

Рассмотрим систему, состояние которой определяется вектором  $x(t) \in R^n$ . Предположим, что эволюция системы определяется одно-параметрическим семейством операторов  $G^t, t \in R$  или  $t \in Z$ , таких, что состояние системы в момент  $t$ :  $x(t, x_0 = G^t x_0)$  где  $x_0$  — начальное состояние (начальная точка). Предположим также, что эволюционные операторы удовлетворяют двум следующим свойствам, отражающим детерминистический характер описываемых процессов.

Первое свойство:  $G^0$  — тождественный оператор, т.е.  $x(0, x_0) = x_0$ , для любых  $x_0$ . Это свойство означает, что состояние системы не может изменяться самопроизвольно.

Второе свойство эволюционных операторов имеет вид:  $x(t_1 + t_2, x_0) = x(t_1, x(t_2, x_0)) = x(t_2, x(t_1, x_0))$  Согласно ему, система приходит в одно и то же финальное состояние независимо от того, достигается ли оно за один временной интервал  $t_1 + t_2$ , или за несколько последовательных интервалов  $t_1$  и  $t_2$ , суммарно равных  $t_1 + t_2$ .

Совокупность всех начальных точек или всех возможных состояний системы называется фазовым пространством, а пара  $(X, G^t)$ , где семейство эволюционных операторов удовлетворяют условиям выше — динамической системой (ДС).

Иначе говоря, динамическая система — объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния, как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задан закон эволюции начального состояния с течением времени. По этому закону можно прогнозировать будущее состояние динамической системы.

### 2 Условия грубости динамических систем на плоскости

Так как динамические системы изменяются вместе со входящими в них параметрами, но при малости изменений качественные черты поведения сохраняются, вводится свойства грубости. Грубость — устойчивость структуры разбиения фазовой плоскости динамических систем на траектории по отношению к малым изменениям динамической системы.

Для плоскости: пусть есть система:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad \text{где } P \text{ и } Q - \text{гладкие функции, система диссипативна.}$$

Система — грубая, если существует число  $\delta > 0$ , что все динамические системы вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) + p(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) + q(x, y) \end{cases}$$

в которых аналитические функции удовлетворяют условию

$$|p(x, y)| + |q(x, y)| + \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial p}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| < \delta,$$

имеют такую же структуру разбиения на положительные полутраектории, что и начальная система.

Переход от одной грубой ДС к другой происходит через негрубую ДС.

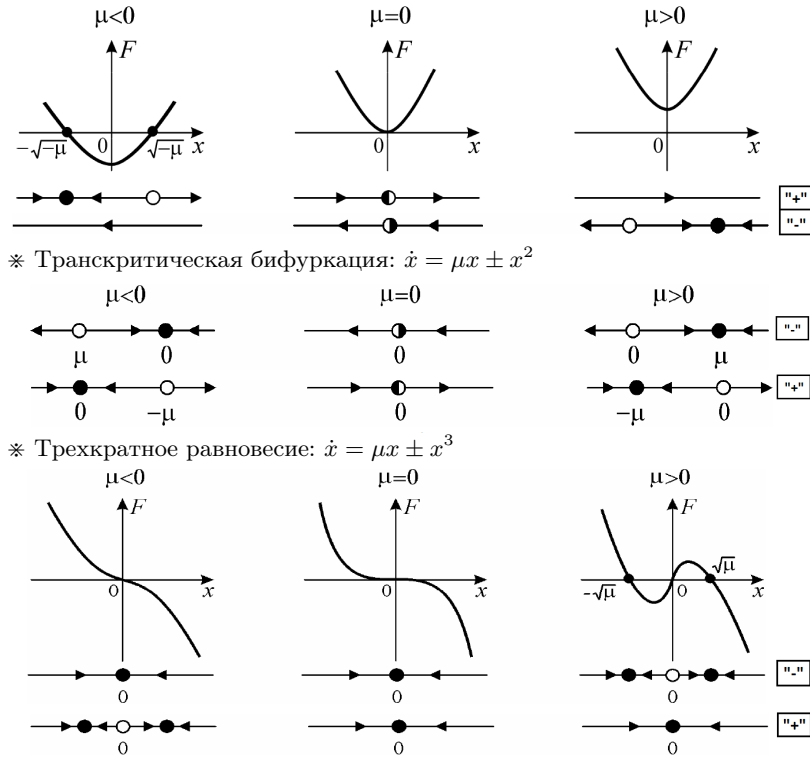
ДС на прямой грубая (структурно устойчива), если для всех состояний равновесия  $\lambda_i(\mu) \neq 0$ .

### 3 Бифуркация состояний равновесия динамических систем на прямой

Значение параметра, при котором ДС является негрубой, называется бифуркационным.

Пусть есть динамическая система на прямой общего вида  $\dot{x} = F(x, \mu)$ .  $F(x)$  — взаимнооднозначная, обеспечивающая выполнение теорем существования и единственности решений. Тогда состояния равновесия будут определяться как  $F(x, \mu) = 0$

\* Двукратное равновесие:  $\dot{x} = \mu \pm x^2$



\* Транскритическая бифуркация:  $\dot{x} = \mu x \pm x^2$

\* Трехкратное равновесие:  $\dot{x} = \mu x \pm x^3$

### 4 Метод линеаризации определения устойчивости состояний равновесия

Рассматриваем систему  $n$ -ого порядка:  $\dot{x} = F(x), x \in R^n, F(x)$  — гладкая вектор-функция. Пусть система имеет состояние равновесия  $x = x^*$

Введем малое возмущение  $\xi(t) = x(t) - x^*$ , тогда система примет вид  $\dot{\xi} = F(x^* + \xi)$ . Разложим правую часть в ряд Тейлора:  $\dot{\xi} = A\xi + \dots$ , где  $A - n \times n$  — матрица Якоби с элементами  $a_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \big|_{x=x^*}$ , и отбросим все нелинейные по  $\xi$  слагаемые. Этим мы линеаризовали систему.

Решения ищем в виде  $\xi = C e^{\lambda t}$ ,  $C$  — матрица-столбец. Подставив это решение в линеаризованное уравнение мы перейдем к системе линейных однородных уравнений, которая имеет нетривиальное решение, если  $\det(A - \lambda E) = 0$ . Это уравнение эквивалентно  $a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$  — характеристическому уравнению. Его корни — характеристические показатели состояния равновесия  $x = x^*$

1. Все корни имеют отрицательные вещественные части ( $Re \lambda_i < 0$ ) — состояние равновесия системы асимптотически устойчиво

2. Среди корней есть хотя бы один корень с  $Re > 0$  — состояние равновесия неустойчиво по Ляпунову

3. Среди корней нет значений с  $Re > 0$ , но есть корень с  $Re = 0$  — состояние равновесия может быть как устойчивым, так и неустойчивым

### 5 Линейный осциллятор. Основные свойства

Осциллятор — простейшая динамическая система с двумерным фазовым портретом

$$\text{Уравнение ЛО: } \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad 2\delta = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$\delta$  — потери,  $\omega_0$  — частота собственных колебаний

#### 1. Без потери энергии

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases} \quad \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$

Состояние равновесия в начале координат — центр

**Свойства:**

\* Гармонические колебания происходят с частотой  $\omega_0$ , амплитудой  $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{y_0^2}{\omega_0^2}}$  и фазой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_0 x_0}{\dot{x}_0} \quad (x_0 \text{ и } y_0 - \text{значения в момент } T)$$

\* Колебания изохронны - не зависят от начальных условий

\* Энергия системы сохраняется

**2. С потерями энергии ( $\delta \neq 0$ )**

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\delta y - \omega_0^2 x \end{cases} \quad \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 - \text{характеристическое ур-е}$$

\* Затухающий процесс ( $\delta > 0, \delta^2 < \omega_0^2$ ):

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega$$

Состояние равновесия - устойчивый фокус, затухающие колебания с изоклиной - экспонентой

\* Затухающий аperiодический процесс ( $\delta > 0, \delta^2 > \omega_0^2$ ):

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad \text{состояние равновесия - устойчивый узел}$$

\* Отрицательное затухание ( $\delta < 0$ ): энергия растет во времени, состояние равновесия - неустойчивый фокус при  $\delta^2 < \omega_0^2$  или неустойчивый узел при  $\delta^2 \geq \omega_0^2$

**6 Резонанс в линейном осцилляторе**

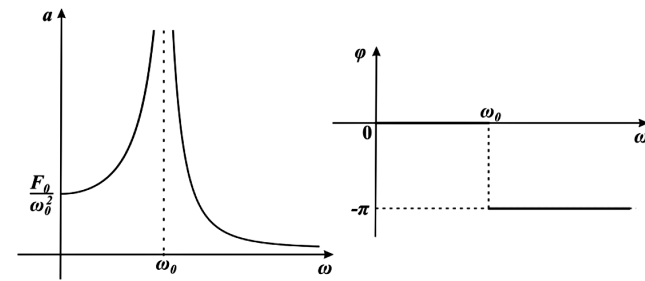
Резонанс — неограниченное возрастание амплитуды вынужденных колебаний, когда частота внешней силы близка к собственной частоте линейного осциллятора. Вынужденные колебания — это колебания, возникающие в результате действия на систему внешнего (силового) воздействия. Характерной особенностью вынужденных колебаний является то, что их свойства зависят не только от параметров системы, но и от параметров внешней силы.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\delta y - \omega_0^2 x + F_0 \cos(\omega t) \end{cases} - \text{ЛО, на который действует гармоническая сила}$$

**1. Консервативный случай (без потери энергии)**

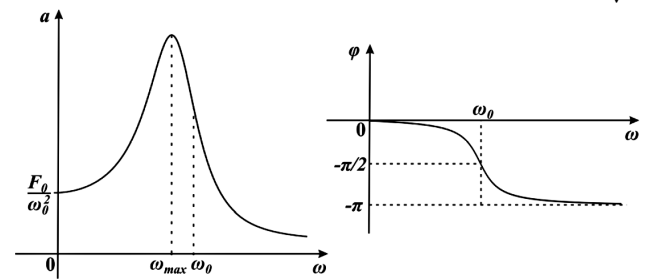
$W$  - не диссипирует.  $a = \frac{F_0}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$  - амплитуда вынужденных колебаний переменной  $x(t)$ .

При резонансе изменение переменных во времени - непериодическое:  $x(t) = t \frac{F_0}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t)$



**2. Диссипативный случай (с потерями энергии)**

$$a_{\max} \rightarrow \omega_{\max} < \omega_0, \quad \omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \quad a_{\max} = \frac{F_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}, \quad \delta \uparrow a_{\max} \downarrow$$



**Характеристики резонансных свойств**

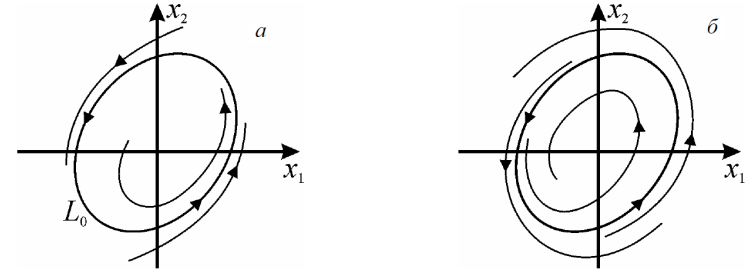
$$\text{Добротность} - Q = \frac{\pi}{d} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

$$\text{Логарифмический коэффициент затухания} - d = \delta T = \frac{2\pi\delta}{\omega}$$

**7 Определение предельного цикла. Характеристики**

Предельный цикл — замкнутая изолированная фазовая траектория. Замкнутая фазовая траектория называется изолированной, если существует достаточно малая кольцеобразная окрестность этой траектории, внутри которой нет других замкнутых траекторий.

Предельному циклу соответствует периодический процесс.



Предельные циклы: устойчивый (а); неустойчивый (б).

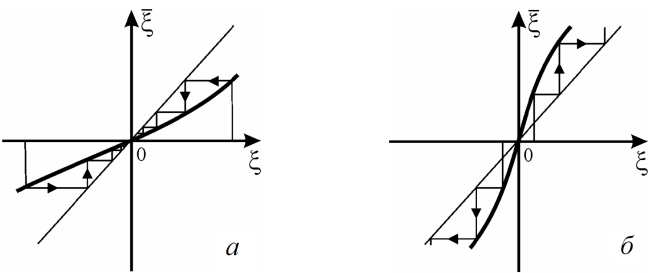
**Характеристики:**

\* Мультипликатор:  $S < 1$  - ПЦ устойчивый,  $S > 1$  - ПЦ неустойчивый. Всегда  $S > 0$

\* Характеристический показатель:  $\lambda < 0$  - ПЦ устойчивый,  $\lambda > 0$  - ПЦ неустойчивый.  $\lambda$  можем получить в уравнении при линеаризации системы

$$\text{Связь характеристик: } \lambda = \frac{1}{T_0} \ln(S)$$

Качественный вид отображения Пуанкаре в окрестности устойчивого (а) и неустойчивого (б) предельных циклов:



**8 Автоколебания и автоколебательная система. Мягкий и жесткий режимы возбуждения**

Автоколебательная система — диссипативная система, совершающая незатухающие колебания при отсутствии колебательного воздействия извне. В этих системах возникает баланс между действиями диссипативных потерь и внутренних механизмов, компенсирующих потери. Автоколебания — незатухающие колебания в нелинейной диссипативной системе, форма и свойства которых в определенных пределах не зависят от начальных условий и определяется параметрами самой системы.

**1. Мягкий режим**

$\gamma < 0$  - автоколебаний нет,  $\gamma = 0$  - суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа ( $\lambda_i < 0$ ),  $\gamma > 0$  - неустойчивое состояние равновесия + появление одного устойчивого предельного цикла на фазовой плоскости.  $\gamma \uparrow A \uparrow$

Состояние равновесия  $\gamma = 0$  - безопасная граница устойчивости, то есть при ее нарушении система переходит в качественно новое состояние, но не покидает при  $0 < \gamma \ll 1$  окрестности предыдущего состояния.

**2. Жесткий режим**

$\lambda < 0$  - состояние равновесия локально устойчиво,  $\lambda = 0$  - состояние равновесия теряет устойчивость → автоколебания возникают скачком (жестко),  $\lambda \uparrow A \uparrow$ , затем квазистатически  $\lambda \downarrow A \uparrow$  при  $\lambda > 0$ , а потом совсем исчезают скачком. Рождение и исчезновение АК происходит при разных  $\lambda$

- наблюдается гистерезис.  $\lambda = 0$  - опасная граница устойчивости состояния равновесия, так как поведение системы меняется резко



**Свойства автоколебательных систем**

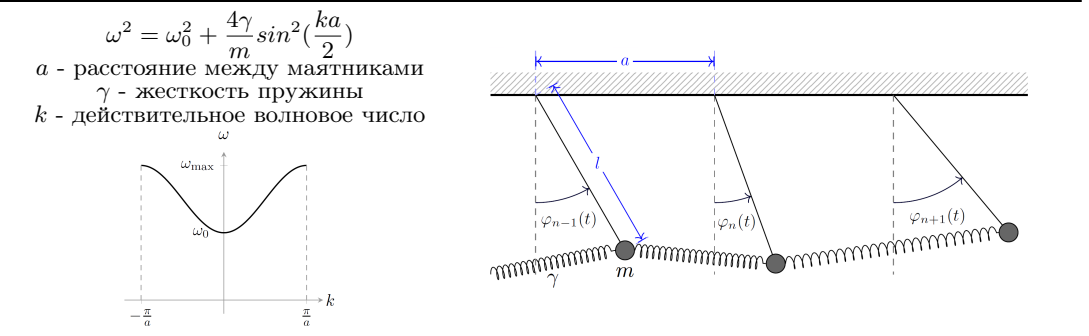
- \* Источник энергии для компенсации диссипации — постоянен и находится внутри самой системы
- \* Система содержит колебательную подсистему и активный нелинейный элемент
- \* В изолированной колебательной системе происходят затухающие колебательные процессы, а активный элемент может усиливать колебания и их нелинейно ограничивать
- \* Между колебательной подсистемой и активным элементом существует обратная связь, регулирующая поступление энергии от источника
- \* Автоколебания в определенных пределах не зависят от начальных условий и определяются параметрами системы
- \* Математическим образом периодических автоколебаний является предельной цикл

9 Бифуркационные сценарии рождения периодических движений динамических систем на плоскости

Значение параметра		$\mu < 0$	$\mu = 0$	$\mu > 0$
Бифуркация		Фазовые портреты		
I	Андронова-Хопфа			
	Двукратный предельный цикл (седло-узловая циклов)			
II	Петля сепаратрис седла (седловая гомоклиническая бифуркация)			
	Петля сепаратрис седло-узла (седло-узловая гомоклиническая бифуркация)			

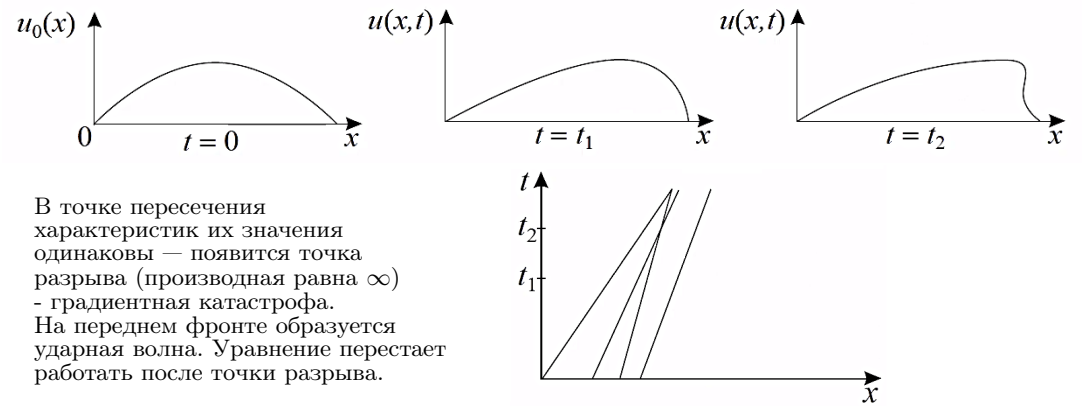
10 Дисперсия, ее физическая природа и проявления

Дисперсия — зависимость фазовой скорости волны от ее частоты. Связь между частотой и волновым числом гармонической волны определяется пространственными и временными масштабами среды и называется дисперсионным соотношением.



У каждой компоненты волнового пакета (суперпозиции двух и большего числа волн с различными частотами) будет своя  $V_{\text{ф}}$ , возникает его деформация. Наличием собственных масштабов объясняется эффект частичного непропускания волны  
Область прозрачности:  $k \in Re$  - распространение без искажения гармонической волны  
Область непрозрачности:  $k \in Im$  - нераспространение.

**11 Простые волны. Основные свойства и условия существования**  
 $U_t + C(U)U_x = 0$  — нелинейное уравнение простой волны.  $C(U)$  — дифференцируемая функция (скорость от состояния среды). Характеристики — линии, вдоль которых переменная  $U(x, t)$  будет оставаться постоянной и равной по значению для каждого соответствующего значения  $x$ .



В точке пересечения характеристик их значения одинаковы — появится точка разрыва (производная равна  $\infty$ ) - градиентная катастрофа. На переднем фронте образуется ударная волна. Уравнение перестает работать после точки разрыва.

Градиентная катастрофа наблюдается в нелинейных средах. При наличии в среде дисперсии и диссипации градиентная катастрофа наблюдаться не будет.

На переднем фронте если  $\frac{dC}{dU} > 0$  (холмик справа), и на заднем, если  $\frac{dC}{dU} < 0$

**12 Параметрические системы. Основные свойства**  
Параметрические системы — системы, где внешнее воздействие находится внутри системы и может изменять ее параметры.  
**Резонансные.** Период изменения параметров находится в целочисленном соотношении с периодом собственных колебаний. В такт с изменением энергии, соответствующей собственным колебаниям, вносится энергия, вызванная работой внешнего воздействия. При определенных условиях может привести к эффекту раскачки колебаний за счет накапливающейся в системе энергии. Пример - маятник с переменной длиной нити  
**Нерезонансные.** Параметры изменяются очень быстро или очень медленно в сравнении с характерными временными масштабами изменения переменных системы.  
**Свойства.**

1. Параметрическая система, находящаяся в начальный момент в состоянии равновесия, останется в этом состоянии при  $t > 0$  (дергая за нитку, маятник нельзя раскачать)
2. Состояния равновесия параметрической системы могут быть как устойчивы, так и неустойчивы
3. Если параметры системы таковы, что она неустойчива и система выведена из состояния равновесия, то в ней возникают колебания, амплитуда которых  $\uparrow \text{exp}$ . Процесс возрастания размаха в колебаниях при периодическом нарастании колебаний — параметрический резонанс.

**Явления.**

1. Параметрический резонанс
2. Параметрические колебания - ограниченные колебания (периодические или квазипериодические)
3. Граница между параметрическим резонансом и параметрическими колебаниями неустойчива

Траектории системы порождают точечное линейное отображение через период (с помощью функции Флоке)

13 Релаксационные колебания

Имеем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \mu \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad 0 < \mu \ll 1$$

От расположения параметра  $\mu$  в системе уравнений (либо около  $x$ , либо около  $y$ ) зависит направление прямых на фазовом портрете. Если параметр расположен около  $x$  – прямые горизонтальные, если около  $y$  – вертикальные.

СМД:

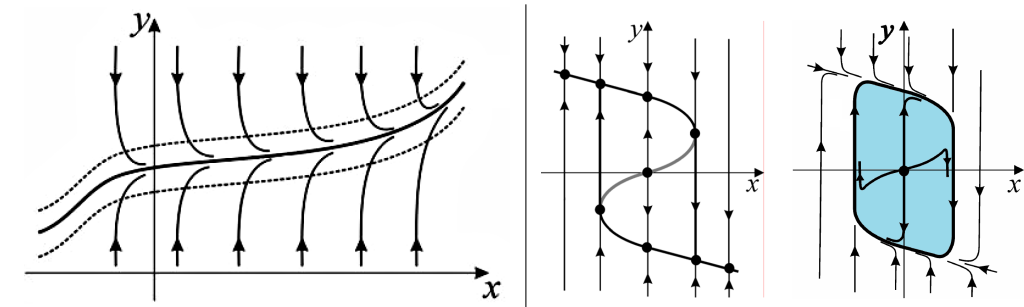
$$\begin{cases} \mu \dot{x} = P(x, y) \\ 0 = Q(x, y) \end{cases}$$

1. Первое уравнение остается неизменным
2. Кладём параметр  $\mu = 0$  – получаем 2-е уравнение. Затем, решая уравнение, находим точки пересечения с осью, после берём производную от полученного выше выражения, кладём её равной 0 и находим состояния равновесия.

СВД:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = P(x, y) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} Q(x, y) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial y} \mu \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \Rightarrow x = const \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{y} = \frac{1}{\mu} Q(x_0, y) \end{cases}$$

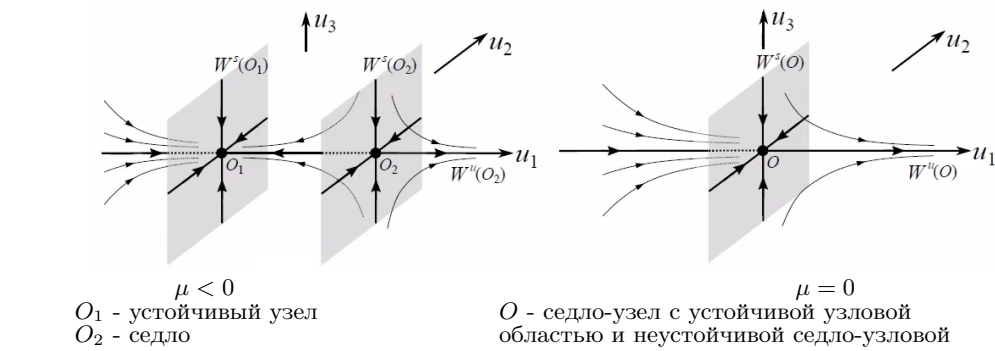
1. Делим уравнение с параметром на сам параметр – получаем 1-е уравнение
2. Делим одно уравнение исходной системы на второе и выявляем, что в данном случае является константой (например  $x = x_0 = const$ ) – получаем 2-е уравнение.



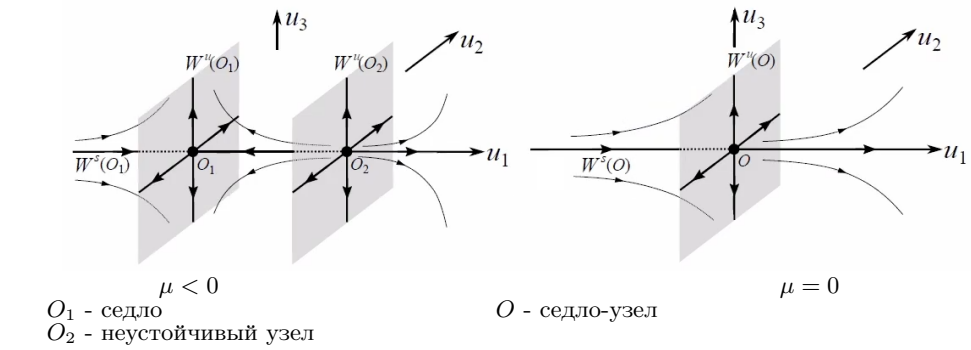
В ходе решения задачи мы переходим от двумерной системы к двум одномерным системам, что намного упрощает анализ исходной системы

14 Локальные бифуркации состояний равновесия трехмерных систем

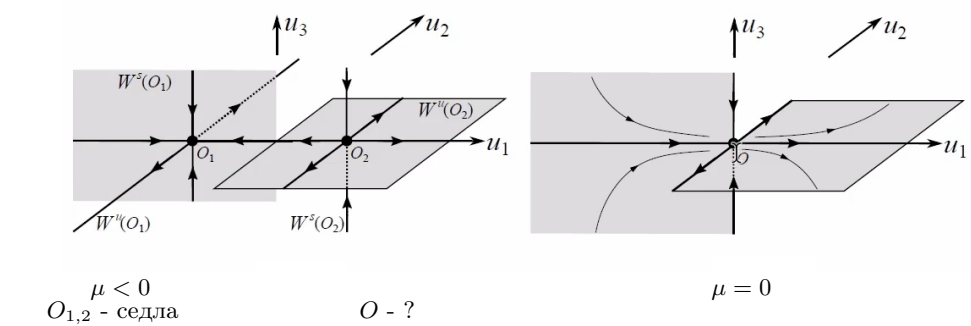
1.  $\lambda_{1,2,3} - \text{Re}, \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} < 0$



2.  $\lambda_{1,2,3} - \text{Re}, \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} > 0$

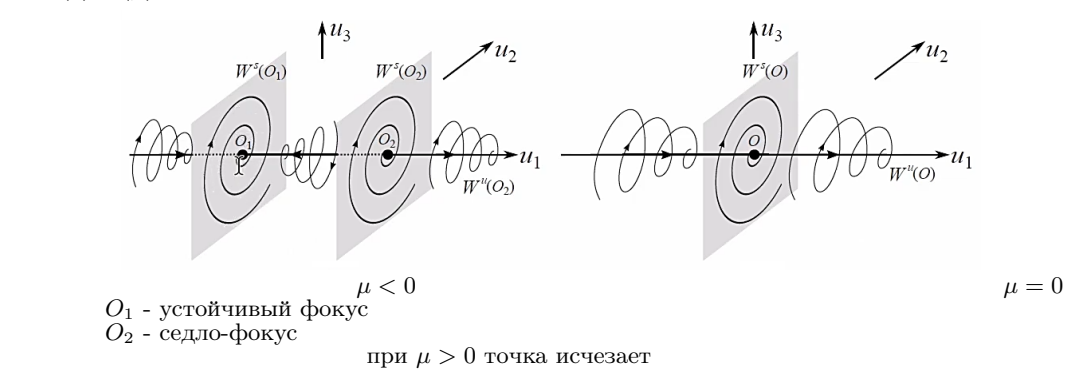


3.  $\lambda_{1,2,3} - \text{Re}, \lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$

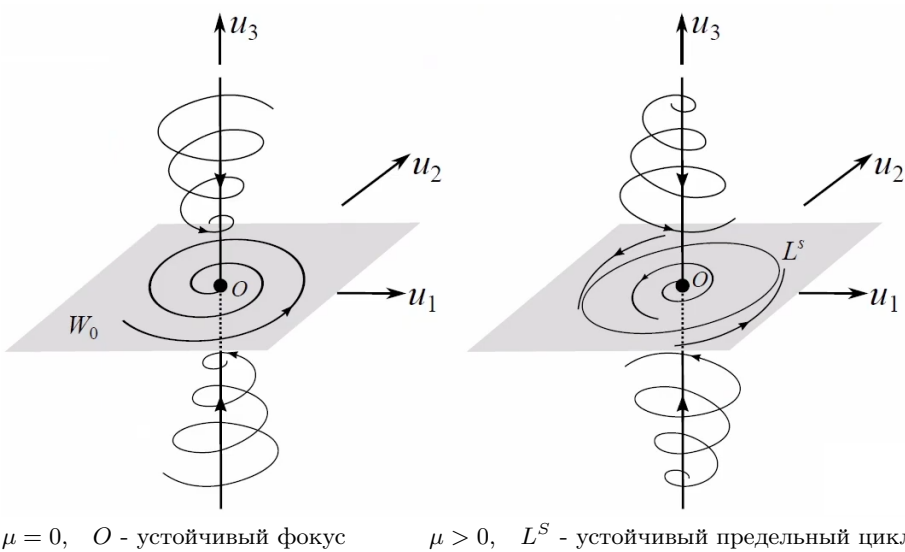
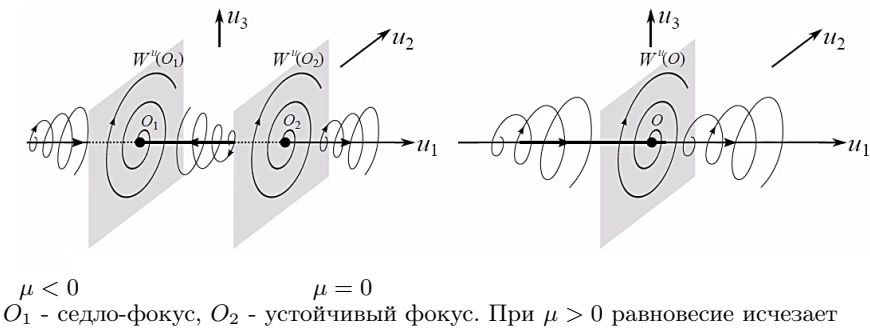


4.  $\lambda_1=0, \lambda_{2,3} = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$

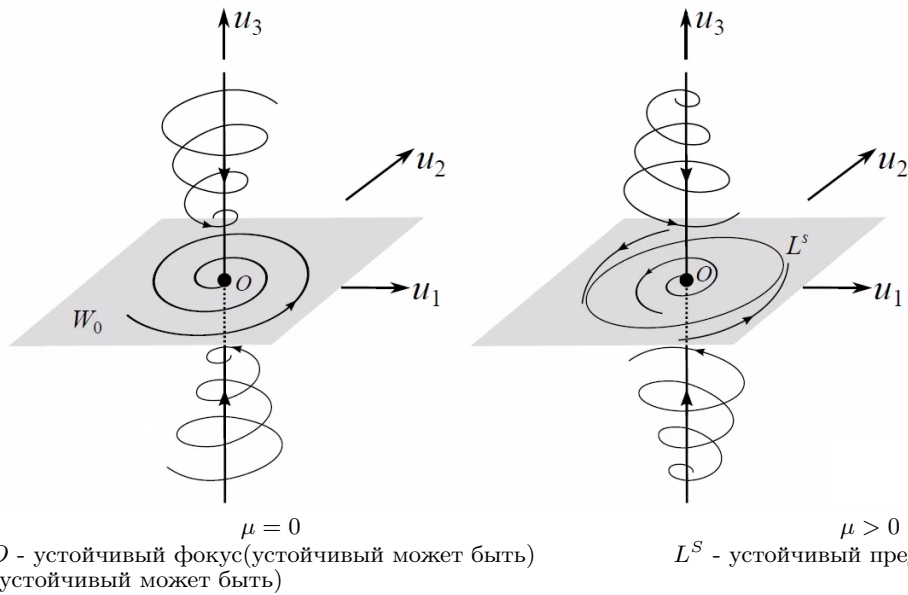
- (a)  $\alpha(\mu) < 0$



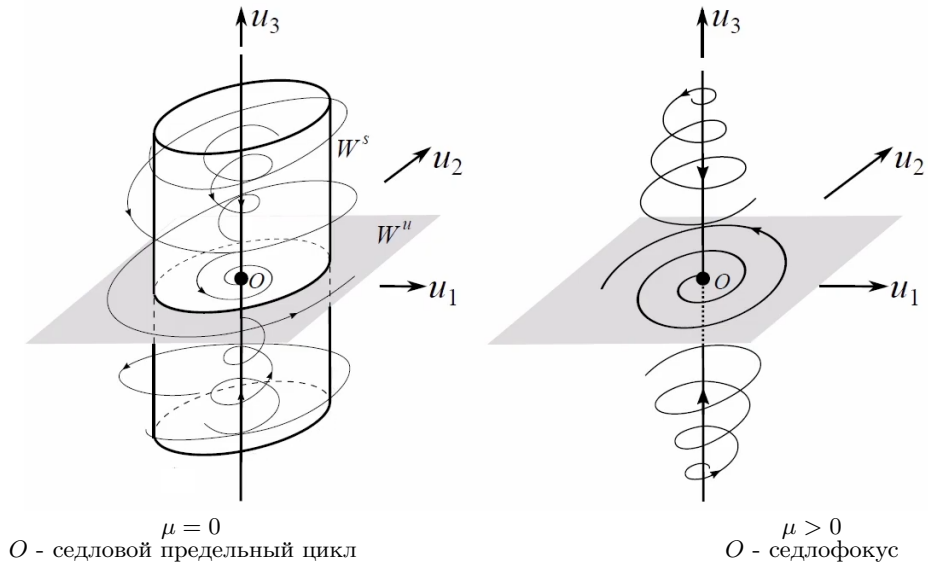
- (b)  $\alpha(\mu) > 0$



5. Бифуркация Андронова Хопфа  
 $L(\mu) < 0$  - суперкритическая бифуркация



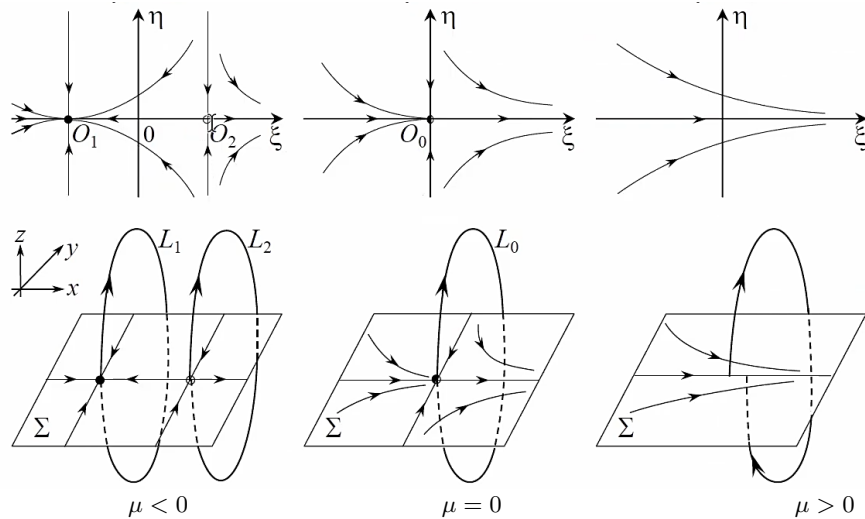
6. Субкритическая бифуркация  
 $L(\mu) > 0$  - первая Ляпуновская величина



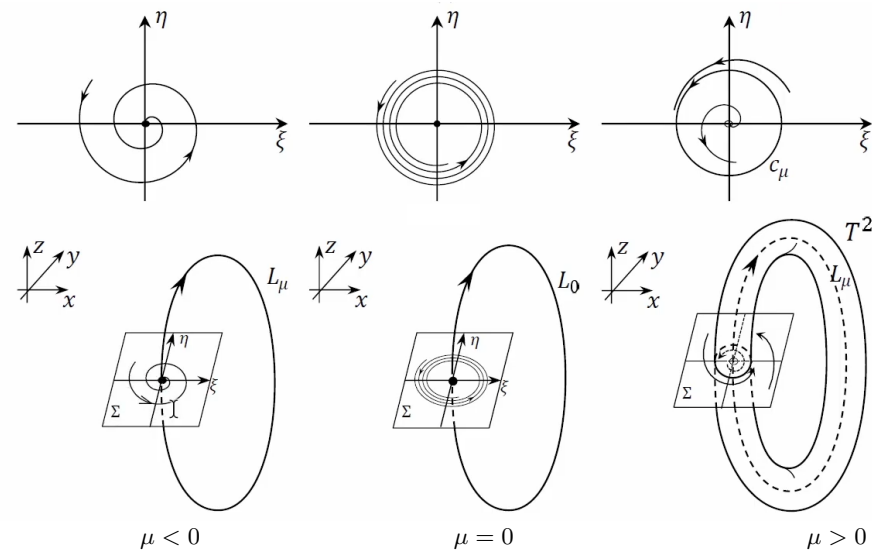


## 15 Локальные бифуркации периодических движений трехмерных систем

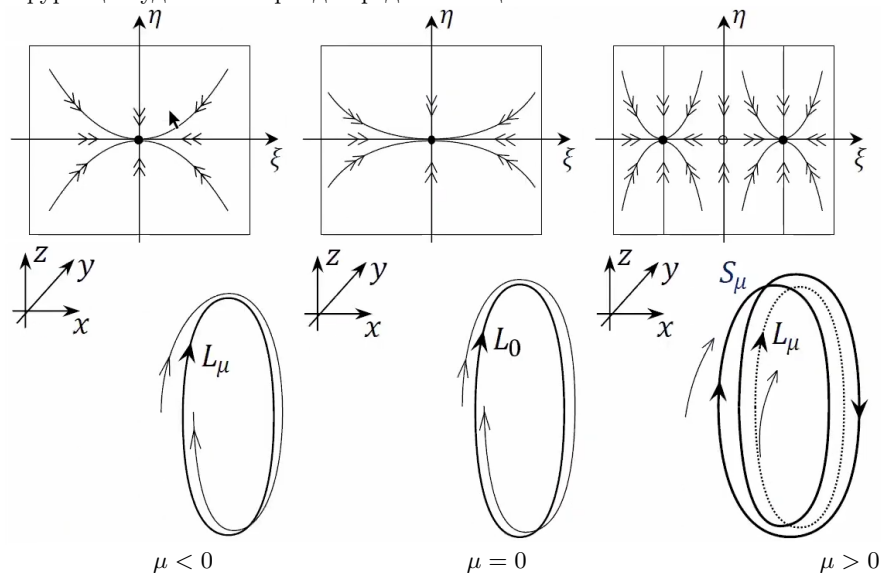
## 1. Седло-узловая бифуркация предельных усиков



В бифуркации образуется предельный цикл с мультипликаторами  $S_x = 1$  - не грубый цикл, он либо распадается на 2 грубых, либо исчезает



## 2. Бифуркация удвоения периода предельных циклов



## 3. Бифуркация рождения инвариантного тора