1 Определение динамической системы

2 Условия грубости динамических систем на плоскости

Так как динамические системы изменяются вместе со входящими в них параметрами, но при малости изменений качественные черты поведения сохраняются, вводится свойства грубости.
Грубость — устойчивость структуры разбиения фазовой плоскости динамических систем на траектории по отношению к малым изменениям динамической системы.
Для плоскости: пусть есть система:

$$\begin{cases}\dot{x} = P(x,y)\\ \dot{y} = Q(x,y)\end{cases}$$

где P и Q - гладкие функции, система диссипативна.
Система — грубая, если существует число $\delta > 0$, что все динамические системы вида:

$$\begin{cases}\dot{x} = P(x,y) + p(x,y)\\ \dot{y} = Q(x,y) + q(x,y)\end{cases}$$

в которых аналитические функции удовлетворяют условию $|p(x,y)| + |q(x,y)|$, имеют такую же структуру разбиения на положительные полутраектории, что и начальная система.
Переход от одной грубой ДС к другой происходит через негрубую ДС.
ДС на прямой устойчива (структурно грубая), если для всех состоянии равновесия $\lambda_i(\mu) \neq 0$.

3 Бифуркация состояний равновесия динамических систем на прямой

Значение параметра, при котором ДС является негрубой, называется бифуркационным.

4 Метод линеаризации определения устойчивости состояний равновесия

5 Линейный осциллятор. Основные свойства

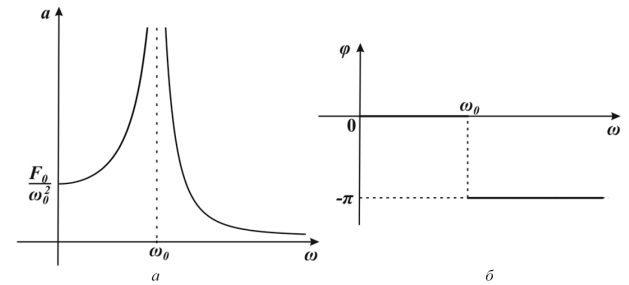
6 Резонанс в линейном осцилляторе

Резонанс — неограниченное возрастание амплитуды вынужденных колебаний, когда частота внешней силы близка к собственной частоте, линейного осциллятора.

1. Консервативный случай (без потери энергии)

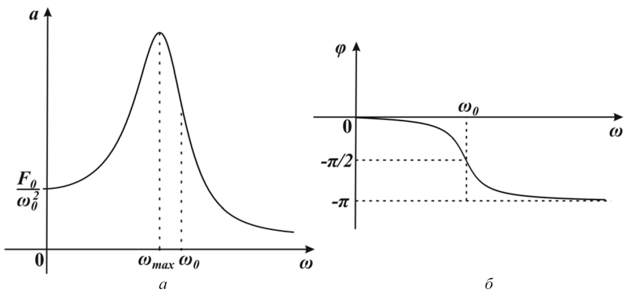
W - не диссипирует. $a = \dfrac{F_0}{|{\omega_0}^2 - \omega^2|}$ - амплитуда вынужденных колебаний переменной x(t).

При резонансе измерение переменных во времени - непереодическое: $x(t) = t\dfrac{F_0}{2\omega_0} sin(\omega_0 t)$



2. Диссипативный случай (с потерями энергии)

$a_{max} \to \omega_{max} < \omega_0, \quad \omega_{max} = sqrt({\omega_0}^2 - 2\delta^2), \quad a_{max} = \dfrac{F_0}{2\delta sqrt({\omega_0}^2 - 2\delta^2)}, \quad \delta \uparrow a_{max} \downarrow$



Характеристики резонансных свойств

Добротность - $Q = \dfrac{\pi}{d} = \dfrac{\omega_0}{2\delta}$

Логарифмический коэффициент затухания - $d = \delta T = \dfrac{2\pi\delta}{\omega}$

7 Определение предельного цикла. Характеристики

Предельный цикл — замкнутая изолированная фазовая траектория. Замкнутая фазовая траектория называется изолированный, если существует достаточно малое кольцеобразная окрестность этой траектории, внутри которой нет других замкнутых траекторий.
Предельному циклу соответствует периодический процесс.

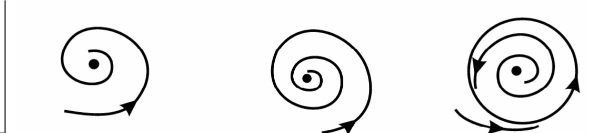
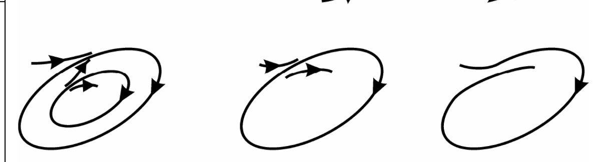
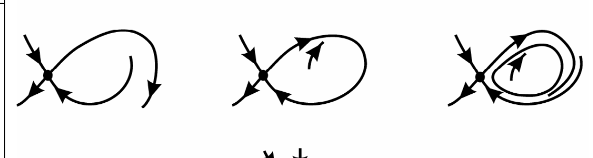
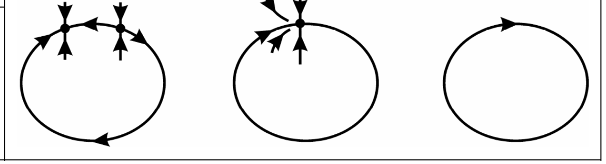
8 Автоколебания и автоколебательная система. Мягкий и жесткий режимы возбуждения

Автоколебательная система — диссипативная система, совершающая незатухающие колебания при отсутствии колебательного воздействия извне. В этих системах возникает баланс между действиями диссипативных потерь и внутренних механизмов, компенсирующих потери. Автоколебания — незатухающие колебания в нелинейной диссипативной системе, форма и свойства которых в определенных пределах не зависит от начальных условий и определяется параметрами самой системы.
1. Мягкий режим
2. Жесткий режим

Свойства автоколебательных систем

⋇ Источник энергии для компенсации диссипации — постоянен и находится внутри самой системы
⋇ Система содержит колебательную подсистему и активный нелинейный элемент
⋇ В изолированной колебательной системе происходят затухающие колебательные процессы, а активный элемент может усиливать колебания и их нелинейно ограничивать
⋇ Между колебательной подсистемой активным элементом существует обратная связь, регулирующая поступление энергии от источника
⋇ Автоколебания в определенных пределах не зависят от начальных условиях и определяются параметрами системы
⋇ Математическим образом периодических автоколебаний является предельной цикл

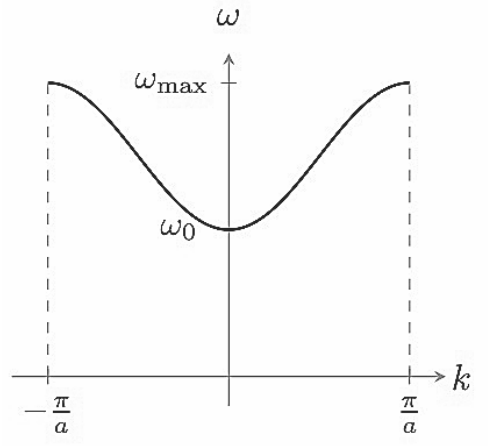
9 Бифуркационные сценарии рождения периодических движений динамических систем на плоскости

Бифуркация \ Значение параметра		$\mu < 0$ / $\mu = 0$ / $\mu > 0$ — Фазовые портреты
I	Андронова-Хопфа	
I	Двукратный предельный цикл (седло-узловая циклов)	
II	Петля сепаратрис седла (седловая гомоклиническая бифуркация)	
II	Петля сепаратрис седло-узла (седло-узловая гомоклиническая бифуркация)	

10 Дисперсия, ее физическая природа и проявления

Дисперсия — зависимость фазовой скорости волны от ее частоты. Связь между частотой и волновым числом гармонической волны определяется пространственными и временными масштабами среды и называется дисперсионным соотношением.

$\omega^2 = {\omega_0}^2 + \frac{4\gamma}{m} sin^2(\frac{ka}{A})$
a - расстояние между маятниками
γ - жесткость пружины
k - действительное волновое число



У каждой компоненты волнового пакета будет своя $V_{\text{ф}}$, возникает его деформация. Наличием собственных масштабов объясняется эффект частичного непропускания волны
Область прозрачности: $k \in Re$ - распространение без искажения гармонической волны
Область непрозрачности: $k \in Im$ - нераспространение.

11 Простые волны. Основные свойства и условия существования

$U_t + C(U)U_x = 0$ — нелинейное уравнение простой волны. $C(U)$ — дифференцируемая функция (скорость от состояния среды). Характеристики — линии, вдоль которых переменная $U(x,t)$ будет оставаться постоянной и равной по значению для каждого соответствующего значения x. В точке пересечения характеристик их значения одинаковы — появится точка разрыва (производная равна $infty$) - градиентная катастрофа. На переднем фронте образуется ударная волна. Уравнение перестает работать после точки разрыва.

12 Параметрические системы. Основные свойства

Параметрически системы — системы, где внешнее воздействие находится внутри системы и может изменять ее параметры.

Резонансные. Период изменения параметров находится в целочисленном соотношении с периодом собственных колебаний. В такт с изменением энергии, соответствующей собственным колебаниям, вносится энергия, вызванная работой внешнего воздействия. При определенных условиях может привести к эффекту раскачки колебаний за счет накапливающейся в системе энергии.

Нерезонансные. Параметры изменяются очень быстро или очень медленно в сравнении с характерными временными масштабами изменения переменных системы.

Свойства.

1. Параметрическая система, находящаяся в начальный момент в состоянии равновесия, останется в этом состоянии при $t > 0$ (дергая за нитку, маятник нельзя раскачать)
2. Состояния равновесия параметрической системы могут быть как устойчивы, так и неустойчивы
3. Если параметры системы таковы, что она неустойчива и система выведена из состояния равновесия, то в ней возникают колебания, амплитуда которых $\uparrow exp$. Процесс возрастания размаха в колебаний при периодическом нарастании колебаний — параметрический резонанс.

13 Релаксационные колебания

14 Локальные бифуркации состояний равновесия трехмерных систем

15 Локальные бифуркации периодических движений трехмерных систем