1 Понятие субстанциальной и локальной производных.

$\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)$ - субстанциальная

$\dfrac{\partial}{\partial t}$ - локальная

2 Уравнение неразрывности для сжимаемой и несжимаемой жидкости.

$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0$ - для сжимаемой жидкости

В несжимаемой жидкости $\rho = const \to \dfrac{d\rho}{dt} = 0 \to \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = \rho\operatorname{div}(\vec{v}) + \vec{v}grad(\rho) \to$

$\to \rho\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \to \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$

$\dfrac{d\rho}{dt} = 0$ - для несжимаемой жидкости

3 Уравнение Эйлера в векторной форме и в проекциях на оси в декартовой системе координат.

Уравнение Эйлера описывает движение идеальной жидкости

$\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\dfrac{\nabla p}{\rho} + \vec{f}$

Минус возникает потому, что при повышении скорости снижается давление

$\dfrac{\partial v_i}{\partial t} + \sum\limits_{k=1}^{3} v_k \dfrac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x_i} + f_i$

4 Закон сохранения энергии идеальной жидкости. Поток энергии.

$\int\limits_V \left[\dfrac{\partial}{\partial t}(\dfrac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon) + \operatorname{div}(\dfrac{\rho v^2}{2} + W)\vec{v}\right] dV = 0$, где

$W = \rho\varepsilon + p = \int \dfrac{dp}{\rho}$ - энтальпия, ε - плотность энергии на единицу массы

или в дифференциальной форме

$\dfrac{\partial E}{\partial t} + div\vec{N} = 0$, где

$E = \dfrac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon$ - плотность энергии

$\vec{N} = \left[\dfrac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon + p\right]\vec{v}$ - вектор плотности потока энергии

Закон не работает в случае неидеальной жидкости (из-за диссипации)

5 Закон сохранения импульса идеальной жидкости. Тензор плотности потока импульса и его представление в декартовой системе координат.

$\dfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho\vec{v}dV = -\oint\limits_S [p\vec{n} + \rho\vec{v}(\vec{v}\vec{n})]\, d\sigma = 0$

$\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\sum\limits_{k=1}^{3}\dfrac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i$

$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k$ - тензор ППИ

6 Уравнение гидростатики.

$\operatorname{grad} p = \rho\vec{f}, \quad p = p(\rho)$ - выполняется в стационарной жидкости

7 Частота Брента-Вяйсяля.

$N = \sqrt{\dfrac{g}{\rho}\dfrac{d\rho}{dz}}$

Если $N^2 < 0$, то неустойчивость жидкости (тело всплывает или тонет). Если $N^2 > 0$, то жидкость устойчива (тело не двигается).

8 Теорема Бернулли для потенциальных (безвихревых) и не потенциальных, стационарных (не двигающихся) и нестационарных течений.

$\dfrac{v^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} - gz = const$ - стационарное безвихревое ($const$ во всём объёме)

$\dfrac{v^2}{2} + W - gz = const$ - стационарное вихревое ($const$ на линии тока)

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{v^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} - gz = F(t)$ - нестационарное безвихревое

9 Теорема Томсона.

Циркуляция скорости(Γ) вдоль замкнутого контура, перемещающегося в идеальной жидкости, остается постоянной.

$\Gamma = \oint\limits_L \vec{v}d\vec{r} = const$

10 Потенциальные течения идеальной несжимаемой жидкости. Основные уравнения, граничные условия.

$\vec{v} = \operatorname{grad}(\varphi), \quad rot\vec{v} = 0, \quad div\vec{v} = 0, \quad \Delta\varphi = 0$

Граничное условие не протекания:

нормальная компонента скорости на границе с телом равна нулю: $\vec{v}\vec{n}|_s = 0$

если тело движется со скоростью v_0: $\vec{v}\vec{n}|_s = \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = \vec{v_0}\vec{n}$

Граничное условие на бесконечности - используют значение потенциала на бесконечности.

11 Парадокс Д'Аламбера-Эйлера.

Для тела с гладкой поверхностью, движущегося равномерно в идеальной несжимаемой жидкости постоянной плотности без границ, сила сопротивления, действующая на тело со стороны потока, равна нулю.

$\vec{F} = -\oint\limits_s p_s\vec{n}dS = 0$

12 Понятие присоединенной массы. Присоединенная масса сферы и единицы длины бесконечного кругового цилиндра.

Присоединенная масса - это масса, которая добавляется к массе тела, движущегося неравномерно в жидкой среде для учета воздействия среды на это тело.

$(M = F_{\text{сопр}}/a = \dfrac{\rho}{v_0^2}\iiint\limits_V v^2 dV)$

$M_{\text{сферы}} = \dfrac{2}{3}\rho\pi R^3$ (равна половине массы вытесненной жидкости)

$M_{\text{цилиндра}} = \rho(\pi R^2 * l), \quad l = 1$ (равна массе вытесненной жидкости)

13 Функция тока и ее свойства.

Для плоского потенциального течения несжимаемой идеальной жидкости:

$\psi = \psi(x,y,t); \quad v_x = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}; \quad v_y = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$

$d\psi = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}dy = -v_y dx + v_x dy$

На линии тока $\psi = const$. Линии тока ($\psi = const$) ортогональны изопотенциальным линиям ($\varphi = const$), т.е. $(\nabla\psi, \nabla\varphi) = 0$

Функция тока - является гармонической функцией, удовлетворяющей уравнению Лапласа $\Delta\psi = 0$.

14 Комплексный потенциал.

$F(z) = \varphi + i\psi$ (действительная часть - потенциал, мнимая – функция тока)

Любую аналитическую функцию комплексного переменного можно поставить в соответствие с неким плоским потенциальным течением идеальной несжимаемой жидкости.

15 Линии тока и эквипотенциальные линии.

Линия тока - это линия, касательные к которой в данный момент времени и в каждой точке совпадают с вектором скорости $\vec{v}$

$\psi = const$ - линии тока (постоянная функция тока)

$\varphi = const$ - эквипотенциальные линии (постоянный потенциал)

16 Формула Жуковского.

$F_y = -\int p n_y dl = \rho\Gamma v_0$

Сила, действующая на вращающийся шарик, находящийся в набегающем потоке жидкости, пропорциональна плотности, скорости и параметру, характеризующему вихрь.

17 Точечные вихри и их взаимодействия.

Устремляем сечение нашей вихревой трубки к нулю, а частоту к бесконечности - получаем точечный вихрь. Скорость точечного i-ого вихря равна скорости жидкости в данной точке, создаваемой всеми остальными вихрями.

$\dfrac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum\limits_{k\neq i}\vec{v_k}(\vec{r_i})$

18 Поверхностные гравитационные волны (длинные, короткие, гравитационно-капиллярные) и их основные свойства (траектории движения частиц, дисперсионные уравнения, фазовые и групповые скорости).

В случае волн на мелкой воде:
$\omega^2 = gk^2 H, \omega = \pm k\sqrt{gH}, v_\text{ф} = \frac{\omega}{k}, v_\text{гр} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$
В случае волн на глубокой воде:
$$\omega = \pm\sqrt{gk}, v_\text{ф} = \sqrt{\frac{g}{k}}, v_\text{гр} = \frac{g}{2\sqrt{gk}} = \frac{v_\text{ф}}{2}$$
В случае гравитационно-капиллярных волн:
$\omega^2 = (gk + \gamma k^3)\,\mathrm{th}\, kH, \gamma = \frac{\alpha}{\rho}$
$$v_\text{ф}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} + \gamma k$$
$k_* = \sqrt{\frac{g}{k}}$ - минимум $v_\text{ф}$
$$v_\text{гр} = \frac{d\omega}{dk} \quad \Rightarrow \quad v_\text{гр} = \frac{v_\text{ф}}{2}\frac{k_*^2 + 3k^2}{k_*^2 + k^2}$$
Если $k \gg k_*$, это капиллярные волны. Если $H \ll k \ll k_*$, то это гравитационные короткие волны (дно ещё не чувствуется). Если же $k \ll H$, то это длинные гравитационные волны.

19 Уравнение Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости в векторной форме и в проекциях на оси в декартовой системе координат.

Запись через кинематическую вязкость $\nu = \eta/\rho$:
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\vec{v} + \vec{f}$$
$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + f_i$$

20 Тензор вязких напряжений, физический смысл, представление в декартовой системе координат.

Общий вид тензора вязких напряжения (при относительном смещении слоёв жидкости, зависимость $\sim \eta$ линейна, жидкость будем считать изотропной):
$\sigma_{ik} = a\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + c\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + b\sum\limits_l \frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik}$
Переобозначим константы $a = \eta$, $b = \xi$. Тогда тензор вязких напряжений перепишется как
$\sigma_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + \xi\sum\limits_l \frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik}$
Тензор показывает, как один слой жидкости действует на другой слой жидкости

21 Граничные условия для несжимаемой вязкой жидкости на поверхности твердого тела и свободной поверхности.

В случае вязкой жидкости скорость жидкости на границе с телом равна скорости тела:
$v_\text{жидк}|_s = v_\text{тела}$
При рассмотрении гидродинамики слоя жидкости на верхней границе:
$f_i = \sigma_{ik}n_k = n\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$

22 Формула Пуазейля для расхода жидкости.

$$Q = 2\pi\int\limits_0^R v(r)r dr = \frac{\pi}{8\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) R^4$$

23 Скин-слой.

Поскольку среда вязкая, возмущения передаются наверх, но затухают на характерном масштабе толщины скин-слоя
$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

24 Числа Рейнольдса, Фруда, Струхаля и их физический смысл.

$$Re = \frac{v_0 l}{\nu} = \frac{2v_0 R}{\nu} = \frac{V_\text{ср}H}{\nu}$$
$\nu = \frac{\eta}{\rho}$ - кинематический коэффициент вязкости
Число Рейнольдса показывает относительное влияние нелинейных эффектов. Если Re мало, то можно пренебречь в уравнении движения вязкой жидкости всем, кроме давления.
$$Fr = \frac{v_0^2}{gl}$$
Число Фруда описывает отношение кинетической энергии жидкости к потенциальной (энергии гравитационных сил). Если оно велико, то можно не учитывать влияние силы тяжести
$$Sh = \frac{v_0 T}{l}$$
Число Струхаля характеризует стационарность. Если $Sh >> 1$ можно пренебречь нестационарностью (переходим в квазистатику).

25 Формула Стокса.

Сила сопротивления, действующая на маленькое тело, движущееся в жидкости.
$F = 6\pi\eta R v_0$, условие применимости - $Re << 1$

26 Зависимость ширины пограничного слоя от параметров.

Пограничный слой - слой, где скорость меняется от нуля до скорости, соответствующей скорости обтекания тела идеальной жидкостью.
Толщина пограничного слоя: $h = \frac{\nu x}{v_0}$, где x - длина рассматриваемого участка
Во-первых, чем больше вязкость, тем толще пограничный слой. Кроме того, чем дальше по x, тем слой толще. И, наконец, чем больше скорость, тем больше пограничный слой должен быть прижат к пластине.

27 Уравнения линейной акустики. Волновое уравнение.

Уравнение Эйлера, уравнение непрерывности и последнее уравнение - состояния:
$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0}, \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 c^2\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0, \quad p' = c^2\rho'$$
Здесь $p = p_0 + p', \quad v = v_0 + v', \quad \rho = \rho_0 + \rho'$
Величины с индексом 0 равновесная среда, штрихами обозначены добавки, возникающие при распространении звука. c - скорость звука в данной среде
Волновое уравнение: $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\Delta\varphi = 0$

28 Монохроматические волны, уравнение Гельмгольца

Уравнение Гельмгольца: $\Delta\Phi_0 + k_0^2\Phi_0 = 0, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}$
Простейшее решение - плоские волны: $\Phi_0 = e^{i\left(\vec{k},\vec{r}\right)}$
В случае $\vec{k} = \vec{k}_1 + i\vec{k}_2$ (неоднородная плоская волна):
$\Phi_0 = e^{i\left(\vec{k}_1,\vec{r}\right)}e^{-\left(\vec{k}_2,\vec{r}\right)}$. Всякую волну можно представить в виде суперпозиции плоских монохроматических волн с различными волновыми векторами и частотами.

29 Закон сохранения энергии (звуковой волны)

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{J} = 0$$
$\vec{J} = \rho\vec{v}$ - вектор Умова-Пойнтинга - интенсивность звуковой волны, сила звука.
$E = \frac{\rho v^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c^2}$ - полная энергия звуковой волны.