

1 Понятие субстанциальной и локальной производных.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\nabla) - \text{субстанциальная}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} - \text{локальная}$$

2 Уравнение неразрывности для сжимаемой и несжимаемой жидкости.

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0 - \text{для сжимаемой жидкости}$$

$$\text{В несжимаемой жидкости } \rho = \text{const} \rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0 \rightarrow \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = \rho \operatorname{div}(\vec{v}) + \vec{v}\operatorname{grad}(\rho) \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \rightarrow \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 - \text{для несжимаемой жидкости}$$

3 Уравнение Эйлера в векторной форме и в проекциях на оси в декартовой системе координат.

Уравнение Эйлера описывает движение идеальной жидкости

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f}$$

Минус возникает потому, что при повышении скорости снижается давление

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i$$

4 Закон сохранения энергии идеальной жидкости. Поток энергии.

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\rho v^2}{2} + W \right) \vec{v} \right] dV = 0, \text{ где}$$

$$W = \rho \varepsilon + p = \int \frac{dp}{\rho} - \text{энтальпия, } \varepsilon - \text{плотность энергии на единицу массы}$$

или в дифференциальной форме

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{N} = 0, \text{ где}$$

$$E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon - \text{плотность энергии}$$

$$\vec{N} = \left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon + p \right] \vec{v} - \text{вектор плотности потока энергии}$$

Закон не работает в случае неидеальной жидкости (из-за диссипации)

5 Закон сохранения импульса идеальной жидкости. Тензор плотности потока импульса и его представление в декартовой системе координат.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV = - \oint_S [p\vec{n} + \rho \vec{v}(\vec{v}\vec{n})] d\sigma = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i$$

$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k$ - тензор ППИ

6 Уравнение гидростатики.

$$\operatorname{grad} p = \rho \vec{f}, \quad p = p(\rho) - \text{выполняется в стационарной жидкости}$$

7 Частота Брента-Вяйсяля.

$$N = \sqrt{\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}}$$

Если $N^2 < 0$, то неустойчивость жидкости (тело всплывает или тонет). Если $N^2 > 0$, то жидкость устойчива (тело не двигается).

8 Теорема Бернулли для потенциальных (безвихревых) и не потенциальных, стационарных (не двигающихся) и нестационарных течений.

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - gz = \text{const} - \text{стационарное безвихревое (const во всём объёме)}$$

$$\frac{v^2}{2} + W - gz = \text{const} - \text{стационарное вихревое (const на линии тока)}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - gz = \text{const} - \text{нестационарное безвихревое}$$

9 Теорема Томсона.

Циркуляция скорости (Γ) вдоль замкнутого контура, перемещающегося в идеальной жидкости, остается постоянной.

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} d\vec{r} = \text{const}$$

10 Потенциальные течения идеальной несжимаемой жидкости. Основные уравнения, граничные условия.

$$\vec{v} = \operatorname{grad}(\varphi), \quad \operatorname{rot} \vec{v} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \Delta \varphi = 0$$

Граничное условие не протекания:

нормальная компонента скорости на границе с телом равна нулю: $\vec{v}\vec{n}|_s = 0$

$$\text{если тело движется со скоростью } v_0: \vec{v}\vec{n}|_s = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \vec{v}_0 \vec{n}$$

Граничное условие на бесконечности - используют значение потенциала на бесконечности.

11 Парадокс Д'Аламбера-Эйлера.

Для тела с гладкой поверхностью, движущегося равномерно в идеальной несжимаемой жидкости постоянной плотности без границ, сила сопротивления, действующая на тело со стороны потока, равна нулю.

$$\vec{F} = - \oint_s p_s \vec{n} dS = 0$$

12 Понятие присоединенной массы. Присоединенная масса сферы и единицы длины бесконечного кругового цилиндра.

Присоединенная масса - это масса, которая добавляется к массе тела, движущегося неравномерно в жидкой среде для учета воздействия среды на это тело.

$$(M = F_{\text{сопр}}/a = \frac{\rho}{v_0^2} \iiint_V v^2 dV)$$

$$M_{\text{сферы}} = \frac{2}{3} \rho \pi R^3 \quad (\text{равна половине массы вытесненной жидкости})$$

$$M_{\text{цилиндра}} = \rho(\pi R^2 * l), \quad l = 1 \quad (\text{равна массе вытесненной жидкости})$$

13 Функция тока и ее свойства.

Для плоского потенциального течения несжимаемой идеальной жидкости:

$$\psi = \psi(x, y, t); \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v_y dx + v_x dy$$

На линии тока $\psi = \text{const}$. Линии тока ($\psi = \text{const}$) ортогональны изопотенциальным линиям ($\varphi = \text{const}$), т.е. $(\nabla \psi, \nabla \varphi) = 0$

Функция тока - является гармонической функцией, удовлетворяющей уравнению Лапласа $\Delta \psi = 0$.

14 Комплексный потенциал.

$$F(z) = \varphi + i\psi \quad (\text{действительная часть - потенциал, мнимая - функция тока})$$

Любую аналитическую функцию комплексного переменного можно поставить в соответствие с неким плоским потенциальным течением идеальной несжимаемой жидкости.

15 Линии тока и эквипотенциальные линии.

Линия тока - это линия, касательные к которой в данный момент времени и в каждой точке совпадают с вектором скорости \vec{v}

$\psi = \text{const}$ - линии тока (постоянная функция тока)

$\varphi = \text{const}$ - эквипотенциальные линии (постоянный потенциал)

16 Формула Жуковского.

$$F_y = - \int p n_y dl = \rho \Gamma v_0$$

Сила, действующая на вращающийся шарик, находящийся в набегающем потоке жидкости, пропорциональна плотности, скорости и параметру, характеризующему вихрь.

17 Точечные вихри и их взаимодействия.

Устремляем сечение нашей вихревой трубки к нулю, а частоту к бесконечности - получаем точечный вихрь. Скорость точечного i-ого вихря равна скорости жидкости в данной точке, создаваемой всеми остальными вихрями.

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{k \neq i} \vec{v}_k(\vec{r}_i)$$

18 Поверхностные гравитационные волны (длинные, короткие, гравитационно-капиллярные) и их основные свойства (траектории движения частиц, дисперсионные уравнения, фазовые и групповые скорости).

В случае волн на мелкой воде:
 $\omega^2 = gk^2 H, \omega = \pm k \sqrt{gH}, v_\Phi = \frac{\omega}{k}, v_{\text{гp}} = \frac{d\omega}{dk}$
В случае волн на глубокой воде:
 $\omega = \pm \sqrt{gk}, v_\Phi = \sqrt{\frac{g}{k}}, v_{\text{гp}} = \frac{g}{2\sqrt{gk}} = \frac{v_\Phi}{2}$
В случае гравитационно-капиллярных волн:
 $\omega^2 = (gk + \gamma k^3) \operatorname{th} kH, \gamma = \frac{\alpha}{\rho}$
 $v_\Phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} + \gamma k$
 $k_* = \sqrt{\frac{g}{k}}$ - минимум v_Φ
 $v_{\text{гp}} = \frac{d\omega}{dk} \Rightarrow v_{\text{гp}} = \frac{v_\Phi}{2} \frac{k_*^2 + 3k^2}{k_*^2 + k^2}$

Если $k \gg k_*$, это капиллярные волны. Если $H \ll k \ll k_*$, то это гравитационные короткие волны (дно ещё не чувствуется). Если же $k \ll H$, то это длинные гравитационные волны.

19 Уравнение Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости в векторной форме и в проекциях на оси в декартовой системе координат.

Запись через кинематическую вязкость $\nu = \eta/\rho$:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f}$$
$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + f_i$$

20 Тензор вязких напряжений, физический смысл, представление в декартовой системе координат.

Общий вид тензора вязких напряжения (при относительном смещении слоёв жидкости, зависимость $\sim \eta$ линейна, жидкость будем считать изотропной):

$$\sigma_{ik} = a \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + c \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + b \sum_l \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik}$$

Переобозначим константы $a = \eta, b = \xi$. Тогда тензор вязких напряжений перепишется как

$$\sigma_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \xi \sum_l \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik}$$

Тензор показывает, как один слой жидкости действует на другой слой жидкости

21 Граничные условия для несжимаемой вязкой жидкости на поверхности твердого тела и свободной поверхности.

В случае вязкой жидкости скорость жидкости на границе с телом равна скорости тела:

$$v_{\text{жидк}}|_s = v_{\text{тела}}$$

При рассмотрении гидродинамики слоя жидкости на верхней границе:

$$f_i = \sigma_{ik} n_k = n \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

22 Формула Пуазейля для расхода жидкости.

$$Q = 2\pi \int_0^R v(r) r dr = \frac{\pi}{8\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) R^4$$

23 Скин-слой.

Поскольку среда вязкая, возмущения передаются вверх, но затухают на характерном масштабе толщины скин-слоя

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

24 Числа Рейнольдса, Фруда, Струхала и их физический смысл.

$$Re = \frac{v_0 l}{\nu} = \frac{2v_0 R}{\nu} = \frac{V_{\text{ср}} H}{\nu}$$

$\nu = \frac{\eta}{\rho}$ - кинематический коэффициент вязкости

Число Рейнольдса показывает относительное влияние нелинейных эффектов. Если Re мало, то можно пренебречь в уравнении движения вязкой жидкости всем, кроме давления.

$$Fr = \frac{v_0^2}{gl}$$

Число Фруда описывает отношение кинетической энергии жидкости к потенциальной (энергии гравитационных сил). Если оно велико, то можно не учитывать влияние силы тяжести

$$Sh = \frac{v_0 T}{l}$$

Число Струхала характеризует стационарность. Если $Sh \gg 1$ можно пренебречь нестационарностью (переходим в квазистатику).

25 Формула Стокса.

Сила сопротивления, действующая на маленькое тело, движущееся в жидкости.

$$F = 6\pi\eta R v_0, \text{ условие применимости - } Re \ll 1$$

26 Зависимость ширины пограничного слоя от параметров.

Пограничный слой - слой, где скорость меняется от нуля до скорости, соответствующей скорости обтекания тела идеальной жидкостью.

Толщина пограничного слоя: $h = \frac{\nu x}{v_0}$, где x - длина рассматриваемого участка

Во-первых, чем больше вязкость, тем толще пограничный слой. Кроме того, чем дальше по x , тем слой толще. И, наконец, чем больше скорость, тем больше пограничный слой должен быть прижат к пластине.

27 Уравнения линейной акустики. Волновое уравнение.

Уравнение Эйлера, уравнение непрерывности и последнее уравнение - состояния:

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0}, \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 c^2 \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad p' = c^2 \rho'$$

$$\text{Здесь } p = p_0 + p', \quad v = v_0 + v', \quad \rho = \rho_0 + \rho'$$

Величины с индексом 0 - равновесная среда, штрихами обозначены добавки, возникающие при распространении звука. c - скорость звука в данной среде

$$\text{Волновое уравнение: } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0$$

28 Монохроматические волны, уравнение Гельмгольца

$$\text{Уравнение Гельмгольца: } \Delta \Phi_0 + k_0^2 \Phi_0 = 0, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}$$

Простейшее решение - плоские волны: $\Phi_0 = e^{i(\vec{k}, \vec{r})}$

В случае $\vec{k} = \vec{k}_1 + i\vec{k}_2$ (неоднородная плоская волна):

$\Phi_0 = e^{i(\vec{k}_1, \vec{r})} e^{-(\vec{k}_2, \vec{r})}$. Всякую волну можно представить в виде суперпозиции плоских монохроматических волн с различными волновыми векторами и частотами.

29 Закон сохранения энергии (звуковой волны)

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0$$

$\vec{J} = \rho \vec{v}$ - вектор Умова-Пойнтинга - интенсивность звуковой волны, сила звука.

$$E = \rho \frac{v^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c^2} - \text{полная энергия звуковой волны.}$$