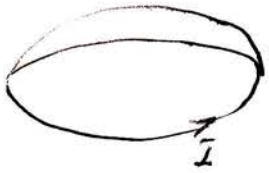
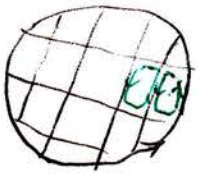
$$H_\varphi = \frac{2I}{c r}$$

$$H_\varphi \propto r_1 + H_\varphi(-1) \propto r_2 = 0$$

Магнитный листок как эквивалент линейного контура с током.





Разобьем поверхность, натянутую на контур, на элементарные контуры.

Каждый контур можно представить как $d\vec{p}^{\,m} = \frac{\mu}{c} I \vec{n}\, dS$

$$\underbrace{\vec{\tau}^{\,m}}_{\text{плотность дипольн. слоя}} \equiv \vec{p}^{\,m}_{\text{поверхн}} = \frac{d\vec{p}^{\,m}}{dS} = \frac{\mu}{c} I \vec{n}$$ – поверхностная плотность магн. дипольного момента

$$\varphi^m = \frac{1}{\mu} \int_S \frac{(\vec{p}^{\,m}_{\text{поверхн}}, \vec{R})}{R^3} dS' \Leftrightarrow \varphi^e = \frac{1}{\varepsilon} \int_S \frac{(\vec{p}^{\,e}_{\text{пов}}, \vec{R})}{R^3} dS'$$

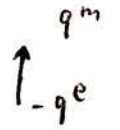
Аналогия на „языке" уравнений

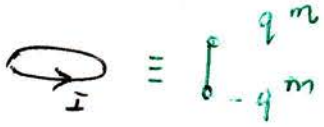
Электростатика (вне источн)	Магнитостатика (вне источн.)
$\vec{E} = -\nabla \varphi^e$	$\vec{H} = -\nabla \varphi^m$
$\varphi^e_2 - \varphi^e_1 = \frac{4\pi}{\varepsilon}(\vec{\tau}^{\,e}, \vec{n}_{12})$	$\varphi^m_2 - \varphi^m_1 = \frac{4\pi}{\mu}(\vec{n}_{12}, \vec{\tau}^{\,m})$
$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$	$\mathrm{rot}\,\vec{H} = 0$
$\mathrm{div}\,\vec{D} = 0$	$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$
$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$

граничные условия:

В отсутствие поверхн. токов и зарядов:

E_τ – непрерывно	H_τ – непрерывно
D_n – непрерывно	B_n – непрерывно





Магнитные заряды можно „разнести", но нельзя разделить

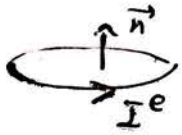
Аналогию можно продолжить введя магнитные заряды и магнитные токи;

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,m} \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,e}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho^{e} \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 4\pi\rho^{m}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

$\vec{p}^{\,e}$ $\uparrow^{q^e}_{-q^e}$ $\equiv$



$\equiv \uparrow^{q^m}_{-q^m}$ $\vec{p}^{\,m}$

$$\vec{p}^{\,e} = -\frac{\varepsilon}{c} I^m S\,\vec{n} \qquad \vec{p}^{\,m} = \frac{\mu}{c} I^e S\,\vec{n}$$

$$\vec{p}^{\,e} \to \vec{p}^{\,m},\ I^m \to -I^e$$

$$\vec{p}^{\,m} \to -\vec{p}^{\,e},\ I^e \to I^m$$

Замечание:

$$\vec{p}^{\,m} = \frac{\mu}{2c}\int_V [\vec{r}\,', \vec{j}^{\,e}(\vec{r}\,')]\,dv',$$

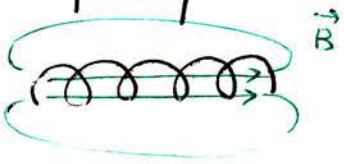
$$\vec{p}^{\,e} = -\frac{\varepsilon}{2c}\int_V [\vec{r}\,', \vec{j}^{\,m}(\vec{r}\,')]\,dv'$$

$\vec{j}^{\,e} \to \vec{j}^{\,m},\ \vec{p}^{\,m} \to -\vec{p}^{\,e},\ \mu \to \varepsilon$

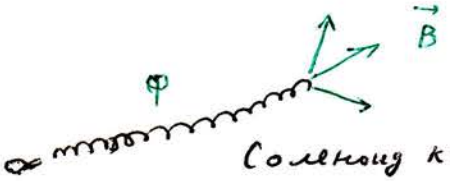
или

$\vec{j}^{\,m} \to -\vec{j}^{\,e},\ \vec{p}^{\,e} \to \vec{p}^{\,m},\ \varepsilon \to \mu$

Еще один пример:



$-\rho^m_{\text{пов}} = -\sigma^m$ $+\rho^m_{\text{поверх}} = \sigma^m$



Соленоид как поток-провод

— Моделирование магнитного монополя

Итак,

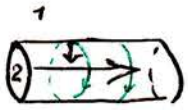
Магнитостатика $\xleftrightarrow{\text{аналогия}}$ Дипольная электростатика

Поля, создаваемые намагниченными телами

При наличии постоянных магнитов: $\vec{M} = \vec{M}^{\text{ст}}$ внутри намагн. тела

$$\vec{j}^{\,\text{ст},e} = c\operatorname{rot}\vec{M}^{\text{ст}}$$

При скачке: $c\,[\vec{n}_{12}, \vec{M}_2 - \vec{M}_1] = \vec{i}^{\,\text{ст}}$

① 

$\vec{M}^{\text{ст}} = \vec{M}_0$

$\vec{M}_1 = 0$ (вне)

$\vec{M}_2 = \vec{M}_0$ (внутри)

$$\vec{i}^{\,\text{ст},e} = c\,[\vec{n}_{12}, \vec{M}_0]$$

Таким образом, магнит эквивалентен соленоиду с током, текущим в азимутальном направлении с шагом = 0

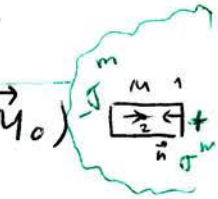
(2)

Намагниченный шар

$\vec{i}^{\,em,e} = c\,[\vec{n}_{12}, \vec{M}_0]$ – токи $\vec{i}^{\,em,e}$ текут по широтам

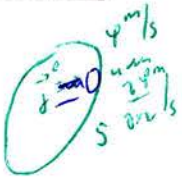
Замена на магнит. масс. заряд

$\rho^m = -\operatorname{div}\vec{M}$, $\sigma^m = -(\vec{n}_{12}, \vec{M}_2 - \vec{M}_1)$, $\sigma^m = -(\vec{n}_{12}, \vec{M}_0)$



Единственность решения задачи магнитостатики (замечание)

1) В скалярном описании (φ^m) формулировка – как в электростатике, но нет упоминания о проводниках в условиях теоремы.



2) При описании через $\vec{A}$:
Внутри объема задается $\vec{j} = \vec{j}^{\,e}$,
на границе – либо $\vec{A}_\tau|_S$, либо $\underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial n}\Big|_S}_{\text{Это задание эквивалентно заданию } \vec{B}_\tau}$.

Вместо $\vec{B}_\tau$ можно задать $\frac{\partial \vec{A}}{\partial n}$, если можно положить на границе $A_n = 0$ (так всегда можно сделать, когда $\vec{j} \in V < \infty$)

Для разностного поля:
$\operatorname{div}[\vec{A}_3, \vec{H}_3] = H_3 \underbrace{\operatorname{rot}\vec{A}_3}_{\sqrt{\mu}\vec{H}_3} - \vec{A}_3 \underbrace{\operatorname{rot}\vec{H}_3}_{=0}$

Теорема взаимности

$$\int_V \rho^{m(1)} \varphi^{m(2)}\, dv = \int_V \rho^{m(2)} \varphi^{m(1)}\, dv \quad \text{или} \quad \int_V \vec{j}^{(1)} \vec{A}^{(2)}\, dv = \int_V \vec{j}^{(2)} \vec{A}^{(1)}\, dv$$

(см. обр/пт)

$\rho^m = -\operatorname{div}\vec{M}$ – при наличии намагниченности

$$\int_V \rho^{m(1)} \varphi^{m(2)}\, dv = -\int_V \operatorname{div}\vec{M}^{(1)} \varphi^{m(2)}\, dv =$$

$$= -\int_V \left\{ \operatorname{div}(\varphi^{m(2)} \vec{M}^{(1)}) - (\nabla \varphi^{m(2)}, \vec{M}^{(1)}) \right\} dv =$$

$$= -\underbrace{\oint_S \varphi^{m(2)} \vec{M}^{(1)} d\vec{\sigma}}_{=0} + \int_V \nabla \varphi^{m(2)} \vec{M}^{(1)}\, dv = -\int_V \vec{M}^{(1)} \vec{H}^{(2)}\, dv.$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}^{(1)} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}^{(1)} \quad \Big| \cdot \vec{A}^{(2)}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}^{(2)} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}^{(2)} \quad \Big| \cdot \vec{A}^{(1)}$$

$$\underbrace{\vec{A}^{(2)} \operatorname{rot} \vec{H}^{(1)} - \vec{A}^{(1)} \operatorname{rot} \vec{H}^{(2)}} = \frac{4\pi}{c} \left(\vec{j}^{(1)} \vec{A}^{(2)} - \vec{j}^{(2)} \vec{A}^{(1)} \right)$$

$$\operatorname{div} [\vec{A}^{(1)}, \vec{H}^{(2)}] = \vec{H}^{(2)} \underbrace{\operatorname{rot} \vec{A}^{(1)}}_{\mu \vec{H}^{(1)}} - \vec{A}^{(1)} \operatorname{rot} \vec{H}^{(2)} -$$

$$\operatorname{div} [\vec{A}^{(2)}, \vec{H}^{(1)}] = \vec{H}^{(1)} \underbrace{\operatorname{rot} \vec{A}^{(2)}}_{\mu \vec{H}^{(2)}} - \vec{A}^{(2)} \operatorname{rot} \vec{H}^{(1)}$$

$$\operatorname{div} \left\{ [\vec{A}^{(1)}, \vec{H}^{(2)}] - [\vec{A}^{(2)}, \vec{H}^{(1)}] \right\} = \underbrace{\vec{A}^{(2)} \operatorname{rot} \vec{H}^{(1)} - \vec{A}^{(1)} \operatorname{rot} \vec{H}^{(2)}}_{\sim \frac{1}{R^2}};$$

$$\int_V \left(\vec{j}^{(1)} \vec{A}^{(2)} - \vec{j}^{(2)} \vec{A}^{(1)} \right) dv = \frac{c}{4\pi} \underbrace{\oint_{S_R} \left\{ [\vec{A}^{(1)} \sim \tfrac{1}{R^2}, \vec{H}^{(2)} \sim \tfrac{1}{R^3}] - [\vec{A}^{(2)} \sim \tfrac{1}{R^2}, \vec{H}^{(1)} \sim \tfrac{1}{R^3}] \right\} d\vec{S}}_{R \to \infty \;\to\; 0 \qquad S_R \sim R^2}.$$

$$\int_V \vec{M}^{(1)}\vec{H}^{(2)}dv = \int_V \vec{M}^{(2)}\vec{H}^{(1)}dv$$ – полевая формулировка теоремы взаимности

Если объ. V мала, то

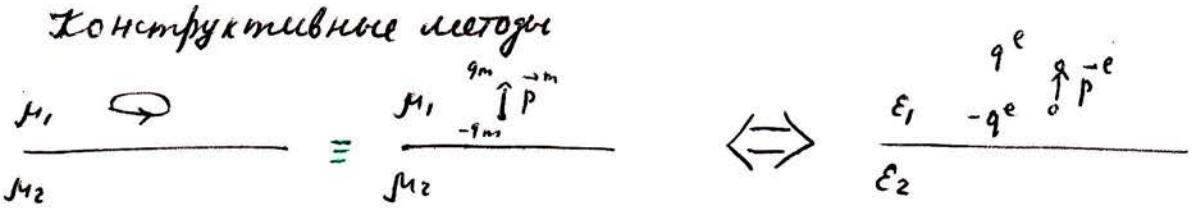
$$\int_V \vec{M}^{(1)}\vec{H}^{(2)}dv \approx \vec{H}^{(2)}(1)\underbrace{\int_V \vec{M}^{(1)}dv}_{\vec{p}^{m(1)}}, \quad \int_V \vec{M}^{(2)}\vec{H}^{(1)}dv = \vec{p}^{m(2)}\vec{H}^{(1)}(2)$$

Имеем

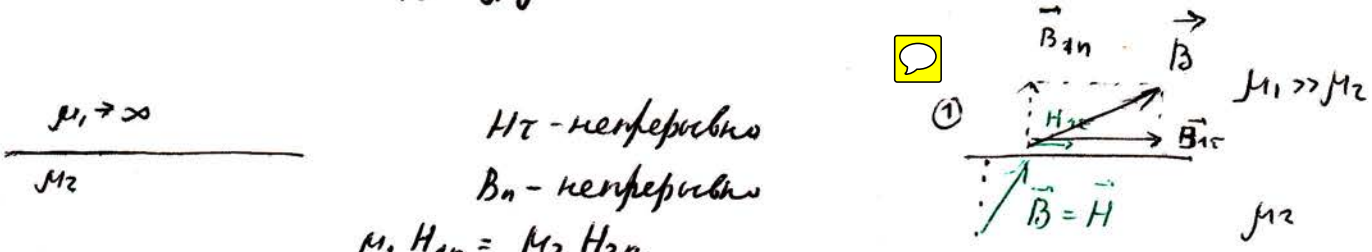
$$\vec{p}^{m(1)}\vec{H}^{(2)}(1) = \vec{p}^{m(2)}\vec{H}^{(1)}(2)$$

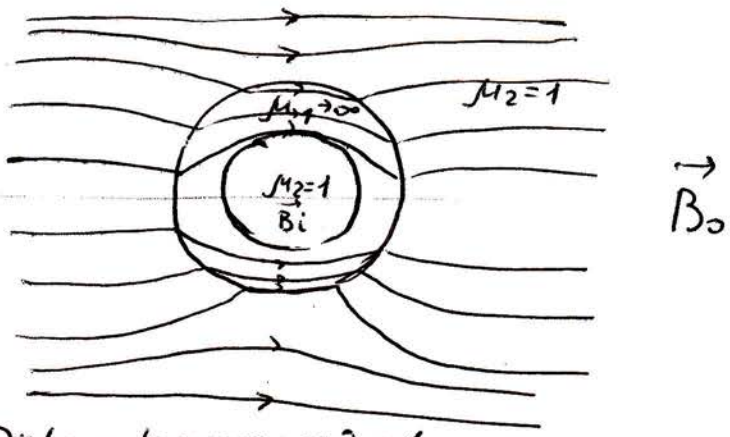
Методы решения краевых задач

Конструктивные методы



используем дипольную структуру





Экранирующее действие оболочки с высоким значением μ

$$\frac{|\vec{B}_i|}{|\vec{B}_0|} \simeq \frac{\mu_2}{\mu_1} \ll 1 \qquad (\mu_1 \gg \mu_2)$$

$$\mu_2 H_{2n} = \underset{0}{\mu_1}\,\underset{\text{конечн}}{H_{1n}}$$

$$H_{2n} = 0 \quad (H_n = 0 \text{ – на границе с } \mu = 0)$$

В случае переменных полей на границе с идеальным проводником $H_n = 0$ ($B_n = 0$) и $E_\tau = 0$. Поэтому в волновых задачах переход к идеальному проводнику эквивалентен $\varepsilon \to \infty$, $\mu \to 0$.

О методе заполнения

Если заполнение идет вдоль силовых трубок ($\nabla\mu \perp \vec{H}, \vec{B}$), то сохраняется структура $\vec{H}$ (H_τ – непр.).

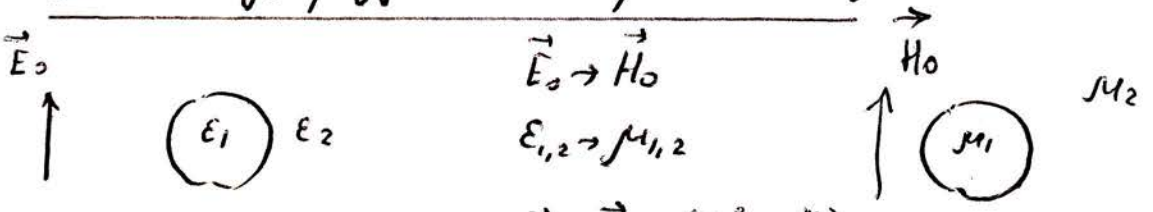
$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I$ → при сохранении неизменными токов сохраняется и значение $\vec{H}$ (I – полн)

Если заполнение идет вдоль эквипотенциалей ($\nabla\mu \parallel \vec{H}, \vec{B}$), то сохраняется структура $\vec{B}$ (т.к. B_n – непр.)

$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \Phi$ – поток. → при сохранении неизменными потоков сохраняется значение $\vec{B}$ (Φ – зар.)

Метод инверсии встречается с трудностями в магнитостатике, Метод конформ. преобр. – применим.

О методе разделения переменных



$\vec{E}_0 \to \vec{H}_0$

$\varepsilon_{1,2} \to \mu_{1,2}$

$\vec{E}_{1,2} \to \vec{H}_{1,2}$ $(\varphi^e_{1,2} \to \varphi^m_{1,2})$

Здесь сходны и граничные условия

$\vec{p}^e = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \varepsilon_2 a^3 \vec{E}_0$

$\vec{p}^m = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} \mu_2 a^3 \vec{H}_0$

$\frac{\partial}{\partial t}$: $\vec{p}^m = -\frac{1}{2} \overbrace{a^3}^{\mu_2} \vec{H}_0$

$\mu_1 = 0$ (сверхпр.)

Метод возмущений – выглядит в магнитостатике аналогично задачам электростатики.

Поле системы квазилинейных ~~контуров~~ токов. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции.

Положительн. направление обхода контура совместим с направл. тока в этом контуре

(Положительн. направление можно установить произвольно, но тогда I_k вводятся со знаком)

Поток индукции через контур:

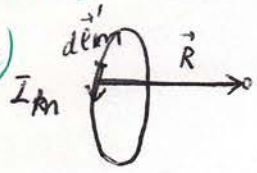
$$\Phi = \int_S \vec{B}\, d\vec{S} = \int_S \operatorname{rot} \vec{A}\, d\vec{S} = \oint_L \vec{A}\, d\vec{l}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')\, dv'}{R}$$

$$\vec{j}\, dv' = I\, d\vec{l}\,'$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{c} \sum_m I_m \oint_{L_m} \frac{d\vec{l}_m}{R} \equiv \sum_m \vec{A}_m$$

потенциал, создаваемый m-ым контуром



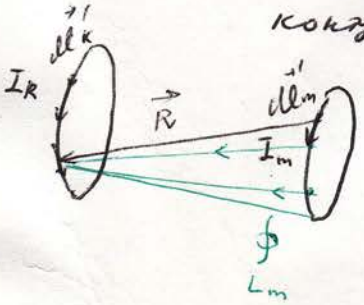
$$\vec{A}_m = \frac{\mu}{c} I_m \oint_{L_m} \frac{d\vec{l}_m}{R}$$

Штрихи можно не ставить

Рассмотрим поток Φ_k через k-ый контур

$$\Phi_k = \oint_{L_k} \vec{A}\, d\vec{l}_k = \oint_{L_k} \sum_m \vec{A}_m\, d\vec{l}_k = \underbrace{\sum_m \Phi_{km}}_{\text{Входит поток } \Phi_{kk} \text{ („собственный" поток)}} =$$

поле создается всеми контурами



Поток Φ_{km} – создается через k-й контур полем тока I_m в m-ом контуре

$$= \sum_m \underbrace{\oint_{L_k} \vec{A}_m\, d\vec{l}_k}_{\Phi_{km}} = \sum_m \oint_{L_k} \left\{ \frac{\mu I_m}{c} \oint_{L_m} \frac{d\vec{l}_m}{R} \right\} d\vec{l}_k =$$

$$= \frac{1}{c} \sum_m I_m \cdot \mu \oint_{L_k} \oint_{L_m} \frac{d\vec{l}_k\, d\vec{l}_m}{R} =$$

$$= \frac{1}{c} \sum_m I_m L_{km},$$

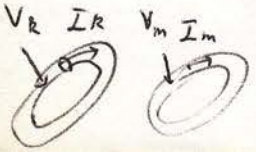
Определение L_{km}:

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi_k &= \sum_m \Phi_{km} \\ \Phi_{km} &= \frac{1}{c} L_{km} I_m \end{aligned}}$$

где $L_{km} = \mu \oint_{L_k} \oint_{L_m} \frac{d\vec{l}_k\, d\vec{l}_m}{R}$, $L_{km} = L_{mk}$; (*)

Выражение для L_{km}

$$L_{km} = \begin{cases} \text{коэффициент самоиндукции, если } k = m \\ \text{коэффициент взаимоиндукции} \end{cases}$$



: $\vec{j}_k dv_k = I_k d\vec{l}_k$, $\vec{j}_m dv_m = I_m d\vec{l}_m$

$$L_{km} = \mu \frac{1}{I_k I_m} \int_{V_k} \int_{V_m} \frac{\vec{j}_k \vec{j}_m \, dv_k \, dv_m}{R} \qquad (**)$$

Для линейного контура ф-ла (**) → дает бесконечное значение L_{kk} (т.к. мы не учитываем распределение тока по проводнику — погрешность идеализации). Формула (**) дает здесь правильный ответ.

$$\underbrace{\Phi_{km}}_{} = \frac{1}{c} L_{km} I_m$$

поток через k-ый контур, создаваемый полем тока I_m в m-ом контуре

L_{km} — есть поток через k-ый контур, создаваемый полем тока I_m, равного по величине C.

Энергия и силы в постоянном магнитном поле

Представление энергии магн. поля в виде интеграла по обл. источник.

$$W^m = \frac{1}{8\pi} \int_V \vec{B}\vec{H} \, dv = \frac{1}{8\pi} \int_V \vec{H} \, \mathrm{rot} \vec{A} \, dv = \frac{1}{8\pi} \int_V \left\{ \mathrm{div}[\vec{A}, \vec{H}] + \vec{A} \underbrace{\mathrm{rot} \vec{H}}_{\frac{4\pi}{c}\vec{j}} \right\} dv =$$

$$\mathrm{div}[\vec{A}, \vec{H}] = \vec{H} \, \mathrm{rot} \vec{A} - \vec{A} \, \mathrm{rot} \vec{H}$$

$$= \frac{1}{8\pi} \oint_{S_R} \underbrace{[\vec{A}, \vec{H}]}_{1/R^2} \underbrace{d\vec{S}}_{1/R^3} + \frac{1}{2c} \int_V \vec{j} \vec{A} \, dv$$

Получили представление энергии в виде интеграла по области источников:

$$W^m = \frac{1}{2c} \int_V \vec{j}(\vec{r}) \vec{A}(\vec{r}) \, dv$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} \, dv'$$

$$W^m = \frac{\mu}{2c^2} \int_V \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}) \vec{j}(\vec{r}')}{R} \, dv \, dv'.$$

Исходя из этой формулы, можно подумать, что энергия сосредоточена в контурах с током. Это не так. Дело в том, что в сумме присутствуют близко- и дальнодействия не отличимые.

$$W^m = \frac{1}{2c^2} L I^2; \quad L = \frac{\mu}{I^2} \int_V \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}) \vec{j}(\vec{r}')}{R} dv \, dv'$$

(см. **) $\vec{j}(\vec{r})$ $\vec{j}(\vec{r}')$ — это один и тот же ток, но взят в разных точках

Энергия системы квазилинейных контуров.

$$W^m = \frac{1}{2c}\int_V \vec{j}\vec{A}\,dv = \frac{1}{2c}\sum_k I_k \underbrace{\oint_{L_k} \vec{A}\,d\vec{l}_k}_{\varphi_k} = \boxed{\frac{1}{2c}\sum_k I_k \varphi_k} =$$

$\vec{j}\,dv = I_k\,d\vec{l}_k$

φ_k, поток через контур k, он равен $\sum_m \varphi_{km}$

$$= \frac{1}{2c}\sum_k I_k \underbrace{\sum_m \varphi_{km}}_{\varphi_k} =$$

$$= \frac{1}{2c^2}\sum_{k,m} L_{km} I_k I_m .$$ Здесь учтено: $\varphi_{km} = \frac{1}{c} L_{km} I_m$

$$W^m = \frac{1}{2c^2}\sum_{k,m} L_{km} I_k I_m$$ — отсюда тоже можно найти L_{km}

$$W^m = \frac{1}{2c^2}\cdot\left(\mu\int_V \frac{j(r)\,j(r')\,dv'}{R}\,\frac{1}{I^2}\right) I^2$$

<u>Собственная энергия и энергия взаимодействия контуров</u> (с фикс. токами)

$k = m$ - опуск.

$$W^m = \frac{1}{2c^2}\sum_{k,m} L_{k,m} I_k I_m = \underbrace{\frac{1}{2c^2}\sum_m L_{mm} I_m^2}_{W^m_{собст}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2c^2}\sum_{\substack{k,m\\(k\neq m}} L_{km} I_k I_m}_{W^m_{взаимод}} .$$

Пример: $k, m = \overline{1,2}$

$$W^m = \frac{1}{2c^2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2c^2} L_{22} I_2^2 + \frac{1}{2c^2}\underbrace{\left(L_{12} I_1 I_2 + L_{21} I_2 I_1\right)}_{2L_{12} I_1 I_2}$$, т.к. $L_{km} = L_{mk}$

Пусть W^m_{km} - энергия взаимодействия k-го и m-го контуров $\left(\begin{smallmatrix}k=1\\m=2\end{smallmatrix}\right)$

Тогда

$$W^m_{km} = \frac{1}{c^2} L_{km} I_k I_m = \frac{1}{c} I_k \underbrace{\varphi_{km}}_{\text{поток от } m\text{-го контура (т.е. внешний поток)}}$$ — энергия взаимодействия k-го и m-го контуров

$$W^m_{12} = \frac{1}{c^2} L_{12} \overset{k=1}{I_1} I_2 \overset{m=2}{=} \frac{1}{c} I_1 \varphi_{12}$$

Пусть теперь во <u>внешнее</u> поле вносится контур с током I (причем при внесении ток во время постоянный).

Если внешнее поле создает через контур поток Φ, то энергия взаимодействия контура с полем равна

$$W_{вз} = \frac{1}{c} I \Phi_0.$$

$I_к = I$, $\Phi_{кт} = \Phi_0$

$\vec{j}/\sigma = \vec{E} + \vec{E}^{ст}$; $\oint \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$

$\vec{E} = \vec{j}/\sigma - \vec{E}^{ст}$

$RI - \mathcal{E}^{ст} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$

Замечание: о потоке магн. поля через контур, образованный ид. квазил. провод.

[контур с током I во <u>внешнем</u> поле.]

$$I = \frac{1}{R}\left(\mathcal{E}_{ind} + \underbrace{\mathcal{E}^{ст}}_{\text{сторонняя ЭДС (батарея)}}\right)$$

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Здесь $\Phi_\Sigma = \Phi_{соб} + \Phi_{внеш}$

$$\operatorname{rot} \vec{E}_{ind} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\underbrace{\int_S \operatorname{rot} \vec{E}_{ind}\, d\vec{S}}_{\oint_L \vec{E}_{ind}\, d\vec{l}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_S \vec{B}\, d\vec{S}}_{\Phi_\Sigma}$$

Если система консервативная, то $\mathcal{E}^{ст} = 0$.

Т.к. $R = 0$, то для конечного тока требуем $\mathcal{E}_{ind} + \mathcal{E}^{ст} = 0$

а) Если $\mathcal{E}^{ст} = 0$, то $\mathcal{E}_{ind} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_\Sigma}{\partial t} = 0$, т.е.

$\Phi_\Sigma = const$ (I - меняется, но остается конечным)

При движении идеально проводящего замкнутого провода в магнитном поле остается постоянным магнитный поток, пронизывающий контур провода (теорема о сохр. магн. потока),

$\Phi_{соб}$ и $\Phi_{внеш}$ - меняются, но $\Phi_{соб} + \Phi_{внеш} = const$ в силу правила Ленца

б) Если $\begin{cases} I = const \\ \mathcal{E}^{ст} \neq 0 \end{cases}$, то $\mathcal{E}^{ст} = \underbrace{-\mathcal{E}_{ind}}_{\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}}$ - для поддержания постоянства токов необходимо ввести сторонние ЭДС, которые бы в каждый момент времени уравновешивали бы ЭДС индукции

$\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}$ ($I = const$), т.к. $\Phi_{соб}$ не м.

$\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_I$

$\Delta I = \frac{I}{c}\overbrace{(\Delta \Phi_0)}^{(\Delta \Phi)_I}$

$$\boxed{\mathcal{E}^{ст} = \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}}$$

Энергетический метод расчета обобщенных сил в магнитостатике

Рассмотрим получение выражения для силы, действующей в системе замкнутых квазилинейных контуров с постоянными потоками или токами.

В консервативной системе ($\mathcal{E}^{ст}=0$) ; $\delta A = -(\delta W^m)_\Phi$

< по аналогии с $\delta A = -(\delta W^e)_Q$ >.

$$\boxed{\mathcal{F}_\alpha \delta \xi_\alpha \equiv \delta A = -(\delta W^m)_\Phi} \Rightarrow \boxed{\mathcal{F}_\alpha = -\left(\frac{\delta W^m}{\delta \xi_\alpha}\right)_\Phi}$$

Величине W^m можно придать смысл свободной энергии $F = U - TS$ (изотермич. процессы!)

В неконсервативной системе ($\mathcal{E}^{ст} \neq 0$): $\delta A = -\delta W^m + \delta P =$

$$= -\delta(W^m - P)_I .$$

Для поддержания в каждом витке постоянного тока, необходимо, чтобы для этого витка $-\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathcal{E}^{ст} = 0$,

где Φ - через виток.

Другими словами, внешние электродвижущие силы $\mathcal{E}^{ст}$ должны в каждый момент уравновешивать ЭДС индукции, возникающие в ходе квазистационарного процесса.

$$\Delta P = \int_{\Delta t} \mathcal{E}^{ст} \underbrace{I\,dt}_{dq} = \int \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \underset{\substack{\parallel \\ const}}{I}\, dt = \frac{1}{c} I \int d\Phi_0 = \frac{1}{c} I \underbrace{\Delta \Phi_0}_{(\Delta \Phi)_I} =$$

(т.к. $I = const$)

Для виртуальных перемещений имеем, что виртуальная работа внешних (сторонних) ЭДС равна

$(\delta P)_I = \frac{1}{c} I (\delta \Phi)_I$ — в одном витке. $(\delta \Phi)_I = (\delta \Phi_0)_I$

При наличии системы витков:

$(\delta P)_I = \frac{1}{c}\sum_k I_k (\delta \Phi_k)_I$, где Φ_k - полный поток через k-ый контур (от k, и от $\mathcal{E}^{ст}$)

$$\boxed{W^m = \frac{1}{2c}\sum_k I_k \Phi_k}$$

$$\boxed{\Phi_k = \sum_m \Phi_{km} = \sum_m \frac{1}{c} L_{km} I_m}$$

Тогда,

$$(\delta W^m)_I = \delta\left(\frac{1}{2c}\sum_k I_k \Phi_k\right)_I = \frac{1}{2c}\sum_k I_k (\delta \Phi_k)_I ,$$

$$-\delta(W^m - P)_I = -(\delta W^m)_I + (\delta P)_I = -\frac{1}{2c}\sum_k I_k (\delta \Phi_k)_I + \frac{1}{c}\sum_k I_k (\delta \Phi_k)_I =$$

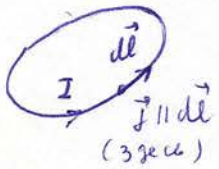
$$= (\delta W^m)_I .$$

Получаем

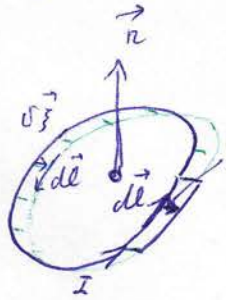
$$\underbrace{\delta A = -\delta (W^m - P)_I = (\delta W^m)_I}_{F_\alpha \delta \xi_\alpha} \Rightarrow \quad F_\alpha = \left(\frac{\delta W^m}{\delta \xi_\alpha}\right)_I$$

Примеры

① Сила действующая на элемент квазилинейного контура с током:



Выполним виртуальное перемещение ~~элемента~~ контура



$\delta\vec{\xi}$ - виртуальное перемещение ~~элемента~~ контура (как целого)

$d\vec{F}$ - сила действующая на элемент $d\vec{l}$ с током I.

$$\delta A = \oint_L \delta\vec{\xi}\, d\vec{F} = (\delta W^m)_I, \quad \boxed{W^m_{вз.} = \frac{1}{c} I \varphi_0}, \quad \varphi_0 \text{ - поток во внешнем поле} \Big\} \ \varphi_{соб.} \text{ здесь не меняется}$$

$$(\delta W^m)_I = (\delta W^m_{вз})_I = \frac{1}{c} I \underbrace{\delta \varphi_0}_{\cancel{= \delta'' \varphi_0 \ (т.к. (\delta \varphi_{соб})_I = 0)}} = \frac{1}{c} I \oint_L \underbrace{[\delta\vec{\xi}, d\vec{l}]}_{d\vec{S}} \vec{B}_0 = \frac{1}{c} I \oint_L [d\vec{l}, \vec{B}_0]\, \delta\vec{\xi}.$$

$\vec{B}_0 \equiv \vec{B}_0$ (внеш. поле)

$dS = |[\delta\vec{\xi}, d\vec{l}]|$

$(\delta\varphi)_I = (\delta\varphi_0)_I$

$\Phi = \varphi_0 + \varphi_{соб}$ - меняется

Φ меняется, а I - не меняется (т.е. $\Phi_{соб}$ не мен.)

$$\vec{F}\cdot\delta\vec{\xi} = \oint_L d\vec{F}\cdot\delta\vec{\xi} = \oint_L \frac{I}{c}[d\vec{l}, \vec{B}]\cdot\delta\vec{\xi}$$

$$d\vec{F} = \frac{I}{c}[d\vec{l}, \vec{B}_0] \Rightarrow \vec{F} = \oint_L \frac{I}{c}[d\vec{l}, \vec{B}_0] = \oint_L \frac{I}{c}[d\vec{l}, \vec{B}]$$

$\vec{B} = \vec{B}_{соб} + \vec{B}_0$

② Объемная плотность силы в магнитном поле:

$I d\vec{l} = \vec{j}\, dv$

$$d\vec{F} = \frac{[\vec{j}, \vec{B}]}{c} dv; \qquad d\vec{F} = \vec{f}\, dv$$

$$\vec{f} = \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{B}]$$

В случае движ. заряда: $\vec{j} = q\vec{v}\,\delta(\vec{r} - \vec{r}(t))$, $\vec{f} = \frac{q}{c}[\vec{v}, \vec{B}]$

Таким образом, общее выражение для силы Лоренца:

$$\vec{f}_л = \rho\vec{E}_0 + \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{B}]$$

$$\int_V \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{B}_0]\, dv = \int_V \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{B}]\, dv$$

$\vec{B} = \vec{B}_{соб} + \vec{B}_0$

③ Сила, действующая на виток (магнитный диполь).
Вращающий момент, действующий на виток.

$W^m_{вз} = \frac{1}{c} I \varphi_0$, $\varphi = \varphi_0$ – поток внешнего поля $\vec{B}$.

$I = const$, $\varphi_{соб} = const$

$$W^m_{вз} = \frac{1}{c} I \varphi_0 = \frac{I}{c}(\vec{B}_0, \vec{n}) S = \left(\mu \frac{I}{c} S \vec{n}, \vec{H}_0\right) = (\vec{p}^m, \vec{H}_0) = (\vec{p}^m_н, \vec{B}_0)$$

учли, что виток мал. внеш. поле

$$\vec{p}^m_н = \frac{\vec{p}^m}{\mu}.$$

Далее "0" не пишем для краткости

Тогда

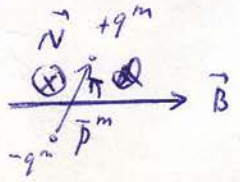
$$\vec{F} = (\nabla W^m_{вз})_I = \nabla(\vec{p}^m_н, \vec{B}_0) = [\vec{p}^m_н, \underbrace{rot\, \vec{B}}_{\mu\, rot \vec{H} = 0}] + [\vec{B}, \underbrace{rot\, \vec{p}^m_н}_{0}] + (\vec{B}, \nabla)\underbrace{\vec{p}^m_н}_{0} +$$

Мы смотрим поле от внешних источников, ток которых равен нулю в месте расположения диполя

$$+ (\vec{p}^m_н, \nabla)\vec{B}.$$

$$\underline{\vec{F} = (\vec{p}^m_н, \nabla)\vec{B}_0} = (\vec{p}^m, \nabla)\vec{H}.$$

Момент сил: $N = (\vec{F})_\vartheta = \left(\frac{\partial W^m_{вз}}{\partial \vartheta}\right)_I = \frac{\partial}{\partial \vartheta} p^m_н B_0 \cos\vartheta = -p^m_н B_0 \sin\vartheta$



$$\underline{\vec{N} = [\vec{p}^m_н, \vec{B}_0]} = [\vec{p}^m, \vec{H}_0]$$

④ Объемная плотность пондеромоторной силы в магнетике:

$$\vec{f} = (\vec{M}, \nabla)\frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{\mu - 1}{4\pi}(\vec{H}, \nabla)\vec{H} = \frac{\mu - 1}{8\pi}\nabla \vec{H}^2 \quad \text{– формула} \quad (*)$$

$\mu > 1$ – магнетик втягив. в сильное поле (парам.)

$\mu < 1$ – магнетик выт. из сильн. поля (диамаг.)

$\frac{1}{2}\nabla(\vec{H}\vec{H}) = (\vec{H}, \nabla)\vec{H}$

получена без учета магнитострикции

В магнитострикционном случае: <τ – плотность среды>

$$\vec{f} = \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{B}] + \frac{1}{8\pi}\nabla\left(\tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau}\vec{H}^2\right) - \frac{\vec{H}^2}{8\pi}\nabla\mu.$$

В случае $\mu = 1 + c\tau$ (жидкости и газообр. магнетики)

имеем $\tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} = \mu - 1$, и получаем: $\vec{f} = \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{B}] + \frac{\mu - 1}{8\pi}\nabla \vec{H}^2$.

<u>Замечание:</u> Сведение объемных сил к поверхностным натяжениям:

$\vec{F} = \int \vec{f}\, dv$. Введем тензор поверхностных натяжений $\overleftrightarrow{T}$: $\vec{f} = div\, \overleftrightarrow{T}$.

$$\vec{F} = \int_V div\, \overleftrightarrow{T}\, dv = \oint_S \overleftrightarrow{T}\, d\vec{S} = \oint_S \underbrace{(\overleftrightarrow{T}, \vec{n})}_{\vec{T}_{пов}}\, dS \equiv \oint \vec{T}_{пов}\, dS.$$

$\vec{T}_{пов}$ – сила, действующая на dS

Сведение объёмных сил к поверхностным натяжениям в магнитостатике.

$$\vec{F} = \int_V \vec{f}\, dv, \text{ где } \vec{f} = \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{B}] + \frac{1}{8\pi}\nabla\left(\vec{H}^2 \frac{\partial \mu}{\partial \tau}\tau\right) - \frac{1}{8\pi}\vec{H}^2 \nabla\mu.$$

$$\vec{f} = \operatorname{div}\hat{T}; \quad \vec{f} = \vec{f}' + \vec{f}''; \quad \hat{T} = \hat{T}' + \hat{T}''$$

$$\vec{f}^{\text{пов}} = \hat{T}\vec{n}$$

$$\vec{f}'' = \frac{1}{8\pi}\nabla\left(\vec{H}^2 \frac{\partial \mu}{\partial \tau}\tau\right);$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{T}'' = \frac{1}{8\pi}\vec{H}^2 \frac{\partial \mu}{\partial \tau}\tau \hat{I}.$$

В электростатике:

$$\vec{f}'' = \frac{1}{8\pi}\nabla\left(\vec{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\tau\right);$$

$$\hat{T}'' = \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\tau \hat{I}.$$

$$\vec{f}' = \frac{1}{c}[\underbrace{\vec{j}}_{\frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\vec{H}}, \underbrace{\vec{B}}_{\mu\vec{H}}] - \frac{1}{8\pi}\vec{H}^2\nabla\mu = \frac{\mu}{4\pi}[\operatorname{rot}\vec{H}, \vec{H}] - \frac{1}{8\pi}\vec{H}^2\nabla\mu =$$

$$= -\frac{\mu}{4\pi}[\vec{H}, \operatorname{rot}\vec{H}] - \frac{1}{8\pi}\vec{H}^2\nabla\mu;$$

$$\nabla(\vec{H}, \vec{H}) = 2[\vec{H}, \operatorname{rot}\vec{H}] + 2(\vec{H}, \nabla)\vec{H};$$

$$-[\vec{H}, \operatorname{rot}\vec{H}] = -\frac{1}{2}\nabla\vec{H}^2 + (\vec{H}, \nabla)\vec{H};$$

$$\vec{f}' = -\frac{\mu}{8\pi}\nabla\vec{H}^2 + \frac{\mu}{4\pi}(\vec{H}, \nabla)\vec{H} - \frac{1}{8\pi}\vec{H}^2\nabla\mu = \frac{\mu}{4\pi}(\vec{H}, \nabla)\vec{H} - \frac{1}{8\pi}\nabla(\mu\vec{H}^2).$$

$$f'_x = \frac{\mu}{4\pi}(\vec{H}, \nabla)H_x - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}(\mu\vec{H}^2);$$

$$\operatorname{div}(H_x\vec{B}) = H_x \underbrace{\operatorname{div}\vec{B}}_{0} + (\nabla H_x, \vec{B}) = (\vec{B}, \nabla)H_x = \mu(\vec{H}, \nabla)H_x;$$

$$f'_x = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(H_x\vec{B}) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu\vec{H}^2}{8\pi}\right) = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(\mu H_x\vec{H}) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu\vec{H}^2}{8\pi}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu H_x^2}{4\pi} - \frac{\mu\vec{H}^2}{8\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu H_x H_y}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu H_x H_z}{4\pi}\right).$$

$$f'_x = \frac{\partial T'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T'_{xz}}{\partial z};$$

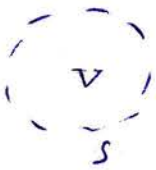
$$\boxed{T'_{\alpha\beta} = \frac{\mu}{4\pi}\left(H_\alpha H_\beta - \frac{\vec{H}^2}{2}\delta_{\alpha\beta}\right)}$$

$$T'_{\alpha\beta} = T'_{\beta\alpha}$$

$$T''_{\alpha\beta} = T''_{\beta\alpha}$$

$\oint_S (\overleftrightarrow{T}, \vec{n})\, dS$ – интеграл описывает Максвелловские натяжения на границе S объема V. (S можно выбрать и вне тела)

В специальной теор. относительности показывается, что



$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\vec{P}_{мех} + \vec{G})}_{\text{полн. импульс системы}} = \underbrace{\oint_S \overleftrightarrow{T}\, d\vec{S}}_{= \int_V \operatorname{div}\overleftrightarrow{T}\, dv}$$

$$\vec{P}_{мех} = \int_V \vec{p}_{мех}\, dv$$

$$\vec{G} = \int_V \vec{g}\, dv, \text{ где } \vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial(\vec{g}+\vec{p}_{мех})}{\partial t} - \operatorname{div}\overleftrightarrow{T} = 0}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{S} = 0$$

Переменное электромагнитное поле

Описание переменного поля в общем случае

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$\vec{B} = \mu\vec{H}$, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, μ, ε – const (и без дисперс.)

Покажем, что из двух векторных уравнений можно прийти к одному:

(I) $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \;\Big|\; \operatorname{rot}$ $\qquad \operatorname{rot}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{H}$$

$$\nabla\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}\right)$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$$

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\mu}{c^2}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} + \frac{4\pi}{\varepsilon}\nabla\rho}$$

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = v$$

$$\Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Box.$$

$$\Box\vec{E} = \frac{4\pi\mu}{c^2}\vec{j} + \frac{4\pi}{\varepsilon}\nabla\rho$$

II) $$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad \Big| \operatorname{rot}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\vec{j}.$$

$$\nabla \operatorname{div}\vec{H} - \Delta\vec{H} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\vec{j}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \to \mu \operatorname{div}\vec{H} = 0$$

$$\boxed{\Delta\vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\vec{j}}$$

$$\Big\{ \ \Box\vec{H} = -\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\vec{j}.$$

→ Показать самостоятельно, что чисто потенциальный переменный ток, заданный в конечной области пространства не создает поля излучения.

$$\Box f = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{1}{v^2} = 0 \Rightarrow f = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

или

$$f = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

Пример:

$$\xi = t - \frac{x}{v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = +\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Итак, мы показали, что векторные уравнения Максвелла свелись к одному векторному уравнению (т.е. к 3 скалярным уравнениям).

<В ряде случая достаточно меньше ур-ий: например, φ в электростат.>

Описание переменного электромагнитного поля с помощью векторного и скалярного потенциалов.

[данное описание не универсально, оно, например, мало пригодно для неоднородных сред]

$\underbrace{\operatorname{div}\vec{B}=0}$; $\underbrace{\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}}$ $\Rightarrow$ $\vec{H}=\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}$

$\underbrace{\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$ $\qquad \operatorname{rot}\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0 \Rightarrow \vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$;

$$\underbrace{\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

Рассмотрим теперь уравнение Максвелла (далее считая, что $\varepsilon=\text{const}$ и $\mu=\text{const}$)

нет дисперсии

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{1}{c}\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\operatorname{rot}\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)+\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}=\nabla\operatorname{div}\vec{A}-\Delta\vec{A}$

$$\Delta\vec{A}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}+\nabla\left(\operatorname{div}\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \qquad (\mathrm{I})$$

Рассмотрим последнее ~~из~~ оставшееся ур-ие Максвелла

$\operatorname{div}\vec{D}=4\pi\rho$,

$\operatorname{div}\left(-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$,

$$\Delta\varphi=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A}. \qquad (\mathrm{II}')$$

$$\Delta\varphi=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A}\ \Big/\left(-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right),$$

$$\Delta\varphi-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \qquad (\mathrm{II}'')$$

Обсудим, как можно упростить эти уравнения с помощью выбора $\vec{A}$.

$\vec{A}_{нов}=\vec{A}_{стар}-\nabla\psi$ (это возможно, т.к. $\operatorname{rot}\nabla\psi=0$, и $\operatorname{rot}\vec{A}_{нов}=\operatorname{rot}\vec{A}_{ст}$)

Кроме того, необходимо, чтобы $\vec{E} = -\nabla\varphi_{нов} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}_{нов}}{\partial t} =$
$= -\nabla\varphi_{ст} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}_{ст}}{\partial t}$.

$$\vec{E} = -\nabla\varphi_{нов} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}_{нов}}{\partial t} =$$
$$= -\nabla\varphi_{нов} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}_{ст} - \nabla\psi) = -\nabla\varphi_{нов} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}_{ст}}{\partial t} + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\psi}{\partial t} =$$
$$= -\nabla\varphi_{ст} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}_{ст}}{\partial t}.$$

$\nabla\varphi_{нов} - \nabla\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \nabla\varphi_{ст}$. Отсюда без ограничения общности имеем, что $\varphi_н = \varphi_{ст} + \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}$.

При таком введении $\vec{E}$ и $\vec{B}$ не изменятся.

① Калибровка Лоренца

Покажем, что ψ можно выбрать так, чтобы при $\operatorname{div}\vec{A}_{ст} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi_{ст}}{\partial t} \neq 0$ получить

$$\operatorname{div}\vec{A}_{нов} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi_{нов}}{\partial t} = 0.$$

В самом деле

$$0 = \operatorname{div}\vec{A}_{нов} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi_{нов}}{\partial t} = \operatorname{div}(\vec{A}_{ст} - \nabla\psi) + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi_{ст} + \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) =$$
$$= \operatorname{div}\vec{A}_{ст} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi_{ст}}{\partial t} - \left(\Delta\psi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right);$$

Приходим к задаче для ψ:

$$\Delta\psi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \operatorname{div}\vec{A}_{ст} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi_{ст}}{\partial t}$$ – такая задача всегда имеет решение.

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0}$$ – калибровка Лоренца (L. V. Lorenz)

$$\left.\begin{aligned} &(I) \to \quad \Delta\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} \\ &(II'') \to \quad \Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho \end{aligned}\right\}$$

Как ясно из этих уравнений, калибровка Лоренца удобна при отыскании полей заданных источников.

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E},$$
$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu}B.$$

$\varphi = -\frac{c}{\varepsilon\mu}\int \operatorname{div}\vec{A}\,dt$ – отсюда видно, что решать специально уравнение для φ не нужно.

(2) Калибровка Кулона

$\operatorname{div}\vec{A}=0$ Если $\operatorname{div}\vec{A}_{ст}\neq 0$, то $\vec{A}_{нов}=\vec{A}_{ст}-\nabla\psi$,

и $\Delta\psi=\operatorname{div}\vec{A}_{ст}$

$$\vec{E}=-\nabla\varphi_{ст}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_{ст}}{\partial t}=-\nabla\varphi_{нов}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_{нов}}{\partial t}$$

Обратимся к уравнениям (I) и (II'):

$$\Delta\vec{A}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}+\nabla\left(\operatorname{div}\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right), \qquad (I)$$

$$\Delta\varphi=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} \qquad (II')$$

При использовании калибровки Кулона получаем

$$\left.\begin{aligned}&(II'):\ \Delta\varphi=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon},\\ &(I):\ \Delta\vec{A}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}.\end{aligned}\right\}$$

такой калибровкой отделяется статическое поле.

Данная калибровка используется в задачах об излучении движущихся частиц.

Векторный потенциал Герца

Введем потенциал $\vec{\Pi}$ с помощью соотношений

$\vec{A}=\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t}$, $\varphi=-\operatorname{div}\vec{\Pi}$ (при этом тождественно выполняется калибровка Лоренца)

Тогда из $\Delta\vec{A}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}$ получим

$$\Delta\vec{\Pi}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{\varepsilon}\int\vec{j}\,dt$$

Если заданы $\vec{j}$, введем $\vec{P}^{ст}$ (сторонняя поляризация); $\vec{j}=\frac{\partial\vec{P}^{ст}}{\partial t}$

$$\int\vec{j}\,dt=\vec{P}^{ст}.$$

$$\Delta\vec{\Pi}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{\varepsilon}\vec{P}^{ст}.$$

Описание поля через потенциал $\vec{\Pi}$:

$$\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}=\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{\Pi};\quad \vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2}+\nabla\operatorname{div}\vec{\Pi}.$$

Принцип двойственности:

$\vec{A}=\vec{A}^e \to \vec{A}^m$

$\varphi=\varphi^e \to \varphi^m$

$\vec{E}=\vec{E}^e \to \vec{H}^m$

$\vec{H}=\vec{H}^e \to -\vec{E}^m$

$\vec{j}=\vec{j}^e \to \vec{j}^m$

$\rho=\rho^e \to \rho^m$

$\varepsilon,\mu \to \mu,\varepsilon$

$\vec{B}^e=\mathrm{rot}\,\vec{A}^e \to -\vec{D}^m=\mathrm{rot}\,\vec{A}^m$

$\vec{E}^e=-\nabla\varphi^e-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}^e}{\partial t}$

$\vec{\Pi}=\vec{\Pi}^e \to \vec{\Pi}^m$

$\vec{P}^{cm} \to \vec{M}^{cm}$

При условии калибровки Лоренца

$$\mathrm{div}\,\vec{A}^m+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi^m}{\partial t}=0$$

будем иметь

$$\Delta\vec{A}^m-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}^m}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\varepsilon}{c}\vec{j}^m$$

$$\Delta\varphi^m-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi^m}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{\mu}\rho^m$$

$$\Delta\vec{\Pi}^m-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}^m}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{\mu}\vec{M}^{cm}$$

$$\Rightarrow \vec{D}^m=-\mathrm{rot}\,\vec{A}^m,\quad \vec{E}^m=\frac{\vec{D}^m}{\varepsilon},$$

$$\vec{H}^m=-\nabla\varphi^m-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}^m}{\partial t},\quad \vec{B}^m=\mu\vec{H}^m$$

В общем случае (при наличии $\vec{j}^e,\rho^e$ и $\vec{j}^m,\rho^m$) $\vec{E}=\vec{E}^e+\vec{E}^m$, $\vec{H}=\vec{H}^e+\vec{H}^m$.

Мы показали, что поле можно описать с помощью 3 скалярных функций. В частных случаях может оказаться достаточным наличие только 2 функций.

Гармонические во времени процессы.

Процесс $f(t)$ будем называть гармоническим во времени (монохр.), если его зависимость от времени имеет вид

$$f(t)=A\cos(\omega t+\varphi),$$

где $\omega=2\pi\nu$ – круговая частота, ν – частота, φ – начальная фаза, A – амплитуда,

$\nu=\frac{1}{T}$, где T – период

$$f(t)=\int_0^\infty[a(\omega)\cos\omega t+b(\omega)\sin\omega t]\,d\omega=$$

$$=\int_0^\infty A(\omega)\cos[\omega t+\varphi(\omega)]\,d\omega$$

$$A(\omega)=\sqrt{a^2(\omega)+b^2(\omega)},\quad \varphi=-\mathrm{arctg}\frac{b(\omega)}{a(\omega)}$$

Уравнения для поля линейны. Если и материальные уравнения линейны, то $\forall$ процесс можно разложить в ф

интеграл Фурье и далее решать задачу для отдельных Фурье-составляющих.

При математическом рассмотрении монохроматических процессов целесообразно ввести комплексные обозначения. Сами ур-ия Максвелла линейны. Поэтому при линейном характере материальных связей векторам напряженности $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{H}(\vec{r},t)$ приводятся в соответствие комплексные векторные амплитуды $\vec{E}(\vec{r},\omega)$, $\vec{H}(\vec{r},\omega)$.

Пусть $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})\cos(\omega t + \varphi_E(\vec{r}))$

$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0(\vec{r})\cos(\omega t + \varphi_H(\vec{r}))$;

φ может быть функцией $\varphi(\vec{r})$

тогда <u>комплексные амплитуды</u>, приводимые в соответствие этим полям, имеют вид

$$\vec{E}(\vec{r},\omega) = \vec{E}_0(\vec{r})e^{i\varphi_E(\vec{r})}, \quad \vec{H}(\vec{r},\omega) = \vec{H}_0(\vec{r})e^{i\varphi_H(\vec{r})}.$$

Связь между физическими величинами и комплексными амплитудами дается соотношениями

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\vec{E}(\vec{r},\omega)e^{i\omega t}\right\}, \quad \vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\vec{H}(\vec{r},\omega)e^{i\omega t}\right\}.$$

Заметим, что (в силу линейности), если $\mathrm{Re}\{\ldots\}$ – решение ур-ия (т.е. вещ. решение, т.е.) с пост. коэфф., ~~тогда~~ $\mathrm{Im}\{\ldots\}$ – тоже решение

Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд:

$$\mathrm{rot}\left\{\vec{E}(\vec{r},\omega)e^{i\omega t}\right\} = -\frac{\mu}{c}\, i\omega\left\{\vec{H}(\vec{r},\omega)e^{i\omega t}\right\} \qquad \frac{\partial}{\partial t} \to i\omega$$

Далее множитель $e^{i\omega t}$ сокращаются. Вводится волновое число в свободном пространстве $k_0 = \frac{\omega}{c}$. В итоге имеем

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},\omega) = -ik_0\mu\vec{H}(\vec{r},\omega)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r},\omega) = ik_0\varepsilon\vec{E}(\vec{r},\omega) + \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},\omega)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D}(\vec{r},\omega) = 4\pi\rho(\vec{r},\omega)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r},\omega) = 0$$

При наличии дисперсии (временной): $\left.\begin{array}{l}\varepsilon = \varepsilon(\omega)\\ \mu = \mu(\omega)\\ \sigma = \sigma(\omega)\end{array}\right\} = \mathrm{const}$ при $\omega = \mathrm{const}$

$$\vec{D}(\vec{r},\omega) = \varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r},\omega), \quad \vec{B}(\vec{r},\omega) = \mu(\omega)\vec{H}(\vec{r},\omega), \quad \vec{j}(\vec{r},\omega) = \sigma(\omega)\vec{E}(\vec{r},\omega)$$

Уравнение непрерывности:

$$\operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},\omega) + i\omega\rho(\vec{r},\omega) = 0$$

[достаточно задать $\vec{j}$; ρ следует из ур-ия непр.]

Комплексная диэлектрическая проницаемость

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{rot}\vec{H} = ik_0\varepsilon\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}.$$

Пусть $\vec{j} = \sigma\vec{E} + \vec{j}^{\,ст}$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \left(ik_0\varepsilon + \frac{4\pi}{c}\sigma\right)\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,ст}; \quad \operatorname{rot}\vec{H} = ik_0\left(\varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,ст}$$

$\varepsilon_к = \varepsilon - i\dfrac{4\pi\sigma}{\omega}$ - комплексная диэлектрическая проницаемость

$\operatorname{Re}\varepsilon_к = \varepsilon$; $\operatorname{Im}\varepsilon_к$ - определяется потерями в среде

(Пример: диэлектрик с потерями $\varepsilon_к = \varepsilon' - i\varepsilon''$; аналогично - магнетик)

Приходим к уравнению

$$\operatorname{rot}\vec{H} = ik_0\varepsilon_к\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,ст}.$$

Перепишем ранее полученные уравнения в новых обозначениях (в терминах комплексных амплитуд).

$$\Delta\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\mu}{c^2}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} + \frac{4\pi}{\varepsilon}\nabla\rho \Rightarrow \Delta\vec{E} + k^2\vec{E} = \frac{4\pi\mu}{c}ik_0\vec{j} + \frac{4\pi}{\varepsilon}\nabla\rho$$

$$\Delta\vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\vec{j} \Rightarrow \Delta\vec{H} + k^2\vec{H} = -\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\vec{j}$$

$k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu}$ - волновое число в среде

Калибровка Лоренца:

$$\operatorname{div}\vec{A} + ik_0\varepsilon\mu\varphi = 0. \quad \text{Отсюда } \underbrace{\varphi = \frac{i}{k_0\varepsilon\mu}\operatorname{div}\vec{A}}$$

$$(\mathrm{I}) \quad \Delta\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} \Rightarrow \Delta\vec{A} + k^2\vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j},$$

$$(\mathrm{II}') \quad \Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho \Rightarrow \Delta\varphi + k^2\varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho,$$

$$\begin{cases} \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla\varphi - ik_0\vec{A} = -\dfrac{i}{k_0\varepsilon\mu}\nabla\operatorname{div}\vec{A} - ik_0\vec{A} = -\dfrac{i}{k_0\varepsilon\mu}\left(\nabla\operatorname{div}\vec{A} + k^2\vec{A}\right) \end{cases}$$

$$\Delta\vec{\Pi} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\vec{P}^{\,ст} \Rightarrow \Delta\vec{\Pi} + k^2\vec{\Pi} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\vec{P}^{\,ст}$$

$$\vec{A} = \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\Pi} = -\frac{i}{k_0\varepsilon\mu}\vec{A}$$

Замечание об усреднении по периоду $T = 2\pi/\omega$ произведений величин, гармонически зависящих от времени

Рассмотрим две величины, $a(t)$ и $b(t)$, гармонически зависящие от времени:

$$a(t) = \mathrm{Re}\{a(\omega)e^{i\omega t}\}, \quad b(t) = \mathrm{Re}\{b(\omega)e^{i\omega t}\}.$$

Комплексные амплитуды $a(\omega)$ и $b(\omega)$ могут быть представлены в виде:

$$a(\omega) = \underbrace{|a(\omega)|}_{A} e^{i\alpha}, \qquad b(\omega) = \underbrace{|b(\omega)|}_{B} e^{i\beta}$$

Запишем среднее (по периоду $T = 2\pi/\omega$) значение произведения $a(t)b(t)$:

$$\overline{a(t)\,b(t)}^{T} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} a(t)\,b(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} AB\cos(\omega t+\alpha)\cos(\omega t+\beta)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{T}AB\int_t^{t+T}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(2\omega t+\alpha+\beta)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2}AB\cos(\alpha-\beta).$$

Такой же результат можно получить иначе:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{a(\omega)\,b^*(\omega)\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{Ae^{i\alpha}\cdot Be^{-i\beta}\} = \frac{1}{2}AB\cos(\alpha-\beta).$$

$*$ – символ комплексного сопряжения

Таким образом, имеем простой способ расчета среднего:

$$\overline{a(t)\,b(t)}^{T} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{a(\omega)\,b^*(\omega)\}.$$

Отсюда следует, что $\overline{a^2(t)}^{T} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\underbrace{a(\omega)a^*(\omega)}_{|a(\omega)|^2}\} = \frac{|a(\omega)|^2}{2}$;

Пример 1 [расчёт среднего по времени вектора Пойнтинга]

$$\overline{\vec{S}(t)}^{T} = \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{4\pi}\mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{r},\omega), \vec{H}^*(\vec{r},\omega)\right] = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{r},\omega), \vec{H}^*(\vec{r},\omega)\right].$$

Пример 2 [расчёт средней по времени объемной плотности мощности джоулевых потерь]

$$\overline{q}^{T} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{\sigma}\underbrace{\vec{j}(\vec{r},\omega)\,\vec{j}^{*}(\vec{r},\omega)}_{|\vec{j}(\vec{r},\omega)|^2} \right\} = \frac{1}{2}\,\frac{|\vec{j}(\vec{r},\omega)|^2}{\sigma},$$

где σ – проводимость среды (вещественная величина).

Пример 3 [расчёт средней по времени объемной плотности энергии электромагнитного поля в среде без дисперсии]

Напомним, что $w = \dfrac{\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}}{8\pi} = \dfrac{\varepsilon\vec{E}^2 + \mu\vec{H}^2}{8\pi}$.

Считая, что ε и μ – вещественные, имеем:

$$\overline{w}^{T} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{ \frac{\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{E}^{*} + \mu\vec{H}\cdot\vec{H}^{*}}{8\pi} \right\} = \frac{\varepsilon|\vec{E}|^2 + \mu|\vec{H}|^2}{16\pi}.$$

(здесь и далее, аргументы $\vec{r}$ и ω для краткости опускаем).

Комплексная теорема Пойнтинга

< При доказательстве теоремы считаем, что ε, μ и σ – вещественные величины, т.е. комплексную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_к = \varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$ пока не используем >

Запишем уравнения Максвелла для комплексных амплитуд:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -ik_0\mu\vec{H}, \qquad (1)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = ik_0\varepsilon\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{пр} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{ст}, \qquad (2)$$

где $\vec{j}_{пр} = \sigma\vec{E}$ – плотность тока проводимости,
$\vec{j}^{ст}$ – плотность стороннего тока, $k_0 = \omega/c$.

Выполним комплексное сопряжение второго уравнения:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}^{*} = -ik_0\varepsilon\vec{E}^{*} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{*}_{пр} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{ст*}.$$

Умножим скалярно первое уравнение на $\vec{H}^*$, второе — на $\vec{E}$ и вычтем из первого уравнения второе:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -ik_0\mu\vec{H} \;\Big|\cdot\,\vec{H}^*$$
$$\mathrm{rot}\,\vec{H}^* = -ik_0\varepsilon\vec{E}^* + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,*}_{пр} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,ст*} \;\Big|\cdot\,\vec{E}$$

$$\underbrace{\vec{H}^*\mathrm{rot}\,\vec{E} - \vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{H}^*}_{\mathrm{div}[\vec{E},\vec{H}^*]} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,*}_{пр}\vec{E} - \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,ст*}\vec{E} + ik_0\Big(\varepsilon\underbrace{\vec{E}\vec{E}^*}_{|\vec{E}|^2} - \mu\underbrace{\vec{H}\vec{H}^*}_{|\vec{H}|^2}\Big)$$

Умножим получившийся результат на $\frac{c}{8\pi}$ и введём комплексный вектор Пойнтинга $\vec{S}_к = \frac{c}{8\pi}[\vec{E},\vec{H}^*]$.

Заметим, что

$$\mathrm{Re}\,\vec{S}_к = \mathrm{Re}\,\frac{c}{8\pi}[\vec{E},\vec{H}^*] = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\,[\vec{E},\vec{H}^*] = \vec{S}^{\,T}.$$

В результате описанных операций получим

$$\mathrm{div}\,\vec{S}_к = -\frac{1}{2}\underbrace{\vec{j}^{\,*}_{пр}\vec{E}}_{=\frac{|\vec{j}_{пр}|^2}{\sigma}} - \frac{1}{2}\vec{j}^{\,ст*}\vec{E} + 2i\omega\frac{\varepsilon|\vec{E}|^2 - \mu|\vec{H}|^2}{16\pi}.$$

, так как $\vec{j}_{пр} = \sigma\vec{E}$, т.е. $\vec{E} = \vec{j}_{пр}/\sigma$.

Получим теорему Пойнтинга (комплексную) в дифференциальной форме:

$$\mathrm{div}\,\vec{S}_к = -\frac{1}{2}\underbrace{\frac{|\vec{j}_{пр}|^2}{\sigma}}_{=\sigma|\vec{E}|^2} - \frac{1}{2}\vec{j}^{\,ст*}\vec{E} + 2i\omega\frac{\varepsilon|\vec{E}|^2 - \mu|\vec{H}|^2}{16\pi}. \quad (3)$$

В интегральной форме эта теорема имеет вид:

$$\oint_S \vec{S}_к\,d\vec{S} = -\frac{1}{2}\int_V \underbrace{\frac{|\vec{j}_{пр}|^2}{\sigma}}_{=\sigma|\vec{E}|^2}dv - \frac{1}{2}\int_V \vec{j}^{\,ст*}\vec{E}\,dv + 2i\omega\int_V\frac{\varepsilon|\vec{E}|^2 - \mu|\vec{H}|^2}{16\pi}dv. \quad (4)$$

Вычислим реальную часть каждого члена в комплексной теореме Пойнтинга. Тогда, с учетом того, что $\mathrm{Re}\,\vec{S}_K = \overline{\vec{S}}^T$, получим

$$\underbrace{\oint_S \overline{\vec{S}}^T d\vec{S}}_{\substack{\text{средний по}\\ \text{времени}\\ \text{поток энергии } \overline{\Pi}^T\\ \text{через замкнутую}\\ \text{поверхность } S}} = \underbrace{-\frac{1}{2}\int_V \frac{|\vec{J}_{пр}|^2}{\sigma} dv}_{\substack{\text{средняя}\\ \text{по времени}\\ \text{мощность}\\ \text{джоулевых}\\ \text{потерь } \overline{Q}^T\\ \text{в объеме } V}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Re}\int_V \vec{J}^{ст*}\vec{E}\, dv}_{\substack{\text{средняя по времени}\\ \text{мощность}\\ \text{сторонних}\\ \text{источников } \overline{A^{ст}}^T\\ \text{в объеме } V}} \quad (5)$$

Таким образом, „реальная" часть комплексной теоремы Пойнтинга представляет собой формулировку закона сохранения энергии для средних величин:

$$\overline{\Pi}^T = -\overline{Q}^T + \overline{A^{ст}}^T, \quad \text{или} \quad \overline{\Pi}^T + \overline{Q}^T = \overline{A^{ст}}^T.$$

Заметим, что для монохроматических процессов амплитуды электрического и магнитного полей являются постоянными. Вследствие этого средняя по времени энергия электромагнитного поля остается постоянной величиной, не зависящей от времени t:

$$\overline{W}^T = \int_V \overline{w}^T dv = const.$$

В отсутствие дисперсии $\overline{W}^T = \int_V \frac{\varepsilon|\vec{E}|^2 + \mu|\vec{H}|^2}{16\pi} dv =$

$$= \overline{W^e}^T + \overline{W^m}^T, \text{ где } \overline{W^e}^T = \int_V \frac{\varepsilon|\vec{E}|^2}{16\pi} dv, \quad \overline{W^m}^T = \int_V \frac{\mu|\vec{H}|^2}{16\pi} dv. \quad (6)$$

С учётом этих соотношений запишем „мнимую часть" комплексной теоремы Пойнтинга:

$$\mathrm{Im}\oint_S \vec{S}_K d\vec{S} = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_V \vec{J}^{ст*}\vec{E}\, dv + 2\omega\int_V \frac{\varepsilon|\vec{E}|^2 - \mu|\vec{H}|^2}{16\pi} dv \quad (7)$$

Здесь

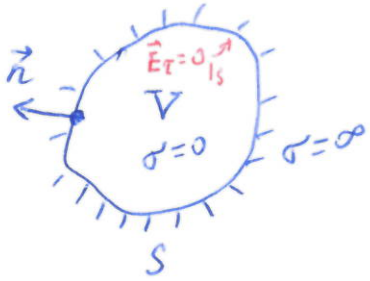
$$\int_V \frac{\varepsilon|\vec{E}|^2 - \mu|\vec{H}^2|}{16\pi} dv \underset{\text{(см. (6))}}{=} \overline{W^e}^T - \overline{W^m}^T$$

(формула верна лишь при отсутствии дисперсии!)

В отличие от формулы (5), „мнимая" часть комплексной теоремы Пойнтинга (7) является чисто вспомогательным математическим соотношением. Оно, однако, может быть использовано при доказательстве некоторых полезных утверждений.

Рассмотрим, например, колебания электромагнитного поля в объеме V, ограниченном идеально проводящей поверхностью S, в отсутствие сторонних источников (такие колебания называются свободными и могут осуществляться при отсутствии потерь, т.е. при $\sigma = 0$).

Тогда из (7) имеем:



$$\mathrm{Im} \oint_S \vec{S}_K \underbrace{d\vec{S}}_{\vec{n}\,ds} = 2\omega\left(\overline{W^e}^T - \overline{W^m}^T\right)$$

$$\vec{S}_K \cdot \vec{n}\,\Big|_S = \frac{c}{8\pi}\left[\vec{E}, \vec{H}^*\right]\cdot\vec{n}\,\Big|_S =$$

$$= \frac{c}{8\pi}\left[\vec{E}_\tau, \vec{H}^*_\tau\right]\cdot\vec{n}\,\Big|_S = 0, \text{ т.к. } \vec{E}_\tau = 0\Big|_S.$$

(идеально проводящая поверхность)

Получаем, что $2\omega\left(\overline{W^e}^T - \overline{W^m}^T\right) = 0$.

Так как $\omega \neq 0$, имеем: $\overline{W^e}^T = \overline{W^m}^T$.

Таким образом, при отсутствии дисперсии в среде, заполняющей объём V, электрическая и магнитная части средней по времени энергии равны: $\overline{W^e}^T = \overline{W^m}^T$, так что $\overline{W}^T = \overline{W^e}^T + \overline{W^m}^T = 2\overline{W^e}^T = 2\overline{W^m}^T$. При наличии дисперсии равенство обеих частей полной энергии, вообще говоря, не выполняется.

Замечание („мелким шрифтом") о некоторых обобщениях формулировки комплексной теоремы Пойнтинга.

В ряде случаев бывает удобнее ввести вместо ε и σ

с самого начала комплексную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_K = \varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega} \equiv \varepsilon' - i\varepsilon''$, где $\varepsilon' = \varepsilon$, $\varepsilon'' = \frac{4\pi\sigma}{\omega}$. Кроме того, можно учесть дополнительно возможные магнитные потери в среде заменой μ на комплексную магнитную проницаемость $\mu_K = \mu' - i\mu''$ (здесь $\mu' = \mu$).

Тогда уравнения (1) и (2) принимают вид

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -ik_0(\mu' - i\mu'')\vec{H}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = ik_0(\varepsilon' - i\varepsilon'')\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,ст}.$$

Если с этими уравнениями выполнить операции, аналогичные проведённым выше, то нетрудно получить такую формулировку комплексной теоремы Пойнтинга (получите её самостоятельно!):

$$\oint_S \vec{S}_K\, d\vec{S} = -\frac{\omega}{8\pi}\int_V \left[\varepsilon''|\vec{E}|^2 + \mu''|\vec{H}|^2\right] dv +$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\right)\int_V \vec{j}^{\,ст*}\vec{E}\, dv + 2i\omega\int_V \frac{\varepsilon'|\vec{E}|^2 - \mu'|\vec{H}|^2}{16\pi}\, dv.$$

Очевидно, что при $\mu'' = 0$ (когда $\mu' = \mu$) последняя формула переходит в ранее доказанную формулу (4), если воспользоваться соотношением $\varepsilon'' = \frac{4\pi\sigma}{\omega}$. Действительно, в этом случае

$$-\frac{\omega}{8\pi}\int_V \left[\varepsilon''|\vec{E}|^2 + \mu''|\vec{H}|^2\right] dv = -\frac{1}{2}\int_V \sigma|\vec{E}|^2 dv =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_V \frac{|\vec{j}_{пр}|^2}{\sigma}\, dv.$$

Теорема единственности решения уравнений Максвелла для гармонических полей.

Поскольку поля, гармонически зависящие от времени, реализуются от $t=-\infty$ до $t=\infty$, то говорить применительно к ним о начальных условиях не приходится. Поэтому нельзя воспользоваться ранее доказанной теоремой единственности при заданных начальных и граничных условиях.

Формулировка теоремы: Решение уравнений Максвелла для гармонических полей внутри области V, ограниченной замкнутой поверхностью S, единственно, если

1) В области V заданы сторонние источники (токи $\vec{J}^{ст}$);
2) на поверхности S задано либо поле $\vec{E}_\tau|_S$, либо $\vec{H}_\tau|_S$;
3) внутри области V всюду имеются потери (т.е. проводимость $\sigma \neq 0$).

Доказательство – строится методом „от противного". Пусть имеются два разных поля – $\vec{E}_1, \vec{H}_1$ и $\vec{E}_2, \vec{H}_2$, – удовлетворяющие условиям 1)-3).

Образуем разностное поле $\vec{E}_3 = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$, $\vec{H}_3 = \vec{H}_1 - \vec{H}_2$.

Тогда для разностного поля условия 1)-3) примут вид:

1') $\vec{J}_3^{ст} = 0$ в области V;
2') На поверхности S имеем $\vec{E}_{3\tau} = 0|_S$, либо $\vec{H}_{3\tau} = 0|_S$;
3') $\sigma \neq 0$ в области V [это условие не изменилось].

Запишем „реальную" часть комплексной теоремы Пойнтинга, т.е.

$$\oint_S \vec{S}^T d\vec{S} = -\frac{1}{2}\int_V \underbrace{\frac{|\vec{J}_{пр}|^2}{\sigma}}_{\sigma|\vec{E}|^2} dv + \left(-\frac{1}{2}\right) \mathrm{Re}\int_V \vec{J}^{ст*}\vec{E}\, dv,$$

для разностного поля:

$$\oint_S \vec{S}_3^{\,T} \underbrace{d\vec{S}}_{\vec{n}dS} = -\frac{1}{2}\int_V \sigma |\vec{E}_3|^2 dv + \left(-\frac{1}{2}\right) \mathrm{Re} \int_V \underbrace{\vec{j}_3^{\,cm*}}_{=0\ [\text{в силу условия } 1')]} \vec{E}_3\, dv.$$

Учтем, что

$$\vec{S}_3^{\,T}\cdot\vec{n}\,\big|_S = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\,[\vec{E}_3, \vec{H}_3^{\,*}]\cdot\vec{n}\,\big|_S =$$

$$= \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\,[\vec{E}_{3\tau}, \vec{H}_{3\tau}^{\,*}]\cdot\vec{n}\,\big|_S = 0,$$

так как либо $\vec{E}_{3\tau} = 0\,\big|_S$, либо $\vec{H}_{3\tau} = 0\,\big|_S$.

Получаем

$$0 = -\frac{1}{2}\int_V \sigma |\vec{E}_3|^2 dv + 0, \text{ т.е. } \int_V \sigma |\vec{E}_3|^2 dv = 0.$$

В силу условия 3') имеем $\vec{E}_3 = 0$ в объеме V.
Запишем уравнение Максвелла для разностного поля

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}_3 = -i\frac{\omega}{c}\vec{B}_3.$$

Поскольку $\vec{E}_3 = 0$, $\omega \neq 0$, получаем, что $\vec{B}_3 = 0$

Таким образом пришли к противоречию: раз $\vec{E}_3 = 0$ и $\vec{B}_3 = 0$, то двух разных решений нет.

Здесь нужно иметь в виду, что из условия $\vec{B}_3 = 0$ следует, что $\mu\vec{H}_3 = 0$, т.е. $\vec{H}_3 = 0$ (при $\mu \neq 0$). Теорему единственности (с результатом, что и $\vec{H}_3 = 0$) можно доказать при произвольных μ, если учесть, что в реальных магнетиках μ является комплексной величиной, т.е. имеем $\mu_K = \mu' - i\mu''$). Идея этого доказательства представлена ниже – в Замечании №2 „мелким шрифтом".

Представленное выше доказательство имеет простую физическую интерпретацию: разностное поле не возникает, так для него отсутствуют источники ($\vec{j}_3^{\,cm} = 0$); оно не может проникнуть через поверхность S (в силу того, что $\vec{S}_3^{\,T}\cdot\vec{n} = 0\,\big|_S$); оно не может существовать в виде свободных незатухающих

колебаний в объеме V, так как наличие потерь ($\sigma \neq 0$) исключает такую возможность [любые свободные колебания, реализующиеся при отсутствии сторонних источников, при наличии потерь будут затухать, так что режим гармонических незатухающих колебаний поля исключается].

Замечание №1 („мелким шрифтом")

Теорема остается справедливой, если вместо условия 2) поставить условие, что на поверхности S задано импедансное граничное условие $\vec{E}_\tau = \eta_S [\vec{H}, \vec{n}]|_S$, где $\mathrm{Re}\,\eta_S > 0$.

В этом случае доказательство модифицируется таким образом:

$$\vec{S}_3^{\,T} \cdot \vec{n}|_S = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\,[\vec{E}_3, \vec{H}_3^{\,*}] \cdot \vec{n}|_S = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\,[\vec{E}_{3\tau}, \vec{H}_{3\tau}^{\,*}] \cdot \vec{n}|_S =$$

$$= \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\,[\eta_S [\vec{H}_3, \vec{n}], \vec{H}_{3\tau}^{\,*}] \cdot \vec{n}|_S =$$

$$= \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\,\eta_S \underbrace{[[\vec{H}_{3\tau}, \vec{n}], \vec{H}_{3\tau}^{\,*}]}_{\vec{n}\underbrace{(\vec{H}_{3\tau}, \vec{H}_{3\tau}^{\,*})}_{|\vec{H}_{3\tau}|^2} - \vec{H}_{3\tau}^{\,*}\underbrace{(\vec{H}_{3\tau}, \vec{n})}_{0 \text{ (так как } \vec{H}_{3\tau} \perp \vec{n})}} \cdot \vec{n}|_S =$$

$$= \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\,\eta_S\, \vec{n}\,|\vec{H}_{3\tau}|^2 \cdot \vec{n} \underset{(\vec{n},\vec{n})=1}{=} \frac{c}{8\pi} (\mathrm{Re}\,\eta_S)\, |\vec{H}_{3\tau}|^2.$$

В результате теорема Пойнтинга для разностного поля принимает вид:

$$\oint_S \frac{c}{8\pi} (\mathrm{Re}\,\eta_S)\, |\vec{H}_{3\tau}|^2 dS = -\frac{1}{2} \int_V \sigma |\vec{E}_3|^2 dv + 0,$$

т.е.
$$\frac{1}{2} \int_V \sigma |\vec{E}_3|^2 dS + \oint_S \frac{c}{8\pi} (\mathrm{Re}\,\eta_S)\, |\vec{H}_{3\tau}|^2 dS = 0.$$

Так как $\sigma \neq 0$ (а $\sigma > 0$) и $\mathrm{Re}\,\eta_S > 0$, получаем, что $\vec{E}_3 = 0$ (и вдобавок $\vec{H}_{3\tau} = 0$). Доказав, что $\vec{E}_3 = 0$,

Возвращаемся к концу доказательства теоремы, представленного выше.

Замечание 2 („мелким шрифтом")

Случай $\mu = 0$ возможен в средах с дисперсией. Позже мы обсудим, что среды с дисперсией всегда имеют потери. Поэтому более общее доказательство можно построить, считая, что проницаемости среды — комплексные величины $\varepsilon_K = \varepsilon' - i\varepsilon'' \equiv \varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$ и $\mu_K = \mu' - i\mu''$.

Тогда для разностного поля следует применить теорему Пойнтинга в виде („реальном")

$$\oint_S \vec{S}^T d\vec{s} = -\frac{\omega}{8\pi}\int_V \left[\varepsilon''|\vec{E}|^2 + \mu''|\vec{H}|^2\right] dv + \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Re}\int_V \vec{j}^{\,cm*}\vec{E}\, dv,$$

т.е.

$$\oint_S \underbrace{\vec{S}_3^T d\vec{s}}_{\substack{\| \\ \vec{S}_3^T\cdot\vec{n}\, ds}} = -\frac{\omega}{8\pi}\int_V \left[\varepsilon''|\vec{E}_3|^2 + \mu''|\vec{H}_3|^2\right] dv + \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Re}\int_V \underbrace{\vec{j}_3^{\,cm*}\vec{E}_3}_{\substack{\| \\ 0}}\, dv$$

(см. выше)

$\vec{S}_3^T\cdot\vec{n} = 0$ на S (см. выше).

Получаем, что

$$\frac{\omega}{8\pi}\int_V \left[\varepsilon''|\vec{E}_3|^2 + \mu''|\vec{H}_3|^2\right] dv = 0.$$

$\omega \neq 0$, величины $\varepsilon'' > 0$, $\mu'' > 0$ (условие 3) теперь формулируется в этом виде). Заметим, что потерям всегда соответствует положительный знак ε'' и μ''.

Итак, если при $\varepsilon'' > 0$ и $\mu'' > 0$

$$\int_V \left[\varepsilon''|\vec{E}_3|^2 + \mu''|\vec{H}_3|^2\right] dv = 0,$$

то $\vec{E}_3 = 0$ и $\vec{H}_3 = 0$ в объеме V. Вновь пришли к противоречию, которое доказывает теорему.

Квазистационарные процессы в сплошных проводящих средах

Характер переменных полей в материальных средах существенно зависит от рода этих сред и от порядка величины ω.

Рассмотрим явления в массивных проводниках в переменном электромагнитном поле. Будем предполагать, что скорость изменения поля не слишком велика, будучи ограничена рядом условий, которые будут сформулированы ниже. Электромагнитные поля и токи, удовлетворяющие этим условиям, называют квазистационарными.

Уравнения квазистационарного поля внутри проводника.

Рассматриваем поле, изменяющееся во времени по гармоническому закону $\sim e^{i\omega t}$ ($T = 2\pi/\omega$).

Пусть выполнено условие

$$\tau_M \ll T,$$

где $\tau_M = \dfrac{\varepsilon}{4\pi\sigma}$ – характерное время релаксации заряда в проводнике (максвелловское время релаксации)

Пример: $\rho(\vec{r},t) = \rho_0(\vec{r})\big|_{t=0}$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{j} = \sigma \operatorname{div}\vec{E} = \sigma\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\rho = 0.$$

Решение: $\rho(\vec{r},t) = \rho_0(\vec{r})\, e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t}$, т.е. $\rho \sim e^{-\frac{t}{\tau_m}}$, $\tau_M = \dfrac{\varepsilon}{4\pi\sigma}$.

Запишем уравнения Максвелла при условии $\rho^{ст} = 0$, $\vec{j}^{ст} = 0$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \quad \vec{j} = \sigma\vec{E} \qquad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0$$

Для гармонических полей

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -ik_0\mu\vec{H}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = ik_0\underbrace{\left(\varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)}_{\varepsilon_K}\vec{E}, \quad \text{где} \quad \varepsilon_K = \varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega};$$

$\varepsilon_K = \text{const}$

$\downarrow$

$\underbrace{\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H}}_{=0} = ik_0\varepsilon_K \operatorname{div}\vec{E}$ т.е. $\operatorname{div}\vec{E} = 0$

Условие $\tau_м \ll T$ эквивалентно (с точностью до множителя 2π) условию $\varepsilon \ll \frac{4\pi\sigma}{\omega}$

Действительно, $\varepsilon \ll \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ может быть записано как: $\frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} \ll \frac{T}{2\pi}$.

Получаем: $\varepsilon_к \approx -i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$, что эквивалентно условию $|\vec{j}_{см.}| \ll |\sigma\vec{E}|$

Таким образом, если в уравнениях Максвелла пренебрегается током смещения, то получаем уравнения квазистационарного поля:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -ik_0\mu\vec{H}$$
$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = ik_0\varepsilon_к\vec{E}, \quad \varepsilon_к \approx -i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$$
$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$$
$$\mathrm{div}\,\vec{H} = 0$$

$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$

$\mathrm{rot}\,\vec{H} = ik_0\varepsilon_к\vec{E}$

$\underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{H}}_{=0} = ik_0\varepsilon_к\,\mathrm{div}\,\vec{E}$

$\downarrow$

$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$

Обсудим условия применимости неравенства $\varepsilon \ll \frac{4\pi\sigma}{\omega}$, т.е. $\omega \ll \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$.

1) Для хороших проводников (Медь, $\sigma = 5{,}4\cdot10^{17}$ ед. СГС, $\varepsilon = 1$) это соотношение выполняется формально вплоть до частот, соответствующих ультрафиолету.

2) Есть, однако, и другие ограничения применимости написанных выше уравнений. В этих уравнениях существенно, что связь тока с напряженностью поля дается соотношением $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, где σ бралось со значением, относящимся к стационарному случаю. Это справедливо, если $T \gg \tau_{\text{установления проводимости}}$ (реально $\tau_{\text{уст. провод.}}$ есть время свободного пробега электронов в проводнике). Обычно $\tau_{\text{своб. проб}} \sim 10^{-13}$ сек. Имеем $\omega \ll 10^{13}\ c^{-1}$. Предельные частоты, допускаемые этим условием, лежат в инфракрасной области спектра.

3) Далее, считалось, что связь $\vec{j}$ и $\vec{E}$ локальная. Это предполагает, что расстояние L_E, на котором поле заметно меняется в проводнике, должно быть много больше длины свободного пробега электронов $l_{\text{своб. проб.}}$:

$$L_E \gg l_{\text{своб. пробег.}}$$

Далее будет показано, что в качестве величины L_E фигурирует глубина проникновения поля в проводник $\delta(\omega)$. Условие $\delta \gg l_{\text{св. пр.}}$ для хороших проводников приводит к ограничению

$$\boxed{\omega \ll 10^{10}\ c^{-1}}$$ ← до СВЧ диапазона выполняется

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -ik_0\mu\vec{H}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = -ik_0\mu\,\mathrm{rot}\,\vec{H}$$

$$\nabla\,\mathrm{div}\,\vec{E} - \Delta\vec{E} = -ik_0\mu\cdot ik_0\varepsilon_K\vec{E}, \qquad \Delta\vec{E} + k_0^2\varepsilon_K\mu\vec{E} = 0$$

$$\overset{\shortparallel}{0}$$

Введем обозначение: $k_0^2\varepsilon_K\mu = k_0^2\left(-i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)\mu = \tilde{k}^2.$ $\qquad \sqrt{-i} = \pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

$$\tilde{k} = \pm(1-i)\frac{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}{c} = \pm\frac{1-i}{\delta}, \text{ где } \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}$$ (пока это просто обозначение)

δ – глубина проникновения поля в проводник (толщина скин-слоя)

Итак,

$$\Delta\vec{E} + \tilde{k}^2\vec{E} = 0.$$

Можно было бы получить уравнения вида $\Delta\vec{H} + \tilde{k}^2\vec{H} = 0$

Замечание о нечармонических процессах

Здесь вместо $T = \frac{2\pi}{\omega}$ во всех оценках и неравенствах должна фигурировать величина T_E – характерное время изменения поля.

Если $\frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} \ll T_E$, то (в силу того, что $\left|\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right| \sim \frac{\varepsilon}{cT_E}|\vec{E}|$)

$\left|\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right| \ll \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E}$, т.е. током смещения по-прежнему можно пренебречь. Тогда уравнения квазистационарного поля в проводнике выглядят так:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ &\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \equiv \frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E} \\ &\mathrm{div}\,\vec{E} = 0 \\ &\mathrm{div}\,\vec{H} = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\mathrm{rot}\,\vec{E}$$

$$\nabla\,\mathrm{div}\,\vec{H} - \Delta\vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left(-\frac{1}{c}\mu\right)\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$ (однородная среда)

$$\overset{\shortparallel}{0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta\vec{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ &\mathrm{div}\,\vec{H} = 0 \end{aligned}}$$

← полная система для отыскания $\vec{H}$ в проводнике

Первое уравнение полученной системы имеет вид, совпадающий с уравнением теплопроводности с „коэффициентом температуропроводности" $\chi = c^2/4\pi\sigma\mu$

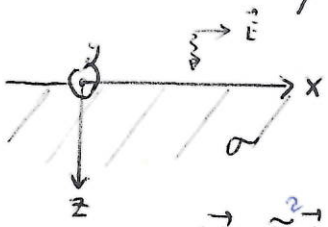
Замечание об описании поля вне проводника

Пусть проводник имеет характерные размеры L.
Пусть λ – длина волны в среде, окружающей проводник
Если $L \ll \lambda$, то на расстояниях порядка L (или $\ll \lambda$) вне проводника можно использовать статические формулы, отвечающие пределу $\lambda \to \infty$, т.е. $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$, $\mathrm{rot}\,\vec{H} = 0$

(это, в каком случае, достаточно для целей определения поля внутри проводника)

Скин-эффект

Рассмотрим случай проводящего полупространства ($z>0$), в котором течет ток $\vec{j} = \vec{x}_0 j(z)$, $j(0) = j_0 = const$



$$\Delta \vec{E} + \tilde{k}^2 \vec{E} = 0, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad \tilde{k} = \frac{1-i}{\delta}.$$

$$\underline{\Delta \vec{j} + \tilde{k}^2 \vec{j} = 0} \Rightarrow \frac{d^2 j}{dz^2} + \tilde{k}^2 j = 0, \quad j(z) = A_1 e^{-i\tilde{k}z} + A_2 e^{i\tilde{k}z};$$

Потребуем, чтобы $|j| < \infty$. Тогда $j(z) = A_1 e^{-i\tilde{k}z}$, $A_1 = j_0$

$$e^{-i\tilde{k}z} = e^{-i\frac{1-i}{\delta}z} = e^{-\frac{z}{\delta} - i\frac{z}{\delta}}$$

Имеем:

$$j = j_0 e^{-\frac{z}{\delta} - i\frac{z}{\delta}};$$

$$E_x = \frac{j}{\sigma} = \frac{j_0}{\sigma} e^{-\frac{z}{\delta} - i\frac{z}{\delta}} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta} - i\frac{z}{\delta}}, \quad E_0 = j_0/\sigma;$$

$$\vec{H} = \frac{i}{k_0\mu} \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{i}{k_0\mu}[\nabla, E_x \vec{x}_0] = \frac{i}{k_0\mu}[\nabla E_x, \vec{x}_0] = \frac{i}{k_0\mu}\frac{\partial}{\partial z} E_0 e^{-i\frac{1-i}{\delta}z} \underbrace{[\vec{z}_0, \vec{x}_0]}_{\vec{y}_0}$$

$$= \vec{y}_0 \underbrace{\frac{1}{k_0\mu}\frac{1-i}{\delta} E_0}_{H_0} e^{-i\frac{1-i}{\delta}z} = \vec{y}_0 H_0 e^{-\frac{z}{\delta} - i\frac{z}{\delta}}, \quad \underline{H_0 = \frac{1-i}{k_0\mu\delta} E_0}.$$

$$j_0 = |j_0| e^{i\varphi}$$

$$\operatorname{Re}\{j e^{i\omega t}\} = |j_0| e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi\right),$$ — ток спадает от границы экр-но

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}.$$

Отсюда видно, что при увеличении частоты ток и поле будут в основном вблизи поверхности проводника. Это явление называют скин-эффектом.

В более общем смысле о скин-эффекте говорят в всех ситуациях, когда переменное э/м. поле (а с ним и вызываемые им токи) проникает лишь на относительно небольшую глубину в проводник.

Если $\sigma \to \infty$ (ид. проводник), то $\delta = 0$ (поле не проникает)

Физическая трактовка скин-эффекта

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$
$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E}$$

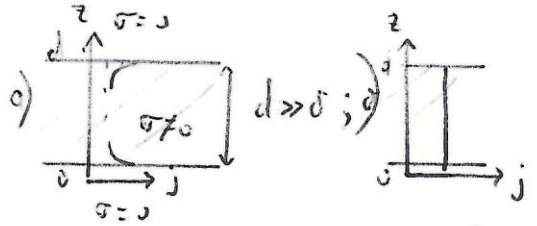
Переменное магнитное поле $\vec{H}$ $\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \neq 0\right)$, проникая в проводник, индуцирует переменное электрическое поле, а последнее вызывает появление токов $\sigma\vec{E}$ (токи Фуко), дающие свой вклад (с обр. знаком) в магн. поле.

Примеры:

Медь: $\mu = 1$, $\varepsilon = 1$, $\sigma = 5.4 \cdot 10^{17}$ СГС

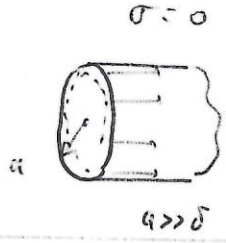
λ, см	1 см	1 м	100 м	10 км	∞
ν, Гц (в вакууме)	$3 \cdot 10^{10}$	$3 \cdot 10^{8}$	$3 \cdot 10^{6}$	$3 \cdot 10^{4}$	0
δ, мм	$4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-1}$	∞

тогда $3{,}75 \cdot 10^{-4}$.



Здесь $\vec{H}_{внутри} = \vec{H}_{снаружи}$

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\vec{E} = 0 \\ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -i k_0 \mu \vec{H}_{снаружи} \end{cases}$$



При $a \ll \delta$ – ток распределен по сечению проводника равномерно

Если $\sigma \gg \omega$ $(\delta \ll d)$, то $\vec{E} = 0$, $\vec{H} = 0$ (внутри), т.е. на поверхности $E_\tau = 0$, $B_n = 0$ $(H_n = 0)$. Здесь при вычислении поля

$\vec{H} = 0$ $(H_n = 0)$ $B_n = 0$

вне проводника можно считать, что в него магн. поле вообще не проникает (т.е. $\mu_{тела} \to 0$). Здесь по отнош. к переем. магн. полю (в квазистатическом описании) проводник ведет себя так же, как сверхпроводник в пост. магн. поле, так что для вычисления магн. поля вне $(< \lambda)$ достаточно воспользоваться решением стационарной задачи для сверхпроводника той же формы.

При анализе эл. поля вне E_τ мало. В пределе $\sigma \to \infty$ $E_\tau = 0$ (т.е. $\varepsilon \to \infty$ при переходе от задачи с диэл. телом к проводнику той же формы).

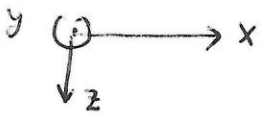
Уточнение понятия квазилинейного проводника

В случае переменных полей для квазилинейного описания проводника необходимо наложить дополнительное условие: толщина проводника должна быть много меньше толщины скин-слоя (чтобы ток был распределен квазиравномерно по сечению проводника)

$a \ll \delta$

Граничные условия на границе с хорошим проводником (Импедансные граничные условия Леонтовича)

Выше было показано, что в случае $\vec{j} = j(z)\vec{x}_0$



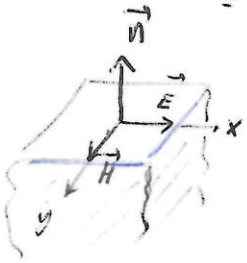
на поверхности проводника

$$E_x(0) = E_0$$

$$H_y(0) = \frac{1-i}{k_0 \mu \delta} E_0$$

$$\frac{E_x(0)}{H_y(0)} = \frac{k_0 \mu \delta}{1-i} = \frac{k_0 \mu \delta}{\sqrt{2}\sqrt{-i}} = \frac{\frac{\omega}{c}\mu \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}}{\sqrt{2}\sqrt{-i}} = \sqrt{\frac{\mu}{-i\frac{4\pi\sigma}{\omega}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_K}};$$



$\vec{n}$ - нормаль, смотрящая из проводника.

$$\vec{E}_\tau = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_K}}\,[\vec{n}, \vec{H}]\Big|_s = \frac{c}{4\pi} Z_{ск}\,[\vec{n}, \vec{H}]\Big|_s,$$ ← условие приближенно!

где $Z_{ск} = \frac{4\pi}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_K}}$.

Величина $\eta_s = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_K}} = \sqrt{\frac{\mu}{-i\frac{4\pi\sigma}{\omega}}}$ называется <u>поверхностным импедансом</u> проводника:

$$\eta_s = \frac{E_\tau}{H_\tau} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_K}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\sigma}}\,(1+i).$$

(Обычно для проводников (из цвет. ме) $\mu = 1$)

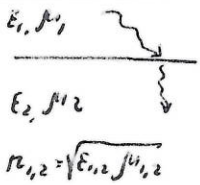
Если $\sigma \to \infty$, то $\eta_s \to 0$, и $E_\tau = 0$ (идеальный проводник).

1) Граничное условие справедливо для проводника конечной толщины d, если $d \gg \delta$ (сильный скин-эффект)

2)

Условие справедливо и для искривленной границы, если $R_{кр} \gg \delta$.

3)
Условие „работает" при наклонном падении, если проводимость σ дост. велика

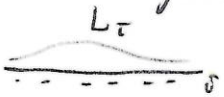


При $\varepsilon_2\mu_2 \gg \varepsilon_1\mu_1$ волна продит по нормали

Здесь $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2} = n_2' - i n_2''$

Уточнения (В.А. Фок) нужны лишь при скользящем падении

2) Масштаб неоднородности поля вдоль границы L_τ должен быть $\gg \delta$.



$L_\tau \gg \delta$

Значение приближенных граничных условий Леонтовича заключается в том, что они позволяют не рассматривать поле внутри хорошо проводящего тела и учитывать наличие этого тела с помощью граничных условий на его поверхности

<таким же свойством обладают граничн. условия $E_\tau = 0$, $H_n = 0$ на поверхности идеального проводника>

Энергетические соотношения при скин-эффекте

$$Q = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{\vec{j}\,\vec{j}^*}{\sigma}\,\underbrace{dV}_{dy=1,\ dx=d} = \frac{1}{2\sigma}|j_0|^2\int_0^\infty e^{-\frac{2z}{\delta}}dz = \frac{\delta}{4\sigma}|j_0|^2;$$

Джоулевы потери в столбике с единичн. площадью основания

I – ток текущий через сечение единичной длины по y (лин. плотность квазиповерхн. тока).

$$I = \int_0^\infty j\,dz = j_0\int_0^\infty e^{-i\frac{1-i}{\delta}z}dz = \frac{j_0\delta}{1+i}$$

$$|I| = \frac{|j_0|\delta}{\sqrt{2}}; \qquad |j_0| = \frac{\sqrt{2}}{\delta}|I|;$$

$$Q = \frac{|I|^2}{2\sigma\delta};$$

$$Q = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sigma\delta}\,|I|^2 = \frac{R\,|I|^2}{2} \quad ; R = R_{ск} = \frac{1}{\sigma\delta}$$

$$S = 1\cdot\delta$$
$$L = 1$$
$$R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{1}{\sigma\delta};$$

$$W^m = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\mu|\vec{H}|^2}{8\pi}\,dz = \frac{\mu}{16\pi}\int_0^\infty \left|\frac{1-i}{k_0\mu\delta}\,\underbrace{E_0}_{=\frac{j_0}{\sigma}}\,e^{-\frac{z}{\delta}-i\frac{z}{\delta}}\right|^2 dz =$$

эл.м. энергия в столбике с ед. площади основания

$$= \frac{\mu}{16\pi}\,\frac{2}{k_0^2\mu^2\delta^2}\,\frac{|j_0|^2}{\sigma^2}\,\underbrace{\int_0^\infty e^{-\frac{2z}{\delta}}dz}_{\frac{\delta}{2}} =$$

$$= \left\langle |j_0| = \frac{\sqrt{2}}{\delta}|I| \right\rangle =$$

$$= \frac{\mu}{16\pi}\,\frac{2}{k_0^2\mu^2\delta^2}\,\frac{2|I|^2}{\delta^2\sigma^2}\,\frac{\delta}{2} =$$

$$= \frac{\mu}{\cancel{16}\pi}\,\frac{\cancel{2}}{\frac{\omega^2}{c^2}\mu^2\,\frac{c^4}{(2\pi\sigma\mu\omega)^2}}\,\frac{\cancel{2}|I|^2}{\sigma^2}\cdot\frac{\delta}{2} =$$

$$= \frac{1}{c^2}\mu\pi\delta\,\frac{|I|^2}{2} = \frac{1}{2c^2}\,\underbrace{2\pi\mu\delta}_{L_{ск}}\,\frac{|I|^2}{2} = \frac{1}{2c^2}L_{ск}\frac{|I|^2}{2}$$

$L_{ск} = 2\pi\mu\delta$ – „индуктивность" скин-эффекта

$$Z_{ск} = \frac{4\pi}{c}\underbrace{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_к}}}_{\eta_s} = \frac{4\pi}{c}\sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\sigma}}\,(1+i) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{c}\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}_{1/\delta}\,\frac{1}{\sigma} + i\,\frac{\omega}{c^2}\,\underbrace{\sqrt{\frac{2\pi\mu}{\sigma\omega}}\,c}_{2\pi\mu\,\frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}} =$$

$Z_{ск} = \frac{4\pi}{c}\frac{E_x(0)}{H_y(0)}$

$\frac{c}{4\pi}H_y(0) = I$; $I = \frac{j_0\delta}{1+i} = \frac{\sigma E_0\delta(1-i)}{2}$;

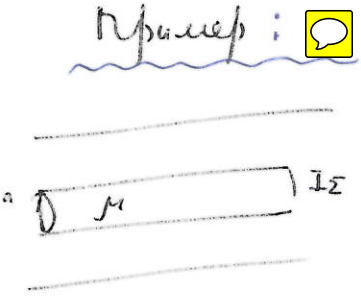
$$\left.\begin{aligned} &\tilde{Z}_{ск} = \frac{\omega}{c^2}L_{ск} \\ &Z_{ск} = \frac{E_x(0)\cdot 1}{I\cdot 1}\quad H_y(0) = \frac{1-i}{\ldots}E_0 \end{aligned}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma\delta} + i\,\frac{\omega L_{ск}}{c^2} = R_{ск} + i\,\frac{\omega}{c^2}L_{ск};$$

В случае скин-эфф. надо учить изм. индукт. проводн.

Если $\sigma \to \infty$, то $\delta \to 0$ и $L_{ск} = 0$, $R = 0$

Пример:



$$j = \frac{I_\Sigma}{\pi a^2}$$

$$H_\varphi 2\pi r = \frac{4\pi}{c} j \pi r^2$$

$$H_\varphi = \frac{r}{2} \frac{4\pi}{c} \frac{I_\Sigma}{\pi a^2} = \frac{2 I_\Sigma}{c a^2} r$$

$$W^m_{\text{на ед. дл.}} = \mu \int_0^a \frac{H_\varphi^2}{8\pi} dS = \mu \frac{1}{8\pi} \frac{4 I_\Sigma^2}{c^2 a^4} \int_0^a r^2 \cdot 2\pi r\, dr =$$

$$= \mu \frac{1}{c^2} I_\Sigma^2 \frac{1}{4} = \frac{1}{2c^2} L_{\text{ед. дл.}} I_\Sigma^2;$$

$$L_{\text{ед. дл.}} = \mu \frac{1}{2}$$

$$W^m = \mu \int_0^a \frac{1}{2} \frac{|H_\varphi|^2}{8\pi} dS = \frac{1}{2c^2} L_{\text{ед.}} \frac{|I_\Sigma|}{2}$$

$$\boxed{\overline{W}^m_1 = \frac{1}{2c^2} L_1 \frac{|I_\Sigma|^2}{2}}$$

Сильный скин-эффект:

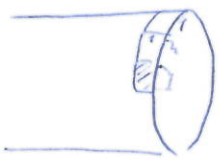
$$\overline{W}^m = \frac{1}{2c^2} L_{ск} \frac{|I|^2}{2}$$

$$I = I_\Sigma / 2\pi a$$

$$I_\Sigma = I 2\pi a$$

$$\overline{W}^m_{\text{на ед. длину}} \approx \frac{1}{2c^2} \left(\underbrace{L_{ск}}_{= 2\pi\mu\delta} \underbrace{2\pi a}_{= \overline{W}^m \cdot 2\pi a} \right) \frac{|I_\Sigma / 2\pi a|^2}{2} =$$

$a \gg \delta$



$$= \frac{1}{2c^2} \left(\frac{L_{ск}}{2\pi a} \right) \frac{|I_\Sigma|^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2c^2} \frac{\cancel{2\pi} \mu \delta}{\cancel{2\pi} a} \frac{|I_\Sigma|^2}{2} =$$

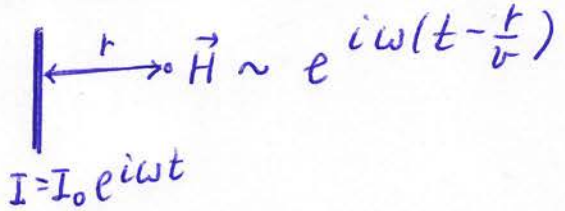
$$= \frac{1}{2c^2} \underbrace{L_{\text{на ед. дл.}}}_{= \mu\delta/a} \frac{|I_\Sigma|^2}{2},$$

$$L_{\text{ед. дл.}} = \mu \frac{\delta}{a} \ll \frac{\mu}{2}$$

Квазистационарные процессы в квазилинейных проводниках с сосредоточенными параметрами

Условие применимости квазистационарного описания в данном случае имеет вид $T \gg \tau$, где τ – время запаздывания поля, $T = 2\pi/\omega$. Величину τ можно оценить как $\tau \sim l/v$, где l – характерный пространственный масштаб системы, $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ – скорость волны.

Пример 1 [провод с переменным током]



– имеет место запаздывание поля (относительно тока) на время запаздывания $\tau = r/v$ (здесь $r \equiv l$).

$$e^{i\omega(t-\frac{r}{v})} = e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega}{v}r} \approx e^{i\omega t}, \text{ если } \frac{\omega}{v} r \ll 1.$$

[В экспоненте $e^{i\alpha}$ при $\alpha \ll \pi$ можно положить $\alpha \approx 0$, т.е. $e^{i\alpha} \approx 1$]

$\frac{\omega}{v} r = 2\pi \frac{1}{T} \frac{r}{v} = 2\pi \frac{\tau}{T} \ll 1$ при $\tau \ll T$ (с точностью до множителя 2π, который имеет порядок $\gtrsim 1$).

Поэтому условие квазистационарного поля $\tau \ll T$ эквивалентно условию $\frac{\omega}{v} r \ll 1$. Однако

$$\frac{\omega}{v} = \underbrace{\frac{\omega}{c}}_{k_0} \sqrt{\varepsilon\mu} = k_0 \sqrt{\varepsilon\mu}$$ – волновое число в среде.

Получаем, что условие $\frac{\omega}{v} r \ll 1$ можно записать в виде $kr \ll 1$. Поскольку $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, где λ – длина волны, условие $kr \ll 1$ можно переписать и в виде $\frac{2\pi}{\lambda} r \ll 1$, или $r \ll \lambda$ (если пренебречь величиной 2π)

Таким образом, в области, где $kr \ll 1$ (или, что то же, $r \ll \lambda$) поле подчиняется квазистационарному приближению, т.е. характеризуется пренебрежимо малым запаздыванием.

Тогда, например, поле прямого провода с током $I = I_0 e^{i\omega t}$ в зоне, где $r \ll \lambda$, может быть приближённо записано в виде

$$H_\varphi \approx \frac{2 I_0}{c r} e^{i\omega t}.$$

В этом случае пространственная структура поля оказывается такой же, как в статике, а само поле называется квазистатическим.

Область пространства, определяемая условием $kr \ll 1$ (или $r \ll \lambda$) называется зоной квазистатики.

В зоне квазистатики, как мы видим, поле подчиняется квазистационарному приближению ($\tau \ll T$).

Аналогичная картина будет иметь место вокруг любых проводников с переменным током, если удаляться от них на расстояние l, такое, что $kl \ll 1$ (т.е. оставаться в зоне квазистатики).

Естественно, что в приближении, когда $\vec{H} \approx \vec{H}_{квст}$, квазистатическое поле $\vec{H}_{квст}$ удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot} \vec{H}_{квст} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\operatorname{div} \vec{B}_{квст} = 0, \quad \text{где} \quad \vec{B}_{квст} = \mu \vec{H}_{квст}.$$

Ясно, что переменное поле $\vec{H}_{квст}$ должно порождать вихревое электрическое поле $\vec{E}$ согласно формулам

$$\vec{E} \equiv \vec{E}_{вихр} \rightarrow \left[\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \mu \frac{\partial \vec{H}_{квст}}{\partial t} \right. \quad \leftarrow \text{здесь учли, что } \vec{H} \approx \vec{H}_{квст}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \rightarrow \left[\operatorname{div} \vec{D} = 0 \right. \quad \leftarrow \text{здесь для простоты считаем, что } \operatorname{div} \vec{j} = 0, \text{ т.е. } \rho = 0$$

$$(\operatorname{div} \vec{j} + i\omega\rho = 0)$$

В случае гармонических полей имеем:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -i k_0 \mu \vec{H}_{квст}, \text{ где } k_0 = \omega/c.$$

Величину $\mathrm{rot}\,\vec{E}$ по порядку величины можно оценить так, как оцениваются порядки частных производных: $|\mathrm{rot}\,\vec{E}| \sim \frac{|\vec{E}|}{l}$.

Итак,

$$\frac{|\vec{E}|}{l} \sim k_0 \mu |\vec{H}_{квст}|, \text{ откуда имеем}$$

$$|\vec{E}| \sim k_0 l \mu |\vec{H}_{квст}|. \qquad (1)$$

Мы оценили порядок возникающего вокруг проводов вихревого электрического поля. Если величины ε и μ не слишком сильно отличаются от единицы, то при условии $kl \ll 1$ (т.е. $k_0\sqrt{\varepsilon\mu}\, l \ll 1$) будет выполняться и условие $k_0 l \mu \ll 1$, при котором $|\vec{E}| \ll |\vec{H}_{квст}|$.

Возникающее поле $\vec{E}$ порождает член $\frac{1}{c}\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, за счет которого возникает добавка $\vec{H}_{доб}$ к полю $\vec{H}_{квст}$: полное поле $\vec{H} = \vec{H}_{квст} + \vec{H}_{доб}$.

Тогда

$$\underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{H}}_{\underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{H}_{квст}}_{=\frac{4\pi}{c}\vec{j}} + \mathrm{rot}\,\vec{H}_{доб}} = \frac{4\pi}{c} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Отсюда имеем

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}_{доб} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \text{ или } \mathrm{rot}\,\vec{H}_{доб} = i k_0 \varepsilon \vec{E}.$$

Тогда справедлива оценка

$$\frac{|\vec{H}_{доб}|}{l} \sim k_0 \varepsilon |\vec{E}|, \text{ или } |\vec{H}_{доб}| \sim k_0 \varepsilon l |\vec{E}|.$$

Подставим вместо $|\vec{E}|$ оценку из (1). Получим

$$|\vec{H}_{доб}| \sim k_0 \varepsilon l \cdot k_0 \mu l |\vec{H}_{квст}| = (kl)^2 |\vec{H}_{квст}|$$

Но $kl \ll 1$. Значит, $|\vec{H}_{доб}| \ll |\vec{H}_{квст}|$ и $\vec{H} \approx \vec{H}_{квст}$.

Представляет интерес сравнить в этом случае электрическую и магнитную энергии, запасенные в зоне квазистатики:

$$\frac{\overline{W^e}^T}{\overline{W^m}^T} \sim \frac{\overline{w^e}^T \cdot \cancel{\ell^3}}{\overline{w^m}^T \cdot \cancel{\ell^3}} = \frac{\varepsilon |\vec{E}|^2/16\pi}{\mu \underbrace{|\vec{H}|^2}_{\approx |\vec{H}_{квст}|}/16\pi} \sim \langle \text{с учётом (1)} \rangle$$

$$\sim \frac{\varepsilon \cdot (K_0 \ell \mu)^2 |\vec{H}_{квст}|^2}{\mu |\vec{H}_{квст}|^2} = K_0^2 \ell^2 \varepsilon \mu = \underbrace{(K\ell)^2 \ll 1}_{\text{выполняется в зоне квазистатики с квадратичным запасом.}}$$

Таким образом, вблизи проводов с переменным током (при $\rho = 0$) имеет место соотношение $\overline{W^e}^T / \overline{W^m}^T \sim (K\ell)^2 \ll 1$, так что $\overline{W}^T = \overline{W^e}^T + \overline{W^m}^T \approx \overline{W^m}^T$. Т.е. энергия запасается преимущественно в форме „магнитной части" энергии. В силу этого вблизи катушек, внутри соленоидов и т.п. происходит <u>сосредоточение</u> энергии в „магнитной форме".

Можно всю описанную картину изобразить графически так:

$$\vec{j} \longrightarrow \vec{H}_{квст}, \vec{B}_{квст} \xrightarrow{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0} \vec{E}, \vec{D} \xrightarrow{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \neq 0} \vec{H}_{доб}, \vec{B}_{доб}$$

переменный ток порождает переменное поле $\vec{H}_{квст}$ в зоне квазистатики

переменное поле $\vec{B} \approx \vec{B}_{квст}$ порождает вихревое поле $\vec{E}$ (закон электромагнитной индукции Фарадея)

ток смещения порождает малое добавочное поле $\vec{H}_{доб}$.

Поле $\vec{H}_{доб}$ нужно прибавить к полю $\vec{H}_{квст}$, чтобы получить полное поле $\vec{H}$, но этим мы здесь пренебрегаем, „разрывая" цепочку связей полей (символ ⊗).

Пример 2 (поле вокруг провода с включенным конденсатором вне конденсатора)

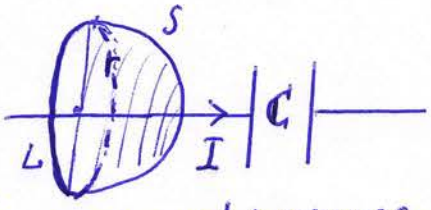


Рис. 1: на контур L радиуса r „натянута" поверхность S.

$$I = I_0 e^{i\omega t}$$

$$\oint_L \vec{H}\, d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I + \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{D}\, d\vec{S}}_{= \frac{4\pi}{c} I_{см}|_{вне\ C}}$$

Пусть радиус r удовлетворяет условию нахождения в зоне квазистатики: $kr \ll 1$.
Тогда $\vec{H} \approx \vec{H}_{квст}$. Следовательно
$\oint_L \vec{H}\, d\vec{l} \approx \oint_L \vec{H}_{квст}\, d\vec{l}$. Но $\oint_L \vec{H}_{квст}\, d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I$.

Получаем, что

$$\underbrace{\oint_L \vec{H}\, d\vec{l}}_{\approx \frac{4\pi}{c} I} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{4\pi}{c} I_{см}.$$

Такое возможно, если только вне конденсатора $|I_{см}| \ll |I|$. Таким образом вне конденсатора можно пренебречь током смещения:

$$I + I_{см}|_{вне\ C} \approx I.$$

Рассмотрим теперь тот же контур L, но поверхность S „натянем" на него так, чтобы она заходила внутрь конденсатора.

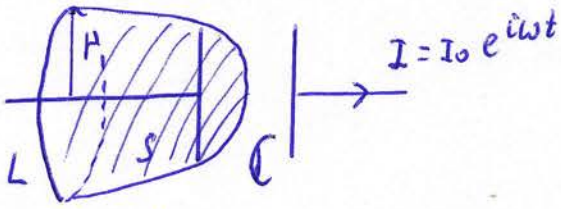


Рис. 2

$$\underbrace{\oint_L \vec{H}\, d\vec{l}}_{\approx \oint_L \vec{H}_{квст}\, d\vec{l}} = \underbrace{\frac{4\pi}{c} I}_{= 0} + \frac{4\pi}{c} I_{см}|_{внутри\ C}$$

внутри конденсатора тока I нет, есть только ток смещения

Учтем, что $\oint_L \vec{H}_{квст}\, d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I$.

Получаем, что

$$I \approx I_{см}|_{внутри\ C}. \qquad (2)$$

Несколько жаргонно данный факт иллюстрируют утверждением, что ток провода I „замыкается" током смещения в конденсаторе $I_{см}|_{внутри\ C}$.

В действительности, конечно,

← этим членом пренебрегаем

этот член оставляем →

$$\underbrace{I + \underbrace{I_{см}|_{вне\ C}}_{\text{малый член по сравн. с } I}}_{\text{см. Рис. 1}} = \underbrace{I_{см}|_{внутри\ C}}_{\text{см. Рис. 2}} \qquad (3)$$

Условие (3) является очевидным следствием уравнения Максвелла, записанного в виде

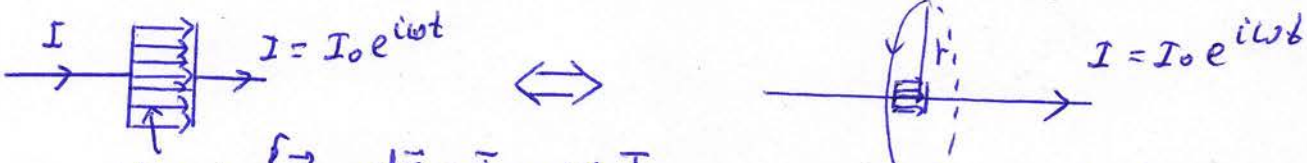
$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}_{см}).$$

Применим оператор div и учтём, что $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = 0$. Получим, что

$$\mathrm{div}\,(\vec{j} + \vec{j}_{см}) = 0.$$

Таким образом линии $\vec{j} + \vec{j}_{см}$ неразрывны. Однако вне конденсатора $\vec{j} + \vec{j}_{см} \approx \vec{j}$, а внутри конденсатора $\vec{j} = \vec{j}_{см}$.

В силу сказанного для отыскания поля $\vec{H}$ вне конденсатора на достаточно большом расстоянии от него (но внутри зоны квазистатики!) описанная система может быть заменена на такую:



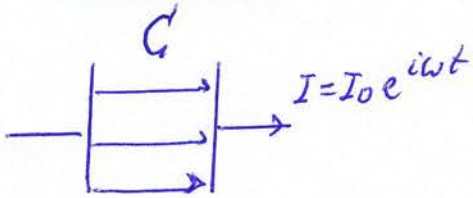
$j_{см}$: $\int_S \vec{j}_{см}\, d\vec{S} = I_{см} \approx I$

Конденсатор „работает" как „утолщение" прямого провода для наружного наблюдателя.

$$H_\varphi \approx \frac{2 I_0}{c r} e^{i\omega t}$$ всюду при $r \ll \lambda$

Но r много больше размера конденсатора.

Пример 3 [поле внутри конденсатора]



Размер конденсатора (характерный) l удовлетворяет условию $kl \ll 1$.

В этом случае поле в конденсаторе $\vec{E} \approx \vec{E}_{квст}$, где квазистатическое поле $\vec{E}_{квст}$ определяется уравнениями

$$\operatorname{div} \vec{D}_{квст} = 4\pi\rho \qquad \vec{D}_{квст} = \varepsilon \vec{E}_{квст}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}_{квст} = 0$$

ρ – учитывает переменные заряды на обкладках конденсатора с емкостью C.

Переменное поле $\vec{E}_{квст}$ порождает поле $\vec{H}$ в конденсаторе:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}_{квст}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Здесь мы положили $\vec{D} \simeq \vec{D}_{квст} = \varepsilon \vec{E}_{квст}$

Проведем оценки для уравнения $\operatorname{rot} \vec{H} = i k_0 \varepsilon \vec{E}_{квст}$

$$|\operatorname{rot} \vec{H}| \sim \frac{|\vec{H}|}{l}$$

$$\frac{|\vec{H}|}{l} \sim k_0 \varepsilon |\vec{E}_{квст}|$$

Получаем

$$|\vec{H}| \sim k_0 \varepsilon l |\vec{E}_{квст}|. \qquad (4)$$

(ср. с (1); см. обсуждение после формулы (1))

Полное поле $\vec{E}$ в конденсаторе содержит также вихревую составляющую $\vec{E}_{вихр}$: $\vec{E} = \vec{E}_{квст} + \vec{E}_{вихр}$, где $\operatorname{rot} \vec{E}_{квст} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{E}_{вихр} \neq 0$.

Запишем уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \text{ или } \underbrace{\operatorname{rot} \vec{E}}_{= \operatorname{rot} \vec{E}_{вихр}} = -i k_0 \mu \vec{H}.$$

Тогда имеет место оценка:

$$|\operatorname{rot} \vec{E}_{вихр}| \sim \frac{|\vec{E}_{вихр}|}{l}, \text{ т.е. } \frac{|\vec{E}_{вихр}|}{l} \sim k_0 \mu |\vec{H}|, \text{ или } |\vec{E}_{вихр}| \sim k_0 l \mu |\vec{H}|.$$

Подставим $\vec{H}$ из формулы (4):

$$|\vec{E}_{вихр}| \sim k_0 l \mu |\vec{H}| \sim k_0 l \mu \cdot k_0 l \varepsilon |\vec{E}_{квст}| \sim (kl)^2 |\vec{E}_{квст}|$$

Результат

$$|\vec{E}_{вихр}| \sim (k\ell)^2 |\vec{E}_{квст}|$$

означает (в силу $k\ell \ll 1$), что $|\vec{E}_{вихр}| \ll |\vec{E}_{квст}|$ внутри конденсатора.

Оценим отношение магнитной и электрической частей энергии внутри конденсатора:

$$\frac{\overline{W^m}^T}{\overline{W^e}^T} \sim \frac{\overline{w^m}^T \cancel{\ell^3}}{\overline{w^e}^T \cancel{\ell^3}} \sim \frac{\mu |\vec{H}|^2/16\pi}{\varepsilon |\vec{E}|^2/16\pi} \approx \frac{\mu |\vec{H}|^2}{\varepsilon |\vec{E}_{квст}|^2} \sim \langle см.(4)\rangle \sim$$

$$\sim \frac{\mu (k_0 \varepsilon \ell)^2 |\vec{E}_{квст}|^2}{\varepsilon |\vec{E}_{квст}|^2} = k_0^2 \ell^2 \varepsilon \mu = (k\ell)^2 \ll 1.$$

Поэтому внутри конденсатора энергия сосредоточивается в „электрической форме":

$\overline{W^m}^T \ll \overline{W^e}^T$, так что $\overline{W}^T = \overline{W^e}^T + \overline{W^m}^T \approx \overline{W^e}^T$.

Отсюда – название „сосредоточенные параметры" (для емкостей и индуктивностей).

Графически описанные процессы можно проиллюстрировать так:

$$\rho \to \vec{E}_{квст}, \vec{D}_{квст} \xrightarrow{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \neq 0} \vec{H}, \vec{B} \xrightarrow{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0} \vec{E}_{вихр}, \vec{D}_{вихр}$$

переменные заряды на обкладках порождают поле $\vec{E}_{квст}$

переменное поле $\vec{D} \approx \vec{D}_{квст}$ порождает поле $\vec{H}$

переменное поле $\vec{H}$ порождает вихревое электрическое поле (закон электромагнитной индукции Фарадея)

Поле $\vec{E}_{вихр}$ добавляется к $\vec{E}_{квст}$, чтобы получилось полное поле $\vec{E}$, но этой вихревой добавкой мы здесь пренебрегаем из-за её малости.

Законы Кирхгофа для квазистационарных цепей.

Первый закон.

Узел с токами.

Выше было показано, что $\operatorname{div}(\vec{j}+\vec{j}_{см})=0$,

т.е. $\oint\limits_S (\vec{j}+\vec{j}_{см})\,d\vec{S}=0$, или $\underbrace{\oint\limits_S \vec{j}\,d\vec{S}}_{\sum\limits_k I_k}+\underbrace{\oint \vec{j}_{см}\,d\vec{S}}_{I_{см}}=0$.

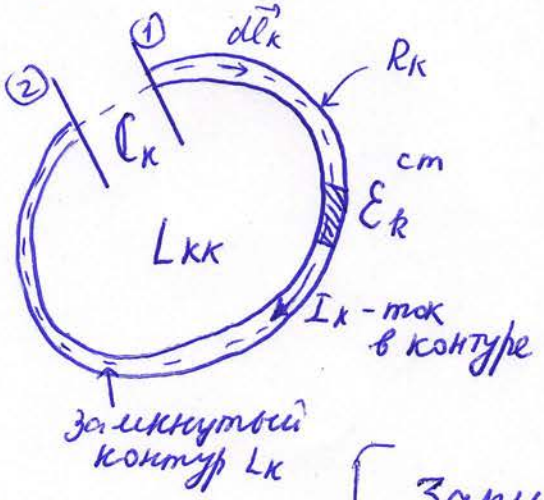
Кроме того, было показано, что токами смещения вокруг проводов в зоне квазистатики можно пренебречь. Тогда получаем

$$\sum_k I_k = 0, \quad \leftarrow \text{Первый закон Кирхгофа}$$

т.е. сумма переменных токов в узле равна нулю.

Второй закон.

Изобразим контур с номером k (могут быть и другие контуры): его коэффициент самоиндукции $-L_{kk}$, он содержит емкость C_k, стороннюю ЭДС $\mathcal{E}_k^{ст}$ и имеет сопротивление проводов R_k.



①, ② - номера обкладок конденсатора

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

$$\oint\limits_{L_k} \vec{E}\,d\vec{l}_k = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_k}{\partial t},$$

где Φ_k - поток магнитного поля через контур L_k.

Запишем закон Ома:

$$\frac{\vec{j}}{\sigma} = \vec{E} + \vec{E}^{ст}.$$

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{\vec{j}}{\sigma} d\vec{l}_k = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} d\vec{l}_k + \underbrace{\int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^{ст} d\vec{l}_k}_{\mathcal{E}_k^{ст}};$$

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{\vec{j}}{\sigma} d\vec{l}_k = \int_{(1)}^{(2)} \frac{j}{\sigma} dl_k = \int_{(1)}^{(2)} \frac{I_k}{\sigma S} dl_k = I_k \underbrace{\int_{(1)}^{(2)} \frac{dl_k}{\sigma S}}_{R_k} = I_k R_k;$$

Вынося I_k за знак интеграла, мы считаем, что ток во всех точках контура колеблется во времени одинаково (синфазно); это возможно только при пренебрежении запаздыванием, т.е. в зоне квазистатики.

Учли, что поле является квазистационарным

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{E} d\vec{l}_k = \underbrace{\oint \vec{E} d\vec{l}_k}_{= -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_k}{\partial t}} - \underbrace{\int_{(2)}^{(1)} \vec{E} d\vec{l}_k}_{\text{путь проходит внутри конденсатора}} =$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} + \underbrace{\int_{(1)}^{(2)} \vec{E} d\vec{l}_k}_{\text{путь интегрирования проходит внутри конденсатора} \; = V_k};$$

V_k — обозначение второго интеграла.

$$\Phi_k = \Phi_{kk} + \sum_{m \neq k} \Phi_{km}.$$

Если можно пренебречь запаздыванием магнитного потока (т.е. магнитного поля) относительно тока, то $\Phi_{kk} \sim I_k$, $\Phi_{km} \sim I_{km}$.

Значит, как и в статике,

$$\Phi_{kk} = \frac{1}{c} L_{kk} I_k, \quad \Phi_{km} = \frac{1}{c} L_{km} I_m.$$

Здесь мы снова (во второй раз) пренебрегли запаздыванием.

Если пренебрегать запаздыванием и для поля $\vec{E}$ в конденсаторе, то заряд q_k на первой обкладке и величина V_k (напряжение, отсчитываемое от первой обкладки) пропорциональны друг другу. Коэффициент пропорциональности — емкость C_k, как в статике. Итак,

$$V_k = \frac{q_k}{C_k}.$$

Здесь мы в третий раз пренебрегли запаздыванием.

Пусть I_k — ток, текущий в проводе, который идет от обкладки ①. Согласно уравнению непрерывности

$$I_k = -\dot{q}_k,$$

т.е. $q_k = -\int I_k\,dt$, так что $V_k = -\frac{1}{C_k}\int I_k dt$.

Получаем, что

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{E}\,d\vec{l}_k = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} + V_k =$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c} L_{kk} I_k + \sum_{m\neq k} \Phi_{km}\right) - \frac{1}{C_k}\int I_k dt.$$

Тогда имеем

$$R_k I_k = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(L_{kk} I_k\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{m\neq k}\Phi_{km} - \frac{1}{C_k}\int I_k dt + \mathcal{E}_k^{ст}.$$

Окончательно получаем:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(L_{kk} I_k) + R_k I_k + \frac{1}{C_k}\int I_k\, dt =$$

$$= \mathcal{E}_k^{ст} + \underbrace{(-1)\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{m\neq k} \Phi_{km}}_{\mathcal{E}_k^{ind}} ; \qquad (5)$$

$\mathcal{E}_k^{ind}$ – индукционная ЭДС в k-ом контуре.

Здесь $\Phi_{km} = \frac{1}{c} L_{km} I_m$.

Формула (5) выражает второй закон Кирхгофа для квазистационарной цепи.

Если геометрия контуров не меняется во времени, то величины L_{kk} и L_{km} можно вынести за знак производной $\partial/\partial t$ и переписать (5) в таком виде:

$$\frac{1}{c^2}\sum_m L_{km}\dot{I}_m + R_k I_k + \frac{1}{C_k}\int I_k\, dt = \mathcal{E}_k^{ст}. \qquad (6)$$

здесь суммирование по m включает и $m = k$; $\overset{\text{символ}}{\text{"точка"}}$ (над I) $\equiv \frac{\partial}{\partial t}$ в (6).

Пример

Пусть имеется единственный контур, возбуждаемый сторонней ЭДС $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$ (индекс $k=1$ в этом случае опускаем). Найти установившийся ток в контуре.

Запишем уравнение (6):

$$\frac{1}{c^2} L\dot{I} + RI + \frac{1}{C}\int I\, dt = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Продифференцируем для удобства по времени; решение ищем в виде $I = I_0 e^{i\omega t}$, где $I_0 = const$:

$$\frac{1}{c^2} L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = i\omega \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Подстановка $I = I_0 e^{i\omega t}$ дает

$$\left\{\frac{1}{c^2}(i\omega)^2 L I_0 + i\omega R I_0 + \frac{1}{C} I_0\right\} e^{i\omega t} = i\omega \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Поделив на $(i\omega)$, получим после сокращения экспоненты $e^{i\omega t}$:

$$\left(\frac{i\omega L}{c^2} + R + \frac{1}{i\omega C}\right) I_0 = \mathcal{E}_0,$$

или

$$Z I_0 = \mathcal{E}_0,$$

где введен импеданс $Z = R + i\omega\left(\frac{L}{c^2} - \frac{1}{\omega^2 C}\right)$.

Рассмотрим частный случай свободных колебаний, т.е. колебаний без источника, когда $\mathcal{E}_0 = 0$, а $I_0 \neq 0$:

$$Z I_0 = 0.$$

Решение с $I_0 \neq 0$ возможно, если только $Z=0$, т.е

$$R + i\omega\left(\frac{L}{c^2} - \frac{1}{\omega^2 C}\right) = 0$$

Отсюда следует, что должны выполняться два соотношения:

$$R = 0, \qquad (7)$$

$$\frac{L}{c^2} - \frac{1}{\omega^2 C} = 0. \qquad (8)$$

Условие (7) означает отсутствие джоулевых потерь (иначе свободные незатухающие колебания невозможны).

Условие (8) дает

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{LC}}. \qquad (9)$$

← c - скорость света
← C - емкость

Скорость света c в числителе в (9) связана с использованием гауссовой системы единиц (в SI было бы $\omega = 1/\sqrt{LC}$).

Таким образом, свободные колебания могут существовать в этой цепи только на собственной частоте, определяемой формулой (9).

Заметим, что свободные колебания не следует путать с вынужденными, когда $\mathcal{E}_0 \neq 0$, а частота задается источником (т.е. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$).

Быстропеременное электромагнитное поле

Плоские электромагнитные волны

Рассмотрим переменное ($\sim e^{i\omega t}$) э/м поле в безграничной, однородной среде. В отсутствие источников ур-ия Максвелла принимают вид

эти ур-ия отр. ауют теперь по ан. систему

$$-\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{H} = ik_0\varepsilon\vec{E} \\ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -ik_0\mu\vec{H} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \mathrm{div}\,\vec{D}=0 \\ \mathrm{div}\,\vec{B}=0 \end{matrix} \quad \left[\begin{matrix} \vec{D}=\varepsilon\vec{E} \\ \vec{B}=\mu\vec{H} \end{matrix}\right.$$

$$\Delta\vec{H}+k^2\vec{H}=0, \quad \Delta\vec{E}+k^2\vec{E}=0. \qquad k=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$$

Решением этих уравнений является плоская электромагнитная волна. В плоской волне зависимость поля от координат дается множителем вида $\sim e^{\mp i\vec{k}\vec{r}}$, где $\vec{k}$ - волновой вектор ($\vec{k}\vec{r}=k_x x+k_y y+k_z z$).

Def: Плоской монохр. э/м волной называется э/м ~~поле~~ волна, ~~векторы~~ фаза которой в каждый момент времени принимает пост. значения на системе парал. плоскостей

Пример:

$$\vec{E}(z)=\vec{x}_0 E_x(z), \quad E_x(z)=E_0 e^{\mp ik_z z} \qquad (*)$$

Выберем ось z перпендик. этим плоскостям

$$\frac{d^2E_x(z)}{dz^2}+k^2E_x(z)=0.$$ Функция (*) является решением уравнения, если $k_z=k=k_0\sqrt{\varepsilon\mu}$, т.е. $\vec{k}=k_z\vec{z}_0=k\vec{z}_0$.

Пусть

$$\vec{E}=\vec{x}_0E_0e^{-ikz}$$

$$\begin{cases} \nabla e^{-i\vec{k}\vec{r}}=-i\vec{k}e^{-i\vec{k}\vec{r}}, \quad \mathrm{div}(\vec{A}_0e^{-i\vec{k}\vec{r}})=(-i\vec{k},\vec{A}), \\ \mathrm{rot}(\vec{A}_0e^{-i\vec{k}\vec{r}})=[-i\vec{k},\vec{A}]. \end{cases}$$

$$\vec{H}=\frac{i}{k_0\mu}\mathrm{rot}\,\vec{E}=\frac{iE_0}{k_0\mu}[\nabla e^{-ikz},\vec{x}_0]=\frac{i}{k_0\mu}[\underbrace{-ik\vec{z}_0}_{-i\vec{k}},\underbrace{E_0e^{-ikz}\vec{x}_0}_{\vec{E}}]=$$

$$=\frac{k}{k_0\mu}E_x\vec{y}_0=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_x\vec{y}_0$$

$$H_y=\frac{1}{\eta}E_x, \quad \text{где } \eta=\frac{E_x}{H_y} \text{ (в бегущей волне)}$$

Величина η называется поперечным (по отнош. к напр. расп.) характеристическим импедансом однородной плоской ~~волны~~ (или, короче, волновым импедансом среды)

Итак, $E_x(z,t)=|E_0|\cos(\omega t-kz+\varphi)$,

$H_y(z,t)=\frac{1}{\eta}|E_0|\cos(\omega t-kz+\varphi)$

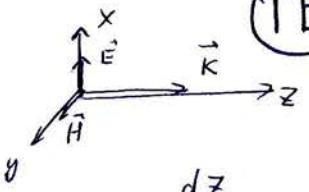
$\omega t-kz+\varphi=\mathrm{const}$ — уравнение поверхности постоянной фазы

$\Downarrow$

В каждый момент $t=t_{фикс}$ $z=\mathrm{const}$ на этой поверхности

ТЕМ - поляризация

(Однородная плоская волна)



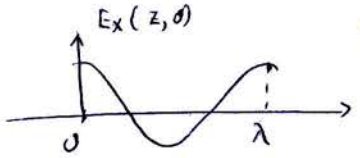
ТЕМ

Видно, что $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ образуют правую тройку: $\vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,[\vec{H}, \vec{z}_0]$; ТЕМ

$\vec{E}_\perp = \eta_\perp [\vec{H}, \vec{n}]$; $\vec{n} = \vec{z}_0$ (здесь)

$$v_\varphi = \frac{dz}{dt}$$

$$\omega t - kz + \varphi = const \Rightarrow \frac{d}{dt} \Rightarrow \omega - k\frac{dz}{dt} = 0, \quad v_{фаз} \equiv v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}};$$



$\varphi = 0$

$$k\lambda = 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k};$$

$\sqrt{\varepsilon\mu} = n$ – показатель преломления;

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\lambda_0}{n}.$$

$$\lambda = vT$$

Вводится также <u>групповая скорость</u> $v_{гр} = \frac{\partial\omega}{\partial k}$ $\quad \vec{v}_{гр} = \nabla_{\vec{k}}\omega$

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$\frac{\partial k}{\partial\omega} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} + \frac{\omega}{c}\frac{\partial}{\partial\omega}\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{1}{v} + \omega\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{v} = \frac{1}{v} - \frac{\omega}{v^2}\frac{\partial v}{\partial\omega} =$$

$$= \frac{1}{v}\left(1 - \frac{\omega}{v}\frac{\partial v}{\partial\omega}\right);$$

$$\boxed{v_{гр} = \frac{v}{1 - \frac{\omega}{v}\frac{\partial v}{\partial\omega}}}$$

В отсутствие дисперсии $v \neq v(\omega)$, т.е. $\frac{\partial v}{\partial\omega} = 0$, и $v_{гр} = v$.

Заметим, что величина $|\vec{v}_{гр}|$ (там, где $\vec{v}_{гр} = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}} \equiv \nabla_{\vec{k}}\omega$ определена корректно) всегда меньше c – скорости света в вакууме

Поток энергии:

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi}\,Re\,[\vec{E}, \vec{H}^*] = \frac{c}{8\pi}\,Re\,[\overbrace{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,[\vec{H}, \vec{z}_0]}^{\vec{E}}, \vec{H}^*] =$$

$$= \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,|\vec{H}|^2\vec{z}_0 = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,|\vec{E}|^2\vec{z}_0$$

<u>Рассмотрим теперь плоскую волну в общем случае</u>:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}; \quad \vec{k} = k_x\vec{x}_0 + k_y\vec{y}_0 + k_z\vec{z}_0, \quad \vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\nabla e^{-i\vec{k}\vec{r}} = -i\vec{k}e^{-i\vec{k}\vec{r}};$$

$$\vec{H} = \frac{i}{k_0\mu}\,rot\,\vec{E} = \frac{i}{k_0\mu}[\nabla, \vec{E}] = \frac{i}{k_0\mu}[-i\vec{k}, \vec{E}] = \frac{1}{k_0\mu}[\vec{k}, \vec{E}]$$

$\vec{H}_0 = \frac{1}{k_0\mu}[\vec{k}, \vec{E}_0]$. Далее, действуя аналогично, получим:

$$\operatorname{rot}\vec E = -ik_0\mu\vec H \qquad \operatorname{rot}\vec H = ik_0\varepsilon\vec E \qquad \operatorname{div}\vec E = 0 \qquad \operatorname{div}\vec H = 0$$

$$\vec E = \vec E_0 e^{-i\vec k\vec r} \qquad \vec H = \vec H_0 e^{-i\vec k\vec r}$$

$$\begin{cases} +[\vec k, \vec E_0] = k_0\mu\vec H_0 \\ -[\vec k, \vec H_0] = k_0\varepsilon\vec E_0 \\ (\vec k, \vec E_0) = 0 \\ (\vec k, \vec H_0) = 0 \end{cases}$$

$$\vec H_0 = \frac{1}{k_0\mu}[\vec k, \vec E_0]$$

$$[\vec k, [\vec k, \vec E_0]] = -k_0^2\varepsilon\mu\vec E_0 \; ; \qquad \vec k\underbrace{(\vec k, \vec E_0)}_{=0} - (\vec k, \vec k)\vec E_0 = -k_0^2\varepsilon\mu\vec E_0$$

$$\{(\vec k, \vec k) - k_0^2\varepsilon\mu\}\vec E_0 = 0.$$

Для ∃ия нетривиального решения необх. и дост., чтобы

(*) $(\vec k, \vec k) = k_0^2\varepsilon\mu$, где $k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu}$.

(*) – дисперсионное уравнение для плоских э/м. волн в однородной безграничной среде. Решение этого уравнения:

$\omega = \omega(\vec k)$ – т.н. дисперсионное соотношение для волны

Рассмотрим случай среды без потерь.

Ищем решение дисп. ур-ия в виде $\vec k = \vec k_1 - i\vec k_2$

$$\begin{cases} k_1^2 - k_2^2 = k_0^2\varepsilon\mu \\ -2i(\vec k_1, \vec k_2) = 0 \end{cases}$$

Решения: а) $\vec k_2 = 0$, $k_1 = k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu}$ – однородная плоская волна

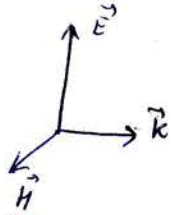
б) $\vec k_1 \neq 0$, $\vec k_2 \neq 0$, $\vec k_1 \perp \vec k_2$ – неоднородная плоская волна.

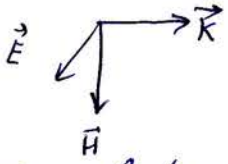
А) Однородные плоские волны (поляризация, длина волны, фаз скорость, плотность потока энергии)

$$\vec H = \frac{1}{k_0\mu}[\vec k, \vec E], \quad \vec k = k\vec n, \quad \vec H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}[\vec n, \vec E] = \frac{1}{\eta}[\vec n, \vec E];$$

$$\vec E = -\frac{1}{k_0\varepsilon}[\vec k, \vec H], \quad \vec E = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}[\vec n, \vec H] = -\eta[\vec n, \vec H] = \eta[\vec H, \vec n]$$

ТЕМ-поляризация





$\vec E, \vec H, \vec k$ – правая тройка

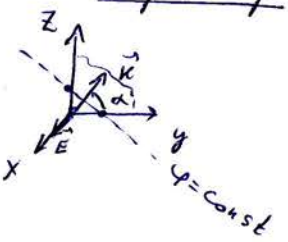
Плотность потока энергии: $\vec S = \frac{c}{8\pi}\eta|\vec H|^2\vec n = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}|\vec E|^2\vec n$

Поляризация: поляризационное вырождение (снимается в анизотр. и гиротр. средах)

$e^{-i\vec k\vec r}$: поверхности пост. фазы – плоскости, перпендикулярные вектору $\vec k$.

Однородные плоские волны – это волны, у которых поверхности (плоскости) постоянной фазы и поверхности (плоскости) пост. амплитуды совпадают.

Пример



$E_y = E_z = 0$

$E_x = E_0 e^{-ik_y y - ik_z z}$ $\qquad \omega t - k_y y - k_z z + \varphi = const$

$v_\varphi^{(x)} = \frac{\omega}{k_x}$, $v_\varphi^{(y)} = \frac{\omega}{k_y}$, $v_\varphi^{(z)} = \frac{\omega}{k_z}$ — это не есть компоненты какого-л. вектора (!)

Например

$v_\varphi^{(y)} = \frac{\omega}{k_y} = \frac{\omega}{k\cos\alpha} > \frac{\omega}{k} = v_\varphi$ (= c, в вакууме) [„быстр."]

$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$, $\lambda_y = \frac{2\pi}{k_y}$, $\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z}$ (пространственные периоды)

B) Неоднородные плоские волны.

$\vec{k}_1 \neq 0$, $\vec{k}_2 \neq 0$, $\vec{k}_1 \perp \vec{k}_2$

$$\boxed{h^2 - \varkappa^2 = k_0^2 \varepsilon\mu}$$

$\vec{k}_1 = h\vec{z}_0$, $\vec{k}_2 = \varkappa \vec{x}_0$

$\vec{k} = h\vec{z}_0 - i\varkappa\vec{x}_0$

$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}} = \vec{E}_0 e^{-ihz - \varkappa x}$ $\qquad \omega t - hz + \varphi = const$

$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}} = \vec{H}_0 e^{-ihz - \varkappa x}$ $\qquad z = const$ — поверхность пост. фазы.

У данных волн поверхности пост. фазы и поверхн. пост. амплитуды не совпадают.

Поляризация:

I) $\vec{H}_0 = H_0 \vec{y}_0$ $\qquad \vec{E}_0 = \frac{(-1)}{k_0\varepsilon}[\vec{k}, \vec{H}_0] = \frac{(-1)}{k_0\varepsilon}[h\vec{z}_0 - i\varkappa\vec{x}_0, \vec{H}_0]$

$\vec{E}_0 = \frac{H_0}{k_0\varepsilon}\{h\vec{x}_0 + i\varkappa\vec{z}_0\}$ — поле поляризовано эллиптически

(Волна поперечно-магнитного (TM), т.е. электрического (E) типа)

чисто поперечн.

есть E_z

II) $\vec{E}_0 = E_0\vec{y}_0$ $\qquad \vec{H}_0 = \frac{1}{k_0\mu}[\vec{k}, \vec{E}_0] = \frac{1}{k_0\mu}[h\vec{z}_0 - i\varkappa\vec{x}_0, \vec{E}_0]$

$\vec{H}_0 = \frac{(-E_0)}{k_0\mu}\{h\vec{x}_0 + i\varkappa\vec{z}_0\}$ — поле поляризовано эллиптически

(Волна поперечно-электрического (TE), т.е. магнитного (H) типа).

E — чисто поперечн.

есть H_z

Замечание: однородная плоская волна — TEM тип

Фазовая скорость неоднородной плоской волны

$v_{фаз} = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{\sqrt{k_0^2\varepsilon\mu + \varkappa^2}} < \frac{\omega}{k} = v_{ф\,одн.\,пл.\,волн.} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ — медленная волна

Длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{h} < \frac{2\pi}{k} = \lambda_{одн.\ плоск.\ волны}$$

$\lambda = \lambda_z$

$(h > k)$

Поперечный (волновой) импеданс

(TM) $\eta_\perp = \frac{h}{k_0\varepsilon} = \frac{E_x}{H_y}$;

(TE) $\eta_\perp = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{k_0\mu}{h}$;

$\vec{E}_\perp = \eta_\perp[\vec{H}, \vec{z}_0]$

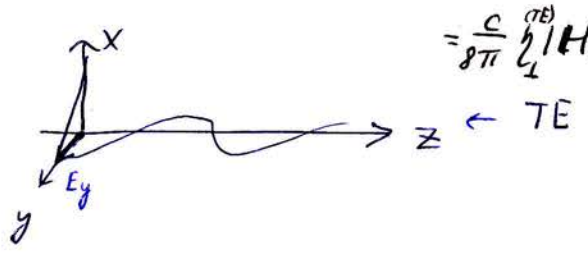
Волна бежит по z!

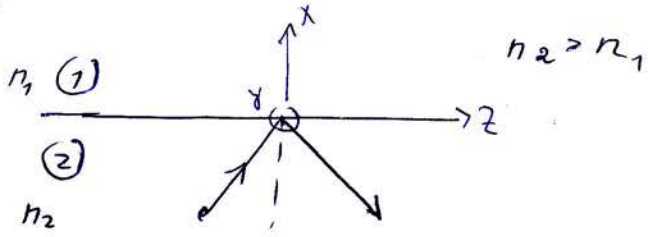
$\vec{H}_\perp = \frac{1}{\eta_\perp}[\vec{z}_0, \vec{E}]$

Плотность потока энергии:

$$TE:\ \vec{S} = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\,[\vec{E}, \vec{H}^*] = \frac{c}{8\pi}\,\underbrace{\frac{h}{k_0\mu}}_{\eta_\perp^{(TE)}}\,|E_y|^2\,\vec{z}_0 = \frac{c}{8\pi}\,\eta_\perp^{(TE)}|H_x|^2\vec{z}_0;$$

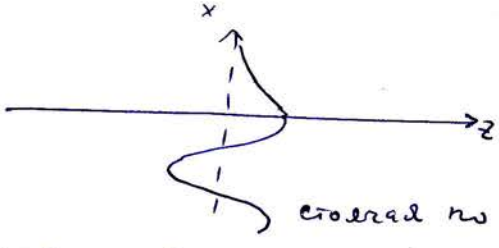
(для TM - подсчитать самим!)





полн. внутр. отраж.

Волны с $v_\varphi < c$ используются в приборах СВЧ для взаимодействия пучков заряженных частиц с полем.



стоячая по x волна

Плоские волны в поглощающей среде

(Учёт поглощения в среде.)

$\varepsilon = \varepsilon_k = \varepsilon' - i\varepsilon''$

Если $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$

$\mu = \mu' - i\mu''$

$n = \sqrt{\varepsilon\mu} = n' - in''$

$\vec{k} = \vec{k}_1 - i\vec{k}_2$

$$k_1^2 - k_2^2 - 2i(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = k_0^2\,\mathrm{Re}(\varepsilon_k\mu) + i\,k_0^2\,\mathrm{Im}(\varepsilon_k\mu);$$

$\vec{k}_1 \parallel \vec{k}_2$ $\quad \vec{k}_1 = \vec{k}'$, $\vec{k}_2 = \vec{k}''$ $\Rightarrow$ $\boxed{k = k' - ik'' = k_0\sqrt{\varepsilon_k\mu} = k_0(n' - in'')}$

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 = k_0^2\varepsilon'\mu \\ -2k'k'' = -k_0^2\varepsilon''\mu \end{cases} \quad (+) \Rightarrow \vec{k} \parallel \vec{z}_0$$

$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-k''z} e^{i\omega t - ik'z}$

$\vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_k}}\,[\vec{H}, \vec{z}_0]$

— теперь $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — не в фазе (затухание)

$$\varepsilon'' = \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

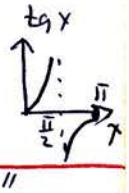
$$2k'k'' = \frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{4\pi\sigma}{\omega}\,\mu = \frac{2}{\delta^2}$$

$\varepsilon'' \geq 0$

$\varepsilon' > 0$ или < 0

$0 \leq \chi \leq \pi$

но если $\varepsilon' > 0$, то $0 \leq \chi < \pi/2$



$\varepsilon_k = \varepsilon' - i\varepsilon'' = |\varepsilon_k|\,e^{-i\,\mathrm{arctg}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}} = |\varepsilon_k|\,e^{-i\chi}$

Введем угол χ (угол потерь): $\mathrm{tg}\,\chi = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon'}$.

$2k'k'' = k_0^2\varepsilon'\mu\,\mathrm{tg}\,\chi$;

Тогда решение системы (+) имеет вид:

$$k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'\mu\left[\frac{1}{2}\sqrt{1+tg^2\chi} + \frac{1}{2}\right],$$

$$k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'\mu\left[\frac{1}{2}\sqrt{1+tg^2\chi} - \frac{1}{2}\right]$$

Далее рассматриваем случай $\varepsilon' > 0$.:

Частные случаи:

а) Малые потери: $tg^2\chi = \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2 \ll 1$

$$k' \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu}$$

$$k''^1 \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}tg^2\chi\right) - \frac{1}{2}\right\}^{1/2} = k'\frac{1}{2}tg\chi \approx k'\frac{\chi}{2} \ll k'$$

Мгновенная картина поля

б) Поглощение велико: $tg^2\chi \gg 1$

$$k' \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu}\sqrt{\frac{1}{2}tg\chi} = \frac{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}{c} = \frac{1}{\delta}$$

$$tg\chi = \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon'}$$

$$k'' \approx k'$$

$$k = k' - ik'' = \frac{1-i}{\delta}, \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{z}{\delta} - i\frac{z}{\delta}}$$

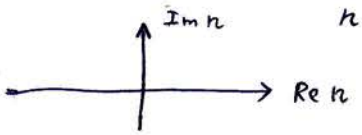
– выражение аналогично скин-эффекту

X Замечание: X

Пусть $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$, $\mu = \mu' - i\mu''$

$$n = n' - in'' = \sqrt{(\varepsilon' - i\varepsilon'')(\mu' - i\mu'')} = \sqrt{\underbrace{\varepsilon'\mu' - \varepsilon''\mu''}_{\text{Если: } <0} - i\underbrace{(\varepsilon''\mu' + \varepsilon'\mu'')}_{0}}$$

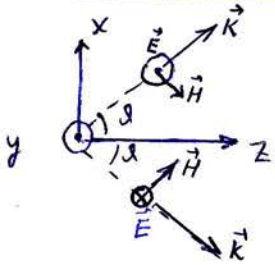
$$\sqrt{-|A| + i|B|} = \underbrace{-|n'|}_{n'} - i|n''|$$



$$(-|n'| - i|n''|)^2 = n'^2 - n''^2 + 2i|n'n''|$$

Фаза бежит против z, а затухает по z.

Неоднородная плоская волна как суперпозиция двух однородных плоских волн



$$k_z = k\cos\vartheta$$

$$\vec{E} = \vec{y}_0 E_0 e^{-ik_x x - ik_z z} - \vec{y}_0 E_0 e^{ik_x x - ik_z z} =$$

$$= \vec{y}_0 (-2i) E_0 \sin(k_x x) e^{-ik_z z} =$$

$$= \vec{y}_0 E_{0\Sigma} \sin(k_x x) e^{-ik_z z};$$

$$E_y = 0 \quad \text{при} \quad k_x x = \pi m, \; m = 0, \pm 1, \pm 2$$

а) Свойства поля E_y:

1) Плоскости постоянной фазы $z = const$;

2) Плоскости постоянной амплитуды $x = const$.

б) Поляризация волны:

Поле $\vec{H}$: H_x, H_z

$$\vec{H} = \frac{i}{k_0\mu} \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y_0} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$H_x = -\frac{k_z}{k_0\mu} E_{0\Sigma} \sin(k_x x) e^{-ik_z z} = -\frac{\cos\vartheta}{\eta} E_{0\Sigma} \sin(k_x x) e^{-ik_z z};$$

$$H_z = \frac{ik_x}{k_0\mu} E_{0\Sigma} \cos(k_x x) e^{-ik_z z} = \frac{i\sin\vartheta}{\eta} E_{0\Sigma} \cos(k_x x) e^{-ik_z z}$$

Волна типа TE (H-типа)

Замечание:

Волны TE (H)-типа имеют только поперечные (по отношению к направлению распр.) компоненты поля E;

Волны TM(E)-типа имеют только поперечные компоненты поля $\vec{H}$.

в) Фазовая скорость

$$v_\Phi = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} > \frac{\omega}{k} = v_{\Phi,\, \text{одн. плоск. волны}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Полученная нами неоднор. плоская волна — быстрая (её фазовая скорость больше, чем фазовая скорость одн. плоск. волны)

г) Длина волны

(Замечание: длина волны = расстояние, проходимому волной за период T)

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} > \frac{2\pi}{k} = \lambda_{\text{одн. плоск. волны}}$$

д) Поперечный волновой импеданс

$$\vec{E}_\perp = \eta_\perp [\vec{H}, \vec{z}_0]; \quad \vec{H}_\perp = \frac{1}{\eta_\perp}[\vec{z}_0, \vec{E}]$$

$$\text{TE}: \quad \eta_\perp^{(TE)} = -E_y / H_x = \frac{k_0 \mu}{k_z} = \left\| k_z = h \right\| = \frac{k_0 \mu}{h};$$

Если бы мы стали рассматривать волну TM-типа, то получили бы $\eta_\perp^{(TM)} = \frac{k_z}{k_0 \varepsilon} = \left\| k_z = h \right\| = \frac{h}{\ }$.

е) Плотность потока энергии

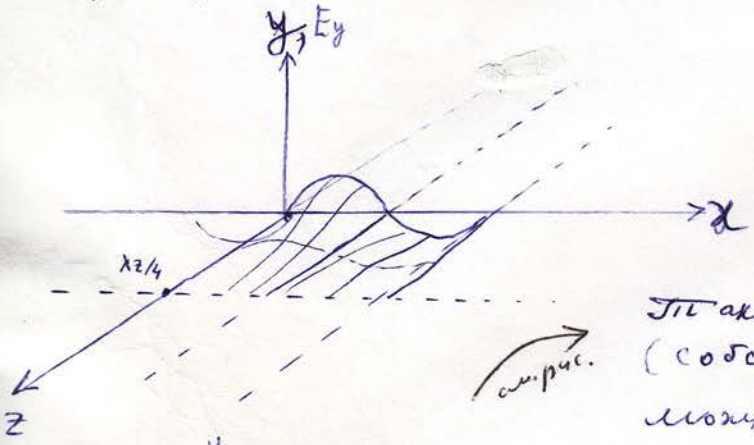
$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\,[\vec{E}, \vec{H}^*] = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\,[E_y \vec{y}_0, H_x^* \vec{x}_0 + H_z^* \vec{z}_0] =$$

$$= \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\left\{(-E_y H_x^*)\vec{z}_0 + E_y H_z^* \vec{x}_0\right\} =$$

$$= -\frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}(E_y H_x^*)\vec{z}_0 \;\|\; \vec{z}_0; \left[-E_y H_x^* = \frac{k_z}{k_0 \mu} |E_{0z}|^2 \sin^2(k_x x) \right].$$

ж) Распределение поля в пространстве.

Пример: волна типа TE(H) в прямоугольном волноводе.

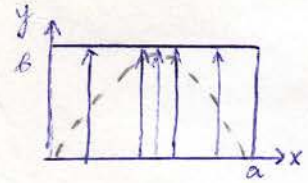


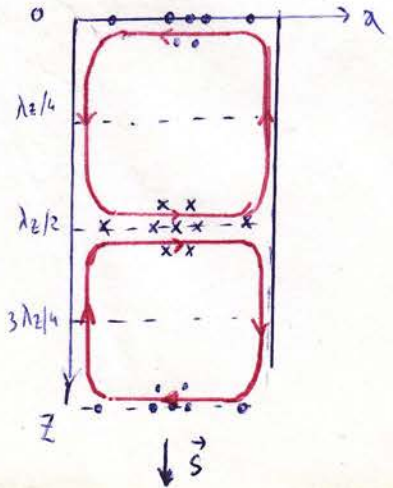
$$E_y = |E_{0z}| \sin(k_x x) \times$$
$$\times \cos(\omega t - k_z z + \varphi);$$

Конструирование полей в волноводе и резонаторе из однородных плоских волн:

Таким образом волноводные волны (собственные моды волновода) можно собирать из плоских волн (концепция Бриллюэна) Brillouin

TE_{10}





Таким образом, волны в волноводе являются экстремами

$$K_x a = \pi m, \quad K_x = \frac{\pi m}{a}, \quad m = 1, 2, 3$$

$$K_z = \sqrt{K^2 - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2}$$

$$\equiv$$

$$h = \sqrt{K^2 - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2} \longrightarrow \lambda_в = \frac{2\pi}{h}$$ – длина волны в волноводе

h – постоянная распространения

Волна в волноводе будет распространяющейся, если $k > \frac{\pi m}{a} = \varkappa$ (для TE_{m0})

Значение $K_{кр}$: $K_{кр} = \frac{\pi m}{a} = \varkappa$

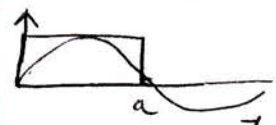
Критическая частота: $\omega_{кр} = \frac{c K_{кр}}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c\varkappa}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ (волна – распространяющаяся, только если $\omega > \omega_{кр}$); при $\omega < \omega_{кр}$ – волна – нераспростр.

Критическая длина волны: это длина однородной плоской волны, соответствующая критическому значения $K_{кр}$: $\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{K_{кр}} = \frac{2a}{m}$ для TE_{10}

TE_{10}: – при $\omega = \omega_{кр}$, $\lambda_{кр} = 2a$

– при $\omega < \omega_{кр}$: а) exp-е спадание по z

б) Из каких плоских волн собирается? (неоч)



$\frac{\lambda_в}{2} = a$

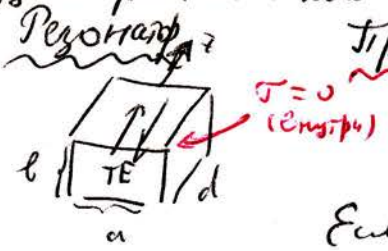
На a должно уложиться хотя бы $\frac{\lambda}{2}$

Таким образом,

собственная мода в волноводе есть суперпозиция плоских волн, распространяющихся под определенным углом к оси волновода.

В общем случае интерпретация волноводного распростр. с помощью концепции Бриллюэна – довольно громоздкая (особенно, для круглых волноводов). Далее мы задачи о волноводных модах будем решать как краевые. [Brillouin

Резонатор



Пример: Колебания TE в прямоугольном резонаторе:

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{h} \quad (h = K_z) \qquad d = \frac{\lambda_z}{2} l = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{K_z} l; \; h \equiv K_z$$

Если $\frac{\lambda_z}{2} l = d$, $l = 1, 2, \ldots$, то на частотах ω_{mnl}

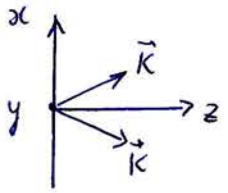
TE_{mnl} когда это реализуется поле в резонаторе $\neq 0$ в отсутствие источников

$$h = \frac{2\pi}{\lambda_z} = \frac{\pi l}{d}$$

Электромагнитные волновые пучки

Представление поля пучка в виде суперпозиции однор. плоск. волн

Рассмотрим двумерный электромагнитный волновой пучок, векторы $\vec{k}$ в котором сосредоточены вблизи оси z:



$\frac{\partial}{\partial y}=0$ в двумерном пучке

$k^2=k_x^2+k_z^2$. Пусть поле $\vec{E}(x,z)$ в пучке направлено по оси y. Тогда

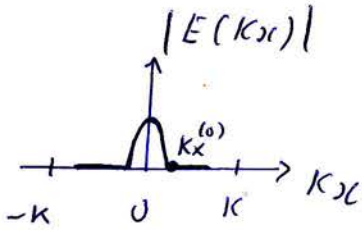
$$\vec{E}(x,z)=E(x,z)\vec{y}_0.$$

$$E(x,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{E(k_x)}_{\text{пространственный спектр пучка}}e^{-ik_x x-i\sqrt{k^2-k_x^2}\,z}dk_x$$

Малоугловое (параксиальное) приближение

В сечении $z=0$:

$$E(x,0)=\int_{-\infty}^{+\infty}E(k_x)e^{-ik_x x}dk_x$$



Пусть в пучке $|k_x|\ll k$, т.е.

$$k_x^{(0)}\ll k\Rightarrow\frac{2\pi}{\Lambda_\perp}\ll\frac{2\pi}{\lambda}$$

(параксиальный пучок)

$\Lambda_\perp\gg\lambda$

Трехмерный пучок:

$$E_i(x,y,0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}E_i(\underbrace{k_x,k_y}_{\vec{k}_\perp})e^{-i\vec{k}_\perp\vec{r}_\perp}d\vec{k}_\perp$$

Пучок, в котором $k_x^{(0)}\ll k$, называется квазиоптическим (малоугловое, или параксиальное приближение).

$$k_z=\sqrt{k^2-k_x^2}=k\sqrt{1-\frac{k_x^2}{k^2}}\approx k\left(1-\frac{1}{2}\frac{k_x^2}{k^2}-\frac{1}{8}\frac{k_x^4}{k^4}+\dots\right);$$

$$\sqrt{1+\xi}=1+\frac{\xi}{2}-\frac{\xi^2}{8}+\dots;$$

$$E(x,z)=\underbrace{e^{-ikz}}_{\text{быстроосциллирующая функция}}\underbrace{\int E(k_x)e^{-ik_x x+i\left(\frac{k_x^2}{2k}+\frac{k_x^4}{8k^3}+\dots\right)z}dk_x}_{E^{(0)}(x,z)\ -\ \text{медленно меняющаяся амплитуда}}.$$

! $E(x,0)=E^{(0)}(x,0)$; $\vec{E}^{(0)}(x,z)=E^{(0)}(x,z)\vec{y}_0$

Рассмотрим характерные зоны пространства:

(1) $\frac{k_x^2}{2k} z \ll \pi$ (*).

В этом случае

$E^{(0)}(x,z) \approx \int E(k_x) e^{-ik_x x} = E(x,0)$ – распределение поля в сечении $z=0$.

Поэтому рассматриваемая зона является зоной неискаженного распространения пучка.

Пусть $\Lambda_\perp$ – „начальная" (при $z=0$) характерная ширина пучка. Из теории Фурье следует, что

$$\Lambda_\perp \approx \frac{2\pi}{k_x^{(0)}}$$

Тогда условие (*) можно переписать в виде

$$\frac{4\pi^2}{\Lambda_\perp^2}\,\frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{2\pi} z \ll \pi, \quad \text{или} \quad \frac{\lambda z}{\Lambda_\perp^2} \ll 1$$

$$p^2 = \frac{\lambda z}{\Lambda_\perp^2}, \quad p \text{ – параметр Френеля}$$

$\sqrt{\lambda z}$ – размер первой зоны Френеля.

Условие (*) эквивалентно тому, что на размере апертуры b_0 укладывается много зон Френеля, и определяет зону геометрической оптики (прожекторная зона)

Чем шире апертура пучка, тем до бо́льших z он распространяется без искажений.

(2) Зона Френеля и диффузионная зона

Пусть $\frac{k_x^4}{8k^3} z \ll \pi$, или

$$\frac{(2\pi)^4}{\Lambda_\perp^4}\,\frac{\lambda^3}{8(2\pi)^3} z \ll \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda z}{\Lambda_\perp^2} \ll 4\left(\frac{\Lambda_\perp}{\lambda}\right)^2$$

$$\Lambda_\perp \approx \frac{2\pi}{k_x^{(0)}} \gg \frac{2\pi}{\lambda}, \quad k_x^{(0)} \ll k$$

$$\boxed{p^2 \ll 4\underbrace{\left(\frac{\Lambda_\perp}{\lambda}\right)^2}_{\gg 1}}$$ – условие диффузионной зоны

$$\boxed{\begin{aligned} z &\ll k^3\Lambda_\perp^4 = \frac{k\Lambda_\perp^2}{\left(\frac{1}{k\Lambda_\perp}\right)^2} \\ \theta_д &= \frac{1}{k\Lambda_\perp} \text{ – дифр. расх. пучка} \end{aligned}}$$

$\Leftrightarrow$

Сюда входит и зона Френеля ($p \sim 1$) и, м.б., даже зона Фраунгофера ($p \gg 1$).

$$E^{(0)}(x,z) = \int E(k_x)\, e^{-ik_x x + i\frac{k_x^2}{2k}z}\, dk_x \quad -$$

– распределение $E(x,0)$ будет по мере распространения искажаться.

Уравнение пол. диф. (пар. ур-ие) для амплитуды волн. пучка

$$\boxed{E_i^{(0)}(x,y,z) = \int E_i(\vec{k}_\perp)\, e^{-i\vec{k}_\perp \vec{r}_\perp + i\frac{k_\perp^2}{2k}z}\, d\vec{k}_\perp}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

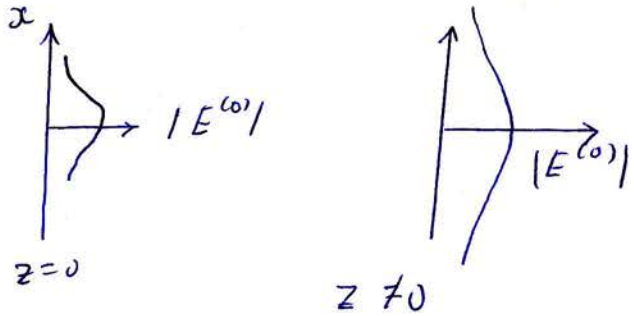
$$D\,\frac{\partial^2 \vec{E}^{(0)}(x,z)}{\partial x^2} = \frac{\partial \vec{E}^{(0)}(x,z)}{\partial z}$$

– уравнение параболического типа (для ампл. пучка)

$\vec{E}^{(0)} = E^{(0)}\vec{y}_0$

$$D = -\frac{i}{2k} = \frac{1}{2ik}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}^{(0)}(x,z)}{\partial x^2} = 2ik\frac{\partial \vec{E}^{(0)}(x,z)}{\partial z} \Rightarrow \Delta_\perp \vec{E}^{(0)} = 2ik\frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial z}}$$



Пучок будет расплываться по мере распространения („поперечная диффузия")

В результате распространение амплитуды происходит не вдоль лучевых трубок (как в геометрической оптике), а поперек лучевых трубок (Юнг, 1801).

Решение диффузионного (параболического) уравнения

$$E^{(0)}(x,z) = \sqrt{\frac{k}{-i2\pi z}}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{E^{(0)}(x',0)}_{E(x',0)}\, e^{\frac{-ik(x-x')^2}{2z}}\, dx'$$

$$\vec{E}^{(0)}(x,z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D z}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}^{(0)}(x',0)\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4Dz}}\, dx'$$

$$\underbrace{E(x,0)}_{E^{(0)}(x,0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} E(k_x)\, e^{-ik_x x}\, dk_x,$$

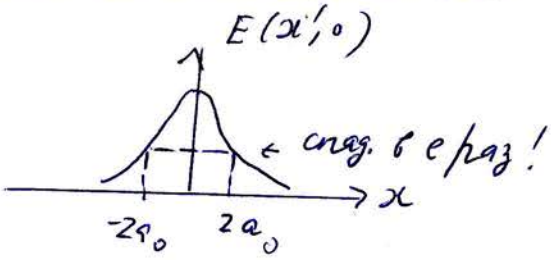
$$E(k_x) = \frac{1}{2\pi}\int \underbrace{E(x',0)}_{E^{(0)}(x',0)}\, e^{ik_x x'}\, dx'.$$

В этих выражениях „(0)" можно опустить.

Пример: Пучок с гауссовым распределением амплитуды

Поле гауссова пучка

$$E(x',0) = e^{-\frac{x'^2}{4a_0^2}}$$



$$E^{(0)}(x,z) = \sqrt{\frac{k}{-i2\pi z}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x'^2}{4a_0^2}} e^{-\frac{ik(x-x')^2}{2z}} dx' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{z}{2ika_0^2}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a_0^2\left(1+\frac{z}{2ika_0^2}\right)}\right\}.$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x'^2} dx' = \sqrt{\frac{\pi}{i\lambda}}}$$

(интеграл Френеля)

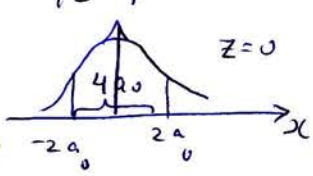
$\mathrm{Im}\,\lambda \le 0$

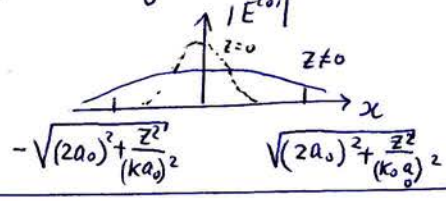
$z=0$: $E^{(0)}(x,0) = e^{-\frac{x^2}{4a_0^2}}$; ширина пучка $= 2a_0$

$z>0$: $$|E^{(0)}(x,z)| = \frac{1}{\sqrt[4]{1+\left(\frac{z}{2ka_0^2}\right)^2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a_0^2\left[1+\left(\frac{z}{2ka_0^2}\right)^2\right]}\right\}.$$

$$l^2(z) = 4a_0^2\left[1+\left(\frac{z}{2ka_0^2}\right)^2\right] = 4a_0^2 + \frac{z^2}{(ka_0)^2}; \quad \theta_g = \frac{1}{ka_0}$$

Ширина пучка при $z=0$: $l(z) = \sqrt{(2a_0)^2 + \frac{z^2}{(ka_0)^2}}$.





Пучок расширяется тем быстрее, чем он у́же.

Детали выкладок:

$$\frac{x'^2}{4a_0^2} + \frac{ik(x'^2-2xx'+x^2)}{2z} = \left(\frac{1}{4a_0^2}+\frac{ik}{2z}\right)x'^2 - \frac{2ik}{2z}xx' + \frac{ikx^2}{2z} =$$

$$= \frac{ik}{2z}\left\{\left(1+\frac{z}{2ika_0^2}\right)x'^2 - 2xx' + x^2\right\} = \frac{ik}{2z}\left\{\left(1+\frac{z}{2ika_0^2}\right)\left(x' - \frac{x}{1+\frac{z}{2ika_0^2}}\right)^2 - \frac{x^2}{1+\frac{z}{2ika_0^2}} + x^2\right\} =$$

$$= \overbrace{\frac{ik}{2z}\left(1+\frac{z}{2ika_0^2}\right)}^{\lambda}\left(x' - \frac{x}{1+\frac{z}{2ika_0^2}}\right)^2 + \frac{\frac{1}{4a_0^2}x^2}{1+\frac{z}{2ika_0^2}};$$

Рассмотрим поведение пучка в зоне Фраунгофера при соблюдении условия $1 \ll \underbrace{p^2 \ll 4\left(\frac{\Lambda_\perp}{\lambda}\right)^2}_{\text{условие дальн. зоны}}$

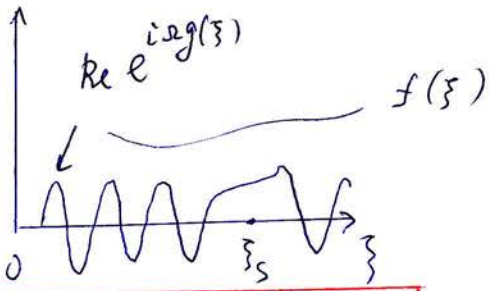
$$p^2 = \frac{\lambda z}{\ell_0^2}$$

$$E^{(0)}(x,z) = \int E(k_x)\, e^{-ik_x x + i\frac{k_x^2}{2k}z}\, dk_x.$$

Вычислим этот интеграл методом стационарной фазы.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\Omega g(\xi)} d\xi, \quad \Omega \to \infty$$

$$g(\xi) = g(\xi_s) + g'(\xi_s)(\xi-\xi_s) + \frac{1}{2}g''(\xi_s)(\xi-\xi_s)^2 + \ldots; \quad g'(\xi_s) = 0$$



Стационарная точка:
$g'(\xi_s) = 0$

$$I \simeq f(\xi_s) e^{i\Omega g(\xi_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i\Omega g''(\xi_s)}{2}(\xi-\xi_s)^2} d\xi =$$

$$= f(\xi_s) e^{i\Omega g(\xi_s)} \sqrt{\frac{\pi}{-i\Omega \frac{g''(\xi_s)}{2}}};$$

$$1 \ll \underbrace{\frac{\lambda z}{\Lambda_\perp^2}}_{p^2} \ll 4\left(\frac{\Lambda_\perp}{\lambda}\right)^2$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\underbrace{\frac{\Lambda_\perp^2}{\lambda^2}}_{1} \ll \underbrace{\frac{z}{\lambda}}_{\sim kz} \qquad \frac{z}{\lambda} \ll 4\frac{\Lambda_\perp^4}{\lambda^4}$$

$$\left(-k_x x + \frac{k_x^2}{2k} z\right)'_{k_x} = 0 \text{ (поиск стацион. точки)}; \quad \left(-k_x x + \frac{k_x^2}{2k} z\right)''_{k_x} = \frac{z}{k}$$

$$-x + \frac{k_x}{k} z = 0 \Rightarrow k_{x,s} = k\frac{x}{z}.$$

$$E^{(0)}(x,z) = E\left(\overset{k_x =}{k\frac{x}{z}}\right) e^{-i\left(k\frac{x}{z}\right)x + i\left(\frac{kx}{z}\right)^2 \frac{z}{2k}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{z}{2k}(k_x - k_{x,s})^2} dk_x}_{\sqrt{\frac{\pi}{-i\frac{z}{2k}}}}$$

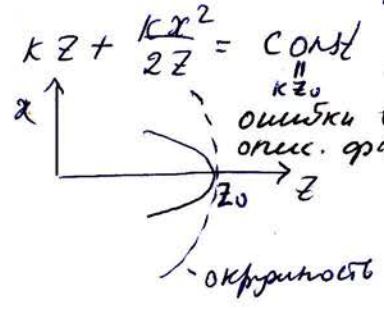
$$= \sqrt{\frac{2\pi i k}{z}}\, E\left(\overset{k_x =}{k\frac{x}{z}}\right) e^{-i\frac{kx^2}{2z}};$$

$$E(x,z) = E^{(0)}(x,z) e^{-ikz} = \sqrt{\frac{2\pi i k}{z}}\, \underbrace{E\left(k\frac{x}{z}\right)}_{\text{спектр}} e^{-ikz - i\frac{kx^2}{2z}};$$

Фазовый фронт: $kz + \frac{kx^2}{2z} = \underset{kz_0}{\underset{\parallel}{\mathrm{const}}}$; $\quad z = \overset{z_0}{\overset{\parallel}{\mathrm{const}}} - \frac{x^2}{2z} \Rightarrow$

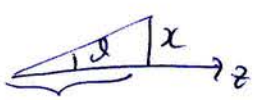
$x = 0$: $z = z_0$

$z = z_0\left(1 - \frac{x^2}{2zz_0}\right)$



фазовый фронт — параболический!

Приближение верно, пока парабола удовл.-но аппроксимирует окружность



$\frac{x}{z} = \mathrm{tg}\,\vartheta$

Вывод параболического уравнения для амплитуды вып. пучка

Исходное уравнение (волновое) было уравнением гиперболического типа. В нашем случае поле описывается уравнением параболического типа. Выясним, при каких условиях это возможно.

$$\Delta E_i + k^2 E_i = 0 \qquad E_i = (E_x, E_y, E_z)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$E_i = \underbrace{E_i^{(0)}(\vec{r})}_{\text{медленно меняющаяся амплитуда}} e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}; \qquad \nabla E_i = \nabla\left(E_i^{(0)} e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right) = \left(\nabla E_i^{(0)}\right) e^{-i\vec{k}\vec{r}} - i\vec{k} E_i^{(0)} e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\operatorname{div}\nabla E_i = \left(\Delta E_i^{(0)}\right) e^{-i\vec{k}\vec{r}} + \left(-i\vec{k}, \nabla E_i^{(0)}\right) e^{-i\vec{k}\vec{r}} +$$

$$+ \Big(\underbrace{\nabla\left(E_i^{(0)} e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right)}_{\substack{\shortparallel \\ e^{-i\vec{k}\vec{r}} \nabla E_i^{(0)} + (-i\vec{k}) E_i^{(0)} e^{-i\vec{k}\vec{r}}}}, -i\vec{k}\Big) =$$

$$= \left[\Delta E_i^{(0)} - \left(2i\vec{k}, \nabla E_i^{(0)}\right) - k^2 E_i^{(0)}\right] e^{-i\vec{k}\vec{r}};$$

Тогда, после сокращения $e^{-i\vec{k}\vec{r}}$, первое уравнение даёт:

$$\Delta E_i^{(0)} = 2i\left(\vec{k}, \nabla\right) E_i^{(0)}. \quad (1)$$

Рассмотрим второе уравнение:

$$\operatorname{div}\left(\vec{E}^{(0)} e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right) = e^{-i\vec{k}\vec{r}} \operatorname{div}\vec{E}^{(0)} + \left(-i\vec{k}, \vec{E}^{(0)}\right) e^{-i\vec{k}\vec{r}}.$$

Тогда второе уравнение дает:

$$\operatorname{div}\vec{E}^{(0)} = i\left(\vec{k}, \vec{E}^{(0)}\right). \quad (2)$$

Пусть $\vec{k} = k\vec{z}_0$

$$\Delta_\perp E_i^{(0)} + \frac{\partial^2 E_i^{(0)}}{\partial z^2} = 2ik \frac{\partial E_i^{(0)}}{\partial z} \qquad \cancel{E_i^{(0)} \to E_y^{(0)} \vec{y}_0 = \vec{E}^{(0)}}.$$

Для декартовых координат

$$\Delta_\perp \vec{E}^{(0)} + \frac{\partial^2 \vec{E}^{(0)}}{\partial z^2} = 2ik \frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial z}, \quad \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Второе уравнение принимает вид:

$$\operatorname{div}_\perp \vec{E}_\perp^{(0)} + \frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial z} = ik E_z^{(0)}$$

Пусть в первом уравнении $k\left|\frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial z}\right| \gg \left|\frac{\partial^2 \vec{E}^{(0)}}{\partial z^2}\right|$

$$\frac{k}{\Lambda_\parallel} \gg \frac{1}{\Lambda_\parallel^2}, \text{ т.е. } k\Lambda_\parallel \gg 1$$

В этом случае для второго уравнения можно записать

$$k\left|E_z^{(0)}\right| \gg \left|\frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial z}\right|$$

Тогда получим

$$\begin{cases} \Delta_\perp \vec{E}^{(0)} = 2ik \dfrac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial z} \\ \operatorname{div}_\perp \vec{E}_\perp^{(0)} = ik E_z^{(0)} \end{cases}$$

Мы уже имели ранее первое уравнение. Член $\frac{\partial^2 \vec{E}^{(0)}}{\partial z^2}$, которым пренебрегли, соответствует продольной диффузии

$$\Delta_\perp \vec{E}^{(0)} = 2ik \frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial z} \rightarrow \frac{1}{\Lambda_\perp^2} \sim \frac{k}{\Lambda_\parallel}, \text{ т.е. } (k\Lambda_\perp)^2 \sim k\Lambda_\parallel$$

$$\underbrace{(k\Lambda_\perp)^2 \gg 1}_{\text{это мы требовали ранее}}, \Rightarrow k\Lambda_\parallel \gg 1$$

$$\frac{\Lambda_\perp}{\Lambda_\parallel} \sim \frac{1}{k\Lambda_\perp} \ll 1$$

$$\operatorname{div}_\perp \vec{E}_\perp^{(0)} = ik E_z^{(0)} \rightarrow \frac{|\vec{E}_\perp^{(0)}|}{\Lambda_\perp} \sim k\left|E_z^{(0)}\right| \rightarrow \left|E_z^{(0)}\right| \sim \frac{1}{k\Lambda_\perp}\left|\vec{E}_\perp^{(0)}\right|$$

$k\Lambda_\perp \gg 1$

$E_z^{(0)}$ – мало

$$ik E_z^{(0)} \simeq \operatorname{div}_\perp \vec{E}_\perp^{(0)}$$

В первом уравнении тогда можно рассмотреть только $\vec{E}_\perp$.

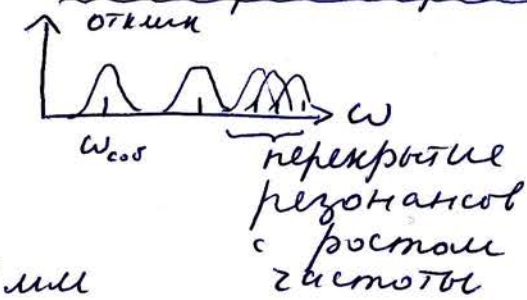
Запишем общее решение параболического уравнения:

$$\vec{E}^{(0)}(\vec{r}) = \int \vec{E}(\vec{k}_\perp) e^{-i\vec{k}_\perp \vec{r}_\perp + i\frac{k_\perp^2}{2k}z} d\vec{k}_\perp$$

$$\vec{E}^{(0)}(\underbrace{\vec{r}}_{x,y,z}) = \underbrace{\left(\sqrt{\frac{k}{-i2\pi z}}\right)^2}_{-\frac{k}{i2\pi z} = \frac{ik}{2\pi z}} \int\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\vec{E}^{(0)}(x', y', 0)}_{\vec{E}^{(0)}(\vec{r}_\perp')} \underbrace{e^{-\frac{ik(x-x')^2}{2z} - \frac{ik(y-y')^2}{2z}}}_{e^{-\frac{ik(\vec{r}_\perp - \vec{r}_\perp')^2}{2z}}} \underbrace{dx'dy'}_{d\vec{r}_\perp'}$$

$$\vec{E}^{(0)}(\vec{r}) = \frac{ik}{2\pi z} \int_{S_\perp} \underbrace{\vec{E}^{(0)}(\vec{r}_\perp{}')}_{\vec{E}(\vec{r}_\perp{}') \equiv \vec{E}(x', y', 0)} e^{-\frac{ik(\vec{r}_\perp - \vec{r}_\perp{}')^2}{2z}} d\vec{r}_\perp{}'.$$

Об открытых резонаторах



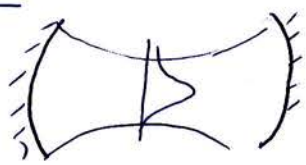
Характерные добротности

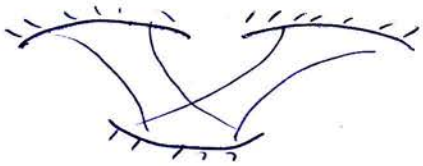
Q обычн. контур ~ 50 ÷ 100

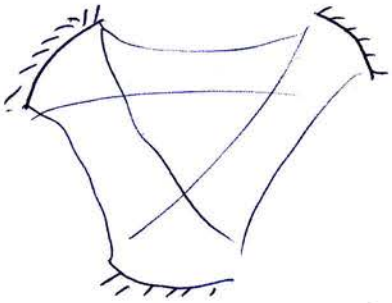
Q объемн. резонатор ~ 500 ÷ 1000

Q откр. резонатор ~ 5000

$\lambda \sim 1$ мм







Электромагнитные волны в однородных изотропных средах с временной дисперсией

Связь между индукцией и напряженностью поля.

При пренебрежении пространственной дисперсией в однородной изотропной среде

$$\vec{D}(t,\vec{r}) = \int_{-\infty}^{t} \tilde{\varepsilon}(t-t')\vec{E}(t',\vec{r})\,dt'$$

В лекции № 3:
$$D_i(t,\vec{r}) = \int_{-\infty}^{t} \tilde{\varepsilon}_{ij}(t-t')E_j(t',\vec{r})\,dt',$$
$$\tilde{\varepsilon}_{ij}(t-t') = \tilde{\varepsilon}(t-t')\,\delta_{ij}.$$

$\tau = t - t'$

$$\vec{D}(t,\vec{r}) = \int_{0}^{\infty} \tilde{\varepsilon}(\tau)\,\vec{E}(t-\tau,\vec{r})\,d\tau$$

Опуская (для краткости записи) $\vec{r}$, разложим поле в интеграл Фурье:

$$\vec{E}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega, \quad \vec{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t)e^{-i\omega t}\,dt.$$

Подставим представление $\vec{E}(t)$ в виде интеграла Фурье в связь между $\vec{D}$ и $\vec{E}$

$$\vec{D}(t) = \int_{0}^{\infty} \tilde{\varepsilon}(\tau)\,\vec{E}(t-\tau)\,d\tau = \int_{0}^{\infty} \tilde{\varepsilon}(\tau)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega)e^{i\omega(t-\tau)}\,d\omega\right\}d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\int_{0}^{\infty} \tilde{\varepsilon}(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau\right\}\vec{E}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

В свою очередь,

$$\vec{D}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{D}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \longrightarrow \vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\vec{E}(\omega),$$

где

$$\varepsilon(\omega) = \int_{0}^{\infty} \tilde{\varepsilon}(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

← тот факт, что интегр. берется от 0 до ∞ явл-ся следствием принципа причинности.

Итак, для гармонических процессов комплексные амплитуды $\vec{D}(\omega)$ и $\vec{E}(\omega)$ связаны соотношением $\vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\vec{E}(\omega)$, где $\varepsilon(\omega)$ – функция частоты

Среды, для которых $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, называют средами с временной (частотной дисперсией).

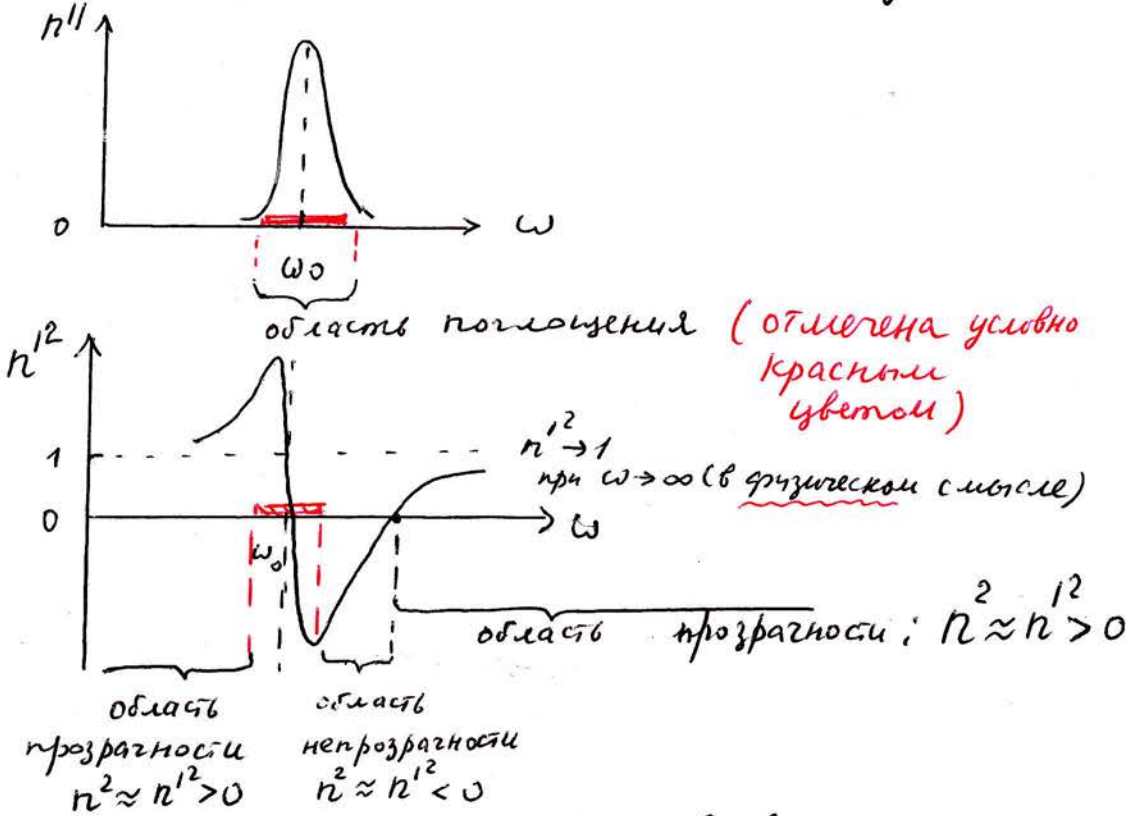
Замечание: В случае сред с пространственной дисперсией $\vec{D}(\omega,\vec{k}) = \varepsilon(\omega,\vec{k})\vec{E}(\omega,\vec{k})$; поле при этом раскл. по временным и пространств. гармоникам.

Замечание:

Исходя из принципа причинности можно вывести соотношения, связывающие величины $\varepsilon'(\omega)$ и $\varepsilon''(\omega)$ (формулы Крамерса - Кронига), которые входят в комплексную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_к = \varepsilon' - i\varepsilon''$. Аналогичные результаты можно получить и для частей комплексной магнитной проницаемости. Это означает, что диспергирующая среда является принципиально средой поглощающей.

Показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon_к \mu_к}$ такой среды, определяющий волновое число $k = k_0 n = k_0\sqrt{\varepsilon_к \mu_к}$ в ней, является поэтому комплексным: $n(\omega) = n'(\omega) - i n''(\omega)$.

Типичные графики, иллюстрирующие зависимости величин $n'(\omega)$ и $n''(\omega)$ от частоты имеют вид:



Поскольку проводимость среды учтена в величине $\varepsilon_к$, нет смысла выделять ток проводимости в $\vec{j}^{\,микро}$. Далее полагаем

$$\mathrm{rot}\,\vec{h} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,микро} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{e}}{\partial t}; \quad \vec{j}^{\,микро} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c\,\mathrm{rot}\,\vec{M}, \text{ т.е. } \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$\vec{D} = \varepsilon_к \vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}.$$

Мощность джоулевых потерь и энергия электромагнитного поля в среде с временной дисперсией

Из уравнений Максвелла при отсутствии сторонних источников следует, что

$$\operatorname{div} \underbrace{\vec{S}(t)}_{\frac{c}{4\pi}[\vec{E}(t),\vec{H}(t)]} = -\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}(t)\frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} + \vec{H}(t)\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t}\right) \qquad (1)$$

В диспергирующей среде всегда имеет место диссипация энергии, поэтому закон сохр. энергии должен записываться в виде

$$\operatorname{div}\vec{S} = -q - \frac{\partial w}{\partial t}. \qquad (2)$$

Задача состоит в том, чтобы определить $\vec{S}$, q, w в диспергирующей среде.

Очевидно, что $\vec{S}(t) = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}(t),\vec{H}(t)]$.

Для монохром. процессов $\overline{\vec{S}}^T = \frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}[\vec{E},\vec{H}^*]$, где $\vec{E},\vec{H}$ – компл. амплит.

Рассмотрим монохроматич. процесс:

$$\operatorname{div}\overline{\vec{S}}^T = -\overline{q}^T + \overline{\frac{\partial w}{\partial t}}^T.$$

Изменения энергии в монохроматическом поле не происходит, поэтому д.б. $\operatorname{div}\overline{\vec{S}}^T = -\overline{q}^T$; $\overline{q}^T = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}(t)\frac{\partial\vec{D}(t)}{\partial t} + \vec{H}(t)\frac{\partial\vec{B}(t)}{\partial t}\right)^T$

Формула (1) при этом имеет вид:

$$\overline{\operatorname{div}\vec{S}(t)}^T = -\overline{\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}(t)\frac{\partial\vec{D}(t)}{\partial t} + \vec{H}(t)\frac{\partial\vec{B}(t)}{\partial t}\right)}^T =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\operatorname{Re}\frac{1}{2}\left(\vec{E}^*\underbrace{i\omega(\varepsilon'-i\varepsilon'')\vec{E}}_{i\omega\vec{D}} + \vec{H}^*\underbrace{i\omega(\mu'-i\mu'')\vec{H}}_{i\omega\vec{B}}\right) =$$

$$= \underbrace{-\frac{\omega}{8\pi}\left(\varepsilon''|\vec{E}|^2 + \mu''|\vec{H}|^2\right)}_{-\overline{q}^T}$$

$$\overline{q}^T = \frac{\omega}{8\pi}\left(\varepsilon''|\vec{E}|^2 + \mu''|\vec{H}|^2\right), \qquad \varepsilon'', \mu'' > 0$$ – на всех частотах для всех веществ.

пример: $\mu''=0$; $\varepsilon'' = \frac{4\pi\sigma}{\omega}$: $\overline{q}^T = \frac{1}{2}\sigma|\vec{E}|^2$

Рассмотрим теперь область частот, где потерями (в том приближении) можно пренебречь. В этой области можно говорить о запасенной энергии. Мы введем выражение для энергии в области прозрачности для квазимонохроматического сигнала

Для такого сигнала: $\vec{E}(t) = \frac{1}{2}\left(\vec{E}_0(t)\, e^{i\omega t} + \text{к.с.}\right) = \mathrm{Re}\left\{\vec{E}_0(t) e^{i\omega t}\right\}$

комплекс. ампл. (медленная)

$$\vec{H}(t) = \frac{1}{2}\left(\vec{H}_0(t)\, e^{i\omega t} + \text{к.с.}\right) = \mathrm{Re}\left\{\vec{H}_0(t) e^{i\omega t}\right\}$$

В обл. прозрачности:

$$\mathrm{div}\, \vec{S}^T = -\overline{\frac{\partial w}{\partial t}}^T.$$

Мы должны найти выражение для $\overline{w}^T$, исходя из формулы

$$\overline{\frac{\partial w}{\partial t}}^T = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}(t)\frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} + \vec{H}(t)\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t}\right)^T.$$

Здесь $\vec{S}^T = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left[\vec{E}_0, \vec{H}_0^*\right]$.

Найдем связь между $\vec{D}_0(t)e^{i\omega t}$ и $\vec{E}_0(t)e^{i\omega t}$:

$$\vec{D}_0(t)e^{i\omega t} = \int_0^\infty \underbrace{\tilde{\varepsilon}(\tau)}_{|\varepsilon|,\ \tau} \underbrace{\vec{E}_0(t-\tau)}_{\text{медленно меняющаяся ф-ия (по сравн. с } \varepsilon(\tau))} e^{i\omega(t-\tau)}\, d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \tilde{\varepsilon}(\tau)\left[\vec{E}_0(t) - \tau\frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t}\right] e^{-i\omega\tau}\, d\tau\; e^{i\omega t}$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty \tilde{\varepsilon}(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau}_{\varepsilon(\omega)}\; \vec{E}_0(t) e^{i\omega t} + \underbrace{\int_0^\infty (-\tau)\,\tilde{\varepsilon}(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau}_{-i\frac{d\varepsilon}{d\omega}}\; \frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t} e^{i\omega t} =$$

$$= \varepsilon(\omega)\vec{E}_0(t)e^{i\omega t} - i\frac{d\varepsilon}{d\omega}\frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t} e^{i\omega t};$$

Отсюда:

$$\vec{D}_0(t) = \varepsilon(\omega)\vec{E}_0(t) - i\frac{d\varepsilon}{d\omega}\frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t} \approx \varepsilon(\omega)\vec{E}_0(t); \quad \frac{\partial \vec{D}_0(t)}{\partial t} \approx \varepsilon(\omega)\frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t}$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(D_0(t)\,e^{i\omega t}\right)}_{i\omega D_0(t)e^{i\omega t}+\frac{\partial D_0(t)}{\partial t}e^{i\omega t}} = i\omega\,\varepsilon(\omega)\vec{E}_0(t)\,e^{i\omega t} + \varepsilon(\omega)\frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t}e^{i\omega t} - i\,\frac{d\varepsilon}{d\omega}\,\frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t}\,i\omega\,e^{i\omega t} + \ldots =$$

$$= i\omega\,\varepsilon(\omega)\vec{E}_0(t)e^{i\omega t} + \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\,\frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t}\,e^{i\omega t};$$

$$\frac{1}{4\pi}\overline{\vec{E}\,\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}^{T} = \frac{1}{16\pi}\overline{\left(\vec{E}_0(t)e^{i\omega t} + \vec{E}_0^{*}(t)e^{-i\omega t}\right)\left(i\omega\,\varepsilon(\omega)\vec{E}_0(t)\,e^{i\omega t} + \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t}e^{i\omega t} + (-i\omega)\varepsilon(\omega)\vec{E}_0^{*}(t)e^{-i\omega t} + \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\frac{\partial \vec{E}_0^{*}(t)}{\partial t}e^{-i\omega t}\right)}^{T} =$$

ε - считаем действит.

$$= \frac{1}{16\pi}\,\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\left(\vec{E}_0^{*}(t)\frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t} + \vec{E}_0(t)\frac{\partial \vec{E}_0^{*}(t)}{\partial t}\right) +$$

$$+ \underbrace{\cancel{\frac{1}{16\pi}\left(i\omega\,\varepsilon(\omega)\,|\vec{E}_0|^2 - i\omega\,\varepsilon(\omega)|\vec{E}_0|^2\right)}}_{=0} + \underbrace{\overline{\text{члены}\left(e^{i2\omega t}, e^{-i2\omega t}\right)}^{T}}_{=0} =$$

(дают нулевое значение при усреднении)

$$= \frac{1}{16\pi}\,\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\,\frac{\partial |\vec{E}_0(t)|^2}{\partial t};$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \mu = 1$$

$$\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} > 0$$

$$\overline{w}^{T} = \frac{1}{16\pi}\left\{\left(1+\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)|\vec{E}_0|^2 + |\vec{B}_0|^2\right\}$$

$$\frac{|\vec{E}_0|^2}{|\vec{B}_0|^2} = \frac{\mu}{\varepsilon} = \frac{1}{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}};$$

$$|B_0|^2 = \left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)|\vec{E}_0|^2, \quad \overline{w}^{T} = \frac{|\vec{E}_0|^2}{8\pi}$$

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial t}^{T} = \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{16\pi}\left\{\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}|\vec{E}_0(t)|^2 + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega}|\vec{H}_0(t)|^2\right\}.$$

$$\overline{w(t)}^{T} = \frac{1}{16\pi}\left\{\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}|\vec{E}_0(t)|^2 + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega}|\vec{H}_0(t)|^2\right\};$$ – выражение для средней плотности э.м. энергии

Следует заметить, что вне рассмотренной области частот (т.е. если диссипативн. процессы играют существ. роль) данная формула для энергии становится неприменимой.

В общем случае разделить член $\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$ на части, соответствующие q (тепловым потерям) и изменению энергии, невозможно в рамках макроскопич. электродинамики. (чтобы это сделать, приходится прибегать к микросоображениям).

Распространение импульсного сигнала в однородной изотропной среде с временной дисперсией.

Рассмотрим поле плоской однородной волны, распростр. по z:
$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} = \vec{E}_0 e^{i\omega(t - \frac{z}{v_\varphi})}$, $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c/\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$.

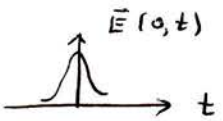
Передача сигналов с помощью монохроматической волны невозможна из-за её однородности в пространстве и во времени, поэтому сигнал всегда имеет некоторый спектр.

Поле такого сигнала представляется в виде

$$\vec{E}(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega)\, e^{i\omega\left[t - \frac{z}{v_\varphi(\omega)}\right]}\, d\omega \qquad (1) \qquad \left\{ \vec{E}_{физ}(z,t) = \mathrm{Re}\{\vec{E}(z,t)\} \right.$$

Пусть известна форма сигнала при $z = 0$:

$$\vec{E}(0,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \qquad (2)$$



Согласно (2), распределение $\vec{E}(0,t)$ разложено в спектр. Далее каждая Фурье-составляющая спектра будет распространяться со своей фазовой скоростью.

Рассмотрим частный случай, когда v_φ не зависит от ω (временная дисперсия отсутствует).

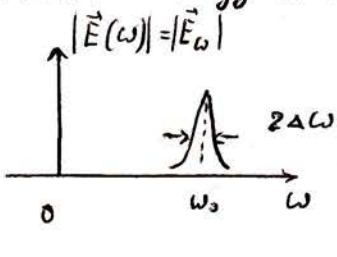
$$\vec{E}(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega)\, e^{i\omega(t - \frac{z}{v_\varphi})}\, d\omega = \vec{E}\left(0, t - \frac{z}{v_\varphi}\right).$$

Следовательно, сигнал будет распространяться как целое (без искажений), поскольку все его гармоники будут распространяться с одной и той же скоростью v_φ.

Рассмотрим случай диспергирующей среды.

Волновой пакет в диспергирующей среде

Волновой пакет – это квазимонохроматический волновой процесс, т.е. сигнал с узким частотным спектром (импульс). Вне обл. поглощения:



Выделяя некоторую среднюю частоту сигнала ω_0, можно записать

$$\underbrace{K(\omega)}_{\text{кон}(\omega)} = k(\omega_0) + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0)^2 + \ldots$$

Подставляя это представление в (1), получим

$$\vec{E}(z,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}(\omega)\,e^{i\omega t-i\omega_0 t+i\omega_0 t}\cdot e^{-iK(\omega_0)z-i\left(\frac{dK}{d\omega}\right)_0(\omega-\omega_0)z-i\frac{1}{2}\left(\frac{d^2K}{d\omega^2}\right)_0(\omega-\omega_0)^2 z}\,d\omega;$$

Мы пренебрегли членами порядка $\frac{1}{3!}\left(\frac{d^3K}{d\omega^3}\right)_0(\omega-\omega_0)^3 z$.

Это справедливо, если

$$\frac{1}{6}\left|\left(\frac{d^3K}{d\omega^3}\right)_0\underbrace{(\omega-\omega_0)}_{\Omega_{max}\sim\Delta\omega}{}^3 z\right|\ll\pi.$$

Введем обозначения: $\omega-\omega_0=\Omega$, $t-\left(\frac{dK}{d\omega}\right)_0 z=\tau$ $\qquad \tau=\tau(z,t)$

$\tau=t$ при $z=0$

$$\vec{E}(z,t)=e^{i(\omega_0 t-K(\omega_0)z)}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}_\Omega\,e^{i\Omega\tau-i\frac{1}{2}\left(\frac{d^2K}{d\omega^2}\right)_0 z\,\Omega^2}\,d\Omega}_{\vec{E}_0(z,\tau)\text{ — огибающая волнового пакета}}.$$

Для достаточно малых z $\left(\frac{1}{2}\left|\left(\frac{d^2K}{d\omega^2}\right)_0 z\,\Omega^2_{max}\right|\ll\pi\right)$ можно отбросить и член $\sim\Omega^2$:

$$\vec{E}(z,t)=e^{i(\omega_0 t-K(\omega_0)z)}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}_\Omega\,e^{i\Omega\tau}\,d\Omega}_{\vec{E}_0(z,t)}=e^{i(\omega_0 t-K(\omega_0)z)}\underbrace{\vec{E}_0(z,t)}_{\text{огибающая пакета}}. \qquad (3)$$

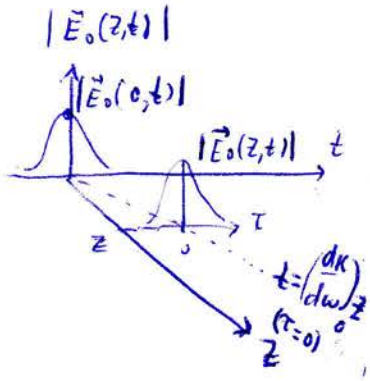
При $z=0$: $\tau=t$,

$$\vec{E}(0,t)=e^{i\omega_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}_\Omega\,e^{i\Omega t}\,d\Omega=e^{i\omega_0 t}\vec{E}_0(0,t),$$

$$\boxed{\vec{E}_0(0,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\vec{E}_\Omega}_{\text{спектр огибающей при } z=0}\,e^{i\Omega t}\,d\Omega} \qquad (4)$$

Из формулы (3), с учетом (4), имеем:

$$\vec{E}_0(z,t)=\vec{E}_0(0,\tau)=\vec{E}_0\left(0,t-\left(\frac{dK}{d\omega}\right)_0 z\right),$$



т.е.

$$\vec{E}(z,t)=e^{i(\omega_0 t-K(\omega_0)z)}\vec{E}_0\left(0,t-\left(\frac{dK}{d\omega}\right)_0 z\right).$$

Огибающая пакета $\vec{E}_0(z,t)=\vec{E}_0(0,\tau)$ постоянна при $\tau=const$.

Это означает, что сигнал распространяется как целое, не расплываясь, со скоростью $v_{гр}=\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0$.

Итак, для квазимонохроматического сигнала имеем:

$$v_{гр} = \frac{dz}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 \quad (5)$$

– скорость распространения огибающей.

$$\Uparrow$$

$$t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 z = \tau = const$$

– уравнение движения точки постоянной амплитуды.

Итак, $v_{гр} \neq v_{ф}$ (если $v_ф$ – функция ω).

Выражение (5) справедливо при следующих предположениях:

а) Сигнал – квазимонохроматический,

б) Среда – в обл. прозрачности,

в) $\frac{1}{2}\left|\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_0 z\,\Omega^2_{max}\right| \ll \pi$.

Можно показать, что $\vec{v}_{гр} = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}} \equiv \nabla_{\vec{k}}\,\omega(\vec{k})$ совпадает со скоростью переноса энергии:

$$\overline{\vec{S}}^{T} = \overline{w}^{T}\,\vec{v}_{гр}.$$

(Задача N7.20) [Гинзбург В.Б., Миллер М.А.]

- $v_{гр_z}$ может быть $\gtrless 0$;
- $v_{гр} < c$;
- В области линии поглощения $k'(\omega) = k_0 n'$ меняется столь быстро, что 1ое приближение теории дисперсии неприменимо

При достаточно больших значениях z условие (в) нарушается. Тогда сигнал (огибающ.) испытывает при распространении искажения. В этом случае, надо учесть в разложении $k(\omega)$ квадратичный член:

$$\underbrace{\vec{E}_0(z,t)}_{\text{огиб. пакета}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_\Omega\, e^{i(\Omega\tau - \frac{1}{2}k''_\omega z \Omega^2)}\, d\Omega, \quad (6)$$

$$k''_\omega = \left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_0$$

$$\vec{E}(z,t) = e^{i(\omega_0 t - k(\omega_0)z)}\,\vec{E}_0(z,\tau)$$

где введено краткое обозначение $k''_\omega = \left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_0$, и вместо $\vec{E}_0(z,t)$ использовано обозначение $\vec{E}_0(z,\tau)$, $\tau = t - z/v_{гр}$.

Прямым дифференцированием можно убедиться, что амплитуда (огибающая) волнового пакета удовлетворяет уравнению параболического типа:

$$\frac{\partial \vec{E}_0(z,\tau)}{\partial z} = D\,\frac{\partial^2 \vec{E}_0(z,\tau)}{\partial \tau^2}, \qquad D = \frac{i k''_\omega}{2}$$

Здесь $D = \frac{i}{2} k''_\omega = \frac{i}{2}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{v_{гр}}\right)$ – мнимый коэффициент диффузии.

Таким образом, огибающая волнового пакета описывается уравнением диффузии в системе координат z, τ. В результате при распространении пакета меняется амплитуда $|\vec{E}_0(z,\tau)|$ и фаза огибающей (из-за наличия i в D), т.е. меняется как амплитудная, так и фазовая модуляция импульса.

Решение диффузионного уравнения для огибающей импульса:

Дано: $\vec{E}_0(0,\tau) = \vec{E}_0(0,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_\Omega e^{i\Omega t} d\Omega$ $\leftarrow \tau = t$ при $z=0$

Решение: $$\vec{E}_0(z,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_0(0,\tau') e^{-\frac{(\tau'-\tau)^2}{4Dz}} d\tau' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{i 2\pi k''_\omega z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_0(0,\tau') e^{\frac{i(\tau'-\tau)^2}{2k''_\omega z}} d\tau'.$$

После того, как величина $\vec{E}_0(z,\tau)$ найдена, вычисляем

$$\vec{E}(z,t) = e^{i(\omega_0 t - k(\omega_0) z)} \vec{E}_0(z,\tau),$$

$$\underset{\text{физич.}}{\vec{E}(z,t)} = \mathrm{Re}\{\vec{E}(z,t)\}.$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda\tau'^2} d\tau' = \sqrt{\frac{\pi}{i\lambda}} \quad \text{(Fresnel)}}$$

$\mathrm{Im}\,\lambda \le 0$

Пример:

$$\vec{E}_0(0,t) = \vec{E}_0(0,\tau) = \vec{e}_0 e^{-\frac{t^2}{t_0^2}}$$

$$\vec{E}_0(z,\tau) = \vec{e}_0 \frac{1}{\sqrt{i 2\pi k''_\omega z}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau'^2}{t_0^2} + i\frac{(\tau'-\tau)^2}{2k''_\omega z}} d\tau' = \qquad (7)$$

$$\boxed{\frac{1}{t_0} \sim \Omega_{max}^2}$$

$$= \vec{e}_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{i 2 k''_\omega z}{t_0^2}}} \exp\left[-\frac{\left(t - \frac{z}{v_{гр}}\right)^2}{t_0^2\left(1 + \frac{i 2 k''_\omega z}{t_0^2}\right)}\right], \quad v_{гр} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0$$

Вычисление методом стационарной фазы интеграла при $kz \to \infty$:

$$\vec{E}_0(z,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_\Omega \, e^{i(\Omega\tau - \frac{1}{2}k''_\omega z \Omega^2)} d\Omega .$$

$$\boxed{k''_\omega z \Omega^2 = \underbrace{\frac{k''_\omega}{k}}_{\sim 1} \Omega^2 \underbrace{(kz)}_{\gg 1}}$$

$$\left[\left(\Omega\tau - \frac{1}{2}k''_\omega z \Omega^2\right)'_\Omega = 0 \right.$$

$$\tau - \frac{1}{\cancel{2}} k''_\omega z \cdot \cancel{2}\Omega = 0 \; ; \Rightarrow \Omega_s = \frac{\tau}{k''_\omega z} \text{ - стационарная точка}$$

$$\left[\left(\Omega\tau - \frac{1}{2}k''_\omega z \Omega^2\right)''_\Omega = - k''_\omega z \right.$$

Тогда

$$\vec{E}_0(z,\tau) = \vec{E}_\Omega\left(\Omega = \frac{\tau}{k''_\omega z}\right) e^{i(\Omega_s\tau - \frac{1}{2}k''_\omega z \Omega_s^2)} \times$$

$$\times \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{2}k''_\omega z(\Omega-\Omega_s)^2} d\Omega}_{\sqrt{\frac{\pi}{i\frac{k''_\omega z}{2}}}} =$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda\Omega^2} d\Omega = \sqrt{\frac{\pi}{i\lambda}}}$$

$$= \vec{E}_\Omega\left(\Omega = \frac{\tau}{k''_\omega z}\right) e^{i\frac{\tau^2}{2k''_\omega z}} \sqrt{\frac{2\pi}{ik''_\omega z}} .$$

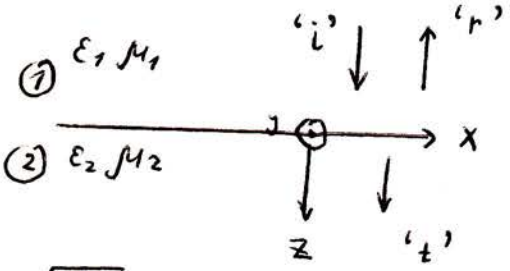
$$\vec{E}_0(z,\tau) = \sqrt{\frac{2\pi}{ik''_\omega z}} \, \vec{E}_\Omega\left(\Omega = \frac{\tau}{k''_\omega z}\right) e^{i\frac{\tau^2}{2k''_\omega z}} .$$

Волны в неоднородных изотропных средах

В случае неоднородных сред можно различать наличие резкой неоднородности (граница раздела) и плавной неоднородности, когда параметры среды меняются в пространстве медленно на масштабе длины волны.

Отражение и преломление плоских волн на плоской границе раздела двух однородных сред

Нормальное падение



'i'
$$\vec{E}^{(i)} = \vec{E}_0^{(i)} e^{-ik_1 z}$$
$$\vec{H}^{(i)} = \frac{1}{\eta_1}[\underbrace{\vec{z}_0}_{\vec{n}^{(i)}}, \vec{E}^{(i)}] = \frac{1}{\eta_1}[\vec{z}_0, \vec{E}_0^{(i)}] e^{-ik_1 z}$$

$$\eta_{1,2} = \sqrt{\frac{\mu_{1,2}}{\varepsilon_{1,2}}}, \quad k_{1,2} = k_0\sqrt{\varepsilon_{1,2}\mu_{1,2}}$$

'r'
$$\vec{E}^{(r)} = \underbrace{\Gamma \vec{E}_0^{(i)}}_{\vec{E}_0^{(r)}} e^{ik_1 z}$$
$$\vec{H}^{(r)} = -\frac{1}{\eta_1}[\vec{z}_0, \vec{E}^{(r)}] = -\frac{\Gamma}{\eta_1}[\vec{z}_0, \vec{E}_0^{(i)}] e^{ik_1 z} \qquad (\text{здесь } \vec{n} = -\vec{z}_0)$$

't'
$$\vec{E}^{(t)} = \underbrace{T \vec{E}_0^{(i)}}_{\vec{E}_0^{(t)}} e^{-ik_2 z}$$
$$\vec{H}^{(t)} = \frac{1}{\eta_2}[\vec{z}_0, \vec{E}^{(t)}] = \frac{T}{\eta_2}[\vec{z}_0, \vec{E}_0^{(i)}] e^{-ik_2 z}$$

Граничные условия на $z=0$:

$$\begin{cases} \vec{E}_\tau^{(i)} + \vec{E}_\tau^{(r)} = \vec{E}_\tau^{(t)} \\ \vec{H}_\tau^{(i)} + \vec{H}_\tau^{(r)} = \vec{H}_\tau^{(t)} \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 + \Gamma = T \\ \frac{1}{\eta_1} - \frac{\Gamma}{\eta_1} = \frac{T}{\eta_2} \end{cases} \Rightarrow \quad \Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}, \quad T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

Частные случаи:

$\Gamma = |\Gamma| e^{i\varphi}$

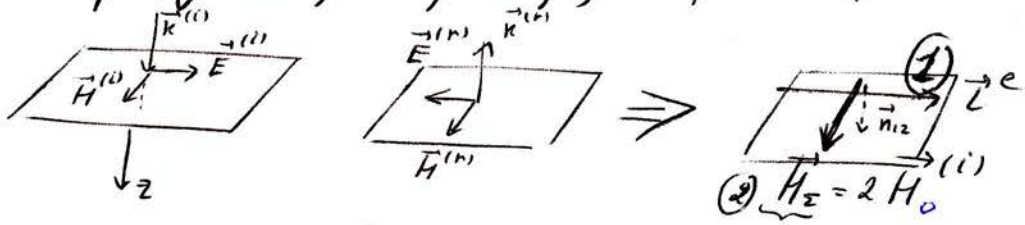
а) $\Gamma = 0$ (режим согласования)

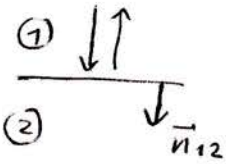
$\eta_2 = \eta_1 \Rightarrow \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$

→

б) $\eta_2 = 0$ (идеальный проводник, например) – режим „КЗ"

$\Gamma = -1$





$$[\vec{n}_{12}, \underbrace{\vec{H}_2}_{0} - \underbrace{\vec{H}_1}_{\vec{H}_\tau}] = \frac{4\pi}{c}\vec{i}^{e}$$

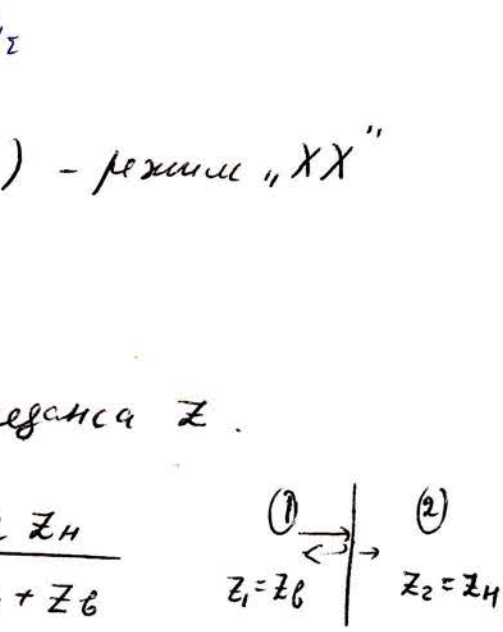
в) $\eta_2 = \infty$ (идеальный магнетик с $\mu_2 \to \infty$) – режим „ХХ"
или $\varepsilon_2 \to 0$

$\Gamma = 1$

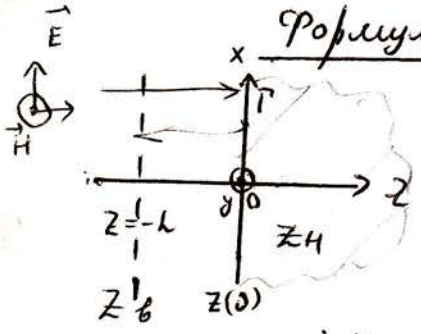
В случае квазистацион. цепей вводят понятие импеданса Z.

Введем $Z_{1,2} = \frac{4\pi}{c}\eta_{1,2}$.

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{Z_H - Z_b}{Z_H + Z_b}, \quad T = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{2Z_H}{Z_H + Z_b}$$



Формула пересчета импеданса. Формула пересчета коэф. отраж.



Введем поверхностный импеданс $Z(-L) = \frac{\left(\frac{4\pi}{c}\right)E_\tau}{H_\tau}\Big|_{z=-L}$

$\vec{E}_\tau = \eta_s[\vec{H}, \vec{n}]$, $\vec{n} = \vec{z}_0$

нормаль к поверхн. (вектор)

$$Z(-L) = \frac{\frac{4\pi}{c}E_x}{\underbrace{H_y}_{\eta(-L)}}\Big|_{z=-L} \text{ (тоже это } \eta(-L)\text{)}.$$

$$\underbrace{Z(-L)}_{=\frac{4\pi}{c}\eta(-L)} = \frac{E_0 e^{-ikz} + \Gamma E_0 e^{ikz}}{\frac{E_0}{Z_b}e^{-ikz} - \frac{\Gamma E_0}{Z_b}e^{ikz}}\Bigg|_{z=-L} = Z_b\frac{Z_H\cos(kL) + iZ_b\sin(kL)}{Z_b\cos(kL) + iZ_H\sin(kL)}$$

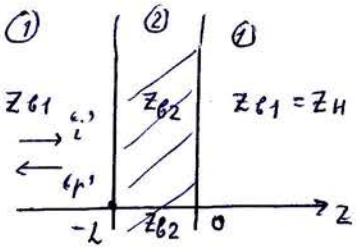
$\boxed{Z_b = \frac{4\pi}{c}\eta}$ $\quad \Gamma = \frac{Z_H - Z_b}{Z_H + Z_b}$ $\quad \boxed{Z_H = Z(0)}$

$$\Gamma(-L) = \frac{E_x^{(r)}}{E_x^{(i)}} = \frac{\Gamma E_0^{(i)} e^{ikz}}{E_0^{(i)} e^{-ikz}}\Bigg|_{z=-L} = \underbrace{\Gamma}_{\Gamma(0)} e^{-i2kL};$$

– формула пересчета коэффиц. отражения

$$\Gamma(-L) = \frac{Z(-L) - Z_b}{Z(-L) + Z_b}$$

Пример: Использование формулы пересчета импеданса для отыскания коэфф. отражения от плоскопаралл. пластинки.



$$\Gamma(-L) = \frac{Z(-L) - Z_{в1}}{Z(-L) + Z_{в1}},$$

$$Z(-L) = Z_{в2}\frac{Z_{в1}\cos(k_2 L) + i Z_{в2}\sin(k_2 L)}{Z_{в2}\cos(k_2 L) + i Z_{в1}\sin(k_2 L)}, \quad k_2 = k_0\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$$

$\Gamma = 0$ при $Z(-L) = Z_{в1}$: $Z_{в1}\left[Z_{в2}\cos(k_2 L) + i Z_{в1}\sin(k_2 L)\right] =$

$= Z_{в2}\left[Z_{в1}\cos(k_2 L) + i Z_{в2}\sin(k_2 L)\right]$;

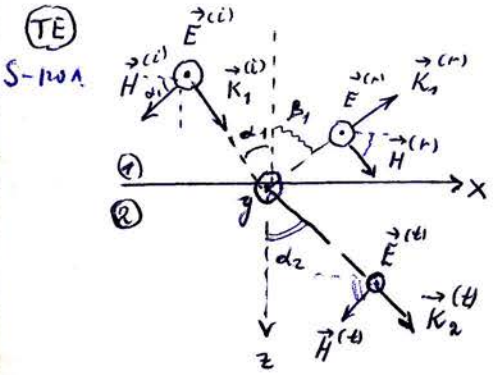
$(Z_{в1}^2 - Z_{в2}^2)\sin(k_2 L) = 0 \Rightarrow$ [$Z_{в1} = Z_{в2}$, L - любые (однородная среда); либо

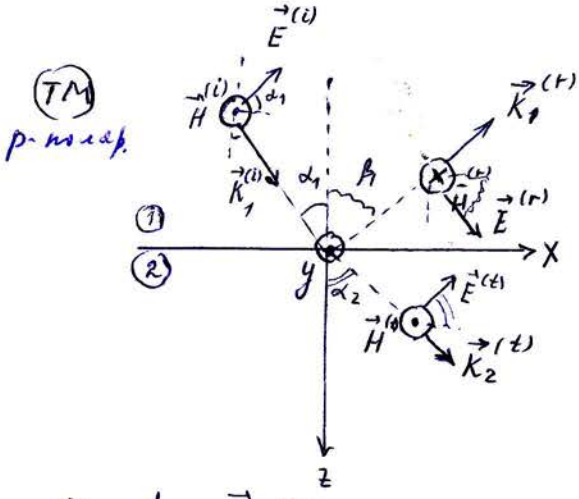
$Z_{в1} \neq Z_{в2}$, $k_2 L = \pi n$, $n = 1, 2, \ldots$,

т.е. $L = \frac{\lambda_2}{2} n$ $(\lambda_2 = 2\pi/k_2)$.

При этом условии $Z(-L) = Z_{в1}$

Отражение и преломление плоских волн при наклонном падении на плоскую границу раздела двух сред (формулы Френеля).





Падающая волна;

$\vec{E} = \eta[\vec{H}, \vec{n}] = \eta\left[\vec{H}, \frac{\vec{k}}{k}\right]$, $\vec{H} = \frac{1}{\eta}\left[\frac{\vec{k}}{k}, \vec{E}\right]$, η - импеданс плоской волны

$\vec{E}_\perp = \eta_\perp[\vec{H}, \vec{z}_0]$, $\vec{H}_\perp = \frac{1}{\eta_\perp}[\vec{z}_0, \vec{E}]$, $\eta_\perp$ - поперечный (по отн. к z) характеристич. импеданс

$\eta_\perp^{(TE)} = \frac{E_y}{(-H_x)} = \frac{\eta}{\cos\alpha}$, $\boxed{\text{TE: } \eta_{\perp 1}^{(i)} = \frac{\eta_1}{\cos\alpha_1}, \quad \text{TM: } \eta_{\perp 1}^{(i)} = \eta_1\cos\alpha_1}$

$\eta_\perp^{(TM)} = \frac{E_x}{H_y} = \eta\cos\alpha$, $\alpha = (\vec{k}, \vec{z}_0)$

$\eta_{\perp 1}^{(i)} = \eta_{\perp 1}(\alpha = \alpha_1)$

$\eta_{\perp 1}^{(r)} = \begin{cases} \text{TM: } \eta_1\cos(\pi - \beta_1) \\ \text{TE: } \frac{\eta_1}{\cos(\pi - \beta_1)} \end{cases} = -\eta_{\perp 1}(\cos\alpha_1 \to \cos\beta_1)$

$\boxed{\text{TE: } \eta_{\perp 1}^{(r)} = \frac{\eta_1}{\cos(\pi-\beta_1)} = -\eta_1/\cos\beta_1, \quad \text{TM: } \eta_{\perp 1}^{(r)} = \eta_1\cos(\pi - \beta_1) = -\eta_1\cos\beta_1}$

$\boxed{\text{TE: } \eta_{\perp 2}^{(t)} = \eta_2/\cos\alpha_2, \quad \text{TM: } \eta_{\perp 2}^{(t)} = \eta_2\cos\alpha_2}$

Случай TE: $E_y = E_\perp$, $H_x = H_\perp$ ($E_\perp = E_\tau$, $H_\perp = H_\tau$)

Случай TM: $H_y = H_\perp$, $E_x = E_\perp$ ($H_\perp = H_\tau$, $E_\perp = E_\tau$)

$\vec{E}_\perp^{(i)} = \vec{E}_{0\perp}^{(i)} e^{-i\vec{k}_1^{(i)}\vec{r}}$,

$\vec{E}_\perp^{(r)} = \Gamma_\perp \overbrace{\vec{E}_{0\perp}^{(i)}}^{\vec{E}_{0\perp}^{(r)}} e^{-i\vec{k}_1^{(r)}\vec{r}}$

$\vec{E}_\perp^{(t)} = T_\perp \overbrace{\vec{E}_{0\perp}^{(i)}}^{\vec{E}_{0\perp}^{(t)}} e^{-i\vec{k}_2^{(t)}\vec{r}}$

коэффициенты $\Gamma_\perp$, $T_\perp$ определены соотв-но как отношения тангенциальных компонент комплексн. электр. полей отраженной и преломленной волн на границе к той же компоненте падающей волны.

Воспользуемся граничными условиями при $z=0$

$$\vec{E}_\tau^{(i)} + \vec{E}_\tau^{(r)} = \vec{E}_\tau^{(t)}\Big|_{z=0},$$

$$\vec{H}_\tau^{(i)} + \vec{H}_\tau^{(r)} = \vec{H}_\tau^{(t)}\Big|_{z=0}.$$

$$\vec{E}_{01}^{(i)} e^{-i\vec{k}_1^{(i)}\vec{r}} + \Gamma_\perp \vec{E}_{01}^{(i)} e^{-i\vec{k}_1^{(r)}\vec{r}} = T_\perp \vec{E}_{01}^{(i)} e^{-i\vec{k}_2^{(t)}\vec{r}}\Big|_{z=0},$$

$$\frac{1}{\eta_{\perp 1}^{(i)}}[\vec{z}_0,\vec{E}_{01}^{(i)}]e^{-i\vec{k}_1^{(i)}\vec{r}} + \frac{\Gamma_\perp}{\eta_{\perp 1}^{(r)}}[\vec{z}_0,\vec{E}_{01}^{(i)}]e^{-i\vec{k}_1^{(r)}\vec{r}} = \frac{T_\perp}{\eta_{\perp 2}^{(t)}}[\vec{z}_0,\vec{E}_{01}^{(i)}]e^{-i\vec{k}_2^{(t)}\vec{r}}\Big|_{z=0}.$$

$\eta_{\perp 1}^{(i)} \equiv \eta_{\perp 1}$; $\eta_{\perp 1}^{(r)} = \eta_{\perp 1}(\alpha_1 \to \beta_1)$ $\qquad$ $\eta_{\perp 2}^{(t)} \equiv \eta_{\perp 2}$

Для того, чтобы граничные условия выполнялись при всех x, необходимо, чтобы зависимость от x в отраженной и преломленной волнах была такой же, как в падающей, т.е.

$$\vec{k}_1^{(i)}\vec{r} = \vec{k}_1^{(r)}\vec{r} = \vec{k}_2^{(t)}\vec{r}\Big|_{z=0}.$$

Отсюда $k_{1x}^{(i)} x = k_{1x}^{(r)} x = k_{2x}^{(t)} x \Rightarrow k_1 \sin\alpha_1 = k_1 \sin\beta_1 = k_2 \sin\alpha_2$

Получаем:

1) $\alpha_1 = \beta_1$ – угол падения равен углу отражения

2) $\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\sin\alpha_1 = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\sin\alpha_2$

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}}$$

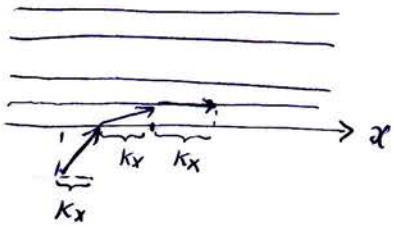
} закон Снеллиуса (Snel's law)

$$\alpha_1 = \beta_1; \Rightarrow \eta_{\perp 1}^{(i)} \equiv \eta_{\perp 1} = \begin{cases} \dfrac{\eta_1}{\cos\alpha_1} & (TE) \\ \eta_1\cos\alpha_1 & (TM) \end{cases}$$

$$\eta_{\perp 1}^{(r)} = -\eta_{\perp 1} = \begin{cases} -\dfrac{\eta_1}{\cos\alpha_1} & (TE) \\ -\eta_1\cos\alpha_1 & (TM) \end{cases}$$

$$\eta_{\perp 2}^{(t)} \equiv \eta_{\perp 2} = \begin{cases} \dfrac{\eta_2}{\cos\alpha_2} & (TE) \\ \eta_2\cos\alpha_2 & (TM) \end{cases}$$

Пример: <многослойная структура>



Итак, из граничных условий имеем

$$\begin{cases} 1 + \Gamma_\perp = T_\perp \\ \dfrac{1}{\eta_{\perp 1}} - \dfrac{\Gamma_\perp}{\eta_{\perp 1}} = \dfrac{T_\perp}{\eta_{\perp 2}} \end{cases} \Rightarrow \Gamma_\perp = \frac{\eta_{\perp 2} - \eta_{\perp 1}}{\eta_{\perp 2} + \eta_{\perp 1}}, \quad T_\perp = \frac{2\eta_{\perp 2}}{\eta_{\perp 2} + \eta_{\perp 1}}.$$

формулы Френеля:

Для TE-поляризации:

$$\Gamma_\perp = \frac{E_y^{(r)}}{E_y^{(i)}}\Big|_{z=0} \overset{= \frac{E^{(r)}}{E^{(i)}}\Big|_{z=0}}{=} \Gamma = \frac{\frac{\eta_2}{\cos\alpha_2} - \frac{\eta_1}{\cos\alpha_1}}{\frac{\eta_2}{\cos\alpha_2} + \frac{\eta_1}{\cos\alpha_1}};$$

$$T_\perp = \frac{E_y^{(t)}}{E_y^{(i)}}\Big|_{z=0} \overset{= \frac{E^{(t)}}{E^{(i)}}\Big|_{z=0}}{=} T = \frac{2\frac{\eta_2}{\cos\alpha_2}}{\frac{\eta_2}{\cos\alpha_2} + \frac{\eta_1}{\cos\alpha_1}};$$

Для TM-поляризации:

$$\Gamma_\perp = \frac{E_x^{(r)}}{E_x^{(i)}}\Big|_{z=0} = \frac{E^{(r)}\cos\beta_1}{E^{(i)}\cos\alpha_1}\Big|_{z=0} \underset{\alpha_1=\beta_1}{=} \frac{E^{(r)}}{E^{(i)}}\Big|_{z=0} = \Gamma = \frac{\eta_2\cos\alpha_2 - \eta_1\cos\alpha_1}{\eta_2\cos\alpha_2 + \eta_1\cos\alpha_1};$$

$$T_\perp = \frac{E_x^{(t)}}{E_x^{(i)}}\Big|_{z=0} = \frac{E^{(t)}\cos\alpha_2}{E^{(i)}\cos\alpha_1}\Big|_{z=0} = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}\cdot\underbrace{\frac{E^{(t)}}{E^{(i)}}\Big|_{z=0}}_{T} = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}T = \frac{2\eta_2\cos\alpha_2}{\eta_2\cos\alpha_2 + \eta_1\cos\alpha_1}$$

Перейдем к рассмотрению частных случаев.

Угол Брюстера (Brewster)

Для поляризации TM (только) возможна ситуация, когда $\Gamma_\perp = 0$, т.е. отраженной волны нет

Это имеет место, если $\eta_2\cos\alpha_2 = \eta_1\cos\alpha_1$

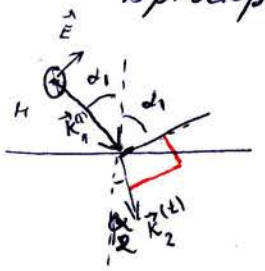
$$1 = \frac{\eta_2\cos\alpha_2}{\eta_1\cos\alpha_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_2}{\varepsilon_2\mu_1}}\,\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha_2}}{\cos\alpha_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_2}{\varepsilon_2\mu_1}}\,\frac{1}{\cos\alpha_1}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2}\sin^2\alpha_1}$$

Отсюда после ряда преобразований получим

$\frac{1}{\cos^2\alpha_1} = 1 + tg^2\alpha_1$

$$tg\,\alpha_{1,бр.} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1} - 1}} = \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1} - 1}}$$ — тангенс угла Брюстера

Допустим, что $\mu_2 = \mu_1$. Тогда $tg\,\alpha_{1,бр} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$



$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2},$$

Док-во:

$$\sqrt{\varepsilon_1}\sin\alpha_1 = \sqrt{\varepsilon_2}\sin\alpha_2;$$

$$\sin\alpha_1 = \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}_{tg\,\alpha_1}\sin\alpha_2; \Rightarrow \cos\alpha_1 = \sin\alpha_2$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2$$

Случай TE-поляризации:

Здесь $\Gamma_\perp = 0$, если $\dfrac{\eta_2}{\cos\alpha_2} = \dfrac{\eta_1}{\cos\alpha_1}$

$$1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\,\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2}}\,\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha_2}}{\cos\alpha_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2}}\,\frac{\sqrt{1-\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2}\sin^2\alpha_1}}{\cos\alpha_1}$$

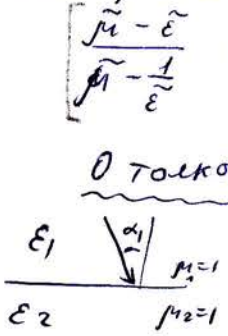
$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \sqrt{\frac{\frac{\mu_2}{\mu_1}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\mu_2}{\mu_1}-1}} = \sqrt{\frac{\tilde\mu(\tilde\mu-\tilde\varepsilon)}{\tilde\varepsilon\tilde\mu-1}}, \quad \tilde\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1},\ \tilde\varepsilon = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \qquad (*)$$

При $\tilde\mu = 1$: $\operatorname{tg}\alpha_1 = \sqrt{\dfrac{1-\tilde\varepsilon}{\tilde\varepsilon-1}}$ – не выполняется при действит. α

Для реальных сред соотношение (*) также не выполняется

$\left[\dfrac{\tilde\mu-\tilde\varepsilon}{\tilde\mu-\frac{1}{\tilde\varepsilon}}\right.$; если $\tilde\mu > \tilde\varepsilon$, то должно быть $\tilde\mu > \frac{1}{\tilde\varepsilon}$, т.е. $\frac{\tilde\mu}{\tilde\varepsilon} > 1$

О толковании эффекта Брюстера:

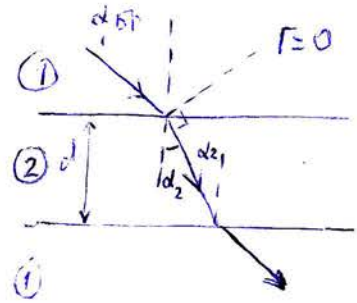


$\operatorname{tg}\alpha_{1,бр} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$

Толкование, связанное с диполями в среде 2, некорректно

Пусть $\varepsilon_2 = 1$ (вакуум) – здесь диполей в среде ② нет, а эффект Брюстера имеет место.

Эффект Брюстера связан не с элементарными диполями, с поляризационными токами на границе раздела сред, которые сфазированы при $\alpha_1 = \alpha_{1,бр}$ таким образом, что отраженной волны нет.



Волна проходит без отражения

(имеет место обратимость)

Обратимость реализуется лишь для взаимн. сред.

$\alpha_{1бр} + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{tg}\alpha_{1бр} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right)_{бр} = \operatorname{ctg}\alpha_{1бр} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

$\underbrace{\alpha_2 = \alpha_{2бр}}_{\text{для падения из ② в ①}}$

Полное внутреннее отражение.

Возникновение неоднородных волн при полном внутр. отраж.

Пусть $\varepsilon_1\mu_1 > \varepsilon_2\mu_2$

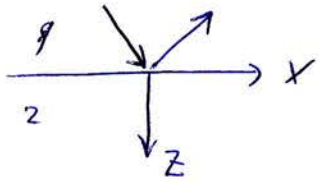
$$\sin\alpha_2 = \sin\alpha_1\sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2}} \qquad \alpha_1 = \alpha_1^*: \quad \sin\alpha_1^*\sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2}} = \underbrace{1}_{\sin\alpha_2} \quad \left(\alpha_2 = \frac{\pi}{2}\right)$$

При $\alpha_1 > \alpha_1^*$ получаем, что $\sin\alpha_2 > 1$.

В этом случае $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + i\tau$; $\quad \sin\alpha_2 = \dfrac{e^{i\alpha_2} - e^{-i\alpha_2}}{2i} = \sin\left(\frac{\pi}{2}+i\tau\right) = \operatorname{ch}\tau > 1.$

$$\cos\alpha_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + i\tau\right) = -i\,\mathrm{sh}\,\tau.$$

TE: $$E_y^{(t)} = E_0\, e^{-ik_2\cos\alpha_2 z - ik_2\sin\alpha_2 x} = E_0\, e^{-k_2(\mathrm{sh}\,\tau)z - ik_2(\mathrm{ch}\,\tau)x}$$

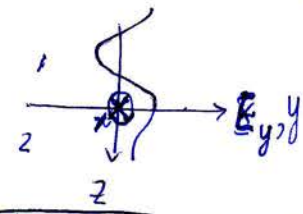


$\cos\alpha_2$ – чисто мнимая величина

$$\Gamma_\perp^{TE} = \frac{\dfrac{\eta_2}{\cos\alpha_2} - \dfrac{\eta_1}{\cos\alpha_1}}{\dfrac{\eta_2}{\cos\alpha_2} + \dfrac{\eta_1}{\cos\alpha_1}}, \qquad \Gamma_\perp^{TM} = \frac{\eta_2\cos\alpha_2 - \eta_1\cos\alpha_1}{\eta_2\cos\alpha_2 + \eta_1\cos\alpha_1}$$

$|\Gamma| = 1$ – полное внутреннее отражение

Во второй среде возникает поле, спадающее по экспоненте, в 1-й среде – волна, стоячая по z.



$$v_{ф}^{(x)} = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{k_2\,\mathrm{ch}\,\tau} = \frac{v_{фаз\,(в\ среде\ 2)}}{\mathrm{ch}\,\tau} < \underbrace{v_{фаз\,(в\ 2)}}_{v_2}$$

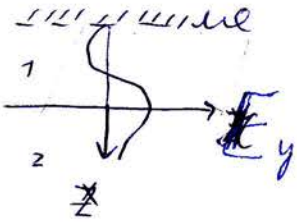
$k_{x2} = k_2\sin\alpha_2$

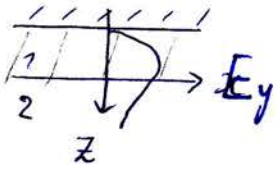
$k_x < k_1 \to v_{ф}^{(x)} > \frac{\omega}{k_1} = \underbrace{v_{ф1}}_{v_1}$

$\mathrm{ch}\,\tau > 1$

$$\boxed{v_1 < v_{ф}^{(x)} < v_2 \quad \varepsilon_1\mu_1 > \varepsilon_2\mu_2}$$

(волна – медленная, по отношению к среде 2)



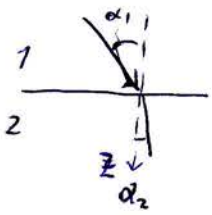


– медленная поверхностная неодн. плоская волна, бегущая вдоль диэлектр. пластинки 1

$\varepsilon_1\mu_1 > \varepsilon_2\mu_2$

Волоконная оптика:

Отражение от хорошо проводящей поверхности и условие Леонтовича



$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2}}.$$

Если $|\varepsilon_2\mu_2| \gg |\varepsilon_1\mu_1|$, то $|\sin\alpha_2| \ll |\sin\alpha_1| < 1$; $|\cos\alpha_2| \approx 1$

В этом случае волна в среде 2 идет почти по нормали и выполняется условие

$$\vec{E}_\perp = \underbrace{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}}_{\eta_{\perp 2}}\,[\vec{H}_\perp, \vec{z}_0]_{z=0} \quad \text{на границе раздела.}$$

$\vec{z}_0 = -\vec{n}$

Стр-ра поля в среде 2 фиксирована при разных α_1

$\eta_{\perp 2} \approx \eta_2$ (т.к. $\cos\alpha_2 \to 1$)

Такое граничное условие имеет место, если 2 – хороший проводник, и $|\varepsilon_{k2}|\mu_2 \gg \varepsilon_1\mu_1$, $\varepsilon_{k2} = -i\frac{4\pi\sigma_2}{\omega}$.

Электромагнитные волны в плоско-слоистых плавно-неоднородных средах

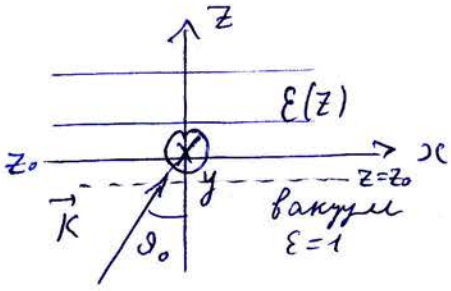
Рассмотрим плоскослоистую среду, в которой $\varepsilon = \varepsilon(z)$. Будем считать, что $\mu = const$ (далее, для простоты, положим, что $\mu = 1$). Считаем, что среда – без потерь.

$$\begin{cases} rot\,\vec{E} = -ik_0 \underset{1}{\mu}\,\vec{H} \\ rot\,\vec{H} = ik_0\,\varepsilon\,\vec{E} \end{cases}$$

$$\Delta\vec{E} - \nabla div\,\vec{E} + k_0^2\,\varepsilon\,\vec{E} = 0\,, \quad div(\varepsilon\vec{E}) = 0 \quad (div\,\vec{E} \neq 0, \text{ т.к. } \varepsilon(z))$$

$$\Delta\vec{H} + \left[\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}, rot\,\vec{H}\right] + k_0^2\,\varepsilon\,\vec{H} = 0.$$ (учтено, что $div\,\vec{H} = 0$

$$rot(\varepsilon\vec{E}) = \varepsilon\,\underbrace{rot\,\vec{E}}_{-ik_0\vec{H}} + [\nabla\varepsilon, \underbrace{\vec{E}}_{\frac{rot\,\vec{H}}{ik_0\varepsilon}}])$$



$k_0 \sin\vartheta_0 = k_x$

Ищем поле в виде:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(z)\,e^{-ik_x x}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}(z)\,e^{-ik_x x}$$

Две поляризации:

① $\vec{E} \perp$ плоскости падения (TE, или s-поляризация): $\vec{E}(\vec{r}) = E_y(\vec{r})\,\vec{y}_0$; $E_y(\vec{r}) = E(z)\,e^{-ik_x x}$; тогда поле $\vec{H}$ имеет H_x, H_z компоненты.

② $\vec{H} \perp$ плоскости падения (TM, или p-поляризация): $\vec{H}(\vec{r}) = H_y(\vec{r})\,\vec{y}_0$; $H_y(\vec{r}) = H(z)\,e^{-ik_x x}$; тогда поле $\vec{E}$ имеет E_x, E_z компоненты.

Случай ①

Поле удобно описывать через компоненту E.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -k_x^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,; \qquad \frac{\partial E(z)}{\partial z} \to \frac{dE(z)}{dz}.$$

$$\frac{d^2E(z)}{dz^2} + \underbrace{\left[k_0^2\,\varepsilon(z) - k_x^2\right]}_{k_z^2(z)} E(z) = 0, \qquad k_z^2(z) = k_0^2\left[\varepsilon(z) - \underbrace{\frac{k_x^2}{k_0^2}}_{\sin^2\vartheta_0}\right].$$

Здесь учтено, что $div(\underbrace{E_y(\vec{r})\,\vec{y}_0}_{\vec{E}(\vec{r})}) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\underbrace{E(z)\,e^{-ik_x x}}_{E_y(\vec{r})}\right) = 0.$

$$\vec{H} = \frac{i}{k_0}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = \frac{i}{k_0}\left\{\vec{x}_0\underbrace{\left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(E(z)e^{-ik_x x}\right)\right]}_{-\frac{dE(z)}{dz}e^{-ik_x x}} + \vec{z}_0\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(E(z)e^{-ik_x x}\right)}_{=\,-ik_x E(z)e^{-ik_x x}}\right\}.$$

Случай 2

$$\frac{d^2H(z)}{dz^2} - \frac{1}{\varepsilon(z)}\frac{d\varepsilon(z)}{dz}\frac{dH(z)}{dz} + \underbrace{\left[k_0^2\varepsilon(z) - k_x^2\right]}_{k_z^2(z)}H(z) = 0.$$

При выводе этой формулы учтено, что

$$\left[\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}, \mathrm{rot}\,\vec{H}\right] = \left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dz}\vec{z}_0, \vec{x}_0\left(-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \vec{z}_0\frac{\partial H_y}{\partial x}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dz}\frac{dH(z)}{dz}e^{-ik_x x}\underbrace{[\vec{z}_0, \vec{x}_0]}_{\vec{y}_0}.$$

Поле $\vec{E}$ записывается здесь так:

$$\vec{E} = -\frac{i}{k_0\varepsilon}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = -\frac{i}{k_0\varepsilon}\left\{\vec{x}_0\underbrace{\left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(H(z)e^{-ik_x x}\right)\right]}_{-\frac{dH(z)}{dz}e^{-ik_x x}} + \vec{z}_0\underbrace{(-ik_x)H(z)e^{-ik_x x}}_{\frac{\partial}{\partial x}\left(H(z)e^{-ik_x x}\right)}\right\}.$$

Далее будем рассматривать только случай ①

Если $\varepsilon(z)$ – достаточно простая функция, то решение для $E(z)$ можно получить через спецфункции.

При произвольной зависимости $\varepsilon(z)$ аналитическое решение отсутствует.

Введем $\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z(z)} \ll L_z$, где L_z – характерный масштаб неоднородности среды в z-направлении. Среда с $\lambda_z \ll L_z$ называется плавнонеоднородной.

Математическая формулировка условия плавнонеоднородной среды может быть записана так:

$$\underbrace{\left|\frac{dk_z(z)}{dz}\cdot\frac{1}{k_z}\right|}_{\frac{1}{L_z}} \ll \underbrace{|k_z|}_{\frac{2\pi}{\lambda_z}}, \quad \text{или} \quad \left|\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{k_z(z)}\right)\right| \ll 1.$$

Метод Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна (ВКБ) — 1

Уравнение: $\frac{d^2E(z)}{dz^2} + k_0^2\left[\varepsilon(z) - \sin^2\vartheta_0\right]E(z) = 0.$ (Wentzel, Kramers, Brillouin, Jeffreys)

Ищем $E(z)$ в виде $E(z) = A(z)e^{-ik_0\psi(z)}$.

В случае однородной среды $A(z)$ — константа,
$\psi(z) = \frac{k_z}{k_0}z$ (т.е. $\psi'(z) = \frac{k_z}{k_0}$ — константа).

Теперь $A(z)$, $\psi'(z)$ — медленно меняющиеся функции (с масштабом изменения L_z): $L_z \gg 2\pi/k_z$, т.е. $k_zL_z \gg 1$

$$E'(z) = A'(z)e^{-ik_0\psi(z)} - ik_0\psi'(z)A(z)e^{-ik_0\psi(z)};$$

$$E''(z) = A''(z)e^{-ik_0\psi(z)} - 2ik_0\psi'(z)A'(z)e^{-ik_0\psi(z)} -$$
$$-ik_0A(z)\psi''(z)e^{-ik_0\psi(z)} - k_0^2A(z)(\psi'(z))^2e^{-ik_0\psi(z)}.$$

Подставляем этот результат в исходное уравнение:

$$A'' - \left[2ik_0\psi'A' + ik_0\psi''A\right] + k_0^2\left[\underbrace{\varepsilon(z) - \sin^2\vartheta_0}_{\frac{k_z^2(z)}{k_0^2}} - (\psi')^2\right]A = 0 \quad \Big|\frac{1}{k_z^2}.$$

$k_x = k_0\sin\vartheta_0$

$k_0^2(\varepsilon - \sin^2\vartheta_0) = k_z^2$

$\frac{k_0^2\varepsilon(z) - k_x^2}{k_0^2}$

A, ψ' — члены нулевого порядка малости (почти константы);

$$\psi'' \sim \frac{\psi'}{L_z}, \quad A' \sim \frac{A}{L_z}$$

а) $\left|\frac{2ik_0\psi'A'}{k_z^2}\right| \sim \frac{k_0|\psi'|\cdot|A|}{k_z^2L_z} \sim \frac{|A|}{|k_zL_z|}$; $\left|\frac{ik_0\psi''A}{k_z^2}\right| \sim \frac{k_0|\psi'|\cdot|A|}{k_z^2L_z} \sim \frac{|A|}{|k_zL_z|}$; $|\psi'| \sim \left|\frac{k_z(z)}{k_0}\right|$

члены первого порядка малости ($\sim$); $k_0L_z \gg 1$ ($L_z \gg \lambda_0$)

б) $\frac{|A''|}{k_z^2} \sim \frac{|A|}{(k_zL_z)^2}$ — член второго порядка малости ($\approx$)

В нулевом приближении оставим мы члены нулевого порядка малости:

$$\left[\varepsilon(z) - \sin^2\vartheta_0 - (\psi')^2\right] A = 0$$

Пусть $A \neq 0$, тогда

$$(\psi')^2 = \varepsilon(z) - \sin^2\vartheta_0 = \frac{k_z^2(z)}{k_0^2}; \quad \psi'(z) = \pm\frac{k_z(z)}{k_0} = \frac{\pm\sqrt{k_z^2 - k_x^2}}{k_0}$$

$$\psi' = \pm\sqrt{\varepsilon(z) - \sin^2\vartheta_0}$$

$$\psi(z) - \underbrace{\psi(z_0)}_{=0} = \pm\int_{z_0}^{z}\sqrt{\varepsilon(z') - \sin^2\vartheta_0}\, dz'.$$

(для простоты всегда так можно считать).

Запишем члены второго порядка малости:

$$2ik_0\psi' A' + ik_0\psi'' A = 0, \text{ где } A \neq 0 \quad \Big| \cdot A$$

$$\frac{d}{dz}(\psi' A^2) = 0.$$

$$\psi' A^2 = \text{const}, \text{ т.е. } A = \frac{C}{\sqrt{\psi'}} = \frac{C}{\sqrt[4]{\varepsilon(z) - \sin^2\vartheta_0}},$$

C – произвольная константа.

Общее решение будет иметь вид:

$$E(z) = \frac{C_1}{\sqrt[4]{\varepsilon(z) - \sin^2\vartheta_0}}\, e^{-ik_0\int_{z_0}^{z}\sqrt{\varepsilon(z') - \sin^2\vartheta_0}\, dz'} + \frac{C_2}{\sqrt[4]{\varepsilon(z) - \sin^2\vartheta_0}}\, e^{ik_0\int_{z_0}^{z}\sqrt{\varepsilon(z') - \sin^2\vartheta_0}\, dz'}.$$

Общее решение – суперпозиция двух волн, независимо распространяющихся в $+z$ и $(-z)$ – направлениях.

Решение нарушается при $\sqrt{\varepsilon(z) - \sin^2\vartheta_0} \to 0$;

$\sqrt{\varepsilon(z) - \sin^2\vartheta_0} = \frac{k_z}{k_0}$. Если $k_z \to 0$, то $\lambda_z \to \infty$ и нарушается условие $\lambda_z \ll L_z$.

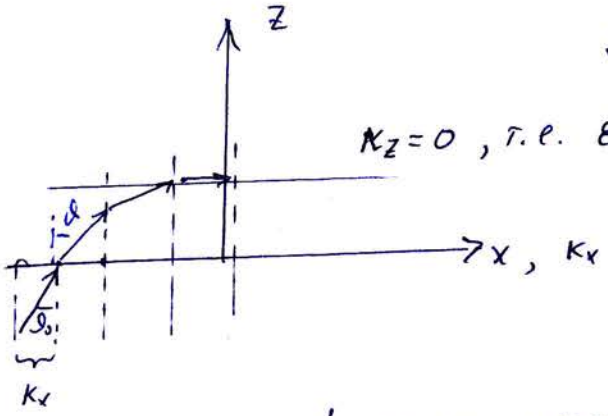
Пример:

Пусть $\varepsilon(z)$ убывает с ростом z, например, $\varepsilon(z) = 1 - \frac{z-z_0}{\ell}$. Тогда $\ell = L_z$ $\quad \boxed{z_0 = 0:\ \varepsilon(z_0) = 1}$

это возможно в случае плазмы, когда $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} =$

$= 1 - \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2}$, где $N(z) = N_0 \frac{z}{\Lambda}$; $\quad z_0 = 0$;

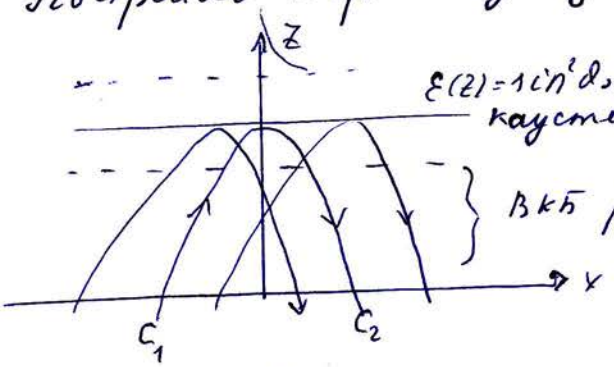
$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N_0}{m\omega^2}\frac{1}{\Lambda} z = 1 - \frac{z}{\ell}, \quad \ell = \Lambda \frac{m\omega^2}{4\pi e^2 N_0}$$



при $z = 0$ $\quad \varepsilon = 1$ $\quad (z_0 = 0)$

$k_z = 0$, т.е. $\varepsilon = \sin^2\vartheta_0$

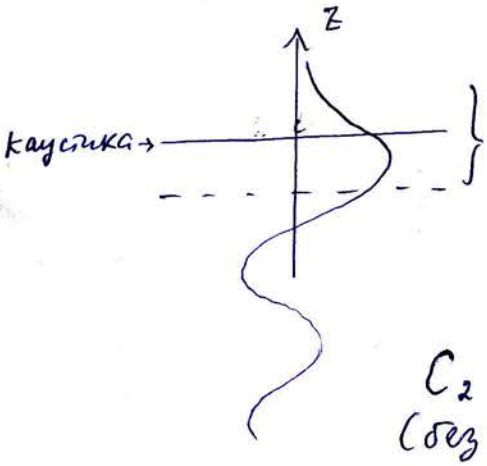
Построим картину лучей (приближение геометрической оптики)



$k_x = k_0 \sin\vartheta_0 = const$

$k_0 \sin\vartheta_0 = k_0\sqrt{\varepsilon}\sin\vartheta$

$\sin\vartheta = \sin\vartheta_0 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ – закон Снеллиуса



$\varepsilon = 1 - \frac{z}{\ell}$ – есть точное решение (ф-ия Эйри, $Ai(t)$)

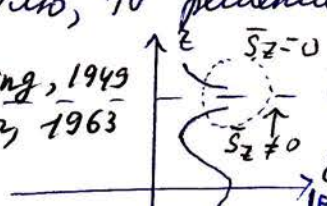
Эйри [Airy G.B.], 1838, 1849

$C_2 = C_1 e^{i\frac{\pi}{2}}$ (без док-ва) $\Leftarrow$ (Л.М. Бреховских „Волны в слоистых средах").

В случае ТМ-поляризации стоит член $\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dz}\frac{dH(z)}{dz}$.

Если ε не близко к нулю, то решение близко к предыдущему случаю.

K. Försterling, 1949
В.Б. Гильденбург, 1963



$\varepsilon = 0$ $\quad (z = \ell,\ \varepsilon = 1 - \frac{z}{\ell})$ $\quad (\varepsilon = -\alpha z)$; $\varepsilon' = -\alpha$

$\bar{S}_z = \frac{k_x^2 c^2}{8\omega\alpha}|H_y|^2$

Излучение заданных источников в безграничной однородной изотропной среде

В предыдущих лекциях были получены следующие неоднородные волновые уравнения для векторного и скалярного потенциалов (для однф. безгр. изотр. среды без дисперсии):

$$\Box \vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}(\vec{r},t),$$

$$\Box \varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho(\vec{r},t),$$

$$\Box = \Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad \text{(среда без дисперсии)}$$

При записи этих уравнений использована калибровка Лоренца: $\operatorname{div}\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$.

Зависимость заданных токов (зарядов) от $t, \vec{r}$ – произвольная (однако должно выполняться уравнение непрерывности $\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$)

$$\vec{j}(\vec{r},t),\ \rho(\vec{r},t) \longrightarrow \vec{A}(\vec{r},t),\ \varphi(\vec{r},t) \rightarrow \begin{array}{l} \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \mu\vec{H},\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \end{array}$$

Обозначим буквой ψ любую из проекций $\vec{A}$, либо φ, а буквой g – любую из величин $\frac{\mu j_{x,y,z}}{c}$ либо $\frac{\rho}{\varepsilon}$.

Тогда приходим к уравнению вида

(1) $$\boxed{\Box\psi(\vec{r},t) = -4\pi g(\vec{r},t)}$$ – неоднородное волновое уравнение (d'Alembert) для функции $\psi(\vec{r},t)$.

d'Alembert

$\Box$ – d'Alembertian (wave operator)

Функция Грина и общее решение неоднородного волнового уравнения

~~а) Функция Грина волн. ур-ия при произвольной зависимости от времени (для среды без дисперсии)~~

Назовем функцией Грина G неоднородного волнового уравнения решение уравнения

(2) $$\Box\psi = -4\pi\chi(t)\,\delta(\vec{r}).$$

Ищем решение этого уравнения в виде $\psi = G(r,t)$, $r = |\vec{r}|$.

Из (2) имеем

(3) $$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi\chi(t)\,\delta(\vec{r}).$$

Рассмотрим вначале область $r \neq 0$:

(4) $$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r}\right) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0.$$

Введем новую функцию: $G(r,t) = \dfrac{u(r,t)}{r}$.

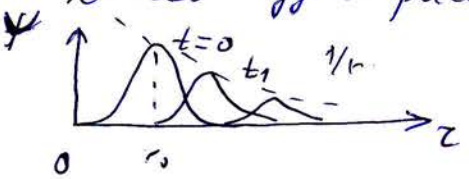
Тогда уравнение (4) принимает вид

(5) $$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Общее решение уравнения (5) имеет вид

(6) $u(r,t) = f\left(t - \frac{r}{v}\right) + \tilde{f}\left(t + \frac{r}{v}\right)$, где $f, \tilde{f}$ - произвольные функции

Далее будем рассматривать частное решение $f\left(t - \frac{r}{v}\right)$



$f = const \Rightarrow t - \frac{r}{v} = const \Rightarrow r = v(t - const)$

$const = -\frac{r_0}{v}$ $\quad \boxed{r = vt + r_0}$

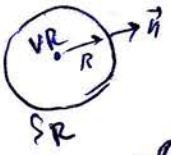
Очевидно, что слагаемое $G = \dfrac{f\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}$ описывает расходящуюся сферическую волну, а слагаемое $\tilde{G} = \dfrac{\tilde{f}\left(t + \frac{r}{v}\right)}{r}$ – сходящуюся. Будем рассматривать далее (пока без пояснений) расходящуюся волну.

Найдем теперь решение в точке $r = 0$:

$$\Delta G - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi \chi(t)\,\delta(\vec{r})$$

Подставим в это уравнение $G = \dfrac{f\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}$ и проинтегрируем по объему V (шар радиуса R):

$$\int_{V_R} \Delta G\, dv = \int_{V_R} \operatorname{div} \nabla G\, dv = \oint_{S_R} \nabla G\, d\vec{S} = \oint_{S_R} \frac{\partial G}{\partial r}\, dS =$$



$$= \left\| \frac{\partial G}{\partial r} \text{ при } r = R = const \right\| = \frac{\partial G}{\partial r}\, 4\pi R^2 \Big|_{r=R}$$

$\dfrac{\partial G}{\partial r} = -\dfrac{1}{r^2} f\left(t - \frac{r}{v}\right) - \dfrac{1}{vr} f'\left(t - \frac{r}{v}\right)$, где f' обозначает производную по аргументу функции f.

$$\int_{V_R} \Delta G\, dv = -4\pi f\left(t - \frac{r}{v}\right) - 4\pi \frac{r}{v} f'\left(t - \frac{r}{v}\right)\Big|_{r=R},$$

$$\lim_{R \to 0} \int_{V_R} \Delta G\, dv = -4\pi f(t).$$

$$\lim_{R\to 0}\int_{V_R}(-1)\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\,dv = -\frac{1}{v^2}\lim_{R\to 0}\int_{V_R}\frac{1}{r}f''\left(t-\frac{r}{v}\right)\underbrace{dv}_{4\pi r^2 dr} = 0$$

$$\lim_{R\to 0}\int_{V_R}(-4\pi)\chi(t)\,\delta(\vec{r})\,dv = -4\pi\chi(t)$$

Имеем: $-4\pi f(t) = -4\pi\chi(t)$, $f(t)=\chi(t)$.

Таким образом функция Грина есть

$$G(r,t) = \frac{\chi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}$$

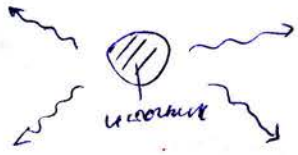
$G(r,t)$ – решение уравнения $\Box\psi = -4\pi\chi(t)\,\delta(r)$

Замечание:

Решением ур-ия $\Box\psi = -4\pi\chi(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_1)$ является решение

$$G(\vec{r},\vec{r}_1,t) = \frac{\chi\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_1|}{v}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$$

В качестве решения можно было бы выбрать $\tilde{G}(r,t) = \dfrac{\chi\left(t+\frac{r}{v}\right)}{r}$.
Это решение, однако, противоречит принципу причинности



б) Функция Грина волн. ур-ия при гармонической зависимости от времени

Дальнейший вывод будем проводить для полей, гармонически меняющихся во времени:

$$\chi(t) = \mathrm{Re}\{\chi_k(t)\},\quad \chi_k(t) = e^{i\omega t}$$

$$\psi(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\psi_k(\vec{r},t)\} = \mathrm{Re}\{\psi(\vec{r})e^{i\omega t}\},$$
$$G(r,t) = \mathrm{Re}\{G_k(r,t)\} = \mathrm{Re}\{G(r)e^{i\omega t}\}$$

Для комплексных амплитуд $\psi(r)$ имеем:

$$\boxed{\Delta G_k + k^2 G_k = -4\pi\delta(\vec{r})e^{i\omega t}},\qquad k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} = k_0\sqrt{\varepsilon\mu}$$

(уравнение Гельмгольца с правой частью)

! $\varepsilon=\varepsilon(\omega)$, $\mu=\mu(\omega)$ ~ зависимости м. быть

$\Delta G_k + k^2 G_k = -4\pi\delta(\vec r)\, e^{i\omega t}$, $v = c/\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$.

Введем $G_k = G(r)\, e^{i\omega t}$

Решение последнего ур-ия $\boxed{\Delta G + k^2 G = -4\pi \cdot \delta(\vec r)}$

$$G_k = \underbrace{\frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{v})}}{r}}_{\frac{x_k(t-\frac{r}{v})}{r}} = \underbrace{\frac{e^{-ikr}}{r}}_{G(r)}\, e^{i\omega t} \qquad (r = |\vec r|)$$

Ясно, что решением уравнения

$\Delta G + k^2 G = -4\pi\delta(\vec r - \vec r_1)$

будет $G(\vec r, \vec r_1) = \dfrac{e^{-ik|\vec r - \vec r_1|}}{|\vec r - \vec r_1|}$

в) Решение волнового уравнения при гармонической зависимости от времени

Пусть источник имеет вид $g_k = g(\vec r)\, e^{i\omega t}$

$$\Delta \psi_k + k^2 \psi_k = -4\pi \underbrace{g(\vec r)\, e^{i\omega t}}_{g_k(\vec r, t)}, \qquad \Delta\psi + k^2\psi = -4\pi g(\vec r)$$

Найдем решение этого уравнения.

2ая ф-ла Грина:

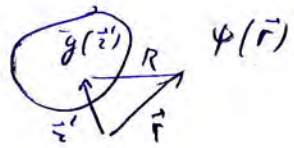
$$\int_V \Big(\underbrace{G(\vec r', \vec r_1)}_{\frac{e^{-ik|\vec r' - \vec r_1|}}{|\vec r' - \vec r_1|}} \underbrace{\Delta_{\vec r'} \psi(\vec r')}_{-4\pi g(\vec r') - k^2\psi(\vec r')} - \psi(\vec r') \underbrace{\Delta_{\vec r'} G(\vec r', \vec r_1)}_{-4\pi\delta(\vec r' - \vec r_1) - k^2 G(\vec r', \vec r_1)} \Big)\, dv' =$$

$$= \oint_S \left[G(\vec r', \vec r_1) \frac{\partial \psi(\vec r')}{\partial n} - \psi(\vec r') \frac{\partial G(\vec r', r_1)}{\partial n} \right] ds', \quad \vec r_1 = \vec r;$$

$$-4\pi \int_V g(\vec r') \frac{e^{-ik|\vec r - \vec r'|}}{|\vec r - \vec r'|}\, dv' + 4\pi \int_V \psi(\vec r')\, \delta(\vec r' - \vec r)\, dv' =$$

$$= \oint_S \left[\frac{e^{-ik|\vec r - \vec r'|}}{|\vec r - \vec r'|} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ik|\vec r - \vec r'|}}{|\vec r - \vec r'|} \right) \right] ds'$$

Обозначение: $R = |\vec r - \vec r'|$



$$\psi(\vec r) = \int_V g(\vec r') \frac{e^{-ikR}}{R}\, dv' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\underbrace{\frac{e^{-ikR}}{R}}_{G(\vec r', \vec r)} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \Big(\underbrace{\frac{e^{-ikR}}{R}}_{G(\vec r', \vec r)} \Big) \right] ds' -$$

– получили интегральное уравнение для ψ

Распространим область интегрирования на все пространство.

Будем полагать, что источники занимают ограниченную область пространства.

Потребуем, чтобы ψ при $R \to \infty$ подчинялось условию $\psi \sim \frac{e^{-ikR}}{R}$, т.е.,

$$\lim_{R\to\infty} R\left[\frac{\partial\psi}{\partial R} + ik\psi\right] = 0$$ – условие излучения Зоммерфельда

Заметим, что без этого добавочного условия нельзя построить единственное решение задачи.

Тогда

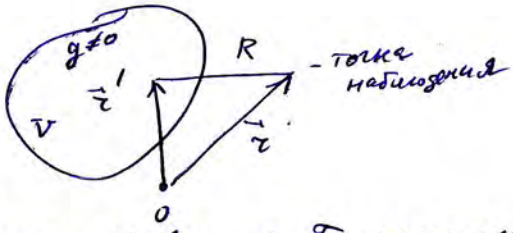
$$\psi \frac{\partial}{\partial n}\Big(\underbrace{\frac{e^{-ikR}}{R}}_{G}\Big) = \psi\cdot\left[-ik\frac{e^{-ikR}}{R} - \frac{1}{R^2}e^{-ikR}\right] = \psi\cdot G\cdot\left(-ik - \frac{1}{R}\right);$$

$$\underbrace{\frac{e^{-ikR}}{R}}_{G}\frac{\partial\psi}{\partial n} = G\cdot\psi\cdot\left(-ik - \frac{1}{R}\right);$$

В итоге $\oint\!\!\!\oint_S = 0$.

Итак, решением уравнения

$$\Delta\psi + k^2\psi = -4\pi g(\vec r)$$



является функция

$$\psi(\vec r) = \int_V \frac{g(\vec r\,')e^{-ikR}}{R}\,dv'$$ – решение уравнения Гельмгольца с правой частью.

$$\psi_k = \int_V \frac{g(\vec r\,')e^{i\omega t - ikR}}{R}\,dv'$$

1) Решение волнового уравнения при произвольной зависимости от времени.

Уравнение д'Аламбера для отыскания функции ψ

$$\Delta\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi g(\vec{r},t) \qquad (1)$$

может быть использовано лишь для недиспергирующей среды.

Напомним, что при гармонической зависимости от времени для комплексной амплитуды ψ имеем ур-ие Гельмгольца

$$\Delta\psi + k^2\psi = -4\pi g(\vec{r}),$$

и его решение есть

$$\psi(\vec{r}) = \int_V g(\vec{r}\,')\frac{e^{-ikR}}{R}\,dv'.$$

Разложим источник $g(\vec{r},t)$ и искомое решение $\psi(\vec{r},t)$ в интеграл Фурье:

$$g(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r},\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega;$$

$$\psi(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\vec{r},\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega.$$

Тогда для комплексных амплитуд имеем известное решение:

$$\psi(\vec{r},\omega) = \int_V \frac{g(\vec{r}\,',\omega)}{R}e^{-ikR}\,dv', \quad k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{v(\omega)}, \quad \varepsilon = \varepsilon(\omega),\ \mu = \mu(\omega).$$

$$\psi(\vec{r},t) = \int_V\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(\vec{r}\,',\omega)}{R}\,e^{i\omega\left(t-\frac{R}{v(\omega)}\right)}\,d\omega\,dv'. \qquad (2)$$

— суперпозиция сферических волн

В общем случае $v = v(\omega)$. Условие излучения должно выполняться для каждой ω!

Пусть среда — без дисперсии. Тогда

$$\psi(\vec{r},t) = \int_V \frac{1}{R}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}\,',\omega)\,e^{i\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)}\,d\omega\right]dv' = \int_V \frac{g\left(\vec{r}\,',t-\frac{R}{v}\right)}{R}\,dv'$$

Введем обозначение $[g] = g\left(\vec{r}\,',t-\frac{R}{v}\right)$

$$\psi(\vec{r},t) = \int_V \frac{[g]}{R}\,dv'$$

Данное решение похоже на решение уравнения Пуассона. Отличие в том, что интеграл берется с учетом запаздывания передачи взаимодействия. Это решение уравнения (1) для сред без дисперсии. При наличии дисперсии следует брать решение (2)

г) Неоднородные волновые уравнения и их решения для потенциалов (сводка результатов).

(I)

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}$$

– уравнение для компл. ампл. $\vec{A}$ при гармонической зависимости от времени

$$\lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial R} + ik\vec{A}\right) = 0$$

Решение:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R} e^{-ikR}\, dv',$$

$$\vec{A}_{физ} = \mathrm{Re}\{\vec{A}(\vec{r})e^{i\omega t}\}.$$

среда – однородная, безграничная, изотропная, при наличии дисперсии $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, $\mu = \mu(\omega)$

(II)

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}(\vec{r},t),$$

– среда без дисперсии, однородная, безграничная, изотропная

$$\vec{A}_{(\vec{r},t)} = \frac{\mu}{c}\int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \frac{R}{v}\right)}{R} dv' = \frac{\mu}{c}\int_V \frac{[\vec{j}]}{R} dv',$$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}\,'|.$$

Замечание:

Мы решили трёхмерную задачу.

Если задача одномерна, то (при гармонической зависимости от времени) имеем уравнение:

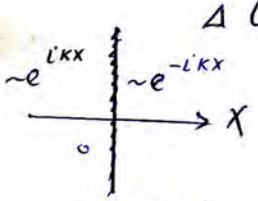
$$\Delta \psi + k^2\psi = -4\pi g(x), \quad \Delta = \frac{d^2}{dx^2}$$

Функция Грина

$$\Delta G + k^2 G = -4\pi\delta(x); \qquad G \sim e^{-ik|x|}$$

$-2ikA = -4\pi$

$A = \frac{2\pi}{ik}$



Токовый лист (например)

$$G(x) = \frac{2\pi e^{-ik|x|}}{ik};$$

$$\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=+0} = -\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=-0} = -2\pi;$$

$$G_k = \frac{2\pi}{ik} e^{i\omega t - ik|x|}.$$

Если задача двумерна, то

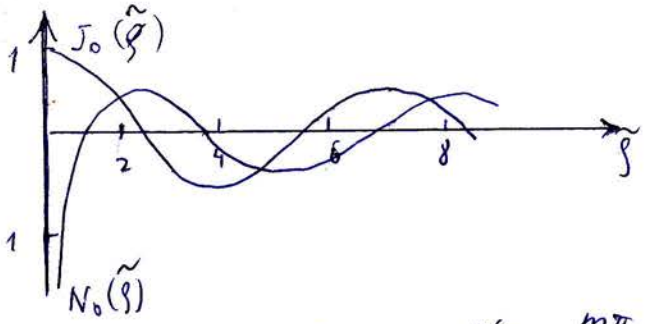
$$\Delta G + k^2 G = -4\pi\overbrace{\delta(x)\delta(y)}^{\frac{1}{2\pi\rho}\delta(\rho)};$$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$\rho \neq 0 \quad G = G(\rho)$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial G}{\partial \rho} + k^2 G = 0$$

В точках, где $\rho \neq 0$, решение ищется в виде $J_0(k\rho)$, $N_0(k\rho)$



$$H_m^{(1)}(k\rho) = J_m(k\rho) + i N_m(k\rho)$$
$$H_m^{(2)}(k\rho) = J_m(k\rho) - i N_m(k\rho)$$

$$\left.\begin{aligned} H_m^{(1)}(z) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \\ H_m^{(2)}(z) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i\left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &z \to \infty, \\ &|z| \gg m. \end{aligned}$$

При $\rho \neq 0$ решение надо искать в виде $\sim H_0^{(2)}(k\rho)$

В случае $k\rho \gg 1$ имеем расходящуюся цилиндрическую волну $\sim \dfrac{e^{-ik\rho}}{\sqrt{k\rho}}$

Решения: $G(\rho) = -i\pi H_0^{(2)}(k\rho)$; $\tilde{G}(\rho) = i\pi H_0^{(1)}(k\rho)$. [В.С. Владимиров, „Ур. мат. физики", М.: Наука, 1983; §11, п.9; §30]

Различие множителей ($\frac{1}{r}$ для сферических волн, $\frac{1}{\rho^{1/2}}$ для цилиндрических волн) объясняется законом сохранения энергии

$\rho \to 0$: $H_0^{(2)}(k\rho) \approx -i\frac{2}{\pi}\ln\frac{k\rho}{2}$

$$\begin{cases} \Delta_\perp G + k^2 G = -4\pi\delta(\rho)\frac{1}{2\pi\rho} \\ \Delta = \Delta_\perp \end{cases} \quad \underbrace{\int \Delta_\perp G\, ds}_{= \oint \nabla_\perp G \cdot \vec{n}\, dl,\ \vec{n} = \vec{\rho}_0} + k^2 \int G \underbrace{ds}_{2\pi\rho\, d\rho} = -4\pi; \quad \lim_{R\to 0}\left(\overbrace{\frac{\partial G}{\partial \rho}}^{A(-i)\frac{2}{\pi}\frac{1}{\rho}} 2\pi\rho\right)\Big|_{\rho=R} = -4\pi; \quad \lim_{R\to 0}\left\{(-k)\underbrace{AH_1^{(2)}(k\rho)}_{(-i\pi)(-i)\left(-\frac{2}{\pi}\frac{1}{k\rho}\right)} 2\pi\rho\right\}\Big|_{\rho=R} = -4\pi;$$

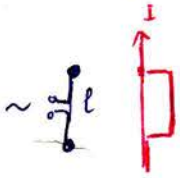
$H_0^{(2)\prime}(z) = -H_1^{(2)}(z)$

$\Rightarrow A = -i\pi$

Излучение простейших источников

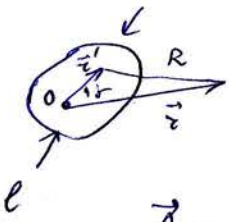
Элементарный электрический вибратор (диполь Герца)

$\vec{p} = q\vec{l}$ – дипольный момент статического диполя



Пусть $l \ll \lambda = \begin{cases} \lambda_0 - \text{в вакууме } \left(\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}\right) \\ \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - \text{в среде (если нет дисперсии)} \end{cases}$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{c}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')\, e^{-ikR}}{R}\, dv'$$



Выберем начало координат в области, занятой токами

$R \approx r$ (если $r \gg l$)

$r \gg l$ – дальняя зона (в узком смысле)

$$\vec{A} \approx \frac{\mu}{c}\frac{1}{r}\int_V \vec{j}(\vec{r}\,')\, e^{-ikR}\, dv'$$

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma} = r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma + \frac{r'^2}{r^2}} \approx r\left(1 - \frac{r'}{r}\cos\gamma\right)$$

$$kR \approx kr - \underbrace{kr'\cos\gamma + \ldots}_{\text{отбросим}} \qquad |kr'\cos\gamma| < kl = \frac{2\pi}{\lambda} l \ll \pi$$

$$(l \ll \lambda)$$

$$\vec{A} \approx \frac{\mu}{c}\,\frac{e^{-ikr}}{r}\int_V \vec{j}(\vec{r}')\,dv'$$

В разделе „Магнитостатика" („разложение по мультиполям") была доказана формула для огранич. в пр-стве распределения источников:

$$\boxed{\int_V \vec{j}(\vec{r},t)\,dv = -\int_V \vec{r}\,\operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t)\,dv} \qquad \operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Эта формула верна и при $\frac{\partial}{\partial t}=0$:

$$\int_V \vec{j}(\vec{r},t)\,dv = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \vec{r}\rho\,dv = \frac{\partial\vec{p}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \vec{P}\,dv = \int_V \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\,dv$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = i\omega\vec{P}(\vec{r})$$

$$\vec{A} \approx \frac{\mu}{c}\,\frac{e^{-ikr}}{r}\int_V i\omega\vec{P}(\vec{r}')\,dv' = \mu\, ik_0\vec{p}\,\frac{e^{-ikr}}{r}, \quad \vec{p} = \int_V \vec{P}(\vec{r}')\,dv$$

Для точечного диполя ($\vec{P} = \vec{p}\,\delta(\vec{r})$) формула

$$\vec{A} = \mu\,\frac{i\omega\vec{p}}{c}\,\frac{e^{-ikr}}{r} \qquad \Downarrow \quad \vec{j} = i\omega\vec{p}\,\delta(\vec{r})$$

является точной.

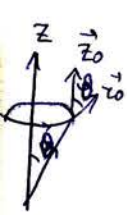
Для диполя конечных размеров ($l \ll \lambda$) данная формула является приближенной и работает при ($l \ll r$), т.е. имеем следующие условия применимости формулы: 1) $r \gg l$

2) $\lambda \gg l$

[В эстатике поле системы зарядов с $\int\rho\,dv = 0$ тоже опред диполь. моментом при $R\to\infty$].

Далее проводим все выкладки, считая диполь точечным

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = \left[\nabla, \mu\, ik_0\vec{p}\,\frac{e^{-ikr}}{r}\right] = \mu\, ik_0\,\frac{e^{-ikr}}{r}\,[\nabla,\vec{p}] +$$



$$+ \mu\, ik_0\left[\nabla\,\frac{e^{-ikr}}{r}, \vec{p}\right] = \langle \vec{p} = p\vec{z}_0 \rangle =$$

$$= \mu\, ik_0 p\left(-ik - \frac{1}{r}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}\,\underbrace{[\vec{r}_0, \vec{z}_0]}_{-\vec{\varphi}_0\sin\theta} = \underbrace{\vec{\varphi}_0\mu\, p\sin\theta\left(-\frac{kk_0}{r} + \frac{ik_0}{r^2}\right)e^{-ikr}}_{B_\varphi = \mu H_\varphi} =$$

$$= \vec{\varphi}_0\mu\, p\sin\theta\,\frac{ik_0 e^{-ikr}}{r}\left(\frac{1}{r} + ik\right)$$

$$H_\varphi = p\sin\vartheta\left(-\frac{kk_0}{r}+\frac{ik_0}{r^2}\right)e^{-ikr} = \left(\frac{ik_0}{r^2}-\frac{kk_0}{r}\right)p\sin\vartheta\, e^{-ikr};$$

Переходим к вычислению поля $\vec{E}$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = ik_0\varepsilon\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}.$$

Для $r\neq 0$

$$\vec{E} = -\frac{i}{k_0\varepsilon}\mathrm{rot}\,\vec{H} = -\frac{i}{k_0\varepsilon}\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\begin{vmatrix} \vec{r}_0 & r\vec{\vartheta}_0 & r\sin\vartheta\,\vec{\varphi}_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\vartheta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}=0 \\ 0 & 0 & r\sin\vartheta H_\varphi \end{vmatrix};$$

$$E_r = -\frac{i}{k_0\varepsilon}\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta H_\varphi) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{2}{r^3}+\frac{i2k}{r^2}\right)p\cos\vartheta\, e^{-ikr};$$

$$E_\vartheta = \frac{i}{k_0\varepsilon}\frac{1}{r\cancel{\sin\vartheta}}\frac{\partial}{\partial r}(r\cancel{\sin\vartheta}H_\varphi) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r^3}+\frac{ik}{r^2}-\frac{k^2}{r}\right)p\sin\vartheta\, e^{-ikr};$$

Итак,

$$(\mathrm{I})\quad \left\|\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{2}{r^3}+\frac{2ik}{r^2}\right)e^{-ikr}p\cos\vartheta, \\ E_\vartheta &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r^3}+\frac{ik}{r^2}-\frac{k^2}{r}\right)e^{-ikr}p\sin\vartheta, \\ H_\varphi &= \left(\frac{ik_0}{r^2}-\frac{k_0k}{r}\right)e^{-ikr}p\sin\vartheta, \quad k=k_0\sqrt{\varepsilon\mu}, \quad k_0=\frac{\omega}{c} \end{aligned}\right.$$

1. Физический смысл имеют лишь действительные части:

$$pe^{i\omega t-ikr} = pe^{i\omega(t-\frac{r}{v})}, \quad v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}}$$

$$i\omega pe^{i\omega t-ikr} = \frac{\partial}{\partial t}pe^{i\omega(t-\frac{r}{v})}, \quad -\omega^2 pe^{i\omega t-ikr} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}pe^{i\omega(t-\frac{r}{v})}.$$

$$p(t) = \mathrm{Re}\{pe^{i\omega t}\},$$

$$[p] \equiv p\left(t-\frac{r}{v}\right) = \mathrm{Re}\left\{pe^{i\omega(t-\frac{r}{v})}\right\}$$

$$[\dot{p}] = \frac{\partial}{\partial t}[p] = \mathrm{Re}\left\{i\omega pe^{i\omega(t-\frac{r}{v})}\right\}; \quad [\ddot{p}] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}[p] = \mathrm{Re}\left\{-\omega^2 pe^{i\omega(t-\frac{r}{v})}\right\}$$

$$E_r(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{E_r e^{i\omega t}\}; \quad E_\vartheta(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{E_\vartheta e^{i\omega t}\}, \quad H_\varphi(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{H_\varphi e^{i\omega t}\}.$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad k = \frac{\omega}{v}$$

$$
(\mathrm{II})\quad \begin{cases}
E_r(\vec r,t) = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\dfrac{2[p]}{r^3} + \dfrac{2[\dot p]}{v\,r^2}\right)\cos\vartheta, \\[2ex]
E_\vartheta(\vec r,t) = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\dfrac{[p]}{r^3} + \dfrac{[\dot p]}{v\,r^2} + \dfrac{[\ddot p]}{v^2 r}\right)\sin\vartheta, \\[2ex]
H_\varphi(\vec r,t) = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{[\dot p]}{r^2} + \dfrac{[\ddot p]}{v\,r}\right)\sin\vartheta
\end{cases}
\qquad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}
$$

Для гармонического процесса формулы (II) справедливы, при этом $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, $\mu = \mu(\omega)$, ω - частота, $v = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

2. Формулы (II) остаются справедливыми для недиспергирующей среды при произвольной зависимости от времени дипольного момента $p = p(t)$.

3. Формулы (II) являются точными для точечного диполя (так же, как и формулы (I)).

4. Обсуждение структуры поля в различных областях пространства для ~~точечного~~ элементарного диполя (при гармонической зависимости от времени) (диполя Герца)

[В случае точечного диполя условия $l \ll \lambda$, $l \ll r$ выполняются автоматически, так как $l \to 0$]

Зона квазистатики

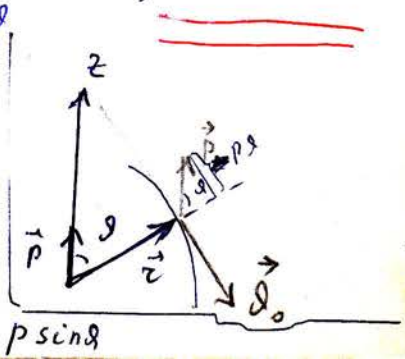
$kr \ll 1$, т.е. $r \ll \lambda$ $\qquad l \ll r \ll \lambda$

$\tau_{запазд} = \dfrac{r}{v}$. Если $\tau_{зап} \ll T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, то запаздыванием можно пренебречь: $\dfrac{r}{v} \ll \dfrac{2\pi}{\omega} \Rightarrow kr \ll 2\pi$.

$\dfrac{1}{r^3} \gg \dfrac{k}{r^2}$ в выражении для E_r,

$\dfrac{1}{r^3} \gg \dfrac{k}{r^2} \gg \dfrac{k^2}{r}$ в выражении для E_ϑ, $kr \ll 1$, $e^{-ikr} \approx 1$.

$$E_r \approx \frac{2p\cos\vartheta}{\varepsilon r^3}, \quad E_\vartheta \approx \frac{p\sin\vartheta}{\varepsilon r^3}, \quad H_\varphi = \frac{ik_0 p\sin\vartheta}{r^2}$$



$$\vec E = \frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{3(\vec p,\vec r)\vec r}{r^5} - \frac{\vec p}{r^3}\right\}$$

$$E_r = \frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{3p_r r}{r^5} - \frac{p_r}{r^3}\right\} = \frac{2p\cos\vartheta}{\varepsilon r^3}; \quad E_\vartheta = -\frac{p_\vartheta}{\varepsilon r^3} = \frac{p\sin\vartheta}{\varepsilon r^3}$$

$p_r = p\cos\vartheta$ $\qquad p_\vartheta = -p\sin\vartheta$

Таким образом, поле в зоне квазистатики имеет такую же структуру, как для статического диполя.

Замечание: поучительный пример того, как правильное магнитное поле в зоне квазистатики можно „получить" из закона Био–Савара, который в данном случае неприменим:

$$\vec{H} = \int_V \frac{[\vec{j}, \vec{R}]dv'}{cR^3}, \quad \vec{j} = i\omega\vec{P} = i\omega\vec{z}_0 p\delta(\vec{r}), \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

$$\vec{H} = i\omega p\frac{[\vec{z}_0, \vec{r}]}{cr^3} = \frac{i\omega p}{cr^2}\underbrace{[\vec{z}_0, \vec{r}_0]}_{+\vec{\varphi}_0 \sin\vartheta} = \vec{\varphi}_0 \cdot \frac{ik_0 p\sin\vartheta}{r^2};$$

см. стр. 5'

Заметим, что магнитное поле не является в зоне квазистатики потенциальным ($\mathrm{rot}\,\vec{H} \neq 0$); $\mathrm{rot}\,\vec{H} \to \vec{E}$ квс.

Аналогичное выражение следует из I если учесть, что $\frac{1}{r^2} \gg \frac{k}{r}$ в H_φ в (I).

Особенности поля точечного диполя в начале координат: $E_{r,\vartheta} \sim \frac{1}{r^3}$, $H_\varphi \sim \frac{1}{r^2}$.

Сдвиг фаз: Между полем $\vec{E}_{\text{квс.}}$ и $\vec{H}_{\text{квс.}}$ в зоне квазистатики имеется сдвиг фаз $\frac{\pi}{2}$ (множитель i в выражении для H_φ указывает на это).

$l \ll \lambda$, $l \ll r$

$l \ll r \ll \lambda$ – квазистатич. зона

$l \ll r \sim \lambda$ – зона индукции

$l \ll \lambda \ll r$ – волновая зона

Поле в волновой зоне

Опр.: Волновая зона – это область пространства, где $kr \gg 1$ (т.е. $r \gg \lambda$): расстояние от диполя до $\forall$ой точки волновой зоны много больше длины волны (это понятие следует уточнить при переходе к неэлементарному источнику).

Отбросим члены $\frac{1}{r^3}$, $\frac{k}{r^2}$ в выражениях для полей (по сравн. $\frac{k^2}{r}$),

$$E_\vartheta = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right)e^{-ikr}p\sin\vartheta \approx -\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{e^{-ikr}}{r}p\sin\vartheta,$$

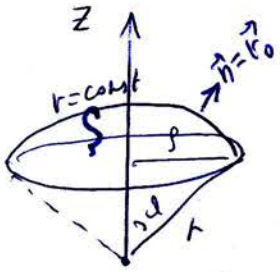
$$H_\varphi = \left(\frac{ik_0}{r^2} - \frac{k_0 k}{r}\right)e^{-ikr}p\sin\vartheta \approx -\frac{k_0 k}{r}e^{-ikr}p\sin\vartheta = \frac{E_\vartheta}{\eta},$$

$$E_r = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{2}{r^3} + \frac{2ik}{r^2}\right)e^{-ikr}p\cos\vartheta \approx \frac{2ik}{\varepsilon}\frac{e^{-ikr}}{r^2}p\cos\vartheta.$$

При $r \to \infty$ $|E_r| \ll |E_\vartheta|$ (кроме $\vartheta = 0, \pi$) $\quad E_r \approx 0 \ \left(\sim \frac{1}{r^2}\right)$

Правильный расчет поля H диполя в зоне квазистатики

$\rho = r\sin\vartheta$



$$\oint_L \vec{H}\,d\vec{l} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{D}\,d\vec{S} \;; \quad d\vec{S} = \vec{n}\,dS \equiv \vec{r}_0\,dS, \text{ т.к. } \vec{n} \equiv \vec{r}_0$$

$$H_\varphi\, 2\pi\rho = ik_0\varepsilon \int_S E_r \underbrace{dS}_{r^2\sin\vartheta' d\vartheta' 2\pi} \;; \quad \rho = r\sin\vartheta$$

$$H_\varphi \cdot r\sin\vartheta = ik_0\varepsilon \int_0^\vartheta \underbrace{\frac{2p\cos\vartheta'}{\varepsilon r^3}}_{E_r} \cdot r^2\sin\vartheta' d\vartheta' =$$

$$= ik_0 \frac{1}{r} 2p \int_0^\vartheta d\left(\frac{\sin^2\vartheta'}{2}\right) = ik_0 \frac{p}{r}\sin^2\vartheta \;;$$

$$H_\varphi = \frac{ik_0 p\sin\vartheta}{r^2}$$ – квазистатическое магнитное поле.

<задача 6.14>
Гильденбург В.Б.
Миллер М.А.

а) Закон убывания поля в волновой зоне; $E_\vartheta, H_\varphi \sim \frac{1}{r}$

$E_\vartheta, H_\varphi \sim \frac{e^{-ikr}}{r}\sin\vartheta$

$E_r \sim \frac{e^{-ikr}}{r^2}\cos\vartheta$

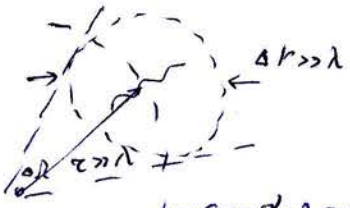
(это закон убывания любых полей излучения).

[Если бы поле спадало более быстро, то была бы невозможна радиосвязь на большие расстояния]

б) В волновой зоне $\vec{E} = E_\vartheta \vec{\vartheta}_0$, $\vec{H} = H_\varphi \vec{\varphi}_0$ и $\vec{k} = k\vec{r}_0$ образуют правую тройку

в) $E_\vartheta / H_\varphi = \eta$, т.е. $\vec{E} = \eta[\vec{H}, \vec{n}]$, $\vec{n} = \vec{r}_0$.

Таким образом поле в волновой зоне представляет собой локально плоскую волну.

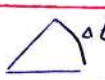


1 – фазовый фронт

$\lambda \ll \Delta r \ll r$; $\Delta\vartheta = \frac{\Delta r}{r} \ll 1$

$\Delta\Omega \sim \frac{(\Delta r_1)^2}{r^2} \ll 1 \ll \pi$

в выделенной области (i) кривизна фронта мало заметна и (ii) неоднородность амплитуды невелика (как по r, так и по ϑ).

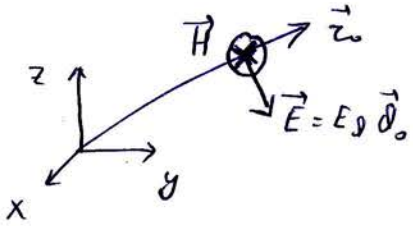


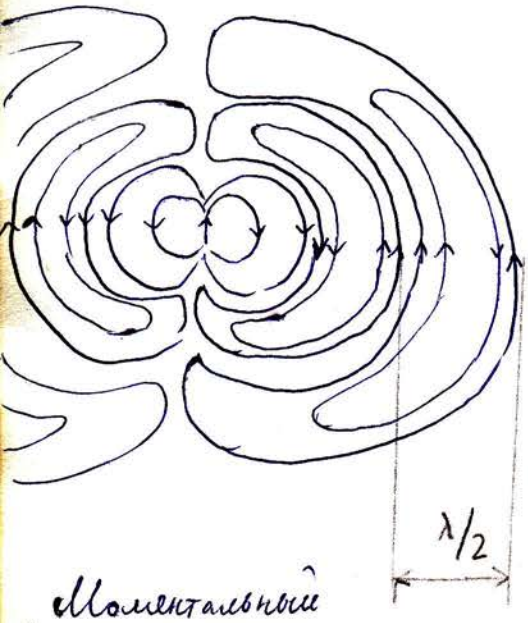
$\Delta l = \Delta\vartheta \cdot r$

$\Delta\vartheta \ll \pi$

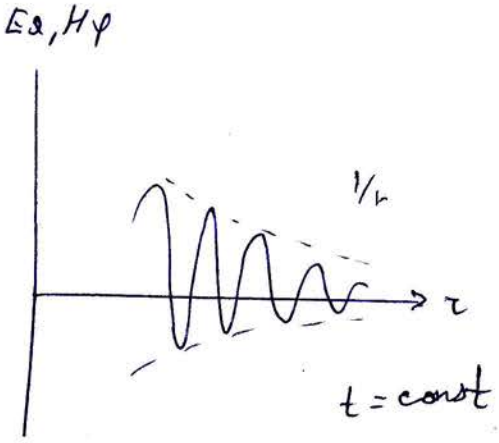
$\lambda \ll \Delta l = \Delta\vartheta \cdot r \ll \pi r$

м.б.





„Моментальный снимок" поля



Энергетические соотношения для поля излучения диполя.

Плотность потока энергии $\vec{S} = \frac{c}{8\pi} Re\,[\vec{E}, \vec{H}^*]$

$$E_\vartheta = -\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{e^{-ikr}}{r} p \sin\vartheta$$

В волновой зоне:

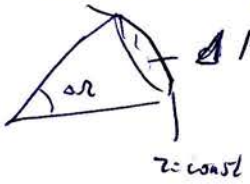
$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} Re\, E_\vartheta \underbrace{\frac{E_\vartheta^*}{\eta}}_{H_\varphi^*} [\vec{\vartheta}_0, \vec{\varphi}_0] = \underbrace{\frac{c}{8\pi\eta} |E_\vartheta|^2}_{S_r} \vec{r}_0$$

$$S_r = \frac{c}{8\pi}\frac{k^4|p|^2}{\varepsilon^2\eta\, r^2}\sin^2\vartheta = \frac{c}{8\pi}\mu\sqrt{\varepsilon\mu}\;\frac{k_0^4|p|^2\sin^2\vartheta}{r^2};$$

В направлениях $\vartheta = 0, \pi$ излучение отсутствует.

Диаграмма направленности излучения по мощности

Диаграмма напр. изл. по мощности есть угловое распределение мощности, излучаемой в единицу телесного угла.

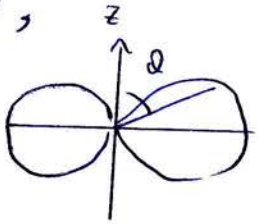


ΔP – мощность, излучаемая в телесн. угол $\Delta\Omega$

$$\Delta P = \lim_{r\to\infty}\int_{\Delta S} S_r\, dS = \lim_{r\to\infty}\int_{\Delta\Omega} S_r r^2\, d\Omega;$$

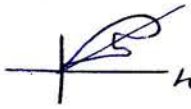
$$\lim_{\Delta\Omega\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta\Omega} = \lim_{r\to\infty} S_r r^2 = \mathcal{D}(\vartheta,\varphi);$$

$$\boxed{\mathcal{D} = \frac{c}{8\pi}\frac{1}{\varepsilon^2\eta}k^4|p|^2\sin^2\vartheta.}$$



В вакууме: $\mathcal{D} \overset{(*)}{=} \frac{c}{8\pi}k_0^4|p|^2\sin^2\vartheta.$

Пример диаграммы, которой не может быть:



неоднозначность.

Существуют также диаграммы направленности по амплитуде и фазовые диаграммы.

Подсчитаем полную мощность излучения:

$$P_\Sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathcal{D}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{c}{8\pi}\frac{1}{\varepsilon^2\eta}k^4|p|^2\cdot 2\pi\underbrace{\int_0^\pi \sin^3\vartheta\, d\vartheta}_{4/3} =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{c}{\varepsilon^2\eta}k^4|p|^2.$$

$$\int_0^\pi \sin^3\vartheta\, d\vartheta = \int_0^\pi(\cos^2\vartheta - 1)\, d(\cos\vartheta) = \left(\frac{\cos^3\vartheta}{3} - \cos\vartheta\right)\Big|_0^\pi = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$P_\Sigma \sim \omega^4,\ |p|^2$

Понятие сопротивления излучения;

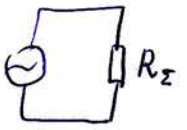
$|p| = |Q|\ell$ $\qquad$ $I + \dot{Q} = 0$

$|I| = \omega |Q|$

$$|p| = \frac{|I|}{\omega}\ell$$

$$P_\Sigma = \frac{1}{3}\frac{c}{\varepsilon^2 \eta} k^4 |I|^2 \ell^2 \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{2}|I|^2 \underbrace{\frac{1}{c}\frac{2}{3}\frac{\mu^2}{\eta}(k_0\ell)^2}_{R_\Sigma}$$

Рассмотрим эквивалентную схему (с точки зрения потреб. энергии)



Можно подобрать R_Σ таким образом, чтобы от генератора отбиралась такая же мощность, как и в случае излучающей антенны (при том же значении тока)

Тогда мощность, выделяемая на резисторе, равна $P_\Sigma = \frac{|I|^2}{2} R_\Sigma$

Величина R_Σ называется сопротивлением излучения.

$$R_{\Sigma\,\text{диполя}} = \frac{1}{c}\frac{2}{3}\frac{\mu^2}{\eta}(k_0\ell)^2$$

В вакууме: $R_{\Sigma,\text{дип}} = \frac{1}{c}\frac{2}{3}(k_0\ell)^2$ $\qquad$ В СИ: $R_\Sigma = 30\ \text{Ом} \times \frac{2}{3}(k_0\ell)^2 = 80\pi^2\left(\frac{\ell}{\lambda_0}\right)^2$ (Ом);

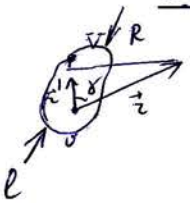
$$R_\Sigma \sim (k_0\ell)^2 \sim \left(\frac{\ell}{\lambda_0}\right)^2$$

Элементарный вибратор, у которого $\frac{\ell}{\lambda} \ll 1$, излучает сравнительно плохо $\qquad R_{\Sigma\,\text{дип.}} \ll 30 \cdot \frac{2}{3}\ (\text{Ом}) = 20\ \text{Ом}$

$$\boxed{R_\Sigma = \frac{2P_\Sigma}{|I|^2}}$$

Def: Сопротивление излучения – это ~~сопротивление~~ величина, равная сопротивлению активной (омической) нагрузки, на которой при силе тока, равной току ~~из~~ излучателя, [выделяется такая же мощность, что и излучаемая] (т.е. выделяется мощность, равная излучаемой мощности)

Разложение поля по мультиполям. Излучение элем. магнитного диполя.



$0 \in V$, $\quad r \gg \lambda \gg \ell \qquad \left(\frac{\sqrt{\lambda r}}{\ell} \gg 1 \right)$ – выполняется

$$R = r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma + \frac{r'^2}{r^2}} \approx r\left(1 - \frac{r'}{r}\cos\gamma + \dots\right)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{1 - \frac{r'}{r}\cos\gamma}\, e^{ikr'\cos\gamma}\, dv' \approx \left\langle \begin{matrix} r \gg \ell \\ \lambda \gg \ell \end{matrix} \right\rangle \approx$$

$$\approx \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\int_V \vec{j}(\vec{r}')\left(1 + \frac{r'}{r}\cos\gamma\right)\left(1 + ikr'\cos\gamma\right) dv' = \langle k \gg \tfrac{1}{r} \rangle$$

$$\approx \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\int_V \vec{j}(\vec{r}')\left[1 + ikr'\cos\gamma\right] dv' =$$

$$= \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\int_V \vec{j}(\vec{r}')\left[1 + i(\underbrace{\vec{k}}_{\vec{k} = k\vec{r}_0}, \vec{r}')\right] dv' = \quad \leftarrow \text{разложение по параметру } \ell/\lambda \ll 1$$

$$= \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\underbrace{\int_V \vec{j}(\vec{r}')\, dv'}_{i\omega\vec{p}} + \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\, ik\int_V \vec{j}(\vec{r}')\,(\vec{r}_0, \vec{r}')\, dv' + \dots,$$

$$\vec{j}(\vec{r}')(\vec{r}', \vec{r}_0) = \left[[\vec{r}', \vec{j}(\vec{r}')], \vec{r}_0\right] + \vec{r}'(\vec{j}(\vec{r}'), \vec{r}_0);$$

$$\vec{j}(\vec{r}')(\vec{r}', \vec{r}_0) = \frac{1}{2}\vec{j}(\vec{r}')(\vec{r}', \vec{r}_0) + \frac{1}{2}[[\vec{r}', \vec{j}(\vec{r}')], \vec{r}_0] + \frac{1}{2}\vec{r}'(\vec{j}(\vec{r}'), \vec{r}_0)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\, i\omega \underbrace{\vec{p}}_{\vec{p}^{\,e}} + \frac{e^{-ikr}}{r}\, ik\left[\underbrace{\frac{\mu}{2c}\int[\vec{r}', \vec{j}(\vec{r}')]\, dv'}_{\vec{p}^{\,m}}, \vec{r}_0\right] +$$

$$+ \frac{e^{-ikr}}{r}\, ik\, \frac{\mu}{2c}\underbrace{\int_V \left\{\vec{r}'(\vec{j}(\vec{r}'), \underbrace{\vec{r}_0}_{\frac{\vec{r}}{r}}) + \vec{j}(\vec{r}')(\vec{r}', \underbrace{\vec{r}_0}_{\frac{\vec{r}}{r}})\right\} dv'}_{\vec{Q}};$$

Рассмотрим последний интеграл

$$Q_\alpha = \left(\int_V \left\{\vec{r}'(\vec{j}, \vec{r}_0) + \vec{j}(\vec{r}', \vec{r}_0)\right\} dv'\right)_\alpha = \int_V \left\{x_\alpha' \underbrace{(\vec{j}, \vec{r}')}_{j_\beta x_\beta}\frac{1}{r} + j_\alpha \frac{x_\beta x_\beta'}{r}\right\} dv' =$$

$$= \frac{x_\beta}{r}\int_V (x_\alpha' j_\beta + x_\beta' j_\alpha)\, dv' = \frac{x_\beta}{r}\int_V \vec{j}\, \nabla_{\vec{r}'}(x_\alpha' x_\beta')\, dv' =$$

$j_\beta \nabla_\beta x_\alpha' = j_\alpha$

$$= \frac{x_\beta}{r}\int_V \left\{ \mathrm{div}_{\vec{r}'}(x_\alpha' x_\beta' \vec{j}) - x_\alpha' x_\beta' \,\mathrm{div}_{\vec{r}'}\vec{j}\right\} dv' =$$

$$= \frac{x_\beta}{r}\left\{\underbrace{\oint_S x_\alpha' x_\beta' \vec{j}\, d\vec{s}'}_{} - \int_V x_\alpha' x_\beta' (-i\omega\rho)\, dv'\right. = \frac{i\omega}{r} x_\beta \underbrace{\int_V x_\alpha' x_\beta' \rho\, dv'}_{D_{\alpha\beta}}$$

$\hat{Q}$ - тензор квадрупольного момента ($\hat{Q} \equiv \hat{Q}^e$)

$$\frac{Q_{\alpha\beta} x_\beta}{r} = (\hat{Q}, \vec{r}_0)_\alpha, \quad (\vec{r}_0)_\beta = \frac{x_\beta}{r}; \quad (\vec{Q})_\alpha = i\omega(\hat{Q}\cdot\vec{r}_0)_\alpha$$

$$\vec{Q} = i\omega(\hat{Q}, \vec{r}_0)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r} i\omega \vec{p}^e + \frac{e^{-ikr}}{r} ik [\vec{p}^m, \vec{r}_0] + \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r} ik \cdot \frac{1}{2} i\omega (\hat{Q}, \vec{r}_0); \quad \vec{r}_0 = \vec{n}.$$

$|\vec{E}|, |\vec{B}| \sim k|\vec{A}|$

$\boxed{r \gg \lambda \gg l}$

$l \ll \lambda \le n\lambda \ll r$

$\vec{r}_0 = \sin\vartheta\cos\varphi\, \vec{x}_0 + \sin\vartheta\sin\varphi\, \vec{y}_0 + \cos\vartheta\, \vec{z}_0.$

$|\vec{p}^e| = \frac{|I|l}{\omega}$

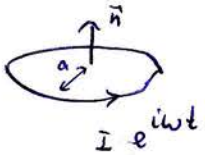
Таким образом дальнейшее разложение дает поле магнитного диполя и поле электрического квадруполя.

9.18

$R^{(0)}_{\Sigma g} \sim (k_0 l)^2$

$R^{(0)}_{\Sigma a} \sim (k_0 a)^2 (k_0 l)^4$

Поле элементарного магнитного диполя



- Рамка характеризуется магнитным моментом $\vec{p}^m = \frac{\mu}{c} I S \vec{n}$

относительно точки $\vec{p}^e_a = -\frac{i}{2c}\int_V [\vec{r}', \vec{j}(\vec{r}')]\, dV'$

$\vec{p}^e_a = -\frac{i}{c}\pi a^2 I \vec{n}$

Если $a \ll \lambda$, то поле рамки совпадает (при $r \gg a$) с полем элементарного магнитного диполя.

$R^{(0)} = \frac{2}{3c}\pi^2 (k_0 a)^2 \left[(k_0 a)^2 + \frac{N^2}{4}(k_0 b)^2\right]$

Поле магнитного диполя получается из формул для поля электрического диполя с помощью принципа перестановочной двойственности

$$\vec{p}^e \to \vec{p}^m, \quad \vec{E} \to \vec{H}, \quad \vec{H} \to -\vec{E},$$

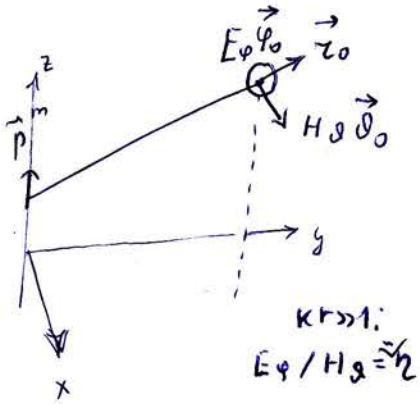
$$\varepsilon \to \mu, \quad \mu \to \varepsilon, \quad \eta \to \frac{1}{\eta}$$

Поле элементарного магн. диполя:

$$E_\varphi = -\left(\frac{ik_0}{r^2} - \frac{k_0 k}{r}\right) e^{-ikr} p^m \sin\vartheta,$$

$$H_r = \frac{1}{\mu}\left(\frac{2}{r^3} + \frac{2ik}{r^2}\right) e^{-ikr} p^m \cos\vartheta,$$

$$H_\vartheta = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right) e^{-ikr} p^m \sin\vartheta$$



$kr \gg 1$: $E_\varphi / H_\vartheta \simeq \eta$

Диаграмма направленности и мощность излучения:

$$\mathcal{D}^m = \frac{c}{8\pi}\frac{\eta}{\mu^2} k^4 |p^m|^2 \sin^2\vartheta, \quad k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu}, \quad p^m = \frac{\mu}{c} I \pi a^2.$$

$$P^m_\Sigma = \frac{1}{3} c \frac{\eta}{\mu^2} k^4 |p^m|^2 = \frac{1}{3} c \frac{\eta}{\mu^2} k^4 \frac{\mu^2}{c^2} |I|^2 (\pi a^2)^2 =$$

$$= \frac{|I|^2}{2} \underbrace{\frac{2}{3c}\eta\, \pi^2 (ka)^4}_{R^m_\Sigma};$$

$R_\Sigma = \frac{1}{c}\frac{2}{3}\eta (\varepsilon\mu)^2 \pi^2 (k_0 a)^4$

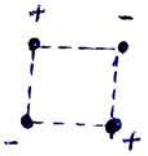
В вакууме: $R^{m(0)}_\Sigma = \frac{2}{3c}\pi^2 (k_0 a)^4.$

Если $a \sim l$, то

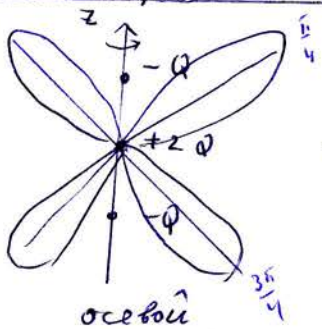
$R_\Sigma^m \ll R_\Sigma^e$.

Магнитный диполь излучает много хуже электрического, если линейные размеры обоих диполей одинаковы и одинаковы токи обоих излучателей.

О поле излучения электрического квадруполя.



электр. квадруполь



осевой квадруполь

— такая система излучает значительно хуже эл. диполя.

·) При произвольной системе источников, занимающих область с масштабом $l \ll \lambda$, поле можно считать результатом суперпозиции полей элементарных мультиполей, лежащих в начале координат.

··) Все диполи имеют различные диаграммы, но их поля в волновой зоне спадают одинаково $\sim \frac{1}{r}$.

∴) Вдали от области источников каждый мультиполь порождает сферическую волну. ($kr \gg n$ ($kr \gg n$))

∵) Чем выше порядок мультиполя, тем более „изрезана" его диаграмма (т.е. тем более острые лепестки диаграммы).

Можно создавать необходимую диаграмму, подбирая различные мультиполи.

К вопросу разложения полей на мультиполи можно подойти несколько иначе.

Разложение по сферическим функциям:

дает представление поля в виде сферич. волн, различающихся типом эл. распределения и поляризации

Сферические функции — это частные решения уравнения Гельмгольца в сферических координатах (r, ϑ, φ).

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0.$$

Частное решение имеет вид:

$$\psi(r,\vartheta,\varphi) = \underbrace{P_n^m(\cos\vartheta)}_{\text{присоединенная функция Лежандра}} \left[C_{1,m}\sin m\varphi + C_{2,m}\cos m\varphi\right]\left[A_{1,n} j_n(kr) + A_{2,n} n_n(kr)\right],$$

$\begin{cases} m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm n; \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$ j_n, n_n — сферические функции Бесселя и Неймана

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \quad m>0; \qquad P_n^{(-|m|)}(x) = (-1)^{|m|} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} P_n^{|m|}(x),$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n, \; m=0 \qquad (-|m|)<0;$$

$$P_n^0(x) = P_n(x), \; m=0;$$

При $kr \gg n$

$$\times\left[j_n(kr) \sim \frac{\cos kr}{r}, \quad n_n(kr) \sim \frac{\sin kr}{r} \right] \times$$

Сферические функции Ханкеля:

$$h_n^{(1)}(z) = j_n(z) + i\, n_n(z), \qquad h_n^{(2)}(z) = j_n(z) - i\, n_n(z).$$

При $kr \gg n$;

$$h_n^{(1)} \sim \frac{e^{ikr}}{r} \quad \text{(сходящаяся сферическая волна)}$$

$$h_n^{(2)} \sim \frac{e^{-ikr}}{r} \quad \text{(расходящаяся сферическая волна)}.$$

{Область $kr \gg n$ (n – номер мультиполя) называется волновой зоной n-го мультиполя.

Можно показать, что разложение по сферическим функциям эквивалентно разложению по мультиполям.

$$Y_{nm}(\vartheta,\varphi) = \left(\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right)^{1/2} P_n^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$$ – сферические гармоники

Джексон, Гл. 3 (§4,5), Гл. 16.

$$\left\{ g(\vartheta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_{nm} Y_{nm}(\vartheta,\varphi), \quad A_{nm} = \int g(\vartheta,\varphi)\, Y_{nm}^*(\vartheta,\varphi)\, d\Omega \right\}$$

Прим.:

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(z), \qquad n_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, N_{n+\frac{1}{2}}(z).$$

При целых n сферические функции становятся элементарными трансцендентными функциями:

$$j_0(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad h_0^{(1)}(z) = -\frac{ie^{iz}}{z}, \quad h_0^{(2)}(z) = \frac{ie^{-iz}}{z},$$

$$j_{-1}(z) = \frac{\cos z}{z}, \quad h_{-1}^{(1)}(z) = \frac{e^{iz}}{z}, \quad h_{-1}^{(2)}(z) = \frac{e^{-iz}}{z},$$

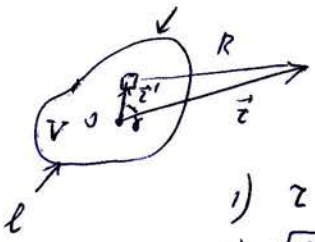
$$j_n(z) = z^n \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \frac{\sin z}{z};$$

$$n_n(z) = (-1)^{n+1} j_{-n-1}(z)$$

$$\begin{cases} kr \gg n \quad (r \gg n\lambda) \\ l \ll \lambda \leq n\lambda \ll r \end{cases}$$

Поле излучения произвольной системы заданных гармонических токов в дальней зоне

Опр.: Дальняя зона – это зона, где амплитуды полей $\vec{E}, \vec{H}$ убывают как $\frac{1}{r}$ (r – расстояние до области источников)



$O \in V$

l – характерный размер области источников

Пусть (при $O \in V$)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c}\int_V \vec{j}(\vec{r}\,')\frac{e^{-ikR}}{R}\,dv'$$

1) $r \gg l$;

2) $\frac{\sqrt{\lambda r}}{l} \gg 1$ (зона Фраунгофера)

3) $kr \gg n$, n – число вариаций тока в области источников (обычно $n \sim 1$) $[\mu \gg n\lambda]$

Совокупность условий 1)–3) определяют дальнюю зону произвольной системы заданных гармонических токов

Замечание: а) Если $\lambda \gg l$, то при выполнении условия 1) условие 2) выполняется автоматически

б) Произвольность – теперь отношение λ/l считаем произвольным.

$$R = r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma + \frac{r'^2}{r^2}}\ ; \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$$

$$R \approx r\left\{1 - \frac{r'}{r}\cos\gamma + \frac{r'^2}{2r^2} - \frac{1}{8}\,4\frac{r'^2}{r^2}\cos^2\gamma + \dots\right\} = r\left\{1 - \frac{r'}{r}\cos\gamma + \frac{1}{2}\frac{r'^2}{r^2}\sin^2\gamma + \dots\right\}$$

Условие 1): $\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r}$

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu}{c}\frac{1}{r}\int_V \vec{j}(\vec{r}\,')\,e^{-ikr + ikr'\cos\gamma - ik\frac{r'^2}{2r}\sin^2\gamma + \dots}\,dv'$$

(Теперь $|\vec{A}| \sim \frac{1}{r}$, но еще не поля)

$$\left|k\frac{r'^2}{2r}\sin^2\gamma\right| \le \frac{2\pi}{\lambda}\frac{l^2}{2r} = \pi\frac{l^2}{\lambda r}$$

Условие 2): $\pi\frac{l^2}{\lambda r} \ll \pi$

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\int_V \vec{j}(\vec{r}\,')\,e^{ikr'\cos\gamma}\,dv'$$

$\vec{k} = k\vec{n}$, $\vec{n} = \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$, $\quad kr'\cos\gamma = \vec{k}\cdot\vec{r}\,'$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c}\,\frac{e^{-ikr}}{r}\int_V \vec{j}(\vec{r}\,')\,e^{i\vec{k}\vec{r}\,'}\,dv'$$

$\vec{N}(\vec{k}) = \int_V \vec{j}(\vec{r}\,')\,e^{i\vec{k}\vec{r}\,'}\,dv'$ – вектор излучения

(пространственная Фурье – гармоника (составляющая) плотности тока)

$\vec{N}(\vec{k}) = N(\vartheta,\varphi)$, $k_x = k\sin\vartheta\cos\varphi$

$k_y = k\sin\vartheta\sin\varphi$

$k_z = k\cos\vartheta$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c}\,\frac{e^{-ikr}}{r}\,\vec{N}(\vartheta,\varphi)$$

Таким образом, в дальней зоне радиальная (r) и угловые переменные (ϑ,φ) разделяются

Вектор излучения $\vec{N}$ зависит от распределения источников и направления (ϑ,φ) на точку наблюдения.

Вычисление поля $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = \left[\nabla,\ \frac{\mu}{c}\,\frac{e^{-ikr}}{r}\,\vec{N}(\vartheta,\varphi)\right]$$

e^{-ikr} – существенно меняется на масштабе λ

$\frac{1}{r}$ – существенно меняется на масштабе $\sim O(r)$ ($r \gg \lambda$ в волновой зоне)

$\vec{N}(\vartheta,\varphi)$ – существенно меняется при $\Delta\vartheta_{изм},\ \Delta\varphi_{изм.} \sim \frac{\pi}{n}$, т.е.

$|\vec{N}|$

на масштабе $r\Delta\vartheta,\ r\Delta\varphi \sim \frac{\pi}{n}r$

$\frac{\pi r}{n} \gg \lambda$, т.к $kr \gg n$ ($2\pi r \gg n\lambda$)

Поэтому

$$\vec{B} \approx \left[\nabla e^{-ikr},\ \frac{\mu}{c}\,\frac{1}{r}\,\vec{N}\right] = \left[-i\vec{k},\ \vec{A}\right]$$

– данный результат означает, что поле в дальней зоне имеет вид локально плоской волны.

Данный результат можно получить более формально:

$$\vec{B} = \left(-ik - \frac{1}{r}\right)\Big[\vec{r}_0,\ \underbrace{\frac{\mu}{c}\,\frac{e^{-ikr}}{r}\,\vec{N}}_{\vec{A}}\Big] + \frac{\mu}{c}\,\frac{e^{-ikr}}{r}\,\mathrm{rot}\,\vec{N},$$

где

$$\mathrm{rot}\,\vec{N} = \vec{r}_0\,\frac{1}{r}\,\frac{1}{\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\,N_\varphi) - \frac{\partial N_\vartheta}{\partial\varphi}\right] + \vec{\vartheta}_0\,\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial N_r}{\partial\varphi} - \underbrace{N_\varphi}_{\frac{\partial}{\partial r}(rN_\varphi)}\right] + \vec{\varphi}_0\,\frac{1}{r}\left[\underbrace{N_\vartheta}_{\frac{\partial}{\partial r}(rN_\vartheta)} - \frac{\partial N_r}{\partial\vartheta}\right];$$

$$|\cot \vec{N}| \sim \frac{n|\vec{N}|}{r}$$

Поэтому при $kr \gg n > 1$

$$\vec{B} \approx -ik[\vec{r}_0, \vec{A}] = [-i\vec{k}, \vec{A}], \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

<u>Вычисление поля $\vec{E}$</u>

$$\vec{E} = -\frac{i}{k_0\varepsilon}\operatorname{rot}\vec{H} \approx -\frac{i}{k_0\varepsilon}[-i\vec{k}, \vec{H}] = \frac{k}{k_0\varepsilon}[\vec{H}, \vec{n}] = \eta[\vec{H}, \vec{n}]$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{B} = [-i\vec{k}, \vec{A}], \ \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \\ &\vec{E} = \eta[\vec{H}, \vec{n}], \ \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \end{aligned}}$$

$(\vec{E}, \vec{H}, \vec{n})$ — образуют в дальней зоне правую тройку

$|\vec{E}|, |\vec{H}| \sim \frac{1}{r}$

Если учитывать производные от медленно меняющихся сомножителей, то получатся члены более высокого порядка малости

$$\vec{E} \sim \frac{e^{-ikr}}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3}\right), \quad \vec{H} \sim \frac{e^{-ikr}}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Еще раз о диаграмме направленности

<u>Основные характеристики направленности излучающей системы:</u>

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}[\vec{E}, \vec{H}^*] = \frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}[\eta[\vec{H}, \vec{n}], \vec{H}^*] = \frac{c}{8\pi}\eta\left\{\vec{n}|\vec{H}|^2 - \vec{H}\underbrace{(\vec{n}, \vec{H}^*)}_{=0 \text{ в д. зоне}}\right\} =$$

$$= \frac{c}{8\pi}\eta|\vec{H}|^2\underset{\vec{n}}{\vec{r}_0}.$$

$$D = S_r r^2 = r^2\frac{c}{8\pi}\eta|\vec{H}|^2, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu}[-ik\vec{r}_0, \vec{A}] =$$

$$= \frac{1}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}(-ik)[\vec{r}_0, N_r\vec{r}_0 + N_\vartheta\vec{\vartheta}_0 + N_\varphi\vec{\varphi}_0] =$$

$$= \frac{1}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}(-ik)\left\{-\vec{\vartheta}_0 N_\varphi + \vec{\varphi}_0 N_\vartheta\right\}$$

$$|\vec{H}|^2 = \frac{1}{c^2}\frac{1}{r^2}k^2\left\{|N_\vartheta|^2 + |N_\varphi|^2\right\};$$

$$\boxed{D(\vartheta, \varphi) = \frac{\eta}{8\pi c}k^2\left\{|N_\vartheta(\vartheta, \varphi)|^2 + |N_\varphi(\vartheta, \varphi)|^2\right\}}$$

$D_{max} = D(\vartheta_{max}, \varphi_{max})$ — максимум диаграммы направленности.

$f(\vartheta, \varphi) = \dfrac{D(\vartheta, \varphi)}{D_{max}}$ – диаграмма направленности, нормированная на максимум

Коэффициент направленного действия

КНД – directivity

P_Σ – полная мощность излучения

4π – полный телесный угол

$(P_\Sigma / 4\pi)$ – средняя (по всем направлениям) излучаемая мощность

$$КНД = \frac{D_{max}}{P_\Sigma / 4\pi}$$

– это число (удобная характеристика, если диаграмма слишком сложна)

Для антенн:

$$КПД = \frac{P_{\Sigma\,излуч.}}{P_{подв.}} = \frac{P_\Sigma}{P_{подв.}}$$

КПД. efficiency

Коэффициент усиления (gain): $G = КПД \cdot КНД = \dfrac{D_{max}}{P_{подвод} / 4\pi}$

коэф. усил. – gain

Замечания о сверхнаправленной антенне (суперчейн):

$\Delta\vartheta \sim \dfrac{\lambda}{a}$

Обычно говорят, что для получения узкой диаграммы нужна антенна больших электрических размеров. Это верно только для антенн с синфазными токами (с синфазными распределениями поля на апертуре)

Можно создать антенну малых эл. размеров с узкой диаграммой. Для этого нужно лишь обеспечить высокую мультипольность источника (т.е. ток в обл. источников должен быть быстро меняющейся функцией координат) – низкая эффективность