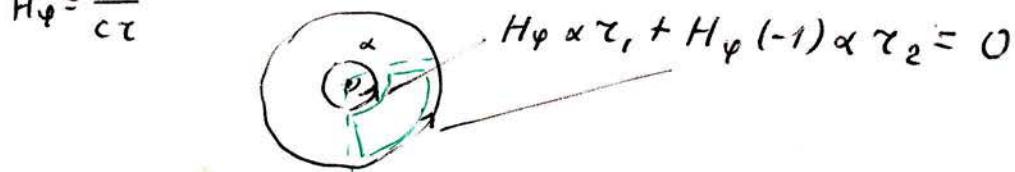
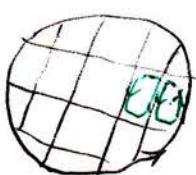
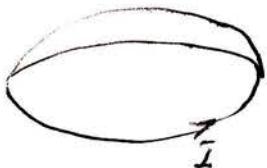


$$H_\varphi = \frac{2I}{c\tau}$$



Магнитный диполь как эквивалент магнитного контура с током.



Разобрана поверхность, катеноидную на контур, на электрическое поле.

каждый контур можно

представить как  $d\vec{p}^m = \frac{\mu}{c} I \vec{n} dS$

$$\vec{T}^m \equiv \vec{P}_{\text{поверхн}}^m = \frac{d\vec{p}^m}{dS} = \frac{\mu}{c} I \vec{n} - \text{поверхностная плотность линий дипольного момента}$$

$$\varphi^m = \frac{1}{\mu} \int_S \frac{(\vec{P}_{\text{поверхн}}^m, \vec{R})}{R^3} dS' \Leftrightarrow \varphi^e = \frac{1}{\epsilon} \int_S \frac{(\vec{P}_{\text{поверхн}}^e, \vec{R})}{R^3} dS'$$

Аналогия на „доске“ уравнений

Электростатика  
(все источ.)

$$\vec{E} = -\nabla \varphi^e$$

$$\varphi_2^e - \varphi_1^e = \frac{4\pi}{\epsilon} (\vec{T}, \vec{n}_{12})$$

Магнитостатика  
(все источ.)

$$\vec{H} = -\nabla \varphi^m$$

$$\varphi_2^m - \varphi_1^m = \frac{4\pi}{\mu} (\vec{n}_{12}, \vec{T}^m)$$



$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

граничные условия:

В отсутствие поверхн. токов:

$E_n$  - непрерывно  $\rightarrow$  "заряд"

$D_n$  - непрерывно

$H_n$  - непрерывно

$B_n$  - непрерывно

$$\begin{matrix} q^m \\ \uparrow \\ -q^e \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} q^m \\ \uparrow \\ -q^m \end{matrix} \equiv \int_{-q^m}^{q^m}$$

Магнитное заряды можно "разделить", тк  
они не разделяются

Аналогично можно проделывать введя магнитные заряды и магнитные токи:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{4\pi}{c} j^m$$

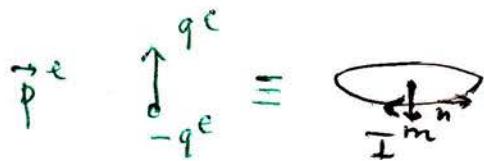
$$\text{div } \vec{D} = 4\pi \rho^e$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} j^e$$

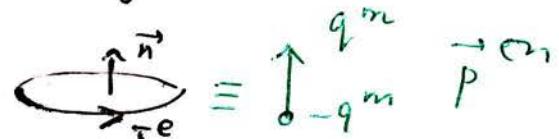
$$\text{div } \vec{B} = 4\pi \rho^m$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$



$$\vec{p}^e = -\frac{\epsilon}{c} I^m s \vec{n}$$

$$\vec{p}^e \rightarrow \vec{p}^m, I^m \rightarrow -I^e$$



$$\vec{p}^m = \frac{\mu}{c} I^e s \vec{n}$$

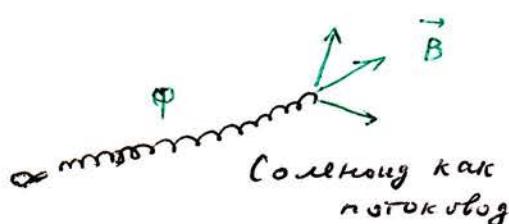
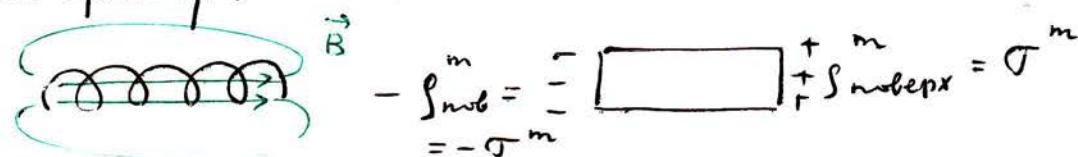
$$\vec{p}^m \rightarrow -\vec{p}^e, I^e \rightarrow I^m$$

Замечание:

$$\vec{p}^m = \frac{\mu}{2c} \int [ \vec{z}', \vec{j}^e(\vec{z}') ] dv', \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{j}^e \rightarrow \vec{j}^m, \vec{p}^m \rightarrow -\vec{p}^e, \mu \rightarrow \epsilon \\ \vec{j}^m \rightarrow -\vec{j}^e, \vec{p}^e \rightarrow \vec{p}^m, \epsilon \rightarrow \mu \end{array} \right.$$

$$\vec{p}^e = -\frac{\epsilon}{2c} \int [ \vec{z}', \vec{j}^m(\vec{z}') ] dv'$$

Еще один пример:



— Моделирование  
магнитного момента

Вот,

Магнитостатика  $\xleftarrow{\text{аналогия}}$  Динамическая электростатика

Поля, создаваемые намагниченными телами

При наличии постоянных магнитов:  $\vec{M} = \vec{M}^{cm}$  внешне намагнитое

$$\vec{j}^{cm,e} = \epsilon \text{rot} \vec{M}^{cm}$$

$$\text{При скачке: } c [\vec{n}_{12}, \vec{M}_2 - \vec{M}_1] = \vec{i}^{er} \cdot \vec{p}$$

①

$$\boxed{(1) \rightarrow (2)} \vec{M}^{cm} = \vec{M}_0$$

$$\vec{M}_1 = 0 \text{ (вне)} \\ \vec{M}_2 = \vec{M}_0 \text{ (внутри)}$$

$$\vec{i}^{cm,e} = c [\vec{n}_{12}, \vec{M}_0]$$

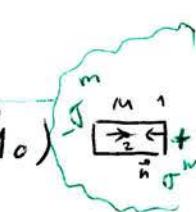
Таким образом, магнит эквивалентен  
сolenoid с током, текущим в одинаковом  
направлении с шагом = 0

(2) 

намагниченный шар

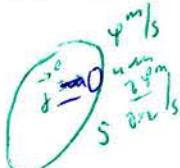
$$\vec{r}^{em,e} = c [\vec{n}_{12}, \vec{M}_0] - \text{токи } \vec{I}^{em,e} \text{ текут по циркулю}$$

Задача на задачи.  $\delta^m = -\operatorname{div} \vec{M}$ ,  $\sigma^m = -(\vec{n}_{12}, \vec{M}_2 - \vec{M}_1)$ ,  $\sigma^m = (\vec{n}_{12}, \vec{M}_0)$



### Единственность решения задачи магнитостатики (занесение)

1) В скользящем описании ( $\varphi^m$ ) фронтальная поверхность как в электростатике, но нет упоминания о приборниках в условиях теории.



2) при описании через  $\vec{A}$ :

внутри объема задаем  $\vec{j} = \vec{J}$ ,  
на границе — либо  $\vec{A}/s$ , либо  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial n}/s$ .

Это задание  
эквивалентно  
заданию  $\vec{B}^m$

Вместо  $\vec{B}^m$  можно  
задать  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial n}$ , если можно  
погрешность на границе  $A_n = 0$   
(так всегда можно сделать, когда  $\vec{J} \in V^{<\infty}$ )

Для погрешности  
найдем  $\operatorname{div} [\vec{A}_3, \vec{H}_3] = \vec{H}_3 \operatorname{rot} \vec{A}_3 -$   
 $- \vec{A}_3 \operatorname{rot} \vec{H}_3$

$\int \vec{J}^{(1)} \vec{A}^{(2)} dv = \int \vec{J}^{(2)} \vec{A}^{(1)} dv$  (см. о.о./нн)

### Преобразование взаимности

  $\int_v \rho^{m(1)} \varphi^{m(2)} dv = \int_v \rho^{m(2)} \varphi^{m(1)} du$  или

$\rho^m = -\operatorname{div} \vec{M}$  — при наличии намагниченности

$$\int_v \rho^{m(1)} \varphi^{m(2)} dv = - \int_v \operatorname{div} \vec{M}^{(1)} \varphi^{m(2)} du =$$

$$= - \int_v \left\{ \operatorname{div} (\varphi^{m(2)} \vec{M}^{(1)}) - (\nabla \varphi^{m(2)}, \vec{M}^{(1)}) \right\} dv =$$

$$= - \oint_{\Gamma} \varphi^{m(2)} \vec{M}^{(1)} d\vec{s} + \int_v \nabla \varphi^{m(2)} \vec{M}^{(1)} dv = - \int_v \vec{M}^{(1)} \vec{H}^{(2)} du.$$



$$\text{rot } \vec{H} = [J, \vec{A}] = \vec{A}'' - J'' \vec{A}$$

$$(\text{rot } \vec{H})_{\perp} = J'' \vec{A} - \vec{A}'' J = \vec{A}'' \vec{A} - J'' \vec{A}^2$$

(Anwendung) Anwendung der Vektoranalysis auf die Elektrodynamik

Die elektromagnetischen Wellen sind die Lösungen des Maxwell-Gleichungssystems

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \vec{J} \quad \text{die Vektoren } \vec{A} \text{ und } \vec{J} \text{ sind -vektoren}$$

Lösungsweg:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}^{(1)} \cdot \vec{A}^{(2)}$$

$$\text{rot } \vec{H}^{(2)} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}^{(2)} \cdot \vec{A}^{(1)}$$

$$\vec{A}^{(2)} \text{rot } \vec{H}^{(1)} - \vec{A}^{(1)} \text{rot } \vec{H}^{(2)} = \frac{4\pi}{c} (\vec{J}^{(1)} \vec{A}^{(2)} - \vec{J}^{(2)} \vec{A}^{(1)})$$

$$\text{div } [\vec{A}^{(1)}, \vec{H}^{(2)}] = \vec{H}^{(2)} \underbrace{\text{rot } \vec{A}^{(1)}}_{\mu \vec{A}^{(1)}} - \vec{A}^{(1)} \text{rot } \vec{H}^{(2)} -$$

$$\text{div } [\vec{A}^{(2)}, \vec{H}^{(1)}] = \vec{H}^{(1)} \underbrace{\text{rot } \vec{A}^{(2)}}_{\mu \vec{A}^{(2)}} - \vec{A}^{(2)} \text{rot } \vec{H}^{(1)}$$

$$\text{div } [\vec{A}^{(1)}, \vec{H}^{(2)}] - [\vec{A}^{(2)}, \vec{H}^{(1)}] = \vec{A}^{(2)} \underbrace{\text{rot } \vec{H}^{(1)}}_{\mu \vec{A}^{(1)}} - \vec{A}^{(1)} \underbrace{\text{rot } \vec{H}^{(2)}}_{\mu \vec{A}^{(2)}}$$

$$\int_V (\vec{J}^{(1)} \vec{A}^{(2)} - \vec{J}^{(2)} \vec{A}^{(1)}) dV = \frac{c}{4\pi} \oint_{S_R} \{ [\vec{A}^{(1)}, \vec{H}^{(2)}] - [\vec{A}^{(2)}, \vec{H}^{(1)}] \} dS.$$

$\underbrace{S_R}_{R \rightarrow \infty \rightarrow 0} \sim R^2$

$$\int_v \vec{M}^{(1)} \vec{H}^{(2)} dv = \int_v \vec{M}^{(2)} \vec{H}^{(1)} dv - \text{половая формулировка теоремы взаимности}$$

Если сде.  $V$  макс., то

$$\int_v \vec{M}^{(1)} \vec{H}^{(2)} dv \approx \vec{H}^{(2)}(1) \underbrace{\int_v \vec{M}^{(1)} dv}_{\vec{P}} , \quad \int_v \vec{M}^{(2)} \vec{H}^{(1)} dv = \vec{P}^{(2)} \vec{H}^{(1)}(2)$$

Имеем

$$\vec{P}^{(1)} \vec{H}^{(2)} = \vec{P}^{(2)} \vec{H}^{(1)}(2)$$

## Методы решения краевых задач

### Конструктивные методы

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} \rightarrow \frac{\mu_1 \begin{matrix} q_m \\ \uparrow \vec{P} \end{matrix}}{\mu_2 \begin{matrix} -q_m \\ \uparrow \vec{P} \end{matrix}} \Leftrightarrow \frac{\epsilon_1 \begin{matrix} q^e \\ -q^e \end{matrix}}{\epsilon_2 \begin{matrix} q^e \\ \uparrow \vec{P}^e \end{matrix}}$$

Эквивалентная  
дипольная  
структуре

$$\frac{\mu_1 \rightarrow \infty}{\mu_2}$$

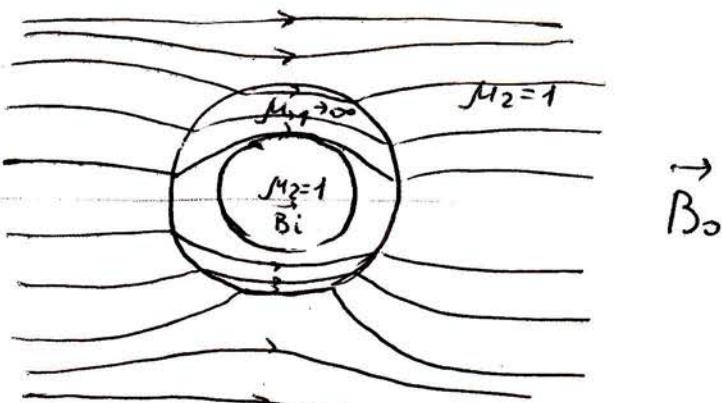
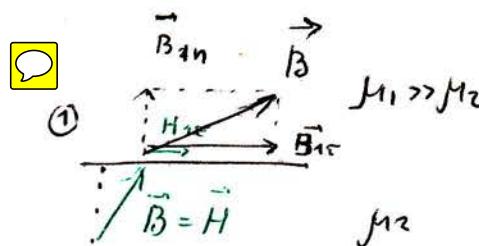
$H_T$  - непрерывно

$B_n$  - непрерывны

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

$$\downarrow \infty \quad \text{коэффиц.}$$

$$H_{1n} = 0$$



Экранирующее действие оболочки с высоким значением  $\mu$

$$\frac{|B_i|}{|B_0|} \approx \frac{\mu_2}{\mu_1} \ll 1 \quad (\mu_1 \gg \mu_2)$$

$$\frac{\mu_1 \rightarrow 0}{\mu_2}$$

$$\mu_2 H_{2n} = \mu_1 H_{1n}$$

↓ ↓  
коэффиц.

$$H_{2n} = 0 \quad (H_n = 0 - \text{на границе с } \mu = 0)$$

В случае переменных постей на границе

с идеальными проводниками  $H_n=0$  ( $B_n=0$ ) и  $E_\tau=0$ .

Постоянно в вакуумных задачах переход к идеальному проводнику эквивалентен  $\epsilon \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0$ .

### О методе заполнения

Если заполнение идет вдоль симметрических трубоок ( $\nabla \mu \perp \vec{H}, \vec{B}$ ), то сохраняется структура  $\vec{H}$  (Нг - непр.).

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I \quad \rightarrow \text{при сохранении неизменности} \quad (I_{\text{норм.}})$$

$\hookrightarrow$  потоков сохраняется и значение  $\vec{H}$

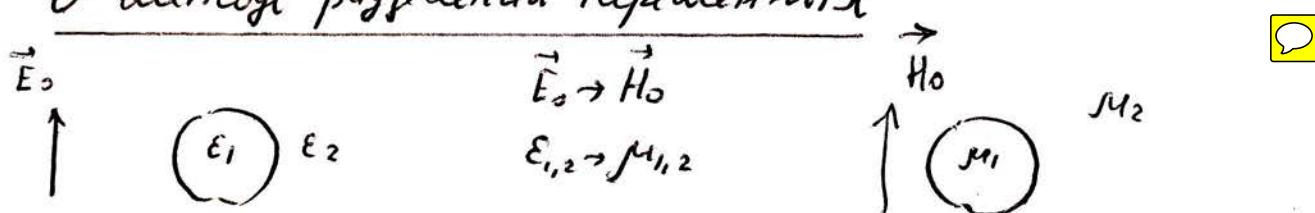
Если заполнение идет вдоль эквипотенциалей ( $\nabla \mu \parallel \vec{H}, \vec{B}$ ), то сохраняется структура  $\vec{B}$  (т.к.  $B_n$  - непр.).

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \Psi - \text{поток} \rightarrow \text{при сохранении неизменности} \quad (\Psi_{\text{зап.}})$$

$\hookrightarrow$  потоков сохраняется значение  $\vec{B}$

Метод итераций свергается с трудностями в магнетостатике,  
метод конформ. преобр. - привлекает.

### О методе разделения переменных



$$\tilde{p}^0 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \epsilon_2 \alpha^3 \tilde{E}_0$$

Здесь сходные  
и граничные  
условия

$$\tilde{p}^m = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} \mu_2 \alpha^3 \tilde{H}_0$$

$\frac{\partial}{\partial t} : \tilde{p}^m = \frac{1}{2} \alpha^3 \tilde{H}_0$

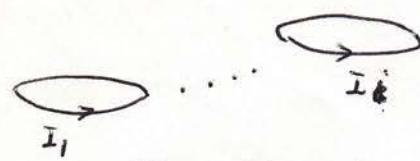
Метод возмущений - аналогичен в магнетостатике

аналогично задачам электростатики.

$$\mu_2 = 0 \quad (\text{случай})$$

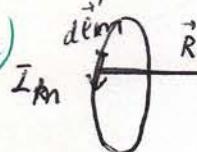
Поле системы квазимгнитных контуров токов.

Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции.



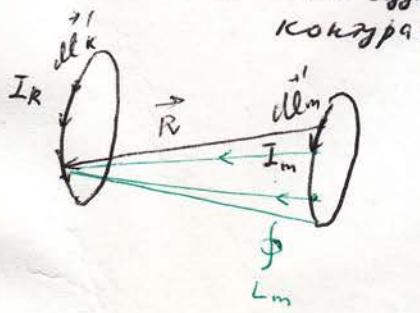
Положительное направление обхода контура совпадает с направлением тока в этом контуре

(При положительном направлении можно устремовать произвольно, но тогда  $I_k$  будет иметь противоположный знак)



Рассмотрим поток  $\Phi_k$  через  $k$ -ий контур

$$\Phi_k = \oint_{L_k} \vec{A} d\vec{l}_k = \oint_{L_k} \sum_m \vec{A}_m d\vec{l}_k = \sum_m \Phi_{km} =$$



поле создается всеми контурами

$$\begin{aligned} &= \sum_m \oint_{L_k} \vec{A}_m d\vec{l}_k = \sum_m \oint_{L_k} \left( \frac{\mu}{c} \oint_{L_m} \vec{I}_m d\vec{l}_m \right) d\vec{l}_k = \\ &= \frac{1}{c} \sum_m I_m \cdot \mu \oint_{L_k} \oint_{L_m} \frac{d\vec{l}_k d\vec{l}_m}{R} = \end{aligned}$$

Определение  $L_{km}$

$$\begin{aligned} \Phi_{ik} &= \sum_m \Phi_{km} \\ \Phi_{km} &= \frac{1}{c} \oint_{L_{km}} I_m \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{c} \sum_m I_m L_{km},$$

$$z g e L_{km} = \mu \oint_{L_k} \oint_{L_m} \frac{d\vec{l}_k d\vec{l}_m}{R}, \quad L_{km} = L_{mk}, \quad (*)$$

Возложение для  $L_{km}$

$$L_{km} =$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{коэффициент самоиндукции, если } k=m \\ \text{коэффициент взаимной индукции} \end{array} \right.$



$$V_k I_k$$

$$V_m I_m$$

$$: \Rightarrow$$

$$J_k d\vec{v}_k = I_k d\vec{l}_k, \quad J_m d\vec{v}_m = I_m d\vec{l}_m$$

Поток индукции через контур:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S \text{rot} \vec{A} d\vec{S} = \oint_L \vec{A} d\vec{l}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{c} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') d\vec{v}'}{R}$$

$$\vec{J} d\vec{v}' = I d\vec{l}'$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{c} \sum_m I_m \oint_{L_m} \frac{d\vec{l}_m}{R} = \sum_m \vec{A}_m$$

последний, создаваемый  $m$ -ым контуром

$$\vec{A}_m = \frac{\mu}{c} I_m \oint_{L_m} \frac{d\vec{l}_m}{R}$$

Потоки не складываются

$$L_{km} = \mu \frac{1}{I_k I_m} \int \int \frac{\vec{J}_k \vec{J}_m d\tau_k d\tau_m}{R} \quad (*)$$

Для магнитного контура  $(*)$   $\rightarrow$  гаев бесконечное значение  $I_{kk}$  (т.к. это не учитывает распределение тока <sup>по проводнику</sup> — непрерывность изолирующей). Порядок  $(*)$  гаев заслуживает внимания.

$$\Phi_{km} = \frac{1}{c} L_{km} I_m$$

некоторый разрез  $k$ -ой контура, создаваемый налетом тока  $I_m$  в  $m$ -ом контуре

$L_{km}$  — есть некоторый разрез  $k$ -ой контура, создаваемый налетом тока  $I_m$ , равного на величине  $C$ .

Энергия и сила в постоянном магнитном поле

Представление энергии имеет вид в виде интеграла по обл. дифференциал.

$$W^m = \frac{1}{8\pi} \int \int \vec{B} \vec{H} d\tau = \frac{1}{8\pi} \int \int \vec{H} \text{rot} \vec{A} d\tau = \frac{1}{8\pi} \int \int \left\{ \text{div} [\vec{A}, \vec{H}] + \vec{A} \underbrace{\text{rot} \vec{H}}_{\text{из}}$$

$$\text{div} [\vec{A}, \vec{H}] = \vec{H} \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \text{rot} \vec{H}$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int \int \int \vec{A} \vec{H} dS + \frac{1}{2C} \int \int \vec{A} \vec{H} d\tau$$

$$S_R \frac{1}{1/R^2} \frac{1}{1/R^3}$$

Получим представление энергии в виде интеграла по областям источников:

$$W^m = \frac{1}{2C} \int \int \vec{B} \vec{H} d\tau$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c} \int \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} d\tau'$$

$$W^m = \frac{\mu}{2C^2} \int \int \int \int \frac{\vec{J}(\vec{r}) \vec{J}(\vec{r}')}{R} d\tau d\tau'!$$

Исходя из этой формулы можно показать, что энергия сосредоточена в контурах с током. Это не так. Для этого, что в центре контура силы  $\vec{B}$  и гравитационные не противостоят.

$$W^m = \frac{1}{2C^2} L I^2; L = \frac{\mu}{I^2} \int \int \int \int \frac{\vec{J}(\vec{r}) \vec{J}(\vec{r}')}{R} d\tau d\tau' \vec{J}(\vec{r}) \vec{J}(\vec{r}')$$

Это один из тот же ток, который в первых терминах

$$W^m = \frac{1}{2C} \int \vec{J} \cdot \vec{A} dv = \frac{1}{2C} \sum_k I_k \oint \vec{A} dl_k = \boxed{\frac{1}{2C} \sum_k I_k \varphi_k} \quad ||$$

$$= \frac{1}{2C} \sum_k I_k \underbrace{\sum_m \varphi_{km}}_{\varphi_k} =$$

$$= \frac{1}{2C^2} \sum_{k,m} L_{km} I_k I_m . \quad \text{Здесь нужно: } \varphi_{km} = \frac{1}{C} L_{km} I_m$$

$$W^m = \frac{1}{2C^2} \sum_{k,m} L_{km} I_k I_m - \text{отсюда тоже можно найти}$$

$$W^m = \frac{1}{2C^2} \cdot \left( \int \vec{J} (\vec{F}) \vec{I} (\vec{F}) dv \right) I^2$$

Собственная энергия и энергия взаимодействия  
конупров (с фикс. токами)

$k=m$  - only

$$W^m = \frac{1}{2C^2} \sum_{k,m} L_{km} I_k I_m = \underbrace{\frac{1}{2C^2} \sum_m L_{mm} I_m^2}_{W_{\text{сост}}} +$$

$$+ \frac{1}{2C^2} \sum_{k,m} L_{km} I_k I_m .$$

$$\underbrace{W^m_{\text{взаим}}}_{(k \neq m)}$$

Пример:  $k, m = 1, 2$

$$W^m = \frac{1}{2C^2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2C^2} L_{22} I_2^2 + \underbrace{\frac{1}{2C^2} (L_{12} I_1 I_2 + L_{21} I_2 I_1)}_{2 L_{12} I_1 I_2}, \text{т.к. } L_{km} = L_{mk}$$

Тогда  $W^m_{km}$  - энергия взаимодействия  $k$ -го и  $m$ -го конупров ( $\sum_{m=2}^{k-1}$ )

Тогда

$$W^m_{km} = \frac{1}{C^2} L_{km} I_k I_m = \frac{1}{C} I_k \underbrace{\varphi_{km}}_{\text{поток от } m\text{-го конупра}} - \text{энергия взаимодействия } k\text{-го и } m\text{-го конупров}$$

$$W^m_{12} = \frac{1}{C^2} L_{12} I_1 I_2 = \frac{1}{C} I_1 \varphi_{12}$$

(т.е. полезный поток)

Пусть теперь во внешнее поле вносится контур с током  $I$  (причем при внесении ток не сразу посторонний).

9

Если внешнее поле создает через контур поток  $\Phi$ , то энергия взаимодействия контура с полем равна

$$W_{EJ} = \frac{1}{c} I \Phi.$$

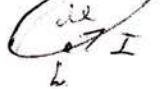
$$I_K = I, P_{km} = \Phi_0$$

$$\vec{E} = \vec{E} + \vec{E}^{cm}; \oint \vec{E} d\vec{l} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\vec{E} = \vec{I} - \vec{E}^{cm}$$

$$RI - E^{cm} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

**Задача:** о потоке магн. поля через контур, образованный из квадр. провод. [контур с током  $I$  в внешнем поле.]



$$I = \frac{1}{R} (E_{ind} + E^{cm})$$

стороннее ЭДС  
(датчик)

$$E_{ind} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\text{Здесь } \Phi = \Phi_{ext} + \Phi_{new}$$

$$\text{rot } \vec{E}_{ind} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\int \text{rot } \vec{E}_{ind} d\vec{s} = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{s}$$

$$\oint \vec{E}_{ind} d\vec{l}$$

$$\Phi$$

Если система консервативна,  
то  $E^{cm} = 0$ .

Т.к.  $R = \infty$ , то для консервации тока требуется  $E_{ind} + E^{cm} = 0$

а) Если  $E^{cm} = 0$ , то  $E_{ind} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ , т.е.

$\Phi = \text{const}$  ( $I$  - меняется, но остается консерв.)

{При движении идеально проводящего замкнутого провода в магнитном поле остается постоянным магнитный поток, пронизывающий контур провода (теорема о сохр.магн. потока),  $\Phi_{ext}$  и  $\Phi_{new}$ -меняются, но  $\Phi_{ext} + \Phi_{new} = \text{const}$  следствие правила Ленца

б) Если  $\left\{ \begin{array}{l} E^{cm} \neq 0, \\ E^{cm} = -E_{ind} \end{array} \right.$  - для подтверждения

постоянства токов  
необходимо ввести

**?**  
 $\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$  (I=const)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t}, \text{ т.к.}$$

сторонние ЭДС, которые об

в каждом момент

времени уравновешиваются

ЭДС индукции

$$\Delta t = \frac{I}{c} \frac{(\Delta \Phi)}{L} \quad \boxed{E^{cm} = \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t}} \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} / L, \text{ т.к.} \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \text{ неизм.}$$

# Энергетический метод расчета обобщенных сил в магнитостатике



Рассмотрим получение выражения для силы, действующей в системе замкнутых квазистационарных контуров с постоянными потоками или токами.

В консервативной системе ( $\mathcal{E}^{cm}=0$ ):  $\delta A = -(\delta W^m)_\varphi$

< по аналогии с  $\delta A = -(\delta W^e)_Q$  >

$$F_\alpha \delta \varphi_\alpha \equiv \delta A = -(\delta W^m)_\varphi \Rightarrow F_\alpha = -\left( \frac{\delta W^m}{\delta \varphi_\alpha} \right)_\varphi$$

Величина  $W^m$  можно придать смысл свободной энергии  $F = U - TS$   
(изотермич. процесс!)

В неконсервативной системе ( $\mathcal{E}^{cm} \neq 0$ ):  $\delta A = -\delta W^m + \delta P = -\delta(W^m - P)_I$

Для поддержания в каждом витке постоянного тока, необходимо, чтобы для этого витка  $-\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathcal{E}^{cm} = 0$ , где  $\varphi$ -переход виток.

Другими словами, внешние электродвигающие силы  $\mathcal{E}^{cm}$  должны в каждом момент уравновешивать ЭДС индукции, возникающие в ходе квазистационарного процесса.

$$\delta P = \int_{dt} \mathcal{E}^{cm} I dt = \int \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} I dt = \frac{1}{c} I \int d\varphi_0 \frac{1}{c} I \Delta \varphi_0 = (\Delta \varphi)_I \quad (\text{т.к. } I = \text{const})$$

Для виртуальных перемещений имеем, что виртуальная работа внешних (сторонних) ЭДС равна

$$(\delta P)_I = \frac{1}{c} I (\delta \varphi)_I - \text{в одном витке.} \quad (\delta \varphi)_I = (\delta \varphi_k)_I$$

При наличии системы витков:

$$(\delta P)_I = \frac{1}{c} \sum_k I_k (\delta \varphi_k)_I, \text{ где } \varphi_k \text{-} \underline{\text{постоянны}} \text{ поток через } k\text{-ий контур}$$

(от  $k$ ,  $n = 2h$ )

$$W^m = \frac{1}{2c} \sum_k I_k \varphi_k$$

$$\varphi_k = \sum_m \varphi_{km} = \sum_m \frac{1}{c} L_{km} I_m \quad (\text{Morga})$$

$$(\delta W^m)_I = \delta \left( \frac{1}{2c} \sum_k I_k \varphi_k \right)_I = \frac{1}{2c} \sum_k I_k (\delta \varphi_k)_I$$

$$-\delta(W^m - P)_I = -(\delta W^m)_I + (\delta P)_I = -\frac{1}{2c} \sum_k I_k (\delta \varphi_k)_I + \frac{1}{c} \sum_k I_k (\delta \varphi_k)_I = (\delta W^m)_I$$

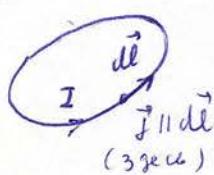
Понятие

$$\delta A = -\delta (W^m P)_I = (\delta W^m)_I \Rightarrow F_\alpha = \left( \frac{\delta W^m}{\delta \xi_\alpha} \right)_I$$

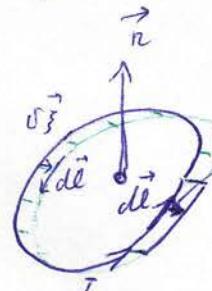
$\delta A \delta F_\alpha$

Пример

- ① Сила действующая на элемент квазимагнитного контура с током:



Возможное виртуальное  
перемещение  
элемента контура



$\delta \vec{\xi}$  - виртуальное  
перемещение  
элемента  
контура  
(как угодно)

$d\vec{F}$ - сила действующая на элемент  $dl$  с током  $I$ .

$$\delta A = \oint \delta \vec{\xi} d\vec{F} = (\delta W^m)_I, \quad W_{B_0}^m = \frac{1}{c} I \varphi_0, \quad \varphi_0 - поток  
во внешнем \quad \left. \begin{array}{l} \text{поток} \\ \text{заряда} \\ \text{не меняется} \end{array} \right\} \varphi_{\text{const.}}$$

$$(\delta W^m)_I = \frac{1}{c} I \delta \varphi_0 = \frac{1}{c} I \oint [\delta \vec{\xi}, dl] \vec{B}_0 = \frac{1}{c} I \oint [dl, \vec{B}_0] \delta \vec{\xi}.$$

$\boxed{dS = |\delta \vec{\xi}, dl|}$

$\vec{B}_0 = \vec{B}_0 \text{ (бес.н.)}$   
 $(\delta \varphi_0 / \varphi_0)_I$   
 $\varphi_0 = \varphi_0 + \varphi_{\text{const.}}$   
 не меняется  
 поток  
 $\approx I - \text{не}$   
 $\text{изменяется}$   
 $(\text{т.е. } \varphi_0 \text{ не мен.})$

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{\xi} = \oint d\vec{F} \cdot \delta \vec{\xi} = \oint \frac{I}{c} [dl, \vec{B}_0] \cdot \delta \vec{\xi}$$

$$\boxed{d\vec{F} = \frac{I}{c} [dl, \vec{B}_0]} \Rightarrow \vec{F} = \oint \frac{I}{c} [dl, \vec{B}_0] = \oint \frac{I}{c} [dl, \vec{B}] \quad \boxed{dS = \vec{B}_0 + \vec{B}_0}$$

- ② Общая формула силы в магнитном поле:

$$Idl = \vec{j} du$$

$$d\vec{F} = \frac{[\vec{j}, \vec{B}]}{c} dv;$$

$$\vec{f} = \frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{B}]$$

$$d\vec{F} = \vec{f} du$$

$$\delta(F - \vec{F}(t))$$

Всегда глухи, за исключением:  $\vec{j} = qv \times \vec{B}$ ,  $\vec{f} = \frac{q}{c} [\vec{v}, \vec{B}]$

При этом образуются однородные векторные поля:

$$\vec{f}_1 = q \vec{E}_0 + \frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{B}_0]$$

$$\int \frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{B}_0] dv = \int \frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{B}_0] dv$$

$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_0$

③ Curci, действующий на биток (магнитной группе).

Вращающийся момент, действующий на биток.

$$W_{\theta_3}^m = \frac{1}{c} I \varphi_0, \varphi_0 = \varphi_0 - \text{угол вращения нормали } \vec{B}.$$

$$I = \text{const}, \quad \varphi_0 = \text{const}$$

$$W_{\theta_3}^m = \frac{1}{c} I \varphi_0 = \frac{I}{c} (\vec{B}, \vec{n}) S = \left( \mu \frac{I}{c} S \vec{n}, \vec{H}_0 \right) = (\vec{p}_H^m, \vec{H}_0) = (\vec{p}_H^m, \vec{B}_0)$$

указ, что  
биток мал.

беск. мал.

$$\vec{p}_H^m = \frac{\vec{p}^m}{\mu}.$$

Дано "о"  
не писали  
записки

$$\vec{F} = (\nabla W_{\theta_3}^m)_I = \nabla (\vec{p}_H^m, \vec{B}) = [\vec{p}_H^m, \underbrace{\text{rot } \vec{B}}_{\text{если } \text{rot } \vec{H} = 0}] + [\vec{B}, \underbrace{\text{wt } \vec{p}_H^m}_{\text{"!"}}] + (\vec{B}, \nabla) \vec{p}_H^m +$$

$$+ (\vec{p}_H^m, \nabla) \vec{B}.$$

Мы имеем  
дело с внешними  
постоянными, ток которых  
работает в неизмененном  
расположении группе

$$\vec{F} = (\vec{p}_H^m, \nabla) \vec{B} = (\vec{p}^m, \nabla) \vec{H}.$$

$$\text{Момент силы: } N = (\vec{F})_3 = \left( \frac{\partial W_{\theta_3}^m}{\partial \theta} \right)_I = \frac{\partial}{\partial \theta} p_H^m B_0 \cos \theta = - p_H^m B_0 \sin \theta$$

$$\begin{array}{c} \vec{N} \\ \otimes \vec{p}^m \end{array} \xrightarrow{-q^m} \vec{B}$$

$$\vec{N} = [\vec{p}_H^m, \vec{B}_0] = [\vec{p}^m, \vec{H}_0]$$

④ Отличия постоянства гидромагнитной силы в магнетике:

$$\vec{f} = (\vec{M}, \nabla) \vec{B} = \frac{\mu-1}{4\pi} (\vec{H}, \nabla) \vec{H} = \frac{\mu-1}{8\pi} \nabla \vec{H}^2 - \text{сторона} \quad (*)$$

$\mu > 1$  - магнитик втягивает  $\vec{B}$   
(прав.) в сущест. поле

$\mu < 1$  - магнитик отталкивает поле

(левая) В гидромагнитоструктурном случае:  $\langle \tau \text{-постоянство среды} \rangle$

$$\vec{f} = \frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{B}] + \frac{1}{8\pi} \nabla \left( \tau \frac{\partial M}{\partial T} \vec{H}^2 \right) - \frac{\vec{H}^2}{8\pi} \nabla M. \quad \text{В случае } \mu = 1 + CT \quad \begin{array}{l} \text{постоянна} \\ \text{среда} \\ \text{и структура} \end{array}$$

также  $\tau \frac{\partial M}{\partial T} = \mu - 1$ , и получаем:  $\vec{f} = \frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{B}] + \frac{\mu-1}{8\pi} D \vec{H}^2$ .

Замечание: Сложение отдельных сил к поверхности можно наложить:

$$\vec{F} = \int \vec{f} d\sigma. \quad \text{Введем тензор поверхности напряжений } \vec{T}: \quad \vec{f} = d\sigma \cdot \vec{T}.$$

$$\vec{F} = \int d\sigma \vec{T} d\sigma = \oint \vec{T} dS = \oint (\vec{T}, \vec{n}) dS \equiv \oint \vec{T} \text{ноб} dS.$$

$\vec{T}$  - curci, действующий на  $dS$   $\vec{dS}$   $\vec{T}$  ноб

Сведение обобщенных сил к поверхности  
напоминает в магнитостатике.

$$\vec{f} = \int \vec{f} dv, \text{ где } \vec{f} = \frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{B}] + \frac{1}{8\pi} \nabla (\vec{H}^2 \frac{\partial \mu}{\partial t} \tau) - \frac{1}{8\pi} \vec{H}^2 \nabla \mu.$$

$$\vec{f} = dv \hat{T}; \quad \vec{f} = \vec{f}' + \vec{f}''; \quad \hat{T} = \hat{T}' + \hat{T}''$$

$$\vec{f}^{nob} = \hat{T} \vec{n}$$

$$\vec{f}'' = \frac{1}{8\pi} \nabla (\vec{H}^2 \frac{\partial \mu}{\partial t} \tau);$$

$$\hat{T}'' = \frac{1}{8\pi} \vec{H}^2 \frac{\partial \mu}{\partial t} \tau \hat{I}.$$

$$\vec{f}'' \stackrel{\beta \text{ электростатике}}{=} \frac{1}{8\pi} \nabla (\vec{E}^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \sigma),$$

$$\hat{T}'' = \frac{1}{8\pi} \vec{E}^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \sigma \hat{I}.$$

$$\vec{f}' = \frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{B}] - \frac{1}{8\pi} \vec{H}^2 \nabla \mu = \frac{\mu}{4\pi} [\text{rot} \vec{H}, \vec{H}] - \frac{1}{8\pi} \vec{H}^2 \nabla \mu =$$

$$\frac{c}{4\pi} \text{rot} \vec{H} \stackrel{\mu \vec{H}}{\sim} = - \frac{\mu}{4\pi} [\vec{H}, \text{rot} \vec{H}] - \frac{1}{8\pi} \vec{H}^2 \nabla \mu;$$

$$\nabla(\vec{H}, \vec{H}) = 2 [\vec{H}, \text{rot} \vec{H}] + 2(\vec{H}, \nabla) \vec{H};$$

$$- [\vec{H}, \text{rot} \vec{H}] = - \frac{1}{2} \nabla \vec{H}^2 + (\vec{H}, \nabla) \vec{H};$$

$$\vec{f}' = - \underbrace{\frac{\mu}{8\pi} \nabla \vec{H}^2}_{\sim} + \underbrace{\frac{\mu}{4\pi} (\vec{H}, \nabla) \vec{H}}_{\sim} - \underbrace{\frac{1}{8\pi} \vec{H}^2 \nabla \mu}_{\sim} = \frac{\mu}{4\pi} (\vec{H}, \nabla) \vec{H} - \frac{1}{8\pi} \nabla (\mu \vec{H}^2).$$

$$f'_x = \underbrace{\frac{\mu}{4\pi} (\vec{H}, \nabla) H_x}_{\sim} - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \vec{H}^2),$$

$$\text{div}(H_x \vec{B}) = H_x \text{div} \vec{B} + (\nabla H_x, \vec{B}) = (\vec{B}, \nabla) H_x = \underbrace{\mu (\vec{H}, \nabla) H_x}_{\sim};$$

$$f'_x = \frac{1}{4\pi} \text{div}(H_x \vec{B}) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu \vec{H}^2}{8\pi} \right) = \frac{1}{4\pi} \text{div}(\mu H_x \vec{H}) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu \vec{H}^2}{8\pi} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu H_x^2}{4\pi} - \frac{\mu \vec{H}^2}{8\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu H_x H_y}{4\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu H_x H_z}{4\pi} \right).$$

$$f'_x = \frac{\partial T'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T'_{xz}}{\partial z};$$

$$\boxed{T'_{\alpha\beta} = \frac{\mu}{4\pi} (H_\alpha H_\beta - \frac{\vec{H}}{2} \delta_{\alpha\beta})}$$

$$T'_{\alpha\beta} = T'_{\beta\alpha}$$

$$T''_{\alpha\beta} = T''_{\beta\alpha}$$

$\oint_S (\vec{T}, \vec{n}) dS$  - интеграл определяем  
Максвелловским начальником на  
границе  $S$  объема  $V$ . ( $S$  имеет форму  
и две грани)

В специальной теор. относительности показывается,

$$\text{что } \frac{\partial}{\partial t} (\underbrace{\vec{P}_{\text{мех}} + \vec{G}}_{\text{мат.,\\ полн.\\ массы системы}}) = \oint_S \vec{T} dS$$

$$\vec{P}_{\text{мех}} = \int_V \vec{P}_{\text{мех}} dv$$

$$\vec{G} = \int_V \vec{g} dv, \text{ где } \vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial(\vec{g} + \vec{P}_{\text{мех}})}{\partial t} \rightarrow \operatorname{div} \vec{T} = 0}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = 0$$



## Переменное электромагнитное поле

Описание переменного поля в общем случае.

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \mu, \epsilon - \text{const}$$

(или дисперс.)

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho$$

Покажем, что из двух векторных уравнений можно  
прийти к одному:

$$\textcircled{1} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \left| \text{ rot} \quad \operatorname{rot} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \right.$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H}$$

$$\left\{ \nabla \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho \right) \right.$$

$$\left. \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho \right.$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho$$

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi \mu}{c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi}{\epsilon} \nabla \rho}$$

$$\frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} = v$$

$$\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square.$$

$$\boxed{\square \vec{E} = \frac{4\pi \mu}{c^2} \rho + \frac{4\pi}{\epsilon} \nabla \rho}$$

$$\text{II) } \text{rot} \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad | \text{ rot}$$

$$\text{rot rot} \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \text{rot} \vec{j}.$$

$$\nabla \text{div} \vec{H} - \Delta \vec{H} = - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \text{rot} \vec{j}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \rightarrow \mu \text{div} \vec{H} = 0$$

$$\boxed{\Delta \vec{H} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = - \frac{4\pi}{c} \text{rot} \vec{j}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \square \vec{H} = - \frac{4\pi}{c} \text{rot} \vec{j} \end{array} \right.$$

→ показать самостоятельно, что  
чисто поперечный  
переменный ток, заданный  
в конечной области пространства  
не создает поле излучения.

$$\square f = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{1}{v^2} = 0 \Rightarrow f = f_1(x-vt) + f_2(x+vt)$$

Например:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= t - \frac{x}{v} \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = +\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \\ &= 0. \end{aligned}$$

Итак, мы показали, что векторные уравнения Максвелла  
сводятся к одному векторному уравнению (т.е. к  
3 скалярным уравнениям).

*(В ряде случаев достаточно меньше ур-ий: например, в электростат.)*

Описание переменного электромагнитного поля с помощью векторного и скалярного изометричеслов.

[данное описание не универсально  
она, например, мало пригодна  
для неоднородных сред]

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad \vec{B} = -\operatorname{rot} \vec{A} \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \psi;$$

$$\vec{E} = -\nabla \psi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

Рассмотрим теперь уравнение Максвелла (где  $\epsilon$  const,  $\mu$  const)

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$\epsilon = \text{const}$  и  $\mu = \text{const}$   
нам достаточно

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla \psi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \mu}{c} \vec{j} + \nabla \left( \operatorname{div} \vec{A} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right). \quad (\text{I})$$

Рассмотрим позже оставшееся уравнение Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho,$$

$$\operatorname{div} \left( -\nabla \psi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{4\pi \rho}{\epsilon},$$

$$\Delta \psi = -\frac{4\pi \rho}{\epsilon} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A}. \quad (\text{II}')$$

$$\Delta \psi = -\frac{4\pi \rho}{\epsilon} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} / \left( -\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right),$$

$$\Delta \psi - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \operatorname{div} \vec{A} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right). \quad (\text{II}'')$$

Очевидно, как можно упростить эти уравнения  
с помощью вектора  $\vec{A}$ .

$$\vec{A}_{\text{ноб}} = \vec{A}_{\text{инф}} - \nabla \psi \quad (\text{то возможно, т.к. } \operatorname{rot} \nabla \psi = 0, \text{ и } \operatorname{rot} \vec{A}_{\text{ноб}} = \operatorname{rot} \vec{A}_{\text{инф}})$$

$$\text{Кроме того, необходимо, чтобы } \vec{E} = -\nabla \varphi_{\text{ноб}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_{\text{ноб}}}{\partial t} = -\nabla \varphi_{\text{см}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_{\text{см}}}{\partial t}.$$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla \varphi_{\text{ноб}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_{\text{ноб}}}{\partial t} = \\ &= -\nabla \varphi_{\text{ноб}} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A}_{\text{см}} - \nabla \psi) = -\nabla \varphi_{\text{ноб}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_{\text{см}}}{\partial t} + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \psi}{\partial t} = \\ &= -\nabla \varphi_{\text{см}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_{\text{см}}}{\partial t}.\end{aligned}$$

$\nabla \varphi_{\text{ноб}} = \nabla \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla \psi_{\text{см}}$ . Отсюда без ограничения общности имеем, что  $\underline{\varphi_H = \varphi_{\text{см}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}}$ .

① При таком представлении  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  не изменяется.  
Калибровка Лоренца  
 Покажем, что  $\varphi$  можно выбрать так, чтобы при  $\operatorname{div} \vec{A}_{\text{см}} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi_{\text{см}}}{\partial t} \neq 0$  получим

$$\operatorname{div} \vec{A}_{\text{ноб}} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi_{\text{ноб}}}{\partial t} = 0.$$

В сущности имеем

$$\begin{aligned}0 &= \operatorname{div} \vec{A}_{\text{ноб}} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi_{\text{ноб}}}{\partial t} = \operatorname{div} (\vec{A}_{\text{см}} - \nabla \psi) + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_{\text{см}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}) = \\ &= \operatorname{div} \vec{A}_{\text{см}} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi_{\text{см}}}{\partial t} - (\Delta \psi - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}),\end{aligned}$$

Таким образом  $\varphi$  имеет вид

$$\Delta \psi - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \operatorname{div} \vec{A}_{\text{см}} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi_{\text{см}}}{\partial t} - \text{такой загада}$$

бывает, имеем  
решение.

$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0}$  - калибровка Лоренца (L. V. Lorenz)

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \Delta \vec{A} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \mu}{c} \vec{j} \\ \Delta \psi - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \vec{s} \end{array} \right. \end{aligned} \right\} \text{Как ясно из этих уравнений, калибровка Лоренца удовлетворяется при отыскании полей зарядами источников.}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla \psi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, & \vec{\mathcal{D}} &= \epsilon \vec{E}, \\ \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A} & \vec{H} &= \frac{1}{\mu} \vec{B}. \end{aligned} \right.$$

$$\psi = -\frac{c}{\epsilon \mu} \int \operatorname{div} \vec{A} dt -$$

отсюда видно, что решет спешащим уравнением для  $\psi$  не нужно.

## (2) Калибровка Кулона

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

Если  $\operatorname{div} \vec{A}_{\text{см}} \neq 0$ , то  $\vec{A}_{\text{ноб}} = \vec{A}_{\text{см}} - \nabla \psi$ ,

$$\Delta \psi = \operatorname{div} \vec{A}_{\text{см}}$$

$$\vec{E} = -\nabla \psi_{\text{см}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_{\text{см}}}{\partial t} = -\nabla \psi_{\text{ноб}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_{\text{ноб}}}{\partial t}$$

Обратимся к уравнениям (I) и (II'):

$$\Delta \vec{A} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \mu}{c} \vec{j} + \nabla (\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}), \quad (\text{I})$$

$$\Delta \psi = -\frac{4\pi \rho}{\epsilon} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} \quad (\text{II}')$$

При использовании калибровки Кулона получаем

$$(\text{II}') : \Delta \psi = -\frac{4\pi \rho}{\epsilon},$$

$$(\text{I}) : \Delta \vec{A} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \mu}{c} \vec{j} + \frac{\epsilon \mu}{c} \nabla \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad \left. \begin{array}{l} \text{такой} \\ \text{калибровкой} \\ \text{определенное} \\ \text{столическое} \\ \text{поле.} \end{array} \right\}$$

Данная калибровка используется в задачах об изучении движущихся частиц.

## Векторный потенциал Тернера

Введем потенциал  $\vec{\Pi}$  с помощью соотношений

$$\vec{A} = \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}, \quad \psi = -\operatorname{div} \vec{\Pi} \quad (\text{при этом тождественно выполняется калибровка Лоренца})$$

Тогда из  $\Delta \vec{A} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \mu}{c} \vec{j}$  получим

$$\Delta \vec{\Pi} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \int \vec{j} dt$$

Если задана  $\vec{j}$ , введен  $\vec{P}^{\text{см}}$  (сторонние поверхности);  $\vec{J} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

$$\int \vec{j} dt = \vec{P}^{\text{см}}$$

$$\Delta \vec{\Pi} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \vec{P}^{\text{см}}$$

Описание полей  $\vec{\Pi}$ :

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{\Pi}; \quad \vec{E} = -\nabla \psi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} + \nabla \operatorname{div} \vec{\Pi}.$$

Тригонометрические свойства:

$$\begin{aligned} \vec{A} = \vec{A}^e &\rightarrow \vec{A}^m \\ \varphi = \varphi^e &\rightarrow \varphi^m \\ \vec{E} = \vec{E}^e &\rightarrow \vec{E}^m \\ \vec{H} = \vec{H}^e &\rightarrow -\vec{E}^m \\ \vec{j} = \vec{j}^e &\rightarrow \vec{j}^m \\ \vec{s} = \vec{s}^e &\rightarrow \vec{s}^m \\ \epsilon, \mu &\rightarrow \mu, \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{B}^e &= \text{rot } \vec{A}^e \rightarrow -\vec{D}^m = \text{rot } \vec{A}^m \\ \vec{E}^e &= -\nabla \varphi^e - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} \rightarrow \vec{E}^m \\ \vec{H} &= \vec{H}^e \rightarrow \vec{H}^m \\ \vec{P}^m &\rightarrow \vec{M}^m \end{aligned}$$

При условии компактности дифракции

$$\text{div } \vec{A}^m + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi^m}{\partial t} = 0$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A}^m - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}^m}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi \epsilon}{c} \vec{j}^m \\ \Delta \varphi^m - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi^m}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{\mu} \vec{s}^m \\ \Delta \vec{H}^m - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}^m}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{\mu} \vec{M}^m \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{D}^m = -\text{rot } \vec{A}^m, \quad \vec{E}^m = \frac{\vec{D}^m}{\epsilon},$$

$$\vec{H}^m = -\nabla \varphi^m - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^m}{\partial t}, \quad \vec{B}^m = \mu \vec{H}^m$$

В общем случае (при наличии  $\vec{j}^e, \vec{s}^e$  и  $\vec{j}^m, \vec{s}^m$ )  $\vec{E} = \vec{E}^e + \vec{E}^m, \vec{H} = \vec{H}^e + \vec{H}^m$ .

Мы показали, что поле можно описать с помощью 3 скалярных функций. В частных случаях может оказаться достаточно лишь только 2 функций.

Гармонические волны

Процесс  $f(t)$  будем называть гармоническим волниением, если его зависимость от времени имеет вид

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где  $\omega = 2\pi V$  - круговая частота,  $V$ -частота,  $\varphi$  начальная фаза,

$A$  - амплитуда,

$$V = \frac{1}{T}, \quad \text{где } T \text{- период.}$$

$$f(t) = \int_0^\infty [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega =$$

$$= \int_0^\infty A(\omega) \cos [\omega t + \varphi(\omega)] d\omega$$

$$A(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}, \quad \varphi = -\arctg \frac{b(\omega)}{a(\omega)}$$

Уравнения для полей линейные. Если и матерниальные уравнения линейны, то процесс можно разложить в

ищетное уравнение и далее решают задачу для отдельных  
Радио-составляющих.

При математическом рассмотрении монохроматических  
процессов член сооружено векторы комплексные обозначенные  
Самые упрощенные Максвелла линейные. Поэтому при линейном  
характере материальных свойств векторами напряженности

$\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{H}(\vec{r}, t)$  приводятся в соответствующие комплексные  
векторные амплитуды  $\vec{E}(\vec{r}, \omega), \vec{H}(\vec{r}, \omega)$ .

Пусть  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi_E)$ . ? Число  $\omega$  называется  
 $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi_H)$ ; фазой вектора  $\vec{H}(\vec{r})$

При комплексном амплитуде, приводимое в  
соответствии эти выражения, имеет вид

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{i\varphi_E}, \vec{H}(\vec{r}, \omega) = \vec{H}_0(\vec{r}) e^{i\varphi_H}$$

Связь между физическими величинами и комплексными  
амплитудами дается соотношениями

?  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \{ \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} \}, \vec{H}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \{ \vec{H}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} \}$

Замечание, что (в силу линейности), если  $\operatorname{Re}\{...\}$  - решение уравнения, то  $\operatorname{Im}\{...\}$  - тоже решение

Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд:

$$\operatorname{rot} \{ \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} \} = - \frac{\mu}{c} i\omega \operatorname{curl} \{ \vec{H}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} \} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$$

Далее аналогичные сокращаются. Благодаря волновое число  $k$   
В итоге имеем

свободном пространстве  $k_0 = \frac{\omega}{c}$

?  $\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, \omega) = -i k_0 \mu_0 \vec{H}(\vec{r}, \omega)$

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, \omega) = ik_0 \epsilon \vec{E}(\vec{r}, \omega) + \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, \omega)$$

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, \omega) = 4\pi \rho(\vec{r}, \omega)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, \omega) = 0$$

Такие наименования дисперсии (введенной):  $\left. \begin{array}{l} E = E(\omega) \\ \mu = \mu(\omega) \\ J = J(\omega) \end{array} \right\} = \text{const}$  при  $\omega = \text{const}$

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega), \vec{B}(\vec{r}, \omega) = \mu(\omega) \vec{H}(\vec{r}, \omega), \vec{j}(\vec{r}, \omega) = \sigma(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

Уравнение неизервативности:

$$\operatorname{div} \vec{J}(\vec{E}, \omega) + i\omega \vec{J}(\vec{E}, \omega) = 0 \quad [ \text{достаточно задать } \vec{J}; \\ \text{затем из ур-ия неизв. } ]$$

Комплексная диэлектрическая проницаемость

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{rot} \vec{H} = ik_0 \epsilon \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}.$$

$$\text{Пусть } \vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}^{\text{cm}}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = (ik_0 \epsilon + \frac{4\pi}{c} \sigma) \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}^{\text{cm}}; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = ik_0 (\epsilon - i \frac{4\pi \sigma}{\omega}) \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}^{\text{cm}}$$

$\epsilon_K = \epsilon - i \frac{4\pi \sigma}{\omega}$  - комплексная диэлектрическая проницаемость

$\operatorname{Re} \epsilon_K = \epsilon$ ;  $\operatorname{Im} \epsilon_K$  определяется потерями в среде

(пример: диэлектрик с потерями  $\epsilon_K = \epsilon' - i\epsilon''$ ; аналогично - магнитик)

Приходим к уравнению

$$\operatorname{rot} \vec{H} = ik_0 \epsilon_K \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}^{\text{cm}}.$$

Перенесем ранее полученные уравнения в новых обозначениях  
(в терминах комплексных амперауз)

$$\Delta \vec{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi \mu}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{4\pi}{\epsilon} \nabla \phi \Rightarrow \Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = \frac{4\pi \mu}{c} ik_0 \vec{J} + \frac{4\pi}{\epsilon} \nabla \phi$$

$$\Delta \vec{H} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \vec{J} \Rightarrow \Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \vec{J}$$

$k = k_0 \sqrt{\epsilon \mu}$  - волновое число в среде

Калибровка Лоренца:

$$\operatorname{div} \vec{A} + ik_0 \epsilon \phi = 0. \quad \text{Отсюда } \phi = \frac{i}{k_0 \epsilon \mu} \operatorname{div} \vec{A},$$

$$(I) \Delta \vec{A} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \mu}{c} \vec{J} \Rightarrow \Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\frac{4\pi \mu}{c} \vec{J},$$

$$(II) \Delta \phi - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \phi \Rightarrow \Delta \phi + k^2 \phi = -\frac{4\pi}{\epsilon} \phi,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla \phi - ik_0 \vec{A} = -\frac{i}{k_0 \epsilon \mu} \nabla \operatorname{div} \vec{A} - ik_0 \vec{A} = -\frac{i}{k_0 \epsilon \mu} (\nabla \operatorname{div} \vec{A} + k^2 \vec{A}) \end{array} \right.$$

$$\Delta \vec{P} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \vec{P}^{\text{cm}} \Rightarrow \Delta \vec{P} + k^2 \vec{P} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \vec{P}^{\text{cm}}$$

$$\vec{A} = \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \Rightarrow \vec{P} = -\frac{i}{k_0 \epsilon \mu} \vec{A}$$

Замечание об усреднении по периоду  $T = 2\pi/\omega$  произведений величин, гармонически зависящих от времени

Рассмотрим две величины,  $a(t)$  и  $b(t)$ , гармонически зависящие от времени:

$$a(t) = \operatorname{Re} \{ a(\omega) e^{i\omega t} \}, \quad b(t) = \operatorname{Re} \{ b(\omega) e^{i\omega t} \}.$$

Комплексные амплитуды  $a(\omega)$  и  $b(\omega)$  могут быть представлены в виде:

$$a(\omega) = \underbrace{|a(\omega)| e^{i\alpha}}_A, \quad b(\omega) = \underbrace{|b(\omega)| e^{i\beta}}_B$$

Запишем среднее (по периоду  $T = 2\pi/\omega$ ) значение произведения  $a(t)b(t)$ :

$$\begin{aligned} \overline{a(t)b(t)}^T &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} a(t)b(t) dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} A B \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \beta) dt = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{T} AB \int_t^{t+T} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)] dt = \\ &= \frac{1}{2} AB \cos(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Такой же результат можно получить иначе:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ a(\omega) b^*(\omega) \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ A e^{i\alpha} \cdot B e^{-i\beta} \} = \frac{1}{2} AB \cos(\alpha - \beta).$$

$\uparrow$   
\* - символ комплексного сопряжения

Таким образом, имеем: простой способ расчета среднего:

$$\overline{a(t)b(t)}^T = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ a(\omega) b^*(\omega) \}.$$

Отсюда следует, что  $\overline{a^2(t)}^T = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underbrace{a(\omega)a^*(\omega)}_{|a(\omega)|^2} \} = \frac{|a(\omega)|^2}{2}$ ;

Пример 1 [расчёт среднего по времени вектора токенгина]

$$\overline{\vec{s}(t)}^T = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} [\vec{E}(\vec{r}, \omega), \vec{H}^*(\vec{r}, \omega)] = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\vec{E}(\vec{r}, \omega), \vec{H}^*(\vec{r}, \omega)].$$

Пример 2 [расчёт средней по времени общей плотности мощности диэлектрических потерь]

$$\bar{q}^T = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\sigma} \underbrace{\vec{j}(\vec{r}, \omega) \vec{j}^*(\vec{r}, \omega)}_{|\vec{j}(\vec{r}, \omega)|^2} \right\} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{J}(\vec{r}, \omega)|^2}{\sigma},$$

здесь  $\sigma$  - проводимость среды (вещественная величина).

Пример 3 [расчёт средней по времени общей плотности энергии электромагнитного поля в среде без дисперсии]

$$\text{Напомним, что } \omega = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}}{8\pi} = \frac{\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2}{8\pi}.$$

Составь, что  $\epsilon$  и  $\mu$  - вещественные, ищем:

$$\bar{\omega}^T = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \mu \vec{H} \cdot \vec{H}^*}{8\pi} \right\} = \frac{\epsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2}{16\pi}.$$

(здесь и далее, аргументы  $\vec{r}$  и  $\omega$  для краткости опускаем).

### Комплексная теорема Пойнгтига

<При доказательстве теоремы составим, что  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  - вещественные величины, т.е., комплексную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_K = \epsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$  пока не используем>

Запишем уравнения Максвелла для комплексных амплитуд:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -iK_0\mu \vec{H}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = iK_0\epsilon \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{np} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}^{cm}, \quad (2)$$

здесь  $\vec{J}_{np} = \sigma \vec{E}$  - плотность тока проводимости,  $\vec{J}^{cm}$  - плотность стороннего тока,  $K_0 = \omega/c$ .

Выполним комплексное сопряжение второго уравнения:

$$\operatorname{rot} \vec{H}^* = -iK_0\epsilon \vec{E}^* + \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{np}^* + \frac{4\pi}{c} \vec{J}^{cm*}.$$

Учимся синтетично первое уравнение на  $\vec{H}^*$ , второе — на  $\vec{E}$  и вычитем из первого уравнения второе:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -i\kappa_0 \mu \vec{H} \mid \cdot \vec{H}^* \\ \text{rot } \vec{H}^* &= -i\kappa_0 \epsilon \vec{E}^* + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{np}^* + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^{cm*} \mid \cdot \vec{E} \\ \vec{H}^* \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \text{rot } \vec{H}^* &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_{np}^* \vec{E} - \frac{4\pi}{c} \vec{j}^{cm*} \vec{E} + \\ \underbrace{\text{div} [\vec{E}, \vec{H}^*]}_{d} &+ i\kappa_0 (\epsilon \underbrace{\vec{E} \vec{E}^*}_{|\vec{E}|^2} - \mu \underbrace{\vec{H} \vec{H}^*}_{|\vec{H}|^2}) \end{aligned}$$

Учимся получившийся результат на  $\frac{c}{8\pi}$  и видим

комплексный вектор Пойнтинга  $\vec{S}_k = \frac{c}{8\pi} [\vec{E}, \vec{H}^*]$ .

Заметим, что

$$\text{Re } \vec{S}_k = \text{Re } \frac{c}{8\pi} [\vec{E}, \vec{H}^*] = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [\vec{E}, \vec{H}^*] = \vec{S}^T.$$

В результате описанных операций получим

$$\text{div } \vec{S}_k = -\frac{1}{2} \underbrace{\vec{j}_{np}^*}_{\frac{1}{\sigma} |\vec{j}_{np}|^2} \vec{E} - \frac{1}{2} \vec{j}^{cm*} \vec{E} + 2i\omega \frac{\epsilon |\vec{E}|^2 - \mu |\vec{H}|^2}{16\pi}.$$

$$\frac{1}{\sigma} |\vec{j}_{np}|^2, \text{ так как } \vec{j}_{np} = \sigma \vec{E}, \text{ т.е. } \vec{E} = \vec{j}_{np}/\sigma.$$

Получим теорему Пойнтинга (комплексную) в дифференциальной форме:

$$\text{div } \vec{S}_k = -\frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{\sigma} |\vec{j}_{np}|^2}_{\frac{1}{\sigma} |\vec{E}|^2} - \frac{1}{2} \vec{j}^{cm*} \vec{E} + 2i\omega \frac{\epsilon |\vec{E}|^2 - \mu |\vec{H}|^2}{16\pi}. \quad (3)$$

В интегральной форме эта теорема имеет вид:

$$\oint_S \vec{S}_k d\vec{S} = -\frac{1}{2} \int_V \underbrace{\frac{1}{\sigma} |\vec{j}_{np}|^2}_{\frac{1}{\sigma} |\vec{E}|^2} dv - \frac{1}{2} \int_V \vec{j}^{cm*} \vec{E} dv + 2i\omega \int_V \frac{\epsilon |\vec{E}|^2 - \mu |\vec{H}|^2}{16\pi} dv. \quad (4)$$

Выведем реальную часть комплексной величины в комплексной теории Пойнгтига. Тогда, с учетом того, что  $\operatorname{Re} \vec{S}_k = \vec{S}^T$ , получим

$$\oint_S \vec{S}^T d\vec{S} = -\frac{1}{2} \underbrace{\int_V \frac{|\vec{J}_{np}|^2}{\sigma} dv}_{\text{средний по времени поток энергии } \vec{P}^T \text{ через замкнутую поверхность } S} + \left( -\frac{1}{2} \right) \operatorname{Re} \underbrace{\int_V \vec{J}^{cm*} \vec{E} dv}_{\text{средний по времени мощность генераторных источников } \vec{A}^{cmT} \text{ в объеме } V}$$

Таким образом, „реальная“ часть комплексной теории Пойнгтига представляет собой формулировку закона сохранения энергии для средних величин:

$$\vec{P}^T = -\vec{Q}^T + \vec{A}^{cmT}, \text{ или } \vec{P}^T + \vec{Q}^T = \vec{A}^{cmT}.$$

Заметим, что для монохроматических процессов амплитуды электрического и магнитного полей являются постоянными. Вследствие этого средний по времени энергия электромагнитного поля остается постоянной величиной, не зависящей от времени:

$$\bar{W}^T = \int_V \bar{w}^T dv = \text{const.}$$

$$\begin{aligned} \text{В отсутствии дисперсии } \bar{W}^T &= \int \frac{\epsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2}{16\pi} dv = \\ &= \bar{W}^e + \bar{W}^m, \text{ где } \bar{W}^e = \int_V \frac{\epsilon |\vec{E}|^2}{16\pi} dv, \bar{W}^m = \int_V \frac{\mu |\vec{H}|^2}{16\pi} dv. \end{aligned} \quad (6)$$

С учётом этих соотношений запишем „мнимую часть“ комплексной теории Пойнгтига:

$$\operatorname{Im} \oint_S \vec{S}_k d\vec{S} = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_V \vec{J}^{cm*} \vec{E} dv + 2\omega \int_V \frac{\epsilon |\vec{E}|^2 - \mu |\vec{H}|^2}{16\pi} dv \quad (7)$$

Здесь

$$\int_V \frac{\epsilon |\vec{E}|^2 - \mu |\vec{H}|^2}{16\pi} dv = \bar{W}^e - \bar{W}^m \quad (\text{формула верна лишь при отсутствии дисперсии!})$$

(см. (6))

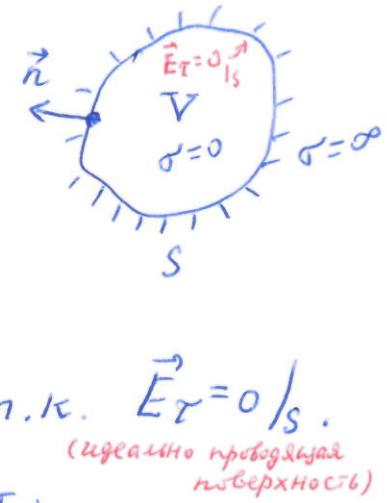
В отличие от формулы (5), „именно“

часть комплексной теоремы Тойнгина (7) является чисто вспомогательным математическим соотношением. Оно, однако, может быть использовано при доказательстве некоторых утверждений.

Рассмотрим, например, колебания электромагнитного поля в объеме  $V$ , ограниченном идеально проводящей поверхностью  $S$ , в отсутствие сторонних источников (такие колебания называются свободными и могут осуществляться при отсутствии потерь, т.е. при  $\sigma = 0$ ).

Тогда из (7) имеем:

$$\operatorname{Im} \oint_S \vec{S}_K \frac{d\vec{S}}{\vec{n} ds} = 2\omega (\bar{W}^{e^T} - \bar{W}^{m^T})$$



$$\begin{aligned} \vec{S}_K \cdot \vec{n} \Big|_S &= \frac{c}{8\pi} [\vec{E}, \vec{H}^*] \cdot \vec{n} \Big|_S = \\ &= \frac{c}{8\pi} [\vec{E}_T, \vec{H}_T^*] \cdot \vec{n} \Big|_S = 0, \text{ m.k. } \vec{E}_T = 0 \Big|_S. \end{aligned}$$

(идеально проводящая поверхность)

Получаем, что  $2\omega (\bar{W}^{e^T} - \bar{W}^{m^T}) = 0$ .

Так как  $\omega = 0$ , имеем:  $\bar{W}^{e^T} = \bar{W}^{m^T}$ .

Таким образом, при отсутствии дисперсии в среде, заполняющей объем  $V$ , электрическая и магнитная частоты средней по времени энергии равны:  $\bar{W}^{e^T} = \bar{W}^{m^T}$ , так что  $\bar{W}^T = \bar{W}^{e^T} + \bar{W}^{m^T} = 2\bar{W}^{e^T} = 2\bar{W}^{m^T}$ . При наличии дисперсии равенство обеих частей полной энергии, вообще говоря, не выполняется.

Замечание („механик инженер“) о некоторых обобщениях формулировки комплексной теоремы Тойнгина.

В ряде случаев бывает удобнее вместо  $E$  и  $H$

с самого начала комплексную динамическую  
проницаемость  $\epsilon_k = \epsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega} = \epsilon' - i\epsilon''$ , где  
 $\epsilon' = \epsilon$ ,  $\epsilon'' = \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ . Кроме того, можно учесть  
дополнительно возможные магнитные потери  
в среде земной  $\mu$  на комплексную магнитную  
проницаемость  $\mu_k = \mu' - i\mu''$  (здесь  $\mu' = \mu$ ).

Тогда уравнения (1) и (2) примут вид

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -i\kappa_0 (\mu' - i\mu'') \vec{H}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = i\kappa_0 (\epsilon' - i\epsilon'') \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{cm}.$$

Если с этими уравнениями выполнить опрации,  
аналогичные проведённые выше, то нетрудно  
получить такую формулировку комплексной  
теоремы Тайкита (получите её самостоятельно!):

$$\oint_S \vec{S}_k d\vec{s} = -\frac{\omega}{8\pi} \int_V [\epsilon'' |\vec{E}|^2 + \mu'' |\vec{H}|^2] dv + \\ + \left(-\frac{1}{2}\right) \int_V \vec{j}_{cm}^* \vec{E} dv + 2i\omega \int_V \frac{\epsilon' |\vec{E}|^2 - \mu' |\vec{H}|^2}{16\pi} dv.$$

Очевидно, что при  $\mu'' = 0$  (когда  $\mu' = \mu$ ) последняя  
формула переходит в ранее доказанную  
формулу (4), если воспользоваться соотношением  
 $\epsilon'' = \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ . Действительно, в этом случае

$$-\frac{\omega}{8\pi} \int_V [\epsilon'' |\vec{E}|^2 + \mu'' |\vec{H}|^2] dv = -\frac{1}{2} \int_V \sigma |\vec{E}|^2 dv = \\ = -\frac{1}{2} \int_V \frac{|\vec{J}_{np}|^2}{\sigma} dv.$$

## Теорема единственности решения уравнений Максвела для гармонических полей.

Поскольку поля, гармонически зависящие от времени, реализуются от  $t = -\infty$  до  $t = \infty$ , то говорить применительно к ним о начальных условиях не приходится. Поэтому наше воспользование ранее доказанной теоремой единственности при заданных начальных и граничных условиях.

Формулировка теоремы: Решение уравнений Максвела для гармонических полей внутри области  $V$ , ограниченной замкнутой поверхностью  $S$ , единственно, если

- 1) В области  $V$  заданы стационарные источники (токи  $\vec{J}^{cm}$ );

- 2) На поверхности  $S$  задано либо поле  $\vec{E}_r|_S$ , либо  $\vec{H}_r|_S$ ;
- 3) Внутри области  $V$  всюду имеются потери (т.е. проводимость  $\sigma \neq 0$ ).

Доказательство — строим методом „от противного“.

Пусть имеются два разных поля —  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  и  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ , удовлетворяющие условиям 1)-3).

Образуем разностное поле  $\vec{E}_3 = \vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{H}_3 = \vec{H}_1 - \vec{H}_2$ .

Тогда для разностного поля условия 1)-3) примут вид:

- 1')  $\vec{J}_3^{cm} = 0$  в области  $V$ ;
- 2') На поверхности  $S$  имеем  $\vec{E}_{3r} = 0|_S$ , либо  $\vec{H}_{3r} = 0|_S$ ;
- 3')  $\sigma \neq 0$  в области  $V$  [это условие не изменилось].

Запишем „реальную“ часть комплексной теоремы Гойткина, т.е.

$$\oint_S \vec{S}^T d\vec{S} = -\frac{1}{2} \int_V \underbrace{\frac{|\vec{J}^{cm}|^2}{\sigma}}_{\sigma |\vec{E}|^2} dv + \left(-\frac{1}{2}\right) \operatorname{Re} \int_V \vec{J}^{cm*} \vec{E} dv,$$

для разностного поля:

$$\oint_S \vec{S}_3^T \underbrace{\vec{n} d\vec{s}}_{\vec{n} ds} = -\frac{1}{2} \int_V \sigma |\vec{E}_3|^2 dv + \left(-\frac{1}{2}\right) \operatorname{Re} \underbrace{\int_V \vec{j}_3^{cm*} \vec{E}_3 dv}_{\text{в сиу условиј 3')}}.$$

Учиме, што

$\vec{E}_3 = 0$  [в сиу условиј 3']]

$$\vec{S}_3^T \cdot \vec{n} \Big|_S = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\vec{E}_3, \vec{H}_3^*] \cdot \vec{n} \Big|_S =$$

$$= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\vec{E}_{3\tau}, \vec{H}_{3\tau}^*] \cdot \vec{n} \Big|_S = 0,$$

так как ибо  $\vec{E}_{3\tau} = 0 \Big|_S$ , ибо  $\vec{H}_{3\tau} = 0 \Big|_S$ .

Получам

$$0 = -\frac{1}{2} \int_V \sigma |\vec{E}_3|^2 dv + 0, \text{ м.е. } \int_V \sigma |\vec{E}_3|^2 dv = 0.$$

В сиу условиј 3') имам  $\vec{E}_3 = 0$  в одеве  $V$ .

Запишем уравнение Максвела да разносткого поља

$$\operatorname{rot} \vec{E}_3 = -i \frac{\omega}{c} \vec{B}_3.$$

Поскојку  $\vec{E}_3 = 0$ ,  $\omega \neq 0$ , получаам, што  $\vec{B}_3 = 0$

Паки образам прииде к противоречију: дај  $\vec{E}_3 = 0$  и  $\vec{B}_3 = 0$ , то је двојих разних решенија тад.

Здесь нужно имат в виду, што из условиј  $\vec{B}_3 = 0$  следи, што  $\mu \vec{H}_3 = 0$ , м.е.  $\vec{H}_3 = 0$  (при  $\mu \neq 0$ ).

Теорему единствености (с резултатом, што и  $\vec{H}_3 = 0$ ) можемо доказати при произвольних  $\mu$ , али учесто, што в реалних магнетиках  $\mu$  јављаје комплексну величину, т.е. имам  $\mu_k = \mu' - i\mu''$ ). Идеја овога доказатељства представљена је у Заметки N2 „мажкии шрафтаци“.

Приједстављено више доказатељство имаје приступ чији је интерпретацију: разносткое поље не возникаје, так да него отсуствујујуисточници ( $\vec{j}_3^{cm} = 0$ ); оно не може проникнути кроз поврхност  $S$  (в сиу тад, што  $\vec{S}_3 \cdot \vec{n} = 0 \Big|_S$ ); оно не може сушествовати в виде свободних незатухајућих

Колебаний в объеме  $V$ , так как наименее потерю ( $\sigma \neq 0$ ) исключаем такую возможность [любое свободное колебание, реализующееся при отсутствии стирательных источников, при наименее потерях будут затухать, так что режим гармонических незатухающих колебаний наш исключаем].

### Задача №1 ("максимум интеграла")

Теорема остается справедливой, если вместо условия 2) поставим условие, что на поверхности  $S$  задано неизвестное граничное условие  $\vec{E}_T = \eta_s [\vec{H}, \vec{n}]_S$ , где  $\operatorname{Re} \eta_s > 0$ .

В этом случае доказательство модифицируется таким образом:

$$\begin{aligned} \overline{\vec{S}}_3^T \cdot \vec{n} |_S &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\vec{E}_3, \vec{H}_3^*] \cdot \vec{n} |_S = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\vec{E}_{3T}, \vec{H}_{3T}^*] \cdot \vec{n} |_S = \\ &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \eta_s [\vec{H}_3, \vec{n}], \vec{H}_{3T}^* \cdot \vec{n} |_S = \\ &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \eta_s \underbrace{[[\vec{H}_{3T}, \vec{n}], \vec{H}_{3T}^*]}_{\vec{n}(\vec{H}_{3T}, \vec{H}_{3T}^*) - \vec{H}_{3T}^*(\vec{H}_{3T}, \vec{n})} \cdot \vec{n} |_S = \\ &\quad | \vec{H}_{3T} |^2 \quad \text{0'' (так как } \vec{H}_{3T} \perp \vec{n} \text{)} \\ &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \eta_s \vec{n} | \vec{H}_{3T} |^2 \cdot \vec{n} \underset{(\vec{n}, \vec{n})=1}{=} \frac{c}{8\pi} (\operatorname{Re} \eta_s) | \vec{H}_{3T} |^2. \end{aligned}$$

В результате теорема Пойнкеля для разностного поля применима и дает:

$$\oint_S \frac{c}{8\pi} (\operatorname{Re} \eta_s) | \vec{H}_{3T} |^2 dS = -\frac{1}{2} \int_V \sigma | \vec{E}_3 |^2 dv + 0,$$

$$\text{т.е. } \frac{1}{2} \int_V \sigma | \vec{E}_3 |^2 dv + \oint_S \frac{c}{8\pi} (\operatorname{Re} \eta_s) | \vec{H}_{3T} |^2 dS = 0.$$

Так как  $\sigma \neq 0$  (а  $\sigma > 0$ ) и  $\operatorname{Re} \eta_s > 0$ , получаем, что  $\vec{E}_3 = 0$  (и следовательно  $\vec{H}_{3T} = 0$ ). Доказав, что  $\vec{E}_3 = 0$ ,

Возвращаемся к концу доказательства  
теоремы, представленной выше.

### Задание 2 („малкий парадокс“)

Случай  $\mu = 0$  возможен в средах с дисперсией. Тогда мы будем, что среда с дисперсией всегда имеет потери. Поэтому более обще доказательство можно построить, считая, что проницаемость среды —  
комплексные величины  $\varepsilon_K = \varepsilon' - i\varepsilon'' \equiv \varepsilon - i\frac{\omega}{c_0}$  и  
 $\mu_K = \mu' - i\mu''$ .

Тогда для разностного поля следующим  
применимо теорему Пойнтинга в виде („реально“)

$$\oint_S \vec{S}^T d\vec{s} = -\frac{\omega}{8\pi} \int_V [\varepsilon'' |\vec{E}|^2 + \mu'' |\vec{H}|^2] dv + \left(-\frac{1}{2}\right) \operatorname{Re} \int_V \vec{J}^{cm*} \vec{E} dv,$$

T. e.

$$\oint_S \underbrace{\vec{S}_3}_{\vec{S}_3 \cdot \vec{n}} d\vec{s} = -\frac{\omega}{8\pi} \int_V [\varepsilon'' |\vec{E}_3|^2 + \mu'' |\vec{H}_3|^2] dv + \left(-\frac{1}{2}\right) \operatorname{Re} \int_V \vec{J}_3^{cm*} \vec{E}_3 dv$$

$\parallel$   
 $\vec{S}_3 \cdot \vec{n}$   
 $\parallel$  на S (ан. выше).

(ан. выше)

Получаем, что

$$\frac{\omega}{8\pi} \int_V [\varepsilon'' |\vec{E}_3|^2 + \mu'' |\vec{H}_3|^2] dv = 0.$$

$\omega \neq 0$ , величины  $\varepsilon'' > 0$ ,  $\mu'' > 0$  (условие 3) теперь  
однозначно определяются в этом виде). Значит, что  
потери всегда соответствуют положительным знаком  $\varepsilon''$  и  $\mu''$ .

Чтобы, если при  $\varepsilon'' > 0$  и  $\mu'' > 0$

$$\int_V [\varepsilon'' |\vec{E}_3|^2 + \mu'' |\vec{H}_3|^2] dv = 0,$$

то  $\vec{E}_3 = 0$  и  $\vec{H}_3 = 0$  в объеме V. Это противоречит, которое доказываем теорему.

## Квазистационарные процессы в сплошных проводящих средах

Характер переменных полей в материальных средах существенно зависит от рода этих сред и от порядка величин  $\omega$ .

Рассмотрим явления в массивных проводниках в переменном электромагнитном поле. Будем предполагать, что скорость изменения поля не слишком велика, будучи ограничена рядом условий, которые будут сформулированы ниже. Электромагнитные поля и токи, удовлетворяющие этим условиям, называют квазистационарными.

### Уравнение квазистационарного поля внутри проводника.

Рассматриваемое поле, изменяющееся во времени по гармоническому закону  $\sim e^{i\omega t}$  ( $T = 2\pi/\omega$ ).

Пусть выполнено условие

$$\tau_M \ll T,$$

где  $\tau_M = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma}$  — характеристическое время релаксации заряда в проводнике (максвелловское время релаксации)

Пример:  $\vec{g}(\vec{r}, t) = g_0(\vec{r})|_{t=0}$

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{j} = \sigma \operatorname{div} \vec{E} = \sigma \frac{4\pi I}{\epsilon}.$$

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \frac{4\pi I}{\epsilon} \vec{g} = 0.$$

$$\text{Решение: } \vec{g}(\vec{r}, t) = g_0(\vec{r}) \bar{e}^{-\frac{4\pi I t}{\epsilon}}, \text{ т.е. } g \sim e^{-\frac{t}{\tau_M}}, \tau_M = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma}.$$

Запись уравнения Максвелла при условиях  $\vec{g}^{cm} = 0, \vec{j}^{cm} = 0$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0$$

$$\epsilon_K = \text{const}$$



Для гармонических полей

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -i k_0 \mu \vec{H}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = i k_0 (\underbrace{\epsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}}_{\epsilon_K}) \vec{E}, \quad \text{т.е. } \epsilon_K = \epsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}; \quad \underbrace{\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H}}_{\sim 0} = i k_0 \epsilon_K \operatorname{div} \vec{E} \quad \text{т.е. } \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

Условие  $\tau_m \ll T$  эквивалентно (степенство же изменяется  $2\pi$ ) условию  $\epsilon \ll \frac{4\pi\sigma}{\omega}$

Действительно,  $\epsilon \ll \frac{4\pi\sigma}{\omega}$  можно записать так:  $\frac{\epsilon}{4\pi\sigma} \ll \frac{T}{2\pi}$ .

Получим:  $\epsilon_k \approx -i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ , то эквивалентно условию  $i\tilde{J}_{\text{дис}} \ll i\tilde{\sigma}\tilde{E}$

Таким образом, если в уравнениях Максвелла преобразовать токи и напряжения, то получим уравнение квазистационарного поля:

$$\text{rot } \vec{E} = -i\kappa_0\mu_0 \vec{H}$$

$$\text{rot } \vec{H} = i\kappa_0\epsilon_0 \vec{E}, \quad \epsilon_k \approx -i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{H} = 0$$

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{rot } \vec{H} = i\kappa_0\epsilon_0 \vec{E}$$

$$\text{div rot } \vec{H} = i\kappa_0\epsilon_0 \text{div } \vec{E}$$

"

$$\downarrow \\ \text{div } \vec{E} = 0$$

Обсудим условия применимости неравенства  $\epsilon \ll \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ , т.е.  $\omega \ll \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}$ .

- 1) Для хороших проводников (Мед,  $\sigma = 5,4 \cdot 10^{17} \text{ С/Гц}$   $\epsilon \approx 1$   $\text{ег. СГц}$ ) это соотношение выполняется формально при любой частоте, соответствующих уравнению.
- 2) Есть, однако, и другие ограничения применимости написанных выше уравнений. В этих уравнениях существенно, что свет тока с напряженностью поля дает в соотношении  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ , где  $\sigma$  брались со знакомини, относящимся к стационарному случаю. Это справедливо, если  $T > T_{\text{устранения}}$  (реально  $T_{\text{уст. прям.}} < T_{\text{устранения}}$ ), т.е. в пределах свободного пробега электронов в проводнике. Обычно  $T_{\text{устран.}} \sim 10 \text{ сек.}$  имеем  $\omega \ll 10^{13} \text{ с}^{-1}$ . Прерывистые частоты, допускающие эти условия, лежат в инфракрасной области спектра.
- 3) Далее, считается, что свет  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$  локальная. Это предполагает, что расположение  $L_E$ , на котором поле заметно меняется в проводнике, должно быть много больше длины свободного пробега  $\ell_{\text{своб. проб.}}$ :  
 $L_E \gg \ell_{\text{своб. проб.}}$

Далее будет показано, что в качестве величины  $L_E$  фигурирует глубина проникновения полей в проводник (без). Условие  $\delta \gg \ell_{\text{своб. проб.}}$  для хороших проводников приводит к ограничению

$$\omega \ll 10^{10} \text{ с}^{-1} \quad \text{СВЧ диапазона выполняется}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -i \kappa \mu \vec{H}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -i \kappa \mu \operatorname{rot} \vec{H}$$

$$\nabla \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -i \kappa \mu \cdot i \kappa \epsilon \vec{E}, \quad \Delta \vec{E} + \kappa^2 \epsilon \kappa \mu \vec{E} = 0$$

"

$$\text{Введен обозначение: } \kappa^2 \epsilon \kappa \mu = \kappa^2 \left( -i \frac{4\pi\sigma}{c} \right) \mu = \tilde{\kappa}^2.$$

$$\sqrt{-i} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$\tilde{\kappa} = \pm(1-i) \frac{\sqrt{2\pi\sigma c}}{c} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \text{ где } \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma M\omega}} \quad (\text{пока это просто обозначение})$$

тогда,

$$\Delta \vec{E} + \tilde{\kappa}^2 \vec{E} = 0.$$

δ - шагина проприетарна поле в проводнике (толщина скан-слоя)

Можноально это получит уравнение вида  $\Delta \vec{H} + \tilde{\kappa}^2 \vec{H} = 0$

### Замечание о не гармонических процессах

Здесь вместо  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  во всех частных и неравенствах должна фигурировать величина  $T_E$  - характеристическое время изменения поля.

Если  $\frac{\epsilon}{4\pi\sigma} \ll T_E$ , то (в силу того, что  $\left| \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right| \sim \frac{\epsilon}{c T_E} |\vec{E}|$ )

$\left| \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right| \ll \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E}$ , т.е. током изменения по-прежнему можно пренебречь. Тогда уравнения в волостационарном виде в проводнике выглядят так:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{j} \equiv \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \operatorname{rot} \vec{E}$$

$$\nabla \operatorname{div} \vec{H} - \Delta \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left( -\frac{1}{c} \mu \right) \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{(однородный член)}$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0$$

← полная система для отыскания  $\vec{H}$  в проводнике

Первое уравнение полученной системы

ищем вид, связанный с уравнением теплопроводности с "коэффициентом теплопроводности"  $\chi = c^2 / 4\pi\mu\sigma$

### Замечание об описании поля в проводнике

Проводник имеет характерное размерное  $l$ .

Пусть  $l$ -длина волны в среде, окружающей проводник

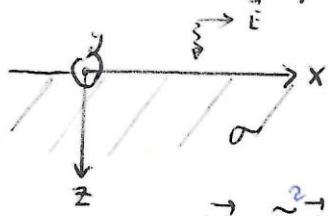
Если  $l \ll \lambda$ , то на расстояниях порядка  $l$  ( $\lambda \ll l$ ) все проводники можно использовать статические формулы,

отвечающие пределу  $\lambda \rightarrow \infty$ , т.е.  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ ,  $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$

(но, конечно же, достаточно определить поле вблизи проводника)

## Скин-эффект

Рассмотрим случай проводника полупространства ( $z > 0$ ),



в котором имеет ток  $\vec{j} = \vec{x}_0 j(z)$ ,  $j(0) = j_0 = \text{const}$

$$\Delta \vec{E} + \tilde{K}^2 \vec{E} = 0, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad \tilde{K} = \frac{1-i}{\delta}.$$

$$\underline{\Delta \vec{j} + \tilde{K}^2 \vec{j} = 0} \Rightarrow \frac{d^2 j}{dz^2} + \tilde{K}^2 j = 0, \quad j(z) = A_1 e^{-i \tilde{K} z} + A_2 e^{i \tilde{K} z};$$

При условии, чтобы  $|j| < \infty$ . Тогда  $j(z) = A_1 e^{-i \tilde{K} z}$ ,  $A_1 = j_0$

$$e^{-i \tilde{K} z} = e^{-i \frac{1-i}{\delta} z} = e^{-\frac{z}{\delta} - i \frac{z}{\delta}}$$

Имеем:

$$j = j_0 e^{-\frac{z}{\delta} - i \frac{z}{\delta}};$$

$$E_x = \frac{j_z}{\sigma} = \frac{j_0}{\sigma} e^{-\frac{z}{\delta} - i \frac{z}{\delta}} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta} - i \frac{z}{\delta}}, \quad E_0 = j_0 / \sigma;$$

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{i}{\kappa_0 \mu} \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{i}{\kappa_0 \mu} [\nabla, E_x] \vec{x}_0 = \frac{i}{\kappa_0 \mu} [\nabla E_x, \vec{x}_0] = \frac{i}{\kappa_0 \mu} \frac{\partial}{\partial z} E_0 e^{-\frac{z}{\delta} - i \frac{z}{\delta}} \\ &= \vec{y}_0 \underbrace{\frac{1}{\kappa_0 \mu} \frac{1-i}{\delta}}_{H_0} E_0 e^{-i \frac{1-i}{\delta} z} = \vec{y}_0 H_0 e^{-\frac{z}{\delta} - i \frac{z}{\delta}}, \quad H_0 = \frac{1-i}{\kappa_0 \mu \delta} E_0. \end{aligned}$$

$$j_0 = |j_0| e^{i\psi}$$

$\operatorname{Re}\{j e^{i\omega t}\} = |j_0| e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta} + \psi)$ , — ток сдвигаем от границы  $\exp(-z/\delta)$

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2 \pi \sigma \mu \omega}}.$$

Очевидно видно, что при увеличении частоты ток и поле будут в основном близи поверхности проводника.

Это явление называют скин-эффектом.

В более общем смысле о скин-эффекте говорят в тех случаях, когда переменное э/у. поле (а также и соответствующие токи) проникает лишь на относительно небольшую глубину в проводник.

Если  $\sigma \rightarrow \infty$  (т.е. проводник), то  $\delta = 0$  (поле не проникает).

## Различные трактовки скрин-эффекта

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\omega t \vec{H} = \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \sigma \vec{E}$$

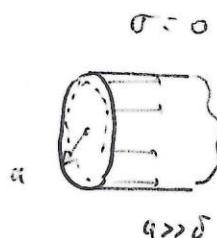
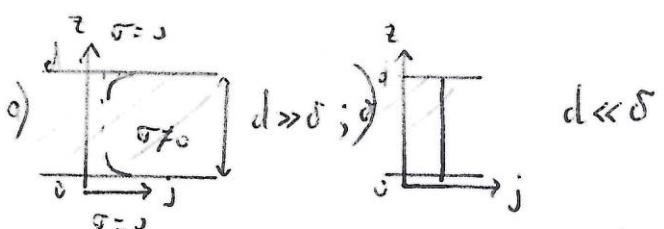
Переменное электрическое поле  $\vec{H}$  ( $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \neq 0$ ), проходящее в проводник, индуцирует переменное электромагнитное поле, а  $\rightarrow$  последнее вызывает появление токов  $\sigma \vec{E}$  (токи Фуко), дающие свой вклад (сопр. зондации) в магн. поле.

### Пример:

$$\text{для: } \mu = 1, \epsilon = 1, \sigma = 5,4 \cdot 10^{17} \text{ С/С}$$

$\lambda, \text{мм}$	1 м	1 м	100 м	10 км	$\infty$
$\gamma, \text{Гц}$ (частоты)	$3 \cdot 10^{10}$	$3 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^4$	0
$\delta, \text{мм}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-1}$	$\infty$

такж.  $3,75 \cdot 10^4$ .



Здесь  $\vec{H}_{\text{внешн}} = \vec{H}_{\text{внутр}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = -i \kappa \sigma \vec{H}_{\text{внешн}} \end{array} \right.$$

При  $a \ll \delta$  - ток распределен по сечению проводника равномерно

Если  $\sigma \gg \delta$ , то  $\vec{E} = 0$ ,  $\vec{H} = 0$  (выпукл.), т.е. на поверхности

$E_T = 0$ ,  $B_n = 0$  ( $H_n = 0$ ). Здесь при воспроизведении пол.

$$\left( \begin{array}{l} \vec{H} = 0 \\ B_n = 0 \\ (H_n = 0) \end{array} \right)$$

Все проводники можно считать, что в них можно поле вообще не проектировать (т.е.  $\mu_{\text{рези}} \rightarrow 0$ ).

Здесь по стечки. к некот. пол. (в квадратичном описании) проводник будем видеть так же, как сверхпроводник и магн. пол., так что

для воспроизведения магн. пола будем <sup>(1)</sup> воспользоваться стандартной задачей для сверхпроводника той же длины.

Также анализе эл. поле все  $E_T$  мало. В пределе  $\sigma \rightarrow \infty$   $E_T = 0$  (т.е.  $E \rightarrow \infty$  при переходе от задачи с дисл. геном к проводнику той же форме).

### Течение пограничного квазичастичного проводника

3

В случае перенесенного поля  $\vec{j}$  для квазичастичного описания проводника необходимо наложить дополнительное условие: толщина проводника должна быть много меньше толщины скрин-слоя

(тогда ток  $\vec{J}$  распределен квазифллюзорным по сечению проводника)

$$a \ll \delta$$



### Границные условия на границе с хорошим проводником (Излипединские граничные условия Леконовика)

Внимание показано, что в случае  $\vec{j} = j(z) \vec{x}_0$

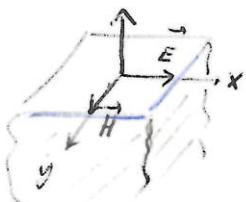
$y$  (↑)  $x$   $\rightarrow$  на поверхности проводника

$$E_x(0) = E_0$$

$$H_y(0) = \frac{1-i}{k_0 \mu_0 \delta} \quad \text{или}$$

$$\frac{E_x(0)}{H_y(0)} = \frac{k_0 \mu_0 \delta}{1-i} = \frac{k_0 \mu_0 \delta}{\sqrt{2} \sqrt{-i}} = \frac{\omega \mu \frac{c}{\sqrt{2 \pi \sigma \mu \omega}}}{\sqrt{2} \sqrt{-i}} = \sqrt{\frac{\mu}{-i \frac{4 \pi \sigma}{\omega}}} =$$

$$\vec{n} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_k}} ;$$



$\vec{n}$  - нормаль, смотрящая из проводника.

$$\vec{E}_q = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_k}} [\vec{n}, \vec{H}]_{|s} = \frac{c}{4\pi} Z_{ek} [\vec{n}, \vec{H}]_{|s}, \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{условие} \\ \text{приближения} \end{matrix}$$

$$\text{зде } Z_{ek} = \frac{4\pi}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_k}} .$$

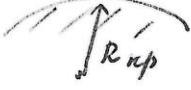
Величина  $\gamma_s = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_k}} = \sqrt{\frac{\mu}{-i \frac{4 \pi \sigma}{\omega}}} \dots$  называется поверхностной излипединской проводником:

$$\gamma_s = \frac{E_t}{H_t} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_k}} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{8 \pi \sigma}} (1+i) .$$

(Однако для проводников (из цветн. мат.)  $\gamma_s = 1$ )

Если  $\sigma \rightarrow \infty$ , то  $\gamma_s \rightarrow 0$ , и  $E_t = 0$  (идеальный проводник).

1) Границное условие нарашивается при проводнике конечной толщины  $d$ , если  $d \gg \delta$  (смешанная СКН - зеркальный)

4)  Условие нарашивается и для искривленной границы, если  $R_{kp} \gg \delta$ .

5)  Две кривые "работают" при наклонном падении, если проводимость  $\sigma$  достаточно велика.

$$\frac{E_1 \mu_1}{E_2 \mu_2} = \frac{\mu_{1\perp}}{\mu_{2\perp}}$$

$$n_{1,2} = \sqrt{E_{1,2} \mu_{1,2}}$$

$E_2 \mu_2 \gg E_1 \mu_1$  вблизи  
пограничной нормали

$$n_2 = \sqrt{E_2 \mu_2} = n_2' + i n_2''$$

Угломерка (В. А. Романов)  
нужно писать при  
искривленной границе

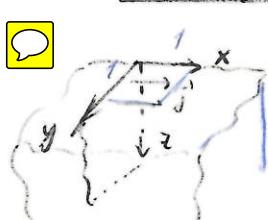
2) Максимальная неоднородность на границе  $L_T$   
затухает если  $L_T \gg \delta$ .

$$L_T \gg \delta$$

Значение приближенных граничных условий Лекомовика  
заключается в том, что они позволяют не рассаскивать поле внутри хорошо проводящего тела и учитывать  
наличие этого тела с помощью граничных условий  
на его поверхности

<Также на свойствах отражения граничных условий  $E_T=0, H_n=0$   
на поверхности идеального проводника>

### Энергетические соотношения при скрин-эффекте



Дополнительные  
потери в  
стенке  
с единичной  
плотностью  
струйчатой

$$Q = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int \frac{\vec{j} \vec{d}}{\sigma} d\vec{z} = \frac{1}{2\sigma} |j_0|^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2z}{\delta}} dz = \frac{\delta}{4\sigma} |j_0|^2;$$

$\frac{dy}{dz} = 1$

I - ток текущий через сечение фиктивной  
плоскости  $z=0$  (или плотность тока  $j_0$ ).

$$I = \int_0^\infty j dz = j_0 \int_0^\infty e^{-\frac{i-iz}{\delta}} dz = \frac{j_0 \delta}{1+i}$$

$$|I| = \frac{|j_0| \delta}{\sqrt{2}} ; \quad Q = \frac{\sqrt{2}}{\delta} |I|^2 ;$$

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sigma \delta} |I|^2 = \frac{R|I|^2}{2} ; R = R_{ek} = \frac{1}{\sigma \delta}$$



$$S = 1 \cdot \delta \\ L = 1 \\ R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{1}{\sigma \delta} ;$$

$$W^m = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\mu |H|^2}{8\pi} dz = \frac{\mu}{16\pi} \int_0^\infty \left| \frac{1-i}{K_0 \mu \delta} \frac{E_0}{j_0} e^{-\frac{z-i\frac{z}{\delta}}{\delta}} \right|^2 dz =$$

закон. диполиса  
столбика  
одноточечн.

$$= \frac{\mu}{16\pi} \frac{2}{K_0^2 \mu^2 \delta^2} \frac{|j_0|^2}{\sigma^2} \int_0^\infty e^{-\frac{2z}{\delta}} dz =$$

$$= \underbrace{\langle |j_0| = \frac{\sqrt{2}}{\delta} |I| \rangle}_{\frac{\delta}{2}} =$$

$$= \frac{\mu}{16\pi} \frac{2}{K_0^2 \mu^2 \delta^2} \frac{2|I|^2}{\delta^2 \sigma^2} \frac{\delta}{2} =$$

$$= \frac{\mu}{16\pi} \frac{2}{\frac{C^2}{c^2} \mu^2 \frac{c^4}{(2\pi\phi/\mu\omega)^2}} \frac{2|I|^2}{\phi^2} \cdot \frac{\delta}{2} =$$

$$= \frac{1}{c^2} \mu \pi \delta \frac{|I|^2}{2} = \frac{1}{2c^2} \underbrace{2\pi\mu\delta}_{L_{ek}} \frac{|I|^2}{2} = \frac{1}{2c^2} L_{ek} \frac{|I|^2}{2}$$

$L_{ek} = 2\pi\mu\delta$  - "индуктивность" скрин-элемента

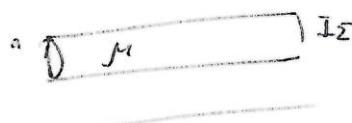
$$Z_{ek} = \frac{4\pi}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_0}} = \frac{4\pi}{c} \sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi G}} (1+i) =$$

$$Z_{ek} = \frac{4\pi E_0 \omega}{c H_0(0)} \quad \gamma_s = \frac{1}{c} \sqrt{2\pi\sigma\mu\omega} \frac{1}{\delta} + i \frac{\omega}{c^2} \sqrt{\frac{2\pi\mu}{\sigma\omega}} c = \\ \frac{c}{4\pi} H_0(0) = I ; I = \frac{j_0\delta}{1+i\omega} = \frac{\sigma E_0 \delta (1+i)}{2} ; \quad 2\pi\mu \left( \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}} \right)$$

$$R_{ek} = \frac{E_0 \omega}{I \cdot 1} ; H_0(0) = \frac{1-i}{\omega} E_0 = \frac{1}{\omega} E_0 \quad Z_{ek} = \frac{1}{\omega \delta} + i \frac{\omega L_{ek}}{c^2} = R_{ek} + i \frac{\omega}{c^2} L_{ek} ; \quad \text{В сущес. скрин-элем. неизвестн. напряж.}$$

Пример:

$$J = \frac{I_\Sigma}{2\pi a^2}$$



$$H_\varphi = \frac{I_\Sigma}{2\pi a^2} \cdot \frac{4\pi}{c} j \propto \frac{I_\Sigma}{c a^2} \cdot \frac{2\pi}{c} \cdot \frac{I_\Sigma}{a^2} \cdot \frac{r^2}{2\pi r} = \frac{2 I_\Sigma^2}{c a^4} \cdot \frac{r^2}{2} = \frac{I_\Sigma^2}{c a^4} \cdot r^2$$

$$W_{\text{нагр.}} = \mu_0 \int_0^a \frac{H_\varphi^2}{8\pi} ds = \mu_0 \frac{1}{8\pi} \frac{4 I_\Sigma^2}{c^2 a^4} \int_0^a r^4 \cdot 2\pi r dr =$$

$$= \mu_0 \frac{1}{c^2} I_\Sigma^2 \frac{1}{4} = \frac{1}{2c^2} L_{\text{нагр.}} I_\Sigma^2;$$

$$L_{\text{нагр.}} = \mu_0 \frac{1}{2}$$

$$W^m = \int_0^a \frac{1}{2} \frac{H_\varphi^2}{8\pi} ds = \frac{1}{2c^2} L_{\text{нагр.}} \frac{I_\Sigma^2}{2}$$

Симметрический контур  $\rightarrow$  выражение:

$$W^m = \frac{1}{2c^2} L_{\text{нагр.}} \frac{|I_\Sigma|^2}{2}$$

$$W_1^m = \frac{1}{2c^2} L_1 \frac{|I_\Sigma|^2}{2}$$

$$L = I_\Sigma / 2\pi a$$

$$W_{\text{нагр. грубы}}^m \approx \frac{1}{2c^2} \left( L_{\text{нагр.}} \frac{2\pi a}{2\pi a} \right) \frac{\left( I_\Sigma / 2\pi a \right)^2}{2} =$$

$a \gg \delta$

$$= \frac{1}{2c^2} \left( \frac{L_{\text{нагр.}}}{2\pi a} \right) \frac{|I_\Sigma|^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2c^2} \frac{2\pi \mu_0 \delta}{2\pi a} \frac{|I_\Sigma|^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2c^2} \underbrace{L_{\text{нагр.}}}_{\text{нагр.}} \frac{|I_\Sigma|^2}{2},$$

$\mu_0 \delta a$

$$L_{\text{нагр.}} = \mu_0 \frac{\delta}{a} \ll \mu_0$$

## Квазистационарное описание в квазичастотных проводниках с сосредоточенными параметрами

-1-

Условие применимости квазистационарного описания в данном случае имеет вид  $T \gg \tau$ , где  $\tau$  - время запаздывания поля,  $T = 2\pi/\omega$ . Величину  $\tau$  можно оценить как  $\tau \sim l/v$ , где  $l$  - характерный пространственный масштаб системы,  $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$  - скорость волн.

### Пример 1 [ провод с переменным током]

$$\vec{H} \sim e^{i\omega(t-\frac{l}{v})}$$

$I = I_0 e^{i\omega t}$

- имеет место  
запаздывание поля  
(относительно тока)  
на время запаздывания  
 $\tau = l/v$  (здесь  $l \equiv l$ ).

$$e^{i\omega(t-\frac{l}{v})} = e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega}{v}l} \approx e^{i\omega t}, \text{ если } \frac{\omega}{v}l \ll 1.$$

[ В экспоненте  $e^{id}$  при  $d \ll \pi$  можно положить  $d \approx 0$ ,  
т.е.  $e^{id} \approx 1$ ]

$$\frac{\omega}{v}l = 2\pi \frac{1}{T} \frac{l}{v} = 2\pi \frac{\tau}{T} \ll 1 \text{ при } T \ll T \text{ (с горючью  
до множителя } 2\pi \text{, который имеет порядок } \gtrsim 1\text{).}$$

Поэтому условие квазистационарного поля  $\tau \ll T$   
эквивалентно условию  $\frac{\omega}{v}l \ll 1$ . Однако

$$\frac{\omega}{v} = \underbrace{\frac{\omega}{c}}_{k_0} \sqrt{\epsilon\mu} = k_0 \sqrt{\epsilon\mu} - волновое число в среде.$$

Получаем, что условие  $\frac{\omega}{v}l \ll 1$  можно записать  
в виде  $kl \ll 1$ . Поскольку  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , где  
 $\lambda$  - длина волны, условие  $kl \ll 1$  можно переписать и  
в виде  $\frac{2\pi}{\lambda}l \ll 1$ , или  $l \ll \lambda$  (если преобразовать величиной  $2\pi$ ).

Таким образом, в области, где  $K \ll 1$  (или, что то же,  $\tau \ll \lambda$ ) поле подчиняется квазистационарному приближению, т.е. характеризуется преобразованием малым запаздыванием.

Тогда, например, поле прямого провода с током  $I = I_0 e^{i\omega t}$  в зоне, где  $\tau \ll \lambda$ , может быть приближенно записано в виде

$$H_\varphi \approx \frac{2I_0}{c\tau} e^{i\omega t}.$$

В этом случае пространственная структура поля оказывается такой же, как в статике, а само поле называется квазистатическим.

{  
Доля пространства, определяемая условием  $K \ll 1$  (или  $\tau \ll \lambda$ ) называется зоной квазистатики.

В зоне квазистатики, как мы видим, поле подчиняется квазистационарному приближению ( $\epsilon \ll T$ ).

Аналогичная картина будет иметь место вокруг любых проводников с переменным током, если удалиться от них на расстояние  $\ell$ , такое, что  $K \ll 1$  (т.е. оставаться в зоне квазистатики).

Естественно, что в приближении, когда  $\vec{H} \approx \vec{H}_{\text{кв}}$ , квазистатическое поле  $\vec{H}_{\text{кв}}$  удовлетворяет уравнениям

$$\text{rot } \vec{H}_{\text{кв}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{B}_{\text{кв}} = 0, \quad \text{где } \vec{B}_{\text{кв}} = \mu \vec{H}_{\text{кв}}.$$

Ясно, что переменное поле  $\vec{H}_{\text{кв}}$  должно порождать вихревое электрическое поле  $\vec{E}$  согласно формулям

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{вих}} \rightarrow \left[ \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \mu \frac{\partial \vec{H}_{\text{кв}}}{\partial t} \right] \quad \leftarrow \text{здесь учт.}, \text{т.е. } \vec{H} \approx \vec{H}_{\text{кв}}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \rightarrow \left[ \text{div } \vec{D} = 0 \right] \quad \leftarrow \text{здесь учт. отсутств.}, \\ \text{т.е. } \text{div } \vec{j} = 0, \text{т.е. } \beta = 0 \\ (\text{div } \vec{j} + i\omega \beta = 0)$$

В случае гармонических полей имеем:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -i \omega \mu \vec{H}_{\text{кв}} \text{см}, \text{ где } \omega = \omega/c.$$

Величину  $\operatorname{rot} \vec{E}$  по порядку величин можно оценить так, как оценивается порядок частных производных:  $|\operatorname{rot} \vec{E}| \sim \frac{|\vec{E}|}{\ell}$ .

Итак,

$$\frac{|\vec{E}|}{\ell} \sim \omega \mu |\vec{H}_{\text{кв}}|, \text{ откуда имеем} \\ |\vec{E}| \sim \omega \mu |\vec{H}_{\text{кв}}|. \quad (1)$$

Мы оценили порядок возникающего вокруг проводов вихревого электрического поля. Если величины  $\epsilon$  и  $\mu$  не слишком сильно отличаются от единицы, то при условии  $k\ell \ll 1$  (т.е.  $\omega \tau_{\text{пер}} \ell \ll 1$ ) будет выполняться и условие  $\omega \mu \ell \ll 1$ , при котором  $|\vec{E}| \ll |\vec{H}_{\text{кв}}|$ .

Возникающее поле  $\vec{E}$  порождает зета  $\frac{1}{c} \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , за счет которого возникает добавка  $\vec{H}_{\text{дод}}$  к полю  $\vec{H}_{\text{кв}}$ : полное поле  $\vec{H} = \vec{H}_{\text{кв}} + \vec{H}_{\text{дод}}$ .

$$\underbrace{\operatorname{rot} \vec{H}}_{\substack{\operatorname{rot} \vec{H}_{\text{кв}} + \operatorname{rot} \vec{H}_{\text{дод}} \\ " \frac{4\pi}{c} j }} = \frac{4\pi}{c} \boxed{j} \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

$$\text{Отсюда имеем} \quad \operatorname{rot} \vec{H}_{\text{дод}} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \text{ или} \quad \operatorname{rot} \vec{H}_{\text{дод}} = ik \epsilon \vec{E}.$$

Тогда справедлива оценка

$$\frac{|\vec{H}_{\text{дод}}|}{\ell} \sim k \epsilon |\vec{E}|, \text{ или} \quad |\vec{H}_{\text{дод}}| \sim k \epsilon \ell |\vec{E}|.$$

Подставим вместо  $|\vec{E}|$  оценку из (1). Получим

$$|\vec{H}_{\text{дод}}| \sim k \epsilon \ell \cdot \omega \mu \ell |\vec{H}_{\text{кв}}| = (k \ell)^2 |\vec{H}_{\text{кв}}|$$

Но  $k \ell \ll 1$ . Значит,  $|\vec{H}_{\text{дод}}| \ll |\vec{H}_{\text{кв}}|$  и  $\vec{H} \approx \vec{H}_{\text{кв}}$ .

Представим синтез сравнив в этом случае электрическую и магнитную энергию, запасенную в зоне квазистатики:

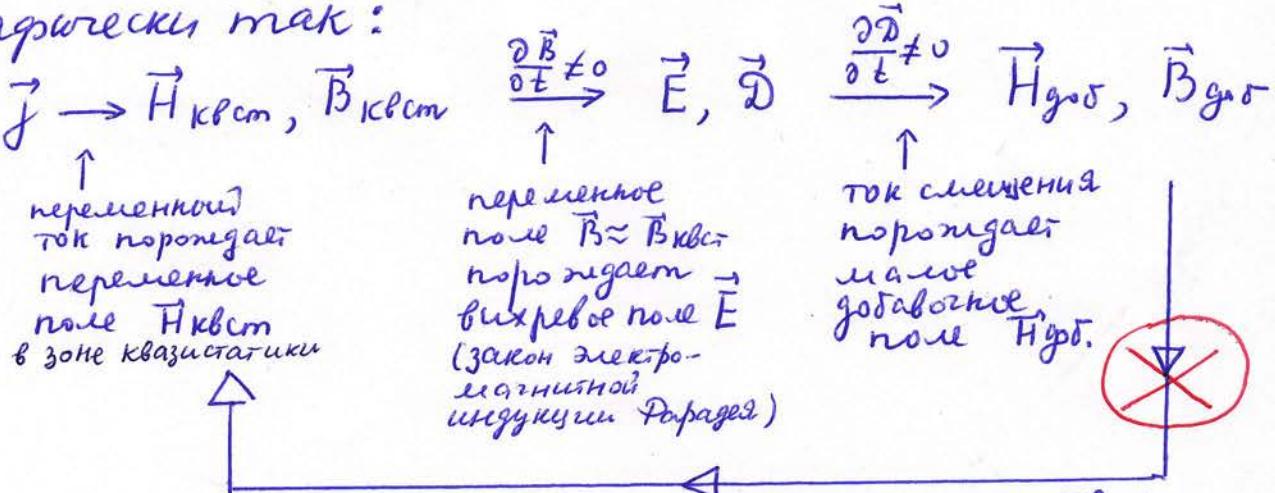
$$\frac{\overline{W}^{e^+}}{\overline{W}^{m^+}} \sim \frac{\overline{w}^{e^+} \cdot \cancel{l^3}}{\overline{w}^{m^+} \cdot \cancel{l^3}} = \frac{\epsilon |E|^2 / 16\pi}{\mu \underbrace{|H|^2 / 16\pi}_{\text{||} H \text{|| кв. см}}} \sim \langle \text{с учётом (1)} \rangle$$

$$\sim \frac{\epsilon \cdot (K_0 l \mu)^2 |H \text{ кв. см}|^2}{\mu |H \text{ кв. см}|^2} = K_0^2 l^2 \epsilon \mu = (K l)^2 \ll 1$$

вспоминается  
в зоне квазистатики  
с квадратичным  
запасом.

Таким образом, вблизи проводов с переменными токами (при  $\rho=0$ ) имеет место соотношение  $\overline{W}^T / \overline{W}^{m^+} \sim (K l)^2 \ll 1$ , так что  $\overline{W}^T = \overline{W}^{e^+} + \overline{W}^{m^+} \approx \overline{W}^{m^+}$ . Т.е. энергия запасается преимущественно в форме „магнитной гасьбы“ энергии. В силу этого вблизи катушки, внутри соленоидов и т.п. происходит сострогожение энергии в „магнитной форме“.

Можем всю описанную картину изобразить графически так:



Поле  $H_{\text{доб}}$  нужно прибавить к полю  $H_{\text{kvst}}$ , чтобы получить поле поле  $H$ , но эти два здесь преодолевают, „разрывают“ цепь между собой (символ  $\otimes$ ).

Пример 2 ( поле вокруг провода с включенным конденсатором вне конденсатора)

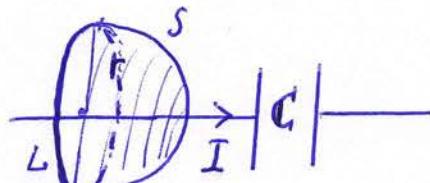


Рис. 1: на контуре радиуса  $r$  "намечена" поверхность  $S$ .

$$I = I_0 e^{i\omega t}$$

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I + \underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{D} dS}_{\text{"}}$$

$$\frac{4\pi}{c} I_{\text{см/вне}} \text{ C}$$

Пусть радиус  $r$  удовлетворяет условию нахождения в зоне квазистатики:  $k r \ll 1$ .

Тогда  $\vec{H} \approx \vec{H}_{\text{квзт}}$ . Следовательно

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} \approx \oint_L \vec{H}_{\text{квзт}} d\vec{l}. \text{ Но } \oint_L \vec{H}_{\text{квзт}} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I.$$

Получаем, что

$$\underbrace{\oint_L \vec{H} d\vec{l}}_{\text{"}} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{4\pi}{c} I_{\text{см}}.$$

Такое возможно, если только вне конденсатора  $|I_{\text{см}}| \ll |I|$ . Таким образом вне конденсатора можно пренебречь током изменения:

$$I + I_{\text{см/вне}} \approx I.$$

Рассмотрим теперь тот же контур  $L$ , но поверхность  $S$  "намечена" на него так, чтобы она находилась внутри конденсатора.

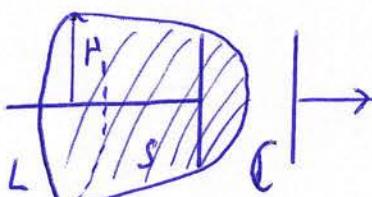


Рис. 2

$$I = I_0 e^{i\omega t}$$

$$\underbrace{\oint_L \vec{H} d\vec{l}}_{\text{"}} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{4\pi}{c} I_{\text{см/внутри}} \text{ C}$$

$$\oint_L \vec{H}_{\text{квзт}} d\vec{l}$$

внутри конденсатора

тока  $I$  нет, есть только ток смещения

$$Y_{\text{max}, \text{rms}} = \int H_{\text{KBM}} d\ell = \frac{4\pi}{c} I.$$

-6-

Полярная, 200

$$I \approx I_{\text{cm}} / \text{старт} \quad (2)$$

Несколько заранее данных факт подтверждаем утверждением, что ток провода I „затекает“ током смещения в конденсаторе  $I_{en}$  /  $I_{kupr}$  C.

В действительности, Roberts,

Условие (3) является очевидным следствием уравнения Максвелла, записанного в виде

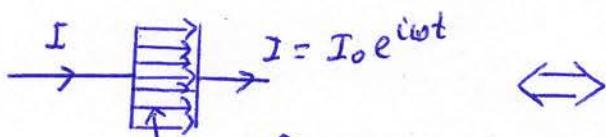
$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} (\vec{J} + \vec{J}_{am}).$$

Приложение операторов  $\operatorname{div}$  и  $\operatorname{curl}$ , что делает  $\vec{H} = 0$ .  
Получим, что

$$d\partial v(\vec{f} + \vec{f}_{\text{cut}}) = 0.$$

Таким образом мы имеем  $\tilde{J} + \tilde{J}'$  не перенормированные, однако вне конденсатора  $\tilde{J} + \tilde{J}' \approx \tilde{J}$ , а внутри конденсатора  $\tilde{J} = \tilde{J}'$ .

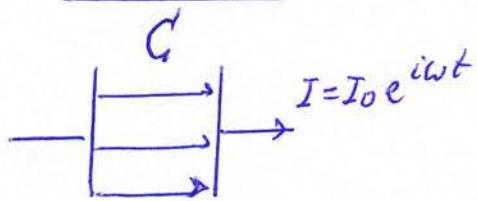
В силу сказанного над отысканием полей  $\tilde{H}$  все конденсаторы на доставлено большими расстояниями от него (но внутри зоны квазистатики!) описанная система может быть заменена на такую:



$$J_{cm} : \int j_{cm} d\bar{s} = I_{cm} \approx I$$

Конденсатор „работает“ как „умножение“ прямого провода для наружного наблюдателя.

### Пример 3 [поле внутри конденсатора]



Размер конденсатора  
(характерный)  $\ell$   
удовлетворяет условию  
 $kl \ll 1$ .

В этом случае поле в конденсаторе  $\vec{E} \approx \vec{E}_{\text{квст}}$ ,  
где квазистатическое поле  $\vec{E}_{\text{квст}}$  определяется  
уравнениями

$$\operatorname{div} \vec{D}_{\text{квст}} = 4\pi \rho$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}_{\text{квст}} = 0$$

$$\vec{D}_{\text{квст}} = \epsilon \vec{E}_{\text{квст}}$$

$\rho$  - учитывают перенесенные  
заряды на откладках  
конденсатора с емкостью  $C$ .

Переменное поле  $\vec{E}_{\text{квст}}$  порождает поле  $\vec{H}$   
в конденсаторе:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}_{\text{квст}}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Проведем оценки  
для уравнения

$$\operatorname{rot} \vec{H} = i \kappa \epsilon \vec{E}_{\text{квст}}$$

$$\text{Здесь мы посчитим } \vec{D} \approx \vec{D}_{\text{квст}} = \epsilon \vec{E}_{\text{квст}}$$

$$|\operatorname{rot} \vec{H}| \sim \frac{|\vec{H}|}{\ell}$$

$$\frac{|\vec{H}|}{\ell} \sim \kappa \epsilon |\vec{E}_{\text{квст}}|.$$

Получаем

$$|\vec{H}| \sim \kappa \epsilon \ell |\vec{E}_{\text{квст}}|. \quad (4)$$

(ср. с (1); см. обсуждение поля фарadays (1))

Полное поле  $\vec{E}$  в конденсаторе содержит также  
выхревую составляющую  $\vec{E}_{\text{вихр}}$ :  $\vec{E} = \vec{E}_{\text{квст}} + \vec{E}_{\text{вихр}}$ ,  
где  $\operatorname{rot} \vec{E}_{\text{квст}} = 0$ ,  $\operatorname{rot} \vec{E}_{\text{вихр}} \neq 0$ .

Запишем уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \text{ или } \underbrace{\operatorname{rot} \vec{E}}_{\text{rot } \vec{E}_{\text{вихр}}} = -i \kappa \mu \vec{H}.$$

" $\operatorname{rot} \vec{E}_{\text{вихр}}$ "

Тогда имеем место оценка:

$$|\operatorname{rot} \vec{E}| \sim \frac{|\vec{E}_{\text{вихр}}|}{\ell}, \text{ т.е. } \frac{|\vec{E}_{\text{вихр}}|}{\ell} \sim \kappa \mu |\vec{H}|, \text{ или } |\vec{E}_{\text{вихр}}| \sim \kappa \mu \ell |\vec{H}|.$$

Подставим  $\vec{H}$  из формулы (4):

$$|\vec{E}_{\text{вихр}}| \sim \kappa \mu \ell |\vec{H}| \sim \kappa \mu \cdot \kappa \epsilon \cdot |\vec{E}_{\text{квст}}| \sim (\kappa \ell)^2 |\vec{E}_{\text{квст}}|.$$

Результат

$$|\vec{E}_{\text{вих}}| \sim (k l)^2 |\vec{E}_{\text{квсм}}|$$

означает (в силу  $k l \ll 1$ ), что  $|\vec{E}_{\text{вих}}| \ll |\vec{E}_{\text{квсм}}|$  внутри конденсатора.

Одно и то же значение магнитной и электрической частей энергии внутри конденсатора:

$$\frac{\overline{W^m}^T}{\overline{W^e}^T} \sim \frac{\overline{w^m}^T f^3}{\overline{w^e}^T f^3} \sim \frac{\mu I \bar{H}^2 / 16\pi}{\epsilon |\vec{E}|^2 / 16\pi} \approx \frac{\mu I \bar{H}^2}{\epsilon |\vec{E}_{\text{квсм}}|^2} \sim \text{[\(4\)](#)} \sim$$

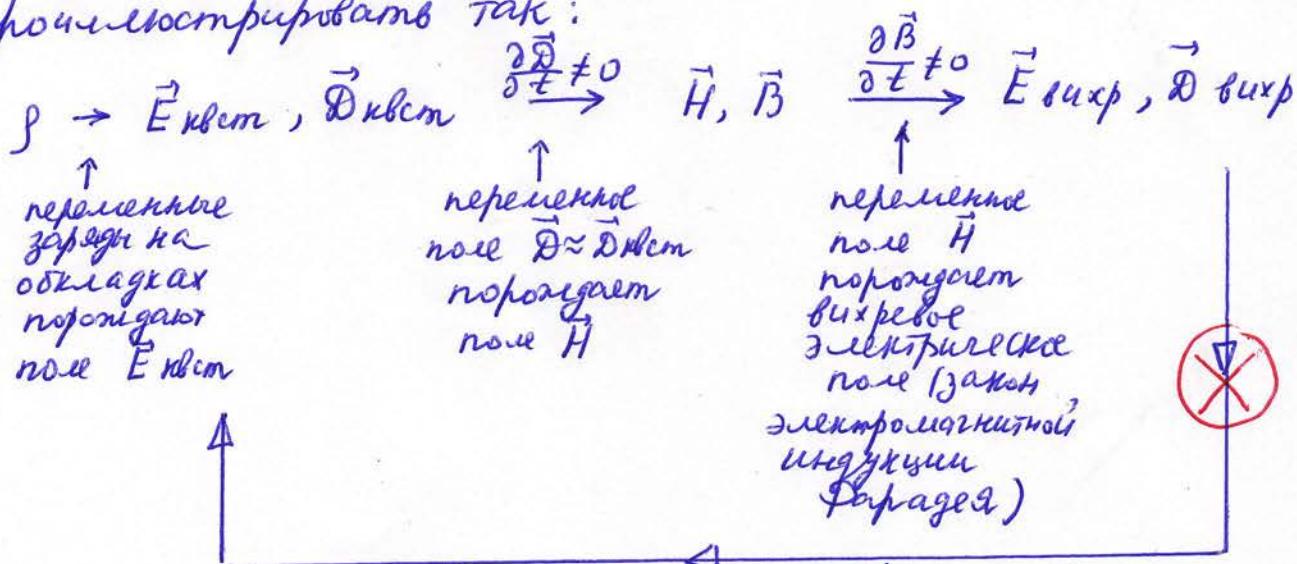
$$\sim \frac{\mu (k_0 \epsilon l)^2 |\vec{E}_{\text{квсм}}|^2}{\epsilon |\vec{E}_{\text{квсм}}|^2} = k_0^2 l^2 \epsilon \mu = (kl)^2 \ll 1.$$

Поэтому внутри конденсатора энергия сосредоточивается в „электрической форме“:

$$\overline{W^m}^T \ll \overline{W^e}^T, \text{ так что } \overline{W}^T = \overline{W^e} + \overline{W^m}^T \approx \overline{W^e}^T.$$

Отсюда – название „сосредоточенные параметры“ (для емкостей и индуктивностей).

Графическое описание процессов можно проиллюстрировать так:

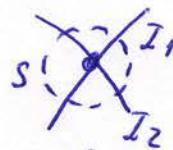


Поле  $\vec{E}_{\text{вих}}$  добавляется к  $\vec{E}_{\text{квс}}$ , чтобы получилось полное поле  $\vec{E}$ , но этот вихревой добавкой можно здесь пренебречь из-за её малости.

# Законы Кирхгофа для квазистационарных

-9-

## Первый закон.



Узел с токами.

Всем было показано, что  $\operatorname{div}(\vec{J} + \vec{J}_{\text{ст}}) = 0$ ,

t.e.  $\oint_S (\vec{J} + \vec{J}_{\text{ст}}) d\vec{s} = 0$ , или  $\underbrace{\oint_S \vec{J} d\vec{s}}_{\sum_k I_k} + \underbrace{\oint_S \vec{J}_{\text{ст}} d\vec{s}}_{I_{\text{ст}}} = 0$ .

Кроме того, это показало, что токами смещения вокруг проводов в зоне квазистатики можно пренебречь. Тогда получаем

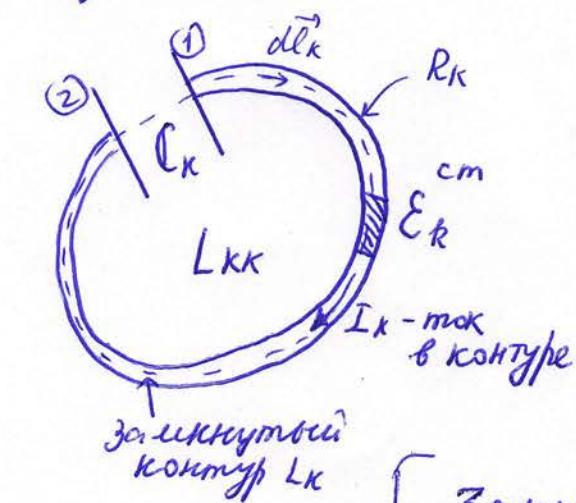
$$\sum_k I_k = 0,$$

← Первый закон Кирхгофа

t.e. сумма переменных токов в узле равна нулю.

## Второй закон.

Изобразим контур с номером  $k$  (можут быть и другие контуры): его контурическим сопротивлением —  $L_k$ , он содержит емкость  $C_k$ , стабильную ЭДС  $E_k^{\text{ст}}$  и имеет сопротивление проводов  $R_k$ .



(1), (2) - номера  
обкладок  
конденсатора

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l}_k = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_k}{\partial t},$$

где  $\Phi_k$  — поток  
магнитного поля  
через контур  $L_k$ .

Запишем закон Ома:

$$\frac{\vec{J}}{J} = \vec{E} + \vec{E}^{\text{ст}}$$

$$\int \frac{\vec{J}}{\sigma} d\vec{l}_k = \int \vec{E} d\vec{l}_k + \underbrace{\int \vec{E}^{cm} d\vec{l}_k}_{(1)} ;$$

$$\int \frac{\vec{J}}{\sigma} d\vec{l}_k = \int \frac{\vec{j}}{\sigma} d\vec{l}_k = \int \frac{I_k}{\sigma S} d\vec{l}_k = \overset{(2)}{E_k^{cm}} I_k \int \frac{d\vec{l}_k}{\sigma S} = I_k R_k ;$$

Всююд  $I_k$   
за знак интеграла,  
мы оставляем

что ток во всех  
точках контура  
колеблется во  
времени одинаково  
(синхронно); это  
возможно только  
при пренебрежении  
запаздыванием, т.е.,  
в зоне квазистатики.

Чтоб, что  
поле  
двигалось  
квазистатично

$$\int \vec{E} d\vec{l}_k = \underbrace{\oint \vec{E} d\vec{l}_k}_{L_k} - \int \vec{E} d\vec{l}_k =$$

$\underbrace{\text{путь проходит}}_{\text{внутри конденсатора}}$

$$= - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} + \int \vec{E} d\vec{l}_k ;$$

$\underbrace{\text{путь интегрирования}}_{\text{внутри конденсатора}}$

$\overset{\text{II}}{V_k}$

$$\Phi_k = \Phi_{kk} + \sum_{m \neq k} \Phi_{km}.$$

Если можно пренебречь запаздыванием магнитного потока (т.е. магнитного поля) относительно тока, то  $\Phi_{km} \sim I_{km}$ ,  $\Phi_{km} \sim I_{km}$ .

$V_k$  — обозначение  
второго  
интеграла.

Значит, как и в статье,

$$\Phi_{kk} = \frac{1}{C} L_{kk} I_k, \quad \Phi_{km} = \frac{1}{C} L_{km} I_m.$$

Здесь же слова (во второй раз) пренебрегли запаздыванием.

Если пренебречем запаздыванием и дадут пока  $\vec{E}$  в конденсаторе, то заряд  $q_k$  на первой обкладке и величина  $V_k$  (напряжение, отсчитываемое от первой обкладки) пропорциональны друг другу. Коэффициент пропорциональности — емкость  $C_k$ , как в статье.

$$V_k = \frac{q_k}{C_k}.$$

Здесь же в третий раз пренебречем запаздыванием.

Пусть  $I_k$  — ток, текущий в проводе, который идет от обкладки  $\mathcal{D}$ . Согласно уравнению непрерывности

$$I_k = -\dot{q}_k,$$

$$\text{т.е. } q_k = - \int I_k dt, \text{ тогда } V_k = -\frac{1}{C_k} \int I_k dt.$$

Но получим, что

$$\begin{aligned} \stackrel{(2)}{\int} \vec{E} d\vec{l}_k &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} + V_k = \\ \stackrel{(1)}{=} &- \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{C} L_{kk} I_k + \sum_{m \neq k} \Phi_{km} \right) - \frac{1}{C_k} \int I_k dt. \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$R_k I_k = -\frac{1}{C^2} \frac{\partial}{\partial t} (L_{kk} I_k) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m \neq k} \Phi_{km} - \frac{1}{C_k} \int I_k dt +$$

$$\text{Окончательно получаем: } \underbrace{+ E_k^{cm}}_{\text{.}}$$

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial}{\partial t} (L_{kk} I_k) + R_k I_k + \frac{1}{C_k} \int I_k dt =$$

$$= E_k^{cm} + (-1) \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m \neq k} P_{km};$$

$E_k^{ind}$  - индукционная  
ЭДС в  $k$ -ом контуре.

Здесь  $P_{km} = \frac{1}{C} L_{km} \dot{I}_m$ .

(5)

Равенство (5) выражает второй закон Кирхгофа для квазистационарной цепи.

Если геометрия контуров не меняется во времени, то величины  $L_{kk}$  и  $L_{km}$  можно вынести за знак производной  $\frac{\partial}{\partial t}$  и переписать (5) в таком виде:

$$\frac{1}{C^2} \sum_m L_{km} \dot{I}_m + R_k I_k + \frac{1}{C_k} \int I_k dt = E_k^{cm}. \quad (6)$$

Здесь суммирование по  $m$  включает и  $m = k$ ;  $\overset{\text{символ}}{\underset{(\text{наг } I)}{\overset{\text{"ТОРКА"} = \frac{\partial}{\partial t}}{\text{}}}} b(6)$ .

### Пример

Пусть имеется единственний контур, возбуждаемый стоячей ЭДС  $E = E_0 e^{i\omega t}$  (здесь  $k=1$  в этом случае опускаем). Найти установившийся ток в контуре.

Запишем уравнение (6):

$$\frac{1}{C^2} L \ddot{I} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = E_0 e^{i\omega t}.$$

Продифференцируем эту уравнение по времени; решение ищем в виде  $I = I_0 e^{i\omega t}$ , где  $I_0 = \text{const}$ :

$$\frac{1}{C^2} L \ddot{I} + RI + \frac{1}{C} I = i\omega E_0 e^{i\omega t},$$

Подстановка  $I = I_0 e^{i\omega t}$  даёт

$$\left\{ \frac{1}{C^2} (i\omega)^2 L I_0 + i\omega R I_0 + \frac{1}{C} I_0 \right\} e^{i\omega t} = i\omega E_0 e^{i\omega t}.$$

Поделив на  $(i\omega)$ , получим после сокращения экспоненты  $e^{i\omega t}$ :

$$\left( \frac{i\omega L}{C^2} + R + \frac{1}{i\omega C} \right) I_0 = E_0,$$

или

$$Z I_0 = E_0,$$

где введен impedance  $Z = R + i\omega \left( \frac{L}{C^2} - \frac{1}{\omega^2 C} \right)$ .

Рассмотрим частный случай свободных колебаний, т.е. колебаний без источника, когда  $E_0 = 0$ , а  $I_0 \neq 0$ :

$$Z I_0 = 0.$$

Решение с  $I_0 \neq 0$  возможно, если только  $Z = 0$ , т.е.

$$R + i\omega \left( \frac{L}{C^2} - \frac{1}{\omega^2 C} \right) = 0$$

Отсюда следует, что должны выполняться два соотношения:

$$R = 0, \quad (7)$$

$$\frac{L}{C^2} - \frac{1}{\omega^2 C} = 0. \quad (8)$$

Условие (7) означает отсутствие джоулевых потерь (иначе свободные незатухающие колебания невозможны).

Условие (8) даёт

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{LC}}. \quad (9)$$

$\leftarrow c$  - скорость света  
 $\leftarrow C$  - емкость

Скорость света  $c$  в гальванеической цепи определяется с использованием гауссовой системы единиц (в SI имеем  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ ).

Таким образом, свободные колебания могут существовать в этой цепи только на собственной частоте, определимой формулой (9).

Заметим, что свободные колебания не могут пустить внешний источник, когда  $E_0 \neq 0$ , а частота задается источником (т.е.  $E = E_0 e^{i\omega t}$ ).

# Бессторопоременное электромагнитное поле

## Плоские электромагнитные волны

Расмотрим переменное ( $\sim e^{i\omega t}$ ) эл/поле в безграничной, однородной среде. В отсутствие источников уравнения Максвелла принимают вид

$$\begin{aligned} \text{ЭЛ/поле} \\ \text{однородной} \\ \text{среды} \quad - \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{H} = i\kappa_0 \epsilon \vec{E} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -i\kappa_0 \mu \vec{H} \end{array} \right. \Rightarrow \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \left[ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{array} \right] \\ \Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0, \quad \Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0. \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu} \end{aligned}$$

Решением этих уравнений является плоская электромагнитная волна. В плоской волне зависимость поля от координат дается множителем вида  $\sim e^{i\vec{k}\vec{r}}$ , где  $\vec{k}$  - вектор волны ( $\vec{R}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ ).

Пример:

$$\vec{E}(z) = \vec{x}_0 E_x(z), \quad E_x(z) = E_0 e^{-ik_z z} \quad (*)$$

Видим ось  $z$   
перпендикулярно  
этой плоскости

$$\frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + k^2 E_x(z) = 0. \quad \text{Функция (*) является решением уравнения, если } k_z = k = \kappa_0 \sqrt{\epsilon \mu}, \text{ т.е. } \vec{k} = k_z \vec{z}_0 = \vec{k}_0.$$

Def:

Плоской мат. хр. эл/поле называется эл/поле, реж. векторы которого в каком-либо момент времени принимают одинаковые значения на симметрических плоскостях

Пусть

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_0 e^{-ik_z z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \vec{E} = -i\vec{k} \vec{E}, \quad \operatorname{div} (\vec{A} e^{-i\vec{k}\vec{r}}) = (-i\vec{k}, \vec{A}), \\ \operatorname{rot} (\vec{A} e^{-i\vec{k}\vec{r}}) = [-i\vec{k}, \vec{A}]. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{i}{\kappa_0 \mu} \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{i E_0}{\kappa_0 \mu} [\nabla e^{-ik_z z}, \vec{x}_0] = \frac{i}{\kappa_0 \mu} [-iK \vec{z}_0, \underbrace{E_0 e^{-ik_z z}}_{-i\vec{k}} \vec{x}_0] = \\ &= \frac{K}{\kappa_0 \mu} E_x \vec{y}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_x \vec{y}_0 \end{aligned}$$

$$H_y = \frac{1}{\gamma} E_x, \quad \text{где } \gamma = \frac{E_x}{H_y} \quad (\text{безразм. волна})$$

Величина  $\gamma$  называется поглощением (по отношению к нач. фазе) плоской волны. (или, короче, волновой индексом среды)

$$\rightarrow \text{Итак, } E_x(z, t) = |E_0| \cos(\omega t - kz + \varphi),$$

$$H_y(z, t) = \frac{1}{\gamma} |E_0| \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

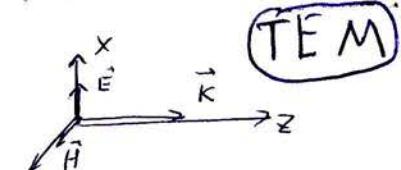
$$\omega t - kz + \varphi = \text{const} -$$

уравнение поверхности постоянной фазы

В каждый момент  $t = t$  фикс.

$z = \text{const}$  на этой поверхности

TEM - изолированная  
(однородная плоская волна)

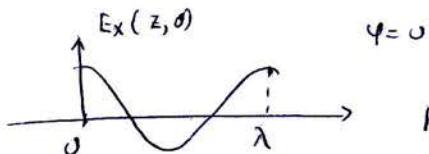


Видно, что  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{k}$  образуют  
правую тройку :  $\vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [\vec{H}, \vec{z}_0]$ ; TEM

$$v_p = \frac{dz}{dt}$$

$$\omega t - kz + \varphi = \text{const} \Rightarrow \frac{d}{dt} \Rightarrow \omega - k \frac{dz}{dt} = 0, \quad v_{paz} \equiv v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}},$$

$$\boxed{\vec{E}_\perp = \eta_\perp [\vec{H}, \vec{n}]}; \quad \vec{n} = \vec{z}_0 \text{ (здесь)}$$



$$\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}; \quad \lambda = \nu T$$

$$\sqrt{\epsilon \mu} = n - \text{ показатель преломления;}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\lambda_0}{n}.$$

Благодаря такому физическому смыслу  $v_p = \frac{\partial \omega}{\partial k}$

$$\vec{r}_p = \nabla_k \omega$$

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu}$$

$$\frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{\partial}{\partial \omega} \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{1}{n} + \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{\omega}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \omega} =$$

$$= \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{\omega \frac{\partial n}{\partial \omega}}{n^2} \right);$$

$$\boxed{v_{ip} = \frac{\omega}{1 - \frac{\omega}{n} \frac{\partial n}{\partial \omega}}}$$

При отсутствии дисперсии  $\partial n / \partial \omega = 0$ , и  $v_{ip} = v$ .

Замечание, что величина  $|v_{ip}|$  (так, где  $\vec{v}_{ip} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \nabla_k \omega$  определена корректно) всегда меньше  $c$  - скорости света в вакууме

Поток энергии:

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\vec{E}, \vec{H}] = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\underbrace{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [\vec{H}, \vec{z}_0]}_{\vec{E}}, \vec{H}^*] =$$

$$= \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} |\vec{H}|^2 \vec{z}_0 = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\vec{E}|^2 \vec{z}_0$$

Рассмотрим теперь плюсную форму 1-ой задачи :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-ik\vec{r}}; \quad \vec{k} = k_x \vec{x}_0 + k_y \vec{y}_0 + k_z \vec{z}_0, \quad \vec{r} = x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0 + z \vec{z}_0$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-ik\vec{r}}; \quad \nabla e^{-ik\vec{r}} = -i\vec{k} e^{-ik\vec{r}}$$

$$\vec{H} = \frac{i}{k_0 \mu} \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{i}{k_0 \mu} [\nabla, \vec{E}] = \frac{i}{k_0 \mu} [-i\vec{k}, \vec{E}] = \frac{1}{k_0 \mu} [\vec{k}, \vec{E}]$$

$$\vec{H}_0 = \frac{1}{k_0 \mu} [\vec{k}, \vec{E}_0]. \quad \text{Далее, действуя аналогично, получим:}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -i\kappa_0\mu_0 \vec{H} \\ \text{rot } \vec{H} &= i\kappa_0\epsilon \vec{E} \\ \text{div } \vec{E} &= 0 \\ \text{div } \vec{H} &= 0 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}} \\ \vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} + [\vec{k}, \vec{E}_0] = \kappa_0 \mu_0 \vec{H}_0 \\ - [\vec{k}, \vec{H}_0] = \kappa_0 \epsilon \vec{E}_0 \\ (\vec{k}, \vec{E}_0) = 0 \\ (\vec{k}, \vec{H}_0) = 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{H}_0 = \frac{1}{\kappa_0 \mu_0} [\vec{k}, \vec{E}_0]$$

$$[\vec{k}, [\vec{k}, \vec{E}_0]] = -\kappa_0^2 \epsilon \mu_0 \vec{E}_0 ; \quad \vec{k}(\vec{k}, \vec{E}_0) - (\vec{k}, \vec{k}) \vec{E}_0 = -\kappa_0^2 \epsilon \mu_0 \vec{E}_0$$

$$\{ (\vec{k}, \vec{k}) - \kappa_0^2 \epsilon \mu_0 \} \vec{E}_0 = 0.$$

Для find непривычного решения метод. и док. задач

$$(*) \quad (\vec{k}, \vec{k}) = \kappa_0^2 \epsilon \mu_0, \text{ где } \kappa = \kappa_0 \sqrt{\epsilon \mu}.$$

(\*) - дисперсионное уравнение для плоских Э/М. волн в однородной диэлектрической среде. Решение этого уравнения:  
 $\omega = \omega(\vec{k})$  - т.н. дисперсионное соотношение для волн

Рассмотрим случай среды без потерь.

Численное решение дисп. ур-ия в виде  $\vec{k} = \vec{k}_1 - i\vec{k}_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_1^2 - \kappa_2^2 = \kappa_0^2 \epsilon \mu \\ -2i(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = 0 \end{array} \right.$$

Решения: а)  $\vec{k}_2 = 0$ ,  $\kappa_1 = \kappa = \kappa_0 \sqrt{\epsilon \mu}$  - однородная плоская волна

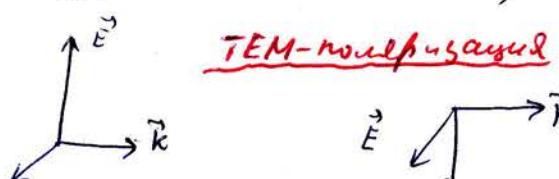
б)  $\vec{k}_2 \neq 0$ ,  $\vec{k}_1 \neq 0$ ,  $\vec{k}_1 \perp \vec{k}_2$  - неоднородная плоская волна.

A) Однородные плоские волны (линейчатая, длина волны, фаза скорости, частота потока энергии)

$$\vec{H} = \frac{1}{\kappa_0 \mu_0} [\vec{k}, \vec{E}], \quad \vec{k} = k \vec{n}, \quad \vec{H} = \sqrt{\epsilon \mu} [\vec{n}, \vec{E}] = \frac{1}{k} [\vec{n}, \vec{E}];$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{\kappa_0 \epsilon} [\vec{k}, \vec{H}], \quad \vec{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [\vec{n}, \vec{H}] = -\gamma [\vec{n}, \vec{H}] = \gamma [\vec{H}, \vec{n}]$$

TEM-линейчатый

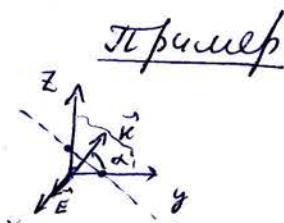


Этот поле правое:  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$  - правое  
 $\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \Im |\vec{H}|^2 \vec{n} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\epsilon \mu} |\vec{E}|^2 \vec{n}$

Поверхность: линейчатое излучение (снимается вакуумом и гибкой средой)

$e^{-ikz}$ : поверхности пост. фазы - плоскости, перпендикулярные вектору  $\vec{k}$ .

Однородные плоские волны - это волны, у которых все поверхности постоянной фазы и поверхности (плоскости) пост. амплитуды совпадают.



$$E_y = E_z = 0$$

$$E_x = E_0 e^{-ik_y y - ik_z z}$$

$$\omega t - k_y y - k_z z + \varphi = \text{const}$$

**Например**

$$v_{\varphi}^{(y)} = \frac{\omega}{k_y}, v_{\varphi}^{(z)} = \frac{\omega}{k_z}, v_{\varphi}^{(x)} = \frac{\omega}{k_x} - \text{это не есть компоненты вектора } (\vec{k})$$

$$v_{\varphi}^{(y)} = \frac{\omega}{k_y} = \frac{\omega}{k \cos \alpha} \Rightarrow \frac{\omega}{k} = v (= c, \text{ в вакууме}) \text{ [„Гарпр.“]}$$

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}, \lambda_y = \frac{2\pi}{k_y}, \lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} \text{ (проспранноеование периодов)}$$

### B) Неоднородные плоские волны.

$$\vec{k}_1 \neq 0, \vec{k}_2 \neq 0, \vec{k}_1 \perp \vec{k}_2$$

$$\vec{k}_1 = h \vec{z}_0, \vec{k}_2 = \alpha \vec{x}_0$$

$$\vec{k} = h \vec{z}_0 - i \alpha \vec{x}_0$$

$$h^2 - \alpha^2 = k_0^2 \epsilon \mu$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i \vec{k} \vec{r}} = \vec{E}_0 e^{-ihz - \alpha x}$$

$$\omega t - hz + \varphi = \text{const}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i \vec{k} \vec{r}} = \vec{H}_0 e^{-ihz - \alpha x}$$

$$z = \text{const} - \text{поверхность пост. фазы.}$$

У данных волн поверхность пост. фазы и поверхности пост. амплитуды не совпадают.

Поляризация:

$$\text{i) } \vec{H}_0 = H_0 \vec{y}_0$$

$$\vec{E}_0 = \frac{(-1)}{k_0 \epsilon} [\vec{k}, \vec{H}_0] = \frac{(-1)}{k_0 \epsilon} [h \vec{z}_0 - i \alpha \vec{x}_0, \vec{H}_0]$$

$\vec{E}_0 = \frac{H_0}{k_0 \epsilon} [h \vec{x}_0 + i \alpha \vec{z}_0]$  - плюс поляризовано эллиптически

(Волна полупрото-магнитного (TEM), т.е.  
электрического (E) типа)

эл. полупр.

$$\text{ii) } \vec{E}_0 = E_0 \vec{y}_0$$

эл. E<sub>z</sub>

$$\vec{H}_0 = \frac{1}{k_0 \mu} [\vec{k}, \vec{E}_0] = \frac{1}{k_0 \mu} [h \vec{z}_0 - i \alpha \vec{x}_0, \vec{E}_0]$$

$\vec{H}_0 = \frac{(-E_0)}{k_0 \mu} [h \vec{x}_0 + i \alpha \vec{z}_0]$  - плюс поляризовано эллиптически

(Волна полупрото-электрического (TE), т.е.  
магнитного (H) типа).

E - полупр.

1  
эл. H<sub>z</sub>

Замечание: однородная плоская волна - TEM тип

Разовая скорость неоднородной плоской волны

$$v_{\text{раз}} = \frac{\omega}{h} = \sqrt{\frac{\omega}{k_0^2 \epsilon \mu + \alpha^2}} < \frac{\omega}{k} = v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

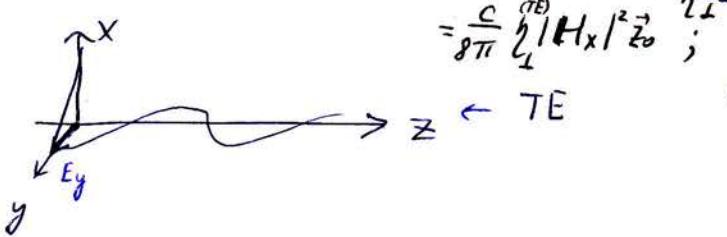
- медленная волна

## Длина волны

$$\frac{\lambda}{\lambda_z} = \frac{2\pi}{h} < \frac{2\pi}{k} = \lambda_{\text{огр. макс. волны}}$$

Численное значение  
( $k > h$ )

$$\text{TE: } S = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\vec{E}, \vec{H}^*] = \frac{c}{8\pi} \frac{h}{k_0 \mu} |E_y|^2 z_0 = \left( \text{для TM-нормальных симм.} \right)$$

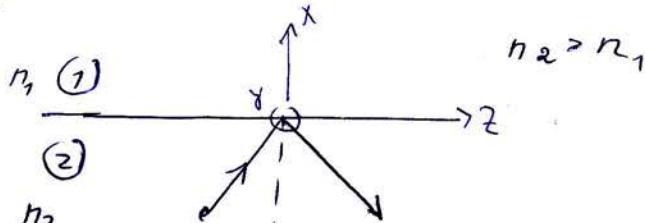


3

3) определение волновой длины

$$k_z = \frac{E_x}{k_0 \epsilon} = \frac{Ex}{Hy}; \quad \vec{E}_z = \eta_z [\vec{H}, \vec{z}_0]$$

$$k_z = -\frac{E_y}{k_0 \mu} = \frac{k_0 \mu}{h}; \quad \vec{H}_z = \frac{1}{\eta_z} [\vec{z}_0, \vec{E}]$$



Волны с  $v_p < c$   
используются в  
приборах СВЧ для  
взаимодействия  
лучков заряженных  
частиц с полем.

пост. волни. отраж.

## Плоские волны в поглощающей среде

(Фронт распространения в среде.)

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_K = \mathcal{E}' - i\mathcal{E}''$$

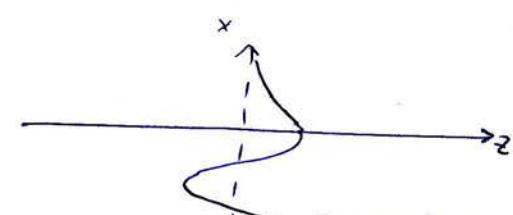
$$\vec{K} = \vec{K}_1 - i\vec{K}_2$$

$$K_1^2 - K_2^2 - 2i(\vec{K}_1, \vec{K}_2) = k_0^2 \operatorname{Re}(\mathcal{E}_K \mu) + i k_0^2 \operatorname{Im}(\mathcal{E}_K \mu);$$

$$\text{Если } \mathcal{E} = \mathcal{E}' - i\mathcal{E}''$$

$$\mu = \mu' - i\mu''$$

$$n = \sqrt{\epsilon \mu} = n' - i n''$$



согласно x волна



$$\vec{K}_1 \parallel \vec{K}_2$$

$$\vec{K}_1 = \vec{K}' \quad \Rightarrow \quad K = k' - iK'' = k_0 \sqrt{\epsilon \mu} = k_0 (n' - i n'')$$

$$\vec{K}_2 = \vec{K}'' \quad \vec{K} = \vec{K}' + \vec{K}''$$

$$\begin{cases} K'^2 - K''^2 = k_0^2 \epsilon' \mu \\ -2K' K'' = -k_0^2 \epsilon'' \mu \end{cases} \quad (+) \Rightarrow \vec{K} \parallel \vec{z}_0 \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-K'' z} e^{i \omega t - i k' z}$$

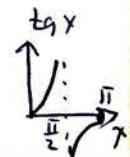
- генер.  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  -  
не в прост.  
(затухание)

$$\epsilon'' = \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

$$2K' K'' = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{4\pi\sigma}{\omega} \mu = \frac{2}{\delta^2}$$

$$\begin{cases} \epsilon''_0 \\ \epsilon' > 0 \text{ и } \epsilon < 0 \\ 0 \leq \alpha \leq \pi \end{cases}$$

но если  $\epsilon' > 0$ , т.к.  
 $0 \leq x \leq \pi/2$



$$\begin{aligned} \mathcal{E}_K &= \mathcal{E}' - i\mathcal{E}'' = \\ &= 1/\epsilon_k \bar{e}^{-i \arctg \epsilon''_0} \bar{e}^{i \arctg \epsilon'_0} = \\ &= 1/\epsilon_k \bar{e}^{-ix} \end{aligned}$$

Введен угол  $\chi$  (угол потерь);  $\operatorname{tg} \chi = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{4\pi\sigma}{\omega \epsilon'}$

$$2K' K'' = k_0^2 \epsilon' \mu \operatorname{tg} \chi;$$

При оценке решения системы (1) имеем для:

$$k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon' \mu \left[ \frac{1}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 X} + \frac{1}{2} \right],$$

$$k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon' \mu \left[ \frac{1}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 X} - \frac{1}{2} \right]$$

Далее рассматриваем случай  $\epsilon' > 0$ :  
Частное решение:

а) Малое натяжение:  $\operatorname{tg}^2 X = \left( \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \ll 1$

$$k' \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon' \mu}$$

$$k'' \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon' \mu} \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 X \right) - \frac{1}{2} \right\}^{1/2} = k' \frac{1}{2} \operatorname{tg} X \approx k' \frac{X}{2} \ll k'$$

Многовесная картина поля



б) Погонажные величины:  $\operatorname{tg}^2 X \gg 1$

$$k' \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon' \mu} \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tg} X} = \frac{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}{c} = \frac{1}{\sigma}$$
$$\operatorname{tg} X = \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon'}$$

$$k'' \approx k'$$

$$K = k' - i k'' = \frac{1 - i}{\sigma}, \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{z}{\sigma}} e^{-i \frac{z}{\sigma}}$$

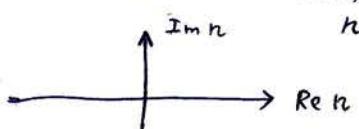
- выражение  
аналогичное  
СКИИ-экспрессу

X Зависимость:  $X$

$$\operatorname{tg} X = \epsilon' - i \epsilon'', \quad \mu = \mu' - i \mu''$$

$$n = n' - i n'' = \sqrt{(\epsilon' - i \epsilon'')(\mu' - i \mu'')} = \sqrt{\underbrace{\epsilon' \mu'}_{\text{Если } \leq 0} - \underbrace{\epsilon'' \mu''}_{\text{и }} - i (\underbrace{\epsilon'' \mu' + \epsilon' \mu''}_{\text{и }})}$$

$$\sqrt{-|A| + i|B|} = \underbrace{|n'| - i |n''|}_{n'}$$



$$(-|n'| - i |n''|)^2 = |n'|^2 - |n''|^2 + 2i |n'| |n''|$$

Разность между  $|n'|$  и  $|n''|$  не равна нулю.

# Недипольная плоская волна как суперпозиция двух однородных плоских волн

$$\begin{aligned} K_z &= k \cos \theta \\ \vec{E} &= \vec{y}_0 E_0 e^{-ik_x x - ik_z z} - \vec{y}_0 E_0 e^{ik_x x - ik_z z} = \\ &= \vec{y}_0 (-2i) E_0 \sin(k_x x) e^{-ik_z z} = \\ &= \vec{y}_0 E_{0z} \sin(k_x x) e^{-ik_z z}; \end{aligned}$$

$$E_y = 0 \text{ при } k_x x = \pi n \text{, где } n = 0, \pm 1, \pm 2$$

a)

(свойства поля  $E_y$ :

- 1) Плоскости постоянной фазы  $z = \text{const}$ ;
- 2) Плоскости постоянной амплитуды  $x = \text{const}$ .

б) Поперечная волна:Поле  $\vec{H}$ :  $H_x, H_z$ 

$$\vec{H} = \frac{i}{k_0 \mu} \left| \begin{array}{ccc} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & E_y & 0 \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{k_z}{k_0 \mu} E_{0z} \sin(k_x x) e^{-ik_z z} = -\frac{\cos \theta}{\gamma} E_{0z} \sin(k_x x) e^{-ik_z z}; \\ H_z &= \frac{i k_x}{k_0 \mu} E_{0z} \cos(k_x x) e^{-ik_z z} = \frac{i \sin \theta}{\gamma} E_{0z} \cos(k_x x) e^{-ik_z z} \end{aligned}$$

Волна типа TE ( $H$ -типа)

Замечание:

Волны TE ( $H$ )-типа имеют только поперечные коэффициенты  
к направлению распространения (коэффициенты поля  $E$ );

Волны TM ( $E$ )-типа имеют только поперечные коэффициенты поля  $\vec{H}$ .

в) Фазовая скорость

$$v_p = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} > \frac{\omega}{k} = v_p, \text{ общ. плоск.} \equiv \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

Полученная нами недипольная плоская волна — дисперсионная

(ее фазовая скорость больше, чем фазовая скорость общих плоских волн)

г) Длина волны

(замечание: длина волны = расстояние, проходимое волной за период  $T$ )

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} > \frac{2\pi}{k} = \lambda, \text{ общ. плоск. волны}$$

g) Для поперечной волновой моды длины

$$\vec{E}_\perp = \gamma_\perp [\vec{H}_1, \vec{z}_0]; \quad \vec{H}_1 = \frac{1}{\gamma_\perp} [\vec{z}_0, \vec{E}]$$

$$TE: \quad \gamma_\perp^{(TE)} - E_y / H_{0c} = \frac{k_0 \mu}{k_z} = \|k_z = h\| = \frac{k_0 \mu}{h};$$

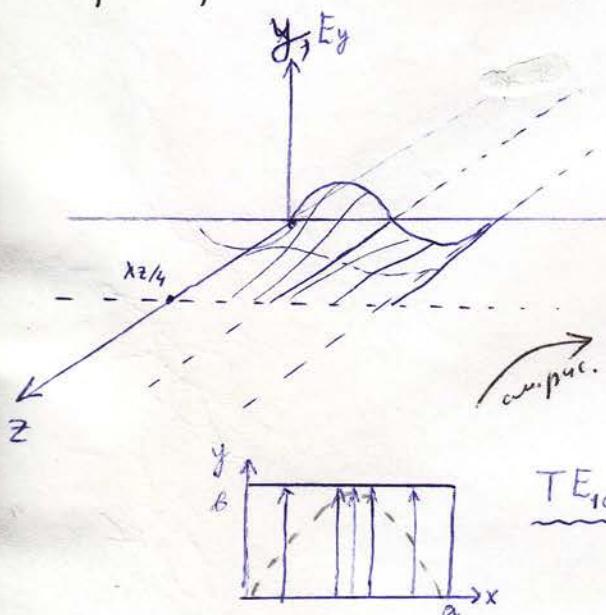
Если для них ставим расщепление волны  $TM$ -типа, то получим для  $\gamma_\perp^{(TM)} = \frac{k_z}{k_0 \epsilon} = \|k_z = h\| = h$ .

e) Плотность потока энергии

$$\begin{aligned} \vec{\xi} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\vec{E}, \vec{H}^*] &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [E_y \vec{y}_0, H_x^* \vec{x}_0 + H_z^* \vec{z}_0] = \\ &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \{ (E_y H_x^*) \vec{z}_0 + E_y H_z^* \vec{x}_0 \} = \\ &= - \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} (E_y H_x^*) \vec{z}_0 \| \vec{z}_0 \|, \quad [ -E_y H_x^* = \frac{k_z}{k_0 \mu} |E_{0z}|^2 \sin^2(k_x x) ]. \end{aligned}$$

m) Распределение поля в пространстве.

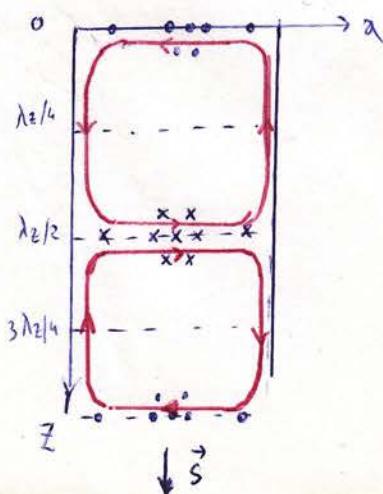
Пример: волна типа  $TE(H)$  в прямоугольном волноводе.



$$E_y = |E_{0z}| \sin(k_x x) \times \cos(\omega t - k_z z + \varphi);$$

Конструирование полей в  
волноводе и результаты из  
однородных плоских волн;

Таким образом волноводное поле  
(собственные моды волновода)  
можно собирать из плоских волн  
(концепция Бриллюэна) Brillouin



Таким образом, волна в волноводе является

дисперсией

$$K_x a = \pi m, \quad k_x = \frac{\pi m}{a}, \quad m=1, 2, 3$$

$$k_z = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2}$$

$$h = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2} \rightarrow \lambda_0 = \frac{2\pi}{h} \text{ - длина волны в волн.}$$

Волна в волноводе будет распространяться, если  $k > \frac{\pi m}{a} = \lambda$  (для  $TE_{m0}$ )

Значение  $K_{kp}$ :  $K_{kp} = \frac{\pi m}{a} = \lambda$

Критическая частота:  $\omega_{kp} = \frac{c K_{kp}}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c \lambda}{\sqrt{\epsilon_r}}$  (волна - распространяющаяся только если  $\omega > \omega_{kp}$ ); при  $\omega < \omega_{kp}$  -

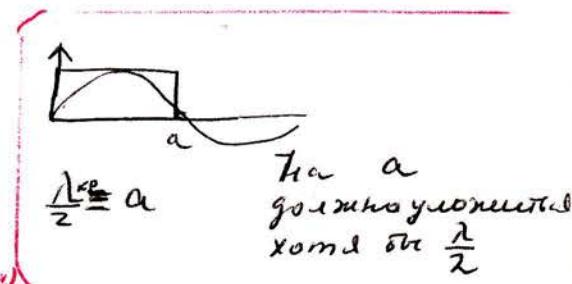
Критическая длина волны: это длина однородной плоской волны, соответствующая критическому значению  $K_{kp}$ :  $\lambda_{kp} = \frac{2\pi}{K_{kp}} = \frac{2a}{m}$  для  $TE_{10}$

TE<sub>10</sub>: - при  $\omega = \omega_{kp}$ ,  $\lambda_{kp} = 2a$

- при  $\omega < \omega_{kp}$ :
  - a) что-то спадание по  $z$
  - б) из каких плоских волн состоит? (неко.)

таким образом,

собственный мода в волноводе есть суперпозиция плоских волн, распространяющихся под определенным углом к оси волновода.



В общем случае интерференция волноводного распред. с помощью концепции Бриллюэна-девольто гребенок (особенно, для круговых волноводов). Далее мы заговорим о волноводных модах будем решать как краевые.

Резонатор:



Пример: Колебание в прямоугольном резонаторе:

$$\omega = 0 \quad (\text{сингуляр.}) \quad \lambda_z = \frac{2\pi}{h} \quad (h=k_z) \quad d = \frac{\lambda_z}{2} l = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{k_z} l; \quad h \approx k_z$$

TE<sub>mnl</sub>

Если  $\frac{\lambda_z}{2} n = d$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то на частотах  $\omega_{mn0}$

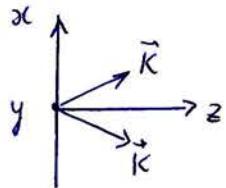
когда эта резонансная мода в резонаторе ≠ 0 в отсутствие источников

$$h = \frac{2\pi}{\lambda_z} = \frac{\pi l}{d}$$

# Электромагнитное волновое пучки

Представление волнового пучка в виде суперпозиции однор. плоск. волн

Рассмотрим двумерный электромагнитный волновой пучок, вектором  $\vec{k}$  в котором преобладают волны оси  $z$ :



$\frac{\partial}{\partial y} = 0$  в двумерном пучке

$k^2 = k_x^2 + k_z^2$ . Пусть имеем  $\vec{E}(x, z)$  в пучке  
направлено по оси  $y$ . Тогда

$$\vec{E}(x, z) = E(x, z) \hat{y}_0.$$

$$E(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{E(k_x)}_{\text{пространственный спектр пучка}} e^{-ik_x x - i\sqrt{k^2 - k_x^2} z} dk_x$$

Малоугловое (параксимальное) приближение

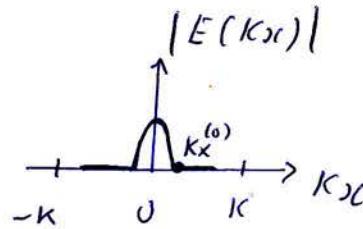
В сечении  $z=0$ :

$$E(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(k_x) e^{-ik_x x} dk_x$$

Пусть в пучке  $|k_x| \ll k$ , т.е.

Трехмерный пучок:

$$E_i(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{E_i(k_x, k_y)}_{K_\perp} e^{-i\vec{k}_\perp \vec{r}_\perp} dk_\perp$$



$$k_x^{(0)} \ll k \Rightarrow \frac{2\pi}{\Lambda_\perp} \ll \frac{2\pi}{\lambda} \\ (\text{параксимальный пучок})$$

Пучок, в котором  $k_x^{(0)} \ll k$ , называется  $\Lambda_\perp \gg 1$   
квазиоптическим (малоугловое, или параксимальное  
приближение).

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2} = k \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k^2}} \approx k \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{k_x^2}{k^2} - \frac{1}{8} \frac{k_x^4}{k^4} + \dots \right);$$

$$\sqrt{1 + \xi^2} = 1 + \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^4}{8} + \dots;$$

$$E(x, z) = \underbrace{e^{-ik_z z}}_{\text{быстро-осциллирующая функция}} \underbrace{\int E(k_x) e^{-ik_x x + i(\frac{k_x^2}{2k} + \frac{k_x^4}{8k^3} + \dots)z} dk_x}_{E(x, z) - \text{медленно меняющаяся}}$$

!  $E(x, 0) = E^{(0)}(x, 0)$ ;  $\vec{E}^{(0)}(x, z) = \vec{E}^{(0)}(x, z) \hat{y}_0$  амплитуда.

Расмотрим характеристики зонок простираемства:

$$(1) \quad \frac{Kx^2}{2K} z \ll \pi \quad (*)$$

В этом случае

$$E^{(0)}(x, z) \approx \int E(K_{xc}) e^{-i K_{xc} x} = E(x, 0) - \text{распространение}$$

после в сечении  $z=0$

Поэтому рассматриваемая зона является зоной искаженного распространения пучка.

Пусть  $\Lambda_{\perp}$ - "нормальная" (при  $z=0$ ) характеристика ширина пучка. Из теории Рурье следует, что

$$\Lambda_{\perp} \approx \frac{2\pi}{K_{xc}^{(0)}}$$

Тогда условие (\*) можно переписать в виде

$$\frac{4\pi^2}{\Lambda_{\perp}^2} \frac{1}{2} \frac{\lambda}{2\pi} z \ll \pi, \text{ или } \frac{\lambda z}{\Lambda_{\perp}^2} \ll 1$$

$$\rho^2 = \frac{\lambda z}{\Lambda_{\perp}^2}, \rho - \text{параметр Ренея}$$

$\sqrt{\lambda z}$  - радиус первой зоны Ренея.

Условие (\*) эквивалентно тому, что на радиусе апертуры то укладывается не одна зона Ренея, а одна зона геометрической оптики (прогностическая зона)

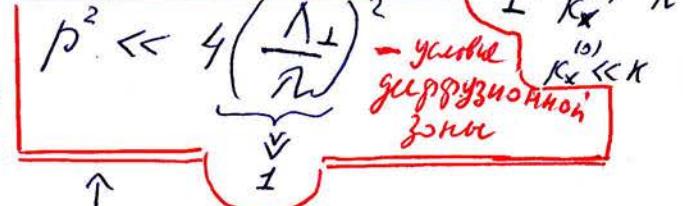
Чем шире апертура пучка, тем до большей  $z$  он распространяется без искажений.

## 2) Зона Ренея и дифракционная зона

$$\text{Пусть } \frac{Kx^4}{8K^3} z \ll \pi, \text{ или}$$

$$\frac{(2\pi)^4}{\Lambda_{\perp}^4} \frac{\lambda^3}{8(2\pi)^3} z \ll \pi \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda z}{\Lambda_{\perp}^2} \ll 4 \left( \frac{\Lambda_{\perp}}{\lambda} \right)^2$$



$$z \ll K \Lambda_{\perp}^4 = \frac{K \Lambda_{\perp}^2}{\left(\frac{1}{K \Lambda_{\perp}}\right)^2}$$

$\theta_d = \frac{1}{K \Lambda_{\perp}}$  - дифр. расх. пучка

Сюда входит и зона Ренея ( $\rho \sim 1$ ) и, и.д., даже зона Фраунгофера ( $\rho > 1$ ).

$$E^{(0)}(x, z) = \int E(K_x) e^{-ik_x x + i \frac{k_x^2}{2k} z} dK_x$$

- распределение  $E(x, 0)$  даем по мере распространения

Уравнение искомается  
и не имеет решения (непр. вида)

$$E_i^{(0)}(x, y, z) = \int E_i(\vec{k}_\perp) e^{-i\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp + i \frac{k_\perp^2}{2k} z} d\vec{k}_\perp$$



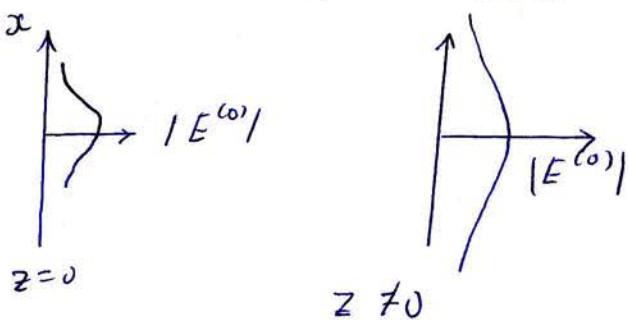
Несовместимости проверкой можно убедиться,

что

$$D \frac{\partial \vec{E}^{(0)}(x, z)}{\partial x^2} = \frac{\partial \vec{E}^{(0)}(x, z)}{\partial z} - \text{уравнение}$$

параллельного  
типа (для альт. трубы)

$$D = -\frac{i}{2k} = \frac{1}{2ik} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}^{(0)}(x, z)}{\partial x^2} = 2ik \frac{\partial \vec{E}^{(0)}(x, z)}{\partial z} \Rightarrow \Delta \vec{E} = 2ik \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$



Типик даем  
распространяется  
по мере распространения  
(„поперечная динамика“)

В результате распространение амплитуда происходит не вдоль пучевых трубок (как в геометрической оптике), а поперек пучевых трубок (Юнг, 1801).

Решение для динамического  
уравнения

$$E^{(0)}(x, z) = \sqrt{\frac{k}{-i2\pi z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{E^{(0)}(x', 0)}_{E(x', 0)} e^{-ik(x-x')^2/2z} dx'$$

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(0)}(x, z) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi D z}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}^{(0)}(x', 0) e^{-ik(x-x')^2/4Dz} dx' \end{aligned}$$

$$\underbrace{E^{(0)}(x', 0)}_{E^{(0)}(x', 0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} E(K_x) e^{-ik_x x'} dK_x$$

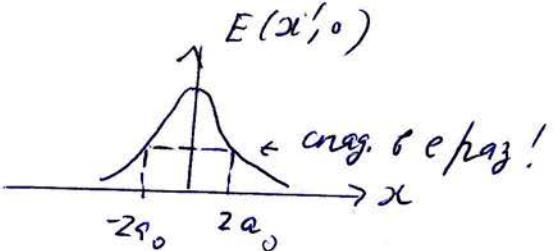
$$E(K_x) = \frac{1}{2\pi} \int \underbrace{E^{(0)}(x', 0)}_{E^{(0)}(x', 0)} e^{ik_x x'} dx'$$

В этих выражениях „ $(0)$ “ можно опускать.

График с гауссовым распределением амплитуды -4-

### Форма гауссова пучка

$$E(x', 0) = e^{-\frac{x'^2}{4a_0^2}}$$



$$E^{(0)}(x, z) = \sqrt{\frac{k}{-i2\pi z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x'^2}{4a_0^2}} e^{-\frac{i k (x-x')^2}{2z}} dx' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z}{2ka_0^2}}} e^{ikp} \left\{ -\frac{x^2}{4a_0^2 \left(1 + \frac{z}{2ka_0^2}\right)} \right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x'} dx' = \sqrt{\frac{\pi}{i\lambda}}$$

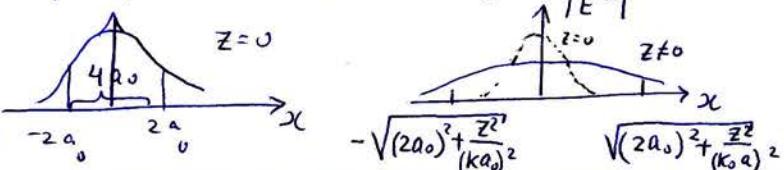
(интеграл Френеля)  
Im \lambda \leq 0

$$z=0: E^{(0)}(x, 0) = e^{-\frac{x^2}{4a_0^2}} ; \text{ширина пучка} = 2a_0$$

$$z>0: |E^{(0)}(x, z)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{2ka_0^2}\right)^2}} e^{ikp} \left\{ -\frac{x^2}{4a_0^2 \left[1 + \left(\frac{z}{2ka_0^2}\right)^2\right]} \right\}.$$

$$\ell^2(z) = 4a_0^2 \left[1 + \left(\frac{z}{2ka_0^2}\right)^2\right] = 4a_0^2 + \frac{z^2}{(ka_0^2)^2}; \quad \partial g = \frac{1}{ka_0}$$

$$(|E^{(0)}|) \quad \text{ширина пучка при } z=0: \ell(z) = \sqrt{(2a_0)^2 + \left(\frac{z}{ka_0}\right)^2}.$$



Пучок расширяется тем быстрее, чем он выше.

Демонстрация:

$$\begin{aligned} \frac{x'^2}{4a_0^2} + \frac{ik(x'^2 - 2xx' + x^2)}{2z} &= \left(\frac{1}{4a_0^2} + \frac{ik}{2z}\right)x'^2 - \frac{2ik}{2z}xx' + \frac{ikx^2}{2z} = \\ &= \frac{ik}{2z} \left\{ \left(1 + \frac{z}{2ik a_0^2}\right)x'^2 - 2xx' + x^2 \right\} = \frac{ik}{2z} \left\{ \left(1 + \frac{z}{2ik a_0^2}\right) \left(x' - \frac{x}{1 + \frac{z}{2ik a_0^2}}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^2}{1 + \frac{z}{2ik a_0^2}} + x^2 \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{ik}{2z} \left(1 + \frac{z}{2ik a_0^2}\right) \left(x' - \frac{x}{1 + \frac{z}{2ik a_0^2}}\right)^2 + \frac{\frac{1}{4a_0^2}x^2}{1 + \frac{z}{2ik a_0^2}};$$

Рассмотрим поведение пучка в зоне Фраунгофера при соблюдении условий  $1 \ll p^2 \ll 4 \left(\frac{\lambda z}{\lambda_x}\right)^2$

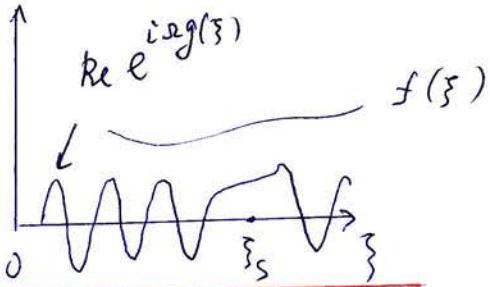
$$p = \frac{\lambda z}{\lambda_x^2} \quad \text{условие для зоны}$$

$$E^{(0)}(x, z) = \int E(k_x) e^{-ik_x x + i \frac{k_x^2}{2K} z} dk_x.$$

Вспомним этот методический метод стационарной зоны.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i \xi g(\xi)} d\xi, \quad \xi \rightarrow \infty$$

$$g(\xi) = g(\xi_s) + g'(\xi_s)(\xi - \xi_s) + \frac{1}{2} g''(\xi_s)(\xi - \xi_s)^2 + \dots; \quad g'(\xi_s) = 0$$



Стационарная зона:

$$g'(\xi_s) = 0$$

$$I \approx f(\xi_s) e^{i \xi_s g(\xi_s)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i \xi g''(\xi_s)}{2} (\xi - \xi_s)^2} d\xi =$$

$$= f(\xi_s) e^{i \xi_s g(\xi_s)} \sqrt{\frac{\pi}{-i \cdot \frac{g''(\xi_s)}{2}}};$$

$$\boxed{1 \ll \frac{\lambda z}{\lambda_x^2} \ll 4 \left(\frac{\lambda}{\lambda_x}\right)^2}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\frac{\lambda_x^2}{\lambda^2} \ll \frac{z}{\lambda} \quad \frac{z}{\lambda} \ll 4 \frac{\lambda_x^4}{\lambda^4}$$

$$\frac{1}{\sim K^2} \quad \sim K^2$$

$$\left(-k_x x + \frac{k_x^2}{2K} z\right)_{k_x} = 0 \quad (\text{новая стационар. зона}); \quad \left(-k_x x + \frac{k_x^2}{2K} z\right)_{k_x}'' = \frac{z}{K}$$

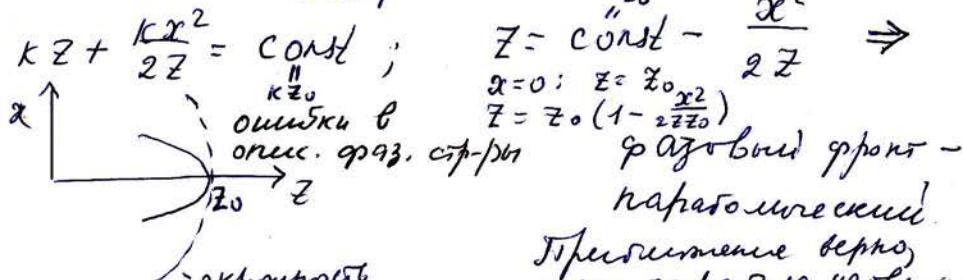
$$-k_x x + \frac{k_x^2}{2K} z = 0 \Rightarrow k_x c_s = k \frac{x}{z},$$

$$E^{(0)}(x, z) = E\left(k \frac{x}{z}\right) e^{-i\left(k \frac{x}{z}\right)x + i\left(\frac{k_x^2}{2K}\right)^2 \frac{z}{2K}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{z}{2K} (k_x x - k_x s)^2} dk_x$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi i k}{z}} E\left(k \frac{x}{z}\right) e^{-i \frac{k x^2}{2z}};$$

$$E(x, z) = E^{(0)}(x, z) e^{-ik z} = \sqrt{\frac{2\pi i k}{z}} E\left(k \frac{x}{z}\right) e^{-ik z - i \frac{k x^2}{2z}}$$

Разобьем зону:



$$\begin{array}{l} x \\ z \\ \frac{x}{z} = \tan \alpha \end{array}$$

При изменении верно, пока параллела узла, но отражение несет окрестность

Початкове рівняння (волнове) було рівнянням гиперболіческого типу. В нашому слуга поєднується рівняннями параболіческого типу. Видимо, при яких умовах це можливо.

$$\Delta E_i + K^2 E_i = 0 \quad E_i = (E_{ix}, E_y, E_z)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$E_i = \underbrace{E_i^{(0)}(\vec{r})}_{\text{постійно змінюючийся амплітуда}} e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

постійно змінюючийся амплітуда

$$\begin{aligned} \Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}; \quad \nabla E_i &= \nabla(E_i^{(0)} e^{-i\vec{k}\vec{r}}) = (\nabla E_i^{(0)}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} - i\vec{k} E_i^{(0)} e^{-i\vec{k}\vec{r}} \\ \operatorname{div} \nabla E_i &= (\Delta E_i^{(0)}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} + (-i\vec{k}, \nabla E_i^{(0)}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} + \\ &\quad + \underbrace{(\nabla(E_i^{(0)} e^{-i\vec{k}\vec{r}}), -i\vec{k})}_{e^{-i\vec{k}\vec{r}} \nabla E_i^{(0)} + (-i\vec{k}) E_i^{(0)} e^{-i\vec{k}\vec{r}}} = \\ &= [\Delta E_i^{(0)} - (2i\vec{k}, \nabla E_i^{(0)}) - K^2 E_i^{(0)}] e^{-i\vec{k}\vec{r}}; \end{aligned}$$

Тоді, після сокращення  $e^{-i\vec{k}\vec{r}}$ , перве рівняння дає:

$$\Delta E_i^{(0)} = 2i(\vec{k}, \nabla) E_i^{(0)}. \quad (1)$$

Рассмотриме второе уравнение:

$$\operatorname{div}(E_i^{(0)} e^{-i\vec{k}\vec{r}}) = e^{-i\vec{k}\vec{r}} \operatorname{div} E_i^{(0)} + (-i\vec{k}, \vec{E}^{(0)}) e^{-i\vec{k}\vec{r}}.$$

Тоді друге уравнение дає:

$$\operatorname{div} \vec{E}^{(0)} = i(\vec{k}, \vec{E}^{(0)}). \quad (2)$$

Цільно  $\vec{k} = K \vec{z}_0$

$$\Delta_L E_i^{(0)} + \frac{\partial^2 E_i^{(0)}}{\partial z^2} = 2iK \frac{\partial E_i^{(0)}}{\partial z}$$

~~$E_i^{(0)} \rightarrow E_y \neq \vec{E}^{(0)}$~~

Для декартових координат

$$\Delta_L \vec{E}^{(0)} + \frac{\partial^2 \vec{E}^{(0)}}{\partial z^2} = 2iK \frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial z}, \quad \Delta_L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Второе уравнение принимает вид:

$$\operatorname{div}_{\perp} \vec{E}_{\perp}^{(0)} + \frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial z} = i k E_z^{(0)}$$

Изменя в первом уравнении

$$K \left| \frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial z} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 \vec{E}^{(0)}}{\partial z^2} \right|$$

$$\frac{K}{\lambda_{11}} \gg \frac{1}{\lambda_{11}^2}, \text{ т.е. } \underline{\underline{K \lambda_{11} \gg 1}}$$

В этом случае для второго уравнения можно записать

$$K |E_z^{(0)}| \gg \left| \frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial z} \right|$$

Тогда получим

$$\begin{cases} \Delta_{\perp} \vec{E}^{(0)} = 2 i k \frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial z} \\ \operatorname{div}_{\perp} \vec{E}_{\perp}^{(0)} = i k E_z^{(0)} \end{cases}$$

Мы уже имеем ранее первое уравнение. Числ  $\frac{\partial^2 \vec{E}^{(0)}}{\partial z^2}$ , которых преобразуем, соответствует продольной дифракции

$$\underline{\underline{\Delta_{\perp} \vec{E}^{(0)} = 2 i k \frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial z}}} \rightarrow \frac{1}{\lambda_{\perp}^2} \sim \frac{K}{\lambda_{11}}, \text{ т.е. } (K \lambda_{\perp})^2 \sim K \lambda_{11}$$

$$(K \lambda_{\perp})^2 \gg 1 \Rightarrow K \lambda_{11} \gg 1$$

$$\xrightarrow[\text{этот шаг}\text{ предваряет}\text{ ранее}]{\quad} \frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_{11}} \sim \frac{1}{K \lambda_{\perp}} \ll 1$$

$$\operatorname{div}_{\perp} \vec{E}_{\perp}^{(0)} = i k E_z^{(0)} \rightarrow \frac{1}{\lambda_{\perp}} \sim K |E_z^{(0)}| \rightarrow |E_z^{(0)}| \sim \frac{1}{K \lambda_{\perp}} |E_{\perp}^{(0)}|$$

$E_z^{(0)}$  мало

$$\underline{\underline{i k E_z^{(0)} \approx \operatorname{div}_{\perp} \vec{E}_{\perp}^{(0)}}}$$

В первом уравнении можно рассмотреть только  $\vec{E}_{\perp}$ .

Запишем общее решение краевого уравнения:

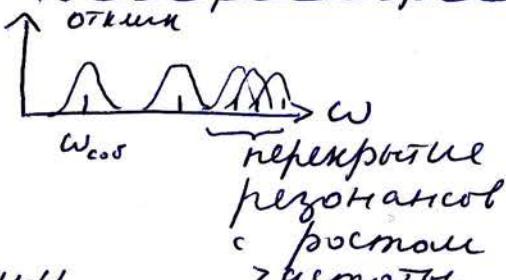
$$\vec{E}^{(0)}(\vec{r}) = \int \vec{E}(\vec{r}_1) e^{-ik\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 + ik \frac{K_{\perp}^2}{2k} z} d\vec{r}_1$$

$$\vec{E}^{(0)}(\vec{r}) = \underbrace{\left( \frac{k}{-i 2\pi z} \right)^2}_{-\frac{K}{i 2\pi z} = \frac{ik}{2\pi z}} \int \int \underbrace{\vec{E}^{(0)}(x', y', 0)}_{\vec{E}^{(0)}(\vec{r}'_1)} e^{-\frac{ik(x-x')^2}{2z} - \frac{ik(y-y')^2}{2z}} dx' dy' \underbrace{d\vec{r}'_1}_{d\vec{r}_1}$$

$$\vec{E}^{(o)}(\vec{r}) = \frac{ik}{2\pi z} \int_{S_\perp} \underbrace{\vec{E}^{(o)}(\vec{r}_\perp')}_\text{"} e^{-\frac{ik(\vec{r}_\perp - \vec{r}_\perp')^2}{2z}} d\vec{r}_\perp,$$

$\vec{E}(\vec{r}_\perp') \equiv \vec{E}(x', y', 0)$

Об открытих резонаторах

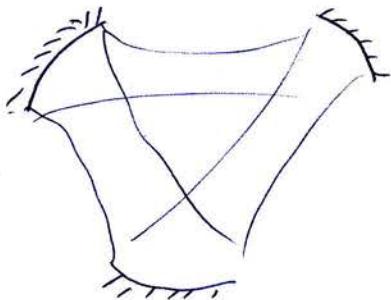


Характеристики добротности

Q общ. колебл.  $\sim 50 \div 100$

Q огнест. резонатор  $\sim 500 \div 1000$

Q откр. резонатор  $\sim 5000$



# Электромагнитные волны в однородных

изотропных средах с  
дисперсией

временной

Связь между индукцией и напряженностью полей.

При преобразовании пространственной дисперсии в однородной изотропной среде

$$\vec{D}(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^t \tilde{\epsilon}(t-t') \vec{E}(t', \vec{r}) dt'$$

В лекции № 3:

$$D_i(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^t \tilde{\epsilon}_{ij}(t-t') E_j(t', \vec{r}) dt',$$

$$\tilde{\epsilon}_{ij}(t-t') = \tilde{\epsilon}(t-t') \delta_{ij}.$$

$$\tau = t - t'$$

$$\vec{D}(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\epsilon}(\tau) \vec{E}(t-\tau, \vec{r}) d\tau$$

Определяем (для краткости записи)  $\vec{e}$ , разложим поле в интеграл Фурье:

$$\vec{E}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \vec{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Представим представление  $\vec{E}(t)$  в виде интеграла Фурье в виде между  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$

$$\vec{D}(t) = \int_0^{\infty} \tilde{\epsilon}(\tau) \vec{E}(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \tilde{\epsilon}(\tau) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega \right\} d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \tilde{\epsilon}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right\} \vec{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

В свою очередь,

$$\vec{D}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{D}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \rightarrow \vec{D}(\omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega),$$

$$\text{зде } \epsilon(\omega) = \int_0^{\infty} \tilde{\epsilon}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

*тот смысл  
что имеет  
деление от  
одного поля  
следующее  
принципа  
причины.*

Установим, что гармонических процессов комплексные амплитуды  $\vec{D}(\omega)$  и  $\vec{E}(\omega)$  связаны соотношением

$$\vec{D}(\omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega), \quad \text{зде } \epsilon(\omega) - \text{функция частоты}$$

Среди, среди которых  $\epsilon = \epsilon(\omega)$ , называем средами с временной (частотной дисперсией).

Замечание: В случае сред с пространственной дисперсией

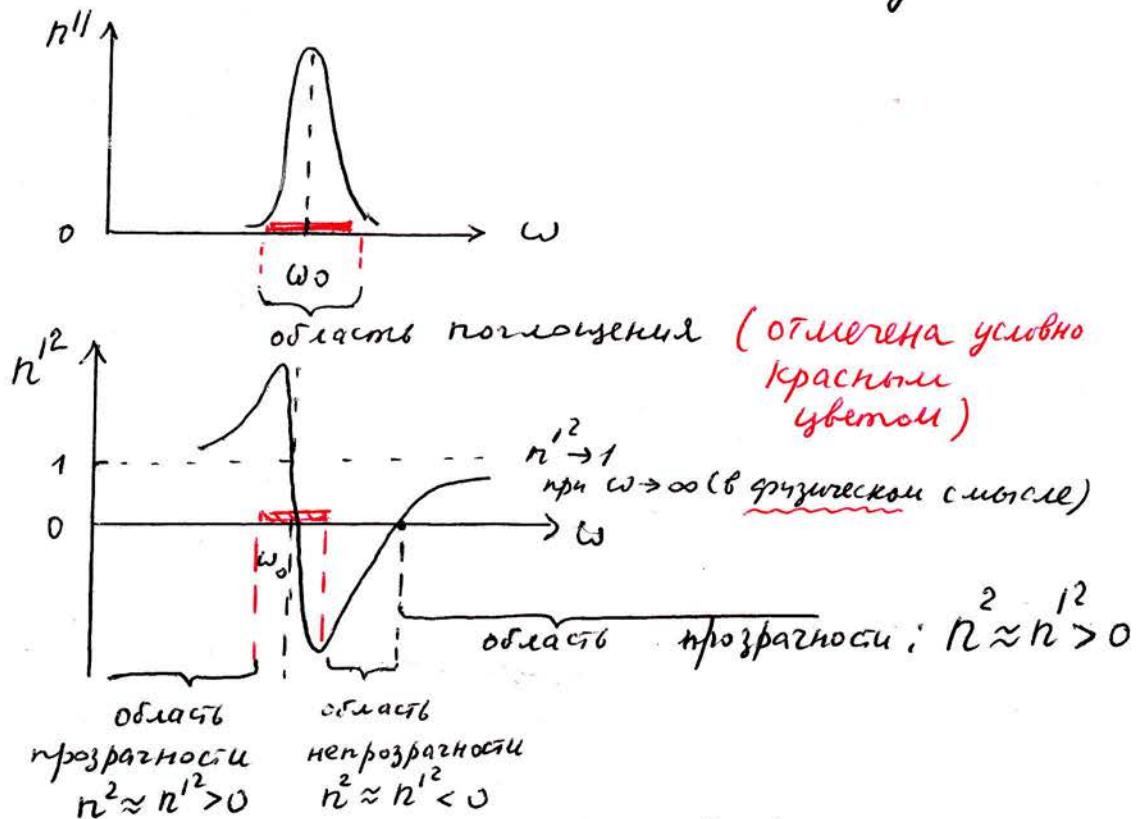
$$\vec{D}(\omega, \vec{r}) = \epsilon(\omega, \vec{r}) \vec{E}(\omega, \vec{r}); \quad \text{здесь при этом раски. по времени и пространству гармоникам.}$$

### Замечание:

Исходя из принципа причинности можно вывести соотношения, связывающие величины  $\epsilon'(\omega)$  и  $\epsilon''(\omega)$  (формулы Крамерса - Кротига), которые входят в комплексную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_k = \epsilon' - i\epsilon''$ . Аналогичные результаты можно получить и для гасящей комплексной магнитной проницаемости. Это означает, что диспергирующая среда является приступателью средой поглощающей.

Показатель преломления  $n = \sqrt{\epsilon_k \mu_k}$  такой среды, определяющий волновое число  $k = k_0 n = k_0 \sqrt{\epsilon_k \mu_k}$  в ней, является поэтому комплексным:  $n(\omega) = n'(\omega) - i n''(\omega)$ .

Типичные графики, иллюстрирующие зависимости величин  $n'(\omega)$  и  $n''(\omega)$  от частоты имеют вид:



Поскольку проводимость среды учтена в величине  $\epsilon_k$ , нет смысла выделять ток проводимости в  $\vec{j}_{\text{макро}}$ . Далее посчитаем

$$\text{rot} \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{макро}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}; \quad \vec{j}_{\text{макро}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \text{rot} \vec{M}, \text{ т.е. } \text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$\vec{D} = \epsilon_k \vec{E} = \vec{E} + \eta \vec{P}.$$

Мощность диэлектрических потерь и энергия электромагнитного поля в среде с временной дисперсией

Из уравнений Максвелла при отсутствии стационарных источников следует, что

$$\operatorname{div} \tilde{S}(t) = -\frac{1}{4\pi} \left( \vec{E}(t) \frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} + \vec{H}(t) \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \right) \quad (1)$$

$$\stackrel{\epsilon}{\sim} [\vec{E}, \vec{H}]$$

В диспергирующей среде всегда имеет место диссипация энергии, поэтому закон сохр. энергии должен записываться в виде

$$\operatorname{div} \tilde{S} = -q - \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (2)$$

Задача состоит в том, чтобы определить  $\tilde{S}$ ,  $q$ ,  $w$  в диспергирующей среде.

Очевидно, что  $\tilde{S}(t) = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}(t), \vec{H}(t)]$ .

Для монохром. процессов  $\tilde{S}^T = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\vec{E}, \vec{H}^*]$ , где  $\vec{E}, \vec{H}$ -коэф. ампл.

Рассмотрим монохроматич. процесс:

$$\operatorname{div} \tilde{S}^T = -\tilde{q}^T + \frac{\partial w}{\partial t}^T.$$

Изменение энергии в монохроматическом поле не происходит, поэтому  $\operatorname{div} \tilde{S}^T = -\tilde{q}^T$ ;  $\tilde{q}^T = \frac{1}{4\pi} (\vec{E}(t) \frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} + \vec{H}(t) \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t})$

Формула (1) при этом имеет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{S}(t)^T &= -\frac{1}{4\pi} \left( \vec{E}(t) \frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} + \vec{H}(t) \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \right)^T = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{2} \left( \underbrace{\vec{E}^* i\omega(\epsilon' - i\epsilon'')}_{i\omega \tilde{S}} \vec{E} + \underbrace{\vec{H}^* i\omega(\mu' - i\mu'')}_{i\omega \tilde{B}} \vec{H} \right) = \\ &= -\frac{\omega}{8\pi} (\epsilon'' |\vec{E}|^2 + \mu'' |\vec{H}|^2) \underbrace{-\tilde{q}^T}_{\tilde{q}} \end{aligned}$$

$$\tilde{q}^T = \frac{\omega}{8\pi} (\epsilon'' |\vec{E}|^2 + \mu'' |\vec{H}|^2), \quad \epsilon'', \mu'' > 0 - \text{на всех частотах}$$

$$\text{прич.: } \mu'' = 0; \epsilon'' = \frac{4\pi\sigma}{\omega}; \quad \tilde{q}^T = \frac{1}{2} \sigma |\vec{E}|^2$$

на всех частотах

Рассмотрим теперь область частот, где потеряніи (в тон приближенно) могут преодолеть.  
В этой области можно говорить о запасной энергии.  
Мы будем выражение силы энергии в области прозрачности силы квазимодохроматического сигнала.

Для такого сигнала:  $\vec{E}(t) = \frac{1}{2} (\vec{E}_0(t) e^{i\omega t} + \text{к. с.}) = \text{Re}\{\vec{E}(t)e^{i\omega t}\}$   
 $\vec{H}(t) = \frac{1}{2} (\vec{H}_0(t) e^{i\omega t} + \text{к. с.}) = \text{Re}\{\vec{H}(t)e^{i\omega t}\}$

В обл. прозрачности:  
 $\operatorname{div} \vec{S} = - \frac{\partial \vec{w}}{\partial t}$ .

Мы должны найти выражение силы  $\vec{w}^T$ , исходя из формулы  
 $\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \left( \vec{E}(t) \frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} + \vec{H}(t) \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \right)$ .

Здесь  $\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\vec{E}_0, \vec{H}_0^*]$ .

Найдем связь между  $\vec{D}_0(t) e^{i\omega t}$  и  $\vec{E}_0(t) e^{i\omega t}$ :

$$\begin{aligned} \vec{D}_0(t) e^{i\omega t} &= \int_0^\infty \underbrace{\tilde{\epsilon}(\tau)}_{\substack{\text{из} \\ \text{сигнала}}} \underbrace{\vec{E}_0(t-\tau) e^{i\omega(t-\tau)}}_{\substack{\text{модуля} \\ \text{сигнала} \\ \text{при} (\text{по сравн. с } \vec{E}(\tau))}} d\tau = \\ &= \int_0^\infty \tilde{\epsilon}(\tau) \left[ \vec{E}_0(t) - \tau \frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t} \right] e^{-i\omega\tau} d\tau e^{i\omega t} \\ &= \underbrace{\int_0^\infty \tilde{\epsilon}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau}_{\mathcal{E}(\omega)} \vec{E}_0(t) e^{i\omega t} + \underbrace{\int_0^\infty \tilde{\epsilon}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau}_{-i \frac{d\mathcal{E}}{d\omega}} \frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t} e^{i\omega t} \\ &= \mathcal{E}(\omega) \vec{E}_0(t) e^{i\omega t} - i \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t} e^{i\omega t}; \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\vec{D}_0(t) = \mathcal{E}(\omega) \vec{E}_0(t) - i \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t} \approx \mathcal{E}(\omega) \vec{E}_0(t); \quad \frac{\partial \vec{D}_0(t)}{\partial t} \approx \mathcal{E}(\omega) \frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( D_o(t) e^{i\omega t} \right) = i\omega \epsilon(\omega) \vec{E}_o(t) e^{i\omega t} + \epsilon(\omega) \frac{\partial \vec{E}_o}{\partial t} e^{i\omega t} -$$

$i\omega \epsilon(\omega) \vec{E}_o(t) e^{i\omega t} + \frac{\partial \vec{E}_o(t)}{\partial t} e^{i\omega t}$

$$- i \frac{d\epsilon}{d\omega} \frac{\partial \vec{E}_o(t)}{\partial t} i\omega e^{i\omega t} + \dots =$$

$$= i\omega \epsilon(\omega) \vec{E}_o(t) e^{i\omega t} + \frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} \frac{\partial \vec{E}_o(t)}{\partial t} e^{i\omega t};$$

$$\frac{1}{4\pi} \overline{\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}^T = \frac{1}{16\pi} \left( \vec{E}_o(t) e^{i\omega t} + \vec{E}_o^*(t) e^{-i\omega t} \right) \left( i\omega \epsilon(\omega) \vec{E}_o(t) e^{i\omega t} + \frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} \frac{\partial \vec{E}_o(t)}{\partial t} e^{i\omega t} + (-i\omega) \epsilon(\omega) \vec{E}_o^*(t) e^{-i\omega t} + \frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} \frac{\partial \vec{E}_o^*(t)}{\partial t} e^{-i\omega t} \right)$$

$\epsilon$ -крутиль  
гистерезис.

$$= \frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} \left( \vec{E}_o^*(t) \frac{\partial \vec{E}_o(t)}{\partial t} + \vec{E}_o(t) \frac{\partial \vec{E}_o^*(t)}{\partial t} \right) +$$

$$+ \frac{1}{16\pi} \underbrace{(i\omega \epsilon(\omega) |\vec{E}_o|^2 - i\omega \epsilon(\omega) |\vec{E}_o|^2)}_{0} \neq \underbrace{\text{затухание} (e^{i\omega t}, e^{-i\omega t})}_{\text{затухание}}$$

$$= \frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} \frac{\partial |\vec{E}_o(t)|^2}{\partial t};$$

$$\overline{\frac{\partial w}{\partial t}}^T = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} |\vec{E}_o(t)|^2 + \frac{d(\omega\mu_f)}{d\omega} |\vec{H}_o(t)|^2 \right\}.$$

$$\overline{\frac{\partial w}{\partial t}}^T = \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} |\vec{E}_o(t)|^2 + \frac{d(\omega\mu_f)}{d\omega} |\vec{H}_o(t)|^2 \right\}; \quad - \text{вспомогательные величины}$$

средней мощности  
э.н. энергии

Следует упомянуть, что вне рассмотренной области частот (т.е. в диапазоне низких частот существ. рес.) данная формула для энергии становится неактуальной.

В общем случае разделять члены  $\frac{1}{4\pi} (\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$  на части, соответствующие  $\epsilon$  (тепловые потери) и изменению энергии, невозможно в рамках макроскопич. электродинамики.

(хотя это можно, приходится прибегать к микрософтвермехике).

II

(затухание  
затухание при  
уменьшении)

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \mu_u = 1$$

$$\frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} > 0$$

$$\overline{w}^T = \frac{1}{16\pi} \left\{ \left( 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) |\vec{E}_o|^2 + |\vec{H}_o|^2 \right\}$$

$$\frac{|\vec{E}_o|^2}{|\vec{H}_o|^2} = \frac{M}{\epsilon} = \frac{1}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

$$|\vec{B}_o|^2 = \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) |\vec{E}_o|^2, \omega = \frac{|\vec{E}_o|}{|\vec{H}_o|}$$

$$|\vec{E}_o|^2 = M = \frac{1}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

## Распространение импульсного сигнала

в однородной изотропной среде с временной дисперсией.

Рассмотрим поле плоской однородной волны, распространяющейся по  $Z$ :  
 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} = \vec{E}_0 e^{i\omega(t - \frac{z}{v_g})}$ ,  $v_g = \frac{\omega}{k} = C/\sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}$ .

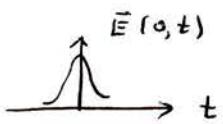
Передача сигналов с помощью монохроматической волны невозможна из-за её однородности в пространстве и во времени, поэтому сигнал всегда имеет некоторый спектр.

Поле такого сигнала представляется в виде

$$\vec{E}(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{i\omega[t - \frac{z}{v_g(\omega)}]} d\omega \quad (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{\text{пред}}(z, t) = \\ = \text{Re}\{\vec{E}(z, t)\} \end{array} \right.$$

Пусть известна форма сигнала при  $z = 0$ :

$$\vec{E}(0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2)$$



Согласно (2), распределение  $\vec{E}(0, t)$  разложено в спектр. Далее каждая Fourier-составляющая спектра будет распространяться со своей групповой скоростью.

Рассмотрим частный случай, когда  $v_g$  не зависит от  $\omega$  (временная дисперсия отсутствует).

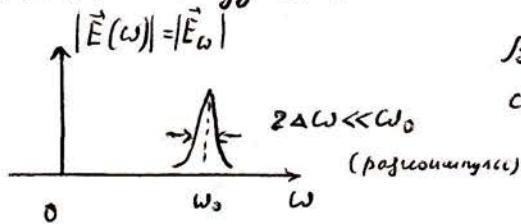
$$\vec{E}(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{i\omega(t - \frac{z}{v_g})} d\omega = \vec{E}(0, t - \frac{z}{v_g}).$$

Следовательно, сигнал будет распространяться как волна (без искажений), поскольку все его гармоники будут распространяться с одной и той же скоростью  $v_g$ .

Рассмотрим случай диспергирующей среды.

Волновой пакет в диспергирующей среде

Волновой пакет - это квазимохроматический волновой процесс, т.е. сигнал с узким частотным спектром (импульс). Всё это называется:



Выделить некоторую среднюю частоту

сигнала  $\omega_0$ , можно записать

$$K(\omega) = k(\omega_0) + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 k}{d\omega^2}\right)_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots$$

$k(\omega)$

Приближение это представление в (1), получение

$$\vec{E}(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{i\omega t - i\omega_0 t + i\omega_0 t} e^{-iK(\omega)z - i\left(\frac{dK}{d\omega}\right)_0 (\omega - \omega_0)z - i\frac{1}{2}\left(\frac{d^2K}{d\omega^2}\right)_0 (\omega - \omega_0)^2 z} d\omega;$$

Мы пренебречем членами порядка  $\frac{1}{3!} \left(\frac{d^3 K}{d \omega^3}\right)_0 (\omega - \omega_0)^3 z$ .

Это справедливо, если

$$\frac{1}{6} \left| \left(\frac{d^3 K}{d \omega^3}\right)_0 (\underbrace{\omega - \omega_0}_\Omega \underbrace{z}_{\max \sim \Delta \omega})^3 \right| \ll \pi.$$

Введем обозначения:  $\omega - \omega_0 = \Omega$ ,  $t - \left(\frac{dK}{d\omega}\right)_0 z = \tau$

$$\tau = \tau(z, t)$$

$$\Omega = t \text{ при } z=0$$

$$\vec{E}(z, t) = e^{i(\omega_0 t - K(\omega_0)z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_0 e^{i\Omega \tau - i\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 K}{d \omega^2}\right)_0 z \Omega^2} d\Omega.$$

$\vec{E}_0(z, \tau)$  — огибающая волнового пакета

Для геометрических малых  $z$  ( $\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 K}{d \omega^2}\right)_0 z \Omega^2 \ll \pi$ )

можно отбросить и член  $\sim \Omega^2$ :

$$\vec{E}(z, t) = e^{i(\omega_0 t - K(\omega_0)z)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_0 e^{i\Omega \tau} d\Omega}_{\vec{E}_0(z, t)} = e^{i(\omega_0 t - K(\omega_0)z)} \underbrace{\vec{E}_0(z, t)}_{\text{огибающая пакета}}. \quad (3)$$

Т.к.  $z=0$ :  $\vec{E}(0, t) = e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_0 e^{i\Omega t} d\Omega = e^{i\omega_0 t} \vec{E}_0(0, t)$ ,

$$\vec{E}_0(0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_0 e^{i\Omega t} d\Omega$$

секущая огибающая при  $z=0$

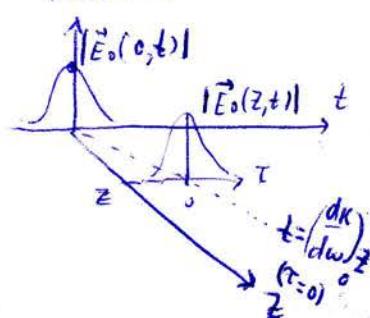
$$\left. \begin{array}{l} |\vec{E}_0(z, t)| \\ |\vec{E}_0(0, t)| \end{array} \right\} (4)$$

Уз физически (3), с врем. (4), имеем:

$$\vec{E}_0(z, t) = \vec{E}_0(0, \tau) = \vec{E}_0(0, t - \left(\frac{dK}{d\omega}\right)_0 z),$$

т.е.

$$\vec{E}(z, t) = e^{i(\omega_0 t - K(\omega_0)z)} \vec{E}_0(0, t - \left(\frac{dK}{d\omega}\right)_0 z).$$



Огибающая пакета  $\vec{E}_0(z, t) = \vec{E}_0(0, \tau)$  постоянна при  $\tau = \text{const}$ .

Это означает, что сигнал распространяется как волна, т.е. распространяется, со скоростью  $v_p = \left(\frac{d\omega}{dK}\right)_0$ .

Чтак, где квазимохроматического сигнала нелиней;

$$v_{yp} = \frac{d\vec{z}}{dt} = \left( \frac{d\omega}{dK} \right)_0 \vec{z} - \text{скорость распространения огибающей.} \quad (5)$$

II

$$t - \left( \frac{dK}{d\omega} \right)_0 z = T = \text{const} - \text{уравнение движения точки постоянной амплитуды.}$$

Чтак,  $v_{yp} \neq v_p$  ( $v_p$  - движущая  $\omega$ ).

Возможное (5) справедливо при следующих предположениях:

а) Центр - квазимохроматический,

б) Сфера - в одн. прозрачности,

в)  $\frac{1}{2} \left( \frac{d^2 K}{d\omega^2} \right)_0 z \ll R^2$ .

Можно показать, что  $\vec{v}_{yp} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{K}} = \nabla_K \omega(\vec{K})$  согласно со скоростью переноса энергии:

$$\vec{s}^T = \vec{w}^T \vec{v}_{yp}. \quad (\text{Задача N7.20})$$

[Изобретатель В.Б., Ильин А.]

- $v_{yp}$  имеет значение  $> 0$ ;
- $v_{yp} < c$ ;
- В области линий неподвижных  $K'(w) = \text{const}$  меняется сою образом, что ее приближение, методом дифференциального

При достаточно больших значениях  $z$  условие (6) нарушается.

Несогласия сигнал (огибающей) используется при распространении искажений. В этом случае, надо учесть в разложении  $K(w)$  квадратичной член:

$$\underbrace{\vec{E}_o(z, t)}_{\text{одн. пакет}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_n l \frac{i(RT - \frac{1}{2} K''_w z - R^2)}{dz},$$

где введен краткое обозначение

$$K''_w = \left( \frac{d^2 K}{d\omega^2} \right)_0,$$

и вместо  $\vec{E}_o(z, t)$  используется обозначение

$$\vec{E}_o(z, \tau), \quad \tau = t - z/v_{yp}.$$

(6)

$$K''_w = \left( \frac{d^2 K}{d\omega^2} \right)_0,$$

$$\vec{E}(z, t) = l \frac{i(w, t - K''_w z)}{E_o(z, \tau)}$$

При этом дифференцированием можно убедиться, что амплитуда (огибающая) волнового пакета удовлетворяет уравнению параболического типа:

$$\frac{\partial \vec{E}_o(z, t)}{\partial z} = D \frac{\partial^2 \vec{E}_o(z, t)}{\partial t^2}, \quad D = \frac{i k'' \omega}{2}$$

Здесь  $D = \frac{i}{2} k'' \omega = \frac{i}{2} \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{v_{sp}} \right)$  — линейный коэффициент дифракции.

Таким образом, огибающая волнового пакета описывается уравнением дифракции в системе координат  $z, t$ . В результате при распространении пакета меняется амплитуда  $|\vec{E}_o(z, t)|$  и фаза огибающей (из-за наличия  $i \in D$ ), т.е. меняется как амплитудная, так и фазовая модуляция пакета.

Решение дифракционного уравнения для огибающей пакета:

$$\text{Дано: } \vec{E}_o(0, t) = \vec{E}_o(0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_o e^{i k z} dt \quad \leftarrow t = t \text{ при } z = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Демонстрируем: } \vec{E}_o(z, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi D z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_o(0, t') e^{-\frac{(t-t')^2}{4Dz}} dt' = \\ &= \frac{1}{\sqrt{i 2\pi k'' \omega z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_o(0, t') e^{\frac{i(t-t')^2}{2k'' \omega z}} dt'. \end{aligned}$$

Таким образом, как величина  $\vec{E}_o(z, t)$  найдена,

получаем

$$\vec{E}(z, t) = e^{i(\omega_0 t - k(z)t)} \vec{E}_o(z, t),$$

$$\vec{E}(z, t) = \operatorname{Re} \{ \vec{E}(z, t) \}.$$

Пример:

$$\vec{E}_o(0, t) = \vec{E}_o(0, t) = \vec{e}_o e^{-\frac{t^2}{t_0^2}}$$

$$\vec{E}_o(z, t) = \vec{e}_o \frac{1}{\sqrt{i 2\pi k'' \omega z}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t'^2}{t_0^2} + i \frac{(t-t')^2}{2k'' \omega z}} dt' = \quad (7)$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t'^2} dt' = \sqrt{\frac{\pi}{i\lambda}}$
(Fresnel)

$$\frac{1}{t_0} \sim \frac{z^2}{\lambda_{\max}^2}$$

$$= \vec{e}_o \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{i 2 k'' \omega z}{t_0^2}}} \exp \left[ -\frac{\left( t - \frac{z}{v_{sp}} \right)^2}{t_0^2 \left( 1 + \frac{i 2 k'' \omega z}{t_0^2} \right)} \right], \quad v_{sp} = \frac{d\omega}{dk}$$

Вычисление методом стационарной

длины интегриала при  $\kappa z \rightarrow \infty$ :

$$\tilde{E}_0(z, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_n e^{i(\kappa z - \frac{1}{2} k''_w z \cdot \kappa^2)} d\kappa.$$

$$\left[ \left( \kappa z - \frac{1}{2} k''_w z \cdot \kappa^2 \right)' \right]_\kappa = 0$$

$$\left[ \kappa - \frac{1}{2} k''_w z \cdot \kappa = 0 ; \Rightarrow \kappa_s = \frac{\tau}{k''_w z} \right] - \text{стационарная длина}$$

$$\left[ \left( \kappa \tau - \frac{1}{2} k''_w z \cdot \kappa^2 \right)'' \right]_\kappa = - k''_w z$$

Тогда

$$i \left( \kappa_s \tau - \frac{1}{2} k''_w z \cdot \kappa_s^2 \right)$$

$$\tilde{E}_0(z, \tau) = \tilde{E}_n \left( \kappa = \frac{\tau}{k''_w z} \right) e$$

$$x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{2} k''_w z (\kappa - \kappa_s)^2} d\kappa =$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{i \frac{k''_w z}{2}}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i \lambda \kappa^2} d\kappa = \sqrt{\frac{\pi}{i \lambda}}$$

$$= \tilde{E}_n \left( \kappa = \frac{\tau}{k''_w z} \right) e^{i \frac{\tau^2}{2 k''_w z} \sqrt{\frac{2 \pi}{i k''_w z}}}.$$

$$\left\{ \tilde{E}_0(z, \tau) = \sqrt{\frac{2 \pi}{i k''_w z}} \tilde{E}_n \left( \kappa = \frac{\tau}{k''_w z} \right) e^{i \frac{\tau^2}{2 k''_w z}} . \right.$$



# Волны в неоднородных изотропных средах

В случае неоднородных сред можно различать количества резкой неоднородности (гранича раздела) и плавной неоднородности, когда параметры среды меняются в пространстве небольшими на масштабе длины волн.

Отражение и преломление плоских волн на плоской границе раздела двух однородных сред

## Нормальное падение

$$\begin{cases} \textcircled{1} \quad \epsilon_1, \mu_1 \\ \textcircled{2} \quad \frac{1}{\epsilon_2 \mu_2} \end{cases}$$

$$i \downarrow \uparrow r \downarrow \downarrow t$$

$$z$$

$$\vec{E}^{(i)} = \vec{E}_0 e^{-ik_1 z}$$

$$\vec{H}^{(i)} = \frac{1}{Z_1} [\vec{z}_0, \vec{E}^{(i)}] = \frac{1}{Z_1} [\vec{z}_0, \vec{E}_0] e^{-ik_1 z}$$

$$Z_{1,2} = \sqrt{\frac{\mu_{1,2}}{\epsilon_{1,2}}} \quad , \quad K_{1,2} = k_0 \sqrt{\epsilon_{1,2} \mu_{1,2}}$$

$$\textcircled{r} \quad \begin{cases} \vec{E}^{(r)} = \underbrace{\Gamma \vec{E}_0}_{\vec{E}_0^{(r)}} e^{ik_1 z} \\ \vec{H}^{(r)} = -\frac{1}{Z_1} [\vec{z}_0, \vec{E}^{(r)}] = -\frac{\Gamma}{Z_1} [\vec{z}_0, \vec{E}_0] e^{ik_1 z} \quad (\text{здесь } \vec{n} = -\vec{z}_0) \end{cases}$$

$$\textcircled{t} \quad \begin{cases} \vec{E}^{(t)} = \underbrace{T \vec{E}_0}_{\vec{E}_0^{(t)}} e^{-ik_2 z} \\ \vec{H}^{(t)} = \frac{T}{Z_2} [\vec{z}_0, \vec{E}^{(t)}] = \frac{T}{Z_2} [\vec{z}_0, \vec{E}_0] e^{-ik_2 z} \end{cases}$$

Границные условия на  $z=0$ :

$$\begin{cases} \vec{E}_T^{(i)} + \vec{E}_T^{(r)} = \vec{E}_T^{(t)} \\ \vec{H}_T^{(i)} + \vec{H}_T^{(r)} = \vec{H}_T^{(t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \Gamma = T \\ \frac{1}{Z_1} - \frac{\Gamma}{Z_1} = \frac{T}{Z_2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1}, \\ T &= \frac{2\gamma_2}{\gamma_2 + \gamma_1} \end{aligned}$$

### Частные случаи:

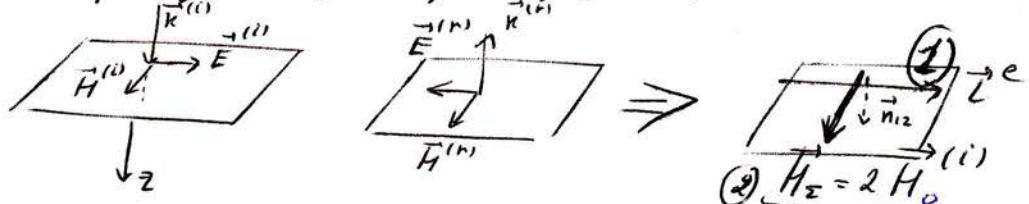
a)  $\Gamma = 0$  (первичное сопротивление)

$$\gamma_2 = \gamma_1 \Rightarrow \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$$

$$\Gamma = |\Gamma| e^{i\psi}$$

b)  $\gamma_2 = 0$  (идеальный проводник, например) - режим "K3"

$$\Gamma = -1$$



$$\begin{matrix} (1) \\ \downarrow \uparrow \\ (2) \end{matrix} \quad \begin{matrix} [\vec{H}_{12}, \vec{H}_2 - \vec{H}_1] = \frac{4\pi}{c} I^e \\ 0 \quad \vec{H}_\Sigma \end{matrix}$$

$$[\vec{H}_{12}, \vec{H}_2 - \vec{H}_1] = \frac{4\pi}{c} I^e$$

c)  $\gamma_2 = \infty$  (идеальный магнитик с  $\mu_2 \rightarrow \infty$ ) - режим "XX"

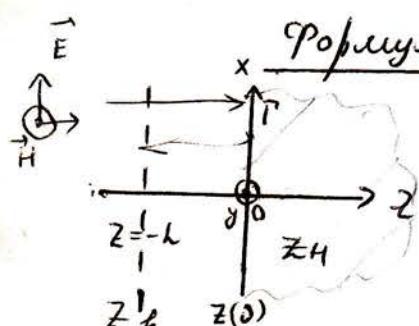
$$\text{или } \epsilon_2 \rightarrow 0$$

$$\Gamma = 1$$

В случае кристаллов, where  $\vec{E}$  field не имеет смысла  $Z$ .

$$\text{Введем } Z_{1,2} = \frac{4\pi}{c} \gamma_{1,2}.$$

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{Z_H - Z_E}{Z_H + Z_E}, \quad T = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{2Z_H}{Z_H + Z_E} \quad \left| \begin{array}{l} (1) \\ \swarrow \searrow \\ Z_1 = Z_E \\ Z_2 = Z_H \end{array} \right| \quad (2)$$



Формула рефракции инициатора. Погония пересечет когр. орт. сим.

$$\text{Введен поворотом инициатора } Z(-L) = \frac{(\frac{4\pi}{c}) E_T}{H_T} \Big|_{Z=-L}$$

$$\vec{E}_T = \gamma_s [\vec{H}, \vec{n}], \quad \vec{n} = \vec{z}_0$$

поворот к поверхн.  
(боку)

$$Z(-L) = \frac{\sqrt{\frac{4\pi}{c}} E_X}{H_Y} \Big|_{Z=-L} \quad (\text{такое что } \gamma(-L)).$$

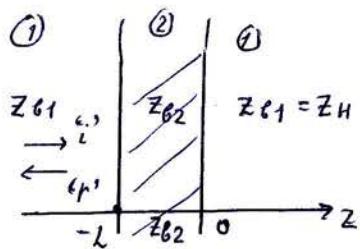
$$\left\{ \begin{array}{l} Z(-L) = \frac{\frac{4\pi}{c} \gamma(-L)}{Z_E} = \frac{E_0 e^{-ikz} + \Gamma_E e^{ikz}}{\frac{E_0}{Z_E} e^{-ikz} - \frac{\Gamma_E}{Z_E} e^{ikz}} \Big|_{Z=-L} = \frac{Z_H - Z_E}{Z_H + Z_E} = \frac{Z_H \cos(kL) + i Z_E \sin(kL)}{Z_E \cos(kL) + i Z_H \sin(kL)} \\ \Gamma(-L) = \frac{E_X^{(2)}}{E_X^{(1)}} = \frac{\Gamma_E^{(2)} e^{ikz}}{\Gamma_E^{(1)} e^{-ikz}} \Big|_{Z=-L} = \frac{\Gamma}{\Gamma(0)} e^{-i2kL} \end{array} \right.$$

- формула  
пересечения  
когр. орт. инициатора

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(-L) = \frac{Z(-L) - Z_E}{Z(-L) + Z_E} \end{array} \right.$$

## Пример:

Использование фазового переноса для отыскания коэффициента отражения от поглощающей пластинки.



$$\Gamma(-L) = \frac{Z(-L) - Z_{B1}}{Z(-L) + Z_{B1}},$$

$$Z(-L) = Z_{B2} \frac{Z_{B1} \cos(K_2 L) + i Z_{B2} \sin(K_2 L)}{Z_{B2} \cos(K_2 L) + i Z_{B1} \sin(K_2 L)}, \quad K_2 = k_0 \sqrt{\epsilon_2 / M_2}$$

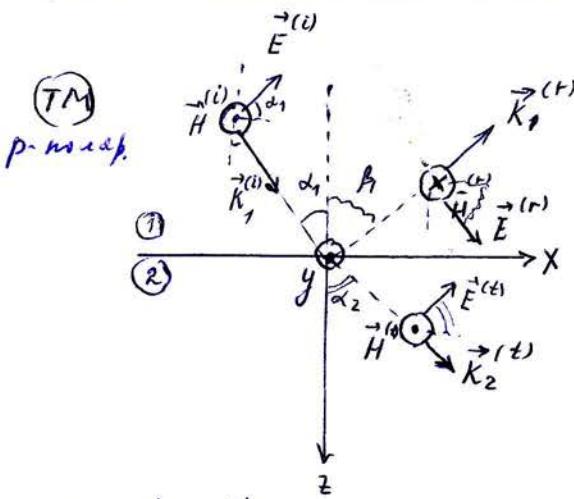
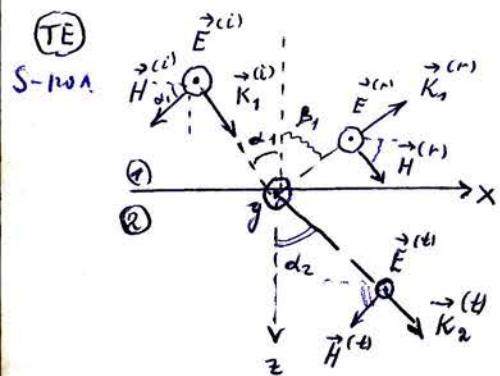
$$\Gamma = 0 \text{ при } Z(-L) = Z_{B1} : Z_{B1} [Z_{B2} \cos(K_2 L) + i Z_{B1} \sin(K_2 L)] =$$

$$= Z_{B2} [Z_{B1} \cos(K_2 L) + i Z_{B2} \sin(K_2 L)];$$

$$(Z_{B1}^2 - Z_{B2}^2) \sin(K_2 L) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Z_{B1} = Z_{B2}, L - \text{четное (однородная среда);} \\ Z_{B1} \neq Z_{B2}, K_2 L = \pi n, n = 1, 2, \dots, \\ \text{i.e. } L = \frac{\lambda_2}{2} n \quad (\lambda_2 = 2\pi/K_2). \end{cases}$$

При этом условии  $Z(-L) = Z_{B1}$

Отражение и преломление плоских волн при наклонном падении на плоскую границу раздела двух сред (формулы Френеля).



Падающая волна;  $\vec{E} = \gamma [\vec{H}, \vec{n}] = \gamma [\vec{H}, \frac{\vec{k}}{k}]$ ,  $\vec{H} = \frac{1}{\gamma} [\frac{\vec{k}}{k}, \vec{E}]$ ,  $\gamma$  - интенсивность плоской волны

$$\vec{E}_\perp = \gamma_\perp [\vec{H}, \vec{z}_0], \quad \vec{H}_\perp = \frac{1}{\gamma_\perp} [\vec{z}_0, \vec{E}], \quad \gamma_\perp - \text{поперечный (по отн. к Z)}$$

$$\gamma_\perp = \frac{E_y}{(-H_x)} = \frac{\gamma}{\cos \alpha} \quad \boxed{\text{TE: } \gamma_{\perp 1}^{(i)} = \frac{\gamma_1}{\cos \alpha_1}}$$

$$\gamma_\perp = \frac{E_x}{H_y} = \gamma \cos \alpha, \alpha = \arctan(\vec{k}, \vec{z}_0) \quad \boxed{\text{TM: } \gamma_{\perp 1}^{(i)} = \gamma_1 \cos \alpha_1}$$

$$\gamma_{\perp 2}^{(i)} = \gamma_{\perp 1}^{(i)} (\lambda - \lambda_1) \quad \boxed{\text{TM: } \gamma_{\perp 1}^{(i)} = \frac{\gamma_1}{\cos(\pi - \beta_1)}} \quad \boxed{\text{TE: } \gamma_{\perp 1}^{(r)} = \frac{\gamma_1}{\cos(\pi - \beta_1)} = -\frac{\gamma_1}{\cos \beta_1}}$$

Случай TE:  $E_y = E_x$ ,  $H_x = H_z$

Случай TM:  $H_y = H_z$ ,  $E_x = E_z$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_\perp &= E_{0\perp} e^{-i\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}} \\ \vec{E}_\perp &= T_\perp E_{0\perp} e^{-i\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}} \\ \vec{E}_\perp &= T_\perp E_{0\perp} e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \end{aligned} \right\}$$

Коэффициенты  $T_1, T_2$  определяются соотношениями отражения тангенциальных компонент комплексных, электр. полей отраженной и преломленной волн на границе к той же компоненте падающей волны.

Вспомогательные граничные условия при  $z=0$

$$\vec{E}_\tau^{(i)} + \vec{E}_\tau^{(r)} = \vec{E}_\tau^{(t)}|_{z=0},$$

$$\vec{H}_\tau^{(i)} + \vec{H}_\tau^{(r)} = \vec{H}_\tau^{(t)}|_{z=0}.$$

$$\vec{E}_{0\perp}^{(i)} e^{-i\vec{k}_1^{(i)}\vec{r}} + \Gamma_\perp \vec{E}_{0\perp}^{(r)} e^{-i\vec{k}_1^{(r)}\vec{r}} = T_\perp \vec{E}_{0\perp}^{(t)} e^{-i\vec{k}_2^{(t)}\vec{r}}|_{z=0},$$

$$\frac{1}{\eta_1^{(i)}} [\vec{z}, \vec{E}_{0\perp}^{(i)}] e^{-i\vec{k}_1^{(i)}\vec{r}} + \frac{\Gamma_\perp}{\eta_1^{(r)}} [\vec{z}, \vec{E}_{0\perp}^{(r)}] e^{-i\vec{k}_1^{(r)}\vec{r}} = \frac{T_\perp}{\eta_2^{(t)}} [\vec{z}, \vec{E}_{0\perp}^{(t)}] e^{-i\vec{k}_2^{(t)}\vec{r}}|_{z=0}.$$

$\eta_{\perp 1}^{(i)} \equiv \eta_{\perp 1}; \quad \eta_{\perp 1}^{(r)} = -\eta_{\perp 1} (\alpha_1 \rightarrow \beta_1)$

Для того, чтобы граничные условия выполнялись для всех  $x$ , необходимо, чтобы зависимость от  $x$  в отраженной и преломленной волнах была такой же, как в падающей, т.е.

$$\vec{k}_1^{(i)} \vec{r} = \vec{k}_1^{(r)} \vec{r} = \vec{k}_2^{(t)} \vec{r} |_{z=0}.$$

$$\text{Отсюда } k_{1x}^{(i)} x = k_{1x}^{(r)} x = k_{2x}^{(t)} x \Rightarrow k_1 \sin \alpha_1 = k_2 \sin \alpha_2$$

Получаем:

$$1) \alpha_1 = \beta_1, \quad - \text{ угол падения равен углу отражения}$$

$$2) \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \alpha_1 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \sin \alpha_2$$

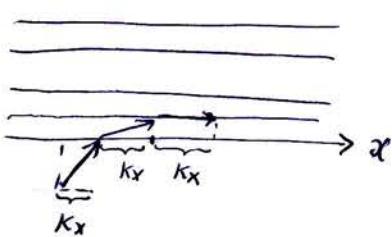
$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{закон} \\ \text{Снеллиуса} \\ (\text{Snell's law}) \end{array} \right\} \alpha_1 = \beta_1; \Rightarrow \eta_{\perp 1}^{(i)} \equiv \eta_{\perp 1} = \begin{cases} \frac{\eta_1}{\cos \alpha_1} & (\text{TE}) \\ \eta_1 \cos \alpha_1 & (\text{TM}) \end{cases}$$

$$\eta_{\perp 1}^{(r)} = -\eta_{\perp 1} = \begin{cases} -\frac{\eta_1}{\cos \alpha_1} & (\text{TE}) \\ -\eta_1 \cos \alpha_1 & (\text{TM}) \end{cases}$$

$$\eta_{\perp 2}^{(t)} \equiv \eta_{\perp 2} = \begin{cases} \frac{\eta_2}{\cos \alpha_2} & (\text{TE}) \\ \eta_2 \cos \alpha_2 & (\text{TM}) \end{cases}$$

Пример: микроскопическая структура



Итак, из граничных условий имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \Gamma_\perp = T_\perp \\ \frac{1}{\eta_{\perp 1}} - \frac{\Gamma_\perp}{\eta_{\perp 1}} = \frac{T_\perp}{\eta_{\perp 2}} \end{array} \right. \Rightarrow \Gamma_\perp = \frac{\eta_{\perp 2} - \eta_{\perp 1}}{\eta_{\perp 2} + \eta_{\perp 1}}, \quad T_\perp = \frac{2\eta_{\perp 2}}{\eta_{\perp 2} + \eta_{\perp 1}}.$$

Для TE-поляризации:

$$\Gamma_L = \frac{E_y^{(r)}}{E_y^{(i)}} \Big|_{z=0} = \frac{\frac{\eta_2}{\cos \alpha_2} - \frac{\eta_1}{\cos \alpha_1}}{\frac{\eta_2}{\cos \alpha_2} + \frac{\eta_1}{\cos \alpha_1}} ;$$

$$T_L = \frac{E_y^{(t)}}{E_y^{(i)}} \Big|_{z=0} = \frac{\frac{2 \eta_2}{\cos \alpha_2}}{\frac{\eta_2}{\cos \alpha_2} + \frac{\eta_1}{\cos \alpha_1}} ;$$

Для TM-поляризации:

$$\Gamma_L = \frac{E_x^{(r)}}{E_x^{(i)}} \Big|_{z=0} = \frac{\frac{E^{(r)} \cos \beta_1}{E^{(i)} \cos \alpha_1} \Big|_{z=0}}{\frac{E^{(r)}}{E^{(i)}} \Big|_{z=0}} = \frac{E^{(r)}}{E^{(i)}} \Big|_{z=0} = \Gamma = \frac{\eta_2 \cos \alpha_2 - \eta_1 \cos \alpha_1}{\eta_2 \cos \alpha_2 + \eta_1 \cos \alpha_1} ;$$

$$T_L = \frac{E_x^{(t)}}{E_x^{(i)}} \Big|_{z=0} = \frac{\frac{E^{(t)} \cos \alpha_2}{E^{(i)} \cos \alpha_1} \Big|_{z=0}}{\frac{E^{(t)}}{E^{(i)}} \Big|_{z=0}} = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} \cdot \frac{E^{(t)}}{E^{(i)}} \Big|_{z=0} = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} T = \frac{2 \eta_2 \cos \alpha_2}{\eta_2 \cos \alpha_2 + \eta_1 \cos \alpha_1}$$

Перейдем к рассмотрению частных случаев:

Частный случай (Brewster)

Для поляризации TM (также) возможна ситуация, когда  $\Gamma_L = 0$ , т.е. отраженной волны нет

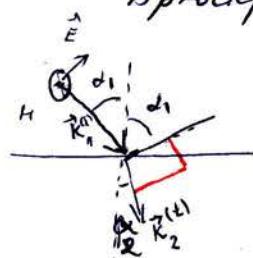
Это имеет место, если  $\eta_2 \cos \alpha_2 = \eta_1 \cos \alpha_1$

$$1 = \frac{\eta_2 \cos \alpha_2}{\eta_1 \cos \alpha_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 M_2}{\epsilon_2 M_1}} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2}}{\cos \alpha_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 M_2}{\epsilon_2 M_1}} \frac{1}{\cos \alpha_1} \sqrt{1 - \frac{\epsilon_1 M_2 \sin^2 \alpha_2}{\epsilon_2 M_1}}$$

Отсюда наше поле преобразовано получим

$$\operatorname{tg} \alpha_{1, \text{бр.}} = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \frac{M_2}{M_1}}}{\sqrt{\frac{\epsilon_2 M_2}{\epsilon_1 M_1} - 1}} = \sqrt{\frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \frac{M_2}{M_1} \right)}{\frac{\epsilon_2 M_2}{\epsilon_1 M_1} - 1}} - \text{такое } \text{чное } \text{Bр.} \text{случае}$$

Допустим, что  $M_2 = M_1$ . Тогда  $\operatorname{tg} \alpha_{1, \text{бр.}} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$



$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2},$$

Dok-л.:

$$\sqrt{\epsilon_1} \sin \alpha_1 = \sqrt{\epsilon_2} \sin \alpha_2 ;$$

$$\underbrace{\sin \alpha_1}_{\operatorname{tg} \alpha_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \sin \alpha_2 ; \Rightarrow \underbrace{\cos \alpha_1}_{\operatorname{tg} \alpha_1} = \sin \alpha_2$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2$$

Случай TE-поляризации:

Здесь  $\Gamma_2 = 0$ , если

$$\frac{\eta_2}{\cos \alpha_2} = \frac{\eta_1}{\cos \alpha_1}$$

$$1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1} \frac{\epsilon_2}{\mu_2} \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_1}{\epsilon_1 \mu_2}} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2}}{\cos \alpha_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_1}{\epsilon_1 \mu_2}} \frac{\sqrt{1 - \frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2} \sin^2 \alpha_1}}{\cos \alpha_1}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \sqrt{\frac{\mu_2 (\mu_2 - \epsilon_2)}{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1} - 1}} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu} (\tilde{\mu} - \tilde{\epsilon})}{\tilde{\epsilon} \tilde{\mu} - 1}}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (*)$$

При  $\tilde{\mu} = 1$ :  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \sqrt{\frac{1 - \tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon} - 1}}$  — не выполняется при действии.

Однако реальных сред соотношение (\*) также не выполняется

$$\left[ \frac{\tilde{\mu} - \tilde{\epsilon}}{\tilde{\mu} - \frac{1}{\tilde{\epsilon}}} \right]; \text{ если } \tilde{\mu} > \tilde{\epsilon}, \text{ то должно быть } \tilde{\mu} > \frac{1}{\tilde{\epsilon}}, \text{ т.е. } \frac{\mu_2}{\epsilon_1} > 1$$

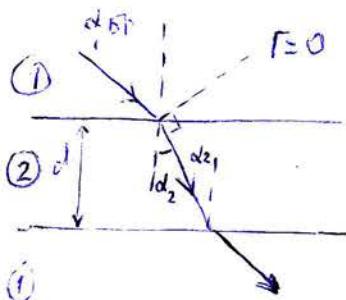
Объяснение эффекта броска:

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\mu_2}} \Big|_{\mu_2=1} \operatorname{tg} \alpha_{1, \text{бр}} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

Объяснение, связанное с диполем в среде 2, некорректно

Пусть  $\epsilon_2 = 1$  (вакуум) — здесь диполь в среде (2) нет, а эффект броска имеется.

Эффект броска связан не с элементарными диполями, а конфигурациями токами на границе раздела сред, которые сформированы при  $\alpha_1 = \alpha_1, \text{бр}$ , такими образом, что отраженный волна нет.



Волна проходит без отражения  
(имеет место обратимость)

$$\alpha_{1, \text{бр}} + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$$

Обратимость  
предполагает  
иметь гол  
бесконечн. фаз.

$$\operatorname{tg} \alpha_{1, \text{бр}} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right) = \operatorname{ctg} \alpha_{1, \text{бр}} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}$$

$$\underbrace{\alpha_2}_{\text{дан падение из}} = \alpha_{2, \text{бр}}$$

дан падение из  
(2) в (1)

Физическое объяснение отражения.

Возникновение неоднородных волн при падении волны отраж.

Пусть  $\epsilon_1 \mu_1 > \epsilon_2 \mu_2$

$$\sin \alpha_2 = \sin \alpha_1 \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}}$$

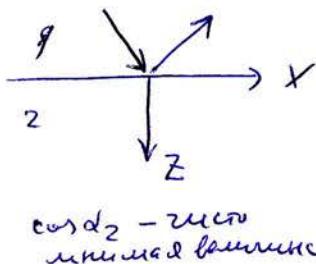
$$\alpha_2 = \alpha_1^*: \quad \sin \alpha_1^* \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}} = 1 \quad (\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \sin \alpha_2)$$

При  $\alpha_1 > \alpha_1^*$  получаем, что  $\sin \alpha_2 > 1$ .

$$\text{В этом случае } \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + i\tau; \quad \sin \alpha_2 = \frac{e^{i\alpha_2} - e^{-i\alpha_2}}{2i} = \sin(\frac{\pi}{2} + i\tau) = \operatorname{ch} \tau > 1.$$

$$\cos \alpha_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + i\tau\right) = -i \sinh \tau.$$

TE:  $E_y^{(t)} = E_0 e^{-i k_x \cos \alpha_2 z - i k_z \sin \alpha_2 x} = E_0 e^{-k_2 (hT) z - i k_2 (\sinh \tau) x}$



$$\Gamma_{\perp}^{\text{TE}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\frac{\cos \alpha_2}{\eta_2} + \frac{\eta_1}{\cos \alpha_1}}, \quad \Gamma_{\perp}^{\text{TM}} = \frac{\eta_2 \cos \alpha_2 - \eta_1 \cos \alpha_1}{\eta_2 \cos \alpha_2 + \eta_1 \cos \alpha_1}$$

$|\Gamma| = 1$  - полное внутреннее отражение

Во второй среде возникает волна, сдвигавшее по экспоненте, в 1-й среде - волна, сдвигавшее по  $z$ .

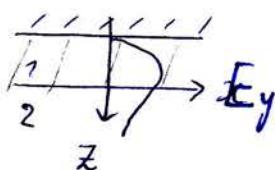
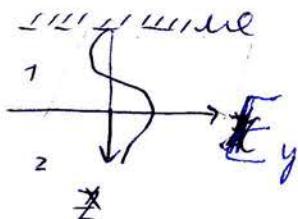
$v_p < v_p^{(x)} < v_2$        $\epsilon_1 \mu_1 > \epsilon_2 \mu_2$

$v_p^{(x)} = \frac{\omega}{K_x} = \frac{\omega}{K_x = K_2 \sin \alpha_2} = \frac{\omega}{\eta_2 \sinh \tau}$

$K_x < K_1 \rightarrow v_p^{(x)} > \frac{\omega}{K_1} = v_{p1}$

(волна - неизменная, то отражение к среде 2)

$\sinh \tau > 1$



- изогнутая поверхность  
недр. плоская волна  
безуход волна диэлектр.  
пластинки 1

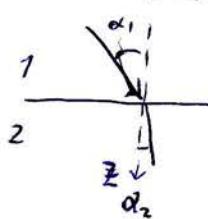
$$\epsilon_1 \mu_1 > \epsilon_2 \mu_2$$

Волоконная оптика:



### Отражение от хорошо проводящей поверхности

и условие леонтовича



$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если } |\epsilon_2 \mu_2| \gg |\epsilon_1 \mu_1|, \\ |\sin \alpha_2| \ll |\sin \alpha_1| < 1; |\cos \alpha_2| \approx 1 \end{array} \right.$$

В этом случае волна в среде 2 идет нормально поверхности и выполняется условие

$$\vec{E}_\perp = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} [\vec{H}_\perp, \vec{z}_0]_{\vec{k}=0} \text{ на границе раздела.}$$

$$\eta_{\perp 2} \approx \eta_2 \text{ (т.к. } \cos \alpha_2 \approx 1)$$

$$\vec{z}_0 = -\vec{n}$$

{ Справа  
находится  
среда 2  
присоединяется  
при разных  $\alpha$ ,

Такое граничное условие имеет место, если (2) - хорошо проводящий проводник, и  $|\epsilon_{x2}| \mu_2 \gg \epsilon_1 \mu_1$ ,  $\epsilon_{x2} = -i \frac{4 \pi \sigma}{\omega}$ .

# Электромагнитные волны в неоднородных средах

Рассмотрим плоскосимметрическую среду, в которой  $\epsilon = \epsilon(z)$ . Будем считать, что  $\mu = \text{const}$  (далее, для простоты, полагаем, что  $\mu = 1$ ). Считаем, что среда - без потерь.

$$\text{rot } \vec{E} = -ik_0 \mu \vec{H}$$

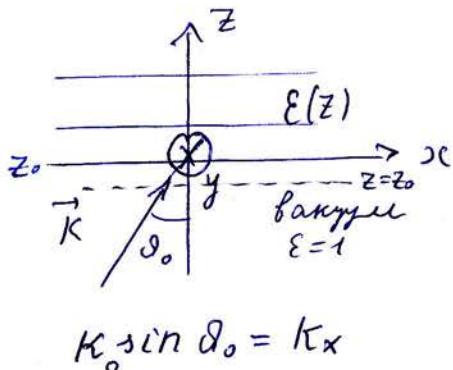
$$\text{rot } \vec{H} = ik_0 \epsilon \vec{E}$$

$$\Delta \vec{E} - \nabla \text{div} \vec{E} + k_0^2 \epsilon \vec{E} = 0, \quad \text{div}(\epsilon \vec{E}) = 0 \quad (\text{div} \vec{E} \neq 0, \text{т.к. } \epsilon \neq 1)$$

$$\Delta \vec{H} + [\frac{\nabla \epsilon}{\epsilon}, \text{rot } \vec{H}] + k_0^2 \epsilon \vec{H} = 0. \quad (\text{дано, что } \text{div} \vec{H} = 0)$$

$$\text{rot}(\epsilon \vec{E}) = \epsilon \underbrace{\text{rot} \vec{E}}_{-ik_0 \vec{H}} + [\nabla \epsilon, \vec{E}]$$

$$\frac{\text{rot} \vec{H}}{ik_0 \epsilon}$$



Ищем волне в виде:

$$\vec{E}(r) = \vec{E}(z) e^{-ik_x x}$$

$$\vec{H}(r) = \vec{H}(z) e^{-ik_x x}$$

Обе модификации:

①  $\vec{E} \perp$  плоскости падения (TE, или s-модификация):  $\vec{E} = E_y \hat{y} y_0$ ;   
 $E_y^{(F)} = E(z) e^{-ik_x x}$ ; тогда волна  $\vec{H}$  имеет  $H_x, H_z$  компоненты.

②  $\vec{H} \perp$  плоскости падения (TM, или p-модификация):  $\vec{H} = H_y \hat{y} y_0$ ;   
 $H_y^{(F)} = H(z) e^{-ik_x x}$ ; тогда волна  $\vec{E}$  имеет  $E_x, E_z$  компоненты.

Легенда (1)

Поле удобно определять через компоненту  $E$ .

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -k_x^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial E(z)}{\partial z} \rightarrow \frac{dE(z)}{dz}$$

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} + \underbrace{[k_0^2 \epsilon(z) - k_x^2]}_{K_z^2(z)} E(z) = 0; \quad K_z^2(z) = k_0^2 \left[ \epsilon(z) - \frac{k_x^2}{k_0^2} \right].$$

Здесь уточняем, что  $\text{div}(\frac{E_y^{(F)} y_0}{E^{(F)}}) = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{E(z) e^{-ik_x x}}{E^{(F)}} \right) = 0$ .

$$\vec{H} = \frac{i}{K_0} \text{rot} \vec{E} = \frac{i}{K_0} \left\{ \vec{x}_0 \underbrace{\left[ -\frac{\partial}{\partial z} (E_x(z) e^{-ik_x x}) \right]}_{- \frac{d E_x(z)}{d z} e^{-ik_x x}} + \vec{z}_0 \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (E_z(z) e^{-ik_x x})}_{-ik_x E_z(z) e^{-ik_x x}} \right\}$$

Случай 2

$$\frac{d^2 H(z)}{dz^2} - \frac{1}{\epsilon(z)} \frac{d \epsilon(z)}{d z} \frac{d H(z)}{d z} + \underbrace{\left[ K_0^2 \epsilon(z) - k_x^2 \right] H(z)}_{k_z^2(z)} = 0.$$

При выборе этого приближения имеем, что

$$\left[ \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon}, \text{rot} \vec{H} \right] = \left[ \frac{1}{\epsilon} \frac{d \epsilon}{d z} \vec{z}_0, \vec{x}_0 \left( - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{z}_0 \frac{\partial H_y}{\partial x} \right] = \\ = - \frac{1}{\epsilon} \frac{d \epsilon}{d z} \frac{d H_y(z)}{d z} \underbrace{[\vec{z}_0, \vec{x}_0]}_{y_0}.$$

То же  $\vec{E}$  записывается следующим образом:

$$\vec{E} = - \frac{i}{K_0 \epsilon} \text{rot} \vec{H} = - \frac{i}{K_0 \epsilon} \left\{ \vec{x}_0 \underbrace{\left[ -\frac{\partial}{\partial z} (H(z) e^{-ik_x x}) \right]}_{- \frac{d H(z)}{d z} e^{-ik_x x}} + \vec{z}_0 \underbrace{\left( -ik_x \right) H(z) e^{-ik_x x}}_{\frac{\partial}{\partial x} (H(z) e^{-ik_x x})} \right\}$$

Далее будем рассматривать только случай (1)

Если  $\epsilon(z)$ -достаточно простое выражение, то решение для  $E(z)$  можно получить через соподчиненное.

При произвольной зависимости  $\epsilon(z)$  аналитическое решение отсутствует.

Введем  $\lambda_z = \frac{2\pi}{K_z(z)} \ll L_z$ , где  $L_z$ -характеристика масштаба неоднородности среды в  $z$ - направлении.

Среда с  $\lambda_z \ll L_z$  называется малонеоднородной.

Математическая формулировка уравнения малонеоднородной среды имеет такой вид записи так:

$$\left| \frac{\partial K_z(z)}{\partial z} \cdot \frac{1}{K_z(z)} \right| \ll |K_z|, \quad \text{или} \quad \left| \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{K_z(z)} \right) \right| \ll 1.$$

# Метод Вентцеля - Крамера - Бриллюэна (ВКБ) - 1

Уравнение:  $\frac{d^2 E(z)}{dz^2} + k_0^2 [\epsilon(z) - \sin^2 \theta_0] E(z) = 0.$  Wentzel, Kramers, Brillouin, Jeffreys

Ищем  $E(z)$  в виде  $E(z) = A(z) e^{-ik_0 \psi(z)}$ .

В случае однородной среды  $A(z)$  - константа,

$$\psi(z) = \frac{k_z}{k_0} z \quad (\text{т.е. } \psi'(z) = \frac{k_z}{k_0} \text{ - константа}).$$

Теперь  $A(z)$ ,  $\psi'(z)$  - неизвестные функции (с максимумом в начале  $L_z$ ):  $L_z > 2\pi/k_z$ , т.е.  $k_z L_z \gg 1$

$$E'(z) = A'(z) e^{-ik_0 \psi(z)} - ik_0 \psi'(z) A(z) e^{-ik_0 \psi(z)};$$

$$E''(z) = A''(z) e^{-ik_0 \psi(z)} - 2ik_0 \psi'(z) A'(z) e^{-ik_0 \psi(z)} - \\ - ik_0 A(z) \psi''(z) e^{-ik_0 \psi(z)} - k_0^2 A(z) (\psi'(z))^2 e^{-ik_0 \psi(z)}.$$

Подставляем эти результаты в исходное уравнение:

$$\underline{\underline{A''}} - [2ik_0 \psi' A' + ik_0 \psi'' A] + k_0^2 \left[ \underbrace{\epsilon(z) - \sin^2 \theta_0}_{K_z^2(z)} - (\psi')^2 \right] A = 0 \Bigg| \frac{1}{k_z^2}$$

$$\frac{K_0^2 \epsilon(z) - 1}{k_z^2} \quad K_x = k_0 \sin \theta_0$$

$$K_0^2 (\epsilon - \sin^2 \theta_0) = K_z^2$$

$A$ ,  $\psi'$  - члены первого порядка малости (последующие члены константы);

$$\psi'' \sim \frac{\psi'}{L_z}, \quad A' \sim \frac{A}{L_z}$$

$$a) \quad \left| \frac{2ik_0 \psi' A'}{k_z^2} \right| \sim \left| \frac{k_0 |\psi'| \cdot |A|}{k_z^2 L_z} \right| \sim \left| \frac{|A|}{k_z L_z} \right|, \quad \left| \frac{ik_0 \psi'' A}{k_z^2} \right| \sim \left| \frac{k_0 |\psi'| \cdot |A|}{k_z^2 L_z} \right| \sim \left| \frac{|A|}{k_z L_z} \right|$$

$\sqrt{\frac{K_z(z)}{K_0}}$

член первого порядка малости ( $\sim$ );  $k_0 L_z \gg 1$

$$\delta) \quad \left| \frac{|A''|}{k_z^2} \right| \sim \left| \frac{|A|}{(k_z L_z)^2} \right| - \text{член второго порядка малости} (\approx) \quad (L_z \gg R_0)$$

В кинетическом приближении оставил лишь члены кинетического порядка малости:

$$[\epsilon(z) - \sin^2 \theta_0 - (\psi')^2] A = 0$$

Тогда  $A \neq 0$ , т.к.

$$(\psi')^2 = \epsilon(z) - \sin^2 \theta_0 = \frac{k_z^2(z)}{k_0^2}; \quad \psi'(z) = \pm \frac{k_z(z)}{k_0} = \frac{\pm \sqrt{k_z^2(z)}}{k_0}$$

$$\psi' = \pm \sqrt{\epsilon(z) - \sin^2 \theta_0}$$

$$\underbrace{\psi(z) - \psi(z_0)}_{\text{"}} = \pm \int_{z_0}^z \sqrt{\epsilon(z') - \sin^2 \theta_0} dz'.$$

(где  $\theta_0$  - постоянная константа, можно выбрать).

Затем находим значение константы  $A$ :

$$2ik_0 \psi' A' + ik_0 \psi'' A = 0, \quad \text{т.к. } A \neq 0$$

$$\frac{d}{dz} (\psi' A^2) = 0.$$

$$\psi' A^2 = \text{const}, \quad \text{т.е.} \quad A = \frac{C}{\sqrt{\psi'}} = \frac{C}{\sqrt{\epsilon(z) - \sin^2 \theta_0}},$$

$C$  - производная константа.

Общее решение имеет вид:

$$E(z) = \frac{C_1}{\sqrt{\epsilon(z) - \sin^2 \theta_0}} e^{-ik_0 \int_{z_0}^z \sqrt{\epsilon(z') - \sin^2 \theta_0} dz'} + \\ + \frac{C_2}{\sqrt{\epsilon(z) - \sin^2 \theta_0}} e^{ik_0 \int_{z_0}^z \sqrt{\epsilon(z') - \sin^2 \theta_0} dz'}$$

Общее решение - суперпозиция двух частей, независимо распространяющихся в  $+z$  и  $-z$  направлениях.

Решение называется при  $\sqrt{\epsilon(z) - \sin^2 \theta_0} \rightarrow 0$ ;

$\sqrt{\epsilon(z) - \sin^2 \theta_0} = \frac{k_z}{k_0}$ . Если  $k_z \rightarrow 0$ , то  $\lambda_z \rightarrow \infty$  и называемое условие  $\lambda_z \ll L_z$ .

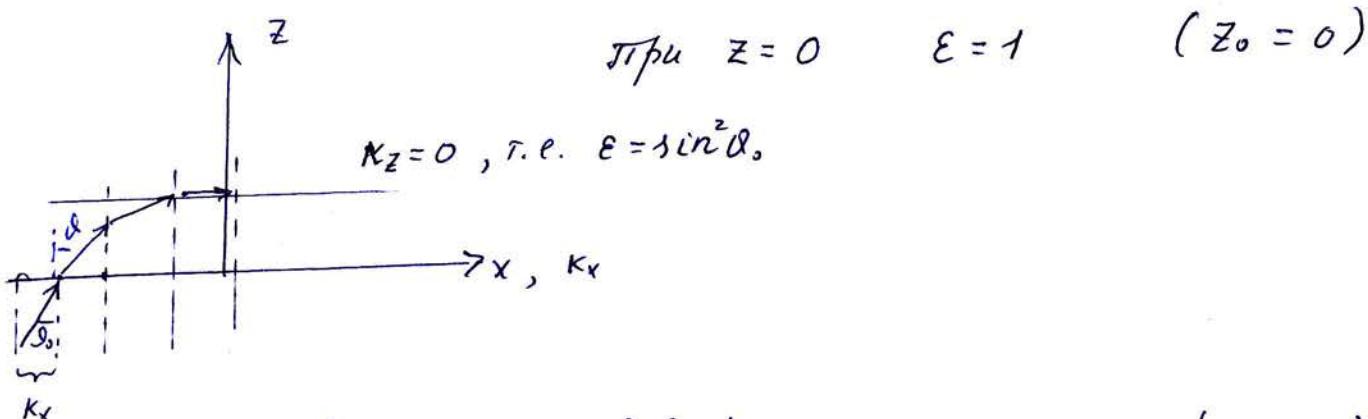
Пример:

Пусть  $\varepsilon(z)$  убывает с ростом  $z$ ,  
например,  $\varepsilon(z) = 1 - \frac{z-z_0}{\ell}$ . Тогда  $\ell = L_z$

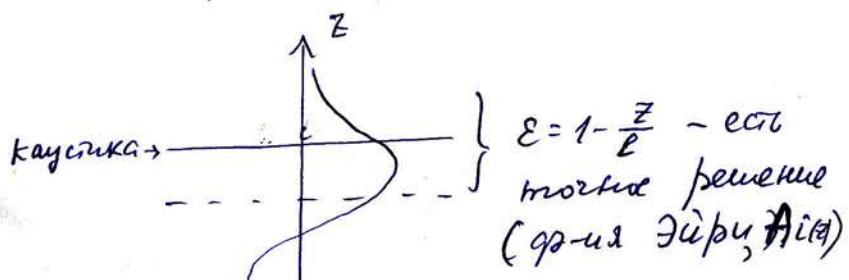
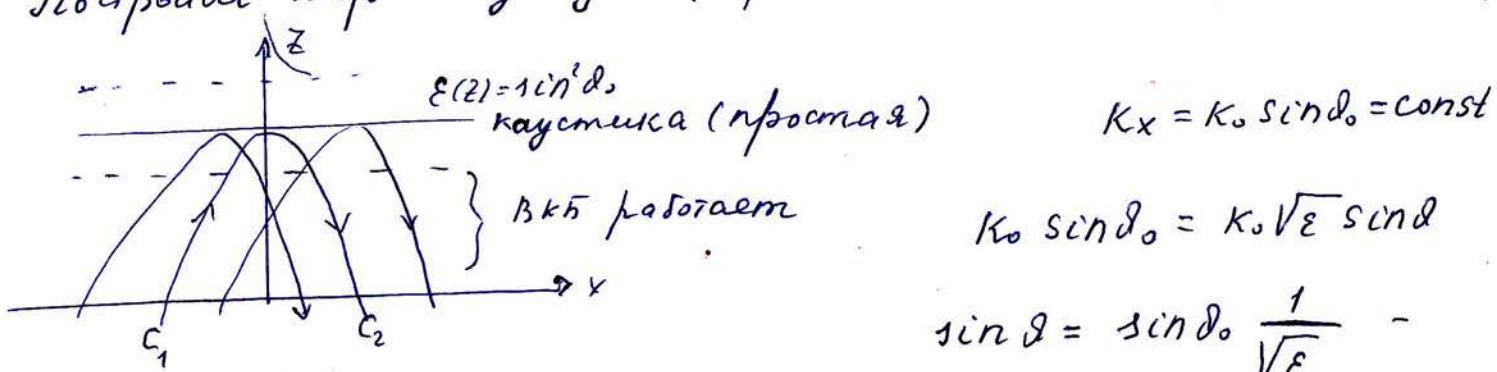
$$(z_0 = 0; \varepsilon(z_0) = 1)$$

Это возможно в случае плазмы, когда  $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 - \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2}$ , где  $N(z) = N_0 \frac{z}{\ell}$ ;  $z_0 = 0$ .

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N_0}{m\omega^2} \frac{1}{\ell} z = 1 - \frac{z}{\ell}, \quad \ell = \Lambda \frac{m\omega^2}{4\pi e^2 N_0}$$



Фокусирующая способность (приложение геометрической оптики)

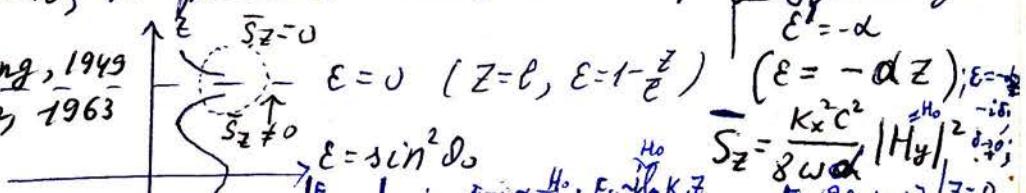


Эйри [Airy G.B.], 1838, 1849

$$C_2 = C_1 e^{i \frac{\pi}{2}}. \quad \leftarrow (\text{д. М. Брахмольцем, "Волны в смеси средах"}).$$

В случае ТМ-поляризации стоит еще  $\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dz} \frac{dH(z)}{dz}$ .  
Если  $\varepsilon$  не близко к нулю, то решение близко к предыдущему случаю.

K. Försterling, 1949  
B. B. Гильденбург, 1963



# Изучение заданных источников в бесграничной однородной изотропной среде

В предыдущих лекциях были получены следующие неоднородные волновые уравнения для векторного и скалярного потенциалов (для однор. беспр. изотр. среды без дисперсии):

$$\square \vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}(\vec{r}, t),$$

$$\square \Psi = -\frac{4\pi}{\epsilon} g(\vec{r}, t),$$

$$\square = \Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (\text{среда без дисперсии})$$

При записи этих уравнений использована компактка Лоренца:  $\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$ .

Зависимость заданных токов (зарядов) от  $t, \vec{r}$  – произвольная (однако должно выполняться уравнение непрерывности  $\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$ )

$$\vec{j}(\vec{r}, t), \quad g(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t), \quad \Psi(\vec{r}, t) \rightarrow \begin{aligned} \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A} \\ \vec{E} &= -\nabla \Psi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Обозначим буквой  $\Psi$  любую из проекций  $\vec{A}$ , либо  $\Psi$ , а буквой  $g$  – любую из величин  $\frac{\mu j_{x,y,z}}{c}$  либо  $\frac{\Psi}{\epsilon}$ .

Тогда приходим к уравнению вида

$$(1) \quad \boxed{\square \Psi(\vec{r}, t) = -4\pi g(\vec{r}, t)} \quad \text{- неоднородное волновое уравнение (уравнение d'Alembert) для функции } \Psi(\vec{r}, t).$$

d'Alembert

$\square$  - d'Alembertian (wave operator)

Функция Трина и общее решение неоднородного волнового уравнения

a) функция Трина <sup>роль, ур-ние</sup> при произвольной зависимости от времени (для среды без дисперсии)

б) функции Трина (б) неоднородного волнового уравнения

решение уравнения

$$(2) \quad \square \Psi = -4\pi \chi(t) \delta(\vec{r}).$$

Численное решение этого уравнения в виде  $\Psi = \Phi(r, t)$ ,  $r = |\vec{r}|$ .

Из (2) имеем

$$(3) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi \chi(t) \delta(\vec{r}).$$

Рассмотрим вначале обласль  $r \neq 0$ :

$$(4) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$$

Введем новую функцию:  $\Phi(r, t) = \frac{u(r, t)}{r}$ .

Тогда уравнение (4) принимает вид

$$(5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$(6) \quad u(r, t) = f(t - \frac{r}{v}) + \tilde{f}(t + \frac{r}{v}), \text{ где } f, \tilde{f} \text{ - произвольные функции}$$

\* Далее будем рассматривать частное решение  $f(t - \frac{r}{v})$



$$f = \text{const} \Rightarrow t - \frac{r}{v} = \text{const} \Rightarrow r = v(t - \text{const})$$

$$-\frac{r_0}{v}$$

$$r = vt + r_0$$

Очевидно, что слагаемое  $\frac{f(t - \frac{r}{v})}{r}$  описывает расходящуюся сферическую волну, а слагаемое  $\frac{\tilde{f}(t + \frac{r}{v})}{r}$  — сходящуюся. Будем рассматривать далее (пока без пояснений) расходящуюся волну.

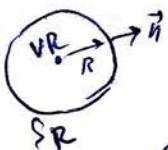
Найдем теперь решение в точке  $r = 0$ :

$$\Delta G - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi X(t) \delta(\vec{r})$$

Поставим в это уравнение  $G = \frac{f(t - \frac{r}{v})}{r}$  и проинтегрируем по объему  $V$  (здесь радиус  $R$ ):

$$\int_V \Delta G dV = \int_V dr \nabla G \cdot \nabla G = \oint_{S_R} \nabla G \cdot d\vec{S} = \oint_{S_R} \frac{\partial G}{\partial r} dS =$$

$$= \left\| \frac{\partial G}{\partial r} \text{ при } r=R=\text{const} \right\| = \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r=R} = 4\pi R^2 f'$$



$\frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} f(t - \frac{r}{v}) - \frac{1}{v r} f'(t - \frac{r}{v})$ , где  $f'$  обозначает производную по аргументу функции  $f$ .

$$\int_V \Delta G dV = -4\pi f(t - \frac{R}{v}) - 4\pi \frac{R}{v} f'(t - \frac{R}{v}) \Big|_{r=R},$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_V \Delta G dV = -4\pi f(t).$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{V_R} (-1) \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} dv = - \frac{1}{v^2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{V_R} \frac{1}{v} f'''(t - \frac{v}{v}) dv = 0$$

3  
4πr<sup>2</sup>dr

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{V_R} (-4\pi) X(t) \delta(\vec{v}) dv = -4\pi X(t)$$

Имеем:  $-4\pi f(t) = -4\pi X(t)$ ,  $f(t) = X(t)$ .

Таким образом получаем Грина есть

$$G(\vec{r}, t) = \frac{X(t - \frac{\vec{r}}{v})}{v}$$

$G(\vec{r}, t)$  - решение уравнения  $\square \psi = -4\pi X(t) \delta(\vec{r})$

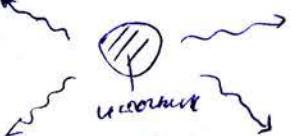


Замечание:

Решением ур-ия  $\square \psi = -4\pi X(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_1)$  является

$$G(\vec{r}, \vec{r}_1, t) = \frac{X(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_1|}{v})}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

В качестве решения можно взять оба вида  
 Это решение, однако, противоречит принципу однинкости

   
 искомое  $\Rightarrow$  Рукавица Грина при гармонической зависимости от времени

Дальнейший выбор будем проводить для полей, гармонически меняющихся во времени:

$$X(t) = \operatorname{Re}\{X_k(t)\}, \quad x_k(t) = e^{i\omega t}$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \operatorname{Re}\{\psi_k(\vec{r}, t)\} = \operatorname{Re}\{\psi(\vec{r}) e^{i\omega t}\}$$

$$G(\vec{r}, t) = \operatorname{Re}\{G_k(\vec{r}, t)\} = \operatorname{Re}\{G(\vec{r}) e^{i\omega t}\}$$

Для комплексных амплитуд  $\psi(\vec{r})$  имеем:

$$\Delta G_k + k^2 G_k = -4\pi \delta(\vec{r}) e^{i\omega t}, \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu} = k_0 \sqrt{\epsilon \mu}$$

(уравнение Гельмгольца с неравной частотой)

!  
 $\epsilon = \epsilon(\omega), \mu = \mu(\omega) \sim$   
 залог генерации и. дист.

$$\Delta G_K + K^2 G_K = -4\pi \delta(\vec{r}) e^{i\omega t}, v = c/\sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}$$

Выводим  $G_K = G(\tau) e^{i\omega t}$

Решение последнего ур-ия

$$\boxed{\Delta G + K^2 G = -4\pi \delta(\vec{r})}$$

тако, что решением уравнения

$$\Delta G + K^2 G = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_1)$$

$$\text{将是 } G(\vec{r}, \vec{r}_1) = \frac{e^{-ik/|\vec{r} - \vec{r}_1|}}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

б) решение волнового уравнения при гармонической зависимости времени  
Пусть источник имеет вид  $g_k = g(\vec{r}) e^{i\omega t}$

$$\Delta \psi_k + K^2 \psi_k = -4\pi g(\vec{r}) e^{i\omega t}, \quad \Delta \psi + K^2 \psi = -4\pi g(\vec{r})$$

Найдем решение этого уравнения.

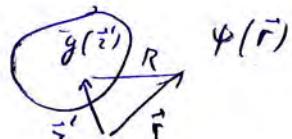
Задача 3:

$$\int_V \left( G(\vec{r}', \vec{r}_1) \underbrace{\Delta_{\vec{r}'} \psi(\vec{r}')}_{\frac{e^{-ik/|\vec{r}' - \vec{r}_1|}}{|\vec{r}' - \vec{r}_1|}} - \psi(\vec{r}') \underbrace{\Delta_{\vec{r}'} G(\vec{r}', \vec{r}_1)}_{-4\pi g(\vec{r}') - K^2 \psi(\vec{r}')} \right) d\vec{v}' = \\ = \oint_S \left[ G(\vec{r}', \vec{r}_1) \frac{\partial \psi(\vec{r}')}{\partial n} - \psi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}', \vec{r}_1)}{\partial n} \right] ds', \quad \vec{r}_1 = \vec{r}$$

$$-4\pi \int_V g(\vec{r}') \frac{e^{-ik/|\vec{r}' - \vec{r}|}}{|\vec{r}' - \vec{r}|} d\vec{v}' + 4\pi \int_V \psi(\vec{r}') \delta(\vec{r}' - \vec{r}) d\vec{v}' =$$

$$= \oint_S \left[ \frac{e^{-ik/|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ik/|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] ds'$$

Одозначение:  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$



$$\psi(\vec{r}) = \int_V g(\vec{r}') \frac{e^{-ikR}}{R} d\vec{v}' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \underbrace{\frac{e^{-ikR}}{R} \frac{\partial \psi}{\partial n}}_{G(\vec{r}', \vec{r})} - \psi \underbrace{\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \right)}_{G(\vec{r}, \vec{r}')} \right] ds'$$

- получим краевое уравнение для  $\psi$

Распространение области интегрирования  
по всем пространству.

Будем полагать, что источники занимают  
ограниченную область пространства.

Примечание, что при  $R \rightarrow \infty$  погрешность  
условия  $\Psi \sim \frac{e^{-ikR}}{R}$ , т.е.,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial R} + ik\Psi \right] = 0 \quad - \text{условие из условия Зоммерфельда}$$

Заметим, что без этого добавочного условия нельзя  
построить единственное решение задачи.

Тогда

$$\Psi \frac{\partial}{\partial n} \left( \underbrace{\frac{e^{-ikR}}{R}}_G \right) = \Psi \cdot \left[ -ik \frac{e^{-ikR}}{R} - \frac{1}{R^2} e^{-ikR} \right] = \Psi \cdot G \cdot \left( -ik - \frac{1}{R} \right);$$

$$\underbrace{\frac{e^{-ikR}}{R}}_G \frac{\partial \Psi}{\partial n} = G \cdot \Psi \cdot \left( -ik - \frac{1}{R} \right);$$

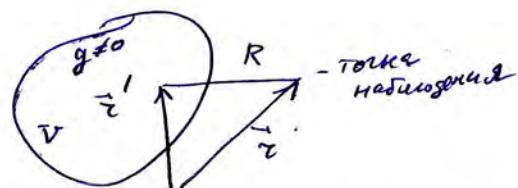
$$\text{В итоге } \oint_S = 0.$$

Умножим уравнение

$$A\Psi + k^2\Psi = -4\pi g(\vec{r})$$

единичной функцией

$$\Psi(\vec{r}) = \int_V \frac{g(\vec{r}') e^{-ikR}}{R} dV' \quad - \text{решение уравнения Гельмгольца  
с арабской расчеткой.}$$



$$\Psi_k = \int_V \frac{g(\vec{r}') e^{i\omega t - ikR}}{R} dV'$$

6) Решение волнистого уравнения при производной зависимости от времени.

Уравнение 9) для определения групп и

$$\Delta \Psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -4\pi g(\vec{r}, t) \quad (4)$$

moment  $\partial t^2$  some uses of tables must get regularized before

Напомним, что при гармонической зависимости от времени под комплексной амплитудой  $\psi$  имеем уравнение Гельфандова

$$\Delta \psi + k^2 \psi = -4\pi g(\vec{r}),$$

и это пленение есть

$$\psi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} g(\vec{r}') \frac{e^{-ikR}}{R} d^3u'$$

Разложение источника  $g(\vec{r}, t)$  и искомое решение  $\Psi(\vec{r}, t)$  в интегралах Фурье:

$$g(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega;$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Тогда под комплексных альбомов имеем избыточное значение:

$$\psi(\vec{r}, \omega) = \int \frac{g(\vec{r}', \omega)}{R} e^{-ikR} d\vec{r}', \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{\omega}{\sigma(\omega)}, \quad \epsilon = \epsilon(\omega), \quad f^4 = f^4(\omega).$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\int \int g(\vec{r}, \omega)}{R} e^{i\omega(t - \frac{R}{v(\omega)})} d\omega d\vec{r}' - \text{сферически симметрическим}$$

$$\underline{\beta \text{ useful curves}} \quad v = v(\omega)$$

успешно вел  
сопернических боев (2)  
Удачные изыскания  
Джека Стюарта  
затягиваются в 1

Пуск среща - без гиперфрази. Тогава

$$\psi(\vec{r}, t) = \int_V \frac{1}{R} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}', \omega) e^{i\omega(t - \frac{R}{v})} d\omega \right] dv' = \int_V \frac{g(\vec{r}', t - \frac{R}{v})}{R} dv'$$

$$\text{Введен обозначение } [g] = g(\vec{r}', t - \frac{R}{v})$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \int_V \frac{[g]}{R} dv'$$

Данное решение получено на решении уравнения Тьюссона. Отличие в том, что иконограф берется с учетом запаздывания передачи взаимодействия. Это решение уравнения (1) для среды без дисперсии. При наличии дисперсии следует брать решение (2).

2) Неоднородное волновое уравнение и  
его решение для потенциала (слогка результатов).

$$\Delta \vec{A} + K^2 \vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j} \quad - \text{уравнение для конст. ампл. } \vec{A} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} R \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial R} + iK \vec{A} \right) = 0 \quad \text{при гармонической зависимости от времени}$$

(I)

Решение:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c} \int_v \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} e^{-iK R} du' ;$$

$$\vec{A}_{\text{ phys}} = \operatorname{Re} \{ \vec{A}(\vec{r}) e^{i\omega t} \} .$$

сфера = однородная,  
безгранична,  
изотропна;  
при наименьшем  
дисперсии  
 $\epsilon = \epsilon(\omega), \mu = \mu(\omega)$

$$\begin{cases} \Delta \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}(\vec{r}, t), & - \text{сфера } \text{с } \text{дисперсией,} \\ \vec{A}_{\text{phys}} = \frac{\mu}{c} \int_v \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{R}{v})}{R} du' = \frac{\mu}{c} \int_v \frac{[\vec{j}]}{R} du', & \text{однородная,} \\ & \text{безгранична,} \\ & \text{изотропна!} \\ & R = |\vec{r} - \vec{r}'|, \end{cases}$$

Замечание:

Мы решим трёхмерную задачу.

Если задача одномерна, то (при гармонической зависимости от времени) имеем уравнение:

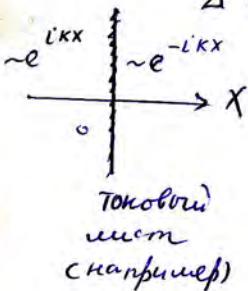
$$\Delta \psi + K^2 \psi = -4\pi g(x), \quad \Delta = \frac{d^2}{dx^2}$$

Функция Грина

$$\Delta G + K^2 G = -4\pi \delta(x);$$

$$G \sim e^{-iK|x|}$$

$$-2iKA = -4\pi \\ A = \frac{2\pi}{iK}$$



$$G(x) = \frac{2\pi e^{-iK|x|}}{iK};$$

$$\frac{dG}{dx} \Big|_{x=+0} = - \frac{dG}{dx} \Big|_{x=-0} = -2\pi;$$

$$G_K = \frac{2\pi}{iK} e^{i\omega t - iK|x|}$$

Если задача двумерна, то



$$\Delta G + K^2 G = -4\pi \delta(x)\delta(y);$$

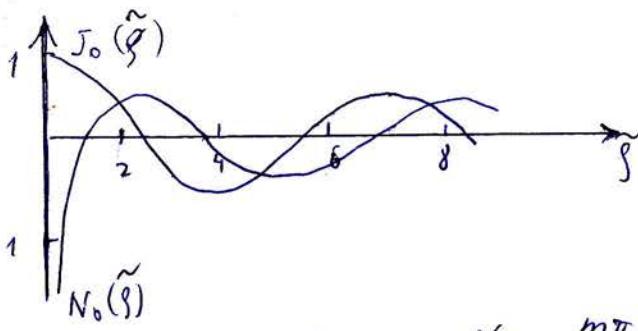
В полярных координатах,  $r \neq 0$ , решение имеет вид

$$\frac{1}{2\pi s} \delta(s), \quad s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$s \neq 0 \quad G = G(s)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial G}{\partial s} + K^2 G = 0$$

т.е.  $J_0(Ks)$ ,  $N_0(Ks)$



$$H_m^{(1)}(k\beta) = J_m(k\beta) + i N_m(k\beta)$$

$$H_m^{(2)}(k\beta) = J_m(k\beta) - i N_m(k\beta)$$

$$\left. \begin{aligned} H_m^{(1)}(z) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \\ H_m^{(2)}(z) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} z \rightarrow \infty, \\ |z| \gg m. \end{array}$$

При  $\beta \neq 0$  решение надо искать в виде  $\sim H_0^{(2)}(k\beta)$

В случае  $k\beta \gg 1$  имеем распадающуюся сферическую волну  $\sim \frac{e^{-ik\beta}}{r}$

Решение:  $G(\beta) = -i\pi H_0^{(2)}(k\beta)$ ;  $\tilde{G}(\beta) = \frac{\sqrt{k\beta}}{i\pi} H_0^{(1)}(k\beta)$ . [B. C. Владиславов, "Ур. мат. физики", М.: Наука, 1983;]

Различие констант  $(\frac{1}{r}$  для сферических волн,  $\frac{1}{k\beta}$  для ультрафиолетических волн) обуславливается законом сохранения энергии

$$A(-i)\frac{2}{\pi}\frac{1}{\beta}$$

$$\stackrel{\beta \rightarrow 0}{H_0^{(2)}(k\beta) \approx -i\frac{2}{\pi} \ln \frac{k\beta}{2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta G + k^2 G = -4\pi \delta(\beta) \frac{1}{2\pi} \\ \Delta = \Delta_1 \end{array} \right. \quad \int \Delta G ds + k^2 \int G ds = -4\pi; \lim_{\beta \rightarrow 0} \left( \frac{\partial G}{\partial \beta} \right) = -4\pi; \lim_{\beta \rightarrow 0} \left\{ (-k) H_0^{(2)}(k\beta) \frac{2\pi}{2} \right\} = -4\pi; \\ H_0^{(2)'} = H_0^{(2)}(2) \quad (-i)(-i) \left( -\frac{2}{\pi} \frac{1}{k\beta} \right) \beta = \lambda \quad A = -i\pi \end{array}$$

### Узлуковые и простейшие источники

#### Элементарный электрический диполь Тедса

- дипольный момент статического диполя

Пусть  $\underline{l} \ll \lambda$  =  $\begin{cases} \lambda_0 - в вакууме (\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}) \\ \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon \mu}} - в среде (если нет дисперсии) \end{cases}$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{c} \int_V \frac{\vec{J}(i') e^{-ikR}}{R} du'$$

Внешние наружные координаты в области, за пределами токами  $R \approx r$  (если  $r \gg l$ )

$r \gg l$  - дальняя зона (в узком смысле)

$$\vec{A} \approx \frac{\mu}{c} \frac{1}{r} \int_V \vec{J}(i') e^{-ikR} du'$$

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta} = r \sqrt{1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \vartheta + \frac{r'^2}{r^2}} \approx r \left( 1 - \frac{r'}{r} \cos \vartheta \right)$$

$$KR \approx KR - \underbrace{KR' \cos \delta + \dots}_{\text{отбросили}} \quad |KR' \cos \delta| < KR \ell = \frac{2\pi}{\lambda} \ell \ll \pi$$

$$\vec{A} \approx \frac{\mu}{c} \frac{e^{-ikr}}{r} \int_V \vec{J}(\vec{r}') d\tau' \quad (\ell \ll \lambda)$$

В разделе "Магнитостатика" ("Физиология на макроподы")  
была доказана формула для вектора  $\vec{B}$  от единичных источников:

$$\boxed{\int_V \vec{J}(\vec{r}) d\tau = - \int_V \vec{r} d\tau \vec{J}(\vec{r}) d\tau} \quad d\tau \vec{J} = - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Эта формула верна и при  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\int_V \vec{J}(\vec{r}) d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \vec{r} \delta d\tau = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \vec{P} d\tau = \int_V \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} d\tau$$

$$\vec{J}(\vec{r}) = i\omega \vec{P}(\vec{r})$$

$$\vec{A} \approx \frac{\mu}{c} \frac{e^{-ikr}}{r} \int_V i\omega \vec{P}(\vec{r}') d\tau' = \mu i k_0 \vec{P} \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad \vec{P} = \int_V \vec{P}(\vec{r}) d\tau$$

Для moretovo гипотезы ( $\vec{P} = \vec{P} \delta(\vec{r})$ ) формула

$$\vec{A} = \mu \frac{i\omega \vec{P}}{c} \frac{e^{-ikr}}{r} \quad \vec{J} = i\omega \vec{P} \delta(\vec{r})$$

является точной.

Для гипотезы конкретных размеров ( $\ell \ll \lambda$ ) данная формула является приближенной и работает при ( $\ell \ll r$ ), т.е. наименее следующие условия применимости формулы: 1)  $r \gg \ell$   $\Rightarrow$   
2)  $\lambda \gg \ell$

[В статике имеются заряды с  $\int \rho d\tau = 0$  тоже определены. исследование при  $R \rightarrow \infty$ ].

Далее приводим все выкладки, связанные с гипотезой конкретных

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = [\nabla, \mu i k_0 \vec{P} \frac{e^{-ikr}}{r}] = \mu i k_0 \frac{e^{-ikr}}{r} [\nabla, \vec{P}] +$$

$$+ \mu i k_0 [\nabla \frac{e^{-ikr}}{r}, \vec{P}] = \langle \vec{P} = \rho \vec{z}_0 \rangle =$$

$$= \mu i k_0 \rho \left( -i k - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-ikr}}{r} \underbrace{[\vec{z}_0, \vec{z}_0]}_{-\vec{z}_0 \sin \delta} = \rho \mu i k_0 \sin \delta \left( -\frac{Kk_0}{r} + \frac{i k_0}{r^2} \right) e^{-ikr}$$

$$B_\varphi = \mu H_\varphi \quad \boxed{H_\varphi = \rho \mu i k_0 \sin \delta \frac{i k_0 e^{ikr}}{r} \left( \frac{1}{r} + ik \right)}$$



$$H_\varphi = p \sin \vartheta \left( -\frac{\kappa K_0}{r} + \frac{i K_0}{r^2} \right) e^{-ikr} = \left( \frac{i K_0}{r^2} - \frac{\kappa K_0}{r} \right) p \sin \vartheta e^{-ikr};$$

Преобразование к векторному виде  $\vec{E}$

$$\text{rot } \vec{H} = i K_0 \epsilon \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Для  $r \neq 0$

$$\vec{E} = -\frac{i}{K_0 \epsilon} \text{rot } \vec{H} = -\frac{i}{K_0 \epsilon} \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \begin{vmatrix} \vec{z}_0 & r \vec{\vartheta}_0 & r \sin \vartheta \vec{\varphi}_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & r \sin \vartheta H_\varphi \end{vmatrix};$$

$$E_r = -\frac{i}{K_0 \epsilon} \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} (\sin \vartheta H_\varphi) = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{2}{r^3} + \frac{i 2 K}{r^2} \right) p \cos \vartheta e^{-ikr};$$

$$E_\vartheta = -\frac{i}{K_0 \epsilon} \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta H_\varphi) = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{1}{r^3} + \frac{i K}{r^2} - \frac{K^2}{r} \right) p \sin \vartheta e^{-ikr};$$

Умножим,

$$E_r = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{2}{r^3} + \frac{2 i K}{r^2} \right) e^{-ikr} p \cos \vartheta,$$

$$(I) E_\vartheta = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{1}{r^3} + \frac{i K}{r^2} - \frac{K^2}{r} \right) e^{-ikr} p \sin \vartheta,$$

$$H_\varphi = \left( \frac{i K_0}{r^2} - \frac{\kappa_0 K}{r} \right) p \sin \vartheta, \quad K = K_0 \sqrt{\epsilon \mu}, \quad K_0 = \frac{\omega}{c}$$

1. Равнозначные способы записи волновых функций

$$p e^{i \omega t - i k r} = p e^{i \omega \left( t - \frac{r}{v} \right)}, \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon(\omega) \mu(\omega)}}$$

$$i \omega p e^{i \omega t - i k r} = \frac{\partial}{\partial t} p e^{i \omega \left( t - \frac{r}{v} \right)}, \quad -\omega^2 p e^{i \omega t - i k r} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} p e^{i \omega \left( t - \frac{r}{v} \right)}.$$

$$p(t) = \operatorname{Re} \{ p e^{i \omega t} \},$$

$$[p] \equiv p \left( t - \frac{r}{v} \right) = \operatorname{Re} \{ p e^{i \omega \left( t - \frac{r}{v} \right)} \}$$

$$[\dot{p}] = \frac{\partial}{\partial t} [p] = \operatorname{Re} \{ i \omega p e^{i \omega \left( t - \frac{r}{v} \right)} \}; [\ddot{p}] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} [p] = \operatorname{Re} \{ -\omega^2 p e^{i \omega \left( t - \frac{r}{v} \right)} \}$$

$$E_r(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \{ E_r e^{i \omega t} \}, \quad E_\vartheta(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \{ E_\vartheta e^{i \omega t} \}, \quad H_\varphi(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \{ H_\varphi e^{i \omega t} \}.$$

$$K_0 = \frac{\omega}{c}, \quad K = \frac{\omega}{v}$$

$$\begin{aligned}
 E_r(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\frac{2[p]}{r^3}}{v} + \frac{\frac{2[\dot{p}]}{vr^2}}{v} \right) \cos \vartheta, \\
 (II) \quad E_\theta(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{[p]}{r^3} + \frac{[\dot{p}]}{vr^2} + \frac{[\ddot{p}]}{v^2 r} \right) \sin \vartheta, \\
 H_\varphi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \left( \frac{[\dot{p}]}{r^2} + \frac{[\ddot{p}]}{vr} \right) \sin \vartheta \quad v = \sqrt{\frac{c}{\epsilon \mu}}
 \end{aligned}$$

Для гармонического процесса формулы (II) справедливы, при этом  $\epsilon = \epsilon(\omega)$ ,  $\mu = \mu(\omega)$ ,  $\omega$  - частота,  $v = \sqrt{\frac{c}{\epsilon \mu}}$ .

2. Формулы (II) остаются справедливыми для неиспергружающей среды при производной зависимости от времени дипольного момента  $p = p(t)$ .
3. Формулы (II) являются аналогом формул для момента диполя (так же, как и формулы (I)).
4. Обсуждение структуры полей в различных областях пространства под одинаковыми диполем (при гармонической зависимости от времени) (диполь Теряя)  
 [В случае момента диполя условие  $\ell \ll \lambda$ ,  $\ell \ll r$  выполняется автоматически, так как  $\ell \rightarrow 0$ ]

### Зона квазистатики

$$\kappa r \ll 1, \text{ т.е. } r \ll \lambda$$

$$\underline{\underline{\ell \ll r \ll \lambda}}$$

$$\tau_{\text{запазд}} = \frac{\tau}{v}. \text{ Если } \tau_{\text{запазд}} \ll T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ то запаздывание можно преобразовать: } \frac{\tau}{\omega} \ll \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \underline{\underline{\kappa r \ll 2\pi}}.$$

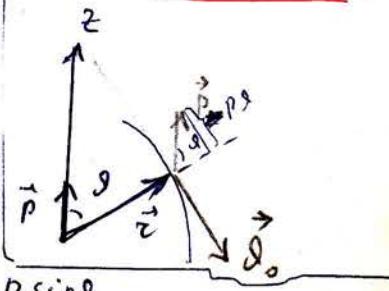
$$\frac{1}{r^3} \gg \frac{\kappa}{r^2} \text{ в выражении для } E_r,$$

$$\frac{1}{r^3} \gg \frac{\kappa}{r^2} \gg \frac{\kappa^2}{r} \text{ в выражении для } E_\theta, \quad \kappa r \ll 1, \quad e^{-ikr} \approx 1.$$

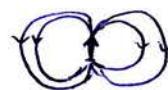
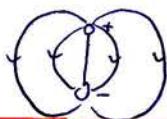
$$E_r \approx \frac{2pcos\vartheta}{\epsilon r^3}, \quad E_\theta \approx \frac{p \sin \vartheta}{\epsilon r^3}, \quad H_\varphi = \frac{ip \sin \vartheta}{\epsilon r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \left\{ \frac{3(\vec{p}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right\}$$

$$E_r = \frac{1}{\epsilon} \left\{ \frac{3pr \cdot r}{r^5} - \frac{pr}{r^3} \right\} = \frac{2pcos\vartheta}{\epsilon r^3}; \quad E_\theta = -\frac{p\vartheta}{\epsilon r^3} = \frac{psin\vartheta}{\epsilon r^3}; \quad H_\varphi = -\frac{pd}{\epsilon r^3} = -\frac{psin\vartheta}{\epsilon r^3}$$



Таким образом, поле в зоне квазистатики не имеет такого же спиралевидного, как для статического диполя.



Замечание: полученный пример того, как правильное магнитное поле в зоне квазистатики можно получить из закона Бюо-Савара, который в данном случае неприменим:

$$\vec{H} = \int_V \frac{[\vec{j}(\vec{r})] dV}{c R^3}, \quad \vec{j} = i\omega \vec{P} = i\omega \vec{z}_0 \rho \delta(\vec{r}), \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

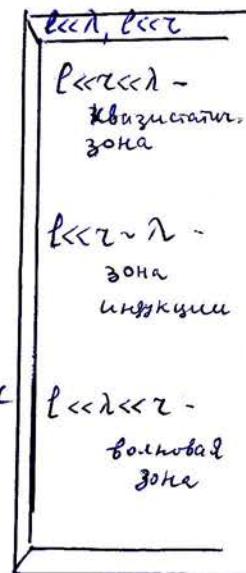
$$\vec{H} = i\omega \rho \frac{[\vec{z}_0, \vec{r}]}{c r^3} = \frac{i\omega \rho}{c r^2} [\vec{z}_0, \vec{r}_0] = \vec{\varphi}_0 \cdot \frac{i K_0 \rho \sin \delta}{r^2};$$

Заметка: что магнитное поле не является в зоне квазистатики наметурированное ( $\text{rot } \vec{H} \neq 0$ ); Аналогичное выражение получим для  $\vec{H}_\varphi$  и  $H_\varphi$  (I).

Особенности поля торического диполя в

качестве координаты:  $E_{r,\vartheta} \sim \frac{1}{r^3}$ ,  $H_\varphi \sim \frac{1}{r^2}$ .

Следующий раз: между полями  $\vec{E}_{\text{кв.}}$  и  $\vec{H}_{\text{кв.}}$  в зоне квазистатики имеется следующий раз  $\frac{\pi}{2}$  (что означает, что в выражении для  $H_\varphi$  учитывается на это).



### Поле в волновой зоне

Def.: Волновая зона - это область пространства, где  $k\tau \gg 1$  (т.е.  $\tau \gg \lambda$ ): расстояние от диполя до той точки волновой зоны много больше длины волны (это понятие следует уточнить при переходе к неизотропному источнику). Относительные числа  $\frac{1}{r^3}, \frac{K}{r^2}$  в выражениях для полей (и среды  $\frac{k}{r}$ ,

$$E_\vartheta = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{1}{r^3} + \frac{iK}{r^2} - \frac{K^2}{r} \right) e^{-ikr} \rho \sin \delta \approx - \frac{K^2}{\epsilon} \frac{e^{-ikr}}{\tau} \rho \sin \delta,$$

$$H_\varphi = \left( \frac{ik_0}{r^2} - \frac{k_0 K}{r} \right) e^{-ikr} \rho \sin \delta \approx - \frac{k_0 K}{r} e^{-ikr} \rho \sin \delta = \frac{E_\vartheta}{y},$$

$$E_z = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{2}{r^3} + \frac{2ik}{r^2} \right) e^{-ikr} \rho \cos \delta \approx \frac{2ik}{\epsilon} \frac{e^{-ikr}}{\tau^2} \rho \cos \delta,$$

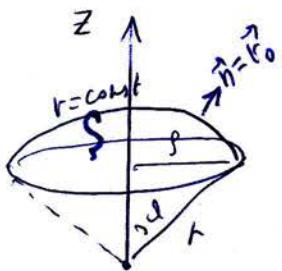
При  $\tau \rightarrow \infty$   $|E_z| \ll |E_\vartheta|$  (кроме  $\delta = 0, \pi$ )

$$E_z \approx 0 \quad (\sim \frac{1}{\tau^2})$$

Стационарный поток наружу в зоне квазистатики

5'

$$g = rs \sin \delta$$



$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S}; \quad d\vec{S} = \vec{n} ds \hat{n} \vec{r}_0 ds, \text{т.к. } \vec{n} \equiv \vec{r}_0$$

$$H_\varphi |_{2\pi t} = ik_0 \epsilon \int_S E_r \frac{ds}{r^2 \sin \delta' d\delta' 2\pi} ; \quad g = rs \sin \delta$$

$$H_\varphi \cdot r \sin \delta = ik_0 \epsilon' \int_0^\delta \underbrace{\frac{2p \cos \delta'}{\epsilon' r^3}}_{E_r} \cdot r^2 \sin \delta' d\delta' =$$

$$= ik_0 \frac{1}{r} p' \int_0^\delta d\delta' \left( \frac{\sin^2 \delta'}{2} \right) = ik_0 \frac{p}{r} \underbrace{\sin^2 \delta}_{\text{;}}$$

$$H_\varphi = \frac{ik_0 p \sin \delta}{r^2} - \text{квазистатическое магнитное поле.}$$

<задача 6.14>

Жибекбай B.B.  
Миндер M.A.