Основные формулы комбинаторики

1) Факториал (произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно)

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$

...

$(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n$

$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n(n+1)$

...

Кроме того: $0! = 1$

2) Перестановки, сочетания и размещения без повторений

Участники действий: множество, состоящее из n **различных** объектов *(либо объектов, считающихся в контексте той или иной задачи различными)*

Формула количества перестановок: $P_n = n!$

Типичная смысловая нагрузка: *«Сколькими способами можно переставить n объектов?»*

Формула количества сочетаний: $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$

Типичная смысловая нагрузка: *«Сколькими способами можно выбрать m объектов из n?». Поскольку выборка проводится из множества, состоящего из n объектов, то справедливо неравенство $0 \le m \le n$*

Формула количества размещений: $A_n^m = (n-m+1) \cdot \ldots \cdot (n-1)n$

Типичная смысловая нагрузка: *«сколькими способами можно выбрать m объектов (из n объектов)* ***и в каждой*** *выборке переставить их местами (либо распределить между ними какие-нибудь уникальные атрибуты)»*

Исходя из вышесказанного, справедлива следующая формула:

$$C_n^m \cdot P_m = A_n^m$$

И в самом деле:

$$C_n^m \cdot P_m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} \cdot m! = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-m)(n-m+1) \cdot \ldots \cdot (n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-m)} = (n-m+1) \cdot \ldots \cdot (n-1)n = A_n^m$$

3) Бином Ньютона и треугольник Паскаля

Под ***биномом Ньютона*** чаще всего подразумевают формулу возведения двучлена $(a+b)$ в целую неотрицательную степень n:

$(a+b)^0 = \mathbf{1}$

$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b = \mathbf{a + b}$

$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 b^2 = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$

$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 b^3 = \mathbf{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 b^4 = \mathbf{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$

$(a+b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b^1 + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a^1 b^4 + C_5^5 b^5 = \mathbf{a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5}$

...

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n =$

...

Биномиальные коэффициенты C_n^m можно рассчитать по стандартной формуле (см. пункт 2), но удобнее воспользоваться так называемым ***треугольником Паскаля***, который представляет собой бесконечную таблицу биномиальных коэффициентов. По бокам этого треугольника расположены единицы, а каждое внутреннее число равно сумме двух ближайших верхних чисел *(красные метки)*:

0: 1
1: 1 1
2: 1 2 1
3: 1 + 3 3 1
4: 1 4 6 4 1
5: 1 5 10 10 + 5 1
6: 1 6 15 20 15 6 1
7: 1 7 21 35 + 35 21 7 1
8: 1 8 28 56 70 56 28 8 1
9: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10: 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
....

Так, например, для возведения двучлена в 6-ю степень следует руководствоваться общей формулой бинома, после чего сразу записать числа из строки № 6 треугольника Паскаля:

$$(a+b)^6 = C_6^0 a^6 + C_6^1 a^5 b^1 + C_6^2 a^4 b^2 + C_6^3 a^3 b^3 + C_6^4 a^2 b^4 + C_6^5 a^1 b^5 + C_6^6 b^6 =$$
$$= \mathbf{a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6}$$

Кроме того, данная таблица позволяет быстро находить отдельно взятые биномиальные коэффициенты (например, в целях проверки вычислений по формуле $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$):

C_6^2 – находим строку № 6 и ***(внимание!)*** 2 + 1 = 3-й элемент слева *(зелёный кружок)*: $C_6^2 = 15$;

C_9^5 – находим строку № 9 и выбираем 5 + 1 = 6-й элемент слева *(малиновый кружок)*: $C_9^5 = 126$;

C_{10}^3 – находим строку № 10 и выбираем 3 + 1 = 4-й элемент слева *(коричневый кружок)*: $C_{10}^3 = 120$.

4) Комбинаторное правило суммы и комбинаторное правило произведения

Если объект A можно выбрать из некоторого множества объектов m способами, а другой объект B – n способами, то выбор объекта A **или** объекта B (без разницы какого) возможен $m+n$ способами.

Если объект A можно выбрать из некоторого множества объектов m способами **и** после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то упорядоченная пара объектов $(A; B)$ может быть выбрана mn способами.

Данные принципы справедливы и для бОльшего количества объектов.

Важная содержательная часть правил состоит в том, знак «плюс» понимается и читается как союз **ИЛИ**, а знак «умножить» – как союз **И**.

5) Перестановки, сочетания и размещения с повторениями

Участники действий: множество, состоящее из объектов, среди которых есть одинаковые *(либо считающиеся таковыми по смыслу задачи)*

Формула количества перестановок с повторениями: $P_{n\,(повт)} = \dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\cdot\ldots\cdot n_k!}$,

где $n_1+n_2+n_3+\ldots+n_k=n$

Типичная смысловая нагрузка: «Количество способов, которыми можно переставить n объектов, среди которых 1-й объект повторяется n_1 раз, 2-й объект повторяется n_2 раз, 3-й объект – n_3 раз,…, k-й объект – n_k раз»

Следует отметить, что в подавляющем большинстве задач в совокупности есть и уникальные (не повторяющиеся) объекты, в этом случае соответствующие значения n_i равны единице, и в практических расчётах их можно не записывать в знаменатель.

Формула количества сочетаний с повторениями: $C^m_{n\,(повт)} = C^m_{n+m-1} = \dfrac{(n+m-1)!}{(n-1)!\cdot m!}$

Типичная смысловая нагрузка: «Для выбора предложено n множеств, каждое из которых состоит из одинаковых объектов. Сколькими способами можно выбрать m объектов?»

То есть, здесь в выборке могут оказаться одинаковые объекты, и если $m>n$, то совпадения точно будут. По умолчанию предполагается, что исходная совокупность содержит не менее m объектов ***каждого вида***, и поэтому выборка может полностью состоять из одинаковых объектов.

Формула количества размещений с повторениями: $A^m_{n(повт)} = n^m$

*Типичная смысловая нагрузка: «Дано множество, состоящее из n объектов, при этом любой объект можно выбирать **неоднократно**. Сколькими способами можно выбрать m объектов, если **важен порядок их расположения** в выборке? »*

Для бОльшей ясности здесь удобно представить, что объекты извлекаются последовательно (хотя это вовсе не обязательное условие). В частности, возможен случай, когда из n имеющихся объектов m раз будет выбран какой-то один объект.