LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY
of NIZHNI NOVGOROD
National Research University

Интегралы, зависящие от параметров, и операционное исчисление

Практическое занятие 1

1 Собственные интегралы, зависящие от параметра.

Определение.

Пусть функция $f(x,y)$ определена в прямоугольнике $\Pi = [a,b] \times [c,d]$ и интегрируема по x на отрезке $[a,b]$ для $\forall$ фиксированных $y \in [c,d]$. Тогда интеграл

$$\boxed{I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx} \qquad (1)$$

называется собственным интегралом, зависящим от параметра "y".

Если $f(x,y) \in C(\Pi)$, то $I(y)$ непрерывна и интегрируема на $[c,d]$ и справедлива формула

$$\boxed{\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy,} \qquad (2)$$

т.е. интегралы можно менять местами.

Если $f(x,y), f'_y(x,y) \in C(\Pi)$, то $I(y)$ дифференцируема на (c,d) и производная вычисляется как

$$\boxed{I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.} \qquad (3)$$

Наиболее общим видом интеграла, зависящего от параметра, является следующий

$$\boxed{J(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx,} \qquad (4)$$

т.е. когда от параметра зависят еще и пределы интеграла.

Если $f(x,y) \in C(\Pi)$, $a(y), b(y) \in C([c,d])$, то функция $J(y) \in C([c,d])$. Сложнее обстоит дело с дифференцированием интеграла (4).

Если $f(x,y), f'_y(x,y) \in \mathbb{C}(\Pi)$, а функции $a(y)$ и $b(y)$ дифференцируемы в интервале (c,d), то $I(y)$ – дифференцируема на (c,d) и справедливо правило Лейбница

$$\boxed{I'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx + b'(y) f(b(y),y) - a'(y) f(a(y),y).} \quad (5)$$

№ 3718 (а, в)

№ 3718 (а, в) Найти $F'(\alpha)$, если

а) $F(\alpha) = \displaystyle\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx,$

$$-\left(e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha + e^{\alpha|\cos\alpha|}\cdot\cos\alpha\right) + \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

в) $F(\alpha) = \displaystyle\int\limits_{0}^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,dx.$

$$\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)$$

№ 3720

№ 3720 Найти $F''(y)$, если

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x)\,|y-x|\,dx,$$

где $a<b$, $f(x)\in C([a,b])$.

$$F''(y) = \begin{cases} 2f(y), & a<y<b \\ 0, & y<a,\ y>b \end{cases}$$

№ 3722 Найти представление "n"-ой производной

№ 3722.1 функции $\frac{\sin x}{x}$ через интеграл, зависящий от параметра, и оценить ее абсолютное значение.

$$\left|\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(n)}\right| \le \frac{1}{n+1}$$

№ 3732

№ 3732

Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\,dx.$$

$\pi \ln \frac{|a|+|b|}{2}$

№ 3734

№ 3734

Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx.$$

$\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}a \cdot \ln(1+|a|)$

Домашнее задание.

Новый задачник (Демидович, 2005+)

№№ 3718 (б, д), 3721.1, 3726*, 3728, 3729, 3735, 3736, 3738 (а).

Старый задачник (Демидович, 1997 и раньше)

№№ 3718 (б, д), 3721, 3726*, 3728, 3729, 3735, 3736, 3738 (а).

LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY
of NIZHNI NOVGOROD
National Research University

Интегралы, зависящие от параметров, и операционное исчисление

Практическое занятие 2

2 Равномерная сходимость несобственных интегралов.

Определение.

Несобственный интеграл 1-го рода

$$I(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx, \qquad (1)$$

зависящий от параметра "y", называется равномерно сходящимся относительно "y" на отрезке $[c,d]$, если он сходится на $[c,d]$ и по $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A = A(\varepsilon) \geq a : \; \forall R > A(\varepsilon)$ и $\forall y \in [c,d]$:

$$\boxed{\left| \int_R^{\infty} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon.}$$

В редких случаях удается доказать равномерную сходимость по определению. Для её доказательства применяют различные достаточные признаки.

Признак Вейерштрасса.

Если во всех точках полуполосы $\Pi_\infty = [a, \infty) \times [c, d]$ выполняется неравенство

$$\boxed{|f(x,y)| \le g(x),}$$

и несобственный интеграл $\int_a^\infty g(x)\,dx$ сходится, то интеграл (1) равномерно сходится относительно "y" на $[c, d]$.

Этот признак наиболее часто применяют на практике. Для знакопостоянных на $[a,\infty)$ функций $f(x,y)$ иногда используется другой достаточный признак.

Признак Дини.

Пусть: 1°. функция $f(x,y) \geq 0$ и непрерывна в полуполосе Π_∞;

2°. для $\forall\, y \in [c,d]$ сходится несобственный интеграл (1), и функция $I(y)$ непрерывна на отрезке $[c,d]$.

Тогда несобственный интеграл (1) равномерно сходится относительно "y" на $[c,d]$.

Недостаток признака состоит в том, что требуется знать вид функции $I(y)$, т.е. значение интеграла (1).

Признак Дирихле.

Пусть функция $f(x,y)$ определена в полуполосе Π_∞ и при $\forall\, y \in [c,d]$ интегрируема по x на отрезке $[a,R]$ для $\forall R > a$. Если $f(x,y)$ имеет равномерно ограниченную первообразную, т.е.

$$\left| \int_a^R f(x,y)\,dx \right| \leq M \quad \text{для } \forall R > a,\ \forall y \in [c,d],$$

а другая функция $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то несобственный интеграл

$$\int_a^\infty f(x,y)\,g(x)\,dx \qquad (2)$$

сходится равномерно относительно "y" на отрезке $[c,d]$.

Признак Абеля.

Если несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ сходится, а функция $g(x,y)$, определенная в полуполосе Π_∞, равномерно ограничена в ней, т.е.

$$\exists M>0 : \quad |g(x,y)| \le M \quad \text{для } \forall (x,y) \in \Pi_\infty,$$

то несобственный интеграл

$$\int_a^\infty f(x)\,g(x,y)\,dx \tag{3}$$

сходится равномерно относительно "y" на отрезке $[c,d]$.

Возникает вопрос: а как проверить неравномерную сходимость интеграла (1) относительно [redacted] "y" на отрезке $[c,d]$? Для этой цели можно воспользоваться необходимым и достаточным критерием Коши, но его практическое применение весьма ограничено. Здесь удобнее пользоваться следствием теоремы о непрерывности интеграла (1).

Следствие теоремы о непрерывности $I(y)$.

Если функция $f(x,y)$ непрерывна в полуполосе Π_∞, а функция $I(y)$ имеет точки разрыва на отрезке $[c,d]$, то несобственный интеграл (1) сходится неравномерно относительно [redacted] "y" на отрезке $[c,d]$.

Аналогичные признаки существуют и для несобственных интегралов 2-го рода, зависящих от параметра,

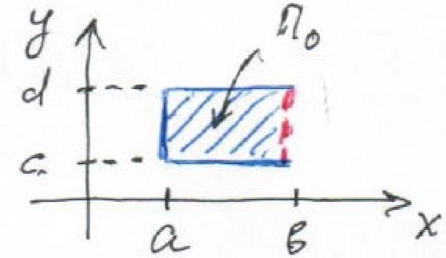
$$\boxed{J(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx.} \qquad (4)$$

Так, например, если особой точкой функции $f(x,y)$ является т. $x = b$, т.е. $\lim\limits_{x\to b-0} f(x,y) = \infty$ для $\forall y \in [c,d]$, то по определению интеграл (4) называется равномерно сходящимся относительно "y" на отрезке $[c,d]$, если

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall \alpha : 0 < \alpha < \delta(\varepsilon)$ и $\forall y \in [c,d]$:

$$\left| \int_{b-\alpha}^{b} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Признак Вейерштрасса.



Если для $\forall (x,y)$ из открытого прямоугольника $П_0 = [a,b) \times [c,d]$ выполняется неравенство

$$\boxed{|f(x,y)| \le g(x)}$$

и интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ – сходится, то интеграл $I(y)$ сходится равномерно относительно "y" на $[c,d]$.

В то же время, часто удобно пользоваться ранее рассмотренными достаточными признаками равномерной сходимости [redacted] несобственного интеграла 1-го рода, зависящего от параметра. Дело в том, что интеграл 2-го рода можно привести к интегралу 1-го рода.

Так, если, по-прежнему, $x = b$ является особой точкой интеграла (4), то применяя замену $t = \frac{1}{b-x}$ $\left\{ x = b - \frac{1}{t},\ dx = \frac{dt}{t^2} \right\}$, приходим к

$$\boxed{I(y) = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(b - \frac{1}{t}, y\right) \frac{dt}{t^2},}$$

т.е. к несобственному интегралу 1-го рода. Дальше можно применять рассмотренные достаточные признаки равномерной сходимости.

Если особых точек в интеграле 2-го рода несколько, то, пользуясь свойством аддитивности, его разбивают на сумму интегралов, каждый из которых содержит только одну особую точку.

Исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках следующие интегралы:

№ 3756 (б)

№ 3756

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x \, dx \quad (0 < \alpha_0 \leq \alpha < \infty)$$

Равномерно

№ 3759

№ 3759

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dx}{1 + (x-\alpha)^2} \quad (0 \leq \alpha < \infty)$$

Неравномерно

№ 3760 (б)

№ 3760.1

$$I(p) = \int_1^\infty \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx \quad (0 \leq p \leq 10)$$

Равномерно

№ 3762

№ 3762

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \sqrt{\alpha} \, e^{-\alpha x^2} dx \quad (0 \leq \alpha < \infty)$$

Неравномерно

N 3767

N 3767

$$I(n) = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (0 \le n < \infty)$$

Равномерно

N 3764(б)

N 3765

$$I(p) = \int_0^\infty \frac{\sin x^2}{1+x^p}\,dx \quad (0 \le p < \infty)$$

Равномерно

Домашнее задание.

Новый задачник (Демидович, 2005+)

NN 3757, 3758, 3761, 3763, 3764(а), 3768*, 3769, 3770*.

Старый задачник (Демидович, 1997 и ранее)

NN 3757, 3758, 3761, 3763, 3764, 3768*, 3769, 3770*.

LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY
of NIZHNI NOVGOROD
National Research University

Интегралы, зависящие от параметров, и операционное исчисление

Практическое занятие 3

③ Вычисление несобственных интегралов дифференцированием и интегрированием по параметру.

Теорема о дифференцировании по параметру.

Если:

1) функция $f(x,y)$ непрерывна вместе со своей производной $f'_y(x,y)$ в области Π_∞: $a \le x < +\infty$, $c < y < d$;

2) $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ — сходится для некоторого $y \in [c,d]$;

3) $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$ — сходится равномерно относительно параметра "y" в интервале (c,d),

то:

$$\boxed{\exists\ \frac{d}{dy}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx} \qquad (1)$$

Теорема об интегрировании по параметру.

Если:

1) функция $f(x,y)$ непрерывна при $x \geq a$ и $y \in [c,d]$;

2) $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ – сходится равномерно относительно параметра "y" на отрезке $[c,d]$,

то

$$\boxed{\exists \int\limits_c^d dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy.} \qquad (2)$$

Теорема о перестановке несобственных интегралов.

1. Пусть функция $f(x,y)$ неотрицательна и непрерывна в области $x \geq a, y \geq c$, а интегралы

$$I(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx \quad \text{и} \quad K(x) = \int_c^\infty f(x,y)\,dy$$ непрерывны

при $y \geq c$ и $x \geq a$ соответственно. Тогда из сходимости одного из следующих двух несобственных интегралов

$$\int_c^\infty I(y)\,dy \quad \text{и} \quad \int_a^\infty K(x)\,dx$$

вытекает сходимость другого и их равенство, т.е.

$$\boxed{\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x,y)\,dy.}$$

2 Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в области $x \geq a, y \geq c$, а интегралы $J(y)$ и $K(x)$ сходятся равномерно относительно y и x соответственно в промежутках $[c,\infty)$ и $[a,\infty)$. Тогда из сходимости одного из двух несобственных интегралов

$$\int_c^{\infty} J(y)\,dy \quad \text{и} \quad \int_a^{\infty} K(x)\,dx$$

вытекает сходимость другого и их равенство.

№3784

№3784 Пользуясь формулой

$$\int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n} \qquad (n>0)$$

вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 x^{n-1} \ln^m x\,dx, \quad m \in N. \qquad \frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}$$

№3793 Вычислить несобственный интеграл двумя способами

№3793

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\, dx \qquad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}$$

№3794 Вычислить несобственный интеграл

№3794

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx \qquad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

$$\ln \frac{(2\alpha)^{2\alpha} (2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2(\alpha+\beta)}}$$

№ 3795 Вычислить несобственный интеграл

№ 3795

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx \qquad (\alpha>0,\beta>0)$$

$\operatorname{arctg}\frac{\beta}{m}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$, $m\neq 0$

0, $m=0$

На дом: №№ 3785, 3796 (двумя способами),

3788, 3797, 3799, 3800, 3802.

старый задачник (Демидович, 1997 и ранее).

новый задачник (Демидович, 2005+)

LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY
of NIZHNI NOVGOROD
National Research University

Интегралы, зависящие от параметров, и операционное исчисление

Практическое занятие 4

④ Вычисление несобственных интегралов с помощью именных интегралов и теорем Фрулани.

На этом занятии рассмотрим задачи на вычисление несобственных интегралов указанными методами путём сведения их к именным интегралам: Дирихле, Пуассона, Френеля.

Интеграл Дирихле

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.}$$

Его обобщение

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\,\alpha.}$$

Интеграл Пуассона

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Его обобщение

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-Ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{A}} \quad (A>0).}$$

Интегралы Френеля

$$\boxed{\int_0^\infty \left\{\begin{matrix}\sin x^2\\ \cos x^2\end{matrix}\right\} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

Итальянский математик Фруллани (1795–1834) изучал интеграл вида

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx \equiv \Phi(a,b) \qquad (a,b>0)$$

и нашел все его возможные значения. Он сформулировал свои результаты в форме трех теорем.

Теорема 1.

Если: 1) $f(x)$ определена и непрерывна при $x \geq 0$,
2) $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(\infty) < \infty$, то $\boxed{\Phi(a,b) = [f(0)-f(\infty)]\ln b/a.}$

Теорема 2.

Если: 1) $f(x)$ определена и непрерывна при $x \geq 0$,
2) для $\forall A>0$ $\int_A^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx < \infty$, то $\boxed{\Phi(a,b) = f(0)\ln b/a.}$

Теорема 3.

Если: 1) для $\forall A>0$ $\int_0^A \frac{f(x)}{x}dx<\infty$, 2) $\exists \lim_{x\to\infty} f(x)=f(\infty)$,

то $\boxed{\Phi(a,b)=f(\infty)\ln a/b.}$

Вычисление интегралов типа Фруллани сводится к проверке условий одной из теорем.

Замечание.

Если исходный несобственный интеграл не содержит параметра, его можно искусственно ввести, а потом положить его значение нужному.

№3789 Доказать вторую теорему Фруллани.

№3790 Применяя формулу Фруллани, вычислить интегралы:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx \quad (a>0,\ b>0).$$ $\ln b/a$

№ 3792

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx \quad (a>0, b>0). \qquad \frac{\pi}{2}\ln a/b$$

№ 3813

Используя интегралы Дирихле, Пуассона и Фруллани, найти интегралы:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2}\,dx \quad (\alpha>0). \qquad \pi\frac{|\beta|}{2} - \sqrt{\pi\alpha}$$

№ 3818

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^3 dx \qquad \frac{3\pi}{8}\alpha|\alpha|$$

№ 3819

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx \qquad \frac{\pi}{4}$$

На дом: №№ 3791, 3814, 3816, 3817, 3821, 3823, доказать первую и третью теорему Фруллани.

LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY
of NIZHNI NOVGOROD
National Research University

Интегралы, зависящие от параметров, и операционное исчисление

Практическое занятие 5

5 Вычисление несобственных интегралов с помощью интегралов Эйлера.

Наиболее известными из именных интегралов являются интегралы Эйлера или гамма- и бета-функции.

Гамма-функция или эйлеров интеграл 2-го рода является несобственным интегралом смешанного типа, зависящим от одного параметра:

$$\boxed{\Gamma(p)=\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx.} \qquad (7)$$

Гамма-функция определена и непрерывна в области $p>0$ и обладает свойствами:

1°. Формула приведения

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

Отсюда, $\Gamma(n+1) = n!$ для $n \in \mathbb{N}$.

Поэтому гамма-функцию называют обобщением факториала на случай не целых p.

2°. Формула дополнения

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p} \qquad (0<p<1)$$

Следствие: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

3°.

$\Gamma(p)$ имеет производную любого порядка, причем $\Gamma''(p) > 0$.

Бета-функция или эйлеров интеграл 1-го рода является несобственным интегралом 2-го рода и зависит от двух параметров:

$$\boxed{B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.} \qquad (2)$$

Бета-функция определена и непрерывна в первом квадранте: $p>0,\ q>0$, обладая свойствами:

1°. Формула приведения

$$B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}B(p,q),$$

$$B(p,q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,q).$$

2°. Формула симметрии

$$B(q,p)=B(p,q).$$

3°. Связь эйлеровых интегралов

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Следствие:

$$B(m+1,n+1)=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}=\frac{1}{(m+n+1)\,C_{m+n}^{m}},$$

где $m,n\in\mathbb{N}$.

4°. Другие представления бета-функции

$$B(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}t\cos^{2q-1}t\,dt,$$

$$B(p,q)=\int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt.$$

Вычисление несобственных интегралов с помощью эйлеровых производится путем их приведения к одному из представлений гамма- и бета-функций. Используются методы дифференцирования и интегрирования по параметру, замена переменного, искусственного введение параметра и т.д. Решением задачи является ответ, выраженный через $\Gamma(p)$ или $B(p,q)$, поскольку эти функции табулированы. Иногда, используя свойства гамма- и бета-функций, можно довести ответ до числа.

В ряде задач требуется не только выразить несобственный интеграл через эйлеровы, но и определить область его существования. Это можно сделать по ответу, если учесть, что $\Gamma(p)$ и $B(p,q)$ определены только для положительных аргументов.

Однако, это не всегда дает правильную область существования. Поэтому нужно знать признаки сходимости несобственных интегралов (это будет на следующем занятии).

Вычислить следующие интегралы с помощью бета- и гамма-функций:

№ 3843 $$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\, dx$$ $\pi/8$

№ 3844

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0) \qquad \frac{\pi a^4}{16}$$

№ 3847

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{1+x^4} \qquad \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

Определить области существования интегралов и выразить их через эйлерова:

№ 3853

$$\int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p} \quad (a>0,\ b>0,\ n>0)$$

$$\boxed{\frac{1}{na^p}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} B\left(p-\frac{m+1}{n},\ \frac{m+1}{n}\right)}$$

№ 3855

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} \quad (m>0)$$

$$\boxed{\frac{1}{m} B\left(\frac{1}{m},\ 1-\frac{1}{n}\right)}$$

№ 3876

Используя равенство

$$\frac{1}{x^m}=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty t^{m-1}e^{-xt}\,dt \quad (x>0),$$

вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^m}\,dx \qquad (0<m<1).$$

$$\boxed{\frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m)\cos\frac{\pi m}{2}} \quad (a>0)}$$

На дом: №№ 3846, 3849, 3850, 3851,
3854, 3857, 3863, 3877.

LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY
of NIZHNI NOVGOROD
National Research University

Интегралы, зависящие от параметров, и операционное исчисление

Практическое занятие 6

6 Определение области сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметров, и их вычисление с помощью эйлеровых.

Перед тем, как приступать к вычислению несобственного интеграла, зависящего от параметров, нужно найти его область существования. Для этого используют признаки сравнения в обычной и предельной формах для случая знакопостоянных подынтегральных функций и достаточные признаки Дирихле и Абеля для знакопеременных функций. При этом, как правило, нужна описал область сходимости, т.е. область абсолютной сходимости с присоединенной областью условной сходимости. Найденная область существования может понадобиться далее при вычислении несобственного интеграла, а именно при сведении его к эйлеровым. Ответ выражается через гамма- и бета-функции и не должен противоречить найденной области существования несобственного интеграла, т.е. аргументы этих функций в ответе должны быть положительными.

Напомним основные признаки сходимости несобственных интегралов.

Если в несобственном интеграле 1-го рода $\int_a^\infty f(x)dx$ подынтегральная функция знакопостоянна, например, $f(x) \geq 0$, то применяются признаки сравнения.

Общий признак сравнения.

Если
$$|f(x)| \leq g(x) \quad \text{для } \forall x \geq a$$
и $\int_a^\infty g(x)dx$ – сходится, то сходится $\int_a^\infty |f(x)|dx$.

Признак сравнения в предельной форме.

Если $\lim\limits_{x\to\infty} x^q|f(x)| = C \geq 0$ для $q>1$, то

$\int\limits_a^{\infty}|f(x)|dx$ – сходится.

Здесь идет сравнение с эталонным интегралом $\int\limits_a^{\infty}\frac{dx}{x^q}$, который сходится при $q>1$.

Для несобственного интеграла 2-го рода $\int\limits_a^{b}f(x)dx$ с особой точкой $x=b$ предельный признак имеет вид:

если $\lim\limits_{x\to b-0}|f(x)|(b-x)^{\alpha} = C \geq 0$ для $\alpha<1$, то

$\int\limits_a^{b}|f(x)|dx$ – сходится.

Если функция $f(x)$ – знакопеременная, то сначала исследуют абсолютную сходимость – $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$. Если интеграл расходится, то исследуют условную по признакам Дирихле и Абеля.

Определить области существования и выразить через эйлеровы следующие интегралы:

№ 3857 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^n x\, dx$

$$\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi n}{2}} \qquad \text{о.с. } |n|<1$$

№ 3858 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1+k\cos x)^n}\, dx$

$$\frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{n/2}} B\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

о.с. $0<|k|<1,\ n>0$

№ 3560 $\displaystyle\int_0^{\infty} x^m e^{-x^n}\, dx$

$$\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

о.с. $\dfrac{m+1}{n}>0$

№ 3863 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx$

$-\dfrac{\pi^2\cos\pi p}{\sin^2\pi p}$ о.с. $(0<p<1)$

№ 3864.2 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^4}\,dx$

$\dfrac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$

№ 3865 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\,dx$

$\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi p}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi q}{2}}\right|$ о.с.

$0,\ p=q$ $\quad 0<p<1$, $0<q<1$

На дом: №№ 3859, 3861, 3862, 3864, 3864.1

LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY
of NIZHNI NOVGOROD
National Research University

Интегралы, зависящие от параметров, и операционное исчисление

Практическое занятие 7

⑦ Простейшие задачи операционного исчисления.

Изображением по Лапласу комплексно-значной функции $f(t)$ называют функцию комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемую соотношением:

$$\boxed{F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.}$$

Для сокращения используют символическую запись

$$\boxed{f(t) \doteqdot F(p).}$$

Функция $f(t)$ называется оригиналом и на нее накладывают следующие 3 условия:

ⓐ $f(t) = 0$ для $t < 0$.

(в) за исключением точек разрыва 1-го рода $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица-Гёльдера:

$\forall t>0 \quad \exists A>0,\ 0<\alpha\leq 1,\ \tau_0>0$, что

$$\boxed{|f(t+\tau)-f(t)|\leq A|\tau|^{\alpha}}$$

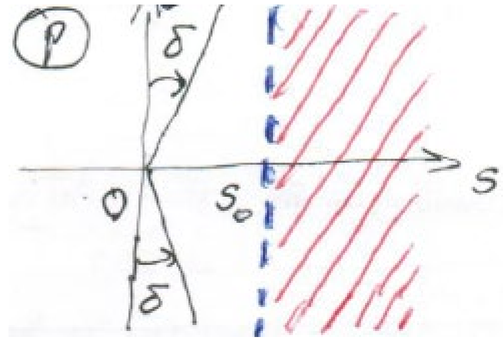
для $\forall \tau: |\tau|\leq \tau_0$.

(с) $f(t)$ возрастает с увеличением t не быстрее показательной функции, т.е. $\exists M>0,\ s_0\geq 0: \forall t>0: \underline{|f(t)|<Me^{s_0 t}}$, где s_0 – <u>показатель роста</u>.

Изображение по Лапласу обладает следующими свойствами:

(1) $F(p)$ определено в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p>s_0$ и является в ней аналитической функцией

② $\lim\limits_{\substack{p\to\infty \\ |\arg p|<\frac{\pi}{2}-\delta}} F(p) = 0. \quad (\forall \delta>0)$



Основные свойства преобразования Лапласа.

① Линейность.

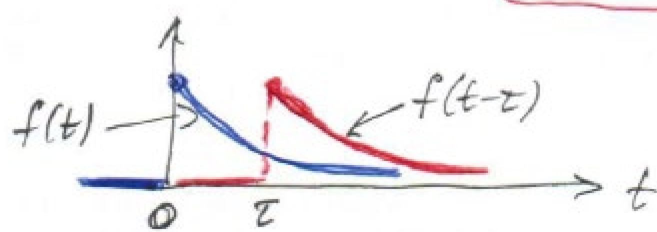
Для $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$: $\boxed{\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p).}$

② Теорема подобия.

Для $\forall \alpha > 0$: $\boxed{f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).}$

③ Теорема запаздывания.

Для $\forall \tau > 0$: $\boxed{f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p).}$



4 Теорема смещения.

Для $\forall p_0 \in \mathbb{C}$: $\boxed{e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p-p_0).}$

5 Дифференцирование оригинала.

Если $f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, т.е. удовлетворяют свойствам a, b, c, то:

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$\ldots$$

$$\boxed{f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),}$$

где $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t)$.

6 Дифференцирование изображения.

Для $\forall n \in \mathbb{N}$: $\boxed{(-t)^n f(t) \risingdotseq F^{(n)}(p).}$

7 Предельные (тауберовы) теоремы.

а) Если $\exists$ конечное значение $f(0)$, то

$$\boxed{\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0)} \qquad (|\arg p| < \pi/2 - \delta).$$

в) Если $\exists \lim\limits_{t\to\infty} f(t) \equiv f(\infty)$, то

$$\boxed{\lim_{p\to 0} pF(p) = f(\infty)} \qquad (|\arg p| < \pi/2 - \delta).$$

8 Интегрирование оригинала.

$$\boxed{\int_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}}.$$

9 Интегрирование изображения.

Если $\exists \int_p^\infty F(q)\,dq$, то $\boxed{\dfrac{f(t)}{t} \risingdotseq \displaystyle\int_p^\infty F(q)\,dq}.$

10 Теорема о свёртке.

$$\boxed{f(t) \circledast g(t) \risingdotseq F(p)G(p),}$$

где

$$f(t) \circledast g(t) = \int_0^t g(t-\tau) f(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\,d\tau.$$

Приступим к решению некоторых простых задач с помощью рассмотренных свойств преобразования Лапласа, составляющих аппарат операционного исчисления.

Будем также использовать изображения по Лапласу некоторых элементарных функций, которые мы нашли в ходе знакомства со свойствами преобразования.

$f(t)$	$F(p)$	$f(t)$	$F(p)$
1	$1/p$	$e^{p_0 t}$	$\frac{1}{p-p_0}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{\omega^2+p^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{\omega^2+p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln \frac{p-a}{p-b}$
$\mathrm{sh}\, \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$\mathrm{ch}\, \alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$

К простейшему классу задач относится отыскание изображения по заданному оригиналу.

Задача 1.

Найти изображение по Лапласу функции

$$f(t) = t^m \cos \omega t, \text{ где } m \in \mathbb{N}.$$

Задача 2.

Найти изображение по Лапласу функции

$$f(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}} \qquad (\alpha > 0).$$

Более сложными являются задачи на решение обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и интегральных уравнений Вольтерра.

Задача 3.

Найти операционным методом решение дифференциального уравнения:

$$y^{(IV)} - y'' = \sin t$$

с начальными условиями $y(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

Задача 4.

Найти решение интегрального уравнения Вольтерра:

$$y(t) = \sin t + \int_0^t (t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau.$$

Домашнее задание.

(1) Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала найти изображение по Лапласу функции

$$f(t) = \cos^4 t.$$

(2) Найти изображение по Лапласу функции

$$f(t) = \sqrt{t}\,\sin\omega t.$$

(3) Найти операционным методом решение дифференциального уравнения

$$y''' + y'' = t, \quad y(0) = -3,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0.$$

(4) Найти решение интегрального уравнения операционным методом

$$y(t) = t - \int_0^t sh(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau.$$

LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY
of NIZHNI NOVGOROD
National Research University

Интегралы, зависящие от параметров, и операционное исчисление

Практическое занятие 8

8 Применение операционных методов для решения систем дифференциальных уравнений и задач математической физики.

Задача 5.

Вычислить операционным методом несобственный интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2+a^2}\,dx.$$

Задача 6.

Используя преобразование Лапласа, вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^3}\,dx.$$

Указание.

Для решения применить равенство Парсеваля

$$\boxed{\int_0^\infty f(x)G(x)\,dx=\int_0^\infty F(y)g(y)\,dy,}$$

где: $f(t)\doteqdot F(p)$, $g(t)\doteqdot G(p)$.

Как мы видели на предыдущем занятии, переход к изображениям по Лапласу позволяет сводить к алгебраическим многие дифференциальные и интегральные уравнения и успешно решать их. Однако обратный переход к оригиналам не всегда прост. Наряду с таблицами преобразования элементарных функций применяется обычно теорема Римана-Меллина и ~~ее~~ следствие — теорема разложения.

Теорема Римана-Меллина.

Если функция $f(t)$ является оригиналом преобразования Лапласа, а $F(p)$ служит ее изображением, то в $\forall$ т. t, где оригинал удовлетворяет условию Липшица-Гёльдера (не имеет скачков), справедливо равенство Римана-Меллина

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp,}$$

где $a > s_0$ – показатель роста $f(t)$ и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Первая теорема разложения.

Если $F(p)$ правильна в бесконечно удаленной точке и имеет в ее окрестности $|p| \geq R$ разложение в ряд Лорана

$$\boxed{F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n},}$$

то оригиналом $f(t)$ служит функция

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} t^{n-1}} \quad \text{для } t > 0.$$

Вторая теорема разложения.

Если функция комплексного переменного $F(p)$:

1) правильная в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > s_0 \geq 0$,

2) существует система окружностей C_n:

$|p| = R_n$, причем $R_1 < R_2 < R_3 < \ldots$, на которых

$F(p) \to 0$ при $R_n \to \infty$ равномерно относительно

$\arg p$,

3) для $\forall\, a > s_0$ абсолютно сходится $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\,dp$,

то оригиналом, соответствующим изображению

$F(p)$, служит

$$\boxed{f(t) = \sum_k \operatorname*{res}_{p=p_k} F(p)e^{pt}, \quad t>0,}$$

где вычеты берутся относительно всех особых

точек p_k функции $F(p)$.

Иногда бывает удобно применять следующую теорему, являющуюся обобщением теоремы о свёртке.

Теорема Эфроса.

Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$ и $\Phi(p)$ и $q(p)$ – аналитические функции, такие, что

$$\Phi(p)\, e^{-\tau q(p)} \doteqdot \varphi(t,\tau) \quad (\tau > 0).$$

Тогда

$$\boxed{F[q(p)]\,\Phi(p) \doteqdot \int_0^{\infty} f(\tau)\,\varphi(t,\tau)\,d\tau.}$$

Напомним еще ряд найденных оригиналов и изображений, которые могут пригодиться при решении задач

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{p}}\, e^{-\alpha\sqrt{p}} \quad (\alpha > 0)$$

$$\frac{1}{t^{\beta}} \doteqdot \frac{\Gamma(1-\beta)}{p^{1-\beta}} \quad (0 < \beta < 1).$$

Задача 1.

Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p)=\frac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}.$$

Задача 2.

Используя теорему Эфроса, найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p)=\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p} \quad (\alpha>0).$$

Задача 3.

Операционным методом найти решение системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}-4x+y=1-5t,$$
$$\dot{y}-x-2y=-1+t$$

с начальными условиями $x(0)=y(0)=1$.

Задача 4.

Операционным методом найти решение системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = y + z,$$
$$\dot{y} = 3x + z,$$
$$\dot{z} = 3x + y, \qquad x(0)=0,\ y(0)=1,\ z(0)=1.$$

Задача 5.

Применив преобразование Лапласа по времени, решить задачу о нагреве полубесконечного стержня, имеющего начальную температуру u_0, и на границе $x=0$ которого поддерживается температура u_1. Определить величину теплового потока на границе $x=0$: $u_x(0,t)=?$

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (0<x<\infty,\ t>0)$$

н.у. $u(x,0)=u_0$, гр.у. $u(0,t)=u_1$.

Задача 6.

Применяя преобразование Лапласа по времени, решить задачу о колебаниях струны длины L. В начальный момент струна находится в состоянии покоя. Ее конец $x=0$ жестко закреплен, а к свободному концу $x=L$ приложена постоянная сила F (на единицу площади сечения), направленная вдоль струны.

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \qquad (0\le x\le L,\ t>0)$$

н.у. $u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0;$

гр.у. $u(0,t)=0,\ u_x(L,t)=F/E$ (E–модуль Юнга).

Домашнее задание.

(5) Операционным методом вычислить несобственный интеграл, применяя равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{x^2+b^2}\,dx \qquad (a>0).$$

(6) Найти изображение по Лапласу функции Бесселя 1-го порядка, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$y'' + \frac{1}{t}y' + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)y = 0$$

с начальными условиями $y(0)=0,\ y'(0)=1/2$.

(7) Найти оригинал, отвечающий изображению

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}\,e^{-\frac{a}{p}}.$$

(8) Найти оригинал, отвечающий изображению

$$F(p) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p(\sqrt{p}+\alpha)}.$$

(9) Операционными методами решить систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} - \dot{y} - 2x + 2y = 1 - 2t,$$
$$\ddot{x} + 2\dot{y} + x = 0,$$
$$x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

(10) Операционными методами решить систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = 2x - y + z,$$
$$\dot{y} = x + z,$$
$$\dot{z} = -3x + y - 2z, \quad x(0) = 1,\ y(0) = 1,\ z(0) = 0.$$

11. Решить задачу математической физики, применяя операционное исчисление:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad \text{н.у. } u(x,0) = 0, \; u_x(0,t) = -q. \text{ гр.у.}$$

$(0 \le x < \infty, t > 0)$.

12. Решить задачу математической физики, применяя операционное исчисление:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad (0 \le x \le L, t > 0)$$

н.у. $u(x,0) = 0, \; u_t(x,0) = B \sin \frac{\pi x}{L}$,

гр.у. $u(0,t) = 0, \; u_x(L,t) = 0$.