Д. К. ФАДДЕЕВ, И. С. СОМИНСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ

ИЗДАНИЕ ДЕСЯТОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов физико-математических факультетов университетов и педагогических институтов

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1972

517.1
Ф 15
УДК 512.8(075.8)

$\frac{2-2-3}{21-72}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ II

УКАЗАНИЯ

ЧАСТЬ III

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник задач по высшей алгебре возник в результате преподавания в Ленинградском государственном университете и Педагогическом институте им. Герцена. Сборник предназначен для студентов младших курсов университетов и педагогических институтов при прохождении ими основного курса высшей алгебры.

Задачи сборника довольно резко разделяются на два типа. С одной стороны, собрано большое количество численных примеров, предназначенных для выработки вычислительных навыков и иллюстрирующих основные положения теоретического курса. Количество примеров, по мнению авторов, вполне достаточно для аудиторной работы, работы на дому и для контрольных работ.

С другой стороны, приводится значительное количество задач средней трудности и трудных, решение которых требует от учащихся проявления инициативы и изобретательности. Многие из задач этой категории сопровождаются указаниями, помещенными во второй части книги. Номера задач, к которым даны указания, отмечены звездочками.

Все задачи снабжены ответами, для части задач даны подробные решения.

Авторы

ЧАСТЬ I

ЗАДАЧИ

ГЛАВА I

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Действия над комплексными числами

1. $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$.

Найти x и y, считая их вещественными.

2. Решить систему, считая x, y, z, t вещественными:

$(1+i)x+(1+2i)y+(1+3i)z+(1+4i)t=1+5i$,

$(3-i)x+(4-2i)y+(1+i)z+4it=2-i$.

3. Вычислить i^n, где n — целое число.

4. Проверить тождество

$x^4+4=(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$.

5. Вычислить:

a) $(1+2i)^6$; b) $(2+i)^7+(2-i)^7$; c) $(1+2i)^5-(1-2i)^5$.

6. Выяснить, при каких условиях произведение двух комплексных чисел чисто мнимо.

7. Выполнить указанные действия:

a) $\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$; b) $\frac{a+bi}{a-bi}$; c) $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$;

d) $\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$; e) $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

8. Вычислить $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, где n — целое положительное число.

9. Решить системы уравнений:

a) $(3-i)x+(4+2i)y=2+6i, \quad (4+2i)x-(2+3i)y=$ $=5+4i$;

b) $(2+i)x+(2-i)y=6, \quad (3+2i)x+(3-2i)y=8$;

c) $x+yi-2z=10, \quad x-y+2iz=20,$
$ix+3iy-(1+i)z=30$.

10. Вычислить:

a) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

b) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

***11.** Пусть $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$. Вычислить:

a) $(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$;

b) $(a+b)(a+b\omega)(a+b\omega^2)$;

c) $(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3$;

d) $(a\omega^2+b\omega)(b\omega^2+a\omega)$.

12. Найти числа, сопряженные:

a) своему квадрату, b) своему кубу.

***13.** Доказать теорему:

Если в результате конечного числа рациональных действий (т. е. сложения, вычитания, умножения и деления) над числами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ получается число u, то в результате тех же действий над сопряжеными $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ получится число $\bar{u}$, сопряженное с u.

14. Доказать, что $x^2+y^2=(s^2+t^2)^n$, если $x+yi=$ $=(s+ti)^n$.

15. Вычислить:

a) $\sqrt{2i}$; b) $\sqrt{-8i}$; c) $\sqrt{3-4i}$; d) $\sqrt{-15+8i}$;
e) $\sqrt{-3-4i}$; f) $\sqrt{-11+60i}$; g) $\sqrt{-8+6i}$;
h) $\sqrt{-8-6i}$; i) $\sqrt{8-6i}$; j) $\sqrt{8+6i}$; k) $\sqrt{2-3i}$;
l) $\sqrt{4+i}+\sqrt{4-i}$; m) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; n) $\sqrt[4]{-1}$;
o) $\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}$.

16. $\sqrt{a+bi}=\pm(\alpha+\beta i)$. Чему равен $\sqrt{-a-bi}$?

17. Решить уравнения:

a) $x^2-(2+i)x+(-1+7i)=0$;
b) $x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$;
c) $(2+i)x^2-(5-i)x+(2-2i)=0$.

*18. Решить уравнения и левые части их разложить на множители с вещественными коэффициентами:

a) $x^4+6x^3+9x^2+100=0$;
b) $x^4+2x^2-24x+72=0$.

19. Решить уравнения:

a) $x^4-3x^2+4=0$; b) $x^4-30x^2+289=0$.

20. Составить формулу для решения биквадратного уравнения $x^4+px^2+q=0$ с вещественными коэффициентами, удобную для случая, когда $\frac{p^2}{4}-q<0$.

§ 2. Комплексные числа в тригонометрической форме

21. Построить точки, изображающие комплексные числа: $1,\ -1,\ -\sqrt{2},\ i,\ -i,\ i\sqrt{2},\ -1+i,\ 2-3i$.

22. Представить в тригонометрической форме следующие числа:

a) 1; b) -1; c) i; d) $-i$; e) $1+i$;
f) $-1+i$; g) $-1-i$; h) $1-i$; i) $1+i\sqrt{3}$;
j) $-1+i\sqrt{3}$; k) $-1-i\sqrt{3}$; l) $1-i\sqrt{3}$; m) $2i$;
n) -3; o) $\sqrt{3}-i$; p) $2+\sqrt{3}+i$.

23. Пользуясь таблицами, представить в тригонометрической форме следующие числа:

a) $3+i$; b) $4-i$; c) $-2+i$; d) $-1-2i$.

24. Найти геометрическое место точек, изображающих комплексные числа:

a) модуль которых 1; b) аргумент которых $\frac{\pi}{6}$.

25. Найти геометрическое место точек, изображающих числа z, удовлетворяющие неравенствам:

a) $|z|<2$; b) $|z-i|\leqslant 1$; c) $|z-1-i|<1$.

26. Решить уравнения:

a) $|x|-x=1+2i$; b) $|x|+x=2+i$.

*27. Доказать тождество

$$|x+y|^2+|x-y|^2=2(|x|^2+|y|^2);$$

какой геометрический смысл имеет это тождество?

*28. Доказать, что всякое комплексное число z, отличное от -1, модуль которого 1, может быть представлено в форме $z=\frac{1+ti}{1-ti}$, где t — вещественное число.

29. При каких условиях модуль суммы двух комплексных чисел равен разности модулей слагаемых?

30. При каких условиях модуль суммы двух комплексных чисел равен сумме модулей слагаемых?

*31. z и z' — два комплексных числа, $u=\sqrt{zz'}$. Доказать, что

$$|z|+|z'|=\left|\frac{z+z'}{2}-u\right|+\left|\frac{z+z'}{2}+u\right|.$$

32. Показать, что если $|z|<\frac{1}{2}$, то

$$|(1+i)z^3+iz|<\frac{3}{4}.$$

33. Доказать, что

$$(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$
$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)\right].$$

34. Упростить $\dfrac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\psi-i\sin\psi}$.

35. Вычислить $\dfrac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$.

36. Вычислить:

a) $(1+i)^{25}$; b) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; c) $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$;

d) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

*37. Доказать, что

a) $(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$;

b) $(\sqrt{3}-i)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$;

n — целое число.

*38. Упростить $(1+\omega)^n$, где $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$.

39. Полагая $\omega_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, определить $\omega_1^n+\omega_2^n$, где n — целое число.

*40. Вычислить $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$.

*41. Доказать, что если $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$, то

$$z^m+\frac{1}{z^m}=2\cos m\theta.$$

42. Доказать, что $\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n=\frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}$.

43. Извлечь корни:

a) $\sqrt[3]{i}$; b) $\sqrt[3]{2-2i}$; c) $\sqrt[4]{-4}$; d) $\sqrt[6]{1}$; e) $\sqrt[6]{-27}$.

44. Пользуясь таблицами, извлечь корни:

a) $\sqrt[3]{2+i}$; b) $\sqrt[3]{3-i}$; c) $\sqrt[5]{2+3i}$.

45. Вычислить:

a) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; b) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$; c) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

46. Зная, что β является одним из значений $\sqrt[n]{\alpha}$, написать все значения $\sqrt[n]{\alpha}$.

47. Выразить через $\cos x$ и $\sin x$:

a) $\cos 5x$; b) $\cos 8x$; c) $\sin 6x$; d) $\sin 7x$.

48. Выразить $\operatorname{tg}6\varphi$ через $\operatorname{tg}\varphi$.

49. Составить формулы, выражающие $\cos nx$ и $\sin nx$ через $\cos x$ и $\sin x$.

50. Представить в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций углов, кратных x:

a) $\sin^3 x$; b) $\sin^4 x$; c) $\cos^5 x$; d) $\cos^6 x$.

***51.** Доказать, что:

a) $$2^{2m}\cos^{2m} x = 2\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + C_{2m}^m;$$

b) $$2^{2m}\cos^{2m+1} x = \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \cos(2m-2k+1)x;$$

c) $$2^{2m}\sin^{2m} x = 2\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + C_{2m}^m;$$

d) $$2^{2m}\sin^{2m+1} x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m+k} C_{2m+1}^k \sin(2m-2k+1)x.$$

***52.** Доказать, что $2\cos mx = (2\cos x)^m -$

$$-\frac{m}{1}(2\cos x)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1\cdot 2}(2\cos x)^{m-4} - \ldots +$$

$$+(-1)^p \frac{m(m-p-1)(m-p-2)\ldots(m-2p+1)}{p!}\times$$

$$\times(2\cos x)^{m-2p} + \ldots$$

***53.** Выразить $\dfrac{\sin mx}{\sin x}$ через $\cos x$.

***54.** Найти суммы:

a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$;

b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$

***55.** Доказать, что:

a) $$1 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right);$$

b) $$C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right);$$

c) $$C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right);$$

d) $$C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

***56.** Найти сумму

$$C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 - \frac{1}{27}C_n^7 + \ldots$$

57. Доказать, что $(x+a)^m+(x+a\omega)^m+(x+a\omega^2)^m = 3x^m+3C_m^3x^{m-3}a^3+\ldots+3C_m^nx^{m-n}a^n$, где $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, а n есть наибольшее целое число, кратное 3 и не превосходящее m.

58. Доказать, что

a) $1+C_n^3+C_n^6+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$;

b) $C_n^1+C_n^4+C_n^7+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$;

c) $C_n^2+C_n^5+C_n^8+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right)$.

59. Вычислить суммы:

a) $1+a\cos\varphi+a^2\cos 2\varphi+\ldots+a^k\cos k\varphi$;

b) $\sin\varphi+a\sin(\varphi+h)+a^2\sin(\varphi+2h)+\ldots+a^k\sin(\varphi+kh)$;

c) $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$.

60. Показать, что

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

61. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x+\ldots+\frac{1}{2^n}\cos nx\right).$$

62. Доказать, что если n — целое положительное, а θ — угол, удовлетворяющий условию $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2n}$, то

$$\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}+\ldots+\cos\frac{2n-1}{2}\theta=n\sin n\theta.$$

63. Показать, что

a) $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$;

b) $\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}=-\frac{1}{2}$;

c) $\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}=\frac{1}{2}$.

64. Найти суммы:

a) $\cos a - \cos(a+h) + \cos(a+2h) - \ldots$
$$\ldots + (-1)^{n-1}\cos[a+(n-1)h];$$

b) $\sin a - \sin(a+h) + \sin(a+2h) - \ldots$
$$\ldots + (-1)^{n-1}\sin[a+(n-1)h].$$

65. Доказать, что если x меньше единицы по абсолютной величине, то ряды

a) $\cos\alpha + x\cos(\alpha+\beta) + x^2\cos(\alpha+2\beta) + \ldots$
$$\ldots + x^n\cos(\alpha+n\beta) + \ldots,$$

b) $\sin\alpha + x\sin(\alpha+\beta) + x^2\sin(\alpha+2\beta) + \ldots$
$$\ldots + x^n\sin(\alpha+n\beta) + \ldots$$

сходятся и суммы соответственно равны
$$\frac{\cos\alpha - x\cos(\alpha-\beta)}{1-2x\cos\beta+x^2}, \quad \frac{\sin\alpha - x\sin(\alpha-\beta)}{1-2x\cos\beta+x^2}.$$

66. Найти суммы:

a) $\cos x + C_n^1\cos 2x + \ldots + C_n^n\cos(n+1)x;$

b) $\sin x + C_n^1\sin 2x + \ldots + C_n^n\sin(n+1)x.$

67. Найти суммы:

a) $\cos x - C_n^1\cos 2x + C_n^2\cos 3x - \ldots$
$$\ldots + (-1)^n C_n^n\cos(n+1)x;$$

b) $\sin x - C_n^1\sin 2x + C_n^2\sin 3x - \ldots$
$$\ldots + (-1)^n C_n^n\sin(n+1)x.$$

***68.** $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OB}$ — векторы, изображающие 1 и i соответственно. Из O опущен перпендикуляр OA_2 на A_1B; из A_2 опущен перпендикуляр A_2A_3 на OA_1; из A_3 — перпендикуляр A_3A_4 на A_1A_2 и т. д. по правилу: из A_n перпендикуляр A_nA_{n+1} на $A_{n-2}A_{n-1}$. Найти предел суммы
$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots$$

***69.** Найти сумму
$$\sin^2 x + \sin^2 3x + \ldots + \sin^2(2n-1)x.$$

70. Показать, что:

a) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \ldots + \cos^2 nx = \dfrac{n}{2} + \dfrac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x};$

b) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \ldots + \sin^2 nx = \dfrac{n}{2} - \dfrac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x}.$

*71. Найти суммы:

a) $\cos^3 x + \cos^3 2x + \ldots + \cos^3 nx$;
b) $\sin^3 x + \sin^3 2x + \ldots + \sin^3 nx$.

*72. Найти суммы:

a) $\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos nx$;
b) $\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots + n\sin nx$.

73. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$ при $\alpha = a + bi$.

74. Определение: $e^\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$. Доказать:

a) $e^{2\pi i} = 1$; b) $e^{\pi i} = -1$;
c) $e^{\alpha+\beta} = e^\alpha \cdot e^\beta$; d) $(e^\alpha)^k = e^{\alpha k}$ при целом k.

§ 3. Уравнения третьей и четвертой степени

75. Решить по формуле Кардано уравнения:

a) $x^3 - 6x + 9 = 0$; b) $x^3 + 12x + 63 = 0$;
c) $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$; d) $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$;
e) $x^3 - 6x + 4 = 0$; f) $x^3 + 6x + 2 = 0$;
g) $x^3 + 18x + 15 = 0$; h) $x^3 - 3x^2 - 3x + 11 = 0$;
i) $x^3 + 3x^2 - 6x + 4 = 0$; j) $x^3 + 9x - 26 = 0$;
k) $x^3 + 24x - 56 = 0$; l) $x^3 + 45x - 98 = 0$;
m) $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$; n) $x^3 - 6x^2 + 57x - 196 = 0$;
o) $x^3 + 3x - 2i = 0$; p) $x^3 - 6ix + 4(1 - i) = 0$;
q) $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0$;
r) $x^3 - 3abfgx + f^2ga^3 + fg^2b^3 = 0$;
s) $x^3 - 4x - 1 = 0$; t) $x^3 - 4x + 2 = 0$.

*76. Пользуясь формулой Кардано, доказать, что

$$(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 = -4p^3 - 27q^2,$$

если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 + px + q = 0$.

(Выражение $-4p^3 - 27q^2$ называется дискриминантом уравнения $x^3 + px + q = 0$.)

*77. Решить уравнение

$$(x^3 - 3qx + p^3 - 3pq)^2 - 4(px + q)^3 = 0.$$

***78.** Вывести формулу для решения уравнения

$$x^5-5ax^3+5a^2x-2b=0.$$

79. Решить уравнения:

a) $x^4-2x^3+2x^2+4x-8=0$;
b) $x^4+2x^3-2x^2+6x-15=0$;
c) $x^4-x^3-x^2+2x-2=0$;
d) $x^4-4x^3+3x^2+2x-1=0$;
e) $x^4-3x^3+x^2+4x-6=0$;
f) $x^4-6x^3+6x^2+27x-56=0$;
g) $x^4-2x^3+4x^2-2x+3=0$;
h) $x^4-x^3-3x^2+5x-10=0$;
i) $x^4+2x^3+8x^2+2x+7=0$;
j) $x^4+6x^3+6x^2-8=0$;
k) $x^4-6x^3+10x^2-2x-3=0$;
l) $x^4-2x^3+4x^2+2x-5=0$;
m) $x^4-x^3-3x^2+x+1=0$;
n) $x^4-x^3-4x^2+4x+1=0$;
o) $x^4-2x^3+x^2+2x-1=0$;
p) $x^4-4x^3-20x^2-8x+4=0$;
q) $x^4-2x^3+3x^2-2x-2=0$;
r) $x^4-x^3+2x-1=0$;
s) $4x^4-4x^3+3x^2-2x+1=0$;
t) $4x^4-4x^3-6x^2+2x+1=0$.

80. Способ Феррари для решения уравнения четвертой степени $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ состоит в том, что левая часть представляется в виде

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{\lambda}{2}\right)^2-$$
$$-\left[\left(\frac{a^2}{4}+\lambda-b\right)x^2+\left(\frac{a\lambda}{2}-c\right)x+\left(\frac{\lambda^2}{4}-d\right)\right]$$

и затем λ подбирается так, чтобы выражение в квадратной скобке было квадратом двучлена первой степени. Для этого необходимо и достаточно, чтобы было

$$\left(\frac{a\lambda}{2}-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}+\lambda-b\right)\left(\frac{\lambda^2}{4}-d\right)=0,$$

т. е. λ должно быть корнем некоторого вспомогательного кубического уравнения. Найдя λ, раскладываем левую часть на множители.

Выразить корни вспомогательного уравнения через корни уравнения четвертой степени.

§ 4. Корни из единицы

81. Написать корни из единицы степени:

a) 2; b) 3; c) 4; d) 6; e) 8; f) 12; g) 24.

82. Выписать первообразные корни степени:

a) 2; b) 3; c) 4; d) 6; e) 8; f) 12; g) 24.

83. Какому показателю принадлежит:

a) $z_k = \cos\frac{2k\pi}{180} + i\sin\frac{2k\pi}{180}$ при $k = 27,\ 99,\ 137$;

b) $z_k = \cos\frac{2k\pi}{144} + i\sin\frac{2k\pi}{144}$ при $k = 10,\ 35,\ 60$?

84. Выписать все корни 28-й степени из 1, принадлежащие показателю 7.

85. Для каждого корня a) 16-й; b) 20-й; c) 24-й степени из единицы указать показатель, которому он принадлежит.

86. Выписать «круговые полиномы» $X_n(x)$ для n, равного:

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5; f) 6; g) 7; h) 8; i) 9; j) 10; k) 11; l) 12; m) 15; n) 105.

***87.** Пусть ε — первообразный корень степени $2n$ из 1. Вычислить сумму $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{n-1}$.

***88.** Найти сумму всех корней n-й степени из 1.

***89.** Найти сумму k-х степеней всех корней n-й степени из 1.

90. В выражение $(x + a)^m$ подставить вместо a последовательно m корней m-й степени из 1 и полученные результаты сложить.

***91.** Вычислить $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \ldots + n\varepsilon^{n-1}$, где ε — корень n-й степени из 1.

***92.** Вычислить $1 + 4\varepsilon + 9\varepsilon^2 + \ldots + n^2\varepsilon^{n-1}$, где ε — корень n-й степени из 1.

93. Найти суммы:

a) $\cos\frac{2\pi}{n} + 2\cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + (n-1)\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$;

b) $\sin\frac{2\pi}{n} + 2\sin\frac{4\pi}{n} + \ldots + (n-1)\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}$.

***94.** Определить сумму первообразных корней: a) 15-й; b) 24-й; c) 30-й степени из единицы.

95. Найти корни 5-й степени из 1, решив уравнение $x^5 - 1 = 0$ алгебраически.

96. Используя результат задачи 95, написать $\sin 18^\circ$ и $\cos 18^\circ$.

***97.** Составить простейшее алгебраическое уравнение, корнем которого является длина стороны правильного 14-угольника, вписанного в круг радиуса 1.

***98.** Разложить x^n-1 на множители первой и второй степени с вещественными коэффициентами.

***99.** Воспользоваться результатом задачи 98 для доказательства формул:

a) $\sin\frac{\pi}{2m}\cdot\sin\frac{2\pi}{2m}\ldots\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}=\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$;

b) $\sin\frac{\pi}{2m+1}\cdot\sin\frac{2\pi}{2m+1}\ldots\sin\frac{m\pi}{2m+1}=\frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$.

***100.** Доказать, что $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(a+b\varepsilon_k)=a^n+(-1)^{n-1}b^n$, где

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

***101.** Доказать, что $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(\varepsilon_k^2-2\varepsilon_k\cos\theta+1)=2(1-\cos n\theta)$, если

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

102. Доказать, что

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(t+\varepsilon_k)^n-1}{t}=\prod_{k=1}^{n-1}[t^n-(\varepsilon_k-1)^n],$$

где $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$.

***103.** Найти все комплексные числа, удовлетворяющие условию $\bar{x}=x^{n-1}$, где $\bar{x}$ — сопряженное x.

104. Показать, что корни уравнения $\lambda(z-a)^n+\mu(z-b)^n=0$, где λ, μ, a, b — комплексные, лежат на одной окружности, которая в частном случае может вырождиться в прямую (n — натуральное число).

***105.** Решить уравнения:

a) $(x+1)^m-(x-1)^m=0$; b) $(x+i)^m-(x-i)^m=0$;

c) $x^n-nax^{n-1}-C_n^2a^2x^{n-2}-\ldots-a^n=0$.

106. Доказать, что если A — комплексное число, модуль которого 1, то уравнение

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m = A$$

имеет все корни вещественные и различные.

***107.** Решить уравнение

$$\cos\varphi + C_n^1\cos(\varphi+\alpha)x + C_n^2\cos(\varphi+2\alpha)x^2 + \ldots$$
$$\ldots + C_n^n\cos(\varphi+n\alpha)x^n = 0.$$

Доказать следующие теоремы:

108. Произведение корня степени a из 1 на корень степени b из 1 есть корень степени ab из 1.

109. Если a и b взаимно просты, то x^a-1 и x^b-1 имеют единственный общий корень.

110. Если a и b взаимно просты, то все корни степени ab из 1 получаются умножением корней степени a из 1 на корни степени b из 1.

111. Если a и b взаимно просты, то произведение первообразного корня степени a из 1 на первообразный корень степени b из 1 есть первообразный корень степени ab из 1 и обратно.

112. Обозначив через $\varphi(n)$ число первообразных корней n-й степени из 1, доказать, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, если a и b взаимно просты.

***113.** Доказать, что если $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_k$ — различные простые числа, то

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

114. Показать, что число первообразных корней n-й степени из единицы четное, если $n > 2$.

115. Написать полином $X_p(x)$, где p — простое число.

***116.** Написать полином $X_{p^m}(x)$, где p — простое число.

***117.** Доказать, что при n нечетном, большем 1, $X_{2n}(x) = X_n(-x)$.

118. Доказать, что если d составлено из простых делителей, входящих в n, то каждый первообразный корень из 1 степени nd есть корень степени d из первообразного корня n-й степени из 1 и обратно.

***119.** Доказать, что если $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_k$ — различные простые числа, то $X_n(x) = X_{n'}(x^{n''})$, где

$$n' = p_1p_2\ldots p_k; \quad n'' = \frac{n}{n'}.$$

*__120.__ Обозначив через $\mu(n)$ сумму первообразных корней n-й степени из 1, доказать, что $\mu(n)=0$, если n делится на квадрат хотя бы одного простого числа; $\mu(n)=1$, если n есть произведение четного числа различных простых чисел; $\mu(n)=-1$, если n есть произведение нечетного числа различных простых чисел.

__121.__ Доказать, что $\sum \mu(d)=0$, если d пробегает все делители числа n при $n \neq 1$.

*__122.__ Доказать, что $X_n(x)=\Pi(x^d-1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$, где d пробегает все делители n.

*__123.__ Найти $X_n(1)$.

*__124.__ Найти $X_n(-1)$.

*__125.__ Определить сумму произведений первообразных корней n-й степени из 1, взятых по два.

*__126.__ $S=1+\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^9+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}$, где ε — первообразный корень степени n из 1. Найти $|S|$.

ГЛАВА 2

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

§ 1. Определители 2-го и 3-го порядков

Вычислить определители:

127. a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta i & \gamma+\delta i \\ \gamma-\delta i & \alpha-\beta i \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix}$; i) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$;

j) $\begin{vmatrix} 1 & \lg_b a \\ \lg_a b & 1 \end{vmatrix}$; k) $\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}$; l) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

m) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$; n) $\begin{vmatrix} \omega & \omega \\ -1 & \omega \end{vmatrix}$,

где $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$;

o) $\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix}$,

где $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

128. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3} & 1 & \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3} & 1 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$, где $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$;

h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \omega \\ 1 & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$, где $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$.

§ 2. Перестановки

129. Выписать транспозиции, посредством которых от перестановки 1, 2, 4, 3, 5 можно перейти к перестановке 2, 5, 3, 4, 1.

130. Считая, что 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 — исходное расположение, определить число инверсий в перестановках:

a) 1, 3, 4, 7, 8, 2, 6, 9, 5; b) 2, 1, 7, 9, 8, 6, 3, 5, 4; c) 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

131. Считая, что 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 — исходное расположение, подобрать i и k так, чтобы:

a) перестановка 1, 2, 7, 4, i, 5, 6, k, 9 была четной;

b) перестановка 1, i, 2, 5, k, 4, 8, 9, 7 была нечетной.

***132.** Определить число инверсий в перестановке $n, n-1, \ldots, 2, 1$, если исходной является перестановка $1, 2, \ldots, n$.

***133.** В перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ имеется I инверсий. Сколько инверсий в перестановке $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1$?

134. Определить число инверсий в перестановках:

a) $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, 2, 4, 6, \ldots, 2n$;
b) $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, 1, 3, 5, \ldots, 2n-1$,

если исходная перестановка $1, 2, \ldots, 2n$.

135. Определить число инверсий в перестановках:

a) $3, 6, 9, \ldots, 3n, 1, 4, 7, \ldots, 3n-2, 2, 5, \ldots, 3n-1$;
b) $1, 4, 7, \ldots, 3n-2, 2, 5, \ldots, 3n-1, 3, 6, \ldots, 3n$,

если исходная перестановка $1, 2, 3, \ldots, 3n$.

136. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — перестановка с числом инверсий I, то после приведения ее в исходное расположение номера $1, 2, \ldots, n$ образуют перестановку с тем же числом инверсий I.

137. Определить четность перестановки букв ф, р, м, и, а, г, о, л, если за исходное принять их расположение в словах:

a) логарифм; b) алгорифм.

Сравнить и объяснить результаты.

§ 3. Определение детерминанта

138. С каким знаком в определитель 6-го порядка входят произведения:

a) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$; b) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$?

139. Входят ли в определитель 5-го порядка произведения:

a) $a_{13}a_{24}a_{23}a_{41}a_{55}$; b) $a_{21}a_{13}a_{34}a_{55}a_{42}$?

140. Подобрать i и k так, чтобы произведение $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ входило в определитель 5-го порядка со знаком плюс.

141. Выписать все слагаемые, входящие в состав определителя 4-го порядка со знаком минус и содержащие множителем a_{23}.

142. Выписать все слагаемые, входящие в определитель 5-го порядка и имеющие вид $a_{14}a_{23}a_{3\alpha_3}a_{4\alpha_4}a_{5\alpha_5}$. Что получится, если из их суммы вынести $a_{14}a_{23}$ за скобки?

143. С каким знаком входит в определитель n-го порядка произведение элементов главной диагонали?

144. С каким знаком входит в определитель n-го порядка произведение элементов второй диагонали?

***145.** Руководствуясь только определением детерминанта, доказать, что детерминант

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

равен 0.

146. Руководствуясь только определением детерминанта, вычислить коэффициенты при x^4 и x^3 в выражении

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

147. Вычислить определители:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} 1 & a & a & \ldots & a \\ 0 & 2 & a & \ldots & a \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & a \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{vmatrix}.$$

Замечание. Во всех задачах, где из условия не виден порядок определителя и не сделано специальной оговорки, условимся считать его равным n.

148. $F(x) = x(x-1)(x-2) \ldots (x-n+1)$.

Вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} F(0) & F(1) & F(2) & \ldots & F(n) \\ F(1) & F(2) & F(3) & \ldots & F(n+1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F(n) & F(n+1) & F(n+2) & \ldots & F(2n) \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} F(a) & F'(a) & F''(a) & \ldots & F^{(n)}(a) \\ F'(a) & F''(a) & F'''(a) & \ldots & F^{(n+1)}(a) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F^{(n)}(a) & F^{(n+1)}(a) & F^{(n+2)}(a) & \ldots & F^{(2n)}(a) \end{vmatrix}$.

§ 4. Основные свойства определителей

***149.** Доказать, что определитель n-го порядка, у которого каждый элемент a_{ik} является комплексным сопряженным элементу a_{ki}, равен вещественному числу.

***150.** Доказать, что определитель нечетного порядка равен 0, если все элементы его удовлетворяют условию

$$a_{ik}+a_{ki}=0$$

(кососимметрический определитель).

151. Определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ равен Δ.

Чему равен определитель

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{vmatrix}?$$

152. Как изменится определитель, если все столбцы его написать в обратном порядке?

***153.** Чему равна сумма

$$\sum \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \ldots & a_{1\alpha_n} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} & \ldots & a_{2\alpha_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n\alpha_1} & a_{n\alpha_2} & \ldots & a_{n\alpha_n} \end{vmatrix},$$

если суммирование распространяется на все перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$?

***154.** Решить уравнения:

a) $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \ldots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ все различны;

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0;$$

c) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \ldots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix} = 0.$$

***155.** Числа 204, 527 и 255 делятся на 17. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

делится на 17.

***156.** Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix}.$$

157. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

158. Упростить определитель $\begin{vmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{vmatrix}$, разложив его на слагаемые.

159. Найти сумму алгебраических дополнений всех элементов определителей:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

160. Разложить по элементам третьей строки и вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

161. Разложить по элементам последнего столбца и вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}.$$

162. Разложить по элементам первого столбца и вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

§ 5. Вычисление определителей

Вычислить определители:

***163.** $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$. **164.** $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$.

165. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. **166.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$. **167.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

168. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$. **169.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

170. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$. **171.** $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

172. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$. **173.** $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

174. $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}$. **175.** $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$.

176. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$.

177. $\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix}$.

178. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$.

***179.** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

***180.** $$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

***181.** $$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x \end{vmatrix}.$$

***182.** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}.$$

***183.** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

***184.** $$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

***185.** $$\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \ldots & a+(n-1)h \\ -a & a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -a & a & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a \end{vmatrix}.$$

***186.** $$\begin{vmatrix} a & -(a+h) & \ldots & (-1)^{n-1}[a+(n-1)h] \\ a & a & \ldots & 0 \\ 0 & a & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a \end{vmatrix}.$$

***187.** $$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \ldots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} & C_n^n \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \ldots & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-1} & 0 \\ 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & C_{n-2}^3 & \ldots & C_{n-2}^{n-2} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & C_1^1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

***188.** $$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

***189.** $$\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \ldots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

***190.** Вычислить разность $f(x+1)-f(x)$, где

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \ldots & 0 & x^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \ldots & C_n^{n-1} & x^n \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \ldots & C_{n+1}^{n-1} & x^{n+1} \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители:

***191.**

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}.$$

***192.**

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}.$$

193.

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ -a & x & a & \dots & a & a \\ -a & -a & x & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a & -a & -a & \dots & -a & x \end{vmatrix}.$$

***194.**

$$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

***195.**

$$\begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

***196.**

$$\begin{vmatrix} h & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ hx & h & -1 & 0 & \dots & 0 \\ hx^2 & hx & h & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ hx^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & hx^{n-3} & \dots & h \end{vmatrix}.$$

***197.**

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}.$$

***198.** $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & a_1+a_2 & \dots & a_1+a_n \\ 1 & a_2+a_1 & 0 & \dots & a_2+a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

***199.** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

***200.** $$\begin{vmatrix} 2 & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \dots & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & 2 & 1-\frac{1}{n} & \dots & 1-\frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

(порядок $n+1$).

***201.** $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ x_{11} & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ x_{21} & x_{22} & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & x_{n4} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

***202.** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \dots & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

***203.** $$\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & -b_0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & -b_1 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & -b_{n-2} & b_n \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -b_{n-1} \end{vmatrix}.$$

***204.**

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2a+b & (a+b)^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a+3b & (a+2b)^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2a+(2n-1)b & (a+nb)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2a+(2n+1)b \end{vmatrix}$$

***205.**

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

***206.**

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

207. $$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \dots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \dots & a_2-b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \dots & a_n-b_n \end{vmatrix}.$$

***208.** $$\begin{vmatrix} 1+a_1+x_1 & a_1+x_2 & \dots & a_1+x_n \\ a_2+x_1 & 1+a_2+x_2 & \dots & a_2+x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+x_1 & a_n+x_2 & \dots & 1+a_n+x_n \end{vmatrix}.$$

209. $$\begin{vmatrix} a^n-\alpha & a^{n+1}-\alpha & \dots & a^{n+p-1}-\alpha \\ a^{n+p}-\alpha & a^{n+p+1}-\alpha & \dots & a^{n+2p-1}-\alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n+p(p-1)}-\alpha & a^{n+p(p-1)+1}-\alpha & \dots & a^{n+p^2-1}-\alpha \end{vmatrix}.$$

210. Доказать, что определитель

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

равен нулю, если $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ — многочлены от x, каждый степени не выше $n-2$, а числа a_1, a_2, ..., a_n — произвольные.

Вычислить определители:

***211.**
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

***212.**
$$\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}.$$

***213.**
$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n \end{vmatrix}.$$

***214.**
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

***215.**
$$\begin{vmatrix} n!\,a_0 & (n-1)!\,a_1 & (n-2)!\,a_2 & \dots & a_n \\ -n & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

216.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Написать определитель n-го порядка такой структуры и вычислить его.

Вычислить определители:

217.
$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

218.
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

***219.** $$\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}.$$

220. $$\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos\theta \end{vmatrix}.$$

***221.** $$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

***222.** $$\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \dots & x_1y_n \\ x_1y_2 & x_2y_2 & x_2y_3 & \dots & x_2y_n \\ x_1y_3 & x_2y_3 & x_3y_3 & \dots & x_3y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1y_n & x_2y_n & x_3y_n & \dots & x_ny_n \end{vmatrix}.$$

***223.** $$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

224. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a_1+1 \\ 1 & 1 & \dots & a_2+1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n-1}+1 & \dots & 1 & 1 \\ a_n+1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

***225.** $$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

***226.** $$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x_n \end{vmatrix}.$$

***227.** $$\begin{vmatrix} x_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots & a_nb_1 \\ a_1b_2 & x_2 & a_3b_2 & \dots & a_nb_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & x_3 & \dots & a_nb_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

***228.** $$\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2-m & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-m & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n-m \end{vmatrix}.$$

229. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n-\alpha_n x \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1}-\alpha_{n-1}x & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1-\alpha_1 x & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислить определители:

***230.** $$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \quad \text{(порядка } 2n\text{)}.$$

***231.** $$\begin{vmatrix} 1 & -b & -b & -b & \dots & -b \\ 1 & na & -2b & -3b & \dots & -(n-1)b \\ 1 & (n-1)a & a & -3b & \dots & -(n-1)b \\ 1 & (n-2)a & a & a & \dots & -(n-1)b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2a & a & a & \dots & a \end{vmatrix}.$$

***232.** $$\begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix}.$$

***233.** $$\begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_1a_2 & \dots & a_1a_n \\ a_1a_2 & (x-a_2)^2 & \dots & a_2a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1a_n & a_2a_n & \dots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix}.$$

***234.** $$\begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & b_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

*235. $\begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & b_2 & 0 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & 0 & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$.

*236.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & 2 & \dots & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

*237.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ x & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ x & x & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ x & x & x & 1 & \dots & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

*238. $\begin{vmatrix} a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \dots & a_{n-1}x & a_n \\ a_0x & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0x^2 & a_1x & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0x^{n-1} & a_1x^{n-2} & a_2x^{n-3} & \dots & b_{n-1} & 0 \\ a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \dots & a_{n-1}x & b_n \end{vmatrix}$.

*239. Доказать, что определитель

$$\begin{vmatrix} a_{00}x^n & a_{01}x^{n-1} & a_{02}x^{n-2} & \dots & a_{0n} \\ a_{10}x & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{20}x^2 & a_{21}x & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0}x^n & a_{n1}x^{n-1} & a_{n2}x^{n-2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = x^n \cdot \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители:

*240.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

*241.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ C_m^1 & C_{m+1}^1 & \dots & C_{m+n}^1 \\ C_{m+1}^2 & C_{m+2}^2 & \dots & C_{m+n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m+n-1}^n & C_{m+n}^n & \dots & C_{m+2n-1}^n \end{vmatrix}.$$

***242.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

***243.**

$$\begin{vmatrix} C_m^k & C_m^{k+1} & \dots & C_m^{k+n} \\ C_{m+1}^k & C_{m+1}^{k+1} & \dots & C_{m+1}^{k+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m+n}^k & C_{m+n}^{k+1} & \dots & C_{m+n}^{k+n} \end{vmatrix}.$$

***244.**

$$\begin{vmatrix} C_{k+m}^m & C_{k+m+1}^m & \dots & C_{k+2m}^m \\ C_{k+m+1}^m & C_{k+m+2}^m & \dots & C_{k+2m+1}^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{k+2m}^m & C_{k+2m+1}^m & \dots & C_{k+3m}^m \end{vmatrix}.$$

***245.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \dots & 0 & x^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

***246.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1! & 0 & 0 & \dots & x \\ 1 & 2 & 2! & 0 & \dots & x^2 \\ 1 & 3 & 3\cdot 2 & 3! & \dots & x^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & n(n-1) & n(n-1)(n-2) & \dots & x^n \end{vmatrix}.$$

***247.**

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha+\delta & \alpha+2\delta & \alpha+3\delta & \dots & \alpha+(n-1)\delta \\ \alpha & 2\alpha+\delta & 3\alpha+3\delta & 4\alpha+6\delta & \dots & C_n^1\alpha+C_n^2\delta \\ \alpha & 3\alpha+\delta & 6\alpha+4\delta & 10\alpha+10\delta & \dots & C_{n+1}^2\alpha+C_{n+1}^3\delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha & C_n^{n-1}\alpha+\delta & C_{n+1}^{n-1}\alpha+C_{n+1}^n\delta & C_{n+2}^{n-1}\alpha+C_{n+2}^n\delta & \dots & C_{2n-2}^{n-1}\alpha+C_{2n-2}^n\delta \end{vmatrix}.$$

***248.**

$$\begin{vmatrix} x & y & y & \dots & y & y \\ z & x & y & \dots & y & y \\ z & z & x & \dots & y & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & x & y \\ z & z & z & \dots & z & x \end{vmatrix}.$$

***249.**

$$\begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a & 0 \\ a & a & a & \dots & 0 & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & 0 & b & \dots & b & b \\ 0 & b & b & \dots & b & b \end{vmatrix}.$$

250.
$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ y & a_2 & x & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y & y & y & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

251.
$$\begin{vmatrix} c_1 & a & a & \dots & a & 1 \\ b & c_2 & a & \dots & a & 1 \\ b & b & c_3 & \dots & a & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b & b & b & \dots & c_n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

***252.**
$$\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \dots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b & \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{vmatrix}.$$

***253.**
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix}.$$

***254.**
$$\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+(n-1)h \\ a+h & a+2h & a+3h & \dots & a \\ a+2h & a+3h & a+4h & \dots & a+h \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a+(n-1)h & a & a+h & \dots & a+(n-2)h \end{vmatrix}.$$

255.
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x^2 & x^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

***256.**
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

257.
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & a & d & c & f & e & h & g \\ c & d & a & b & g & h & e & f \\ d & c & b & a & h & g & f & e \\ e & f & g & h & a & b & c & d \\ f & e & h & g & b & a & d & c \\ g & h & e & f & c & d & a & b \\ h & g & f & e & d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

***258.**
$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

*259. $$\begin{vmatrix} \cos^{n-1}\varphi_1 & \cos^{n-2}\varphi_1 & \ldots & \cos\varphi_1 & 1 \\ \cos^{n-1}\varphi_2 & \cos^{n-2}\varphi_2 & \ldots & \cos\varphi_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos^{n-1}\varphi_n & \cos^{n-2}\varphi_n & \ldots & \cos\varphi_n & 1 \end{vmatrix}.$$

260. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \ldots & \sin\varphi_n \\ \sin^2\varphi_1 & \sin^2\varphi_2 & \ldots & \sin^2\varphi_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sin^{n-1}\varphi_1 & \sin^{n-1}\varphi_2 & \ldots & \sin^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}.$$

261. $$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \ldots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \ldots & (a-n)^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & a-1 & \ldots & a-n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

262. $$\begin{vmatrix} (a_1+x)^n & (a_1+x)^{n-1} & \ldots & a_1+x & 1 \\ (a_2+x)^n & (a_2+x)^{n-1} & \ldots & a_2+x & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_{n+1}+x)^n & (a_{n+1}+x)^{n-1} & \ldots & a_{n+1}+x & 1 \end{vmatrix}.$$

263. $$\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \ldots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \ldots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2n-1 & 2n-2 & \ldots & n & 2n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

*264. $$\begin{vmatrix} w_1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ w_2 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_n & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

*265.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & x_3+1 & \ldots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & x_3^2+x_3 & \ldots & x_n^2+x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & x_3^{n-1}+x_3^{n-2} & \ldots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

266.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1+\sin\varphi_1 & 1+\sin\varphi_2 & \dots & 1+\sin\varphi_n \\ \sin\varphi_1+\sin^2\varphi_1 & \sin\varphi_2+\sin^2\varphi_2 & \dots & \sin\varphi_n+\sin^2\varphi_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin^{n-2}\varphi_1+\sin^{n-1}\varphi_1 & \sin^{n-2}\varphi_2+\sin^{n-1}\varphi_2 & \dots & \sin^{n-2}\varphi_n+\sin^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}.$$

267. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_{n-1}(x_2) & \dots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix},$$

где $\varphi_k(x) = x^k + a_{1k}x^{k-1} + \dots + a_{kk}$.

268. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ F_1(\cos\varphi_1) & F_1(\cos\varphi_2) & \dots & F_1(\cos\varphi_n) \\ F_2(\cos\varphi_1) & F_2(\cos\varphi_2) & \dots & F_2(\cos\varphi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n-1}(\cos\varphi_1) & F_{n-1}(\cos\varphi_2) & \dots & F_{n-1}(\cos\varphi_n) \end{vmatrix},$$

где $F_k(x) = a_{0k}x^k + a_{1k}x^{k-1} + \dots + a_{kk}$.

*269. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \dots & \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{2} & \binom{x_2}{2} & \dots & \binom{x_n}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & \dots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix},$$

где $\binom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{1\cdot 2\dots k}$.

*270. Доказать, что значение определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

при целых $a_1, a_2, \dots, a_n$ делится на $1^{n-1}\,2^{n-2}\,\dots\,(n-1)$.

Вычислить определители:

***271.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{vmatrix}.$$

***272.**

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-1} & \frac{x_2}{x_2-1} & \dots & \frac{x_n}{x_n-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

***273.** $$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

274.

$$\begin{vmatrix} \sin^{n-1}\alpha_1 & \sin^{n-2}\alpha_1\cos\alpha_1 & \dots & \sin\alpha_1\cos^{n-2}\alpha_1 & \cos^{n-1}\alpha_1 \\ \sin^{n-1}\alpha_2 & \sin^{n-2}\alpha_2\cos\alpha_2 & \dots & \sin\alpha_2\cos^{n-2}\alpha_2 & \cos^{n-1}\alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sin^{n-1}\alpha_n & \sin^{n-2}\alpha_n\cos\alpha_n & \dots & \sin\alpha_n\cos^{n-2}\alpha_n & \cos^{n-1}\alpha_n \end{vmatrix}.$$

***275.**

$$\begin{vmatrix} a_1^{2n}+1 & a_1^{2n-1}+a_1 & a_1^{2n-2}+a_1^2 & \dots & a_1^{n+1}+a_1^{n-1} & a_1^n \\ a_2^{2n}+1 & a_2^{2n-1}+a_2 & a_2^{2n-2}+a_2^2 & \dots & a_2^{n+1}+a_2^{n-1} & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+1}^{2n}+1 & a_{n+1}^{2n-1}+a_{n+1} & a_{n+1}^{2n-2}+a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^{n+1}+a_{n+1}^{n-1} & a_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

***276.** $$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_0 & \cos 2\varphi_0 & \dots & \cos(n-1)\varphi_0 \\ 1 & \cos\varphi_1 & \cos 2\varphi_1 & \dots & \cos(n-1)\varphi_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cos\varphi_{n-1} & \cos 2\varphi_{n-1} & \dots & \cos(n-1)\varphi_{n-1} \end{vmatrix}.$$

***277.** $$\begin{vmatrix} \sin(n+1)\alpha_0 & \sin n\alpha_0 & \dots & \sin\alpha_0 \\ \sin(n+1)\alpha_1 & \sin n\alpha_1 & \dots & \sin\alpha_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sin(n+1)\alpha_n & \sin n\alpha_n & \dots & \sin\alpha_n \end{vmatrix}.$$

***278.** $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1(x-1) & x_2(x_2-1) & \dots & x_n(x_n-1) \\ x_1^2(x_1-1) & x_2^2(x_2-1) & \dots & x_n^2(x_n-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1}(x_1-1) & x_2^{n-1}(x_2-1) & \dots & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{vmatrix}.$$

***279.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & \dots & x_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$

***280.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$

281.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{s-1} & x_2^{s-1} & \dots & x_n^{s-1} \\ x_1^{s+1} & x_2^{s+1} & \dots & x_n^{s+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

***282.**

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

283.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 4x^3 & 3x^2 & 2x & 1 \end{vmatrix}.$$

284.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & 25x^4 \\ 1 & y & y^2 & y^3 & y^4 \\ 1 & 2y & 3y^2 & 4y^3 & 5y^4 \end{vmatrix}.$$

***285.** $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & 2x & 3x^2 & \dots & (n+1)\,x^n \\ 1 & 2^2x & 3^2x^2 & \dots & (n+1)^2x^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2^{n-1}x & 3^{n-1}x^2 & \dots & (n+1)^{n-1}\,x^n \\ 1 & y & y^2 & \dots & y^n \end{vmatrix}.$

***286.** $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & 2x & 3x^2 & \dots & nx^{n-1} \\ 1 & 2^2x & 3^2x^2 & \dots & n^2x^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2^{k-1}x & 3^{k-1}x^2 & \dots & n^{k-1}x^{n-1} \\ 1 & y_1 & y_1^2 & \dots & y_1^{n-1} \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \dots & y_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & y_{n-k} & y_{n-k}^2 & \dots & y_{n-k}^{n-1} \end{vmatrix}.$

***287.** $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 0 & 1 & C_2^1 x & \dots & C_{n-1}^1 x^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & C_{n-1}^2 x^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{k-1} x^{n-k} \\ 1 & y & y^2 & \dots & y^{n-1} \\ 0 & 1 & C_2^1 y & \dots & C_{n-1}^1 y^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{n-k-1} y^k \end{vmatrix}.$$

288.

a) Написать разложение определителя четвертого порядка по минорам первых двух строк.

b) Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

пользуясь разложением по минорам второго порядка.

c) Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

пользуясь разложением по минорам второго порядка.

d) Вычислить определитель задачи 145.

Вычислить определители:

e) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 14 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 15 & 24 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 24 & 38 & 1 & 25 & 81 \end{vmatrix};$$

f) $$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ b_2 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \end{vmatrix};$$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & 1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & x_1 & x_2 & x_3 & c_2 \\ a_3 & b_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & c_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 & x_3^2 \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & a \\ x_1 & \alpha & \beta & \ldots & \beta & y_1 \\ x_2 & \beta & \alpha & \ldots & \beta & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & \beta & \beta & \ldots & \alpha & y_n \\ a & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{vmatrix}$.

i) Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определитель задачи 230.

j) Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определитель задачи 171.

k) Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}.$$

l) Пусть A, B, C, D — определители третьего порядка, составленные из таблицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

вычеркиванием соответственно первого, второго, третьего и четвертого столбцов. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = AD - BC.$$

*m) Вычислить определитель пятнадцатого порядка

$$\begin{vmatrix} \Delta & \Delta_1 & \Delta_1 \\ \Delta_1 & \Delta & \Delta_1 \\ \Delta_1 & \Delta_1 & \Delta \end{vmatrix},$$

составленный указанным образом из клеток

$$\Delta=\begin{pmatrix} a & x & x & -x & -x \\ x & 2a & a & 0 & 0 \\ x & a & 2a & 0 & 0 \\ -x & 0 & 0 & 2a & a \\ -x & 0 & 0 & a & 2a \end{pmatrix}, \quad \Delta_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

§ 6. Умножение определителей

289. Пользуясь правилом умножения матриц, представить в виде определителя произведения определителей:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.

290. Вычислить определитель Δ посредством умножения его на определитель δ:

a) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & -13 \\ 2 & 3 & 5 & 15 \end{vmatrix}$,

$\delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

b) $\Delta=\begin{vmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, $\delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

c) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$

291. Вычислить квадрат определителя:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & -7 & -1 & 9 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}.$

292. Определитель

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0,\,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,\,0} & a_{n-1,\,1} & a_{n-1,\,2} & \dots & a_{n-1,\,n-1} \end{vmatrix} = D;$$

Чему равен

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_0(x_2) & \dots & \varphi_0(x_n) \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_{n-1}(x_2) & \dots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix},$$

где $\varphi_i(x) = a_{0i} + a_{1i}x + \ldots + a_{n-1,\,i}x^{n-1}$?

Применить полученный результат к решению задач 265, 267, 268.

Вычислить определители:

***293.**

a) $\begin{vmatrix} (b_0+a_0)^n & (b_1+a_0)^n & \dots & (b_n+a_0)^n \\ (b_0+a_1)^n & (b_1+a_1)^n & \dots & (b_n+a_1)^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (b_0+a_n)^n & (b_1+a_n)^n & \dots & (b_n+a_n)^n \end{vmatrix}$;

b) $$\begin{vmatrix} \frac{1-\alpha_1^n\beta_1^n}{1-\alpha_1\beta_1} & \frac{1-\alpha_1^n\beta_2^n}{1-\alpha_1\beta_2} & \dots & \frac{1-\alpha_1^n\beta_n^n}{1-\alpha_1\beta_n} \\ \frac{1-\alpha_2^n\beta_1^n}{1-\alpha_2\beta_1} & \frac{1-\alpha_2^n\beta_2^n}{1-\alpha_2\beta_2} & \dots & \frac{1-\alpha_2^n\beta_n^n}{1-\alpha_2\beta_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1-\alpha_n^n\beta_1^n}{1-\alpha_n\beta_1} & \frac{1-\alpha_n^n\beta_2^n}{1-\alpha_n\beta_2} & \dots & \frac{1-\alpha_n^n\beta_n^n}{1-\alpha_n\beta_n} \end{vmatrix}.$$

***294.** $$\begin{vmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \sin 2\alpha_2 & \dots & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1) & \sin(\alpha_n+\alpha_2) & \dots & \sin 2\alpha_n \end{vmatrix}.$$

***295.** $$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} & x^{n-1} \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix},$$

где $s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$.

***296.**

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & l & m & n & p \\ b & -a & -d & -c & m & -l & p & -n \\ c & d & -a & -b & n & -p & -l & m \\ d & -c & b & -a & p & n & -m & -l \\ l & -m & -n & -p & -a & b & c & d \\ m & l & p & -n & -b & -a & d & -c \\ n & -p & l & m & -c & -d & -a & b \\ p & n & -m & l & -d & c & -b & -a \end{vmatrix}.$$

***297.** $$\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & \cos\varphi & \sin\varphi \\ \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 2\cos 2\varphi & 2\sin 2\varphi \\ \cos 3\varphi & \sin 3\varphi & 3\cos 3\varphi & 3\sin 3\varphi \\ \cos 4\varphi & \sin 4\varphi & 4\cos 4\varphi & 4\sin 4\varphi \end{vmatrix}.$$

***298.**

$$\begin{vmatrix} \cos n\varphi & n\cos n\varphi & \sin n\varphi & n\sin n\varphi \\ \cos(n+1)\varphi & (n+1)\cos(n+1)\varphi & \sin(n+1)\varphi & (n+1)\sin(n+1)\varphi \\ \cos(n+2)\varphi & (n+2)\cos(n+2)\varphi & \sin(n+2)\varphi & (n+2)\sin(n+2)\varphi \\ \cos(n+3)\varphi & (n+3)\cos(n+3)\varphi & \sin(n+3)\varphi & (n+3)\sin(n+3)\varphi \end{vmatrix}.$$

***299.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix},$$

где $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

***300.**

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{vmatrix}.$$

(циклический определитель)

301. Применить результат задачи 300 к определителю

$$\begin{vmatrix} x & u & z & y \\ y & x & u & z \\ z & y & x & u \\ u & z & y & x \end{vmatrix}.$$

302. Применить результат задачи 300 к задачам 192, 205, 255.

Вычислить определители:

303. $$\begin{vmatrix} 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \dots & C_{n-1}^{n-2} & 1 \\ 1 & 1 & C_{n-1}^1 & \dots & C_{n-1}^{n-3} & C_{n-1}^{n-2} \\ C_{n-1}^{n-2} & 1 & 1 & \dots & C_{n-1}^{n-4} & C_{n-1}^{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

304. $$\begin{vmatrix} 1 & 2a & 3a^2 & \dots & na^{n-1} \\ na^{n-1} & 1 & 2a & \dots & (n-1)a^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2a & 3a^2 & 4a^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

305. $$\begin{vmatrix} s-a_1 & s-a_2 & \dots & s-a_n \\ s-a_n & s-a_1 & \dots & s-a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s-a_2 & s-a_3 & \dots & s-a_1 \end{vmatrix},$$

где $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

306. $$\begin{vmatrix} t^{n-1} & C_n^1 t^{n-2} & C_n^2 t^{n-3} & \dots & C_n^{n-2} t & C_n^{n-1} \\ C_n^{n-1} & t^{n-1} & C_n^1 t^{n-2} & \dots & C_n^{n-3} t^2 & C_n^{n-2} t \\ C_n^{n-2} t & C_n^{n-1} & t^{n-1} & \dots & C_n^{n-4} t^3 & C_n^{n-3} t^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_n^1 t^{n-2} & C_n^2 t^{n-3} & C_n^3 t^{n-4} & \dots & C_n^{n-1} & t^{n-1} \end{vmatrix}.$$

307.
$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{p} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{n-p} \end{array} \\
\begin{vmatrix}
-1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & 1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-1 & -1 & \dots & -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -1
\end{vmatrix}
\end{array}.$$

***308.**
$$\begin{vmatrix}
\cos\frac{\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \dots & -1 \\
-1 & \cos\frac{\pi}{n} & \dots & \cos\frac{(n-1)\pi}{n} \\
\cos\frac{(n-1)\pi}{n} & -1 & \dots & \cos\frac{(n-2)\pi}{n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\cos\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{3\pi}{n} & \dots & \cos\frac{\pi}{n}
\end{vmatrix}.$$

309.
$$\begin{vmatrix}
\cos\theta & \cos 2\theta & \dots & \cos n\theta \\
\cos n\theta & \cos\theta & \dots & \cos(n-1)\theta \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\cos 2\theta & \cos 3\theta & \dots & \cos\theta
\end{vmatrix}.$$

310.
$$\begin{vmatrix}
\sin a & \sin(a+h) & \sin(a+2h) & \dots & \sin[a+(n-1)h] \\
\sin[a+(n-1)h] & \sin a & \sin(a+h) & \dots & \sin[a+(n-2)h] \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\sin(a+h) & \sin(a+2h) & \sin(a+3h) & \dots & \sin a
\end{vmatrix}.$$

***311.**
$$\begin{vmatrix}
1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\
n^2 & 1^2 & 2^2 & \dots & (n-1)^2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
2^2 & 3^2 & 4^2 & \dots & 1^2
\end{vmatrix}.$$

312. Доказать, что

$$\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & a_2 \\
a_2 & a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 \\
a_2 & a_2 & a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_1 \\
a_1 & a_2 & a_2 & a_0 & a_1 & a_1 & a_2 \\
a_2 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 & a_1 & a_1 \\
a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 & a_1 \\
a_1 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0
\end{vmatrix} =$$

$$= (a_0 + 3a_1 + 3a_2)(a_0^2 - a_0a_1 - a_0a_2 + 2a_1^2 + 2a_2^2 - 3a_1a_2)^3.$$

313. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

(косоциклический определитель).

***314.** Доказать, что циклический определитель порядка $2n$ может быть представлен как произведение циклического определителя порядка n и косоциклического определителя порядка n.

315. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \mu a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \mu a_{n-1} & \mu a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu a_2 & \mu a_3 & \mu a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

§ 7. Различные задачи

316. Доказать, что если

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

то

$$\Delta'(x) = \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \dots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \dots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

317. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \dots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \dots & a_{2n}+x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{ik},$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik}.

318. Пользуясь результатом задачи 317, вычислить определители задач 200, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 232, 233, 248, 249, 250.

319. Доказать, что сумма алгебраических дополнений всех элементов определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

равна

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \dots & a_{2n}-a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}-a_{n-1,1} & a_{n2}-a_{n-1,2} & \dots & a_{nn}-a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

Доказать теоремы:

320. Сумма алгебраических дополнений всех элементов определителя не изменяется, если ко всем элементам определителя прибавить одно и то же число.

321. Если все элементы одной строки (столбца) определителя равны единице, то сумма алгебраических дополнений всех элементов определителя равна самому определителю.

322. Вычислить сумму алгебраических дополнений всех элементов определителя задачи 250.

***323.** Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \dots & (a_1+b_n)^{-1} \\ (a_2+b_1)^{-1} & (a_2+b_2)^{-1} & \dots & (a_2+b_n)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \dots & (a_n+b_n)^{-1} \end{vmatrix}.$$

324. Обозначив через P_n и Q_n определители

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

и

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix},$$

доказать, что

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}}}}.$$

Вычислить определители:

***325.**

$$\begin{vmatrix} c & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & c & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & c \end{vmatrix}.$$

326.

$$\begin{vmatrix} p & q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & p & q & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p & q \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & p \end{vmatrix}.$$

***327.** Представить определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

в виде многочлена, расположенного по степеням x.

*328. Вычислить определитель $(2n-1)$-го порядка, у которого первые $n-1$ элементов главной диагонали равны единице, остальные элементы главной диагонали равны n. В каждой из первых $n-1$ строк n элементов, находящихся справа от главной диагонали, равны единице, в каждой из последних n строк элементы, находящиеся слева от главной диагонали, суть $n-1, n-2, \ldots, 1$. Остальные элементы определителя равны нулю.

Например, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители:

*329. $$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -n & x-2 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -(n-1) & x-4 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & x-2n \end{vmatrix}.$$

330 $$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x \end{vmatrix}.$$

331.
$$\begin{vmatrix} x & a & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ n(a-1) & x-1 & 2a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & (n-1)(a-1) & x-2 & 3a & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a-1 & x-n \end{vmatrix}.$$

332. $$\begin{vmatrix} 1^{n-1} & 2^{n-1} & \ldots & n^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3^{n-1} & \ldots & (n+1)^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & \ldots & (2n-1)^{n-1} \end{vmatrix}.$$

333.

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}.$$

334. Найти коэффициент при наименьшей степени x в определителе

$$\begin{vmatrix} (1+x)^{a_1b_1} & (1+x)^{a_1b_2} & \dots & (1+x)^{a_1b_n} \\ (1+x)^{a_2b_1} & (1+x)^{a_2b_2} & \dots & (1+x)^{a_2b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1+x)^{a_nb_1} & (1+x)^{a_nb_2} & \dots & (1+x)^{a_nb_n} \end{vmatrix}.$$

ГЛАВА 3
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Теорема Крамера

Решить системы уравнений:

335. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11. \end{aligned}$

336. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2. \end{aligned}$

337. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11. \end{aligned}$

338. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10. \end{aligned}$

339. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -4. \end{aligned}$

340. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -8. \end{aligned}$

341. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5. \end{aligned}$

342. $\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -5, \\ x_1 \qquad - 2x_3 + 3x_4 &= -4, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad - 5x_4 &= 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 \qquad &= 5. \end{aligned}$

343. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 6. \end{aligned}$$

344. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 &= 0, \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 &= 0. \end{aligned}$$

345. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 &= 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 &= 4, \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 16. \end{aligned}$$

346. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 &= 0, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 - 8x_4 + 27x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 16x_3 + 16x_4 + 81x_5 &= 0. \end{aligned}$$

347. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

348. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \phantom{{}+x_5} &= 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}+x_4+x_5} &= 2, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 \phantom{{}+x_5} &= -2, \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2. \end{aligned}$$

349. $$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= 0, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 &= 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 &= 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$$

350. $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2,$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0,$

$x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3,$

$x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -2,$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5.$

351. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 13,$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 10,$

$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 11,$

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 6,$

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3.$

352. $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1,$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 8,$

$3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3,$

$4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -2,$

$x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -3.$

353. $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0,$

$3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0,$

$4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 0,$

$13x_1 - 25x_2 + x_3 + 11x_4 = 0.$

Проверить, что система имеет решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, и вычислить определитель системы.

354. Доказать, что система

$$\begin{aligned} ax + by + cz + dt &= 0, \\ bx - ay + dz - ct &= 0, \\ cx - dy - az + bt &= 0, \\ dx + cy - bz - at &= 0 \end{aligned}$$

имеет единственное решение, если a, b, c, d вещественные, не все равные нулю.

Решить системы уравнений:

355. $\alpha x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \alpha x_{n-1} + \beta x_n = a_n,$

$\alpha x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \beta x_{n-1} + \alpha x_n = a_{n-1},$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\beta x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \alpha x_{n-1} + \alpha x_n = a_1,$

где $\alpha \neq \beta$.

356. $\dfrac{x_1}{b_1-\beta_1}+\dfrac{x_2}{b_1-\beta_2}+\ldots+\dfrac{x_n}{b_1-\beta_n}=1,$

$$\begin{gathered}
\dfrac{x_1}{b_2-\beta_1}+\dfrac{x_2}{b_2-\beta_2}+\ldots+\dfrac{x_n}{b_2-\beta_n}=1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{x_1}{b_n-\beta_1}+\dfrac{x_2}{b_n-\beta_2}+\ldots+\dfrac{x_n}{b_n-\beta_n}=1,
\end{gathered}$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ все различны.

357. $$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \\
&x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n = t; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&x_1\alpha_1^{n-1} + x_2\alpha_2^{n-1} + \ldots + x_n\alpha_n^{n-1} = t^{n-1},
\end{aligned}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ все различны.

358. $$\begin{aligned}
&x_1 + x_2\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_1^{n-1} = u_1, \\
&x_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_2^{n-1} = u_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&x_1 + x_2\alpha_n + \ldots + x_n\alpha_n^{n-1} = u_n,
\end{aligned}$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n$ все различны.

359. $$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + \ldots + x_n = u_1, \\
&x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n = u_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&x_1\alpha_1^{n-1} + x_2\alpha_2^{n-1} + \ldots + x_n\alpha_n^{n-1} = u_n,
\end{aligned}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ все различны.

360. $$\begin{aligned}
&1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0, \\
&1 + 2x_1 + 2^2x_2 + \ldots + 2^nx_n = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&1 + nx_1 + n^2x_2 + \ldots + n^nx_n = 0.
\end{aligned}$$

§ 2. Ранг матрицы

361. Сколько определителей k-го порядка можно составить из матрицы, имеющей m строк и n столбцов?

362. Составить матрицу, ранг которой равен: a) 2; b) 3.

363. Доказать, что ранг матрицы не изменится, если:

a) заменить строки столбцами;

b) умножить элементы строки или столбца на число, отличное от 0;

c) переставить две строки или два столбца;

d) к элементам одной строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на некоторое число.

364. Суммой двух матриц с одинаковым числом строчек и столбцов называется матрица, элементы которой суть суммы соответствующих элементов слагаемых матриц. Доказать, что ранг суммы двух матриц не превосходит суммы рангов слагающих матриц.

365. Как может измениться ранг матрицы, если приписать к ней: a) 1 столбец; b) 2 столбца?

Вычислить ранг матриц:

366.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

367.

$$\begin{pmatrix} 75 & 0 & 116 & 39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{pmatrix}.$$

368.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

369.

$$\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}.$$

370.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}.$$

371.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

372.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

373.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}.$$

374.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

375.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

376.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

377.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

378.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

379.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

380.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

§ 3. Системы линейных форм

381. a) Написать две независимые линейные формы.
b) Написать три независимые линейные формы.

382. Составить систему четырех линейных форм от пяти переменных так, чтобы две из них были независимы, а остальные были их линейными комбинациями.

Найти основные зависимости между формами системы:

383. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1+2x_2+7x_3-x_4, \\ y_2 &= 3x_1-x_2+2x_3+4x_4, \\ y_3 &= x_1+x_2+3x_3+x_4. \end{aligned}$$

384. $$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1+2x_2-5x_3+4x_4, \\ y_2 &= 3x_1-x_2+3x_3-3x_4, \\ y_3 &= 3x_1+5x_2-13x_3+11x_4. \end{aligned}$$

385. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1+3x_2-4x_3-x_4, \\ y_2 &= x_1-2x_2+x_3+3x_4, \\ y_3 &= 5x_1-3x_2-x_3+8x_4, \\ y_4 &= 3x_1+8x_2-9x_3-5x_4. \end{aligned}$$

386. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1+x_2-x_3+x_4, \\ y_2 &= x_1+2x_2+x_3-x_4, \\ y_3 &= x_1+x_2+2x_3+x_4. \end{aligned}$$

387. $$\begin{aligned} y_1 &= x_1+2x_2+3x_3+x_4, \\ y_2 &= 2x_1+3x_2+x_3+2x_4, \\ y_3 &= 3x_1+x_2+2x_3-2x_4, \\ y_4 &= 4x_2+2x_3+5x_4. \end{aligned}$$

388. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1+x_2, \\ y_2 &= 3x_1+2x_2, \\ y_3 &= x_1+x_2, \\ y_4 &= 2x_1+3x_2. \end{aligned}$$

389. $$\begin{aligned} y_1 &= x_1+x_2+x_3+x_4+x_5, \\ y_2 &= x_1+2x_2+3x_3+4x_4+x_5, \\ y_3 &= x_1+3x_2+6x_3+10x_4+x_5, \\ y_4 &= x_1+4x_2+10x_3+20x_4+x_5. \end{aligned}$$

390. $$\begin{aligned} y_1 &= x_1+2x_2+3x_3-4x_4, \\ y_2 &= 2x_1-x_2+2x_3+5x_4, \\ y_3 &= 2x_1-x_2+5x_3-4x_4, \\ y_4 &= 2x_1+3x_2-4x_3+x_4. \end{aligned}$$

391. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1+x_2-3x_3, \\ y_2 &= 3x_1+x_2-5x_3, \\ y_3 &= 4x_1+2x_2-x_3, \\ y_4 &= x_1-7x_3. \end{aligned}$$

392. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4+x_5, \\ y_2 &= x_1-x_2+2x_3+3x_4+5x_5, \\ y_3 &= 3x_1+7x_2+8x_3-11x_4-3x_5, \\ y_4 &= x_1-x_2+x_3-2x_4+3x_5. \end{aligned}$$

393. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5, \\ y_2 &= x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5, \\ y_3 &= 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 - 5x_5, \\ y_4 &= x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5. \end{aligned}$$

394. $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5, \\ y_2 &= 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5, \\ y_3 &= x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5, \\ y_4 &= 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5, \\ y_5 &= x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 7x_5. \end{aligned}$$

395. $$\begin{aligned} y_1 &= 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5, \\ y_2 &= 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5, \\ y_3 &= x_1 - 3x_2 + x_4 - 2x_5, \\ y_4 &= x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 6x_5. \end{aligned}$$

396. $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 + 2x_6, \\ y_2 &= 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + x_5 - x_6, \\ y_3 &= 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6, \\ y_4 &= 4x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 15x_4 + 6x_5 - 5x_6, \\ y_5 &= 5x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 11x_4 + 9x_6. \end{aligned}$$

397. $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5, \\ y_2 &= 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5, \\ y_3 &= x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5, \\ y_4 &= 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 17x_4 + \lambda x_5. \end{aligned}$$

Подобрать λ так, чтобы четвертая форма была линейной комбинацией первых трех.

§ 4. Системы линейных уравнений

398. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 5. \end{aligned}$$

399. Подобрать λ так, чтобы система уравнений имела решение:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= \lambda. \end{aligned}$$

Решить системы уравнений:

400.

$$\begin{aligned} x_1+x_2-3x_3&=-1,\\ 2x_1+x_2-2x_3&=1,\\ x_1+x_2+x_3&=3,\\ x_1+2x_2-3x_3&=1. \end{aligned}$$

401.

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3&=2,\\ x_1+3x_2+x_3&=5,\\ x_1+x_2+5x_3&=-7,\\ 2x_1+3x_2-3x_3&=14. \end{aligned}$$

402.

$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+3x_3&=3,\\ 3x_1+x_2-5x_3&=0,\\ 4x_1-x_2+x_3&=3,\\ x_1+3x_2-13x_3&=-6. \end{aligned}$$

403.

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3&=0,\\ 2x_1-x_2+3x_3&=0,\\ 3x_1-5x_2+4x_3&=0,\\ x_1+17x_2+4x_3&=0. \end{aligned}$$

404.
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3+x_4&=1,\\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4&=2,\\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4&=-1,\\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4&=4. \end{aligned}$$

405.
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3-x_4&=1,\\ 2x_1-x_2-3x_4&=2,\\ 3x_1-x_3+x_4&=-3,\\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4&=-6. \end{aligned}$$

406.

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3-4x_4&=4,\\ x_2-x_3+x_4&=-3,\\ x_1+3x_2-3x_4&=1,\\ -7x_2+3x_3+x_4&=-3. \end{aligned}$$

407.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=11,\\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4&=12,\\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4&=13,\\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4&=14. \end{aligned}$$

408.

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4&=0,\\ 3x_1-x_2+2x_3-7x_4&=0,\\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4&=0,\\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4&=0. \end{aligned}$$

409.

$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4&=0,\\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4&=0,\\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4&=0,\\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4&=0. \end{aligned}$$

410.
$$\begin{aligned} x_1+x_2-3x_4-x_5&=0,\\ x_1-x_2+2x_3-x_4&=0,\\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5&=0,\\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5&=0. \end{aligned}$$

411.
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=7,\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5&=-2,\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5&=23,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5&=12. \end{aligned}$$

412. $$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5&=0,\\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5&=0,\\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5&=0,\\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5&=0.\end{aligned}$$

413. $$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5&=0,\\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5&=0,\\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5&=0,\\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5&=0.\end{aligned}$$

414. $$\begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5&=1,\\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5&=0,\\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5&=2,\\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5&=3.\end{aligned}$$

415. $$\begin{aligned} 2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5&=1,\\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5&=1,\\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5&=1,\\ 2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5&=-1.\end{aligned}$$

416. $$\begin{aligned} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5&=1,\\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5&=2,\\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5&=3,\\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5&=3.\end{aligned}$$

417. $$\begin{aligned} x_1+2x_2-3x_4+2x_5&=1,\\ x_1-x_2-3x_3+x_4-3x_5&=2,\\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4+2x_5&=7,\\ 9x_1-9x_2+6x_3-16x_4+2x_5&=25.\end{aligned}$$

418. $$\begin{aligned} x_1+3x_2+5x_3-4x_4&=1,\\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5&=-1,\\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5&=3,\\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5&=3,\\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5&=-1.\end{aligned}$$

419. $$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3-x_4&=1,\\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4&=1,\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4&=1,\\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4&=1,\\ 5x_1+5x_2+2x_3&=2.\end{aligned}$$

420. $$\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5&=-2,\\ x_1+2x_2-x_3-x_5&=-3,\\ x_1-x_2+2x_3-3x_4&=10,\\ x_2-x_3+x_4-2x_5&=-5,\\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4+4x_5&=1.\end{aligned}$$

421. Система
$$\begin{aligned} ay+bx&=c,\\ cx+az&=b,\\ bz+cy&=a \end{aligned}$$
имеет единственное решение. Доказать, что $abc \neq 0$, и найти решение.

Решить системы уравнений:

422. $$\begin{aligned} \lambda x+y+z&=1,\\ x+\lambda y+z&=\lambda,\\ x+y+\lambda z&=\lambda^2. \end{aligned}$$

423. $$\begin{aligned} \lambda x+y+z+t&=1,\\ x+\lambda y+z+t&=\lambda,\\ x+y+\lambda z+t&=\lambda^2,\\ x+y+z+\lambda t&=\lambda^3. \end{aligned}$$

424. $$\begin{aligned} x+ay+a^2z&=a^3,\\ x+by+b^2z&=b^3,\\ x+cy+c^2z&=c^3. \end{aligned}$$

425. $$\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ ax+by+cz&=d,\\ a^2x+b^2y+c^2z&=d^2. \end{aligned}$$

426. $$\begin{aligned} ax+y+z&=4,\\ x+by+z&=3,\\ x+2by+z&=4. \end{aligned}$$

427. $$\begin{aligned} ax+by+z&=1,\\ x+aby+z&=b,\\ x+by+az&=1. \end{aligned}$$

428. $$\begin{aligned} \alpha x+y+z&=m,\\ x+\alpha y+z&=n,\\ x+y+\alpha z&=p. \end{aligned}$$

429. $$\begin{aligned} x+ay+a^2z&=1,\\ x+ay+abz&=a,\\ bx+a^2y+a^2bz&=a^2b. \end{aligned}$$

430. $$\begin{aligned} (\lambda+3)x+y+2z&=\lambda,\\ \lambda x+(\lambda-1)y+z&=2\lambda,\\ 3(\lambda+1)x+\lambda y+(\lambda+3)z&=3. \end{aligned}$$

431. $$\begin{aligned} \lambda x+\lambda y+(\lambda+1)z&=\lambda,\\ \lambda x+\lambda y+(\lambda-1)z&=\lambda,\\ (\lambda+1)x+\lambda y+(2\lambda+3)z&=1. \end{aligned}$$

432. $$\begin{aligned} 3kx+(2k+1)y+(k+1)z&=k,\\ (2k-1)x+(2k-1)y+(k-2)z&=k+1,\\ (4k-1)x+3ky+2kz&=1. \end{aligned}$$

433. $$\begin{aligned} ax+by+2z&=1,\\ ax+(2b-1)y+3z&=1,\\ ax+by+(b+3)z&=2b-1. \end{aligned}$$

434. а) $$\begin{aligned} 3mx+(3m-7)y+(m-5)z&=m-1,\\ (2m-1)x+(4m-1)y+2mz&=m+1,\\ 4mx+(5m-7)y+(2m-5)z&=0. \end{aligned}$$

b) $(2m+1)x - my + (m+1)z = m-1,$
$(m-2)x+(m-1)y+(m-2)z = m,$
$(2m-1)x+(m-1)y+(2m-1)z = m.$

c) $(5\lambda+1)x + 2\lambda y+(4\lambda+1)z = 1+\lambda,$
$(4\lambda-1)x+(\lambda-1)y+(4\lambda-1)z = -1,$
$2(3\lambda+1)x + 2\lambda y+(5\lambda+2)z = 2-\lambda.$

435. a) $(2c+1)x - cy - (c+1)z = 2c,$
$3cx-(2c-1)y-(3c-1)z = c+1,$
$(c+2)x - y - 2cz = 2.$

b) $2(\lambda+1)x + 3y + \lambda z = \lambda+4,$
$(4\lambda-1)x+(\lambda+1)y+(2\lambda-1)z = 2\lambda+2,$
$(5\lambda-4)x+(\lambda+1)y+(3\lambda-4)z = \lambda-1.$

c) $dx+(2d-1)y+(d+2)z = 1,$
$(d-1)y+(d-3)z = 1+d,$
$dx+(3d-2)y+(3d+1)z = 2-d.$

d) $(3a-1)x + 2ay+(3a+1)z = 1,$
$2ax + 2ay+(3a+1)z = a,$
$(a+1)x+(a+1)y+2(a+1)z = a^2.$

436. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

437. При каком условии три точки $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $M_3(x_3, y_3)$ лежат на одной прямой?

438. При каком условии три прямые $a_1x+b_1y+c_1=0$; $a_2x+b_2y+c_2=0$; $a_3x+b_3y+c_3=0$ проходят через одну точку?

439. При каком условии четыре точки $M_0(x_0, y_0)$; $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $M_3(x_3, y_3)$ лежат на одной окружности?

440. Написать уравнение окружности, проходящей через точки $M_1(2, 1)$; $M_2(1, 2)$; $M_3(0, 1)$.

441. Найти уравнение кривой 2-го порядка, проходящей через точки $M_1(0, 0)$; $M_2(1, 0)$; $M_3(-1, 0)$; $M_4(1, 1)$ и $M_5(-1, 1)$.

442. Найти уравнение параболы 3-й степени, проходящей через точки $M_1(1, 0)$; $M_2(0, -1)$; $M_3(-1, -2)$ и $M_4(2, 7)$.

443. Составить уравнение параболы степени n $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, проходящей через $n+1$ точек $M_0(x_0, y_0)$; $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $\ldots$; $M_n(x_n, y_n)$.

444. При каком условии четыре точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$; $M_3(x_3, y_3, z_3)$; $M_4(x_4, y_4, z_4)$ лежат в одной плоскости?

445. Составить уравнение шара, проходящего через точки $M_1(1, 0, 0)$; $M_2(1, 1, 0)$; $M_3(1, 1, 1)$; $M_4(0, 1, 1)$.

446. При каком условии n точек $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $M_3(x_3, y_3)$; ...; $M_n(x_n, y_n)$ лежат на одной прямой?

447. При каком условии n прямых $a_1x+b_1y+c_1=0$; $a_2x+b_2y+c_2=0$; ...; $a_nx+b_ny+c_n=0$ проходят через одну точку?

448. При каком условии n точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$; ...; $M_n(x_n, y_n, z_n)$ лежат в одной плоскости и при каком условии эти точки лежат на одной прямой?

449. При каком условии n плоскостей $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ проходят через одну точку и при каком условии все эти плоскости проходят через одну прямую?

450. Исключить $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ из системы n равенств:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1,\,n-1}x_{n-1}+a_{1n}=0,\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2,\,n-1}x_{n-1}+a_{2n}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{n,\,n-1}x_{n-1}+a_{nn}=0.
\end{aligned}$$

451. Пусть

$$\left.\begin{matrix}
x_1^{(1)}=\alpha_{11}; & x_2^{(1)}=\alpha_{12}; & \ldots; & x_n^{(1)}=\alpha_{1n},\\
x_1^{(2)}=\alpha_{21}; & x_2^{(2)}=\alpha_{22}; & \ldots; & x_n^{(2)}=\alpha_{2n},\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
x_1^{(m)}=\alpha_{m1}; & x_2^{(m)}=\alpha_{m2}; & \ldots; & x_n^{(m)}=\alpha_{mn}
\end{matrix}\right\} \qquad (1)$$

— m решений некоторой системы линейных однородных уравнений. Решения эти называются линейно зависимыми, если существуют такие постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_m$, не все равные нулю, что

$$c_1\alpha_{1i}+c_2\alpha_{2i}+\ldots+c_m\alpha_{mi}=0 \qquad (2)$$
$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Если же равенства (2) возможны только при $c_1=c_2=\ldots=c_m=0$, решения называются линейно независимыми.

Условимся решения записывать строчками матрицы.

Так, система решений (1) запишется матрицей

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = A.$$

Доказать, что если ранг матрицы A равен r, в системе (1) имеется r линейно независимых решений, а все остальные решения системы (1) являются их линейными комбинациями.

452. Доказать, что если ранг системы m линейных однородных уравнений с n неизвестными равен r, то существует $n-r$ линейно независимых решений системы, а все остальные решения системы являются их линейными комбинациями.

Такая система $n-r$ решений называется фундаментальной системой решений.

453. Является ли $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ фундаментальной системой решений системы уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 0? \end{aligned}$$

454. Написать фундаментальную систему решений для системы уравнений задачи 453.

455. Представляет ли $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ фундаментальную систему решений системы задачи 453?

456. Доказать, что если A — матрица ранга r, образующая фундаментальную систему решений системы линейных однородных уравнений, а B есть произвольная неособенная матрица r-го порядка, то матрица BA также образует фундаментальную систему решений той же системы уравнений.

457. Доказать, что если две матрицы A и C ранга r образуют фундаментальные системы решений некоторой системы линейных однородных уравнений, то одна из них есть произведение некоторой неособенной матрицы r-го порядка B на другую, т. е. $A = BC$.

458. Пусть $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rn} \end{pmatrix}$ — фундаментальная система решений некоторой системы линейных однородных уравнений; доказать, что

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{21} + \dots + c_r\alpha_{r1}, \\ x_2 &= c_1\alpha_{12} + c_2\alpha_{22} + \dots + c_r\alpha_{r2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= c_1\alpha_{1n} + c_2\alpha_{2n} + \dots + c_r\alpha_{rn} \end{aligned}$$

есть общее решение этой системы уравнений, т. е. всякое решение системы может быть получено из него при некоторых значениях $c_1, c_2, \dots, c_r$, и обратно.

459. Написать общее решение системы задачи 453.

460. Проверить, что $(1\ 1\ 1\ -7)$ — фундаментальная система решений системы задачи 403, и написать общее решение.

461. Написать общие решения систем задач 408, 409, 410, 412, 413.

462. Зная общее решение системы задачи 453 (см. ответ задачи 459) и то, что $x_1 = -16$, $x_2 = 23$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ есть частное решение системы 411, найти общее решение системы 411.

463. Написать общие решения систем задач 406, 414, 415.

ГЛАВА 4

МАТРИЦЫ

§ 1. Действия над квадратными матрицами

464. Умножить матрицы:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$.

465. Выполнить действия:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; e) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$.

***466.** Найти $\lim\limits_{n \to \infty} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$, α — вещественное число.

467. Доказать, что если $AB = BA$, то

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

b) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$;

c) $(A+B)^n = A^n + \frac{n}{1} A^{n-1} B + \ldots + B^n$.

468. Вычислить $AB - BA$, если:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

469. Найти все матрицы, коммутативные с матрицей A:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

470. Найти $f(A)$:

a) $f(x) = x^2 - x - 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $f(x) = x^2 - 5x + 3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

471. Доказать, что каждая матрица второго порядка $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению

$$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0.$$

472. Доказать, что для любой данной матрицы A найдется полином $f(x)$ такой, что $f(A) = 0$, причем все полиномы, обладающие этим свойством, делятся на один из них.

***473.** Доказать, что равенство $AB - BA = E$ невозможно.

474. Пусть $A^k=0$. Доказать, что $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\ldots+A^{k-1}$.

475. Найти все матрицы второго порядка, квадраты которых равны нулевой матрице.

476. Найти все матрицы второго порядка, кубы которых равны нулевой матрице.

477. Найти все матрицы второго порядка, квадраты которых равны единичной матрице.

478. Решить и исследовать уравнение $XA=0$, где A — данная и X — искомая матрицы второго порядка.

479. Решить и исследовать уравнение $X^2=A$, где A — данная и X — искомая матрицы второго порядка.

480. Найти обратную матрицу для матрицы A:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$;

c) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; d) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5 & 7\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

e) $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$; f) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

g) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$; h) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0\end{pmatrix}$;

i) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \ldots & \varepsilon^{n-1}\\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \ldots & \varepsilon^{2n-2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2n-2} & \ldots & \varepsilon^{(n-1)^2}\end{pmatrix}$,

где $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$;

j) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

k) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 2n-1 \\ 2n-1 & 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-3 \\ 2n-3 & 2n-1 & 1 & 3 & \dots & 2n-5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 5 & 7 & 9 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

l) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & c_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n & a \end{pmatrix}$;

m) $A = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & -x & \dots & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -x \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & & a_n \end{pmatrix}$;

n) $A = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{\lambda_1} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+\frac{1}{\lambda_2} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+\frac{1}{\lambda_3} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+\frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$;

o) Зная матрицу B^{-1}, найти обратную матрицу для окаймленной матрицы $\begin{pmatrix} B & U \\ V & a \end{pmatrix}$.

481. Найти неизвестную матрицу X из уравнений:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; g) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

482. Доказать, что если $AB = BA$, то $A^{-1}B = BA^{-1}$.

483. Вычислить $\varphi(A)$, где $\varphi(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

484. Найти все вещественные матрицы второго порядка, кубы которых равны единичной матрице.

485. Найти все вещественные матрицы второго порядка, четвертые степени которых равны единичной матрице.

486. Установить изоморфизм поля комплексных чисел и множества матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ при вещественных a, b.

487. Установить, что матрицы вида $\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$ при вещественных a, b, c, d образуют кольцо, не имеющее делителей нуля.

488. Представить $(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)$ в виде суммы четырех квадратов билинейных выражений.

489. Доказать, что следующие операции над матрицей:

a) перестановка двух строчек,

b) добавление к элементам одной строчки чисел, пропорциональных элементам другой строчки,

c) умножение элементов строчки на число, отличное от 0, — осуществляются посредством умножения матрицы слева на некоторые неособенные матрицы.

Те же операции над столбцами осуществляются посредством умножения справа.

490. Доказать, что каждая матрица может быть представлена в виде PRQ, где P и Q — неособенные матрицы, а R — диагональная матрица вида

$$R=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

***491.** Доказать, что каждая матрица может быть представлена в виде произведений матриц $E+\alpha e_{ik}$, где e_{ik} — матрица, у которой элемент i-й строчки и k-го столбца равен 1, а все остальные элементы равны 0.

***492.** Доказать, что ранг произведения двух квадратных матриц порядка n не меньше r_1+r_2-n, где r_1 и r_2 — ранги множителей.

493. Доказать, что каждая квадратная матрица ранга 1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & \lambda_1\mu_2 & \dots & \lambda_1\mu_n \\ \lambda_2\mu_1 & \lambda_2\mu_2 & \dots & \lambda_2\mu_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_n\mu_1 & \lambda_n\mu_2 & \dots & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}.$$

***494.** Найти все матрицы третьего порядка, квадраты которых равны 0.

***495.** Найти все матрицы третьего порядка, квадраты которых равны единичной матрице.

***496.** Пусть прямоугольные матрицы A и B имеют одинаковое число строчек. Через (A, B) обозначим матрицу, получающуюся, если к матрице A присоединить все столбцы матрицы B. Доказать, что ранг $(A,B) \leqslant$ ранг $A +$ ранг B.

***497.** Доказать, что если $A^2 = E$, то ранг $(E + A) +$ ранг $(E - A) = n$, где n — порядок матрицы A.

***498.** Доказать, что матрица A, обладающая свойством $A^2 = E$, может быть представлена в виде PBP^{-1}, где P — неособенная, а B — диагональная матрица, все элементы которой равны ± 1.

499. Найти условие, которому должна удовлетворять матрица с целыми элементами для того, чтобы все элементы обратной матрицы были целыми.

500. Доказать, что каждая неособенная целочисленная матрица может быть представлена в виде PR, где P — целочисленная унимодулярная матрица, а R — целочисленная треугольная матрица, все элементы которой, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю, диагональные элементы положительны, а элементы, лежащие выше главной диагонали, неотрицательны и меньше диагональных элементов того же столбца.

***501.** Объединим в один класс все целочисленные матрицы, получающиеся одна из другой умножением слева на целочисленные унимодулярные матрицы. Подсчитать число классов матриц n-го порядка с данным определителем k.

502. Доказать, что каждая целочисленная матрица может быть представлена в виде PRQ, где P и Q — целочисленные унимодулярные матрицы, R — целочисленная диагональная матрица.

503. Доказать, что каждая целочисленная унимодулярная матрица второго порядка с определителем 1 может быть представлена в виде произведения степеней (положительных и отрицательных) матриц

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

504. Доказать, что каждая целочисленная унимодулярная матрица второго порядка может быть представлена в виде произведения степеней матриц

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

***505.** Доказать, что каждая целочисленная матрица третьего порядка, отличная от единичной, с положительным определителем и удовлетворяющая условию $A^2=E$, может быть представлена в виде QCQ^{-1}, где Q—целочисленная унимодулярная матрица, а C—одна из матриц

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

§ 2. Прямоугольные матрицы. Некоторые неравенства

506. Умножить матрицы:

a) $\begin{pmatrix}2&1&1\\3&0&1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}3&1\\2&1\\1&0\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}3&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ и $(1\ 2\ 3)$; d) $(1\ 2\ 3)$ и $\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$.

507. Найти определитель произведения матрицы $\begin{pmatrix}3&2&1&2\\4&1&1&3\end{pmatrix}$ на транспонированную.

508. Умножить матрицу $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}$ на транспонированную и применить теорему об определителе произведения.

509. Выразить минор m-го порядка произведения двух матриц через миноры множителей.

510. Доказать, что все главные (диагональные) миноры матрицы $\bar{A}A$ неотрицательны. Здесь A — вещественная матрица, $\bar{A}$ — матрица, транспонированная с A.

511. Доказать, что если все главные миноры k-го порядка матрицы $\bar{A}A$ равны нулю, то ранги матриц $\bar{A}A$ и A меньше k. Здесь A — вещественная матрица, $\bar{A}$ — транспонированная с ней.

512. Доказать, что суммы всех диагональных миноров данного порядка k, вычисленные для матриц $\bar{A}A$ и $A\bar{A}$, одинаковы.

513. Используя умножение прямоугольных матриц, доказать тождество

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)-$$
$$-(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2=\sum_{i<k}(a_ib_k-a_kb_i)^2.$$

514. Доказать тождество

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2-\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i'\right|^2=\sum_{i<k}|a_ib_k-a_kb_i|^2.$$

Здесь a_i, b_i — комплексные числа, b_i' — числа, сопряженные с b_i.

515. Доказать неравенство Буняковского

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

для вещественных a_i, b_i, исходя из тождества задачи 513.

516. Доказать неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i'\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2$$

для комплексных a_i, b_i.

***517.** Пусть B и C — две вещественные прямоугольные матрицы такие, что $(B,\ C)=A$ есть квадратная матрица [смысл обозначения $(B,\ C)$ такой же, как в задаче 496]. Доказать, что $|A|^2\leqslant|\bar{B}B|\cdot|\bar{C}C|$.

***518.** Пусть $A=(B,\ C)$ — прямоугольная матрица с вещественными элементами. Доказать, что

$$|\bar{A}A|\leqslant|\bar{B}B|\cdot|\bar{C}C|.$$

519. Пусть A — прямоугольная вещественная матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Доказать, что $|A\bar{A}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{1k}^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{2k}^2 \dots \sum_{k=1}^{n} a_{mk}^2$.

520. Пусть A — прямоугольная матрица с комплексными элементами, A^* — матрица, транспонированная для комплексно сопряженной с A матрицы. Доказать, что определитель матрицы A^*A есть неотрицательное вещественное число и этот определитель равен 0 в том и только в том случае, когда ранг A меньше числа столбцов.

521. Пусть $A=(B, C)$ есть комплексная прямоугольная матрица. Доказать, что $|A^*A| \leqslant |B^*B| \cdot |C^*C|$.

522. Доказать, что если $|a_{ik}| \leqslant M$, то модуль определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

не превосходит $M^n n^{n/2}$.

***523.** Доказать, что если a_{ik} вещественны и лежат в интервале $0 \leqslant a_{ik} \leqslant M$, то определитель, составленный из чисел a_{ik}, по абсолютной величине не превосходит $M^n 2^{-n}(n+1)^{\frac{n+1}{2}}$.

524. Доказать, что для определителей с комплексными элементами оценка, приведенная в задаче 522, точная и не может быть улучшена.

525. Доказать, что для определителей с вещественными элементами оценка, приведенная в задаче 522, точная при $n=2^m$.

526. Доказать, что максимум абсолютной величины определителей порядка n, имеющих вещественные элементы, не превосходящие 1 по абсолютной величине, есть целое число, делящееся на 2^{n-1}.

***527.** Найти максимум абсолютной величины определителей порядков 3 и 5, образованных из вещественных чисел, не превосходящих 1 по абсолютной величине.

***528.** Матрицей, взаимной с данной матрицей A, называется матрица, элементами которой являются миноры $(n-1)$-го порядка исходной матрицы в естественном расположении. Доказать, что матрица, взаимная к взаимной, равна исходной матрице, умноженной на ее определитель в степени $n-2$.

***529.** Доказать, что миноры m-го порядка взаимной матрицы равны дополнительным минорам к соответствующим минорам исходной матрицы, умноженным на Δ^{m-1}.

530. Доказать, что матрица, взаимная к произведению двух матриц, равна произведению взаимных матриц в том же порядке.

531. Пусть каким-либо способом занумерованы все сочетания из номеров $1, 2, \ldots, n$, взятых по m.

Дана квадратная матрица $A=(a_{ik})$ порядка n. Пусть $A_{\alpha\beta}$ есть минор m-го порядка матрицы A, номера строчек которого образуют сочетание с номером α, номера столбцов — сочетание с номером β. Тогда из всех таких миноров можно построить матрицу $A'_m=(A_{\alpha\beta})$ порядка C_n^m. В частности, $A'_1=A$, A'_{n-1} есть матрица, взаимная с A.

Доказать, что $(AB)'_m=A'_mB'_m$, $E'_m=E$, $(A^{-1})'_m=(A'_m)^{-1}$.

532. Доказать, что если A есть «треугольная» матрица вида

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то при надлежащей нумерации сочетаний матрица A'_m будет также треугольной.

533. Доказать, что определитель матрицы A'_m равен $|A|^{C_{n-1}^{m-1}}$.

534. Пусть установлена каким-либо способом нумерация пар (i, k); $i=1, 2, \ldots, n$; $k=1, 2, \ldots, m$. Кронекеровским произведением двух квадратных матриц A и B порядков n и m соответственно называется матрица $C=A\times B$ порядка nm с элементами $c_{\alpha_1\alpha_2}=a_{i_1i_2}b_{k_1k_2}$, где α_1 есть номер пары (i_1, k_1), α_2 — номер (i_2, k_2). Доказать:

a) $(A_1 \pm A_2)\times B=(A_1\times B)\pm(A_2\times B)$,

b) $A\times(B_1 \pm B_2)=(A\times B_1)\pm(A\times B_2)$,

c) $(A'\times B')\cdot(A''\times B'')=(A'\cdot A'')\times(B'\cdot B'')$.

***535.** Доказать, что определитель $A \times B$ равен $|A|^m \cdot |B|^n$.

536. Пусть матрицы A и B порядка mn разбиты на n^2 квадратных клеток, так что они принимают вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ik} и B_{ik} — квадратные матрицы порядка m. Пусть составлено их произведение C и разбито таким же образом на клетки C_{ik}. Доказать, что

$$C_{ik} = A_{i1}B_{1k} + A_{i2}B_{2k} + \dots + A_{in}B_{nk}.$$

Таким образом, умножение матриц, разбитых на клетки, производится формально по тому же правилу, как если бы в клетках находились не матрицы, а числа.

***537.** Пусть матрица C порядка mn разбита на n^2 равных квадратных клеток. Пусть матрицы A_{ik}, образованные элементами отдельных клеток, попарно коммутируют при умножении. Из матриц A_{ik} составляется «определитель» $\sum \pm A_{1\alpha_1} A_{2\alpha_2} \dots A_{n\alpha_n} = B$. Этот «определитель» есть некоторая матрица порядка m. Доказать, что определитель матрицы C равен определителю матрицы B.

ГЛАВА 5

ПОЛИНОМЫ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Действия над полиномами. Формула Тейлора. Кратные корни

538. Умножить полиномы:

a) $(2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 1)$;
b) $(x^3 + x^2 - x - 1)(x^2 - 2x - 1)$.

539. Выполнить деление с остатком:

a) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на $x^2 - 3x + 1$;
b) $x^3 - 3x^2 - x - 1$ на $3x^2 - 2x + 1$.

540. При каком условии полином $x^3 + px + q$ делится на полином вида $x^2 + mx - 1$?

541. При каком условии полином $x^4 + px^2 + q$ делится на полином вида $x^2 + mx + 1$?

542. Упростить полином

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2} - \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}.$$

543. Выполнить деление с остатком:

a) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ на $x - 1$;
b) $2x^5 - 5x^3 - 8x$ на $x + 3$;
c) $4x^3 + x^2$ на $x + 1 + i$;
d) $x^3 - x^2 - x$ на $x - 1 + 2i$.

544. Пользуясь схемой Горнера, вычислить $f(x_0)$:

a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $x_0 = 4$;
b) $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$, $x_0 = -2 - i$.

545. Пользуясь схемой Горнера, разложить полином $f(x)$ по степеням $x-x_0$:

a) $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1, \qquad x_0=-1;$
b) $f(x)=x^5, \qquad x_0=1;$
c) $f(x)=x^4-8x^3+24x^2-50x+90, \qquad x_0=2;$
d) $f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i, \qquad x_0=-i;$
e) $f(x)=x^4+(3-8i)x^3-(21+18i)x^2-$
$-(33-20i)x+7+18i, \quad x_0=-1+2i.$

546. Пользуясь схемой Горнера, разложить на простейшие дроби:

$$\text{a)}\ \frac{x^3-x+1}{(x-2)^5}; \qquad \text{b)}\ \frac{x^4-2x^2+3}{(x+1)^5}.$$

***547.** Посредством схемы Горнера разложить по степеням x:

a) $f(x+3)$, где $f(x)=x^4-x^3+1;$
b) $(x-2)^4+4(x-2)^3+6(x-2)^2+10(x-2)+20.$

548. Найти значения полинома $f(x)$ и его производных при $x=x_0$:

a) $f(x)=x^5-4x^3+6x^2-8x+10, \qquad x_0=2;$
b) $f(x)=x^4-3ix^3-4x^2+5ix-1, \qquad x_0=1+2i.$

549. Чему равен показатель кратности корня:

a) 2 для полинома $x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8;$
b) -2 для полинома $x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16$?

550. Определить коэффициент a так, чтобы полином x^5-ax^2-ax+1 имел -1 корнем не ниже второй кратности.

551. Определить A и B так, чтобы трехчлен Ax^4+Bx^3+1 делился на $(x-1)^2$.

552. Определить A и B так, чтобы трехчлен $Ax^{n+1}+$ $+Bx^n+1$ делился на $(x-1)^2$.

***553.** Доказать, что полиномы:

a) $x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1;$
b) $x^{2n+1}-(2n+1)x^{n+1}+(2n+1)x^n-1;$
c) $(n-2m)x^n-nx^{n-m}+nx^m-(n-2m)$

имеют число 1 тройным корнем.

554. Доказать, что полином

$$x^{2n+1}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}x^{n+2}+\frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}x^{n+1}-$$
$$-\frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}x^{n}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}x^{n-1}-1$$

делится на $(x-1)^5$ и не делится на $(x-1)^6$.

***555.** Доказать, что для того чтобы полином

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

делился на $(x-1)^{k+1}$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{aligned} a_0+a_1+\ a_2+\ \ldots\ +\ a_n&=0,\\ a_1+2\,a_2+\ \ldots\ +n\,a_n&=0,\\ a_1+4\,a_2+\ \ldots\ +n^2a_n&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ a_1+2^ka_2+\ \ldots\ +n^ka_n&=0.\end{aligned}$$

556. Определить показатель кратности корня a полинома

$$\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a),$$

где $f(x)$ — полином.

557. Найти условие, при котором полином x^5+ax^3+b имеет двойной корень, отличный от нуля.

558. Найти условие, при котором полином x^5+10ax^3+ $+5bx+c$ имеет тройной корень, отличный от нуля.

559. Доказать, что трехчленный полином $x^n+ax^{n-m}+b$ не может иметь корней, отличных от нуля, выше второй кратности.

560. Найти условие, при котором трехчленный полином $x^n+ax^{n-m}+b$ имеет двойной корень, отличный от нуля.

***561.** Доказать, что k-членный полином

$$a_1x^{p_1}+a_2x^{p_2}+\ldots+a_kx^{p_k}$$

не имеет корней выше $(k-1)$-й кратности, отличных от нуля.

***562.** Доказать, что каждый не равный нулю корень $(k-1)$-й кратности полинома

$$a_1x^{p_1}+a_2x^{p_2}+\ldots+a_kx^{p_k}$$

удовлетворяет уравнениям

$$a_1x^{p_1}\varphi'(p_1)=a_2x^{p_2}\varphi'(p_2)=\ldots=a_kx^{p_k}\varphi'(p_k),$$

где

$$\varphi(t)=(t-p_1)(t-p_2)(t-p_3)\ldots(t-p_k),$$

и обратно.

***563.** Доказать, что полином делится на свою производную в том и только в том случае, когда он равен $a_0(x-x_0)^n$.

564. Доказать, что полином

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней.

565. Доказать, что для того чтобы x_0 было корнем кратности k числителя дробной рациональной функции $f(x)=\frac{\varphi(x)}{w(x)}$, знаменатель которой $w(x)$ не обращается в 0 при $x=x_0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x_0)=f'(x_0)=\ldots=f^{(k-1)}(x_0)=0,\ f^k(x_0)\neq 0.$$

566. Доказать, что дробная рациональная функция $f(x)=\frac{\varphi(x)}{w(x)}$ может быть представлена в виде

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{F(x)}{w(x)}(x-x_0)^{n+1},$$

где $F(x)$ — полином. Предполагается, что $w(x_0)\neq 0$ (формула Тейлора для дробной рациональной функции).

***567.** Доказать, что если x_0 есть корень кратности k для полинома $f_1(x)f_2'(x)-f_2(x)f_1'(x)$, то x_0 будет корнем кратности $k+1$ для полинома $f_1(x)f_2(x_0)-f_2(x)f_1(x_0)$, если этот последний не равен нулю тождественно, и обратно.

***568.** Доказать, что если $f(x)$ не имеет кратных корней, то $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$ не имеет корней кратности выше $n-1$, где n — степень $f(x)$.

***569.** Построить полином $f(x)$ степени n, для которого $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$ имеет корень x_0 кратности $n-1$, не являющийся корнем $f(x)$.

§ 2. Доказательство основной теоремы высшей алгебры и смежные вопросы

570. Определить δ так, чтобы при $|x|<\delta$ полином

$$x^5-4x^3+2x$$

был меньше 0,1 по модулю.

571. Определить δ так, чтобы $|f(x)-f(2)|<0{,}01$ при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-2|<\delta$; $f(x)=x^4-3x^3+4x+5$.

572. Определить M так, чтобы при $|x| > M$

$$|x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2| > 100.$$

573. Найти x так, чтобы $|f(x)| < |f(0)|$, где:
a) $f(x) = x^5 - 3ix^3 + 4$; b) $f(x) = x^5 - 3x^3 + 4$.

574. Найти x так, чтобы $|f(x)| < |f(1)|$, где:

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$;
b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$;
c) $f(x) = x^4 - 4x + 5$.

575. Доказать, что если $z - i = a(1 - i)$, $0 < a < \frac{1}{2}$, то

$$|f(z)| < \sqrt{5},$$

где

$$f(z) = (1+i)\ z^5 + (3-5i)z^4 - (9+5i)z^3 - \\ - 7(1-i)z^2 + 2(1+3i)z + 4 - i.$$

*576. Доказать, что если $f(z)$ — полином, отличный от постоянной, то в сколь угодно малой окрестности z_0 можно найти z_1 так, что $|f(z_1)| > |f(z_0)|$.

577. Доказать лемму Даламбера для дробной рациональной функции.

578. Доказать, что модуль дробной рациональной функции достигает своей точной нижней границы при изменении независимой переменной в замкнутой прямоугольной области.

579. Очевидно, что теорема о существовании корня неверна для дробной рациональной функции. Так, функция $\frac{1}{z}$ не имеет ни одного корня. Что препятствует «доказательству» теоремы по той же схеме, как для полинома?

*580. Пусть $f(x)$ — полином или дробная рациональная функция. Доказать, что если a является корнем $f(z) - f(a)$ кратности k и $f(a) \neq 0$, то при достаточно малом ρ на окружности $|z - a| = \rho$ найдется $2k$ точек, в которых $|f(z)| = |f(a)|$.

*581. Доказать, что если a является корнем $f(z) - f(a)$ кратности k, то при достаточно малом ρ на окружности $|z - a| = \rho$ найдется $2k$ точек, в которых $\mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}(f(a))$, и $2k$ точек, в которых $\mathrm{Im}(f(z)) = \mathrm{Im}(f(a))$. Здесь $f(z)$ — полином или дробная рациональная функция.

§ 3. Разложение на линейные множители. Разложение на неприводимые множители в поле вещественных чисел. Соотношения между коэффициентами и корнями

582. Разложить на линейные множители полиномы:

a) $x^3-6x^2+11x-6$; b) x^4+4; c) $x^4+4x^3+4x^2+1$;
d) x^4-10x^2+1.

***583.** Разложить на линейные множители полиномы:
a) $\cos(n \arccos x)$;
b) $(x+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(x+\cos\theta-i\sin\theta)^n$;
c) $x^m-C_{2m}^2x^{m-1}+C_{2m}^4x^{m-2}-\ldots+(-1)^m C_{2m}^{2m}$.

584. Разложить на неприводимые вещественные множители полиномы;

a) x^4+4; b) x^6+27; c) $x^4+4x^3+4x^2+1$;
d) $x^{2n}-2x^n+2$; e) x^4-ax^2+1, $-2<a<2$;
f) $x^{2n}+x^n+1$.

585. Построить полиномы наименьшей степени по данным корням:

a) двойной корень 1, простые 2, 3 и $1+i$;
b) тройной корень -1, простые 3 и 4;
c) двойной корень i, простой $-1-i$.

586. Найти полином наименьшей степени, корнями которого являются все корни из 1, степени которых не превосходят n.

587. Построить полином наименьшей степени с вещественными коэффициентами по данным корням:

a) двойной корень 1, простые 2, 3 и $1+i$;
b) тройной корень $2-3i$;
c) двойной корень i, простой $-1-i$.

588. Найти наибольший общий делитель полиномов:

a) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4)$ и $(x-1)^2(x+2)(x+5)$;
b) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ и $(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)$;
c) $(x^3-1)(x^2-2x+1)$ и $(x^2-1)^3$.

***589.** Найти наибольший общий делитель полиномов

$$x^m-1 \text{ и } x^n-1.$$

590. Найти наибольший общий делитель полиномов

$$x^m + a^m \text{ и } x^n + a^n.$$

591. Найти наибольший общий делитель полинома и его производной:

a) $f(x) = (x-1)^3 (x+1)^2 (x-3)$;
b) $f(x) = (x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$;
c) $f(x) = x^{m+n} - x^m - x^n + 1$.

592. Полином $f(x)$ не имеет кратных корней. Доказать, что если x_0 есть корень кратности $k > 1$ для уравнения $f\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = 0$, то уравнение $f\left(\frac{u'(x)}{v'(x)}\right) = 0$ имеет x_0 корнем кратности $k-1$.

Предполагается, что $v(x_0) \neq 0$, $v'(x_0) \neq 0$.

593. Доказать, что $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ делится на $x^2 + x + 1$.

594. Когда $x^{3m} - x^{3n+1} + x^{3p+2}$ делится на $x^2 - x + 1$?

595. При каком условии $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ делится на $x^4 + x^2 + 1$?

596. При каком условии $x^{2m} + x^m + 1$ делится на $x^2 + x + 1$?

597. Доказать, что

$$x^{ka_1} + x^{ka_2+1} + \ldots + x^{ka_k+k-1}$$

делится на $x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + 1$.

598. При каких значениях m $(x+1)^m - x^m - 1$ делится на $x^2 + x + 1$?

599. При каких значениях m $(x+1)^m + x^m + 1$ делится на $x^2 + x + 1$?

600. При каких значениях m $(x+1)^m - x^m - 1$ делится на $(x^2 + x + 1)^2$?

601. При каких значениях m $(x+1)^m + x^m + 1$ делится на $(x^2 + x + 1)^2$?

602. Могут ли полиномы $(x+1)^m + x^m + 1$ и $(x+1)^m - x^m - 1$ делиться на $(x^2 + x + 1)^3$?

603. Преобразовать полином

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} - \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n},$$

придавая x последовательно значения $1, 2, \ldots, n$. (Сравнить с задачей 542.)

604. При каких значениях m $X_n(x^m)$ делится на $X_n(x)$? (X_n — круговой полином.)

Доказать теоремы:

605. Если $f(x^n)$ делится на $x-1$, то делится и на x^n-1.

606. Если $f(x^n)$ делится на $(x-a)^k$, то делится и на $(x^n-a^n)^k$ при $a\neq 0$.

607. Если $F(x)=f_1(x^3)+xf_2(x^3)$ делится на x^2+x+1, то $f_1(x)$ и $f_2(x)$ делятся на $x-1$.

***608.** Если полином $f(x)$ с вещественными коэффициентами удовлетворяет неравенству $f(x)\geqslant 0$ при всех вещественных значениях x, то $f(x)=[\varphi_1(x)]^2+[\varphi_2(x)]^2$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — полиномы с вещественными коэффициентами.

609. Полином $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ имеет корни $x_1, \ldots, x_n$. Какие корни имеют полиномы:

a) $a_0x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}-\ldots+(-1)^n a_n$;

b) $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$;

c) $f(a)+\dfrac{f'(a)}{1}x+\dfrac{f''(a)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$;

d) $a_0x^n+a_1bx^{n-1}+a_2b^2x^{n-2}+\ldots+a_nb^n$?

610. Найти соотношение между коэффициентами кубического уравнения $x^3+px^2+qx+r=0$, при котором один корень равен сумме двух других.

611. Проверить, что один из корней уравнения $36x^3-12x^2-5x+1=0$ равен сумме двух других, и решить уравнение.

612. Найти соотношение между коэффициентами уравнения четвертой степени $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, при котором сумма двух корней равна сумме двух других корней.

613. Доказать, что уравнение, удовлетворяющее условию задачи 612, приводится к биквадратному подстановкой $x=y+\alpha$ при надлежащем выборе α.

614. Найти соотношение между коэффициентами уравнения 4-й степени $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, при выполнении которого произведение двух корней равно произведению двух других корней.

615. Доказать, что уравнение, удовлетворяющее условию задачи 614, решается посредством деления на x^2 и подстановкой $y=x+\dfrac{c}{ax}$ (при $a\neq 0$).

616. Решить уравнения:

a) $x^4-4x^3+5x^2-2x-6=0$;

b) $x^4+2x^3+2x^2+10x+25=0$;

c) $x^4+2x^3+3x^2+2x-3=0$;

d) $x^4+x^3-10x^2-2x+4=0$,

используя задачи 612—615.

617. Определить λ так, чтобы один из корней уравнения $x^3-7x+\lambda=0$ равнялся удвоенному другому.

618. Определить a, b, c так, чтобы они были корнями уравнения

$$x^3-ax^2+bx-c=0.$$

619. Определить a, b, c так, чтобы они были корнями уравнения

$$x^3+ax^2+bx+c=0.$$

620. Сумма двух корней уравнения

$$2x^3-x^2-7x+\lambda=0$$

равна 1. Определить λ.

621. Определить соотношение между коэффициентами уравнения $x^3+px+q=0$, при выполнении которого $x_3=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

622. Найти сумму квадратов корней полинома

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n.$$

***623.** Решить уравнение

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0,$$

зная коэффициенты a_1 и a_2 и зная, что корни его образуют арифметическую прогрессию.

624. Образуют ли корни уравнений:

a) $8x^3-12x^2-2x+3=0$;

b) $2x^4+8x^3+7x^2-2x-2=0$

арифметические прогрессии?

625. Дана кривая

$$y=x^4+ax^3+bx^2+cx+d.$$

Найти прямую так, чтобы точки пересечения M_1, M_2, M_3, M_4 ее с кривой отсекали три равных отрезка: $M_1M_2=M_2M_3=M_3M_4$. При каком условии эта задача имеет решение?

***626.** Составить уравнение 4-й степени, корнями которого являются α, $\frac{1}{\alpha}$, $-\alpha$, $-\frac{1}{\alpha}$.

***627.** Составить уравнение 6-й степени, имеющее корни:

$$\alpha,\ \frac{1}{\alpha},\ 1-\alpha,\ \frac{1}{1-\alpha},\ 1-\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}.$$

628. Пусть $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$. Найти $f'(x_i)$, $f''(x_i)$ и доказать, что

$$\frac{\partial f'(x_i)}{\partial x_i}=\frac{1}{2}f''(x_i).$$

629. Доказать, что если $f(x_1)=f''(x_1)=0$, но $f'(x_1)\neq 0$, то

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x_1-x_i}=0.$$

630. Корни полинома $x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ образуют арифметическую прогрессию. Определить $f'(x_i)$.

§ 4. Алгорифм Евклида

631. Определить наибольший общий делитель полиномов:

a) $x^4+x^3-3x^2-4x-1$ и x^3+x^2-x-1;
b) $x^5+x^4-x^3-2x-1$ и $3x^4+2x^3+x^2+2x-2$;
c) $x^6-7x^4+8x^3-7x+7$ и $3x^5-7x^3+3x^2-7$;
d) $x^5-2x^4+x^3+7x^2-12x+10$
и $3x^4-6x^3+5x^2+2x-2$;
e) $x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5$ и x^5+x^2-x+1;
f) $x^5+3x^4-12x^3-52x^2-52x-12$ и
$x^4+3x^3-6x^2-22x-12$;
g) $x^5+x^4-x^3-3x^2-3x-1$
и $x^4-2x^3-x^2-2x+1$;
h) x^4-10x^2+1 и $x^4-4\sqrt{2}\,x^3+6x^2+4\sqrt{2}\,x+1$;
i) $x^4+7x^3+19x^2+23x+10$
и $x^4+7x^3+18x^2+22x+12$;
j) x^4-4x^3+1 и x^3-3x^2+1;
k) $2x^6-5x^5-14x^4+36x^3+86x^2+12x-31$ и
$2x^5-9x^4+2x^3+37x^2+10x-14$;
l) $3x^6-x^5-9x^4-14x^3-11x^2-3x-1$ и
$3x^5+8x^4+9x^3+15x^2+10x+9$.

632. Пользуясь алгорифмом Евклида, подобрать полиномы $M_1(x)$ и $M_2(x)$ так, чтобы $f_1(x)M_2(x)+f_2(x)M_1(x)=\delta(x)$, где $\delta(x)$ — наибольший общий делитель $f_1(x)$ и $f_2(x)$:

a) $f_1(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$,
$f_2(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$;
b) $f_1(x)=x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$,
$f_2(x)=x^4+2x^3+x+2$;

c) $f_1(x)=x^6-4x^5+11x^4-27x^3+37x^2-35x+35$,
$f_2(x)=x^5-3x^4+7x^3-20x^2+10x-25$;
d) $f_1(x)=3x^7+6x^6-3x^5+4x^4+14x^3-6x^2-4x+4$,
$f_2(x)=3x^6-3x^4+7x^3-6x+2$;
e) $f_1(x)=3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$,
$f_2(x)=3x^4-4x^3-x^2-x-2$;
f) $f_1(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$,
$f_2(x)=2x^3-x^2-5x+4$.

633. Пользуясь алгорифмом Евклида, подобрать полиномы $M_1(x)$ и $M_2(x)$, так, чтобы $f_1(x)M_2(x)+f_2(x)M_1(x)=1$:

a) $f_1(x)=3x^3-2x^2+x+2$, $f_2(x)=x^2-x+1$;
b) $f_1(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$, $f_2(x)=x^2-x-1$;
c) $f_1(x)=x^5-5x^4-2x^3+12x^2-2x+12$,
$f_2(x)=x^3-5x^2-3x+17$;
d) $f_1(x)=2x^4+3x^3-3x^2-5x+2$,
$f_2(x)=2x^3+x^2-x-1$;
e) $f_1(x)=3x^4-5x^3+4x^2-2x+1$,
$f_2(x)=3x^3-2x^2+x-1$;
f) $f_1(x)=x^5+5x^4+9x^3+7x^2+5x+3$,
$f_2(x)=x^4+2x^3+2x^2+x+1$.

634. Способом неопределенных коэффициентов подобрать $M_1(x)$ и $M_2(x)$ так, чтобы $f_1(x)M_2(x)+f_2(x)M_1(x)=1$:

a) $f_1(x)=x^4-4x^3+1$, $f_2(x)=x^3-3x^2+1$;
b) $f_1(x)=x^3$, $f_2(x)=(1-x)^2$;
c) $f_1(x)=x^4$, $f_2(x)=(1-x)^4$.

635. Подобрать полиномы наименьшей степени $M_1(x)$, $M_2(x)$ так, чтобы

a) $(x^4-2x^3-4x^2+6x+1)M_1(x)+$
$+(x^3-5x-3)M_2(x)=x^4$;
b) $(x^4+2x^3+x+1)M_1(x)+$
$+(x^4+x^3-2x^2+2x-1)M_2(x)=x^3-2x$.

636. Определить полином наименьшей степени, дающий в остатке:

a) $2x$ при делении на $(x-1)^2$ и $3x$ при делении на $(x-2)^3$;
b) x^2+x+1 при делении на $x^4-2x^3-2x^2+10x-7$ и $2x^2-3$ при делении на $x^4-2x^3-3x^2+13x-10$.

***637.** Найти полиномы $M(x)$ и $N(x)$ так, чтобы

$$x^m M(x) + (1-x)^n N(x) = 1.$$

638. Пусть $f_1(x) M(x) + f_2(x) N(x) = \delta(x)$, где $\delta(x)$ — наибольший общий делитель $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Чему равен наибольший общий делитель $M(x)$ и $N(x)$?

639. Отделить кратные множители полиномов:

a) $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$;
b) $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$;
c) $x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$;
d) $x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 20x - 8$;
e) $x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$;
f) $x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1$;
g) $x^8 + 2x^7 + 5x^6 + 6x^5 + 8x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 2x + 1$.

§ 5. Интерполяционная задача и дробная рациональная функция

640. Пользуясь способом Ньютона, построить полином наименьшей степени по данной таблице значений:

a) $\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f(x) & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{array}$; b) $\begin{array}{c|ccccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f(x) & 6 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{array}$;

c) $\begin{array}{c|cccc} x & 1 & \frac{9}{4} & 4 & \frac{25}{4} \\ \hline f(x) & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \end{array}$, найти $f(2)$; d) $\begin{array}{c|ccccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ \hline f(x) & 5 & 6 & 1 & -4 & 10 \end{array}$.

641. Построить полином по заданной таблице значений, пользуясь формулой Лагранжа:

a) $\begin{array}{c|cccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}$; b) $\begin{array}{c|cccc} x & 1 & i & -1 & -i \\ \hline y & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$.

***642.** Найти $f(x)$ по таблице значений:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_{n-1} \\ \hline f(x) & 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{array}, \quad \varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}.$$

643. Полином $f(x)$, степень которого не превосходит $n-1$, принимает значения $y_1, y_2, \dots, y_n$ в корнях n-й степени из 1. Найти $f(0)$.

***644.** Доказать теорему: для того чтобы

$$f(x) = \frac{1}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)\right]$$

для любого полинома $f(x)$, степень которого не превосходит $n-1$, необходимо и достаточно, чтобы точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ были расположены на окружности с центром в x_0 и делили ее на равные части.

***645.** Доказать, что если корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ полинома $\varphi(x)$ все различны, то

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^s}{\varphi'(x_i)} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant n-2.$$

646. Найти сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^{n-1}}{\varphi'(x_i)}$ (обозначения такие же, как и в задаче 645).

647. Вывести интерполяционную формулу Лагранжа посредством решения системы уравнений:

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_{n-1}x_1^{n-1} &= y_1, \\
a_0 + a_1x_2 + \ldots + a_{n-1}x_2^{n-1} &= y_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots \\
a_0 + a_1x_n + \ldots + a_{n-1}x_n^{n-1} &= y_n.
\end{aligned}$$

***648.** Построить полином наименьшей степени по таблице значений

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & 1 & 2 & \ldots & n \\ \hline y & 1 & 2 & 4 & \ldots & 2^n \end{array}.$$

***649.** Построить полином наименьшей степени по таблице значений

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & 1 & 2 & \ldots & n \\ \hline y & 1 & a & a^2 & \ldots & a^n \end{array}.$$

***650.** Найти полином степени $2n$, дающий при делении на $x(x-2)\ldots(x-2n)$ в остатке 1, а при делении на $(x-1)(x-3)\ldots[x-(2n-1)]$ в остатке -1.

***651.** Построить полином наименьшей степени по таблице значений

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \hline y & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots & \frac{1}{n} \end{array}.$$

***652.** Найти полином не выше $(n-1)$-й степени, удовлетворяющий условию $f(x) = \frac{1}{x-a}$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x_i \neq a$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

***653.** Доказать, что полином степени $k \leqslant n$, принимающий целые значения при $n+1$ последовательных целых значениях независимой переменной, принимает целые значения при всех целых значениях независимой переменной.

***654.** Доказать, что полином степени n, принимающий целые значения при $x=0, 1, 4, 9, \ldots, n^2$, принимает целые значения при всех квадратах натуральных чисел.

***655.** Разложить на простейшие дроби первого вида:

a) $\frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; b) $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$;

c) $\frac{3+x}{(x-1)(x^2+1)}$; d) $\frac{x^2}{x^4-1}$; e) $\frac{1}{x^3-1}$;

f) $\frac{1}{x^4+4}$; g) $\frac{1}{x^n-1}$; h) $\frac{1}{x^n+1}$;

i) $\frac{n!}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}$;

j) $\frac{(2n)!}{x(x^2-1)(x^2-4)\ldots(x^2-n^2)}$; k) $\frac{1}{\cos(n \arccos x)}$.

***656.** Разложить на вещественные простейшие дроби первого и второго вида:

a) $\frac{1}{x^3-1}$; b) $\frac{x^2}{x^4-16}$; c) $\frac{1}{x^4+4}$; d) $\frac{x^2}{x^6+27}$;

e) $\frac{x^m}{x^{2n+1}-1}$, $m<2n+1$;

f) $\frac{x^m}{x^{2n+1}+1}$, $m<2n+1$;

g) $\frac{1}{x^{2n}-1}$; h) $\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$, $m<n$;

i) $\frac{1}{x(x^2+1)(x^2+4)\ldots(x^2+n^2)}$.

***657.** Разложить на простейшие дроби первого вида:

a) $\frac{x}{(x^2-1)^2}$; b) $\frac{1}{(x^2-1)^2}$; c) $\frac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}$;

d) $\frac{1}{(x^n-1)^2}$; e) $\frac{1}{x^m(1-x)^n}$; f) $\frac{1}{(x^2-a^2)^n}$, $a \neq 0$;

g) $\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$; h) $\frac{g(x)}{[f(x)]^2}$,

где $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ — полином, не имеющий кратных корней, и $g(x)$ — полином, степень которого меньше $2n$.

658. Разложить на вещественные простейшие дроби первого и второго вида:

a) $\frac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}$; b) $\frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$;

c) $\frac{1}{(x^4-1)^2}$; d) $\frac{1}{(x^{2n}-1)^2}$.

659. Пусть $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

Выразить через $\varphi(x)$ суммы:

a) $\sum\frac{1}{x-x_i}$; b) $\sum\frac{x_i}{x-x_i}$; c) $\sum\frac{1}{(x-x_i)^2}$.

***660.** Вычислить следующие суммы, зная, что $x_1, x_2, \ldots$ суть корни полинома $\varphi(x)$:

a) $\frac{1}{2-x_1}+\frac{1}{2-x_2}+\frac{1}{2-x_3}$, $\quad\varphi(x)=x^3-3x-1$;

b) $\frac{1}{x_1^2-3x_1+2}+\frac{1}{x_2^2-3x_2+2}+\frac{1}{x_3^2-3x_3+2}$,

$\varphi(x)=x^3+x^2-4x+1$;

c) $\frac{1}{x_1^2-2x_1+1}+\frac{1}{x_2^2-2x_2+1}+\frac{1}{x_3^2-2x_3+1}$,

$\varphi(x)=x^3+x^2-1$.

661. Определить полином первой степени, приближенно принимающий таблицу значений

x	0	1	2	3	4
y	2,1	2,5	3,0	3,6	4,1

так, чтобы сумма квадратов погрешностей была наименьшей.

662. Определить полином второй степени, приближенно принимающий таблицу значений

x	0	1	2	3	4
y	1	1,4	2	2,7	3,6

так, чтобы сумма квадратов погрешностей была наименьшей.

§ 6. Рациональные корни полиномов. Приводимость и неприводимость в поле рациональных чисел

663. Доказать, что если $\frac{p}{q}$ — несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем полинома $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ с целыми коэффициентами, то:

1) q есть делитель a_0;

2) p есть делитель a_n;

8) $p-mq$ есть делитель $f(m)$ при любом целом m. В частности, $p-q$ есть делитель $f(1)$, $p+q$ — делитель $f(-1)$.

664. Найти рациональные корни полиномов:

a) $x^3-6x^2+15x-14$; b) $x^4-2x^3-8x^2+13x-24$;
c) $x^5-7x^3-12x^2+6x+36$;
d) $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12$;
e) $24x^4-42x^3-77x^2+56x+60$;
f) $x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6$;
g) $24x^5+10x^4-x^3-19x^2-5x+6$;
h) $10x^4-13x^3+15x^2-18x-24$;
i) $x^4+2x^3-13x^2-38x-24$;
k) $2x^3+3x^2+6x-4$; l) $4x^4-7x^2-5x-1$;
m) $x^4+4x^3-2x^2-12x+9$;
n) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$;
o) $x^6-6x^5+11x^4-x^3-18x^2+20x-8$.

***665.** Доказать, что полином $f(x)$ с целыми коэффициентами не имеет целых корней, если $f(0)$ и $f(1)$ — нечетные числа.

***666.** Доказать, что если полином с целыми коэффициентами принимает значения ± 1 при двух целых значениях x_1 и x_2 независимой переменной, то он не имеет рациональных корней, если $|x_1-x_2|>2$. Если же $|x_1-x_2|\leqslant 2$, то рациональным корнем может быть только $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$.

***667.** Доказать неприводимость полиномов, пользуясь признаком Эйзенштейна:

a) $x^4-8x^3+12x^2-6x+2$;
b) $x^5-12x^3+36x-12$; c) x^4-x^3+2x+1.

***668.** Доказать неприводимость полинома

$$X_p(x)=\frac{x^p-1}{x-1},\quad p \text{ — простое число.}$$

***669.** Доказать неприводимость полинома

$$X_{p^k}(x)=\frac{x^{p^k}-1}{x^{p^{k-1}}-1},\quad p \text{ — простое число.}$$

***670.** Доказать, что полином $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ с целыми коэффициентами, не имеющий рациональных корней, неприводим, если существует такое простое число p, что a_0 не делится на p, a_2, a_3, ..., a_n делятся на p и a_n не делится на p^2.

***671.** Пусть $f(x)$ — полином с целыми коэффициентами, для которого существует такое простое число p, что a_0 не делится на p, $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ делятся на p и a_n не делится на p^2. Доказать, что тогда $f(x)$ имеет неприводимый множитель степени $\geqslant n-k$.

672. Методом разложения на множители значений полинома при целых значениях переменной разложить на множители полиномы или доказать их неприводимость:

a) x^4-3x^2+1; b) $x^4+5x^3-3x^2-5x+1$;
c) $x^4+3x^3-2x^2-2x+1$; d) $x^4-x^3-3x^2+2x+2$.

673. Доказать, что полином третьей степени неприводим, если он не имеет рациональных корней.

674. Доказать, что полином четвертой степени $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ с целыми коэффициентами неприводим, если он не имеет целых корней и не делится ни на один из полиномов вида

$$x^2+\frac{cm-am^2}{d-m^2}x+m,$$

где m — делители числа d. Полиномы с дробными коэффициентами можно не принимать во внимание. Исключение могут представить полиномы, «сходные с возвратными» (задачи 614—615).

675. Доказать, что полином пятой степени $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ с целыми коэффициентами неприводим, если он не имеет целых корней и не делится ни на один из полиномов с целыми коэффициентами вида

$$x^2+\frac{am^3-cm^2-dn+be}{m^3-n^2+ae-dm}x+m,$$

где m — делитель e, $n=\frac{e}{m}$.

676. Разложить на множители полиномы или доказать их неприводимость, пользуясь задачами 674, 675:

a) $x^4-3x^3+2x^2+3x-9$; b) $x^4-3x^3+2x^2+2x-6$;
c) $x^4+4x^3-6x^2-23x-12$;
d) $x^5+x^4-4x^3+9x^2-6x+6$.

677. Найти необходимые и достаточные условия приводимости полинома x^4+px^2+q с рациональными (быть может дробными) коэффициентами.

678. Доказать, что для приводимости полинома четвертой степени, не имеющего рациональных корней, необходимо (но не достаточно) существование рационального корня кубического уравнения, получающегося при решении по способу Феррари.

***679.** Доказать неприводимость полинома $f(x)=(x-a_1)\times\times(x-a_2)\dots(x-a_n)-1$; $a_1, a_2, \dots a_n$ — различные между собой целые числа.

***680.** Доказать неприводимость полинома $f(x)=(x-a_1)\times\times(x-a_2)\dots(x-a_n)+1$ при различных между собой целых $a_1, a_2, \dots, a_n$ за исключениями

$$(x-a)(x-a-1)(x-a-2)(x-a-3)+1=$$
$$=[(x-a-1)(x-a-2)-1]^2$$

и

$$(x-a)(x-a-2)+1=(x-a-1)^2.$$

***681.** Доказать, что если полином n-й степени с целыми коэффициентами принимает значения ± 1 более чем при $2m$ целых значениях переменной ($n=2m$ или $2m+1$), то он неприводим.

***682.** Доказать неприводимость полинома

$$f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2+1,$$

если $a_1, a_2, \dots, a_n$ — различные между собой целые числа.

***683.** Доказать, что полином $f(x)$ с целыми коэффициентами, принимающий значение $+1$ более чем при трех целых значениях независимой переменной, не может принимать значение -1 при целых значениях независимой переменной.

***684.** Доказать, что полином n-й степени с целыми коэффициентами, принимающий значения ± 1 более чем при $\frac{n}{2}$ целых значениях независимой переменной, неприводим при $n \geqslant 12$.

***685.** Доказать, что если полином с целыми коэффициентами ax^2+bx+1 неприводим, то неприводим и полином $a[\varphi(x)]^2+b\varphi(x)+1$, где $\varphi(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$ при $n \geqslant 7$. Здесь $a_1, a_2, \dots, a_n$ — целые, различные между собой числа.

§ 7. Границы корней полинома

686. Доказать, что корни полинома $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots$ $\ldots+a_n$ с вещественными или комплексными коэффициентами не превосходят по модулю:

a) $1+\max\left|\frac{a_k}{a_0}\right|$, $k=1, 2, \ldots, n$;

b) $\rho+\max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-1}}\right|$,

$k=1, 2, \ldots, n$, ρ — любое положительное число;

c) $2\max\sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$, $k=1, 2, \ldots, n$;

d) $\left|\frac{a_1}{a_0}\right|+\max\sqrt[k-1]{\left|\frac{a_k}{a_1}\right|}$, $k=1, 2, \ldots, n$.

687. Доказать, что модули корней полинома a_0x^n+ $+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ не превосходят единственного положительного корня уравнения $b_0x^n-b_1x^{n-1}-b_2x^{n-2}-\ldots-b_n$, где $0<b_0\leqslant|a_0|$, $b_1\geqslant|a_1|$, $b_2\geqslant|a_2|$, $\ldots$, $b_n\geqslant|a_n|$.

688. Доказать, что модули корней полинома $f(x)=a_0x^n+$ $+a_rx^{n-r}+\ldots+a_n$, $a_r\neq 0$, не превосходят:

a) $1+\sqrt[r]{\max\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$, $k=r, \ldots, n$;

b) $\rho+\sqrt[r]{\max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-r}}\right|}$,

$k=r, \ldots, n$, ρ — любое положительное число;

c) $\sqrt[r]{\left|\frac{a_r}{a_0}\right|}+\max\sqrt[k-r]{\left|\frac{a_k}{a_r}\right|}$, $k=r, \ldots, n$.

689. Доказать, что вещественные корни полинома с вещественными коэффициентами не превосходят единственного неотрицательного корня полинома, который получается из данного выбрасыванием всех членов, кроме старшего, коэффициенты при которых имеют знак, совпадающий со знаком старшего коэффициента.

Доказать теоремы:

690. Вещественные корни полинома $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots$ $\ldots+a_n$ с вещественными коэффициентами (при $a_0>0$) не превосходят:

a) $1+\sqrt[r]{\max\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$, где r — номер первого отрицательного коэффициента, a_k — отрицательные коэффициенты полинома;

b) $\rho+\sqrt[r]{\max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-r}}\right|}$, r — номер первого отрицательного коэффициента, a_k — отрицательные коэффициенты, ρ — любое положительное число;

c) $2\max\sqrt[k]{\frac{|a_k|}{a_0}}$, a_k — отрицательные коэффициенты полинома;

d) $\sqrt[r]{\frac{|a_r|}{a_0}}+\max\sqrt[k-r]{\left|\frac{a_k}{a_r}\right|}$, r — номер первого отрицательного коэффициента, a_k — отрицательные коэффициенты.

691. Если все коэффициенты полинома $f(x)$ неотрицательны, то полином не имеет положительных корней.

692. Если $f(a)>0$, $f'(a)\geqslant 0$, $\ldots$, $f^{(n)}(a)\geqslant 0$, то все вещественные корни полинома не превосходят a.

693. Ограничить сверху и снизу вещественные корни полиномов:

a) $x^4-4x^3+7x^2-8x+3$; b) x^5+7x^3-3;
c) $x^7-108x^5-445x^3+900x^2+801$;
d) $x^4+4x^3-8x^2-10x+14$.

§ 8. Теорема Штурма

694. Составить полиномы Штурма и отделить корни полиномов:

a) x^3-3x-1; b) x^3+x^2-2x-1;
c) x^3-7x+7; d) x^3-x+5; e) x^3+3x-5.

695. Составить полиномы Штурма и отделить корни полиномов:

a) $x^4-12x^2-16x-4$; b) x^4-x-1;
c) $2x^4-8x^3+8x^2-1$; d) x^4+x^2-1;
e) $x^4+4x^3-12x+9$.

696. Составить полиномы Штурма и отделить корни полиномов:

a) $x^4-2x^3-4x^2+5x+5$; b) $x^4-2x^3+x^2-2x+1$;
c) $x^4-2x^3-3x^2+2x+1$; d) $x^4-x^3+x^2-x-1$;
e) $x^4-4x^3-4x^2+4x+1$.

697. Составить ряд Штурма и отделить корни полиномов:

a) $x^4-2x^3-7x^2+8x+1$; b) x^4-4x^2+x+1;
c) $x^4-x^3-x^2-x+1$; d) $x^4-4x^3+8x^2-12x+8$;
e) x^4-x^3-2x+1.

698. Составить ряд Штурма и отделить корни полиномов:

a) x^4-6x^2-4x+2; b) $4x^4-12x^2+8x-1$;
c) $3x^4+12x^3+9x^2-1$; d) $x^4-x^3-4x^2+4x+1$;
e) $9x^4-126x^2-252x-140$.

699. Составить ряд Штурма и отделить корни полиномов:

a) $2x^5-10x^3+10x-3$;
b) $x^6-3x^5-3x^4+11x^3-3x^2-3x+1$;
c) $x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1$; d) $x^5-5x^3-10x^2+2$.

700. Составить ряд Штурма, используя право делить функции Штурма на положительные величины, и отделить корни полиномов:

a) x^4+4x^2-1; b) $x^4-2x^3+3x^2-9x+1$;
c) $x^4-2x^3+2x^2-6x+1$;
d) $x^5+5x^4+10x^2-5x-3$.

701. Пользуясь теоремой Штурма, определить число вещественных корней уравнения $x^3+px+q=0$ при вещественных p и q.

***702.** **Определить число вещественных корней уравнения**

$$x^n+px+q=0.$$

703. Определить число вещественных корней уравнения

$$x^5-5ax^3+5a^2x+2b=0.$$

704. Доказать, что если ряд Штурма содержит полиномы всех степеней от нулевой до n-й, то число перемен знака в ряду старших коэффициентов полиномов Штурма равно числу пар сопряженных комплексных корней исходного полинома.

705. Доказать, что если полиномы $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$ обладают свойствами:

1) $f(x)f_1(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через корень $f(x)$;

2) два рядом стоящих полинома не обращаются в нуль одновременно;

3) если $f_\lambda(x_0)=0$, то $f_{\lambda-1}(x_0)$ и $f_{\lambda+1}(x_0)$ имеют противоположные знаки;

4) последний полином $f_k(x)$ не меняет знака в интервале (a, b),— то число корней полинома $f(x)$ в интервале (a, b) равно приращению числа перемен знака в ряду значений полиномов $f, f_1, \ldots, f_k$ при переходе от a к b.

706. Пусть x_0—вещественный корень $f'(x)$:

$$f_1(x)=\frac{1}{x-x_0}f'(x);$$

$f_2(x)$ есть остаток при делении $f(x)$ на $f_1(x)$, взятый с обратным знаком; $f_3(x)$—остаток при делении $f_1(x)$ на $f_2(x)$, взятый с обратным знаком, и т. д. Предполагается, что $f(x)$ не имеет кратных корней. Связать число вещественных корней $f(x)$ с числом перемен знака в ряду значений построенных полиномов при $x=-\infty$, $x=x_0$ и $x=+\infty$.

***707.** Построить ряд Штурма для полиномов Эрмита

$$P_n(x)=(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$$

и определить число вещественных корней.

***708.** Определить число вещественных корней полиномов Лагерра

$$P_n(x)=(-1)^n e^x \frac{d^n(e^{-x}x^n)}{dx^n}.$$

Определить число вещественных корней полиномов:

***709.** $E_n(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$.

***710.** $P_n(x)=(-1)^{n+1}x^{2n+2}e^{-\frac{1}{x}}\frac{d^{n+1}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^{n+1}}$.

***711.** $P_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}(x^2+1)^{n+1}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$.

*712. $P_n(x) = (-1)^n (x^2+1)^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

*713. Пусть $f(x)$ — полином третьей степени, не имеющий кратных корней. Показать, что полином $F(x) = 2f(x)f''(x) - [f'(x)]^2$ имеет два и только два вещественных корня. Исследовать случаи, когда $f(x)$ имеет двойной или тройной корень.

714. Доказать, что если все корни полинома $f(x)$ вещественны и различны, то все корни каждого из полиномов ряда Штурма, составленного посредством алгорифма Евклида, вещественные и различные.

§ 9. Различные теоремы о распределении корней полинома

Доказать следующие теоремы:

715. Все корни полинома Лежандра $P_n(x) = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ вещественны, различны и заключены в интервале $(-1, +1)$.

716. Если все корни полинома $f(x)$ вещественны, то все корни полинома $\lambda f(x) + f'(x)$ вещественны при любом вещественном λ.

*717. Если все корни полинома $f(x)$ вещественны и все корни полинома $g(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ вещественны, то все корни полинома

$$F(x) = a_0 f(x) + a_1 f'(x) + \ldots + a_n f^{(n)}(x)$$

вещественны.

*718. Если все корни полинома $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ вещественны, то все корни полинома

$$a_0x^n + a_1 m x^{n-1} + a_2 m(m-1)x^{n-2} + \ldots \\ \ldots + a_n m(m-1)\ldots(m-n+1)$$

вещественны при любом целом положительном m.

*719. Если все корни полинома $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ вещественны, то все корни полинома

$$G(x) = a_0x^n + C_n^1 a_1 x^{n-1} + C_n^2 a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

вещественны.

720. Доказать вещественность всех корней полинома

$$x^n + \left(\frac{n}{1}\right)^2 x^{n-1} + \left(\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\right)^2 x^{n-2} + \ldots + 1.$$

***721.** Определить число вещественных корней полинома

$$nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - 1.$$

722. Определить число вещественных корней полинома

$$x^{2n_1+1} + x^{2n_2+1} + \ldots + x^{2n_k+1} + a.$$

723. Определить число вещественных корней полинома $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) - A^2(x-a) - B^2(x-b) - C^2(x-c)$ при вещественных a, b, c, A, B, C.

724. Доказать, что

$$\varphi(x) = \frac{A_1^2}{x-a_1} + \frac{A_2^2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n^2}{x-a_n} + B$$

не имеет мнимых корней при вещественных a_1, a_2, $\ldots$, a_n, A_1, A_2, $\ldots$, A_n, B.

Доказать следующие теоремы:

725. Если полином $f(x)$ имеет вещественные различные корни, то $[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)$ не имеет вещественных корней.

726. Если корни полиномов $f(x)$ и $\varphi(x)$ все вещественные, простые и разделяются, т. е. между любыми двумя корнями $f(x)$ есть корень $\varphi(x)$ и между любыми двумя корнями $\varphi(x)$ есть корень $f(x)$, то все корни уравнения $\lambda f(x) + \mu\varphi(x) = 0$ вещественны при любых вещественных λ и μ.

***727.** Если все корни полиномов $F(x) = \lambda f(x) + \mu\varphi(x)$ вещественны при любых вещественных λ и μ, то корни полиномов $f(x)$ и $\varphi(x)$ разделяются.

***728.** Если $f'(x)$ имеет все корни вещественные и различные и $f(x)$ не имеет кратных корней, то число вещественных корней полинома $[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)$ равно числу мнимых корней полинома $f(x)$.

***729.** Если корни полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ все вещественные и разделяются, то корни их производных разделяются.

***730.** Если все корни полинома $f(x)$ вещественны, то все корни полинома $F(x) = \gamma f(x) + (\lambda + x) f'(x)$ вещественны при $\gamma > 0$ или $\gamma < -n$ и при любом вещественном λ.

***731.** Если полином

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

имеет только вещественные корни, а полином

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_k x^k$$

имеет вещественные корни, не содержащиеся в интервале $(0, n)$, то все корни полинома

$$a_0\varphi(0)+a_1\varphi(1)x+a_2\varphi(2)x^2+\ldots+a_n\varphi(n)x^n$$

вещественны.

***732.** Если все корни полинома $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ вещественны, то все корни полинома $a_0+a_1\gamma x+a_2\gamma(\gamma-1)x^2+\ldots+a_n\gamma(\gamma-1)\ldots(\gamma-n+1)x^n$ вещественны при $\gamma>n-1$.

***733.** Если все корни полинома $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ вещественны, то вещественны все корни полинома

$$a_0+\frac{\gamma}{\alpha}a_1x+\frac{\gamma(\gamma-1)}{\alpha(\alpha+1)}a_2x^2+\ldots+\frac{\gamma(\gamma-1)\ldots(\gamma-n+1)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}a_nx^n$$

при $\gamma>n-1$, $\alpha>0$.

***734.** Если все корни полинома $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ вещественны, то все корни полинома

$$a_0+a_1wx+a_2w^4x^2+\ldots+a_nw^{n^2}x^n$$

вещественны при $0<w\leqslant 1$.

***735.** Если все корни полинома $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ вещественны и одного знака, то все корни полинома $a_0\cos\varphi+a_1\cos(\varphi+\theta)x+a_2\cos(\varphi+2\theta)x^2+\ldots+a_n\cos(\varphi+n\theta)x^n$ вещественны.

***736.** Если все корни полинома

$$(a_0+ib_0)+(a_1+ib_1)x+\ldots+(a_n+ib_n)x^n$$

лежат в верхней полуплоскости, то все корни полиномов

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \text{ и } b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n$$

вещественны и разделяются (числа $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ вещественны).

***737.** Если все корни полиномов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ вещественны и разделяются, то мнимые части корней $\varphi(x)+i\psi(x)$ имеют одинаковые знаки.

***738.** Если все корни полинома $f(x)$ лежат в верхней полуплоскости, то и все корни его производной находятся в верхней полуплоскости.

***739.** Если все корни полинома $f(x)$ расположены в некоторой полуплоскости, то все корни производной расположены в той же полуплоскости.

***740.** Корни производной полинома $f(x)$ заключены внутри любого выпуклого контура, содержащего внутри себя все корни полинома $f(x)$.

***741.** Если $f(x)$ — полином степени n с вещественными корнями, то все корни уравнения $[f(x)]^2 + k^2 [f'(x)]^2 = 0$ имеют мнимую часть, меньшую kn по абсолютной величине.

742. Если все корни полиномов $f(x) - a$ и $f(x) - b$ вещественны, то все корни полинома $f(x) - \lambda$ вещественны, если λ заключено между a и b.

***743.** Для того чтобы вещественные части всех корней полинома $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ с вещественными коэффициентами были одного знака, необходимо и достаточно, чтобы корни полиномов

$$x^n - a_2 x^{n-2} + a_4 x^{n-4} - \ldots$$

и

$$a_1 x^{n-1} - a_3 x^{n-3} + \ldots$$

были все вещественны и разделялись.

***744.** Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы вещественные части всех корней уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ с вещественными коэффициентами были отрицательными.

***745.** Найти необходимые и достаточные условия для отрицательности вещественных частей всех корней уравнения $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ с вещественными коэффициентами.

***746.** Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы все корни уравнения с вещественными коэффициентами $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ не превосходили по модулю единицы.

***747.** Доказать, что если $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$, то все корни полинома $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ не превосходят по модулю единицы.

§ 10. Приближенное вычисление корней полинома

748. Вычислить с точностью до 0,0001 корень уравнения $x^3 - 3x^2 - 13x - 7 = 0$, содержащийся в промежутке $(-1, 0)$.

749. Вычислить с точностью до 0,000001 вещественный корень уравнения $x^3 - 2x - 5 = 0$.

750. Вычислить с точностью до 0,0001 вещественные корни уравнений:

a) $x^3 - 10x - 5 = 0$; b) $x^3 + 2x - 30 = 0$;

c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$; d) $x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$.

751. Полусферу радиуса 1 разделить на две равновеликие части плоскостью, параллельной основанию.

752. Вычислить с точностью до 0,0001 положительный корень уравнения $x^3-5x-3=0$.

753. Вычислить с точностью до 0,0001 корень уравнения:

a) $x^4+3x^3-9x-9=0$, содержащийся в промежутке $(1, 2)$;

b) $x^4-4x^3+4x^2-4=0$, содержащийся в промежутке $(-1, 0)$;

c) $x^4+3x^3+4x^2+x-3=0$, содержащийся в промежутке $(0, 1)$;

d) $x^4-10x^2-16x+5=0$, содержащийся в промежутке $(0, 1)$;

e) $x^4-x^3-9x^2+10x-10=0$, содержащийся в промежутке $(-4, -3)$;

f) $x^4-6x^2+12x-8=0$, содержащийся в промежутке $(1, 2)$;

g) $x^4-3x^2+4x-3=0$, содержащийся в промежутке $(-3, -2)$;

h) $x^4-x^3-7x^2-8x-6=0$, содержащийся в промежутке $(3, 4)$.

i) $x^4-3x^3+3x^2-2=0$, содержащийся в промежутке $(1, 2)$.

754. Вычислить с точностью до 0,0001 вещественные корни уравнений:

a) $x^4+3x^3-4x-1=0$;
b) $x^4+3x^3-x^2-3x+1=0$;
c) $x^4-6x^3+13x^2-10x+1=0$;
d) $x^4-8x^3-2x^2+16x-3=0$;
e) $x^4-5x^3+9x^2-5x-1=0$;
f) $x^4-2x^3-6x^2+4x+4=0$;
g) $x^4+2x^3+3x^2+2x-2=0$;
h) $x^4+4x^3-4x^2-16x-8=0$.

ГЛАВА 6

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Выражение симметрических функций через основные. Вычисление симметрических функций от корней алгебраического уравнения

755. Выразить через основные симметрические полиномы:

a) $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$;
b) $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$;
c) $x_1^4+x_2^4+x_3^4-2x_1^2x_2^2-2x_2^2x_3^2-2x_3^2x_1^2$;
d) $x_1^5x_2^2+x_1^2x_2^5+x_1^5x_3^2+x_1^2x_3^5+x_2^5x_3^2+x_2^2x_3^5$;
e) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$;
f) $(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)$;
g) $(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)$;
h) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$.

756. Выразить через основные симметрические полиномы:

a) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)(x_2+x_4)(x_3+x_4)$;
b) $(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)$;
c) $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$.

757. Выразить через основные симметрические полиномы моногенные полиномы:

a) $x_1^2+\ldots$;
b) $x_1^3+\ldots$;
c) $x_1^2x_2x_3+\ldots$;
d) $x_1^2x_2^2+\ldots$;
e) $x_1^3x_2+\ldots$;
f) $x_1^4+\ldots$;
g) $x_1^2x_2^2x_3+\ldots$;
h) $x_1^3x_2x_3+\ldots$;
i) $x_1^3x_2^2+\ldots$;
j) $x_1^4x_2+\ldots$;
k) $x_1^5+\ldots$;
l) $x_1^2x_2^2x_3x_4+\ldots$;
m) $x_1^2x_2^2x_3^2+\ldots$;
n) $x_1^3x_2x_3x_4+\ldots$;
o) $x_1^3x_2^2x_3+\ldots$;
p) $x_1^3x_2^3+\ldots$;
q) $x_1^4x_2x_3+\ldots$;
r) $x_1^4x_2^2+\ldots$;
s) $x_1^5x_2+\ldots$;
t) $x_1^6+\ldots$

758. Выразить через основные симметрические полиномы:

a) $(-x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)^2+(x_1-x_2+x_3+\ldots$
$\ldots+x_n)^2+(x_1+x_2-x_3+\ldots+x_n)^2+\ldots$
$\ldots+(x_1+x_2+x_3+\ldots-x_n)^2;$

b) $(-x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)(x_1-x_2+x_3+\ldots$
$\ldots+x_n)\ldots(x_1+x_2+\ldots-x_n).$

759. Выразить через основные симметрические полиномы:

a) $\sum\limits_{i>k}(x_i-x_k)^2$; b) $\sum\limits_{i>k}(x_i+x_k)^3$;

c) $\sum\limits_{i>k}(x_i-x_k)^4$; d) $\sum\limits_{\substack{i>k\\ j\neq i;\ j\neq k}}(x_i+x_k-x_j)^2$.

760. Выразить через основные симметрические полиномы моногенный полином

$$x_1^2x_2^2\ldots x_k^2+\ldots$$

761. Выразить через основные симметрические полиномы

$$\sum(a_1x_{i_1}+a_2x_{i_2}+\ldots+a_nx_{i_n})^2.$$

Сумма распространена на все возможные перестановки $i_1, i_2, \ldots, i_n$ номеров $1, 2, \ldots, n$.

762. Выразить через основные симметрические полиномы:

a) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}$;

b) $\frac{(x_1-x_2)^2}{x_1+x_2}+\frac{(x_2-x_3)^2}{x_2+x_3}+\frac{(x_3-x_1)^2}{x_3+x_1}$;

c) $\left(\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}\right)$.

763. Выразить через основные симметрические полиномы:

a) $\frac{x_1x_2}{x_3x_4}+\frac{x_1x_3}{x_2x_4}+\frac{x_1x_4}{x_2x_3}+\frac{x_2x_3}{x_1x_4}+\frac{x_2x_4}{x_1x_3}+\frac{x_3x_4}{x_1x_2}$;

b) $\frac{x_1+x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_1+x_3}{x_2+x_4}+\frac{x_1+x_4}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_1+x_4}+\frac{x_2+x_4}{x_1+x_3}+\frac{x_3+x_4}{x_1+x_2}$.

764. Выразить через основные симметрические полиномы:

a) $\sum \frac{1}{x_i}$; b) $\sum \frac{1}{x_i^2}$; c) $\sum\limits_{i \neq j} \frac{x_i}{x_j}$;

d) $\sum\limits_{i \neq j} \frac{x_i^2}{x_j^2}$; e) $\sum\limits_{i \neq j} \frac{x_i^2}{x_j}$; f) $\sum\limits_{\substack{i \neq j \\ i \neq k \\ j > k}} \frac{x_j x_k}{x_i}$.

765. Вычислить сумму квадратов корней уравнения

$$x^3 + 2x - 3 = 0.$$

766. Вычислить $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + x_2^3 x_3 + x_2 x_3^3 + x_3^3 x_1 + x_3 x_1^3$ от корней уравнения $x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$.

767. Определить значение моногенной симметрической функции

$$x_1^3 x_2 x_3 + \ldots$$

от корней уравнения

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

768. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 + px + q = 0$. Вычислить:

a) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_3}$;

b) $x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_2^4 + x_2^4 x_3^2 + x_2^2 x_3^4 + x_3^4 x_1^2 + x_3^2 x_1^4$;

c) $(x_1^2 - x_2 x_3)(x_2^2 - x_1 x_3)(x_3^2 - x_2 x_1)$;

d) $(x_1 + x_2)^4 (x_1 + x_3)^4 (x_2 + x_3)^4$;

e) $\frac{x_1^2}{(x_2+1)(x_3+1)} + \frac{x_2^2}{(x_1+1)(x_3+1)} + \frac{x_3^2}{(x_1+1)(x_2+1)}$;

f) $\frac{x_1^2}{(x_1+1)^2} + \frac{x_2^2}{(x_2+1)^2} + \frac{x_3^2}{(x_3+1)^2}$.

769. Какое соотношение существует между коэффициентами кубического уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

если квадрат одного из корней равен сумме квадратов двух других?

770. Доказать теорему: для того чтобы все корни кубического уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$a > 0; \quad ab - c > 0; \quad c > 0.$$

771. Найти площадь и радиус описанного круга треугольника, стороны которого равны корням кубического уравнения

$$x^3-ax^2+bx-c=0.$$

***772.** Найти соотношение между коэффициентами уравнения, корни которого равны синусам углов треугольника.

773. Вычислить значение симметрической функции от корней уравнения $f(x)=0$:

a) $x_1^4x_2+\ldots,\qquad f(x)=3x^3-5x^2+1;$

b) $x_1^3x_2^3+\ldots,\qquad f(x)=3x^4-2x^3+2x^2+x-1;$

c) $(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)(x_2^2+x_2x_3+x_3^2)(x_3^2+x_3x_1+x_1^2),$
$\qquad f(x)=5x^3-6x^2+7x-8.$

774. Выразить через коэффициенты уравнения

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

следующие симметрические функции:

a) $a_0^4(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2;$

b) $a_0^4(x_1^2-x_2x_3)(x_2^2-x_1x_3)(x_3^2-x_1x_2);$

c) $\dfrac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2}+\dfrac{(x_1-x_3)^2}{x_1x_3}+\dfrac{(x_2-x_3)^2}{x_2x_3};$

d) $a_0^4(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)(x_2^2+x_2x_3+x_3^2)(x_3^2+x_3x_1+x_1^2).$

775. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни полинома

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n.$$

Доказать, что симметрический полином от $x_2, x_3, \ldots, x_n$ можно представить в виде полинома от x_1.

776. Решить, используя результат задачи 775, задачи 755 e), 755 g), 774 b), 774 d).

777. Найти $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f_k}{\partial x_i}$, где f_k есть k-я основная симметрическая функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

778. Пусть известно выражение симметрической функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ через основные. Найти выражение через основные симметрические функции для $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$.

Доказать теоремы:

779. Если $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — симметрическая функция, обладающая свойством

$$F(x_1+a, x_2+a, \ldots, x_n+a) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

и если $\Phi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ — ее выражение через основные, то

$$n\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}+(n-1)f_1\frac{\partial\Phi}{\partial f_2}+\ldots+f_{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial f_n}=0,$$

и обратно.

780. Каждый однородный симметрический полином второй степени, обладающий свойством задачи 779, равен $\alpha\sum\limits_{i<k}(x_i-x_k)^2$, где α — постоянная.

781. Найти общий вид однородных симметрических полиномов третьей степени, имеющих свойство задачи 779.

782. Выразить через основные симметрические полиномы

$$\sum_{i<j<k}(x_i-x_j)^2(x_i-x_k)^2(x_j-x_k)^2,$$

используя результат задачи 779.

783. Доказать, что среди симметрических полиномов $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, обладающих свойством

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1+a, x_2+a, \ldots, x_n+a),$$

существует $n-1$ «основных полиномов» $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$, т. е. таких, что каждый полином рассматриваемого класса может быть выражен в виде полинома от $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$.

784. Выразить через полиномы φ_2, φ_3 задачи 783 следующие симметрические функции:

a) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$;

b) $(x_1-x_2)^4+(x_1-x_3)^4+(x_2-x_3)^4$.

785. Выразить через полиномы $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ задачи 783 следующие симметрические функции:

a) $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$;

b) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2(x_3-x_4)^2$.

§ 2. Степенные суммы

786. Найти выражение для s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 через основные симметрические полиномы, пользуясь формулами Ньютона.

787. Выразить f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 через степенные суммы s_1, s_2, ..., пользуясь формулами Ньютона.

788. Найти сумму пятых степеней корней уравнения

$$x^6-4x^5+3x^3-4x^2+x+1=0.$$

789. Найти сумму восьмых степеней корней уравнения

$$x^4-x^3-1=0.$$

790. Найти сумму десятых степеней корней уравнения

$$x^3-3x+1=0.$$

791. Найти s_1, s_2, ..., s_n от корней уравнения

$$x^n+\frac{x^{n-1}}{1}+\frac{x^{n-2}}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{n!}=0.$$

792. Доказать, что

$$a^k(x_1^k+x_2^k)=(-1)^k\left[b^k-\frac{k}{1}b^{k-2}ac+\frac{k(k-3)}{1\cdot 2}b^{k-4}a^2c^2-\right.$$
$$\left.-\frac{k(k-4)(k-5)}{1\cdot 2\cdot 3}b^{k-6}a^3c^3+\ldots\right],$$

если x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

793. Доказать, что для всякого уравнения третьей степени

$$\frac{s_1^5-s_5}{s_1^3-s_3}=\frac{5}{3}(f_1^2-f_2).$$

794. Доказать, что если сумма корней уравнения четвертой степени равна нулю, то

$$\frac{s_5}{5}=\frac{s_3}{3}\cdot\frac{s_2}{2}.$$

795. Доказать, что если для уравнения шестой степени $s_1=s_3=0$, то

$$\frac{s_7}{7}=\frac{s_5}{5}\cdot\frac{s_2}{2}.$$

796. Найти уравнения n-й степени, для которых

$$s_1=s_2=\ldots=s_{n-1}=0.$$

797. Найти уравнения n-й степени, для которых

$$s_2=s_3=\ldots=s_n=0.$$

798. Найти уравнение n-й степени, для которого

$$s_2 = 1, \; s_3 = s_4 = \ldots = s_n = s_{n+1} = 0.$$

799. Выразить $\sum\limits_{i<j} x_i^k x_j^k$ через степенные суммы.

*800. Выразить $\sum\limits_{i<j} (x_i + x_j)^k$ через степенные суммы.

*801. Выразить $\sum\limits_{i<j} (x_i - x_j)^{2k}$ через степенные суммы.

802. Доказать, что $s_k = \begin{vmatrix} f_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 2f_2 & f_1 & 1 & \ldots & 0 \\ 3f_3 & f_2 & f_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ kf_k & f_{k-1} & f_{k-2} & \ldots & f_1 \end{vmatrix}$.

803. Доказать, что $f_k = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \ldots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 \; 3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \ldots & s_1 \end{vmatrix}$.

804. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & x^{n-2} & \ldots & 1 \\ s_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_n & s_{n-1} & s_{n-2} & \ldots & n \end{vmatrix}$.

*805. Найти s_m от корней уравнения

$$X_n(x) = 0.$$

*806. Доказать, что f_2, f_3 и f_4 от корней уравнения $X_n(x) = 0$ могут принимать только значения 0 и ± 1.

*807. Решить систему уравнений:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a, \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a, \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = a \end{gathered}$$

и найти $x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \ldots + x_n^{n+1}$.

*808. Вычислить степенные суммы $s_1, s_2, \ldots, s_n$ от корней уравнения

$$x^n + (a+b)\,x^{n-1} + (a^2 + ab + b^2)\,x^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + (a^n + a^{n-1}b + \ldots + b^n) = 0.$$

***809.** Вычислить степенные суммы $s_1, s_2, \ldots, s_n$ от корней уравнения

$$x^n + (a+b)\,x^{n-1} + (a^2+b^2)\,x^{n-2} + \ldots + (a^n+b^n) = 0.$$

§ 3. Преобразование уравнений

810. Найти уравнения, корнями которых являются:

a) $x_1+x_2,\ x_2+x_3,\ x_3+x_1$;
b) $(x_1-x_2)^2,\ (x_2-x_3)^2,\ (x_3-x_1)^2$;
c) $x_1^2-x_2x_3,\ x_2^2-x_3x_1,\ x_3^2-x_1x_2$;
d) $(x_1-x_2)(x_1-x_3),\ (x_2-x_1)(x_2-x_3),\ (x_3-x_1)(x_3-x_2)$;
e) $x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2$; f) $x_1^3,\ x_2^3,\ x_3^3$,

где x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$.

811. Найти уравнение, корнями которого являются

$$(x_1+x_2\varepsilon+x_3\varepsilon^2)^3 \text{ и } (x_1+x_2\varepsilon^2+x_3\varepsilon)^3,$$

где $\varepsilon = -\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, x_1, x_2, x_3 — корни уравнения

$$x^3+ax^2+bx+c=0.$$

812. Найти уравнение наименьшей степени, одним из корней которого является $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}$, где x_1, x_2, x_3 — корни кубического уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$, и коэффициенты которого выражаются рационально через коэффициенты данного уравнения.

813. Найти уравнение наименьшей степени, одним из корней которого является $\frac{x_1}{x_2}$, где x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$, и коэффициенты которого выражаются через коэффициенты данного уравнения.

814. Найти уравнение наименьшей степени с коэффициентами, выражающимися рационально через коэффициенты данного уравнения $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, принимая за один из корней искомого уравнения:

a) $x_1x_2+x_3x_4$; b) $(x_1+x_2-x_3-x_4)^2$; c) x_1x_2;
d) x_1+x_2; e) $(x_1-x_2)^2$.

815. Используя результаты задач 814 a) и 814 b), выразить корни уравнения четвертой степени через корни вспомогательного кубического уравнения задачи 814 a).

816. Написать формулу для решения уравнения

$$x^4-6ax^2+bx-3a^2=0.$$

817. Составить уравнение, одним из корней которого является

$$(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)\times$$
$$\times(x_1x_3+x_3x_5+x_5x_2+x_2x_4+x_4x_1),$$

где x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — корни уравнения

$$x^5+ax+b=0.$$

§ 4. Результант и дискриминант

***818.** Доказать, что результант полиномов

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n \text{ и } \varphi(x)=b_0x^m+\ldots+b_m$$

равен определителю, составленному из коэффициентов остатков при делении $\varphi(x)$, $x\varphi(x)$, ..., $x^{n-1}\varphi(x)$ на $f(x)$. Предполагается, что остатки расположены в порядке возрастания степеней x (способ Эрмита).

Замечание. Остаток $r_k(x)$ при делении $x^{k-1}\varphi(x)$ на $f(x)$ равен остатку при делении $xr_{k-1}(x)$ на $f(x)$.

***819.** Доказать, что результант полиномов

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

и

$$\varphi(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n$$

равен определителю, составленному из коэффициентов полиномов $(n-1)$-й степени (или ниже)

$$\psi_k(x)=(a_0x^{k-1}+a_1x^{k-2}+\ldots+a_{k-1})\varphi(x)-$$
$$-(b_0x^{k-1}+b_1x^{k-2}+\ldots+b_{k-1})f(x),$$

$k=1, \ldots, n$ (способ Безу).

Замечание. $\psi_1=a_0\varphi-b_0f$,

$$\psi_k=x\psi_{k-1}+a_{k-1}\varphi-b_{k-1}f.$$

***820.** Доказать, что результант полиномов

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

и

$$\varphi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m$$

при $n>m$ равен определителю, составленному из коэффициентов полиномов не выше $(n-1)$-й степени $\chi_k(x)$, определенных по формулам:

$$\chi_k(x)=x^{k-1}\varphi(x) \text{ при } 1\leqslant k\leqslant n-m;$$
$$\chi_k(x)=(a_0x^{k-n+m-1}+a_1x^{k-n+m-2}+\ldots$$
$$\ldots+a_{k-n+m-1})x^{n-m}\varphi(x)-(b_0x^{k-n+m-1}+$$
$$+b_1x^{k-n+m-2}+\ldots+b_{k-n+m-1})f(x)$$

(полиномы χ_k располагаются в порядке возрастающих степеней x).

Замечание. $\chi_{n-m+1}=a_0x^{n-m}\varphi(x)-b_0f(x)$,

$$\chi_k=x\chi_{k-1}+a_{k-n+m-1}x^{n-m}\varphi(x)-b_{k-n+m-1}f(x)$$

при $k>n-m+1$.

821. Вычислить результант полиномов:

a) x^3-3x^2+2x+1 и $2x^2-x-1$;
b) $2x^3-3x^2+2x+1$ и x^2+x+3;
c) $2x^3-3x^2-x+2$ и x^4-2x^2-3x+4;
d) $3x^3+2x^2+x+1$ и $2x^3+x^2-x-1$;
e) $2x^4-x^3+3$ и $3x^3-x^2+4$;
f) $a_0x^2+a_1x+a_2$ и $b_0x^2+b_1x+b_2$.

822. При каком значении λ полиномы имеют общий корень:

a) $x^3-\lambda x+2$ и $x^2+\lambda x+2$;
b) $x^3-2\lambda x+\lambda^3$ и $x^2+\lambda^2-2$;
c) $x^3+\lambda x^2-9$ и $x^3+\lambda x-3$?

823. Исключить x из системы уравнений:

a) $x^2-xy+y^2=3$, $\quad x^2y+xy^2=6$;
b) $x^3-xy-y^3+y=0$, $\quad x^2+x-y^2-1=0$;
c) $y=x^3-2x^2-6x+8$, $\quad y=2x^3-8x^2+5x+2$.

824. Решить системы:

a) $y^2-7xy+4x^2+13x-2y-3=0$,
$y^2-14xy+9x^2+28x-4y-5=0$;
b) $y^2+x^2-y-3x=0$,
$y^2-6xy-x^2+11y+7x-12=0$;
c) $5y^2-6xy+5x^2-16=0$,
$y^2-xy+2x^2-y-x-4=0$;
d) $y^2+(x-4)y+x^2-2x+3=0$,
$y^3-5y^2+(x+7)y+x^3-x^2-5x-3=0$;
e) $2y^3-4xy^2-(2x^2-12x+8)y+x^3+6x^2-16x=0$,
$4y^3-(3x+10)y^2-(4x^2-24x+16)y-3x^3+$
$+2x^2-12x+40=0$.

825. Определить результант полиномов

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n \quad \text{и} \quad a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}.$$

826. Доказать, что $\Re(f, \varphi_1\cdot\varphi_2)=\Re(f, \varphi_1)\cdot\Re(f, \varphi_2)$.

***827.** Найти результант полиномов

$$X_n \quad \text{и} \quad x^m-1.$$

***828.** Найти результант полиномов X_m и X_n.

829. Вычислить дискриминант полинома:

a) x^3-x^2-2x+1; b) x^3+2x^2+4x+1;
c) $3x^3+3x^2+5x+2$; d) $x^4-x^3-3x^2+x+1$;
e) $2x^4-x^3-4x^2+x+1$.

830. Вычислить дискриминант полинома:

a) $x^5-5ax^3+5a^2x-b$; b) $(x^2-x+1)^3-\lambda(x^2-x)^2$;
c) $ax^3-bx^2+(b-3a)x+a$;
d) $x^4-\lambda x^3+3(\lambda-4)x^2-2(\lambda-8)x-4$.

831. При каком значении λ полином имеет кратные корни:

a) $x^3-3x+\lambda$; b) $x^4-4x+\lambda$;
c) $x^3-8x^2+(13-\lambda)x-(6+2\lambda)$;
d) $x^4-4x^3+(2-\lambda)x^2+2x-2$?

832. Охарактеризовать число вещественных корней полинома с вещественными коэффициентами по знаку дискриминанта:

a) для полинома третьей степени;
b) для полинома четвертой степени;
c) в общем случае.

833. Вычислить дискриминант полинома x^n+a.

***834.** Вычислить дискриминант полинома x^n+px+q.

***835.** Вычислить дискриминант полинома

$$a_0x^{m+n}+a_1x^m+a_2.$$

836. Зная дискриминант полинома

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

найти дискриминант полинома

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0.$$

837. Доказать, что дискриминант полинома четвертой степени равен дискриминанту его резольвенты Феррари [задача 814 a) и задача 80].

838. Доказать, что

$$D((x-a)f(x))=D(f(x))\,[f(a)]^2.$$

***839.** Вычислить дискриминант полинома

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1.$$

***840.** Вычислить дискриминант полинома

$$x^n+ax^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a.$$

841. Доказать, что дискриминант произведения двух полиномов равен произведению дискриминантов, умноженному на квадрат их результанта.

842. Найти дискриминант полинома

$$X_{p^m}=\frac{x^{p^m}-1}{x^{p^{m-1}}-1}.$$

***843.** Найти дискриминант кругового полинома X_n.

***844.** Вычислить дискриминант полинома

$$E_n=n!\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right).$$

***845.** Вычислить дискриминант полинома

$$F_n=x^n+\frac{a}{1}x^{n-1}+\frac{a(a-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}.$$

***846.** Вычислить дискриминант полинома Эрмита

$$P_n(x)=(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}.$$

***847.** Вычислить дискриминант полинома Лагерра

$$P_n(x)=(-1)^n e^x\frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}.$$

***848.** Вычислить дискриминант полинома Чебышева

$$2\cos\left(n\arccos\frac{x}{2}\right).$$

***849.** Вычислить дискриминант полинома

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}(1+x^2)^{n+1}\frac{d^n\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{dx^n}.$$

***850.** Вычислить дискриминант полинома

$$P_n(x)=(-1)^n(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^n\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{dx^n}.$$

***851.** Вычислить дискриминант полинома

$$P_n(x)=(-1)^n x^{2n+2}e^{-\frac{1}{x}}\frac{d^n\left(e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^n}.$$

***852.** Найти максимум дискриминанта полинома

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

все корни которого вещественны и связаны соотношением

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=n(n-1)R^2.$$

853. Зная дискриминант $f(x)$, найти дискриминант $f(x^2)$.

854. Зная дискриминант $f(x)$, найти дискриминант $f(x^m)$.

855. Доказать, что дискриминант $F(x)=f(\varphi(x))$ равен

$$[D(f)]^m\prod_{i=1}^{n}D(\varphi(x)-x_i),$$

где m — степень $\varphi(x)$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни $f(x)$. Старшие коэффициенты f и φ принимаются равными единице.

§ 5. Преобразование Чирнгаузена и уничтожение иррациональности в знаменателе

856. Преобразовать уравнение $(x-1)(x-3)(x+4)=0$ подстановкой $y=x^2-x-1$.

857. Преобразовать уравнения:

a) $x^3-3x-4=0$ подстановкой $y=x^2+x+1$;
b) $x^3+2x^2+2=0$ подстановкой $y=x^2+1$;
c) $x^4-x-2=0$ подстановкой $y=x^3-2$;
d) $x^4-x^3-x^2+1=0$ подстановкой $y=x^3+x^2+x+1$.

858. Преобразовать уравнения по Чирнгаузену и найти обратные преобразования:

a) $x^3-x+2=0$, $\quad y=x^2+x$;
b) $x^4-3x+1=0$, $\quad y=x^3+x$;
c) $x^4+5x^3+6x^2-1=0$, $\quad y=x^3+4x^2+3x-1$.

859. Преобразовать уравнение $x^3-x^2-2x+1=0$ подстановкой $y=2-x^2$ и истолковать получившийся результат.

860. Для того чтобы корни кубического уравнения с рациональными коэффициентами выражались рационально с рациональными коэффициентами друг через друга, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант был квадратом рационального числа. Доказать.

861. Исключить иррациональность в знаменателе выражений:

$$\text{a)}\ \frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}};\quad \text{b)}\ \frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}};\quad \text{c)}\ \frac{7}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}.$$

862. Исключить иррациональность в знаменателях выражений:

a) $\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$, $\qquad \alpha^3-3\alpha+1=0$;

b) $\dfrac{\alpha^2-3\alpha-1}{\alpha^2+2\alpha+1}$, $\qquad \alpha^3+\alpha^2+3\alpha+4=0$;

c) $\dfrac{1}{3\alpha^3+\alpha^2-2\alpha-1}$, $\qquad \alpha^4-\alpha^3+2\alpha+1=0$;

d) $\dfrac{1}{\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+2}$, $\qquad \alpha^4+\alpha^3-4\alpha^2-3\alpha+2=0$.

863. Доказать, что каждая рациональная функция от корня x_1 кубического уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ может быть представлена в виде $\dfrac{Ax_1+B}{Cx_1+D}$ с коэффициентами A, B, C, D, рационально выражающимися через коэффициенты первоначального выражения и через коэффициенты a, b, c.

864. Пусть дискриминант кубического уравнения с рациональными коэффициентами и неприводимого в поле рациональных чисел есть квадрат рационального числа. Тогда между корнями можно установить соотношение $x_2=\dfrac{\alpha x_1+\beta}{\gamma x_1+\delta}$. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты α, β, γ, δ?

865. Сделать преобразование $y=x^2$ в уравнении

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

866. Сделать преобразование $y=x^3$ в уравнении

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

***867.** Доказать, что если все корни x_i полинома

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n, \quad a_n\neq 0,$$

с целыми коэффициентами удовлетворяют условию $|x_i|\leqslant 1$, то все они являются корнями из единицы.

§ 6. Полиномы, не меняющиеся при четных перестановках переменных. Полиномы, не меняющиеся при круговых перестановках переменных

868. Доказать, что если полином не меняется при четных перестановках и меняет знак при нечетных, то он делится на определитель Вандермонда, составленный из переменных, и частное от деления есть симметрический полином.

869. Доказать, что каждый полином, не меняющийся при четных перестановках переменных, может быть представлен в виде

$$F_1+F_2\Delta,$$

где F_1 и F_2 — симметрические полиномы и Δ есть определитель Вандермонда из переменных.

870. Вычислить

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-2} & x_1^{n+1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2} & x_2^{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-2} & x_n^{n+1} \end{vmatrix}.$$

871. Составить уравнение, корнями которого являются $\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3$, $\alpha x_2+\beta x_3+\gamma x_1$ и $\alpha x_3+\beta x_1+\gamma x_2$, где x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$.

872. Составить уравнение, корнями которого являются $x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$, $x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1$, $x_1y_3+x_2y_1+x_3y_2$, где x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3+px+q+0$, y_1, y_2, y_3 — корни уравнения $y^3+p'y+q'=0$.

873. Для того чтобы уравнения с рациональными коэффициентами

$$x^3+px+q=0,$$
$$y^3+p'y+q'=0$$

были связаны рациональным преобразованием Чирнгаузена, необходимо и достаточно, чтобы отношение их дискриминантов Δ и Δ' было квадратом рационального числа и чтобы одно из уравнений

$$u^3 = 3pp'u + \frac{27qq' \pm \sqrt{\Delta\Delta'}}{2}$$

имело рациональный корень. Доказать.

874. Доказать, что каждый полином от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не изменяющийся при круговых перестановках переменных, можно представить в виде

$$\sum A f_1^{\alpha_0} \eta_1^{\alpha_1} \eta_2^{\alpha_2} \ldots \eta_{n-1}^{\alpha_{n-1}},$$

где $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ суть линейные формы:

$$\eta_1 = x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \ldots + x_n,$$
$$\eta_2 = x_1\varepsilon^2 + x_2\varepsilon^4 + \ldots + x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\eta_{n-1} = x_1\varepsilon^{n-1} + x_2\varepsilon^{2n-2} + \ldots + x_n;$$
$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

причем показатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ удовлетворяют условию: $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (n-1)\alpha_{n-1}$ делится на n.

875. Для рациональных функций, не меняющихся при круговых перестановках переменных, указать n основных (дробных и с нерациональными коэффициентами), через которые все выражаются рационально.

876. Для рациональных функций от трех переменных, не меняющихся при круговых перестановках, указать три основные функции с рациональными коэффициентами.

877. Для рациональных функций от четырех переменных, не меняющихся при круговых перестановках, указать четыре основные функции с рациональными коэффициентами.

878. Для рациональных функций от пяти переменных, не меняющихся при круговых перестановках, указать пять основных функций с рациональными коэффициентами.

ГЛАВА 7

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

В этом отделе приняты следующая терминология и обозначения. Термин *пространство* обозначает векторное пространство над полем вещественных чисел, если нет специальных оговорок. Этот термин применяется независимо от того, рассматривается ли пространство само по себе или как часть другого, более обширного пространства. Однако в случае, когда нужно подчеркнуть это обстоятельство, применяется термин *подпространство*. *Линейным многообразием* называется множество векторов вида X_0+X, где X_0 — некоторый фиксированный вектор, а X пробегает множество всех векторов некоторого подпространства.

Равенство $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ означает, что X имеет координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в некотором фиксированном базисе пространства, причем в случае, когда речь идет об евклидовом пространстве, базис предполагается ортогонально нормированным.

Векторы называются иногда точками, одномерные многообразия — прямыми, двумерные — плоскостями.

§ 1. Подпространства и линейные многообразия. Преобразование координат

879. Дано векторное пространство, натянутое на векторы $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Определить его базис и размерность:

a) $X_1=(2, 1, 3, 1)$, $X_2=(1, 2, 0, 1)$, $X_3=(-1, 1, -3, 0)$;

b) $X_1=(2, 0, 1, 3, -1)$, $X_2=(1, 1, 0, -1, 1)$, $X_3=(0, -2, 1, 5, -3)$, $X_4=(1, -3, 2, 9, -5)$;

c) $X_1=(2, 1, 3, -1)$, $X_2=(-1, 1, -3, 1)$, $X_3=(4, 5, 3, -1)$, $X_4=(1, 5, -3, 1)$.

880. Определить базис и размерность суммы и пересечения пространств, натянутых на векторы $X_1, \ldots, X_k$ и $Y_1, \ldots, Y_m$:

a) $X_1=(1, 2, 1, 0)$, $Y_1=(2, -1, 0, 1)$,
$X_2=(-1, 1, 1, 1)$, $Y_2=(1, -1, 3, 7)$;
b) $X_1=(1, 2, -1, -2)$, $Y_1=(2, 5, -6, -5)$,
$X_2=(3, 1, 1, 1)$, $Y_2=(-1, 2, -7, -3)$,
$X_3=(-1, 0, 1, -1)$;
c) $X_1=(1, 1, 0, 0)$, $Y_1=(0, 0, 1, 1)$,
$X_2=(1, 0, 1, 1)$, $Y_2=(0, 1, 1, 0)$.

881. Найти координаты вектора X в базисе E_1, E_2, E_3, E_4:

a) $X=(1, 2, 1, 1)$, $E_1=(1, 1, 1, 1)$,
$E_2=(1, 1, -1, -1)$,
$E_3=(1, -1, 1, -1)$, $E_4=(1, -1, -1, 1)$;
b) $X=(0, 0, 0, 1)$, $E_1=(1, 1, 0, 1)$, $E_2=(2, 1, 3, 1)$,
$E_3=(1, 1, 0, 0)$, $E_4=(0, 1, -1, -1)$.

882. Составить формулы преобразования координат при переходе от базиса E_1, E_2, E_3, E_4 к базису E'_1, E'_2, E'_3, E'_4:

a) $E_1=(1, 0, 0, 0)$, $E_2=(0, 1, 0, 0)$, $E_3=(0, 0, 1, 0)$,
$E_4=(0, 0, 0, 1)$, $E'_1=(1, 1, 0, 0)$, $E'_2=(1, 0, 1, 0)$,
$E'_3=(1, 0, 0, 1)$, $E'_4=(1, 1, 1, 1)$;
b) $E_1=(1, 2, -1, 0)$, $E_2=(1, -1, 1, 1)$,
$E_3=(-1, 2, 1, 1)$, $E_4=(-1, -1, 0, 1)$,
$E'_1=(2, 1, 0, 1)$,
$E'_2=(0, 1, 2, 2)$, $E'_3=(-2, 1, 1, 2)$,
$E'_4=(1, 3, 1, 2)$.

883. Уравнение «поверхности» относительно некоторого базиса $E_1, \ldots, E_4$ имеет вид $x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=1$. Найти уравнение этой же поверхности относительно базиса

$E'_1=(1, 1, 1, 1)$; $E'_3=(1, -1, 1, -1)$;
$E'_2=(1, 1, -1, -1)$; $E'_4=(1, -1, -1, 1)$

(координаты даны в том же базисе $E_1, \ldots, E_4$).

***884.** В пространстве полиномов не выше n-й степени от $\cos x$ написать формулы преобразования координат для перехода от базиса $1, \cos x, \ldots, \cos^n x$ к базису $1, \cos x, \ldots, \cos nx$ и обратно.

885. В четырехмерном пространстве найти прямую, проходящую через начало координат и пересекающую прямые:

$$x_1 = 2 + 3t, \quad x_2 = 1 - t, \quad x_3 = -1 + 2t, \quad x_4 = 3 - 2t$$

и

$$x_1 = 7t, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1 + t, \quad x_4 = -1 + 2t.$$

Найти точки пересечения этой прямой с данными прямыми.

886. Доказать, что любые две прямые в n-мерном пространстве могут быть погружены в трехмерное линейное многообразие.

887. Исследовать в общем виде условие разрешимости задачи 885 для двух прямых в n-мерном пространстве.

888. Доказать, что любые две плоскости в n-мерном пространстве могут быть погружены в пятимерное линейное многообразие.

889. Дать описание всех возможных случаев взаимного расположения двух плоскостей в n-мерном пространстве.

890. Доказать, что линейное многообразие может быть охарактеризовано как множество векторов, содержащее вместе с любыми двумя векторами X_1, X_2 их линейные комбинации $\alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2$ при любых α.

§ 2. Элементарная геометрия n-мерного евклидова пространства

891. Определить скалярное произведение векторов X и Y:

a) $X = (2, 1, -1, 2)$, $Y = (3, -1, -2, 1)$;
b) $X = (1, 2, 1, -1)$, $Y = (-2, 3, -5, -1)$.

892. Определить угол между векторами X и Y:

a) $X = (2, 1, 3, 2)$, $Y = (1, 2, -2, 1)$;
b) $X = (1, 2, 2, 3)$, $Y = (3, 1, 5, 1)$;
c) $X = (1, 1, 1, 2)$, $Y = (3, 1, -1, 0)$.

893. Определить косинусы углов между прямой $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ и осями координат.

894. Определить косинусы внутренних углов треугольника ABC, заданного координатами вершин:

$$A = (1, 2, 1, 2), \quad B = (3, 1, -1, 0), \quad C = (1, 1, 0, 1).$$

895. Найти длины диагоналей n-мерного куба со стороной, равной 1.

896. Найти число диагоналей n-мерного куба, ортогональных к данной диагонали.

897. Найти в n-мерном пространстве n точек с неотрицательными координатами так, чтобы расстояния их друг от друга и от начала координат равнялись 1. Первую из этих точек расположить на первой оси координат, вторую — в плоскости, натянутой на первые две оси, и т. д. (Эти точки вместе с началом координат образуют вершины правильного симплекса с длиной ребра, равной 1.)

898. Определить координаты центра и радиус сферы, описанной вокруг симплекса задачи 897.

899. Нормировать вектор (3, 1, 2, 1).

900. Найти нормированный вектор, ортогональный к векторам (1, 1, 1, 1); (1, —1, —1, 1); (2, 1, 1, 3).

901. Построить ортогонально-нормированный базис пространства, приняв за два вектора этого базиса векторы

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ и } \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right).$$

902. Посредством процесса ортогонализации найти ортогональный базис пространства, порожденного векторами (1, 2, 1, 3); (4, 1, 1, 1); (3, 1, 1, 0).

903. Пристроить к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

еще две строчки, ортогональные между собой и ортогональные к первым трем строчкам.

904. Интерпретировать систему линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

и ее фундаментальную систему решений в пространстве n измерений, считая коэффициенты каждого уравнения координатами вектора.

905. Найти ортогональную и нормированную фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$

906. Разложить вектор X на сумму двух векторов, один из которых лежит в пространстве, натянутом на векторы $A_1, A_2, \ldots, A_m$, а другой ортогонален к этому пространству (ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора X):

a) $X=(5, 2, -2, 2)$, $A_1=(2, 1, 1, -1)$,
$A_2=(1, 1, 3, 0)$;

b) $X=(-3, 5, 9, 3)$, $A_1=(1, 1, 1, 1)$,
$A_2=(2, -1, 1, 1)$, $A_3=(2, -7, -1, -1)$.

907. В предположении линейиой независимости векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ дать формулы для вычисления длин составляющих вектора в задаче 906, поставленной в общем виде.

908. Доказать, что из всех векторов даиного пространства P наименьший угол с данным вектором X образует ортогональная проекция вектора X на пространство P.

909. Найти наименьший угол между векторами пространства P, натянутого на векторы $A_1, \ldots, A_m$, и вектором X:

a) $X=(1, 3, -1, 3)$, $A_1=(1, -1, 1, 1)$,
$A_2=(5, 1, -3, 3)$;

b) $X=(2, 2, -1, 1)$, $A_1=(1, -1, 1, 1)$,
$A_2=(-1, 2, 3, 1)$, $A_3=(1, 0, 5, 3)$.

910. Найти наименьший угол, образованный вектором $(1, 1, \ldots, 1)$ n-мерного пространства с векторами какого-либо m-мерного координатного пространства.

911. Доказать, что из всех векторов $X-Y$, где X—данный вектор, а Y пробегает данное пространство P, наименьшую длину имеет вектор $X-X'$, где X' есть ортогональная проекция X на P. (Эта наименьшая длина называется расстоянием от точки X до пространства P.)

912. Определить расстояние от точки X до линейного многообразия $A_0+t_1A_1+\ldots+t_mA_m$:

a) $X=(1, 2, -1, 1)$, $A_0=(0, -1, 1, 1)$,
$A_1=(0, -3, -1, 5)$, $A_2=(4, -1, -3, 3)$;

b) $X=(0, 0, 0, 0)$, $A_0=(1, 1, 1, 1)$, $A_1=(1, 2, 3, 4)$.

913. Рассматривается пространство полиномов, степени которых не превосходят n. Скалярное произведение полиномов f_1, f_2 определяется как $\int_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx$. Найти расстояние от начала координат до линейного многообразия, состоящего из полиномов $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$.

914. Дать способ определения кратчайшего расстояния между точками двух линейных многообразий $X_0 + P$ и $Y_0 + Q$.

915. Вершины n-мерного правильного симплекса (см. задачу 897), длина ребра которого равна 1, разбиты на две совокупности из $m+1$ и $n-m$ вершин. Через эти совокупности вершин проведены линейные многообразия наименьшей размерности. Определить кратчайшее расстояние между точками этих многообразий и определить точки, для которых оно реализуется.

***916.** В четырехмерном пространстве даны две плоскости, натянутые на векторы A_1, A_2 и B_1, B_2. Среди углов, образованных векторами первой плоскости с векторами второй плоскости, найти наименьший:

a) $A_1 = (1, 0, 0, 0)$, $A_2 = (0, 1, 0, 0)$, $B_1 = (1, 1, 1, 1)$, $B_2 = (2, -2, 5, 2)$;

b) $A_1 = (1, 0, 0, 0)$, $A_2 = (0, 1, 0, 0)$, $B_1 = (1, 1, 1, 1)$, $B_2 = (1, -1, 1, -1)$.

***917.** Четырехмерный куб пересекается трехмерной «плоскостью», проходящей через центр куба и ортогональной к диагонали. Определить форму тела, получающегося в пересечении.

***918.** Дана система линейно независимых векторов B_1, B_2, ..., B_m. Множество точек, являющихся концами векторов $t_1B_1 + t_2B_2 + \ldots + t_mB_m$, $0 \leqslant t_1 \leqslant 1$, ..., $0 \leqslant t_m \leqslant 1$, называется параллелепипедом, построенным на векторах B_1, B_2, ..., B_m. Определить объем параллелепипеда индуктивно как объем «основания» $[B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}]$, умноженный на «высоту», равную расстоянию конца вектора B_m до пространства, натянутого на основание. «Объем» одномерного «параллелепипеда» $[B_1]$ считается равным длине вектора B_1.

a) Составить формулу для вычисления квадрата объема и убедиться в том, что объем не зависит от нумерации вершин.

b) Доказать, что $V[cB_1, B_2, \ldots, B_m] = |c| \cdot V[B_1, B_2, \ldots, B_m]$.

c) Доказать, что $V[B_1' + B_1'', B_2, \ldots, B_m] \leqslant V[B_1', B_2, \ldots, B_m] + V[B_1'', B_2, \ldots, B_m]$, и выяснить, когда имеет место знак равенства.

919. Доказать, что объем n-мерного параллелепипеда в n-мерном пространстве равен абсолютной величине определителя, составленного из координат порождающих векторов.

*920. Пусть C_1, C_2, ..., C_m суть ортогональные проекции векторов B_1, B_2, ..., B_m на некоторое пространство. Доказать, что

$$V[C_1, C_2, \ldots, C_m] \leqslant V[B_1, B_2, \ldots, B_m].$$

*921. Доказать, что

$$V[A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_k] \leqslant \leqslant V[A_1, \ldots, A_m] \cdot V[B_1, \ldots, B_k]$$

(ср. с задачей 518).

922. Доказать, что

$$V[A_1, A_2, \ldots, A_m] \leqslant |A_1| \cdot |A_2| \ldots |A_m|$$

(ср. с задачей 519).

923. Найти объем n-мерного шара, пользуясь принципом Кавальери.

924. Рассматривается пространство полиномов, степени которых не превосходят n. За скалярное произведение принимается $\int_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx$. Найти объем параллелепипеда, образованного векторами того базиса, относительно которого координатами полинома являются его коэффициенты.

§ 3. Характеристические числа и собственные векторы матрицы

925. Найти характеристические числа и собственные векторы матриц:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$.

926. Зная характеристические числа матрицы A, найти характеристические числа матрицы A^{-1}.

927. Зная характеристические числа матрицы A, найти характеристические числа матрицы A^2.

928. Зная характеристические числа матрицы A, найти характеристические числа матрицы A^m.

929. Зная характеристический полином $F(\lambda)$ матрицы A (порядка n), найти определитель матрицы $f(A)$, где $f(x) = b_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ \dots\ (x-\xi_m)$.

930. Зная характеристические числа матрицы A, найти определитель матрицы $f(A)$, где $f(x)$ — полином.

931. Зная характеристические числа матрицы A, найти характеристические числа матрицы $f(A)$.

932. Доказать, что все собственные векторы матрицы A являются собственными векторами матрицы $f(A)$.

***933.** Найти характеристические числа матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, n — нечетное число.

***934.** Найти сумму

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^4 + \dots + \varepsilon^{(n-1)^2}.$$

935. Найти характеристические числа матриц:

a) $\begin{pmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ y & 0 & x & \dots & x \\ y & y & 0 & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y & y & y & \dots & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & & \\ & -1 & 0 & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

*936. Зная характеристические числа матриц A и B, найти характеристические числа их кронекеровского произведения.

937. Доказать, что характеристические полиномы матриц AB и BA совпадают при любых квадратных матрицах A и B.

938. Доказать, что характеристические полиномы матриц AB и BA отличаются только множителем $(-\lambda)^{n-m}$. Здесь A — прямоугольная матрица, имеющая m строчек и n столбцов, матрица B имеет n строчек и m столбцов, $n > m$.

§ 4. Квадратичные формы и симметрические матрицы

939. Преобразовать к сумме квадратов квадратичные формы:

a) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$;

b) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$;

c) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$;

d) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2$;

e) $x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$.

940. Преобразовать квадратичную форму

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<k} x_i x_k$$

к диагональному виду.

941. Преобразовать к диагональному виду квадратичную форму

$$\sum_{i<k} x_i x_k.$$

942. Доказать, что все главные миноры положительной квадратичной формы положительны.

*943. Пусть квадратичная форма

$$\begin{aligned} f = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

может быть приведена к диагональной форме $\alpha_1 x_1'^2 + \alpha_2 x_2'^2 + \ldots + \alpha_n x_n'^2$ «треугольным» преобразованием:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n \\ x_2' &= \qquad\quad x_2 + \ldots + b_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= \qquad\qquad\qquad\quad x_n. \end{aligned}$$

Требуется:

a) выразить коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ через коэффициенты a_{ik};

b) выразить дискриминанты форм $f_k(x_{k+1}, \ldots, x_n) = f - \alpha_1 x_1'^2 - \ldots - \alpha_k x_k'^2$ через коэффициенты a_{ik}.

Найти условие, при котором возможно треугольное преобразование указанного вида.

944. Доказать, что необходимым и достаточным условием положительности квадратичной формы

$$\begin{aligned} f = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n &+ \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n &+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots &+ a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

является выполнение неравенств:

$$a_{11} > 0; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \ldots; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

(условия Сильвестра).

***945.** Доказать, что если к положительной квадратичной форме добавить квадрат линейной формы, то ее дискриминант увеличится.

***946.** Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \ldots$ — положительная квадратичная форма,

$$\varphi(x_2, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots, x_n),$$

D_f и D_φ — их дискриминанты. Доказать, что

$$D_f \leqslant a_{11} D_\varphi.$$

947. Пусть

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_p^2 - l_{p+1}^2 - l_{p+2}^2 - \ldots - l_{p+q}^2,$$

где $l_1, l_2, \ldots, l_p, l_{p+1}, l_{p+2}, \ldots, l_{p+q}$ — вещественные линейные формы от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Доказать, что число положительных квадратов при каноническом представлении формы f не превосходит p, число отрицательных квадратов не превосходит q.

***948.** Пусть $s_0, s_1, \ldots$ — степенные суммы от корней уравнения $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ с вещественными коэффициентами. Доказать, что число отрицательных квадратов при каноническом представлении квадратичной формы $\sum\limits_{i,k=1}^{n} s_{i+k+2}x_ix_k$ равно числу пар сопряженных комплексных корней данного уравнения.

Доказать теоремы:

949. Для того чтобы все корни уравнения с вещественными коэффициентами были вещественными и различными, необходимо и достаточно выполнение неравенств:

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0; \quad \ldots; \quad \Delta = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix} > 0.$$

***950.** Если квадратичные формы

$$\begin{aligned} f = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \varphi = {} & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \ldots + b_{1n}x_1x_n + \\ & + b_{21}x_2x_1 + b_{22}x_2^2 + \ldots + b_{2n}x_2x_n + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + b_{n1}x_nx_1 + b_{n2}x_nx_2 + \ldots + b_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

неотрицательны, то форма

$$\begin{aligned} (f, \varphi) = {} & a_{11}b_{11}x_1^2 + a_{12}b_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}b_{1n}x_1x_n + \\ & + a_{21}b_{21}x_2x_1 + a_{22}b_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}b_{2n}x_2x_n + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{n1}b_{n1}x_nx_1 + a_{n2}b_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}b_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

неотрицательна.

951. Преобразовать к каноническому виду ортогональным преобразованием квадратичные формы:

a) $2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$;
b) $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$;
c) $3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$;
d) $2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$;
e) $x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$;
f) $5x_1^2+6x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3$;
g) $3x_1^2+6x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$;
h) $7x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-8x_1x_2+8x_2x_3$;
i) $2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_4^2-4x_1x_2+2x_1x_4+2x_2x_3-4x_3x_4$;
j) $2x_1x_2+2x_3x_4$;
k) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$;
l) $2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$;
m) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+6x_1x_3-4x_1x_4-$
$$-4x_2x_3+6x_2x_4-2x_3x_4;$$
n) $8x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+8x_2x_4$.

952. Преобразовать к каноническому виду ортогональным преобразованием квадратичные формы:

a) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2+\sum\limits_{i<k} x_ix_k$; b) $\sum\limits_{i<k} x_ix_k$.

953. Преобразовать к каноническому виду ортогональным преобразованием форму

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n.$$

954. Доказать, что если все характеристические числа вещественной симметрической матрицы A заключены в сегменте $[a, b]$, то квадратичная форма с матрицей $A-\lambda E$ отрицательна при $\lambda>b$ и положительна при $\lambda<a$. Справедлива и обратная теорема.

955. Доказать, что если все характеристические числа вещественной симметрической матрицы A заключены в сегменте $[a, c]$ и все характеристические числа вещественной симметрической матрицы B заключены в сегменте $[b, d]$, то все характеристические числа матрицы $A+B$ заключены в сегменте $[a+b, c+d]$.

956. Назовем арифметическое значение квадратного корня из наибольшего характеристического числа матрицы AA'

(A — вещественная квадратная матрица, $\bar{A}$ — ее транспонированная) нормой матрицы A и обозначим ее через $\|A\|$. Доказать, что

a) $\|A\| = \|\bar{A}\|$;

b) $|AX| \leqslant \|A\| \cdot |X|$, причем для некоторого вектора X_0 имеет место равенство;

c) $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$;

d) $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$;

e) модули всех характеристических чисел матрицы A не превосходят $\|A\|$.

957. Доказать, что всякая вещественная неособенная матрица может быть представлена в виде произведения ортогональной матрицы и треугольной вида

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

с положительными диагональными элементами b_{ii} и такое представление единственно.

958. Доказать, что всякая вещественная неособенная матрица может быть представлена в виде произведения ортогональной матрицы и симметрической, соответствующей некоторой положительной квадратичной форме.

959. Пусть дана поверхность второго порядка в n-мерном пространстве посредством уравнения

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + \\ + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + \dots + 2b_nx_n + c = 0, \end{aligned}$$

или в сокращенной записи $AX \cdot X + 2B \cdot X + c = 0$. Доказать, что для существования центра поверхности необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A был равен рангу матрицы (A, B).

960. Доказать, что уравнение центральной поверхности второго порядка может быть приведено посредством переноса начала и ортогонального преобразования к каноническому виду

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_r x_r^2 + \gamma = 0.$$

961. Доказать, что уравнение нецентральной поверхности второго порядка может быть приведено посредством переноса начала и ортогонального преобразования к каноническому виду:

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_r x_r^2 = 2x_{r+1}.$$

§ 5. Линейные преобразования. Каноническая форма Жордана

962. Установить, что размерность подпространства, в которое отображается все пространство при линейном преобразовании, равна рангу матрицы этого линейного преобразования.

963. Пусть Q есть подпространство размерности q пространства R размерности n, а Q' есть образ Q при линейном преобразовании ранга r пространства R. Доказать, что размерность q' пространства Q' удовлетворяет неравенствам

$$q + r - n \leqslant q' \leqslant \min(q, r).$$

964. Пользуясь результатом задачи 963, установить, что ранг ρ произведения двух матриц рангов r_1 и r_2 удовлетворяет неравенствам

$$r_1 + r_2 - n \leqslant \rho \leqslant \min(r_1, r_2).$$

***965.** Пусть P и Q — какие-либо взаимно дополнительные подпространства пространства R. Тогда любой вектор $X \in R$ однозначно разлагается на сумму векторов $Y \in P$ и $Z \in Q$. Преобразование, заключающееся в переходе от вектора X к его компоненте Y, называется проектированием на P параллельно Q. Доказать, что проектирование есть линейное преобразование и его матрица A (в любом базисе) удовлетворяет условию $A^2 = A$. Обратно, всякое линейное преобразование, матрица которого удовлетворяет условию $A^2 = A$, есть проектирование.

*966. Проектирование называется ортогональным, если $P \perp Q$. Доказать, что в любом ортогонально нормированном базисе матрица ортогонального проектирования симметрична. Обратно, всякая симметрическая равностепенная матрица есть матрица ортогонального проектирования.

*967. Доказать, что все отличные от нуля характеристические числа кососимметрической матрицы чисто мнимы, а вещественная и мнимая части соответствующих собственных векторов равны по длине и ортогональны.

*968. Доказать, что для кососимметрической матрицы A можно найти такую ортогональную матрицу P, что

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & & & & & & \\ -a_1 & 0 & & & & & & & & & \\ & & 0 & a_2 & & & & & & & \\ & & -a_2 & 0 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & 0 & a_k & & & & \\ & & & & & -a_k & 0 & & & & \\ & & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(все не указанные элементы равны нулю; $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — вещественные числа).

969. Доказать теорему: если A — кососимметрическая матрица, то матрица $(E-A)(E+A)^{-1}$ есть ортогональная матрица, не имеющая -1 характеристическим числом. Обратно, каждая ортогональная матрица, не имеющая -1 характеристическим числом, может быть представлена в этой форме.

*970. Доказать, что модули всех характеристических чисел ортогональной матрицы равны 1.

*971. Доказать, что собственные векторы ортогональной матрицы, принадлежащие комплексному характеристическому числу, имеют вид $X+iY$, где X, Y — вещественные векторы, равные по длине и ортогональные.

*972. Доказать, что каждая ортогональная матрица может быть представлена в виде

$$Q^{-1}TQ,$$

где Q — ортогональная матрица, а T имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & & & & & & & & & & \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & & & & & & & & & & \\ & & \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & & & & & & & & & & \\ & & \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & & & & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & & & & & & -1 & \end{pmatrix}$$

(все не обозначенные элементы равны нулю).

978. Привести к нормальной форме Жордана матрицы:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 18 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 8 & 30 & -14 \\ -6 & -19 & 9 \\ -6 & -23 & 11 \end{pmatrix}$;

k) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$;

m) $\begin{pmatrix} 9 & 22 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{pmatrix}$; n) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

o) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

974. **Привести к нормальной форме Жордана матрицы:**

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}$.

***975.** Доказать, что всякая периодическая матрица A (удовлетворяющая условию $A^m = E$ при некотором натуральном m) приводится к диагональной канонической форме.

***976.** Зная характеристические числа матрицы A, найти характеристические числа матрицы A'_m, составленной из надлежащим образом расположенных миноров m-го порядка матрицы A (см. задачу 531).

977. Доказать, что любую матрицу A можно преобразовать в транспонированную.

***978.** Доказать, что любую матрицу можно представить в виде произведения двух симметрических матриц, одна из которых неособенная.

979. Исходя из данной матрицы A порядка n, строим ряд матриц посредством следующего процесса:

$$\begin{array}{lll}
A_1 = A; & \operatorname{Sp} A_1 = p_1; & A_1 - p_1E = B_1, \\
B_1A = A_2; & \frac{1}{2}\operatorname{Sp} A_2 = p_2; & A_2 - p_2E = B_2, \\
B_2A = A_3; & \frac{1}{3}\operatorname{Sp} A_3 = p_3; & A_3 - p_3E = B_3, \\
\dots & \dots & \dots \\
B_{n-1}A = A_n; & \frac{1}{n}\operatorname{Sp} A_n = p_n; & A_n - p_nE = B_n,
\end{array}$$

где $\operatorname{Sp} A_i$ — след матрицы A_i (сумма диагональных элементов). Доказать, что: $p_1, p_2, \dots, p_n$ — коэффициенты характеристического полинома матрицы A, записанного в форме $(-1)^n[\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \dots - p_n]$; матрица B_n нулевая; наконец, если A — неособенная матрица, то $\frac{1}{p_n}B_{n-1} = A^{-1}$.

***980.** Для того чтобы уравнение $XY - YX = C$ было разрешимо в квадратных матрицах X, Y, необходимо и достаточно, чтобы след матрицы C равнялся нулю. Доказать.

ЧАСТЬ II
УКАЗАНИЯ

Глава 1
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

11. См. задачу 10.

13. Показать справедливость теоремы для каждого из четырех действий над двумя числами и воспользоваться методом математической индукции.

18. Воспользоваться тем, что левые части легко представляются в виде суммы двух квадратов.

27. Положить $x=a+bi$, $y=c+di$.

28. Положить $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

31. Положить $z=t^2$; $z'=t'^2$. Использовать задачу 27.

37. Перейти к тригонометрической форме.

38. $1+\omega=-\omega^2$.

40. Перейти к половинному углу.

41. Убедиться, что $z=\cos\theta\pm i\sin\theta$; $\frac{1}{z}=\cos\theta\mp i\sin\theta$. Воспользоваться формулой Муавра.

51. Положить $\alpha=\cos x+i\sin x$. Тогда $\cos^{2m}x=\left(\frac{\alpha+\alpha^{-1}}{2}\right)^{2m}$ и т. д.

52. Показать, что коэффициент при $(2\cos x)^{m-2p}$ равен $(-1)^p(C_{m-p}^p+C_{m-p-1}^{p-1})$. Воспользоваться методом математической индукции.

53. Задача аналогична предыдущей.

54. Воспользоваться разложением по формуле бинома Ньютона $(1+i)^n$.

55. Воспользоваться предыдущей задачей.

56. Разложить по формуле бинома Ньютона $\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$.

68. Показать, что задача сводится к вычислению предела суммы $1+\alpha+\alpha^2+\ldots$, где $\alpha=\frac{-1+i}{2}$.

69. Воспользоваться тем, что $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2\alpha}{2}$.

71. Воспользоваться тем, что

$$\cos^3\alpha=\frac{\cos 3\alpha}{4}+\frac{3\cos\alpha}{4};\quad \sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha}{4}-\frac{\sin 3\alpha}{4}.$$

72. Для вычисления сумм вида $1+2a+3a^2+\ldots+na^{n-1}$ и $1+2^2a+3^2a^2+\ldots+n^2a^{n-1}$ их полезно умножить предварительно на $1-a$.

76. $x_1=\alpha+\beta$; $x_2=\alpha\omega+\beta\omega^2$; $x_3=\alpha\omega^2+\beta\omega$; $\alpha^3+\beta^3=-q$, $3\alpha\beta=-p$.

77. Умножить на -27 и рассмотреть левую часть как дискриминант некоторого кубического уравнения.

78. Положить $x=\alpha+\beta$.

87. Показать, что $\varepsilon^n=-1$.

88. Если $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$, то искомая сумма может быть записана так: $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{n-1}$.

89. Рассмотреть два случая: 1) k делится на n; 2) k не делится на n.

91, 92. Умножить на $1-\varepsilon$.

94. а) Из суммы всех корней 15-й степени из 1 вычесть сумму корней, принадлежащих показателям 1, 3 и 5.

97. Длина стороны правильного 14-угольника, радиус которого 1, равна $2\sin\frac{\pi}{14}$. Использовать то обстоятельство, что уравнению $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ удовлетворяет $\cos\frac{4\pi}{7}+i\sin\frac{4\pi}{7}$.

98. 1) Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни уравнения $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$, то $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=a_0(x-x_1)\ldots(x-x_n)$.

2) Если ε — корень n-й степени из 1, то $\bar{\varepsilon}$, сопряженное с ε, также корень n-й степени из 1.

99. В тождествах, полученных в результате задачи 98, положить $x=1$.

100. Воспользоваться разложением x^n-1 на множители первой степени.

101. В разложении x^n-1 на линейные множители положить: 1) $x=\cos\theta+i\sin\theta$; 2) $x=\cos\theta-i\sin\theta$.

103. Воспользоваться тем, что модули комплексных сопряженных чисел равны.

105. а) Уравнение преобразовать к виду $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m=1$.

107. Пусть

$$S=\cos\varphi+C_n^1\cos(\varphi+\alpha)x+\ldots+\cos(\varphi+n\alpha)x^n,$$

$$T=\sin\varphi+C_n^1\sin(\varphi+\alpha)x+\ldots+\sin(\varphi+n\alpha)x^n.$$

Вычислить $S+Ti$ и $S-Ti$ и определить S из полученных равенств.

113. Доказать сначала, что $\varphi(p^\alpha)=p^\alpha\left(1-\frac{1}{p}\right)$, если p — простое число. С этой целью подсчитать количество чисел, не превосходящих p^α и делящихся на p.

116. Доказать, что все корни $x^{p^{m-1}}-1$ и только они не являются первообразными корнями $x^{p^m}-1$.

117. Показать, что если n — нечетное, то для получения всех первообразных корней степени $2n$ из единицы достаточно все первообразные корни степени n умножить на -1.

119. Использовать задачу 118.

120. Использовать задачи 115, 116, 111 и показать, что 1) $\mu(p)=-1$, если p — простое; 2) что $\mu(p^\alpha)=0$, если p — простое, $\alpha>1$; 3) $\mu(ab)=\mu(a)\mu(b)$, если a и b взаимно просты.

122. Показать, что если $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ принадлежит показателю n_1, то $x-\varepsilon_k$ войдет в правую часть доказываемого равенства в степени $\sum\mu(d_1)$, где d_1 пробегает все делители $\frac{n}{n_1}$.

123. Рассмотреть случаи: 1) n — степень простого числа; 2) n — произведение степеней различных простых. Для случая 1) использовать задачу 116, для 2) — задачи 119 и 122.

124. Рассмотреть случаи: 1) n — нечетное, большее 1; 2) $n=2^k$; 3) $n=2n_1$, n_1 — нечетное, большее 1; 4) $n=2^kn_1$, где $k>1$, n_1 — нечетное, большее 1.

125. Использовать тождество

$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}{2}.$$

Рассмотреть случаи: 1) n — нечетное; 2) $n=2n_1$, n_1 — нечетное; 3) $n=2^kn_1$, где $k>1$, n_1 — нечетное.

126. Умножить сумму S на сопряженную и принять во внимание, что ε^{x^2} не меняется при замене x на $x+n$.

Глава 2

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

132. Иметь в виду, что каждая пара элементов перестановки образует инверсию.

133. Число инверсий во второй перестановке равно числу порядков в первой.

145. Показать, что в каждое слагаемое входит множителем 0.

149, 150. Заменить строки столбцами.

153. Выяснить, как изменится определитель, если каким-нибудь образом переставить его столбцы.

154. а) Обратить внимание на то, что при $x=a_i$ определитель имеет две одинаковые строки.

155. К последнему столбцу прибавить первый, умноженный на 100, и второй, умноженный на 10.

156. Сначала из каждого столбца вычесть первый.

163. Из второго столбца вычесть первый.

179. Первую строку прибавить ко всем остальным.

180—182. Первую строку вычесть из всех остальных.

183. Вторую строку вычесть из всех остальных.

184. Первую строку прибавить ко второй.

185. Все столбцы прибавить к первому.

186, 187. Из первого столбца вычесть второй, прибавить третий и т. д.

188. Разложить по элементам первого столбца или к последней строке прибавить первую, умноженную на x^n, вторую, умноженную на x^{n-1}, и т. д.

189. К последнему столбцу прибавить первый умноженный на x^{n-1}, второй, умноженный на x^{n-2}, и т. д.

190. Составить определитель, равный $f(x+1)-f(x)$. В полученном определителе из последнего столбца вычесть первый, второй, умноженный на x, третий, умноженный на x^2, и т. д.

191. Последний столбец умножить на $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и вычесть соответственно из 1-го, 2-го, ..., n-го столбца.

192. Все столбцы прибавить к первому.

194. Все столбцы прибавить к последнему.

195. Из первого столбца вынести a_1, из второго a_2 и т. д. К последнему столбцу прибавить все предыдущие.

196. Из первого столбца вынести h; первый столбец прибавить ко второму.

197. Первую строку и первый столбец умножить на x.

198. Из каждой строки вычесть первую, умноженную последовательно на $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Из каждого столбца вычесть первый, умноженный последовательно на $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

199. Все столбцы прибавить к первому.

200. К первому столбцу прибавить все остальные.

201. Из каждого столбца, начиная с последнего, вычесть предшествующий столбец, умноженный на a.

202. Из каждой строки, начиная с последней, вычесть предыдущую. Затем к каждому столбцу добавить первый.

203. Умножить первую строку на b_0, вторую на b_1 и т. д. К первой строке прибавить все последующие.

204. Из первой строки вынести a и из второй вычесть первую.

205. Разложить по элементам первой строки.

206. Представить в виде суммы двух определителей.

208. К каждому элементу, не стоящему на главной диагонали, приписать в качестве слагаемого нуль и представить определитель в виде суммы 2^n определителей. Использовать задачу 206 или 207.

211. Первый столбец умножить на x^{n-1}, второй на x^{n-2} и т. д.

212. Разложить по элементам последнего столбца и показать, что $\Delta_n = x_n\Delta_{n-1} + a_n x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$ (Δ_n означает определитель порядка n). Для вычисления определителя воспользоваться методом математической индукции.

213. Разложить по элементам последнего столбца и показать, что $\Delta_{n+1} = x_n\Delta_n + a_n y_1 y_2 \ldots y_n$.

214. Из второго столбца вынести a_1, из третьего $a_2, \ldots$, из $(n+1)$-го a_n. У первого столбца изменить знак на противоположный и прибавить все столбцы к первому.

215. Разложить по элементам первой строки.

216. Разложить по элементам первой строки и показать, что $\Delta_n = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} - \Delta_{n-1}$.

219. Воспользоваться результатом задачи 217.

221. Разложить по элементам первой строки и показать, что $\Delta_n = x\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$.

222. Из последней строки вычесть предпоследнюю, умноженную на $\frac{y_n}{y_{n-1}}$. Показать, что $\Delta_n = \frac{y_n}{y_{n-1}}(x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n)\Delta_{n-1}$.

223. Представить в виде суммы двух определителей и показать, что $\Delta_n = a_n\Delta_{n-1} + a_1a_2\ldots a_{n-1}$.

225. Представить в виде суммы двух определителей и показать, что

$$\Delta_n = (a_n - x)\,\Delta_{n-1} + x\,(a_1 - x)\ldots(a_{n-1} - x).$$

226. Положив $x_n = (x_n - a_n) + a_n$, представить определитель в виде суммы двух определителей и показать, что

$$\Delta_n = (x_n - a_n)\,\Delta_{n-1} + a_n\,(x_1 - a_1)\,(x_2 - a_2)\ldots(x_{n-1} - a_{n-1}).$$

227. Представить в виде суммы двух определителей и показать, что

$$\Delta_n = (x_n - a_nb_n)\,\Delta_{n-1} + a_nb_n\,(x_1 - a_1b_1)\ldots(x_{n-1} - a_{n-1}\,b_{n-1}).$$

228. Представить в виде суммы двух определителей и показать, что

$$\Delta_n = -\,m\Delta_{n-1} + (-1)^{n-1}m^{n-1}x_n.$$

230. Разложить по элементам первой строки и показать, что

$$\Delta_{2n} = (a^2 - b^2)\,\Delta_{2n-2}.$$

231. Из каждой строки вычесть предыдущую и ко второй строке прибавить все последующие. Далее, разложив определитель по элементам последней строки, показать, что

$$\Delta_n = [a + (n-1)\,b]\,\Delta_{n-1} + a\,(a+b)\ldots[a + (n-2)\,b].$$

232. Представить в виде суммы двух определителей и показать, что

$$\Delta_n = x\,(x - 2a_n)\,\Delta_{n-1} + a_n^2x^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(x - 2a_i).$$

233. Положив $(x - a_n)^2 = x\,(x - 2a_n) + a_n^2$, представить определитель в виде суммы двух определителей и показать, что

$$\Delta_n = x\,(x - 2a_n)\,\Delta_{n-1} + a_n^2x^{n-1}\,(x - 2a_1)\ldots(x - 2a_{n-1}).$$

234. Представить в виде суммы двух определителей и доказать, что

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + (-1)^nb_1b_2\ldots b_n.$$

235. Последний элемент последней строки представить в виде $a_n - a_n$. Доказать, что

$$\Delta_n = (-1)^{n-1}b_1b_2\ldots b_{n-1}a_n - a_n\Delta_{n-1}.$$

236. Из каждой строки вычесть последующую.

237. В левом верхнем углу положить $1 = x + (1 - x)$. Определитель представить в виде суммы двух определителей. Использовать результат задачи 236.

238. Умножить вторую строку на x^{n-1}, третью на x^{n-2}, ..., n-ю на x. Из первого столбца вынести x^n, из второго x^{n-1}, ..., из n-го x.

239. Использовать указание, данное к предыдущей задаче.

240. Из каждого столбца, начиная с последнего, вычесть предыдущий. Затем из каждой строки вычесть предыдущую. Доказать, что $\Delta_n = \Delta_{n-1}$. При вычислении иметь в виду, что $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

241. Из каждого столбца вычесть предыдущий.

242. Из каждой строки вычесть предыдущую. Доказать, что $\Delta_n = \Delta_{n-1}$.

243. Вынести из 1-й строки m, из 2-й $m+1$, ..., из последней $m+n$. Из 1-го столбца вынести $\frac{1}{k}$, из 2-го $\frac{1}{k+1}$ и т. д. Повторять эту операцию до тех пор, пока все элементы 1-го столбца не станут равными 1.

244. Из каждого столбца вычесть предыдущий. В полученном определителе из каждого столбца вычесть предыдущий, сохраняя первые два без изменения. Вновь из каждого столбца вычесть предыдущий, сохраняя без изменения первые три столбца, и т. д. После m таких операций получится определитель, у которого все элементы последнего столбца равны 1. Вычисление этого определителя особых затруднений не представит.

245. Из каждой строки вычесть предыдущую и показать, что $\Delta_{n+1} = (x-1)\,\Delta_n$.

246. Из каждой строки вычесть предыдущую и показать, что $\Delta_{n+1} = (n-1)\,!\,(x-1)\,\Delta_n$.

247. Из каждой строки вычесть предыдущую; из каждого столбца вычесть предыдущий. Доказать, что $\Delta_n = \alpha\Delta_{n-1}$.

248. Последний элемент последней строки представить в виде $z+(x-z)$. Определитель представить в виде суммы двух определителей. Использовать то обстоятельство, что определитель симметричен относительно y и z.

249. См. указание к задаче 248.

252. Из каждой строки вычесть первую, умноженную на $\frac{\beta}{a}$. В полученном определителе из первого столбца вынести $\frac{ab-\lambda\beta}{a(\alpha-\beta)}$ и из первого столбца вычесть все остальные.

253. Все столбцы прибавить к первому и из каждой строки вычесть предшествующую. См. задачу 199.

254. Использовать указание к предыдущей задаче.

256. Рассмотреть определитель как многочлен четвертой степени от a. Показать, что искомый многочлен делится на следующие многочлены первой степени относительно a:

$$a+b+c+d;\quad a+b-c-d;\quad a-b+c-d;\quad a-b-c+d.$$

258. Добавив все столбцы к первому, выделить множитель $x+a_1+\ldots+a_n$. Положив затем $x=a_1, a_2, \ldots, a_n$, убедиться в том, что определитель делится на $x-a_1$, $x-a_2$, ..., $x-a_n$.

259. Определитель Вандермонда.

264. Разложить по элементам первого столбца.

265. Из второй строки вычесть первую. В полученном определителе из третьей строки вычесть вторую и т. д.

269. Из третьей строки вынести $\frac{1}{2!}$, из четвертой $\frac{1}{3!}$ и т. д.

270. Воспользоваться результатом задачи 269.

271. Из второго столбца вынести 2, из третьего 3 и т. д. При вычислении $\prod\limits_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (i^2-k^2)$ полезно представить

$$\prod (i^2-k^2)=\prod (i-k)\cdot\prod (i+k).$$

272. Из первого столбца вынести $\frac{x_1}{x_1-1}$; из второго $\frac{x_2}{x_2-1}$ и т. д.

273. Из первой строки вынести a_1^n, из второй a_2^n и т. д.

275. К первому столбцу прибавить второй, умноженный на C_{2n}^1; третий, умноженный на C_{2n}^2, и т. д.

276. Воспользоваться результатом задачи 51.

277. Воспользоваться задачей 53.

278. Приписать строку $1, x_1, x_2, \ldots, x_n$ и столбец $1, 0, 0, \ldots, 0$.

279. Рассмотреть определитель

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n & z \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 & z^2 \\ . & . & . & . & . \\ x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n & z^n \end{vmatrix}.$$

Сравнить разложение D по элементам последнего столбца с выражением $D=\prod\limits_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i-x_k)\cdot\prod\limits_{i=1}^{n} (z-x_i)$.

280. Воспользоваться указанием к предыдущей задаче.

282. Приписать первую строку $1, 0, \ldots, 0$ и первый столбец $1, 1, 1, \ldots, 1$. Вычесть первый столбец из всех последующих.

285. Разложить по элементам последней строки.

286. Сначала из каждого столбца, начиная с последнего, вычесть предшествующий, умноженный на x. Затем, после понижения порядка и вынесения очевидных множителей, преобразовать первые строки (зависящие от x), используя соотношение

$$(m+1)^s-m^s=sm^{s-1}+\frac{s(s-1)}{2}m^{s-2}+\ldots+1.$$

287. Из каждого столбца, начиная с последнего, вычесть предшествующий, умноженный на x.

288. m) Прибавить к первому столбцу шестой и одиннадцатый, ко второму столбцу седьмой и двенадцатый, ..., к пятому столбцу десятый и пятнадцатый. Прибавить к шестому столбцу одиннадцатый, к седьмому столбцу двенадцатый, ..., к десятому столбцу пятнадцатый.

Из пятнадцатой строки вычесть десятую, из четырнадцатой строки вычесть девятую, ..., из шестой строки вычесть первую.

293. Рассмотреть

$$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 a_0 & C_n^2 a_0^2 & \ldots & a_0^n \\ 1 & C_n^1 a_1 & C_n^2 a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ . & . & . & . & . \\ 1 & C_n^1 a_n & C_n^2 a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0^n & b_1^n & \ldots & b_n^n \\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & \ldots & b_n^{n-1} \\ . & . & . & . \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

294. Рассмотреть

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \dots & \cos\alpha_n \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \dots & \sin\alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

295. Рассмотреть

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n & x^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

296. Возвести в квадрат.

297. Вычесть из третьего столбца первый, из четвертого—второй. Затем умножить на

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ 0 & 0 & \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{vmatrix}.$$

298. Отнять из второго столбца n-кратный первый, из четвертого n-кратный второй. Переставить местами второй и третий столбцы. Умножить на

$$\begin{vmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi & 0 & 0 \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(n+1)\varphi & -\sin(n+1)\varphi \\ 0 & 0 & \sin(n+1)\varphi & \cos(n+1)\varphi \end{vmatrix}.$$

299. Возвести в квадрат. Преобразовать как определитель Вандермонда и каждую разность преобразовать к синусу некоторого угла. Таким образом определится знак.

300. Изучить произведение

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon_1^{n-1} & \dots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix},$$

где $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$

308. Ввести в рассмотрение $\varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$. Тогда

$$\Delta = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_1^j + \varepsilon_1^{-j}}{2}\,\varepsilon_1^{2k(j-1)}\right).$$

311. Использовать задачу 92.

314. $$\prod_{k=0}^{2n-1}{}' (a_0+a_1\varepsilon_k+a_2\varepsilon_k^2+\ldots+a_{2n-1}\varepsilon_k^{2n-1})=$$

$$=\prod_{r=0}^{n-1}[(a_0+a_n)+(a_1+a_{n+1})\alpha_r+\ldots+(a_{n-1}+a_{2n-1})\alpha_r^{n-1}]\times$$

$$\times\prod_{s=0}^{n-1}[(a_0-a_n)+(a_1-a_{n+1})\beta_s+\ldots+(a_{n-1}-a_{2n-1})\beta_s^{n-1}],$$

где $\varepsilon_k=\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}$; $\alpha_r=\cos\frac{2r\pi}{n}+i\sin\frac{2r\pi}{n}$;

$$\beta_s=\cos\frac{(2s+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2s+1)\pi}{n}.$$

323. Из каждой строки вычесть первую, из каждого столбца вычесть первый.

325. Использовать задачу 217.

327. Представить в виде суммы определителей или положить $x=0$ в определителе и его производных.

328. 1) Из $(2n-1)$-й строки вычесть $(2n-2)$-ю, из $(2n-2)$-й строки вычесть $(2n-3)$-ю, ..., из $(n+1)$-й строки вычесть n-ю, из n-й строки вычесть сумму всех предшествующих.

2) К $(n+1)$-й строке прибавить i-ю, $i=1, 2, \ldots, n-1$.

329. К каждой строке прибавить все последующие, из каждого столбца вычесть предыдущий. Доказать, что

$$\Delta_{n+1}(x)=(x-n)\,\Delta_n(x-1).$$

Глава 4

МАТРИЦЫ

466. Воспользоваться результатом задачи 465 е).

473. Рассмотреть сумму диагональных элементов.

491. Воспользоваться результатами задач 489, 490.

492. Воспользоваться результатом задачи 490.

494, 495. Воспользоваться результатами задач 492, 493.

496. Провести доказательство индуктивно по числу столбцов матрицы B, доказав предварительно, что если присоединение одного столбца не меняет ранга матрицы B, то оно не меняет и ранга матрицы (A, B).

Можно провести доказательство и не индуктивно, воспользовавшись теоремой Лапласа.

497. Воспользоваться результатами задач 496, 492.

498. Из матрицы $(E-A, E+A)$ выбрать неособенную квадратную матрицу P и рассмотреть произведения $(E-A)P$ и $(E+A)P$.

500. Воспользоваться результатом задачи 489.

501. Доказать единственность представления в задаче 500 и свести тем самым задачу к подсчету числа треугольных матриц R

с данным определителем k. Обозначив искомое число через $F_n(k)$, доказать, что если $k=a\cdot b$ при взаимно простых a, b, то $F_n(k)=F_n(a)F_n(b)$. Наконец, осуществить индуктивное построение формулы для $F_n(p^m)$, где p — простое число.

505. Воспользоваться результатами задач 495, 498. Найти матрицу P с возможно меньшим определителем так, чтобы $P^{-1}AP$ была диагональной, и затем воспользоваться результатом задачи 500.

517. Воспользоваться теоремой Лапласа и неравенством Буняковского.

518. Установить равенство $|\bar{A}A|=|\bar{B}B|\cdot|\bar{C}C|$ в предположении, что сумма произведений элементов любого столбца матрицы B на соответствующие элементы любого столбца матрицы C равна нулю. Затем дополнить надлежащим образом матрицу (B, C) до квадратной и воспользоваться результатом задачи 517.

523. Приписать к определителю слева столбец, все элементы которого равны $\frac{M}{2}$, и сверху строчку, все элементы которой (кроме углового), равны 0, затем вычесть первый столбец из всех остальных.

527. Воспользоваться результатами задач 522, 526.

528. Установить связь взаимной матрицы с обратной.

529. Для минора, образованного элементами первых m строчек и первых m столбцов взаимной матрицы, установить результат, рассмотрев произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{m+1,1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \dots & A_{m+1,2} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1m} & \dots & A_{m+1,m} & \dots & A_{nm} \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ik} — алгебраические дополнения элементов a_{ik}.

Аналогичным образом поступить в общем случае.

535. Представить $A\times B$ как $(A\times E_m)\cdot(E_n\times B)$.

537. Провести доказательство по индукции, сначала разобрав случай, когда A_{11} есть неособенная матрица. Общий случай свести к этому, добавив к матрице λE.

Глава 5

ПОЛИНОМЫ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

547. а) Разложить $f(x)$ по степеням $x-3$, затем заменить x на $x+3$.

553. Непосредственно продифференцировать и подставить $x=1$, затем выделить максимальную степень x и продолжать дифференцирование.

555. Ввести в рассмотрение полиномы

$$f_1(x)=nf(x)-xf'(x);\quad f_2(x)=nf_1(x)-xf_1'(x)$$

и т. д.

561. Доказывать способом математической индукции.

562. Отличный от нуля корень $(k-1)$-й кратности полинома $f(x)$ есть корень $(k-2)$-й кратности полинома $xf'(x)$, $(k-3)$-й — полинома $x[xf'(x)]'$ и т. д.

Обратно, общий отличный от нуля корень полиномов $f(x)$, $xf'(x)$, $x[xf'(x)]'$, ... (всего $k-1$ полином) есть корень $f(x)$ не ниже чем $(k-1)$-й кратности.

563. Дифференцировать равенство, показывающее, что полином делится на свою производную.

567. Рассмотреть функцию $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ или $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$.

568. Связать задачу с рассмотрением корней

$$\varphi(x)=f(x)f'(x_0)-f'(x)f(x_0),$$

где x_0 — корень $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$.

569. Использовать решение предшествующей задачи и разложить $f(x)$ по степеням $x-x_0$.

576. Доказывать, как лемму Даламбера.

580, 581. Представить функцию в таком же виде, как при доказательстве леммы Даламбера:

$$f(z)=f(a)+\frac{f^k(a)}{k!}(z-a)^k[1+\varphi(z)];\qquad \varphi(a)=0.$$

583. Найти корни полиномов и учесть старшие коэффициенты [в задачах a) и b)]. В задаче c) для разыскания корней целесообразно положить $x=\operatorname{tg}^2\theta$.

589. Найти общие корни.

608. Доказать предварительно, что $f(x)$ не имеет вещественных корней нечетной кратности.

623. Использовать результат задачи 622.

626. Воспользоваться тем, что уравнение не должно изменяться при замене x на $-x$ и x на $\dfrac{1}{x}$.

627. Уравнение не должно меняться при замене x на $\dfrac{1}{x}$ и x на $1-x$.

637. Поделить на $(1-x)^n$ и дифференцировать $m-1$ раз, полагая после каждого дифференцирования $x=0$. Воспользоваться тем, что степень $N(x)$ меньше m, степень $M(x)$ меньше n.

642. Воспользоваться формулой Лагранжа. Произвести деление в каждом слагаемом результата и привести подобные члены, используя результат задачи 100.

644. Выразить $f(x_0)$ через $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, пользуясь интерполяционной формулой Лагранжа, и сравнить результат с условием задачи, принимая во внимание независимость $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$. Затем изучить $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, разложив его по степеням $x-x_0$.

645. Полином x^s представить через свои значения посредством интерполяционной формулы Лагранжа.

648, 649. Составить интерполяционный полином по способу Ньютона.

650. Найти значения искомого полинома при $x=0, 1, 2, 3, \ldots, 2n$.

651. Можно решить задачу, пользуясь способом Ньютона. Короче, рассмотреть полином $F(x)=xf(x)-1$, где $f(x)$ — искомый полином.

652. Рассмотреть полином $(x-a)f(x)-1$.

653. Составить полином по способу Ньютона, вводя для удобства вычислений в знаменатель каждого слагаемого факториал.

654. Рассмотреть полином $f(x^2)$, где $f(x)$ — искомый полином.

655. Проще всего по формуле Лагранжа

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{(x-x_k)\varphi'(x_k)}$$ ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни знаменателя).

656. Разложить сперва по формуле Лагранжа, затем объединить комплексно сопряженные слагаемые.

657. e) Использовать задачу 631. f) Положить $\frac{a+x}{2a}=y$.

d), h) Искать разложения способом неопределенных коэффициентов. Часть найти подстановкой $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$ после умножения на общий знаменатель. Затем продифференцировать и снова положить $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$.

660. Использовать задачу 659. В примере b) разложить $\frac{1}{x^2-3x+2}$ на простейшие дроби.

665, 666. Воспользоваться задачей 663.

667. В примере c) разложить полином по степеням $x-1$.

668. Разложить по степеням $x-1$ (или положить $x=y+1$).

669. Положить $x=y+1$ и методом математической индукции доказать, что все коэффициенты делимого и делителя, кроме старших, делятся на p.

670, 671. Доказывается, как теорема Эйзенштейна.

679, 680. Допустив приводимость $f(x)$, положить $x=a_1, a_2, \ldots, a_n$ и сделать заключение о значениях делителей.

681. Подсчитать число равных значений предполагаемых делителей.

682. Воспользоваться тем, что $f(x)$ не имеет вещественных корней.

683. Доказать, что полином, имеющий более чем три целых корня, не может иметь своим значением простое число при целом значении независимой переменной, и применить это к полиному $f(x)-1$.

684, 685. Воспользоваться результатом задачи 683.

702. Составить ряд Штурма и рассмотреть порознь случаи четного и нечетного n.

707—712. Вывести рекуррентные соотношения между полиномами смежных степеней и их производными и построить из них ряд Штурма. В задаче 708 составить ряд Штурма только для положительных значений x и убедиться в отсутствии отрицательных корней из других соображений. В задаче 709 составить ряд Штурма для отрицательных x.

713. Воспользоваться тем, что $F'(x)=2f(x)f'''(x)$ и что $f'''(x)$ — постоянная.

717. Разложить $g(x)$ на множители и применить несколько раз результат задачи 716.

718. Применить результат задачи 717 к полиному x^m.

719. Воспользоваться тем, что если все корни полинома $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ вещественны, то все корни полинома $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ вещественны.

721. Умножить на $x-1$.

727. Доказывать от противного, воспользовавшись теоремой Ролля и результатом задачи 581.

728. Построить график $\psi(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ и строго доказать, что каждый корень $[f'(x)]^2 - f(x) f''(x)$ дает экстремальную точку для $\psi(x)$ и обратно. Доказать, что $\psi(x)$ не имеет экстремальных точек в интервалах между корнями $f'(x)$, содержащих корень $f(x)$, и имеет точно одну экстремальную точку в интервалах, не содержащих корней $f(x)$.

729. Использовать результат задач 727 и 726.

730. Изучить поведение функции

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} + \frac{x+\lambda}{\gamma}.$$

731. Решается на основе предыдущей задачи при $\lambda = 0$.

732. Доказать индукцией по степени $f(x)$, положив $f(x) = (x+\lambda) f_1(x)$, где $f_1(x)$ — полином степени $n-1$.

733. Доказывается двукратным применением результата задачи 732.

734. Если все корни $f(x)$ положительны, то доказательство проводится элементарными средствами, именно индукцией по степени $f(x)$. В индуктивные предположения следует включить, что корни $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ полинома $b_0 + b_1wx + \ldots + b_{n-1}w^{(n-1)^2}x^{n-1}$ удовлетворяют условию

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} \quad \text{и} \quad x_i > x_{i-1}w^{-2},$$

Для доказательства теоремы в общем случае следует представить w^{x^2} как предел полинома от x с корнями, не содержащимися в интервале $(0, n)$, и воспользоваться результатом задачи 731.

735. Рассмотреть $\left|\dfrac{\varphi(x) + i\psi(x)}{\varphi(x) - i\psi(x)}\right|$, где

$$\varphi(x) = a_0 \cos\varphi + \ldots + a_n \cos(\varphi + n\theta)\, x^n,$$
$$\psi(x) = b_0 \sin\varphi + \ldots + b_n \sin(\varphi + n\theta)\, x^n.$$

736. Рассмотреть модуль $\dfrac{\varphi(x) + i\psi(x)}{\varphi(x) - i\psi(x)}$, где

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,$$
$$\psi(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n.$$

Доказав вещественность корней, умножить $\varphi(x) + i\psi(x)$ на $\alpha - \beta i$ и рассмотреть вещественную часть. Воспользоваться результатом задачи 727.

737. Разложить $\dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ на простейшие дроби, исследовать знаки коэффициентов в этом разложении и исследовать мнимую часть

$$\frac{-i\,[\varphi(x) + i\psi(x)]}{\varphi(x)} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - i.$$

738. Исследовать мнимую часть $\frac{f'(x)}{f(x)}$, разложив эту дробь на простейшие.

739. Сделать замену переменной так, чтобы данная полуплоскость преобразовалась в полуплоскость $\operatorname{Im}(x) > 0$.

740. Связать с задачей 739.

741. Разложить $\frac{f'(x)}{f(x)}$ на простейшие дроби и оценить мнимую часть.

743. Положить $x = yi$ и воспользоваться результатами задач 736 и 737.

744, 745. Воспользоваться результатом задачи 743.

746. Положить $x = \frac{1+y}{1-y}$ и воспользоваться результатом задачи 744.

747. Умножить полином на $1-x$ и, положив $|x| = \rho > 1$, оценить модуль $(1-x)f(x)$.

Глава 6

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

772. Стороны треугольника, подобного данному и вписанного в круг радиуса $1/2$, равны синусам углов данного треугольника.

800. Сначала вычислить сумму

$$\sum_{i=1}^{n} (x + x_i)^k,$$

затем подставить $x = x_j$ и просуммировать по j от 1 до n. Наконец, удалить лишние слагаемые и поделить на 2.

801. Решается, как задача 800.

805. Каждый первообразный корень из единицы степени n, будучи возведен в m-ю степень, дает первообразный корень степени $\frac{n}{d}$, где d — наибольший общий делитель m и n. В результате этой операции, проведенной над всеми первообразными корнями степени n из 1, все первообразные корни степени $\frac{n}{d}$ получаются одинаковое число раз.

806. Воспользоваться результатами задач 805, 117 и 119.

807. Нужно найти уравнение, корнями которого являются $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для этого воспользоваться формулами Ньютона или представлением коэффициентов через степенные суммы в виде определителя (задача 803).

808. Задача легко решается посредством формул Ньютона или посредством представления степенных сумм через основные симметрические функции в виде определителей (задача 802). Однако еще проще умножить уравнение на $(x-a)\cdot(x-b)$ и подсчитать степенные суммы для нового уравнения.

809. Проще всего умножить уравнение на $(x-a)\cdot(x-b)$.

818. Считать корни полинома $f(x)$ независимыми переменными. Умножить определитель из коэффициентов остатков на определитель Вандермонда.

819. Прежде всего доказать, что все полиномы ψ_k имеют степень $n-1$. Затем умножить определитель из коэффициентов ψ_k на определитель Вандермонда.

820. Решается, как задача 819.

827. Воспользоваться тем, что m-е степени первообразных корней n-й степени из 1 пробегают все первообразные корни степени $\frac{n}{d}$ из 1, где d есть наибольший общий делитель m и n.

828. Воспользоваться результатом задачи 827 и тем, что $R(X_m, X_n)$ есть делитель $R(X_m, x^n-1)$ и $R(X_n, x^m-1)$.

834, 835. Вычислить $R(f', f)$.

839. Умножить на $x-1$.

840. Умножить на $x-1$ и воспользоваться результатом задачи 835.

843. Вычислить $R(X_n, X_n')$. При вычислении значений X_n' при корнях X_n представить X_n в виде

$$(x^n-1)\prod (x^d-1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)},$$

считая d пробегающим собственные делители n.

844. Воспользоваться соотношением $E_n' = E_n - x^n$.

845. Воспользоваться соотношением

$$(nx-x-a)F_n - x(x+1)F_n' + \frac{(a-1)\dots(a-n)}{n!} = 0.$$

846. Воспользоваться соотношениями:

$$P_n = xP_{n-1} - (n-1)P_{n-2}; \qquad P_n' = nP_{n-1}.$$

847. Воспользоваться соотношениями:

$$xP_n' = nP_n + n^2P_{n-1}; \qquad P_n = (x-2n+1)P_{n-1} - (n-1)^2 P_{n-2}.$$

848. Воспользоваться соотношениями:

$$(4-x^2)P_n' + nxP_n = 2nP_{n-1}; \qquad P_n - xP_{n-1} + P_{n-2} = 0.$$

849. Воспользоваться соотношениями:

$$P_n - 2xP_{n-1} + (x^2+1)P_{n-2} = 0; \qquad P_n' = (n+1)P_{n-1}.$$

850. Воспользоваться соотношениями:

$$P_n - (2n-1)xP_{n-1} + (n-1)^2(x^2+1)P_{n-2} = 0; \qquad P_n' = n^2P_{n-1}.$$

851. Воспользоваться соотношениями:

$$P_n - (2nx+1)P_{n-1} + n(n-1)x^2P_{n-2} = 0;$$

$$P_n' = (n+1)nP_{n-1}.$$

852. Решить задачу методом множителей Лагранжа. Записать результат приравнивания производных нулю в виде дифференциального уравнения относительно полинома, дающего максимум, и решить уравнение методом неопределённых коэффициентов.

867. Показать прежде всего, что уравнений с указанными свойствами существует при данном n лишь конечное число. Затем показать, что свойства не нарушаются при преобразовании $y=x^m$.

Глава 7

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

884. Использовать результаты задач 51, 52.

916. Наименьший угол следует искать среди углов, образованных векторами второй плоскости с их ортогональными проекциями на первую плоскость.

917. Задать куб в системе координат с началом в центре и с осями, параллельным ребрам. Затем принять за оси четыре взаимно ортогональных диагонали.

918. Использовать результат задачи 907.

920. Доказывать по индукции.

921. Воспользоваться тем, что $V[A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_k] = V[A_1, \ldots, A_m]\cdot V[B_1, \ldots, B_k]$, если $A_i \perp B_j$, и результатом предыдущей задачи.

933. Прежде всего найти характеристические числа для квадрата матрицы. Затем для определения знаков при извлечении квадратного корня воспользоваться тем, что сумма характеристических чисел равна сумме элементов главной диагонали и что произведение характеристических чисел равно определителю. Применить результаты задач 126 и 299.

934. Применить результат задачи 933.

936. Использовать результаты задач 537 и 930.

943. 1) Воспользоваться тем, что определитель треугольного преобразования равен единице.

2) Положить

$$x_{k+1}=x_{k+2}=\ldots=x_n=0.$$

945. Принять линейную форму, квадрат которой добавляется к квадратичной форме, за новую независимую переменную.

946. Выделить из формы f один квадрат и воспользоваться результатом задачи 945.

948. Рассмотреть квадратичную форму от переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$:

$$f=\sum_{k=1}^{n}(u_1+u_2x_k+\ldots+u_nx_k^{n-1})^2,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни данного уравнения.

950. Разложить f и φ на сумму квадратов и воспользоваться дистрибутивностью операции (f, φ).

965. При доказательстве обратной теоремы использовать разложение $X=AX+(E-A)X$.

966. Записать матрицу проектирования в базисе, получающемся объединением ортогонально нормированных базисов P и Q.

967. Убедиться в том, что $AX \cdot X = 0$ для любого вещественного вектора X. Разложить характеристическое число и собственный вектор на вещественную и мнимую части.

968. Умножить матрицу A справа на P, слева на P^{-1}, где P — ортогональная матрица, первые два столбца которой составлены из нормированных вещественной и мнимой частей собственного вектора.

970, 971. Воспользоваться тем, что для ортогональной матрицы A $AX \cdot AY = X \cdot Y$ при любых вещественных векторах X и Y.

972. Доказывается на основе результатов задач 970, 971 и так же, как задача 968, на основании результата задачи 967.

975, 976. Перейти к канонической форме Жордана.

978. Связать с решением предыдущей задачи.

980. Необходимость—см. задачу 473.

Для доказательства достаточности рассмотреть сначала случай, когда все диагональные элементы матрицы C равны нулю. Далее, использовать, что если $C = XY - YX$, то

$$S^{-1}CS = (S^{-1}XS)(S^{-1}YS) - (S^{-1}YS)(S^{-1}XS).$$

ЧАСТЬ III

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Глава 1

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. $x=-\frac{4}{11}$; $y=\frac{5}{11}$.

2. $x=-2$; $y=\frac{3}{2}$; $z=2$; $t=-\frac{1}{2}$.

3. 1, если $n=4k$; i, если $n=4k+1$; -1, если $n=4k+2$; $-i$, если $n=4k+3$; k — целое число.

5. a) $117+44i$; b) -556; c) $-76i$.

6. В том и только в том случае, когда:

1) ни один из сомножителей не равен нулю;

2) сомножители имеют вид $(a+bi)$ и $\lambda(b+ai)$, где λ — вещественное число.

7. a) $\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$; b) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+i\frac{2ab}{a^2+b^2}$; c) $\frac{44-5i}{318}$;

d) $\frac{-1-32i}{25}$; e) 2.

8. $2i^{n-1}$.

9. a) $x=1+i$, $y=i$; b) $x=2+i$, $y=2-i$;
c) $x=3-11i$, $y=-3-9i$, $z=1-7i$.

10. a) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) 1.

11. a) $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ac)$; b) a^3+b^3;
c) $2(a^3+b^3+c^3)-3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+12abc$;
d) a^2-ab+b^2.

12. a) 0, 1, $-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$; b) 0, 1, i, -1, $-i$.

15. a) $\pm(1+i)$; b) $\pm(2-2i)$; c) $\pm(2-i)$; d) $\pm(1+4i)$;
e) $\pm(1-2i)$; f) $\pm(5+6i)$; g) $\pm(1+3i)$; h) $\pm(1-3i)$;
i) $\pm(3-i)$; j) $\pm(3+i)$; k) $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}\right)$;

l) $\pm\sqrt{8+2\sqrt{17}}, \pm i\sqrt{-8+2\sqrt{17}}$; m) $\pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$;

n) $\frac{\sqrt{2}(\pm 1 \pm i)}{2}$; o) $i^{\alpha}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right)$, $\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3.$

16. $\pm(\beta-\alpha i)$.

17. a) $x_1=3-i$; $x_2=-1+2i$; b) $x_1=2+i$; $x_2=1-3i$;

c) $x_1=1-i$; $x_2=\frac{4-2i}{5}$.

18. a) $1\pm 2i$; $-4\pm 2i$; $(x^2-2x+5)(x^2+8x+20)$;

b) $2\pm i\sqrt{2}$; $-2\pm 2i\sqrt{2}$; $(x^2-4x+6)(x^2+4x+12)$.

19. a) $x=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\pm\frac{i}{2}$; b) $\pm 4\pm i$.

20. $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{q}}{2}-\frac{p}{4}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{q}}{2}+\frac{p}{4}}$.

22. a) $\cos 0+i\sin 0$; b) $\cos\pi+i\sin\pi$; c) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$;

d) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$;

e) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

f) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

g) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$;

h) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$;

i) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

j) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

k) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$;

l) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$;

m) $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

n) $3(\cos\pi+i\sin\pi)$;

o) $2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$;

p) $(\sqrt{2}+\sqrt{6})\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

Замечание. Здесь приведено одно из возможных значений аргумента.

23. a) $\sqrt{10}\,(\cos 18°26'+i\sin 18°26')$;

b) $\sqrt{17}\,(\cos 345°57'48''+i\sin 345°57'48'')$;

c) $\sqrt{5}\,(\cos 153°26'6''+i\sin 153°26'6'')$;

d) $\sqrt{5}\,(\cos 243°26'6''+i\sin 243°26'6'')$.

24. a) Окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

b) Луч, выходящий из начала координат под углом $\frac{\pi}{6}$ к положительному направлению вещественной оси.

25. a) Внутренность круга радиуса 2 с центром в начале координат.

b) Внутренность и контур круга радиуса 1 с центром в точке (0, 1).

c) Внутренность круга радиуса 1 с центром в точке (1, 1).

26. a) $x=\frac{3}{2}-2i$; b) $x=\frac{3}{4}+i$.

27. Тождество выражает известную теорему геометрии: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

29. Если разность аргументов этих чисел равна $\pi+2k\pi$, где k — целое число.

30. Если разность аргументов этих чисел равна $2k\pi$, где k — целое число.

34. $\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)$.

35. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)\right]$.

36. a) $2^{12}(1+i)$; b) $2^9(1-i\sqrt{3})$; c) $(2-\sqrt{3})^{12}$; d) -64.

38. $\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}$.

39. $2\cos\frac{2n\pi}{3}$.

40. Решение. $1+\cos\alpha+i\sin\alpha=$

$$=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right).$$

43. a) $-i$; $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$; $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$;

b) $-1+i$; $\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$; $\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$;

c) $1+i$; $1-i$; $-1+i$; $-1-i$;

d) 1; -1; $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

e) $i\sqrt{3}$; $-i\sqrt{3}$; $\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$.

44. a) $\sqrt[6]{5}(\cos 8°5'18''+i\sin 8°5'18'')\varepsilon_k$,
где $\varepsilon_k=\cos 120°k+i\sin 120°k$, $k=0, 1, 2$;

b) $\sqrt[6]{10}(\cos 113°51'20''+i\sin 113°51'20'')\varepsilon_k$,
где $\varepsilon_k=\cos 120°k+i\sin 120°k$, $k=0, 1, 2$;

c) $\sqrt[10]{13}(\cos 11°15'29''+i\sin 11°15'29'')\varepsilon_k$,
где $\varepsilon_k=\cos 72°k+i\sin 72°k$, $k=0, 1, 2, 3, 4$.

45. a) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+19}{72}\pi+i\sin\frac{24k+19}{72}\pi\right)$,

где $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$;

b) $\frac{1}{\sqrt[16]{2}}\left(\cos\frac{24k+5}{96}\pi+i\sin\frac{24k+5}{96}\pi\right)$,

где $k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$;

c) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+17}{72}\pi+i\sin\frac{24k+17}{72}\pi\right)$, где $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$.

46. $\beta\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$, где $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

47. a) Решение. Рассмотрим $(\cos x+i\sin x)^5$. По формуле Муавра

$$(\cos x+i\sin x)^5=\cos 5x+i\sin 5x.$$

С другой стороны,

$$(\cos x+i\sin x)^5=\cos^5 x+5i\cos^4 x\sin x-10\cos^3 x\sin^2 x-$$
$$-10i\cos^2 x\sin^3 x+5\cos x\sin^4 x+i\sin^5 x=$$
$$=(\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x)+i(5\cos^4 x\sin x-$$
$$-10\cos^2 x\sin^3 x+\sin^5 x).$$

Сравнивая результаты, имеем:

$$\cos 5x=\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x;$$

b) $\cos^8 x-28\cos^6 x\sin^2 x+70\cos^4 x\sin^4 x-28\cos^2 x\sin^6 x+\sin^8 x$;
c) $6\cos^5 x\sin x-20\cos^3 x\sin^3 x+6\cos x\sin^5 x$;
d) $7\cos^6 x\sin x-35\cos^4 x\sin^3 x+21\cos^2 x\sin^5 x-\sin^7 x$.

48. $\frac{2(3\operatorname{tg}\varphi-10\operatorname{tg}^3\varphi+3\operatorname{tg}^5\varphi)}{1-15\operatorname{tg}^2\varphi+15\operatorname{tg}^4\varphi-\operatorname{tg}^6\varphi}$.

49. $\cos nx=\cos^n x-C_n^2\cos^{n-2}x\sin^2 x+C_n^4\cos^{n-4}x\sin^4 x-\ldots+M$,

где $M=(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n x$, если n — четное, и

$M=(-1)^{\frac{n-1}{2}}n\cos x\sin^{n-1}x$, если n — нечетное.

$$\sin nx=C_n^1\cos^{n-1}x\sin x-C_n^3\cos^{n-3}x\sin^3 x+\ldots+M,$$

где $M=(-1)^{\frac{n-2}{2}}n\cos x\sin^{n-1}x$, если n — четное, и

$M=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n x$, если n — нечетное.

50. a) Решение. Пусть $\alpha=\cos x+i\sin x$. Тогда

$$\alpha^{-1}=\cos x-i\sin x;$$
$$\alpha^k=\cos kx+i\sin kx;\quad \alpha^{-k}=\cos kx-i\sin kx.$$

Отсюда имеем $\cos kx=\frac{\alpha^k+\alpha^{-k}}{2}$; $\sin kx=\frac{\alpha^k-\alpha^{-k}}{2i}$.

В частности, $\cos x=\frac{\alpha+\alpha^{-1}}{2}$; $\sin x=\frac{\alpha-\alpha^{-1}}{2i}$;

$$\sin^3 x=\left(\frac{\alpha-\alpha^{-1}}{2i}\right)^3=\frac{\alpha^3-3\alpha+3\alpha^{-1}-\alpha^{-3}}{-8i}=\frac{(\alpha^3-\alpha^{-3})-3(\alpha-\alpha^{-1})}{-8i};$$

$$\sin^3 x=\frac{2i\sin 3x-6i\sin x}{-8i}=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4};$$

b) $\frac{\cos 4x-4\cos 2x+3}{8}$; c) $\frac{\cos 5x+5\cos 3x+10\cos x}{16}$;

d) $\frac{\cos 6x+6\cos 4x+15\cos 2x+10}{32}$.

52. Решение.

$$C_{m-p}^{p}+C_{m-p-1}^{p-1}=$$

$$=\frac{(m-p)(m-p-1)\dots(m-2p+1)}{p!}+\frac{(m-p-1)\dots(m-2p+1)}{(p-1)!}=$$

$$=\frac{m(m-p-1)(m-p-2)\dots(m-2p+1)}{p!}.$$

Обозначим $2\cos mx=S_m$; $2\cos x=a$. Тогда интересующее нас равенство можно записать так:

$$S_m=a^m-ma^{m-2}+(C_{m-2}^2+C_{m-3}^1)a^{m-4}-\dots$$
$$\dots+(-1)^p(C_{m-p}^p+C_{m-p-1}^{p-1})a^{m-2p}+\dots$$

Нетрудно показать, что

$$2\cos mx=2\cos x\cdot 2\cos(m-1)x-2\cos(m-2)x,$$

или, в наших обозначениях, $S_m=aS_{m-1}-S_{m-2}$.

Нетрудно проверить, что для $m=1$ и $m=2$ доказываемое равенство справедливо. Допустим, что

$$S_{m-1}=a^{m-1}-(m-1)a^{m-3}+(C_{m-3}^2+C_{m-4}^1)a^{m-5}+\dots$$
$$\dots+(-1)^p(C_{m-p-1}^p+C_{m-p-2}^{p-1})a^{m-2p-1}+\dots;$$

$$S_{m-2}=a^{m-2}-(m-2)a^{m-4}+(C_{m-4}^2+C_{m-5}^1)a^{m-6}+\dots$$
$$\dots+(-1)^{p-1}(C_{m-p-1}^{p-1}+C_{m-p-2}^{p-2})a^{m-2p}+\dots$$

Тогда $S_m=a^m-ma^{m-2}+\dots$

$$\dots+(-1)^p(C_{m-p-1}^p+C_{m-p-2}^{p-1}+C_{m-p-1}^{p-1}+C_{m-p-2}^{p-2})a^{m-2p}+\dots$$

Имея в виду, что $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$, получим требуемый результат.

53. $$\frac{\sin mx}{\sin x}=(2\cos x)^{m-1}-C_{m-2}^1(2\cos x)^{m-3}+$$
$$+C_{m-3}^2(2\cos x)^{m-5}-\dots+(-1)^p C_{m-p-1}^p(2\cos x)^{m-2p-1}+\dots$$

54. a) $2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$; b) $2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$. 56. $\frac{2^n}{3^{\frac{n-1}{2}}}\sin\frac{n\pi}{6}$.

59. a) Решение.

$$S=1+a\cos\varphi+a^2\cos 2\varphi+\dots+a^k\cos k\varphi.$$

Составим $T=a\sin\varphi+a^2\sin 2\varphi+\ldots+a^k\sin k\varphi$;

$$S+Ti=1+a(\cos\varphi+i\sin\varphi)+a^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+\ldots$$
$$\ldots+a^k(\cos k\varphi+i\sin k\varphi).$$

Положив $\alpha=\cos\varphi+i\sin\varphi$, имеем

$$S+Ti=1+a\alpha+a^2\alpha^2+\ldots+a^k\alpha^k=\frac{a^{k+1}\alpha^{k+1}-1}{a\alpha-1}.$$

S равно вещественной части полученной суммы. Имеем

$$S+Ti=\frac{a^{k+1}\alpha^{k+1}-1}{a\alpha-1}\cdot\frac{a\alpha^{-1}-1}{a\alpha^{-1}-1}=\frac{a^{k+2}\alpha^k-a^{k+1}\alpha^{k+1}-a\alpha^{-1}+1}{a^2-a(\alpha+\alpha^{-1})+1}.$$

Отсюда $S=\dfrac{a^{k+2}\cos k\varphi-a^{k+1}\cos(k+1)\varphi-a\cos\varphi+1}{a^2-2a\cos\varphi+1}$.

b) $\dfrac{a^{k+2}\sin(\varphi+kh)-a^{k+1}\sin[\varphi+(k+1)h]-a\sin(\varphi-h)+\sin\varphi}{a^2-2a\cos h+1}$.

c) $\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$.

60. Решение.

$$T=\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx;$$
$$S=\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx.$$

Пусть $\alpha=\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}$. Тогда $S+Ti=\alpha^2+\alpha^4+\ldots+\alpha^{2n}$,

$$S+Ti=\alpha^2\,\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1}=\alpha^2\,\frac{\alpha^n(\alpha^n-\alpha^{-n})}{\alpha(\alpha-\alpha^{-1})}=$$
$$=\left(\cos\frac{n+1}{2}x+i\sin\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Отсюда $T=\sin\dfrac{n+1}{2}x\,\dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

61. $\dfrac{2(2-\cos x)}{5-4\cos x}$.

64. a) $\dfrac{\sin\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\sin\frac{nh}{2}}{\cos\frac{h}{2}}$, если n — четное,

$\dfrac{\cos\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\cos\frac{nh}{2}}{\cos\frac{h}{2}}$, если n — нечетное;

b) $\dfrac{\cos\left(a+\dfrac{n-1}{2}h\right)\sin\dfrac{nh}{2}}{\cos\dfrac{h}{2}}$, если n — четное,

$\dfrac{\sin\left(a+\dfrac{n-1}{2}h\right)\cos\dfrac{nh}{2}}{\cos\dfrac{h}{2}}$, если n — нечетное.

66. a) $2^n\cos^n\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{n+2}{2}x$; b) $2^n\cos^n\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{n+2}{2}x$.

67. a) $2^n\sin^n\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{n\pi-(n+2)x}{2}$; b) $2^n\sin^n\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{(n+2)x-n\pi}{2}$.

68. Предел суммы равен вектору, изображающему число $\dfrac{3+i}{5}$.

69. $\dfrac{n}{2}-\dfrac{\sin 4nx}{4\sin 2x}$.

71. a) $\dfrac{3\cos\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{nx}{2}}{4\sin\dfrac{x}{2}}+\dfrac{\cos\dfrac{3(n+1)}{2}x\sin\dfrac{3nx}{2}}{4\sin\dfrac{3x}{2}}$;

b) $\dfrac{3\sin\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{nx}{2}}{4\sin\dfrac{x}{2}}-\dfrac{\sin\dfrac{3(n+1)}{2}x\sin\dfrac{3nx}{2}}{4\sin\dfrac{3x}{2}}$.

72. a) $\dfrac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}$;

b) $\dfrac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}$.

73. $e^a(\cos b+i\sin b)$.

75. a) -3; $\dfrac{3\pm i\sqrt{3}}{2}$; b) -3; $\dfrac{3\pm 5i\sqrt{3}}{2}$;

c) -7; $-1\pm i\sqrt{3}$; d) -1; $\dfrac{-5\pm 5i\sqrt{3}}{2}$; e) 2; $-1\pm\sqrt{3}$;

f) $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$; $\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})$;

g) $\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}$; $\dfrac{2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3})$;

h) $1-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$; $\dfrac{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})$;

i) $-\left(1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)$;

$\dfrac{-2+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{2} \pm \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}\right)$;

j) $2;\ -1\pm 2i\sqrt{3}$; k) $2;\ -1\pm 3i\sqrt{3}$; l) $2;\ -1\pm 4i\sqrt{3}$;

m) $1;\ -2\pm\sqrt{3}$; n) $4;\ -1\pm 4i\sqrt{3}$; o) $-2i;\ i;\ i$;

p) $-1-i;\ -1-i;\ 2+2i$;

q) $-(a+b)$; $\dfrac{a+b}{2} \pm \dfrac{i\sqrt{3}}{2}(a-b)$;

r) $-\left(a\sqrt[3]{f^2g}+b\sqrt[3]{fg^2}\right)$;

$\dfrac{a\sqrt[3]{f^2g}+b\sqrt[3]{fg^2}}{2} \pm \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\left(a\sqrt[3]{f^2g}-b\sqrt[3]{fg^2}\right)$;

s) 2,1149; —0,2541; —1,8608;

t) 1,5981; 0,5115; —2,1007.

76. Решение.

$$x_1-x_2=\alpha(1-\omega)+\beta(1-\omega^2)=(1-\omega)(\alpha-\beta\omega^2);$$
$$x_1-x_3=\alpha(1-\omega^2)+\beta(1-\omega)=(1-\omega^2)(\alpha-\beta\omega);$$
$$x_2-x_3=\alpha(\omega-\omega^2)+\beta(\omega^2-\omega)=(\omega-\omega^2)(\alpha-\beta);$$
$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)=3(\omega-\omega^2)(\alpha^3-\beta^3);$$
$$(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=$$
$$=-27\left[(\alpha^3+\beta^3)^2-4\alpha^3\beta^3\right]=-27q^2-4p^3.$$

77. Решение.

Кубическое уравнение, о котором упоминалось в указании, есть $z^3-3(px+q)z+x^3+p^3-3qx-3pq=0$, имеющее очевидный корень $z=-(x+p)$. Остальные корни этого уравнения суть $z_{2,3}=\dfrac{x+p\pm\sqrt{-3(x-p)^2+12q}}{2}$. В силу задачи 76 левую часть изучаемого уравнения можно представить в виде

$$-\frac{1}{27}(z_2-z_3)^2(z_3-z_1)^2(z_1-z_2)^2=$$
$$=-\frac{1}{27}\left[-3(x-p)^2+12q\right]\left[\frac{3(x+p)+\sqrt{-3(x-p)^2+12q}}{2}\right]^2\times$$
$$\times\left[\frac{3(x+p)-\sqrt{-3(x-p)^2+12q}}{2}\right]^2=$$
$$=\left[(x-p)^2-4q\right](x^2+px+p^2-q)^2,$$

откуда корни легко находятся:

$$x_{1,2}=p\pm 2\sqrt{q};\quad x_3=x_4=\frac{-p+\sqrt{4q-3p^2}}{2};$$
$$x_5=x_6=\frac{-p-\sqrt{4q-3p^2}}{2}.$$

78. Левая часть представится в виде

$$\alpha^5+\beta^5+5(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-a)(\alpha\beta-a)-2b=0.$$

Ответ. $x=\alpha+\beta$, где

$$\alpha=\sqrt[5]{b+\sqrt{b^2-a^5}};\quad \beta=\sqrt[5]{b-\sqrt{b^3-a^5}};\quad \alpha\beta=a.$$

79. a) $\pm\sqrt{2}$; $1\pm i\sqrt{3}$; b) $-1\pm\sqrt{6}$; $\pm i\sqrt{3}$;

c) $\pm\sqrt{2}$; $\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$; d) $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$;

e) $\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$; $1\pm i$; f) $\dfrac{1\pm\sqrt{29}}{2}$; $\dfrac{5\pm i\sqrt{7}}{2}$;

g) $\pm i$; $1\pm i\sqrt{2}$; h) $\pm\sqrt{5}$; $\dfrac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$;

i) $\pm i$; $-1\pm i\sqrt{6}$; j) $-2\pm2\sqrt{2}$; $-1\pm i$;

k) 1; 3; $1\pm\sqrt{2}$; l) 1; -1; $1\pm2i$;

m) $\dfrac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4}$; $\dfrac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4}$;

n) $\dfrac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4}$; $\dfrac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{4}$;

o) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{-1-2\sqrt{2}}$;

$\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{-1+2\sqrt{2}}$;

p) $1+\sqrt{7}\pm\sqrt{6+2\sqrt{7}}$; $1-\sqrt{7}\pm\sqrt{6-2\sqrt{7}}$;

q) $\dfrac{1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$; $\dfrac{1\pm\sqrt{-4\sqrt{3}-3}}{2}$;

r) $\dfrac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{-2-6\sqrt{5}}}{4}$; $\dfrac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{-2+6\sqrt{5}}}{4}$;

s) $\dfrac{1+\sqrt{2}\pm\sqrt{-5+2\sqrt{2}}}{4}$; $\dfrac{1-\sqrt{2}\pm\sqrt{-5-2\sqrt{2}}}{4}$;

t) $\dfrac{1+\sqrt{3}\pm\sqrt{12+2\sqrt{3}}}{4}$; $\dfrac{1-\sqrt{3}\pm\sqrt{12-2\sqrt{3}}}{4}$.

80. Решение.

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=$$

$$=\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{\lambda}{2}+mx+n\right)\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{\lambda}{2}-mx-n\right);$$

$$x_1x_2=\frac{\lambda}{2}+n;\quad x_3x_4=\frac{\lambda}{2}-n;\quad \lambda=x_1x_2+x_3x_4.$$

81. a) ± 1; b) 1; $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) ± 1; $\pm i$;

d) ± 1; $\pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) ± 1; $\pm i$; $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$;

f) ± 1; $\pm i$; $\pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$;

g) ± 1; $\pm i$; $\pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$;

$\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \pm i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \pm i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

82. a) -1; b) $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\pm i$; d) $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

e) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$; f) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$;

g) $\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \pm i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \pm i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

83. a) 20; 20; 180; b) 72; 144; 12.

84. $\cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}$, где $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

85. a) Обозначая $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{16} + i\sin\frac{2k\pi}{16}$, получаем:

показателю 1 принадлежит ε_0;
показателю 2 принадлежит ε_8;
показателю 4 принадлежат ε_4, ε_{12};
показателю 8 принадлежат ε_2, ε_6, ε_{10}, ε_{14};
первообразные корни 16-й степени ε_1, ε_3, ε_5, ε_7, ε_9, ε_{11}, ε_{13}, ε_{15}.

b) Обозначая $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{20} + i\sin\frac{2k\pi}{20}$, получаем:

показателю 1 принадлежит ε_0;
показателю 2 принадлежит ε_{10};
показателю 4 принадлежат ε_5, ε_{15};
показателю 5 принадлежат ε_4, ε_8, ε_{12}, ε_{16};
показателю 10 принадлежат ε_2, ε_6, ε_{14}, ε_{18};
первообразные корни 20-й степени ε_1, ε_3, ε_7, ε_9, ε_{11}, ε_{13}, ε_{17}, ε_{19}.

c) Обозначая $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{24} + i\sin\frac{2k\pi}{24}$, получаем:

показателю 1 принадлежит ε_0;
показателю 2 принадлежит ε_{12};
показателю 3 принадлежат ε_8, ε_{16};
показателю 4 принадлежат ε_6, ε_{18};
показателю 6 принадлежат ε_4, ε_{20};
показателю 8 принадлежат ε_3, ε_9, ε_{15}, ε_{21};
показателю 12 принадлежат ε_2, ε_{10}, ε_{14}, ε_{22};
первообразные корни 24-й степени ε_1, ε_5, ε_7, ε_{11}, ε_{13}, ε_{17}, ε_{19}, ε_{23}.

86. a) $X_1(x)=x-1$; b) $X_2(x)=x+1$;
c) $X_3(x)=x^2+x+1$; d) $X_4(x)=x^2+1$;
e) $X_5(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$;
f) $X_6(x)=x^2-x+1$;
g) $X_7(x)=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$;
h) $X_8(x)=x^4+1$;
i) $X_9(x)=x^6+x^3+1$;
j) $X_{10}(x)=x^4-x^3+x^2-x+1$;
k) $X_{11}(x)=x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$;
l) $X_{12}(x)=x^4-x^2+1$;
m) $X_{15}(x)=x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1$;
n) $X_{105}(x)=x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-$
$-x^{39}+x^{36}+x^{35}+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-$
$-x^{24}-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}-$
$-x^9-x^8-2x^7-x^6-x^5+x^2+x+1$.

87. $\dfrac{2}{1-\varepsilon}$.

88. 0, если $n>1$.

89. n, если k делится на n; 0, если k не делится на n.

90. $m(x^m+1)$.

91. $-\dfrac{n}{1-\varepsilon}$, если $\varepsilon\neq 1$; $\dfrac{n(n+1)}{2}$, если $\varepsilon=1$.

92. $-\dfrac{n^2(1-\varepsilon)+2n}{(1-\varepsilon)^2}$, если $\varepsilon\neq 1$; $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, если $\varepsilon=1$.

93. a) $-\dfrac{n}{2}$; b) $-\dfrac{n}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}$.

94. a) 1; b) 0; c) -1.

95. $x_0=1$;

$$x_1=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

$$x_2=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}};$$

$$x_3=\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}};$$

$$x_4=\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}-\frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

96. $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\cos 18^\circ=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

97. Решение. Разделим обе части уравнения $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ на x^3. После некоторого преобразования получим

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0.$$

Уравнению $z^3+z^2-2z-1=0$ удовлетворяет $z=2\cos\frac{4\pi}{7}=-2\sin\frac{\pi}{14}$. Отсюда $t=2\sin\frac{\pi}{14}$ удовлетворяют уравнению $t^3-t^2-2t+1=0$. Полученное уравнение—простейшее в том смысле, что всякое другое уравнение с рациональными коэффициентами, имеющее общий корень с этим, имеет более высокую степень. Доказательство этого требует сведений из последующих отделов курса.

98. Решение. Пусть $n=2m$, тогда уравнение $x^n-1=0$ имеет два вещественных корня 1 и -1 и $2m-2$ комплексных. При этом $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{2m}+i\sin\frac{2k\pi}{2m}$ сопряжено с $\varepsilon_{2m-k}=\cos\frac{2(2m-k)\pi}{2m}+i\sin\frac{2(2m-k)\pi}{2m}$. Таким образом, имеем

$$x^{2m}-1=(x^2-1)(x-\varepsilon_1)(x-\bar{\varepsilon}_1)(x-\varepsilon_2)(x-\bar{\varepsilon}_2)\ldots$$
$$\ldots(x-\varepsilon_{m-1})(x-\bar{\varepsilon}_{m-1});$$
$$x^{2m}-1=(x^2-1)[x^2-(\varepsilon_1+\bar{\varepsilon}_1)x+1]\ldots[x^2-(\varepsilon_{m-1}+\bar{\varepsilon}_{m-1})x+1];$$
$$x^{2m}-1=(x^2-1)\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{m}+1\right).$$

Если $n=2m+1$, то аналогичным путем получим

$$x^{2m+1}-1=(x-1)\prod_{k=1}^{m}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2m+1}+1\right).$$

99. Решение. а) Имеем

$$\frac{x^{2m}-1}{x^2-1}=\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{m}+1\right).$$

Положив $x=1$, получим $m=2^{m-1}\prod_{k=1}^{m-1}\left(1-\cos\frac{k\pi}{m}\right)$,

или $m=2^{2(m-1)}\prod_{k=1}^{m-1}\sin^2\frac{k\pi}{2m}$, и, наконец,

$$\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}=\prod_{k=1}^{m-1}\sin\frac{k\pi}{2m}.$$

Формула b) получается аналогичным путем.

100. Решение. В тождестве $x^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(x-\varepsilon_k)$,

где $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$, положим $x=-\frac{a}{b}$. Получим

$$(-1)^n\frac{a^n}{b^n}-1=(-1)^n\prod_{k=8}^{n-1}\left(\frac{a}{b}+\varepsilon_k\right)\text{ и т. д.}$$

101. Поступая по указанию, имеем

$$\cos n\theta + i\sin n\theta - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (\cos\theta + i\sin\theta - \varepsilon_k),$$

$$\cos n\theta - i\sin n\theta - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (\cos\theta - i\sin\theta - \varepsilon_k).$$

Перемножив последние равенства, получим требуемый результат.

102. Решение.

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(t+\varepsilon_k)^n - 1}{t} = \frac{1}{t^n} \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{s=0}^{n-1} (t + \varepsilon_k - \varepsilon_s) =$$

$$= \frac{1}{t^n} \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{s=0}^{n-1} \left[t - \varepsilon_k \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_k} - 1\right)\right] = \frac{1}{t^n} \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{s=0}^{n-1} [t - \varepsilon_k (\varepsilon_s - 1)] =$$

$$= \frac{1}{t^n} \prod_{s=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} [t - \varepsilon_k (\varepsilon_s - 1)] = \frac{1}{t^n} \prod_{s=0}^{n-1} [t^n - (\varepsilon_s - 1)^n] =$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1} [t^n - (\varepsilon_k - 1)^n].$$

103. Имеем $|x| = |x|^{n-1}$, следовательно, $|x| = 0$ или $|x| = 1$. Если $|x| = 0$, то $x = 0$. Если же $|x| = 1$, то $x\bar{x} = 1$.

С другой стороны, $x\bar{x} = x^n$. Следовательно, $x^n = 1$. Таким образом,

$$x = 0 \text{ и } x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Обратное проверяется легко.

104. Решение. Если z удовлетворяет данному уравнению, то $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \sqrt[n]{\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|}$. Геометрическое место точек, расстояния от которых до двух данных точек находятся в данном отношении, есть окружность (в частном случае — прямая).

105. a) Имеем $\frac{x+1}{x-1} = \varepsilon_k$, где $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$. Отсюда $x = \frac{\varepsilon_k + 1}{\varepsilon_k - 1}$. Преобразование последнего выражения дает $x_k = i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{m}$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$;

b) $x_k = \operatorname{ctg}\frac{k\pi}{m}$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$;

c) $x_k = \dfrac{a}{\varepsilon_k \sqrt[n]{2} - 1}$,

где $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

106. Решение. Пусть $A=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Тогда $\frac{1+ix}{1-ix}=\eta_k^2$, где $\eta_k=\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2m}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2m}$, $k=0, 1, \ldots, m-1$. Отсюда

$$x=\frac{\eta_k^2-1}{i(\eta_k^2+1)}=\frac{\eta_k-\eta_k^{-1}}{i(\eta_k+\eta_k^{-1})}=\operatorname{tg}\frac{\varphi+2k\pi}{2m}.$$

107. Решение. Поступая по указанию, имеем

$$S+Ti=\mu(1+\lambda x)^n,\quad S-Ti=\overline{\mu}(1+\overline{\lambda}x)^n,$$

где $\lambda=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $\mu=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Отсюда

$$2S=\mu(1+\lambda x)^n+\overline{\mu}(1+\overline{\lambda}x)^n.$$

Уравнение принимает вид $\mu(1+\lambda x)^n+\overline{\mu}(1+\overline{\lambda}x)^n=0$;

$$x_k=-\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi-2\varphi}{2n}}{\sin\frac{(2k+1)\pi-2\varphi-2n\alpha}{2n}};\quad k=0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

108. Решение. Пусть $\alpha^a=1$; $\beta^b=1$. Тогда $(\alpha\beta)^{ab}=(\alpha^a)^b\cdot(\beta^b)^a=1$.

109. Решение. Пусть ε — общий корень x^a-1 и x^b-1; s — показатель, которому принадлежит ε. Тогда s — общий делитель a и b, s может быть поэтому равно только 1 и $\varepsilon=1$. Обратное очевидно.

110. Решение. Пусть α_k и β_s — корни a-й и b-й степеней из 1; $k=0, 1, 2, \ldots, a-1$; $s=0, 1, 2, \ldots, b-1$. На основании задачи 108 достаточно показать, что все $\alpha_k\beta_s$ различны. Допустим, что $\alpha_{k_1}\beta_{s_1}=\alpha_{k_2}\beta_{s_2}$. Тогда $\frac{\alpha_{k_1}}{\alpha_{k_2}}=\frac{\beta_{s_2}}{\beta_{s_1}}$, т. е. $\alpha_i=\beta_j$. На основании задачи 109 $\alpha_i=\beta_j=1$, т. е. $k_1=k_2$; $s_1=s_2$.

111. Решение. Пусть α и β — первообразные корни степени a и b из 1. Пусть $(\alpha\beta)^s=1$. Тогда $\alpha^{bs}=1$; $\beta^{as}=1$. Выходит, что bs делится на a, as делится на b. Следовательно, s делится на ab.

Пусть λ — первообразный корень степени ab из 1. Тогда $\lambda=\alpha^k\beta^s$ (задача 110). Пусть α^k принадлежит показателю $a_1<a$. Тогда $\lambda^{a_1b}=(\alpha^k)^{a_1b}(\beta^s)^{a_1b}=1$, что невозможно. Точно так же можно показать, что β^s — первообразный корень степени b из 1.

112. Непосредственно следует из задачи 111.

113. Поступая по указанию, выпишем все числа, кратные p и не превосходящие p^α. Именно: $1\cdot p, 2\cdot p, 3\cdot p, \ldots, p^{\alpha-1}\cdot p$. Непосредственно видно, что таких чисел $p^{\alpha-1}$. Отсюда $\varphi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1}=p^\alpha\left(1-\frac{1}{p}\right)$. На основании задачи 112, $\varphi(n)=\varphi(p_1^{\alpha_1})\varphi(p_2^{\alpha_2})\ldots$

$$\ldots\varphi\left(p_k^{\alpha_k}\right)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

114. Решение. Если ε — первообразный корень степени n из 1, то и $\overline{\varepsilon}$, сопряженное с ε, — тоже первообразный корень степени n из 1. При этом $\varepsilon\neq\pm1$, так как $n>2$.

115. $X_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$.

116. $X_{p^m}(x) = x^{(p-1)p^{m-1}} + x^{(p-2)p^{m-1}} + \ldots + x^{p^{m-1}} + 1$.

117. Указание может быть выполнено сразу на основании задачи 111.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\varphi(n)}$ — первообразные корни степени n из 1. Тогда $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_{\varphi(n)}$ — первообразные корни степени $2n$ из 1. Имеем

$$X_{2n}(x) = (x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_{\varphi(n)}) =$$
$$= (-1)^{\varphi(n)}(-x-\alpha_1)\ldots(-x-\alpha_{\varphi(n)}),$$

или (задача 114) $X_{2n}(x) = X_n(-x)$.

118. Решение. Пусть $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{nd} + i\sin\frac{2k\pi}{nd}$ — первообразный корень степени nd из 1, т. е. k и n взаимно просты. Разделим k на n, получим $k = nq + r$, где $0 < r < n$. Отсюда $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2q\pi + \frac{2r\pi}{n}}{d} + i\sin\dfrac{2q\pi + \frac{2r\pi}{n}}{d}$, т. е. ε_k — одно из значений корня степени d из $\eta_r = \cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n}$; η_r — первообразный корень степени n из 1, так как всякий общий делитель r и n есть общий делитель k и n.

Пусть теперь $\eta_r = \cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n}$ — первообразный корень степени n из 1, т. е. r и n взаимно просты.

Составим $\varepsilon_q = \cos\dfrac{2q\pi + \frac{2r\pi}{n}}{d} + i\sin\dfrac{2q\pi + \frac{2r\pi}{n}}{d} = \cos\dfrac{2\pi(r+nq)}{nd} + i\sin\dfrac{2\pi(r+nq)}{nd}$, где $q = 0, 1, 2, \ldots, d-1$. ε_q — первообразный корень степени nd из 1. Действительно, если бы $r+nq$ и nd делились оба на некоторое простое p, то на p делились бы n и r, а это невозможно.

119. Решение. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\varphi(n')}$ — первообразные корни степени n' из 1. Тогда $X_{n'}(x^{n''}) = \prod\limits_{k=1}^{\varphi(n')}\left(x^{n''} - \varepsilon_k\right)$. Пусть, далее, $(x-\varepsilon_{k,1})(x-\varepsilon_{k,2})\ldots(x-\varepsilon_{k,n''})$ — разложение $x^{n''} - \varepsilon_k$ на линейные множители. Тогда $X'_n(x^{n''}) = \prod\limits_{\substack{k=1\\ i=1}}^{\substack{k=\varphi(n')\\ i=n''}}(x-\varepsilon_{k,i})$. На основании задачи 118 каждый линейный множитель $x-\varepsilon_{k,i}$ входит в разложение $X_n(x)$ и обратно. Так как, кроме того, $\varphi(n) = n''\varphi(n')$, степени $X_n(x)$ и $X_{n'}(x^{n''})$ равны.

121. Решение. Сумма всех корней степени n из 1 равна 0. Так как каждый корень n-й степени из 1 принадлежит показателю d, являющемуся делителем n, и обратно, то $\sum\limits_{d/n} \mu(d)=0$.

122. Решение. Пусть $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ принадлежит показателю n_1. Тогда множитель $x-\varepsilon_k$ войдет в такие и только такие двучлены x^d-1, где d делится на n_1. При этом, если d пробегает все делители n, кратные n_1, $\frac{n}{d}$ пробегает все делители $\frac{n}{n_1}$. Таким образом, $x-\varepsilon_k$ в правую часть войдет с показателем $\sum\limits_{d \left| \frac{n}{n_1}\right.} \mu(d_1)$.

Сумма эта равна 0, если $\frac{n}{n_1}\neq 1$, и равна 1, если $n=n_1$.

123. Решение. Если $n=p^\alpha$, где p — простое, то $X_n(1)=p$. Если $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые, то (задача 119) $X_n(1)=X_{n'}(1)$, где $n'=p_1p_2\ldots p_k$.

Пусть теперь $n=p_1p_2\ldots p_k$; $k\geqslant 2$; $n_1=\frac{n}{p_k}$. Заметим, что для получения всех делителей n достаточно ко всем делителям n_1 приписать их произведения на p_k. Поэтому

$$X_n(x)=\prod_{d/n}(x^d-1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}=$$

$$=\prod_{d/n_1}(x^d-1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}\cdot\prod_{d/n_1}(x^{dp_k}-1)^{\mu\left(\frac{n}{dp_k}\right)}=$$

$$=[X_{n_1}(x)]^{-1}\cdot X_{n_1}(x^{p_k}).$$

Отсюда $X_n(1)=1$.

124. Решение. 1) Пусть n — нечетное, большее единицы. Тогда (задача 117) $X_n(-1)=X_{2n}(1)=1$.

2) Пусть $n=2^k$, тогда $X_n=\dfrac{x^n-1}{x^{\frac{n}{2}}-1}=x^{\frac{n}{2}}+1$ и $X_n(-1)$ равно 0, если $k=1$, и равно 2, если $k>1$.

3) Пусть $n=2n_1$, где n_1 — нечетное, большее единицы. Тогда (задача 117) $X_n(-1)=X_{n_1}(1)$ и, следовательно, $X_n(-1)$ или равно p, если $n_1=p^\alpha$ (p — простое), или равно 1, если $n_1\neq p^\alpha$.

4) Пусть $n=2^kn_1$, где $k>1$, а $n_1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_s^{\alpha_s}$ ($p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_s$ — различные нечетные простые числа). В этом случае (задача 119) $X_n(x)=X_{2p_1p_2\ldots p_s}(x^\lambda)$, где $\lambda=2^{k-1}p_1^{\alpha_1-1}\ldots p_s^{\alpha_s-1}$. Отсюда следует, что $X_n(-1)=X_n(1)=1$.

125. Решение. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\varphi(n)}$ — первообразные корни степени n из 1:

$$s=\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_{\varphi(n)-1}\cdot\varepsilon_{\varphi(n)}=$$

$$=\frac{[\mu(n)]^2-\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_{\varphi(n)}^2\right)}{2}.$$

1) Пусть n — нечетное, тогда ε_i^2 есть первообразный корень степени n из 1 и $\varepsilon_i^2=\varepsilon_j^2$ только при $i=j$. Поэтому

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_{\varphi(n)}^2=\mu(n) \quad \text{и} \quad s=\frac{[\mu(n)]^2-\mu(n)}{2}.$$

2) Пусть $n=2n_1$; n_1 — нечетное. В этом случае $-\varepsilon_i$ (задача 111) есть первообразный корень степени n_1 из единицы и поэтому (см. 1)) $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_{\varphi(n)}^2=\mu(n_1)=-\mu(n)$. Таким образом, в этом случае $s=\frac{[\mu(n)]^2+\mu(n)}{2}$.

3) Пусть $n=2^kn_1$, где $k>1$, n_1 — нечетное. В этом случае ε_i^2 принадлежит показателю $\frac{n}{2}$. На основании задачи 118 утверждаем, что $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\varphi(n)}$ представляют собой квадратные корни из $\eta_1, \eta_2, \ldots$ $\ldots, \eta_{\varphi\left(\frac{n}{2}\right)}$, где $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\varphi\left(\frac{n}{2}\right)}$ — первообразные корни степени $\frac{n}{2}$ из 1. Отсюда следует, что

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_{\varphi(n)}^2=2\left(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_{\varphi\left(\frac{n}{2}\right)}\right)=2\mu\left(\frac{n}{2}\right);$$

$$s=-\mu\left(\frac{n}{2}\right).$$

126. Решение. $S=\sum\limits_{x=0}^{n-1}\varepsilon^{x^2}=\sum\limits_{x=y}^{y+n-1}\varepsilon^{x^2}=\sum\limits_{s=0}^{n-1}\varepsilon^{(y+s)^2}$ при любом целом y;

$$S'=\sum_{y=0}^{n-1}\varepsilon^{-y^2};\quad S'S=\sum_{y=0}^{n-1}\varepsilon^{-y^2}S=\sum_{y=0}^{n-1}\left(\varepsilon^{-y^2}\cdot\sum_{s=0}^{n-1}\varepsilon^{(y+s)^2}\right)=$$

$$=\sum_{y=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1}\varepsilon^{2ys+s^2}=\sum_{s=0}^{n-1}\left(\varepsilon^{s^2}\cdot\sum_{y=0}^{n-1}\varepsilon^{2ys}\right)=n+\sum_{s=1}^{n-1}\varepsilon^{s^2}\cdot\sum_{y=0}^{n-1}(\varepsilon^{2s})^y=n$$

при n нечетном;

$$SS'=n+n\varepsilon^{\left(\frac{n}{2}\right)^2}=n\left[1+(-1)^{\frac{n}{2}}\right]$$

при n четном $\left(\text{так как } \sum\limits_{y=0}^{n-1}\varepsilon^{2sy}=0 \text{ при } 2s, \text{ не делящемся на } n\right)$.

Итак, $|S|=\sqrt{n}$, если n — нечетное, и $|S|=\sqrt{n\left[1+(-1)^{\frac{n}{2}}\right]}$, если n — четное.

Глава 2

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

127. a) 5; b) 5; c) 1; d) $ab-c^2-d^2$; e) $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2$; f) $\sin(\alpha-\beta)$; g) $\cos(\alpha+\beta)$; h) $\sec^2\alpha$; i) -2; j) 0; k) $(b-c)(d-a)$; l) $4ab$; m) -1; n) -1; o) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

128. a) 1; b) 2; c) $2a^2(a+x)$; d) 1; e) -2; f) $-2-\sqrt{2}$; g) $-3i\sqrt{3}$; h) -3.

129. Число транспозиций нечетное.

130. a) 10; b) 18; c) 36. **131.** a) $i=8$; $k=3$; b) $i=3$; $k=6$.

132. C_n^2. **133.** C_n^2-I. **134.** a) $\frac{n(n-1)}{2}$; b) $\frac{n(n+1)}{2}$.

135. a) $\frac{n(3n+1)}{2}$; b) $\frac{3n(n-1)}{2}$.

136. Рассмотрим пару элементов a_i и a_k, где $i<k$. Если эти элементы не образуют инверсии, то и после приведения перестановки в исходное расположение a_i будет предшествовать a_k и, следовательно, номера i и k не будут давать инверсии.

Если же элементы a_i и a_k образуют инверсию, то после приведения перестановки в исходное расположение a_k будет предшествовать a_i и, таким образом, номера i и k будут давать инверсию.

137. Подстановка в обоих случаях нечетна. Объясняется это тем, что одно исходное расположение получается из другого посредством четного числа транспозиций.

138. a) со знаком $+$; b) со знаком $+$.

139. a) не входит; b) входит. **140.** $i=1$; $k=4$.

141. $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$, $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ и $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

142. $-a_{14}a_{23}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} \end{vmatrix}$.

143. Со знаком $+$. **144.** Со знаком $(-1)^{C_n^2}$.

146. 2; -1. **147.** a) $n!$; b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; c) $n!$.

148. a) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n!)^{n+1}$; b) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n!)^{n+1}$.

149. Решение. От замены строк столбцами определитель: 1) не изменится; 2) превратится в сопряженное комплексное число.

150. Решение. От замены строк столбцами определитель: 1) не изменится; 2) умножится на -1.

151. $(-1)^{n-1}\Delta$. **152.** Умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

153. 0, так как число четных перестановок n элементов равно числу их нечетных перестановок.

154. a) $x_1=a_1$; $x_2=a_2$; ...; $x_{n-1}=a_{n-1}$;
b) $x_1=0$; $x_2=1$; ...; $x_{n-1}=n-2$;
c) $x_1=a_1$; $x_2=a_2$; ...; $x_{n-1}=a_{n-1}$.

156. 0. 158. $(mq-np)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

159. a) $a_1a_2 \ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$;

b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1a_2 \ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

160. $3a-b+2c+d$. 161. $4t-x-y-z$. 162. $2a-b-c-d$.
163. $-1\,487\,600$. 164. $-29\,400\,000$. 165. 48. 166. 1.
167. 160. 168. 12. 169. 900. 170. 394. 171. 665.
172. $a^2+b^2+c^2-2(bc+ca+ab)$. 173. $-2(x^3+y^3)$.
174. $(x+1)(x^2-x+1)^2$. 175. x^2z^2. 176. $-3(x^2-1)(x^2-4)$.
177. $\sin(c-a)\sin(c-b)\sin(a-b)$. 178. $(af-be+cd)^2$. 179. $n!$.
180. $b_1b_2 \ldots b_n$. 181. $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.
182. $(n-1)!$. 183. $-2(n-2)!$ 184. 1.

185. $\frac{na^{n-1}}{2}[2a+(n-1)h]$. 186. $\frac{na^{n-1}}{2}[2a+(n-1)h]$.

187. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}[a_0-a_1+a_2-\ldots+(-1)^n a_n]$.

188. $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$. 189. $\frac{nx^n}{x-1}-\frac{x^n-1}{(x-1)^2}$.

190. $(n+1)!\,x^n$. 191. $(x-a_1)(x-a_2)\ \ldots\ (x-a_n)$.

192. $[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$. 193. $\frac{(x+a)^n+(x-a)^n}{2}$.

194. $(-1)^n(n+1)a_1a_2 \ldots a_n$.

195. $a_1a_2 \ldots a_n\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

196. $h(x+h)^n$. 197. $(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$.

198. $(-1)^n 2^{n-1}a_1a_2 \ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

199. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$. 200. $\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$.

201. $\prod\limits_{k=1}^{n}(1-ax_{kk})$. 202. $(-1)^{n-1}2^{n-2}(n+1)$.

203. $(-1)^n(a_0b_0+a_1b_1+\ldots+a_nb_n)b_1b_2 \ldots b_{n-1}$.
204. $a(a+b)(a+2b)\ \ldots\ [a+(n+1)b]$.
205. $x^n+(-1)^{n-1}y^n$. 206. 0, если $n>2$. 207. 0, если $n>2$.
208. Пусть $n=2$. Поступая по указанию, имеем:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1+x_1 & a_1+x_2 \\ a_2+x_1 & 1+a_2+x_2 \end{vmatrix}=$$
$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & a_1+x_2 \\ 0 & a_2+x_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1+x_1 & 0 \\ a_2+x_1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_1+x_2 \\ a_2+x_1 & a_2+x_2 \end{vmatrix}=$$
$$=1+[(a_1+x_1)+(a_2+x_2)]+(a_2-a_1)(x_1-x_2).$$

Представляя таким же образом определитель n-го порядка в виде суммы 2^n определителей, получим, что одно из слагаемых равно единице, n слагаемых равны a_i+x_i, где $i=1, 2, \ldots, n$, и $\frac{n(n-1)}{2}$ слагаемых равны $(a_i-a_k)(x_k-x_i)$, где $i>k$.

Остальные слагаемые равны нулю. Таким образом, имеем ответ:

$$1+\sum_{i=1}^{n}(a_i+x_i)+\sum_{i>k}(a_i-a_k)(x_k-x_i).$$

Этот результат можно преобразовать к виду

$$(1+a_1+a_2+\ldots+a_n)(1+x_1+x_2+\ldots+x_n)-$$
$$-n(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n).$$

209. 0, если $p>2$. 211. $\frac{n+1}{1-x}+\frac{x^{n+1}-1}{(1-x)^2}$.

212. Решение. Легко видеть, что $\Delta_2=x_1x_2\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}\right)$.

Допустим, что $\Delta_{n-1}=x_1x_2\ \ldots\ x_{n-1}\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{x_{n-1}}\right)$.

Тогда $\Delta_n=x_1x_2\ \ldots\ x_n\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{x_{n-1}}\right)+$

$$+a_nx_1x_2\ \ldots\ x_{n-1}=x_1x_2\ \ldots\ x_n\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\ldots+\frac{a_n}{x_n}\right).$$

213. $a_0x_1x_2\ \ldots\ x_n+a_1y_1x_2\ \ldots\ x_n+a_2y_1y_2x_3\ \ldots\ x_n+\ldots$
$\ldots+a_ny_1y_2\ \ldots\ y_n$.

214. $-a_1a_2\ \ldots\ a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

215. $n!\,(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n)$.

216. $a_1a_2\ \ldots\ a_{n-1}-a_1a_2\ \ldots\ a_{n-2}+\ldots+(-1)^n a_1+(-1)^{n+1}$.

217. Решение. Разложим определитель по элементам первого столбца; получим $\Delta_n=(\alpha+\beta)\Delta_{n-1}-\alpha\beta\Delta_{n-2}$. Нетрудно проверить, что $\Delta_2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$; $\Delta_3=\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta}$. Допустим, что $\Delta_{n-2}=\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$; $\Delta_{n-1}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$. Тогда

$$\Delta_n=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

Второй вариант решения.

Представим Δ_n в виде суммы $d_n+\delta_n$, где

$$d_n=\begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix},$$

$$\delta_n=\begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

Из первой строки d_n вынесем α и затем из второй строки вычтем первую. Получим $d_n = \alpha d_{n-1}$. Легко видеть, что $d_2 = \alpha^2$. Пусть $d_{n-1} = \alpha^{n-1}$, тогда $d_n = \alpha^n$. Разложив δ_n по элементам первой строки, видим, что $\delta_n = \beta\Delta_{n-1}$.

Из сказанного следует, что $\Delta_n = \alpha^n + \beta\Delta_{n-1}$. Нетрудно проверить, что $\Delta_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}$. Предположим, что $\Delta_{n-1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$. Тогда

$$\Delta_n = \alpha^n + \beta\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

218. $n+1$. **219.** $\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$. **220.** $\cos n\theta$.

221. $x^n - C_{n-1}^1 x^{n-2} + C_{n-2}^2 x^{n-4} - \ldots$ Сравнить с задачей 53.

222. $x_1 y_n \prod_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1})$.

223. $a_1 a_2 \ldots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$.

224. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \ldots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$.

225. $x(a_1 - x) \ldots (a_n - x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \ldots + \frac{1}{a_n - x}\right)$.

226. $(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \ldots (x_n - a_n)\left(1 + \frac{a_1}{x_1 - a_1} + \ldots + \frac{a_n}{x_n - a_n}\right)$.

227. $\prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i b_i)\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{x_i - a_i b_i}\right)$.

228. $(-1)^n m^n \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{m}\right)$.

229. $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0; \quad x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\alpha_i}$.

230. $(a^2 - b^2)^n$.

231. $a(a+b) \ldots [a + (n-1)b]\left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a+b} + \ldots + \frac{1}{a+(n-1)b}\right)$.

232. $x^{n-1} \prod_{i=1}^{n} (x - 2a_i)\left(x + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{x - 2a_i}\right)$.

233. $x^{n-1} \prod_{i=1}^{n} (x - 2a_i)\left(x + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{x - 2a_i}\right)$.

234. $1 - b_1 + b_1 b_2 - b_1 b_2 b_3 + \ldots + (-1)^n b_1 b_2 \ldots b_n$.

235. $(-1)^{n-1}(b_1 a_2 a_3 \ldots a_n + b_1 b_2 a_3 \ldots a_n + \ldots + b_1 b_2 \ldots b_{n-1} a_n)$.

236. $(-1)^{n-1} x^{n-2}$. **237.** $(-1)^n [(x-1)^n - x^n]$.

238. $a_0x^n\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$. 240. 1. 241. 1. 242. 1.

243. $\dfrac{C_{m+n}^{n+1}C_{m+n-1}^{n+1}\dots C_{m+n-k+1}^{n+1}}{C_{k+n}^{n+1}C_{k+n-1}^{n+1}\dots C_{n+1}^{n+1}}$. 244. $(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}$.

245. $(x-1)^n$. 246. $(n-1)!\,(n-2)!\dots 1!\,(x-1)^n$. 247. α^n.

248. Поступая по указанию, имеем:

$$\Delta_n=(x-z)\,\Delta_{n-1}+z\,(x-y)^{n-1},$$
$$\Delta_n=(x-y)\,\Delta_{n-1}+y\,(x-z)^{n-1}.$$

Из полученной системы уравнений находим:

$$\Delta_n=\frac{z\,(x-y)^n-y\,(x-z)^n}{z-y}.$$

249. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\dfrac{ab\,(b^{n-1}-a^{n-1})}{a-b}$.

250. $\dfrac{xf(y)-yf(x)}{x-y}$, где $f(x)=\prod_{k=1}^{n}(a_k-x)$.

251. $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$, где $f(x)=\prod_{k=1}^{n}(c_k-x)$.

252. $(\alpha-\beta)^{n-2}\,[\lambda\alpha+(n-2)\,\lambda\beta-(n-1)\,ab]$.

253. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{n^{n-1}(n+1)}{2}$.

254. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(nh)^{n-1}\left[a+\dfrac{h(n-1)}{2}\right]$. 255. $(1-x^n)^{n-1}$.

256. Если прибавить все столбцы к первому, то за знак определителя можно вынести $a+b+c+d$, и при этом все элементы оставшегося определителя — целые выражения относительно a.

Это доказывает, что определитель делится на $a+b+c+d$. Если к первому столбцу прибавить второй, вычесть третий и четвертый, то обнаружится, что определитель делится на $a+b-c-d$. Так рассуждая, покажем, что определитель делится на $a-b+c-d$ и $a-b-c+d$. Из сказанного следует, что определитель оказывается равным $\lambda\,(a+b+c+d)\,(a+b-c-d)\,(a-b+c-d)\,(a-b-c+d)$. Для определения λ заметим, что коэффициент при a^4 должен равняться 1, поэтому $\lambda=1$.

257. $(a+b+c+d+e+f+g+h)\,(a+b+c+d-e-f-g-h)\times\times(a+b-c-d+e+f-g-h)\,(a+b-c-d-e-f+g+h)\,(a-b+c-d+e-f+g-h)\,(a-b+c-d-e+f-g+h)\,(a-b-c+d+e-f-g+h)\,(a-b-c+d-e+f+g-h)$.

258. $(x+a_1+a_2+\dots+a_n)\,(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$.

259. $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \sin\frac{\varphi_k-\varphi_i}{2}$.

260. $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} \cos\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} \sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$.

261. $1!\,2!\,\ldots\,n!$. 262. $\prod_{n+1 \geqslant k > i \geqslant 1} (a_i-a_k)$.

263. $(-1)^n\,1!\,2!\,\ldots\,n!$.

264. $(-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (a_i-a_k) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{a_i f'(a_i)} \right)$,

где $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

265. $\prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i-x_k)$.

266. $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} \cos\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} \sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$.

267. $\prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i-x_k)$.

268. $2^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{01}a_{02}\ldots a_{0,\,n-1} \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} \sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \times$

$$\times \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} \sin\frac{\varphi_k-\varphi_i}{2}.$$

269. $\frac{1}{1!\,2!\ldots(n-1)!} \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i-x_k)$.

271. $1!\,3!\,5!\,\ldots(2n-1)!$. 272. $\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i-1} \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i-x_k)$.

273. $\prod_{n+1 \geqslant k > i \geqslant 1} (b_k a_i - a_k b_i)$. 274. $\prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \sin(\alpha_i-\alpha_k)$.

275. $\prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n+1} (a_i-a_k)(a_i a_k-1)$.

276. $2^{(n-1)^2} \prod_{n-1 \geqslant i > k \geqslant 0} \sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \prod_{n-1 \geqslant i > k \geqslant 0} \sin\frac{\varphi_k-\varphi_i}{2}$.

277. $2^{n(n+1)} \sin\alpha_0 \sin\alpha_1 \ldots$

$$\ldots \sin\alpha_n \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 0} \sin\frac{\alpha_i+\alpha_k}{2} \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 0} \sin\frac{\alpha_i-\alpha_k}{2}.$$

278. $[x_1x_2\ldots x_n-(x_1-1)\ldots(x_n-1)] \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i-x_k)$.

279. $x_1x_2\dots x_n\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\right)\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

280. $(x_1+x_2+\dots+x_n)\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

281. $\sigma_{n-s}\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$, где σ_p обозначает сумму всевозможных произведений чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, взятых по p.

282. $[2x_1x_2\dots x_n-(x_1-1)(x_2-1)\dots(x_n-1)]\times$

$$\times\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k).$$

283. $x^2(x^2-1)^4$. 284. $2x^3y(x-y)^6$.

285. $1!\,2!\,3!\dots(n-1)!\,x^{\frac{n(n-1)}{2}}(y-x)^n$.

286. $1!\,2!\,3!\dots(k-1)!\,x^{\frac{k(k-1)}{2}}(y_1-x)^k(y_2-x)^k\dots$

$$\dots(y_{n-k}-x)^k\prod_{n-k\geqslant i>l\geqslant 1}(y_i-y_l).$$

287. $(y-x)^{k(n-k)}$.

288. b) 9; c) 5; e) 128; f) $(a_1a_2-b_1b_2)(c_1c_2-d_1d_2)$;
g) $(x_3-x_2)^2(x_3-x_1)^2(x_2-x_1)^2$;
h) $(\lambda^2-a^2)(\alpha-\beta)^{n-1}[\alpha+(n-1)\beta]$;
k) $(x_4-x_3)[(x_3-x_2)(x_4-x_2)-2(x_3-x_1)(x_4-x_1)]$;
m) $27(a+2)^3(a-1)^6[3(a+2)^2-4x^2][3(a-1)^2-4x^2]^2$.
Замечание. Эта задача является частным случаем задачи 537.

289. a) $\begin{vmatrix}-5 & -2\\ -8 & 4\end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix}2 & 8 & 17\\ 11 & -6 & 5\\ 3 & 8 & -3\end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix}7 & 5 & -3 & 3\\ -1 & 5 & -3 & 3\\ -4 & -4 & -5 & 4\\ -4 & -4 & 0 & 3\end{vmatrix}$.

290. a) 24; b) 18;
c) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$.

291. a) 256; b) 78 400; c) $(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$.

292. $D\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

293. a) $C_n^1C_n^2\dots C_n^n\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 0}(a_i-a_k)(b_k-b_i)$;

b) $\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(\alpha_i-\alpha_k)(\beta_i-\beta_k)$.

294. 0, если $n\geqslant 2$. 295. $\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)^2$.

296. $-(a^2+b^2+c^2+d^2+l^2+m^2+n^2+p^2)^4$.

297. $4\sin^4\varphi$. 298. $4\sin^4\varphi$.

299. Обозначим искомый определитель через Δ. Возведение в квадрат дает, что $|\Delta| = n^{\frac{n}{2}}$. С другой стороны, $\Delta = \prod\limits_{n-1\geqslant k>s\geqslant 0} (\varepsilon^k - \varepsilon^s)$.

Полагаем $\varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$. Тогда $\varepsilon = \varepsilon_1^2$ и

$$\Delta = \prod_{n-1\geqslant k>s\geqslant 0} (\varepsilon^k - \varepsilon^s) = \prod \varepsilon_1^{k+s} \prod (\varepsilon_1^{k-s} - \varepsilon_1^{-k+s}) =$$

$$= \prod \varepsilon_1^{k+s} \cdot i^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod 2\sin\frac{(k-s)\pi}{n}.$$ Далее, $\sin\frac{(k-s)\pi}{n} > 0$ при всех k, s. Следовательно, $n^{\frac{n}{2}} = |\Delta| = \left|\prod 2\sin\frac{(k-s)\pi}{n}\right| =$

$= \prod 2\sin\frac{(k-s)\pi}{n}$. Поэтому $\Delta = n^{\frac{n}{2}} i^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod\limits_{n-1\geqslant k>s\geqslant 0} \varepsilon_1^{k+s} =$

$$= n^{\frac{n}{2}} i^{\frac{n(n-1)}{2}} \varepsilon_1^{\frac{n(n-1)^2}{2}} = n^{\frac{n}{2}} i^{\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)^2} = n^{\frac{n}{2}} i^{-\frac{(n-1)(n+2)}{2}}.$$

300. $\prod\limits_{k=0}^{n-1} (a_0 + a_1\varepsilon_k + a_2\varepsilon_k^2 + \ldots + a_{n-1}\varepsilon_k^{n-1})$,

где $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$.

301. $x^4 - y^4 + z^4 - u^4 + 4xy^2z + 4xzu^2 - 4x^2yu - 4yz^2u - 2x^2z^2 + 2y^2u^2$.

303. 2^{n-1}, если n — нечетное; 0, если n — четное.

304. $(-1)^n \dfrac{[(n+1)a^n - 1]^n - n^n a^{n(n+1)}}{(1-a^n)^2}$.

305. $(-1)^{n-1}(n-1)\prod\limits_{k=0}^{n-1} (a_1 + a_2\varepsilon_k + \ldots + a_n\varepsilon_k^{n-1})$,

где $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$.

306. $\varphi_0(t)\,\varphi_1(t)\ldots\varphi_{n-1}(t)$, где $\varphi_k(t) = \dfrac{(t+\varepsilon_k)^n - 1}{t}$; $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$.

Согласно результату задачи 102, ответ может быть представлен в виде $\prod\limits_{k=1}^{n-1} [t^n - (\varepsilon_k - 1)^n]$.

307. $(-2)^{n-1}(n-2p)$, если $(n, p) = 1$; 0, если $(n, p) \neq 1$.

308. $2^{n-2}\left(\cos^n\frac{\pi}{n} - 1\right)$.

309. $2^{n-2}\sin^{n-2}\frac{n\theta}{2}\left[\sin^n\frac{(n+2)\theta}{2} - \sin^n\frac{n\theta}{2}\right]$.

310. $(-1)^n 2^{n-2}\sin^{n-2}\frac{nh}{2}\left[\cos^n\left(a+\frac{nh}{2}\right)-\cos^n\left(a+\frac{(n-2)h}{2}\right)\right].$

311. $(-1)^{n-1}\frac{(n+1)(2n+1)}{12}n^{n-2}[(n+2)^n-n^n].$

313. $\prod_{k=0}^{n-1}(a_1+a_2\varepsilon_k+a_3\varepsilon_k^2+\ldots+a_n\varepsilon_k^{n-1}),$

где $\varepsilon_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}.$

315. $\prod_{i=1}^{n}(a_1+a_2\rho_i+a_3\rho_i^2+\ldots+a_n\rho_i^{n-1}),$

где $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ — корни n-й степени из μ.

318. Решение задачи 223. Прибавив ко всем элементам определителя $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}$ по 1, получим определитель Δ.

Имеем $\Delta=a_1a_2\ldots a_n+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ik};$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ik}=a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

Решение задачи 250. Обозначим вычисляемый определитель Δ. Имеем:

$$\Delta=(a_1-x)(a_2-x)\ldots(a_n-x)+x\sum A_{ik};$$

$$\Delta=(a_1-y)(a_2-y)\ldots(a_n-y)+y\sum A_{ik},$$

где $\sum A_{ik}$ — сумма алгебраических дополнений всех элементов Δ. Δ легко определяется из системы уравнений.

323. $\prod_{1\leqslant i<k\leqslant n}(a_i-a_k)\prod_{1\leqslant i<k\leqslant n}(b_i-b_k)\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}f(a_i)},$

где $f(x)=(x+b_1)\ldots(x+b_n)$.

325. $\frac{[c+\sqrt{c^2-4ab}]^{n+1}-[c-\sqrt{c^2-4ab}]^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{c^2-4ab}}.$

326. $\frac{[p+\sqrt{p^2-4q}]^n+[p-\sqrt{p^2-4q}]^n}{2^n}.$

327. $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$, где a_k — сумма всех миноров k-го порядка определителя

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$, полученных из него вычеркиванием $n-k$ строк с номерами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-k}$ и столбцов с теми же номерами.

328. $(n+1)^{n-1}$. 329. $(x-n)^{n+1}$.

330. $(x^2-1^2)(x^2-3^2)\ \dots\ [x^2-(2m-1)^2]$, если $n=2m$; $x(x^2-2^2)(x^2-4^2)\ \dots\ (x^2-4m^2)$, если $n=2m+1$.

331. $(x+na-n)[x+(n-2)a-n+1]\times$
$$\times[x+(n-4)a-n+2]\ \dots\ (x-na).$$

332. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(n-1)!]^n$. 333. $\dfrac{[1!\,2!\,\dots\,(n-1)!]^3}{n!\,(n+1)!\,\dots\,(2n-1)!}$.

334. $\dfrac{\Delta(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)\,\Delta(b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n)}{\Delta(1,\ 2,\ \dots,\ n)}$, где Δ — определитель Вандермонда.

Глава 3

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

335. $x_1=3$; $x_2=x_3=1$.
336. $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=-2$.
337. $x_1=2$; $x_2=-2$; $x_3=3$.
338. $x_1=3$; $x_2=4$; $x_3=5$.
339. $x_1=x_2=-1$; $x_3=0$; $x_4=1$.
340. $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=-1$; $x_4=-2$.
341. $x_1=-2$; $x_2=2$; $x_3=-3$; $x_4=3$.
342. $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=1$; $x_4=-1$.
343. $x_1=2$; $x_2=x_3=x_4=0$.
344. $x_1=x_2=x_3=x_4=0$.
345. $x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=0$; $x_4=2$.
346. $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$.
347. $x_1=x_2=x_3=x_4=0$.
348. $x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=1$; $x_4=-1$; $x_5=1$.
349. $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$.
350. $x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=1$; $x_4=-1$; $x_5=1$.
351. $x_1=0$; $x_2=2$; $x_3=-2$; $x_4=0$; $x_5=3$.
352. $x_1=2$; $x_2=0$; $x_3=-2$; $x_4=-2$; $x_5=1$.

353. Определитель системы равен 0, так как система имеет ненулевое решение.

354. Определитель системы равен $-(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

355. $x_i=\dfrac{\alpha\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-a_i[(n-1)\alpha+\beta]}{(\alpha-\beta)[(n-1)\alpha+\beta]}$.

356. $x_i=-\dfrac{f(\beta_i)}{\varphi'(\beta_i)}$, где $f(x)=(x-b_1)(x-b_2)\ \dots\ (x-b_n)$, $\varphi(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ \dots\ (x-\beta_n)$.

357. $x_i=\dfrac{f(t)}{(t-\alpha_i)f'(\alpha_i)}$, где $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \dots\ (x-\alpha_n)$.

358. $x_s=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(-1)^{n+s}u_i}{f'(\alpha_i)}\varphi_{s,\,i}$, где $f(x)=(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)$; $\varphi_{s,\,i}=$ $=\sum\alpha_{t_1}\alpha_{t_2}\dots\alpha_{t_{n-s}}$, при этом сумма берется по всем сочетаниям $t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_{n-s}$ из $1,\ 2,\ \dots,\ i-1,\ i+1,\ \dots,\ n$.

359. $x_s=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{n+i}u_i}{f'(\alpha_s)}\varphi_{i,s}$, где $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$;

$\varphi_{i,s}=\sum\alpha_{t_1}\alpha_{t_2}\ldots\alpha_{t_{n-i}}$, прн этом сумма берется по всем сочетаниям $t_1, t_2, \ldots, t_{n-i}$ из $1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n$.

360. $x_i=\frac{(-1)^n a_{n-i}}{n!}$, где $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=$

$=(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$.

361. $C_m^k\cdot C_n^k$.

365. а) Не изменится или увеличится на едиинцу;

b) либо ие нзменится, либо увеличится на единицу или на два.

366. 2. 367. 3. 368. 2. 369. 2. 370. 3. 371. 3. 372. 4.

373. 3. 374. 2. 375. 3. 376. 5. 377. 6. 378. 5. 379. 3. 380. 4.

383. Формы иезависимы. 384. $2y_1-y_2-y_3=0$.

385. $y_1+3y_2-y_3=0$; $2y_1-y_2-y_4=0$.

386. Формы независимы.

387. $y_1+y_2-y_3-y_4=0$.

388. $y_1-y_2+y_3=0$; $5y_1-4y_2+y_4=0$.

389. Формы независимы.

390. Формы независимы.

391. $y_1+y_2-y_3-y_4=0$. 392. $2y_1-y_2-y_3=0$.

393. $3y_1-y_2-y_3=0$; $y_1-y_2-y_4=0$.

394. Формы независимы. 395. $y_1-y_2-y_3-y_4=0$.

396. $3y_1-2y_2-y_3+y_4=0$; $y_1-y_2+2y_3-y_5=0$.

397. $\lambda=10$; $3y_1+2y_2-5y_3-y_4=0$.

398. $x_3=2x_2-x_1$; $x_4=1$. 399. $\lambda=5$.

400. Система решеиий ие имеет. 401. $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=-2$.

402. $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=1$. 403. $x_1=-\frac{11x_3}{7}$; $x_2=-\frac{x_3}{7}$.

404. Система решений не имеет.

405. $x_1=0$; $x_2=2$; $x_3=\frac{5}{3}$; $x_4=-\frac{4}{3}$.

406. $x_1=-8$; $x_2=3+x_4$; $x_3=6+2x_4$.

407. $x_1=2$; $x_2=x_3=x_4=1$. 408. $x_1=x_2=x_3=x_4=0$.

409. $x_1=\frac{3x_3-13x_4}{17}$; $x_2=\frac{19x_3-20x_4}{17}$.

410. $x_1=\frac{7}{6}x_5-x_3$; $x_2=\frac{5}{6}x_5+x_3$; $x_4=\frac{x_5}{3}$.

411. $x_1=-16+x_3+x_4+5x_5$; $x_2=23-2x_3-2x_4-6x_5$.

412. $x_1=\frac{-4x_4+7x_5}{8}$; $x_2=\frac{-4x_4+5x_5}{8}$; $x_3=\frac{4x_4-5x_5}{8}$.

413. $x_1=x_2=x_3=0$; $x_4=x_5$.

414. $x_1=\frac{1+x_5}{3}$; $x_2=\frac{1+3x_3+3x_4-5x_5}{3}$.

415. $x_1=\frac{2+x_5}{3}$; $x_2=\frac{1+3x_3-3x_4+5x_5}{6}$.

416. Система решенни не имеет.

417. Система решений ие имеет.

418. $x_1=-\frac{x_5}{2}$; $x_2=-1-\frac{x_5}{2}$; $x_3=0$; $x_4=-1-\frac{x_5}{2}$.

419. $x_1=\frac{1+5x_4}{6}$; $x_2=\frac{1-7x_4}{6}$; $x_3=\frac{1+5x_4}{6}$.

420. Система решений не имеет.

421. $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$; $z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

422. Если $(\lambda-1)(\lambda+2)\neq 0$, $x=-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}$; $y=\frac{1}{\lambda+2}$; $z=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$.

Если $\lambda=1$, система имеет решения, зависящие от двух параметров. Если $\lambda=-2$, система решений не имеет.

423. Если $(\lambda-1)(\lambda+3)\neq 0$, $x=-\frac{\lambda^2+2\lambda+2}{\lambda+3}$;

$$y=-\frac{\lambda^2+\lambda-1}{\lambda+3};\quad z=\frac{2\lambda+1}{\lambda+3};\quad t=-\frac{\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda+3}.$$

Если $\lambda=1$, система имеет решения, зависящие от трех параметров. Если $\lambda=-3$, система решений не имеет.

424. Если a, b, c все различны,

$$x=abc;\quad y=-(ab+ac+bc);\quad z=a+b+c.$$

Если среди a, b, c два равных, решения зависят от одного параметра.

Если $a=b=c$, решения зависят от двух параметров.

425. Если a, b, c все различны,

$$x=\frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)};\quad y=\frac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)};\quad z=\frac{(a-d)(b-d)}{(a-c)(b-c)}.$$

Если $a=b$; $a\neq c$; $d=a$ или $d=c$, решения зависят от одного параметра.

Если $b=c$; $a\neq b$; $d=a$ или $d=b$, решения зависят от одного параметра.

Если $a=c$; $a\neq b$; $d=a$ или $d=b$, решения зависят от одного параметра.

Если $a=b=c=d$, решения зависят от двух параметров.

Во всех остальных случаях система решений не имеет.

426. Если $b(a-1)\neq 0$, $x=\frac{2b-1}{b(a-1)}$; $y=\frac{1}{b}$; $z=\frac{2ab-4b+1}{b(a-1)}$.

Если $a=1$; $b=\frac{1}{2}$, решения зависят от одного параметра.

Во всех остальных случаях система решений не имеет.

427. Если $b(a-1)(a+2)\neq 0$, $x=z=\frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$;

$$y=\frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}.$$

Если $a=-2$; $b=-2$, решения зависят от одного параметра.
Если $a=1$; $b=1$, решения зависят от двух параметров.
Во всех остальных случаях система решений не имеет.

428. Если $(\alpha-1)(\alpha+2)\neq 0$, $x=\dfrac{m\alpha+m-n-p}{(\alpha+2)(\alpha-1)}$;

$$y=\frac{n\alpha+n-m-p}{(\alpha+2)(\alpha-1)};\quad z=\frac{p\alpha+p-m-n}{(\alpha+2)(\alpha-1)}.$$

Если $\alpha=-2$ и $m+n+p=0$, решения зависят от одного параметра.

Если $\alpha=1$ и $m=n=p$, решения зависят от двух параметров. Во всех остальных случаях система решений не имеет.

429. Если $a(a-b)\neq 0$, $x=\dfrac{a^2(b-1)}{b-a}$; $y=\dfrac{b(a^2-1)}{a(a-b)}$; $z=\dfrac{a-1}{a(b-a)}$.

Если $a=b=1$, решения зависят от двух параметров.

Во всех остальных случаях система решений не имеет.

430. $\Delta=\lambda^2(\lambda-1)$. При $\lambda=0$; $\lambda=1$ система несовместна.

431. $\Delta=-2\lambda$. Если $\lambda\neq 0$, $x=1-\lambda$; $y=\lambda$; $z=0$. Если $\lambda=0$, $x=1$; $z=0$; y—любое.

432. $\Delta=(k-1)^2(k+1)$. Если $k=1$, решение зависит от одного параметра. Если $k=-1$, система несовместна.

433. $\Delta=a(b-1)(b+1)$.

Если $a=0$; $b=5$, $y=-\dfrac{1}{3}$; $z=\dfrac{4}{3}$; x—любое.

Если $a=0$; $b\neq 1$ и $b\neq 5$, система несовместна.

Если $b=1$, $z=0$; $y=1-ax$; x—любое.

Если $b=-1$, система несовместна.

434. a) $\Delta=-m(m+2)$. При $m=0$ и $m=-2$ система несовместна.

b) $\Delta=m(m^2-1)$. Если $m=0$; $m=1$, система несовместна. Если $m=-1$, решение зависит от одного параметра.

c) $\Delta=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$. Если $\lambda=1$; $\lambda=-1$, система несовместна. Если $\lambda=0$, решение зависит от одного параметра.

435. a) $\Delta=3(c+1)(c-1)^2$. Если $c=-1$, система несовместна. Если $c=1$, решение зависит от двух параметров.

b) $\Delta=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$. Если $\lambda=2$; $\lambda=3$, система несовместна. Если $\lambda=1$, решение зависит от одного параметра.

c) $\Delta=d(d-1)(d+2)$. Если $d=1$; $d=-2$, система несовместна. Если $d=0$, решение зависит от одного параметра.

d) $\Delta=(a-1)^2(a+1)$. Если $a=-1$, система несовместна. Если $a=1$, решение зависит от двух параметров.

436. $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0.$

437. Тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

438. Только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=0.$$

439. Только тогда, когда $\begin{vmatrix} x_0^2+y_0^2 & x_0 & y_0 & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$

440. $(x-1)^2+(y-1)^2=1.$ **441.** $y^2-y=0.$

442. $y=x^3-1.$

443. $$\begin{vmatrix} y & x^n & x^{n-1} & \dots & x^2 & x & 1 \\ y_0 & x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0^2 & x_0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n^2 & x_n & 1 \end{vmatrix}=0.$$

444. Тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$

445. $x^2+y^2+z^2-x-y-z=0.$

446. Тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}$$

меньше трех.

447. Только тогда, когда ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$$

меньше трех.

448. В одной плоскости тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & z_n & 1 \end{pmatrix}$$

меньше четырех; на одной прямой тогда и только тогда, когда ранг этой матрицы меньше трех.

449. Все плоскости проходят через одну точку только тогда, когда ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n & B_n & C_n & D_n \end{pmatrix}$$

меньше четырех; через одну прямую только тогда, когда ранг этой матрицы меньше трех.

450. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,\,n-1} & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

453. Нет. **454.** Например, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **455.** Да.

456. Решение. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rn} \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1r} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{r1} & \lambda_{r2} & \dots & \lambda_{rr} \end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix} \sum_{s=1}^{r}\lambda_{1s}\alpha_{s1} & \dots & \sum_{s=1}^{r}\lambda_{1s}\alpha_{sn} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{s=1}^{r}\lambda_{rs}\alpha_{s1} & \dots & \sum_{s=1}^{r}\lambda_{rs}\alpha_{sn} \end{pmatrix}.$$

Непосредственно видно, что строки матрицы BA суть решения системы. Кроме того, так как $|B|\neq 0$, $A=B^{-1}(BA)$, т. е. решения, записанные матрицей A, суть линейные комбинации решений, записанных матрицей BA.

457. Решение. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rn} \end{pmatrix}; \qquad C=\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{r1} & \gamma_{r2} & \dots & \gamma_{rn} \end{pmatrix}.$$

Так как C представляет фундаментальную систему решений, $\alpha_{11}= =\lambda_{11}\gamma_{11}+\lambda_{12}\gamma_{21}+\dots+\lambda_{1r}\gamma_{r1}$ и т. д., т. е. $A=BC$, где

$$B=\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{r1} & \lambda_{r2} & \dots & \lambda_{rr} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, A также представляет фундаментальную систему решений, и потому $|B|\neq 0$.

459. Например,

$x_1=c_1+c_2+5c_3$; $x_2=-2c_1-2c_2-6c_3$; $x_3=c_1$; $x_4=c_2$; $x_5=c_3$ (см. ответ задачи 454).

460. $x_1=11c$; $x_2=c$; $x_3=-7c$.

461. № 408. $x_1=x_2=x_3=x_4=0$.

№ 409. $x_1=3c_1+13c_2$; $x_2=19c_1+20c_2$; $x_3=17c_1$; $x_4=-17c_2$.

№ 410. $x_1=c_1+7c_2$; $x_2=-c_1+5c_2$; $x_3=-c_1$; $x_4=2c_2$; $x_5=6c_2$.

№ 412. $x_1=c_1+7c_2$; $x_2=c_1+5c_2$; $x_3=-c_1-5c_2$; $x_4=-2c_1$; $x_5=8c_2$.

№ 413. $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=0$; $x_4=c$; $x_5=c$.

462. $x_1=-16+c_1+c_2+5c_3$; $x_2=23-2c_1-2c_2-6c_3$; $x_3=c_1$; $x_4=c_2$; $x_5=c_3$.

463. № 406. $x_1=-8$; $x_2=3+c$; $x_3=6+2c$; $x_4=c$.

№ 414. $x_1=c_3$; $x_2=2+c_1+c_2-5c_3$; $x_3=c_1$; $x_4=c_2$; $x_5=-1+3c_3$.

№ 415. $x_1=1+2c_3$; $x_2=1+c_1-c_2+5c_3$; $x_3=2c_1$; $x_4=2c_2$; $x_5=1+6c_3$.

Глава 4

МАТРИЦЫ

464. a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^3 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$.

465. a) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$.

466.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha}{n}$. Следовательно,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = \left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}.$$

Предел первого множителя равен 1. $\lim\limits_{n\to\infty} n\varphi = \alpha \lim\limits_{\varphi\to 0} \frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} = \alpha$. Поэтому

$$\lim \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

467. a) $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2 = A^2+2AB+B^2$;
b) $(A+B)(A-B) = A^2-AB+BA-B^2 = A^2-B^2$.
c) Доказывается по индукции.

468. a) $\begin{pmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

469 a) $\begin{pmatrix} x & 2y \\ -y & x-2y \end{pmatrix} = (x-y)E + yA$;

b) $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = (x-y)E + yA$; c) $\begin{pmatrix} x & y & 0 \\ u & v & 0 \\ 3t-3x-u & t-3y-v & t \end{pmatrix}$.

470. a) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

471. Проверяется непосредственным вычислением.

472. Полиномы $F(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$, такие, что $F(A)=0$, существуют, ибо равенство $F(A)=a_0E+a_1A+\ldots+a_mA^m=0$ равносильно системе n^2 линейных однородных уравнений с $m+1$ неизвестными $a_0, a_1, \ldots, a_m$, которая при $m\geqslant n^2$ наверное имеет нетривиальные решения. Пусть $F(x)$ — какой-либо полином, для которого $F(A)=0$, а $f(x)$ — полином наименьшей степени среди полиномов, обладающих этим свойством. Тогда $F(x)=f(x)\,q(x)+r(x)$, где $r(x)$ — полином, степень которого меньше степени $f(x)$. Имеем $r(A)=F(A)-f(A)\,q(A)=0$, следовательно, $r(x)=0$, иначе получилось бы противоречие с выбором $f(x)$. Итак, $F(x)=f(x)\,q(x)$.

473. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда сумма диагональных элементов матрицы AB равна $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$. Совершенно такая же сумма диагональных элементов у матрицы BA. Следовательно, сумма диагональных элементов матрицы $AB-BA$ равна нулю, и равенство $AB-BA=E$ невозможно.

Замечание. Результат неверен для матриц с элементами из поля характеристики $p\neq 0$. Действительно, в поле характеристики p для матриц p-го порядка:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p-1 & 0 \end{pmatrix},$$

имеем $AB-BA=E$.

474. $(E-A)(E+A+A^2+\ldots+A^{k-1})=E-A^k=E$.

475. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $bc=-a^2$.

476. Если $A^3=0$, то и $A^2=0$. Действительно, если $A^3=0$, то $|A|=0$. Следовательно (см. 471), $A^2=(a+d)A$, $0=A^3=(a+d)A^2=(a+d)^2A$, откуда $a+d=0$ и $A^2=0$.

477. $\pm E$; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $a^2=1-bc$.

478. Если $A=0$, то X — любая матрица. Если $|A|\neq 0$, то $X=0$. Наконец, если $|A|=0$, но $A\neq 0$, то строчки матрицы A пропорциональны. Пусть $\alpha:\beta$ есть отношение соответствующих элементов первой и второй строчек матрицы A. Тогда $X=\begin{pmatrix} -\beta x & \alpha x \\ -\beta y & \alpha y \end{pmatrix}$ при любых x, y.

479. Пусть $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1) Если $A \neq 0$, но $a+d=0$, $ad-bc=0$, то решений не существует;

2) если $a+d \neq 0$, $(a-d)^2+4bc=0$, $(a-d)$, b, c не равны нулю одновременно, то существует два решения:

$$X = \pm \frac{1}{2\sqrt{2(a+d)}} \begin{pmatrix} 3a+d & 2b \\ 2c & a+3d \end{pmatrix};$$

3) если $a+d \neq 0$, $ad-bc=0$, то существует два решения:

$$X = \pm \frac{1}{\sqrt{a+d}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

4) если $ad-bc \neq 0$, $(a-d)^2+4bc \neq 0$, то существует четыре решения:

$$X = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2+a-d}{2} & b \\ c & \frac{\lambda^2-a+d}{2} \end{pmatrix},$$

где $\lambda = \pm \sqrt{a+d \pm 2\sqrt{ad-bc}}$;

5) если $a-d=b=c=0$, то существует бесконечно много решений: $X = \pm \sqrt{a}E$ и $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$, где x, y, z связаны соотношением $x^2+yz=a$.

480. a) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; f) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

h) $\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2-n \end{pmatrix}$;

i) $\frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-2} & \dots & \varepsilon^{-n+1} \\ 1 & \varepsilon^{-2} & \varepsilon^{-4} & \dots & \varepsilon^{-2n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon^{-n+1} & \varepsilon^{-2n+2} & \dots & \varepsilon^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}$;

j) $\frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} 1\cdot n & 1\cdot(n-1) & 1\cdot(n-2) & \dots & 1\cdot 1 \\ 1\cdot(n-1) & 2\cdot(n-1) & 2\cdot(n-2) & \dots & 2\cdot 1 \\ 1\cdot(n-2) & 2\cdot(n-2) & 3\cdot(n-2) & \dots & 3\cdot 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1\cdot 1 & 2\cdot 1 & 3\cdot 1 & \dots & n\cdot 1 \end{pmatrix}$;

k) $\frac{1}{2n^3}\begin{pmatrix} 2-n^2 & 2+n^2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2-n^2 & 2+n^2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2+n^2 & 2 & 2 & \dots & 2-n^2 \end{pmatrix}$;

l) $\frac{1}{d}\begin{pmatrix} b_1c_1+d & b_2c_1 & \dots & b_nc_1 & -c_1 \\ b_1c_2 & b_2c_2+d & \dots & b_nc_2 & -c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1c_n & b_2c_n & \dots & b_nc_n+d & -c_n \\ -b_1 & -b_2 & \dots & -b_n & 1 \end{pmatrix}$,

где $d=a-b_1c_1-b_2c_2-\dots-b_nc_n$;

m) $\frac{1}{f}\begin{pmatrix} f-f_0x^n & xf-f_1x^n & \dots & x^{n-1}f-f_{n-1}x^n & x^n \\ -f_0x^{n-1} & f-f_1x^{n-1} & \dots & x^{n-2}f-f_{n-1}x^{n-1} & x^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -f_0x & -f_1x & \dots & f-f_{n-1}x & x \\ -f_0 & -f_1 & \dots & -f_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$,

где $f_0=a_0$, $f_1=a_0x+a_1$, $\dots$, $f_{n-1}=a_0x^{n-1}+\dots+a_{n-1}$, $f=a_0x^n+$ $+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$;

n) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}-\frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1\lambda_2 & \dots & \lambda_1\lambda_n \\ \lambda_2\lambda_1 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2\lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n\lambda_1 & \lambda_n\lambda_2 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$,

$$\mu=1+\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n;$$

o) $\begin{pmatrix} B^{-1}+\lambda B^{-1}UVB^{-1} & -\lambda B^{-1}U \\ -\lambda VB^{-1} & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda=\frac{1}{a-VB^{-1}U}$.

481. a) $\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$; e) $X=E-\frac{n-1}{n^2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

f) $X=\begin{pmatrix} 1+a & b \\ -2a & 1-2b \end{pmatrix}$; g) X не существует.

482. Достаточно умножить равенство $AB=BA$ справа и слева на A^{-1}.

483. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

484. Если $A^3=E$, то $|A|^3=1$ и, в силу вещественности, $|A|=1$. Положим $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда, приравняв A^{-1} и A^2, легко получим, что $A=E$ или $a+d=-1$, $ad-bc=1$.

485. $A=\pm E$ или $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, причем $a^2+bc=\pm 1$.

486. $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=aE+bI$, где $I=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $I^2=-E$ и, следовательно, соответствие $aE+bI \longrightarrow a+bi$ есть изоморфизм.

487. Положим $\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}=aE+bI+cJ+dK$, где $I=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $I^2=J^2=K^2=-E$, $IJ=-JI=K$, $JK=-KJ=I$, $KI=-IK=J$. Отсюда следует, что произведение двух матриц вида $a+bI+cJ+dK$ есть матрица такого же вида. То же самое имеет место для суммы и разности, так что рассматриваемое множество матриц есть кольцо. Далее, $|A|=\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}=a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$, как только $A \neq 0$. Следовательно, каждая отличная от 0 матрица имеет обратную, и из равенства $A_1A_2=0$ (или $A_2A_1=0$) при $A_1 \neq 0$ следует $A_2=0$. Рассматриваемое кольцо матриц реализует так называемую алгебру кватернионов.

488. $(a_1E+b_1I+c_1J+d_1K)\ (a_2E+b_2I+c_2J+d_2K)=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)\,E+(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)\,I+(a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2+d_1b_2)\,J+(a_1d_2+b_1c_2-c_1b_2+d_1a_2)\,K$. Переходя к определителям, получим $(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)\,(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)=$

$$=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)^2+(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)^2+$$
$$+(a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2+d_1b_2)^2+(a_1d_2+b_1c_2-c_1b_2+d_1a_2)^2.$$

489. Перестановка двух строчек матрицы осуществляется посредством умножения слева на матрицу

$$\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&& \\
&& 1 &&&&&& \\
&&& 0 & \cdots & 1 &&& \\
&&& \vdots & 1 & \vdots &&& \\
&&& \vdots & \ddots & \vdots &&& \\
&&& \vdots & 1 & \vdots &&& \\
&&& 1 & \cdots & 0 &&& \\
&&&&&& 1 && \\
&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}.$$

Операция $\mathfrak{b}$ осуществляется посредством умножения слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \dots & \alpha & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & \alpha & \dots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Операция c осуществляется посредством умножения слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Операции a, $\mathfrak{b}$, c над столбцами осуществляются посредством умножения на те же матрицы справа.

490. Как известно, любая матрица A может быть приведена к диагональному виду R посредством элементарных преобразований a, $\mathfrak{b}$, c над строчками и столбцами. Поэтому для данной матрицы A найдется такая матрица вида R, что $R = U_1U_2 \dots U_mAV_1V_2 \dots V_k$, где $U_1, \dots, U_m, V_1, \dots, V_k$—матрицы элементарных преобразований. Все они неособенные и имеют обратные.

Следовательно, $A = PRQ$, где P и Q—неособенные матрицы.

491. В силу результатов задач 489, 490, достаточно доказать теорему для диагональных матриц и матриц, соответствующих операции a, ибо матрицы, соответствующие операции $\mathfrak{b}$, имеют требуемый вид. Легко видеть, что операция a сводится к операциям $\mathfrak{b}$ и c. Действительно, для того чтобы переставить две строчки, можно добавить первую из них ко второй, затем из первой отнять вторую, затем ко второй добавить первую и, наконец, умножить первую на -1. Это равносильно матричному тождеству $E - e_{ii} - e_{kk} + e_{ik} + e_{ki} = (E - 2e_{kk})(E + e_{ik})(E - e_{ki})(E + e_{ik})$. Для диагональных матриц теорема очевидна:

$$a_1e_{11} + a_2e_{22} + \dots + a_ne_{nn} = \\ = (E + (a_1 - 1)e_{11})(E + (a_2 - 1)e_{22}) \dots (E + (a_n - 1)e_{nn}).$$

492. Пусть $A = P_1R_1Q_1$, $B = P_2R_2Q_2$, где P_1, Q_1, P_2, Q_2—неособенные матрицы, а R_1 и R_2—матрицы, имеющие соответственно

r_1 и r_2 единиц на главной диагонали и все остальные элементы которых равны 0. Тогда $AB=P_1R_1Q_1P_2R_2Q_2$, и ранг AB равен рангу R_1CR_2, где $C=Q_1P_2$—неособенная матрица. Матрица R_1CR_2 получается из матрицы C посредством замены всех элементов последних $n-r_1$ строчек и $n-r_2$ столбцов нулями. Ввиду того что вычеркивание одной строчки или одного столбца понижает ранг матрицы не более, чем на одну единицу, ранг R_1CR_2 не меньше $n-(n-r_1)-(n-r_2)=r_1+r_2-n$.

493. Непосредственно следует из пропорциональности всех строчек матрицы ранга 1.

494. На основании результата задачи 492 ранг искомой матрицы A равен 1 или 0. Следовательно,

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1\mu_1 & \lambda_1\mu_2 & \lambda_1\mu_3\\ \lambda_2\mu_1 & \lambda_2\mu_2 & \lambda_2\mu_3\\ \lambda_3\mu_1 & \lambda_3\mu_2 & \lambda_3\mu_3\end{pmatrix}.$$

Непосредственное умножение дает

$$0=A^2=(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3)\,A,$$

откуда следует, что $\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3=0$.

495. Пусть A дает решение задачи, отличное от тривиального $A=\pm E$. Тогда одна из матриц $A-E$ или $A+E$ имеет ранг 1. Пусть

$$A+E=\begin{pmatrix}\lambda_1\mu_1 & \lambda_1\mu_2 & \lambda_1\mu_3\\ \lambda_2\mu_1 & \lambda_2\mu_2 & \lambda_2\mu_3\\ \lambda_3\mu_1 & \lambda_3\mu_2 & \lambda_3\mu_3\end{pmatrix}=B.$$

Тогда $A^2=E-2B+B^2=E+(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3-2)\,B$, откуда следует, что для $A^2=E$ необходимо и достаточно выполнение условия $\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3=2$. Аналогично рассматривается и второй случай.

496. Пусть к матрице (A, B), где

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1k}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & \dots & a_{mk}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & \dots & b_{1s}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ b_{m1} & \dots & b_{ms}\end{pmatrix},$$

добавляется столбец $C=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ c_m\end{pmatrix}$, присоединение которого к матрице B не увеличивает ее ранга. Тогда система линейных уравнений

$$\begin{aligned} b_{11}y_1+\dots+b_{1s}y_s&=c_1,\\ &\dots\dots\dots\\ b_{m1}y_1+\dots+b_{ms}y_s&=c_m\end{aligned}$$

совместна. Но вместе с ней совместна и система

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+\dots+a_{1k}x_k+b_{11}y_1+\dots+b_{1s}y_s&=c_1,\\ &\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mk}x_k+b_{m1}y_1+\dots+b_{ms}y_s&=c_m.\end{aligned}$$

Следовательно, ранг матрицы (A, B) равен рангу матрицы (A, B, C).

Предположим теперь, что столбцы матрицы B присоединяются к матрице A постепенно по одному. При этом ранг может возрастать на 1, в силу только что доказанного, лишь тогда, когда возрастает ранг B. Следовательно, ранг $(A, B) \leqslant$ ранг $A +$ ранг B.

497. Пусть ранг $(E+A)=r_1$, ранг $(E-A)=r_2$. Ввиду того, что $(E+A)+(E-A)=2E$, $r_1+r_2 \geqslant n$. С другой стороны, $(E+A)(E-A)=0$, поэтому $0 \geqslant r_1+r_2-n$. Следовательно, $r_1+r_2=n$.

498. Ранг матрицы $(E+A, E-A)$ равен n. Выберем из этой матрицы квадратную неособенную матрицу P порядка n, и пусть ее первые r столбцов принадлежат матрице $E+A$, а остальные $n-r$ столбцов принадлежат $E-A$. Тогда, в силу $(E+A)(E-A)=0$, будем иметь

$$(E+A)P=\begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1r} & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ q_{n1} & \dots & q_{nr} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$(E-A)P=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & q_{1,r+1} & \dots & q_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & q_{n,r+1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}.$$

Сложив эти равенства, получим

$$2P=\begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1r} & q_{1,r+1} & \dots & q_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ q_{n1} & \dots & q_{nr} & q_{n,r+1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}.$$

Вычитая, получим

$$2AP=\begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1r} & -q_{1,r+1} & \dots & -q_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ q_{n1} & \dots & q_{nr} & -q_{n,r+1} & \dots & -q_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$=2P\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда непосредственно следует то, что требовалось доказать.

499. Если $AA^{-1}=E$ и обе матрицы целочисленные, то имеем $|A|\cdot|A^{-1}|=1$, откуда следует, что $|A|=\pm 1$, ибо $|A|$ и $|A|^{-1}$ — целые числа. Условие $|A|=\pm 1$, очевидно, также и достаточно для целочисленности матрицы A^{-1}.

500. Пусть A — целочисленная неособенная матрица. Среди элементов ее первого столбца найдутся отличные от нуля. Посредством умножения некоторых строчек матрицы A на -1 можно добиться того, что все элементы первого столбца станут неотрицательными. Выберем среди них наименьший положительный и отнимем соответствующую ему строчку из какой-либо другой, содержащей положительный элемент в первом столбце. Получим снова матрицу с неотрицательными элементами в первом столбце, но один из них будет

меньше, чем у исходной матрицы. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока это возможно. Через конечное число шагов процесса придем к матрице, у которой все элементы первого столбца, кроме одного положительного, окажутся равными нулю. Тогда перестановкой двух строчек переведем отличный от 0 элемент первого столбца в первую строчку. Затем, не трогая первой строчки, теми же операциями добьемся того, чтобы во втором столбце на диагонали оказался положительный элемент, а все лежащие ниже сделались нулями. Затем обращаемся к третьему столбцу и т. д. В конце концов матрица окажется приведенной к треугольной форме. Тогда добавлением (или вычитанием) надлежащее число раз каждой строчки к лежащим выше добьемся того, чтобы элементы, лежащие выше главной диагонали, удовлетворяли поставленным требованиям.

Все упомянутые действия равносильны умножениям слева на некоторые унимодулярные матрицы, откуда непосредственно следует искомый результат.

501. Пусть $A = P_1R_1 = P_2R_2$, где матрицы P_1, R_1 и P_2, R_2 удовлетворяют требованиям задачи 500. Тогда из равенства $P_2^{-1}P_1 = R_2R_1^{-1}$ следует, что целочисленная унимодулярная матрица $C = P_2^{-1}P_1$ также имеет треугольный вид. Пусть

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда из равенства $R_2 = CR_1$ заключаем прежде всего, что $b_{11} = c_{11}a_{11}, \dots, b_{nn} = c_{nn}a_{nn}$, откуда следует, что все c_{ii} положительны. Но $c_{11}c_{22} \dots c_{nn} = |c| = \pm 1$, следовательно, $c_{11} = c_{22} = \dots c_{nn} = 1$ и $a_{ii} = b_{ii}$.

Далее, $b_{12} = c_{11}a_{12} + c_{12}a_{22} = a_{12} + c_{12}a_{22}$, откуда $c_{12} = \dfrac{b_{12} - a_{12}}{a_{22}}$. Но $0 \leqslant b_{12} < b_{22} = a_{22}$, $0 \leqslant a_{12} < a_{22}$, следовательно, $|c_{12}| < 1$, и потому $c_{12} = 0$. Таким же образом, сравнивая последовательно (по столбцам) остальные элементы в матричном равенстве $CR_1 = R_2$, придем к выводу, что все $c_{ik} = 0$ при $k > i$, т. е. $C = E$, следовательно, $R_1 = R_2$, $P_1 = P_2$. Таким образом, в каждом классе найдется одна и только одна матрица вида R.

Число матриц R с данными диагональными элементами $d_1, d_2, \dots, d_n$, очевидно, равно $d_2d_3^2 \dots d_n^{n-1}$, а следовательно, число матриц R с данным определителем k равно $F_n(k) = \sum d_2d_3^2 \dots d_n^{n-1}$, где знак $\sum$ распространен на все целые положительные числа $d_1, d_2, \dots, d_n$, удовлетворяющие условию $d_1d_2 \dots d_n = k$. Если $k = ab$, $(a, b) = 1$, то каждый множитель d_i в равенстве $k = d_1d_2 \dots d_n$

единственным образом распадается на две множителя α_i, β_i, так что $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n = a$, $\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n = b$. Следовательно,

$$F_n(k) = \sum_{d_1 d_2 \ldots d_n = k} d_2 d_3^2 \ldots d_n^{n-1} =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = a \\ \beta_1\beta_2\ldots\beta_n = b}} \alpha_2\alpha_3^2 \ldots \alpha_n^{n-1}\beta_2\beta_3^2 \ldots \beta_n^{n-1} =$$

$$= \sum_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = a} \alpha_2\alpha_3^2 \ldots \alpha_n^{n-1} \sum_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n = b} \beta_2\beta_3^2 \ldots \beta_n^{n-1} = F_n(a)\cdot F_n(b).$$

Отсюда заключаем, что если $k = p_1^{m_1} \ldots p_s^{m_s}$ — каноническое разложение k на простые множители, то $F_n(k) = F_n(p_1^{m_1}) \ldots F_n(p_s^{m_s})$.

Остается подсчитать $F_n(p^m)$. С этой целью разбиваем сумму для вычисления $F_n(p^m)$ на две части, в первой из которых $d_n = 1$, а во второй d_n делится на p, $d_n = pd_n'$. Это дает формулу $F_n(p^m) = F_{n-1}(p^m) + p^{n-1}F_n(p^{m-1})$, из которой легко устанавливается методом математической индукции, что

$$F_n(p^m) = \frac{(p^{m+1}-1)(p^{m+2}-1)\ldots(p^{m+n-1}-1)}{(p-1)(p^2-1)\ldots(p^{n-1}-1)}.$$

502. Выбрав наименьший по абсолютной величине отличный от 0 элемент матрицы, переносим его в левый верхний угол перестановкой строчек и столбцов. Затем первую строчку и первый столбец добавляем ко всем остальным строчкам и столбцам или вычитаем из них столько раз, чтобы все элементы первой строчки и первого столбца стали меньше углового элемента по абсолютной величине. Затем повторяем этот процесс. Он закончится после конечного числа шагов, ибо после каждого шага в левый верхний угол попадает элемент, меньший предшествующего по абсолютной величине. Но процесс может закончиться только тем, что все элементы первой строчки и первого столбца, кроме углового, обратятся в 0. После этого преобразуем тем же способом матрицу, образованную 2-й, ..., n-й строчками и столбцами. В конце концов матрица преобразуется к диагональному виду. В силу результата задачи 489, все описанные преобразования равносильны умножениям справа и слева на унимодулярные матрицы.

503. Умножение слева на матрицу A^m равносильно прибавлению к первой строчке второй, умноженной на m. Умножение слева на B^m равносильно прибавлению ко второй строчке первой, умноженной на m.

Пусть $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — данная целочисленная матрица с определителем 1. Поделим с остатком a на c: $a = mc + a_1$, $0 \leqslant a_1 < |c|$; затем поделим c на a_1: $c = m_1 a_1 + c_2$, $0 \leqslant c_2 < a_1$, и т. д., до тех пор, пока деление не выполнится без остатка. Тогда $A^{-m}U = U_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{pmatrix}$, $B^{-m}U_1 = U_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ и т. д. В конце концов придем к матрице U_{k+1} вида $\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ 0 & d_{k+1} \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 0 & b_{k+1} \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$. При этом, в силу положительности всех a_k, c_k и унимодулярности U_{k+1}, будет $a_k=d_{k+1}=1$ в первом случае, $c_k=-b_{k+1}=1$ — во втором. Таким образом, $U_{k+1}=\begin{pmatrix}1 & b_k\\ 0 & 1\end{pmatrix}=A^{b_k}$ в первом случае, $U_{k+1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & d_k\end{pmatrix}=$ $=A^{-1}BA^{d_k-1}$ — во втором. Тем самым теорема доказана.

504. Матрица с определителем -1 посредством умножения на C преобразуется в матрицу с определителем 1. Каждая такая матрица есть произведение степеней A и B. Но $B=CAC$.

505. Пусть $|A|=1$, $A^2=E$, $A\neq E$. Тогда (задача 498)

$$A=P\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}P^{-1}$$

при некоторой неособенной матрице P. Определим матрицу P так, чтобы она была целочисленной с возможно меньшим определителем.

Ввиду того, что $A+E=P\begin{pmatrix}2 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}P^{-1}$, матрица $A+E$ имеет ранг 1 и, следовательно,

$$A+E=\begin{pmatrix}\lambda_1\mu_1 & \lambda_1\mu_2 & \lambda_1\mu_3\\ \lambda_2\mu_1 & \lambda_2\mu_2 & \lambda_2\mu_3\\ \lambda_3\mu_1 & \lambda_3\mu_2 & \lambda_3\mu_3\end{pmatrix},$$

причем $\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3=2$ (задача 495). В силу целочисленности матрицы $A+E$, числа λ_1, λ_2, λ_3 и числа μ_1, μ_2, μ_3 можно считать целыми.

Составив систему уравнений для компонент матрицы P, нетрудно проверить, что в качестве P можно взять матрицу

$$P=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & -\delta\\ \lambda_2 & \frac{\mu_3}{\delta} & u\mu_1\\ \lambda_3 & -\frac{\mu_2}{\delta} & v\mu_1\end{pmatrix},$$

где δ есть общий наибольший делитель μ_2, μ_3, а u, v — такие целые числа, что $u\mu_2+v\mu_3=\delta$.

Определитель матрицы P равен 2.

На основании результата задачи 500, $P=QR$, где Q — унимодулярная, R — одна из семи возможных треугольных матриц с определителем 2.

Следовательно, $Q^{-1}AQ$ равна одной из семи матриц $R\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}R^{-1}$. Среди этих матриц оказываются только три различных, причем две из них переходят друг в друга посредством преобразования унимодулярной матрицей. Остаются две, указанные в условии задачи.

506. a) $\begin{pmatrix}9 & 3\\ 10 & 3\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}10\\ 8\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$; d) 13. **507.** 45.

508. В результате получится тождество Эйлера:
$$(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)=(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2+$$
$$+(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1c_2-a_2c_1)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2.$$

509. Минор, образованный элементами строчек с номерами i_1, i_2, ..., i_m и столбцов с номерами k_1, k_2, ..., k_m, есть определитель произведения матрицы, образованной из строчек i_1, i_2, ..., i_m первого множителя, на матрицу, составленную из столбцов k_1, k_2, ..., k_m второго. Поэтому он равен сумме всевозможных миноров m-го порядка, составленных из строчек первой матрицы с номерами i_1, i_2, ..., i_m, на соответствующие миноры, составленные из столбцов второй матрицы с номерами k_1, k_2, ..., k_m.

510. Диагональный минор матрицы $\bar{A}A$ равен сумме квадратов всех миноров матрицы A того же порядка, составленных из элементов столбцов, имеющих одинаковые номера со столбцами матрицы $\bar{A}A$, содержащими взятый минор. Следовательно, он неотрицателен.

511. Если все главные миноры k-го порядка матрицы $\bar{A}A$ равны 0, то, в силу результата задачи 510, все миноры порядка k матрицы A равны 0. Следовательно, ранг матрицы A, а вместе с ним и ранг матрицы $\bar{A}A$, меньше k.

512. Сумма всех диагональных миноров порядка k матрицы $\bar{A}A$ равна сумме квадратов всех миноров порядка k матрицы A. Тому же числу равна сумма всех диагональных миноров порядка k матрицы $A\bar{A}$.

513. Получается в результате применения теоремы об определителе произведения двух матриц к произведению матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ на транспонированную.

514. Получается в результате применения теоремы об определителе произведения к
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \\ \cdot & \cdot \\ a_n' & b_n' \end{pmatrix}.$$

515. Непосредственно следует из тождества задачи 513. Знак равенства возможен, только если ранг матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ меньше двух, т. е. если числа a_1, a_2, ..., a_n и b_1, b_2, ..., b_n пропорциональны.

516. Непосредственно следует из тождества задачи 514. Знак равенства возможен только при пропорциональности чисел a_1, a_2, ..., a_n и b_1, b_2, ..., b_n.

517. Пусть матрица B имеет m столбцов, матрица C имеет k столбцов. По теореме Лапласа $|A|=\sum B_iC_i$, где B_i — всевозможные определители порядка m, составленные из матрицы B, а C_i — их алгебраические дополнения, равные, с точностью до знаков, определителям порядка k, составленным из матрицы C. В силу неравенства Буняковского (задача 515), $|A|^2 \leqslant \sum B_i^2 \sum C_i^2$. Но $\sum B_i^2=|\bar{B}B|$, $\sum C_i^2=|\bar{C}C|$.

518. Пусть

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ . & . & . & . & . & . \\ c_{n1} & \dots & c_{nk} \end{pmatrix}; \quad A=(B, C).$$

Доказываемое неравенство тривиально, если $m+k>n$; для случая $m+k=n$ оно установлено в задаче 517. Остается рассмотреть случай $m+k<n$. Предположим сначала, что $\sum_{i=1}^{n} b_{ij}c_{is}=0$ при любых j, s. Тогда

$$\overline{A}A=\begin{pmatrix} \overline{B}B & 0 \\ 0 & \overline{C}C \end{pmatrix} \text{ и, следовательно, } |\overline{A}A|=|\overline{B}B|\cdot|\overline{C}C|.$$

В общем случае достаточно решить задачу в предположении, что ранг матрицы A равен $m+k$, ибо в противном случае неравенство тривиально.

Достроим матрицу A до квадратной матрицы (A, D) так, чтобы ранг матрицы D был равен $n-m-k$, а суммы произведений элементов любого столбца матрицы D на элементы любого столбца матрицы A равнялись 0. Это можно сделать, например, так. Сначала достроить матрицу A до квадратной неособенной матрицы $\varepsilon'=(A, D')$, что, очевидно, возможно, а затем заменить все элементы матрицы D' их алгебраическими дополнениями в $|\varepsilon'|$. Ранг построенной таким образом матрицы D будет равен числу ее столбцов $n-m-k$, ибо она есть часть матрицы, составленной из алгебраических дополнений матрицы ε', которая лишь множителем $|\varepsilon'|$ отличается от неособенной матрицы $(\overline{\varepsilon'})^{-1}$.

Обозначим (A, D) через P, (C, D) через Q. Тогда, в силу результата задачи 517, $|\overline{P}P|\leqslant|\overline{B}B|\cdot|\overline{Q}Q|$. Но $|\overline{P}P|=|\overline{A}A|\cdot|\overline{D}D|$ и $|\overline{Q}Q|=|\overline{C}C|\cdot|\overline{D}D|$. Отсюда следует, так как $|\overline{D}D|>0$, что

$$|\overline{A}A|\leqslant|\overline{B}B|\cdot|\overline{C}C|.$$

519. Непосредственно следует из результата задачи 518, примененного к матрице $\overline{A}$.

520. Определитель A^*A есть сумма квадратов модулей всех миноров порядка m матрицы A, где m — число столбцов матрицы A.

521. Решение подобно решению задач 517, 518. Для квадратной матрицы вопрос решается применением теоремы Лапласа и неравенства Буняковского. Прямоугольную матрицу надлежит дополнить до квадратной так, чтобы сумма произведений элементов любого столбца матрицы A на числа, сопряженные с элементами любого столбца дополняющей матрицы, равнялась 0.

522. Применяя несколько раз результат задачи 521 к матрице A, принимая за B матрицу, состоящую из одного столбца, получим

$$|A^*A|=\|A\|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_{i1}|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|a_{i2}|^2\dots\sum_{i=1}^{n}|a_{in}|^2\leqslant n^nM^{2n},$$

откуда следует, что

$$\|A\|\leqslant n^{\frac{n}{2}}M^n.$$

523. Дополним данный определитель Δ до определителя Δ_1 порядка $n+1$, приписав слева столбец, все элементы которого равны $\frac{M}{2}$, а сверху строчку из нулей. Тогда $\Delta=\frac{2}{M}\Delta_1$. Из всех столбцов определителя Δ_1 вычтем первый. Получится определитель, все элементы которого не превосходят $\frac{M}{2}$. Применение результата задачи 522 дает то, что требовалось доказать.

524. Граница $n^{\frac{n}{2}} M^n$ достигается, например, для модуля определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \ldots & \varepsilon^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \ldots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}, \text{ где } \varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

525. Построим матрицу порядка $n=2^m$ следующим образом. Прежде всего построим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Затем каждый ее элемент, равный 1, заменяем матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, а каждый элемент, равный -1, заменяем матрицей $-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Получим матрицу 4-го порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

С ней поступаем таким же образом, получим матрицу 8-го порядка и т. д.

Легко видеть, что для построенных таким образом матриц суммы произведений соответствующих элементов двух различных столбцов равны 0. Следовательно,

$$\bar{A}A=\begin{pmatrix} n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & n & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & n \end{pmatrix}, \ |\bar{A}A|=n^n, \ \ \|A\|=n^{\frac{n}{2}}.$$

Для матрицы MA будет выполнено равенство:

$$\|MA\|=M^n n^{\frac{n}{2}}.$$

526. Докажем, что все элементы матрицы, абсолютная величина определителя которой имеет максимальное значение, равны ± 1. Действительно, если $-1<a_{ik}<1$, $\Delta\geqslant 0$ и $A_{ik}>0$, то определитель увеличится от замены a_{ik} на 1, если же $\Delta\geqslant 0$ и $A_{ik}<0$, определитель увеличится от замены a_{ik} на -1. Если $\Delta<0$, то увеличение абсолютной величины определителя произойдет при замене a_{ik} единицей со знаком, противоположным знаку A_{ik}. Наконец,

если $A_{ik}=0$, то величина определителя не изменится при замене a_{ik} на 1 или -1. Без нарушения общности можно считать, что все элементы первой строчки и первого столбца максимального определителя равны 1; этого можно добиться умножением на -1 строчек и столбцов. Вычтем теперь первую строчку максимального определителя из всех остальных. Тогда определитель сведется к определителю порядка $n-1$, все элементы которого равны 0 или -2. Этот последний равен $2^{n-1}N$, где N — некоторое число.

527. 4 для $n=3$; 48 для $n=5$.

528. Для особенной матрицы A результат тривиален. Пусть A — неособенная матрица и пусть $\bar{A}$ — ее транспонированная, Δ — ее определитель, A' — взаимная с A. Тогда $A'=\Delta C\bar{A}^{-1}C$, где

$$C=\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & +1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \end{pmatrix};$$ это непосредственно следует из правила составления обратной матрицы. Поэтому

$$|A'|=\Delta^{n-1} \text{ и } (A')'=\Delta^{n-1}\cdot C(\bar{A'})^{-1}C=\Delta^{n-1}\cdot\Delta^{-1}A=\Delta^{n-2}A.$$

529. Пусть минор матрицы A', взаимной к неособенной матрице A, образован из строчек с номерами $i_1<i_2<\ldots<i_m$ и столбцов с номерами $k_1<k_2<\ldots<k_m$. Пусть $i_{m+1}<i_{m+2}<\ldots$ $\ldots<i_n$ — номера не входящих в минор строчек, $k_{m+1}<k_{m+2}<\ldots$ $\ldots<k_n$ — номера не входящих в минор столбцов. Умножим рассматриваемый минор на определитель Δ матрицы A:

$$\Delta\cdot\begin{vmatrix} \Delta_{i_1k_1} & \ldots & \Delta_{i_1k_m} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \Delta_{i_mk_1} & \ldots & \Delta_{i_mk_m} \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{i_1+\ldots+i_m+k_1+\ldots+k_m}\Delta\cdot\begin{vmatrix} A_{i_1k_1} & \ldots & A_{i_mk_1} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ A_{i_1k_m} & \ldots & A_{i_mk_m} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} A_{i_1k_1} & \ldots & A_{i_mk_1} & A_{i_{m+1}k_1} & \ldots & A_{i_nk_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{i_1k_m} & \ldots & A_{i_mk_m} & A_{i_{m+1}k_m} & \ldots & A_{i_nk_m} \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{vmatrix}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & \ldots & a_{i_1k_m} & \ldots & a_{i_1k_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_mk_1} & \ldots & a_{i_mk_m} & \ldots & a_{i_mk_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_nk_1} & \ldots & a_{i_nk_m} & \ldots & a_{i_nk_n} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \Delta & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \Delta & & \\ a_{i_{m+1}k_1} & \dots & & a_{i_{m+1}k_{m+1}} & \dots & a_{i_{m+1}k_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_nk_1} & \dots & & a_{i_nk_{m+1}} & \dots & a_{i_nk_n} \end{vmatrix}=$$

$$=\Delta^m\cdot\begin{vmatrix} a_{i_{m+1}k_{m+1}} & \dots & a_{i_{m+1}k_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_nk_{m+1}} & \dots & a_{i_nk_n} \end{vmatrix},$$

откуда и следует то, что требовалось доказать.

530, 531. Непосредственно следует из теоремы об определителе произведения двух прямоугольных матриц.

532. Нужно установить лексикографическую нумерацию сочетаний, т. е. считать сочетание $i_1<i_2<\dots<i_m$ предшествующим сочетанию $j_1<j_2<\dots<j_m$, если первая отличная от 0 разность в ряду i_1-j_1, i_2-j_2, ... отрицательна. Тогда каждый минор треугольной матрицы, номера столбцов которого образуют сочетание, предшествующее сочетанию из номеров строчек, равен 0.

533. В силу результатов задач 531, 491, достаточно доказать теорему для треугольных матриц. В силу результата задачи 532, имеем для треугольной матрицы A:

$$|A'_m|=\prod_{i_1<i_2<\dots<i_m} a_{i_1i_1}a_{i_2i_2}\dots a_{i_mi_m}=|A|^{C_{n-1}^{m-1}}.$$

534. Свойства a) и b) следуют непосредственно из определения. Для установления свойства c) удобно обозначить элементы кронекеровского произведения, снабжая их в качестве индексов не номерами пар, а самими парами. Пусть

$$C=(A'\cdot A'')\times(B'\cdot B''),\quad A'\times B'=G,\quad A''\times B''=H.$$

Тогда

$$c_{i_1k_1,\,i_2k_2}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} a'_{i_1i}a''_{ii_2}\cdot\sum_{k=1}^{m} b'_{k_1k}b''_{kk_2}=\sum_{i,\,k} a'_{i_1i}b'_{k_1k}a''_{ii_2}b''_{kk_2}=\sum_{i,\,k} g_{i_1k_1,\,ik}h_{ik,\,i_2k_2},$$

откуда $C=G\cdot H$, что и требовалось доказать.

535. Определитель матрицы $A\times B$ не зависит от способа нумерации пар, ибо изменение нумерации влечет одинаковые перестановки строчек и столбцов. Далее,

$$A\times B=(A\times E_m)\cdot(E_n\times B).$$

При надлежащей нумерации пар матрица $A\times E_m$ имеет вид $\begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix}$, причем матрица A повторяется m раз. Следовательно, определитель $A \times E_m$ равен $|A|^m$. Таким же образом (но при другой нумерации пар) убедимся в том, что определитель $E_n \times B$ равен $|B|^n$. Следовательно, $|A \times B| = |A|^m \cdot |B|^n$.

536. Элемент строчки с номером α и столбца с номером β матрицы C_{ik} есть

$$c_{(i-1)m+\alpha,\ (k-1)m+\beta} = \sum_{s=1}^{mn} a_{(i-1)m+\alpha,\ s}\, b_{s,\ (k-1)m+\beta} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{v=1}^{m} a_{(i-1)m+\alpha,\ (j-1)m+v}\, b_{(j-1)m+v,\ (k-1)m+\beta}.$$

Но внутренняя сумма в последнем выражении есть элемент матрицы $A_{ij}B_{jk}$, взятый из строчки с номером α и столбца с номером β.

Таким образом, $C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jk}$.

537. Для $n=1$ теорема тривиальна. Допустим, что теорема доказана для матриц «порядка» $n-1$ и в этом предположении докажем ее для матриц «порядка» n.

Сначала рассмотрим случай, когда A_{11} есть неособенная матрица:

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Умножим матрицу C справа на матрицу D, где

$$D = \begin{pmatrix} E & -A_{11}^{-1}A_{12} & \dots & -A_{11}^{-1}A_{1n} \\ & E & & \\ & & \ddots & \\ & & & E \end{pmatrix}.$$

Тогда $C' = CD$ будет иметь вид

$$C' = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A'_{22} & \dots & A'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A'_{n2} & \dots & A'_{nn} \end{pmatrix},$$

где $A'_{ik} = A_{ik} - A_{i1}A_{11}^{-1}A_{1k}$.

Все матрицы, находящиеся в клетках матриц C, D и C', коммутируют друг с другом. Легко убедиться в том, что при выполнении этого условия теорема об определителе произведения двух матриц верна также и для формальных определителей.

Матрица D имеет формальный определитель E, настоящий определитель D равен 1.

Следовательно, $|C| = |C'| = |A_{11}| \cdot \begin{vmatrix} A'_{22} & \dots & A'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A'_{n2} & \dots & A'_{nn} \end{vmatrix}$, а для формального определителя B будем иметь $B = A_{11} \cdot B'$, где B' есть формальный определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} A'_{22} & \dots & A'_{2n} \\ . & . & . \\ A'_{n2} & \dots & A'_{nn} \end{pmatrix}.$$

В силу индукционного предположения

$$|B'| = \begin{vmatrix} A'_{22} & \dots & A'_{2n} \\ . & . & . \\ A'_{n2} & \dots & A'_{nn} \end{vmatrix}$$

н, следовательно, $|B| = |A_{11}| \cdot |B'| = |C|$, что и требовалось доказать.

Для того чтобы избавиться от ограничения $|A_{11}| \neq 0$, можно поступить следующим образом. Введем в рассмотрение матрицу

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{11}+\lambda E_m & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

и обозначим через $B(\lambda)$ ее формальный определитель.

Ввиду того что $|A_{11}+\lambda E_m| = \lambda^m + \ldots \neq 0$, $|C(\lambda)| = |B(\lambda)|$. Оба эти определителя являются полиномами от λ. Сравнивая их свободные члены, получим $|C| = |B|$. Этим завершается доказательство.

Глава 5

ПОЛИНОМЫ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

538. a) $2x^6-7x^5+6x^4-3x^3-x^2-2x+1$;

b) $x^5-x^4-4x^3+3x+1$.

539. a) Частное $2x^2+3x+11$, остаток $25x-5$.

b) Частное $\frac{3x-7}{9}$, остаток $\frac{-26x-2}{9}$.

540. $p=-q^2-1$, $m=q$.

541. 1) $q=p-1$, $m=0$; 2) $q=1$; $m=\pm\sqrt{2-p}$.

542. $(-1)^n \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$.

543. a) $(x-1)(x^3-x^2+3x-3)+5$;

b) $(x+3)(2x^4-6x^3+13x^2-39x+109)-327$;

c) $(x+1+i)[4x^2-(3+4i)x+(-1+7i)]+8-6i$;

d) $(x-1+2i)[x^2-2ix-5-2i]-9+8i$.

544. a) 136; b) $-1-44i$.

545. a) $(x+1)^4-2(x+1)^3-3(x+1)^2+4(x+1)+1$;

b) $(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$;

c) $(x-2)^4-18(x-2)+38$;

d) $(x+i)^4-2i(x+i)^3-(1+i)(x+i)^2-5(x+i)+7+5i$;
e) $(x+1-2i)^4-(x+1-2i)^3+2(x+1-2i)+1$.

546. a) $\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{6}{(x-2)^3}+\frac{11}{(x-2)^4}+\frac{7}{(x-2)^5}$;

b) $\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+1)^2}+\frac{4}{(x+1)^3}+\frac{2}{(x+1)^5}$.

547. a) $x^4+11x^3+45x^2+81x+55$;
b) $x^4-4x^3+6x^2+2x+8$.

548. a) $f(2)=18$, $f'(2)=48$, $f''(2)=124$, $f'''(2)=216$, $f^{\mathrm{IV}}(2)=240$, $f^{\mathrm{V}}(2)=120$;
b) $f(1+2i)=-12-2i$, $f'(1+2i)=-16+8i$, $f''(1+2i)=-8+30i$, $f'''(1+2i)=24+30i$, $f^{\mathrm{IV}}(1+2i)=24$.

549; a) 3; b) 4.

550. $a=-5$.

551. $A=3$, $B=-4$.

552. $A=n$, $B=-(n+1)$.

555. Для того чтобы $f(x)$ делилось на $(x-1)^{k+1}$, необходимо и достаточно, чтобы $f(1)=a_0+a_1+\ldots+a_n=0$ и $f'(x)$ делилось на $(x-1)^k$, для чего, в свою очередь, при выполнении условия $f(1)=0$ необходимо и достаточно, чтобы $f_1(x)=nf(x)-xf'(x)$ делилось на $(x-1)^k$. Рассматривая $f_1(x)$ формально как полином n-й степени, повторяем то же рассуждение k раз.

556. a есть корень $(k+3)$-й кратности, где k — показатель кратности a как корня $f'''(x)$.

557. $3125b^2+108a^5=0$, $a\neq 0$.

558. $b=9a^2$, $1728a^5+c^2=0$.

559. Производная $x^{n-m-1}[nx^m+(n-m)a]$ не имеет кратных корней, кроме 0.

560. Положив общий наибольший делитель m и n равным d, $m=dm_1$, $n=dn_1$, получим условие в виде

$$(-1)^{n_1}(n_1-m_1)^{n_1-m_1}m_1^{m_1}a^{n_1}=b^{m_1}n_1^{n_1}.$$

562. Отличный от нуля корень $(k-1)$-й кратности полинома

$$a_1x^{p_1}+a_2x^{p_2}+\ldots+a_kx^{p_k}$$

удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{aligned}
a_1x^{p_1}+{}&a_2x^{p_2}+\ldots+a_kx^{p_k}=0,\\
p_1a_1x^{p_1}+{}&p_2a_2x^{p_2}+\ldots+p_ka_kx^{p_k}=0,\\
p_1^2a_1x^{p_1}+{}&p_2^2a_2x^{p_2}+\ldots+p_k^2a_kx^{p_k}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p_1^{k-2}a_1x^{p_1}+{}&p_2^{k-2}a_2x^{p_2}+\ldots+p_k^{k-2}a_kx^{p_k}=0,
\end{aligned}$$

откуда следует, что числа $a_1x^{p_1}, a_2x^{p_2}, \ldots, a_kx^{p_k}$ пропорциональны алгебраическим дополнениям элементов последней строчки определителя Вандермонда

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{k-1} & p_2^{k-1} & p_3^{k-1} & \dots & p_k^{k-1} \end{vmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$\frac{\Delta}{\Delta_i}=\prod_{s\neq i}(p_i-p_s)=\varphi'(p_i).$$

Отсюда следует, что числа $a_ix^{p_i}$ обратно пропорциональны $\varphi'(p_i)$, т. е.

$$a_1x^{p_1}\varphi'(p_1)=a_2x^{p_2}\varphi'(p_2)=\dots=a_kx^{p_k}\varphi'(p_k).$$

Все приведенные рассуждения обратимы.

563. Если $f(x)$ делится на $f'(x)$, то частное есть полином первой степени со старшим коэффициентом $\frac{1}{n}$, где n — степень $f(x)$. Поэтому $nf(x)=(x-x_0)f'(x)$. В результате дифференцирования получаем $(n-1)f'(x)=(x-x_0)f''(x)$ и т. д., откуда

$$f(x)=\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x)=a_0(x-x_0)^n.$$

Обратное очевидно.

564. Кратный корень полинома $f(x)=1+\frac{x}{1}+\dots+\frac{x^n}{n!}$ должен быть также корнем его производной

$$f'(x)=1+\frac{x}{1}+\dots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=f(x)-\frac{x^n}{n!}.$$

Следовательно, если $f(x_0)=f'(x_0)=0$, то $x_0=0$, но 0 не является корнем $f(x)$.

565. Если $f(x)=(x-x_0)^kf_1(x)$, где $f_1(x)$ — дробная рациональная функция, не обращающаяся в 0 при $x=x_0$, то непосредственное дифференцирование дает:

$$f(x_0)=f'(x_0)=\dots=f^{(k-1)}(x_0)=0,\quad f^{(k)}(x_0)\neq 0.$$

Обратно, если $f(x_0)=f'(x_0)=\dots=f^{(k-1)}(x_0)=0$ и $f^{(k)}(x_0)\neq 0$, то $f(x)=(x-x_0)^kf_1(x)$, $f_1(x_0)\neq 0$, ибо если бы $f(x)=(x-x_0)^mq(x)$, $q(x_0)\neq 0$ при $m\neq k$, то ряд последовательных производных, обращающихся в 0 при $x=x_0$, был бы короче или длиннее.

566. Функция

$$g(x)=\frac{\psi(x)}{w(x)}=f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)-\dots-\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n$$

удовлетворяет условию

$$g(x_0)=g'(x_0)=\dots=g^{(n)}(x_0)=0.$$

Следовательно, $\psi(x)=(x-x_0)^{n+1}F(x)$, где $F(x)$ — полином, что и требовалось доказать.

567. Если $f_1(x) f_2(x_0) - f_2(x) f_1(x_0)$ не равно 0 тождественно, то можно считать, что $f_1(x_0) \neq 0$. Рассмотрим дробную рациональную функцию $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} - \frac{f_2(x_0)}{f_1(x_0)}$. Она не равна тождественно нулю и имеет корнем x_0. Кратность этого корня на единицу выше кратности x_0 как корня производной, равной $\frac{f_1(x) f_2'(x) - f_2(x) f_1'(x)}{[f_1(x)]^2}$, откуда справедливость доказываемого утверждения следует непосредственно.

568. Пусть x_0 — корень кратности k для $[f'(x)]^2 - f(x) f''(x)$. Тогда $f(x_0) \neq 0$, ибо иначе x_0 было бы общим корнем для $f(x)$ и $f'(x)$. По предыдущей задаче x_0 будет корнем кратности $k+1$ для полинома $f(x) f'(x_0) - f(x_0) f'(x)$, степень которого не превосходит n. Следовательно, $k+1 \leqslant n$, $k \leqslant n-1$.

569. Полином $f(x) f'(x_0) - f(x_0) f'(x)$ должен иметь x_0 корнем n-й кратности, т. е. должен равняться $A(x-x_0)^n$, где A — постоянная. Разложение по степеням $x-x_0$ после замены $x-x_0=z$ дает

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n) a_1 - \\ -(a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots + n a_n z^{n-1}) a_0 = A z^n,$$

причем

$$a_0 = f(x_0) \neq 0.$$

Отсюда $a_2 = \frac{a_1^2}{2a_0}$, $a_3 = \frac{a_1^3}{a_0^2 3!}$, $\ldots$, $a_n = \frac{a_1^n}{a_0^{n-1} n!}$. Заменив $\frac{a_1}{a_0} = \alpha$, получим

$$f(x) = a_0 \left[1 + \frac{\alpha(x-x_0)}{1} + \frac{\alpha^2 (x-x_0)^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{\alpha^n (x-x_0)^n}{n!}\right].$$

570. Например, $\delta = \frac{1}{21}$ $\left(\frac{1}{20}\right.$ уже не подходит$\left.\right)$.

571. Например, $\delta = \frac{1}{25}$ $\left(\frac{1}{24}\right.$ уже не подходит$\left.\right)$.

572. Например, $M = 6$.

573. Например,

a) $x = \rho i$, $0 < \rho < \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$; b) $x = \rho$, $0 < \rho < \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$.

574. Например, a) $x = 1 - \rho$, $0 < \rho < \frac{1}{8}$;

b) $x = 1 + \rho\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{4} + i \sin\frac{(2k-1)\pi}{4}\right)$, $\rho < \sqrt[4]{8}$;

c) $x = 1 + \rho i$, $\rho < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

575. Разложение полинома $f(z)$ по степеням $z - i = h$ дает

$$f(z) = (2-i)\left[1 + (1-i) h^3 - \frac{4+2i}{5} h^4 + \frac{1+3i}{5} h^5\right].$$

Положив $h = a(1-i)$, получим

$$f(z) = (2-i)\left[1 - 4a^3 + 4a^3\left(\frac{4+2i}{5} a - \frac{4+2i}{5} a^2\right)\right],$$

откуда

$$|f(z)| \leqslant \sqrt{5}\left(|1-4a^3|+4a^3\frac{1}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}\right)<\sqrt{5}$$

при $0<a<\frac{1}{2}$.

576. Представив полином в виде

$$f(z)=f(z_0)\left\{1+r(\cos\varphi+i\sin\varphi)(z-z_0)^k[1+(z-z_0)\psi(z)]\right\},$$

положить $z-z_0=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, взять $\theta=\frac{2m\pi-\varphi}{k}$ и взять ρ настолько малым, чтобы $|(z-z_0)\psi(z)|<1$. Тогда

$$|f(z)|=|f(z_0)||1+r\rho^k+r\rho^k(z-z_0)\psi(z)|>f(z_0).$$

577. Доказывается как для полинома, с использованием формулы Тейлора для дробной рациональной функции (задача 566), которую надлежит оборвать после первого члена с отличным от нуля коэффициентом, не считая $f(x_0)$.

578. Обозначим через M точную нижнюю границу $|f(z)|$ при изменении z в рассматриваемой области.

Делением области на части докажем существование точки z_0, в любой окрестности которой точная нижняя граница $|f(z)|$ равна M. В случае надобности сократим дробь на $z-z_0$ в возможно более высокой степени. Пусть $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ после этого сокращения. Тогда $\psi(z_0)\neq 0$, ибо иначе в достаточно малой окрестности z_0 $|f(z)|$ был бы сколь угодно большим и нижняя грань $|f(z)|$ в достаточно малой окрестности z_0 не могла бы равняться M. Следовательно, $f(z)$ непрерывно при $z=z_0$ и в силу непрерывности $|f(z_0)|=M$, что и требовалось доказать.

579. Не хватает леммы о возрастании модуля.

580. При сделанном предположении

$$f(a)\neq 0,\quad f'(a)=\ldots=f^{(k-1)}(a)=0,\quad f^{(k)}(a)\neq 0$$

и по формуле Тейлора

$$f(z)=f(a)+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k[1+\varphi(z)],\quad \varphi(a)=0.$$

Положим

$$\frac{1}{f(a)}\cdot\frac{f^{(k)}(a)}{k!}=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\qquad z-a=\rho(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Возьмем ρ настолько малым, что $|\varphi(z)|<1$, $r\rho^k<1$. Тогда $|f(z)|=$ $=|f(a)|\cdot|1+r\rho^k[\cos(\varphi+k\theta)+i\sin(\varphi+k\theta)]+r\rho^k\lambda|$, где $|\lambda|<1$.

При $\theta=\frac{(2m-1)\pi-\varphi}{k}$, $m=1, 2, \ldots, k$, $|f(z)|<|f(a)|$.

При $\theta=\frac{2m\pi-\varphi}{k}$, $m=1, 2, \ldots, k$, $|f(z)|>|f(a)|$.

Таким образом, при изменении θ от $\frac{\pi-\varphi}{k}$ до $\frac{\pi-\varphi}{k}+2\pi$ функция $|f(z)|-|f(a)|$ меняет знак $2k$ раз. Вследствие непрерывности $|f(z)|-$ $-|f(a)|$ как функции от θ, $|f(z)|-|f(a)|$ обратится в нуль $2k$ раз, что и требовалось доказать.

581. Так же, как в предыдущей задаче, покажем, что $\mathrm{Re}(f(z)) - \mathrm{Re}(f(a))$ и $\mathrm{Im}(f(z)) - \mathrm{Im}(f(a))$ при $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ меняют знак $2k$ раз при изменении θ на 2π, если только ρ достаточно мало. По формуле Тейлора, положив $\frac{1}{k!} f^{(k)}(a) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, получим $f(z) - f(a) = r\rho^k[\cos(\varphi + k\theta) + i\sin(\varphi + k\theta)][1 + \varphi(z)]$, $\varphi(a) = 0$. Выбрав ρ так, чтобы $|\varphi(z)| < 1$, получим, положив $\varphi(z) = \varphi_1(z) + i\varphi_2(z)$:
$\mathrm{Re}(f(z)) - \mathrm{Re}(f(a)) = r\rho^k[\cos(\varphi + k\theta)(1 + \varphi_1(z)) - \sin(\varphi + k\theta)\varphi_2(z)]$;
$\mathrm{Im}(f(z)) - \mathrm{Im}(f(a)) = r\rho^k[\sin(\varphi + k\theta)(1 + \varphi_1(z)) + \cos(\varphi + k\theta)\varphi_2(z)]$.
Положив $\varphi + k\theta = m\pi$, $m = 0, 1, 2, \ldots, 2k$, получим

$$\mathrm{Re}(f(z)) - \mathrm{Re}(f(a)) = r\rho^k(-1)^m(1 + \varepsilon_m),$$

где ε_m — соответствующее значение $\varphi_1(z)$, $|\varepsilon_m| < 1$.

Отсюда следует, что $\mathrm{Re}(f(z)) - \mathrm{Re}(f(a))$ меняет знак $2m$ раз при обходе z окружности $|z - a| = \rho$. Аналогичный результат получим для $\mathrm{Im}(f(z)) - \mathrm{Im}(f(a))$, положив $\varphi + k\theta = \frac{\pi}{2} + m\pi$, $m = 0, 1, \ldots, 2k$.

582. a) $(x-1)(x-2)(x-3)$;

b) $(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$;

c) $$\left(x+1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\times$$
$$\times\left(x+1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\times$$
$$\times\left(x+1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\times$$
$$\times\left(x+1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right);$$

d) $(x-\sqrt{3}-\sqrt{2})(x-\sqrt{3}+\sqrt{2})(x+\sqrt{3}-\sqrt{2})\times$
$\times(x+\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

583. a) $2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$;

b) $$2\prod_{k=1}^{n}\left(x+\frac{\sin\left(\theta+\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right);$$ c) $$\prod_{k=1}^{m}\left(x-\operatorname{tg}^2\frac{(2k-1)\pi}{4m}\right).$$

584. a) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$;

b) $(x^2+3)(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$;

c) $$\left(x^2+2x+1+\sqrt{2}-2(x+1)\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right)\times$$
$$\times\left(x^2+2x+1+\sqrt{2}+2(x+1)\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right);$$

d) $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2\sqrt[2n]{2}\,x\cos\frac{(8k+1)\pi}{4n}+\sqrt[n]{2}\right)$;

e) $\left(x^2-x\sqrt{a+2}+1\right)\left(x^2+x\sqrt{a+2}+1\right)$;

f) $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{(3k+1)2\pi}{3n}+1\right)$.

585. a) $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-i)=$
$=x^5-(8+i)x^4+(24+7i)x^3-(34+17i)x^2+(23+17i)x-(6+6i)$;

b) $(x+1)^3(x-3)(x-4)=x^5-4x^4-6x^3+16x^2+29x+12$;

c) $(x-i)^2(x+1+i)=x^3+(1-i)x^2+(1-2i)x-1-i$.

586. $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k(x)$.

587. a) $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x^2-2x+2)=x^6-9x^5+33x^4-$
$-65x^3+74x^2-46x+12$;

b) $(x^2-4x+13)^3=x^6-12x^5+87x^4-376x^3+1131x^2-$
$-2028x+2197$;

c) $(x^2+1)^2(x^2+2x+2)=x^6+2x^5+4x^4+4x^3+5x^2+2x+2$.

588. a) $(x-1)^2(x+2)$; b) $(x+1)^2(x^2+1)$; c) $(x-1)^3$.

589. x^d-1, где d — наибольший общий делитель m и n.

590. x^d+a^d, если числа $\frac{m}{d}$ и $\frac{n}{d}$ — нечетные; 1, если хотя бы одно из них четное; d обозначает наибольший общий делитель m и n.

591. a) $(x-1)^2(x+1)$; b) $(x-1)^3(x+1)$;

c) x^d-1 (d — н. о. д. m и n).

592. Обозначим $\lambda_0=\frac{u(x_0)}{v(x_0)}$ и разложим $f(x)$ на линейные множители: $f(x)=(x-\lambda_0)(x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_{k-1})$. Тогда $\lambda_j\neq\lambda_0$ при $j\neq 0$. Далее,

$$f\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\frac{1}{[v(x)]^k}\,(u(x)-\lambda_0 v(x))\dots(u(x)-\lambda_{k-1}v(x)).$$

В силу условия задачи и того, что $u(x_0)-\lambda_j v(x_0)=v(x_0)(\lambda_0-\lambda_j)\neq 0$, полином $u(x)-\lambda_0 v(x)$ имеет x_0 корнем кратности $k>1$. Следовательно, $u'(x)-\lambda_0 v'(x)$ имеет x_0 корнем кратности $k-1$. Далее,

$$f\left(\frac{u'(x)}{v'(x)}\right)=\frac{1}{[v'(x)]^k}\,(u'(x)-\lambda_0 v'(x))\dots(u'(x)-\lambda_{k-1}v'(x)).$$

Все $u'(x)-\lambda_j v'(x)$, $j\neq 0$, очевидно, не обращаются в 0 при $x=x_0$. Следовательно, $f\left(\frac{u'(x)}{v'(x)}\right)$ имеет x_0 корнем кратности $k-1$, что и требовалось доказать.

593. Если w — корень полинома x^2+x+1, то $w^3=1$. Следовательно, $w^{3m}+w^{3n+1}+w^{3p+2}=1+w+w^2=0$.

594. Корень λ полинома x^2-x+1 удовлетворяет уравнению $\lambda^3=-1$. Следовательно,

$$\lambda^{3m}-\lambda^{3n+1}+\lambda^{3p+2}=(-1)^m-(-1)^n\lambda+(-1)^p\lambda^2=$$
$$=(-1)^m-(-1)^p+\lambda\,[(-1)^p-(-1)^n].$$

Последнее выражение может равняться нулю, только если $(-1)^m=$ $=(-1)^p=(-1)^n$, т. е. если m, n, p — одновременно четные или одновременно нечетные числа.

595. $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$. Множители эти взаимно просты, x^2+x+1 всегда является делителем $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ (задача 593). Остается выяснить, когда имеет место делимость на x^2-x+1. Подстановка корня λ этого полинома дает

$$(-1)^m+(-1)^n\lambda+(-1)^p\lambda^2=(-1)^m-(-1)^p+\lambda\,[(-1)^n+(-1)^p].$$

В результате получится 0, только если $(-1)^m=(-1)^p=-(-1)^n$, т. е. числа m, p и $n+1$ — одновременно четные или нечетные.

596. Если m не делится на 3.

597. Все корни полинома $x^{k-1}+x^{k-2}+\ldots+1$ суть корни k-й степени из 1. Следовательно, $\xi^{ka_1}+\xi^{ka_2+1}+\ldots+\xi^{ka_k+k-1}=$ $=1+\xi+\ldots+\xi^{k-1}=0$. Отсюда следует делимость, так как все корни $x^{k-1}+\ldots+1$ простые.

598. Подстановка корня ω полинома x^2+x+1 в $f(x)=(1+x)^m-$ $-x^m-1$ дает $(1+\omega)^m-\omega^m-1$. Но $1+\omega=-\omega^2=\lambda$ — первообразному корню 6-й степени из 1. Далее, $\omega=\lambda^2$, откуда $f(\omega)=\lambda^m-\lambda^{2m}-1$.

При

$m=6n$	$f(\omega)=-1\neq0;$
$m=6n+1$	$f(\omega)=\lambda-\lambda^2-1=0;$
$m=6n+2$	$f(\omega)=\lambda^2+\lambda-1\neq0;$
$m=6n+3$	$f(\omega)=-3\neq0;$
$m=6n+4$	$f(\omega)=-\lambda+\lambda^2-1\neq0;$
$m=6n+5$	$f(\omega)=-\lambda^2+\lambda-1=0.$

Делимость $f(x)$ на x^2+x+1 имеет место при $m=6n+1$ и $m=6n+5$.

599. При $m=6n+2$ и $m=6n+4$.

600. $f(\omega)=m(1+\omega)^{m-1}-m\omega^{m-1}=m\,[\lambda^{m-1}-\lambda^{2(m-1)}]$, $f'(\omega)=0$ только при $m=6n+1$.

601. При $m=6n+4$.

602. Нет, так как первая и вторая производные не обращаются в 0 одновременно.

603. При $x=k$, $1\leqslant k\leqslant n$,

$$f(k)=1-\frac{k}{1}+\frac{k(k-1)}{1\cdot2}-\ldots+(-1)^k\frac{k(k-1)\ldots1}{1\cdot2\ldots k}=(1-1)^k=0.$$

Следовательно, полином делится на $(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$. Сравнение старших коэффициентов дает

$$f(x)=\frac{(-1)^n}{n!}(x-1)(x-2)\ldots(x-n).$$

604. При m, взаимно простых с n.

605. Если $f(x^n)$ делится на $x-1$, то $f(1)=0$ и, следовательно, $f(x)$ делится на $x-1$, откуда следует, что $f(x^n)$ делится на x^n-1.

606. Если $F(x)=f(x^n)$ делится на $(x-a)^k$, то $F'(x)=f'(x^n)\,nx^{n-1}$ делится на $(x-a)^{k-1}$, откуда следует, что $f'(x^n)$ делится на $(x-a)^{k-1}$. Таким же образом, $f''(x^n)$ делится на $(x-a)^{k-2}$, ..., $f^{(k-1)}(x^n)$

делится на $x-a$. Отсюда заключаем, что $f(a^n)=f'(a^n)=\ldots=f^{(k-1)}(a^n)=0$ и, следовательно, $f(x)$ делится на $(x-a^n)^k$, $f(x^n)$ делится на $(x^n-a^n)^k$.

607. Если $F(x)=f_1(x^3)+xf_2(x^3)$ делится на x^2+x+1, то $F(\omega)=f_1(1)+\omega f_2(1)=0$ (ω — корень x^2+x+1) и $F(\omega^2)=f_1(1)+\omega^2 f_2(1)=0$, откуда $f_1(1)=0$, $f_2(1)=0$.

608. Полином $f(x)$ не имеет вещественных корней нечетной кратности, так как иначе он менял бы знак. Следовательно, $f(x)=[f_1(x)]^2 f_2(x)$, где $f_2(x)$ — полином, не имеющий вещественных корней. Комплексные корни полинома f_2 разделим на две группы, относя комплексно сопряженные в разные группы. Произведения линейных множителей, соответствующих корням каждой группы, образуют полиномы с сопряженными коэффициентами $\psi_1(x)+i\psi_2(x)$ и $\psi_1(x)-i\psi_2(x)$. Следовательно,

$$f_2(x)=\psi_1^2(x)+\psi_2^2(x) \text{ и } f(x)=(f_1\psi_1)^2+(f_1\psi_2)^2.$$

609. a) $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$; b) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$;

c) $x_1-a, x_2-a, \ldots, x_n-a$; d) $bx_1, bx_2, \ldots bx_n$.

610. Один из корней должен равняться $-\frac{p}{2}$. Искомое соотношение: $8r=4pq-p^3$.

611. $x_1=\frac{1}{6}$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=-\frac{1}{3}$. **612.** $a^3-4ab+8c=0$.

613. При любом α соотношение между корнями сохранится. Взяв $\alpha=-\frac{a}{4}$, получим для преобразованного уравнения $y^4+a'y^3+b'y^2+c'y+d'=0$ $a'=0$, $a'^3-4a'b'+8c'=0$, откуда $c'=0$.

614. $a^2d=c^2$.

615. Деление на x^2 дает $x^2+\frac{d}{x^2}+a\left(x+\frac{c}{ax}\right)+b=0$.

Заменив $x+\frac{c}{ax}=z$, получим $x^2+\frac{d}{x^2}=x^2+\frac{c^2}{a^2x^2}=z^2-2\frac{c}{a}$, откуда для z получаем квадратное уравнение $z^2+az+b-2\frac{c}{a}=0$. Определив z, легко найдем x (обобщенные возвратные уравнения).

616. a) $x=1\pm\sqrt{3}$, $1\pm i\sqrt{2}$; b) $x=1\pm 2i$, $-2\pm i$;

c) $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1\pm i\sqrt{11}}{2}$; d) $x=1\pm\sqrt{3}$; $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

617. $\lambda=\pm 6$.

618. 1) $b=c=0$, a — любое; 2) $a=-1$, $b=-1$, $c=1$.

619. 1) $a=b=c=0$; 2) $a=1$, $b=-2$, $c=0$; 3) $a=1$, $b=-1$, $c=-1$; 4) $b=\lambda$, $a=-\frac{1}{\lambda}$, $c=\frac{2-\lambda^2}{\lambda}$, где $\lambda^3-2\lambda+2=0$.

620. $\lambda=-3$. **621.** $q^3+pq+q=0$. **622.** $a_1^2-2a_2$.

623. $x_i=-\frac{a_1}{n}+\frac{2i-n-1}{2}h$, $i=1, 2, \ldots, n$, где

$$h=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{12(n-1)a_1^2-24na_2}{n^2-1}}.$$

624. Если бы корни образовывали арифметическую прогрессию, то по формуле предыдущей задачи они равнялись бы:

a) $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ — они действительно удовлетворяют уравнению;

b) $-\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ — они не удовлетворяют уравнению.

625. Пусть $y = Ax + B$ — уравнение искомой прямой. Тогда корни уравнения $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = Ax + B$ образуют арифметическую прогрессию. Находим их, согласно задаче 623:

$$x_i = -\frac{a}{4} + \frac{2i-5}{2}h, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

где

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9a^2-24b}{15}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2-8b}{5}}.$$

Отсюда

$$A - c = x_1x_4(x_2+x_3) + x_2x_3(x_1+x_4) =$$

$$= -\left(\frac{a^2}{16} - \frac{9}{4}h^2\right)\frac{a}{2} - \left(\frac{a^2}{16} - \frac{1}{4}h^2\right)\frac{a}{2} = \frac{a^3-4ab}{8},$$

$$d - B = x_1x_2x_3x_4 = \frac{1}{1600}(36b - 11a^2)(4b + a^2).$$

Следовательно,

$$A = \frac{a^3 - 4ab + 8c}{8}, \quad B = d - \frac{1}{1600}(36b - 11a^2)(4b + a^2).$$

Точки пересечения будут вещественными и не сливающимися, если $3a^2 - 8b > 0$, т. е. если вторая производная $2(6x^2 + 3ax + b)$ меняет знак при изменении x вдоль вещественной оси.

626. $x^4 - ax^2 + 1 = 0$, где $a = \frac{\alpha^4+1}{\alpha^2}$.

627. $(x^2 - x + 1)^3 - a(x^2 - x)^2 = 0$, $a = \frac{(\alpha^2-\alpha+1)^3}{(\alpha^2-\alpha)^2}$.

628. $f'(x_i) = (x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)$;
$f''(x_i) = 2[(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n) +$
$+ (x_i - x_1)(x_i - x_3)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n) + \ldots$
$\ldots + (x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots$

$$\ldots(x_i - x_{n-1})] = 2f'(x_i)\sum_{\substack{s=1\\(s\neq i)}}^{n}\frac{1}{x_i - x_s} \text{ (если } x_s \neq x_i).$$

629. Непосредственно следует из задачи 628.

630. Пусть $x_i = x_1 + (i-1)h$. Тогда

$$f'(x_i) = (-1)^{n-i}(i-1)!\,(n-i)!\,h^{n-1}.$$

631. a) $x+1$; b) x^2+1; c) x^3+1; d) x^2-2x+2; e) x^3-x+1; f) $x+3$; g) x^2+x+1; h) $x^2-2x\sqrt{2}-1$; i) $x+2$; j) 1; k) $2x^2+x-1$; l) x^2+x+1.

632. a) $(-x-1)f_1(x)+(x+2)f_2(x)=x^2-2$;
b) $-f_1(x)+(x+1)f_2(x)=x^3+1$;
c) $(3-x)f_1(x)+(x^2-4x+4)f_2(x)=x^2+5$;
d) $(1-x^2)f_1(x)+(x^3+2x^2-x-1)f_2(x)=x^3+2$;
e) $(-x^2+x+1)f_1(x)+(x^3+2x^2-5x-4)f_2(x)=3x+2$;
f) $-\dfrac{x-1}{3}f_1(x)+\dfrac{2x^2-2x-3}{3}f_2(x)=x-1$.

633. a) $M_2(x)=x, \qquad M_1(x)=-3x^2-x+1$;
b) $M_2(x)=-x-1, \qquad M_1(x)=x^3+x^2-3x-2$;
c) $M_2(x)=\dfrac{-x^2+3}{2}, \qquad M_1(x)=\dfrac{x^4-2x^2-2}{2}$;
d) $M_2(x)=-\dfrac{2x^2+3x}{6}, \qquad M_1(x)=\dfrac{2x^3+5x^2-6}{6}$;
e) $M_2(x)=3x^2+x-1, \qquad M_1(x)=-3x^3+2x^2+x-2$;
f) $M_2(x)=-x^3-3x^2-4x-2$,
$M_1(x)=x^4+6x^3+14x^2+15x+7$.

634. a) $M_2(x)=\dfrac{-16x^2+37x+26}{3}, \ M_1(x)=\dfrac{16x^3-53x^2-37x-23}{3}$;
b) $M_2(x)=4-3x, \quad M_1(x)=1+2x+3x^2$;
c) $M_2(x)=35-84x+70x^2-20x^3$,
$M_1(x)=1+4x+10x^2+20x^3$.

635. a) $M_1(x)=9x^2-26x-21$,
$M_2(x)=-9x^3+44x^2-39x-7$;
b) $M_1(x)=3x^3+3x^2-7x+2$,
$M_2(x)=-3x^3-6x^2+x+2$.

636. a) $4x^4-27x^3+66x^2-65x+24$;
b) $-5x^7+13x^6+27x^5-130x^4+75x^3+266x^2-440x+197$.

637. $N(x)=1+\dfrac{n}{1}x+\dfrac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots$

$$\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1\cdot 2\ldots(m-1)}x^{m-1};$$

$$M(x)=1+\frac{m}{1}(1-x)+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}(1-x)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}(1-x)^{n-1}=$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{(n-1)!}-\frac{m}{1}\,\frac{(m+2)\ldots(m+n-1)}{(n-2)!}x+$$

$$+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\,\frac{(m+3)\ldots(m+n-1)}{(n-3)!}x^2-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{(n-1)!}x^{n-1}.$$

638. 1.

639. a) $(x+1)^4(x-2)^2$; b) $(x+1)^4(x-4)$;
c) $(x-1)^3(x+3)^2(x-3)$; d) $(x-2)(x^2-2x+2)^2$;
e) $(x^3-x^2-x-2)^2$; f) $(x^2+1)^2(x-1)^3$;
g) $(x^4+x^3+2x^2+x+1)^2$.

640. a) $f(x)=x+1+\frac{1}{24}x(x-1)(x-2)(x-3)$;

b) $f(x)=-x^4+4x^3-x^2-7x+5$;

c) $f(x)=1+\frac{2}{5}(x-1)-\frac{1}{105}(x-1)(4x-9)+$

$$+\frac{1}{945}(x-1)(4x-9)(x-4),$$

$(2)=1\frac{389}{945}=1{,}4116\ \ldots\ (\sqrt{2}=1{,}4142\ \ldots)$;

d) $f(x)=x^3-9x^2+21x-8$.

641. a) $y=-\frac{1}{3}(x-2)(x-3)(x-4)+$

$$+\frac{1}{2}(x-1)(x-3)(x-4)-2(x-1)(x-2)(x-4)+$$

$$+\frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3)=-\frac{4}{3}x^3+10x^2-\frac{65}{3}x+15;$$

b) $y=\frac{1}{2}[5-(1-i)x-x^2-(1+i)x^3]$.

642. $f(x)=\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}\right)x^k$.

Решение. $f(x)=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(s+1)(x^n-1)}{(x-\varepsilon_s)n\varepsilon_s^{n-1}}=$

$$=\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(s+1)(1-x^n)}{1-x\varepsilon_s^{-1}}=\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}(s+1)x^k\varepsilon_1^{-ks}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}x^k\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\varepsilon_1^{-ks}=\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}x^k\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\varepsilon_k^{-s}=\frac{n+1}{2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x^k}{1-\varepsilon_k^{-1}}=$$

$$=\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}\right)x^k.$$

643. $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(x^n-1)}{(x-\varepsilon_k)n\varepsilon_k^{n-1}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(1-x^n)}{1-x\varepsilon_k^{-1}}$,

$f(0)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k$.

644. Положим $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$.

Пусть $f(x)$ — произвольный полином не выше $(n-1)$-й степени, $y_1, y_2, \dots, y_n$ — его значения при $x=x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогда

$$f(x_0)=\frac{y_1+y_2+\dots+y_n}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k\varphi(x_0)}{\varphi'(x_i)(x_0-x_i)}.$$

В силу произвольности $y_1, y_2, \dots y_n$.

$$\frac{\varphi(x_0)}{\varphi'(x_k)(x_0-x_k)}=\frac{1}{n}.$$

Рассмотрим полином

$$F(x)=n[\varphi(x_0)-\varphi(x)]-(x_0-x)\varphi'(x).$$

Степень его меньше n, и он обращается в 0 при $x=x_1, x_2, \dots, x_n$. Следовательно, $F(x)=0$. Разложим $\varphi(x)$ по степеням $(x-x_0)$:

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-x_0)^k.$$

Имеем $\sum_{k=1}^{n}(n-k)c_k(x-x_0)^k=0$. Следовательно, $c_1=c_2=\dots=c_{n-1}=0$;

$$\varphi(x)=(x-x_0)^n+c_0,\quad x_i=x_0+\sqrt[n]{-c_0}.$$

645. $x^s=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^s\varphi(x)}{(x-x_i)\varphi'(x_i)}$. Сравнение коэффициентов при x^{n-1} дает

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^s}{\varphi'(x_i)}=0.$$

646. $x^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{n-1}\varphi(x)}{(x-x_i)\varphi'(x_i)}$. Сравнение коэффициентов при x^{n-1} дает

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{n-1}}{\varphi'(x_i)}=1.$$

647. $a_i=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}y_k\Delta_{ki}$, где $\Delta=\begin{vmatrix}1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$, Δ_{ki} — алгебраическое дополнение элемента k-й строки и $(i+1)$-го столбца определителя Δ.

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}y_k\sum_{i=0}^{n-1}\Delta_{ki}x^i=\sum_{k=1}^{n}y_k\frac{\Delta_k}{\Delta},$$

где Δ_k — определитель, получающийся из Δ заменой элементов k-й строки на $1, x, \ldots, x^{n-1}$.

Вычисление определителей Δ_k и Δ как определителей Вандермонда дает

$$\frac{\Delta_k}{\Delta}=\frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}=$$
$$=\frac{\varphi(x)}{(x-x_k)\varphi'(x_k)},$$

где $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

Отсюда $f(x)=\sum\frac{y_k\varphi(x)}{(x-x_k)\varphi'(x_k)}$, что и требовалось доказать.

648. $f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$.

649. $f(x)=1+\frac{(a-1)x}{1}+\frac{(a-1)^2x(x-1)}{1\cdot 2}+\ldots$
$$\ldots+\frac{(a-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}.$$

650. $f(x)=1-\frac{2x}{1}+\frac{2x(2x-2)}{1\cdot 2}+\ldots$
$$\ldots+\frac{2x(2x-2)\ldots(2x-4n+2)}{(2n)!}.$$

651. $f(x)=1-\frac{x-1}{2!}+\frac{(x-1)(x-2)}{3!}-\ldots$
$$\ldots+(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!}=$$
$$=\frac{n!-(1-x)(2-x)\ldots(n-x)}{n!\,x}.$$

652. $f(x)=\frac{\varphi(a)-\varphi(x)}{\varphi(a)(x-a)}$, где $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

653. Ищем $f(x)$ в виде

$$f(x)=A_0+A_1\frac{x-m}{1}+A_2\frac{(x-m)(x-m-1)}{1\cdot 2}+\ldots$$
$$\ldots+A_n\frac{(x-m)(x-m-1)\ldots(x-m-n+1)}{n!},$$

где $m, m+1, \ldots, m+n$ — целые значения x, при которых по условию $f(x)$ принимает целые значения.

Полагая последовательно $x=m, m+1, \ldots, m+n$, получим равенства для определения $A_0, A_1, \ldots, A_n$:

$$A_0=f(m),$$
$$A_k=f(m+k)-A_0-\frac{k}{1}A_1-\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}A_2-\ldots-kA_{k-1},$$
$$k=1, 2, \ldots, n,$$

из которых следует, что все коэффициенты A_k — целые. При целых значениях x все слагаемые $f(x)$ обращаются в биномиальные коэффициенты с целыми множителями A_k и потому являются целыми числами. Следовательно, $f(x)$ принимает целые значения при целых значениях x, что и требовалось доказать.

654. Полином $F(x)=f(x^2)$ степени $2n$ принимает целые значения при $2n+1$ значениях $x=-n,\ -(n-1),\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ n$ и в силу предыдущей задачи принимает целые значения при всех целых значениях x.

655. a) $\frac{1}{12(x-1)}-\frac{4}{3(x+2)}+\frac{9}{4(x+3)}$;

b) $-\frac{1}{6(x-1)}+\frac{1}{2(x-2)}-\frac{1}{2(x-3)}+\frac{1}{6(x-4)}$;

c) $\frac{2}{x-1}+\frac{-2+i}{2(x-i)}+\frac{-2-i}{2(x+i)}$;

d) $\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{i}{4(x-i)}+\frac{i}{4(x+i)}$;

e) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{\varepsilon}{x-\varepsilon}+\frac{\varepsilon^2}{x-\varepsilon^2}\right),\quad \varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$;

f) $-\frac{1}{16}\left(\frac{1+i}{x-1-i}+\frac{1-i}{x-1+i}+\frac{-1+i}{x+1-i}+\frac{-1-i}{x+1+i}\right)$;

g) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon_k}{x-\varepsilon_k},\quad \varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$;

h) $-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\eta_k}{x-\eta_k},\quad \eta_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}$;

i) $\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k(-1)^{n-k}}{x-k}$; j) $\sum_{k=-n}^{n}\frac{(-1)^{n-k}C_{2n}^{n+k}}{x-k}$;

k) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}{x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}$.

656. a) $\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}$;

b) $\frac{1}{8(x-2)}-\frac{1}{8(x+2)}+\frac{1}{2(x^2+4)}$;

c) $\frac{1}{8}\frac{x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{8}\frac{x-2}{x^2-2x+2}$;

d) $\frac{1}{18}\left(\frac{1}{x^2+3x+3}+\frac{1}{x^2-3x+3}-\frac{2}{x^2+3}\right)$;

$$\text{e)}\ \frac{1}{2n+1}\left[\frac{1}{x-1}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{x\cos\frac{2k(m+1)\pi}{2n+1}-\cos\frac{2km\pi}{2n+1}}{x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1}\right];$$

$$\text{f)}\ \frac{(-1)^m}{2n+1}\left[\frac{1}{x+1}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{x\cos\frac{2k(m+1)\pi}{2n+1}+\cos\frac{2km\pi}{2n+1}}{x^2+2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1}\right];$$

$$\text{g)}\ \frac{1}{2n}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x\cos\frac{k\pi}{n}-1}{x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1}\right];$$

$$\text{h)}\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\frac{(2k-1)m\pi}{n}-x\cos\frac{(2k-1)(2m+1)\pi}{2n}}{x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}+1};$$

$$\text{i)}\ \frac{1}{(n!)^2x}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^kx}{(n+k)!\,(n-k)!\,(x^2+k^2)}.$$

657. a) $\dfrac{1}{4(x-1)^2}-\dfrac{1}{4(x+1)^2}$;

b) $\dfrac{1}{4(x+1)}-\dfrac{1}{4(x-1)}+\dfrac{1}{4(x-1)^2}+\dfrac{1}{4(x+1)^2}$;

c) $\dfrac{3}{(x-1)^3}-\dfrac{4}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x+1)^3}-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}$;

d) $\dfrac{1}{n^2}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{\varepsilon_k^2}{(x-\varepsilon_k)^2}-(n-1)\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{\varepsilon_k}{x-\varepsilon_k}\right]$,

$\varepsilon_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$;

$$\text{e)}\ \frac{1}{x^m}+\frac{\frac{n}{1}}{x^{m-1}}+\frac{\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}}{x^{m-2}}+\ldots+\frac{\frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1\cdot 2\ldots(m-1)}}{x}+$$

$$+\frac{1}{(1-x)^n}+\frac{\frac{m}{1}}{(1-x)^{n-1}}+\frac{\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}}{(1-x)^{n-2}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}}{1-x};$$

f) $\dfrac{1}{(-4a^2)^n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(2a)^{n-k}\dfrac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!}\times$

$$\times\left[\frac{1}{(a-x)^{n-k}}+\frac{1}{(a+x)^{n-k}}\right];$$

g) $\dfrac{1}{(4a^2)^n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(2a)^{n-k}\dfrac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!}\times$

$$\times\left[\frac{1}{(a-ix)^{n-k}}+\frac{1}{(a+ix)^{n-k}}\right];$$

h) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{g(x_k)}{[f'(x_k)]^2(x-x_k)^2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{g'(x_k)f'(x_k)-g(x_k)f''(x_k)}{[f'(x_k)]^3(x-x_k)}$.

658. a) $-\dfrac{1}{4(x+1)}+\dfrac{x-1}{4(x^2+1)}+\dfrac{x+1}{2(x^2+1)^2}$;

b) $-\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x+1}+\dfrac{3}{(x+1)^2}-\dfrac{6x+2}{x^2+x+1}-\dfrac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}$;

c) $\dfrac{1}{16(x-1)^2}-\dfrac{3}{16(x-1)}+\dfrac{1}{16(x+1)^2}+\dfrac{3}{16(x+1)}+$

$$+\frac{1}{4(x^2+1)}+\frac{1}{4(x^2+1)^2};$$

d) $\dfrac{1}{4n^2}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{2n-1}{x-1}+\dfrac{2n-1}{x+1}\right]+$

$$+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin^2\frac{k\pi}{n}\left(1-2x\cos\frac{k\pi}{n}\right)}{\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)^2}+$$

$$+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-\sin^2\frac{k\pi}{n}-\left(n-\frac{1}{2}\right)x\cos\frac{k\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1}.$$

659. a) $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$; b) $\dfrac{x\varphi'(x)-n\varphi(x)}{\varphi(x)}$; c) $\dfrac{[\varphi'(x)]^2-\varphi(x)\varphi''(x)}{[\varphi(x)]^2}$.

660. a) 9; b) $-\dfrac{\varphi'(2)}{\varphi(2)}+\dfrac{\varphi'(1)}{\varphi(1)}=-\dfrac{17}{5}$; c) 17.

661. $0{,}51x+2{,}04$. **662.** $y=\dfrac{1}{7}[0{,}55x^2+2{,}35x+6{,}98]$.

663. Подставив $\dfrac{p}{q}$ в $f(x)$, получим после умножения на q^n

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\dots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0,$$

откуда

$$\frac{a_0p^n}{q}=-(a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}pq^{n-2}+a_nq^{n-1}),$$

$$\frac{a_nq^n}{p}=-(a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}q+\ldots+a_{n-1}q^{n-1}).$$

В правых частях последних равенств находятся целые числа. Числа p и q взаимно просты. Следовательно, a_0 делится на q, a_n делится на p.

Расположим теперь $f(x)$ по степеням $x-m$:

$$f(x)=a_0(x-m)^n+c_1(x-m)^{n-1}+\ldots+c_{n-1}(x-m)+c_n.$$

Коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — целые числа, так как m — целое. $c_n=f(m)$. Подставив $x=\frac{p}{q}$, получим

$$a_0(p-mq)^n+c_1(p-mq)^{n-1}q+\ldots+c_{n-1}(p-mq)q^{n-1}+c_nq^n=0,$$

откуда заключаем, что $\frac{c_nq^n}{p-mq}$ — целое число.

Ввиду того, что дробь $\frac{p-mq}{q}=\frac{p}{q}-m$ несократима, числа $p-mq$ и q взаимно просты. Следовательно, $c_n=f(m)$ делится на $p-mq$, что и требовалось доказать.

664. Для примера а) даем подробное решение.

Возможные значения для p: $1, -1, 2, -2, 7, -7, 14, -14$. Для q только 1 (знак считаем присоединенным к числителю).

$f(1)=-4$. Следовательно, $p-1$ должно быть делителем 4. Отбрасываются возможности $p=1, -2, 7, -7, 14, -14$. Остается испытать -1 и 2.

$f(-1)\neq 0$; $f(2)=0$. Единственный рациональный корень $x_1=2$.

b) $x_1=-3$; c) $x_1=-2$, $x_2=3$; d) $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$;

e) $\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{4}$; f) $1, -2, 3$; g) $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$;

h) рациональных корней нет; i) $-1, -2, -3, +4$;

k) $\frac{1}{2}$; l) $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$; m) $x_1=x_2=1$, $x_3=x_4=-3$;

n) $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=x_5=-1$; o) $x_1=x_2=x_3=2$.

665. По задаче 663 p и $p-q$ — одновременно нечетные числа. Следовательно, q — четное число и не может равняться единице.

666. По задаче 663 $p-x_1q=\pm 1$, $p-x_2q=\pm 1$, откуда $(x_2-x_1)q=\pm 2$ или 0. Значение 0 отпадает, так как $q>0$, $x_2\neq x_1$. Положив для определенности $x_2>x_1$, получим $(x_2-x_1)q=2$. Это равенство невозможно при $x_2-x_1>2$. Положим теперь, что $x_2-x_1=1$ или 2. Единственно возможные значения для p и q, при которых возможно равенство $(x_2-x_1)q=2$, есть $p=x_1q+1$, $q=\frac{2}{x_2-x_1}$, откуда единственная возможность для рационального корня $\frac{p}{q}=x_1+\frac{1}{q}=\frac{x_1+x_2}{2}$, что и требоаалось доказать.

667. Выполнен признак Эйзенштейна:

a) для $p=2$; b) для $p=3$; c) для $p=3$, после разложения полинома по степеням $x-1$.

668. $$X_p(x)=(x-1)^{p-1}+\frac{p}{1}(x-1)^{p-2}+$$
$$+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}(x-1)^{p-3}+\ldots+p.$$

Все коэффициенты $C_k=\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}$, $k\leqslant p-1$, делятся на p, ибо $k!\,C_k=p(p-1)\ldots(p-k+1)$ делится на p, а $k!$ взаимно просто с p. Таким образом, для $X_p(x)$ после разложения по степеням $x-1$ выполнен признак Эйзенштейна для простого числа p.

669. Применим признак Эйзенштейна для числа p, положив $x=y+1$:
$$X_{p^k}(x)=\varphi(y)=\frac{(y+1)^{p^k}-1}{(y+1)^{p^{k-1}}-1}.$$

Старший коэффициент полинома φ равен 1. Свободный член $\varphi(y)$, равный $\varphi(0)=X_{p^k}(1)=p$, делится на p и не делится на p^2. Остается доказать, что все остальные коэффициенты делятся на p. Для этого докажем по индукции, что все коэффициенты полинома $(y+1)^{p^n}-1$, кроме старшего, делятся на p. Для $n=1$ это верно. Допустим, что это верно для показателя p^{n-1}, т. е. $(y+1)^{p^{n-1}}=y^{p^{n-1}}+1+p\omega_{n-1}(y)$, где $\omega_{n-1}(y)$ — полином с целыми коэффициентами. Тогда $(y+1)^{p^n}=(y^{p^{n-1}}+1+p\omega_{n-1}(y))^p=(y^{p^{n-1}}+1)^p+p\psi(y)=y^{p^n}+1+p\omega_n(y)$; $\psi(y)$ и $\omega_n(y)$ — полиномы с целыми коэффициентами. Итак,
$$\varphi(y)=\frac{y^{p^k}+p\omega_k(y)}{y^{p^{k-1}}+p\omega_{k-1}(y)}=$$
$$=y^{p^k-p^{k-1}}+p\frac{\omega_k(y)-y^{p^k-p^{k-1}}\omega_{k-1}(y)}{y^{p^{k-1}}+p\omega_{k-1}(y)}=y^{p^k-p^{k-1}}+p\chi(y).$$

Коэффициенты полинома $\chi(y)$ — целые, так как $\chi(y)$ есть частное от деления полиномов с целыми коэффициентами и старший коэффициент делителя равен единице. Следовательно, все коэффициенты полинома $\varphi(y)$, кроме старшего, делятся на p. Условия теоремы Эйзенштейна выполнены.

670. Допустим, что полином приводим: $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$.

Тогда оба множителя имеют целые коэффициенты и степени их больше 1, так как $f(x)$ по условию не имеет рациональных корней.

Пусть

$$\varphi(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1} + \ldots + b_k,$$
$$\psi(x) = c_0x^m + c_1x^{m-1} + \ldots + c_m,$$

$k \geqslant 2$, $m \geqslant 2$, $k+m=n$. Так как $b_kc_m = a_n$ делится на p и не делится на p^2, можно принять, что b_k делится на p, c_m не делится на p.

Пусть b_i — первый с конца коэффициент $\varphi(x)$, не делящийся на p, $i \geqslant 0$. Такой найдется, так как $a_0 = b_0c_0$ не делится на p. Тогда $a_{m+i} = b_ic_m + b_{i+1}c_{m-1} + \ldots$ не делится иа p, так как b_ic_m не делится на p, а b_{i+1}, b_{i+2}, … делятся иа p. Это противоречит условию, ибо $m+i \geqslant 2$.

671. Разложив $f(x)$ иа неприводимые множители с целыми коэффициентами, рассмотрим неприводимый множитель $\varphi(x)$, свободный член которого делится на p. Такой найдется, так как a_n делится на p. Частное от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$ обозначим $\psi(x)$. Пусть

$$\varphi(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m,$$
$$\psi(x) = c_0x^h + c_1x^{h-1} + \ldots + c_h$$

и b_i — первый с конца коэффициент $\varphi(x)$, не делящийся на p; c_h не делится на p, так как $a_n = b_mc_h$ не делится на p^2.

Поэтому $a_{h+i} = b_ic_h + b_{i+1}c_{h-1} + \ldots$ не делится на p, откуда следует $h+i \leqslant k$. Следовательно, $m \geqslant m+h+i-k = n+i-k \geqslant n-k$.

672. a) $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(-1) = -1$.

Если $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ и степень $\varphi(x) \leqslant 2$, то $\varphi(0) = \pm 1$, $\varphi(1) = \pm 1$, $\varphi(-1) = \pm 1$, т. е. $\varphi(x)$ задается одной из таблиц:

x	$\varphi(x)$							
-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
0	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1

Последние 5 таблиц можно выбросить из рассмотрения, так как последние 4 определяют полиномы, отличающиеся только знаком от полиномов, заданных первыми четырьмя таблицами, четвертая же определяет полином, тождественно равный единице. Первые три дают следующие возможности:

$$\varphi(x) = -(x^2 + x - 1);\quad \varphi(x) = x^2 - x - 1;\quad \varphi(x) = 2x^2 - 1.$$

Испытания посредством деления дают:

$$f(x) = (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1).$$

b) Неприводим; c) неприводим; d) $(x^2 - x - 1)(x^2 - 2)$.

673. Приводимый полином третьей степени имеет множитель первой степени с рациональными коэффициентами и потому имеет рациональный корень.

674. Полином $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, не имеющий рациональных корней, может быть разложен, в случае приводимости, только на множители второй степени с целыми коэффициентами:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + \lambda x + m)(x^2 + \mu x + n).$$

Число m, очевидно, должно быть делителем d; $mn = d$. Сравнение коэффициентов при x^3 и x дает

$$\lambda+\mu=a, \quad n\lambda+m\mu=c.$$

Эта система неопределенна, только если $m=n$, $c=am$, т. е. если $c^2=a^2d$ (см. задачу 614).

Если же $m\neq n$, то $\lambda=\frac{c-am}{n-m}=\frac{cm-am^2}{d-m^2}$, что и требовалось доказать.

675. В случае приводимости необходимо, чтобы

$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=(x^2+\lambda x+m)(x^3+\lambda' x^2+\lambda'' x+n).$$

Коэффициенты множителей должны быть целыми.

Сравнение коэффициентов дает $mn=e$, откуда следует, что m есть делитель e. Далее,

$$\begin{aligned} \lambda+\lambda'&=a,\\ n\lambda+m\lambda''&=d,\\ m+\lambda\lambda'+\lambda''&=b,\\ n+\lambda\lambda''+m\lambda'&=c, \end{aligned}$$

откуда

$$m\lambda''-n\lambda'=d-an,$$
$$\lambda(m\lambda''-n\lambda')+m^2\lambda'-n\lambda''=cm-bn$$

и, следовательно, $(d-an)\lambda+m^2\lambda'-n\lambda''=cm-bn$. Решая это уравнение совместно с $\lambda+\lambda'=a$, $n\lambda+m\lambda''=d$, получим

$$\lambda=\frac{am^3-cm^2-dn+be}{m^3-n^2+ae-dm},$$

что и требовалось доказать.

676. a) $(x^2-2x+3)(x^3-x-3)$; b) неприводим;
c) $(x^3-x-4)(x^2+5x+3)$; d) $(x^2-2x+2)(x^2+3x+3)$.

677. Без нарушения общности можно искать условия, при которых x^4+px^2+q раскладывается на множители второй степени с рациональными коэффициентами, ибо если полином имеет рациональный корень x_1, то $-x_1$ будет также рациональным корнем и соответствующие им линейные множители можно объединить.

Пусть $x^4+px^2+q=(x^2+\lambda_1 x+\mu_1)(x^2+\lambda_2 x+\mu_2)$. Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_2&=0,\\ \lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1&=0,\\ \mu_1+\lambda_1\lambda_2+\mu_2&=p,\\ \mu_1\mu_2&=q. \end{aligned}$$

Если $\lambda_1=0$, то и $\lambda_2=0$. В этом случае для существования рациональных μ_1 и μ_2 необходимо и достаточно, чтобы дискриминант p^2-4q был квадратом рационального числа.

Пусть $\lambda_1\neq 0$. Тогда $\lambda_2=-\lambda_1$, $\mu_2=\mu_1$ и далее

$$q=\mu_1^2, \quad 2\mu_1-p=\lambda_1^2.$$

Итак, для приводимости полинома x^4+px^2+q необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий:

a) p^2-4q есть квадрат рационального числа;

b) q есть квадрат рационального числа μ_1, $2\mu_1-p$ есть квадрат рационального числа λ_1.

678. Если $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)$, то, так как $p_1+p_2=a$, можно записать:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=\left(x^2+\frac{1}{2}ax+\frac{\lambda}{2}\right)^2-\left(\frac{p_1-p_2}{2}x+\frac{q_1-q_2}{2}\right)^2,$$

где $\lambda=q_1+q_2$. Отсюда следует, что вспомогательное кубическое уравнение имеет рациональный корень $\lambda=q_1+q_2$.

679. Пусть $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ и $\varphi(x)$, $\psi(x)$ имеют целые коэффициенты. Так как $f(a_i)=-1$, то должно быть $\varphi(a_i)=1$, $\psi(a_i)=-1$ или $\varphi(a_i)=-1$, $\psi(a_i)=1$ и, следовательно,

$$\varphi(a_i)+\psi(a_i)=0, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ оба непостоянные, то степень $\varphi(x)+\psi(x)$ меньше n, откуда следует, что $\varphi(x)+\psi(x)=0$ тождественно. Итак, должно быть $f(x)=-[\varphi(x)]^2$. Это невозможно, так как старший коэффициент $f(x)$ положителен.

680. Если $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, то $\varphi(a_i)=\psi(a_i)=\pm1$, так как $f(a_i)=1$. Следовательно, если φ и ψ непостоянные, $\varphi(x)=\psi(x)$ тождественно и

$$f(x)=[\varphi(x)]^2.$$

Это возможно только при четном n.

Итак, единственное возможное разложение есть

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+1=[\varphi(x)]^2.$$

Отсюда выводим, считая старший коэффициент $\varphi(x)$ положительным, что

$$\varphi(x)+1=(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1}).$$
$$\varphi(x)-1=(x-a_2)(x-a_4)\ldots(x-a_n).$$

(Для того чтобы иметь право записать эти равенства, нужно изменить нумерацию чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.) И, наконец,

$$(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1})-(x-a_2)(x-a_4)\ldots(x-a_n)=2.$$

Положим $a_1>a_3>\ldots>a_{n-1}$. Подставив в последнее равенство $x=a_{2k}$, $k=1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$, получим

$$(a_{2k}-a_1)(a_{2k}-a_3)\ldots(a_{2k}-a_{n-1})=2,$$

т. е. число 2 должно раскладываться на $\frac{n}{2}$ целых множителей, расположенных в порядке возрастания, $\frac{n}{2}$ способами. Это возможно только при $\frac{n}{2}=2$, $2=-2\cdot(-1)=1\cdot2$, и при $\frac{n}{2}=1$. Эти две возможности и приводят к двум случаям приводимости полинома $f(x)$, упомянутым в условии задачи.

681. Если полином n-й степени $f(x)$ при $n=2m$ или $n=2m+1$ приводим, то степень одного из его множителей $\varphi(x)$ не превосходит m. Если $f(x)$ принимает значения ±1 более чем при $2m$ целых значениях переменной, то $\varphi(x)$ тоже принимает значения ±1 при тех же значениях переменной. Среди этих значений для $\varphi(x)$ найдется более чем m равных $+1$ или -1. Но в таком случае $\varphi(x)=+1$ или -1 тождественно.

682. Полином $f(x)$ не имеет вещественных корней. Следовательно, если он приводим, его множители $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не имеют вещественных корней и потому не меняют знака при вещественных значениях x. Можно считать, что $\varphi(x)>0$, $\psi(x)>0$ при всех вещественных значениях x. Так как $f(a_k)=1$, то $\varphi(a_k)=\psi(a_k)=1$, $k=1, 2, \ldots, n$. Если степень $\varphi(x)$ [или $\psi(x)$] меньше n, то $\varphi(x)=1$ [или $\psi(x)=1$] тождественно. Следовательно, степени $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ равны n. Тогда $\varphi(x)=1+\alpha(x-a_1)\ldots(x-a_n)$, $\psi(x)=1+\beta(x-a_1)\ldots(x-a_n)$, где α и β — некоторые целые числа. Но тогда

$$f(x)=(x-a_1)^2\ldots(x-a_n)^2+1=1+(\alpha+\beta)(x-a_1)\ldots(x-a_n)+$$
$$+\alpha\beta(x-a_1)^2\ldots(x-a_n)^2.$$

Сравнение коэффициентов при x^{2n} и при x^n дает систему уравнений $\alpha\beta=1$, $\alpha+\beta=0$, не имеющую целых решений. Следовательно, $f(x)$ неприводим.

683. Пусть $f(x)$ принимает значение 1 более трех раз. Тогда $f(x)-1$ имеет по крайней мере четыре целых корня, т. е.

$$f(x)-1=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)h(x),$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 и коэффициенты полинома $h(x)$ суть целые числа. При целых значениях x выражение $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$ является произведением различных между собой целых чисел. Два из них могут равняться $+1$ и -1, остальные два отличны от ± 1. Следовательно, их произведение не может равняться простому числу, в частности -2. Итак, $f(x)-1\neq -2$ при целых значениях x и, следовательно, $f(x)\neq -1$.

684. Пусть $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$. Один из множителей $\varphi(x)$ имеет степень $\leqslant\frac{n}{2}$ и принимает значения ± 1 более чем при $\frac{n}{2}$ целых значениях x. Так как $\frac{n}{2}\geqslant 6$, то $+\varphi(x)$ или $-\varphi(x)$ принимает значение 1 более трех раз и, в силу результата задачи 683, не может принимать значения -1. Итак, $\varphi(x)$ или $-\varphi(x)$ принимает значение $+1$ более чем $\frac{n}{2}$ раз и, следовательно, $\varphi(x)$ или $-\varphi(x)$ равно 1 тождественно. Следовательно, $f(x)$ неприводим.

Уточняя рассуждение, можно доказать справедливость результата при $n\geqslant 8$.

685. Пусть

$$a[\varphi(x)]^2+b\varphi(x)+1=\psi(x)\,\omega(x).$$

Один из множителей имеет степень $\leqslant n$; $\psi(x)$ принимает значения ± 1 при $x=a_1, a_2, \ldots, a_n$ и, ввиду того, что $n\geqslant 7$, все эти значения $\psi(x)$ должны быть одного знака. Следовательно,

$$\psi(x)=\pm 1+\alpha(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)=\pm 1+\alpha\varphi(x).$$

Если $\alpha\neq 0$, то $\omega(x)$ тоже имеет степень n и $\omega(x)=\pm 1+\beta\varphi(x)$. Но равенство

$$a[\varphi(x)]^2+b\varphi(x)+1=[\pm 1+\alpha\varphi(x)][\pm 1+\beta\varphi(x)]$$

невозможно, так как полином ax^2+bx+1 по условию неприводим.

686. а) $f(x)=a_0x^n\left(1+\frac{a_1}{a_0x}+\ldots+\frac{a_n}{a_0x^n}\right)$.

Пусть $\max\left|\frac{a_k}{a_0}\right|=A$. Тогда при $|x|>1$

$$|f(x)|\geqslant|a_0x^n|\left[1-\frac{A}{|x|-1}\right]=|a_0x^n|\frac{|x|-1-A}{|x|-1}>0$$

при $|x|>1+A$.

b) $\frac{1}{\rho^n}f(x)=a_0\left(\frac{x}{\rho}\right)^n+\frac{a_1}{\rho}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{n-1}+\frac{a_2}{\rho^2}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{n-2}+\ldots+\frac{a_n}{\rho^n}.$

В силу а) для всех корней

$$\frac{|x|}{\rho}\leqslant 1+\max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^k}\right|,\text{ откуда } |x|\leqslant\rho+\max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-1}}\right|.$$

c) Положим $\rho=\max\sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$. Тогда

$$\left|\frac{a_k}{a_0}\right|\leqslant\rho^k,\qquad\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-1}}\right|\leqslant\rho,\qquad\max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-1}}\right|\leqslant\rho.$$

Следовательно, модули всех корней не превосходят

$$\rho+\rho=2\rho=2\max\sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}.$$

d) Положим $\rho=\max\sqrt[k-1]{\left|\frac{a_k}{a_1}\right|}$. Тогда $|a_k|\leqslant|a_1|\rho^{k-1}$, $\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-1}}\right|\leqslant$ $\leqslant\left|\frac{a_1}{a_0}\right|$. Следовательно, модули корней не превосходит

$$\rho+\left|\frac{a_1}{a_0}\right|=\left|\frac{a_1}{a_0}\right|+\max\sqrt[k-1]{\left|\frac{a_k}{a_1}\right|}.$$

687. Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$,

$$\varphi(x)=b_0x^n-b_1x^{n-1}-\ldots-b_n;$$

$0<b_0\leqslant|a_0|$, $b_1\geqslant|a_1|,\ldots,b_n\geqslant|a_n|$. Очевидно, $|f(x)|\geqslant\varphi(|x|)$.

Далее, $\varphi(x)=b_0x^n\left(1-\frac{b_1}{b_0x}-\frac{b_2}{b_0x^2}-\ldots-\frac{b_n}{b_0x^n}\right)$.

Выражение, стоящее в скобках, возрастает от $-\infty$ до 1 при x, меняющимся от 0 до $+\infty$.

Следовательно, $\varphi(x)$ имеет единственный положительный корень ξ и $\varphi(x)>0$ при $x>\xi$. В силу этого, при $|x|>\xi$ имеем $|f(x)|\geqslant\varphi(|x|)>0$, откуда следует, что модули всех корней $f(x)$ не превосходят ξ.

688. а) Пусть $A=\max\left|\frac{a_k}{a_0}\right|$. Очевидно, что

$$|f(x)|\geqslant|a_0x^n|\left(1-\frac{A}{|x|^r}-\frac{A}{|x|^{r+1}}-\ldots-\frac{A}{|x|^n}\right),$$

откуда при $|x|>1$

$$|f(x)|>|a_0x^n|\left(1-\frac{A}{|x|^{r-1}(|x|-1)}\right)=$$
$$=\frac{|a_0x^{n-r+1}|}{|x|-1}[|x|^{r-1}(|x|-1)-A]>\frac{|a_0x|^{n-r+1}}{|x|-1}[(|x|-1)^r-A].$$

При $|x|>1+\sqrt[r]{A}$ имеем $|f(x)|>0$.

b) $\frac{1}{\rho^n}f(x)=a_0\left(\frac{x}{\rho}\right)^n+\frac{a_r}{\rho^r}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{n-r}+\ldots+\frac{a_n}{\rho^n}$.

В силу а) для всех корней $f(x)$ имеет место

$$\left|\frac{x}{\rho}\right|<1+\sqrt[r]{\max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^k}\right|},\text{ откуда } |x|<\rho+\sqrt[r]{\max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-r}}\right|}.$$

c) Положим $\rho=\max\sqrt[k-r]{\left|\frac{a_k}{a_r}\right|}$. Тогда $|a_k|\leqslant|a_r|\rho^{k-r}$, и модули всех корней полинома не превосходят

$$\sqrt[r]{\left|\frac{a_r}{a_0}\right|}+\rho=\sqrt[r]{\left|\frac{a_r}{a_0}\right|}+\max\sqrt[k-r]{\left|\frac{a_k}{a_r}\right|}.$$

689. Для отрицательных корней полинома утверждение очевидно. Положим для определенности $a_0>0$ и обозначим $\varphi(x)=a_0x^n-b_1x^{n-1}-b_2x^{n-2}-\ldots-b_n$, где $b_k=0$ при $a_k>0$, $b_k=-a_k$ при $a_k<0$. Тогда при положительном x, очевидно,

$$f(x)\geqslant\varphi(x).$$

Далее, $\varphi(x)$ имеет единственный неотрицательный корень ξ (см. задачу 687) и $\varphi(x)>0$ при $x>\xi$. Следовательно, $f(x)\geqslant\varphi(x)>0$ при $x>\xi$.

690. Непосредственно следует из 688, 689, 686 с).

692. Разложив $f(x)$ по степеням $x-a$, получим при $x\geqslant a$:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{1\cdot2}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n>0.$$

693. Верхнюю границу корней находим, используя результаты задач 690, 692. Для определения нижней заменим x на $-x$:

а) $0<x_i<3$; b) $0<x_i<1$; c) $-11<x_i<11$; d) $-6<x_i<2$.

694. а) $f=x^3-3x-1$, $f_1=x^2-1$, $f_2=2x+1$, $f_3=+1$.

Три вещественных корня в интервалах $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(1,2)$.

b) $f=x^3+x^2-2x-1$, $f_1=3x^2+2x-2$, $f_2=2x+1$, $f_3=+1$. Три вещественных корня в интервалах $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(1,2)$.

c) $f=x^3-7x+7$, $f_1=3x^2-7$, $f_2=2x-3$, $f_3=+1$. Три вещественных корня в интервалах $(-4,-3)$, $\left(1,\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2},2\right)$.

d) $f=x^3-x+5$, $f_1=3x^2-1$, $f_2=2x-15$, $f_3=-1$. Один вещественный корень в интервале $(-2,-1)$.

e) $f=x^3+3x-5$, $f_1=x^2+1$. Один вещественный корень в интервале $(1,2)$.

695. a) $f=x^4-12x^2-16x-4$, $f_1=x^3-6x-4$, $f_2=3x^2+6x+2$, $f_3=x+1$, $f_4=1$. Четыре вещественных корня в интервалах $(-3, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(4, 5)$.

b) $f=x^4-x-1$, $f_1=4x^3-1$, $f_2=3x+4$, $f_3=+1$. Два вещественных корня в интервалах $(-1, 0)$ и $(1, 2)$.

c) $f=2x^4-8x^3+8x^2-1$, $f_1=x^3-3x^2+2x$, $f_2=2x^2-4x+1$, $f_3=x-1$, $f_4=1$. Четыре вещественных корня в интервалах $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$.

d) $f=x^4+x^2-1$, $f_1=2x^3+x$, $f_2=-x^2+2$, $f_3=-x$, $f_4=-1$. Два вещественных корня в интервалах $(-1, 0)$ и $(0, 1)$.

e) $f=x^4+4x^3-12x+9$, $f_1=x^3+3x^2-3$, $f_2=x^2+3x-4$, $f_3=-4x+3$, $f_4=1$. Вещественных корней нет.

696. a) $f=x^4-2x^3-4x^2+5x+5$, $f_1=4x^3-6x^2-8x+5$, $f_2=22x^2-22x-45$, $f_3=2x-1$, $f_4=1$. Четыре вещественных корня в интервалах $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(-1, 0)$, $(-2, -1)$.

b) $f=x^4-2x^3+x^2-2x+1$, $f_1=2x^3-3x^2+x-1$, $f_2=x^2+5x-3$, $f_3=-9x+5$, $f_4=-1$. Два вещественных корня в интервалах $(0, 1)$, $(1, 2)$.

c) $f=x^4-2x^3-3x^2+2x+1$, $f_1=2x^3-3x^2-3x+1$, $f_2=9x^2-3x-5$, $f_3=9x+1$, $f_4=+1$. Четыре вещественных корня в интервалах $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$.

d) $f=x^4-x^3+x^2-x-1$, $f_1=4x^3-3x^2+2x-1$, $f_2=-5x^2+10x+17$, $f_3=-8x-5$, $f_4=-1$. Два вещественных корня в интервалах $(1, 2)$, $(-1, 0)$.

e) $f=x^4-4x^3-4x^2+4x+1$, $f_1=x^3-3x^2-2x+1$, $f_2=5x^2-x-2$, $f_3=18x+1$, $f_4=+1$. Четыре вещественных корня в интервалах $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(4, 5)$.

697. a) $f=x^4-2x^3-7x^2+8x+1$, $f_1=2x^3-3x^2-7x+4$, $f_2=17x^2-17x-8$, $f_3=2x-1$, $f_4=1$. Четыре вещественных корня в интервалах $(-3, -2)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$, $(3, 4)$.

b) $f=x^4-4x^2+x+1$, $f_1=4x^3-8x+1$, $f_2=8x^2-3x-4$, $f_3=87x-28$, $f_4=+1$. Четыре вещественных корня в интервалах $(-3, -2)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$.

c) $f=x^4-x^3-x^2-x+1$, $f_1=4x^3-3x^2-2x-1$, $f_2=11x^2+14x-15$, $f_3=-8x+7$, $f_4=-1$. Два вещественных корня в интервалах $(0, 1)$ и $(1, 2)$.

d) $f=x^4-4x^3+8x^2-12x+8$, $f_1=x^3-3x^2+4x-3$, $f_2=-x^2+5x-5$, $f_3=-9x+13$, $f_4=-1$. Два вещественных корня $x_1=2$, $1<x_2<2$.

e) $f=x^4-x^3-2x+1$, $f_1=4x^3-3x^2-2$, $f_2=3x^2+24x-14$, $f_3=-56x+31$, $f_4=-1$. Два вещественных корня в интервалах $(0, 1)$ и $(1, 2)$.

698. a) $f=x^4-6x^2-4x+2$, $f_1=x^3-3x-1$, $f_2=3x^2+3x-2$, $f_3=4x+5$, $f_4=1$. Четыре вещественных корня в интервалах

$$\left(-2, -\frac{3}{2}\right), \quad \left(-\frac{3}{2}, -1\right), \ (0, 1), \ (2, 3).$$

b) $f=4x^4-12x^2+8x-1$, $f_1=2x^3-3x+1$, $f_2=6x^2-6x+1$, $f_3=2x-1$, $f_4=1$. Четыре вещественных корня в интервалах $(-3, -2)$,

$$\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ и } (1, 2).$$

c) $f=3x^4+12x^3+9x^2-1$, $f_1=2x^3+6x^2+3x$, $f_2=9x^2+9x+2$, $f_3=13x+8$, $f_4=1$. Четыре вещественных корня в интервалах $(-4, -3)$, $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, $(0, 1)$.

d) $f=x^4-x^3-4x^2+4x+1$, $f_1=4x^3-3x^2-8x+4$, $f_2=7x^2-8x-4$, $f_3=4x-5$, $f_4=1$. Четыре вещественных корня в интервалах $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$.

e) $f=9x^4-126x^2-252x-140$, $f_1=x^3-7x-7$, $f_2=9x^2+27x+20$, $f_3=2x+3$, $f_4=1$. Четыре вещественных корня в интервалах $(4, 5)$, $\left(-\frac{4}{3}, -1\right)$, $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, $\left(-2, -\frac{5}{3}\right)$.

699. a) $f=2x^5-10x^3+10x-3$, $f_1=x^4-3x^2+1$, $f_2=4x^3-8x+3$, $f_3=4x^2+3x-4$, $f_4=x$, $f_5=1$. Пять вещественных корней в интервалах $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $(1, 2)$.

b) $f=x^6-3x^5-3x^4+11x^3-3x^2-3x+1$, $f_1=2x^5-5x^4-4x^3+11x^2-2x-1$, $f_2=3x^4-6x^3-x^2+4x-1$, $f_3=4x^3-6x^2+1$, $f_4=26x^2-26x+5$, $f_5=2x-1$, $f_6=1$. Шесть вещественных корней в интервалах $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$.

c) $f=x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1$, $f_1=5x^4+4x^3-12x^2-6x+3$, $f_2=4x^3+3x^2-6x-2$, $f_3=3x^2+2x-2$, $f_4=2x+1$, $f_5=1$.

Пять вещественных корней в интервалах $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$.

d) $f=x^5-5x^3-10x^2+2$, $f_1=x^4-3x^2-4x$, $f_2=x^3+3x^2-1$, $f_3=-2x^2+x+1$, $f_4=-3x-1$, $f_5=-1$. Три вещественных корня в интервалах $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$.

700. a) $f=x^4+4x^2-1$, $f_1=x$, $f_2=1$. Два вещественных корня в интервалах $(-1, 0)$, $(0, 1)$.

b) $f=x^4-2x^3+3x^2-9x+1$, $f_1=2x-3$, $f_2=1$. Два вещественных корня в интервалах $(0, 1)$ и $(2, 3)$.

c) $f=x^4-2x^3+2x^2-6x+1$, $f_1=2x-3$, $f_2=1$. Два вещественных корня в интервалах $(0, 1)$ и $(2, 3)$.

d) $f=x^5+5x^4+10x^2-5x-3$, $f_1=x^2+4x-1$, $f_2=5x-1$, $f_3=1$. Три вещественных корня в интервалах $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(-6, -5)$.

701. Ряд Штурма образован полиномами x^3+px+q, $3x^2+p$, $-2px-3q$, $-4p^3-27q^2$. Если $-4p^3-27q^2>0$, то $p<0$. Все старшие коэффициенты полиномов Штурма положительны и потому все корни x^3+px+q вещественны. Если $-4p^3-27q^2<0$, то независимо от знака p ряд Штурма имеет при $-\infty$ две перемены знака, при $+\infty$ одну перемену. В этом случае x^3+px+q имеет один вещественный корень.

702. Ряд Штурма образован полиномами x^n+px+q, $nx^{n-1}+p$, $-(n-1)px-nq$, $-p-n\left(\frac{-nq}{(n-1)p}\right)^{n-1}$.

При нечетном n знак последиего выражеиия совпадает со знаком $\Delta = -(n-1)^{n-1}p^n - n^n q^{n-1}$. Если $\Delta > 0$, то необходимо $p < 0$. В этом случае полином имеет три вещественных корня. Если $\Delta < 0$, то независимо от знака p полином имеет один вещественный корень.

При четном n знак последнего выражения в ряду Штурма совпадает со знаком $-p\Delta$, где $\Delta = (n-1)^{n-1}p^n - n^n q^{n-1}$. Распределение знаков в ряду Штурма при различных комбинациях знаков p и Δ дается в таблице:

			f	f_1	f_2	f_3
1. $p > 0$,	$\Delta > 0$	$-\infty$	+	−	+	−
		$+\infty$	+	+	−	−
2. $p < 0$,	$\Delta > 0$	$-\infty$	+	−	−	+
		$+\infty$	+	+	+	+
3. $p > 0$,	$\Delta < 0$	$-\infty$	+	−	+	+
		$+\infty$	+	+	−	+
4. $p < 0$,	$\Delta < 0$	$-\infty$	+	−	−	−
		$+\infty$	+	+	+	−

Из рассмотрения этой таблицы следует, что при $\Delta > 0$ полином имеет два вещественных корня, при $\Delta < 0$ вещественных корней нет.

703. Ряд Штурма образован полиномами $f = x^5 - 5ax^3 + 5a^2x + 2b$, $f_1 = x^4 - 3ax^2 + a^2$, $f_2 = ax^3 - 2a^2x - b$, $f_3 = a(a^2x^2 - bx - a^3)$, $f_4 = a(a^5 - b^2)x$, $f_5 = 1$.

Если $\Delta = a^5 - b^2 > 0$, то $a > 0$, и все старшие коэффициенты полиномов Штурма положительны. В этом случае все пять корней полинома f вещественны. Если $\Delta < 0$, то в зависимости от знака a распределение знаков выглядит так:

		f	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
$a > 0$	$-\infty$	−	+	−	+	+	+
	$+\infty$	+	+	+	+	−	+
$a < 0$	$-\infty$	−	+	+	−	−	+
	$+\infty$	+	+	−	−	+	+

Следовательно, при $\Delta < 0$ полином f имеет один вещественный корень.

704. Пусть f_λ и $f_{\lambda+1}$ — два соседних полинома «полного» ряда Штурма. Если их старшие коэффициенты имеют одинаковые знаки, то их значения при $+\infty$ не образуют перемены знака, а значения при $-\infty$ дают перемену знака, так как степень одного из полиномов четная, степень другого нечетная. Если же старшие коэффициенты имеют противоположные знаки, то значения f_λ и $f_{\lambda+1}$ при $+\infty$ дают перемену знака, а при $-\infty$ не дают. Поэтому, обозначив через ν_1 и ν_2 число перемен знака в ряду Штурма при $-\infty$ и $+\infty$, имеем, что $\nu_1 + \nu_2 = n$. С другой стороны, $\nu_1 - \nu_2$ равно числу N вещественных корней полинома. Следовательно, $\nu_2 = \frac{n-N}{2}$, что и требовалось доказать.

705. Доказывается, как теорема Штурма, с той только разницей, что нужно проследить увеличение (а не уменьшение) числа перемен знаков на одну единицу при переходе через корень начального полинома.

706. Построенный ряд полиномов есть ряд Штурма для интервала $x_0 \leq x < +\infty$ и удовлетворяет условиям задачи 705 для интервала $-\infty < x \leq x_0$. Следовательно, число корней f в интервале (x_0, ∞) равно $\nu(x_0)-\nu(+\infty)$, число корней f в интервале $(-\infty, x_0)$ равно $\nu(x_0)-\nu(-\infty)$, где ν — число перемен знаков соответствующих значений полиномов.

Общее число вещественных корней равно

$$2\nu(x_0)-\nu(+\infty)-\nu(-\infty).$$

707. Применение теоремы Эйлера к

$$P_n=(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}=(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n-1}\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)}{dx^{n-1}}$$

дает

$$P_n=(-1)^{n-1} e^{\frac{x^2}{2}}\left(x\frac{d^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{n-1}}+(n-1)\frac{d^{n-2}e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{n-2}}\right),$$

откуда

$$P_n=xP_{n-1}-(n-1)P_{n-2}.$$

С другой стороны, дифференцируя равенство, определяющее P_{n-1}, получим

$$P'_{n-1}=(-1)^{n-1} xe^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{n-1}}+(-1)^{n-1} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n},$$

откуда

$$P'_{n-1}=xP_{n-1}-P_n.$$

Сравнивая с предыдущей формулой, получаем $P'_{n-1}=(n-1)P_{n-2}$ и, следовательно, $P'_n=nP_{n-1}$.

Из выведенных формул следует, что последовательность P_n, $P_{n-1}, \ldots, P_1, P_0=1$ есть ряд Штурма для полиномов P_n, так как P_{n-1} только множителем n отличается от P'_n, и $P_{\lambda-1}$ есть взятый с обратным знаком остаток при делении $P_{\lambda+1}$ на P_λ с точностью до положительного множителя.

Все старшие коэффициенты полиномов P_n равны $+1$. Следовательно, все корни P_n вещественны.

708. Дифференцируя равенство, определяющее P_n, получим

$$P'_n=(-1)^n e^x \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}+(-1)^n e^x \frac{d^n(nx^{n-1}e^{-x}-x^n e^{-x})}{dx^n},$$

откуда

$$P'_n=(-1)^n n e^x \frac{d^n(x^{n-1}e^{-x})}{dx^n}.$$

Далее

$$P_n=(-1)^n e^x \frac{d^n(x\cdot x^{n-1}e^{-x})}{dx^n}=$$

$$=(-1)^n e^x\left[x\frac{d^n(x^{n-1}e^{-x})}{dx^n}+n\frac{d^{n-1}(x^{n-1}e^{-x})}{dx^{n-1}}\right]=\frac{x}{n}P'_n-nP_{n-1},$$

откуда $xP'_n=nP_n+n^2P_{n-1}$.

С другой стороны,

$$P_n'=(-1)^n n e^x\frac{d^{n-1}[(n-1)x^{n-2}e^{-x}-x^{n-1}e^{-x}]}{dx^{n-1}},$$

откуда $P_n'=-nP_{n-1}'+nP_{n-1}$. Умножив на x и подставив вместо xP_n' и xP_{n-1}' их выражение через P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, получим

$$P_n=(x-2n+1)P_{n-1}-(n-1)^2P_{n-2}.$$

Из этих соотношений видно, что рядом стоящие полиномы P_n не обращаются в 0 одновременно, и если $P_{n-1}=0$, то P_n и P_{n-2} имеют противоположные знаки. Далее, из $\frac{P_{n-1}}{P_n}=-\frac{1}{n}+\frac{xP_n'}{n^2P_n}$ следует, что $\frac{P_{n-1}}{P_n}$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через положительный корень P_n. Таким образом, ряд P_n, P_{n-1}, ..., P_1, $P_0=1$ есть ряд Штурма для P_n в интервале $(0, \infty)$. Старшие коэффициенты всех P_n равны единице. $P_n(0)=(-1)^n n!$. Следовательно, $\nu(0)-\nu(+\infty)=n$, т. е. P_n имеет n положительных корней.

709. $E_n'=E_{n-1}$. Далее, $E_n=E_{n-1}-\left(-\frac{x^n}{n!}\right)$. Поэтому полиномы E_n, E_{n-1} и $-\frac{x^n}{n!}$ образуют ряд Штурма для E_n на интервале $(-\infty, -\varepsilon)$ при сколь угодно малом ε. Распределение знаков дается следующей таблицей:

$-\infty$	$(-1)^n$	$(-1)^{n-1}$	$(-1)^{n-1}$
$-\varepsilon$	$+$	$+$	$(-1)^{n-1}$

Следовательно, при четном n полином E_n не имеет отрицательных корней; при нечетном n полином E_n имеет один отрицательный корень. Далее, при $x\geqslant 0$ полином $E_n(x)>0$.

710. Преобразуем посредством формулы Эйлера тождество

$$\frac{d^{n+1}\left(x^2e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^{n+1}}=\frac{d^n\left[(2x-1)e^{\frac{1}{x}}\right]}{dx^n}.$$

Получим

$$x^2\frac{d^{n+1}e^{\frac{1}{x}}}{dx^{n+1}}+2(n+1)x\frac{d^ne^{\frac{1}{x}}}{dx^n}+(n+1)n\frac{d^{n-1}e^{\frac{1}{x}}}{dx^{n-1}}=$$

$$=(2x-1)\frac{d^ne^{\frac{1}{x}}}{dx^n}+2n\frac{d^{n-1}e^{\frac{1}{x}}}{dx^{n-1}},$$

откуда $P_n=(2nx+1)P_{n-1}-n(n-1)P_{n-2}x^2$. С другой стороны, дифференцированием равенства, определяющего P_{n-1}, получим

$$P_n=(2nx+1)P_{n-1}-x^2P_{n-1}'.$$

Сравнивая результаты, видим, что $P_{n-1}'=n(n-1)P_{n-2}$ и, следовательно, $P_n'=(n+1)nP_{n-1}$. В силу установленных соотношений ряд полиномов P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, ..., $P_0=1$ образует ряд Штурма для P_n. Старшие коэффициенты всех P_n положительны. Следовательно, все корни P_n вещественны.

711. Подсчитывая двумя способами

$$\frac{d^n\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)}{dx^n}=-\frac{d^n\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)}{dx^n},$$

получим

$$P_n-2xP_{n-1}+(x^2+1)P_{n-2}=0.$$

Дифференцирование равенства, определяющего P_{n-1}, дает $P_n = 2xP_{n-1}-\frac{x^2+1}{n}P'_{n-1}$, откуда $P'_{n-1}=nP_{n-2}$ и, следовательно, $P'_n=(n+1)P_{n-1}$.

Из выведенных соотношений следует, что $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_0=1$ образуют ряд Штурма для P_n. Все старшие коэффициенты ряда положительны, следовательно, все корни P_n вещественны.

Эта задача легко решается непосредственно. Именно,

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}+\frac{1}{x+i}\right),$$

откуда получаем, что

$$P_n(x)=\frac{1}{2i}[(x+i)^{n+1}-(x-i)^{n+1}].$$

Легко подсчитать, что корни P_n суть $\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n+1}$, $k=1, 2, \ldots, n$.

712. Развернув по формуле Эйлера тождество

$$\frac{d^n\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}}{dx^n}=\frac{d^{n-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{dx^{n-1}},$$

получим

$$P_n-(2n-1)xP_{n-1}+(n-1)^2(x^2+1)P_{n-2}=0.$$

Дифференцируя равенство, определяющее P_{n-1}, получим

$$P_n-(2n-1)xP_{n-1}+(x^2+1)P'_{n-1}=0,$$

откуда

$$P'_{n-1}=(n-1)^2P_{n-2} \text{ и } P'_n=n^2P_{n-1}.$$

Из найденных соотношений следует, что $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_0=1$ образуют ряд Штурма.

В силу положительности старших коэффициентов, все корни P_n вещественны.

713. Функции $F(x)$, $F'(x)$ и $[f'(x)]^2$ образуют ряд Штурма для F. Старшие коэффициенты ряда $3a_0^2$, $12a_0^2$ и $9a_0^2$ положительны. Следовательно, число потерь перемен знака при переходе x от $-\infty$ к $+\infty$ равно 2.

Если f имеет двойной корень, то F имеет один тройной корень и один простой. Если f имеет тройной корень, то F имеет четырехкратный.

714. Если какой-либо из полиномов ряда Штурма имеет кратный корень x_0 или комплексный корень α, то этот полином можно заменить полиномом меньшей степени, поделив его на положительную величину $(x-x_0)^2$ или $(x-\alpha)(x-\alpha')$. Дальнейшие полиномы можно заменить взятыми с обратными знаками остатками в алгорифме Евклида для замененного полинома и ему предшествующего. После этого число перемен знака при $x=-\infty$ станет $\leqslant n-2$, где n — степень полинома. Следовательно, число вещественных корней подавно $\leqslant n-2$.

715. Пусть $F(x)=(x^2-1)^n$. $F(x)$ имеет -1 и $+1$ корнями n-й кратности. $F'(x)$ имеет -1 и $+1$ корнями кратности $n-1$ и по теореме Ролля еще один корень в интервале $(-1, +1)$. $F''(x)$ имеет -1 и $+1$ корнями кратности $n-2$ и два корня в открытом интервале $(-1, +1)$ и т. д. $F^{(n)}(x)=P_n(x)$ имеет n корней в открытом интервале $(-1, 1)$.

716. Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — различные корни $f(x)$ кратностей α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$, $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_k$. Функция $\varphi(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ непрерывна в открытых интервалах $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), $\ldots$, (x_{k-1}, x_k) и $(x_k, +\infty)$ и изменяется от 0 до $-\infty$ в интервале $(-\infty, x_1)$, от $+\infty$ до $-\infty$ в каждом из интервалов (x_{i-1}, x_i) и от $+\infty$ до 0 в интервале $(x_k; \infty)$, ибо $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to x_i$ и при переходе через x_i меняет знак — на $+$.

Следовательно, $\varphi(x)+\lambda$ имеет корень в каждом из интервалов (x_{i-1}, x_i) и, кроме того, при $\lambda>0$ один корень в интервале $(-\infty, x_1)$, а при $\lambda<0$ один корень в интервале $(x_k, +\infty)$.

Таким образом, $\varphi(x)+\lambda$, а значит, и $f(x)[\varphi(x)+\lambda]=\lambda f(x)+f'(x)$ имеет k корней, отличных от $x_1, x_2, \ldots, x_k$, при $\lambda\neq 0$ или $k-1$ корень, отличный от $x_1, x_2, \ldots, x_k$, при $\lambda=0$. Кроме того, $\lambda f(x)+$ $+f'(x)$ имеет $x_1, x_2, \ldots, x_k$ корнями кратности $\alpha_1-1, \alpha_2-1, \ldots$ $\ldots, \alpha_k-1$. Таким образом, общее число вещественных корней (с учетом кратности) полинома $\lambda f(x)+f'(x)$ равно $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k$ при $\lambda\neq 0$ и $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k-1$ при $\lambda=0$, т. е. равно степени полинома $\lambda f(x)+f'(x)$.

717. Пусть $g(x)=a_0(x+\lambda_1)(x+\lambda_2)\ldots(x+\lambda_n)$, $F_0(x)=a_0f(x)$, $F_1(x)=F_0(x)+\lambda_1F_0'(x)=a_0f(x)+a_0\lambda_1f'(x)$, $F_2(x)=F_1(x)+\lambda_2F_1'(x)=$ $=a_0f(x)+a_0(\lambda_1+\lambda_2)f'(x)+a_0\lambda_1\lambda_2f''(x)$ и т. д. Тогда $F_n(x)=$ $=F_{n-1}(x)+\lambda_nF_{n-1}'(x)=a_0f(x)+a_1f'(x)+\ldots+a_nf^{(n)}(x)$, где a_0, $a_1, \ldots, a_n$ — коэффициенты g. В силу результата задачи 715 все корни всех полиномов $F_0, F_1, \ldots, F_n$ вещественны.

718. Полином $a_0x^n+a_1mx^{n-1}+\ldots+m(m-1)\ldots(m-n+1)a_n=$ $=[a_0x^m+a_1(x^m)'+\ldots+a_n(x^m)^{(n)}]x^{n-m}$, а все корни x^m вещественны.

719. Полином $a_nx^n+na_{n-1}x^{n-1}+n(n-1)a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0n!$ имеет только вещественные корни. Следовательно, все корни $a_0n!x^n+$ $+a_1n(n-1)\ldots2x^{n-1}+\ldots+na_{n-1}x+a_n$ вещественны. Применив еще раз результат задачи 718, получим, что все корни полинома $a_0n!x^n+a_1n\cdot n(n-1)\ldots2x^{n-1}+a_2n(n-1)\cdot n(n-1)\ldots3x^{n-2}+\ldots+a_nn!$ вещественны. Остается поделить на $n!$.

720. Все корни полинома $(1+x)^n=1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+$ $+\ldots+x^n$ вещественны. Остается применить результат задачи 719.

721. Полином $f(x)=nx^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\ldots-1$ имеет вещественный корень 1. Далее, пусть $F(x)=(x-1)f(x)=nx^{n+1}-$ $-(n+1)x^n+1$. Тогда $F'(x)=n(n+1)(x-1)x^{n-1}$. При нечетном n

полином $F(x)$ имеет единственный минимум при $x=1$ и, следовательно, не имеет корней, кроме двойного корня $x=1$. При четном n полином $F(x)$ возрастает от $-\infty$ до 1 при $-\infty < x \leqslant 0$, убывает от 1 до 0 при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и возрастает от 0 до ∞ при $1 \leqslant x < \infty$. Поэтому $F(x)$ в этом случае имеет единственный корень, кроме корня $x=1$.

722. Производная от интересующего нас полинома положительна при всех вещественных значениях x. Следовательно, полином имеет только один вещественный корень.

723. Пусть $a < b < c$; $f(-\infty) < 0$; $f(a) = B^2(b-a) + C^2(c-a) > 0$; $f(c) = -A^2(c-a) - B^2(c-b) < 0$; $f(+\infty) > 0$. Следовательно, f имеет вещественные корни в интервалах $(-\infty, a)$; (a, c); $(c, +\infty)$.

724. $$\varphi(a+bi) = B + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^2}{a+bi-a_k} = B + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^2(a-a_k-bi)}{(a-a_k)^2+b^2};$$

$$\operatorname{Im}(\varphi(a+bi)) = -b\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^2}{(a-a_k)^2+b^2} \neq 0$$ при $b \neq 0$, ибо все слагаемые, находящиеся под знаком суммы, положительны. Следовательно, $\varphi(a+bi) \neq 0$ при $b \neq 0$. Тот же результат можно получить также на основании того, что $\varphi(x)$ меняется от $+\infty$ до $-\infty$, пока x меняется от a_i до a_{i+1}, $\varphi(x)$ меняется от 0 до $-\infty$ при $-\infty < x < a_1$, $\varphi(x)$ меняется от $+\infty$ до 0 при $a_n < x < \infty$. Здесь предполагается, что

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n.$$

725. $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x-x_k}$, где x_k — корни полинома $f(x)$. Следовательно,

$$[f'(x)]^2 - f(x)f''(x) = [f(x)]^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x-x_k)^2} > 0$$

при всех вещественных значениях x.

726. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — корни полинома $f(x)$, $y_1 < y_2 < \ldots \ldots < y_m$ — корни полинома $\varphi(x)$.

При выполнении условия задачи $m=n$, $n-1$ или $n+1$. Без нарушения общности можно считать, что $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots \ldots < y_{n-1} < x_n$ или $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < x_n < y_n$. Будем считать $\lambda \neq 0$. Перепишем уравнение в виде

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} = -\frac{\mu}{\lambda}.$$

Если $m=n$, то $\psi(x)$ меняется:

от $\dfrac{a_0}{b_0}$ до $-\infty$ при $-\infty < x < y_1$, обращаясь в 0 при $x=x_1$;
от $+\infty$ до $-\infty$ при $y_k < x < y_{k+1}$, обращаясь в 0 при $x=x_{k+1}$;
от $+\infty$ до $\dfrac{a_0}{b_0}$ при $y_n < x < +\infty$.

Здесь a_0 и b_0 — старшие коэффициенты $f(x)$ и $\varphi(x)$, которые мы считаем положительными.

Вследствие непрерывности $\psi(x)$ в каждом из рассмотренных интервалов, уравнение $\psi(x) = -\frac{\mu}{\lambda}$ имеет n вещественных корней, если $-\frac{\mu}{\lambda} \neq \frac{a_0}{b_0}$, и $n-1$ вещественный корень, если $-\frac{\mu}{\lambda} = \frac{a_0}{b_0}$. Таким образом, число вещественных корней уравнения $\lambda f(x) + \mu\varphi(x)$ равно его степени.

Аналогично рассматривается случай, когда $m = n-1$.

727. Корни $f(x)$ и $\varphi(x)$ необходимо все вещественные, так как $f(x)$ и $\varphi(x)$ получаются из $F(x)$ при $\lambda = 1$, $\mu = 0$ и при $\mu = 1$, $\lambda = 0$.

Допустим, что корни $f(x)$ и $\varphi(x)$ не разделяются. Без нарушения общности можно считать, что между двумя смежными корнями x_1 и x_2 полинома $f(x)$ нет корней $\varphi(x)$. Тогда $\psi(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ непрерывна при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ и на концах этого интервала обращается в 0. По теореме Ролля внутри (x_1, x_2) найдется точка x_0 такая, что $\psi'(x_0) = 0$. Тогда $\psi(x) - \psi(x_0)$ имеет x_0 корнем кратности $k \geqslant 2$. На основании результата задачи 581 на окружности $|z - x_0| = \rho$, если ρ достаточно мало, найдется по крайней мере четыре точки, в которых $\operatorname{Im}(\psi(z)) = \operatorname{Im}(\psi(x_0)) = 0$.

Из этих точек по крайней мере одна z_0 невещественная. Число $\mu = \psi(z_0)$ вещественно. Полином $F(x) = -f(x) + \mu\varphi(x)$ имеет невещественный корень, что противоречит условию.

728. Корни $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n-1}$ полинома $f'(x)$ разбивают вещественную ось на n интервалов:

$$(-\infty, \xi_1), (\xi_1, \xi_2), \ldots, (\xi_{n-2}, \xi_{n-1}), (\xi_{n-1}, \infty).$$

В силу теоремы Ролля, в каждом из этих интервалов полином $f(x)$ имеет не более чем один корень. Далее, полином $f'(x) + \lambda f''(x)$ при любом вещественном λ имеет не более одного корня в каждом из отмеченных выше интервалов. Следовательно, $f(x) + \lambda f'(x)$, в силу теоремы Ролля, имеет не более двух корней в каждом из интервалов, с учетом кратности.

Разобьем теперь все интервалы на два класса. К первому отнесем те, в которых есть корень $f(x)$. Ко второму — те, в которых нет корня $f(x)$. Рассмотрим функцию $\psi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. В интервалах первого класса $\psi(x)$ имеет один простой корень и поэтому меняет знак. В интервалах второго класса $\psi(x)$ не меняет знака. В интервалах первого класса $\psi(x) + \lambda$ имеет, с учетом кратности, нечетное число корней. Следовательно, в силу сказанного ранее, $\psi(x) + \lambda$ в интервале первого класса имеет только один простой корень и кратных корней не имеет. Поэтому $\psi'(x)$ не имеет корней в интервале первого класса. Исследуем теперь интервалы второго класса. Пусть ξ_0 — точка в некотором интервале второго класса, в которой абсолютная величина $\psi(x)$ достигает минимума, и пусть $\lambda_0 = \psi(\xi_0)$. Для определенности будем считать, что $\psi(x)$ положительна в этом интервале. Тогда функция $\psi(x) - \lambda$ не имеет корней в интересующем нас интервале при $\lambda < \lambda_0$ и имеет по крайней мере два корня при $\lambda > \lambda_0$.

В силу сказанного ранее, число корней $\psi(x)-\lambda$ точно равно двум при $\lambda > \lambda_0$ и оба корня простые. Далее $\psi(x)-\lambda_0$ имеет ξ_0 кратным, именно двойным корнем.

Итак, $\psi(x)-\lambda$ не имеет кратных корней в интервалах первого класса и имеет только один кратный корень при одном значении λ в каждом интервале второго класса. Далее, каждый корень η полинома $f'^2(x)-f(x)f''(x)$ является кратным корнем для $\psi(x)-\psi(\eta)$, ибо

$$[\psi(x)]'=\frac{f'^2(x)-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Таким образом, число вещественных корней $f'^2(x)-f(x)f''(x)$ равно числу интервалов второго класса, которое равно, очевидно, числу мнимых корней $f(x)$.

729. $\lambda f_1(x)+\mu f_2(x)$ имеет все корни вещественные при любых вещественных постоянных λ и μ (задача 726). Следовательно, в силу теоремы Ролля, $\lambda f_1'(x)+\mu f_2'(x)$ имеет все корни вещественные. Отсюда следует (задача 727), что корни $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$ разделяются.

730. Пусть $f(x)$ не имеет кратных корней и пусть $\xi_1<\xi_2<\ldots$ $\ldots<\xi_{n-1}$ — корни $f'(x)$. Рассмотрим функцию $\psi(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}+\frac{x+\lambda}{\gamma}$.

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}=\frac{1}{n}+\frac{1}{\gamma}>0$, если $\gamma>0$ или если $\gamma<-n$. Отсюда следует, что $\psi(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$ и $\psi(x)\to-\infty$ при $x\to-\infty$. Кроме того, $\psi(x)\to-\infty$ при $x\to\xi_i$ справа и $\psi(x)\to+\infty$ при $x\to\xi_i$ слева. Таким образом, $\psi(x)$ меняется от $-\infty$ до $+\infty$ на каждом из интервалов $(-\infty,\xi_1)$, (ξ_1,ξ_2), $\ldots$, (ξ_{n-1},∞), оставаясь непрерывной внутри этих интервалов.

Следовательно, $\psi(x)$, а вместе с ней и ее числитель $\gamma f(x)+$ $+(x+\lambda)f'(x)$ имеет не меньше n различных корней при $\gamma>0$ или $\gamma<-n$. Но число корней $\gamma f(x)+(x+\lambda)f'(x)$ и не превышает n, ибо $\gamma f(x)+(x+\lambda)f'(x)$ есть полином степени n. Если $f(x)$ имеет кратные корни и $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — различные корни $f(x)$, то $f'(x)$ имеет $k-1$ корней $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}$, отличных от $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Рассуждением, аналогичным предыдущему, убедимся в существовании k корней $\psi(x)$. Все они, кроме $-\lambda$, если $-\lambda$ находится среди корней $f(x)$, будут отличны от корней $f(x)$.

Кроме этих корней, $\gamma f(x)+(x+\lambda)f'(x)$ будет иметь своими корнями $x_1, x_2, \ldots, x_k$ с суммой кратностей $n-k$ (если $-\lambda$ не является корнем $f(x)$) или $n-k+1$ (если $-\lambda$ — корень $f(x)$).

Общее число вещественных корней $\gamma f(x)+(\lambda+x)f'(x)$ с учетом кратностей снова оказывается равным n.

731. Пусть $\varphi(x)=b_k(x+\gamma_1)(x+\gamma_2)\ldots(x+\gamma_k)$. Каждое γ_i или больше нуля или меньше $-n$.

Очевидно, что коэффициенты полинома

$$F_1(x)=\gamma_1 f(x)+xf'(x) \text{ суть } a_i(\gamma_1+i).$$

Коэффициенты полинома

$$F_2(x)=\gamma_2F_1(x)+xF_1'(x) \quad \text{суть} \quad a_i(\gamma_1+i)(\gamma_2+i)$$

и т. д., коэффициенты полинома

$$F_k(x)=\gamma_kF_{k-1}(x)+xF_{k-1}'(x)$$

суть

$$a_i(\gamma_1+i)(\gamma_2+i)\dots(\gamma_k+i),\quad i=1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

На основании результата задачи 730, все корни всех полиномов $F_1, F_2, \dots, F_k$ вещественны. Но

$$a_0\varphi(0)+a_1\varphi(1)x+\dots+a_n\varphi(n)x^n=b_kF_k(x).$$

732. Пусть $f(x)=f_1(x)(x+\lambda)$, где λ — вещественное число, и $f_1(x)$ — полином $(n-1)$-й степени, все корни которого вещественны. Допустим, что для полиномов $(n-1)$-й степени теорема справедлива и в этом предположении докажем ее для полиномов степени n.

Пусть $f_1(x)=b_0+b_1x+\dots+b_{n-1}x^{n-1}$,

$$f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda b_0,\\ a_1 &= \lambda b_1+b_0,\\ a_2 &= \lambda b_2+b_1,\\ &\dots\dots\dots\\ a_{n-1} &= \lambda b_{n-1}+b_{n-2},\\ a_n &= \qquad\quad b_{n-1} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &a_0+a_1\gamma x+a_2\gamma(\gamma-1)x^2+\dots+a_n\gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-n+1)x^n=\\ &=\lambda\,[b_0+b_1\gamma x+b_2\gamma(\gamma-1)x^2+\dots+b_{n-1}\gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-n+2)x^{n-1}]+\\ &+x\gamma\,[b_0+b_1(\gamma-1)x+b_2(\gamma-1)(\gamma-2)x^2+\dots+b_{n-1}(\gamma-1)(\gamma-2)\dots\\ &\qquad\dots(\gamma-n+1)x^{n-1}]=\lambda\varphi(x)+x\,[\gamma\varphi(x)-x\varphi'(x)], \end{aligned}$$

где через $\varphi(x)$ обозначен полином

$$b_0+b_1\gamma x+b_2\gamma(\gamma-1)x^2+\dots+b_{n-1}\gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-n+2)x^{n-1}.$$

В силу сделанного предположения, все корни полинома $\varphi(x)$ вещественны. Остается доказать следующую лемму.

Лемма. Если $\varphi(x)$ — полином степени $n-1$, имеющий только вещественные корни, то все корни полинома $\psi(x)=\lambda\varphi+\gamma x\varphi-x^2\varphi'$ вещественны при $\gamma>n-1$ и при любом вещественном λ.

Доказательство. Без нарушения общности можно считать, что 0 не является корнем $\varphi(x)$, ибо если $\varphi=x^k\varphi_1$, $\varphi_1(0)\neq 0$, то

$$\psi(x)=x^k(\lambda\varphi_1+(\gamma-k)x\varphi_1-x^2\varphi_1')=x^k\psi_1$$

и $\gamma_1=\gamma-k$ превосходит степень φ_1.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_m$ — различные корни φ. Полином ψ имеет среди своих корней $x_1, x_2, \dots, x_m$ с суммой кратностей $n-1-m$. Рассмотрим теперь

$$w(x)=\lambda+\gamma x-\frac{x^2\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Очевидно, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{w(x)}{x}=\gamma-(n-1)>0.$$

Следовательно, $w(x)\to-\infty$ при $x\to-\infty$ и $w(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$. Кроме того, $w(x)\to+\infty$ при $x\to x_i$ слева и $w(x)\to-\infty$ при $x\to x_i$ справа. Вследствие этого, $w(x)$ имеет корни в каждом из интервалов

$$(-\infty,\ x_1),\ (x_1,\ x_2),\ \dots,\ (x_{m-1},\ x_m),\ (x_m,\ +\infty).$$

Общее число вещественных корней $\psi(x)$, с учетом кратности, оказывается равным $n-1-m+m+1=n$, т. е. равно степени $\psi(x)$, что и требовалось доказать.

733. Если все корни полинома $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ вещественны, то все корни полинома $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ вещественны. Далее, все корни полиномов

$$a_0\gamma_1(\gamma_1-1)\ldots(\gamma_1-n+1)x^n+a_1\gamma_1(\gamma_1-1)\ldots$$
$$\ldots(\gamma_1-n+2)x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\gamma_1x+a_n$$

и

$$a_0\gamma_1(\gamma_1-1)\ldots(\gamma_1-n+1)+a_1\gamma_1(\gamma_1-1)\ldots$$
$$\ldots(\gamma_1-n+2)x+\ldots+a_{n-1}\gamma_1x^{n-1}+a_nx^n=$$
$$=\left[a_0+\frac{a_1}{\gamma_1-n+1}x+\ldots+\frac{a_{n-1}}{(\gamma_1-n+1)(\gamma_1-n+2)\ldots(\gamma_1-1)}x^{n-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{a_n}{(\gamma_1-n+1)(\gamma_1-n+2)\ldots\gamma_1}x^n\right]\gamma_1(\gamma_1+1)\ldots(\gamma_1-n+1)$$

вещественны при $\gamma_1>n-1$. Положив $\gamma_1-n+1=\alpha>0$, получим, что все корни полинома

$$a_0+\frac{a_1}{\alpha}x+\frac{a_2}{\alpha(\alpha+1)}x^2+\ldots+\frac{a_n}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}x^n$$

вещественны. Применяя результат задачи 732 второй раз, получим искомый результат.

734. 1. Положим, что все корни $f(x)$ положительны. Тогда полином $a_0+a_1wx+\ldots+a_nw^{n^2}x^n$ не может иметь отрицательных корней. Пусть теорема справедлива для полиномов степени $n-1$. Обозначим

$$\varphi(x)=b_0+b_1wx+b_2w^4x^2+\ldots+b_{n-1}w^{(n-1)^2}x^{n-1}.$$

Пусть $0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ — корни $\varphi(x)$, и пусть $\frac{x_i}{x_{i-1}}>w^{-2}$.

Пусть, далее, $f(x)=(\lambda-x)(b_0+b_1x+\ldots+b_{n-1}x^{n-1})$. Коэффициенты полинома $f(x)$ равны

$$\begin{aligned}
a_0&=\lambda b_0,\\
a_1&=\lambda b_1-b_0,\\
a_2&=\lambda b_2-b_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n-1}&=\lambda b_{n-1}-b_{n-2},\\
a_n&=-b_{n-1}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\psi(x)=a_0+a_1wx+a_2w^4x^2+\ldots+a_nw^{n^2}x^n=\lambda(b_0+b_1wx+\ldots$$
$$\ldots+b_{n-1}w^{(n-1)^2}x^{n-1})-x(b_0w+b_1w^4x+\ldots+b_{n-1}w^{n^2}x^{n-1})=$$
$$=\lambda\varphi(x)-xw\varphi(xw^2).$$

Корни полиномов $\varphi(x)$ и $x\varphi(xw^2)$ разделяются в силу индуктивного предположения. Следовательно, все корни интересующего нас полинома $\lambda\varphi(x)+xw\varphi(xw^2)$ вещественны. Остается проверить, что закон их распределения такой же, как для полинома $\varphi(x)$.

Обозначим через $z_1, z_2, \ldots, z_n$ корни $\psi(x)$. Легко видеть, что

$$0<z_1<x_1<x_1w^{-2}<z_2<x_2<x_2w^{-2}<z_3<\ldots$$
$$\ldots<z_{n-1}<x_{n-1}<x_{n-1}w^{-2}<z_n.$$

Отсюда следует, что $\frac{z_i}{z_{i-1}} > \frac{x_{i-1}w^{-2}}{x_{i-1}} = w^{-2}$, что и требовалось доказать.

2. Рассмотрим $\varphi_m(x) = \left(1 - \frac{x^2 \lg \frac{1}{w}}{m}\right)^m$.

При достаточно большом m корни полинома $\varphi_m(x)$, равные $\pm\sqrt{\frac{m}{\lg \frac{1}{w}}}$, не содержатся в интервале $(0, n)$. Следовательно (задача 731), все корни полинома $a_0\varphi_m(0) + a_1\varphi_m(1)x + \ldots + a_n\varphi_m(n)x^n$ вещественны. Но $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m(x) = w^{x^2}$. Следовательно, в силу непрерывности корней как функций от коэффициентов, все корни $a_0 + a_1wx + \ldots + a_nw^{n^2}x^n$ вещественны.

735. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ корни полинома $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$. Без нарушения общности их можно считать положительными. Пусть, далее,

$$\varphi(x) = a_0 \cos\varphi + a_1 \cos(\varphi+\theta)x + \ldots + a_n \cos(\varphi + n\theta)x^n,$$
$$\psi(x) = a_0 \sin\varphi + a_1 \sin(\varphi+\theta)x + \ldots + a_n \sin(\varphi + n\theta)x^n.$$

Тогда

$$\varphi(x) + i\psi(x) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\, a_n \prod_{i=1}^{n} (\alpha x - x_i),$$

$$\varphi(x) - i\psi(x) = (\cos\varphi - i\sin\varphi)\, a_n \prod_{i=1}^{n} (\alpha' x - x_i),$$

где

$$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \alpha' = \cos\theta - i\sin\theta.$$

Следовательно,

$$\Phi(x) = \frac{\varphi(x) + i\psi(x)}{\varphi(x) - i\psi(x)} = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha x - x_i}{\alpha' x - x_i}.$$

Пусть $x = \rho\beta$ — корень полинома $\varphi(x)$. Здесь $\rho = |x|$; $\beta = \cos\lambda + i\sin\lambda$. Тогда $|\Phi(x)| = 1$ и, следовательно,

$$\prod_{i=1}^{n} \left|\frac{\rho\alpha\beta - x_i}{\rho\alpha'\beta - x_i}\right| = 1,$$

но

$$\left|\frac{\rho\alpha\beta - x_i}{\rho\alpha'\beta - x_i}\right|^2 = \frac{(\rho\alpha\beta - x_i)(\rho\alpha'\beta' - x_i)}{(\rho\alpha'\beta - x_i)(\rho\alpha\beta' - x_i)} =$$
$$= 1 + \frac{\rho x_i(\alpha - \alpha')(\beta' - \beta)}{|\rho\alpha'\beta - x_i|^2} = 1 + \frac{4\rho x_i \sin\theta \sin\lambda}{|\rho\alpha'\beta - x_i|^2}.$$

Отбросим неинтересный случай $\sin\theta = 0$.

Если $\sin\lambda \neq 0$, то все $\left|\frac{\rho\alpha\beta - x_i}{\rho\alpha'\beta - x_i}\right|^2$ одновременно больше единицы или одновременно меньше единицы и их произведение не может равняться 1. Следовательно, $\sin\lambda=0$, т. е. x вещественное.

736. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни полинома

$$f(x)=a_0+ib_0+(a_1+ib_1)x+\ldots+(a_n+ib_n)x^n=\varphi(x)+i\psi(x).$$

Мнимые части этих корней положительны. Рассмотрим полином $\overline{f}(x)=\varphi(x)-i\psi(x)$. Его корнями будут, очевидно, $x_1', x_2', \ldots, x_n'$, сопряженные с $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда

$$\Phi(x)=\frac{\varphi(x)+i\psi(x)}{\varphi(x)-i\psi(x)}=\prod_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{x-x_i'}\cdot\frac{a_n+ib_n}{a_n-ib_n}.$$

Если x_0 есть корень $\varphi(x)$, то

$$|\Phi(x_0)|=\prod_{i=1}^{n}\left|\frac{x_0-x_i}{x_0-x_i'}\right|=1.$$

Но

$$\left|\frac{x_0-x_i}{x_0-x_i'}\right|^2=\frac{(x_0-x_i)(x_0'-x_i')}{(x_0-x_i')(x_0'-x_i)}=1+\frac{(x_i-x_i')(x_0-x_0')}{|x_0-x_i|^2}=$$
$$=1-\frac{4\operatorname{Im}(x_0)\operatorname{Im}(x_i)}{|x_0-x_i'|^2}.$$

Отсюда, если $\operatorname{Im}(x_0)>0$, то $\left|\frac{x_0-x_i}{x_0-x_i'}\right|<1$ при всех i; если $\operatorname{Im}(x_0)<0$, то $\left|\frac{x_0-x_i}{x_0-x_i'}\right|>1$ при всех i. (То же самое очень легко получить геометрически, без вычислений.) Следовательно, равенство $|\Phi(x_0)|=1$ возможно только для вещественного x_0, и потому все корни $\varphi(x)$ вещественны.

Далее, рассмотрим полином

$$(\alpha-\beta i)[\varphi(x)+i\psi(x)]=\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)+i[\alpha\psi(x)-\beta\varphi(x)].$$

Его корни не отличаются от корней исходного полинома и, значит, его вещественная часть $\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)$ имеет только вещественные корни при любых вещественных α и β. Но в таком случае корни $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ разделяются (задача 727).

737. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни $\varphi(x)$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — корни $\psi(x)$. Без нарушения общности можно положить, что старшие коэффициенты φ и ψ положительны и

$$x_1>y_1>x_2>y_2>\ldots>y_{n-1}>x_n>y_n$$

(y_n может отсутствовать).

Разложим $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ на простейшие дроби:

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=A+\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{x-x_k};\qquad A_k=\frac{\psi(x_k)}{\varphi'(x_k)}.$$

Легко видеть, что все $A_k > 0$. Положим $x = a + bi$ и найдем мнимую часть для

$$\frac{-i(\varphi(x) + i\psi(x))}{\varphi(x)} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - i;$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - i\right) = -1 + \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{a + bi - x_k}\right) =$$

$$= -1 - b\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(a - x_k)^2 + b^2}.$$

Если $b \geqslant 0$, то $\operatorname{Im}\left(\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} - i\right) < 0$ и, следовательно, $\varphi(x) + i\psi(x) \neq 0$. Итак, в рассмотренном случае все корни $\varphi(x) + i\psi(x)$ лежат в нижней полуплоскости. Аналогично рассматриваются другие случаи расположения корней.

738.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k}; \quad x_k \text{— корни } f(x).$$

Пусть $x = a - bi$, $b > 0$. Тогда

$$\operatorname{Im}\left(\frac{f'(a - bi)}{f(a - bi)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b + \operatorname{Im}(x_k)}{|x - x_k|^2} > 0.$$

Следовательно,

$$f'(a - bi) \neq 0.$$

739. Пусть полуплоскость задана неравенством

$$r\cos(\theta - \varphi) > p, \quad \text{где } x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Положим $x = (x' + pi)(\sin\theta - i\cos\theta)$. Тогда

$$x' = -pi + x(\sin\theta + i\cos\theta) = r\sin(\theta - \varphi) + i[r\cos(\theta - \varphi) - p].$$

Отсюда следует, что если x лежит в данной полуплоскости, то x' лежит в полуплоскости $\operatorname{Im}(x') > 0$, и обратно. Корни полинома $f[(x' + pi)(\sin\theta - i\cos\theta)]$, таким образом, находятся в верхней полуплоскости. На основании задачи 738 корни его производной, равной $[\sin\theta - i\cos\theta]\, f'[(x' + pi)(\sin\theta - i\cos\theta)]$, также находятся в верхней полуплоскости.

Следовательно, корни полинома $f'(x)$ находятся в данной полуплоскости.

740. Непосредственно вытекает из результата задачи 739.

741. Уравнение разбивается на два:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{1}{ki} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{ki} = 0.$$

Разложение на простейшие дроби даёт

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k} \pm \frac{1}{ki} = 0,$$

x_k — корни $f(x)$, по предположению вещественные. Пусть $x = a + bi$;

тогда

$$\left|\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}\right)\right|=|b|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(a-x_k)^2+b^2}<\frac{n}{|b|}.$$

Для корней каждого из уравнений должно быть $\frac{1}{k}<\frac{n}{|b|}$, откуда $|b|<kn$.

742. Все корни $f'(x)$, очевидно, вещественные. Обозначим их $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$. Далее, обозначим через $y_1, y_2, \ldots, y_n$ корни полинома $f(x)-b$, через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни полинома $f(x)-a$. Тогда

$$y_1<\xi_1<y_2<\xi_2<\ldots<y_{n-1}<\xi_{n-1}<y_n,$$
$$x_1<\xi_1<x_2<\xi_2<\ldots<x_{n-1}<\xi_{n-1}<x_n.$$

Из этих неравенств следует, что интервалы, ограниченные точками x_i, y_i, не налегают, ибо они заключены в неналегающих интервалах

$$(-\infty, \xi_1);\quad (\xi_1, \xi_2);\quad \ldots;\quad (\xi_{n-1}, +\infty).$$

Полином $f(x)$ принимает на концах каждого из рассмотренных интервалов значений a и b и проходит внутри интервала через все промежуточные значения. Следовательно, $f(x)-\lambda$ обращается в 0 на вещественной оси n раз, что и требовалось доказать.

743. Если вещественные части корней полинома $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ имеют одинаковые знаки, то мнимые части корней полинома

$$i^n f(-ix)=x^n+ia_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}-ia_3x^{n-3}+\ldots$$

тоже имеют одинаковые знаки, и обратно.

В силу результата задач 736, 737, для этого необходимо и достаточно, чтобы корни полиномов $x^n-a_2x^{n-2}+a_4x^{n-4}-\ldots$ и $a_1x^{n-1}-a_3x^{n-3}+a_5x^{n-5}-\ldots$ были вещественны и разделялись.

744. Нужно, чтобы было $a>0$ и чтобы корни полиномов x^3-bx и ax^2-c были вещественны и разделялись. Для этого необходимо и достаточно условие $0<\frac{c}{a}<b$ или $c>0$, $ab-c>0$.

Итак, для отрицательности вещественных частей всех корней уравнения

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

необходимо и достаточно выполнение неравенств $a>0$, $c>0$, $ab-c>0$.

745. $a>0$, $c>0$, $d>0$, $abc-c^2-a^2d>0$.

746. Положим $x=\frac{1+y}{1-y}$. Легко видеть, что если $|x|<1$, то вещественная часть y отрицательна, и обратно.

Следовательно, для того чтобы все корни x_1, x_2, x_3 уравнения $f(x)=0$ были по модулю меньше 1, необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения $f\left(\frac{1+y}{1-y}\right)=0$ имели отрицательные вещественные части. Это уравнение имеет вид

$$y^3(1-a+b-c)+y^2(3-a-b+3c)+y(3+a-b-3c)+$$
$$+(1+a+b+c)=0.$$

Легко видеть, кроме того, необходимость условия

$$1-a+b-c=(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)>0.$$

На основании результата задачи 744 получаем необходимые и достаточные условия:

$$1-a+b-c>0; \quad 1+a+b+c>0; \quad 3-a-b+3c>0;$$
$$1-b+ac-c^2>0.$$

747. $f(x)(1-x)=a_n+(a_{n-1}-a_n)x+$
$$+(a_{n-2}-a_{n-1})x^2+\ldots+(a_0-a_1)x^n-a_0x^{n+1}.$$

Пусть $|x|=\rho>1$. Тогда

$$|f(x)(1-x)|\geqslant a_0\rho^{n+1}-|a_n+(a_{n-1}-a_n)x+\ldots$$
$$\ldots+(a_0-a_1)x^n|\geqslant a_0\rho^{n+1}-\rho^n(a_n+a_{n-1}-a_n+\ldots$$
$$\ldots+a_0-a_1)=a_0(\rho^{n+1}-\rho^n)>0.$$

Следовательно, $f(x)\neq 0$ при $|x|>1$.

748. $-0,6618$. 749. $2,094551$.

750. a) $3,3876$, $-0,5136$, $-2,8741$; b) $2,8931$;
c) $3,9489$, $0,2172$, $-1,1660$; d) $3,1149$, $0,7459$, $-0,8608$.

751. Задача сводится к вычислению корня уравнения $x^2-3x+1=0$, содержащегося в промежутке $(0, 1)$.

Ответ: $x=0,347$ (с точностью до $0,001$).

752. $2,4908$.

753. a) $1,7320$; b) $-0,7321$; c) $0,6180$; d) $0,2679$;
e) $-3,1623$; f) $1,2361$; g) $-2,3028$; h) $3,6457$; i) $1,6180$.

754. a) $1,0953$, $-0,2624$, $-1,4773$, $-2,3556$;
b) $0,8270$, $0,3383$, $-1,2090$, $-2,9563$;
c) $1,4689$, $0,1168$;
d) $8,0060$, $1,2855$, $0,1960$, $-1,4875$;
e) $1,5357$, $-0,1537$;
f) $3,3322$, $1,0947$, $-0,6002$, $-1,8268$;
g) $0,4910$, $-1,4910$;
h) $2,1462$, $-0,6821$, $-1,3178$, $-4,1463$.

Глава 6

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

755. Приводим подробное решение примера f):

$$F(x_1, x_2, x_3)=(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2).$$

Старший член полинома F равен $x_1^4\cdot x_2^2$.

Выпишем показатели в старших членах полиномов, которые будут оставаться после последовательного исключения старших членов посредством вычитания подходящих комбинаций основных симметрических полиномов. Эти показатели:

$$(4, 2, 0); \quad (4, 1, 1); \quad (3, 3, 0); \quad (3, 2, 1) \quad \text{и} \quad (2, 2, 2).$$

Следовательно, $F=f_1^2f_2^2+Af_1^3f_3+Bf_2^3+Cf_1f_2f_3+Df_3^2$, где A, B, C, D — численные коэффициенты. Определяем их, задавая частные значення для x_1, x_2, x_3:

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	F
1	1	0	2	1	0	2
2	−1	−1	0	−3	2	50
1	−2	−2	−3	0	4	200
1	−1	−1	−1	−1	1	8

Для определения A, B, C, D получили систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2&=4+B,\\ 50&=-27B+4D,\\ 200&=-108A+16D,\\ 8&=1-A-B+C+D, \end{aligned}$$

откуда $B=-2$, $D=-1$, $A=-2$, $C=4$.

Итак,

$$(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)=f_1^2f_2^2-2f_1^3f_3-2f_2^3+4f_1f_2f_3-f_3^2.$$

Даём ответы для остальных примеров:

a) $f_1^3-3f_1f_2$; b) $f_1f_2-3f_3$; c) $f_1^4-4f_1^2f_2+8f_1f_3$;
d) $f_1^3f_2^2-2f_1^4f_3-3f_1f_2^3+6f_1^2f_2f_3+3f_2^2f_3-7f_1f_3^2$;
e) $f_1f_2-f_3$; g) $2f_1^3-9f_1f_2+27f_3$;
h) $f_1^2f_2^2-4f_1^3f_3-4f_2^3+18f_1f_2f_3-27f_3^2$.

756. a) $f_1f_2f_3-f_1^2f_4-f_3^2$; b) $f_1^2f_4+f_3^2-4f_2f_4$;
c) $f_1^3-4f_1f_2+8f_3$.

757. a) $f_1^2-2f_2$; b) $f_1^3-3f_1f_2+3f_3$;
c) $f_1f_3-4f_4$; d) $f_2^2-2f_1f_3+2f_4$;
e) $f_1^2f_2-f_1f_3-2f_2^2+4f_4$; f) $f_1^4-4f_1^2f_2+2f_2^2+4f_1f_3-4f_4$;
g) $f_2f_3-3f_1f_4+5f_5$; h) $f_1^2f_3-2f_2f_3-f_1f_4+5f_5$;
i) $f_1f_2^2-2f_1^2f_3-f_2f_3+5f_1f_4-5f_5$;
j) $f_1^3f_2-3f_1f_2^2-f_1^2f_3+5f_2f_3+f_1f_4-5f_5$;
k) $f_1^5-5f_1^3f_2+5f_1f_2^2+5f_1^2f_3-5f_2f_3-5f_1f_4+5f_5$;
l) $f_2f_4-4f_1f_5+9f_6$; m) $f_3^2-2f_2f_4+2f_1f_5-2f_6$;
n) $f_1^2f_4-2f_2f_4-f_1f_5+6f_6$;
o) $f_1f_2f_3-3f_1^2f_4-3f_3^2+4f_2f_4+7f_1f_5-12f_6$;
p) $f_2^3-3f_1f_2f_3+3f_1^2f_4+3f_3^2-3f_2f_4-3f_1f_5+3f_6$;
q) $f_1^3f_3-3f_1f_2f_3-f_1^2f_4+3f_3^2+2f_2f_4+f_1f_5-6f_6$;
r) $f_1^2f_2^2-2f_1^3f_3-2f_2^3+4f_1f_2f_3+2f_1^2f_4-3f_3^2+2f_2f_4-6f_1f_5+6f_6$;
s) $f_1^4f_2-4f_1^2f_2^2-f_1^3f_3+2f_2^3+7f_1f_2f_3+f_1^2f_4-3f_3^2-6f_2f_4-f_1f_5+6f_6$;

t) $f_1^6-6f_1^4f_2+9f_1^2f_2^2+6f_1^3f_3-2f_2^3-12f_1f_2f_3-6f_1^2f_4+$
$$+3f_3^2+6f_2f_4+6f_1f_5-6f_6.$$

758. a) $nf_1^2-8f_2$;

b) $-f_1^n+4f_1^{n-2}f_2-8f_1^{n-3}f_3+\ldots+(-2)^n f_n$.

759. a) $(n-1)f_1^2-2nf_2$; b) $(n-1)f_1^3-3(n-2)f_1f_2+3(n-4)f_3$;

c) $(n-1)f_1^4-4nf_1^2f_2+2(n+6)f_2^2+4(n-3)f_1f_3-4nf_4$;

d) $\dfrac{3(n-1)(n-2)}{2}f_1^2-(3n-1)(n-2)f_2$.

760. $f_k^2-2f_{k-1}f_{k+1}+2f_{k-2}f_{k+2}-2f_{k-3}f_{k+3}+\ldots$

761. $$(n-1)!\sum_{i=1}^{n}a_i^2 f_1^2-2(n-2)!\left[n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\right]f_2=$$
$$=(n-1)!\,S_2s_2+4(n-2)!\,F_2f_2,$$

где
$$S_2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2;\quad s_2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2;\quad F_2=\sum_{i<k}a_ia_k;\quad f_2=\sum_{i<k}x_ix_k.$$

762. a) $\dfrac{f_1f_2-3f_3}{f_3}$; b) $\dfrac{2(f_1^2f_2-3f_1f_3-2f_2^2)}{f_1f_2-f_3}$; c) $\dfrac{f_2^3+f_1^3f_3-6f_1f_2f_3+9f_3^2}{f_3^2}$.

763. a) $\dfrac{f_2^2-2f_1f_3+2f_4}{f_4}$; b) $\dfrac{f_1^2f_2^2+f_1^3f_3-6f_1f_2f_3+6f_3^2+2f_1^2f_4}{f_1f_2f_3-f_1^2f_4-f_3^2}$.

764. a) $\dfrac{f_{n-1}}{f_n}$; b) $\dfrac{f_{n-1}^2-2f_{n-2}f_n}{f_n^2}$; c) $\dfrac{f_1f_{n-1}-nf_n}{f_n}$;

d) $\dfrac{f_1^2f_{n-1}^2-2f_2f_{n-1}^2-2f_1^2f_{n-2}f_n+4f_2f_{n-2}f_n-nf_n^2}{f_n^2}$;

e) $\dfrac{f_1^2f_{n-1}-2f_2f_{n-1}-f_1f_n}{f_n}$; f) $\dfrac{f_2f_{n-1}-(n-1)f_1f_n}{f_n}$.

765. —4. **766.** —35. **767.** 16.

768. a) —3; b) $-2p^3-3q^2$; c) $-p^3$ $(x_1^2-x_2x_3=-p)$;

d) q^4; e) $\dfrac{-2p-3q}{1+p-q}$; f) $\dfrac{2p^2-4p-4pq+3q^2+6q}{(1+p-q)^2}$.

769. Пусть $x_1^2=x_2^2+x_3^2$. Тогда $2x_1^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2-2b$.

Следовательно, $\sqrt{\dfrac{a^2-2b}{2}}$ или $-\sqrt{\dfrac{a^2-2b}{2}}$ находится среди корней данного уравнения. Для этого необходимо и достаточно выполнение условия
$$a^4(a^2-2b)=2(a^3-2ab+2c)^2.$$

770.
$$a=-x_1-x_2-x_3,$$
$$ab-c=-(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3),$$
$$c=-x_1x_2x_3.$$

Если все корни вещественны и отрицательны, то

$$a>0,\quad b>0,\quad c>0.$$

Если один корень x_1 вещественный, а x_2 и x_3—комплексные сопряженные с отрицательной вещественной частью, то $x_2+x_3<0$, $x_2x_3>0$, $(x_1+x_2)(x_1+x_3)>0$ и, следовательно, тоже $a>0$, $b>0$ и $c>0$. Необходимость условий доказана.

Допустим теперь, что $a>0$, $b>0$, $c>0$. Если x_1—вещественное, x_2 и x_3—комплексные сопряженные, то $x_2x_3>0$, $(x_1+x_2)(x_1+x_3)>$ >0 и из $c>0$, $b>0$ следует $x_1<0$, $2\operatorname{Re}(x_2)=x_2+x_3<0$.

Если же x_1, x_2, x_3 вещественны, то из $c>0$ следует, что один корень x_1 отрицателен, остальные два одного знака. Если $x_2>0$, $x_3>0$, то

$$-x_1-x_2>x_3>0,\quad -x_1-x_3>x_2>0$$

и тогда $-(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)<0$, что противоречит условию. Следовательно, $x_2<0$, $x_3<0$.

Другое решение дано в задаче 744.

771. $s=\frac{1}{4}\sqrt{a(4ab-a^3-bc)}$, $R=\frac{c}{\sqrt{a(4ab-a^3-bc)}}$.

772. $a(4ab-a^3-8c)=4c^2$.

773. a) $\frac{25}{27}$; b) $\frac{35}{27}$; c) $-\frac{1679}{625}$.

774. a) $a_1^2a_2^2-4a_1^3a_3-4a_2^3a_0+18a_0a_1a_2a_3-27a_0^2a_3^2$;

b) $a_1^3a_3-a_2^3a_0$; c) $\frac{a_1a_2}{a_0a_3}-9$; d) $a_1^3a_2^2-a_1^3a_3-a_2^3a_0$.

775. Достаточно доказать для основных симметрических полиномов. Пусть φ_k—основная симметрическая функция степени k от $x_2, x_3, \ldots, x_n$; f_k—основная симметрическая функция от $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$. Очевидно, что $\varphi_k=f_k-x_1\varphi_{k-1}$ откуда следует:

$$\varphi_k=f_k-x_1f_{k-1}+x_1^2f_{k-2}-\ldots+(-x_1)^{k-1}f_1+(-1)^kx_1^k,$$
$$(-1)^k\varphi_k=a_k+a_{k-1}x_1+\ldots+a_1x_1^{k-1}+x_1^k.$$

776. $x_1+x_2=f_1-x_3$, $(f_1-x_1)(f_1-x_2)(f_1-x_3)=f_1^3-f_1^3+f_1f_2-$ $-f_3=f_1f_2-f_3$; $2x_1-x_2-x_3=3x_1-f_1$, $(3x_1-f_1)(3x_2-f_1)(3x_3-f_1)=$ $=27f_3-9f_1f_2+2f_1^3$;

$$x_1^2-x_2x_3=f_1x_1-f_2;$$
$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=f_1^2-f_2-f_1x_3.$$

777. $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}=(n-k)f_{k-1}$.

778. Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\Phi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}=n\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}+(n-1)f_1\frac{\partial\Phi}{\partial f_2}+\ldots+f_{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial f_n}.$$

779. Пусть $\varphi(a)=F(x_1+a,\ x_2+a,\ \ldots,\ x_n+a)$. Тогда

$$\varphi'(a)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F(x_1+a,\ x_2+a,\ \ldots,\ x_n+a)}{\partial x_i}.$$

Так как $\varphi(a)$ не зависит от a, то $\varphi'(a)=0$ тождественно, откуда следует $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}=0$. Обратно, если $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}{\partial x_i}=0$ тождественно, то $\varphi'(a)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F(x_1+a,\ \ldots,\ x_n+a)}{\partial x_i}=0$, откуда следует, что $\varphi(a)$ не зависит от a и $\varphi(a)=\varphi(0)$, т. е.

$$F(x_1+a,\ x_2+a,\ \ldots,\ x_n+a)=F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

В силу предыдущей задачи, условие $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}=0$ равносильно условию

$$n\frac{\partial \Phi}{\partial f_1}+(n-1)f_1\frac{\partial \Phi}{\partial f_2}+\ldots+f_{n-1}\frac{\partial \Phi}{\partial f_n}=0.$$

780. Пусть $F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ — однородный симметрический полином второй степени. Тогда его выражение через основные симметрические полиномы имеет вид $\Phi=Af_1^2+Bf_2$. В силу результата задачи 779, должно быть $n\cdot 2Af_1+(n-1)Bf_1=0$, откуда $A=(n-1)\alpha$, $B=-2n\alpha$ и

$$F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=\alpha[(n-1)f_1^2-2nf_2]=\alpha\sum_{i<k}(x_i-x_k)^2.$$

781. Выражение однородного симметрического полинома третьей степени через основные имеет вид $Af_1^3+Bf_1f_2+Cf_3$. В силу результата задачи 779 должно быть $3Anf_1^2+nBf_2+(n-1)Bf_1^2+(n-2)Cf_2=0$, откуда

$$F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=\alpha[(n-1)(n-2)f_1^3-3n(n-2)f_1f_2+3n^2f_3].$$

782. $(n-2)f_1^2f_2^2-2(n-1)f_1^3f_3-4(n-2)f_2^3+$
$+(10n-12)f_1f_2f_3-4(n-1)f_1^2f_4-9nf_3^2+8nf_2f_4.$

783. Можно взять

$$\varphi_k=f_k\left(x_1-\frac{f_1}{n},\quad x_2-\frac{f_1}{n},\ \ldots,\ x_n-\frac{f_1}{n}\right).$$

Каждая функция φ_k обладает требуемым свойством. Далее, если $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=F(x_1+a,\ x_2+a,\ \ldots,\ x_n+a)$ и $F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=\Phi(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n)$, то

$$F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=\Phi(0,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \ldots,\ \varphi_n)$$

784. a) $-4\varphi_2^3-27\varphi_3^2$; b) $18\varphi_2^2$.

785. a) $8\varphi_3$;

b) $-4\varphi_2^3\varphi_3^2+16\varphi_2^4\varphi_4-27\varphi_3^4+144\varphi_2\varphi_3^2\varphi_4-128\varphi_2^2\varphi_4^2+256\varphi_4^3$.

786. $s_2=f_1^2-2f_2$;
$s_3=f_1^3-3f_1f_2+3f_3$;
$s_4=f_1^4-4f_1^2f_2+2f_2^2+4f_1f_3-4f_4$;
$s_5=f_1^5-5f_1^3f_2+5f_1f_2^2+5f_1^2f_3-5f_2f_3-5f_1f_4+5f_5$;
$$s_6=f_1^6-6f_1^4f_2+9f_1^2f_2^2+6f_1^3f_3-2f_2^3-12f_1f_2f_3-6f_1^2f_4+$$
$$+3f_3^2+6f_2f_4+6f_1f_5-6f_6.$$

787. $2f_2=s_1^2-s_2$;
$6f_3=s_1^3-3s_1s_2+2s_3$;
$24f_4=s_1^4-6s_1^2s_2+8s_1s_3+3s_2^2-6s_4$;
$120f_5=s_1^5-10s_1^3s_2+20s_1^2s_3+15s_1s_2^2-20s_2s_3-30s_1s_4+24s_5$;
$$720f_6=s_1^6-15s_1^4s_2+40s_1^3s_3+45s_1^2s_2^2-120s_1s_2s_3-15s_2^3-$$
$$-90s_1^2s_4+40s_3^2+90s_2s_4+144s_1s_5-120s_6.$$

788. $s_5=859$. 789. $s_8=13$. 790. $s_{10}=621$.

791. $s_1=-1$, $s_2=s_3=\ldots=s_n=0$.

792. Легко доказывается методом математической индукции при помощи соотношения
$$as_k+bs_{k-1}+cs_{k-2}=0,$$
где $s_k=x_1^k+x_2^k$.

793. $s_5-s_1^5=5(f_1^2-f_2)(f_3-f_1f_2)$; $s_3-s_1^3=3(f_3-f_1f_2)$.

794. $s_5=-5f_2f_3$; $s_3=3f_3$; $s_2=-2f_2$.

795. $s_7=-7f_2f_5$; $s_2=-2f_2$; $s_5=5f_5$.

796. $x^n-a=0$.

797. $x^n-\frac{a}{1}x^{n-1}+\frac{a^2}{1\cdot 2}x^{n-2}-\ldots+(-1)^n\frac{a^n}{n!}=0$.

798. $x^n+\frac{P_1(\alpha)}{1}x^{n-1}+\frac{P_2(\alpha)}{2!}x^{n-2}+\ldots+\frac{P_n(\alpha)}{n!}=0$, где $P_1, P_2, \ldots$

$\ldots, P_n$ — полиномы Эрмита: $P_k(x)=(-1)^k e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^k e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^k}$, α — корень полинома Эрмита $P_{n+1}(x)$.

Решение. Пусть искомое уравнение имеет вид
$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0.$$
силу формул Ньютона
$$a_1=\alpha,$$
$$2a_2=\alpha a_1-1,$$
$$3a_3=\alpha a_2-a_1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$ka_k=\alpha a_{k-1}-a_{k-2},$$
$$\cdots\cdots$$
$$na_n=\alpha a_{n-1}-a_{n-2},$$
$$0=\alpha a_n-a_{n-1}.$$

Из этих соотношений следует, что a_k есть полином степени k от α. Обозначим $k!\, a_k = P_k(\alpha)$. Тогда, считая $P_0 = 1$, получим

$$P_1 = \alpha \text{ и } P_k - \alpha P_{k-1} + (k-1) P_{k-2} = 0; \quad -\alpha P_n + n P_{n-1} = 0.$$

Первые соотношения показывают, что P_k есть полином Эрмита от α (см. задачу 707). Последнее дает $P_{n+1}(\alpha) = 0$.

799. $\frac{1}{2}(s_k^2 - s_{2k})$.

800. $$\sum_{i=1}^{n} (x+x_i)^k = \sum_{m=0}^{k} C_k^m s_{k-m} x^m;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_j + x_i)^k = \sum_{m=0}^{k} C_k^m s_{k-m} s_m;$$

$$\sum_{i<j} (x_i + x_j)^k = \frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{k} C_k^m s_{k-m} s_m - 2^k s_k\right).$$

801. $$\sum_{i<j} (x_i - x_j)^{2k} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{2k} C_{2k}^m (-1)^m s_m s_{2k-m}.$$

802. Второй столбец умножить на $-s_1$, третий на s_2, ..., k-й на $(-1)^{k-1} s_{k-1}$ и добавить к первому. В силу формул Ньютона получим:

$$\begin{vmatrix} f_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2f_2 & f_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (k-1) f_{k-1} & f_{k-2} & \dots & f_1 & 1 \\ k f_k & f_{k-1} & \dots & & f_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & f_{k-2} & f_{k-3} & \dots & 1 \\ (-1)^{k-1} s_k & f_{k-1} & f_{k-2} & \dots & f_1 \end{vmatrix} = s_k.$$

803. Второй столбец умножается на $-f_1$, третий на f_2, ..., k-й на $(-1)^{k-1} f_{k-1}$, и результаты прибавляются к первому столбцу. В силу формул Ньютона получается требуемый результат.

804. $n!\,(x^n - f_1 x^{n-1} + f_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^n f_n)$.

805. $\dfrac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{d}\right)} \mu\left(\frac{n}{d}\right)$, где d есть наибольший общий делитель m и n.

806. В силу результата задач 117, 119 достаточно рассмотреть случай $n = p_1 p_2 \dots p_k$, где $p_1, p_2, \dots, p_k$ — различные между собой нечетные простые числа. В этом случае $s_1 = s_2 = s_4 = (-1)^k$; $s_3 = 2(-1)^{k-1}$, если n делится на 3, и $s_3 = (-1)^k$, если n не делится

на 3. Вычисления по формулам Ньютона дают:

$$f_2=\frac{1-(-1)^k}{2};$$

$$f_3=\frac{(-1)^{k-1}-1}{2},\ \text{если } n \text{ делится на 3;}$$

$$f_3=\frac{(-1)^k-1}{2},\ \text{если } n \text{ не делится на 3;}$$

$$f_4=\frac{(-1)^{k-1}-1}{2},\ \text{если } n \text{ делится на 3;}$$

$$f_4=\frac{(-1)^{k-1}+1}{2},\ \text{если } n \text{ не делится на 3.}$$

807. $s_1=s_2=s_3=\ldots=s_n=a$. Следовательно, при $k\leqslant n$

$$kf_k=af_{k-1}-af_{k-2}+\ldots+(-1)^{k-1}f_1,$$

$$(k-1)f_{k-1}=\qquad af_{k-2}+\ldots+(-1)^{k-2}f_1,$$

откуда

$$kf_k=(a-k+1)f_{k-1},\quad f_k=\frac{a-k+1}{k}f_{k-1}.$$

Очевидно, $f_1=a$; следовательно,

$$f_2=\frac{a(a-1)}{1\cdot 2},\ \ldots,\ f_k=\frac{a(a-1)\ \ldots\ (a-k+1)}{1\cdot 2\ \ldots\ k},$$

и потому $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ являются корнями уравнения

$$x^n-\frac{a}{1}x^{n-1}+\frac{a(a-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}-\ldots+(-1)^n\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}=0;$$

$$s_{n+1}=a-\frac{a(1-a)(2-a)\ \ldots\ (n-a)}{n!}.$$

808. $(x-a)(x-b)[x^n+(a+b)x^{n-1}+\ldots+(a^n+a^{n-1}b+\ldots$
$\ldots+b^n)]=(x-a)[x^{n+1}+ax^n+a^2x^{n-1}+\ldots+a^nx-$
$-b(a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n)]=x^{n+2}-(a^{n+1}+a^nb+\ldots+b^{n+1})x+$
$+ab(a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n).$

Степенные суммы $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n$ для нового полинома, очевидно, равны нулю. Но $\sigma_k=s_k+a^k+b^k$. Следовательно, $s_k=-(a^k+b^k)$ для $1\leqslant k\leqslant n$.

809. $s_k=-a^k-b^k$ при нечетном k,

$$s_k=-\left(a^{\frac{k}{2}}-b^{\frac{k}{2}}\right)^2 \quad \text{при четном } k.$$

810. a) $(x+a)(x^2+ax+b)-c=0;$

b) $x(x-a^2+3b)^2-(a^2b^2-4a^3c-4b^3+18abc-27c^2)=0;$

c) $x^3+(3b-a^2)x^2+b(3b-a^2)x+b^3-a^2c=0;$

d) $x^2(x-a^2+3b)+(a^2b^2-4a^3c-4b^3+18abc-27c^2)=0;$

e) $x^3-(a^2-2b)x^2+(b^2-2ac)x-c^2=0;$

f) $x^3+(a^3-3ab+3c)x^2+(b^3-3abc+3c^2)x+c^3=0.$

811. $y^2+(2a^3-9ab+27c)y+(a^2-3b)^2=0.$

812. $y^2-\frac{ab-3c}{c}y+\frac{b^3+a^3c-6abc+9c^2}{c^2}=0.$

813. $$y^6-\frac{ab-3c}{c}y^5+\frac{b^3-5abc+6c^2}{c^2}y^4-$$
$$-\frac{a^2b^2-2b^3-2a^3b+6abc-7c^2}{c^2}y^3+\frac{b^3-5abc+6c^2}{c^2}y^2-$$
$$-\frac{ab-3c}{c}y+1=0.$$

814. a) $y^3-by^2+(ac-4d)y-(a^2d+c^2-4bd)=0$
(резольвента Феррари);

b) $y^3-(3a^2-8b)y^2+(3a^4-16a^2b+16b^2+16ac-64d)y-$
$-(a^3-4ab+8c)^2=0$
(резольвента Эйлера);

c) $y^6-by^5+(ac-d)y^4-(a^2d+c^2-2bd)y^3+$
$+d(ac-d)y^2-bd^2y+d^3=0;$

d) $y^6+3ay^5+(3a^2+2b)y^4+(a^3+4ab)y^3+$
$+(2a^2b+b^2+ac-4d)y^2+(ab^2+a^2c-4ad)y+$
$+(abc-a^2d-c^2)=0.$

815 $$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b+4y_1}\pm\sqrt{a^2-4b+4y_2}\pm\sqrt{a^2-4b+4y_3}}{4}.$$

Знаки квадратных корней должны выбираться так, чтобы их произведение равнялось $-a^3+4ab-8c$.

816.
$$x=\frac{\pm\sqrt{4a+\sqrt[3]{b^2-64a^3}}\pm\sqrt{4a+\varepsilon\sqrt[3]{b^2-64a^3}}\pm\sqrt{4a+\varepsilon^2\sqrt[3]{b^2-64a^3}}}{2},$$

$\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$. Знаки квадратных корней выбираются так, чтобы их произведение равнялось $-b$.

817. $(y+a)^4(y^2+6ay+25a^2)+3125b^4y=0.$

Решение. Корнями искомого уравнения являются:

$$y_1=(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)\,(x_1x_3+x_3x_5+x_5x_2+x_2x_4+x_4x_1);$$
$$y_2=(x_1x_3+x_3x_2+x_2x_5+x_5x_4+x_4x_1)\,(x_1x_2+x_2x_4+x_4x_3+x_3x_5+x_5x_1);$$
$$y_3=(x_5x_2+x_2x_4+x_4x_3+x_3x_1+x_1x_5)\,(x_5x_4+x_4x_1+x_1x_3+x_2x_3+x_3x_5);$$
$$y_4=(x_2x_1+x_1x_3+x_3x_5+x_5x_4+x_4x_2)\,(x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1+x_1x_5+x_5x_2);$$
$$y_5=(x_5x_3+x_3x_2+x_2x_4+x_4x_1+x_1x_5)\,(x_5x_2+x_2x_1+x_1x_3+x_3x_4+x_4x_5);$$
$$y_6=(x_2x_1+x_1x_4+x_4x_3+x_3x_5+x_5x_2)\,(x_2x_4+x_4x_5+x_5x_1+x_1x_3+x_3x_2).$$

Искомое уравнение, очевидно, имеет вид

$$y^6+c_1ay^5+c_2a^2y^4+c_3a^3y^3+c_4a^4y^2+(c_5a^5+c_6b^4)y+$$
$$+(c_7a^6+c_8ab^4)=0,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_8$ — абсолютные постоянные. Для их определения положим $a=-1$, $b=0$ и $a=0$, $b=-1$. Получим

a	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
-1	0	1	i	-1	$-i$	0	1	$3-4i$	1	1	$3+4i$	1
0	-1	1	ε	ε^2	ε^3	ε^4	0	-5	$-5\varepsilon^4$	$-5\varepsilon^3$	$-5\varepsilon^2$	-5ε

В первом случае искомое уравнение имеет вид:

$$(y-1)^4(y^2-6y+25)=0.$$

Во втором случае $y^6+3125y=0$. Отсюда мы определим все коэффициенты, кроме c_8. Легко проверить, что $c_8=0$. Для этого можно взять, например, $a=-5$, $b=4$. В этом случае $x_1=x_2=1$, а остальные корни удовлетворяют уравнению $x^3+2x^2+3x+4=0$, и все необходимые вычисления проводятся без труда.

818. Пусть $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые переменные. Пусть, далее,

$$x^{k-1}\varphi(x)=f(x)\,q_k(x)+r_k(x) \quad \text{и} \quad r_k(x)=c_{k1}+c_{k2}x+\ldots+c_{kn}x^{n-1}.$$

Коэффициенты c_{ks} суть, очевидно, некоторые полиномы от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Далее,

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} r_1(x_1) & r_1(x_2) & \ldots & r_1(x_n) \\ r_2(x_1) & r_2(x_2) & \ldots & r_2(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_n(x_1) & r_n(x_2) & \ldots & r_n(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi(x_1) & \varphi(x_2) & \ldots & \varphi(x_n) \\ x_1\varphi(x_1) & x_2\varphi(x_2) & \ldots & x_n\varphi(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1}\varphi(x_1) & x_2^{n-1}\varphi(x_2) & \ldots & x_n^{n-1}\varphi(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

откуда следует

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)=R(f, \varphi).$$

Последнее равенство есть тождество между полиномами от независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и потому остается верным при всех частных значениях этих переменных.

819. Прежде всего убедимся в том, что все полиномы $\psi_k(x)$ имеют степень $n-1$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
f_k(x) &= a_0x^{k-1}+\ldots+a_{k-1};\\
\bar{f}_k(x) &= a_kx^{n-k}+\ldots+a_n;\\
\varphi_k(x) &= b_0x^{k-1}+\ldots+b_{k-1};\\
\bar{\varphi}_k(x) &= b_kx^{n-k}+\ldots+b_n.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{n-k+1}f_k(x)+\bar{f}_k(x);\\
\varphi(x) &= x^{n-k+1}\varphi_k(x)+\bar{\varphi}_k(x);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_k(x) = f_k(x)\,[x^{n-k+1}\varphi_k(x)+\bar{\varphi}_k(x)] - {}\\
-\varphi_k(x)\,[x^{n-k+1}f_k(x)+\bar{f}_k(x)] = f_k(x)\,\bar{\varphi}_k-\varphi_k\bar{f}_k(x) = {}\\
=(a_0b_k-b_0a_k)\,x^{n-1}+\ldots
\end{aligned}$$

Пусть $\psi_k(x)=c_{k1}+c_{k2}x+\ldots+c_{kn}x^{n-1}$ и пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни полинома $f(x)$. Тогда

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1\\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \psi_1(x_1) & \psi_1(x_2) & \ldots & \psi_1(x_n)\\ \psi_2(x_1) & \psi_2(x_2) & \ldots & \psi_2(x_n)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \psi_n(x_1) & \psi_n(x_2) & \ldots & \psi_n(x_n)\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} f_1(x_1)\varphi(x_1) & f_1(x_2)\varphi(x_2) & \ldots & f_1(x_n)\varphi(x_n)\\ f_2(x_1)\varphi(x_1) & f_2(x_2)\varphi(x_2) & \ldots & f_2(x_n)\varphi(x_n)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ f_n(x_1)\varphi(x_1) & f_n(x_2)\varphi(x_2) & \ldots & f_n(x_n)\varphi(x_n)\end{vmatrix}=$$

$$=\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)\cdot\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \ldots & f_1(x_n)\\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \ldots & f_2(x_n)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \ldots & f_n(x_n)\end{vmatrix}=$$

$$=\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)\times$$

$$\times\begin{vmatrix} a_0 & 0 & \ldots & 0\\ a_1 & a_0 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1\\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=$$

$$=\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)\,a_0^n\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1\\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1}\end{vmatrix},$$

откуда следует

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = a_0^n \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n) = R(f, \varphi).$$

820. Полиномы χ_k имеют степени не выше $n-1$. Это очевидно для $1 \leqslant k \leqslant n-m$, а для $k > n-m$ это следует из того, что χ_k суть полиномы Безу ψ_{k-n+m} для $f(x)$ и $x^{n-m}\varphi(x)$. Пусть $\chi_k(x) = c_{k1} + c_{k2}x + \dots + c_{kn}x^{n-1}$ и

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \Delta = \begin{vmatrix} \chi_1(x_1) & \chi_1(x_2) & \dots & \chi_1(x_n) \\ \chi_2(x_1) & \chi_2(x_2) & \dots & \chi_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_n(x_1) & \chi_n(x_2) & \dots & \chi_n(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-m-1} & x_2^{n-m-1} & \dots & x_n^{n-m-1} \\ x_1^{n-m} f_0(x_1) & x_2^{n-m} f_0(x_2) & \dots & x_n^{n-m} f_0(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-m} f_{m-1}(x_1) & x_2^{n-m} f_{m-1}(x_2) & \dots & x_n^{n-m} f_{m-1}(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n)\Delta \cdot \begin{vmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & a_0 & & & \\ & & & & a_1 & a_0 & & \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & a_{m-1} & a_{m-2} & \dots & a_0 \end{vmatrix} =$$

$$= a_0^m \varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)\Delta,$$

откуда непосредственно следует требуемый результат.

821. a) -7; b) 243; c) 0; d) -59; e) 4854; f) $(b_0a_2 - b_2a_0)^2 - (b_0a_1 - b_1a_0)(b_1a_2 - b_2a_1)$.

822. a) При $\lambda=3$ и $\lambda=-1$;

b) $\lambda=1$, $\lambda=\dfrac{-2+\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$,

$$\lambda=\frac{-2-\sqrt{2}\pm i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2};$$

c) $\lambda=\pm\sqrt{-2}$, $\lambda=\pm\sqrt{-12}$.

823. a) $y^6-4y^4+3y^2-12y+12=0$;

b) $5y^5-7y^4+6y^3-2y^2-y-1=0$; c) $y^3+4y^2-y-4=0$.

824. a) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=0$, $x_4=-2$,
$y_1=2$; $y_2=3$; $x_3=-1$; $y_4=1$.

b) $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=2$, $x_4=2$,
$y_1=1$; $y_2=0$; $y_3=2$; $y_4=-1$.

c) $x_1=x_2=1$, $x_3=-1$, $x_4=2$,
$y_1=y_2=-1$; $y_3=1$; $y_4=2$.

d) $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=-1$, $x_4=-1$, $x_{5,6}=2$,
$y_1=1$; $y_2=3$; $y_3=2$; $y_4=3$; $y_{5,6}=1\pm i\sqrt{2}$.

e) $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=x_5=2$, $x_6=-4$,
$y_1=2$; $y_2=-2$; $y_3=0$; $y_4=y_5=2$; $y_6=2$;
$x_7=4$, $x_8=-6$, $x_9=-{}^2/_3$,
$y_7=6$; $y_8=4$; $y_9={}^4/_3$.

825. $a_0^n a_n^{n-1}$.

826. Пусть $f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$;
$\varphi_1(x)=b_0x^k+\ldots+b_k$; $\varphi_2(x)=c_0x^m+\ldots+c_m$.

Тогда

$$R(f,\ \varphi_1\cdot\varphi_2)=a_0^{m+k}\prod_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)\,\varphi_2(x_i)=$$

$$=\left[a_0^m\prod_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)\right]\left[a_0^k\prod_{i=1}^{n}\varphi_2(x_i)\right]=R(f,\ \varphi_1)\cdot R(f,\ \varphi_2).$$

827. Интересно рассмотреть только случай $n>2$. Обозначим через d наибольший общий делитель m и n; $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — первообразные корни из единицы степени n; $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — первообразные корни из единицы степени $\dfrac{n}{d}=n_1$. Тогда

$$R(X_n,\ x^m-1)=\prod(\xi_i^m-1)=\prod(1-\xi_i^m)=$$

$$=\left[\prod(1-\eta_i)\right]^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(n_1)}}=[X_{n_1}(1)]^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(n_1)}}.$$

Если m делится на n, то $R(X_n,\ x^m-1)=0$. Если же m не делится на n, то $n_1\neq 1$ и, в силу задачи 123, $X_{n_1}(1)=1$ при $n_1\neq p^\lambda$, $X_{n_1}(1)=p$ при $n_1=p^\lambda$ (p — простое число). Итак,

$$R(X_n,\ x^m-1)=0 \quad\text{при}\quad n_1=\frac{n}{d}=1;$$

$$R(X_n,\ x^m-1)=p^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(n_1)}} \quad\text{при}\quad n_1=\frac{n}{d}=p^\lambda;$$

$R(X_n,\ x^m-1)=1$ во всех остальных случаях.

828. Очевидно, что $R(X_n, X_m)$ есть целое положительное число, являющееся делителем $R(X_n, x^m-1)$ и $R(X_m, x^n-1)$. Обозначим через d наибольший общий делитель m и n. Если m не делится на n и n не делится на m, то $\frac{m}{d}$ и $\frac{n}{d}$ отличны от 1 и взаимно просты. В силу результата предыдущей задачи, $R(X_n, x^m-1)$ и $R(X_m, x^n-1)$ в этом случае взаимно просты, и потому $R(X_n, X_m)=1$.

Остается рассмотреть случай, когда одно из чисел m, n делится на другое. Допустим, для определенности, что m делится на n.

Если $m=n$, то $R(X_m, X_n)=0$. Если $\frac{m}{n}$ не является степенью простого числа, то $R(X_m, x^n-1)=1$ и, следовательно, $R(X_m, X_n)=1$. Допустим, наконец, что $m=np^\lambda$. Тогда

$$R(X_m, X_n)=\prod_{\delta/n} R(X_m, x^\delta-1)^{\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}.$$

Все множители правой части равны единице, кроме тех, для которых $\frac{m}{\delta}$ есть степень числа p.

Если n не делится на p, то отличный от единицы множитель останется только один при $\delta=n$ и

$$R(X_m, X_n)=R(X_m, x^n-1)=p^{\frac{\varphi(m)}{\varphi(m/n)}}=p^{\varphi(n)}.$$

Если n делится на p, то отличных от единицы множителей останется два: при $\delta=n$ и $\delta=\frac{n}{p}$. Тогда

$$R(X_m, X_n)=\frac{R(X_m, x^n-1)}{R(X_m, x^{n/p}-1)}=p^{\frac{\varphi(m)}{\varphi(m/n)}-\frac{\varphi(m)}{\varphi(mp/n)}}=$$

$$=p^{\varphi(m)\left[\frac{1}{p^{\lambda-1}(p-1)}-\frac{1}{p^\lambda(p-1)}\right]}=p^{\frac{\varphi(m)}{p^\lambda}}=p^{\varphi(n)}.$$

Итак,

$$R(X_m, X_n)=0 \quad \text{при } m=n;$$
$$R(X_m, X_n)=p^{\varphi(n)} \quad \text{при } m=np^\lambda;$$
$$R(X_m, X_n)=1 \text{ в остальных случаях.}$$

829. a) 49; b) -107; c) -843; d) 725; e) 2777.

830. a) $3125(b^2-4a^5)^2$; b) $\lambda^4(4\lambda-27)^3$;
c) $(b^2-3ab+9a^2)^2$; d) $4(\lambda^2-8\lambda+32)^3$.

831. a) $\lambda=\pm 2$; b) $\lambda_1=3$, $\lambda_{2,3}=3\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$;
c) $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=125$;
d) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-\frac{3}{2}$, $\lambda_{3,4}=\frac{7}{2}\pm\frac{9}{2}i\sqrt{3}$.

832. В общем случае, если дискриминант положителен, то число пар сопряженных комплексных корней четное, если дискриминант отрицателен,— то нечетное.

В частности, для полинома третьей степени, если $D > 0$, то все корни вещественны, если $D < 0$, то два корня комплексно сопряженные.

Для полинома четвертой степени при $D > 0$ или все корни вещественные, или все корни комплексные. При $D < 0$ имеется два вещественных корня и одна пара сопряженных комплексных.

833. $f = x^n + a$; $f' = nx^{n-1}$;

$$R(f', f) = n^n a^{n-1}; \quad D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n a^{n-1}.$$

834. $f = x^n + px + q$; $f' = nx^{n-1} + p$;

$$R(f', f) = n^n \prod_{k=0}^{n-2} \left(q + \frac{n-1}{n} p \sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}\, \varepsilon^k\right),$$

где $\varepsilon = \cos \dfrac{2\pi}{n-1} + i \sin \dfrac{2\pi}{n-1}$.

$$R(f', f) = n^n \left[q^{n-1} + \frac{(n-1)^{n-1} p^{n-1}}{n^{n-1}} \cdot \left(-\frac{p}{n}\right)(-1)^{n-2}\right] =$$
$$= n^n q^{n-1} + (-1)^{n-1} (n-1)^{n-1} p^n;$$

$$D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n q^{n-1} + (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (n-1)^{n-1} p^n.$$

835. Пусть наибольший общий делитель m и n равен d. Введем обозначения: $m_1 = \dfrac{m}{d}$, $n_1 = \dfrac{n}{d}$, ε — первообразный корень n-й степени из 1, η — первообразный корень n_1-й степени из 1, $a_0 x^{m+n} + a_1 x^m + a_2 = f(x)$. Тогда $f'(x) = (m+n) a_0 x^{m+n-1} + m a_1 x^{m-1}$. Корни производной суть: $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_{m-1} = 0$,

$$\xi_{m+k} = \sqrt[n]{-\frac{m a_1}{(m+n) a_0}}\, \varepsilon^k = \xi_m \varepsilon^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Далее,

$$R(f', f) = (m+n)^{m+n} a_0^{m+n} a_2^{m-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left[a_2 + \frac{n a_1}{m+n} \xi_m^m \varepsilon^{km}\right] =$$
$$= (m+n)^{m+n} a_0^{m+n} a_2^{m-1} \left[\prod_{k=0}^{n_1-1} \left(a_2 + \frac{n a_1}{m+n}\right) \xi_m \eta^k\right]^d =$$
$$= (m+n)^{m+n} a_0^{m+n} a_2^{m-1} \left[a_2^{n_1} + (-1)^{m_1+n_1-1} \frac{n^{n_1} m^{m_1} a_1^{m_1+n_1}}{(m+n)^{m_1+n_1} a_0^{m_1}}\right]^d =$$
$$= a_0^n a_2^{m-1} \left[(m+n)^{m_1+n_1} a_0^{m_1} a_2^{n_1} + (-1)^{m_1+n_1-1} n^{n_1} m^{m_1} a_1^{m_1+n_1}\right]^d$$

и, следовательно,

$$D(f) = (-1)^{\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}} a_0^{n-1} a_2^{m-1} \left[(m+n)^{m_1+n_1} a_0^{m_1} a_2^{n_1} + \right.$$
$$\left. + (-1)^{m_1+n_1-1} n^{n_1} m^{m_1} a_1^{m_1+n_1}\right]^d.$$

836. Дискриминанты равны.

837. $x_1x_2 + x_3x_4 - x_1x_3 - x_2x_4 = (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)$;
$x_1x_3 + x_2x_4 - x_1x_4 - x_2x_3 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)$;
$x_1x_4 + x_2x_3 - x_1x_2 - x_3x_4 = (x_1 - x_3)(x_4 - x_2)$.

Возведя эти равенства в квадрат и перемножив их, получим требуемый результат.

838. Пусть $f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$. Тогда

$$D(f(x)(x-a))=a_0^{2n}(a-x_1)^2(a-x_2)^2\ldots$$
$$\ldots(a-x_n)^2\prod_{i<k}(x_i-x_k)^2=D(f(x))[f(a)]^2.$$

839. Обозначим $\varphi(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1$. Тогда $(x-1)\varphi(x)=$ $=x^n-1$, откуда следует

$$D(\varphi)[\varphi(1)]^2=D(x^n-1)=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n^n.$$

Следовательно,

$$D(\varphi)=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n^{n-2}.$$

840. Пусть $\varphi(x)=x^n+ax^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a$. Тогда $\varphi(x)(x-1)=x^{n+1}+(a-1)x^n-a$. Следовательно,

$$(na+1)^2D(\varphi)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a^{n-1}[(n+1)^{n+1}a+n^n(1-a)^{n+1}].$$

Итак,

$$D(\varphi)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a^{n-1}\frac{(n+1)^{n+1}a+n^n(1-a)^{n+1}}{(1+na)^2}.$$

841. Пусть $f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$,
$\varphi(x)=b_0(x-y_1)(x-y_2)\ldots(x-y_m)$.

Тогда

$$D(f\varphi)=(a_0b_0)^{2m+2n-2}\prod_{i<k}(x_i-x_k)^2\prod_{i<k}(y_i-y_k)^2\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(x_i-y_k)^2=a_0^{2n-2}\prod_{i<k}(x_i-x_k)^2\,b_0^{2m-2}\times$$
$$\times\prod_{i<k}(y_i-y_k)^2\left[a_0^mb_0^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(x_i-y_k)\right]^2=D(f)D(\varphi)[R(f,\varphi)]^2.$$

842. $X_{p^m}(x^{p^{m-1}}-1)=x^{p^m}-1$. Следовательно,

$$D(X_{p^m})D(x^{p^{m-1}}-1)[R(x^{p^{m-1}}-1,X_{p^m})]^2=D(x^{p^m}-1).$$

Подставив значения известных величин, получим

$$D(X_{p^m})=p^{mp^m-(m+1)p^{m-1}}(-1)^{\frac{1}{2}p^{m-1}(p-1)}.$$

843. $X_n\prod_{\delta/n}(x^\delta-1)^{\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}=(x^n-1)\prod_{\substack{\delta/n\\ \delta\neq n}}(x^\delta-1)^{\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}$. Пусть ε — корень X_n. Тогда $X_n'(\varepsilon)=n\varepsilon^{n-1}\prod_{\substack{\delta/n\\ \delta\neq n}}(\varepsilon^\delta-1)^{\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}$.

Для упрощения вычислений найдем сначала абсолютную величину дискриминанта X_n:

$$|D(X_n)| = \prod_{\varepsilon} |X_n'(\varepsilon)| = n^{\varphi(n)} \prod_{\substack{\delta/n \\ \delta \neq n}} \prod_{\varepsilon} (1-\varepsilon^{\delta})^{\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)} =$$

$$= n^{\varphi(n)} \prod_{\substack{\delta/n \\ \delta \neq n}} \left[X_{\frac{n}{\delta}}(1) \right]^{\frac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{\delta}\right)} \mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}.$$

Далее, $X_{\frac{n}{\delta}}(1)$ отлично от 1, только если $\frac{n}{\delta}$ есть степень простого числа. С другой стороны, $\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)$ отлично от 0, только если $\frac{n}{\delta}$ не делится на квадрат простого числа. Следовательно, в последнем произведении нужно сохранить только множители, соответствующие $\frac{n}{\delta} = p_1, p_2, \ldots, p_k$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые делители числа n.

Итак,

$$|D(X_n)| = \frac{n^{\varphi(n)}}{\prod\limits_{p/n} p^{\varphi(n)/p-1}}.$$

Ввиду того, что все корни X_n комплексны, знак дискриминанта равен $(-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}}$. Окончательно

$$D(X_n) = (-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}} \frac{n^{\varphi(n)}}{\prod\limits_{p/n} p^{\varphi(n)/p-1}}.$$

844. $E_n = n!\left(1 + \frac{x}{1} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$,

$$E_n' = n!\left(1 + \frac{x}{1} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right).$$

Следовательно,

$$E_n' = E_n - x^n;$$

$$R(E_n, E_n') = \prod_{i=1}^{n} (-x_i)^n = (-1)^n [(-1)^n n!]^n = (n!)^n;$$

$$D(E_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n!)^n.$$

845. Нетрудно установить, что

$$(nx+n-a) F_n - x(x+1) F_n' + \frac{a(a-1)\ldots(a-n)}{n!} = 0.$$

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни F_n. Тогда

$$F'_n(x_i)=\frac{c}{x_i(x_i+1)}, \text{ где } c=\frac{a(a-1)\ldots(a-n)}{n!}.$$

Следовательно,

$$R(F_n, F'_n)=$$

$$=\frac{c^n}{\Pi x_i \Pi(x_i+1)}=\frac{c^n}{\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}\cdot\frac{(a-1)\ldots(a-n)}{n!}}=$$

$$=\frac{a^{n-1}(a-1)^{n-2}(a-2)^{n-2}\ldots(a-n+1)^{n-2}(a-n)^{n-1}}{(n!)^{n-2}};$$

$$D(F_n)=$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{a^{n-1}(a-1)^{n-2}(a-2)^{n-2}\ldots(a-n+1)^{n-2}(a-n)^{n-1}}{(n!)^{n-2}}.$$

846. $P'_n=nP_{n-1}$. Следовательно,

$$R(P_n, P'_n)=n^nR(P_n, P_{n-1}).$$

Далее,

$$P_n-xP_{n-1}+(n-1)P_{n-2}=0.$$

Следовательно, $P_n(\xi)=-(n-1)P_{n-2}(\xi)$, если ξ есть корень P_{n-1}, и потому

$$R(P_n, P_{n-1})=(-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}R(P_{n-2}, P_{n-1})=$$
$$=(-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}R(P_{n-1}, P_{n-2}).$$

Теперь легко установить, что

$$R(P_n, P_{n-1})=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)^{n-1}(n-2)^{n-2}\ldots2^2\cdot1.$$

Окончательно

$$D(P_n)=1\cdot2^2\cdot3^3\ldots(n-1)^{n-1}n^n.$$

847. $D(P_n)=1\cdot2^3\cdot3^5\ldots n^{2n-1}$.

848. $D(P_n)=2^{n-1}n^n$.

849. $D(P_n)=(n+1)^{n-1}\cdot2^{n(n-1)}$.

850. $D(P_n)=1\cdot2^3\cdot3^5\ldots n^{2n-1}\cdot1^{2(n-1)}\cdot3^{2(n-2)}\ldots(2n-3)^2$.

851. $D(P_n)=2^2\cdot3^4\ldots n^{2n-2}\cdot(n+1)^{n-1}$.

852. Пусть $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=$

$$=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

$D(f)=\Pi(x_i-x_k)^2$. Ищем максимум $D(f)$ по правилу отыскания относительного максимума, решая систему уравнений

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=n(n-1)R^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(D-\lambda(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2))=0.$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial D}{\partial x_i}=\frac{Df''(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Таким образом, имеем

$$f''(x)D-2\lambda x_if'(x_i)=0 \text{ при } i=1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, полином $f(x)$, дающий максимум дискриминанту, должен удовлетворять дифференциальному уравнению

$$cf(x)-2\lambda xf'(x)+Df''(x)=0,$$

где c — некоторая константа. Поделив на $\frac{c}{n}$ и сравнив коэффициенты при x^n, получим, что дифференциальное уравнение должно иметь вид

$$nf(x)-xf'(x)+c'f''(x)=0,$$

где c' — некоторая новая константа.

Сравнивая коэффициенты при x^{n-1} и x^{n-2}, находим $a_1=0$, $a_2=-\frac{n(n-1)}{2}c'$. Теперь мы можем определить c'. Действительно,

$n(n-1)R^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=a_1^2-2a_2=n(n-1)c'$, откуда $c'=R^2$.

Продолжая сравнение коэффициентов, находим, что $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=x^n-\frac{n(n-1)}{2}R^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4}R^4x^{n-4}-\ldots$$

Легко видеть, что

$$f(x)=R^nP_n\left(\frac{x}{R}\right),$$

где P_n — полином Эрмита.

$$D(f)=R^{n(n-1)}\cdot 1\cdot 2^2\cdot 3^3\ldots n^n.$$

Это и есть искомый максимум дискриминанта.

853. $2^{2n}(-1)^n a_0 a_n [D(f)]^2$.

854. $m^{mn}(-1)^{\frac{m(m-1)n}{2}}a_0^{m-1}a_n^{m-1}[D(f)]^m$.

855. $F(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}(\varphi(x)-x_i)$.

Следовательно,

$$D(F)=\prod_{i=1}^{n}D(\varphi(x)-x_i)\left[\prod_{i<k}R(\varphi(x)-x_i,\ \varphi(x)-x_k)\right]^2.$$

Очевидно далее, что

$$R(\varphi(x)-x_i,\ \varphi(x)-x_k)=(x_i-x_k)^m.$$

Поэтому

$$D(F)=\prod_{i=1}^{n}D(\varphi(x)-x_i)\prod_{i<k}(x_i-x_k)^{2m}=[D(f)]^m\prod_{i=1}^{n}D(\varphi(x)-x_i),$$

что и требовалось доказать.

856. $(y+1)(y-5)(y-19)=0$.

857. а) Решение. $x^3=3x+4$. Пусть $y=1+x+x^2$, где x — корень данного уравнения. Тогда

$$yx=x+x^2+x^3=x+x^2+3x+4=4+4x+x^2;$$
$$yx^2=4x+4x^2+x^3=4x+4x^2+3x+4=4+7x+4x^2.$$

Исключая x, получим

$$\begin{vmatrix} 1-y & 1 & 1 \\ 4 & 4-y & 1 \\ 4 & 7 & 4-y \end{vmatrix} = 0,$$

$$y^3-9y^2+9y-9=0;$$

b) $y^3-7y^2+3y-1=0$;
c) $y^4+5y^3+9y^2+7y-6=0$;
d) $y^4-12y^3+43y^2-49y+20=0$.

858. a) $y^3-2y^2+6y-4=0,\ \ x=-\dfrac{y^2-2y+4}{2}$;

b) $y^4-9y^3+31y^2-45y+13=0,\ \ x=\dfrac{y^2-3y+2}{3}$;

c) $y^4+2y^3-y^2-2y+1=0$, обратное преобразование не существует.

859. $y^3-y^2-2y+1=0$.

Преобразованное уравнение совпадает с исходным. Это значит, что среди корней исходного уравнения существуют корни x_1 и x_2, связанные соотношением $x_2=2-x_1^2$.

860. Пусть $x_2=\varphi(x_1)$, где $\varphi(x_1)$ — рациональная функция с рациональными коэффициентами. Без нарушения общности можно считать, что $x_2=ax_1^2+bx_1+c$. Числа $ax_1^2+bx_1+c$, $ax_2^2+bx_2+c$, $ax_3^2+bx_3+c$ являются корнями кубического уравнения с рациональными коэффициентами, один из корней которого совпадает с корнем $x_2=ax_1^2+bx_1+c$ данного уравнения. В силу неприводимости данного уравнения, должны совпадать и остальные корни. Следовательно, или $ax_2^2+bx_2+c=x_3$, $ax_3^2+bx_3+c=x_1$, или $ax_2^2+bx_2+c=x_1$, $ax_3^2+bx_3+c=x_3$. Последнее равенство невозможно, так как x_3 не может быть корнем квадратного уравнения с рациональными коэффициентами. Итак, при нашем предположении корни данного уравнения связаны соотношениями:

$$x_2=ax_1^2+bx_1+c;$$
$$x_3=ax_2^2+bx_2+c;$$
$$x_1=ax_3^2+bx_3+c.$$

Следовательно,

$$\sqrt{D}=(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_1-x_3)=$$
$$=\left[ax_1^2+(b-1)x_1+c\right]\left[ax_2^2+(b-1)x_2+c\right]\left[ax_3^2+(b-1)x_3+c\right]$$

есть рациональное число как симметрическая функция с рациональными коэффициентами от x_1, x_2, x_3. Необходимость условия доказана.

Допустим теперь, что дискриминант D есть квадрат рационального числа d. Тогда

$$x_2-x_3=\frac{d}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{d}{3x_1^2+2ax_1+b}.$$

С другой стороны,

$$x_2+x_3=-a-x_1.$$

Отсюда следует, что x_2 и x_3 являются рациональными функциями от x_1. Достаточность условия доказана.

861. a) $\dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$;

b) $\dfrac{-3+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}{23}$;

c) $1+3\sqrt[4]{2}+2\sqrt{2}-\sqrt[4]{8}$.

862. a) $\dfrac{\alpha^2-\alpha+1}{3}$; b) $17\alpha^2-3\alpha+55$; c) $3-10\alpha+8\alpha^2-3\alpha^3$;

d) знаменатель обращается в 0 при одном из корней уравнения.

863. $mx_1^2+nx_1+p=$

$$=\frac{(pm-bm^2+amn-n^2)\,x_1+(amp-np-cm^2)}{mx_1+ma-n}.$$

864. Если

$$x_2=\frac{\alpha x_1+\beta}{\gamma x_1+\delta},$$

то

$$x_3=\frac{\alpha x_2+\beta}{\gamma x_2+\delta},$$

$$x_1=\frac{\alpha x_3+\beta}{\gamma x_3+\delta}=\frac{(\alpha^2+\beta\gamma)\,x_2+(\alpha+\delta)\,\beta}{(\alpha+\delta)\,\gamma x_2+(\beta\gamma+\delta^2)}.$$

С другой стороны, $x_1=\dfrac{-\delta x_2+\beta}{\gamma x_2-\alpha}$, откуда следует необходимость соотношения

$$\alpha\delta-\beta\gamma=(\alpha+\delta)^2.$$

865. Пусть

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=a_0\,(x-x_1)\,(x-x_2)\;\ldots\;(x-x_n).$$

Тогда

$$a_0x^n-a_1x^{n-1}+\ldots+(-1)^n\,a_n=a_0\,(x+x_1)\,(x+x_2)\ldots(x+x_n).$$

Перемножив эти равенства, получим

$$a_0^2\,(x^2-x_1^2)\,(x^2-x_2^2)\ldots(x^2-x_n^2)=$$
$$=(a_0x^n+a_2x^{n-2}+\ldots)^2-(a_1x^{n-1}+a_3x^{n-3}+\ldots)^2.$$

Отсюда заключаем, что для того чтобы выполнить преобразование $y=x^2$, нужно заменить x^2 на y в уравнении

$$(a_0x^n+a_2x^{n-2}+\ldots)^2-(a_1x^{n-1}+a_3x^{n-3}+\ldots)^2=0.$$

866. Искомое уравнение получится посредством замены x^3 на y в уравнении

$$(a_0x^n+a_3x^{n-3}+\ldots)^3+(a_1x^{n-1}+a_4x^{n-4}+\ldots)^3+$$
$$+(a_2x^{n-2}+a_5x^{n-5}+\ldots)^3-3\,(a_0x^n+a_3x^{n-3}+\ldots)\times$$
$$\times(a_1x^{n-1}+a_4x^{n-4}+\ldots)\,(a_2x^{n-2}+a_5x^{n-5}+\ldots)=0.$$

867. Существует лишь конечное число полиномов $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots$ с целыми коэффициентами, модули корней которых не превосходят 1, ибо коэффициенты таких полиномов, очевидно, ограничены:

$$|a_k|\leqslant\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Пусть $f=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, $a_n\neq 0$, — один из таких полиномов и пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — его корни. Обозначим $f_m=(x-x_1^m)\times\times(x-x_2^m)\ldots(x-x_n^m)$. Все полиномы f_m имеют целые коэффициенты и все их корни не превосходят 1 по модулю. Следовательно, среди них есть только конечное число различных. Выберем такую бесконечную последовательность целых чисел $m_0<m_1<m_2<\ldots$, что $f_{m_0}=f_{m_1}=f_{m_2}=\ldots$ Это значит, что

$$x_1^{m_i}=x_{\alpha_1}^{m_0},$$
$$x_2^{m_i}=x_{\alpha_2}^{m_0},$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$x_n^{m_i}=x_{\alpha_n}^{m_0},$$

где $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — некоторая перестановка номеров $1, 2, \ldots, n$. Ввиду того, что показателей m_i бесконечно много, а перестановок лишь конечное число, найдутся два (и бесконечно много) показателя m_{i_1} и m_{i_2}, которым соответствует одна и та же перестановка $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Для таких показателей имеют место равенства:

$$x_1^{m_{i_1}}=x_1^{m_{i_2}};$$
$$x_2^{m_{i_1}}=x_2^{m_{i_2}};$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$x_n^{m_{i_1}}=x_n^{m_{i_2}},$$

показывающие, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть корни степени $m_{i_2}-m_{i_1}$ из единицы, ибо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ отличны от нуля в силу условия $a_n\neq 0$.

868. Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — полином, меняющий знак при нечетных перестановках переменных. Так как $F(x_2, x_2, x_3, \ldots, x_n)=-F(x_2, x_2, \ldots, x_n)=0$, $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ делится на x_1-x_2. Аналогично доказывается, что $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ делится на все разности x_i-x_k. Следовательно, $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ делится на $\Delta=\prod\limits_{i>k}(x_i-x_k)$, равное определителю Вандермонда. Ввиду того, что определитель Δ меняет знак при нечетных перестановках переменных, $\frac{F}{\Delta}$ — симметрический полином.

869. Пусть $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — полином, не меняющийся при четных перестановках переменных. Обозначим через $\overline{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ полином, получающийся из $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ посредством какой-либо определенной нечетной перестановки.

Нетрудно проверить, что при каждой нечетной перестановке φ переходит в $\overline{\varphi}$, $\overline{\varphi}$ в φ. Следовательно, $\varphi+\overline{\varphi}$ не меняется при всех перестановках, $\varphi-\overline{\varphi}$ меняет знак при нечетных перестановках. Далее,

$$\varphi=\frac{\varphi+\overline{\varphi}}{2}+\frac{\varphi-\overline{\varphi}}{2}=F_1+F_2\Delta,$$

где Δ — определитель Вандермонда. На основании результата задачи 868 F_2 есть симметрический полином; F_1 — тоже симметрический полином, так как не меняется при всех перестановках переменных.

870. $\left(f_1^2-f_2\right)\Delta$, где f_1, f_2 — основные симметрические полиномы от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

871. $u^3+a(\alpha+\beta+\gamma)u^2+[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)b+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\times$
$\times(a^2-b)]u+c(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+\frac{ab-3c}{2}(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+$

$$+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2)+\alpha\beta\gamma(a^3-3ab+6c)+\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{2}\sqrt{\Delta}=0,$$

где Δ — дискриминант данного уравнения.

872. $u^3-3pp'u-\frac{27qq'+\sqrt{\Delta\Delta'}}{2}=0$, где Δ и Δ' — дискриминанты данных уравнений.

873. Пусть $y=ax^2+bx+c$ — преобразование Чирнгаузена, связывающее данные уравнения. Тогда при некотором выборе нумерации $x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=a\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)+b\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+c(x_1+x_2+x_3)$ будет рациональным числом. Следовательно, одно из уравнений

$$u^3-3pp'u-\frac{27qq'\pm\sqrt{\Delta\Delta'}}{2}=0$$

(задача 872) имеет рациональный корень. Отсюда следует, что $\sqrt{\Delta\Delta'}$ будет рациональным числом. Необходимость условия доказана.

Обратно, пусть уравнение

$$u^3-3pp'u-\frac{27qq'\pm\sqrt{\Delta\Delta'}}{2}=0 \qquad (*)$$

имеет рациональный корень u.

Нетрудно убедиться в том, что дискриминант уравнения (*) равен $\frac{27^2}{4}\left(q\sqrt{\Delta'}-\sqrt{\Delta}\,q'\right)^2$ и, следовательно, отличается от $\sqrt{\Delta}$ множителем, равным квадрату рационального числа. Следовательно, разность $u'-u''$ второго и третьего корней уравнения отличается рациональным множителем от $\sqrt{\Delta}$.

Для y_1, y_2, y_3 имеем систему уравнений:

$$\begin{gathered}y_1+y_2+y_3=0,\\ x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=u,\\ (x_2-x_3)y_1+(x_3-x_1)y_2+(x_1-x_2)y_3=u'-u''=r\sqrt{\Delta}.\end{gathered}$$

Из этой системы находим

$$y_1=\frac{-3ux_1+(x_2-x_3)r\sqrt{\Delta}}{6p}.$$

Но $(x_2-x_3)\sqrt{\Delta}$ выражается рационально через x_1. Достаточность условий доказана.

874. Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно выразить линейно через f_1, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$. Следовательно, каждый полином от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно представить в виде полинома от $f_1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum A f_1^{\alpha_0}\eta_1^{\alpha_1}\eta_2^{\alpha_2}\ldots\eta_{n-1}^{\alpha_{n-1}}.$$

При круговой перестановке переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ одночлен $Af_1^{\alpha_0}\eta_1^{\alpha_1}\eta_2^{\alpha_2}\ldots\eta_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$ приобретает множитель $\varepsilon^{-(\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+(n-1)\alpha_{n-1})}$. Следовательно, для того чтобы $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не менялся при круговых перестановках переменных, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+(n-1)\alpha_{n-1}$ делилось на n.

875. Можно взять $f_1, \eta_1^n, \eta_2\eta_1^{-2}, \ldots, \eta_{n-1}\eta_1^{-(n-1)}$.

876. Пусть $\eta_1=x_1+x_2\varepsilon+x_3\varepsilon^2$; $\eta_2=x_1+x_2\varepsilon^2+x_3\varepsilon$, где $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда $\frac{\eta_1^2}{\eta_2}=\varphi_1+i\sqrt{3}\,\varphi_2$, где φ_1 и φ_2 — некоторые рациональные функции от x_1, x_2, x_3 с рациональными коэффициентами, не меняющиеся при круговой перестановке x_1, x_2, x_3. Легко видеть, что через $f_1=x_1+x_2+x_3$, φ_1 и φ_2 рационально выражается каждая рациональная функция от x_1, x_2, x_3, не изменяющаяся при круговой перестановке переменных.

Достаточно это доказать для $\eta_2\eta_1^{-2}$ и η_1^3. Но

$$\eta_2\eta_1^{-2}=\frac{1}{\varphi_1+i\varphi_2\sqrt{3}};$$

$$\eta_1^3=\left(\frac{\eta_1^2}{\eta_2}\right)^2\cdot\frac{\eta_2^2}{\eta_1}=(\varphi_1+i\varphi_2\sqrt{3})^2(\varphi_1-i\varphi_2\sqrt{3}).$$

877. При $n=4$

$$\eta_1=x_1+ix_2-x_3-ix_4,$$
$$\eta_2=x_1-x_2+x_3-x_4,$$
$$\eta_3=x_1-ix_2-x_3+ix_4.$$

Положим $\theta_1=\eta_1\eta_3$; $\theta_2+i\theta_3=\frac{\eta_1\eta_2}{\eta_3}$; $\theta_2-i\theta_3=\frac{\eta_3\eta_2}{\eta_1}$. $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ суть рациональные функции с рациональными коэффициентами от x_1, x_2, x_3, x_4, не меняющиеся при круговых перестановках. Легко видеть, что они вместе с $f=x_1+x_2+x_3+x_4$ образуют систему основных функций. Действительно,

$$\eta_2\eta_1^{-2}=\frac{\theta_2-i\theta_3}{\theta_1};\quad \eta_3\eta_1^{-3}=\frac{\theta_2-i\theta_3}{\theta_1(\theta_2+i\theta_3)};$$

$$\eta_1^4=\frac{\theta_1^4(\theta_2+i\theta_3)}{\theta_2-i\theta_3}.$$

878. Пусть
$$\eta_1=x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+x_3\varepsilon^3+x_4\varepsilon^4+x_5,$$
$$\eta_2=x_1\varepsilon^2+x_2\varepsilon^4+x_3\varepsilon+x_4\varepsilon^3+x_5,$$
$$\eta_3=x_1\varepsilon^3+x_2\varepsilon+x_3\varepsilon^4+x_4\varepsilon^2+x_5,$$
$$\eta_4=x_1\varepsilon^4+x_2\varepsilon^3+x_3\varepsilon^2+x_4\varepsilon+x_5.$$

Рассмотрим рациональную функцию $\lambda_1=\frac{\eta_1\eta_2}{\eta_3}$ и расположим ее по степеням ε, заменив 1 на $-\varepsilon-\varepsilon^2-\varepsilon^3-\varepsilon^4$:

$$\lambda_1=\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+\varepsilon^3\varphi_3+\varepsilon^4\varphi_4.$$

Коэффициенты φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 суть рациональные числа. Заменяя ε на ε^2, ε^3 и ε^4, получим:

$$\lambda_2=\frac{\eta_2\eta_4}{\eta_1}=\varepsilon^2\varphi_1+\varepsilon^4\varphi_2+\varepsilon\varphi_3+\varepsilon^3\varphi_4,$$

$$\lambda_3=\frac{\eta_3\eta_1}{\eta_4}=\varepsilon^3\varphi_1+\varepsilon\varphi_2+\varepsilon^4\varphi_3+\varepsilon^2\varphi_4,$$

$$\lambda_4=\frac{\eta_4\eta_3}{\eta_2}=\varepsilon^4\varphi_1+\varepsilon^3\varphi_2+\varepsilon^2\varphi_3+\varepsilon\varphi_4.$$

За «основные функции» можно взять f, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. Действительно, через них выражаются рационально λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. Далее,

$$\eta_2\eta_1^{-2}=\lambda_1^{-1}\lambda_2\lambda_4^{-1},\quad \eta_4\eta_1^{-4}=\lambda_1^{-2}\lambda_2\lambda_3^{-1}\lambda_4^{-1},$$

$$\eta_3\eta_1^{-3}=\lambda_1^{-2}\lambda_2\lambda_4^{-1},\quad \eta_1^5\quad=\lambda_1^3\lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_4^2.$$

Глава 7

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

879. a) Размерность $r=2$, базис образован, например, X_1 и X_2;
b) $r=2$, базис образован, например, X_1 и X_2;
c) $r=2$, базис образован, например, X_1 и X_2.

880. a) Размерность пересечения равна 1, базисный вектор

$$Z=(5,\ -2,\ -3,\ -4)=X_1-4X_2=3Y_1-Y_2.$$

Размерность суммы равна 3, базис составлен, например, из векторов Z, X_1, Y_1.

b) Сумма совпадает с первым пространством, пересечение — со вторым.

c) Сумма есть все четырехмерное пространство, пересечение состоит только из нулевого вектора.

881. a) $\left(\frac{5}{4},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4}\right)$; b) $(1,\ 0,\ -1,\ 0)$.

882. a) $x_1'=\frac{x_1+x_2-x_3-x_4}{2}$, $\quad x_2'=\frac{x_1-x_2+x_3-x_4}{2}$,

$x_3'=\frac{x_1-x_2-x_3+x_4}{2}$, $\quad x_4'=\frac{-x_1+x_2+x_3+x_4}{2}$;

b) $x_1'=x_2-x_3+x_4$, $\quad x_2'=-x_1+x_2$, $\quad x_3'=x_4$,
$x_4'=x_1-x_2+x_3-x_4$.

883. $x_1'x_2'+x_3'x_4'=\frac{1}{8}$.

884. Пусть $a_0+a_1\cos x+a_2\cos^2 x+\ldots+a_n\cos^n x=$
$$=b_0+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\ldots+b_n\cos nx.$$
Тогда $a_0=b_0-b_2+b_4-\ldots,$
$$a_k=2^{k-1}\Bigg[b_k+$$
$$+\sum_{1\leqslant p\leqslant\frac{n-k}{2}}(-1)^p\frac{(k+2p)(k+p-1)(k+p-2)\ldots(k+1)}{p!}b_{k+2p}\Bigg],$$
$$b_0=a_0+\sum_{1\leqslant p\leqslant\frac{n}{2}}2^{-2p}C_{2p}^p a_{2p},$$
$$b_k=2^{1-k}\Bigg(a_k+\sum_{1\leqslant p\leqslant\frac{n-k}{2}}2^{-2p}C_{k+2p}^p a_{k+2p}\Bigg).$$

885. Точка пересечения с первой прямой имеет координаты $\left(\frac{14}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{7}{9},\ \frac{11}{9}\right)$, со второй (42, 1, 7, 11).

886. Прямые X_0+tX_1, Y_0+tY_1 содержится в многообразии $X_0+t(Y_0-X_0)+t_1X_1+t_2Y_1$.

887. Для разрешимости задачи для прямых X_0+tX_1, Y_0+tY_1 необходимо и достаточно, чтобы векторы X_0, Y_0, X_1, Y_1 были линейно зависимы. Это равносильно тому, что прямые можно заключить в трехмерное подпространство, содержащее начало координат.

888. Плоскости $X_0+t_1X_1+t_2X_2$ и $Y_0+t_1Y_1+t_2Y_2$ могут быть погружены в многообразие $X_0+t(Y_0-X_0)+t_1X_1+t_2X_2+t_3Y_1+t_4Y_2$.

889. Таких случаев 6:

1) плоскости не имеют общих точек и не могут быть заключены в четырехмерное линейное многообразие (плоскости абсолютно скрещиваются);

2) плоскости не имеют общих точек, содержатся в четырехмерном многообразии, но не погружаются в трехмерное (скрещиваются параллельно прямой);

3) плоскости не имеют общих точек и погружаются в трехмерное многообразие (плоскости параллельны);

4) плоскости имеют одну общую точку. В этом случае они погружаются в четырехмерное многообразие, но не погружаются в трехмерное;

5) плоскости пересекаются по прямой;

6) плоскости совпадают.

В трехмерном пространстве реализуются только случаи 3, 5, 6.

890. Пусть $Q=X_0+P$ есть линейное многообразие, P — линейное пространство. Если $X_1\in Q$ и $X_2\in Q$, то $X_1=X_0+Y_1$, $X_2=X_0+Y_2$, где Y_1 и Y_2 принадлежат P. Тогда $\alpha X_1+(1-\alpha)X_2=X_0+\alpha Y_1+(1-\alpha)Y_2\in Q$ при любом α. Обратно, пусть Q — множество векторов, содержащее вместе с векторами X_1, X_2 их линейную комбинацию $\alpha X_1+(1-\alpha)X_2$ при любом α. Пусть X_0 — некоторый фиксированный вектор из Q и P обозначает множество всех векторов $Y=X-X_0$. Если $Y\in P$, то $cY\in P$ при любом c, ибо $cY=cX+(1-c)X_0-X_0$. Далее, если $Y_1=X_1-X_0\in P$ и $Y_2=X_2-X_0\in P$, то $\alpha Y_1+(1-\alpha)Y_2=$ $=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2-X_0\in P$ при любом α. Возьмем теперь некоторое

фиксированное α, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, и произвольные c_1, c_2. Тогда $\frac{c_1}{\alpha} Y_1 \in P$, $\frac{c_2}{1-\alpha} Y_2 \in P$ при любых Y_1, $Y_2 \in P$, а следовательно, и

$$c_1 Y_1 + c_2 Y_2 = \alpha \frac{c_1}{\alpha} Y_1 + (1-\alpha) \frac{c_2}{1-\alpha} Y_2 \in P.$$

Следовательно, P есть линейное пространство и Q есть линейное многообразие.

Замечание. Результат не верен, если основное поле есть поле вычетов по модулю 2.

891. a) 9; b) 0.

892. a) 90°; b) 45°; c) $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{77}}$.

893. $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

894. $\cos A = \frac{5}{\sqrt{39}}$, $\cos B = \frac{8}{\sqrt{78}}$, $\cos C = -\frac{\sqrt{2}}{3}$.

895. $\sqrt{n}$.

896. При нечетном n ортогональных диагоналей нет. При $n = 2m$ число диагоналей, ортогональных к данной, равно C_{2m-1}^{m-1}.

897. Координаты точек даются строчками матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{4}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \sqrt{\frac{4}{6}} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2n(n-1)}} & \sqrt{\frac{n+1}{2n}} \end{pmatrix}.$$

898. $R = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$.

Координаты центра:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2n(n-1)}}, \frac{1}{\sqrt{2(n+1)n}}\right).$$

899. $\left(\frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right)$.

900. $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

901. За остальные два вектора можно взять, например, $\frac{1}{\sqrt{26}}(0, -4, 3, 1)$ и $\frac{1}{3\sqrt{26}}(-13, 5, 6, 2)$.

902. (1, 2, 1, 3), (10, —1, 1, —3), (19, —87, —61, 72).

903. Например, $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & -4 & -2 \\ 39 & -37 & 51 & -29 & 5 \end{pmatrix}$.

904. Система интерпретируется как задача об отыскании векторов, ортогональных к системе векторов, изображающих коэффициенты уравнений. Множество искомых векторов есть пространство, ортогонально дополнительное к пространству, порожденному данными векторами. Фундаментальная система решений есть базис пространства искомых векторов.

905. Например, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, 2, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{498}}(1, 12, 8, 17)$.

906. a) $X'=(3, 1, -1, -2)\in P$, $X''=(2, 1, -1, 4)\perp P$; b) $X'=(1, 7, 3, 3)\in P$, $X''=(-4, -2, 6, 0)\perp P$.

907. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ линейно независимы, P — натянутое на них пространство. Далее, пусть $X=Y+Z$, $Y\in P$, $Z\perp P$.

Положим

$$Y=c_1A_1+c_2A_2+\ldots+c_mA_m.$$

Составим систему уравнений для определения $c_1, c_2, \ldots, c_m$, умножив скалярно последнее равенство на A_i, $i=1, 2, \ldots, m$, и принимая во внимание, что $YA_i=XA_i$.

Получим

$$\begin{aligned} &c_1A_1^2 + c_2A_1A_2+\ldots+c_mA_1A_m=XA_1,\\ &c_1A_2A_1+c_2A_2^2 +\ldots+c_mA_2A_m=XA_2,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &c_1A_mA_1+c_2A_mA_2+\ldots+c_mA_m^2 =XA_m. \end{aligned}$$

В силу линейной независимости $A_1, A_2, \ldots, A_m$, определитель Δ этой системы отличен от 0.

Найдем $c_1, c_2, \ldots, c_m$ и подставим их в выражение для Y. Получим

$$Y=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & -A_1 & -A_2 & \ldots & -A_m \\ XA_1 & A_1^2 & A_1A_2 & \ldots & A_1A_m \\ XA_2 & A_2A_1 & A_2^2 & \ldots & A_2A_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ XA_m & A_mA_1 & A_mA_2 & \ldots & A_m^2 \end{vmatrix}$$

и

$$Z=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} X & A_1 & A_2 & \ldots & A_m \\ A_1X & A_1^2 & A_1A_2 & \ldots & A_1A_m \\ A_2X & A_2A_1 & A_2^2 & \ldots & A_2A_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_mX & A_mA_1 & A_mA_2 & \ldots & A_m^2 \end{vmatrix}.$$

Эти равенства следует понимать в том смысле, что векторы Y и Z являются линейными комбинациями векторов, находящихся в первой строчке, с коэффициентами, равными соответствующим алгебраическим дополнениям.

Отсюда получаем, наконец, что

$$Y^2=Y(X-Z)=YX=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & -XA_1 & -XA_2 & \dots & -XA_m \\ A_1X & A_1^2 & A_1A_2 & \dots & A_1A_m \\ A_2X & A_2A_1 & A_2^2 & \dots & A_2A_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_mX & A_mA_1 & A_mA_2 & \dots & A_m^2 \end{vmatrix}$$

и

$$Z^2=Z(X-Y)=ZX=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} X^2 & XA_1 & XA_2 & \dots & XA_m \\ A_1X & A_1^2 & A_1A_2 & \dots & A_1A_m \\ A_2X & A_2A_1 & A_2^2 & \dots & A_2A_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_mX & A_mA_1 & A_mA_2 & \dots & A_m^2 \end{vmatrix}.$$

908. Пусть Y — какой-либо вектор пространства P, а X' — ортогональная проекция вектора X на P.

Тогда

$$\cos(X, Y)=\frac{XY}{|X|\cdot|Y|}=\frac{X'Y}{|X|\cdot|Y|}=\frac{|X'|\cdot|Y|\cdot\cos(X', Y)}{|X|\cdot|Y|}=$$
$$=\frac{|X'|}{|X|}\cos(X', Y),$$

откуда следует, что наибольшее значение $\cos(X, Y)$ достигается для тех Y, для которых $\cos(X', Y)=1$, т. е. для $Y=\alpha X'$ при $\alpha > 0$.

909. a) 45°; b) 90°.

910. $\sqrt{\frac{m}{n}}$.

911. $|X-Y|^2=|(X-X')+(X'-Y)|^2=|X-X'|^2+|X'-Y|^2 \geqslant$ $\geqslant |X-X'|^2$, причем равенство возможно только при $Y=X'$.

912. a) $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

913. $\dfrac{n!}{(n+1)(n+2)\dots 2n\sqrt{2n+1}}$.

914. Искомое кратчайшее расстояние равно кратчайшему расстоянию от точки X_0-Y_0 до пространства $P+Q$.

915. Пусть одна из вершин лежит в начале координат и пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — векторы, исходящие из начала в остальные вершины. Легко видеть, что $X_i^2=1$, $X_iX_j=\frac{1}{2}$. Многообразие, проходящее через первые $m+1$ вершин, есть пространство $t_1X_1+\dots+t_mX_m$. Многообразие, проходящее через остальные $n-m$ вершин, есть $X_n+t_{m+1}(X_{m+1}-X_n)+\dots+t_{n-1}(X_{n-1}-X_n)$. Искомое кратчайшее расстояние есть расстояние от X_n до пространства P, порожденного векторами $X_1, X_2, \dots, X_m, X_n-X_{m+1}, \dots, \dots, X_n-X_{n-1}$.

Пусть

$$X_n = t_1X_1 + \ldots + t_mX_m + t_{m+1}(X_n - X_{m+1}) + \ldots$$
$$\ldots + t_{n-1}(X_n - X_{n-1}) + Y,$$

где $Y \perp P$. Составляя скалярное произведение X_n с $X_1, \ldots, X_m$, $X_n - X_{m+1}, \ldots, X_n - X_{n-1}$, получим для определения $t_1, \ldots, t_{n-1}$ систему уравнений

$$t_1 + \frac{1}{2}t_2 + \ldots + \frac{1}{2}t_m = \frac{1}{2}, \quad t_{m+1} + \frac{1}{2}t_{m+2} + \ldots + \frac{1}{2}t_{n-1} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}t_1 + t_2 + \ldots + \frac{1}{2}t_m = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}t_{m+1} + t_{m+2} + \ldots + \frac{1}{2}t_{n-1} = \frac{1}{2},$$

. . . .

$$\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 + \ldots + t_m = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}t_{m+1} + \frac{1}{2}t_{m+2} + \ldots + t_{n-1} = \frac{1}{2},$$

откуда $t_1 = t_2 = \ldots = t_m = \frac{1}{m+1}$, $t_{m+1} = t_{m+2} = \ldots = t_{n-1} = \frac{1}{n-m}$.

Следовательно,

$$Y = \frac{X_{m+1} + X_{m+2} + \ldots + X_n}{n-m} - \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_m}{m+1}.$$

Таким образом, общим перпендикуляром является вектор, соединяющий центры выбранных граней. Кратчайшее расстояние равно длине этого вектора

$$|Y| = \sqrt{\frac{n+1}{2(n-m)(m+1)}}.$$

916. а) Проекция вектора $(t_1 + 2t_2, t_1 - 2t_2, t_1 + 5t_2, t_1 + 2t_2)$ на первую плоскость есть $(t_1 + 2t_2, t_1 - 2t_2, 0, 0)$. Следовательно, $\cos^2\varphi = \frac{2t_1^2 + 8t_2^2}{4t_1^2 + 14t_1t_2 + 37t_2^2} = \frac{2\lambda^2 + 8}{4\lambda^2 + 14\lambda + 37}$, где $\lambda = \frac{t_1}{t_2}$. Это выражение достигает максимума, равного $\frac{8}{9}$, при $\lambda = -4$.

b) Угол между любым вектором второй плоскости с его ортогональной проекцией на первую плоскость остается неизменным и равен $\frac{\pi}{4}$.

917. Куб есть множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам $-\frac{a}{2} \leqslant x_i \leqslant \frac{a}{2}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Здесь a есть длина ребра куба. Перейдем к новым осям, приняв за координатные векторы $e_1' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $e_2' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $e_3' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ и $e_4' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Эти векторы ортогонально нормированы, и их направления совпадают с направлениями некоторых диагоналей куба. Координаты точек куба в этих осях удовлетворяют неравенствам

$$-a \leqslant x_1' + x_2' + x_3' + x_4' \leqslant a, \qquad -a \leqslant x_1' + x_2' - x_3' - x_4' \leqslant a,$$
$$-a \leqslant x_1' - x_2' + x_3' - x_4' \leqslant a, \qquad -a \leqslant x_1' - x_2' - x_3' + x_4' \leqslant a.$$

Интересующее нас пересечение получим, положив $x_1' = 0$. Оно представляет собой тело, расположенное в пространстве, натянутом на e_2', e_3', e_4', и координаты точек которого удовлетворяют неравенствам $\pm x_2' \pm x_3' \pm x_4' \leqslant a$.

Это есть правильный октаэдр, ограниченный плоскостями, отсекающими на осях отрезки длины a.

918. $$V^2[B_1, B_2, \ldots, B_m] = \begin{vmatrix} B_1^2 & B_1B_2 & \ldots & B_1B_m \\ B_2B_1 & B_2^2 & \ldots & B_2B_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_mB_1 & B_mB_2 & \ldots & B_m^2 \end{vmatrix}.$$

Эта формула легко устанавливается по индукции, если принять во внимание результат задачи 907. Из формулы непосредственно следует, что объем не зависит от нумерации вершин и что

$$V[cB_1, B_2, \ldots, B_m] = |c| \cdot V[B_1, B_2, \ldots, B_m].$$

Пусть теперь $B_1 = B_1' + B_1''$, C_1, C_1', C_1'' — ортогональные проекции векторов B_1, B_1' и B_1'' на пространство, ортогонально дополнительное к $(B_2, \ldots, B_m)$. Очевидно, что $C_1 = C_1' + C_1''$. По определению, $V[B_1, B_2, \ldots, B_m] = |C_1| \cdot V[B_2, \ldots, B_m]$, $V[B_1', B_2, \ldots, B_m] = |C_1'| \cdot V[B_2, \ldots, B_m]$, $V[B_1'', B_2, \ldots, B_m] = |C_1''| \cdot V[B_2, \ldots, B_m]$. Так как $|C_1| \leqslant |C_1'| + |C_1''|$, то $V[B_1, B_2, \ldots, B_m] \leqslant V[B_1', B_2, \ldots, B_m] + V[B_1'', B_2, \ldots, B_m]$. Знак равенства возможен, только если C_1' и C_1'' коллинеарны и одинаково направлены, что, в свою очередь, имеет место в том и только в том случае, если B_1', B_1'' лежат в пространстве, натянутом на $B_1, B_2, \ldots, B_m$, и коэффициенты при B_1 в выражениях B_1', B_1'' через $B_1, B_2, \ldots, B_m$ имеют одинаковые знаки, т. е. B_1', B_2'' лежат «по одну сторону» от пространства $(B_2, \ldots, B_m)$ в пространстве $(B_1, B_2, \ldots, B_m)$.

919. $$V^2[B_1, B_2, \ldots, B_n] = \begin{vmatrix} B_1^2 & B_1B_2 & \ldots & B_1B_n \\ B_2B_1 & B_2^2 & \ldots & B_2B_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_nB_1 & B_nB_2 & \ldots & B_n^2 \end{vmatrix} = |\overline{B}B| = |B|^2,$$

где B — матрица, столбцами которой являются координаты векторов $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

920. Непосредственно из определения получаются еще следующие два свойства объема:

d) $V[B_1+X, B_2, \ldots, B_m]=V[B_1, B_2, \ldots, B_m]$

при любом X, принадлежащем пространству $(B_2, \ldots, B_m)$, ибо точки B_1, B_1+X имеют одинаковые расстояния от $(B_2, \ldots, B_m)$.

e) $V[B_1, B_2, \ldots, B_m]\leqslant |B_1|\cdot V[B_2, \ldots, B_m]$.

Это следует из того, что «высота», т. е. длина ортогональной к $(B_2, \ldots, B_m)$ составляющей вектора B_1, не превосходит длины самого вектора B_1.

Пусть теперь $C_1, C_2, \ldots, C_m$ суть ортогональные проекции векторов $B_1, B_2, \ldots, B_m$ на пространство P. Предположим, что неравенство $V[C_2, \ldots, C_m]\leqslant V[B_2, \ldots, B_m]$ уже доказано. Обозначим через B_1' ортогональную к $(B_2, \ldots, B_m)$ составляющую вектора B_1, через C_1' — ее проекцию на P. Ввиду того, что $B_1'-B_1\in(B_2, \ldots, B_m)$, заключаем, что $C_1'-C\in(C_2, \ldots, C_m)$ и, следовательно, будет

$$V[C_1, C_2, \ldots, C_m]=V[C_1', C_2, \ldots, C_m]\leqslant|C_1'|\cdot V[C_2, \ldots, C_m].$$

Но очевидно, что $|C_1|\leqslant|B_1'|$ и, по индукционному предположению, $V[C_2, \ldots, C_m]\leqslant V[B_2, \ldots, B_m]$. Следовательно,

$$V[C_1, C_2, \ldots, C_m]\leqslant|B_1'|\cdot V[B_2, \ldots, B_m]=V[B_1, B_2, \ldots, B_m].$$

База для индукции имеется, ибо для одномерных параллелепипедов теорема очевидна.

921. Из формулы для вычисления квадрата объема следует, что $V[A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_k]=V[A_1, \ldots, A_m]\cdot V[B_1, \ldots, B_k]$, если каждый вектор A_i ортогонален к каждому вектору B_j. В общем случае заменим векторы $B_1, \ldots, B_k$ их проекциями $C_1, \ldots, C_k$ на пространство, ортогонально дополнительное к $(A_1, \ldots, A_m)$. В силу результата предыдущей задачи, $V[C_1, \ldots, C_k]\leqslant V[B_1, \ldots, B_k]$, откуда

$$V[A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_k]=V[A_1, \ldots, A_m, C_1, \ldots, C_k]=$$
$$=V[A_1, \ldots, A_m]\cdot V[C_1, \ldots, C_k]\leqslant V[A_1, \ldots, A_m]\cdot V[B_1, \ldots, B_k].$$

Содержание этой задачи совпадает с содержанием задачи 518.

922. Непосредственно следует из неравенства $V[A_1, \ldots, A_m]\leqslant$ $\leqslant|A_1|\cdot V[A_2, \ldots, A_m]$, которое, в свою очередь, непосредственно следует из определения объема.

По своему содержанию эта задача совпадает с задачей 519.

923. Подобное преобразование тела в n-мерном пространстве влечет изменение объема, пропорциональное n-й степени коэффициента подобия. Для параллелепипеда это непосредственно следует из формулы для объема, а для всякого другого тела объем есть предел суммы объемов параллелепипедов. Следовательно, объем $V_n(R)$ n-мерного шара радиуса R равен $V_n(1)R^n$.

Для вычисления $V_n(1)$ разобьем шар системой параллельных $(n-1)$-мерных «плоскостей» и воспользуемся принципом Кавальери.

Пусть x есть расстояние секущей «плоскости» от центра. Сечение есть $(n-1)$-мерный шар радиуса $\sqrt{1-x^2}$.

Следовательно,

$$V_n(1)=2\int_0^1 V_{n-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx=2V_{n-1}(1)\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dx=$$

$$=V_{n-1}(1)\int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt=V_{n-1}(1)\,B\left(\frac{n+1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=$$

$$=V_{n-1}(1)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Отсюда следует, что

$$V_n(1)=\frac{n^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

924. Базисом являются полиномы $1,\ x,\ \ldots,\ x^n$. Квадрат объема соответствующего параллелепипеда равен

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{vmatrix}=\frac{[1!\,2!\,\ldots\,n!]^3}{(n+1)!\,(n+2)!\,\ldots\,(2n+1)!}.$$

925. a) $\lambda_1=1,\ X_1=c(1,\ -1)$; $\lambda_2=3,\ X_2=c(1,\ 1)$;
b) $\lambda_1=7,\ X_1=c(1,\ 1)$; $\lambda_2=-2,\ X_2=c(4,\ -5)$;
c) $\lambda_1=ai,\ X_1=c(1,\ i)$; $\lambda_2=-ai,\ X_2=c(1,\ -i)$;
d) $\lambda_1=2,\ X_1=c_1(1,\ 1,\ 0,\ 0)+c_2(1,\ 0,\ 1,\ 0)+c_3(1,\ 0,\ 0,\ 1)$;
$\lambda_2=-2,\ X_2=c(1,\ -1,\ -1,\ -1)$;
e) $\lambda=2,\ X=c_1(-2,\ 1,\ 0)+c_2(1,\ 0,\ 1)$;
f) $\lambda=-1,\ X=c(1,\ 1,\ -1)$;
g) $\lambda_1=1,\ X_1=c_1(1,\ 0,\ 1)+c_2(0,\ 1,\ 0)$; $\lambda_2=-1,\ X_2=c(1,\ 0,\ -1)$;
h) $\lambda_1=0,\ X_1=c(3,\ -1,\ 2)$; $\lambda_{2,\,3}=\pm\sqrt{-14}$,
$X_{2,\,3}=c\left(3\pm 2\sqrt{-14},\ 13,\ 2\mp 3\sqrt{-14}\right)$;
i) $\lambda_1=1,\ X_1=c(3,\ -6,\ 20)$; $\lambda_2=-2,\ X_2=c(0,\ 0,\ 1)$;
j) $\lambda_1=1,\ X_1=c(1,\ 1,\ 1)$; $\lambda_2=\varepsilon,\ X_2=c(3+2\varepsilon,\ 2+3\varepsilon;\ 3+3\varepsilon)$;
$\lambda_3=\varepsilon^2,\ X_3=c(3+2\varepsilon^2,\ 2+3\varepsilon^2,\ 3+3\varepsilon^2)$,
где

$$\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

926. Характеристические числа A^{-1} суть обратные величины для характеристических чисел A. Действительно, из $|A^{-1}-\lambda E|=0$ следует $|E-\lambda A|=0$, $\left|A-\frac{1}{\lambda}E\right|=0$.

927. Характеристические числа матрицы A^2 равны квадратам характеристических чисел для A. Действительно, пусть

$$|A-\lambda E|=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\ \dots\ (\lambda_n-\lambda).$$

Тогда

$$|A+\lambda E|=(\lambda_1+\lambda)(\lambda_2+\lambda)\ \dots\ (\lambda_n+\lambda).$$

Перемножив эти равенства и заменив λ^2 на λ, получим

$$|A^2-\lambda E|=(\lambda_1^2-\lambda)(\lambda_2^2-\lambda)\ \dots\ (\lambda_n^2-\lambda).$$

928. Характеристические числа A^m равны m-м степеням характеристических чисел A.

Для того чтобы в этом убедиться, проще всего заменить в равенстве

$$|A-\lambda E|=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\ \dots\ (\lambda_n-\lambda)$$

λ на $\lambda\varepsilon$, $\lambda\varepsilon^2$, ..., $\lambda\varepsilon^{n-1}$, где

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},$$

перемножить равенства и заменить λ^n на λ.

929. $f(A)=b_0(A-\xi_1E)\ \dots\ (A-\xi_mE)$, следовательно,

$$|f(A)|=b_0^n\cdot|A-\xi_1E|\ \dots\ |A-\xi_mE|=b_0^nF(\xi_1)\ \dots\ F(\xi_m).$$

930. Пусть

$$F(\lambda)=|A-\lambda E|=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\ \dots\ (\lambda_n-\lambda)$$

и

$$f(x)=b_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ \dots\ (x-\xi_m).$$

Тогда

$$|f(A)|=b_0^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(\lambda_i-\xi_k)=f(\lambda_1)f(\lambda_2)\ \dots\ f(\lambda_n).$$

931. Положим

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda$$

и применим результат предыдущей задачи.

Получим

$$|f(A)-\lambda E|=(f(\lambda_1)-\lambda)(f(\lambda_2)-\lambda)\ \dots\ (f(\lambda_n)-\lambda),$$

откуда следует, что характеристическими числами матрицы $f(A)$ являются $f(\lambda_1)$, $f(\lambda_2)$, ..., $f(\lambda_n)$.

932. Пусть X есть собственный вектор матрицы A, соответствующий характеристическому числу λ.

Тогда

$$\begin{aligned} EX&=X,\\ AX&=\lambda X,\\ A^2X&=\lambda^2X,\\ &\dots\dots\\ A^mX&=\lambda^mX. \end{aligned}$$

Умножив эти векторные равенства на произвольные коэффициенты и сложив, получим для любого полинома f, что

$$f(A)X=f(\lambda)X,$$

т. е. X есть собственный вектор $f(A)$, соответствующий характеристическому числу $f(\lambda)$.

933. Характеристические числа A^2 суть n и $-n$ кратностей $\frac{n+1}{2}$ и $\frac{n-1}{2}$ соответственно. Следовательно, характеристическими числами A являются $+\sqrt{n}$, $-\sqrt{n}$, $+\sqrt{n}\,i$ и $-\sqrt{n}\,i$. Обозначим их показатели кратности через a, b, c, d. Тогда $a+b=\frac{n+1}{2}$, $c+d=\frac{n-1}{2}$. Сумма характеристических чисел матрицы равна сумме элементов главной диагонали.

Следовательно,

$$[a-b+(c-d)\,i]\sqrt{n}=1+\varepsilon+\varepsilon^4+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}.$$

Модуль правой части этого равенства равен $\sqrt{n}$ (задача 126). Следовательно,

$$(a-b)^2+(c-d)^2=1.$$

Ввиду того, что числа $c-d$ и $c+d$ одинаковой четности, заключаем, что

$$a-b=0,\ c-d=\pm 1, \text{ если } \frac{n-1}{2} \text{ — нечетное число,}$$

и

$$a-b=\pm 1,\ c-d=0, \text{ если } \frac{n-1}{2} \text{ — четное число.}$$

Следовательно, при $n=1+4k$

$$c=d=k;\quad a=k+1,\quad b=k \quad \text{или} \quad a=k,\quad b=k+1,$$

при $n=3+4k$

$$a=b=k+1;\quad c=k+1,\quad d=k \text{ или } c=k,\quad d=k+1.$$

Тем самым, характеристические числа определены с точностью до знака. Чтобы определить знак, воспользуемся тем, что произведение характеристических чисел равно определителю матрицы. При помощи результата задачи 299 легко получим, что при $n=1+4k$

$$a=k+1,\quad b=k,$$

при $n=3+4k$

$$c=k+1,\quad d=k.$$

Таким образом, характеристические числа определены до конца.

934. $1+\varepsilon+\varepsilon^4+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}=+\sqrt{n}$ при $n=4k+1$,

$1+\varepsilon+\varepsilon^4+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}=+i\sqrt{n}$ при $n=4k+3$.

935. а) Положим $\frac{x}{y}=\alpha^n$. Тогда

$$\lambda_k=y\frac{\alpha\varepsilon_k-\alpha^n}{1-\alpha\varepsilon_k},$$

где $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$,

b) $\lambda_k = a_1 + a_2\varepsilon_k + a_3\varepsilon_k^2 + \ldots + a_n\varepsilon_k^{n-1}$.

c) $\lambda_k = 2i \cos \frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

936.

$$A \times B - \lambda E_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11}B - \lambda E_m & a_{12}B & \ldots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B - \lambda E_m & \ldots & a_{2n}B \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \ldots & a_{nn}B - \lambda E_m \end{pmatrix},$$

откуда следует, в силу результата задачи 537, что

$$| A \times B - \lambda E_{mn} | = | \varphi(B) |,$$

где

$$\varphi(x) = | Ax - \lambda E_n | = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i x - \lambda).$$

В силу результата задачи 930,

$$| \varphi(B) | = \prod_{k=1}^{m} \varphi(\beta_k) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} (\alpha_i \beta_k - \lambda).$$

Таким образом, характеристическими числами $A \times B$ являются числа $\alpha_i\beta_k$, где α_i—характеристические числа A, β_k—характеристические числа B.

937. Если A—неособенная матрица, то

$$| BA - \lambda E | = | A^{-1}(AB - \lambda E) A | = | A^{-1} | \cdot | AB - \lambda E | \cdot | A | = | AB - \lambda E |.$$

Избавиться от предположения о неособенности A можно посредством предельного перехода или применения теоремы о тождестве полиномов от многих переменных.

Можно также, применяя теорему умножения прямоугольных матриц, непосредственно подсчитать коэффициенты полиномов

$$| AB - \lambda E | \quad \text{и} \quad | BA - \lambda E |$$

и убедиться в их равенстве.

938. Дополним матрицы A и B до квадратных A' и B' порядка n, добавив к A $n-m$ строчек, а к B $n-m$ столбцов, составленных из нулей. Тогда $BA = B'A'$, а $A'B'$ получается из AB посредством окаймления нулями. Применение результата предыдущей задачи дает то, что требовалось доказать.

Решения задач 939, 940, 941 не однозначны. Приведенные ниже ответы соответствуют преобразованию, возможно менее отклоняющемуся от «треугольного».

939. a) $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$,

$x_1' = x_1 + x_2$,
$x_2' = x_2 + 2x_3$,
$x_3' = x_3$;

b) $-x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$,

$x_1' = x_1$,
$x_2' = x_1 - 2x_2$,
$x_3' = x_1 + x_3$;

c) $x_1'^2-x_2'^2-x_3'^2$,

$$x_1'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+x_3,$$
$$x_2'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2,$$
$$x_3'=x_3;$$

d) $x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2$,

$$x_1'=x_1-x_2+x_3-x_4,$$
$$x_2'=x_2+x_3+x_4,$$
$$x_3'=x_2-x_3+2x_4,$$
$$x_4'=x_4;$$

e) $x_1'^2-x_2'^2+x_3'^2-x_4'^2$,

$$x_1'=x_1+\frac{1}{2}x_2,$$
$$x_2'=\frac{1}{2}x_2,$$
$$x_3'=\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4,$$
$$x_4'=\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4.$$

940. $x_1'^2+\frac{3}{4}x_2'^2+\frac{4}{6}x_3'^2+\ldots+\frac{n+1}{2n}x_n'^2$.

Переменные $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ выражаются через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & & \ldots & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & & \ldots & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & \ldots & 1/4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

941. $$\left(\frac{x_1+x_2}{2}+x_3+x_4+\ldots+x_n\right)^2-\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2-$$
$$-\left(x_3+\frac{1}{2}x_4+\ldots+\frac{1}{2}x_n\right)^2-$$
$$-\frac{3}{4}\left(x_4+\frac{1}{3}x_5+\ldots+\frac{1}{3}x_n\right)^2-\ldots-\frac{n-1}{2(n-2)}x_n^2.$$

942. Матрица положительной квадратичной формы равна $\bar{A}A$, где A — неособенная вещественная матрица, осуществляющая переход от суммы квадратов к данной форме.

Положительность миноров следует из результата задачи 510.

943. Пусть $$f=a_{11}x_1^2+\ldots+a_{1n}x_1x_n+$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$+a_{n1}x_nx_1+\ldots+a_{nn}x_n^2$$

— квадратичная форма.

Обозначим

$$f^{(k)}=a_{11}x_1^2+\ldots+a_{1k}x_1x_k+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+a_{k1}x_kx_1+\ldots+a_{kk}x_k^2,$$

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk}\end{vmatrix}, \quad r \text{ — ранг формы } f.$$

Пусть

$$f=\alpha_1x_1'^2+\alpha_2x_2'^2+\ldots+\alpha_nx_n'^2,$$

где

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1+b_{12}x_2+\ldots+b_{1n}x_n, \\ x_2' &= \qquad\;\; x_2+\ldots+b_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= \qquad\qquad\qquad\quad x_n. \end{aligned}$$

Ввиду того, что определитель треугольного преобразования равен 1, $D_f=\Delta_n=\alpha_1\alpha_2\ \ldots\ \alpha_n$. Положив

$$x_{k+1}=\ldots=x_n=0,$$

получим

$$f^{(k)}=\alpha_1x_1^{(k)^2}+\alpha_2x_2^{(k)^2}+\ldots+\alpha_kx_k^{(k)^2},$$

где

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= x_1+b_{12}x_2+\ldots+b_{1k}x_k, \\ x_2^{(k)} &= \qquad\;\; x_2+\ldots+b_{2k}x_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k^{(k)} &= \qquad\qquad\qquad\quad x_k. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\Delta_k=\alpha_1\alpha_2\ \ldots\ \alpha_k$ и что необходимым условием для возможности треугольного преобразования к диагональному виду является

$$\Delta_1\neq 0,\quad \Delta_2\neq 0,\ \ldots,\ \Delta_r\neq 0.$$

Легко проверить, что это условие достаточно.

Далее, $\alpha_k=\dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$ при $k\leqslant r$, $\alpha_k=0$ при $k>r$.

Дискриминант формы

$$f_k(x_{k+1},\ \ldots,\ x_n)=f-\alpha_1x_1'^2-\ldots-\alpha_kx_k'^2=\alpha_{k+1}x_{k+1}'^2+\ldots+\alpha_nx_n'^2$$

равен $\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots\alpha_n=\dfrac{\Delta_n}{\Delta_k}$.

944. Необходимость условий Сильвестера была доказана в задаче 942. Достаточность следует из результата задачи 943.

945. Пусть l — некоторая линейная форма от переменных x_1, x_2, ..., x_n. Преобразуем форму f посредством преобразования с равным единице определителем, приняв форму l за последнюю из новых переменных. Затем сделаем треугольное преобразование формы f к каноническому виду.

Форма f примет вид

$$f=\alpha_1x_1'^2+\alpha_2x_2'^2+\ldots+\alpha_nx_n'^2,$$

причем $x_n'=l$.

Дискриминант формы f равен $\alpha_1\alpha_2\ \ldots\ \alpha_n$.

Дискриминант формы $f+l^2$ равен $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}(\alpha_n+1)$. Он больше дискриминанта формы f, так как все коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ положительны.

946. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$

$$= a_{11}x_1^2+2a_{21}x_1x_2+\ldots+2a_{n1}x_1x_n+\varphi =$$

$$= a_{11}\left(x_1+\frac{a_{21}}{a_{11}}x_2+\ldots+\frac{a_{n1}}{a_{11}}x_n\right)^2+f_1(x_2, \ldots, x_n),$$

где

$$f_1=\varphi-a_{11}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}x_2+\ldots+\frac{a_{n1}}{a_{11}}x_n\right)^2.$$

Форма f_1 положительна, и ее дискриминант равен $\frac{D_f}{a_{11}}$, где D_f — дискриминант f. На основании результата задачи 945 $D_{f_1} \geqslant \frac{D_f}{a_{11}}$, что и требовалось доказать.

947. Доказывается так же, как закон инерции.

948. Составим линейные формы

$$l_k=u_1+u_2x_k+\ldots+u_nx_k^{n-1}, \quad k=1, 2, \ldots, n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни данного уравнения.

Равным корням будут соответствовать равные формы, различным — линейно независимые, вещественным — вещественные, сопряженным комплексным — сопряженные комплексные.

Вещественная и мнимая части комплексной формы $l_k=\lambda_k+\mu_k i$ будут линейно независимыми между собой и со всеми формами, соответствующими корням, отличным от x_k и x_k'.

Составим квадратичную форму

$$f(u_1, \ldots, u_n)=\sum_{k=1}^{n}(u_1+u_2x_i+\ldots+u_nx_i^{n-1})^2.$$

Ранг этой формы равен числу различных корней данного уравнения. Матрица ее коэффициентов есть

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

Сумма квадратов сопряженных комплексных линейных форм $l_k=\lambda_k+i\mu_k$ и $l_k'=\lambda_k-i\mu_k$ равна $2\lambda_k^2-2\mu_k^2$. Следовательно, число отрицательных квадратов в любом (по закону инерции) каноническом представлении формы f равно числу различных пар сопряженных комплексных корней данного уравнения.

949. Следует из результатов задач 948, 944.

950. Операция (f, φ), очевидно, дистрибутивна. Поэтому достаточно провести доказательство для квадратов линейных форм.

Пусть $f=(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n)^2$,

$\varphi=(\beta_1x_1+\beta_2x_2+\ldots+\beta_nx_n)^2$.

Легко видеть, что тогда

$$(f, \varphi)=(\alpha_1\beta_1x_1+\alpha_2\beta_2x_2+\ldots+\alpha_n\beta_nx_n)^2\geqslant 0.$$

951. a) $4x_1'^2+x_2'^2-2x_3'^2$,
$$x_1'=\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3,$$
$$x_2'=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,$$
$$x_3'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3;$$

b) $2x_1'^2-x_2'^2+5x_3'^2$,
$$x_1'=\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,$$
$$x_2'=\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3,$$
$$x_3'=\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3;$$

c) $7x_1'^2+4x_2'^2+x_3'^2$,
$$x_1'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,$$
$$x_2'=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3,$$
$$x_3'=-\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3;$$

d) $10x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2$,
$$x_1'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,$$
$$x_2'=\frac{2\sqrt{5}}{5}x_1-\frac{\sqrt{5}}{5}x_2,$$
$$x_3'=\frac{2\sqrt{5}}{15}x_1+\frac{4\sqrt{5}}{15}x_2+\frac{\sqrt{5}}{3}x_3;$$

e) $-7x_1'^2+2x_2'^2+2x_3'^2$,
$$x_1'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,$$
$$x_2'=\frac{2\sqrt{5}}{5}x_1-\frac{\sqrt{5}}{5}x_2,$$
$$x_3'=\frac{2\sqrt{5}}{15}x_1+\frac{4\sqrt{5}}{15}x_2+\frac{\sqrt{5}}{3}x_3;$$

f) $2x_1'^2+5x_2'^2+8x_3'^2$,
$$x_1'=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3,$$
$$x_2'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,$$
$$x_3'=\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3;$$

g) $7x_1'^2-2x_2'^2+7x_3'^2$,

$$x_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}x_3,$$
$$x_2'=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3,$$
$$x_3'=\frac{\sqrt{2}}{6}x_1-\frac{2\sqrt{2}}{3}x_2+\frac{\sqrt{2}}{6}x_3;$$

h) $11x_1'^2+5x_2'^2-x_3'^2$,

$$x_1'=\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3,$$
$$x_2'=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3,$$
$$x_3'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3;$$

i) $x_1'^2-x_2'^2+3x_3'^2+5x_4'^2$,

$$x_1'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4,$$
$$x_2'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$
$$x_3'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$
$$x_4'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4;$$

j) $x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2-x_4'^2$,

$$x_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2,$$
$$x_2'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_3+\frac{\sqrt{2}}{2}x_4,$$
$$x_3'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2,$$
$$x_4'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_3-\frac{\sqrt{2}}{2}x_4;$$

k) $x_1'^2+x_2'^2+3x_3'^2-x_4'^2$,

$$x_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_2+\frac{\sqrt{2}}{2}x_4,$$
$$x_2'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3,$$
$$x_3'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$
$$x_4'=-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4;$$

l) $x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-3x_4'^2$,

$$\begin{aligned}
x_1' &= \frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2,\\
x_2' &= \frac{\sqrt{2}}{2}x_3+\frac{\sqrt{2}}{2}x_4,\\
x_3' &= \frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,\\
x_4' &= \frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4;
\end{aligned}$$

m) $x_1'^2-x_2'^2+7x_3'^2-3x_4'^2$,

$$\begin{aligned}
x_1' &= \frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4,\\
x_2' &= \frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,\\
x_3' &= \frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,\\
x_4' &= \frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4;
\end{aligned}$$

n) $5x_1'^2-5x_2'^2+3x_3'^2-3x_4'^2$,

$$\begin{aligned}
x_1' &= \frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4,\\
x_2' &= \frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,\\
x_3' &= \frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,\\
x_4' &= \frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4.
\end{aligned}$$

952. a) $\dfrac{n+1}{2}x_1'^2+\dfrac{1}{2}(x_2'^2+x_3'^2+\ldots+x_n'^2)$;

b) $\dfrac{n-1}{2}x_1'^2-\dfrac{1}{2}(x_2'^2+x_3'^2+\ldots+x_n'^2)$,

где

$$x_1'=\frac{1}{\sqrt{n}}(x_1+x_2+\ldots+x_n);$$

$$x_i'=\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+\ldots+\alpha_{in}x_n,\quad i=2,\ \ldots,\ n,$$

где $(\alpha_{i1},\ \alpha_{i2},\ \ldots,\ \alpha_{in})$ — любая ортогональная и нормированная фундаментальная система решений уравнения

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=0.$$

953. $x_1'^2\cos\dfrac{\pi}{n+1}+x_2'^2\cos\dfrac{2\pi}{n+1}+\ldots+x_n'^2\cos\dfrac{n\pi}{n+1}$.

954. Если все характеристические числа матрицы A лежат в сегменте $[a, b]$, то все характеристические числа матрицы $A-\lambda E$ отрицательны при $\lambda > b$ и положительны при $\lambda < a$. Следовательно, квадратичная форма с матрицей $A-\lambda E$ отрицательна при $\lambda > b$ и положительна при $\lambda < a$. Обратно, если квадратичная форма $(A-\lambda E)X\cdot X$ отрицательна при $\lambda > b$ и положительна при $\lambda < a$, то все характеристические числа матрицы $A-\lambda E$ положительны при $\lambda < a$ и отрицательны при $\lambda > b$.

Следовательно, все характеристические числа матрицы A лежат в сегменте $[a, b]$.

955. Для любого вектора X справедливы неравенства

$$aX\cdot X \leqslant AX\cdot X \leqslant cX\cdot X,$$

$$bX\cdot X \leqslant BX\cdot X \leqslant dX\cdot X,$$

откуда $(a+b)X\cdot X \leqslant (A+B)X\cdot X \leqslant (c+d)X\cdot X$. Следовательно, все характеристические числа матрицы $A+B$ заключены в сегменте $[a+b, c+d]$.

956. a) Следует из результата задачи 937.

b) $|AX|^2 = AX\cdot AX = X\cdot \bar{A}AX \leqslant |X|^2\cdot \|A\|^2$.

Знак равенства имеет место для собственного вектора матрицы $\bar{A}A$, принадлежащего характеристическому числу $\|A\|^2$.

c) $|(A+B)X| \leqslant |AX| + |BX| \leqslant (\|A\| + \|B\|)|X|$ для любого вектора X. Но для некоторого вектора X_0

$$|(A+B)X_0| = (\|A+B\|)\cdot|X_0|.$$

Следовательно,

$$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|.$$

d) $|ABX| \leqslant \|A\|\cdot|BX| \leqslant \|A\|\cdot\|B\|\cdot|X|$.

Применяя это неравенство к вектору X_0, для которого

$$\|AB\|\cdot|X_0| = |ABX_0|,$$

получим

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\cdot\|B\|.$$

e) Пусть $\lambda = p+qi$ — характеристическое число матрицы A, $X = Y+iZ$ — соответствующий ему собственный вектор.

Тогда

$$AY = pY - qZ, \quad AZ = qY + pZ,$$

откуда

$$|pY - qZ|^2 \leqslant \|A\|^2|Y|^2,$$

$$|qY + pZ|^2 \leqslant \|A\|^2|Z|^2.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$|\lambda|^2(|Y|^2+|Z|^2)=(p^2+q^2)(|Y|^2+|Z|^2)\leqslant\|A\|^2(|Y|^2+|Z|^2)$$

и, следовательно,

$$|\lambda|\leqslant\|A\|.$$

957. Пусть A — вещественная неособенная матрица; тогда $\overline{A}AX\cdot X=|AX|^2$ есть положительная квадратичная форма, которая может быть приведена к каноническому виду посредством преобразования переменных с треугольной матрицей B, имеющей положительные диагональные элементы. Следовательно, $\overline{A}A=\overline{B}B$, откуда следует, что $\overline{AB^{-1}}\cdot AB^{-1}=E$, т. е. $AB^{-1}=P$ есть ортогональная матрица. Отсюда $A=PB$. Единственность следует из единственности треугольного преобразования квадратичной формы к каноническому виду.

958. $\overline{A}A$ есть симметрическая матрица с положительными характеристическими числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Следовательно,

$$\overline{A}A=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}P.$$

Построим матрицу

$$B=P^{-1}\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}P,$$

где μ_i есть арифметическое значение квадратного корня из λ_i. Очевидно, что B есть снова симметрическая матрица с положительными характеристическими числами и $B^2=\overline{A}A$. Отсюда следует, что $AB^{-1}=Q$ есть ортогональная матрица, $A=QB$.

959. После перенесения начала координат в центр поверхности поверхность должна содержать вместе с точкой X также точку $-X$ и, следовательно, уравнение не должно содержать текущих координат в первых степенях. После преобразования параллельного переноса осей $X=X_0+X'$, где X_0 — вектор переноса, уравнение поверхности преобразуется в

$$AX'\cdot X'+2(AX_0+B)X'+AX_0\cdot X_0+2BX_0+C=0.$$

Поэтому для существования центра необходимо и достаточно, чтобы уравнение AX_0+B было разрешимо относительно вектора X_0, для чего, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A равнялся рангу матрицы (A, B).

960. После перенесения начала координат в центр уравнение поверхности принимает вид

$$AX \cdot X + \gamma = 0.$$

Если r — ранг матрицы A и $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — отличные от 0 характеристические числа, то после надлежащего ортогонального преобразования координат уравнение примет каноническую форму

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_r x_r^2 + \gamma = 0.$$

961. Поверхность не имеет центра, если ранг (A, B) больше ранга A, что возможно, только если $r =$ ранг $A < n$. Обозначим через R все пространство, через P — пространство AR, через Q — ортогональное дополнение к P. Тогда для любого $Y \in Q$ будем иметь $AY = 0$, ибо

$$|AY|^2 = AY \cdot AY = Y \cdot AAY = 0,$$

так как $AAY \in P$. Пусть

$$B = B_1 + B_2, \qquad B_1 \in P, \qquad B_2 \in Q.$$

Тогда $B_2 \neq 0$, иначе B принадлежало бы P, и ранг (A, B) равнялся бы r. Пусть $B_1 = AX_0$. После переноса $X = X_0 + X'$ уравнение поверхности преобразуется к виду

$$AX' \cdot X' + 2B_2 X' + c' = 0.$$

Сделаем еще один перенос $X' = aB_2 + X''$. Тогда

$$AX' \cdot X' = a^2 AB_2 \cdot B_2 + 2aAB_2 \cdot X'' + AX'' \cdot X'' = AX'' \cdot X'',$$

ибо $AB_2 = 0$, и, следовательно, уравнение преобразуется к виду

$$AX'' \cdot X'' + 2B_2 X'' + 2a\,|B_2|^2 + c' = 0.$$

Возьмем

$$a = -\frac{c'}{2\,|B_2|^2}.$$

Тогда уравнение превратится в

$$AX'' \cdot X'' + 2B_2 X'' = 0.$$

Теперь сделаем ортогональное преобразование координат, приняв за базис пространства попарно ортогональные единичные собственные векторы матрицы A, включив в их число единичный вектор, коллинеарный вектору B_2 и противоположно направленный. Это можно сделать, так как B_2 есть собственный вектор для A. В этом базисе уравнение примет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 - 2\beta_2 x_{r+1} = 0,$$

где $\beta_2 = |B_2|$. Остается поделить на β_2.

962. При линейном преобразовании с матрицей A пространство отображается на подпространство, натянутое на векторы $A_1, A_2, \ldots, A_n$, координаты которых образуют столбцы матрицы A. Отсюда непосредственно следует требуемый результат.

963. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_q$ — базис Q. Тогда Q' есть пространство, натянутое на $e'_1, e'_2, \ldots, e'_q$, где $e'_1, e'_2, \ldots, e'_q$ — образы $e_1, e_2, \ldots, e_q$ при сделанном линейном преобразовании. Следовательно, $q' \leqslant q$. Кроме того, очевидно, что $q' \leqslant r$, ибо Q' содержится в R'. Далее, пусть P — пространство, дополнительное к Q, размерности $p = n - q$, и P' — его образ при линейном преобразовании. Его размерность p' не превосходит $n - q$. Но $P' + Q' = R'$, следовательно, $p' + q' \geqslant r$. Отсюда

$$q' \geqslant r - p' \geqslant r + q - n.$$

964. Пусть ранг A равен r_1, ранг B равен r_2 и пусть $BR = Q$. Размерность Q равна r_2. Тогда ρ, равное рангу AB, есть размерность $ABR = AQ$. В силу результата предыдущей задачи, $r_1 + r_2 - n \leqslant \rho \leqslant \min(r_1, r_2)$.

965. Двукратное выполнение операции проектирования равносильно однократному. Действительно, при первом проектировании и все векторы пространства R перейдут в векторы подпространства P, которые при втором проектировании останутся неизменными. Следовательно, $A^2 = A$. Обратно, пусть $A^2 = A$. Обозначим через P множество всех векторов $Y = AX$, через Q — множество векторов Z таких, что $AZ = 0$. Очевидно, что P и Q — линейные пространства. Их пересечение есть нулевой вектор, ибо если $AX = Z$, то $AX = A^2X = AZ = 0$. Далее, для любого вектора X имеет место разложение $X = AX + (E - A)X$. Очевидно, что $(E - A)X \in Q$, ибо $A(E - A)X = (A - A^2)X = 0$. Поэтому $P + Q$ есть все пространство, т. е. P и Q — взаимно дополнительные подпространства. Операция AX есть переход от вектора X к его составляющей в P, т. е. является операцией проектирования на P параллельно Q.

966. Пусть $P \perp Q$. Выберем ортогонально нормированный базис всего пространства, объединив ортогонально нормированные базисы P и Q. В этом базисе матрица проектирования будет иметь диагональную форму

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Во всяком другом ортогонально нормированном базисе матрица проектирования равна $A = B^{-1}A'B$, где B — некоторая ортогональная матрица. Очевидно, что A симметрична.

Обратно, если A — симметрическая матрица и $A^2 = A$, то пространства $P = AR$ и $Q = (E - A)R$ ортогональны, ибо

$$AX(E - A)Y = X \cdot \bar{A}(E - A)Y = X(A - A^2)Y = 0.$$

967. Пусть A — кососимметрическая матрица. Легко видеть, что $AX\cdot X=0$ для любого вещественного вектора X, ибо

$$AX\cdot X=X\cdot\bar{A}X=X\cdot(-AX)=-AX\cdot X.$$

Пусть $\lambda=\alpha+\beta i$ — характеристическое число матрицы A, $U=X+Yi$ — соответствующий ему собственный вектор. Тогда

$$AX=\alpha X-\beta Y, \qquad AY=\beta X+\alpha Y.$$

Отсюда следует $\alpha(|X|^2+|Y|^2)=AX\cdot X+AY\cdot Y=0$ и $\alpha=0$. Далее, $\beta X\cdot Y+\alpha|Y|^2=AY\cdot Y=0$, откуда $X\cdot Y=0$ при $\beta\neq 0$; наконец, из равенства $\beta(|X|^2-|Y|^2)=AY\cdot X+AX\cdot Y=AY\cdot X-X\cdot AY=0$ следует $|X|=|Y|$.

968. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0\end{pmatrix}$$

— кососимметрическая матрица. Если все ее характеристические числа равны нулю, то $A=0$. Действительно, сумма произведений по два всех характеристических чисел равна сумме всех главных миноров второго порядка $\sum\limits_{i<k} a_{ik}^2$, и равенство нулю этой суммы влечет $a_{ik}=0$ при любых i, k, т. е. $A=0$.

Пусть A имеет отличное от нуля характеристическое число $\lambda_1=a_1 i$. Нормируем вещественную и мнимую части принадлежащего ему собственного вектора. Вследствие равенства их длин нормирующий множитель будет один и тот же, и для полученных векторов будут выполнены равенства

$$AX=-a_1Y;$$
$$AY=a_1X.$$

Составим ортогональную матрицу, поместив в первые два столбца векторы X и Y. Тогда

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & \dots\\ -a_1 & 0 & \dots\\ 0 & 0 & \dots\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots\end{pmatrix}.$$

Ввиду того, что матрица $P^{-1}AP$ кососимметрическая, все не указанные элементы первых двух строчек равны нулю, а матрица, образованная элементами 3-й, 4-й, ..., n-й строчки и 3-го, 4-го, ..., n-го столбца, будет кососимметрической. Применяя к ней те же рассуждения, выделим еще одну «ячейку» $\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix}$. Процесс продолжаем до тех пор, пока в левом нижнем углу не останется матрица, все характеристические числа которой равны нулю. Но все элементы такой матрицы равны нулю. Задача решена.

969. Пусть

$$B=(E-A)(E+A)^{-1}.$$

Тогда

$$\overline{B}=\overline{(E+A)}^{-1}\,\overline{(E-A)}=(E-A)^{-1}(E+A)=B^{-1}.$$

Далее,

$$B+E=(E-A)(E+A)^{-1}+(E+A)(E+A)^{-1}=2(E+A)^{-1}$$

и, следовательно,

$$|B+E|\neq 0.$$

Обратно, если

$$\overline{B}=B^{-1} \text{ и } |B+E|\neq 0,$$

то в качестве A можно взять $(E+B)^{-1}(E-B)$. Легко видеть, что A — кососимметрическая матрица.

970. Пусть A — ортогональная матрица. Тогда

$$AX\cdot AY=X\cdot\overline{A}AY=X\cdot Y$$

для любых вещественных векторов X и Y. Пусть

$$\lambda=\alpha+\beta i$$

— характеристическое число матрицы A,

$$U=X+Yi$$

— соответствующий собственный вектор. Тогда

$$AX=\alpha X-\beta Y,$$

$$AY=\alpha Y+\beta X,$$

откуда

$$|X|^2=X\cdot X=AX\cdot AX=\alpha^2|X|^2+\beta^2|Y|^2-2\alpha\beta X\cdot Y,$$

$$|Y|^2=Y\cdot Y=AY\cdot AY=\alpha^2|Y|^2+\beta^2|X|^2+2\alpha\beta X\cdot Y.$$

Сложив эти равенства, получим $\alpha^2+\beta^2=1$.

971. При $\beta\neq 0$ из последних равенств предыдущей задачи получим

$$\beta(|X|^2-|Y|^2)+2\alpha X\cdot Y=0.$$

С другой стороны,

$$X\cdot Y=AX\cdot AY=(\alpha^2-\beta^2)X\cdot Y+\alpha\beta(|X|^2-|Y|^2),$$

откуда

$$\alpha(|X|^2-|Y|^2)-2\beta X\cdot Y=0.$$

Следовательно,

$$X \cdot Y = |X|^2 - |Y|^2 = 0.$$

972. 1. Пусть $\lambda = \alpha + \beta i = \cos\varphi + i\sin\varphi$ — комплексное характеристическое число матрицы. Составим ортогональную матрицу A, первые два столбца которой составляют вещественную и мнимую части собственного вектора, принадлежащего λ. Тогда

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & \dots \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Вследствие ортогональности матрицы $Q^{-1}AQ$ сумма квадратов элементов каждой строчки равна 1 и, следовательно, все не обозначенные элементы первых двух строчек равны 0.

2. Пусть $\lambda = \pm 1$ — вещественное характеристическое число матрицы A, X — принадлежащий λ нормированный собственный вектор.

Составим ортогональную матрицу, первым столбцом которой является вектор X. Тогда

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \pm 1 & \dots \\ 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Все не обозначенные элементы первой строчки равны 0, так как сумма квадратов элементов каждой строчки ортогональной матрицы $Q^{-1}AQ$ равна единице.

Применяя приведенные рассуждения к ортогональным матрицам, остающимся в левом нижнем углу, получим требуемый результат.

973.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

j) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$;

$$\text{m)}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-2&0\\0&0&-1\end{pmatrix};\quad \text{n)}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\quad \text{o)}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

974.

$$\text{a)}\begin{pmatrix}1&1&&\\0&1&&\\&&1&1\\&&0&1\end{pmatrix};\quad \text{b)}\begin{pmatrix}1&1&&\\0&1&1&\\&1&1&1\\&&0&1\end{pmatrix};\quad \text{c)}\begin{pmatrix}\varepsilon&&&\\&\varepsilon^2&&\\&&\ddots&\\&&&\varepsilon^{n-1}\end{pmatrix},$$

где $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$.

975. «Ящик» $\begin{pmatrix}\lambda_i&1&&&\\&\lambda_i&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&&\lambda_i\end{pmatrix}$ не может быть периодическим.

Замечание. Результат неверен в поле с отличной от 0 характеристикой. Например, в поле характеристики 2 имеем

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^2=E.$$

976. Пусть A — данная матрица и $B=C^{-1}AC$ — ее приведение к канонической форме Жордана. Каноническая матрица B имеет треугольную форму, и ее диагональные элементы равны характеристическим числам матрицы A, причем каждое из них повторяется столько раз, какова его кратность в характеристическом уравнении. Далее, $B'_m=(C'_m)^{-1}A_mC'_m$ (задача 531). Следовательно, характеристические полиномы матриц A'_m и B'_m совпадают. При надлежащей нумерации сочетаний матрица B'_m имеет треугольную форму и, следовательно, ее характеристические числа равны диагональным элементам. Они же, очевидно, равны всевозможным произведениям характеристических чисел матрицы A, взятых по m.

977. Матрицы $A-\lambda E$ и $\bar{A}-\lambda E$ имеют, очевидно, совпадающие элементарные делители. Следовательно, A и $\bar{A}$ преобразуются к одной и той же канонической матрице и, следовательно, они преобразуются одна в другую.

978. Если $A=CD$, где C, D — симметрические матрицы и матрица C неособенная, то $\bar{A}=DC$ и, следовательно, $\bar{A}=C^{-1}AC$.

Таким образом, матрицу C следует искать среди матриц, преобразующих A и $\bar{A}$.

Пусть $A=SBS^{-1}$, где B—каноническая матрица:

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & & & & \\ & B_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & B_k \end{pmatrix}, \quad \text{где } B_l=\begin{pmatrix} \lambda_l & 1 & & & \\ & \lambda_l & 1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & 1 \\ & & & & \lambda_l \end{pmatrix}.$$

Тогда $\bar{A}=\bar{S}^{-1}\bar{B}\bar{S}$. Обозначим через H_l матрицу

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \cdot & & \\ & \cdot & & & \\ 1 & & & & \\ \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\bar{B}_l=H_l^{-1}B_lH_l$ и, следовательно,

$$\bar{B}=H^{-1}BH, \quad \text{где } H=\begin{pmatrix} H_1 & & & & \\ & H_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & H_k \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\bar{A}=\bar{S}^{-1}H^{-1}BH\bar{S}=\bar{S}^{-1}H^{-1}S^{-1}ASH\bar{S}=C^{-1}AC$, где $C=SH\bar{S}$. Матрица C, очевидно, симметрична. Положим $D=C^{-1}A$. Тогда $\bar{D}=\bar{A}C^{-1}=C^{-1}ACC^{-1}=D$. Таким образом, матрица D тоже симметрична и $A=CD$.

979. Пусть $|A-\lambda E|=(-1)^n(\lambda^n-c_1\lambda^{n-1}-c_2\lambda^{n-2}-\ldots-c_n)$. Очевидно, что $p_1=\mathrm{Sp}\,A=c_1$. Допустим, что уже доказано, что $p_1=c_1$, $p_2=c_2,\ldots,p_{k-1}=c_{k-1}$, и в этом предположении докажем, что $p_k=c_k$. Согласно конструкции, $A_k=A^k-p_1A^{k-1}-p_2A^{k-2}-\ldots-p_{k-1}A=A^k-c_1A^{k-1}-c_2A^{k-2}-\ldots-c_{k-1}A$. Следовательно,

$$\mathrm{Sp}\,A_k=kp_k=\mathrm{Sp}\,A^k-c_1\mathrm{Sp}\,A^{k-1}-\ldots-c_{k-1}\mathrm{Sp}\,A=$$
$$=S_k-c_1S_{k-1}-\ldots-c_{k-1}S_1,$$

где $S_1, S_2,\ldots, S_k$—степенные суммы от характеристических чисел матрицы A. Но по формулам Ньютона $S_k - c_1 S_{k-1} - \ldots - c_{k-1} S_1 = kc_k$. Следовательно,

$$p_k = c_k.$$

Далее, $B_n = A^n - c_1 A^{n-1} - \ldots - c_{n-1} A - c_n E = 0$, в силу соотношения Гамильтона — Кэли. Наконец,

$$AB_{n-1} = A_n = c_n E,$$

откуда

$$B_{n-1} = c_n A^{-1}.$$

980. Пусть

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & 0 & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим диагональную матрицу

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{bmatrix},$$

диагональные элементы которой произвольны, но попарно различны. Возьмем

$$Y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$XY - YX = \begin{pmatrix} 0 & b_{12}(\alpha_2 - \alpha_1) & \ldots & b_{1n}(\alpha_n - \alpha_1) \\ b_{21}(\alpha_1 - \alpha_2) & 0 & \ldots & b_{2n}(\alpha_n - \alpha_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}(\alpha_1 - \alpha_n) & b_{n2}(\alpha_2 - \alpha_n) & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, достаточно взять $b_{ik} = \dfrac{c_{ik}}{\alpha_k - \alpha_i}$ при $i \neq k$. Далее, применяя метод математической индукции, установим, что всякая матрица со следом, равным нулю, подобна матрице, у которой все диагональные элементы равны нулю. Ввиду того, что $\mathrm{Sp}\, C = 0$, $C \neq \mu E$ при $\mu \neq 0$ и, следовательно, найдется такой вектор U, что CU и U линейно независимы. Включив в базис векторы U и CU, получим, что C подобна матрице

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots & \gamma_{1n} \\ 1 & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & \cdots & \gamma_{nn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & P \\ Q & \Gamma \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\operatorname{Sp} \Gamma = \operatorname{Sp} C = 0$.

Следовательно, по индуктивному предположению, $\Gamma = S^{-1}\Gamma' S$, где Γ' — матрица с нулевыми диагональными элементами. Тогда у матрицы

$$C'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}^{-1} C' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & PS \\ S^{-1}Q & S^{-1}\Gamma S \end{pmatrix}$$

все диагональные элементы равны нулю.

Дмитрий Константинович Фаддеев,
Илья Самуилович Соминский

Сборник задач по высшей алгебре

М., 1972 г., 304 стр.

Редактор *В. В. Донченко*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректор *Т. С. Вайсберг*

Сдано в набор 29/III 1972 г. Подписано к печати 9/VI 1972 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 9,5. Условн. печ. л. 15,96. Уч.-изд. л. 19,11. Тираж 100 000 экз. Т-10522. Цена книги 64 коп. Заказ 2846.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71,
Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва, М-54, Валовая, 28