# Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными

**Задача.** *Определить тип уравнения*

$$A(x,y)U_{xx} + 2B(x,y)U_{xy} + C(x,y)U_{yy} + a(x,y)U_x + b(x,y)U_y + c(x,y)U = f(x,y) \quad (1)$$

*и привести его к каноническому виду.*

## Необходимый теоретический материал

**I**. Тип уравнения (1) определяется знаком выражения $B^2 - AC$:

- если $B^2 - AC > 0$ в некоторой точке, то уравнение (1) называется уравнением гиперболического типа в этой точке;
- если $B^2 - AC < 0$ в некоторой точке, то уравнение (1) называется уравнением эллиптического типа в этой точке;
- если $B^2 - AC = 0$ в некоторой точке, то уравнение (1) называется уравнением параболического типа в этой точке.

Уравнение (1) будет являться уравнением гиперболического, эллиптического, параболического типа в области $D$, если оно гиперболично, эллиптично, параболично в каждой точке этой области.

Уравнение (1) может менять свой тип при переходе из одной точки (области) в другую. Например, уравнение $yU_{xx} + U_{yy} = 0$ является уравнением эллиптического типа в точках $(x,y)$, $y > 0$; параболического типа в точках $(x,0)$; и гиперболического типа в точках $(x,y)$, $y < 0$.

**II.** Чтобы привести уравнение к каноническому виду, необходимо:

1. Определить коэффициенты $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$;
2. Вычислить выражение $B^2 - AC$;
3. Сделать вывод о типе уравнения (1) (в зависимости от знака выражения $B^2 - AC$);
4. Записать уравнение характеристик:

$$A(x,y)dy^2 - 2B(x,y)dxdy + C(x,y)dx^2 = 0; \tag{2}$$

5. Решить уравнение (2). Для этого:

   а) разрешить уравнение (2) как квадратное уравнение относительно $dy$:

$$dy = \frac{B(x,y) \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A(x,y)} dx; \tag{3}$$

   б) найти общие интегралы уравнений (3) (характеристики уравнения (1)):

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x,y) = C_1, \\ &\psi_1(x,y) = C_2, \end{aligned} \tag{4}$$

в случае уравнения гиперболического типа;

$$\varphi_2(x,y) = C\ , \tag{5}$$

в случае уравнения параболического типа;

$$\varphi_3(x,y) \pm i\psi_3(x,y) = C, \tag{6}$$

в случае уравнения эллиптического типа.

6. Ввести новые (характеристические) переменные $\xi$ и $\eta$ :

- в случае уравнения гиперболического типа в качестве $\xi$ и $\eta$ берут общие интегралы (4) уравнений (3), т.е.
$$\xi = \varphi_1(x, y),$$
$$\eta = \psi_1(x, y);$$
- в случае уравнения параболического типа в качестве $\xi$ берут общий интеграл (5) уравнения (3), т.е. $\xi = \varphi_2(x, y)$, в качестве $\eta$ берут произвольную, дважды дифференцируемую функцию $\psi_2$, не выражающуюся через $\varphi_2(x, y)$, т.е. $\eta = \psi_2(x, y)$;
- в случае уравнения эллиптического типа в качестве $\xi$ и $\eta$ берут вещественную и мнимую часть любого из общих интегралов (6) уравнений (3):
$$\xi = \mathrm{Re}\big(\varphi_3(x, y) + i\,\psi_3(x, y)\big) = \varphi_3(x, y),$$
$$\eta = \mathrm{Im}\big(\varphi_3(x, y) + i\,\psi_3(x, y)\big) = \psi_3(x, y).$$

7. Пересчитать все производные, входящие в уравнение (1), используя правило дифференцирования сложной функции: $U(\xi(x,y);\eta(x,y))$

$$
\begin{aligned}
&U_x = U_\xi \cdot \xi_x + U_\eta \cdot \eta_x, \\
&U_y = U_\xi \cdot \xi_y + U_\eta \cdot \eta_y, \\
&U_{xx} = U_{\xi\xi} \cdot (\xi_x)^2 + 2U_{\xi\eta} \cdot \xi_x \eta_x + U_{\eta\eta} \cdot (\eta_x)^2 + U_\xi \cdot \xi_{xx} + U_\eta \cdot \eta_{xx}, \\
&U_{yy} = U_{\xi\xi} \cdot (\xi_y)^2 + 2U_{\xi\eta} \cdot \xi_y \eta_y + U_{\eta\eta} \cdot (\eta_y)^2 + U_\xi \cdot \xi_{yy} + U_\eta \cdot \eta_{yy}, \\
&U_{xy} = U_{\xi\xi} \cdot \xi_x \xi_y + U_{\xi\eta} \cdot (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + U_{\eta\eta} \cdot \eta_x \eta_y + U_\xi \cdot \xi_{xy} + U_\eta \cdot \eta_{xy}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

8. Подставить найденные производные в исходное уравнение (1) и привести подобные слагаемые. В результате уравнение (1) примет один из следующих видов:
   - в случае уравнения гиперболического типа:
     $$U_{\xi\eta} + F_1(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta) = 0;$$
   - в случае уравнения параболического типа:
     $$U_{\eta\eta} + F_1(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta) = 0;$$
   - в случае уравнения эллиптического типа:
     $$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + F_1(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta) = 0.$$

## 1.2. Пример выполнения задачи 1

*Определить тип уравнения*

$$U_{xx} - 4U_{xy} - 21U_{yy} + 2U_x - 3U_y + 5U = x^2 \qquad (8)$$

*и привести его к каноническому виду.*

Решение:

1. Определим коэффициенты $A(x,y), B(x,y), C(x,y)$:

$$A=1,\quad B=-2,\quad C=-21.$$

2. Вычислим выражение $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = 4 + 21 = 25.$$

3. $B^2 - AC = 25 > 0 \Rightarrow$ уравнение гиперболического типа во всей плоскости $XOY$.
4. Запишем уравнение характеристик:

$$dy^2 + 4dxdy - 21dx^2 = 0\ . \qquad (9)$$

5. Решим уравнение (9). Для этого:

а) разрешаем уравнение (9) как квадратное уравнение относительно *dy:*

$$dy = \frac{-2 \pm \sqrt{25}}{1}\, dx;$$

$$dy = (-2 \pm 5)dx; \qquad (10)$$

$$dy = -7dx, \qquad dy = 3dx,$$

б) найдём общие интегралы уравнений (10) (характеристики уравнения(9)):

$$y = -7x + C_1, \qquad y = 3x + C_2,$$

$$y + 7x = C_1, \qquad y - 3x = C_2.$$

6. Введём характеристические переменные:

$$\xi = y + 7x,$$

$$\eta = y - 3x.$$

7. Пересчитаем производные, входящие в исходное уравнение. Найдем сначала

$$\xi_x = 7, \xi_y = 1, \ \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_x = -3, \eta_y = 1, \ \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0.$$

Используя формулы (7), получим:

$$\begin{array}{r|l}
2 & U_x = 7U_\xi - 3U_\eta, \\
-3 & U_y = U_\xi + U_\eta, \\
1 & U_{xx} = 49U_{\xi\xi} - 42U_{\xi\eta} + 9U_{\eta\eta}, \\
1 & U_{xy} = 7U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} - 3U_{\eta\eta}, \\
-21 & U_{yy} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}.
\end{array}$$

Здесь слева написаны коэффициенты уравнения (8) при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим:

$$U_{\xi\xi}\{49-28-21\}+U_{\xi\eta}\{-42-16-42\}+U_{\eta\eta}\{9+12-21\}+$$

$$+U_{\xi}\{14-3\}+U_{\eta}\{-6-3\}+5U=\frac{(\xi-\eta)^2}{16}.$$

Или после деления на -100 (коэффициент при $U_{\xi\eta}$):

$$U_{\xi\eta}-0{,}11U_{\xi}+0{,}09U_{\eta}-0{,}05U=-\frac{(\xi-\eta)^2}{1600}.$$

**Ответ.** Уравнение (8) является уравнением гиперболического типа на всей плоскости *XOY*. Канонический вид

$$U_{\xi\eta}-0{,}11U_{\xi}+0{,}09U_{\eta}-0{,}05U=-\frac{(\xi-\eta)^2}{1600},$$

где $\xi=y+7x,\quad \eta=y-3x.$

## 1.3. Пример выполнения задачи 2

*Определить тип уравнения*

$$25U_{xx} - 10U_{xy} + U_{yy} + U_y + 2U = 5y + 2x \qquad (11)$$

*и привести его к каноническому виду.*

Решение:

1. Определим коэффициенты $A(x,y), B(x,y), C(x,y)$.
   В нашем примере они постоянны:

   $A=25, \quad B=-5, \quad C=1.$

2. Вычислим выражение $B^2 - AC$:

   $$B^2 - AC = 25 - 25 = 0.$$

3. $B^2 - AC = 0 \Rightarrow$ уравнение параболического типа во всей плоскости $XOY$.

4. Запишем уравнение характеристик:

$$25dy^2 + 10dxdy + dx^2 = 0 \ . \tag{12}$$

5. Решим уравнение (12). Для этого:

а) разрешаем уравнение (9) как квадратное уравнение относительно $dy$. Однако в этом случае левая часть уравнения является полным квадратом:

$$(5dy + dx)^2 = 0;$$

$$5dy = -dx; \tag{13}$$

б) имеем только одно уравнение характеристик (13). Найдём его общий интеграл (уравнения параболического типа имеют только одно семейство вещественных характеристик):

$$5y = -x + C,$$

$$5y + x = C.$$

6. Введём характеристические переменные: одну из переменных $(\xi)$ вводим как и ранее

$$\xi = 5y + x,$$

а в качестве $\eta$ берут произвольную, дважды дифференцируемую функцию, не выражающуюся через $\xi$, пусть

$$\eta = x;$$

7. Пересчитаем производные, входящие в исходное уравнение. Найдем сначала

$$\xi_x = 1,\ \xi_y = 5,\ \xi_{xx} = 0,\ \xi_{xy} = 0,\ \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_x = 1,\ \eta_y = 0,\ \eta_{xx} = 0,\ \eta_{xy} = 0,\ \eta_{yy} = 0.$$

Используя формулы (7), получим:

$$\begin{array}{r|l}
0 & U_x = U_\xi + U_\eta, \\
1 & U_y = 5U_\xi, \\
25 & U_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \\
-10 & U_{xy} = 5U_{\xi\xi} + 5U_{\xi\eta}, \\
1 & U_{yy} = 25U_{\xi\xi}.
\end{array}$$

Здесь слева написаны коэффициенты уравнения (11) при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим:

$$U_{\xi\xi}\{25-50+25\}+U_{\xi\eta}\{50-50\}+U_{\eta\eta}\{25\}+$$

$$+U_{\xi}\{5\}+2U=\xi+\eta.$$

Функцию, стоящую в правой части уравнения (11) необходимо также выразить через характеристические переменные.

После деления на 25 (коэффициент при $U_{\eta\eta}$):

$$U_{\eta\eta}+0{,}2U_{\xi}+0{,}08U=0{,}4(\xi+\eta).$$

**Ответ.** Уравнение (11) является уравнением параболического типа на всей плоскости $XOY$. Канонический вид

$$U_{\eta\eta}+0{,}2U_{\xi}+0{,}08U=0{,}4(\xi+\eta).$$

где $\xi=5y+x,\quad \eta=x.$

## 1.4. Пример выполнения задачи 3

Определить тип уравнения

$$U_{xx} + 4U_{yy} + U_x - 3U_y + U = x^2 \qquad (14)$$

и привести его к каноническому виду.

Решение:

1. Определим коэффициенты $A(x, y), B(x, y), C(x, y)$:

$$A=1, \quad B=0, \quad C=4.$$

2. Вычислим выражение $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = 0 - 4 = -4.$$

3. $B^2 - AC = -4 < 0 \Rightarrow$ уравнение эллиптического типа во всей плоскости $XOY$.

4. Запишем уравнение характеристик:

$$dy^2 + 4dx^2 = 0 \ . \qquad (15)$$

5. Решим уравнение (15). Для этого:

а) разрешаем уравнение (15) как квадратное уравнение относительно $dy$:

$$dy = \pm 2idx\,; \tag{16}$$

б) уравнения (16) – это пара комплексно-сопряженных уравнений. Они имеют пару комплексно-сопряженных общих интегралов (уравнения эллиптического типа не имеют вещественных характеристик)

$$\begin{aligned} &y = \pm 2xi + C, \\ &y \mp 2xi = C. \end{aligned} \tag{17}$$

6. Введём характеристические переменные как вещественную и мнимую части одного из общих интегралов (17):

$$\xi = \mathrm{Re}(y + 2xi) = y,$$

$$\eta = \mathrm{Im}(y + 2xi) = 2x.$$

7. Пересчитаем производные, входящие в исходное уравнение. Найдем сначала

$$\xi_x = 0, \xi_y = 1, \ \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_x = 2, \eta_y = 0, \ \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0.$$

Используя формулы (7), получим:

$$\begin{array}{r|l} 1 & U_x = 2U_\eta, \\ -3 & U_y = U_\xi, \\ 1 & U_{xx} = 4U_{\eta\eta}, \\ 4 & U_{yy} = U_{\xi\xi} \end{array}$$

Здесь слева написаны коэффициенты уравнения (14) при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим:

$$U_{\xi\xi}\{4\}+U_{\eta\eta}\{4\}+$$
$$+U_{\xi}\{-3\}+U_{\eta}\{2\}+U=\xi.$$

Или после деления на 4 (коэффициент при $U_{\xi\xi}$ и $U_{\eta\eta}$):

$$U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta}-0{,}75U_{\xi}+0{,}5U_{\eta}+0{,}25U=\xi.$$

**Ответ.** Уравнение (14) является уравнением эллиптического типа на всей плоскости *XOY*. Канонический вид

$$U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta}-0{,}75U_{\xi}+0{,}5U_{\eta}+0{,}25U=\xi.$$

где $\xi=y,\quad \eta=2x.$