Занятие №6
Теорема взаимности. Метод заполнения диэлектриком.

Vasiliy A. Es’kin

University of Nizhny Novgorod

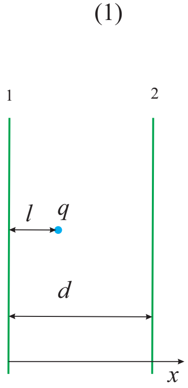
Задачи, подлежащие рассмотрению

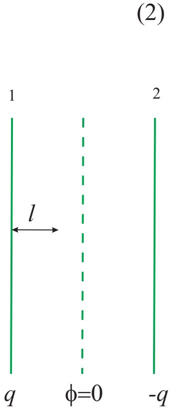
Задачи № 2.19, 2.20, 2.34, 2.35, 2.48 и 2.16 из задачника Гильденбурга В.Б. и Миллера М.А. «Сборник задач по электродинамике».

Задача № 2.19. Постановка задачи

Плоский конденсатор емкостью C образован двумя одинаковыми параллельными пластинами, расстояние между которыми d много меньше их размеров. Заряд каждой пластины равен нулю. Найти разность потенциалов между пластинами U, созданную точечным зарядом q, в следующих случаях.
1) Заряд находится внутри конденсатора вдали от его краёв на расстоянии l от одной из пластин.
2) Заряд находится вне конденсатора на малой высоте над одной из пластин и на большом расстоянии от её краёв.
3) Заряд находится вне конденсатора на большом (по сравнению с размерами пластин) расстоянии R от некоторой точки O внутри него. Направление из точки O на заряд образует угол θ с нормалью к пластинам.

Задача № 2.19. Дополнительные построения для использования теоремы взаимности





Задача № 2.19. Решение

1) Первая конфигурация зарядов (1) соответствует исходной задаче:

$$\rho^{(1)} = q\delta(x-l)\delta(y)\delta(z),$$
$$Q_1^{(1)} = 0, \quad \varphi_1^{(1)} = ?$$
$$Q_2^{(1)} = 0, \quad \varphi_2^{(1)} = ?$$

Во второй конфигурации (2) только на пластинах находятся заряды q и $-q$:

$$\rho^{(2)} = 0, \quad \varphi^{(2)}(l,0,0) = ?$$
$$Q_1^{(2)} = q$$
$$Q_2^{(2)} = -q$$

Здесь $\varphi^{(2)}(l,0,0)$ потенциал в точке, в которой ранее располагался заряд.

Задача № 2.19. Решение

Использую теорему взаимности, имеем следующее соотношение:

$$q\varphi^{(2)}(l,0,0) = q\left(\varphi_1^{(1)} - \varphi_2^{(1)}\right)$$

Отсюда получаем для искомой разности потенциалов:

$$U = \varphi^{(2)}(l,0,0)$$

Во втором случае, в качестве поверхности на которой потенциал принимается равным нулю, была выбрана поверхность параллельная пластинам и расположенная ровно посередине между пластинами (см. рис.).

1)

$$\varphi^{(2)}(l,0,0) = \int\limits_l^{d/2} \mathbf{E}d\mathbf{l} = \left|\mathbf{E} = 4\pi\sigma\mathbf{x}_0\right| = 4\pi\sigma\left(\frac{d}{2} - l\right) =$$

$$= 4\pi\frac{q}{S}\left(\frac{d}{2} - l\right) = \frac{q}{C}\left(\frac{1}{2} - \frac{l}{d}\right)$$

2)

$$\varphi^{(2)}(l,0,0)=\int\limits_0^{d/2}\mathbf{E}d\mathbf{l}=\frac{q}{2C}$$

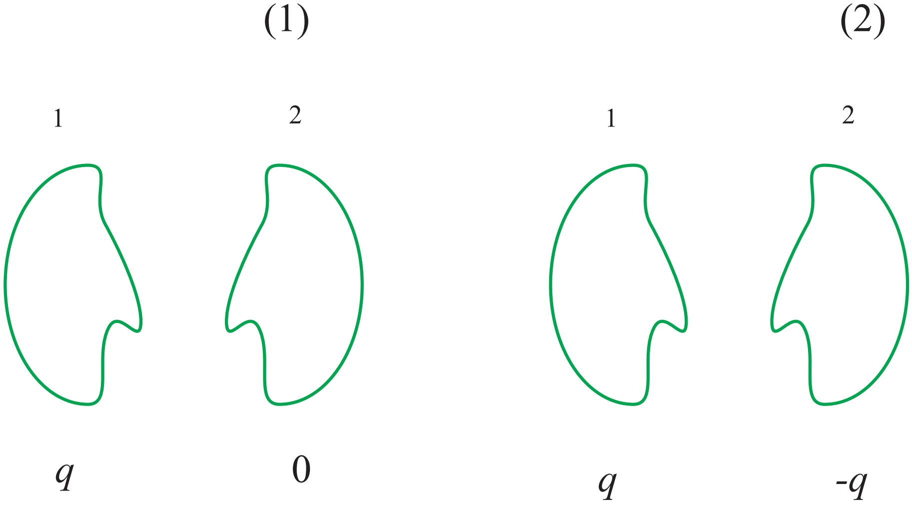
3) На большом расстоянии система из двух пластин (во втором случае) будет эквивалентна диполю с дипольным моментом $\mathbf{p}=qd\mathbf{x}_0$. Потенциал этого диполя на больших расстояниях:

$$\varphi^{(2)}=\frac{(\mathbf{p},\mathbf{R})}{R^3}=\frac{qd}{R^2}\cos\theta$$

Задача № 2.20.

Чему равна разность потенциалов U между двумя зеркально симметричными проводниками произвольной формы, образующими конденсатор ёмкости C, если на один из них помещён заряд q, а другой не заряжен?

Задача № 2.20. Дополнительные построения для использования теоремы взаимности



Задача № 2.20. Решение

Первая конфигурация зарядов (1) соответствует исходной задаче:

$$Q_1^{(1)} = q, \quad \varphi_1^{(1)} =?$$
$$Q_2^{(1)} = 0, \quad \varphi_2^{(1)} =?$$

Во второй конфигурации (2) поместим на второй проводник заряд $-q$:

$$Q_1^{(2)} = q, \quad \varphi_1^{(2)}$$
$$Q_2^{(2)} = -q, \quad \varphi_2^{(2)}$$

Нетрудно догадаться, что во втором случае потенциал первого проводника складывается из потенциала, который создаёт заряд, расположенный на нём, и потенциала, наводимого зарядом $-q$ на втором проводнике. Опираясь на потенциалы в первом случае можем записать:

$$\varphi_1^{(2)} = \varphi_1^{(1)} - \varphi_2^{(1)}$$

Задача № 2.20. Решение

Аналогично можем записать потенциал на втором проводнике

$$\varphi_2^{(2)} = -\varphi_1^{(1)} + \varphi_2^{(1)}$$

Отсюда имеем

$$\varphi_1^{(2)} - \varphi_2^{(2)} = 2(\varphi_1^{(1)} - \varphi_2^{(1)})$$

С другой стороны

$$\varphi_1^{(2)} - \varphi_2^{(2)} = \frac{q}{C}$$

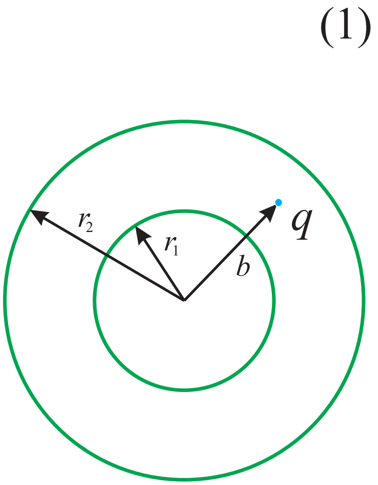
В результате получаем

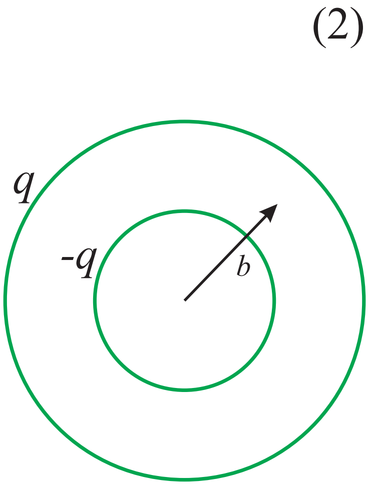
$$U = \varphi_1^{(1)} - \varphi_2^{(1)} = \frac{q}{2C}$$

Задача № 2.34.

Найти разность потенциалов $U = \varphi_1 - \varphi_2$ между двумя незаряженными проводящими концентрическими сферами, создаваемую точечным зарядом q, расположенным на расстоянии b от центра. Радиусы сфер r_1 и r_2. Рассмотреть случаи: 1). $b < r_1 < r_2$; 2). $r_1 < b < r_2$; 3). $r_1 < r_2 < b$.

Задача № 2.34. Дополнительные построения для использования теоремы взаимности





Задача № 2.34. Решение

Первая конфигурация зарядов (1) соответствует исходной задаче:

$$\rho^{(1)} = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{b}),$$
$$Q_1^{(1)} = 0, \quad \varphi_1^{(1)} =?$$
$$Q_2^{(1)} = 0, \quad \varphi_2^{(1)} =?$$

Во второй конфигурации (2) на внутренней (первой) и внешней (второй) сферах помещаем заряды $-q$ и q соответственно:

$$\rho^{(2)} = 0, \quad \varphi^{(2)}(\mathbf{b}) =?$$
$$Q_1^{(2)} = -q$$
$$Q_2^{(2)} = q$$

Из теоремы взаимности получаем

$$-\varphi_1^{(1)} + \varphi_2^{(1)} = \varphi^{(2)}(\mathbf{b}) = -U$$

Задача № 2.34. Решение

1)

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{b}) = q\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Доделать пункты 2) и 3).

По аналогии решить задачу № 2.35

Задача № 2.48.

Плоский конденсатор образован двумя одинаковыми прямоугольными пластинами с размерами a и b и расстоянием между ними d. Пространство между пластинами заполнено неоднородным диэлектриком. Найти ёмкость конденсатора, пренебрегая краевым эффектом, для случаев, когда зависимость диэлектрической проницаемости ε от координаты задава в виде: 1). $\varepsilon = \varepsilon(x)$; 2). $\varepsilon = \varepsilon(y)$; 3). $\varepsilon = \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(y)$; (ось x параллельна одной из сторон пластин, ось y перпендикулярна пластинам).

Задача № 2.48. Решение

1) $\varepsilon = \varepsilon(x)$ — в этом случае сохраняется однородность поля $\mathbf{E}$, т.к. заполнение осуществляется вдоль силовых трубок ($\nabla\varepsilon \perp \mathbf{E}$)

$$U = Ed$$

$$q = \int_S \sigma(x)dxdz = b\int\limits_0^a \sigma(x)dx$$

$$\mathbf{D} = 4\pi\sigma(x)\mathbf{x}_0, \quad \varepsilon(x)\mathbf{E} = 4\pi\sigma(x)\mathbf{x}_0$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{1}{Ed}b\int\limits_0^a \sigma(x)dx = \frac{b}{4\pi d}\int\limits_0^a \varepsilon(x)dx$$

Задача № 2.48. Решение

2) $\varepsilon = \varepsilon(y)$ — в этом случае сохраняется структура поля $\mathbf{D}$.

$$\mathbf{D} = 4\pi\sigma(x)\mathbf{x}_0 = 4\pi\frac{q}{ab}\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon(y)\mathbf{E}$$

$$U = \int\limits_0^d E(y)dy = \int\limits_0^d \frac{4\pi q}{ab}\frac{1}{\varepsilon(y)}dy$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{ab}{4\pi}\left(\int\limits_0^d \frac{dy}{\varepsilon(y)}\right)^{-1}$$

Доделать пункт 3) и сделать задачу № 2.16.

Задания для работы в аудитории

Просмотреть записи своих лекций о теореме взаимности. Необходимо довести представленные задачи до конца. Сканы (фотографии) работ принимаются до конца следующего дня по адресу vasiliy.eskin@gmail.com. В конце письма поставьте имя и фамилию. Не приславшие вовремя считаются отсутствующими на занятии.

Задания для домашней работы

Необходимо прорешать задачи № 2.22, 2.39, 2.31, 2.20 и 2.35 из задачника Гильденбурга В.Б. и Миллера М.А. «Сборник задач по электродинамике».

Занятие №7
Решение задач электростатики методом разделения переменных

Vasiliy A. Es'kin

University of Nizhny Novgorod

Задачи, подлежащие рассмотрению

Задачи № 2.22, 2.39 и 2.31 из задачника Гильденбурга В.Б. и Миллера М.А. «Сборник задач по электродинамике».

Задача № 2.22. Постановка задачи

Найти потенциал $\varphi(x, y)$ в пространстве между двумя бесконечными параллельными плоскостями $x = 0$ и $x = L$, если на первой из них $\varphi = 0$, а на второй

1. $\varphi = \varphi_0 \sin ky$;
2. $\varphi = \varphi_0 |\sin ky|$ (φ_0 и k – константы).

Задача № 2.22. Решение

1) Необходимо найти решение уравнения Лапласа с г.у.

$$\Delta\varphi = 0, \quad \varphi(0, y) = 0, \quad \varphi(0, y) = 0, \quad \varphi(L, y) = \varphi_0 \sin ky.$$

Решим следующее уравнение

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Ищем решение в виде

$$\Phi\,(x, y) = X(x)Y(y).$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0.$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \beta^2.$$

$$X''(x) - \beta^2 X(x) = 0.$$

$$Y''(y) + \beta^2 Y(y) = 0.$$

Задача № 2.22. Решение

$$X(x) = A_1 \cosh \beta x + A_2 \sinh \beta x$$

$$X(0) = A_1 \cosh \beta 0 + A_2 \sinh \beta 0 => A_1 = 0$$

$$X(x) = A_2 \sinh \beta x$$

Есть ещё один частный случай: $\beta = 0$, $X(x) = C_1 x + C_2$
$C_2 = 0$

$$Y(y) = B_1 \cos \beta y + B_2 \sin \beta y$$

Частное решение выглядит как

$$\Phi_\beta (x, y) = \left(B_{\beta 1} \cos \beta y + B_{\beta 2} \sin \beta y\right) \sinh \beta x.$$

Общее решение - сумма частных решений:

$$\Phi (x, y) = \sum_{\beta \neq 0} \left(B_{\beta 1} \cos \beta y + B_{\beta 2} \sin \beta y\right) \sinh \beta x + (B_{01} y + B_{02})\, x.$$

Задача № 2.22. Решение

Используем второе граничное условие:

$$\sum_{\beta\neq 0}\left(B_{_\beta 1}\cos\beta y + B_{_\beta 2}\sin\beta y\right)\sinh\beta L + \left(B_{01}y + B_{02}\right)L = \varphi_0\sin ky.$$

В силу условия ортогональности функций $\sin\beta y$ и $\cos\beta y$ получаем:

$$B_{01} = 0, \quad B_{02} = 0, \quad B_{_\beta 1} = 0, \quad B_{_\beta 2} = 0 \quad if\beta \neq k,$$

$$B_{k2} = A_k = \varphi_0/\sinh kL$$

В итоге получаем

$$\Phi\left(x, y\right) = \frac{\varphi_0}{\sinh kL}\sinh kx\sin ky.$$

Задача № 2.22. Решение

2) Необходимо найти решение уравнения Лапласа со следующими г.у.

$$\Delta\varphi = 0, \quad \varphi(0,y) = 0, \quad \varphi(0,y) = 0, \quad \varphi(L,y) = \varphi_0|\sin ky|.$$

Общее решение остаётся прежним. Для нахождения решения разложим поле в сечении $x = L$ в ряд Фурье:

$$|\sin ky| = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2kny)$$

Здесь

$$a_0 = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(y)dy, \quad a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(y)\cos\frac{2\pi ny}{T}dy$$

$T = \dfrac{\pi}{k}$ — пространственный период функции $|\sin ky|$.
Доделать задачу до конца.

Задача № 2.39.

Найти распределение плотности заряда Ω по поверхности проводящей сферы радиуса a, внесённой во внешнее однородное поле $\mathbf{E}_0$.

Задача № 2.39. Решение

Потенциал в отсутствии зарядов описывается уравнением Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

В сферических координатах (r, θ, ψ) уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} = 0.$$

Можно показать, что при азимутальной симметрии $(\frac{\partial}{\partial\psi} = 0)$ разделение переменных в сферических координатах приводит к решению вида

Задача № 2.39. Решение

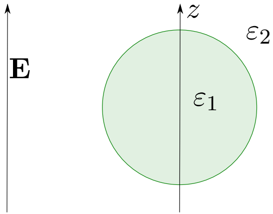
$$\varphi\left(r,\theta\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n r^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right]P_n\left(\cos\theta\right).$$

Здесь $P_n(x)$— полином Лежандра:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n.$$

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),\ldots.$$

Задача № 2.39. Решение



Внешнее поле:

$\varphi_{\text{внешнее}} = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta.$

Отсюда получаем

$$\lim_{r\to\infty} \varphi\left(r,\theta\right) = -E_0 r\cos\theta.$$

Следовательно

$$A_1 = -E_0, \quad A_n = 0$$

Задача № 2.39. Решение

Граничные условия:

$$\varphi\big|_{r=a+0} = C_0 \quad (C_0 = \text{const}).$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\Big|_{r=a+0} = 0 \quad \left(E_\tau\big|_{r=a+0} = 0\right).$$

а) Первое условие можно записать как:

$$C_0 = A_1 a\cos\theta + \frac{B_0}{a} + \frac{B_1}{a^2}\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{a^{n+1}}P_n\left(\cos\theta\right).$$

$$B_0 = C_0 a, \quad A_1 = -B_1/a^3, \quad B_2 = B_3 = ... = 0$$

б) Из второго условия получаем фактически тоже самое

$$A_1 a\sin\theta + \frac{B_1}{a^3}\sin\theta = 0 => A_1 = -B_1/a^3 => B_1 = a^3 E_0.$$

Задача № 2.39. Решение

Положим $C_0 = 0$. Тогда полное поле

$$\varphi = -E_0 r \cos\theta + \frac{a^3 E_0}{r^2} \cos\theta.$$

Найти E_r и довести задачу до конца.

Задача № 2.31.

Двугранный угол θ_0 образован двумя заряженными металлическими полуплоскостями, имеющими одинаковый потенциал $\varphi = 0$. Получить и исследовать выражения для потенциала и поля во внутренней и внешней областях угла, которые при $\theta_0 = \pi$ переходят в соответствующие выражения для равномерно заряженной плоскости.
Решить эту задачу

Задания для работы в аудитории

Просмотреть записи своих лекций о методе разделения переменных. Необходимо довести представленные задачи до конца. Сканы (фотографии) работ принимаются до конца следующего дня по адресу vasiliy.eskin@gmail.com. В конце письма поставьте имя и фамилию. Не приславшие вовремя считаются отсутствующими на занятии.

Задания для домашней работы

Необходимо прорешать задачи № 3.2, 3.4, 3.6 и 4.2 из задачника Гильденбурга В.Б. и Миллера М.А. «Сборник задач по электродинамике».

Занятие №8
Токостатика. Магнитостатика.

Vasiliy A. Es'kin

University of Nizhny Novgorod

Задачи, подлежащие рассмотрению

Задачи № 3.2, 3.4, 3.6, 4.2 и 4.3 из задачника Гильденбурга В.Б. и Миллера М.А. «Сборник задач по электродинамике».

Задача № 3.2. Постановка задачи

Через границу раздела сред с различными значениями проводимости (σ_1, σ_2) и диэлектрической проницаемости $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ течёт ток с нормальной компонентой плотности j_n. Найти плотность поверхностного заряда Ω на границе.

Задача № 3.2. Решение

Воспользуемся граничным условием для нормальных компонент индукции электрического поля:

$$(\mathbf{n}_{12}, \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 4\pi\Omega. \quad (1)$$

Учтём материальные соотношения $\mathbf{D}_2 = \varepsilon_2\mathbf{E}_2$, $\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1\mathbf{E}_1$, $\mathbf{j}_2 = \sigma_2\mathbf{E}_2$, $\mathbf{j}_1 = \sigma_1\mathbf{E}_1$.
Учитывая непрерывность тока на границе двух сред ($j_{n1} = j_{n2} = j_n$) получаем, что

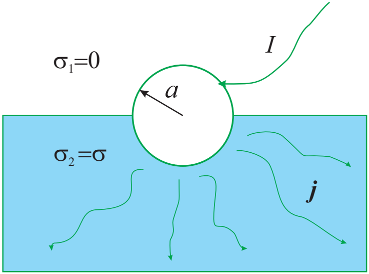
$$D_{1n} = \varepsilon_1\frac{j_n}{\sigma_1}, D_{2n} = \varepsilon_2\frac{j_n}{\sigma_2} \quad (2)$$

Доведите задачу до конца.

Задача № 3.4. Постановка задачи

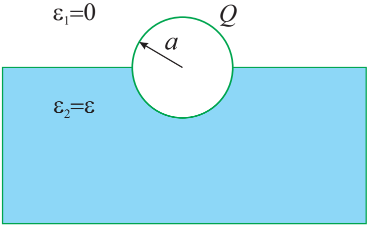
Идеальный сферический электрод радиуса a погружён наполовину в электролит с проводимостью σ. Найти сопротивление электролита между электродом и бесконечностью R и распределение тока в нём $\mathbf{j}$.

Токостатическая задача



=>

Электростатическая задача



Задача № 3.4. Решение

Пусть к электроду подводится ток I. Сопротивление находим из закона Ома $R = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} = \dfrac{\varphi}{I}$.

Перейдём к электростатической задаче путём замены тока I на $4\pi Q$ и σ на ε.

$$R -> \frac{\varphi}{4\pi Q} = \frac{1}{4\pi C}$$

Из уравнения Максвелла найдём напряжённость электрического поля

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{s} = 4\pi Q$$

$$\varepsilon_2 E_2 2\pi r^2 + \varepsilon_1 E_1 2\pi r^2 = 4\pi Q$$

Отсюда

$$E_2 = \frac{2Q}{\varepsilon r^2}$$

и потенциал $\varphi = \dfrac{2Q}{\varepsilon r}$

Задача № 3.4. Решение

Тогда получаем сопротивление в «электростатическом представлении» в виде

$$R = \frac{2}{\varepsilon a}\frac{1}{4\pi}$$

Переходя к токостатике с обратной заменой зарядов токами и проницаемости проводимостью имеем

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma a}$$

В электростатической задаче $\mathbf{D} = \dfrac{2Q}{r^2}\mathbf{r}_0$. Проводя обратную замену с $\mathbf{D} -> \mathbf{j}$ получаем, что

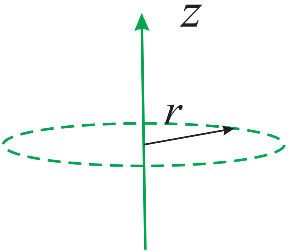
$$\mathbf{j} = \frac{I}{2\pi r^2}\mathbf{r}_0$$

Задача № 3.6. Постановка задачи

Концы двух тонких проволочек касаются горизонтальной поверхности электролита, налитого в широкий и глубокий сосуд. Между ними пропущен ток силы I. Найти плотность тока $\mathbf{j}$ в электролите.
Провести решение этой задачи на основе решения для тока задачи 3.4.

Задача № 4.2. Постановка задачи

Найти магнитное поле, создаваемое током с плотностью $\mathbf{j} = \mathbf{z}_0 j_0 \exp\left(-\alpha r^2\right)$, где r — расстояние до оси, $\alpha = \mathrm{const}$.



Задача № 4.2. Решение

В силу симметрии задачи выбранный ток создаёт магнитное поле, которое имеет только азимутальную компоненту ($\mathbf{H} = H\varphi_0$, имеющая одинаковые значения на расстоянии r от оси z.

Используем уравнение для циркуляции напряжённости магнитного поля:

$$\oint\limits_L \mathbf{H}d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\iint\limits_S \mathbf{j}d\mathbf{s}$$

Отсюда

$$\int\limits_0^{2\pi} H_\varphi r d\varphi = \frac{4\pi}{c}\int\limits_0^{r}\int\limits_0^{2\pi} j_0 e^{-\alpha r^2} r dr d\varphi$$

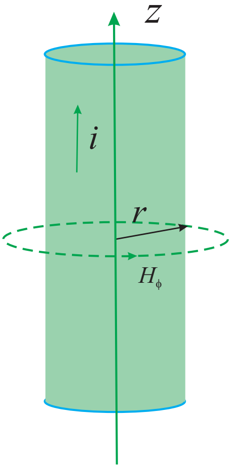
Довести задачу до конца.

Задача № 4.3 (1,2). Постановка задачи

Найти магнитное поле $\mathbf{H}$ и векторный потенциал $\mathbf{A}$, создаваемые током, текущим с постоянной поверхностной плотностью $\mathbf{i}$ по поверхности бесконечного цилиндра радиуса a в направлении:

1. вдоль образующих цилиндра
2. перпендикулярно образующей

Задача № 4.3 1). Рисунок к задаче



Задача № 4.3 1). Решение

В силу симметрии задачи, в данном случае имеется только азимутальная компонента вектора магнитного поля. Для нахождения напряжённости магнитного поля воспользуется уравнением Максвелла:

$$\oint\limits_L \mathbf{H}d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\iint\limits_S \mathbf{j}d\mathbf{s}$$

В случае $r < a$ имеем $H_\varphi = 0$.

при $r > a$: $2\pi r H_\varphi = \dfrac{4\pi}{c}2\pi a i_z$

$$H_\varphi = \frac{4\pi a}{cr}i_z$$

Для нахождения векторного потенциала не будем пользоваться решение уравнения Пуассона, т.к. в данном случае источники поля не сосредоточены в ограниченной области пространства.

Из определения векторного потенциала $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ и отсутствия зависимости от координаты z получаем уравнение

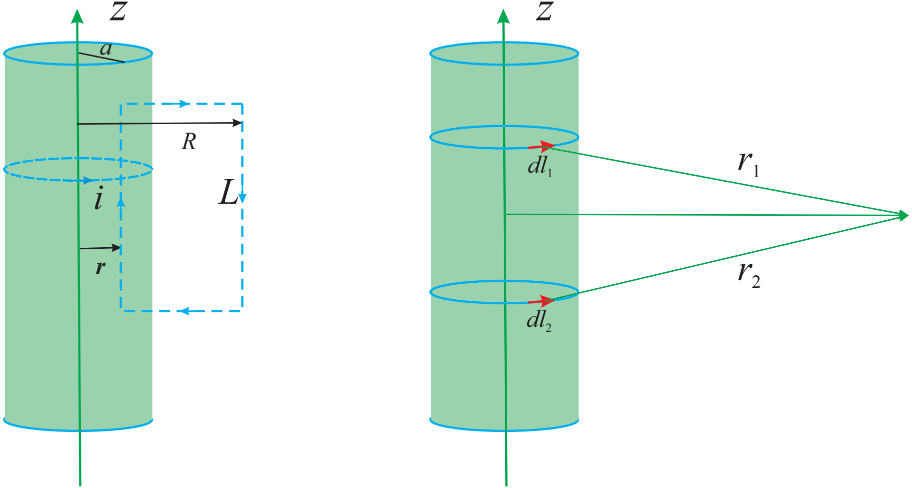
$$\mu H_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r}$$

Отсюда

$$A_z = -\mu \int\limits_a^r \frac{4\pi a}{cr} i_z dr$$

Довести решение задачи до конца.

Задача № 4.3 2). Рисунок к задаче



Задача № 4.3 2). Решение

Для решения этой задачи выберем контур таким образом, какой указан на левой панели рисунка с предыдущего слайда. Т.е. прямоугольный контур с размерами двух сторон, равными L, а оставшиеся две - уходят в бесконечность ($R \to \infty$).
Обратим внимание, что одинаковые участки dl_1 и dl_2, лужащие на одной образующей, создают одинаковое по модулю магнитное поле в плоскости, проходящей перпендикулярно отрезку, через его середину. Общее поле, создаваемое этими участками:

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c}\left(\frac{[d\mathbf{l}_1, \mathbf{r}_1]}{r_1^3} + \frac{[d\mathbf{l}_2, \mathbf{r}_2]}{r_2^3}\right)$$

Т.к. $d\mathbf{l}_1 = d\mathbf{l}_2 = d\mathbf{l}$ и $r_1^2 = r_2^2 = r^2$, то

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c}\left(\frac{[d\mathbf{l}_1, \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2]}{r_1^3}\right)$$

Задача № 4.3 2). Решение

$[d\mathbf{l}_1, \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2]||\mathbf{z}_0$ Т.е., вне бесконечного соленоида поле продольно.
Поле отдельного витка убывает как $\dfrac{1}{r^3}$ при $r \to \infty$. Таким образом, интеграл по бесконечно удалённой стороне будет равен нулю.
Из выражения для циркуляции имеем:

$$H_z L = \frac{4\pi}{c} i_\varphi L$$

при $r < a$: $H_z = \dfrac{4\pi}{c} i_\varphi$
при $r > a$: H_z.
По аналогии с предыдущим пунктом, найти векторный потенциал во всём пространстве.

Задания для домашней работы

Необходимо прорешать задачи № 4.9, 4.10, 4.28, и 5.21 из задачника Гильденбурга В.Б. и Миллера М.А. «Сборник задач по электродинамике».

Занятие №9
Магнитостатика.

Vasiliy A. Es'kin

University of Nizhny Novgorod

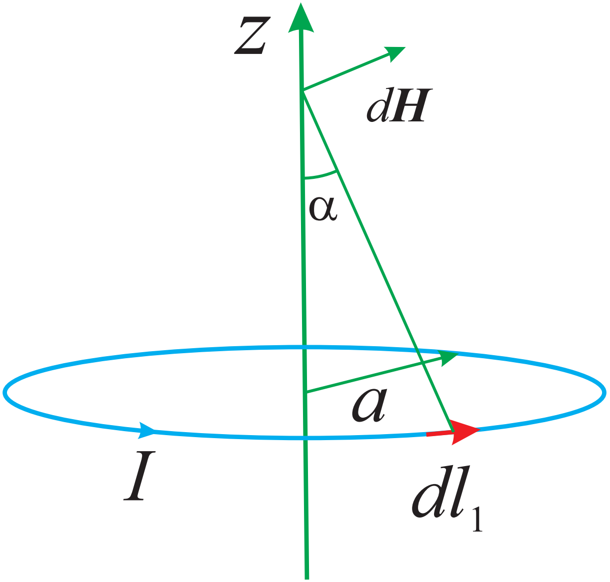
Задачи, подлежащие рассмотрению

Задачи № 4.9, 4.10, 4.28, 5.20, 5.21 и 5.17 из задачника Гильденбурга В.Б. и Миллера М.А. «Сборник задач по электродинамике».

Задача № 4.9. Постановка задачи

В круглой рамке радиуса a течёт линейный ток I. Найти напряжённость магнитного поля $\mathbf{H}$ на оси z, проходящей через центр рамки перпендикулярно её плоскости.

Задача № 4.9. Рисунок к задаче



Задача № 4.9. Решение

По закону Био-Савара:

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{cR^3}[d\mathbf{l}, \mathbf{R}]$$

Из симметрии задачи, на оси z есть только z компонента магнитного поля:

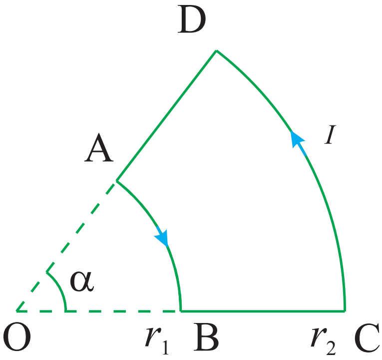
$$dH_z = \frac{I}{R^3} dl R \sin\alpha$$

$$H_z = \int\limits_0^{2\pi} \frac{I}{cR} a d\varphi \sin\alpha =$$

довести задачу до конца

Задача № 4.10. Постановка задачи

Плоский линейный контур ABCD (см. рис.) образован двумя концентрическими дугами AB и DC с центром в точке O и радиальными отрезками AD и BC. Угловой размер дуг α, из радиусы $OA = r_1$, $OD = r_2$. По контуру течёт ток силы I. Найти магнитное поле в точке O и на больших расстояниях от этой точки $r \gg r_2$ в плоскости контура.



Задача № 4.10. Решение

Используя закон Био-Савара приходим к выражению:

$$H = \oint\limits_L \frac{I}{c}\frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{R}]}{R^3} = \frac{I}{c}\left\{\int\limits_0^\alpha \frac{r_2 d\varphi r_2}{r_2^3} + \int\limits_\alpha^0 \frac{r_1 d\varphi r_1}{r_1^3}\right\} =$$
$$= \frac{I}{c}\left\{\frac{\alpha}{r_2} - \frac{\alpha}{r_1}\right\}$$

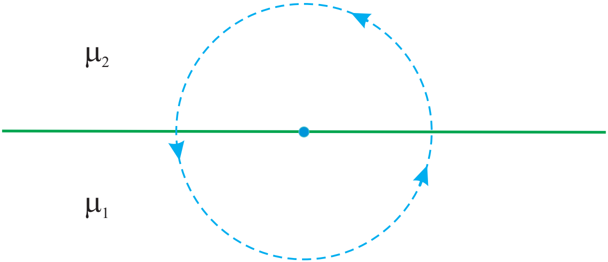
Здесь учли, что $[d\mathbf{l}, \mathbf{R}] = 0$ на радиальных участках и ось z направлена на нас.
На больших расстояниях от контура мы можем рассматривать его как магнитный диполь с дипольным моментом:

$$\mathbf{p}^m = \frac{\mu}{c} IS\mathbf{z}_0 = \mu\frac{I\alpha}{2c}(r_2^2 - r_1^2)\mathbf{z}_0$$

Довести задачу до конца - найти магнитное поле такого диполя в плоскости контура.

Задача № 4.28. Постановка задачи

Найти магнитное поле тонкого прямого провода, лежащего на плоской границе раздела сред с проницаемостями μ_1 и μ_2. Сила тока в проводе I.



Задача № 4.28. Решение

Как следует из уравнения Максвелла

$$\oint\limits_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \iint\limits_S \mathbf{j} d\mathbf{s}$$

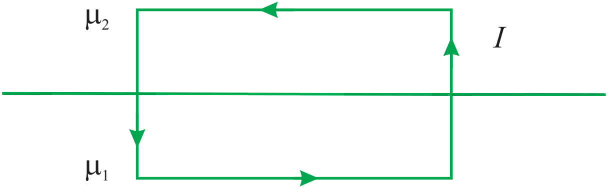
структура поля **H** не зависит от среды. Значит будет такой же, как в случае прямого провода с током в свободном пространстве.
B_φ сохраняется, т.к. на границе выполняется условие
$B_{n1} = B_{n2} = B_\varphi$. Таким образом имеем

$$\frac{B_\varphi}{\mu_1}\pi r + \frac{B_\varphi}{\mu_2}\pi r = \frac{4\pi}{c} I$$

$$B_\varphi = \frac{4\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\frac{I}{cr}$$

Задача № 5.20. Постановка задачи

Найти коэффициент самоиндукцииL плоского квазилинейного контура, имеющего плоскость симметрии, совмещённую с границей раздела сред с различными магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 (плоскость контура перпендикулярна границе раздела). Коэффициент самоиндукции того же контура в вакууме L_0.



Задача № 5.20. Решение

Полный поток магнитной индукции через поверхность, опирающуюся на контур, равна сумме потоков через каждый из элементов, находящихся в своей среде:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\Phi = \frac{1}{c} LI$$

$$\Phi_1 = \int_S B_1 ds = \int_S \mu_1 H_1 ds = \mu_1 \int_S H_1 ds$$

Здесь $\int_S H_1 ds$ — поток Φ_0 в вакууме. Аналогично записываем для Φ_2.

Таким образом:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \mu_1 \int_S H_1 ds + \mu_2 \int_S H_2 ds = (\mu_1 + \mu_2)\Phi_0/2 = (\mu_1 + \mu_2)\frac{1}{c} L_0 I/2$$

С другой стороны

$$\Phi = \frac{1}{c} LI$$

Таким образом

$$L = L_0(\mu_1 + \mu_2)/2$$

Задания для работы в аудитории

Доделать указанные задачи и сделать задачи 5.21 и 5.17.

Задания для домашней работы

Необходимо прорешать задачи № 6.1, 6.8, 6.9 и 6.10 из задачника Гильденбурга В.Б. и Миллера М.А. «Сборник задач по электродинамике».

Занятие №10
Квазистационарные процессы в сплошных проводниках.

Vasiliy A. Es'kin

University of Nizhny Novgorod

Задачи, подлежащие рассмотрению

Задачи № 6.1, 6.8 и 6.9 из задачника Гильденбурга В.Б. и Миллера М.А. «Сборник задач по электродинамике».

Задача № 6.1. Постановка задачи

В однородной среде с проводимостью σ и диэлектрической проницаемостью ε с помощью сторонних сил поддерживается некоторое статическое распределение объёмной плотности заряда $\rho_0(\mathbf{r})$, создающее электрическое поле $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$. В момент $t = 0$ сторонние силы мгновенно исчезают. Найти закон релаксации плотности заряда $\rho(\mathbf{r}, t)$ и электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Какое магнитное поле возникает при этой релаксации?

Задача № 6.1. Решение

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{4\pi\rho(\mathbf{r},t)}{\varepsilon},\\
&\mathrm{div}\mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0,\\
&\sigma\mathrm{div}\mathbf{E} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0,\\
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\rho = 0,\\
&\rho\left(\mathbf{r},t\right) = \rho_0\left(\mathbf{r}\right)e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t}.
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon}e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t}
$$

Отсюда следует, что решение ищем в виде $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t}$

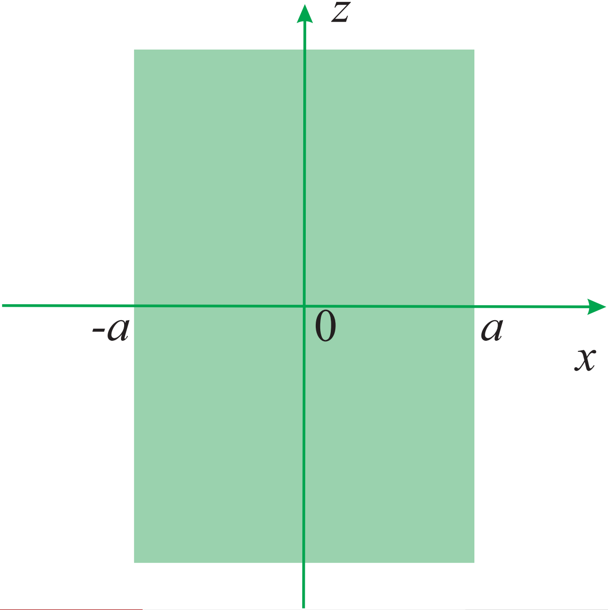
Задача № 6.1. Решение

Довести задачу до конца: найти распределение магнитного поля.

Задача № 6.8. Постановка задачи

Найти распределение комплексной амплитуды $\mathbf{E}(x)$ вектора переменного электрического поля, представляемого в виде $\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}(x)e^{i\omega t}\right)$, внутри проводящего плоского слоя толщины $2a$ с проводимостью $\sigma \gg \omega$ и магнитной проницаемости μ. На границах слоя $(x = \pm a)$ задана амплитуда тангенциальной компоненты поля: $E_y(-a) = E_y(a) = E_0$. Изобразить графически «моментальные снимки» поля при различных t для двух случаев: а) $a \gg \delta$ и б) $a \ll \delta$ ($\delta = c/\sigma 2\pi\sigma\mu\omega$— толщина скин-слоя в проводнике).

Задача № 6.8. Решение



Задача № 6.8. Решение

Электрическое поле в проводнике удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta \mathbf{E} + \tilde{\kappa}^2 \mathbf{E} = 0,$$

Где $\tilde{\kappa} = \pm\dfrac{1-i}{\delta}$, $\delta = \dfrac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}$. Далее будем работать с $\tilde{\kappa} = \dfrac{1-i}{\delta}$. Т.к. на границе заданы только yвые компоненты электрического поля, то в поле проводника будет присутствовать только эта составляющая. Т.е. $\mathbf{E} = \mathbf{y}_0 E(x)$. Уравнение для поля тогда принимает вид

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + \tilde{\kappa}^2 E = 0.$$

Решение находим в виде:

$$E(x) = A_1 e^{-i\tilde{\kappa}x} + A_2 e^{i\tilde{\kappa}x}$$

Задача № 6.8. Решение

Граничные условия при $x = a$ и $x = -a$ дают следующую систему уравнения для определения коэффициентов A_1 и A_2

$$
\begin{aligned}
A_1 e^{i\tilde{\kappa}a} + A_2 e^{-i\tilde{\kappa}a} &= E_0, \\
A_1 e^{-i\tilde{\kappa}a} + A_2 e^{i\tilde{\kappa}a} &= E_0.
\end{aligned}
$$

Находя коэффициенты и подставляю их в полученное общее решение имеем решение для нашей задачи в виде:

$$
E(x) = \frac{E_0}{2\mathrm{ch}(i\tilde{\kappa}a)} \left(e^{-i\tilde{\kappa}x} + e^{i\tilde{\kappa}x}\right) = E_0 \frac{\mathrm{ch}\left(\frac{1+i}{\delta}x\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{1+i}{\delta}a\right)}
$$

Задача № 6.8. Решение

Рассмотрим предельные случаи:
1) $a \ll \delta$, в этом случае $|x| < a \ll \delta$

$$E(x) = E_0 \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{1+i}{\delta}x\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{1+i}{\delta}a\right)} \approx E_0$$

Отсюда, реально наблюдаемое поле: $E_{\text{физ}} = E_0 \cos(\omega t)$
2) $a \gg \delta$
Перепишем поле в несколько ином виде, приняв, что можем переписать комплексную величину в виде $\operatorname{ch}(i\tilde{\kappa}a) = |A|e^{i\varphi}$

$$E(x) = \frac{1}{2}E_0|A|\left(e^{-i\tilde{\kappa}x - i\varphi} + e^{i\tilde{\kappa}x - i\varphi}\right)$$

$$E_{\text{физ}} == \frac{1}{2}E_0|A|\left[e^{\frac{x}{\delta}}\cos\left(\frac{x}{\delta} - \varphi\right) + e^{-\frac{x}{\delta}}\cos\left(\frac{x}{\delta} + \varphi\right)\right]$$

Нарисовать распределение поля в зависимости от координаты x.

Задача № 6.9 (а,б,в). Постановка задачи

В предыдущей задаче найти при $a \gg \delta$:
а) распределение магнитного поля в слое $H_z(x)e^{i\omega t}$;
б) сдвиг фаз φ между полями E_y и H_z при $x = \pm a$;
в) поверхностный импеданс $\zeta_s = E_y/H_z$ на границах слоя; выразить ζ_s через μ и комплексную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = 4\pi\sigma/i\omega$.

Задания для работы в аудитории

Доделать задачу 6.8 и сделать все указанные пункты задачи 6.9.

Задания для домашней работы

Необходимо прорешать задачи № 6.10, 6.11, 6.12 и 6.13 из задачника Гильденбурга В.Б. и Миллера М.А. «Сборник задач по электродинамике».

Занятие №11
Квазистационарные процессы в сплошных проводниках.

Vasiliy A. Es'kin

University of Nizhny Novgorod

Задачи, подлежащие рассмотрению

Задачи № № 6.10, 6.11, 6.12, 6.13, 6.14 и 7.1(1) из задачника Гильденбурга В.Б. и Миллера М.А. «Сборник задач по электродинамике».

Задача № 6.10. Постановка задачи

Решить задачу, аналогичную задаче 6.8, если на одной границе слоя $(x = -a)$ $E_y(-a) = E_0$, а на другой границе $(x = 0)$:
а) лежит идеально проводящий лист;
б) задан поверхностный импеданс $\zeta_s = E_y(0)/H_z(0) = 1$.

Задача № 6.10. Решение

Электрическое поле в проводнике удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\mathbf{E} + \tilde{\kappa}^2\mathbf{E} = 0,$$

Где $\tilde{\kappa} = \pm\dfrac{1-i}{\delta}$, $\delta = \dfrac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}$. Далее будем работать с $\tilde{\kappa} = \dfrac{1-i}{\delta}$. Т.к. на границе заданы только yвые компоненты электрического поля, то в поле проводника будет присутствовать только эта составляющая. Т.е. $\mathbf{E} = \mathbf{y}_0 E(x)$. Уравнение для поля тогда принимает вид

$$\frac{d^2E}{dx^2} + \tilde{\kappa}^2 E = 0.$$

Решение находим в виде:

$$E(x) = A_1 e^{-i\tilde{\kappa}x} + A_2 e^{i\tilde{\kappa}x}$$

Задача № 6.10 а). Решение

Граничные условия при $x = 0$ и $x = -a$ дают следующую систему уравнения для определения коэффициентов A_1 и A_2

$$A_1 + A_2 = 0,$$
$$A_1 e^{i\tilde{\kappa}a} + A_2 e^{-i\tilde{\kappa}a} = E_0.$$

Находя коэффициенты и подставляю их в полученное общее решение имеем решение для нашей задачи в виде:

$$E(x) = -\frac{E_0}{2\mathrm{sh}(i\tilde{\kappa}a)}\left(-e^{-i\tilde{\kappa}x} + e^{i\tilde{\kappa}x}\right) = -E_0 \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{1+i}{\delta}x\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{1+i}{\delta}a\right)}$$

Задача № 6.10 б). Решение

$$E(x) = A_1 e^{i\tilde{\kappa}x} + A_2 e^{-i\tilde{\kappa}x}$$

Найдём магнитное поле в слое:

$$\mathbf{H} = \frac{i}{k_0\mu} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{i}{k_0\mu}\mathbf{z}_0 \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\tilde{\kappa}}{k_0\mu}\left(A_1 e^{i\tilde{\kappa}x} - A_2 e^{-i\tilde{\kappa}x}\right)$$

Граничные условия при $x = 0$ и $x = -a$ дают следующую систему уравнения для определения коэффициентов A_1 и A_2

$$A_1 + A_2 = -\frac{\tilde{\kappa}}{k_0\mu}\left(A_1 - A_2\right),$$
$$A_1 e^{-i\tilde{\kappa}a} + A_2 e^{i\tilde{\kappa}a} = E_0.$$

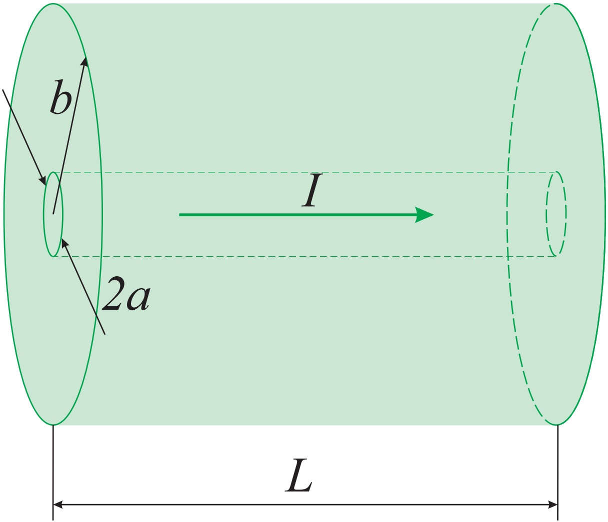
Довести задачу до конца: найти коэффициенты A_1 и A_2.

Задача № 6.11. Постановка задачи

Как изменится коэффициенты самоиндукции L на единицу длины коаксиальной линии (см. задачу 5.17) в случае сильного скин-эффекта (при $a \gg \delta$).

Задача 5.17
Найти коэффициент самоиндукции L_1 единицы длины коаксиальной линии, образованной сплошным цилиндрическим проводником радиуса a, вложенным внутрь тонкостенной проводящей трубы радиуса $b > a$. По сечению центрального проводника ток распределён равномерно.
В начале распишем решение задачи 5.17.

Задача № 5.17. Решение



Задача № 5.17. Решение

Найдём магнитное поле на окружности радиуса ρ

$$\oint_{2\pi} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I$$

Вне центральной жилы ($a < \rho < b$)

$$H_\varphi = \frac{2I}{c\rho}.$$

Внутри центрального провода ($\rho < a$):

$$H_\varphi = \frac{2I}{ca^2}\rho.$$

1. Найдём из выражения для магнитной энергии

$$W = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V \mathbf{H}^2 dV = \frac{1}{2c^2} L I^2$$

Если проинтегрировать по поперечному сечению, то получим

$$\frac{1}{8\pi}\int\limits_V \mathbf{H}^2 dV = \frac{I^2}{c^2}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right)$$

Отсюда

$$L = \frac{1}{2} + 2\ln\frac{b}{a}.$$

Задача № 5.17. Решение

2. Найдём из выражения для потока магнитного поля

$$\Phi = \frac{1}{c} L I$$

$$\Phi = \int\limits_0^a \frac{2I}{ca^2} \rho d\rho + \int\limits_a^b \frac{2I}{c\rho} d\rho = \frac{I}{c}\left(1 + 2\ln\frac{b}{a}\right)$$

Отсюда

$$L = 1 + 2\ln\frac{b}{a}.$$

Ошибка в $1/2$ здесь связана с тем, что ток в проводнике (центральная жила) распределённый. Выражение для потока магнитного поля через коэффициент самоиндукции было введено в приближении квазилинейных контуров с током.

Задача № 6.11. Решение

Вернёмся к задаче 6.11. Как известно (см. лекции) магнитная энергия в единице объёма проводника:

$$W^m = \frac{1}{2c^2} L_{\text{ск}} \frac{|I_{\text{квазиповерхностный}}|^2}{2},$$

где

$$L_{\text{ск}} = 2\pi\mu\delta.$$

$$I \simeq 2\pi a I_{\text{квазиповерхностный}}$$

Отсюда в проводнике (в центральной жиле)

$$W^m_{\text{на единицу длины}} = \frac{1}{2c^2} L_{\text{ск}} \frac{\left|I_{\text{квазиповерхностный}}\right|^2}{2} = \frac{1}{2c^2} L_{\text{на единицу длины}} \frac{\left|I\right|^2}{2};$$

Индуктивность для провода (при $\mu = 0$):

$$L_{\text{на единицу длины}} = \frac{\delta}{a}$$

Эта величина очень мала, в силу условия задачи.

Задача № 6.11. Решение

Магнитная энергия вне провода на единицу длины

$$W = \frac{1}{c^2} I^2 \ln \frac{b}{a}$$

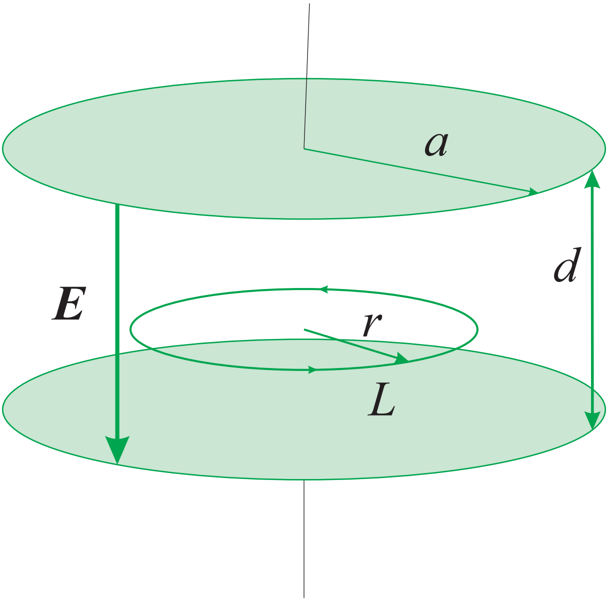
Отсюда

$$L = 2 \ln \frac{b}{a}.$$

Т.е. индуктивность уменьшилась на $1/2$.

Задача № 6.12. Постановка задачи

Плоский конденсатор с круглыми пластинами подключён к источнику переменного напряжения $U = U_0 \sin(\omega t)$. Найти магнитное поле внутри конденсатора $\mathbf{H}$ при условии $d \ll a \ll c/\omega$, где d — расстоянием между пластинами, a — радиус пластин, c — скорость света.


a
d
E
r
L

Задача № 6.12. Решение

Вихревыми поправками можно пренебречь, если $\lambda/a \gg 1$.

$$\oint\limits_L \mathbf{H}d\mathbf{l} = \frac{1}{c}\int\limits_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} ds$$

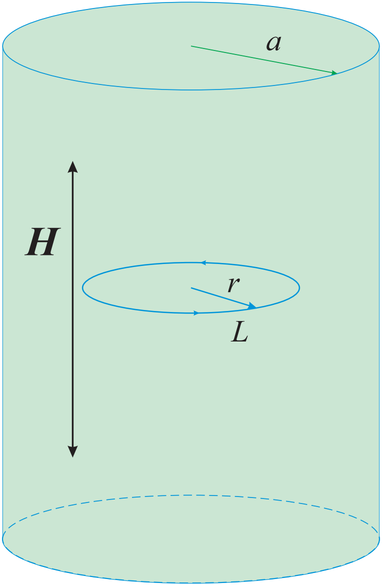
$$H_\varphi 2\pi r = \frac{1}{c}\frac{U_0}{d}\omega\cos(\omega t)\pi r^2$$

$$H_\varphi = r\frac{U_0\omega}{2cd}\cos(\omega t)$$

Задача № 6.13. Постановка задачи

Бесконечный соленоид с числом витков в обмотке на единицу длины n питается переменным током $I = I_0 \cos(\omega t)$. Найти электрическое поле внутри соленоида при условии $a \ll c/\omega$ (a — радиус соленоида).

Задача № 6.13. Решение



Задача № 6.13. Решение

Т.к. $a \ll c/\omega$, то током смещения можно пренебречь. Магнитное поле в соленоиде можно считать таким же как в магнитостатике:

$$H_z = \frac{4\pi}{c} nI.$$

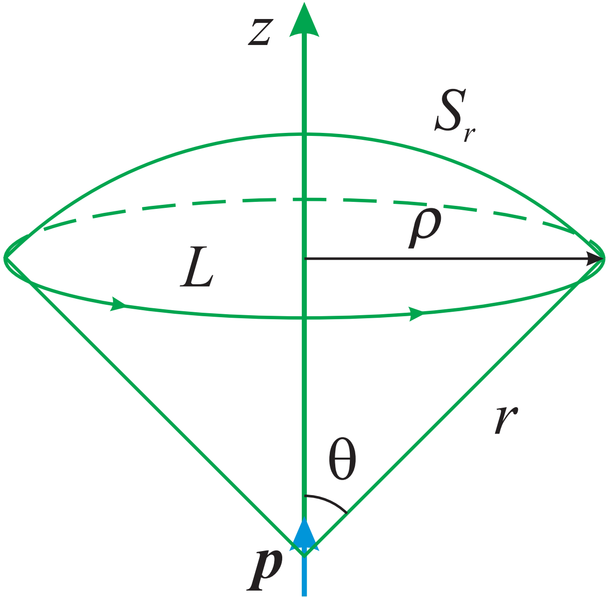
$$E_\varphi 2\pi r = -\frac{1}{c}\omega I_0 \cos(\omega t) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r r dr \frac{4\pi}{c} n.$$

Довести задачу до конца.

Задача № 6.14. Постановка задачи

Найти магнитное поле $\mathbf{H}$ в ближней зоне (на расстоянии $r \ll \lambda$) переменного электрического диполя с моментом $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{i\omega t}$.

Задача № 6.14. Решение



Задача № 6.14. Решение

Электрическое поле диполя:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{3(\mathbf{p},\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right\}.$$

Радиальная компонента этого поля:

$$E_r = \frac{1}{\varepsilon}\frac{2p\cos(\theta)}{r^3}.$$

Найдём поле из уравнения

$$\oint\limits_L \mathbf{H}d\mathbf{l} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \mathbf{D}d\mathbf{s}.$$

В качестве контура L выберем окружность радиуса ρ, а в качестве поверхности S — поверхность сферы радиуса r (S_r), которая опирается на контур L.

В этом случае получаем

$$H_\varphi 2\pi\rho = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S_r}\frac{2p\cos(\theta)}{r^3}ds$$

$$H_\varphi 2\pi r\sin(\theta) = \frac{1}{c}2\pi\frac{p}{r}\int\limits_0^\theta 2\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta$$

$$H_\varphi = \frac{ik_0p}{r^2}\sin(\theta)$$

Задача № 7.1

Сделать все пункты задачи 7.1(1)

Задания для работы в аудитории

Доделать все неоконченные задачи.

Задания для домашней работы

Необходимо прорешать задачи № 7.1(5,6), 7.2, 7.3, 7.13, 7.7, 7.6, из задачника Гильденбурга В.Б. и Миллера М.А. «Сборник задач по электродинамике».

Занятие №12
Плоские волны в однородной среде

Vasiliy A. Es'kin

University of Nizhny Novgorod

Задачи, подлежащие рассмотрению

Задачи № № 7.3, 7.13, 7.7 и 7.6 из задачника Гильденбурга В.Б. и Миллера М.А. «Сборник задач по электродинамике».

Задача № 7.3. Постановка задачи

Выразить амплитуды электрического и магнитного полей гармонической плоской однородной волны E_0 и H_0 в среде с проницаемостями ε и μ через среднюю за период плотность потока энергии S.

Задача № 7.3. Решение

Средний за период колебаний вектор Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{kr}}, \mathbf{H}_0^* e^{i\mathbf{kr}}\right] = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0^*\right]$$

Из уравнения Максвелла

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -ik_0\mu\mathbf{H}$$

следует, что

$$\mathbf{H} = \frac{i}{k_0\mu}\left[-i\mathbf{k}, \mathbf{E}\right] = \frac{1}{k_0\mu}\left[\mathbf{k}, \mathbf{E}\right]$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}_0, \frac{1}{k_0\mu}\left[\mathbf{k}, \mathbf{E}_0^*\right]\right] = \frac{c}{8\pi}\frac{1}{k_0\mu}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{k}(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0^*) - \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \mathbf{E}_0^*)\right\}$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi}\frac{\mathbf{k}}{k}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left|\mathbf{E}_0\right|^2$$

Задача № 7.3. Решение

Из последнего соотношения получаем

$$E_0 = \sqrt{\frac{8\pi}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}S}$$

Найти выражение для H_0.

Задача № 7.13. Постановка задачи

Получить выражение для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ стоячей волны. Чему равен сдвиг фаз φ между полями? Изобразить моментальные снимки полей в различные моменты времени.

Задача № 7.13.Решение

Чисто стоячая волна образуется при распространение двух волн равной амплитуды навстречу друг другу. Пусть волны распространяются вдоль оси z.

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{2} e^{i\omega t - ikz} + \frac{\mathbf{E}_0}{2} e^{i\omega t + ikz}, \quad \mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kz) e^{\omega t}$$

$$\mathbf{H} = \frac{i}{k_0\mu} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{i}{k_0\mu} \mathbf{y}_0 \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{i}{k_0\mu} \mathbf{y}_0 (-k) E_0 \sin(kz) e^{\omega t}$$

Задача № 7.13.Решение

Найдём физические поля, взяв реальные части от полученных выражений.

$$\mathbf{E}_{\text{физ}} = \text{Re}\mathbf{E}_0 \cos(kz)e^{\omega t} = \mathbf{E}_0 \cos(kz)\cos(\omega t)$$

$$\mathbf{H}_{\text{физ}} = \text{Re}\frac{i}{k_0\mu}\mathbf{y}_0(-k)E_0 \sin(kz) = \mathbf{y}_0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0 \sin(kz)\sin(\omega t)$$

Доделать задания задачи: указать сдвиг фаз и нарисовать мгновенные снимки поля (при $\omega t = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$)

Задача № 7.7. Постановка задачи

Найти магнитное поле **H** неоднородной плоской волны в среде с проницаемостями ε и μ, если электрическое поле волны задано в виде $E_y = E_0 \exp\left(i(\omega t - hz) - \kappa x\right)$, $E_x = E_z = 0$. Каким образом связаны между собой параметры $\kappa, h, \omega, \varepsilon, \mu$? При каком условии поляризация магнитного поля близка к круговой?

Задача № 7.7. Решение

$$\mathbf{E} = \mathbf{y}_0 E_0 e^{i(\omega t - hz) - \kappa x}$$

$$\mathbf{H} = \frac{i}{k_0 \mu} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{i}{k_0 \mu} \left\{ \mathbf{z}_0 \frac{\partial E_y}{\partial x} - \mathbf{x}_0 \frac{\partial E_y}{\partial z} \right\} =$$

$$= \frac{i}{k_0 \mu} E_y \left\{ -\mathbf{z}_0 \kappa + \mathbf{x}_0 i h \right\}$$

При подстановке выражения для поля **E** в уравнение Гельмгольца для данной среду можно получить требуемую связь между параметры $\kappa, h, \omega, \varepsilon, \mu$ в виде

$$h^2 - \kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu$$

Задача № 7.7. Решение

Компоненты магнитного поля можно переписать в виде

$$H_x = -E_y \frac{h}{k_0 \mu}$$
$$H_z = -E_y \frac{i\kappa}{k_0 \mu}$$

$$H_{x,\text{физ}} = H_{0x} \cos(\omega t)$$
$$H_{z,\text{физ}} = H_{0z} \sin(\omega t)$$

Как можно видет, конец вектора **H** будет описывать эллипс. Отсюда очевидно, что для круговой поляризации необходимо равенство амплитуд отдельных компонент этого вектора:

$$H_{0x} = H_{0y} => \frac{h}{k_0 \mu} = \frac{\kappa}{k_0 \mu} => h = \kappa$$

Задача № 7.6. Постановка задачи

Найти и изобразить графически зависимость переменного поля частоты ω от координаты x в вакууме, если известно, что от y поле не зависит, а его зависимость от переменных z, t представляет собой волну, бегущую с фазовой скоростью $v^{(z)}$. Рассмотреть случаи: $v^{(z)} > c$, $v^{(z)} < c$, $v^{(z)} = c$. Для указанных трёх случаев сравнить длину волны λ_z, характеризующую зависимость поля от z, с длинной плоской однородной волны $\lambda = 2\pi c/\omega$.
Сделать это задание самостоятельно.

Задания для работы в аудитории

Доделать все неоконченные задачи.

Задания для домашней работы

Необходимо прорешать задачи № 7.5, 7.14, 7.15, 7.20 из задачника Гильденбурга В.Б. и Миллера М.А. «Сборник задач по электродинамике».

Занятие №13
Неоднородные плоские волны в среде с потерями

Vasiliy A. Es'kin

University of Nizhny Novgorod

Задачи, подлежащие рассмотрению

Задачи № 7.5, 7.14, 7.15, 7.20 и 8.1 (1,2) из задачника Гильденбурга В.Б. и Миллера М.А. «Сборник задач по электродинамике».

Задача № 7.5. Постановка задачи

Найти комплексную диэлектрическую проницаемость среды $\varepsilon_c = \varepsilon_r + i\varepsilon_i$, если её магнитная проницаемость $\mu = 1$ и если для распространяющейся в данной среде плоской волны известны:
а). её частота ω, скорость v перемещения волнового фронта и расстояние L, на котором амплитуда убывает в e раз;
б). сдвиг фаз между электрическим и магнитным полями φ и отношение из амплиту $E_0/H_0 = p$.

Задача № 7.5 а. Решение

Поле волны в данной среде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{kr}} = \mathbf{E}_0 e^{-i(k_r - ik_i)z}$$

Из условий задачи получаем:

$$k_i = \frac{1}{L}, \quad \frac{\omega}{k_r} = v$$

Из дисперсионного соотношения получаем выражение

$$(k_r - ik_i)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon_r + i\varepsilon_i\right)$$

Приравнивая реальные и мнимые части в предыдущем уравнении находим искомые величины

$$\varepsilon_r = \frac{c^2}{\omega^2}\left(k_r^2 - k_i^2\right) = \frac{c^2}{v^2} - \frac{c^2}{\omega^2 L^2}$$

$$\varepsilon_i = -\frac{c^2}{\omega^2} 2 \frac{\omega}{v}\frac{1}{L} = -2\frac{c^2}{\omega v L}$$

Задача № 7.5 б. Решение

Сделать эту часть самостоятельно.

Задача № 7.14. Постановка задачи

Электромагнитное поле представляет собой суперпозицию двух гармонических плоских однородных волн с одинаковыми частотами и амплитудами. Векторы электрического поля в обеих волнах параллельны оси x. Волновые векторы $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ лежат в плоскости yz, причём $k_{1z} = k_{2z}$, $k_{1y} = -k_{2y}$. Написать выражения для компонент суммарного поля. Построить графики, иллюстрирующие поведение полей в пространстве и времени. Нарисовать картину силовых линий магнитного поля.

Задача № 7.14.Решение

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E_0 e^{i(\omega t - k_{1y}y - k_{1z}z)} + \mathbf{x}_0 E_0 e^{i(\omega t + k_{1y}y - k_{1z}z)} = 2\mathbf{x}_0 E_0 \cos(k_{1y}y) e^{i(\omega t - k_{1z}z}$$

$$\mathbf{H} = \frac{i}{k_0\mu}\mathrm{rot}\mathbf{E} = \frac{i}{k_0\mu}E_0\mathrm{rot}\left(2\mathbf{x}_0\cos(k_{1y}y)e^{i(\omega t - k_{1z}z)}\right) =$$
$$= \frac{E_0}{k_0\mu}e^{i(\omega t - k_{1z}z)}k_{1y}\mathbf{z}_0 2i\sin(k_{1y}y) + \frac{E_0}{k_0\mu}e^{i(\omega t - k_{1z}z)}k_{1z}\mathbf{y}_0 2\cos(k_{1y}y)$$

Доделать задачу.

Задача № 7.15. Постановка задачи

Выразить структурные параметры поля в предыдущей задаче (длину волны λ_z и фазовую скорость $v^{(z)}$ в направлении оси z, расстояние L между плоскостями $y = \mathrm{const}$, на которых $E_x = 0$, поперечный импеданс $\zeta_\perp = E_x/H_y$) через частоту поля ω и угол наклона α волновых векторов к оси z. При каком α средняя по времени плотность энергии магнитного поля w_m не зависит от координаты?

Задача № 7.15. Решение

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z}, k_z = k_0 \cos\alpha, k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}, \lambda_z = \frac{2\pi c}{\omega}\frac{1}{\cos\alpha}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$v_{\text{ф}}^{(z)} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\cos\alpha}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$L = \frac{\lambda_y}{2} = \frac{\pi}{k_y} = \frac{\pi c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sin\alpha}, k_y = k\sin\alpha$$

$$\zeta_s = \frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\bar{w_m}^T = \mathrm{Re}\frac{1}{16\pi}\mathbf{HB}^* = \frac{1}{4\pi}E_0^2\varepsilon\left[\cos^2 k_y y\cos^2\alpha + \sin^2 k_y y\sin^2\alpha\right]$$

В последнем выражении $\left[\cos^2 k_y y\cos^2\alpha + \sin^2 k_y y\sin^2\alpha\right]$ должно быть равно 1. Тогда w_m не зависит от координаты y при $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Задача № 7.20. Постановка задачи

Показать, что для гармонической плоской волны в прозрачной среде с дисперсией всегда выполняется соотношение $wv_g = S$, где w— средняя плотность энергии, v_g — групповая скорость, S — средняя плотность потока энергии.

Задача № 7.20. Решение

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}, \mathbf{H}^*\right] = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\eta\left[\left[\mathbf{H}, \mathbf{n}\right], \mathbf{H}^*\right] = \frac{c}{8\pi}\eta\left|\mathbf{H}\right|^2\mathbf{n} = \frac{c}{8\pi}\eta^{-1}\left|\mathbf{E}\right|^2\mathbf{n}$$

$$S = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left|\mathbf{E}\right|^2$$

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \left\{\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\right)\right\}^{-1}$$

$$v_g^{-1} = \frac{1}{2c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left\{2\varepsilon + \omega\frac{d\varepsilon}{d\omega} + \omega\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{d\mu}{d\omega}\right\}$$

Отсюда

$$Sv_g^{-1} = \frac{1}{16\pi}\left\{2\varepsilon + \omega\frac{d\varepsilon}{d\omega} + \omega\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{d\mu}{d\omega}\right\}\left|\mathbf{E}\right|^2$$

Задача № 7.20. Решение

С другой стороны плотность электромагнитной энергии в средах с временной дисперсией

$$w = \frac{1}{16\pi}\left\{\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\left|\mathbf{E}\right|^2 + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\left|\mathbf{H}\right|^2\right\} = \frac{1}{16\pi}\left\{\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\frac{\varepsilon}{\mu}\right\}\left|\mathbf{E}\right|^2$$

Отсюда

$$w = \frac{1}{16\pi}\left\{2\varepsilon + \omega\frac{d\varepsilon}{d\omega} + \omega\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{d\mu}{d\omega}\right\}\left|\mathbf{E}\right|^2$$

Задача № 8.1 (1,2). Постановка задачи

Плоская волна с вектором электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E_0 e^{i(\omega t - kz)}$ падает в среде с проницаемостью ε и μ, занимающей область $z < 0$, на плоскостью $z = 0$ с заданным поверхностным импедансом $\zeta_s = E_x(0)/H_y(0)$.
1). Найти коэффициенты отражения волны $\Gamma/$
2). Получить формулу пересчёта импеданса, позволяющую определить импеданс суммарного поля падающей и отражённой волн $\zeta(L) = (E_x/H_y)|_{z=-L}$ на расстоянии L от границы.

Задача № 8.1 (1). Решение

Падающая волна $\mathbf{E}_i = \mathbf{x}_0 E_0 e^{i(\omega t - kz)}$
Отражённая волна $\mathbf{E}_r = \mathbf{x}_0 \Gamma E_0 e^{i(\omega t + kz)}$
Вычисляя магнитное поле получаем:

$$\mathbf{H} = \frac{k}{k_0 \mu} \mathbf{y}_0 \left(E_0 e^{i(\omega t - kz)} - \Gamma E_0 e^{i(\omega t + kz)} \right)$$

$$\frac{E_x(0)}{H_y(0)} = \frac{E_0(1+\Gamma)}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 (1-\Gamma)} = \frac{Z_{\text{в}}(1+\Gamma)}{1-\Gamma} = \zeta_s$$

$$\Gamma = \frac{\zeta_s - Z_{\text{в}}}{\zeta_s + Z_{\text{в}}}$$

Здесь $Z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ Сделать пункт 2) самостоятельно.

Задания для работы в аудитории

Доделать все неоконченные задачи.

Задания для домашней работы

Необходимо прорешать задачи № 8.1(до конца), 8.3, 8.4, 9.7–9.10, 9.14 из задачника Гильденбурга В.Б. и Миллера М.А. «Сборник задач по электродинамике».

Занятие №14
Излучение электромагнитных волн

Vasiliy A. Es'kin

University of Nizhny Novgorod

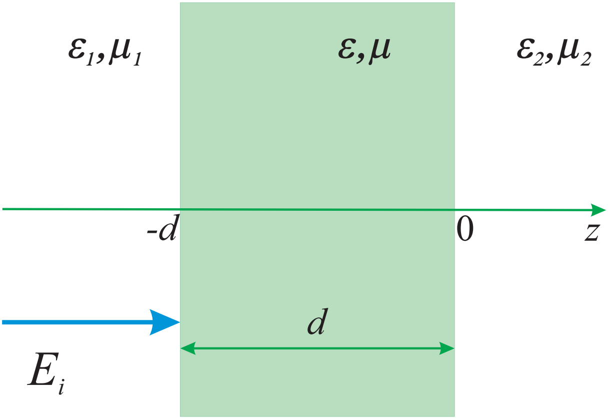
Задачи, подлежащие рассмотрению

Задачи № 8.3, 8.4, 9.7–9.10 и 9.14 из задачника Гильденбурга В.Б. и Миллера М.А. «Сборник задач по электродинамике».

Задача № 8.3. Постановка задачи

Пользуясь формулой пересчёта импедансов, получить выражение для коэффициента отражения Γ плоско волны от плоского слоя толщины d с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε, μ разделяющего среды 1 и 2 с проницаемостями ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2. Волна падает на слой по нормали из среды 1. Найти условия, при которых $\Gamma = 0$, для случаев, когда среды 1 и 2: а) одинаковы, б) различны.

Задача № 8.3. Решение



Задача № 8.3. Решение

Коэффициент отражения от левой границы

$$\Gamma = \frac{Z(-d) - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}{Z(-d) + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}.$$

По формуле пересчета импедансов импеданс в сечении $z = -d$ выражается через волновое сопротивление и импеданс в сечении $z = 0$:

$$Z\left(-d\right) = Z_w \frac{Z(0) + iZ_w \mathrm{tg} hd}{Z_w + iZ(0)\mathrm{tg} hd} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} + i\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathrm{tg} hd}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} + i\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\mathrm{tg} hd}.$$

$$h = k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\varepsilon}, \quad \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

Отсюда получаем коэффициент отражения

$$\Gamma = \frac{\eta\left(\eta_2 + i\eta \mathrm{tg}kd\right) - \eta_1\left(\eta + i\eta_2 \mathrm{tg}kd\right)}{\eta\left(\eta_2 + i\eta \mathrm{tg}kd\right) + \eta_1\left(\eta + i\eta_2 \mathrm{tg}kd\right)}.$$

а). Если среды 1 и 2 различны, то коэффициент отражения равен нулю при числителе предыдущего выражения равного нулю:

$$\eta\left(\eta_2 + i\eta \mathrm{tg}kd\right) - \eta_1\left(\eta + i\eta_2 \mathrm{tg}kd\right) = 0.$$

Отсюда получаем систему уравнений:

$$\eta\eta_1 \cos kd = \eta\eta_2 \cos kd$$
$$\eta^2 \sin kd - \eta_1\eta_2 \sin kd = 0$$

т.е. коэффициент отражения равен нулю при $\left(\eta^2 - \eta_1\eta_2\right)\sin kL = 0$

Т.е. $kd = \frac{\pi}{2}\left(2n - 1\right), n = 1, 2, \ldots$ и $\eta = \sqrt{\eta_1\eta_2}$

б.) это вариант сделать самостоятельно

Задачи № 8.4, 9.7 и 9.8

Эти задачи для самостоятельного решения. По задаче 9.8 смотрите лекции.

Задача № 9.9. Постановка задачи

Вдоль оси z течёт переменный линейный ток $Ie^{i\omega t}$, амплитуда которого одинакова ($I = \mathrm{const} \neq 0$) во всех точках отрезка $|z| \leq L$ и равна нулю вне этого отрезка.
1). Начиная с каких расстояний r от начала координат можно считать сформированной диаграмму направленности данного излучения?
2). Получить выражения для векторного потенциала $\mathbf{A}$ и полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ в дальней зоне.
3). Исследовать и построить в полярных координатах диаграмму направленности $|H|^2(\theta)$ для случаев $kL \ll 1$ и $kL \gg 1$ (θ — сферических полярный угол.

Задача № 9.9.Решение

Диаграмма направленности считается сформированной, если выполняются следующие соотношения:

$$\frac{L^2}{\lambda r} \ll 1, \quad r \gg L, \quad r \gg \lambda.$$

В этой области пространства векторный потенциал вычисляется следующим образом

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = \int\limits_V \mathbf{j}\left(\mathbf{r}'\right) e^{ikr'\cos\gamma} dV'.$$

Рассчитаем вектор направленности для заданного источника:

$$\mathbf{N} = \int\limits_V \mathbf{z}_0 I \delta\left(x, y\right) e^{i\left(k_x x' + k_y y' + k_z z'\right)} dx' dy' dz' = \int\limits_{-L}^{L} \mathbf{z}_0 I e^{ik_z z'} dz' =$$

$$= \mathbf{z}_0 I \int\limits_{-L}^{L} e^{ik\cos\theta z'} dz' = \mathbf{z}_0 2IL \frac{\sin\left(kL\cos\theta\right)}{kL\cos\theta}$$

Задача № 9.9. Решение

$$\mathbf{A} = \mathbf{z}_0 \frac{\mu}{c} \frac{e^{-ikr}}{r} 2IL \frac{\sin\left(kL\cos\theta\right)}{kL\cos\theta}.$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\left[-i\mathbf{k}, \mathbf{A}\right] = ik\sin\theta \frac{1}{c}\frac{e^{-ikr}}{r} 2IL \frac{\sin\left(kL\cos\theta\right)}{kL\cos\theta}\varphi_0.$$

$$\mathbf{E} = \eta\left[\mathbf{H}, \mathbf{n}\right] = \eta H_{\varphi}\theta_0.$$

Диаграмма направленности:

$$D\left(\theta, \varphi\right) = S_r r^2 = \sin^2\theta \frac{\sin^2\left(kL\cos\theta\right)}{\left(kL\cos\theta\right)^2} \left|I\right|^2 \left(kL\right)^2 \frac{\eta}{2\pi c}.$$

а). $kL \ll 1$ $D\left(\theta, \varphi\right) \simeq \sin^2\theta$ — это диаграмма направленности элементарного диполя.

б). Для случая $kL \gg 1$ воспользуемся нормированной на максимум диаграммой направленность

$$f(\theta,\varphi) = \sin^2\theta \frac{\sin^2(kL\cos\theta)}{(kL\cos\theta)^2}.$$

Максимумы определяются из условия $kL\cos\theta = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$

Нули из условия $\cos\theta_n = \dfrac{\pi n}{kL}$

Ширина главного лепестка

$\cos\theta_2 - \cos\theta_1 = \dfrac{2\pi}{kL} \implies 2\sin\left(\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}\right) =$ Отсюда

имеем $\Delta\theta_{max} \simeq \dfrac{2\pi}{kL} = \dfrac{\lambda}{L}$

Задача № 9.10. Постановка задачи

Найти диаграмму направленности линейного излучателя, описанного в предыдущей задаче, для амплитуды тока $I(z) = I_0 e^{-ihz}$ при $|z| \leq L$, $I = 0$ при $|z| > L$. Рассмотреть случаи: а). $KL \gg 1$, $(k - h)\,L \gg 1$; б). $kL \gg 1, h \gg k$; в). $kL \ll 1$, $hL = \pi n, n = 1, 2, 3, \dots$

Задача № 9.10. Решение задачи

Аналогично предыдущему случаю находим векторный потенциал

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\mathbf{z}_0 I_0 \int\limits_{-L}^{L} e^{(ik\cos\theta - ihz')}dz' = \mathbf{z}_0\frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}2I_0L\frac{\sin\left(kL\cos\theta - hL\right)}{kL\cos\theta - hL}$$

$$\mathbf{H} = \frac{ik}{\mu}A_z\sin\theta\varphi_0.$$

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{ik}{\mu}A_z\theta_0.$$

$$D\left(\theta,\varphi\right) = \frac{\sin^2\left(kL\cos\theta - hL\right)}{\left(kL\cos\theta - hL\right)^2}\sin^2\theta.$$

Задача № 9.10. Решение

а). В этому случае главный максимум достигается при $kL\cos\theta - hL = 0$

$$\theta_{max} = \arccos\frac{h}{k}.$$

Нули диаграммы направленности:

$$kL\cos\theta - hL = \pi n, n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$
$$\cos\theta = \frac{h}{k} + \frac{\pi n}{kL}$$

Ширина главного лепестка ДН:

$$kL\cos\theta_0 = hL,$$
$$kL\cos\theta_2 = hL - \pi, \quad kL\cos\theta_1 = hL + \pi$$
$$\cos\theta_2 - \cos\theta_1 = \frac{2\pi}{kL}$$
$$2\sin\underbrace{\frac{\theta_2+\theta_1}{2}}_{\theta_0}\sin\underbrace{\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}_{\frac{\Delta\theta_{max}}{2}} = \frac{2\pi}{kL}$$

Т.е. ширина главного максимум $\Delta\theta \simeq \dfrac{2\pi}{kL\sin\theta_0}$
Нарисовать ДН для этого случая и для случаев б) и в)
Сделать по аналогии задачу 9.14

Задания для работы в аудитории

Доделать все неоконченные задачи.