

Проектирование малоразрядных БИХ-фильтров в целочисленном пространстве параметров

Владимир БУГРОВ,
к. т. н.
pbox27@yandex.ru

В публикации рассмотрены вопросы моделирования и синтеза рекурсивных цифровых фильтров минимальной разрядности с учетом возможностей их реализации на цифровых платформах с целочисленной арифметикой вычислений. Приводится постановка задачи многофункционального синтеза БИХ-фильтров методами целочисленного нелинейного математического программирования с учетом заданного радиуса полюсов передаточной функции. Иллюстрируется эффективность применения данного подхода на нескольких характерных примерах решения задач синтеза каскадных рекурсивных фильтров с минимальной разрядностью целочисленных коэффициентов. Проводится анализ теоретических и экспериментальных характеристик синтезированных фильтров.

Введение

Совокупное качество цифрового фильтра в первую очередь определяется такими функциональными его показателями, как селективная способность и быстродействие. Под селективной способностью обычно понимают возможность удовлетворения совокупности требуемых характеристик фильтра в частотной области, а быстродействие определяется реальным временем расчета его отклика при реализации фильтра на выбранной цифровой платформе. К основным факторам, определяющим быстродействие БИХ-фильтра, относятся арифметика вычислений и разрядность представления данных в алгоритме цифровой фильтрации. Обзор публикаций по методам расчета и синтеза рекурсивных фильтров показывает, что в настоящее время преобладает косвенное проектирование рекурсивных фильтров по аналоговому прототипу с применением метода билинейного преобразования [1–3] либо различных подходов, на нем базирующихся [4–6], при использовании в алгоритмах цифровой фильтрации вещественной арифметики вычислений с плавающей точкой. Очевидно, что это обстоятельство диктуется особенностями расчетного метода билинейного преобразования, когда проектное решение получают только в приближении непрерывной математики, считая все переменные вещественными величинами, точность представления которых может быть сколь угодно большой. Вещественный формат представления данных вынуждает кван-

товать их значения, что приводит к весьма нежелательным для работы данного БИХ-фильтра последствиям, таким как искажение характеристик, появление шумов квантования, необходимость масштабирования вещественных коэффициентов фильтра и возможность появления малых предельных циклов при квантовании результатов внутренних вычислений. К тому же проектное решение в вещественных числах может быть реализовано только на специализированных сигнальных процессорах. Вопросам квантования при аналитическом расчете БИХ-фильтра посвящено много работ [1–3, 5, 6]. В некоторых из них рассматривалась и возможность ограничения радиусов полюсов передаточной функции фильтра. В целом следует отметить, что при высоком порядке фильтра ($N > 20$) весьма существенные трудности возникают уже при квантовании вещественных данных до 8–10 бит.

Однако возможность прямого синтеза цифровых БИХ-фильтров непосредственно в целочисленном пространстве состояний может быть предоставлена методологией целочисленного нелинейного программирования (ЦНП), общее описание которой приведено в работах [7–10]. Под пространством состояний в данном случае понимается, прежде всего, многомерное пространство целочисленных параметров (коэффициентов фильтра), входных и выходных сигналов — целочисленных временных последовательностей, а также базовые целочисленные операции над данными в алгоритме цифровой фильтрации. Естественно, целочисленные опера-

ции на любой цифровой платформе выполняются значительно быстрее, чем операции вещественных вычислений. Число тактов центрального процессорного устройства, необходимых для реализации базовых целочисленных операций, существенно меньше. Например, для микроконтроллерного процессора C8051F120, работающего как с целочисленным, так и с вещественным форматом представления данных, базовые операции сложения реализуются в семь раз быстрее, а операции умножения более чем в четыре раза быстрее для целочисленной арифметики в сравнении с вещественными вычислениями. Ядро CIP-51 данного процессора поддерживается аппаратными и программными средствами разработки от Silicon Labs.

Идеология ЦНП позволяет эффективно проектировать целочисленные цифровые фильтры (ЦЦФ) с заданной разрядностью представления данных и максимальным выполнением требований к совокупности частотных характеристик фильтра при произвольной форме их задания. В настоящее время в общей номенклатуре коммерческих цифровых платформ существенную долю занимают 8-разрядные цифровые платформы с целочисленной арифметикой вычислений. При реализации высокоскоростных целочисленных фильтров на специализированных платформах или на кристалле разрядность представления данных может быть еще ниже (до 4 или даже до 3 бит). А как справедливо показано в [4, 11], снижение разрядности данных даже на 1 бит может сэкономить до 50% оперативной памяти

при значительном уменьшении времени расчета отклика фильтра. Поэтому для высокоскоростных ЦЦФ на кристалле разрядность представления данных во многом становится определяющим фактором.

В настоящей статье приводятся несколько характерных примеров решения задач синтеза каскадных рекурсивных ЦЦФ минимальной разрядности представления данных с учетом требуемого радиуса полюсов передаточной функции фильтра; эти задачи выполняются компьютерным пакетом ЦНП (версии 3.1). Приведенные примеры иллюстрируют принципиальные возможности такого подхода к многофункциональному проектированию цифровых систем.

Моделирование и синтез рекурсивных ЦЦФ малой разрядности

Рекурсивные фильтры, являясь дискретными линейными системами с обратной связью, обладают гораздо большими селективными возможностями по сравнению с КИХ-фильтрами и позволяют реализовать требуемые частотные характеристики значительно меньшей разрядностью представления данных и меньшим порядком фильтра. Что касается структуры построения рекурсивных фильтров, в [5, 12] приведено сравнение каскадных, параллельных, прямых и волновых структур построения и показано преимущество каскадной структуры. Поэтому в настоящее время построение рекурсивных ЦЦФ в форме каскадного соединения звеньев первого или второго порядка на практике используется наиболее часто.

Передаточная функция для рекурсивного ЦЦФ, состоящего из каскадного соединения m -звеньев второго порядка ($m = N/2$, где N — общий порядок фильтра), имеет следующий вид [7, 8]:

$$H(z) = \prod_{i=1}^m \frac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}}{a_{0i} + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}, \quad (1)$$

где комплексная переменная z при переходе к описанию частотной характеристики $K(e^{j\omega}) = |K(e^{j\omega})| \times e^{j\phi(\omega)}$ принимает значение $z = e^{j\omega}$, а $\omega = 2\pi f/f_s$ — цифровая частота.

Все коэффициенты системной функции (1) являются целочисленными, а их интервал изменения определяется заданной длиной битового слова (разрядностью) коэффициентов фильтра. Из соотношения (1) легко получается разностное уравнение для одного звена целочисленного фильтра:

$$y_n = (b_0x_n + b_1x_{n-1} + b_2x_{n-2} - a_1y_{n-1} - a_2y_{n-2})/a_0, \quad (2)$$

где x_n, y_n — входная и выходная целочисленные временные последовательности, a_0 — масштабирующий множитель.

Как видно из (2), при вычислении отклика фильтра должна выполняться операция деления на целочисленный коэффициент a_0 , которая может быть реализована операцией побитового сдвига при условии принадлежности каждого i -го коэффициента биномиальному целочисленному ряду (ряду степеней числа 2):

$$a_{0i} \in \{2^q\}, \quad q = 0, \overline{W_k-1}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3)$$

где W_k — длина битового слова целочисленных коэффициентов, включая знак.

На рис. 1 приведена типичная структура звеньев рекурсивного целочисленного фильтра, соответствующая разностному уравнению (2). Как видно, при вычислении отклика фильтра, кроме традиционных операций сложения, умножения и задержки на такт, присутствует операция сдвига на $B = \log_2 a_0$ бит, с помощью которой реализуется целочисленное деление на биномиальный нормирующий коэффициент a_0 .

Можно отметить, что именно наличие итоговой операции сдвига в алгоритме расчета отклика рекурсивного целочисленного звена нарушает коммутативность расчетной процедуры реализации нулей и полюсов его передаточной функции (1), что не позволяет, в свою

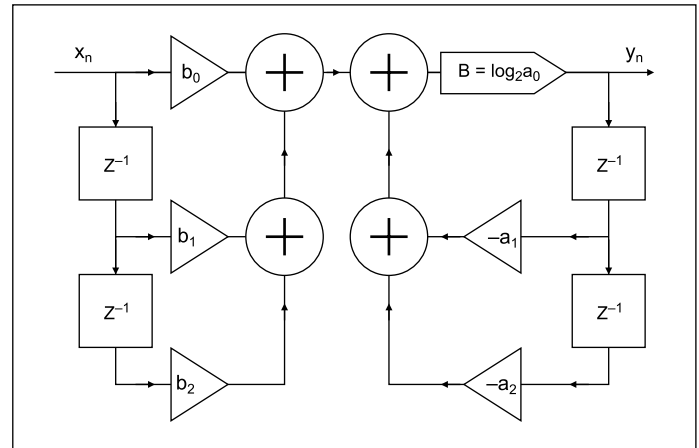


Рис. 1. Структура звена рекурсивного ЦЦФ

очередь, реализовать целочисленное рекурсивное звено в канонической форме.

Как известно, рекурсивный фильтр будет устойчив, если все полюсы p_i передаточной функции лежат внутри единичного круга в z -плоскости:

$$|Zp_i| < 1. \quad (4)$$

Заметим, однако, что это стандартное условие является необходимым, но далеко не достаточным, поскольку устойчивость работы БИХ-фильтра как системы с обратной связью может быть нарушена появлением предельных циклов (limit cycle), когда вроде бы устойчивый по соотношению (4) фильтр начинает демонстрировать неустойчивое поведение, приводящее к возникновению на выходе периодических колебаний. При этом малые предельные циклы возникают, когда при отсутствии сигнала на входе амплитуда выходного сигнала затухает, но из-за вычислительных погрешностей не достигает нуля, принимая зачастую колебательный характер. На рис. 2 в качестве примера проявления таких циклов представлены осциллограммы сигналов на выходе рекурсивных ФНЧ различного порядка при нулевом входе.

Большие предельные циклы наблюдаются, когда амплитуда выходного сигнала не затухает, а возрастает, вызывая в итоге переполнение (overflow). В качестве примера проявления таких циклов на рис. 3 показана потеря устойчивости различных рекурсивных фильтров при автоматизированном измерении их АЧХ, хотя максимальный радиус полюсов $H(z)$ этих фильтров не выходит за пределы единичной окружности в z -плоскости.

Как известно, возможность возникновения предельных циклов возрастает с увеличением порядка рекурсивного фильтра и во многом определяется добротностью полюсов его передаточной функции, то есть коэффициентами знаменателя системной функции (1). В настоящее время провести теоретический анализ и расчет предель-

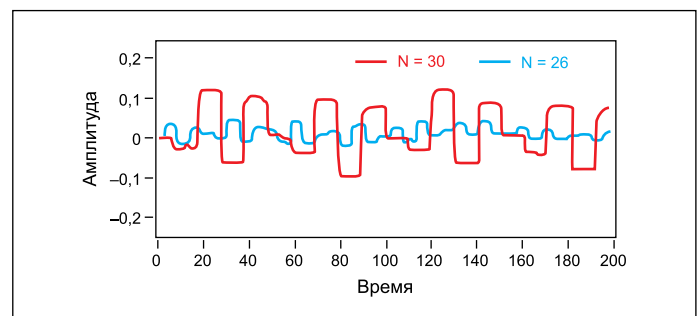


Рис. 2. Амплитуда предельных циклов рекурсивных фильтров при нулевом входе

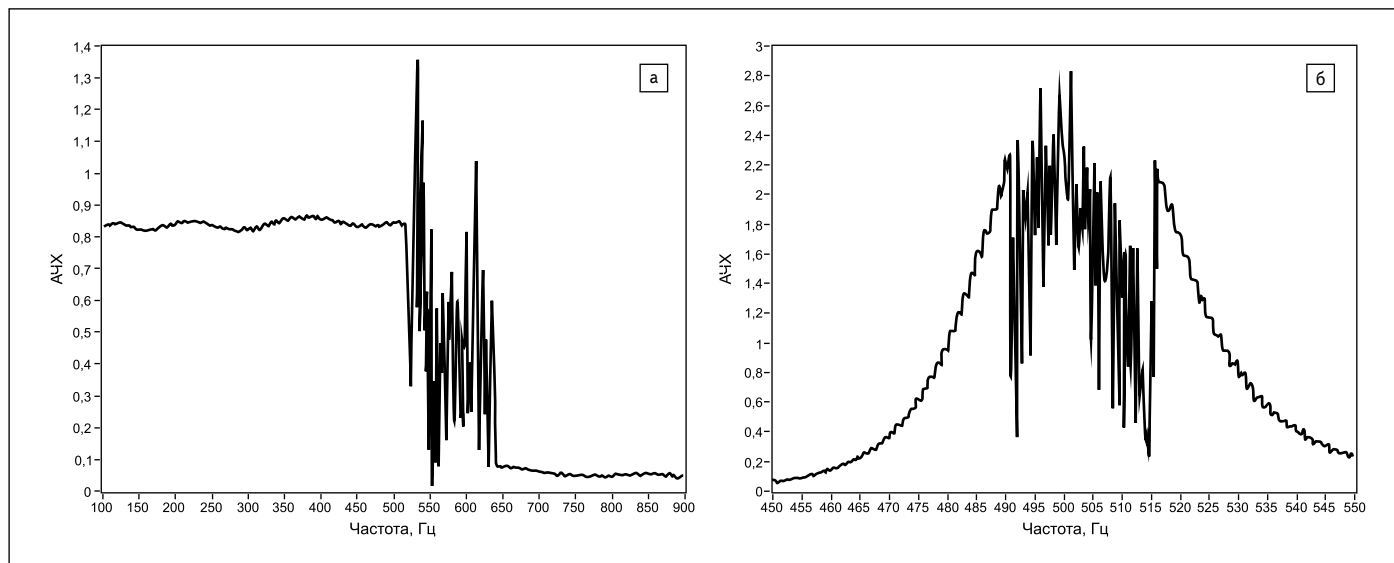


Рис. 3. Потеря устойчивости: а) рекурсивного ФНЧ в переходной зоне; б) гауссова фильтра в полосе пропускания

ных циклов весьма непросто даже для БИХ-фильтров малого порядка. Поэтому действенной, а порой и единственной альтернативой является практическая реализация синтезированного ЦЦФ на конкретной цифровой платформе (MCU, DSP или FPGA) и экспериментальный анализ амплитуды выходного сигнала фильтра при нулевом входе. Именно поэтому проектирование цифровых БИХ-фильтров высокого порядка ($N > 20$) не должно ограничиваться только теоретическим нахождением коэффициентов (как это обычно принято), но обязательно этапом реализации фильтра и практического исследования решения на возможное наличие предельных циклов. В том же случае, когда предельный цикл наблюдается, действенной мерой его устранения становится проведение повторного синтеза фильтра под меньшую допустимую добротность его полюсов. А так как добротность полюсов пропорциональна их радиусу в z -плоскости, достаточно задать меньшее значение допустимого радиуса полюсов передаточной функции и вновь синтезировать фильтр. Попытки задания различных радиусов полюсов [6] на стадии аналитического проектирования БИХ-фильтров малоэффективны из-за низкой адекватности и вычислительных затрат, тогда как поисковый синтез численными методами ЦНП позволяет сделать это без затруднений. Таким образом, совместное условие устойчивости проектируемого БИХ-фильтра с учетом отсутствия предельных циклов можно представить как:

$$|Zp_i| < r_{\max}$$

где r_{\max} — допустимый максимальный радиус полюсов передаточной функции фильтра в z -плоскости, при котором предельные циклы в системе не возникают.

Так, в пакете ЦНП 3.1 возможно задание следующей линейки значений максималь-

ных радиусов полюсов при решении конкретной проектной задачи: $r_{\max} = \{1, 0, 98, 0, 9, 0, 82 \text{ и } 0, 75\}$. Как показала практика, при синтезе с меньшим значением максимального радиуса практически всегда удается получить проектное решение без предельных циклов того или иного рода, хотя селективная способность фильтра при этом, естественно, снижается.

Что касается результатов необходимых для расчета отклика ЦЦФ промежуточных вычислений, то все они также являются целочисленными. А результат умножения целых чисел (например, текущего цифрового отсчета и коэффициента фильтра) полностью детерминирован и не требует квантования для реализации на цифровой платформе с заданной разрядностью W_k представления данных. При заданной битовой разрядности квантования входного сигнала W_x достаточно выделить внутренний аккумуляторный регистр с разрядностью:

$$W_{ak} = W_x + W_k + 2 \text{ (бит)}$$

для хранения результата целочисленного умножения с накоплением (MAC), осуществляемого по алгоритму (2). Колебания переполнения, то есть возникновения больших предельных циклов, вызванных переполнением разрядной сетки регистра-аккумулятора, при таком расчете его разрядности практически никогда не возникает, особенно если принять во внимание, что накопление результата целочисленного умножения в (2) осуществляется алгебраически, с учетом знака слагаемых, что существенно понижает разрядность результата. В алгоритме расчета отклика целочисленного звена единственным случайным процессом (или источником шума) является операция нормировки, деления на нормирующий биномиальный множитель a_0 , которая, как показано выше,

реализуется регистровым сдвигом вправо на $B = \log_2 a_0$ бит с потерей данных в младших разрядах. То есть в целочисленном фильтре на каждое звено приходится по одному источнику шума, своим происхождением объясняющему операции сдвига [13].

В цифровых же платформах с вещественной арифметикой вычислений представление результата умножения вещественных чисел конечным числом разрядов носит стохастический характер и, естественно, требует процедуры квантования, результатом которой и является стохастический шум квантования.

Известно, что в каскадных формах построения цифровых фильтров необходима процедура масштабирования сигнала, или равномерной раскладки усиления по каскадам. Это позволяет фильтру работать в широком динамическом диапазоне входных сигналов. Однако в каскадных ЦЦФ расчет такого масштабирования целочисленного звена гораздо легче осуществлять не стандартным применением L_p -нормы, а прямым введением требования обеспечения малого разброса коэффициентов передачи отдельных звеньев при синтезе фильтра [9, 10]. Как показывает практика, существенного сужения динамического диапазона не происходит, если максимальные коэффициенты передачи его каскадов различаются не более чем в 5–7 раз. При более грубом покаскадном масштабировании сужение динамического диапазона фильтра становится заметным. Формально требования масштабирования сигнала записываются двусторонними функциональными ограничениями (9) экстремальной задачи ЦНП-синтеза.

Программный расчет отклика каскадного рекурсивного ЦЦФ при реализации фильтра на микроконтроллере или сигнальном процессоре может быть осуществлен следующим образом:

```
// программа расчета отклика малоразрядного ППФ 4 бита
#define IIR16_NBIQ 10 // число звеньев
//коэффициенты B0i, B2i, B1i, A2i, A1i, log2(A0i)
const short IIR16_COEFF[6*IIR16_NBIQ+1]={
-2,3,-5,-3,3,
-7,-1,-1,-3,1,3,
-3,3,-5,-4,-7,3,
0,7,-6,-4,4,3,
7,3,-7,-6,5,3,
2,4,1,-5,-7,3,
5,2,3,-5,-7,3,
1,-4,-2,-4,2,3,
-6,2,-5,-1,-0,3,
-1,7,-4,1,2,3};

int DBuffer[2*IIR16_NBIQ+1]; // линии задержки
int EBuffer[2*IIR16_NBIQ+1];

int IIR_Filtr(int Data) {
int32 temp;
short *COEFF=(short*)IIR16_COEFF;
short *D=(short*)DBuffer;
short *E=(short*)EBuffer;
short Xc, pvalue;
int i;

pvalue=(short)Data;
for(i=0;i<IIR16_NBIQ;i++)
{
Xc=pvalue;
temp=(long)(*(COEFF++))*Xc+(long)(*(COEFF++))*(*D++)+
(long)(*(COEFF++))*(*D--)+(long)(*(COEFF++))*(*E++)+
(long)(*(COEFF++))*(*E--);
*D++=*D;
*E++=*E;
pvalue=(short)(temp>>*COEFF++);
*D++=Xc;
*E++=pvalue;
}
return (int) pvalue;
}
```

В общем виде задачу целочисленного нелинейного программирования при машинном синтезе рекурсивного ЦЦФ с заданной разрядностью представления данных можно записать так [10]:

$$F^0(\mathbf{IX}^0) = \min F(\mathbf{IX}) \quad \mathbf{IX} \in I^{6m}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} -2^{Wk-1} < a_{di} < 2^{Wk-1} \quad d = \overline{1,2} \quad i = \overline{1,m}, \\ -2^{Wk-1} < b_{di} < 2^{Wk-1} \quad d = \overline{0,2} \quad i = \overline{1,m}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$a_{0i} \in \{2^q\}, \quad q = \overline{0, W_k - 1}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (7)$$

$$|Z_{pi}| < r_{\max} \quad i = \overline{1, m}, \quad (8)$$

$$K_i^{\min} \leq |K_i(e^{j\omega})| \leq K_i^{\max} \quad i = \overline{1, m}, \quad (9)$$

где m — число звеньев второго порядка; d — индекс коэффициента передаточной функции звена (1); \mathbf{IX} — вектор многомерного целочисленного пространства параметров; $F(\mathbf{IX})$ — целевая функция; K_i^{\min} , K_i^{\max} — допустимые границы изменения коэффициента усиления i -го звена.

Экстремальная задача синтеза (5) записана относительно целочисленного пространства I^{6m} параметров (коэффициентов фильтра) размерностью $6m$. Ограничения (6) задают границы изменения этих целочисленных коэффициентов, а соотношение (7) определяет принадлежность коэффициентов a_{0i} биномиальному ряду. Функциональные ограничения (8) контролируют в процессе синтеза условие устойчивости рекурсивного фильтра по всем полюсам коэффициента передачи с радиусами, не выше r_{\max} , а ограничения (9) масштабируют коэффициенты передачи звеньев в заданный

интервал. В поисковом алгоритме минимизации выполнение данных ограничений реализуется методом штрафных функций [14].

Многофункциональное задание целевой функции наиболее часто формируется в виде взвешенной суммы (10) частных целевых функций $f_i(\mathbf{IX})$, которые определяют выполнение функциональных требований по той или иной частотной характеристике фильтра [10, 14]:

$$F(\mathbf{IX}) = \sum_i \beta_i \times f_i(\mathbf{IX}). \quad (10)$$

Коэффициент β_i задает значимость (вес) характеристики (i -го частотного окна). Сами частные целевые функции $f_i(\mathbf{IX})$ формирует функциональный редактор пакета синтеза обычно по критерию минимума среднеквадратичного отклонения:

$$f_i(\mathbf{IX}) = \sqrt{\frac{1}{p} \times \sum_{n=1}^p [Y_n(\mathbf{IX}) - Y_n^T]^2}, \quad (11)$$

где $Y_n(\mathbf{IX})$ — текущее значение характеристики фильтра на n -й дискретной частоте диапазона определения; а Y_n^T — требуемое значение частотной характеристики.

Критерий максимальной ошибки:

$$f_i(\mathbf{IX}) = \max_n |Y_n(\mathbf{IX}) - Y_n^T| \quad (12)$$

используется значительно реже. Очень часто ради экономии времени расчета в соотношении (11) корень не извлекают и работают по ненормированному квадратичному критерию:

$$f_i(\mathbf{IX}) = \sum_{n=1}^p [Y_n(\mathbf{IX}) - Y_n^T]^2. \quad (13)$$

Для численного решения экстремальной задачи (5) при проектировании ЦЦФ используется эффективный метод синтеза с поиском глобального экстремума на дискретной сетке кода Грея [7, 14]. Данный метод адаптирован к поиску решений в режиме дискретного целочисленного представления многомерной области поиска. Вектор \mathbf{IX}^0 , минимизирующий скалярную целевую функцию $F(\mathbf{IX})$ на множестве допустимых целочисленных решений (6), является парето-эффективным решением задачи синтеза малоразрядного рекурсивного ЦЦФ по совокупности противоречивых характеристик.

Следует отметить, что в отличие от классического аналитического расчета поисковое проектирование является, безусловно, интеллектуальным процессом. Множество сценариев решения сложной проектной задачи может быть предложено, много специфических приемов и навыков применено опытным проектировщиком-поисковиком для успешного решения сложной задачи. Очевидно, что прямой сценарий решения сразу в многомерном пространстве параметров минимальной разрядности коэффициентов малоэффективен и не приведет к приемлемому результату. Только в относительно простых

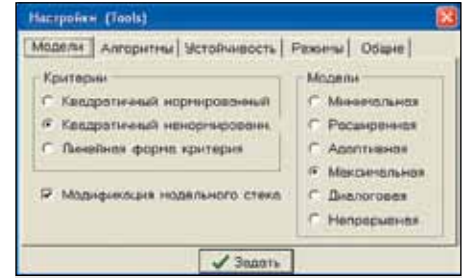


Рис. 4. Панель настроек пакета синтеза

задачах синтеза фильтров низкого порядка ($N \leq 10$) удовлетворительное решение может быть получено подобным образом.

Типовым же сценарием поискового проектирования каскадных ЦЦФ высокого порядка является сценарий динамического программирования, как последовательность поисковых задач с поэтапным повышением порядка проектируемого фильтра. На первом, стартовом этапе используют структуру низкого порядка (4-го или 6-го, не выше). Естественно, выполнение совокупных требований таким фильтром будет низким. Причем для повышения надежности отделения глобального экстремума в поисковом комплексе ЦНП-пакета на стартовом этапе желательно использовать максимальную или непрерывную модель поиска (рис. 4). На втором этапе уже данное решение применяется в качестве исходного. Порядок фильтра при этом повышают добавлением еще одного звена 2-го порядка, обычно путем дублирования найденных ранее коэффициентов одного из звеньев (что в пакете синтеза может делаться автоматически). После нескольких подобных итераций и определяется итоговый порядок проектируемого фильтра, при котором погрешность выполнения сложных совокупных требований лежит в пределах заданного допуска.

Ниже показана возможность синтеза методом ЦНП целочисленных рекурсивных фильтров минимальной разрядности представления данных (вплоть до 3 бит) с учетом заданного радиуса полюсов их передаточной функции в z -плоскости и безотносительно конкретного их практического применения. Многофункциональный синтез осуществляется как по критерию требуемой частотной селективности, так и по критерию обеспечения возможной линейности фазы в полосе пропускания фильтра. Таким образом, целевая функция во всех приведенных ниже проектных задачах формировалась в виде взвешенной суммы двух частных целевых функций $f_{\text{АЧХ}}(\mathbf{IX})$ и $f_{\text{ФЧХ}}(\mathbf{IX})$, обеспечивающих соответственно выполнение требований и амплитудной селекции фильтра, и линейности его фазы:

$$F(\mathbf{IX}) = \beta_1 f_{\text{АЧХ}}(\mathbf{IX}) + \beta_2 f_{\text{ФЧХ}}(\mathbf{IX}), \quad (14)$$

где сами частные целевые функции формировались по квадратичному ненормированному критерию (13).

При решении задач синтеза по совокупности противоречивых характеристик обычно декларируется проблема правильного выбора прототипа — начального приближения, начальной точки построения минимизирующей последовательности. На первый взгляд удачным прототипом кажется любая точка многомерного пространства параметров, где будут выполняться требования реализации хотя бы одной характеристики фильтра, например АЧХ или ФЧХ. Однако относительно аддитивной целевой функции (14) такая стартовая точка очевидно соответствует локальному ее экстремуму (рис. 5).

А это, безусловно, весьма затруднит работу любого поискового алгоритма минимизации необходимостью выхода из локальной ситуации, локального экстремума функции цели. Далеко не каждый поисковый алгоритм способен это обеспечить, особенно на сложных классах полимодальных сталактитовых, овражных или кратерных функций. В этом смысле процесс минимизации, поискового решения экстремальной задачи синтеза (5) гораздо выгоднее пускать «с горки», с любой произвольной точки, чем сознательно заносить начальную точку в локальный экстремум целевого функционала. Поэтому в многофункциональных проектных задачах со сложными селективными требованиями оптимальное решение, как правило, определяется не из начальной точки, заданной пользователем, а из точки, сгенерированной самим поисковым алгоритмом решения экстремальной задачи синтеза (профессиональные алгоритмы минимизации для повышения надежности поиска всегда используют процедуру повторных спусков, то есть поиска из нескольких начальных точек, квазиравномерно распределенных в многомерном пространстве параметров [14]). И только стартовая точка, лежащая в зоне притяжения глобального экстремума целевой функции, может быть достойным начальным приближением, но в сложных проектных задачах синтеза ЦЦФ по совокупности требуемых

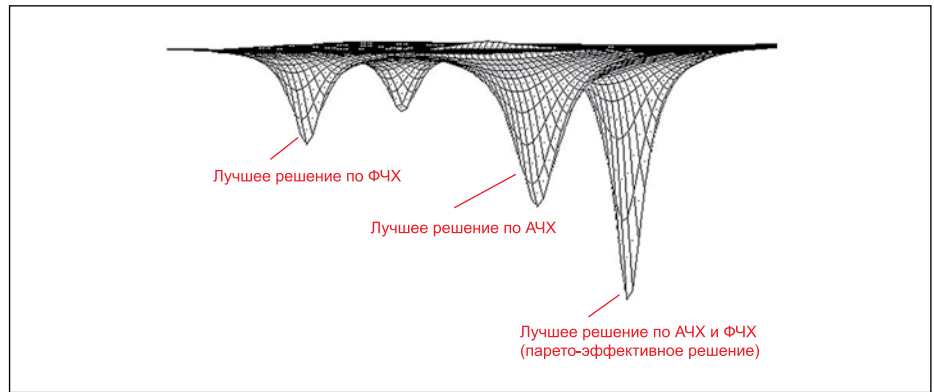


Рис. 5. Сталактитовая целевая функция

противоречивых характеристик априори нет и не может быть никаких сведений, аргументированных предпосылок правильно-го ее выбора.

Четырехразрядный полосовой фильтр

Синтез малоразрядного полосно-пропускающего фильтра (ППФ) высокого порядка в целочисленном пространстве параметров осуществлялся по следующим требованиям:

1. Полоса пропускания: 0,2–0,35 (здесь и далее в шкале относительных частот f/fs , где fs — частота дискретизации входного сигнала).
2. Коэффициент передачи в полосе пропускания: 0 дБ с допуском ± 1 дБ.
3. Нелинейность фазы в полосе не выше 3° .
4. Уровень подавления на частотах ниже 0,1 и выше 0,45 не менее 40 дБ.
5. Разрядность (длина слова коэффициентов W_k): 4 бит.
6. Порядок рекурсивного фильтра: 20.
7. Максимально допустимый радиус полюсов: 0,9.
8. Масштабирование коэффициентов передачи звеньев в интервал $\{1-3\}$.

Требуемая АЧХ полосового фильтра приведена на рис. 8а (выделена красным цветом).

При синтезе рекурсивного ППФ с линейной фазой целевая функция определялась соотношением (14), а сами частные целевые функции $f_{АЧХ}(IX)$ и $f_{ФЧХ}(IX)$ формировались по аддитивному ненормированному критерию (13). Примеры ввода требуемой АЧХ и ФЧХ фильтра в модуль функционального редактора пакета синтеза представлены соответственно на рис. 6 и 7. При вводе обычно широко используется фрагментация характеристик фильтра, когда важные их участки выделяются в отдельное функциональное окно для обеспечения их детальной проработки в ходе синтеза.

Относительно целевой функции задача целочисленного программирования для многофункционального синтеза рекурсивного 4-битового ППФ в форме каскадного соединения 10 звеньев прямой формы второго порядка записывалась так:

$$F^0(IX^0) = \min F(IX) \quad IX \in I^{50}, \quad (15)$$

$$-7 \leq a_{di} b_{di} \leq 7 \quad i = \overline{1,10}, \quad (16)$$

$$a_{0i} = 8 \quad i = \overline{1,10}, \quad (17)$$

$$|Z_{pj}| < 0,9, \quad (18)$$

$$1 \leq K_i(e^{j\omega}) \leq 3 \quad i = \overline{1,10}, \quad (19)$$

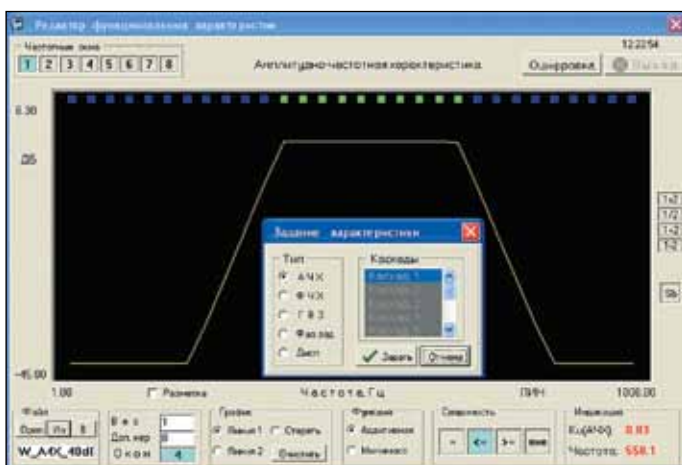


Рис. 6. Ввод требуемой АЧХ полосового фильтра

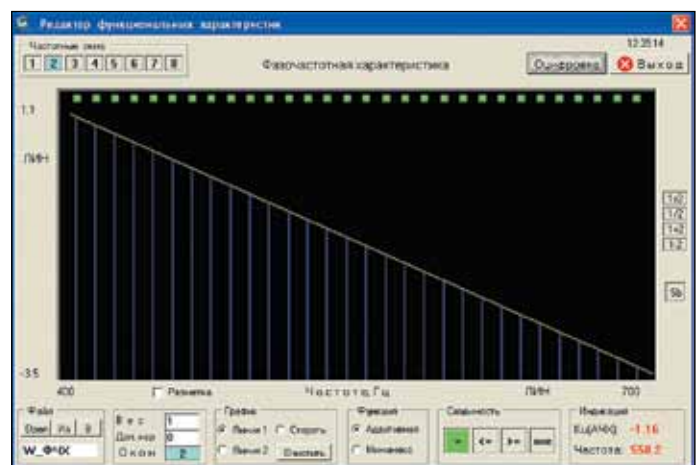


Рис. 7. Ввод требуемой ФЧХ в полосу пропускания фильтра

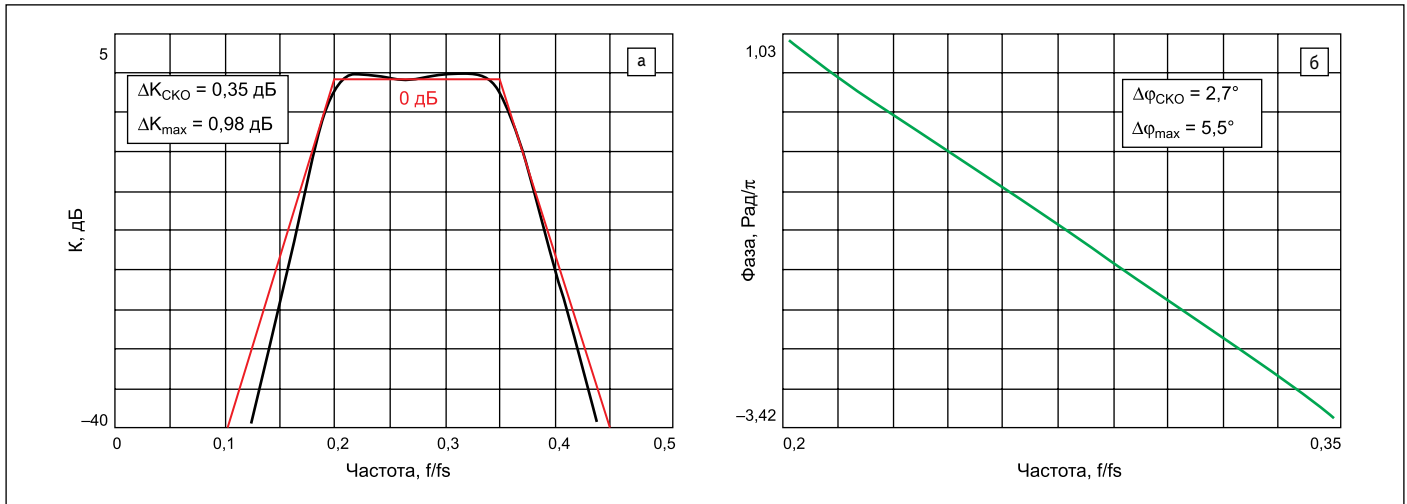


Рис. 8. Характеристики ППФ по синтезу: а) АЧХ; б) ФЧХ в полосе пропускания

Таким образом, итоговая минимизация целевого функционала осуществлялась на 50-мерном целочисленном пространстве 4-битовых параметров в допустимой области (16) при выполнении функциональных ограничений устойчивости фильтра (18) по всем полюсам передаточной функции с радиусами, не превышающими 0,9 в z -плоскости, и масштабировании (19) коэффициентов усиления звеньев в заданный интервал.

Для ввода структуры ППФ в программу используем встроенный топологический редактор ЦНП-пакета [10], позволяющий сформировать файл исходных данных к решению конкретной задачи синтеза с указанием порядка фильтра, числа варьируемых коэффициентов, их начальных значений и границ изменения, а также возможного дублирования коэффициентов в случае необходимости.

В таблице 1 приведены оптимальные значения целочисленных 4-битовых коэффициентов передаточной функции по синтезу с одинаковой значимостью ($\beta_1 = \beta_2$) требований к АЧХ и ФЧХ проектируемого фильтра, а графики его частотных характеристик представлены на рис. 8.

Что касается оценки фазовой нелинейности в полосе пропускания синтезированного ППФ, то по критерию влияния на форму

выходного сигнала корректное применение в данном случае аддитивной среднеквадратичной оценки (СКО) фазовых искажений:

$$\Delta\varphi_{\text{СКО}} = \sqrt{\frac{1}{p} \times \sum_{n=1}^p [\varphi_n(\mathbf{IX}) - \varphi_n^L]^2}, \quad (20)$$

а не их оценки по критерию максимальной ошибки:

$$\Delta\varphi_{\text{max}} = \max_n |\varphi_n(\mathbf{IX}) - \varphi_n^L|,$$

где $\varphi_n(\mathbf{IX})$ — текущее значение ФЧХ на n -й дискретной частоте интервала оценки; а φ_n^L — требуемое значение линейной ФЧХ.

Это следует непосредственно из преобразования Фурье, которое определяет именно аддитивное влияние фазового и амплитудного спектра всех гармоник обрабатываемого сигнала на искажение его формы. Поэтому в дальнейшем для оценки фазовой нелинейности, а также неравномерности АЧХ в полосе пропускания фильтра будет применяться оценка по критерию СКО, хотя и максимальная ошибка также будет приводиться. В данном случае среднеквадратичные неравномерность АЧХ и нелинейность ФЧХ в полосе пропускания 4-битового ППФ были равны соответственно $\Delta K_{\text{СКО}} = 0,35$ дБ и $\Delta\varphi_{\text{СКО}} = 2,7^\circ$.

На рис. 9 приведено распределение полюсов передаточной функции синтезированного ППФ в z -плоскости с указанием заданной границы (18) допустимого максимального радиуса полюсов $r_{\text{max}} = 0,9$. Поскольку некоторые нули передаточной функции выходят за границы единичной окружности в z -плоскости, то синтезированный каскадный ППФ не является строго минимально-фазовой дискретной системой.

Исследуем профиль целевого функционала в точке целочисленного оптимума (табл. 1) путем построения его координатных разрезов. График разреза по параметру b_1 третьего каскада (рис. 10) подтверждает,

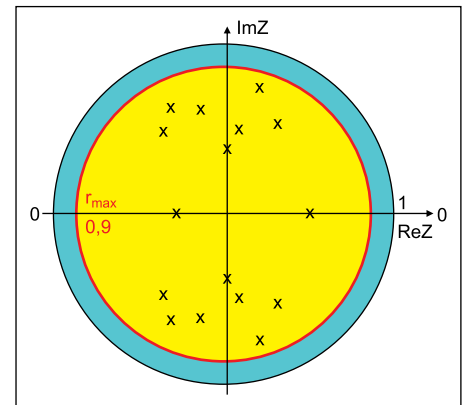


Рис. 9. Фиксация границы максимального радиуса полюсов в z -плоскости

что целевые функции в задачах многофункционального синтеза ЦЦФ имеют сложный, полимодальный характер. Дискретная минимизация таких функций является весьма непростой задачей. Тем не менее разработанный программно-алгоритмический поисковый комплекс пакета ЦНП 3.1 успешно справился с этой задачей, показав высокую надежность и эффективность.

Практическая реализация фильтра осуществлялась на многофункциональном микроконтроллере MSP430F1611 фирмы Texas Instruments [15] с целочисленным RISC-ядром. Особенности данного микроконтроллера являются его низкое энергопотребление, невысокая стоимость, а также возможность только целочисленных вычислений в формате с фиксированной точкой. Измерение частотных характеристик фильтра выполняется на реальном сигнале с помощью автоматизированной панорамной измерительной системы, разработанной в среде виртуальных приборов LabVIEW. Экспериментальные графики частотных характеристик фильтра на всем интервале Найквиста для частоты дискретизации $f_s = 2$ кГц приведены на рис. 11.

Таблица 1. Оптимальные коэффициенты четырехбитового ППФ

Звено фильтра	Коэффициенты передаточной функции фильтра					Усиление звена, K_{max}
	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2	
1	3	5	-2	3	3	1,92
2	-1	3	-7	-1	-1	1,27
3	7	4	-3	5	3	2,08
4	-4	4	0	-6	7	2,02
5	-5	6	7	-7	3	2,7
6	7	5	2	1	4	1,1
7	7	5	5	3	2	1,04
8	-2	4	1	-2	-4	1,41
9	0	1	-6	-5	2	1,38
10	-2	-1	-1	-4	7	1,04



Рис. 10. Разрез целевой функции по параметру b_1 третьего звена

Поскольку выходной сигнал снимался непосредственно с ЦАП микроконтроллера, то наблюдалось некоторое возрастание шумов измерения вблизи частоты Найквиста, где эффекты квантования входного сигнала наиболее выражены. Анализ выходного сигнала при нулевом входе показал, что предельные циклы того или иного рода при максимальном радиусе полюсов 0,87 в синтезированном ППФ отсутствуют. Таким образом, все функциональные требования по ЦНП-синтезу 4-разрядного рекурсивного ППФ были выполнены.

Трехразрядный фильтр нижних частот

В целочисленном пространстве параметров методом ЦНП рекурсивные фильтры нижних частот (ФНЧ) с требуемой фазовой линейностью синтезируются относительно

но просто. Задание для синтеза ФНЧ в пространстве 3-битовых параметров было следующим:

1. Полоса пропускания фильтра: 0–0,23 в шкале частот f/f_s .
2. Коэффициент передачи в полосе пропускания: 0 дБ с допуском ± 1 дБ.
3. Нелинейность фазы в полосе: не выше 10° .
4. Переходная полоса: 0,23–0,33.
5. Уровень подавления на частотах выше 0,33: не менее 40 дБ.
6. Длина слова коэффициентов W_k : 3 бит.
7. Порядок рекурсивного фильтра: 20.
8. Максимально допустимый радиус полюсов: 0,82.
9. Масштабирование коэффициентов передачи звеньев в интервал $\{0,5-3\}$.

Требуемая АЧХ фильтра приведена на рис. 12а (выделена красным цветом). Относительно целевой функции (14) задача целочисленного программирования для

многофункционального синтеза ФНЧ в форме каскадного соединения 10 звеньев 2-го порядка прямой формы записывалась так:

$$F^0(IX^0) = \min F(IX) \quad IX \in I^{50}, \quad (21)$$

$$-3 \leq a_{di} b_{di} \leq 3 \quad i = \overline{1,10}, \quad (22)$$

$$a_{0i} = 4 \quad i = \overline{1,10}, \quad (23)$$

$$|Z_{pj}| < 0,82, \quad (24)$$

$$0,5 \leq K_i(e^{j\omega}) \leq 3 \quad i = \overline{1,10}, \quad (25)$$

Таким образом, итоговая минимизация целевого функционала осуществлялась на 50-мерном целочисленном пространстве 3-битовых параметров в допустимой области (22) при выполнении функциональных ограничений устойчивости фильтра (24) по всем полюсам передаточной функции с радиусами, не превышающими 0,82 в z -плоскости, и масштабировании (25) коэффициентов усиления звеньев в заданный интервал. Нормирующие коэффициенты (23) всех звеньев фильтра были одинаковыми.

В таблице 2 приведены оптимальные значения целочисленных 3-битовых коэффициентов передаточной функции по синтезу

Таблица 2. Оптимальные коэффициенты трехбитового ФНЧ

Звено фильтра	Коэффициенты передаточной функции фильтра					Усиление звена, K_{\max}
	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2	
1	-3	1	2	3	1	2,9
2	1	0	0	-1	-2	0,8
3	-2	0	0	-3	-3	3
4	0	0	0	-3	-3	1,5
5	0	0	-1	1	2	0,9
6	-1	2	0	-1	-3	1,7
7	-1	0	-1	3	-3	1,4
8	0	0	1	-2	-3	1,15
9	-1	0	0	-1	-2	1
10	0	2	0	2	3	1,8

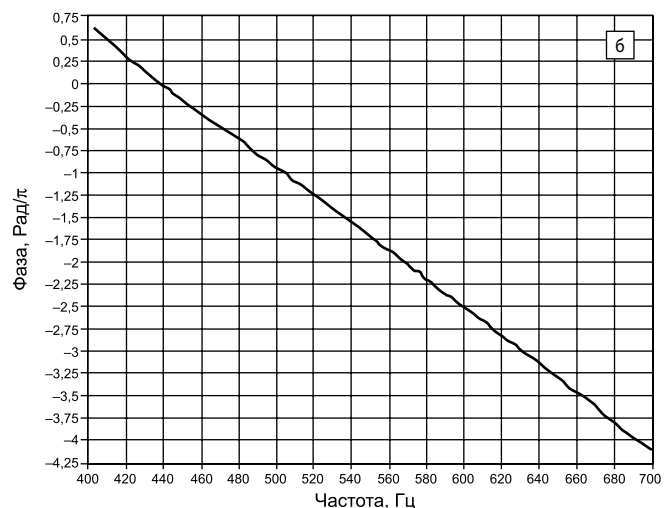
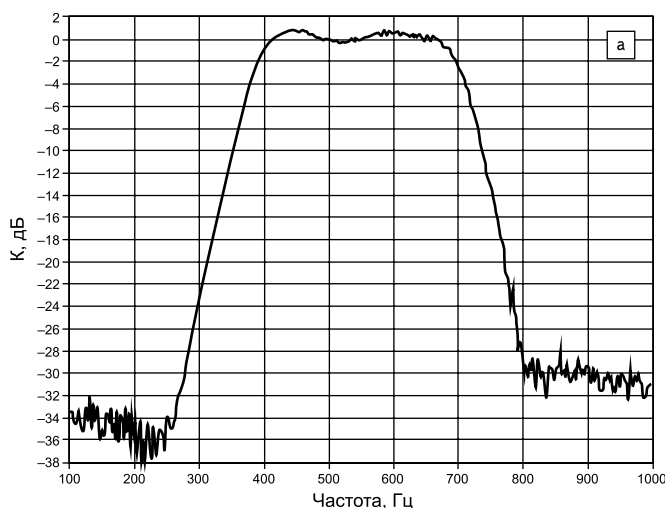


Рис. 11. Экспериментальные измерения: а) АЧХ; б) ФЧХ в полосе пропускания ППФ

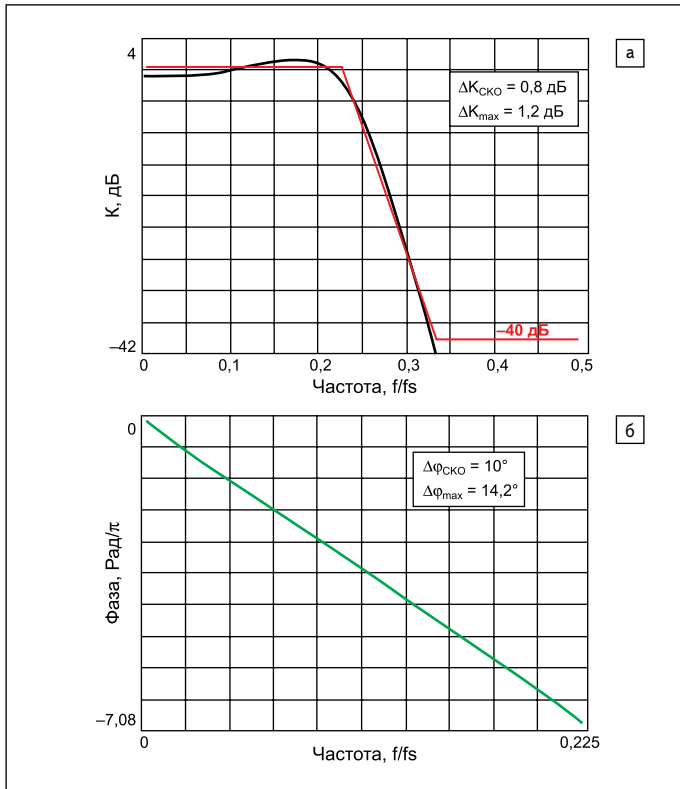


Рис. 12. Характеристики ФНЧ по синтезу: а) АЧХ; б) ФЧХ в полосе пропускания

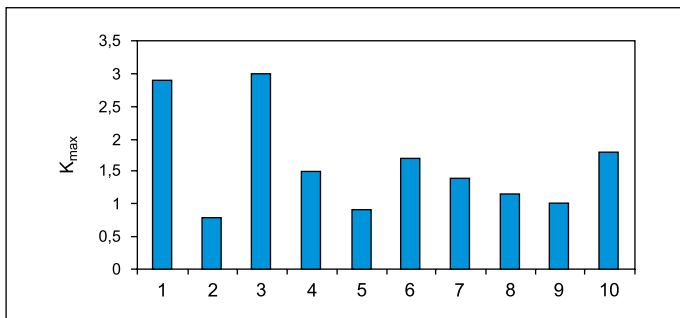


Рис. 13. Распределение усиления по каскадам фильтра

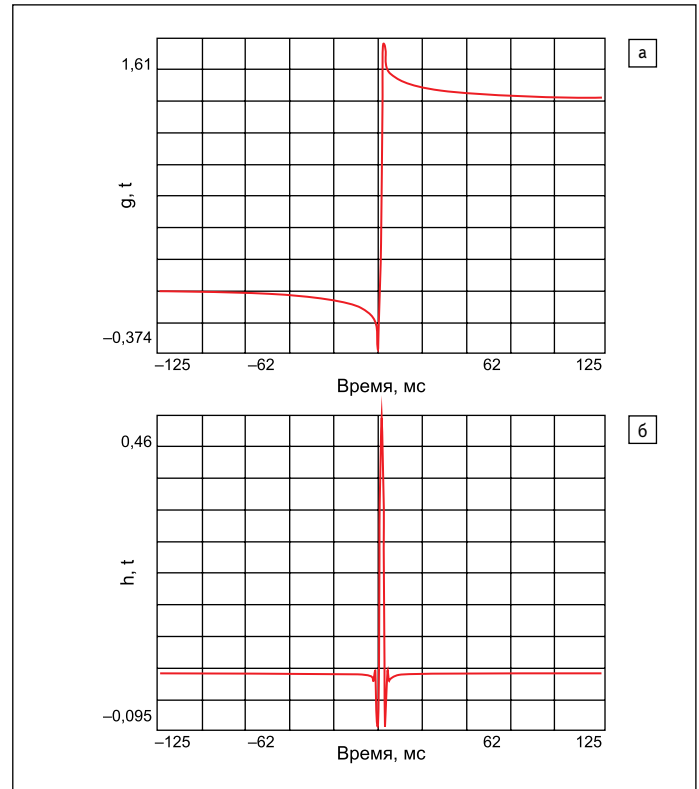


Рис. 15. Характеристики фильтра: а) переходная; б) импульсная

с одинаковой значимостью ($\beta_1 = \beta_2$) требований к АЧХ и ФЧХ проектируемого ФНЧ, а графики его частотных характеристик представлены на рис. 12.

Среднеквадратичная неравномерность АЧХ и нелинейность ФЧХ в полосе пропускания ФНЧ были равны соответственно $\Delta K_{\text{СКО}} = 0,8$ дБ и $\Delta \varphi_{\text{СКО}} = 10^\circ$. Максимальное усиление каскадов синтезированного фильтра представлено на рис. 13.

Практическая реализация фильтра осуществлялась также на микроконтроллере MSP430F1611 фирмы Texas Instruments. Результаты измерения частотных характеристик фильтра на всем интервале Найквиста для частоты дискретизации $f_s = 2$ кГц приведены на рис. 14.

Анализ выходного сигнала при нулевом входе показал, что предельные циклы того или иного рода при максимальном радиусе полюсов

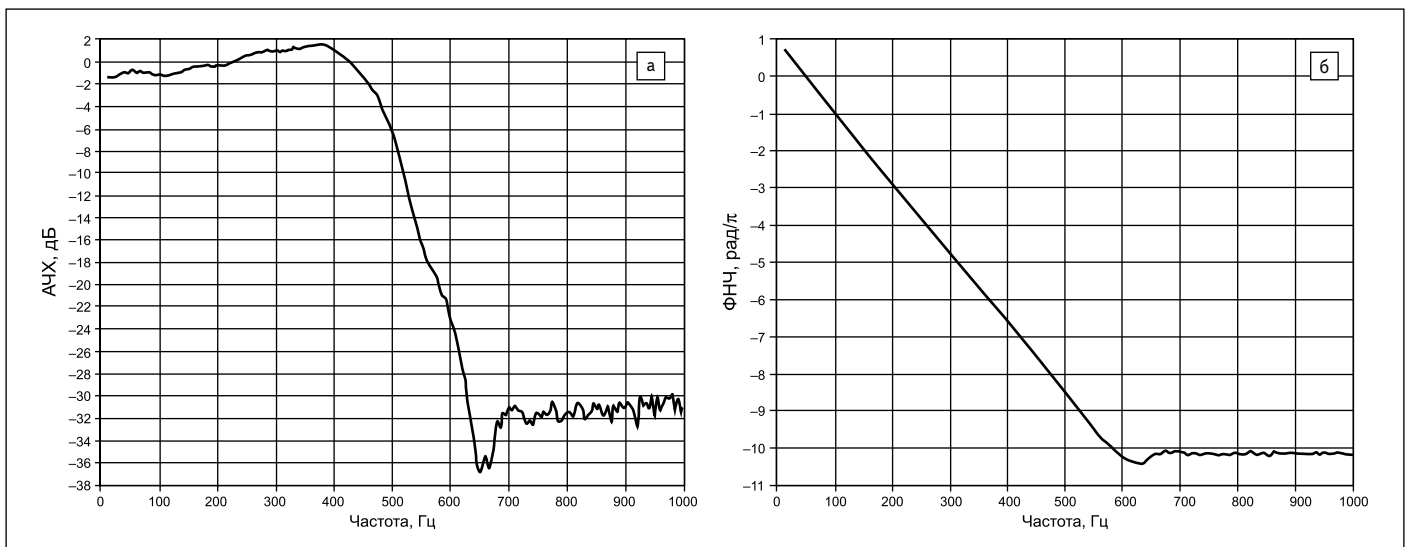


Рис. 14. Экспериментальные измерения: а) АЧХ; б) ФЧХ 3-битового ФНЧ

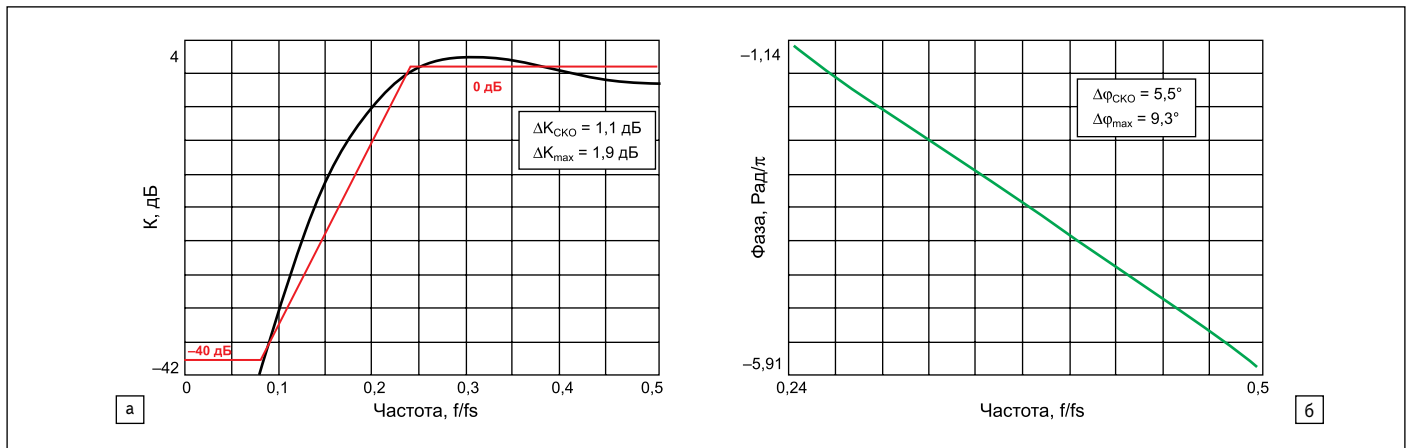


Рис. 16. Характеристики ФВЧ по синтезу; а) АЧХ; б) ФЧХ в полосе пропускания

0,74 в синтезированном ФНЧ отсутствуют. Соответственно, все функциональные требования при ЦНП-синтезе трехразрядного рекурсивного ФНЧ были также выполнены.

Переходная $g(t)$ и импульсная $h(t)$ характеристики данного фильтра в ЦНП-пакете рассчитывались с применением обратного дискретного преобразования Фурье (рис. 15).

Трехразрядный фильтр верхних частот

Техническое задание для синтеза рекурсивного ФВЧ с требуемой фазовой линейностью в целочисленном пространстве 3-битовых параметров было следующим:

1. Полоса пропускания фильтра: 0,24–0,5.
2. Коэффициент передачи в полосе пропускания: 0 дБ с допуском $\pm 1,2$ дБ.
3. Нелинейность фазы в полосе: не выше 10° .
4. Переходная полоса: 0,07–0,24.
5. Уровень подавления на частотах ниже 0,07: не менее 40 дБ.
6. Длина слова коэффициентов W_k : 3 бит.
7. Порядок рекурсивного фильтра: 20.

8. Максимально допустимый радиус полюсов: 0,75.

9. Масштабирование коэффициентов передачи звеньев в интервал $\{0,5-2,5\}$.

Требуемая АЧХ фильтра приведена на рис. 16а (выделена красным цветом). При синтезе рекурсивного ФВЧ с линейной фазой целевая функция также формировалась в виде взвешенной суммы частных целевых функций $f_{\text{АЧХ}}(\text{IX})$ и $f_{\text{ФЧХ}}(\text{IX})$ по соотношению (14).

Задача целочисленного программирования для многофункционального синтеза ФВЧ в форме каскадного соединения 10 звеньев 2-го порядка записывалась так:

$$F^0(\text{IX}^0) = \min F(\text{IX}) \quad \text{IX} \in I^{50}, \quad (26)$$

$$-3 \leq a_{di} \leq 3 \quad i = \overline{1,10}, \quad (27)$$

$$a_{0i} = 4 \quad i = \overline{1,10}, \quad (28)$$

$$|Z_{pj}| < 0,75, \quad (29)$$

$$0,5 \leq K_i(e^{j\omega}) \leq 2,2 \quad i = \overline{1,10}. \quad (30)$$

Таблица 3. Оптимальные коэффициенты трехбитового ФВЧ

Звено фильтра	Коэффициенты передаточной функции фильтра					Усиление звена, K_{max}
	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2	
1	2	0	2	-3	-1	2
2	0	0	-2	3	0	1,3
3	0	2	0	3	1	1,6
4	2	1	0	-3	0	1,2
5	-3	2	1	3	-3	1,5
6	-2	0	1	3	-2	0,9
7	0	0	-3	3	1	1,3
8	0	0	0	3	-3	1,5
9	0	0	1	3	-2	1,1
10	1	0	-3	0	-1	1,3

Итоговая минимизация целевого функционала (13) по сценарию динамического программирования осуществлялась также на 50-мерном целочисленном пространстве 3-битовых параметров в допустимой области (27) при выполнении функциональных ограничений устойчивости фильтра (29) по всем полюсам передаточной функции с радиусами, не превышающими $r_{\text{max}} = 0,75$ в z -плоскости, и масштабировании (30) коэффициен-

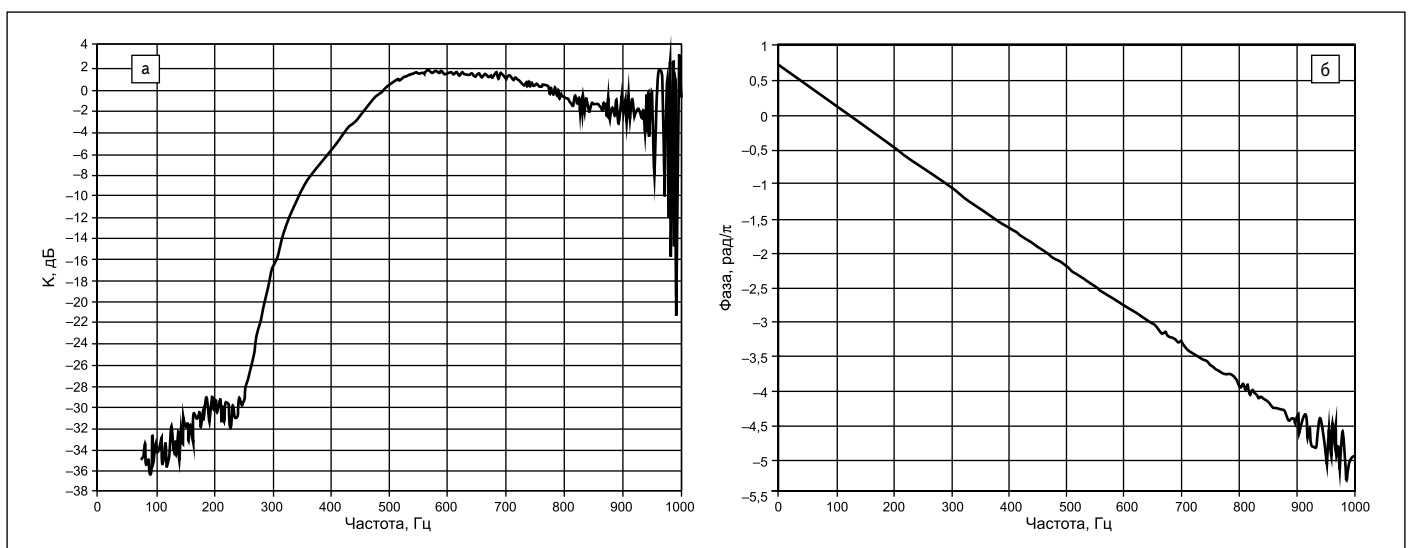


Рис. 17. Экспериментальные измерения 3-битового ФВЧ: а) АЧХ; б) ФЧХ

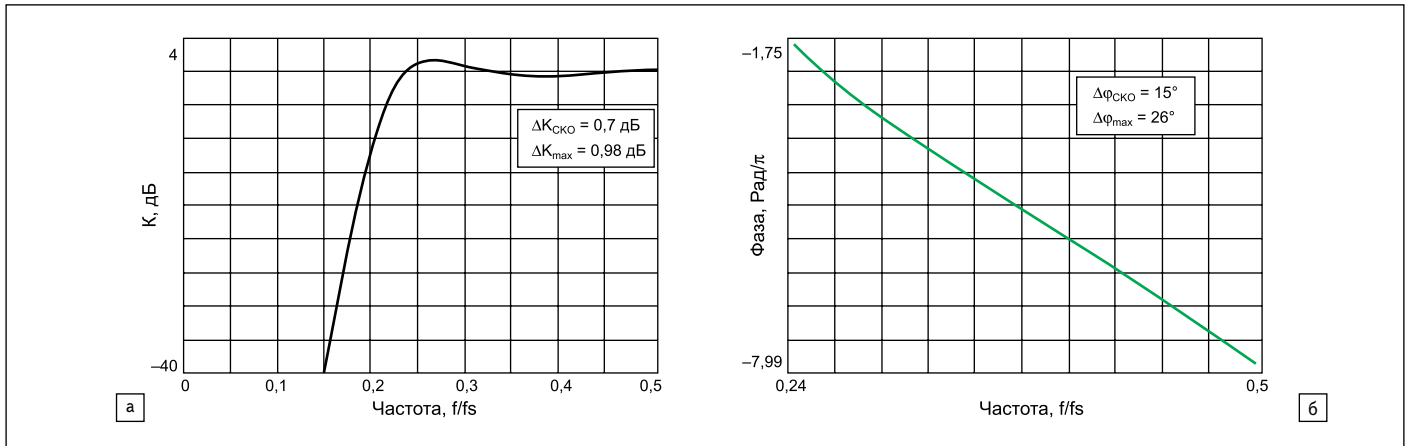


Рис. 18. Характеристики ФВЧ по синтезу: а) АЧХ; б) ФЧХ в полосе пропускания

тов усиления звеньев в заданный интервал. Нормирующие коэффициенты (28) всех звеньев фильтра были одинаковыми.

В таблице 3 приведены оптимальные значения целочисленных 3-битовых коэффициентов передаточной функции по синтезу ФВЧ с одинаковой значимостью ($\beta_1 = \beta_2$) требований к АЧХ и ФЧХ, а также достигнутые значения коэффициентов усиления его звеньев. Графики его частотных характеристик представлены на рис. 11. Время решения данной задачи на стандартном персональном компьютере не превышало 12 мин.

Как видно, среднеквадратичная неравномерность АЧХ и нелинейность ФЧХ в полосе пропускания ФНЧ были равны соответственно $\Delta K_{\text{СКО}} = 1,1$ дБ и $\Delta \varphi_{\text{СКО}} = 5,5^\circ$. Максимальный радиус полюсов передаточной функции при этом был равен 0,71.

Практическая реализация фильтра осуществлялась на МК MSP430F1611. Результаты измерения частотных характеристик фильтра на всем интервале Найквиста для частоты дискретизации $f_s = 2$ кГц приведены на рис. 17. Поскольку выходной сигнал снимался непосредственно с ЦАП, то наблюдается возрастание шумов измерения вблизи

частоты Найквиста, где эффекты квантования сигнала наиболее выражены.

Анализ выходного сигнала при нулевом входе показал, что предельные циклы того или иного рода при максимальном радиусе полюсов 0,71 в синтезированном фильтре отсутствуют. Таким образом, функциональные требования при ЦНП-синтезе трехрядного рекурсивного ФВЧ с одинаковой значимостью ($\beta_1 = \beta_2$) требований к АЧХ и ФЧХ фильтра были выполнены.

В таблице 4 приведены оптимальные значения 3-битовых коэффициентов передаточной функции уже по синтезу ФВЧ с различной значимостью ($\beta_1 = 5\beta_2$) требований к АЧХ и ФЧХ фильтра. Графики его частотных характеристик представлены на рис. 18.

В данном случае ширина переходной зоны существенно уменьшилась, а среднеквадратичная неравномерность АЧХ в полосе пропускания снизилась до значения $\Delta K_{\text{СКО}} = 0,7$ дБ, в то время как фазовые искажения возросли до $\Delta \varphi_{\text{СКО}} = 15^\circ$. Этого и следовало ожидать, поскольку в последовательной топологии построения рекурсивный фильтр является квазимиимальнофазовой структурой, в которой модуль и аргумент

Таблица 4. Оптимальные коэффициенты трехбитового ФВЧ

Звено фильтра	Коэффициенты передаточной функции фильтра					Усиление звена, K_{max}
	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2	
1	-2	2	-1	-3	-2	1,8
2	1	0	-2	2	0	1,3
3	-1	2	0	2	-2	1,4
4	-1	1	2	-3	0	1,1
5	2	0	1	2	-3	2
6	-1	2	0	2	-3	1,7
7	0	0	-3	2	1	1,2
8	1	0	0	2	-3	1,7
9	0	0	0	2	-2	1
10	1	0	0	2	-2	1,3

передаточной функции однозначно связаны преобразованием Гильберта:

$$|K(e^{j\omega})| = H\varphi(\omega).$$

Отсюда следует, что нельзя независимо управлять фазой коэффициента передачи, так как это приведет и к неизбежному изменению его модуля, то есть АЧХ фильтра. Поэтому ужесточение требований по фазовой линейности фильтра возможно только за счет снижения его амплитудной селектив-

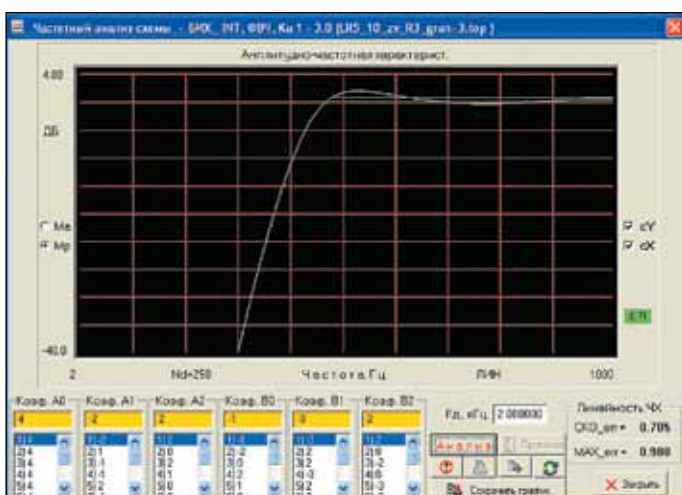


Рис. 19. Измерение полосовой неравномерности АЧХ

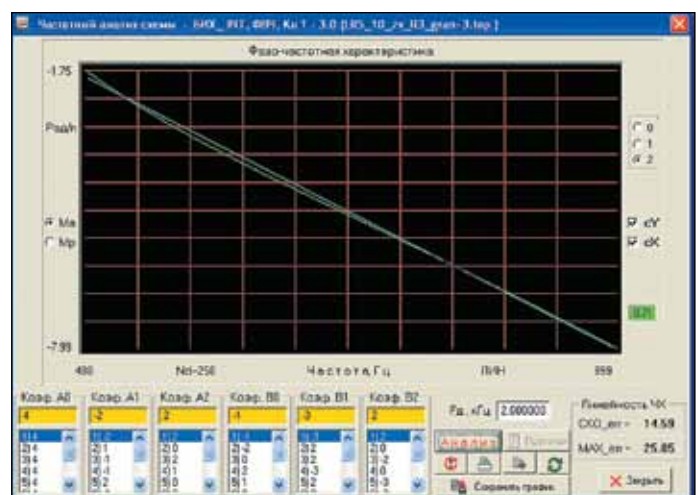


Рис. 20. Измерение линейности ФЧХ в полосе пропускания

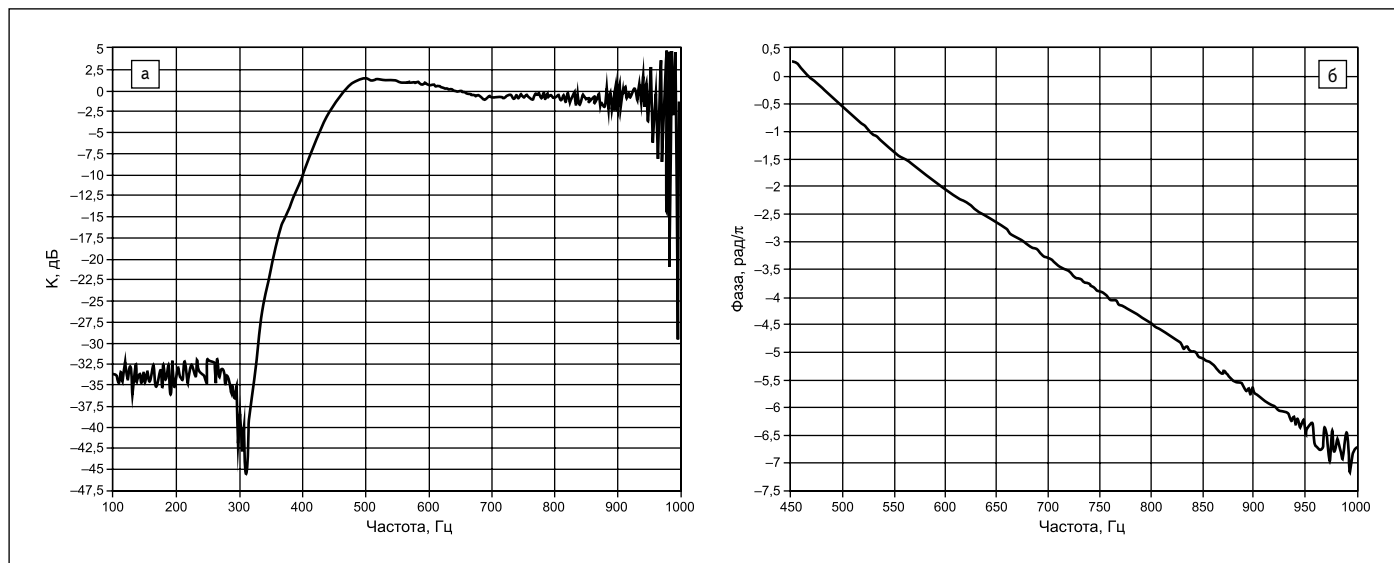


Рис. 21. Экспериментальные измерения: а) АЧХ; б) ФЧХ 3-битового ФВЧ

ности, поскольку эти два показателя являются принципиально противоречивыми. При принятой оценке фазовой нелинейности и неравномерности АЧХ в полосе пропускания фильтра по критерию (20) связь амплитудной селекции и фазовых искажений может быть отражена следующим образом:

$$\Delta K_{\text{СКО}} \times \Delta \varphi_{\text{СКО}} \approx \text{const} \approx k/N,$$

где N — общий порядок рекурсивного фильтра.

Строго минимальнофазовой структурой синтезированный ФВЧ также не является, поскольку имеет нули коэффициента передачи вне пределов единичной окружности в z -плоскости.

Процессы измерения в модуле анализа программы неравномерности АЧХ по заданному уровню 0 дБ и полосовой нелинейности ФЧХ фильтра отображены на рис. 19 и 20 соответственно.

Результаты измерения частотных характеристик фильтра (рис. 21) на всем интервале Найквиста для частоты дискретизации $f_s = 2$ кГц соответствуют данным синтеза.

Анализ выходного сигнала при нулевом входе показал, что предельные циклы того или иного рода при максимальном радиусе полюсов 0,71 в синтезированном фильтре также отсутствуют.

Заключение

Методы целочисленного нелинейного программирования в приложении к задачам проектирования линейных цифровых фильтров являются современной и перспективной альтернативой традиционным методам синтеза цифровых фильтров [2–5]. Классическое проектирование базируется, как известно, на аналитическом представлении функциональных зависимостей, на-

чиная с аналитической аппроксимации требуемой частотной характеристики фильтра, что, естественно, приводит к чрезвычайной сложности аналитических вычислений даже в относительно простых проектных задачах. Так, аналитический расчет селективных цифровых фильтров или фазовых корректоров с учетом возможности обеспечения требуемой фазовой линейности, как справедливо указано в [2, 3, 16], уже вызывает значительные математические трудности. Если же необходимо реализовать некий сложный закон изменения характеристики, например фазы коэффициента передачи либо ее производных (ГВЗ и дисперсии), то аналитический расчет фильтра становится невозможен.

Принципиальное отличие ЦНП-синтеза состоит в применении современных численных методов машинного проектирования, позволяющих работать не с аналитическим, а с дискретным представлением характеристик проектируемого фильтра, когда исходные требуемые и текущие характеристики табулированы с заданной дискретностью их представления в частотной области и в вычислительной системе представлены двумерными массивами (векторами). Это дает возможность, с одной стороны, без труда с применением численных методов рассчитывать с заданной точностью все требуемые характеристики фильтра (включая и дисперсионные характеристики), а с другой — использовать для синтеза технического решения эффективные поисковые методы дискретного программирования, позволяющие осуществлять проектирование цифровых фильтров непосредственно в целочисленном пространстве состояний. Критерием поиска при этом является соответствие совокупного текущего функционирования синтезируемого фильтра его требуемому функционированию. Современные алгоритмические комплексы целочисленной минимизации позволяют ре-

шать подобные проектные задачи надежно и эффективно при выполнении всех внешних условий и ограничений к работе цифрового фильтра, что дает возможность существенно повысить качество проектируемых фильтров и сократить время их разработки.

Можно отметить также относительную простоту инженерного применения технологии поискового ЦНП-синтеза в повседневной практике. В каком-то смысле, по аналогии с известной системой визуального программирования LabVIEW, ее можно назвать и технологией визуального проектирования. В многооконном графическом редакторе функциональных характеристик пакета ЦНП 3.1 проектировщик просто визуально отрисовывает графики нужных характеристик, а затем, используя адекватную математическую модель фильтра заданного порядка, пытается реализовать эти характеристики с помощью эффективного алгоритмического комплекса поисковой минимизации в непрерывном или целочисленном пространстве параметров (коэффициентов) фильтра, визуально контролируя и корректируя итеративный процесс синтеза. И если проектировщик обладает достаточной квалификацией и опытом, инженерным пониманием того, что можно ожидать от ЦЦФ заданной структуры в плане удовлетворения функциональных требований, если он владеет специфическими навыками и приемами поискового проектирования, то для успешного решения сложной проектной задачи ему не понадобится много времени. Типичной же ошибкой малоквалифицированного проектировщика обычно является задание нереальных требований, то есть таких характеристик фильтра, которые не могут быть реализованы ни при каких значениях его параметров в заданной системе прямых и функциональных ограничений.

