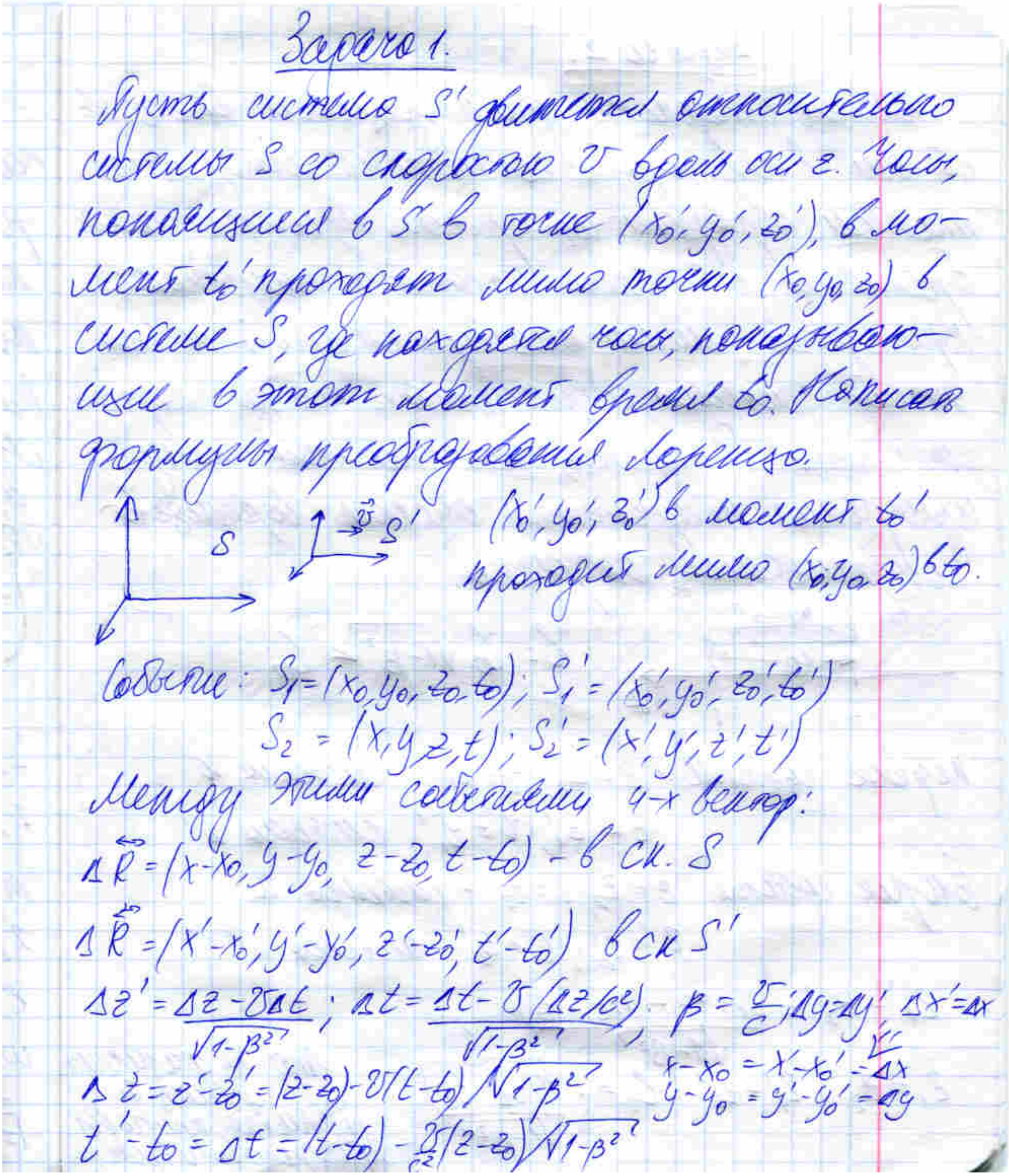
Задача №1

Пусть система S' движется относительно системы S со скоростью V вдоль оси z. Часы, покоящиеся в S' в точке (x_0', y_0', z_0') , в момент t_0 проходят мимо точки (x_0, y_0, z_0) в системе S, где находятся часы, показывающие в этот момент время t_0. Написать формулы преобразования Лоренца для этого случая.



Задача 1.

Пусть система S' движется относительно системы S со скоростью v вдоль оси z. Часы, покоящиеся в S' в точке (x_0', y_0', z_0'), в момент t_0' проходят мимо точки (x_0, y_0, z_0) в системе S, где находятся часы, показывающие в этот момент время t_0. Написать формулы преобразования Лоренца.

S $\vec{v}$ S' (x_0', y_0', z_0') в момент t_0' проходит мимо (x_0, y_0, z_0) в t_0.

Событие: $S_1 = (x_0, y_0, z_0, t_0)$; $S_1' = (x_0', y_0', z_0', t_0')$

$S_2 = (x, y, z, t)$; $S_2' = (x', y', z', t')$

Между этими событиями 4-х вектор:

$\Delta \overleftrightarrow{R} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0, t - t_0)$ – в ск. S

$\Delta \overleftrightarrow{R} = (x' - x_0', y' - y_0', z' - z_0', t' - t_0')$ в ск S'

$\Delta z' = \dfrac{\Delta z - v\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $\Delta t = \dfrac{\Delta t - v(\Delta z/c^2)}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = \dfrac{v}{c}$; $\Delta y = \Delta y'$; $\Delta x' = \Delta x$

$\Delta z = z' - z_0' = (z - z_0) - v(t - t_0) \sqrt{1-\beta^2}$

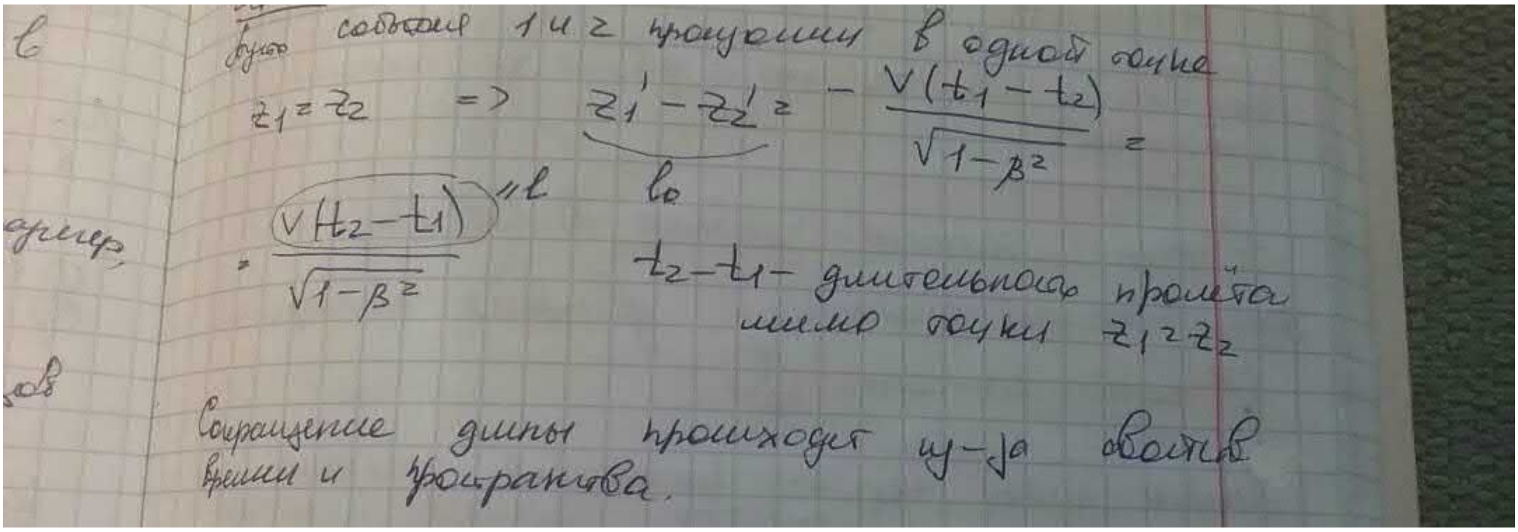
$t' - t_0 = \Delta t = (t - t_0) - \frac{v}{c^2}(z - z_0) \sqrt{1-\beta^2}$

$x - x_0 = x' - x_0' = \Delta x$

$y - y_0 = y' - y_0' = \Delta y$

Задача №2

Длину стержня, движущегося вдоль своей оси в некоторой системе отсчета, можно находить таким образом: измерять промежуток времени, в течение которого стержень проходит мимо фиксированной точки этой системы, и умножать его на скорость стержня. Показать, что при таком методе измерения получается обычное Лоренцево сокращение длины отрезка.



Пусть события 1 и 2 произошли в одной точке

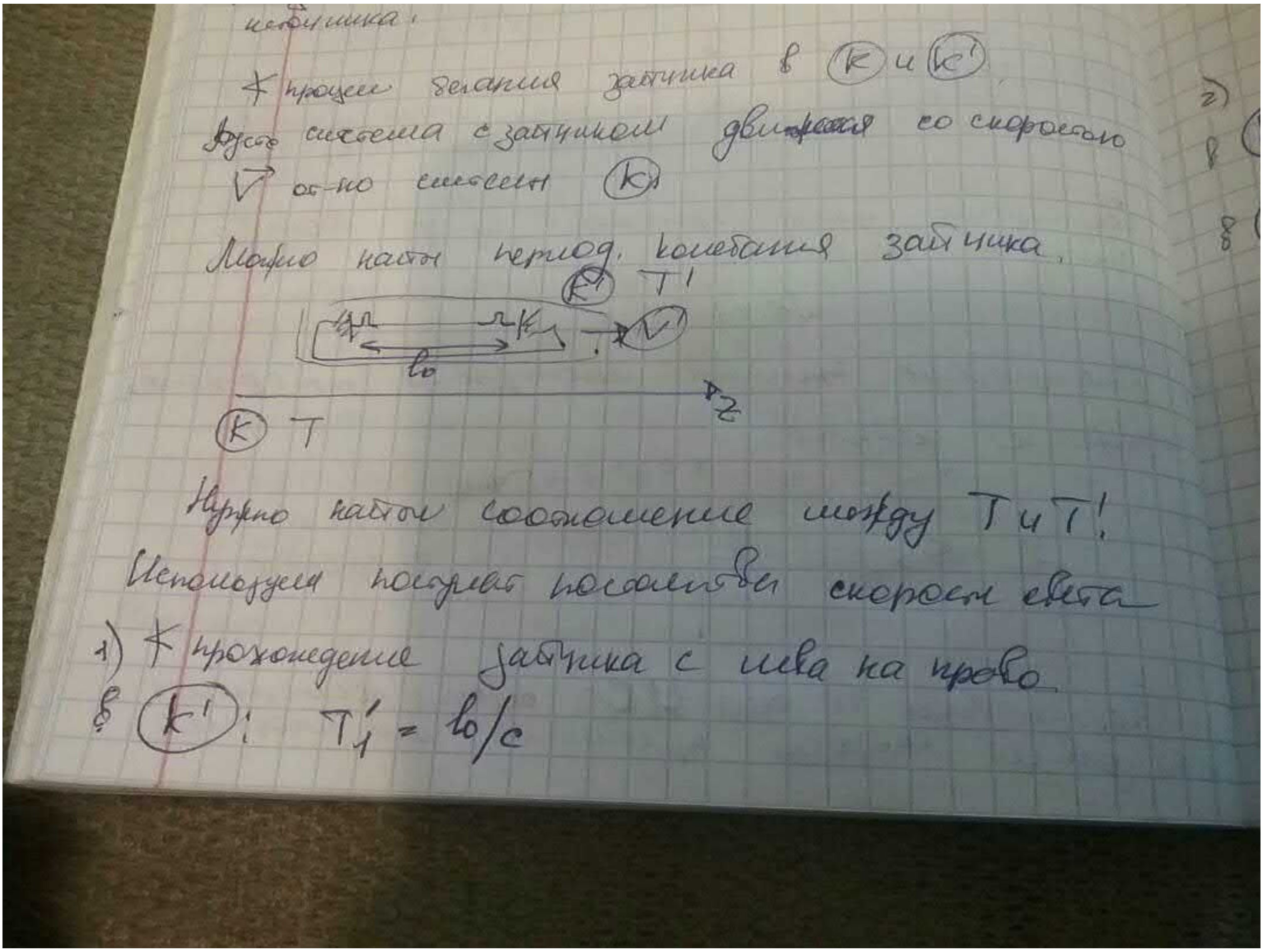
$$z_1 = z_2 \Rightarrow \underbrace{z_1' - z_2'}_{l_0} = -\frac{v(t_1 - t_2)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad v(t_2 - t_1) = l$$

$t_2 - t_1$ – длительность пролёта мимо точки $z_1 = z_2$

Сокращение длины происходит из-за свойств времени и пространства.

Задача №3

Пусть для измерения времени используется периодический процесс отражения светового «зайчика» попеременно от двух зеркал, укрепленных на концах стержня длиной l. Один период – это время движения «зайчика» от одного зеркала до другого и обратно. Световые часы неподвижны в системе S' и ориентированы параллельно направлению движения. Показать, что интервал собственного времени $\mathrm{d}\tau$ выражается через промежуток времени $\mathrm{d}t$ в системе S формулой $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$


...ника.

* процесс деления зайчика в K и K'.

Пусть система с зайчиком движется со скоростью $\vec{V}$ от-но систем K.

Можно найти период колебания зайчика.

K' T'

l_0 $\vec{V}$ z

K T

Нужно найти соотношение между T и T'!

Используем постулат постоянства скорости света

1) * прохождение зайчика с лева на право

в K': $T_1' = l_0/c$

(K): $T_1 =$

$\xrightarrow{c}$ $\xrightarrow{V}$

Ω догонит за время T_1

Световой импульс прошёл путь cT_1

Зеркало прошло путь VT_1, но оно отстояло от датчика на расстоянии $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$.

$$cT_1 = l_0\sqrt{1-\beta^2} + VT_1$$

$$T_1 = \frac{l_0\sqrt{1-\beta^2}}{c-V}$$

г) ∤ проход справа налево.

(K'): $T_2' = \dfrac{l_0}{c}$

(K): T_2 $\xrightarrow{V}$ $\xleftarrow{c}$

Датчик и зеркало встречаются.

Зеркало пройдет путь VT_2

Датчик пройдет путь VT_2.

Но они вместе прошли расстояние $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$

$$l_0\sqrt{1-\beta^2} = cT_2 + VT_2 \Rightarrow T_2 = \frac{l_0\sqrt{1-\beta^2}}{c+V}$$

$$T' = T_1' + T_2' = \frac{2l_0}{c}$$

$$T = T_1 + T_2 = l_0\sqrt{1-\beta^2}\left(\frac{1}{c-V} + \frac{1}{c+V}\right) = \frac{l_0\sqrt{1-\beta^2}\,2c}{c^2-V^2}$$

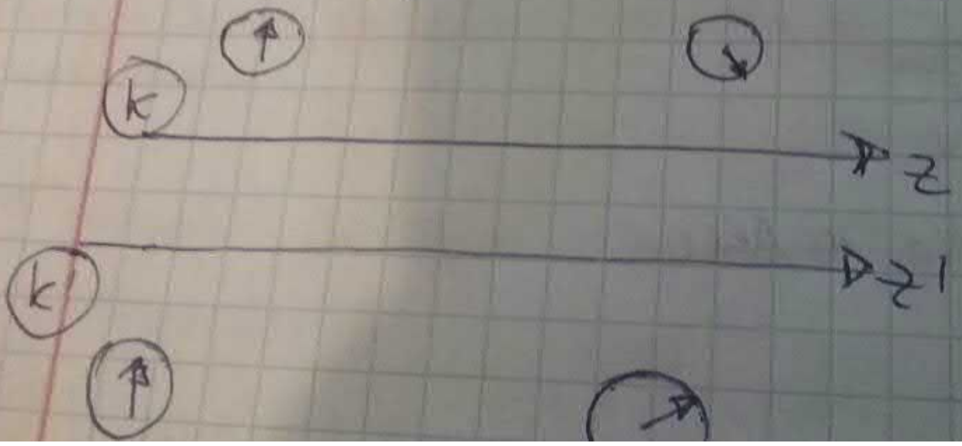
$$= \frac{2l_0}{c\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{1-\beta^2} < 1.$$

=> период колебания зайчика связанной с зеркалом, чем период колебания от-но неподвижной системы.

$$d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}$$

собственное время – оно самое медленное



Пусть события 1 и 2 произошли в одной точке

$$z_1 = z_2 \Rightarrow \underbrace{z_1' - z_2'}_{l_0} = -\frac{v(t_1-t_2)}{\sqrt{1-\beta^2}} =$$

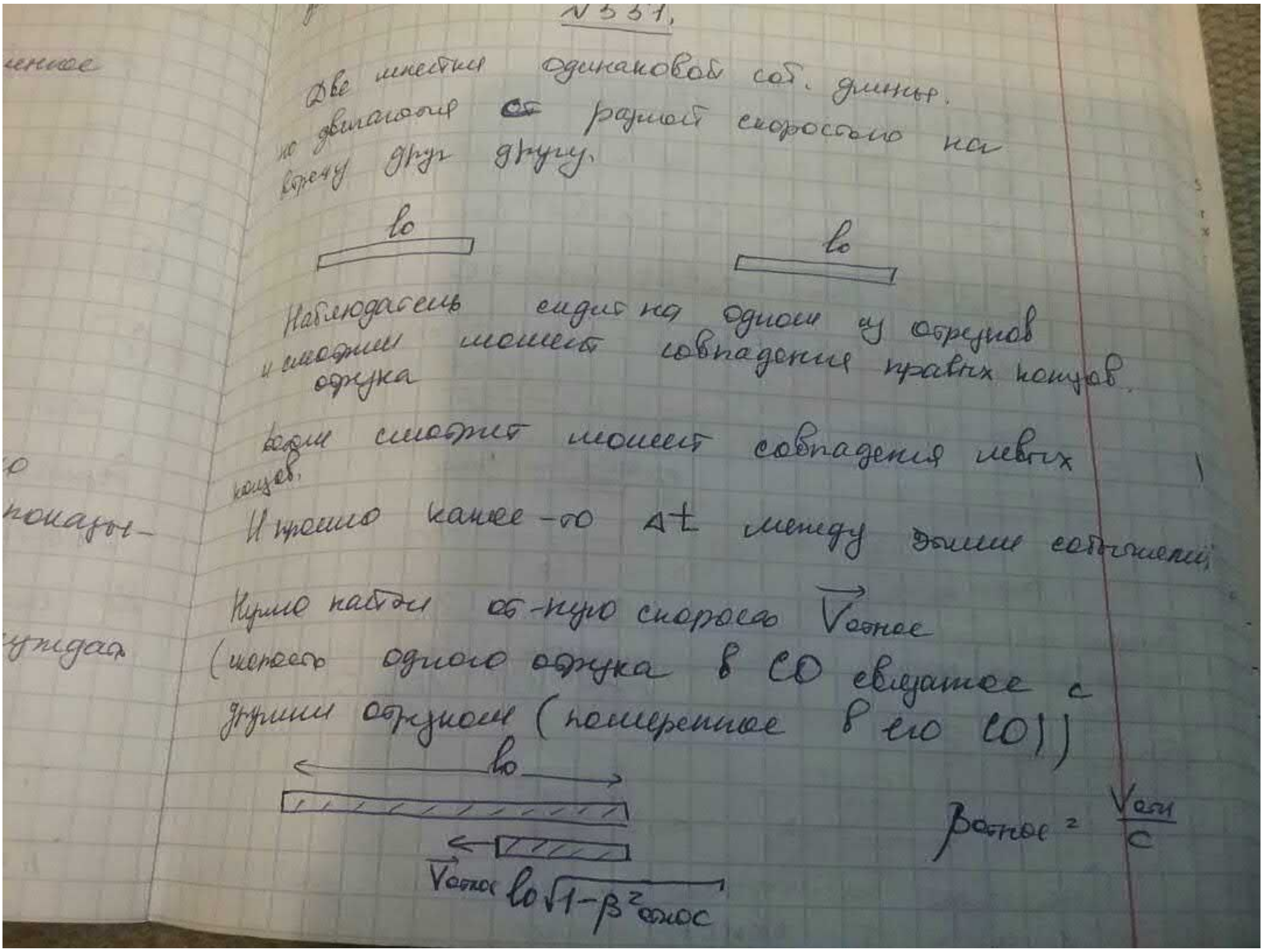
$$= \frac{v(t_2-t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad v(t_2-t_1) = l$$

$t_2 - t_1$ – длительность пролёта мимо точки $z_1 = z_2$

Сокращение длины происходит из-за свойств времени и пространства.

Задача №4

Два масштаба, каждый из которых имеет длину покоя l_0 , равномерно движутся навстречу друг другу параллельно общей оси x. Наблюдатель, связанный с одним из них, заметил, что между совпадениями левых и правых концов масштабов прошло время Δt. Какова относительная скорость масштабов?


№ 331.

Две линейки одинаковой соб. длины движутся с равной скоростью навстречу друг другу.

l_0 l_0

Наблюдатель сидит на одном из отрезков и смотрит момент совпадения правых концов отрезка.

Затем смотрит момент совпадения левых концов.

И прошло какое-то Δt между этими событиями.

Нужно найти отн-ную скорость $\vec{V}_{относ}$ (одного отрезка в СО связанное с другим отрезком (измеренное в его СО))

l_0

$\vec{V}_{относ}$ $l_0\sqrt{1-\beta^2_{относ}}$

$\beta_{относ} = \frac{V_{отн}}{c}$

$$\Delta t \cdot V_{относ} = l_0 - l_0\sqrt{1-\beta^2_{относ}}$$

$$l_0\sqrt{1-\beta^2_{относ}} = l_0 - \Delta t \cdot V_{относ}$$

$$l_0^2\left(1-\frac{V^2_{относ}}{c^2}\right) = l_0^2 - 2\Delta t l_0 V_{относ} + \Delta t^2 V^2_{относ}$$

$$l_0^2 c^2 - l_0^2 V^2_{относ} = c^2 l_0^2 - 2\Delta t l_0 c^2 V_{относ} + c^2\Delta t^2 V^2_{относ}$$

$$(c^2\Delta t^2 + l_0^2)V^2_{относ} - 2\Delta t l_0 c^2 V_{относ} = 0$$

$$V_{относ}\left((c^2\Delta t + l_0^2)V_{относ} - 2\Delta t l_0 c^2\right) = 0$$

$V_{относ} = 0$ или $\quad V_{относ} = \dfrac{2\Delta t l_0 c^2}{c^2\Delta t^2 + l_0^2}$

① l_0

$\vec{V}_{относ}$ $l_0\sqrt{1-\beta^2_{относ}}$ ②

Сначала совпадут правые концы, потом левые

(① - K', ② - K)

① $l_0\sqrt{1-\beta^2_{относ}}$ $\vec{V}_{относ}$

② l_0

Сначала совпадут левые, потом правые концы

(② - K', ① - K)

$l_0\sqrt{1-\beta_1^2}$ $\qquad$ $l_0\sqrt{1-\beta_2^2}$

Относительно наблюдателя, связанного с лабораторной СО концы совпадут одновременно

Задача №5

Доказать формулу $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-v'^2/c^2}\cdot\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\left(\vec{v}'\cdot\vec{V}\right)/c^2}$, в которой $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ – скорости частицы в системах S и S', $\vec{v} = V\vec{z}_0$ – скорость S' относительно S.

...щий случай. (виТ)

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$v'^2 = v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2$$

$$1 - \frac{v_x^2}{c^2} - \frac{v_y^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{c^2} = 1 - \frac{(v_x'+V)^2}{c^2\left(1+\frac{v_x'V}{c^2}\right)^2} - \frac{(v_y')^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{c^2\left(1+\frac{v_x'V}{c^2}\right)^2} - \frac{(v_z')^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{c^2\left(1+\frac{v_x'V}{c^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{c^2\left(1+v_x'V/c^2\right)^2 - (v_x'+V)^2 - (v_y')^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right) - (v_z')^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{c^2\left(1+\frac{v_x'V}{c^2}\right)^2} = \frac{c^2 + 2v_x'V + \frac{(v_x'V)^2}{c^2} - (v_x')^2 - 2v_x'V - V^2 - (v_y')^2 + \frac{v_y'^2V^2}{c^2} - (v_z')^2 + \frac{v_z'^2V^2}{c^2}}{c^2\left(1+\frac{v_x'V}{c^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{c^2 - V^2 - \left((v_x')^2 + (v_y')^2 + (v_z')^2\right) + \frac{V^2}{c^2}\left(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2\right)}{c^2\left(1+\frac{v_x'V}{c^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{c^2 - V^2 - (v')^2 + \frac{V^2}{c^2}(v')^2}{c^2\left(1 + \frac{v_x' V}{c^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - \frac{(v')^2}{c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{v_x' V}{c^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{(v')^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{v_x' V}{c^2}\right)^2} =$$

Но скорость $\vec{V}$ направлена по оси x $\Rightarrow$

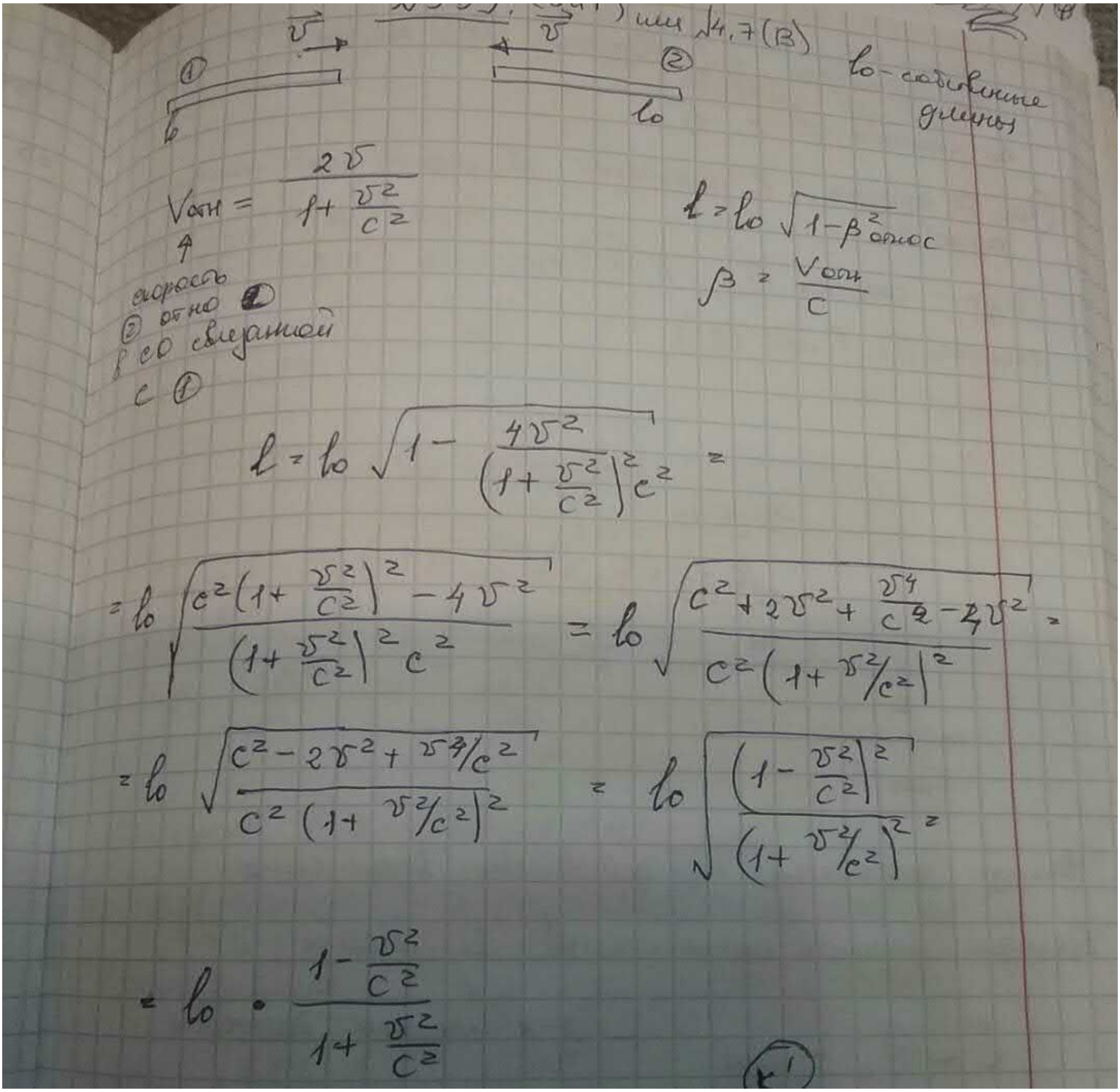
$$v_x' V = (\vec{v}', \vec{V})$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{(v')^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{(\vec{v}', \vec{V})}{c^2}\right)^2}$$

Изначальное выражение возвели в квадрат и доказали для него в общем случае.

Задача №6

Два масштаба, каждый из которых имеет длину покоя l_0, движутся навстречу друг другу с равными скоростями v относительно некоторой системы отсчета. Какова длина l каждого из масштабов, измеренная в системе отсчета, связанной с другим масштабом?



или №4.7(В)

l_0 – собственные длины

$$V_{отн} = \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$$

скорость ② отно ① в СО связанной с ①

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2_{относ}}$$

$$\beta = \frac{V_{отн}}{c}$$

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{4v^2}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2 c^2}} =$$

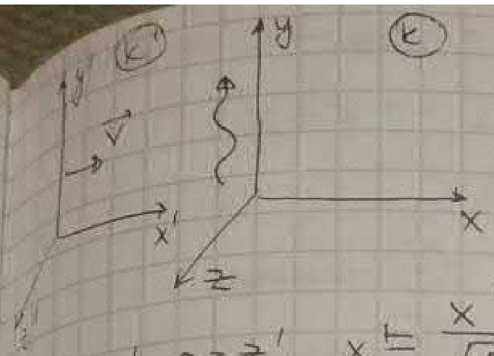
$$= l_0\sqrt{\frac{c^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2-4v^2}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2c^2}} = l_0\sqrt{\frac{c^2+2v^2+\frac{v^4}{c^2}-4v^2}{c^2\left(1+v^2/c^2\right)^2}} =$$

$$= l_0\sqrt{\frac{c^2-2v^2+v^4/c^2}{c^2\left(1+v^2/c^2\right)^2}} = l_0\sqrt{\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}{\left(1+v^2/c^2\right)^2}} =$$

$$= l_0\cdot\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}$$

Задача №7

Найти частоту ω световой волны, наблюдаемую при поперечном эффекте Доплера (направление распространения света перпендикулярно направлению движения источника в системе, связанной с приемником света). Каково направление распространения рассматриваемой волны в системе, связанной с источником?



(k) – приёмник

(k') – источник

$\vec V$ – скорость источника относительно приёмника

$$y=y',\quad z=z',\quad x=\frac{x'+V_x t'}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\quad t=\frac{t'+\frac{x'V_x}{c^2}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

Световая волна: $f(\vec r,t)=A_0\cos(\omega t-\vec k\vec r)$ Это следует из инвариантности фазы

В (k): $f(\vec r,t)=A_0\cos(\omega t-k_y y-k_z z)$

Запись остаётся аналогичной и в других ИСО

Тогда в (k'): $$f=A_0\cos\left(\omega\frac{t'+\frac{x'V_x}{c^2}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-k_y y'-k_z z'\right)=$$

$$=A_0\cos\left(\frac{\omega t'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}+\frac{\omega V_x}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}}x'-k_y y'-k_z z'\right)=$$

$$=A_0\cos(\omega' t'-k_x' x'-k_y' y'-k_z' z')$$

$$\Rightarrow \omega'=\frac{\omega}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\quad k_x'=-\frac{\omega V_x}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}},\quad k_y'=k_y,\quad k_z'=k_z$$

Тогда $\omega=\omega'\sqrt{1-V^2/c^2}$, где ω' – частота света в системе отсчёта связанной с источником (т.е. там где источник покоится)

$$k_y'=k_y=\frac{\omega}{c}=\frac{\omega'\sqrt{1-V^2/c^2}}{c}$$

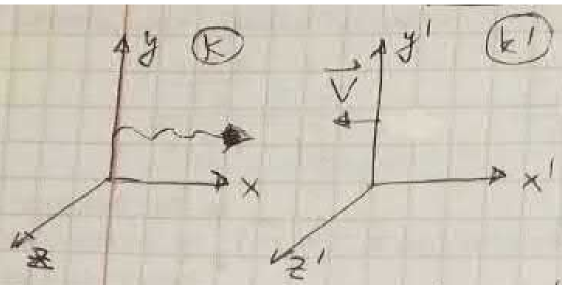
$$k_z'=k_z=0$$

Угол между направлением $\vec k'$ и направлением движения источника $\cos\alpha=\frac{k_x}{|\vec k'|}$

$$\cos\alpha=-\frac{\omega V_x}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}}\cdot\frac{c}{\omega'}=-\frac{\omega}{\omega'}\cdot\frac{V_x}{c\sqrt{1-V^2/c^2}}=-\frac{V_x}{c}$$

Задача №8

Длина волны света, излучаемого некоторым источником в той системе, в которой источник покоится, равна λ_0 . Какую длину волны λ зарегистрируют:
а) наблюдатель, приближающийся со скоростью V к источнику, и
б) наблюдатель, удаляющийся с такой же скоростью от источника?



(k) - источник
(k') - приемник (здесь наблюдатель)

а) $z = z'$, $y = y'$, $x = \dfrac{x' - V_x t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$, $t = \dfrac{t' - \frac{V_x x'}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$

Для простоты будем считать, что $\vec{k}$ направлено вдоль x

$f = A_0 \cos(\omega t - k_x x)$ – в (k)

$$f = A_0 \cos\left(\omega \frac{t' - x' V_x/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - k_x \frac{x' - V_x t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\right) =$$

$$= A_0 \cos\left(\frac{\omega + k_x V_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} t' + \frac{-k_x - \frac{V_x \omega}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} x'\right)$$

$$\omega' = \frac{\omega + k_x V_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$|\vec k| = k_x = \frac{\omega}{c}$$

$$\omega' = \frac{\omega - \vec k \vec V}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$ общее

$$k' c = \frac{k c + k V_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

а) $\vec k$, $\vec V$

$$\omega' = \frac{\omega \pm k V}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda'} c = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{c + V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

б) $\vec k$, V

$$\lambda' = \lambda_0 \frac{\sqrt{1 - V/c}}{\sqrt{1 + V/c}} < \lambda_0$$

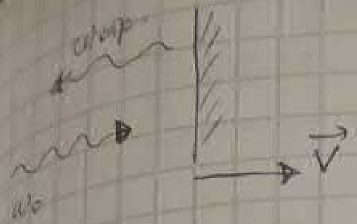
$V = V_x$

б) Здесь нужно в а) вместо $-V_x$ подставить V_x

$$\Rightarrow \lambda' = \lambda_0 \frac{\sqrt{1 + V/c}}{\sqrt{1 - V/c}} > \lambda_0$$

Задача №9

Монохроматичный свет частоты ω_0 падает нормально к поверхности плоского зеркала, движущегося равномерно со скоростью $\vec{v}$ в направлении распространения падающего света. Определить частоту отражённого света



Определить частоту сигнала, отражённого от зеркала? $\omega_{отр}$ — ?

Переходим в СО связанную с зеркалом — K'

В ней $\omega' = \dfrac{\omega_0 - kV}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \omega_0 \dfrac{1 - \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} =$

$= \omega_0 \sqrt{\dfrac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}}$

В K' волна отразится с той же частотой.

$$\omega'_{отр} = \omega' = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + V/c}}$$

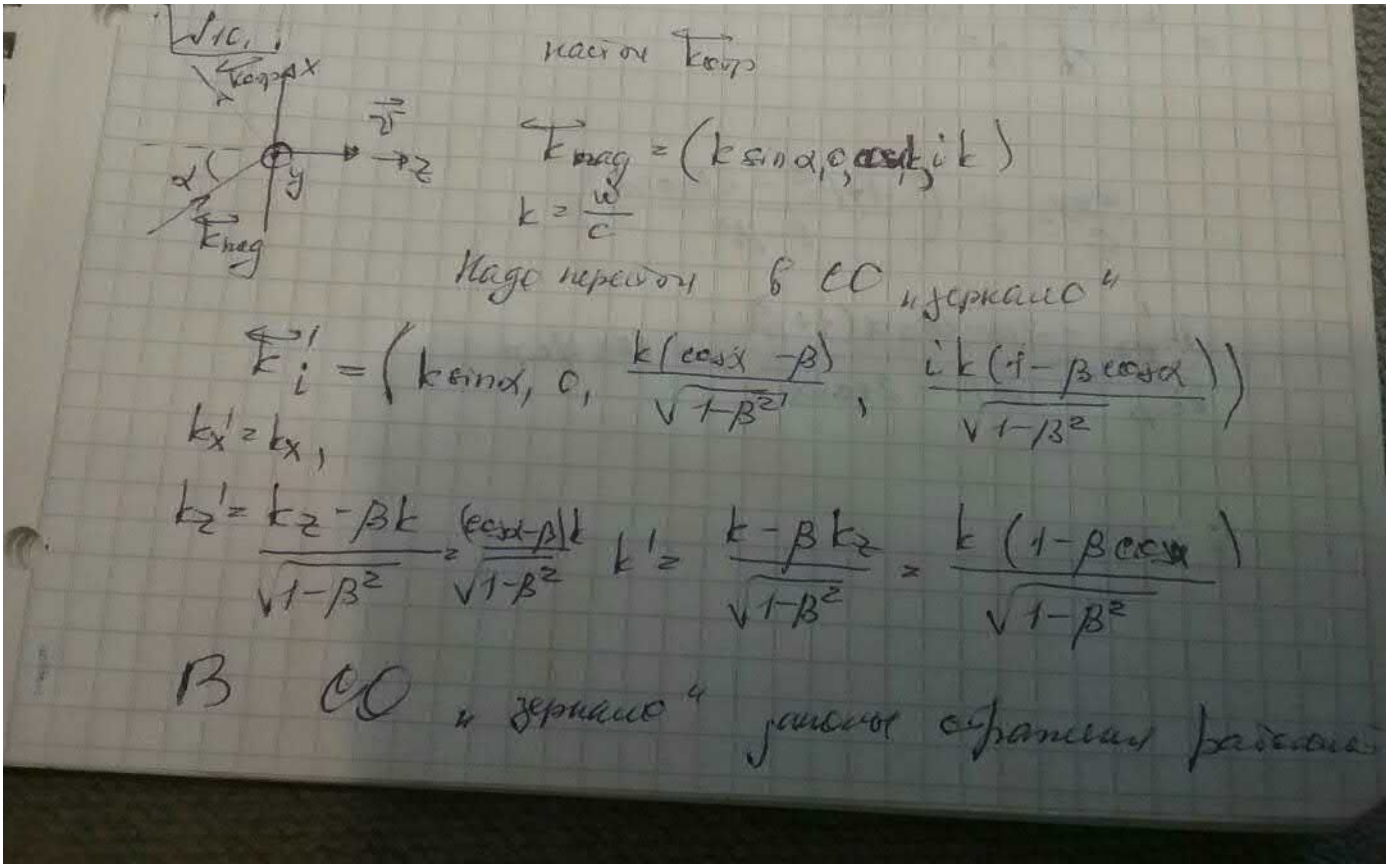
В K СО: $\omega_{отр} = \omega_0 \dfrac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}$

Если бы было так:

, то $\omega_{отр} = \omega_0 \dfrac{1 + \frac{V}{c}}{1 - V/c}$

Задача №10

На плоское зеркало падает свет под углом α. Зеркало движется равномерно со скоростью $\vec{v}$ в направлении нормали к его поверхности в сторону распространения падающего света. Определить угол отражения.



найти $\vec{k}_{отр}$

$\vec{k}_{пад} = (k\sin\alpha, 0, k\cos\alpha, ik)$

$k = \frac{\omega}{c}$

Надо перейти в СО „зеркало“

$$\vec{k}'_i = \left(k\sin\alpha,\ 0,\ \frac{k(\cos\alpha - \beta)}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \frac{ik(1-\beta\cos\alpha)}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$k_x' = k_x,$

$$k_z' = \frac{k_z - \beta k}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(\cos\alpha-\beta)k}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad k' = \frac{k - \beta k_z}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{k(1-\beta\cos\alpha)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

В СО „зеркало“ законы отражения работают

$$\overleftrightarrow{k}'_{отр} = \left(k\sin\alpha,\ 0,\ -k\frac{\cos\alpha-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},\ ik\frac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

z отр будет равна − z пад. Энергия сохраняется

Надо перейти от $\overleftrightarrow{k}'_{отр}$ к $\overleftrightarrow{k}_{отр}$

$$k = \frac{k' + \beta k_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad k_x = k'_x$$

$$k_z = k'\frac{\cos\alpha+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$k'_{отрx} = k_{отрx} \qquad k_{отрz} = \frac{k'_{отрz} + \beta k'_{отр}}{\sqrt{1-\beta^2}} =$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}\left(-k\cos\alpha + k\beta + k\beta - k\beta^2\cos\alpha\right) =$$

$$= \frac{k}{1-\beta^2}\left(-\cos\alpha+\beta-\beta^2\cos\alpha+\beta\right) = \frac{k\left(2\beta - \cos\alpha(1+\beta^2)\right)}{1-\beta^2}$$

$$k_{отр} = \frac{k'_{отр}+\beta k'_{отрz}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{k}{1-\beta^2}\left\{1-\beta\cos\alpha+\beta(-\cos\alpha+\beta)\right\} =$$

$$= \frac{k(1+\beta^2-2\beta\cos\alpha)}{1-\beta^2}$$

$$\frac{\omega_{отр}}{c} = \frac{\omega}{c}\left(\frac{1+\beta^2-2\beta\cos\alpha}{1-\beta^2}\right)$$

$$\frac{k'_{отрz}}{k_{отр}} = \frac{2\beta-\cos\alpha(1+\beta^2)}{1+\beta^2-2\cos\alpha} = \cos\alpha_{отр}$$

Задача №11

Масса покоя частицы m. Выразить ее скорость v через: 1) полную энергию W, 2) кинетическую энергию T и 3) импульс p

Дано: m, а) W, б) T, в) p Найти: v

а) $$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$W^2 - \frac{W^2 v^2}{c^2} = m^2 c^4$$

$$W^2 - m^2 c^4 = \frac{W^2 v^2}{c^2}$$

$$c^2 - \frac{m^2 c^6}{W^2} = v^2 \rightarrow v = c\sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{W^2}}$$

б) $$W = T + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$v = c\sqrt{1 - \frac{c^4 m^2}{(T + mc^2)^2}} = \frac{c\sqrt{T^2 + 2mc^2 T}}{T + mc^2}$$

в) $$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad p^2 - \frac{p^2 v^2}{c^2} = m^2 v^2$$

$$p^2 = v^2\left(m^2 + \frac{p^2}{c^2}\right)$$

$$v = \frac{pc}{\sqrt{c^2 m^2 + p^2}}$$

Задача №12

Неподвижный π-мезон распадается на μ-мезон и нейтрино ($m = 0$). Зная массы π- и μ-мезонов, вычислить кинетическую энергию π-мезона.

$\pi \to \mu + \nu$

Дано: m_π, m_μ, $m_\nu = 0$

Найти: T_μ – ?

ЗСЭ: $m_\pi c^2 = W_\mu + p_\nu c$

$\mathcal{E}_{кин} = T = W - mc^2$

ЗСИ: $0 = \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu \Rightarrow p_\mu = p_\nu$

$$W^2 = p_\mu^2 c^2 + m_\mu^2 c^4$$

$$(m_\pi c^2)^2 - 2 m_\pi c^2 W_\mu + W_\mu^2 = p_\mu^2 c^2 = W_\mu^2 - m_\mu^2 c^4$$

$$W_\mu = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)c^4}{2 m_\pi c^2} = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)c^2}{2 m_\pi}$$

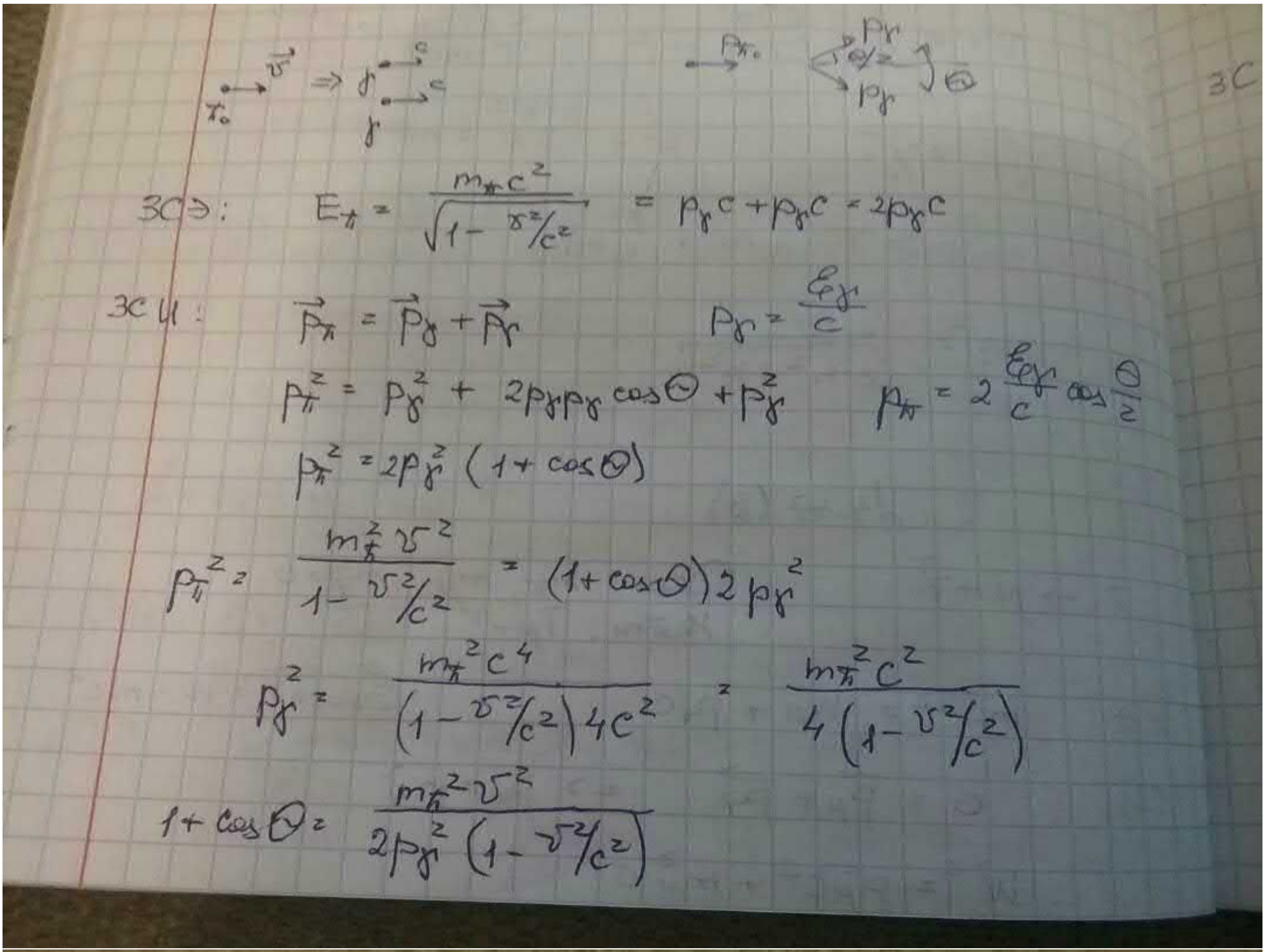
$$W_\mu = T + m_\mu c^2$$

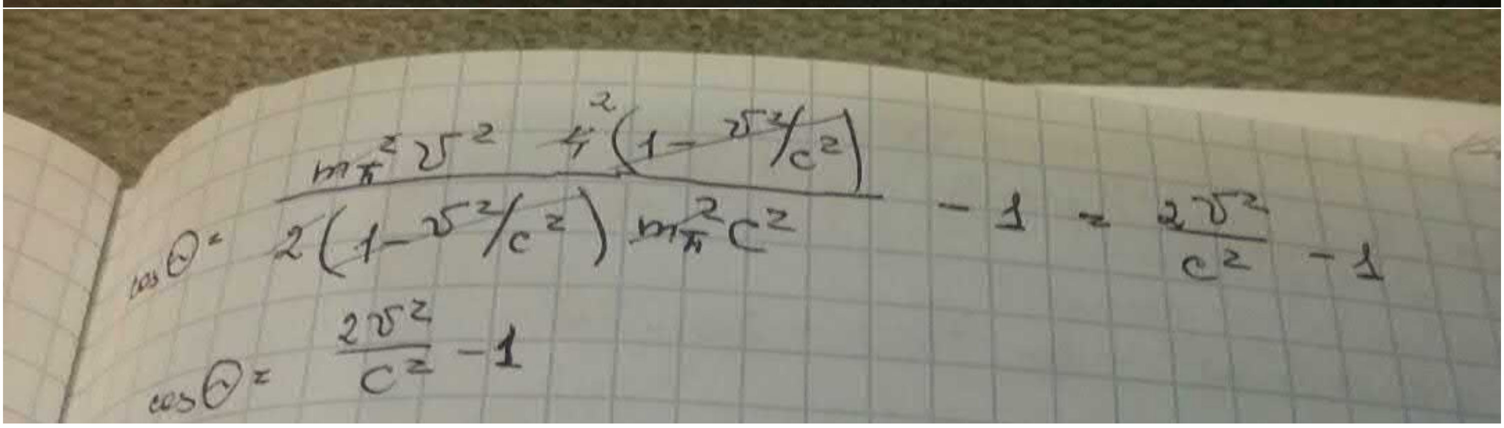
$$T = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)c^2}{2 m_\pi} - m_\mu c^2 = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2 - 2 m_\pi m_\mu)c^2}{2 m_\pi} =$$

$$= \frac{(m_\pi - m_\mu)^2 c^2}{2 m_\pi}$$

Задача №13

π_0-мезон с массой покоя m , движущийся со скоростью v, распадается на два одинаковых γ-кванта. Определить угол разлета γ-квантов.





Задача №14

Возбужденное атомное ядро переходит в основное состояние путем испускания γ-кванта. Масса ядра в основном состоянии m. Энергия возбуждения ΔW. Определить частоту γ-кванта.

№4.53.(В)

(2)

испытывает отдачу после испускания γ-кванта

ЗСЭ: $$mc^2+\Delta W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \hbar\omega$$

ЗСИ: $$0=\vec p_A+\vec p_\gamma \Rightarrow \vec p_A=-\vec p_\gamma \Rightarrow |\vec p_A|=|\vec p_\gamma|$$

$$|\vec p_A| = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = |\vec p_\gamma| = \hbar k = \hbar\frac{\omega}{c}$$

$$\frac{(mv)^2}{1-v^2/c^2} = \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2$$

$$m^2v^2 + \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2$$

$$v^2 = \frac{\hbar^2\omega^2}{c^2\left(m^2+\frac{\hbar^2\omega^2}{c^4}\right)} = \frac{\hbar^2\omega^2}{m^2c^2+\frac{\hbar^2\omega^2}{c^2}}$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{\hbar^2\omega^2}{m^2c^4+\hbar^2\omega^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m^2c^4+\hbar^2\omega^2-\hbar^2\omega^2}{m^2c^4+\hbar^2\omega^2}}} = \sqrt{1+\left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right)^2}$$

$$mc^2+\Delta W=\sqrt{m^2c^4+\hbar^2\omega^2}+\hbar\omega$$

$$m^2c^4+\Delta W^2+\hbar^2\omega^2-2mc^2\hbar\omega-2\Delta W\hbar\omega+2mc^2\Delta W=$$

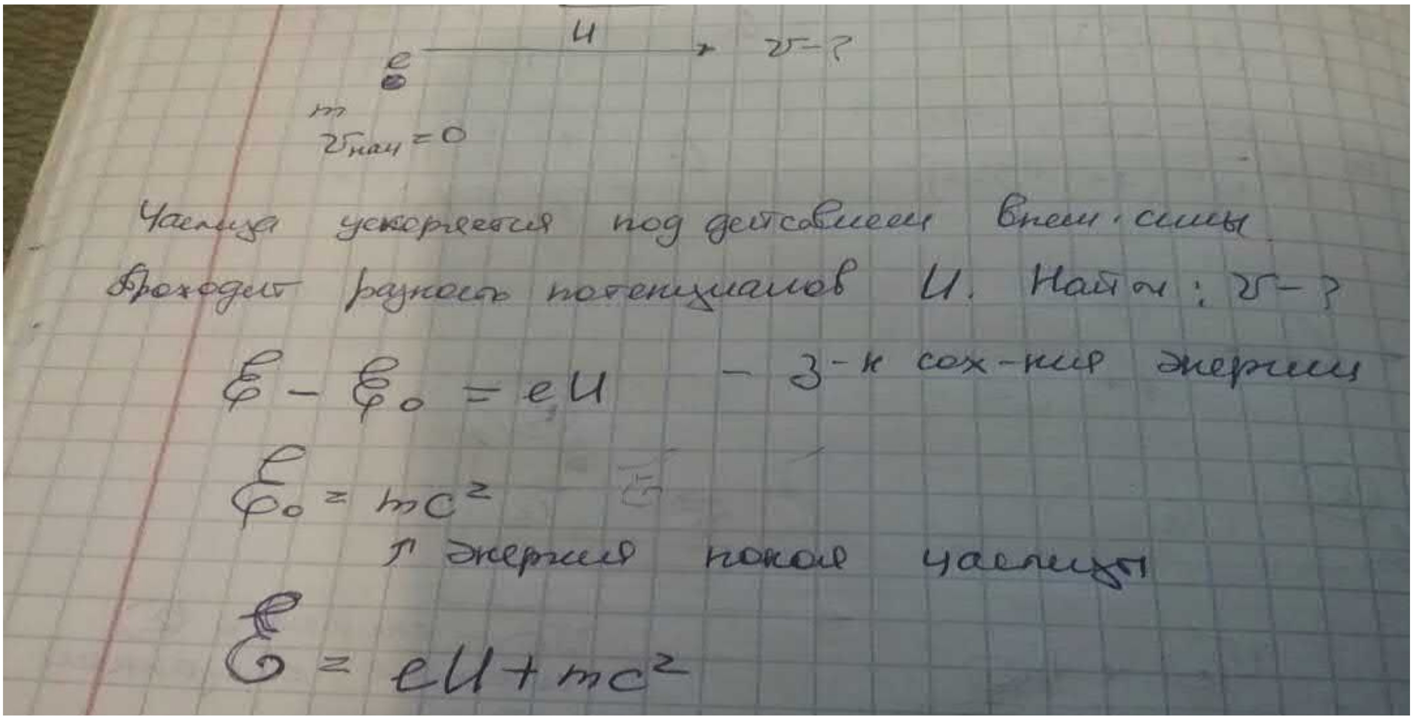
$$=m^2c^4+\hbar^2\omega^2$$

$$\Delta W^2+2mc^2\Delta W=2\hbar\omega(mc^2+\Delta W)$$

$$\omega=\frac{\Delta W}{2\hbar}\,\frac{(\Delta W+2mc^2)}{\Delta W+mc^2}$$

Задача №15

Найти скорость v частицы с массой m и зарядом e, прошедшей разность потенциалов V (начальная скорость равна нулю).



e, m, $v_{нач} = 0$ $\xrightarrow{U}$ $v - ?$

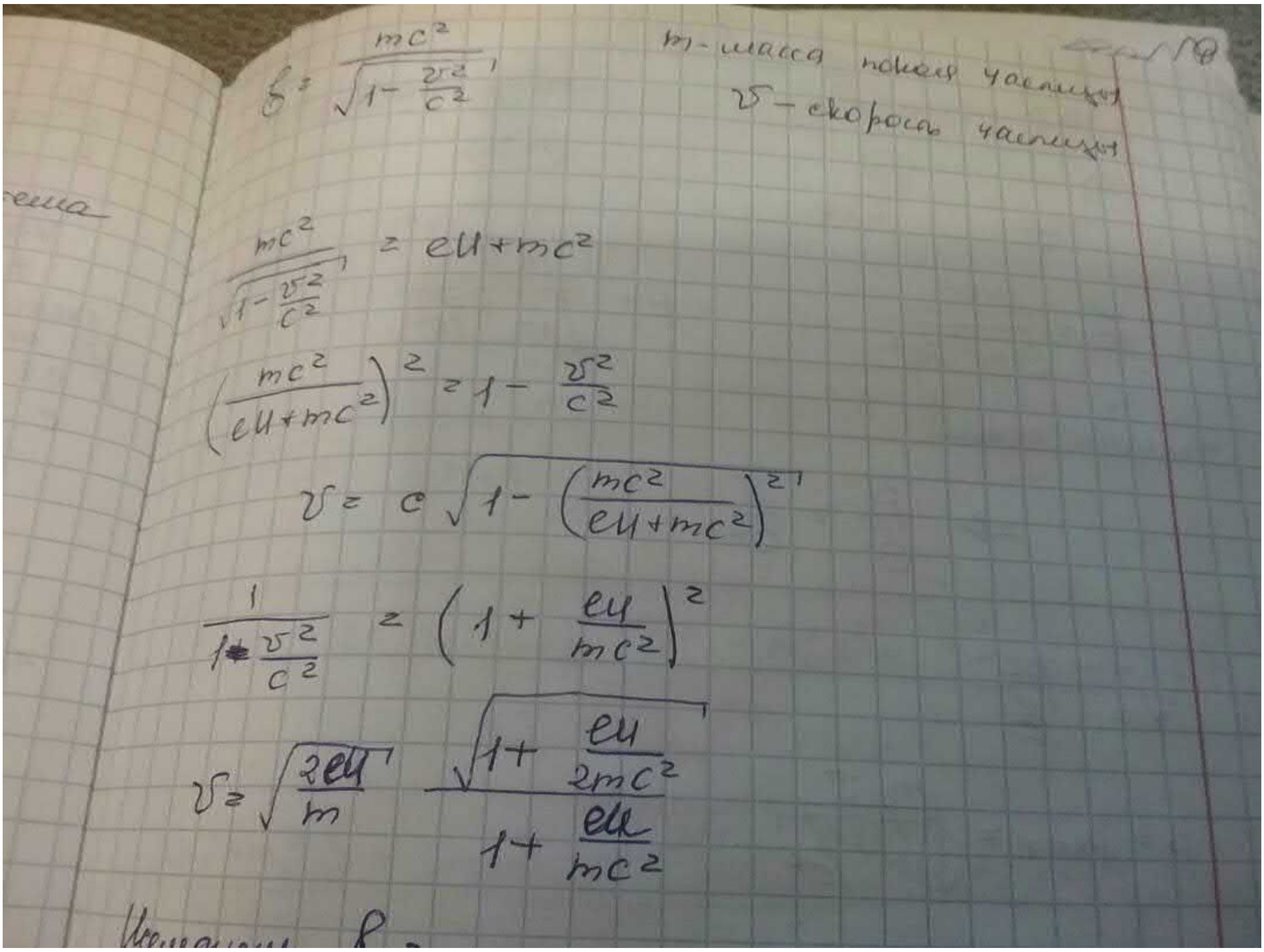
Частица ускоряется под действием внеш. силы. Проходит разность потенциалов U. Найти: $v - ?$

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = eU \quad \text{— З-н сох-ния энергии}$$

$$\mathcal{E}_0 = mc^2$$

↑ энергия покоя частицы

$$\mathcal{E} = eU + mc^2$$



$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

m – масса покоя частицы

v – скорость частицы

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = eU + mc^2$$

$$\left(\frac{mc^2}{eU+mc^2}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{eU+mc^2}\right)^2}$$

$$\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \left(1+\frac{eU}{mc^2}\right)^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}\,\frac{\sqrt{1+\frac{eU}{2mc^2}}}{1+\frac{eU}{mc^2}}$$

Задача №16

Частица с массой m_{10} и скоростью v сталкивается с покоящейся частицей массы m_{20} и поглощается ею. Найти массу m_0 и скорость V образовавшейся частицы.

№642 (БиТ)

До столкновения

$m_1 \quad \vec{v}$

$m_2 \quad v = 0$

После столкновения

$m \quad \vec{V}$

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

m – масса покоя

$$\Rightarrow \frac{p}{\mathcal{E}} = \frac{v}{c^2}$$

1) $$V = \frac{pc^2}{\mathcal{E}}$$

$$p = p_{нач} = \frac{m_1 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{нач} = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_2 c^2$$

$$V = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

2) $$p = \frac{mV}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{m_1 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$m = \frac{m_1 v \sqrt{1 - V^2/c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}\; V} =$$

$$= \frac{m_1 v \sqrt{1 - \frac{m_1^2 v^2}{c^2\left(m_1+m_2\sqrt{1-v^2/c^2}\right)^2}}\;\left(m_1+m_2\sqrt{1-v^2/c^2}\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}\quad m_1 v}$$

$$= \frac{\sqrt{c^2 m_1^2 + 2c^2 m_1 m_2\sqrt{1-v^2/c^2} + m_2^2 c^2 - v^2 m_2^2 - m_1^2 v^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}\; c} =$$

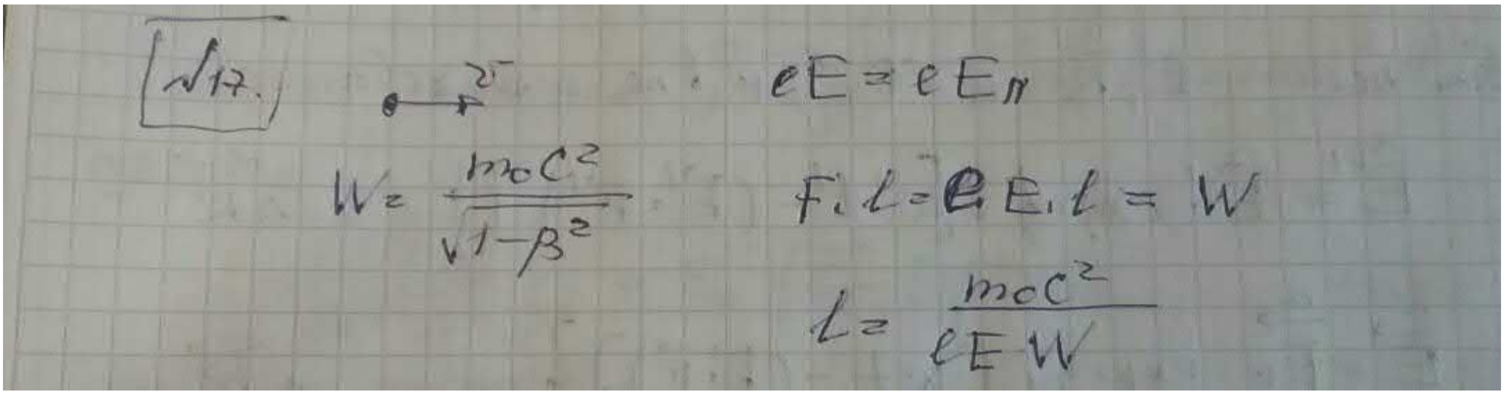
$$= \frac{\sqrt{(m_1^2+m_2^2) + 2m_1m_2\sqrt{1-v^2/c^2} - \frac{v^2}{c^2}(m_1^2+m_2^2)}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(m_1^2+m_2^2)\left(1-v^2/c^2\right) + 2m_1m_2\sqrt{1-v^2/c^2}}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} =$$

$$= \sqrt{m_1^2+m_2^2 + 2m_1m_2\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

Задача №17

Найти пробег l релятивистской заряженной частицы с зарядом e, массой m и начальной энергией W в тормозящем однородном электрическом поле $\vec{E}$, параллельном скорости частицы



№17. $\vec{v}$

$eE = eE_{\parallel}$

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$F \cdot l = eE \cdot l = W$$

$$l = \frac{m_0 c^2}{eEW}$$

Задача №18

Определить движение релятивистской заряженной частицы (m, q) в однородном постоянном электрическом поле. Начальная скорость частицы равна нулю.

$$mc^2 - W = -eEL$$

$$L = \frac{W - mc^2}{eE}$$

№18

Начальная скорость частицы равна нулю

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} \qquad \text{пусть } \vec{E} = E\cdot\vec{x}_0$$

$$\frac{dp_x}{dt} = qE \qquad \int_0^p dp_x = \int_0^t qE\,dt$$

$$p_x = qE\cdot t$$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{W}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$W^2 = (mc^2)^2 + p^2c^2$$

$$W = \sqrt{(mc^2)^2 + (qEt\cdot c)^2}$$

$$\frac{\sqrt{(mc^2)^2 + (qEtc)^2}}{c^2}\,\frac{dx}{dt} = qEt$$

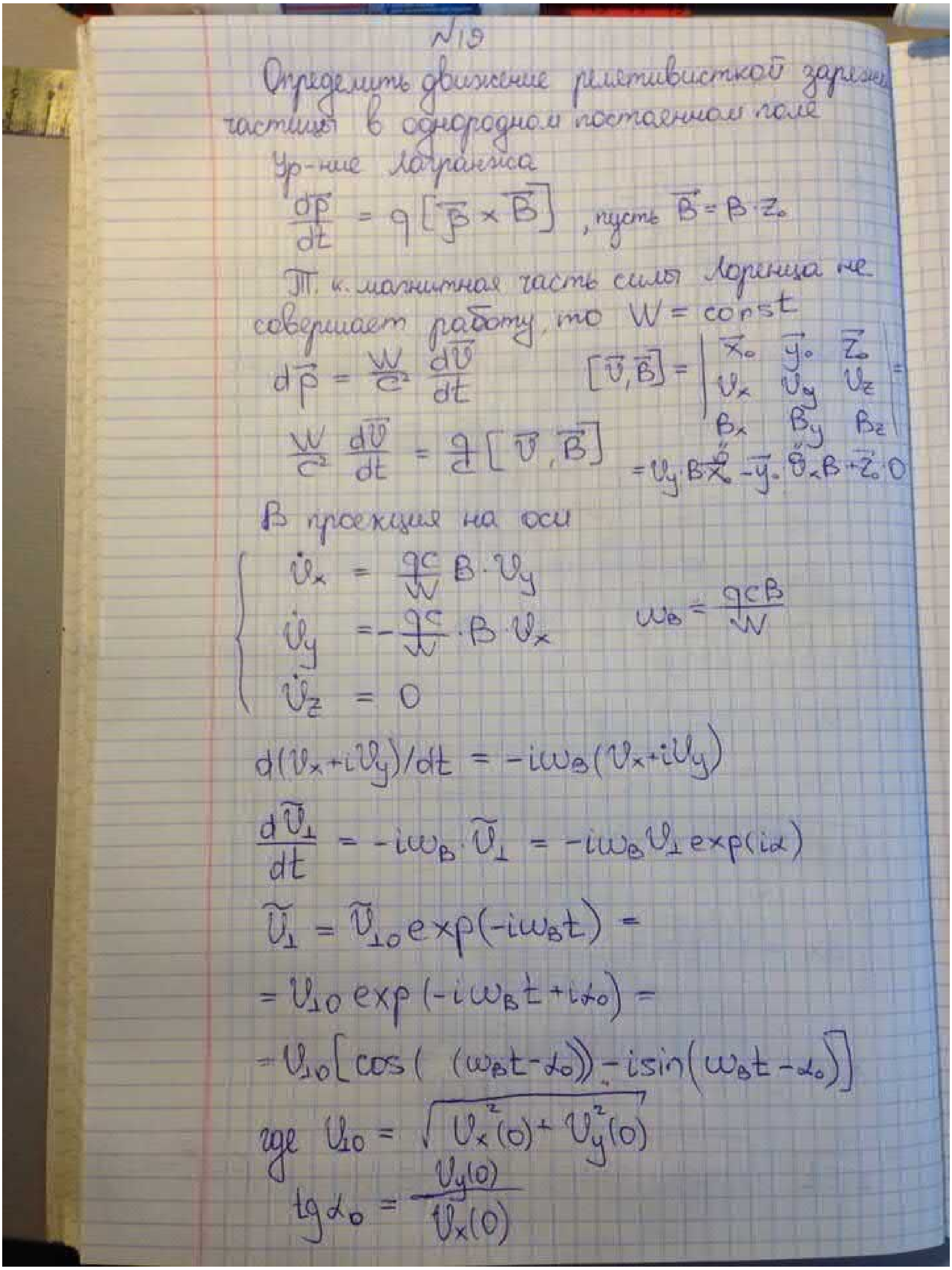
$$\int_0^x dx = \int \frac{c^2 qE\cdot t\,dt}{\sqrt{(mc^2)^2 + (qEtc)^2}}$$

$$x = \frac{1}{2qE}\int_0^t \frac{d(qEtc)^2}{\sqrt{(mc^2)^2 + (qEtc)^2}} =$$

$$= \frac{1}{qE}\sqrt{(mc^2)^2 + (qEtc)^2}\,\Big|_0^t = \frac{1}{qE}\cdot\left(\sqrt{(mc^2)^2 + (qEtc)^2} - mc^2\right)$$

Задача №19

Определить движение релятивистской заряженной частицы (m, q) в однородном постоянном магнитном поле $(\vec{B})$.



№19

Определить движение релятивисткой заряженной частицы в однородном постоянном поле

Ур-ние Лагранжа

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q[\vec{\beta}\times\vec{B}], \text{ пусть } \vec{B} = B\cdot z_0$$

Т.к. магнитная часть силы Лоренца не совершает работу, то $W = const$

$$d\vec{p} = \frac{W}{c^2}\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad [\vec{v},\vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

$$\frac{W}{c^2}\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{c}[\vec{v},\vec{B}] \qquad = v_y B\vec{x}_0 - \vec{y}_0 v_x B + \vec{z}_0 0$$

В проекция на оси

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \frac{qc}{W}B\cdot v_y \\ \dot{v}_y = -\frac{qc}{W}\cdot B\cdot v_x \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases} \qquad \omega_B = \frac{qcB}{W}$$

$$d(v_x+iv_y)/dt = -i\omega_B(v_x+iv_y)$$

$$\frac{d\tilde{v}_\perp}{dt} = -i\omega_B\cdot\tilde{v}_\perp = -i\omega_B v_\perp \exp(i\alpha)$$

$$\tilde{v}_\perp = \tilde{v}_{\perp 0}\exp(-i\omega_B t) =$$

$$= v_{\perp 0}\exp(-i\omega_B t + i\alpha_0) =$$

$$= v_{\perp 0}[\cos((\omega_B t - \alpha_0)) - i\sin(\omega_B t - \alpha_0)]$$

где $v_{\perp 0} = \sqrt{v_x^2(0) + v_y^2(0)}$

$$\text{tg}\,\alpha_0 = \frac{v_y(0)}{v_x(0)}$$

Тогда

$$v_x(t) = v_{\perp 0}\cos(\omega_B t - \alpha_0)$$

$$v_y(t) = -v_{\perp 0}\sin(\omega_B t - \alpha_0)$$

$$v_z(t) = v_{z_0} = v_{\parallel}$$

$$x = x_0 + \frac{v_{\perp 0}}{\omega_B}\sin(\omega_B t - \alpha_0)$$

$$y = y_0 + \frac{v_{\perp 0}}{\omega_B}\cos(\omega_B t - \alpha_0)$$

$$z = z_0 + v_{\parallel} t$$