КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА. ЗАДАЧИ.

Физические константы.
Постоянная Планка $\hbar = 1.054 \cdot 10^{-27} erg \cdot sec$
Заряд электрона $e = 4.8 \cdot 10^{-10}$ед.СГСЭ $= 1.6 \cdot 10^{-19} k$
Масса электрона $m_e = 0.91 \cdot 10^{-27} gr = 0.51 MeV$
Скорость света $c = 3 \cdot 10^{10} cm/sec$
Боровский радиус (ат.ед.длины) $a_0 = \hbar^2/m_e e^2 = 0.53 \cdot 10^{-8} cm$
Атомная единица энергии $m_e e^4/\hbar^2 = 4.36 \cdot 10^{-11} erg = 27.2 eV$
Атомная единица частоты $m_e e^4/\hbar^3 = 4.13 \cdot 10^{16} sec^{-1}$
Атомная единица напряженности электрического поля $e/a_0^2 = 5.14 \cdot 10^9 V/cm$
Постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$
Масса протона $M_p = 1.67 \cdot 10^{-24} gr = 938 MeV$
Разность масс нейтрона и протона $M_n - M_p \simeq 2.5 m_e$
Радиус ядра $R \simeq 10^{-13} cm$
Магнетон Бора $\mu_0 = e\hbar/2m_e c = 0.927 \cdot 10^{-20} erg/Gs$
Ядерный магнетон $\mu = e\hbar/2M_p c = 0.505 \cdot 10^{-23} erg/Gs$;
магнитный момент протона $\mu_p = 2.79\mu$,
магнитный момент нейтрона $\mu_n = -1.91\mu$.
Гравитационная постоянная $G = 6.67 \cdot 10{-}8$дин $\cdot$ с$^2 \cdot$ г$^{-2}$
Постоянная Больцмана $k = 1.38 \cdot 10^{-16} erg/grad$
$1eV = 1.6 \times 10^{-12} erg$

1. Операторы и матрицы.

1.1. Проверить эрмитовость операторов $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}, \hat{T} = -\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}, \hat{L}_i = \epsilon_{ijk}x_j p_k$.

1.2. Найти операторы $(AB)^+, [A,B]^+$, где A,B - произвольные операторы.

1.3. Найти оператор, эрмитово сопряженный оператору $exp(i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi})$.

1.4. Для оператора

$$\hat{T}_a = e^{-a\partial/\partial x} = 1 - a\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2!}a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + ..$$

смещения по координате x показать, что:

а)$\hat{T}_a\Psi(x) = \Psi(x-a); b)(\hat{T}_a)^{-1} = \hat{T}_{-a}; c)\hat{T}_a\hat{T}_b = \hat{T}_{a+b}$.

Найти оператор $\hat{T}^+$, а также собственные функции и собственные значения оператора $\hat{T}_a$.

1.5. Доказать соотношения

$$[x, F(\hat{p}_x, x)] = i\hbar\frac{\partial}{\partial\hat{p}_x}F(\hat{p}_x, x);$$

$$[\hat{p}_x, F(\hat{p}_x, x)] = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}F(\hat{p}_x, x);$$

где $F(\hat{p}_x, x)$ - произвольная функция от операторов импульса и координаты.

1.6. Пусть A и B некоммутирующие операторы, α -параметр, $F(B)$ - функция от оператора B . Доказать, что

$$e^{\alpha A}F(B)e^{-\alpha A} = F(e^{\alpha A}Be^{-\alpha A}),$$

и, в частности,

$$e^{i\alpha\hat{p}_x/\hbar}F(x)e^{-i\alpha\hat{p}_x/\hbar} = F(x+\alpha).$$

1.7. Показать,что для произвольных операторов A, B имеет место соотношение

$$e^{\alpha A}Be^{-\alpha A} = B + \alpha[A,B] + \frac{\alpha^2}{2!}[A,[A,B]] + \frac{\alpha^3}{3!}[A,[A,[A,B]]] + ...$$

1.8. Доказать формулу Бейкера-Хаусдорфа для операторов A, B, коммутатор которых $[A,B]$ является с-числом:

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B \cdot e^{-\frac{1}{2}[A,B]}.$$

1.9. Доказать тождество Якоби для коммутаторов операторов

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C.[A,B]] = 0.$$

1.10. Для операторов рождения $a^+ = (a)^+$ и уничтожения

$$a = 2^{-1/2}\left(\frac{x}{x_0} + i\frac{x_0}{\hbar}\hat{p}\right), x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},$$

вычислить коммутаторы $[a,a^+], [a,a^+a], [a,(a^+)^n], [a^+,a^n]$, а также найти явный вид произведения a^+a.

1.11. Найти коммутатор $\mathbf{\hat{p}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{\hat{p}}$ векторных операторов $\mathbf{\hat{p}}$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

1.12. Для оператора момента импульса $\hat{L}_i = \epsilon_{ijk}x_j\hat{p}_k$ найти коммутаторы $[\hat{L}_i, \hat{L}_j], [\hat{L}_i, \mathbf{\hat{L}^2}], [\hat{L}_z, \hat{L}_\pm]$, где $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$.

1.13. Для матриц Паули

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

доказать, что : $\sigma_i^2 = I, [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$, а также вычислить антикоммутатор $[\sigma_i, \sigma_j]_+ = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i$. Здесь $I-$ единичная матрица.

1.14. Для матрицы A, удовлетворяющей соотношениям $A \cdot A = 0, [A, A^+]_+ = AA^+ + A^+A = I$, где I - единичная матрица, доказать,что $a)(A^+A)^2 = A^+A, b)A^+A^+ = 0$, а также вычислить собственные значения оператора A^+A.

1.15. Доказать, что

$$e^A \cdot e^B = exp\{A + B + \frac{1}{2!}[A, B] + \frac{1}{3!}[A, [A, B]] + ...\}.$$

1.16. Доказать операторные соотношения:

$$e^A \cdot e^B = exp\{A + \int_0^1 d\xi e^{\xi A} B e^{-\xi A}\},$$

$$e^{A+B} = e^A \cdot exp\{\int_0^1 d\xi e^{-\xi A} B e^{\xi A}\} =$$

$$exp\{\int_0^1 d\xi e^{\xi A} B e^{-\xi A}\} \cdot e^A.$$

2.Собственные функции и собственные значения.

2.1. Даны спиновые матрицы в σ_z -представлении. (см. з. 1.13). Найти собственные векторы и собственные значения этих матриц. Вычислить матрицу унитарного преобразования от σ_z-представления к σ_x-представлению. Найти собственные значения и собственные функции матриц Паули в σ_x-представлении.

2.2. В состоянии, описываемом собственным вектором оператора спина $\hat{s}_z = \hbar\sigma_z$, принадлежащим собственному значению $\hbar/2$, найти средние значения и дисперсии проекций спина на ось z и ось x.

2.3. Аномальный эффект Зеемана. Найти уровни энергии и стационарные состояния частицы со спином $1/2$ в постоянном магнитном поле.(Указание: считать, что поле направлено по оси z, пространственное движение частицы не учитывать.)

2.4. Для свободной частицы с массой m, движущейся в одномерном пространстве, найти энергетический спектр и нормированные (на $\delta-$ функцию от энергии) собственные функции оператора полной энергии.

2.5. Частица с массой μ движется по окружности радиуса R. Найти волновую функцию стационарного состояния. Вычислить среднее значение и дисперсию оператора $\hat{L}_z = -i\hbar d/d\varphi$ в данном состоянии.

2.6. Для волнового пакета $\Psi(x) = Ae^{ikx - x^2/2a^2}$ найти: а) нормировочную константу , б) средние значения координаты и импульса, в) дисперсии флуктуаций координаты и импульса, а также их произведение. Проверить справедливость соотношения неопределенностей.

2.7. Доказать соотношение неопределенностей для произвольных некоммутирующих операторов

$$\Delta A \Delta B > \frac{1}{2}|[A, B]|.$$

2.8. Применяя уравнения Гайзенберга, вывести соотношение неопределенностей "энергия-время"$\Delta E \Delta t > \hbar$.

2.9. При помощи соотношения неопределенностей "энергия-время"оценить массу $\pi-$мезона, являющегося переносчиком ядерных сил, радиус действия которых $r_o \simeq 10^{-13} cm$.

2.10. Частица с массой m находится в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме с шириной . Найти нормированные волновые функции и уровни энергии стационарных состояний. Вычислить среднее значение и дисперсию координаты в n-м стационарном состоянии.

2.11. Частица с массой m находится в бесконечно глубокой потенциальной яме с шириной . Найти в n-м стационарном состоянии распределение вероятностей для импульса, среднее значение и дисперсию импульса.

2.12. Используя стационарное уравнение Шредингера, рассмотреть вопрос о непрерывности волновой функции в точке $x = 0$, в которой потенциальная энергия частицы $U(x)$ а) изменяется на конечное значение, б) $U(x) = \alpha\delta(x)$.

2.13. Найти коэффициент отражения и коэффициент прохождения частицы через потенциальный барьер $V(x) = \alpha\delta(x)$.

2.14. Найти уровни энергии и волновые функции частицы в потенциале $V(x) = -\alpha\delta(x)$.

2.15. Модель Кронига-Пенни. Потенциальная энергия частицы в идеальном одномерном кристалле может быть аппроксимирована функцией

$$U(x) = \alpha \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - na),$$

где $\alpha = U_0 l, U_0-$ высота отдельного барьера, l- его ширина, $U_0 \to \infty, l \to 0, 0 < \alpha\infty$.

а) получить уравнение, определяющее спектр собственных значений энергии частицы, б) найти границы разрешенных и запрещенных энергетических зон, а также эффективную массу частицы в первой разрешенной зоне.

2.16. Электрон движется в постоянном электрическом поле с напряженностью ε. В импульсном представлении найти волновые функции частицы, а также энергетический спектр.

2.17. Гармонический осциллятор. Выразить гамильтониан одномерного гармонического осциллятора

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

через операторы рождения-уничтожения (см.задачу 1.10.). Из предположения о существовании состояния $\Psi_0(x) = |0\rangle$ с минимальной энергией $E_{min} : H|0\rangle = E_{min}|0\rangle$ найти нормированную волновую функцию этого состояния, которое также называется вакуумным состоянием, а вместе с ней и минимальную энергию E_{min} гармонического осциллятора.

2.18. Вычислить энергию $n-$го возбужденного состояния $\mid n\rangle = C_n(a^+)^n \mid 0\rangle$ гармонического осциллятора, а также нормировочную константу C_n. (Указание: использовать условие $\langle n \mid n\rangle =\mid C_n \mid^2 \langle 0 \mid a^n(a^+)^n \mid 0\rangle = 1.$)

2.19. Найти результат действия операторов рождения-уничтожения на $n-$е состояние гармонического осциллятора: $a^+ \mid n\rangle =?, a \mid n\rangle =?$, а также матричные элементы $\langle k \mid a^+ \mid n\rangle =?\langle k \mid a \mid n\rangle = ?\langle k \mid x \mid n\rangle =?\langle k \mid p \mid n\rangle =?$

2.20. Вычислить произведение среднеквадратичных отклонений координаты и импульса осциллятора в $n-$м стационарном состоянии $\Delta p{\cdot}\Delta x =?$, где дисперсия флуктуаций физической величины A в $n-$м стационарном состоянии определяется как $(\Delta A)^2 = \langle n|A^2|n\rangle - \langle n|A|n\rangle^2$. В каком состоянии квантовые шумы гармонического осциллятора минимальны?

2.21. Когерентное состояние гармонического осциллятора определяется уравнением: $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. Действительно ли собственное значение α оператора уничтожения? Найти явную координатную зависимость волновой функции $\Psi_\alpha(x) = |\alpha\rangle$ когерентного состояния, а также произведение среднеквадратичных отклонений координаты и импульса.

2.22. Гармонический осциллятор находится в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. Найти амплитуду вероятности C_n нахождения такого осциллятора на $n-$м уровне энергии (т.е. волновую функцию в энергетическом представлении): $|\alpha\rangle = \sum_n C_n|n\rangle$, а также статистику распределения по энергетическим уровням $|C_n|^2 =?$

2.23. Найти волновую функцию гармонического осциллятора в импульсном представлении и рассчитать функцию распределения гармонического осциллятора по импульсам.

2.24. Вычислить уровни энергии и нормированные волновые функции квантовой точки (трехмерного гармонического осциллятора) с потенциальной энергией

$$U(x,y) = \frac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2).$$

Определить кратности вырождения основного, первого и $n-$го энергетических уровней изотропной ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$) квантовой точки.

2.25. Определить энергетический спектр и нормированные волновые функции стационарных состояний одномерного гармонического осциллятора с зарядом e в однородном статическом электрическом поле ε (Оператор энергии взаимодействия $V = -e\varepsilon x$). Вычислить среднее значение электрического дипольного момента частицы $\vec{d} = e\vec{r}$, а также статическую восприимчивость осциллятора $\chi = ?(\langle d \rangle = \chi E.)$

2.26. Уровни Ландау. Электрон с зарядом e движется в вакууме в постоянном и однородном магнитном поле с магнитной индукцией $\vec{B}$, направленном по оси z. При этом вектор-потенциал $\vec{A} = (0, xB, 0), \vec{B} = rot\vec{A}$. Найти энергетический спектр и волновые функции стационарных состояний, а также определить кратность вырождения энергетических уровней электрона?

2.27. Записать вектор плотности тока $\vec{J}$ для заряженной частицы в магнитном поле. Показать, что вид $\vec{J}$ не изменяется $(\vec{J'} = \vec{J})$ при калибровочных преобразованиях: $\vec{A'} = \vec{A} + \nabla f, \Psi'(x) = \Psi(x) \cdot exp[i(ef/\hbar c)]$.

2.28. При помощи уравнений Гайзенберга найти оператор скорости $\vec{V} = \dot{\vec{r}}(t)$ заряженной частицы в магнитном поле с векторным потенциалом $\vec{A}$. Вычислить коммутаторы $[V_i, V_j], [V_i, x_j] = ?$ Измеримы ли одновременно различные проекции скорости частицы? При условии, что магнитное поле направлено по оси z, записать соотношение неопределенностей для проекций скорости на оси x и $y : \Delta V_x \cdot \Delta V_y = ?$

2.29. В симметричной калибровке $\vec{A} = (-\frac{1}{2}xB, \frac{1}{2}yB, 0)$ рассчитать волновые функции и энергетические уровни стационарных состояний заряженной бесспиновой частицы в постоянном магнитном поле $\vec{B}$, направленном по оси z, при условии , что проекция момента импульса на ось z точно определена и равна нулю.

2.30. Для бесспиновой заряженной частицы, находящейся во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях, найти уровни энергии и нормированные волновые функции стационарных состояний.

2.31. Эффект Ааронова-Бома для связанных состояний. Заряженная бесспиновая частица движется вдоль кольца с радиусом r_0, пронизанного по центру соленоидом Ааронова-Бома.

Указание: в цилиндрической системе координат компоненты вектор-потенциала равны: $A_r = A_z = 0; A_\varphi = Br/2$ - внутри соленоида Ааронова-Бома; $A_r = A_z = 0; A_\varphi = BR^2/2r$ - вне соленоида. Здесь R- радиус соленоида, B - магнитное поле внутри соленоида: $\vec{B}_{int} = (B_r = 0, B_\varphi = 0, B_z = B)$.

Вычислить классическую силу Лоренца, воздействующую на частицу со стороны соленоида. Рассчитать смещение энергетических уровней электрона на кольце, связанное с присутствием соленоида, а также волновые функции частицы и касательную к кольцу проекцию плотности тока.

2.32. На систему с двумя энергетическими уровнями E_1 и E_2 (соответствующие стационарные состояния ψ_1, ψ_2) наложено однородное электрическое поле, энергия взаимодействия с которым $V = -dE$. Здесь d - проекция оператора дипольного момента системы на направление электрического поля, E - напряженность внешнего электрического поля. Определить уровни энергии и волновые функции системы в этом поле. Матричные элементы оператора дипольного момента предполагаются известными, причем $d_{11} = d_{22} = 0$.

2.33. Система находится в свободном пространстве и имеет орбитальный момент импульса $\hbar$. Известно также, что вероятность обнаружить у системы при измерении $\mathbf{L}$ равна $1/3$ для всех значений проекции L_z момента импульса. Записать волновую функцию этого состояния.(Состояние "чистое").

2.34. Квантовая частица движется в потенциальном поле (движение одномерное) $U(x) = \kappa x^2/2, x > 0; U(x) = \infty, x < 0$. Найти энергетический спектр и нормированные волновые функции стационарных состояний. Объяснить, почему минимальная энергия больше, чем у простого гармонического осциллятора.

3.Момент импульса. Квантовая частица в сферически симметричном потенциале.

3.1. Частица движется в сферически симметричном потенциале $U(\vec{r}) = U(r)$. Записать ее гамильтониан в сферических координатах r, ϑ, φ , а также стационарное уравнение Шредингера для радиальной компоненты волновой функции. Операторы каких физических величин составляют при этом полный набор?

3.2. Найти волновые функции и энергетические уровни стационарных $S-$состояний частицы, к примеру, нуклона, в сферически симметричной потенциальной яме (в ядре) с непроницаемыми стенками, если радиус этой сферы равен $r_0 = 10^{-13}cm$. С какой силой нуклон давит на стенки ямы?

3.3. Для нуклона (протона или нейтрона) в ядре (см. задачу 3.2.) вычислить следующие величины:

$$\langle r \rangle =?, \langle r^2 \rangle =?, \langle (\Delta r)^2 \rangle =?, \langle P_r \rangle =?, \langle P_r^2 \rangle =?.$$

Проверить справедливость соотношения неопределенностей

$$\langle (\Delta r)^2 \rangle \cdot \langle (\Delta P_r)^2 \rangle =?.$$

Чему равна плотность тока, создаваемая данной частицей?

3.4. Электрон находится в атоме водорода в $1 - S$ состоянии. Вычислить среднее значение радиальной координаты r в этом состоянии, дисперсию флуктуаций, а также наиболее вероятное расстояние r_0 электронного облака от центра.

3.5. В сферических координатах найти составляющие плотности тока для электрона в атоме водорода.

3.6. Найти эффективный электрический потенциал $\varphi(r)$, действующий на стороннюю заряженную частицу со стороны невозбужденного атома водорода.

3.7. Для линейных комбинаций проекций оператора момента импульса $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$ вычислить коммутационные соотношения $[L_z, L_{\pm}] =?, [L_+, L_-] =?$. Является ли состояние $L_{\pm}|m\rangle$ собственной функцией оператора L_z проекции момента импульса на ось z .Если да, то какому собственному значению оно соответствует? (Здесь $|m\rangle-$ собственная функция оператора $L_z : L_z|m\rangle = \hbar m|m\rangle$.)

3.8. Найти матричные элементы операторов $L_x, L_y, L_z, L_{\pm}, \vec{L}^2$ в L_z- представлении. Выписать соответствующие матрицы при $l = 1$.

3.9. Электрон в атоме водорода находится в стационарном состоянии $|n, l, m\rangle$, характеризуемом квантовыми числами n, l, m. Чему равны при этом средние значения проекций момента импульса? Выполняется ли соотношение неопределенностей $\langle (\Delta L_x)^2 \rangle \cdot \langle (\Delta L_y)^2 \rangle =?$ для дисперсий флуктуаций различных проекций момента импульса?

4.Эволюция квантовых состояний и операторов физических величин.

4.1. Частица с зарядом e и массой m находится в свободном одномерном пространстве, имея в начальный момент $t = 0$ волновую функцию

$$)\Psi(x, 0) = \delta(x)$$

$$b)\Psi(x, 0) = (2\pi\hbar)^{-1/2} exp(\frac{ip_o x}{\hbar})$$

$$c)\Psi(x, 0) = (\pi\hbar)^{-1/2} Sin(\frac{p_o x}{\hbar}).$$

Какое из этих состояний является стационарным? Найти волновую функцию и среднюю плотность электрического тока в момент времени $t > 0$ для этих случаев.

4.2. Волновая функция атома водорода в момент времени $t = 0$

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = 2^{-1/2}[R_{10}(r)Y_{00}(\theta, \varphi) + R_{21}(r)Y_{10}(\theta, \varphi)].$$

Записать волновую функцию для времени $t > 0$. Будет ли излучать атом в момент $t > 0$? Если да, то на какой частоте? (Найти $(d^2\langle ez\rangle/dt^2) =?$).

4.3. Система имеет два энергетических уровня $E_1, E_2 : H\Psi_i = E_i\Psi_i$, $i = 1, 2$, и в начальный момент времени $t = 0$ находится в состоянии

$$\Psi(0) = 2^{-1/2}(\Psi_1 + \Psi_2).$$

Найти волновую функцию системы $\Psi(t)$ в последующие моменты времени. На какой частоте будет излучать подобная двухуровневая система, если волновые функции электрона $\Psi_1(x), \Psi_2(x)$ обладают различной четностью ?

4.4. Расплывание гауссовского волнового пакета. Свободная нерелятивистская частица в начальный момент времени локализована вблизи точки $x = 0 : \Psi(x, 0) = (\pi\sigma^2)^{-1/2}exp(-x^2/2\sigma^2)$. Рассчитать эволюцию данного квантового состояния во времени $\Psi(x, t) =?$ Определить скорость расплывания волнового пакета.

4.5. Электрон в атоме водорода в момент времени $t = 0$ описывается следующей волновой функцией

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = 2^{-1/2}[R_{10}(r)Y_{00}(\theta, \varphi) + R_{21}(r)Y_{11}(\theta, \varphi)].$$

Найти средний магнитный момент электрона $\langle\vec{\mu}(t)\rangle$ в последующие моменты времени. Будет ли магнито-дипольное излучение атома в момент $t > 0$?

Указание: оператор магнитного момента электрона $\vec{\mu}$ пропорционален оператору орбитального момента $\vec{L} : \vec{\mu} = -\mu_B(\vec{L}/\hbar)$, где $\mu_B = |e|\hbar/2m_ec-$ магнетон Бора, m_e- масса электрона.

4.6. Как изменяется во времени когерентное состояние гармонического осциллятора? (см. задачу 2.21.) Будет ли расплываться начальный волновой пакет с течением времени?

4.7. Осцилляции Раби. На систему с двумя энергетическими уровнями E_1, E_2 воздействует резонансное электрическое поле $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 os\omega_0 t$, $\hbar\omega_0 = E_2 - E_1$, энергия взаимодействия с которым имеет вид: $V(t) = -d\cdot\varepsilon(t)$. В приближении вращающейся волны (пренебрегая осцилляциями на удвоенной частоте) вычислить вероятность возбуждения двухуровневой системы в момент времени $t > 0$ при условии, что в начальный момент времени электрон находился на нижнем энергетическом уровне. Как изменяется при этом средний дипольный момент атома?

4.8. Как изменяются во времени гайзенберговские операторы координаты, импульса и скорости заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле? (см. задачи 2.26, 2.28.)

4.9. Осцилляции Блоха. Закон дисперсии электрона в одномерной сверхрешетке с периодом d имеет вид: $E(p) = -(\Delta/2)cos(pd/\hbar)$, где $\Delta-$ энергетическая ширина минизоны. В гайзенберговском представлении рассчитать эволюцию операторов координаты, импульса и скорости электрона под действием постоянного электрического поля ε, энергия взаимодействия с которым равна $V = -e\varepsilon x$. На какой частоте будет излучать такая система?

4.10. Частица со спином $1/2$ находится во вращающемся магнитном поле $\vec{B}(t) = (B_0 Cos\omega_0 t, B_0 Sin\omega_0 t, 0)$, энергия взаимодействия с которым равна $V = -g\mu_0\vec{\sigma}\cdot\vec{B}(t)$. Здесь $g-$g-фактор частицы, $\mu_0 = e\hbar/2mc-$магнетон Бора, $\vec{\sigma}-$матрицы Паули. Во вращающейся системе отсчета рассчитать эволюцию операторов проекций спина.

5. Приближенные методы квантовой теории.

5.1. На одномерный гармонический осциллятор с зарядом e и массой m действует однородное постоянное электрическое поле с напряженностью ε. Вычислить поправки к уровням энергии осциллятора с точностью до второго порядка и сравнить с результатами задачи 2.25.

5.2. Увеличится или уменьшится энергия вакуумного состояния квантовой системы при наложении малого возмущения с нулевыми диагональными матричными элементами?

5.3. Как изменятся уровни энергии осциллятора при учете ангармонизма колебаний, описываемого возмущением вида $V(x) = \lambda x^3 + \zeta x^4$? Расчет провести с точностью до второго порядка по малому параметру λ и с точностью до первого порядка по малому параметру ζ. Оценить пределы применимости полученных результатов.

5.4. Нормальный эффект Зеемана. Бесспиновая частица находится в сферически симметричном поле, причем ее невозмущенные уровни энергии равны E_{nl}. В первом порядке теории возмущений найти сдвиг энергетических уровней частицы, а также ее волновую функцию при наложении на атом постоянного магнитного поля, направленного по оси z.

5.5. Применяя стационарную теорию возмущений, найти поправки к уровням энергии квантовой частицы в потенциальной яме с бесконечно-высокими стенками, связанные с наличием в центре ямы $\delta-$образного потенциального барьера:

$$V(x) = \alpha\delta(x - a/2), 0 < x < a, \alpha > 0; U(x) = \infty, x > a, x < 0.$$

Как при этом изменятся волновые функции частицы? Что является малым параметром в этой задаче?

5.6. К квантовому кольцу (см.задачу 2.5.), расположенному в плоскости (x, y) приложено постоянное электрическое поле ε, направленное по оси x, энергия взаимодействия с которым описывается оператором

$$V(\varphi) = -e\varepsilon x = -e\varepsilon r_o cos\varphi.$$

Здесь e-заряд частицы, запертой на кольце радиуса r_o. В рамках теории возмущений вычислить сдвиг энергетических уровней, а также изменение волновой функции данной частицы. Запишите гайзенберговские уравнения движения для оператора $\varphi(t)$ и попытайтесь их решить.

5.7. Частица находится внутри непроницаемого эллипсоида вращения (деформированное ядро), так что ее потенциальная энергия имеет вид:

$$U(x, y, z,) = 0, \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} < 1,$$

$$U(x, y, z,) = \infty, \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} > 1,$$

причем $|a - b| \ll a$. Найти в первом порядке теории возмущений сдвиг энергетического уровня основного состояния частицы.

5.8. Рассмотреть эффект Штарка (расщепление энергетических уровней во внешнем однородном электрическом поле, направленном по оси z) в атоме водорода для состояния с главным квантовым числом $n = 2$. Полностью ли при этом снимается вырождение энергетических уровней электрона?

5.9. Найти расщепление энергетических уровней атома водорода в $1S$- состоянии за счет взаимодействия магнитных моментов электрона и ядра, полагая оператор возмущения равным

$$V = A(\vec{\sigma}^e \cdot \vec{\sigma}^p),$$

где $\vec{\sigma}^e, \vec{\sigma}^p-$ матрицы Паули электрона и протона, A- постоянная размерности энергии. Какова кратность вырождения каждого из уровней?

5.10. В начальный момент времени $t = 0$ система находится в состоянии $\Psi_1^{(0)}$, относящемся к двукратно вырожденному энергетическому уровню $E_0 : H_0\Psi_i^{(0)} = E_0\Psi_i^{(0)}, i = 1, 2$. Определить вероятность того, что в момент времени $t > 0$ система будет находится в состоянии $\Psi_2^{(0)}$, при условии, что переход происходит под действием постоянного возмущения V. (диагональные матричные элементы V_{11}, V_{22} оператора возмущения по волновым функциям $\Psi_1^{(0)}, \Psi_2^{(0)}$ равны нулю, $V_{12} = V_{21}^* = \Delta$).

5.11. Согласно релятивистской теории электрон, движущийся со скоростью v в постоянном электрическом поле $vec\varepsilon$, испытывает воздействие магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{1}{c}[\vec{\varepsilon}\vec{v}], \vec{\varepsilon} = -\frac{dU(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$$

. Учитывая это, показать, что релятивистскую поправку к оператору энергии электрона со спиновым магнитным моментом $\vec{\mu} = \mu_0\vec{\sigma} = (e\hbar/2m_e c)\vec{\sigma}$ в атоме водорода можно представить (с точностью до 1/2) в виде:

$$V == -(\vec{\mu}\cdot\vec{H}) = -A(r)(\vec{L}\cdot\vec{S}), A(r) = \frac{e\hbar^2}{2m_e^2c^2}\frac{dU(r)}{dr}\frac{1}{r},$$

$U(r)-$ оператор потенциальной энергии электрона в атоме водорода, $\vec{L}, \vec{S}-$операторы орбитального и спинового момента количества движения. Показать, что с учетом данного спин-орбитального взаимодействия интегралами движения в атоме водорода будут величины, характеризуемые операторами

$$\vec{J}^2 = (\vec{L}+\vec{S})^2; J_z = L_z + S_z; L^2; S^2.$$

5.12. Найти релятивистские поправки к уровню энергии атома водорода с $n = 2$, обусловленные отклонением закона дисперсии электрона

$$H(p) = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4} \simeq \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2}$$

от параболического закона.

5.13. При помощи квазиклассического метода Вентцеля- Крамерса- Бриллюэна вычислить коэффициенты отражения и прохождения частицы через прямоугольный потенциальный барьер с шириной a и высотой U_0.

5.14. Холодная эмиссия электронов из металла. К поверхности металла приложено постоянное электрическое поле с напряженностью ε. При этом потенциальная энергия электрона $U(x) = 0 (x < 0)-$ внутри металла, $U(x) = U_0 - e\varepsilon x (x > 0)-$вне металла. В квазиклассическом приближении найти вероятность туннелирования электрона сквозь этот потенциальный барьер, если энергия электрона E а) меньше высоты барьера $U_0 : E < U_0$, б) $E > U_0$.

5.15. Квантовая частица движется в гравитационном поле Земли (движение считать одномерным). Считая поверхность Земли идеально отражающей плоскостью ($x = 0$), найти энергетические уровни частицы в квазиклассическом приближении.

5.16. В квазиклассическом приближении найти вероятность туннелирования квантовой частицы с энергией $E < U_0$ через потенциальный барьер

$$U(x) = U_0(1 - \frac{x^2}{a^2}), |x| < a; U(x) = 0, |x| > a.$$

5.17. На заряженный гармонический осциллятор, находящийся в основном состоянии, мгновенно накладывается однородное и в дальнейшем постоянное во времени электрическое поле ε_0. Найти вероятность возбуждения осциллятора. Определить статистику распределения осциллятора по энергетическим уровням (т.е. вероятность перехода в $n-$е возбужденное состояние).

5.18. Вычислить вероятность возбуждения заряженного гармонического осциллятора электрическим полем

$$\varepsilon(t) = A(\pi\tau)^{-1/2}exp[-(t/\tau)^2].$$

Считать, что до включения поля ($t = \infty$) осциллятор находился в основном состоянии.

Указания к решениям и ответы.

1.1. Ответ: все операторы эрмитовы.

1.2. Указание: дважды воспользоваться определением эрмитово- сопряженного оператора

$$\int \phi^*(x)AB\Psi(x)dx =$$

$$\int (A^+\phi)^*(x)B\Psi(x)dx = \int (B^+A^+\phi)^*(x)\Psi(x)dx = \int ((AB)^+\phi)^*(x)\Psi(x)dx.$$

Ответ: $(AB)^+ = B^+A^+, [A,B]^+ = (AB - BA)^+ = [B^+, A^+]$.

1.3. Ответ: $\{exp(i\partial/\partial\varphi)\}^+ = exp(i\partial/\partial\varphi)$.

1.4. Указание: $T_a\Psi(x)$ является разложением в ряд Тейлора функции $\Psi(x-a)$.

Ответ: $T_a^+ = T_{-a}$. Собственные функции $\Psi_\alpha(x) = exp(i\alpha x/a)$ отвечают собственным значениям $\lambda_\alpha = e^{-i\alpha}$, образующим непрерывный спектр ($\alpha-$ действительное число.)

1.5. Указание: предварительно докажите соотношения:

$$[x, p_x^n] = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x}p_x^n = i\hbar n p_x^{n-1};$$

$$[p_x, x^n] = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}x^n = -i\hbar n x^{n-1},$$

и далее воспользуйтесь разложением функции $F(p_x, x)$ в соответствующий ряд Тейлора.

1.6. Указание: разложить $F(B)$ в ряд и применить равенство

$$e^{\alpha a}B^n e^{-\alpha a} = (e^{\alpha a}Be^{-\alpha a})^n.$$

В частности,

$$e^{i\alpha p_x/\hbar}xe^{-i\alpha p_x/\hbar} = x + e^{i\alpha p_x/\hbar}[x, e^{-i\alpha p_x/\hbar}] = x + \alpha.$$

1.7. Указание: показать, что оператор $B(\alpha) = e^{\alpha A}Be^{-\alpha A}$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{dB(\alpha)}{d\alpha} = [A, B(\alpha)]$$

или

$$B(\alpha) = B + \int_0^\alpha d\xi[A, B(\xi)],$$

и воспользоваться методом итераций.

1.8. Указание: введите функцию $F(\alpha) = e^{\alpha A}e^{\alpha B}, F(1) = e^A e^B$, тогда

$$\frac{dF}{d\alpha} = AF + e^{\alpha A}Be^{\alpha B} = (A + e^{\alpha A}Be^{-\alpha A})F(\alpha).$$

После интегрирования по α находим:

$$F(\alpha) = exp\{\int_0^\alpha d\xi(A + e^{\xi A}Be^{-\xi A})\}.$$

Это соотношение справедливо для произвольных операторов A, B. Если коммутатор $[A, B]$ является c-числом, то $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$, а значит, из соотношения, доказанного в з.1.7 следует, что

$$e^{\alpha A}Be^{-\alpha A} = B + \alpha[A,B], F(\alpha) = exp\{\alpha(A+B) + (\alpha^2/2)[A,B]\}.$$

1.9. Указание: применить определение коммутатора $[A,B] = AB - BA$.

1.10. Указание: воспользоваться билинейностью операции коммутирования $[A+B, C+D] = [A,C]+[A,D]+[B,C]+[B,D]$, и коммутаторами $[x, p_x] = i\hbar$.

Ответ: $[a, a^+] = 1, [a, a^+a] = a, [a, (a^+)^n] = n(a^+)^{n-1}, [a^+, a^n] = -na^{n-1}; (p^2/2m) + (m\omega^2 x^2/2) = \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2})$.

1.11. Ответ: $\vec{p}\cdot\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{p} = \sum_{i=1}^{3}[p_i, A_i(\vec{r})] = -i\hbar div\vec{A}$.

1.12. Ответ: $[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k$ (сумма по повторяющимся индексам); $[L_i, \vec{L}^2] = 0, [L_z, L_\pm] = \pm L_\pm$.

1.13. Использовать явный вид матриц Паули в σ_z-представлении.

Ответ: $[\sigma_i, \sigma_j]_+ = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}$.

1.14. Указание: $(A^+A)^2 = A^+(I - A^+A)A = A^+A; A^+A^+ = (AA)^+ = 0; A^+A\Psi = \lambda\Psi, (A^+A)^2\Psi = \lambda^2\Psi = (A^+A)\Psi = \lambda\Psi$, поэтому $\lambda^2 = \lambda, \lambda = 0$ или $\lambda = 1$.

1.15. См. указание к з.1.7 и 1.8.

1.16. Согласно з.1.8.

$$e^B = e^{-A}exp\{A + \int_0^1 d\xi e^{\xi A}Be^{-\xi A}\} = e^A exp\{-A + \int_0^1 d\xi e^{-\xi A}Be^{\xi A}\}.$$

Сделав замену $B = A + C$, находим с учетом з.1.6.

$$e^{A+C} = e^A exp\{\int_0^1 d\xi e^{-\xi A}Ce^{\xi A}\} = exp\{\int_0^1 d\xi e^{-(\xi-1)A}Ce^{(\xi-1)A}\}e^A = exp\{\int_0^1 d\alpha e^{\alpha A}Ce^{-\alpha A}\}e^A.$$

2.1. Указание: собственная функция Ψ_j^μ матрицы Паули $\sigma_j, (j = x, y, z)$, отвечающая собственному значению $\lambda_j^\mu, (\mu = 1, 2)$, может быть найдена из матричного уравнения $\sigma_j\Psi_j^\mu = \lambda_j^\mu\Psi_j^\mu$ (суммирования по повторяющимся индексам здесь нет).

$$\Psi_x^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1; \Psi_x^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -1;$$

$$\Psi_y^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1; \Psi_y^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \lambda_2 = -1;$$

$$\alpha = \Psi_z^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1; \beta = \Psi_z^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -1.$$

Ответ: Матрица $T = |\Psi_x\rangle\langle\Psi_z|$ унитарного преобразования от σ_z к σ_x-представлению имеет матричные элементы $T^{\mu\nu} = \{\Psi_z^\mu\}^+\cdot\Psi_x^\nu$, где Ψ_z^μ- $\mu-$ый собственный вектор матрицы σ_z, $\Psi_x^\nu - \nu-$ый собственный вектор матрицы $\sigma_x, \mu, \nu = 1, 2; T^+T = I$,

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Указание: это состояние $\alpha, s_z\alpha = (\hbar/2)\alpha$;

$$\langle\alpha|s_z|\alpha\rangle = \alpha^+ s_z\alpha = \hbar/2, \langle\alpha|s_z^2|\alpha\rangle = \hbar^2/4;$$

дисперсия

$$D(s_z) = \langle s_z^2\rangle - \langle s_z\rangle^2 = 0; \langle\alpha|s_x|\alpha\rangle = 0,$$

$$s_x^2 = (\hbar^2/4)\sigma_x^2 = (\hbar^2/4)I; D(s_x) = (\hbar^2/4).$$

2.3. Оператор энергии электрона в магнитном поле $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ равен $H_B = -\mu_0\vec{\sigma}\cdot\vec{B} = -\mu_0\sigma - zB_z, \mu_0 = e\hbar/2m_ec-$магнетон Бора, m_e-масса электрона. Уровни энергии и стационарные сотояния могут быть найдены из уравнеия $H_B\Psi = E_B\Psi$.

Ответ: $\Psi^{(1)} = \alpha, E_B^{(1)} = -\mu_0 B_z, \Psi^{(2)} = \beta, E_B^{(2)} = \mu_0 B_z$.

2.4. Ответ: энергетический спектр непрерывен. Собственные функции, нормированные на $\delta-$функцию от энергии, имеют вид:

$$\Psi_E(x) = (2\pi\hbar)^{-1/2}(m/2E)^{-1/4}\{Aexp(ip_0x/\hbar) + Bexp(-ip_0x/\hbar)\},$$

$|A|^2 + |B|^2 = 1, p_0 = \sqrt{2mE}, m-$масса частицы.

2.5. Указание: гамильтониан частицы с массой μ на кольце $H = (-\hbar^2/2\mu R^2)(d^2/d\varphi^2) = (L_z^2/2\mu R^2), L_z = -i\hbar(d/d\varphi)-$оператор проекции момента импульса на ось z, перпендикулярную плоскости кольца. Волновая функция стационарного состояния $\Psi(\varphi)$ удовлетворяет стационарному уравнению Шредингера:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\Psi + \kappa^2\Psi = 0,$$

где $\kappa^2 = (2\mu E/\hbar^2)R^2$. Однозначное решение $\Psi(\varphi) = \Psi(\varphi + 2\pi)$ с энергией $E_m = (\hbar^2 m^2/2\mu R^2)$ имеет вид

$$\Psi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{C_1 e^{im\varphi} + C_2 e^{-im\varphi}\},$$

где $m = 1, 2, 3, ..-$целое число, $|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1. \langle L_z\rangle = \hbar m(|C_1|^2 - |C_2|^2); \langle(\Delta L_z)^2\rangle = 4\hbar^2 m^2 |C_1|^2 |C_2|^2$.

2.6. Ответ: нормировочная константа $A = (\pi a^2)^{-1/4}; \langle x\rangle = 0, \langle p_x\rangle = \hbar k, \langle(\Delta x)^2\rangle = a^2/2, \langle(\Delta p_x)^2\rangle = \hbar^2/2a^2$. Для данного гауссовского волнового пакета выполняется минимальное соотношение неопределенностей: $\langle(\Delta p_x)^2\rangle\langle(\Delta x)^2\rangle = \hbar^2/4$.

2.7. Указание: для некоммутирующих эрмитовских операторов $A, B : [A, B] = iC, C^+ = C$, ввести неотрицательную функцию параметра $\alpha : J(\alpha) = \int |(\alpha\Delta A - i\Delta B)\Psi|^2 dx$, где $\Delta A = A - \langle A\rangle, \Delta B = B - \langle B\rangle, [\Delta A, \Delta B] = iC$. Используя эрмитовость операторов $\Delta A, \Delta B$, а также определение среднего $\langle A\rangle = \int \Psi^*(x)A\Psi(x)dx$, привести $j(\alpha)$ к виду:

$$J(\alpha) = \alpha^2\langle(\Delta A)^2\rangle + \alpha\langle C\rangle + \langle(\Delta B)^2\rangle.$$

Из условия неотрицательности этой квадратичной формы следует соотношение неопределенностей $\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle > \frac{1}{4}\langle C\rangle^2$.

2.8. Из з.2.7. следует, что для любых операторов R и $S : \Delta S\Delta R > \frac{1}{2}\langle|[R, S]|\rangle$, где $\Delta S = \langle(\Delta S)^2\rangle^{1/2}-$ среднеквадратичное отклонение (или стандарт) физической величины S. Производная оператора $R(t)$ по времени также пропорциональна коммутатору $\hbar\frac{\partial}{\partial t}R(t) = i[H, R]$, где H- гамильтониан, явно не зависящий от времени. Пусть $S = H, \Delta E = \langle(\Delta H)^2\rangle^{1/2}$, тогда $\Delta E\Delta R > \frac{\hbar}{2}|(\partial R/\partial t)|$. Взяв интеграл $\int_t^{t+\Delta t}$ с учетом того, что $\Delta E = Const$, находим

$$\Delta E\Delta t > \frac{\hbar}{2}\frac{|\langle R_{t+\Delta t}\rangle - \langle R_t\rangle|}{\Delta R},$$

где $\langle\Delta R\rangle-$ среднее за временной интервал Δt значение стандарта ΔR. Если $\Delta T-$ минимальное время, за которое среднее значение какой-либо величины R изменяется на величину ее стандарта, то $\Delta E\Delta T > \frac{\hbar}{2}$.

2.9. Указание: время полета $\pi-$мезона $\Delta t \simeq r_0/c, \Delta E \simeq \hbar/\Delta t \simeq \hbar c/r_o \simeq m_\pi c^2$.

Ответ: $m_\pi \simeq \hbar/r_0 c$.

2.10. Ответ: $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}Sin(\frac{\pi n}{a}x), 0 < x < a, n = 1, 2, 3, ...; E_n = \frac{(\hbar\pi n)^2}{2\mu a^2}; \langle x\rangle = \langle n|x|n\rangle = a/2, \langle(\Delta x)^2\rangle = (a^2/12)(1 - \frac{6}{\pi^2 n^2})$.

2.11. Указание: распределение по импульсам описывается функцией $P_n(p) = |\Psi_n(p)|^2$, где $\Psi_n(p) = \int dx\Psi_p^*(x)\Psi_n(x)-$ волновая функция частицы в импульсном представлении, $\Psi_p(x) = (2\pi\hbar)^{-1/2}exp\{\frac{ipx}{\hbar}\}-$ волна де Бройля.

Ответ:

$$P_n(p) = \frac{4\pi\hbar^3 an^2}{(p^2a^2 - \pi^2\hbar^2n^2)^2} \cdot f_n(p),$$

где $f_n(p) = Cos^2(pa/2\hbar)$, если n- нечетное число, $f_n(p) = Sin^2(pa/2\hbar)$, если n- четное число; $\langle p \rangle = 0, \langle(\Delta p)^2\rangle = \pi^2\hbar^2n^2/a^2$.

2.12. Указание: проинтегрировать уравнение Шредингера

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = \frac{2m}{\hbar^2}\left[U(x) - E\right]\Psi(x)$$

вблизи точки $x = 0$ по бесконечно малому интервалу $[-\varepsilon, +\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$. Если $U(x)$ в точке $x = 0$ изменяется на конечное значение, то производная волновой функции в этой точке непрерывна: $\Psi'(+\varepsilon) = \Psi'(-\varepsilon)$. Если $U(x) = \alpha\delta(x)$, то

$$\Psi'(+\varepsilon) = \Psi'(-\varepsilon) + \frac{2m}{\hbar^2}\alpha\Psi(0)$$

производная имеет разрыв при $x = 0$.

2.13. Указание: предположить, что частица падает на барьер слева с единичной амплитудой вероятности. Тогда волновая функция в области $x < 0$ имеет вид: $\Psi_I(x) = e^{ikx} + ae^{-ikx}$, где $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}, E-$ энергия частицы ($E > 0$). В области $x > 0$ волновая функция описывается выражением: $\Psi_{II}(x) = be^{ikx}$ (отраженной волны здесь нет). Условия сшивки $\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0); \Psi'_{II}(0) = \Psi'_I(0) + \frac{2m}{\hbar^2}\alpha\Psi_I(0)$ дают:

$$b = \left(1 + i\frac{m\alpha}{\hbar^2 k}\right)^{-1}; a = -i\frac{m\alpha}{\hbar^2 k}\left(1 + i\frac{m\alpha}{\hbar^2 k}\right)^{-1}.$$

Плотность потока вероятности определяется соотношением:

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi\right).$$

Тогда падающий на барьер поток $j = \hbar k/m$, отраженный поток $j = -(\hbar k/m)|a|^2$ и прошедший через барьер поток $j = (\hbar k/m)|b|^2$. Коэффициент прозрачности барьера (вероятность туннелирования)

$$D = |j/j| = |b|^2 = \frac{2\hbar^2 E}{m\alpha^2 + 2\hbar^2 E};$$

коэффициент отражения от барьера

$$R = |j/j| = |a|^2 = \frac{m\alpha^2}{m\alpha^2 + 2\hbar^2 E};$$

$R + D = 1$.

2.14. Указание: рассмотреть только связанные состояния с энергией $E = -|E| < 0$. Волновая функция стационарного состояния имеет вид:

$$\Psi_I(x) = ae^{\kappa x}(x < 0); \Psi_{II}(x) = be^{-\kappa x}(x > 0);$$

$\kappa = \sqrt{2m|E|/\hbar^2}$ (учтены только спадающие решения). Сшивка дает $a = b; \kappa = m\alpha/\hbar^2$. Ответ: имеется только одно связанное состояние с энергией $E = -(m\alpha^2/2\hbar^2)$ и волновой функцией $\Psi(x) = (\kappa)^{-1/2}e^{-\kappa|x|}$, нормированной на единицу.

2.15. Модель Кронига-Пенни. Указание: учесть, что на периоде решетки волновая функция приобретает дополнительную фазу: $\Psi(x+a) = e^{ika}\Psi(x)$ (т.к. $U(x+a) = U(x)$, а $\Psi(x+a)$ и $\Psi(x)$ удовлетворяют идентичным по форме уравнениям Шредингера).

Волновые функции имеют вид: $\Psi_I(x) = C_1 e^{i\kappa x} + C_2 e^{-i\kappa x}$ (в I области: $-a < x < 0$); $\Psi_{II}(x) = C_3 e^{i\kappa x} + C_4 e^{-i\kappa x}$ (в II области: $0 < x < a$); $\Psi_{II}(x) = C_5 e^{i\kappa x} + C_6 e^{-i\kappa x}$ (в III области: $a < x < 2a$), где $\kappa = \sqrt{2\mu E/\hbar^2}$. Если x принадлежит I области, то $x+a$ принадлежит II области. Поэтому $\Psi_{II}(x+a) = e^{ika}\Psi_I(x)$, откуда следует, что $C_3 = e^{i(k-\kappa)a}C_1; C_4 = e^{i(k+\kappa)a}C_2$. Условия сшивки дают: $C_1 + C_2 = C_3 + C_4; C_3 - C_4 = C_1 - C_2 - i(2\mu/\hbar^2)(\alpha/\kappa)(C_1 + C_2)$. Эта система уравнений имеет нетривиальные решения, если энергия частицы $E = \hbar^2\kappa^2/2\mu$ удовлетворяет характеристическому уравнению:

$$cos(\kappa a) + P\frac{sin(\kappa a)}{\kappa a} = cos(ka),$$

где $P = \mu\alpha a/\hbar^2$. Если ввести параметр $\beta : tg\beta = P/\kappa a = \frac{\mu\alpha}{\hbar^2\kappa}$, то уравнение для определения энергетического спектра электрона в периодическом потенциале может быть преобразовано к виду:

$$\frac{cos(\kappa a - \beta)}{cos\beta} = cos(ka).$$

Границы энергетических зон лежат при $\kappa a = \pi n$ или при $\kappa a - 2\beta = \pi n$, когда $cos(\kappa a - \beta) = \pm cos(ka)$. Полагая $\kappa a = \pi n - \varepsilon$, находим: $(-1)^n(cos\varepsilon - tg\beta sin\varepsilon) = coska$. Т.о. при $\varepsilon \to +0$ левая сторона этого соотношения по модулю меньше единицы, значит, ниже точек $\kappa a = \pi n$ идут разрешенные зоны, а выше - запрещенные зоны. Аналогично находим, что выше точек $\kappa a = \pi n + 2\beta$ идут разрешенные зоны, а ниже - запрещенные зоны. Начало запрещенных зон определяется соотношением:$E_n^v = (\pi^2\hbar^2/2\mu a^2)\cdot n^2$, а начало разрешенных зон: $E_n^c = (\pi^2\hbar^2/2\mu a^2)\cdot(n + 2\beta/\pi)^2$.

2.16. Ответ: энергетический спектр непрерывен. Волновая функция в импульсном представлении

$$C_E(p) = (2\pi\hbar F)^{-1/2} exp\left[\frac{i}{\hbar F}\left(Ep - \frac{p^3}{6\mu}\right)\right], F = e\varepsilon > 0,$$

- нормирована на $\delta-$ функцию от энергии:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp C_E^*(p) C_{E'}(p) = \delta(E - E').$$

Волновая функция в координатном представлении имеет вид:

$$\Psi_E(x) = \int dp e^{ipx/\hbar} C_E(p) =$$

$$\frac{1}{2\pi\hbar\sqrt{F}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp Cos\left[\frac{p}{\hbar}\left(x + \frac{E}{F}\right) - \frac{p^3}{6\mu\hbar F}\right].$$

2.17. Гармонический осциллятор. Гамильтониан: $H = \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2})$.

Указание: Рассмотреть состояние $a|0\rangle$ и показать, что его энергия меньше минимальной: $Ha|0\rangle = (E_{min} - \hbar\omega)a|0\rangle$, и, значит, $a|0\rangle = 0$. Используя явный вид оператора $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \frac{d}{d\xi}), \xi = x/x_0, x_0 = \sqrt{\hbar/\mu\omega}$ (см.з.1.10.), находим волновую функцию вакуумного состояния с энергией $E_{min} = \hbar\omega/2$:

$$|0\rangle = \Psi_0(x) = (\pi x_0^2)^{-1/4} exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right).$$

2.18. Указание: многократно использовать перестановочное соотношение: $Ha^+ = a^+H + \hbar\omega a^+$. Тогда, к примеру, $Ha^+|0\rangle = \hbar\omega(1 + \frac{1}{2})a^+|0\rangle$;

$$H(a^+)^n|0\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})(a^+)^n|0\rangle; n = 0, 1, 2, ..$$

При вычислении нормировочной константы C_n можно воспользоваться коммутатором $[a,(a^+)^n] = n(a^+)^{n-1}$.

Ответ: $C_n = (n!)^{-1/2}$,

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|0\rangle; H|n\rangle = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})|n\rangle.$$

2.19. Ответ: $a^+|n\rangle = (n!)^{-1/2}(a^+)^{n+1}|0\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle; a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$. Отличны от нуля следующие матричные элементы: $x_{n,n+1} = \langle n|x|n+1\rangle = (\hbar/2\mu\omega)^{-1/2}\sqrt{n+1}; x_{n,n-1} = \langle n|x|n-1\rangle = (\hbar/2\mu\omega)^{-1/2}\sqrt{n}; \langle n-1|p|n\rangle = -i\mu\omega\langle n-1|x|n\rangle = -i(\hbar\mu\omega/2)^{-1/2}\sqrt{n}; \langle n+1|p|n\rangle = i\mu\omega\langle n+1|x|n\rangle = i(\hbar\mu\omega/2)^{-1/2}\sqrt{n+1}$.

2.20. Ответ: $\langle n|p^2|n\rangle = \hbar\mu\omega(n+1/2)$; дисперсия флуктуаций импульса в $n-$м стационарном состоянии гармонического осциллятора равна: $\langle n|(\Delta p)^2|n\rangle = \hbar\mu\omega(n+1/2)$; дисперсия флуктуаций координаты $\langle n|(\Delta x)^2|n\rangle = (\hbar/\mu\omega)(n+1/2)$; так что произведение среднеквадратичных отклонений

$$\Delta p = (\langle n|(\Delta p)^2|n\rangle)^{-1/2}; \Delta x = (\langle n|(\Delta x)^2|n\rangle)^{-1/2}$$

равно: $\Delta p \cdot \Delta x = (\hbar/2)(2n+1), n = 0,1,2,..$ Квантовые шумы минимальны в основном (вакуумном) состоянии ($n=0$) гармонического осциллятора, описываемом гауссовским распределением по координатам (и по импульсам): $|\Psi_0(x)|^2 = (\pi x_0^2)^{-1/2}exp\{-(x/x_0)^2\}, x_0 = \sqrt{\hbar/\mu\omega}$.

2.21. Когерентное состояние

$$\Psi_\alpha(x) = |\alpha\rangle = (\pi x_0^2)^{-1/4}exp\left[\frac{1}{2}(\alpha^2 - \alpha\alpha^*)\right] \cdot exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0} - \sqrt{2}\alpha\right)^2\right]$$

удовлетворяет уравнению: $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, или

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0\frac{d}{dx} + \frac{x}{x_0}\right)\Psi_\alpha(x) = \alpha\Psi_\alpha(x)$$

с комплексным значением параметра α. Распределение по координатам описывается при этом смещенной гауссовской кривой:

$$|\Psi_\alpha(x)|^2 = (\pi x_0^2)^{-1/2}exp\left[-\left(\frac{x}{x_0} - \sqrt{2}Re\alpha\right)^2\right];$$

$\langle x\rangle = \sqrt{2}x_0 Re\alpha; \langle p\rangle = \sqrt{2}(\hbar/x_0)Im\alpha; \langle(\Delta x)^2\rangle = x_0^2/2; \langle(\Delta p)^2\rangle = (\hbar^2/2x_0^2)$. Произведение среднеквадратичных отклонений координаты и мпульса в когерентном состоянии минимально:$\Delta p \cdot \Delta x = (\hbar/2)$.

2.22. Указание: разложить $\Psi_\alpha(x)$ по полному набору стационарных состояний гармонического осциллятора

$$\Psi_n(x) = |n\rangle = (2^n n!\sqrt{\pi}x_0)^{-1/2}exp\left[-\frac{x^2}{2x_0^2}\right]H_n(x/x_0),$$

где $H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2}(d^n/d\xi^n)e^{-\xi^2} : \Psi_\alpha(x) = \sum_n C_n\Psi_n(x)$,

$$C_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\Psi_n^*(x)\Psi_\alpha(x) =$$

$$(-1)^n x_0(\sqrt{\pi}x_0 2^n n!)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\Psi_\alpha(\xi)e^{\xi^2}(d^n/d\xi^n)e^{-\xi^2},$$

$\xi = x/x_0$. Интегрируя $n-$раз по частям, находим

$$C_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}exp(-|\alpha|^2/2),$$

так что волновая функция когерентного состояния имеет вид:

$$\Psi_\alpha(x) = exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\Psi_n(x).$$

Распределение по энергетическим уровням $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$ в когерентном состоянии $\Psi_\alpha(x)$ описывается статистикой Пуассона $|C_n|^2 = (|\alpha|^{2n}/n!)e^{-|\alpha|^2}$ со средним значением $\langle n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n|C_n|^2 = |\alpha|^2$.

2.23. Указание: в импульсном представлении оператор координаты $\hat{x} = i\hbar\frac{d}{dp}$, оператор импульса $\hat{p} = p$, и гамильтониан $H = (p^2/2\mu) - (\mu\hbar^2\omega^2/2)(d^2/dp^2)$, так что уравнение Шредингера для волновой функции $C(p)$ в импульсном представлении может быть записано в виде:

$$\left[\frac{d^2}{dp^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{\mu^2\omega^2}\left(E - \frac{p^2}{2\mu}\right)\right]C(p) = 0.$$

Сделав замену $q = p/\mu\omega$, получаем уравнение Шредингера в той же форме, что и в координатном представлении:

$$\frac{d^2}{dq^2}C(q) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E - \frac{\mu\omega^2 q^2}{2}\right)C(q) = 0.$$

Волновая функция в импульсном представлении имеет вид:

$$C_n(p) = (\pi\hbar\mu\omega)^{-1/4}(2^n n!)^{-1/2} exp\left[-\frac{p^2}{2\mu\hbar\omega}\right]H_n(p/\sqrt{\mu\hbar\omega}).$$

Функция распределения по импульсам равна: $P_n(p) = |C_n(p)|^2$.

2.24. Указание: полную волновую функцию нужно искать в виде произведения волновых функций одномерного гармонического осциллятора: $\Psi_{n_1n_2n_3}(x,y,z) = \Psi_{n_1}(x)\Psi_{n_2}(y)\Psi_{n_3}(z)$.

Ответ: $E_{n_1n_2n_3} = \hbar\omega_1(n_1+1/2) + \hbar\omega_2(n_2+1/2) + \hbar\omega_3(n_3+1/2)$, где $n_i = 0,1,2,..$

2.25. Указание: оператор потенциальной энергии может быть записан в виде: $U(x) = \mu\omega^2x^2/2 - e\varepsilon x = (\mu\omega^2/2)(x - e\varepsilon/\mu\omega^2)^2 - e^2\varepsilon^2/2\mu\omega^2$. Далее необходимо ввести новые переменные: $\tilde{x} = x - e\varepsilon/\mu\omega^2; \tilde{E} = E + e^2\varepsilon^2/2\mu\omega^2$.

Ответ: энергетический спектр: $E_n = \hbar\omega(n+1/2) + e^2\varepsilon^2/2\mu\omega^2$, волновые функции $\Psi_n^\varepsilon(x) = \Psi_n(x - e\varepsilon/\mu\omega^2)$, где $\Psi_n(x)$- волновая функция обычного гармонического осциллятора; $\langle d\rangle = e\langle x\rangle = \chi\varepsilon$, статическая восприимчивость $\chi = e^2/\mu\omega^2$.

2.26. Уровни Ландау. Уравнение Шредингера имеет вид:

$$\frac{p_x^2 + (p_y - (e/c)Bx)^2 + p_z^2}{2\mu}\Psi(x,y,z) = E\Psi(x,y,z),$$

где $\vec{p} = -i\hbar\nabla-$ оператор импульса. Т.к. коэффициенты этого уравнения не зависят от y, z, то $\Psi(x,y,z)$ можно искать в виде: $\Psi(x,y,z) = e^{i(k_y y + k_z z)}\Psi(x)$, где $\Psi(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - \frac{\hbar^2k_z^2}{2\mu} - \frac{\mu\omega_B^2}{2}\left(x - \frac{\hbar k_y c}{eB}\right)^2\right]\Psi(x) = 0.$$

Ответ: Спектр энергии $E_{n,k_z}\hbar\omega_B(n+1/2) + \hbar^2k_z^2/2\mu$ имеет бесконечную кратность вырождения, т.к. не зависит от k_y; волновые функции

$$\Psi_{n,k_y,k_z}(x,y,z) = C_n e^{i(k_y y + k_z z)} exp(-\xi^2/2)H_n(\xi), C_n = (\mu\omega_B/\pi\hbar)^{1/4}(2^n n!)^{-1/2}, \omega_B = eB/\mu c.$$

2.27. Указание: вычислить производную $\partial \mid \Psi \mid^2 /\partial t$.

Ответ:

$$\vec{j} = (\hbar/2i\mu)(\Psi^*\nabla\Psi - \nabla\Psi^*\Psi) - (e/2\mu c)\vec{A} \mid \Psi \mid^2 .$$

2.28. Из уравнений Гайзенберга $i\hbar\dot{\vec{r}}(t) = [\vec{r}(t), H]_-$ следует выражение для оператора скорости $\vec{V} = (\vec{p} - (e/c)\vec{A})/\mu$. Коммутаторы: $[V_i, V_j] = (ie\hbar/\mu^2 c)\varepsilon_{ijk}B_k; [x_i, V_j] = (i\hbar/\mu)\delta_{ij}$.

2.30. Указание: направить магнитное поле $\vec{B}$ по оси z, а электрическое поле $\vec{\varepsilon}$ - по оси x и использовать калибровку вектор-потенциала $A_x = 0, A_y = Bx, A_z = 0$. Тогда гамильтониан имеет вид:

$$H = \frac{p_x^2}{2\mu} + \frac{(p_y - eBx/c)^2}{2\mu} + \frac{p_z^2}{2\mu} - e\varepsilon x.$$

Собственные функции можно выбрать в виде:

$$\Psi_{n,p_y,p_z} \equiv \mid E, p_y, p_z\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_y y + p_z z)\right]\Psi_n(x).$$

Для $\Psi_n(x)$ получается уравнение Шредингера для гармонического осциллятора.

Ответ:

$$\mid n, p_y, p_z\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_y y + p_z z)\right]\Psi_n^{osc}(x - cp_y/eB - \mu c^2\varepsilon/eB^2),$$

$$E_{n,p_y,p_z} = \hbar\omega_0(n + 1/2) + p_z^2/2\mu - c\varepsilon p_y/B - \mu c^2\varepsilon^2/2B^2, n = 0, 1, 2, ...;$$

$\Psi_n(x)-$ волновая функция осциллятора с частотой $\omega_0 = \mid eB \mid /\mu c$.

2.31. Ответ: магнитное поле вне соленоида равно нулю, к примеру,

$$B_z = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right];$$

$(B_z)_{ext} = 0$; сила Лоренца в области движения электрона также равна нулю.

Однако уровни энергии электрона на кольце смещаются под воздействием потенциала Ааронова-Бома: $E_m = (\hbar^2/2\mu r_0^2)(m - \Phi/\Phi_0)^2$, где m - магнитное квантовое число ($m = 0, \pm1, \pm2, ..$), $\Phi_0 = hc/e = 2\pi\hbar c/e$ - квант магнитного потока; $\Phi = \pi R^2 B$ - магнитный поток внутри соленоида. Волновая функция равна при этом $\Psi_n(\varphi) = (2\pi)^{-1/2}exp\{im\varphi\}$. Потенциал Ааронова-Бома снимает вырождение состояний с положительными и отрицательными значениями магнитного квантового числа $\pm m$.

2.32. Указание: волновую функцию, удовлетворяющую уравнению $(H_0 + V)\Psi = E\Psi$, нужно искать в виде: $\Psi = C_1\Psi_1^{(0)} + C_2\Psi_2^{(0)}$, где $H_0\Psi_i^{(0)} = E_i^{(0)}\Psi_i^{(0)}, i = 1, 2$. Система уравнений для C_n :

$$\sum_n [V_{kn} + (E_k^{(0)} - E)\delta_{kn}]C_n = 0,$$

имеет нетривиальные решения если энергия системы равна:

$$E = \frac{1}{2}(E_1^{(0)} + E_2^{(0)}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(E_2^{(0)} - E_1^{(0)})^2 + \mid V_{12} \mid^2},$$

где $V_{nk} = \langle n|V|k\rangle-$ матричный элемент, взятый по невозмущенным волновым функциям $\Psi_i^{(0)}$.

2.33. Ответ:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}}R(r)\left[e^{i\alpha_0}Y_{1,0}(\theta, \varphi) + e^{i\alpha_1}Y_{1,+1}(\theta, \varphi) + e^{i\alpha_{-1}}Y_{1,-1}(\theta, \varphi)\right].$$

Здесь α_j- некоторые вещественные константы, $R(r)-$ произвольная функция от r.

2.34. Указание: в области $x > 0$ использовать решение у. Шредингера для гармонического осциллятора, далее сшить это решение с тривиальным решением в области $x < 0$. Останутся только уровни с нечетными $n = 2l+1, l = 0, 1, 2, ..$

Ответ: $E_l = \hbar\omega(2l + 3/2); \Psi_l(x) = \Psi^{osc}_{2l+1}(x)$, где волновая функция осциллятора с частотой $\omega = \sqrt{\mid k \mid / \mu}$ имеет вид

$$\Psi^{osc}_n(x) = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} exp\left(\frac{\mu\omega x^2}{2\hbar}\right) H_n\left(x\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\right),$$

$H_n(\xi)$– полином Эрмита.

3.1. Ответ:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + U(r) = T_r + \frac{1}{2\mu r^2}\vec{L}^2 + U(r),$$

где оператор радиальной кинетической энергии записывается в виде:

$$T_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r \cdot ...\right).$$

Оператор квадрата момента импульса

$$\vec{L}^2 = -\hbar^2\Delta_{\theta\varphi} = -\hbar^2\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\right].$$

Полный набор составляют операторы $H, \vec{L}^2, L_z = -i\hbar\partial/\partial\varphi$, так что полная волновая функция имеет вид $\Psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$. Шаровая функция $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ удовлетворяет уравнениям:

$$\vec{L}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1)Y_{lm}; L_z Y_{lm} = \hbar m Y_{lm}.$$

В центрально-симметричном поле уравнение Шредингера сводится к уравнению для радиальной функции $R(r)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r}\frac{d^2}{dr^2}(rR) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}R + U(r)R = ER.$$

3.2. Указание: воспользоваться уравнением для функции $R(r)$ (з.3.1) и сделать подстановку $R(r) = \chi(r)/r$.

Ответ: Уровни энергии $E_n = (\pi\hbar n)^2/(2\mu r_0^2), n = 1, 2, ..$ Волновые функции

$$\Psi_n(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0}}\frac{1}{r}sin\left(\frac{\pi n}{r_0}r\right), r \le r_0.$$

Сила давления $F_n = -(\partial E_n/\partial r_0) = (\pi\hbar n)^2/(\mu r_0^3) > 0$.

3.3. Ответ: $\langle r\rangle = r_0/2, \langle(\Delta r)^2\rangle = (r_0^2/12)(1 - 6/\pi^2 n^2); p_r = -i\hbar\partial/\partial r$.

3.4. Ответ: $\langle r\rangle = 3a/2; \langle(\Delta r)^2\rangle = 3a^2/4, r = a = \hbar^2/\mu e^2$– первый боровский радиус.

3.5. Указание: в сферических координатах

$$\nabla = \{\partial/\partial r, (1/r)(\partial/\partial\theta), (1/rsin\theta)(\partial/\partial\varphi)\}.$$

Для плотности электрического тока

$$\vec{j} = (e\hbar/2i\mu)(\Psi^*\nabla\Psi - \nabla\Psi^*\Psi)$$

в атоме водорода с волновыми функциями $\Psi_{nlm}(r\theta,\varphi) = R_{nl}(r)P_{lm}(cos\theta)e^{im\varphi}$, где $P_{lm}(cos\theta)$– вещественный полином Лежандра, находим

$$j_r = 0, j_\theta = 0, j_\varphi = \frac{\hbar m}{\mu r sin\theta} \mid \Psi_{nlm} \mid^2.$$

3.6. Указание: средний потенциал $\varphi_e(r)$, создаваемый электронным облаком в точке $\vec{r}$, определяется решением уравнения Пуассона $\Delta\varphi_e = -4\pi\rho(r)$, где плотность электрического заряда имеет вид $\rho(r) = -|e| \mid \Psi_{100} \mid^2 (r)$, причем $\mid \Psi_{100} \mid^2 = (1/\pi a^3)exp(-2r/a)$ зависит только от модуля радиус-вектора r. При условии, что $\varphi_e(0) < \infty; \varphi_e(\infty) = 0$, для потенциала электронного облака находим: $\varphi_e(r) = (|e|/a)(1 + a/r)exp(-2r/a)$. С учетом потенциала ядра $\varphi_N = |e|/r$ полный потенциал, создаваемый атомом водорода на расстоянии r от центра равен $\varphi(r) = (|e|/a)(1 + a/r)exp(-2r/a)$, где $a-$ боровский радиус.

3.7. Ответ: $[L_+, L_-] = 2\hbar L_z; [L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm; L_z(L_\pm|l, m\rangle) = \hbar(m \pm 1)L_\pm|l, m\rangle$.

3.8. Указание: воспользоваться операторными соотношениями $L_+L_- = \vec{L}^2 - L_z^2 + L_z, (L_-)^+ = L_+, \langle l, m-1 \mid L_- \mid l, m\rangle = \langle l, m \mid L_+ \mid l, m-1\rangle^*$.

Ответ: отличны от нуля следующие матричные элементы:

$$\langle l, m \mid L_+ \mid l, m-1\rangle = \langle l, m-1 \mid L_- \mid l, m\rangle = \hbar\sqrt{(l+m)(l-m+1)};$$

$$\langle l, m \mid L_x \mid l, m-1\rangle = \langle l, m-1 \mid L_x \mid l, m\rangle = (\hbar/2)\sqrt{(l+m)(l-m+1)};$$

$$\langle l, m \mid L_y \mid l, m-1\rangle = -\langle l, m-1 \mid L_y \mid l, m\rangle = -(i\hbar/2)\sqrt{(l+m)(l-m+1)}.$$

3.9. Ответ: 1) $\langle L_z\rangle = \hbar m; \langle L_x\rangle = \langle L_y\rangle = 0$.

2) $\langle(\Delta L_x)^2\rangle\langle(\Delta L_y)^2\rangle = (\hbar^4/4)[l(l+1) - m^2]^2 \geq (\hbar^4 m^2/4); \langle(\Delta L_z)^2\rangle = 0$.

4.1. Указание: начальную волновую функцию разложить по собственным функциям оператора импульса, которые в этом случае являются стационарными состояниями.

Ответ: Состояние 1 - нестационарное. $\Psi(x, t) = (1/2\hbar\sqrt{\pi})exp\{imx^2/2\hbar t\}$.

4.2. Ответ:

$$\Psi(r, \theta, \varphi, t) = 2^{-1/2}[R_{10}(r)Y_{00}(\theta, \varphi)exp\{-iE_1 t/\hbar\} + R_{21}(r)Y_{10}(\theta, \varphi)exp\{-iE_2 t/\hbar\}],$$

где E_1, E_2 - энергии основного и первого возбужденного состояния атома водорода. Среднее значение дипольного момента атома в момент времени $t : \langle d_z\rangle(t) = C_0\ e\ a\ sin\omega_{21}t$, где $_0 \simeq 1$. Атом будет излучать на частоте $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar = (3/8)m_e e^4/\hbar^3$.

4.3. Ответ: $\Psi(x, t) = 2^{-1/2}[\Psi_1(x)exp\{-iE_1 t/\hbar\} + \Psi_2(x)exp\{-iE_2 t/\hbar\}]$.

4.4. Указание: разложить начальную волновую функцию по волнам де-Бройля. При этом начальная волновая функция в импульсном представлении равна

$$C(p) = \left(\frac{\sigma^2}{\pi\hbar^2}\right)^{1/4} exp\left(-\frac{\pi^2\sigma^2}{2\hbar^2}\right).$$

Ответ:

$$\Psi(x, t) = (\pi\sigma^2)^{-1/4}(1 + i\hbar t/m\sigma^2)^{-1/2} exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2(1 + i\hbar t/m\sigma^2)}\right];$$

$$\mid \Psi(x, t) \mid^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + (\hbar t/m\sigma^2)^2}} exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2[1 + (\hbar t/m\sigma^2)^2]}\right].$$

$\Delta x = \sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle} = (\sigma/\sqrt{2})\sqrt{1 + (\hbar t/m\sigma^2)^2}$.

4.5. Ответ: Средний магнитный момент $\langle\vec{\mu}\rangle = (0, 0, \mu_z = \mu_B/2)$. Магнито-дипольного излучения не будет, т.к. средний магнитный момент не изменяется во времени.

4.6. Указание: разложить начальное когерентное состояние по стационарным состояниям гармонического осциллятора $\Psi_n(x)$ с энергией $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ (см. з.2.22). Волновая функция в момент времени t может быть найдена при помощи оператора эволюции:

$$\Psi(x, t) = exp\{-i\hat{H}t/\hbar\}\Psi(x, 0) = \sum_n C_n exp\{-iE_n t/\hbar\}\Psi_n(x),$$

где коэффициенты C_n найдены в задаче 2.23.

Ответ:

$$\Psi_\alpha(x,t) = (\pi x_0^2)^{-1/4} e^{-i\omega t/2} exp\left[\frac{1}{2}(\alpha^2(t) - \mid \alpha \mid^2)\right] exp\left[-\frac{1}{2}(\frac{x}{x_0} - \sqrt{2}\alpha(t))^2\right],$$

$\alpha(t) = \alpha exp(-i\omega t);$

$$\mid \Psi_\alpha(x,t) \mid^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi} x_0} exp\left[-\frac{1}{x_0^2}(x - x_c(t))^2\right].$$

Центр тяжести волнового пакета совершает гармонические колебания в соответствии с классическими уравнениями движения:

$$x_c(t) = \sqrt{2} x_0 Re\left(\alpha e^{i\omega t}\right) = x_{max} cos\omega t,$$

а форма остается неизменной.

4.7. Указание: волновую функцию можно искать в виде:

$$\Psi(t) = C_1(t)\Psi_1 exp(-iE_1 t/\hbar) + C_2(t)\Psi_2 exp(-iE_2 t/\hbar),$$

где $\hat{H}_0\Psi_i = E_i\Psi_i, i = 1,2$. Пренебрегая колебаниями на удвоенной частоте для коэффициентов $C_i, i = 1,2$ получаем уравнения: $\ddot{C}_i + \Omega^2 C_i = 0$, где $\Omega = \mid V_{12} \mid /2\hbar -$ частота Раби, $V_{12} = -d_{12}\varepsilon_0, d_{12} = \langle\Psi_1 \mid d \mid \Psi_2\rangle -$ матричный элемент оператора дипольного момента по начальным волновым функциям. Если в начальный момент времени $t = 0$ электрон находится на нижнем энергетическом уровне, т.е. $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$, то волновая функция в момент времени $t > 0$ имеет вид:

$$\Psi(t) = cos\Omega t exp(-iE_1 t/\hbar)\Psi_1 - i\{V_{21}/2\hbar\Omega\} sin\Omega t exp(-iE_2 t/\hbar)\Psi_2.$$

Вероятность возбуждения системы осциллирует с частотой Раби: $P_2(t) = sin^2\Omega t$.

4.8. Ответ: координаты частицы в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля, эволюционируют следующим образом:

$$x(t) = x(0) + v_x(0)\frac{sin\omega_c t}{\omega_c} + v_y(0)\frac{1 - coa\omega_c t}{\omega_c};$$

$$y(t) = y(0) + v_y(0)\frac{sin\omega_c t}{\omega_c} - v_x(0)\frac{1 - coa\omega_c t}{\omega_c}.$$

4.9. Ответ:

$$p(t) = p(0) + e\varepsilon t; v(t) = (\Delta d/2\hbar) sin\left[\frac{p(0)d}{\hbar} + \Omega_B t\right];$$

$$x(t) = x(0) + \frac{\Delta}{e\varepsilon} sin(\Omega_B t/2) sin\left[\frac{p(0)d}{\hbar} + \frac{\Omega_B t}{2}\right];$$

$\Omega_B = e\varepsilon d/\hbar -$ частота блоховских осцилляций.

4.10. Указание: удобно перейти во вращающуюся систему отсчета и ввести новые спиновые переменные:

$$X(t) = \sigma_x cos\omega_0 t + \sigma_y sin\omega_0 t,$$

$$Y(t) = -\sigma_x sin\omega_0 t + \sigma_y cos\omega_0 t.$$

Отметим, что эти операторы явно зависят от времени и удовлетворяют следующим уравнениям движения:

$$\frac{d^3}{dt^3}X(t) + \Omega^2 X(t) = 0; \frac{d^2}{dt^2}Y(t) + \Omega^2 Y(t) = 0;$$

$$\frac{d^3}{dt^3}\sigma_z(t) + \Omega^2\sigma_z(t) = 0,$$

где $\Omega^2 = \omega_0^2 + \Delta^2; \Delta = -2g\mu_0 B_0$.

Ответ:

$$X(t) = X(0) + \frac{\omega_0}{\Omega} Y(0) sin\Omega t - \frac{1 - cos\Omega t}{\omega^2} (\omega_0^2 X(0) + \omega_0 \Delta \sigma_z(0);$$

$$\sigma_z(t) = \sigma_z(0) + \frac{\Delta}{\Omega} Y(0) sin\Omega t - \frac{1 - cos\Omega t}{\omega^2} (\Delta^2 \sigma_z(0) + \omega_0 \Delta X(0));$$

$$Y(t) = Y(0) cos\Omega t - \frac{sin\Omega t}{\Omega} (\omega_0 X(0) + \Delta \sigma_z(0)).$$

Матрицы Паули в неподвижной системе отсчета могут быть найдены при помощи соотношений:

$$\sigma_x(t) = X(t) cos\omega_0 t - Y(t) sin\omega_0 t;$$

$$\sigma_y(t) = X(t) sin\omega_0 t + Y(t) cos\omega_0 t.$$

5.1. Ответ: $E_n^{(2)} = - \mid e\varepsilon \mid^2 /2m\omega^2$, где $\omega-$ собственная частота осциллятора.

5.2. Ответ: уменьшится:

$$E_0^{(2)} = \sum_k \frac{\mid V_{0k} \mid^2}{E_0^{(0)} - E_k^{(0)}} < 0,$$

т.к. $E_0^{(0)} < E_k^{(0)}$.

5.3. Указание: воспользоваться формулами теории возмущений:

$$E_n = E_n^{(0)} + V_{nn} + \sum_{k \neq n} \frac{\mid V_{nk} \mid^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}};$$

$$\Psi_n = \Psi_n^{(0)} + \sum_{k \neq n} \frac{V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \Psi_k^{(0)}.$$

Здесь $V_{nk}-$ матричный элемент оператора энергии возмущения по начальным волновым функциям $\Psi_n^{(0)}, \Psi_k^{(0)}$. Матричные элементы:

$$x_{nk} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n} \delta_{n,k+1} + \sqrt{n+1} \delta_{k,n+1});$$

$$(x^2)_{nl} = \frac{\hbar}{2m\omega} [\sqrt{n(n-1)} \delta_{n,l+2} + (2n+1) \delta_{nl} + \sqrt{(n+1)(n+2)} \delta_{n,l-2}];$$

$$(x^3)_{nk} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^{3/2} [\sqrt{n(n-1)(n-2)} \delta_{n,k+3} + 3n^{3/2} \delta_{n,k+1} +$$

$$3(n+1)^{3/2} \delta_{n,k-1} + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)} \delta_{n,k-3}];$$

$$(x^4)_{nn} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 [3n^2 + (3n+1)^2].$$

Ответ:

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2) + 3\zeta \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 (2n^2 + 2n + 1) -$$

$$\frac{\lambda^2}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^3 (30n^2 + 30n + 11).$$

5.4. Указание: невозмущенная волновая функция электрона в атоме водорода имеет вид:

$$\Psi_{nlm} =\mid nlm\rangle = R_{nl}(r)P_{lm}(cos\theta)e^{im\varphi}.$$

Энергия взаимодействия электрона со слабым магнитным полем $V = (i\hbar e/\mu c)(\vec{A}\cdot\nabla)$ пропорциональна оператору проекции момента импульса на ось z $L_z = -i\hbar(\partial/\partial\varphi)$:

$$V = \left(\frac{i\hbar\omega_c}{2}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -\frac{\omega_c}{2}L_z,$$

где $\omega_c = eB/\mu c-$ циклотронная частота, $\mu-$ масса электрона.

Ответ: $E_n^{(1)} = -(\hbar\omega_c/2)m$, $m-$ магнитное квантовое число.

5.5. Ответ: уровни энергии с четными n не сдвигаются. Сдвиг нечетных энергетических уровней определяется соотношением: $E_{2l+1} = 2\alpha/a$.

5.6. Указание: невозмущенные волновые функции частицы на кольце имеют вид: $\Psi_m^{(0)}(\varphi) = (2\pi)^{-1/2}exp\{im\varphi\}$.

Ответ: сдвиг энергетических уровней: $E_m^{(2)} = (2\mu r_0^2/\hbar^2)(e\varepsilon r_0)^2/(4m^2-1)$.

5.7. Указание: сделать замену переменных: $x' = x, y' = y, z' = az/b$. Т.к. $\mid\varepsilon\mid\ll 1, \varepsilon = (a-b)/a$, полный гамильтониан может быть представлен в виде: $H = H_0 + V$, где

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}\right); V = -\frac{\hbar^2}{m}\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial z'^2}.$$

Используя выражения для собственной функции и энергии основного состояния частицы в сферической яме с непроницаемыми стенками

$$\Psi_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\frac{1}{r'}sin\frac{\pi r'}{a}; E_0^{(0)} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2},$$

для поправки первого порядка получаем: $E_0^{(1)} = (\hbar^2\pi^2\varepsilon/3ma^2)$.

5.8. Указание: уровню энергии с $n = 2$ отвечают 4 невозмущенные собственные функции:

$$\Psi_1^{(0)} =\mid 200\rangle = R_{20}(r); \Psi_2^{(0)} =\mid 210\rangle = R_{21}(r)cos\theta;$$

$$\Psi_3^{(0)} =\mid 211\rangle = R_{21}(r)sin\theta e^{i\varphi}; \Psi_4^{(0)} =\mid 21,-1\rangle = R_{21}(r)sin\theta e^{-i\varphi},$$

где

$$R_{20}(r) = \frac{1}{\sqrt{8\pi a^3}}\left(1 - \frac{r}{2a}\right)e^{-r/2a}, R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{8\pi a^3}}\frac{r}{2a}e^{-r/2a}.$$

Собственные функции полного гамильтониана следует искать в виде: $\Psi = \sum_{i=1}^4 C_i\Psi_i^{(0)}$. При этом энергетические уровни вычисляются из условия равенства нулю детерминанта

$$\mid (E_2^{(0)} - E)\delta_{ik} + \langle i\mid V\mid k\rangle\mid= 0,$$

$i,k = 1,2,3,4$. Отличны от нуля только два матричных элемента оператора энергии взаимодействия электрона с внешним полем $V = -\mid e\varepsilon\mid z : \langle 1\mid V\mid 2\rangle = \langle 2\mid V\mid 1\rangle = 3\mid e\varepsilon\mid a$.

Ответ: Уровень энергии расщепляется на два невырожденных подуровня:

$$E_I = E_2^{(0)} + 3\mid e\varepsilon\mid a; E_{II} = E_2^{(0)} - 3\mid e\varepsilon\mid a;$$

и на один двукратновырожденный подуровень: $E_{III} = E_{IV} = E_2^{(0)}$ с соответсвующими волновыми функциями:

$$\Psi_I = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_1^{(0)} + \Psi_2^{(0)}\right); \Psi_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_1^{(0)} - \Psi_2^{(0)}\right);$$

$$\Psi_{III} = C_3^{III}\Psi_3^{(0)} + C_4^{III}\Psi_4^{(0)}; \Psi_{IV} = C_3^{IV}\Psi_3^{(0)} + C_4^{IV}\Psi_4^{(0)}.$$

5.9. Ответ: $E_1 = E^{(0)} + A$ -трехкратно вырожденный уровень; $E_2 = E^{(0)} - 3A$ -невырожденный уровень. Здесь $E^{(0)}$ - невозмущенная энергия $1-S$ состояния.

5.10. Под воздействием постоянного возмущения двукратно вырожденный уровень энергии расщепляется на два подуровня с энергией $E+\Delta$ и волновой функцией $\Psi_1(0) = 2^{-1/2}(\Psi_1^{(0)} + \Psi_2^{(0)})$; с энергией $E-\Delta$ и волновой функцией $\Psi_2(0) = 2^{-1/2}(\Psi_1^{(0)} - \Psi_2^{(0)})$. Временная эволюция этих стационарных состояний описывается соотношениями:

$$\Psi_1(t) = \Psi_1(0)exp\{-i(E+\Delta)t/\hbar\}; \Psi_2(t) = \Psi_1(0)exp\{-i(E-\Delta)t/\hbar\}.$$

Волновая функция системы в момент времени t в общем случае равна суперпозиции состояний $\Psi_1(t)$ и $\Psi_2(t)$: $\Psi(t) = C_1\Psi_1(t) + C_2\Psi_2(t)$. Из начального условия $\Psi(0) = \Psi_1^{(0)}$ следует: $C_1 = C_2 = 1/\sqrt{2}$. Таким образом,

$$\Psi(t) = exp\{-iEt/\hbar\}\left(cos\frac{\Delta t}{\hbar}\Psi_1^{(0)} - isin\frac{\Delta t}{\hbar}\Psi_2^{(0)}\right).$$

Ответ: вероятность перехода из состояния $\Psi_1^{(0)}$ в состояние $\Psi_2^{(0)}$ осциллирует со временем: $P(t) = sin^2(\Delta t/\hbar)$.

5.14. Указание: вероятность туннелирования в квазиклассическом приближении определяется соотношением:

$$D = D_0 exp\left[-2\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{U(x)-E}dx\right],$$

где x_1, x_2 - координаты точек поворота: $U(x_i) = E, i = 1, 2$.

Ответ: Вероятность туннелироания (коэффициент прозрачности барьера) равен:

$$D(E) = D_0 exp\left[-\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\frac{(U_0-E)^{3/2}}{e\varepsilon}\right].$$

Средний по энергиям электронов в металле коэффициент прозрачности определяется соотношением: $\langle D\rangle = \langle D_0\rangle exp(-\varepsilon_0/\varepsilon)$, где $\langle D_0\rangle, \varepsilon_0$ - константы, зависящие от типа металла. Ток холодной эмиссии $J(\varepsilon) = J_0\langle D_0\rangle = J_* exp\{-\varepsilon/\varepsilon_0\}$.

5.15. Указание: применить правило квантования Бора-Зоммерфельда:

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(E_n - mgx)}dx = \pi\hbar(n+3/4).$$

$g-$ ускорение свободного падения.

Ответ:

$$E_n = \frac{1}{2}(9\pi^2 mg^2\hbar^2)^{1/3}(n+3/4)^{2/3}; n = 0, 1, ..$$

5.16. Ответ: коэффициент прозрачности

$$D \simeq exp\left[-\frac{2}{\hbar a}\sqrt{2mU_0}\int_{-x_0}^{+x_0}\sqrt{x_0^2 - x^2}dx\right] = exp\left[-\frac{\pi a}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{U_0}}(U_0 - E)\right]$$

Здесь $x_2 = -x_1 = x_0 = a\sqrt{1-E/U_0}-$ координаты точек поворота.

5.17. Вероятность перехода системы из состояния $\Psi_i^{(0)}$ в новое состояние Ψ_f под действием внезапного возмущения

$$V(t) = -e\varepsilon_0 x\theta(t), \theta(t) = 1(t>0), \theta(t) = 0(t<0),$$

равна

$$P_{fi} = \left|\int dx\Psi_i^{(0)}(x)\Psi_f^*(x)\right|^2.$$

Здесь $\Psi_i^{(0)}$ - $i-$ая волновая функция обычного гармонического осциллятора, Ψ_f- $f-$ая волновая функция смещенного осциллятора $\Psi_f(x) = \Psi_f^{(0)}(x-x_0), x_0 = F/\mu\omega^2$ - смещение центра потенциальной ямы осциллятора с массой μ под действием силы $F = e\varepsilon_0$ (см. з.2.25.). Используя явный вид полинома Эрмита

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2},$$

для перекрестного интеграла получаем:

$$\int dx \Psi_0^{(0)}(x)\Psi_k^*(x) = \xi_0^k \sqrt{\pi} exp(\xi_0^2/4), \xi_0 = x_0\sqrt{\mu\omega/\hbar} = F/\sqrt{\hbar\mu\omega^3}.$$

Ответ: вероятность перехода осциллятора из основного в $k-$ое возбужденное состояние описывается статистикой Пуассона:

$$P_{k0} = \frac{N^k}{k!} e^{-N},$$

где $N = \xi_0^2/2 = F^2/2\mu\hbar\omega^3$.

5.18. Вероятность перехода осциллятора из основного в первое возбужденное состояние равна

$$P_{10} = \frac{1}{\hbar^2} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} dt V_{10} e^{i\omega t} \mid^2,$$

где частота перехода между уровнями $\omega_{10} = \omega, V_{10} = -e\varepsilon(t)\sqrt{\hbar/2\mu\omega}-$ матричный элемент энергии взаимодействия с электрическим полем.

Ответ:

$$P_{10} = \frac{e^2 A^2 \tau}{2\mu\hbar\omega} exp\left[-\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2\right].$$