Задача

Дано:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = \cos\left(\dfrac{5\pi x}{2}\right) \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = u(L,t) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

где $t > 0$ и

$$a = 2, \quad L = 1 \tag{2}$$

Решение

Используем метод Фурье (метод разделения переменных), а именно: будем искать решение $u(x,t)$ задачи (1) в следующей форме:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

где $X(x)$ зависит только от координаты *x*, а $T(t)$ – только от времени *t*. В этом случае имеем из (1):

$$\frac{\partial^2 (XT)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (XT)}{\partial x^2}$$

$$XT'' = a^2 TX''$$

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda = \text{const}$$

поскольку левая дробь зависит только от *t*, а правая – только от *x*. Таким образом, приходим к следующим задачам:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(L) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

и

$$T'' + \lambda a^2 T = 0 \tag{4}$$

Найдем параметр λ. Всего возможны три случая: 1) $\lambda < 0$, 2) $\lambda = 0$, 3) $\lambda > 0$. В первых двух случаях получаются тривиальные (нулевые) решения исходной задачи (1). Поэтому остановимся на

$$\lambda > 0$$

Полагая $\lambda = p^2$, имеем для задачи (3)

$$X'' + p^2 X = 0$$

Решение этого уравнения:

$$X(x) = A_1 \cos px + A_2 \sin px$$

где постоянные A_1 и A_2 найдем (с учетом того, что

$$X'(x) = -pA_1 \sin px + pA_2 \cos px)$$

из граничных условий в (3):

$$\begin{cases} X'(0) = pA_2 = 0 \\ X(L) = A_1 \cos pL + A_2 \sin pL = 0 \end{cases}$$

Чтобы получить нетривиальное решение, нужно допустить, что $A_1 \neq 0$, откуда

$$\cos pL = 0 \quad \rightarrow \quad p = p_n = \frac{\pi(2n+1)}{2L} \tag{5}$$

и

$$\lambda = \lambda_n = \frac{\pi^2 (2n+1)^2}{4L^2}, \quad n = 0,1,2...$$

Получаем целый набор решений системы (3):

$$X_n(x) = \tilde{X}_n \cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2L} x\right), \quad n = 0,1,2... \tag{6}$$

где $\tilde{X}_n$ – некоторые постоянные коэффициенты. Решая (4) с учетом (5), имеем также набор решений для $T(t)$:

$$T_n(t) = \alpha_n \cos(p_n at) + \beta_n \sin(p_n at) =$$

$$= \alpha_n \cos\left(\frac{\pi(2n+1)a}{2L} t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{\pi(2n+1)a}{2L} t\right), \quad n = 0,1,2... \tag{7}$$

где α_n и β_n – также некоторые постоянные коэффициенты. Таким образом, с учетом (6) и (7) искомое решение задачи (1) принимает вид:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2L}x\right)\left(A_n\cos\left(\frac{\pi(2n+1)a}{2L}t\right)+B_n\sin\left(\frac{\pi(2n+1)a}{2L}t\right)\right)$$

Коэффициенты A_n и B_n подлежат определению. Их можно найти, используя начальные условия:

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2L}x\right)dx$$

$$B_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^L\psi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2L}x\right)dx$$

или, с учетом конкретных значений для рассматриваемой задачи (2),

$$A_n=2\int_0^1\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}x\right)dx$$

$$B_n=\frac{1}{\pi n}\int_0^1\psi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}x\right)dx$$

где

$$\varphi(x)\equiv u(x,0)=\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right)$$

$$\psi(x)=\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Коэффициенты A_n:

$$A_n=2\int_0^1\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}x\right)dx$$

Используя известное тригонометрическое тождество

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)) \qquad (8)$$

получаем

$$A_n = 2\int_0^1 \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}x - \frac{5\pi x}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}x + \frac{5\pi x}{2}\right)\right)dx =$$

$$= \int_0^1 (\sin(\pi(n-2)x) + \sin(\pi(n+3)x))dx =$$

$$= \int_0^1 \sin(\pi(n-2)x)dx + \int_0^1 \sin(\pi(n+3)x)dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi(n-2)}\cos(\pi(n-2)x)\Big|_0^1 - \frac{1}{\pi(n+3)}\cos(\pi(n+3)x)\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{\pi(n-2)}(\cos(\pi(n-2))-1) - \frac{1}{\pi(n+3)}(\cos(\pi(n+3))-1) =$$

$$= \frac{1-\cos(\pi(n-2))}{\pi(n-2)} + \frac{1-\cos(\pi(n+3))}{\pi(n+3)} =$$

$$= \frac{1-(-1)^n}{\pi(n-2)} + \frac{1+(-1)^n}{\pi(n+3)}$$

Коэффициенты B_n:

$$B_n = \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}x\right)dx$$

Снова используя тождество (8), получаем

$$B_n = \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}x - \frac{\pi x}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}x + \frac{\pi x}{2}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\int_0^1 (\sin(\pi n x) + \sin(\pi(n+1)x))dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\int_0^1 \sin(\pi n x)dx + \frac{1}{2\pi n}\int_0^1 \sin(\pi(n+1)x)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\cdot\left(-\frac{1}{\pi n}\cos(\pi n x)\right)\Bigg|_0^1 + \frac{1}{2\pi n}\cdot\left(-\frac{1}{\pi(n+1)}\cos(\pi(n+1)x)\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2 n^2}(\cos(\pi n)-1) - \frac{1}{2\pi^2 n(n+1)}(\cos(\pi(n+1))-1) =$$

$$= \frac{1-\cos(\pi n)}{2\pi^2 n^2} + \frac{1-\cos(\pi(n+1))}{2\pi^2 n(n+1)} =$$

$$= \frac{1-(-1)^n}{2\pi^2 n^2} + \frac{1+(-1)^n}{2\pi^2 n(n+1)}$$

Итак, искомое решение исходной задачи (1) с учетом конкретных значений параметров (2):

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}x\right)\left(\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi(n-2)} + \frac{1+(-1)^n}{\pi(n+3)}\right)\cos(\pi(2n+1)t) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1-(-1)^n}{2\pi^2 n^2} + \frac{1+(-1)^n}{2\pi^2 n(n+1)}\right)\sin(\pi(2n+1)t)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}x\right)\left(\left(\frac{1-(-1)^n}{n-2} + \frac{1+(-1)^n}{n+3}\right)\cos(\pi(2n+1)t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{1-(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{n+1}\right)\sin(\pi(2n+1)t)\right)$$