МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского

В.Б. Гильденбург, Е.В. Суворов

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Учебное пособие

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета ННГУ
для студентов, обучающихся по
направлениям подготовки 03.03.03 «Радиофизика», 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии и специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем»

Нижний Новгород
2017

УДК 537.8
ББК 22.313
Г47

Г47 Гильденбург В.Б., Суворов Е.В.: Основы электродинамики. Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2017 – 113 с.

Рецензенты: д.ф.-м.н., профессор **В.Г. Гавриленко**,
д.ф.-м.н., профессор **С.В. Голубев**

Данное пособие занимает промежуточное положение между учебником по электродинамике и кратким справочником. Основы теории и наиболее важные формулы, относящиеся к основным разделам классической макроскопической электродинамики (электро- и магнитостатика, постоянные токи, квазистационарные и волновые поля в однородных и неоднородных средах, линиях передачи и резонаторах, излучение и дифракция волн) излагаются в нем с достаточной полнотой, но без подробных выводов. Предназначается для студентов радиофизического факультета ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 «Радиофизика», 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем».

Ответственный за выпуск:
зам. председателя методической комиссии радиофизического факультета ННГУ
д.ф.м.н., профессор **Е.З. Грибова**

УДК 538.56
ББК 22.336

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем учебном пособии кратко излагаются основные законы, представления и методы теории электромагнитного поля, знание которых необходимо для понимания, описания и расчета различных классов электромагнитных явлений. Фактически пособие представляет собой нечто среднее между подробным учебником-монографией и кратким справочником, содержащим необходимые сведения для решения конкретных учебных и научных задач электродинамики. Логические связи между основными узловыми моментами излагаемого материала присутствуют, но подробности многих выводов и доказательств опущены. На наш взгляд, книга в известной степени восполняет определенный пробел в имеющемся наборе учебных пособий по данному предмету, заключающийся в отсутствии компактного, но в то же время достаточно полного и логически последовательного изложения основных положений и методов теории как в ее фундаментальных, так и прикладных аспектах. Потребность в существовании такого пособия несомненно ощутима как для студентов различных направлений подготовки, хотя бы частично касающихся физики электромагнитных явлений (особенно, в период экзаменационной сессии), так и для аспирантов и научных работников смежных специальностей, столкнувшихся в процессе своей работы с необходимостью в краткое время почерпнуть сведения в относительно новой для них области.

Общее содержание и построение изложения в основном соответствуют программам курсов Электродинамика и Прикладная электродинамика, читавшихся авторами студентам Радиофизического факультета и Высшей школы общей и прикладной физики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

В пособии использована Гауссова абсолютная система единиц; знак перед мнимой единицей в комплексном представлении монохроматических полей соответствует записи временного множителя в виде $\exp(-i\omega t)$; предполагается знакомство студентов с основными понятиями и правилами векторной алгебры, векторного и тензорного анализа. Разделы 2, 3, 4, 7, 9 написаны Е.В. Суворовым, разделы 5, 6, 10-13 – В.Б. Гильденбургом, разделы 1 и 8 написаны авторами совместно.

Для более углубленного изучения предмета и получения навыков в решении задач можно рекомендовать список учебных пособий, приведенный в конце книги.

1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В ВАКУУМЕ И СРЕДЕ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Электромагнитное поле в вакууме характеризуется векторами *напряженности электрического поля* $\mathbf{E}$ и *магнитной индукции* $\mathbf{B}$, связанными между собой и с *плотностями электрического заряда* ρ и *электрического тока* $\mathbf{j}$ уравнениями Максвелла. В абсолютной системе единиц Гаусса эти уравнения записываются в виде:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{1.4}$$

где $c \cong 3\cdot 10^{10}$ см/с – универсальная константа, представляющая собой скорость света в вакууме.

Пространственные распределения плотностей ρ и $\mathbf{j}$ определяют полный заряд Q любого объема V и электрический ток I через любую поверхность S:

$$Q = \iiint\limits_V \rho dV, \quad I = \iint\limits_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{s}. \tag{1.5}$$

Из уравнений (1.1) и (1.4) следует *закон сохранения заряда* (так называемое *уравнение непрерывности*)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \tag{1.6}$$

или, в интегральной форме:

$$\frac{dQ}{dt} + I_\Sigma = 0, \tag{1.7}$$

где $I_\Sigma = \oint\!\!\oint\limits_\Sigma \mathbf{j}\cdot d\mathbf{s}$ – полный ток, вытекающий из объема V с зарядом Q через ограничивающую его замкнутую поверхность Σ. В силу этого закона ток I через любую поверхность S может быть определен как поток заряда, т.е. заряд, протекающий через эту поверхность за единицу времени.

Связь электромагнитных явлений с механическими, определяющая возможные принципы измерения полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ и раскрывающая тем самым физическое содержание излагаемой теории, устанавливается на основании выражения, постулирующего либо *силу Лоренца*, действующую на движущийся точечный электрический заряд q

:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{B} \tag{1.8}$$

($\mathbf{V}$ – скорость заряда), либо объемную плотность этой силы:

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{B} \tag{1.9}$$

Эквивалентность обоих выражений легко установить, используя формализм δ-функции Дирака, т.е. представляя плотности заряда и тока движущегося точечного заряда в виде:

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = q\mathbf{V}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0), \tag{1.10}$$

где $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ – «трехмерная» δ- функция; $\mathbf{r}$ – радиус вектор точки с компонентами x, y, z; $\mathbf{r}_0(t)$ – радиус-вектор заряда в момент времени t.

Наряду с законом сохранения заряда (1.6), (1.7), из уравнений Максвелла (1.1)-(1.4) следуют еще несколько законов сохранения (энергии, импульса, момента импульса). Основное значение из них при анализе работы большинства реальных электродинамических систем и технических устройств имеет вытекающий из уравнений (1.1) и (1.2) закон сохранения энергии (теорема Пойнтинга):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{S} + \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = 0, \tag{1.11}$$

или, в интегральной форме,

$$\frac{dW}{dt} + \Pi_\Sigma + P = 0. \tag{1.12}$$

Здесь введены обозначения:

$$w = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)\ , \ \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}, \tag{1.13}$$

$$W=\iiint\limits_V w dV\,,\quad P=\iiint\limits_V \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,dV\,,\quad \Pi_\Sigma=\iint\limits_\Sigma \mathbf{S}\cdot\mathbf{ds}\,. \tag{1.14}$$

Величины w и $\mathbf{S}$ представляют собой соответственно плотность энергии и вектор плотности потока энергии электромагнитного поля в вакууме; скалярное произведение $\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$ есть плотность отдаваемой полем (или поглощаемой током) мощности, т.е. работа электрического поля над током в единице объема за единицу времени. Объемные интегралы W и P определяют соответственно полную электромагнитную энергию W и полную отдаваемую мощность P в произвольном объеме V; поверхностный интеграл Π_Σ есть полный поток энергии электромагнитного поля через замкнутую поверхность Σ, ограничивающую этот объем.

Задача, с которой чаще всего приходится сталкиваться при изучении различных электромагнитных процессов, заключается в решении уравнений Максвелла (1.1)-(1.4) при заданных плотностях заряда и тока, играющих роль источников электромагнитного поля. В то же время, согласно выражениям (1.8) или (1.9) для силы Лоренца, заряды и токи (фактически несущие их тела) сами являются объектами силового воздействия со стороны поля, и их пространственно-временное поведение само может определяться полем, поэтому в общем случае приходится находить *самосогласованное решение*, определяющее динамику и структуру как самих полей, так и их источников.

Уравнения для макроскопического электромагнитного поля в среде могут быть получены путем усреднения уравнений (1.1)-(1.4) для «микроскопических» или «истинных» (точно определенных в каждой точке пространства в каждый момент времени) величин $\mathbf{E}_{mic}$, $\mathbf{B}_{mic}$, ρ_{mic}, $\mathbf{j}_{mic}$ по «физически бесконечно малому» объему. Предполагается, что такой объем содержит большое число микроскопических элементов среды (электронов, ионов, атомов или молекул), но имеет малые размеры в масштабе рассматриваемой макроскопической задачи. При традиционном способе описания поля в среде усредненные значения плотности заряда и тока представляются в виде (угловые скобки обозначают усреднение по физически бесконечно малому объему):

$$<\rho_{mic}>=\rho-\mathrm{div}\mathbf{P}\,, \tag{1.15}$$

$$<\mathbf{j}_{mic}>=\mathbf{j}+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+c\ \mathrm{rot}\,\mathbf{M}\ , \tag{1.16}$$

где ρ – плотность *свободных зарядов*, не входящих в состав электрически нейтральных молекул и способных перемещаться в среде на макроскопически большие расстояния; $\mathbf{j}$ – определяемая их движением плотность *свободных токов* (часто называемых также *токами проводимости*); $\mathbf{P}$ – вектор *электрической поляризации* среды (средний электрический дипольный момент единицы объема), определяемый смещением зарядов, связанных в электрически нейтральные атомы или молекулы; $\mathbf{M}$ – вектор *магнитной поляризации* или *намагниченности* среды (средний магнитный дипольный момент единицы объема), определяемый внутримолекулярными вихревыми токами. Выражения для электрического ($\mathbf{p}$) и магнитного ($\mathbf{m}$) дипольных моментов любого отдельного элемента среды (молекулы) или макроскопического объекта в целом приведены соответственно в разделах 2 и 4.

Для описания среднего макроскопического поля в среде на основе представления средних источников в виде (1.15), (1.16) вводятся четыре вектора: *средняя напряженность электрического поля* $\mathbf{E} = \langle \mathbf{E}_{mic} \rangle$, *средняя магнитная индукция* $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B}_{mic} \rangle$, *электрическая индукция* (или *электрическое смещение*) $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ и *напряженность магнитного поля* $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$. Первые два из этих векторов имеют прямой физический смысл, поскольку находятся путем усреднения истинных полей. Вторые два вектора играют вспомогательную роль и вводятся лишь для достижения компактности записи получаемых из (1.1)-(1.4) усредненных уравнений:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{1.17}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1.18}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{1.19}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho. \tag{1.20}$$

Одной из главных задач *электронной теории* сред является отыскание так называемых *материальных уравнений*, связывающих векторы $\mathbf{j}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ с векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. При достаточно малых величинах полей эти уравнения являются линейными и для широкого класса изотропных сред при не слишком быстром изменении полей во времени и пространстве имеют простейшую форму:

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{j}_{ext}, \tag{1.21}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \tag{1.22}$$

где σ, ε и μ – некоторые константы, характеризующие данную среду и называемые соответственно *проводимостью* (или *электропроводностью*), *диэлектрической проницаемостью* (или *диэлектрической постоянной*) и *магнитной* *проницаемостью* (*магнитной постоянной*). Вектор $\mathbf{j}_{ext}$ в правой части (1.21) описывает возможное присутствие в среде так называемых сторонних (не зависящих от поля в среде) электрических токов. Выражения (1.22) могут быть заменены эквивалентными выражениями для электрической и магнитной поляризаций:

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}, \; \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}. \tag{1.23}$$

Величины $\chi_e = (\varepsilon - 1)/4\pi$ и $\chi_m = (\mu - 1)/4\pi$ называются соответственно *электрической* и *магнитной восприимчивостью*. Вещества с отличными от нуля значениями σ, χ_e, χ_m называют соответственно проводниками, диэлектриками, магнетиками. Наряду с *индуцированными* (наведенными полем) поляризациями (1.23), в некоторых средах могут присутствовать также сторонние (спонтанные) поляризации $\mathbf{P}_{ext}$, $\mathbf{M}_{ext}$, которые должны вводиться в качестве дополнительных слагаемых в правые части (1.23) и (с множителем 4π) в соответствующие выражения для векторов электрической и магнитной индукции (1.22).

Нужно отметить, что запись уравнений Максвелла в среде в виде (1.17)-(1.20) не является единственно возможной. Иногда вместо вспомогательных векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ в уравнения непосредственно вводятся члены, определяющие средние плотности связанных источников в правых частях (1.15), (1.16): *плотность связанных зарядов* $\rho_b = -\mathrm{div}\mathbf{P}$, плотность *тока поляризации* $\mathbf{j}_p = \partial \mathbf{P}/\partial t$ и плотность *тока намагниченности* $\mathbf{j}_m = c\ \mathrm{rot}\,\mathbf{M}$. Не является единственно возможной также и сама форма представления (1.15), (1.16). В частности, в *электродинамике плазмы*, как правило, более предпочтительным является описание макроскопического поля при помощи трех векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$, основанное на введении единой эквивалентной электрической поляризации согласно равенству $<\mathbf{j}_{mic}> = \partial \mathbf{P}/\partial t$. Смысл вектора электрической индукции $\mathbf{D}$ в уравнениях Максвелла (1.17)-(1.20) при этом, вообще говоря, изменяется, а введения добавочного вспомогательного вектора $\mathbf{H}$ не требуется. В уравнениях (1.17)-(1.20) при таком описании следует заменить $\mathbf{H}$ на $\mathbf{B}$, а величины ρ и $\mathbf{j}$ (в отсутствие сторонних источников) положить равными нулю. Наконец, следует отметить, что не существует единства в названии и обозначении вектора, определяющего силовое действие магнитного поля на ток в вакууме. В ряде руководств при записи выражения для силы Лоренца и уравнений для поля в вакууме этот вектор обозначается $\mathbf{H}$ и называется напряженностью магнитного поля; впрочем, какой-либо серьезной путаницы (более существенной, чем чисто терминологическая) при этом не происходит, поскольку в вакууме (в используемой нами гауссовой системе единиц) всегда $\mathbf{B} = \mathbf{H}$.

Законы сохранения заряда и энергии для поля в среде могут быть записаны в той же форме (1.6), (1.7), (1.11), (1.12), что и в вакууме. При этом для вектора Пойнтинга $\mathbf{S}$, определяющего плотность потока энергии в законе сохранения энергии (1.11), (1.12), может быть принято универсальное (пригодное для любой среды) выражение

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \tag{1.24}$$

обобщающее приведенное выше (в формуле (1.13)) для вакуума. Однако для определения плотности энергии поля в среде w вообще говоря, оказывается необходимым анализ конкретных микромоделей среды, и достаточно общее выражение для w может быть получено лишь для некоторых ограниченных классов явлений и моделей среды. В частности, это оказывается возможным для статических (или близких к ним) полей в диэлектриках и магнетиках, описываемых линейными материальными уравнениями (1.22). Плотность энергии в этом случае полностью определяется векторами индукции и напряженности поля:

$$w = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{DE} + \mathbf{BH}) = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right). \tag{1.25}$$

Уравнения Максвелла (1.12)-(1.15) (как и уравнения для поля в вакууме (1.1)-(1.4)) могут быть записаны в интегральной форме:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{c}\iint_S \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} \cdot \mathbf{dS}, \tag{1.26}$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\iint_S \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \cdot \mathbf{dS}. \tag{1.27}$$

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = 0, \tag{1.28}$$

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{dS} = 4\pi \iiint_V \rho\, dV. \tag{1.29}$$

В левых частях уравнений (1.26), (1.27) интегрирование производится по произвольному замкнутому линейному контуру L, а в правых – по произвольной поверхности S, ограничиваемой этим контуром (опирающейся на контур). Направление обхода по контуру L (определяющее направление элементарных касательных векторов $\mathrm{d}\mathbf{l}$) и направления векторов нормали $\mathbf{n}$ к поверхности S (определяющие направления векторов элементарных площадок $\mathbf{dS} = \mathbf{n}\,dS$) согласованы по правилу правого винта. В левых частях уравнений (1.28), (1.29) интегрирование производится по произвольной замкнутой поверхности S; ограничивающей объем V; нормаль $\mathbf{n}$ на поверхности – внешняя.

Из интегральных уравнений (1.26)-(1.29) легко получить *граничные условия* для полей на любой поверхности. При условии ограниченности всех компонент поля эти условия, предусматривающие возможность совпадения поверхности с границей среды или присутствия на ней так называемых поверхностных (полностью сосредоточенных на поверхности) свободных зарядов и токов, имеют вид:

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)=4\pi\Omega, \tag{1.30}$$
$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)=0, \tag{1.31}$$
$$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=0, \tag{1.32}$$
$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\frac{4\pi}{c}\mathbf{i}, \tag{1.33}$$

где индексами 1 и 2 помечены поля в двух бесконечно близких точках, лежащих по разные стороны граничной поверхности; $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности, направленный от 1 к 2; Ω – поверхностная плотность заряда (заряд, приходящийся на единицу площади поверхности); $\mathbf{i}$ – вектор поверхностной плотности тока, определяющий согласно соотношению $dI=\mathbf{i}\cdot\boldsymbol{\tau}\,dl$ величину элементарного тока dI, протекающего по поверхности через лежащий на ней элементарный отрезок dl ($\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор, касательный к поверхности и нормальный к отрезку dl). Условия (1.31), (1.32) выражают непрерывность нормальной к границе компоненты вектора магнитной индукции и тангенциальной компоненты напряженности электрического поля. Условия (1.30), (1.33) определяют величины скачков нормальной компоненты электрической индукции и тангенциальной компоненты напряженности магнитного поля при наличии на границе поверхностных зарядов или поверхностных токов.

Уравнения Максвелла для поля в вакууме или в среде с материальными уравнениями вида (1.21), (1.22) при заданных источниках поля являются линейными. Поэтому их решения удовлетворяют *принципу суперпозиции*, играющему важную роль в решении задач электродинамики. Согласно этому принципу, поле, создаваемое системой нескольких произвольных источников, представляет собой в каждой точке пространства и в каждый момент времени сумму полей, созданных каждым из этих источников в отдельности.

2. ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОЛЯ И ИСТОЧНИКИ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Электростатика представляет собой раздел электродинамики, в котором изучаются постоянные (не зависящие от времени) электрические поля, создаваемые заданными распределениями электрических зарядов. Как следует из общей системы уравнений Максвелла (1.17)-(1.20), электростатическое поле в среде определяется двумя уравнениями:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho; \tag{2.2}$$

где $\rho(\mathbf{r})$ - заданное статическое распределение объемной плотности свободных электрических зарядов, которое можно рассматривать в качестве *источника* электростатического поля.

Уравнения (2.1), (2.2) могут быть переписаны в интегральном виде (см. также (1.27), (1.29)):

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = 0, \tag{2.1a}$$

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}ds = 4\pi\int_V \rho dV = 4\pi Q; \tag{2.2a}$$

в уравнении (2.1а) L – произвольный замкнутый контур, а в уравнении (2.2а) V – произвольный объем, S –ограничивающая его замкнутая поверхность, Q - полный электрический заряд в объеме V. Интегральная форма записи (2.2а) называется также *теоремой Гаусса-Отроградского*.

Из уравнения (2.1) следует, что электростатическое поле $\mathbf{E}$ может быть представлено как *градиент* некоторой скалярной функции φ, называемой *потенциалом* электростатического поля:

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi = -\nabla\varphi. \tag{2.3}$$

Выражение (2.3) позволяет однозначно определить электрическое поле по его заданному потенциалу; потенциал при заданном электрическом поле определен с точностью до произвольной константы, однозначно определяется лишь разность потенциалов между любыми двумя точками в пространстве:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\,\mathbf{l}. \qquad (2.4)$$

В силу уравнения (2.1а) интеграл в (2.4) не зависит от формы пути, соединяющего точки 1 и 2. Обычно (если это не противоречит условиям задачи) принимается, что потенциал равен нулю в бесконечно удаленной точке.

В общем случае потенциал электростатического поля в однородной среде с линейным материальным соотношением (см. также (1.22)):

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \qquad (2.5)$$

подчиняется уравнению Пуассона, которое получается при подстановке выражений (2.3) и (2.5) в (2.2):

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho / \varepsilon, \qquad (2.6)$$

где Δ – дифференциальный оператор второго порядка, называемый *оператором Лапласа*; в декартовой системе координат $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$).

Ниже будем рассматривать поля, создаваемые свободными зарядами в вакууме, полагая $\varepsilon = 1$. Все полученные решения в этом случае решения могут быть перенесены на случай однородной (и безграничной) среды с $\varepsilon = \text{const} \neq 1$: при одних и тех же источниках поля $\mathbf{E}$ и φ во всех точках среды уменьшаются в ε раз по сравнению с вакуумом, а поле $\mathbf{D}$ во всех точках среды не изменяется, т.е. совпадает с полем $\mathbf{E}$, рассчитанным для вакуума. Фактически, все решения для потенциала и электрического поле в однородной среде с диэлектрической проницаемостью ε получаются из соответствующих решений в вакууме путем замены ρ на ρ/ε. Физический смысл этой замены в том, что поле и потенциал определяются суммарной плотностью свободных (ρ) и связанных (ρ_b) зарядов, которая в случае однородного диэлектрика равна

$$\rho_\Sigma = \rho + \rho_b = \rho/\varepsilon \quad (\rho_b = -\mathrm{div}\mathbf{P}), \qquad (2.7)$$

где $\mathbf{P}$ – вектор поляризации диэлектрика (см. также (1.15)). В отсутствие источников (в области, где плотность заряда $\rho = 0$) потенциал, как следует из (2.6), удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \qquad (2.8)$$

Задачи, решаемые в электростатике, могут быть разбиты на два класса: *прямые задачи* – заключающиеся в нахождении электростатического поля или потенциала по заданному пространственному распределению электрического заряда, и *обратные задачи* – заключаюшиеся в нахождении источников (т.е. распределения электрических зарядов) по заданному распределению электрического поля или потенциала. К классу обратных могут быть отнесены и те задачи, в которых информация о поле и источниках задана лишь частичным образом и требуется найти ее недостающую часть.

Решение прямых задач электростатики опирается, по существу, на известное выражение для электростатического поля и его потенциала, создаваемых точечным электрическим зарядом q:

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{r^3}\ , \tag{2.9}$$

$$\varphi = \frac{q}{r}, \tag{2.10}$$

где r – вектор, проведенный из точки расположения точечного заряда в точку наблюдения, r – его модуль; кроме того, принято, что потенциал обращается в нуль на бесконечности.

Выражения (2.9), (2.10) представляют собой фактически *функции Грина* для поля и потенциала, которые позволяют представить поле и потенциал произвольного (но локализованного в ограниченной области) распределения электрического заряда в виде интегралов источников:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{R^3}, \tag{2.11}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R}\ , \tag{2.12}$$

Здесь $dV' = dx'dy'dz'$, $R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ – расстояние от «точки наблюдения» $\mathbf{r}$ (с координатами x, y, z) до «точки интегрирования» $\mathbf{r}'$ (с координатами x', y', z'), Выражение (2.12) представляет собой решение уравнения Пуассона (2.6) при $\varepsilon = 1$ с граничным условием $\varphi = 0$ на бесконечности.

В случае, когда заряд распределен по поверхности или по линейному контуру, выражения (2.14), (2.15) на основании замены $\rho dV' \to \Omega dS'$ или $\rho dV' \to \Omega dS'$ могут быть соответственно записаны в виде

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \iint \frac{\Omega(x',y',z')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{R^3} dS', \tag{2.11a}$$

$$\varphi(x,y,z)=\iint\frac{\Omega(x',y',z')}{R}dS', \qquad (2.12а)$$

или

$$\mathbf{E}(x,y,z)=\int\frac{\kappa(x',y',z')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{R^3}dl', \qquad (2.11б)$$

$$\varphi(x,y,z)=\int\frac{\kappa(x',y',z')}{R}dl', \qquad (2.12б)$$

где Ω и κ - соответственно поверхностная и линейная (погонная) плотности зарядов (заряд, приходящийся на единицу площади поверхности или на единицу длины линейного контура).

Несмотря на наличие общих выражений (2.11), (2.12) для электростатического поля и потенциала, создаваемых в однородной среде заданными распределениями электрических зарядов, имеются задачи, которые более удобно решать исходя из интегрального уравнения (2.2а) и соображений симметрии; кроме того, следует иметь в виду, что при некоторых идеализированных постановках задач, когда электрический заряд не локализован в ограниченной области пространства, не всегда удается отсчитывать потенциал от бесконечно удаленной точки, как это подразумевается в выражениях (2.12, 2.13).

Если произвольное распределение электрических зарядов задано в некоторой ограниченной области, то на расстояниях r от этой области, больших по сравнению с ее характерным (наибольшим) размером *a,* создаваемое этими зарядами поле удобно представить в виде *разложения по мультиполям*, т.е. в виде суммы полей точечных электрических мультиполей, расположенных в начале координат (помещаемом где-либо внутри системы зарядов). Такая сумма получается путем разложения в ряд подынтегрального выражения в (2.12) по степеням малых параметров x'_α/r (индекс $\alpha=1,2,3$ нумерует оси декартовой системы координат x,y,z):

$$\varphi(x,y,z)=\frac{q}{r}-p_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{1}{r}+\frac{Q_{\alpha\beta}}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\frac{1}{r}-\frac{Q_{\alpha\beta\gamma}}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x_\alpha\partial x_\beta\partial x_\gamma}\frac{1}{r}+\dots , \qquad (2.13)$$

где в каждом из слагаемых по дважды встречающемуся индексу подразумевается суммирование. Член этого ряда с номером n (нумерация начинается с $n=0$) представляет собой потенциал мультиполя n-го порядка: $n=0$ – точечный заряд (монополь), $n=1$ – диполь, $n=2$ – квадруполь, $n=3$ – октуполь, при произвольном n – «2^n-поль». Величины q, p_α, $Q_{\alpha\beta}$, … характеризуют различные *мультипольные моменты* данного распределения зарядов:

$$q = \int \rho(\mathbf{r}') dV' \tag{2.14}$$

– полный заряд системы,

$$p_\alpha = \int \rho(\mathbf{r}') x'_\alpha dV' \tag{2.15}$$

– компоненты вектора дипольного момента

$$Q_{\alpha\beta} = \int \rho(\mathbf{r}') x'_\alpha x'_\beta dV' \tag{2.16}$$

– компоненты тензора квадрупольного момента и т.д.
Заметим, что наряду с (2.16) часто используется несколько другое определение тензора квадрупольного момента

$$D_{\alpha\beta} = 3Q_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \int \rho(\mathbf{r}')(r')^2 dV', \tag{2.16a}$$

в явном виде указывающее на то, что соответствующий член в разложении (2.13), записываемый с учетом равенства $\Delta(1/r) = 0$ в виде $(D_{\alpha\beta}/6)(\partial^2/\partial x_\alpha \partial x_\beta)(1/r)$, определяется лишь пятью независимыми величинами, а именно пятью независимыми компонентами симметричного тензора $D_{\alpha\beta}$, сумма диагональных компонент которого равна нулю. Заметим, что мультипольный момент n-го порядка (определяемый тензором n-го ранга) не зависит от выбора начала координат, если все предыдущие моменты (порядка 0, 1, 2, …, n-1) равны нулю.

В частности, система из двух точечных зарядов $+q$ и $-q$, разнесенных на расстояние Δl, представляет собой диполь с моментом $\mathbf{p} = q\Delta\mathbf{l}$, где вектор $\Delta\mathbf{l}$ направлен от отрицательного заряда к положительному. Потенциал и поле точечного диполя, получаемого в результате предельного перехода ($q \to \infty$, $\Delta\mathbf{l} \to 0$ при постоянном $\mathbf{p}$), в любой точке с $\mathbf{r} \neq 0$ записываются в виде

$$\varphi = \frac{\mathbf{pr}}{r^3}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{p}}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{pr})\mathbf{r}}{r^3}. \tag{2.18}$$

В сферической системе координат (r, ϑ, ψ) функция Грина для уравнения Пуассона может быть представлена в виде разложения

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta', \psi') Y_{lm}^*(\vartheta, \psi), \tag{2.19}$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ – радиус-векторы точки наблюдения и точки источника, задаваемые соответственно координатами r, ϑ, ψ и r', ϑ', ψ'; Y_{lm} – так называемые сферические гармоники (см. подробнее разд. 3); $r_<$ и $r_>$ – соответственно меньшая и большая из величин r и r'.

При использовании сферической системы координат потенциал вне области источников ($r > a$, где a – максимальное расстояние от заряда до начала координат) потенциал представляется в виде разложения:

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\frac{Q_{lm}}{r^{l+1}}Y_{lm}(\vartheta,\psi) \qquad , \tag{2.20}$$

где

$$Q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int\rho(\mathbf{r}')r'^{l}Y^{*}_{lm}(\vartheta',\psi')dV'. \ , \tag{2.21}$$

Интегрирование в (2.21) производится по всей области источников $r' < a$. Представление (2.20), (2.21) аналогично разложению (2.13) для потенциала вне области источников, но является более удобным при описании потенциала мультиполей высоких порядков

В области источников ($r < a$) потенциал может быть представлен в виде разложения по так называемым внутренним и внешним мультиполям:

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\left(\frac{Q'_{lm}}{r^{l+1}} + Q''_{lm}\ r^{l}\right)Y_{lm}(\vartheta,\psi), \tag{2.22}$$

где величины

$$Q'_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int_{r'<r}\rho(\mathbf{r}')r'^{l}Y^{*}_{lm}(\vartheta',\psi')dV',$$
$$Q''_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int_{r'>r}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{r'^{l+1}}Y^{*}_{lm}(\vartheta',\psi')dV' \tag{2.23}$$

определяют внутренние и внешние мультипольные моменты распределений зарядов, расположенных соответственно в областях $r' < r$ и $r' > r$

Решение обратной задачи электростатики для однородной среды, т.е. нахождение распределения электрических зарядов по заданному распределению поля или потенциала, сводится, в соответствии с уравнениями (2.2), (2.5), (2.6), к выполнению операции дифференцирования заданных функций пространственных координат. Здесь, правда, важно уметь выделить особенности в распределении поля и потенциала (особые точки, линии или поверхности, где эти функции являются недифференцируемыми в обычном смысле, но могут быть проанализированы с помощью аппарата обобщенных функций). Ниже перечислены простейшие типы особенностей поля и потенциала и отвечающих им источников.

Особые поверхности:

а) скачок нормальной компоненты электрического поля или производной от потенциала по нормали при переходе через поверхность свидетельствует о наличии на ней поверхностного заряда с поверхностной плотностью

$$\Omega = \frac{1}{4\pi}\left(E_{n2} - E_{n1}\right) = -\frac{1}{4\pi}\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_2 - \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_1\right), \tag{2.24}$$

где нормаль к поверхности разрыва, разделяющей области 1 и 2, считается направленной из области 1 в область 2; заметим, что при наличии скачка нормальной компоненты электрической поляризации в среде на соответствующей поверхности существует связанный поверхностный заряд с поверхностной плотностью

$$\Omega_b = -\left(P_{n2} - P_{n1}\right);$$

б) скачок потенциала при переходе через поверхность свидетельствует о наличии на ней двойного электрического слоя с мощностью

$$P_s = \frac{1}{4\pi}\left(\varphi_2 - \varphi_1\right); \tag{2.25}$$

величина P_s представляет собой нормальную компоненту поверхностной плотности дипольного момента (нормаль к поверхности считается направленной из области 1 в область 2).

Особые линии:

а) особенность в распределении потенциала при приближении к некоторой линии типа

$$\varphi = -2\kappa \ln\frac{r}{r_0}, \tag{2.26}$$

или особенность в распределении поля типа

$$E_r = \frac{2\kappa}{r} \tag{2.27}$$

где r – расстояние до линии, свидетельствует о наличии на ней линейного электрического заряда с линейной плотностью κ;

б) особенность в распределении потенциала при приближении к некоторой линии типа

$$\varphi = \frac{2p_l}{r}\cos\psi, \tag{2.28}$$

где r и ψ - полярные координаты в плоскости, перпендикулярной к особой линии, свидетельствует о том, что эта линия представляет собой дипольную нить с погонной плотностью дипольного момента p_l, ориентированного в направлении $\psi = 0$.

Особые точки:

а) особенность в распределении потенциала при приближении к некоторой точке типа

$$\varphi = \frac{q}{r}, \tag{2.29}$$

или особенность в распределении поля типа

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{r^3}, \tag{2.30}$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, проведенный от некоторой точки в точку наблюдения, свидетельствует о наличии в этой точке точечного заряда q;

б) особенность потенциала вида

$$\varphi = \frac{p}{r^2}\cos\vartheta, \tag{2.31}$$

где ϑ - сферический полярный угол, отсчитываемый от некоторого фиксированного направления (полярной оси), свидетельствует о наличии в точке r =0 точечного диполя с дипольным моментом $\mathbf{p}$, ориентированного в направлении $\vartheta = 0$.

Очевидно, что высшим точечным мультиполям соответствуют особенности более высокого порядка. Потенциал мультиполя n-го порядка (если принять, что он описывается соответствующим членом ряда (2.13) или (2.20) вплоть до точки $r = 0$) имеет в начале координат особенность вида $1/r^{n+1}$. По аналогии можно ввести также двумерные особенности высоких порядков.

3. ПРОВОДНИКИ И ДИЭЛЕКТРИКИ. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

3.1 Общие соотношения

В неоднородном диэлектрике уравнение Лапласа для электростатического потенциала, как следует из уравнений (2.1), (2.2), (2.5) заменяется более сложным уравнением

$$\nabla(\varepsilon\nabla\varphi) = -4\pi\rho\,. \tag{3.1}$$

решения которого могут быть получены аналитически лишь при некоторых частных видах зависимости диэлектрической проницаемости от координат.

Более широкий класс решений может быть найден в случае так называемых *кусочно-однородных сред* – сред, сформированных из однородных областей с резким (в макроскопических масштабах) изменением диэлектрической проницаемости при переходе через границу раздела. Из уравнений Максвелла в интегральной форме следуют *граничные условия*, определяющие изменение характеристик электростатического поля при переходе через произвольную поверхность, разделяющую две области пространства (см. также (1.30), (1.32)):

$$D_{n2} - D_{n1} = 4\pi\Omega\,, \tag{3.2}$$

$$E_{n2} - E_{n1} = 4\pi\,\Omega_\Sigma = 4\pi(\Omega + \Omega_b), \tag{3.3}$$

$$P_{n2} - P_{n1} = -\,\Omega_b\,. \tag{3.4}$$

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}\,, \tag{3.5}$$

Здесь Ω, Ω_b - поверхностные плотности свободных и связанных электрических зарядов на границе раздела, $\Omega_\Sigma = \Omega + \Omega_b$, нормаль **n** к границе направлена из области 1 в область 2; E_τ - тангенциальная компонента электрического поля (проекция вектора **E** на любое направление в плоскости, касающейся граничной поверхности). Приведенные граничные условия (3.2), (3.3), (3.5), можно записать также в виде граничных условий для потенциала:

$$\varepsilon_2\,\partial\varphi/\partial n\big|_2 - \varepsilon_1\,\partial\varphi/\partial n\big|_1 = -4\pi\Omega\,, \tag{3.2a}$$

$$\partial\varphi/\partial n\big|_2 - \partial\varphi/\partial n\big|_1 = -4\pi\Omega_\Sigma\,, \tag{3.3a}$$

$$\partial\varphi/\partial\tau\big|_1 = \partial\varphi/\partial\tau\big|_2 \tag{3.5a}$$

Условия (3.5), (3.5а) получаются в предположении, что нормальная компонента поля **E** не обращается в бесконечность на границе раздела, при этом из условия непрерывности тангенциальной производной потенциала (3.5а) следует непрерывность самого потенциала:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \tag{3.5б}$$

При наличии на некоторой поверхности двойного электрического слоя (см.(2.25)) электростатический потенциал и тангенциальная компонента поля претерпевают разрывы:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi P_s\,, \tag{3.6}$$

$$E_{\tau 2} - E_{\tau 1} = -4\pi\,\partial P_s/\partial\tau\,, \tag{3.6а}$$

где P_s – мощность двойного электрического слоя (нормальная компонента поверхностного дипольного момента). Решение задачи электростатики в каждом однородном участке диэлектрика ищется так же, как в случае однородной среды, а «сшивание» решений на границах раздела производится с помощью граничных условий.

Внутри *проводников* – тел с проводимостью $\sigma \neq 0$ – электростатическое поле равно нулю, в силу чего граничные условия (3.5), (3.5б) для внешнего поля на их поверхностях приобретают вид:

$$E_\tau = \partial\varphi/\partial\tau = 0, \qquad \varphi = \text{const}, \tag{3.7}$$

т.е. границы проводников представляют собой эквипотенциальные поверхности. Заметим, что тому же условию отсутствия тангенциальной составляющей и постоянства потенциала (3.6) удовлетворяет также электрическое поле на границе диэлектрика с бесконечно большой диэлектрической проницаемостью, откуда следует, что незаряженное диэлектрическое тело с $\varepsilon = \infty$ оказывает на внешнее поле такое же влияние, как незаряженный проводник той же формы и размеров.

Граничное условие для нормальной компоненты внешнего поля на границе проводника

$$D_n = 4\pi\,\Omega\,, \qquad \varepsilon\,\partial\varphi/\partial n = -4\pi\Omega\,, \tag{3.8}$$

(**n** – внешняя нормаль на границе) при расчетах поля обычно играет вспомогательную роль и служит для нахождения распределения поверхностного электрического заряда.

Важную роль при решении граничных задач электростатики играет *теорема существования и единственности решения*, которая гласит, что решение задачи о нахождении электростатического поля внутри некоторой ограниченной области пространства существует и единственно, если внутри нее задано распределение диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{r})$ и свободного электрического заряда $\rho(\mathbf{r})$, а на ее границе задано либо распределение электростатического потенциала $\varphi(\mathbf{r}_S)$ (*граничное условие Дирихле*), либо распределение его нормальной производной $\partial\varphi/\partial n(\boldsymbol{r}_S)$ (*граничное условие Неймана*). Последнее граничное условие эквивалентно заданию на границе нормальной компоненты электростатического поля; решение для задачи является в этом случае как бы условно единственным, поскольку к потенциалу при этом во всей рассматриваемой области может быть добавлена произвольная константа, не изменяющая, однако, величины поля. Решение существует и единственно также в том случае, если на части ограничивающей поверхности задано граничное условие Дирихле, а на оставшейся части поверхности – граничное условие Неймана. Кроме того, теорема существования и единственности справедлива и в том случае, когда внутри объема имеется произвольное количество проводников заданной формы с заданным суммарным зарядом или потенциалом на каждом из них. Наконец, теорема работает и в том случае, когда внешняя граница области унесена на бесконечность, но выполняется условие достаточно быстрого убывания потенциала: $\varphi(r \to \infty) < (C/r)$, где C – ограниченная постоянная.

Существует большое количество методов решения граничных задач электростатики. Наиболее общим является метод нахождения функций Грина в граничных задачах Дирихле или Неймана для заданной ограничивающей поверхности, позволяющий при заданных источниках и граничных условиях записывать решение в квадратурах. Однако сама задача нахождения Функции Грина является довольно громоздкой и решается достаточно редко. Остальные методы решения граничных задач электростатики являются в той или иной степени *конструктивными*, т.е. пригодными для подобранных каким-то способом ограничивающих поверхностей и граничных условий на них.

3.2. Металлизация эквипотенциальных поверхностей

Если известно решение какой-либо электростатической задачи, то на его основе можно получить решение новых (граничных) задач, заменяя любую эквипотенциальную поверхность проводником; заряд на проводнике при этом строго фиксирован и в соответствии с теоремой Гаусса - Остроградского (2.3) равен полному свободному заряду внутри объема, ограниченного эквипотенциальной поверхностью.

3.2.1. *Метод изображений для металлической плоскости.*

Два точечных заряда одинаковой величины и противоположных знаков создают электрическое поле с плоской эквипотенциальной поверхностью $\varphi = 0$; эта плоскость перпендикулярна отрезку, соединяющему точечные заряды, и проходит через его середину. Металлизация этой эквипотенциальной поверхности дает решение для поля точечного заряда q вблизи металлической плоскости (металлического полупространства) – поле точечного заряда в данной граничной задаче такое же, как для безграничной задачи, в которой металлическая плоскость заменяется *зарядом-изображением* $q' = - q$, помещенным в симметричную точку относительно металлической плоскости. Если перед металлической плоскостью (z = 0) задано некоторое распределение зарядов $\rho(x,y,z)$, то электростатическое поле в этой граничной задаче поле такое же, как в безграничной задаче с добавленным распределением электрического заряда-изображения $\rho' = -\rho\ (x,y,-z)$ (ось z перпендикулярна плоскости).

3.2.2. *Метод изображений для металлической сферы*.

Два точечных заряда разной величины и противоположных знаков создают электрическое поле со сферической эквипотенциальной поверхностью $\varphi = 0$; центр сферы находится на продолжении отрезка, соединяющего точечные заряды, со стороны меньшего по модулю заряда, радиус сферы a и расстояния до зарядов (r, r') удовлетворяют так называемому *соотношению инверсии*: $rr' = a^2$. Металлизация этой эквипотенциальной поверхности позволяет решить две задачи: о поле точечного заряда снаружи от заземленной металлической сферы и о поле точечного заряда внутри заземленной металлической сферы. Решения обеих задач формулируются одинаково: поле точечного заряда q, находящегося на расстоянии r от центра заземленной металлической сферы радиуса a (внутри сферы или вне ее), совпадает с полем этого точечного заряда и заряда-изображения $q' = -q(a/r)$, помещенного на луче, проходящем через центры сферы и точечный заряд q, на расстоянии $r' = a^2/r$ от центра (в безграничной задаче). Аналогичный метод изображений применим и к произвольному распределению электрического заряда $\rho(r, \vartheta, \varphi)$ (внутри или вне заземленной сферы): поле в граничной задаче совпадает с полем заданного распределения и распределения-изображения в безграничной задаче, которое удовлетворяет преобразованию инверсии $\rho'(r', \vartheta, \varphi) = -\left(a^3/r'^3\right)\rho\left(a^2/r', \vartheta, \varphi\right)$. Метод изображений пригоден и для случая изолированной металлической сферы с заданным зарядом Q. В этом случае для зарядов внутри сферы решение такое же, как в случае изолированной сферы, а для зарядов вне сферы к зарядам-изображениям добавляется точечный заряд в центре сферы $Q' = Q - \int \rho' dV'$.

3.3. Метод изображений для плоской границы раздела двух диэлектриков

Поле точечного заряда q, расположенного в среде I с диэлектрической проницаемостью ε_1 вблизи плоской границы раздела со средой II с диэлектрической проницаемостью ε_2, также может быть найдено методом изображений. При этом поле в среде I такое же, как поле в безграничной среде с диэлектрической проницаемостью ε_1, создаваемое исходным зарядом q и зарядом-изображением $q' = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$, помещенным в симметричную (относительно границы раздела) точку. Поле же в среде II такое же как поле в безграничной среде с диэлектрической проницаемостью ε_2, создаваемое зарядом-изображением $q'' = \dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$, помещенным в точку нахождения исходного заряда q. Описанный метод очевидным образом обобщается на случай произвольного распределения электрических зарядов $\rho(\mathbf{r})$ вблизи плоской границы раздела двух диэлектриков.

Общим для всех методов изображений является то, что заряды-изображения помещаются вне тех областей пространства, где ищется электрическое поле в граничной задаче.

3.4. Метод диэлектрических заполнений

3.4.1. *Заполнение пространства между эквипотенциальными поверхностями.*

Поле электрической индукции $\mathbf{D}(\mathbf{r})$, создаваемое произвольным заданным распределением свободных электрических зарядов, не меняется при заполнении однородным диэлектриком пространства между любыми двумя эквипотенциальными поверхностями. Оно остается неизменным и при заполнении всего пространства неоднородным диэлектриком, если градиент диэлектрической проницаемости всюду перпендикулярен эквипотенциальным поверхностям, т.е. $\nabla\varepsilon \parallel \mathbf{E}$.

3.4.2. *Заполнение пространства внутри силовых трубок электростатического поля.*

В системе проводников с фиксированными потенциалами электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (и, соответственно, потенциал $\varphi(\mathbf{r})$) остаются неизменными при заполнении однородным диэлектриком силовой трубки электрического поля. Эти распределения не меняются и при заполнении всего пространства неоднородным диэлектриком, если $\nabla\varepsilon \perp \mathbf{E}$. При этом очевидно, что свободный заряд на проводниках меняется, но распределение суммарных (свободных и связанных) зарядов на их поверхности остается неизменным в обеих задачах.

3.5. Метод разделения переменных

Широкий класс граничных задач электростатики допускает решение в том случае, если граничные условия задаются на координатных поверхностях систем координат, которые допускают разделение переменных в уравнении Лапласа. То же самое относится к случаю, когда эти координатные поверхности являются границей раздела сред с различными свойствами, или, наконец, когда диэлектрическая проницаемость неоднородной среды может быть задана аналитической зависимостью в виде произведения функций, по крайней мере одна из которых зависит лишь от одной координаты. В этом случае весьма плодотворным является *метод разделения переменных* в уравнении Лапласа (2.8), основанный на отыскании частных решений уравнений в частных производных в виде произведения функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной и удовлетворяет уравнению в обыкновенных производных. Существует одиннадцать криволинейных ортогональных систем координат, в которых разделяются переменные в уравнении Лапласа; к ним относятся и наиболее часто используемые *декартовы*, *цилиндрические* и *сферические* системы координат.

3.5.1. Разделение переменных в декартовых координатах.

В декартовых координатах в результате разделения переменных получаются частные решения вида:

$$\varphi(x, y, z) \sim \exp(\alpha x)\exp(\beta y)\exp(\gamma z), \qquad (3.9)$$

где произвольные *комплексные константы разделения* α, β, γ должны удовлетворять соотношению $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Уравнению Лапласа удовлетворяет бесчисленное множество частных решений (3.8), а также их произвольные линейные комбинации, выбор которых определяется формой граничных поверхностей и видом граничных условий.

3.5.2. Разделение переменных в сферических координатах.

Решения уравнения Лапласа, полученные путем разделения переменных в сферических координатах r, ϑ, ψ (обозначение ψ для азимутального угла введено во избежание путаницы с обозначением потенциала), имеют вид

$$\varphi(r, \vartheta, \psi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\vartheta, \psi), \qquad (3.10)$$

где $Y_{lm}(\vartheta, \psi)$ - так называемые сферические гармоники, представляющие собой полный набор взаимно ортогональных функций на сфере:

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\vartheta, \psi) &= \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} \cdot P_l^m(\cos\vartheta)\exp(im\psi), \quad m \geq 0; \\ Y_{l,-m}(\vartheta, \psi) &= (-1)^m Y_{lm}^*(\vartheta, \psi); \end{aligned} \qquad (3.11)$$

$P_l^m(x)$ - присоединенные полиномы Лежандра, ортогональные на отрезке $-1 < x < 1$ и представляющие собой при фиксированном m полный набор функций ($l \geq m$) на этом отрезке; A_{lm} и B_{lm} – произвольные комплексные постоянные с ограничениями, обеспечивающими действительность решения. (Действительное решение может быть записано также в виде реальной или мнимой части решения (3.10) с произвольными комплексными постоянными A_{lm} и B_{lm}.)

Если граничные условия заданы на поверхности сферы ($r = a$) то для *внешней задачи* ($r > a$) в разложении потенциала (3.9) $A_{lm}=0$, а для *внутренней задачи* - $B_{lm} = 0$. В обоих случаях решения указанных задач представляют собой соответственно разложения по «внешним» или «внутренним» мультиполям (ср. с (2.20),(2.22)).

Осесимметричные сферические гармоники (m = 0) определяются обычными полиномами Лежандра, выражения для которых можно получить путем дифференцирования *производящей функции* (Формула Родрига):

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} \left(x^2 - 1\right)^l$$

Во внешней задаче l = 0 соответствует потенциалу электрического монополя (точечного заряда в начале координат), l = 1 – потенциалу электрического диполя, ориентированного вдоль полярной оси сферической системы координат, l = 2 – потенциалу осесимметричного квадруполя, ориентированного вдоль полярной оси, и т.д. Во внутренней задаче l = 0 соответствует постоянному потенциалу, l = 1 – потенциалу постоянного электрического поля, направленного вдоль полярной оси сферической системы координат, l = 2 – потенциалу осесимметричного квадруполя, и т.д.

3.5.3. Разделение переменных в цилиндрических координатах.

Решения уравнения Лапласа, полученные путем разделения переменных в цилиндрических координатах r, ψ, z, в общем случае выражаются в виде произведений гармонических функций азимутального угла ψ, экспоненциальных зависимостей от координаты z (с действительным или мнимым показателем экспоненты) и функции Бесселя от радиальной координаты r (с мнимым или действительным аргументом). В случае, когда зависимость от координаты z отсутствует общее решение принимает достаточно простой вид:

$$\varphi(r, \psi) = A_0 \ln r + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(im\psi) \left(\frac{A_m}{r^m} + B_m r^m \right), \tag{3.12}$$

где для внутренней задачи все коэффициенты A_m обращаются в нуль, а для внешней задачи все коэффициенты B_m обращаются в нуль.

Помимо приведенных решений в «разделенных переменных» для декартовых (3.8), сферических (3.9) и цилиндрических (3.12) координат существуют и другие решения, не описываемые приведенными соотношениями. Простейшими примерами являются потенциалы, линейно зависящие от декартовых координат (однородное электрическое поле). Другие типы решений в разделенных переменных могут возникать, когда угловые переменные в цилиндрических или сферических координатах меняются в ограниченных пределах, задаваемых граничными условиями.

В качестве примера использования метода разделения переменных для нахождения поля в присутствии диэлектрических тела приведем решение двух эталонных задач об искажениях, вносимых в заданное внешнее однородное поле однородным диэлектрическим шаром и круговым цилиндром.

Пусть центр шара радиуса a с диэлектрической проницаемостью ε_i расположен в начале координат на оси z. Диэлектрическая проницаемость окружающей среды равна ε_e. Внешнее поле $\mathbf{E}_0 = \mathbf{z}_0 E_0$ в отсутствие шара однородно и направлено параллельно оси z. В силу осевой симметрии задачи искомое поле в сферической системе координат с полярной осью z есть функция двух переменных: радиуса r (расстояния до центра шара) и полярного угла ϑ, образуемого радиусом с полярной осью, и не зависит от азимутального угла ψ. На границе шара ($r=a$) искомый потенциал должен удовлетворять граничным условиям

$$\varphi(a-0)=\varphi(a+0)) \text{ и } \varepsilon_i(\partial\varphi/\partial r)|_{a-0}=\varepsilon_e(\partial\varphi/\partial r)|_{a+0},$$

а при $r\to\infty$ искомое поле должно переходить в заданное внешнее поле $\mathbf{E}_0=\mathbf{z}_0E_0$, потенциал которого $\varphi_0=-E_0rP_1(\cos\vartheta)=-E_0r\cos\vartheta$ представляет собой частное решение уравнения Лапласа, отвечающее тому слагаемому в разложении (3.10), для которого $l=1$, $m=0$. Поэтому потенциал внутри и вне шара (с учетом требования его конечности при $r=0$ и при $r\to\infty$) должен соответственно представляться в виде

$$\varphi(r<a)=C_1r\cos\vartheta,\quad \varphi(r>a)=\varphi_0+C_2r^{-2}\cos\vartheta,$$

Константа C_2 определяет дипольный момент шара $\mathbf{P}=\mathbf{z}_0C_1$, а константа C_1 – поле внутри шара $\mathbf{E}_i=-\mathbf{z}_0C_2$. Определяя значения этих констант из приведенных выше граничных условий для потенциала и его производной, находим:

$$\mathbf{P}=a^3\mathbf{E}_0(\varepsilon_i-\varepsilon_e)/(\varepsilon_i+2\varepsilon_e),\ \ \mathbf{E}_i=3\mathbf{E}_0\varepsilon_e/(\varepsilon_i+2\varepsilon_e).$$

Таким образом, поле внутри шара однородно, а поле вне его есть сумма заданного внешнего поля и поля точечного диполя с моментом $\mathbf{P}$, расположенного в центре шара.

Решение аналогичной задачи для бесконечно длинного цилиндра радиуса a, расположенного перпендикулярно внешнему однородному полю $\mathbf{E}_0$, выполняемое методом разделения переменных в полярных координатах r, ψ в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, приводит к следующим выражениям для дипольного момента единицы длины цилиндра $\mathbf{p}$ и поля внутри него:

$$\mathbf{p}=\frac{1}{2}a^3\mathbf{E}_0(\varepsilon_i-\varepsilon_e)/(\varepsilon_i+\varepsilon_e),\ \ \mathbf{E}_i=2\mathbf{E}_0\varepsilon_e/(\varepsilon_i+\varepsilon_e).$$

3.6. Метод конформных преобразований

Суть метода конформных преобразований, позволяющего находить большое количество довольно сложных решений двумерных задач электростатики, состоит в следующем. Если на плоскости x, y ввести комплексную переменную $z=x+iy$ и сделать конформное преобразование $w=u(x,y)+iv(x,y)=f(z)$ (где $f(z)$ произвольная аналитическая функция) этой плоскости на плоскость комплексных переменных u, v, то семейство линий $u(x,y)=C_1$ на плоскости xy всюду ортогонально семейству линий $v(x,y)=C_2$, а сами функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ всюду удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа. Любую из функций, например, $u(x,y)$ можно принять за двумерное распределение потенциала, тогда семейство линий $u(x,y) = C_1$ определяет систему эквипотенциалей; второе семейство линий $v(x,y) = C_2$ определяет силовые линии электростатического поля, причем функция $v(x,y)$ представляет собой *функцию потока* электрического поля. Если поперечное сечение двумерного проводника с заданным потенциалом φ_0 представляет собой некоторый контур L в плоскости $x, y,$ то для нахождения потенциала $\varphi(x, y)$ (удовлетворяющего на этом контуре условию $\varphi = \varphi_0$) при помощи рассматриваемого метода необходимо найти такую аналитическую функцию $w(z)$, которая преобразовывала бы контур L в комплексной плоскости z в линию $w = \varphi_0$, параллельную оси ординат в плоскости w. Тогда действительная часть этой функции $u(x,y)$ и будет представлять собой искомый потенциал (поскольку она удовлетворяет уравнению Лапласа и граничному условию постоянства потенциала на контуре).

3.7. Теорема взаимности

Для распределений заряда, потенциал которых достаточно быстро спадает на бесконечности ($\varphi(\mathrm{r} \to \infty) < C / r^{\alpha}$, где C – ограниченная постоянная, а $\alpha > 1/2$), в электростатике справедлива *теорема взаимности*: если в безграничной среде (в общем случае неоднородной) распределение заряда $\rho_1(\mathbf{r})$ создает распределение потенциала $\varphi_1(\mathbf{r})$, а распределение заряда $\rho_2(\mathbf{r})$ создает в той же среде распределение потенциала $\varphi_2(\mathbf{r})$, то

$$\int \rho_1 \varphi_2 dV = \int \rho_2 \varphi_1 dV . \tag{3.13}$$

Теорема взаимности (3.13) справедлива и при наличии поверхностных, линейных и точечных зарядов, если при определении $\rho(\mathbf{r})$ использовать δ - функции соответствующего порядка. В частном случае для системы точечных зарядов и проводников заданной формы с фиксированным положением в пространстве теорема взаимности принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{N} q_i^I \varphi_i^{II} = \sum_{i=1}^{N} q_i^{II} \varphi_i^I , \tag{3.14}$$

где $q_i^{I(II)}$ - заряд i-го объекта (точечного заряда или проводника) при I-м (II-м) распределении зарядов, а $\varphi_i^{I,(II)}$ - потенциалы, создаваемые в месте нахождения i-го объекта (точечного заряда или проводника) при I-м (II-м) распределении зарядов. В силу расходимости потенциала точечного заряда при приближении к нему, для применимости теоремы взаимности в форму для теоремы взаимности в форме (3.14) важно, чтобы отличные от нуля точечные заряды не имели одинаковых координат при I-м и II-м распределениях.

Для частного случая двух проводников теорема взаимности формулируется следующим образом: если заряд q_1^I, помещенный на первый проводник, создает на втором проводнике потенциал φ_2^I, а заряд q_2^{II}, помещенный на второй проводник, создает на первом проводнике потенциал φ_1^{II}, то

$$q_1^I \varphi_1^{II} = q_2^{II} \varphi_2^I \qquad (3.15)$$

3.8. Потенциальные и емкостные коэффициенты

Из принципа суперпозиции следует, что для системы проводников фиксированной формы с заданным положением в пространстве потенциал каждого проводника может быть представлен как линейная комбинация зарядов на всех проводниках системы:

$$\varphi_i = \sum_j S_{ij} q_j , \qquad (3.16)$$

где коэффициенты S_{ij}, являющиеся характеристикой данной системы проводников, называются *потенциальными коэффициентами*. Все потенциальные коэффициенты положительны и в силу теоремы взаимности удовлетворяют условию симметрии $S_{ij} = S_{ji}$.

Из аналогичных соображений следует, что заряд каждого проводника системы может быть представлен как линейная комбинация потенциалов всех проводников:

$$q_i = \sum_j C_{ij} \varphi_j , \qquad (3.15)$$

где коэффициенты C_{ij}, называемые *емкостными коэффициентами*, также являются характеристикой данной системы проводников.

Все собственные емкостные коэффициенты (с совпадающими индексами) положительны, а все перекрестные емкостные коэффициенты (с различающимися индексами) отрицательны. В силу теоремы взаимности емкостные коэффициенты также удовлетворяют условию симметрии $C_{ij} = C_{ji}$. Емкостные и потенциальные коэффициенты связаны друг с другом – они образуют взаимно обратные матрицы.

4. ПОСТОЯННЫЕ ТОКИ В ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

РВ отличие от цепей постоянного тока с сосредоточенными параметрами (эдс и сопротивлениями), где решение задачи сводится к нахождению некоторого набора постоянных скалярных величин (например, электрических токов в различных ветвях электрической цепи), решение задач о распределении постоянных электрических токов в объеме проводящей среды дается векторным полем (например, распределением плотности электрического тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ в некоторой заданной области пространства).

Распределение плотности постоянного электрического тока в проводящей среде с заданной проводимостью $\sigma(\boldsymbol{r})$ определяется уравнениями:

$$\mathrm{div}\mathbf{j} = 0\,, \tag{4.1}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0\,, \tag{4.2}$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{ext}), \tag{4.3}$$

где через $\mathbf{E}_{ext}$ введены электродвижущие силы неэлектрического происхождения. Из уравнений (4.1), (4.2) следует, что вектор электростатического поля $\mathbf{E}$ является потенциальным, а вектор плотности тока $\mathbf{j}$ – вихревым. В отсутствие сторонних сил отличные от нуля статические распределения вихревых токов и потенциальных полей, локализованные в ограниченной области пространства, не существуют. При положительной проводимости отличные от нуля решения уравнений (4.1) – (4.3) могут существовать лишь при условии $\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_{ext} \neq 0$, $\mathrm{div}\,\sigma\mathbf{E}_{ext} \neq 0$.

Уравнения для электрических цепей постоянного тока (закон Ома) получаются путем интегрирования уравнений (4.1) – (4.3) по замкнутой трубке тока достаточно малого сечения, либо по отрезку такой трубки:

$$I\oint\limits_L \frac{dl}{\sigma S} = \oint\limits_L \mathbf{E}_{ext}d\boldsymbol{l} \quad \Rightarrow \quad IR = \mathcal{E}, \tag{4.4}$$

$$I\int\limits_1^2 \frac{dl}{\sigma S} = \int\limits_1^2 \left(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{ext}\right)d\boldsymbol{l} \quad \Rightarrow \quad U_{12} = IR_{12} - \mathcal{E}_{12}\,, \tag{4.5}$$

где I - полный ток в выбранной трубке тока, S - площадь ее поперечного сечения, σ – проводимость внутри трубки тока, R – электрическое сопротивление замкнутой трубки тока, $\mathcal{E}$ – электродвижущая сила в замкнутом контуре, совпадающем с трубкой тока, U_{12} – электрическое напряжение на участке трубки тока «1»-«2», R_{12} – электрическое сопротивление этого участка, $\mathcal{E}_{12}$ – электродвижущая сила на этом участке.

При решении задач о протекании постоянных токов в проводящей среде важную роль играют понятия *идеального изолятора* – участка пространства, проводимость которого равна нулю, и *идеального проводника* – участка пространства с бесконечно большой проводимостью. На границе идеального изолятора с проводящей средой обращаются в нуль нормальные составляющие плотности электрического тока и электрического поля:

$$j_n = 0, \qquad E_n = 0; \tag{4.6}$$

на границе же идеального проводника и среды с конечной проводимостью обращаются в нуль их тангенциальные составляющие:

$$j_\tau = 0, \qquad E_\tau = 0. \tag{4.7}$$

Вводится также понятие *идеального электрода* – идеального проводника, с которого в окружающую проводящую среду стекает заданный ток.

Типичная задача о распределении электрического тока в проводящей среде может быть смоделирована на основе электролитической ванны, в которую погружены тела различной формы и проводимости; к части хороших проводников (играющих роль идеальных электродов) подводятся электрические токи заданной величины. Считается, что электрический ток к электродам подводится от неких внешних источников по бесконечно тонким изолированным проводам, которые не возмущают распределение токов и полей в окружающей проводящей среде. При такой постановке задачи электродвижущие силы неэлектрического происхождения выводятся из рассмотрения, а в роли источников постоянного тока выступает система идеальных электродов. Распределение электрического поля и тока определяется в этом случае уравнениями:

$$\mathbf{E} = -\,\mathrm{grad}\varphi = -\,\nabla\varphi, \tag{4.8}$$

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}, \tag{4.9}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{j} = 0, \tag{4.10}$$

$$\oint\limits_{S_i} \mathbf{j}\,d\mathbf{S} = I_i, \tag{4.11}$$

где S_i - поверхность i-го идеального электрода, I_i - полный ток, стекающий с него в окружающую проводящую среду.

В приведенной постановке задача о протекании тока в распределенной среде полностью эквивалентна электростатической задаче о распределении поля в неоднородном диэлектрике, создаваемом системой проводников с заданным полным электрическим зарядом на каждом из них. При этом заданное распределение проводимости $\sigma(\mathbf{r})$ является аналогом заданного распределения диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{r})$, распределение плотности тока проводимости является аналогом распределения электрического смещения, а полный ток, стекающий с i-го идеального электрода, является аналогом полного электрического заряда на i-м проводнике, умноженного на 4π. Задачи полностью эквивалентны при условии, что количество и форма идеальных электродов в токовой задаче совпадают с количеством и формой проводников в электростатической задаче; распределение электрического поля при этом идентично в обеих задачах. Ввиду указанной эквивалентности все методы решения краевых задач электростатики могут быть использованы и при решении задач токовой статики.

5. ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Раздел электродинамики, в котором изучаются постоянные (не зависящие от времени) магнитные поля, создаваемые постоянными электрическими токами (при отсутствии накапливающихся электрических зарядов) или постоянными магнитами, называется *магнитостатикой.* Дифференциальные уравнения и граничные условия для магнитостатического поля в вакууме, как следует из их записи в общем случае (см. раздел 1) имеют вид:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{5.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{5.2}$$

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \tag{5.3}$$

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{i}. \tag{5.4}$$

(индексами 1 и 2 помечены поля в двух бесконечно близких точках, лежащих по разные стороны любой поверхности с нормалью $\mathbf{n}$, направленной от 1 к 2; $\mathbf{i}$ – плотность поверхностного тока).

Поля, создаваемые источниками простейших типов симметрии, рассчитываются непосредственно на основании уравнений, записанных в интегральной форме

$$\oint\limits_L \mathbf{B}\cdot\mathbf{d}l = \frac{4\pi}{c}\iint\limits_S \mathbf{j}\cdot\mathbf{dS} = \frac{4\pi}{c}I; \tag{5.5}$$

$$\oiint\limits_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{dS} = 0. \tag{5.6}$$

В уравнении (5.5) I – полный электрический ток через поверхность S, который в статике зависит лишь от формы ограничивающего эту поверхность замкнутого контура L.

Из уравнений (5.5), предполагающих отсутствие накопления электрических зарядов, следует, что линии электрического тока в магнитостатике не могут обрываться ($\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$). Однако следует отметить, что постоянное магнитное поле может создаваться постоянными токами и в том случае, если эти токи где-то обрываются (что, в соответствии с уравнением непрерывности (1.6), (1.7) ведет к накоплению заряда в месте обрыва). Для описания магнитного поля в этом случае уравнения (5.1), (5.5) должны быть заменены полными уравнениями (1.17), (1.26), содержащими в своих правых частях наряду с токами проводимости также и так называемые *токи смещения,* плотность которых в общем случае $\mathbf{j}_d = (1/4\pi)(\partial\mathbf{D}/\partial t)$. Поскольку электрический заряд в месте обрыва постоянного тока и порождаемое этим зарядом электрическое поле растут во времени по линейному закону, ток смещения $\mathbf{j}_d$ оказывается постоянным и порождает (так же как и ток проводимости $\mathbf{j}$) постоянное магнитное поле.

Из уравнения (5.2) следует, что индукцию магнитного поля $\mathbf{B}$ можно представить как *ротор* некоторой векторной функции $\mathbf{A}$, называемой *векторным потенциалом*:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A}. \tag{5.7}$$

Вектор $\mathbf{A}$ определен равенством (4.5) не однозначно, а лишь с точностью до слагаемого, представляющего собой градиент произвольной скалярной функции. Эту функцию в магнитостатике удобно выбрать таким образом, чтобы векторный потенциал удовлетворял так называемому *условию калибровки Кулона*

$$\operatorname{div}\mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \tag{5.8}$$

позволяющему получить для $\mathbf{A}$ путем подстановки (5.7) в (5.1) векторное уравнение

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{5.9}$$

совпадающее по виду с уравнением Пуассона для скалярного электростатического потенциала φ (см. раздел 2). Если плотность тока отлична от нуля в некоторой ограниченной области пространства (или достаточно быстро убывает на бесконечности), то решение этого уравнения, (также обращающееся в нуль на бесконечности) определяется той же функцией Грина $1/R$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\iiint\limits_{\infty}\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R}dV', \tag{5.10}$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ – расстояние от *точки наблюдения* с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ (в которой и определяется вектор $\mathbf{A}$ данным выражением), до элемента объема dV', или до *точки интегрирования* $\mathbf{r}'$, функцией которой является в этом выражении вектор $\mathbf{j}$. Отсюда для поля $\mathbf{B}$ на основании (5.7) получаем

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{c}\iiint\limits_{\infty}\frac{\mathbf{j}\times\mathbf{R}}{R^3}dV', \tag{5.11}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ – вектор, направленный из точки интегрирования в точку наблюдения. Производя в выражениях (5.10,5.11) замену $\mathbf{j}dV' \to I\,d\mathbf{l}'$, находим векторный потенциал и поле, создаваемые *линейным* током I, текущим по контуру L бесконечно тонкого проводника:

$$\mathbf{A} = \frac{I}{c}\oint\limits_{L}\frac{d\mathbf{l}'}{R}, \quad \mathbf{B} = \frac{I}{c}\oint\limits_{L}\frac{d\mathbf{l}'\times\mathbf{R}}{R^3}, \tag{5.12}$$

(направление линейного элемента контура $d\mathbf{l}'$ совпадает с направлением тока). Последнее из этих равенств выражает закон *Био-Савара-Лапласа,* определяющий магнитное поле произвольно ориентированного элемента с током.

Магнитное поле, создаваемое системой постоянных электрических токов $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, замкнутых внутри некоторого объема *V*, вне этого объема может быть представлено как сумма полей точечных *магнитных мультиполей*. На расстояниях $r \gg a$, где a – характерный размер области токов, в этой сумме можно пренебречь всеми слагаемыми, кроме первого, отвечающего магнитному диполю, векторный потенциал которого

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}, \tag{5.13}$$

где вектор

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \iiint_V \mathbf{r} \times \mathbf{j}\ dV \tag{5.14}$$

называется *магнитным дипольным моментом* данного распределения токов $\mathbf{j(r)}$. Если все токи замыкаются внутри объема *V*, этот вектор не зависит от выбора начала координат. Для линейного тока I, текущего по замкнутому контуру L,

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}/c; \quad \mathbf{S} = \iint \mathbf{ds}, \tag{5.15}$$

где интегрирование производится по произвольной поверхности, натянутой на контур *L*; нормаль к поверхности связана с направлением тока в контуре правилом правого винта, причем вектор площади $\mathbf{S}$ при заданном контуре L не зависит от формы натянутой на него поверхности.

Вне области токов вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ удовлетворяет уравнениям $\operatorname{rot}\mathbf{B} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, совпадающим с уравнениями для вектора напряженности статического электрического поля $\mathbf{E}$ вне области зарядов. Благодаря этому решение ряда задач магнитостатики удобно искать, используя электростатическую аналогию, т.е. описывая магнитное поле при помощи *скалярного магнитного потенциала* ψ, удовлетворяющего тому же уравнению Лапласа, что и электрический потенциал:

$$\mathbf{B} = -\operatorname{grad}\psi, \quad \Delta\psi = 0. \tag{5.16}$$

Правда, ввиду того что магнитное поле, в отличие от электрического, является потенциальным только вне области своих источников, скалярный потенциал ψ не может быть определен как однозначная функция координат во всем пространстве. При всяком обходе по замкнутому контуру, охватывающему линейный ток I, функция ψ изменяется на константу $4\pi I/c$, т.е. на величину, равную циркуляции вектора $\mathbf{B}$ по этому контуру. Такая неоднозначность, однако, не приводит к ошибкам при описании поля в односвязных областях, не содержащих замкнутых контуров, охватывающих линий тока. Это позволяет рассчитывать поле любого линейного замкнутого контура с током I как поле опирающегося на этот контур *магнитного листка* – двойного (дипольного) слоя эквивалентных магнитных зарядов, характеризуемого поверхностной плотностью магнитного дипольного момента $\mathbf{p}_s^{(m)} = (4\pi / c) I \mathbf{n}$ (направление нормали $\mathbf{n}$ к поверхности слоя согласовано с направлением тока в контуре по правилу правого винта). При таком подходе поле магнитного диполя, описанное выше при помощи векторного потенциала (5.13), может быть выражено также и через скалярный потенциал, связанный с вектором магнитного дипольного момента $\mathbf{m}$ (5.14, 5.15) соотношением, подобным электростатическому:

$$\psi = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \tag{5.17}$$

Оба способа расчета (при помощи векторного и скалярного потенциалов) дают для вектора $\mathbf{B}$ одно и то же выражение:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}, \tag{5.18}$$

аналогичное выражению (2.18) для электрического поля точечного электрического диполя.

Дифференциальные и интегральные уравнения магнитостатики в среде записываются в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \tag{5.19}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{5.20}$$

$$\oint\limits_L \boldsymbol{H} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c} \iint\limits_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{dS} = \frac{4\pi}{c} I; \tag{5.21}$$

$$\oiint\limits_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = 0. \tag{5.22}$$

Вместе с материальным уравнением для линейной изотропной среды

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \tag{5.23}$$

интегральные уравнения (5.21)-(5.23) образуют полную систему уравнений для расчета магнитного поля, создаваемого заданными токами в пространстве с заданным распределением магнитной проницаемости μ. Такую же полную систему образуют (вместе с (5.23)) и дифференциальные уравнения (5.19), (5.20), дополненные граничными условиями (см. (1.31), (1.33)):

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)=0, \tag{5.24}$$

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\frac{4\pi}{c}\mathbf{i}, \tag{5.25}$$

определяющими поведение нормальной компоненты вектора $\mathbf{B}$ и тангенциальной компоненты вектора $\mathbf{H}$ при переходе через границу раздела сред или любую поверхность, несущую поверхностный ток $\mathbf{i}$.

В магнитных средах, обладающих сторонней (спонтанной) намагниченностью $\mathbf{M}_{ext}$, не исчезающей при $\mathbf{H}=0$ (так называемые *постоянные магниты*), в правую часть материального уравнения (5.23) вводится дополнительное слагаемое:

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M}_{ext}. \tag{5.28}$$

Так же как и электрические токи (объемные, поверхностные или линейные), постоянные магниты, характеризуемые сторонней намагниченностью $\mathbf{M}_{ext}$, играют роль источников статического магнитного поля. Существуют два подхода к расчету полей этих источников, которые мы опишем ниже для случая, когда источники другого рода (электрический ток и индуцированная намагниченность) отсутствуют, т.е. $\mathbf{j}=0$ и $\mu=1$.

1. *Метод эквивалентных токов.* Подстановкой уравнения (5.28) в уравнение (5.19) задача сводится к решению уравнений (5.1), (5.2) для вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ в вакууме при некоторой заданной плотности эквивалентных токов $\mathbf{j}_{eq}=c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}_{ext}$, фактически представляющей собой среднюю плотность молекулярных токов намагничения. При этом вектор $\mathbf{B}$ находится во всем пространстве, вне магнита поля $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ совпадают, а внутри магнита $\mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}_{ext}$.

2. *Метод эквивалентных магнитных зарядов*. Подстановкой соотношения (5.28) в уравнение (5.20) задача сводится к решению уравнений для вектора $\mathbf{H}$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}=0,\quad \mathrm{div}\,\mathbf{H}=4\pi\rho_{eq}^{(m)},\qquad \rho_{eq}^{(m)}=-\mathrm{div}\,\mathbf{M}_{ext}, \qquad 5.29)$$

совпадающих с уравнениями для электростатического поля, создаваемого в вакууме заданным распределением электрического заряда (величина $\rho_{eq}^{(m)}$ называется плотностью эквивалентных магнитных зарядов). При этом вектор $\mathbf{H}$ находится во всем пространстве, вне магнита поля $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ совпадают, а внутри магнита $\mathbf{B}=\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M}_{ext}$.

Задачи магнитостатики для однородной безграничной среды с $\mu =$ const и $\mathbf{M}_{ext} = 0$ фактически не отличаются от аналогичных задач для поля в вакууме, поскольку уравнения для вектора $\mathbf{H}$ в этом случае вообще не содержат величины μ и не отличаются от вакуумных. При наличии областей с различными магнитными проницаемостями задачи расчета магнитных полей становятся более сложными. В некоторых случаях они могут либо непосредственно сводиться к соответствующим краевым задачам электростатики, имеющим известные решения, либо решаться аналитическими методами, подобными описанным в разделах 2, 3 (разделение переменных, метод изображений и другие конструктивные методы).

Решение ряда задач может находиться путем их сопоставления с другими (более простыми или уже решенными) задачами на основании *теоремы взаимности*, связывающей между собой пространственные распределения двух различных систем токов $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{j}_2$ и соответствующих (создаваемых ими) векторных потенциалов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ в одной и той же (в общем случае неоднородной) среде «перекрестным» соотношением

$$\iiint_{\infty} \boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{r})\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r})dV = \iiint_{\infty} \boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r})\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r})dV . \qquad (5.30)$$

Для двух замкнутых линейных контуров L_1, L_2 с текущими в них токами I_1, I_2 это соотношение принимает вид

$$I_1\Phi_{12} = \mathrm{I}_2\Phi_{21} , \qquad (5.31)$$

где Φ_{ik} $(i,k = 1,2)$ – создаваемый током I_k, текущим в контуре L_k, поток вектора магнитной индукции **B** через произвольную поверхность *S*, натянутую на контур L_i.

6. ЭНЕРГИЯ И СИЛЫ В СТАТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

Плотность энергии электростатического поля в среде с диэлектрической проницаемостью ε определяется соотношением:

$$w = \frac{1}{8\pi}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{8\pi}\varepsilon E^2 \tag{6.1}$$

(в вакууме $\mathbf{D} = \mathbf{E}$, $\varepsilon = 1$). Полная энергия W произвольной ограниченной системы электрических зарядов может быть представлена как в виде интеграла по всему пространству, занятому полем, так и в виде интеграла по области источников:

$$W = \iiint\limits_{\infty} w\,dV = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\infty} \rho\,\varphi\; dV\,. \tag{6.2}$$

Здесь ρ – плотность свободных зарядов, φ – скалярный потенциал электрического поля (определяемый в предположении $\varphi = 0$ на бесконечности). Энергия системы, представляющей собой суперпозицию двух (возможно, частично перекрывающихся) подсистем зарядов $\rho_1(\mathbf{r}),\ \rho_2(\mathbf{r})$, создающих соответственно потенциалы $\varphi_1(\mathbf{r}),\ \varphi_2(\mathbf{r})$ и поля $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}),\ \mathbf{E}_2(\mathbf{r})$, может быть записана в виде суммы

$$W = W_1 + W_2 + W_{\text{int}}, \tag{6.3}$$

в которой первые два слагаемых представляют собой *собственные энергии* подсистем:

$$W_{1,2} = \frac{1}{8\pi}\iiint\limits_{\infty} \varepsilon\,\mathbf{E}_{1,2}^2 dV = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\infty} \rho_{1,2}\,\varphi_{1,2}\,dV\,, \tag{6.4}$$

а третье – их *взаимную энергию* (или *энергию взаимодействия*)

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\infty} \varepsilon\,\mathbf{E_1 E_2} dV = \iiint\limits_{\infty} \rho_1\varphi_2\,dV = \iiint\limits_{\infty} \rho_2\varphi_1\,dV\,, \tag{6.5}$$

равную работе, которую совершат силы электрического поля при разнесении этих подсистем (без изменения распределения зарядов внутри них) на бесконечное расстояние друг от друга Возможность перестановки индексов 1 и 2 в равенстве (6.5) выражает *теорему взаимности* в электростатике. Из выражений (6.4), (6.5) следует, что собственная электростатическая энергия любой подсистемы всегда положительна, энергия же взаимодействия может быть любого знака.

Выражение (6.3) очевидным образом обобщается на случай N взаимод-ствующих электрических подсистем:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W_i + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} W_{ij} \,. \qquad 6.6)$$

Собственная энергия точечного заряда, ввиду обращения в бесконечность его собственного потенциала в точке его расположения, равна бесконечности. Энергия взаимодействия двух точечных зарядов q_1, q_2, разнесенных на расстояние r, равна

$$W_{\text{int}} = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r} \,. \qquad (6.7)$$

Энергии, приобретаемые точечным зарядом q и точечным диполем с заданным дипольным моментом $\mathbf{p}$ при их внесении в заданное внешнее поле, равны соответственно

$$W_{\text{int}}^{(q)} = q\varphi \,, \quad W_{\text{int}}^{(p)} = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E} \,, \qquad (6.8)$$

где φ и $\mathbf{E}$ обозначают потенциал и напряженность внешнего поля в точке размещения заряда или диполя. В случае если дипольный момент не задан и пропорционален напряженности внешнего поля (т.е диполь сам индуцируется этим полем), его энергия взаимодействия с внешним полем

$$W_{\text{int}}^{(p)} = -\frac{1}{2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{E} \,. \qquad (6.9)$$

Энергия поля, создаваемого системой N проводников с зарядами q_i и потенциалами φ_i ($i = 1,2,3,...N$) на основании (6.2) и условия эквипотенциальности каждого проводника может быть представлена в виде:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\,\varphi_i \,. \qquad (6.10)$$

Ввиду линейности уравнений поля заряд (потенциал) каждого проводника является линейной функцией потенциалов (зарядов) всех проводников

$$q_i = \sum_{k=1}^{N} C_{ik}\varphi_k \ , \quad \varphi_i = \sum_{k=1}^{N} B_{ik} q_k \ , \tag{6.11}$$

откуда следует, что энергия (6.10) может быть представлена в виде квадратичной формы потенциалов или зарядов:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} C_{ik}\varphi_i\varphi_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} B_{ik} q_i q_k \ , \tag{6.12}$$

где C_{ik} и B_{ik} – соответственно так называемые *емкостные* и *потенциальные* коэффициенты, зависящие от геометрической формы и взаимного расположения проводников. Из теоремы взаимности и положительной определенности энергии следуют соотношения $C_{ik} = C_{ki}$;: $C_{ii} > 0,\ B_{ii} > 0$; $C_{ik} < 0,\ B_{ik} > 0$ (при $i \neq k$). Емкостью одиночного проводника называется отношение его заряда к потенциалу $C = q/\varphi$; емкостью системы из двух проводников называется отношение $C = q/(\varphi_1 - \varphi_2)$, найденное при условии $q_1 = -q_2 = q$. В обоих случаях полная энергия данных систем определяется формулой одного и того же вида:

$$W = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{q^2}{2C}, \qquad 6.13)$$

где в первом случае $U = \varphi$, во втором $U = \varphi_1 - \varphi_2$. Нужно отметить, что, поскольку распределение поверхностных зарядов на проводниках в общем случае зависит от их взаимного расположения, их взаимная энергия (работа, совершаемая полем при их разнесении на бесконечное расстояние с соблюдением условия $q_i = \text{const}$) не совпадает с взаимной энергией подсистем (6.4), определяемой при фиксированных распределениях плотности заряда внутри каждой из них.

Силы, действующие на тела в электростатическом поле, можно рассчитывать тремя способами.

Первый способ основан на непосредственном использовании выражения для силы Лоренца в электростатике (являющегося фактически определением напряженности электрического поля), согласно которому (см. раздел 1) на точечный заряд действует сила

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{E}\,. \tag{6.14}$$

Сила, действующая в пустоте на тело конечных размеров с произвольно распределенными по его объему плотностями свободных ($\rho(\mathbf{r})$) и связанных ($\rho_b = -\,\mathrm{div}\mathbf{P}$) зарядов, может быть представлена в виде:

$$\mathbf{F} = \iiint_V [\rho(\mathbf{r}) + \rho_b(\mathbf{r})]\mathbf{E}(\mathbf{r})\,dV = \iiint_V \rho\mathbf{E}\,dV + \iiint_V (\mathbf{P}\nabla)\mathbf{E}\,dV\,. \qquad (6.15)$$

Из этого выражения следует, что на точечный диполь или на незаряженное тело малых размеров с дипольным моментом $\mathbf{p}$ действует сила

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}\nabla)\mathbf{E}\,. \qquad (6.16)$$

Вектор $\mathbf{E}$ в приведенных выражениях для силы (6.14)-(6.16) обозначает напряженность так называемого *внешнего поля*, создаваемого всеми (свободными и связанными) зарядами, не входящими в состав объекта, на который эта сила действует (собственное статическое поле зарядов самого объекта вклада в полную силу не дает). Это не означает, однако, что пространственное распределение внешних (сторонних) зарядов, создающих поле $\mathbf{E}$, не изменяется в присутствии объекта, испытывающего действие силы. В общем случае (например, при наличии внешних проводников или диэлектриков) отыскание распределений сторонних зарядов и создаваемого ими поля может представлять собой отдельную самостоятельную задачу.

Второй способ расчета сил – *энергетический*. Он основан на расчете вариации энергии, определяющей работу *обобщенных сил* в исследуемой системе при ее малой деформации, т.е. при малых изменениях характеризующих ее *обобщенных координат*. В частности, для того чтобы найти на основании этого метода обобщенные силы F_α в системе проводников, достаточно знания зависимости электрической энергии этой системы W от соответствующих обобщенных координаты x_α, характеризующих взаимное расположение проводников:

$$F_\alpha = -\left(\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\right)_{q_i=\mathrm{const}} = \left(\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\right)_{\varphi_i=\mathrm{const}}\,. \qquad (6.17)$$

Здесь в первом равенстве производная определяется при фиксированных зарядах на проводниках, а во втором – при фиксированных потенциалах проводников.

Третий способ расчета силы основан на использовании представлений о *натяжениях* (или *напряжениях*), возникающих в пространстве в присутствии электрического поля. Сила, действующая в электрическом поле на любой объем среды, (так называемая *пондеромоторная сила*), может быть выражена через некоторый интеграл по замкнутой поверхности S, ограничивающей этот объем; при этом любая декартова компонента силы F_i записывается в виде

$$F_i = \oint\!\!\oint_S T_{ik}\,n_k\,ds\,. \qquad (6.18)$$

Здесь $i,\,k = 1,2,3$ – индексы, нумерующие оси декартовой системы координат (по дважды встречающемуся индексу k подразумевается суммирование); n_k –

проекция единичного вектора внешней нормали к поверхности на ось x_k; T_{ik} – *тензор поверхностных натяжений*, общее выражение для которого может быть найдено энергетическим методом – путем расчета вариаций энергии при деформации среды.. В жидком или газообразном диэлектрике (где при деформациях не может возникать сдвиговых напряжений)

$$T_{ik} = \frac{\varepsilon}{4\pi}(E_i E_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}E^2) + \frac{1}{8\pi}\left(\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)_T \delta_{ik}E^2, \tag{6.19}$$

где τ – плотность среды, производная $(\partial\varepsilon/\partial\tau)_T$ вычисляется при постоянной температуре.

Первое слагаемое в этом выражении представляет собой *максвелловский* тензор натяжений, второе слагаемое носит название *стрикционного* тензора. В частности, на границе проводника, где вектор $\mathbf{E}$ параллелен нормали, максвелловский тензор описывает нормальное к границе натяжение (отрицательное давление), равное плотности энергии поля над проводником $\varepsilon E^2/8\pi$.

Объемная плотность силы $\mathbf{f}$ в жидком диэлектрике, определяемая на основании выражения (6.19) согласно формуле $f_i = \partial T_{ik}/\partial x_k$, равна

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} - \frac{1}{8\pi}E^2\nabla\varepsilon + \frac{1}{8\pi}\nabla\left(E^2\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right). \qquad 20)$$

Здесь ρ – плотность свободного (стороннего по отношению к диэлектрику) заряда. В достаточно разреженной среде (газе) разность $\varepsilon - 1$ пропорциональна плотности среды τ, так что $\tau\partial\varepsilon/\partial\tau = \varepsilon - 1$ и выражение (6.20) переходит (при $\rho = 0$) в

$$\mathbf{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\nabla E^2. \tag{6.21}$$

Плотность энергии постоянного магнитного поля в среде с магнитной проницаемостью μ равна

$$w = \frac{1}{8\pi}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} = \frac{1}{8\pi}\mu H^2 \tag{6.22}$$

(в вакууме $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, $\mu = 1$).

Способы представления магнитной энергии системы токов или образующих ее подсистем аналогичны используемым в электростатике. Полная энергия произвольной ограниченной системы:

$$W = \iiint\limits_{\infty} w\,dV = \frac{1}{2c}\iiint\limits_{\infty} \mathbf{j}\cdot\mathbf{A}\ dV, \tag{6.23}$$

где $\mathbf{j}$ – плотность тока, $\mathbf{A}$ – векторный потенциал, обращающийся в нуль на бесконечности. Полная энергия двух подсистем с токами $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{j}_2$, создающими соответственно векторные потенциалы $\mathbf{A}_1(\mathbf{r}), \mathbf{A}_2(\mathbf{r})$, представляется в виде $W = W_1 + W_2 + W_{\text{int}}$, где

$$W_{1,2} = \frac{1}{8\pi}\iiint\limits_{\infty} \mu \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{1,2}}^{\boldsymbol{2}} = \frac{1}{2c}\iiint\limits_{\infty} \mathbf{j}_{1,2} \cdot \mathbf{A}_{1,2}\, dV \tag{6.24}$$

– собственные энергии подсистем,

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\infty} \mu \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{2}} dV = \frac{1}{c}\iiint\limits_{\infty} \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{A}_2\, dV = \frac{1}{c}\iiint\limits_{\infty} \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{A}_1\, dV \tag{6.25}$$

– их энергия взаимодействия, последнее равенство в (6.25) (возможность перестановок индексов 1 и 2) есть выражение принципа взаимности в магнитостатике.

При заданных распределениях плотности тока по объему замкнутых проводников их энергия может быть представлена как квадратичная форма полных токов, протекающих через поперечные сечения этих проводников: Собственную энергию проводника W, в котором течет ток I, и энергию взаимодействия любой пары проводников W_{12} с токами I_1, I_2 принято записывать в виде

$$W = \frac{1}{2c^2} L I^2, \qquad W_{12} = \frac{1}{c^2} L_{12} I_1 I_2, \tag{6.26}$$

где коэффициенты L и $L_{12} = L_{21}$, зависящие от геометрии проводников и распределения плотности токов по их объему, называют соответственно коэффициентами самоиндукции и взаимной индукции. Энергию взаимодействия *линейных* (или к*вазилинейных*) *токов*, текущих по линейным контурам l_1, l_2, как следует из (6.25), можно также представить в виде:

$$W_{12} = \frac{1}{c}\Phi_{12} I_2 = \frac{1}{c}\Phi_{21} I_1, \tag{6.27}$$

где

$$\Phi_{12} = \iint\limits_{S_1} \mathbf{B}(I_2) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{c} L_{12} I_2 \tag{6.28}$$

- поток вектора магнитной индукции (так называемый *магнитный поток*), создаваемый током I_2, текущим по контуру 2, через поверхность S_1, натянутую на контур 1. Коэффициент взаимной индукции линейных контуров можно рассчитать либо непосредственно на основании его определений (содержащихся в равенстве (6.28) или последнем из равенств (6.26)), либо по формуле, вытекающей (для однородной среды) из выражений (6.25), (5.12)):

$$L_{12} = \mu \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}}, \tag{6.29}$$

где r_{12} – расстояние между векторными элементами $d\mathbf{l}_1, d\mathbf{l}_2$, принадлежащими контурам 1 и 2. Как ясно из этого выражения, знак коэффициента взаимной индукции зависит от выбора положительных направлений на контурах. Коэффициент самоиндукции проводника следует рассчитывать на основании его энергетического определения (первая из формул (6.26)).

Способы расчета сил, действующих на тела в постоянном магнитном поле, также вполне аналогичны электростатическим. Непосредственно на основании общего выражения для силы Лоренца находится сила, действующая в пустоте на проводник с током в заданном внешнем поле $\mathbf{B}$:

а) сила, действующая на элемент $d\mathbf{l}$ квазилинейного контура (формула Ампера)

$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c} d\mathbf{l} \times \mathbf{B}; \tag{6.30}$$

б) сила, действующая на немагнитный ($\mu = 1$) проводник с произвольным распределением плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \iiint_V [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] dV; \tag{6.31}$$

в) сила и вращающий момент, действующие на тело, обладающее магнитным дипольным моментом $\mathbf{m}$ (определяемым как токами проводимости, так и намагниченностью) в слабо неоднородном внешнем поле (мало меняющемся на расстояниях порядка размеров тела)

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \qquad \mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \tag{6.32}$$

Знание энергии системы квазилинейных проводников с токами как функции обобщенных координат x_α, характеризующих взаимное расположение проводников или их элементов, позволяет найти соответствующую обобщенную силу:

$$F_\alpha = \left(\frac{\partial W}{\partial x_\alpha} \right)_{I_i = \mathrm{const}} = -\left(\frac{\partial W}{\partial x_\alpha} \right)_{\Phi_i = \mathrm{const}}. \qquad 6.33)$$

(в первом равенстве производная берется при постоянных токах I_i во всех контурах, во втором – при постоянных значениях пронизывающих их потоков Φ_i)

Тензор натяжений магнитного поля с жидкой среде с магнитной проницаемостью μ и плотностью τ определяется соотношением:

$$T_{ik} = \frac{\mu}{4\pi}(H_i H_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}H^2) + \frac{1}{8\pi}\left(\tau\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\right)_T \delta_{ik}H^2. \qquad (6.34)$$

Соответствующая плотность пондеромоторной силы равна

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{B} - \frac{1}{8\pi}H^2\nabla\mu + \frac{1}{8\pi}\nabla\left(H^2\tau\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\right). \qquad (6.35)$$

7. РЕЛАКСАЦИОННЫЕ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

В качестве естественного обобщения статики, в которой изучаются не меняющиеся во времени поля, можно рассматривать *квазистатику*, в которой одно из полей (электрическое или магнитное) имеет статическую структуру, т.е. синхронно (без запаздывания) следует за изменением порождающих его источников, и связано в любой точке и в каждый момент времени с этими источникам теми же соотношениями, что и в статике. В соответствии с этим можно различать *квазиэлектростатику* и *квазимагнитостатику*. Меняющееся во времени квазистатическое поле при этом рассматривается как *заданный источник* другого поля (меняющееся электрическое поле порождает магнитное поле, а меняющееся магнитное поле порождает электрическое). Квазистатическое приближение пригодно на малых расстояниях L от источников (в вакууме $L \ll cT$, где T – характерное время изменения токов или зарядов, являющихся источниками квазистатического поля).

В рамках квазимагнитостатики выделяется так называемое *квазистационарное приближение*, которое описывает квазимагнитостатику в хорошо проводящих средах. Специфика его в том, что электрические токи, создающие квазистатическое (или «квазистационарное») магнитное поле, создаются электрическим полем, возникающим лишь вследствие изменения магнитного поля. Формально уравнения квазистационарного приближения получаются из общей системы уравнений Максвелла в пренебрежении током смещения:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}, \tag{7.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \tag{7.2}$$

Вне проводящей среды такое приближение справедливо, как обычное квазимагнитостатическое приближение, на расстояниях от источников поля, значительно меньших длины волны, или в более общем виде, т.е. на расстояниях, малых по сравнению с cT. Внутри проводящей среды такое приближение оправдано, если током смещения можно пренебречь по сравнению с током проводимости, условием чего в переменном поле частоты $\omega \sim 1/T$ является неравенство:

$$\varepsilon \ll 4\pi\sigma/\omega \approx 4\pi\sigma T \tag{7.3}$$

Из системы уравнений (7.1)-(7.2) можно получить уравнения, описывающие поведение любого из векторов (**E**, **H**, **j**) в однородной проводящей среде, например, для поля $\mathbf{H}$ в однородной проводящей среде (с учетом уравнения $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$) получаем

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\Delta\mathbf{H}. \tag{7.4}$$

Граничные условия для векторов, определяющих магнитное поле, на границе проводника имеют обычную форму

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad H_{\tau 1} = H_{\tau 2}, \tag{7.5}$$

а на границах участков с разной проводимостью, в силу непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля, наряду с (7.5), должно выполняться дополнительное условие

$$\sigma_1^{-1}(\operatorname{rot}\mathbf{H})_{\tau 1} = \sigma_2^{-1}(\operatorname{rot}\mathbf{H})_{\tau 2}. \tag{7.6}$$

Уравнение (7.4) имеет вид уравнения диффузии, в котором роль коэффициента диффузии играет величина $c^2/4\pi\sigma\mu$; в частности, оно описывает процесс «сглаживания» (релаксации) любых неоднородных начальных возмущений. Приближенно это процесс может быть описан соотношением

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \mathrm{t}) \approx \mathbf{H}_0(\mathbf{r})\exp(-t/\tau), \tag{7.7}$$

где $\tau = 4\pi\sigma l^2/c^2$, l – характерный пространственный масштаб начального возмущения.

Уравнение (7.4) определяет также глубину проникновения переменного электромагнитного поля в «хорошие» проводники (определяемые условием (7.3)). Так, если на плоской границе проводника $\mathrm{z} = 0$ параллельная границе компонента переменного магнитного поля задана в комплексной форме (см. подробнее раздел 8) как $\mathbf{H}_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{H}_0 \exp(-i\omega t)$, то при удалении от поверхности вглубь проводника (в направлении перпендикулярной к границе оси z) магнитное поле меняется по закону:

$$\mathbf{H}_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{H}_0 \exp\left(-i\omega t + (i-1)\frac{z}{\delta}\right), \tag{7.8}$$

где величина $\delta = c\big/\sqrt{2\pi\mu\omega}$, называемая *толщиной скин-слоя*, определяет глубину проникновения переменного электромагнитного поля в проводник. При этом электрическое поле внутри проводника значительно меньше магнитного:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{n} \times \mathbf{H_0}\sqrt{-i\frac{\omega\mu}{4\pi\sigma}}\exp\left(-i\omega t + (i-1)\frac{z}{\delta}\right) \tag{7.9}$$

($\mathbf{n}$ – внутренняя нормаль к границе).

В аналогичной задаче для проводящего кругового цилиндра радиуса a, на границе которого задана продольная (параллельная оси цилиндра) компонента переменного электрического поля

$$E_z = E_0 \exp(-i\omega t), \tag{7.10}$$

радиальные распределения электрического и магнитного полей внутри цилиндра в цилиндрической системе координат r, φ, z определяются выражениями

$$E_z = E_0 \exp(-i\omega t)\left[J_0\left(\frac{1+i}{\delta} r\right) \Big/ J_0\left(\frac{1+i}{\delta} a\right)\right], \tag{7.11}$$

)

$$H_\varphi = (1-i)\left(\frac{2\pi\sigma}{\mu\omega}\right)^{1/2} E_0 \exp(-i\omega t)\left[J_1\left(\frac{1+i}{\delta} r\right) \Big/ J_1\left(\frac{1+i}{\delta} a\right)\right] \tag{7.12}$$

где J_0 и J_1 – функции Бесселя соответственно нулевого и первого порядков от комплексного аргумента.

Можно считать, что эти выражения моделируют распределения полей (и плотности тока $j_z = \sigma E_z$) в квазилинейных проводниках. Их асимптотика при $a > r >> \delta$ для области вблизи границы ($a - r << a$) имеет вид, локально соответствующий решению (7.8), (7.9) для проводящего полупространства:

$$E_z \approx E_0 \exp\left[-\frac{a-r}{\delta} + i\left(\frac{a-r}{\delta} - \omega t\right)\right]. \tag{7.13}$$

$$H_\varphi \approx \sqrt{i\frac{4\pi\sigma}{\omega\mu}} E_0 \exp\left[-\frac{a-r}{\delta} + i\left(\frac{a-r}{\delta} - \omega t\right)\right]. \tag{7.14}$$

Отсюда видно, что с ростом частоты, когда толщина скин-слоя становится малой по сравнению с радиусом провода, электрический ток концентрируется вблизи его поверхности. Это явление, называемое *скин-эффектом,* приводит к повышению сопротивления проводников по сравнению с их сопротивлением для постоянного тока.

Для приведенных решений средний по времени поток энергии внутрь проводника через его поверхность в полном соответствии с законом сохранения энергии равен мощности джоулевых потерь внутри него. В случае плоской границы проводника, перпендикулярной оси z, это равенство выражается соотношением

$$\frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\left[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\right] = \int_0^\infty \frac{\sigma}{2} |\mathbf{E}|^2 \, dz, \tag{7.15}$$

а в случае цилиндрического проводника радиуса a :

$$\frac{ca}{8\pi}\mathrm{Re}\left(E_z H_\varphi^*\right)=\int_0^a \frac{\sigma}{2}\,|\,E_z\,|^2\; rdr\,. \tag{7.16}$$

Важным свойством рассмотренных решений при сильном скин-эффекте является то обстоятельство, что тангенциальные компоненты электрического магнитного полей удовлетворяют на поверхности проводника:

$$\mathbf{E}_\tau = \varsigma_s \mathbf{H}_\tau \times \mathbf{n}\,, \tag{7.17}$$

где величина

$$\varsigma_s = (1-i)\sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\sigma}} \tag{7.18}$$

называется поверхностным импедансом проводника. Это условие выполняется на границе «хороших» проводников ($4\pi\sigma >> \omega$) любой формы, если их характерные размеры много больше толщины скин-слоя δ. Средняя за период колебаний плотность потока энергии вглубь проводника на его границе при выполнении условия (7.17) определяется выражением

$$S_n = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\,\varsigma\,|\,\mathbf{H}_\tau\,|^2\,, \tag{7.19}$$

8. ЭЛЕТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

8.1. Общие соотношения

Понятия *электромагнитная волна, электромагнитный волновой процесс* охватывают широкую совокупность явлений, в которых проявляется конечная скорость переноса электромагнитных возмущений в пространстве. Хотя реальные волновые процессы всегда порождаются некоторыми сторонними источниками (переменными токами), их важный класс составляют так называемые свободные волны, представляющие собой решения уравнений Максвелла в отсутствие сторонних источников. В случае однородной непроводящей среды без дисперсии, описываемой материальными уравнениями $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ с постоянными ε и μ, эти уравнения записываются в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},\qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\ \operatorname{div}\mathbf{E}=0,\ \operatorname{div}\mathbf{H}=0. \tag{8.1}$$

Из первых двух уравнений для каждого из полей могут быть получены в этом случае векторные *волновые уравнения*

$$\Delta\mathbf{E}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0,\qquad \Delta\mathbf{H}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}=0 \tag{8.2}$$

(условия $\operatorname{div}\mathbf{E}=0$, $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$ выступают по отношению к ним как дополнительные).

Простейшим решением уравнений (8.1) или (8.2), отражающим основные закономерности волновых процессов в однородной среде без дисперсии и весьма важным для их понимания и описания в реальных условиях, является *плоская электромагнитная волна*, т.е. решение вида

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0 f(t-\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}/V),\quad \mathbf{H}=\mathbf{H}_0 f(t-\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}/V), \tag{8.3}$$

где $f(\xi)$ – произвольная функция, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения, $\mathbf{n}$ – постоянный единичный вектор, указывающий направление распространения волны и называемый вектором *волновой нормали*, $V=c/n$ – скорость распространения волны, $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$ – *показатель преломления* среды, $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ – взаимно-перпендикулярные постоянные векторы, лежащие в плоскости, перпендикулярной направлению распространения $\mathbf{n}$ (этим выражается факт *поперечности* волны), и связанные между собой *импедансным* соотношением

$$\mathbf{E}=\varsigma_w[\mathbf{H}\times\mathbf{n}]. \tag{8.4}$$

Величина $\varsigma_w = \sqrt{\mu / \varepsilon}$ называется *волновым сопротивлением* (или *характеристическим импедансом*) среды. Волна, описываемая выражениями (8.3), называется плоской, поскольку ее *волновой фронт* (поверхность, на которой поля в любой заданный момент времени одинаковы), представляет собой плоскость, перпендикулярную вектору волновой нормали $\mathbf{n}$. Вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$, определяющий величину и направление плотности потока энергии, переносимой плоской волной, сонаправлен с $\mathbf{n}$ и на основании (8.4) может быть выражен через любую из величин $\mathbf{E}^2$ или $\mathbf{H}^2$:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi}\varsigma_w \mathbf{H}^2\mathbf{n} = \frac{c}{4\pi}\varsigma_w^{-1} \mathbf{E}^2\mathbf{n}. \qquad (8.5)$$

Выражения для проекций полей плоской волны записываются в простейшей форме, если одна из осей декартовой системы координат (например, ось z) направлена вдоль (или против) волновой нормали, а две другие (x и y) параллельны соответственно векторам $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Общее одномерное (зависящее лишь от одной декартовой координаты z) решение волнового уравнения записывается при этом в виде

$$E_x = f_1(z - Vt) + f_2(z + Vt), \quad H_y = \varsigma_w^{-1}[f_1(z - Vt) - f_2(z + Vt)], \qquad (8.6)$$

где $f_1(z - Vt)$ и $f_2(z + Vt)$ – произвольные функции, описывающие волны, распространяющиеся соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси z.

8.2. Монохроматические плоские волны в изотропной среде

Важным частным классом плоских электромагнитных волн являются так называемые *монохроматические* (или *гармонические*) плоские *волны*, в которых поля изменяются во времени и пространстве по гармоническому закону: $f_{1,2} = A_{1,2}\cos[\omega(t \mp z / V) + \varphi_0]$, где амплитуды $A_{1,2}$, круговая частота ω и начальная фаза φ_0 – постоянные величины. Для описания таких волн, как и любых гармонических во времени процессов, широко используется *метод комплексных амплитуд*, заключающийся в представлении реальных физических величин в виде действительных частей некоторых комплексных величин, зависимость которых от времени определяется множителем $\exp(-i\omega t)$. Например, вектор электрического поля представляется в виде $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}[\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)]$. Комплексный вектор $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$ называется *комплексной амплитудой* поля; модуль и фаза (аргумент) любой его проекции $E_{\omega x} = |E_{\omega x}|\exp(i\varphi_x)$ определяют соответственно амплитуду и постоянную (зависящую в общем случае лишь от координат, но не от времени) фазу соответствующей действительной проекции: $E_x(\mathbf{r},t) = |E_{\omega x}(\mathbf{r})|\cos[\omega t - \varphi_x(\mathbf{r})]$.

Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд полей, гармонически зависящих от времени, принимают вид:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_\omega + i(\omega/c)\,\varepsilon\,\mathbf{E}_\omega = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}_\omega - i(\omega/c)\mu\mathbf{H}_\omega = 0, \tag{8.7}$$

Эти уравнения можно не дополнять уравнениями $\operatorname{div}(\varepsilon\,\mathbf{E}) = 0, \operatorname{div}(\mu\,\mathbf{H}) = 0$, следующими из них автоматически. Волновые уравнения для гармонических полей в однородной среде имеют форму векторного уравнения Гельмгольца

$$\mathbf{\Delta}\,\mathbf{E}_\omega + k^2\mathbf{E}_\omega = 0, \quad \mathbf{\Delta}\,\mathbf{H}_\omega + k^2\mathbf{H}_\omega = 0 \tag{8.8}$$

с *волновым числом*

$$k = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon\mu} = \omega/V = k_0 n, \tag{8.9}$$

($k_0 = \omega/c$ – волновое число в вакууме, V и n – фигурировавшие выше скорость волны и показатель преломления среды). Решения волновых уравнений (8.8), как и уравнений (8.2), должны удовлетворять дополнительным условиям $\operatorname{div}\mathbf{E}_\omega = \operatorname{div}\mathbf{H}_\omega = 0$.

Монохроматические плоские волны могут быть определены как частные решения уравнений (8.7) или (8.8) вида

$$\mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_0 \exp(i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}), \; \mathbf{H}_\omega = \mathbf{H}_0 \exp(i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}), \tag{8.10}$$

где $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ – постоянные векторы, удовлетворяющие, как следует из уравнений (8.7), соотношениям

$$\mathbf{E}_0 = -\frac{c}{\omega\varepsilon}\mathbf{k}\times\mathbf{H}_0, \quad \mathbf{H}_0 = \frac{c}{\omega\mu}\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0, \tag{8.11}$$

$$\mathbf{k}^2 = (\omega/c)^2\,\varepsilon\mu. \tag{8.12}$$

Вектор $\mathbf{k}$, называемый *волновым вектором*, указывает направление распространения волны; векторы $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ определяют амплитуды полей. В случае, например, если волна распространяется по оси z, проекция волнового вектора на эту ось совпадает с волновым числом k ($\mathbf{k} = \{0,0,k\}$); если при этом вектор электрического поля параллелен оси x ($\mathbf{E}_0 = \{E_0,0,0\}$), то выражения для отличных от нуля проекций поля запишутся в виде

$$E_x = \operatorname{Re}\{E_0 \exp[i(k\,z - \omega t)]\}, \; H_y = \operatorname{Re}\{\varsigma_w E_0 \exp[i\,(k\,z - \omega t)]\}. \tag{8.13}$$

Заметим, что дифференциальные уравнения для комплексных амплитуд (8.7), (8.8) и соотношения (8.10)-(8.13), описывающие монохроматические плоские волны, в отличие от уравнений (8.1), 8.2) и их решений (8.3), справедливы также и при наличии временной дисперсии в среде, т.е. в условиях, когда параметры ε и μ зависят от частоты поля ω и, вообще говоря, являются комплексными. При известных зависимостях $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ выражение (8.9) для волнового числа $k(\omega)$ определяет *дисперсионное соотношение* (или *дисперсионное уравнение*) для плоской волны, т. е. связь между коэффициентами k и ω в выражении для фазы волны $\varphi = kz - \omega t$. Дисперсионное соотношение может выражаться также любой из функциональных зависимостей $\omega(k)$, $V(\omega)$, $n(\omega)$.

В среде с чисто действительными и положительными значениями параметров ε и μ волновое число k чисто действительно. Знание дисперсионного соотношения позволяет в этом случае при данной частоте ω определить *длину волны* (пространственный период поля)

$$\lambda = 2\pi / k \ , \tag{8.14}$$

фазовую скорость (с которой перемещается по оси z поверхность постоянной фазы)

$$V = \omega / k = c / n \tag{8.15}$$

и групповую скорость

$$V_{gr} = d\omega / dk \tag{8.16}$$

– скорость перемещения квазимонохроматического волнового пакета (см. ниже) или скорость переноса энергии. Соотношение между фазовой и групповой скоростями в реальной среде может быть различным в различных областях частот. Говорят, что среда обладает *нормальной дисперсией* в тех областях частот, где $V > V_{gr}$ ($dn/d\omega > 0$), и *аномальной дисперсией* там, где $V < V_{gr}$ ($dn/d\omega < 0$). В отсутствие дисперсии ($dn/d\omega = 0$) фазовая и групповая скорости совпадают и не зависят от частоты: $V = V_{gr} = c/n$.

Необходимо иметь в виду, что в среде с дисперсией выражения для плотностей энергии электрического и магнитного поля отличаются от приведенных в разделе 1 для недиспергирующих сред. При чисто действительных ε и μ средние по времени значения этих плотностей, как следует из анализа закона сохранения энергии (теоремы Пойнтинга) для квазимонохроматического поля, определяются следующими выражениями

$$\langle w_E \rangle = \frac{|\boldsymbol{E}_\omega|^2}{16\pi} \frac{\partial}{\partial\omega}[\omega\,\varepsilon(\omega)], \tag{8.17}$$

$$\langle w_H \rangle = \frac{|\boldsymbol{H}_\omega|^2}{16\pi} \frac{\partial}{\partial\omega}[\omega\mu(\omega)]. \tag{8.18}$$

Нетрудно показать, что средние значения плотности потока энергии $\langle \mathbf{S} \rangle$ и плотности энергии $\langle w \rangle = \langle w_E \rangle + \langle w_H \rangle$ монохроматической плоской волны в среде с дисперсией удовлетворяют соотношению $\langle \mathbf{S} \rangle = \mathbf{n} V_{gr} \langle w \rangle$ ($\mathbf{n}$ – вектор волновой нормали), означающему, что групповая скорость V_{gr}, определяемая соотношением (8.16), при отсутствии поглощения действительно представляет собой скорость переноса энергии.

В силу поперечности плоской волны различные направления в плоскости ее волнового фронта (x, y) неэквивалентны. Для описания этой поперечной анизотропии в общем случае вводится дополнительная характеристика, называемая *поляризацией волны,* задание которой определяет направления векторов поля в различные моменты времени. В частности, рассмотренные выше волны простейшего вида (8.3), (8.13), в которых векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ изменяются во времени и пространстве, оставаясь параллельными некоторым фиксированным прямым (в рассмотренных примерах $\mathbf{E} \| OX$, $\mathbf{H} \| OY$), обладают *линейной поляризацией*. В общем случае поляризация гармонических волн является *эллиптической* (концы векторов поля вращаются по эллипсам). Любая волна с эллиптической поляризацией может быть представлена как суперпозиция двух волн, линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях и обладающих (при одинаковых ω и $\mathbf{k}$) различными амплитудами и фазами.

Если фиксировать направление двух взаимно перпендикулярных осей в плоскости волнового фронта (например, осей x и y при распространении плоской волны вдоль z), состояние поляризации волны можно полностью характеризовать комплексным *коэффициентом поляризации*, определяемым как отношение комплексных амплитуд проекций электрического поля: $P = E_x / E_y$. Задание этого коэффициента определяет ориентацию и отношение полуосей эллипса поляризации и направление вращения векторов поля в плоскости волнового фронта. Например, при любом действительном P волна поляризована линейно (в случае $P = 0$ – по оси y, в случае $P = \infty$ – по оси x). При $P = \pm i$ поляризация является *круговой* (*циркулярной*), причем выбор верхнего или нижнего знака отвечает волнам, в которых векторы поля вращаются соответственно по часовой стрелке (право-поляризованная волна) или против часовой стрелки (лево-поляризованная волна), если смотреть навстречу волне (в направлении $-\mathbf{k}$). Впрочем, в некоторых монографиях встречается и прямо противоположное определение «правой» и «левой» поляризаций.

Монохроматическая плоская волна по определению является поляризованной, поскольку обе компоненты электрического поля (E_x и E_y) имеют фиксированные амплитуды и фазы. Для квазимонохроматических плоских волн (с некоторой характерной шириной спектра $\Delta\omega << \omega$) поляризация может медленно меняться с характерным временем $\tau \sim 1/\Delta\omega$, называемым *временным мас-*

штабом когерентности. В оптике (где первоначально возникло понятие поляризации) для света, излучаемого естественными источниками, временной масштаб когерентности, хотя и может быть большим по сравнению с периодом световой волны, обычно является малой величиной по сравнению с характерным временем усреднения любых измерительных приборов. Если за это время у световой волны нельзя выделить какую-либо преимущественную поляризацию, то волна называется *неполяризованной* (или *естественно поляризованной*). Альтернативой может быть частичная или полная поляризация квазимонохроматического излучения.

В случае широкополосного излучения ($\Delta\omega \sim \omega$) с хаотически меняющимися величинами и направлениями векторов поля в поперечной плоскости понятие поляризации в значительной степени утрачивает свое значение. Электрическое и магнитное поля в такой волне можно представить в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{f}(t - \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}/V), \qquad \mathbf{H} = \varsigma_w^{-1}\,\mathbf{n}\times\mathbf{f}(t - \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}/V), \tag{8.19}$$

где **f** – произвольная (но одна и та же для векторов электрического и магнитного поля) векторная функция, имеющая лишь компоненты, поперечные по отношению к направлению распространения, определяемому нормалью к волновому фронту **n**.

Замечание о волнах в анизотропных средах

Отсутствие зависимости фазовой и групповой скорости монохроматических волн от их поляризации для любых направлений распространения (так называемое *поляризационное вырождение)* является следствием предположенной выше изотропии среды. В анизотропной среде поляризационное вырождение снимается: собственные (нормальные) волны, имеющие различные поляризации, различаются также и значениями фазовой скорости.

Компоненты векторов электрической или магнитной индукции выражаются в анизотропной среде через компоненты соответствующих напряженностей поля при помощи тензоров диэлектрической или магнитной проницаемостей:

$$D_i = \varepsilon_{ij}E_j, \quad B_i = \mu_{ij}H_j, \tag{8.20}$$

где индексы $i, j = 1,2,3$ нумеруют оси декартовой системы координат x, y, z (по дважды встречающемуся индексу подразумевается суммирование). В отсутствие постоянного магнитного поля эти тензоры симметричны ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, $\mu_{ij} = \mu_{ji}$) и путем соответствующего поворота системы координат (приводящего к совмещению осей с *главными осями* тензора) всегда могут быть приведены к диагональному виду. Например, тензор диэлектрической проницаемости анизотропного диэлектрического кристалла в главных осях в общем случае записывается в виде

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \tag{8.21}$$

В так называемых *двухосных кристаллах* все три диагональные компоненты этого тензора различны. В *одноосных* кристаллах две из них совпадают; например, если выделенной является ось z, то $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$. При наложении постоянного магнитного поля среда становится *гиротропной*; в частности, если это поле направлено по оси z, то

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \tag{8.22}$$

причем параметры ε_1, ε_2, ε_3 в отсутствие диссипации энергии чисто действительны.

Уравнение для вектора комплексной амплитуды электрического поля, обобщающее уравнение Гельмгольца (8.8) на случай анизотропного диэлектрика (с $\mu = 1$), как следует из общих уравнений Максвелла, можно записать в виде

$$\Delta \mathbf{E}_\omega - \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{E}_\omega + k_0^2 \mathbf{D}_\omega = 0. \tag{8.23}$$

Для монохроматической плоской волны с волновым вектором $\mathbf{k}$ (так называемое *нормальное* решение) это векторное дифференциальное уравнение с учетом приведенной выше тензорной связи между векторами $\mathbf{D}_\omega$ и $\mathbf{E}_\omega$ переходит в систему трех алгебраических уравнений для проекций поля:

$$(k_i k_j - k^2 \delta_{ij} - k_0^2 \varepsilon_{ij}) E_j = 0 , \tag{8.24}$$

где δ_{ij} – *символ Кронекера*, равный нулю при $i \neq j$ и единице при $i = j$. Показатели преломления $n = k / k_0$ и фазовые скорости $V = c / n$ нормальных волн (в простейших случаях их две для каждого заданного направления волнового вектора) определяются из дисперсионного соотношения, получаемого приравниванием нулю определителя данной системы, после чего из этой же системы для каждого найденного значения n находится поляризация волн (соотношения между различными проекциями поля). Нужно отметить, что в общем случае эти волны не являются чисто поперечными и могут быть охарактеризованы двумя коэффициентами поляризации, определяющими характер изменения векторов поля в двух плоскостях (параллельной и перпендикулярной $\mathbf{k}$).

Наряду с рассмотренными *однородными плоскими* волнами, поля которых не зависят от координат, перпендикулярных направлению распространения, решения вида (8.10) описывают также и *неоднородные плоские волны с комплексным волновым вектором*. Последний, как следует из общего дисперсионного уравнения (8.12), может быть комплексным даже при чисто действительных ε и μ (например, в вакууме, при $\varepsilon = \mu = 1$). В самом деле, полагая $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\,\mathbf{k}''$, где $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}''$ – действительные векторы, из уравнения (8.12) находим в этом случае

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' = 0, \quad k'^2 - k''^2 = (\omega / c)^2 \varepsilon\mu . \tag{8.25}$$

Первое из этих равенств означает, что векторы $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}''$ взаимно перпендикулярны. Множитель, определяющий зависимость комплексных амплитуд полей от координат, при этом имеет вид

$$\exp(i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) = \exp(-i\,\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r})\exp(-\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}), \tag{8.26}$$

т.е. амплитуда поля изменяется по экспоненциальному закону ($\sim \exp(-\mathbf{k}''\mathbf{r})$) в направлении $\mathbf{k}''$, перпендикулярном к направлению распространения (направлению градиента фазы) $\mathbf{k}'$). Второе из равенств (8.25) можно рассматривать как дисперсионное соотношение для данной волны, определяющее длину волны $\lambda = 2\pi / k'$, а также фазовую и групповую скорости $V = \omega / k'$, $V_{gr} = d\omega / dk'$ в направлении распространения $\mathbf{k}'$ как функции частоты и константы k'', задающей скорость экспоненциального изменения поля в поперечном направлении. При $k'' \neq 0$ действительная часть волнового числа $k' > k_0\sqrt{\varepsilon\mu}$, т.е. волна является *медленной*: ее фазовая скорость меньше фазовой скорости *плоской однородной волны* c / n (скорости света в данной среде).

Различают неоднородные плоские волны двух типов: поперечно-электрические (ТЕ) и поперечно-магнитные (ТМ). В волне первого типа поле $\mathbf{E}$ перпендикулярно плоскости векторов $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}''$, а поле $\mathbf{H}$, выражающееся через поле $\mathbf{E}$ при помощи второго из уравнений (8.11), имеет как поперечную, так и продольную (по отношению к направлению распространения) компоненты. В волне второго типа поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ меняются местами в соответствии с правилом замены, определяемым принципом перестановочной двойственности (см. раздел 1) $\mathbf{E} \to \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \to -\mathbf{E}$, $\varepsilon \to \mu$, $\mu \to \varepsilon$. Рассмотренные неоднородные плоские волны с комплексным волновым вектором могут реализоваться над плоской границей диэлектрика (в области экспоненциального убывания поля) при возникновении явления полного внутреннего отражения (см. раздел 9). Поперечно-неоднородные волны другого вида, представляющие собой суперпозицию однородных волн, распространяющихся под определенным углом к некоторому заданному направлению, реализуются в волноводах (см. раздел 11).

В реальных равновесных средах всегда имеют место потери (*диссипация*) электромагнитной энергии. Диэлектрическая и магнитная проницаемости в уравнениях для комплексных амплитуд (8.7) в таких средах комплексны: $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, $\mu = \mu' + i\mu''$, причем их мнимые части, как и определяемые ими средние значения объемной плотности мощности электрических и магнитных потерь

$$Q_e = \frac{1}{8\pi}\varepsilon''|\mathbf{E}_\omega|^2, \quad Q_m = \frac{1}{8\pi}\mu''|\mathbf{H}_\omega|^2, \tag{8.27}$$

положительны. Заметим, что использование понятия комплексной диэлектрической проницаемости позволяет при переходе от общих уравнений Максвелла для проводящей среды к уравнениям для комплексных амплитуд (8.7) исключить из них ток проводимости $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, переписывая правую часть уравнения (1.17) в виде

$$\frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}_\omega - \frac{i\,\omega\varepsilon'}{c}\mathbf{E}_\omega = -\frac{i\,\omega}{c}\varepsilon\,\mathbf{E}_\omega, \tag{8.28}$$

т.е. рассматривая проводник как диэлектрик с комплексной проницаемостью

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}. \qquad (8.29)$$

Величина Q_e (первая из формул (8.27)) представляет собой фактически мощность джоулевых потерь в среде с эквивалентной проводимостью σ: $Q_e = \langle \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} \rangle = \sigma |\mathbf{E}_\omega|^2 / 2$.

В среде с потерями показатель преломления n и волновое число (8.9) комплексны: $n = \sqrt{(\varepsilon' + i\varepsilon'')(\mu' + i\mu'')} = n' + in''$, $k = k_0 n = k' + ik''$, благодаря чему плоская волна всегда затухает (по экспоненциальному закону) в направлении распространения. Например, выражения для комплексной амплитуды $E_{\omega x}$ и действительной проекции E_x электрического поля плоской волны, распространяющейся в направлении оси z в такой среде, как следует из (8.13), имеют вид

$$E_{\omega x} = E_0 \exp(ik'z)\exp(-k''z), \quad E_x = E_0 \cos(k'z - \omega t)\exp(-k''z). \qquad (8.30)$$

Мнимая часть волнового числа (так называемая *постоянная затухания*) k'' определяет характерную *длину затухания* волны $d = 1/k''$. В прозрачных средах с малыми потерями ($\varepsilon' > 0$, $\mu' > 0$, $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$, $\mu'' \ll \mu'$) длина затухания может быть весьма большой и во всяком случае значительно превышает длину волны $\lambda = 2\pi / k'$. В хороших проводниках ($\varepsilon'' = 4\pi\sigma/\omega \gg \varepsilon'$) действительная и мнимая части волнового числа равны друг другу: $k = (1+i)/\delta$, где $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega} = d$ – так называемая *толщина скин-слоя* или *глубина проникновения* поля в проводник. При $\varepsilon' < 0$, $\mu' > 0$ среда (плазма в области достаточно низких частот) является непрозрачной ($k = ik''$) даже в отсутствие потерь энергии (при $\varepsilon'' = \mu'' = 0$).

Бегущая плоская монохроматическая волна представляет собой некоторую элементарную структуру, на базе которой могут строиться (с использованием принципа суперпозиции) весьма разнообразные классы решений уравнений поля в линейной среде. В частности, сумма двух встречных плоских волн с одинаковыми поляризациями, частотами и амплитудами представляет собой *стоячую волну*, в которой перенос энергии в среднем по времени отсутствует, а пространственное распределение поля характеризуется чередованием неподвижных *узлов* (нулей) и *пучностей* (максимумов) амплитуды.

8.3. Волновые пакеты в среде с дисперсией

Поле одномерного *волнового пакета* (*импульса*), перемещающегося с некоторой скоростью по оси z и локализованного в каждый данный момент времени в ограниченной области пространства, может быть представлено в виде суперпозиции монохроматических плоских волн с различными частотами, распространяющихся в $+z$ направлении:

$$E(z,t)=\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, E_\omega \exp\left[-i\omega t+ik(\omega)z\right] \qquad (8.31)$$

Функция $E_\omega(\omega)$ представляют собой Фурье-сопряженную поля $E(0,t)$ в некотором начальном (входном) сечении $z=0$:

$$E_\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(0,t)\exp(i\omega t)dt\,. \qquad (8.32)$$

Если это поле задано в виде $E(0,t)=A_0(t)\exp(-i\omega_0 t)$, где ω_0 – *несущая частота*, а $A_0(t)$ – медленная (в масштабе периода $2\pi/\omega_0$) *комплексная амплитудная огибающая*, то спектр такого *квазимонохроматического импульса* E_ω сосредоточен в основном в узкой частотной полосе $\Delta\omega \ll \omega_0$ вблизи несущей частоты. При этом функция $k(\omega)$ в подынтегральном выражении (8.31) может быть представлена несколькими первыми членами степенного ряда

$$k(\omega)=k(\omega_0)+k'(\omega_0)(\omega-\omega_0)+(1/2)k''(\omega_0)(\omega-\omega_0)^2, \qquad (8.33)$$

где штрихи обозначают производные волнового числа по частоте в точке ω_0. В приближении, учитывающем только первые два члена этого ряда, т.е. на расстояниях *z*, удовлетворяющих условию $(d^2k/d\omega^2)_0(\omega-\omega_0)^2 z \ll 1$, выражение (8.31) принимает вид:

$$E(z,t)=A_0(\tau)\exp\left[i\omega_0 t-ik(\omega_0)z\right], \qquad (8.34)$$

где переменная $\tau=t-(z/V_{gr})$ определяет так называемое «местное» или «запаздывающее» время, отсчитываемое от момента прихода в данную точку сигнала, вышедшего в момент $t=0$ из точки $z=0$ и движущегося с групповой скоростью. Как следует из (8.34), зависящая от этого времени медленная огибающая $A_0(\tau)$ перемещается по оси z (не меняя своей формы) с групповой скоростью $V_{gr}=(d\omega/dk)_0$ (см 8. 16), а ее «высокочастотное заполнение» $\exp[i(\omega_0 t-k_0 z)]$ – с фазовой скоростью $V=\omega_0/k(\omega_0)$.

Учет членов второго порядка малости в разложении (8.33) приводит к следующему выражению для поля

$$E(z,t)=A(\tau,z)\exp\left[-i\omega t+ik(\omega_0)z\right], \qquad 8.35)$$

в котором медленная комплексная огибающая

$$A(\tau,z)=\int_{-\infty}^{\infty} dt' A_0(t')\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\left[-i\omega(\tau-t')+(i/2)k''(\omega_0)\omega^2 z\right], \qquad (8.36)$$

зависит не только от местного времени, но и непосредственно от координаты z, т.е. от пройденного импульсом расстояния. Нетрудно убедиться, что функция $A(\tau, z)$ удовлетворяет параболическому (диффузионному) уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{ik''(\omega_0)}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} \tag{8.37}$$

с комплексным коэффициентом диффузии $D = -ik''(\omega_0)/2$.

Решение уравнения (8.37) может быть получено как с использованием функции Грина для уравнения диффузии, так и путем непосредственного интегрирования выражения (8.36):

$$A(z,\tau) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi ik''(\omega_0)z}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' A_0(t') \exp\left[-i\frac{(t'-\tau)^2}{2k''(\omega_0)z}\right] \tag{8.38}$$

Форма импульса $A(\tau)$ при каждом данном z существенно зависит от величины отношения z/L, где $L = T_0^2/2k''(\omega_0)$, $T_0 \sim 1/\Delta\omega$ − характерный временной масштаб (длительность) импульса при $z = 0$. На малых расстояниях $z << L$ импульс сохраняет свою первоначальную форму ($A = A_0(\tau)$), а затем начинает «расплываться»; в области $z >> L$ амплитудная огибающая $|A(\tau)|$ принимает форму модуля ее первоначального спектра $A_{0\omega}$:

$$A(z,\tau) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi ik''(\omega_0)z}} \exp\left(-i\frac{\tau^2}{2k''(\omega_0)z}\right)\tilde{A}_{0\omega}(\tau), \quad |A(\tau,z)| \sim \frac{1}{\sqrt{z}}|\tilde{A}_{0\omega}(\tau)|, \tag{8.39}$$

где $\tilde{A}_{0\omega}(\tau) = A_{0\omega}(\omega = \omega_\tau)$, $\quad A_{0\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} dt' A_0(t') \exp(i\omega t')$, $\omega_\tau = \dfrac{\tau}{k''(\omega_0)z}$.

Согласно выражению (8.39), при неизменной форме огибающей ширина (длительность) импульса линейно растет с пройденным расстоянием, а его амплитуда, в соответствии с законом сохранения полной энергии импульса, уменьшается обратно пропорционально квадратному корню из пройденного расстояния.

Если импульс на входе является гауссовым ($A_0(t) = \exp\left(-t^2/T_0^2\right)$), его амплитудная огибающая $|A(\tau)|$ в рамках применимости диффузионного уравнения остается гауссовой при всех z, а длительность T при распространении вглубь среды монотонно увеличивается:

$$T^2 = T_0^2 + 4\frac{[k''(\omega_0)z]^2}{T_0^2}. \qquad (8.40)$$

Из обратимости решений уравнений Максвелла во времени следует, что наряду с описанным процессом расширения импульса, при его распространении в диспергирующей среде возможен также (на определенном интервале длины или времени) обратный ему процесс сжатия (укорочения) импульса (так называемая *компрессия* или *временная фокусировка*). Обращая во времени решение вида (8.39), можно убедиться, что для компрессии импульса необходимо, чтобы в пределах огибающей амплитуды присутствовала квадратичная по времени модуляция фазы высокочастотного заполнения, которая эквивалентна линейному изменению частоты от начала к концу импульса. Сжатие импульса возможно при наличии зависимости групповой скорости от частоты, если групповая скорость, соответствующая началу импульса, меньше групповой скорости, соответствующей его концу. Максимально достижимое сжатие определяется *соотношением неопределенности* для ширины спектра и минимальной длительности волнового пакета: $\Delta\omega \cdot \tau_{\min} \geq 1$. После достижения (на некоторой ограниченной трассе распространения) максимального сжатия импульс начинает неограниченно расширяться.

8.4. Квазиоптические волновые пучки

Суперпозиция монохроматических плоских волн, распространяющихся в различных (близких друг к другу) направлениях, позволяет описать распространение в однородной среде так называемых *квазиоптических волновых пучков*, поперечное сечение которых значительно превышает длину волны. Волновые векторы плоских волн (фурье-составляющих), образующих такие пучки, наклонены под малыми углами друг к другу и к продольной оси пучка z. Это позволяет рассматривать поле пучка как квазипоперечное, отвлекаясь при описании его пространственной структуры от его векторного характера и описывая эту структуру при помощи одной скалярной функции $u(\mathbf{r})$, в качестве которой может быть взята комплексная амплитуда любой из поперечных (перпендикулярных оси z) компонент электрического или магнитного поля. Выражая на основании дисперсионного уравнения (8.12) продольные компоненты k_z волнового вектора $\mathbf{k}$ через поперечные (перпендикулярные оси z) компоненты $\mathbf{k}_\perp\{k_x, k_y\}$ и ограничиваясь ниже (без потери общности) изучением квазиоптических пучков в вакууме (при $k = k_0 = \omega/c$), представим Фурье-разложение поля $u(\mathbf{r})$ в виде двойного интеграла по поперечным волновым числам k_x, k_y:

$$u(\mathbf{r}_\perp, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y A(\mathbf{k}_\perp) \exp[i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp + ik_z(\mathbf{k}_\perp) z]. \qquad (8.41)$$

Здесь $k_z(\mathbf{k}_\perp)=\sqrt{k_0^2-\mathbf{k}_\perp^2}$; $\mathbf{r}_\perp\{x,y\}$ − радиус-вектор в поперечной плоскости $z=\text{const}$. Дальнейшее описание вполне аналогично использованному выше при анализе квазимонохроматических волновых пакетов в среде с дисперсией.

Поперечный пространственный спектр поля $A(\mathbf{k}_\perp)$ в выражении (8.41) определяется заданием поля $u(\mathbf{r}_\perp,0)=u_0(\mathbf{r}_\perp)$ в некотором начальном (входном) поперечном сечении пучка $z=0$:

$$A(\mathbf{k}_\perp)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}dy\,u_0(\mathbf{r}_\perp)\exp(i\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}_\perp). \qquad (8.42)$$

В рассматриваемом нами *малоугловом* (называемом также *параксиальным* или *квазиоптическом*) приближении этот спектр в основном сосредоточен в области малых значений поперечных волновых чисел $|\mathbf{k}_\perp|<\Delta k_\perp<<k_z\approx k_0$ (или малых углов $\vartheta\approx|\mathbf{k}_\perp|/k_0<<1$, образуемых волновыми векторами с осью z). Его ширина $\Delta k_\perp$ определяется характерным поперечным масштабом a_0 функции $u_0(\mathbf{r}_\perp)$ (начальной шириной пучка): $\Delta k_\perp\sim 1/a_0$ Интеграл (8.41) при этом можно упростить, заменяя функцию $k_z(\mathbf{k}_\perp)$ несколькими первыми членами соответствующего степенного ряда

$$k_z=\sqrt{k_0^2-\mathbf{k}_\perp^2}=k_0\left(1-\frac{\mathbf{k}_\perp^2}{2k_0^2}-\frac{\mathbf{k}_\perp^4}{8k_0^4}-...\right). \qquad (8.43)$$

На расстояниях $z<<a_0(k_0a_0)^3$), где можно ограничиться первыми двумя членами этого ряда, получаем

$$u(\mathbf{r}_\perp,z)=A(\mathbf{r}_\perp,z)\exp(ik_0z), \qquad (8.44)$$

$$A(\mathbf{r}_\perp,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dk_x\int\limits_{-\infty}^{\infty}dk_y A(\mathbf{k}_\perp)\exp[i\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}_\perp-i\,(\mathbf{k}_\perp^2z/2k_0)]. \qquad (8.45)$$

Функция $A(\mathbf{r}_\perp,z)$ (медленная комплексная огибающая поля), описывающая эволюцию поперечной структуры волнового пучка при изменении z, удовлетворяет *уравнению поперечной диффузии* (с комплексным коэффициентом диффузии $i/2k_0$):

$$\frac{\partial A}{\partial z}=\frac{i}{2k_0}\Delta_\perp A, \qquad (8.46)$$

где $\Delta_\perp=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ − поперечный оператор Лапласа. Запись решения этого уравнения при помощи отвечающей ему функции Грина (или на основании прямого анализа спектрального представления (8. 45)) позволяет получить закон преобразования поля от начального сечения $z=0$ к любому другому поперечному сечению z:

$$u(\mathbf{r}_\perp, z) = -\frac{ik_0 \exp(ik_0 z)}{2\pi z} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy' u_0(\mathbf{r}'_\perp) \exp\left[\frac{ik_0}{2z}(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)^2\right]. \tag{8.47}$$

На малых расстояниях $z << k_0 a_0^2/2$ (в так называемой *прожекторной зоне* или *зоне геометрической оптики*) пучок сохраняет свою первоначальную поперечную структуру. В противоположном предельном случае при $z >> k_0 a_0^2/2$ (*зона Фраунгофера*) поперечная огибающая пучка принимает форму его пространственного Фурье-спектра (8.42):

$$u(\mathbf{r}_\perp, z) = -\frac{ik_0 \exp(ik_0 z)}{2\pi z} \exp\left(\frac{ik_0 \mathbf{r}_\perp^2}{2z}\right) A\left(\mathbf{k} = \frac{k_0}{z}\mathbf{r}_\perp\right). \tag{8.48}$$

Амплитуда поля в зоне Фраунгофера убывает обратно пропорционально расстоянию *z*, а поперечные размеры пучка возрастают пропорционально *z*, что соответствует сохранению полной мощности, переносимой через всю поперечную апертуру пучка. В случае действительной функции $u_0(\mathbf{r}_\perp)$ (плоский фазовый фронт во входном сечении) характерный размер поперечной апертуры пучка монотонно увеличивается при переходе от зоны геометрической оптики к зоне Фраунгофера.

Простейшей поперечной структурой обладает осесимметричный гауссов пучок, радиальный профиль которого описывается гауссовой кривой при всех z. Комплексное поле такого пучка в рамках рассмотренного малоуглового приближения (основанного на использовании параболического уравнения (8.46)) записывается в виде

$$u(r, z) = \frac{u_0 \exp(ik_0 z)}{1 + i\left(2z/k_0 a_0^2\right)} \cdot \exp\left(i\frac{k_0 r^2}{2z} \cdot \frac{1}{1 + k_0^2 a_0^4/4z^2}\right) \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{a^2(z)}\right]. \tag{8.49}$$

Здесь r − расстояние от оси в плоскости $z = \text{const}$, u_0 − максимальное значение амплитуды, достигающееся в точке $z = 0,\ r = 0$. В области $z < 0$ пучок является сходящимся (его фазовые фронты обращены выпуклостью в направлении $-z$), а в области $z > 0$ расходящимся (фазовые фронты обращены выпуклостью в направлении $+z$). В плоскости $z = 0$ фаза постоянна. Эффективный радиус пучка a, определяющий расстояние от оси, на котором амплитуда убывает в e раз, зависит от координаты z по закону

$$a^2(z) = a_0^2 + \frac{4z^2}{k_0^2 a_0^2}. \tag{8.50}$$

Минимальное значение радиуса $a_{\min} = a_0$ достигается (вместе с максимальным значением амплитуды) в плоскости $z = 0$. Описанное распределение поля (8.49) может быть реализовано, например, в области пространства за линзой с гауссовой прозрачностью (убывающей по гауссовому закону при удалению от оси), освещаемой по нормали плоской волной. Начало отсчета по оси z в решении (8.49) должно быть помещено в этом случае в фокальной плоскости линзы, а сама линза в плоскости $z = -f$, где f − ее фокусное расстояние. Использованное при получении (8.49) малоугловое приближение будет при этом выполнено, если эффективный диаметр линзы $d << f$.

9. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В ПЛОСКО-СЛОИСТЫХ СРЕДАХ ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВОЛН

Слоистыми (*слоисто-неоднородными*) называются среды, свойства которых зависят от одной декартовой координаты (ниже в качестве этой декартовой координаты будет выбираться ось z). Одной из важных задач, относящихся к распространению электромагнитных волн в таких средах, является задача о распределении электромагнитного поля, возникающем при падении (нормальном или наклонном) монохроматической плоской волны из однородного полупространства на слоисто-неоднородную среду. В силу принципа суперпозиции решение этой задачи естественным образом обобщается на произвольную зависимость от времени (свертка в интеграл Фурье по частотам) и на квазиоптические пучки (свертка в интеграл Фурье по волновым векторам).

Простейшим примером слоисто-неоднородной среды являются два однородных полупространства с различными электродинамическими свойствами, разделенные плоской границей. Пусть из среды 1 ($z<0$) с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_1 и μ_1 по нормали к границе $z = 0$ падает плоская монохроматическая электромагнитная волна заданной амплитуды:

$$E_{x\omega}^{(i)} = E_0 \exp(ik_1 z)$$
$$H_{y\omega}^{(i)} = (1/\varsigma_{w1}) E_0 \exp(ik_1 z) \qquad (9.1)$$

где k_1 – комплексное волновое число в среде 1, а ς_{w1} – ее волновое сопротивление. Знак в показателе экспоненты выбирается таким образом, чтобы обеспечить либо экспоненциальное спадание поля в положительном направлении оси z (для среды с поглощением), либо положительность среднего по времени потока энергии в направлении $+z$ (для среды без поглощения). Учитывая, что в данном разделе рассматриваются только монохроматические плоские волны, индекс «ω» у комплексных амплитуд далее опускаем.

Решение в среде 2 ($z > 0$) с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_2 и μ_2, представляет собой *прошедшую* волну, уходящую от границы в положительном направлении оси z:

$$E_x^{(t)} = T_E E_0 \exp(ik_2 z)$$
$$H_y^{(t)} = T_E (1/\varsigma_{w2}) E_0 \exp(ik_2 z), \qquad (9.2)$$

Где знак в экспоненте выбирается из тех же соображений, что и для падающей волны в среде 1.

Решение в среде 1 ($z < 0$) представляет собой суперпозицию *падающей* волны (9.1) и *отраженной* волны:

$$E_x^{(r)} = R_E E_0 \exp(-ik_1 z),$$
$$H_y^{(i)} = -R_E (1/\varsigma_{w1}) E_0 \exp(ik_1 z). \tag{9.3}$$

Коэффициенты R_E и T_E, входящие в выражения (9.2), (9.3), называются соответственно *амплитудными коэффициентами отражения* и *прохождения* по полю E, отнесенными к точке $z = 0$; в общем случае они являются комплексными величинами, определяющими как амплитуду, так и фазу отраженной и прошедшей волн. Наряду с амплитудными вводятся также *энергетические* коэффициенты отражения и прохождения:

$$R_W = |R_E|^2, \quad T_W = |T_E|^2 \operatorname{Re}(\varsigma_2^{-1}) / \operatorname{Re}(\varsigma_{w1}^{-1}), \tag{9.4}$$

удовлетворяющие очевидному соотношению, выражающему закон сохранения энергии

$$R_W + T_W = 1. \tag{9.5}$$

Для нахождения коэффициентов отражения и прохождения используются два способа: один основан на «сшивке» решений в средах 1 и 2 с использованием граничных условий (непрерывность тангенциальных компонент полей **E** и **H)**, второй способ основан на использовании так называемых *импедансных* граничных условий и идеально приспособлен для нахождения коэффициента отражения (коэффициент прохождения при этом все равно находится с использованием одного их граничных условий). Импеданс вводится как отношение взаимно перпендикулярных проекций комплексных амплитуд электрического и магнитного полей с линейной поляризацией в условиях, когда они зависят от единственной координаты (в нашем случае z):

$$\varsigma(z) = E_{\omega x}(z) / H_{\omega y}(z). \tag{9.6}$$

В частности, например, в плоской волне, распространяющейся в однородной среде, импеданс не зависит от координаты и равен волновому сопротивлению среды ς_w (со знаком «+» или «-» в зависимости от направления распространения волны). В остальных случаях (слоисто-неоднородная среда, суперпозиция плоских волн, распространяющихся навстречу друг другу) импеданс является функцией координаты. При нахождении коэффициента отражения от плоской границы раздела двух сред импедансное граничное условие на границе раздела заключается в приравнивании импеданса на границе волновому сопротивлению второй среды.

Коэффициенты отражения и прохождения при нормальном падении плоской волны на плоскую границу раздела двух сред определяются соотношениями:

$$R = \frac{\varsigma_{w1}^{-1} - \varsigma_{w2}^{-1}}{\varsigma_{w1}^{-1} + \varsigma_{w2}^{-1}} = -\frac{\varsigma_{w1} - \varsigma_{w2}}{\varsigma_{w1} + \varsigma_{w2}}$$

$$T = \frac{2/\varsigma_{w1}}{\varsigma_{w1}^{-1} + \varsigma_{w2}^{-1}} = \frac{2\varsigma_{w2}}{\varsigma_{w1} + \varsigma_{w2}}. \qquad (9.7)$$

Из выражений (9.7) следует, что для прозрачных сред (без диссипации) фаза прошедшей волны совпадает с фазой падающей волны, а фаза отраженной волны совпадает с фазой падающей волны при отражении от среды с большим волновым сопротивлением и отличается от нее на π при отражении от среды с меньшим волновым сопротивлением. Если волновые сопротивления сред 1 и 2 совпадают, то отраженная волна отсутствует, это аналог полного согласования линии передачи с нагрузкой при условии равенства импеданса нагрузки и волнового сопротивления линии передачи (см. далее раздел 11).

В слоисто-неоднородной среде с произвольными зависимостями $\varepsilon(z)$ и $\mu(z)$ импеданс удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка типа Риккати:

$$\varsigma' = ik_0\left(-\varepsilon\varsigma^2 + \mu\right), \qquad (9.8)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по z.

Уравнение (9.8) удобно использовать при нахождении коэффициентов отражения от произвольных неоднородных слоев конечной толщины численными методами, поскольку для уравнения первого порядка достаточно знать импеданс в какой-нибудь одной точке (например, на выходе из слоя он совпадает с волновым сопротивлением однородной среды за слоем). В однородной среде решение уравнения (9.8) определяет *формулу пересчета импеданса* от точки $z = 0$ в произвольную точку z:

$$\varsigma(z) = w\frac{\varsigma(0) + i\varsigma_w \operatorname{tg} kz}{w + i\varsigma(0)\operatorname{tg} kz} \qquad (9.9)$$

Формула (9.9) позволяет достаточно просто рассчитывать коэффициенты отражения от небольшого числа однородных плоских слоев, отличающихся своими электродинамическими свойствами.

При рассмотрении задачи о наклонном падении монохроматической плоской волны на плоскую границу раздела двух сред будем предполагать, что в среде 1 поглощение отсутствует. При этом тангенциальная (по отношению к границе) составляющая волнового вектора (без потери общности будем ее обозначать в дальнейшем k_x) может рассматриваться как заданная действительная величина (из граничных условий следует, что она одинакова для падающей, отраженной и прошедшей волн); нормальная же составляющая может быть как чисто действительной, так и комплексной или чисто мнимой. При определении направлений распространения падающей, отраженной и прошедшей волн в задаче о наклонном падении используются следующие термины: плоскость, проходящая через нормаль к границе раздела и волновой вектор падающей волны («падающий луч»), называется *плоскостью падения*; углы, образуемые лучами падающей, отраженной и прошедшей (преломленной) волны с нормалью к границе называются соответственно углами падения (ϑ_1), отражения (ϑ_r) и преломления (ϑ_2). Из сохранения тангенциальной составляющей волнового вектора следуют *законы Снеллиуса*:

1) лучи падающий, отраженный и преломленный лежат в одной плоскости (плоскости падения).

2) угол падения равен углу отражения: $\vartheta_r = \vartheta_1$,

3) угол преломления связан с углом падения соотношением

$$\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \tag{9.10}$$

где $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$ и $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$ – соответственно *абсолютные показатели преломления* сред 1 и 2, величина n_{12} – *относительный показатель преломления* среды 2 по отношению к среде 1. Понятие «направление луча», использованное выше при формулировке законов Снеллиуса, на языке плоских волн означает направление соответствующего волнового вектора.

При наклонном падении плоской волны на границу со средой, имеющей меньший показатель преломления (иногда называемой *оптически менее плотной* средой), возникает явление *полного внутреннего отражения*, состоящее в том, что при угле падения ϑ_1, большем некоторого критического значения ϑ_{cr}, называемого *углом полного внутреннего отражения* и определяемого условием

$$\sin\vartheta_{cr} = n_2/n_1, \tag{9.11}$$

прошедшая волна в среде «2» как волна с чисто действительным волновым вектором перестает существовать (даже при отсутствии поглощения в среде 2). Проекция ее волнового вектора на ось x остается действительной, но проекция на ось z (при действительном ε_2) оказывается чисто мнимой, так что поле этой волны экспоненциально убывает при удалении от границы и волна не переносит энергию в направлении нормали к границе.

В случае наклонного падения различают две поляризации, которые сохраняются в обеих средах: - *TE поляризация*, в которой вектор **E** перпендикулярен плоскости падения (в рассмотренном выше случае только y компоненту) и *TM поляризация*, в которой вектор **H** перпендикулярен плоскости падения. В обоих случаях электромагнитное поле в среде 1 представляет собой суперпозицию падающей и отраженной волн, а в среде 2 имеется только прошедшая волна. Для TE поляризации обычно вводятся амплитудные коэффициентов отражения (R_E) и прохождения (T_E) по полю **E**:

при z < 0 (среда 1): $$E_y = E_0 \exp(ik_x x)[\exp(ik_{1z}) + R_E \exp(-ik_{1z} z)], \qquad (9.12)$$

при z > 0 (среда 2): $$E_y = T_E E_0 \exp(ik_x x)\exp(ik_{2z}). \qquad (9.13)$$

В приведенных выражениях тангенциальная компонента волнового вектора фиксирована и определяется углом падения в среде 1, нормальные компоненты в каждой из сред определяются их показателями преломления:

$$k_{1,2z} = \sqrt{k_{1,2}^2 - k_x^2} = k_0 \sqrt{n_{1,2}^2 - n_1^2 \sin^2 \vartheta_1} \qquad (9.14)$$

Если угол падения больше угла полного внутреннего отражения, величина k_{2z} становится мнимой, и знак перед ней выбирается из условия экспоненциального убывания поля при $z \to +\infty$.

Коэффициенты отражения и прохождения, как и в случае нормального падения, находятся из условий непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на границе раздела. Соответствующие формулы в случае наклонного падения легко могут быть получены как обобщение формул (9.7) с использованием понятия *поперечного импеданса* $\zeta_\perp$, обобщающего данное выше определение (9.6) на случай плоских волн, не являющихся чисто поперечными по отношению к заданному выделенному направлению (в рассматриваемой задаче – нормаль $\mathbf{z}_0$ к границе раздела сред). Величина $\zeta_\perp$ и в этом случае определяется как коэффициент, связывающий поперечные (перпендикулярные друг к другу и к оси z) компоненты ее электрического и магнитного полей:

$$\mathbf{E}_\perp = \zeta_\perp \mathbf{H}_\perp \times \mathbf{z}_0 \qquad (9.15)$$

Обобщением понятия волнового сопротивления при этом является *характеристический поперечный импеданс* $\zeta_{\perp w}$ монохроматической плоской волны с заданным (в общем случае комплексным) волновым вектором $\mathbf{k}(k_x, k_z)$. Выражения для него легко получаются из общих соотношений (8.11), (8.12); для волн типа TE или TM имеем соответственно:

$$\zeta_{\perp w}^{(TE)} = \frac{k_0 \mu}{k_z} = \zeta_w \frac{1}{\cos\vartheta}, \qquad \zeta_{\perp w}^{(TM)} = \frac{k_z}{k_0 \varepsilon} = \zeta_w \cos\vartheta. \qquad (9.16)$$

Здесь $k_0 = \omega / c$, $k = k_0 \sqrt{\varepsilon\mu}$, $k_z = \sqrt{k_0^2 \varepsilon\mu - k_x^2}$, $\cos\vartheta = k_z / k$. При действительных k и k_z величина ϑ чисто действительна и представляет собой угол, образуемый волновым вектором $\mathbf{k}$ с осью z.

Ввиду непрерывности поперечного импеданса на границе, коэффициенты отражения и прохождения (по полю **E**) при наклонном падении ТЕ волны определяются теми же выражениями (9.7) с заменой ζ_w на $\zeta_{\perp w}^{TE}$:

$$R_E = \frac{\zeta_{\perp w2}^{TE} - \zeta_{\perp w1}^{TE}}{\zeta_{\perp w2}^{TE} + \zeta_{\perp w1}^{TE}}, \qquad T_E = \frac{2\zeta_{\perp w2}^{TE}}{\zeta_{\perp w2}^{TE} + \zeta_{\perp w1}^{TE}}, \tag{9.17}$$

где значения $\zeta_{\perp w}^{TE}$ в областях 1 и 2 определяются выражениями (9.16) при соответствующих каждой из этих областей значениях параметра ζ_w и угла ϑ.

В качестве характеристик отражения волн типа ТМ вместо величин R_E и T_E как правило используются величины R_H и T_H, определяемые как аналогичные отношения амплитуд магнитных, а не электрических полей. Выражения для них можно получить непосредственно из (9.17) на основании принципа перестановочной двойственности (см. раздел 10), произведя замены $\varepsilon \to \mu$, $\mu \to \varepsilon$, $\zeta_w \to \zeta_w^{-1}$. В результате находим:

$$R_H = \frac{\zeta_{\perp w1}^{TM} - \zeta_{\perp w2}^{TM}}{\zeta_{\perp w1}^{TM} + \zeta_{\perp w2}^{TM}}, \qquad T_H = \frac{2\zeta_{\perp w1}^{TM}}{\zeta_{\perp w1}^{TM} + \zeta_{\perp w2}^{TM}} \tag{9.18}$$

Подстановка (9.16) в (9.17) и (9.18) позволяет получить для коэффициентов отражения так называемые *формулы Френеля* (в общем случае достаточно громоздкие). Ниже мы приводим эти формулы лишь для важного частного случая непоглощающих немагнитных сред ($\mu = 1,\ \varepsilon_1'' = \varepsilon_2'' = 0$) при значениях углах падения ϑ_1, меньших угла полного внутреннего отражения:

$$R_E = \frac{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\sin(\vartheta_2 + \vartheta_1)}, \qquad T_E = \frac{2\cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \tag{9.17a}$$

$$R_H = \frac{\operatorname{tg}(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sin(\vartheta_2 + \vartheta_1)}, \qquad T_H = \frac{\sin 2\vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)}, \tag{9.18a}$$

где углы ϑ_1, ϑ_2 связаны законом Снелля (9.10).

При наклонном падении ТМ волны существует так называемое *явление Брюстера*, состоящее в том, что при определенном угле падения $\vartheta_1 = \vartheta_\text{B}$ (называемом *углом Брюстера*) ее коэффициент отражения обращается в нуль. Легко убедиться, что при падении под углом Брюстера лучи отраженный и преломленный образуют угол $\pi/2$, а сам угол Брюстера (при $\mu_1 = \mu_2$) определяется соотношением:

$$\operatorname{tg}\vartheta_B = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} \tag{9.19}$$

Приведем здесь для справки общие выражения для коэффициентов отражения и прохождения, справедливое при $\mu_1 \neq \mu_2$ и при наличии поглощения в среде 2:

$$R_E = \frac{\varsigma_{w1}^{-1}\cos\vartheta_1 - \mu_2^{-1}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\vartheta_1}}{\varsigma_{w1}^{-1}\cos\vartheta_1 + \mu_2^{-1}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\vartheta_1}},$$

$$T_E = \frac{2\varsigma_{w1}^{-1}\cos\vartheta_1}{\varsigma_{w1}^{-1}\cos\vartheta_1 + \mu_2^{-1}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\vartheta_1}}, \tag{9.17б}$$

$$R_H = \frac{\varsigma_{w1}\cos\vartheta_1 - \varepsilon_2^{-1}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\vartheta_1}}{\varsigma_{w1}\cos\vartheta_1 + \varepsilon_2^{-1}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\vartheta_1}},$$

$$T_H = \frac{2\varsigma_{w1}\cos\vartheta_1}{\varsigma_{w1}\cos\vartheta_1 + \varepsilon_2^{-1}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\vartheta_1}}, \tag{9.18б}$$

где величины $\varepsilon_2, \mu_2, n_2^2$ являются комплексными, а выбор знаков перед корнями из тех же соображений, что и выше.

В *плавно неоднородной* диэлектрической среде с $\mu = 1, \varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ комплексные амплитуды электрического и магнитного полей описываются уравнениями

$$\Delta\mathbf{E} + \nabla\left(\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\mathbf{E}\right) + k_0^2\varepsilon\mathbf{E} = 0, \tag{9.20}$$

$$\Delta\mathbf{H} + \frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\times\mathrm{rot}\mathbf{H} + k_0^2\varepsilon\mathbf{H} = 0, \tag{9.21}$$

которые могут быть получены непосредственно из уравнений Максвелла при отсутствии сторонних источников и должны решаться при условиях $\mathrm{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = 0$, $\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0$. В случае нормального падения плоской волны на плоскослоистую среду ($\varepsilon = \varepsilon(z)$) удобно воспользоваться первым из этих уравнений, согласно которому любая из поперечных по отношению к градиенту неоднородности компонент поля U удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка в обыкновенных производных:

…

$$U'' + k_0^2\varepsilon(z)U = 0, \tag{9.22}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по координате z.

Уравнение типа (9.22) встречается в разнообразных физических задачах, поэтому его возможные решения исследованы достаточно подробно. Существует большое количество эталонных задач с конкретными профилями $\varepsilon(z)$, решения которых выражаются через различные специальные функции. Если диэлектрическая проницаемость среды меняется достаточно плавно, можно записать приближенное общее решение этого уравнения, в так называемом *ВКБ приближении* (приближение Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна):

$$U(z) \approx \frac{C_1}{\sqrt[4]{\varepsilon}} \exp\left(ik_0 \int\limits_{z_0}^{z} \sqrt{\varepsilon(z')}dz' \right) + \frac{C_2}{\sqrt{n}} \exp\left(-ik_0 \int\limits_{z_0}^{z} \sqrt{\varepsilon(z')}dz' \right), \tag{9.23}$$

где C_1 и C_2 – произвольные комплексные постоянные.

Приведенное решение локально (на расстояниях, существенно меньших масштаба неоднородности среды, но существенно больших длины волны) представляет собой суперпозицию двух плоских волн с постоянными амплитудами и волновыми числами, распространяющихся навстречу друг другу. На расстояниях, значительно превышающих длину волны, изменения амплитуды и фазовой скорости волн могут быть большими, но, как и в однородной среде, волны остаются независимыми (не взаимодействуют между собой). В данном приближении магнитное поле каждой из этих двух встречных волн связано с электрическим полем соответствующей волны тем же (локальным) импедансным соотношением, что и в однородной среде ($E_x / H_y = \pm\varepsilon^{-1/2}$)

Условием применимости ВКБ-приближения является малость относительного изменения локальной длины волны в среде $\lambda \sim 1/(k_0\sqrt{\varepsilon})$ на расстояниях порядка самой этой длины волны, т.е. выполнение неравенства $d\lambda / dz << 1$, которое, вводя характерный масштаб неоднородности среды $L = (d\varepsilon / dz)^{-1}$, можно записать в виде

$$k_0 L >> \varepsilon^{-3/2}. \tag{9.24}$$

При $\varepsilon \sim 1$ условие (9.24) нарушается в областях с резкими изменениями ε (где величина $k_0 L$ меньше или порядка единицы), но и в случае слабой неоднородности среды (при $k_0 L >> 1$) оно не выполняется в окрестности точки, где диэлектрическая проницаемость проходит через нуль. Как следует из (9.23), электрическое поле в ВКБ-приближении обращается в этой точке в бесконечность, а магнитное поле, в силу его импедансной связи с электрическим, стремится к нулю. В областях нарушения ВКБ-приближения распространяющиеся навстречу друг другу волны (9.23), перестают быть независимыми − между ними фактически возникает взаимодействие, означающее появление отраженной волны.

Взаимодействие волн в окрестности *точки отражения* $\varepsilon = 0$, может быть описано на основе точного решения эталонной задачи о падении плоской волны на так называемый линейный слой, в котором диэлектрическая проницаемость изменяется по линейному закону:

$$\varepsilon(z) = -(z/L), \tag{9.25}$$

(при этом масштаб неоднородности L представляет собой расстояние от точки отражения до границы слоя, где $\varepsilon = 1$). Заметим, что такой слой может рассматриваться как сравнительно простая модель реальных распределений *неоднородной плазмы* (среды, в которой величина ε может изменяться от единицы до больших отрицательных величин). Уравнение для поля (9.22) в линейном слое имеет вид *уравнения Эйри*:

$$U'' - \xi U = 0, \tag{9.26}$$

где введена безразмерная координата $\xi = \left(k_0^2 / L\right)^{1/3} z$. Одно из двух линейно-независимых решений этого уравнения, конечное при всех z и отвечающее волне, приходящей из области отрицательных ξ (т.е. положительных ε), представляет собой (с точностью до постоянного множителя) *функцию Эйри* $\mathrm{Ai}(\xi)$:

$$U(\xi) = C\mathrm{Ai}(\xi),\ \ C = \mathrm{const},\ \mathrm{Ai}(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{u^3}{3} + u\xi\right)du. \tag{9.27}$$

При больших положительных z (в непрозрачной для волны области) эта функция стремится к нулю; асимптотика при $\xi >> 1$:

$$\mathrm{Ai}(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\xi^{-1/4}\exp\left(-\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right). \tag{9.28}$$

Асимптотика при больших отрицательных z ($\xi < 0,\ |\xi| >> 1$) совпадает с ВКБ-приближением для стоячей волны, образованной двумя бегущими встречными волнами одинаковой амплитуды (падающей и отраженной от плоскости $\varepsilon = 0$):

$$\mathrm{Ai}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}|\xi|^{-1/4}\cos\left(\frac{2}{3}|\xi|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right). \tag{9.29}$$

Заметим, что второе линейно-независимое решение уравнения (9.26) (вторая функция Эйри $\mathrm{Bi}(\xi)$) отбрасывается, поскольку не удовлетворяет условию ограниченности в непрозрачной области: $\mathrm{Bi}(\xi \to \infty) \sim \xi^{-1/4}\exp(2\xi^{3/2}/3) \to \infty$.

Решение (9.27) может быть использовано также и для описания поля в слое с произвольной плавной (не обязательно всюду линейной) функцией $\varepsilon(z)$. Требуется лишь, чтобы эта функция была близка к линейной ($\varepsilon(z) = -z/L$) на малом интервале $|z| < \delta$ в окрестности точки отражения $z = 0$. При условии $\delta >> (L/k_0^2)^{1/3}$ (не противоречащем при $k_0 L >> 1$ условию $\delta << L$) решение (9.27) на краях этого интервала близко к своей асимптотике и «сшивается» с решением, получаемым для области $|z| > \delta$ в ВКБ-приближении при любой плавной функции $\varepsilon(z)$.

В задаче о наклонном падении плоской волны на слоисто-неоднородную среду естественным явояется сохранение тангенциальной компоненты волнового вектора. При этом поперечные компоненты полей ТЕ и ТМ волн без уменьшения общности можно записать в виде $E_y = E(z)\exp(ik_x x)$, $H_y = H(z)\exp(ik_x x)$, рассматривая по-прежнему плоскость (x, y) в качестве плоскости падения. Для функций $E(z)$, $H(z)$, описывающих соответственно волны TE- и TM-типов в среде $\varepsilon = \varepsilon(z)$, на основании уравнений (9.20), (9.21) получаем следующие уравнения в обыкновенных производных:

$$E'' + k_0^2(\varepsilon - \sin^2 \vartheta_0)E = 0, \tag{9.30}$$

$$H'' - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}H' + k_0^2(\varepsilon - \sin^2 \vartheta_0)H = 0, \tag{9.31}$$

где через ϑ_0 обозначен угол падения волны в вакууме. Уравнение (9.30) для TE волны отличается от уравнения в случае нормального падения лишь постоянным коэффициентом во втором слагаемом. Поэтому при выполнении замены $\varepsilon \to \varepsilon - \sin^2 \vartheta$ решение, полученное для случая нормального падения, полностью переносится на случай наклонного падения TE-волны, т.е. все свойства решения (изменение амплитуды и фазовой скорости волн, определяемые ВКБ-приближением, включая и расходимость электрического поля в точке отражения, эталонное решение для линейного слоя и т.д.) сохраняются (с тем отличием, однако, что точка отражения перемещается теперь в точку, где $\varepsilon = \sin^2 \vartheta$).

Уравнение для магнитного поля TM-волны (9.31) выглядит более сложным. Тем не менее, в той же области, где применимо ВКБ-приближение для TE-волны, т.е. при выполнении условия $k_0^{-1}(d/dz)(\varepsilon - \sin^2 \vartheta_0)^{-1/2} << 1$, аналогичное приближение может быть построено и для этого уравнения, поскольку, как нетрудно показать, функция $u = H/\sqrt{\varepsilon}$ в этой области приближенно удовлетворяет уравнению, совпадающему с (9.30). В результате ВКБ-приближение для поля H отличается от соответствующего приближения для поля E лишь множителем $\sqrt{\varepsilon}$.

Весьма существенные различия в поведении волн типов TM и TE проявляются, однако, в окрестности особой точки $\varepsilon = 0$, где второе слагаемое в (9.32) имеет особенность. Как показывает исследование решения для TM-волны в линейном слое ($\varepsilon = -z/L$), величина H всюду (включая и особую точку $z = 0$) остается конечной, а компоненты электрического поля оказываются в этой точке расходящимися (поперечная компонента $E_x \sim \ln(k_x z)$, продольная компонента $E_z \sim 1/\varepsilon$). Эти расходимости, фактически обусловленные возникающим в точке $\varepsilon = 0$ явлением резонанса внешнего поля с собственными колебаниями среды (в плазме такой резонанс возникает при совпадении частоты поля с так называемой плазменной частотой), снимаются при учете каких либо механизмов потерь энергии или нелинейных эффектов. Они приводят, в частности, к возникновению в неоднородной плазме так называемого *резонансного поглощения* волны и к ряду других интересных явлений, изучение которых выходит за рамки данного пособия и составляет предмет *электродинамики плазмы*.

10. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЗАДАННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Электромагнитное поле произвольной системы источников может быть описано в общем случае при помощи векторного и скалярного потенциалов $\mathbf{A}$ и φ:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{10.1}$$

При таком представлении полей два уравнения Максвелла, не содержащие источников, удовлетворяются автоматически; другие два уравнения при наложении на потенциалы условия калибровки Лоренца

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{10.2}$$

позволяют получить для потенциалов в однородной среде без дисперсии неоднородные волновые уравнения, содержащие в правых частях источники поля:

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mu\,\mathbf{j}, \tag{10.3}$$

$$\Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\,\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{10.4}$$

Решениями этих уравнений, удовлетворяющими на бесконечности (в случае локализации источников в ограниченной области с объемом V) *условию излучения*, т.е. представляющими собой расходящиеся сферические волны, являются так называемые *запаздывающие потенциалы*:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{c}\iiint\limits_V \frac{1}{R}\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')\,dV', \tag{10.5}$$

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\varepsilon}\iiint\limits_V \frac{1}{R}\rho(\mathbf{r}',t')\,dV'. \tag{10.6}$$

Здесь $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ – расстояние от точки наблюдения $\mathbf{r}$ до точки интегрирования $\mathbf{r}'$; $t' = t - R/u$ – *запаздывающее* время; $u = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ – скорость электромагнитной волны в среде. Выражения (10.1), (10.5), (10.6) позволяют рассчитать потенциалы и поля произвольной ограниченной системы источников в однородной среде без дисперсии.

В случае гармонической (синусоидальной) зависимости полей и источников от времени представление всех переменных величин в комплексной форме (в виде действительной части произведения комплексной амплитуды на временной фактор $e^{i\omega t}$, где ω – круговая частота поля) позволяет переписать уравнения (10.1-10.6) в виде уравнений для соответствующих комплексных амплитуд:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -ik_0\left(\mathbf{A} + \frac{1}{k_0^2\varepsilon\mu}\nabla\operatorname{div}\mathbf{A}\right), \tag{10.7}$$

$$\Delta\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mu\,\mathbf{j}, \tag{10.8}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{c}\iiint\limits_V \mathbf{j}(\mathbf{r}')\frac{e^{-ikR}}{R}dV'. \tag{10.9}$$

Здесь $k_0 = \omega/c$ и $k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu}$ – соответственно волновые числа в вакууме и в среде; скалярный потенциал φ исключен из описания поля с помощью соотношения $\varphi = (ic/\omega\varepsilon\mu)\operatorname{div}\mathbf{A}$, вытекающего из условия калибровки Лоренца. Выражения (10.7)-(10.9) справедливы и при наличии временной дисперсии ($\varepsilon(\omega), \mu(\omega)$).

Расчет полей вихревых (соленоидальных) токов, удовлетворяющих условию $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, в некоторых случаях упрощается, если заменить их эквивалентными *магнитными токами*, имеющими вообще говоря более простую (не обязательно вихревую) конфигурацию. Процедура такой замены (обобщающей замену замкнутых линейных токов эквивалентными двойными слоями магнитных зарядов в магнитостатике, см. раздел 6) состоит в следующем. Представим плотность электрического тока в виде суммы $\mathbf{j} = \mathbf{j}^{(e)} + \mathbf{j}_1$, где второе слагаемое $\mathbf{j}_1$ представляет собой ту часть полного тока, которую мы хотим заменить эквивалентным магнитным током. Определим плотность магнитного тока $\mathbf{j}^{(m)}$ как решение уравнения

$$\operatorname{rot}\mathbf{j}^{(m)} = i(\omega\mu/c)\,\mathbf{j}_1, \tag{10.10}$$

отличное от нуля только внутри некоторой ограниченной области, содержащей всю область с $\mathbf{j}_1 \neq 0$, и введем в систему уравнений Максвелла для гармонических полей

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}^{(e)} + \mathbf{j}_1) + i\,k_0\,\varepsilon\,\mathbf{E}, \qquad (10/11)$$

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = -i\,k_0\,\mu\,\mathbf{H} \qquad (10.12)$$

«новый» вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H}' = \mathbf{H} - 4\pi\,\mathbf{j}^{(m)}/(i\omega\mu)$, отличающийся от вектора $\mathbf{H}$ лишь в области источников. Уравнения для полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}'$ оказываются симметричными относительно источников:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}' = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{(e)} + i\,k_0\,\varepsilon\,\mathbf{E}, \qquad (10.13)$$

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{(m)} - i\,k_0\,\mu\,\mathbf{H}'. \qquad (10.14)$$

Такая симметрия позволяет сформулировать для решений уравнений Макселла, содержащих электрические ($\mathbf{j}^{(e)}$) и магнитные ($\mathbf{j}^{(m)}$) токи, так называемый принцип *перестановочной двойственности*: если найдено одно из решений этих уравнений, то еще одно решение может быть построено путем замен:

$$\mathbf{j}^{(e)} \to \mathbf{j}^{(m)},\ \mathbf{j}^{m)} \to -\mathbf{j}^{(e)}, \mathbf{E} \to \mathbf{H}', \mathbf{H}' \to -\mathbf{E}, \varepsilon \to \mu,\ \ \mu \to \varepsilon \qquad (10.15)$$

Следуя общепринятой форме записи уравнений (10.13), (10.14) и правил замены (10.15), применяемых в основном для расчета полей вне области источников, где $\mathbf{H}' \equiv \mathbf{H}$, штрихи над вектором напряженности магнитного поля далее опускаем).

Решение системы уравнений (10.13, 10.14) может быть представлено в виде суперпозиции полей, порождаемых электрическими и магнитными токами по отдельности:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(e)} + \mathbf{E}^{(m)},\ \mathbf{H} = \mathbf{H}^{(e)} + \mathbf{H}^{(m)}, \qquad (10.16)$$

Первые слагаемые в этих выражениях определяются на основании потенциального описания (10.7)-(10.9), отвечающего электрическим токам $\mathbf{j}^{(e)}$ (используемые в этом описании векторный и скалярный потенциалы естественно называть *электрическими*, обозначая их $\mathbf{A}^{(e)}$, $\varphi^{(e)}$). Вторые слагаемые, ввиду симметрии уравнений (10.13), (10.14), находятся на основании аналогичного потенциального описания, получаемого из (10.7)-(10.9) при помощи принципа перестановочной двойственности (10.15):

$$\mathbf{D}^{(e)} = -\operatorname{rot}\mathbf{A}^{(m)}, \;\; \mathbf{H}^{(m)} = -ik_0\left(\mathbf{A}^{(m)} + \frac{1}{k_0^2\varepsilon\mu}\nabla\operatorname{div}\mathbf{A}^{(m)}\right), \tag{10.17}$$

$$\Delta\mathbf{A}^{(m)} + k^2\mathbf{A}^{(m)} = -\frac{4\pi}{c}\varepsilon\,\mathbf{j}^{(m)}, \tag{10.18 }$$

$$\mathbf{A}^{(m)}(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon}{c}\iiint\limits_V \mathbf{j}^{(m)}(\mathbf{r}')\frac{e^{-ikR}}{R}dV'. \tag{10.19}$$

Здесь $\mathbf{A}^{(m)}$ – векторный *магнитный* потенциал; скалярный *магнитный* потенциал $\varphi^{(m)}$ исключен из выражений для полей на основании условия калибровки Лоренца $\varphi^{(m)} = (ic/\omega\varepsilon\mu)\operatorname{div}\mathbf{A}^{(m)}$

Далее мы ограничимся описанием некоторых методов и результатов расчета векторного потенциала и полей в вакууме, полагая $\varepsilon = \mu = 1$ (обобщение приведенных ниже соотношений на случай однородного диэлектрика или магнетика не составляет большого труда).

Поля источников, характерные размеры которых L малы по сравнению с длиной волны и с расстоянием до них r, обычно представляются первыми членами разложения векторного потенциала (10.9) по степеням малых параметров kL и L/r (начало координат $r = 0$ здесь и всюду далее предполагается расположенным внутри области источников). Первое слагаемое в этом разложении

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = ik\,\mathbf{p}\,\frac{e^{-ikr}}{r} \tag{10.20}$$

определяет поле элементарного электрического диполя (*вибратора Герца*) с вектором дипольного момента

$$\mathbf{p} = \frac{1}{i\omega}\iiint\limits_V \mathbf{j}(\mathbf{r}')dV' = \iiint\limits_\infty \rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}'dV'. \tag{10.21}$$

На расстояниях от диполя, малых по сравнению с длиной волны, т.е. в так называемой *зоне квазистатики* ($kr \ll 1$), электрическое поле в каждый момент времени t близко к полю статического диполя (2.18).

В области $kr \gg 1$ (так называемая *волновая зона*) вектор-потенциал (10.20) описывает почти строго поперечную расходящуюся сферическую волну. Векторы напряженности электрического и магнитного полей этой волны связаны между собой в каждой точке волнового фронта как в плоской волне, распространяющейся в радиальном направлении, а их амплитуды убывают как r^{-1} при увеличении расстояния до диполя. В сферической системе координат r, ϑ, φ с полярной осью z, параллельной вектору дипольного момента $\mathbf{p} = \mathbf{z}_0 p_0$ (в предположении его линейной поляризации), отличные от нуля поперечные компоненты поля записываются в виде:

$$E_\vartheta = H_\varphi = -k^2 p_0 \frac{e^{ikr}}{r} \sin\vartheta . \tag{10.22}$$

Соответствующая интенсивность излучения S (средняя по времени плотность потока энергии в радиальном направлении) обратно пропорциональна квадрату расстояния до диполя, а средняя излучаемая мощность P (поток энергии через замкнутую поверхность, окружающую диполь) в согласии с законом сохранения энергии не зависит от r:

$$S = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}(E_\vartheta H_\varphi^*) = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} p_0^2 \sin^2\vartheta \frac{1}{r^2} , \tag{10.23}$$

$$P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} S(\vartheta) r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3} . \tag{10.24}$$

Обратим внимание на характерную для дипольного излучения угловую зависимость интенсивности (*диаграмму направленности*) $S(\vartheta) \sim \sin^2\vartheta$. Интенсивность не зависит от азимутального угла φ, максимальна для направлений, перпендикулярных вектору $\mathbf{p}$ ($\vartheta = \pi/2$) и обращается в нуль на оси диполя ($\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$)

Если рассматривать в качестве модели дипольного излучателя отрезок провода длины $L \ll \lambda$, в котором возбужден переменный ток с заданной амплитудой I_0 (при этом $p_0 = I_0 L / i\omega$), то его излучающую способность можно характеризовать эквивалентным *сопротивлением излучения* R_r, поглощающим при данном токе среднюю мощность $P = |I_0|^2 R_r / 2$, равную средней излучаемой мощности (10.24):

$$R_r = \frac{2P}{|I_0|^2} = \frac{2(kL)^2}{3c} . \tag{10.25}$$

Последующие члены разложения вектор-потенциала определяют поля точечных электрических и магнитных мультиполей. Как и для первого члена разложения, в зоне квазистатики эти поля близки к полям соответствующих статических мультиполей, а в волновой зоне (определяемой для мультиполя n-

го порядка условием $kr >> n$), представляют собой расходящиеся сферические волны с тем же законом (r^{-1}) убывания амплитуды по радиусу, но, вообще говоря, с более сложной зависимостью от угловых координат. В частности, удерживая в разложении вектор-потенциала в волновой зоне наряду с дипольным членом $\mathbf{A}_1$(10.20) также и члены второго порядка малости по параметру ka, находим:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3, \tag{10.26}$$

где второе и третье слагаемые определяются квадрупольным и магнитным дипольным моментами рассматриваемой системы токов:

$$\mathbf{A}_2 = -\frac{k^2}{6r}\mathbf{Q}e^{-ikr}, \qquad \mathbf{A}_3 = \frac{ik}{r}[\mathbf{m}\times\mathbf{n}]e^{-ikr}, \tag{10.27}$$

$\mathbf{Q}$ – вектор с компонентами $Q_i = Q_{ik}n_k$ $(i,k = 1,2,3)$, n_k – декартова проекция единичного радиуса-вектора $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ (нормали к поверхности сферического волнового фронта) на ось x_k. Тензор электрического квадрупольного момента Q_{ik} и вектор магнитного дипольного момента $\mathbf{m}$ определяются формулами (2.16а), (5.14).. Заметим, что в формуле (10.26) опущен добавочный член, формально присутствующий в разложении общего выражения (10.9), но не дающий вклада в поле в волновой зоне. Вектор-потенциалу (10.26) отвечают следующие выражения для векторов поля:

$$\mathbf{H} = -\frac{k^2e^{-ikr}}{r}\left([\mathbf{p}\times\mathbf{n}] + \frac{i\omega}{6c}[\mathbf{Q}\times\mathbf{n}] + [[\mathbf{m}\times\mathbf{n}]\times\mathbf{n}]\right), \tag{10.28}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{k^2e^{-ikr}}{r}\left([[\mathbf{p}\times\mathbf{n}]\times\mathbf{n}] + \frac{i\omega}{6c}[[\mathbf{Q}\times\mathbf{n}]\times\mathbf{n}] - [\mathbf{m}\times\mathbf{n}]\right). \tag{10.29}$$

Поля электрического и магнитного диполей, определяемые соответственно первыми и последними слагаемыми в выражениях (10.28), (10.29), могут быть получены одно из другого путем замены $\mathbf{p}\to\mathbf{m}$, $\mathbf{E}\to\mathbf{H}$, $\mathbf{H}\to-\mathbf{E}$, являющейся выражением сформулированного выше принципа перестановочной двойственности (10.15) для полей и токов в вакууме. В силу этого, излучения линейно поляризованных магнитного и электрического диполей имеют одну и ту же диаграмму направленности ($S\sim\sin^2\vartheta$) и различаются лишь ориентацией векторов поля. Диаграмма направленности квадрупольного излучения имеет более сложный характер. В случае, если все компоненты тензора квадрупольного момента колеблются в одинаковой фазе, существуют сечения (плоскости, проходящие через источник), в которых диаграмма имеет четыре «лепестка», т.е. четыре максимума, разделенных четырьмя линиями нулевого излучения. В частности, для осесимметричного квадруполя, образуемого зарядами, колеблющимися вдоль полярной оси z, интенсивность излучения

$$S \sim \sin^2 2\vartheta, \tag{10.30}$$

так что в любой плоскости, проходящей через ось z, например, в плоскости (y,z) излучение максимально в направлениях биссектрис каждого из четырех квадрантов плоскости и отсутствует в положительных и отрицательных направлениях координатных осей.

Полная излучаемая мощность в рассматриваемом приближении

$$P = \frac{\omega^4}{3c^3}|\mathbf{p}|^2 + \frac{\omega^6}{360c^5}|D_{ik}|^2 + \frac{\omega^4}{3c^3}|\mathbf{m}|^2. \tag{10.31}$$

В сравнении с мощностью, излучаемой электрическим диполем, мощности квадрупольного и магнито-дипольного излучения при одинаковых характерных силах тока являются величинами второго порядка малости по параметру kL, однако они оказываются преобладающими, если электрический дипольный момент системы близок к нулю.

Необходимо отметить, что разложение полей произвольной системы источников по степеням kL вообще говоря не совпадает с их разложением по типам поляризации и углового распределения излучения. Членам различного порядка по kL могут соответствовать (как в волновой, так и в ближней зоне при $r >> L$) поля одного и того же типа. В частности, поле электро-дипольного типа (10.22), отвечающее первому члену рассмотренного разложения, может быть создано системой токов с равным нулю электрическим дипольным моментом (10.21) (и вообще с $\rho \equiv 0$), если эта система имеет отличный от нуля *анапольный* (или *тороидный*) момент

$$\mathbf{p}_a = \frac{1}{2c}\iiint_\infty [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}^{(m)}]dV', \tag{10.32}$$

определяемый по аналогии с магнитным дипольным моментом $\mathbf{m}$ (5.14) для магнитных токов $\mathbf{j}^{(m)}$ на основании принципа перестановочной двойственности (с заменой $\mathbf{m} \to \mathbf{p}_a$, $\mathbf{j} \to \mathbf{j}^{(m)}$).

Однозначное и последовательное представление полей произвольной системы источников в виде суперпозиции волн, различающихся типом углового распределения и поляризации, достигается путем их разложения по *векторным сферическим волнам.* Поля этих волн, удовлетворяющие необходимым для такого разложения свойствам полноты и ортогональности, выражаются как результат действия векторных дифференциальных операторов на скалярные функции вида:

$$f_{nm} = h_n^{(2)}(kr) P_n^{(m)}(\cos\vartheta)(C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi), \tag{10.33}$$

представляющие собой частные решения скалярного уравнения Гельмгольца, получаемые путем разделения переменных в сферической системе координат r, ϑ, φ. В определении этих функций $h_n^{(2)}(kr)$ – сферическая функция Ханкеля второго рода, имеющая своей асимптотикой при $r \to \infty$ расходящуюся сферическую волну ($\sim e^{-ikr}/r$); $P_n^{(m)}(\cos\vartheta)$ – так называемые присоединенные полиномы Лежандра; $n = 0,1,2,3,...$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3,...,n$; C_1, C_2 – произвольные константы.

На достаточно большом расстоянии от области источников, где наряду с условиями

$$r >> L, \; kr >> n \tag{10.34}$$

выполнено также условие *зоны Фраунгоффера*:

$$r >> kL^2, \tag{10.35}$$

позволяющее считать все лучи, соединяющие точку наблюдения с точками источника, параллельными, поле представляет собой расходящуюся сферическую волну даже в том случае, если размеры источника не малы по сравнению с длиной волны, т.е. при произвольных значениях параметра kL. Векторный потенциал и поля в этой зоне связаны между собой как волновой зоне излучателя малых размеров (т.е. как в плоской волне с «локальным» радиально-направленным волновым вектором $\mathbf{k} = k\,\mathbf{n}$), а их угловое распределение (т..е. фактически диаграмма направленности излучения), определяются пространственным Фурье-спектром $\mathbf{J}(\mathbf{k})$ плотности тока:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cr} e^{-ikr} \mathbf{J}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}[-i\mathbf{k} \times \mathbf{A}], \quad \mathbf{E} = [\mathbf{H} \times \mathbf{n}], \tag{10.36}$$

$$\mathbf{J} = \iiint\limits_V \mathbf{j}(\mathbf{r}')\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}')} dV'. \tag{10.37}$$

11. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ

11.1. Общие свойства и основные типы волн в идеальных линиях. Волны в прямоугольном и круглом волноводах

Линия передачи (направляющая система, волновод) – в общем случае система параллельных металлических или диэлектрических стержней или труб. В радио и СВЧ диапазонах длин волн ($\lambda > 1$ мм) наибольшее применение находят *регулярные* (однородные в продольном направлении) металлические линии передачи, описываемые в первом приближении на основании теории *идеальной линии*, т.е. в предположении бесконечной проводимости образующих ее проводников.

Поля гармонических (монохроматических) волн в линии передачи обычно представляются как действительные части комплексных выражений вида

$$\{\mathbf{E},\, \mathbf{H}\} = \{\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_\perp),\, \mathbf{H}_0(\mathbf{r}_\perp)\}\, e^{i(hz-\omega t)}, \qquad (11.1)$$

где z – продольная координата, отсчитываемая от произвольно выбранного начала координат вдоль линии, $\mathbf{r}_\perp$ – двумерный радиус вектор в плоскости поперечного сечения линии $z =$ const, h – *продольное волновое число* (*постоянная распространения волны*), величина и знак которого определяют соответственно (при действительном h) *пространственную частоту* и направление распространения волны. Выражения (11.1) описывают так называемые *собственные* или *нормальные* волны, поля которых удовлетворяют уравнениям Максвелла и граничным условиям на стенках линии передачи при отсутствии сторонних источников. Задачей теории собственных волн является отыскание их поперечной структуры, т.е. векторных функций $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_\perp), \mathbf{H}_0(\mathbf{r}_\perp)$, и дисперсионного соотношения, определяющего зависимость $h(\omega)$. Знание функции $h(\omega)$ позволяет рассчитать для любой частоты ω основные *кинематические характеристики* волны: длину волны $\lambda_w = 2\pi/h$, фазовую ($V_{ph} = \omega/h$) и групповую ($V_{gr} = d\omega/dh$) скорости.

В идеальной линии, заполненной однородной средой с постоянными (не зависящими от $\mathbf{r}_\perp$) проницаемостями ε и μ, могут распространяться волны трех типов:

(1) поперечно-электрические (ТЕ или Н волны), в которых электрическое поле перпендикулярно оси z, а магнитное поле имеет как поперечную, так и продольную компоненты;

(2) поперечно-магнитные (ТМ или Е волны), в которых продольную компоненту имеет только вектор $\mathbf{E}_0$;

(3) чисто поперечные (ТЕМ или *главные*) волны, в которых продольные компоненты обоих полей равны нулю, а продольное волновое число совпадает с волновым числом в среде ($h = k = (\omega / c)\sqrt{\varepsilon\mu}$).

В линиях с неоднородным заполнением, т.е. с параметрами ε и μ, зависящими от поперечных координат, и в частности в *диэлектрических волноводах*, широко используемых в оптике, вообще говоря, могут существовать лишь так называемые *гибридные* (ЕН или НЕ) волны, в которых обе продольные компоненты полей отличны от нуля, (исключение составляют лишь некоторые особые случаи полей с простейшими типами симметрии). Строго говоря, гибридными являются также и волны в так называемых полосковых или микрополосковых металло-диэлектрических линиях (см. ниже), находящих применение в различных узлах современной СВЧ аппаратуры, хотя для общего понимания и приближенного расчета их электродинамических свойств и параметров обычно бывает достаточным представление о них как о волнах, близких по типу к волнам ТЕМ.

Отличные от нуля продольные и поперечные компоненты векторов полей $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_\perp)$, $\mathbf{H}_0(\mathbf{r}_\perp)$ в волнах указанных выше типов могут быть выражены через скалярные функции, зависящие от поперечных координат:

ТЕ-волна

$$H_{0z} = \frac{i\kappa^2}{k_0\varepsilon\mu}\psi^{(m)},$$

$$\mathbf{H}_{0\perp} = -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu}\nabla_\perp\psi^{(m)}, \tag{11.2}$$

$$\mathbf{E}_{0\perp} = -\frac{1}{\varepsilon}\nabla_\perp\psi^{(m)} \times \mathbf{z}_0 ,$$

ТМ-волна

$$E_{0z} = \frac{i\kappa^2}{k_0\varepsilon\mu}\psi^{(e)},$$

$$\mathbf{E}_{0\perp} = -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu}\nabla_\perp\psi^{(e)}, \tag{11.3}$$

$$\mathbf{H}_{0\perp} = \frac{1}{\mu}\nabla_\perp\psi^{(e)} \times \mathbf{z}_0 ,$$

ТЕМ-волна

$$\mathbf{E}_{0\perp} = \mp\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\nabla_\perp\psi, \quad \mathbf{H}_{0\perp} = \nabla_\perp\psi \times \mathbf{z}_0 \ , \tag{11.4}$$

Здесь $\kappa = \sqrt{k^2 - h^2}$ – *поперечное волновое число*, отличное от нуля для волн типов ТЕ и ТМ и равное нулю для волны ТЕМ; значком $\perp$ помечены поперечные составляющие векторов; $\mathbf{z}_0$ – единичный вектор в направлении оси z. Верхний и нижний знаки в первой из формул (11.4) относятся соответственно к волнам, распространяющимся в направлениях $+z$ $(h = k > 0)$ и $-z$ $(h = -k < 0)$. Функции $\psi^{(e)}(\mathbf{r}_\perp)$, $\psi^{(m)}(\mathbf{r}_\perp)$ удовлетворяют двумерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta_\perp \psi^{(e,m)} + \kappa^2 \psi^{(e,m)} = 0, \tag{11.5}$$

а функция $\psi(\mathbf{r}_\perp)$ – двумерному уравнению Лапласа

$$\Delta_\perp \psi = 0 \tag{11.6}$$

($\Delta_\perp = \Delta - \partial^2 / \partial z^2$ – поперечная часть оператора Лапласа). Эти функции представляют собой амплитуды электрического $\mathbf{A}^{(e)}$ и магнитного $\mathbf{A}^{(m)}$ потенциалов, задаваемых (соответственно для волн ТМ и ТЕ типов) в виде

$$\mathbf{A}^{(e)} = \mathbf{z}_0 \psi^{(e)}(\mathbf{r}_\perp) e^{i(hz - \omega t)}, \ \mathbf{A}^{(m)} = \mathbf{z}_0 \psi^{(m)}(\mathbf{r}_\perp) e^{i(hz - \omega t)} \tag{11.7}$$

и определяющих поля согласно формулам (10.7) (с $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^{(e)}$) и (10.17). Поля ТЕМ волны можно описать при помощи любого из этих потенциалов (с соответствующим переобозначением скалярной функции), полагая $\kappa = 0, \ h = \pm k$.

Как видно из выражений (11.2)-(11.4), поперечные компоненты электрического и магнитного поля связаны между собой в бегущей волне любого типа так называемым *импедансным* соотношением

$$\mathbf{E}_\perp = \varsigma_\perp [\mathbf{H}_\perp \times \mathbf{z}_0]; \qquad \varsigma_\perp = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\frac{k}{h} \right)^{\pm 1}. \tag{11.8}$$

Величина $\varsigma_\perp$ называется *поперечным* (или *характеристическим*) импедансом волны; знаки + и – в ее определении относятся соответственно к волнам типа ТЕ и ТМ. Для ТЕМ волны $\varsigma_\perp = \pm\sqrt{\mu/\varepsilon}$, где знаки + и – соответствуют волнам, бегущим в направлениях $+z$ $(h > 0)$ и $-z$ $(h < 0)$. Соотношение (11.8) позволяет записать средний по времени поток энергии волны (*мощность волны*) в виде

$$P_w = \frac{c}{8\pi} \iint_S \mathrm{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\,\varsigma_\perp \iint_S |\mathbf{H}_\perp|^2 \, dS, \tag{11.9}$$

где S – площадь поперечного сечения линии, $\mathbf{n}$ – нормаль к этой площади в направлении распространения волны.

Граничные условия для функций $\psi^{(e,m)}$ идеальной линии (на граничном контуре L ее поперечного сечения) находятся из условия отсутствия тангенциальной компоненты электрического поля на поверхности идеального проводника

$$\mathbf{E}_\tau = 0 . \tag{11.10}$$

Отсюда на основании выражений (11.2)-(11.4) для волн типов TE и TM получаем соответственно

$$\frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial n}\Big|_L = 0, \qquad \psi^{(e)}\Big|_L = 0, \tag{11.11}$$

а для волны типа TEM

$$\psi\Big|_L = \text{const} . \tag{11.12}$$

(в первом из условий (11.11) производная берется по направлению нормали к границе).

Из соотношений (11.4), (11.6), (11.12) видно, что поперечные структуры электрического и магнитного полей TEM волны определяется соответственно решениями электростатической и магнитостатической задач для заряженных или токонесущих двумерных проводников. Значения константы в граничном условии (11.12) в этих задачах должны быть различными на различных (не соединяющихся между собой) граничных контурах проводников, число которых в линии должно быть не меньше двух.. Если линия состоит из одного проводника (труба или стержень с произвольной формой поперечного сечения), то TEM (главная) волна в ней существовать не может. Для внутренней области трубы это следует из того, что уравнение (11.6) с граничным условием (11.12) имеет только тривиальное решение $\psi \equiv \text{const}$. Для внешней области, вследствие недостаточно быстрого убывания двумерного электростатического поля одиночного проводника на бесконечности, нетривиальное решение отвечает нереализуемой волне, переносящей вдоль линии бесконечный поток энергии.

Так называемые *открытые* линии передачи (не ограничиваемые снаружи металлической оболочкой) в рамках теории, предполагающей проводники идеальными, а заполняющую среду однородной, могут направлять только TEM волны. Волны типов TE и TM в них принадлежат к так называемым волнам сплошного спектра, не удовлетворяющим (так же как и волна TEM снаружи одиночного провода) требуемым условиям пространственной локализации и в силу этого нереализуемым без подкачки энергии извне. Примерами таких линий являются рассматриваемые в конце данного раздела *двухпроводная* и *полосковая* линии.

В *закрытых* или экранированных линиях область существования поля ограничена снаружи замкнутой металлической оболочкой – внешней трубой, за пределы которой поля не проникают. Примерами таких линий являются одиночная металлическая труба (*волновод*) с любой формой поперечного сечения, в которой, как было сказано выше, невозможно распространение волн типа TEM, а также *коаксиальная линия* (труба с вложенным внутрь нее металлическим стержнем), в которой могут распространяться волны всех трех типов: TE, TM и TEM. Решение уравнения (11.5) с любым из условий (11.11) на контуре, ограничивающем поперечное сечение, определяет, как известно, бесконечный дискретный спектр собственных функций $\psi^{(e,m)}(\mathbf{r}_\perp)$ и отвечающих им (чисто действительных) собственных значений κ. Это означает, что в закрытой линии передачи существуют два бесконечных дискретных набора волн (TE и TM типов). Каждая из волн, называемая *модой*, характеризуется своей поперечной структурой и поперечным волновым числом κ, зависящим только от геометрии линии и определяющим значение продольного волнового числа при любой частоте согласно дисперсионному уравнению

$$h = \pm\sqrt{(\omega/c)^2\varepsilon\mu - \kappa^2}\,. \tag{11.13}$$

Как следует из этого дисперсионного уравнения, каждая мода характеризуется определенным значением *критической частоты*

$$\omega_{cr} = \kappa c/\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{11.14}$$

или *критической длины волны*

$$\lambda_{cr} = 2\pi c/(\sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega_{cr}) = 2\pi/\kappa \tag{11.15}$$

(речь идет о длине плоской однородной волны $\lambda = 2\pi c/(\sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega)$ в среде в отсутствие проводников). При $\omega > \omega_{cr}$ (или $\lambda < \lambda_{cr}$) данная мода является *распространяющейся или бегущей* (имеет действительное продольное волновое число). При $\omega < \omega_{cr}$ ($\lambda > \lambda_{cr}$) мода является *нераспространяющейся* (продольное волновое число h чисто мнимое, поле экспоненциально убывает в $+z$ или $-z$ направлении).

Все распространяющиеся моды являются *быстрыми* – их фазовые скорости больше скорости света, а длины волн больше длины плоской однородной волны в среде ($V_{ph} = \omega/h > c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, $\lambda_w = 2\pi/h > \lambda$); групповые скорости меньше скорости света ($V_{gr} = d\omega/dh < c/\sqrt{\varepsilon\mu}$), причем для всех волн в случае, если волновод заполнен средой без дисперсии, выполняется соотношение $V_{ph}\cdot V_{gr} = c^2/(\varepsilon\mu)$. Основное практическое значение для каждой линии передачи имеет, как правило, так называемая *низшая* (или *основная*) *мода*, имеющая наименьшее поперечное волновое число и, следовательно, наименьшую критическую частоту.

Ниже приведены некоторые результаты решения сформулированной задачи расчета волн типа TE и TM в идеальных волноводах простейшего вида. Волны типа TEM в некоторых закрытых и открытых линиях мы рассмотрим несколько позже – после того как ознакомимся с их описанием в терминах тока и напряжения на основе телеграфных уравнений.

Прямоугольный волновод – труба прямоугольного сечения. Направляя оси декартовой системы координат x, y в плоскости поперечного сечения соответственно вдоль сторон прямоугольника и помещая начало координат в одну из его вершин, находим методом разделения переменных системы собственных функций для волн типа ТЕ:

$$\psi_{mn}^{(e)} = A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \tag{11.16}$$

и типа ТМ:

$$\psi_{mn}^{(m)} = B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \tag{11.17}$$

Здесь a и b – внутренние размеры поперечного сечения волновода (для определенности далее полагаем $a \ge b$), A_{mn} и B_{mn} – произвольные константы. Обеим системам функций (11.16), (11.17) соответствует один и тот же спектр собственных значений κ_{mn}:

$$\kappa_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \tag{11.18}$$

В приведенных выражениях m, n – произвольные целые числа; для волн типа ТМ их счет начинается с единицы, для волн типа ТЕ одно из чисел может быть выбрано равным нулю (равенство нулю одного из чисел для волн ТМ или обеих для волн ТЕ дает тривиальное решение $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$). Задание пары чисел m, n определяет волноводную моду TE_{mn} или TM_{mn}. Низшей модой (среди волн обоих типов) при $a > b$ является TE_{10}, для которой $\kappa = \pi / a$, $\lambda_{cr} = 2a$, продольное поле $H_{0z} \sim \cos(\pi x / a)$.

Круглый волновод – труба кругового сечения (внутренний радиус трубы a). В полярных координатах r, ϑ в плоскости поперечного сечения

$$\psi^{(e,m)} = J_m(\kappa_{mn} r)(A_{mn} \cos m\vartheta + B_{mn} \sin m\vartheta), \tag{11.19}$$

где $J_m(\xi)$ – функция Бесселя порядка m ($m = 0,1,2,...$). Поперечные волновые числа κ_{mn} определяются значениями корней функции Бесселя или ее производной при $r = a$: $J_m(\kappa_{mn} a) = 0$ для волн ТМ; $J'_m(\kappa_{mn} a) = 0$ для волн ТЕ ($n = 1,2,3,...$. – номер соответствующего корня). Как и для прямоугольного волновода, различные моды обозначаются TE_{mn} и TM_{mn} (но с другим смыслом индексов m,n). Низшей модой является TE_{11}, для которой $\kappa_{11} \cong 1{,}84 / a$, $\lambda_{cr} \cong 3.41a$, продольное поле $H_{0z} \sim J_1(\kappa_{11} r)(A_{11} \cos \vartheta + B_{11} \sin \vartheta)$.

11.2. Поглощение волн в линиях передачи

В реальных линиях передачи затухание волн в направлении их распространения (т.е. комплексность продольных волновых чисел) обусловлено потерями энергии в среде, заполняющей линию, и в стенках линии вследствие их неидеальной проводимости. Поглощение энергии в заполняющей (однородной) среде легко учитывается на основании дисперсионного уравнения (11.13), позволяющего найти действительную и мнимую части продольного волнового числа $h = h' + ih''$ для среды с комплексными параметрами ε и μ. В поглощающих средах мнимые части ε и μ (при выбранном нами знаке показателя в комплексном временном множителе $e^{-i\omega t}$) всегда отрицательны, что, как легко показать, приводит к затуханию волны в направлении ее распространения ($\mathbf{E} \sim e^{-i\omega t + ih' z - h'' z}$, $h' \cdot h'' > 0$ при $\varepsilon' > 0,\ \mu'' > 0$).

Потери энергии в металлических стенках линии передачи могут быть учтены на основании граничного условия Леонтовича, связывающего между собой тангенциальные компоненты полей на границе хорошего проводника в условиях сильного скин-эффекта:

$$\mathbf{E}_\tau = \varsigma_S [\mathbf{H}_\tau \times \mathbf{n}]\ ; \qquad \varsigma_S = \sqrt{\mu_S / \varepsilon_S} \tag{11.20}$$

($\mathbf{n}$ – нормаль к границе, направленная внутрь проводника, ς_s – поверхностный импеданс, определяемый комплексными диэлектрической и магнитной проницаемостями проводника ε_s, μ_s). В проводниках, используемых обычно в линиях передачи радио- и СВЧ диапазонов $\mu_s \cong 1,\ \varepsilon_s \cong 4i\pi\sigma/\omega$; при этом $|\varepsilon_s| >> 1,\ |\varsigma_s| << 1$. Условие (11.20) позволяет записать погонную мощность потерь в проводниках (средний поток энергии в стенки на единицу длины линии) в виде

$$P_s = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\,\varsigma_S \oint_l |\mathbf{H}_\tau|^2 dl \tag{11.21}$$

(интеграл вычисляется по граничному контуру l поперечного сечения линии).

Как следует из закона сохранения энергии, мощность потерь P_S и скорость изменения потока энергии волны P_W по оси z в случае, если волна распространяется в $+z$ направлении, связаны соотношением $dP_w / dz = -P_s$, откуда, при учете квадратичной зависимости величины P_W от амплитуд полей $|\mathbf{E}_\perp|, |\mathbf{H}_\perp|$ и экспоненциальной зависимости этих амплитуд от продольной координаты z ($|\mathbf{E}_\perp|, |\mathbf{H}_\perp| \sim e^{-|h''|z}$, $P_W \sim e^{-2|h''|z}$, $dP_W / d\,z = -2\,|h''|\,P_W$), получаем выражение, позволяющее рассчитать коэффициент затухания волны по известным значениям мощностей P_s и P_W:

$$|h''| = \frac{P_s}{2P_w} = \frac{\mathrm{Re}\,\varsigma_S \oint_l |\mathbf{H}_\tau|^2\, dl}{2\,\mathrm{Re}\,\varsigma_\perp \iint_S |\mathbf{H}_\perp|^2\, ds}. \tag{1.22}$$

(интеграл в знаменателе берется по всей площади поперечного сечения линии). В случае слабого затухания ($h'' << h'$) в качестве поля $\mathbf{H}$ в эту формулу можно подставлять поле $\mathbf{H}^{(0)}(\mathbf{r}_\perp)$, рассчитанное для идеальной линии (при $\varsigma_s = 0$).

11.3. Телеграфные уравнения для ТЕМ волн

Главные волны в линиях передачи, образованной двумя параллельными проводниками, могут быть описаны на основании простой эквивалентной квазистационарной схемы с использованием понятий тока $I(z,t)$, текущего в одном из проводов (при этом в другом проводе течет ток $-I$) и напряжения между проводами

$$U(z,t)=\int_1^2(\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}), \tag{11.23}$$

определяемого как интеграл по произвольному линейному контуру, соединяющему провода 1 и 2 в плоскости поперечного сечения линии. Функции $I(z,t), U(z,t)$ удовлетворяют так называемым *телеграфным уравнениям*, которые для идеальной линии, погруженной в непроводящую среду без дисперсии, записываются в виде

$$\frac{\partial I}{\partial z}=-C\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{11.24}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{L}{c^2}\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{11.25}$$

Здесь C и L – погонные параметры линии (емкость и индуктивность единицы длины) Эти уравнения фактически представляют собой одномерный аналог уравнений Максвелла для поперечных полей и могут быть получены путем применения известных законов Кирхгофа для квазистационарных цепей к элементарному отрезку линии. Каждая из величин I, U (представляющих собой соответственно аналоги напряженностей магнитного и электрического полей), как следует из приведенных уравнений, удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\{I,U\}}{\partial z^2}-\frac{LC}{c^2}\frac{\partial^2\{I,U\}}{\partial t^2}=0, \tag{11.26}$$

в котором роль скорости волны играет величина $V=c/\sqrt{LC}$. Отношение напряжения к току в бегущей волне, называемое *волновым сопротивлением* линии (аналог характеристического импеданса $\varsigma_\perp$ (11.8)), также выражается через параметры L и C:

$$\pm\frac{U}{I}=Z_w=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{11.27}$$

(знаки + и – относятся соответственно к волнам, бегущим в направлении $+z$ и $-z$). Эти погонные параметры зависят от геометрии поперечного сечения линии, однако их произведение, как следует из выражения, определяющего скорость главной волны $V=c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, зависит только от свойств заполняющей среды: $LC=\varepsilon\mu$.

Рассмотрим поперечную структуру полей ТЕМ волны и рассчитаем характеризующие ее параметры L, C, Z_w для некоторых наиболее часто используемых двухпроводных линий.

Коаксиальная линия (коаксиальный кабель) – круглая труба, в которую вставлен имеющий с ней общую ось круглый стержень. Проводящие поверхности трубы и стержня ограничивают двусвязную цилиндрическую область с внутренним и внешним радиусами a и b. Поскольку эта линия является закрытой, в ней могут существовать волны всех рассмотренных типов, однако на практике она используется только для передачи ТЕМ волны с $\kappa = 0$, $\lambda_{cr} = \infty$. Электрическое и магнитное поля этой волны, имеющие чисто статическую поперечную структуру, описываются в полярных координатах r, ϑ (естественным образом вводимых в поперечном сечении линии) выражениями

$$E_r = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_\vartheta = \frac{A}{r} \qquad (a < r < b; \quad A = \text{const}). \tag{11.28}$$

Электрическое поле в любой плоскости $z = \text{const}$ совпадает с полем цилиндрического конденсатора, а магнитное – с полем прямого осевого тока. Определяя напряжение и ток в линии

$$U = \int_a^b E_r dr = A \ln\frac{b}{a}, \quad I = \frac{c}{2} r H_\vartheta = \frac{c}{2} A \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \tag{11.29}$$

а также приходящиеся на единицу ее длины заряд центрального проводника Q_l и азимутальный (охватывающий центральный проводник) магнитный поток Φ_l

$$Q_l = \frac{1}{2} \varepsilon r E_r = \frac{1}{2} \varepsilon A, \quad \Phi_l = \mu \int_a^b H_\vartheta dr = \sqrt{\varepsilon\mu}\, A \ln\frac{b}{a}, \tag{11.30}$$

находим погонную емкость, самоиндукцию и волновое сопротивление линии

$$C = \frac{Q_l}{U} = \varepsilon \left(2 \ln\frac{b}{a} \right)^{-1}, \quad L = \frac{c\Phi_l}{I} = 2\mu \ln\frac{b}{a}, \quad Z_w = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln\frac{b}{a}. \tag{11.31}$$

Симметричная двухпроводная линия (два круглых параллельных провода), как и любая идеальная линия открытого типа, может поддерживать только волну ТЕМ. Электрическое поле этой волны в каждом поперечном сечении – это поле двух бесконечно длинных разноименно заряженных параллельных проводников. В случае, если радиусы проводов a много меньше расстояния d между ними, электрическое поле волны в поперечном сечении близко к полю двумерного электрического диполя:

$$\mathbf{E} = \frac{2}{\varepsilon} Q_l \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^2} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^2} \right), \tag{11.32}$$

где Q_l – погонная плотность заряда на одном проводнике, $\mathbf{r}_{1,2}$ – векторы в поперечной плоскости, проведенные из центров проводников в точку наблюдения. Семейство силовых линий магнитного поля, как и в любой волне ТЕМ, ортогонально линиям электрического поля. Расчеты, аналогичные предыдущим, приводят к следующим приближенным (справедливым при условии $d/a >> 1$) выражениям для погонных параметров и волнового сопротивления линии

$$C = \varepsilon \left(4 \ln \frac{d}{a} \right)^{-1}, \; L = 4\mu \ln \frac{d}{a}, \; Z_w = \frac{4}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{d}{a}, \tag{11.33}$$

Микрополосковая линия (или несимметричная полосковая линия) – линия, образованная тонкой металлической полоской, нанесенной на слой диэлектрика или магнитодиэлектрика (так называемая подложка с отличными от единицы значениями ε и μ), лежащий, в свою очередь, на широком плоском металлическом основании (экране). Эта линия, представляет собой одну из разновидностей так называемых *планарных структур*, широко используемых в настоящее время в *интегральных схемах* с целью обеспечения простоты изготовления, компактности и миниатюризации различных элементов СВЧ техники. Строго говоря, микрополосковая линия не принадлежит к числу рассмотренных нами выше линий с однородным заполнением: диэлектрический слой в ней занимает не всю область существования поля, и поэтому волны в такой линии не относятся ни к одному из рассмотренных типов (ТЕ, ТМ или ТЕМ), а являются *гибридными* (в них присутствуют продольные компоненты электрического и магнитного полей). Однако в ряде предельных случаев волна низшего типа в микрополосковой линии является почти поперечной (продольные компоненты полей малы) и может быть приближенно описана как волна типа ТЕМ. Такое описание будет абсолютно строгим в случае, если диэлектрическая подложка вообще отсутствует, т.е. полоска и экран разделены промежутком конечной толщины d, имеющим те же параметры, что и окружающая среда ($\varepsilon = \mu = 1$). Поля в такой линии (над экраном) совпадают с полями в симметричной полосковой линии, образованной двумя одинаковыми параллельными полосками в свободном пространстве (вторая из них представляет собой электростатическое изображение первой в экране). Если при этом ширина полоски $a >> d$, то электрическое поле близко к полю плоского конденсатора со слабым краевым эффектом, т.е. сосредоточено в основном в промежутке между полосками и почти однородно в этом промежутке. В этой же области сосредоточено и магнитное поле, представляющее собой поле двух токов, текущих по полоскам в противоположных направлениям.

При большой ширине полоски $a \gg d$ данный подход приближенно справедлив и при отличии параметров магнитодиэлектрической подложки от внешних, поскольку и в этом случае краевой эффект в плоском конденсаторе, образуемом проводниками линии, мал и поле в основном сосредоточено в той же области под полоской, где значения ε и μ постоянны. При выполнении условий $d \ll a \ll c/(\omega\sqrt{\varepsilon\mu})$, т.е. в области длин волн, много больших ширины полоски, других волновых мод в данной линии нет и рассматриваемая квазипоперечная (близкая к ТЕМ) волна является единственно возможной, как в однородной открытой двухпроводной линии. Поле между проводниками линии в этом приближении совпадает с полем плоской однородной волны в однородной среде с проницаемостями ε и μ, дисперсионное уравнение имеет вид $h = k = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon\mu}$, а погонные параметры и волновое сопротивление определяются выражениями

$$C = \frac{\varepsilon a}{4\pi d}, \quad L = \frac{4\pi\mu d}{a}, \quad Z_w = \frac{4\pi}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{d}{a} \quad . \tag{11.34}$$

Заметим, что практические расчеты параметров линий в терминах тока и напряжения обычно проводятся в системе единиц *СИ*, где погонные емкость и индуктивность измеряются соответственно в *фарадах на метр* (Ф/м) и *генри на метр* (Гн/м). Для пересчета в систему *СИ* в правые части приведенных выше выражений (11.31), (11.33), (11.34) нужно ввести дополнительные множители: $4\pi\varepsilon_0$ в формулу для C и $1/(4\pi\mu_0)$ в формулу для L, где $\varepsilon_0 = (1/36\pi)\cdot 10^{-9}$ Ф/м, $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м – так называемые электрическая и магнитная постоянные (диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума). При этом выражения для скорости волны и волнового сопротивления линии преобразуются к виду $V = 1/\sqrt{LC}$ (м/с), $Z_w = \sqrt{L/C}$ (Ом). В частности, в отсутствие заполняющей среды волновые сопротивления рассмотренных линий в этой системе единиц рассчитываются по формулам

коаксиальная линия: $Z_w = 60\ln(b/a)$,

симметричная двухпроводная линия (при $a \ll d$): $Z_w = 120\ln(d/a)$,

микрополосковая линия (при $d \ll a \ll c/\omega$): $Z_w = 120\pi d/a$.

11.4. Коэффициент отражения от нагрузки и входной импеданс

В условиях, когда длина волны много больше поперечных размеров линии передачи и в ней могут распространяться только главные волны, описанный выше подход, основанный на использовании понятий тока и напряжения и позволяющий отвлечься от рассмотрения поперечной (по сути дела фиксированной) структуры поля, существенно упрощает анализ отражения волн от различных препятствий и нерегулярностей в линии. Такие нерегулярности (скачки параметров, нагрузки на конце линии) с неизбежностью присутствуют в схемах передачи электромагнитной энергии от источника (генератора) к потребителю (приемнику). Задача расчета передающих свойств линии сводится при этом к определению эквивалентной квазистационарной схемы нерегулярности и эквивалентных параметров (импедансов) ее отдельных элементов.

При гармонической зависимости полей от времени комплексные амплитуды тока и напряжения в линии представляют собой суммы соответствующих величин в двух волнах, распространяющихся в направлениях $+z$ (падающая волна) и $-z$ (отраженная волна):

$$U(z) = U_i e^{-ikz} + U_r e^{ikz}; \qquad I(z) = I_i e^{-ikz} + I_r e^{ikz}, \tag{11.35}$$

причем

$$I_i = \frac{1}{Z_w} U_i, \quad I_r = -\frac{1}{Z_w} U_r \tag{11.36}$$

Отношение комплексных амплитуд напряжения и тока определяет в общем случае *импеданс* в линии $Z(z) = U(z)/I(z)$ как функцию продольной координаты. Пусть в некоторой точке ($z = 0$) линия оборвана, а к ее концу подключена сосредоточенная нагрузка с заданным импедансом Z_l.. Тогда граничное условие $Z(0) = Z_l$ и соотношения (11.35), (11.36) позволяют найти коэффициент отражения волны от нагрузки

$$R = \frac{U_r}{U_i} = \frac{Z_l - Z_w}{Z_l + Z_w} \tag{11.37}$$

и величину *входного импеданса* $Z_i = Z(-l)$ на любом заданном расстоянии l от нее

$$Z_i = Z_w \frac{Z_l + iZ_w \tan kl}{Z_w + iZ_l \tan kl}. \tag{11.38}$$

Этот входной импеданс, в свою очередь, играет роль импеданса нагрузки для участка линии $z < -l$, который может, в принципе, иметь другое волновое сопротивление Z_{w1}. При этом коэффициент отражения R_1 волны, падающей на данную систему из области $z < -l$, определяется формулой, аналогичной (11.37), в которой следует произвести замены: $Z_l \to Z_i$, $Z_w \to Z_{w1}$. Данный метод, позволяющий, в принципе, производить расчет отражения волн в линии при наличии в ней нескольких сочленений и сосредоточенных нагрузок, находит применение при решении задачи *согласования* генератора с нагрузкой, т.е. достижения нулевой (или минимальной) амплитуды волны, возвращающейся от нагрузки к генератору.

11.5. Возбуждение волн в линий передачи заданными источниками

Пусть в некоторой ограниченной области идеальной закрытой линии передачи (на интервале (z_1, z_2) в пространств между проводниками) заданы сторонние электрические и магнитные токи с плотностями

$$\mathbf{j}^{(e)}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{j}^{(m)}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}. \tag{11.39}$$

Если для этой линии известна полная система ее собственных волн

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{p0}(\mathbf{r}_\perp)e^{-ih_p z}, \; \mathbf{H}_p(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_{p0}(\mathbf{r}_\perp)e^{-ih_p z}, \tag{11.40}$$

то поля (комплексные амплитуды), создаваемые в линии токами (1.39), вне интервала (z_1, z_2) могут быть представлены в виде разложения по этим волнам:

$$\mathbf{E} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \mathbf{E}_p, \quad \mathbf{H} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \mathbf{H}_p\,. \tag{11.41}$$

Здесь $p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$ – индекс, нумерующий собственную волну (моду). Моды, индексы которых равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, имеют одинаковую поперечную структуру и различаются лишь знаком продольного волнового числа: ($h_{-p} = -h_p$), причем знаки величин $h_p^{'}$ и $h_p^{''}$ совпадают со знаком p. Как следует из принципа причинности, все волны должны либо убегать от области источников (при $\omega > \omega_{cr}(p)$), либо экспоненциально убывать с удалением от нее (при $\omega < \omega_{cr}(p)$). Поэтому в области $z > z_2$ равны нулю все коэффициенты a_p с $p < 0$; а в области $z < z_1$ равны нулю все a_p с $p > 0$. Остальные, в общем случае не равные нулю, коэффициенты a_p могут быть найдены при помощи *леммы Лоренца* и вытекающих из нее соотношений ортогональности для полей собственных мод (см. [4]). Соответствующие выражения для a_p и a_{-p} ($p > 0$) имеют вид

$$\text{при } z > z_2: \quad a_p = \frac{1}{N_p} \iiint\limits_{(z_1, z_2)} [(\mathbf{j}^{(e)} \cdot \mathbf{E}_{-p}) - (\mathbf{j}^{(m)} \cdot \mathbf{H}_{-p})]\, dV\,, \tag{11.42}$$

$$\text{при } z < z_1: \quad a_{-p} = \frac{1}{N_p} \iiint\limits_{(z_1, z_2)} [(\mathbf{j}^{(e)} \cdot \mathbf{E}_{p}) - (\mathbf{j}^{(m)} \cdot \mathbf{H}_{p})]\, dV\,, \tag{11.43}$$

где

$$N_p = \frac{c}{4\pi} \iint_S \left(\mathbf{E}_p \times \mathbf{H}_{-p} - \mathbf{E}_{-p} \times \mathbf{H}_p \right) \mathbf{z}_0 \, ds \tag{11.44}$$

– величина, называемая *нормой волны*. Интегрирование в (11.42), (11.43) производится по всему объему, заключенному между сечениями z_1, z_2, а в (11.44) – по площади поперечного сечения линии передачи.

В области внутри источников ($z_1 < z < z_2$) поле представляется в виде

$$\mathbf{E} = \sum_{p=1}^{\infty} (a_p(z)\,\mathbf{E}_p + a_{-p}(z)\,\mathbf{E}_{-p}) - \frac{4\pi i}{\omega\varepsilon} \mathbf{z}_0 j_z^{(e)}, \tag{11.45}$$

$$\mathbf{H} = \sum_{p=1}^{\infty} (a_p(z)\mathbf{H}_p + a_{-p}(z)\mathbf{H}_{-p}) - \frac{4\pi i}{\omega\mu} \mathbf{z}_0 j_z^{(m)}, \tag{11.46}$$

где

$$a_p(z) = \frac{1}{N_p} \iiint_{(z_1, z)} [(\mathbf{j}^{(e)} \cdot \mathbf{E}_{-p}) - (\mathbf{j}^{(m)} \cdot \mathbf{H}_{-p})] \, dV, \tag{11.47}$$

$$a_{-p}(z) = \frac{1}{N_p} \iiint_{(z, z_2)} [(\mathbf{j}^{(e)} \cdot \mathbf{E}_p) - (\mathbf{j}^{(m)} \cdot \mathbf{H}_p)] \, dV. \tag{11.48}$$

Интегрирование в выражениях (11.47), (11.48) проводится по областям, ограничиваемым соответственно сечениями (z_1, z) и (z, z_2).

Необходимо иметь в виду, что расчет поля в волноводе может быть произведен непосредственно на основании приведенных выражений только в том случае, если входящие в них источники $\mathbf{j}_e$, $\mathbf{j}_m$ заданы и могут рассматриваться как сторонние. Близкая к этому ситуация реализуется, например, в случае возбуждения волновода при помощи металлического штыря или проволочной петли, вводимых внутрь волновода через малое отверстие в его стенке. Если размеры штыря или петли достаточно малы, их можно рассматривать соответственно как электрический или магнитный диполи, токи в которых задаются питающими их источниками. Для эффективного возбуждения какой-либо моды, как следует из приведенных выше формул, дипольный штырь должен быть ориентирован параллельно электрическому полю данной моды и располагаться в его максимуме, а петля с током должна располагаться в максимуме магнитного поля и быть ориентированной перпендикулярно ему своей плоскостью.

Наряду с указанными простейшими способами возбуждения волновода при помощи сосредоточенных источников малых размеров, на практике часто используются и другие схемы возбуждения, расчет которых не сводится к описанной выше простой методике. Примером может служить система, образованная двумя волноводами, связанными между собой через отверстие (или совокупность отверстий) в стенках. Для расчета амплитуд и фаз волн, возбуждаемых в одном из волноводов волной заданной амплитуды, распространяющейся в другом (возбуждающем) волноводе, требуется решить *задачу дифракции.* В некоторых случаях, например, когда отверстие представляет собой узкую щель, перпендикулярную линиям поверхностного электрического тока возбуждаемой волны, эта задача путем замены электрического поля в щели текущим вдоль нее эквивалентным поверхностным магнитным током опять сводится к описанной выше методике (см. [4]). Однако в общем случае ее решение может быть найдено только с использованием численных методов. Сложную дифракционную задачу представляет собой в общем случае также расчет полей, создаваемых заданными источниками в открытых линиях передачи, в применении к которым рассмотренный выше метод позволяет найти лишь поля направляемых ими (локализованных) волн типа ТЕМ.

12. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ПОЛЫХ РЕЗОНАТОРАХ

12.1. Собственные колебания

Идеальный полый резонатор (полость в идеальном проводнике) представляет собой колебательную электродинамическую систему, в которой возможны собственные незатухающие колебания. Каждое колебание (так называемая *мода* резонатора) характеризуется определенной структурой поля и собственной частотой. Спектр мод пустого резонатора (или резонатора, заполненного однородной средой) определяется на основании решения задачи об отыскании собственных функций и собственных значений для векторного уравнения Гельмгольца

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \tag{12.1}$$

с граничным условием (11.10) на поверхности проводника S (и вытекающим из уравнений Максвелла дополнительным условием $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$). Собственные значения волнового числа этой задачи $k = (\omega / c)\sqrt{\varepsilon\mu}$, определяющие собственные частоты ω, чисто действительны и зависят лишь от формы и размеров граничной поверхности. Важную роль для любого резонатора имеет понятие *низшей моды* или *низшего типа колебания* – колебания с наименьшей собственной частотой.

Собственные колебания в цилиндрическом резонаторе, образованном путем «металлизации» двух поперечных сечений идеального волновода любой формы, представляют собой стоячие волны (TE, TM или TEM типов) этого волновода.. Спектр их собственных частот определяется спектром поперечных волновых чисел волновода κ и длиной резонатора d (расстоянием между поперечными перегородками). В частности, для прямоугольного или круглого волноводов

$$k_{mnp}^2 = \frac{\omega_{mnp}^2}{c^2}\varepsilon\mu = \kappa_{mn}^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2, \tag{12.2}$$

где $p = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ для волн типа TM и $p = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ для волн типов TE и TEM. Моды в таких резонаторах обозначаются тем же способом, что и соответствующем волноводе, но с добавлением третьего индекса p, обозначающего число полуволн стоячей волны, укладывающихся на длине резонатора: TE_{mnp},

TM_{mnp}. В частности, спектр собственных частот прямоугольного резонатора с размерами ребер a, b, d определяется выражением

$$\omega_{mnp} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2},$$

где одно из целых чисел m, n, p можно положить равным нулю, а низшей (при $b < a,\ b < d$) является мода TE_{101} с электрическим полем, параллельным наименьшему ребру с длиной b. Низшей модой резонатора, имеющего форму прямого кругового цилиндра радиуса a и длины d является при $d/2a < \beta$, где $\beta \equiv 1.02$, мода TM_{010} с собственной частотой $\omega_{010} \cong 2.405c/(a\sqrt{\varepsilon\mu})$ и электрическим полем, параллельным образующей цилиндра, а при $d/2a > \beta$ мода TE_{111}, представляющая собой стоячую волну TE_{11} круглого волновода, с собственной частотой $\omega_{111} \cong (c/\sqrt{\varepsilon\mu})\sqrt{(\pi/d)^2 + (1.84/a)^2}$

Полная энергия W электромагнитного поля в резонаторе складывается из электрической (W_e) и магнитной (W_m) энергий. В идеальном резонаторе, заполненном непоглощающей средой (с чисто действительными ε и μ, вообще говоря, зависящими от частоты), величина W, а также средние по времени значения W_e, W_m, сохраняются и могут быть найдены (если известны распределения амплитуд поля по объему резонатора) на основании приведенных в разделе 8 (формулы 8.17, 8.18) выражений для соответствующих средних плотностей энергии w_e, w_m.

Затухание собственных колебаний в реальных резонаторах (означающее в рамках используемого описания комплексность их собственных частот) обусловлено, как и в волноводе, потерями энергии в заполняющей среде и (или) в металлических стенках. Затухание колебаний в резонаторе, заполненном однородной среде с комплексными ε и μ (при идеальной проводимости стенок) легко учитывается, если известен спектр волновых чисел k идеального пустого резонатора. Комплексные частоты колебаний находятся из равенства $\omega = \omega' + i\omega'' = ck/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Ввиду действительности k, мнимая часть частоты, определяющая скорость затухания колебаний согласно закону $|\mathbf{E}| \sim e^{\omega'' t}$, отлична от нуля (отрицательна), если отличны от нуля (положительны) мнимые части ε или μ.

Потери энергии в металлических стенках резонатора могут быть учтены методом, аналогичным описанному выше для волноводов. Мощность потерь в стенках (средний поток энергии в проводник)

$$P_r = \frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}\varsigma_s \oint\!\!\oint_S |\mathbf{H}_\tau|^2 ds \qquad (12.3)$$

(интегрирование проводится по границе резонатора S). Как следует из закона сохранения энергии, постоянная затухания

$$|\omega''| = \frac{P_r}{2W} = \frac{c\ \mathrm{Re}\varsigma_s \oint\!\!\oint_S |\mathbf{H}_\tau|^2 ds}{16\pi W}, \tag{12.4}$$

где W – полная энергия поля в резонаторе, выражаемая интегралом от средних плотностей энергии электрического и магнитного полей. В случае сравнительно медленного затухания ($|\omega''| << \omega'$) в качестве полей $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$, определяющих величины P_r и W в формуле (12.4), можно использовать поля, найденные для идеального резонатора (при $\varsigma_s = 0$). В качестве характеристики скорости затухания часто используется обратная ей безразмерная величина $Q = \omega'/2|\omega''|$, называемая добротностью колебания.

12.2. Возбуждение колебаний заданными источниками

Поля вынужденных электромагнитных колебаний в идеальном (или близком к идеальному) резонаторе, возбуждаемом изнутри заданными сторонними источниками, могут быть найдены на основании метода, аналогичного используемому в теории возбуждения волноводов – путем разложения полей этих колебаний по собственным модам резонатора. Пусть внутри резонатора заданы сторонние электрические и магнитные токи (11.39), гармонически изменяющиеся во времени с частотой ω. Создаваемые ими поля представляют собой действительные части выражений вида $\{\mathbf{E}(\mathbf{r}),\ \mathbf{H}(\mathbf{r})\}\, e^{-i\omega t}$, где комплексные амплитуды $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ рассчитываются по следующим формулам

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_l, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_t + \mathbf{H}_l, \tag{12.5}$$

$$\mathbf{E}_p = -\nabla\psi_e, \quad \mathbf{H}_p = -\nabla\psi_m, \tag{12.6}$$

$$\mathbf{E}_t = \sum_{p=1}^{\infty} e_p \mathbf{E}_p, \quad \mathbf{H}_t = \sum_{p=1}^{\infty} h_p \mathbf{H}_p, \tag{12.7}$$

$$e_p = \frac{i}{(\omega_p^2 - \omega^2)M_p} \iiint_V (\omega\, \mathbf{j}^{(e)}\mathbf{E}_p - \omega_p \mathbf{j}^{(m)}\mathbf{H}_p)\, dV, \tag{12.8}$$

$$h_p = \frac{i}{(\omega_p^2 - \omega^2)M_p} \iiint_V (\omega_p\, \mathbf{j}^{(e)}\mathbf{E}_p - \omega\, \mathbf{j}^{(m)}\mathbf{H}_p)\, dV, \tag{12.9}$$

Здесь $\{\mathbf{E_t}, \mathbf{H_t}\}$ и $\{\mathbf{E}_l, \mathbf{H}_l\}$ – соответственно *вихревые* (называемые также соленоидальными или поперечными) и *потенциальные* (называемые также продольными) поля, удовлетворяющие условиям $\operatorname{div}\mathbf{E}_t = \operatorname{div}\mathbf{H}_t = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{E}_l = \operatorname{rot}\mathbf{H}_l = 0$.

Потенциальные поля не обладают резонансными свойствами, их потенциалы ψ_e, ψ_m в идеальном резонаторе, заполненном однородной средой, представляют собой решения уравнений Пуассона

$$\Delta\psi_e = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho_e, \quad \Delta\psi_m = -\frac{4\pi}{\mu}\rho_m, \tag{12.10}$$

с граничными условиями

$$\psi_e\Big|_S = 0, \quad \partial\psi_m/\partial n\Big|_S = 0 \tag{12.11}$$

В уравнениях (12.10) $\rho_{e,m} = (1/i\omega)\operatorname{div}\mathbf{j}^{(e,m)}$ – плотности электрических и эквивалентных (фиктивных) магнитных зарядов).

Вихревые поля представлены выражением (12.7) в виде разложений по собственным модам; поля $\mathbf{E}_p(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_p(\mathbf{r})$ и частоты ω_p которых определяются решением задачи о собственных колебаниях данного резонатора, заполненного средой с проницаемостями $\varepsilon(\omega), \mu(\omega)$, взятыми на частоте сторонних источников. Величина M_p в выражениях для коэффициентов разложения (12.8), (12.9), называемая нормой колебания типа p, равна

$$M_p = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V \varepsilon\,\mathbf{E}_p^2\,dV = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V \mu\,\mathbf{H}_p^2\,dV. \tag{12.12}$$

При приближении частоты сторонних токов ω к любой из собственных частот ω_p имеет место явление *резонанса*: коэффициенты e_p, h_p, определяющие амплитуды вынужденных колебаний соответствующей моды, сильно возрастают. Их максимальные (резонансные) значения обратно пропорциональны мнимой части собственной частоты ($e_{p\max} \cong h_{p\max} \sim 1/\omega''_p$), т.е. прямо пропорциональны добротности колебания Q_p. Таким образом, определяемая полученными соотношениями зависимость амплитуды поля внутри резонатора или запасенной в нем полной энергии от частоты сторонних источников представляет собой в общем случае кривую, характеризуемую множеством резонансных пиков на собственных частотах ω'_p. Если постоянная затухания мала по сравнению с частотным интервалом между соседними пиками, т.е. выполнено условие

$$\omega''_p << \Delta\omega'_p = \min|\,\omega'_p - \omega'_{p\pm1}\,|, \tag{12.13}$$

каждый резонансный пик имеет форму, совпадающую с резонансной кривой обычного линейного осциллятора, например, электрического колебательного контура. Как и в случае контура, мерой остроты пика может служить мнимая часть собственной частоты (постоянная затухания) ω''_p, равная его полуширине на том уровне, где запасенная энергия составляет половину максимального (резонансного) значения (а снижение амплитуды поля составляет $1/\sqrt{2}$). В любом реальном резонаторе при больших значениях индекса p отношение $\Delta\omega'_p/\omega''_p$ с ростом p убывает, благодаря чему число достаточно отчетливо выраженных резонансов оказывается конечным. В области, где неравенство (12.13) нарушается, пики сливаются между собой и амплитуда поля не испытывает заметного возрастания.

Заметим, что при сильном резонансе какой-либо моды отвечающее ей слагаемое в суммах (12.7) много больше всех остальных слагаемых. Пренебрегая этими последними и учитывая, что коэффициенты e_p и h_p при $\omega \approx \omega'_p$ почти одинаковы, находим, что поле вынужденного колебания на резонансе имеет практически ту же структуру, что и поле возбуждаемой моды:

$$\mathbf{E}_t \approx e_p \mathbf{E}_p, \quad \mathbf{H}_t \approx e_p \mathbf{H}_p. \tag{12.14}$$

Роль возбуждающих источников сводится в этом случае лишь к поддержанию на постоянном уровне амплитуды колебаний, т.е. к компенсации потерь энергии, что позволяет (на основании равенства (12.4)) выразить запасенную на резонансе энергию W через добротность колебания Q и отдаваемую источниками мощность P:

$$W = \frac{PQ}{\omega}. \tag{12.15}$$

Ширина резонансной линии $|\omega''_p|$ и добротность $Q = \omega'_p/2|\omega''_p|$, определяемые поглощением энергии в стенках резонатора, как следует из (12.4), зависит от соотношения между глубиной проникновения поля в металл (толщиной скин-слоя) $\delta_s = c/\sqrt{4\pi\omega\mu\sigma}$ и некоторого характерного параметра l размерности длины, зависящего от структуры поля данной моды:

$$Q = l/\delta_s, \qquad l = \frac{\iiint\limits_V |\mathbf{H}|^2\, dV}{2\oint\limits_S |\mathbf{H}_\tau|^2\, ds}. \tag{12.16}$$

Для полевых структур простейшего вида может быть принята приближенная оценка $l \sim V/S$, где V – объем резонансной полости, S – площадь ее поверхности; при этом добротность $Q \sim V/V_S$, где $V_S = S\delta_S$ – объем, занимаемый скин-слоем. При значениях параметров $\sigma \approx 5 \cdot 10^{17}$ 1/c (проводимость меди и латуни), $\omega \approx 2 \cdot 10^{11}$ 1/c (длина волны $\lambda \approx 1$см) и характерных размерах резонатора $l \sim 1$-10 см оцениваемая таким образом добротность достигает весьма высоких значений $Q \sim 10^4 - 10^5$. В реальных резонаторах тех же размеров результирующая добротность может снижаться из-за наличия дополнительных потерь, обусловленных излучением через отверстия в стенке резонатора, прорезаемые для осуществления его связи с внешними полями и источниками.

Если говорить о конкретных способах возбуждения резонаторов, то здесь в основном остается справедливым все то, что было сказано выше о возбуждении волноводов. В частности, возбуждающий штырь должен вводиться в максимум электрического поля возбуждаемой моды параллельно его силовым линиям, петля должна охватывать наиболее интенсивные пучки силовых линий магнитного поля, щель должна прорезаться перпендикулярно текущему в стенке поверхностному току. Более сложны для описания и, как и в случае волноводов, должны опираться на решения дифракционных задач, методы возбуждения, в которых связь резонатора с источником электромагнитной энергии осуществляется через широкое отверстие.

13. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Дифракция волн – раздел волновой теории, в котором изучаются отклонения в поведении волнового поля от законов геометрической оптики. Термином дифракция (или рассеяние) волн часто обозначает также всю совокупность явлений и процессов, связываемых с возмущениями некоторого заданного волнового поля различными материальными объектами Типичная задача дифракции в электродинамике: плоская монохроматическая волна

$$\{\mathbf{E}_0,\ \mathbf{H}_0\}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{13.1}$$

падает на тело (или на бесконечный непрозрачный экран с отверстием) с заданными электрическими и магнитными свойствами (проводимостью σ, диэлектрической проницаемостью ε, магнитной проницаемостью μ). Требуется найти электромагнитное поле во всем пространстве. Для понимания общей картины характерных для этой задачи явлений важными являются следующие два момента:

(1) Электромагнитное поле индуцирует в теле объемные или поверхностные электрические токи (токи проводимости с плотностью $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, поляризационные токи $\mathbf{j}_p = \partial\,\mathbf{p}/\partial\,t = -i\omega\,\mathbf{p} = (-i\omega/4\pi)(\varepsilon-1)\,\mathbf{E}$, токи намагничения $\mathbf{j}_m = c\ \mathrm{rot}\ \mathbf{M}$). Эти токи порождают электромагнитное поле

$$\{\mathbf{E}_s(\mathbf{r}),\ \mathbf{H}_s(\mathbf{r})\}e^{-i\omega t} \tag{13.2}$$

которое часто называют *рассеянным* полем или полем *рассеянной* волны; полное поле в любой точке пространства есть суперпозиция полей падающей и рассеянной волн.

(2) Если тело (объект дифракции) занимает ограниченную область (с характерным размером L) в трехмерном пространстве, то рассеянное поле на достаточно большом расстоянии от него (так же как и поле прошедшего излучения в дальней зоне отверстия в экране) представляет собой расходящуюся сферическую волну. Определение интенсивности излучения в этой волне для различных направлений обычно является важнейшим вопросом, на который должно дать ответ решение задачи дифракции.

В качестве характеристики интенсивности рассеянной волны используется *дифференциальное сечение рассеяния* $\sigma_d = S_0^{-1}dP/d\Omega$, определяемое как отношение потока энергии, рассеиваемого телом в единицу телесного угла в данном направлении, к средней плотности потока энергии S_0 в падающей волне (dP – поток энергии рассеянной волны в элементе телесного угла $d\Omega$). Полная рассеивающая способность тела характеризуется *полным сечением рассеяния*

$\sigma_t = P/S_0$, определяемым как отношение полного потока энергии рассеянной волны P через замкнутую поверхность, окружающую тело, к S_0. Для описания поглощающей способности тела вводится *сечение поглощения* $\sigma_a = Q/S_0$, где Q – энергия, поглощаемая телом за единицу времени (мощность потерь).

В общем случае задача дифракции формулируется как некоторая достаточно сложная *краевая задача* математической физики, в которой требуется найти решения векторных волновых уравнений внутри и снаружи рассеивающего объекта, удовлетворяющие условиям непрерывности тангенциальных компонент векторов напряженности полного поля на границе объекта и условию излучения для рассеянного поля на бесконечности. Такая задача допускает точное аналитическое решение (представляемое, как правило, в виде бесконечных рядов или несобственных интегралов от известных функций) лишь для однородных тел простейшей геометрической формы (шар или бесконечный цилиндр; при $\sigma = \infty$ к ним добавляются эллипсоид вращения, бесконечный клин и некоторые другие тела). В связи с этим большую роль при решении задач дифракции играют различные приближенные методы.

При выборе метода решения дифракционной задачи могут оказаться полезными следующие общие теоремы (формулируемые здесь на «физическом» уровне строгости), справедливые для любых монохроматических полей и источников.

1. *Теорема единственности решения*

Электромагнитное поле в некоторой области пространства G, ограниченной замкнутой поверхностью S, определено единственным образом, если

1) во всех точках области G заданы: комплексные амплитуды плотностей сторонних электрических и магнитных токов $\mathbf{j}^{(e)}(\mathbf{r})$, $\mathbf{j}^{(m)}(\mathbf{r})$ и комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды $\varepsilon(\mathbf{r})$, $\mu(\mathbf{r})$, мнимые части которых не отрицательны и по крайней мере одна из них (ε'' или μ'') строго больше нуля.

2) во всех точках граничной поверхности S заданы либо тангенциальная компонента электрического или магнитного поля ($\mathbf{E}_\tau^{(s)}$ или $\mathbf{H}_\tau^{(s)}$); либо линейная импедансная связь между ними $\mathbf{E}_\tau^{(s)} = \varsigma_s[\mathbf{H}_\tau^{(s)} \times \mathbf{n}]$, где $\mathbf{n}$ – внешняя (по отношению к G) нормаль к границе, $\mathrm{Re}\,\varsigma_s \geq 0$.

Величины ε'', μ'' в формулировке теоремы могут быть сколь угодно малыми. Условием положительности хотя бы одной из них, означающим присутствие в среде конечных (в принципе, сколь угодно малых) потерь энергии, исключается возможная неоднозначность определения поля, связанная с существованием собственных незатухающих колебаний. Область определения поля G может располагаться как внутри поверхности S (внутренняя задача), так и вне ее, простираясь до бесконечности (внешняя задача). В последнем случае решение единственно, если токи отличны от нуля в некоторой ограниченной области пространства, а поля подчинены условию достаточно быстрого убывания на бесконечности $|\mathbf{E}|, |\mathbf{H}| < C / R^{\alpha}$, где $C = \text{const}$, $\alpha > 1$. Заметим, что последнее условие подразумевает выполнение *условия излучения*, записываемого для монохроматических полей в виде

$$\lim_{R \to \infty} R(\partial \mathbf{E} / \partial R - ik\mathbf{E}) = 0 \qquad (13.3)$$

и означающего, что поле на бесконечно большом расстоянии от области источников представляет собой расходящуюся сферическую волну. Определяемая этим условием асимптотика решения $\mathbf{E}, \mathbf{H} \sim e^{ikR} / R$ в среде с потерями, где волновое число $k = (\omega / c)\sqrt{\varepsilon\mu}$ комплексно, имеет более быстрый по сравнению с $1/R$ закон убывания амплитуды поля, чем и обеспечивается выполнение требований теоремы единственности. Обычно при решении внешней задачи приходится иметь дело со случаем, когда потерями в среде, окружающей источник, можно полностью пренебречь. При этом для обеспечения единственности решения достаточно использовать условие (13.3), полагая в нем волновое число k чисто действительным.

2. Теорема об эквивалентных поверхностных токах

Пусть на некоторой замкнутой поверхности S известны тангенциальные компоненты как электрического, так и магнитного поля $\mathbf{E}_{\tau}^{(s)}$, $\mathbf{H}_{\tau}^{(s)}$. Тогда электромагнитное поле в области пространства G, ограничиваемой этой поверхностью снаружи или изнутри, при условии отсутствия в этой области источников поля и неоднородностей среды, совпадает с полем, создаваемым поверхностными электрическими и магнитными токами

$$\mathbf{i}_s^{(e)} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{H}_{\tau}^{(s)} \times \mathbf{n}], \; \mathbf{i}_s^{(m)} = -\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}_{\tau}^{(s)} \times \mathbf{n}], \qquad (13.4)$$

текущими по поверхности S в безграничной однородной среде. Нормаль $\mathbf{n}$ в каждой точке поверхности S в этих выражениях – внешняя по отношению к G. Векторные потенциалы токов (13.4) в области G рассчитываются на основании формул (10.9), (10.19) (с заменой объемных интегралов на поверхностные), после чего по формулам (10.7), (10.16), (10.17) определяются поля.

Токи (13.4) можно рассматривать как эквивалентные *вторичные источники*, позволяющие выразить, согласно *принципу Гюйгенса-Френеля*, поле в любой точке пространства через его значения на некоторой поверхности. Соотношения (13.4) вместе с формулами, выражающими векторные потенциалы и поля через заданные токи, фактически дают строгую математическую формулировку этого принципа для векторных задач электродинамики. В силу сформулированной выше теоремы единственности решения, для определения поля в области G достаточно задания одного из полей $\mathbf{E}_\tau^{(s)}$, $\mathbf{H}_\tau^{(s)}$, поэтому рассматриваемые вторичные источники не независимы и должны задаваться непротиворечивым образом. Как правило, в задачах дифракции поля $\mathbf{E}_\tau^{(s)}$, $\mathbf{H}_\tau^{(s)}$ на какой-либо поверхности могут быть найдены точно лишь после построения полного решения во всей области, однако приближенно они могут быть в ряде случаев определены заранее, что позволяет использовать принцип Гюйгенса-Френеля для отыскания приближенных решений..

Заметим, что в области пространства, расположенной по другую сторону граничной поверхности S, т.е. являющейся «дополнительной» по отношению к области определения поля G, токи (13.4) создают поле, тождественно равное нулю. Это позволяет рассматривать эту дополнительную область как идеальный проводник, по границе которого и текут поверхностные токи (13.4). В случае, если эта граница представляет собой бесконечную плоскость, т.е. поле ищется в полупространстве, поля, создаваемые в нем каждым из эквивалентных поверхностных токов $\mathbf{i}_s^{(e)}$, $\mathbf{i}_s^{(m)}$ по отдельности, как нетрудно показать, пользуясь методом изображений, равны друг другу, так что полное поле совпадает с удвоенным полем любого из них. Это обстоятельство упрощает расчет поля над плоской границей, не затрудняя его и том случае, когда с достаточной точностью известно лишь одно из полей $\mathbf{E}_\tau^{(s)}$, $\mathbf{H}_\tau^{(s)}$.

Одним из важнейших параметров, определяющих характер приближений, используемых при решении задач дифракции, является отношение длины электромагнитной волны λ к характерному размеру тела L. При малых значениях этого параметра ($\lambda / L << 1$) для решения задачи используются так называемые коротковолновые приближения, простейшим из которых является приближение *геометрической оптики*. В его основе лежит представление поля в виде суперпозиции плоских (или локально плоских) волн, каждая из которых характеризуется своей системой *лучей* – линий, касательная к которым в каждой точке совпадает с вектором плотности потока энергии (в изотропной среде – также и с волновым вектором) соответствующей волны. Лучи в однородной среде являются прямыми и обычно находятся путем несложного поэтапного геометрического построения.

Например, в задаче о дифракции плоской волны на идеально проводящем теле, границей которого является некоторая замкнутая искривленная поверхность, сначала строится семейство лучей (параллельных прямых), отображающих заданную падающую волну. Те лучи из этого семейства, которые попали на границу тела, порождают семейство отраженных лучей, расположение которых (вместе с ориентацией векторов поля) определяется законами отражения плоской волны на плоской границе, совпадающей с касательной плоскостью в точке отражения. Фаза волны на каждом отраженном луче определяется законом ее преобразования при отражении от проводника и фазовым набегом вдоль луча. Интенсивность рассеянной волны, как следует из закона сохранения энергии, изменяется вдоль луча обратно пропорционально площади поперечного сечения элементарной конической лучевой трубки, образуемой лучами, бесконечно близкими к данному, т.е. определяется в конечном счете кривизной поверхности тела в точке отражения луча.

Геометрическая оптика оказывается недостаточной для описания поля в тех областях пространства, где она предсказывает:

(а) образование параллельных (не расходящихся) волновых пучков конечной ширины;

(б) резкое изменение интенсивности излучения на поверхностях, касательных к лучам (граница области тени позади тела или граница семейства лучей, отраженных от поверхностей с резким краем, изломом или заострением);

(в) образование так называемых *каустик* – особых точек или поверхностей, где сходимость лучей оказывается столь сильной, что приводит к бесконечным значениям интенсивности.

Более точное описание поля в этих условиях достигается при помощи так называемого *кирхгофовского* приближения (или метода Кирхгофа)– коротковолнового приближения, сочетающего в себе элементы геометрической оптики с точным расчетом поля, основанным на принципе Гюйгенса-Френеля. Геометрическая оптика в этом методе используется не для определения поля во всем пространстве, а лишь для расчета параметров вторичных источников (13.4) на некоторой поверхности вблизи объекта дифракции. Последующий расчет поля в пространстве по этим источникам производится уже с использованием точных формул, связывающих векторные потенциалы и поля с поверхностными токами.

Частным случаем использования кирхгофовского приближения является метод *зеркальных токов* (называемый также методом *физической оптики*) в задаче о дифракции волны на идеально проводящем теле. Согласно этому методу, тангенциальная компонента магнитного поля на поверхности тела $\mathbf{H}_\tau^{(s)}$ и определяемая ею на основании известного граничного условия плотность поверхностного электрического тока $\mathbf{i}_s^{(e)} = (c/4\pi)[\mathbf{H}_\tau^{(s)} \times \mathbf{n}]$ ($\mathbf{n}$ – внутренняя нормаль на проводнике) задаются в приближении геометрической оптики. Это означает, что поле в каждой точке освещенной части поверхности проводника связано с заданным полем падающей волны $\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{H}_0 \exp(i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ тем же соотношением, что и в задаче о наклонном падении плоской волны на соответствующую (касательную к поверхности) идеально проводящую плоскость:

$$\mathbf{H}_\tau^{(s)} = 2\mathbf{H}_\tau^{(i)}, \quad \mathbf{i}_s^{(e)} = \frac{c}{2\pi}[\mathbf{H}_\tau^{(i)} \times \mathbf{n}]; \tag{13.5}$$

на теневой части поверхности проводника $\mathbf{H}_\tau^{(s)} = \mathbf{i}_s^{(e)} = 0$. Поле рассеянной волны ищется затем как поле, порождаемое током (13.5).

В *классической оптике*, основные представления и методы которой были разработаны задолго до создания максвелловской электродинамики векторных полей, расчет дифракционного поля как правило производится на основе скалярного описания, опирающегося на известную формулу Кирхгофа

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oiint_S \left[u(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp(ikR)}{R} \right) - \frac{\exp(ikR)}{R} \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds'. \qquad (13.6)$$

В этой формуле $u(\mathbf{r})$ – скалярная функция (фактически, любая декартова компонента поля), удовлетворяющая уравнению Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$; $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ – расстояние от точки наблюдения до точки интегрирования. В рамках кирхгофовского приближения значения этой функции $u(\mathbf{r}')$ и ее производной в направлении внешней нормали $\partial u(\mathbf{r}')/\partial n$ в точках интегрирования на замкнутой поверхности S задаются на основании законов геометрической оптики.

Кирхгофовское приближение (как в его скалярной, так и в векторной форме) позволяет с достаточной точностью рассчитать распределение интенсивности в волне, порождаемой вторичными источниками, лишь для направлений рассеяния, близких к геометро-оптическим лучам, т.е. для малых углов рассеяния. В ряде случаев это обстоятельство позволяет, не ухудшая общей точности решения, воспользоваться при расчете полей, создаваемых вторичными источниками, теми упрощениями, которые дает переход к так называемому малоугловому или параксиальному приближению, описанному в Разделе 8. В частности, любая поперечная (перпендикулярная к основному лучу) компонента поля $u(z, \mathbf{r}_\perp)$ в волне, прошедшей через отверстие в плоском экране, ориентированном перпендикулярно направлению распространения падающей на него (из области $z < 0$) плоской волны $u = u_0 \exp(ikz)$, выражается в этом приближении через ее значение в плоскости экрана $z = 0$ при помощи функции Грина для параболического уравнения:

$$u(\mathbf{r}_\perp, z) = \frac{ik\, u_0}{2\pi z} \exp(ikz) \iint_S \exp\left[-ik \frac{(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)^2}{2z} \right] dS'. \qquad (13.7)$$

Здесь интегрирование производится по площади отверстия, $\mathbf{r}_\perp$ и $\mathbf{r}'_\perp$ – соответственно поперечные радиусы-векторы точек наблюдения (в плоскости $z > 0$) и интегрирования (в плоскости $z = 0$). Это выражение (представляющее собой частный случай более общей формулы (8.47) при $u_0 = \mathrm{const}$) можно получить непосредственно из (13.5), определяя функции $u(\mathbf{r}')$ и $\partial u(\mathbf{r}')/\partial n$ при $z = 0$ в приближении геометрической оптики ($u = u_0, \partial u/\partial n = -iku_0$ в области отверстия, $u = \partial u/\partial n = 0$ на теневой стороне поверхности экрана) и заменяя функцию $R=\sqrt{z^2+(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}$ первыми двумя членами ее разложения в степенной ряд по малому параметру $|\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}'_\perp|/z$:

$$R\cong z+(\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}'_\perp)^2/2z\,. \tag{13.8}$$

В соответствии с общим описанием квазиоптического волнового пучка, данным в Главе 8, поперечное распределение поля в волне, прошедшей через отверстие, существенно зависит от величины *френелевского параметра* $F=kL^2/z$. (L – характерный размер отверстия). Формула (13.6) правильно описывает распределение амплитуды поля вблизи границы геометрической тени в *зоне геометрической оптики* (область с $F>>1$, $kz>>1$, где поперечный профиль пучка в основном еще сохраняет свои геометрооптические очертания) и диаграмму направленности для малых углов рассеяния в *зоне Фраунгофера* ($F<<1$).

При малых размерах объекта $L<<\lambda$ для решения задач дифракции (чаще называемых в этом случае задачами рассеяния) используются так называемые длинноволновые или квазистатические приближения, основанные на расчете токов или поляризаций, индуцированных в объекте падающей волной, методами, развитыми в теории статических или квазистационарных полей. Рассеяние на малых трехмерных объектах, как правило, рассчитывается в дипольном приближении, учитывающем излучение наведенных в них электрических и магнитных диполей. Рассеяние на длинных квазилинейных проводниках может определяться также наведенными в них электрическими и магнитными продольными токами.

К приближенным методам, не связанным непосредственно с величиной параметра λ/a, относится *борновское приближние*, находящее применение при решении задач рассеяния на диэлектрических телах любых размеров в условиях, когда их диэлектрическая проницаемость ε мало отличается от ее значения $\varepsilon=1$ в окружающей среде (вакууме). Поляризационные токи $\mathbf{j}_p=-i\omega\mathbf{p}$, порождающие рассеянную волну, находятся в этом приближении на основании выражения для поляризации $\mathbf{p}=(\varepsilon-1)\mathbf{E}^{(i)}/4\pi$, в котором электрическое поле в каждой точке внутри тела принимается равным его невозмущенному значению в падающей волне $\mathbf{E}^{(i)}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Теория поля: учебное пособие. – 7-е издание, испр. – М.: Наука, Физматлит, 1988. – 512 с.
2. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Электродинамика сплогшных сред: учебное пособие. – 2-е издание, перераб. и доп. – М.: Наука, Физматлит, 1982. – 620 с.
3. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – 2-е издание, перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
4. Джексон Дж. Классическая электродинамика: пер. с англ. – М.: Мир, 1965.– 702 с.
5. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн: учебное пособие. – 3-е издание, перераб. и доп. –М.: Наука, Физматлит, 1989. – 544 с.
6. Гильденбург В.Б., Миллер М.А. Сборник задач по электродинамике: учебное пособие. – 2-е издание, доп. – М.: Наука, Физматлит, 2001. – 164 с.
7. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике испециальной теории относительности: учебное пособие. – 4-е издание, перераб.– СПб: Лань, 2010. – 480 с.

Владимир Борисович **Гильденбург**
Евгений Васильевич **Суворов**

Учебное пособие

Федеральное государственное автономное образоватнльное учпеждение высшего обрназования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»,
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.