# Теоретический минимум по ТФКП.

## 1. Комплексные числа и простейшие действия над ними

Определение. *Комплексным числом* называется пара действительных чисел с установленным порядком следования *$z=(a,b)$, $a=Re(z)$, $b=Im(z)$*. Действительные числа включаются в множество комплексных чисел.
$a=(a,0)$ - вещественное число, $(0,b)$ - чисто мнимое число. $(0,1)=i$ - мнимая единица.
Еще примеры комплексных чисел: $0=(0,0)$, $-1=(-1,0)$, $-i=(0,-1)$.
Комплексные числа можно изображать точками на комплексной плоскости.

**Действия с комплексными числами.**

1) Равенство. Два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части: $z_1=(a_1,b_1)$, $z_2=(a_2,b_2)$. Если $_1=z_2 \Leftrightarrow a_1=a_2$, $b_1=b_2$. Операция сравнения не определена. Множество комплексных чисел - неупорядоченное множество.
2) Сложение. $z_1+z_2=(a_1+a_2,b_1+b_2)$.
Пример: $(0,1)+(1,0)=(1,1)$.
3) Умножение. $z_1 \bullet z_2=(a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2+a_2 b_1)$.
Операции сложения и умножения включают действия с действительными числами.
Пример: Умножение чисто вещественного числа на чисто мнимое число. $(b,0)\bullet(0,1)=(0,b)= ib$ - тем самым чисто мнимое число есть произведение соответствующего действительного числа на мнимую единицу.
$\Rightarrow$ **алгебраическая форма записи комплексного числа $z = a + ib = Re(z) + i\bullet Im(z)$.**

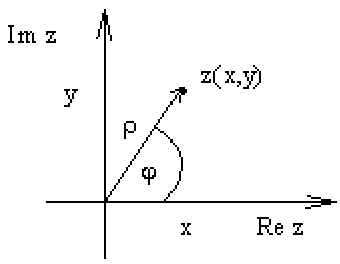
Обратные операции.
4) Вычитание. $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2,\ b_1 - b_2)$.
5) Деление. $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{b_1a_2 - b_2a_1}{a_2^2 + b_2^2}$$ . Пример. $1/i = -i$.
6) Возведение в целую степень. Действия с многочленами.
$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i & n = 4k+1 \\ -1 & n = 4k+2 \\ -i & n = 4k+3 \end{cases},\ k = 0,1,2\ldots$$
Примеры: а) $i^2 = i\ i= (0,1)(0,1) = -1$. б)
в) $z= (a, b) = a + ib$. $z^2 = (a+ib)^2 = a^2 + 2iab - b^2 = (a^2 - b^2) + i\ 2ab \Rightarrow$ ; $Re(z^2)=(a^2- b^2)$, $Im(z^2) = 2ab$.

7) Комплексное сопряжение. $z=(a, b)=a + ib$; $Re(z) = a$, $Im(z) = b$;
$z^* = (a, -b) = a - ib$. $Re(z^*) = a$ ; $Im(z^*) = -b$. $\Rightarrow$; $Re(z) = ( z + z^* ) / 2$; $Im(z) = (z - z^* ) / 2i$.

Некоторые свойства. $(z_1 \pm z_2)^*= z_1^* \pm z_2^*$ ; $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$; $(z_1 / z_2)^* = z_1^* / z_2^*$; $(z^*)^* = z$.
Примеры. а) $z z^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$; б) $(z z)^* = (z^2)^* = (a^2 - b^2) - i\ 2ab$; в) $z_1 / z_2 = z_1 z_2^* / z_2 z_2^*$; г) $i^* = -i$; $1^* = 1$.

**Геометрическая интерпретация комплексных чисел.**

$z = (x, y) = x + iy \Leftrightarrow$ точка плоскости $(x, y)$.
Взаимно однозначное соответствие.




Комплексная плоскость:

Ось абсцисс $Re(z)$ - *действительная ось*
Ось ординат $Im(z)$ - *мнимая ось*

Простейшие множества точек на комплексной плоскости.
Примеры. а) $|z-z_0|=a$ $(a>0)$ - окружность с центром в точке $z_0$ радиуса a;
б) $|z-z_0|<a$ $(a>0)$ - открытый круг с центром в точке $z_0$ радиуса a;
в) $|z-z_0|>a$ $(a>0)$ - внешность открытого круг с центром в точке $z_0$ радиуса a;
г) $a<|z-z_0|<b$ $(0<a<b)$ - открытое кольцо с центром в точке $z_0$ ;
д) $\arg(z-z_0)= \varphi$ - луч, с началом в точке $z_0$ , идущий под углом $\varphi$ к положительному направлению действительной оси.
е) $\alpha <\arg(z-z_0)<\beta$ - внутренность неограниченного открытого сектора с вершиной в точке $z_0$ и углом раскрыва $\beta -\alpha$
ж) $Re\ z= a$ - прямая, || мнимой оси, проходящая через точку $(a,0)$;
з) $Im\ z= b$ - прямая, || действительной оси, проходящая через точку $(0,b)$;

**Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа**

Полярные координаты (x,y) <=> ($\rho$ ,$\varphi$ ), где x=.$\rho$ cos face=Symbol>j , y=$\rho$ sin $\varphi$ ,
$\rho =(x^2+y^2)^{1/2}=|z| =((\mathrm{Re}\, z)^2+(\mathrm{Im}\, z)^2)^{1/2}$ - модуль комплексного числа,
tg $\varphi$ =y/x. $\varphi =\varphi_0+2\pi k$- аргумент комплексного числа.
Arg z=arg z+2$\pi$ k, 0$\leq$ arg z $\leq$ 2$\pi$ .
Для комплексного числа 0=(0,0) модуль равен 0, а аргумент не определен.
Тригонометрическая форма записи комплексного числа: $z=\rho (\cos\varphi +i\sin\varphi )=\rho e^{i\varphi}$- (***формула Эйлера***)- показательная форма записи комплексного числа.

Примеры. а)$|z|^2=z z^*=a^2+b^2$.; $z^2 \neq |z|^2$;
б)z=1: |1|=1, arg 1=0; 1=1(cos 0 +i sin 0)= $1e^{i0}$;
в) z=i: |i|=1, arg i=$\pi$ /2; i=1(cos $\pi$ /2 +i sin $\pi$ /2)= $1e^{i\pi/2}$;
г) z=-1: |-1|=1, arg (-1)= $\pi$ ; -1=1(cos $\pi$ +i sin $\pi$ )= $1e^{i\pi}$;
д) z=-i: |-i|=1, arg (-i)= 3$\pi$ /2; -i=1(cos 3$\pi$ /2 +i sin 3$\pi$ /2)= $1e^{i3\pi/2}$;
е) z=1+i: |1+i|= $\sqrt{2}$ , arg (1+i)= $\pi$ /4; 1+i= $\sqrt{2}$ (cos $\pi$ /4 +i sin $\pi$ /4)= $\sqrt{2}\ e^{i\pi/4}$;
ж) $z=e^{i\varphi}$; $|e^{i\varphi}|=1$, arg ($e^{i\varphi}$)= $\varphi$ ; $e^{i\varphi}=1$ (cos $\varphi$ +i sin $\varphi$ );
з) $z=-e^{i\varphi}$; $|-e^{i\varphi}|=1$, arg ($-e^{i\varphi}$)= $\pi +\varphi$ ; $-e^{i\varphi}=1$ (cos($\pi +\varphi$ ) +i sin($\pi +\varphi$ ))=$e^{i(\pi +\varphi )}$

Геометрическая интерпретация сложения и умножения.
Сложение двух комплексных чисел можно рассматривать как сложение двух векторов на плоскости. При этом справедливы
Неравенства треугольника $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$; $|z_1-z_2| \geq |z_1|-|z_2|$
$|z_1-z_2|$ - расстояние между $z_1$ и $z_2$ на комплексной плоскости.
$\varepsilon$ -окрестность точки $z_0$: $|z-z_0|<\varepsilon$, $0<|z-z_0|<\varepsilon$ - выколотая (проколотая)
$\varepsilon$ -окрестность точки $z_0$.
При умножении двух комплексных чисел их ***модули перемножаются*** (растяжение или сжатие), а ***аргументы складываются*** (поворот на плоскости). $z_1=a_1+i\, b_1=\rho_1 e^{i\alpha}$; $z_2=a_2+i\, b_2=\rho_2 e^{i\beta}$; $z_1 z_2=\rho_1\rho_2 e^{i(\alpha +\beta )}$ => $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$;
arg($z_1 z_2$)=arg $z_1$+ arg $z_2$ .
При делении двух комплексных чисел их ***модули делятся*** (модуль знаменателя $\gamma$ 0), а ***аргументы вычитаются***:
$z_1/z_2=(\rho_1/\rho_2)e^{i(\alpha -\beta )}$ => $z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|$;
arg($z_1/z_2$)=arg $z_1$- arg $z_2$ .
Алгебраической формой записи комплексных чисел удобно пользоваться при операциях сложения и вычитания, а показательной- при умножении, делении, возведении в целую степень, извлечении целого корня (возведение в рациональную степень).
Возведение в целую степень. $z^n=[\rho (\cos\varphi +i\sin\varphi )]^n=[\rho e^{i\varphi} ]=\rho^n e^{in\varphi}=$
$=\rho^n(\cos(n\varphi )+i\sin(n\varphi ))$; ***Формула Муавра***: $(\cos\varphi +i\sin\varphi )^n = \cos(n\varphi )+i\sin(n\varphi )$.
Пример: $(1+i)^3=(\sqrt{2}\ e^{i\pi/4})^3=2^{3/2}\ e^{i3\pi/4}=2^{3/2}(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4))=-2+2i$ ;
Извлечение целого корня (возведение в рациональную степень).
$z=\rho e^{i\varphi}= \rho e^{i(\varphi +2\pi k)}$ , k=0,$\pm$ 1,$\pm$ 2... . $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)}$ => корень n-той степени из комплексного числа имеет n различных значений, котторые получаются при k=0, 1, 2...n-1.
Пример: $\sqrt[4]{1}=1\ e^{i(0+2\pi k)/4}$={1 (k=0), i (k=1), -1 (k=2), -i (k=3) }.

## 2. Последовательности комплексных чисел

**Определение " *Последовательностью комплексных чисел* называют упорядоченное счетное множество комплексных чисел."**
**Члены последовательности (элементы) располагаются в порядке следования их номеров. Обозначение: {$z_n$}.**

Определение. "Комплексное число z называется ***пределом последовательности*** {$z_n$ }, если для $\forall\ \varepsilon >0\ \exists\ N(\varepsilon )$: $|z_n-z| <\varepsilon$ для $\forall\ n\geq N$."
Обозначения: {$z_n$} $\rightarrow$ z; $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$.
Примеры. а) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+z/n)^n=e^z$, (z=x+iy); б) $\lim\limits_{n\to\infty} \arg[(-1)^n/n]$ не $\exists$ , т.к $\arg[(-1)^n/n]=0$ при четных n, а при нечетных n $\arg[(-1)^n/n]=\pi$ .
Каждый член последовательности $z_n=a_n+ib_n$ : {$z_n$}={$a_n$}+i{$b_n$}- одновременное задание двух действительных последовательностей.

Теорема. "Необходимым и достаточным условием сходимости
{$z_n$} $\rightarrow$ z= a+ib является требование {$a_n$} $\rightarrow$ a; {$b_n$} $\rightarrow$ b."

Определение. Последовательность {$z_n$} называется ***ограниченной***,
если $\exists$ A: $\forall$ n $|z_n|$<A.
Любая сходящаяся последовательность ограничена.

Теорема. Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. ( Теорема Больцано - Вейерштрасса )

Критерий Коши. "Необходимым и достаточным условием сходимости $\{z_n\} \to z$ является требование, чтобы для $\forall\ \varepsilon>0$ $\exists\ N(\varepsilon)$: $|z_{n+m}-z_n|<\varepsilon$ для $\forall\ n \geq N$ и $\forall\ m>0$.
Неограниченно возрастающие последовательности .Если для $\forall\ A>0\ \exists\ N(A)$:
$|z_n| > A$ для $\forall$T $n>N(A)$, то последовательность $\{z_n\}$ называется ***неограниченно возрастающей***.
Примеры. а) $z_n=z^n$ при $|z|>1$; б) $z_n= i\ n$.
В обычном смысле они не сходятся, но оказывается удобным считать, что

$\exists\ z_\infty=\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$ . Единственная **бесконечно удаленная точка** комплексной плоскости. Все неограниченно возрастающие последовательности сходятся к этой единственной точке. Если $\{z_n\}$ неограниченно возрастающая, то $\{\xi_n=1/z_n\} \to 0$. Отсюда легко получить правила арифметических действий с бесконечно удаленной точкой: $1/\infty=0$,.
$1/0=\infty$ , $z\bullet\infty=\infty$ , $z\neq 0$, $z+\infty=\infty$ , $z/\infty=0$,
$z\neq\infty$ . Операции $0/0$ и $\infty/\infty$ являются неопределенными .

## 3,4. Понятие функции комплексной переменной. Непрерывность функции комплексной переменной.

Пусть на комплексной плоскости задано множество E и закон, ставящий $\forall\ z\in E$ в соответствие определенное комплексное число w: $z \to w$, тогда говорят, что на E задана ***функция комплексной переменной*** f(z)=w. E-***множество задания*** **(z);**
**Множество M - значений соответствующих w-** ***множество значений*** **f(z). Задание f(z) есть задание соответствия (отображения) E** $\to$ M.

Примеры. а) w=az+b (поворот, растяжение и параллельный перенос),
б)$w=z^n$, в) w=1/z (симметричное отражение относительно вещественной оси, инверсия).

Определение.***Областью*** **g комплексной плоскости Z называется множество точек этой плоскости, удовлетворяющее условиям:**
1)Все $z\in g$ являются внутренними точками g.
2)Любые $z_1, z_2 \in g$ можно соединить ломаной с конечным числом звеньев, состоящих только из $z\in g$.
Примеры. а) $|z|<1$ - область; б) $|z|\leq 1$-не область; в) $\{z: |z|<1\}\cup\{z: |z-5i|<1\}$ не область;

Таким образом, в определении области условие
1) означает, что g- ***открытое*** множество.
2) означает, что g- ***связное*** множество.
Итак, **область**- открытое связное множество.

Определение. Точка $z_0$ называется ***внутренней точкой*** множества g, если $\exists\ \varepsilon$ -окрестность точки $z_0$ : $|z-z_0|<\varepsilon$ все точки которой принадлежат g.
Примеры. а) z=0 - внутренняя точка множества $|z|<1$; б) z=i - не является внутренней точкой множества $|z|\leq 1$.

Определение.Точка $z_0$ называется ***граничной точкой*** множества g, если в $\forall$ ее $\varepsilon$ -окрестности имеются как $z\in g$, так и $z\notin g$.
Примеры. а) z=0 - граничная точка множества $|z|>0$; б) z=i - граничная точка множества $|z|\leq 1$.
Совокупность граничных точек области g называется ***границей*** области g. (обозначения: $\partial g$ , C, Г , Σ и т.д.)
Граница множества может состоять из конечного числа точек, и даже из одной точки (как, например, у множества $|z|>0$).

Определение. Замыкание области g, состоящее в присоединении к g ее границы g называется ***замкнутой областью*** $\bar{g}=g+\partial g$ .
Множество $|z|\leq 1$ - замкнутое.
На ***р*асширенной комплексной плоскости** (т.е. комплексной плоскости с бесконечно удаленной точкой замкнутое множество называется ***компактным.***
Итак, будем рассматривать случай, когда w=f(z) задана в g и отображает g на область D комплексной плоскости w.
Отображение однозначно (по определению.
Если $z_1, z_2 \in g$ и $z_1\neq z_2$ : $f(z_1)=w_1\neq w_2= f(z_2)$, то отображение ***взаимно однозначно***
g<=>D.
В этом случае g называется ***областью однолистности*** f(z) и f(z) называется ***однолистной*** в g.

Примеры. а) w=const, w=az+b -однозначные и однолистные; б) $w=z^n$ , $w=e^z$- однозначные, но не однолистные; в) w=Ln zη |z|+i Arg(z), $w=\sqrt{z}$ - не однозначный функции.

Определение. (по Гейне) Комплексное число $w_0$ называется ***пределом*** f(z), z∈ g, в точке $z_0$∈g, если для ∀ $\{z_n\} \to z_0$ соответствующая последовательность $\{f(z_n)\} \to w_0$.
Замечание. Предполагается, что $z_0$ является точкой сгущения (предельной точкой множества g.
Определение.Точка $z_0$∈ g называется ***точкой сгущения (предельной точкой)*** множества g, если в ∀ ε - окрестности точки $z_0$ содержатся точки множества g, отличные от $z_0$.
Определение 2. (по Коши)Комплексное число $w_0$ называется ***пределом*** f(z), z∈ g, в точке $z_0$∈g, если для ∀ε >0 ∃δ (ε ,$z_0$)>0 : | f(z)-$w_0$ |<ε , как только 0<| z-$z_0$|<δ
Обозначение: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)= w_0$.
Замечание. Это определение имеет смысл лишь при конечных значениях $z_0$ и $w_0$ в отличие от определения предела по Гейне .

Определение непрерывности f(z) в точке $z_0$. Функция комплексной переменной f(z), z∈ g, называется ***непрерывной в точке*** $z_0$∈ g, если ∃ ограниченный предел :
$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)= w_0$ и $w_0= f(z_0)$, т.е. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)= f(z_0)$.
Очевидно, при этом достаточно малая δ - окрестность точки $z_0$ отображается f(z) на достаточно малую ε - окрестность точки $w_0= f(z_0)$.
Определение непрерывности функции в точке в терминах ε -δ .Функция комплексной переменной f(z), z∈ g, называется ***непрерывной в точке*** $z_0$∈ g, если
∀ ε >0 ∃δ (ε ,$z_0$)>0 : для ∀ z : |z-$z_0$|<δ ; |f(z)-f($z_0$)| <ε .
Замечание 1. Это определение распространяется как на внутренние , так и на граничные точки множества.
Определение.Точка $z_0$ называется ***изолированной точкой*** множества g, если в ∃ такая ее ε -окрестность, в которой нет других точек множества g.
Замечание 2. По определению функция считается непрерывной в изолированной точке $z_0$∈ g.
Замечание 3. Понятие непрерывности функции f(z), z∈ g, в точке $z_0$∈ g справедливо и в случае бесконечно удаленной точки $z_0=\infty$.
При этом под пределом функции f(z) при $z\to\infty$ по Гейне надо понимать предел последовательности $\{f(z_n)\}$, где $\{z_n\}$- ∀ неограниченно возрастающая последовательность .
В ε -δ определении непрерывности функции f(z) при $z\to\infty$ условие к z-$z_0$к<δ надо заменить на условие |z| >R.
Примеры: а) функции w=az+b, $w=z^*$, w=const, w=Re z, $w=z^n$, w=|z| - являются непрерывными на всей комплексной плоскости.
б) функция w=arg(z) является непрерывной нам всей комплексной плоскости, за исключением точек z=0, $z=\infty$ , и точек, лежащей на положительной части действительной полуоси.
Основное определение.Функция комплексной переменной f(z), z∈ g, называется ***непрерывной в области* g, если она непрерывна в** ∀ z∈ g.
Обозначение: f(z)∈ C(g).

Аналогично определяются понятия f(z)∈ C($\bar{g}$), и f(z)∈ C($\partial g$). При этом при определении непрерывности по Гейне в z∈ $\bar{g}$ или z∈ $\partial g$ надо рассматривать последовательности $\{z_n\}$, состоящие только из точек $z_n$∈ $\bar{g}$ или $z_n$∈ $\partial g$.
Замечание 4. В случае понятия непрерывности по Коши для f(z)∈ C(g) для заданного ε δ зависит от (ε ,z) (δ =δ (ε ,z)), т.е. на ε - окрестность ∀ точки w=f(z)∈ D отображается δ -окрестность соответствующей точки z, где δ для различных z- различна. Более тонкое понятие равномерной непрерывности в g.

Определение.Функция комплексной переменной f(z), z ∈ g, называется ***равномерно непрерывной*** в g, если для ∀ε>0 ∃δ (ε )>0 (зависящее только от ε) : такое, что для
∀$z_1$, $z_2$ ∈ g : | $z_1$-$z_2$ |<δ ; | f($z_1$)-f($z_2$)| <ε .
Любые δ - близкие точки области g отображаются на соответствующие ε-близкие точки области D.
Очевидно, что из равномерной непрерывности в g следует f(z)?C(g).
Обратное, вообще говоря, не всегда верно.
Определение.Множество g называется ***ограниченным***, если оно целиком содержится в некотором круге (т.е. ∃R>0 и $z_0$ : g ⊂ {z: |z-$z_0$|<R}).

Если компактное множество не содержит бесконечно удаленной точки , то оно ограничено .

Теорема. Если f(z) ∈C($\bar{g}$ ) и $\bar{g}$ ограничена то f(z) - равномерно непрерывна в $\bar{g}$ .

Функцию комплексной переменной f(z) можно представить в виде f(z)=u(x,y)+iv(x,y), где u(x,y) и v(x,y)- действительные функции действительных переменных. Тогда справедлива

Теорема. Необходимым и достаточным условием непрерывности $f(z)$ в $g$ ( $f(z) \in C(g)$ ) является требование, чтобы $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были непрерывны в области $g$ плоскости $(x,y)$ по совокупности переменных.
Данное утверждение является следствием того, что необходимым и достаточным условием сходимости последовательности комплексных чисел является сходимость последовательностей их действительных и мнимых частей.

## 5. Дифференцирование функции комплексной переменной. Понятие аналитической функции.

Пусть $f(z) \in C(g)$.
Определение. $f(z)$ называется ***дифференцируемой*** (или ***моногенной***) в точке $z_0 \in g$, если при $\Delta z \to 0$ ($\Delta z = z-z_0$) $\exists$конечный предел разностного отношения

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}\overset{def}{\equiv} f'(z_0);$$

где $z_0 \in g$.

Центральная идея теории функций комплексной переменной возникает при формулировке понятия производной. На первый взгляд эта производная определяется совершено аналогично производной функции действительной переменной, как предел разностного отношения $f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$.
Однако, приращение комплексного аргумента $\Delta z$ характеризуется не только величиной $|\Delta z|$, но и направлением $\arg \Delta z$, а производная по определению от этого направления не зависит. Поэтому дифференцируемость функции комплексного переменного- значительно более редкое явление, чем дифференцируемость функции вещественного переменного, а дифференцируемые функции комплексного переменного- аналитические функции- обладают гораздо более единообразными свойствами, чем дифференцируемые функции действительной переменной.

**Теорема**. Если $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ дифференцируема(моногенна) в точке $z_0$, то $\exists u_x(x_0,y_0)$, $u_y(x_0,y_0)$, $v_x(x_0,y_0)$, $v_y(x_0,y_0)$, причем они связаны условиями
***Коши-Римана:*** $u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)$ ; $u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)$.

Теорема Если в точке $z_0=(x_0,y_0) \in g$ $\exists$ первые дифференциалы функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ и первые частные производные этих функций в точке $(x_0,y_0)$ связаны условиями Коши-Римана , то $f(z)$ √ дифференцируемая (моногенная) функция в точке $z_0$.

**Основное определение.**Функция $f(z) \in C(g)$, дифференцируемая (моногенная) во всех точках $z \in g$, производная которой $f'(z) \in C(g)$ называется ***аналитической функцией*** в области $g$.

Обозначение: $f(z) \in C^{\infty}(g)$.
Понятие аналитичности функции определяет глобальное поведение $f(z)$ в области $g$.

**Теорема** Необходимым и достаточным условиями аналитичности функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ в области $g$, являются непрерывность первых частных производных $u_x$, $u_y$, $v_x$, $v_y$ и связь их условиями Коши-Римана .
Теорема Если $u(x,y)$ и $v(x,y)$ $\in C(g)$ и в точке $z_0=(x_0,y_0) \in g$ $\exists$первые частные производные $u_x$, $u_y$, $v_x$ , $v_y$ связаные условиями Коши-Римана , то $f(z)$ √ дифференцируемая (моногенная) функция в точке $z_0$.
Теорема. Необходимым и достаточным условиями "аналитичности" функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ в области $g$, являются непрерывность $u(x,y)$, $v(x,y)$ и в $\forall$ точке $z=(x,y) \in g$ $\exists$ первые частные производные $u_x$, $u_y$, $v_x$, $v_y$, связанные условиями Коши-Римана" .

Следствия условий Коши-Римана : Попробуйте показать самостоятельно, что
1) Действительная и мнимая части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\mathbf{u_{xx}+u_{yy}=\Delta u=0\ ;\ v_{xx}+v_{yy}=\Delta v=0}$$

2) Действительная и мнимая части аналитической функции $f(z)=u(\rho,\varphi)+iv(\rho,\varphi)$ комплексной переменной $z=\rho e^{i\varphi}$связаны соотношениями:

$$\mathbf{v_\varphi=\rho\, u_\rho\ ,\ u_\varphi=-\rho\, v_\rho.}$$

3) Модуль и аргумент аналитической функции $f(z)=R(x,y)e^{i\Phi(x,y)}$ связаны соотношениями:

$$\mathbf{R_x=R\Phi_y,\ \ R_y=-R\Phi_x}$$

п.3. Свойства аналитических функций.

1) Если $f(z) \in C^{\infty}(g)$ (аналитическая в $g$), то $f(z) \in C(g)$ (непрерывна в $g$).
2) Сумма и произведение аналитических функций есть аналитическая функция. Частное аналитических функций есть аналитическая функция всюду, где знаменатель отличен от нуля.
3) Если $w=f(z) \in C^{\infty}(g)$ - аналитическая функция комплексной переменной $z$, причем в области ее значений $G$ на

плоскости w определена аналитическая функция
$\xi=\varphi(w) \in C^\infty(G)$, то функция $F(z)=\varphi[f(z)] \in C^\infty(g)$ -аналитическая функция комплексной переменной z в области g.
4) Пусть $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \in C^\infty(g)$ и $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in g$. Тогда в окрестности точки $w_0=f(z_0)$ определена обратная аналитическая функция $z=\varphi(w) \in C^\infty(|w-w_0|<\varepsilon)$ отображающая эту окрестность на окрестность точки $z_0$, причем $\varphi'(w_0)=1/f'(z_0)$.

5) Пусть в односвязной области g плоскости (x,y) задана функция u(x,y), являющаяся действительной частью аналитической функции f(z). Тогда мнимая часть этой функции определяется с точностью до аддитивной постоянной.

6) grad $u=(u_x,u_y)$, grad $v=(v_x,v_y)$, (grad u, grad v)$=u_xv_x+u_yv_y=-u_yv_y+u_yv_y=0$. Т.к. градиент ортогонален линии уровня => линии уровня u(x,y)=c, v(x,y)=c взаимно ортогональны.

Примеры простейших функций комплексной переменой.
1) Константа: f(z)=C - аналитическая на [расширенной комплексной плоскости.](#)
$f'(z)=0$.
2) Линейная функция f(z)=az+b аналитическая на всей комплексной плоскости.
$f'(z)=a$.
3) f(z)=1/z - аналитическая всюду, кроме точки z=0.
4) $f(z)=z^n$ n-целое число- аналитическая на всей комплексной плоскости. $f'(z)=nz^{n-1}$
5) $f(z)=z^*=x-iy$ - не аналитическая. $u_x=1 \neq v_y=-1$;

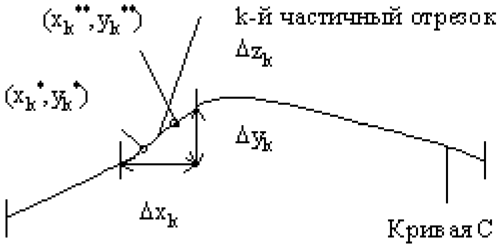
## 6. Интеграл от функции комплексной переменной по кривой на комплексной плоскости.

1) **Кусочно-гладкая кривая**- Множество точек z=z(t)=x(t)+iy(t), где $t \in [a,b]$ действительный параметр. $x(t), y(t) \in C[a,b]$; x'(t), y'(t) -кусочно- непрерывные на [a,b];. $x'^2(t)+y'^2(t) \neq 0$ - нет точек возврата, нет точек самопересечения. Если замкнутая кривая, то x(a)=x(b), y(a)=y(b).
2) **Криволинейные интегралы второго рода по кривой на плоскости (x,y)**.

$$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\lim_{n\to\infty,\max|\Delta z_i|\mapsto 0} S_n;$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} P(x_k^*,y_k^*)\Delta x_k+Q(x_k^{**},y_k^{**})\Delta y_k;$$

$_k)^2+(\Delta y_k)^2]^{1/2}$. При этом предел не зависит ни от способа , ни от выбора промежуточных точек.




Достаточными условиями существования криволинейного интеграла II рода являются : кусочная гладкость кривой C, кусочная непрерывность и ограниченность функций P и Q.

**Основное определение.**
**Интегралом от функции комплексно переменной f(z)=u(x,y)+iv(x,y) по кривой C комплексной плоскости z** называется комплексное число, действительная и мнимая части которого есть криволинейные интегралы второго рода от действительной и мнимой частей f(z) вида:

$$\int_C f(z)dz=\int_C [u(x,y)+iv(x,y)]\,(dx+idy)=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy.$$

Замечания.
1) Достаточное условие существования- кусочная гладкость контура C и кусочная непрерывность и ограниченность |f(z)|.

2) Из этого [определения](#) и определения [криволинейного интеграла II рода](#) => $\exists \lim_{n\to\infty,\ \max|\Delta z_i|\mapsto 0} S_n=\int_C f(z)dz$; $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(z_i^*)\Delta z_i$, причем предел не зависит ни от способа разбиения, ни от выбора промежуточных точек.

**Свойства $\int_C f(z)dz$ .**
Поскольку значение контурного интеграла зависит от направления интегрирования, условимся в качестве ***положительного* направления обхода** контура принимать направление, при котором внутренняя область, ограниченная данным ***замкнутым*** контуром, остается ***слева*** от направления движения. Интегрирование в положительном направлении будем обозначать символом $\int_{c+} f(z)dz$ или просто $\int_c f(z)dz$, интегрирование в отрицательном направлении- $\int_{C^-} f(z)dz$.

1) $\int_{C^+} f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz$; 2) Линейность. 3) $\int_{C_1+\ldots+C_n} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \ldots + \int_{C_n} f(z)dz$.

4) $\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|ds \le ML_c$;

5) Вычисление интеграла интегрированием по параметру: $\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]\, z'(t)dt$.

Пример. $\int_{|z-z_0|=R_0} \frac{dz}{z-z_0} = \left\{ \begin{array}{l} z = z_0 + R_0 e^{i\varphi} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ dz = iR_0 e^{i\varphi} d\varphi \end{array} \right\} = i\int_0^{2\pi} d\varphi$ $=2\pi i$ . Результат не зависит ни от $R_0$, ни от $z_0$ !!

6) Замена переменных. Пусть $\exists\ \varphi(\xi)$: $z=\varphi(\xi)$; $C \Leftrightarrow \Gamma$ на плоскости $\xi$ и $\varphi(\xi) \in C^\infty(D)$ и однолистная в D, где D-область комплексной плоскости $\xi$ , содержащая $\Gamma$ .

$\Rightarrow \int_C f(z)dz = \int_\Gamma f[\varphi(\xi)]\varphi'(\xi)d\xi$ .

## 7. Теорема Коши

1) Определение. Область g плоскости (x,y) называется ***квадрируемой*** если**sup** множества площадей всех ***вписанных*** многоугольников $P_*$ равна **inf** множества площадей всех ***описанных*** многоугольников $P^*$. Число $P=P^*=P_*$ называют ***площадью*** плоской области g (по Жордану). Достаточное условие квадрируемости- кусочная гладкость (спрямляемость) границы - $\partial g$ .

2) Для функции $f(x,y) \in C(g)$ и $|f(x,y)| \le A$- кусочно непрерывной и ограниченной в квадрируемой области g $\exists \iint_g f(x,y)dxdy$, понимаемый как предел последовательности соответствующих интегральных сумм.

3) Определение .Область g на плоскости называется ***односвязной***, если для $\forall$ замкнутого контура $\subset$ g, ограниченная им часть плоскости целиком $\subset$ g.

4) Формула Грина. Пусть P(x,y), Q(x,y) $\in C(\bar{g})$, причем $\partial g$ - кусочно- гладкий контур и $P_x$, $P_y$, $Q_x$, $Q_y$ $\in C(g)$, тогда

$$\int_{\partial g} Pdx+Qdy = \iint_g (Q_x - P_y)\, dxdy.$$

Теорема Коши. Если $f(z) \in C^\infty(g)$, в односвязной области g, то для $\forall$*замкнутого контура* $\gamma \subset g$ $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Теорема Пусть $f(z) \in C^\infty(g)$, g-многосвязная, ограниченная извне контуром $C_0$, а изнутри- контурами $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и пусть $f(z) \in C^\infty(\bar{g})$. Тогда $\int_C f(z)dz = 0$, где C-полная граница g, $C = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$, проходящая в ***положительном*** направлении.

II-я Теорема Коши. Если $f(z) \in C^\infty(\bar{g})$, g-односвязная, то $\int_{\partial g} f(z)dz = 0$.
Следствия теоремы Коши.

1) Если g- односвязная и $f(z) \in C^\infty(g)$, то для $\forall\ z_1, z_2 \in g$ $\int_{z_1}^{z_2} f(\xi)d\xi$ не зависит от пути интегрирования. При фиксированном $z_0$ интеграл $\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ $=F(z)$- функция только z!

2) Неопределенный интеграл. Пусть g-односвязная область, $f(z) \in C(g)$, для $\forall$ замкнутого контура $\gamma \subset g$ интеграл $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Функция $\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ $=F(z)$- называется ***неопределенным интегралом от* f(z).**
Каковы свойства F(z) ?

Теорема 6.1. Если g-односвязная и $f(z) \in C(g)$ и для $\forall$ замкнутого контура $\gamma \subset g$ интеграл $\int_\gamma f(z)dz = 0$, то $F(z)\ \exists$ и $F(z) \in C^\infty(g)$.

Свойства неопределенного интеграла.

1) Понятие ***первообразной***. Пусть $f(z) \in C(g)$. Тогда ***первообразной*** $F(z)$ функции $f(z)$ в g называется $\forall\ F(z) \in C^\infty(g)$ такая, что $F'(z)=f(z)$.

Замечания.

1) Неопределенный интеграл $F(z)$ в односвязной области g- первообразная $f(z)$.

2) Если $\exists$ первообразная $F(z)$, то их $\exists$ бесконечно много, но все они различаются на аддитивную постоянную $F'_1(z)-F'_2(z)=0 \Rightarrow F_1(z)=F_2(z)+C$.

3) Формула Ньютона-Лейбница. Если g-односвязная и и $f(z) \in C(g)$ и для $\forall$ замкнутого контура $\gamma \subset g$ интеграл $\int_\gamma f(z)dz = 0$, то $\int_{z_1}^{z_2} f(\xi)d\xi = F(z_2)-F(z_1)$; где F- $\forall$ первообразная.

4) Формула конечных приращений, вообще гооворя не верна.

$f(b)-f(a)=(b-a)f'(x^*)$; $x^* \in (a,b)$.

5) Формула Коши-Адамара. Пусть g- односвязная и $f(z) \in C^\infty(g)$ и для $\forall$ замкнутого контура $\gamma \subset g$ интеграл $\int_\gamma f'(\xi)d\xi = 0$; $f(z)$- первообразная $f'(z) \Rightarrow$

$\int_z^{z+\Delta z} f'(\xi)d\xi = f(z+\Delta z)-f(z)$. В качестве пути интегрирования возьмем прямолинейный отрезок, соединяющий z и $z+\Delta z$: $\xi = z+\Delta z\theta$ ; $0 \le \theta \le 1$; $d\xi = \Delta z d\theta$ . Получим:

$f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta z \int_0^1 f'(z+\Delta z\,\theta)d\theta$ - ***формула Коши-Адамара.***

6) При вычислении интеграла от аналитической функции контур интегрирования можно деформировать так, чтобы он не выходил из области аналитичности подынтегральной функции. Деформируя контур интегрирования так, как это допускается теоремой Коши, можно легко вычислить многие интегралы.

## 8. Интегральная формула Коши и ее следствия

Пусть $f(z) \in C^\infty(\bar{g})$. Выразим $f(z_0)$ $z_0 \in g$ через значения $f(z)$ на $\partial g$. Рассмотрим

$\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{z-z_0} \in C^\infty(\bar{g}/z_0)$. Поэтому, если в области g взять такой замкнутый контур $\gamma$ , чтобы точка $z_0$ попала внутрь ограниченной им области, то $\varphi(z)$ будет аналитической в *двухсвязной* области $g^*$, заключенной между $\partial g$ и $\gamma$ . По теореме Коши для многосвязной области. интеграл от функции $\varphi(z)$ по кривой $\partial g+\gamma$ равен

0: $\int_{\partial g^+} \dfrac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi + \int_{\gamma^-} \dfrac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi = 0$. Т.к. $\int_{\gamma^-} = -\int_{\gamma^+}$, то $\int_{\partial g^+} \dfrac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi = \int_{\gamma^+} \dfrac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi$. Поскольку интеграл, стоящий слева не зависит от выбора контура, то эти свойством обладает и интеграл, стоящий справа. Удобно в качестве контура интегрирования выбрать окружность $\gamma_\rho$ с центром в точке $z_0$ и радиуса $\rho$ . Положив на $\gamma_\rho$ $\xi = z_0+\rho e^{i\varphi}$,

$d\xi = i\rho e^{i\varphi}d\varphi$ , получим $\int_{\partial g^+} \dfrac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi = \int_{\gamma_\rho} \dfrac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi = i\int_0^{2\pi} f(\xi)d\varphi = i\int_0^{2\pi} [f(\xi)-f(z_0)]d\varphi + i\int_0^{2\pi} f(z_0)d\varphi = I+2\pi f(z_0)$.

Оценим I. $|I| \le 2\pi \max_{\xi\in\gamma_\rho} |f(\xi)-f(z_0)|$. Устремим $\rho \to 0$ при этом. $\xi(\rho) \to z_0$.Т.к. $f(z)$- аналитическая, а следовательно непрерывная в g, то для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$|f(\xi)-f(z_0)| < \varepsilon$, как только $|\xi(\rho)-z_0| < \delta$. А это значит, что при $\rho \to 0$ $I \to 0$. Поскольку левая часть и второе слагаемое правой части не зависят от $\rho$ , то переходя к пределу в обоих частях, получим***интегральную формулу Коши*:**

$f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\partial g^+} \dfrac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)}$.

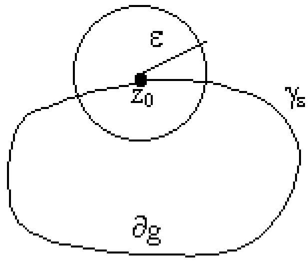
Замечания.

1. Формула верна как для g односвязной, так и g- многосвязной, только в последнем случае $\partial g_+$- полная граница области, проходимая в положительном направлении.

ал вида $I(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial g^+}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)}$ имеет смысл для $\forall$ положения

а комплексной плоскости при условии, что $z_0\notin\partial g$. Если $z_0\in g$, то

если $z_0\notin g$, то $I(z_0)=0$, поскольку в этом случае подынтегральная




функция $\varphi(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\in C^\infty(g)$ является аналитической всюду в g. При $z_0\in\partial g$ $I(z_0)$ в обычном смысле не $\exists$, однако, при дополнительных требованиях на поведение функции $f(\xi)$ на контуре границы этому интегралу может быть придан определенный смысл. Так, если $f(\xi)$ удовлетворяет на $\partial g$ ***условию Гельдера:*** $|f(\xi_1)-f(\xi_2)|<C|\xi_1-\xi_2|^\delta$,
$0<\delta<1$ (Гельдер- непрерывна), то $\exists$***главное значение по Коши*** интеграла $I(z_0)$:

V.p.$I(z_0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\varepsilon}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)}$, где $\gamma_\varepsilon$ представляет собой часть контура $\partial g$, лежащую ***вне*** круга $|\xi-z_0|<\varepsilon$. При этом

V.p.$I(z_0)=1/2\ f(z_0)$. Окончательно для $f(z)\in C^\infty(g)$ можно записать:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial g^+}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)}=\begin{cases}f(z_0), & z_0\in g\\ \frac{1}{2}f(z_0), & z_0\in\partial g\ (V.p.)\\ 0, & z_0\notin g\end{cases}$$

3. Формула верна и для $\forall$ контура $C^+\subset g$, который можно стянуть к $z_0$, оставаясь внутри g.

Следствия интегральной формулы Коши.

Пусть $f(z)\in C^\infty(g)$.

1 **<u>Формула среднего значения.</u>** Пусть $z_0$- некоторая внутренняя точка односвязной области g. Возьмем окружность с центром в $z_0$ и радиусом R, целиком лежащую в g. Тогда $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)}=(\xi=z_0+R\,e^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\varphi})d\varphi$ $=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{C_R}f(\xi)ds$,
($ds=Rd\varphi$, круг $K_R\subset g$)- ***формула среднего значения.***

2. **<u>Принцип максимума модуля.</u>**Если $f(z)\in C^\infty(\bar{g})$ и $f(z)\neq$ const, то $|f(z)|$ достигает своего максимального значения только на $\partial g$.

**Определение. F(z) - аналитическая функция комплексной переменной на всей комплексной плоскости кроме кривой С.**

Пусть С- кусочно-гладкая кривая конечной длины L: $\int\limits_C ds=L$ и $f(\xi)$ непрерывна в$\forall$ точке$\xi\in C$. Тогда при $z\notin C$ $\exists$

$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)}$ - ***интеграл типа Коши.***

<u>Теорема.</u> В $\forall$ $z_0\notin C$ $F(z_0)$- дифференцируема и $F'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^2}$.

<u>Теорема</u>. При $z\notin C$ $F(z)\in C^\infty(E\backslash C)$.

<u>Теорема</u> При $z\notin C$ F(z) имеет непрерывные n-е производные для $\forall$ n, причем $F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{n+1}}$.
<u>Теорема</u> (Основная!). Если $f(z)\in C^\infty(g)$, то для $\forall$ n и $\forall$ $z\in g$ $\exists$ $f^{(n)}(z)\in C^\infty(g)$.

Теорема Морера. Если $f(z) \in C(g)$, g-односвязная и для $\forall \gamma \subset g$: $\int_\gamma f(z)dz=0$, где $\gamma$ -замкнутый контур, который можно стянуть в точку, оставаясь в g, то $f(z) \in C^\infty(g)$.

Замечание.
1. Теорема Морера является в некотором смысле обратной к теореме Коши.
2. Теорема Морера справедливы и для многосвязных ообластей.

Теорема Лиувилля.
Если $f(z) \in C^\infty(E)$ и $f(z) \neq$ const, то при $z \to \infty$, $|f(z)| \to \infty$.
Другая формулировка:
Если $f(z) \in C^\infty(E)$ и $\exists$ M: $|f(z)| \leq$ M для $\forall$ z ($|f(z)|$- равномерно ограничен), то $f(z) \equiv$ const.

Определение.
$f(z) \in C^\infty(E)$(на всей комплексной плоскости) ($z \neq \infty$) называется ***целой*** функцией.

Целая функция $\neq$ const не может быть ограничена по абсолютной величине.
Так например, целые функции sin z и cos z неограничены по модулю!
Пример целой функции. Функция $f(z)=z^n$.
Отображение области однолистности
Сектор раскрыва $2\pi/n$ отображается на всю комплексную плоскость.

Важное замечание. Конфомное отображение плоскости с выколотой точкой или расширенной плоскости на единичный круг невозможно!

## 9.Числовые и функциональные ряды

Пусть дана последовательность $\{a_k\}_{k=1}^\infty$. Составим $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$- частичная сумма,

составим последовательность частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ и рассмотрим $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - числовой ряд.
Определение. Числовой ряд называется ***сходящимся***, если сходится $\{S_n\}$] S. Предел последовательности частичных

сумм называется ***суммой ряда*** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k=S$.
Необходимый и достаточный признак сходимости: Критерий Коши сходимости числовой последовательности : для $\forall\varepsilon>0 \; \exists \; N(\varepsilon)$: $|S_{n+m}-S_n|<\varepsilon$ для $\forall n \geq N$ и $\forall m>0$.
Отсюда следует
Необходимый признак сходимости ряда (Но не достаточный!) : $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. .

Определение. Если $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|<\infty$ (сходится) , то ряд называется ***абсолютно сходящимся***.

Очевидно, что если ряд сходится абсолютно, то он сходится. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k$ сходится, тогда как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$- расходится,
Достаточными критериями абсолютной сходимости рядов являются признаки Даламбера и Коши.
Признак Даламбера. Если начиная с некоторого номера N выполняется неравенство $|a_{n+1}/a_n| \leq L<1$ для $\forall n \geq N$, то

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ***сходится.***

Если начиная с некоторого N $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$ для $\forall n \geq N$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ***расходится.***
Признак Даламбера в предельной форме.

Если $\exists \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|=L$, то при L<1 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ***сходится,*** при L>1 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ***расходится,***при L=1 ничего сказать нельзя.

Признак Коши. Если начиная с некоторого N $\sqrt[n]{|a_n|} \leq L<1$ для $\forall n \geq N$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ***сходится.***

Если начиная с некоторого N $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ для $\forall n \geq N$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ***расходится.***

Признак Коши в предельной форме.

Если $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, то при $L<1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ***сходится,*** при $L>1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ***расходится,*** при $L=1$ ничего сказать нельзя.

Пусть дана последовательность $\{u_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$, $z \in g$. Выражение $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$- называется ***функциональным рядом***, заданным в g.

Определение. Если при $\forall z \in g$, соответствующий числовой ряд сходится к определенному комплексному числу w(z), то в g определена f(z)=w, которая называется ***суммой функционального ряда***, а сам ряд называется ***сходящимся*** в g.

Если ряд сходится в g, то $\forall \varepsilon>0 \; \exists N(\varepsilon,z)$: $|r_n(z)| <\varepsilon$ для $\forall n \geq N(\varepsilon, z)$.

Необходимый и достаточный признак сходимости:

Критерий Коши: для $\forall \varepsilon>0 \; \exists N(\varepsilon, z)$: $|S_{n+m}(z)-S_n(z)| <\varepsilon$ для $\forall n \geq N$ и $\forall m>0$.

Вообще говоря, в каждой точке $z \in g$ N свое: $N=N(\varepsilon, z)$ и общего N для всей z может и не существовать.

Если для $\forall \varepsilon>0 \; \exists N(\varepsilon)$ что $|r_n(z)| <\varepsilon$ для $\forall n \geq N(\varepsilon)$ и $\forall$ z одновременно, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ называется ***равномерно сходящимся*** к функции f(z) в g.

Обозначение: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \Rightarrow f(z)$.

Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости- критерий Коши:

Если для $\forall \varepsilon>0 \; \exists N(\varepsilon)$: $|S_{n+m}(z)-S_n(z)| <\varepsilon$ для $\forall n \geq N$ и $\forall m>0$ и $\forall$ z одновременно, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \Rightarrow f(z)$.

Достаточный признак равномерной сходимости Вейерштрасса. (Мажорантный признак Вейерштрасса).

Если $|u_k(z)|<a_k$, $a_k>0$ для $\forall k \geq N$ и $\forall z \in g$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k<\infty$ (сходится), то $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \Rightarrow f(z)$ в g.

Свойства равномерно сходящихся рядов:

1) Пусть $u_k(z) \in C(g)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \Rightarrow f(z)$, тогда $f(z) \in C(g)$.

2). Пусть $u_k(z) \in C(g)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \Rightarrow f(z)$. Пусть C кусочно- гладкий контур $C \in g$ конечной длины L: $\int_C ds=L$, тогда $\int_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{\infty} \int_C u_k(z)dz$.

3) Теорема Вейерштрасса. Если $u_k(z) \in C^{\infty}(g)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \Rightarrow f(z)$, для $\forall z \in \forall \overline{g}' \subset g$,

(для любой замкнутой подобласти области g) то:

1. $f(z) \in C^{\infty}(g)$.
2. $f^{(p)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z)$, для $\forall z \in g$.
3. $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z) \Rightarrow f^{(p)}(z)$, для $\forall z \in \forall \overline{g}' \subset g$.

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z^k/k^2$ сходится равномерно в круге $|z| \le 1$, а ряд из производных $\sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1}/k$ *не может равномерно сходится в круге* $|z|\le 1$ , т.к. он расходится при $z=1$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1}/k$ равномерно сходится при $|z|<1$.

II Теорема Вейерштрасса. Пусть $u_k(z) \in C^{\infty}(\overline{g})$ и $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\xi) \Rightarrow f(\xi)$, для $\xi \in g$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \Rightarrow f(z)$, $z \in \overline{g}$.

## 10.Степенные ряды

***Степенным рядом*** назовем ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, $z_0$ -центр, $c_n$ - коэффициенты заданные комплексные числа. При $z=z_0$ ряд сходится. Это может быть как единственная точка сходимости $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$ , а также ряд может сходится на всей комплексной плоскости $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$. При исследовании степенного ряда важно установить область его равномерной сходимости. Как будет показано далее, область сходимости степенного ряда определяется видом его коэффициентов $c_n$.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ сходится в точке $z_1 \ne z_0$ , то он ***сходится*** и при $\forall$ z: $|z-z_0|<|z_1-z_0|$, причем в круге $|z-z_0|\le \rho <|z_1-z_0|$ ***сходится равномерно.***

Следствия теоремы Абеля.

1. Если степенной ряд ***расходится*** в точке $z_2 \ne z_0$ , то он ***расходится*** и при $\forall$ z: $|z-z_0|>|z_2-z_0|$. (Предполагая противное, получим, что по тереме Абеля ряд должен сходится в $\forall$ круге радиуса $\rho <|z-z_0|$, в частности и в точке $z_2$ , что противоречит условию.).
2. Круг сходимости. Радиус сходимости. Рассмотрим $\sup|z_1-z_0|=R$ для $\forall$ $z_1$ , где ряд сходится- точную верхнюю грань расстояний от точки $z_0$ до точек $z_1$ в которых сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ . Если $R\ne\infty$, то для $\forall$ $z_2$: $|z_2-z_0|>R$ ряд расходится. $R=\inf|z_2-z_0|=R$ для $\forall$ $z_2$ , где ряд расходится. Пусть$R>0$, тогда ***наибольшей областью сходимости степенного ряда*** является ***круг*** $|z-z_0|<R$ - ***круг сходимости степенного ряда, число*** $R>0$- ***радиус сходимости степенного ряда. Внутри круга сходимости ряд сходится, вне- расходится, в точках границы*** $|z-z_0|=R$ ***может как сходиться, так и расходиться.***
3. Формула Коши-Адамара. $R=1/L$, $L=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$
4. В $\forall$ круге $|z-z_0|\le \rho <R$ степенной ряд сходится равномерно. => По теореме Вейерштрасса $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=f(z) \in C^{\infty}(|z-z_0|<R)$.
5. По теореме Вейерштрасса степенной ряд внутри круга сходимости можно дифференцировать и интегрировать почленно любое число раз. При этом радиус сходимости не меняется !
6. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=f(z) \Rightarrow c_0=f(z_0)$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)(z-z_0)^n=f'(z) \Rightarrow c_1=f'(z_0)\ldots$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k}(n+k)!(z-z_0)^n=f^{(k)}(z) \Rightarrow c_k=f^{(k)}(z_0)/k!$

7. Пример. $\sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n$ : $\forall$ $c_n=1 \Rightarrow R=1$. $S_n=[1-(z-z_0)^{n+1}]/[1-(z-z_0)]$; $|z-z_0|<1$ и $\lim_{n\to\infty} S_n=1/[1-(z-z_0)]$. => $\sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n=1/[1-(z-z_0)]$- Формула суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Итак $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \Rightarrow f(z) \in C^{\infty}(|z-z_0|<R)$. Можно ли функции, аналитической внутри некоторого круга, сопоставить степенной ряд, сходящийся в этом круге к данной функции?

Теорема Тейлора. Если $f(z) \in C^{\infty}(|z-z_0|<R)$, то $\exists!$ степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \Rightarrow f(z)$ при $|z-z_0|<R$.

Замечания. 1 ) Разложение функции $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ называют ***разложением функции в ряд Тейлора.***

2) По теореме Коши $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$, где С- произвольный кусочно-гладкий контур, содержащий внутри себя точку $z_0$.

## 11. Единственность аналитической функции

Пусть f(z) задана в g, за исключением может быть некоторых изолированных точек.

Точка $z_0 \in g$ называется ***правильной точкой*** функции f(z), заданной в g, если $\exists \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = f(z)$ в $g \cap |z-z_0| < \rho(z_0)$, где $\rho(z_0)$-радиус сходимости степенного ряда.

Все остальные точки $z \in g$- ***особые точки*** функции f(z), заданной в g.

**Замечание.** Если $f(z) \in C^{\infty}(g)$, то все $z \in g$- ***правильные*** точки f(z). Если f(z) задана в $\bar{g}$, то граничные точки могут быть как правильными, так и особыми.

Пусть $f(z) \in C^{\infty}(g)$; $f(z_0)=0$, $z_0 \in g$, тогда $z_0$ - ***нуль аналитической функции*** . $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \Rightarrow c_0=0$. Если $c_1=\ldots=c_{n-1}=0$, а $c_n \neq 0$, то $z_0$ - ***нуль n-того порядка.***

Заметим, что в нуле n-того порядка $f(z_0)=f'(z_0)=\ldots f^{(n-1)}(z_0)=0$, $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ и $f(z)=(z-z_0)^n f_1(z)$, $f_1(z_0) \neq 0$.

Теорема о нулях аналитической функции.

Пусть $f(z) \in C^{\infty}(g)$ и обращается в 0 в бесконечном множестве различных точек ($z_i \neq z_k$, все $z_n \in g$ и $f(z_n)=0$), имеющем предельную точку (точку сгущения) $z^* \in g$ ($\lim_{n\to\infty} z_n=z^* \in g$). Тогда $f(z)\equiv 0$, для $z \in g$.

Следствия.

1. Все нули $f(z) \in C^{\infty}(g)$ и f(z) тождественно $\neq 0$ в g - изолированные.
2. Если $f(z) \in C^{\infty}(g)$ и f(z) тождественно $\neq 0$ в g, то в $\forall$ ограниченной $\bar{g}' \subset g$ может быть лишь конечное число нулей f(z).

Теорема. Если $f_1(z)$ и $f_2(z) \in C^{\infty}(g)$ и $\exists \{z_n\} \to z^* \in g$, $z_i \neq z_k$ и $f_1(z_n)=f_2(z_n)$, то $f_1(z)\equiv f_2(z)$ для $\forall z \in g$.

Для доказательства достаточно при помощи теоремы о нулях установить, что функция $h(z)=f_1(z)-f_2(z)\equiv 0$ в g.

Следствия теоремы единственности.

Множество задания аналитической функции.

В области g ***может существовать*** только одна аналитическая функция, принимающая заданные значения на

a) $\{z_n\} \to z^* \in g$, $z_i \neq z_k$

b ) $\xi \in C \subset g$, С- кусочно-гладкая кривая.

c) $z \in \bar{g}' \subset g$.

Другими словами: Функция аналитическая в g ***однозначно*** определяется заданием своих значений на a), b), c).

Существенное замечание. Может - не значит существует. Нельзя произвольно задавать значения $f(z_n)$ или f(C) или $f(\bar{g}')$ !

## 12. Аналитическое продолжение

Пусть $f_1(z) \in C^{\infty}(g_1)$ и $g_1 \cap g_2 = g_{12} \neq \varnothing$ и пусть $f_2(z) \in C^{\infty}(g_2)$, причем $f_2(z)\equiv f_1(z)$, $z \in g_{12}$. Тогда $f_2(z)$ называется ***аналитическим продолжением*** $f_1(z)$ на $g_2$ через общую подобласть $g_{12}$.

В силу теоремы единственности определенной аналитической функции если аналитическое продолжение $\exists$ , то оно-единственно. При этом в $g=g_1 \cup g_2$ $\exists!$ (единственная) аналитическая функция $F(z)=\begin{cases} f_1(z), & z \in g_1 \\ f_2(z), & z \in g_2 \end{cases} \in C^{\infty}(g)$. F(z) называется аналитическим продолжением своего первоначального элемента $f_1(z) \in C^{\infty}(g_1)$ на большую область g, для которой $g_1 \subset g$ – подобласть.

Осуществить аналитическое продолжение можно с помощью степенных рядов. Пусть $f(z) \in C^{\infty}(g)$ и $z_0 \in g$-правильная точка g, т.е. $\exists \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ сходящийся к f(z) в общей части g и круга сходимости степенного ряда $|z-z_0|$

$< \rho(z_0)$. Если $\rho(z_0)$ больше расстояния от точки $z_0$ до $\partial g$, то круг сходимости выйдет за пределы g, и мы получим F(z)- аналитическое продолжение $f(z) \in C\infty(g)$ на большую область $g \cup |z-z_0| < \rho(z_0)$.

Теорема На границе круга сходимости степенного ряда найдется хотя бы одна особая точка аналитической функции комплексной переменной, которая (функция) является суммой ряда внутри его круга сходимости $|z-z_0|<R_0$.

Следствие. Радиус круга сходимости определяется расстоянием от центра сходимости до ближайшей особой точки той аналитической функции, к которой сходится данный ряд.

Теорема

Пусть $f_i(z) \in C\infty(g_i)$, i=1,2 и $f_i(z) \in C\infty(g_i+\Gamma)$ и $f_1|\Gamma = f_2|\Gamma$. Тогда $F(z)=\begin{cases} f_1(z), & z \in g_1+\Gamma \\ f_2(z), & z \in g_2+\Gamma \end{cases} \in C\infty$ $(g=g_1+g_2+\Gamma)$.

Пусть отрезок $[a,b] \subset$ области g комплексной плоскости z. Тогда в силу теоремы единственности определенной аналитической функции в g может ∃ !□ функция

$f(z) \in C\infty(g)$, принимающая заданные значения f(x) на $x \in [a,b]$. Если такая f(z) ∃, то она называется ***аналитическим продолжением в комплексную плоскость функции действительной переменной, заданной на действительной оси.***

f(x)- вообще говоря, комплексная функция действительной переменной. Причем в силу свойств аналитической функции f(x) должна быть бесконечно дифференцируема по x !!.

Элементарные функции действительной переменной.

$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$; $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

Целые функции $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ - единственные аналитические продолжения sin x, cos x, $e^x$ на всю комплексную плоскость z. Естественно сохранить для них старые обозначения. Прямой проверкой проверяется **формула Эйлера:**

$e^{iz}=\cos z+ i\sin z$. Однако, это, с одной стороны требует нудных преобразований и обоснования возможности перестановки членов абсолютно сходящихся рядов, а с другой стороны, является следствием общего положения и возможности аналитического продолжения не только функций, но и аналитических соотношений.

## 13. Ряд Лорана. Классификация изолированных особых точек. Вычеты. Кольцо сходимости ряда Лорана.

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ =P(z)+Q(z). P(z) называется *правильной частью* ряда Лорана, Q(z)- *главной частью* ряда Лорана. $P(z) \in C\infty(|z-z_0|<R_1)$.

В какой области Q(z) будет аналитической функцией? Сделаем замену $1/(z-z_0)=\xi$;

$Q(z) \rightarrow Q(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\xi^n \in C\infty(|\xi|<1/R_2)$, где мы *обозначили* через $1/R_2$ радиус сходимости полученного степенного ряда. При $R_2<R_1$ существует общая область сходимости- ***круговое кольцо*** $R_2<|z-z_0|<R_1$.

Следствия теоремы Абеля :

1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \in C\infty(R_2<|z-z_0|<R_1)$.
2. Внутри кругового кольца сходимости ряд Лорана можно почленно дифференцировать и интегрировать любое число раз, при этом полученные ряды также $\in C\infty(R_2<|z-z_0|<R_1)$.
3. $R_1$ определяется через $\{c_n\}$, n=0,...,∞: $R_1=1/L_1$, $L_1=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$ или $L_1=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$, а $R_2$ -через $\{c_{-n}\}$, n=1,...,∞: $R_2=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_{-n}|}$, или $R_2=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}$.
4. Коэффициенты ряда Лорана $c_n$ через значения суммы ряда в точке $z_0$ ***не определяются! В точке $z_0$ сумма ряда Лорана не определена!***

Т еорема Определение. Точка $z_0$ называется ***изолированной особой точкой*** функции f(z), если f(z) однозначная и $\in C\infty(0<|z-z_0|<\rho(z_0))$, а точка $z_0$ является особой точкой функции f(z).

Другими словами, точка $z_0$ называется ***изолированной особой точкой*** функции f(z), если ∃ такая окрестность точки $z_0$

, в которой нет других особых точек функции f(z).
В самой особой точке $z_0$ функция f(z) может быть не определена. Функцию f(z) в окрестности точки $z_0$ можно разложить в ряд Лорана, сходящийся в кольце
$0<|z-z_0|<\rho(z_0)$. Поведение функции f(z) в окрестности точки $z_0$ определяется главной частью ряда Лорана
$Q(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$.
<u>Важное замечание</u> В малой окрестности ***точки ветвления*** и ***неизолированной особой точки вообще нельзя раскладывать в ряд Лорана!***
Возможны три случая:

a) Для $\forall$ n>0 $c_{-n}=0$; Q(z)=0; $f(z)\to c_0$ при $z\to z_0$- ***устранимая особая точка***. $z_0$ - правильная точка f(z). Если функция не определена в точке $z_0$, то ее можно доопределить по непрерывности, положив $f(z_0)=c_0$. В окрестности устранимой особой точки $0<|z-z_0|<\rho(z_0)$ : | f(z)|<M и $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, $m\geq 0$- целое, $\varphi(z_0)\neq 0$; и если $\lim_{z\to z_0} f(z)=0$, то $z_0$ - нуль m-того порядка.
<u>Теорема 16.1</u> Если $f(z)\in C^{\infty}(0<|z-z_0|<\rho(z_0))$ и |f(z)|<M при $0<|z-c|<\rho(z_0)$, то $z_0$ - устранимая особая точка.

Если $f(z)\in C^{\infty}(R_2<|z-z_0|<R_1)$, то она однозначно разложима в этом кольце в ряд Лорана $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$.
b) Ряд Лорана функции f(z) в окрестности ее изолированной особой точки содержит конечное число членов с отрицательными степенями; $Q(z)=\sum_{n=1}^{m}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ ; $c_{-m}\neq 0$.
$f(z)\to\infty$ при $z\to z_0$- ***п олюс порядка m***, $f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$ ; $\psi(z_0)\neq 0$
<u>Теорема 16.2</u> Если $f(z)\in C^{\infty}(0<|z-z_0|<\rho(z_0))$, $z_0$ - изолированная особая точка f(z) и $|f(z)|\Rightarrow\infty$ при $z\to z_0$ (независимо от способа стремления z к $z_0$), то $z_0$ - полюс f(z).
c) Точка $z_0$ называется **существенно особой** точкой функции f(z), если ряд Лорана функции f(z) в окрестности ее изолированной особой точки $z_0$ содержит бесконечно много членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$. (Бесконечное число коэффициентов $c_{-n}\neq 0$). Поведение аналитической функции в окрестности существенно особой точки описывается следующей теоремой.
<u>Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса</u> Для $\forall$ комплексного числа B и $\forall\varepsilon>0$, в $\forall\eta$ - окрестности существенно особой точки $z_0$ $0<|z-z_0|<\eta$ $\exists$ $z_1$: $|f(z_1)-B|<\varepsilon$.

<u>Классификация изолированных особых точек на языке пределов.</u>

Пусть $z_0$ - изолированная особая точка $f(z)\in C^{\infty}(0<|z-z_0|<\rho(z_0))$.
a) Если при z из окрестности $0<|z-z_0|<\rho(z_0)$ и при $z\to z_0$ $f(z)\to c_0$ $|c_0|<\infty$, то $z_0$ - ***устранимая особая точка*** f(z).
b) Если при z из окрестности $0<|z-z_0|<\rho(z_0)$ и при $z\to z_0$ $f(z)\to\infty$, то $z_0$ - ***полюс*** f(z).
c) Если при z из окрестности $0<|z-z_0|<\rho(z_0)$ и при $z\to z_0$ f(z) не имеет конечного или бесконечного предела, то $z_0$ - ***существенно особая точка*** f(z).

<u>Определение</u>. $z_\infty$ является изолированной особой точкой однозначной аналитической функции, если $\exists$ R>0 : для $\forall$ z : |z|>R f(z) не имеет особых точек, находящихся на конечном расстоянии от точки z=0.

Ряд Лорана в окрестности $z_\infty$ : $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, $R<|z|<\infty$.

a) $z_\infty$ называется ***устранимой особой точкой*** f(z), если все $c_n=0$ при n>0 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n$ , или $\exists$ конечный предел f(z) при $z\to\infty$ .
b) $z_\infty$ называется ***полюсом*** f(z) если ряд Лорана функции f(z) в окрестности $z_\infty$ содержит ***конечное*** число членов с положительными степенями $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{m} c_n z^n$, (m>0) или $f(z)\to\infty$ при $z\to\infty$ .
c) Точка $z_\infty$ называется ***существенно особой*** точкой функции f(z), если ряд Лорана функции f(z) в окрестности $z_\infty$ содержит бесконечно много членов с положительными степенями z: $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ , или при $z\to\infty$ у f(z) н ет конечного или бесконечного предела.

Пусть $z_0$ - изолированная особая точка аналитической f(z). $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$; $0<|z-z_0|<\rho$, $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}$.

<u>Определение .</u> Комплексное число Выч$[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(\xi)d\xi$, где $C^+$ - замкнутый контур, который можно стянуть к $z_0$, оставаясь в кольце аналитичности функции f(z)- называется ***вычетом*** f(z) в точке $z_0$.
Очевидно Выч $[f(z),z_0]=c_{-1}$.

<u>Основная теорема теории вычетов.</u> Пусть $f(z)\in C^{\infty}(\bar{g}\setminus z_1,z_2,\ldots,z_N)$ за исключением конечного числа N изолированных особых точек. Тогда $\int_{\partial g} f(z)dz=2\pi i\sum_{n=1}^{N}$ Выч $[f(z),z_n]$.
**Формулы вычисления Выч [f(z),z₀] в полюсе.**

Как считать вычеты?
a) $z_0$- устранимая особая точка . Выч $[f(z),z_0]=0$.
b) $z_0$ - полюс порядка m>0 . $f(z)=c_{-m}/(z-z_0)^m+\ldots+c_{-1}/z-z_0+c_0+\ldots$ =>
=> $(z-z_0)^m f(z)=c_{-m}+\ldots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+\ldots$=>
Выч $[f(z),z_0]=c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$.
Частный случай m=1. Выч $[f(z),z_0]=c_{-1}=\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)f(z)\right]$.
Если $f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$, $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z)=(z-z_0)\psi'(z_0)+\ldots$; $\psi'(z_0)\neq 0$.
Тогда Выч $[f(z),z_0]=c_{-1}=\varphi(z_0)/\psi'(z_0)$.
c) $z_0$- существенно особая: Выч $[f(z),z_0]=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(\xi)d\xi$
**Вычет f(z) в z∞**

Вычет f(z) в z∞. Выч $[f(z),z_\infty]=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(\xi)d\xi=-c_{-1}$. Если $z_\infty$- устранимая особая точка, то вычет в ней может быть отличен от 0.
<u>Пример.</u> $f(z)=1+1/z$. $z_\infty$- устранимая особая точка , Выч $[f(z),z_\infty]=-c_{-1}=-1\neq 0$.
Сумма всех вычетов функции, аналитической на полной комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек+ $z_\infty$, включая вычет в $z_\infty$ равна 0.

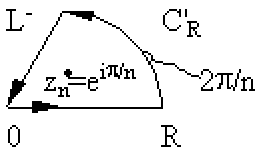
## 14. Применение вычетов.

<u>Лемма</u> Пусть $f(z)\in C^{\infty}(|z|>R_0\cap \mathrm{Im} z>0)$, за исключением конечного числа изолированных особых точек и $|f(z)|<M/|z|^{1+\delta}$, $\delta>0$. Тогда $\lim_{R\to\infty}\int_{C'_R} f(\xi=0$.
($C'_R$ - полуокружность $|z|=R\cap \mathrm{Im} z>0$).
<u>Замечания.</u>

1. Если условия Леммы 18.1 выполнены при $\varphi_1<\arg z<\varphi_2$, то $\lim_{R\to\infty}\int_{C'_R} f(\xi)d\xi=0$.
($C'_R$ - дуга окружности, лежащая в данном секторе: $|z|=R\cap(\varphi_1<\arg z<\varphi_2)$)
2. Условия Леммы 18.1 будут выполнены, если f(z) является аналитической в окрестности $z_\infty$ , которая является *<u>нулем не ниже второго порядка</u>* для f(z).

<u>Теорема</u>. Пусть f(x) задана при $-\infty<x<\infty$ и ∃ аналитическое продолжение f(z) на $\mathrm{Im}\, z\geq 0$, имеющее конечное число изолированных особых точек $z_n$, не имеющее особых точек на действительной оси и удовлетворяющее условиям Леммы . Тогда ∃ несобственный интеграл I-го рода $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_{n=1}^{N}$ Выч$[f(z),z_n]$.

$\frac{dx}{1+x^n}$; $f(z)=\frac{1}{1+z^n}$ ; $\int_{\Gamma} f(z)dz=$




$\frac{1}{1+z^n}$ $,e^{i\pi/n}]=(z_0=e^{i\pi/n}$ -полюс 1-порядка)=

$\tau^{(n-1)/n}$)=-2 π i/(ne$^{-i\pi/n}$ ). С другой стороны,

$\int_\Gamma f(z)dz=\int_0^R f(z)dz+\int_{C_R} f(\xi)d\xi+\int_{\Gamma} f(z)dz$ .При R$\to\infty$второе слагаемое $\to 0$

(по Замечанию 1 к Лемме ) . В третьем слагаемом z=xe $^{i2\pi/n}$ (f( xe $^{i2\pi/n}$)=f(x)) . Устремив R$\to\infty$, получим $\int_0^\infty f(x)dx-e^{i2\pi/n}\int_0^\infty f(x)dx=(1-e^{i2\pi/n})\int_0^\infty f(x)dx=-2\pi i/(ne^{-i\pi/n})\Rightarrow\int_0^\infty f(x)dx=-2\pi i/[(ne^{-i\pi/n})(1-e^{i2\pi/n})]=\pi$ /(n sin π /n).

Лемма (Жордана). Если f(z) $\in C_\infty(|z|>R_0\cap$ Imz>0) за исключением конечного числа изолированных особых точек и f(z)=>0 при $|z|\to\infty$(равномерно по arg z,

$0\le$ arg z$\le$ π ), z $\in$ Imz>0, то при a>0 $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{ia\xi} f(\xi)d\xi=0$, C'$_R$ - полуокружность $|z|=R\cap$ Imz>0.

Теорема Пусть f(x) задана при $-\infty<x<\infty$ и ∃ аналитическое продолжение f(z) на Im z$\ge$0, имеющее конечное число изолированных особых точек $z_n$ , не имеющее особых точек на действительной оси и удовлетворяющее условиям Леммы Жордана . Тогда ∃ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)dx=2\pi i\sum_{n=1}^{N}$ Выч[e $^{iaz}$f(z),z$_n$ ], где $z_n$ - изолированные особые точки в *верхней* полуплоскости Im z$\ge$ 0.

Пример. $\int_0^\infty\frac{\cos kx dx}{x^2+a^2}$ (k>0, a>0)= $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kx dx}{x^2+a^2}=\mathrm{Re}\,\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}dx}{x^2+a^2}$ == Re π iВыч[$\frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}$ ,ia] =(z$_0$ = ia -полюс 1-порядка)= Re π i(e$^{-ka}$/2ia)= π e$^{-ka}$/2a.

Определение . Функция комплексной переменной f(z) называется ***мероморфной***, если она определена на всей комплексной плоскости и не имеет в конечной части плоскости особых точек, отличных от полюсов.

Некоторые интегралы

1. $\int_0^\infty\frac{\sin ax}{x}dx$ =sign(a) π /2
2. I=$\int_0^\infty x^{a-1}f(x)dx$ , 0<a<1; I=$\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi ia}}\sum_{k=1}^{n}$ Выч[z $^{a-1}$f(z),z$_k$]
3. I=$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{-a}f(x)dx$ , 0<a<1; I=$\frac{\pi a_0}{\sin\pi a}+\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi ia}}\sum_{k=1}^{n}$ Выч[z $^{a-1}$(1-z)$^{-a}$f(z),z$_k$], a$_0$=$\lim_{z\to 0}$ f(z).
4. I=$\int_0^\infty$ f(x)ln(x)dx= π i $\sum_{n=1}^{N}$ Выч[f(z)(lnz-i π /2),z$_k$]

Пусть f(z) $\in C_\infty$ ($\bar g$ \z$_1$,:z$_N$), z$_n$- полюса и f(ξ )$|_{\xi\in\partial g}\ne$ 0. Тогда ∀ ξ $\in\partial g$ - правильная и ∃ f(ξ )$|_{\xi\in\partial g}$.

Определение. Функция φ (z)=f'(z)/f(z)=[ln f(z)]' называется ***логарифмической производной*** функции f(z).

Вычеты φ (z) в ее особых точках z$_n$ называются ***логарифмическими вычетами***.

Особыми точками φ (z) будут нули z$^0_k$ и полюса z$_k$ функции f(z). Как считать вычеты?

a) Пусть z$^0_k$ - нуль порядка n функции f(z); => f(z)=(z-z$^0_k$)$^n$f$_1$(z), f$_1$(z$^0_k$)$\ne$ 0 => => φ (z)=n/(z-z$^0_k$)+f'$_1$(z)/f$_1$(z) => Выч[φ (z),z$^0_k$]=n.

b) Пусть z$_k$ - полюс порядка p функции f(z);=> f(z)=ψ (z)/(z-z$_k$)$^p$ , ψ (z$_k$)$\ne$ 0 => => φ (z)=-p/(z-z$_k$)+ ψ '(z)/ψ (z) => Выч[φ (z),z$_k$]=-p.

Теорема Если f(z) $\in C_\infty$($\bar g$ \z$_1$,:z$_N$), z$_n$- полюса и f(ξ )$|_{\xi\in\partial g}\ne$ 0, то $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial g^+}\frac{f'(\xi)d\xi}{f(\xi)}$ =N-P, где N- полное число нулей f(z) с учетом кратности, P- полное число полюсов f(z) с учетом кратности.

Принцип аргумента. Разность между полным числом нулей и полюсов функции f(z) в области g определяется числом оборотов, которое совершает очка w=f(z) вокруг точки w=0, при положительном обходе точкой z контура $\partial g$.

Теорема Руше Если f(z), φ (z) $\in C_\infty$($\bar g$) и |f(z)|$_{\partial g}$ >|φ (z)|$_{\partial g}$ , то N[f+φ ]$_g$=N[f]$_g$.

Основная теорема высшей алгебры. Полином n-ой степени имеет на комплексной плоскости ровно n нулей (с учетом их кратности).

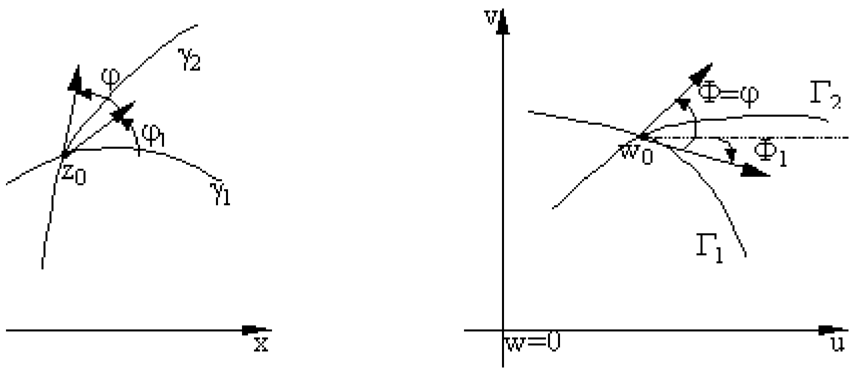
# 15. Конформные отображения.

Геометрический смысл $f'(z_0) \neq 0$. Свойства постоянства растяжений и сохранения углов. Конформные отображения в точкею.

п.1. Геометрический смысл $f'(z_0) \neq 0$.

Пусть $w=f(z) \in C^{\infty}(g)$ и $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in g$. => $\exists\ f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta w/\Delta z = ke^{i\alpha}$, $k>0$,

$\alpha$ - определенное действительное число. Выберем такой способ стремления $\Delta z \to 0$, при котором точки $z=z_0+\Delta z \in \gamma_1 \subset g$, $z_0 \in \gamma_1$- некоторой гладкой кривой. Соответствующие им точки $w=w_0+\Delta w \in \Gamma_1 \subset G$, $w_0 \in \Gamma_1$- гладкой кривой. Комплексные числа $\Delta z$ и $\Delta w$ - ***вектора секущих к кривым*** $\gamma_1$ и $\Gamma_1$. arg $\Delta z$ и arg $\Delta w$ - имеют геометрический смысл ***углов*** соответствующих векторов с положительными направлениями осей абсцисс на комплексных плоскостях z и w соответственно, а $|\Delta z|$ и $|\Delta w|$- ***длины***этих векторов. При $\Delta z \to 0$ вектора секущих переходят в вектора касательных к соответствующим кривым.




$|\Delta w|=k|\Delta z|+o(|\Delta z|^2)$, $k=|f'(z_0)|$ не зависит от выбора $\gamma_1$.

<u>Геометрический смысл</u> $|f'(z_0)|$: При отображении $w= f(z) \in C^{\infty}(g)$ и $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in g$ ***бесконечно малые линейные элементы преобразуются подобным образом*, причем $|f'(z_0)|$- *коэффициент преобразования подобия***.-это свойство носит название

a) ***Свойство постоянства растяжения.***

$\alpha = \arg f'(z_0)= \lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg\Delta w- \lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg\Delta z=\Phi_1-\varphi_1$.

<u>Геометрический смысл</u> arg $f'(z_0)$: Разность угла $\Phi_1$ (угол между касательной к кривой $\Gamma_1$ и положительным направлением оси u на плоскости w) и угла $\varphi_1$ (угол между касательной к кривой $\gamma_1$ и положительным направлением оси x на плоскости z)

=> $\Phi_1=\varphi_1+\alpha$ . Другими словами, ***аргумент производной*** arg $f'(z_0)$ в точке $z_0$ ***определяет величину угла*, на который нужно повернуть касательную к** $\forall$ гладкой кривой $\gamma$ , проходящей через точку $z_0$, чтобы получить касательную к образу этой кривой в точке $w_0=f(z_0)$.

Т.к. $\alpha = \arg f'(z_0)$ не зависит от выбора $\gamma_1$, то для $\forall\ \gamma_2 : z_0 \in \gamma_2 : \Phi_2=\varphi_2+\alpha$ =>

=>$\Phi = \Phi_2-\Phi_1=\varphi_2-\varphi_1=\varphi$ (сохраняется величина и направление углов).

b) ***Свойство сохранения углов.***

<u>Определение</u> Отображение окрестности точки $z_0$ на окрестность точки $w_0$, обладающее свойствами сохранения углов и постоянства растяжений называется ***конформным отображением*** в точке $z_0$.

=> бесконечно малая окружность $\to$ бесконечно малую окружность; бесконечно малый треугольник $\to$ бесконечно малый треугольник.

<u>Основное определение.</u> Непрерывное взаимно однозначное отображение области g комплексной плоскости z на область D комплексной плоскости w, при котором в $\forall\ z \in g$ выполняются свойства сохранения углов и постоянства растяжений, называется ***конформным отображением*** g на D.

<u>Обозначение:</u> $g \xleftrightarrow{K} D$.

Очевидно, что при этом D конформно отображается на g.

<u>Теорема </u>Если $f(z) \in C^{\infty}(g)$, однозначная и однолистная, и $f'(z) \neq 0$, $\forall\ z \in g$, то f(z) осуществляет конформное отображение $g \xleftrightarrow{K} D$.

<u>Теорема </u>(обратная) Если f(z) осуществляет конформное отображение $g \xleftrightarrow{K} D$, то $f(z) \in C^{\infty}(g)$, однолистна, и $f'(z) \neq 0$, $\forall\ z \in g$.

<u>Теорема </u>Необходимым и достаточным условием конформности отображения является $f(z) \in C^{\infty}(g)$, однозначна и однолистна в g.

<u>Принцип соответствия границ</u>. Если $f(z) \in C^{\infty}(\overline{g})$, g-односвязна и $f(\xi)$ взаимно однозначно отображает $\partial g$ на замкнутый контур $\Gamma = \partial D$ плоскости w с сохранением обхода, то $g \xleftrightarrow{K} D$.

<u>Теорема Римана. Основной закон конформных отображений.</u>

Заданы область g комплексной плоскости g и область D комплексной плоскости w. Требуется найти f(z)=w конформно отображающую g на D.

Теорема Римана. Если g- односвязная область комплексной плоскости w, граница которой состоит более чем из одной точки, то $\exists!\ f(z) \in C^{\infty}(g)$: $g \overset{K}{\longleftrightarrow} |w|<1$, так что $f(z_0)=0$ и $\arg f'(z_0)=\alpha$ , $z_0 \in g$ и $\alpha$ - заданные числа.

Полное доказательство приводить не будем. (см. например А.В.Бицадзе "Основы теории аналитических функций"). Ограничимся замечаниями.

1. Пусть g комплексной плоскости z и G комплексной плоскости w удовлетворяют условиям теоремы Римана . Тогда $\exists \xi =f(z)$: $g \overset{K}{\longleftrightarrow} |\xi |<1$; $f(z_0)=\xi_0$ и $\exists\ w=\varphi (\xi )$: $|\xi |<1 \overset{K}{\longleftrightarrow} D$, $\varphi (\xi_0)= w_0 \Rightarrow \exists\ w=F(z)= \varphi (f(z))$; $g \overset{K}{\longleftrightarrow} D$; $F(z_0)=w_0$ .
2. Односвязность существенна!.
3. Условия теоремы Римана можно заменить установлением соответствия 3-х точек $\partial g$ трем точкам $\partial$ D.

**Основные функции, используемые при конформных отображениях.**

a) Степенная $w=f(z)=z^n$, область однолистности $0<\arg z<2\pi/n$.

b) $w=f(z)=1/z$ область однолистности- вся комплексная плоскость. $z \overset{K}{\longleftrightarrow} w$

c) $w=f(z)=e^z$ область однолистности $-\pi <\operatorname{Im} z<\pi$ .

Дробно-линейная функция.

$w=f(z)=(az+b)/(cz+d)=\lambda (z+\alpha )/(z+\beta )$ (3 параметра, $\alpha\neq\beta$ ).

$z=\lambda '(w+\alpha ')/(w+\beta ')$; $z \overset{K}{\longleftrightarrow} w$, $f'(z)\neq 0$ для $\forall$ z.

1. Геометрический смысл: $f(z)=\lambda [1+(\alpha -\beta )/(z+\beta )]$ - повороты и растяжения, отражение от действительной оси, инверсия.
2. Заданием соответствия 3-м точкам $z_1 \Leftrightarrow w_1$, $z_2 \Leftrightarrow w_2$, $z_3 \Leftrightarrow w_3$, плоскости z трех точек плоскости w, дробно-линейная функция определена однозначно, т.е. коэффициенты $\lambda$ , $\alpha$ , $\beta$ однозначно выражаются через 6 заданных комплексных чисел.

Свойства дробно-линейной функции.

a) Круговое: $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$; $z=x+iy=1/\zeta =1/(\xi +i\eta )=\xi /(\xi^2+\eta^2)-i\eta /(\xi^2+\eta^2)\Rightarrow$
$\Rightarrow A+B\xi -C\eta +D(\xi^2+\eta^2)=0$. Окружность на плоскости однозначно определяется заданием 3-х точек.=> Задав $z_i \Leftrightarrow w_i$, i=1,2,3 с сохранением направления обхода однозначно определим дробно-линейную функцию, конформно отображающую $g \overset{K}{\longleftrightarrow} D$.

Пример. $|z|<1 \overset{K}{\longleftrightarrow} \operatorname{Im} z>0$. так, чтобы $z=1 \Leftrightarrow w=0$; $z=i \Leftrightarrow w=1$; $z=-1 \Leftrightarrow w=\infty$ ;
Возьмем $w=\lambda (z-1)/(z+1)$; $1=\lambda (i-1)/(i+1) \Rightarrow \lambda =(i+1)/(i-1)= (i+1)(1+i)/(i-1)(1+i)=-(1+i)^2/2=$
$=-(1+2i-1)/2=-i$; $\Rightarrow w=i(1-z)/(1+z)$.

b) Сохранение сопряженности точек.

Пример. $\operatorname{Im} z>0 \overset{K}{\longleftrightarrow} |w|<1$; $z_0 \Leftrightarrow w_0=0$; $\Rightarrow w=\lambda (z-z_0)/(z- z_0^*)$;

Функция Жуковского.

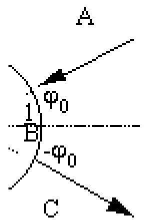
$w=f(z)=(1/2)(z+1/z)$-однозначная аналитическая функция в кольце $0<|z|<\infty$ ;
Два полюса 1-го порядка: $z=0$ и $z=\infty$ .
Области однолистности: $z_1\neq z_2$ и $z_1+1/z_1= z_2+1/z_2 \Rightarrow (z_1-z_2)=(z_1-z_2)/z_1z_2 \Rightarrow z_1z_2=1 \Rightarrow$
Области однолистности $|z|<1$ и $|z|>1$.
$f'(z)=(1/2)(1-1/z^2)$; $f'(z_{1,2})=0 \Rightarrow z_{1,2}=\pm 1$.

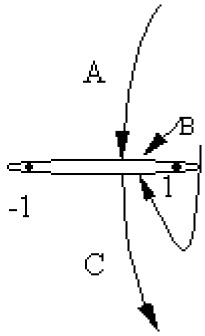
Геометрический смысл отображения.

$|z|>1$; $z=r_0e^{i\varphi}$ ; $w=(1/2)(r_0e^{i\varphi}+(1/r_0)e^{-i\varphi})$; $w=u+iv=(1/2)(r_0+1/r_0)\cos\varphi +i(1/2)(r_0-1/r_0)\sin\varphi$ ;
$u^2/[(1/2)(r_0+1/r_0)]^2+v^2/[(1/2)(r_0-1/r_0)]^2=1$; $a=(1/2)(r_0+1/r_0)$; $b=(1/2)(r_0-1/r_0)$;
$c^2=a^2-b^2=1$; $\Rightarrow c=\pm 1$;
Окружность $r_0e^{i\varphi} \Leftrightarrow$ семейство софокусных эллипсов. При $r_0 \to 1$ $a\to 1$, $b\to 0$.
$|z|>1 \overset{K}{\longleftrightarrow} w$, с разрезом по отрезку [-1;1].
Луч $z=re^{i\varphi}$; $1<r<\infty$ ; $\varphi =\varphi_0$ .
$u=(1/2)(r+1/r)\cos\varphi$ ; $v=(1/2)(r-1/r)\sin\varphi$ ; $\Rightarrow u^2/\cos^{2\varphi} - v^2/\sin^{2\varphi}=1$; - гипербола:
$c^2=a^2+b^2=1$; $\Rightarrow c=\pm 1$; $0<\varphi_0<\pi /2$- правая ветвь гиперболы, $\pi /2<\varphi_0<\pi$ - левая ветвь гиперболы. Полярная система координат $|z|>1$ переходит в эллиптическую систему координат на плоскости w, с разрезом с сохранением направления обхода. На плоскости w с разрезом определена обратная функция $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$ , являющаяся аналитическим продолжением действительной функции $x = u + \sqrt{u^2 - 1}$ , u>1.

Аналогично, область однолистности $|z|<1 \overset{K}{\longleftrightarrow}$ на плоскость w с разрезом по

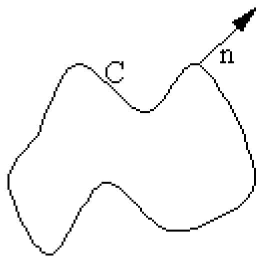
[-1;1] с изменением направления обхода.




На этой плоскости определена обратная функция $z = w - \sqrt{w^2 - 1}$, являющаяся аналитическим продолжением действительной функции $x = u - \sqrt{u^2 - 1}$, u>1.
Итак, функция Жуковского осуществляет конформное отображение полной плоскости z на двулистную Риманову поверхность w, склеенную из двух плоскостей w с разрезом по [-1;1]. Конформность отображения нарушается в точках $z_{1,2}=\pm 1$, где $f'(z_{1,2})=0$; $z_{1,2}=\pm 1 < w_{1,2}=\pm 1$. Обратная функция $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$ (обе ветви) имеет две точки ветвления w=+ 1- концы берегов разреза.

Задача Робэна- распределение заряда на проводящей границе.

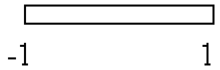



s)ds-дано; $\sigma(s)=(1/4\pi)E_n|_C=-(1/4\pi)\partial u/\partial n|_C$; n-внешняя нормаль.
обэна: $\Delta u=0$ вне C;. $u|_C=\text{const}$;

n ds=-4π q - дано.   Найти σ (s)=?

Задача просто решается, если C есть окружность $|\zeta|=1$.
Тогда $\Omega(s)=q/2\pi=-(1/4\pi)\partial u_0/\partial n_0$. $\Rightarrow \partial u_0/\partial n_0|_{|\zeta|=1}=-2q$.
Пусть известна функция $\zeta=f(z)$, которая конформно отображает C на плоскости z на окружность $|\zeta|=1$ на плоскости $\zeta$.
Тогда $\partial u/\partial n|_C=\partial u_0/\partial n_0|_{|\zeta|=1}\,\partial n_0/\partial n|_C+\partial u_0/\partial\tau_0|_{|\zeta|=1}\,\partial\tau_0/\partial n|_C$ = (поскольку контур проводящий, то $E_\tau=\partial u_0/\partial\tau_0=0$) $=-2q\,\partial n_0/\partial n|_C$;
Но при конформном отображении нормаль n к C переходит в нормаль $n_0$ к $|\zeta|=1$, а меняется лишь ее длина $\Rightarrow \partial n_0/\partial n|_C=|f'(z)|_C \Rightarrow \partial u/\partial n|_C=-2q\,|f'(z)|_C$.
$\Rightarrow \sigma(s)=(q/2\pi)\,|f'(z)|_C$.

Пример. Двусторонний отрезок [-1;1] на плоскости z . $\zeta=f(z)$: C  $|\zeta|=1$- функция,




ι к функции Жуковского
$z+\sqrt{z^2-1}$;

$f'(z)|_{z\in[-1;1]}=1+z/\sqrt{z^2-1}\,|_{z\in[-1;1]}=f(z)/\sqrt{z^2-1}\,|_{z\in[-1;1]}$
Но $|f(z)|_{z\in[-1;1]}=|\zeta|=1 \Rightarrow |f'(z)|_{z\in[-1;1]}=1/\sqrt{1-x^2}$ ;-1<x<1;$\Rightarrow \sigma(x)=q/[2\pi\sqrt{1-x^2}]$;-1<x<1;

Замечания. 1) $\sigma(x)\to\infty$, $x\to\pm 1$- эффект острия; 2) $2\int_{-1}^{1}\sigma(x)dx=q$ (Двусторонний отрезок).

# 16. Операционное исчисление.

Операционное исчисление - это аппарат интегральных преобразований, позволяющий заменить операции дифференцирования и интегрирования функции действительной переменной (известной или неизвестной, заданной или искомой) на алгебраические операции с параметрами интегральных преобразований.

**Понятие одностороннего преобразования Лапласа.**

Класс рассматриваемых функций действительной переменной. $f(t)$, $-\infty<t<\infty$

1) $f(t)\equiv 0$, $t<0$

2) $f(t)$- кусочно- непрерывна при $t>0$, т.е. для $\forall$ конечного $[a,b]$ $f(t)$ имеет лишь конечное число разрывов I рода.

$\exists$ $M>0$, $a'>0$ : $|f(t)|<Me^{a't}$, $t]\infty$ ($f(t)$-***функция ограниченной степени роста***).

$\inf a'=a$- ***показатель степени роста***.

Класс $A(a)$- класс функций ограниченной степени роста.

Замечания

1. Для $f(t)=t^n\in A(0)$, $a=0$, т.к. $t^n<Me^{a't}$ для $\forall$ $a'>0$.
2. $f(t)=\exp(2t^2)\notin A(a)$ для $\forall$ a.

Определение. ***Односторонним преобразованием Лапласа*** функции $f(t)$ класса $A(a)$ называется функция комплексной переменной $F(p)$, определяемая соотношением

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt;$$

Если $\exists$ $F(p)$, то $f(t) \doteqdot F(p)$; $f(t)$-***оригинал***, $F(p)$-***изображение***.

Для каких p $\exists$ $F(p)$ ?

Теорема Если $f(t)\in A(a)$, то $F(p)$ $\exists$ при $\mathrm{Re}\, p>a$ и в области $\mathrm{Re}\, p\geq x_0>a$ интеграл сходится равномерно по p.

Теорема В области $\mathrm{Re} p>a$ ($f(t)\in A(a)$) $F(p)\in C^\infty(\mathrm{Re}\, p>a)$.

**Свойства изображений.**

1. $f(t)=\sigma(t)=\{0, t<0; 1, t>0$; $\sigma(t)$- ***функция Хевисайда***. $\sigma(t)\in A(0)$ =>

$\Rightarrow F(p)\in C^\infty(\mathrm{Re}\, p>0)$; $F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}dt=1/p$; $\sigma(t)\doteqdot 1/p$, $\mathrm{Re}\, p>0$.

2. $f(t)=t^\nu$ ; $\nu>-1$; $t^\nu\in A(0)$; $F(p)\in C^\infty(\mathrm{Re}\, p>0)$; $F(p)=\int_0^\infty t^\nu e^{-pt}dt$; $F(x>0)=\int_0^\infty t^\nu e^{-xt}dt=$

$=\{xt=s\}=(1/x^{\nu+1})\int_0^\infty s^\nu e^{-s}ds=\Gamma(\nu+1)/x^{\nu+1}$; $F(p)$- аналитическое продолжение $F(x)$ в правую полуплоскость $\mathrm{Re}\, p>0$;

$\Rightarrow F(p)=\Gamma(\nu+1)/p^{\nu+1}$; Если $\nu$ -дробное, то берется та ветвь корня, которая является непосредственным аналитическим продолжением

$x^{\nu+1}$, $x>0$. Частный случай $\nu=0$; $f(t)=\sigma(t)\doteqdot 1/p$, $\mathrm{Re}\, p>0$. При $\nu=n$ : $t^n\doteqdot n!/p^{n+1}$

3. $f(t)=e^{\alpha t}$; $\mathrm{Re}\, p>\mathrm{Re}\,\alpha$ ; $F(p)=\int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-pt}dt=1/(p-\alpha)$; $\mathrm{Re}\, p>\mathrm{Re}\,\alpha$ ; Линейность изображений.

Примеры 1) Полином.

2) $\sin\omega t=(1/2i)(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})\doteqdot (1/2i)[1/(p-i\omega)-1/(p+i\omega)]=\omega/(p^2+\omega^2)$;

5. Теорема запаздывания.

$f(t)\in A(a)$; $f(t)\doteqdot F(p)$; $f_\tau(t)=\{0, t<\tau$ ; $f(t-\tau)$ $t>\tau$ ;$f_\tau(t)\in A(a)$; $f_\tau(t)\doteqdot\int_0^\infty e^{-pt}f(t-\tau)dt=$

$=\{t-\tau=t'\}=e^{-p\tau}\int_0^\infty e^{-pt'}f(t')dt'=e^{-p\tau}F(p)$.

Пример. Изображение прямоугольного импульса.

$f(t)=\{0, t<\tau_1$ ; $1, \tau_2<t<\tau_1$; $0, t>\tau_2$;} $F(p)=(1/p)(e^{-p\tau 1}-e^{-p\tau 2})$;

Пилообразный импульс- самостоятельно.

6. Изображение производной. Пусть $f(t)\in C[0;\infty]$ и имеет конечную производную $f'(t)$, причем и $f(t)$ и $f'(t)\in A(a)$.

Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$. Найдем $f'(t) \doteqdot$ ?.

$$f'(t) \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)dt = (\text{по частям}) = -f(0) + p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = (\operatorname{Re} p > a) = pF(p) - f(0) = p[F(p) - f(0)/p];$$

Аналогично, если $f(t) \in C^{(n-1)}[0;\infty]$ и $f^{(n)}(t)$- кусочно- непрерывна, и $f^{(k)}(t) \in A(a)$, $k=0,1...n$; то $f^{(n)}(t) \doteqdot p^n[F(p)-f(0)/p-f'(0)/p^2-...-f^{(n-1)}(0)/p^n]$;

7. Изображение интеграла.

$f(t) \in A(a)$; $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \in A(a)$; $\varphi(t) \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt} \int_0^t f(\tau)d\tau\, dt = (\operatorname{Re} p > a) = \int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-pt} f(\tau)\, dt d\tau = (1/p)\int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau)d\tau = (1/p)F(p)$;

Можно обобщить на случай n- кратного интеграла $\doteqdot (1/p^n)F(p)$

8. Изображение свертки.

$f_1(t) \in A(a_1)$, $f_2(t) \in A(a_2)$, $\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \in A(a)$, $a=\max(a_1,a_2)$;

$$\varphi(t) \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt} \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\, dt = (\operatorname{Re} p > a) = \int_0^\infty f_1(\tau) \int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)d\tau\, dt = (t-\tau = t') =$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau)e^{-p\tau} \int_0^\infty e^{-pt'} f_2(t')d\tau\, dt' = F_1(p)F_2(p).$$

**Теорема Меллина.**

Пусть $F(p) \in C^\infty$ $(\operatorname{Re} p > a)$ и

1) $|F(p)| \Rightarrow 0$ при $|p| \to \infty$, $\operatorname{Re} p > a$ относительно аргумента.

2) $\forall\, x > a$: $\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)|dy < M$ (равномерно ограничен по x).

Тогда $\exists\, f(t) \in A(a)$: $f(t) \doteqdot F(p)$ и $f(t) = (1/2\pi i)\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp$, для $\forall\, x > a$.

<u>Замечание.</u> Несобственный интеграл $(1/2\pi i)\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp$ вычисляется вдоль прямой $\operatorname{Re} p = x > a$ и понимается в смысле главного значения: $\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp = \lim_{A\to\infty} \int_{x-iA}^{x+iA} e^{pt}F(p)dp$.

<u>Пример</u>. Решить задачу Коши: $y''+\omega_0^2 y = f(t)$; $y(0)=y'(0)=0$;

$Y(p)=F(p)/(p^2+\omega_0^2)$; и трудности могут возникнуть при достаточно сложной $F(p)$.

Но мы знаем, что $y(t) = (1/a_0)\int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau$. А т.к. $G(p) = a_0/P_n(p)$, и $a_0=1$, и $P_n(p)=p^2+\omega_0^2$, то $G(p)=1/(p^2+\omega_0^2)$. =>

$g(t) = (1/2\pi i)\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}/(p^2+\omega_0^2)dp =$

$=$ Выч$[e^{pt}/(p^2+\omega_0^2), i\omega_0]$ + Выч$[e^{pt}/(p^2+\omega_0^2), -i\omega_0]$ $= e^{i\omega_0 t}/(2i\omega_0) - e^{-i\omega_0 t}/(2i\omega_0) = \sin(\omega_0 t)/\omega_0 \Rightarrow y(t) = (1/\omega_0)\int_0^t \sin(\omega_0(t-\tau))f(\tau)d\tau$ и в частности при $f(t)=\sin(\omega_0 t)$: $y(t)=$

$=(1/\omega_0)\int_0^t \sin\omega_0(t-\tau)\sin(\omega_0\tau)d\tau = (1/2\omega_0^2)[\sin(\omega_0 t) - t\omega_0\cos(\omega_0 t)]$- осциллирующая функция с линейно нарастающей амплитудой- резонанс.

**Изображение произведения.**

Пусть $f_1(t)\in A(a_1)$: $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)\in C\infty(\mathrm{Re}\,p>a_1)$; $f_2(t)\in A(a_2)$: $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)\in C\infty(\mathrm{Re}\,p>a_2)$.
$f(t)=f_1(t)f_2(t)\in A(a_1+a_2)$; -удовлетворяет всем условиям существования изображения.

$f(t) \risingdotseq F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt}f_1(t)f_2(t)dt=\{f_1(t)=(1/2\pi\, i)\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F_1(p)dp$, для $\forall\ x>a_1\}=$

$=(1/2\pi\, i)\int_0^{\infty} e^{-pt}f_2(t)\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{qt}F_1(q)dqdt=(1/2\pi\, i)\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q)\int_0^{\infty} e^{-(p-q)t}f_2(t)dtdq=$

$=(1/2\pi\, i)\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q)F_2(p-q)dq$; $(a_1<x=\mathrm{Re}\,q<\mathrm{Re}\,p-a_2)=(1/2\pi\, i)\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(p-q)F_2(q)dq$;
$(a_2<x=\mathrm{Re}\,q<\mathrm{Re}\,p-a_1)$ ; $F(p)\in C\infty(\mathrm{Re}\,p>a_1+a_2)$

<u>Пример</u>. $f_1(t)=t \risingdotseq 1/p^2$; $f_2(t)=\sin\omega t \risingdotseq \omega/(p^2+\omega^2)$;

$f(t)=f_1(t)f_2(t)=t\sin\omega t \risingdotseq (\omega/2\pi\, i)\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} dq/[(p-q)^2(q^2+\omega^2)]$ ; $0<x=\mathrm{Re}\,q<\mathrm{Re}\,p=${при помощи вычетов, с учетом того, что контур интегрирования замыкается *вправо* и обходится *по часовой стрелке*- в отрицательном направлении}$=-\omega$ Выч$[1/[(p-q)^2(q^2+\omega^2)],q=p]$
$\{q=p-$ полюс 2-го порядка $=-\omega\, d/dq[1/(q^2+\omega^2),q=p]=2\omega\, p/(p^2+\omega^2)$;
<u>Замечание.</u> Можно считать контур интегрирования замкнутым налево и суммировать вычеты в $\pm\ i\omega$ ;