Наибольшее и наименьшее значение функции

Теорема. Если $z = f(x, y)$ непрерывна на компакте (ограниченной замкнутой области) D, то такая функция достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значения.

Алгоритм нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции на компакте.
1) Вычислить частные производные функции.
2) Найти критические точки функции: либо те, в которых обе частные производные равны нулю, либо те, в которых хотя бы одна из частных производных не существует конечная.
3) Выбрать из найденных критических точек те, которые попали в исследуемую область. Вычислить значения функции в отобранных критических точках.
4) Исследовать функцию на границе области. Это задача нахождения условного экстремума данной функции, в которой уравнением связи является уравнение границы. Находим точки возможного условного экстремума либо методом исключения неизвестных, либо методом множителей Лагранжа. Вычисляем значения функции в найденных точках.
5) Из вычисленных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее.

Пример 1. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy$ в области $D: |x| + |y| \le 1$.

Решение

Изобразите область D.

Находим стационарные точки в D. Их координаты удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases}$.

Стационарной будет точка (0,0). Значение функции в стационарной точке: $z(0,0) = 0$.

Исследуем значения функции на границе области. Граница состоит из четырех отрезков.

1) $y = x + 1,\ x \in [-1,0],\quad z = x^2 + x + 1.$ Стационарная точка удовлетворяет условию $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 1 = 0$, отсюда $x = -\dfrac{1}{2} \in [-1,0]$ и $z\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$. Значения функции на концах отрезка: $z(0) = z(-1) = 1$.

2) $y = x - 1,\ x \in [0,1],\quad z = x^2 - x + 1.$ Стационарная точка удовлетворяет условию $z' = 2x - 1 = 0$, отсюда $x = \dfrac{1}{2} \in [0,1]$ и $z\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$. Значения функции на концах отрезка: $z(0) = z(1) = 1$.

3) $y = -x + 1,\ x \in [0,1],\quad z = 3x^2 - 3x + 1.$ Стационарная точка удовлетворяет условию $z' = 6x - 3 = 0$, отсюда $x = \dfrac{1}{2} \in [0,1]$ и $z\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$. Значения функции на концах отрезка: $z(0) = z(1) = 1$.

4) $y = -x - 1,\ x \in [-1,0],\quad z = 3x^2 + 3x + 1.$ Стационарная точка удовлетворяет условию $z' = 6x + 3 = 0$, отсюда $x = -\dfrac{1}{2} \in [-1,0]$ и $z\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$. Значения функции на концах отрезка: $z(0) = z(-1) = 1$.

Из полученных значений функции выбираем самое большое $z_{наиб} = 1$ в угловых точках (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0) и самое маленькое $z_{наим} = 0$ в точке (0,0).

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 3y^2 + y$ в области $D: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le x + y \le 1$.

Решение

Изобразите область D.

Найдем стационарные точки функции из системы

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x - 6y + 1 = 0 \end{cases}$$

Отсюда получаем единственную стационарную точку $\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$, не лежащую в области D.

Исследуем значения функции на границе области. Граница состоит из трех отрезков.

1) $y = 0,\ x \in [0,1]$. Подставляя это в функцию, получаем $z = x^2, x \in [0,1]$. Для нее стационарная точка $x = 0$, она не попадает внутрь отрезка. Значения функции на концах отрезка $z(0,0)=0$ и $z(1,0)=1$.

2) $x = 0,\ y \in [0,1]$. Подставляя это в функцию, получаем $z = y - 3y^2, y \in [0,1]$. Стационарная точка находится из уравнения $z' = 1 - 6y = 0$ Точка $y = \frac{1}{6}$ попадает в отрезок $[0,1]$. Значение функции в этой точке $z\left(0, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}$. Значение функции на одном из концов отрезка найдено в предыдущем пункте, а на втором конце $z(0,1) = -2$.

3) $y = 1 - x,\ x \in [0,1]$. Подставляя это в функцию, получаем $z = -4x^2 + 7x - 2,\ x \in [0,1]$. . Ее стационарная точка находится из уравнения $z' = 7 - 8x = 0$. Точка $x = \frac{7}{8}$ попадает в отрезок $[0,1]$. Значение функции в этой точке $z\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right) = \frac{17}{16}$.

Из полученных значений функции выбираем самое большое $z\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right) = \frac{17}{16} = z_{наиб}$ и самое маленькое $z(0,1) = -2 = z_{наим}$.

Пример 3. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3 + 2xy$ в области $D: x^2 + y^2 \le 1$.

Решение

Находим стационарную точку функции из системы

$\begin{cases} 2y = 0 \\ 2x = 0 \end{cases}$. Отсюда получаем единственную стационарную точку $(0,0)$, лежащую в области D.

Значение функции в стационарной точке: $z(0,0) = 3$.

Исследуем функцию на границе области. Для этого составим функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda) = 3 + 2xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Найдем ее стационарные точки из системы

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2y + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2x + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Решая эту систему, находим четыре точки возможного условного экстремума. При $\lambda = -1$ $M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. При $\lambda = 1$ $M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $M_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Вычисляем значения функции в найденных точках:

$z(M_1) = z(M_3) = 4$, $z(M_2) = z(M_4) = 2$. Наибольшее и наименьшее значение функции принимаются на границе области и равны: $z_{наим} = 2$ в точках $M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $M_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $z_{наиб} = 4$ в точках $M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Д/з 3676, 3678, 3679.