Глава 1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§1. Векторы и векторные пространства

Определение 1.1. *Фиксированным вектором* или просто *вектором* называется ориентированный (т.е. направленный) отрезок.

Чтобы ориентировать отрезок AB, надо указать, какая из точек является его началом и какая — концом. На отрезке AB можно определить два вектора: $\overrightarrow{AB}$ (A — начало, B — конец) (рис. 1.1) и $\overrightarrow{BA}$. Вектор $\overrightarrow{BA}$ называется противоположным вектору $\overrightarrow{AB}$. Ясно, что противоположный к противоположному есть исходный вектор.

Если начало и конец вектора совпадают, скажем, с точкой C, то вектор $\overrightarrow{CC}$ называется *нулевым* вектором или *нуль вектором* (рис. 1.2). Т.к. две ориентации нулевого вектора не различимы, то по определению нулевой вектор не имеет ориентации.

Определение 1.2. (Правило параллелограмма.) Если $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ — два вектора с общим началом O, и $OACB$ — параллелограмм, построенный на этих векторах (рис. 1.3), то вектор $\overrightarrow{OC}$ называется *суммой* векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. При этом пишут

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

При построении по правилу треугольника участвуют другие фиксированные векторы, поэтому для фиксированных векторов эти правила разные.

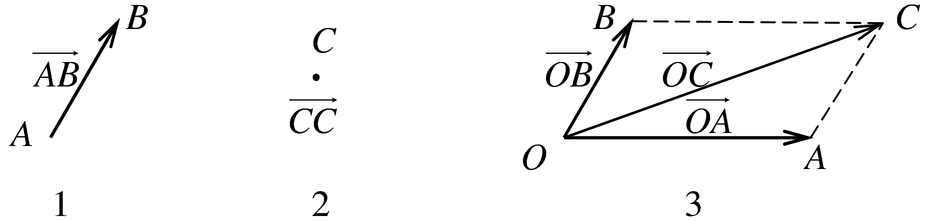

Рис. 1: Вектор $\overrightarrow{AB}$, нулевой вектор $\overrightarrow{CC}$ и правило параллелограмма.

Лемма 1.3. 1) *Сложение коммутативно:*

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}. \qquad (1)$$

2) *Сложение ассоциативно:*

$$\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right). \qquad (2)$$

Доказательство. 1) По правилу параллелограмма левая и правая часть равенства (1), реализуют одну и ту же диагональ параллелограмма (рис. 1.3).

2) По построению левая и правая часть равенства (2), реализуют один и тот же вектор (рис. 2). □

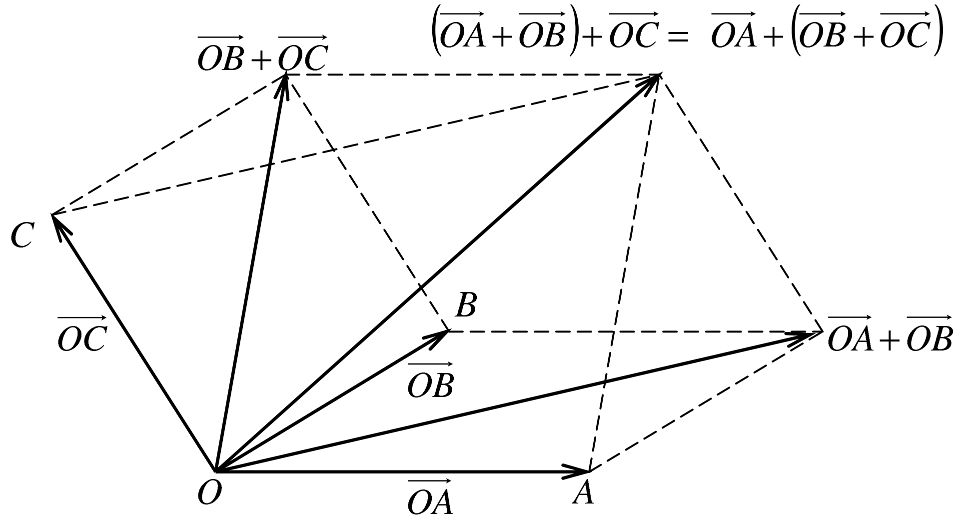

Рис. 2: Ассоциативность сложения.

Рассмотрим какой-либо вектор $\overrightarrow{OA}$, проведём ось Ox, непараллельную этому вектору, и соединим точку 1 на оси Ox с концом вектора $\overrightarrow{OA}$ (рис. 3).

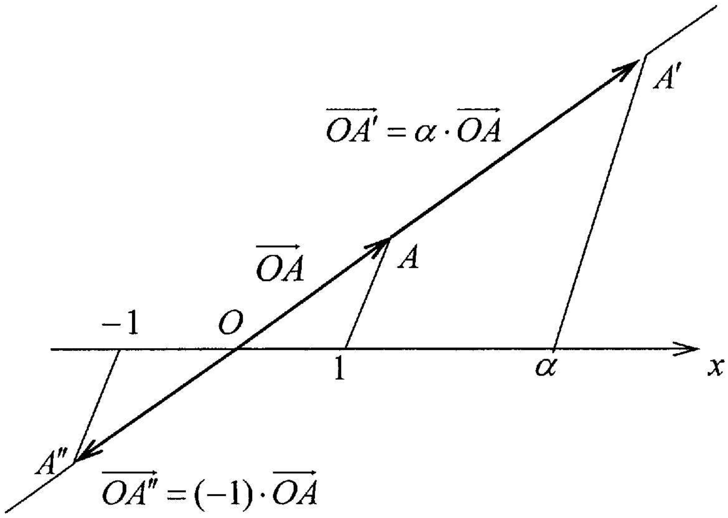

Рис. 3: Умножение вектора на число.

Определение 1.4. *Произведением* вектора $\overrightarrow{OA}$ на число $\alpha \neq 0$ называется вектор $\overrightarrow{OA'}$, построенный по теореме о пропорциональности отрезков на сторонах угла при пересечении параллельными прямыми,

$$\frac{OA}{1} = \frac{OA'}{\alpha},$$

при этом пишут
$$\overrightarrow{OA'} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} = \alpha\,\overrightarrow{OA}.$$

Обратим внимание, что $(-1)\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA''} \neq \overrightarrow{AO}$; см. рис. 3. Если $\alpha = 0$, то по определению полагают $0 \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO}$. По построению векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA'} = \alpha\,\overrightarrow{OA}$ лежат на одной прямой. Деление вектора на число $\beta \neq 0$ определяется как умножение на число $\frac{1}{\beta}$, например, $\frac{\overrightarrow{AB}}{\beta} = \frac{1}{\beta}\overrightarrow{AB}$.

Определение 1.5. Операции суммы векторов и умножения вектора на число называются *линейными* операциями над векторами.

Определение 1.6. *Длиной* вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $|AB| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$. Ясно, что $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right|$ и что $\left|\overrightarrow{AA}\right| = 0$. Вектор, имеющий длину 1, называется *единичным* вектором.

Лемма 1.7. $\left|\alpha\,\overrightarrow{AB}\right| = |\alpha| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Доказательство. Формула следует из опред. 1.4. □

Определение 1.8. 1) Если ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на параллельных прямых, то они называются *коллинеарными*. Пишут: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

2) Если коллинеарные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на прямой и задают на ней одну и ту же ориентацию, то векторы называются *одинаково направленными*; пишут: $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$. В противном случае векторы называются *противоположно направленными*; пишут: $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ или $\overrightarrow{AB} \downarrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

3) Если коллинеарные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на разных параллельных прямых, и отрезки AC и BD не пересекаются, то векторы называются *одинаково направленными*; пишут: $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$. В противном случае, когда отрезки AC и BD пересекаются, векторы называются *противоположно направленными*; пишут: $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ или $\overrightarrow{AB} \downarrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Определение 1.9. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *равными*, пишут $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, если

1) их длины равны: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$ и

2) они одинаково направлены: $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$.

Определение 1.10. 1) Множество всех векторов, равных данному вектору $\overrightarrow{OA}$ называется *свободным* вектором и в печатном тексте обозначают жирным шрифтом, например $\mathbf{a}$. Любой вектор $\overrightarrow{BC} \in \mathbf{a}$ называется *представителем* свободного вектора $\mathbf{a}$.

2) *Длиной* свободного вектора $\mathbf{a}$ называется длина любого его представителя.

3) Пусть $\overrightarrow{AB}$ — представитель ненулевого свободного вектора $\mathbf{a}$. *Направлением* ненулевого вектора $\mathbf{a}$ называется свободный вектор $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$.

Нулевой свободный вектор, обозначаемый $\mathbf{o}$, не имеет направления.

4) свободные векторы $\mathbf{a} =$ и $-\mathbf{a}$ называются противоположными.

Замечание 1.11. 1) Так как свободный вектор $\mathbf{a}$ однозначно определяется любым своим представителем $\overrightarrow{BC} \in \mathbf{a}$, $\overrightarrow{DE} \in \mathbf{a}$ и т.д., то допускается соответственно запись $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{DE}$ и т.д.

2) Ясно, что длина и направление свободного вектора не зависит от выбора представителя.

Лемма 1.12. *Направление есть единичный вектор.*

Доказательство. $|\mathbf{e}| = \left|\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right| \overset{1.7}{=} \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|} = 1$[1]. □

Определение 1.13. *Суммой* двух свободных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется свободный вектор $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, который определяется по следующему правилу:

1) из множества $\mathbf{a}$ выберем какой-нибудь фиксированный вектор и обозначают его $\overrightarrow{OA}$,

2) из множества $\mathbf{b}$ выберем фиксированный вектор с началом в точке O и обозначают его $\overrightarrow{OB}$,

3) Вектор $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ объявляется представителем свободного вектора $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

Замечание 1.14. Свободный вектор определяется любым своим представителем, поэтому для свободных векторов из правила параллелограмма следует правило треугольника (и наоборот); см. рис. 4, поэтому для свободных векторов эти правила эквивалентными.

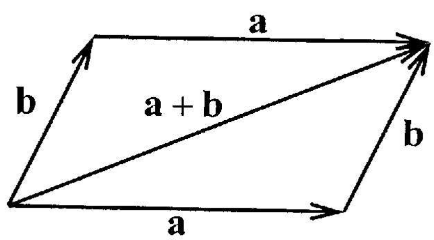

Рис. 4: Правило параллелограмма и два правила треугольника.

Определение 1.15. *Произведение* $\alpha\,\mathbf{a}$ свободного вектора $\mathbf{a}$ на число $\alpha \neq 0$ определяется по следующему правилу:

1) из множества $\mathbf{a}$ выберем какой-нибудь фиксированный вектор $\overrightarrow{OA}$,

2) по опред. 1.4 умножим его на число α и получим вектор $\alpha\,\overrightarrow{OA}$; этот вектор и все равные ему векторы составляют свободный вектор $\alpha\,\mathbf{a}$.

[1] Здесь и далее знак $\overset{1.7}{=}$ означает, что равенство следует из леммы 1.7.

Замечание 1.16. Свободные векторы $\mathbf{a}$ и $-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a}$ называются *противоположными.*

Лемма 1.17. 1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (коммутативность сложения),

2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (ассоциативность сложения),

3) $\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a}$,

4) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$.

Доказательство. 1) и 2) Коммутативность и ассоциативность сложения свободных векторов по построению следует из тех же свойств сложения фиксированных векторов.

Утверждения 3) и 4) очевидны. □

Критерий 1.18. (1-й критерий коллинеарности.) *Ненулевые векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *коллинеарны, согда* [2] *существует число* λ*, такое что* $\mathbf{a} = \lambda\,\mathbf{b}$.

Доказательство. 1) *Необходимость.* Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то по опред. 1.15 либо $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$, либо $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$.

а) Если $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$, то есть векторы имеют одно направление, то $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$, и $\mathbf{a} = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}\,\mathbf{b}$. Положим $\lambda = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$, получим требуемый результат.

б) Если $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$, то есть векторы имеют противоположные направления, то $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = -\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$, и $\mathbf{a} = -\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}\,\mathbf{b}$. Положим $\lambda = -\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$, получим требуемый результат.

2) *Достаточность.* Если $\mathbf{a} = \lambda\,\mathbf{b}$, то по опред. 1.4 векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ лежат на одной прямой и следовательно коллинеарны. □

Определение 1.19. Три ненулевых вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называются *компланарными*, если они параллельны какой-нибудь плоскости.

Определение 1.20. (Общее определение векторного пространства.) Множество $\mathcal{L} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots\}$ называется *векторным* или *линейным* пространством, а его элементы называются *векторами*, если, во-первых, в нём определены две операции, называемые *линейными*;

[2] В математической литературе часто встречается сложный союз "тогда и только тогда, когда" (другие варианты: "в том и только в том случае, если", "для того чтобы ... необходимо и достаточно, чтобы", "если и только если"). Ни в одном языке мира нет короткого союза с тем же смыслом. В письменном английском языке был предложен и получил широкое распространение союз "iff", заменяющий союз "if and only if". В русском языке на ту же роль был предложен новый союз — **согда**, который и звучит по-русски, и имеет достаточно ясную этимологию. Его второй слог **-гда** является активным славянским корнем, указывающий на время; он входит в слова *тогда, всегда, когда, иногда, никогда, некогда.* Первый слог **со-** является не менее активной приставкой, которая служит для образования слов, означая общее участие, совместность и т. п., например, *собеседник, собутыльник, совладелец, современник, сокурсник, сомножитель, сообщник, соотечественник, соучастник.* Смысл слова **согда** означает одновременность выполнения того и другого утверждения, что соответствует длинной форме "тогда и только тогда, когда"(и подобным ей). Союз **согда** был предложен О.Я. Виро, О.А. Ивановым, В.М. Харламовым и Н.Ю. Нецветаевым в их книге *Элементарная топология.*

• для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}$ определено *сложение* $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{L}$, т.е эта сумма есть вектор из пространства $\mathcal{L}$;

• для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ определено *умножение вектора на число* $\alpha\mathbf{x} \in \mathcal{L}$, т.е это произведение есть вектор из пространства $\mathcal{L}$;

во-вторых, для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ и любых чисел α, β эти операции удовлетворяют следующим условиям (аксиомам):

(1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (коммутативность сложения),

(2) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{y} + (\mathbf{x} + \mathbf{z})$ (ассоциативность сложения),

(3) существует нуль-вектор, такой что $\mathbf{x}+\mathbf{o} = \mathbf{x}$ (существование нуля),

(4) для каждого $\mathbf{x}$ существует вектор $-\mathbf{x}$, такой что $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (существование противоположного вектора),

(5) $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ (ассоциативность умножения на число),

(6) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (мультипликативность единицы),

(7) $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения чисел),

(8) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов).

Замечание 1.21. Простейшие свойства.

1) Векторное пространство не бывает пустым; по условию (3) оно содержит как минимум нуль вектор.

2) $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$.

3) Нуль-вектор $\mathbf{o}$ является единственным.

4) Противоположный для $\mathbf{x}$ вектор $-\mathbf{x}$ является единственным.

5) $(-1) \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

6) $(-\alpha) \cdot \mathbf{x} = \alpha(-\mathbf{x}) = -\alpha\mathbf{x}$.

7) Если $\alpha \cdot \mathbf{x} = 0$ и $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, то $\alpha = 0$.

8) Если $\alpha \cdot \mathbf{x} = 0$ и $\alpha \neq 0$, то $\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

Примеры. (Геометрические.) 1) Множество всех векторов на прямой с линейными операциями (опред. 1.5) являются векторным пространством.

2) Множество всех векторов на плоскости с линейными операциями являются векторным пространством.

3) Множества всех векторов в пространстве с линейными операциями являются векторным пространством.

Определение 1.22. Множество всех упорядоченных последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из n вещественных чисел называется *n-мерным арифметическим пространством* и обозначается

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Совокупности чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называются *точками* пространства $\mathbb{R}^n$.

Замечание 1.23. Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ является вместилищем разнообразных объектов, которые задают с помощью (систем) уравнений и неравенств. Например уравнение $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ задаёт стандартную единичную $(n-1)$-мерную сферу $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, а неравенство $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leq 1$ задаёт стандартный единичный n-мерный шар $D^n \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1.24. 1) Если $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — две точки, то *суммой* этих точек называется операция, определённая про формуле

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

2) *Произведением* точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на число α называется операция, определённая про формуле

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Теорема 1.25. *Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ с операциями сложения и умножением на число является векторным пространством.*

Это векторное пространство называется *стандартным* векторным пространством.

Доказательство. Доказательство сводится к проверке опред. 1.20.

• Из опред. 1.24.1) следует, что сумма двух точек принадлежит $\mathbb{R}^n$.

• Из опред. 1.24.2) следует, что произведение точки на число тоже принадлежит $\mathbb{R}^n$.

(1) Коммутативность сложения точек следует из коммутативности сложения вещественных чисел.

(2) Ассоциативность сложения точек следует из коммутативности сложения вещественных чисел.

(3) Нулём является точка (0, 0, ..., 0).

(4) Для каждой точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ точка $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ является противоположной.

(5) Ассоциативность умножения на число следует ассоциативности умножения вещественных чисел.

(6) Мультипликативность единицы очевидна.

(7) Это утверждение следует из дистрибутивности умножения относительно сложения вещественных чисел.

(8) То же как в предыдущем пункте. □

Заметим, что элементы арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ называются токами, а те же элементы векторного пространства $\mathbb{R}^n$ называются векторами.

Примеры. (Алгебраические.) 1) $\mathbb{R}^0 = \{\mathbf{o}\}$ — векторное пространство.

2) Пространства $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ можно интерпретировать как векторные пространства соответственно на прямой, на плоскости и в пространстве.

§2. Линейная зависимость и независимость векторов

Замечание 2.1. Рассмотрим векторное однородное уравнение

$$x_1\,\mathbf{a}_1 + x_2\,\mathbf{a}_2 + \cdots + x_k\,\mathbf{a}_k = \mathbf{o}, \qquad \text{(O)}$$

где x_1, x_2, ..., x_k — искомые числа. Видно, что это уравнение всегда имеет нулевое решение

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (0, 0, \ldots, 0).$$

Замечание 2.2. По закону исключения третьего, уравнение (O)

1) либо имеет только единственное нулевое решение $(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (0, 0, \ldots, 0)$,

2) либо кроме нулевого имеет ещё и ненулевое решение $(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, где хотя бы одно альфа отлично от нуля.

Определение 2.3. Если уравнение (O) имеет только нулевое решение, то векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$ называются *линейно независимыми.*

Определение 2.4. Если уравнение (O) имеет ненулевое решение, то эти векторы называются *линейно зависимыми.*

Лемма 2.5. *Если совокупность векторов содержит нуль-вектор* $\mathbf{o}$, *например,* $\mathbf{o}$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots, \mathbf{a}_n$, *то векторы линейно зависимы.*

Доказательство. Ясно что уравнение

$$x_1\,\mathbf{o}_1 + x_2\,\mathbf{a}_2 + \cdots + x_k\,\mathbf{a}_k = \mathbf{o}$$

имеет ненулевое решение $(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (1, 0, \ldots, 0)$. Поэтому по опред. 2.4 векторы $\mathbf{o}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы. □

Теорема 2.6. (Критерий линейной зависимости.) *Векторы* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$ *линейно зависимы, согда один из них можно выразить через остальные.*

Доказательство. 1) *Необходимость.* Если векторы линейно зависимы, то в уравнении (O) один из x-ов отличен от нуля. Без потери общности положим $x_1 \neq 0$, Тогда из уравнения (O) можно выразить $\mathbf{a}_1$ через остальные: $\mathbf{a}_1 = -\frac{x_2}{x_1}\mathbf{a}_2 - \cdots - \frac{x_k}{x_1}\mathbf{a}_k$.

2) *Достаточность.* Если один из векторов, например. $\mathbf{a}_1$, выражается через остальные, т.е. $\mathbf{a}_1 = \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k$, то $\mathbf{a}_1 - \beta_2\mathbf{a}_2 - \cdots - \beta_n\mathbf{a}_n = 0$. Это означает, что уравнение (O) имеет ненулевое решение $(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (1, -\beta_2, \ldots, -\beta_k)$. Поэтому по опред. 2.4 эти векторы линейно зависимы. □

Следствие 2.7. (Критерий линейной независимости.) *Векторы линейно независимы, согда никакой из них нельзя линейно выразить через остальные.*

Теорема 2.8. (О линейной зависимости совокупности векторов, имеющей линейно зависимую подсовокупность.) *Если векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *линейно зависимы, то векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_l$*, где* $k < l$*, тоже линейно зависимы.*

Доказательство. По опред. 2.4 уравнение (O): $x_1\,\mathbf{a}_1 + x_2\,\mathbf{a}_2 + \cdots + x_k\,\mathbf{a}_k = \mathbf{o}$ имеет ненулевое решение $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ (т.е. хотя бы один из x-ов отличен от нуля). Это означает, что уравнение $x_1\,\mathbf{a}_1 + x_2\,\mathbf{a}_2 + \cdots + x_k\,\mathbf{a}_k + x_{k+1}\,\mathbf{a}_{k+1} + \ldots + x_l\,\mathbf{a}_l = \mathbf{o}$ тоже имеет ненулевое решение $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ x_{k+1} = \ldots = x_l = 0$. Поэтому по опред. 2.4 векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_l$ линейно зависимы. □

Остальная часть этого параграфа посвящена геометрической интерпретации линейной зависимости и независимости на прямой, на плоскости и в пространстве.

Теорема 2.9. (Критерий линейной зависимости одного вектора.) *Вектор* $\mathbf{a}$ *линейно зависим, согда* $\mathbf{a} = \mathbf{o}$.

Доказательство. 1) *Необходимость.* Если $\mathbf{a}$ линейно зависим, тогда по опред. 2.4 уравнение $x\mathbf{a} = \mathbf{o}$ имеет ненулевое решение $x \neq 0$. Тогда необходимо $\mathbf{a} = \mathbf{o}$.

2) *Достаточность.* Следует из 2.5. □

Следствие 2.10. (Критерий линейной независимости одного вектора.) *Вектор* $\mathbf{a}$ *линейно независим, согда* $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$.

Теорема 2.11. (Критерий линейной зависимости двух векторов.) *Два ненулевых вектора* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *линейно зависимы, согда они коллинеарны.*

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ линейно зависимы. Тогда по крит. 2.6 один из них выражается через другой, скажем $\mathbf{a}_1 = \lambda\mathbf{a}_2$, тогда по 1-му критерию коллинеарности 1.18 они коллинеарны.

2) *Достаточность.* Доказывается в обратном порядке. □

Следствие 2.12. (Критерий линейной независимости двух векторов.) *Два ненулевых вектора* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *линейно независимы, согда они не коллинеарны.*

Следствие 2.13. *Любые два вектора на прямой линейно зависимы.*

Критерий 2.14. (Разложения вектора по двум неколлинеарным векторам.) *Если векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *линейно независимы, то векторы* $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ *компланарны, согда существует такая пара чисел* λ_1 *и* λ_2*, что* $\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2$.

Доказательство. 1) *Необходимость.* Если векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ линейно независимы, то по след. 2.12 они не коллинеарны; см. рис. 5. Т.к. векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ компланарны, то по правилу параллелограмма вектор $\mathbf{a}$ можно разложить по направлениям векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, т.е. $\mathbf{a} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, где $\mathbf{b}_1 \parallel \mathbf{a}_1$ и $\mathbf{b}_2 \parallel \mathbf{a}_2$. По 1-му критерию коллинеарности 1.18 существуют λ_1 и λ_2, такие что $\mathbf{b}_1 = \lambda_1\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{b}_2 = \lambda_2\mathbf{a}_2$, поэтому $\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2$.

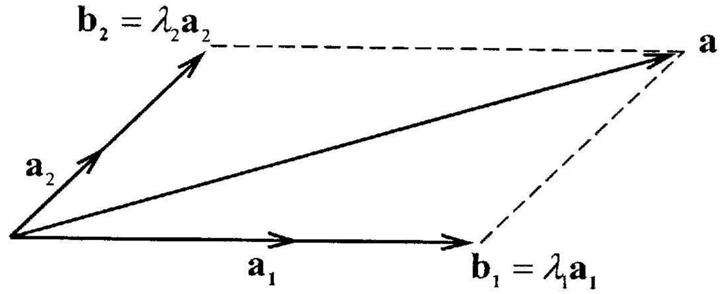

Рис. 5: $\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2$.

2) *Достаточность.* Если $\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2$, то вектор $\mathbf{a}$ лежит в плоскости векторов , $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, поэтому векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ компланарны. □

Критерий 2.15. (1-й критерий компланарности.) *Ненулевые векторы* $\mathbf{a}_1$*,* $\mathbf{a}_2$*,* $\mathbf{a}_3$ *компланарны, согда* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ *линейно зависимы.*

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ компланарны. По закону исключения третьего возможны два случая либо $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2$, либо $\mathbf{a}_1 \nparallel \mathbf{a}_2$.

а) Если $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2$, то по теор. 2.11 векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ линейно зависимы, а по теор. 2.8 векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно зависимы.

б) Если $\mathbf{a}_1 \nparallel \mathbf{a}_2$, то по след. 2.12 эти векторы линейно независимы. Тогда по теор. 2.14 имеем $\mathbf{a}_3 = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2$, а по крит. 2.6 векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно зависимы.

2) *Достаточность.* Если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно зависимы, то по крит. 2.6 имеем $\mathbf{a}_3 = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2$, следовательно по крит. 2.14 векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ компланарны. □

Следствие 2.16. *Любые три вектора на плоскости линейно зависимы.*

Следствие 2.17. *Ненулевые векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ *не компланарны, согда* $\mathbf{a}_1$*,* $\mathbf{a}_2$*,* $\mathbf{a}_3$ *линейно независимы.*

Теорема 2.18. (О разложении вектора по трём некомпланарным векторам.) *Если в 3-мерном пространстве векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ *линейно независимы, то для любого вектора* $\mathbf{a}$ *существует такая тройка чисел* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$*, что* $\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3$.

Доказательство. По правилу параллелепипеда вектор $\mathbf{a}$ можно разложить по направлениям векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$; см. рис. 6, т.е. $\mathbf{a} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$, где $\mathbf{b}_1 \parallel \mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_2 \parallel \mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_3 \parallel \mathbf{a}_3$. По 1.18 существуют λ_1, λ_2 и λ_3, такие что $\mathbf{b}_1 = \lambda_1 \mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_2 = \lambda_2 \mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_3 = \lambda_1 \mathbf{a}_3$. Поэтому $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$. □

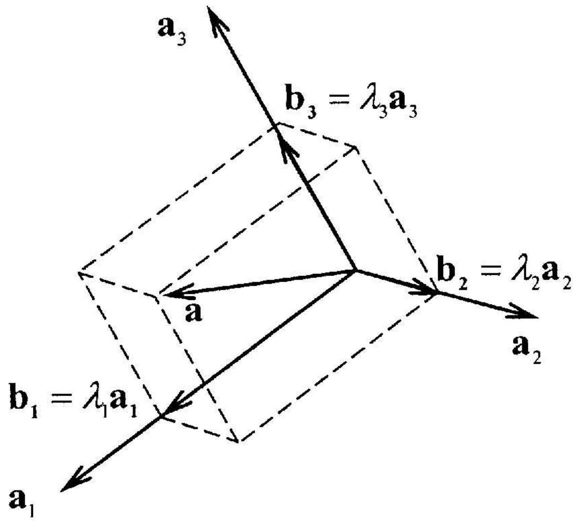

Рис. 6: $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$.

Теорема 2.19. *Любые четыре вектора* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ *в пространстве линейно зависимы.*

Доказательство. По закону исключения третьего возможны два случая либо $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно зависимы, либо $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно независимы.

а) Если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно зависимы, то по теор. 2.8 векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ тоже линейно зависимы.

б) Если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно независимы, то теор. 2.18 $\mathbf{a}_4 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$, а по крит. 2.6 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ линейно зависимы. □

§3. Базис. Координаты вектора в базисе.

Определение 3.1. Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ называются *базисом* векторного пространства $\mathcal{L}$ (см. опред. 1.20), если

а) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ — линейно независимы и

б) любой вектор $\mathbf{a}$ из $\mathcal{L}$ можно разложить по этим векторам:

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + a_n \mathbf{e}_n,$$

при этом числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются *координатами* вектора $\mathbf{a}$ в этом базисе.

Определение 3.2. Число векторов в базисе векторного пространства $\mathcal{L}$ называется *размерностью* этого пространства и обозначается $\dim\mathcal{L}$.

Лемма 3.3. (О стандартном базисе.) 1) *При $n \geq 1$ векторное пространство $\mathbb{R}^n$ имеет стандартный базис*

$$\begin{aligned}&\mathbf{e}_1 = (1,\,0,\,\ldots,\,0),\\ &\mathbf{e}_2 = (0,\,1,\,\ldots,\,0),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\mathbf{e}_n = (0,\,0,\,\ldots,\,1),\end{aligned}$$

который называется *стандартным* базисом

2) *Пространство $\mathbb{R}^0$ не имеет базиса.*

3) $\dim\mathbb{R}^n = n$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. 1) Проверим, что эти векторы удовлетворяют опред. 3.1.

а) Запишем векторное уравнение

$$x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{e}_n = \mathbf{o}$$

в координатной форме (см. опред. 1.24)

$$x_1\,(1,\,0,\,\ldots,\,0) + x_2\,(0,\,1,\,\ldots,\,0) + \cdots + x_n\,(0,\,0,\,\ldots,\,1) = (0,\,0,\,\ldots,\,0),$$

$$(x_1,\,0,\,\ldots,\,0) + (0,\,x_2,\,\ldots,\,0) + \cdots + (0,\,0,\,\ldots,\,x_n) = (0,\,0,\,\ldots,\,0),$$

$$(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n) = (0,\,0,\,\ldots,\,0).$$

Т.о. исходное векторное уравнение имеет только нулевое решение, поэтому по опред. 2.3 векторы $\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2,\,\ldots,\,\mathbf{e}_n$ линейно независимы.

б) Любой вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ очевидно раскладывается по этим векторам: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1(1, 0, \ldots, 0) + a_2(0, 1, \ldots, 0) + \cdots + a_n(0, 0, \ldots, 1) = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n$.

2) Пространство $\mathbb{R}^0$ состоит из единственного нулевого вектора $\mathbf{o}$. По 2.9 совокупность из одного вектора $\mathbf{o}$ линейно зависима. Поэтому в 0-мерном пространстве нет независимых векторов, следовательно пункт 1) опред. 3.1 не выполнен, это означает, что пространство $\mathbb{R}^0$ не имеет базиса. (В $\mathbb{R}^0$ нечего раскладывать.)

3) Очевидно по опред. 3.2. □

Теорема 3.4. *Базисом на прямой является любой ненулевой вектор на этой прямой.*

Доказательство. Доказательство сводится к проверке опред. 3.1. Во-первых, по теор. 2.9 каждый ненулевой вектор $\mathbf{e}$ линейно независим, Во-вторых, любой вектор $\mathbf{a}$ на прямой коллинеарен вектору $\mathbf{e}$, и по 1-му критерию коллинеарности 1.18 $\mathbf{a} = \lambda\,\mathbf{e}$. □

Теорема 3.5. *Базисом на плоскости является любая пара неколлинеарных векторов* $\mathbf{e}_1$ *и* $\mathbf{e}_2$.

Доказательство. Доказательство сводится к проверке опред. 3.1. Во-первых, по след. 2.12 каждая пара неколлинеарных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на плоскости являются линейно независимыми. Во-вторых, т.к. любые три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ на плоскости компланарны, то по 2.14 $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2$. □

Лемма 3.6. *Базисом в пространстве является любая тройка некомпланарных векторов.*

Доказательство. Доказательство сводится к проверке опред. 3.1. Во-первых, по теор. 2.17 любые три некомпланарных вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ являются линейно независимыми. Во-вторых, по 2.18 любой вектор $\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{e}_1 + a_2\,\mathbf{e}_2 + a_3\,\mathbf{e}_3$. □

Теорема 3.7. *Если* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ *— базис и* $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n$ *— разложение вектора* $\mathbf{a}$ *по этому базису, то координаты* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *определены однозначно.*

Доказательство. Предположим противное, что

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n$$

$$\mathbf{a} = a_1'\mathbf{e}_1 + a_2'\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n'\mathbf{e}_n$$

— два разных разложения, т.е. $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (a_1', a_2', \dots, a_n')$ или $(a_1 - a_1', a_2 - a_2', \dots, a_n - a_n') \neq (0, 0, \dots, 0)$. Вычтем из верхнего равенства почленно нижнее, получим

$$\mathbf{o} = (a_1 - a_1')\mathbf{e}_1 + (a_2 - a_2')\mathbf{e}_2 + \cdots + (a_n - a_n')\mathbf{e}_n.$$

Т.к. векторы базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ линейно независимы, то $(a_1 - a_1', a_2 - a_2', \dots, a_n - a_n') = (0, 0, \dots, 0)$. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Следствие 3.8. *Если* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ *— базис, то векторы*

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n,$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n$$

равны, согда

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n.$$

Критерий 3.9. (2-й критерий коллинеарности.) *Векторы*

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n,$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \dots + b_n\mathbf{e}_n$$

коллинеарны, согда

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Доказательство. 1) *Необходимость.* Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то по 1-му критерию коллинеарности существует λ, такое что $\mathbf{a} = \lambda\,\mathbf{b}$, т.е.

$$a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \dots + a_n\mathbf{e}_n = \lambda b_1\mathbf{e}_1 + \lambda b_2\mathbf{e}_2 + \dots + \lambda b_n\mathbf{e}_n.$$

По лемме 3.8 имеем $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, $\dots$ $a_n = \lambda b_n$. Решая эти уравнения относительно λ, получим требуемый результат

$$\lambda = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

2) *Достаточность.* Доказывается в обратном порядке. □

Определение 3.10. При $n = 2$ и $n = 2$

1) базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ называется *ортогональным*, если его векторы попарно перпендикулярны;

2) ортогональный базис называется *ортонормированным*, если $|\mathbf{e}_1| = 1$, $|\mathbf{e}_2| = 1$, $\dots$, $|\mathbf{e}_n| = 1$.

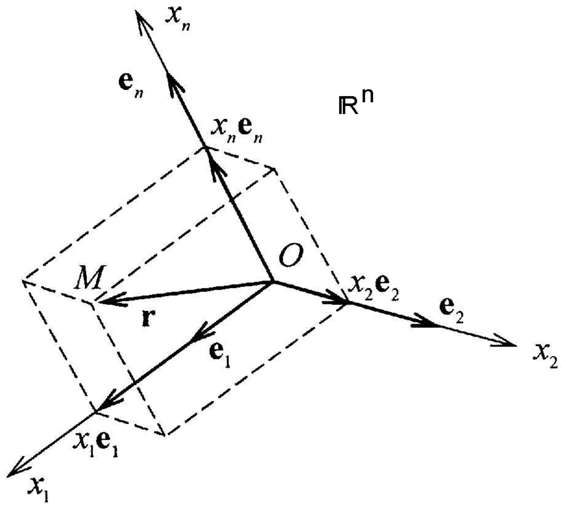

Рис. 7:

§4. Координаты точки.

Определение 4.1. Совокупность фиксированной точки O и базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\dots$, $\mathbf{e}_n$ называется *аффинной системой координат.* Обозначение: $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2,$

$\ldots, \mathbf{e}_n$). Если базис ортогональный (соотв. ортонормальный), то система координат называется *ортогональной* (соотв. *декартовой*).

Определение 4.2. Для точки $M \in \mathbb{R}^n$ и базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ в $\mathbb{R}^n$ вектор $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ называется *радиус-вектором* точки M, а его координаты называются *координатами* точки M в этой аффинной системе координат. Обозначение $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Прямые $Ox_1, Ox_2, \ldots, Ox_n$, проходящие через точку O и параллельные базисным векторам, называются *координатными осями*; см. рис. 7. Ясно, что точка M и её радиус-вектор $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ имеют одни и те же координаты.

Лемма 4.3. *Если $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ координаты точек, то $\overrightarrow{AB} = (a_1 - b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (a_n - b_n)\mathbf{e}_n$.* (См. рис. 8.)

Доказательство. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (a_1 - b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + (a_n - b_n)\mathbf{e}_n$. □

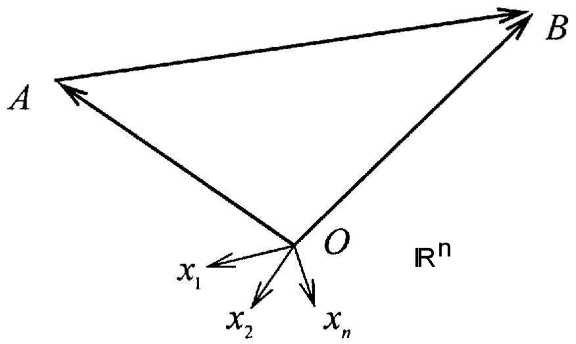

Рис. 8:

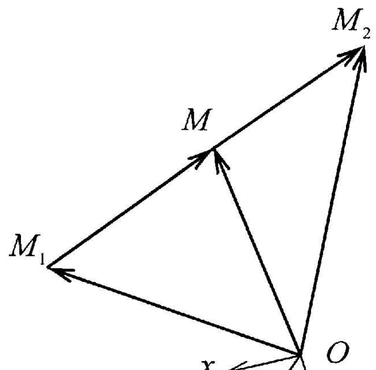

Рис. 9:

Теорема 4.4. (Деление отреза в данном отношении.) *Пусть $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ – две точки. Если точка $M = (x, y, z)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{|\overrightarrow{M_1M}|}{|\overrightarrow{MM_2}|}$, то координаты точки M вычисляются по* *формулам*

$$x = \frac{\beta x_1 + \alpha x_2}{\alpha + \beta}, \quad y = \frac{\beta y_1 + \alpha y_2}{\alpha + \beta}, \quad z = \frac{\beta z_1 + \alpha z_2}{\alpha + \beta}.$$

Доказательство. Выразим координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ через координаты точек M_1 и M_2; см. рис. 9. Т.к. $\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{MM_2}$, то по 1-му критерию коллинеарности 1.18 имеем

$$\overrightarrow{M_1M} = \frac{\alpha}{\beta}\,\overrightarrow{MM_2},$$

$$\beta(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1}) = \alpha(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM}),$$

$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{OM} = \alpha\,\overrightarrow{OM_2} + \beta\,\overrightarrow{OM_1},$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\,\overrightarrow{OM_2} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\,\overrightarrow{OM_1} =$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\,(x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3) + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\,(x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3) =$$

$$= \frac{\beta x_1 + \alpha x_2}{\alpha + \beta}\,\mathbf{e}_1 + \frac{\beta y_1 + \alpha y_2}{\alpha + \beta}\,\mathbf{e}_2 + \frac{\beta z_1 + \alpha z_2}{\alpha + \beta}\,\mathbf{e}_3.$$

□

§5. Скалярная и векторная проекции вектора.

Определение 5.1. *Углом* φ между ненулевыми векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется наименьший положительный угол между ними: $\varphi = \angle(\mathbf{a}\ \mathbf{b})$; см. рис. 10.

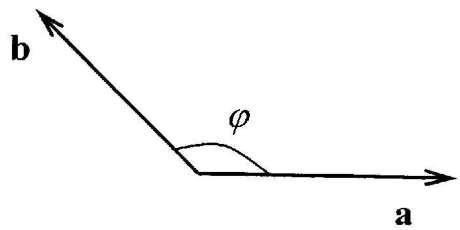

Рис. 10: Угол между векторами: $0 \le \varphi \le \pi$.

Определение 5.2. *Скалярной проекцией* вектора $\mathbf{a}$ на ненулевой вектор $\mathbf{b}$ называется число $pr_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\varphi$.

Определение 5.3. *Векторной проекцией* вектора $\mathbf{a}$ на ненулевой вектор $\mathbf{b}$ называется вектор $\overrightarrow{Pr}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (pr_{\mathbf{b}}\mathbf{a})\,\mathbf{e}$, где $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ – направление вектора $\mathbf{b}$; см. рис. 11.

Лемма 5.4. *Пусть* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *– векторы,* $\mathbf{c} \neq \mathbf{o}$, *и* α *– число. Тогда*

1) $\overrightarrow{Pr}_{\mathbf{c}}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\overrightarrow{Pr}_{\mathbf{c}}\mathbf{a}$,

2) $\overrightarrow{Pr}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \overrightarrow{Pr}_{\mathbf{c}}\mathbf{a} + \overrightarrow{Pr}_{\mathbf{c}}\mathbf{b}$.

Доказательство. Доказательство сводится к построению, показанному на рис. 12. □

Лемма 5.5. *Пусть* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *– векторы,* $\mathbf{c} \neq \mathbf{o}$, *и* α *– число. Тогда*
1) $pr_{\mathbf{c}}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha pr_{\mathbf{c}}\mathbf{a}$,
2) $pr_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = pr_{\mathbf{c}}\mathbf{a} + pr_{\mathbf{c}}\mathbf{b}$.

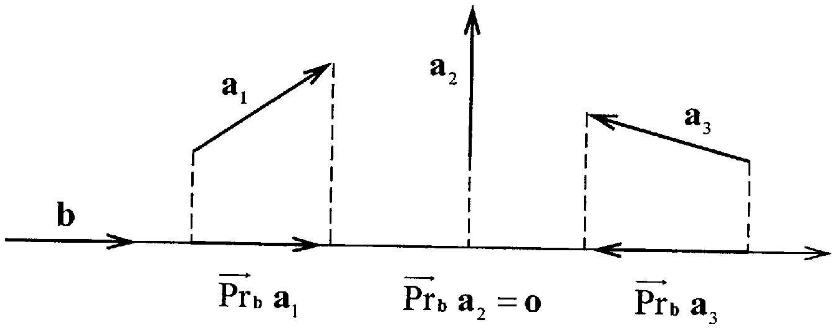

Рис. 11: Векторная проекция.

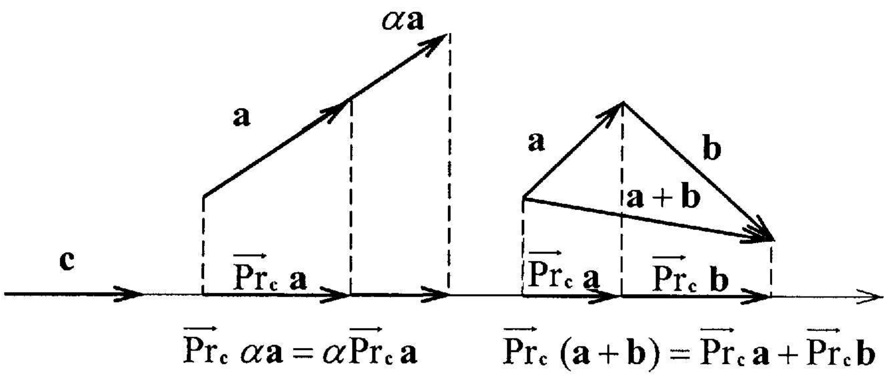

Рис. 12: Доказательство теор. 5.4.

Доказательство. 1) По лемме 5.4.1) имеем $\overrightarrow{Pr}_{\mathbf{c}}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\overrightarrow{Pr}_{\mathbf{c}}\mathbf{a}$. По опред. 5.3

$$pr_{\mathbf{c}}(\alpha\mathbf{a}) \cdot \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = \alpha\, pr_{\mathbf{c}}(\mathbf{a})\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|},$$

т.е.

$$[pr_{\mathbf{c}}(\alpha\mathbf{a}) - \alpha\, pr_{\mathbf{c}}(\mathbf{a})]\,\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = \mathbf{o},$$

т.к. направление $\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} \neq \mathbf{o}$, то по свойству 1.21.7) $pr_{\mathbf{c}}(\alpha\mathbf{a}) - \alpha\, pr_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}) = 0$, откуда следует требуемый результат.

2) По лемме 5.4.2) имеем $\overrightarrow{Pr}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \overrightarrow{Pr}_{\mathbf{c}}\mathbf{a} + \overrightarrow{Pr}_{\mathbf{c}}\mathbf{b}$. По опред. 5.3

$$[pr_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{b})]\,\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = pr_{\mathbf{c}}\mathbf{a}\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} + pr_{\mathbf{c}}\mathbf{b}\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|},$$

т.е.

$$[pr_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) - pr_{\mathbf{c}}\mathbf{a} - pr_{\mathbf{c}}\mathbf{b}]\,\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = \mathbf{o}$$

т.к. направление $\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} \neq \mathbf{o}$, то по свойству 1.21.7) $pr_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) - pr_{\mathbf{c}}\mathbf{a} - pr_{\mathbf{c}}\mathbf{b} = 0$, откуда следует требуемый результат. □

§6. Скалярное произведение.

Определение 6.1. *Скалярным произведением* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\varphi,$$

где φ – угол между этими векторами.

Если $\mathbf{a} = \mathbf{o}$ или $\mathbf{b} = \mathbf{o}$, то $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$. Всюду в этом параграфе оба сомножителя отличны от $\mathbf{o}$

Лемма 6.2. $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\cdot pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cdot pr_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$.

Доказательство. Формула очевидно следует из опредд. 5.2 и 6.1. □

Теорема 6.3. (Свойства скалярного произведения.)

1) $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\mathbf{a})$ (коммутативность),
2) $(\alpha\mathbf{a},\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a},\mathbf{b})$,
3) $(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{c}) + (\mathbf{b},\mathbf{c})$,
4) $(\mathbf{a},\beta\mathbf{b}) = \beta(\mathbf{a},\mathbf{b})$,
5) $(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{b}) + (\mathbf{a},\mathbf{c})$
6) $(\mathbf{a},\mathbf{a}) \geq 0$; $(\mathbf{a},\mathbf{a}) = 0$, согда $\mathbf{a} = \mathbf{o}$,
7) $|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}$,
8) если $\mathbf{a} \neq 0$ и $\mathbf{b} \neq 0$, то $\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$.

Доказательство. 1) Очевидно следует из опред. 6.1.

2) $(\alpha\mathbf{a},\mathbf{b}) \overset{6.2}{=} |\mathbf{b}|\cdot pr_{\mathbf{b}}(\alpha\mathbf{a}) \overset{5.5.1}{=} \alpha|\mathbf{b}|\cdot pr_{\mathbf{b}}\mathbf{a} \overset{6.2}{=} \alpha(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

3) $(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}) \overset{6.2}{=} |\mathbf{c}|\cdot pr_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \overset{5.5.2)}{=} |\mathbf{c}|\cdot pr_{\mathbf{c}}\mathbf{a} + |\mathbf{c}|\cdot pr_{\mathbf{c}}\mathbf{b} \overset{6.2}{=} (\mathbf{a},\mathbf{c}) + (\mathbf{b},\mathbf{c})$.

4) $(\mathbf{a},\beta\mathbf{b}) \overset{6.3.1)}{=} (\beta\mathbf{b},\mathbf{a}) \overset{6.3.2)}{=} \beta(\mathbf{b},\mathbf{a}) \overset{6.3.1)}{=} \beta(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

5) $(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c}) \overset{6.3.1)}{=} (\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{a}) \overset{6.3.3)}{=} (\mathbf{b},\mathbf{a}) + (\mathbf{c},\mathbf{a}) \overset{6.3.1)}{=} (\mathbf{a},\mathbf{b}) + (\mathbf{a},\mathbf{c})$.

6) $(\mathbf{a},\mathbf{a}) \overset{6.1}{=} |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{a}|\cos 0 = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$. Ясно, что $(\mathbf{a},\mathbf{a}) = 0$, согда $\mathbf{a} = \mathbf{o}$.

7) Т.к. $(\mathbf{a},\mathbf{a}) \overset{6.1}{=} |\mathbf{a}|^2$, то $|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}$.

8) Этот пункт следует из опред. 6.1. □

Определение 6.4. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *ортогональными* (или *перпендикулярными*), если угол φ между ними прямой. Обозначение: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Критерий 6.5. (Ортогональности векторов.) *Ненулевые векторы ортогональны, согда их скалярное произведение равно нулю.*

Доказательство. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, согда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, согда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$. □

Таблица 6.6. Таблица скалярного умножения векторов ортонормированного базиса $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

$\mathbf{a} \diagdown \mathbf{b}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	1	0	0
$\mathbf{j}$	0	1	0
$\mathbf{k}$	0	0	1

Теорема 6.7. (О вычислении в ортогональных координатах.) *Если* $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ *и* φ *– угол между ними, то*

1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$,
2) $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$,
3) $\cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$.

Доказательство. 1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \overset{6.3.3) \text{ и } 5)}{=}$

$$\begin{aligned} &= (a_1\mathbf{i}, b_1\mathbf{i}) + (a_1\mathbf{i}, b_2\mathbf{j}) + (a_1\mathbf{i}, b_3\mathbf{k}) + \\ &+ a_2\mathbf{j}, b_1\mathbf{i}) + (a_2\mathbf{j}, b_2\mathbf{j}) + (a_2\mathbf{j}, b_3\mathbf{k}) + \\ &+ (a_3\mathbf{k}, b_1\mathbf{i}) + (a_3\mathbf{k}, b_2\mathbf{j}) + (a_3\mathbf{k}, b_3\mathbf{k}) \overset{6.3.2) \text{ и } 4)}{=} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a_1 b_1(\mathbf{i}, \mathbf{i}) + a_1 b_2(\mathbf{i}, \mathbf{j}) + a_1 b_3(\mathbf{i}, \mathbf{k}) + \\ &+ a_2 b_1(\mathbf{j}, \mathbf{i}) + a_2 b_2(\mathbf{j}, \mathbf{j}) + a_2 b_3(\mathbf{j}, \mathbf{k}) + \\ &+ a_3 b_1(\mathbf{k}, \mathbf{i}) + a_3 b_2(\mathbf{k}, \mathbf{j}) + a_3 b_3(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \overset{6.6}{=} \end{aligned}$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3;$$

2) $|\mathbf{a}| \overset{6.3.7)}{=} \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \overset{6.7.1)}{=} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$;

3) Этот пункт следует из 6.3.8), 6.7.1) и 6.7.2). □

Определение 6.8. Если $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, то углы $\alpha = \angle(\mathbf{a}\mathbf{i})$, $\beta = \angle(\mathbf{a}\mathbf{j})$, $\gamma = \angle(\mathbf{a}\mathbf{k})$ называются *направляющими* углами вектора $\mathbf{a}$, а их косинусы – *направляющими* косинусами; см. рис. 13.

Лемма 6.9. (О направляющий косинусах.) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. (Эта формула является обобщением основного тригонометрического тождества $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.)

Доказательство. Пусть $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$. Имеем $a_1 = pr_{\mathbf{i}}\mathbf{a} \overset{5.2}{=} |\mathbf{a}|\cos\alpha$, т.е. $a_1 = |\mathbf{a}|\cos\alpha$. Аналогично $a_2 = |\mathbf{a}|\cos\beta$ и $a_3 = |\mathbf{a}|\cos\gamma$. Поэтому

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\alpha\,\mathbf{i} + |\mathbf{a}|\cos\beta\,\mathbf{j} + |\mathbf{a}|\cos\gamma\,\mathbf{k}. \qquad (\star).$$

Далее

$$|\mathbf{a}|^2 \overset{6.3.7)}{=} (\mathbf{a},\mathbf{a}) \overset{6.7.1)}{=} |\mathbf{a}|^2\cos^2\alpha + |\mathbf{a}|^2\cos^2\beta + |\mathbf{a}|^2\cos^2\gamma.$$

Разделив левую и правую части этого сквозного равнства на $|\mathbf{a}|^2$, получаем требуемый результат. □

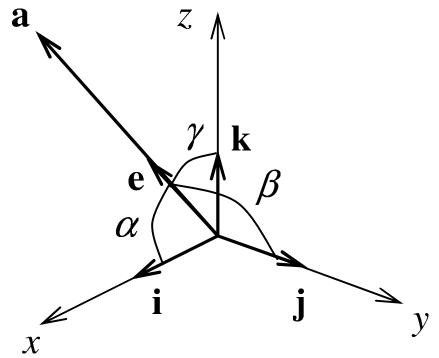

Рис. 13:

Лемма 6.10. (О координатах единичного вектора.) *Координатами любого единичного вектора являются его направляющие косинусы* (см. рис. 13):

$$\mathbf{e} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}.$$

Доказательство. Запишем формулу $(\star)$ для единичного вектора $\mathbf{e}$:

$$\mathbf{e} = |\mathbf{e}|\cos\alpha\,\mathbf{i} + |\mathbf{e}|\cos\beta\,\mathbf{j} + |\mathbf{e}|\cos\gamma\,\mathbf{k}.$$

Подставим $|\mathbf{e}| = 1$, получим требуемую формулу. □

§7. Векторное и смешанное произведения

Определение 7.1. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется *правой*, если кратчайший поворот от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ виден с конца вектора $\mathbf{c}$ против часовой стрелки. В противном случае тройка называется *левой*; см. рис. 14.

Определение 7.2. Каждая из этих двух возможностей (быть правой или левой тройкой) называется *ориентацией* тройки. Левая и правая ориентации называются *противоположными* (друг другу).

Лемма 7.3. *Тройки* $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$; $\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$,$\mathbf{a}$; $\mathbf{c}$,$\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$ *имеют одну ориентацию, а тройки* $\mathbf{b}$,$\mathbf{a}$,$\mathbf{c}$; $\mathbf{a}$,$\mathbf{c}$,$\mathbf{b}$; $\mathbf{c}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{a}$ *— противоположную ориентацию.*

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить выполнение опред. 7.1 для каждой из шести троек рис. 14. □

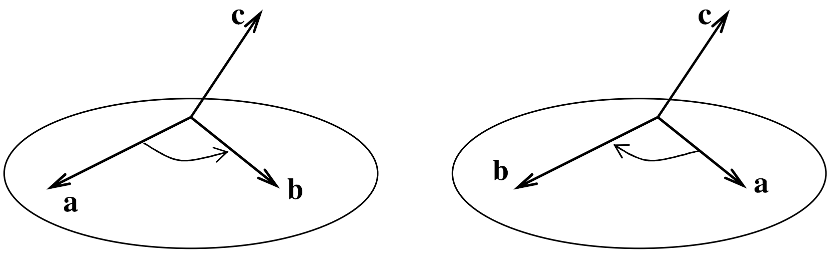

Рис. 14: Правая и левая тройки.

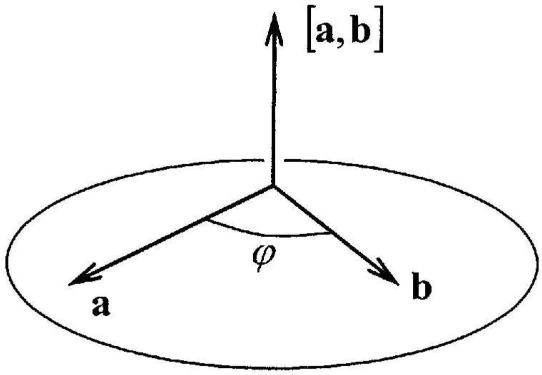

Рис. 15: Векторное произведение.

Определение 7.4. *Векторным произведением* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор, который обозначают $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, и который удовлетворяет следующим трём условиям.

1) Длина векторного произведения определяется по формуле $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$.

2) Векторное произведение перпендикулярно сомножителям, то есть $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \perp \mathbf{a}$ и $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \perp \mathbf{b}$.

3) Тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — правая; см. рис. 15.

Пункт 1) определяет длину векторного произведения, а пункты 2) и 3) его направление.

По определению полагаем, что $[\mathbf{o}, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \mathbf{o}] = [\mathbf{o}, \mathbf{o}] = \mathbf{o}$.

Критерий 7.5. (3-й критерий коллинеарности.) *Ненулевые векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *коллинеарны, согда* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{o}$.

Доказательство. Ненулевые векторы коллинеарны, согда угол φ между ними равен либо 0, либо π, согда $\sin\varphi = 0$, согда $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{o}$. □

Замечание 7.6. В курсе школьной математики доказано, что площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, определяется по формуле $S = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$. По опред. 7.4 длина векторного произведения определяется по той же формуле $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$. Это совпадение не случайно; длина векторного произведения $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|$ была специально выбрана *численно* равной площади S параллелограмма для удобства вычисления площадей методами векторной алгебры; см. рис. 16.

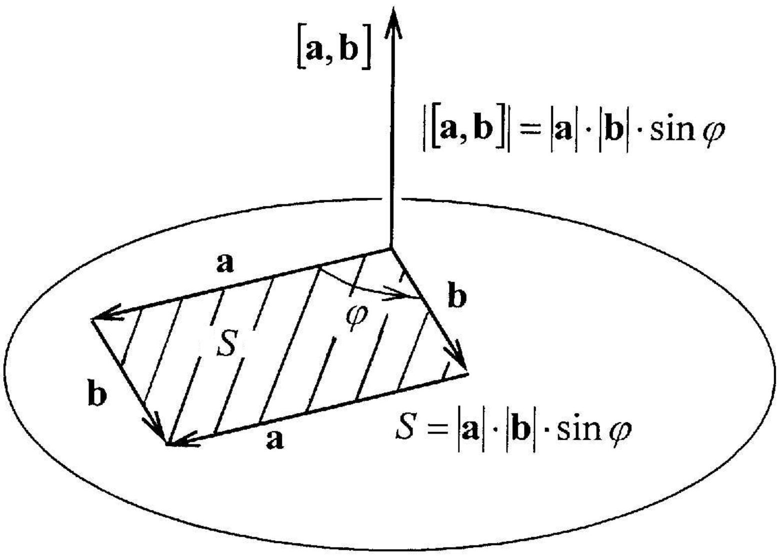

Рис. 16: Длина векторного произведения *численно* равна площади параллелограмма.

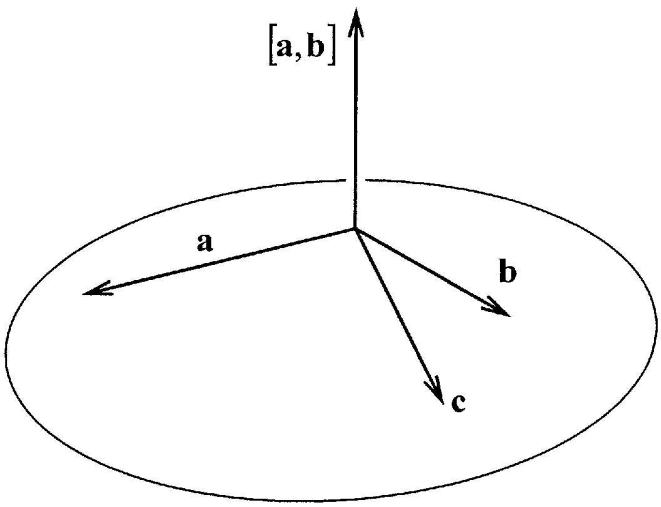

Рис. 17: К доказательству 2-го критерия компланарности 7.8.

Определение 7.7. *Смешанным* (*векторно-скалярным*) произведением векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется число $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})$. Обозначение: $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Критерий 7.8. (2-й критерий компланарности.) *Ненулевые векторы* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *компланарны, согда* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

Доказательство. См. рис. 17. Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны, согда по опред. 7.4 имеем $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \perp \mathbf{c}$, согда по критерию ортогональности 6.5 имеем $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = 0$ $\square$

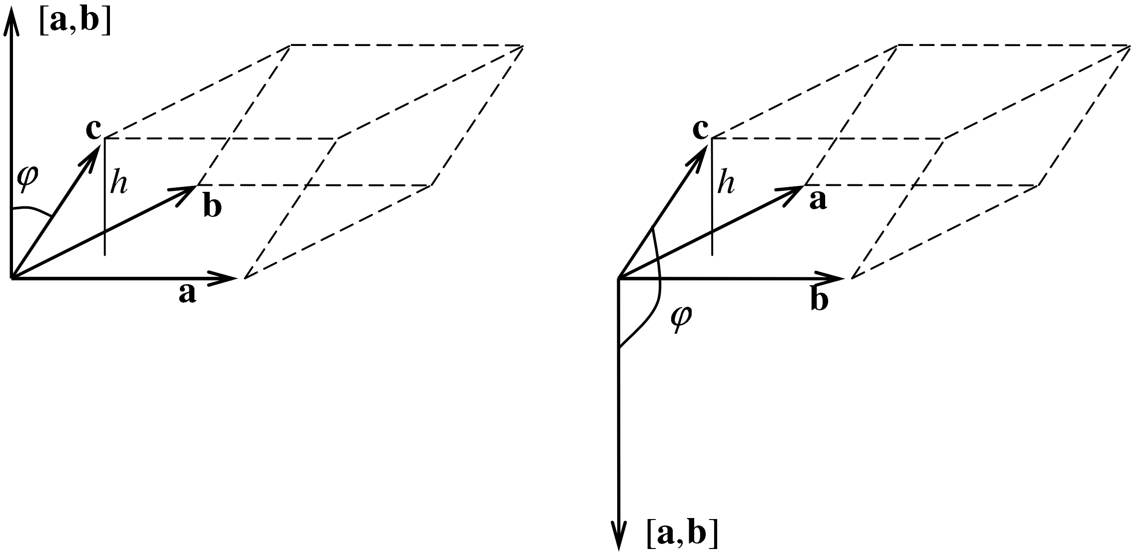

Рис. 18: К доказательству формулы объёма параллелепипеда.

Теорема 7.9. *Объём V параллелепипеда, построенного на трёх некомпланарных векторах, вычисляется по формуле*:

$$V = \begin{cases} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & \textit{если } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \textit{ — правая тройка} \\ -(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & \textit{если } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \textit{ — левая тройка} \end{cases}.$$

Доказательство. См. рис. 18. $V = S_{\text{осн.}} h = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| h$. Но по пред. 5.2

$$h = \begin{cases} |\mathbf{c}| \cos\varphi, & \text{если } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ — правая тройка} \\ -|\mathbf{c}| \cos\varphi, & \text{если } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ — левая тройка} \end{cases}.$$

Поэтому $V =$

$$\begin{cases} |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| h = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| |\mathbf{c}| \cos\varphi \overset{6.1}{=} ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}), & \text{если } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ — правая тройка} \\ |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| h = -|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| |\mathbf{c}| \cos\varphi \overset{6.1}{=} -([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}), & \text{если } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ — левая тройка} \end{cases}.$$

$\square$

Следствие 7.10. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) =$

$$= -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

Следствие 7.11.

$$\begin{cases} (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) > 0, & \text{если } \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \text{ — правая тройка} \\ (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0, & \text{если } \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \text{ — компланарны} \\ (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) < 0, & \text{если } \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \text{ — левая тройка} \end{cases}.$$

Лемма 7.12. (Вспомогательная.) *Если для любого вектора* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ *выполнено равенство* $(\mathbf{a},\mathbf{x}) = 0$*, то* $\mathbf{a} = \mathbf{o}$.

Доказательство. Разложим $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$. Т.к. для любого вектора $\mathbf{x}$ имеем $0 = (\mathbf{a},\mathbf{x})$, то

1) для $\mathbf{x} = \mathbf{i}$ имеем $0 = (\mathbf{a},\mathbf{i}) \overset{6.7.1)}{=} a_1$,

2) аналогично для $\mathbf{x} = \mathbf{j}$ имеем $a_2 = 0$,
3) аналогично для $\mathbf{x} = \mathbf{k}$ имеем $a_3 = 0$.
Таким образом $\mathbf{a} = \mathbf{o}$. □

Теорема 7.13. (Свойства векторного произведения.)
1) $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = -[\mathbf{b},\mathbf{a}]$ (антикоммутативность),
2) $[\alpha\mathbf{a},\mathbf{b}] = \alpha[\mathbf{a},\mathbf{b}]$,
3) $[\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}] = [\mathbf{a},\mathbf{c}] + [\mathbf{b},\mathbf{c}]$,
4) $[\mathbf{a},\beta\mathbf{b}] = \beta[\mathbf{a},\mathbf{b}]$,
5) $[\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c}] = [\mathbf{a},\mathbf{b}] + [\mathbf{a},\mathbf{c}]$.

Доказательство. 1) Следует из опред. 7.4.
2) Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ — произвольный вектор. Вычислим

$$([\alpha\,\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{x}) \overset{7.10}{=} -([\mathbf{x},\mathbf{b}],\alpha\,\mathbf{a}) \overset{6.3.4)}{=} -\alpha\,([\mathbf{x},\mathbf{b}],\mathbf{a}) \overset{7.10}{=}$$

$$\alpha\,([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{x}) \overset{6.3.2)}{=} (\alpha\,[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{x}).$$

Получили $([\alpha\,\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{x}) = (\alpha\,[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{x})$, т.е $([\alpha\,\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{x}) - (\alpha\,[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{x}) = 0$, тогда по 6.3.3) имеем $([\alpha\,\mathbf{a},\mathbf{b}] - \alpha\,[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{x}) = 0$, тогда по 7.12 имеем $[\alpha\,\mathbf{a},\mathbf{b}] - \alpha\,[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \mathbf{o}$. Откуда получаем требуемый результат.
3) Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ — произвольный вектор. Вычислим

$$([\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}],\mathbf{x}) \overset{7.10}{=} -([\mathbf{x},\mathbf{c}],\mathbf{a}+\mathbf{b}) \overset{6.3.5)}{=} -([\mathbf{x},\mathbf{c}],\mathbf{a}) - ([\mathbf{x},\mathbf{c}],\mathbf{b}) \overset{7.10}{=}$$

$$\overset{6.3.5)}{=} ([\mathbf{a},\mathbf{c}],\mathbf{x}) + ([\mathbf{b},\mathbf{c}],\mathbf{x}) \overset{6.3.3)}{=} ([\mathbf{a},\mathbf{c}] + [\mathbf{b},\mathbf{c}],\mathbf{x}).$$

Т.е. $([\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}],\mathbf{x}) = ([\mathbf{a},\mathbf{c}] + [\mathbf{b},\mathbf{c}],\mathbf{x})$, или $([\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}],\mathbf{x}) - ([\mathbf{a},\mathbf{c}] - [\mathbf{b},\mathbf{c}],\mathbf{x}) = 0$, тогда по 6.3.3) имеем $([\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}] - [\mathbf{a},\mathbf{c}] - [\mathbf{b},\mathbf{c}],\mathbf{x}) = 0$, тогда по 7.12 имеем $[\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}] - [\mathbf{a},\mathbf{c}] - [\mathbf{b},\mathbf{c}] = \mathbf{o}$. Откуда получаем требуемый результат.

4) $[\mathbf{a},\beta\mathbf{b}] \overset{7.13.1)}{=} -[\beta\mathbf{b},\mathbf{a}] \overset{7.13.2)}{=} -\beta[\mathbf{b},\mathbf{a}] \overset{7.13.1)}{=} \beta[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

5) $[\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c}] \overset{7.13.1)}{=} -[\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{a}] \overset{7.13.3)}{=} -[\mathbf{b},\mathbf{a}]-[\mathbf{c},\mathbf{a}] \overset{7.13.1)}{=} [\mathbf{a},\mathbf{b}]+[\mathbf{a},\mathbf{c}]$. □

Таблица 7.14. Таблица векторного умножения векторов правого ортонормированного базиса **i**, **j**, **k**.

a╲b	i	j	k
i	**o**	**k**	−**j**
j	−**k**	**o**	**i**
k	**j**	−**i**	**o**

По 3-му критерию коллинеарности 7.5 имеем $[\mathbf{i},\mathbf{i}]=[\mathbf{j},\mathbf{j}]=[\mathbf{k},\mathbf{k}]=\mathbf{o}$. Остальные значения вычисляют по опред. 7.4; см. рис. 19.

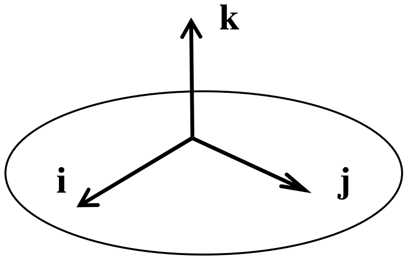

Рис. 19: К таблице 7.14.

Теорема 7.15. (Вычисление векторного и смешанного произведений в правом ортонормированном базисе.) *Если* $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$ *и* $\mathbf{c}=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$, *то*

1) $[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$,

2) $([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

Доказательство. 1) $[\mathbf{a},\mathbf{b}]=[a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k},b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}] \overset{7.13.3)\text{ и }5)}{=}$

$$= [a_1\mathbf{i},b_1\mathbf{i}]+[a_1\mathbf{i},b_2\mathbf{j}]+[a_1\mathbf{i},b_3\mathbf{k}]+$$
$$+[a_2\mathbf{j},b_1\mathbf{i}]+[a_2\mathbf{j},b_2\mathbf{j}]+[a_2\mathbf{j},b_3\mathbf{k}]+$$
$$+[a_3\mathbf{k},b_1\mathbf{i}]+[a_3\mathbf{k},b_2\mathbf{j}]+[a_3\mathbf{k},b_3\mathbf{k}] \overset{7.13.2)\text{ и }4)}{=}$$

$$\begin{aligned}
&= a_1b_1[\mathbf{i},\mathbf{i}] + a_1b_2[\mathbf{i},\mathbf{j}] + a_1b_3[\mathbf{i},\mathbf{k}]+\\
&+a_2b_1[\mathbf{j},\mathbf{i}] + a_2b_2[\mathbf{j},\mathbf{j}] + a_2b_3[\mathbf{j},\mathbf{k}]+\\
&+a_3b_1[\mathbf{k},\mathbf{i}] + a_3b_2[\mathbf{k},\mathbf{j}] + a_3b_3[\mathbf{k},\mathbf{k}] \overset{7.14}{=}
\end{aligned}$$

$$= a_1b_2\mathbf{k} - a_1b_3\mathbf{j} + -a_2b_1\mathbf{k} + a_2b_3\mathbf{i} + +a_3b_1\mathbf{j} - a_3b_2\mathbf{i} =$$

$$= \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \mathbf{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1) =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix};$$

2) $([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}) \overset{1)}{=} \left(\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k} \right) =$

$$= \big(\mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \mathbf{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1),\ c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k} \big) \overset{6.7.1)}{=}$$

$$= c_1(a_2b_3 - a_3b_2) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

□

§8. Двойное векторное произведение

Определение 8.1. *Двойным векторным* произведением векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется вектор $[[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}]$.

Замечание 8.2. Векторное произведение не является ассоциативным, т.е.

$$[[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}] \neq [\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]].$$

Пример. $[[\mathbf{i},\mathbf{i}],\mathbf{j}] = [\mathbf{o},\mathbf{j}] = \mathbf{o}$, а $[\mathbf{i},[\mathbf{i},\mathbf{j}]] = [\mathbf{i},\mathbf{k}] = -\mathbf{j}$.

Теорема 8.3. *Справедливо тождество*

$$[[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}] = \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b},\mathbf{c}).$$

Доказательство. По опред. 6.1 и 7.4 скалярное и векторное произведения не зависят от выбора базиса, поэтому достаточно доказать это тождество в каком-либо (удобном) базисе, и это будет означать, что тождество будет выполняться в любом другом базисе.

Выберем правый ортогональный базис $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ так, чтобы вектор $\mathbf{i}$ был коллинеарен вектору $\mathbf{a}$, т.е. $\mathbf{i} \parallel \mathbf{a}$, а векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{b}$ были бы компланарны; см. рис. 20.

Тогда в этом базисе

$$\begin{array}{l} \mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ \mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k} \end{array}.$$

1) Вычислим левую часть тождества.

$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \stackrel{7.15.1)}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = a_1 b_2 \mathbf{k},$

$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}] \stackrel{7.15.1)}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & a_1 b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -a_1 b_2 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = -a_1 b_2 c_2 \mathbf{i} + a_1 b_2 c_1 \mathbf{j}.$

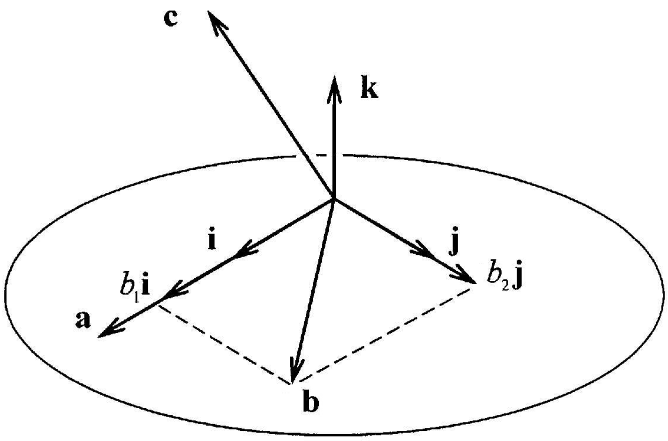

Рис. 20: К доказательству теор. 8.3.

2) Вычислим правую часть тождества.

$(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \stackrel{6.7.1)}{=} a_1 c_1,$

$(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \stackrel{6.7.1)}{=} b_1 c_1 + b_2 c_2,$

$\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) a_1 c_1 - a_1\mathbf{i}(b_1 c_1 + b_2 c_2) = -a_1 b_2 c_2 \mathbf{i} + a_1 b_2 c_1 \mathbf{j}.$

3) Правая и левая части равны, следовательно тождество доказано. □

Следствие 8.4. *Справедливо тождество*

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Доказательство. $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] \stackrel{7.13.1)}{=} -[[\mathbf{b}, \mathbf{c}], \mathbf{a}] \stackrel{8.3}{=} \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$ □

Загадка. Какое максимальное число попарно неколлинеарных векторов можно получить из двух неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, применяя к ним операцию векторного произведения неограниченное число раз?

Глава 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§9. Прямая на плоскости

Всюду в дальнейшем $M = (x, y)$ — произвольная (т.е. переменная) точка на плоскости с декартовыми координатами $(O; x, y)$, а $M_0 = (x_0, y_0)$, $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$ и т. д. — фиксированные точки. Их радиус-векторы суть $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$. Ясно, что радиус-вектор и его конец имеют одинаковые координаты; см. рис. 21.

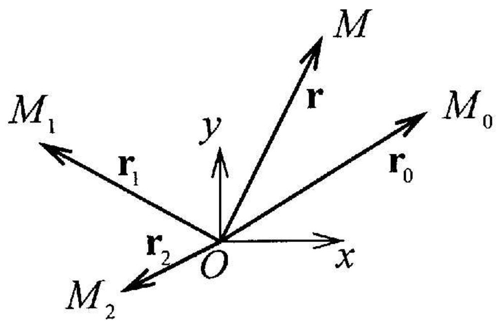

Рис. 21: Радиус-векторы.

Определение 9.1. Пусть L — прямая на плоскости.

1) Любой вектор $\mathbf{N} \neq \mathbf{o}$, перпендикулярный прямой L, называется её *вектором нормали*; см. рис. 22. Его координаты традиционно обозначаются $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$.

2) Любой вектор $\mathbf{d} \neq \mathbf{o}$, параллельный прямой L, называется её *направляющим вектором*; см. рис. 22). В координатах он обозначается $\mathbf{d} = d_1\mathbf{i} + d_2\mathbf{j}$ (направление — directio, *лат.*).

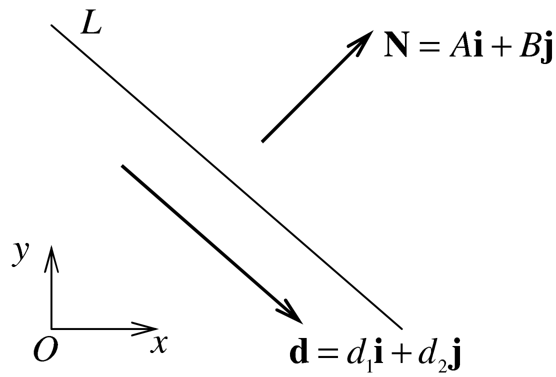

Рис. 22: L Вектор нормали и направляющий вектор прямой.

Лемма 9.2. *Если прямая L проходит через точку $M_0 = (x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$, тогда её уравнение можно записать в векторной форме*

$$(\mathbf{N}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \qquad (1)$$

и в координатной форме —

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (2)$$

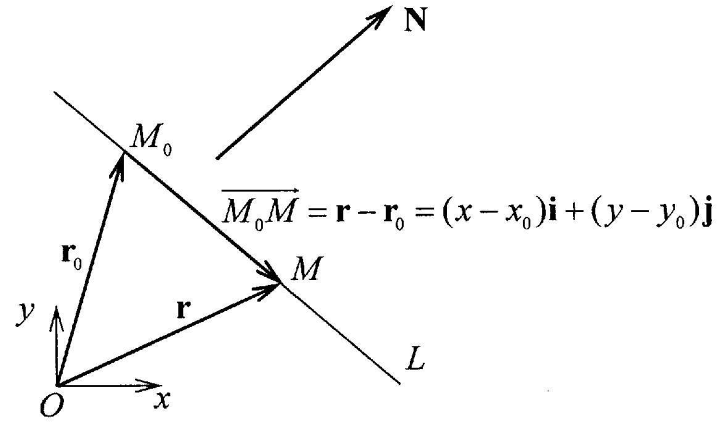

Рис. 23: Прямая $(\mathbf{N}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$, она же $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Доказательство. См. рис. 23. По условию имеем $M_0 \in L$ и $\mathbf{N} \perp L$. Переменная точка $M = (x, y)$ лежит на прямой L, тогда вектор $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ лежит на прямой L, тогда по критерию ортогональности 6.5 имеем уравнение (1).

Т.к. $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$, а $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_))\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j}$, то, вычисляя левую часть уравнения (1) по формуле 6.7.1), получаем уравнение (2). □

Уравнение (2) имеет название *уравнение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярно данному вектору.*

Определение 9.3. Уравнение (2) можно записать в виде

$$Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0.$$

Обозначая $C = -Ax_0 - By_0$, получим уравнение

$$Ax + By + C = 0, \qquad (3)$$

которое называется *общим* уравнением прямой на плоскости.

Подчеркнём, что коэффициенты A и B в уравнениях (2) и (3) являются координатами вектора нормали $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ к прямой. Другими словами, эти уравнения доставляют геометрический объект — вектор, который перпендикулярен прямой.

Замечание 9.4. Ясно, что при $\rho \neq 0$ уравнения $Ax + By + C = 0$ и $\rho Ax + \rho By + \rho C = 0$ описывают одну и ту же прямую и по 1-му критерию коллинеарности 1.18 доставляют коллинеарные векторы нормали $\mathbf{N}$ и $\rho\mathbf{N}$.

Теорема 9.5. (О расположении двух прямых на плоскости.) *Пусть прямые L_1 и L_2 заданы их общими уравнениями*

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Тогда

1) *прямые совпадают, т.е. $L_1 = L_2$, согда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$,*

2) *прямые пересекаются в точке, т.е. $L_1 \cap L_2 = M$, согда $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$,*

3) *прямые параллельны, т.е. $L_1 \parallel L_2$, согда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.*

Доказательство. 1) Очевидно по замеч. 9.4.

2) Прямые L_1 и L_2 пересекаются, согда их векторы нормали неколлинеарны: $\mathbf{N}_1 \nparallel \mathbf{N}_2$, согда $A_1\mathbf{i} + B_1\mathbf{j} \nparallel A_2\mathbf{i} + B_2\mathbf{j}$, согда по 2-му критерию коллинеарности 3.9 имеем $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$.

3) Утверждения 1) и 2) не выполнены, согда выполнено утверждение 3). □

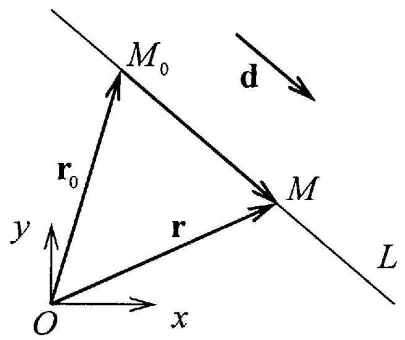

Рис. 24: Прямая $[\mathbf{d}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0] = \mathbf{o}$, она же $\frac{x-x_0}{d_1} = \frac{y-y_0}{d_2}$.

Теорема 9.6. *Если прямая L проходит через точку $M_0 = (x_0, y_0)$ параллельно вектору $\mathbf{d} = d_1\mathbf{i} + d_2\mathbf{j}$, тогда её уравнение можно записать в векторной форме*

$$[\mathbf{d}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0] = \mathbf{o}, \tag{4}$$

и в координатной форме

$$\frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2}. \tag{5}$$

Доказательство. См. рис. 24. Имеем $M_0 \in L$ и $\mathbf{N} \perp L$. Переменная точка $M = (x, y)$ лежит на прямой L, тогда вектор $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ лежит на прямой L, тогда векторы $\mathbf{d}$ и $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ коллинеарны, тогда по 3-му критерию коллинеарности 7.5 получаем уравнение (4), а по 2-му критерию коллинеарности 3.9 получаем уравнение (5). □

Определение 9.7. Уравнение (5) называется *каноническим* уравнением прямой на плоскости.

Лемма 9.8. *Если прямая проходит через точки* $M_1 = (x_1, y_1)$ *и* $M_2 = (x_2, y_2)$, *тогда её уравнение можно записать в виде*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (6)$$

Доказательство. Направляющим вектором этой прямой является вектор $\mathbf{d} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$, поэтому по теор. 9.6 уравнение (6) является искомым. □

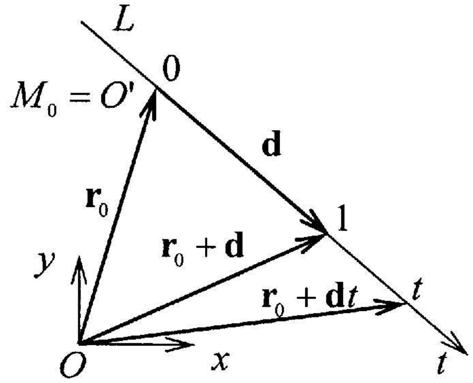

Рис. 25: Прямая $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{d}t$, она же $x = x_0 + d_1t$, $y = y_0 + d_2t$.

Лемма 9.9. *Если прямая* L *проходит через точку* $M_0 = (x_0, y_0)$ *параллельно вектору* $\mathbf{d} = d_1\mathbf{i} + d_2\mathbf{j}$, *тогда её уравнение можно записать в векторно-параметрической форме*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{d}t, \qquad (7)$$

и в координатно-параметрической форме

$$\begin{cases} x = x_0 + d_1t \\ y = y_0 + d_2t \end{cases}, \qquad (8)$$

где $-\infty < t < \infty$.

Доказательство. См. рис. 24. Пусть $M = (x, y)$ — переменная точка на прямой L. Вектор $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_))\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j}$ лежит на прямой L тогда он параллелен направляющему вектору $\mathbf{d}$, тогда по 1-му крит. коллинеарности 1.18 получаем $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{d}t$, откуда получается уравнение (7).

Запишем уравнение (7) в координатной форме

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + (d_1\mathbf{i} + d_2\mathbf{j})t.$$

По след. 3.8 получаем уравнения (8). □

Замечание 9.10. Уравнение $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{d}t$ (7), задаёт систему координат (O, t) на прямой L: вектор $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ задаёт начало координат, вектор $\mathbf{r}(1) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{d}$ задаёт точку с координатой 1, а вектор $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{d}t$ задаёт точку с координатой t; см. рис. 25.

Определение 9.11. По замечанию 9.4 уравнения $Ax + By + C = 0$ и

$$\rho Ax + \rho By + \rho C = 0 \qquad (9)$$

описывают одну и ту же прямую. Если в уравнении (9) выбрать значение $\rho = \pm\frac{1}{|\mathbf{N}|} = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, а его знак выбрать так, чтобы $\rho C < 0$, то уравнение (9) называется *нормальным* уравнением прямой, а $\rho = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ называется *нормирующим множителем.* Условие $\rho C < 0$ означает, что свободный член в нормальном уравнении должен быть отрицательным.

Замечание 9.12. 1) Вектор нормали $\rho\mathbf{N} = \pm\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,\mathbf{i} + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,\mathbf{j}\right)$ является единичным вектором, т.к.

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1.$$

2) По лемме 6.10 координаты единичного вектора суть его направляющие косинусы, $\cos\alpha = \rho A$ и $\cos\beta = \rho B$. Если свободный член ρC обозначить через $-p$, то нормальное уравнение прямой может быть записано в виде

$$\cos\alpha\cdot x + \sin\alpha\cdot y - p = 0. \qquad (9)$$

3) Обозначим левую часть нормального уравнения через

$$\delta(x, y) \equiv \cos\alpha\cdot x + \sin\alpha\cdot y - p.$$

Важность нормального уравнения описано в следующей теореме.

Теорема 9.13. (О расстоянии от точки до прямо на плоскости.) *Если уравнение прямой L приведено к нормальному виду (9), то расстояние от точки $M_0 = (x_0, y_0)$ до прямой L вычисляется по формуле*

$$d(M_0, L) = |\delta(x_0, y_0)| = |\cos\alpha\cdot x_0 + \sin\alpha\cdot y_0 - p|.$$

Доказательство. См. рис. 26. Обозначим через M_0A перпендикуляр, опущенный из M_0 на L. Обозначим через $\mathbf{e} = \cos\alpha\cdot\mathbf{i} + \sin\alpha\cdot\mathbf{j}$ единичный вектор нормали прямой L, где α — угол между $\mathbf{e}$ и осью Ox. Построим прямоугольник M_0ABC, как показано на рисунке. Пусть прямая OM_0 пересекает прямую L в точке $M = (x, y)$. Тогда

$d(M_0, L) = M_0A = BC = |OC - OB|$,

$OC = pr_{\mathbf{e}}\mathbf{r}_0 \overset{6.2}{=} \frac{(\mathbf{e},\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{e}|} = (\mathbf{e},\mathbf{r}_0) \overset{6.7.1)}{=} \cos\alpha\cdot x_0 + \sin\alpha\cdot y_0,$

$OB = pr_{\mathbf{e}}\mathbf{r} = (\mathbf{e},\mathbf{r}) = \cos\alpha\cdot x + \sin\alpha\cdot y \overset{(9)}{=} p.$

Таким образом $d(M_0, L) = |\cos\alpha\cdot x_0 + \sin\alpha\cdot y_0 - p| = |\delta(x_0, y_0)|$. □

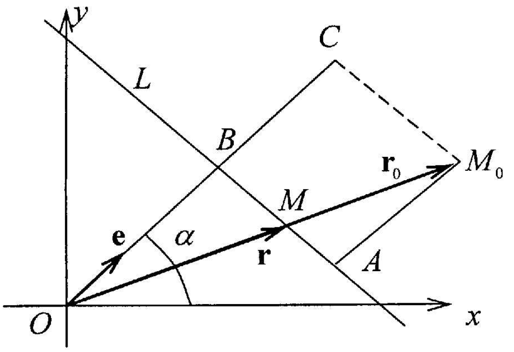

Рис. 26: К доказательству теор. 9.13.

Замечание 9.14. Нетрудно проверить, что

1) $\delta(x_0, y_0) > 0$, согда точки O и M_0 лежат по разные стороны от прямой L,

2) $\delta(x_0, y_0) = 0$, согда $M_0 \in L$,

3) $\delta(x_0, y_0) < 0$, согда точки O и M_0 лежат по одну сторону от прямой L.

В дальнейшем, если через L обозначена прямая (как множество точек), то через $L(x, y)$ будем обозначать многочлен в правой части её общего уравнения, т.е. $L(x, y) \equiv Ax + By + C$.

Определение 9.15. *Пучком* прямых в точке M_0 называется множество всех прямых, проходящих через точку M_0; см. рис. 27.

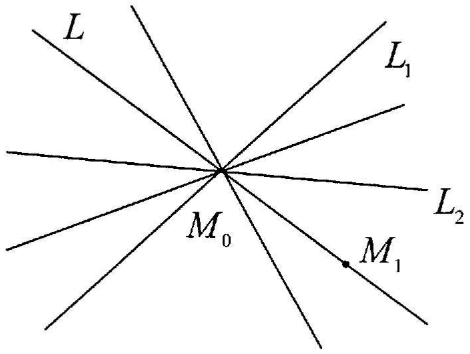

Рис. 27: Пять прямых из пучка.

Лемма 9.16. *Если*

$$L_1(x, y) \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad L_2(x, y) \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

— две разные прямые, проходящие через точку M_0, *то при любых* $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ *уравнение* $L(x, y) \equiv$

$$\equiv \alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \qquad (10)$$

или (с использованием определителя) $L(x,y) \equiv$

$$\equiv \begin{vmatrix} A_1x + B_1y + C_1 & A_2x + B_2y + C_2 \\ -\beta & \alpha \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} L_1(x,y) & L_2(x,y) \\ -\beta & \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad (10')$$

является уравнением некоторой прямой из пучка в точке M_0.

Доказательство. Ясно, что эта прямая проходит через точку M_0. □

Определение 9.17. Уравнение (10) называется *уравнением пучка прямых.*

В наших обозначениях уравнение пучка можно записать в коротком виде

$$L(x,y) \equiv \alpha L_1(x,y) + \beta L_2(x,y) = 0. \qquad (10'')$$

Лемма 9.18. *Уравнение прямой из пучка, которая проходит через точку* $M_1(x_1,y_1) \neq M_0$ *есть*

$$L(x,y) \equiv L_2(x_1,y_1)L_1(x,y) - L_1(x_1,y_1)L_2(x,y) = 0 \qquad (11)$$

или

$$L(x,y) \equiv \begin{vmatrix} L_1(x,y) & L_2(x,y) \\ L_1(x_1,y_1) & L_2(x_1,y_1) \end{vmatrix} = 0 \qquad (11')$$

т.е. получается из уравнения $(10'')$ *при* $\alpha = L_2(x_1,y_1)$ *и* $\beta = -L_1(x_1,y_1)$.

Доказательство. Подставим в уравнение (11) координаты точки $M_1(x_1,y_1)$, получим тождество $0 = 0$, значит $M_1 \in L$. □

Определение 9.19. Уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

называется уравнением прямой *в отрезках.*

Определение 9.20. Школьное уравнение

$$y = kx + b$$

называется уравнением прямой *с угловым коэффициентом* k; при этом угол φ, для которого $\operatorname{tg}\varphi = k$, есть угол наклона прямой к оси Ox, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

§10. Плоскость в пространстве

Всюду в дальнейшем $M = (x,y,z)$ — произвольная (т.е. переменная) точка в пространстве $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами $(O;x,y,z)$, а $M_0 =$

(x_0, y_0, z_0), $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ и т.д. — фиксированные точки. Их радиус-векторы суть $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ и т.д. соответственно; см. рис. 28.

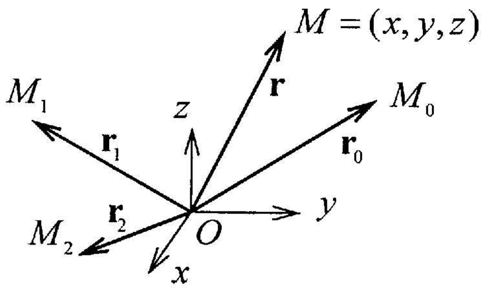

Рис. 28:

Определение 10.1. Пусть P — плоскость в пространстве $\mathbb{R}^3$. Любой вектор $\mathbf{N}$ перпендикулярный плоскости P называется *вектором нормали* этой плоскости; см. рис. 29.

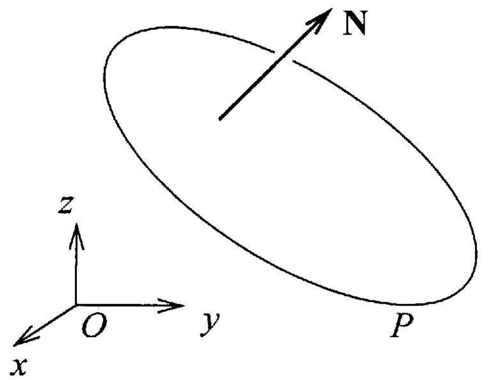

Рис. 29:

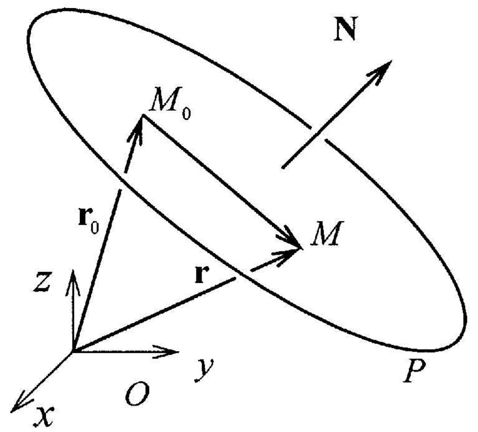

Рис. 30: Плоскость $(\mathbf{N}, \mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = 0$, она же $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$.

Лемма 10.2. *Если плоскость P проходит через точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, то её уравнение можно запи-*

сать в векторной форме

$$(\mathbf{N}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \qquad (1)$$

и в координатной форме

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (2)$$

Доказательство. См. рис. 30. Пусть $M = (x, y, z)$ — переменная точка на плоскости P. По известной школьной теореме вектор нормали $\mathbf{N}$ перпендикулярен любому вектору на плоскости P и в частности вектору $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, т.е. $\mathbf{N} \perp \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. По критерию ортогональности 6.5 получаем уравнение (1).

Т.к. $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, а $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_))\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$, то, вычисляя левую часть уравнения (1) по формуле 6.7.1), получаем уравнение (2). □

Определение 10.3. Уравнение (2) можно записать в виде

$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0.$$

Обозначим $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (3)$$

называется *общим* уравнением плоскости в пространстве. Подчеркнём, что коэффициенты A, B, C в этом уравнении суть координаты вектора нормали плоскости.

Замечание 10.4. Ясно, что при $\rho \neq 0$ уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$ и $\rho Ax + \rho By + \rho Cz + \rho D = 0$ описывают одну и ту же плоскость.

Теорема 10.5. (О расположении двух плоскостей в пространстве.) *Пусть*

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad и \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

— уравнения плоскостей P_1 и P_2.

Тогда

1) $P_1 = P_2$, согда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$,

2) $P_1 \cap P_2 = L$, согда $(A_1 : B_1 : C_1) \neq (A_2 : B_2 : C_2)$,

3) $P_1 \parallel P_2$, согда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$.

Доказательство. 1) Очевидно по замечанию 10.4.

2) Плоскости P_1 и P_2 пересекаются, согда их векторы нормали неколлинеарны, т.е.

$$\mathbf{N}_1 = A_1\mathbf{i} + B_1\mathbf{j} + C_1\mathbf{k} \nparallel \mathbf{N}_2 = A_2\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + C_2\mathbf{k},$$

согда $(A_1 : B_1 : C_1) \neq (A_2 : B_2 : C_2)$ по 2-му критерию коллинеарности 3.9.

3) Утверждения 1) и 2) не выполнены, согда выполнено утверждение 3). $\square$

Теорема 10.6. *Если плоскости P проходит через три точки $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $M_3 = (x_3, y_3, z_3)$, то её уравнение можно записать в виде*

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

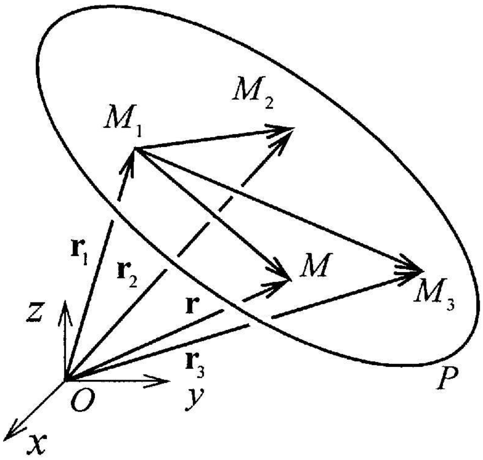

Рис. 31: Плоскость $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1,\, \mathbf{r} - \mathbf{r}_2,\, \mathbf{r} - \mathbf{r}_3) = 0$.

Доказательство. См. рис. 31. Если переменная точка M лежит на плоскости P, то векторы

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j} + (z - z_1)\mathbf{k},$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1)\mathbf{i} + (y_3 - y_1)\mathbf{j} + (z_3 - z_1)\mathbf{k}$$

компланарны, тогда по 2-му критерию компланарности 7.8

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0,$$

откуда по формуле 7.15.2) получаем требуемый результат. $\square$

Теорема 10.7. *Если плоскость P проходит через точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ параллельно неколлинеарным векторам $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, то её уравнение можно записать в векторной форме*

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0,\, \mathbf{a},\, \mathbf{b}) = 0, \qquad (5)$$

и в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

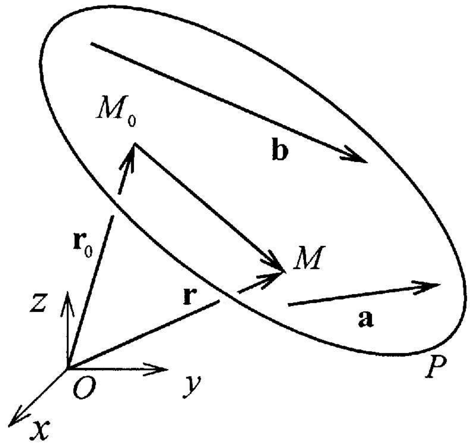

Рис. 32: Плоскость $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{a},\ \mathbf{b})=0$.

Доказательство. См. рис. 32. Если переменная точка M лежит на плоскости P, то векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r}-\mathbf{r}_0 = (x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k}$ компланарны, тогда по 2-му критерию компланарности 7.8 имеем

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\mathbf{a},\mathbf{b})=0.$$

По формуле 7.15.2) вычисления смешанного произведения получаем уравнение (6). □

Теорема 10.8. *Если плоскость P проходит через точку $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ параллельно неколлинеарным векторам $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$, то её уравнение можно записать в векторно-параметрической форме*

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{a}s+\mathbf{b}t, \quad \text{\textit{где}} \quad s,t\in\mathbb{R}^1, \qquad (7)$$

и в координатно-параметрической форме

$$\begin{cases} x=x_0+a_1s+b_1t \\ y=y_0+a_2s+b_2t \\ z=z_0+a_3s+b_3t \end{cases}, \quad \text{\textit{где}} \quad s,t\in\mathbb{R}^1, \qquad (8)$$

Доказательство. См. рис. 33. Если переменная точка M лежит на плоскости P, тогда векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$ компланарны, тогда по критерию разложения 2.14 существуют числа s и t, такие что $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{a}s + \mathbf{b}t$; отсюда получаем уравнению (7). Записывая уравнение (7) в координатной форме, получаем уравнения (8). □

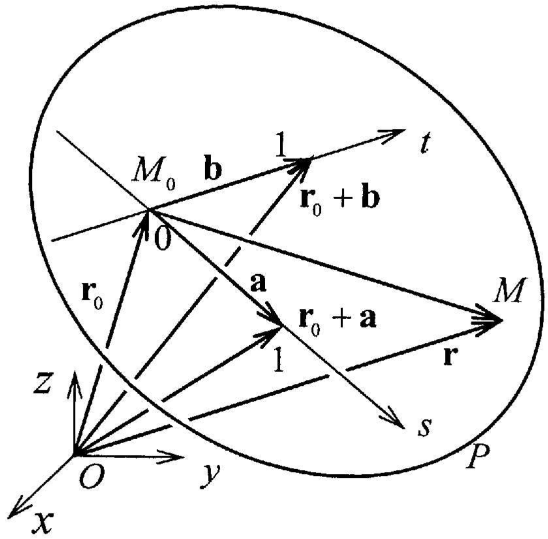

Рис. 33: Плоскость $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}s + \mathbf{b}t$, где $s, t \in \mathbb{R}^1$.

Замечание 10.9. Уравнение $\mathbf{r}(s,t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}s + \mathbf{b}t$ (7), индуцирует на плоскости P систему координат (O', s, t) с базисом $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$: вектор $\mathbf{r}(0,0) = \mathbf{r}_0$ задаёт начало координат $M_0 = O' = (0,0)$, вектор $\mathbf{r}(1,0) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$ задаёт точку с координатами $(1,0)$, вектор $\mathbf{r}(0,1) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{b}$ задаёт точку с координатами $(0,1)$, а вектор $\mathbf{r}(s,t)$ задаёт точку с координатами (s,t); см. рис. 33. Уравнение $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{a}s + \mathbf{b}t$ представляет разложение вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ по базису $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Определение 10.10. По замечанию 10.4 уравнения $Ax+By+Cz+D = 0$ и

$$\rho Ax + \rho By + \rho Cz + \rho D = 0 \qquad (9)$$

описывают одну и ту же плоскость. Если в уравнении (9) выбрать значение $\rho = \pm\frac{1}{|\mathbf{N}|} = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, а его знак выбрать так, чтобы $\rho D < 0$, то уравнение (9) называется *нормальным* уравнением плоскости, а $\rho = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ называется *нормирующим множителем.* Условие $\rho D < 0$ означает, что свободный член в нормальном уравнении должен быть отрицательным.

Пример. $2x - y + 2z - 6 = 0$, $\rho = \pm\frac{1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \pm\frac{1}{3}$. Нормальное уравнение $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 2 = 0$.

Замечание 10.11. 1) Вектор нормали $\rho\mathbf{N} = \pm(\rho A\,\mathbf{i} + \rho B\,\mathbf{j} + \rho C\,\mathbf{k})$ является единичным вектором, т.к.

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)^2+\left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)^2+\left(\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)^2=1.$$

2) По лемме 6.10 координаты единичного вектора суть его направляющие косинусы, $\rho A=\cos\alpha$, $\rho B=\cos\beta$ и $\rho C=\cos\gamma$. Если свободный член ρC обозначить через $-p$, то нормальное уравнение может быть записано в виде

$$\cos\alpha\cdot x+\cos\beta\cdot y+\cos\gamma\cdot z-p=0, \qquad (9)$$

3) Обозначим левую часть нормального уравнения через

$$\delta(x,y)\equiv\cos\alpha\cdot x+\cos\beta\cdot y+\cos\gamma\cdot z-p.$$

Важность нормального уравнения описано в следующей теореме.

Теорема 10.12. *Если уравнение плоскости P приведено к нормальному виду* (9), *то расстояние от точки $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости P вычисляется по формуле*

$$d(M_0,P)=|\delta(x_0,y_0,z_0)|=|\cos\alpha\cdot x_0+\cos\beta\cdot y_0+\cos\gamma\cdot z_0-p|.$$

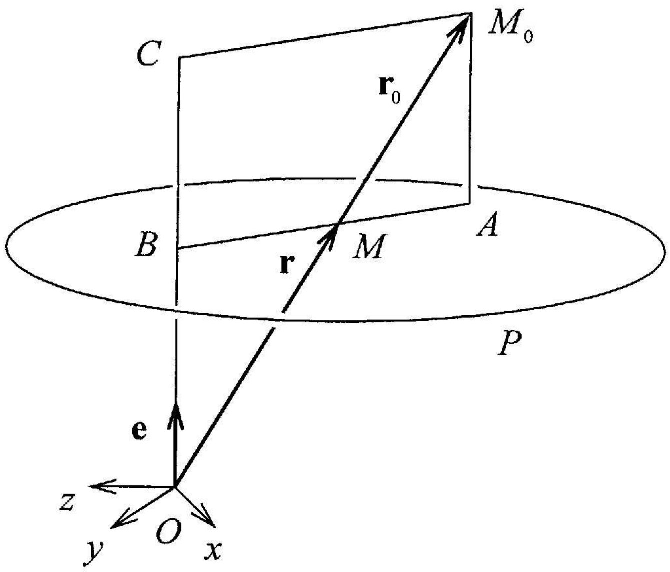

Рис. 34:

Доказательство. См. рис. 34. Обозначим через M_0A перпендикуляр, опущенный из M_0 на плоскость P. Обозначим через $\mathbf{e}=\cos\alpha\cdot\mathbf{i}+\cos\beta\cdot\mathbf{j}+\cos\gamma\cdot\mathbf{k}$ единичный вектор нормали к плоскости P, где α, β, γ — его направляющие косинусы; см. лемму 6.10. Построим прямоугольник M_0ABC, как показано на рис. 34. Пусть прямая OM_0 пересекает плоскость P в точке $M = (x, y, z)$, т.е. $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Тогда

$d(M_0, P) = M_0A = BC = |OC - OB|$,

$OC = pr_{\mathbf{e}}\mathbf{r}_0 \stackrel{6.2}{=} \frac{(\mathbf{e},\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{e}|} = (\mathbf{e}, \mathbf{r}_0) \stackrel{6.7.1)}{=} \cos\alpha \cdot x_0 + \cos\beta \cdot y_0 + \cos\gamma \cdot z_0$,

$OB = pr_{\mathbf{e}}\mathbf{r} = (\mathbf{e}, \mathbf{r}) = \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z \stackrel{(9)}{=} p$.

Таким образом $d(M_0, P) = |\cos\alpha{\cdot}x_0{+}\cos\beta{\cdot}y_0{+}\cos\gamma{\cdot}z_0{-}p| = |\delta(x_0, y_0, z_0)|$.

$\square$

Заметим, что

$\delta(x_0, y_0, z_0) > 0$, сгда начало координат O и точка M_0 лежат по разные стороны от плоскости P,

$\delta(x_0, y_0) = 0$, сгда $M_0 \in P$,

$\delta(x_0, y_0) < 0$, сгда начало координат O и точка M_0 лежат по одну сторону от плоскости P.

Определение 10.13. Множество всех плоскостей, проходящих через фиксированную прямую L называется *пучком* плоскостей, проходящих через прямую L; см. рис. 35.

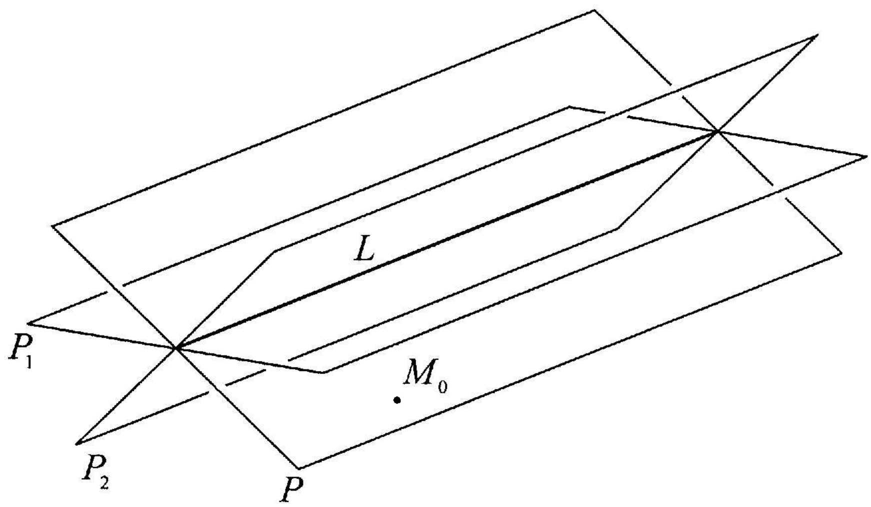

Рис. 35: Три плоскости из пучка плоскостей вокруг прямой L.

В дальнейшем, если через P обозначена плоскость (как множество точек), то через $P(x, y, z)$ будем обозначать многочлен в правой части её общего уравнения, т.е. $P(x, y, z) \equiv Ax + By + Cz + D$.

Замечание 10.14. Т.к. одно линейное уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ задаёт плоскость в пространстве $\mathbb{R}^3$, то становится ясно, что задать прямую в пространстве с помощью одного линейного уравнения первой степени невозможно. Т.к. две непараллельные плоскости пересекаются по единственной прямой, то прямую в пространстве $\mathbb{R}^3$ можно задать как пересечение двух плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Другими словами прямую в пространстве можно задать в виде системы двух уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Теорема 10.15. *Если*

$$P_1(x, y, z) \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \tag{3.1}$$

$$P_2(x, y, z) \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \tag{3.2}$$

— две разные плоскости P_1 и P_2 из пучка плоскостей вокруг прямой L, то при любых $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ плоскость

$$P(x, y, z) \equiv \alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \tag{10}$$

или короче

$$P(x, y, z) \equiv \alpha P_1(x, y, z) + \beta P_2(x, y, z) = 0$$

тоже является плоскостью из этого пучка.

Доказательство. Пусть $M = (x, y, z)$ произвольная точка на прямой $L = P_1 \cap P_2$. Т.к. эта точка лежит на обеих плоскостях, то при подстановке координат этой точки в уравнения (3.1) и (3.2) они обращаются в тождества. Это означает, что при постановке координат этой точки в уравнение (10) оно тоже обращается в тождество. Т.к. точка M — произвольная точка прямой L, то все точки прямой L удовлетворяют уравнению (10), а это означает, что плоскость (10) принадлежит пучку плоскостей вокруг прямой L. $\square$

Определение 10.16. Уравнение (10) называется *уравнением пучка плоскостей* вокруг прямой $L = P_1 \cap P_2$.

Теорема 10.17. *Если плоскость из пучка вокруг прямой L проходит через точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \notin L$, то её уравнение можно записать в виде*

$$P(x, y, z) \equiv P_2(x_0, y_0, z_0)P_1(x, y, z) - P_1(x_0, y_0, z_0)P_2(x, y, z) = 0, \tag{11}$$

т.е. получается из уравнения пучка (10) при $\alpha = P_2(x_0, y_0, z_0)$ и $\beta = -P_1(x_0, y_0, z_0)$. См. рис. 35.

Доказательство. Подставим в уравнение (11) вместо (x, y, z) координаты точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, получим тождество

$$P_2(x_0, y_0, z_0)P_1(x_0, y_0, z_0) - P_1(x_0, y_0, z_0)P_2(x_0, y_0, z_0) \equiv 0,$$

что означает, что плоскость из пучка (10) проходит через точку M_0. $\square$

Замечание 10.18. Уравнение (11) можно записать с помощью определителя

$$\begin{vmatrix} P_1(x,y,z) & P_2(x,y,z) \\ P_1(x_0,y_0,z_0) & P_2(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix} = 0. \tag{11$'$}$$

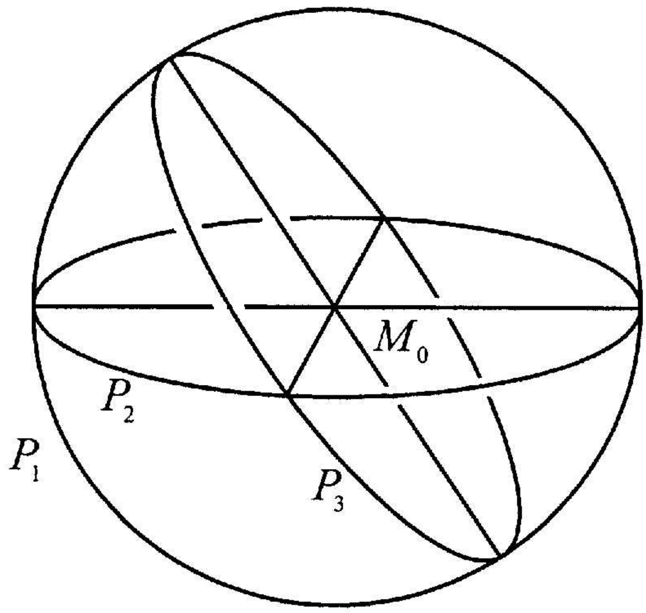

Рис. 36: Три плоскости из связки плоскостей в точке M_0.

Определение 10.19. Множество всех плоскостей, проходящих через фиксированную точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ называется *связкой* плоскостей с центром в точке M_0; см. рис. 36.

Теорема 10.20. *Если*

$$P_1(x,y,z) \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \tag{3.1}$$

$$P_2(x,y,z) \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \tag{3.2}$$

$$P_3(x,y,z) \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \tag{3.3}$$

— три плоскости P_1, P_2, P_3 из связки с центром в точке M_0, у которых векторы нормали $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, $\mathbf{N}_3$ не компланарны, то при $(\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0)$ плоскость

$$P(x,y,z) \equiv \alpha P_1(x,y,z) + \beta P_2(x,y,z) + \gamma P_3(x,y,z) = 0$$

тоже является плоскостью из этой связки.

Доказательство. Если $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — точка пересечения плоскостей P_1, P_2, P_3, т.е. $M_0 = P_1 \cap P_2 \cap P_3$, то при подстановке координат этой точки в уравнения (3.1), (3.2), (3.3) они обращаются в тождества. Это означает, что при постановке координат этой точки в уравнение (12) оно тоже обращается в тождество, поэтому плоскость P проходит через точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. $\square$

Определение 10.21. Уравнение (12) называется *уравнением связки плоскостей* с центром в точке $M_0 = P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

Лемма 10.22. *Если плоскость из связки плоскостей с центром в точке $M_0 = P_1 \cap P_2 \cap P_3$ проходит через две разные точки $M_1 = (x_1, y_1, z_1) \neq M_0$ и $M_2 = (x_2, y_2, z_2) \neq M_0$, то её уравнение можно записать в виде*

$$P_4(x, y, z) \equiv \begin{vmatrix} P_1(x, y, z) & P_2(x, y, z) & P_3(x, y, z) \\ P_1(x_1, y_1, z_1) & P_2(x_1, y_1, z_1) & P_3(x_1, y_1, z_1) \\ P_1(x_2, y_2, z_2) & P_2(x_2, y_2, z_2) & P_3(x_2, y_2, z_2) \end{vmatrix} = 0 \qquad (13)$$

т.е. получается из уравнений связки (12) *при*

$$\alpha = \begin{vmatrix} P_2(x_1, y_1, z_1) & P_3(x_1, y_1, z_1) \\ P_2(x_2, y_2, z_2) & P_3(x_2, y_2, z_2) \end{vmatrix},$$

$$\beta = -\begin{vmatrix} P_1(x_1, y_1, z_1) & P_3(x_1, y_1, z_1) \\ P_1(x_2, y_2, z_2) & P_3(x_2, y_2, z_2) \end{vmatrix},$$

$$\gamma = \begin{vmatrix} P_1(x_1, y_1, z_1) & P_2(x_1, y_1, z_1) \\ P_1(x_2, y_2, z_2) & P_2(x_2, y_2, z_2) \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Подставим в уравнение (13) вместо (x, y, z) сначала координаты точки $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$, получим тождество $0 \equiv 0$, а затем координаты точки $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$, получим тождество $0 \equiv 0$, что означает, что плоскость (13) из связки (12) проходит через точки M_1 и M_2. $\square$

§11. Прямая в пространстве

Определение 11.1. Если плоскости

$$L: \qquad \begin{cases} P_1(x, y, z) \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P_2(x, y, z) \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

не параллельны (т.е. $\mathbf{N}_1 \nparallel \mathbf{N}_2$), то по теор. 10.5.2) $P_1 \cap P_2 = L$ — прямая. Уравнения (1) называются уравнениями прямой L в пространстве $\mathbb{R}^3$, заданной пересечением двух плоскостей; см. рис. 37.

Замечание 11.2. Ненулевой вектор $\mathbf{d}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, параллельный прямой L, называется *направляющим вектором* этой прямой. Если прямая L задана уравнениями (1), то очевидно её направляющий вектор может быть вычислен по формуле $\mathbf{d} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$.

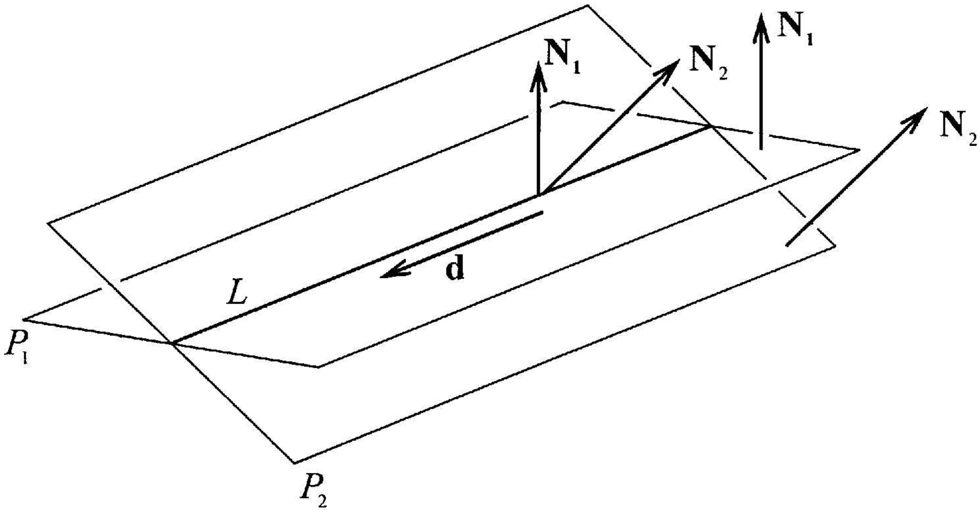

Рис. 37: Прямая, заданная пересечением двух плоскостей.

Теорема 11.3. *Если прямая* $L \subset \mathbb{R}^3$ *проходит через точку* $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *параллельно вектору* $\mathbf{d} = d_1\mathbf{i}+d_2\mathbf{j}+d_3\mathbf{k}$*, то её уравнение можно записать в векторной форме*

$$[\mathbf{d}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0] = \mathbf{o}, \qquad (2)$$

и в координатной форме

$$\frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2} = \frac{z - z_0}{d_3}. \qquad (3)$$

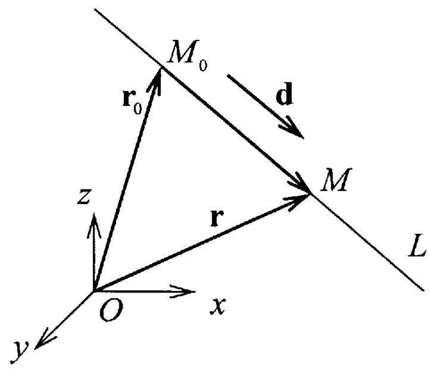

Рис. 38: Прямая $[\mathbf{d}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0] = \mathbf{o}$, она же $\frac{x-x_0}{d_1} = \frac{y-y_0}{d_2} = \frac{z-z_0}{d_3}$.

Доказательство. См. рис. 38. Пусть $M = (x, y, z)$ — переменная точка на прямой L. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0 M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_))\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$ лежит на прямой L и поэтому параллелен направляющему вектору $\mathbf{d}$. По 3-му критерию коллинеарности 7.5 получаем уравнение (2), а по 2-му критерию коллинеарности 3.9 получаем уравнение (3). □

Определение 11.4. Уравнения (3) называются *каноническими* уравнениями прямой в пространстве.

Лемма 11.5. *Если прямая L проходит через две разные точки $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$, то её канонические уравнения можно записать в виде*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{4}$$

Доказательство. Направляющим вектором этой прямой является вектор $\mathbf{d} = \overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$, поэтому по лемме 11.3 уравнение (4) является искомым. □

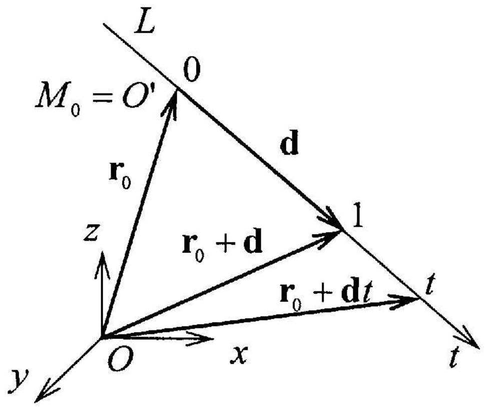

Рис. 39: Прямая $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{d}t$.

Теорема 11.6. *Если прямая $L \subset \mathbb{R}^3$ проходит через точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\mathbf{d} = d_1\mathbf{i} + d_2\mathbf{j} + d_3\mathbf{k}$. то её уравнения можно записать в векторно-параметрической в форме*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{d}t, \tag{5}$$

и в координатно-параметрической форме

$$\begin{cases} x = x_0 + d_1 t \\ y = y_0 + d_2 t \\ y = z_0 + d_3 t \end{cases}, \tag{6}$$

где в обоих случаях $-\infty < t < \infty$.

Доказательство. См. рис. 39. Пусть $M = (x, y, z)$ — переменная точка на прямой L. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_))\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$ лежит на прямой L и поэтому параллелен направляющему вектору $\mathbf{d}$. По 1-му критерию коллинеарности 1.14 получаем уравнение $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{d}t$, которое эквивалентно уравнению (5).

Запишем теперь уравнение (4) в координатной форме

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + y\mathbf{k} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} + (d_1\mathbf{i} + d_2\mathbf{j} + d_3\mathbf{k})t.$$

Приводя подобные члены в правой части, по следствию 3.8 получаем уравнения (6). □

Замечание 11.7. Уравнение (5) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{d}t$ задаёт систему координат на прямой L; см. рис. 39. Значению $t = 0$ соответствует конец вектора $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, т.е. точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, которая есть начало координат O' на прямой. Значению $t = 1$ соответствует конец вектора $\mathbf{r}(1) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{d}$, которую естественно рассматривать как точку с координатой 1 на прямой, а вектор $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{d}t$ задаёт точку с координатой t.

§12. Теоремы о расстояниях и общем перпендикуляре

Теорема 12.1. *Расстояние $d(M_1, L)$ от точки M_1 до прямой L, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\mathbf{d}$, вычисляется по формуле*

$$d(M_1, L) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1}, \mathbf{d}\right]\right|}{|\mathbf{d}|}.$$

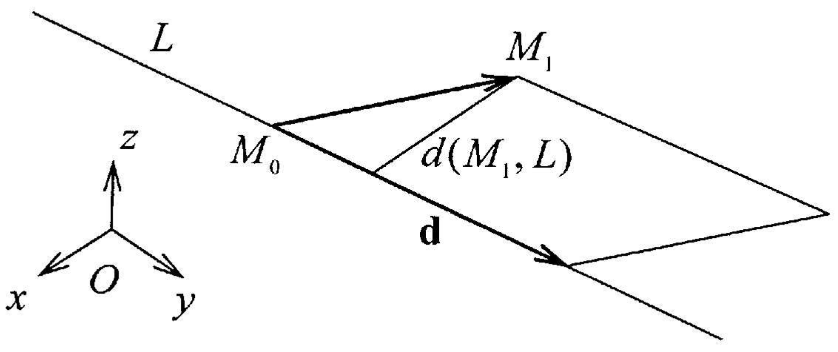

Рис. 40: Расстояние $d(M_1, L)$ от точки M_1 до прямой L.

Доказательство. См. рис. 40. Искомое расстояние есть высота параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\mathbf{d}$. Площадь параллелограмма вычисляется по формуле $S_{\text{пар.}} = |\mathbf{d}| \cdot d(M_1, L)$. По замеч. 7.6 имеем $S_{\text{пар.}} = \left|\left[\overrightarrow{M_0M_1},\, \mathbf{d}\right]\right|$. Отсюда получаем требуемую формулу. $\square$

Теорема 12.2. *Расстояние $d(L_1, L_2)$ между скрещивающимися прямыми L_1 и L_2, проходящими через точки M_1 и M_2 параллельно векторам $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$ соответственно, вычисляется по формуле*

$$d(L_1, L_2) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2},\, \mathbf{d}_1,\, \mathbf{d}_2\right)\right|}{|[\mathbf{d}_1,\, \mathbf{d}_2]|}.$$

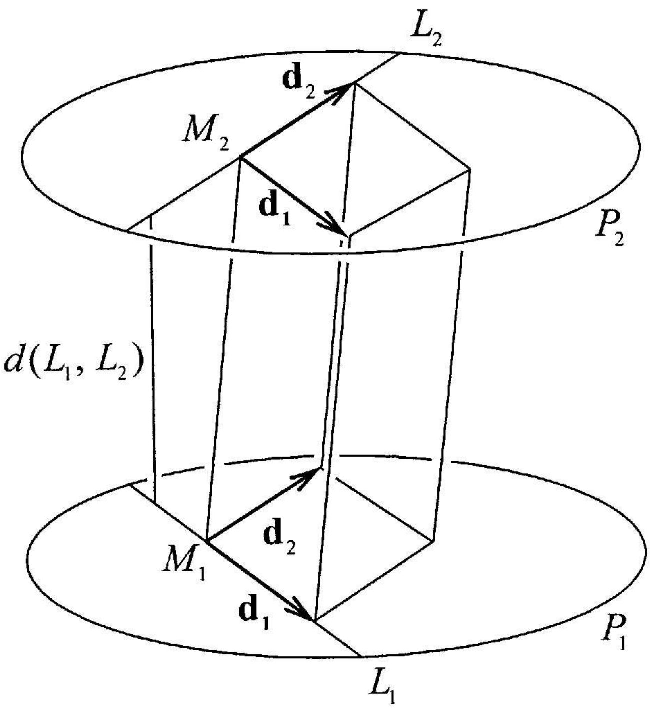

Рис. 41: Расстояние $d(L_1, L_2)$ между скрещивающимися прямыми.

Доказательство. См. рис. 41. Проведём через прямую L_1 плоскость P_1, параллельную прямой L_2. Проведём через прямую L_2 плоскость P_2, параллельную прямой L_1. Построим параллелепипед на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$. Искомое расстояние есть высота параллелепипеда, построенного на этих векторах. Вычислим объём этого параллелепипеда двумя способами. Во-первых, по теор. 7.9 имеем $V_{\text{пар.}} = \left|\left(\overrightarrow{M_0M_1},\, \mathbf{d}_1,\, \mathbf{d}_2\right)\right|$. Во-вторых, из школьной геометрии известно, что $V_{\text{пар.}} = |[\mathbf{d}_1,\, \mathbf{d}_2]| \cdot d(L_1, L_2)$, где $|[\mathbf{d}_1,\, \mathbf{d}_2]|$ — площадь основания параллелепипеда (см. замеч. 7.6). Отсюда получаем требуемую формулу. $\square$

Теорема 12.3. (Об общем перпендикуляре.) *Пусть скрещивающиеся прямые L_1 и L_2 проходят через точки M_1 и M_2 параллельно направляющим* *векторам* $\mathbf{d}_1$ *и* $\mathbf{d}_2$ *соответственно. Тогда уравнения их общего перпендикуляра* L*, заданного как пересечение двух плоскостей, в векторной форме суть*

$$L: \qquad \begin{cases} P_1: & (\mathbf{r}-\mathbf{r}_1, \mathbf{d}_1, [\mathbf{d}_1,\, \mathbf{d}_2]) = 0 \\ P_2: & (\mathbf{r}-\mathbf{r}_1, \mathbf{d}_2, [\mathbf{d}_1,\, \mathbf{d}_2]) = 0 \end{cases}.$$

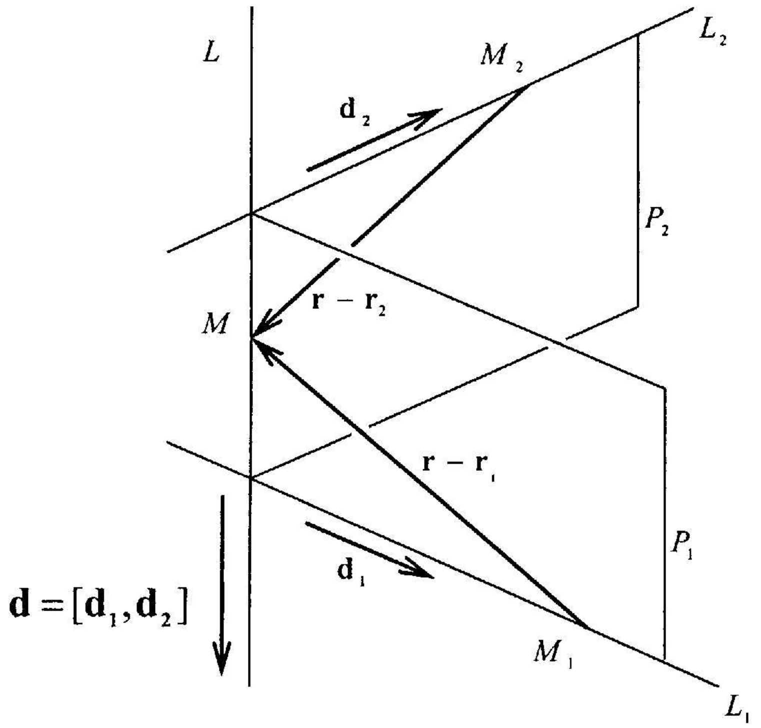

Рис. 42: Прямая L — общий перпендикуляр к прямым L_1 и L_2. Он задаётся как пересечение плоскостей P_1 и P_1.

Доказательство. См. рис. 42. Т.к. векторы $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$ перпендикулярны общему перпендикуляру L, то вектор $[\mathbf{d}_1,\, \mathbf{d}_2]$ параллелен L.

Проведём через прямые L_1 и L плоскость P_1. Тогда плоскость P_1 параллельна векторам $\mathbf{d}_1$ и $[\mathbf{d}_1,\, \mathbf{d}_2]$, и по теор. 10.7.(5) её уравнение есть

$$P_1: \qquad (\mathbf{r}-\mathbf{r}_1, \mathbf{d}_1, [\mathbf{d}_1,\, \mathbf{d}_2]) = 0.$$

Проведём через прямые L_2 и L плоскость P_2. Тогда плоскость P_2 параллельна векторам $\mathbf{d}_2$ и $[\mathbf{d}_1,\, \mathbf{d}_2]$, и по теор. 10.7.(5) её уравнение есть

$$P_1: \qquad (\mathbf{r}-\mathbf{r}_2, \mathbf{d}_2, [\mathbf{d}_1,\, \mathbf{d}_2]) = 0.$$

Отсюда получаем уравнения общего перпендикуляра L. □

Глава 3. КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§13. Эллипс

Замечание 13.1. Проведём мысленно следующий эксперимент. Пусть F_1 и F_2 — две разные фиксированные точки на плоскости, в которые воткнуты два кнопки. Обозначим расстояние F_1F_2 через $2c$ и назовём *фокусным* расстоянием. Пусть тонкая нерастяжимая замкнутая верёвочка с длиной ℓ накинута на кнопки и натянута с помощью карандаша. См. рис. 43. В таком положении длина ℓ будет состоять из трёх отрезков $\ell = r_1 + r_2 + 2c$, показанных на рисунке. Ясно, что при движении карандаша, сохраняющем верёвочку в натянутом состоянии, длины отрезков r_1 и r_2 меняются, а фокусное расстояние $2c$ остаётся неизменной. Поэтому при движении карандаша сумма $r_1+r_2 = \ell-2c$ остаётся постоянной. Обозначим $\ell-2c = 2a$ и получим уравнение

$$r_1 + r_2 = 2a. \qquad (1)$$

Это уравнение называется *инвариантным*[3] уравнение эллипса.

Из неравенства треугольника следует, что $r_1 + r_2 > F_1F_2$, поэтому $a > c$.

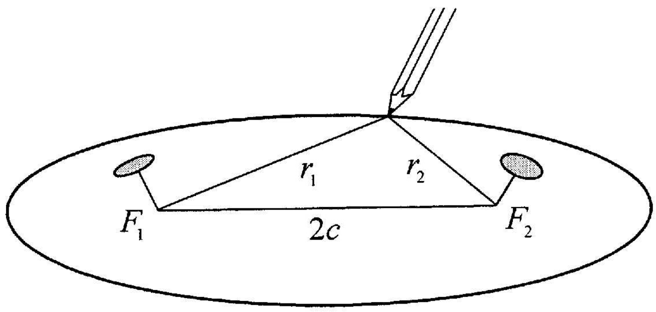

Рис. 43: Эллипс $r_1 + r_2 = 2a$.

Заметим, что если фокусы сдвинуть в одну точку, то получится окружность, поэтому окружность можно рассматривать как вырожденный эллипс, у которого фокусы совпадают.

Определение 13.2. Геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению (1), называется *эллипсом.* Середина отрезка F_1F_2 называется его *центром* O. См. рис. 44. Любая хорда, проходящая через центр, называется *диаметром* эллипса. Легко видеть, что среди диаметров есть один самый

[3] *Инвариантными* в математике называются уравнения, формулы и выражения, независящие от выбора системы координат, т.е. неменяющиеся при переходе от одной системы координат к другой.

большой CA, проходящий через фокусы, и самый маленький BD, перпендикулярный большому; они называются *большой* и *малой осями* эллипса, а их концы — вершинами эллипса.

Ясно, что большая и малая оси являются осями симметрии эллипса.

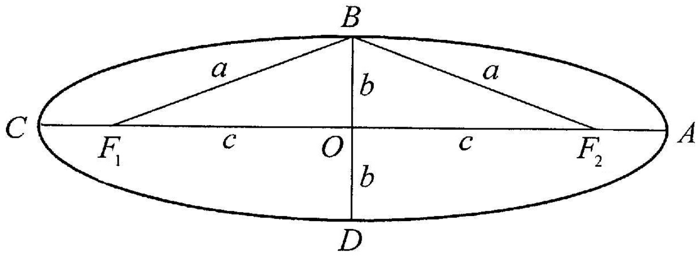

Рис. 44: Эллипс

Лемма 13.3. *Длина большой оси равна* $2a$ (*т.е.* $CA = 2a$).

Доказательство. Ясно, что $CA = CF_1 + F_1A$. См. рис. 44. Из уравнения эллипса следует, что сумма расстояний от фокусов до точки A равна $2a$, т.е. $F_1A + F_2A = 2a$. Из симметрии эллипса (1) имеем $F_2A = CF_1$, поэтому $CA = CF_1 + F_1A = F_2A + F_1A = 2a$. □

Следовательно, большие полуоси $CO = OA = a$.

Обозначим малые полуоси через $b = OB = OD$.

Лемма 13.4. *Длина малой оси* $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (*т.е.* $OB = OD = \sqrt{a^2 - c^2}$).

Доказательство. Из уравнения эллипса следует, что сумма расстояний от фокусов до точки B равна $2a$. См. рис. 44. Ввиду симметрии $F_1B = F_2B = a$; по теореме Пифагора $b^2 = a^2 - c^2$. □

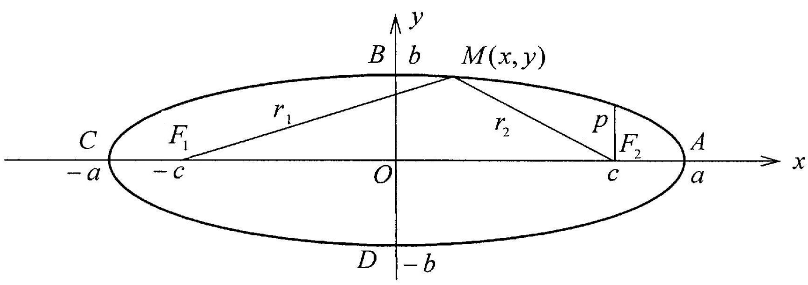

Рис. 45: Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Выберем декартову систему координат так, чтобы оси координат Ox и Oy были продолжениями большой и малой осей эллипса. См. рис. 45, где на осях указаны координаты фокусов и вершин, а через $M = (x, y)$ обозначена текущая точка на эллипсе.

Теорема 13.5. *В выбранной системе координат эллипс имеет уравнение*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (2)$$

Доказательство. См. рис. 45. Ясно, что

$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Подставим в полученное в инвариантное уравнение эллипса (1), получим

$$r_1 + r_2 = 2a, \qquad (1)$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$
$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$
$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$
$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right),$$
$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2,$$
$$a^4 - a^2c^2 = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2,$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Учитывая, что $b^2 = a^2 - c^2$, получим уравнение (2). □

Определение 13.6. Уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ называется *каноническим* уравнением эллипса.

Определение 13.7. Расстояние p от фокуса до эллипса по вертикали называется *фокальным параметром.* См. рис. 45.

Лемма 13.8. $p = \frac{b^2}{a}$.

Доказательство. Рис. Подставим $x = c$ в каноническое уравнение (2), получим $y = \pm\frac{b^2}{a}$. □

Определение 13.9. Число $e = \frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* эллипса.

Очевидно, что $0 \leq e < 1$ Эксцентриситет является характеристикой формы эллипса, рис. 46.

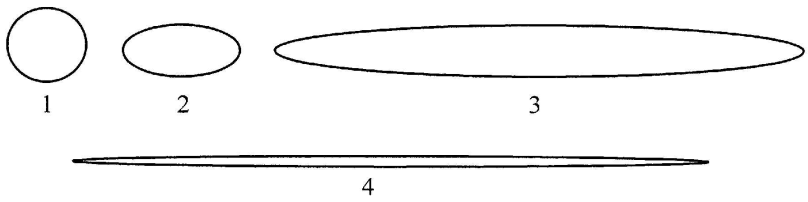

Рис. 46:

При $b = a$, получаем $c = 0$, т.е. $F_1 = F_2$, получаем окружность; её эксцентриситет $e = 0$, рис. 46.1

При $b = a/2$ эксцентриситет "клумбы" $e = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$, рис. 46.2

При $b = a/10$ эксцентриситет "сигары" $e \approx 0,995$, рис. 46.3.

При $b = a/50$ эксцентриситет "иголки" $e \approx 0,9998$, рис. 46.4

Орбита Земли близка к окружности, её полуоси $a \approx 151$ *млн км*, $b \approx 149$ *млн км* и эксцентриситет $e \approx 0,16$.

Если допустить $F_1 = F_2$, то получится, что $a = b$, то эксцентриситет $e = 0$, и эллипс становится окружностью.

Теорема 13.10. *Уравнение касательной к эллипсу* (2) *в точке* $M_1 = (x_1, y_1)$ *имеет вид*

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1. \qquad (3)$$

Доказательство. Запишем уравнение касательной в отрезках (см. опред. 9.19)

$$\frac{x}{f} + \frac{y}{g} = 1. \qquad (4)$$

Касательная и эллипс проходят через точку $M_1 = (x_1, y_1)$, поэтому её координаты удовлетворяют их уравнениям

$$\begin{cases} \frac{x_1}{f} + \frac{y_1}{g} = 1 \\ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \end{cases}.$$

Решая эту систему относительно f и g получим $f = \frac{a^2}{x_1}$ и $g = \frac{b^2}{y_1}$. Подставим найденные значения в (4) получим уравнение (3). $\square$

§14. Гипербола

Определение 14.1. Пусть F_1 и F_2 — две разные фиксированные точки на плоскости. Пусть M — переменная точка. Обозначим $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$. Геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению

$$|r_1 - r_2| = 2a, \qquad (1)$$

где $a > 0$, называется *гиперболой*. См. рис. 47. Точки F_1 и F_2 называются *фокусами*, длина отрезка F_1F_2 называется *фокусным расстоянием*; обозначим её через $2c$, т.е. $F_1F_2 = 2c$. Это инвариантное уравнение гиперболы. Из неравенства треугольника $r_1 - r_2 < 2c$ следует, что $a < c$.

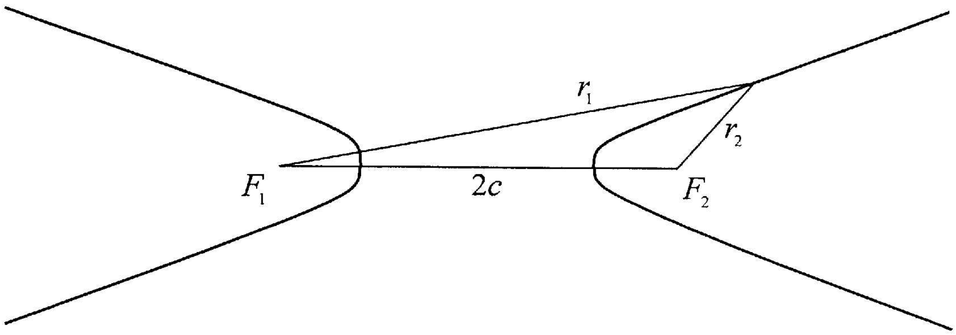

Рис. 47: Гипербола $|r_1 - r_2| = 2a$.

Замечанбие 14.2. Уравнение (1) эквивалентно системе

$$\left[\begin{array}{ll} r_1 - r_2 = 2a & \qquad (1.1) \\ r_2 - r_1 = 2a & \qquad (1.2) \end{array}\right.,$$

первое уравнение которой описывает компоненту гиперболы, ближнюю к точке F_2, а второе — компоненту, ближнюю к точке F_1.

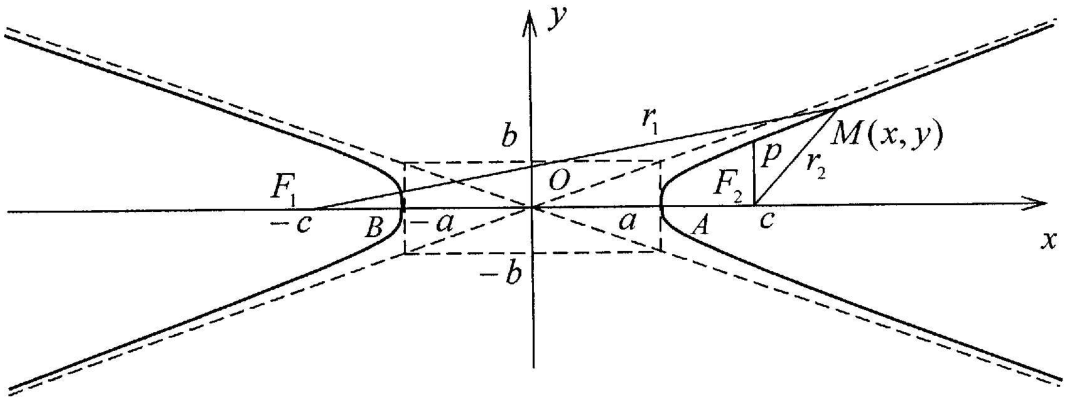

Рис. 48: Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Замечанбие 14.3. Выберем декартову систему координат так, чтобы ось Ox походила через фокусы, а ось Oy проходила через середину отрезка F_1F_2 перпендикулярно ему. См. рис. 48.

Теорема 14.4. *В выбранной системе координат гипербола имеет уравнение*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (2)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Доказательство. См. рис. 48.

$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

1) Подставим сначала r_1 и r_2 в уравнение

$$r_1 - r_2 = 2a, \qquad (1)$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$
$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$
$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$
$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right),$$
$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2,$$
$$a^4 - a^2c^2 = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2,$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$
$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2),$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Обозначая $c^2 - a^2$ через b^2, получим уравнение (2).

2) Подставим теперь r_1 и r_2 в уравнение

$$r_2 - r_1 = 2a \qquad (1.2)$$

и сделаем аналогичные выкладки как в пункте 1), получим то же уравнение (2).

Это означает, что обе части гиперболы описываются одним уравнением (2). □

Определение 14.5. Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ называется *каноническим* уравнением гиперболы. Числа $2a$ и $2b$ называются *вещественной* и *мнимой* осями гиперболы соответственно.

Теорема 14.6. *Прямые* $y = \pm\frac{b}{a}x$ *являются асимптотами гиперболы* (2).

Доказательство. Из математического анализа известно, что если прямая $y = kx + \ell$ является асимптотой функции $y = f(x)$, то

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad \ell = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx].$$

Из уравнения (2) следует, что $y = f(x) = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Поэтому

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \pm\frac{b}{a},$$

$$\ell = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \mp \frac{b}{a}x\right] =$$

$$= \pm\frac{b}{a} \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) = 0.$$

□

Определение 14.7. *Фокальным параметром* p называется расстояние от фокуса до гиперболы по вертикали. См. рис. 48.

Лемма 14.8. $p = \frac{b^2}{a}$.

Доказательство. Рис. Подставим $x = c$ в каноническое уравнение (2), получим $y = \pm\frac{b^2}{a}$. □

Определение 14.9. Число $e = \frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Очевидно, что эксцентриситет гиперболы $e > 1$. Эксцентриситет является характеристикой формы гиперболы, рис. 49.

При $b = a/2$, эксцентриситет $e = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,118$, рис. 49.1.

При $b = a$ гипербола называется *равнобочной*, её эксцентриситет $c = \sqrt{2} \approx 1,414$, рис. 49.2.

При $b = 2a$, эксцентриситет $e = \sqrt{5} \approx 2,236$, рис. 49.3.

Теорема 14.10. *Уравнение касательной к гиперболе* (2) *в точке* $M_1 = (x_1, y_1)$, *лежащей на этой гиперболе, имеет вид*

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1. \qquad (3)$$

Доказательство. Запишем уравнение касательной в отрезках (см. опред. 9.19)

$$\frac{x}{f} + \frac{y}{g} = 1. \qquad (4)$$

Касательная и гипербола проходят через точку $M_1 = (x_1, y_1)$, поэтому её координаты удовлетворяют их уравнениям

$$\begin{cases} \frac{x_1}{f} + \frac{y_1}{g} = 1 \\ \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \end{cases}.$$

Решая эту систему относительно f и g получим $f = \frac{a^2}{x_1}$ и $g = -\frac{b^2}{y_1}$. Подставим найденные значения в (4) получим уравнение (3). $\square$

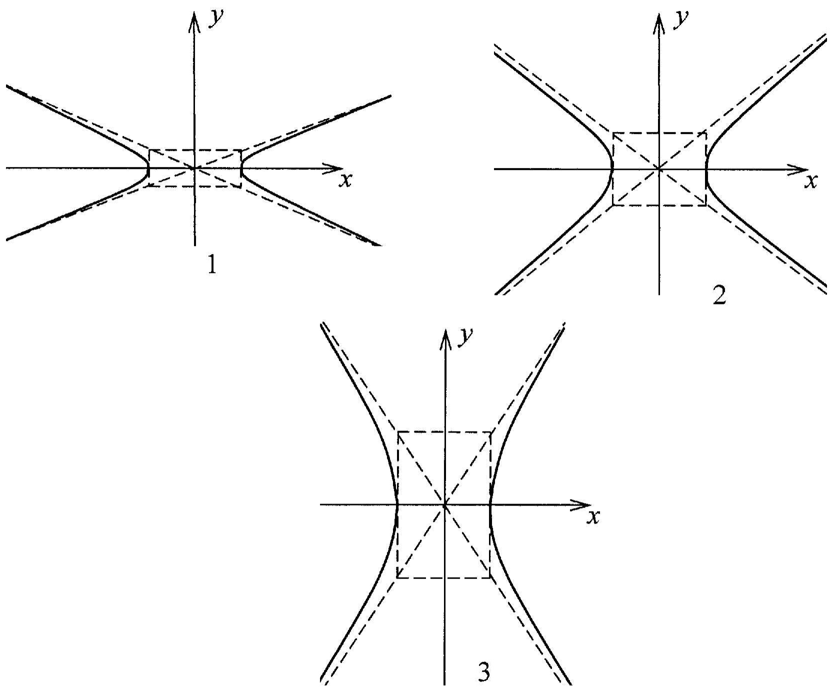

Рис. 49:

§15. Парабола

Определение 15.1. Геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от прямой D и точки $F \notin D$, называется *параболой*. Прямая D называется *директрисой*, точка F — *фокусом* параболы. Пусть M — произвольная точка параболы, см. рис. 50, обозначим $FM = r$, а расстояние от точки M до директрисы D через d. Тогда уравнение параболы может быть записано в виде

$$r = d. \qquad (1)$$

Это инвариантное уравнение параболы.

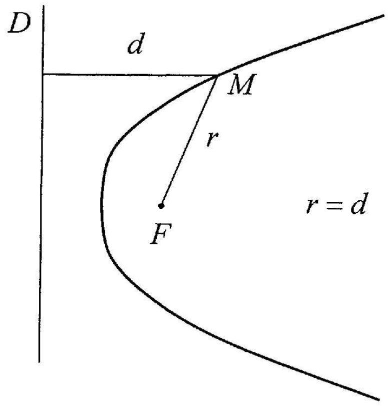

Рис. 50: Парабола $r = d$.

Замечание 15.2. Обозначим через $AF = p$ расстояние от фокуса до директрисы, см. рис. 51. Поведем ось Ox через точку F перпендикулярно директрисе D, а ось Oy через середину отрезка AF. В этой декартовой системе координат $A = \left(-\frac{p}{2}, 0\right)$, $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Уравнение директрисы есть $x = -\frac{p}{2}$.

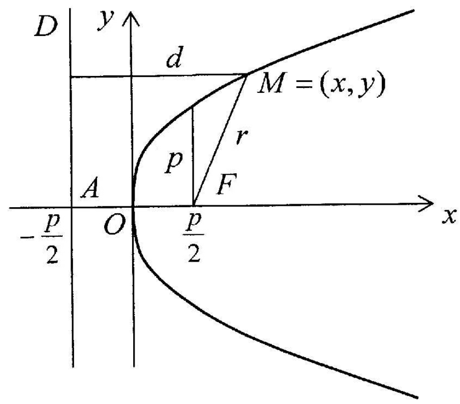

Рис. 51: Парабола $y^2 = 2px$.

Теорема 15.3. В выбранной декартовой системе координат парабола имеет уравнение

$$y^2 = 2px. \qquad (2)$$

Доказательство. Рис.

$$r = FM = \sqrt{\left(x + -\frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$d = \frac{p}{2} + x.$$

Т.к. $r = d$, то

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x,$$

$$y^2 = 2px.$$

$\square$

Определение 15.4. *Фокальным параметром* называется расстояние от фокуса до параболы по вертикали. См. рис. 51.

Лемма 15.5. Фокальный параметр параболы равен p.

Доказательство. Вертикальная прямая $x = \frac{p}{2}$, проходящая через фокус, пересекает параболу $y^2 = 2px$ в точке $F = \left(\frac{p}{2}, p\right)$. $\square$

§16. Полярные координаты

Определение 16.1. Вы берем на плоскости точку O и назовём её *полюсом.* Рассмотрим к.-л. луч с началом в полюсе O (обычно его рисуют горизонтально, направленным слева на право), см. рис. 52, и назовём её *полярной* осью. В качестве координат произвольной точки M на плоскости выберем два числа: φ — угол в радианах между полярной осью и отрезком OM и ρ — расстояние от полюса O до точки M. Координаты φ и ρ называются *полярными*, а система с этими координатами — *полярной* системой координат.

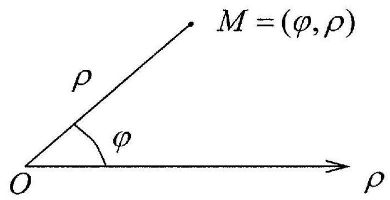

Рис. 52: Полярная система координат.

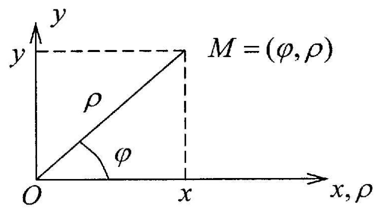

Рис. 53: Связь полярных и декартовых координат.

Замечание 16.2. Координата φ определена с точностью до слагаемого $2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Другими словами пары чисел (φ, ρ), $(\varphi \pm 2\pi, \rho)$, $(\varphi \pm 4\pi, \rho)$, $\ldots$ определяют одну и ту же точку M. При любом φ координаты $(\varphi, 0)$ есть координаты полюса O.

Замечание 16.3. Формулы, связывающие полярные и декартовы координаты, легко выводятся из рис. 53.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}, \qquad (1) \qquad\qquad \begin{cases} \varphi = \arctan\frac{y}{x} \\ \rho = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}. \qquad (2)$$

Замечание 16.4. Графики некоторых кривых в полярных координатах показаны на рис. 53 – 59.

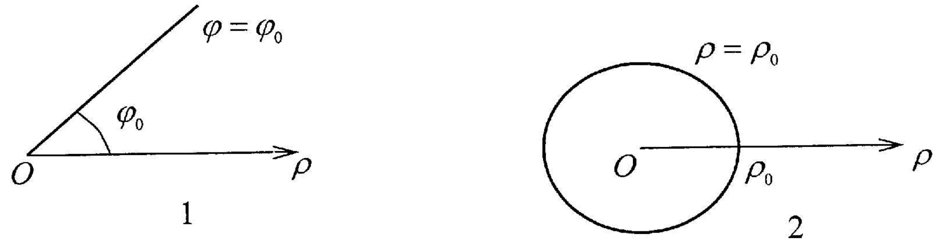

Рис. 54: Луч $\varphi = \varphi_0$ и окружность $\rho = \rho_0$.

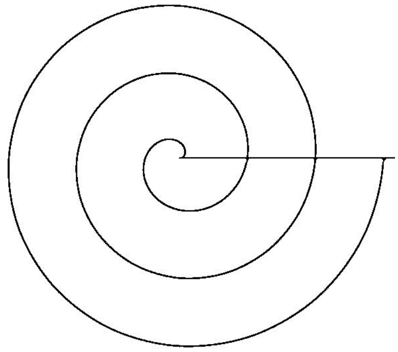

Рис. 55: Спираль Архимеда $\rho = k\varphi$, где $k > 0$, $\varphi > 0$.

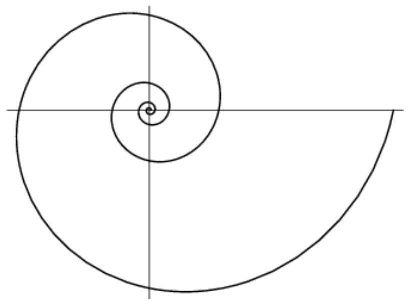

Рис. 56: Логарифмическая спираль $\rho = e^{\varphi}$.

Лемниската Бернулли[4] есть геометрическое место точек $\{M\}$, произведение расстояний r_1 и r_2 которых до двух данных точек F_1, F_2 (фокусов) равно

[4]лемниската от греч. lemniskos — лента. В древности "лемнискатой" называли бантик, с помощью которого прикрепляли венок к голове победителя на спортивных соревнованиях.

квадрату половины фокусного расстояния, т.е. если $F_1F_2 = 2c$, то $r_1r_2 = c^2$

$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = c^2,$$

$$\left[(x+c)^2 + y^2\right]\left[(x-c)^2 + y^2\right] = c^4,$$

$$\left(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx\right)\left(x^2 + y^2 + c^2 - 2cx\right) = c^4,$$

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 + 2c^2\left(x^2 + y^2\right) + c^4 - 4c^2x^2 = c^4,$$

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 + 2c^2x^2 + 2c^2y^2 - 4c^2x^2 = 0,$$

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2c^2x^2 + 2c^2y^2 = 0,$$

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2c^2\left(x^2 - y^2\right). \qquad (3)$$

Подставим формулы (1) в уравнение (3)

$$\rho^4 = 2c^2\rho^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right),$$

$$\rho^2 = 2c^2\cos 2\varphi,$$

Получаем уравнение лемнискаты Бернулли в полярных координатах

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi},$$

где $a = c\sqrt{2}$, см. рис. 57.

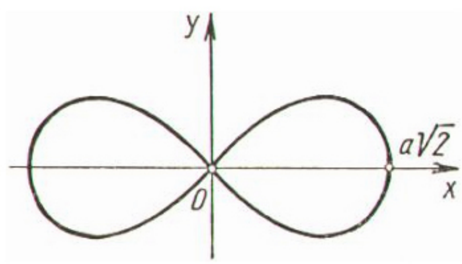

Рис. 57: Лемниската Бернулли.

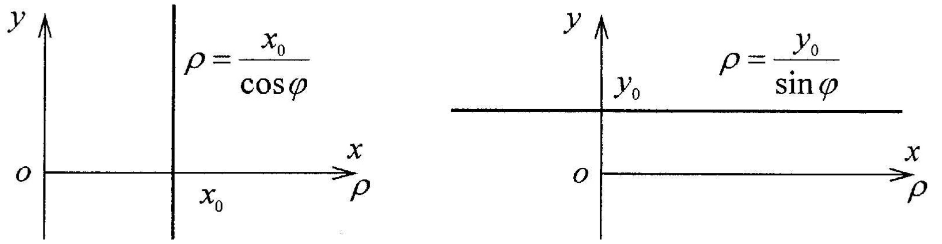

Рис. 58: Прямая $x = x_0$ переходят в $\rho = \frac{x_0}{\cos\varphi}$, а $y = y_0$ в $\rho = \frac{y_0}{\sin\varphi}$.

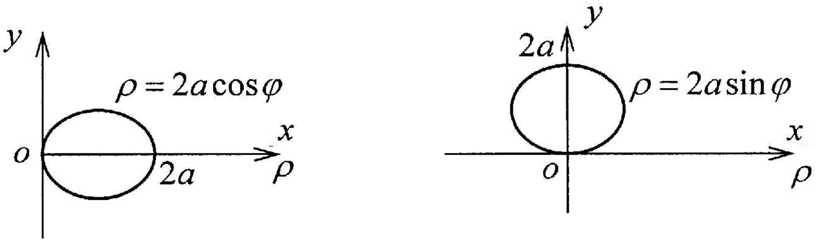

Рис. 59: Окружности $\rho = 2a\cos\varphi$ и $\rho = 2a\sin\varphi$.

§17. Эллипс, гипербола и парабола в полярных координатах

А. Эллипс. По опред. 13.2 эллипс имеет уравнение

$$r_1 + r_2 = 2a,$$

где $a > 0$, а $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$ суть расстояния от произвольной точки M эллипса до фокусов F_1 и F_2 соответственно. Фокусное расстояние $F_1F_2 = 2c$.

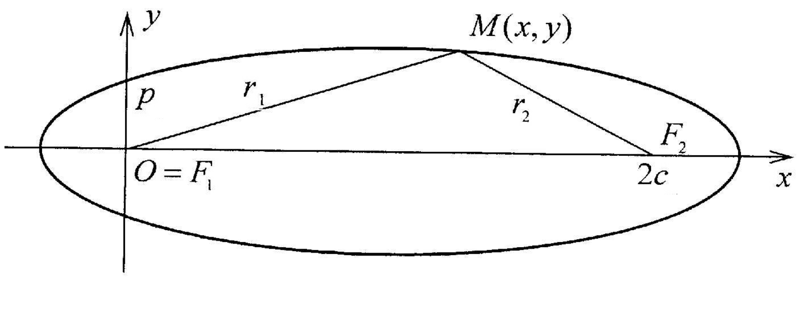

Рис. 60: Эллипс.

Выберем теперь декартовы координаты так, чтобы ось Ox проходила через фокусы F_1 и F_2, а ось Oy проходила через фокус F_2, см. рис. 60. Тогда $F_1 = (0, 0)$, и $F_2 = (2c, 0)$

$$r_1 = F_1M = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$r_2 = F_2M = \sqrt{(x-2c)^2 + y^2}.$$

Запишем эти расстояния в полярных координатах (φ, ρ), т.е. сделаем замену

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}.$$

Получим

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho,$$

$$r_2 = \sqrt{(\rho\cos\varphi - 2c)^2 + \rho^2\sin^2\varphi}.$$

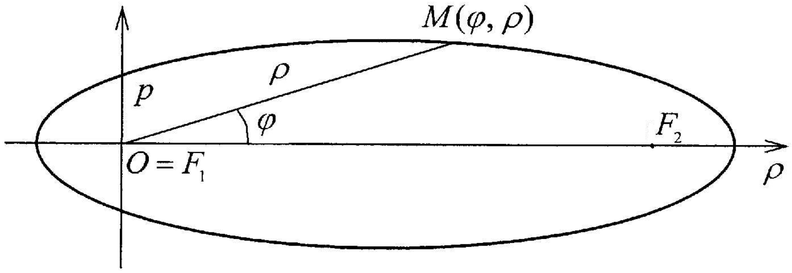

Рис. 61: Эллипс.

Подставим эти расстояния в уравнение эллипса $r_1 + r_2 = 2a$, получим

$$\rho + \sqrt{(\rho\cos\varphi - 2c)^2 + \rho^2\sin^2\varphi} = 2a,$$

$$\rho + \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi - 4c\rho\cos\varphi + 4c^2 + \rho^2\sin^2\varphi} = 2a,$$

$$\rho^2 - 4c\rho\cos\varphi + 4c^2 = (2a-\rho)^2,$$

$$\rho^2 - 4c\rho\cos\varphi + 4c^2 = 4a^2 - 4a\rho + \rho^2,$$

$$a\rho - c\rho\cos\varphi = a^2 - c^2, \text{ где } a^2 - c^2 = b^2,$$

$$a\rho\left(1 - \frac{c}{a}\cos\varphi\right) = b^2, \text{ где } \frac{c}{a} = e,$$

$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - e\cos\varphi}, \text{ где } \frac{b^2}{a} = p,$$

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) есть каноническое уравнение эллипса в полярных координатах, см. рис. 61. Напомним, что у эллипса эксцентриситет $0 < e < 1$, поэтому знаменатель в уравнении (1) всегда положительный и не обращается в нуль.

Б. Гипербола. По опред. 14.2 гипербола имеет уравнение

$$r_1 - r_2 = 2a,$$

где $a > 0$, а $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$ суть расстояния от произвольной точки M гиперболы до фокусов F_1 и F_2 соответственно. Фокусное расстояние есть $F_1F_2 = 2c$.

Выберем теперь декартовы координаты так, чтобы ось Ox проходила через фокусы F_1 и F_2, а ось Oy проходила через фокус F_2, см. рис. 62. Тогда $F_1 = (-2c, 0)$, $F_2 = (0, 0)$ и

$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x+2c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = F_2M = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

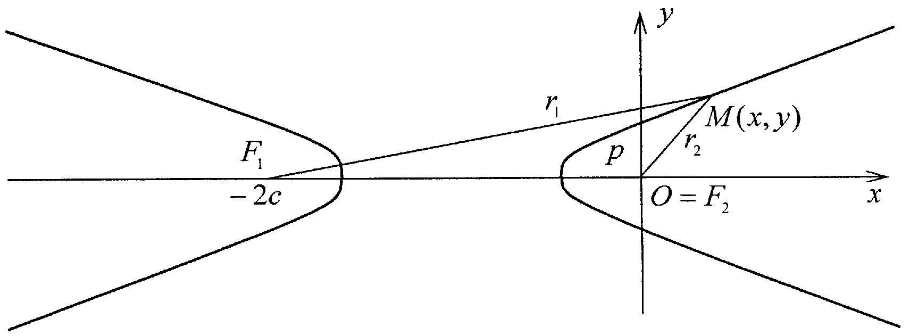

Рис. 62: Гипербола.

Запишем эти расстояния в полярных координатах (φ, ρ), т.е. сделаем замену

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}.$$

Получим

$$r_1 = \sqrt{(\rho\cos\varphi + 2c)^2 + \rho^2\sin^2\varphi}.$$

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho,$$

Подставим эти расстояния в уравнение гиперболы $r_1 + r_2 = 2a$, получим

$$\sqrt{(\rho\cos\varphi + 2c)^2 + \rho^2\sin^2\varphi} - \rho = 2a,$$

$$(\rho\cos\varphi + 2c)^2 + \rho^2\sin^2\varphi = (2a+\rho)^2,$$

$$\rho^2\cos^2\varphi + 4c\rho\cos\varphi + 4c^2 + \rho^2\sin^2\varphi = 4a^2 + 4a\rho + \rho^2,$$

$$\rho^2 + 4c\rho\cos\varphi + 4c^2 = 4a^2 + 4a\rho + \rho^2,$$

$$c\rho\cos\varphi + c^2 = a^2 + a\rho,$$

$$c^2 - a^2 = a\rho - c\rho\cos\varphi, \text{ где } c^2 - a^2 = b^2,$$

$$a\rho\left(1 - \frac{c}{a}\cos\varphi\right) = b^2, \text{ где } \frac{c}{a} = e,$$

$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - e\cos\varphi}, \text{ где } \frac{b^2}{a} = p,$$

$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - e\cos\varphi}, \text{ где } \frac{b^2}{a} = p,$$

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \qquad (2)$$

Уравнение (2) есть каноническое уравнение гиперболы в полярных координатах, см. рис. 63.

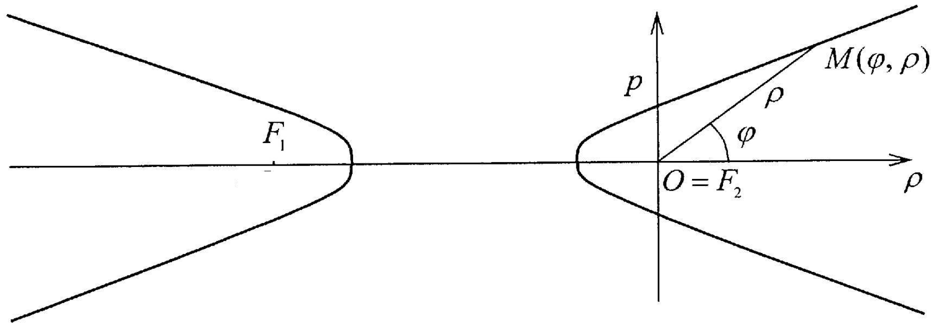

Рис. 63: Гипербола.

Напомним, что у гиперболы эксцентриситет $e > 1$, поэтому знаменатель в уравнении (1) может обращаться в нуль.

$$1 - e\cos\varphi = 0,$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{e},$$

Поэтому при $\varphi \to \pm\arccos\frac{1}{e}$, расстояние $\rho \to \pm\infty$ вдоль асимптот $\varphi = \pm\arccos\frac{1}{e}$ и $\varphi = \pm\arccos\frac{1}{e} - \pi$.

B. Парабола. По опред. 15.1 парабола имеет уравнение

$$r = d,$$

где $r = FM$ и $d = d(M, D)$ суть расстояния от произвольной точки M параболы до фокуса F и точки M до директрисы D соответственно, см.

рис. 63. Расстояние от фокуса до директрисы равно фокальному параметру: $d(F, D) = p$.

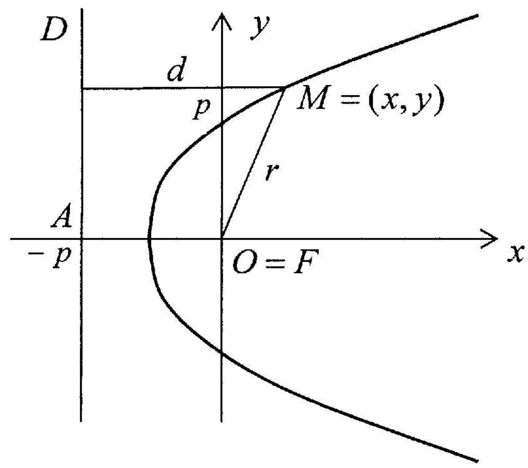

Рис. 64: Парабола.

Выберем теперь декартовы координаты так, чтобы ось Ox проходила через фокус F перпендикулярно директрисе D, а ось Oy проходила через фокус F, см. рис. 64. Тогда $F = (0, 0)$, уравнение директрисы $x = -p$ и

$$r = FM = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$d = d(M, D) = x + p.$$

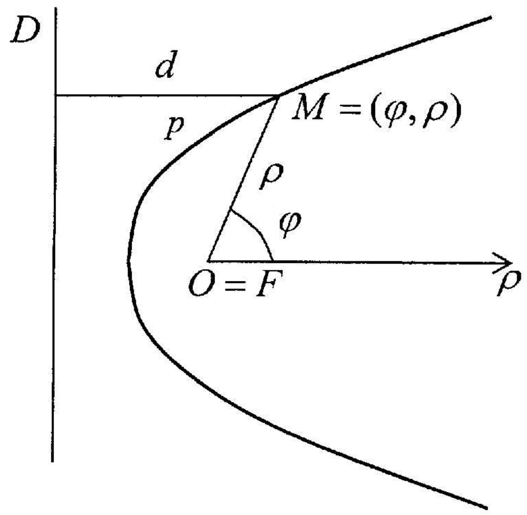

Рис. 65: Парабола.

Запишем эти расстояния в полярных координатах (φ, ρ), т.е. сделаем замену

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}.$$

Получим

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho,$$

$$r_2 = \rho \cos \varphi + p.$$

Подставим эти расстояния в уравнение параболы $r = d$, получим

$$\rho = \rho \cos \varphi + p,$$

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}. \qquad (3)$$

Уравнение (3) есть каноническое уравнение параболы в полярных координатах, см. рис. 65.

Г. *Вывод.* В полярных координатах уравнение

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \varphi} \qquad (4)$$

при $0 < e < 1$ определяет эллипс,
при $e = 1$ — параболу,
при $e > 1$ — гиперболу.

В дополнение заметим, что при $e = 0$ уравнение (4) превращается в $\rho = p$ и определяет окружность радиуса p с центром в полюсе. Рис.

Другими словами при $0 \le e < \infty$ уравнение (4) определяет семейство кривых, которое содержит окружность (при $e = 0$), эллипсы (при $0 < e < 1$), параболу (при $e = 1$) и гиперболы (при $e > 1$), см. рис. 66.

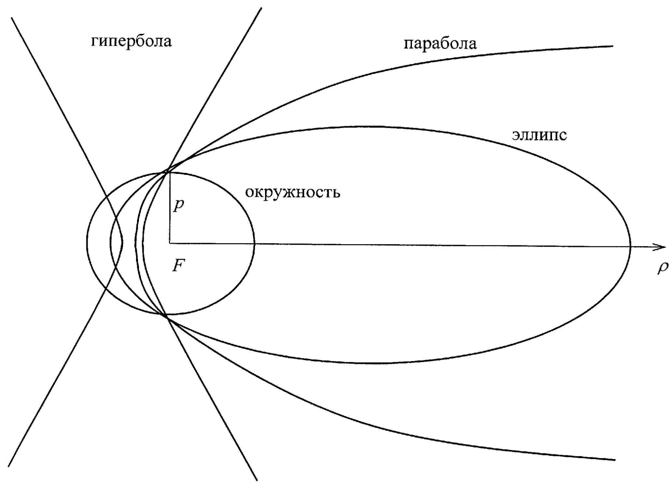

Рис. 66: Все кривые семейства имеют один и тот же фокальный параметр.

§18. Ортогональные преобразования

Пусть Oxy и OXY две декартовы системы координат на плоскости $\mathbb{R}^2$. Следующие определения хорошо известны из школьной математики.

Определение 18.1. 1) Преобразование плоскости, заданное формулами

$$\begin{cases} X = -x \\ Y = y \end{cases},$$

называется *зеркальным отражением относительно оси Oy*.

2) Преобразование плоскости, заданное формулами

$$\begin{cases} X = x \\ Y = -y \end{cases},$$

называется *зеркальным отражением относительно оси Ox*.

Определение 18.2. Преобразование плоскости, заданное формулами

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases},$$

называется *параллельным переносом* плоскости на вектор $\overrightarrow{OM_0}$; см. рис. 67. Обратное преобразование задаётся формулами

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

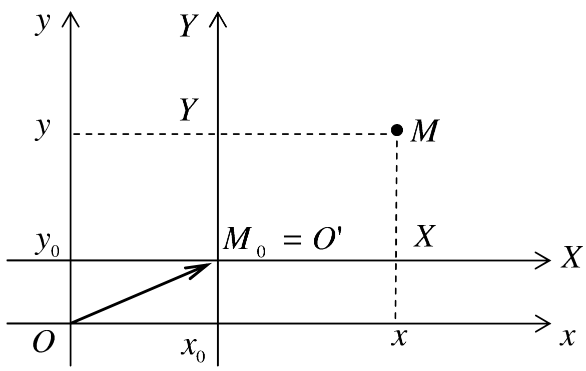

Рис. 67: Параллельный прернос.

Лемма-определение 18.3. *Преобразование плоскости, заданное формулами*

$$\begin{cases} X = \cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y \\ Y = -\sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot y \end{cases},$$

называется поворотом системы координат вокруг начала координат O на угол φ; см. рис. 68. *Обратное преобразование задаётся формулами*

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \cdot X - \sin\varphi \cdot Y \\ y = \sin\varphi \cdot X + \cos\varphi \cdot Y \end{cases}.$$

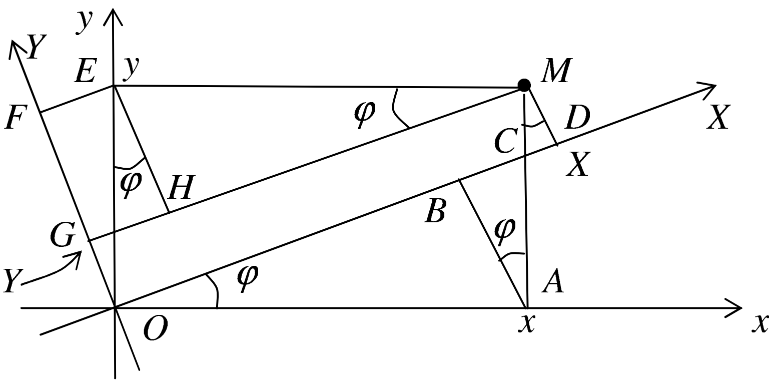

Рис. 68: Поворот на угол φ.

Доказательство. См. рис. 68.

$X = OD = OB + BC + CD = OA\cos\varphi + AC\,\sin\varphi + CM\,\sin\varphi =$
$= x\cos\varphi + (AC + CM)\,\sin\varphi = x\,\cos\varphi + AM\,\sin\varphi = x\cos\varphi + OE\,\sin\varphi =$
$= x\,\cos\varphi + y\,\sin\varphi$.

$Y = OG = OF - FG = OE\,\cos\varphi - EH = y\,\cos\varphi - ME\,\sin\varphi =$
$= y\,\cos\varphi - x\,\sin\varphi = -x\,\sin\varphi + y\,\cos\varphi$.

Обратное преобразование получается из прямого в результате замены x, y, φ на $X, Y, -\varphi$ соотсветственно. □

Определение 18.4. Преобразования 18.1 — 18.3 не меняют размеры и форму фигур. Такие преобразования и их композиции называются *ортогональными.*

§19. Кривые второй степени

Определение 19.1. 1) Выражение ax^iy^j, где $a \neq 0$ и i, j — целые неотрицательные числа, называется *мономом* или *одночленом* от двух переменных. *Степенью монома* называется число $i + j$. Нулевой моном 0 степени не имеет (почему?). Например, мономы $2x^2$, $5xy$, $-7y^2$ имеют степень 2.

2) Сумма конечного числа мономов называется *полиномом* или *многочленом. Степенью полинома* называется максимальная степень входящих в него мономов.

Определение 19.2. Множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$K(x, y) \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \qquad (1)$$

где $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ (т.е. хотя бы один из коэффициентов a, b, c отличен от нуля), называется *кривой степени* 2 или короче *коникой*, а уравнение (1) называется *общим уравнением* коники. Будем рассматривать левую часть уравнения (1) с точностью до постоянного множителя; это означает, что при $\alpha \neq 0$, уравнения $K(x, y) = 0$ и $\alpha K(x, y) = 0$ определяют одну и ту же конику и являются эквивалентными.

Эллипс, гипербола и парабола являются кониками.

Определение 19.3. Если полином в уравнении (1) разлагается в произведение двух множителей степени 1, т.е.

$$K(x, y) \equiv (A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2), \qquad (1)$$

то коника называется *распадающейся*, в противном случае называется *нераспадающейся*.

Например, коника $3x^2 - xy - 4y^2 - x + 13y - 10 \equiv (x + y - 2)(3x - 4y + 5) = 0$ — распадающаяся, она является объединением двух прямых. Эллипс, гипербола и парабола суть нераспадающиеся коники.

Теорема 19.4. (Критерий распадания коники на две прямые). *Многочлен в общем уравнении коники* (1) *раскладывается в произведение многочленов первой степени, согда*

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0.$$

Без доказательства. Этот определитель называется дискриминантом коники.

Наша цель — получить классификацию коник по их форме. Т.к. форма коники не меняется при ортогональных преобразованиях, то в основу классификации удобно положить следующее определение.

Определение 19.5. Две коники $K_1(x, y) = 0$ и $K_2(x, y) = 0$ называются *ортогонально эквивалентными*, если существует ортогональное преобразование, переводящее уравнение $K_1(x, y) = 0$ в уравнение $K_2(x, y) = 0$. Множество всех коник, эквивалентных друг другу, называется *классом эквивалентности*. Классификация с этой эквивалентностью называется *ортогональной* классификацией коник. Доказательство классификации состоит в перечислении всех классов эквивалентности.

Замечание 19.6. 1) Эллипсы $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ и $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ являются ортогонально эквивалентными, они переводятся друг в друга ортогональным преобразованием $(x, y) \mapsto (y, x)$.

2) Эллипсы $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ и $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ не являются ортогонально эквивалентными, они имеют разную форму и не могут наложится один на другого.

Стандартное упрощение общего уравнения коники путём поворота осей.

Замечание 19.7. Если

$$\left\{\begin{array}{l} X=\cos\varphi\cdot x+\sin\varphi\cdot y \\ Y=-\sin\varphi\cdot x+\cos\varphi\cdot y \end{array}\right., \qquad (\star)$$

— поворот плоскости вокруг начала координат O и $f(x,y)=0$ — уравнение к.-л. фигуры в плоскости Oxy, то уравнение этой фигуры в плоскости OXY имеет уравнение $f(\cos\varphi\cdot X+\sin\varphi\cdot Y, -\sin\varphi\cdot X+\cos\varphi\cdot Y)=0$, т.е. получается из $f(x,y)=0$ с помощью обратного преобразования

$$\left\{\begin{array}{l} x=\cos\varphi\cdot X-\sin\varphi\cdot Y \\ y=\sin\varphi\cdot X+\cos\varphi\cdot Y \end{array}\right.. \qquad (\star\star)$$

Теорема 19.8. *При повороте* $(\star)$ *общее уравнение коники* (1) *преобразуется к виду*

$$AX^2+2BXY+CY^2+2DX+2EY+F=0, \qquad (1')$$

где

$A=a\cos^2\varphi+2b\cos\varphi\sin\varphi+c\sin^2\varphi,$
$B=-b\sin^2\varphi-(a-c)\cos\varphi\sin\varphi+b\cos^2\varphi,$
$C=a\sin^2\varphi-2b\cos\varphi\sin\varphi+c\cos^2\varphi,$
$D=d\cos\varphi+e\sin\varphi,$
$E=-d\sin\varphi+e\cos\varphi,$
$F=f.$

Доказательство. Поставим в уравнение (1)

$$\left\{\begin{array}{l} x=\cos\varphi\ X-\sin\varphi\ Y \\ y=\sin\varphi\ X+\cos\varphi\ Y \end{array}\right., \qquad (\star\star)$$

получим

$a(\cos\varphi\ X-\sin\varphi\ Y)^2+$
$2b(\cos\varphi\ X-\sin\varphi\ Y)(\sin\varphi\ X+\cos\varphi\ Y)+$
$c(\sin\varphi\ X+\cos\varphi\ Y)^2+$
$2d(\cos\varphi\ X-\sin\varphi\ Y)+$
$2e(\sin\varphi\ X+\cos\varphi\ Y)+f=0.$

Вычисляем "столбиком" коэффициенты

при X^2, т.е. $A=a\cos^2\varphi+2b\cos\varphi\sin\varphi+c\sin^2\varphi,$
при XY, т.е. $2B=-2a\cos\varphi\sin\varphi+2b(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+2c\cos\varphi\sin\varphi,$

при Y^2, т.е. $C = a\sin^2\varphi - 2b\cos\varphi\sin\varphi + c\cos^2\varphi$,
при X, т.е. $2D = 2d\cos\varphi + 2e\sin\varphi$,
при Y, т.е. $2E = -2d\sin\varphi + 2e\cos\varphi$,
свободный член $F = f$.

Приводим подобные члены в выражении для коэффициента $2B$, получим требуемый результат. $\square$

Замечание 19.9. Если потребовать, чтобы получилось $B = 0$, надо решить уравнение

$$-b\sin^2\varphi - (a-c)\cos\varphi\sin\varphi + b\cos^2\varphi = 0$$

или

$$b\operatorname{tg}^2\varphi + (a-c)\operatorname{tg}\varphi - b = 0,$$

и найти

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-(a-c)\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2b} = \frac{c-a\pm\sqrt{(c-a)^2+4b^2}}{2b}.$$

Т.е. при повороте декартовых координат на каждый из углов

$$\varphi_{1,2} = \operatorname{arctg}\frac{c-a\pm\sqrt{(c-a)^2+4b^2}}{2b}$$

моном $2BXY$ в уравнении $(1')$ исчезнет. Т.о. мы доказали следующую теорему.

Теорема 19.10. *Если $b \neq 0$, то уравнение* (1) *при замене*

$$\begin{cases} x = \cos\varphi_{1,2}\, X - \sin\varphi_{1,2}\, Y \\ y = \sin\varphi_{1,2}\, X + \cos\varphi_{1,2}\, Y \end{cases}$$

(*либо с индексом* 1*, либо с индексом* 2)*, где*

$$\varphi_{1,2} = \operatorname{arctg}\frac{c-a\pm\sqrt{(c-a)^2+4b^2}}{2b},$$

преобразуется к виду (см. рис. 69)

$$AX^2 + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0. \qquad (2)$$

Замечание 19.11. 1) Нетрудно проверить, что $\operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 = -1$. Это означает, что в полярных координатах лучи $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_1$ взаимно перпендикулярны. Очевидно, что $\varphi_1 > 0$, а $\varphi_2 < 0$. Это означает, что при обоих поворотах

$$\begin{cases} X = \cos\varphi_{1,2}\, x + \sin\varphi_{1,2}\, y \\ Y = -\sin\varphi_{1,2}\, x + \cos\varphi_{1,2}\, y \end{cases}$$

эти прямые с точностью до симметрии

$$\begin{cases} X = \pm y \\ Y = \pm x \end{cases},$$

отображаются на координатные оси X и Y. Значит, поворот на угол φ_1 и поворот на угол φ_2 приведёт к одному результату.

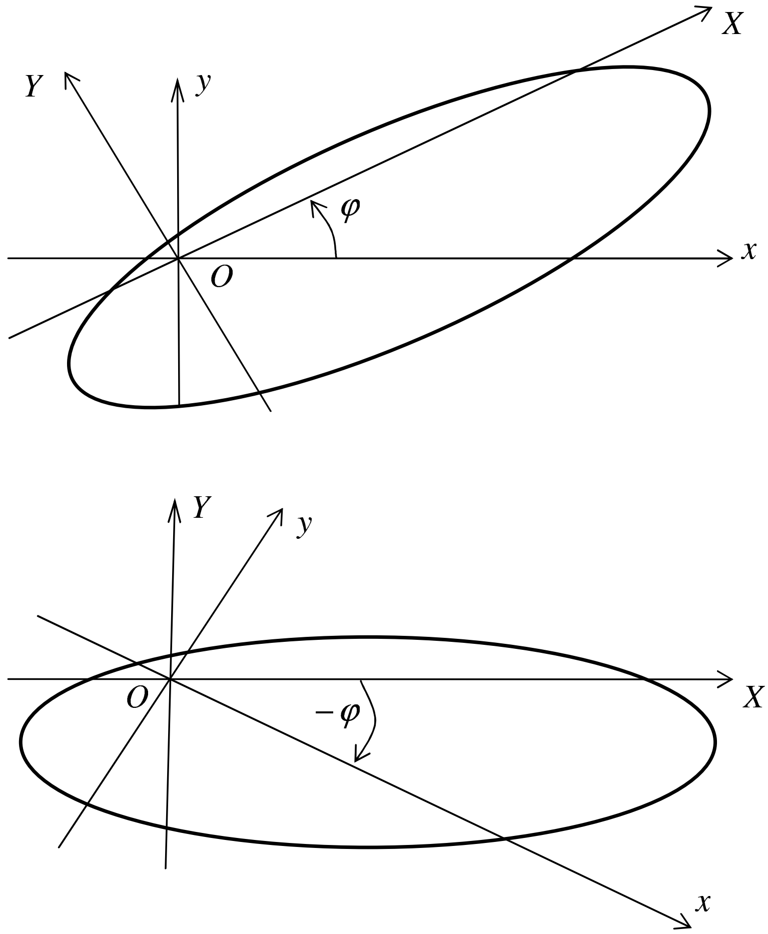

Рис. 69: Поворот системы координат $(O; x, y)$ на угол φ зануляет коэффициент при мономе XY в уравнении любой коники (как распадающейся, так и у нераспадающейся). Оси в системе координат $(O; X, Y)$ параллельны осям симметрии коники.

2) При конкретных преобразованиях уравнения (1) к уравнению (2) полезно использовать формулы

$$\cos\varphi_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi_{1,2} + 1}} \quad \text{и} \quad \sin\varphi_{1,2} = \frac{\operatorname{tg}\varphi_{1,2}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi_{1,2} + 1}}.$$

Стандартное упрощение уравнения коники с $B = 0$ путём параллельного переноса осей. Классификация коник.

В этом пункте мы исследуем уравнение

$$AX^2 + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0. \qquad (2)$$

1. Случай $A > 0$ и $C > 0$. Рассмотрим случай, когда $A > 0$ и $C > 0$. (Если $A < 0$ и $C < 0$, то умножив уравнение (2) на -1, получим $A > 0$ и $C > 0$.)

Выделим в уравнении (2) полные квадраты по X и по Y, получим

$$A\left(X^2 + 2\frac{D}{A}X + \frac{D^2}{A^2}\right) + C\left(Y^2 + 2\frac{E}{C}Y + \frac{E^2}{C^2}\right) - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C} + F = 0,$$

$$A\left(X + \frac{D}{A}\right)^2 + C\left(Y + \frac{E}{C}\right)^2 = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F.$$

Обозначим $\alpha = -\frac{D}{A}$, $\beta = -\frac{E}{C}$, $G = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F$, получим уравнение

$$A\left(X - \alpha\right)^2 + C\left(Y - \beta\right)^2 = G.$$

1.1. Случай $A > 0$, $C > 0$ и $G > 0$. Разделим обе части на G, получим уравнение

$$\frac{\left(X - \alpha\right)^2}{\frac{G}{A}} + \frac{\left(Y - \beta\right)^2}{\frac{G}{C}} = 1$$

эллипса с полуосями $a = \sqrt{\frac{G}{A}}$, $b = \sqrt{\frac{G}{C}}$ и с центром в точке $O' = (\alpha, \beta)$. Параллельным переносом начала координат в точку C эллипс приводится к каноническому виду (см. рис. 70.1)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

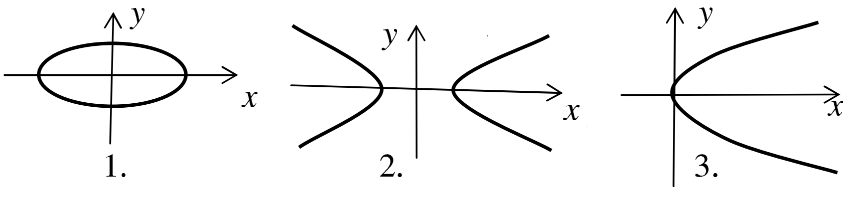

Рис. 70: Вещественные нераспадающиеся коники.

1.2. Случай $A > 0$, $C > 0$ и $G < 0$. Разделим обе части на $-G$, получим уравнение

$$\frac{\left(X - \alpha\right)^2}{-\frac{G}{A}} + \frac{\left(Y - \beta\right)^2}{-\frac{G}{C}} = -1$$

мнимого эллипса с мнимыми полуосями $a = \sqrt{-\frac{G}{A}}$ и $b = \sqrt{-\frac{G}{C}}$ и с центром в точке $O' = (\alpha, \beta)$. Параллельным переносом начала координат в точку C мнимый эллипс приводится к каноническому виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Мнимый эллипс не имеет вещественных точек

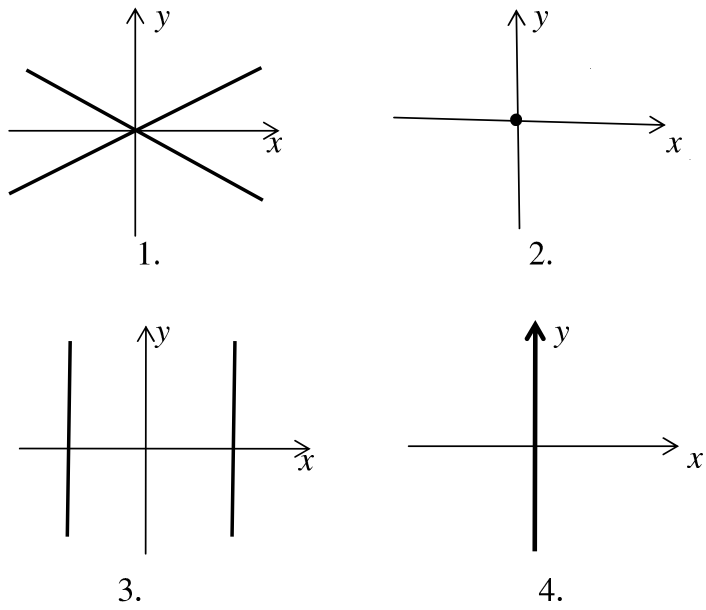

Рис. 71: Вещественные распадающиеся коники.

1.3. Случай $A > 0$, $C > 0$ и $G = 0$. Уравнение

$$A\,(X-\alpha)^2 + C\,(Y-\beta)^2 = 0$$

описывает объединение двух мнимых прямых

$$\left(\sqrt{A}\,(X-\alpha) + i\sqrt{C}\,(Y-\beta)\right)\left(\sqrt{A}\,(X-\alpha) - i\sqrt{C}\,(Y-\beta)\right) = 0,$$

пересекающихся в вещественной точке $O' = (\alpha, \beta)$. Параллельным переносом начала координат в точку O' уравнение этих прямых приводится к стандартному виду (см. рис. 71.2)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

где $a = \frac{1}{\sqrt{A}}$ и $b = \frac{1}{\sqrt{C}}$ или к виду

$$\left(\frac{x}{a} + i\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - i\frac{y}{b}\right) = 0.$$

2. Случай $A > 0$ и $C < 0$. Рассмотрим теперь случай, когда $A > 0$ и $C < 0$. (Если $A < 0$ и $C > 0$, то, умножив уравнение (2) на -1, получим $A > 0$ и $C < 0$.)

Выделим в уравнении (2) полные квадраты по X и по Y и в точности как в п.2.1 получим

$$A\left(X-\alpha\right)^2 + C\left(Y-\beta\right)^2 = G,$$

где обозначены $\alpha = -\frac{D}{A}$, $\beta = -\frac{E}{C}$, $G = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F$.

2.1. Случай $A > 0$, $C < 0$ и $G > 0$. Разделим обе части на G, получим уравнение

$$\frac{\left(X-\alpha\right)^2}{\frac{G}{A}} - \frac{\left(Y-\beta\right)^2}{-\frac{G}{C}} = 1$$

гиперболы с вещественной полуосью $a = \sqrt{\frac{G}{A}}$, мнимой полуосью $b = \sqrt{-\frac{G}{C}}$ и с центром в точке $O' = (\alpha, \beta)$. Параллельным переносом начала координат в точку O' гипербола приводится к каноническому виду (см. рис. 70.2)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2.2. Случай $A > 0$, $C < 0$ и $G < 0$. Легко проверить, что в этом случае получается гипербола.

2.3. Случай $A > 0$, $C < 0$ и $G = 0$. Уравнение

$$A\left(X-\alpha\right)^2 + C\left(Y-\beta\right)^2 = 0$$

описывает объединение двух вещественных прямых

$$\Big(\sqrt{A}\left(X-\alpha\right) + \sqrt{-C}\left(Y-\beta\right)\Big)\Big(\sqrt{A}\left(X-\alpha\right) - \sqrt{-C}\left(Y-\beta\right)\Big) = 0,$$

пересекающихся в точке $O' = (\alpha, \beta)$. Параллельным переносом начала координат в точку O' уравнение этих прямых приводится к каноническому виду (см. рис. 71.1)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

где $a = \frac{1}{\sqrt{A}}$ и $b = \frac{1}{\sqrt{-C}}$.

3. Случай $A = 0$ и $C \neq 0$. Рассмотрим теперь случай, когда $A = 0$ и $C \neq 0$. (Если $A \neq 0$ и $C = 0$, то с помощью симметрии относительно биссектрисы первого и третьего квадрантов получим $A = 0$ и $C \neq 0$.)

Уравнении (2) запишется в виде

$$CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0. \qquad (3)$$

Выделим в этом уравнении полный квадрат по Y получим

$$C\left(Y-\beta\right)^{2}+2DX-\frac{E^{2}}{C}+F=0, \qquad (4)$$

где $\beta=-\frac{E}{C}$.

3.1. Случай $A=0$ и $C\neq 0$ и $D\neq 0$. Разделим обе части на C, получим уравнение

$$\left(Y-\beta\right)^{2}=-2\frac{D}{C}\left(X-\alpha\right),$$

параболы с фокальным параметром $p=\frac{D}{C}$ и с вершиной в точке $O'=(\alpha,\beta)$, где $\alpha=\frac{E^2-CF}{2D}$. С помощью параллельного переноса начала координат в точку O' уравнение параболы приводится к виду

$$Y^{2}=-2pX.$$

С помощью симметрии относительно оси Y оно приводится к каноническому виду (см. рис. 70.3)

$$y^{2}=2px.$$

3.2. Случай $A=0$, $C\neq 0$ и $D=0$. Уравнении (4) запишется в виде

$$\left(Y-\beta\right)^{2}-\frac{E^{2}-CF}{C^{2}}=0. \qquad (5)$$

3.2.1. Случай $A=0$, $C\neq 0$, $D=0$ и $E^2-CF>0$. В этом случае уравнение

$$\left(Y-\beta\right)^{2}-\frac{E^{2}-CF}{C^{2}}=0 \qquad (5)$$

описывает объединение двух вещественных параллельных прямых

$$\left(Y-\beta+\frac{\sqrt{E^{2}-CF}}{C}\right)\left(Y-\beta-\frac{\sqrt{E^{2}-CF}}{C}\right)=0.$$

Сделав параллельный перенос в точку $(0,\beta)$ и обозначив $a=\frac{\sqrt{E^2-CF}}{C}$, получим уравнение двух вещественных параллельных прямых $y^2-a^2=0$, которое при помощи симметрии относительно биссектрисы первого квадранта приводится к каноническому виду (см. рис. 71.3)

$$x^{2}-a^{2}=0.$$

3.2.2. Случай $A=0$, $C\neq 0$, $D=0$ и $E^2-CF<0$. В этом случае уравнение

$$\left(Y-\beta\right)^{2}+\frac{CF-E^{2}}{C^{2}}=0 \qquad (5)$$

описывает объединение двух мнимых параллельных прямых

$$\left(Y-\beta+i\frac{\sqrt{CF-E^2}}{C}\right)\left(Y-\beta-i\frac{\sqrt{CF-E^2}}{C}\right)=0.$$

Сделав параллельный перенос в точку $(0,\beta)$, затем симметрию относительно биссектрисы первого квадранта и обозначив $a=\frac{\sqrt{CF-E^2}}{C}$ уравнение приводится к каноническому виду

$$x^2+a^2=0.$$

Эта коника не имеет вещественных точек.

3.2.3. Случай $A=0$, $C\neq 0$, $D=0$ и $E^2-CF=0$. В этом случае уравнение (5) принимает вид

$$(Y-\beta)^2=0,$$

описывает двукратную прямую. Сделав параллельный перенос в точку $(0,\beta)$, затем симметрию относительно биссектрисы первого квадранта, получим каноническое уравнение двух совпадающих прямых (см. рис. 71.4)

$$x^2=0.$$

Таким образом нами доказана следующая теорема.

Теорема 19.12. (Ортогональная классификация коник.) *Общее уравнение коники* (1) *с помощью ортогональных преобразований (поворот + параллельный перенос) может быть приведено только к одному из* 9 *видов Таблицы* 1 на стр. 79.

Замечание 19.13. Ортогональная классификация коник содержит несчётное количество классов эквивалентности.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение коники

$$9x^2+24xy+16y^2-20x+15y=0, \qquad (\star)$$

определить её тип и нарисовать.

Решение. Из общего уравнения коники нетрудно видеть, что $a=9, b=12$, $c=16$.

По замечанию 19.5 уравнение для нахождения угла поворота системы координат, в которой $B=0$ есть

$$b\operatorname{tg}^2\varphi+(a-c)\operatorname{tg}\varphi-b=0 \qquad \text{или} \qquad 12\operatorname{tg}^2\varphi-7\operatorname{tg}\varphi-12=0.$$

Таблица 1.

No.	Ортогональные классы коник	Канонические уравнения	Рисунок
1	Классы вещ. эллипсов	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ 0<b\le a$	70.1
2	Классы гипербол	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ \ a>0,\, b>0$	70.2
3	Классы парабол	$y^2=2px,\ \ p>0$	70.3
4	Классы мним. эллипсов	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,\ 0<b\le a$	—
5	Классы вещ. пересек. прямых	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,\ 0<b\le a$	71.1
6	Классы мним. пересек. прямых	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0,\ 0<b\le a$	71.2
7	Классы вещ. паралл. прямых	$x^2-a^2=0,\ a>0$	71.3
8	Классы мним. паралл. прямых	$x^2+a^2=0,\ a>0$	—
9	Класс совпадающих прямых	$x^2=0$	71.4

Его решения $\operatorname{tg}\varphi_1=-\frac{3}{4}$ и $\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{4}{3}$. Выберем $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{3}{4}$, тогда по тригонометрическим формулам 19.7.2)

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi+1}}\quad\text{и}\quad\sin\varphi=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi+1}}$$

находим

$$\cos\varphi=\frac{4}{5}\quad\text{и}\quad\sin\varphi=-\frac{3}{5}.$$

Записываем формулы поворота из опред. 18.3

$$\begin{cases} x=\frac{4}{5}X+\frac{3}{5}Y=\frac{1}{5}(4X+3Y)\\ y=-\frac{3}{5}X+\frac{4}{5}Y=\frac{1}{5}(-3X+4Y)\end{cases}.$$

Подставим x и y в исходное уравнение ($\star$), упростим его, получим уравнение $Y^2=X$.

Определение 19.14. Преобразования плоскости, определённые соответствием[5] $(x,y)\mapsto(\frac{1}{a}\,x,\frac{1}{b}\,y)$ при $ab\neq 0$ называются преобразованиями *растяжений-сжатий* вдоль осей координат.

Чтобы получить более простую классификацию коник добавим к ортогональным преобразованиям преобразования растяжений-сжатий.

Определение 19.15. Объединение множества ортогональных преобразований, множества преобразований растяжений-сжатий и множества их композиций называются множеством *аффинных* преобразований.

[5] Соответствие $(x,y)\mapsto(\frac{1}{a}\,x,\frac{1}{b}\,y)$ является компактной записью преобразования $\begin{cases} X=\frac{1}{a}\,x\\ Y=\frac{1}{b}\,y\end{cases}$. С помощью обратного преобразования $\begin{cases} x=aX\\ y=bY\end{cases}$, например, уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ преобразуется к виду $X^2+Y^2=1$, которое затем в стандартных координатах переписывают в виде $x^2+y^2=1$.

Определение 19.16. Две коники $K_1(x, y) = 0$ и $K_2(x, y) = 0$ называются *аффинно эквивалентными*, если существует аффинное преобразование, переводящее уравнение $K_1(x, y) = 0$ в уравнение $K_2(x, y) = 0$. Множество всех коник, аффинно эквивалентных друг другу, называется *классом аффинной эквивалентности.* Классификация с этой эквивалентностью называется *аффинной* классификацией коник. Доказательство классификации состоит в перечислении всех классов эквивалентности.

Замечание 19.17. 1) Эллипсы $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2} = 1$ и $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5} = 1$ являются аффинно эквивалентными, первая переводится во вторую преобразованием $(x, y) \mapsto (\frac{\sqrt{3}}{2}\, x,\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\, y)$.

2) Коники из предыдущего пункта соответственно с помощью преобразований $(x, y) \mapsto (\frac{1}{\sqrt{3}}\, x,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\, y)$ и $(x, y) \mapsto (\frac{1}{2}\, x,\ \frac{1}{\sqrt{5}}\, y)$ переводятся в стандартную окружность $x^2 + y^2 = 1$.

Теорема 19.18. (Аффинная классификация коник.) *Общее уравнение коники* (1) *с помощью аффинного преобразования может быть приведено только к одному из* 9 *уравнений Таблицы* 2. См. стр. 80

Таблица 2.

No.	Аффинный класс коники	Каноническое уравнение	Рисунок
1	Класс эллипсов	$x^2 + y^2 = 1$	
2	Класс гипербол	$x^2 - y^2 = 1$	
3	Класс парабол	$y^2 = x$	
4	Класс мнимых эллипсов	$x^2 + y^2 = -1$	
5	Класс вещ. пересек прямых	$x^2 - y^2 = 0$	
6	Класс мним. пересек. прямых	$x^2 + y^2 = 0$	
7	Класс вещ. паралл. прямых	$x^2 - 1 = 0$	
8	Класс мним. паралл. прямых	$x^2 + 1 = 0$	
9	Класс совпадающих прямых	$x^2 = 0$	

Доказательство. 1) По теор. 19.9 в ортогональной классификации коник все канонические уравнения эллипсов описываются уравнениями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ при $0 < b \le a$. Применим преобразование плоскости, описываемое соответствием $(x, y) \mapsto (\frac{1}{a}\, x, \frac{1}{b}\, y)$, получим уравнение $x^2 + y^2 = 1$.

2) По теор. 19.9 в ортогональной классификации коник все канонические уравнения гипербол описываются уравнениями $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ при $a > 0$ и $b > 0$. Применим преобразование плоскости, описываемое соответствием $(x, y) \mapsto (\frac{1}{a}\, x, \frac{1}{b}\, y)$, получим уравнение $x^2 + y^2 = 1$.

3) По теор. 19.9 в ортогональной классификации коник все канонические уравнения парабол описываются уравнениями $y^2 = 2px$ при $p > 0$. Применим преобразование плоскости, описываемое соответствием $(x, y) \mapsto (2px, y)$, получим уравнение $x^2 + y^2 = 1$.

4), 5), 6) Аналогичны пп. 1), 2), 1) соответственно.

7) По теор. 19.9 в ортогональной классификации коник все канонические уравнения пар вещественных пересекающихся прямых описываются уравнениями $x^2 - a^2 = 0$ при $a > 0$. Применим преобразование плоскости, описываемое соответствием $(x, y) \mapsto (ax, y)$, получим уравнение $x^2 - 1 = 0$.

8) Аналогично п. 7).

9) Уравнение $x^2 = 0$ является каноническим. □

Таблица 3. Качественное исследование произвольной коники.

<table>
<tr><th>δ</th><th>Тип коники</th><th colspan="2">$\Delta \neq 0$</th><th colspan="2">$\Delta = 0$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$\delta > 0$</td><td rowspan="2">Эллиптический</td><td>$\frac{\Delta}{S} < 0$</td><td>Вещественный эллипс</td><td colspan="2" rowspan="2">Пара мнимых прямых, пересекающихся в вещественной точке</td></tr>
<tr><td>$\frac{\Delta}{S} > 0$</td><td>Мнимый эллипс</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\delta = 0$</td><td rowspan="3">Параболический</td><td colspan="2" rowspan="3">Парабола</td><td>$S' > 0$</td><td>Пара мнимых параллельных прямых</td></tr>
<tr><td>$S' = 0$</td><td>Пара вещественных совпадающих прямых</td></tr>
<tr><td>$S' < 0$</td><td>Пара вещественных параллельных прямых</td></tr>
<tr><td>$\delta < 0$</td><td>Гиперболический</td><td colspan="2">Гипербола</td><td colspan="2">Пара вещественных пересекающихся прямых</td></tr>
</table>

Замечание 19.19. Аффинная классификация конечна. Она состоит из 9-ти классов аффинной эквивалентности.

Замечание 19.20. Вернёмся к общему уравнению коники

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0. \qquad (1)$$

Обозначим

$$S = a + c, \quad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix},$$

$$S' = \begin{vmatrix} a & d \\ d & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & e \\ e & f \end{vmatrix}.$$

Величина S называется *следом*, определитель Δ называется *дискриминантом*, а S' называется *полуинвариантом* коники.

§20. Поверхности степени 2

Определение 20.1. *Поверхностью степени* 2 или *квадрикой* называется множество точек в пространстве $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющее уравнению

$$Q(x,y,z) \equiv ax^2+2bxy+cy^2+2dyz+ez^2+2fxz+2gx+2hy+2iz+k=0, \qquad (1)$$

где $(a,b,c,d,e) \neq (0,0,0,0)$. Это уравнение называется *общим* уравнением квадрики. Будем рассматривать левую часть уравнения (1) с точностью до постоянного множителя; это означает, что при $\alpha \neq 0$ уравнения $Q(x,y,z)=0$ и $\alpha Q(x,y,z) = 0$ считаются эквивалентными и определяют одну и ту же квадрику.

Определение 20.2. Преобразование $a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ трёхмерного пространства, определённое по формуле

$$\begin{cases} X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + x_0 \\ Y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + y_0 \\ Z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + z_0 \end{cases},$$

называется *ортогональным* если оно сохраняет длины векторов и углы между ними.

Замечание 20.3. 1) Геометрически ортогональными преобразованиями являются повороты вокруг прямых, зеркальные отражения относительно плоскостей и параллельные переносы.

2) Из опред. 20.2 следует, что при ортогональных преобразованиях сохраняется форма трёхмерных тел и форма поверхностей в $\mathbb{R}^3$.

3) Если систему опред. 20.2 решить относительно $x, y.z$ (например, по правилу Крамера), то получится обратное преобразование

$$\begin{cases} x = b_{11}X + b_{12}Y + b_{13}Z - x_0 \\ y = b_{21}X + b_{22}Y + b_{23}Z - y_0 \\ z = b_{31}X + b_{32}Y + b_{33}Z - z_0 \end{cases},$$

которое тоже является ортогональным.

4) Если в системе координат $(O; x, y, z)$ квадрика имеет уравнение ()

$$Q(x, y, z) = 0, \qquad (1)$$

то в системе координат $(O'; X, Y, Z)$ эта квадрика имеет уравнение

$$Q(b_{11}X+b_{12}Y+b_{13}Z-x_0,\ b_{21}X+b_{22}Y+b_{23}Z-y_0,\ b_{31}X+b_{32}Y+b_{33}Z-z_0) = 0.$$

Определение 20.4. Если существует ортогональное преобразование, переводящее уравнение квадрики в уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

то квадрика называется *вещественным эллипсоидом*, см. рис. 72.

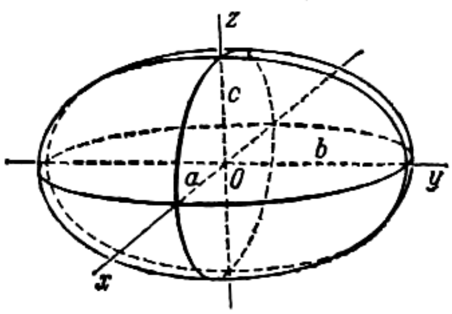

Рис. 72: Эллипсоид.

Определение 20.5. Если существует ортогональное преобразование, переводящее уравнение квадрики в уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

то она называется *мнимым эллипсоидом.* Мнимый эллипсоид не имеет вещественных точек.

Числа a, b, c называются *полуосями* вещественного и мнимого эллипсоидов. Если $a = b = c = R$, то эллипсоиды превращаются соответственно в *вещественную* и *мнимую сферы.*

Определение 20.6. Если существует ортогональное преобразование, переводящее уравнение квадрики в уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

то она называется *однополостным гиперболоидом*, см. рис. 73.

Определение 20.7. Если существует ортогональное преобразование, переводящее уравнение квадрики в уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

то она называется *двуполостным гиперболоидом*, см. рис. 74.

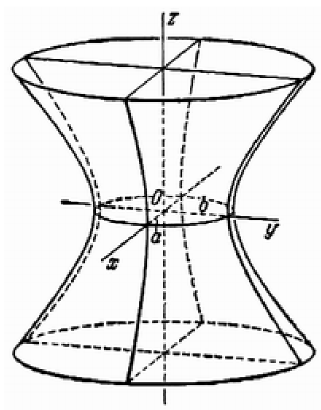

Рис. 73: Однополостный гиперболоид.

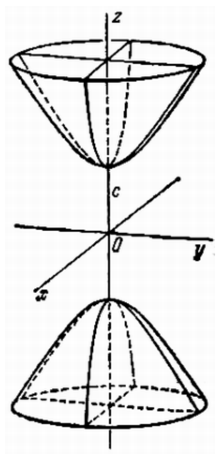

Рис. 74: Двуполостный гиперболоид.

Определение 20.8. Если существует ортогональное преобразование, переводящее уравнение квадрики в уравнение

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q},$$

то она называется *эллиптическим параболоидом*, см. рис. 75, где $p > 0$ и $q > 0$.

Определение 20.9. Если существует ортогональное преобразование, переводящее уравнение квадрики в уравнение

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q},$$

то она называется *гиперболическим параболоидом*, см. рис. 76, где $p > 0$ и $q > 0$.

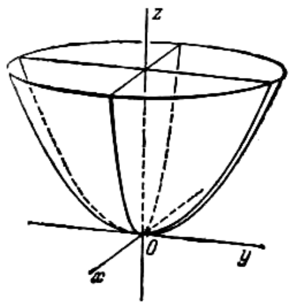

Рис. 75: Эллиптический параболоид.

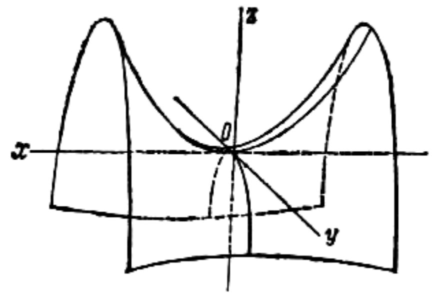

Рис. 76: Гиперболический параболоид (седло).

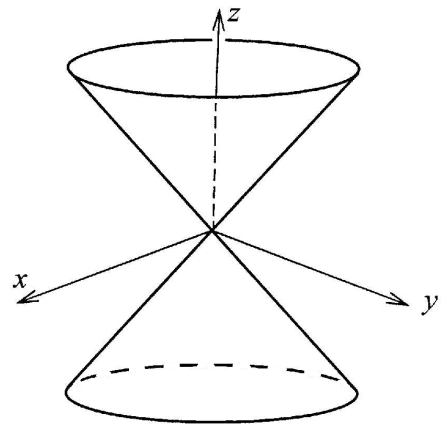

Рис. 77: Вещественный конус.

Определение 20.10. Если существует ортогональное преобразование, переводящее уравнение квадрики в уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

то она называется *вещественным конусом*, см. рис. 77.

Определение 20.11. Если существует ортогональное преобразование, переводящее уравнение квадрики в уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

то она называется *мнимым конусом*, где в обоих случаях $p > 0$ и $q > 0$. Мнимый конус состоит их одной точки в начале координат; см. рис. 78.

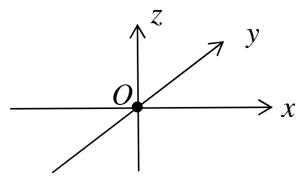

Рис. 78: Мнимый конус.

Определение 20.12. Если существует ортогональное преобразование, переводящее уравнение квадрики в уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то она называется *вещественным эллиптическим цилиндром*, см. рис. 79.

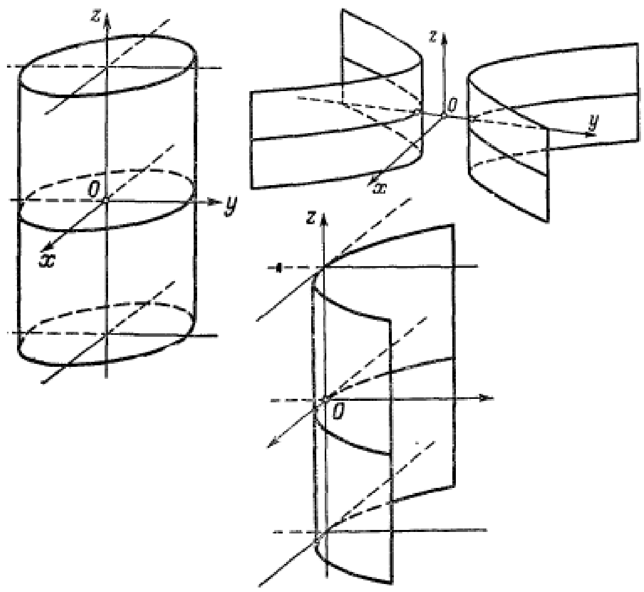

Рис. 79: Эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры.

Определение 20.13. Если существует ортогональное преобразование, переводящее уравнение квадрики в уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

то она называется *мнимым эллиптическим цилиндром.* Мнимый эллиптический цилиндр не имеет вещественных точек.

Определение 20.14. Если существует ортогональное преобразование, переводящее уравнение квадрики в уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то она называется *гиперболическим цилиндром*, см. рис. 79.

Определение 20.15. Если существует ортогональное преобразование, переводящее уравнение квадрики в уравнение

$$y^2 = 2px,$$

то — *параболическим цилиндром*, см. рис. 79.

Определение 20.16. Если многочлен в общем уравнении квадрики раскладывается на два линейных множителя, т.е.

$$Q(x, y, z) \equiv (A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

то квадрика называется *распадающейся.* в противном случае называется *нераспадающейся.* Ясно, что распадающаяся квадрика представляет собой объединение двух плоскостей.

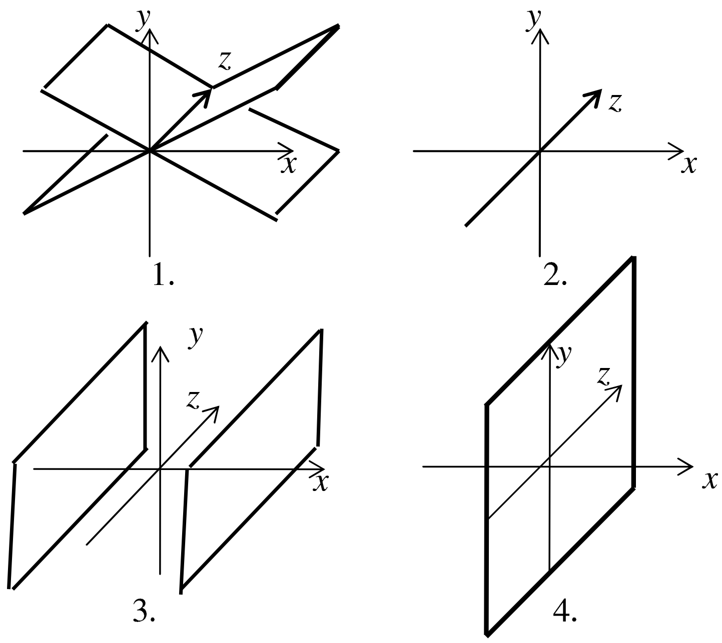

Рис. 80: Вещественные распадающиеся квадрики.

Примеры. 1) Квадрика

$$(x + 2y - 5z + 3)(2x - 3y + z + 5) = 0$$

представляет собой объединение двух вещественных пересекающихся плоскостей. Можно предъявить ортогональное преобразование, переводящее её уравнение к виду, см. рис. 80.1,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

2) Квадрика

$$(x + 2y - 5z + 3)^2 + (2x - 3y + z + 5)^2 = 0,$$

или

$$[(x + 2y - 5z + 3 - i(2x - 3y + z + 5)]\,[(x + 2y - 5z + 3 + i(2x - 3y + z + 5)] = 0,$$

представляет собой объединение дух мнимых плоскостей, пересекающихся по вещественной прямой

$$\begin{cases} x + 2y - 5z + 3 = 0 \\ 2x - 3y + z + 5 = 0 \end{cases}.$$

Можно предъявить ортогональное преобразование, переводящее её уравнение к виду, см. рис. 80.2, график — двукратная ось Oz

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

3) Квадрика

$$(x + 2y - 5z + 3)(x + 2y - 5z + 5) = 0$$

представляет собой объединение двух вещественных параллельных плоскостей. Можно предъявить ортогональное преобразование, переводящее её уравнение к виду, см. рис. 80.3,

$$x^2 - a^2 = 0;$$

4) Квадрика

$$(x + 2y - 5z)^2 + 4 = 0$$

представляет собой объединение двух мнимых параллельных плоскостей:

$$(x + 2y - 5z - 2i)(x + 2y - 5z + 2i) = 0.$$

Можно предъявить ортогональное преобразование, переводящее её уравнение к виду

$$x^2 + a^2 = 0;$$

квадрика не имеет вещественных точек.

5) Квадрика

$$(x + 2y - 5z + 3)^2 = 0$$

представляет собой пару совпадающих плоскостей. Можно предъявить ортогональное преобразование, переводящее её уравнение к виду, см. рис. 80.4,

$$x^2 = 0.$$

Таблица 4.

№	Ортогональные классы квадрик	Каноническое уравнение	Рис.
1	Класс вещественных эллипсоидов	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ 0 < c \le b \le a$	72
2	Класс мнимых эллипсоидов	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,\ 0 < c \le b \le a$	—
3	Класс 1-полостных гиперболоидов	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\ 0 < b \le a, 0 < c$	73
4	Класс 2-полостных гиперболоидов	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,\ 0 < b \le a, 0 < c$	74
5	Класс эллиптических параболоидов	$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q},\ \ 0 < p,\ \ 0 < q$	75
6	Кл. гиперболических параболоидов	$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q},\ \ 0 < p,\ \ 0 < q$	76
7	Класс вещественных конусов	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,\ 0 < b \le a,\ c > 0$	77
8	Класс мнимых конусов	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,\ 0 < c \le b \le a$	78
9	Класс эллиптических цилиндров	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ 0 < b \le a$	79
10	Класс мним. эллипт. цилиндров	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,\ 0 < b \le a$	—
11	Класс гиперболических цилиндров	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0$	79
12	Класс параболических цилиндров	$y^2 - 2px,\ p > 0$	79
13	Класс вещ. пересек. плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,\ 0 < b \le a$	80.1
14	Класс мним. пересек. плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,\ 0 < b \le a$	80.2
15	Класс вещ. паралл. плоскостей	$x^2 - a^2 = 0,\ a > 0$	80.3
16	Класс мним. паралл. плоскостей	$x^2 + a^2 = 0,\ a > 0$	—
17	Класс совпадающих плоскостей	$x^2 = 0$	80.4

Определение 20.17. Две квадрики $Q_1(x, y, z) = 0$ и $Q_2(x, y, z) = 0$ называются *ортогонально эквивалентными*, если существует ортогональное преобразование, переводящее уравнение $Q_1(x, y, z) = 0$ в уравнение $Q_2(x, y, z) = 0$. Множество ортогонально эквивалентных квадрик называется *классом ортогональной эквивалентности*. Классификация с этой эквивалентностью называется *ортогональной* классификацией квадрик. Доказательство классификации состоит в перечислении всех классов эквивалентности.

Теорема 20.18. (Ортогональная классификация квадрик.). *Не существуют квадрики, отличные от 12-ти семейств классов (ортогональной эквивалентности) нераспадающихся квадрик из строк* 1 – 12, *и 5-ти классов распадающихся квадрик из строк* 13 – 17 *Таблицы* 4; на стр. 89. (Без доказательства.)

Замечание 20.19. Ортогональная классификация квадрик содержит несчётное множество классов.

Таблица 5.

№	Аффинные классы квадрик	Каноническое уравнение	Рис.
1	Класс вещественных эллипсоидов	$x^2+y^2+z^2=1$	72
2	Класс мнимых эллипсоидов	$x^2+y^2+z^2=-1$	
3	Класс 1-полостных гиперболоидов	$x^2+y^2-z^2=1$	73
4	Класс 2-полостных гиперболоидов	$x^2+y^2-z^2=-1$	74
5	Класс эллиптических параболоидов	$z=x^2+y^2$	75
6	Кл. гиперболических параболоидов	$z=x^2-y^2$	76
7	Класс вещественных конусов	$x^2+y^2-z^2=0$	77
8	Класс мнимых конусов	$x^2+y^2+z^2=0$	
9	Класс эллиптических цилиндров	$x^2+y^2=1$	79
10	Класс мним. эллипт. цилиндров	$x^2+y^2=-1$	
11	Класс гиперболических цилиндров	$x^2-y^2=1$	79
12	Класс параболических цилиндров	$y^2=x$	79
13	Класс вещ. пересек. плоскостей	$x^2-y^2=0$	80.1
14	Класс мним. пересек. плоскостей	$x^2+y^2=0$	80.2
15	Класс вещ. паралл. плоскостей	$x^2-1=0$	80.3
16	Класс мним. паралл. плоскостей	$x^2+1=0$	
17	Класс совпадающих плоскостей	$x^2=0$	80.4

Определение 20.20. Преобразования плоскости, определённые соответствием $(x,y,z) \mapsto (\frac{1}{a}\,x, \frac{1}{b}\,y, \frac{1}{c}\,z)$ при $abc \neq 0$ называются преобразованиями *растяжений-сжатий* вдоль осей координат.

Определение 20.21. Объединение множества ортогональных преобразований, множества преобразований растяжений-сжатий и множества их композиций называются множеством *аффинными* преобразований.

Определение 20.22. Две квадрики $Q_2(x,y,z)=0$ и $Q_2(x,y,z)=0$ называются *аффинно эквивалентными*, если существует аффинное преобразование, переводящее уравнение $Q_2(x,y,z)=0$ в уравнение $Q_2(x,y,z)=0$. Множество аффинно эквивалентных квадрик называется *классом аффинной эквивалентности*. Классификация с этой эквивалентностью называется *аф-*

финной классификацией квадрик. Доказательство классификации состоит в перечислении всех классов эквивалентности.

Теорема 20.23. (Аффинная классификация квадрик.). *Не существуют квадрики, отличные от 12-ти классов (аффинной эквивалентности) нераспадающихся квадрик из строк* 1 – 12, *и 5-ти классов распадающихся квадрик из строк* 13 – 17 *Таблицы* 4; на стр. 90. (Без доказательства.)

Замечание 20.24. Аффинная классификация квадрик конечна, она содержит 17 классов аффинной эквивалентности.

§21. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида

Определение 21.1. Если через каждую точку поверхности проходит прямая, лежащая на этой поверхности, то поверхность называется *линейчатой*, а все такие прямые называются *прямолинейными образующими.*

Примеры. Цилиндрические и конические поверхности являются линейчатыми поверхностями, см. рис. 81.

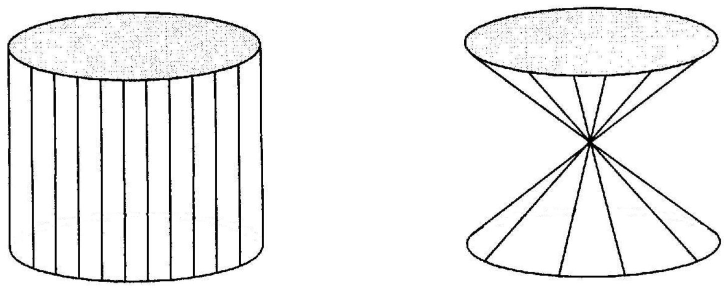

Рис. 81: Цилиндры и конусы — линейчатые поверхности.

Замечание 21.2. 1) Запишем уравнение однополостного гиперболоида 20.6 в следующем виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}, \qquad (1)$$

а затем в виде

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

Исходя из этого уравнения, изучим систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases}. \qquad (2)$$

где параметры α и β удовлетворяют условию $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. При при условии $(\alpha, \beta) = (0,0)$ любая точка пространства $\mathbb{R}^3$ удовлетворяет системе (2), т.е. это условие не содержит никакой информации, поэтому всюду в дальнейшем считаем, что $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

2) Заметим, что все решения системы (2) удовлетворяют уравнению (1). Это означает, что если плоскости из системы (2) пересекаются, то прямая, описываемая системой (2), лежит на гиперболоиде (1).

3) Запишем уравнения системы в виде общих уравнений плоскостей

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{a}x - \frac{\beta}{b}y + \frac{\alpha}{c}z - \beta = 0 \\ \frac{\beta}{a}x + \frac{\alpha}{b}y - \frac{\beta}{c}z - \alpha = 0 \end{cases}. \qquad (3)$$

Лемма 21.3. *Векторы нормалей* $\mathbf{N}_1 = \left(\frac{\alpha}{a}, -\frac{\beta}{b}, \frac{\alpha}{c}\right)$ *и* $\mathbf{N}_2 = \left(\frac{\beta}{a}, \frac{\alpha}{b}, -\frac{\beta}{c}\right)$ *не коллинеарны.* Другими словами, *системы* (2) и (3) *определяет прямую в пространстве* $\mathbb{R}^3$.

Доказательство. Предположим противное, что векторы коллинеарны. Тогда по 2-му крит. коллинеарности 3.9 их координаты пропорциональны, т.е.

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Это двойное сквозное равенство эквивалентно системе двух уравнений

$$\begin{cases} \alpha^2 = -\beta^2 \\ \alpha^2 = \beta^2 \end{cases},$$

которая имеет только нулевое решение $(\alpha, \beta) = (0,0)$. Полученное противоречие доказывает, что векторы $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ не коллинеарны. $\square$

Лемма 21.4. *Прямая* (2) *лежит на гиперболоиде* (1).

Доказательство. Умножая почленно уравнения системы (2), получим уравнение гиперболоида (1). Это означает, что все решения системы (2) (точки прямой) являются решениями уравнения (1) (т.е. являются точками гиперболоида). $\square$

Следствие 21.5. *При* $k \neq 0$ *пары* (α, β) *и* $(k\alpha, k\beta)$ *определяют одну и ту же прямую.*

Замечание 21.6. Система (2) определяет параметрическое семейство прямых на гиперболоиде с параметрами α и β. Если в системе (2) заменить при $k \neq 0$ пару (α, β) на пару $(k\alpha, K\beta)$, то получим уравнения той же самой прямой. Поэтому каждая прямая этого семейства однозначно определена отношением $(\alpha : \beta) = (k\alpha : k\beta)$. Обозначим прямую отвечающую этому отношению через $L_{\alpha:\beta}$, а множество всех прямых этого семейства через $\{L_{\alpha:\beta}\}$.

Лемма 21.7. *Если $(\alpha : \beta) \neq (\gamma : \delta)$, то прямые $L_{\alpha:\beta}$ и $L_{\gamma:\delta}$ не пересекаются.*

Доказательство. Предположим противное, что $(\alpha : \beta) \neq (\gamma : \delta)$, а прямые

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \gamma\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\delta\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ \delta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\gamma\left(1-\frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

пересекаются хотя бы в одной точке, т.е. система из этих 4-х уравнений имеет хотя бы одно решение. Разделим почленно 1-е уравнение 1-й системы на 1-е уравнение 2-й системы, получим $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$, что эквивалентно $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, или $(\alpha : \beta) = (\gamma : \delta)$. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Следствие 21.8. *Множество всех прямых семейства $\{L_{\alpha:\beta}\}$ эквивалентно окружности.*

Лемма 21.9. *Через каждую точку гиперболоида* (1) *проходит прямая семейства $\{L_{\alpha:\beta}\}$*; см. рис. 82.

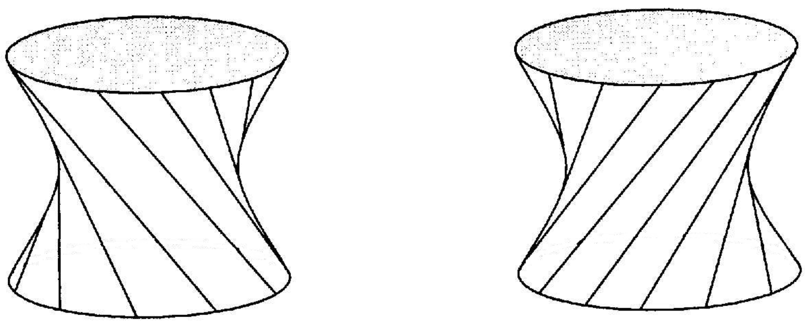

Рис. 82: Семейства $\{L_{\alpha:\beta}\}$ и $\{L'_{\alpha':\beta'}\}$ образующих.

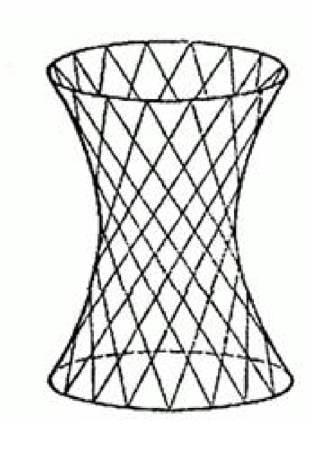

Рис. 83: Прямолинейные образующие семейств $\{L_{\alpha:\beta}\}$ и $\{L'_{\alpha':\beta'}\}$.

Замечание 21.10. Теперь, исходя из уравнения однополостного гиперболоида (1), рассмотрим систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha'\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta'\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ \beta'\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha'\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases}, \qquad (4)$$

где параметры α' и β' удовлетворяют условию $(\alpha', \beta') \neq (0,0)$. По аналогичной схеме можно доказать, что через каждую точку гиперболоида проходит прямая семейства $\{L'_{\alpha' : \beta'}\}$. Поэтому получаем окончательный результат:

Теорема 21.11. *Однополостный гиперболоид — линейчатая поверхность с двумя семействами образующих* $\{L_{\alpha : \beta}\}$ *и* $\{L'_{\alpha' : \beta'}\}$.

§22. Прямолинейные образующие гиперболического параболоида

Замечание 22.1. Запишем уравнение

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \qquad (1)$$

гиперболического параболоида (см. опред. 20.9) в следующем виде

$$2z = \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right).$$

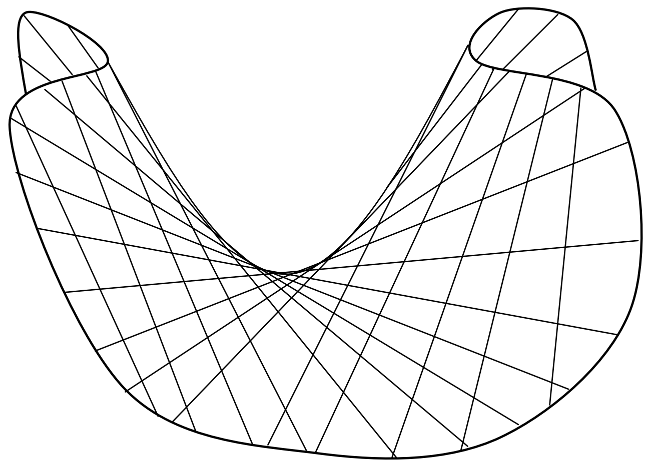

Рис. 84: Прямолинейные образующие гиперболического параболоида.

Рассмотрим системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\beta z \\ \beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=\alpha \end{cases} \quad (2) \quad \text{и} \quad \begin{cases} \alpha'\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\beta' z \\ \beta'\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=\alpha' \end{cases}. \quad (3)$$

По аналогичной схеме, как для однополостного гиперболоида, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 22.2. *Системы уравнений* (2) *и* (3) *определяют на гиперболическом параболоиде два семейства прямолинейных образующих* $\{L_{\alpha\,:\,\beta}\}$ *и* $\{L'_{\alpha'\,:\,\beta'}\}$.

Лемма 22.3. *Через каждую точку параболоида* (1) *проходит одна образующая семейства* $\{L_{\alpha\,:\,\beta}\}$ *и одна образующая семейства* $\{L'_{\alpha'\,:\,\beta'}\}$.

Лемма 22.4. *Гиперболический параболоид — линейчатая поверхность с двумя семействами образующих* $\{L_{\alpha\,:\,\beta}\}$ и $\{L'_{\alpha'\,:\,\beta'}\}$; см. рис. 84.