ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ПАРАМЕТРУ

1. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^\infty x^n e^{-x^2}\cos 2bx\,dx \qquad (n\in\mathbf{N}).$$

2. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^\infty x\ln\left(\frac{b^2+x^2}{c^2+x^2}\right)\sin ax\,dx.$$

3. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)\,dx \qquad (a>0),$$
где $J_0(x)$ - функция Бесселя нулевого порядка.

4. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 mx}{x\sqrt{x}}\,dx \qquad (m>0).$$

5. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^{\pi/2} \ln(1+p\cos^2 x)\,dx \qquad (p\ge -1).$$

6. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^\infty \frac{x\ \arctan qx}{(p^2+x^2)^2}\,dx.$$

7. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^{\pi/2} \ln(a^2+b^2\tan^2 x)\,dx.$$

8. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{a^2e^x+b^2e^{-x}}\,.$$

9. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+p\cos x)}{\cos x}\,dx \qquad (|p|<1).$$

10. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

11. Применяя дифференцирование или интегрирование по искусственно введенному параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-x}}{x}\cos x\,dx.$$

12. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^\infty \exp\left(-a^2x^2-\frac{b^2}{x^2}\right)dx.$$

13. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^1 \arctan(p\sqrt{1-x^2})\,\frac{dx}{1-x^2}\,.$$

14. Применяя дифференцирование или интегрирование по искусственно введенному параметру, вычислить несобственный интеграл
$$\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{arccot}\,x}{1-x^4}\,dx.$$

15. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx^2 \, dx \qquad (a > 0).$$

16. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{x} \sin^2 mx \, dx \qquad (a > 0).$$

17. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} \arctan\left(\frac{a}{x}\right) \sin mx \, dx \qquad (a, m > 0).$$

18. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin \frac{\gamma^2}{x^2} \, dx.$$

19. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{p + q \sin x}{p - q \sin x}\right) \frac{dx}{\sin x} \quad (p > q > 0).$$

20. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(1 + a \sin^2 x\right) \cos^2 x \, dx \quad (a > -1).$$

21. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{(1 - x^p)(1 - x^q)}{\ln x} \, dx \ (p, q, p + q > -1).$$

22. Применяя дифференцирование или интегрирование по параметру, вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{\ln(1 - x^p)}{x} \, dx \qquad (p > 0).$$

ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ

1. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos kx}{|x|^{\alpha+1}}\, dx.$$

2. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^{2n}}}\, dx.$$

3. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}}\, dx.$$

4. Вычислить несобственный интеграл, выразив его через эйлеровы,

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}.$$

5. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_0^{\pi/2} \ln(a\,\mathrm{tg} x)\sin^{\mu-1}(2x)\, dx.$$

6. Вычислить несобственный интеграл, выразив его через эйлеровы,

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,(1-x)^{3/2}}{(1+x)^4}\, dx.$$

7. Вычислить несобственный интеграл, выразив его через эйлеровы,

$$\int_0^{\pi} x\sin^p x dx.$$

8. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh\alpha x}{\sinh\beta x}\, dx.$$

9. Вычислить несобственный интеграл, выразив его через эйлеровы,

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos(2n\pi x)\, dx \quad (n\in N).$$

10. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\, dx.$$

11. Вычислить несобственный интеграл, выразив его через эйлеровы,

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\right)^{\cos 2\alpha} dx.$$

12. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\ln x\, dx.$$

13. Вычислить несобственный интеграл, выразив его через эйлеровы,

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{x}.$$

14. Вычислить несобственный интеграл, выразив его через эйлеровы,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1/x)}{1-x}\, dx.$$

15. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_0^1 \left(\ln\ln\frac{1}{x}\right)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\mu-1} dx.$$

16. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha x-\sin\beta x}{x^{\mu+1}}\, dx.$$

17. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{nx-re^x}\, dx.$$

18. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin kx - kx}{x^{1+\alpha}}\, dx.$$

19. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+a^2}\right)^p \frac{\ln x}{x}\, dx.$$

20. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_0^{\infty} x^p \operatorname{arccot} x\, dx.$$

21. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^\alpha x\, dx}{(\sin x + \cos x)^2}\,.$$

22. Определить область существования несобственного интеграла и выразить его через эйлеровы

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^p x}{1+\cos x}\, dx.$$

ЗАДАЧИ НА ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1. Применяя операционное исчисление, найти решение интегрального уравнения ($0 < \alpha < 1$)

$$\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} y(\tau)\,d\tau = f(t).$$

2. Применяя свойства преобразования Лапласа, найти изображение следующего оригинала

$$f(t) = \int_1^\infty \frac{\cos \tau t}{\tau}\,d\tau.$$

3. Применяя теорему Эфроса, вычислить следующий несобственный интеграл:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \cosh a\tau\,d\tau.$$

4. Применяя операционное исчисление, найти решение интегрального уравнения

$$y(t) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{+\infty} e^{-|t-\tau|} y(\tau) d\tau, \quad t > 0.$$

Предполагается, что $\lambda > 0$, $y(0) = 1$, $|y(t)| \le Me^{\alpha t}$ ($\alpha < 1$).

5. Применяя операционное исчисление, решить задачу о распространении граничного режима по полубесконечной струне, т.е. решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \le x < +\infty,\ t > 0)$$

с нулевыми начальными условиями и граничным условием: $u(0,t) = \mu(t)$.

6. Применяя операционное исчисление, решить систему уравнений

$$x' - y' - y = e^t,$$

$$2x' + y' + 2y = \cos t,$$

с начальными условиями: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

7. Применяя операционные методы, вычислить интеграл

$$\int_0^t \tau \cos(t-\tau) e^{-\tau}\,d\tau.$$

8. Применяя операционные методы, найти оригинал по заданному изображению

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-a/p}.$$

9. Применяя операционное исчисление, найти решение интегрального уравнения

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + \int_0^t (t-\tau) e^{-(t-\tau)} y(\tau) d\tau.$$

10. Применяя операционные методы, найти решение дифференциального уравнения

$$x''' + x = e^t$$

с начальными условиями: $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.

11. Применяя свойства преобразования Лапласа, найти изображение одного из интегралов Френеля

$$S(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\sqrt{2\pi\tau}}\,d\tau.$$

12. Применяя операционное исчисление, решить систему дифференциальных уравнений для функций $x_k(t)$:

$$x_0' = -ax_0,$$

$$x_k' + ax_k = ax_{k-1}$$

($a > 0$) с начальными условиями: $x_0(0) = 1$, $x_k(0) = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$).

13. Применяя свойства преобразования Лапласа, найти изображение следующего оригинала

$$\int_t^\infty \frac{J_0(\tau)}{\tau}\,d\tau,$$

где $J_0(t)$ - функция Бесселя нулевого порядка.

14. Применяя операционное исчисление, найти решение интегрального уравнения

$$\int_0^t e^{2\,(t-\tau)} y(\tau) d\tau = t^2 e^{-t}.$$

15. Применяя операционное исчисление, найти ограниченное решение уравнения Бесселя

$$y'' + \frac{y'}{t} + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right) y = 0\,, \quad (n \in \mathbf{N}).$$

16. Применяя свойства преобразования Лапласа, найти изображение оригинала $f(t) = A\{t\}$, где $\{t\}$ - дробная часть t.

17. Применяя операционное исчисление, найти решение интегрального уравнения

$$y(t) = \sin t + 2\int_0^t \cos(t-\tau) y(\tau) d\tau.$$

18. Применяя свойства преобразования Лапласа, найти изображение следующего оригинала:

$$\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x^2 + a^2}\, dx.$$

19. Применяя операционное исчисление, решить задачу о вынужденных колебаниях полубесконечной струны с жестко закрепленным концом $x = 0$ под действием синусоидальной силы, т.е. решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \sin \omega t$$

$(0 \le x < +\infty,\ t > 0)$ с нулевыми начальными условиями.

20. Применяя операционные методы, найти решение дифференциального уравнения

$$x'' + 2x' + x = 2\cos^2 t$$

с начальными условиями: $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

21. Применяя операционное исчисление, решить систему дифференциальных уравнений для функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

$$\begin{aligned} x' + y + z &= 0, \\ y' + x + z &= 0, \\ z' + x + y &= 0 \end{aligned}$$

с начальными условиями: $x(0) = -1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

22. Применяя теорему Эфроса, найти оригинал, соответствующий следующему изображению:

$$F\,(p) = \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\left(\sqrt{p} + a\right)}.$$