1. Базисные системы векторов

Пусть дано множество элементов V. На этом множестве определим операции сложения и умножения на число следующим образом:

1)для каждой пары элементов a, b ∈ V множество V содержит их векторную сумму a + b, причем

a + b = b + a , a + (b + c) = (a + b) + c ,

a + 0 = a , a + (– a) = 0 ,

где 0 – нулевой элемент, a – a – элемент множества V, обратный элементу a;

2)если a – любой элемент множества V и α – любое число, то V содержит элемент αa, причем

(αβ) a = α (βa) , (α + β) a = αa + βa ,

α (a + b) = αa + αb , 1 * a = a .

Укажем в этой связи ряд определений:

Любое множество элементов, на котором введены операции сложения и умножения на число, обладающие восемью перечисленными свойствами, образуют линейное (векторное) пространство. При этом элементы множества называют векторами.

Размерностью N векторного пространства называется максимальное число линейно независимых векторов.

Базисом векторного пространства размерности N называется любая совокупность N линейно независимых векторов.

Из всех возможных базисных систем наиболее употребительной является так называемая ортонормированная базисная система – та, в которой вектора базиса ei (i = 1, …, N) обладают следующими свойствами – их скалярное произведение равно нулю в случае, когда сомножители разные, и единице в случае, когда в качестве обоих сомножителей выступает один и тот же вектор. Коротко это записывается так:

$$\left(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j\right)=\delta_{ij}, \text{ где } \delta_{ij}=\begin{cases}0, & \text{если } i \neq j\\ 1, & \text{если } i = j\end{cases}. \quad (1)$$

Величина δij в уравнении (1) называется символом Кронекера в честь немецкого математика Леопольда Кро́некера (1823-1891).

Произвольный вектор a может быть единственным образом разложен по базисным векторам:

$$\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{N} a_i \boldsymbol{e}_i, \quad (2)$$

тогда величины ai называются компонентами (координатами) вектора a в данном базисе. В случае ортонормированной базисной системы

$$a_i=\left(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{a}\right). \quad (3)$$

Тогда нетрудно получить выражение для скалярного произведения двух векторов, выраженное через их компоненты. Итак, если ai и bi – координаты векторов a и b соответственно, то

$$\left(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\right)=\sum_{i=1}^{N} a_i b_i. \quad (4)$$

Сформулируем полезное правило:

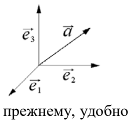
Правило Эйнштейна. По всякому индексу, повторяющемуся в выражении два раза, подразумевается суммирование, а знак суммы опускается.

С помощью этого правила удается сократить запись многих формул и соотношений. Так, например, скалярное произведение двух векторов приобретает вид:

$$\left(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\right)=\sum_{i=1}^{N} a_i b_i \equiv a_i b_i. \quad (5)$$

2. Вектор как направленный отрезок. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.

Для случая N = 3 понятие вектора имеет наглядную геометрическую интерпретацию, а именно под вектором удобно понимать направленный отрезок. Базисом тогда могут служить любые три некомпланарных вектора, однако, по-прежнему, удобно выбрать ортонормированный базис, т.е.



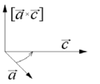
$$\left(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k\right)=\delta_{ik}.$$

Скалярное произведение двух векторов определяется так:

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)=|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a},\vec{b}}, \quad (6)$$

где $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ – длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно.

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ называется вектор $[\vec{a}\times\vec{c}]$, длина которого определяется соотношением



$$\left|[\vec{a}\times\vec{c}]\right|=|\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin \widehat{\vec{a},\vec{c}}, \quad (7)$$

а направление определяется по правилу правого винта. Векторное произведение удобно представлять в виде определителя:

$$[\vec{a}\times\vec{c}]=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}. \quad (8)$$

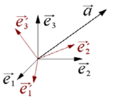
Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется скалярная величина, определяемая с помощью равенства:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]\right). \quad (9)$$

Численно смешанное произведение с точностью до знака равно объему параллелепипеда, построенного на некомпланарных векторах-сомножителях.

3. Преобразование компонент векторов при повороте системы координат

Пусть в исходном ортонормированном базисе – {$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$} – заданы компоненты вектора $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, т.е. верно равенство $\vec{a}=a_n\vec{e}_n$. В новой системе координат с базисом {$\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$, $\vec{e}'_3$} будем иметь аналогичное разложение $\vec{a}=a'_k\vec{e}'_k$. Связь между компонентами вектора $\vec{a}$ в старом и новом базисе задается с помощью соотношения:



$$a'_i=\alpha_{ik}a_k, \quad (10)$$

где $\alpha_{ik}=\cos\widehat{\vec{e}'_i,\vec{e}_k}$ – так называемая матрица поворота, полностью определяющая своими компонентами совершенный поворот системы координат. Ортонормированность старого и нового базисов накладывает на матрицу поворота дополнительное условие, а именно

$$\alpha_{in}\alpha_{jn}=\delta_{ij}. \quad (11)$$

Отсюда получаем, что матрицей, обратной α, т.е. α^{-1}, является транспонированная матрица α^T. Пользуясь этим фактом, можем записать обратное преобразование (от нового базиса к старому) в виде:

$$a_i=\alpha^T_{ik}a'_k \equiv \alpha_{ki}a'_k. \quad (12)$$

4. Определение тензора. Действия над тензорами.

К понятию тензора можно относиться как к некоторому обобщению понятия скаляра, вектора, матрицы на более общий случай.

Определение. Любая совокупность N^R величин, заданная в каждом базисе и нумеруемая R индексами, изменяющимися от 1 до N, образует тензор R-того ранга в N-мерном пространстве, если при повороте декартовой системы координат эти величины в начальном и конечном базисах связаны линейным законом, т.е.

$$T'_{i_1,i_2,\ldots,i_R}=\alpha_{i_1k_1}\alpha_{i_2k_2}\ldots\alpha_{i_Rk_R}T_{k_1,k_2,\ldots,k_R}. \quad (13)$$

Согласно данному определению, тензором нулевого ранга является скаляр – величина, не изменяющаяся при поворотах системы координат, а тензором I-го ранга является N-мерный вектор. В дальнейшем по умолчанию будем подразумевать N = 3. Определим действия над тензорными величинами.

Сложение тензоров. Складывать можно лишь тензоры одинакового ранга – результатом будет тензор того же ранга. Например,

$$A_{kn}+B_{kn}=C_{kn}, \quad (14)$$

т.е. тензор II-го ранга Ckn является суммой двух тензоров II-го ранга – Akn и Bkn .

Умножение тензоров. Результатом умножения двух тензоров рангов R1 и R2 является тензор ранга R1 + R2 . Например,

$$A_i \cdot B_{jk}=C_{ijk}. \quad (15)$$

Свертка тензора. Сверткой тензора называется операция умножения его на символ Кронекера с последующим суммированием по одному из его индексов. При свертке ранг тензора уменьшается на 2. Например,

$$A_{iknm}\delta_{nm}\equiv A_{iknn}=B_{ik}. \quad (16)$$

Иногда выделяют еще одну операцию, частным случаем которой является скалярное произведение векторов (см. (5)). Скалярное умножение тензоров. Скалярное умножение тензоров – это умножение тензоров с последующей сверткой по какой-либо паре индексов. Например,

$$A_{ijk}B_{km}=C_{ijm}. \quad (17)$$

Теорема деления. Если в каждой системе координат существуют N^R величин $T_{i_1,i_2,\ldots,i_R}$ и для любого тензора ранга r ($r \le R$) $A_{i_1,i_2,\ldots,i_r}$ выражение $T_{i_1,i_2,\ldots,i_R}A_{i_1,i_2,\ldots,i_r}$ является тензором ранга R – r, то компоненты $T_{i_1,i_2,\ldots,i_R}$ составляют тензор R-того ранга.

Докажем эту теорему в частном случае. Пусть дано, что в каждой системе координат выполняется соотношение $A_{ijk}\cdot B_j=C_{ik}$, причем Aijk и Cik – тензоры III-го и II-го рангов соответственно. Докажем, что Bj является тензором I-го ранга.

Доказательство. Поскольку Cik является тензором, для него верен закон преобразования $C'_{ik}=\alpha_{ij}\alpha_{kn}C_{jn}$.

Продолжаем эту запись с учетом условий теоремы:

$$C'_{ik}=\alpha_{ij}\alpha_{kn}C_{jn}=\alpha_{ij}\alpha_{kn}A_{jmn}B_m=\ldots$$

Теперь используем то, что Aijk – тензор, получим

$$\ldots=\alpha_{ij}\alpha_{kn}\alpha_{pj}\alpha_{qm}\alpha_{rn}A'_{pqr}B_m=\ldots$$

Используя (11), получим

$$\ldots=\delta_{ip}\delta_{kr}\alpha_{qm}A'_{pqr}B_m=\alpha_{qm}B_mA'_{iqk}.$$

С другой стороны в силу условий теоремы должно быть $C'_{ik}=A'_{iqk}B'_q$. Следовательно, $A'_{iqk}\left(B'_q-\alpha_{qm}B_m\right)=0$, откуда

$$B'_q=\alpha_{qm}B_m,$$

что и является доказательством того, что Bj есть тензор I-го ранга.

5. Свойство симметрии тензоров. Изотропные тензоры.

Понятие симметрии относится к тензорам, ранг которых больше или равен 2.

Определение. Тензор Aijk называется симметричным (антисимметричным) по паре индексов i и j, если при перестановке этих индексов компонента тензора не меняется (меняет знак на противоположный).

Легко обобщить данное определение на любую пару индексов и любой ранг тензора.

Важную роль в физическом приложении тензорного исчисления играет следующая теорема. Приведем ее без доказательства.

Теорема. Свойство симметрии (антисимметрии) – инвариантно.

Определение. Тензор называется изотропным, если при повороте системы координат его компоненты не меняются.

Изотропным тензором II-го ранга является упомянутый выше символ Кронекера.

Изотропным тензором III-го ранга является абсолютно антисимметричный единичный тензор ε_{ijk}, который чаще называют тензором Леви-Чивита в честь итальянского математика Туллио Леви-Чивита (1873-1941). Данный тензор антисимметричен по любой паре индексов, поэтому из 27 его компонент только 6 не равны нулю:

$$\begin{cases}\varepsilon_{123}=\varepsilon_{312}=\varepsilon_{231}=1,\\ \varepsilon_{213}=\varepsilon_{321}=\varepsilon_{132}=-1.\end{cases} \quad (18)$$

С помощью тензора Леви-Чивита упрощается запись многих тензорных соотношений. Так, например, i-тая компонента векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ найдется так:

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]_i=\varepsilon_{ijk}a_jb_k. \quad (19)$$

Соответственно смешанное произведение, выраженное через компоненты векторов-сомножителей, имеет вид:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k. \quad (20)$$

Произведение $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}$ образует тензор VI-го ранга, сверткой которого можно получить тензоры IV-го и II-го рангов. Эти тензоры по определению инвариантны, поэтому должны выражаться через различные комбинации символов Кронекера:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}=\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}. \quad (21)$$

Отсюда нетрудно получить:

$$\varepsilon_{ijn}\varepsilon_{lmn}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}, \quad \varepsilon_{imn}\varepsilon_{lmn}=2\delta_{il}, \quad \varepsilon_{lmn}\varepsilon_{lmn}=6. \quad (22)$$

6. Приведение симметричного тензора II-го ранга к диагональному виду

Как известно, результатом свертки тензора второго ранга с вектором является вектор. При этом, однако, может оказаться, что оба вектора коллинеарны друг другу, т.е. верно соотношение

$$T_{ij}A_j=\lambda A_i. \quad (23)$$

Тогда $\vec{A}$ называется собственным (главным) вектором, соответствующим собственному (главному) значению λ.

Уравнение на собственные значения тензора нетрудно получить из (23):

$$\det\left(T_{ij}-\lambda\delta_{ij}\right)=0. \quad (24)$$

Уравнение (24) называется характеристическим уравнением. В трехмерном пространстве характеристическое уравнение имеет 3 корня – $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$ – каждому из которых соответствует свой собственный вектор – $\vec{A}^{(1)}$, $\vec{A}^{(2)}$, $\vec{A}^{(3)}$.

Теорема. Собственные значения симметричного тензора II-го ранга – вещественны, а его собственные векторы $\vec{A}^{(i)}$ и $\vec{A}^{(j)}$, соответствующие различным собственным значениям $\lambda^{(i)}\neq\lambda^{(j)}$, ортогональны.

7. Тензорные поля

Ранее рассматривались случаи, когда компоненты тензоров зависели лишь от системы координат. Отметим теперь, что компоненты тензоров физических величин являются как правило функциями времени, температуры, координат и т.п.

Определение. Если каждой точке пространства однозначно соответствует значение компонент тензора, то говорят, что задано тензорное поле.

Например, в каждой точке $\vec{r}$ атмосферы свое атмосферное давление p, которое меняется со временем t, поэтому можно говорить, что $p(\vec{r},t)$ – тензорное поле нулевого ранга. Примером тензорного поля первого ранга может служить стационарный поток жидкости, в каждой точке которого вектор скорости имеет свои модуль и направление.

В трехмерном пространстве часто используется векторный дифференциальный оператор – $\vec{\nabla}$ (читается – “набла”). В декартовых координатах он выражается наиболее просто:

$$\vec{\nabla}=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}. \quad (25)$$

С помощью данного оператора легко определяются три важные операции – градиент скалярной функции, дивергенция и ротор векторной функции.

Определения:

1. Градиентом скалярной функции φ называется векторная величина $\operatorname{grad}\varphi$, i-тая компонента которой в декартовой системе координат определяется так:

$$\operatorname{grad}_i\varphi=\nabla_i\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}. \quad (26)$$

2. Дивергенцией векторной функции $\vec{A}$ называется скалярная величина $\operatorname{div}\vec{A}$, определяемая в декартовой системе координат так:

$$\operatorname{div}\vec{A}=\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)\equiv\frac{\partial A_i}{\partial x_i}. \quad (27)$$

3. Ротором векторной функции $\vec{A}$ называется векторная величина $\mathrm{rot}\,\vec{A}$, i-тая компонента которой в декартовой системе координат определяется так:

$$\mathrm{rot}_i\,\vec{A} = \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]_i \equiv \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}A_k. \qquad (28)$$

Заметим в этой связи, что если $\mathrm{rot}\,\vec{A} \equiv \vec{0}$, то векторное поле $\vec{A}(\vec{r})$ называется потенциальным, если $\mathrm{div}\,\vec{A} \equiv 0$, то – вихревым или соленоидальным.

8. Интегральное представление дифференциальных операторов

Векторный дифференциальный оператор $\vec{\nabla}$, определенный в (25), имеет следующее интегральное представление:

$$\vec{\nabla} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_S \vec{n}\,dS}{V}, \qquad (29)$$

где S – поверхность, ограничивающая бесконечно малый объем V, $\vec{n}$ – вектор нормали к поверхности. Используя (29), дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{A}$ можно также записать в интегральной форме:

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_S \left(\vec{n}\cdot\vec{A}\right)dS}{V},$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_S \left[\vec{n}\times\vec{A}\right]dS}{V}. \qquad (30)$$

Важную роль в математике и ее физических приложениях играют следующие две теоремы.

Теорема Остроградского-Гаусса. Поток векторного поля $\vec{A}$ через замкнутую поверхность S равен интегралу от его дивергенции по объему, ограниченному этой поверхностью:

$$\oint_S \left(\vec{A}\cdot d\vec{S}\right) = \int_V \mathrm{div}\,\vec{A}\,dV. \qquad (31)$$

Теорема Стокса. Криволинейный интеграл от поля $\vec{A}$ по замкнутому контуру C равен потоку ротора этого поля через поверхность S, натянутую на контур C:

$$\oint_C \left(\vec{A}\cdot d\vec{l}\right) = \int_S \left(\mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot d\vec{S}\right). \qquad (32)$$

9. **Криволинейные системы координат**

В некоторых задачах оказывается удобным определение положения точки в трехмерном пространстве не декартовыми координатами xi (i = 1, 2, 3), а тремя криволинейными координатами qi (i = 1, 2, 3). Система криволинейных координат ставит в соответствие каждой точке пространства с декартовыми координатами x1, x2, x3 упорядоченную тройку действительных чисел q1, q2, q3. Криволинейные координаты точки связаны с ее декартовыми координатами посредством следующего соотношения:

$$q_i = q_i(x_1, x_2, x_3), \qquad (33)$$

где i = 1, 2, 3. Функции qi однозначны и непрерывно дифференцируемы, а производимое преобразование координат является невырожденным, т.е.

$$\frac{\partial(q_1,q_2,q_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)} \equiv \begin{vmatrix} \partial q_1/\partial x_1 & \partial q_1/\partial x_2 & \partial q_1/\partial x_3 \\ \partial q_2/\partial x_1 & \partial q_2/\partial x_2 & \partial q_2/\partial x_3 \\ \partial q_3/\partial x_1 & \partial q_3/\partial x_2 & \partial q_2/\partial x_3 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (34)$$

Поверхности $q_i = \mathrm{const}$ (i = 1, 2, 3) называются координатными поверхностями, а линии их пересечения – координатными линиями. Касательные к координатным линиям векторы

$$\vec{e}_i = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} \quad \text{(i = 1, 2, 3)} \qquad (35)$$

образуют базис криволинейной системы координат в данной точке пространства. В соответствие с определением (35) вводятся так называемые коэффициенты Ламе

$$H_i \equiv |\vec{e}_i| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2}, \qquad (36)$$

введенные в обращение французским математиком и инженером Габриэля Ламе (1795–1870). С помощью коэффициентов Ламе можно естественным образом ввести нормированный на единицу базис векторов $\vec{n}_i$:

$$\vec{n}_i = \frac{\vec{e}_i}{H_i} \quad \Rightarrow \quad |\vec{n}_i| = 1. \qquad (37)$$

Если векторы $\vec{e}_i$ образуют ортогональную тройку векторов, т.е.

$$\left(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j\right) = H_i^2\delta_{ij}, \qquad (38)$$

то криволинейная система координат называется ортогональной.

Квадрат расстояния dS^2 между двумя бесконечно близкими точками, разделенными радиус-вектором $d\vec{r}$, равен

$$dS^2 = d\vec{r}^{\,2} = \left(\vec{e}_i dq_i\cdot\vec{e}_j dq_j\right) = \left(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j\right)dq_i dq_j \equiv g_{ij}dq_i dq_j \qquad (39)$$

где величина g_{ij} называется метрическим тензором. Очевидно, в ортогональных системах координат метрический тензор диагонален:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} H_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & H_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & H_3^2 \end{pmatrix}. \qquad (40)$$

Метрический тензор полностью определяет всю геометрию криволинейного пространства. Так элементы площади координатных поверхностей выражаются через его компоненты следующим образом:

$$d\sigma_1 = \sqrt{g_{22}g_{33}}\,dq_2dq_3,$$
$$d\sigma_2 = \sqrt{g_{11}g_{33}}\,dq_1dq_3,$$
$$d\sigma_3 = \sqrt{g_{11}g_{22}}\,dq_1dq_2. \qquad (41)$$

Элемент объема определяется соотношением

$$dV = J\cdot dq_1dq_2dq_3, \qquad (42)$$

где величина $J \equiv \sqrt{\det g_{ij}}$ называется якобианом (в честь немецкого математика Карла Густава Якоба Якоби (1804–1851)).

Определим дифференциальные операции над скалярными и векторными полями в ортогональных криволинейных системах координат. Оператор $\vec{\nabla}$ имеет следующий вид (сравните с (25)):

$$\vec{\nabla} = \frac{\vec{n}_1}{H_1}\cdot\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\vec{n}_2}{H_2}\cdot\frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\vec{n}_3}{H_3}\cdot\frac{\partial}{\partial q_3}. \qquad (43)$$

Соответственно, i-тая компонента градиента скалярной функции φ определяется так:

$$\mathrm{grad}_i\,\varphi = \frac{1}{H_i}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}. \qquad (44)$$

Используя интегральное представление для дивергенции векторного поля $\vec{A}$, можно получить

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3} * \left(\frac{\partial(A_1H_2H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_2H_1H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_3H_1H_2)}{\partial q_3}\right). \qquad (45)$$

Ротор векторного поля $\vec{A}$ удобно изображать в виде следующего определителя:

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vec{n}_1}{H_2H_3} & \dfrac{\vec{n}_2}{H_1H_3} & \dfrac{\vec{n}_3}{H_1H_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1A_1 & H_2A_2 & H_3A_3 \end{vmatrix}. \qquad (46)$$

В заключение данного раздела приведем формулу для лапласиана скалярного поля φ:

$$\Delta\varphi \equiv \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)\right). \qquad (47)$$