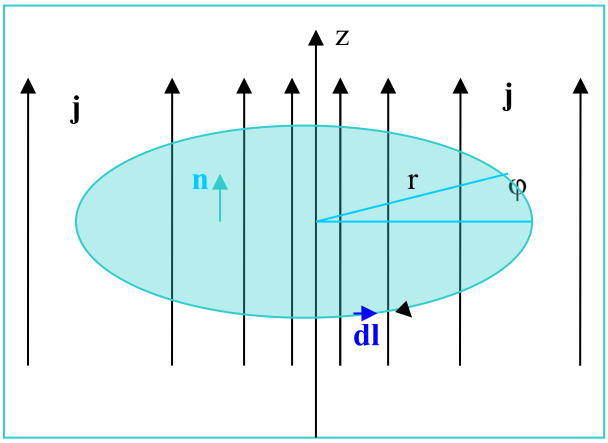
МАГНИТОСТАТИКА

Задача 4.2. Найти магнитное поле $\boldsymbol{H}$, создаваемое током с плотностью $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{z}_0 j_0\, exp(-\alpha r^2)$, где r - расстояние до оси z, $\alpha = \text{const}$.

Решение.

Аналогичная, хорошо вам известная задача – ток равномерно распределен по поперечному сечению цилиндра – решается просто - непосредственно на основании теоремы о циркуляции магнитного поля с использованием соображений осевой симметрии. И здесь годится тот же самый прием, т.к. симметрия прежняя.

Опять рассмотрим циркуляцию вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру L, представляющему собой окружность радиуса r в плоскости $z = \text{const}$



с центром на оси z (r, ϕ, z - цилиндрические координаты). В силу осевой симметрии задачи имеем:

$$\oint_L H_l\, dl = H_\phi \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c}\iint_S j_n ds = \frac{4\pi}{c}\int_0^r j_0\, exp(-\alpha r^2)\cdot 2\pi r dr = \frac{4\pi^2 j_0}{c\alpha}\cdot[1 - exp(-\alpha r^2)].$$

Отсюда проекция вектора $\boldsymbol{H}$ на направление отсчета азимутального угла ϕ

$$H_\phi = \frac{2\pi j_0}{c\alpha r}[1 - exp(-\alpha r^2)].$$

Остальные проекции вектора $\boldsymbol{H}$ равны нулю в силу отсутствия зависимости тока от координат z и ϕ (и при дополнительном условии исчезновения поля при $r \to \infty$).

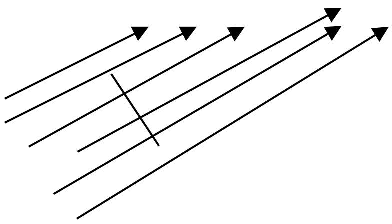
Задача 4.3. Найти магнитное поле, создаваемое током, текущим с постоянной поверхностной плотностью i по поверхности бесконечно длинного цилиндра радиуса a в направлении: а) вдоль образующей цилиндра, б) перпендикулярно образующей.

Решение

А что это такое - поверхносгный ток или поверхностная плотность тока i?

Определение: $i_{пов} \equiv j_{пов} = i = lim\frac{\Delta I}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$, где Δl - прямолинейный отрезок, лежащий на поверхности, по которой течет ток, и ориентированный **перпендикулярно** линиям тока в окрестности данной точки на поверхности, а ΔI - количество заряда, пересекающего за единицу времени этот отрезок, т.е. сила тока внутри узкой полоски ширины Δl

(на рисунке показаны линии тока и отрезок)



а) как и в предыдущей задаче, находим циркуляцию вектора $\boldsymbol{H}$ по окружности радиуса r с центром на оси цилиндра в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра z.
$\oint_L H_l\, dl = H_\phi \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I,$ где I - полный ток через площадь круга радиуса r.

В области $r > a$ (вне цилиндра) этот ток есть полный ток, текущий вдоль цилиндра: $I = i \cdot 2\pi a$. Тогда $H_\phi = \frac{2I}{cr} = \frac{4\pi i a}{cr}$
В области $r < a$ (внутри цилиндра) ток $I = 0$ магнитное поле отсутствует $H_\phi = 0$.

б) Магнитное поле рассчитывается путем вычисления его циркуляции по контуру, представляющему собой прямоугольник, лежащий в плоскости продольного сечения $\phi = const$, содержащей ось цилиндра. Две стороны прямоугольника параллельны оси, другие две стороны ей перпендикулярны, т.е. представляют собой радиальные отрезки. Т.к. направления обхода по контуру на этих радиальных отрезках взаимно противоположны, а поле не зависит от продольной координаты z, то входящие в полную циркуляцию интегралы по этим радиальным отрезкам взаимно уничтожаются, и вклад в циркуляцию дают только интегралы по сторонам прямоугольника, параллельны оси.
Если прямоугольник целиком лежит внутри или вне цилиндра, то циркуляция равна нулю, т.к. опирающаяся на контур площадка не пересекается током. Отсюда следует, что внутри цилиндра и вне цилиндра поле однородно (не зависит от r). Если принять, что поле на бесконечности равно нулю, то оно равно нулю всюду вне цилиндра. Однородное поле внутри цилиндра можно найти, расположив прямоугольник так, чтобы одна из его сторон, параллеотных оси, лежала внутри цилиндра, а вторая снаружи. Тогда циркуляция
$\oint_L H_l dl = (H_{z1} - H_{z2})\, l = \frac{4\pi}{c} I$, где $I = il$, l - длина стороны, параллельной оси, H_{z1} и H_{z2} - проекции поля на ось z соответственно внутри и вне цилиндра. Поскольку $H_{z2} = 0$, находим $H_{z1} = \frac{4\pi}{c} i$ (направление поля связано правилом правого винта с направлением азимутального тока).

Задача 4.9. В круглой рамке радиуса a течет линейный ток силы I. Найти напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$ на оси z, проходящей через центр рамки перпендикулярно ее плоскости.

Решение.
Закон Био-Савара $\boldsymbol{H} = \frac{I}{c} \oint_L \frac{[\boldsymbol{dl}, \boldsymbol{R}]}{R^3}$, (1)
где I - сила тока в контуре, $\boldsymbol{dl}$ - векторный элемент контура, совпадающий по направлению с направлением тока, $\boldsymbol{R}$ - вектор, проведенный из элемента интегрирования $\boldsymbol{dl}$ в точку наблюдения (где определяется вектор $\boldsymbol{H}$).

Введем цилиндрическую систему координат r, ϕ, z с началом координат в центре рамки. Для точки наблюдения, лежащей на оси z, векторы $[\boldsymbol{dl}, \boldsymbol{R}]$ имеют в этой системе две компоненты: продольную (параллельную оси z) $[\boldsymbol{dl}, \boldsymbol{R}]_z$ и радиальную (лежащую в плоскости $z = const$) $[\boldsymbol{dl}, \boldsymbol{R}]_r$. В любой меридиальной плоскости $\phi = const$ (проходящей через ось z) для элементов контура интегрирования, лежащих на двух противоположных концах диаметра рамки, радиальные проекции этих векторов равны по величине и противоположны по знаку, так что их вклады в интерграл (1) взаимно уничтожаются, продольные проекции совпадают и суммируются. Благодаря этому интеграл (1) имеет на оси z единственную проекцию на ось z (что, впрочем, сразу очевидно из симметрии). Эта проекция: $H_z = \frac{I}{c}\oint_L \frac{[\boldsymbol{dl},\boldsymbol{R}]_z}{R^3}$. Легко видеть, что векторы $\boldsymbol{dl}$ и $\boldsymbol{R}$ взаимно перпендикулярны, а их векторное произведение образует с осью z угол $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, где α - угол между осью z и вектором $\boldsymbol{R}$, проведенным из элемента $\boldsymbol{dl}$ в точку наблюдения на оси z. Поэтому для всех элементов $\boldsymbol{dl}$ имеет место равенство $[\boldsymbol{dl},\boldsymbol{R}]_z = Rdl\cos\beta = Rdl\sin\alpha = adl$, откуда находим

$$H_z = \frac{I}{c}\frac{a}{R^3}\oint_L dl = \frac{2\pi I}{c}\frac{a^2}{R^3} = \frac{2\pi I a^2}{c(a^2+z^2)^{3/2}}.$$

Задача 4.10. Плоский линейный контур ABCD образован двумя концентрическими дугами AB и DC с центром в точке O и радиальными отрезками AD и BC. Угловой размер дуг α, их радиусы $\mathrm{OA} = r_1$, $\mathrm{OD} = r_2$. По контуру течет ток силы I. Найти магнитное поле
(1) в точке O и (2) на больших расстояниях $r >> r_2$ от этой точки в плоскости контура.

Решение

(1) По закону Био-Савара $\boldsymbol{H} = \frac{I}{c}\oint_L \frac{[\boldsymbol{dl},\boldsymbol{R}]}{R^3}$, (1)

обозначения те же, что и в предыдущей задаче.
Интеграл разбивается на четыре слагаемых: по двум дугам и двум радиальным отрезкам. Интегралы по радиальным отрезкам равны нулю, т.к. для них векторы $\boldsymbol{dl}$ и $\boldsymbol{R}$ параллельны и их векторное произведение равно нулю. Остаются интегралы по дугам, для которых эти векторы взаимно перпендикулярны, а их векторные произведения параллельны оси z, так что поле будет иметь только составляющую, перпендикулярную плоскости рамки, величина которой находится очевидным образом на основании формулы (1):

$H = \frac{I}{c}\left(\frac{l_1}{r_1^2} - \frac{l_2}{r_2^2}\right) = \frac{\alpha I}{c}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$. (мы учли, что длины дуг AB и DC равны соответственно $l_1 = \alpha r_1$ и $l_2 = \alpha r_2$).

(2) На большом расстоянии от рамки с током магнитное поле может быть приближенно рассчитано как поле точечного магнитного диполя:

$\boldsymbol{H} = -\nabla\phi^{(m)}$, $\phi^{(m)} = \frac{(\boldsymbol{p}^{(m)},\boldsymbol{r})}{r^3}$, (1)

где $\boldsymbol{r}$ - радиус-вектор, проведенный из точки расположения диполя в точку наблюдения. Вектор магнитного дипольного момента для плоской рамки с током равен
$\boldsymbol{p}^{(m)} = \frac{I}{c}S\boldsymbol{n}$, где S - площадь, ограничиваемая рамкой, $\boldsymbol{n}$ - единичный вектор нормали к этой площади, направление которого связано правилом правого винта с направлением тока в рамке. В условиях нашей залачи площадь $S = (\alpha/2)(r_2^2 - r_1^2)$.
В плоскости рамки, где требуется найти магнитное поле, радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ перпендикулярен вектору дипольного момента $\boldsymbol{p}^{(m)}$. При этом, как следует из (1),
$\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{p}^{(m)}/r^3$, т.е. магнитное поле перпендикулярно плоскости рамки и равно по величине $H = \frac{I\alpha}{2cr^3}(r_2^2 - r_1^2)$

Пояснение

$$\nabla\left(\frac{\boldsymbol{pr}}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}\nabla(\boldsymbol{pr}) + (\boldsymbol{pr})\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{\boldsymbol{p}}{r^3} - (\boldsymbol{pr})\frac{3}{r^4}\nabla r = \frac{\boldsymbol{p}}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{pr})\boldsymbol{r}}{r^5}$$

(учли, что $\nabla(\boldsymbol{pr}) = p\nabla(\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{r}) = p\nabla z = p\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{p}$ и что $\nabla r = \boldsymbol{r}/r$).

Задача 4.28. Найти магнитное поле тонкого прямого провода, лежащего на плоской границе раздела двух однородных сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2. Сила тока в проводе I.

Решение. Сравним нашу задачу с более простой задачей, в которой обе среды одинаковы (например, $\mu_1 = \mu_2$=1, т.е. граница вообще отсутствует, среда однородна). В этом простом случае, как следует из теоремы о циркуляции магнитного поля и соображений симметрии, силовые линии напряженности магнитного поля и магнитной индукции представляют собой окружности с центрами на проводе с током, лежащие в плоскостях перпендикулярных току, а величины напряженности и индукции (их проекции на направление отсчета азимутального угла) $H_\phi^{(0)} = B_\phi^{(0)} = 2I/(cr)$, где r - расстояние до провода с током.

Обратим внимание на то, что в поставленной перед нами более сложной задаче граница раздела двух различных сред проходит таким образом, что она перпендикулярна силовым линиям магнитного поля этой взятой нами для сравнения простой «однородной» задачи, где нет никакой границы. То новое, что вносит в задачу появление границы, - это необходимость удовлетворить граничным условиям -условиям непрерывности тангенциальной компоненты вектора напряженности поля H_τ и нормальной компоненты вектора индукции B_n. Но вектор индукции $\boldsymbol{B}^{(0)}$ в простой однородной задаче без заполнения, с которой мы сравниваемся, обоим этим граничным условиям, требуемым при наличии заполнения, полностью удовлетворяет (в нем $H_\tau = 0$ с обеих сторон границы, а B_n всюду непрерывно. Что касается дифференциальных уравнений для поля, то они тоже не изменяются - в обоих задачах, как и требуется, $div\boldsymbol{B} = 0$. Поэтому можно было бы предположить, что поле $\boldsymbol{B}$ после заполнения вообще не изменится, т.е. индукция в искомом поле (после заполнения) $B_\phi = B_\phi^{(0)} = 2I/(cr)$, а поле $\boldsymbol{H}$ в каждом полупространстве с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 находится делением $\boldsymbol{B}$ на μ.

Однако, необходимо учесть, что кроме дифференциальных уравнений и граничных условий, поле должно еще удовлетворять уравнению, связывающему поле с его источником, а именно, теореме о циркуляции, которую можно записать и для вектора индукции в виде

$$\oint_L (B_l/\mu)\, dl = \frac{4\pi}{c} I. \qquad (*)$$

Этому уравнению исходное простое поле $B_\phi^{(0)} = 2I/(cr)$ не удовлетворяет, т.к. это поле есть решение данного уравнения при той же правой части, но без всякого множителя $1/\mu$ под интегралом, а у нас к тому же этот множитель разный на двух частях контура, лежащих в различных средах. *Однако этому уравнению (*) можно удовлетворить очень просто – для этого не надо менять ту простую структуру поля* $\boldsymbol{B}$, *которую мы предположили, надо лишь умножить это поле на некоторую константу A, т.е. записывая искомое поле в во всем пространстве при наличии границы в виде* $\boldsymbol{B_\phi = AB_\phi^{(0)} = A\frac{2I}{cr}}$**.** Тогда напряженности магнитного поля по разные стороны границы будут $H_{\phi 1} = B_\phi/\mu_1,\ H_{\phi 2} = B_\phi/\mu_1$.

Выберем в качестве контура интегрирования в теореме о циркуляции окружность с центром на проводе с током, тогда полную циркуляцию можно представить в виде суммы двух интегралов по полуокружностям L_1 и L_2, лежащим по разные стороны границы:

$$.\int_L H_l dl = \int_{L_1} A\frac{2I}{cr\mu_1} \rightleftarrows dl + \int_{L_1} A\frac{2I}{cr\mu_2} \rightleftarrows dl = \frac{4\pi}{c} I, \quad \text{или}$$

$$(2AI/cr)\left(\frac{1}{\mu_1}\int_{L_1} dl + \frac{1}{\mu_2}\int_{L_1} dl\right) = \frac{4\pi}{c} I.$$

Учитывая, что каждый из интегралов по полуокружностям равен πr, находим отсюда величину A

$A = 2(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2})$ и записываем ответ в виде

$$B_\phi = I(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2})/(cr).$$

КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ (КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ) ПОЛЯ

Это поля, изменяющиеся во времени, но имеющие (приближенно) в каждый момент времени такую пространственную структуру и так связанные с создающими их источниками (зависящими от времени токами и зарядами), как если бы те и другие были постоянными, т.е. описывались уравнениями электростатики: $\vec{E} = -\nabla\phi, div\vec{D} = 4\pi\rho$ или магнитостатики: $rot\vec{H} = (4\pi/c)\vec{j}$ (соответственно можно говорить о *квази-электростатическом и квази-магнитостатическом полях.*

В непроводящей среде такое описание полей дает приближенно правильный результат, *если можно пренебречь запаздыванием электромагнитного сигнала на масштабах рассматриваемой системы,*

т.е время запаздывания $\tau_{\text{зап.}}$ электромагнитного сигнала на расстоянии порядка характерного размера L рассматриваемой системы мало по сравнению с характерным временем изменения поля $\tau_{\text{поля}}$ (например, его временным периодом). Поскольку время запаздывании $\tau_{\text{зап}} \sim L/c$, где c - скорость света в среде, в которой протекает исследуемый процесс, для синусоидально меняющихся во времени полей и источников условие пренебрежения запаздыванием можно записать в виде $L/c \rightleftarrows << T$ или $L << \lambda$, где $\lambda = cT$ - длина электромагнитной волны.

Задача 6.1. В однородной среде с проводимостью σ и диэлектрической проницаемостью ε с помощью сторонних сил поддерживается некоторое статическое распределение объемной плотности заряда $\rho_0(\vec{r})$, создающее электростатическое поле $\vec{E}_0(\vec{r})$. В момент времени $t = 0$ сторонние силы мгновенно исчезают. Найти закон релаксации плотности заряда $\rho(\vec{r}, t)$ и электрического поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ при $t > 0$. Какое магнитное поле возникает при этой релаксации?

Решение. Из уравнений $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0, \vec{j} = \sigma\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{D}, div\vec{D} = 4\pi\rho$

получаем уравнение для ρ: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\rho = 0$

Его решение, удовлетворяющее начальному условию

$$\rho = \rho_0(\vec{r})\, exp(-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t)$$

При этом уравнениям Максвелла и начальным условиям удовлетворяют поля

$$\vec{H} \equiv 0,\ \vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r})\, exp(-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t).$$

В этом случае квазистатическое описание является точным, магнитное поле вообще не возникает (вследствие полной взаимной компенсации тока проводимости и тока смещения). Заметим, что убывание плотности заряда и электрического поля в этом процессе происходит с одинаковой скоростью во всех точках пространства, т.е. характеризуется одним и тем же характерным временем убывания $\tau = \varepsilon/(4\pi\sigma)$, называемым Максвеловским временем. Заметим также, что полученный результат справедлив только для безграничной однородной среды.

Задача 6.8. Найти распределение комплексной амплитуды $\boldsymbol{E}(x)$ вектора переменного электрического поля, представляемого в виде $Re\{\boldsymbol{E}(x)e^{i\omega t}\}$, внутри проводящего плоского слоя толщины $2a$ с проводимостью $\sigma >> \omega$ и магнитной проницаемостью μ. На границах слоя ($x = \pm a$) задана амплитуда тангенциальной компоненты поля

$E_y(-a) = E_y(a) = E_0$. Изобразить графически «моментальные снимки» поля при различных t для двух случаев: а) $a >> \delta$ и б) $a >> \delta$ ($\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}$ - толщина скин-слоя в проводнике.

Решение. Комплексная амплитуда поля $\boldsymbol{E}$ удовлетворяет уравнениям

$$\boldsymbol{\Delta E + k^2 E = 0, divE = 0},$$

где $k^2 = (\omega/c)^2\varepsilon_c\mu$, $\varepsilon_c = -i4\pi\sigma/\omega$ - комплексная диэлектрическая проницаемость среды (действительной частью ε_cпренебрегаем в силу условия $\sigma >> \omega$). Из этих уравнений следует, что рассматриваемое в задаче одномерное поле $\boldsymbol{E}(x)$ должно быть чисто поперечным: $E_x = 0$. Отличная от нуля поперечная компонента поля E_y описывается уравнением

$$\frac{d^2E_y}{dx^2}+k^2E_y=0, \qquad k^2=-i\frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c},\ k=\frac{1-i}{\delta},$$

Здесь $\delta=\sqrt{-2i/k^2}=c/\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}$ -глубина проникновения поля в проводник (толщина скин-слоя).

Общее решение этого уравнения можно представить в виде линейных комбинаций тригонометрических, или экспоненциальных, или гиперболических функций:

$C_1\,sin(\,kx)+C_2\,cos(\,kx)$, или $C_1\,exp(\,ikx)$ $+C_2\,exp(-ikx)$, или $C_1sh(ikx)+C_2ch(ikx)$.

При заданных граничных условиях решение - симметричная функция x. Поскольку волновое число k комплексное, удобная компактная запись - через симметричную гиперболическую функцию, т.е. сумму двух экспонент с одним и тем же множителем

$$E_y=Cch(ikx)=(C/2)[exp(\,ikx)+exp(-ikx)].$$

Этот множитель легко находится из граничного условия: $E=E_0$ при $x=\pm a$
Учитывая, что $ik=(1+i)/\delta$, записываем ответ
комплексная амплитуда поля: $E_y=E_0ch^{-1}\left[\frac{a}{\delta}(1+i)\right]\cdot ch\left[\frac{x}{\delta}(1+i)\right]$

Полное комплексное поле (после домножения на $e^{i\omega t}$) с точностью до постоянного множителя

$$e^{i\omega t}E_y\sim e^{i(\omega t-\frac{x}{\delta})}e^{-\frac{x}{\delta}}+e^{i(\omega t+\frac{x}{\delta})}e^{+\frac{x}{\delta}}$$

представляет собой сумму двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях ($\pm x$) и затухающих в тех же направлениях, куда они распространяются.
При условии $a<<\delta$ (слабый скин-эффект) поле внутри слоя почти однородно ($E_y\approx E_0$). При условии $a>>\delta$ (сильный скин-эффект) поле в основном сосредоточено в тонких слоях толщины порядка δ вблизи границ слоя и представляет собой вблизи каждой границы волну, убегающую и быстро затухающую вглубь слоя.

Задача 6.9. В предыдущей задаче найти также при $a>>\delta$
а) распределение магнитного поля в слое $H_z(x)e^{i\omega t}$
б) сдвиг фаз ϕ между полями E_y и H_z при $z=\pm a$
в) поверхностный импеданс $\varsigma_s=E_y/H_z$ на границах слоя; выразить его через μ и комплексную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon=4\pi\sigma/(i\omega)$

Решение. Электрическое поле вблизи границ при $a>>\delta$ (из задачи 6.8)

$$E_y=E_0\,exp[\frac{1+i}{\delta}(|x|-a)].$$

а) $rot\boldsymbol{E}=-ik_0\mu\boldsymbol{H}$, $\quad\partial E_y/\partial x=-ik_0\mu H_z$, $\quad H_z=i/(k_0\mu)\,\partial E_y/\partial x \quad (k_0=\omega/c)$

при $x=\pm a \quad H_z=\pm\frac{ic(1+i)}{\omega\mu\delta}E_0\,exp[\frac{1+i}{\delta}(|x|-a)]$
б)$\phi(-a)=\pi/4,\phi(a)=5\pi/4$

в) $\varsigma(-a)=-\varsigma(a)=\sqrt{\mu/\varepsilon_c}=\frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\pi\sigma}}.$

Задача 6.12. Плоский конденсатор с круглыми пластинами подключен к источнику переменного напряжения $U=U_0\,sin\,\omega\,t$. Найти электрическое ($\vec{E}$) и магнитное ($\vec{H}$) поля внутри конденсатора при условии $d << a << c/\omega$, где d - расстояние между пластинами, a - радиус пластин, c - скорость света. Между пластинами – вакуум.

Решение. В силу условия $\boldsymbol{a << c/\omega}$ электрическое поле между пластинами является квазистатическим и находится как в электростатике: почти во всем объеме оно однородно (в силу условия $d << a$ краевой эффект мал), направлено перпендикулярно пластинам, а его проекция на перпендикулярную пластинами ось z (пусть это будет ось симметрии пластин) равна $E_z = U/d$ (для определенности положительное направление оси z выбираем таким, чтобы E_z и U имели одинаковые знаки).

Магнитное поле в данной задаче не является квазистатическим. Его можно найти приближенно после того, как мы нашли (в квазиситическом приближении) электрическое поле, пользуясь интегральным уравнением Максвелла

$$\oint_L H_l dl = \frac{1}{c}\iint_S \frac{\partial E_n}{\partial t} ds \qquad (*)$$

и выбирая контур L и поверхность S из соображений максимальной (допускаемой имеющейся симметрией задачи) простоты вычисления обоих входящих в уравнение (*) интегралов. Пусть S — это круглая площадка радиуса $r < a$, расположенная между пластинами конденсатора перпендикулярно оси z, с центром на оси z и вектором единичной нормали $\vec{n}$, направленным по оси z. Тогда $E_n = E_z$, контур L - это окружность радиуса r , а положительное направление обхода по контуру, на которое проектируется в левой части уравнения (*) вектор $\vec{H}$, связано правилом правого винта с направлением оси z. Введя цилиндрическую систему координат r, ϕ, z, проекцию H_l можно переобозначить как проекцию H_ϕ вектора $\vec{H}$ на единичный вектор $\vec{\phi}_0$ в направление отсчета азимутального угла ϕ.

Подинтегральные функции в уравнении (*) могут быть вынесены из-под знаков интегралов: проекция $H_l \equiv H_\phi$ на касательную к контуру L в левой части (*) - в силу осевой симметрии задачи, а производная $\frac{\partial E_n}{\partial t} = \omega \frac{U_0}{d} cos\, \omega\, t$ - в силу однородности электрического поля в основной части объема площади интегрирования (вплоть до значений радиуса r, близких к радиусу пластин a). В результате на основании (*) имеем:

$H_\phi 2\pi r = \frac{\omega U_0 \cos \omega t}{cd}\pi r^2$, откуда

$$H_\phi = \frac{\omega U_0 r}{2cd} cos\, \omega\, t$$

Обратим внимание на то, что магнитное поле сдвинуто по фазе на четверть периода по сравнению с электрическим полем, а амплитуда его в области применимости квазистатки много меньше амплитуды электрического:

$$(H_\phi)z_{max_{max}}.$$

Произведенный нами расчет магнитного поля есть вообще выход за рамки квазиэлектростатического приближения, внутри которых магнитное поле просто равно нулю. Однако мы видим, что квазистатическое приближение, если оно справедливо только для одного поля, существенно упрощает и расчет второго поля, т.к. позволяет действовать методом последовательных приближений.

Задача 6.13. Бесконечный соленоид с числом витков в обмотке на единицу длины n питается переменным током $I = I_0 \,sin\, \omega\, t$. Найти магнитное и электрическое поле внутри соленоида при условии $a << c/\omega$ (a - радиус соленоида).

Решение. Магнитное поле является квазистатическим и находится как в магнитостатике путем вычисления циркуляции вектора напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$ по контуру прямоугольника, лежащего в плоскости, проходящей через ось соленоида z, положительное направление которой связано правилом правого винта с направлением тока в обмотке. Две (противоположные) стороны прямоугольника длины l параллельны оси z, а две другие стороны ей перпендикулярны. Если прямоугольник полностью лежит вне соленоида или внутри соленоида, то величина циркуляции равна нулю, т. к. через площадь прямоугольника не протекает никакой ток. С учетом того, что поле не зависит от продольной координаты z, отсюда следует, что поле внутри соленоида однородно и имеет лишь одну, параллельную оси компоненту H_z, а снаружи (при условии его отсутствия на бесконечности) равно нулю. Величина поля внутри может быть найдена, если расположить прямоугольник так, чтобы его стороны, параллельные оси, располагались по разные стороны от токовой обмотки соленоида. Циркуляция в этом случае равна $H_z l$, а согласно уравнению Максвелла, она равна $(4\pi/c)nlI$, откуда находим

$$H_z = (4\pi/c)nI_0 \sin\omega t. \qquad (1)$$

Электрическое поле может быть найдено по уже найденному магнитному полю (1) при помощи интегрального уравнения Максвелла (закона индукции Фарадея).

$$\oint_L E_l dl = -(1/c)\iint_S (\partial B_n/\partial t) ds. \qquad (2)$$

Пусть S - это круглая площадка радиуса $r < a$, расположенная внутри соленоида перпендикулярно оси z, с центром на оси z и вектором единичной нормали $\vec{n}$, направленным по оси z. Тогда $B_n = B_z = H_z$ (полагаем $\mu = 1$), контур L - это окружность радиуса r , а положительное направление обхода по контуру, на которое проектируется в левой части уравнения (2) вектор $\boldsymbol{E}$, связано правилом правого винта с направлением оси z. Введя цилиндрическую систему координат r, ϕ, z, проекцию E_l можно переобозначить как проекцию E_ϕ вектора $\boldsymbol{E}$ на единичный вектор $\vec{\phi}_0$ в направление отсчета азимутального угла ϕ.

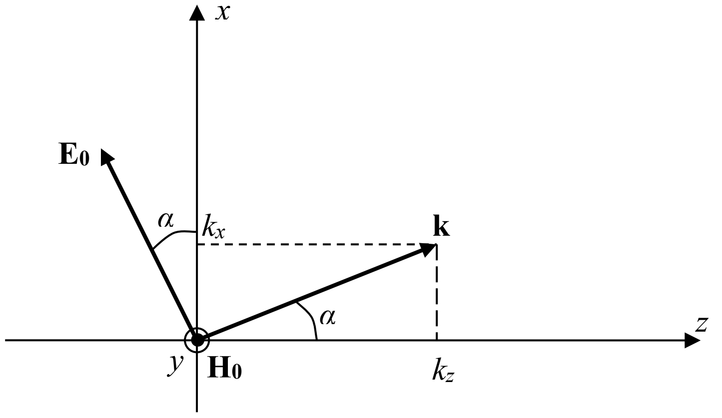
Подынтегральные функции в уравнении (2) могут быть вынесены из-под знаков интегралов: проекция $E_l \equiv E_\phi$ на касательную к контуру L в левой части (2) - в силу осевой симметрии задачи, а производная $\frac{\partial B_n}{\partial t} = (4\pi/c)nI_0\omega\cos\omega t$ - в силу однородности магнитного поля внутри соленоида. В результате на основании (2) имеем:
$E_\phi 2\pi r = -\frac{4\pi n I_0\omega\cos\omega t}{c^2}\pi r^2$, откуда

$$E_\phi = -\frac{2\pi n I_0 \omega r}{c^2}\cos\omega t$$

7. Плоские электромагнитные волны в однородной среде

Задача 7.1. Вектор электрического поля гармонической плоской однородной волны задан в комплексной форме $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}$. Векторы $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{k}$ лежат в плоскости (x, z).

1) Записать комплексные и действительные выражения для проекций электрического и магнитного полей на направления x, y, z, которые содержали бы явные зависимости от переменных x, y, z, t и параметров $|\boldsymbol{E}_0|, \omega, k_x, k_z$ для случая, когда волна распространяется в вакууме.



$\boldsymbol{kr} = k_x x + k_y y (k_z = 0)$
$\cos\alpha = E_{0x}/E_0 = k_z/k$
$\sin\alpha = -E_{0z}/E_0 = k_x/k$
$E_0 = |\boldsymbol{E}_0|,\ k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$
$E_{0x} = (k_z/k)E_0$
$E_{0z} = -(k_x/k)E_0$

$$E_x = E_{0x} e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)} = (k_z/k) E_0 \frac{e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)}}{},$$
$$E_z = E_{0z} e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)} = -(k_x/k) E_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)},$$

$\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{H} \perp \boldsymbol{k}$ - «правая тройка»; т.е. $[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}] \uparrow\uparrow \boldsymbol{k}$
$E_0/H_0 = \eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$; в пустоте $H_0 = E_0 \quad \Rightarrow \quad H_y = E_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)}$

< действительные выражения для полей - по формуле Эйлера
$$Re\, e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)} = cos(\,\omega t - k_x x - k_z z) \;>$$

2) Определить пространственные периоды поля $\lambda^{(x)}, \lambda^{(z)}$ по осям x, z, если заданы: частота ω, диэлектрическая и магнитная проницаемости среды ε, μ и угол α между вектором $\boldsymbol{k}$ и осью z.
$\lambda^{(x)} = 2\pi/k_x = 2\pi/(k\, sin\, \alpha) = \lambda/\, sin\, \alpha, \quad \lambda^{(z)} = 2\pi/k_z = 2\pi/(k\, cos\, \alpha) = \lambda/\, cos\, \alpha,$
где $\lambda = 2\pi c/(\omega\sqrt{\varepsilon\mu})$ (использовано дисперсионное уравнение $k = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon\mu}$).

3) Определить $\lambda^{(x)}$, если заданы: $\omega, \varepsilon, \mu, \lambda^{(z)}$.
$k_x = \sqrt{k^2 - k_z^2} = \sqrt{(\omega/c)^2 \varepsilon\mu - [2\pi/\lambda^{(z)}]^2},$
$\lambda^{(x)} = 2\pi/k_x = 2\pi/\sqrt{(\omega/c)^2 \varepsilon\mu - [2\pi/\lambda^{(z)}]^2}.$
4) Определить частоту ω, если заданы: $\varepsilon, \mu, \lambda^{(x)}, v^{(z)}$, где $v^{(z)}$- скорость, с которой перемещается вдоль оси z точка пересечения фазового фронта с этой осью.

Фазовый фронт –это поверхность (плоскость), во всех точках которой фаза поля $\phi = \omega t - k_x x - k_z z$ в данный момент одна и та же. Точка ее пересечения с осью z перемещается вдоль этой оси со скоростью $v^{(z)}$=ω/k_z. Записываем дисперсионное уравнение: $\omega^2 = k^2 c^2/(\varepsilon\mu) = c^2(k_x^2 + k_z^2)/(\varepsilon\mu) = (\frac{c^2}{\varepsilon\mu})\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda^{(x)}}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{v^{(z)}}\right)^2\right]$. Разрешая это уравнение относительно ω, находим $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda^{(x)}}\left(\varepsilon\mu - (\frac{c}{v^{(z)}})^2\right)^{-1/2}$
5), 6) Графики проекций полей $E_{x,z}(x,z), H_y(x,z)$ при разных t для различных углов α,

Задача 7.2. Волновой вектор плоской однородной волны направлен под углом α к оси z. Среда имеет проницаемости ε, μ. Найти поперечные (по отношению к оси z) характеристические импедансы волны $\eta_\perp$ (в терминах полей) , связывающие поперечные компоненты полей соотношением $\boldsymbol{E}_\perp = \eta_\perp[\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{z}_0]$, для поляризаций типа ТЕ $(E_z = 0)$, ТМ $(H_z = 0)$ и ТЕМ $(E_z = H_z = 0)$.
Для поляризации типа ТЕМ из уравнений Максвелла получается известное импедансное соотношение, согласно которому отношение длин векторов электрического и магнитного полей $E_0/H_0 = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$.
Для поляризации типа ТМ, как следует из рисунка к задаче 7.1, имеем
$$E_x = E_0\, cos\, \alpha, H_y = H_0, \quad \eta_\perp = \frac{E_x}{H_y} = \frac{E_0\, cos\, \alpha}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} cos\, \alpha\, .$$
Для поляризации типа ТЕ годится тот же рисунок, в котором поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ нужно поменять местами, в результате , если мы сохраним расположение осей координат и направление волнового вектора $\boldsymbol{k}$, то для проекции полей и характеристического импеданса будем иметь
$$E_y = -E_0,\; H_x = H_0\, cos\, \alpha, \quad \eta_\perp = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{E_0}{H_0\, cos\, \alpha} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\cos\alpha}$$

При $\alpha = 0$ оба выражения для импеланса ТЕ и ТМ волн, естественно, совпадают и переходят в известное выражение для импеданса ТЕМ волны.

Задача 7.3. Выразить амплитуды электрического и магнитного полей гармонической плоской однородной волны E_0, H_0 в среде с проницаемостями ε, μ через среднюю по периоду плотность потока энергии S.

Вектор плотности потока энергии (вектор Пойнтинга)
$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}]$, где векторы полей чисто действительны. Если представить поля в комплексной форме (как действительные части произведений их комплексных амплитуд на множитель $e^{i\omega t}$), то средний по периоду поля вектор Пойнтинга $\boldsymbol{S}_{\text{ср}} = \frac{c}{8\pi} Re[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*]$. В плоской бегущей волне поля связаны импедансным соотношением $\boldsymbol{E} = \eta[\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n}]$, где $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, $\boldsymbol{n}$ - единичный вектор в направлении распространения волны. Тогда величина среднего вектора Пойнтинга $S = \frac{c}{8\pi}\eta H_0^2 = \frac{c}{8\pi}\eta^{-1}E_0^2$. Отсюда
$E_0 = \sqrt{\frac{8\pi\eta S}{c}}$, $H_0 = \sqrt{\frac{8\pi S}{c\eta}}$.

Задача 7.5. Найти комалексную диэлектрическую проницаемость среды $\varepsilon_c = \varepsilon' + i\varepsilon''$, если ее магнитная проницаемость $\mu = 1$ и если для распространяющейся в данной среде плоской волны известны:
а) ее частотаω, скорость v перемещения волнового фронта и расстояние L, на котором амплитуда убывает в e раз. Волновое число $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon' + i\varepsilon''} = k' + ik''$

$$\varepsilon' + i\varepsilon'' = (c/\omega)^2[(k')^2 - (k")^2 + 2ik'k"] \Rightarrow \ \varepsilon' = (c/\omega)^2[(k')^2 - (k")^2]\ ,\ \varepsilon" = (c/\omega)^2 2k'k"$$

$$E = E_0 e^{i(\omega t - kz)} = E_0 e^{i(\omega t - k'z) + k''z)}.\ Re\, E = E_0 \cos(\,\omega t - k'z)e^{k''z}.$$

$$v = \omega/k' \Rightarrow k' = \omega/v, \quad k" = 1/L\ .$$

$$\varepsilon' = (c/\omega)^2[(\omega/v)^2 - (1/L)^2] = \frac{c^2}{v^2} - \frac{c^2}{(\omega L)^2}\ ,$$

$$\varepsilon" = (c/\omega)^2 2(\omega/v)(1/L) = \frac{2c^2}{\omega v L}.$$

б) Сдвиг фаз между электрическим и магнитным полями ϕ и отношение их амплитуд $E_0/H_0 = p$

$$E/H = \eta = \sqrt{\mu/\varepsilon} = 1/\sqrt{\varepsilon' + i\varepsilon"} = pe^{i\phi}, \quad \varepsilon' + i\varepsilon" = (1/p^2)e^{-2i\phi}\ \ .\ \ \varepsilon' = (1/p^2)\cos(\,2\phi)$$

$$\varepsilon" = -(1/p^2)\sin(\,2\phi)$$

Задача 7.7. Найти магнитное поле неоднородной плоской волны в среде с проницаемостями ε, μ , если электрическое поле волны задано в виде: $E_x = E_z = 0$, $E_y = E_0 e^{i(\omega t - hz) - px}$. Каким образом связаны между собой параметры $p, h, \omega, \varepsilon, \mu$? При каком условии поляризация магнитного поля близка к круговой?

Решение. Используем уравнение Максвелла $rot\boldsymbol{E} = -i(\omega/c)\mu\boldsymbol{H}$.

Отличные от нуля компоненты вектора $rot\boldsymbol{E}$: $(rot\boldsymbol{E})_x = -\partial E_y/\partial z$, $(rot\boldsymbol{E})_z = \partial E_y/\partial x$.
Отсюда: $H_y = 0$, $H_x = -\frac{ch}{\omega\mu}E_y$, $H_z = -\frac{ipc}{\omega\mu}E_y$, где E_y- поле, заданное в условии задачи.

Поле, заданное к условии задачи, представляет собой плоскую волну с комплексным волновым вектором $\boldsymbol{k}$, компоненты которого $k_z = h$, $k_y = ip$ (именно в этом случае поле будет периодической функцией z и экспоненциально убывающей функцией x). Согласно общему дисперсионному уравнению для плоской волны (в том числе, и с комплексным волновым вектором), $(\boldsymbol{k})^2 = k_z^2 + k_y^2 = (\omega/c)^2\varepsilon\mu$, откуда находим

$$h^2 = p^2 + (\omega/c)^2\varepsilon\mu. \qquad (1)$$

Это и есть искомая связь между параметрами задачи, Ее можно было бы получить при помощи другого уравнения Максвелла (для ротора вектора $\boldsymbol{H}$).

Вектор $\boldsymbol{H}$ будет иметь поляризацию, близкую к круговой, если его компоненты сдвинуты по фазе на $\pi/2$ (что действительно имеет место в найденном решении) и будут почти одинаковы по амплитуде. Последнее выполняется, если $h \approx p$, т.е., как следует из равенства (1), при условии $(\omega/c)\sqrt{\varepsilon\mu} << p$

Задача 7.13. Получить выражения для полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ стоячей волны. Чему равен сдвиг фаз ϕ между полями? Изобразить «моментальные снимки» полей в различные моменты времени.

Решение. Поле стоячей волны – суперпозиция полей двух встречных бегущих волн одинаковой частоты, амплитуды и поляризации. Пусть эти две плоские волны распространяются навстречу друг другу параллельно оси z в среде с действительными проницаемостями ε и. Пусть их электрическое поле параллельно оси x, а магнитное – оси y. Суммарные проекции электрического и магнитного полей на оси координат (в комплексной форме):

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)} + E_0 e^{i(\omega t + kz)} = E_0 e^{i\omega t}(e^{-ikz} + e^{ikz}) = 2E_0 e^{i\omega t} \cos k z$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 e^{i(\omega t - kz)} - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 e^{i(\omega t + kz)} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 e^{i\omega t}(e^{-ikz} - e^{ikz}) = -2i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 e^{i\omega t} \sin k z$$

Здесь $k = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon\mu}$- волновое число в среде. Первые слагаемые в этих выражениях представляют собой поля волны, бегущей в $+z$ -направлении, а вторые слагаемые – поля волны, бегущей в $-z$ -направлении. Мы учли, что векторы электрического и магнитного поля в бегущей волне связаны импедансным соотношением, согласно которому в каждой из волн $E_x/H_y = \pm\sqrt{\mu/\varepsilon}$, где знак «+» или «–» выбирается для волны, бегущей соответственно в положительном или отрицательном направлении оси z (так чтобы вектор плотности потока энергии в каждой из волн был направлен в сторону ее распространения).

В действительной форме проекции полей записываются в виде

$\mathrm{Re}\, E_x = 2E_0 \cos\omega t \cos k z$,

$\mathrm{Re}\, H_y = 2\sqrt{\varepsilon/\mu} E_0 \sin\omega t \sin k z$

Обратим внимание на то, что поля имеют сдвиг по фазе $\pi/2$, т.е. на четверть периода колебаний во времени (одно из полей изменется во времени как $\cos\omega t$, а другое – как $\sin\omega t$) и что положение узлов (нулей) и пучностей (максимумов) амплитуды каждого из полей сдвинуты по отношению друг к другу на четверть длины волны (пучности электрического поля располагаются в узлах магнитного и наоборот).

Задача 7.14. Электромагнитное поле представляет собой суперпозицию двух гармонических плоских однородных волн с одинаковыми частотами и амплитудами. Векторы электрического поля в обеих волнах параллельны оси x. Волновые векторы $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2$ лежат в плоскости (y, z), причем $k_{1z} = k_{2z}$, $k_{1y} = -k_{2y}$. Написать выражения для компонент суммарного поля. Построить графики, иллюстрирующие поведение полей в пространстве и времени. Нарисовать картину силовых линий магнитного поля.

Решение. Записываем сумму комплексных полей двух волн в общем случае и выполняем простейшие алгебраические преобразования, принимая во внимание условия задачи.

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{r})} + E_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{r})} = E_0 e^{i\omega t}[e^{-i(k_{1z}z + k_{1y}y)} + e^{-i(k_{2z}z + k_{2y}y)}] =$$

$$= E_0 e^{i(\omega t - k_z z)}(e^{-ik_y y} + e^{ik_y y}) = 2E_0 \cos(k_y y) e^{i(\omega t - k_z z)}. \qquad (1)$$

Здесь введены обозначения: $k_z = k_{1z} = k_{2z}, k_y = k_{1y} = -k_{2y}$, причем из дисперсионного уравнения следует, что $k_z^2 + k_y^2 = k^2 = (\omega/c)^2 \varepsilon\mu$.
Магнитное поле можно найти как сумму магнитных полей двух волн, а можно непосредственно с помощью уравнения Максвелла $rot\boldsymbol{E} = -i(\omega/c)\mu\boldsymbol{H}$, поскольку поле $\boldsymbol{E}$ уже найдено. Результат: поле $\boldsymbol{H}$ имеет две отличные от нуля компоненты:

$$H_y = (k_z/k)\sqrt{\varepsilon/\mu}E_x \text{ -} \qquad (2)$$

- эта компонента зависит от координат и времени так же, как электрическое поле (1)),

и $$H_z = 2iE_0(k_y/k)\sqrt{\varepsilon/\mu}\sin(k_y y)e^{i(\omega t - k_z z)}. \qquad (3)$$

В целом картина поля выглядит как стоячая волна по координате y (имеются узлы и пучности) и бегущая волна по координате z (при увеличении времени t картина перемещается как целое в направлении оси z, поскольку зависимость полей от времени t и координаты z полностью определяется множителем $e^{i(\omega t - k_z z)}$ (или в действительной форме $cos(\omega t - k_z z)$)

Задача 7.15. Выразить структурные параметры поля в задаче (7.14):
длину волны $\lambda^{(z)}$ и фазовую скорость $v^{(z)}$ в направлении оси z, расстояние L между плоскостями $y = const$, на которых $E_x = 0$, и поперечный импеданс $\varsigma_\perp = E_x/H_y$ – через частоту поля ω и угол наклона α волновых векторов к оси z. При каком α средняя по времени плотность энергии магнитного поля не зависит от координат?

Решение. Длина волны и фазовая скорость находятся из вида функции, определяющей зависимость полей от времени t и координаты z. Эта функция

$$cos(\omega t - k_z z).$$

1. Длина волны $\lambda^{(z)}$ (или пространственный период поля) – это такой отрезок Δz по оси z, на котором аргумент приведенной функции $\phi = \omega t - k_z z$, называемый фазой волны, при фиксированном t меняется на 2π, т.е. функция повторяет свое прежнее значение. Изменение фазы на отрезке Δz равно $k_z \Delta z$. Приравнивая эту величину 2π, находим

$$\lambda^{(z)} = \Delta z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi}{k\cos\alpha} = \frac{2\pi c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\alpha}$$

2. Фазовая скорость $v^{(z)}$ это скорость перемещения вдоль оси z той точки, в которой фаза $\phi = \omega t - k_z z$ равна некоторому (любому) заданному значению ϕ_0, т.е. $\phi = \omega t - k_z z = \phi_0 = const$. Это равенство определяет зависимость координаты точки z, где фаза постоянна, от времени t. Эта зависимость линейная: $z = const + (\omega/k_z)t$, и искомая скорость

$$v^{(z)} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\alpha}.$$

3. Зависимость электрического поля E_x от координаты y определяется функцией

$$E_x \sim cos(k_y y)$$

Расстояние по оси y между ближайшими двумя точками, где эта функция обращается в нуль (так называемые узлы стоячей волны) соответствуют изменению аргумента этой функции на величину, равную π, откуда находим, что искомое расстояние (расстояние между двумя соседними узлами) равно μ

$$L = \frac{\pi}{k_y} = \frac{\pi c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sin\alpha}$$

4. Как следует из формул (1) и (2) в решении задачи 7.14, поперечное (по отношению к направлению распространения z) волновое сопротивление (в терминах полей) равно

$$\varsigma_\perp = E_x/H_y = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{\cos\alpha}.$$

(Заметим, что в случае, если бы чисто поперечным по отношению у оси z было не электрическое, а магнитное поле, т.е. отличными от нуля компонентами были бы H_x, E_y, E_z, то выражение для поперечного волнового сопротивления содержало бы $cos\,\alpha$ не в знаменателе, а в числителе).

5. Как следует из выражений (1), (2), (3) в решении задачи 7.14, средняя по времени плотность энергии магнитного поля

$$w_m = \frac{1}{16\pi}(|H_y|^2 + |H_z|^2) = \frac{E_0^2 \varepsilon}{4\pi\mu}\left(\frac{k_z^2}{k^2}cos^2(k_y y) + \frac{k_y^2}{k^2}cos^2(k_y y)\right) =$$

$$= \frac{E_0^2 \varepsilon}{4\pi\mu}\left(cos^2\alpha\, cos^2(k_y y) + sin^2\alpha\, sin^2(k_y y)\right).$$

Очевидно, что $w_m(y) = const$, если $cos\,\alpha = sin\,\alpha$, т.е. при $\alpha = \pi/4$ (когда волновые векторы складываемых волн взаимно перпендикулярны).

Волны в плоско-слоистых средах. Отражение и преломление

Задача 8.1. Плоская волна с вектором электрического поля $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{x}_0 E_0 e^{i(\omega t - kz)}$ падает в среде с проницаемостями ε и μ на плоскость $z = 0$ с заданным поверхностным импедансом $\varsigma_s = \frac{E_x(0)}{H_y(0)}$.

1) Найти коэффициент отражения волны Γ.

Решение. Поле в области $z < 0$ представляет собой сумму полей падающей и отраженной волн. В соответствии с этим комплексные амплитуды проекций суммарного электрического и магнитного полей определяются выражениями:

$$E_x = E_0 e^{-ikz} + E_r e^{ikz)}, \qquad (1)$$

$$H_y = H_0 e^{-ikz} + H_r e^{ikz}. \qquad (2)$$

Учитывая, что проекции электрического и магнитного полей в каждой из бегущих (падающей и отраженной) волн связаны между собой импедансным соотношением:

$$\frac{E_0}{H_0} = \varsigma_в, \frac{E_r}{H_r} = -\varsigma_в, \quad \text{где } \varsigma_в = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \qquad (3)$$

(см. также решение задачи 7.13)) и определяя коэффициент отражения Γ как отношение комплексных амплитуд электрического поля в падающей (E_0) и отраженной (E_r) волнах на отражающей поверхности:

$$\Gamma = \frac{E_r}{E_0}, \qquad (4)$$

перепишем выражения (1), (2) в виде

$$E_x = E_0 e^{-ikz} + \Gamma E_0 e^{ikz)}, \qquad (5)$$

$$H_y = (E_0/\varsigma_в)e^{-ikz} - (\Gamma E_0/\varsigma_в)e^{ikz}. \qquad (6)$$

Удовлетворяя заданному в условии задачи граничному условию $\frac{E_x(0)}{H_y(0)} = \varsigma_s$, на основании уравнений (5), (6) получаем

$$\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = \frac{\varsigma_s}{\varsigma_в}, \qquad (7)$$

откуда

$$\Gamma = \frac{\varsigma_s - \varsigma_в}{\varsigma_s + \varsigma_в} = \frac{\varsigma_s - \sqrt{\mu/\varepsilon}}{\varsigma_s + \sqrt{\mu/\varepsilon}} \qquad (8)$$

2) Получить формулу пересчета импеданса, позволяющую определить импеданс суммарного поля падающей и отраженной волн $\varsigma(-L) = \frac{E_x(-L)}{H_y(-L)}$ на расстоянии L от границы в в том полупространстве, откуда приходит падающая (и куда уходит отраженная) волна.

Решение. Определяя отношение E_x/H_y при $z = -L$ на основании выражений (5) и (6), путем несложных преобразований, использующих формулу (8) для коэффициента отражения и формулу Эйлера $e^{\pm ikz} = cos\,k\,z \pm i\,sin\,k\,z$, находим

$$\varsigma(-L) = \frac{E_x(-L)}{H_y(-L)} = \varsigma_в \frac{\varsigma_s + i\varsigma_в tg(kl)}{\varsigma_в + i\varsigma_s tg(kl)}.$$

3) Найти функцию $|E|^2(z)$ и определить коэффициент *стоячей волны* $КСВ = \frac{|E|^2_{max}}{|E|^2_{min}}$.

Решение. Представляя (в общем случае комплексный) коэффициент отражения в виде $\Gamma = |\Gamma|e^{i\phi}$ и подставляя в (5) поле $E_r = \Gamma E_0$, путем несложных преобразований получаем

$|E|^2 = E \cdot E^* = (E_0 e^{-ikz} + E_r e^{ikz})(E_0^* e^{ikz} + E_r^* e^{-ikz}) = |E_0|^2\left(1 + |\Gamma|^2 + \Gamma e^{2ikz} + \Gamma^* e^{-2ikz}\right) =$

$$= |E_0|^2(1 + |\Gamma|^2 + 2|\Gamma|\, cos(\, 2kz + \phi)).$$

В точках, где $cos(\, 2kz + \phi) = 1$, величина $|E|^2$ достигает максимума

$$|E|^{2_0^{2^2}}_{max},$$

в точках, где $cos(\, 2kz + \phi) = -1$, достигается минимум

$$|E|^{2_0^{2^2}}_{min}.$$

Коэффициент стоячей волны

$$КСВ = \left(\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}\right)^2 \qquad (9)$$

4) Что можно сказать об импедансе граничной поверхности ς_s при КСВ=1 и при КСВ = ∞ ?

Как следует из выражений (8), (9),

КСВ=1, если $\Gamma = 0$, т.е. при $\varsigma_s = \sqrt{\mu/\varepsilon}$,

КСВ = ∞, если $|\Gamma| = 1$, т.е. при $|\varsigma_s| = \infty$ или при $Re\, \varsigma_s = 0$.

Задача 8.3. Пользуясь формулой пересчета импеданса (задача 8.1 (2)), получить выражение для коэффициента отражения Γ плоской волны от плоского слоя толщины d с проницаемостями ε и μ, разделяющего среды 1 и 2 с проницаемостями ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2. Волна падает на слой по нормали из среды 1. Найти условия, при которых $\Gamma = 0$, для случаев, когда среды 1 и 2 : а) одинаковы, б) различны.

Решение. Направим осьz перпендикулярно границам слоя по направлению распространения падающей волны и поместим начало отсчета $z = 0$ на выходной границе слоя, отделяющей его от среды 2. Поскольку поле в среде 2 представляет собой плоскую волну, бегущую в направлении $+z$ (от слоя) , полевой импеданс (отношение поперечных полей E и H) во всех точках этой среды равен ее волновому сопротивлению $\varsigma_{в2} = \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}$. Следовательно, этой же величине (в силу непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей) равен поверхностный импеданс ς_{s2} на выходной границе слоя $z = 0$: $\varsigma_{S2} = \varsigma_{в2} = \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}$. На основании формулы пересчета импеданса (см. ответ к задаче 8.1 (2)) находим импеданс ς_{s1} на входной границе слоя $z = -d$, облучаемой падающей волной:

$$\varsigma_{s1} = \varsigma(-L) = \varsigma_в \frac{\varsigma_s + i\varsigma_в tg(kl)}{\varsigma_в + i\varsigma_s tg(kl)},$$

где $\varsigma_в = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ и $k = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon\mu}$ – волновое сопротивление и волновое число в слое. Коэффициент отражения от слоя (отношение комплексных амплитуд электрического поля в отраженной и падающей волнах при $z = -d$) согласно решению задачи 8.1(1) равен

$$\Gamma = \frac{\varsigma_{s1} - \varsigma_{в1}}{\varsigma_{s1} + \varsigma_{в1}} = \frac{\varsigma_в(\varsigma_{в2} + i\varsigma_в tgkd) - \varsigma_{в1}(\varsigma_в + i\varsigma_{в2} tgkd)}{\varsigma_в(\varsigma_{в2} + i\varsigma_в tgkd) + \varsigma_{в1}(\varsigma_в + i\varsigma_{в2} tgkd)}. \qquad (*)$$

Если волновые сопротивления сред 1 и 2 различны ($\varsigma_{в1} \neq \varsigma_{в2}$), то величина Γ обращается в нуль при одновременном выполнении двух условий $\varsigma_в = \sqrt{\varsigma_{в1}\varsigma_{в2}}$ и $kd = (\pi/2)(2n - 1)$, где $n = 1,$ 2,3,... (в этом можно убедиться, если разделить числитель и знаменатель дроби (*) на $tgkd$ и перейти к пределу, когда $tgkd \to \infty$). Если $\varsigma_{в1} = \varsigma_{в2}$, то $\Gamma = 0$ либо при $\varsigma_в = \varsigma_{в1} = \varsigma_{в2}$ (и любых kd), либо при $kd = n\pi$ (и любых $\varsigma_в$).

Излучение электромагнитных волн заданными источниками в однородной среде.

Задача 9.7. Излучение монохроматического источника в вакууме распределено равномерно внутри сектора углов $-\alpha < \phi < \alpha, \frac{\pi}{2} - \beta < \vartheta < \frac{\pi}{2} + \beta$ (ϕ - азимутальный, ϑ - полярный углы в сферической системе координат). Вне этого сектора излучение отсутствует. Найти амплитуду электрического поля E в дальней зоне на расстоянии R от источника, если средняя излучаемая им мощность равна P. Найти численное значение амплитуды в единицах В/см при $\alpha = \beta = 5^o$

Решение. Средняя излучаемая мощность P равна потоку среднего вектора Пойнтинга

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]$$

через поверхность сферы Σ, в центре которой находится источник:

$$P = \iint_{\Sigma} S_n ds. \qquad (1)$$

В этих выражениях $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ – комплексные амплитуды электрического и магнитного полей, S_n – проекция среднего вектора Пойнтинга на вектор единичной нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности сферы, т.е. на радиальное направление. В дальней зоне, т.е. при достаточно большом радиусе сферы R, поле излучения представляет собой расходящуюся сферическую волну, поля которой почти чисто поперечны и связаны между собой импедансным соотношением, как в локально плоской волне в вакууме: $\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n}]$, откуда следует, что $S_n = \frac{c}{8\pi}E^2$. Поскольку по условию задачи плотность потока излучения распределена равномерно внутри заданного сектора углов, а вне этого сектора равна нулю, выражение (1) можно записать в виде

$$P = \frac{c}{8\pi}E^2\Sigma_0, \qquad (2)$$

где Σ_0 - площадь той части поверхности сферы, которая вырезается из нее данным сектором углов. Записывая элемент поверхности сферы радиуса Rв сферических координатах $ds = R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta d\phi$, находим

$$\Sigma_0 = R^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\phi \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \sin\vartheta \, d\vartheta = 4R^2\alpha \sin\beta \, \phi, \qquad (3)$$

Откуда на основании (2) получаем ответ задачи: $E = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2\pi P}{c\alpha \sin\vartheta}}$

Численный ответ ($E \approx 3.6 \cdot 10^{-3}$ В/см) ?

1 км $=10^5$см $1 \; CGSE = 300$ В/см

1 Вт = 10^7эрг/сек. $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек.

Задача 9.9. Вдоль осиz течет переменный линейный ток $Ie^{i\omega t}$, амплитуда которого одинакова ($I = const \neq 0$ во всех точках отрезка $|z| \leq L$ и равна нулю вне этого отрезка.

1) Начиная с каких расстояний r от начала координат можно считать сформированной диаграмму направленности данного излучателя?

2) Получить выражения для векторного потенциала $\boldsymbol{A}$ и полей $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ в дальней зоне.

3) Исследовать и качественно изобразить в полярных координатах диаграмму направленности $|H|^2(\vartheta)$ для случаев $kL << 1$ и $kL >> 1$ ($k = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon\mu}$- волновое число, ϑ - сферический полярный угол, отсчитываемый от оси z).

Решение.

1) Диаграмму направленности можно считать сформированной в так называемой «дальней зоне» излучателя – области пространства, где поле представляет собой расходящуюся от излучателя сферическую волну. В этой области расстояние r до начала координат, выбранного в любой точке внутри или вблизи излучателя, должно удовлетворять трем неравенствам $r >> L$, $kr >> 1$, $kr^2 >> L$.

2) В однородной среде с проницаемостями ε и μ векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ и поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, создаваемые переменным током, распределенным в некоторой ограниченной области пространства с плотностью $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})e^{i\omega t}$, в дальней зоне определяются следующими выражениями (в комплексной форме):

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu e^{i(\omega t-kr)}}{cr}\boldsymbol{N}, \quad \boldsymbol{N} = \iiint_V \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')e^{-i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}')}dv',$$

$$\boldsymbol{H} = -\frac{i}{\mu}[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}], \quad \boldsymbol{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}[\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{r}_0], \qquad \Leftarrow \quad (\nabla e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r})} = i\boldsymbol{k}e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r})})$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор «точки наблюдения», в которой определяются поля и векторный потенциал, $\boldsymbol{r}'$ – радиус-вектор «точки интегрирования», $r = |\boldsymbol{r}|$, $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}/r$ – единичный вектор в направлении точки наблюдения, $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{r}_0$ – волновой вектор локально плоской волны, бегущей в радиальном направлении, $k = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon\mu}$, $\boldsymbol{N}$ – так называемый вектор излучения, зависящий от направления излучения (но не от расстояния до излучающей системы).

В применении к условиям поставленной задачи естественно рассматривать поля в сферической системе координат r,ϑ,ϕ с полярной осью z и началом отсчета, совпадающим центром отрезка, по которому течет ток. В этой системе координат находим:

- вектор излучения $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{z}_0 I\int_{-L}^{+L} e^{ikz'\cos\vartheta}\,dz' = \boldsymbol{z}_0 2IL\frac{\sin\xi}{\xi}$, где $\xi = kL\cos\vartheta$,
- вектор-потенциал направлен по оси z, его проекция $A_z = \frac{2\mu ILe^{i(\omega t-kr)}}{cr}\frac{\sin\xi}{\xi}$,
- вектор $\boldsymbol{H} = -i[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}] = \vec{\phi}_0 H_\phi, H_\phi = ikA_z\sin\vartheta$,
- вектор $\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{r}_0] = \vec{\vartheta}_0 E_\vartheta, E_\vartheta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H_\phi$.

3) Диаграмма направленности излучения – плотность потока энергии как функция углов, определяющих направление в пространстве $S_r(\vartheta) = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}|H_\phi|^2 \sim \sin^2\vartheta\left(\frac{\sin(kL\cos\vartheta)}{kL\cos\vartheta}\right)^2$.
(«поляризационный» и «интерференционный или «решеточный» множители). От азимутального угла интенсивность излучения не зависит.

В случае $kL \ll 1$ $\quad S_r \sim \sin^2\vartheta$ – диаграмма направленности точечного диполя – один широкий лепесток с максимумом при $\vartheta = \pi/2$.
В случае $kL \gg 1$ – многолепестковая диаграмма, направление главного максимума $\vartheta = \pi/2$; угловая ширина основного лепестка определяется положением первого нуля диаграммы $\sin(kL\cos\vartheta) = 0$, т.е. $kL\cos\vartheta = \pi$. Если вместо полярного угла ϑ (образуемого лучом с осью z) ввести угол $\alpha = (\pi/2) - \vartheta$ - угол наклона луча к плоскости главного максимума $\vartheta = \pi/2$, то первый нуль диаграммы возникает при условии $kL\sin\alpha = \pi$; в случае $kL \gg 1$ этот угол $\alpha \approx \pi/(kL) \ll 1$. Это и есть оценка угловой ширины основного лепестка диаграммы направленности $\Delta\vartheta \sim \lambda/L$ ($\lambda = 2\pi/k$ - длина волны).