ЛЕКЦИЯ 1
I.ВВЕДЕНИЕ
1.Предмет курса.

Большинство законов природы записывается в форме соотношений, в которые входят физические величины, зависящие от одной или нескольких переменных, а также их производные по этим переменным. Примером может служить закон Ньютона, описывающий движение классической частицы с импульсом $\vec{p}\,(t)$ под действием силы $\vec{F}\,(t)$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\,(t)\,,$$

где

$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\vec{v},$$

m_0 - масса покоя, $\tilde{n}$ - скорость света, $\vec{v}$ - скорость частицы. Здесь неизвестной величиной является скорость частицы, которая зависит от одной переменной - времени t. Другим важнейшим законом природы является закон Максвелла, который описывает распространение электромагнитных волн в среде. Так, в вакууме напряженности электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей, являющихся функциями трех координат и времени, описываются соотношениями:

$$rot \quad \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$rot \quad \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$div \quad \vec{E} = 0$$

$$div \quad \vec{H} = 0$$

Обратимся к конкретным физическим примерам.

Радиоактивный распад. Пусть $m\,(t)$ - масса радиоактивного вещества в момент времени t. Обозначим через $dm\,(t)$ изменение (уменьшение) массы вещества за промежуток времени dt. Тогда, физически оправдано предположение, что величина dm пропорциональна длительности промежутка dt и исходной массе радиоактивного вещества m, т.е.

$$dm = -\alpha m dt,$$

где постоянная $\alpha > 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{dm}{m} = -\alpha dt,$$

и, интегрируя, получаем

$$\ln m = -\alpha t + \ln c$$

или

$$m = ce^{-\alpha t}.$$

Семейство решений содержит одну неизвестную постоянную c и имеет мощность континуума. Если в начальный момент времени $t = 0$ имеется m_0 вещества, то $m_0 = c$, и поэтому

$$m(t) = m_0 e^{-\alpha t}.$$

Время, за которое начальная масса вещества уменьшается в два раза, называется периодом полураспада T:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-\alpha T} \Longrightarrow T = \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

Постоянная α определяется природой радиоактивного вещества.

Свободное падение тела. Запишем уравнение Ньютона для частицы массы m, падающей вниз под действием силы тяжести:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g}.$$

Отсюда,

$$\frac{dv}{dt} = -g \Longrightarrow v(t) = -gt + c_1.$$

Тогда для координаты частицы имеем

$$\frac{dy}{dt} = -gt + c_1,$$

или после интегрирования

$$y = -\frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2.$$

Формула охватывает всевозможные падения тел под действием силы тяжести. Она содержит две неизвестные постоянные. Пусть при $t = 0$ определены координата y_0 и скорость v_0 тела. Тогда, $v_0 = c_1, y_0 = c_2$, и получаем единственное решение:

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0.$$

2.Основные определения.

Определения. Дифференциальным уравнением называется соотношение для неизвестной функции, в которое входят ее производные или дифференциалы. Если функция зависит от одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным. Дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных, если функция, входящая в него, зависит от нескольких независимых переменных. Примеры таких уравнений - соответственно уравнение Ньютона и уравнения Максвелла.

Порядком уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение. В примерах мы имели дело с обыкновенными дифференциальными уравнениями первого и второго порядков. Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка для неизвестной функции $y(x)$ таков:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Здесь функция F обязательно должна зависеть от $y^{(n)}$. Общий вид дифференциального уравнения первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Определения. Решением дифференциального уравнения называется всякая функция, обращающая его в тождество. Частным решением называется решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям (если оно единственно). Множество всех частных решений называется общим решением дифференциального уравнения.

Как мы видели на примере, общее решение дифференциального уравнения первого порядка является семейством функций, зависящих от одного параметра: $y = \varphi(x, c)$, где функция $\varphi(x, c)$ дифференцируема по x. Из общего решения можно получить частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям (x_0, y_0) : $\varphi(x_0, c) = y_0$ - уравнение для определения постоянной c. Решая его, получим $c = c_0$. Следовательно, частное решение имеет вид: $y = \varphi(x, c_0)$.

Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка, как правило, есть семейство функций, зависящих от n произвольных постоянных: $y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Начальные условия должны давать возможность определить константы $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Иногда общее решение дифференциального уравнения первого порядка получается в форме

$$\Phi(x, y, c) = 0$$

и называется общим интегралом. Частное решение, записанное в подобной форме, называют частным интегралом.

3.Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ определена в некоторой двумерной области $G \subset \Re^2$. Частное решение $y = \varphi(x)$ обращает уравнение в тождество

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x, \varphi(x))$$

и удовлетворяет начальным условиям $\varphi(x_0) = y_0$. При этом $(x_0, y_0) \in G$. На плоскости $y = \varphi(x)$ представляет кривую, проходящую через т.$M_0(x_0, y_0)$. Эта кривая называется интегральной кривой. По нашему определению, это - единственная кривая. Множество всех интегральных кривых соответствует общему решению уравнения. Геометрически ясно, что оно зависит от одного параметра - ординаты начальной точки. Из геометрического смысла производной следует, что тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой в т.x_0 равен значению функции $f(x_0, y_0)$:

$$f(x_0, y_0) = \left.\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Таким образом, правая часть $f(x, y)$ дифференциального уравнения задает в области G поле направлений. Будем отмечать это отрезками в области G (а не векторами, поскольку направление определено с точностью до π). Тогда, интегральной кривой будет кривая, касательная к которой совпадает с направлением поля в каждой своей точке.

Определение. Изоклиной называется кривая, в каждой точке которой поле имеет одно и то же фиксированное направление.

Пример. Построим интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = 1 + xy.$$

Полагая $dy/dx = k$, находим уравнения изоклин: $xy = k - 1$. Построим на плоскости несколько простейших изоклин, отвечающих $k = -1, 0, 1, 2$ (см.рис). Перед построением интегральных кривых найдем их точки перегиба. Как известно, точки, подозрительные на перегиб, определяются из условия равенства нулю второй производной. Вычисляя y'' из исходного уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y + xy' = y + x(1 + xy)$$

и полагая ее равной нулю, получаем кривую точек перегиба

$$y = -\frac{x}{1 + x^2}.$$

Теперь уже не составляет труда качественно изобразить ход интегральных кривых исходного дифференциального уравнения. Примененный способ построения интегральных кривых носит название метода изоклин.

ЛЕКЦИЯ 2

4.Построение дифференциального уравнения по общему решению.

Пусть дано семейство дифференцируемых функций, зависящих от одного параметра. Требуется найти дифференциальное уравнение, для которого это семейство будет решением.

Итак, известно:

$$y = \varphi\left(x, c\right). \tag{1}$$

Продифференцируем уравнение (1) по x:

$$y' = \varphi'_x\left(x, c\right). \tag{2}$$

Из уравнений (1),(2) нужно исключить c. Может оказаться, что равенство $y' = \varphi'_x$ уже не содержит c. Следовательно, это равенство и будет искомым уравнением. В общем случае из уравнения (1) можно исключить c (если $\varphi'_c\left(x, c\right) \neq 0$) и выразить

$$c = \psi\left(x, y\right). \tag{3}$$

При этом справедливо тождество

$$c \equiv \psi\left(x, \varphi\left(x, c\right)\right).$$

Подставляя равенство (3) в уравнение (1), имеем

$$y' = \varphi'_x\left(x, \psi\left(x, y\right)\right) = f\left(x, y\right). \tag{4}$$

Покажем, что $y = \varphi\left(x, c\right)$ действительно является общим решением дифференциального уравнения (4). Подставим (1) в (4)

$$\varphi'_x\left(x, c\right) = \varphi'_x\left(x, \psi\left(x, \varphi\left(x, c\right)\right)\right) \equiv \varphi'_x\left(x, c\right).$$

<u>Пример</u>.

$$y = \sqrt{c^2 - x^2}.$$

Тогда,

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{c^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

В итоге, получаем уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Если же имеется семейство n раз дифференцируемых функций, зависящих от n параметров: $y = \varphi\left(x, c_1, c_2, \ldots, c_n\right)$, и мы хотим построить дифференциальное уравнение, для которого это семейство является общим решением, то следует дифференцировать равенство последовательно n раз:

$$y' = \varphi'_x\left(x, c_1, \ldots, c_n\right), \ldots, y^{(n)} = \varphi^{(n)}_{x\ldots x}\left(x, c_1, \ldots, c_n\right).$$

Из первых n уравнений определяем

$$c_i = \psi_i \left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), i = 1, 2, \ldots, n;$$

а затем подставляем в последнее уравнение. В итоге получим,

$$y^{(n)} = \psi \left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Заметим, что дифференциальное уравнение считается проинтегрированным, если решение найдено в виде квадратур.

II.ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.Уравнения с разделяющимися переменными

Простейшим дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными является уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{5}$$

Предполагается, что $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b). Все решения этого уравнения даются формулой:

$$y = \int f(x)\, dx + c. \tag{6}$$

Переобозначив постоянную c, его удобно записать в виде

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi + c.$$

Если задано начальное условие: $y = y_0$ при $x = x_0$, то $c = y_0$, и получаем частное решение

$$y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi. \tag{7}$$

В силу непрерывности $f(x)$ входящий в (7) интеграл существует. Все решения уравнения (5) расположены в полосе $a < x < b, \quad -\infty < y < \infty$, а интегральные кривые получаются из (7) сдвигом параллельно оси OY.

Другим видом уравнения с разделяющимися переменными является:

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \tag{8}$$

где $f(y)$ непрерывна в интервале $c < y < d$. Будем искать решение уравнения (8) в виде обратной функции к решению $y = \varphi(x)$, т.е. в виде $x = \psi(y)$, где $\psi(y) = \varphi^{(-1)}(y)$. Для этого запишем уравнение (8) в эквивалентной форме

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}. \tag{9}$$

Это можно сделать, если $f(y) \neq 0$.

Пусть α и β - два последних нуля функции $f(y)$, т.е. $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ и при $\forall y \in (\alpha, \beta) : f(y) \neq 0$. Тогда в интервале (α, β) уравнения (8) и (9) равноправны. В уравнении (9) правая часть в интервале (α, β) непрерывна, и, следовательно, в соответствии с (6)

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + c. \tag{10}$$

Здесь все интегральные кривые расположены в полосе (α, β) и получаются одна из другой сдвигом по оси OX.

Предположим, что при $y = \beta$ интеграл $\int dy/f(y)$ сходится. Тогда, интегральная кривая касается линии $y = \beta$. Если, наоборот, при $y = \alpha$ интеграл $\int dy/f(y)$ расходится, и $1/f(\alpha) = -\infty$. Тогда интегральная кривая асимптотически приближается к линии $y = \alpha$.

Заметим, что формула (10) определяет y как однозначную функцию x. Действительно, поскольку функция $f(y)$ не меняет знак в (α, β), то не меняет знак и производная dx/dy, а, значит, функция $x = \psi(y)$ имеет однозначную обратную функцию $y = \varphi(x)$ - решение уравнения (8).

Помимо решения (10) прямые $y = \alpha$ и $y = \beta$ являются также решениями уравнения (8):

$$\frac{d\alpha}{dx} \equiv f(\alpha), \quad \frac{d\beta}{dx} \equiv f(\beta).$$

Однако, через любую точку прямой $y = \alpha$ проходит одна интегральная кривая, а через любую точку прямой $y = \beta$ две интегральные кривые уравнения (8). Такие решения носят название <u>особых</u>. В нашем случае $y = \beta$ - особое решение.

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения (8) не выражается одной формулой

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + c, \quad y = \alpha, \quad y = \beta.$$

Особое решение возникает тогда, когда через каждую точку соответствующей интегральной кривой проходит (касается) другая интегральная кривая.

<u>Пример</u>. Движение частицы в вязкой среде.

Пусть частица массы m движется прямолинейно в вязкой среде, сила трения которой пропорциональна кубу скорости частицы. Тогда уравнение Ньютона запишется в виде:

$$m\frac{dv}{dt} = -\gamma v^3, \quad (\gamma > 0).$$

Одно из решений уравнения очевидно - $v = 0$. Такое решение, отвечающее покоящейся частице, неинтересно с физической точки зрения. Если $v \neq 0$, то

$$\frac{dv}{v^3} = -\frac{\gamma}{m}dt \Longrightarrow -\frac{1}{2v^2} = -\frac{\gamma t}{m} - \frac{c}{2}.$$

Отсюда находим общее решение

$$v = \pm\frac{1}{\sqrt{c + 2\gamma t/m}}.$$

В асимптотике $(t \to \infty)$ частица останавливается: $v \to 0$. Знаки $\pm$ отвечают различному направлению движения частицы вдоль оси OX.

Рассмотрим следующий тип уравнения с разделяющимися переменными

$$f_1(x)\, f_2(y)\, dx = g_1(x)\, g_2(y)\, dy. \tag{11}$$

Считаем $f_1(x), f_2(y), g_1(x), g_2(y)$ непрерывными функциями в некоторой области. Допустим, что $y = y_i, i = 1, 2, \ldots$ есть решения уравнения $f_2(y) = 0$. Тогда, очевидно, $y = y_i$ являются интегральными кривыми уравнения (11). Пусть $x = x_j, j = 1, 2, \ldots$ - корни уравнения $g_1(x) = 0$. Тогда прямые $x = x_j$ являются интегральными, но они не являются решениями уравнения (11), поскольку $x = x_j$ не есть функция.

Далее, предполагая, что $f_2(y) \neq 0, g_1(x) \neq 0$, находим делением на $g_1(x)\, f_2(y)$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} dx = \frac{g_2(y)}{f_2(y)} dy.$$

Это уравнение равносильно (11). Интегрируя обе части, имеем:

$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)} dx = \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)} dy + c. \tag{12}$$

Получили соотношение вида $\Phi(x, y, c) = 0$. Это общий интеграл уравнения (11). Можно показать, что формула (12) определяет y как неявную функцию x.

2.Уравнения, приводимые к уравнениям с разделяющимися переменными.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by), \quad a, b \in \Re \quad (a, b \neq 0).$$

Введем новую функцию $z = ax + by$. Тогда, $dz = adx + bdy$ и

$$\frac{dz - adx}{bdx} = f(z)$$

или

$$dz = [a + bf(z)]\, dx.$$

Таким образом, пришли к уравнению с разделяющимися переменными.

Определение. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется <u>однородной</u>, если для произвольного действительного параметра t:

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где k - некоторое натуральное число, показывающее "степень" однородной функции (ее порядок).

<u>Пример</u>.

$$f(x,y) = x^3 + 2y^3 - 3xy^2 -$$

однородная функция 3-ей степени.

$$f(x,y) = x^2 e^{-y/x} + 8xy \sin \frac{x}{y} -$$

однородная функция 2-го порядка.

Для случая двух переменных условие однородности функции записывается в следующем виде

$$f(tx, ty) = t^k f(x,y).$$

Положим в этом равенстве $t = 1/x$. Тогда,

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^k} f(x,y),$$

т.е.

$$f(x,y) = x^k f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Если $k = 0$, то:

$$f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Итак, однородная функция двух независимых переменных нулевого порядка есть функция отношения y/x.

Определение. Если правая часть дифференциального уравнения является однородной функцией нулевого порядка, то дифференциальное уравнение называется однородным:

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y/x = u$, где u - новая функция. Тогда,

$$y = ux \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = g(u).$$

Следовательно,

$$x\frac{du}{dx} = g(u) - u.$$

Допустим, что $u_1, u_2, \ldots$- корни уравнения $g(u) - u = 0$. Тогда $u = u_i$ - есть решение полученного уравнения. Значит, прямые $y = u_i x$, проходящие через начало координат, являются интегральными кривыми. Считая $u \neq u_i$, находим:

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

или

$$\int \frac{du}{g(u) - u} = \ln|x| + \ln|c| = \ln|cx|.$$

Отсюда, находим решение $u = \omega(cx)$, а по нему общее решение исходного однородного уравнения $y = x\omega(cx)$.

ЛЕКЦИЯ 3

Уравнения, приводимые к однородным.

Отметим основные способы сведения уравнений к однородным:

а) заменой функции $y = z^{\alpha}$. Степень α подбирают так, чтобы уравнение стало однородным,

б) уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$$

приводится к однородному одновременной заменой и аргумента и функции: $x = \xi + \alpha, y = \eta + \beta$, где константы α и β выбираются специальным образом. В силу произведенной замены $dx = d\xi, dy = d\eta, ax+by+c = (a\xi + b\eta)+a\alpha+b\beta+c, a_1x+b_1y+c_1 = (a_1\xi + b_1\eta) + a_1\alpha + b_1\beta + c_1$. Слагаемые, стоящие вне круглых скобок, полагаются равными нулю. Отсюда получается система уравнений для определения α и β:

$$\left\{ \begin{array}{c} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{array} \right| .$$

Данная система имеет единственное решение, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда исходное дифференциальное уравнение перейдет в однородное

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}\right) = g\left(\frac{\eta}{\xi}\right).$$

Если $\Delta = 0$, т.е. $a_1/a = b_1/b = \lambda$, то

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{\lambda\,(ax + by) + c_1}\right),$$

и оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z = ax + by$.

3.**Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.**

Определение. Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называют уравнение вида

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,, \tag{1}$$

где неизвестная функция y и ее производная y' входят в первой степени.

Будем полагать, что функции $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Если $Q(x) \equiv 0$, то уравнение

$$y' + P(x)\,y = 0 \tag{2}$$

называют линейным однородным уравнением, соответствующим неоднородному линейному уравнению (1). Уравнение (2) является уравнением с разделяющимися переменными и легко решается. Оно имеет очевидное тривиальное решение

$$y = 0. \tag{3}$$

Если $y \neq 0$, то

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx \Longrightarrow \ln|y| = -\int P(x)\,dx + \ln|c|\,, c \neq 0.$$

Поэтому

$$y = c\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\}. \tag{4}$$

В уравнении (4) $c \neq 0$. Если же "разрешить" c принимать нулевое значение, то придем к решению (3). Поэтому, общее решение однородного уравнения (2) дается формулой

$$y = c\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\}. \tag{5}$$

Оказывается, решение неоднородного уравнения (1) можно получить из (5), применив метод Лагранжа - метод вариации произвольной постоянной. Будем искать решение исходного неоднородного уравнения (1) в виде

$$y = c(x)\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\}, \tag{6}$$

где $c(x)$ - неизвестная функция. Подставим это решение в (1)

$$c'(x)\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\} - c(x)\,P(x)\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\} +$$

$$+P(x)\,c(x)\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\} = Q(x) \Longrightarrow c'(x) = Q(x)\exp\left\{\int P(x)\,dx\right\}$$

$$\Longrightarrow c(x) = \int Q(x)\exp\left\{\int P(x)\,dx\right\}dx + c_1.$$

Подставляя $c(x)$ в (6), получим:

$$y = \exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\}\left[c_1 + \int Q(x)\exp\left\{\int P(x)\,dx\right\}dx\right]. \tag{7}$$

Таким образом, общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка можно найти с помощью двух квадратур (интегралов).

Проанализируем структуру полученного решения. Общее решение линейного неоднородного уравнения представляет собой сумму двух слагаемых:

$$y_1 = c_1\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\} -$$

это общее решение однородного уравнения и

$$y_2 = \exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\}\int Q(x)\exp\left\{\int P(x)\,dx\right\}dx -$$

это решение получается из (7) при $c_1 = 0$, т.е. является частным решением неоднородного уравнения. Оказывается, это общее правило.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой суперпозицию общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Предположим, что каким-то образом удалось найти $\psi(x)$ - частное решение неоднородного уравнения. Тогда общее решение неоднородного уравнения можно найти с помощью одной квадратуры. Сделаем замену $y = z + \psi(x)$, где z - новая функция. Подставим все в уравнение (1):

$$z' + \underbrace{\psi'(x)} + P(x)z + \underbrace{P(x)\psi(x)} = \underbrace{Q(x)}.$$

Поскольку $\psi(x)$ - решение уравнения (1), то выделенные слагаемые сокращаются, и получаем уравнение вида (2)

$$z' + P(x)z = 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения (1) представляется в форме

$$y = c\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\} + \psi(x).$$

Если известно два частных решения линейного неоднородного дифференциального уравнения, то его общее решение может быть найдено без квадратур. Пусть $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ - два указанных частных решения, т.е.

$$\begin{aligned}\psi_1{}' + P(x)\psi_1 = Q(x),\\ \psi_2{}' + P(x)\psi_2 = Q(x).\end{aligned}$$

Вычитая второе уравнение из первого, найдем

$$[\psi_1 - \psi_2]' + P(x)[\psi_1 - \psi_2] = 0.$$

Следовательно, $(\psi_1 - \psi_2)$ - есть решение однородного уравнения. Таким образом, общее решение однородного уравнения можно представить как

$$y = c(\psi_1 - \psi_2),$$

а общее решение неоднородного уравнения (1) в виде

$$y = \psi_1(x) + c[\psi_1(x) - \psi_2(x)].$$

Отсюда видно, что общее решение неоднородного уравнения (1) дается формулой

$$y = \varphi(x) + c\psi(x), \tag{8}$$

т.е. является линейной функцией постоянной c.

Обратно, если взять линейную функцию произвольного постоянного, то дифференциальное уравнение, для которого эта линейная функция является общим решением, будет линейным. Покажем это. Продифференцируем соотношение (8):

$$y' = \varphi'(x) + c\psi'(x). \tag{9}$$

Исключая c из (8),(9), приходим к

$$\frac{y' - \varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{y - \varphi(x)}{\psi(x)}$$

или

$$y' \quad \underbrace{-\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}}_{P(x)} y = \underbrace{\varphi'(x) - \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\varphi(x)}_{Q(x)}.$$

Пример. Заряд конденсатора.

Запишем уравнения Кирхгофа для электрической схемы, представленной на рисунке. Здесь: E - постоянная э.д.с., U - напряжение на емкости, I - ток, текущий через сопротивление R и конденсатор C. Тогда,

$$E = RI + U, \quad I = C\frac{dU}{dt}.$$

В итоге, для напряжения U на емкости получается линейное дифференциальное уравнение

$$\tau\frac{dU}{dt} + U = E \qquad (\tau = RC).$$

Частное решение этого неоднородного уравнения физически очевидно: $U = E$. Тогда, производя замену $U = z + E$, придем к однородному уравнению

$$\tau\frac{dz}{dt} + z = 0,$$

решение которого имеет вид

$$z = c_1 e^{-t/\tau}.$$

И, следовательно, общее решение

$$U = E + c_1 e^{-t/\tau}.$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ конденсатор был разряжен: $U(0) = 0$, то $E + c_1 = 0 \to c_1 = -E$, и процесс заряда описывается формулой

$$U = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

Таким образом, время заряда конденсатора равно постоянной времени $\tau = RC$.

4.**Уравнения Бернулли и Риккати.**

Есть ряд дифференциальных уравнений, которые приводятся к линейным. Уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \quad (n \neq 0, 1) \tag{10}$$

называют уравнением Бернулли. Если $n > 0$, то $y = 0$ - тривиальное решение. Будем полагать далее, что $y \neq 0$. Тогда, поделив обе части уравнения (10) на y^n, получим:

$$y^{-n}y' + P(x)y^{-n+1} = Q(x).$$

Легко заметить, что

$$\left(y^{-n+1}\right)' = (1-n)\, y^{-n} y'.$$

Тогда, производя замену функции: $y^{-n+1} = z$, приходим к линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{z'}{1-n} + P(x)\, z = Q(x)\,.$$

Пример. Рассмотрим уравнение Бернулли вида

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = \frac{x^2}{2y}.$$

Поскольку в этом уравнении $n = -1$, то по рецепту нужно применить замену $y^2 = z$. Домножение на $2y$ обеих частей уравнения дает:

$$2yy' - \frac{y^2}{x} = x^2$$

или

$$z' - \frac{z}{x} = x^2.$$

Далее, действуя по схеме решения линейного дифференциального уравнения, получим общий интеграл исходного уравнения

$$y^2 = cx + \frac{x^3}{2}.$$

Уравнением Риккати называют дифференциальное уравнение вида

$$y' + \alpha(x)\, y + \beta(x)\, y^2 = \gamma(x)\,. \tag{11}$$

На самом деле, это - обобщенное уравнение, поскольку Риккати изучал более простое:

$$y' + \beta y^2 = \gamma x^m. \tag{12}$$

Заметим, что уравнение вида (12) встречается в физике. Оно получается из уравнения для напряженности электрического поля $E(x)$ в плоско-слоистой среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x)$:

$$\frac{d^2E}{dx^2} + k^2 \varepsilon(x)\, E = 0.$$

Сделав замену переменной

$$E = \exp\left\{\int z(x)\, dx\right\}$$

и вычислив

$$E' = z(x) \exp\left\{\int z(x)\, dx\right\} = zE, \quad E'' = z'E + zE' = \left(z' + z^2\right) E,$$

придем к уравнению Риккати

$$z' + z^2 = -k^2 \varepsilon (x) \, .$$

Следует заметить, что, в отличие от уравнения Бернулли, уравнение Риккати в общем случае не интегрируется в квадратурах. Однако, если известно частное решение (11) $\psi (x)$, то его можно свести к уравнению Бернулли и найти его общее решение. В самом деле. Проведем в (11) замену функции: $y = z + \psi (x)$. Тогда

$$z' + \underbrace{\psi' (x)} + \alpha (x) \, z + \underbrace{\alpha (x) \, \psi (x)} + \beta (x) \, z^2 + 2\beta (x) \, z\psi (x) + \underbrace{\beta (x) \, \psi^2 (x)} = \underbrace{\gamma (x)} \, .$$

Поскольку $\psi (x)$ - решение уравнения (11), отмеченные слагаемые сокращаются. В итоге, для функции $z (x)$ получается уравнение Бернулли

$$z' + [\alpha (x) + 2\beta (x) \, \psi (x)] \, z + \beta (x) \, z^2 = 0,$$

которое линеаризуется заменой $1/z = u \quad (n = 2)$.

Пример. Рассмотрим уравнение Риккати

$$y' + 3y^2 = \frac{2}{x^2}.$$

Поищем частное решение этого уравнения в виде $y = c/x$. Тогда,

$$-\frac{c}{x^2} + \frac{3c^2}{x^2} = \frac{2}{x^2} \Longrightarrow 3c^2 - c - 2 = 0 \Longrightarrow c_1 = 1, c_2 = -\frac{2}{3}.$$

В итоге мы нашли сразу два частных решения. Беря наиболее простое из них и производя замену функции: $y = z + 1/x$, придем к уравнению Бернулли

$$z' + \frac{6z}{x} + 3z^2 = 0.$$

Решая последнее, найдем общее решение исходного уравнения

$$y = \frac{cx^5 + 2}{x \, (cx^5 - 3)}.$$

ЛЕКЦИЯ 4

5.Уравнение в полных дифференциалах.

В записи дифференциального уравнения

$$y' = f(x,y)$$

y является функцией, а x - аргументом. В эквивалентной форме записи уравнения

$$f(x,y)\,dx - dy = 0$$

переменные равноправны, но отсутствует симметрия. Поэтому наиболее общая форма дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной, такова:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0. \tag{1}$$

Будем полагать, что в (1) функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ непрерывны в некоторой области G вместе с частными производными $\partial M/\partial y$ и $\partial N/\partial x$.

Может оказаться, что левая часть уравнения (1) представляет собой полный дифференциал некоторой функции, т.е. $\exists U(x,y)$ такая, что

$$dU = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy.$$

В силу формулы первого дифференциала функции двух переменных это означает, что

$$M = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{2}$$

В этом случае уравнение (1) называют уравнением в полных дифференциалах.

Если функция $U(x,y)$ известна, то решение уравнения (1) легко найти. В самом деле

$$dU(x,y) = 0 \Longrightarrow U(x,y) = c. \tag{3}$$

Пусть $y = \varphi(x)$ - решение дифференциального уравнения (1). Тогда, из (3) имеем:

$$U(x,\varphi(x)) \equiv c,$$

т.е. функция U по любой интегральной кривой принимает одно и то же значение. Для разных интегральных кривых эти значения различны.

Определение. Функция $U(x,y)$, непрерывно-дифференцируемая по обоим аргументам, которая вдоль любой интегральной кривой принимает постоянное значение, называется первым интегралом.

Заметим, что это определение относят чаще к системам дифференциальных уравнений. Здесь мы его привели, чтобы подчеркнуть отличие от общего интеграла: в отличие от общего интеграла $\Phi(x,y,c) = 0$ первый интеграл разрешен относительно произвольной постоянной $U(x,y) = c$. Первых интегралов существует бесчисленное множество, поскольку любая функция от первого интеграла также будет первым интегралом

$$\Psi(U(x,y)) = \Psi(c) = c_1,$$

причем эти интегралы будут функционально независимы.

Пусть функция $U(x,y)$ известна. Как получить любое частное решение уравнения (1)? Зададимся начальным значением (x_0,y_0) и сосчитаем из (3) $c_0 = U(x_0,y_0)$. Тогда утверждается, что частное решение дифференциального уравнения (1) можно найти, разрешив относительно y уравнение

$$U(x,y) = c_0. \tag{4}$$

Уравнение (4) определяет неявно y как функцию x (или x как функцию y). Для этого необходимо, чтобы $\partial U(x_0,y_0)/\partial y \neq 0$, т.е. $N(x_0,y_0) \neq 0$, либо $\partial U(x_0,y_0)/\partial x \neq 0$, т.е. $M(x_0,y_0) \neq 0$. Может случиться, что в т.(x_0,y_0): $M(x_0,y_0) = N(x_0,y_0) = 0$. Подобные точки называются <u>особыми</u>, и мы их пока изучать не будем. Допустим, что $N(x_0,y_0) \neq 0$. Тогда по теореме о существовании неявного решения уравнение (4) определяет функцию $y = \varphi(x)$, причем $\varphi(x_0) = y_0$. Докажем, что эта функция является решением дифференциального уравнения (1).

Подставляя в равенство (4) $y = \varphi(x)$, имеем:

$$U(x,\varphi(x)) \equiv c_0.$$

Продифференцируем обе части тождества по x

$$\frac{\partial U(x,\varphi(x))}{\partial x}dx + \frac{\partial U(x,\varphi(x))}{\partial y}d\varphi(x) \equiv 0$$

или в силу (2)

$$M(x,\varphi(x))\,dx + N(x,\varphi(x))\,d\varphi(x) \equiv 0. \qquad ⊛$$

Таким образом, если функция $U(x,y)$ известна, то мы можем получить все частные решения уравнения (1).

Возникает вопрос: какому условию должны удовлетворять функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$, чтобы выражение $Mdx + Ndy$ являлось полным дифференциалом некоторой функции ?

<u>Необходимость.</u>

Предположим $\exists U(x,y)$ такая, что $dU = Mdx + Ndy$, т.е. выполнены равенства (2):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N.$$

Но, тогда

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

В силу непрерывности частных производных $\partial M/\partial y$ и $\partial N/\partial x$, которую мы предположили, имеем:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad ⊛ \tag{5}$$

Достаточность.

Построим функцию U, исходя из условий (2),(5).

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y) \Longrightarrow U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \Psi(y),$$

где y - параметр. Чтобы определить неизвестную $\Psi(y)$, нужно использовать второе условие в (2)

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \frac{d\Psi}{dy} =$$

и поскольку $\partial M/\partial y$ непрерывна

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx + \frac{d\Psi}{dy}.$$

В соответствии с условием (5) имеем далее

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dx + \frac{d\Psi}{dy}$$

или, согласно (2),

$$N(x,y) = N(x,y) - N(x_0,y) + \frac{d\Psi}{dy} \Longrightarrow \Psi'(y) = N(x_0,y).$$

В результате,

$$\Psi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy.$$

Таким образом, мы нашли (построили) функцию $U(x,y)$:

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy. \qquad \boxtimes \qquad (6)$$

6.Интегрирующий множитель.

Условие (5) не всегда выполняется, поэтому можно пытаться преобразовать уравнение (1) так, чтобы условие стало справедливым. Предположим, что уравнение (1) не является уравнением в полных дифференциалах, т.е.

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Поставим задачу: найти такую функцию $\mu(x,y)$, при умножении на которую левая часть уравнения (1) превращается в полный дифференциал некоторой функции. Существует ли такая функция ? Интегрирующим множителем как раз и называют указанную функцию $\mu(x,y)$. Докажем ряд теорем об интегрирующем множителе.

Теорема 1. О существовании интегрирующего множителя.

Если дифференциальное уравнение (1) имеет первый интеграл, то интегрирующий множитель существует.

Доказательство.

Предположим, что существует непрерывно-дифференцируемая функция $U(x,y)$, для которой выражение $U(x,y)=c$ определяет все решения уравнения (1). Возьмем дифференциал от обеих частей выражения

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial U}{\partial x}\underline{dx}+\frac{\partial U}{\partial y}\underline{dy}=0 \\ M\underline{dx}+N\underline{dy}=0 \end{array}\right| .$$

Будем рассматривать это как систему уравнений с двумя неизвестными: dx и dy. Система однородна и поэтому имеет не нулевое решение, когда ее определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ M & N \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда,

$$\frac{U'_x}{M}=\frac{U'_y}{N}.$$

Обозначая это отношение за $\mu(x,y)$, придем к

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\mu M, \quad \frac{\partial U}{\partial y}=\mu N,$$

т.е. если уравнение (1) умножить на $\mu(x,y)$, то его левая часть превратится в dU: $dU=\mu(Mdx+Ndy)$. Выражение для $\mu(x,y)$ находится, поскольку $U(x,y)$ известна. ⊠

Теорема 2.

Число интегрирующих множителей бесконечно.

Доказательство.

Пусть известен интегрирующий множитель $\mu(x,y)$ такой, что при умножении на него левая часть уравнения превращается в $dU=\mu(Mdx+Ndy)$. Умножим это выражение на произвольную непрерывную функцию $\varphi(U(x,y))$. Тогда получим

$$\varphi(U)\,dU=d\underbrace{\int\varphi(U)\,dU}_{V}=\varphi(U)\,\mu\,(Mdx+Ndy)$$

или

$$dV=\varphi(U)\,\mu\,(Mdx+Ndy)\,.$$

Это означает, что $\varphi(U)\,\mu$ также интегрирующий множитель

$$\mu_1=\varphi(U)\,\mu. \quad ⊠ \tag{7}$$

Теорема 3.

Любой интегрирующий множитель уравнения (1) имеет вид (7).

Доказательство.

Пусть имеются два интегрирующих множителя $\mu(x,y)$ и $\mu_1(x,y)$ уравнения (1), т.е.

$$dU = \mu (Mdx + Ndy),$$
$$dV = \mu_1 (Mdx + Ndy).$$

Эти уравнения эквивалентны тому, что

$$U'_x = \mu M, \quad U'_y = \mu N, \quad V'_x = \mu_1 M, \quad V'_y = \mu_1 N.$$

Поскольку

$$\frac{U'_x}{V'_x} = \frac{U'_y}{V'_y} = \frac{\mu}{\mu_1},$$

то <u>якобиан</u>

$$\begin{vmatrix} U'_x & U'_y \\ V'_x & V'_y \end{vmatrix} \equiv \frac{D(U,V)}{D(x,y)} \equiv 0.$$

Последнее означает, что между функциями $U(x,y)$ и $V(x,y)$ существует функциональная зависимость: $\Phi(U,V) = 0$. Поскольку мы исключили особые точки, это уравнение можно разрешить как относительно U, так и относительно V. Пусть, например, $V = \varphi(U)$. Тогда $dV = \varphi'(U)\,dU$. Отсюда $\mu_1 = \varphi'(U)\,\mu$. ⊠

Теорема 4.

Если известны два существенно различных (т.е. не отличающихся на постоянный множитель) интегрирующих множителя, то первый интеграл уравнения (1) можно получить без квадратур.

Доказательство.

Пусть имеются два существенно различных интегрирующих множителя μ и μ_1. Тогда, по теореме 2 (см.(7))

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \varphi(U) = V -$$

некоторый первый интеграл дифференциального уравнения (1). Действительно, поскольку $U = c$, то $V = \varphi(U) = \varphi(c) = c_1$. ⊠

ЛЕКЦИЯ 5

Некоторые способы нахождения интегрирующего множителя.

Рассмотрим уравнение

$$Mdx + Ndy = 0.$$

Требуется найти такую функцию $\mu(x, y)$, что

$$\mu(Mdx + Ndy) = dU.$$

Для того, чтобы это выражение было полным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

или

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x} \Longrightarrow \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} \Longrightarrow$$

$$N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1}$$

В общем случае, как видно из (1), для определения интегрирующего множителя $\mu(x, y)$ необходимо решать уравнение *в частных производных*. В отдельных случаях удается найти интегрирующий множитель частного вида. Поищем множитель в виде $\mu = \mu(x)$. Тогда,

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)/N.$$

Если правая часть зависит только от x, то существует интегрирующий множитель, зависящий только от x. Аналогично для $\mu = \mu(y)$. Можно искать множитель в виде: $\mu = \mu(x \pm y), \mu = \mu(xy), \mu = \mu(y/x)$ и т.д. Иногда удается разбить уравнение на группы и искать интегрирующий множитель для каждой группы отдельно. Например,

$$(M_1dx + N_1dy) + (M_2dx + N_2dy) = 0.$$

Пусть для первой группы интегрирующий множитель - μ_1 и U_1 такая функция, что $dU_1 = \mu_1(M_1dx + N_1dy)$, а для второй группы это соответственно μ_2 и U_2. Тогда для первой группы общий вид всех интегрирующих множителей в соответствии с доказанной теоремой таков: $\varphi_1(U_1)\mu_1$, а для второй - $\varphi_2(U_2)\mu_2$. Если удается подобрать φ_1 и φ_2 так, чтобы $\varphi_1(U_1)\mu_1 = \varphi_2(U_2)\mu_2 = \mu$, то μ и есть искомый интегрирующий множитель.

Пример.

Найдем решение следующего уравнения в дифференциалах:

$$\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right)dx + \left(1 + \frac{x^3}{y}\right)dy = 0.$$

Разобьем левую часть на две группы

$$\left(\frac{y}{x}dx + dy\right) + \left(3x^2dx + \frac{x^3}{y}dy\right) = 0.$$

Тогда, очевидно, для первой группы: $\mu_1 = x, U_1 = xy$, а общий вид интегрирующего множителя - $x\varphi_1(xy)$, а для второй - $\mu_2 = y, U_2 = x^3y$, а общий вид множителя - $y\varphi_2(x^3y)$. Легко видеть, что при $\varphi_1(U) = U^2, \varphi_2(U) = U$: $x(xy)^2 = y(x^3y)$. Значит, искомый множитель $\mu = x^3y^2$. В результате,

$$(xy)^2 d(xy) + \left(x^3y\right) d\left(x^3y\right) = 0 \Longrightarrow \frac{(xy)^3}{3} + \frac{\left(x^3y\right)^2}{2} = c.$$

Пример.

Согласно *первому закону термодинамики* имеет место закон сохранения энергии для тепловых процессов

$$dQ = dU + pdV,$$

где dQ - количество теплоты, пришедшей в систему, dU - приращение внутренней энергии газа, pdV - работа газа.

Поскольку работа газа не является полным дифференциалом, а dU - полный дифференциал, то dQ также не есть полный дифференциал. Оказывается, если ввести новую физическую величину - *энтропию* S как функцию состояния газа через $dS = dQ/T$ при *равновесном процессе*, то первый закон термодинамики перепишется в виде

$$dS = \frac{1}{T}(dU + pdV).$$

Оказывается dS - полный дифференциал, значит $1/T$ - интегрирующий множитель (T - *абсолютная температура* газа).

7. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2}$$

Предположим, что $f(x, y)$ непрерывна по обоим аргументам в некоторой односвязной области $G \subset \Re^2$, содержащей начальные значения (x_0, y_0), т.е. точку $M(x_0, y_0)$. Всегда можно выбрать прямоугольник D с центром в т.$M(x_0, y_0)$, целиком лежащий в G, с шириной $2a$ и высотой $2b$. Далее всегда будем рассматривать прямоугольник $D : \{|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$. Докажем следующую важную теорему.

Теорема (Коши).

Пусть: 1) функция $f(x, y)$ непрерывна по обоим аргументам в прямоугольнике $D : \{|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$,

2) удовлетворяет в нем условию Липшица относительно y, т.е. $\exists N > 0 : \forall x, y_1, y_2 \in D :$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2|,$$

причем постоянная N не зависит от x.

Тогда существует единственное решение уравнения (2) $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальному условию

$$\varphi(x_0) = y_0 \tag{3}$$

и определенное при $|x - x_0| \leq h \quad (h \leq a)$. Постоянная h будет определена в ходе доказательства.

Перед доказательством теоремы дадим некоторые пояснения и сформулируем несколько предложений.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ *условию Липшица*, если $\exists N > 0$, что для $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq N |x_1 - x_2|.$$

Геометрически это означает, что тангенс угла наклона секущей по модулю не превышает числа $N : |\tan \alpha| \leq N$. Значит, кривая достаточно плавно меняется на отрезке $[a, b]$.

Заметим, что входящее в посылку теоремы условие Липшица можно заменить более сильным. Предположим, что в прямоугольнике D существует ограниченная частная производная функции $f(x, y)$:

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq N.$$

Тогда, по формуле конечных приращений Лагранжа

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f(x, y_2 + \theta(y_1 - y_2))}{\partial y}(y_1 - y_2) \quad (0 < \theta < 1),$$

и поэтому

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2|.$$

Сформулированная теорема существования носит локальный характер. Условие непрерывности $f(x, y)$ обеспечивает существование решения (теорема Пеано), условие Липшица обеспечивает не только существование решения, но и его единственность. Заметим, что оба условия являются достаточными, но не необходимыми.

Предложение I. Дифференциальное уравнение (2) вместе с начальным условием (3) эквивалентно *интегральному уравнению*

$$y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx. \tag{4}$$

Доказательство: $\boxed{\Longrightarrow}$ пусть функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (2)

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)) \tag{5}$$

и начальному условию (3):

$$\varphi(x_0) = y_0.$$

Интегрируя тождество (5) в пределах от x_0 до x, имеем:

$$\int\limits_{x_0}^{x} \varphi'(x)\,dx \equiv \int\limits_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\,dx$$

или

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \equiv \int\limits_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\,dx.$$

Тогда, в силу (3)

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\,dx. \tag{6}$$

Значит, функция $y = \varphi(x)$ есть и решение интегрального уравнения (4). $\boxtimes$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Обратно, пусть $y = \varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (4). Тогда имеет место тождество (6). Полагая в нем $x = x_0$, получаем $\varphi(x_0) = y_0$ (начальное условие). Дифференцируя (6) по x, находим:

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)). \qquad \boxtimes$$

Предложение II. **Определение.** Закон, по которому каждой функции φ из некоторого класса ставится в соответствие функция ψ некоторого (другого) класса, называется *оператором* $\hat{A}$

$$\psi = \hat{A}\varphi.$$

Над функцией $\varphi(x)$, определенной и непрерывной на отрезке $|x - x_0| \leq a$ с областью изменения $|\varphi(x) - y_0| \leq b$, т.е. из класса $\mathbf{C}_a$, проделаем операцию

$$y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\,dx,$$

которая в указанном прямоугольнике D имеет смысл. В результате получим новую функцию

$$\hat{A}\varphi = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\,dx.$$

На языке введенного оператора решением интегрального уравнения (4) будет функция, которая удовлетворяет равенству (см.(6))

$$\varphi = \hat{A}\varphi.$$

В этом случае говорят, что решением дифференциального уравнения (2) является *неподвижная точка* оператора $\hat{A}$.

Предложение III. Нормой функции $\varphi(x)$ назовем

$$\|\varphi(x)\| = \max_{|x - x_0| \leq a} |\varphi(x)|.$$

Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из класса $\mathbf{C}_a$ равны, если $\|\varphi(x) - \psi(x)\| = 0$.

ЛЕКЦИЯ 6

Доказательство:

Сузим класс функций $\varphi(x)$ так, чтобы функции $\hat{A}\varphi$ принадлежали тому же классу. Дело в том, что функция $\psi(x) = \hat{A}\varphi(x)$ будет непрерывна, дифференцируема, но условие $|\psi(x) - y_0| \le b$ может не выполняться. Уменьшим интервал изменения $|x - x_0|$ так, чтобы $|\psi(x) - y_0| \le b$. Новый прямоугольник $\{|x - x_0| \le h, |y - y_0| \le b\}$ обозначим через D_h.

Выберем число h таким образом, чтобы выполнялись условия:

а) $\left|\hat{A}\varphi - y_0\right| \le b$ для $\forall x : |x - x_0| \le h$;

б) для $\forall \varphi(x), \psi(x)$ класса $\mathbf{C}_h$ (определенных и непрерывных на отрезке $|x - x_0| \le h$)

$$\left\|\hat{A}\varphi - \hat{A}\psi\right\| \le K \|\varphi - \psi\|, \tag{1}$$

где K - некоторое число $(0 < K < 1)$. Оператор, удовлетворяющий условию (1), называется *сжимающим.*

Оценим величину в левой части неравенства а). В силу непрерывности $f(x, y)$ на D_h - $\exists M > 0 : \forall (x, y) \in D_h : |f(x, y)| \le M$, и мы имеем следующую цепочку неравенств:

$$\left|\hat{A}\varphi - y_0\right| = \left|y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\, dx - y_0\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, \varphi(x))|\, dx\right| \le M|x - x_0| \le Mh \le b.$$

Отсюда, $h \le b/M$ и должно выполняться $h \le a$.

Из условия б) имеем:

$$\left|\hat{A}\varphi - \hat{A}\psi\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\, dx - \int_{x_0}^{x} f(x, \psi(x))\, dx\right| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x))|\, dx\right| \le$$

по условию Липшица

$$\le N \left|\int_{x_0}^{x} |\varphi(x) - \psi(x)|\, dx\right| \le N\|\varphi - \psi\| |x - x_0| \le Nh \|\varphi - \psi\|.$$

Поскольку это неравенство справедливо для $\forall x : |x - x_0| \le h$, то и

$$\left\|\hat{A}\varphi - \hat{A}\psi\right\| \le Nh \|\varphi - \psi\|.$$

Выберем h из условия $Nh < 1$, т.е. $h < 1/N$.

Итак, будем считать в дальнейшем, что h удовлетворяет одновременно трем условиям:

$$h \le \frac{b}{M}, \quad h \le a, \quad h < \frac{1}{N}. \tag{2}$$

Теперь можно взять число K такое, что $Nh < K < 1$.

Применим далее для доказательства *метод последовательных приближений*. Будем строить последовательные приближения к решению как

$$\varphi_0 = y_0; \quad \varphi_1 = \hat{A}\varphi_0; \quad \varphi_2 = \hat{A}\varphi_1; \ldots; \quad \varphi_n = \hat{A}\varphi_{n-1}; \ldots,$$

где

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, \varphi_{n-1}(x))\, dx.$$

Докажем, что построенная нами *функциональная последовательность* $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно сходится на отрезке $|x - x_0| \le h$.

Определение. Функциональная последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ называется *равномерно сходящейся* к функции $\varphi(x)$ на отрезке $|x - x_0| \le h$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N, \forall x : |x - x_0| \le h : |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Заменим вопрос равномерной сходимости функциональной последовательности вопросом равномерной сходимости эквивалентного ей *функционального ряда*:

$$\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots + (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + \ldots =$$

$$= \varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n - \varphi_{n-1}). \tag{3}$$

В самом деле. Сумма первых n членов построенного ряда (n-я частичная сумма) равна:

$$S_n(x) = \varphi_n(x).$$

Поэтому вопрос существования предела $S_n(x)$ при $n \to \infty$ (сходимости ряда) эквивалентен сходимости последовательности $\{\varphi_n(x)\}$. В то же время, для проверки равномерной сходимости ряда существует эффективно применяемый на практике достаточный признак Вейерштрасса.

Признак Вейерштрасса.

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на отрезке $|x - x_0| \le h$, если $|u_n(x)| \le a_n$ для $\forall n \in \mathbf{N}$ и $\forall x : |x - x_0| \le h$, и при этом числовой (мажорирующий) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Оценим по норме члены нашего функционального ряда.

$$\|\varphi_2 - \varphi_1\| = \left\|\hat{A}\varphi_1 - \hat{A}\varphi_0\right\| \le K\,\|\varphi_1 - \varphi_0\| = K\left\|\hat{A}\varphi_0 - y_0\right\| \le Kb;$$

$$\|\varphi_3-\varphi_2\|=\left\|\hat{A}\varphi_2-\hat{A}\varphi_1\right\|\le K\left\|\varphi_2-\varphi_1\right\|\le K^2b;\ldots;\|\varphi_{n+1}-\varphi_n\|\le K^nb.$$

Поскольку

$$|\varphi_{n+1}-\varphi_n|\le\|\varphi_{n+1}-\varphi_n\|\le K^nb,$$

то члены функционального ряда (3) не превосходят членов числового ряда

$$b+bK+bK^2+\ldots+bK^n+\ldots=b\sum_{n=0}^{\infty}K^n. \tag{4}$$

Числовой ряд (4) сходится, поскольку он представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $K<1$. Тогда по признаку Вейерштрасса функциональный ряд (3) сходится равномерно.

Воспользуемся теперь свойством равномерно сходящегося функционального ряда: сумма этого ряда является непрерывной функцией на отрезке равномерной сходимости: $|x-x_0|\le h$. Таким образом, и ряд (3) и последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходятся к одной и той же непрерывной на отрезке $|x-x_0|\le h$ функции $\varphi(x)$.

Поскольку $|\varphi_n-y_0|\le b$, то, переходя в этом неравенстве к пределу $n\to\infty$, имеем: $|\varphi(x)-y_0|\le b$, т.е. $\varphi(x)\in\mathbf{C}_h$. Теперь надо доказать, что полученная функция $\varphi(x)$ является решением интегрального уравнения

$$y=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(x,y)\,dx.$$

Оценим $\left\|\hat{A}\varphi-\hat{A}\varphi_n\right\|$.

$$\left\|\hat{A}\varphi-\hat{A}\varphi_n\right\|\le K\left\|\varphi-\varphi_n\right\|\to 0\qquad(n\to\infty).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\hat{A}\varphi_n=\hat{A}\varphi.$$

Переходя в соотношении $\varphi_n=\hat{A}\varphi_{n-1}$ к пределу при $n\to\infty$, имеем

$$\varphi=\hat{A}\varphi.$$

Таким образом, функция $\varphi(x)$ является решением интегрального уравнения на отрезке $|x-x_0|\le h$, т.е. решением исходного дифференциального уравнения. Существование решения доказано.

Докажем теперь единственность решения. Предположим, что существуют два решения дифференциального уравнения $y=\varphi(x)$, $\quad r_1<x<r_2$ и $y=\psi(x)$, $\quad s_1<x<s_2$, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям: $\varphi(x_0)=y_0,\psi(x_0)=y_0$, причем $\varphi(x)\ne\psi(x)$. Покажем, что в общей части эти решения совпадают.

Докажем, прежде всего, что эти решения совпадают на отрезке $|x-x_0|\le h$, где: $h\le a,\quad h\le b/M,\quad h<1/N,\quad [x_0-h,x_0+h]\subset((r_1,r_2)\cap(s_1,s_2))$. Поскольку $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - решения интегрального уравнения, то: $\varphi=\hat{A}\varphi,\quad \psi=\hat{A}\psi$. Поэтому,

$$\|\varphi-\psi\|=\left\|\hat{A}\varphi-\hat{A}\psi\right\|\le K\left\|\varphi-\psi\right\|,\quad(0<K<1).$$

Этому неравенству можно удовлетворить лишь при $\|\varphi - \psi\| = 0$. Отсюда $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ при $|x - x_0| \leq h$.

Обозначим за x_1 такую точку $x_1 > x_0$, что для всех $x_0 < x \leq x_1 : \varphi(x) \equiv \psi(x)$, а для $x > x_1 : \varphi(x) \neq \psi(x)$. Например, $x_1 = x_0 + h$. Тогда точку $(x_1, \varphi(x_1))$ можно принять за начальную, с центром в этой точке построить прямоугольник D_1, для него найти h_1, которое фигурирует в теореме существования. В результате, по доказанному ранее $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ для $|x - x_1| \leq h_1$ и т.д. В итоге, в области пересечения интервалов (r_1, r_2) и (s_1, s_2) решения совпадают. Значит, решение единственно. ⊠

Пример. Приведем пример на метод последовательных приближений, примененный при доказательстве теоремы существования и единственности. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y$$

с начальной точкой $(0,1)$. Ему эквивалентно интегральное уравнение:

$$y = 1 + \int\limits_0^x y dx.$$

Строим последовательные приближения:

$$\varphi_0 = 1; \quad \varphi_1 = 1 + \int\limits_0^x 1 \cdot dx = 1 + x;$$

$$\varphi_2 = 1 + \int\limits_0^x (1 + x)\, dx = 1 + x + \frac{x^2}{2};$$

$$\varphi_3 = 1 + \int\limits_0^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) dx = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \ldots;$$

$$\varphi_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Тогда, предельная функция

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Проверим, что получено решение исходного уравнения.

$$\frac{dy}{y} = dx \Longrightarrow \ln y = x + \ln c \Longrightarrow y = ce^x.$$

Из начального условия: $1 = ce^0 \longrightarrow c = 1$. Таким образом, решение дифференциального уравнения действительно $y = e^x$.

ЛЕКЦИЯ 7

Замечание. Доказанная теорема носит локальный характер. Показано, что решение $y = \varphi(x)$ существует при $|x - x_0| \le h$, где: $h \le a, \quad h \le b/M, \quad h < 1/N$ (N - постоянная Липшица). Как получить решение во всей области, где выполняется условие Липшица ? Применяется метод продолжения решения.

Берем т.$A(x_0 + h, \varphi(x_0 + h))$ и с центром в ней строим прямоугольник D_1, целиком лежащий в G. Для него находим $a_1, \quad b_1, M_1, N_1$ и по теореме существования определяем h_1. В данном прямоугольнике D_1 найдем решение $y = \psi(x)$, определенное при $|x - (x_0 + h)| \le h_1$, т.е. при $x_0 + h - h_1 \le x \le x_0 + h + h_1$. Решения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ совпадают на некотором участке. По теореме единственности они совпадают всюду, где определены. Построенная функция $\psi(x)$ будет продолжением решения $\varphi(x)$.

Определение. Пусть имеются два решения дифференциального уравнения $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям: $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$. Пусть также $\varphi(x)$ определено при $r_1 < x < r_2$, а $\psi(x)$ при $s_1 < x < s_2$, причем $(r_1, r_2) \subset (s_1, s_2)$. Тогда решение $y = \psi(x)$ называется *продолжением* решения $y = \varphi(x)$.

Непродолжаемым называется такое решение, которое является продолжением любого другого решения.

Рассмотрим множество всех решений, удовлетворяющих одним и тем же начальным условиям (x_0, y_0). Каждое решение имеет свой интервал определения. Пусть R_1 - множество левых концов этих интервалов, а R_2 - множество правых концов, причем $m_2 = \sup R_2$; $m_1 = \inf R_1$ (может быть $m_2 = +\infty$; $m_1 = -\infty$). Необходимо построить решение $y = \varphi(x)$, определенное в интервале (m_1, m_2) и удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$.

Пусть $x_0 < x^* < m_2$. Согласно определению m_2, $\exists$ решение $\psi(x)$, которое определено при $x = x^*$. Вычислим $\psi(x^*)$ и положим $\varphi(x^*) = \psi(x^*)$. В силу теоремы единственности выбранное значение $\varphi(x^*)$ не зависит от выбора функции $\psi(x)$. Аналогично можно определить $\varphi(x)$ для аргументов x^* таких, что $m_1 < x^* < x_0$. Тем самым, построенная $\varphi(x)$ определена при $m_1 < x < m_2$. К тому же она является решением, т.к. в каждой точке ее значение совпадает с одним из решений. В силу определения m_1 и m_2 данное решение не продолжаемо. В силу теоремы единственности оно единственно.

Теорема.

Непродолжаемое решение примыкает к границе области.

Доказательство.

Предположим, что в области G правая часть дифференциального уравнения - $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y. Выбрана т.(x_0, y_0) и определено непродолжаемое решение $\varphi(x)$, $m_1 < x < m_2$. Покажем, что каково бы ни было замкнутое множество $F \subset G$, $\exists$ числа r_1, r_2 $(m_1 < r_1 < r_2 < m_2)$ такие, что для $\forall x \notin [r_1, r_2]$ точка $(x, \varphi(x)) \notin F$.

Определение. *Расстоянием между точечными множествами* A и B называется величина

$$d = \inf_{M \in A, P \in B} \rho(M, P),$$

где $\rho(M, P)$ - расстояние между точками M и P.

Обозначим через ρ расстояние между множествами $E_2 \backslash G$ и F (E_2 - евклидова плоскость). Определим замкнутое множество F^* как множество точек, расстояние которых от множества F не превышает $\rho/2$. Тогда, $F^* \subset G$. В силу непрерывности функции $f(x,y)$, стоящей в правой части дифференциального уравнения: $\exists M > 0 : |f(x,y)| \leq M$ для $\forall (x,y) \in F^*$. Выберем постоянную Липшица N так, чтобы неравенство

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq N|y_2 - y_1|$$

выполнялось для $\forall (x,y_1), (x,y_2) \in F^*$. Выберем a и b таким образом, чтобы $a^2 + b^2 \leq \rho^2/4$. Далее, как обычно, выберем параметр h из условий: $h \leq a, \quad h \leq b/M, \quad h < 1/N$. Это h будет одно и то же для всех точек множеств F^* и $F \subset F^*$. Покажем, что т.$(x, \varphi(x))$ при $\forall x > m_2 - h$ выходит за пределы множества F. *"От противного"*. Предположим, что $\exists \bar{x} > m_2 - h$ такое, что т.$(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \in F$. Тогда эту точку можно принять за начальную и определить решение при всех $x : |x - \bar{x}| \leq h$, т.е. при $\bar{x} - h \leq x \leq \bar{x} + h$. Но $\bar{x} + h > m_2$, следовательно, наше решение $\varphi(x)$ определено при $x > m_2$. Но m_2 - точная верхняя грань правых концов интервалов, где существует решение. Пришли к противоречию. ⊛

8. Непрерывная зависимость решения дифференциального уравнения от начальных условий и от параметров.

До сих пор мы исследовали решение дифференциального уравнения, когда фиксируется некоторая начальная точка (x_0, y_0), через которую должно проходить это решение. Если изменить точку и взять $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, то изменится и решение. Поэтому непродолжаемое решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \tag{1}$$

определенное при $m_1 < x < m_2$, будет зависеть еще и от координат начальной точки: $y = \varphi(x, x_0, y_0)$. Вообще говоря, и значения m_1, m_2 также зависят от (x_0, y_0), т.е. $m_1 = m_1(x_0, y_0), m_2 = m_2(x_0, y_0)$. Таким образом, формула

$$y = \varphi(x, x_0, y_0) \tag{2}$$

исчерпывает все возможные непродолжаемые решения уравнения (1), т.е. дает общее решение дифференциального уравнения. В свете вышесказанного, возникает важный для практических приложений вопрос: как будет меняться решение (2) при изменении начальных условий ? Дело в том, что в физике значение y_0 находится обычно путем экспериментального измерения. Поэтому возникают незначительные погрешности с заданием начальных условий, и если они приведут к сильному изменению решения дифференциального уравнения, то это неприемлемо - придется менять математическую модель явления.

На поставленный нами вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема.

Множество точек (x, x_0, y_0), в котором определено общее решение (2) уравнения (1), является открытым, и решение (2) представляет собой непрерывную функцию по совокупности аргументов на этом множестве.

Без доказательства.

Укажем на одно следствие сформулированной теоремы. При $\forall x_1, x_2 : m_1 (x_0, y_0) < x_1 < x_2 < m_2 (x_0, y_0)$ и $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta (\varepsilon) > 0 : \forall \bar{x}_0, \bar{y}_0 : |x_0 - \bar{x}_0| < \delta, |y_0 - \bar{y}_0| < \delta :$

$$|\varphi (x, x_0, y_0) - \varphi (x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)| < \varepsilon$$

для $\forall x \in [x_1, x_2]$.

Сформулированная теорема доказывается с помощью еще более мощной теоремы. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f (x, y, \mu), \tag{3}$$

где μ - некоторый параметр, а функция $f (x, y, \mu)$ определена в трехмерной области S. Предположим, что $f (x, y, \mu)$ непрерывно-дифференцируема по совокупности аргументов в S и удовлетворяет условию Липшица

$$|f (x, y_2, \mu) - f (x, y_1, \mu)| \leq N |y_2 - y_1| \tag{4}$$

равномерно относительно x и μ (N не зависит от x, μ) для $\forall (x, y_1, \mu), (x, y_2, \mu) \in S$.

Зададимся фиксированным начальным условием (x_0, y_0). Пусть при $x = x_0, \quad y = y_0$ параметр μ изменяется от μ_1 до μ_2 в области $S : \mu \in (\mu_1, \mu_2)$. Совершенно ясно, что решение $y = \varphi (x)$ дифференциального уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $y_0 = \varphi (x_0)$, будет зависеть от параметра μ. Если зададим $\mu = \mu^*$, то решение $y = \varphi (x, \mu^*)$ будет представлять кривую в плоскости σ. Непродолжаемое решение определено при $m_1 < x < m_2$. Ясно, что границы m_1 и m_2 зависят от μ. Спрашивается: каково множество, в котором определено решение $\varphi (x, \mu)$? Оказывается, это множество открытое !

Теорема.

Если правая часть дифференциального уравнения (3) непрерывна в области S и удовлетворяет условию Липшица (4), то решение $y = \varphi (x, \mu)$, удовлетворяющее фиксированным начальным условиям (x_0, y_0), определено в открытой области T и непрерывно в этой области по своим аргументам.

Без доказательства.

На математическом языке сформулированная теорема означает, что если $(x^*, \mu^*) \in T$, то все достаточно близкие точки (x, μ) также принадлежат области T и $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta (\varepsilon) > 0 : \forall (x, \mu) \in T, |x - x^*| < \delta, |\mu - \mu^*| < \delta :$

$$|\varphi (x, \mu) - \varphi (x^*, \mu^*)| < \varepsilon.$$

Заметим, что доказанная теорема будет справедлива, если в уравнение (3) будет входить несколько параметров.

ЛЕКЦИЯ 8

9.Простые особые точки. Особые решения.

Что будет, если не выполняются условия теоремы единственности ? Пусть в уравнении

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

в некоторой точке $(\bar{x}, \bar{y}) : f(\bar{x}, \bar{y}) = \infty$. Тогда можно рассмотреть уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \tag{2}$$

Если доопределить правую часть уравнения (2) в т.$(\bar{x}, \bar{y})$ нулем, если она будет непрерывна и удовлетворять условию Липшица, то через т.$(\bar{x}, \bar{y})$ будет проходить одна интегральная кривая с вертикальной касательной.

Часто на практике встречаются дифференциальные уравнения вида:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \tag{3}$$

Предположим, что в т.$(\bar{x}, \bar{y})$:

$$P(\bar{x}, \bar{y}) = Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0. \tag{4}$$

Такие точки называются особыми точками типа $\frac{0}{0}$. Ограничимся пока примерами.

1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Для этого уравнения $(0, 0)$ - особая точка. Решая уравнение, имеем:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Longrightarrow y = cx^2.$$

Таким образом, интегральными кривыми являются параболы. Оси координат также являются интегральными кривыми. Через особую точку $(0, 0)$ проходит бесконечное число интегральных кривых. Все интегральные кривые (за исключением $x = 0$) касаются прямой $y = 0$. Кривые с общей касательной образуют особую точку типа *узел.*

2.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Решение уравнения дает:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \Longrightarrow xy = c.$$

Оси координат являются интегральными кривыми уравнения (они соответствуют $c = 0$). Через особую точку $(0, 0)$ здесь проходят две интегральные кривые. Такая особая точка называется *седлом*, а проходящие через нее интегральные кривые - *сепаратрисами.*

3.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Решая данное уравнение с разделяющимися переменными, находим:

$$xdx + ydy = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = c^2.$$

В данной ситуации через особую точку $(0, 0)$ не проходит ни одной интегральной кривой. Такую особую точку называют *центром.*

4.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Уравнение является однородным, поэтому для его решения применяем замену функции: $y/x = z$. Тогда,

$$z + xz' = \frac{1+z}{1-z} \Longrightarrow xz' = \frac{1+z^2}{1-z} \Longrightarrow$$

$$\frac{(1-z)\,dz}{1+z^2} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \arctan z - \frac{1}{2}\ln\left(1+z^2\right) = \ln x - \ln c \Longrightarrow$$

$$\arctan\frac{y}{x} = \ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c} \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = c\exp\left\{\arctan\frac{y}{x}\right\}.$$

В полярных координатах решение записывается более просто

$$\rho = ce^{\varphi}.$$

Интегральными кривыми является семейство логарифмических спиралей. Спирали асимптотически приближаются к особой точке $(0, 0)$, однако через начало координат ни одна спираль не проходит. Это особая точка типа *фокус.*

Здесь рассмотрены так называемые *простые* особые точки, их всего четыре типа. Заметим, что бывают еще *сложные* особые точки.

Мы проанализировали случай, когда нарушается условие существования решения (разрыв правой части уравнения). Рассмотрим теперь ситуацию, когда нарушается условие Липшица. Точки, подозрительные на нарушение условия Липшица (нарушение единственности решения), удовлетворяют условию: $\partial f/\partial y \longrightarrow \infty$.

Если кривая, определяемая уравнением

$$\frac{1}{f'_y(x,y)} = 0, \tag{5}$$

является интегральной, и если через каждую ее точку проходят, по крайней мере, две интегральные кривые, то соответствующее данной интегральной кривой решение уравнения (1) называется *особым.* Заметим, что условие $f'_y(x,y)=\infty$ не является необходимым для появления особого решения.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=(y-x)^{2/3}+1.$$

Определим производную правой части по y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2}{3}(y-x)^{-1/3}.$$

Геометрическим местом точек, где $f'_y=\infty$, будет прямая $y=x$ (биссектриса главного координатного угла). Проверим, является ли она интегральной кривой. Подставляя $y=x$ в дифференциальное уравнение, приходим к тождеству: $1\equiv 1$.

Теперь решим само уравнение, применив замену переменной: $y-x=z$. Тогда,

$$1+z'=z^{2/3}+1\Longrightarrow z'=z^{2/3}\Longrightarrow\frac{dz}{z^{2/3}}=dx\Longrightarrow$$

$$3z^{1/3}=x-c\Longrightarrow y=x+\frac{(x-c)^3}{27}.$$

Интегральные кривые представляют собой семейство кубических парабол. Точки перегиба парабол, определяемые из условия: $y''=0$, имеют координаты (c,c), т.е. лежат на прямой $y=x$. Таким образом, через любую точку прямой $y=x$ проходят две интегральные кривые - нарушается единственность решения. Интегральная кривая $y=x$ - особое решение рассматриваемого дифференциального уравнения.

10.Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной.

Уравнением первого порядка, не разрешенным относительно производной, называют дифференциальное уравнение вида

$$F(x,y,y')=0. \tag{6}$$

Рассмотрим сначала простые частные случаи уравнения (6).

1. Пусть функция F не зависит от x и y:

$$F(y')=0. \tag{7}$$

Предположим, что это уравнение имеет действительные корни $k_1,k_2,\ldots$ Тогда, $y'=k_i;\quad i=1,2,\ldots$ Отсюда, $y=k_ix+c$ - прямые. Поскольку, $k_i=(y-c)/x$, то

$$F\left(\frac{y-c}{x}\right)=0.$$

Это общий интеграл уравнения (7).

2. Пусть функция F не зависит от y:

$$F(x, y') = 0. \tag{8}$$

Не всегда это уравнение легко решается относительно y'. Если его удается разрешить, то $y' = \varphi(x)$ и

$$y = \int \varphi(x)\, dx + c.$$

Иногда удается подобрать две функции $x = \varphi(t)\,, y' = \psi(t)$ такие, что

$$F(\varphi(t)\,, \psi(t)) \equiv 0.$$

Тогда уравнение (8) можно проинтегрировать в параметрической форме. В самом деле.

$$\frac{dy}{dx} = y' \Longrightarrow dy = y'dx = \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

Откуда

$$\begin{cases} x = \varphi(t)\,, \\ y = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + c. \end{cases} \tag{9}$$

Уравнения (9) представляют собой общий интеграл уравнения (8) в параметрической форме. Действительно, если исключить параметр t, то получим общий интеграл.

Возникает вопрос: как находить на практике функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$? Иногда можно дать некоторые рекомендации. Пусть, например, имеем уравнение вида:

$$P(x, y') + Q(x, y') = 0,$$

где P и Q - однородные многочлены относительно x и y' (степени однородности в общем случае разные).

Пример.

$$x^3 + y'^3 - 3xy' = 0.$$

Применим параметризацию $y' = tx$. Заметим, что такую же параметризацию применяют в уравнении декартова листа: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Тогда,

$$x^3 + t^3x^3 - 3xtx = 0 \Longrightarrow x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y' = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

Отсюда,

$$dy = \frac{9t^2}{1+t^3} \cdot \frac{(1+t^3) - 3t^3}{(1+t^3)^2} dt \Longrightarrow dy = \frac{9t^2}{(1+t^3)^3}\left(1 - 2t^3\right) dt.$$

Производя замену переменной $z = t^3$, вычисляем интеграл

$$y = 3\int \frac{(1-2z)}{(1+z)^3} dz = 3 \cdot (-2) \int \frac{dz}{(1+z)^2} + 9 \int \frac{dz}{(1+z)^3} =$$

$$= \frac{6}{1+z} - \frac{9}{2(1+z)^2} + c = \frac{3}{2} \cdot \frac{1+4z}{(1+z)^2} + c.$$

Окончательно,

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3}{2} \cdot \frac{1+4t^3}{\left(1+t^3\right)^2} + c.$$

Предположим теперь, что уравнение (8) разрешается относительно x:

$$x = g\left(y'\right),$$

т.е. $F\left(g\left(y'\right), y'\right) \equiv 0$. В этом случае параметр ввести легко: $y' = h\left(t\right)$ - произвольная дифференцируемая функция. Тогда, $x = g\left(h\left(t\right)\right)$, и далее проводится интегрирование уравнения (8) в параметрической форме.

ЛЕКЦИЯ 9

3. Пусть, наконец, функция F не зависит от аргумента x:

$$F(y, y') = 0. \tag{1}$$

Если уравнение (1) разрешается относительно y', то далее все ясно - приходим к уравнению с разделяющимися переменными.

Надо поискать $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ такие, чтобы $y = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$ и $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$. Тогда,

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}$$

и

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + c, \\ y = \varphi(t), \end{cases}$$

- общий интеграл уравнения (1). Как найти $\varphi(t)$ и $\psi(t)$? Если уравнение (1) легко решается относительно y: $y = g(y')$ и

$$F(g(y'), y') \equiv 0.$$

Тогда можно взять $y' = h(t)$, $h(t)$ - произвольная дифференцируемая функция. В результате, $y = g(h(t))$ и далее по схеме.

Пример. Уравнение цепной линии.

В 1638 г. Галилей предложил следующий способ построения параболы. Возьмем цепочку, состоящую из мелких звеньев, и подвесим ее за края на одной высоте. При этом расстояние между точками подвеса меньше длины цепочки L. Далее проведем линию по границе провисшей цепочки. Галилей догадывался, что этот способ построения параболы не совсем точен.

Спрашивается, по какой же линии провисает цепочка ? Лишь спустя полвека Якоб Бернулли чисто теоретическим путем нашел точную формулу провисающей цепочки. Он сделал это в 1690 г. и призвал других решить ту же задачу. Правильное решение в 1691 г. опубликовали Гюйгенс, Лейбниц и братья Бернулли. Математический аппарат решения подобных задач возник в конце XVII века и получил название "Вариационного исчисления". Это наиболее красивая область математики, развитие которой позволило сформулировать вариационные принципы физики.

Один из таких принципов гласит: любая физическая система стремится занять в состоянии равновесия такое положение, в котором ее потенциальная энергия минимальна. Поэтому в задаче о провисающей цепочке надо найти потенциальную энергию цепочки и минимизировать ее. Подобная процедура приводит к дифференциальному уравнению 1-го порядка вида:

$$\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = c.$$

Поскольку $y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0$, то $c = y_0$. Полагаем

$$y' = \sinh t \Longrightarrow y = y_0 \cosh t \Longrightarrow dx = \frac{dy}{y'} = y_0 dt.$$

Отсюда,

$$x = y_0 t + c_1.$$

Из условий: $y = y_0$, $x = 0$ при $t = 0$, имеем: $c_1 = 0$. Поэтому окончательно

$$y = y_0 \cosh \frac{x}{y_0}.$$

4. Рассмотрим теперь уравнение общего вида

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2}$$

где функция F становится однородной относительно всех своих аргументов, если считать аргумент x измерения 1, аргумент y - измерения α, аргумент y' - измерения $(\alpha - 1)$, т.е.

$$F\left(\lambda x, \lambda^\alpha y, \lambda^{\alpha-1} y'\right) \equiv \lambda^m F(x, y, y'), \tag{3}$$

для $\forall x, y, y', \lambda$. Тогда, делая замену функции и аргумента: $x = e^t, y = ze^{\alpha t}$; $\quad t$ - новая независимая переменная, z - новая функция, находим:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}; \quad \frac{dx}{dt} = e^t \Longrightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}.$$

Отсюда,

$$y' = \left(\frac{dz}{dt} + \alpha z\right) e^{\alpha t} e^{-t}.$$

Подставляя все в (2), (3), придем к:

$$F\left(e^t, ze^{\alpha t}, \left(\frac{dz}{dt} + \alpha z\right) e^{(\alpha-1)t}\right) \equiv e^{mt} F\left(1, z, \frac{dz}{dt} + \alpha z\right) = 0.$$

В этом уравнении отсутствует независимая переменная t, и оно принимает вид (1):

$$G\left(z, \frac{dz}{dt}\right) = 0,$$

которое решается указанным выше способом.

Общий случай введения параметра.

Рассмотрим снова уравнение (2) с функцией F общего вида. Предположим, что каким-то образом удалось представить

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ y' = \chi(u, v), \end{cases}$$

так что выполняется тождество по (u, v)

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \equiv 0.$$

Покажем, что в этом случае удается перейти к уравнению, разрешенному относительно производной. В самом деле.

$$dy = y'dx \Longrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv = \chi(u,v)\left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv\right].$$

Пусть u - новая независимая переменная, а v - новая функция. Тогда,

$$\frac{dv}{du} = \frac{\partial \psi/\partial u - \chi \cdot \partial \varphi/\partial u}{\chi \cdot \partial \varphi/\partial v - \partial \psi/\partial v}. \tag{4}$$

Допустим, что мы нашли общее решение уравнения (4): $v = \omega(u,c)$. Тогда решение исходного уравнения (2) получается в виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, \omega(u,c)), \\ y = \psi(u, \omega(u,c)). \end{cases}$$

Это общий интеграл уравнения (2) в параметрической форме.

Дифференциальные уравнения, разрешимые относительно x или y. Уравнения Лагранжа и Клеро.

Рассмотрим еще два частных случая, когда параметрическое представление получается просто. Пусть, например, уравнение (2) допускает представление в виде:

$$y = f(x, y'). \tag{5}$$

Тогда в качестве вышеупомянутых параметров можно выбрать x и $y' = p$, т.е.

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x,p), \\ y' = p. \end{cases}$$

В результате из равенства: $dy = y'dx$ имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp = pdx$$

или

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - \partial f/\partial x}{\partial f/\partial p}.$$

Решая уравнение, получим: $p = \omega(x,c)$. Таким образом, общее решение исходного уравнения (5) имеет вид:

$$y = f(x, \omega(x,c)).$$

В том случае, когда уравнение (2) допускает запись в виде

$$x = g(y, y') \tag{6}$$

параметрами считаем y и $y' = p$, т.е.

$$\begin{cases} x = g\left(y,p\right), \\ y = y, \\ y' = p. \end{cases}$$

Тогда

$$dx = \frac{dy}{y'} \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial p}dp = \frac{dy}{p}.$$

Отсюда,

$$\frac{dp}{dy} = \frac{1/p - \partial g/\partial y}{\partial g/\partial p}.$$

Если мы получили решение уравнения в виде $p = \omega\left(y,c\right)$, то общее решение уравнения (6) таково

$$x = g\left(y, \omega\left(y,c\right)\right).$$

Пример.

Проанализируем уравнение вида

$$y = x\varphi\left(y'\right) + \psi\left(y'\right), \tag{7}$$

где φ и ψ - дифференцируемые функции. Данное уравнение, в которое переменные x и y входят линейно, носит название *уравнения Лагранжа.* Найдем общее решение данного уравнения. Обозначим $y' = p$. Тогда, $y = x\varphi\left(p\right) + \psi\left(p\right)$, и поэтому

$$dy = pdx = \varphi\left(p\right)dx + x\varphi'\left(p\right)dp + \psi'\left(p\right)dp. \tag{8}$$

Получилось линейное дифференциальное уравнение, если считать x - функцией, а p - независимой переменной:

$$\left[p - \varphi\left(p\right)\right]\frac{dx}{dp} - x\varphi'\left(p\right) = \psi'\left(p\right).$$

Может оказаться, что $p \equiv \varphi\left(p\right)$. Этот случай соответствует специальному уравнению Лагранжа, и мы рассмотрим его чуть позже. Предположим, что уравнение $p - \varphi\left(p\right) = 0$ имеет решения $p_1, p_2, \ldots$ Тогда при подстановке $p = p_i$ в уравнение (8) оно превращается в тождество. Значит

$$y = x\varphi\left(p_i\right) + \psi\left(p_i\right) \tag{9}$$

- интегральные прямые уравнения Лагранжа.

При $p \neq p_i$ имеем:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'\left(p\right)}{\varphi\left(p\right) - p}x = \frac{\psi'\left(p\right)}{p - \varphi\left(p\right)}. \tag{10}$$

Если применить методы решения линейных дифференциальных уравнений, то общее решение уравнения (10) можно записать в виде: $x = c\chi\left(p\right) + \omega\left(p\right)$. Вместе с выражением $y = x\varphi\left(p\right) + \psi\left(p\right)$ оно дает параметрическое представление искомого общего решения.

Проанализируем подробнее ситуацию, когда $p \equiv \varphi(p)$. В этом случае уравнение (7) превращается в

$$y = xy' + \psi(y'), \tag{11}$$

и носит название *уравнения Клеро*. Полагая $\varphi(p) = p$ в уравнении (8), придем к

$$[x + \psi'(p)]\, dp = 0.$$

Далее возможны два случая:

а) $dp = 0 \Longrightarrow p = c$, и тогда

$$y = xc + \psi(c) \tag{12}$$

- общее решение уравнения Клеро.

б) $x + \psi'(p) = 0$. Это уравнение определяет p как функцию $x : p = \omega(x)$. Тогда из (11) имеем:

$$y = x\omega(x) + \psi(\omega(x)). \tag{13}$$

Это будет также решение уравнения Клеро, причем особое. В каждой его точке нарушается единственность. В самом деле. Продифференцируем (12) по c. Тогда получим: $0 = x + \psi'(c)$.

В дифференциальной геометрии доказывается, что если имеется уравнение $\Phi(x, y, c) = 0$, то вместе с уравнением $\Phi'_c(x, y, c) = 0$ оно определяет *С-дискриминантную кривую*, и если к тому же

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 \neq 0$$

и $\partial\Phi/\partial x, \partial\Phi/\partial y$ ограничены, то С-дискриминантная кривая определяет огибающую семейства кривых.

Определение. *Огибающей семейства кривых* называется кривая, которая в каждой своей точке касается одной из кривых семейства.

Оказывается, всегда для уравнения Клеро С-дискриминантная кривая является огибающей. В самом деле: $\Phi(x, y, c) = xc + \psi(c) - y$. Тогда,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = c; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -1 \Longrightarrow c^2 + 1 \neq 0.$$

К тому же $\partial\Phi/\partial x, \partial\Phi/\partial y$ ограничены.

Пример.

Рассмотрим уравнение Клеро вида

$$y = xy' - y'^2.$$

Общее решение $y = xc - c^2$ - семейство прямых. Особое решение:

$$0 = x - 2c \Longrightarrow c = \frac{x}{2} \Longrightarrow y = x\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}.$$

Парабола $y = x^2/4$ разделяет плоскость на две области: в одной через каждую точку проходят две интегральные кривые, а в другой - ни одной (y' в одной области имеет два значения, а в другой - ни одного).

ЛЕКЦИЯ 10

Поговорим об особых решениях уравнения

$$F\left(x,y,y'\right)=0.$$

Как следует из доказанной теоремы, особые решения могут быть, если:

1) $\partial F/\partial y$ - не ограничена;

2) $\partial F/\partial y'=0$.

Первый случай на практике встречается редко. Поэтому остановимся подробнее на второй ситуации. Уравнения

$$\begin{cases} F\left(x,y,y'\right)=0, \\ F'_{y'}\left(x,y,y'\right)=0 \end{cases}$$

определяют на плоскости кривую (y' - параметр), которая носит название *p-дискриминантной кривой.* Особое решение уравнения может входить в состав данной кривой.

Пример.

Рассмотрим уравнение Лагранжа

$$x-y=\frac{4}{9}\left(y'\right)^2-\frac{8}{27}\left(y'\right)^3.$$

Составим уравнения p-дискриминантной кривой ($y'=p$):

$$x-y=\frac{4}{9}p^2-\frac{8}{27}p^3;\qquad 0=\frac{8}{9}p-\frac{8}{9}p^2.$$

Отсюда,

$$p\left(1-p\right)=0.$$

Возможны два варианта:

а) $p=0\Longrightarrow y=x$;

б) $p=1\Longrightarrow y=x-4/27$.

Таким образом, p-дискриминантная кривая состоит из двух прямых. Являются ли они интегральными ? Проверим, подставив в исходное уравнение. В результате обнаруживаем, что $y=x$ не является решением, а $y=x-4/27$ является решением уравнения. Найдем теперь общее решение уравнения.

$$y=x-\frac{4}{9}p^2+\frac{8}{27}p^3\Longrightarrow dy=dx-\frac{8}{9}pdp+\frac{8}{9}p^2dp=$$

$$=dx+\frac{8}{9}p\left(p-1\right)dp=y'dx=pdx.$$

В результате, с учетом того, что ($p\neq 1$), имеем

$$dx=\frac{8}{9}pdp\Longrightarrow x-c=\frac{4}{9}p^2,\quad y=c+\frac{8}{27}p^3.$$

Исключая параметр, находим:

$$(y-c)^2 = (x-c)^3$$

или

$$y = c \pm (x-c)^{3/2}\,.$$

Отсюда видно, что решение существует лишь при $x > c$, а точки (c,c) являются точками возврата. Эти точки лежат на биссектрисе $y = x$ главного координатного угла. В то же время,

$$y' = \pm\frac{3}{2}\,(x-c)^{1/2}\,.$$

Следовательно, верхние ветви полукубических парабол касаются прямой $y = x - 4/27$ в точках

$$\frac{3}{2}\,(x-c) = 1 \Longrightarrow x = c + \frac{4}{9}.$$

Таким образом, прямая $y = x - 4/27$ - огибающая семейства парабол и особое решение.

Теорема.

Огибающая семейства интегральных кривых всегда является особым решением дифференциального уравнения.

Доказательство:

каждая точка огибающей является одновременно и точкой интегральной кривой, поскольку в каждой своей точке она касается одной из интегральных кривых. Это означает, что в каждой своей точке огибающая имеет направление поля. Значит, она также является интегральной линией дифференциального уравнения, т.е. его решением. Но поскольку через каждую точку проходят два решения (в заданном направлении) - она сама и другая интегральная кривая, то огибающая является особым решением. ⊠

III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

1.Дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной.

Как мы уже отмечали, дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение вида:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1}$$

Допустим, что уравнение (1) разрешено относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right). \tag{2}$$

Далее удобно уравнение (2) свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Сделаем замены, вводя новые функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$y = y_1, y' = y_2, y'' = y_3, \ldots, y^{(n-1)} = y_n. \tag{3}$$

Тогда дифференциальное уравнение (2) будет эквивалентно следующей системе:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\
\frac{dy_2}{dx} &= y_3, \\
\cdots \quad & \cdots \\
\frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n, \\
\frac{dy_n}{dx} &= f\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right).
\end{aligned} \tag{4}
$$

Подобная система дифференциальных уравнений называется *нормальной*. Общий вид нормальной системы дифференциальных уравнений таков:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \\
\frac{dy_2}{dx} &= f_2\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \\
\cdots \quad & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\frac{dy_n}{dx} &= f_n\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right).
\end{aligned} \tag{5}
$$

Вводя векторные обозначения: $\vec{y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, $\vec{f} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, получаем сокращенную форму записи (5)

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}\left(x, \vec{y}\right).$$

Теорема существования и единственности решения нормальной системы дифференциальных уравнений.

Пусть:

1. Правые части системы (5) являются непрерывными функциями по совокупности аргументов $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в некоторой области G $(n+1)$-мерного пространства, содержащей начальную точку $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$.

2. Существуют ограниченные производные:

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right| \le N, \quad i = \overline{1, n}; k = \overline{1, n}.$$

Тогда система (5) имеет единственное решение:

$$y_1 = \varphi_1\left(x\right), y_2 = \varphi_2\left(x\right), \ldots, y_n = \varphi_n\left(x\right),$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$\varphi_1\left(x_0\right) = y_1^0, \varphi_2\left(x_0\right) = y_2^0, \ldots, \varphi_n\left(x_0\right) = y_n^0$$

и определенное в некоторой окрестности начальной точки: $|x - x_0| \le h$.

Без доказательства.

Заметим, что в векторной форме решение системы (5) записывается в виде $\vec{y} = \vec{\varphi}\,(x)$, причем $\vec{\varphi}\,(x_0) = \vec{y}_0$. Доказательство теоремы очень похоже на доказательство теоремы о существовании решения одного дифференциального уравнения первого порядка, поэтому здесь не приводится. Аналогичным образом доказывается возможность продолжения решения, непрерывная зависимость от начальных условий и т.д.

Поговорим о геометрической интерпретации решения системы дифференциальных уравнений. Общее решение системы представляет собой семейство интегральных кривых в $(n+1)$-мерном пространстве и зависит от n параметров (при фиксированном x_0 - параметры $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$). Отсюда следует вывод, что общее решение системы дифференциальных уравнений (5) зависит от n произвольных постоянных.

Частное решение $\vec{y} = \vec{\varphi}\,(x)$ можно интерпретировать как параметрически заданную (x - параметр) кривую в n-мерном пространстве $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, которую часто называют *траекторией движения* системы (5).

На основе сформулированной общей теоремы докажем теорему для уравнения (2).

Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной.

Пусть в уравнении (2) функция $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ непрерывна по совокупности переменных в некоторой области G $(n+1)$-мерного пространства и существуют ограниченные производные

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\right| \le N, \quad k = \overline{0,1}$$

во всей области G. Начальная точка $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in G$.

Тогда, существует единственное решение $y = \varphi\,(x)$ уравнения (2), удовлетворяющее начальному условию $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, т.е. $\varphi\,(x_0) = y_0, \varphi'\,(x_0) = y_0', \ldots, \varphi^{(n-1)}\,(x_0) = y_0^{(n-1)}$, определенное в окрестности точки x_0: $|x - x_0| \le h$.

Доказательство.

Поскольку нормальная система (4), соответствующая уравнению (2), является частным случаем системы (5), то можно проверить условия теоремы для системы (5). Первые $(n-1)$ правых частей системы (4) удовлетворяют условиям теоремы существования: $f_k = y_{k+1}$ - непрерывны и

$$\frac{\partial f_k}{\partial y_i} = \delta_{i,k+1} = \begin{cases} 1, & i = k+1 \\ 0, & i \ne k+1 \end{cases} \quad \text{- символ Кронекера,}$$

т.е. они и ограничены. Остается рассмотреть правую часть последнего уравнения системы (4): $f_n = f$. Непрерывность функции f_n по совокупности переменных вытекает из условий теоремы и замен (3). Ограниченность $\partial f_k/\partial y_i$ следует из условий ограниченности $\partial f/\partial y^{(i)}$ и замен (3). Следовательно, все условия общей теоремы выполняются и в окрестности точки x_0: $|x - x_0| \le h$ существует единственное решение $y = \varphi\,(x)$. Каковы начальные условия для него ? Для общей системы это $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$, а на нашем языке - $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, поскольку $y_1 = \varphi\,(x)\,, y_2 = \varphi'\,(x)\,, \ldots, y_n = \varphi^{(n-1)}\,(x)$ согласно (3). ⊠

ЛЕКЦИЯ 11

2.Частные случаи общего уравнения n-го порядка, допускающие понижение порядка.

Вернемся к уравнению общего вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

1.Предположим, что в уравнении (1) отсутствует функция y и несколько ее первых производных, т.е.

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad 1 \le k \le n.$$

Производя замену функции $y^{(k)} = z$, понижаем порядок уравнения до $(n-k)$:

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

2.Пусть в левой части уравнения (1) аргумент x явно не присутствует:

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Здесь удобно ввести новую независимую переменную y, а за функцию взять $y' = p$. Тогда,

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot p'_y;$$

$$y''' = \frac{d}{dy}(p \cdot p'_y) \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{d}{dy}(p\frac{dp}{dy}); \dots;$$

$$y^{(n)} = (p\frac{d}{dy})^{n-1}p.$$

Подставляя все в уравнение, придем к дифференциальному уравнению $(n-1)$-го порядка:

$$G\left(y, p, \dots, p^{(n-1)}\right) = 0.$$

3.Иногда левая часть уравнения представляет собой полную производную, т.е. уравнение приводится к виду:

$$\frac{d}{dx}\left[R\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)\right] = 0.$$

Тогда,

$$R\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) = c_1$$

и получаем дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка.

4.Рассмотрим случай, когда левая часть уравнения (1) является однородной функцией относительно y и ее производных:

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n-1)}, ty^{(n)}) = t^m \cdot F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}).$$

Произведем замену функции
$$y = e^{\int z\,dx}.$$
Тогда,
$$y' = z \cdot e^{\int z\,dx}; \quad y'' = \left(z' + z^2\right) e^{\int z\,dx}; \ldots;$$
$$y^{(n)} = e^{\int z\,dx} \cdot P_n\left(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right),$$
где P_n - полином. Подставляя все в уравнение, имеем:
$$F\left(x, e^{\int z\,dx}, z \cdot e^{\int z\,dx}, \ldots, e^{\int z\,dx} \cdot P_n\left(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right)\right) =$$
$$= \left\{t = e^{\int z\,dx}\right\} = e^{m\int z\,dx} F\left(x, 1, z, \ldots, P_n\left(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0.$$
Отсюда,
$$H\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right) = 0-$$
уравнение $(n-1)$-го порядка.

Иногда функция F является обобщенно-однородной, т.е.
$$F(tx, t^{\alpha} y, t^{\alpha-1} y', \ldots, t^{\alpha-n} y^{(n)}) = t^m \cdot F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}).$$
Тогда удобно произвести одновременную замену и аргумента и функции: $x = e^{\tau}, y = ze^{\alpha\tau}$. В результате,
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{d\tau}\left(ze^{\alpha\tau}\right)\frac{d\tau}{dx} = e^{(\alpha-1)\tau}\left(\frac{dz}{d\tau} + \alpha z\right); \ldots;$$
$$y^{(k)} = e^{(\alpha-k)\tau} L_k\left(z, z', \ldots, z^{(k)}\right),$$
где L_k - линейная функция переменных. Подставляя все в уравнение, получим:
$$F(e^{\tau}, ze^{\alpha\tau}, e^{(\alpha-1)\tau} L_1, \ldots, e^{(\alpha-n)\tau} L_n) = \{t = e^{\tau}\} =$$
$$= e^{m\tau} F(1, z, L_1, \ldots, L_n) = 0.$$
Отсюда
$$F(1, z, L_1, \ldots, L_n) = 0.$$
Данное уравнение уже не содержит независимой переменной и поэтому допускает понижение порядка.

Пример. Закон сохранения энергии. Эволюционная модель Вселенной.

Рассмотрим одномерное уравнение Ньютона для координаты $x\left(t\right)$ частицы массы m, движущейся в поле потенциальных сил:
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU\left(x\right)}{dx}.$$
Уравнение не содержит независимой переменной - времени t. Производя замену $\dot{x} = v$, где v - скорость частицы, имеем: $\ddot{x} = v'_x \cdot v$. Поэтому,
$$mvv'_x = -\frac{dU}{dx} \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{mv^2}{2} + U\right) = 0 \Longrightarrow \frac{mv^2}{2} + U = C.$$

Получили известный в физике *закон сохранения энергии.*

В 30-х годах двадцатого столетия Фридманом из уравнений *общей теории относительности* было найдено сферически симметричное решение, указавшее возможные сценарии развития Вселенной.

Основную идею этих решений можно понять на простой физической модели. Рассмотрим сферически симметричный рой материальных частиц массы m, заключенных в начальный момент времени $t = 0$ в сферу радиуса R_0. Определим дальнейшую эволюцию этого образования массы M, если начальные скорости частиц, расположенных на оболочке сферы равны v_0.

Запишем уравнение Ньютона для расстояния $R(t)$ от центра сферы до частицы оболочки:

$$m\ddot{R} = -\gamma \frac{mM}{R^2},$$

где γ - гравитационная постоянная. Умножим обе части уравнения на $2\dot{R}$

$$2\dot{R}\ddot{R} = -2\gamma M \frac{\dot{R}}{R^2} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\dot{R}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2\gamma M}{R}\right) \Longrightarrow \dot{R}^2 = \frac{2\gamma M}{R} + c.$$

Из начальных условий находим

$$c = v_0^2 - \frac{2\gamma M}{R_0}.$$

Рассмотрим сначала наиболее простой случай: $c = 0$. Тогда,

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} \Longrightarrow \sqrt{R}dR = \sqrt{2\gamma M}dt \Longrightarrow \frac{2}{3}R^{3/2} = \sqrt{2\gamma M}t + c_1.$$

Определяя константу c_1 из начального условия $R(0) = R_0$, приходим окончательно к

$$R = \left(R_0^{3/2} + 3\sqrt{\frac{\gamma M}{2}}t\right)^{2/3}.$$

В асимптотике $t \to \infty$ $R(t) \sim t^{2/3} \to \infty$, т.е. радиус сферы увеличивается неограниченно со временем. Аналогичным образом ведет себя решение при $c > 0 \Longrightarrow v_0^2 > 2\gamma M/R_0$.

Пусть теперь $c < 0$. Тогда, обозначая $c = -w^2$, имеем:

$$R = \frac{2\gamma M}{\dot{R}^2 + w^2}.$$

Введем параметр соотношением $\dot{R} = w\cot(p/2)$. В результате получим

$$R = \frac{2\gamma M \sin^2(p/2)}{w^2} = \frac{\gamma M}{w^2}(1 - \cos p).$$

Наконец,

$$dt = \frac{dR}{\dot{R}} = \frac{\gamma M}{w^2} \cdot \frac{\sin p}{w\cot(p/2)}dp = \frac{2\gamma M}{w^3}\sin^2(p/2)\,dp = \frac{\gamma M}{w^3}(1 - \cos p)\,dp.$$

Отсюда,

$$t = \frac{\gamma M}{w^3}\left(p - \sin p\right) + c_1.$$

Параметрические уравнения

$$t = \frac{\gamma M}{w^3}\left(p - \sin p\right) + c_1,$$

$$R = \frac{\gamma M}{w^2}\left(1 - \cos p\right)$$

определяют циклоиду. Это означает, что за расширением сферы наступает сжатие.

Таким образом, при $v_0^2 \geq 2\gamma M/R_0$ мы имеем модель расширяющейся Вселенной, а при $v_0^2 < 2\gamma M/R_0$ - так называемый *коллапс* Вселенной. Режим сжатия будет иметь место при достаточно большой плотности вещества ρ

$$\rho > \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{v_0^2}{\gamma R_0^2}.$$

В настоящее время Вселенная расширяется. Каков дальнейший сценарий - расширение или коллапс зависит от величины ρ, а этот параметр очень сложно оценить.

3.Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка.

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка* называют уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1\left(x\right) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\left(x\right) y' + a_n\left(x\right) y = f\left(x\right), \qquad (2)$$

в которое неизвестная функция и ее производные входят линейно. Будем считать функции $a_1\left(x\right), \ldots, a_n\left(x\right), f\left(x\right)$ непрерывными на отрезке $[a, b]$.

Теорема. Если функции $f\left(x\right)$ и $a_i\left(x\right), i = \overline{1, n}$ в уравнении (2) непрерывны на $[a, b]$, то в области $G : a < x < b, -\infty < y < \infty, \ldots, -\infty < y^{(n-1)} < \infty$ с начальной точкой $\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$ существует единственное решение линейного уравнения (2) $y = \varphi\left(x\right)$, удовлетворяющее начальным условиям: $\varphi\left(x_0\right) = y_0, \varphi'\left(x_0\right) = y_0', \ldots, \varphi^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_0^{(n-1)}$ и определенное в окрестности т.$x_0 : |x - x_0| \leq h$.

Доказательство: перенесем все слагаемые, кроме $y^{(n)}$, в правую часть уравнения (2), приведя его к стандартной форме,

$$y^{(n)} = -a_1\left(x\right) y^{(n-1)} - \ldots - a_{n-1}\left(x\right) y' - a_n\left(x\right) y + f\left(x\right).$$

Проверим выполнение условий ранее доказанной теоремы для уравнения n-го порядка с

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = -\sum_{i=1}^{n} a_i\left(x\right) y^{(n-i)} + f\left(x\right).$$

Функция f непрерывна по совокупности переменных в области G в силу линейности по переменным $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ и условий теоремы о непрерывности $a_i\left(x\right)$ и $f\left(x\right)$. Далее, поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} = -a_{n-k}\left(x\right),$$

правая часть уравнения имеет непрерывные частные производные. Следовательно, на отрезке $[a, b]$ эти производные ограничены. Поэтому все условия общей теоремы выполнены, и существует единственное решение уравнения (2). ⊠

Заметим, что можно доказать существование и единственность решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка методом последовательных приближений на всем интервале $a < x < b$ при начальных условиях $\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y_0', \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, где значения $\left(y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$ - любые.

Уравнение (2) с $f(x) \neq 0$ носит название *неоднородного.* Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0 \tag{3}$$

называется *однородным*, соответствующим неоднородному уравнению (2). Уравнение (3) всегда имеет *тривиальное решение* $y = 0$, которое удовлетворяет нулевым начальным условиям $(x_0, 0, 0, \ldots, 0)$. В силу доказанной теоремы такое решение единственно.

Назовем выражение

$$\frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x) = \hat{L}$$

дифференциальным оператором. Такой оператор является линейным, поскольку обладает свойством

$$\hat{L}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 \hat{L} y_1 + c_2 \hat{L} y_2$$

для $\forall c_1, c_2 \in \Re$.

4.Общая теория линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Теорема 1. О линейной комбинации решений однородного дифференциального уравнения.

Если функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x)$ есть решения однородного уравнения (3), т.е. $\hat{L}y_1 = \hat{L}y_2 = \ldots = \hat{L}y_k = 0$, то их линейная комбинация $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_k y_k(x)$ $(c_1, c_2, \ldots, c_k$ - произвольные постоянные) также является решением.

Доказательство: воспользуемся свойством линейности оператора $\hat{L}$. Тогда,

$$\hat{L}\left[\sum_{i=1}^{k} c_i y_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{k} c_i \hat{L} y_i(x) = 0.$$

Значит, линейная комбинация - также решение. ⊠

В связи с доказанной теоремой возникает мысль, как построить общее решение дифференциального уравнения (3). Такое решение содержит n констант. Поэтому нужно взять n линейно независимых решений и построить их линейную комбинацию.

Теорема 2. Об определителе Вронского системы линейно зависимых функций.

Если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ - линейно зависимые, достаточное число раз дифференцируемые функции, то определитель Вронского тождественно равен нулю.

Доказательство: по определению *определителем Вронского* (*вронскианом*) системы функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называется определитель вида

$$W(x) = W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Исходим из линейной зависимости функций:

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Re \qquad \left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0\right)$$

такие, что:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0.$$

Продифференцируем соотношение последовательно $(n-1)$ раз и составим систему

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0, \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \ldots + \alpha_n y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

Полученную систему можно рассматривать как алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, которая при $\forall x$, в соответствии с условием $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$, имеет ненулевое решение. Значит, для $\forall x$ определитель системы, а это $W(x) = 0$. ⊛

ЛЕКЦИЯ 12

Теорема 3. О линейно независимых решениях однородного дифференциального уравнения.

Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ - линейно независимые решения однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0. \tag{1}$$

Тогда определитель Вронского $W(x)$ не обращается в нуль ни в одной из точек отрезка $[a, b]$.

Доказательство: *"от противного"*

Предположим, что при некотором $x = x_0 \in [a, b]: \quad W(x) = 0$. Значит,

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} & \cdots & y_{n0} \\ y'_{10} & y'_{20} & \cdots & y'_{n0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{10}^{(n-1)} & y_{20}^{(n-1)} & \cdots & y_{n0}^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0,$$

где $y_{k0}^{(s)} = y_k^{(s)}(x_0)$. Составим систему

$$\begin{cases} c_1 y_{10} + c_2 y_{20} + \ldots + c_n y_{n0} = 0, \\ c_1 y'_{10} + c_2 y'_{20} + \ldots + c_n y'_{n0} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1 y_{10}^{(n-1)} + c_2 y_{20}^{(n-1)} + \ldots + c_n y_{n0}^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

- это система однородных уравнений с неизвестными $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Система имеет ненулевое решение, поскольку ее определитель $W(x_0) = 0$. Обозначим через $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n$ нетривиальное решение системы и составим функцию

$$y(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x) + \ldots + \bar{c}_n y_n(x).$$

В силу доказанной теоремы 1 эта функция является решением однородного уравнения (1). В то же время, согласно первому уравнению системы $y(x_0) = 0$, согласно второму - $y'(x_0) = 0$, и т.д., наконец, в силу последнего из уравнений - $y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Таким образом, построенное решение удовлетворяет нулевым начальным условиям $(x_0, 0, \ldots, 0)$. Значит, по теореме единственности $y(x) \equiv 0$.

Отсюда

$$\bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x) + \ldots + \bar{c}_n y_n(x) \equiv 0,$$

причем не все $\bar{c}_i$ равны нулю. В результате получили линейную зависимость решений, что противоречит условиям теоремы. Значит, определитель Вронского $W(x) \neq 0$ ни в одной точке из $[a, b]$. ⊠

Следствия теорем 2 **и** 3. Поскольку система n решений линейного дифференциального уравнения (1) может быть линейно зависимой, либо линейно независимой, то определитель Вронского, соответственно, либо тождественно равен нулю, либо не обращается в нуль ни в одной точке.

Таким образом, если $W(x)$ для системы n решений равен нулю в одной точке, то он тождественно равен нулю, и решения линейно зависимы.

Определение. Система n линейно независимых решений однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка называется *фундаментальной.*

Теорема 4. О существовании фундаментальной системы решений.

Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка всегда имеет фундаментальную систему решений.

Доказательство: выберем n^2 действительных чисел a_{ik} таким образом, чтобы $\det\{a_{ik}\} \neq 0$. Построим систему решений линейного однородного уравнения (1) следующим образом.

Первое решение определим так, чтобы при $x = x_0 : y_1(x_0) = a_{11}, y_1'(x_0) = a_{21}, \ldots, y_1^{(n-1)}(x_0) = a_{n1}$. По теореме существования такое решение единственно. Определим второе решение $y_2(x)$ так, чтобы для него начальными условиями были $(x_0, a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})$. И т.д. Аналогично для $y_n(x)$ за начальные условия берем $(x_0, a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn})$. По построению, для этой системы решений $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)\ |_{x=x_0} \neq 0$. Следовательно, данная система решений линейно независима, т.е. фундаментальна. ⊠

Теорема 5. О линейном преобразовании фндаментальной системы решений.

Если фундаментальную систему решений подвергнуть линейному невырожденному преобразованию, то получится снова фундаментальная система решений.

Доказательство: рассмотрим новую систему функций $\vec{z} = (z_1 \quad z_2 \quad \ldots \quad z_n)$, которая получается линейным невырожденным преобразованием из фундаментальной системы $\vec{y} = (y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_n)$:

$$\vec{z} = \vec{y}\mathbf{A}^T \text{ или } z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k,$$

причем $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T \neq 0$.

Поскольку y_k - решения однородного дифференциального уравнения (1), то их линейные комбинации z_i также являются решениями (см.теорему 1). Докажем фундаментальность системы решений $\vec{z}$. Составим матрицу

$$\begin{pmatrix} \vec{z} \\ \vec{z}' \\ \cdots \\ \vec{z}^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y}\mathbf{A}^T \\ \vec{y}'\mathbf{A}^T \\ \cdots \\ \vec{y}^{(n-1)}\mathbf{A}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y} \\ \vec{y}' \\ \cdots \\ \vec{y}^{(n-1)} \end{pmatrix} \mathbf{A}^T.$$

Отсюда

$$W(z_1, z_2, \ldots, z_n) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \cdot \det \mathbf{A}.$$

В силу фундаментальности исходной системы $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ определитель Вронского $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ (см.теорему 3), а поскольку линейное преобразование невырождено - и $\det \mathbf{A} \neq 0$. Поэтому, при любых x определитель Вронского $W(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ системы решений $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ отличен от нуля. Значит, в соответствии со следствием к теоремам $2, 3$ новая система решений однородного дифференциального уравнения также фундаментальна. ⊠

Следствие. Существует бесчисленное множество фундаментальных систем решений однородного дифференциального уравнения (1).

Теорема 6. О структуре общего решения однородного дифференциального уравнения.

Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ - фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения (1). Тогда его общее решение имеет вид

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x). \tag{2}$$

Доказательство: функция, определенная равенством (2), является решением однородного дифференциального уравнения (1) по теореме 1. Докажем, что $y(x)$ - общее решение, т.е. что при любых начальных условиях можно подобрать постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_n$ так, чтобы получилось частное решение, удовлетворяющее взятым начальным условиям.

Пусть функции $a_i(x), \quad i = \overline{1,n}$, входящие в уравнение (1), непрерывны на $[a,b]$. Возьмем значение $x_0 \quad (a < x_0 < b)$ и зададим начальные условия $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Обозначим $y_k(x_0) = y_{k0}, y_k^{(i)}(x_0) = y_{k0}^{(i)} \quad \left(i = \overline{1, n-1}\right)$. Составим систему уравнений, используя (2) и начальные условия,

$$\begin{cases} c_1 y_{10} + c_2 y_{20} + \ldots + c_n y_{n0} = y_0, \\ c_1 y'_{10} + c_2 y'_{20} + \ldots + c_n y'_{n0} = y'_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1 y_{10}^{(n-1)} + c_2 y_{20}^{(n-1)} + \ldots + c_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Полученная система является неоднородной алгебраической системой уравнений относительно неизвестных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ с определителем $W(x_0)$. Поскольку по условиям теоремы система решений $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ - фундаментальна, определитель Вронского $W(x)$ в любой точке отличен от нуля (см. теорему 3), в частности, и $W(x_0) \neq 0$. Следовательно, линейная алгебраическая система уравнений имеет единственное решение $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n$. В результате нам удалось построить на основе (2) единственное частное решение

$$y(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x) + \ldots + \bar{c}_n y_n(x),$$

удовлетворяющее заданным начальным условиям. ⊛

Теорема 7. О количестве линейно независимых решений.

Максимальное число линейно независимых решений однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка равно порядку уравнения.

Доказательство: нам достаточно показать, что любые $(n+1)$ решений дифференциального уравнения (1) всегда линейно зависимы. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ - любые решений уравнения (1). Рассмотрим два случая: а) первые n решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - линейно зависимы, т.е. $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Re \quad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0)$ такие, что

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0.$$

Тогда система $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ также линейно зависима, поскольку

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n + 0 \cdot y_{n+1} = 0;$$

б) пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - линейно независимая система решений. Тогда она является фундаментальной, и по теореме 6 любое другое решение может быть представлено в виде линейной комбинации решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, в частности, и y_{n+1}. Таким образом, всегда найдутся постоянные $\beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$, для которых

$$y_{n+1} = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n.$$

Это и означает, что система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ линейно зависима. ⊠

Замечание. Все доказанные теоремы можно подытожить так: множество решений однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка образует линейное n-мерное векторное пространство, базисом которого является фундаментальная система решений.

Теорема 8. О тождественности линейных однородных дифференциальных уравнений.

Если два линейных однородных дифференциальных уравнения с коэффициентами при старшей производной, равными единице, имеют одну и ту же фундаментальную систему решений, то они тождественны.

Доказательство: предположим, что имеются два линейных однородных дифференциальных уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0,$$

$$y^{(n)} + b_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}(x)\, y' + b_n(x)\, y = 0,$$

имеющие одну и ту же фундаментальную систему решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Вычитая одно уравнение из другого, получим:

$$[a_1(x) - b_1(x)]\, y^{(n-1)} + \ldots + [a_n(x) - b_n(x)]\, y = 0. \tag{3}$$

Функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ обращают это уравнение в тождество, поскольку они являются решениями как уравнения с коэффициентами $a_i(x)$ так и уравнения с коэффициентами $b_i(x)$. Допустим, что $\exists i$ такое, что в точке $x = x_0$: $a_i(x_0) \neq b_i(x_0)$. Тогда, в силу непрерывности функций $a_i(x)$ и $b_i(x)$ неравенство имеет место и в некоторой окрестности точки x_0, т.е. $a_i(x) - b_i(x) \neq 0$. Поделим уравнение (3) на первую отличную от нуля разность $[a_k(x) - b_k(x)]$. Тогда получим дифференциальное уравнение порядка не выше $(n-1)$ с коэффициентом при старшей производной, равном единице. Более того, коэффициенты этого уравнения будут непрерывными функциями в некотором интервале. Данное уравнение имеет фундаментальную систему решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, однако, по теореме 7 максимальное число линейно независимых решений такого уравнения не превосходит его порядка, т.е. $(n-1)$. Пришли к противоречию. Значит, для $\forall i, x$: $a_i(x) \equiv b_i(x)$. ⊠

ЛЕКЦИЯ 13

Следствие. Фундаментальная система решений однозначно определяет линейное однородное дифференциальное уравнение.

Указанное следствие позволяет сформулировать следующую задачу.

Задача. Задана фундаментальная система решений некоторого линейного однородного дифференциального уравнения. Построить дифференциальное уравнение, которое имеет эту фундаментальную систему решений.

Решение.

Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ - система линейно независимых n раз дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$. Составим определитель

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Данное равенство представляет собой однородное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка для неизвестной функции $y(x)$. Подстановка вместо $y(x)$ любой функции $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ обращает уравнение в тождество (возникают два одинаковых столбца в определителе). Это означает, что функции $y_i(x)$ являются линейно независимыми решениями построенного уравнения, т.е. его фундаментальной системой решений. Коэффициентом при старшей производной $y^{(n)}$, входящей в уравнение, является определитель Вронского $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Для фундаментальной системы решений $W(x) \neq 0$ ни в одной точке отрезка $[a,b]$, и поэтому на него можно поделить обе части уравнения. Раскладывая определитель по последнему столбцу и деля обе части равенства на $W(x)$, придем к однородному линейному дифференциальному уравнению вида:

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0, \tag{1}$$

где

$$a_i(x) = (-1)^i \frac{\Delta_i(x)}{W(x)},$$

$$\Delta_i(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-i-1)} & y_2^{(n-i-1)} & \cdots & y_n^{(n-i-1)} \\ y_1^{(n-i+1)} & y_2^{(n-i+1)} & \cdots & y_n^{(n-i+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

В частности,

$$a_1(x) = -\frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Таким образом, искомое уравнение построено.

Формула Лиувилля.

Выведем сначала формулу дифференцирования функционального определителя. Рассмотрим производную

$$\frac{d\Delta(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Воспользуемся формулой для определителя

$$\Delta(x) = \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)} (-1)^r a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n},$$

где сумма содержит $n!$ слагаемых, соответствующих различным упорядоченным множествам $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, получаемым r попарными перестановками (транспозициями) элементов из множества $(1, 2, \ldots, n)$. Тогда,

$$\frac{d\Delta(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)} (-1)^r a_{1k_1}(x) a_{2k_2}(x) \ldots a_{nk_n}(x)\right] = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i(x),$$

где

$$\Delta_i(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1}(x) & a'_{i2}(x) & \cdots & a'_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Применяя найденную формулу, подсчитаем производную определителя Вронского $W'(x)$.

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Поскольку все определители, кроме последнего, зануляются (содержат одинаковые строки), то в соответствии с формулой (2)

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = -a_1(x) W(x).$$

Решая полученное дифференциальное уравнение первого порядка, находим:

$$W(x) = c \exp\left(-\int a_1(x)\,dx\right)$$

или

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt\right). \tag{3}$$

Формула (3) и называется *формулой Лиувилля.* Из нее отчетливо видно, что если $W(x) = 0$ в одной точке, то он тождественно равен нулю.

На практике выведенную формулу Лиувилля можно с успехом применять для отыскания взаимосвязи фундаментальных решений линейного однородного дифференциального уравнения. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0.$$

Пусть известно частное решение $y_1(x)$ этого уравнения. Построим систему фундаментальных решений, взяв в качестве одного из них $y_1(x)$, а второе определив из формулы Лиувилля. В самом деле, согласно (3)

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = c\exp\left(-\int a_1(x)\,dx\right).$$

Отсюда,

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = c\exp\left(-\int a_1(x)\,dx\right)$$

или

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{c}{y_1^2}\exp\left(-\int a_1(x)\,dx\right).$$

Проводя интегрирование, получаем формулу связи фундаментальных решений в виде двух квадратур

$$y_2(x) = y_1(x)\int \exp\left(-\int a_1(x)\,dx\right)\frac{dx}{y_1^2(x)}. \tag{4}$$

(константа c отнесена в множитель функции $y_1(x)$).

Пример. Допустим, нам известно одно из фундаментальных решений уравнения второго порядка: $y_1(x) = \cos x$. Выведенная формула (4) позволяет найти второе фундаментальное решение при заданном коэффициенте $a_1(x)$ при y', а затем построить само дифференциальное уравнение и записать его общее решение. Положим для простоты $a_1(x) = 0$. Тогда,

$$y_2(x) = \cos x \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \cos x \cdot \tan x = \sin x.$$

Построим теперь по известной фундаментальной системе $\{\cos x, \sin x\}$ линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Составим определитель

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x & y \\ -\sin x & \cos x & y' \\ -\cos x & -\sin x & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Складывая первую и третью строки и разлагая определитель по третьей строке, придем к известному уравнению математического маятника

$$y'' + y = 0,$$

общее решение которого имеет вид:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Пример. Найдем общее решение дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Поскольку коэффициенты уравнения являются полиномами, частное решение можно поискать также в виде полинома некоторой степени k

$$y(x) = x^k + b_1 x^{k-1} + \dots b_{k-1} x + b_k.$$

Подставим это выражение в уравнение.

$$k(k-1)x^{k-2} + \dots - 2x\left[kx^{k-1} + (k-1)b_1 x^{k-2} \dots\right] + 2x^k + 2b_1 x^{k-1} + \dots = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при старшей степени x, определяем степень полинома: $k = 1$. Следовательно, частное решение следует искать в виде линейной функции $y = x + b_1$. Подставляя ее в уравнение, найдем:

$$-2x + 2x + 2b_1 = 0 \Longrightarrow b_1 = 0.$$

Таким образом, частное решение рассматриваемого уравнения имеет вид: $y_1(x) = x$.

По формуле (4) определяем второе линейно независимое решение

$$y_2(x) = x \int \exp\left\{\int 2x dx\right\} \frac{dx}{x^2} = x \int e^{x^2} \frac{dx}{x^2} = x\left(-\frac{e^{x^2}}{x} + 2\int e^{x^2} dx\right) =$$

$$= 2x \int e^{x^2} dx - e^{x^2}.$$

Заметим, что второе решение не выражается через элементарные функции, но быстро нарастает при $|x| \to \infty$. Общее решение уравнения таково

$$y = c_1 x + c_2 \left(2x \int e^{x^2} dx - e^{x^2}\right).$$

Понижение порядка однородного линейного дифференциального уравнения.

Как понизить порядок однородного линейного дифференциального уравнения ? Один прием мы рассматривали ранее - замену функции

$$y = \exp\left\{\int z dx\right\}.$$

При этом уравнение для новой функции $z(x)$ оказывается уже нелинейным. Оказывается, если известно какое-либо частное решение $y_1(x)$, то порядок уравнения можно понизить, сохранив его линейность.

Введем новую функцию $z(x)$ соотношением $y = y_1 z$. Тогда,

$$y' = y_1' z + y_1 z'; \quad y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''; \ldots;$$

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(k)} z^{(n-k)} = y_1^{(n)} z + n y_1^{(n-1)} z' + \ldots + y_1 z^{(n)}.$$

Подставляя все в однородное дифференциальное уравнение (1), придем к

$$z\hat{L}y_1(x) + b_{n-1}(x) z' + \ldots + b_1(x) z^{(n-1)} + y_1(x) z^{(n)} = 0,$$

где оператор $\hat{L}$, по-прежнему,

$$\hat{L} = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x).$$

Поскольку $y_1(x)$ - решение дифференциального уравнения, $\hat{L}y_1(x) = 0$, и в результате получаем линейное однородное уравнение, не содержащее явно функции z. Вводя еще одну функцию $u = z'$ и деля обе части уравнения на функцию $y_1(x)$, приходим к

$$u^{(n-1)} + d_1(x) u^{(n-2)} + \ldots + d_{n-1}(x) u = 0,$$

где $d_i = b_i/y_1$. Полученное уравнение $(n-1)$-го порядка имеет фундаментальную систему решений $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Вспоминая замены: $u = (y/y_1)'$, для исходного дифференциального уравнения находим систему решений:

$$y_1, y_1\int u_1 dx, y_1\int u_2 dx, \ldots, y_1\int u_{n-1} dx.$$

Докажите самостоятельно, что если система $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ - фундаментальная, то полученная система решений также фундаментальна.

5.Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка.

Поговорим теперь о свойствах решений неоднородного уравнения

$$\hat{L}y = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x). \tag{5}$$

Теорема 1. О структуре общего решения неоднородного уравнения.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения является суперпозицией частного решения неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Доказательство: пусть $Y(x)$ - частное решение уравнения (5), т.е. $\hat{L}Y = f(x)$. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения, т.е. $\hat{L}y_k = 0, k = \overline{1,n}$. Докажем, что функция

$$y = Y + c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n \tag{6}$$

является общим решением дифференциального уравнения (5).

Покажем вначале, что это просто решение. В самом деле, в силу линейных свойств оператора $\hat{L}$

$$\hat{L}(Y + c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n) = \hat{L}Y + c_1 \hat{L}y_1 + \ldots + c_n \hat{L}y_n \equiv f(x).$$

Докажем теперь общность решения. Зададим произвольные начальные условия $\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$. Подставляя функцию (6) в начальные условия и вводя обозначения $Y^{(k)}(x_0) \equiv Y_0^{(k)}, y_i^{(k)}(x_0) \equiv y_{i0}^{(k)}$, придем к системе уравнений

$$\begin{cases} Y_0 + c_1 y_{10} + \ldots + c_n y_{n0} = y_0, \\ Y_0' + c_1 y_{10}' + \ldots + c_n y_{n0}' = y_0', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_0^{(n-1)} + c_1 y_{10}^{(n-1)} + \ldots + c_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Это - неоднородная система алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ с определителем $W(x_0) \neq 0$. Такая система имеет единственное решение: $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n$. Следовательно, функция

$$y = Y + \bar{c}_1 y_1 + \ldots + \bar{c}_n y_n$$

определяет частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. ⊠

Теорема 2. Принцип суперпозиции.

Пусть правая часть неоднородного уравнения (5)

$$f(x) = \sum_i \alpha_i f_i(x)$$

и $Y_i(x)$ - частные решения дифференциальных уравнений: $\hat{L}Y_i = f_i(x) \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$. Тогда суперпозиция

$$Y = \sum_i \alpha_i Y_i$$

является частным решением дифференциального уравнения (5).

Доказательство: проверим, что функция

$$Y = \sum_i \alpha_i Y_i$$

удовлетворяет неоднородному уравнению. В самом деле:

$$\hat{L}\left(\sum_i \alpha_i Y_i\right) = \sum_i \alpha_i \hat{L} Y_i = \sum_i \alpha_i f_i = f\left(x\right). \qquad \boxed{*}$$

ЛЕКЦИЯ 14

Метод вариации произвольных постоянных для отыскания частного решения неоднородного уравнения.

Покажем, что с помощью известной фундаментальной системы решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейного однородного уравнения можно найти частное решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\hat{L}y = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x) \tag{1}$$

и, следовательно, построить его общее решение. Воспользуемся тем, что общее решение однородного уравнения представляется в виде суперпозиции

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n. \tag{2}$$

Совершенно ясно, что ни при каких постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ функция (2) не будет решением неоднородного уравнения (1). Попытаемся, считая постоянные функциями $x : c_i = c_i(x)$, подобрать их так, чтобы функция (2) стала решением неоднородного уравнения (1).

Поскольку вместо одной неизвестной функции $y(x)$ мы ввели n функций, то мы имеем право наложить $(n-1)$ условий на $c_i(x)$ так, как нам удобно. Продифференцируем обе части выражения (2)

$$y' = c_1' y_1 + c_2' y_2 + \ldots + c_n' y_n + c_1 y_1' + c_2 y_2' + \ldots + c_n y_n'.$$

Потребуем, чтобы y' имела такое же выражение как и при постоянных c_i, т.е. положим

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 + \ldots + c_n' y_n = 0. \tag{3}$$

Дифференцируя еще раз соотношение для

$$y' = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k',$$

находим:

$$y'' = \sum_{k=1}^{n} c_k' y_k' + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k''.$$

Опять потребуем, чтобы выражение для y'' выглядело также как и при постоянных c_i. В результате получаем еще одно условие

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + \ldots + c_n' y_n' = 0. \tag{4}$$

Поступая далее аналогичным образом, можно придти к выражению для $(n-1)$ производной вида

$$y^{(n-1)} = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k^{(n-1)},$$

наложив $(n-1)$ вспомогательных условий на функции $c_i(x)$. Последнее из этих условий таково:

$$c_1' y_1^{(n-2)} + c_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0. \tag{5}$$

Продифференцируем соотношение для $(n-1)$-ой производной еще раз. В результате придем к

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} c_k' y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k^{(n)}.$$

Подстановка выражений для производных в уравнение (1) дает:

$$\hat{L}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k' y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n} c_k \hat{L} y_k = f(x).$$

Поскольку функции $y_k(x)$ - решения однородного уравнения: $\hat{L}y_k = 0$, и мы получаем еще одно уравнение для производных функций $c_i(x)$:

$$c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \tag{6}$$

Собирая уравнения (3-6), получаем неоднородную систему алгебраических уравнений для производных неизвестных функций $c_i(x)$:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \ldots + c_n' y_n = 0, \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \ldots + c_n' y_n' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + c_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{7}$$

В силу фундаментальности системы решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ определитель неоднородной системы (7), являющийся определителем Вронского, $W(x) \neq 0$ для любых x. Поэтому неоднородная система имеет единственное решение: $c_1' = \varphi_1(x), c_2' = \varphi_2(x), \ldots, c_n' = \varphi_n(x)$. Интегрируя эти соотношения (без произвольных постоянных), находим $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$. Подставляя эти выражения в (2), определяем частное решение неоднородного уравнения (1). Рассмотренный метод связан с достаточно сложными расчетами (решение линейной системы n-го порядка и последующее взятие n квадратур), но позволяет найти частное решение при любой функции $f(x)$.

6. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Комплекснозначные функции.

Определение. Если каждому числу $x \in E \subset \Re$ по некоторому закону поставлено в соответствие комплексное число w, то говорят, что на множестве E задана *комплекснозначная* функция $w = w(x)$.

Поскольку любое комплексное число представляется в виде $w = u + iv$, где u - его действительная часть, v - мнимая часть; то задание комплекснозначной функции $w = w(x)$ эквивалентно заданию двух функций действительного переменного x :

$u = u(x), v = v(x)$. Если $u(x)$ и $v(x)$ - дифференцируемые функции, то $w'(x) = u'(x) + iv'(x)$.

Если $\lambda = \alpha + i\beta$ - комплексное число, то по определению

$$e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta).$$

При $\alpha = 0$ отсюда имеем

$$e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta,$$

что совпадает с известной *формулой Эйлера.* Так определяется функция с комплексным показателем. Заменяя β на $-\beta$, имеем:

$$e^{-i\beta} = \cos\beta - i\sin\beta.$$

Складывая и вычитая левые и правые части последних двух равенств, получаем:

$$\cos\beta = \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2}, \quad \sin\beta = \frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2i}.$$

Для функции $y = e^{\lambda x}$, где $\lambda = \alpha + i\beta$, в соответствии с определением имеем:

$$y = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x).$$

Установим правило дифференцирования этой функции. Рассмотрим сначала производную

$$\left(e^{i\beta x}\right)' = (\cos\beta x + i\sin\beta x)' = -\beta\sin\beta x + i\beta\cos\beta x =$$
$$= i\beta(\cos\beta x + i\sin\beta x) = i\beta e^{i\beta x}.$$

В общем случае

$$y' = \left(e^{\lambda x}\right)' = \left(e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}\right)' = \left(e^{\alpha x}\right)' e^{i\beta x} + e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x}\right)' =$$
$$= \alpha e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x} + i\beta e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x} = (\alpha + i\beta)\, e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}.$$

Это означает, что функция $y = e^{\lambda x}$ $(\lambda = \alpha + i\beta)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y.$$

Его общее решение таково

$$y = ce^{\lambda x}, \text{ где } c = c_1 + ic_2.$$

Утверждение.

Если комплекснозначная функция $y(x) = u(x) + iv(x)$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения $\hat{L}y = 0$, то ее действительная часть $u(x)$ и мнимая часть $v(x)$ являются решениями того же уравнения.

Доказательство: в силу линейных свойств дифференциального оператора $\hat{L}$ и определения производных комплекснозначной функции

$$\hat{L}y = \hat{L}(u + iv) = \hat{L}u + i\hat{L}v = 0.$$

Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда обращаются одновременно в нуль его действительная и мнимая части. Значит, $\hat{L}u = 0, \hat{L}v = 0$. ⊠

Операторные многочлены и их свойства.

Перейдем к анализу линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{8}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n = const$. Попытаемся найти фундаментальную систему решений уравнения (8). Введем *оператор дифференцирования* $D : y' = Dy$. Тогда $y'' = (y')' = D\,(Dy) = D^2 y, \ldots, y^{(n)} = D^n y$. Уравнение (8) при этом примет вид

$$D^n y + a_1 D^{n-1} y + \ldots + a_{n-1} D y + a_n y = 0$$

или

$$\left(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n\right) y = 0.$$

Многочлен, стоящий перед функцией y, является многочленом от оператора дифференцирования и носит название *операторного многочлена* $M\,(D)$:

$$M\,(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} D^k \qquad (a_0 = 1)\,.$$

Уравнение (8) принимает компактный вид: $M\,(D)\,y = 0$.

Отметим основные свойства операторных многочленов.

1. Закон сложения (ассоциативность):

$$[M\,(D) + N\,(D)]\,y = M\,(D)\,y + N\,(D)\,y.$$

2. Под умножением операторных многочленов понимается их последовательное применение.

$$M\,(D)\,[N\,(D)\,y] = [M\,(D)\,N\,(D)]\,y.$$

Отсюда,

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} D^k \left[\sum_{s=0}^{m} b_{m-s} D^s y\right] = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} a_{n-k} b_{m-s} D^{k+s} y = \sum_{s=0}^{m} b_{m-s} D^s \left[\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} D^k y\right].$$

Следовательно, верен переместительный закон:

$$M\,(D)\,[N\,(D)\,y] = N\,(D)\,[M\,(D)\,y]\,.$$

3. Поскольку $M\,(D)$ - дифференциальный оператор, то

$$M\,(D)\,(y_1 + y_2) = M\,(D)\,y_1 + M\,(D)\,y_2.$$

4. Справедлив дистрибутивный закон

$$M\,(D)\,[N\,(D) + Q\,(D)]\,y = M\,(D)\,N\,(D)\,y + M\,(D)\,Q\,(D)\,y.$$

Свойства 1-4 показывают, что для операторных многочленов справедливы все теоремы алгебры. Отсюда следует еще одно свойство.

5. Операторный многочлен можно разложить на множители. Введем *характеристический многочлен*

$$M(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n. \tag{9}$$

Этот многочлен имеет n корней и представим по теореме алгебры в виде

$$M(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n).$$

Значит,

$$M(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (D - \lambda_n). \tag{10}$$

Решение линейного уравнения в случае простых корней.

Допустим, что характеристический многочлен (9) имеет n различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тогда из (10) имеем:

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (D - \lambda_n)\, y = 0. \tag{11}$$

Поскольку операторы, стоящие в (11) в скобках, обладают переместительным свойством, то любой из них можно сделать последним. Это означает, что уравнение (11) имеет решения:

$$(D - \lambda_i)\, y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \lambda_i y \Longrightarrow y_i = e^{\lambda_i x}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь постоянные λ_i могут быть и комплексными. В итоге, мы получили n решений. Можно ли по ним построить общее решение ? Если найденные решения линейно независимы, т.е. образуют фундаментальную систему, то можно. Докажем фундаментальность найденной системы решений.

Составим определитель Вронского

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)x} \prod_{i>k} (\lambda_i - \lambda_k) \neq 0.$$

В наших расчетах встретился *определитель Вандермонда*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>k} (\lambda_i - \lambda_k),$$

равный произведениям всевозможных попарных разностей чисел λ_i.

Поскольку определитель Вронского отличен от нуля, найденная система решений фундаментальна, и общее решение линейного однородного дифференциального уравнения в случае простых корней имеет вид:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}. \tag{12}$$

Таким образом, для построения общего решения (12) достаточно найти корни характеристического многочлена, т.е. решить уравнение $M(\lambda) = 0$. Если среди корней λ_i встречаются комплексные, то выделяют действительное решение. Делается это следующим образом.

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ - корень характеристического уравнения. Так как коэффициенты многочлена действительны, то имеется сопряженный корень $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Таким образом, имеем два комплексных решения

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right),$$

$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right).$$

Комбинируя их, легко получить два действительных решения

$$Y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

$$Y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x = \frac{y_1 - y_2}{2i}.$$

Проверим, что найденные решения линейно независимы. Для этого составим определитель матрицы перехода

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2i & -1/2i \end{vmatrix} = \frac{i}{2} \neq 0.$$

Тогда из линейной независимости решений y_1, y_2 вытекает линейная независимость решений Y_1, Y_2.

В случае, когда имеется несколько комплексных корней, определитель матрицы перехода

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/2i & -1/2i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/2i & -1/2i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В результате мы можем получить только линейно независимые действительные решения.

ЛЕКЦИЯ 15

Решение линейного уравнения в случае кратных корней.

Пусть характеристический многочлен

$$M(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

имеет кратные корни: корень λ_1 кратности m_1, корень λ_2 кратности m_2, ..., корень λ_k кратности m_k, причем $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$. В этом случае операторный многочлен $M(D)$ может быть разложен на следующие множители:

$$M(D) = (D - \lambda_1)^{m_1}(D - \lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (D - \lambda_k)^{m_k},$$

а дифференциальное уравнение

$$(D - \lambda_1)^{m_1}(D - \lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (D - \lambda_k)^{m_k} y = 0$$

распадается на k уравнений

$$(D - \lambda_s)^{m_s} y = 0; \qquad s = 1, 2, \ldots, k. \tag{1}$$

Мы уже знаем, что решением этого уравнения является функция $y = e^{\lambda_s x}, \quad s = \overline{1,k}$. Но всего таких решений $k < n$. Нам не хватает $(n-k)$ решений для построения фундаментальной системы. Как найти дополнительные решения ?

Выведем сначала вспомогательное операторное соотношение, называемое *формулой смещения*

$$M(D)\, e^{\lambda x} f(x) = e^{\lambda x} M(D + \lambda)\, f(x). \tag{2}$$

Подставим в левую часть выражение операторного многочлена

$$M(D) = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l} D^l \qquad (a_0 = 1).$$

Тогда,

$$M(D)\, e^{\lambda x} f(x) = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l} D^l e^{\lambda x} f(x) = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l} \left[e^{\lambda x} f(x)\right]^{(l)} =$$

применим формулу Лейбница для производной от произведения функций

$$= \sum_{l=0}^{n} a_{n-l} \sum_{j=0}^{l} C_l^j \left(e^{\lambda x}\right)^{(j)} f^{(l-j)}(x) = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l} \sum_{j=0}^{l} C_l^j \lambda^j e^{\lambda x} f^{(l-j)}(x) =$$

$$= e^{\lambda x} \left[\sum_{l=0}^{n} a_{n-l} \sum_{j=0}^{l} C_l^j \lambda^j D^{l-j}\right] f(x) = e^{\lambda x} \left[\sum_{l=0}^{n} a_{n-l} (D + \lambda)^l\right] f(x) =$$

$$= e^{\lambda x} M\left(D+\lambda\right) f\left(x\right). \qquad \boxed{*}$$

Вернемся к уравнению (1). Будем искать его решение в виде $y = e^{\lambda_s x} P\left(x\right)$. Тогда,

$$\left(D-\lambda_s\right)^{m_s} e^{\lambda_s x} P\left(x\right) = 0,$$

и применяя формулу смещения, имеем:

$$D^{m_s} P\left(x\right) = 0$$

или

$$\frac{d^{m_s}}{dx^{m_s}} P\left(x\right) = 0.$$

Решением получившегося уравнения является произвольный полином степени $(m_s - 1)$, т.е.

$$P\left(x\right) = c_0 x^{m_s-1} + c_1 x^{m_s-2} + \ldots + c_{m_s-2} x + c_{m_s-1}.$$

Окончательный вид решения уравнения (1) таков

$$y = e^{\lambda_s x}\left(c_0 x^{m_s-1} + c_1 x^{m_s-2} + \ldots + c_{m_s-2} x + c_{m_s-1}\right).$$

Как получить отсюда линейно независимые решения ?

Будем полагать поочередно: $c_{m_s-1} = 1$, остальные - нули; $c_{m_s-2} = 1$, остальные - нули;...; $c_0 = 1$, остальные - нули. В результате получим m_s решений вида

$$e^{\lambda_s x}, \quad x e^{\lambda_s x}, \ldots, \quad x^{m_s-1} e^{\lambda_s x}, \tag{3}$$

соответствующих кратности корня λ_s характеристического многочлена. Серии решений вида (3) получаются для всех остальных корней, так что общее число построенных решений равно $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$.

Покажем, что построенная система решений фундаментальна. Предположим *противное*, т.е. что система решений линейно зависима. Это означает, что существует набор действительных постоянных α_{ij} (не все из которых нули), для которого

$$\alpha_{11} e^{\lambda_1 x} + \alpha_{12} x e^{\lambda_1 x} + \ldots + \alpha_{1m_1} x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x} + \ldots + \alpha_{k1} e^{\lambda_k x} + \alpha_{k2} x e^{\lambda_k x} +$$

$$+ \ldots + \alpha_{km_k} x^{m_k-1} e^{\lambda_k x} \equiv 0$$

или

$$P_{m_1-1}\left(x\right) e^{\lambda_1 x} + Q_{m_2-1}\left(x\right) e^{\lambda_2 x} + \ldots + R_{m_k-1}\left(x\right) e^{\lambda_k x} \equiv 0 \qquad \text{для } \forall x. \tag{4}$$

Покажем, что отсюда вытекает равенство нулю всех многочленов $P_{m_1-1}\left(x\right), Q_{m_2-1}\left(x\right)$, $\ldots, R_{m_k-1}\left(x\right)$.

Снова применим прием от противного. Пусть хотя бы у одного из многочленов не все коэффициенты α_{ij} являются нулями, например у $P_{m_1-1}(x)$ отличен от нуля коэффициент при старшей степени α_{1m_1}. Разделим тождество (4) на $e^{\lambda_k x}$:

$$P_{m_1-1}(x)\, e^{(\lambda_1-\lambda_k)x} + Q_{m_2-1}(x)\, e^{(\lambda_2-\lambda_k)x} + \ldots + R_{m_k-1}(x) \equiv 0$$

и продифференцируем его m_k раз для того, чтобы исчез многочлен $R_{m_k-1}(x)$. Поскольку,

$$\left[P_{m_1-1}(x)\, e^{(\lambda_1-\lambda_k)x}\right]' = \left[(\lambda_1-\lambda_k)\, P_{m_1-1}(x) + P'_{m_1-1}(x)\right] e^{(\lambda_1-\lambda_k)x},$$

то в силу условий $\lambda_1 \neq \lambda_k$ и $P_{m_1-1}(x) \neq 0$ в квадратных скобках получается многочлен той же степени, что и $P_{m_1-1}(x)$. В результате, после дифференцирования m_k раз придем к:

$$\tilde{P}_{m_1-1}(x)\, e^{(\lambda_1-\lambda_k)x} + \tilde{Q}_{m_2-1}(x)\, e^{(\lambda_2-\lambda_k)x} + \ldots + \tilde{T}_{m_{k-1}-1}(x)\, e^{(\lambda_{k-1}-\lambda_k)x} \equiv 0.$$

Многочленов стало на один меньше. Разделим теперь тождество на $e^{(\lambda_{k-1}-\lambda_k)x}$ и продифференцируем его m_{k-1} раз для того, чтобы исчез многочлен $\tilde{T}_{m_{k-1}-1}(x)$. В результате получим $(k-2)$ слагаемых. И т.д. В конце этой процедуры придем к тождеству вида

$$\bar{P}_{m_1-1}(x)\, e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} \equiv 0.$$

Из него следует, что $\bar{P}_{m_1-1}(x) \equiv 0$ при $\forall x$, а значит все коффициенты многочлена $\bar{P}_{m_1-1}(x)$ обращаются в нуль. В том числе и коэффициент при старшей степени, который совпадает с аналогичным коэффициентом α_{1m_1} исходного полинома $P_{m_1-1}(x)$. Мы пришли к противоречию, поскольку полагали этот коэффициент отличным от нуля.

Таким образом все полиномы в тождестве (4) равны нулю. Следовательно, обращаются в нуль и все коэффициенты α_{ij}: $\alpha_{ij} \equiv 0$. Получили еще одно противоречие, которое и доказывает фундаментальность построенной системы решений (3).

Итак, в случае кратных корней фундаментальная система решений имеет вид:

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}; \ldots; e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, \ldots, x^{m_k-1}e^{\lambda_k x}.$$

Общее решение линейного однородного уравнения является линейной суперпозицией этих решений.

Остановимся и здесь на способе выделения действительных решений в случае комплексности корней λ_k. Пусть комплексный корень $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ имеет кратность m. Тогда, как мы знаем, существует комплексно-сопряженный корень $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ той же кратности. Корню λ_1 соответствуют решения вида:

$$e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), xe^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x).$$

Корню λ_2 соответствуют решения

$$e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x), xe^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Всего таких решений $2m$. Из них почленным сложением и вычитанием, т.е. невырожденным преобразованием, можно получить следующие $2m$ линейно независимых действительных решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}x\cos\beta x, \dots, e^{\alpha x}x^{m-1}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, e^{\alpha x}x\sin\beta x, \dots, e^{\alpha x}x^{m-1}\sin\beta x.$$

Понятие квазиполинома.

Функция вида $P(x)\,e^{\lambda x}$, где $P(x)$ - полином, а λ - некоторая, вообще говоря, комплексная постоянная, носит название *квазиполинома*. Отметим основные свойства квазиполиномов.

1. Сумма двух квазиполиномов с одинаковыми показательными функциями есть снова квазиполином:

$$P(x)\,e^{\lambda x} + Q(x)\,e^{\lambda x} = R(x)\,e^{\lambda x}.$$

2. Произведение двух квазиполиномов дает снова квазиполином:

$$P(x)\,e^{\lambda x}\cdot Q(x)\,e^{\mu x} = R(x)\,e^{(\lambda+\mu)x}.$$

3. Производная от квазиполинома дает снова квазиполином:

$$\left[P(x)\,e^{\lambda x}\right]' = \left[\lambda P(x) + P'(x)\right]e^{\lambda x} = Q(x)\,e^{\lambda x}.$$

4. После действия операторного многочлена на квазиполином получается снова квазиполином:

$$M(D)\,P(x)\,e^{\lambda x} = e^{\lambda x}M(D+\lambda)\,P(x) = R(x)\,e^{\lambda x}.$$

Исследуем, как действует операторный многочлен $M(D)$ на показательную и тригонометрические функции.

$$M(D)\,e^{\lambda x} = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l}D^l e^{\lambda x} = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l}\lambda^l e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\sum_{l=0}^{n} a_{n-l}\lambda^l = e^{\lambda x}M(\lambda).$$

Итак,

$$M(D)\,e^{\lambda x} = M(\lambda)\,e^{\lambda x}. \tag{5}$$

Далее.

$$M\left(D^2\right)\sin\beta x = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l}D^{2l}\sin\beta x = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l}D^{2l-2}\left(-\beta^2\right)\sin\beta x =$$

$$= \sin\beta x\sum_{l=0}^{n} a_{n-l}\left(-\beta^2\right)^l = M\left(-\beta^2\right)\sin\beta x.$$

В итоге, получили еще одну формулу

$$M\left(D^2\right)\sin\beta x = M\left(-\beta^2\right)\sin\beta x. \tag{6}$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$M\left(D^2\right)\cos\beta x = M\left(-\beta^2\right)\cos\beta x. \tag{7}$$

ЛЕКЦИЯ 16

Решение линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и квазиполиномом в правой части.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с квазиполиномом в правой части

$$M\left(D\right)y=e^{\mu x}P_r\left(x\right). \tag{1}$$

Здесь μ, вообще говоря, некоторое комплексное число, а коэффициенты многочлена $P_r\left(x\right)$ действительны.

$$P_r\left(x\right)=b_0x^r+b_1x^{r-1}+\ldots+b_{r-1}x+b_r=b_0x^r+P_{r-1}\left(x\right)$$

Теорема. Уравнение (1) имеет частное решение вида

$$y=x^me^{\mu x}Q_r\left(x\right), \tag{2}$$

где $Q_r\left(x\right)$ - многочлен той же степени, что и $P_r\left(x\right)$:

$$Q_r\left(x\right)=c_0x^r+c_1x^{r-1}+\ldots+c_{r-1}x+c_r=c_0x^r+Q_{r-1}\left(x\right).$$

Если μ - не корень характеристического многочлена, т.е. $M\left(\mu\right)\neq 0$, то $m=0$; если μ - корень характеристического многочлена, т.е. $M\left(\mu\right)=0$, то m - его кратность.

Доказательство: докажем, что (2) - решение уравнения (1). Рассмотрим равенство

$$M\left(D\right)x^me^{\mu x}Q_r\left(x\right)=e^{\mu x}P_r\left(x\right).$$

Применим в левой части формулу смещения

$$e^{\mu x}M\left(D+\mu\right)x^mQ_r\left(x\right)=e^{\mu x}P_r\left(x\right)$$

и сократим на $e^{\mu x}$:

$$M\left(D+\mu\right)x^mQ_r\left(x\right)=P_r\left(x\right). \tag{3}$$

Теперь нам осталось показать, что можно всегда подобрать коэффициенты многочлена $Q_r\left(x\right)$ $c_0,c_1,\ldots,c_r$ так, чтобы выполнялось равенство(3).

Поскольку μ - m-кратный корень многочлена $M\left(\lambda\right)$: $M\left(\mu\right)=0$, операторный многочлен $M\left(D\right)$ допускает представление в виде

$$M\left(D\right)=\left(D-\mu\right)^mN\left(D\right), \tag{4}$$

где $N\left(\mu\right)\neq 0$ ($m=0$, если μ - не корень $M\left(\lambda\right)$). Подставляя (4) в (3), находим:

$$N\left(D+\mu\right)D^mx^mQ_r\left(x\right)=P_r\left(x\right)$$

или

$$N\left(D+\mu\right)D^{m}x^{m}\left[c_0x^r+Q_{r-1}\left(x\right)\right]=b_0x^r+P_{r-1}\left(x\right). \tag{5}$$

Представим оператор $N\left(D+\mu\right)$ в виде

$$N\left(D+\mu\right)=N\left(\mu\right)+DN_1\left(D\right).$$

Тогда,

$$c_0N\left(\mu\right)D^{m}x^{m+r}+c_0N_1\left(D\right)D^{m+1}x^{m+r}+N\left(D+\mu\right)D^{m}x^{m}Q_{r-1}\left(x\right)=b_0x^r+P_{r-1}\left(x\right). \tag{6}$$

Определим старший полиномиальный член слева и приравняем его подобному справа в силу произвольности x:

$$c_0N\left(\mu\right)D^{m}x^{m+r}=b_0x^r.$$

Поскольку $N\left(\mu\right)\neq 0$, то коэффициент c_0 находится однозначно

$$c_0=\frac{b_0\cdot r!}{N\left(\mu\right)\cdot\left(m+r\right)!}.$$

В результате уравнение (6) примет вид:

$$N\left(D+\mu\right)D^{m}x^{m}Q_{r-1}\left(x\right)=P_{r-1}\left(x\right)-\frac{rb_0}{N\left(\mu\right)}N_1\left(D\right)x^{r-1}. \tag{7}$$

Уравнения (5) и (7) имеют одинаковую структуру, но в (7) степень полинома справа стала меньше на единицу. Поэтому, аналогичным образом найдем c_1. И т.д. Аналогично можно однозначно найти остальные коэффициенты $c_2,\ldots,c_r$. Таким образом, решение вида (2) уравнения (1) существует. $\boxed{*}$

Пример. Рассмотрим некоторые примеры.

1. Дано неоднородное уравнение второго порядка:

$$y''-2y'+y=xe^x.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2-2\lambda+1=0.$$

Оно имеет один двукратный корень $\lambda=1$, т.е. $m=2$. Из правой части уравнения определяем значение $\mu=1$. Оно совпадает с корнем характеристического многочлена, поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$y=x^2e^x\left(c_0x+c_1\right),$$

где коэффициенты c_0,c_1 неизвестны. Для их определения подставим решение в исходное уравнение и применим формулу сдвига:

$$M\left(D\right)y=\left(D-1\right)^2x^2\left(c_0x+c_1\right)=e^xD^2\left(c_0x^3+c_1x^2\right)=e^x\left(6c_0x+2c_1\right)=xe^x.$$

Отсюда, пользуясь произвольностью x, определяем коэффициенты

$$c_0 = \frac{1}{6}, \qquad c_1 = 0.$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения таково:

$$y = \frac{1}{6}x^3 e^x.$$

2. Рассмотрим уравнение математического маятника, находящегося под действием периодической силы:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = A \sin \nu t,$$

где $\ddot{y}$ - вторая производная по времени t. Из характеристического уравнения $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ определяем корни $\lambda_1 = i\omega, \quad \lambda_2 = -i\omega$. Представим $\sin \nu t$ по формуле Эйлера

$$\sin \nu t = \frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2i},$$

откуда следует, что $\mu = i\nu$ и $\mu = -i\nu$.

Проанализируем вначале ситуацию, когда $\nu \neq \omega$ (нерезонансный случай). Тогда $\mu \neq \lambda_1, \lambda_2$, и вынужденное решение записывается в виде

$$y = c_0 e^{i\nu t} + c_1 e^{-i\nu t}$$

или в действительной форме

$$y = a \cos \nu t + b \sin \nu t.$$

Подставляя это решение в уравнение маятника, находим:

$$M\left(D^2\right) y = \left(D^2 + \omega^2\right)(a \cos \nu t + b \sin \nu t) = \left(\omega^2 - \nu^2\right)(a \cos \nu t + b \sin \nu t) = A \sin \nu t.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos \nu t$ и $\sin \nu t$, определяем a и b

$$a = 0, \qquad b = \frac{A}{\omega^2 - \nu^2}.$$

Окончательный вид вынужденного решения таков

$$y = \frac{A}{\omega^2 - \nu^2} \sin \nu t.$$

Пусть теперь $\nu = \omega$. Этот случай в физике называют *резонансом*. Тогда оба μ совпадают с простыми корнями характеристического многочлена, и решение следует искать в виде:

$$y = t\left(a \cos \omega t + b \sin \omega t\right).$$

Для отыскания коэффициентов a и b достаточно рассмотреть действие оператора $(D^2+\omega^2)$ на функцию $te^{i\omega t}$, а затем взять от полученного выражения действительную и мнимую часть.

$$\left(D^2+\omega^2\right)te^{i\omega t}=(D+i\omega)(D-i\omega)e^{i\omega t}t=e^{i\omega t}(D+2i\omega)Dt=2i\omega e^{i\omega t}.$$

В результате,

$$\left(D^2+\omega^2\right)y=\left(D^2+\omega^2\right)(a\cos\omega t+b\sin\omega t)t=-2\omega a\sin\omega t+2\omega b\cos\omega t=A\sin\omega t.$$

Отсюда

$$b=0,\qquad a=-\frac{A}{2\omega}.$$

Окончательно,

$$y=-\frac{At}{2\omega}\cos\omega t.$$

Как видим, с течением времени амплитуда колебаний маятника увеличивается пропорционально t. Говорят, что происходит резонансная раскачка колебаний.

Операторный метод отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами.

Обратный оператор. Запишем исследуемое линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка в операторной форме

$$M(D)\,y=f(x)\,. \tag{8}$$

Если отсюда формально найти y, то получим:

$$y=\frac{1}{M(D)}f(x)\,. \tag{9}$$

Оператор $1/M(D)$, стоящий в (9), называют обратным операторному многочлену $M(D)$ или просто *обратным оператором.* Если мы изучим свойства обратного оператора, то это позволит нам достаточно просто находить частное решение неоднородного уравнения (8).

Свойства $1/M(D)$.

1. Подставляя (9) в (8), мы должны получить тождество, так как (9) - решение уравнения (8). Значит,

$$M(D)\,\frac{1}{M(D)}f(x)\equiv f(x)\,.$$

Поскольку $f(x)$ может быть любой, имеем:

$$M(D)\frac{1}{M(D)} \equiv 1. \tag{10}$$

2. Рассмотрим уравнение

$$M(D)\,y = M(D)\,f(x)\,. \tag{11}$$

Тогда ясно, что $y = f(x)$ является решением данного уравнения, но не единственным. Функции вида $y = y_{00}(x) + f(x)$, где $y_{00}(x)$ - общее решение однородного уравнения $M(D)\,y_{00} = 0$, также являются решениями. Из (11) находим:

$$y = \frac{1}{M(D)}M(D)\,f(x)\,.$$

Значит равенство

$$f(x) = \frac{1}{M(D)}M(D)\,f(x) \tag{12}$$

справедливо с точностью до решения линейного однородного уравнения. Вывод: обратный оператор (9) находит решение уравнения (8) с точностью до решения линейного однородного уравнения.

Из (12) получаем второе свойство, когда прямой и обратный операторы действуют в другом порядке:

$$\frac{1}{M(D)}M(D) = 1. \tag{13}$$

В соответствии с (10), (13) прямой и обратный операторы можно менять местами и сокращать.

3. Рассмотрим уравнение первого порядка

$$Dy = f(x)\,.$$

Отсюда,

$$y' = f(x) \Longrightarrow y = \int f(x)\,dx.$$

С другой стороны,

$$y = \frac{1}{D}f(x)\,.$$

Сопоставление показывает, что оператор $1/D$ является оператором интегрирования:

$$\frac{1}{D} \equiv \int \ldots dx. \tag{14}$$

4. Определим действие умножения произвольного операторного многочлена на обратный оператор:

$$N(D)\frac{1}{M(D)}f(x) \equiv N(D)\left[\frac{1}{M(D)}f(x)\right].$$

Аналогично наоборот

$$\frac{1}{M(D)}N(D)f(x) \equiv \frac{1}{M(D)}\left[N(D)f(x)\right].$$

Докажем, что эти операции обладают переместительным свойством:

$$N(D)\frac{1}{M(D)} = \frac{1}{M(D)}N(D). \qquad (15)$$

Введем обозначение

$$y \equiv N(D)\frac{1}{M(D)}f(x).$$

Тогда,

$$M(D)\,y \equiv M(D)\,N(D)\frac{1}{M(D)}f(x) = N(D)\,M(D)\frac{1}{M(D)}f(x) = N(D)\,f(x).$$

Отсюда

$$y \equiv \frac{1}{M(D)}N(D)f(x) = N(D)\frac{1}{M(D)}f(x).$$

Что и требовалось доказать.

5. Справедливо еще одно равенство для обратного оператора

$$\frac{1}{M(D)}\left[f_1(x)+f_2(x)\right] = \frac{1}{M(D)}f_1(x) + \frac{1}{M(D)}f_2(x). \qquad (16)$$

Это равенство следует из принципа суперпозиции для линейного неоднородного уравнения: сумма частных решений неоднородного уравнения с $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в правой части дает частное решение неоднородного уравнения с суммарной правой частью $f_1(x)+f_2(x)$.

6. Определение сложения обратных операторов

$$\left[\frac{1}{M(D)}+\frac{1}{N(D)}\right]f(x) = \frac{1}{M(D)}f(x) + \frac{1}{N(D)}f(x).$$

Они складываются по типу дробей. Умножение для обратных операторов определяют как

$$\left(\frac{1}{M(D)}\cdot\frac{1}{N(D)}\right)f(x) = \frac{1}{M(D)}\left[\frac{1}{N(D)}f(x)\right].$$

Проверим, выполняется ли переместительное свойство для обратных операторов.

$$\frac{1}{M(D)}\cdot\frac{1}{N(D)}=\frac{1}{N(D)}\cdot\frac{1}{M(D)}\quad ?$$

Введем обозначение

$$y\equiv\frac{1}{M(D)}\cdot\frac{1}{N(D)}f(x).$$

Тогда,

$$M(D)\,y\equiv\frac{1}{N(D)}f(x)\Longrightarrow N(D)\,M(D)\,y\equiv f(x)\Longrightarrow M(D)\,N(D)\,y\equiv f(x)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow N(D)\,y\equiv\frac{1}{M(D)}f(x)\Longrightarrow y\equiv\frac{1}{N(D)}\cdot\frac{1}{M(D)}f(x),$$

и свойство доказано.

Таким образом

$$\frac{1}{M(D)}\cdot\frac{1}{N(D)}=\frac{1}{N(D)}\cdot\frac{1}{M(D)}. \tag{17}$$

7. В силу доказанных равенств на обратный оператор можно распространить все свойства алгебраических дробей. В частности, операторная дробь как и алгебраическая должна раскладываться на простейшие дроби. Пусть характеристический многочлен $M(\lambda)$ имеет корни: λ_1 кратности m_1;...; λ_k кратности m_k. Тогда,

$$\frac{1}{M(\lambda)}=\frac{A_{11}}{\lambda-\lambda_1}+\ldots+\frac{A_{1m_1}}{(\lambda-\lambda_1)^{m_1}}+\ldots+\frac{A_{k1}}{\lambda-\lambda_k}+\ldots+\frac{A_{km_k}}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}}.$$

В результате,

$$\frac{1}{M(D)}=\sum_{s=1}^{k}\sum_{r=1}^{m_s}\frac{A_{sr}}{(D-\lambda_s)^r}. \tag{18}$$

Важное соотношение (18) позволяет свести действие обратного оператора к сумме действий простейших операторов.

ЛЕКЦИЯ 17

Действие обратного оператора на простейшие функции.

1. Действие обратного оператора на показательную функцию

$$\frac{1}{M(D)}e^{\lambda x} = \frac{e^{\lambda x}}{M(\lambda)}, \qquad \text{если } M(\lambda) \neq 0.$$

В самом деле.

$$e^{\lambda x} = \frac{1}{M(D)}M(D)\,e^{\lambda x} = \frac{1}{M(D)}e^{\lambda x}M(\lambda).$$

И если $M(\lambda) \neq 0$, то

$$\frac{e^{\lambda x}}{M(\lambda)} = \frac{1}{M(D)}e^{\lambda x}.$$

2. Действие обратного оператора на тригонометрические функции

$$\frac{1}{M(D^2)}\sin\beta x = \frac{\sin\beta x}{M\left(-\beta^2\right)}, \qquad \text{если } M\left(-\beta^2\right) \neq 0.$$

$$\frac{1}{M(D^2)}\cos\beta x = \frac{\cos\beta x}{M\left(-\beta^2\right)}, \qquad \text{если } M\left(-\beta^2\right) \neq 0.$$

Формулы доказываются аналогично.

3. Действие обратного оператора на полином

$$\frac{1}{M(D)}P_r(x) = ?$$

Здесь $P_r(x)$ - многочлен степени r:

$$P_r(x) = b_0x^r + b_1x^{r-1} + \ldots + b_{r-1}x + b_r.$$

Разделим уголком 1 на операторный многочлен $M(D) = a_n + a_{n-1}D + \ldots + a_1D^{n-1} + D^n$, причем деление продолжаем до тех пор, пока в частном не получится многочлен по D степени r:

$$Q_r(D) = c_0 + c_1D + \ldots + c_{r-1}D^{r-1} + c_rD^r.$$

В остатке имеем некоторый операторный многочлен

$$R(D) = c_{r+1}D^{r+1} + \ldots + c_{r+n}D^{r+n}.$$

В результате,

$$\frac{1}{M(D)} = Q_r(D) + \frac{R(D)}{M(D)} \Longrightarrow 1 = Q_r(D)\,M(D) + R(D).$$

Это означает, что

$$[Q_r(D)\,M(D)+R(D)]\,P_r(x)=P_r(x)\,.$$

Если продифференцировать полином $P_r(x)$ более r раз, то получим нуль. Следовательно, $R(D)\,P_r(x)\equiv 0$, и тогда

$$Q_r(D)\,M(D)\,P_r(x)=P_r(x)\Longrightarrow M(D)\,Q_r(D)\,P_r(x)=P_r(x)\,.$$

Отсюда окончательно

$$\frac{1}{M(D)}P_r(x)=Q_r(D)\,P_r(x)\,.$$

Таким образом, действие обратного оператора на полином эквивалентно действию некоторого прямого оператора.

4. Формула смещения для обратного оператора.

Докажем справедливость для обратного оператора той же формулы смещения, что и для прямого оператора, т.е.

$$\frac{1}{M(D)}e^{\lambda x}f(x)=e^{\lambda x}\frac{1}{M(D+\lambda)}f(x)\,. \tag{1}$$

Введем обозначение

$$y=e^{\lambda x}\frac{1}{M(D+\lambda)}f(x)\,.$$

Тогда,

$$M(D)\,y=M(D)\,e^{\lambda x}\frac{1}{M(D+\lambda)}f(x)=e^{\lambda x}M(D+\lambda)\,\frac{1}{M(D+\lambda)}f(x)=e^{\lambda x}f(x)\,.$$

Отсюда,

$$y=\frac{1}{M(D)}e^{\lambda x}f(x)\,,$$

и формула смещения для обратного оператора доказана.

Полученные формулы позволяют легко находить частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с квазиполиномом в правой части операторным методом.

Примеры отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения с квазиполиномом в правой части с помощью обратного оператора.

1. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$y''+4y=e^x.$$

Вводя оператор дифференцирования, находим:

$$y = \frac{1}{D^2+4}e^x = \frac{1}{1^2+4} = \frac{1}{5}e^x.$$

2. Определим частное решение уравнения четвертого порядка

$$y^{IV} + y = 2\cos 3x.$$

Аналогичным образом

$$y = \frac{1}{D^4+1} 2\cos 3x = 2\cos 3x \frac{1}{\left(-3^2\right)^2+1} = \frac{1}{41}\cos 3x.$$

3. Пусть теперь в правой части уравнения второго порядка стоит квазиполином

$$y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x}.$$

Тогда,

$$y = \frac{1}{D^2-4D+4}x^2e^{2x} = \frac{1}{\left(D-2\right)^2}x^2e^{2x} = e^{2x}\frac{1}{D^2}x^2 = \frac{x^4}{12}e^{2x}.$$

4. Рассмотрим уравнение третьего порядка с тригонометрической функцией в правой части

$$y''' - y = \sin x.$$

Запишем y через обратный оператор

$$y = \frac{1}{D^3-1}\sin x$$

и применим вспомогательный прием. Домножим и числитель и знаменатель на операторный многочлен, так чтобы обратный оператор стал четным по D.

$$y = \left(D^3+1\right)\frac{1}{D^6-1}\sin x = \left(D^3+1\right)\sin x \frac{1}{\left(-1^2\right)^3-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\cos x + \sin x\right) = \frac{1}{2}\left(\cos x - \sin x\right).$$

5. Пусть в правой части уравнения стоит только полином

$$y'' + y = x^2 - x + 2.$$

Тогда,

$$y = \frac{1}{D^2+1}\left(x^2 - x + 2\right).$$

Используя известное разложение

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots\,,$$

находим:

$$y = \left(1 - D^2 + D^4 - D^6 + \dots\right)\left(x^2 - x + 2\right) = x^2 - x + 2 - D^2\left(x^2 - x + 2\right) = x^2 - x.$$

6. Рассмотрим, наконец, пример на применение формулы смещения для обратного оператора

$$y'' + y = x\cos x.$$

Будем решать вспомогательное дифференциальное уравнение

$$\tilde{y}'' + \tilde{y} = xe^{ix}.$$

Решение данного уравнения является комплексным, причем $y = \operatorname{Re}\tilde{y}$. Для вспомогательного уравнения имеем:

$$\tilde{y} = \frac{1}{D^2+1}xe^{ix} = e^{ix}\frac{1}{(D+i)^2+1}x = e^{ix}\frac{1}{D^2+2Di}x = e^{ix}\frac{1}{D}\cdot\frac{1}{D+2i}x =$$

$$= e^{ix}\frac{1}{D}\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1+D/2i}x = e^{ix}\frac{1}{D}\left[\frac{1}{2i} - \frac{D}{(2i)^2}\right]x = e^{ix}\frac{1}{D}\left(\frac{x}{2i} + \frac{1}{4}\right) = e^{ix}\left(\frac{x^2}{4i} + \frac{x}{4}\right) =$$

$$= (\cos x + i\sin x)\left(\frac{x^2}{4i} + \frac{x}{4}\right) = \left(\frac{x^2}{4}\sin x + \frac{x}{4}\cos x\right) + i\left(\frac{x}{4}\sin x - \frac{x^2}{4}\cos x\right).$$

Отделяя действительную часть, получаем искомое решение

$$y = \frac{x}{4}\left(\cos x + x\sin x\right).$$

Формула для частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с произвольной правой частью. Функция Грина.

Возникает вопрос: можно ли найти частное решение линейного неоднородного уравнения с произвольной правой частью с помощью обратного оператора ? Оказывается, это можно сделать, если воспользоваться разложением обратного оператора на простейшие дроби

$$\frac{1}{M(D)} = \sum_{s=1}^{k}\sum_{r=1}^{m_s}\frac{A_{sr}}{(D-\lambda_s)^r}$$

и формулой смещения (1). Подставим данное разложение в формулу для частного решения линейного неоднородного уравнения с произвольной правой частью:

$$y = \frac{1}{M(D)} f(x) = \sum_{s=1}^{k} \sum_{r=1}^{m_s} \frac{A_{sr}}{(D-\lambda_s)^r} f(x). \tag{2}$$

Попытаемся свести действие простейшей операторной дроби на функцию $f(x)$

$$\frac{1}{(D-\lambda)^r} f(x)$$

к интегрированию, добавив специальные множители и применив формулу смещения. В самом деле,

$$\frac{1}{(D-\lambda)^r} f(x) = \frac{1}{(D-\lambda)^r} e^{\lambda x} f(x) e^{-\lambda x} = e^{\lambda x} \frac{1}{D^r} e^{-\lambda x} f(x) =$$

$$= e^{\lambda x} \underbrace{\int dx \int dx \ldots \int dx}_{r} \cdot e^{-\lambda x} f(x).$$

Поскольку мы ищем любое частное решение линейного неоднородного уравнения, расставим пределы у повторных интегралов так, как нам удобно. А именно, по убыванию аргументов

$$\frac{1}{(D-\lambda)^r} f(x) = e^{\lambda x} \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{r-1}} e^{-\lambda x_r} f(x_r)\, dx_r.$$

Изменяя порядок интегрирования на обратный (по возрастанию аргументов) и вычисляя $(r-1)$ интегралов, придем к

$$\frac{1}{(D-\lambda)^r} f(x) = e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda x_r} f(x_r)\, dx_r \int_{x_r}^{x} dx_{r-1} \ldots \int_{x_2}^{x} dx_1 =$$

$$= e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda x_r} f(x_r) \frac{(x-x_r)^{r-1}}{(r-1)!} dx_r.$$

Итак, окончательно имеем:

$$\frac{1}{(D-\lambda)^r} f(x) = \int_0^x e^{\lambda(x-t)} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} f(t)\, dt. \tag{3}$$

Подставляя выражение (3) в (2), получаем:

$$y = \sum_{s=1}^{k} \sum_{r=1}^{m_s} A_{sr} \int\limits_0^x e^{\lambda_s (x-t)} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} f(t)\, dt = \int\limits_0^x \left[\sum_{s=1}^{k} \sum_{r=1}^{m_s} A_{sr} e^{\lambda_s (x-t)} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} \right] f(t)\, dt.$$

Отсюда видно, что частное решение линейного неоднородного уравнения с произвольной правой частью представимо в виде квадратуры

$$y = \int\limits_0^x G(x-t)\, f(t)\, dt, \tag{4}$$

где функция

$$G(x) = \sum_{s=1}^{k} \sum_{r=1}^{m_s} A_{sr} e^{\lambda_s x} \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \tag{5}$$

носит название *функции Грина*.

ЛЕКЦИЯ 18

7. Уравнение Эйлера.

Существует целый класс линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которые сводятся к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. Рассмотрим неоднородное линейное уравнение n-го порядка следующего вида:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x). \tag{1}$$

В уравнении (1), называемом *уравнением Эйлера*, числа $a_1, \ldots, a_n$ - действительные постоянные. Точка $x = 0$ является особой точкой уравнения Эйлера.

Проанализируем сначала однородное уравнение

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0. \tag{2}$$

Сделаем замену аргумента $x = e^t$. Тогда,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} e^{-t}\right)\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) e^{-2t} \qquad \text{и т.д.}$$

$$\frac{d^ky}{dx^k} = \left(\frac{d^ky}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}} + \ldots + \alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\right) e^{-kt},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ - некоторые действительные постоянные. Отсюда следует, что

$$x^k y^{(k)} = e^{kt} y^{(k)} = \frac{d^ky}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}} + \ldots + \alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}. \tag{3}$$

Подставляя выражения (3) в уравнение (2), придем к линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^ny}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_{n-1}\frac{dy}{dt} + b_n y = 0. \tag{4}$$

Методы решения уравнения (4) хорошо известны. Его решение ищут в виде $y = ce^{\lambda t}$. Это означает, при решении однородного уравнения (2) нет никакой необходимости проводить замену переменного, а следует сразу искать его решение в виде $y = ce^{\lambda t} = c\left(e^t\right)^\lambda = cx^\lambda$. Подставляя $y = cx^\lambda$ в (2), имеем:

$$cx^n \lambda(\lambda - 1)\ldots(\lambda - n + 1) x^{\lambda - n} + ca_1 x^{n-1}\lambda(\lambda - 1)\ldots(\lambda - n + 2) x^{\lambda - n + 1} +$$

$$+ \ldots + ca_{n-1} x \lambda x^{\lambda - 1} + ca_n x^\lambda = 0.$$

Сокращая обе части уравнения на cx^λ, получаем характеристическое уравнение для определения параметра λ:

$$\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)+a_1\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+2)+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0. \qquad (5)$$

Рассмотрим различные ситуации для корней уравнения (5).

1. Если корни характеристического уравнения (5) действительные и простые, то тогда им соответствует фундаментальная система решений вида

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t} \quad \text{или} \quad x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots, x^{\lambda_n}.$$

2. Если среди простых корней есть комплексно-сопряженные: $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$, то этим корням, как известно, соответствуют действительные решения

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t \quad \text{или} \quad x^\alpha\cos(\beta\ln x), x^\alpha\sin(\beta\ln x).$$

3. Пусть все корни действительны, но среди них есть кратные. Если, например, корень λ имеет кратность m, то ему соответствуют m решений вида

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda t} \quad \text{или} \quad x^\lambda, x^\lambda\ln x, \ldots, x^\lambda(\ln x)^{m-1}.$$

4. Наконец, если среди корней есть комплексно-сопряженные кратные корни: $\lambda_1=\alpha+i\beta$ кратности m и $\lambda_2=\alpha-i\beta$ той же кратности m, то этой паре соответствует серия $2m$ действительных решений

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, \ldots, t^{m-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t, te^{\alpha t}\sin\beta t, \ldots, t^{m-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$$

или

$$x^\alpha\cos(\beta\ln x), x^\alpha(\ln x)\cos(\beta\ln x), \ldots, x^\alpha(\ln x)^{m-1}\cos(\beta\ln x),$$

$$x^\alpha\sin(\beta\ln x), x^\alpha(\ln x)\sin(\beta\ln x), \ldots, x^\alpha(\ln x)^{m-1}\sin(\beta\ln x).$$

Способ нахождения общего решения уравнения Эйлера продемонстрируем на примере.

Пример.

Найдем общее решение следующего уравнения Эйлера

$$x^2y''+2xy'-6y=18x^2\ln x.$$

Составим характеристическое уравнение для λ, подставив решение в виде $y=x^\lambda$.

$$\lambda(\lambda-1)+2\lambda-6=0 \Longrightarrow \lambda^2+\lambda-6=0.$$

Отсюда определяем корни: $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-3$. Следовательно, общее решение однородного уравнения таково:

$$y_{00}=c_1x^2+c_2x^{-3}.$$

По виду получившегося характеристического уравнения: $\lambda^2+\lambda-6=0$ легко восстановить дифференциальное уравнение для функции $y=y(t)$, получающегося после замены $x=e^t$. Достаточно заменить все λ^k на $y_{t^k}^{(k)}$ и подставить $x=e^t$ в правую часть исходного уравнения. В результате найдем:

$$y_{tt}^{''}+y_t'-6y=18te^{2t}.$$

Далее находим частное решение этого уравнения операторным методом.

$$y=\frac{1}{D^2+D-6}18te^{2t}=18\frac{1}{D-2}\cdot\frac{1}{D+3}e^{2t}t=18e^{2t}\frac{1}{D}\cdot\frac{1}{D+5}t=$$

$$=\frac{18}{5}e^{2t}\frac{1}{D}\cdot\frac{1}{1+D/5}t=\frac{18}{5}e^{2t}\frac{1}{D}\left(1-\frac{D}{5}\right)t=\frac{18}{5}e^{2t}\frac{1}{D}\left(t-\frac{1}{5}\right)=$$

$$=\frac{18}{5}e^{2t}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t}{5}\right)=\frac{9}{5}te^{2t}\left(t-\frac{2}{5}\right).$$

Подставляя в это решение $t=\ln x$ и складывая с полученным ранее общим решением, окончательно получаем:

$$y=c_1x^2+c_2\frac{1}{x^3}+\frac{9}{5}x^2\left(\ln x-\frac{2}{5}\right)\ln x.$$

Заметим, что к уравнению Эйлера приводятся и уравнения вида

$$(\beta x+\gamma)^n y^{(n)}+a_1(\beta x+\gamma)^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(\beta x+\gamma)y'+a_ny=f(x),$$

если применить замену $\beta x+\gamma=e^t$.

8. Интегрирование однородных линейных дифференциальных уравнений с помощью рядов.

В физике очень часто приходится решать линейные дифференциальные уравнения второго порядка, которые не подпадают ни под один из рассмотренных случаев. Пусть имеется уравнение вида

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0, \qquad (6)$$

где функции $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ либо многочлены, либо степенные ряды. Существуют две теоремы о виде фундаментальных решений уравнения (6).

Теорема 1. Если в какой-либо точке $a_0(x_0)\neq 0$, то уравнение (6) имеет два линейно независимых решения в форме степенного ряда:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x-x_0)^n. \qquad (7)$$

Без доказательства.

Теорема 2. Если x_0 является нулем функции $a_0(x_0)$ порядка s: $a_0(x_0) = 0$, функция $a_1(x)$ имеет в точке x_0 нуль порядка ни ниже $(s-1)$ и функция $a_2(x)$ имеет в точке x_0 нуль порядка ни ниже $(s-2)$, то уравнение (6) имеет, по крайней мере, одно решение в виде *обобщенного степенного ряда*:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^{r+n}, \tag{8}$$

где r - некоторое действительное число (не обязательно целое).

Без доказательства.

Примеры.

1. **Уравнение Эйри.**

Рассмотрим уравнение

$$y'' - xy = 0, \tag{9}$$

которое называется *уравнением Эйри* и встречается в целом ряде задач оптики, акустики, квантовой механики. Поскольку $a_0(x) = 1$, то можно применить первую теорему, т.е. искать решение в виде степенного ряда с центром в точке $x = 0$:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), находим:

$$\sum_{k=2}^{\infty} A_k k (k-1) x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{k+1} = 0.$$

Выделим в первой сумме слагаемое с $k = 2$, а второй произведем замену индекса суммирования $k + 1 = m - 2$ или $k = m - 3$. В результате получим

$$2A_2 + \sum_{k=3}^{\infty} A_k k (k-1) x^{k-2} - \sum_{m=3}^{\infty} A_{m-3} x^{m-2} = 0$$

или

$$2A_2 + \sum_{k=3}^{\infty} \left[A_k k (k-1) - A_{k-3}\right] x^{k-2} = 0.$$

Поскольку данное равенство справедливо для любых x, приравняем нулю коэффициенты степенного ряда, стоящие при различных степенях x:

$$A_2 = 0, \qquad A_k k (k-1) - A_{k-3} = 0, \quad k = 3, 4, \ldots$$

Отсюда находим рекуррентное соотношение для коэффициентов A_k

$$A_k = \frac{A_{k-3}}{k\,(k-1)}.$$

Полагая в нем $k = 5, 8, 11, \ldots$, получаем:

$$A_5 = \frac{A_2}{5 \cdot 4} = 0, \quad A_8 = \frac{A_5}{8 \cdot 7} = 0, \quad A_{11} = \frac{A_8}{11 \cdot 10} = 0, \ldots, \quad A_{3n-1} = 0.$$

Далее,

$$A_3 = \frac{A_0}{3 \cdot 2}; \quad A_6 = \frac{A_3}{6 \cdot 5} = \frac{A_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}; \quad A_9 = \frac{A_0}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}; \ldots;$$

$$A_{3n} = \frac{A_0}{3n\,(3n-1)\,(3n-3)\,(3n-4)\ldots 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}.$$

Аналогично

$$A_4 = \frac{A_1}{4 \cdot 3}; \quad A_7 = \frac{A_4}{7 \cdot 6} = \frac{A_1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}; \quad A_{10} = \frac{A_1}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}; \ldots;$$

$$A_{3n+1} = \frac{A_1}{(3n+1)\,3n\,(3n-2)\,(3n-3)\ldots 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}.$$

Подставляя эти выражения в (10) и производя перегруппировку членов ряда, придем окончательно к

$$y = A_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3n\,(3n-1)\,(3n-3)\,(3n-4)\ldots 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} \right] +$$

$$+ A_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)\,3n\,(3n-2)\,(3n-3)\ldots 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} \right]. \qquad (11)$$

В формуле (11) A_0 и A_1 - две произвольные постоянные. Значит, мы построили общее решение уравнения (10), где в квадратных скобках записаны два фундаментальных решения уравнения Эйри. Докажем, что полученные ряды абсолютно сходятся на всей числовой оси (**самостоятельно докажите линейную независимость решений !**).

По признаку Даламбера

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{3(n+1)} \cdot 3n\,(3n-1)\ldots 3 \cdot 2}{(3n+3)\,(3n+2)\,3n\,(3n-1)\ldots 3 \cdot 2 \cdot |x|^{3n}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{|x|^3}{(3n+3)\,(3n+2)} = 0 < 1 \qquad \text{для } \forall x \in \Re.$$

Аналогично доказывается сходимость второго ряда.

2. **Уравнение Бесселя.**

При исследовании объектов с круговой симметрией в механике, электродинамике, оптике встречается линейное дифференциальное уравнение вида

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0 \qquad (\nu \in \Re), \tag{12}$$

называемое *уравнением Бесселя.* Точка $x = 0$ является особой точкой этого уравнения. Поскольку функции $a_0(x) = x^2$, $a_1(x) = x$, $a_2(x) = x^2 - \nu^2$, то указанная точка является нулем второго порядка функции $a_0(x)$, нулем первого порядка функции $a_1(x)$, вообще не является нулем функции $a_2(x)$ при $\nu \neq 0$ и нулем второго порядка при $\nu = 0$. Воспользуемся теперь второй теоремой и будем искать решение уравнения (12) в виде обобщенного степенного ряда

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{r+k}, \qquad r \in \Re. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), находим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k (r+k)(r+k-1) x^{r+k} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k (r+k) x^{r+k} - \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{r+k} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{r+k+2} = 0$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(r+k)^2 - \nu^2\right] A_k x^{r+k} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{r+k+2} = 0.$$

Выделим в первой сумме слагаемые с x^r и с x^{r+1}, не содержащиеся во второй сумме, и приравняем к нулю коэффициенты при степенях x. Слагаемое с $k = 0$ дает равенство:

$$\left[r^2 - \nu^2\right] A_0 = 0.$$

Поскольку $A_0 \neq 0$ (в противном случае надо было бы переобозначить r), то:

$$r = \pm\nu. \tag{14}$$

Приравнивание к нулю члена с $k = 1$ приводит к

$$\left[(r+1)^2 - \nu^2\right] A_1 = 0.$$

Отсюда с учетом (14) получаем:

$$(1 \pm 2\nu) A_1 = 0.$$

Далее есть две возможности: либо $A_1 = 0$, либо $\nu = \pm 1/2$.

Остановимся на более общем случае $A_1 = 0$, положив $r = \nu$. Тогда,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left[(\nu + k)^2 - \nu^2\right] A_k x^{\nu+k} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{\nu+k+2} = 0.$$

Заменяя индекс суммирования в первой сумме $k = m + 2$, имеем:

$$\sum_{m=2}^{\infty} \left\{ \left[(\nu + m + 2)^2 - \nu^2\right] A_{m+2} + A_m \right\} x^{\nu+m+2} = 0.$$

Отсюда,

$$A_{m+2} = -\frac{A_m}{2\nu\,(m+2) + (m+2)^2} = -\frac{A_m}{(m+2)\,(m+2+2\nu)}.$$

Поскольку $A_1 = 0$, то все нечетные коэффициенты $A_{2n+1} = 0$. С другой стороны,

$$A_2 = -\frac{A_0}{2^2\,(\nu+1)}; \quad A_4 = -\frac{A_2}{2^2 \cdot 2\,(\nu+2)} = \frac{A_0}{2^4 \cdot 2\,(\nu+1)\,(\nu+2)};$$

$$A_6 = -\frac{A_0}{2^6 \cdot 2 \cdot 3\,(\nu+1)\,(\nu+2)\,(\nu+3)}; \dots ;$$

$$A_{2n} = (-1)^n \, \frac{A_0}{2^{2n} n! \cdot (\nu+1)\,(\nu+2) \dots (\nu+n)}.$$

Используем одну из специальных функций - *гамма-функцию*, определяемую как:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

и обладающую свойствами:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,, \qquad \Gamma(n+1) = n! \text{ ; где } n \text{ - натуральное число.}$$

Гамма-функцию можно трактовать в качестве обобщения факториала на случай не целых x.

Выберем постоянную

$$A_0 = \frac{1}{2^{\nu} \cdot \Gamma(\nu)}.$$

Тогда,

$$A_{2n} = (-1)^n \, \frac{1}{2^{2n+\nu} n! \cdot \Gamma(\nu+n+1)},$$

и из (13) получаем:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \frac{1}{n! \cdot \Gamma(\nu + n + 1)}. \tag{15}$$

Функция (15) называется функцией Бесселя первого рода n-го порядка и обозначается как $J_\nu(x)$.

Если взять $r = -\nu$, то получим второе решение

$$y_2 = J_{-\nu}(x).$$

Таким образом, общее решение уравнения Бесселя (12) записывается в виде:

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x).$$

В случае целого ν $(\nu = m)$ из (15) имеем:

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} \frac{1}{n!\,(m+n)!}.$$

Функции $J_m(x)$ и $J_{-m}(x)$ оказываются уже линейно зависимыми:

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x). \tag{16}$$

Здесь вторым линейно независимым решением является функция Бесселя 2-го рода

$$Y_m(x) = \lim_{\nu \to m} \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}.$$

Из формулы Лиувилля для уравнения второго порядка можно получить другое представление этой функции:

$$Y_m(x) = J_m(x) \int \frac{dx}{x J_m^2(x)}.$$

На самостоятельную работу: доказать соотношение (16) и разобрать случай $\nu = \pm 1/2$.

ЛЕКЦИЯ 19

IV. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

1. Эквивалентность системы дифференциальных уравнений одному уравнению n-го порядка.

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1, \ldots, y_n\right),$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \tag{1}$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n\left(x, y_1, \ldots, y_n\right).$$

Предположим, что функции $f_1, \ldots, f_n$ дифференцируемы неограниченное число раз. Общим методом решения системы (1) является *метод исключения.* Докажем теорему.

Теорема. Об эквивалентности нормальной системы одному дифференциальному уравнению.

Нормальная система n дифференциальных уравнений эквивалентна одному дифференциальному уравнению n-го порядка при условии дифференцируемости правых частей $f_1, \ldots, f_n$.

Доказательство: будем исключать переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и строить дифференциальное уравнение относительно функции y_1. Как известно, решением системы (1) является система функций: $y_1 = \varphi_1\left(x\right), \ldots, y_n = \varphi_n\left(x\right)$. Подставляя ее в (1), получаем тождества:

$$\frac{d\varphi_1\left(x\right)}{dx} \equiv f_1\left(x, \varphi_1\left(x\right), \ldots, \varphi_n\left(x\right)\right) = \tilde{f}_1,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \tag{2}$$

$$\frac{d\varphi_n\left(x\right)}{dx} \equiv f_n\left(x, \varphi_1\left(x\right), \ldots, \varphi_n\left(x\right)\right) = \tilde{f}_n.$$

Продифференцируем по x первое тождество системы (2)

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} = \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y_k} \cdot \frac{d\varphi_k}{dx} = \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y_k} \cdot \tilde{f}_k \equiv F_2\left(x, \varphi_1\left(x\right), \ldots, \varphi_n\left(x\right)\right) = \tilde{F}_2.$$

Далее находим еще одну производную

$$\frac{d^3\varphi_1}{dx^3} = \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial y_k} \cdot \tilde{f}_k \equiv F_3\left(x, \varphi_1\left(x\right), \ldots, \varphi_n\left(x\right)\right) = \tilde{F}_3.$$

И т.д. Наконец,

$$\frac{d^n\varphi_1}{dx^n} = \frac{\partial \tilde{F}_{n-1}}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \tilde{F}_{n-1}}{\partial y_k} \cdot \tilde{f}_k \equiv F_n\left(x, \varphi_1\left(x\right), \ldots, \varphi_n\left(x\right)\right) = \tilde{F}_n.$$

В итоге мы получили новую систему тождеств. По образцу этих тождеств составим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} = F_{n-1}\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right). \end{gathered} \tag{3}$$

Добавим к системе (3) отдельное уравнение:

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right). \tag{4}$$

Будем рассматривать переменные $y_2, y_3, \ldots, y_n$ системы (3) в качестве неизвестных. Тогда систему (3) можно разрешить относительно этих переменных, если якобиан

$$\frac{D\left(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1}\right)}{D\left(y_2, y_3, \ldots, y_n\right)} \neq 0. \tag{5}$$

Если условие (5) выполняется, то получим:

$$\begin{gathered} y_2 = \psi_2\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n = \psi_n\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right). \end{gathered} \tag{6}$$

Учитывая, что функции $\psi_2, \ldots, \psi_n$ являются решениями системы (3), и ранее установленные тождества (2), имеем:

$$\begin{gathered}\psi_2\left(x, \varphi_1(x), \varphi_1'(x), \ldots, \varphi_1^{(n-1)}(x)\right) \equiv \varphi_2(x), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \psi_n\left(x, \varphi_1(x), \varphi_1'(x), \ldots, \varphi_1^{(n-1)}(x)\right) \equiv \varphi_n(x).\end{gathered} \tag{7}$$

Подставляя выражения (6) в уравнение (4), придем окончательно к

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = \Phi\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right). \tag{8}$$

Составленное уравнение (8) и будет искомым уравнением. Проверим, что функция $\varphi_1(x)$ является решением уравнения (8). Подстановка $\varphi_1(x)$ в левую и правую части уравнения (8) с учетом тождеств (7) дает:

$$\frac{d^n \varphi_1}{dx^n} = F_n(x, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \tilde{F}_n,$$

что совпадает с последним из ранее полученных тождеств.

Проведем теперь доказательство в обратную сторону. Покажем, что если известно какое-либо решение уравнения (8), то можно без дополнительного интегрирования получить решение нормальной системы (1).

Пусть $y_1 = \psi_1(x)$ - решение дифференциального уравнения (8). Для того, чтобы построить решение системы необходимо найти функции $y_2, y_3, \ldots, y_n$. Составим систему

$$\begin{gathered}\frac{d\psi_1}{dx} = f_1(x, \psi_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{d^2\psi_1}{dx^2} = F_2(x, \psi_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \frac{d^{n-1}\psi_1}{dx^{n-1}} = F_{n-1}(x, \psi_1, y_2, \ldots, y_n).\end{gathered} \tag{9}$$

Эта алгебраическая система система уравнений с неизвестными $y_2, \ldots, y_n$ очень похожа на (3). В силу условия (5) эта система разрешима относительно $y_2, \ldots, y_n$, и решением ее будут функции $y_2 = \psi_2(x), \ldots, y_n = \psi_n(x)$. Однако неизвестно, является ли найденная система функций вместе с $\psi_1(x)$ решением нормальной системы (1) ?

Если $\psi_2, \ldots , \psi_n$ подставить в (9), то получим тождества:

$$\frac{d\psi_1}{dx} \equiv f_1 \left(x, \psi_1, \psi_2, \ldots , \psi_n \right),$$

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} \equiv F_2 \left(x, \psi_1, \psi_2, \ldots , \psi_n \right), \tag{10}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\frac{d^{n-1}\psi_1}{dx^{n-1}} \equiv F_{n-1} \left(x, \psi_1, \psi_2, \ldots , \psi_n \right).$$

В то же время, поскольку функция $\psi_1 (x)$ является решением уравнения (8), имеет место тождество:

$$\frac{d^n\psi_1}{dx^n} \equiv F_n \left(x, \psi_1, \psi_2, \ldots , \psi_n \right). \tag{11}$$

Продифференцируем по x обе части первого из тождеств (10):

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} \equiv \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \cdot \frac{d\psi_k}{dx}. \tag{12}$$

Записывая второе из тождеств (10) в развернутой форме, находим:

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} \equiv \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \cdot f_k. \tag{13}$$

Вычитая почленно (13) из (12), имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \left(\frac{d\psi_k}{dx} - f_k \right) \equiv 0.$$

В соответствии с первым из тождеств (10): $d\psi_1/dx = f_1$. Поэтому,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \left(\frac{d\psi_k}{dx} - f_k \right) \equiv 0. \tag{14}$$

Продифференцируем далее по x второе из тождеств (10)

$$\frac{d^3\psi_1}{dx^3} \equiv \frac{\partial F_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial y_k} \cdot \frac{d\psi_k}{dx}$$

и запишем третье тождество в развернутом виде:

$$\frac{d^3\psi_1}{dx^3} \equiv \frac{\partial F_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial y_k} \cdot f_k.$$

Почленное вычитание и учет того, что $d\psi_1/dx = f_1$, дает:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial y_k} \left(\frac{d\psi_k}{dx} - f_k \right) \equiv 0. \tag{15}$$

Аналогичным образом поступаем до $(n-1)$-го тождества. Дифференцирование последнего из тождеств (10) и вычитание из него тождества (11), записанного в развернутой форме, приводит к:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_k} \left(\frac{d\psi_k}{dx} - f_k \right) \equiv 0. \tag{16}$$

В итоге, мы получили систему тождеств (14)-(16), где неизвестными являются разности $(d\psi_k/dx - f_k)$. Определителем этой однородной системы является якобиан (5), отличный от нуля при любом значении x. Следовательно, система (14)-(16) при всех x имеет только нулевое решение, т.е.

$$\frac{d\psi_k}{dx} \equiv f_k, \qquad k = 2, 3, \ldots, n.$$

К тому же $d\psi_1/dx \equiv f_1$. Значит, найденная система функций является решением нормальной системы (1). $\boxed{*}$

Замечание.

В процессе доказательства теоремы использовано условие отличности от нуля якобиана (5). Если якобиан везде равен нулю, то можно попытаться построить уравнение для переменной y_2. И т.д. Может, однако, оказаться, что все якобианы типа (5) относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$ обращаются в нуль. Значит, методом исключения нельзя построить одно дифференциальное уравнение n-го порядка. В этом случае нормальная система (1) распадается на несколько подсистем. Например,

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2), \\
\frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2), \\
\frac{dy_3}{dx} &= f_3(x, y_3, y_4), \\
\frac{dy_4}{dx} &= f_4(x, y_3, y_4).
\end{aligned}$$

Каждую из таких подсистем можно анализировать отдельно, т.е. строить для нее дифференциальное уравнение соответствующего порядка.

2. Линейные системы дифференциальных уравнений.

Линейной системой дифференциальных уравнений называется система уравнений вида:

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)\, y_1 + \ldots + a_{1n}(x)\, y_n + f_1(x)\,,$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \tag{17}$$

$$\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)\, y_1 + \ldots + a_{nn}(x)\, y_n + f_n(x)\,.$$

Входящие в (17) функции $a_{ik}(x)$ и $f_i(x)$ предполагаются непрерывными на отрезке $[a, b]$. Это обеспечивает, как мы видели ранее, выполнение условий теоремы существования и единственности решения в области $a \le x \le b, -\infty < y_1 < \infty, \ldots, -\infty < y_n < \infty$. Таким образом, система (17) имеет единственное решение при любом начальном условии $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$, где $a < x_0 < b, -\infty < y_{10} < \infty, \ldots, -\infty < y_{n0} < \infty$.

Очень часто систему (17) записывают в векторной форме. Если ввести матричную функцию

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

и вектор-функции

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}; \qquad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \cdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

то систему (17) можно переписать как

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\,\vec{y} + \vec{f}(x)\,. \tag{18}$$

Решением системы (18) будет вектор-функция $\vec{y} = \vec{\varphi}(x)$, которая обращает (17) в тождество:

$$\frac{d\vec{\varphi}}{dx} \equiv \mathbf{A}(x)\,\vec{\varphi} + \vec{f}(x)\,. \tag{19}$$

Система (18) называется *однородной*, если $\vec{f} = 0$, т.е. когда она имеет вид:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\,\vec{y}, \tag{20}$$

и *неоднородной*, если $\vec{f} \neq 0$.

ЛЕКЦИЯ 20

Общая теория линейных однородных систем дифференциальных уравнений.

Теорема 1. *О тривиальном решении системы.*

Если решение $\vec{y} = \vec{\varphi}\,(x)$ однородной системы

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \mathbf{A}\,(x)\,\vec{y} \tag{1}$$

обращается в нуль в некоторой точке $x = x_0$, т.е. $\vec{\varphi}\,(x_0) = 0$, то $\vec{\varphi}\,(x) \equiv 0$.

Доказательство: как видно из (1), однородная система имеет тривиальное решение $\vec{y} = 0$. Это решение удовлетворяет нулевым начальным условиям при $\forall x_0$. Тогда в силу теоремы единственности $\vec{\varphi}\,(x)$ должно совпадать с тривиальным решением: $\vec{\varphi}\,(x) \equiv 0$. $\boxed{*}$

Теорема 2. *Принцип суперпозиции.*

Пусть $\vec{\varphi}_1\,(x)\,, \ldots, \vec{\varphi}_s\,(x)$ - решения однородной системы (1). Тогда их линейная комбинация

$$\vec{\psi}\,(x) = \sum_{k=1}^{s} c_k \vec{\varphi}_k\,(x)\,, \qquad c_k \in \Re$$

также является решением однородной системы.

Доказательство: проверим, что вектор-функция $\vec{\psi}\,(x)$ является решением системы (1). Для этого подставим выражение для $\vec{\psi}\,(x)$ в (1) и учтем, что $\vec{\varphi}_k\,(x)$ - решения однородной системы. Тогда,

$$\frac{d\vec{\psi}}{dx} = \sum_{k=1}^{s} c_k \frac{d\vec{\varphi}_k}{dx} \equiv \sum_{k=1}^{s} c_k \mathbf{A}\,(x)\,\vec{\varphi}_k = \mathbf{A}\,(x) \sum_{k=1}^{s} c_k \vec{\varphi}_k = \mathbf{A}\,(x)\,\vec{\psi}. \qquad \boxed{*}$$

Определение. Если имеются вектор-функции $\vec{\varphi}_1\,(x)\,, \ldots, \vec{\varphi}_s\,(x)$, то они называются *линейно независимыми*, если тождество

$$\sum_{k=1}^{s} \alpha_k \vec{\varphi}_k\,(x) \equiv 0$$

имеет место лишь при $\alpha_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, s$. В противном случае они называются *линейно зависимыми.*

Заметим, что если вектор-функции линейно зависимы, то постоянные векторы $\vec{\varphi}_1\,(x_0)\,, \ldots, \vec{\varphi}_s\,(x_0)$ будут также линейно зависимыми. Обратное неверно.

Теорема 3. *О линейной зависимости решений однородной системы.*

Если постоянные векторы $\vec{\varphi}_1\,(x_0)\,, \ldots, \vec{\varphi}_s\,(x_0)$ линейно зависимы, то соответствующие им решения $\vec{\varphi}_1\,(x)\,, \ldots, \vec{\varphi}_s\,(x)$ однородной системы (1) также линейно зависимы.

Доказательство: в силу зависимости постоянных векторов $\vec{\varphi}_1\,(x_0)\,, \ldots, \vec{\varphi}_s\,(x_0)$ существует ненулевая система констант $\{\alpha_i\}$, таких, что

$$\alpha_1 \vec{\varphi}_1\,(x_0) + \ldots + \alpha_s \vec{\varphi}_s\,(x_0) = 0.$$

Построим вспомогательную вектор-функцию

$$\vec{\varphi}(x) = \alpha_1 \vec{\varphi}_1(x) + \ldots + \alpha_s \vec{\varphi}_s(x),$$

где $\vec{\varphi}_k(x)$ - решения системы (1), удовлетворяющие начальным условиям: $(x_0, \vec{\varphi}_k(x_0))$. По предыдущей теореме функция $\vec{\varphi}(x)$ также является решением однородной системы (1), причем $\vec{\varphi}(x_0) = 0$. Тогда в соответствии с теоремой о тривиальном решении $\vec{\varphi}(x) \equiv 0$. $\boxed{*}$

Определение. Система n линейно независимых решений $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ однородной системы (1), где n - порядок системы, называется *фундаментальной системой решений.*

Теорема 4. *О существовании фундаментальной системы решений.*

Однородная система дифференциальных уравнений (1) всегда имеет фундаментальную систему решений.

Доказательство: выберем систему постоянных n-мерных векторов $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$, линейно независимых между собой. Такие векторы всегда существуют: в качестве них, например, можно взять базис n-мерного пространства. Определим вектор-функцию $\vec{\varphi}_k(x)$ как решение однородной системы (1), удовлетворяющее начальному условию $\vec{\varphi}_k(x_0) = \vec{b}_k$. В результате получим систему n решений: $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$. По соответствующей теореме для линейной системы такие решения существуют и являются единственными.

Докажем их линейную независимость методом "от противного". Пусть система $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ линейно зависима. Это означает, что существует ненулевой набор констант $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{\varphi}_k(x) \equiv 0.$$

Но тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{\varphi}_k(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{b}_k = 0,$$

а это означает линейную зависимость системы постоянных векторов $\left\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\right\}$, что невозможно по построению. $\boxed{*}$

Теорема 5. *Структура общего решения линейной однородной системы.*

Общее решение линейной однородной системы (1) имеет вид:

$$\vec{y} = \sum_{k=1}^{n} c_k \vec{\varphi}_k(x), \tag{2}$$

где c_k - некоторые константы, а $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ - фундаментальная система решений.

Доказательство: из теоремы о суперпозиции следует, что (2) является решением однородной системы (1). Убедимся теперь в его общности, т.е. покажем, что любое решение (1), удовлетворяющее заданным произвольным начальным условиям, может быть получено из (2) при соответствующем выборе коэффициентов $c_1, \ldots, c_n$.

Пусть некоторое решение $\vec{\varphi}(x)$ системы (1) удовлетворяет начальному условию $\vec{\varphi}(x_0) = \vec{b}$. В силу фундаментальности системы решений $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ постоянные векторы $\vec{\varphi}_1(x_0), \ldots, \vec{\varphi}_n(x_0)$ являются линейно независимыми и образуют базис n-мерного пространства. Тогда любой вектор, в частности $\vec{b}$, можно разложить по этому базису:

$$\vec{b} = c_1^* \vec{\varphi}_1(x_0) + c_2^* \vec{\varphi}_2(x_0) + \ldots + c_n^* \vec{\varphi}_n(x_0). \tag{3}$$

Тогда вектор-функция

$$\vec{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k^* \vec{\varphi}_k(x)$$

будет являться решением системы (1), удовлетворяющим заданному начальному условию $\vec{y}(x_0) = \vec{b}$ (см.(3)), а, следовательно, по теореме единственности совпадает с $\vec{\varphi}(x)$. $\boxed{*}$

Теорема 6. *О числе линейно независимых решений однородной системы.*

Максимальное число линейно независимых решений однородной системы (1) равно порядку системы.

Доказательство: "от противного".

Допустим, что имеются $(n+1)$ линейно независимых решений однородной системы (1): $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x), \vec{\varphi}_{n+1}(x)$. Согласно доказанной теореме о структуре общего решения системы (1) любое ее решение выражается формулой (2). В частности, всегда можно подобрать постоянные $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n$ таким образом, чтобы решение $\vec{\varphi}_{n+1}(x)$ было представлено в форме:

$$\vec{\varphi}_{n+1}(x) = \bar{c}_1 \vec{\varphi}_1(x) + \ldots + \bar{c}_n \vec{\varphi}_n(x).$$

Запись данного равенства в виде

$$\bar{c}_1 \vec{\varphi}_1(x) + \ldots + \bar{c}_n \vec{\varphi}_n(x) - \vec{\varphi}_{n+1}(x) = 0$$

указывает на линейную зависимость функций $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x), \vec{\varphi}_{n+1}(x)$, что противоречит первоначальному предположению. Следовательно, число линейно независимых решений однородной системы (1) не превосходит ее порядка n. $\boxed{*}$

Вывод. Совокупность решений линейной однородной системы образует линейное n-мерное векторное пространство.

Определение. Пусть задана система вектор-функций $\vec{\psi}_1(x), \ldots, \vec{\psi}_n(x)$, где

$$\vec{\psi}_1(x) = \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \\ \cdots \\ \psi_{n1} \end{pmatrix}, \vec{\psi}_2(x) = \begin{pmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{22} \\ \cdots \\ \psi_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \vec{\psi}_n(x) = \begin{pmatrix} \psi_{1n} \\ \psi_{2n} \\ \cdots \\ \psi_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определителем Вронского такой системы называют определитель размера $n \times n$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \vec{\psi}_1(x) & \vec{\psi}_2(x) & \cdots & \vec{\psi}_n(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \cdots & \psi_{1n} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \cdots & \psi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{n1} & \psi_{n2} & \cdots & \psi_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Теорема 7. *Об определителе Вронского для системы линейно зависимых функций.*

Для линейно зависимых вектор-функций $\vec{\psi}_1(x), \ldots, \vec{\psi}_n(x)$ определитель Вронского тождественно равен нулю.

Доказательство: пусть $\vec{\psi}_1(x), \ldots, \vec{\psi}_n(x)$ - линейно зависимые вектор-функции, т.е. существует ненулевой набор действительных постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0)$ таких, что:

$$\alpha_1 \vec{\psi}_1(x) + \ldots + \alpha_n \vec{\psi}_n(x) \equiv 0. \tag{5}$$

Соотношение (5) означает, что между столбцами определителя Вронского (4) существует линейная зависимость. Следовательно, по свойствам определителей $W(x) \equiv 0$. $\boxed{*}$

Теорема 8. *Об определителе Вронского для решений линейной однородной системы.*

Пусть при некотором значении $x = x_0$ определитель Вронского для решений линейной однородной системы (1) обращается в нуль

$$W(x_0) = 0. \tag{6}$$

Тогда для $\forall x \quad W(x) \equiv 0$.

Доказательство: равенство (6) означает, что столбцы определителя $W(x_0)$ линейно зависимы, т.е. линейно зависимы постоянные векторы $\vec{\varphi}_1(x_0), \ldots, \vec{\varphi}_n(x_0)$. Если их принять за начальные условия, то по теореме 3 линейно зависимыми будут и соответствующие решения системы (1) $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$. Следовательно, по ранее доказанной теоремой 7 определитель Вронского тождественно равен нулю при любых x. $\boxed{*}$

Следствие. Если определитель Вронского для решений линейной однородной системы не обращается в нуль хотя бы в одной точке x_0, то он ни при каких x не обращается в нуль, и эта система решений линейно независима, т.е. фундаментальна.

Теорема 9. *О линейном преобразовании фундаментальной системы решений.*

Если фундаментальную систему решений подвергнуть линейному невырожденному преобразованию, то полученная система решений будет также фундаментальной.

Доказательство: Допустим, что $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ - фундаментальная система решений линейной однородной системы (1). Построим новую систему функций

$$\vec{\psi}_j(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \vec{\varphi}_k(x), \qquad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{7}$$

где определитель матрицы $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$ отличен от нуля: $\det \mathbf{A} \neq 0$. Совершенно ясно, что суперпозиция (7) решений линейной однородной системы (1) сама является решением этой системы (см. теорему 2). С другой стороны, соотношение (7) можно переписать в матричной форме

$$\left(\begin{array}{cccc} \vec{\psi}_1(x) & \vec{\psi}_2(x) & \cdots & \vec{\psi}_n(x) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} \vec{\varphi}_1(x) & \vec{\varphi}_2(x) & \cdots & \vec{\varphi}_n(x) \end{array} \right) \mathbf{A}^T. \tag{8}$$

Из формулы (8) вытекает следующее равенство для определителей

$$\left| \begin{array}{cccc} \vec{\psi}_1(x) & \vec{\psi}_2(x) & \cdots & \vec{\psi}_n(x) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} \vec{\varphi}_1(x) & \vec{\varphi}_2(x) & \cdots & \vec{\varphi}_n(x) \end{array} \right| \det \mathbf{A}^T$$

или

$$W_\psi(x) = \det \mathbf{A} \cdot W_\varphi(x),$$

где $W_\psi(x)$ и $W_\varphi(x)$ - определители Вронского для системы решений $\vec{\psi}_1(x), \ldots, \vec{\psi}_n(x)$ и $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ соответственно. Поскольку исходная система решений фундаментальна, то $W_\varphi(x) \neq 0$ ни при каких x. В силу невырожденности преобразования: $\det \mathbf{A} \neq 0$ и, следовательно, $W_\psi(x)$ также отличен от нуля: $W_\psi(x) \neq 0$. Это означает, что построенная система решений $\vec{\psi}_1(x), \ldots, \vec{\psi}_n(x)$ остается фундаментальной. $\boxed{*}$

Построение линейной однородной системы по фундаментальной системе решений.

Задача. Задана система n линейно независимых вектор-функций: . Требуется построить линейную однородную систему дифференциальных уравнений, для которой вектор-функции $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ являются фундаментальной системой решений.

Решение. Составим n определителей $(n+1)$-го порядка для n неизвестных функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ и положим их равными нулю

$$\left| \begin{array}{ccccc} y_k' & \varphi_{k1}' & \varphi_{k2}' & \cdots & \varphi_{kn}' \\ y_1 & \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ y_2 & \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{array} \right| = 0; \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Каждое из построенных уравнений (9) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной. В самом деле, если разложить определитель по первому столбцу, то перед производной $y_k'(x)$ появится определитель Вронского $W(x)$, который для системы линейно независимых функций $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ отличен от нуля для всех x, и на него можно поделить обе части уравнения. В результате придем к

$$\frac{dy_k}{dx} = \frac{1}{W(x)} \left[b_{k1}(x)\, y_1 + b_{k2}(x)\, y_2 + \ldots + b_{kn}(x)\, y_n \right]; \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Уравнения (10) представляют собой однородную нормальную систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Теперь легко проверить, что функции $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ являются решениями системы (10). Например, при подстановке $y_k = \varphi_{k1}$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$ в (9) получаем два одинаковых столбца (первый и второй) определителя, и (9) переходит в тождество. Таким образом, система линейно независимых функций $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ является фундаментальной системой решений построенной линейной однородной системы (9).

ЛЕКЦИЯ 21

Формула Лиувилля.

Вычислим производную определителя Вронского, составленного для фундаментальной системы решений $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ линейной однородной системы

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\,\vec{y}. \tag{1}$$

В соответствии с ранее установленным правилом

$$\frac{d}{dx}W(x) = \sum_{k=1}^{n} W_k(x), \tag{2}$$

где

$$W_k(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi'_{k1} & \cdots & \varphi'_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Поскольку вектор-функции $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ являются решениями однородной системы (1), справедлива система тождеств

$$\frac{d\varphi_{km}}{dx} \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\varphi_{jm}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Подставляя эти равенства в (3), имеем:

$$W_k(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}\varphi_{j1} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}\varphi_{j} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1\cdots} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{j1} & \cdots & \varphi_{j} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}.$$

У определителей в правой части при $j \neq k$ есть совпадающие строки, поэтому отличным от нуля будет лишь определитель с $j = k$, который является определителем Вронского. Поэтому

$$W_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} W(x)\,\delta_{jk} = a_{kk} W(x),$$

и согласно (2)

$$\frac{dW}{dx} = W(x) \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = W(x) \cdot \mathrm{Spur}\ \mathbf{A}. \tag{4}$$

Здесь введено традиционное обозначение суммы диагональных элементов матрицы

$$\mathrm{Spur}\ \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk},$$

называемое ее *следом.* В частности, для единичной матрицы $\mathbf{E}$ размера $(n \times n)$ Spur $\mathbf{E} = n$.

Решая дифференциальное уравнение первого порядка (4) для $W(x)$, находим:

$$W(x) = W(x_0) \exp\left\{ \int\limits_{x_0}^{x} \mathrm{Spur}\ \mathbf{A}(t)\, dt \right\}. \tag{5}$$

Формула (5) и есть искомая *формула Лиувилля.*

Линейные неоднородные системы.

Рассмотрим теперь неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\,\vec{y} + \vec{f}(x). \tag{6}$$

Теорема. *О структуре общего решения линейной неоднородной системы.*

Пусть $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ - фундаментальная система решений однородной системы (1), а $\vec{\psi}(x)$ - частное решение неоднородной системы (6). Тогда общее решение неоднородной системы записывается в виде

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{\varphi}_i(x) + \vec{\psi}(x). \tag{7}$$

Доказательство: сначала проверим: является ли вектор-функция (7) решением неоднородной системы (6) ? Для этого подставим (7) в левую часть (6)

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{\varphi}_i(x) + \vec{\psi}(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{d}{dx}\vec{\varphi}_i(x) + \frac{d}{dx}\vec{\psi}(x).$$

Поскольку вектор-функции $\vec{\varphi}_i(x)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ удовлетворяют однородному уравнению (1), а вектор-функция $\vec{\psi}(x)$ неоднородному, то справедливы тождества

$$\frac{d}{dx}\vec{\varphi}_i(x) \equiv \mathbf{A}(x)\,\vec{\varphi}_i(x), \qquad \frac{d}{dx}\vec{\psi}(x) \equiv \mathbf{A}(x)\,\vec{\psi}(x) + \vec{f}(x),$$

и поэтому

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{\varphi}_i(x) + \vec{\psi}(x)\right) \equiv \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{A}(x)\,\vec{\varphi}_i(x) + \mathbf{A}(x)\,\vec{\psi}(x) + \vec{f}(x) \equiv$$

$$\equiv \mathbf{A}(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{\varphi}_i(x) + \vec{\psi}(x)\right) + \vec{f}(x).$$

Полученное тождество доказывает, что (7) является решением неоднородной системы.

Перейдем к доказательству общности решения. Покажем, что из (7) можно получить любое частное решение неоднородной системы. Зададим произвольное начальное условие: $\vec{y}(x_0) = \vec{b}$. Разложим постоянный вектор $\vec{b} - \vec{\psi}(x_0)$ по системе линейно независимых векторов (базису) $\vec{\varphi}_1(x_0), \ldots, \vec{\varphi}_n(x_0)$

$$\vec{b} - \vec{\psi}(x_0) = c_1^* \vec{\varphi}_1(x_0) + \ldots + c_n^* \vec{\varphi}_n(x_0).$$

Если теперь в (7) заменить c_i на c_i^*, то полученное частное решение будет удовлетворять выбранному начальному условию. $\boxed{*}$

Метод вариации произвольных постоянных при отыскании частного решения неоднородной системы.

Существует прием отыскания частного решения линейной неоднородной системы с произвольной правой частью $\vec{f}(x)$ по известной фундаментальной системе решений $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ однородной системы. Будем искать частное решение системы (6) в виде

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, \vec{\varphi}_i(x), \tag{8}$$

где $c_i(x)$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ - неизвестные функции. Потребуем, чтобы при подстановке (8) в (6) получалось тождество. Тогда,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, \vec{\varphi}_i(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, \vec{\varphi}_i'(x) = \mathbf{A}(x) \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{\varphi}_i(x) + \vec{f}(x)$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, \vec{\varphi}_i(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) \left[\vec{\varphi}_i'(x) - \mathbf{A}(x)\, \vec{\varphi}_i(x)\right] = \vec{f}(x).$$

Учитывая, что $\vec{\varphi}_i(x)$ - решения однородной системы, придем к

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, \vec{\varphi}_i(x) = \vec{f}(x). \tag{9}$$

В результате пришли к линейной алгебраической системе уравнений для неизвестных $c_1'(x), \ldots, c_n'(x)$. Определитель неоднородной системы (9) является определителем Вронского

$$\Delta = \begin{vmatrix} \vec{\varphi}_1(x) & \vec{\varphi}_2(x) & \cdots & \vec{\varphi}_n(x) \end{vmatrix} = W(x).$$

Для системы линейно независимых функций $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ определитель $W(x) \neq 0$ при всех x. Следовательно, неоднородная линейная алгебраическая система (9) имеет единственное решение, которое можно записать как

$$c_1'(x) = \psi_1(x), \ldots, c_n'(x) = \psi_n(x).$$

Вычисляя n неопределенных интегралов без произвольных постоянных и подставляя их в (8), получаем искомое частное решение.

3. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим подробнее линейную однородную систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \mathbf{A}\vec{y}, \tag{10}$$

где $\mathbf{A}$ - $(n \times n)$ матрица постоянных коэффициентов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Система (10) удовлетворяет теореме существования во всем пространстве $\mathbf{E}_{n+1}$. Приемом, который был рассмотрен ранее, данную систему можно свести к линейному однородному уравнению n-го порядка для одной из переменных y_k, решение которого, как известно, ищется в виде $y_k = \gamma_k e^{\lambda x}$. Исходя из этих соображений, будем искать нетривиальное решение однородной системы (10) в форме следующей вектор-функции

$$\vec{y}(x) = \vec{\gamma} e^{\lambda x}, \tag{11}$$

где $\vec{\gamma}$ - неизвестный постоянный вектор, λ - неизвестная константа.

Подставляя (11) в (10), придем к

$$\lambda \vec{\gamma} e^{\lambda x} = \mathbf{A} \vec{\gamma} e^{\lambda x}$$

или

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \vec{\gamma} = 0, \tag{12}$$

где $\mathbf{E} = \{\delta_{ij}\}$ - единичная матрица. Однородная система (12) имеет ненулевое решение, когда

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$$

или

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Соотношение (13) представляет собой *характеристическое уравнение* для определения λ (в полной аналогии с уравнением n-го порядка). Если раскрыть определитель, то левая часть (13) окажется многочленом n-ой степени по λ, который называют *характеристическим.*

Вернемся к соотношению (12), которое можно переписать в виде

$$\mathbf{A}\vec{\gamma} = \lambda\vec{\gamma}. \tag{14}$$

Уравнение (14) - известное из курса "Аналитическая геометрия и высшая алгебра" уравнение на определение собственных значений λ и собственных векторов $\vec{\gamma}$ матрицы $\mathbf{A}$. Заметим, что в зависимости от собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ вид решений системы (10) может быть весьма различным.

1. Случай простых корней характеристического уравнения.

Пусть все корни характеристического уравнения (13) простые: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. В этом случае характеристический многочлен $\Delta(\lambda)$ допускает представление в виде

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)\,\Delta_1(\lambda), \tag{15}$$

причем $\Delta_1(\lambda_k) \neq 0$. Из (15) следует. что

$$\Delta'(\lambda) = \Delta_1(\lambda) + (\lambda - \lambda_k)\,\Delta_1'(\lambda),$$

и поэтому $\Delta'(\lambda_k) = \Delta_1(\lambda_k) \neq 0$. С другой стороны, по правилам дифференцирования функционального определителя

$$\Delta'(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left\{ \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & a_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \right\}.$$

Поскольку сумма диагональных миноров $(n-1)$ порядка матрицы

$$\mathbf{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

при $\lambda = \lambda_k$ не обращается в нуль, то найдется по крайней мере один из диагональных миноров, отличный от нуля. Это означает, что матрица $\mathbf{M}(\lambda_k)$ имеет $\operatorname{rang}\mathbf{M}(\lambda_k) = r = n-1$.

Для определения векторов $\vec{\gamma}$ будем последовательно подставлять в уравнения (12) $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2, \dots, \lambda = \lambda_n$. В результате придем к уравнениям вида

$$(\mathbf{A} - \lambda_k\mathbf{E})\,\vec{\gamma}_k = 0$$

или

$$\mathbf{M}(\lambda_k)\,\vec{\gamma}_k = 0. \tag{16}$$

Всего таких систем уравнений будет n, поскольку индекс k пробегает значения от 1 до n. Поскольку, как мы установили, ранг матрицы $\mathbf{M}(\lambda_k)$: $r = n-1$, то компоненты собственных векторов $\vec{\gamma}_k$ определяются с точностью до произвольного множителя.

В качестве ненулевого решения системы уравнений (16) можно взять алгебраические дополнения элементов той строки матрицы $\mathbf{M}(\lambda_k)$, которые не обращаются в нуль. Такие миноры существуют, ибо $r = n - 1$. В результате найдем n решений однородной системы (10):

$$\vec{\varphi}_k(x) = \vec{\gamma}_k e^{\lambda_k x}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

Теперь необходимо доказать их линейную независимость.

Доказательство проведем методом "от противного". Пусть найденная система решений линейно зависима, т.е. найдутся ненулевые действительные постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0)$ такие, что

$$\alpha_1\vec{\gamma}_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2\vec{\gamma}_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + \alpha_n\vec{\gamma}_n e^{\lambda_n x} = 0 \qquad\qquad \text{при } \forall x.$$

Однако ранее было доказано, что функции $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ линейно независимы при $\lambda_i \neq \lambda_j$. Поэтому данное равенство имеет место лишь при

$$\alpha_1\vec{\gamma}_1 = 0, \quad \alpha_2\vec{\gamma}_2 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_n\vec{\gamma}_n = 0.$$

Так как не все из α_k равны нулю, то найдется вектор $\vec{\gamma}_i = 0$, но это не соответствует определению собственных векторов матрицы. Пришли к противоречию. Следовательно, полученная система решений (17) фундаментальна, и общее решение однородной системы (10) представляется в виде

$$\vec{y} = c_1\vec{\gamma}_1 e^{\lambda_1 x} + c_2\vec{\gamma}_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n\vec{\gamma}_n e^{\lambda_n x}.$$

ЛЕКЦИЯ 22

Рассмотрим ситуацию, когда среди простых корней характеристического уравнения встречаются комплексные. В этом случае представление общего решения линейной однородной системы в виде

$$\vec{y} = c_1\vec{\gamma}_1 e^{\lambda_1 x} + c_2\vec{\gamma}_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n\vec{\gamma}_n e^{\lambda_n x}$$

нас не устраивает, ибо среди слагаемых есть комплекснозначные функции. Поэтому фундаментальная система решений нуждается в определенной реконструкции. Допустим, что $\lambda_1 = \alpha + i\beta$. Тогда, в силу действительности коэффициентов характеристического многочлена среди его корней должен присутствовать и комплесно сопряженный корень $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Из уравнений для собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$

$$(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{E})\,\vec{\gamma}_k = 0,$$

отвечающих собственным значениям λ_1 и λ_2, имеем:

$$[\mathbf{A} - (\alpha + i\beta)\,\mathbf{E}]\,\vec{\gamma}_1 = 0, \tag{1}$$

$$[\mathbf{A} - (\alpha - i\beta)\,\mathbf{E}]\,\vec{\gamma}_2 = 0.$$

Применяя комплексное сопряжение к первому из уравнений (1)

$$[\mathbf{A} - (\alpha - i\beta)\,\mathbf{E}]\,\vec{\gamma}_1^* = 0$$

и сопоставляя его с уравнением для собственного вектора $\vec{\gamma}_2$, заключаем, что $\vec{\gamma}_2$ можно выбрать равным $\vec{\gamma}_1^*$: $\vec{\gamma}_2 = \vec{\gamma}_1^*$. Отсюда следует, что два линейно независимых комплекснозначных решения $\vec{\varphi}_1(x) = \vec{\gamma}_1 e^{(\alpha+i\beta)x}$ и $\vec{\varphi}_2(x) = \vec{\gamma}_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$ линейной однородной системы также являются комплексно сопряженными: $\vec{\varphi}_2(x) = \vec{\varphi}_1^*(x)$. Из этих комплекснозначных решений можно путем линейного невырожденного преобразования получить два действительных линейно независимых решения $\vec{\psi}_1(x)$ и $\vec{\psi}_2(x)$. В самом деле, их можно построить следующим образом:

$$\vec{\psi}_1(x) = \frac{\vec{\varphi}_1(x) + \vec{\varphi}_2(x)}{2} = \mathrm{Re}\,[\vec{\varphi}_1(x)] = e^{\alpha x}\,\mathrm{Re}\left[\vec{\gamma}_1 e^{i\beta x}\right] = e^{\alpha x}\left(\vec{a}_1 \cos\beta x - \vec{b}_1 \sin\beta x\right),$$

$$\vec{\psi}_2(x) = \frac{\vec{\varphi}_1(x) - \vec{\varphi}_2(x)}{2i} = \mathrm{Im}\,[\vec{\varphi}_1(x)] = e^{\alpha x}\,\mathrm{Im}\left[\vec{\gamma}_1 e^{i\beta x}\right] = e^{\alpha x}\left(\vec{a}_1 \sin\beta x + \vec{b}_1 \cos\beta x\right),$$

где $\vec{\gamma}_1 = \vec{a}_1 + i\vec{b}_1$. Определитель матрицы преобразования

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2i & -1/2i \end{vmatrix} = \frac{i}{2} \neq 0.$$

Таким образом, в случае простых комплексных корней линейно независимыми действительными решениями являются действительные и мнимые части комплекснозначных решений.

Пример. Решим следующую однородную систему уравнений для двух неизвестных функций $y(x)$ и $z(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = -7y + z,$$

$$\frac{dz}{dx} = -2y - 5z.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0$$

и определяем корни характеристического многочлена: $\lambda_{1,2} = -6 \pm i$. Запишем уравнения для компонент γ_{11} и γ_{21} собственного вектора $\vec{\gamma}_1$, отвечающего собственному значению $\lambda_1 = -6 + i$.

$$(-1-i)\,\gamma_{11} + = 0,$$

$$-2\gamma_{11} + (1-i)\,\gamma_{21} = 0.$$

Эти уравнения идентичны, в чем легко убедиться, домножив первое из уравнений на $(1-i)$. Берем для простоты $\gamma_{11} = 1$, тогда $\gamma_{21} = 1 + i$. В результате для корня λ_1 получаем комплекснозначное решение

$$\vec{\varphi}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{-6x} e^{ix} = e^{-6x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} (\cos x + i \sin x).$$

Возьмем от полученного решения действительную и мнимую части

$$\vec{\psi}_1(x) = \mathrm{Re}\,[\vec{\varphi}_1(x)] = e^{-6x} \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix},$$

$$\vec{\psi}_2(x) = \mathrm{Im}\,[\vec{\varphi}_1(x)] = e^{-6x} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix}.$$

Строим теперь общее решение исследуемой системы по формуле

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \vec{\psi}_1(x) + c_2 \vec{\psi}_2(x),$$

т.е.

$$y(x) = e^{-6x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x),$$

$$z(x) = e^{-6x}\left[(c_1 + c_2)\cos x + (c_2 - c_1)\sin x\right].$$

Как и должно быть, в общее решение системы второго порядка входят две произвольные константы.

2. Случай кратных корней характеристического уравнения.

Пусть среди корней характеристического уравнения есть кратные. Предположим, например, что корень λ_1 имеет кратность m. В этой ситуации характеристический многочлен $\Delta(\lambda)$ представим в виде

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m \Delta_1(\lambda), \tag{2}$$

причем $\Delta_1(\lambda_1) \neq 0$. Из равенства (2) следует, что

$$\Delta'(\lambda_1) = 0, \quad \Delta''(\lambda_1) = 0, \quad \ldots, \quad \Delta^{(m-1)}(\lambda_1) = 0, \quad \Delta^{(m)}(\lambda_1) \neq 0.$$

Как было показано ранее, $\Delta'(\lambda_1)$ является суммой главных миноров $(n-1)$-го порядка матрицы $\mathbf{M}(\lambda_1)$. Аналогично $\Delta''(\lambda_1)$ есть сумма миноров $(n-2)$-го порядка той же матрицы и т.д. Выражение для $\Delta^{(m)}(\lambda_1)$ представляет собой сумму главных миноров матрицы $\mathbf{M}(\lambda_1)$ порядка . Эта сумма отлична от нуля, поэтому хотя бы один из миноров $(n-m)$-го порядка также не равен нулю. Следовательно, ранг матрицы $\mathbf{M}(\lambda_1)$: $r \geq n - m$. Ранг достигает минимального значения $r = n - m$, когда все главные миноры матрицы $\mathbf{M}(\lambda_1)$ порядка $(n - m + 1)$ обращаются в нуль. В общем случае границы изменения ранга матрицы таковы: $n - m \leq r \leq n - 1$.

Таким образом, система уравнений для определения собственного вектора $\vec{\gamma}_1$, отвечающего собственному значению λ_1,

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})\,\vec{\gamma}_1 = 0$$

имеет r независимых уравнений, а остальные $(n-r)$ уравнений являются их следствиями. Это означает, что $(n-r)$ компонент собственного вектора $\vec{\gamma}_1$ могут быть произвольными, а остальные r компонент являются их линейными комбинациями.

Положим $\gamma_{11} = c_1, \gamma_{21} = c_2, \ldots, \gamma_{n-r,1} = c_{n-r}$, где c_i - произвольные постоянные, а

$$\gamma_{k1} = \sum_{i=1}^{n-r} \sigma_{ki} c_i, \qquad k = n-r+1, n-r+2, \ldots, n.$$

В результате придем к системе решений

$$y_1 = c_1, \quad y_2 = c_2 e^{\lambda_1 x}, \quad \ldots, \; y_{n-r} = c_{n-r} e^{\lambda_1 x},$$

$$y_{n-r+1} = \sum_{i=1}^{n-r} c_i e^{\lambda_1 x}, \quad \ldots, \; y_n = \sum_{i=1}^{n-r} \sigma_{ni} c_i e^{\lambda_1 x}.$$

Из этих решений можно получить $(n-r)$ линейно независимых. Положим $, c_2 = \ldots = c_{n-r} = 0$. Тогда,

$$\begin{aligned}
&y_{11} = e^{\lambda_1 x},\\
&y_{21} = 0,\\
&\ldots\\
&y_{n-r,1} = 0,\\
&y_{n-r+1,1} = \sigma_{n-r+1,1} e^{\lambda_1 x},\\
&\ldots\\
&y_{n1} = \sigma_{n1} e^{\lambda_1 x}.
\end{aligned}$$

Выберая теперь , находим второе решение:

$$\begin{aligned}
&y_{12} = 0,\\
&y_{22} = e^{\lambda_1 x},\\
&\ldots\\
&y_{n-r,2} = 0,\\
&y_{n-r+1,2} = \sigma_{n-r+1,2} e^{\lambda_1 x},\\
&\ldots\\
&y_{n2} = \sigma_{n2} e^{\lambda_1 x}.
\end{aligned}$$

И т.д. Последнее решение получаем при подстановке $c_1 = \ldots c_{n-r-1} = 0, c_{n-r} = 1$

$$\begin{aligned}
&y_{1,n-r} = 0,\\
&y_{2,n-r} = 0,\\
&\ldots\\
&y_{n-r,n-r} = e^{\lambda_1 x},\\
&y_{n-r+1,n-r} = \sigma_{n-r+1,n-r} e^{\lambda_1 x},\\
&\ldots\\
&y_{n,n-r} = \sigma_{n,n-r} e^{\lambda_1 x}.
\end{aligned}$$

Для того, чтобы убедиться в линейной независимости решений выпишем матрицу коэффициентов:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & \cdots & 1\\
\sigma_{n-r+1,1} & \sigma_{n-r+1,2} & \cdots & \sigma_{n-r+1,n-r}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{n,n-r}
\end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы, имеющей размер $n \times (n-r)$, равен $n-r$, поскольку есть минор $(n-r)$-го порядка, отличный от нуля. Отсюда и следует линейная независимость $(n-r)$ построенных решений.

Если ранг матрицы имеет наименьшее значение $r = n-m$, то число линейно независимых решений равно $n-r=m$ - кратности корня λ_1. А это нам и нужно для построения фундаментальной системы решений.

Если же ранг матрицы $\mathbf{M}(\lambda_1)$: $r > n - m$, то число построенных линейно независимых решений $n - r < m$. В этом случае решение системы ищут в виде:

$$y_i = P_i(x)\, e^{\lambda_1 x}, \tag{3}$$

где $P_i(x)$ - многочлен степени $m - (n - r)$. Заметим, что если ранг матрицы $\mathbf{M}(\lambda_1)$ достигает своего максимального значения $r = n - 1$, то входящий в (3) многочлен имеет степень $m - 1$.

Задача для самостоятельной работы. Показать, что если записать нормальную систему, эквивалентную одному линейному дифференциальному уравнению n-го порядка, то для полученной системы ранг матрицы $\mathbf{M}(\lambda)$ всегда равен $n - 1$.

3. Метод исключения для линейных систем с постоянными коэффициентами произвольного вида.

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{array}{l} M_{11}(D)\, y_1 + M_{12}(D)\, y_2 + \ldots + M_{1n}(D)\, y_n = f_1(x), \\ M_{21}(D)\, y_1 + M_{22}(D)\, y_2 + \ldots + M_{2n}(D)\, y_n = f_2(x), \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ M_{n1}(D)\, y_1 + M_{n2}(D)\, y_2 + \ldots + M_{nn}(D)\, y_n = f_n(x), \end{array} \tag{4}$$

где $M_{ik}(D)$ - операторные многочлены некоторой степени, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ - достаточное число раз дифференцируемые функции. Попытаемся получить дифференциальное уравнение для одной из неизвестных, например, y_1. Подействуем на первое уравнение слева оператором $N_{11}(D)$ - алгебраическим дополнением для элемента $M_{11}(D)$ следующего операторного определителя

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} M_{11}(D) & \cdots & M_{1n}(D) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{n1}(D) & \cdots & M_{nn}(D) \end{vmatrix}. \tag{5}$$

На второе уравнение системы (4) подействуем слева оператором $N_{21}(D)$ - алгебраическим дополнением для элемента $M_{21}(D)$ определителя $\Delta(D)$. И т.д. На последнее уравнение действуем слева оператором $N_{n1}(D)$ - алгебраическим дополнением для элемента $M_{n1}(D)$ определителя (5). Затем, складывая получившиеся уравнения, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i1}(D)\, N_{i1}(D)\, y_1 + \sum_{i=1}^{n} M_{i2}(D)\, N_{i1}(D)\, y_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} M_{in}(D)\, N_{i1}(D)\, y_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} N_{i1}(D)\, f_i(x)$$

или

$$\Delta(D)\, y_1 = \sum_{i=1}^{n} N_{i1}(D)\, f_i(x). \tag{6}$$

Уравнение (6) - линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами. Аналогичным образом получаются уравнения для определения неизвестных $y_2, \dots, y_n$:

$$\begin{aligned} &\Delta(D)\, y_2 = \sum_{i=1}^{n} N_{i2}(D)\, f_i(x)\,, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ &\Delta(D)\, y_n = \sum_{i=1}^{n} N_{in}(D)\, f_i(x)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

При выводе системы (6)-(7) мы предполагали дифференцируемость решений. Этот факт можно доказать. Может оказаться также, что $\Delta(D) = 0$. Тогда предложенный метод решения ничего не дает. Этот случай мы не будем рассматривать.

Пусть $\Delta(D) \neq 0$. Тогда определитель представляет собой операторный многочлен относительно D некоторой степени m. Степень многочлена m и называется *порядком системы* (4). Общее решение первого уравнения системы (6)-(7) будет содержать m произвольных постоянных, второго - также m постоянных. И т.д. Таким образом, общее число произвольных постоянных окажется равным $m \cdot n$. В соответствии с порядком системы (4) независимыми являются только m произвольных постоянных. Для того, чтобы установить зависимость между произвольными постоянными, следует найденные общие решения системы (6)-(7) подставить в исходную систему (4) и потребовать выполнения тождеств для любых x. В результате этой процедуры должно остаться m произвольных постоянных, через которые выражаются все остальные.

Пример.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений для двух неизвестных функций

$$\begin{aligned} &y' + y + z' = 0, \\ &y'' - y + z'' + z = x. \end{aligned}$$

Представим ее в операторной форме

$$\begin{aligned} &(D+1)\, y + Dz = 0, \\ &(D^2-1)\, y + (D^2+1)\, z = x. \end{aligned}$$

Домножим первое уравнение на (D^2+1), второе на D и вычтем второе из первого. В результате получим:

$$\left[(D+1)\left(D^2+1\right) - D\left(D^2-1\right)\right] y = -1 \Longrightarrow \left(D^2+2D+1\right) y = -1.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$(\lambda+1)^2 = 0$$

и находим его корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Общее решение однородного уравнения таково

$$y = e^{-x}\left(c_1 + c_2 x\right).$$

Легко видеть, что частным решением неоднородного уравнения является, например, $y = -1$. Таким образом, окончательно

$$y = e^{-x}\left(c_1 + c_2 x\right) - 1.$$

Теперь домножим первое уравнение на $(D-1)$ и вычтем из него второе. Тогда придем к уравнению первого порядка

$$\left[D\left(D-1\right) - \left(D^2+1\right)\right] z = -x \Longrightarrow \left(D+1\right) z = x,$$

общее решение которого легко находится

$$z = c_3 e^{-x} + x - 1.$$

Определитель системы

$$\Delta\left(D\right) = \left[\left(D+1\right)\left(D^2+1\right) - D\left(D^2-1\right)\right] = \left(D+1\right)^2,$$

поэтому ее порядок равен 2. Следовательно, решения системы должны содержать лишь две независимые постоянные. Для отыскания связи постоянных c_1, c_2, c_3 подставим найденные решения в первое уравнение системы. Тогда,

$$-e^{-x}\left(c_1 + c_2 x\right) + c_2 e^{-x} + e^{-x}\left(c_1 + c_2 x\right) - 1 - c_3 e^{-x} + 1 = 0 \Longrightarrow c_3 = c_2.$$

Окончательный вид решения системы таков

$$\begin{aligned} y &= e^{-x}\left(c_1 + c_2 x\right) - 1, \\ z &= c_2 e^{-x} + x - 1. \end{aligned}$$