ЛЕКЦИЯ № 1. Общие понятия. Интегрируемые типы уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной

1. Введение

1. Задача решения (**интегрирования**) дифференциальных уравнений — это задача, обратная дифференцированию. Задача дифференциального исчисления заключается в том, чтобы по заданной функции найти ее производную. Простейшую обратную задачу можно встретить в интегральном исчислении, где дана функция $f(x)$, а нужно найти ее примитивную (неопределенный интеграл). Если искомую примитивную функцию обозначить через y, то указанная задача может быть записана в форме уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \qquad (1)$$

или

$$dy = f(x)dx. \qquad (2)$$

Равносильные между собой эти уравнения и есть простейшие дифференциальные уравнения. Из интегрального исчисления известно, что наиболее общая функция y, которая удовлетворяет уравнению (1) или (2), имеет вид:

$$y = \int f(x)dx + C. \qquad (3)$$

В решении (3) символ неопределенного интеграла обозначает какую-нибудь примитивную, а C — **произвольная постоянная**. Значит, искомая функция определяется из уравнения (1) или (2) **неоднозначно**. Наше дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений, каждое из которых получится, если произвольной постоянной C придать определенное числовое значение. Решение (3) уравнения (1), содержащее произвольную постоянную, называется **общим решением**. При этом каждое решение, которое получается из общего, если дать постоянную C определенное числовое значение, называется **частным решением**.

2. В уравнение (1) входила только первая производная от искомой функции, представляющая собой дифференциальное уравнение первого порядка. Общее дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F\left(x, y, \frac{dx}{dy}\right) = 0, \tag{4}$$

где F — заданная непрерывная функция трех своих аргументов. В частности, она может не зависеть от x или от y (или от обоих этих аргументов), но непременно должна содержать $\frac{dy}{dx}$. Если уравнение (4) определяет $\frac{dy}{dx}$ как неявную функцию двух остальных аргументов, то его можно представить в виде, разрешенном относительно:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{5}$$

где f — непрерывная заданная функция от x, y, которая, в частности, может не содержать одного или обоих аргументов, т. е. в уравнении (1) f не зависит от y. В дифференциальном уравнении (4) или (5) x является независимым переменным, y — искомой функцией. Таким образом, **дифференциальное уравнение первого порядка есть соотношение, связывающее искомую функцию, независимое переменное и первую производную от искомой функции**. Решением дифференциального уравнения (4) или (5) называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение (4) или (5), обратит его в тождество. Уравнение содержит вторую производную от искомой функции; это уравнение второго порядка. Общий вид дифференциального уравнения второго порядка:

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{6}$$

или, предполагая его разрешенным относительно второй производной (если это разрешение возможно),

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{7}$$

Здесь производные от y по x обозначены штрихами. Здесь F и f — данные непрерывные функции своих аргументов, x — независимое переменное, y — искомая функция; некоторые из аргументов x, y, y' (или все они) могут не входить в уравнение, но y'' непременно входит. Решением называется функция $\varphi(x)$, которая, будучи подставлена на место у в уравнение (6) или (7), обратит его в тождество. **Порядок дифференциального уравнения** — это порядок наивысшей входящей в него производной от искомой функции. Значит, уравнение n-го порядка имеет вид:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

причем $y^{(n)}$ непременно входит в уравнение.

3. Дифференциальному уравнению первого порядка можно дать геометрическое толкование, которое выяснит характер множественности решений такого уравнения. Пусть дано уравнение в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Примем x, у за декартовы прямоугольные координаты плоскости. Каждой точке (x, y) той области, где определена функция f, уравнение (5) ставит в соответствие определенное значение $\dfrac{dy}{dx}$.

Пусть $y = \varphi(x)$ есть решение уравнения (5); тогда кривая, определяемая уравнением $y = \varphi(x)$, называется **интегральной кривой** дифференциального уравнения. Значение $\frac{dy}{dx}$ есть тангенс угла, образуемого касательной к этой кривой с осью O_x. Таким образом, каждой точке (x, y) рассматриваемой области уравнение (5) ставит в соответствие некоторое направление; мы получаем **поле направлений**. Это поле можно изобразить, поместив в соответствующих точках области стрелки, образующие с осью O_x углы $\operatorname{arctg}\frac{dy}{dx}$ (положительное направление стрелки можно взять произвольным, так как арктангенс определяет угол лишь с точностью до кратного π). Задача интегрирования дифференциального уравнения может быть теперь истолкована так: требуется найти такую кривую, чтобы ее касательная в каждой точке имела направление, совпадающее с направлением поля в этой точке. Проще говоря, нужно провести кривую так, чтобы расставленные на поле стрелки показывали в каждой точке направление касательной к искомой кривой. Рассмотрим подробнее следующий пример:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2. \tag{8}$$

Так, если $y' = 0$, мы имеем $x = y = 0$ (начало координат), если $y = \frac{1}{2}$, то $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ (круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$ с центром в начале), $y' = 1$ на окружности $x^2 + y^2 = 1$ и т. д. Чтобы начертить интегральную кривую уравнения (8), надо взять некоторую точку (x_0, y_0) на плоскости и провести через нее кривую так, чтобы она в каждой точке имела направление поля. Это заключение будет при известных ограничениях справедливо и для любого поля, т. е. любого дифференциального уравнения. Таким образом, мы вправе ожидать такого ответа на вопрос о множестве интегральных кривых дифференциального уравнения: **интегральные кривые дифферен-**

циального уравнения первого порядка образуют семейство, зависящее от одного параметра:

$$y = \varphi(x, C). \tag{9}$$

Замечая, что функция $\varphi(x, C)$ при любой C есть решение дифференциального уравнения, мы можем также ожидать следующего результата. Общее решение дифференциального уравнения первого порядка дается формулой (9), заключающей одну произвольную постоянную. Наконец, вспомнив, что мы получаем каждую отдельную интегральную кривую, задавая точку (x_0, y_0), через которую она проходит, мы приходим к следующему заключению: чтобы однозначно определить частное решение дифференциального уравнения первого порядка, надо задать то значение y_0, которое искомая функция принимает при заданном значении x_0 независимого переменного (начальные значения). В самом деле, если x_0 и y_0 даны, то, подставляя их в уравнение (9), мы получим: $y_0 = y(x_0, C)$ — одно уравнение для определения одного неизвестного C; наши геометрические соображения позволяют ожидать, что это уравнение имеет решение.

4. Мы видели, что свойство общего решения дифференциального уравнения первого порядка — зависеть от одной произвольной постоянной. Выявленное подтверждается соображениями предыдущего раздела и для более общих уравнений первого порядка.

Естественно ожидать, что решение общего дифференциального уравнения второго порядка (8) или (8') будет заключать две произвольных постоянных, а общее решение дифференциального уравнения n-го порядка будет зависеть от n произвольных постоянных. Так оно и есть (при известных ограничениях); мы не будем здесь приводить геометрических соображений, а подойдем к вопросу с другой стороны, благодаря чему наши соображения по аналогии получат значительное подтверждение. Поставим задачу, в некотором смысле обратную задаче интегрирования дифференциального уравнения. Пусть дано соотношение:

$$y = \varphi(x, C), \tag{10}$$

где C есть параметр; дифференцируя по x, получим:

$$y' = \varphi(x, C). \tag{11}$$

Если правая часть выражения (11) не содержит C, то мы уже произвели исключение параметра C и получили дифференциальное уравнение:

$$y' = \varphi'_x(x); \tag{12}$$

очевидно, что в этом случае соотношение (11) имеет вид:

$$y = \varphi(x) + C$$

и является решением уравнения (11′). Пусть теперь правая часть равенства (11) содержит С; тогда и правая часть равенства (10) содержит C, т. е. $\varphi'_C(x, C) \neq 0$, и в окрестности значений x_0, C_0, для которых $\varphi'_C(x, C_0) \neq 0$, мы можем определить С как функцию от x и y:

$$C = \Psi(x,y). \tag{13}$$

Очевидно, что имеет место тождество (по переменным x и C):

$$\Psi(x, \varphi(x, C)) \equiv C. \tag{14}$$

Подставляя значение C, определенное формулой (13), в выражение (11), мы получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' = \varphi'_x(x, \Psi(x, y)). \tag{15}$$

Легко убедиться в том, что (11) представляет его решение при любом значении C. В самом деле, если мы подставим это выражение для y в уравнение (15), то в левой части получим $\varphi'_x(x, C)$, а в правой

$\varphi'_x\{x, \Psi(x, C)\}$, а это в силу тождества (16) тоже дает $\varphi'_x(x, C)$. Если соотношение между x, y, C дано в неявном виде:

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{16}$$

то, дифференцируя его по x, находим:

$$\Phi'x + \Phi'yy' = 0. \tag{17}$$

Исключая С из соотношений (16) и (17), приходим при выполнении соответствующих условий из теории неявных функций к уравнению

$$F(x, y, y') = 0. \tag{18}$$

Предыдущие рассуждения показывают, что (16) определяет его решение. Пусть теперь дано соотношение:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0, \tag{19}$$

связывающее функцию у и независимое переменное x и заключающее параметры $C_1, C_2, ..., C_n$. Нельзя ли построить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция y, определенная соотношением (19), при любых постоянных значениях параметров? Мы предположим, что Φ непрерывна по всем аргументам и дифференцируема по x и y достаточное число раз. Дифференцируем в указанных предположениях равенство (19) n раз. Имеем:

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} y = 0, \\
\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} y + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} y'' = 0, \\
\dfrac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + 3\dfrac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} y + \ldots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} y'' = 0, \\
\ldots \\
\dfrac{\partial^n \Phi}{\partial x^n} + \ldots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} y^{(n)} = 0.
\end{array}\right\} \tag{18}$$

Соотношение (19) и (20) образуют систему $n + 1$ уравнений; они содержат n параметров C_1, C_2, .., C_n. Из этой системы можно исключить все параметры, т. е. найти их выражения через x, y, y',..., $y^{(n)}$ из n уравнений и вставить эти выражения в $(n + 1)$ – е уравнения. Мы приведем к соотношению вида:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{21}$$

т. е. к дифференциальному уравнению n-го порядка. Мы уже отметили, что при подстановке в уравнение (19) на место y его выражения $(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ получается тождество, и то же справедливо относительно уравнений (20); поэтому и уравнение (21), являющееся следствием уравнений (19) и (20), обратится в тождество, если в него подставить вместо y функцию $(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, а это значит, что y, определяемый из уравнения (19), есть решение уравнения (21). Таким образом, эта функция, содержащая n произвольных постоянных, является решением некоторого дифференциального уравнения n-го порядка. Можно было бы провести и более точное рассуждение, как мы это сделали для уравнения первого порядка. Теперь мы вправе ожидать, что исходное решение является общим и что, обратно, общее решение дифференциального уравнения n-го порядка содержит n произвольных постоянных.

2. Метод разделения переменных

1. Простейшее дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{1}$$

Его можно также записать с помощью дифференциалов:

$$dy = f(x)dx. \tag{2}$$

Уравнение вида (1) или (2) — это **дифференциальное уравнение первого порядка, не содержащее (явно) искомой функции**. Мы предполагаем, что функция $f(x)$ определена в некотором интервале $a < x < b$ и непрерывна во всякой внутренней точке этого интервала. В частности, может быть $a = -\infty$ или $b = \infty$, или одновременно $a = -\infty$, $b = \infty$. В интегральном исчислении доказывается, что искомая функция $y(x)$, как примитивная по отношению к функции $f(x)$, дается неопределенным интегралом (или определенным интегралом с переменным верхним пределом). Доказывается это таким образом, что любая примитивная отличается от какой-нибудь определенной примитивной только на постоянное слагаемое. Следовательно, решение уравнения (1) или (2) есть:

$$y = \int f(x)dx + C. \tag{3}$$

Здесь C — произвольная постоянная, она может принимать все значения, $-\infty < C < \infty$. Давая ей всевозможные численные значения, получим все функции y, удовлетворяющие данному уравнению. Значит, выражение (3) представляет **общее решение** уравнения (1). Задаваясь определенным численным значением C, мы получаем **частное решение**. Все частные решения являются непрерывными и дифференцируемыми функциями от x во всем интервале $a < x < b$. Чтобы выяснить смысл произвольной постоянной, в формуле (3) нужно записать неопределенный интеграл в виде определенного с переменным верхним пределом:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C, \tag{4}$$

где x_0 — любая внутренняя точка интервала (a, b). Если дать переменной x значение x_0, тогда получим:

$$y(x_0) = C.$$

Если обозначить через y_0 значение искомой функции при $x = x_0$, то получится вместо формулы ($3'$) следующее выражение:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx. \tag{5}$$

Следовательно, частное решение вполне определится, если задать начальное значение искомой функции, т. е. то значение, которое она должна принимать при некотором определенном (начальном) значении x_0 независимого переменного. Таким образом, начальные данные (x_0, y_0) определяют единственное решение уравнения (1) во всем интервале непрерывности правой части $f(x)$. С геометрической точки зрения задание начальных значений есть задание некоторой точки плоскости xOy. Значит, через каждую точку полосы $a < x < b$, $-\infty < y < \infty$ плоскости xOy проходит единственная интегральная кривая уравнения (1). При этом формулы ($3'$), ($3''$) показывают, что любая интегральная кривая может быть получена из одной определенной, например из $y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$, путем переноса параллельно оси y на (положительный или отрицательный) отрезок $C = y_0$. Часто при заданной функции $f(x)$ мы не сумеем выразить входящий в решение (3) интеграл через элементарные функции. Тем не менее можно считать, что задача интегрирования уравнения (1) решена — решение выражено в квадратурах. Мы будем считать, что умеем решать дифференциальное уравнение, если сумеем выразить общее решение при помощи квадратур. Если решение получается в виде соотношения, определяющего y как неявную функцию x, мы будем считать решение известным. Приближенное нахождение квадратуры и приближенное решение конечного (т. е. не содержащего дифференциалов) уравнения, хотя бы не алгебраического, а трансцендентного, являются более легкими задачами, чем приближенное решение дифференциального уравнения.

2. Второй тип уравнений первого порядка, тоже интегрируемых в квадратурах:

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \tag{6}$$

или

$$dy = f(y)dx. \tag{7}$$

Это **уравнение первого порядка, не содержащее (явно) независимого переменного**.

Предположим, что функция $f(y)$ непрерывна в интервале $a < y < b$, где $a \geq -\infty$, $b \leq +\infty$. Для нахождения искомой функции $y = \varphi(x)$ допускают, что для нее существует обратная функция $x = \Psi$ (y). Принимая y за независимое переменное, а x — за искомую функцию, по свойству производной от обратной функции будем иметь:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}. \tag{8}$$

Мы привели уравнение к уже рассмотренному типу, однако функция в правой части перестает быть непрерывной для тех значений y, которые обращают знаменатель в нуль. В связи с этим ограничимся сначала рассмотрением интервала $\alpha < y < \beta$, внутри которого $f(y)$ не обращается в нуль. Записав уравнение (8) в виде:

$$dx = \frac{dy}{f(y)},$$

будем иметь внутри указанного интеграла:

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C. \tag{9}$$

Вводя начальные значения x_0, y_0 $(-\infty < x_0 < +\infty,\ \alpha < y_0 < \beta)$, решение (5) можно переписать в виде:

$$x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)} + C. \tag{10}$$

Формулы (9) или (10) определяют x как функцию от y. Затем осталось убедиться, что эта функция допускает обратную. В интервале $(\alpha,\ \beta)$ непрерывная функция $f(y)$ не обращается в нуль, а значит, сохраняет постоянный знак; $x - x_0$ есть монотонная функция от y, а непрерывная монотонная функция (не постоянная ни в каком интервале) всегда имеет непрерывную и однозначную обратную функцию. Таким образом, сделанное нами допущение оправданно. Видно, что эта обратная функция $y = \varphi(x - x_0)$ удовлетворяет исходному уравнению (4). Таким образом, через каждую точку полосы $-\infty < x < +\infty$, $\alpha < y < \beta$ проходит одна и только одна интегральная кривая. Рассмотрим теперь значения y, обращающие в нуль правую часть уравнения (8). Пусть уравнение

$$f(x) = 0 \tag{11}$$

имеет корень y_0. Затем остается убедиться, что при подставлении $y = y_0$ в обе части уравнения (8) оно обращается в тождество. Следовательно, кроме решений, даваемых формулами (10) или (2, 3, 1), имеются еще решения вида $y = y_0$ (интегральные кривые здесь суть прямые, параллельные оси O_x), где y_0 — любое значение, удовлетворяющее уравнению (11). Через точки этих прямых $x = x_0,\ y = y_0$ иногда проходит только одна интегральная кривая — сама прямая $y = y_0$, иногда также и отличные от этой прямой интегральные кривые, — в последнем случае говорят, что в точке $(x_0,\ y_0)$ нарушается свойство единственности.

3. Уравнения вида:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y), \tag{12}$$

в которых правая часть есть произведение функции только от x на функцию только от y, интегрируются следующим образом: следует «разделить переменные». Иначе говоря, при помощи умножения и деления необходимо привести уравнение к такой форме, чтобы в одну часть входила только функция от x и дифференциал dx, а в другую часть — функция от y и dy. В данном случае надо умножить обе части уравнения на dx и разделить на $\varphi(y)$. В результате получится:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx. \tag{13}$$

Когда переменные разделены, рассуждают так: представим, что нам известен y как функция x, являющаяся решением уравнения (7). Тогда в обеих частях уравнения ($7'$) стоят тождественно равные между собой дифференциалы. Следует заметить, что только в правой части этот дифференциал выражен непосредственно через независимое переменное x, а в левой части — через посредство y, являющегося функцией от x. Если дифференциалы равны, то их неопределенные интегралы могут различаться только постоянным слагаемым; мы можем интегрировать левую часть по y, а правую по x. В результате получится:

$$\int \frac{dy}{\varphi(x)} = \int f(x)\,dx + C, \tag{14}$$

где C — произвольная постоянная. Таким образом, если y — решение уравнения (12), мы получили соотношение (14), связывающее это решение y и независимое переменное x, т. е. получили общий интеграл уравнения (12). Если удается разрешить его относительно y, то получим (в явном виде) общее решение данного уравнения.

Узнаем теперь, при каких условиях формула (14) действительно определяет y как функцию (однозначную) от x в окрестности точки $x = x_0$, $y = y_0$. Напишем интеграл в виде:

$$0 = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\varphi(y)} - \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \psi(x, y; x_0, y_0).$$

Видно, что $\psi(x, y; x_0, y_0) = 0$, тогда

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \frac{1}{\varphi(y_0)}.$$

Это выражение не обращается в 0; оно имеет смысл, если $\varphi(y_0) \neq 0$. Если для некоторого значения $y = y_0$ мы имеем $\varphi(y_0) = 0$, то решением уравнения (12), кроме решений, данных формулой (14), будет также $y = y_0$. Если уравнение задано в виде:

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0, \tag{15}$$

то для разделения переменных не нужно приводить его к виду (12), а достаточно разделить обе части на произведение тех множителей, которые содержат не то переменное, на дифференциал которого они умножаются. То есть разделяем переменные на $N(y)P(x)$:

$$\frac{M(x)dx}{P(x)} + \frac{Q(y)dy}{N(y)} = 0.$$

Отсюда получится общий интеграл:

$$\int \frac{M(x)dx}{P(x)} + \int \frac{Q(y)dy}{N(y)} = C.$$

3. Однородные уравнения

Уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

называется **однородным**, если $f(x, y)$ есть однородная функция своих аргументов нулевого измерения, т. е. имеет место тождество:

$$f(tx, ty) = f(x, y). \tag{1}$$

Если в (10) $t = \frac{1}{x}$, получается тождество:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

В правой части стоит функция только одного аргумента $\frac{y}{x}$. Если обозначить ее через $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, то можно видеть, что однородное уравнение всегда можно представить в виде:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2}$$

При произвольно заданной непрерывной функции φ переменные не разделяются, однако поскольку в правую часть переменные входят только в комбинации $\frac{y}{x}$, то можно предположить, что уравнение упростится, если ввести новую искомую функцию:

$$u = \frac{y}{x},$$

откуда

$$y = ux. \tag{3}$$

если вставить выражение $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ в уравнение (2), то получится:

$$u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u),$$

или

$$xdu = [\varphi(u) - u]dx. \tag{4}$$

Если обе части разделить на $x[\varphi(u) - u]$, то переменные разделятся, и получится:

$$\frac{du}{(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

После интегрирования можно найти:

$$\int \frac{du}{(u) - u} = \ln x + C. \tag{5}$$

Если в этом выражении заменить u его значением $\frac{y}{x}$, то получится интеграл уравнения (2).

Уравнения, приводимые к однородным

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}, \tag{6}$$

где a, b, ..., c_1 — данные постоянные. Если $c = c_1 = 0$, то уравнение является однородным, которое можно проинтегрировать. В общем случае его нужно свести к однородному. Вводим новые переменные: $x = \xi + h$, $y = \eta k$, где h и k — пока еще неопределенные постоянные. Мы имеем: $dx = d\xi$, $dy = \eta d$, подставляя их в уравнение (15), имеем:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\xi + b\xi + ah + bk + c}{a_1\xi + b_1\eta + a_1h + b_1k + c_1}.$$

Если теперь выбрать h и k как решения системы линейных уравнений :

$$\left.\begin{aligned} ah + bk + c = 0 \\ a_1b + b_1k + c_1 = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (7)$$

то мы получим однородное уравнение:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}.$$

В его интервале следует заменить ξ через $x — h$, η через $y — k$, где h и k имеют вышеуказанные значения, в результате получится интеграл уравнения (32). Система (16) не имеет решения, если определитель из коэффициентов при неизвестных равен нулю: $ab_1 — a_1b = 0$. В этом случае такой метод неприменим. Однако если в этом случае $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$, а значит, уравнение имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}. \qquad (8)$$

Его можно привести к виду с разделяющими переменными, если ввести новую переменную:

$$z = ax + by.$$

Тогда $\dfrac{dz}{dx} = a + b\dfrac{dy}{dx}$, и уравнение (8) примет вид:

$$\frac{1}{b}\frac{dx}{dz} - \frac{a}{b} = \frac{z + c}{\lambda z + c_1}.$$

Другими словами, мы получим уравнение, не содержащее явно x, — переменные разделяются.

Геометрические свойства семейства интегральных кривых

Рассмотрим уравнение, не содержащее явно y:

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \qquad (9)$$

Если в нем сделать замену переменного

$$x_1 = x,\ y_1 = y + C, \qquad (10)$$

где C — постоянная. Поскольку $dx = dx_1$, $dy = dy_1$, то уравнение перейдет само в себя. Таким образом, если $F(x, y) = 0$ — частный интеграл уравнения (1), то

$$F(x_1, y_1) = 0, \text{ или}$$
$$F(x, y + C) = 0 \qquad (11)$$

тоже будет являться интегралом при любом C. Если общий интеграл дифференциального уравнения имеет вид (11), то исключение произвольного постоянного приведет к уравнению вида (9). Преобразование (10) геометрически состоит в том, что все точки плоскости (x, y) переносятся на равную величину C параллельно оси y (перенос). Дифференциальное уравнение (9) допускает преобразование (9), т. е. поле направлений после такого переноса совпадает с первоначальным (так как линии $x = x_0$, параллельные оси O_y, являются изоклинами). Угловой коэффициент на такой прямой имеет постоянное значение $f(x_0)$. Также семейство интегральных кривых переходит при переносе (10) само в себя, при этом каждая отдельная кривая $F(x, y, C') = 0$ переходит в другую кривую:

$$F(x, y, C') = 0. \tag{12}$$

Аналогично обстоит дело с уравнением типа

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{13}$$

которое допускает группу преобразований:

$$x_1 = x + C, \; y_1 = y.$$

Здесь подразумевается группа переносов параллельно оси x. Ту же группу допускает семейство интегральных кривых, а общий интеграл получается из частного заменой x на $x + C$.

4. Линейные уравнения

Линейное уравнение первого порядка — это уравнение, линейное относительно искомой функции и ее производной, которое имеет вид:

$$A\frac{dy}{dx} + By + C = 0.$$

Здесь коэффициенты A, B, C — заданные непрерывные функции от x. Предполагая, что в некотором интервале изменения x коэффициент A не обращается в нуль, мы можем разделить все члены уравнения на этот коэффициент. Обыкновенно линейное уравнение пишут в виде:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q, \tag{1}$$

где P, Q — заданные функции от x. Если $Q = 0$, то уравнение имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} + Py = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) — это **линейное однородное** уравнение (или без правой части), уравнение (1) — **неоднородное**. Однородное линейное уравнение (2) интегрируется разделением переменных и одной квадратурой:

$$\frac{dy}{y} = -Pdx, \ln|y| = -\int Pdx + \ln|C|;$$

его общее решение —

$$y = Ce^{-\int Pdx}. \tag{3}$$

Для нахождения общего решения уравнения (2), в котором P обозначает ту же функцию, что и в уравнении (3), нужно применить прием, который называется **вариацией постоянного**. Мы будем пытаться удовлетворить неоднородному уравнению (2) решением того же вида (3), но будем в этой формуле считать C не постоянной, а неизвестной функцией от x. Подставляя в этом предположении правую часть выражения (3) в уравнение (1), получим:

$$\frac{dC}{dx} e^{-\int Pdx} - CPe^{-\int Pdx} + CPe^{-\int Pdx} = Q,$$

или

$$\frac{dC}{dx} = Qe^{\int Pdx}.$$

Из этого уравнения С найдется квадратурой:

$$C = \int Qe^{\int Pdx}dx + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Подставляя найденное значение C в выражение (3), получим общее решение неоднородного линейного уравнения (3):

$$y = e^{-\int Pdx}\left(C_1 + \int Qe^{\int Pdx}dx\right). \quad (4)$$

Таким образом, общее решение линейного уравнения первого порядка находится двумя квадратурами. Заметим, что решение (5) — это сумма двух слагаемых. Здесь $C_1e^{-\int Pdx}$ — общее решение однородного уравнения (2), соответствующего данному уравнению (37), т. е. получаемого из данного заменой правой части нулем. Второе слагаемое $e^{-\int Pdx}\int Qe^{\int Pdx}dx$ — частное решение неоднородного уравнения, оно получается из общего, если положить $C_1 = 0$.

К линейному уравнению преобразованием искомой функции легко приводится **уравнение Бернулли**: Здесь P, Q — заданные непрерывные функции x, а n — некоторое постоянное число. Если $n = 0$, то будет иметь место неоднородное линейное уравнение, а при $n = 1$ имеем однородное линейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} + (P - Q)\,y = 0$$

Следовательно, будем предполагать $n \neq 0$, $n \neq 1$. Разделив обе части уравнения (26) на y^n, получим:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + Py^{-n+1} = Q.$$

Первый член с точностью до постоянного коэффициента равен производной от множителя при P, т. е. от y^{-n+1}. В связи с этим введем новую функцию:

$$z = y^{-n+1},$$

тогда:

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)\,Pz = (-n+1)\,Q.$$

Подставив в его общее решение вместо z выражение y^{-n+1}, получим общий интеграл уравнения Бернулли, который разрешается относительно y. При $n > 0$ мы имеем еще решение $y = 0$.

ЛЕКЦИЯ № 2. Вопросы существования решений уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной

1. Особые точки

1. Пусть в окрестности некоторой точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ является неограниченной. Могут иметь место два случая:

Первый случай: $f(x, y) \to \infty$, когда $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Тогда функция $\frac{1}{f(x,y)}$ стремится к нулю. Примем ее значение равным 0 в точке (x_0, y_0). Рассмотрим уравнение $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$ и допустим, что для него условия теоремы Коши в окрестности точки (x_0, y_0) выполнены. В результате получится интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0). Ее уравнение будет иметь вид:

$$x = \varphi(y); \text{ при } x = x_0,\ y = y_0 \text{ имеем } \frac{dx}{dy} = 0.$$

Следовательно, интегральная кривая имеет в точке (x_0, y_0) вертикальную касательную. Для семейства интегральных кривых точка (x_0, y_0) никакими другими геометрическими особенностями обладать не будет.

Второй случай: $f(x, y)$, являясь неограниченной в окрестности точки (x_0, y_0), не имеет единственного предела ∞, когда точка (x, y) стремится к (x_0, y_0), между тем как в остальных точках этой окрестности или $f(x, y)$ или $\frac{1}{f(x,y)}$ непрерывна. Такова, например, функция $\frac{ax + by}{cx + dy}$ в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$. Действительно, когда точка (x, y) стремится к $(0, 0)$, оставаясь на прямой

$ax + by = 0$, эта функция равна 0. Однако если точка (x, y) лежит на прямой $cx\ dy = 0$, функция не определена (нуль в знаменателе), но вблизи этой прямой она бесконечно велика; по другим же направлениям функция имеет иные предельные значения. Таким образом, в точке (0, 0) наша функция имеет изолированную особую точку типа 0/0.

2. Разберем течение интегральных кривых в окрестности особой точки только что указанного типа для простого уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy}. \tag{1}$$

Пусть $ad - bc = 0$, тогда при помощи линейной подстановки с постоянными коэффициентами и определителем, отличным от нуля,

$$\xi = \alpha_x + \beta y,\ \eta = \gamma_x + \delta y, \tag{2}$$

преобразуем уравнение, стараясь подобрать постоянные α, β, γ, δ таким образом, чтобы преобразованное уравнение имело наиболее простой вид. Иначе говоря, так, чтобы в числителе нового уравнения был одночлен $\lambda\eta$, а в знаменателе — одночлен $\mu\xi$ (λ и μ — некоторые постоянные). Из формулы (2) получается:

$$d\xi = \alpha dx + \beta dx,\ d\eta = \gamma dx = \delta dy.$$

Тогда, составляя производную $\frac{d\eta}{d\xi}$, заменяют в ее выражении в числителе и знаменателе dx и dy через пропорциональные им согласно (1) величины $cx + dy$ и $ax + by$. В результате получается:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\gamma(cx+dy)+\delta(ax+by)}{\alpha(cx+dy)+\beta(ax+by)}.$$

Мы ставили целью преобразования (2), чтобы числитель имел вид $\lambda\eta$, т. е. чтобы имело место тождество:

$$\gamma(cx+dx)+\delta(ax+by)=\lambda\eta=\lambda(\gamma x+\delta y).$$

Приравнивая в первой и последней частях этого тождества коэффициенты при x и y, для определения γ и δ получают два уравнения:

$$\left.\begin{array}{r}\gamma(c-\lambda)+\delta a=0\\ \gamma d+\delta(b-\lambda)=0\end{array}\right\}. \qquad (3)$$

Эти два однородных линейных уравнения будут иметь не равные нулю решения, только если определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & a \\ d & b-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\lambda^2-(b+c)\lambda+bc-ad=0. \qquad (4)$$

Аналогично, приравнивая знаменатель правой части уравнения (2) выражению $\mu\xi$ и затем приравнивая в полученном тождестве коэффициенты при x и y, получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{r}\alpha(c-\mu)+\beta\alpha=0\\ \alpha d+\beta(\beta-\mu)=0\end{array}\right\}. \qquad (5)$$

Чтобы из этой системы получить не равные нулю значения α и β, нужно опять потребовать равенство нулю определителя, т. е.

$$\mu^2-(\mathrm{b}+\mathrm{c})\mu+\mathrm{bc}-\mathrm{ad}=0. \qquad (6)$$

Отсюда видно, что λ и μ должны быть корнями одного и того же уравнения (5) или (5′). Допустим, что это уравнение имеет различные корни $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Подставляя один из них, например λ_1, в уравнения (4), а другой λ_2 — в уравнения (5), мы найдем из первой системы γ и δ, а из второй α и β. Здесь определитель $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$. Действительно, если, например, a $\neq$ 0, то из первого уравнения (4) получим:

$$\frac{\delta}{\lambda} = -\frac{c - \lambda_1}{a},$$

а из уравнения (5):

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{c - \lambda_2}{a}.$$

Таким образом,

$$\frac{\delta}{\gamma} \neq \frac{\beta}{\alpha},$$

т. е. $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Значит, уравнение (1) при помощи подстановки (2), где α, β, γ, δ уже определены, будет иметь вид:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_1 \eta}{\lambda_2 \xi}. \tag{7}$$

Геометрический смысл подстановки (2) (однородного аффинного преобразования) состоит в переходе от осей *x*, *y* к новым (вообще говоря, косоугольным) осям ξ и η и в преобразовании масштаба на каждой оси. Однако поскольку нам важна общая качественная картина, мы не будем вычислять положения и масштабы новых осей и будем на наших чертежах изображать эти оси как прямоугольные. Уравнение (7) легко интегрируется разделением переменных:

$$\frac{d\eta}{\eta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{d\xi}{\xi}.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \ln|\eta| &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\ln|\xi| + \ln|C| \\ \eta &= C|\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

2. Интегрирующий множитель

1. Всякое уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

можно представить в дифференциальной форме:

$$dy - f(x, y)dx = 0,$$

или, умножая обе части на некоторую функцию $N(x, y)$, в более симметричном виде:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{9}$$

Рассмотрим частный случай, когда левая часть уравнения (9) представляет полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$:

$$M(x, y)dx + Ndy \equiv dU \equiv \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy.$$

В этом случае уравнение (9) называется уравнением в полных (точных) **дифференциалах**. Последнее тождество равносильно двум:

$$M = \frac{\partial U}{\partial x}, M = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{10}$$

Если в уравнение (9) подставить вместо y решение уравнения (1), то мы будем иметь $dU = 0$, откуда:

$$U(x,y) = C, \tag{10}$$

для значений x и y, соответствующих этому решению (C — постоянное); и обратно, для функции y, определяемой уравнением (11), имеем $dU = 0$. Итак, уравнение (11), содержащее произвольную постоянную, является интегралом уравнения (9) в полных дифференциалах. Для существования решения $y(x)$ дифференциального уравнения (1), принимающего при $x = x_0$ значение y_0, достаточно, чтобы уравнение (11) определяло y как неявную функцию от x, т. е. чтобы в точке (x_0, y_0) мы имели $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} = N(x_0, y_0) \neq 0$; в таком случае решение $y(x)$, проходящее через точку (x_0, y), определится из уравнения:

$$U(x, y) = U(x_0, y_0);$$

если $N(x_0, y_0) = 0$, а $M(x_0, y_0) \neq 0$, то соотношение (9) определит x как функцию от y. Исключение в смысле существования и единственности решения составляют только точки, в которых $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$; это — особые точки уравнения (9). Найдем признак, по которому для данного уравнения (9) можно судить, принадлежит ли оно к классу уравнений в точных дифференциалах. Из равенств (10), предполагая существование соответвующих производных, получаем два выражения для $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$; приравнивая их, получаем необходимое условие:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{12}$$

Покажем, что условие (11) является также достаточным, а именно, предполагая его выполненным, найдем функцию $U(x, y)$, удовлетворяющую соотношениям (8). Мы имеем $\frac{\partial U}{\partial x} = U(x, y)$, откуда, интегрируя по x от x_0 до x и считая у постоянным, получаем:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \varphi(y). \quad (13$$

Построенная функция (13) при всяком φ удовлетворяет первому из соотношений. Покажем, что при выполнении условия интегрируемости (12) можно найти такую функцию φ(y), чтобы выполнялось и второе соотношение (9). Мы находим из формулы (13), применяя правило дифференцирования интеграла

по параметру: $\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx + \varphi(y)$

.

Используя тождество (13), получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} dx + \varphi(y) = N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi(y).$$

Это выражение окажется равным $N(x, y)$, если положить φ'(y) = $= N(x_0, y_0)$, откуда одно из значений $\varphi(y)$ есть $\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy$.

Итак, функция U(x, y) найдена; приравнивая ее к произвольной постоянной, получаем общий интеграл уравнения (12):

$$U(x,y)\equiv \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C. \qquad (14)$$

2. Если левая часть уравнения (33) не есть полный дифференциал, возникает вопрос: нельзя ли найти такую функцию μ(x, y), при умножении на которую левая часть уравнения (33) станет полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$? Такая функция μ называется **интегрирующим множителем**. Таким образом, если μ — интегрирующий множитель, мы имеем:

$$\mu(Mdx + Ndy) = dU; \mu M = \frac{\partial U}{\partial x}, \mu N = \frac{\partial U}{\partial y}. \qquad (15)$$

Первый вопрос: для всякого ли уравнения первого порядка существует интегрирующий множитель? Из теоремы существования мы знаем, что при известных условиях уравнение (1) имеет общий интеграл: $U(x, y) = C$. Дифференцируем это равенство по x; таким образом, мы исключим C и придем к дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = 0$$

или

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial U}{\partial x} \bigg| \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Это уравнение должно быть тождественно с исходным уравнением (33), которое мы напишем в виде: $\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$. Сравнивая эти оба вида одного и того же дифференциального уравнения, мы приходим к равенству:

$$-\frac{M}{N} = -\frac{\partial U}{\partial x} \bigg| \frac{\partial U}{\partial y}$$

или

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{N} = \mu$$

(через μ мы обозначили общую величину двух последних отношений). Из последних равенств имеем: $\mu M = \frac{\partial U}{\partial x}$, $\mu N = \frac{\partial U}{\partial y}$, т. е. μ является интегрирующим множителем. Итак, **всякое дифференциальное уравнение первого порядка, удовлетворяющее некоторым условиям, имеет интегрирующий множитель. Число интегрирующих множителей данного уравнения бесконечно.** В самом деле, пусть μ есть какой-нибудь интегрирующий множитель уравнения, а $U(x, y) = C$ есть интеграл этого уравнения. Тогда μ_1, где φ — произвольная дифференцируемая функция, является также интегрирующим множителем. В самом деле, выражение $\mu_1(Mdx + Ndy) = \varphi(U)\mu(Mdx + Ndy) = \varphi(U)dU$ является полным дифференциалом от функции $\Phi(U) = \int \varphi(U)dU$. Следовательно,

$$\mu_1 = \varphi(\mathrm{U})\mu \quad (16)$$

есть интегрирующий множитель уравнения (9). Докажем, что всякий интегрирующий множитель уравнения (9) дается формулой (16). В самом деле, пусть, кроме интегрирующего множителя μ, имеется еще какой-то интегрирующий множитель μ_1. Мы имеем:

$$\mu(Mdx + Ndy) = dU, \quad (17)$$

$$\mu_1(Mdx + Ndy) = dV, \quad (18)$$

где V — некоторая функция от x, y; раскрывая последние тождества, имеем:

$$\mu M = \frac{\partial U}{\partial x}, \ \mu N = \frac{\partial U}{\partial y}, \ \mu_1 M = \frac{\partial V}{\partial x}, \ \mu_1 N = \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Откуда:

$$\frac{\partial U}{\partial x} : \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial y}$$

или

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

Таким образом, якобиан функций U и V тождественно равен нулю, а так как $\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$, то между этими функциями существует зависимость вида: $V = \Psi(U)$. Равенство (17) дает тогда:

$$\mu_1(Mdx + Ndy) = \Psi'(U)dU = \Psi'(U)\mu(Mdx + Ndy),$$

откуда $\mu_1 = \Psi'(U)$, что и требовалось доказать.

3. Нахождение интегрирующего определения интегрирующего множителя. Из определения интегрирующего множителя имеем:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

или

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu, \tag{19}$$

или же, деля обе части равенства (19) на μ,

$$N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}-M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (20)$$

В виде (19) или (20) мы получилиуравнение в частных производных для определения неизвестной функции μ. Задача интегрирования такого уравнения в общем случае не проще, чем задача решения уравнения (9). Конечно, нам достаточно знать только одно частное решение уравнения (19); иногда, по каким-нибудь особенностям уравнения (19), удается найти такое частное решение, и тогда интеграция уравнения (9) сводится к квадратурам.

ЛЕКЦИЯ № 3. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

1. Уравнения первого порядка n-й степени

1. Общий вид уравнения первого порядка может быть записан так:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Мы часто будем предполагать, что левая часть уравнения (1) является многочленом относительно y' степени n, причем коэффициенты этого многочлена в некоторой области D плоскости xy суть непрерывные функции от x и от y, допускающие по у непрерывные частные производные.

$$P(x, y, y') = An(x, y)y'^n + A_{n-1}(x, y)y'^{n-1} + \ldots + A_0(x, y) = 0. \tag{2}$$

Уравнение вида (2) называется уравнением первого порядка n-й степени относительно у'. Затем допустим, что в области D коэффициент при старшей степени у', т. е. $A_n(x, y)$, нигде не обращается в нуль. Тогда по основной теореме высшей алгебры уравнение (2) для всякой пары значений x, y в рассматриваемой области имеет n решений y' (действительных или мнимых). По теореме о неявных функциях каждое из действительных решений является непрерывной функцией от x и y и имеет конечную частную производную $\frac{\partial y}{\partial y}$, если для рассматриваемых значений x, y, y' имеем $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$ (т. е. если для данных значений x и y уравнение (2) относительно y' не имеет кратного корня; этот последний случай будет нами разобран дальше, в теории особых решений дифференциального уравнения). Таким образом, во всякой области, в которой

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right| \geq a > 0, \tag{3}$$

разрешенное относительно y' уравнение ($1'$) удовлетворяет условию Липшица.

2. Общий метод интегрирования уравнений первого порядка n-й степени таков: стараемся разрешить уравнение (1) относительно y'; в случае приводимости левой части получаем несколько уравнений низших степеней; если все неприводимые множители являются множителями первой степени, то получаем n уравнений первой степени относительно y', и задача сводится к n различным задачам, которые иногда могут быть разрешены предыдущими методами. Если имеем уравнение, неприводимое относительно y', то иногда его можно разрешить в радикалах; если полученное иррациональное уравнение относительно y' интегрируется в явном виде, то общее решение обычно содержит те же радикалы, что и исходное уравнение. Давая в этом решении радикалам все их значения, получим все n решений исходного уравнения, а если освободиться от радикалов, то получим одно семейство интегральных кривых.

2. Уравнения, не содержащие явно одной из переменных

1. Если не разрешенное относительно производной $y' \equiv p$ уравнение не содержит явно искомой функции y, то оно имеет вид:

$$F(x, p) = 0. \tag{1}$$

Если левая часть уравнения (3) удовлетворяет условиям существования неявной функции, то в окрестности данного значения x_0

оно определяет одно или несколько решений, выражающих p как функцию от x:

$$p = f_1(x),\ p = f_2(x),\ \ldots \tag{2}$$

Уравнения (2), не содержащие y, интегрируются квадратурами:

$$y = \int f_1(x)dx + C,$$
$$y = \int f_2(x)dx + C, \ldots$$

Однако фактическое разрешение уравнения (1) относительно p иногда приводит к слишком сложным функциям, а часто при помощи элементарных функций разрешение совсем невозможно. Можно, однако, указать несколько приемов, которые в более широком случае дают возможность явно выразить решение уравнения (1).

2. Уравнение вида

$$F(y, y') = 0 \tag{3}$$

может быть приведено к рассмотренному типу, если считать y за независимое переменное, а x — за функцию, так как $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{dx}$.

Если уравнение разрешено относительно y, т. е. имеет вид:

$$y = \varphi(p),$$

то ясно, что для получения x в функции p надо воспользоваться соотношением: $\dfrac{dy}{dx} = p$, откуда

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{\varphi'(p)dp}{p},$$

и x получается в функции параметра p квадратурой:

$$x = \int \frac{\varphi^{/}(p)dp}{p} + C.$$

Если нам удается заменить соотношение (5) двумя параметрическими уравнениями: у = χ (t), р = ψ (t), то опять x получается квадратурой:

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{\chi'(t)dt}{\psi(t)}, \quad x = \int \frac{\chi(t)dt}{\psi(t)} + C.$$

3. Общий метод введения параметра. Уравнения Лагранжа и Клеро

1. Пусть дано неразрешенное уравнение:

$$F(x. y, p) = 0. \tag{1}$$

Если мы будем рассматривать x, y, p как декартовы координаты в пространстве, то уравнение (6) определит некоторую поверхность. Известно, что координаты точек поверхности могут быть выражены как функции двух параметров u, v. Пусть нам известно такое параметрическое представление поверхности (1):

$$x = \varphi\,(u, v),\ y = \chi\,(u, v),\ p = \psi\,(u, v). \tag{2}$$

Система уравнений (2) эквивалентна уравнению (1). Теперь вспомним, что уравнение (1) дифференциальное и что $p = \dfrac{dy}{dx}$, или $dy = pdx$. Подставляя в это последнее равенство выражения p, dy, dx, получаем:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial u}dv = \chi(u, v)\left[\frac{\partial}{\partial u}du + \frac{\partial}{\partial v}dv\right].$$

Это — дифференциальное уравнение первого порядка между u и v. Принимая u за независимое переменное, а v — за искомую функцию, можем написать его в виде:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\chi \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\frac{\partial \psi}{\partial u} - \chi \frac{\partial \varphi}{\partial v}}.$$

Мы получили уравнение первого порядка, но уже разрешенное относительно производной. Если мы найдем его общее решение в виде: $v = \omega(u, C)$, то два первых уравнения (2) дадут:

$$x = \varphi\{u, \omega(u, C)\}, y = \psi\{u, \omega(u, C)\},$$

т. е. общее решение уравнения (1), выраженное в параметрической форме (u — параметр, C — произвольное постоянное). Это преобразование (2) обычно применяется в случае, если уравнение (1) легко разрешается относительно x или y; тогда в представлении (2) за параметры естественно взять y и p или x и p. Рассмотрим сначала уравнение:

$$v = f(x, y). \tag{3}$$

Соотношение $dy = pdx$, если принять за параметры x и y, даст нам:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp = pdx$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} = p. \tag{4}$$

Мы получили уравнение между x и p, разрешенное относительно $\frac{dp}{dx}$; пусть его общее решение будет:

$$p = \varphi(x, C). \tag{5}$$

Внося это выражение в формулу (3), получим общее решение искомого уравнения:

$$y = f\{x, \varphi(x, C)\}.$$

2. Рассмотрим теперь уравнение:

$$x = f(y, p). \tag{6}$$

Можно воспользоваться соотношением $dy = pdx$, вводя в него в качестве новых вспомогательных переменных y и p; можно также получить уравнение, разрешенное относительно производной от искомой функции, дифференцируя обе части уравнения (6) по y и принимая во внимание, что $\frac{dy}{dx} = p$, или $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{p}$. При этом находим:

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}.$$

Мы получили дифференциальное уравнение между y и p. Найдя его общее решение $p = \psi(y, C)$ и внеся это выражение на место p в данное уравнение (6), получим его общий интеграл:

$$x = f\{y, \psi(y, C)\}.$$

Впрочем, уравнение (6) переходит в уравнение вида (3), если поменять роль переменных x и y.

3. **Уравнение Лагранжа.** Изложенные преобразования приводят уравнение, не разрешенное относительно производной, к новому уравнению, которое является разрешенным относительно производной; но это новое уравнение, вообще говоря, не интегрируется в квадратурах. Сейчас мы рассмотрим тип уравнений, не разрешенных относительно производных, в применении к которым метод дифференцирования всегда приводит к уравнению, интегрируемому в квадратурах. Это **уравнение Лагранжа**. Так называется уравнение, линейное относительно x и y, т. е. уравнение вида: $A(p)y + B(p)x = C(p)$, где коэффициенты A, B, C — данные дифференцируемые функции производной $p = \dfrac{dy}{dx}$. Разрешая это уравнение относительно y (мы предполагаем, что $A(p) \neq 0$), приводим его к виду:

$$y = \varphi(p)x + \psi(p). \tag{7}$$

Применяя к уравнению (14) метод дифференцирования (так как это — уравнение вида (10)), приходим к уравнению:

$$p = \varphi(p) + [\varphi'(p)x + \psi'(p)]. \tag{8}$$

Если в этом уравнении рассматривать x как искомую функцию, а p — как независимое переменное, то получаем линейное уравнение:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}. \tag{9}$$

Оно, как известно, интегрируется в квадратурах; решение имеет вид: $x = C\omega(p) + \chi(p)$, где, например, $\omega(p) = e^{-\int \frac{\varphi(p)\,dp}{\varphi(p) - p}}$.

Внося найденное выражение x в данное уравнение, получим выражение вида: $y = [C\omega(p) + \chi(p)] + \varphi(p) + \Psi(p)$. Таким образом два переменных выражения в функции параметра p; если исключить этот параметр, получим общий интеграл уравнения Лагранжа в форме $\Phi(x, y, C) = 0$.

4. **Уравнение Клеро** является частным случаем уравнения Лагранжа; оно имеет вид:

$$y = px + \varphi(p), \tag{10}$$

где φ — данная (дифференцируемая) функция.

Дифференцируем обе части по x; получаем:

$$p = p + [x + \varphi'(p)]\frac{dp}{dx}.$$

или

$$\frac{dp}{dx}[x + \varphi'(p)] = 0.$$

Исследуем на этот раз оба множителя левой части последнего уравнения; первый множитель дает дифференциальное уравнение: $\frac{dp}{dx} = 0$, откуда $p = C$, и общее решение уравнения (15) есть

$$y = Cx + \varphi(C). \tag{11}$$

Итак, общее решение уравнения Клеро получается заменой в уравнении (10) p на произвольное постоянное С. Решение (11) геометрически представляет семейство прямых от одного параметра. Приравняем теперь нулю второй множитель $x + \varphi'(p) = 0$. Это равенство определяет p как функцию от x; $p = \omega(x)$. Если подставить это значение p в уравнение (10), то получим:

$$y = x\omega(x) + \varphi[\omega(x)]. \tag{15}$$

Можно также подставить значение $x = -\varphi'(p)$ в уравнение (12) и получить ту же кривую в параметрической форме:

$$x = -\varphi'(p),\ y = -p\varphi'(p) + \varphi(p). \tag{13}$$

Легко проверить, что кривая или (13) является интегральной кривой уравнения (10); в самом деле, пользуясь, например, параметрическим представлением (12), находим:

$$dx = -\varphi''(p)dp,$$
$$dy = [-p\varphi''(p) + \varphi'(p) - \varphi'(p)]dp = -p\varphi''(p)dp,$$

откуда $\frac{dp}{dx} = 0$. Вставляя значения x, y, y' в уравнение (10), получаем тождество:

$$-p\varphi'(p) + \varphi(p) = -p\varphi'(p) + \varphi(p).$$

Решение (12) или (13) не содержит произвольной постоянной; оно не получается из общего решения (11) ни при каком постоянном значении C. В самом деле, правая часть уравнения (11) при любом постоянном С есть линейная функция от x. Допустим, что $x\omega(x) + \varphi[\omega(x)] = ax + b$ (a и b — постоянные). Диффе-ренцируя, находим: $\omega(x) + x\omega'(x) + \varphi'[\omega(x)]\omega'(x) = a$. Но по оп-ределению функции $\omega(x)$ имеем: $\varphi[\omega(x)] = -x$, и предыдущее равенство обращается в следующее: $\omega(x) = a$, что противоречит уравнению, определяющему $\omega(x)$. Посмотрим, каково геометрическое значение решения (12). Оно получилось путем исключения р из двух уравнений: $y = px + \varphi(p)$, $0 = x + \varphi'(p)$, или заменяя p через C из двух уравнений:

$$y = Cx + \varphi(C),\ 0 = x + \varphi'(C),$$

причем второе получается из первого дифференцированием по C. Но из дифференциальной геометрии известно, что этот процесс дает огибающую семейства прямых (11), представляющего общее решение. Мы скажем, что эта огибающая, т. е. решение (12), есть особое решение уравнения Клеро (10). Итак, **общее решение уравнения Клеро представляет семейство прямых, особое решение — огибающую**.

4. Особые решения

1. При исследовании уравнения Клеро мы встретились с особым решением. В настоящем параграфе мы исследуем вопрос о существовании особых решений для довольно широкого класса уравнений и укажем два способа их нахождения. Мы видели, что по теореме Коши, если правая часть дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

непрерывна в некоторой области и имеет в ней ограниченную производную по y, то через каждую точку (x_0, y_0) области проходит единственная интегральная кривая (свойство единственности); эта кривая входит в семейство от одного параметра (за параметр мы принимали величину y_0) и получается из этого семейства, когда параметр принимает определенное числовое значение. Семейство от одного параметра образует общее решение, каждая интегральная кривая представляет частное решение, и в силу теоремы единственности никаких других решений, в частности особых решений, в этом случае не представится. Например, если правая часть уравнения (16) есть многочлен относительно y,

$$\frac{dy}{dx} = A_n(x)y^n + A_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + A_1(x)y + A_0(x),$$

то в области непрерывности коэффициентов и при ограниченных значениях y (т. е. в прямоугольнике $a \leq x \leq b$, $-k \leq y \leq k$, где коэффициенты непрерывны в интервале $a \leq x \leq b$ и k сколь угодно большое положительное число) выражение $\dfrac{df}{dy}$ тоже ограничено — это уравнение не имеет особых решений (таковы, например, линейное уравнение, $n = 1$; уравнение Риккати, $n = 2$). Далее, если правая часть есть дробная рациональная функция от x и от y:

$$f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

где P и Q суть многочлены по x и y без общего множителя, то производная обращается в бесконечность только в тех точках x_0, y_0, где $Q(x_0, y_0) = 0$, т. е. где $f = \infty$. Но в таких точках для уравнения $f(x, y) = \dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ правая часть [если $P(x_0, y_0) \neq 0$] непрерывна вместе с производной по x, и опять в силу теоремы Коши, проходящая через такую точку интегральная кривая $x = \psi(y)$ удовлетворяет условию единственности и входит в семейство от одного параметра (т. е. является обыкновенным частным решением). Наконец, если $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ (это может иметь место лишь в изолированных точках), особым решением мы назовем такое решение дифференциального уравнения, которое во всех своих точках не удовлетворяет свойству единственности, т. е. в любой окрестности каждой точки (x, y) особого решения существует по крайней мере две интегральные кривые, проходящие через эту точку. Теорема Коши дает достаточные условия для того, чтобы в некоторой области не существовало особых решений; следовательно, обратно, для существования особого решения необходимо, чтобы не выполнялись условия теоремы Коши. Итак, мы можем искать особые решения только в тех точках плоскости xOy, где не выполнены условия теоремы Коши. В частности, если правая часть уравнения (16) непрерывна во всей рассматриваемой области, то особые решения могут проходить только через те точки, в которых не выполняется условие Липшица. Если $f(x, y)$ всюду имеет конечную или бесконечную производную по y, то условие Липшица не выполняется в тех точках, где $\dfrac{df}{dy}$ становится бесконечной.

Случай, когда функция f непрерывна и $\frac{df}{dy}$ бесконечна, может представиться, например, для иррациональных функций.

2. Мы видели, что простейший случай, когда правая часть уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ непрерывна, а $\frac{df}{dy}$ бесконечна, встречается, когда f является иррациональной функцией от y. Освобождаясь от этих иррациональностей, мы получим алгебраическое уравнение степени выше первой относительно y' с коэффициентами, являющимися рациональными функциями от y. Естественно было бы поставить вопрос об отыскании особых решений такого уравнения. Пусть дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2}$$

будет алгебраическое, n-й степени относительно y', т. е. имеет вид:

$$A_n(x, y)y'^{n} + \ldots + A_1(x, y)y' + A_0(x, y) = 0, \tag{3}$$

причем левая часть представляет неприводимый многочлен по y'. Коэффициенты $A_k(x, y)$ мы предполагаем многочленами по y и по x (достаточно было бы допустить, что $A_k(x, y)$ непрерывны по переменным x, y в некоторой области D и допускают в ней частные производные по x и по y). Как уже указывалось в начале настоящей главы, уравнение (3) определяет n ветвей многозначной функции:

$$y_i' = f_i(x, y) \ (i = 1, 2, \ldots, n); \qquad (4).$$

Мы будем рассматривать только действительные ветви (4). Все эти ветви являются непрерывными функциями от x и y для тех значений этих переменных, которые не обращают в нуль $A_n(x, y)$. Посмотрим, как для этих ветвей обстоит дело с условиями Липшица. Для вычисления производной $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv \frac{\partial y'}{\partial y}$ воспользуемся уравнением (2) и правилом дифференцирования неявной функции; находим:

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}}. \tag{5}$$

Так как все коэффициенты $A_k(x, y)$ являются дифференцируемыми по y, то производная (5) конечна и непрерывна всюду, где $A_n \neq 0$ и где знаменатель не равен нулю, т. е. те значения x, y, для которых может не выполняться условие Липшица, удовлетворяют уравнению:

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0, \tag{6}$$

где после выполнения дифференцирования в левой части вместо y' надо взять одну из функций $f_i(x, y)$, определенную уравнением (2). Иначе говоря, чтобы получить уравнение геометрического места тех точек плоскости xOy, где условие Липшица не выполняется, надо исключить y' из уравнений (2) и (6). В высшей алгебре дается процесс исключения одного переменного из двух алгебраических уравнений при помощи рациональных операций — получение так называемого результанта этих уравнений; равенство нулю результанта есть условие существования общих корней двух уравнений. В нашем случае левая часть уравнения (6) есть производная по y' от левой части уравнения (2); результант этих уравнений есть дискриминант уравнения (2) относительно y'. Равенство нулю дискриминанта есть условие существования общего нуля данного многочлена и его производной, т. е. кратного корня уравнения (2), где в качестве неизвестного рассматривается y'. Исключая y' из (2) и (6), мы придем к уравнению:

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{7}$$

которое, вообще говоря, определит одну или несколько кривых . Дискриминантная кривая (или их совокупность) разделяет плоскость xy на некоторое количество областей. Внутри каждой такой области G некоторое число k ($k \geq 0$) из и ветвей (4) являются действительными; это число одно и то же для всей области. Во всякой области, лежащей вместе с границей внутри G, знаменатель в правой части выражения (5) по абсолютной величине больше некоторого положительного числа, следовательно, $\frac{\partial y'}{\partial y}$ ограничена; условие Липшица для всех k ветвей (4) выполнено; таким образом, через каждую точку области О проходит k интегральных кривых в согласии с теоремой существования. Для особых решений здесь нет места. (Отметим, что все k интегральных кривых имеют в точке x, y различные касательные, так как между значениями (4) для y' нет равных.) В точках дискриминантной кривой две или более ветвей функции y', определяемой уравнениями (4), становятся равными между собой, по самому определению дискриминанта. Кроме того, в силу формулы (5) на дискриминантной кривой, вообще говоря, не удовлетворяются условия Липшица. Дополним теперь область G ее границей, состоящей из дискриминантных кривых или их частей. В полученной таким образом замкнутой области G каждая из ветвей (4) попрежнему будет непрерывной функцией от x, y, но условия Липшица не выполнены на границе. Мы находимся в таких условиях, когда может существовать особое решение. Пусть y как функция x

$$y = \varphi(x), \tag{8}$$

определенная из уравнения (7) дискриминантной кривой, сама является решением дифференциального уравнения (2), и пусть совокупность решений рассматриваемой ветви (5), определенная внутри области О, может быть продолжена до ее границы, т. е. вплоть до всех точек кривой (8). Тогда через каждую точку кривой (8) проходят два решения, соответствующих рассматриваемой ветви: во-первых, одна интегральная кривая, продолженная изнутри области О (обыкновенное решение), и, во-вторых, решение

(8), которое является, таким образом, особым решением. Итак, особыми решениями уравнения (2) могут быть только функции:

$$y = \varphi(x), \tag{9}$$

определяемые уравнением (7). Вообще говоря, эти функции, однако, не удовлетворяют данному дифференциальному уравнению, т. е. не являются вовсе решениями уравнения (2). В том, какой из этих случаев имеет место, легко убедиться непосредственной проверкой. Иногда может случиться, что вдоль такого решения (9) удовлетворяется во всех его точках свойство единственности (для данной ветви). Это будет в случае, если решения, определенные внутри области G, не доходят до ее границы: тогда мы имеем дело с частным решением. Можно показать, что этот случай является исключительным. В общем случае, если функция (9), полученная из дискриминантной кривой (7), удовлетворяет дифференциальному уравнению (3), она является особым решением. Итак, мы получаем следующее правило нахождения особого решения: Если дано уравнение:

$$F(x, y, p) = 0, \; p = \frac{dy}{dx}, \tag{10}$$

где левая часть есть многочлен по p, то составляем уравнение:

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0. \tag{11}$$

Исключая p из уравнений (10) и (11), получаем уравнение (8), определяющее дискриминантную кривую. Если определяемая этим уравнением функция (9) является решением дифференциального уравнения (10), то решение, вообще говоря, особое.

3. Изложенный в предыдущем разделе способ нахождения особых решений сводится к алгебраическим операциям — дифференцированию (многочлена) и исключению. Если данное уравнение алгебраическое по x, y, y', то и особое решение является ал-

гебраическим; мы его всегда можем найти, даже если не умеем интегрировать уравнения (10). Второй метод нахождения особых решений, который мы сейчас изложим, требует знания общего интеграла дифференциального уравнения. Пусть общий интеграл уравнения (10) есть

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{12}$$

Если семейство кривых, изображаемое уравнением (12), имеет огибающую, то эта огибающая:

1) является решением дифференциального уравнения. В самом деле, в каждой точке огибающей элемент (x, y, y') совпадает с элементом одной из интегральных кривых семейства (12); а так как интегральные кривые семейства (12)есть суть решения уравнения (10), то все элементы огибающей также удовлетворяют этому уравнению, т. е. огибающая есть решение;
2) дает особое решение. В самом деле, рассмотрим семейство, состоящее из дуг интегральных кривых до точки прикосновения с огибающей; через каждую точку некоторой окрестности огибающей проходит одна такая кривая; эти кривые соответствуют полю, определенному одной из ветвей (4) уравнения (10); в точках огибающей единственность нарушается, так как через каждую ее точку проходят две интегральные кривые с общей касательной — сама огибающая и касающаяся ее кривая семейства. Отсюда правило нахождения особого решения, если известен общий интеграл (12), таке же, как для нахождения огибающей: дифференцируем уравнение (12) по параметру C:

$$\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \tag{13}$$

Из уравнений (12) к (13) исключаем C, полученное соотношение

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{14}$$

(если оно представляет решение) дает особое решение.

5. Задача о траекториях

1. Пусть дано семейство плоских кривых

$$F(x,\ y,\ a) = 0, \tag{1}$$

которое зависит от одного параметра a. Кривая, образующая в каждой своей точке постоянный угол α с проходящей через эту точку кривой семейства (1), называется **изогональной траекторией этого семейства**. Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, мы имеем **ортогональную траекторию**. Будем считать семейство (30) данным и разыскивать его изогональные траектории. Обозначим текущие координаты траектории через x_1, y_1. Допустим, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, тогда обозначим $\operatorname{tg}\alpha = k$, и будем иметь в любой точке траектории: $\varphi_1 - \varphi_2 = \alpha$, где φ — угол с осью x касательной к кривой семейства, φ_1 — то же для траектории, т. е.

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = k$$

или

$$\frac{\frac{dy_1}{dx1} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy_1}{dx_1} \cdot \frac{dy}{dx}} = k. \tag{2}$$

Равенство (2) имеет место в любой точке (x_1, y_1) траектории. Угловой коэффициент $\frac{dy}{dx}$ для проходящей через эту точку кривой семейства вычисляется из уравнения (1):

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

где вместо *x, y* нужно подставить x_1, y_1. Подставляя найденное значение $\frac{dy}{dx}$ в уравнение (2), получаем:

$$\frac{\frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial x_1}}{\frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial y_1} - \frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial x_1}\frac{dy_1}{dx_1}} = k. \qquad (3)$$

В это уравнение входит параметр *a*, изменяющийся от точки к точке траектории и характеризующий ту кривую семейства, которую траектория пересекает в данной точке. Его значение для точки x_1, y_1 получится из уравнения (1), если в нем положить $x = x_1$, $y = y_1$:

$$F(x_1, y_1, a) = 0. \qquad (4)$$

Исключая *a* из двух уравнений (4) и (3), получим соотношение:

$$\Phi(x_1, y_1, \frac{dy_1}{dx_1}) = 0, \qquad (5)$$

которое связывает координаты точки траектории и угловой коэффициент касательной. Значит, уравнение (5) есть **дифференциальное уравнение изогональных траекторий** семейства (1). Общий интеграл уравнения (4):

$$\Psi\ (x_1, y_1, C) = 0$$

дает **семейство от одного параметра изогональных траекторий**. Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то имеем:

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{\pi}{2},\ \operatorname{tg}\varphi_1 = -\operatorname{ctg}\varphi,\ \frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Таким образом, вместо уравнения (3) получим:

$$\frac{dy_1}{dx_1}\frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial x_1} - \frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial y_1} = 0 . \tag{6}$$

Дифференциальное уравнение ортогональных траекторий получается путем исключения параметра *a* из уравнений (2) и (6).

2. Рассуждения и выкладки упрощаются, если само исходное семейство кривых задано дифференциальным уравнением:

$$\Phi_1(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 . \tag{7}$$

Это уравнение ставит в соответствие каждой точке (x, y) одно или несколько значений $\frac{dy}{dx}$, определяющих поле направлений данного семейства. Мы можем положить $x = x_1$, $y = y_1$; направление поля для изогональных траекторий связано с направлением поля для данного семейства соотношением (2), откуда, разрешая относительно $\frac{dy}{dx}$, будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - k}{k\frac{dy_1}{dx_1} + 1}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (7), заменяя в нем x, y на x_1, y_1 получаем уравнение поля для семейства изогональных траекторий, т. е. их дифференциальное уравнение:

$$\Phi_1\left(x_1, y_1, \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - k}{k\frac{dy_1}{dx_1} + 1} \right) = 0. \tag{8}$$

В случае ортогональных траекторий $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dy_1}{dx_1}$ связаны соотношением:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}.$$

Отсюда дифференциальное уравнение для ортогональных траекторий будет иметь вид:

$$\Phi_1\left(x_1, y_1, \frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}\right) = 0. \tag{9}$$

ЛЕКЦИЯ № 4. Дифференциальные уравнения высших порядков

1. Теорема существования

1. Обозначим независимую переменную через x, искомую функцию – через y. Дифференциальное уравнение *n*-го порядка ($n > 1$) имеет вид:

$$\mathrm{F}(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

где F – непрерывная функция всех своих аргументов. При этом левая часть зависит от старшей производной $y(n)$. Вблизи начальных значений x_0, y_0, y_0',..., $y_0^{(n)}$, удовлетворяющих условиям:

$$F(x, y, y', \ldots, y_0^{(n)}) = 0,$$

По теореме о существовании неявной функции мы можем разрешить уравнение (1) относительно $y^{(n)}$. Оно запишется в виде:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Докажем существование и единственность решения уравнения (2), определяемого начальными условиями при $x = x_0$, тогда имеем:

$$y = y_0, y' = y_0', \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}, \tag{3}$$

где x_0, y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ – данные числа. Для доказательства существования целесообразно заменить уравнение (2) системой n дифференциальных уравнений первого порядка с n искомыми функциями. Для осуществления этой замены мы наряду с искомой функцией y вводим еще $n - 1$ вспомогательных искомых функций y_1, y_2, ..., y_{n-1}, которые связаны с y и между собой соотношениями:

$$\frac{dy}{dx} = y_1,\ \frac{dy_1}{dx} = y_2, \ldots, \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}. \tag{4}$$

Из этого соотношений вытекает, что функция yk является k-й производной от функции y, $y_k = \dfrac{d^k y}{dx^k} = y^{(k)}$ $(k = 1, 2, ..., n - 1)$, поэтому мы имеем:

$$y^{(n)} = \frac{dy_{n-1}}{dx},$$

и уравнение (2) примет вид:

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}) \tag{5}$$

Уравнения (4) и (5) есть система n дифференциальных уравнений первого порядка с n искомыми функциями y, y_1, ..., y_{n-2}, y_{n-1}. В левых частях этих уравнений стоят производные от искомых функций, а правые части зависят от независимого переменного и искомых функций (и не зависят от производных). Система такого вида называется **системой** n дифференциальных уравнений **нормальной формы**. Несмотря на это, система (4) и (5) имеет ту особенность, что только в последнем уравнении правая часть есть функция от $x, y, y_1, ..., y_{n-1}$ наиболее общего вида. В уравнениях (4) правые части имеют специальную форму. Докажем существование нормальной формы для системы n дифференциальных уравнений первого порядка. При этом для полной симметрии в обозначениях мы вместо обозначений $y, y_1, ..., y_{n-1}$ для искомых функций введем обозначения: $y_1, y_2, ..., y_n$. Значит, будем рассматривать систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

2. Для доказательства существования решения системы n дифференциальных уравнений нормальной формы (6) применим метод последовательных приближений Пикара. Пусть для системы (6) задана система начальных значений x_0, $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$. Мы введем следующие предположения относительно правых частей уравнений (6):

1) функции f_i ($i = 1, 2, ..., n$) непрерывны по всем аргументам в замкнутой области:

$$D: x_0 - a \le x \le x0 + a,\ y_i^{(0)} - b \le y_i \le y_i^{(0)} + b\ (i = 1, 2, ..., n).$$

Из непрерывности функций f_i в области D следует их ограниченность, т. е. существование такого положительного числа M, что $|f_i| \le M$ ($i = 1, 2, ..., n$) для значений аргументов, принадлежащих D;

2) в области D эти функции удовлетворяют условию Липшица относительно аргументов $y_1, y_2, ..., y_n$: если при данном x значения $y_1', y_2', ..., y_n'$ и $y_1'', y_2'', ..., y_n''$ суть две какие-нибудь системы значений, принадлежащие области D, то имеют место неравенства:

$$\left|f_i(x_1, y'_1, y'_2, ..., y'_n) - f_i(x, y''_1, y''_2, ..., y''_n)\right| \le K\left\{\left|y'_1 - y''_1\right| + \right.$$

$$\left. + \left|y'_2 - y''_2\right| + ... + \left|y'_n - y'_n\right|\right\} \text{ (i = 1, 2, ..., n)}, \qquad (7)$$

где K есть некоторое постоянное положительное число.

Заметим, что если функции f_i имеют в области D непрерывные частные производные по $y_1, y_2, ..., y_n$, то, по теореме о конечном приращении имеем:

$$f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) - f_i(x, y''_1, y''_2, ..., y''_n) =$$

$$= \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_1}\right)_{\overline{y_k}} (y_1 - y''_1) + ... + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_n}\right)_{\overline{y_k}} (y_n - y''_n), \qquad (8)$$

где знак $(\ )_{y_k}$ показывает, что аргументы y_k ($k = 1, 2,..., n$) должны быть заменены через

$$\overline{y_k} = y_k' + (y_k'' - y_k'), \ 0 < \theta < 1.$$

В силу непрерывности частные производные являются ограниченными. Мы можем взять наибольшее значение абсолютных величин всех этих производных $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ (i, $k = 1, 2, ..., n$) в области D за постоянную K и получить из (8) неравенство вида (7). Таким образом, условие Липшица выполняется при существовании и непрерывности в D частных производных $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ (i, $k = 1, 2, ..., n$). Мы докажем, что в указанных предположениях 1) и 2) существует одна и только одна система решений уравнений (4):

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x),$$

определенная для значений x в отрезке $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, где $h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$ и принимающая при $x = x_0$ заданные начальные значения

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)},\ y_2(x_0) = y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_n^{(0)}. \tag{10}$$

Вычисляем последовательные приближения одновременно для всех искомых функций. За приближения нулевого порядка берем постоянные $y_i^{(0)}$. Далее приближения первого порядка будут:

$$\left.\begin{array}{l} y_1^{(1)}(x) = y_1^{(0)} + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f_1\left(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)} dx\right), \\ \qquad\qquad \ldots \\ y_n^{(1)}(x) = y_n^{(0)} + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f_n\left(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)} dx\right). \end{array}\right\} \tag{11}$$

Очевидно, что построенные функции являются непрерывными. Покажем, что первые приближения при $\left|x - x_0\right| \le h$ не выходят из области D. В самом деле,

$$|y_i^{(1)} - y_i^{(0)}| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i\left(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right) dx\right| M\left|x - x_0\right| Mh \le b \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(в силу определения числа h). Далее определяем вторые приближения:

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(2)}(x) &= y_1^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_1\left(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)} dx\right), \\ &\ldots \\ y_n^{(2)}(x) &= y_n^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_n\left(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)} dx\right). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Вообще, m – e приближения определяются через приближения (m – 1)-го порядка такими формулами:

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(m)}(x) &= y_1^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_1\left(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)} dx\right), \\ &\ldots \\ y_n^{(m)}(x) &= y_n^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_n\left(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)} dx\right). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Допуская, что (m – 1) – e приближения оказались непрерывными функциями от x, мы видим, что m – e приближения как неопределенные интегралы от непрерывных функций также оказываются непрерывными. Легко доказать, что если (m – 1) – е приближения не выходят из области D при $|x - x_0| \le h$, то это же имеет место для приближений порядка m. В самом деле, в силу предположения о (m – 1) – x приближениях мы имеем:

$$|f_i\left(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}\right)| \le M$$

при $|x-x_0|\le h$ ($i = 1, 2, ..., n$), и формулы (13) в таком случае дают:

$$|y_i^{(m)}-y_i^{(0)}|=\left|\int\limits_{x_0}^{x} f_i\left(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}\right)dx\right| M\left|x-x_0\right| Mh \le b.$$

Так как неравенство доказано для $m = 1$, то оно справедливо для любого натурального m. Таким образом, все последовательные приближения (13) принадлежат области D при изменении x в отрезке $x_0 - h \le x \le x_0 + h$. Докажем далее, что последовательные приближения образуют сходящуюся последовательность, т. е. что существует ($i = 1, 2, ..., n$). Для этого, как и в случае одной функции, рассмотрим ряды:

$$y_i^{(0)}+[y_i^{(1)}(x)-y_i^{(0)}]+[y_i^{(2)}(x)-y_i^{(1)}(x)]+[y_i^{(m)}(x)-y_i^{(m-1)}(x)]+\ldots$$

$$(i = 1, 2, ..., n). \tag{14}$$

Оценим абсолютные величины членов этих рядов, начиная со второго, пользуясь для этой оценки условием Липшица. Имеем:

$$|y_i^{(1)}(x)-y_i^{(0)}|=\left|\int\limits_{x_0}^{x} f_i\left(x, y_1^{0}, \ldots, y_n^{(0)}dx\right)\right| M\left|x-x_0\right|,$$

далее

$$|y_i^{(2)}(x)-y_i^{(1)}|=\left|\int\limits_{x_0}^{x}\left[f_i\left(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}\right)-f_i\left(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right)\right]dx\right| \le$$

$$\le \int\limits_{x_0}^{x}\left[f_i\left(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}\right)-f_i\left(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right)\right]dx\Bigg|, \tag{15}$$

и на основании условия Липшица и полученных оценок для $| y_i^{(1)} - y_i^{(0)} |$,

$$| y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)} | \le \left| \int_{x_0}^{x} K \left\{ | y_1^{(1)} - y_1^{(0)} | + \ldots + \right.\right.$$

$$\left.\left. . + \left| y_n^{(1)} - y_n^{(0)} \right| \right\} dx \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} MnK \left| x - x_0 \right| dx \right| = MnK \frac{\left| x - x_0 \right|^2}{2} \tag{16}$$

$(i = 1, 2, ..., n)$

Допустим, что для члена $y_i^{(m-1)}(x) - y_i^{(m-2)}(x)$ мы уже получили оценку:

$$| y_i^{(m-1)}(x) - y_i^{(m-2)}(x) | \le M (nK)^{(m-2)} \frac{\left| x - x_0 \right|^{m-1}}{(m-1)!} \tag{17}$$

$(i = 1, 2, ..., n)$;

покажем, что аналогичная оценка с заменой $m - 1$ на m справедлива для следующего члена. В самом деле,

$$| y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x) | = \left| \int_{x_0}^{x} \left[f_i \left(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)} \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f_i \left(x, y_1^{(m-2)}, \ldots, y_n^{(m-2)} \right) \right] dx \right| \le$$

$$\le \int_{x_0}^{x} | f_i \left(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)} \right) - f_i \left(x, y_i^{(m-2)}, \ldots, \right.$$

$$\ldots, y_n^{(m-2)}\Big)dx \,\Bigg| \le \left| K \int_{x_0}^{x} \sum_{l=1}^{n} \left| y_l^{(m-1)} - y_l^{(m-2)} \right| dx \right| \le$$

$$< M(nK)^{m-1} \left| \int_{x_0}^{x} \frac{|x - x_0|^{m-1}}{(m-1)!} dx \right| = M(nK)^{m-1} \frac{|x - x_0|^m}{m!}. \qquad (18$$

Таким образом, мы доказали, что оценка (18) справедлива для всякого натурального m. Замечая далее, что $|x - x_0| \le h$, мы видим, что все члены рядов (14), начиная со второго, соответственно не больше по абсолютной величине, чем члены знакоположительного числового ряда $\sum_{m=1}^{\infty} M(nK)^{m-1} \frac{h^m}{m!}$. Этот последний ряд, как легко проверить, сходится; следовательно, ряды (14) сходятся равномерно для значений x в отрезке $x_0 - h \le x \le x_0 + h$. Так как их члены суть непрерывные функции, то и суммы их будут функциями непрерывными. Обозначив их через $Y_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), получим:

$$Y_i(x) = y_i^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} (y_i^l - y_i^{l-1}) = \lim_{m \to \infty} y_i^{(m)}(x).$$

Докажем, что функции $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, ..., $Y_n(x)$ дают искомую систему решений системы дифференциальных уравнений (6). По самому определению $y_i^{(m)}(x)$ мы имеем: $y_i^{(m)}(x_0) = y_i^{(0)}$; следовательно, $\lim_{m \to \infty} y_i^{(m)}(x_0) = Y_i(x_0)$, т. е. предельные функции $Y_i(x)$ удовлетворяют начальным условиям.

Докажем, что эти функции удовлетворяют системе (6). В силу равенств (13) мы можем написать:

$$y_i^{(m)}(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} \Big\{ f_i\Big(x, y_1^{(m-1)}(x), \ldots, y_n^{(m-1)}(x)\Big) - f_i\big(x, Y_1(x), \ldots$$

$$\ldots, Y_n(x))\}dx + \int_{x_0}^{x} f_i(x, Y_1(x), \ldots, Y_n(x))dx \tag{19}$$

($i = 1, 2, \ldots, n$).

Оценим абсолютную величину первого интеграла:

$$\left|\int_{x_0}^{x} \left\{f\left(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}\right) - f_i(x, Y_1, \ldots Y_n)\right\}dx\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} \left| f_i\left(x, y_1^{(m-1)}\right), \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots, y_n^{(m-1)} - f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n)\right| dx\right|$$

$$K\left|\int_{x_0}^{x} \left\{| y_1^{(m-1)} - Y| + \ldots + | y_n^{(m-1)} - Y_n|\right\}dx\right|, \tag{20}$$

(последнее неравенство есть следствие условия Липшица). Так как функции $y_i^{(m-1)}(x)$ ($m = 1, 2, \ldots$) сходятся в интервале ($x_0 - h$, $x_0 + h$) равномерно к $Y_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), то для любого наперед заданного e можно найти такое N, что при $m - 1 > N$ для всякого значения x в рассматриваемом интервале выполняются неравенства: $| y_i^{(m-1)}(x) - Y_i(x)| < \frac{\varepsilon}{nKh}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), и тогда для первого интеграла в формуле (19) получается в силу неравенства (20) оценка при:

$$\int_{x_0}^{x} \left\{f_1\left(x, y_1^{(m-1)}\right) \ldots, y_n^{(m-1)} - f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n)\right\}dx\left| \frac{\varepsilon}{nKh} hnK = \varepsilon.\right.$$

Следовательно, при $m \to \infty$ предел этого интеграла равен нулю.

С другой стороны, по доказанному, $\lim\limits_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x) = Y_i(x)$, и равенства (19) дают в пределе:

$$Y_i(x) = y_i^{(0)} + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, Y_1, \ldots, Y_n)dx$$

($i = 1, 2, \ldots, n$), т. е. функции $Y_i(x)$ действительно удовлетворяют системе (6). Докажем далее, что полученное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, будет единственным. Допустим, что, кроме системы решений $Y_1(x), \ldots, Y_n(x)$, существует еще одна система решений $Z_1(x), \ldots, Z_n(x)$, причем $Y_i(x_0) = Z_i(x_0) = y_i^{(0)}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) и не все Z_i тождественно равны Yi. Таким образом, в силу нашего допущения (непрерывная) функция

$$\Phi(x) = |Y_1(x) - Z_1(x)| + |Y_2(x) - Z_2(x)| + \ldots + |Y_n(x) - Z_n(x)| \qquad (21)$$

не равна тождественно нулю в отрезке $(x_0 - h, x_0 + h)$. Без ограничения общности мы можем допустить, что $\Phi(x) \neq 0$ при значениях x, сколь угодно близких к x_0 и, например, больших, чем x_0 если бы при $x_0 \le x \le x_1$ было $\Phi(x) = 0$, а неравенство выполнялось бы впервые для значений x, больших, чем x_1, и сколь угодно близких к нему, то мы заменили бы в последующих рассуждениях x_0 через x. Рассмотрим отрезок $[x_0, x_0 + h_1]$, где h_1 – любое положительное число, меньшее или равное h. По допущению $\Phi(x)$ принимает отличные от нуля, следовательно, положительные значения в интервале $[x_0, x_0 + h_1]$ для значений x, сколь угодно близких к x_0, значит, при сколь угодно малом h_1. В силу известного свойства непрерывных функций функция (21) достигает своего положительного максимума в отрезке $[x_0, x_0 + h_1]$ для некоторого значения $x = \xi$, где $x_0 < \xi < x_0 + h_1$. Так как наши функции $Y_i(x)$ и $Z_i(x)$ по предположению удовлетворяют системе (6), то мы имеем тождества:

$$\frac{dY_i}{dx} = f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n), \quad \frac{dZ_i}{dx} = f_i(x, Z_1, \ldots, Z_n)$$

откуда

$$\frac{d(Y_i - Z_i)}{dx} = f_i(x, Y_i, ..., Y_n) - f_i(x, Z1, ..., Z_n) \qquad (22)$$

Интегрируя тождества (11) в интервале ($x_0 + h$), где x – переменное, принадлежащие отрезку $[x_0, x_0 + h]$, получаем:

$$Y_i(x) - Z_i(x) = \int_{x_0}^{x} \{f_i(x, Y_1, ..., Y_n) - f_i(x, Z1, ..., Z_n)\} dx$$

($i = 1, 2, ..., n$). Оценим разности в левых частях этих равенств, пользуясь условиями Липшица и тем, что значение функции (10) в отрезке $[x_0, x_0 + h_1]$ меньше или равно θ. Находим:

$$\left|Y_i(x) - Z_i(x)\right| \le \int_{x_0}^{x} K\{\left|Y_1(x) - Z_1(x)\right| + ... + \left|Y_n(x) - Z_n(x)\right|\} dx <$$

$$< \int_{x_0}^{x} K\theta dx = K\theta(x - x_0)$$

($i = 1, 2, ..., n$). Складывая последние неравенства для $i = 1, 2, ..., n$, находим:

$$\left|Y_i(x) - Z_i(x)\right| + ... + \left|Y_n(x) - Z_n(x)\right| < nK\theta(x - x_0) \le nK\theta h1 \qquad (23)$$

для всякого x, удовлетворяющего неравенствам: $x_0 \le x \le x_0 + h_1$. Если мы возьмем, в частности, значение $x = \xi$, то левая часть (23) будет равна θ, и мы получим неравенство: $\theta < nK\theta h_1$. Оно приводит к противоречию, так как h_1 может быть взято сколь угодно малым. В частности, можно взять $h_1 \le \dfrac{1}{nK}$; тогда правая часть окажется $\le \theta$, и мы получаем $\theta \le \theta$. Это противоречие доказывает единственность решения. Полученное нами решение определено только для интервала $(x_0 - h, x_0 + h)$. Пользуясь языком многомерной геометрии, мы можем сказать, что область D есть параллелепипед $(n + 1)$-мерного пространства, прямоугольные координаты точек которого суть $x, y_1, y_2, ..., y_n$. Решение $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ будем называть **интегральной кривой** в этом пространстве, проходящей через точку $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_n^{(0)})$. Если хоть один из концов полученного отрезка интегральной кривой, соответствующий значениям $x_0 + h$ и $x_0 + h$, еще является внутренним для области, в которой функции f_1 удовлетворяют условиям 1 и 2 (например, конец, соответствующий $x = x_0 + h$), то можно взять точку $x_0^{(1)} = x_0 + h$, $y_i^{(1)} = y_i(x_0 + h)$, $i = 1, 2, ..., n$ за новую начальную точку и исходя из нее определить дальнейший отрезок интегральной кривой при значениях x в некотором интервале $(x_0^{(1)} - h^{(1)}, x_0^{(1)} + h^{(1)})$. В силу теоремы единственности эти кривые совпадают в общей части отрезков $[x_0 - h, x_0 + h]$ и $[x_0^{(1)} - h^{(1)}, x_0^{(1)} + h^{(1)}]$. Таким образом, мы продолжили наше решение, определив его на большом интервале. Это продолжение возможно до тех пор, пока мы не подойдем как угодно близко к границе той области, в которой функции f_i удовлетворяют условиям 1 и 2. Таким образом, шаг за шагом, мы определим интегральную кривую. Вспомним теперь, что одно дифференциальное уравнение n-го порядка вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, ..., \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \tag{24}$$

и

$$\frac{dy}{dx} = y_1,\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, ..., y_{n-1}),\ \frac{dy_1}{dx} = y_2, ..., \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}.$$

Применяя к этой системе доказанную теорему существования и вспоминая связь между функциями y_i и производными от y, существующую в данном случае, мы можем сформулировать следующую теорему существования (и единственности) для уравнения (24): Уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, правая часть которого непрерывна по всем аргументам и удо влетворяет условию Липшица по аргументам y, $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным данным: при $x = x_0$ имеет место $y = y_0, \frac{dy}{dx} = y, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y_0^{(n-1)}$ (задача Коши).

3. Теорема Коши утверждает существование частного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (именно решения, удовлетворяющего данным начальным условиям). Геометрически это означает, что существует интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$). Однако приведенное доказательство позволяет построить также общее решение. Будем рассматривать x_0 как данное число, а $y_1(0)$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$ – как переменные параметры, которые могут принимать различные числовые значения, не выходящие, однако, из области D. Для каждой такой системы начальных значений получится своя интегральная кривая. Через каждую точку (n + 1)-мерного пространства, лежащую достаточно близко к «гиперплоскости» $x = x_0$, проходит интегральная кривая нашей системы. В самом деле, рассмотрим какую-нибудь точку $P\left(\overline{x_0}, \overline{y_1^{(0)}}, \ldots, \overline{y_n^{(0)}}\right)$ и проходящую через нее интегральную кривую. Если $|x_0 - \overline{x_0}|$ достаточно мало, то эта интегральная кривая может быть продолжена до значения $x = x_0$, причем $y_1, y_2, \ldots, y_n$ примут при $x = x_0$ некоторые значения (x_0, $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$). Тогда кривая, определенная начальными значениями (x_0, $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$), пройдет через точку P. Итак, через каждую точку некоторой области D', лежащей внутри области D, проходит интегральная кривая, определяемая при $x = x_0$

начальными значениями $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$. В силу единственности через каждую точку D' проходит только одна такая интегральная кривая. Формулы (11), (12), ..., (7_n) показывают, что последовательные приближения $y_i^{(\mathrm{m})}$ являются непрерывными функциями параметров $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $yn^{(0)}$. В силу равномерной сходимости $y_i^{(m)}(x)$ к предельным функциям $y_i(x)$ эти последние тоже являются непрерывными функциями этих параметров:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \\ y_2 &= \varphi_2(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \\ y_n &= \varphi_n(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Формулы (24) дают выражение общего решения системы (4) в области D'. Мы видим, что это решение **непрерывно зависит от *n* произвольных постоянных**, каковыми в нашем выводе являются параметры $y_i^{(0)}$. Возвращаясь к интересующему нас в этой главе случаю одного дифференциального уравнения n-го порядка, замечаем, что входящей в задачу искомой функцией является y, а функции y_1, y_2, ..., y_{n-1} являются вспомогательными; поэтому из совокупности формул вида (25) нас интересует только та, которая дает выражение для y. Входящие в нее начальные значения вспомогательных функций суть в нашем случае начальные значения производных от y. Таким образом, общее решение уравнения (24) имеет вид:

$$y = \varphi(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}). \ (26)$$

Замечая, что начальные значения y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ являются параметрами, т. е. произвольными постоянными, мы приходим к выводу: общее решение уравнения n-Мго порядка содержит n произвольных постоянных и имеет вид:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \qquad (27)$$

Если соотношение, связывающее x, y и n произвольных постоянных, дано в виде, не разрешенном относительно y:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0, \qquad (28)$$

то мы будем называть такое соотношение **общим интегралом** уравнения (24) или (25). В теореме существования мы получили в качестве произвольных постоянных начальные значения функции и ее $n - 1$ последовательных производных; при фактической интеграции уравнения n-го порядка мы обыкновенно получаем другие произвольные постоянные. Однако если их число равно n, то мы при выполнении некоторых условий сумеем из формулы (27) или (28) получить (в некоторой области) любое частное решение, т. е. решение, удовлетворяющее начальным данным Коши. При выполнении упомянутых условий мы также будем назы-вать формулу (27) **общим решением**, а формулу (28) – общим интегралом уравнения (24) или (25), причем постоянные $C_1, C_2, ..., C_n$ уже не являются непременно начальными значениями для $y, y', ..., y^{(n-1)}$.

Покажем, как решить задачу Коши, если известно общее решение (27). Из соотношения (27) и тех, которые получаются из него дифференцированием по x, подставляя в них вместо x начальное значение x_0, а вместо y, y', ..., $y^{(n-1)}$ их начальные значения, мы получаем равенства:

$$\left.\begin{array}{c} \varphi(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) = y_0 \\ \varphi' = (x_0, C_1, C_2, ..., C_n) = y'_0 \\ \dots \\ \varphi^{(n-1)} = (x_0, C_1, C_2, ..., C_n) = y_0^{(n-1)} \end{array}\right\}. \qquad (29)$$

Рассматривая равенства (29) как n уравнений с n неизвестными, $C_1, C_2, ..., C_n$, мы получим, вообще говоря, числовые значения $C_1, C_2, ..., C_n$, соответствующие тому частному решению, которое отвечает данным начальным условиям. Точно так же, если дан общий интеграл (28), то, подставляя в него вместо y решение (27) уравнения (24), полученное разрешением уравнения (28) относительно y, мы получим тождество. Дифференцируем его по x, помня, что y является функцией x. Подставляем в полученные равенства начальные значения; получаем:

$$\left.\begin{array}{c}
\Phi(x_0, y_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \\
\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 y'_0 = 0 \\
\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\right)_0 y'_0 + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)_0 y'_2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 y''_0 = 0 \\
\left(\frac{\partial^{n-1} \Phi}{\partial x^{n-1}}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 y_0^{(n-1)} = 0
\end{array}\right\} \quad (30)$$

символ $(\ )_0$ указывает, что в данном выражении вместо x и y подставить x_0 и y_0. Мы опять получаем n уравнений для определения n неизвестных, C_1, C_2, ..., C_n, т. е. мы и в этом случае можем, вообще говоря, решить задачу Коши.

2. Типы уравнений n-го порядка, разрешаемые в квадратурах

1. Уравнение вида

$$y(n) = f(x) \quad (1)$$

легко интегрируется в квадратурах. В самом деле, из уравнения (1) последовательными интеграциями получаем:

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1, \quad y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1(x - x_0) + C_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int\limits_{x_0}^{x} dx \int\limits_{x_0}^{x} dx \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + \frac{C_1(x - x_0)^2}{2} + C_2(x - x_0) + C_3,$$

и, наконец,

$$y = \underbrace{\int\limits_{x_0}^{x} dx \int\limits_{x_0}^{x} dx \int\limits_{x_0}^{x}}_{n \text{ раз}} f(x)dx + \frac{C_1(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{C_2(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + C_{n-1}(x - x_0) + C_n. \qquad (2)$$

Формула (2) дает общее решение уравнения (1); при этом из промежуточных формул очевидно, что формула (2) представляет решение такой задачи Коши — найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным: при $x = x_0$

$$y_0 = C_n,\ y_0^{/} = C_{n-1},\ y_0^{(n-2)} = C_2,\ y_0^{(n-1)} = C_1.$$

Следовательно, первый член правой части в формуле (18)

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} dx \int\limits_{x_0}^{x} dx \ldots \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx. \qquad (3)$$

представляет частное решение уравнения (1), которое вместе со своими производными до (n – 1)-го порядка обращается в нуль при $x = x_0$. Это выражение (3), содержащее n-кратную квадратуру по x, может быть преобразовано к такому виду, где содержится только одна квадратура по параметру.

2. Уравнение вида

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0 \qquad (4)$$

приводится к квадратурам при любом натуральном n. Предположим сначала, что уравнение (4) разрешено относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}); \quad (5)$$

вводим новую функцию $z : z = y^{(n-1)}$. Уравнение (5) примет вид: $z' = f(z)$. Из этого уравнения получаем с помощью разделения переменных его общий интеграл:

$$x + C_1 = \int \frac{dz}{f(z)}.$$

Допустим, что это соотношение разрешено относительно z: $z = \varphi(x, C_1)$. Заменяя z его значением $y^{(n-1)}$, получим уравнение (n — 1)-го порядка: $y^{(n-1)} = \varphi(x, C_1)$; при его интеграции войдут еще n — 1 произвольных постоянных, и мы получим общее решение уравнения (4) в виде:

$$y = \underbrace{\int dx \int dx \ldots \int}_{n \text{ раз}} \varphi(x, C_1)\, dx + C_2 x^{n-1} + C_3 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n.$$

Если уравнение (4) неразрешимо в элементарных функциях относительно y^n, но мы имеем выражения $y^{(n)}$ и $y^{(n-1)}$ через параметр t:

$$y^{(n)} = \varphi(t), \; y^{(n-1)} = \psi(t), \qquad (6)$$

то соотношение $dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx$, или $dx = \dfrac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}}$ дает нам $dx = \dfrac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)}$, откуда x получается квадратурой:

$$x = \int \frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)} + C_1.$$

Далее, находим последовательно:

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \frac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\varphi(t)},$$

$$y^{(n-2)} = \int \frac{\psi(t)\,\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)} + C_2,$$

$$dy^{(n-3)} = y^{(n-2)}dx, \ldots, dy = y'\,dx$$

и, наконец,

$$y = \int y'\,dx + C_n,$$

т. е. опять представление y и x в функции параметра t и n произвольных постоянных C_1, C_0, ..., C_n, следовательно, общее решение.

3. Уравнения вида

$$F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0 \tag{7}$$

также интегрируются в квадратурах. Введение нового переменного $z = y^{(n-2)}$ приводит уравнение (21) к уравнению второго порядка:

$$F(z'', z) = 0. \tag{8}$$

Если уравнение (8) разрешено относительно z'', т. е. имеет вид:

$$z'' = f(z), \tag{9}$$

то один из методов его интеграции таков: умножив обе части на $2z'$, получаем: $2z'z'' = 2f(z)z'$, или в дифференциалах: $d(z'^2) =$

$= 2f(z)dz$, откуда $z^2 = 2\int f(z)dz + C_1$. Последнее уравнение можно разрешить относительно производной и разделить переменные: $\frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} = dx$; отсюда находим общий интеграл уравнения (22′):

$$\int \frac{dz}{2\int f(z)dz + C_1} = x + C_2.$$

Этот интеграл по замене z на $y^{(n-2)}$ получает вид: $\Phi(y^{(n-2)}, x, C_1, C_2) = 0$, т. е. уравнение вида (17′); оно интегрируется, как мы уже знаем, квадратурами, причем эта интеграция дает еще n — 2 произвольных постоянных, и мы получим общее решение уравнения (9). Если уравнение (9) дано в не разрешенном относительно $y^{(n)}$ виде, но известно его параметрическое представление:

$$y^{(n)} = \varphi(t),\ y^{(n-2)} = \Psi(\mathrm{t}), \tag{10}$$

то интеграция совершается следующим образом. Мы имеем два равенства:

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx,$$
$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx,$$

связывающих две неизвестные функции от t, именно x и y. Исключая делением dx, получаем дифференциальное уравнение для $y^{(n-1)}$: $y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = y^{(n)}dy^{(n-2)}$ или в силу уравнений (10), $y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = \varphi(\mathrm{t})\Psi'(\mathrm{t})dt$, откуда квадратурой находим $(y^{(n-1)})^2$. Далее получим:

$$y^{(n-1)} = \sqrt{2\int \varphi(t)\psi'(t)dt + C}.$$

Имея параметрическое представление $y^{(n-1)}$ и $y^{(n-2)}$, мы свели задачу к типу (10). Дальнейшие квадратуры введут n — 1 новых произвольных постоянных.

3. Промежуточные интегралы. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Промежуточный интеграл. Если мы имеем уравнение n-го порядка

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

то, как уже сказано, соотношение

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0.$$

Определяющее решение этого уравнения и связывающее y, x и n существенных произвольных постоянных называется общим интегралом уравнения $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Иначе общий интеграл можно определить так: соотношение $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ называется общим интегралом уравнения $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Если, исключая из него и из уравнений, получаемых дифференцированием его по x (причем y рассматривается как функция от x), произвольные постоянные C_1 $C_2, \dots, C_n$, мы приходим к уравнению $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Пусть теперь мы имеем соотношение:

$$\Psi(x, y, y', \dots, y^{(k)}, C_{k+1}, C_{k+2}, \dots, C_n) = 0, \tag{1}$$

в которое входят производные до k-то порядка (производная входит непременно) и n — k произвольных постоянных. Диф-ференцируем это уравнение n — k раз по x, считая у функцией x; имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}y'+\dots+\frac{\partial\psi}{\partial y^{(k)}}y^{(k+1)}=0 \\ &\frac{\partial^{n-k}\psi}{\partial x^{n-k}}+\dots+\frac{\partial\psi}{\partial y^{(k)}}y^{(n)}=0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Если в результате исключения из $n - k + 1$ уравнений (23) и (2) $n - k$ постоянных C_i $(i = k + 1, ..., n)$ мы получим уравнение а, то соотношение (1) называется промежуточным интегралом уравнения а. В частности, если соотношение (1) содержит только одно произвольное постоянное, т. е. имеет вид: $\Psi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}, C) = 0$, то оно называется первым интегралом уравнения (1). Промежуточный интеграл (1), если в нем рассматривать y как искомую функцию, сам является дифференциальным уравнением порядка k, где $k < n$. Легко видеть, что каждое решение уравнения (1) является решением уравнения $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$. В самом деле, если $y = \varphi(x)$ есть решение уравнения (1), то, подставляя это значение y в уравнения (1) и (2), мы обратим их в тождества; а значит, и уравнение $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, которое является следствием системы (1) и (2), обратится в тождество, что и требовалось доказать. Если мы найдем общее решение уравнения (1), то оно должно содержать k новых произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_k$ сверх входящих в самое уравнение параметров $C_{k+1}, ..., C_n$, и мы получим решение уравнения $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, содержащее n произвольных постоянных, т. е. общее решение этого последнего уравнения. Таким образом, знание промежуточного интеграла вида (1) позволяет свести задачу интеграции уравнения n-го порядка к интеграции уравнения порядка $k < n$, т. е. к задаче более простой.

2. Уравнения, не содержащие явно искомой функции или независимого переменного. Пусть уравнение n-го порядка не содержит явно искомой функции у; для общности предположим, что оно не содержит также ее $k - 1$ первых производных $y', ..., y^{(k-1)}$ и низшая производная, явно входящая в уравнение, есть $y^{(k)}$ $(1 \le k \le n - 1)$. Уравнение имеет вид:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0. \tag{3}$$

Полагая $y^{(x)} = z$, мы заменяем уравнение (3) уравнением:

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0 \ (4)$$

порядка $n - k$. Здесь мы не можем утверждать, что уравнение (4) всегда интегрируется в квадратурах. Но вместо уравнения n-го порядка мы получили уравнение порядка $n - k < n$. Допустим, что мы сумели найти общий интеграл уравнения (4):

$$\Phi(x, z, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}) = 0$$

или

$$\Phi(x, y(k), C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}) = 0. \ (5)$$

Уравнение (25) есть промежуточный интеграл уравнения (4), содержащий $n - k$ постоянных. Само уравнение (25) принадлежит к типу (1), т. е. заведомо интегрируется в квадратурах, и, решая его, мы найдем общий интеграл уравнения (4). Если $k = n$, мы непосредственно имеем уже рассмотренное нами уравнение (1). Пусть далее уравнение не содержит явно x, т. е. имеет вид:

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (6)$$

Здесь мы проведем такую замену переменных: в качестве новой искомой функции вводим $p = \dfrac{dy}{dx}$; за независимое переменное принимаем y. Вычисляем в этом предположении производные различных порядков:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d\left(p\dfrac{dp}{dy}\right)}{dy}\frac{dy}{dx} = p\left[p\frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right] = p^2\frac{d^2p}{dy_2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2$$

Таким образом, вторая производная от y по x через p и $\frac{dp}{dy}$, третья производная через p и его производные не выше второго порядка. Легко доказать методом полной индукции, что $\frac{d^k y}{dx^k}$ выражается через p, $\frac{dp}{dy}$, ..., $\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}$. Подставляя выражения для y'', y''', ..., $y^{(n)}$ в новых переменных в уравнение (6), получим дифференциальное уравнение порядка n — 1:

$$F_1(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}) = 0.$$

Если его удастся проинтегрировать, то его общий интеграл $\Phi(y, p, C_1, ..., C_{n-1}) = 0$, или $\Phi(y, \frac{dp}{dy}, C_1, ..., C_{n-1}) = 0$, который является промежуточным для уравнения (26), дает дифференциальное уравнение первого порядка, интегрируемое в квадратурах.

3. Понижение порядка в однородных уравнениях различных типов.

Пусть левая часть уравнения (1) есть однородная функция аргументов y, y', y'', ..., $y^{(n)}$, т. е. пусть выполняется тождество:

$$F(x, ky, ky', ..., ky^{(n)}) = k^m F(x, y, y', ..., y^{(n)}). \qquad (7)$$

Для любого k; m есть показатель однородности. Заметим, что если $y_1(x)$ есть решение такого уравнения, то $Cy_1(x)$ есть также решение (C — произвольная постоянная). В самом деле, результат подстановки в левую часть уравнения (а) на место у выражения $Cy_1(x)$ дает произведение из C^m на результат подстановки в то же уравнение функции $y_1(x)$, что по условию тождественно равно нулю. Если мы введем новую искомую функцию $u = \ln y$, то по предыдущему, если $u_1(x)$ будет решением преобразованного уравнения, то $u_1 + \ln C = u_1(x) + C_1$ будет также его решением. Иначе говоря, уравнение допускает группу преобразований $x_1 = x$, $u_1 = u + C$. Рассуждения показывают, что в таком случае искомая функция не входит явно в преобразованное уравнение. А тогда, как мы знаем, замена зависимого переменного $u' = z$ приводит к уравнению порядка $n — 1$. Исключая промежуточное переменное u, получаем такую зависимость между y и z:

$$y = e^{\int z dx}. \tag{8}$$

Итак, порядок рассматриваемого уравнения может быть понижен на единицу введением новой неизвестной функции z, связанной с y соотношением (8). Проверим это рассуждение непосредственным вычислением. Последовательно дифференцируя равенство (8) по x, находим:

$$y' = ze^{\int z dx}, \quad y'' = (z' - z^2)e^{\int z dx}, \quad y''' = (z'' + 3zz' + z^3)e^{\int z dx},$$

и, вообще, $y(k)$ выразится как произведение $e^{\int z dx}$ на выражение, содержащее z и его производные до порядка $k — 1$. Вносим эти выражения в уравнение и замечаем, что в силу соотношения (7) имеем:

$$F\left(x, e^{\int z dx}, ze^{\int z dx}, (z' + z^2)e^{\int z dx}, \ldots\right) \equiv e^{m\int z dx} F(x, 1, z, z' + z^2, \ldots)$$

(m — показатель однородности). Множитель $e^{m\int z dx}$ в уравнении может быть отброшен, и мы получаем уравнение порядка $n — 1$:

$$F(x, 1, z, z' + z^2, \ldots) = 0.$$

Если его удастся решить, мы получим промежуточный интеграл уравнения (1), зависящий от n — 1 постоянных, вида:

$$\Phi(z, x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$$

или

$$\Phi(\frac{y'}{y}, x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

Когда выражение функции z известно, то y получится квадратурой по формуле (28), причем сюда войдет новая постоянная C_n:

$$y = e^{\int zdx + \ln C_n} = C_n e^{zdx}.$$

Другим типом однородных дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка, являются уравнения, однородные относительно $x, y, dx, dy, d^2y, ..., d^ny$. Для установления этой однородности пишем уравнение (1) в форме:

$$\Phi(x, y, dx, dy, d^2y, ..., dny) = 0. \qquad (29)$$

Уравнение принадлежит к рассматриваемому нами типу, если функция Φ в формуле (29) однородна (степени n) в отношении всех своих аргументов, т. е. если имеет место тождество:

$$\Phi(kx, ky, kdx, kdy, kd^2y, ..., kdny) \equiv k^m \Phi(x, y, dx, dy, d^2y, ..., dny).$$

Вид уравнения показывает, что оно не изменяется, если заменить x через C_x и y через C_y (C — постоянное). Если мы введем пе ременные $u = \frac{y}{x}$ и x, то преобразованное уравнение будет допускать группу преобразований $u_1 = u$, $x_1 = C_x$. Наконец, если ввести новое независимое переменное $\xi = \ln x$, то уравнение, связывающее

u и , будет допускать группу преобразований: $u_1 = u$, $\xi_1 = \xi + C$. Отсюда следует, что в последнее уравнение не входит явно ξ; поэтому оно допускает понижение порядка на единицу. Выписываем формулы непосредственного перехода от переменных x, y к переменным ξ, u:

$$x = e^{\xi},\ y = ue^{\xi}. \tag{10}$$

Проверим непосредственным вычислением результат этой замены. Последовательным дифференцированием находим:

$$dx = e^{\xi} d\xi,\ dy = e^{\xi}(du + ud\xi);$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{d\xi} + u.$$

Далее,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{du}{d\xi} + u\right)\frac{d\xi}{dx} = e^{-\xi}\left(\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{du}{d\xi}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{d\xi}\left[e^{-\xi}\left(\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{du}{d\xi}\right)\right]\frac{d\xi}{dx} = e^{-2\xi}\left(\frac{d^3u}{d\xi^3} - \frac{du}{d\xi}\right)$$

и т. д. Итак, мы получаем:

$$\left.\begin{aligned} x = e^{\xi},\ y = ue^{\xi},\ dx = e^{\xi}d\xi,\ dy = e^{\xi}(du + ud\xi), \\ d^2y = e^{\xi}(d^2u + dud\xi),\ d^3y = e^{\xi}(d^3u - dud\xi^2) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

(при этом d^2y, d^3y, ... взяты в предположении, что независимое переменное есть x, а d^2u, d^3u, ... — в предположении, что независимое переменное есть ξ). Внося выражения (11) в уравнение 9), мы в силу однородности можем вынести за знак функции Ф множитель e^m и сократить на него уравнение; получим: $\Phi(1, u, d\xi, du + ud\xi, d^2u + dud\xi, ..., dnu + ...) = 0$. Мы получили уравнение n-го порядка, в которое явно не входит независимое переменное ξ; это уравнение допускает понижение порядка на единицу.

Можно рассмотреть несколько более общий класс однородных уравнений, именно уравнения вида (9), в которых функция Φ однородна относительно своих аргументов, если считать x и dx первого измерения, а y, dy, d^2y, ... — измерения m; тогда $\frac{dp}{dy}$ будет иметь измерение m — 1, $\frac{d^2y}{dx^2}$ — измерение m — 2 и т. д. Для понижения порядка применяем подстановку: $x = e\xi$, $y = uem\xi$; мы будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} = e^{m\xi}\left(\frac{du}{d\xi} + mu\right)\frac{d\xi}{dx} = e^{(m-1)\xi}\left(\frac{du}{d\xi} + mu\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\xi}\left[e^{(m-1)\xi}\left(\frac{du}{d\xi} + mu\right)\right]\frac{d\xi}{dx} =$$

$$= e^{(m-2)\xi}\left[\frac{d^2u}{d\xi^2} + (2\mathrm{m} - 1)\frac{du}{d\xi} + m(m-1)\,u\right].$$

Каждая производная содержит множитель e^{ξ} в такой степени, каково измерение этой производной в функции F; поэтому e^{ξ} в некоторой степени выйдет за знак функции Φ. Мы получим дифференциальное уравнение, не содержащее явно ξ, т. е. допускающее понижение порядка на единицу.

4. Уравнения, левая часть которых является точной производной

Если нам удалось убедиться, что левая часть уравнения (3) есть полная производная по x от некоторого дифференциального выражения (n — 1)-го порядка, т. е. что мы имеем тождественно по

$x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ соотношение $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, или

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} y' + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}, \qquad (1)$$

то очевидно, что каждое решение уравнения (1) является решением дифференциального уравнения:

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C, \qquad (2)$$

и, обратно, каждое решение уравнения (2) является решением уравнения (1). Таким образом, соотношение (2) является первым интегралом уравнения (1); нам удалось понизить порядок уравнения на единицу.

ЛЕКЦИЯ № 5. Общая теория линейных дифференциальных уравнений

1. Определения и общие свойства

1. Дифференциальное уравнение n-го порядка называется линейным, если оно первой степени относительно совокупности величин $y, \frac{dy}{dx}, ..., \frac{d^n y}{dx^n}$ (y — искомая функция, x — независимое переменное). Таким образом, линейное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = F(x), \tag{1}$$

где коэффициенты a_0, a_1, ..., a_n (так же как F) есть непрерывные функции от x (в частности, они могут быть постоянными или нулями). Если уравнение действительно имеет порядок n, то коэффициент a_0 не должен быть тождественно равен нулю. Допустим, что для значений x в интервале

$$a < x < b \tag{2}$$

$a_0(x) \neq 0$ и что все остальные коэффициенты и $F(x)$ непрерывны в этом интервале. Разделив обе части уравнения на $a_0(x)$ и введя обозначения:

$$p_1 = \frac{a_i}{a_0} \ (i = 1, 2, ..., n), \ f(x) = \frac{F(x)}{a_0},$$

мы приведем уравнение (1) к виду:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x), \tag{3}$$

где p_1, ..., p_n и $f(x)$ — известные непрерывные функции от x. В дальнейшем мы будем преимущественно рассматривать линейное уравнение, приведенное к виду (3). Уравнение (1) или (3) называется **неоднородным линейным уравнением**, или **уравнением с правой частью**. Если же «правая часть» (или «свободный член») уравнения, $F(x)$ или $f(x)$, тождественно равна нулю, то уравнение называется однородным линейным:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{4}$$

или

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0. \tag{5}$$

Если уравнение (4) или (5) имеет те же коэффициенты, как (1) или (3), то оно называется однородным уравнением, **соответствующим** неоднородному уравнению (1) или (3).

2. Отметим следующие общие свойства линейных дифференциальных уравнений:

1) уравнение остается линейным при замене независимого переменного. В самом деле, преобразуем независимое переменное подстановкой:

$$x = \varphi(\xi), \tag{6}$$

где φ есть произвольная непрерывная дифференцируемая n раз функция, производная которой $\varphi/(\xi)$ не обращается в нуль в рассматриваемом интервале $\alpha < \xi < \beta$, причем этот интервал соответствует изменению x в интервале (2) (это условие достаточно для существования обратной функции $\xi = \varphi(x)$, определенной в интервале (2)). Из равенства (6) имеем: $dx = \varphi'(\xi)\xi$. Вычисляя выражения производных от y по x через производные по новому независимому переменному, находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\varphi'(\xi)}\frac{dy}{d\xi},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varphi'(\xi)}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\varphi'(\xi)}\frac{dy}{d\xi}\right) = \frac{1}{\varphi'^2(\xi)}\frac{d^2y}{d\xi} - \frac{\varphi''(\xi)dy}{\varphi'^3(\xi)}\frac{dy}{d\xi},\ldots.$$

Легко видеть, что вообще $\frac{d^k y}{dx^k}$ выразится линейно (и однородно) через $\frac{dy}{d\xi}, \frac{d^2y}{d\xi^2}, \ldots, \frac{d^k y}{d\xi^k}$, с коэффициентами — непрерывными функциями от ξ. Вставляя эти выражения в уравнение (1) и производя в коэффициентах a_i и в свободном члене $F(x)$ замену (4), мы опять получим линейное уравнение:

$$b_0\frac{d^n y}{d\xi^n} + b_1\frac{d^{n-1}y}{d\xi^{n-1}} + \ldots + b_{n-1}\frac{dy}{d\xi} + b_n y = \Phi(\xi),$$

причем

$$b_0(\xi) = \frac{a_0[\varphi(\xi)]}{[\varphi'(\xi)]^n} \neq 0$$

в интервале $\alpha < \xi < \beta$;

2) уравнение остается линейным при линейном преобразовании зависимого переменного. Вводим новую функцию η, связанную с y уравнением:

$$y = v(x)\eta + \gamma(x), \tag{7}$$

где v, γ допускают непрерывные производные до порядка n включительно и $v(x) \neq 0$ в интервале (2). Мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{d\eta}{dx} + v'\eta + \lambda',$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = v\frac{d^2\eta}{dx^2} + 2v'\frac{d\eta}{dx} + v''\eta + \gamma''.$$

Очевидно, что вообще производная n—го порядка от y по x выразится линейно (но неоднородно) через k первых производных от η по x; результат подстановки этих выражений в (1) дает опять линейное уравнение; его коэффициент при старшей производной $a_0v(x)$ в силу сделанных предположений не обращается в нуль в интервале (2). Легко видеть, что подстановка:

$$y = v(x)^{\eta} \tag{8}$$

преобразует однородное линейное уравнение снова в однородное. Преобразованием (8) часто пользуются, чтобы в преобразованном уравнении коэффициент при $(n — 1)$-й производной обратился в 0. В самом деле, из уравнения (8) получаем:

$$y^{(n)} = v^{\eta\,(n)} + nv'^{(n—1)} + \ldots,$$
$$y^{(n—1)} = v^{\eta\,(n—1)} + \ldots$$

Вставляя эти выражения в уравнение (5), находим:

$$v^{\eta\,(n)} + (nv' + p_1v)^{\eta\,(n—1)} + \ldots = 0.$$

Для того чтобы отсутствовал член $c^{\eta\,(n—1)}$, достаточно выбрать $v(x)$ так, чтобы было $nv' + p_1v = 0$, т. е.

2. Общая теория линейного однородного уравнения

1. Рассмотрим линейное уравнение без правой части:

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0. \tag{1}$$

Через $L[y]$ мы будем сокращенно обозначать результат применения к функции у совокупности операций (дифференцирование, умножение на функции $p_i(x)$ и сложение), указываемых левой частью уравнения (1), и будем называть $L[y]$ линейным дифференциальным выражением, или **линейным дифференциальным оператором**. Линейный оператор обладает следующими двумя важными свойствами:

1) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2],$ (2)

где y_1 и y_2 — любые функции, имеющие n непрерывных производных. В самом деле, раскрывая значения символа оператора, имеем: $L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(y_1 + y_2) + p_n(y_1 + y_2) = (y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + p_n y_1) + (y_2^{(n)} + p_1 y_2^{(n-1)} + \ldots + p_n y_2) = L[y_1] + L[y_2]$. Оператор от суммы равен сумме операторов слагаемых. Это свойство доказано для суммы двух слагаемых, но оно, очевидно, распространяется на сумму любого числа слагаемых.

2) $L[Cy] = CL[y],$ (3)

где y — любая n раз дифференцируемая функция, а C — постоянная, т. е. постоянный множитель можно вынести за знак линейного оператора. Доказательство легко проводится подобно тому, как в предыдущем случае. На основании свойств линейного оператора, выражаемых тождествами (2) и (3), легко получаются следующие теоремы о решениях однородного линейного уравнения.

Теорема 1. Если y_1 и y_2 суть два (частных) решения уравнения (1), то $y_1 + y_2$ есть также решение этого уравнения.

Доказательство. Так как y_1 y_2 суть решения, то имеем тождества: $L[y_1] = 0$, $L[y_2] = 0$. Но в силу (2) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$, что в силу условия равно нулю тождественно. Теорема доказана.

Теорема 2. Если y_1 есть решение уравнения (1), то Cy_1 есть также решение этого уравнения (C — любая постоянная).

Доказательство. В силу свойства (7) $\mathrm{L}[\mathrm{C}y_1] = \mathrm{CL}[y_1]$, а по условию $L[y_1] = 0$, откуда и следует теорема.

Следствие 1. Если имеем частные решения уравнения (1) y_1, y_2, ..., y_k, то выражение

$C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ky_k$ есть также решение этого уравнения (C_1, C_2, ..., $C_к$ — любые постоянные).

Следствие 2. Если y_1, y_2, ..., y_n суть частные решения линейного однородного уравнения n—го порядка, то выражение

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n \tag{4}$$

есть решение, содержащее n произвольных постоянных. Если все эти постоянные существенны, то выражение (4) представляет общее решение.

2. Вопрос о том, каким условиям должны удовлетворять частные решения, чтобы выражение (4) являлось общим решением однородного уравнения, разрешается в связи с понятием **линейной зависимости функций**. Функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,..., $\varphi_n(x)$, определенные в интервале (a, b), называются **линейно зависимыми** в этом интервале, если существуют постоянные α_1, α_2,...α_n, не все равные нулю, такие, что для всех значений x в рассматриваемом интервале выполняется тождественно соотношение:

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + ... + \alpha_n\varphi_n(x) = 0. \tag{5}$$

Если не существует таких постоянных α_1, α_2, ...α_n, чтобы равенство (5) имело место для всех рассматриваемых значений x

(причем предполагается, что не все α_i равны нулю), то функции называются линейно независимыми (в данном интервале). В последующем мы часто будем иметь дело с интервалом (— , +).

3. Пусть мы имеем n функций от x, имеющих непрерывные производные до (n — 1)-го порядка: y_1, y_2, ..., y_n. Определитель

$$W[y_1, y_2, ..., y_n] \equiv W(x) \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ..., y_n \\ y'_1 & y'_2 & ..., y'_n \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ..., y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

называется **определителем Вронского** этих функций. Легко доказывается следующая теорема:

Теорема 3. Если функции y_1, y_2, ..., y_n линейно зависимы, то определитель Вронского тождественно равен нулю. Пусть функции y_1, y_2, ..., y_n n линейно зависимы, т. е. существует тождественное соотношение:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n = 0, \qquad (7)$$

где не все α_i равны нулю. Без ограничения общности мы можем допустить, что $\alpha_n \neq 0$ (иначе мы изменили бы нумерацию функций). Разрешая соотношение (7) относительно y_n, получаем тождество:

$$y_n = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + ... + \beta_{n-1} y_{n-1} \qquad (8)$$

$$(\beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_n}, \text{ i} = 1, 2, ..., \text{n} — 1).$$

Из тождества (11$'$) дифференцированием по x получаем:

$$\left.\begin{aligned} y'_n &= \beta_1 y'_1 + \beta_2 y'_2 + ... + \beta_{n-1} y'_{n-1} \\ y_n^{(n-1)} &= \beta_1 y_1^{(n-1)} + \beta_2 y_2^{(n-1)} + ... + \beta_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Умножаем в выражении (6) первый столбец на β_1, второй на β_2, ..., (n — 1)-й на β_{n-1} и прибавляем к последнему. Величина определителя W не изменится, но в силу соотношений (8) и (9) последний столбец нового определителя будет состоять из нулей, откуда следует, что $W \equiv 0$, а это и требовалось доказать. Если y_1, y_2, ..., y_n суть частные решения однородного уравнения, то справедлива обратная, притом более сильная теорема.

Теорема 4. Если решения y_1, y_2, ..., y_n линейно независимы [в интервале (2)], то $W[y_1, y_2, ..., y_n]$ не обращается в нуль ни в одной точке рассматриваемого интервала. Допустим противное: пусть $W(x_0) = 0$, $a < x_0 < b$. Обозначим величины y_i при $x = x_0$ через y_{i0} и значения $y_i^{(k)}(x_0)$ — через $y_{i0}^{(k)}$ и составим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} C_1y_{10} + C_2y_{20} + \ldots + C_ny_{n0} = 0 \\ C_1y'_{10} + C_2y'_{20} + \ldots + C_ny'_{n0} = 0 \\ C_1y_{10}^{(n-1)} + C_2y_{20}^{(n-1)} + \ldots + C_ny_{n0}^{(n-1)} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Рассматривая в уравнениях (10) величины C_1, C_2, ..., C_n как неизвестные, мы получим для определителя системы (10) значение $W(x_0) = 0$. Следовательно, однородная система (10) из n уравнений с n неизвестными имеет систему решений C_1, C_2, ..., C_n, причем не все C_i равны нулю. Составим функцию:

$$\tilde{y}(x) = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n; \qquad (11)$$

в силу следствия 1 теорем 1 и 2 она является решением уравнения (1); в силу условий (10) мы имеем при $x = x_0$:

$$\tilde{y}(x_0) = 0,\ \tilde{y}'(x_0) = 0, \ldots,\ \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0. \qquad (12)$$

Начальные условия (12), по теореме существования определяют единственное решение уравнения (1). Но таким решением, очевидно, является тривиальное решение $y = 0$, следовательно, $\tilde{y}(x) \equiv 0$ в интервале $(a < x < b)$, и мы получаем из равенства (11):

$$C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n = 0$$

для всякого x в интервале (2), причем не все C_i равны нулю, т. е. функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно зависимы против предположения. Полученное противоречие доказывает теорему. Теоремы 3 и 4 можно объединить в следующей формулировке: определитель Вронского, составленный для системы n решений линейного уравнения n-го порядка (1), или тождественно равен нулю, или не обращается в нуль ни в одной точке того интервала, где коэффициенты уравнения непрерывны. Любая система из n линейно независимых частных решений линейного однородного уравнения (1) называется фундаментальной системой.

Следствие теоремы 4. Функции, образующие фундаментальную систему, линейно независимы во всяком частичном интервале (α, β), содержащемся в (a, b). Это следует из необращения в нуль определителя Вронского.

Теорема 5. Для всякого линейного однородного дифференциального уравнения существует фундаментальная система. В самом деле, возьмем любую систему таких n^2 чисел a_{ik} $(i, k = 1, 2, ..., n)$, чтобы составленный из них определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}...a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2}...a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (13)$$

был отличен от нуля. Определим n частных решений $y_1, y_2, ..., y_{\mathrm{n}}$ уравнения (1) начальными условиями: при $x = x_0$ имеем $y_i = a_{i1}$, $y'_i = a_{i2}, ..., y_i^{(n-1)} = a_{in}$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Функции определены во всем интервале (2). Определитель (13) представляет значение определителя Вронского $W[y_1, y_2, ..., y_n]$ при $x = x_0$. Таким образом, $W(x)$

заведомо не равен нулю при $x = x_0$, откуда в силу теоремы 3 следует, что $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы, т. е. образуют фундаментальную систему (вспомним, что $W(x)$ не равен нулю ни для какого x в интервале (a, b)).

Теорема 6. Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $L[y] = 0$, то общее решение дается формулой:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.$$

По определению, решение, содержащее n произвольных постоянных, называется общим, если из него при определенных числовых значениях постоянных получается любое частное решение. А как было указано, в силу теоремы существования и единственности любое частное решение однозначно определяется начальными условиями: при $x = x_0$

$$y = y_0,\ y' = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}, = y_0^{(n-1)}, \tag{14}$$

где $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ — любые числа, и $a < x_0 < b$. Мы докажем, что решение (4) есть общее, если покажем, что можно в формуле (4) определить постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (14). Для определения постоянных C_i мы получаем систему линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \ldots + C_n y_{n0} &= y_0, \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} + \ldots + C_n y'_{n0} &= y'_0, \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \ldots + C_n y_{n0}^{(n-1)} &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Здесь y_{i0} обозначает значение функции $y_i(x)$ при $x = x_0$; $y_{i0}^{(k)}$ есть значение производной $y_i^{(k)}(x)$ при $x = x_0$. Определитель системы (15) есть определитель Вронского, в котором вместо x подставлено x_0, т. е. $W(x_0)$; в силу теоремы 4 $W(x_0) \neq 0$. Следовательно, система уравнений (15) всегда допускает (и притом единственную) систему решений C_1, C_2, ..., C_n. Выражение (8), в котором C имеют полученные таким образом значения, очевидно, удовлетворяет начальным условиям (14). Теорема доказана.

4. Мы видели, что формула (8) дает любое решение линейного однородного уравнения n-го порядка, если функции y_1, y_2, ..., y_n линейно независимы. Отсюда легко получается доказательство такой теоремы:

Теорема 7. Если мы имеем $n + 1$ частных решений уравнения (1) y_1, y_2, ..., y_{n+1}, то между ними существует линейная зависимость. Для доказательства рассмотрим первые n функций: y_1, y_2, ..., y_n. Возможны два случая.

Функции y_1, y_2, ..., y_n линейно зависимы; тогда теорема справедлива, так как линейное соотношение между n функциями есть частный случай линейного соотношения между $n + 1$ функциями, где постоянный множитель при y_{n+1} равен нулю.

Функции y_1, y_2, ..., y_n линейно независимы; тогда они образуют фундаментальную систему, через которую выражается линейным образом с постоянными коэффициентами любое частное решение. В частности, для y_{n+1} получим: $y_{n+1} = A_1y_1 + A_2y_2 + ... + A_ny_n$. Это и есть искомая линейная зависимость. Теорема доказана.

Теорема 8. Если два линейных однородных уравнения

$$\left.\begin{aligned} y^{(x)} + p_1y^{(n-1)} + ... + p_ny = 0, \\ y^{(n)} + \overline{p_1}y^{(n-1)} + ... + \overline{p_n}y = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

имеют общую фундаментальную систему решений, то они тождественны между собой, т. е. $p_\mathrm{i}(x) \equiv \overline{p_i}(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

Доказательство. Вычитая почленно уравнения (16), получаем новое уравнение (n — 1)-го порядка:

$$(p_1 - \overline{p_1})y^{(n-1)} + (p_2 - \overline{p_2})y^{(n-2)} + ... + (p_n - \overline{p_n})y = 0. \tag{17}$$

Если p_1 и $\overline{p_1}$ не тождественно равны между собой, то найдется в силу их непрерывности интервал $\alpha < x < \beta$, в котором $p_1 - \overline{p_1} \neq 0$. Разделив обе части уравнения (17) на $p_1 - \overline{p_1}$, мы получим в интервале (α, β) уравнение вида (1), т. е. со старшим коэффициентом, равным 1. Очевидно по самому построению уравнения (17), что оно допускает те же решения, что уравнения (16), т. е. уравнение $(n - 1)$-го порядка со старшим коэффициентом, равным 1, допускает n независимых интегралов. Противоречие с теоремой 7 показывает, что $p_1(x) \equiv \overline{p_1}(x)$. Таким образом, уравнение (17) имеет вид: $(p_2 - \overline{p_2})y^{(n-2)} + (p_3 - \overline{p_3})y^{(n-3)} + (p_n - \overline{p_n})y = 0$.

Предыдущее рассуждение показывает, что далее, таким же образом докажем, что

$$p_3 \equiv \overline{p_3}, \ldots, p_n \equiv \overline{p_n}.$$

Следствие. Фундаментальная система вполне определяет линейное однородное уравнение со старшим коэффициентом, равным 1. Решим теперь такую задачу. Дана фундаментальная система (в интервале $a < x < b$): $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Нужно построить соответствующее дифференциальное уравнение. Для этой цели приравниваем нулю следующий определитель, в котором y обозначает искомую функцию:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n, y] \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n & y' \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \qquad (18)$$

Разлагая его по элементам последнего столбца, мы убеждаемся в том, что равенство (18) представляет собой однородное дифференциальное уравнение n-го порядка относительно функции y. При подстановке вместо у функций y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ мы получаем определитель с двумя равными столбцами. Он тождественно равен нулю; следовательно, уравнение (18) допускает частные решения $y_1, y_2, ..., y_n$. Коэффициент при $y^{(n)}$ есть $W[y_1, y_2, ..., y_n]$. Он, как нам известно, не обращается в нуль в интервале (a, b). Разделив на него обе части уравнения (18), получим уравнение n-го порядка со старшим коэффициентом, равным единице, а по доказанному такое уравнение однозначно определяется фундаментальной системой. Задача, таким образом, решена. Напишем уравнение (18) в развернутом виде:

$$y^{(n)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} - y^{(n-1)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + ... +$$

$$+(-1)^n y\begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ y''_1 & y''_2 & \cdots & y''_n \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

Если исходное уравнение было написано в виде:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = 0,$$

то сравнение коэффициентов дает нам тождество:

$$p_1 = -\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W\left[y_1, y_2, ..., y_n\right]}.$$

Легко убедиться в том, что определитель в числителе есть производная от определителя Вронского, стоящего в знаменателе. В самом деле, производная по x определителя, составленного из функций от x, равна сумме определителей, из которых у первого в первой строке функции заменены производными, а остальные не изменены, у второго во второй строке функции заменены производными и так далее, у n-го в последней строке функции заменены производными. Применяя это правило дифференцирования к определителю Вронского, мы получим n — 1 первых слагаемых в виде определителей, имеющих две равные строки, т. е. обращающиеся в нуль, а последнее слагаемое, не равное нулю, есть как раз числитель в выражении для p_1. Итак, мы имеем: $p_1 = -\frac{W'(x)}{W(x)}$, откуда $W(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p_1 dx}$. Выражаем постоянное. C через начальное значение $W(x)$ при $x = x_0$; получаем окончательно:

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p_1 dx}. \tag{19}$$

Равенство (19), определяющее определитель Вронского (с точностью до постоянного множителя) через коэффициент данного уравнения при $y^{(n-1)}$, носит название **формулы Остроградского—Лиувилля**. Применим формулу Остроградского—Лиувилля к нахождению общего решения уравнения второго порядка: $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$, у которого нам известно одно частное решение y_1. Пусть y есть любое решение этого уравнения, отличное от y_1. Составляем $W[y_1, y]$ и пишем его значение по формуле (19):

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1 & y \end{vmatrix} = Ce^{-\int p_1 dx}.$$

Получаем для y линейное уравнение первого порядка. Раскрывая определитель, имеем: $y_1 y' — y_1' y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p_1 dx}$;

деля обе части на y_1^2, находим:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2} Ce^{-\int p_1 dx},$$

откуда y определяется квадратурой:

$$y = y_1\left\{\int \frac{Ce^{-\int p_1 dx}}{y_1^2} dx + C'\right\} \qquad (20)$$

Полученное решение содержит два произвольных постоянных и, следовательно, является общим. Итак, если известно одно частное решение линейного однородного уравнения второго порядка, общее решение находится квадратурами.

5. Понижение порядка линейного однородного уравнения. Линейное однородное уравнение

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0 \qquad (21)$$

относится к классу уравнений, однородных относительно y, y', y'',...; поэтому подстановка $y = e^{\int z dx}$ приводит его к уравнению порядка n — 1. Однако эта подстановка в большинстве случаев нецелесообразна, так как преобразованное уравнение (относительно z) уже не является линейным и, следовательно, теряет те простые свойства, которые характеризуют линейные уравнения. Мы рассмотрим здесь метод понижения порядка, если известны частные решения. При этом окажется, что каждое известное частное решение позволяет понизить порядок уравнения на единицу, причем преобразованное уравнение остается линейным. Таким образом, каждое известное частное решение является шагом вперед в нахождении общего решения. Пусть $y = y_1$ есть частное решение уравнения (21). Вводим новую искомую функцию z соотношением:

$$y = y_1 z. \tag{22}$$

Соотношение (22) разрешимо относительно z в тех интервалах, где yx не обращается в нуль; только такие интервалы мы будем рассматривать. Вычисляем из соотношения (22) производные от y. Мы имеем:

$$y' = y_1 z' + y'_1 z,$$
$$y'' = y_1 z'' + 2y'_1 z' + y_1{}^n z,$$
$$y^{(n)} = y_1 z^{(n)} + \left(\frac{n}{1}\right) y'_1 z^{(n-1)} + \left(\frac{n}{2}\right) y''_1 z^{(n-2)} + \ldots + y_1{}^{(n)} z.$$

Подстановка в уравнение ($3'$) дает:

$$y_1 z^{(n)} + [\left(\frac{n}{1}\right) y'_1 + p_1 y_1] z^{(n-1)} + \ldots + [y_1{}^{(n)} + p_1 y_1{}^{(n-1)} + \ldots + p_{\mathrm{n}-1} y'_1 +$$

$$+ p_n y_1] = 0.$$

Для z мы получили опять уравнение порядка n; но коэффициент при z есть $L[y_1]$, он тождественно равен нулю, так как ух есть решение уравнения (1). Следовательно, в полученном уравнении порядок понижается, если ввести новую искомую функцию $u = z'$. Разделив, кроме того, все члены последнего уравнения на y_1, мы приведем его к виду:

$$u^{(n-1)} + q_1 u^{(n-2)} + \ldots + q_{n-1} u = 0 \tag{23}$$

линейному уравнению порядка $n — 1$. Выражение функции и через y, очевидно, следующее:

$$u = z' = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right).$$

Пусть для последнего уравнения получена фундаментальная система: $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$. Тогда система n решений для z будет:

$$\int u_1 dx,\ \int u_2 dx,\ \ldots,\ \int u_{n-1} dx,$$

а соответствующая система для y будет:

$$y_1,\ y_2 = y_1 \int u_1 dx,\ y_3 = y_1 \int u_2 dx, \ldots,\ y_n = y_1 \int u_{n-1} dx.$$

Покажем, что последние решения образуют фундаментальную систему уравнения ($3'$). Допустим, что между ними существует линейная зависимость: $C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n = 0$. Деля на y_1 (который по условию в рассматриваемых интервалах отличен от нуля), получим:

$$C_1 + C_2 \int u_1 dx + C_3 \int u_2 dx + ... + C_n \int u_{n-1} dx = 0.$$

Дифференцируя последнее тождество по x, получаем: $C_1 u_1 + C_2 u_2 + ... + C_n u_{n-1} = 0$, что противоречит условию линейной независимости системы $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$. Следовательно, $C_2 = C_3 = ... = C_n = 0$. Так как $y_1 \neq 0$, то, очевидно, также имеем $C_1 = 0$, и $y_1, y_2, ..., y_n$ образуют фундаментальную систему. Итак, если известно частное решение уравнения (1), то задача интегрирования этого уравнения приводится к интегрированию линейного однородного уравнения порядка n — 1. Пусть теперь известно два линейно независимых частных решения уравнения (1), y_1 и y_2. Вводя, как выше, новую искомую функцию $u = \left(\frac{y}{y_1}\right)$, мы получаем уравнение (23) порядка n — 1. Но теперь это уравнение имеет один известный интеграл $u_1 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)$, и поэтому оно в свою очередь допускает понижение порядка на единицу. Итак, если известны два частных линейно независимых решения, то порядок уравнения может быть понижен на две единицы. Пусть вообще известно r линейно независимых частных решений уравнения (1) ($z < n$): $y_1, y_2, ..., y_n$ Подстановка $u = \left(\frac{y}{y_1}\right)'$ опять приводит к уравнению (23), причем нам известно r — 1 его частных решений: $u_1 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'$, $u_2 = \left(\frac{y_3}{y_1}\right)'$, ..., $u_{r-1} = \left(\frac{y_r}{y_1}\right)'$. Эти решения линейно независимы. В самом деле, если мы допустим существование соотношения: $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_r u_r - 1 = 0$, то, интегрируя его по x, получим:

$(-\alpha_2 \frac{y_2}{y_1} + \alpha_3 \frac{y_3}{y_1} + ... + \alpha_r \frac{y_r}{y_1} = -\alpha_1$ есть постоянная интеграции),

или $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_r y_{r-1} = 0$, что противоречит предположению о линейной независимости функций $y_1, y_2, ..., y_r$. Уравнение (23) имеет, таким образом, r — 1 известных линейно независимых решений. Вводя подстановку $v = \left(\frac{u}{u_1}\right)'$ (v — новая искомая функция), мы получим для v линейное уравнение порядка n — 2, имеющее r — 2 линейно независимых частных решений $\left(\frac{u_2}{u_1}\right)'$, $\left(\frac{u_3}{u_1}\right)'$, ..., $\left(\frac{u_{r-1}}{u_1}\right)'$. Мы можем применить к нему то же рассуждение, и в результате подобных преобразований придем, наконец, к уравнению порядка n — r. Следовательно, если известно r частных линейно независимых решений линейного однородного уравнения, то порядок уравнения может быть понижен на r единиц.

3. Неоднородные линейные уравнения

1. Общие свойства. Рассмотрим неоднородное линейное дифференциальное уравнение вида:

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x). \qquad (1)$$

где $f = 0$ Однородное линейное уравнение с теми же коэффициентами, но с правой частью, равной нулю

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0, \tag{2}$$

называется, как указано выше, однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению (1). Очевидно, уравнения (1) и (2) не имеют общих решений.

Теорема. Если известно какое-нибудь частное решение Y неоднородного уравнения (1), то общее его решение есть сумма этого частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Так как Y есть решение уравнения ($1'$), то имеем тождество:

$$L[y] = f(x). \tag{3}$$

Введем новую искомую функцию z, полагая

$$y = Y + z. \tag{4}$$

Подставляя выражение (4) в уравнение (1), имеем в силу свойства (6) линейного оператора $L[y]$, $L[Y] + L[z] = f(x)$. Принимая во внимание тождество (2), получаем отсюда: $L[z] = 0$ — однородное уравнение, соответствующее (1). Пусть фундаментальная система соответствующего уравнению (1) однородного уравнения (2) будет: y_1, y_2, ... Тогда общее решение уравнения (2) имеет вид: $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$. Подставляя это выражение вместо z в формулу (4), получаем общее решение неоднородного уравнения (1):

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + Y. \tag{5}$$

Это уравнение содержит n произвольных постоянных. Чтобы доказать, что эти постоянные существенные, покажем, что из выражения (5) при надлежащем выборе значений постоянных

$C_1y_1 + C_2y_2 + \ + ... + C_ny_n$ получится решение, удовлетворяющее любым начальным данным Коши, т. е. при $x = x_0$, где x_0 — любое значение из интервала (2), мы будем иметь:

$$y = y_0, y' = y'_0, ..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)},$$

где y_0, $y'_0, ...,$ $y_0^{(n-1)}$, — любая данная система n чисел. Последовательным дифференцированием выражения (26) находим:

$$\left.\begin{aligned} y' = C_1y'_1 + C_2y'_2 + ... + C_ny'_n + Y', \\ y'' = C_1y''_1 + C_2y''_2 + ... + C_ny''_n + Y'', \\ y^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + ... + C_ny_n^{(n-1)} + Y^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

В выражениях (26) и (26/) надо в левых частях вместо y, y', ..., $y^{(n-1)}$ подставить соответственно y, y'_0, ..., $y_0^{(n-1)}$, а в правых частях во всех функциях дать переменному x значение x_0; получится система n линейных уравнений с n неизвестными C_1, C_2, ..., C_n. Определитель этой системы есть значение определителя Вронского $W(x)$ при $x = x_0$; при этом $W(x_0) \neq 0$, так как система y_1, y_2, ..., y_n, по предположению, фундаментальная. Таким образом, для C_1, C_2, ..., C_n получим вполне определенные значения, и решение (26), действительно, является общим. Теорема доказана.

2. Метод вариации постоянных. Из изложенного в предыдущем разделе следует, что для решения неоднородного уравнения достаточно знать фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения и одно частное решение неоднородного уравнения; в рассматриваемых примерах это частное решение являлось заданным. Теперь мы докажем следующую **теорему**: если известна фундаментальная система соответствующего однородного уравнения, то общее решение неоднородного уравнения может быть найдено при помощи квадратур. Мы дадим способ решения неоднородного уравнения, принадлежащий Лагранжу и называемый методом вариации постоянных.

Пусть дано неоднородное линейное уравнение:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x), \qquad (7)$$

где f(x) не равно тождественно нулю, и пусть нам известна фундаментальная система $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соответствующего однородного уравнения:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0. \qquad (8)$$

Общее решение уравнения (8) будет:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \qquad (9)$$

где C_1, C_2, ..., C_n — произвольные постоянные. Выражение (9) удовлетворяет уравнению 8$'$) и, следовательно, не может удовлетворять уравнению (7), пока C_i остаются постоянными. Поставим себе цель — получить решение уравнений (7) в той же форме (9), где, однако, C_1, C_2, ..., C_n будут функциями независимого переменного x. Мы получаем n новых неизвестных функций; для их определения нужно иметь n уравнений. Одно из них получится из условия, что выражение (9) (с переменными C_i) удовлетворяет уравнению (7), остальные n — 1 уравнений мы можем задать произвольно; мы их будем задавать таким образом, чтобы выражения для производных от у имели наиболее простой вид. Дифференцируем равенство (9) по x:

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \ldots + C_n y'_n + y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n \frac{dC_n}{dx}.$$

Мы записали члены, полученные от дифференцирования, в две строки; в качестве первого из числа n — 1 дополнительных уравнений возьмем уравнение, которое получится, если вторую строку приравнять нулю:

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0. \qquad (10)$$

В таком случае для y' получим выражение:

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y''_2 + \ldots + C_n y''_n, \tag{11}$$

которое имеет такой же вид, как и в случае постоянных C_i. Для нахождения y'' дифференцируем равенство (11) по x; в полученном результате опять приравниваем нулю члены, содержащие производные функций C_i (это будет второе добавочное уравнение):

$$y'_1 \frac{dC_1}{dx} + y'_2 \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y'_n \frac{dC_n}{dx} = 0, \tag{12}$$

и для y'' получится выражение:

$$y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + \ldots + C_n y''_n. \tag{13}$$

Продолжая таким образом, мы в последний раз введем добавочное условие на (n — 1)-м шаге:

$$y_1^{(n-2)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-2)} \frac{dC_2}{dx} + \ \ldots \ + y_n^{(n-2)} \frac{dC_n}{dx} = 0, \tag{14}$$

и выражение для $y^{(n-1)}$ будет иметь вид:

$$y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}. \tag{15}$$

Вычисляем, наконец, $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + y_1^{(n-1)} \frac{dC_1}{dx} +$$

$$+ y_2^{(n-1)} \frac{dC_2}{dx} + \ \ldots \ + y_n^{(n-1)} \frac{dC_n}{dx}. \tag{16}$$

Подставляя выражения (9), (11), ..., (15), (16) в уравнение (7), получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i (y_i^{(n)} + p_1 y_i^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y'_i + p_n y_i) +$$

$$+ y_1^{(n-1)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-1)} \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n^{(n-1)} \frac{dC_n}{dx} = f(x).$$

Замечаем, что множители при C_i под знаком суммы все равны нулю, так как они являются результатами подстановки в левую часть уравнения (1) его решений, и мы получаем последнее уравнение для определения C_i:

$$y_1^{(n-1)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-1)} \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n^{(n-1)} \frac{dC_n}{dx} = f(x) \qquad (17)$$

Мы получили систему n неоднородных линейных уравнений (11), (12), ..., (15), (17) с n неизвестными $\frac{dC_i}{dx}$ ($i = 1, 2, ..., n$). Определитель этой линейной системы есть определитель Вронского для фундаментальной системы; он не обращается в нуль; следовательно, разрешая ее, мы получим $\frac{dC_i}{dx}$ как известные непрерывные функции от x: $\frac{dC_i}{dx} = \varphi_i(x)$, откуда квадратурами находим:

$$C_i = \int \varphi_i(x) dx + \lambda_i \qquad (18)$$

(γ_i — новые произвольные постоянные). Подставляя найденные значения C в выражение (9), мы найдем общее решение уравнения (7):

$$y = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \ldots + \gamma_n y_n + \sum_{i=1}^{n} y_i \int \varphi_i(x) dx.$$

Действительно, по самому его образованию это есть решение рассматриваемого уравнения; сумма членов, содержащих множители γ_i, представляет, как мы знаем, общее решение однородного уравнения (8), а выражение $\sum_{i=1}^{n} y_i \int \varphi_i(x)dx$ есть частное решение неоднородного уравнения (7). Таким образом, действительно, при знании фундаментальной системы однородного уравнения мы получаем с помощью квадратур решение неоднородного уравнения.

4. Сопряженное уравнение

1. Множитель линейного выражения. Поставим себе такую задачу: дано линейное дифференциальное выражение:

$$L[y] \equiv a_n y + a_{n-1}y' + a_{n-2}y'' + ... + a_1 y^{(n-1)} + a_0 y^{(n)}; \qquad (19)$$

найти такую функцию $z(x)$, чтобы при умножении на нее выражение (29) стало точной производной по x при любой (n раз дифференцируемой) функции y. Эта функция $z(x)$ называется множителем дифференциального выражения $L[y]$. При этом мы предположим, что a_i суть функции от x, непрерывные в рассматриваемом интервале и имеющие непрерывные производные всех тех порядков, которые войдут в наши формулы. Умножаем выражение (29) на искомую функцию z и вычисляем неопределенный интеграл $\int zL[y]dx$, причем каждый член интегрируем по частям, понижая порядок производной от y до тех пор, пока под интегралом не останется множитель y. Таким образом, будем иметь:

$$\int a_n yzdx = \int a_n yzdx,$$

$$\int a_{n-1}y'zdx = a_{n-1}zy - \int y(a_{n-1}z)'dx,$$

$$\int a_{n-2}y''zdx = a_{n-2}zy' - \int (a_{n-2}z)'y'dx = a_{n-2}zy' -$$

$$-(a_{n-2}z)'y+\int y(a_{n-2}z)''dx.$$

$$\int a_1 y^{(n-1)}zdx = a_1 zy^{(n-2)}-(a_1z)''y^{(n-3)}+(a_1z)''y^{(n-4)}-\ldots+$$

$$+(-1)^{n-2}(a_1z)^{(n-2)}y+(-1)^{n-1}\int y(a_1z)^{n-1}dx,$$

$$\int a_0 y^{(n)}zdx = a_0 zy^{(n-1)}-(a_0z)y^{(n-2)}+(a_0z)'y^{(n-3)}-\ldots+$$

$$+(-1)^{n-1}(a_0z)^{(n-1)}y+(-1)^n\int y(a_0z)^{(n)}dx$$

Собирая отдельно члены, не содержащие интегралов, и под общим знаком интеграла члены, содержащие квадратуру, получаем:

$$\int zL[y]dx = a_{n-1}zy-(a_{n-2}z)'y+\ldots+(-1)^{n-1}(a_0z)^{(n-1)}y+$$

$$+a_{n-2}zy'-(a_{n-3}z)'y'+\ldots+(-1)^{n-2}(a_0z)^{(n-2)}y'+$$

$$+a_1zy^{(n-2)}-(a_0z)'y^{(n-2)}+a_0zy^{(n-1)}+\int y\{a_nz-(a_{n-1})'+$$

$$+(a_{n-2}z)''-\ldots+(-1)^n(a_0z)^{(n)}\}dx,$$

или, перенося интеграл в левую часть и вводя новые обозначения,

$$\int\{zL[y]-yM[z]\}dx=\Psi[y,z]; \tag{20}$$

дифференциальное выражение

$$M[z] = a_nz - (a_{n-1}z)' + \ldots + (-1)^{n-1}(a_1z)^{(n-1)} + (-1)^n(a_0z)^{(n)} \tag{21}$$

называется **сопряженным с $L[y]$ дифференциальным выражением** (или оператором), а $\Psi[y, z]$ есть билинейная форма относительно $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, с одной стороны, и $z, z', \ldots, z^{(n-1)}$ — с другой, а именно:

$$\Psi[y,z]=y\{a_{n-1}z-(a_{n-2}z)'+\ldots+(-1)^{n-1}(a_0z)^{n-1}\}+y'\{a_{n-2}z-$$

$$-(a_{n-3}z)'+\ldots+(-1)^{n-2}(a_0z)^{n-2}\}+$$

$$+y^{(n-2)}\{a_1z-(a_0z)'\}+y^{(n-1)}\cdot a_0z. \tag{22}$$

Дифференциальное уравнение n-го порядка

$$M[z] = 0 \tag{23}$$

называется **уравнением, сопряженным с уравнением**

$$L[y] = 0. \tag{24}$$

Соотношение (20) есть тождество не только по x, оно справедливо при любых функциях y и z. Если мы теперь возьмем в качестве z решение уравнения (33), $z = \bar{z}$, то формула (20) примет вид: $\int \bar{z}L[y]\,dx = \psi[y, \bar{z}]$, или, дифференцируя, $\bar{z}L[y] = \frac{d}{dx}\psi[y, \bar{z}]$. Таким образом, поставленная в начале настоящего параграфа задача решена: если умножить данное дифференциальное выражение (19) на любое решение $\bar{z}$ сопряженного уравнения (23), то оно становится полной производной от дифференциального выра жения (n — 1)-го порядка $\psi[y, \bar{z}]$. Обратно, для того чтобы функция $\bar{z}$ по умножении на $L[y]$ делала его точной производной при любой функции y, необходимо, чтобы $M[\bar{z}] \equiv 0$. В самом деле, если $\bar{z}$ есть какой-нибудь множитель выражения (13), то имеет место равенство:

$$\bar{z}L[y] = \frac{d}{dx}\psi_1[y] \tag{25}$$

где, как легко видеть, Ψ_1 есть линейное выражение относительно $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$:

$$[y] = b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + b_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \ldots + b_1(x)y, (25) + b_0(x)y.$$

С другой стороны, подставляя $\bar{z}$ вместо z в тождество (20) и дифференцируя по x, находим:

$$\bar{z}L[y] = \frac{d}{dx}\psi\,|\,y, \bar{z}\,| + yM[\bar{z}]. \tag{26}$$

Из (25) и (26) получаем:

$$\frac{d}{dx}\{\Psi_1[y] - \Psi[y, \bar{z}]\} - yM[\bar{z}] = 0\,. \tag{27}$$

В левой части (27) стоит линейное выражение n-го порядка относительно y; так как равенство нулю выполняется тождественно для любой функции y, то коэффициенты при y и всех его производных тождественно равны нулю, иначе (26) было бы дифференциальным уравнением для y. Из вида (25) билинейного выражения для Ψ следует:

$$b_{n-1} = a_0\bar{z}\,,\ b_{n-2} = a_1\bar{z} - (a_0\bar{z})',$$
$$b_0 = a_{n-1}\bar{z} - (a_{n-2}\bar{z})' + \ldots + (-1)^{n-1}(a_0\bar{z})^{(n-1)},$$

т. е. $\Psi_1[y] \equiv \Psi[y, \bar{z}]$, и равенство (27) дает: $M[\bar{z}] = 0$.

Следовательно, мы можем сделать такой вывод: для того чтобы функция z при всякой функции $y(x)$ обращала произведение $L[y]$ в точную производную, необходимо и достаточно, чтобы являлось решением сопряженного уравнения (23). Каждое решение сопряженного уравнения (23) является множителем уравнения (23); по умножении на него левая часть уравнения (24) становится точной производной. Таким образом, уравнение (24) допускает первый интеграл:

$$\Psi[y, \bar{z}], \tag{28}$$

который сам является (неоднородным) уравнением порядка $n - 1$. Очевидно, если нам дано неоднородное уравнение $L[y] = f(x)$, то та же функция z является его множителем, и мы получим первый интеграл: $\Psi\left[y, \bar{z}\right] = \int f(x)\bar{z}dx + C$. Если имеем линейное уравнение первого порядка в форме $y' + Py = Q$, то уравнение, сопряженное соответствующему однородному, будет: $Pz - z' = 0$; его решение $\bar{z} = e^{\int Pdx}$ будет множителем данного уравнения.

ЛЕКЦИЯ № 6. Частные виды линейных дифференциальных уравнений

1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами и приводимые к ним

1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами и приводимые к ним. Рассмотрим дифференциальное уравнение, линейное однородное n-го порядка с коэффициентом при старшей производной, равным единице:

$$L[y]=\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_n y=0,$$

или

$$L[y]\equiv y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+a_2 y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_n y=0. \qquad (1)$$

В этом параграфе мы будем считать коэффициенты a_1, a_2, ..., a_n постоянными (действительными) числами. Мы покажем, что в таком случае интеграция уравнения (1) всегда возможна в элементарных функциях и сводится даже не к квадратурам, а к алгебраическим операциям. Заметим, что в силу общих свойств линейных уравнений нам достаточно найти n частных решений, образующих фундаментальную систему, т. е. линейно независимых. Постараемся выяснить, какие элементарные функции могли бы обратить уравнение (1) в тождество. Для этого нужно, чтобы по подстановке решения в левую часть уравнения там оказались подобные члены, которые в сумме могли бы дать нуль. Из дифференциального исчисления мы знаем функцию, которая подобна со всеми своими производными в смысле элементарной алгебры; этой функцией является e^{kx}, где k — постоянное. Итак, попытаемся удовлетворить нашему уравнению, полагая

$$y = e^{kx}, \tag{2}$$

где k — постоянное, которое мы можем выбирать произвольно. Дифференцируя по x выражение (2) один раз, два раза, ..., n раз, мы получим следующие функции:

$$y' = ke^{kx},\ y'' = k^2e^{kx},\ y^{(n-1)} = k^{n-1}e^{kx},\ y^{(n)} = k^ne^{kx}. \tag{3}$$

Внося выражения (2) и (3) в левую часть уравнения (1), которую мы обозначим символом оператора L, мы получим:

$$L[e^{kx}] = e^{kx}(k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \dots + a_{n-1}k + a_n). \tag{4}$$

В равенстве (4), в правой части, в скобках стоит многочлен n-й степени относительно k с постоянными коэффициентами. Он называется **характеристическим многочленом**, соответствующим оператору L. Обозначим его через $F(k)$:

$$F(k) \equiv k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \dots + a_{n-1}k + a_n.$$

В этих обозначениях равенство (4) кратко запишется так:

$$L[e^{kx}] = e^{kx}F(k). \tag{5}$$

Заметим, что характеристический многочлен получается из оператора $L[y]$, если производные различных порядков в этом последнем заменить равными степенями величины k. Если выражение (2) есть решение дифференциального уравнения (1), то выражение (4) должно тождественно обращаться в нуль. Но множитель $e^{kx} \neq 0$; следовательно, мы должны положить:

$$F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0. \qquad (6)$$

Равенство (6) есть алгебраическое уравнение с неизвестным k. Оно называется **характеристическим уравнением**. Если мы в качестве постоянного k в выражении (2) возьмем корень k характеристического уравнения (6), то выражение (4) будет тождественно равно нулю, т. е. $e^{k_1 x}$ будет являться решением дифференциального уравнения (1). Но характеристическое уравнение есть уравнение n-й степени; следовательно, оно имеет n корней.

В этом разделе мы рассмотрим случай, когда все эти корни различны. Обозначим их через

$$k_1, k_2, \ldots, k_n. \qquad (7)$$

Каждому из корней (6) соответствует частное решение дифференциального уравнения (1):

$$y_1 = e^{k_1 x}, \; y_2 = e^{k_2 x}, \ldots, \; y_n = e^{k_\mathrm{n} x}. \qquad (8)$$

Докажем, что эти решения образуют фундаментальную систему; для этого составим определитель Вронского:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \dots & e^{k_n x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & \dots & k_n e^{k_n x} \\ k_1^{n-1} e^{k_1 x} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} e^{k_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_3 \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Последний определитель есть известный определитель Вандермонда; он равен $(k_1 - k_2)(k_1 - k_3) \ldots (k_1 - k_n) \times (k_2 - k_3)\ldots(k_2 - - k_n) \times (k_{n-1} - k_n)$ и, следовательно, не обращается в нуль, если все корни уравнения (5) различны. Таким образом, система решений (7) является фундаментальной, и общее решение уравнения (1) будет:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}, \tag{9}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Рассмотрим теперь случай комплексных корней. Формально выражение (9) до конца решает поставленную нами задачу интегрирования линейного уравнения с постоянными коэффициентами в случае отсутствия кратных корней характеристического уравнения. Но мы в этой главе, как и во всем курсе, рассматриваем уравнения только с действительными коэффициентами; между тем уравнение (5) может допускать также комплексные корни. Заметим (этим замечанием мы вскоре воспользуемся), что в силу того, что коэффициенты уравнений (5) действительны, комплексные корни входят попарно сопряженными, т. е. комплексному корню $k_1 = \alpha + \beta i$ соответствует другой корень $k_2 = \alpha - \beta i$. Если мы напишем решение y_1, соответствующее корню k_1, то оно будет иметь вид:

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}. \tag{10}$$

Выражение (10) является, вообще говоря, комплексным числом; мы имеем дело с комплексной функцией действительного переменного x. Всякая комплексная функция $f(x)$ действительного переменного может быть представлена в виде:

$$f(x) = u(x) + iv(x), \tag{11}$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — две действительные функции действительного переменного. И, обратно, две произвольные действительные функции $u(x)$ и $v(x)$ дают по формуле (11) комплексную функцию действительного переменного. Докажем следующую лемму.

Лемма. Если мы имеем комплексное решение вида (11) линейного дифференциального уравнения с действительными (не обязательно постоянными) коэффициентами

$$L[y] = 0, \tag{12}$$

то функции $u(x)$ и $v(x)$ в отдельности являются решениями (действительными) уравнения (12).

В самом деле, из свойств линейного дифференциального оператора $L[y]$ следует:

$$L[u(x) + iv(x)] = L[u(x)] + iL[v(x)]. \tag{13}$$

По условию леммы выражение (13) тождественно равно нулю, но оба выражения $L[u]$ и $L[v]$ суть действительные функции от x. Тождественное равенство нулю выражения (13) влечет за собой, таким образом, два тождества: $L[u(x)] = 0$, $L[v(x)] = 0$, что и доказывает лемму. Воспользуемся этой леммой для преобразования решения (10). Отделяя в нем действительную часть от мнимой по формуле Эйлера, получаем:

$$y_1 = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha} x(\cos\beta x + \mathrm{i}\sin\beta x) = e^{\alpha} x\cos\beta x + ie^{\alpha} x\sin\beta x.$$

Согласно лемме мы получаем: комплексному корню $k_1 = \alpha + \beta i$ соответствуют два действительных решения уравнения (1):

$$y_1 = e^{\alpha}x\cos\beta x;\ y_2 = e^{\alpha}x\sin\beta x. \tag{14}$$

Заметим, что сопряженному корню $k_2 = \alpha - \beta i$ соответствует комплексное решение, которое, очевидно, может быть написано в виде: $y_2 = e^{\alpha}x\cos\beta x - ie^{\alpha}x\sin\beta x$, т. е. является (комплексной) линейной комбинацией тех же действительных решений (14). Таким образом, мы можем сказать, что паре сопряженных комплексных корней характеристического уравнения (6) соответствуют два действительных частных решения уравнения (1) вида (14).

Рассмотрим теперь случай кратных корней характеристического уравнения. Если среди корней уравнения (6) существуют кратные, то количество различных в ряду (7) чисел будет $< n$, и, соответственно, число линейно независимых частных решений вида (8) будет меньше n. Этих решений недостаточно для получения общего решения. Для получения недостающих решений изучим выражение линейного оператора L от произведения двух функций uv. По формуле Лейбница имеем:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \binom{n}{1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)},$$

$$(uv)^{(n-1)} = u^{(n-1)}v + \binom{n-1}{1}u^{(n-2)}v' + \binom{n-1}{2}u^{(n-3)}v'' + uv^{(n-1)},$$

$$(uv)' = u''v + 2u'v' + uv'',\ (uv) = u\ v + uv,\ uv = uv.$$

Умножая первую строку на 1, вторую на a_1, ..., последнюю на a_n и складывая, получим:

$$L[uv] = vL[u] + \frac{v'}{1!}L_1[u] + \frac{v''}{2!}L_2[u] + \ldots + \frac{v^{(n-1)}}{(n-1)!}L_{n-1}[u] + \frac{v^{(n)}}{n!}L_n[u] \tag{15}$$

Здесь введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
L[y] &= y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y,\\
L_1[y] &= n y^{(n-1)} + (n-1) a_1 y^{(n-2)} + \ldots + 2a_{n-2} y' + a_{n-1} y,\\
L_2[y] &= n(n-1) y^{(n-2)} + (n-1)(n-2) a_1 y^{(n-3)} + \\
&\quad \ldots + 2\cdot 1\cdot a_{n-2} y,\\
L_{n-1}[y] &= n(n-1)\ldots 2y' + (n-1)(n-2)\ldots 1\cdot a_1 y,\\
L_n[y] &= n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot y.
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Операторы $L[y]$, $r = 1, 2, \ldots, n$ составлены из $L[y]$ по правилу, аналогичному правилу дифференцирования многочлена, только роль показателей играют указатели порядка производной. Формула (15) применима к любому линейному оператору. Если, в частности, коэффициенты a_1, a_2, ..., a_n суть постоянные, то каждому оператору $L_r[y]$ соответствует характеристический многочлен $F_r(k)$, причем легко видеть, что $F_r(k)$ есть r-я производная по k многочлена $F(k)$, соответствующего оператору $L[y]$:

$$F_r(k) = F^{(r)}(k). \qquad (17)$$

Вычислим теперь выражение (15), если k — целое неотрицательное число. Мы получим:

$$L[x^m e^{kx}] = x^m L[e^{kx}] + \frac{m}{1} x^{m-1} L_1[e^{kx}] + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} x^{m-2} L_2[e^{kx}] + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{m}{m-1}\right) x L_{m-1}[e^{kx}] + L_m[e^{kx}]$$

или, поскольку в силу формул (5) и (17) мы имеем: $L_r[e^{kx}] = e^{kx}F^{(r)}(k)$, получим:

$$L[x^m e^{kx}] = e^{kx}\left\{x^m F(k) + \binom{m}{1}x^{m-1}F'(k) + \binom{m}{2}x^{m-2}F''(k) + \ldots + \right.$$
$$\left. + \binom{m}{m-1}xF^{(m-1)}(k) + F^{(m)}(k)\right\}. \qquad (19)$$

Пусть теперь k_1 есть корень характеристического уравнения (6) кратности m. Тогда, как известно, $F(k_1) = 0$, $F'(k_1) = 0, \ldots$, $F^{(m_1-1)}(k_1) \neq 0$, $F^{(m_1)}(k_1) \neq 0$. Если в выражении (19) взять показатель m при x меньшем, чем m_1, то все члены в скобке правой части обратятся в нуль; следовательно, мы получаем m_1 частных решений дифференциального уравнения (1), соответствующих корню k_1:

$$e^{k_1x}, xe^{k_1x}, x^2e^{k_1x}, \ldots, x^{m_1-1}e^{k_1x}. \qquad (20)$$

Аналогично, если имеются другие корни характеристического уравнения, k_2 кратности m_2, ..., k_p кратности m_p, $m_i \geq 1$, причем $m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n$, и все k_r уже различны, то им будут соответствовать частные решения:

$$\left.\begin{array}{l} e^{k_2x}, xe^{k_2x}, \ldots, x^{m_2-1}e^{k_2x}, \\ e^{k_px}, xe^{k_px}, \ldots, x^{m_p-1}e^{k_px} \end{array}\right\} \qquad (21)$$

Совокупность решений (20) и (21) даст в общем случае кратных корней n частных решений. Остается доказать, что они образуют фундаментальную систему. Допустим, что между этими решениями существует тождественно линейное соотношение:

$$\sum_{r=1}^{p}\left(A_0^{(r)} + A_1^{(r)}x + \ldots + A_{m_r-1}^{(r)}x^{m_1-1}\right)e^{k_rx} \sum_{r=1}^{p} P_r(x)e^{k_rx} = 0, \qquad (22)$$

где коэффициенты $A_j^{(r)}$ — постоянные. Без ограничения общности можно предположить, что в многочлене $P_p(x)$ по крайней мере один коэффициент отличен от нуля. Разделим обе части этого соотношения на $e^{k_1 x}$:

$$P_1(x)+\sum_{r=2}^{p} P_r(x)e^{(k_r-k_1)x}=0.$$

Дифференцируя последнее (предполагаемое) тождество m_1 раз по x, мы вместо первого многочлена получим нуль, а все многочлены, стоящие множителями при показательных функциях, заменятся новыми многочленами тех же степеней, и мы получим новое тождество:

$$\sum_{r=2}^{p} Q_r(x)e^{(k_r-k_1)x} = 0. \tag{23}$$

Очевидно, что $Q_p(x)$ не равно нулю тождественно. Сумма (23) содержит уже p — 1 слагаемых; продолжая тот же процесс, мы придем, наконец, к тождеству:

$$R_p(x)\,e^{(k_p-k_{p-1})x} = 0. \tag{24}$$

Но тождество (24) невозможно, так как $e^{(k_p-k_{p-1})x} \neq 0$, а многочлен $R_p(x)$, будучи той же степени, что $P_p(x)$, имеет по крайней мере один коэффициент отличным от нуля и не тождественно равен нулю. Доказав линейную независимость частных решений (20) и (21), мы можем написать общее решение уравнения (1) в случае кратных корней в виде:

$$y=\sum_{r=1}^{p}\ , \tag{25}$$

где $Gr(x)$ есть многочлен степени m_r — 1 с произвольными коэффициентами. Число произвольных постоянных в выражении (25) равно $m_1 + m_2 + ... + m_{\text{p}} = n$, т. е. порядку уравнения, как и должно быть.

2. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Если дано линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$L[y] = V(x), \tag{26}$$

то, так как мы всегда умеем решить соответствующее однородное уравнение, изложенный ранее метод вариации постоянных во всяком случае позволяет найти квадратурами частное решение, а следовательно, и написать общее решение. Мы в этом параграфе остановимся главным образом на тех случаях, когда частное решение находится без квадратур. Начнем с одного замечания, относящегося к любому линейному уравнению с правой частью. Если имеем уравнение $L[y] = V_1(x) + V_2(x)$, то, обозначая через Y_1 и Y_2 соответственно частные решения уравнений: $L[y] = V_1(x)$, $L[y] = V_2(x)$, мы получим его частное решение в виде: $Y = Y_1 + Y_2$. В самом деле, мы имеем: $L[Y_1 + Y_2] = L[Y_1] + L[Y_2]$. Но по условию $L[Y_1] \quad V_1(x)$, $L[Y_2] \quad V_2(x)$, откуда $L[Y_1 + Y_2] \quad V_1(x) + V_2(x)$, что и требовалось доказать. Мы укажем способ нахождения частных решений линейного уравнения с постоянными коэффициентами вида $L[y] = \sum_{r=1}^{k} P_r(x)e^{\alpha}r^{x}$ [$P_{\text{r}}(x)$ — многочлены] без квадратур, одними рациональными операциями.

На основании предыдущего замечания достаточно уметь находить частное решение уравнения вида:

$$L[y] = P_{\text{m}}(x)e^{\alpha x}, \tag{27}$$

где $P_{\text{m}}(x) = p_m x_m + ... + p_0$ есть многочлен степени $m \quad 0$. Нам придется рассмотреть два случая:

1) α не является корнем характеристического уравнения, $F(\alpha) \neq 0$. Мы докажем, что в этом случае существует частное решение того же вида, что и правая часть, именно:

$$Y = Q_m(x)e^{\alpha x}, \tag{28}$$

где $Q_m(x) = q_m x_m + q_{m-1}x_{m-1} + ... + q_0$. Рассматривая коэффициенты $q_m, q_{m-1}..., q_0$ как неизвестные, покажем, что их можно определить так, чтобы выполнялось следующее тождество по x:

$$L[Q_{\mathrm{m}}(x)\, \mathrm{e}^{\alpha x}] = P_{\mathrm{m}}(x)e^{\alpha x},$$

или

$$e^{-\alpha x} L[Q_{\mathrm{m}}(x)\, \mathrm{e}^{\alpha x}] = P_{\mathrm{m}}(x). \tag{29}$$

Мы можем вычислить левую часть, применяя формулу (17); мы найдем, обозначая по-прежнему характеристический многочлен через $F(\alpha)$:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha x} L[Q_m(x)e^{\alpha x}] = q_m \Big\{ & x^m F(\alpha) + \binom{m}{1} x^{m-1} F'(\alpha) + \\ & + \binom{m}{2} x^{m-2} F''(\alpha) + ... + F^{(m)}(\alpha) \Big\} + \\ & + q_{m-1} \left\{ x^{m-1} F(\alpha) + \binom{m-1}{1} x^{m-2} F'(\alpha) \right\} + ... + \\ & + q_1 \{ xF(\alpha) + F'(\alpha) \} + q_0 F(\alpha). \end{aligned} \tag{30}$$

Приравнивая выражение (30) многочлену $P_m(x)$ и отождествляя коэффициенты при одинаковых степенях x, получим $m + 1$ уравнений с $m + 1$ неизвестными $q_0, q_1, ..., q_m$

$$\left.\begin{array}{l}
q_m F(\alpha) = p_m, \\
q_{m-1} F(\alpha) + q_m \left(\dfrac{m}{1}\right) F(\alpha) = p_{m-1}, \\
q_{m-2} F(\alpha) + q_{m-1} \left(\dfrac{m-1}{1}\right) F'(\alpha) = p_{m-2}, \\
q_{m-r} F(\alpha) + q_{m-r+1} \left(\dfrac{m-r+1}{1}\right) F(\alpha) + \\
+q_{\,m-r+2} \left(\dfrac{m-r+2}{2}\right) F'(a) + \ldots + q_m \left(\dfrac{m}{r}\right) F^{(r)}(\alpha) = p_{m-r}, \\
q_0 F(\alpha) + q_1 F(\alpha) + q_2 F'()\alpha + q_3 F''(\alpha) + \ldots + \\
+q_m F^{(m)}(\alpha) = p_0.
\end{array}\right\} \qquad (31)$$

F(α) $\neq$ 0. Система (31) дает возможность последовательно вычислить q_m, $q_{m-1}\ldots$, q_0:

$$q_m = \frac{p_m}{F(\alpha)},$$

$$q_{m-1} = \frac{1}{F(\alpha)}\left(p_{m-1} - q_m \left(\frac{m}{1}\right) F(\alpha)\right) = \frac{p_{m-1}}{F(\alpha)} - \left(\frac{m}{1}\right) \frac{p_m}{\left[F(\alpha)\right]} F(\alpha)$$

и т. д. Таким образом, мы находим искомое частное решение (28) (разрешимость системы (31) относительно q_0, q_1, ..., q_m можно сразу усмотреть из того, что ее определитель равен $[F(\alpha)]^{m+1} \neq 0$);

2) пусть теперь является корнем характеристического уравнения кратности $r \geq 1$. Тогда $F(\alpha) = F'(\alpha) = \ldots = F^{(r-1)}(\alpha) = 0$, $F^{(r)}(\alpha) \neq 0$. Формула (19) показывает, что в этом случае $L[e^{\alpha} xx_m]$ есть произведение е х на многочлен степени $m - r$. Чтобы получить в результате подстановки в левую часть уравнения $e^{\alpha}x$, умноженное на многочлен степени m, естественно искать частное решение в этом случае в виде:

$$Y = x^r Q_m(x) e^{\alpha x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(q_\mathrm{m} x^{m+r} + q_{m-1} x^{m+r-1} + \ldots + q_0 x^r). \qquad (32)$$

Подставляя это выражение в уравнение (27) и требуя, чтобы (26) было решением уравнения, мы приходим к условию:

$$e^{\alpha x} L[x^r Q_m(x) e^{\alpha x}] = P_m(x). \tag{33}$$

Опять вычисляем левую часть, пользуясь формулой (19) и помня, что $F(\alpha) = F'(\alpha) = \ldots = F^{(\mathrm{r}-1)}(\alpha) = 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha x} L[x^r Q_m(x) e^{\alpha x}] = q_m \left\{ \binom{m+r}{r} x^m F^{(r)}(\alpha) + \right. \\ \left. + \binom{m+r}{r+1} x^{m-1} F^{(r+1)}(\text{á}) + \ldots + F^{(m+r)}(\text{á}) \right\} + \\ + q_{m-1} \left\{ \binom{m+r-1}{r} x^{m-1} F^{(r)}(\text{á}) + \binom{m+r-1}{r+1} x^{m-2} F^{(r+1)}(\text{á}) + \right. \\ \left. + \ldots + F^{(m+r-1)}(\text{á}) \right\} + \ldots + q_1 \left\{ \binom{r+1}{r} x F^{(r)}(\text{á}) + \right. \\ \left. + F^{(r+1)}(\text{á}) \right\} + q_0 F^{(r)}(\text{á}). \end{aligned}$$

Подставляя выражение (34) в равенство (33) и приравнивая после этого коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства (26′), опять получаем систему $m + 1$ уравнений для определения $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_m$:

$$\left.\begin{aligned} &\binom{m+r}{r} F^{(r)}(\alpha) q_m = p_m, \\ &\binom{m+r-1}{r} F^{(r)}(\alpha) q_{m-1} + \binom{m+r}{r+1} F^{(r+1)}(\alpha) q_m = p_{m-1}, \\ &\binom{m+r-l}{r} F^{(r)}(\alpha) q_{m-l} + \binom{m+r-l+1}{r+1} F^{(r+1)}(\alpha) q_{m-l+1} + \\ &+ \ldots + \binom{m+r}{r+l} F^{(r+l)}(\alpha) q_m = p_{m-l}, \\ &F^{(r)}(\alpha) q_0 + F^{(r+1)}(\alpha) q_1 + \ldots + F^{(r+m)}(\alpha) q_m = p_0. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Определитель системы (35) равен

$$\binom{m+r}{r}\binom{m+r-1}{r}\cdots\binom{r}{r}[F^{(r)}(\alpha)]^{m+1}\neq 0,$$

поэтому все неизвестные $q_i (i = 0, 1, 2, ..., m)$ определяются однозначно, и мы получаем решение вида (26). Итак, мы приходим к следующему результату: частное решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью вида $P_m(x)e^{\alpha x}$ может быть найдено в виде:

$$x^r Q_m(x)e^{\alpha x}, \tag{36}$$

где $r \geq 0$ есть кратность корня а характеристического уравнения, Q_m есть многочлен той же степени, что и P_m. На практике для нахождения частного решения обычно его пишут в форме (28) или (32) с неопределенными коэффициентами у многочлена $Q_m(x)$. Подставляя это выражение частного решения в заданное уравнение, сокращая на $e^{\alpha x}$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получают систему линейных уравнений для этих коэффициентов. По доказанному, эта система всегда имеет определенные решения.

3. Применение тригонометрических рядов к нахождению частного решения. В приложениях часто встречаются уравнения вида: $L[y] = V(x)$, где $L[y]$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а V(x) — периодическая функция, период которой предположим равным 2π. Для простоты рассуждений мы предположим, что оператор L — второго порядка и не содержит члена с первой производной, т. е. $L[y] \equiv y'' + qy$. Функцию $V(x)$ мы будем писать в виде разложения в тригонометрический ряд Фурье. Итак, имеем уравнение:

$$L[y] \equiv y'' + qy = V(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{37}$$

где q — постоянное. Ищем частное решение $Y(x)$ тоже в виде тригонометрического ряда с неопределенными коэффициентами:

$$Y(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx) \qquad (38)$$

Подставляем ряд (38) в уравнение (37) и подбираем его коэффициенты так, чтобы равенство (37) удовлетворялось формально (т. е. мы пока не ставим вопроса о сходимости входящих в рассуждение рядов). Приравнивая свободные члены, имеем:

$$L\left[\frac{A_0}{2}\right]=\frac{a_0}{2}$$

или

$$q\frac{A_0}{2}=\frac{a_0}{2},$$

откуда

$$A_0=\frac{a_0}{q}.$$

Сразу видно первое необходимое условие существования решения вида (38): если $a_0 \neq 0$, то необходимо $q \neq 0$ (если $q = 0$ и $a_0 = 0$, то коэффициент A0 остается неопределенным).

Затем приравниваем в обеих частях члены, содержащие $\cos nx$ и $\sin nx$, т. е.

$$L[A_n\cos nx + B_n\sin nx] = a_n\cos nx + bn\sin nx. \qquad (39)$$

Раскрываем левую часть, замечая, что $L[\cos nx] = (-n^2 + q)\cos nx$, $L[\sin nx] = (-n^2 + q)\sin nx$.

Приравнивая далее коэффициенты при $\cos nx$ и $\sin nx$ в обеих частях (39), находим:

$$A_n = \frac{a_n}{-n^2+q}, \quad B_n = \frac{b_n}{-n^2+q}. \tag{40}$$

Для того чтобы формулы (40) имели смысл, необходимо, чтобы не было $-n^2 + q = 0$. Но равенство возможно только, если $q = n^2$, т. е. для оператора $L[y] = y'' + n^2y$. В этом случае однородное уравнение имеет периодическое решение с частотой n, и член правой части $a_n\cos nx + b_n\sin nx$ находится в резонансе с этим решением; поэтому a priori (от лат. a priori — заложенное изначально) нельзя ожидать периодического решения (если при этом $a_n = b_n = 0$, то резонанса не будет, периодические же члены $A_n\cos nx + B_n\sin nx$ с произвольными A_n, B_n входят в общее решение однородного уравнения). Итак, предполагая, что резонанса нет, мы получаем формальное решение уравнения (30) в виде тригонометрического ряда:

$$Y(x) = \frac{a_0}{2q} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{a_n}{n^2-q}\cos nx - \frac{b_n}{n^2-q}\sin nx\right). \tag{41}$$

Остается доказать, что ряд (41) действительно сходится и удовлетворяет уравнению (37). Это легко вытекает из следующих соображений. Коэффициенты Фурье a_n, b_n функции $V(x)$ по известному свойству коэффициентов Фурье стремятся к 0; следовательно, начиная с некоторого n, имеем $|a_n| < 1$, $|b_n| < 1$. Однако множитель $Y(x) = \frac{a_0}{2q}$ для достаточно большого n положителен и не превышает $\frac{A}{n^2}$ ($A > 0$ — постоянное). Итак, члены ряда (41), начиная с некоторого, не превышают по абсолютной величине соответствующих членов сходящегося числового ряда $\sum \frac{2A}{n^2}$, т. е. ряд (41) **сходится равномерно**. Докажем, наконец, что найденная функция $Y(x)$ удовлетворяет уравнению (37). Составим выражение: $-qY + V(x)$;

непрерывная функция x; ее ряд Фурье, получаемый как линейная комбинация рядов для Y и V, в силу формул (37) и (41) будет:

$$-q\left[\frac{a_0}{2q}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{a_n}{n^2-q}\cos nx-\frac{b_n}{n^2-q}\right)\right]+\frac{a_0}{2}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2a_n}{n^2-q}\cos nx+\frac{n^2b_n}{n^2-q}\sin nx\right). \quad (42)$$

Получившийся ряд Фурье есть дважды продифференцированный ряд (41); следовательно, представляемая им непрерывная функция есть вторая производная от $Y(x)$, и мы имеем тождество: $Y''(x) = -pY + V(x)$, т. е. $Y(x)$ удовлетворяет уравнению (37). Тот же метод и то же рассуждение применяются к уравнению n-го порядка:

$$y^{(n)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_ny=V(x)\sim\frac{a_0}{2}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_n\sin mx), \quad (43)$$

с постоянными коэффициентами. Коэффициенты решения для $n = 4$ имеют значения:

$$A_0=\frac{a_0}{p_4},\ A_m=\frac{(m^4-p_2m^2+p_4)a_m+p_3mb_m}{(m^4-p_2m^2+p_4)^2+p_3^2m^2},$$

$$B_m=\frac{-p_3ma_m+(m^4-p_2m^2+p_4)b_m}{(m^4-p_2m^2+p_4)^2+p_3^2m^2}. \quad (44)$$

2. Линейные уравнения второго порядка

1. Приведение к простейшим формам. Мы будем рассматривать однородные линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами:

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \quad (1)$$

или же

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0. \quad (2)$$

Коэффициенты P, Q или p_0, p_1, p_2 будем предполагать непрерывными функциями от x. Рассмотрим некоторые упрощенные формы уравнения второго порядка. Как известно самосопряженное уравнение второго порядка имеет вид:

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+qy=0. \quad (3)$$

Докажем, что всякое уравнение второго порядка может быть приведено к самосопряженной форме умножением на некоторую функцию от x. Уравнение (3), написанное в раскрытом виде, $py'' + p'y' + qy = 0$, показывает, что коэффициент при y' есть производная от коэффициента при y''. Умножим обе части уравнения (2) на некоторую функцию $\mu(x)$ и постараемся подобрать эту функцию так, чтобы для нового уравнения выполнялось условие: $(\mu p_0(x))' = \mu p_1(x)$. Преобразуем это уравнение для μ:

$$p_0\mu' + p'_0\mu = p_1\mu,$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{p_1 - p'_0}{p_0},$$

$$\ln\mu = \int\frac{p_1}{p_0}dx - \int\frac{p'_0\,dx}{p_0},$$

$$\mu = \frac{1}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}.$$

По умножении на μ уравнение (2) примет вид:

$$e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}y'' + \frac{p_1}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}y' + \frac{p_2}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}y = 0,$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int \frac{p_1}{p_0}dx}\frac{dy}{dx}\right)+\frac{p_2}{p_0}e^{\int \frac{p_1}{p_0}dx}y = 0,$$

т. е., действительно, вид (3), где

$$p = e^{\int \frac{p}{p_0}dx},$$

$$q = \frac{p_2}{p_0}e^{\int \frac{p_1}{p_0}dx}.$$

Заменой независимого переменного можно привести линейное уравнение второго порядка к виду:

$$y'' + Q(x)y = 0. \tag{4}$$

Линейной заменой искомой функции также можно уничтожить член с первой производной, т. е. привести уравнение к виду (4).

ЛЕКЦИЯ № 7. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Существование производных по начальным значениям от решений системы

1. Докажем следующую лемму.

Лемма. Если правые части системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n; \lambda) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

являются непрерывными функциями переменных x, y_1, y_2 ..., y_n и параметра λ в области

$$\left|x - x_0\right| \le a, \left|y_i - y_i^0\right| \le b \; (i = 1, 2, \ldots, n), \;\; \lambda 0 \le \lambda \le \lambda 1, \tag{2}$$

и если в той же области непрерывны частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ (i = 1, 2, ..., n), то решение, определенное начальными данными (x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0), является непрерывной функцией параметра λ при $\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2$. Для доказательства заметим, что из условия непрерывности функций f_i в области (2) следует их ограниченность в этой области: $|f_i|$ (i = 1, 2, ..., n), а из непрерывности $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ следует также их ограниченность: $\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \le K (i = 1, 2, \ldots, n)$. Последние неравенства влекут за собой выполнение условий Липшица для функций f_i по отношению к аргументам y_1, y_2 ..., y_n:

$$|f_i(x, y'_1, \ldots, y'n; \lambda) - f_i(x, y''_1, \ldots, y''_n; \lambda)| \le K\{|y'_1 - y''_1| + \ldots + |y'_n - y''_n|\}.$$

Следовательно, для всякого фиксированного значения параметра λ между λ_1 и λ_2 и для значений x в интервале $x_0 - h \le x \le$ $\le x_0 + h$, $h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$ последовательные приближения, получаемые по методу Пикара,

$$y_i^{(m)}(x; x_0, y_1^0, ..., y_n^0; \lambda) = y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1^{(m-1)}, ..., y_n^{(m-1)}; \lambda)\,dx$$

$(i = 1, 2, ..., n;\ m = 1, 2, 3,...)$ (3)

будут сходиться равномерно как по отношению к x, так и по отношению к параметру λ. Пределы этих последовательностей при $m \to \infty$ дадут, как мы знаем, решение системы (1):

$$yi = \varphi_i(x; x^0, y_1^0, ..., y_n^0; \lambda); \tag{4}$$

так как все члены последовательностей (4) являются, очевидно, непрерывными функциями от λ. Это же справедливо в силу равномерной сходимости и для предельных функций (4), что и доказывает лемму.

2. **Теорема.** Если правые части системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$$

$(i = 1, 2, ...n)$

допускают в области D: $|x - \bar{x}_0| \le a$, $\left|y_i - \bar{y}_i^0\right| \le b$ $(i = 1, 2, ..., n)$ непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}$ $(i = 1, 2, ...n)$, то решение, определенное начальными данными x^0, $y_1{}^0$, $y_2{}^0$, ..., $y_n{}^0$,

$$y_i = \varphi_i(x; x^0, y_1{}^0, y_2{}^0, ..., y_n{}^0) \tag{5}$$

допускает непрерывные производные по начальным данным: $\frac{\partial y_i}{\partial x_0}$, $\frac{\partial y_i}{\partial y_k}$($i$ = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., n). Для доказательства допустим, что в формуле (5) величины x^0, y_i^0 получили некоторые определенные числовые значения, принадлежащие области D'($| x_0 - \bar{x}_0 | \le \frac{h}{2}$, $\left| y_i^0 - \bar{y}_i^0 \right| \le \frac{b}{2}$). Подставив затем y_i из (5) в уравнения (4), мы получим тождества. Далее, даем в формуле (5) одному начальному значению $y_k{}^0$ приращение $\Delta y_k{}^0$; обозначим соответствующее решение через

$$\tilde{y}^i = \varphi_i(x, x_0, y_1^0, ..., y_k^0 + \Delta y_k^0, ..., y_n^0) \ (i = 1, 2, ..., n). \tag{6}$$

Составим для этого решения тождество, соответствующее (4), и вычтем оба тождества почленно:

$$\frac{d\left(\tilde{y}_i - y_i\right)}{dx} = f_i\left(x, \tilde{y}1, ..., \tilde{y}\right) - f_i(x, y_1, ..., y_n) \tag{7}$$

(i = 1, 2, ..., n).

Разности в правых частях равенства (7) путем последовательного применения теоремы о конечном приращении преобразуем так:

$$f_i\left(x, \tilde{y}1, \tilde{y}2, ..., \tilde{y}n\right) - f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) = \left[f_i\left(x, \tilde{y}1, \tilde{y}_2, ..., \tilde{y}n\right) - \right.$$

$$-f_i\left(x, y_1, \tilde{y}, \ldots, \tilde{y}_n\right)\Big] + \Big[f_i\left(x, y_1, \tilde{y}, \ldots, \tilde{y}_n\right) - f_i\left(x, y_1, y_2, \tilde{y}, \ldots, \tilde{y}_n\right)\Big] +$$

$$+ \ldots + \Big[f_i\left(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, \tilde{y}_n\right) - f_i\left(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n\right)\Big] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i\left(x, y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j, y_j + õ_{ij}\left(\tilde{y}_j - y_i\right)\tilde{y}_{j+1}, \ldots\right)}{\partial y_j}\left(\tilde{y}_j - y_j\right),$$

$0 < \upsilon_{ij} < 1$. Множители при во второй части последнего равенства (обозначим их через $a_{ij}(x, \; y_k{}^0)$) являются непрерывными функциями от совокупности переменных x, $\Delta y_k{}^0$. В самом деле, хотя могут зависеть от х и $\Delta y_k{}^0$ и непрерывны, но если при данных зна чениях этих аргументов $\tilde{y}_j - y_j \neq 0$, то непрерывность следует из равенства, определяющего a_{ij}:

$$a_{ij}(x, \Delta y_k^0) = \frac{f_i\left(x, y_1, \ldots, \tilde{y}_j, \tilde{y}_{j+1}, \ldots\right) - f_i\left(x, y_1, \ldots, y_j \tilde{y}_{j+1} \ldots\right)}{\tilde{y}_j - y_y},$$

где числитель и знаменатель непрерывны и знаменатель $\neq 0$. Если же разность $\tilde{y}_j - y_j$ стремится к нулю при $x \to \bar{x}$, $\Delta y_k^0 \to \Delta \bar{y}_k^0$,

то a_{ij} в силу непрерывности $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}$ по отношению к совокупности

аргументов стремится к значению $\dfrac{\partial f_i\left(x, y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j \tilde{y}_{j+1} \ldots\right)}{\partial y_y}$.

Заметим, что, в частности, a_{ij} непрерывны при $\Delta y_k{}^0 = 0$ и что

$a_{ij}\left(x, 0\right) = \dfrac{af_i\left(x, y_1, \ldots, y_n\right)}{\partial y_y}$. Разделив далее обе части преобразованных указанным способом равенств (7) на Δy_k^0, мы получим следующие равенства:

$$\frac{d\left(\dfrac{\tilde{y}_i - y_i}{\Delta y_k^0}\right)}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x, \Delta y_k^0\right)\frac{\tilde{y}_j - y_j}{\Delta y_k^0}. \tag{8}$$

Мы рассматриваем теперь систему (37) как систему линейных уравнений, в которой искомыми функциями являются: $\dfrac{\tilde{y}_1 - y_1}{\Delta y_k^0}$, $\dfrac{\tilde{y}_2 - y_2}{\Delta y_k^0}$, ... $\dfrac{\tilde{y}_n - y_n}{\Delta y_k^0}$; выражения $a_{ij}(x, \Delta y_k^0)$рассматриваем как известные функции x и параметраΔy_k^0. По доказанному эти коэффициенты непрерывно зависят от параметра Δy_k^0 при достаточно малом $|\Delta y_k^0|$. Начальные условия для искомых функций, очевидно, таковы:

$$\left.\begin{aligned} i \neq k;\left(\frac{\tilde{y}_i - y_i}{\Delta y_k^0}\right)_{x=x_0} &= \frac{y_i^0 - y_i^0}{\Delta y_k^0} = 0 \\ i = k;\left(\frac{\tilde{y}_k - y_k}{\Delta y_0^k}\right)_{x=x_0} &= \frac{\Delta y_k^0}{\Delta y_k^0} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Мы вправе применить доказанную выше лемму: решения системы (8) также непрерывно зависят от параметра кук, и, в частности, для них существуют предельные значения:

$$\lim_{\Delta y_k^0 \to 0} \frac{\tilde{y}_i - y_i}{\Delta y_k^0} = \frac{\partial \varphi_i(x; x_0, y_1^0, ..., y_n^0)}{\partial y_k^0} \frac{\partial y_i}{\partial y_k^0} \tag{10}$$

$(i, k = 1, 2, ..., n)$.

Мы доказали существование производных (10) в любой точке $(x^0, y_1^0, ..., y_n^0)$ области D', т. е. во всей этой области. Эти производные удовлетворяют системе однородных линейных уравнений:

$$\frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, y_i, ..., y_n)}{\partial y_j} z_j \tag{11}$$

$(i, k = 1, 2, ..., n)$.

2. Первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Рассмотрим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Мы предположим, что в некоторой замкнутой области D функции $f_1, f_2, ..., f_\mathrm{n}$ и все их частные производные по $y_1, y_2, ..., y_n$ непрерывно зависят от всех аргументов. Тогда применима теорема существования и единственности. Если точка с координатами $x^0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0$ лежит внутри некоторой области D', содержащейся в D, то существует одна и только одна система решений уравнений данных, удовлетворяющих начальным условиям: $y_i = y_i^0$ при $x = x_0$ $(i = 1, 2,..., n)$. Пусть эти решения будут:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x; x_0, y_1^0, y_2^0, ... y_n^0), \\ y_2 &= \varphi_2(x; x_0, y_1^0, y_2^0, ... y_n^0), \\ y_n &= \varphi_n(x; x_0, y_1^0, y_2^0, ... y_n^0). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

В этих формулах мы явно указываем зависимость решения от начальных данных x^0, $y_1{}^0$, ..., $y_n{}^0$, которые мы принимаем за параметры, могущие принимать различные значения. Рассмотрим теперь в области D начальную точку (x^0, $y_1{}^0$, ..., $y_n{}^0$) и некоторую точку (x, y_1, ..., y_n), лежащую на интегральной кривой, проходящей через начальную точку. Значения x^0, $y_1{}^0$, ..., $y_n{}^0$, с одной стороны, и значения, y_1, ..., y_n — с другой, связаны соотношениями (2). Если теперь принять точку (x, y_1, ..., y_n) за начальную, то в силу свойства единственности определенная этими начальными значениями интегральная кривая пройдет через точку (x^0, $y_1{}^0$, ..., $y_n{}^0$), причем, очевидно, будут иметь место соотношения:

$$\left.\begin{aligned} y_1^0 &= \varphi_1(x_0; x, y_1, y_2, \ldots y_n), \\ y_2^0 &= \varphi_2(x_0; x, y_1, y_2, \ldots y_n), \\ y_n^0 &= \varphi_n(x_0; x, y_1, y_2, \ldots y_n). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Формулы (3) показывают, что система уравнений (2) может быть разрешена (однозначно в области D') относительно начальных значений $y_0{}^0$, $y_1{}^0$, ..., $y_n{}^0$, причем правые части допускают непрерывные частные производные по x, y_1, y_2, ..., y_n. Заменяя, как мы это делаем в теореме существования, начальные значения $y_1{}^0$, $y_2{}^0$, ..., $y_n{}^0$ через произвольные постоянные C_1, C_2, ..., C_n и давая параметру x_0 определенное числовое значение, мы получим совокупность уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= (x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_1, \\ \psi_2 &= (x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_2, \\ \psi_n &= (x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_n. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Совокупность равенств (4) называется **общим интегралом системы** (1), а каждое из равенств (4) называется **первым интегра-**

лом этой системы. Заметим, что левая часть каждого из этих равенств есть функция от независимого переменного и искомых функций. Из самого происхождения формул (4) следует, что эта функция обращается в некоторую постоянную величину, если вместо y_1, y_2, ..., y_n поставить их выражения (2), т. е. любое решение системы (1) (причем, очевидно, для разных решений значение этой постоянной будет, вообще говоря, различное). Мы можем, таким образом, дать два определения первого интеграл:

1) первыми интегралами системы (1) называются соотношения, полученные разрешением уравнений, дающих общее решение системы, относительно произвольных постоянных. Предыдущее рассуждение показывает, что такое разрешение всегда возможно, если за произвольные постоянные взять начальные значения искомых функций. Очевидно, что это определение применимо лишь ко всей системе соотношений (4). Поэтому мы дадим второе определение, характеризующее каждый первый интеграл в отдельности;
2) первым интегралом системы называется соотношение, не тождественно равное постоянному, содержащее в левой части независимое переменное и искомые функции и принимающее постоянное значение, если вместо искомых функций подставить какое-нибудь решение системы (1). Заметим, что из этого последнего определения очевидно существование бесконечного множества систем первых интегралов. В самом деле, соотношение

$$\Phi\left[\psi_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \psi_2(x, y_1, \ldots, y_n)\right] = C, \qquad (5)$$

где C есть произвольная постоянная, а Φ — произвольная непрерывная функция своих аргументов, также является первым интегралом системы (1), так как, подставляя вместо y_1, y_2, ..., y_n решения системы, мы обращаем функции Ψ_1, Ψ_2, ..., Ψ_n, а следовательно, и Φ, в постоянные величины.

2. Исходя из второго определения первых интегралов можно дать аналитический признак, характеризующий левую часть первого интеграла. Мы предположили, что правые части данных уравнений (1) допускают непрерывные частные производные по y_1, y_2, ..., y_n. Тогда, как доказано выше, правые части равенств (3) допускают непрерывные частные производные по x, y_1, y_2, ..., y_n. Мы можем рассматривать более общие соотношения вида (4), причем мы всегда будем предполагать, что их левые части допускают производные по x, y_1, y_2, ..., y_n. Это будет иметь место всегда, если левые части равенств (4) получены из правых частей равенств (3) формулами вида (5), где Φ — функция, имеющая непрерывные производные по всем своим аргументам. Предположим, что в одном из первых интегралов

$$\Psi\ (x, y_1, \ldots, y_n) = C \tag{6}$$

на место y_1, ..., y_n подставлено какое-нибудь решение системы (1); тогда левая часть обратится в функцию от x, тождественно равную постоянной. Дифференцируя обе части этого тождества по x, получаем:

$$\frac{\partial \psi}{\alpha x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx} = 0. \tag{7}$$

Так как y_1, ..., y_n суть решения системы (1), то производные $\frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ можно заменить в равенстве (7) равными им правыми частями уравнений (1), и мы получим:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + f_1(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \ldots + f_n(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial \psi}{\partial y_n} = 0. \tag{8}$$

В равенстве (8) $y_1, \ldots, y_n$ есть функции от x, являющиеся некоторым решением системы (1). Таким образом, значения $(x, y_1, \ldots, y_n)$ в этом равенстве суть координаты точки $(n + 1)$-мерного пространства, через которую проходит рассматриваемое решение. Но так как результат дифференцирования равенства (6) не зависит от С, то равенство (8) выполняется для точки $(x, y_1, \ldots, y_n)$, лежащей на любой интегральной кривой в рассматриваемой области. Так как по теореме существования через каждую точку $(x^0, y_1^0, \ldots, y_n)$ этой области проходит интегральная кривая, то, следовательно, равенство (8) имеет место для любой точки рассматриваемой области, т. е. тождественно по $x, y_1, \ldots, y_n$. Итак, левая часть каждого первого интеграла удовлетворяет тождественно соотношению (8). Пусть, обратно, некоторая функция обращает уравнение (8) в тождество; тогда вдоль любой интегральной кривой системы (1) имеет место равенство (7), а следовательно, и равенство (6). Таким образом, вдоль каждой интегральной кривой функция принимает постоянное значение.

Итак, равенство (8) есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнение (6) представляло первый интеграл. Иногда свойство первого интеграла, выражаемое равенством (8), формулируют так: производная от левой части первого интеграла обращается в нуль в силу данной системы дифференциальных уравнений.

3. Если нам удастся каким-нибудь способом найти n независимых первых интегралов системы (1), т. е. таких, которые можно разрешить относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то их разрешение дает выражение $y_1, y_2, \ldots, y_n$ через x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Эти выражения дадут нам общее решение системы (1). В самом деле, условие независимости интегралов (4) означает, что якобиан $\dfrac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, y_n)}$ не равен нулю тождественно. Пусть система значений x^0, $y_1^0, \ldots, y_n^0$ дает ему отличное от нуля значение. Тогда в окрестности этих значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ являются однозначными непрерывными функциями от $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и от x. Задавая начальные значения x_0 и $\tilde{y}_1^0$, $\tilde{y}_2^0, \ldots, \tilde{y}_n^0$ в достаточной близости от y_1^0,

$y_2^0, \ldots, y_n^0$ и обозначая соответствующие значения постоянных через $\overline{C_1}, \overline{C_2}, \ldots, \overline{C_n}$, мы видим, что эти значения постоянных определяют решение системы (1):

$$y_1 = \overline{\varphi_1}(x, \overline{C_1}, \overline{C_2}, \ldots, \overline{C_n}), \ldots, \; y_n = \overline{\varphi_n}(x, \overline{C_1}, \overline{C_2}, \ldots, \overline{C_n}),$$

которое при $x = x_0$ принимает наперед заданные начальные значения $\tilde{y}_1^0, \tilde{y}_2^0, \ldots, \tilde{y}_n^0$. А это и есть критерий для общего решения.

Таким образом, знание n (независимых) первых интегралов равносильно интеграции системы (1). Если нам известен один первый интеграл системы: $\Psi(x, y_1, \ldots, y_n) = C$, то из него можно выразить одну из искомых функций, например y_n через x, остальные искомые функции и произвольную постоянную C: $y_n = (x, y_1, \ldots, y_{n-1}; C)$. Внося это выражение в первое, второе, ..., ω $(n - 1)$-е уравнение системы (4), мы придем к системе $n - 1$ уравнений с $n - 1$ искомыми функциями. Таким образом, **порядок системы понижается на единицу**. Производя интеграцию новой системы $(n - 1)$-го порядка, мы введем $n - 1$ произвольных постоянных, которые вместе с C дадут систему n произвольных постоянных, т. е. мы получили общее решение системы (1). Аналогично, если нам известны k независимых первых интегралов, то порядок системы понижается на k единиц.

3. Симметричная форма системы дифференциальных уравнений

1. Соотношения (4), дающие общий интеграл системы (1), имеют ту особенность, что в них независимые и зависимые переменные входят равноправно. Таким образом, эти соотношения сохраняют свою силу, если мы выберем в качестве независимого переменного одну из функций y_i. Соответствующая замена переменных изменит форму системы (1), так как в нее входят производные. Но если написать данные уравнения при помощи диффе-

ренциалов (первого порядка), то по известному их свойству система в этой форме сохраняет свою силу при любой замене переменных, в частности вышеуказанного типа. Итак, мы можем написать систему (4) в виде:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy_1}{f_1(x,y_1,y_2,..,y_n)}=\frac{dy_2}{f_2(x,y_1,y_2,...,y_n)}=...=\frac{dy_n}{f_n(x,y_1,y_2,...,y_n)}$$

Эта система остается равносильной первоначальной, если все знаменатели умножить на один и тот же множитель (при этом надо ограничиться рассмотрением тех областей, где этот множитель не обращается в нуль). Поэтому мы можем предложить, что стоящий в начале дифференциал dx имеет в знаменателе не единицу, а некоторую функцию. Делаем последний шаг: вместо переменных x, y_1, y_2, ..., y_n пишем переменные x_1, x_2, ..., x_n. Система дифференциальных уравнений в симметричной форме имеет вид:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,...,x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,...,x_n)}=...=\frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,...,x_n)}. \qquad (9)$$

Общий интеграл этой системы запишется в виде:

$$\left.\begin{array}{r}\psi_1(x_1,x_2,...,x_n)=C_1,\\ \psi_2(x_1,x_2,...,x_n)=C_2,\\ \psi_{n-1}(x_1,x_2,...,x_n)=C_{n-1}.\end{array}\right\} \qquad (10)$$

Так как мы желаем иметь возможность принять любое из переменных за независимое, а все остальное — за искомые функции, то естественно требовать от функции X_i непрерывности и существования непрерывных частных производных по всем аргументам x_1, x_2, ..., x_n. Чтобы перейти от симметричной системы

(9) к системе вида (1), надо назначить одно из переменных, например x_n, в качестве независимого. Систему перепишем в виде:

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1(x_1, x_2, ..., x_n)}{X_n(x_1, x_2, ..., x_n)}, \ \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}, ..., \ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n}. \quad (11)$$

При этом, чтобы не нарушалась непрерывность правых частей, необходимо при начальных значениях $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ иметь $X_n(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \neq 0$. Если же данные начальные значения обращают в нуль X_n, мы можем взять за независимое переменное такое x_i, чтобы соответствующая функция X_i не обращалась в нуль. Правые части системы вида (45′) могут оказаться разрывными при любом выборе независимого переменного лишь в том случае, если начальные значения x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 обращают в нуль все функции X_i: $X_1(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = X_2(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = ... = X_n(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = 0$. Такие начальные значения называются **особыми начальными значениями**; они соответствуют особым точкам системы (9). Очевидно, к особым начальным значениям неприменимо доказательство Пикара существования и единственности решения. Мы будем исключать особые точки из рассматриваемой области. Аналитическое условие того, чтобы каждый интеграл из числа интегралов (10) или вообще любое соотношение вида

$$\Psi(x_1, x_2, ..., x_n) = C \quad (12)$$

являлось первым интегралом системы, получается следующим образом. Вдоль интегральной кривой системы функция Ψ сохраняет постоянное значение; следовательно, ее полный дифференциал, взятый вдоль этой кривой, равен нулю:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n = 0.$$

Но вдоль интегральной кривой дифференциалы dx_i в силу уравнений (9) пропорциональны значениям функций X_i; следовательно, вдоль каждой интегральной кривой имеем:

$$X_1(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + ... + X_n\frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0. \qquad (13)$$

Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, мы заметим, что соотношение (13) выведено для значений x_1, x_2, ..., x_n, представляющих (переменную) точку некоторой интегральной кривой. Но так как это равенство справедливо для любого значения постоянного С в формуле (12), то равенство (13) выполняется для точек любой интегральной кривой. Отсюда следует (так как через каждую точку рассматриваемой области проходит интегральная кривая), что соотношение (13) для левой части первого интеграла выполняется тождественно и что, обратно, всякая функция Ψ, удовлетворяющая тождественно уравнению (13), дает первый интеграл, если ее приравнять произвольному постоянному. Геометрически решение системы (9), заданное общим интегралом (10), можно рассматривать как многообразие одного измерения («интегральная кривая»), определенное пересечением n — 1 многообразий n — 1 измерений $\Psi_i = C_i$ ($i = 1, 2, ..., n - 1$) («гиперповерхности n — 1 измерений» в n-мерном пространстве x_1, x_2, ..., x_n). Семейство интегральных кривых зависит от n — 1 параметров C_1, C_2, ..., C_{n-1} каждое семейство гиперповерхностей зависит от одного параметра.

2. Приведение системы уравнений к симметричной форме часто оказывается полезным для разыскания первых интегралов. Написав уравнения в дифференциальной форме (9), мы ищем такие комбинации членов равенств (9), линейные относительно дифференциалов, чтобы в левой части стоял полный дифференциал, а в правой — нуль. Интегрируя этот полный дифференциал, получаем первый интеграл. Если таким путем найдено n — 1 ин-

тегралов, мы получаем общий интеграл, эквивалентный общему решению; если найдено n — 2 интегралов, задача нахождения общего решения сводится к интегрированию дифференциального уравнения первого порядка.

4. Устойчивость по Ляпунову. Теорема об устойчивости по первому приближению

1. Мы будем рассматривать системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, x_2, ..., x_n), \tag{1}$$

где $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ предположим непрерывными ($i, j = 1, 2, ..., n$). Будем интерпретировать x_1, x_2,..., x_n как координаты движущейся точки, а t, $t_0 \leq t < \infty$ — как время. Каждое частное решение системы (1) будем называть движением. Рассмотрим движение, определенное начальными данными

$$t = t_0,\ x_i = x_i^0, \tag{2}$$

т. е. $x_i = x_i(t;\ t_0, x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ ($i = 1, 2, ..., n$).

Определение. Движение (2) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что как только, $\left|x_i^0 - \tilde{x}_i^0\right| < \delta$ $i = 1, ..., n$, то

$$\left| x_i(t; t_0, x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) - x_i\left(t; t_0, \tilde{x}_1^0, ..., \tilde{x}_n^0 \right) \right| < \varepsilon \tag{3}$$

($i = 1, ..., n$) для всех значений $t_0 \le t < +\infty$. Всякое движение, не являющееся устойчивым, называется неустойчивым; это означает, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что какое бы малое $\delta > 0$ ни было выбрано, всегда найдутся значения ($\tilde{x}_1^0$, $\tilde{x}_2^0$, ..., $\tilde{x}_n^0$) и $t = T$, что для некоторого i и этих T будет выполняться неравенство:

$$\left| x_i(T, t_0, x_1^0, ..., x_n^0) - x_i\left(T, t_0, \tilde{x}_1^0, ..., \tilde{x}_n^0\right) \right| \ge \varepsilon_0$$

несмотря на то, что $\left| x_k^0 - \tilde{x}_k^0 \right| < \delta$ ($k = 1, 2, ..., n$). Исследуемое движение, соответствующее начальным условиям t_0, x_1^0, ..., x_n^0, Ляпунов называет **невозмущенным**, а движение с измененными начальными условиями: t_0, $\tilde{x}_1^0$, ..., $\tilde{x}_n^0$ — **возмущенным движением**. Таким образом, устойчивость невозмущенного движения геометрически означает, что в любой данный момент времени t точка траектории возмущенного движения находится в достаточно малой окрестности соответствующей точки невозмущенного движения. Перейдем теперь к координатам $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ..., $\bar{x}_n$ по формулам:

$$x_i = \bar{x}_i + x_i(t) \ (i = 1, 2, ..., n). \tag{4}$$

где для краткости мы положили $x_i(t) = x_i(t, t_0, x_1^0, ..., x_n^0)$; тогда невозмущенное движение $x_i(t)$ перейдет в невозмущенное движение в новых координатах $\bar{x}_i(t) \equiv 0$ ($i = 1, 2, ..., n$), т. е. в так называемую точку покоя. Действительно, произведем замену переменных (4) в уравнениях (1). Имеем:

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} + \frac{d}{dt}(x_i(t)) = X_i(t; \bar{x}_1 + x_1(t), ..., \bar{x}_n + x_n(t)).$$

Разлагая правые части последних равенств в ряд Тейлора по $\bar{x}_i$ вплоть до членов первого порядка, получим:

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt}+\frac{d}{dt}(x_i(t))=X_i(t;x_i(t),...,x_n(t))+\sum_{m=1}^{n}\bar{x}_m\frac{\partial X_i}{\partial x_m}(t;x_i(t)+$$

$$+\theta_i\bar{x}_i,...,x_n(t)+\theta_i\bar{x}_n).$$

Так как $x_i(t)$ есть решение системы (1), то мы получаем:

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt}=\sum_{m=1}^{n}\bar{x}_m\frac{\partial X_i}{\partial x_m}(t;x_1(t)+\theta_i\bar{x}_1,...,x_n(t)+\theta_i\bar{x}_n).\ (5)$$

Было доказано, что коэффициенты при $\bar{x}_m$ в правой части равенства (5) являются непрерывными функциями. Этой системе с начальными условиями $\bar{x}_i^0=0$ ($i=1, 2, ..., n$) удовлетворяет решение $\bar{x}_i(t)\equiv 0$ ($i=1, 2, ..., n$), что и доказывает наше утверждение. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что преобразование уже совершилось, и будем рассматривать устойчивость по Ляпунову **тривиального решения**: $x_i(t)\equiv 0$ ($i=1, 2, ..., n$). Условия (3), определяющие устойчивость, означают теперь, что траектория возмущенного движения не выходит при $t_0\le t<+\infty$ из ε -окрестности точки покоя. В дальнейшем нас будут интересовать **качественные** критерии устойчивости по Ляпунову: и теоретически, и для практических приложений важны лишь те случаи, когда мы, не умея интегрировать систему (1), можем тем не менее делать заключения об устойчивости невозмущенного движения.

2. Предположим, что функции X_i допускают непрерывные производные первого порядка по x_i и что эти производные являются постоянными вдоль тривиального решения, т. е.

$$\frac{\partial X_i(t,0,0,...,0)}{\partial x_j}=a_{ij}=\mathrm{const}$$

($i, j = 1, 2, ..., n$). В сделанных предположениях функций X_i могут быть представлены в виде:

$$X_i(t; x_1, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \varphi_i(t; x_1, ..., x_n),$$

где φ_i — бесконечно малые порядка выше первого в окрестности точки $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Система (1) примет вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \varphi_i(t, x_1, ..., x_n) \ (i = 1, 2, ..., n). \tag{6}$$

Если в системе (6) отбросить члены порядка выше первого, то полученная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \ (i = 1, 2, ..., n), \tag{7}$$

называется **системой первого приближения** для нелинейной системы (6), а значит, при сделанных предположениях — и для системы (1). Можно рассматривать уравнения (7) и как систему уравнений в вариациях для системы (1) в окрестности ее тривиального решения.

3. Рассмотрим сначала случай, когда все корни характеристического уравнения первого приближения, т. е. системы (7), простые, или по крайней мере все элементарные делители матрицы коэффициентов системы (7) простые. Тогда существует не особое линейное преобразование:

$$y_y = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \ \ (i = 1, 2, ..., n), \tag{8}$$

приводящее систему (7) к диагональной форме. Применим теперь это преобразование к системе (6), тогда она примет вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1 + \varphi_1^*(t, y_1, y_2, ..., y_n),\\ \frac{dy_2}{dt} &= \lambda_2 y_2 + \varphi_2^*(t, y_1, y_2, ..., y_n),\\ \frac{dy_n}{dt} &= \lambda_n y_n + \varphi_n^*(t, y_1, y_2, ..., y_n)\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

где λ_1, λ_2, ..., λ_n — корни характеристического уравнения системы (8), а $\varphi_i^*(t, y_1, y_2, ..., y_n)$ определяется равенствами:

$$\varphi_i^*(t, y_1, y_2, ..., y_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\varphi_k(t, x_1, ..., x_n) \ (i = 1, 2, ..., n). \qquad (10)$$

Теорема. Если:

1) все корни характеристического уравнения первого приближения (7) отрицательны;

2) все функции $\varphi_i(t, y_1, y_2, ..., y_n)$ в системе (6) удовлетворяют условию:

$$|\varphi_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)| \le M\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{\frac{1}{2}+\alpha} \quad (\mathrm{i} = 1, 2, ..., \mathrm{n}), \qquad (11)$$

где M — некоторая постоянная, а $\alpha > 0$;

3) все корни характеристического уравнения первого приближения (7) простые или по крайней мере элементарные делители матрицы коэффициентов системы уравнений (7) простые, — то тривиальное решение системы уравнений (6) устойчиво.

Доказательство. Условие 3 теоремы позволяет при помощи не особого линейного преобразования привести систему (6) к виду (9). Покажем предварительно, что функции $\varphi_i^*(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ из системы (9) удовлетворяют условию (11). В самом деле, пусть α — верхняя грань модулей коэффициентов преобразования $|\alpha_{ik}| < \alpha$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Тогда, пользуясь равенством (10), получим:

$$\left|\varphi_i^*(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\varphi_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\right| \leq$$

$$\leq M\alpha \sum_{k=1}^{n} (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}+\alpha} \leq M_1(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}+\alpha} \qquad (12)$$

где $M_1 = M\alpha_n$. Но при всяком не особом преобразовании сумма квадратов старых переменных не превосходит суммы квадратов новых переменных, умноженных на некоторую постоянную. Разрешим равенства относительно переменных x_i:

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} y_k, \qquad (13)$$

и пусть β — верхняя грань $|\beta_{ik}|$, т. е. $|\beta_{ik}| \leq \beta$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), тогда

$$x_i^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} y_k\right)^2 \leq \left\{\sum_{k=1}^{n} |\beta_{ik}||y_k|\right\}^2 \leq \beta^2 \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |y_k||y_j| \leq$$

$$\leq \frac{\beta^2}{2} \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(y_k^2 + y_j^2\right) = n\beta^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

Здесь мы воспользовались известным неравенством:

$$|y_k||y_j| \le \frac{y_k^2 + y_j^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le L \sum_{k=1}^{n} y_k^2, \qquad (14)$$

где $L = n^2 \beta^2$. Отметим попутно, что

$$\sum_{k=1} y_k^2 = L_1 \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \qquad (15)$$

где $L_1 = n^2 \alpha^2$. Из неравенств (12) и (14) получаем требуемое неравенство:

$$\left|\varphi_i^*(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)\right| \le M^* \left\{\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right\}^{\frac{1}{2}+\alpha}, \qquad (16)$$

где $M^* = M_1 L^{\frac{1}{2}+\alpha}$. Теперь умножим первое уравнение системы (56) на y_1, второе — на y_2 и так далее и сложим их, тогда получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_i^*(t, y_1, \ldots, y_n). \qquad (17)$$

По условию все числа λ_i отрицательны; обозначим наибольшее из них через — ω и пусть

$$\lambda_n \le \lambda_{n-1} \le \ldots \le \lambda_i = -\omega; \; \omega > 0. \qquad (18)$$

Теперь оценим сверху выражение, стоящее справа в равенстве (17). В силу неравенств (16) и (18) получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le -\omega\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + M^*\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|\left\{\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right\}^{\frac{1}{2}+\alpha}$$

или, так как

$$\left|y_i\right| \le \left\{\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

то

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le -\omega\sum y_i^2 + nM^*\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1+\alpha}$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le \left(-\omega\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(1-\frac{nM^*}{\dot{u}}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\alpha}\right). \qquad (19)$$

Будем считать, что y_k настолько малы, что

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 < \left\{\frac{1}{2}\frac{\omega}{nM^*}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}. \qquad (20)$$

Такое предположение допустимо, потому что в начальный момент $t = t_0$ величины y_k можно предполагать как угодно малыми, в частности удовлетворяющими неравенству (20), а в силу непрерывной зависимости решений нашей системы от начальных условий неравенство (20) будет иметь место в некоторой окрестности значения $t = t_0$. Тогда неравенство (19) перепишется так:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} y_k^2(t) \le -\frac{\omega}{2}\sum_{k=1}^{n} y_k^2(t),$$

откуда, разделяя переменные и интегрируя от t_0 до t, получим:

$$\ln\left[\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} y_k^2(t)\right]_{t_0}^{t} - \omega\left(t - t_0\right)$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2(t) \le e^{-\omega\left(t-t_0\right)}\sum_{k=1}^{n} y_k^2(t_0). \tag{21}$$

Из неравенства (21) видно, что $\sum_{k=1}^{n} y_k^2(t)$ **монотонно** убывает и стремится к нулю при $t \to \infty$. Поэтому, если неравенство (20) выполнено в начальный момент t_0, то оно будет выполнено при всех значениях $t \ge t_0$. Следовательно, и неравенство (21) справедливо при всех $t > t_0$, если только при $t = t_0$ неравенство (20) имело место. Из неравенств (14) и (15) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2(t) \le LL_1 e^{-\omega\left(t-t_0\right)}\sum_{k=1}^{n} x_k^2(t_0), \tag{22}$$

поэтому, если $\left|x_k(t_0)\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{LL_1 n}}$ то $\left|x_k(t)\right| < \varepsilon$, а это и означает, что тривиальное решение системы (6) устойчиво. Отметим также, что, как видно из неравенства (22), все $x_k(t)$ стремятся к нулю при $t \to \infty$. Таким образом, теорема доказана.

4. **Теорема.** Если:

1) все корни характеристического уравнения первого приближения (7) отрицательны;

2) все функции $\varphi_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ в системе (6) удовлетворяют условию (11), то тривиальное решение системы (6) устойчиво.

Доказательство. Пусть система уравнений (6) приведена к виду:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1 + \gamma y_2 + \varphi_1(t, y_1, ..., y_n),\\
\frac{dy_2}{dt} &= \lambda_1 y_2 + \gamma y_3 + \varphi_2(t, y_1, ..., y_n),\\
\frac{dy_{e_1}}{dt} &= \lambda_1 y_{e_1} + \varphi_{e_1}(t, y_1, ..., y_n),\\
\frac{dy_{n-e_k+1}}{dt} &= \lambda_k y_{n-e_k+1} + \gamma y_{n-e_k+2} + \varphi_{n-e_k+1}(t, y_1, ..., y_2),\\
\frac{dy_n}{dt} &= \lambda_k y_n + \varphi_n(t, y_1, ..., y_n)
\end{aligned}\right\}. \qquad (23)$$

Поскольку функции $\varphi_i(t, y_1, ..., y_n)$ выражаются линейно с по мощью формул $_1(t, y_1, ..., y_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \; _k(t, x_1, ..., x_n)$ через $(t, x_1, ..., x_n)$, то оценка (16) имеет место и в этом случае, где $\alpha \geq |\alpha_{ik}|$. Пусть $\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq ... \leq \lambda_1 = -\omega$, где $\omega > 0$. Умножая первое уравнение системы (23) на y_1 второе — на y_2 и т. д. и складывая их и затем заменяя все λ_k через ω, мы получим неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq -\omega \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \gamma \sum_{i=1}^{n} \; y_i y_{i+1} + \sum_{i=1}^{n} y_i \; _i(t, y_1, ..., y_2), \qquad (24)$$

где штрих у знака средней суммы означает, что при суммировании выпускаются значения $i = e_1\; e_1 + e_2, ..., n - e_k, n$. Применяя неравенство

(16) для $\varphi_i^*(t, y_1 \ldots, y_n)$ и замечая, что $y_i y_{i+1} \le |y_i y_{i+1}| \le \dfrac{y_i^2 + y_{i+1}^2}{2}$,

мы, усиливая неравенство (24), получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le -\omega\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \gamma\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + M'\sum_{i=1}^{n} |y_i| \left\{\sum_{k=1}^{n} |y_k^2|\right\}^{\frac{1}{2}+\alpha}. \tag{25}$$

Выберем теперь положительное число γ так, чтобы $-\omega + \gamma$ было отрицательным, и положим: $-\omega + \gamma = -\omega_1$, где $\omega_1 > 0$. Последнее слагаемое в неравенстве (25) оцениваем так же, как это было сделано при получении неравенства (19), тогда:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le -\omega_1\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \left[1 - \frac{nM'}{\omega_1}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\alpha}\right]. \tag{26}$$

Неравенство (26) совершенно такое же, как и неравенство (19), только поэтому, поскольку из неравенства (19) следовала устойчивость тривиального решения системы (6), то и из неравенства (6) будет следовать устойчивость этого решения. Тем же методом, каким мы доказали первые две теоремы, можно доказать и следующую, их обобщающую теорему.

Содержание