Условный экстремум

Рассмотрим функцию $z = f(x,y)$, определенную на множестве $G \subset R^2$ при условии, что ее аргументы связаны соотношением

$$\varphi(x,y) = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) называется **условием связи**. Множество всех точек $M(x,y) \in G$, координаты которых удовлетворяют условию связи (1) обозначим через $D : D \subset G \subset R^2$.

Определение. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой условного экстремума функции $z = f(x,y)$ при выполнении условия связи (1), если она является точкой обычного экстремума этой функции, рассматриваемой только на множестве D.

Иначе говоря, условный экстремум – это экстремальное значение функции в точке M_0 по отношению не ко всем точкам из некоторой окрестности точки M_0, а только к тем из них, координаты которых связаны между собой условием связи (1).

Пример 1. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что аргументы этой функции удовлетворяют условию связи $\varphi(x,y) \equiv x + y - 1 = 0$. (Экстремум функции $z = x^2 + y^2$ ищется не на всей плоскости Oxy, а лишь на прямой $x + y - 1 = 0$).

Решение

Для решения поставленной задачи применим МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ.

Подставим в функцию $z = x^2 + y^2$ значение y, определяемое из условия связи $x + y - 1 = 0$. Таким образом мы сведем поставленную задачу к задаче об отыскании безусловного экстремума функции $z = 2x^2 - 2x + 1$. Получили функцию одной переменной. Как найти экстремум такой функции мы знаем. Поскольку $z' = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)$ и при переходе через стационарную точку $x = \frac{1}{2}$ производная меняет знак с минуса на плюс, то функция $z = 2x^2 - 2x + 1$ имеет минимум $z = \frac{1}{2}$ при $x = \frac{1}{2}$. Таким образом, функция $z = x^2 + y^2$ при условии связи $x + y - 1 = 0$ имеет условный минимум $z = \frac{1}{2}$ в точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Отметим, что безусловный минимум функции $z = x^2 + y^2$ достигается в точке (0,0) и равен $z = 0$ (что очевидно, если представить график функции $z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения).

МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Рассмотрим на множестве $G \subset R^2$ **функцию Лагранжа**

$$L(x, y, \lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y), \qquad (2)$$

где λ – неопределенный постоянный коэффициент.

Необходимое требование условного экстремума. Если точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой условного экстремума для функции $z = f(x,y)$ при выполнении условия связи (1), то она является стационарной точкой для дифференцируемой функции Лагранжа (2), то есть

$$\frac{\partial L}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial L}{\partial y}(M_0) = 0.$$

Отсюда следует, что для отыскания точек возможного условного экстремума функции $z = f(x,y)$ при условии связи (1) нужно решить систему трех уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

относительно трех неизвестных: x, y, λ .

__**Достаточное требование условного экстремума.**__ Пусть $N_0(x_0, y_0, \lambda_0)$ – решение системы (3). Тогда, если второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2L = d\left[\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy\right)\right] \qquad (4)$$

с учетом продифференцированного условия связи, то есть выражения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0, \qquad (5)$$

в точке $M_0(x_0, y_0) \in G$ есть отрицательно (положительно) определенная квадратичная форма, то в точке M_0 есть условный максимум (минимум). Если квадратичная форма в точке M_0 не является знакоопределенной, то в точке M_0 условного экстремума нет.

Итак, чтобы найти условный экстремум функции $z = f(x, y)$ при выполнении условия связи (1), нужно найти точки, подозрительные на условный экстремум, решив для этого систему (3). Затем в найденных точках исследовать второй дифференциал (4) функции Лагранжа, учитывая равенство (5).

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при условии $x + y = 2a \quad (a > 0)$.

Решение

Область $G = \{(x, y) : xy \neq 0\}$. Функция Лагранжа $L(x, y, \lambda) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \lambda(x + y - 2a)$. Стационарные точки находим из системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \lambda - \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \lambda - \dfrac{1}{y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 2a = 0 \end{cases} .$$

Решив ее, имеем $x_0 = y_0 = a, \quad \lambda_0 = \dfrac{1}{a^2}$. Итак, условный экстремум может быть только в точке $M_0(a, a) \in G$. Получаем

$L(x, y, \dfrac{1}{a^2}) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{a^2}(x + y - 2a)$. $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{2}{x^3}, \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{1}{y^2}\right) = \dfrac{2}{y^3}, \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$.

Второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2L = \frac{2}{x^3}dx^2 + \frac{2}{y^3}dy^2. \qquad (6)$$

Из уравнения связи $x+y=2a$ получаем $dx+dy=0$. Подставляя в (6) выражение $dx=-dy$ и координаты точки M_0, имеем: $d^2L=\frac{4}{a^3}dy^2>0$. Следовательно, в точке $M_0(a,a)$ имеем условный минимум.

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $z=x-y$ при условии $x^2+y^2=1$.

Решение

Функция Лагранжа $L(x,y,\lambda)=x-y+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$. Стационарные точки находим из системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=1+2\lambda x=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=-1+2\lambda y=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-1=0 \end{cases}.$$

Из первых двух уравнений системы находим: $x=-\frac{1}{2\lambda},\ y=\frac{1}{2\lambda}$. Подставляем в третье уравнение системы, получаем: $\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}-1=0$, или $\lambda^2=\frac{1}{2}$, откуда $\lambda_0^{(1)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lambda_0^{(2)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Получаем два решения системы: $N_0^{(1)}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $N_0^{(2)}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)=2\lambda,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)=2\lambda,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=0$. Находим $d^2L=2\lambda(dx^2+dy^2)$, а из условия связи $2xdx+2ydy=0$, поэтому $d^2L=2\lambda\frac{1}{x^2}dy^2$.

$d^2L\left(N_0^{(1)}\right)<0$ (поскольку $\lambda_0^{(1)}<0$), следовательно, $M_0^{(1)}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – точка условного максимума функции: $z_{\max}=\sqrt{2}$.

$d^2L\left(N_0^{(2)}\right)>0$ (поскольку $\lambda_0^{(1)}>0$), следовательно, $M_0^{(1)}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – точка условного минимума функции: $z_{\min}=-\sqrt{2}$.

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию $z=xy$ при условии $x^2+y^2=1$.

Решение

Функция Лагранжа $L(x,y,\lambda)=xy+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$. Точки, подозрительные на условный экстремум, находим из системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=y+2\lambda x=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=x+2\lambda y=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2\lambda x \\ x=-2\lambda y=4\lambda^2 x \\ x^2(1+4\lambda^2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda=-\frac{1}{2},\ y=x,\ x^2=\frac{1}{2} \\ \lambda=\frac{1}{2},\ y=-x,\ x^2=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda=-\frac{1}{2},\ x=y=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda=-\frac{1}{2},\ x=y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda=\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda=\frac{1}{2},\ x=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right..$$

Таким образом, условный экстремум может быть в точках $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ при $\lambda=-\frac{1}{2}$, $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $M_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ при $\lambda=\frac{1}{2}$.

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)=2\lambda,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)=2\lambda,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}=1$. Находим $d^2L=2\lambda(dx^2+dy^2)+2dxdy$, а из условия связи $2xdx+2ydy=0$, поэтому $d^2L=\left(2\lambda\frac{1}{x^2}-2\frac{y}{x}\right)dy^2$.

$d^2L(M_1)=d^2L(M_3)=-4dy^2<0$, следовательно, $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – точки условного максимума. $z_{\max}=\frac{1}{2}$.

$d^2L(M_2)=d^2L(M_4)=4dy^2>0$, следовательно, $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $M_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – точки условного минимума. $z_{\min}=-\frac{1}{2}$.

Пример 5. Исследовать на экстремум функцию $z=2x^2+12xy+y^2$ при условии $x^2+4y^2=25$.

Решение

Составим функцию Лагранжа $L(x,y,\lambda)=2x^2+12xy+y^2+\lambda\left(x^2+4y^2-25\right)$. Стационарные точки находим из системы:

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=4x+12y+2\lambda x=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=12x+2y+8\lambda y=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+4y^2-25=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+6y+\lambda x=0\\ 6x+y+4\lambda y=0\\ x^2+4y^2-25=0\end{cases}.$$

Из второго уравнения системы находим: $y=-\frac{6x}{1+4\lambda}$, подставляем в первое: $2x-\frac{36x}{1+4\lambda}+\lambda x=0$, или

$2x+8\lambda x-36x+\lambda x+4\lambda^2x=0\Leftrightarrow 4\lambda^2+9\lambda-34=0\Leftrightarrow \lambda_1=-\frac{17}{4},\ \lambda_2=2.$

1) $\lambda_1=-\frac{17}{4}$. $y=\frac{3}{8}x,\ x^2+\frac{9}{16}x^2=25,\ x^2=16;\ x=\pm4,\ y=\pm\frac{3}{2}$ $\boxed{\left(\pm4,\pm\frac{3}{2}\right)}$

2) $\lambda_2=2$. $y=-\frac{2}{3}x,\ x^2+\frac{16}{9}x^2=25,\ x^2=9;\ x=\pm3,\ y=\mp2$ $\boxed{\left(\pm3,\mp2\right)}$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)=4+2\lambda,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)=2+8\lambda,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}=12$

$L(x,y,-\frac{17}{4})=2x^2+12xy+y^2-\frac{17}{4}\left(x^2+4y^2-25\right)$. Из условия связи имеем $2xdx+8ydy=0$, или $dx=\frac{3}{2}dy$. $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=-\frac{9}{2},\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=-32,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}=12$.

Находим $d^2L = -\frac{9}{2}dx^2 + 24dxdy - 32dy^2 = -\frac{49}{8}dy^2 < 0$. Следовательно, $\left(\pm 4, \pm \frac{3}{2}\right)$ – точки условного максимума и $z_{\max} = \frac{425}{4}$.

$L(x, y, 2) = 2x^2 + 12xy + y^2 + 2\left(x^2 + 4y^2 - 25\right)$. Из условия связи имеем $2xdx + 8ydy = 0$, или $dx = \frac{3}{2}dy$.

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 8,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 18,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 12$.

Находим $d^2L = 8dx^2 + 24dxdy + 18dy^2 = 66dy^2 > 0$. Следовательно, $(\pm 3, \mp 2)$ – точки условного минимума и $z_{\min} = -50$.

Пример 6. Исследовать на экстремум функцию $u = \cos x + ye^z$ при условии $y + z - \cos x = 0$.

Решение

Область $G = R^3$. Функция Лагранжа $L(x, y, z, \lambda) = \cos x + ye^z + \lambda\left(y + z - \cos x\right)$. Стационарные точки находим из системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -\sin x + \lambda \sin x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = e^z + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = ye^z + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = y + z - \cos x = 0 \end{cases}.$$

Решая ее, получаем, что условный экстремум может быть лишь в точках с координатами $x = \pi n,\ y = 1,\ z = (-1)^n - 1$ при $\lambda = -e^{(-1)^n - 1}$, где n – любое целое число.

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = (\lambda - 1)\cos x,\ \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right) = ye^z, \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right) = e^z, \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0$.

Находим $d^2L = (\lambda - 1)\cos x dx^2 + ye^z dz^2 + 2e^z dydz$. Из уравнения связи имеем $dy + dz + \sin x dx = 0$.

В точках при четном n: $x = 2\pi m,\ y = 1,\ z = 0$ при $\lambda = -1$ имеем

$d^2L = -2dx^2 + dz^2 + 2dydz,\ dy + dz = 0$, отсюда $d^2L = -2dx^2 - dz^2 < 0$. Следовательно, в точках $(2\pi m, 1, 0)$ имеем условный максимум.

В точках при нечетном n: $x = (2m+1)\pi,\ y = 1,\ z = -2$ при $\lambda = -e^{-2}$ имеем

$d^2L = (e^{-2} + 1)dx^2 + e^{-2}dz^2 + 2e^{-2}dydz,\ dy + dz = 0$; $d^2L = (e^{-2} + 1)dx^2 - e^{-2}dz^2$. Отсюда ясно, что d^2L не является знакопостоянным. Следовательно, в точках $((2m+1)\pi, 1, -2)$ условного экстремума нет.

Пример 7. Исследовать на экстремум функцию $u = xyz$ при условиях $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0$.

Решение

Составим функцию Лагранжа $L(x, y, z, \lambda, \mu) = xyz + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right) + \mu(x + y + z)$. Стационарные точки находим из системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = yz + 2\lambda x + \mu = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = xz + 2\lambda y + \mu = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = xy + 2\lambda z + \mu = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu} = x + y + z = 0 \end{cases}.$$

Решив эту систему, получим шесть точек, в которых может быть экстремум:

$M_1\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \lambda = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \mu = \frac{1}{6};$

$M_2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \lambda = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \mu = \frac{1}{6};$

$M_3\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \lambda = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \mu = \frac{1}{6};$

$M_4\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{6}}, \mu = \frac{1}{6};$

$M_5\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{6}}, \mu = \frac{1}{6};$

$M_6\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{6}}, \mu = \frac{1}{6}.$

Составим второй дифференциал для функции Лагранжа

$d^2L = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2(zdxdy + ydxdz + xdydz)$.

Из условий связи находим

$$\begin{cases} xdx + ydy + zdz = 0, \\ dx + dy + dz = 0. \end{cases}$$

$d^2L(M_1) = \sqrt{6}dx^2 > 0$, $d^2L(M_2) = \sqrt{6}dx^2 > 0$, $d^2L(M_3) = \sqrt{6}dz^2 > 0$, $d^2L(M_4) = -\sqrt{6}dx^2 < 0$, $d^2L(M_5) = -\sqrt{6}dx^2 < 0$, $d^2L(M_6) = -\sqrt{6}dz^2 < 0$.

Следовательно, в точках M_1, M_2, M_3 имеем условный минимум, в точках M_4, M_5, M_6 – условный максимум.

Д/з 3654, 3656, 3659, 3661, 3663 (б).