Производная по направлению. Градиент

Если направление $\vec{l}$ в пространстве $Oxyz$ характеризуется направляющими косинусами: $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ и функция $u = u(x, y, z)$ дифференцируема, то производная по направлению $\vec{l}$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma .$$

Производная $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$ по направлению $\vec{l}$ в точке M_0 является скоростью изменения функции $u = u(x, y, z)$ по направлению $\vec{l}$ в точке M_0.

Градиентом функции $u = u(x, y, z)$ называется вектор

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} ,$$

модуль которого равен

$$|grad\ u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} .$$

Вектор $grad\,u$ в данной точке указывает направление наибольшего роста функции $u = u(x, y, z)$ в этой точке, а $|grad\ u|$ есть скорость роста функции в этом направлении.

№3341. Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке $M(1,1)$ в направлении $\vec{l}$, составляющим угол $\alpha = 60^0$ с положительным направлением оси Ox.

Решение

Если $\alpha = 60^0$, то $\beta = 90^0 - 60^0 = 30^0$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = 2x\frac{1}{2} - 2y\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$$

№3344. Найти производную функции $z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ в точке $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ по направлению внутренней нормали в этой точке к кривой $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$**.**

Решение

Чтобы найти направление внутренней нормали к эллипсу в данной точке, запишем уравнение касательной к эллипсу, пронормируем его и получим косинусы углов нормали с осями координат:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,\quad \frac{xa}{\sqrt{2}a^2} + \frac{yb}{\sqrt{2}b^2} = 1,\quad bx + ay = \sqrt{2}ab ,$$

$\lambda = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ – нормирующий множитель,

$\cos(n, x) = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos(n, y) = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ($\vec{n}$ – вектор внутренней нормали). Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial z}{\partial y}\cos(n, y) = -\frac{2x_0}{a^2}\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) - \frac{2y_0}{b^2}\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) =$$

$$= \frac{2ab}{\sqrt{2}a^2\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{2ab}{\sqrt{2}b^2\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{2}b}{a\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{\sqrt{2}a}{b\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{ab}.$$

Пример 3. Найти и нарисовать линии уровня функции $z = xy$. Вычислить и изобразить на чертеже градиент этой функции в точках (1,1) и (1,-1).

Решение

Линии уровня функции $z = xy$ задаются уравнением $xy = c, c = const$, то есть представляют собой семейство гипербол $y = \frac{c}{x}$ и две прямые $x = 0$ и $y = 0$. По определению:

$$grad\ z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} = y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$$

$$grad\ z(1{,}1) = \vec{i} + \vec{j}, \quad grad\ z(1{,}-1) = -\vec{i} + \vec{j}.$$

Чертеж сделать самостоятельно (построить линии уровня и градиенты в указанных точках). Из рисунка будет видно, что в указанных точках $grad\,z$ перпендикулярен линиям уровня, проходящим через эти точки. В точке (1,1) функция $z = xy$ быстрее всего возрастает в направлении градиента – от начала координат по биссектрисе первого квадранта – и скорость ее возрастания в этом направлении равна

$$\frac{\partial z}{\partial l_1}(1{,}1) = \left|grad\ z(1{,}1)\right| = \sqrt{2}.$$

В точке (1,-1) функция $z = xy$ быстрее всего возрастает в направлении начала координат по биссектрисе четвертого квадранта, и скорость ее возрастания в этом направлении равна

$$\frac{\partial z}{\partial l_2}(1{,}-1) = \left|grad\ z(1{,}-1)\right| = \sqrt{2}.$$

№3346. Найти модуль и направление градиента функции $u = \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, в точке $M(x, y, z)$.

Решение

Заметим, что функция $r(x, y, z)$ выражает длину радиус-вектора $\vec{r} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$. Найдём частные производные от композиции функций $u = u(r(x, y, z))$ (функция u зависит от одной переменной r, которая является функцией трёх переменных x, y, z):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{x}{r^3};$$

по аналогии

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{du}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$$

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = = -\frac{1}{r^3}\left(x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}\right) = \frac{\vec{r}}{r^3},$$

$$\left|grad\ u\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = \frac{1}{r^3}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Направляющие косинусы совпадают с координатами единичного вектора, поэтому направляющие косинусы $grad\ u$ определяются формулами:

$$\cos\ \alpha = \frac{u'_x}{|grad\,u|} = -\frac{x}{r^3}r^2 = -\frac{x}{r},$$

$$\cos\ \beta = \frac{u'_y}{|grad\,u|} = -\frac{y}{r^3}r^2 = -\frac{y}{r},$$

$$\cos\ \gamma = \frac{u'_z}{|grad\,u|} = -\frac{z}{r^3}r^2 = -\frac{z}{r}.$$

Д/з 3342, 3347, 3349

Геометрические приложения

Если гладкая поверхность задана уравнением $z = f(x,y)$, то уравнения касательной плоскости и нормали в точке (x_0, y_0, z_0) поверхности имеют вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Если гладкая поверхность задана неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$, то уравнения касательной плоскости и нормали в точке (x_0, y_0, z_0) поверхности имеют вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Пример 1. Написать уравнения касательной плоскости и нормали в точке $N_0(1;1;2)$ к поверхности $z = x^2 + y^2$.

Решение

$M_0(1;1)$ – точка на плоскости Oxy.

Находим $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$. $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 2$.

Получаем искомые уравнения касательной плоскости:

$$z - 2 = 2(x-1) + 2(y-1) \Leftrightarrow \boxed{2x + 2y - z - 2 = 0}$$

и нормали:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

Пример 2. Написать уравнения тех касательных плоскостей к поверхности $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, которые параллельны плоскости $x - y + 2z = 0$.

Решение

Поверхность задана неявно уравнением $F(x,y,z) \equiv x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0$. Запишем уравнение касательной плоскости к данной поверхности в произвольной точке (x_0, y_0, z_0):

$$2x_0(x - x_0) + 4y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0x - 2x_0^2 + 4y_0y - 4y_0^2 + 2z_0z - 2z_0^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0x + 2y_0y + z_0z - (x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2) = 0.$$

Учитывая, что точка (x_0, y_0, z_0) принадлежит поверхности, то есть: $x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 1$, получаем уравнение касательной плоскости в следующем виде:

$$x_0x + 2y_0y + z_0z - 1 = 0.$$

Необходимое и достаточное условие параллельности двух плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Условие параллельности плоскостей $x_0x + 2y_0y + z_0z - 1 = 0$ и $x - y + 2z = 0$:

$$\frac{x_0}{1} = \frac{2y_0}{-1} = \frac{z_0}{2} = t \Leftrightarrow x_0 = t,\ y_0 = -\frac{t}{2},\ z_0 = 2t.$$

Находим t, подставляя $x_0 = t,\ y_0 = -\frac{t}{2},\ z_0 = 2t$ в $x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 1$: $t^2 + 2\cdot\frac{t^2}{4} + 4t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{\frac{2}{11}}$.

Получаем $(x_0, y_0, z_0) = \left(\pm\sqrt{\frac{2}{11}}, \mp\frac{1}{\sqrt{22}}, \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right)$.

Искомые уравнения касательных плоскостей:

$$\pm\sqrt{\frac{2}{11}}x \mp 2\cdot\frac{1}{\sqrt{22}}y \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}z = 1 \Leftrightarrow \boxed{2x - 2y + 4z = \pm\sqrt{22}}$$

Пример 3 (№3552). Доказать, что касательные плоскости к поверхности $xyz = a^3$ ($a > 0$) образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема.

Решение

Взяв на поверхности произвольную точку (x_0, y_0, z_0): $x_0 y_0 z_0 = a^3$, запишем уравнение касательной плоскости к поверхности в этой точке:

$$y_0 z_0 (x - x_0) + x_0 z_0 (y - y_0) + x_0 y_0 (z - z_0) = 0 \Leftrightarrow y_0 z_0 x + x_0 z_0 y + x_0 y_0 z = 3a^3.$$

Объем тетраэдра, составленного этой плоскостью с плоскостями координат, будет равен

$$V = \frac{1}{6}\cdot b\cdot c\cdot d\ ,$$

где b, c, d – отрезки, отсекаемые касательной плоскостью на осях координат. В нашем случае они равны $b = \dfrac{3a^3}{y_0 z_0}, c = \dfrac{3a^3}{x_0 z_0}, d = \dfrac{3a^3}{x_0 y_0}$. Следовательно, объем равен

$$V = \frac{1}{6}\cdot\frac{27a^9}{x_0^2 y_0^2 z_0^2} = \frac{27}{6}\cdot\frac{a^9}{a^6} = \frac{9}{2}a^3.$$

Пример 4 (№3556). Найти проекции эллипсоида $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1$ на координатные плоскости.

Решение

Если к эллипсоиду провести множество касательных плоскостей, параллельных оси Ox, то они образуют цилиндр, проектирующий эллипсоид на плоскость Oyz. Пересечение цилиндра с этой плоскостью и будет проекцией эллипсоида на указанную плоскость. Составим уравнение такой плоскости в некоторой точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности. Получим

$$(2x_0 - y_0)(x - x_0) + (2y_0 - x_0)(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0.$$

Ввиду параллельности плоскости оси Ox, коэффициент при координате x должен быть равен нулю: $2x_0 - y_0 = 0$. Но координаты точки N_0 удовлетворяют уравнению: $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - x_0 y_0 = 1$. Выразим из $2x_0 - y_0 = 0$ x_0 : $x_0 = \dfrac{y_0}{2}$ и подставим в уравнение $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - x_0 y_0 = 1$, тогда получим

$$\frac{y_0^2}{4} + y_0^2 + z_0^2 - \frac{y_0^2}{2} = 1 \Leftrightarrow 3y_0^2 + 4z_0^2 = 4.$$

Таким образом, получаем проекцию эллипсоида на плоскость Oyz: $3y^2 + 4z^2 = 4,\ x = 0$.
Аналогичным образом находятся проекции эллипсоида на другие координатные плоскости.

Д/з 3540, 3541, 3553, 3561, 3563