Колебательные системы и процессы.

Колебательный процесс – повторяющийся процесс.

Колебательные системы – системы, совершающие колебательный процесс.

Классификация:

1)По кинематическому признаку:

а)Периодические – процессы при которых колебл. величина, взятая в любой момент времени t через определённый промежуток времени T (период) принимает то же значение: f(t+T)=f(t),

а1)Гармонические – процессы, при кот. колеб. физич. величина изм. по гармоническому закону (синуса или косинуса).

а2)Все прочие…(напр. пилообразные)

б)Непериодические – не соответствуют условию f(t+T)=f(t).

б1)Затухающие.

б2)Нарастающие.

б3)Лимитационные процессы (процессы, при кот. колеб. не происходит).

2)По сложности колеб. ситем:

а)Колеб. системы с 1-й степ. свободы.

б)Колеб. системы с 2-мя и более степ. свободы.

(В электрич. системах – 1 степ. своб., в термодинамике – 2, в мех-ке тв. тела – 6)

3)По виду колебательного явления:

а)Собственные колебания – колебания, происх. в изолир. системе (когда действия внеш. сил скомпенсир.) после внешнего воздействия. Характер колебательного процесса опред. только внутренними силами системы, а необходимая энергия добавл. из вне в момент возбуждения колебания.

а1)Собственные затухающие колебания.

а2)Собственные незатухающие колебания (гармонические).

б)Вынужденные колебания – колебания, происх. под действием внеш. периодической силы, кот. действует независимо от колебаний системы. Характер колеб. процесса определяется как свойствами системы, так и хар-ками внеш. силы. Энергия добавляется в систему внеш. источником, параметры системы при этом остаются неизменными.

в)Параметрические колебания – это колебания, происх. под действием внеш. силы при периодическом изменении какого либо из параметров системы. (напр. Качели – проис. периодическое изменение центра масс, а ⇒ и приведённой длины физ. маятника).

г)Автоколебания – колеб. процесс, происх. с системой в отсутствии внеш. периодич. воздействий. Характер колебания опр. только параметрами системы, а необх. энергия добавляется источником, вход. в систему. (напр. часы).

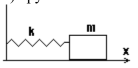
4)По виду движения:

а)Линейные – системы, движ. кот. описывается линейными ДУ (ур-я в кот. сама физ. величина и её производные входят только в 1-й степени).

б)Нелинейные – все остальные.

Примеры линейных колеб. систем с 1-й степ. свободы:

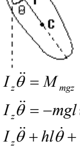
1)Пружинный маятник.



$$ma_x = F_{упр.x} + F_{тр.x} + F_{внеш.}(t)$$
$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + F_{внеш.}(t)$$
$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F_{внеш.}(t)$$
$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_{внеш.}(t)}{m}$$

линейное неоднородное ДУ.

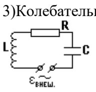
2)Физический маятник.



$$I_z\ddot{\theta} = M_{mgz} + M_{тр.z} + M_{внеш.z}(t)$$
$$I_z\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta - hl\dot{\theta} + M_{внеш.z}(t)$$
$$I_z\ddot{\theta} + hl\dot{\theta} + mgl\sin\theta = M_{внеш.z}(t)$$
$$Если\ \theta - мало,\ то\ \sin\theta \approx \theta$$
$$I_z\ddot{\theta} + hl\dot{\theta} + mgl\theta = M_{внеш.z}(t)$$
$$\ddot{\theta} + \frac{hl}{I_z}\dot{\theta} + \frac{mgl}{I_z}\theta = \frac{M_{внеш.z}(t)}{I_z}$$

линейное неоднородное ДУ.

3)Колебательный контур.



$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = \varepsilon_{внеш.}(t)$$
$$U_R(t) + \frac{q(t)}{C} + L\dot{I} = \varepsilon_{внеш.}(t)$$
$$IR_L = U_L + \varepsilon_{инд.} \Rightarrow при\ R_L \to 0$$
$$(идеальная\ катушка)$$
$$U_L = -\varepsilon_{инд.} = \frac{d\Phi}{dt} = L\dot{I} = L\ddot{q}$$
$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \varepsilon_{внеш.}(t)$$
$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{\varepsilon_{внеш.}(t)}{L}$$

Пусть S – обобщ. коорд., тогда ур-я можно записать:

$$\ddot{S} + 2\delta\dot{S} + \omega_0^2 S = f_{внеш.}(t)$$
$$обобщ.\ ур-е\ колебаний$$
$$\omega_0 - собств.\ цикл.\ частота\ колеб.$$
$$2\delta - коэф.\ затухания$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} - период\ колебаний.$$

Пар-ры	Пруж. маят.	Физ. маят.	Кол. конт.	Хар-ет:
Частота ω_0^2	$\frac{k}{m}$	$\frac{mgl}{I}$	$\frac{1}{LC}$	Упр. силу.
2δ	$\frac{h}{m}$	$\frac{hl}{I}$	$\frac{R}{L}$	Энерг. потери
$f_{внеш.}(t)$	$\frac{F_{внеш.}(t)}{m}$	$\frac{M_{внеш.}(t)}{I}$	$\frac{\varepsilon_{внеш.}(t)}{L}$	Внеш. возд.
	m	I	L	Мера инерт.

Свободные гармонические колебания линейного осциллятора с 1-й степенью свободы.

f(t)=0 и δ=0, тогда:

$$\ddot{\delta} + \omega^2\delta = 0$$
$$\delta = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$A - амплитуда(\max\ откл.\ от\ полож.\ равн.)$$
$$\omega_0 - частота\left({}^{рад}\!/_{c}\right)$$
$$\nu = \frac{1}{T};\ \nu = \frac{\omega_0}{2\pi};\ [\nu] = \frac{1}{c} = Гц$$

ω_0 – циклич. частота, пропорциональна числу колебаний, происх. в течении 2π единиц времени.

ν – частота – число полных колебаний в единицу времени.

$\omega_0 t+\varphi_0$ – фаза колебаний – задаёт состояние системы в любой момент времени.

φ_0 – начальная фаза колебаний – задаёт момент начала отсчёта времени.

Пусть $\varphi_0 = \omega_0 t$, тогда $S = A\cos(\omega_0(t + t_0))$.

Чтобы однозначно определить A и φ_0 нужно задать начальные условия.

Например:

1)

$$\begin{cases} S(0) = A_0 \\ \dot{S}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = A\cos\varphi_0 \\ 0 = -A\omega_0\sin\varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = A \\ \varphi_0 = 0 \end{cases}$$
$$S = A_0\cos\omega t$$

2)

$$\begin{cases} S(0) = 0 \\ \dot{S}(0) = \upsilon_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = A\cos\varphi_0 \\ \upsilon_0 = -A\omega_0\sin\varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \\ A = -\frac{\upsilon_0}{\omega_0} \end{cases}$$
$$S = -\frac{\upsilon_0}{\omega_0}\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\upsilon_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

Замечание:

1)Одно и то же значение начальной фазы может соответствовать разным началам отсчёта, но отстоящим друг от друга на целое число периодов.

2)При фиксированном начале отсчёта времени фаза неопределенна однозначно, а лишь с точностью до целого, кратного 2π.

$$\varphi_1 = \omega_0 t + \varphi_0$$
$$t_2 = t_1 + T$$
$$\varphi_2 = \omega_0 t_2 + \varphi_0$$
$$t_N = t_1 + NT$$
$$\varphi_N = \omega_0 t_N + \varphi_0 = (\omega_0 t_1 + \varphi_0) + \omega_0 NT =$$
$$= \varphi_1 + \frac{2\pi}{T}NT = \varphi_1 + 2\pi N$$

3)Об энергии гармонических колебаний. На примере пруж. маятника:

$$E = const = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\bigg|\frac{d}{dt}$$
$$0 = \frac{m}{2}2\dot{x}\cdot\ddot{x} + \frac{k}{2}2x\cdot\dot{x}$$
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$
$$W_{пот.} = \frac{k}{2}A^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$W_{кин.} = \frac{m\omega_0^2}{2}A^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$
$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$E = \frac{A^2}{2}\left(k\cos^2\varphi + m\omega_0^2\sin^2\varphi\right) =$$
$$= \frac{A^2}{2}\left(k\cos^2\varphi + m\cdot\frac{k}{m}\sin^2\varphi\right) = \frac{A^2 k}{2}$$

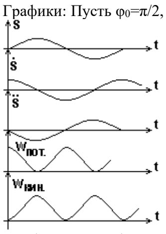
Кинетическая энергия запаздывает на половину периода относительно потенциальной энергии.

4)Собственная частота – это отношение коэффициента при x^2 к коэф. при $\dot{x}^2$

Например: Колебательный контур.

$$E = \frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C}$$
$$\omega_0 = \frac{{}^1\!/_{2C}}{{}^L\!/_2} = \frac{1}{LC}$$
$$W_C = \frac{1}{2C}A^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$W_L = \frac{L}{2}A^2\omega_0^2\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$E = \frac{A^2}{2C}$$

Графики: Пусть $\varphi_0=\pi/2$, тогда:



Свободные колебания линейного осциллятора с 1-й степенью свободы (затух. осциллятор).

$$\ddot{S} + 2\delta\dot{S} + \omega_0^2 S = 0$$
$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$
$$\lambda = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$
$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$
$$S = A_1 e^{-\delta t}e^{i\omega_s t} + A_2 e^{-\delta t}e^{-i\omega_s t}$$
$$A_1 = A_2^* - компл.\ сопряж.$$
$$A_1 = \frac{A}{2}e^{i\varphi_0};\ A_2 = \frac{A}{2}e^{-i\varphi_0}$$
$$S = \frac{A}{2}\left(e^{-\delta t}e^{i\omega_s t + i\varphi_0} + e^{-\delta t}e^{-(i\omega_s t + \varphi_0)}\right)$$
$$S = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_s t + \varphi_0) = A_s\cos(\omega_s t + \varphi_0)$$
$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

ω_s зависит только от пар-в системы

$\omega_s \neq f(t) \Rightarrow$ расстояние между макси-мумами одинаково – ЭКВИДИСТАНТНЫЕ колебания.

Характеристики:

1)δ – *коэф. затухания.*

$$[\delta] = \frac{1}{c}$$

2)$\tau = \frac{1}{\delta}$ – *время релаксации*

Время, в теч. кот. амплитуда уменьш. в e раз.

$$A_s(\tau) = Ae^{-\delta\tau} = \frac{A}{e}$$

3)*Логарифмический декремент затухания*

$$A_{n+1} = A_n e^{-\delta T} = A_n e^{-d}$$
$$d = -T\delta = \ln\frac{A_n}{A_{n+1}}$$

Физический смысл d:

1)Отношение амплитуд двух соседних максимумов ⇒ можно ввести понятие медленных и быстрых колебаний.

$$\Delta A = A_{n+1} - A_n = A_n\left(1 - e^{-d}\right)$$
$$\Delta A \to 0\ при\ d \to 0$$
$$\Delta A \approx A_n(1 - 1 + d) \approx A_n d$$

2)$d \approx \frac{\Delta A}{A_n}$

для медленных колебаний d приближ. равно относит. измен. амплитуды за один период.

3)

$$W_{n+1} \sim A_{n+1}^2;\ W_n \sim A_n^2$$
$$\Delta W = W_{n+1} - W_n = A_{n+1}^2 - A_n^2 =$$
$$= A_n^2\left(1 - e^{-2\delta T}\right) \approx 2dA_n^2$$
$$\Delta W = 2A_n^2 d$$
$$d \approx \frac{\Delta W}{2A_n^2}$$

Половина изменение относительной энергии за один период.

4)Число колебаний за которые амплитуда колебаний уменьшается в e раз:

$$N = \frac{\tau}{T_s} = \frac{1}{d}$$

5)Добротность:

$$Q = \frac{\pi}{d} = \frac{\pi\tau}{T_s}$$

Чем больше Q, тем затухание меньше.

Пример:

d<<1, $\delta \to 0$, $\omega_s \approx \omega_0$

$Q \approx \frac{\pi\omega_s}{2\pi\delta} = \frac{\omega_s}{2\delta}$ – оценка добротности.

Для обычного колеб. контура: $Q = \frac{\sqrt{LC}}{RC}$

прибор	Q
радиосхемы	~10
СВЧ	10^3–10^4
Квантовые источники колебаний	10^5–10^6

$\delta >> \omega_0$

$$\lambda = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$
$$S(t) = e^{-\delta t}\left(A_1 e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\,t} + A_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\,t}\right)$$

Лимитационное движение (может и не быть движение вообще).

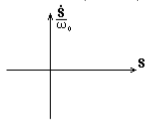
Изображение колебаний на фазовой плоскости.

$$\ddot{S} + 2\delta\dot{S} + \omega_0^2 S = 0$$
$$\begin{cases} \dot{S} = \upsilon = \frac{dS}{dt} \\ \ddot{S} = a = \frac{d\upsilon}{dt} = -\left(2\delta\dot{S} + \omega_0^2 S\right) = -\left(2\delta\upsilon + \omega_0^2 S\right) \end{cases}$$

Делим:

$$\frac{d\upsilon}{dS} = -\frac{2\delta\upsilon + \omega_0^2 S}{\upsilon}$$

Решение $\upsilon(S, const)$

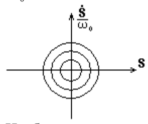


– фазовая плоскость.

Примеры:

1)гармонический осциллятор.

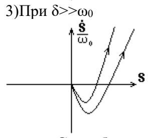
$$\frac{d\upsilon}{dS} = -\frac{\omega_0^2 S}{\upsilon}$$
$$\frac{\upsilon^2}{2} = -\omega_0^2 S^2 + const$$
$$\upsilon^2 + \omega_0^2 S^2 = const\,\Big|:\omega_0^2$$
$$\frac{\upsilon^2}{\omega_0^2} + S^2 = const$$



Изображающая точка – точка, кот. соответствует рассматриваемому колебанию. Для нахождения const задаются начальные условия: S(0)=A и υ(0)=0 ⇒ const=A^2. Если S(0)=0, υ(0)=0 ⇒ const=0 и точка (0,0) – особая точка фазовой траектории – отсутствие колебаний.

2)Затухающий осциллятор.

3)При $\delta >> \omega_0$

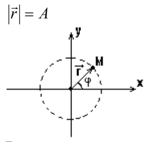


Способы записи колебаний.

1)С помощью гармонической функции: $S=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$,

2)Любое колебание можно записать, используя метод векторных диаграмм.

$$S \sim \vec{r}$$
$$\begin{cases} x = A\cos\varphi(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ y = A\sin\varphi(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \end{cases}$$
$$|\vec{r}| = A$$



Векторные диаграммы используют для расчета неразветвлённых цепей и расчета колеб. систем, фаза кот. изменяется по известному закону.

3)Метод комплексных амплитуд (МКА).

$S \sim \tilde{z} = x + iy$

$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

$y = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

$\mathrm{Re}(\tilde{z}) = S$

$\tilde{z} = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + iA\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$\tilde{z} = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}$

$S = \mathrm{Re}\left(Ae^{i(\omega_0 t + \varphi 0)}\right)$

$\hat{S} = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi 0)}$ – *компл. колеб. ф-я*

т.е $S \sim \hat{S}$, *где* $S = \mathrm{Re}\,\hat{S}$

$\hat{S} = Ae^{i\varphi_0}e^{i\omega t} = \hat{A}e^{i\omega t}$

$\hat{A}$ – *комплексн. амплитуда*

$\hat{S} = \hat{A}e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} = Ae^{i\varphi}$

1) $|\hat{A}| = A$

2) $\arg\hat{A} = \varphi_0$

3) $\arg\hat{S} = \varphi$

Если $\omega = \omega_{\mathrm{Re}} + i\omega_{\mathrm{Im}}$

$\hat{S} = Ae^{i\varphi_0}e^{i(\omega_{\mathrm{Re}} + i\omega_{\mathrm{Im}})t} = Ae^{i\varphi_0}e^{i\omega_{\mathrm{Re}}t}e^{-\omega_{\mathrm{Im}}t} = Ae^{i(\omega_{\mathrm{Re}}t + \varphi_0)}e^{-\omega_{\mathrm{Im}}t}$

Если $\omega_{\mathrm{Im}} > 0$, *то запух. колебания*

$\omega_{\mathrm{Im}} = \delta$

Если $\omega_{\mathrm{Im}} < 0$, *то нарастающие*

Если частота – комплексная, то наличие положительной мнимой части означает наличие затухание.

Ограничение:

Данный метод можно использовать если производятся линейные операции над колебаниями: «+», «–»,

Пример неприменимости:

Если $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, то $S^2 \neq x^2$

Вынужденные колебания под действием гармонической силы.

$\ddot{S} + 2\delta\dot{S} + \omega_0^2 S = f(t)$

$f(t) = F_0\cos\omega t$

ω_0 – *гармонич. частота,*

ω – *частота вынужд. колеб.*

ω_s – *частота затухающего осц.*

$S_{общ.} = (A_1\cos\omega_s t + A_2\sin\omega_s t)e^{-\delta t}$

опис. собств. затух. колебания

A_1, A_2 *нах. из нач. условий.*

Пусть τ – время установления – время, за кот. затухают собств. колебания

При t >> τ частное реш-е ищем в виде:

$\hat{S}_{ч.р.} = \hat{S}_0 e^{i\omega t}$

$\ddot{S} + 2\delta\dot{S} + \omega_0^2 S = \hat{F}_0 e^{i\omega t}$

$-\hat{S}_0\omega^2 e^{i\omega t} + 2\delta i\omega\hat{S}_0 e^{i\omega t} + \omega_0^2\hat{S}_0 e^{i\omega t} = \hat{F}_0 e^{i\omega t}$

$$\hat{S}_0 = \frac{\hat{F}_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega i}$$

$$S_{0\,\mathrm{Re}} = \frac{F_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$$

$$S_{0\,\mathrm{Im}} = -\frac{F_0 2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$$

$$tg\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$S(t) = e^{-\delta t}(A_1\cos\omega_s t + A_2\sin\omega_s t) + \frac{\hat{F}_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega i}e^{i\omega t}$$

Анализируем частное решение при t>>τ. Амплитуда вынужденных колебаний является функцией частоты.

Резонансные кривые.

Рассмотрим частные случаи:

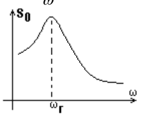
1)ω→0. Если F_0=const, то f=const

$$\hat{S}_0 = \frac{\hat{F}_0}{\omega_0}$$

2)частота ω_0 возрастает ⇒ амплитуда уменьшается.

3)$\omega_0 \to +\infty$

$$\hat{S}_0 \to \frac{\hat{F}_0}{\omega^2}$$



ω_r – резонансная частота – частота, соотв. максимуму амплитуды вынужд. колебания.

Как по отношению к ω_r располож. ω_s и ω_0.

$$\hat{S}_0 = \frac{\hat{F}_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega i}$$

$$\hat{S}_{\mathrm{Re}} = F_0\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$$

$$|\hat{S}_0| = S_0 = F_0\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

φ – разность фаз между F и S.

$$tg\varphi = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Рассмотрим предельные случаи:

1)

$\omega \to 0 \Rightarrow S_0 = \frac{F_0}{\omega_0^2}$

Колебания возбуждаются под действием статической внешней силы.

$$S_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial\omega} = -\frac{1}{2}\frac{F_0(-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\delta^2\omega)}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right)^{3/2}} = \frac{F_0(2\omega(\omega_0^2 - \omega^2) - 4\delta^2\omega)}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial\omega}(0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 S_0}{\partial\omega^2} = -\frac{3}{2}F_0\frac{(2\omega(\omega_0^2 - \omega^2) - 4\delta^2\omega)^2}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right)^{5/2}} + \frac{F_0(2\omega_0^2 - 6\omega^2 - 4\delta^2)}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 S_0}{\partial\omega^2}(0) = \frac{F_0(2\omega_0^2 - 4\delta^2)}{\omega_0^6} = A$$

$$S_0(\omega) \approx \frac{F_0}{\omega_0^2} + A\omega^2$$

2)

$\omega \to +\infty$

$\omega >> \omega_0$

$$S_0 \approx \frac{F_0}{\sqrt{\omega^4 + 4\delta^2\omega^2}} \approx \frac{F_0}{\omega^2} \to 0$$

Найдём экстремум:

$$\frac{dS_0}{d\omega} = -\frac{1}{2}F_0\frac{2(\omega^2 - \omega_0^2)(-2\omega) + 8\delta^2\omega}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right)^{3/2}} = 0$$

$-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\delta^2\omega = 0 \,|:\omega$

$\omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$

$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\omega_s^2 - \delta^2}$

$\omega_s^2 = \omega_0^2 - \delta^2$

$\omega_r < \omega_s < \omega_0$

Найдём з-н колеб. значение S_0 при резонансе:

$$S_0^{рез.} = F_0\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2)^2 + 4\delta^2(\omega_0^2 - 2\delta^2)}} = \frac{F_0}{\sqrt{4\delta^4 + 4\delta^2\omega_0^2 - 8\delta^4}} = \frac{F_0}{\sqrt{4\delta^2\omega_0^2 - 4\delta^4}};$$

$$S_0^{рез.} = \frac{F_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{F_0}{2\delta\omega_s}$$

Найдём выражение S_0 при резонансе через добротность системы для слабозатухающих колебаний:

$Q = \frac{\omega_s}{2\delta}$; $\omega_s \approx \omega_0$; $Q \approx \frac{\omega_0}{2\delta}$

$$S_0^{рез.} = \frac{F_0}{2\delta\omega_s^2}\cdot\frac{\omega_s}{\omega_s} = \frac{F_0}{\omega_s^2}Q \approx \frac{F_0}{\omega_0^2}Q$$

$S_0^{рез.} \sim Q$

Правила построения резонансных кривых:

1-е правило) – высота рез. кривой в Q раз больше амплитуды колебаний при действии статической силы $\frac{F_0}{\omega_0^2}$.

Ширина резонансной кривой.

Ширина резонансной кривой определяется по уровню $\frac{S_0^{рез.}}{\sqrt{2}}$ (часто называют «полушириной»).

$\frac{1}{2}W \sim A^2 = I$ – *интенсивность*

$A = \frac{\sqrt{W}}{\sqrt{2}}$

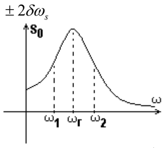
Оценим ширину резонансной кривой:

$$S_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{S_0^{рез.}}{\sqrt{2}} = \frac{F_0}{2\delta\omega_s\sqrt{2}}$$

$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2 = 8\delta^2\omega_s^2$

$\omega^4 + 2\omega^2(2\delta^2 - \omega_0^2) + \omega_0^2 - 8\omega_s^2\delta^2 = 0$

$$\omega_{1,2}^2 = -(2\delta^2 - \omega_0^2) \pm \sqrt{(2\delta^2 - \omega_0^2)^2 - \omega_0^4 + 8\omega_s^2\delta^2} = -(2\delta^2 - \omega_0^2) \pm 2\delta\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2 + 2\omega^2} = \omega_r^2 \pm 2\delta\omega_s$$



При медленных колебаниях:

$\omega_s \approx \omega_0 \approx \omega_r$

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_s^2 \pm 2\delta\omega_s = \omega_s^2\left(1 + \frac{2\delta}{\omega_s}\right)$$

$$\omega_{1,2}^2 \approx \omega_s^2\left(1 \pm \frac{1}{Q}\right)$$

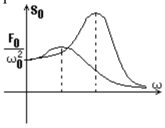
Чем выше добротность, тем уже резонансный пик.

$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{1}{Q}$. Величина, обратная добротности – есть относительная ширина резонансного пика.

2 правило)

$|\omega_2 - \omega_r| = |\omega_1 - \omega_r| = \delta$

Пример: Как изменится резонансная кривая при увеличении добротности системы в 2 раза:

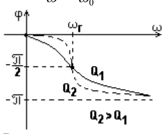


Оценим потери энергии при резонансе.

Если $(\omega_0^2 - \omega_r^2) >> 2\delta\omega$, то потерями энергии пренебрегают. Из выражения видно, что потерями энергии можно пренебречь, если добротность системы велика. Если добротность мала, то расстояние между ω_0^2 и ω_r^2 мало и нер-во не выполняется, тогда потерями энергии при резонансе пренебрегать нельзя.

Исследуем фазу колебаний.

$$tg\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$



Рассмотри предельные случаи:

1) $\omega \to 0$, $\varphi \to 0$

2) $\omega \to \infty$, $tg\varphi \approx \frac{2\delta}{\omega} \to 0$

$\omega >> \omega_0$

$\varphi \to -\pi$

3) $\omega = \omega_r$

$$tg\varphi = \frac{2\delta\omega_r}{\omega_r^2 - \omega_0^2} \approx -\frac{\omega_r}{\delta}$$

Если δ мало (нет затухания), то

$tg\varphi \to \infty \Rightarrow \varphi \to \frac{\pi}{2}$

Вынужденные колебания отстают по фазе на $\pi/2$ от вынуждающеё силы.

$Q_1 < Q_2 \Rightarrow \delta_1 > \delta_2$ ⇒ стремление tgφ к ∞ быстрее(круче) при Q_2.

Процессы установления вынужденных колебаний.

$S = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_s t + \varphi_0) + S_0\cos(\omega t + \varphi)$

При $\Delta t >> \pi$

Будем рассматривать процессы установления:

1)В слабозатухающих колебаниях.

$\omega_0 \approx \omega_s \approx \omega_r \approx \omega$

Медленные колебания при резонансной частоте:

$$\begin{cases} S(0) = 0 \\ \dot{S}(0) = 0 \end{cases}$$

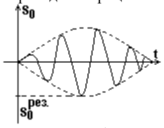
$$\begin{cases} 0 = A\cos\varphi_0 + S_0\cos\varphi = A\cos\varphi_0 \\ 0 = -A\delta\cos\varphi_0 - A\omega_s\sin\varphi_0 - S_0\omega\sin\varphi = \\ = -A\delta\cos\varphi_0 - A\omega_s\sin\varphi_0 - S_0\omega \end{cases}$$

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \\ 0 = A\omega_s + S_0\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -S_0\frac{\omega}{\omega_s} \approx -S_0 \\ \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$S = -S_0e^{-\delta t}\cos\left(\omega_s t - \frac{\pi}{2}\right) + S_0\cos\left(\omega_s t - \frac{\pi}{2}\right) = S_0\cos\left(\omega_s t - \frac{\pi}{2}\right)(1 - e^{-\delta t}) = S_0(1 - e^{-\delta t})\sin\omega_s t$$

Это есть решение уравнения колебаний под действием внешней силы с учётом переходных процессов.

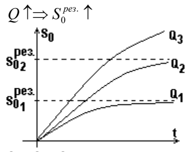


Как влияет добротность системы.

$Q = \frac{\omega_s}{2\delta}$

$S_0^{рез.} = \frac{F_0}{\omega_s}Q$;

$Q\uparrow \Rightarrow S_0^{рез.}\uparrow$



$Q_3 > Q_2 > Q_1$;

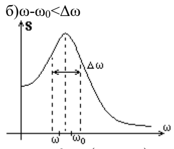
$\tau = \frac{1}{\delta}$; $\tau \sim Q$

Увеличение добротности влечёт за собой увеличение времени переходного процесса.

2)$\omega \neq \omega_0$

а)Если $\omega >> \omega_0$, то колебаний не будет, т.к отклик колеб. системы слишком слабый.

б)$\omega - \omega_0 < \Delta\omega$



$S = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_s t + \varphi_0) + S_0\cos(\omega t + \varphi)$

Задача сложения двух скалярных несинхронных колебаний с близкими частотами.

$S_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$

$S_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

$\omega_2 - \omega_1 = \Omega$ – *разностная частота*

$S_2 = A_2\cos(\omega_1 t + \Omega t + \varphi_2)$

$\varphi_2'(t) = \Omega t + \varphi_2$

$$\begin{cases} S_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ S_2 = A_2\cos(\omega_1 t + \varphi_2'(t)) \end{cases}$$

$$S = A(\cos\omega_1 t\cos\varphi - \sin\omega_1 t\sin\varphi) = A_1(\cos\omega_1 t\cos\varphi_1 - \sin\omega_1 t\sin\varphi_1) + A_2(\cos\omega_1 t\cos\varphi_2'(t) - \sin\omega_1 t\sin\varphi_2'(t))$$

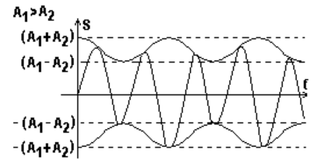
$$\begin{cases} A\cos\varphi = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2' \\ A\sin\varphi = A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2' \end{cases}$$

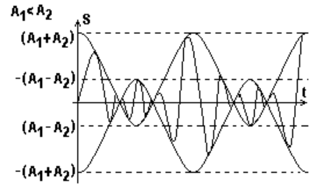
$$A = \pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2' - \varphi_1)}$$

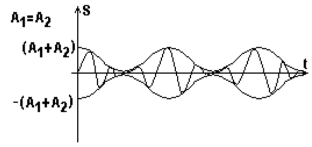
$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2'}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2'}$$

$$A = \pm\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1 + \Omega t)}$$

$A_{\max} = \pm(A_1 + A_2)$; $A_{\min} = \pm(A_1 - A_2)$



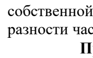




Биения возможны при наложении разности частот колебаний вынуждающей силы и собственной частоты колебаний. Нет разности частот – нет биений.

Принцип радиосвязи.

Колебательный контур как селективный приёмник квазистационарного сигнала.



Настраиваем колебательный контур на резонансную частоту, равной несущей частоте сигнала.

Селекция – отбор среди множества гармоник.

Хар-ки колеб. контура: а)коэф. затухания δ, б)добротность Q.

Чем выше добротность, тем уже ширина резонансной полосы, меньше затухание, больше высота резонансной полосы, но переходные процессы происходят дольше.

Для возможности передачи информации необходимо исказить синусоидальны сигнал. Искажённый синусоидальный сигнал назыв. модулированным.

Различают след. виды модуляции: а)Амплитудная модуляция(AM), б)фазово-частотная модуляция(FM).

Амплитудная модуляция.

$S(t)=S_0(t,\Omega)\cos(\omega_c t+\varphi_0)=$
$=S_{0m}(1+f(t))\cos(\omega_c t+\varphi_0)$

где f(t) – модулирующая функция, Ω – частота модуляции, S_{0m} – сред. значение амплитуды. f(t) – есть функция времени, меняющаяся по тому же закону, как и сам модулирующий сигнал. Обязательным условием амплитудной модуляции является $\Omega \ll \omega_c$. Выясним, что должна представлять собой система, передающая, или принимающая сигнал. Передадим, например, сигнал камертона:

$f(t)=m\cos(\Omega t+\varphi_m)$

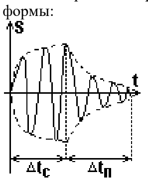
$S(t)=S_{0m}(1+m\cos(\Omega t+\varphi_m))\cos(\omega_c t+\varphi_0)=$
$=S_{0m}\cos\omega_c t+$
$+\frac{S_{0m}m}{2}(\cos(\omega_c-\Omega t)+\cos(\omega_c+\Omega t))$

где S_{0m}–максимальная амплитуда. Ω – частота модуляции, m – глубина модуляции(коэффиц. модуляции), пропорциональная интенсивности передаваемого сигнала.

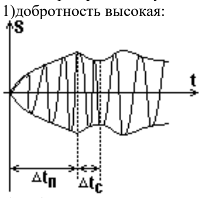
$m=\frac{\Delta S_{0m}}{S_{0m}}$ – относительное изменение максимума амплитуды, ω_c – частота несущего сигнала. *Несущий сигнал* – сигнал, с помощью которого передаёмся сигнал и контур следует настраивать именно на ω_c.

Вся информация заключена в модулирующем сигнале. Чем больше добротность контура, тем больше время установления. Пусть, например, передаётся телеграфный сигнал – набор синусоид разной длительности.

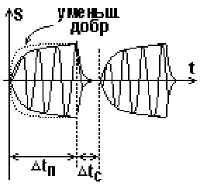
Тогда на приёмник примет сигнал след. формы:



Во время действия сигнала происходят переходные процессы, а во время паузы – процессы затухания колебаний в контуре. *Демодуляция* – нелинейное преобразование сигнала с минимальным искажением.
Рассмотри крайние случаи:
1)добротность высокая:



2)Добротность низкая:



Во время импульса в контуре происходят колебания под действием внешней силы, во время паузы происходят собственные колебания в контуре – устанавливается равновесие. Чем ниже добротность контура, тем круче фронт колебания, что отражено на рисунке. Вследствие всего этого возникает временное ограничение на передачу сигнала. Пусть время установления вынужд. колебаний τ, тогда временным критерием нормального приёма сигнала является нер-во: $\tau\le\Delta t_c$. Поскольку $Q=\frac{1}{2}\omega_0\tau$, то $\frac{1}{2}\omega_0\tau\le\frac{1}{2}\omega_0\Delta t_c$, откуда: $Q\le\frac{1}{2}\omega_0\Delta t_c$ или $Q\le\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\Delta t_c=\pi N_c$, где N_c – относительное число колебаний передающего(высокочастотного) сигнала за период.

Спектральный подход к описанию и анализу сигналов(вынужденные колебания под действием негармонической силы).

Анализ производится на основе ряда Фурье:

$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}[A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t]$, где

n – порядковый номер спектра.
$A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t$ – гармоника (при определённом n).
Задача состоит в том, чтобы выделить из спектра синусоидальные составляющие:
$\omega_n=n\Omega$ – кратные частоты спектра. Тогда ф-лу ряда Фурье можно переписать в виде:

$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos(n\Omega t)+B_n\sin(n\Omega t)$

Ω – самая низкая частота в спектре – основная частота.
$\frac{a_0}{2}$ – среднее значение амплитуды.

$A_n(\omega)=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos\omega_n t dt$

$B_n(\omega)=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin\omega_n t dt$

A_n, B_n – Фурье-образ данной функции f(t).
Формы записи ряда Фурье:
2)
$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}A_{n0}\cos(\omega_n t+\alpha_n)$

$\begin{cases}A_{n0}\cos\alpha_n=A_n\\A_{n0}\sin\alpha_n=B_n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_{n0}=\sqrt{A_n^2+B_n^2}\\tg\alpha_n=-\frac{B_n}{A_n}\end{cases}$

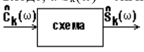
3)Через комплексные числа:
$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{C}_n(\omega)e^{i\omega_n t}$ – в дискретном случае,
$f(t)=\int_{\omega_1}^{\omega_2}\hat{C}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ – в случае непрерывно меняющейся частоты.

$\hat{C}_0=\frac{a_0}{2}$

$\hat{C}_n=\frac{A_{n0}}{2}e^{i\alpha_n}$

$\hat{C}(\omega)=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-i\omega t}dt$

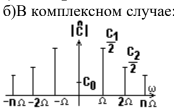
1)Комплексная ф-я C(ω) несёт в себе всю информацию о сигнале. Представление сигналов в виде таких комплексных функций назыв. спектральным подходом.
2)Также благодаря этому подходу можно точно сказать как поведёт себя каждая гармоника при внешнем воздействии:
$\hat{S}_k(\omega)=K(\omega)\hat{C}_k(\omega)$, где $C_k(\omega)$ – сигнал на входе, а $S_k(\omega)$ – сигнал на выходе.



Зная $\hat{S}_k(\omega)$ можно восстановить сигнал
$S(t)=\int\hat{S}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$.

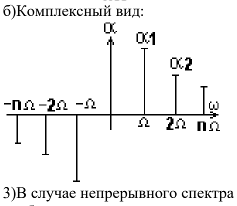
Изображают спектр в виде специальной диаграммы:
Амплитудо-частотные диаграммы:
а)в случае, если сигнал представлен только sin или cos:

б)В комплексном случае:

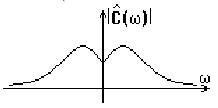


Фазо-частотные диаграммы:
а)Если сигнал представлен только sin или cos:

б)Комплексный вид:

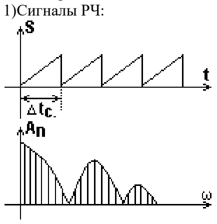


3)В случае непрерывного спектра строится огибающая:

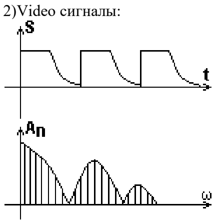


Обрезание спектра.

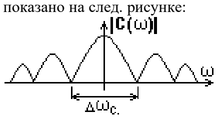
Сигнал представляет собой непрерывный спектр, но реальный прибор не может одинаково хорошо воспринимать сигналы со всеми частотами ⇒ нужно ограничить сигнал. Найдём ширину частот в которой прибор будет хорошо принимать сигнал.
Рассмотрим несколько сигналов:
1)Сигналы РЧ:



2)Video сигналы:



Ширину спектра нужно выбрать такой, как показано на след. рисунке:



Если представить зависимость C(ω) как:
$\hat{C}(\omega)=F\cos(\Delta\omega_c\Delta t_c)$,
Тогда $\Delta\omega_c$ – ширину спектра можно выбрать по следующему критерию:
$\Delta\omega_c\Delta t_c\ge1$. Если $\Delta\omega_c\Delta t_c=1$, то ⇒ $\Delta\omega_c=\frac{1}{\Delta t_c}$

⇒ чем короче импульс, тем шире спектр нужно брать.
Выясним теперь как обеспечить хороший приём сигнала.
Как известно ширина резонансной кривой определяется по уровню $\frac{S_0}{\sqrt{2}}$. Если максимум амплитуды в спектре передаваемого сигнала равен этому уровню, тогда отсюда можно найти условие хорошего приёма сигнала:

$\Delta\omega_c$ – ширина спектра, $\Delta\omega_{п.п.}$ – полоса пропускания. Условием хорошего приёма является: $\Delta\omega_c\le\Delta\omega_{п.п.}$. При этом добротность системы следует подбирать так:
$Q=\frac{\omega_0}{2\delta}=\frac{\omega_{рез.}}{\Delta\omega_{п.п.}}\Rightarrow\frac{1}{\Delta t_c}\le\frac{\omega_{рез.}}{Q}$. При малых колебаниях $\omega_{рез.}\approx\omega_0$, тогда $Q\le\Delta t_c\omega_0$

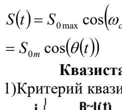
Критерием квазигармонического сигнала является: $\Delta\omega_c\le\omega_c$, т.е ширина спектра должна быть много меньше, чем частота.
Спектроанализаторы – приборы для получения спектра сигнала. Состоят из нескольких колебательных систем с хорошей добротностью, полосы пропускания являются дискретными. Т.к добротность велика ⇒ время настройки велико.

Фазо-частотная модуляция.

$S(t)=S(t)\cos(\omega_c t+\varphi)$ – амплитудно модулированный сигнал. АМ помехонеустойчива. При попадании в полосу пропускания сигналов с близкими несущими частотами (близко расположенных по частоте радиостанций) возникают помехи.
1)Фазовая модуляция:
$S(t)=S_{0\max}\cos(\omega_c t+\varphi(t))=$
$=S_{0\max}\cos(\omega_c t+f(t)+\varphi_0)=S_{0\max}\cos(\theta(t))$
2)Частотная модуляция:
$\omega_c(t)=\omega_{c0}+f(t)\Rightarrow\theta=\int\omega_c(t)dt+\varphi_0$
$S(t)=S_{0\max}\cos(\omega_{c0}+\int\omega_c(t)dt+\varphi_0)=$
$=S_{0m}\cos(\theta(t))$

Квазистационарные токи.

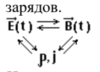
1)Критерий квазистационарности тока.



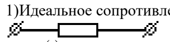
$t=\frac{r}{c}$ – время распространения поля. Если время распространения поля много меньше периода колебаний тока, то такой ток можно считать квазистационарным:
$r\ll Tc$ – условие квазистационарности тока(Tc – длина электромагнитной волны).
В случае квазистационарных токов магнитное поле и ток совпадают по фазе. Если условие квазистационарности выполнено, то в каждый момент времени в разных точках схемы течёт один и тот же ток. $l\ll\lambda$ – то же условие квазистационарности, где l – любой характерный размер схемы, λ – длина электромагнитной волны. Если выполнено условие квазисационарности, то для мгновенных токов справедливы законы Био-Савара-Лапласа, закон Ома и законы Кирхгофа:

$i(t)R=u(t)+\varepsilon(t)$ – *з-н Ома*
$\sum_j i_j(t)=0$ – *1-й з-н Кирхгофа*
$\sum_j u_j(t)=\sum_j\varepsilon_j(t)$ – *2-й з-н Кирхгофа*

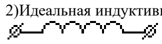
Известно, что изменяющиеся электрическое поле порождает магнитное, а изменяющиеся магнитное – электрическое, кроме того порождается ещё индукционный ток и изменяется плотность зарядов.



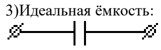
Что учитывать в квазистационарных токах:
1)Если есть индуктивность, то самоиндукцию учитывать надо: $B\rightarrow E_{инд.}$
2)Если есть ёмкость, то не нужно учитывать явление индукции в конденсаторе, т.к это не влияет на цепь, а сам ток смещения, связанный с процессами зарядки и разрядки учитывать нужно,
3)Не учитывается излучение, создающееся ускоренно движущимися частицами.
Введённые ограничения позволяют ввести идеальные элементы цепи:
1)Идеальное сопротивление:



$R=\frac{u(t)}{i(t)}$; $C\to\infty$; $L\to0$
2)Идеальная индуктивность:

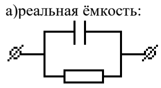


$\varepsilon_{c.u}=-L\frac{di}{dt}$; $R_L\to0$; $C\to0$
3)Идеальная ёмкость:



$R_L\to0$, $L_C\to0$, $u(t)=\frac{q(t)}{C}$

Реальные элементы цепи учитываются эквивалентными схемами:
а)реальная ёмкость:



б)реальная индуктивность:

Импеданс.

$i(t)R=u(t)+\varepsilon(t)$ – закон Ома.
Законы справедливы для Любого сигнала (для любой формы тока). Говорим теперь о синусоидальных токах:
$i(t)=I\cos(\omega t+\varphi_i)\rightarrow\hat{i}(t)=Ie^{i\varphi_i}e^{i\omega t}=\hat{I}e^{i\omega t}$
$u(t)=U\cos(\omega t+\varphi_u)\rightarrow\hat{u}(t)=Ue^{i\varphi_u}e^{i\omega t}=\hat{U}e^{i\omega t}$
Попробуем ввести величину:
$\frac{u(t)}{i(t)}=\frac{U}{I}e^{i(\varphi_u-\varphi_i)}$. Может оказаться так, что $u(t)\ne0$, а $i(t)=0$, тогда $\frac{u(t)}{i(t)}\to\infty$ и лишено смысла ⇒ использовать отношение мгновенных токов не имеет смысла. Введём величину:
$Z=\frac{U}{I}$ – имепеданс.

Комплексное сопротивление.

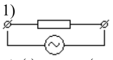
$\hat{Z}=\frac{\hat{U}}{\hat{I}}$ – комплексное сопротивление или комплексный импеданс,
$\hat{Z}=\frac{U}{I}e^{i(\varphi_u-\varphi_i)}$

Комплексный импеданс показывает не только отношение U к I, но и разность фаз между U и I на элементе или участке цепи.
Перепишем комплексное сопротивление с использованием ф-лы Эйлера:
$\hat{Z}=Ze^{i\varphi}=Z\cos\varphi+iZ\sin\varphi$
$\varphi=\varphi_u-\varphi_i$
Реальная часть Z – это активное сопротивление, а мнимая часть Z – реактивное сопротивление:
$Z=\sqrt{\mathrm{Re}(\hat{Z})^2+\mathrm{Im}(\hat{Z})^2}$
$tg\varphi=\frac{\mathrm{Im}\hat{Z}}{\mathrm{Re}\hat{Z}}$

Найдём импедансы двухполюсников.
Двухполюсники – произвольная комбинация из L,R,C имеющие два контакта на выходе.

Характеризуется двухполюсники напряжением и током через двухполюсник. ⇒ можно ввести импеданс.

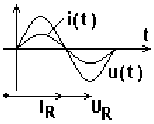
1)



$$\begin{cases} u(t)=U\cos(\omega t+\varphi_u)\\ i(t)=I\cos(\omega t+\varphi_i)\end{cases}$$

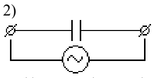
$R=\frac{U}{I}\Rightarrow\varphi_i=\varphi_u$

$\hat Z_R=\frac{U}{I}$



R – активное сопротивление.

2)



$$\begin{cases} u(t)=U\cos(\omega t+\varphi_u)\\ i(t)=I\cos(\omega t+\varphi_i)\end{cases}$$

$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=[q=uC]=C\frac{dU}{dt}=$

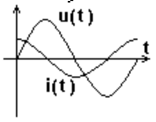
$=-CU\omega\sin(\omega t+\varphi_u)=$

$=CU\omega\cos\left(\omega t+\varphi_u+\frac{\pi}{2}\right)$

$I=CU\omega$

$\varphi_u+\frac{\pi}{2}=\varphi_i\Rightarrow\varphi_i-\varphi_u=\frac{\pi}{2}$

Ток на конденсаторе опережает напряжение на π/2:



$\hat Z=\frac{U}{I}e^{-i\frac{\pi}{2}}=\frac{U}{CU\omega}e^{-i\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{C\omega i}$

а)импеданс Z_C (модуль) называется также ёмкостным сопротивлением,

б)размерность

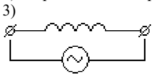
$$[Z_C]=\frac{1}{\frac{1}{c}\cdot\frac{A\cdot c}{B}}=\frac{B}{A}=Ом$$

в)Ёмкостное сопротивление показывает, что напряжение на обкладках конденсатора, возникающее при прохождении тока препятствует прохождению тока.

г)Если ω=0, то ⇒ $Z_c\to\infty$.

д)С – реактивное сопротивление.

3)



$\varepsilon_{с.и.}=-L\frac{di}{dt}$

$IR_L=u(t)+\varepsilon_{с.и.}(t)$

$т.к\ R_L\to0,\ то\Rightarrow u(t)=-\varepsilon_{с.и.}(t)=$

$=L\frac{di}{dt}$

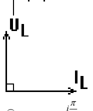
$u_L(t)=U\cos(\omega t+\varphi_u)=-LI\omega\sin(\omega t+\varphi_i)=$

$=LI\omega\cos\left(\omega t+\varphi_i+\frac{\pi}{2}\right)$

$U=LI\omega$

$\varphi_u=\varphi_i+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\varphi_i-\varphi_u=-\frac{\pi}{2}$

Ток опережает напряжение на –π/2



$\hat Z_L=L\omega e^{i\frac{\pi}{2}}=L\omega i$

а)Импеданс индуктивности называют также индуктивным сопротивлением,

б)Размерность: $[Z_L]=\frac{Ом\cdot c}{c}=Ом$

в)Физический смысл: импеданс показывает, что ЭДС самоиндукции, возникающая в цепи при протекании тока препятствует протеканию этого тока и направлена против приложенного напряжения.

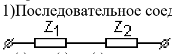
г)При ω→0 ⇒ $Z_L\to0$,

д)Индуктивность – реактивное сопротивление.

Следствия из законов Ома и Кирхгофа.

Для мгновенных значений токов и напряжений.

1)Последовательное соединение.



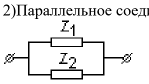
$i_1(t)=i_2(t)=i(t)$

$u(t)=u_1(t)+u_2(t)$

Складываются колебания напряжений.

$Z=\frac{u(t)}{i(t)}$

2)Параллельное соединение.



$i(t)=i_1(t)+i_2(t)$

$u(t)=u_1(t)=u_2(t)$

$Z=\frac{u(t)}{i(t)}$

Складываются колебания:

$S_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$

$S_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

Задача о сложении двух скалярных синхронных гармонических колебаний.

$S_1=A_1(\cos\omega t\cos\varphi_1-\sin\omega t\sin\varphi_1)$

$S_2=A_2(\cos\omega t\cos\varphi_2-\sin\omega t\sin\varphi_2)$

Из физических соображений(складываем колебания одинаковой частоты ⇒ должны получить колебания той же частоты).

$S=S_1+S_2$

$S=A\cos(\omega t+\varphi_0)=A(\cos\omega t\cos\varphi_0-$

$-\sin\omega t\sin\varphi_0)$

Т.к равенство S=S1+S2 справедливо в любой момент времени, то ⇒ коэффициенты при cos(ωt) и при sin(ωt) должны равняться соответственно, ⇒ равенство распадается на систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2=A\cos\varphi_0\\ A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2=A\sin\varphi_0\end{cases}$$

Возводя в квадрат каждое уравнение и складывая их получим:

$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+$

$+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$

$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}$

Поделив второе уравнение на первое найдём:

$tg\varphi_0=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$

Проанализируем полученный результат:

1) $\varphi_1-\varphi_2=0\Rightarrow\varphi_1=\varphi_2$

$A=A_1+A_2$

2) $\varphi_1-\varphi_2=\pi$

$A=A_1-A_2$

3) $\varphi_1-\varphi_2=\pi/2$

$A^2=A_1^2+A_2^2$

Т.к интенсивность ~ квадрату амплитуды, то ⇒ Если $\varphi_1-\varphi_2=\pi/2$, то $I=I_1+I_2$;

Соединение нескольких импедансов в цепи с гармонически изменяющимся токами и напряжениями.

1)Возьмём несколько импедансов, соединённых последовательно. Считать общий импеданс суммированием колебаний весьма затруднительно, но существует более простой способ для частного случая, когда u(t) и i(t) меняются по гармоническому закону. Сопоставим колебанию некоторую комплексную функцию:

$S(t)=A\cos(\omega t+\varphi)\to\hat S(t)=\hat Ae^{i\omega t}$

$i(t)\to\hat i(t)=\hat Ie^{i\omega t}=Ie^{i\omega t}e^{i\varphi_i}$

$u_1(t)\to\hat u_1(t)=\hat U_1e^{i\omega t}=Ue^{i\omega t}e^{i\varphi_1}$

$u_2(t)\to\hat u_2(t)=\hat U_2e^{i\omega t}=Ue^{i\omega t}e^{i\varphi_2}$

$u(t)\to\hat u(t)=\hat Ue^{i\omega t}=Ue^{i\omega t}e^{i\varphi}$

при послед. соединении:

$\hat u=\hat u_1+\hat u_2+\ldots$

$\hat Ue^{i\omega t}=\hat U_1e^{i\omega t}+\hat U_2e^{i\omega t}+\ldots$

Поскольку данное равенство выполняется в любой момент времени, то:

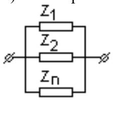
$\hat U=\hat U_1+\hat U_2+\ldots$

$\hat U=\sum_i\hat U_i$

Для гармонических токов комплексная амплитуда падения напряжения при последовательном соединении равна сумме комплексных амплитуд падения напряжения на элементах цепи.

$\hat Z=\frac{\hat U}{\hat I}=\frac{\sum_i U_i}{\hat I}=\sum_i\hat Z_i$

2)Рассмотрим параллельное соединение:



Аналогично:

$u(t)\to\hat Ue^{i\omega t}$

$i_1(t)\to\hat I_1e^{i\omega t};\ i_2(t)\to\hat I_2e^{i\omega t};\ldots;i_n(t)\to\hat I_ne^{i\omega t}$

$\hat i=\hat i_1+\hat i_2+\ldots+\hat i_n$

$\hat Ie^{i\omega t}=\hat I_1e^{i\omega t}+\hat I_2e^{i\omega t}+\ldots+\hat I_ne^{i\omega t}$

Поскольку данное равенство выполняется в любой момент времени, то:

$\hat I=\hat I_1+\hat I_2+\ldots+\hat I_n$

$\hat I=\sum_i\hat I_i$

$\hat Z=\frac{\hat U}{\sum_i\hat I_i}$

$\frac{1}{\hat Z}=\sum_i\frac{1}{\hat Z_i}$

3)Если соединение сложное, тогда необходимо использовать законы Ома и Кирхгофа.

Законы Ома и Кирхгофа для переменных синусоидальных токов.

1)Закон Ома:

а) $i(t)R=u(t)+\varepsilon(t)$

Вводя комплексные амплитуды:

$\hat Ie^{i\omega t}\hat Z=\hat Ue^{i\omega t}+\hat\varepsilon e^{i\omega t}$

Т.к данное равенство верно в любой момент времени, то:

$\hat I\hat Z=\hat U+\hat\varepsilon$

Комплексная амплитуда тока в цепи равна сумме комплексных амплитуд напряжения и ЭДС на участке цепи, делённой на комплексный импеданс.

б) $\hat I\hat Z=\hat\varepsilon$ для замкнутой цепи:

Если импеданс источника не равен нулю, то он добавляется в импеданс цепи.

2)1-й закон Кирхгофа:

$\sum_j i(t)=0\Rightarrow\sum_j\hat I_i=0$

Сумма комплексных амплитуд токов в узле равна нулю.

3)2-й закон Кирхгофа:

$\sum_j i(t)R=\sum_j\varepsilon_i(t)\Rightarrow\sum_j\hat I_j\hat Z_j=\sum_j\hat\varepsilon_j$

В контуре сумма комплексных амплитуд падений напряжений в контуре равна сумме комплексных амплитуд ЭДС в этом контуре.

Замечания:

1)Если ток не гармонический, то законы Ома и Кирхгофа верны для мгновенных значений токов.

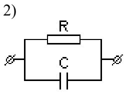
2)Если ток не квазистационарный (для 50 Гц – если размеры цепи > 6000 км), то необходимо решать систему уравнений Максвелла.

Пример:

1)

$\hat Z=R+L\omega j$

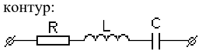
2)



$\frac{1}{\hat Z}=\frac{1}{R}+C\omega j=\frac{1+RC\omega j}{R}$

$\hat Z=\frac{R}{1+RC\omega j}=\frac{R-R^2C\omega j}{1+(RC\omega)^2}$

3)Последовательный колебательный контур:



3 способа расчета импеданса:

$\ddot q+\frac{1}{LC}q+\frac{R}{L}\dot q=\frac{\varepsilon}{L}e^{j\omega t}$

$\omega_0^2=\frac{1}{LC};\ 2\delta=\frac{R}{L}$

$q(t)=Ae^{j\omega t}$

$-A\omega^2e^{j\omega t}+\omega_0^2Ae^{j\omega t}+2\delta\omega jAe^{j\omega t}=\frac{\varepsilon}{L}e^{j\omega t}$

$A=\frac{\varepsilon/L}{\omega_0^2-\omega^2+2\delta\omega j};$

$q(t)=\frac{\varepsilon/L}{\omega_0^2-\omega^2+2\delta\omega j}e^{j\omega t}=$

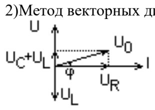
$=\frac{\varepsilon}{L\left(\frac{1}{LC}-\omega^2+\frac{\omega R}{L}j\right)}e^{j\omega t}$

1) $i(t)=\dot q(t)=\frac{\varepsilon j\omega}{\frac{1}{C}-\omega^2LC+\omega Rj}e^{j\omega t}=\hat I_0e^{j\omega t}$

$\hat I_0=\frac{\varepsilon\omega j}{1/C-\omega^2LC+\omega Rj};\ \hat Z=\frac{\hat\varepsilon}{\hat I_0}=\frac{\varepsilon}{\hat I_0}=$

$=\frac{1/C-\omega^2LC+\omega Rj}{\omega j}=R+j\left(\omega L-\frac{1}{C\omega}\right)$

2)Метод векторных диаграмм:



$tg\varphi=\frac{U_L-U_C}{U_R}=\frac{\omega L}{R}-\frac{1}{C\omega R}$

$\sin\varphi=\frac{U_L-U_C}{U_0}=\frac{L\omega-1/C\omega}{Z}$

$\cos\varphi=\frac{U_R}{U_0}=\frac{R}{Z}$

$Z=\frac{U_0}{I}=\sqrt{U_R^2+(U_L-U_C)^2}=$

$=\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}$

$\hat Z=Ze^{i\varphi}=Z\cos\varphi+jZ\sin\varphi$

$\hat Z=R+j\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)$

3)Метод комплексных амплитуд.

$\hat I(\hat Z_R+\hat Z_C+\hat Z_L)=\hat U$

$\hat Z=\hat Z_R+\hat Z_C+\hat Z_L$

$\hat Z=R+j\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)$

$Z(\omega)=\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}$

Найдём экстремум ф-ции Z(ω):

$\frac{dZ}{d\omega}=\frac{\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)\left(L+\frac{1}{C\omega^2}\right)}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}=0$

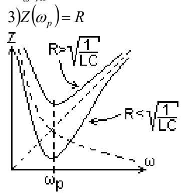
$\omega_p=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

Построим график зависимости Z(ω):

1) $\lim_{\omega\to0}Z(\omega)=0;\ Z\sim\frac{1}{\omega}$

2) $\lim_{\omega\to\infty}Z(\omega)=\infty;\ Z\sim\omega$

3) $Z(\omega_p)=R$



При ω_p влияние индуктивности и ёмкости компенсируются.

Построим теперь график зависимости I(ω):

Если радиоприём, то чем меньше Z, тем лучше приём сигнала. Сдвиг фаз между током и напряжением меняется от –π/2 до π/2.

4)

Учитываем наличие взаимной индукции:

$U_{L_1}=L_1\frac{di_1}{dt}+L_{12}\frac{di_2}{dt}=\frac{di}{dt}(L_1+L_{12})$

поскольку $i_1=i_2=i$

$U_{L_2}=(L_2+L_{12})\frac{di}{dt}$

$U=(L_1+L_2+2L_{12})\frac{di}{dt}$

сопоставляя действ. вел – м – компл.

$\hat U=\hat I\omega j(L_1+L_2+2L_{12})$

$\hat Z=\hat Z_{L_1}+\hat Z_{L_2}+2\omega L_{12}j$

Примеры расчета некоторых четырёхполюсников.

Четырёхполюсник – любая комбинация из индуктивности, ёмкости и сопротивлений, имеющих 2 контакта на выходе и 2 на входе.

Основная характеристика четырёхполюсника:

$\hat K=\frac{\hat U_{вых.}}{\hat U_{вх.}}$ – комплексный коэффициент передачи.

$\hat K=\frac{\hat U_{вых.}}{\hat U_{вх.}}=\frac{U_{вых.}e^{i\omega\varphi_{вых.}}}{U_{вх.}e^{i\omega\varphi_{вх.}}}=\frac{U_{вых.}}{U_{вх.}}e^{i(\varphi_{вых.}-\varphi_{вх.})}=$

$=Ke^{i(\varphi_{вых.}-\varphi_{вх.})}$

K – коэффициент передачи.

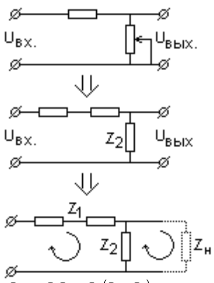
АЧХ – амплитудо-частотная характеристика – зависимость K(ω),

ФЧХ – фазо-частотная характеристика.

Смысл величины K:

Отношение амплитуды реактивной цепи к амплитуде воздействия.

Рассмотрим четырёхполюсник:



$\hat U_{вх.} = \hat I_1 \hat Z_1 + \hat Z_2\left(\hat I_1 - \hat I_2\right)$

$\hat U_{вых.} = \hat Z_2\left(\hat I_2 - \hat I_1\right)$

Выберем режим холостого хода, тогда:

$I_{вх.} >> I_{вых.}$, т.е $Z_{н.} >> Z_1$ и $Z_{н.} >> Z_2$

тогда $I_2 \to 0$

$$K(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Использование четырёхполюсников.

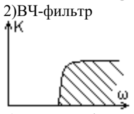
	Z	φ_u-φ_i
R	R	0
L	Lω	π/2
C	1/(Cω)	-π/2

Разновидности фильтров:

По диапазону пропускания (полосы пропускания):

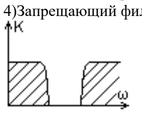
1)НЧ-фильтр

2)ВЧ-фильтр

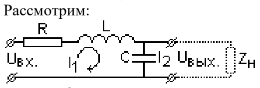


3)Полосной фильтр

4)Запрещающий фильтр



Рассмотрим:



$$K_c(\omega) = \frac{\hat U_{вых.}}{\hat U_{вх.}}$$

$$\begin{cases} \hat U_{вх.} = (R + i\omega L)\hat I_1 + \frac{1}{i\omega C}\left(\hat I_1 + \hat I_2\right) \\ \hat U_{вых.} = \frac{1}{i\omega C}\left(\hat I_2 + \hat I_1\right) \end{cases}$$

1-е приближение:

Выберем режим холостого хода:

$I_{вх.} >> I_{вых.} \Rightarrow I_1 >> I_2 \Rightarrow I_2 \to 0$

2-е приближение:

Пусть большая часть напряжения снимается с сопротивления ⇒ $Z_{н.} >> Z_C$

Тогда:

$$\hat K(\omega) = \frac{1}{i\omega C\left(R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}\right)}$$

$$\hat K_C(\omega) = \frac{1}{i\omega C\left(i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + R\right)} =$$

$$= \frac{1}{RC\omega i - \omega C\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + RC\omega i} =$$

$$= \left[\omega_0^2 = \frac{1}{LC}\right] = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + RC\omega i} =$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - RC\omega i}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + (RC\omega)^2};$$

$$K_C = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + (RC\omega)^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + (RC\omega)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + (RC\omega)^2}}$$

$$tg\varphi = \frac{RC\omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Построим график функции:

График можно построить, проанализировав поведение ф-ции при ω→0 и ω→∞.

Можно поступить иначе:

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\omega_0^4}\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + R^2C^2\omega^2\omega_0^4\right)}} =$$

$$= \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + R^2C^2\omega_0^4\omega^2}}$$

Пусть $\omega_0^2 = F_0$, *а* $R^2C^2\omega_0^4 = 4\delta^2$

Выходное напряжение – есть некоторая характеристика. Т.к вся система – есть колебательный контур, совершающий вынужденные колебания под действием гармонического внешнего воздействия ⇒ можно использовать все выводы, произведённые для подобного рода колебательных систем.

$$S = \frac{F_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

Кривая K(ω) – есть резонансная кривая колебательного контура. S_{max}=QS(0).

Теперь построим график зависимости K(ω):

$$\omega_{р.} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{2R^2C^2\omega_0^4}{4}}$$

$$\omega_{р.} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{R^2C^2\omega_0^2}{2}} < \omega_0$$

$$Q = \frac{\pi}{d} = \frac{\pi}{\delta T};\ 2\delta = \frac{R}{L}$$

$$Q = \frac{2\pi L\omega_0}{R \cdot 2\pi} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{\sqrt{LC}R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

$$Q = \frac{\pi}{d}$$

Чем выше добротность колебательного контура, тем выше коэффициент передачи.

Построим фазочастотную характеристику:

$$\varphi(\omega) = arctg\left(\frac{\mathrm{Im}\left(\hat K\right)}{\mathrm{Re}\left(\hat K\right)}\right) = arctg\left(\frac{RC\omega}{\omega^2\Big/\omega_0^2 - 1}\right)$$

1) $\omega \to \infty$

$\mathrm{Re}\left(\hat K\right) \sim -\omega^2 < 0, \mathrm{Im}\left(\hat K\right) \sim -\omega < 0$

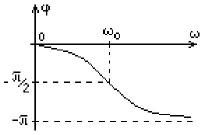
$\lim_{\omega\to\infty}\varphi(\omega) = -\pi$

2) $\omega \to 0$

$\mathrm{Re}\left(\hat K\right) > 0, \mathrm{Im}\left(\hat K\right) < 0$

$\lim_{\omega\to 0}\varphi(\omega) = 0$

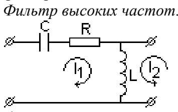
3) $\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$



При увеличении R ⇒ увеличивается резонансная частота $\omega_{р.}$ и уменьшается Q.

Из АЧХ видно, что данный четырёхполюсник представляет собой фильтр низких частот.

Фильтр высоких частот:



$$\begin{cases} \hat U_{вх.} = \left(\frac{1}{C\omega j} + R\right)\hat I_1 + L\omega j\left(\hat I_1 + \hat I_2\right) \\ \hat U_{вых.} = L\omega j\left(\hat I_2 + \hat I_1\right) \end{cases}$$

Рассматриваем режим холостого хода:

$I_2 << I_1$

$$\begin{cases} \hat U_{вх.} = \left(\frac{1}{C\omega j} + L\omega j + R\right)\hat I_1 \\ \hat U_{вых.} = L\omega j\hat I_1 \end{cases}$$

$$\hat K = \frac{L\omega j}{\left(\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)j + R\right)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)L\omega - RL\omega j}{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 + R^2}$$

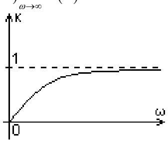
$$K(\omega) = \frac{L\omega}{\sqrt{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 + R^2}}$$

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{R}{L\omega - \frac{1}{C\omega}}$$

Построим график зависимости K(ω):

1) $\lim_{\omega\to 0} K(\omega) = 0$

2) $\lim_{\omega\to\infty} K(\omega) = 1$



Построим график зависимости φ(ω):

1) $\omega \to 0$

$\mathrm{Re}\left(\hat K\right) > 0$; $\mathrm{Im}\left(\hat K\right) < 0$

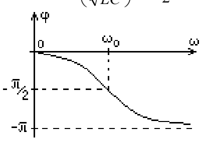
$\varphi \to 0$

2) $\omega \to \infty$

$\mathrm{Re} \to \infty$ *быстрее чем* $\mathrm{Im} \to -\infty$

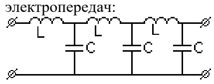
$\varphi \to -\pi$

3) $\varphi(\omega_0) = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right) = -\frac{\pi}{2}$



Линия электропередачи:

Составим эквивалентную схему линии электропередач:



Рассмотрим одно звено схемы:

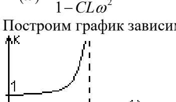
$$\hat I = \frac{\hat U_{вх.}}{L\omega j + \frac{1}{C\omega j}};$$

$$\hat U_{вых.} = \hat I\frac{1}{C\omega j} = \hat U_{вх.}\frac{1}{C\omega j\left(L\omega j + \frac{1}{C\omega j}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1 - CL\omega^2}\hat U_{вх.}$$

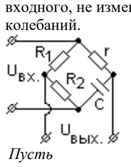
$$K(\omega) = \frac{1}{1 - CL\omega^2}$$

Построим график зависимости K(ω):



Фазовращатели:

Это устройства изменяющие фазу выходного напряжения относительно входного, не изменяя при этом амплитуды колебаний.



Пусть

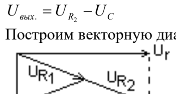
1) $R_1 = R_2 = r$

2) *Рассм. режим хол. хода*

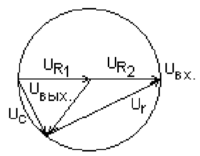
$I_{вых.} \to 0 \Rightarrow U_{R_1} = U_{R_2}$; $U_{вх.} = U_{R_1} + U_{R_2}$

$U_{вых.} = U_{R_2} - U_C$

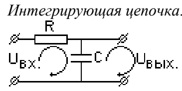
Построим векторную диаграмму:



Единственным управляемым параметром является реостат r. Изменяем r ⇒ изменяем U_r ⇒ $U_{вх.}$ не изм., а $U_{вых.}$ поворачивается относительно $U_{вх.}$, отсюда название – фазовращатель.



Интегрирующая цепочка:



Запишем 2-й закон Кирхгофа для мгновенных значений токов при холостом ходе, т.е при $i_{вых.} \to 0$:

$$\begin{cases} u_{вх.}(t) = i_{вх.}R + u_c(t) \\ u_{вых.}(t) = u_c(t) = \frac{q(t)}{C} \end{cases}$$

$q = \int i_{вых.}(t)dt$

$u_{вх.} = U\cos(\omega t)$

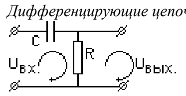
$u_{вых.} = k\int u_{вх.}$

$$u_{вых.} = \frac{1}{C}\int i_{вх.}(t)dt = \frac{1}{C}\int\frac{u_{вх.}(t) - u_{вых.}(t)}{R}dt$$

Чтобы избавиться от $u_{вых.}$ нужно варьировать параметрами схемы R и C так, чтобы $i_{вх.}(t)R << u_c(t)$, тогда:

$$u_{вых.} = \frac{1}{RC}\int u_{вх.}(t)dt$$

Дифференцирующие цепочки:



Будем считать, что $i_{вых.} \to 0$, тогда:

$$\begin{cases} u_{вх.}(t) = u_c(t) + u_R(t) \\ u_{вых.}(t) = u_{вх.}(t)R \\ u_c(t) = \frac{q(t)}{C} \end{cases}$$

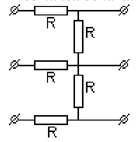
$$u_{вых.} = i_{вх.}(t)R = R\frac{dq}{dt} = RC\frac{du_c}{dt}$$

При $\frac{1}{\omega C} >> R$ (*т.е* $i_{вх.}R << u_c(t)$)

$$u_{вых.}(t) = RC\frac{du_{вх.}}{dt}$$

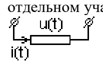
Подобные устройства используются в аналоговых вычислительных машинах. Они медленные, но зато помехоустойчивые.

Шестиполюсники:



Работа и мощность в цепи переменного тока. Проблема косинусов.

Работу по переносу заряда совершают только электрические и магнитные поля, а не токи и напряжения. Найдём работу на отдельном участке цепи.



Поскольку ввели понятие квазистационарности, то ⇒ можно использовать понятие работы поля так же как и в случае стационарных полей:

$$\delta A = u(t)dq = u(t)i(t)dt$$

$$p(t) = \frac{\delta A}{dt} = u(t)i(t)$$

Это мгновенная мощность. Соотношение справедливо для любых квазистационарных токов. Запишем выражение для мощности синусоидальных токов и напряжений:

$$\begin{cases} u = U\cos(\omega t + \varphi_u) \\ i = I\cos(\omega t + \varphi_i) \end{cases}$$

$$p(t) = i(t)u(t) = IU\cos(\omega t + \varphi_u)\cos(\omega t + \varphi)$$

$$p(t) = \frac{IU}{2}\left(\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\varphi_u - \varphi_i)\right)$$

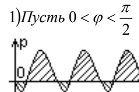
$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

Положим, что $\varphi_u = 0$

$$p(t) = \frac{IU}{2}\left(\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi\right)$$

Рассмотрим частные случаи :

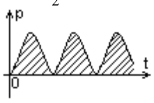
1) *Пусть* $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$



При p>0 происходит запас энергии в полях реактивных элементов(т.е в магнитном поле катушки и электрическом поле конденсатора). При этом на активных сопротивлениях энергия выделяется в виде тепла. При p<0 запасённая энергия возвращается к источнику, но т.к не вся энергия отдаётся реактивным элементам, то ⇒ возвращается не вся энергия.

2)φ=0, тогда:

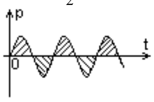
$$p(t)=\frac{IU}{2}\left(1+\cos(2\omega t)\right)$$



В этом случае энергия только поступает в цепь. Цепь в этом случае может состоять из
а)Только активных элементов,
б)Может содержать реактивные элементы, т.к они постоянно обмениваются энергией (например колебательный контур в резонансе).
3)

$$\varphi=\frac{\pi}{2}$$

$$p(t)=\frac{IU}{2}\sin 2\omega t$$



Площади под и над осью t равны $\Rightarrow$ вся энергия, полученная за одну четверть периода колебаний тока возвращается ему за 2-ю четверть периода. Такая цепочка может состоять только из реактивных элементов.
Проблема косинусов. Цепочка не может вырабатывать энергию, а косинус φ в может иметь отрицательное значение(тогда источнику, судя по графику будет возвращено большее кол-во энергии, чем было получено от него же).
Средняя мощность за период.

$$\overline{p}=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}p(t)dt=\frac{1}{2}IU\cos\varphi$$

$$[\overline{p}]=Bm$$

$$\overline{p}=\frac{1}{2}I^2Z\cos\varphi$$

Запишем средние мощности, выделяемые на некоторых элементах:
1)Активное сопротивление:
φ=0, Z=R

$$\overline{p}=\frac{I^2R}{2}=I^2_{эфф.}R=\frac{1}{2}\frac{U^2}{Z}\,;\,I_{эфф.}=\frac{I}{\sqrt{2}}$$

Смысл эффективного значения тока – ток в цепи переменного тока с амплитудой I эквивалентен току в цепи постоянного тока $I_{эфф.}$
Аналогично можно определить:

$$U_{эфф.}=\frac{U}{\sqrt{2}},$$

тогда:

$$\overline{p}=I^2_{эфф.}R=\frac{U^2_{эфф.}}{R}=I_{эфф.}U_{эфф.}$$

Замечание: Если речь идёт о цепи, содержащей не только R, то

$$\overline{p}=U_{эфф.}I_{эфф.}\cos\varphi\,,\,\varphi=\varphi_u-\varphi_i$$

Эффективное значение можно ввести не только для гармонических токов, но и для любых квазистационарных токов:

$$I^2_{эфф.}=\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt\,;\,U^2_{эфф.}=\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt$$

$$R=\frac{\overline{p}}{I^2_{эфф.}}$$

Из последней формулы видно, что $R_{\sim}>R_{=}$. Физическое объяснение этого явления: При переменном токе часть токов растекается по поверхности проводника и ток течёт, как бы по проводу меньшего сечения, с чем и связано уменьшение сопротивления (поверхностные эффекты).
2)Индуктивность.
Z=Lω, φ=π/2 $\Rightarrow$ $\overline{p}=0$
3)Ёмкость.

$$Z=\frac{1}{C\omega}\,;\,\varphi=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\overline{p}=0$$

Выражение для средней мощности можно записать через комплексные параметры:

$$\widehat{\overline{p}}=\overline{\widehat{u}(t)\widehat{i}(t)}\,,\,где$$

$$u(t)\to\widehat{u}=\widehat{U}e^{j\omega t}$$

$$i(t)\to\widehat{i}=\widehat{I}e^{j\omega t}$$

Нельзя найти среднюю мощность, перемножая $\widehat{i}$ на $\widehat{u}$, т.к i и u – это реальные части и для них справедливы лишь линейные операции. Поэтому вводят:

$$\widehat{\overline{p}}=\widehat{U}_{эфф.}\widehat{I}^*_{эфф.}$$

$$\widehat{U}_{эфф.}=\frac{U}{\sqrt{2}}e^{i\varphi_u}\,;\,\widehat{I}_{эфф.}=\frac{I}{\sqrt{2}}e^{i\varphi_i}\,;\,\widehat{I}^*_{эфф.}=\frac{I}{\sqrt{2}}e^{-i\varphi_i}$$

$$\widehat{\overline{p}}=\frac{IU}{2}e^{i\varphi}\,,\,\varphi=\varphi_u-\varphi_i$$

От комплексной мощности нельзя перейти к мгновенной как для токов и напряжений. Она вводится только для упрощения расчетов.

$$\widehat{\overline{p}}=p_{\mathrm{Re}}+ip_{\mathrm{Im}}=U_{эфф.}I_{эфф.}\cos\varphi+$$
$$+iU_{эфф.}I_{эфф.}\sin\varphi=\overline{p}+\overline{Q}$$

[Q]=Вольт-амперы реактивные (ВАР).

Q показывает какая часть энергии циркулирует между источником и нагрузкой.

$$W_c=\frac{Cu^2(t)}{2}-мгн.\ знач.\ эн.\ конд.$$

$$W_L=\frac{Li^2(t)}{2}-мгн.\ знач.\ эн.\ магн.\ п.$$

Усредним по большому промежутку времени, т.е по периоду:

$$\overline{W_c}=\frac{\overline{Cu^2(t)}}{2}=\frac{CU^2}{4}=\frac{CU^2_{эфф.}}{2}$$

$$\overline{W_L}=\frac{\overline{Li^2(t)}}{2}=\frac{LI^2}{4}=\frac{LI^2_{эфф.}}{2}$$

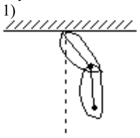
Запишем для гармонических токов в комплексном виде:

$$\overline{W_c}=\frac{C}{2}\widehat{U}_{эфф.}\widehat{U}^*_{эфф.}\,;\,\widehat{U}_{эфф.}=U_{эфф.}e^{i\varphi_u}$$

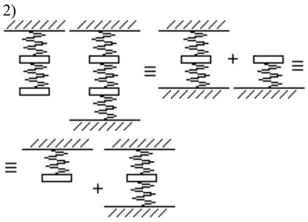
$$\overline{W_L}=\frac{L}{2}\widehat{I}_{эфф.}\widehat{I}^*_{эфф.}\,;\,\widehat{I}_{эфф.}=I_{эфф.}e^{i\varphi_i}$$

Колебания систем с несколькими степенями свободы(связанные колебания).

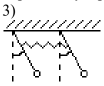
Будем рассматривать системы только с двумя степенями свободы.
1)



1-му маятнику соответствуют гармонические колебания с одной частотой. Если подвесить ещё один, то частота изменится $\Rightarrow$ каждая система колеблется с одной частотой.
Степень свободы определяет число собственных частот в системе.
2)

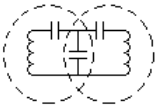


Дополнение: Кристаллическую решётку твёрдого тела можно представить как атомы, связанные между собой пружинами (6 пружин к каждому атому в 6-ти перпендикулярных направлениях).
3)

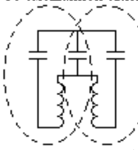


4)С индуктивной связью:

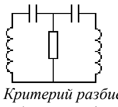
С ёмкостной связью:



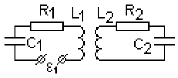
Со смешанной связью:



С гальванической (резистивной) связью:



Критерий разбиения системы на подсистемы(парциальные системы).
1)Из каких парциальных систем с одной степенью свободы состоит сложная система,
2)Каким образом осуществляется связь между парциальными подсистемами. Связь означает, что колебания в одной системе влияют на колебания в другой системе и наоборот,
3)Как характер парциальных систем и связей определяет колебания всей системы(можно ли пренебречь чем нибудь).
Общее правило выбора парциальных систем.
Парциальные системы, соответствующие данной координате – это такая система, которая получается из полной системы в том случае, когда все её координаты кроме данной равны нулю.
Нуль означает, что каждые координаты выбираем в положении равновесия(условие жёсткой связи). Рассмотрим схему:



Запишем закон Ома для мгновенных токов:

$$\begin{cases}R_1i_1(t)+\dfrac{q_1(t)}{C_1}+L_1\dfrac{di_1(t)}{dt}=\varepsilon_1(t)-M\dfrac{di_2(t)}{dt}\\R_2i_2(t)+\dfrac{q_2(t)}{C_2}+L_2\dfrac{di_2(t)}{dt}=-M\dfrac{di_1(t)}{dt}\end{cases}$$

$$i_1=\dot q_1\,;\,i_2=\dot q_2$$

$$\begin{cases}R_1\dot q_1+\dfrac{1}{C_1}q_1+L_1\ddot q_1=\varepsilon_1(t)-M\ddot q_2\\R_2\dot q_2+\dfrac{1}{C_2}q_2+L_2\ddot q_2=-M\ddot q_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\ddot q_1+\dfrac{R_1}{L_1}\dot q_1+\dfrac{1}{L_1C_1}q_1=\dfrac{\varepsilon_1}{L_1}-\dfrac{M}{L_1}\ddot q_2\\\ddot q_2+\dfrac{R_2}{L_2}\dot q_2+\dfrac{1}{L_2C_2}q_2=-\dfrac{M}{L_2}\ddot q_1\end{cases}$$

Введём:

$$\omega^2_{01}=\frac{1}{L_1C_1}\,;\,\omega^2_{02}=\frac{1}{L_2C_2}$$

В случае связанных колебаний частоты, соответствующие независимым колебаниям контуров – парциальные частоты.
Введём:

$$2\delta_1=\frac{R_1}{L_1}\,;\,2\delta_2=\frac{R_2}{L_2}$$

$$\begin{cases}\ddot q_1+2\delta_1\dot q_1+\omega^2_{01}q_1=\varepsilon_1-\dfrac{M}{L_1}\ddot q_2\\\ddot q_2+2\delta_2\dot q_2+\omega^2_{02}q_2=-\dfrac{M}{L_2}\ddot q_1\end{cases}$$

Это есть система двух линейно зависимых ДУ 2-го порядка. Поскольку мы ограничиваемся лишь описанием гармонических колебаний системы, то для решения можем воспользоваться методом комплексных амплитуд.

$$\widehat{q}_1=\widehat{A}_1e^{i\omega t}$$

$$\widehat{q}_2=\widehat{A}_2e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases}-\widehat{A}_1\omega^2+2\delta_1i\omega\widehat{A}_1+\omega^2_{01}\widehat{A}_1=\dfrac{\widehat{\varepsilon}}{L_1}+\dfrac{M}{L_1}\omega^2\widehat{A}_2\\-\widehat{A}_2\omega^2+2\delta_2i\omega\widehat{A}_2+\omega^2_{02}\widehat{A}_2=\dfrac{M}{L_2}\omega^2\widehat{A}_1\end{cases}$$

из 2-го уравнения:

$$\widehat{A}_2=\widehat{A}_1\frac{M\omega^2}{L_2\left(\left(\omega^2_{02}-\omega^2\right)+\dfrac{R_2}{L_2}\omega i\right)}$$

Подставляем в 1-е ур-е:

$$\widehat{A}_1=\frac{\widehat{\varepsilon}_1}{\left(\omega^2_{01}-\omega^2\right)+\dfrac{R_1}{L_1}i\omega}-$$
$$-\frac{M^2\omega^4}{\left(\left(\omega^2_{02}-\omega^2\right)+\dfrac{R_2}{L_2}i\omega\right)L_1L_2}$$

Если известна ε, ω то A_1 и A_2 определяются однозначно в каждой парциальной системах. Чтобы понять каков характер колебаний рассмотрим частные случаи:

1) $\widehat{\varepsilon}=0$ (*)

$$\begin{cases}-\widehat{A}_1\omega^2+2\delta_1i\omega\widehat{A}_1+\omega^2_{01}\widehat{A}_1=\dfrac{M}{L_1}\omega^2\widehat{A}_2\\-\widehat{A}_2\omega^2+2\delta_2i\omega\widehat{A}_2+\omega^2_{02}\widehat{A}_2=\dfrac{M}{L_2}\omega^2\widehat{A}_1\end{cases}$$

$$\widehat{A}_1\left(\left(\omega^2_{01}-\omega^2+\frac{R_1}{L_1}\omega i\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{M^2\omega^4}{\left(\left(\omega^2_{02}-\omega^2\right)+\dfrac{R_2}{L_2}i\omega\right)L_1L_2}\right)=0$$

Ур-е обращается в нуль если скобка → 0. Решение уравнения ω и она зависит от параметров системы, которые постоянны, $\Rightarrow$ ω=const (собственные колебания).

2) $\varepsilon=0,\,R_1=R_2=0\Rightarrow\delta_1=\delta_2=0$

$$\widehat{A}_1\left(\left(\omega^2_{01}-\omega^2\right)-\frac{M^2\omega^4}{\left(\omega^2_{02}-\omega^2\right)L_1L_2}\right)=0$$

Система (*) имеет нетривиальное решение, если det=0 $\Rightarrow$ данное уравнение можно также получить, приравняв det к нулю.

$$\left(\omega^2_{01}-\omega^2\right)\left(\omega^2_{02}-\omega^2\right)=\frac{M^2\omega^4}{L_1L_2}$$

3) $\varepsilon=0\,;\,\delta_{1,2}=0\,;\,L_1=L_2=L\,;\,C_1=C_2=C\Rightarrow$

$$\Rightarrow\omega_{01}=\omega_{02}=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\omega_0$$

$$\left(\omega^2_0-\omega^2\right)^2=\frac{M^2\omega^4}{L^2}$$

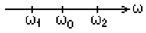
$$\frac{M}{L}\omega^2=\omega^2_0-\omega^2$$

$$\omega^2=\pm\frac{\omega^2_0}{\left(\dfrac{M}{L}\pm1\right)}$$

Физ. смысл имеют решения:

$$\omega_1=\frac{\omega_0}{\sqrt{\dfrac{M}{L}+1}}\,;\,\omega_2=\frac{\omega_0}{\sqrt{\dfrac{M}{L}-1}}$$

ω_1 и ω_2 – частоты колебаний связанных контуров(нормальные частоты). Если колебания контура связаны, то колебания происходят на нормальных частотах ω_1, ω_2 или их сочетаниях.



Найдём значения амплитуд при ω_1 и ω_2 в нашем частном случае:

$$\widehat{A}_2=\widehat{A}_1\frac{M\omega^2}{L\left(\omega^2_0-\omega^2\right)}$$

$$\widehat{A}_2(\omega_1)=\widehat{A}_1\frac{M\omega^2_0}{\left(1+\dfrac{M}{L}\right)L\left(\omega^2_0-\dfrac{\omega^2_0}{1+M/L}\right)}=$$
$$=\widehat{A}_1$$

колебания в фазе

$$\widehat{A}_2(\omega_2)=-\widehat{A}_1$$

колебания в противофазе

Вводят:

$$K(\omega)=\frac{A_2}{A_1}-коэфф.\ распределения$$

$$K(\omega_1)=\frac{M\omega^2_1}{L\left(\omega^2_0-\omega^2_1\right)^2}\,;\,K(\omega_2)=\frac{M\omega^2_2}{L\left(\omega^2_0-\omega^2_2\right)^2}$$

Что показывает коэфф. распеделения:
Т.к в правой части все величины постоянные, то $\Rightarrow$ если в контуре 1 происходят колебания на частоте ω_1, то амплитуда A_1 может быть любой величиной, определяемой параметрами системы, но при этом амплитуда колебаний той же частоты в другом контуре A_2 будет в К раз больше амплитуды A_1.
Общее решение колебаний системы имеет вид:

$$\begin{cases}q_1=A_1\cos(\omega_1t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_2t+\varphi_2)\\q_2=A_1\cos(\omega_1t+\varphi_1)-A_2\cos(\omega_2t+\varphi_2)\end{cases}$$

минус перед A_2 т.к $K(\omega_2)=-1$

Константы A_1,A_2,φ_1,φ_2 находятся из начальных условий.
1)

$$q_1(0)=q_0\,;\,q_2(0)=0\,;\,\dot q_1(0)=\dot q_2(0)=0$$

$$\begin{cases}q_0=A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2\\0=A_1\cos\varphi_1-A_2\cos\varphi_2\\0=-A_1\omega_1\sin\varphi_1-A_2\omega_2\sin\varphi_2\\0=-A_1\omega_1\sin\varphi_1+A_2\omega_2\sin\varphi_2\end{cases}$$

$$A_1=A_2\frac{\omega_2\sin\varphi_2}{\omega_1\sin\varphi_1}$$

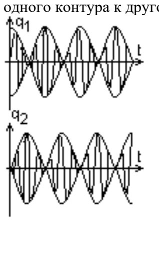
$$0=-A_2\omega_2\sin\varphi_2-A_2\omega_2\sin\varphi_2\Rightarrow\varphi_2=0$$

$$A_1=A_2\cdot\frac{0}{\omega_1\sin\varphi_1}\Rightarrow\varphi_1=0$$

$$\begin{cases}q_0=A_1+A_2\\0=A_1-A_2\end{cases}\Rightarrow A_1=A_2=\frac{q_0}{2}$$

$$\begin{cases}q_1=\dfrac{q_0}{2}\left(\cos\omega_1t+\cos\omega_2t\right)=\\=q_0\cos\left(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\\q_2=\dfrac{q_0}{2}\left(\cos\omega_1t-\cos\omega_2t\right)=\\=q_0\sin\left(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\end{cases}$$

Если $\omega_1-\omega_2<<\omega_1,\omega_2$, то возник. биения – энергия будет периодически переходить от одного контура к другому.



2)

$q_1(0)=q_0$; $q_2(0)=q_0$; $\dot q_1(0)=\dot q_2(0)=0$

$\varphi_1=\varphi_2=0$;

$$\begin{cases} q_0=A_1+A_2 \\ q_0=A_1-A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2=0 \\ A_1=q_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1=q_0\cos\omega_1 t \\ q_2=q_0\cos\omega_1 t \end{cases} - \text{гарм. колеб}-\text{я}$$

Общий вывод:

1)Колебания в каждом контуре состоят из двух гармонических колебаний с частотами ω_1 и ω_2,

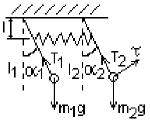
2)Колебания одной частоты имеют одну и ту же фазу в обоих контурах.

3)Коэффициент распределения не зависит от начальных условий и зависит от параметров системы.

4)Если связь между контурами не равна нулю, то коэффициент распределения, соответствующий ω_1 и ω_2 то же не равны нулю ⇒ каждое собственное колебание имеет место в обоих контурах.

5)Нельзя подобрать такие начальные условия, чтобы в одном контуре шли колебания только с частотой ω_1, а в другом только с ω_2. В общем случае колебания системы связанных контуров негармонические.

Связанные мат. маятники.



$m_1l_1\ddot\alpha_1=-m_1g\alpha_1+k\Delta l$

В силу невесомости пружины $F_{1\,упр.}=F_{2\,упр.}$.

$m_2l_2\ddot\alpha_2=-mg\alpha_2-k\Delta l$

$\Delta l=l_1\alpha_1-l_2\alpha_2$

$m_1l_1\ddot\alpha_1=-m_1g\alpha_1+k(l_1\alpha_1-l_2\alpha_2)$

$m_2l_2\ddot\alpha_2=-m_2g\alpha_2-k(l_1\alpha_1-l_2\alpha_2)$

Если расстояние от точки подвеса до точки крепления одинаковы, то можем написать:

$$\begin{cases} m_1l_1\ddot\alpha_1=-m_1g\alpha_1+kl(\alpha_1-\alpha_2) \\ m_2l_2\ddot\alpha_2=-m_2g\alpha_2-kl(\alpha_1-\alpha_2) \end{cases}$$

Замечание о системах ДУ, опис. колебания:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot q_1+a_{12}\ddot q_2+\beta_{11}\dot q_1+\beta_{12}\dot q_2+\omega_{11}q_1+ \\ +\omega_{12}q_2=f_1(t) \\ a_{21}\ddot q_1+a_{22}\ddot q_2+\beta_{21}\dot q_1+\beta_{22}\dot q_2+\omega_{21}q_1+ \\ +\omega_{22}q_2=f_2(t) \end{cases}$$

Метод решения:

Подбирается функция с неизвестными коэфф. и подставляется в исходную систему с учётом начальных условий:

$\hat\alpha_1=\hat A_1e^{i\omega t}$; $\hat\alpha_2=\hat A_2e^{i\omega t}$

Подставляем :

$$\begin{cases} -m_1l_1\hat A_1\omega^2+m_1g\hat A_1-kl\hat A_2=0 \\ -m_2l_2\hat A_2\omega^2+m_2g\hat A_2-kl\hat A_1=0 \end{cases}$$

$$\omega_{01}^2=\frac{g}{l_1};\ \omega_{02}^2=\frac{g}{l_2}$$

$$\hat A_1=\hat A_2\frac{kl}{(\omega^2-\omega_{01}^2)m_1l_1}$$

$$\begin{cases} -\hat A_1\omega^2+\omega_{01}^2\hat A_1-\dfrac{kl}{m_1l_1}\hat A_2=0 \\ -\hat A_2\omega^2+\omega_{02}^2\hat A_2-\dfrac{kl}{m_2l_2}\hat A_1=0 \end{cases}$$

Система имеет нетривиальное решение, если det=0:

$$\begin{vmatrix} \omega_{01}^2-\omega^2 & -\dfrac{kl}{m_1l_1} \\ -\dfrac{kl}{m_2l_2} & \omega_{02}^2-\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

$$(\omega_{02}^2-\omega^2)(\omega_{01}^2-\omega^2)-\frac{k^2l^2}{m_1m_2l_1l_2}=0$$

Найдём решение системы в частных случаях для связанных контуров:

$$\begin{cases} l_1=l_2=l \\ m_1=m_2=m \end{cases} \Rightarrow \omega_{01}=\omega_{02}=\omega_0$$

$$(\omega_0^2-\omega^2)^2=\frac{k^2l^2}{m^2l_0^2}$$

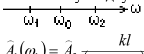
$$\omega_0^2-\omega^2=\pm\frac{kl}{ml_0}$$

$$\omega^2=\omega_0^2\mp\frac{kl}{ml_0}$$

$$\omega_{1,2}=\sqrt{\omega_0^2\mp\frac{kl}{ml_0}};\ \omega_{3,4}=-\sqrt{\omega_0^2\mp\frac{kl}{ml_0}}$$

$$\omega_{1,2}=\sqrt{\omega_0^2\mp\frac{kl}{ml_0}}$$

Две нормальные моды колебаний соответствуют двум нормальным частотам.



$$\hat A_1(\omega_1)=\hat A_2\frac{kl}{(\omega_1^2-\omega_0^2)ml_0}=$$

$$\hat A_2\frac{kl}{\left(\omega_0^2-\dfrac{kl}{ml_0}-\omega_0^2\right)}=-\hat A_2$$

Если колебания происходят на частотах ω_1, то колебания идут в противофазе:

$$\hat A_1(\omega_2)=\hat A_2\frac{kl}{\left(\omega_0^2+\dfrac{kl}{ml_1}-\omega_0^2\right)ml_0}=\hat A_2$$

При частоте ω_2 колебания идут в фазе.

Замечание:

Как преобразуются параметры:

$$\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\frac{kl}{ml_0}};\ \omega_0>\sqrt{\frac{kl}{ml_0}}$$

Если это условие не выполняется, то ω_1 – мнимая и $\hat\alpha_1=\hat A_1e^{-\omega_1 t}$ – действительная экспонента. В этом случае движение системы будет инфинитным(колеб. процессов не будет).

$$\begin{cases} \alpha_1=A_1\cos(\omega_1t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_2t+\varphi_2) \\ \alpha_2=A_1\cos(\omega_1t+\varphi_1)-A_2\cos(\omega_2t+\varphi_2) \end{cases}$$

Система, соотвеств. решению исходной системы имеет тот же вид, что и в связанных контурах и при задании начальных условий колебания будет такие же:

1)$\alpha_1(0)=A_{10}$; $\alpha_2(0)=0$; $\dot\alpha_1(0)=\dot\alpha_2(0)=0$

$$\begin{cases} \alpha_1=q_0\cos\left(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) \\ \alpha_2=q_0\sin\left(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) \end{cases}$$

2)

$\alpha_1(0)=A_{10}$; $\alpha_2(0)=0$;

$\dot\alpha_1(0)=\upsilon_{10}$; $\dot\alpha_2(0)=0$

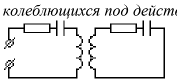
$$\begin{cases} A_{10}=A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2 \\ 0=A_1\cos\varphi_1-A_2\cos\varphi_2 \\ \upsilon_{10}=-A_1\omega_1\sin\varphi_1-A_2\omega_2\sin\varphi_2 \\ 0=-A_1\omega_1\sin\varphi_1+A_2\omega_2\sin\varphi_2 \end{cases}$$

$$tg\varphi_1=-\frac{\upsilon_{10}}{A_{10}\omega_1};\ tg\varphi_2=-\frac{\upsilon_{10}}{A_{10}\omega_2}$$

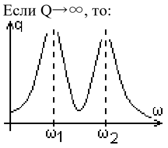
$$A_1=\frac{1}{2\omega_1}\sqrt{A_{01}^2\omega_1^2+\upsilon_{01}^2}$$

$$A_2=\frac{1}{2\omega_2}\sqrt{\upsilon_{10}^2+A_{10}^2\omega_2^2}$$

Несколько замечаний о связанных контурах, колеблющихся под действием внешней силы.



Если Q→∞, то:



Если Q конечно, тогда:

Такая система может быть использована в качестве полосового фильтра.