Кратные интегралы.

Двойные интегралы

Кратный интеграл – обобщение определенного интеграла на отрезке.

Понятие двойного интеграла

Пусть $D \subset R^2$, D – компакт (ограниченное и замкнутое множество); функция f(x,y) ограничена на D. Разобьем область D на конечное число частей произвольным образом:

$D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$; D_i - также компакт, поэтому $D_i \cap D_j$ только по границе, то есть, $D_i \cap D_j$ имеет нулевую площадь.

Диаметр области – наибольшее расстояние между точками:

$d_i = \sup\sqrt{(x_i - x_i^{'})^2 + (y_i - y_i^{'})^2}$ - диаметр области D.

Выберем в каждой из областей D_i произвольную точку ($\xi_i;\eta_i$) и составим сумму:

$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot S_{D_i}$ - интегральные суммы.

Обозначим $\lambda = \max d_i$ - мелкость разбиения.

Если существует предел интегральных сумм при мелкости разбиения стремящейся к нулю, и значение этого предела не зависит ни от выбора разбиения области D, ни от выбора точек ($\xi_i;\eta_i$), тогда этот предел называется двойным интегралом по области D:

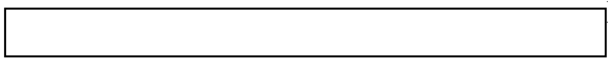
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum f(\xi_i;\eta_i)\cdot S_{D_i} .$$

Физический смысл двойного интеграла

- масса плоской пластины.

Рассмотрим плоскую пластину D. Если $\rho = const,$ то $m = \rho\cdot S_D\cdot$ Если ρ (x,y) – переменная величина, будем считать эту функцию непрерывной на D.

$D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i, D_i \cap D_j$ имеет нулевую площадь.


D

$m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i,$ m – масса пластины D.

Если диаметр d_i - достаточно малая величина, то т.к. ρ (x,y) непрерывна на D_i, ее приближенно можно считать постоянной, так как она мало меняется в силу непрерывности:

$\rho \approx const = \rho(\xi_i,\eta_i)$, где (ξ_i,η_i) - произвольная точка в D.

Тогда $m_i \approx \rho(\xi_i,\eta_i)\cdot S_{D_i}$ - масса одного кусочка, и $m \approx \sum\rho(\xi_i,\eta_i)\cdot S_{D_i}$ - масса пластины.

Если $\lambda = \max d_i \to 0,$ то приближенное равенство становится точным, и сумма переходит в интеграл: $m = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy.$

Геометрический смысл двойного интеграла

Рассмотрим тело, ограниченное снизу плоскостью XOY (z=0), сверху – поверхностью z=z(x,y), по бокам – цилиндрическими поверхностями, параллельными оси Oz (*цилиндроид*).

EMBED Equation.3 $D=\bigcup_{i=1}^{n}D_i$, EMBED Equation.3 $V=\sum_{i=1}^{n}V_i$, EMBED Equation.3 V_i - объем тела, проектируемого на D_i

z=z(x,y) – непрерывна, тогда $V_i=S_{D_i}h$,

h=f(ξ_i,η_i), где (ξ_i,η_i) - произвольная точка из D_i.

$$V\approx\sum f(\xi_i,\eta_i)\cdot S_{D_i}$$

D – проекция поверхности z(x,y) на плоскость z=0.

$$\underset{цил}{V}=\iint_D f(x,y)dxdy;$$

$$f(x,y)\equiv 1\Rightarrow S_D=\iint_D 1dxdy$$

Понятие двойного интеграла через суммы Дарбу

Пусть *D* – компакт в R^2,

***f(x,y)* – ограничена на *D*,**

***T* – разбиение области *D* на конечное число областей,**

***D*-Классы интегрируемых функций.**

Необходимое условие интегрируемости функции на компакте D – ограниченность функции.

Достаточное условие:

Если функция *f(x,y)* непрерывна на компакте *D*, то *f(x,y)* интегрируема на *D*.

Доказательство (По критерию интегрируемости):

Зафиксируем *ε>0*. Если *f(x,y)* непрерывна на компакте, то она равномерно непрерывна на нём (по теореме Кантора).

Значит, $\forall(x,y)\in D$, $\forall(x',y')\in D$: $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}<\delta\Rightarrow f(x,y)-f(x',y')<\dfrac{\varepsilon}{SD_i}$

Рассмотрим разбиение T: $D=U_{i=1}^{n}D_i$, такие что $D_i<\delta \quad \forall i=\overline{1,n}$

Поскольку *f(x,y)* непрерывна на компакте, она достигает на нем своих точных верхних и нижних граней:

$$\omega(f,T_\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}m_iS_{Di}=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)S_{Di}$$

$$\Omega(f,T_\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}M_iS_{Di}=\sum_{i=1}^{n}f(x_i',y_i')S_{Di}$$

$$\Omega(f,T_\varepsilon)-\omega(f,T_\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(f(x_i',y_i')-f(x_i,y_i))}_{<\frac{\varepsilon}{SD_i}}S_{Di}<\frac{\varepsilon}{SD_i}\sum_{i=1}^{n}S_{Di}=\varepsilon$$

Тогда по критерию интегрируемости *f(x,y)* интегрируема на *D*.

Свойства двойного интеграла

1) $\iint_D kf(x,y)dxdy=k\iint_D f(x,y)dxdy$

2) $\iint_D (f(x,y)+g(x,y))dxdy=\iint_D f(x,y)dxdy+\iint_D g(x,y)dxdy$ *– аддитивность по функции.*

3) Если $D = D_1 \cup D_2$, D_1 ,D_2 – компакты, пересечение имеет нулевую площадь, то
$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} g(x,y)dxdy$ *– аддитивность по области.*

4) $\iint\limits_D dxdy = S_D$

5) Если f(x,y)≥0, f(x,y) непрерывна, то $\iint\limits_D f(x,y)dx,dy = V$

6) Если f(x,y)≥0 $\forall$(x,y)$\in$D, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \ge 0$

7) Если f(x,y)≥g(x,y) $\forall$(x,y)$\in$D, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \ge \iint\limits_D g(x,y)dxdy$

8) $\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$

9) Оценка интеграла:

Если $m \le f(x,y) \le M$ $\forall (x,y) \in D$, то $mS_D \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le MS_D$

10) Теорема о среднем:

Если $m \le f(x,y) \le M$ $\forall (x,y) \in D$:
$\exists \mu \in [m,M]$ такое, что μ – значение функции в некоторой (•) $f(\xi,\eta)$.

Вычисление двойного интеграла

Двойной интеграл вычисляется путем сведения к повторному интегралу **по элементарной области**.

Определение: D – элементарная область в направлении оси OY, если она по бокам ограничена вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, снизу функцией $y=y_1(x)$, сверху функцией $y=y_2(x)$.

Теорема (о сведении двойного интеграла к повторному):

Пусть:

1) f – элементарная в направлении оси OY,
2) $f(x,y)$ интегрируема в D,
3) $\forall x \in [a,b]$ функция интегрируема по переменной y на отрезке $[y_1(x), y_2(x)]$,
4) $y_1(x)$, $y_2(x)$ – непрерывны на отрезке $[a,b]$,

тогда $\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy}$

Интеграл по переменной y: $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ – внутренний, он считается первым, при этом x считается константой. После вычисления внутреннего интеграла получается интеграл по переменной x , интеграл $\int\limits_a^b dx$ считается вторым.

Важное замечание о расстановке пределов интегрирования: во внутреннем интеграле пределы интегрирования – функции, во внешнем – числа*!*

Доказательство (для частного случая):

f(x,y)≥0, f(x,y) – непрерывна;

Формула объема тела через площадь поперечных сечений для функции одной переменной: $V=\int_a^b S(x)dx$, где *S(x)* – сечение площадью *x = const*; *S(x)* – площадь криволинейной трапеции $\Rightarrow$

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = S \Rightarrow V=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Повторный интеграл можно считать в другом порядке, но тогда D должна быть элементарной в направлении оси OX:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

Если область не является элементарной ни в направлении оси *OX*, ни в направлении оси *OY*, значит, её надо представить в виде объединения элементарных областей и переходить к повторному интегралу в каждой области.

Пример 1:

$$\iint_D x^2 ydxdy,$$

$$D:\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0\end{cases};\ y=\sqrt{R^2-x^2}$$

1 способ:

$$\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} x^2 ydy=\int_0^R x^2dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} ydy=\int_0^R x^2dx\frac{R^2-x^2}{2}=\frac{1}{2}\int_0^R (x^4-R^2x^2)dx=\frac{R^5}{15}$$

2 способ:

$$\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} x^2 ydy=\int_0^R dy\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} x^2 ydx=\int_0^R ydy\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\sqrt{R^2-y^2}}=\frac{1}{3}\int_0^R (R^2-y^2)^{\frac{3}{2}}ydy=-\frac{1}{6}\int_0^R (R^2-y^2)^{\frac{3}{2}}d(R^2-y^2)=$$

$$=-\frac{1}{6}\left.\frac{2(R^2-y^2)^{\frac{5}{2}}}{5}\right|_0^R=-\frac{1}{15}\left(0-R^5\right)=\frac{R^5}{15}$$

Пример 2.

$$\iint_D (x+2y)dxdy$$

$$D:\begin{cases} y=x^2 \\ y=0 \\ x+y-2=0\end{cases}$$

$$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y}(x+2y)dx=\int_0^1 dy\left(\frac{x^2}{2}+2xy\right)\Bigg|_{\sqrt{y}}^{2-y}=\int_0^1\left(\frac{(2-y)^2-y}{2}+2y(2-y)-2y\sqrt{y}\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(2-\frac{5y}{2}+\frac{y^2}{2}+4y-2y^{\frac{3}{2}}\right)dy=\left(2y+\frac{3y^2}{4}-\frac{1y^3}{2}-\frac{4y^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_0^1=2+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{4}{5}=1{,}45$$

Пример 3.
Задание: изменить порядок интегрирования.

$$\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy=\iint_D f(x,y)dxdy=$$

$$D:\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le\sqrt{2x-x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le 2\\ \begin{cases}y\ge 0\\ y^2\le 2x-x^2\end{cases}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1\\ 0\le x\le 2\\ y\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\pm\sqrt{1-y^2}\\ 0\le y\le 1\end{cases};$$

$$=\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx\,;$$

Пример 4:
Задание: изменить порядок интегрирования.

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt[3]{x^2}}f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}}f(x,y)dy=\iint_{D_1}f(x,y)dxdy+\iint_{D_2}f(x,y)dxdy=$$

Строим область определения на координатной плоскости. Выражаем x через y и меняем пределы интегрирования:

$$D_1:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le x^{\frac{2}{3}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ x=y^{\frac{3}{2}}\end{cases};$$

$$D_2:\begin{cases}1\le x\le 2\\ 0\le y\le 1-\sqrt{4x-x^2-3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1\le x\le 2\\ \begin{cases}(y-1)^2+(x-2)^2=1\\ 0\le y\le 1\end{cases}\end{cases}$$

$$(x-2)^2=1-(y-1)^2$$

$$x=2\pm\sqrt{2y-y^2}$$

$(D=D_1\cup D_2)$ Получилось, что по y область оказалась непрерывна. Это позволяет считать один интеграл вместо двух.

$$=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{y^{\frac{3}{2}}}^{2-\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)dx\,.$$

Криволинейные координаты

Пусть есть декартова система координат. В ней взяли область D – квадрируемый компакт. Нужно перейти в новые координаты U,V. В некоторых случаях посчитать интеграл в криволинейных координатах бывает намного быстрее и удобнее, чем в декартовых.

$(x, y) \in D \Rightarrow (U,V) \in \Delta$ где U,V - дифференцируемые функции у которых существуют частные производные

$$\begin{cases} x = x(U,V) \\ y = y(U,V) \end{cases}$$

$I = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(U,V)}$ - Якобиан.

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial U} & \dfrac{\partial x}{\partial V} \\ \dfrac{\partial y}{\partial U} & \dfrac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix} \neq 0$$ матрица Якоби.

В плоскости U,V вводим координатную сетку : $U=const$, $V=const$;

При данном отражении семейство вертикальных прямых $U=const$ переходят в семейство кривых в плоскости XOY.

$$U = const \Rightarrow \begin{cases} x = x(U,V) \\ y = y(U,V) \end{cases} \quad (1)$$

$$V = const \Rightarrow \begin{cases} x = x(U,V) \\ y = y(U,V) \end{cases} \quad (2)$$

Эти отображения в x,y задают криволинейные координаты.

Пример 1:

$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{cases}$ **;** (ρ,φ)-полярные координаты.

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial U} & \dfrac{\partial x}{\partial V} \\ \dfrac{\partial y}{\partial U} & \dfrac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

$$\rho = C \Rightarrow \begin{cases} x = C\cos\varphi \\ y = C\sin\varphi \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = C^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

$$x^2 + y^2 = C^2 - окружности.$$

$$\varphi = C \Rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos C \\ y = \rho\sin C \end{cases}$$

$$\frac{y}{x} = tgC$$

$$y = tgC \cdot x - лучи.$$

$$\Delta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3} \le \varphi \le \dfrac{2\pi}{3} \\ 1 \le \rho \le 2 \end{cases}$$

$$tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$tg\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Площадь фигуры в криволинейных координатах

$$\boxed{S_D = \iint\limits_D dxdy}$$

Элементарный прямоугольник в плоскости U,V со сторонами ΔU, ΔV, переходит в криволинейный четырехугольник $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, $D(x_4,y_4)$.

$X_1 = x(U,V)$ $\qquad$ $Y_1 = y(U,V)$

$X_1 = x(U,V+\Delta V)$ $\qquad$ $Y_2 = y_2(U,V+\Delta V)$

$X_1 = x(U+\Delta U,V+\Delta V)$ $\qquad$ $Y_3 = y_3$

Можно считать площадь криволинейного четырехугольника приблизительно равной площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ (при равных приращениях ΔU, ΔV).

$$S_{ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}((y_4 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_4 - x_1)(y_2 - y_1))$$

$$S_{ABCD} \approx \left|(y_4 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_4 - x_1)(y_2 - y_1)\right| =$$

$$\left|\big(x(U+\Delta U,V) - x(U,V)\big)\big(y(U,V+\Delta V) - y(U,V)\big) - \big(x(U,V+\Delta V) - x(U,V)\big)\big(y(U+\Delta U,V) - y(U,V)\big)\right| =$$

$$= \left|\frac{\delta x}{\delta U}\Delta U \frac{\delta y}{\delta V}\Delta V - \frac{\delta x}{\delta V}\Delta V \frac{\delta y}{\delta U}\Delta U\right| =$$

$$= \Delta V \Delta U \left|\frac{\delta x}{\delta U}\frac{\delta y}{\delta V} - \frac{\delta x}{\delta V}\frac{\delta y}{\delta U}\right|$$

Малый элемент площади в криволинейных координатах $\Delta S \approx |I| \Delta U \Delta V$.

При переходе к дифференциалам получим: $dS = |I| dUdV$

$$\boxed{S_D = \iint\limits_\Delta |I(U,V)| dUdV}$$

$\boxed{S_D = \iint\limits_\Delta \rho d\rho d\varphi}$ -в полярных координатах.

Замена переменных в двойном интеграле

Пусть f(x,y) определена и непрерывна на квадрируемом компакте D, (x,y) $\in D$, заданы формулы перехода:

x=x(u,v)

y=y(u,v), $\qquad D \to \Delta$

И существуют частные производные $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$, непрерывные в области Δ.

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial U} & \frac{\partial x}{\partial V} \\ \frac{\partial y}{\partial U} & \frac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Delta f(x(u,v), y(u,v)) \,|\, I \,|\, dudv.$

Доказательство:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) S_{D_i} =$$

$$S_{D_i} = \iint_{\Delta} |I|\, dudv \overset{\text{теор.о.среднем}}{=} |I(u_i, v_i)| \cdot S_{D_i}$$

$\exists (u_i, v_i) \in \Delta_i$.

$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$,

$D_i \cap D_j -$ имеет нулевую площадь,

(x_i, y_i) - произвольная точка из D_i.

Так как в интегральной сумме точка выбрана произвольно, то выберем

$x_i = x(u_i, v_i)$,

$y_i = y(u_i, v_i)$.

$\lambda = \max_{1 \le i \le n} diam D_i$

$\lambda' = \max_{1 \le i \le n} diam \Delta_i$

$$= \lim_{\lambda' \to 0} \sum f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)) |I(u_i, v_i)| S_{D_i} =$$

$$= \iint_{\Delta} f(x(u,v), y(u,v)) |I|\, dudv.$$

■

Пример 1.

$$\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dxdy =$$

$\Omega : x^2 + y^2 = 2x$

$y^2 + (x-1)^2 = 1$

Преобразуем сразу в полярные координаты:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{cases}$$

Тогда, подставив в Ω формулы перехода, получаем:

$\rho^2 \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi = 2\rho\cos\varphi$

$p = 2\cos\varphi$

$x^2 + y^2 = \rho^2$

Далее, чтобы посчитать такой интеграл, необходимо найти якобиан (I= $\begin{vmatrix} x'_{\varphi} & y'_{\varphi} \\ x'_{\rho} & y'_{\rho} \end{vmatrix} \ne 0!$). Для полярной системы координат модуль якобиана равен:

|I|=| $\begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix}$ |=ρ.

$$= \iint_{\Omega} f(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{2\cos\varphi} \rho^3 d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{\rho^4}{4} \Bigg|_0^{2\cos\varphi} \right) = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 16\cos^4\varphi d\varphi =$$

Сделаем замену для косинуса в 4 степени.

$$\cos^4\varphi = \left(\frac{\cos 2\varphi + 1}{2}\right)^2 = \frac{\cos^2 2\varphi + 2\cos 2\varphi + 1}{4}$$

Тогда аналогично заменяем косинус в квадрате и видим, что интегралы от них дают нули.

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 2\varphi + 2\cos 2\varphi + 1)d\varphi = \varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \sin 2\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}(\varphi + \sin 4\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Пример 2.

Задание: изменить порядок интегрирования в повторном интеграле.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\rho,\varphi)d\rho = \iint_\Omega f(\rho,\varphi)d\rho d\varphi =$$

Чтобы изменить порядок интегрирования, нужно принять $\rho = const$, то есть, проводить окружности.

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$0 \le \rho \le a\sqrt{\sin 2\varphi}$

Далее выполним следующие преобразования:

Выразим φ через ρ.

$\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi$

$\sin 2\varphi = \frac{\rho^2}{a^2}$ теперь $\begin{cases} 2\varphi = \arcsin\left(\frac{\rho^2}{a^2}\right) \\ 2\varphi = \pi - \arcsin\left(\frac{\rho^2}{a^2}\right) \end{cases}$, итак, $\begin{cases} \varphi = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\rho^2}{a^2}\right) \\ \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\rho^2}{a^2}\right) \end{cases}$

Таким образом, получаем следующие пределы:

$$\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\rho^2}{a^2}\right) \le \varphi \le \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\rho^2}{a^2}\right)$$

$$0 \le \rho \le a$$

Тогда исходный интеграл будет выглядеть следующим образом:

$$= \int_0^a \rho d\rho \int_{\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\rho^2}{a^2}\right)}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\rho^2}{a^2}\right)} f(\rho,\varphi)d\varphi$$

Пример 3.

Задание: вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

$\begin{matrix} xy = a^2 \\ xy = b^2 \end{matrix}$, $\begin{matrix} y = \alpha x \\ y = \beta x \end{matrix}$, где $\begin{matrix} 0 \le \alpha \le \beta \\ 0 \le a \le b \end{matrix}$.

Задание можно выполнить и в декартовых координатах, но для этого нужно делать два «разреза» области интегрирования, чтобы перейти к элементарным областям, поэтому проще сделать замену переменной и перейти в криволинейные координаты:

$\begin{cases} xy = U \\ \dfrac{y}{x} = V \end{cases}$,где $\begin{cases} x = x(U,V) \\ y = y(U,V) \end{cases}$,тогда $\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{U}{V}} \\ y = \sqrt{UV} \end{cases}$.

Назовем область ,ограниченную линиями в новых координатах, элементарной областью Δ.

$\Delta = \begin{cases} a^2 \le U \le b^2 \\ \alpha \le V \le \beta \end{cases}$, тогда $S = \iint\limits_{\Delta} \Upsilon(U,V)dUdV =$

Посчитаем якобиан:

$$I = \begin{vmatrix} x'_U & x'_V \\ y'_U & y'_V \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{UV}} & -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{U}{V^3}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{V}{U}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{U}{V}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2V}$$

И подставим его в интеграл:

$$= \iint\limits_{\Delta} \frac{1}{2V} dUdV = \frac{1}{2}\int\limits_{a^2}^{b^2} dU \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dV}{V} = \frac{1}{2}U\Big|_{a^2}^{b^2} \ln|V|\Big|_{\alpha}^{\beta}$$

$$S = \frac{b^2 - a^2}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$$

Площадь поверхности

Пусть z=z(x,y)-поверхность, (x,y)є*D*, где *D* – квадрируемый компакт.

Понятие площади поверхности:

Пусть $\exists \dfrac{\partial z}{\partial z}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ - непрерывны на D. Тогда в каждой точке поверхности существует касательная плоскость к поверхности z(x,y).

Разбиваем область *D* на конечное число частей:

$\tau : D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$; где D_i - квадрируемые компакты, $D_i \cap D_j$ имеет нулевую площадь.

Выберем в области D точку $M \in D_i$ и построим касательную плоскость к поверхности в точке $M'(x, y, z(x, y))$, обозначим через D'_i часть касательной плоскости, которая проецируется на область D.

$$\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sigma(t)$$

<u>Определение</u> площади поверхности : $\sigma(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} S(t)$, где $\lambda = \max d_i$ – максимальный

радиус. Переходя к пределу, получим:

$\sigma = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} S_{D'_i}$ - площадь поверхности.

Площадь проекции

Пусть есть две плоскости, угол между которыми γ. И есть 2 системы координат: XOY и XOY′; $D' \subset XOY'$. D – проекция D′

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y'\cos\gamma \end{cases}$$ - формулы перехода.

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\gamma \end{vmatrix}$$ =cosγ – якобиан.

$$S_D = \iint_D |I| dx'dy' = \iint_D |\cos\gamma| dx'dy' = \cos\gamma \iint_D dx'dy' = |\cos\gamma| S_{D'}$$

$$S_D = |\cos\gamma| S_{D'}$$

Вычисление площади поверхности.

Пусть *z=z(x,y)*, где *(x,y)ϵD* и $\exists \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$,непрерывные в области *D.*

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

Доказательство: по определению $\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} SD_i'$, где D_i' лежит в касательной плоскости, проведенной к поверхности *z=z(x,y)*в точке $M_i(x_i, y_i)$.

$$z = z_i(x_i, y_i) + \frac{\partial z}{\partial x}(M_i)(x - x_i) + \frac{\partial z}{\partial y}(M_i)(y - y_i)$$

D-проекция D_i; D_i лежит в плоскости XOY. $S_{Di} = |\cos\gamma| S_{D'i}$

γ_i -угол между плоскостями. $\gamma_i = \angle(\vec{n}_1 \vec{n}_2)$, где $\vec{n}_1$ -вектор нормали к касательной плоскости.

$$\vec{n}_1 = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}(x_i, y_i), \frac{\partial z}{\partial y}(x_i, y_i), -1 \right\}$$

$$\vec{n}_2 = \{0, 0, -1\}$$

$$\cos\gamma_i = \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_i, y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x_i, y_i)\right)^2 + 1}}$$

$$\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\cos\gamma_i} S_{Di} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_i, y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x_i, y_i)\right)^2 + 1}$$

Для f= $\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_i, y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x_i, y_i)\right)^2 + 1}$ -это интегральные суммы.

$$\sigma = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_i, y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x_i, y_i)\right)^2 + 1} dxdy \ \blacksquare$$

Пример:

Найти площадь части поверхности $x^2 + z^2 = a^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$.

$$z = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\sigma = 8\sigma_1 = 8\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_i, y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x_i, y_i)\right)^2 + 1}dxdy = 8\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dy =$$

$$= 8\int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} y\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = 8\int_0^a adx = 8a^2$$

Тройной интеграл

Понятие тройного интеграла

Пусть $G \subset R^3$, G – кубируемый компакт (ограниченное и замкнутое множество); функция f(x,y,z) определена и ограничена на G. Разобьем область G на конечное число частей произвольным образом:

$G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$;G_i - также компакт, поэтому $G_i \cap G_j$ только по границе, то есть, $G_i \cap G_j$ имеет нулевой объем.

Выберем в каждой из областей G_i произвольную точку ($\xi_i;\eta_i;\delta_i$) и составим сумму:

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\delta_i)\cdot V_{G_l}$ - интегральные суммы.

Обозначим $\lambda = \max d_i$ - мелкость разбиения.

Если существует предел интегральных сумм при мелкости разбиения стремящейся к нулю, и значение этого предела не зависит ни от выбора разбиения области G, ни от выбора точек ($\xi_i;\eta_i;\delta_i$), тогда этот предел называется тройным интегралом по области G:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum f(\xi_i;\eta_i;\delta_i)\cdot V_{G_i}\ .$$

Физический смысл тройного интеграла – масса объемного тела (тройной интеграл от плотности):

$$m = \iiint_G \rho(x,y,z)dxdydz\ .$$

Необходимое условие интегрируемости функции: если функция непрерывна, то она интегрируема. Если множество точек разрыва имеет нулевой объем, то функция также интегрируема.

Свойства тройного интеграла

1) $\iiint_G c\cdot f(x,y,z)dxdydz = c\iiint_G f(x,y,z)dxdydz$

2) *Аддитивность по функции:*

$$\iiint_G (f(x,y,z)+g(x,y,z))dxdydz = \iiint_G f(x,y,z)dxdydz + \iiint_G g(x,y,z)dxdydz$$

3) *Аддитивность по области:*

(Если G= $G_1 \cup G_2, G_1, G_2$ *– компакты и* $G_1 \cap G_2$ *имеет нулевой объем)*

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{G_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{G_2} f(x,y,z)dxdydz$$

4) $\iiint_G 1dxdydz = V_G$

5) $\iiint_G f(x,y,z)dxdydz \ge 0,$ если $\forall(x,y,z)\in G\ \ f(x,y,z)\ge 0$

6) $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz \ge \iiint\limits_G g(x,y,z)dxdydz,$ если $\forall (x,y,z)\in G \;\; f(x,y,z)\ge g(x,y,z)$

7) $|\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz| \le \iiint\limits_G |f(x,y,z)|\,dxdydz$

8) *Оценка интеграла:*

Если $m \le f(x,y,z)\le M \;\; \forall (x,y,z)\in G$*, то* $m\cdot V_G \le \iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz \le M\cdot V_G$

10) *Теорема о среднем:*

Если $m \le f(x,y,z)\le M \;\; \forall (x,y,z)\in G$*, тогда* $\exists \mu \in [m,M]$*, такое что*

$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \mu V_G$

Если функция f(x,y,z) непрерывна, то μ *можно принять за значение f(x,y,z) в некоторой точке.*

Вычисление тройного интеграла

<u>*Определение:*</u>

G – элементарная область в направлении оси OZ, если она ограничена:

сверху – поверхностью $z=z_1(x,y)$;

снизу – поверхностью $z=z_2(x,y)$;

по бокам – цилиндрической поверхностью, параллельной оси OZ.

D – проекция области G на плоскость XOY.

Теорема(о сведении тройного интеграла к повторному):

Пусть: 1) G – элементарная область в направлении оси OZ;

2)f(x,y,z) интегрируема на G;

3) $\forall (x,y)\in D$ функция $f(x,y,z)$ интегрируема по переменной z на $[z_1(x,y); z_2(x,y)]$;

4) $z_1(x,y), z_2(x,y)$ непрерывны на G.

Тогда $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

(Сначала считаем внутренний интеграл по переменной z, при этом x,y – постоянные. Потом вычисляем двойной интеграл).

Аналогично можно определить элементарные области в направлении осей OX и OY.

Вычисление объемов

G – элементарная область в направлении оси OZ.

$V_G = \iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz = \iint\limits_D (z_2(x,y)-z_1(x,y))dxdy$.

Пример: вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$x^2+y^2+z^2=4a^2$ - сфера с центром в т.(0,0) и радиусом R=2a;

x^2+y^2-2ay=0 => $x^2+(y-a)^2=a^2$ - цилиндр.

$$V=\iiint\limits_G dxdydz=\iint\limits_D(\sqrt{4a^2-x^2-y^2}+\sqrt{4a^2-(x^2+y^2)})dxdy=$$

$$2\iint\sqrt{4a^2-(x^2+y^2)}dxdy=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\sqrt{4a^2-\rho^2}\,2\rho d\rho=$$

$$=-2\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int(4a^2-\rho^2)d(4a^2-\rho^2)=-2\cdot\frac{2}{3}\int\limits_0^{\pi/2}(4a^2-\rho^2)^{3/2}\Big|_0^{2a\sin\varphi}=$$

$$=-\frac{16a^3}{3}\cdot 2\int\limits_0^{\pi/2}(\cos^3\varphi-1)d\varphi=\frac{16a^3}{3}\cdot 2(\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)d\sin\varphi=$$

$$=\frac{16a^3}{3}\cdot 2-(\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{16a^3}{3}-\frac{4}{3}$$

Замена переменных в тройном интеграле

(x,y,z)$\in G\to(u,v,w)\in G_1$

Формулы перехода:

$$\begin{cases} x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w)\\ z=z(u,v,w), \end{cases}$$

Все частные производные существуют и непрерывны в G_1, и якобиан J= $\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w\\ y'_u & y'_v & y'_w\\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$

$\neq 0$

Тогда:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{G_1} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J(u,v,w)|dudvdw.$$

Цилиндрические координаты

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ z=z, \end{cases}$$

$(\varphi,\rho,z)-$ цилиндрические координаты.

$$\boldsymbol{I}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho$$

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{G_1} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz-$$

формула перехода к цилиндрическим координатам.

<u>Пример:</u>

$$\iiint\limits_G((x+y)^2-z)dxdydz=\iiint\limits_{G_1}(\rho^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2-z)\rho d\rho d\varphi dz=$$

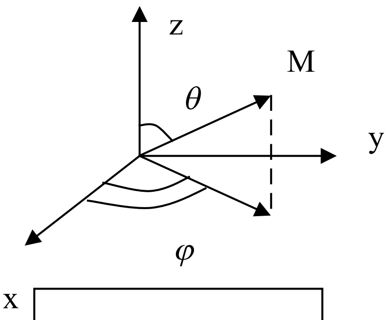
G: $(z-1)^2=x^2+y^2$,

$$\begin{cases} z=0.\\ x=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

y= $\rho \sin \varphi$
z=z
z=$1-\sqrt{x^2+y^2}$ =1- ρ

$$==\iint_{D_1} d\varphi d\rho \int_0^{1-\rho} \;(\rho^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2 - z)\;\rho dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_0^{1-\rho} \rho^3(1+\sin 2\varphi)dz = \frac{\pi}{10}.$$

Сферические координаты



r – расстояние от т.М до начала координат;
θ - угол между положительным направлением оси OZ и радиус-вектором т.М;
φ - угол между положительным направлением оси OX и радиус-вектором проекции т.М на плоскость XOY;
Тогда (r,θ,φ) - сферические координаты.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}}$$ - формулы перехода к сферическим координатам, $$\boxed{\begin{aligned} &r \ge 0 \\ &0 \le \theta \le \pi \\ &0 \le \varphi \le 2\pi \end{aligned}}$$

Используя формулу замены переменных в тройном интеграле:
$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{G_1} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|\,I\,|\,dudvdw,$$
запишем частный случай этой формулы для перехода к сферическим координатам. Для этого вычислим якобиан:

$$I(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -r\sin\theta\sin\varphi \cdot \begin{vmatrix} \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} -$$

$$-r\sin\theta\cos\varphi \cdot \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} = -r\sin\theta\sin\varphi\cdot(-r\sin^2\theta\sin\varphi - r\cos^2\theta\sin\varphi) -$$

$$-r\sin\theta\cos^2\varphi\cdot(-r\sin^2\theta - r\cos^2\theta) = r^2\sin\theta\sin^2\varphi + r^2\sin\theta\cos^2\varphi = r^2\sin\theta.$$

$\boxed{\boldsymbol{I} = r^2\sin\theta,}$ I≥ 0, так как $0 \le \theta \le \pi$.

Тогда:

$$\boxed{\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{G_1} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta drd\varphi d\theta}$$ - формула перехода к сферическим координатам.

Замечание: иногда через θ обозначают другой угол – угол между радиус-вектором точки М и плоскостью XOY. В таком случае синус и косинус аргумента θ нужно поменять местами.

<u>Пример 1.</u>Вычислить интеграл:

$$\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz =$$

G: $x^2+y^2+z^2=$z $\to r^2 = r\cos\theta \to r=\cos\theta$

$x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$ - окружность с центром в точке $(0,0,\frac{1}{2})$ и радиусом r=$\frac{1}{2}$.

$$=\iiint\limits_{G_1} r\cdot r^2\sin\theta drd\theta r\varphi = \int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{\cos\theta} r^3\sin\theta dr = \frac{\pi}{10}.$$

Пример 2. Найти объем эллипсоида.

$$\begin{cases} x = r\cdot\sin\theta\cos\varphi\cdot a \\ y = r\cdot\sin\theta\sin\varphi\cdot b \\ z = r\cdot\cos\theta\cdot c \end{cases}$$

- ***обобщенные сферические координаты.***

Тогда уравнение эллипсоида имеет вид **r=1,** $I = abc\cdot r^2\cdot\sin\theta$, тогда объем эллипсоида может быть вычислен следующим образом:

$$V=\iiint\limits_{G_1}|I|drd\theta d\varphi = abc\cdot\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}d\theta\int\limits_0^{1}r^2\cdot\sin\theta dr = abc\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}d\theta\cdot\frac{r^3}{3}\sin\theta =$$

$$=\frac{1}{3}abc\cdot\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3}abc\int\limits_0^{2\pi}d\varphi = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Физический смысл кратного интеграла

Физический смысл кратного интеграла – масса плоской пластины $m=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy.$

Опр. Статический момент материальной точки S_x - произведение массы этой материальной точки на расстояние до оси OX.

$dS_x = ydm = y\rho(x,y)dxdy,$

$S_x = \iint\limits_D y\cdot\rho(x,y)dxdy$ - статический момент плоской фигуры относительно оси OX.

Опр. Центром тяжести фигуры называется такая точка (x_0, y_0), что если сосредоточить в ней всю массу тела, то ее статический момент равен статическому моменту всей фигуры.

$$S_x = m\cdot y_c \quad\Rightarrow\quad y_c=\frac{S_x}{m}=\frac{\iint\limits_D y\cdot\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D\rho(x,y)dxdy};$$

$$S_y = m\cdot x_c \quad\Rightarrow\quad x_c=\frac{S_y}{m}=\frac{\iint\limits_D x\cdot\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D\rho(x,y)dxdy}.$$

Если фигура однородная, то $\rho = const$, и формулы упрощаются до вида $x_c=\frac{\iint\limits_D xdxdy}{\iint\limits_D dxdy}$,

$y_c = \dfrac{\iint\limits_D y dx dy}{\iint\limits_D dx dy}$. Отметим, что знаменатели дробей равны между собой и равны площади фигуры.

Связь между геометрическим и физическим смыслами кратного интеграла

$V = \iint\limits_D f(x,y) dx dy$ - объем цилиндроида, ограниченного сверху поверхностью z=f(x,y).

Пусть цилиндроид ограничен сверху плоскостью z=ax+by+c. Тогда

$V = a\iint\limits_D x dx dy + b\iint\limits_D y dx dy + c\iint\limits_D dx dy$ или

$$V = \iint\limits_D dx dy \left[a \cdot \frac{\iint\limits_D x dx dy}{\iint\limits_D dx dy} + b \cdot \frac{\iint\limits_D y dx dy}{\iint\limits_D dx dy} + c \right] = S_D \cdot (ax_c + by_c + c).$$

Объем цилиндроида с плоской крышкой равен произведению площади основания на высоту, проведенную из центра тяжести.

Момент инерции

$I_x = \iint y^2 \cdot \rho(x,y) dx dy$ - момент инерции плоской фигуры относительно оси OX,

$I_y = \iint x^2 \cdot \rho(x,y) dx dy$ - момент инерции плоской фигуры относительно оси OY;

$I_O = \iint x^2 + y^2 \cdot \rho(x,y) dx dy$ - момент инерции плоской фигуры относительно начала координат.

Момент инерции плоской фигуры относительно точки равен сумме моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в этой точке и лежащих в данной плоскости:

$I_O = I_x + I_y$.

Определим теперь моменты инерции объемного тела относительно координатных плоскостей.

$m = \iiint\limits_G \rho(x,y,z) dx dy dz$ - масса объемного тела,

$S_{yz} = \iiint\limits_G x\rho(x,y,z) dx dy dz$ - статический момент тела относительно плоскости YOZ.

Аналогично определяются статические моменты относительно плоскостей XOZ и XOY.

$x_c = \dfrac{S_{yz}}{m}$,

$y_c = \dfrac{S_{xz}}{m}$,

$z_c = \dfrac{S_{yx}}{m}$.

Тогда получим:

$I_{xz} = \iiint\limits_G y^2 \cdot \rho(x, y, z)dxdydz$ - момент инерции объемного тела относительно плоскости XOZ (моменты инерции относительно плоскостей YOZ и XOY определяются аналогично);

$I_y = \iiint\limits_G (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz$ - момент инерции объемного тела относительно оси Oy (моменты инерции относительно осей Ox и Oz определяются аналогично);

$I_O = \iiint\limits_G (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz$ - момент инерции объемного тела относительно начала координат.