Локальный экстремум

Пусть в некоторой области $D \subset R^n$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ задана функция $u = f(x) \equiv f(x_1, \ldots, x_n)$ и точка $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ является внутренней точкой области D.

Определение. x_0 – точка локального максимума (минимума) функции f, если существует окрестность $S(x_0, \delta) = \{x : 0 < \rho(x, x_0) < \delta\}$ точки x_0, что $\forall x \in S(x_0, \delta) \cap D$ выполняется неравенство $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$).

Точки минимума и максимума называются точками экстремума.

Если функция f имеет в точке x_0 локальный экстремум, то полное приращение $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$, $x \in S(x_0, \delta) \cap D$ этой функции в точке x_0 удовлетворяет условию $\Delta f(x_0) \leq 0$ (в случае локального максимума), $\Delta f(x_0) \geq 0$ (в случае локального минимума).

Необходимое условие существования локального экстремума. Если x_0 – точка локального экстремума функции f, то $df(x_0) = 0$ (если функция f дифференцируема в точке x_0!).

Точки, в которых выполняется это условие, называются стационарными точками. Функция f может принимать локальный экстремум только в стационарных точках или в точках, в которых частные производные первого порядка имеют бесконечные значения или вовсе не существуют. Все эти точки называются точками, подозрительными на экстремум.

Достаточное условие существования локального экстремума. Пусть в некоторой окрестности стационарной точки x_0 функция f дважды дифференцируема, и все частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i, j = \overline{1, n})$ непрерывны в точке x_0. Тогда, если второй дифференциал $d^2 f(x_0) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$, вычисленный в точке x_0, является отрицательно определенной (положительно определенной) квадратичной формой, то x_0 – точка локального максимума (минимума), а если второй дифференциал является неопределенной квадратичной формой, то в стационарной точке экстремума нет.

То есть, если $d^2 f(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимума, если $d^2 f(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального минимума.

Частные случаи.

1) Рассмотрим случай функции двух переменных $u = f(x, y)$. Пусть (x_0, y_0) – стационарная точка, то есть $df(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Обозначим $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a_{11}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = a_{12}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = a_{22}$ непрерывные в точке (x_0, y_0). Если в точке (x_0, y_0) $\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ (это означает, что квадратичная форма знакоопределена), то (x_0, y_0) – точка локального экстремума функции f. Если $\Delta_1 = a_{11} < 0$, то (x_0, y_0) – точка локального максимума. Если $\Delta_1 = a_{11} > 0$, то (x_0, y_0) – точка локального минимума. Если $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то функция f не имеет экстремума в этой точке. Случай,

когда $\Delta(x_0, y_0) = 0$, требует дополнительных исследований с привлечением высших производных (и вообще говоря, не входит в программу нашего курса).

Пусть в некоторой окрестности точки x_0 функция $u = f(x) \equiv f(x_1, \ldots, x_n)$ m раз дифференцируема, и все частные производные m-го порядка непрерывны в этой точке, причем $df(x_0) = 0, d^2 f(x_0) = \ldots = d^{m-1} f(x_0) = 0, d^m f(x_0) \neq 0$. Тогда если m нечетное, то точка x_0 не является экстремальной, если же m четное, то в точке x_0 функция f имеет экстремум: локальный максимум, если $d^m f(x_0) < 0$, и локальный минимум, если $d^m f(x_0) > 0$.

2) Рассмотрим случай функции трех переменных $u = f(x, y, z)$. Пусть (x_0, y_0, z_0) – стационарная точка, то есть $d f(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0) = 0$. Обозначим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a_{11}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = a_{12}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = a_{13}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = a_{21}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = a_{22}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = a_{23}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = a_{31}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = a_{32}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = a_{33}$$

Если $\Delta_1 = a_{11} > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$ в точке (x_0, y_0, z_0), то (x_0, y_0, z_0) – точка локального минимума. Если $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$ в точке (x_0, y_0, z_0), то (x_0, y_0, z_0) – точка локального максимума.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = x^2 - (y-1)^2$.

Решение

Для нахождения стационарных точек (их координаты удовлетворяют $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$) получаем систему уравнений $\begin{cases} 2x = 0 \\ -2(y-1) = 0 \end{cases}$. Решению этой системы $x = 0, y = 1$ соответствует единственная стационарная точка (0,1) на плоскости Oxy. Вычислим $\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ в этой точке. $\Delta(0,1) = 2 \cdot (-2) = -4 < 0$. Таким образом, в силу достаточных условий отсутствия экстремума, получаем, что данная функция не имеет точек экстремума.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ в области $x > 0, y > 0$.

Решение

Координаты стационарных точек удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} y - \frac{50}{x^2} = 0 \\ x - \frac{20}{y^2} = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что стационарной точкой является точка (5,2). В этой точке $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{4}{5}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 5$ и $\Delta = 3 > 0$. Следовательно, в точке (5,2) данная функция имеет экстремум, а именно минимум: $f_{\min}(x, y) = f(5,2) = 30$.

Замечание: точка (0,0), в которой не существуют частные производные по x и y, не входит в область определения функции.

Пример 3. Найти точки экстремума функции $f(x,y)=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$ в области $D: 0\le x\le \pi/2,\ 0\le y\le \pi/2$.

Решение

Подозрительные на экстремум точки находим, решая систему уравнений $\begin{cases}\cos x-\sin(x-y)=0\\ -\sin y+\sin(x-y)=0\end{cases}$. Складывая уравнения, получаем $\sin y=\cos x$, откуда $y=\frac{\pi}{2}-x$.

Подставляем значение $y=\frac{\pi}{2}-x$ в первое уравнение, находим, что в области D система имеет единственное решение $x=\frac{\pi}{3},\ y=\frac{\pi}{6}$. Тогда $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ является стационарной точкой. Вычислим $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\sin x-\cos(x-y),\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\cos(x-y),\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\cos y-\cos(x-y)$ в точке $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$.Они соответственно равны: $-\sqrt{3};-\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{2}$. В стационарной точке $\Delta=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{9}{4}>0$, а $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\sqrt{3}<0$, значит данная функция принимает в этой точке максимум: $f_{\max}(x,y)=f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2$.

Координаты стационарных точек удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3-4x=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=4y^3=0\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}x(x-1)(x+1)=0\\ y=0\end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что стационарными точками является точки $(0,0),(\pm 1,0)$. Находим $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2-4,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y^2$.

Очевидно, что $\Delta=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$ в стационарных точках $(0,0),(\pm 1,0)$. Как можно поступить в этом случае, не используя производные высших порядков?

Рассмотрим точку (0,0). Рассмотрим полное приращение функции f в точке (0,0):

$\Delta f(0,0)=f(0+\varepsilon_1,0+\varepsilon_2)-f(0,0)=\varepsilon_1^4+\varepsilon_2^4-2\varepsilon_1^2$. Если $\varepsilon_2=\varepsilon_1,\ 0<\varepsilon_1<1$, то $\Delta f(0,0)=\varepsilon_1^4+\varepsilon_1^4-2\varepsilon_1^2=2\varepsilon_1^2\left(\varepsilon_1^2-1\right)<0$. Если $\varepsilon_2=-\sqrt[4]{2}\sqrt{\varepsilon_1},\ 0<\varepsilon_1$, то $\Delta f(0,0)=\varepsilon_1^4+2\varepsilon_1^2-2\varepsilon_1^2=\varepsilon_1^4>0$. Следовательно, полное приращение $\Delta f(0,0)$ принимает значение разных знаков, поэтому точка (0,0) не является экстремальной.

Рассмотрим точки $(\pm 1,0)$. $f(\pm 1,0)=1+0-2=-1$. Рассмотрим полное приращение функции f в точках $(\pm 1,0)$:

$\Delta f(\pm 1,0)=f(\pm 1+\varepsilon_1,0+\varepsilon_2)-f(\pm 1,0)=(\pm 1+\varepsilon_1)^4+\varepsilon_2^4-2(\pm 1+\varepsilon_1)^2+1=((\pm 1+\varepsilon_1)^2-1)^2+\varepsilon_2^4\ge 0$.

Следовательно, данная функция принимает в точках $(\pm 1,0)$ минимум: $f_{\min}=f(\pm 1,0)=-1$.

Пример 4. Найти экстремумы функции

$$f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2+12xy+2z.$$

Решение.

Функция определена на всем трехмерном пространстве, непрерывная, дифференцируема любое число раз.

Находим точки, подозрительные на экстремум:

$$f'_x=3x^2+12y \qquad \begin{cases}3x^2+12y=0\\ 2y+12x=0\\ 2z+2=0\end{cases} \qquad \mathrm{M}_1(0,0,-1)$$

$$f'_y=2y+12x \qquad \mathrm{M}_2(24,-144,-1)$$

$$f'_z=2z+2$$

Поскольку $df=(3x^2+12y)dx+(2y+12x)dy+(2z+2)dz$,то

$d^2f=6xdx^2+12dxdy+2dy^2+12dxdy+2dz^2=6xdx^2+24dxdy+2dy^2+2dz^2$.

Тогда $d^2f(0,0,-1)=24dx\cdot dy+2dy^2+2dz^2$.

Если выбрать $dy=dz=-dx$, то $d^2f(0,0,-1)<0$.

Если выбрать $dy=dz=dx$, то $d^2f(0,0,-1)>0$, $d^2f(0,0,1)$ является знакопеременной величиной, т.е. в $\mathrm{M}_1(0,0,-1)$ экстремума нет.

$d^2f(24,-144,-1)=144dx^2+24dxdy+2dy^2+2dz^2=(12dx+dy)^2+dy^2+2dz^2>0$. Значит, $\mathrm{M}_2(24,-144,-1)$ точка минимума. $f_{\min}=-6913$.

Пример 5. Исследовать функцию $f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$ на экстремум.

Решение.

$$f'_x=-(1+e^y\sin x) \qquad \begin{cases}-(1+e^y)\sin x=0\\ e^y(\cos x-1-y)=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x=\pi n\\ y=(-1)^n-1\end{cases}$$

$$f'_y=e^y\cos x-e^y-ye^y$$

Итак, точек, подозрительных на экстремум бесконечно много.

$d^2f=d\left[-(1+e^y)\sin xdx+e^y(\cos x-1-y)dy\right]=-(1+e^y)\cos xdx^2-2e^y\sin xdxdy+e^y(\cos x-2-y)dy^2$

В точках $(2k\pi;0)$ $d^2f=-2dx^2-dy^2<0$, т.е. максимум.

В точках $((2k+1)\pi;-2)$ $d^2f=e^{-2}\left[(1+e^2)dx^2-dy^2\right]$ - не является знакопостоянным. Значит, в этих точках экстремума нет.

Д/з 3624, 3626, 3627, 3631, 3642, 3644