

Задачи к курсу «Квантовая радиофизика (электроника)»

Уравнение Шредингера для двухуровневой системы. Теория возмущений. Матричные элементы оператора возмущения.

1. Обосновать возможность применимости теории возмущения к модели взаимодействия атома водорода с возбуждающим его электрическим полем на длине волны $\lambda=121$ нм с интенсивностью 10 Вт/см^2
2. Вычислить частоту Раби осцилляций при точном резонансе для перехода с 1 на 2 энергетический уровень идеальной квантовой ямы. Ширина ямы 10 нм, плотность мощности поля 10 Вт/см^2
3. Сформулировать правила отбора для электродипольных переходов в гармоническом осцилляторе.
4. Заряженная частица (заряд e) находится в одномерном потенциальном ящике размером a в состоянии $\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)$. На частицу действует электромагнитный импульс $\vec{E}(t) = \begin{cases} E_0 \vec{i}^0 \sin \omega t, 0 \leq t \leq \tau \\ 0; 0 > t > \tau \end{cases}$. В первом порядке теории возмущений найдите к моменту времени $t > 0$ вероятность перехода с уровня n на уровень m .
5. Двухуровневая система с частотой перехода ω_{12} находится под воздействием электромагнитного поля с напряженностью $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cdot \cos \omega t$, где $\omega \approx \omega_{12}$ (резонансное поле). В момент включения поля квантовая система находилась на нижнем энергетическом уровне E_1 . Найти волновую функцию системы в произвольный момент времени $t > 0$ и определить вероятность перехода квантовой системы к моменту времени t_0 на верхний уровень.
6. На двухуровневую систему, находящуюся в верхнем состоянии, действует переменное поле на частоте перехода в течение трех четвертей (половины) периода осцилляций Раби. Какова будет величина и зависимость от времени дипольного момента перехода после выключения поля в этих случаях
7. Докажите, что оператор взаимодействия $V = -(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E})$ для реальных в эксперименте величин электрических полей имеет малую величину.
8. На двухуровневый атом с дипольным моментом \mathbf{d}_{ba} , направленным по оси OZ, падает резонансное ($\omega = \omega_{ba}$) электромагнитное поле, состоящее из двух плоских волн. Эти плоские волны имеют одинаковую поляризацию и интенсивность, но распространяются под углом 90° друг к другу (по осям OX и OZ). Как происходит взаимодействие этих волн с диполем? Какова вероятность электродипольного излучения атома в направлении под углом 45° между парциальными волнами?

9. Используя ортогональность шаровых (сферических) и спиновых функций, покажите, что правила отбора для магнитодипольного орбитального излучения сводятся к соотношениям: $\Delta l = 0$, $\Delta m_l = 0, \pm 1$, $\Delta S = 0$, $\Delta m_s = 0$, $n_a = n_b$, а правила отбора для магнитодипольного спинового излучения сводятся к соотношениям: $\Delta S = 0$, $\Delta m_l = 0$, $\Delta l = 0$, $\Delta m_s = 0, \pm 1$, $n_a = n_b$

10. Можно ли получить индуцированное (лазерное) излучение в линейном гармоническом осцилляторе в электродипольном приближении?

Уширение спектральных линий. Ширина линии излучения.

11. Найти ширину линии спонтанного излучения квантового гармонического осциллятора при переходе $E_1 - E_0$. Наблюдаема ли такая ситуация в эксперименте.

12. Что является доминирующим механизмом уширения линии в поглощающей ячейке SF_6 , облучаемого CO_2 -лазером ($\lambda = 10,6$ мкм, $U = 50$ Вт), если лазерный пучок в фокусе имеет диаметр 0,5 мм, $T = 300^\circ K$, $p = 100$ тор, $\sigma_{\text{погл}} = 5 \cdot 10^{-14} \text{ см}^2$

13. Определить естественную, доплеровскую и столкновительную ширину линии для перехода неона $3s_2 \rightarrow 2p_4$ ($\lambda = 632,8$ нм) в He-Ne разряде при давлениях $p_{\text{He}} = 1$ тор, $p_{\text{Ne}} = 0,2$ тор и температуре смеси $T = 400^\circ K$. Остальные параметры: $\tau(3s_2) = 60$ нс, $\tau(2p_4) = 20$ нс, $\sigma_{\text{изл}} = 6 \cdot 10^{-14} \text{ см}^2$.

14. Известно, что время жизни электрона в возбужденном состоянии τ . Получить выражение для спектральной формы линии

15. Почему происходит уширение спектральных линий поглощения (излучения) вещества в сильных полях.

16. Рассчитать ширину линии для $2p-1s$ перехода в атоме водорода.

17. Для выбранного механизма получить выражение для неоднородно уширенного контура линии. Оценить её ширину для типичных параметров.

18. Типичное время жизни для разрешённого электродипольного перехода в видимом диапазоне ~ 10 нс. Оценить естественную ширину линии рентгеновского лазера, излучающего в диапазоне 10 нм.

19. Доплеровская ширина линии 500 МГц. Оценка времени жизни уровня 10^{-8} с. Предложить метод измерения ширины однородного лоренцевского контура.

20. Линия люминесценции иона Nd^{3+} в стекле для рабочего перехода Nd лазера имеет ширину ~ 10 нм. Найти ширину верхнего лазерного уровня, если нижний дезактивируется со скоростью 10^8 с^{-1} . Что можно сказать о характере уширения линии люминесценции?

Взаимодействие двухуровневой среды с резонансным полем.

21. Для двухуровневого парамагнетика со спином $1/2$ найти матричный элемент перехода

и доказать, что его вероятность равна 0 при $\vec{H} \sim ||\vec{H}_0$.

22. Для 2-х уровневой среды без диссипации ($T_1 = T_2 = \infty$) найдите выражение для поляризации при наложении на среду резонансного внешнего поля $E = E_0 \cdot \cos(w_{21}t)$.

23. На 2-х уровневый атомный газ воздействует поле $E(t) = E_0 \cdot \cos(w_{21}t)$, w_{21} - боровская частота атомного перехода. Для стационарного режима рассчитайте мощность спонтанного излучения (соударениями в газе пренебречь).

24. Найдите связь мощности, поглощаемой 2-х уровневой средой, и мнимой части χ_{ik}'' восприимчивости этой среды.

25. Найдите выражение для диэлектрической проницаемости ϵ на частотах ω вблизи резонанса ω_{12}

Коэффициент усиления двухуровневой среды. Инверсия населенностей.

26. Определить линейный коэффициент усиления слабого сигнала в 2-х уровневой среде, если концентрация инверсии $N_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$, вероятность спонтанного излучения 10^7 сек^{-1} . Линия имеет форму Лоренца с шириной, определяемой спонтанным излучением.

27. Отношение населенностей двух уровней для вещества, находящегося в состоянии равновесия при температуре 300°K, равно 10. Вычислить частоту излучения, соответствующую переходу между этими уровнями.

28. Оценить минимальную мощность лампы-накачки (к.п.д. = 100 %), необходимую для создания инверсии в твердотельном лазере с концентрацией активных частиц $n = 10^{19} \text{ см}^{-3}$, объемом кристалла $V = 10 \text{ см}^3$. Частота середины полосы оптической накачки равна $\nu = 6 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$, время жизни частиц на верхнем рабочем уровне $t_{\text{сп}} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$.

29. Для соседних продольных мод резонатора Фабри-Перо длиной 1м, заполненного активной средой с шириной лоренцовой линии излучения на рабочем переходе $\Delta w = 2 \cdot 10^{12} \text{ рад/сек}$ (рубин), сделайте оценку относительной разницы коэффициентов (показателей) усиления

Резонаторы.

30. Используя классическое определение добротности резонатора (контура) $Q_s : |dW/dt|$ (мощность потерь) = $\omega_s/Q_s \cdot W$ (запасенная в резонаторе энергия) и концепцию плоских волн в резонаторе Фабри-Перо с коэффициентом отражения по мощности R_1 и R_2 , покажите, что добротность Q_s такого резонатора равна $Q_s = -2L \cdot w_s / (c \cdot \ln R_1 R_2)$, где L - длина резонатора.

31. Рассчитать добротность Q_p и время жизни фотона τ_f в резонаторе Фабри-Перо с плоскими зеркалами. Расстояние между зеркалами $L = 1 \text{ м}$, коэффициенты отражения зеркал $R_1 = R_2 = 0,95$, рабочая длина волны $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$. Коэффициент поглощения среды, заполняющей резонатор, $\alpha = 0,01 \text{ см}^{-1}$. Дифракционными потерями пренебречь.

32. Показать, что абсолютная ширина линии открытого оптического резонатора с плоскими зеркалами не зависит от частоты. Оценить (в см^{-1}) интервал между продольными модами и ширину линии такого резонатора для $R=0,99$ и $L=1$ м.
33. Для гелий-неонового лазера ($\lambda = 632,8$ нм) подсчитайте число продольных мод, попадающих в контур спектральной линии излучения
34. Оцените максимальную величину затягивания частоты моды генерации в лазере на рубине.
35. Определить оптимальный коэффициент пропускания зеркал резонатора лазера, позволяющий получить максимальную выходную мощность. Длина резонатора $L = 10$ см, коэффициент ненасыщенного усиления на проход $g_0 = 0,1 \text{ см}^{-1}$, коэффициент потерь на проход $\alpha = 0,01 \text{ см}^{-1}$. Дифракционными потерями пренебречь.

Пороговое условие.

36. Газовый лазер работает на однородно-уширенном переходе, ширина линии 200 МГц. Вероятность спонтанного излучения на рабочем переходе ($\lambda = 1$ мкм) $A_{\text{сп}} = 10^7 \text{ с}^{-1}$. Параметры резонатора Фабри-Перо: длина $L = 1$ м, полные потери 0,02. Найти пороговую концентрацию инверсии.
37. Определить пороговую концентрацию инверсии. Рассчитайте величину минимальной концентрации ионов Cr^{3+} в рубиновом ОКГ.
38. Рассчитать необходимую пороговую инверсию перехода газового лазера ($\lambda=510$ нм), если вероятность перехода $A_{\text{ик}} = 5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$. Однородная ширина линии $\Delta\nu^{\text{одн}} = 20$ МГц, длина резонатора $L = 20$ см, а потери в резонаторе при двойном проходе составляют 5%.
39. Лазерная среда имеет доплеровский профиль усиления с шириной $\Delta\nu = 2$ ГГц. Однородная ширина равна $\Delta\nu^{\text{одн}} = 50$ МГц, а вероятность перехода $A_{\text{ик}} = 10^8 \text{ с}^{-1}$. Пусть частота одной из мод резонатора ($L = 30$ см) совпадает с центральной частотой профиля усиления. Какова пороговая инверсия для центральной моды и при какой инверсии генерация начнется на соседних модах, если потери в резонаторе составляют 10% ?
40. Докажите, что в стационарном режиме одномодовой генерации разность населенностей равна пороговому значению

Лазерная генерация. Полупроводниковый лазер.

41. Считая одно зеркало в резонаторе Фабри-Перо "глухим" ($R_1 = 1$), а другое полупрозрачным ($R_2 = R$), найдите зависимость мощности лазера от R . Существует ли оптимальная величина R ?
42. Резонатор инжекционного полупроводникового лазера образован естественными гранями кристалла с коэффициентами отражения $R_1=R_2=0,37$. Определите пороговый

уровень усиления для резонаторов длиной $L = 400$ мкм и $L = 100$ мкм, если внутренние потери составляют $\alpha_{\text{внут}} = 5 \text{ см}^{-1}$. Что произойдет, если на грани резонатора нанести отражающие покрытия с $R_1=0,98$ и $R_2=1$?

43. Мощность непрерывной генерации полоскового полупроводникового лазера равна 10 мВт, длина волны излучения $\lambda = 0,8$ мкм, ширина спектральной линии $\Delta\nu = 100$ МГц, размеры ближнего поля - $1 \text{ мкм} \times 10 \text{ мкм}$. До какой температуры надо нагреть абсолютно черное тело, чтобы его спектральная яркость в заданном диапазоне достигла яркости на зеркале лазера?

44. Нарисуйте и объясните график зависимости мощности лазера от величины отражения выходного зеркала резонатора

45. Частота моды пассивного плоскопараллельного Фабри-Перо резонатора ($L = 15$ см) сдвинута на $0,5 \cdot \Delta\nu_{\text{Doppl}}$ от центра гауссовской линии усиления газового лазера с $\lambda=633$ нм. Оценить затягивание моды, если ширина резонанса резонатора $\Delta\nu_p = 20$ МГц, а $\Delta\nu_{\text{Doppl}} = 1$ ГГц.