Электростатика.

Сила электрического взаимодействия.

Сила электрического взаимодействия действует на расстоянии.

Постулаты (факты, которые нельзя доказать).

1. Существует некое количество, называемое зарядом, которое определяет взаимодействие тел на расстоянии. Заряды бывают двух типов: условно обозначаемые “+” и “-”. Одинаково заряженные тела отталкиваются, разноимённо заряженные притягиваются.
2. Количество электрических зарядов во вселенной не меняются во времени (закон сохранения заряда).
3. Пусть a – характерный размер заряженных тел, r – расстояние между ними. В случае, если $a << r$, сила взаимодействия между телами определяется по формуле:

$$\vec{F} = \kappa \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

   где q_1, q_2 - величина зарядов, κ - коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц.
4. Если имеется n заряженных тел, удовлетворяющих третьему постулату, то сила, действующая на $n+1$ тело, равна векторной сумме всех сил, действующих со стороны каждого n заряда.

$$\vec{F}_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k .$$

Постулаты электростатики.

1. Найдется такая система отсчета, в которой все заряды неподвижны.
2. Заряд во всех системах отсчета сохраняется.
3. Закон Кулона:

$$\vec{F} = \kappa \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Гауссова система: $\kappa = 1, F = \frac{q_1 q_2}{r^2}, [q] = H^{\frac{1}{2}} м$.

СГС: $[q] = дин^{\frac{1}{2}} см$ - величина заряда СГСЕ.

СИ: $\kappa = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, $[\varepsilon_0] = \dfrac{ф}{м}$.

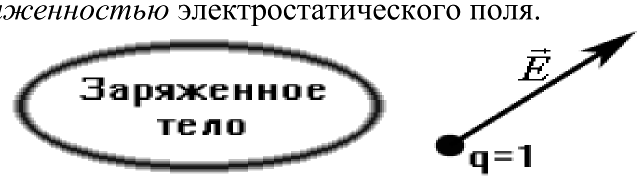
4. Принцип суперпозиции полей.

Электростатика – наука о неподвижных зарядах.

Понятие электрического поля. Напряженность.

Предположим, что в пространстве имеет место быть n зарядов, удовлетворяющих постулату два (n - велико, заряды – малы). Исследуем, как это тело действует на другие заряды.

Для этого надо взять еще один маленький точечный заряд (удовлетворяющий постулату 2). Для простоты положим, что $q = 1$ (пробный заряд) в той системе отсчета, в которой мы работаем. Будем помещать этот заряд в разные точки пространства, и измерять силу, действующую на заряд (обозначим ее буквой $\vec{E}$). Получим некоторую векторную функцию, зависящую от векторного аргумента. Получим векторное поле. Если все заряды неподвижны, то поле – *электростатическое*. Величина $\vec{E}$ называется *напряженностью* электростатического поля.

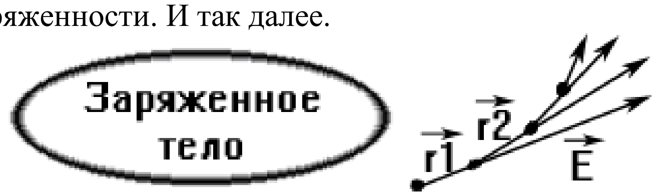


Частный случай для точечного заряда: $\vec{E} = \kappa \dfrac{q}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$.

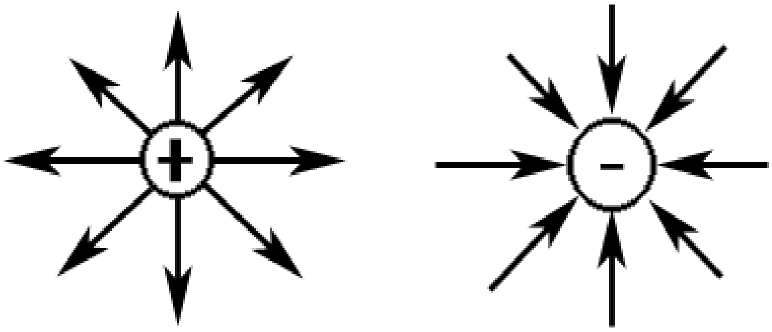
Из принципа суперпозиции для сил следует принцип суперпозиции полей. Пусть имеются n зарядов, $\vec{E}_n(\vec{r})$ – их поля. $\vec{E}(\vec{r}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{E}_i(\vec{r})$.

Силовые линии электрического поля.

Пусть у нас имеется некоторое заряженное тело. Выберем точку, поместим туда пробный заряд и нарисуем вектор напряженности. Далее выберем другую точку в направлении этого вектора и опять нарисуем вектор напряженности. И так далее.



Таким образом, мы построим некоторую ломаную, в пределе представляющую из себя гладкую кривую. Касательная к этой кривой в каждой точке будет совпадать с направлением вектора напряженности электрического поля. Построенные таким образом кривые называются *силовыми линиями*.

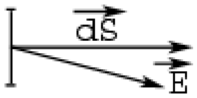


Теорема Гаусса для электрических полей.

01

Рассмотрим некоторую поверхность S, в которой имеется электрическое поле. Выберем на поверхности S малую площадку dS, настолько малую, что ее можно считать частью плоскости. Построим нормаль к этой площадке.

$$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n} .$$



Пусть dS настолько мало, что вектор электрического поля на dS постоянен. Введем величину $d\Phi$.

$$d\Phi = \left(\vec{E} \cdot d\vec{S}\right) = \left(\vec{E} \cdot \vec{n}\right) dS = EdS\cos\alpha .$$

Величина $d\Phi$ называется *потоком вектора* $\vec{E}$ через площадку dS. Если мы разобьем все поверхность S на площадки dS и их просуммируем, то получим *поток вектора* $\vec{E}$ через поверхность S.

$$\Phi = \int_S \left(\vec{E} \cdot d\vec{S}\right) = \int_S \left(\vec{E} \cdot \vec{n}\right) dS = \int_S EdS\cos\alpha .$$

Теорема Гаусса: поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность S равен

$$\oint_S \left(\vec{E} d\vec{S}\right) = \kappa 4\pi q ,$$

где q – полный заряд, содержащийся внутри поверхности S.

Доказательство.

1. Точечный заряд и поверхность в виде сферы с центром в точечном заряде.

Поскольку модуль вектора напряженности поля точечного заряды определяется r^2, то модуль вектора напряженности во всех точках сферы постоянен. Из закона Кулона следует, что вектор напряженности направлен по радиусу.

$$\oint_S \left(\vec{E} \cdot d\vec{S}\right) = \oint \left(\vec{E} \cdot \vec{n}\right) dS = \oint_S E \cdot dS = E \oint_S dS = E 4\pi r^2 = \frac{\kappa q}{r^2} r^2 4\pi = \kappa 4\pi q .$$

2. Точечный заряд и произвольная поверхность, окружающая точечный заряд.

Выберем площадку dS на поверхности. Она должна быть настолько мала. Чтобы можно было ее считать плоскостью и вектор напряженности электрического поля на ней считать постоянным.

$$d\Phi = \left(\vec{E} \cdot d\vec{S}\right) = \left(\vec{E} \cdot \vec{n}\right) dS = E\cos\alpha dS = E \cdot dS_0 = \frac{\kappa q}{r^2} dS_0 ,$$

где $\frac{dS_0}{r^2}$ – конус, под которым из точки q можно увидеть выбранную площадку.

$$d\Phi = \kappa q d\Omega$$
$$\Phi = \oint_S \kappa q d\Omega = \kappa q \oint_S d\Omega = \kappa 4\pi q$$

3. Заряженное тело внутри произвольной поверхности.

Разобьем заряженное тело на множество кусочков, удовлетворяющих второму постулату. Введем функцию плотности заряда $\rho(\vec{r})$. По доказанному выше следует, что для каждого точечного заряда теорема Гаусса выполняется.

$$d\Phi_{dV} = 4\pi\kappa\rho(\vec{r})dV,$$

где $\rho(\vec{r})dV = dq$.

$$\Phi = \oint_V 4\pi\kappa\rho(\vec{r})dV = 4\pi\kappa\oint_V \rho(\vec{r})dV = 4\pi\kappa q.$$

Замечания.

1. Теорема Гаусса выглядит так замечательно потому, что поле обратнопропорционально r^2.
2. для гравитационного поля тоже можно записать теорему Гаусса.

Пример1. Поле заряженной сферы.

R – радиус сферы, Q – заряд, равномерно распределенный по поверхности сферы .

1. $r > R$

Выберем точку, находящуюся на расстоянии r от центра сферы. Окружим сферу воображаемой поверхностью, проходящей через эту точку, и для нее запишем теорему Гаусса. Поле выбранной поверхности симметрично, так как симметрично поле источника.

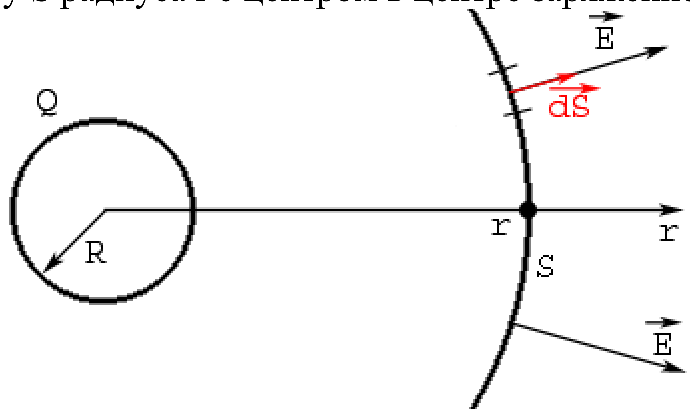
$$\Phi = \oint_S \left(\vec{E}\cdot d\vec{S}\right) = \oint_S E\cdot dS = E\oint_S dS = E4\pi r^2 = 4\pi\kappa Q$$
$$E = \frac{\kappa Q}{r^2}, \vec{E} = \frac{\kappa Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Большая сфера создает такое же поле, как и точечный заряд.

3.09.04 Лекция №2.

Примеры:

1. Рассчитаем поле заряженной сферы. Пусть есть заряженная сфера радиуса R с положительным зарядом Q, найдем электростатическое поле этой сферы на некотором расстоянии r от её центра. Пусть $r > R$. Проведем сферу S радиуса r с центром в центре заряженной сферы.

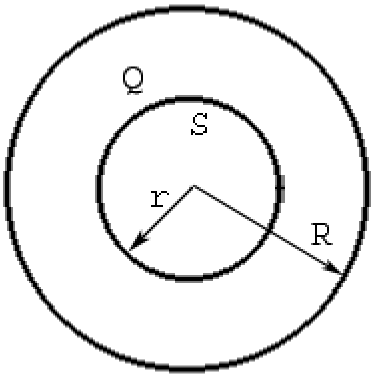


В силу симметричности задачи очевидно, что поле создаваемое заряженной сферой на сфере радиуса r везде одинаково по модулю и направлено по радиусу. Тогда поток через эту сферу запишется так:

$$\Phi = \oint_S \left(\vec{E} * d\vec{S}\right) = E\oint_S dS = E4\pi * r^{2\,2} \overset{по\_Теор\_Гаусса}{=} 4\pi * k * Q.$$

Откуда - $\vec{E} = k * \dfrac{Q}{r^2} * \dfrac{\vec{r}}{r}$. Т.е. заряженная сфера создаёт вне себя такое же поле как и такой же точечный заряд находящийся в центре этой сферы

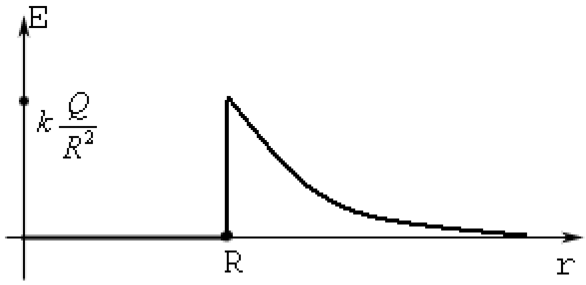
Пусть $r < R$.



Тогда поток через эту сферу запишется так:

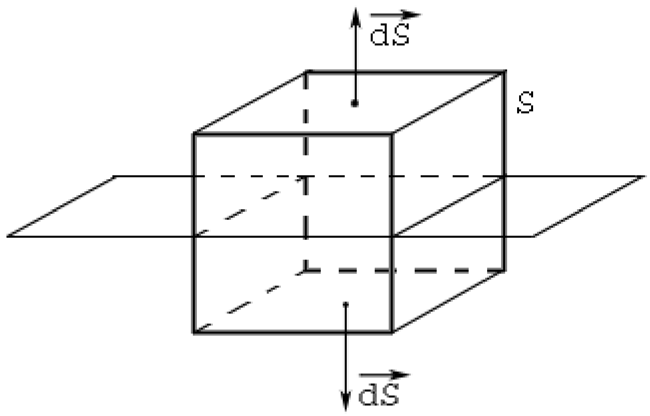
$$\Phi = \oint_S \left(\vec{E} * d\vec{S}\right) = E\oint_S dS = E4\pi * r^{2\,2} \overset{по\_Теор\_Гаусса}{=} 0.$$

Откуда - $\vec{E} = \vec{0}$. Т.е. поля внутри заряженной сферы нет.



2. Рассмотрим поле бесконечной, однородной, тонкой, заряженной плоскости.

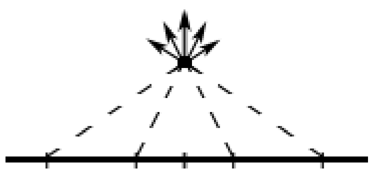
Выберем площадку ΔS с зарядом Δq. $\lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} = \sigma$ - поверхностная плотность заряда. $\sigma = \sigma(\vec{r})$ - общий случай. Если $\sigma = const$ то плоскость однородно заряженная. Рассмотрим однородно заряженную плоскость, с плотностью заряда σ. Выберем на ней некоторое $d\vec{S}$, малое настолько, что $E_{d\vec{S}}$ можно считать постоянным. Рассмотрим параллелепипед S, такой что его верхние грани параллельны заряженной плоскости и по площади равны dS, а боковые грани разделены заряженной плоскостью пополам (ребро боковой грани 2h).



Тогда поток через этот параллелепипед равен

$$d\Phi = d\Phi_{вер} + d\Phi_{ниж} + d\Phi_{бок}.$$

Рассмотрим некоторую точку не лежащую на данной плоскости. Опустим из неё перпендикуляр на данную плоскость и от полученной точки отсчитаем в разные стороны симметричные полоски одинаковой длины, малые настолько, что создаваемое ими поле можно считать одинаковым.



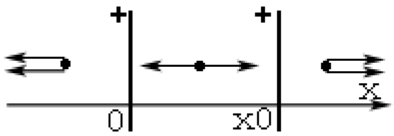
Проссумируем попарно напряженности от всех полосок. Из элементарной геометрии очевидно, что $\vec{E}_{сумм}$ располагается по нормали к плоскости. Тогда $d\Phi_{бок}$=0, т.к. вектор площади боковой поверхности перпендикулярен напряженности. Но очевидно, что $d\Phi_{вер} = d\Phi_{ниж}$. Откуда

$$d\Phi = 2d\Phi_{вер} = 2E(h) * dS \overset{по\_теор\_Гаусса}{=} 4\pi k * \sigma * dS.$$

$$E = 2\pi k * \sigma.$$

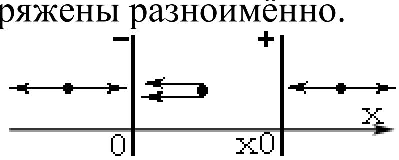
Т.о. поле зависит только от σ и по модулю одинаково в каждой точке.

3. Найдем поле 2-х заряженных бесконечных плоскостей.
   Пусть обе плоскости заряжены одинаково. По принципу суперпозиции обе плоскости действуют независимо.



1) $x > x_0$: $E_x = 4\pi * k * \sigma$;
2) $x < 0$: $E_x = -4\pi * k * \sigma$;
3) $0 < x < x_0$: $E_x = 0$.

Пусть обе плоскости заряжены разноимённо.



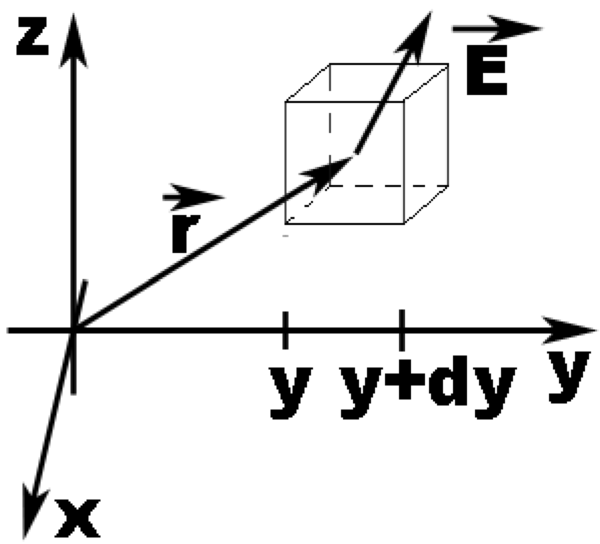
1) $x > x_0$: $E_x = 0$;
2) $x < 0$: $E_x = 0$;
3) $0 < x < x_0$: $E_x = -4\pi * k * \sigma$.

Замечания:

1. Бесконечных плоскостей нет. Но заряженную плоскость можно считать бесконечной если расстояние до исследуемой точки много меньше чем характерные размеры плоскости ($x, S : x << \sqrt{S}$).
2. В каждом случае E разрывна (т.е. испытывает скачок).
3. Теорема Гаусса справедлива всегда, но использовать её можно только для решения симметричных задач.
4. Теорема Гаусса – синтез закона Кулона и принципа суперпозиции.

Дифференциальная форма теоремы Гаусса.

Пусть в пространстве задано электрическое поле и распределен заряд, распределение задано характеризующей функцией $\rho = \dfrac{dq}{dV}$, $\rho = \rho(\vec{r})$.



Построим кубик с гранями перпендикулярными и параллельными плоскостям осей с ребрами $dx;dy;dz$ малыми настолько, что ρ и E внутри кубика можно было бы считать постоянными (внутри кубика E=const, но на гранях уже может различаться). Тогда

$$d\Phi = \left[E_y(x, y+dy, z) * dx * dz - E_y(x,y,z) * dx * dz\right] +$$
$$+\left[E_x(x+dx, y, z) * dy * dz - E_x(x,y,z) * dy * dz\right] +$$
$$+\left[E_z(x, y, z+dz) * dx * dy - E_z(x,y,z) * dx * dy\right] = \left[\frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_z}{dz}\right] * dx * dy * dz$$

.

$$d\Phi = \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right] * dV = div\vec{E} * dV \overset{по\_теор\_Гаусса}{=} k4\pi\rho * dV.$$

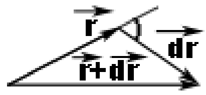
Откуда получаем дифференциальную форму теоремы Гаусса:

$$div\vec{E}(x,y,z) = k\pi 4 * \rho(x,y,z).$$

Работа электростатических сил. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля.

Найдём работу сил электростатического поля по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2.

$$A = \int\limits_{1\to 2} (\vec{F} d\vec{r}) = q \int\limits_{1\to 2} (\vec{E} d\vec{r}) = q \int\limits_{1\to 2} k\frac{Q}{r^2} * \frac{\vec{r}}{r} d\vec{r} = qQk \int\limits_{1\to 2} \frac{1}{r^3}(\vec{r} d\vec{r}).$$



$$(\vec{r} d\vec{r}) = r * dr * Cos(\theta).$$

$dr * Cos(\theta) = d|\vec{r}|$ - изменение $\vec{r}$ по модулю. Тогда

$$A_{1\to 2} = qQk\int\frac{dr}{r^2} = qQk\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Т.е. важно лишь изменение расстояния. Работа сил поля точечного заряда по перемещению заряда из точки 1 в точку 2 не зависит от пути. Т.о.

02

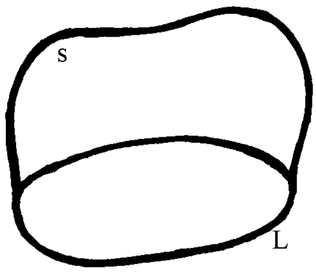
$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0 .$$

<u>Теор.:</u> Циркуляция вектора напряженности электростатического поля равна нулю.

Лекция №3.

Работа сил электростатического поля по перемещению заряда по замкнутому контуру равна нулю $\oint \vec{E}\vec{dr} = 0$. Эта формула справедлива не только для поля точечного заряда, но и для электростатического поля вообще.

Работа сил электростатического поля по замкнутому контуру $\oint \vec{E}\vec{dr}$ называется циркуляцией вектора напряженности электростатического поля. Равенство $\oint \vec{E}\vec{dr} = 0$ называется теоремой о циркуляции в интегральной форме.



Если имеется произвольный замкнутый контур L, и на него натянута произвольная замкнутая поверхность S, наложено электростатическое поле $\vec{E}$, то согласно т. Стокса, циркуляция вектора напряженности электростатического поля по контуру L равна потоку ротора поля $\vec{E}$ через поверхность S. $\oint\limits_L \vec{E}\vec{dr} = \oint\limits_s rot\vec{E}\cdot\vec{ds}$

Поскольку $\oint\limits_L \vec{E}\vec{dr} = 0$, то и $\oint\limits_s rot\vec{E}\cdot\vec{ds} = 0$ при любой форме поверхности S.

Теперь легко записать теорему о циркуляции в дифференциальной форме $rot\vec{E} = 0$, она справедлива в каждой точке пространства.

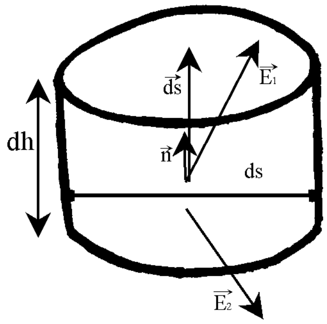
Дифференциальный оператор набла $\vec{\nabla}$ - это вектор, компоненты которого – частные производные по координатам $\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$.

Rot – векторное произведение оператора набла $\vec{\nabla}$ на вектор поля, ротор которого мы берем. Записав $rot\vec{E}$ в виде символического определителя, теорему о циркуляции вектора $\vec{E}$ можно представить следующим образом $rot\vec{E} = \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_X & E_Y & E_Z \end{vmatrix} = 0$.

Заметим, что эта формула верна не только для электростатического поля, н.р. гравитационное поле тоже потенциально, работа гравитационного поля по замкнутому контуру равна нулю $\oint \vec{g}\vec{dr} = 0$, а это означает, что и $rot\vec{g} = 0$.

Так же следует отметить, что в отличие от т. Гаусса, т. о циркуляции в таком виде справедлива только в электростатическом поле, т.е. когда заряды неподвижны, или движутся равномерно. Если поля переменные т. о циркуляции не выполняется.

Электростатическое поле вблизи заряженных поверхностей (граничные условия).



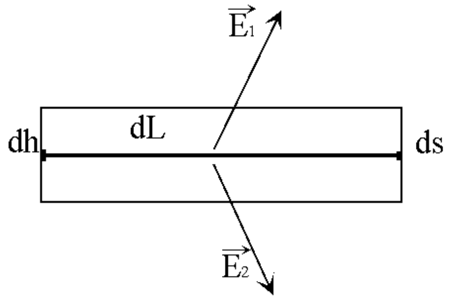
Рассмотрим тонкую поверхность, т.е. при любом выборе пощади площади S толщина поверхности h много меньше чем $\sqrt{S}$. Пусть $\sigma(\vec{r})$- поверхностная плотность заряда.

Исследуем особенности электростатического поля сверху и снизу от поверхности. В общем случае функция поля $E(\vec{r})$ может быть любой, даже разрывной.

Выберем на поверхности площадку ds, на столько малую, что её можно считать частью плоскости, а электрическое поле сверху и снизу от неё не изменяются (сверху и снизу поля разные, но постоянные).

Выберем замкнутую поверхность в виде цилиндра так, чтобы его основания были параллельны площадке ds. Поскольку цилиндрик на столько мал, что вектора $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ на его поверхности постоянны, то поток электростатического поля $E(\vec{r})$ через него можно записать следующим образом $d\phi = \left(\vec{E}_1\vec{ds}\right) - \left(\vec{E}_2\vec{ds}\right) + d\phi_{бок} = \left(\vec{E}_1\vec{n}\right)ds - \left(\vec{E}_2\vec{n}\right)ds + d\phi_{бок} = \left(E_{1n} - E_{2n}\right)ds + d\phi_{бок}$, где E_{1n} и E_{2n} проекции векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ на перпендикуляр к площадке, $d\phi_{бок}$ - поток через боковую поверхность цилиндра. Теперь будем уменьшать высоту dh цилиндра $\lim\limits_{dh \to 0} d\phi = \left(E_{1n} - E_{2n}\right)ds$, т.к. $\lim\limits_{dh \to 0} d\phi_{бок} = 0$.

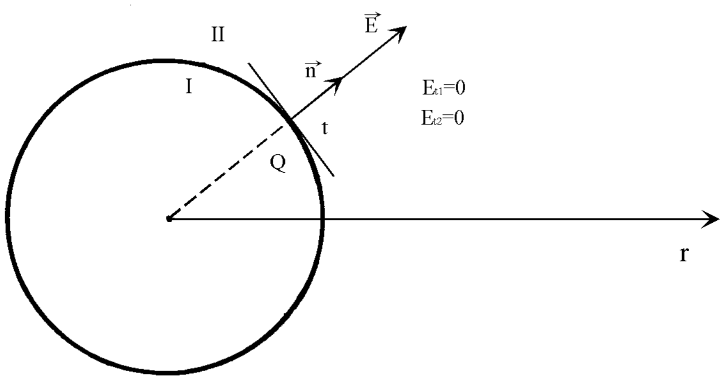
По теореме Гаусса $\left(E_{1n} - E_{2n}\right)ds = k4\pi \cdot dq$, где $dq = \sigma(\vec{r})ds$ - заряд на площадке, откуда $E_{1n} - E_{2n} = k4\pi \cdot \sigma(\vec{r})$. Итак, при переходе через поверхность нормальная компонента вектора $\vec{E}$ испытывает скачок, равный $\sigma(\vec{r})$ с точностью до константы $k4\pi$.



Найдем соотношение для тангенциальной компоненты вектора $\vec{E}$ при переходе через поверхность. Опять же выберем на поверхности площадку ds, на столько малую, что её можно считать частью плоскости, а электрическое поле сверху и снизу от неё не изменяются (сверху и снизу поля разные, но постоянные). Теперь выберем замкнутый контур виде прямоугольника т.о., чтобы площадка ds его пересекала под прямым углом. Длины сторон прямоугольника, параллельных площадке равны dl, а боковые dh. Запишем циркуляцию вектора $\vec{E}$ по замкнутому контуру L

$\oint\limits_L \vec{E}\vec{dl} = \left(\vec{E}_1\vec{dl}\right) - \left(\vec{E}_2\vec{dl}\right) + L_{бок} \xrightarrow{dh \to 0} \vec{E}_1\vec{dl} - \vec{E}_2\vec{dl} = \left(E_{1\tau} - E_{2\tau}\right)dl = 0$, где $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau}$ - тангенциальные составляющие вектора $\vec{E}$ к площадке. $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ тангенциальная составляющая вектора $\vec{E}$ всегда непрерывна.

Соотношения $E_{1n} - E_{2n} = k4\pi \cdot \sigma(\vec{r})$ и $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ называются граничными условиями.

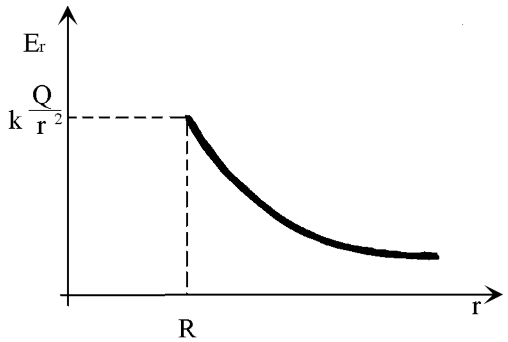


Пример1. Проверим, выполняются ли граничные условия для равномерно заряженной сферы. Знаем, что поле сферы равно

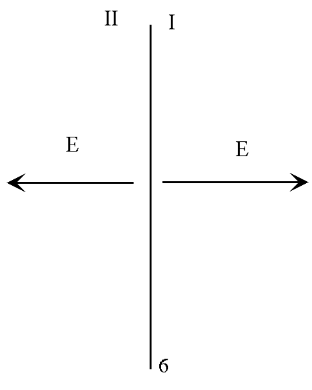
$$E_r = \begin{cases} 0, r < R \\ k\dfrac{Q}{r^2}, r \geq R \end{cases}.$$

Поле на сфере всегда направленно по нормали к поверхности, поэтому все тангенциальные компоненты вектора $\vec{E}$ равны нулю $E_{1\tau} = E_{2\tau} = 0$.

Поле внутри сферы равно нулю, поэтому $E_{1n} = 0$. А вне сферы $E_{2n} = E(R) = \dfrac{kQ}{R^2} = \dfrac{k\sigma \cdot 4\pi R^2}{R^2} = \sigma \cdot k4\pi$. Граничные условия выполняются.



Пример2. Бесконечная заряженная плоскость.

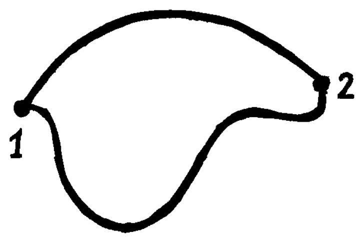


Обе тангенциальные компоненты вектора $\vec{E}$ равны нулю, они непрерывны $E_{1\tau} = E_{2\tau} = 0$. Разность нормальных компонент вектора $\vec{E}$ равна $E_{1n} - E_{2n} = 2 \cdot k2\pi\sigma = k4\pi \cdot \sigma$.

Граничные условия помогают решать некоторые задачи.

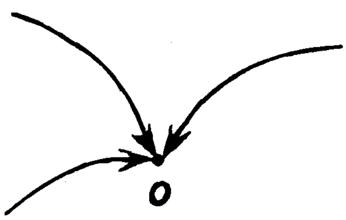
Разность потенциалов. Потенциал.

Рассмотрим произвольное электростатическое поле а пространстве. В это поле поместим единичный положительный заряд.



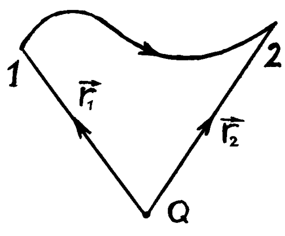
Выберем в пространстве две точки 1 и 2. Найдем работу сил поля по перемещению единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2.

Эту работу будем обозначать следующим образом $A_{1\to 2} = \varphi_1 - \varphi_2 \equiv -\Delta\varphi$. А по определению, это интеграл по некоторой траектории $A_{1\to 2} = \int\limits_{1\to 2}\left(\vec{E}d\vec{r}\right)$. Эта работа не зависит от пути, поэтому такую работу можно назвать характеристикой этих двух точек данного поля. Данная работа называется разностью потенциалов между точками 1 и 2.



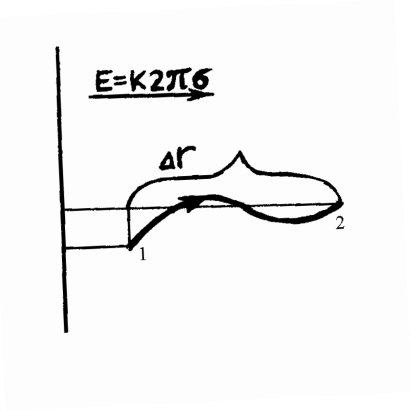
Если рассматриваемое нами поле постоянно, то можно зафиксировать одну любую точку и объявить, что потенциал этой точки равен нулю $\varphi_2 = 0$. Работа по перемещению заряда из любой точки 1 в фиксированную точку, у которой потенциал считается равным нулю, характеризует не пару точек, а одну, из которой движется заряд. Работу по перемещению из любой точки пространства в некоторую фиксированную, будем называть потенциалом, причем потенциал этой фиксированной точки не обязательно равен нулю. Таким образом каждую точку пространства можно охарактеризовать потенциалом, тем самым мы получим скалярное поле.

Пример1. Рассмотрим точечный заряд величины Q.



Разность потенциалов поля, создаваемого точечным зарядом равна $\varphi_1 - \varphi_2 = kQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$. Разность потенциалов больше нуля $\varphi_1 - \varphi_2 > 0$, если $Q > 0$ и $r_1 < r_2$. Чем ближе к заряду, тем потенциал больше. Чтобы считать $\varphi_2 = 0$, точку 2 надо взять в бесконечности $r_2 \to \infty$. В данном случае потенциал произвольной точки 1 определяется как $\varphi_1 = k\frac{Q}{r_1}$ - работа сил поля точечного заряда по перемещению единичного положительного точечного заряда из точки 1 в бесконечность.

Пример1. рассмотрим бесконечную заряженную плоскость.



Разность потенциалов поля, создаваемого бесконечной заряженной плоскостью

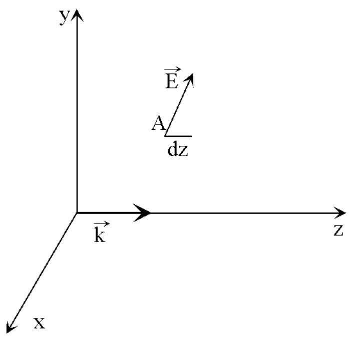
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_{1\to 2} k2\pi\sigma \cdot dr = k2\pi\sigma \cdot \int\limits_{r_1}^{r_2} dr = k2\pi\sigma \cdot \Delta r$$

Предположим, что потенциал – работа по перемещению положительного единичного заряда из точки 1 в бесконечность, тогда $\varphi_1 = \int\limits_{r_1}^{\infty} k2\pi\sigma \cdot dr \to \infty$. Это означает, что ноль мы должны задать в любой конкретной точке, но не бесконечности.

Если к числам φ_1 и φ_2 добавить любое число, то $\Delta\varphi$ не изменится. В этом смысле потенциал – величина относительная. Для нас представляет интерес только разность потенциалов, а не сам потенциал.

Уравнение Пуассона.

Рассмотрим в пространстве произвольное электростатическое поле. Введем декартовую систему координат. Зафиксируем некоторую точку A и построим вокруг неё меленький кубик, на столько маленький, что внутри него не меняется поле и объёмная плотность заряда. Его ребра параллельны осям координат и называются dx, dy и dz.



Поместим туда единичный положительный заряд с посчитаем работу по его перемещению вдоль оси oz на dz. Эта работа равна $A = \varphi_1 - \varphi_2 = -d\varphi = \left(\vec{E}\vec{k}\right)dz = E_z dz$, где $\vec{k}$ -орт. Из этого равенства получим следующее соотношение $E_z = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$. Проделав ту же операцию по другим координатам получим: $E_y = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, $E_x = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$. Теперь сконструируем вектор

$$\vec{E} = -\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -grad\varphi$$

Теперь вспомним т. Гаусса в дифференциальной форме: $divE(\vec{r}) = k4\pi\rho(\vec{r})$

Дивергенция вектора $\vec{E}$ выражается следующим образом: $divE(\vec{r}) = \left(\vec{\nabla}\vec{E}\right) = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}$, а дивергенция от градиента потенциала:

$$div \cdot grad\varphi = \left(\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\varphi\right)\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi,$$ где

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ -- оператор Лапласа (лапласиан) обозначается символами $\nabla^2\varphi$, или $\Delta\varphi$. Итак, получается, что в электростатике справедлива следующая формула: $-\Delta\varphi = k4\pi\rho(\vec{r})$ видим, что потенциал определяется через объёмную плотность заряда в точке. Это уравнение можно решить в очень ограниченном числе случаев.

Следует заметить частный случай, когда мы рассматриваем точку, в которой нет зарядов, но рядом может находиться заряженное тело, тогда в этой точке $\Delta\varphi = 0$.

Эквипотенциальные поверхности.

$$\vec{E} = -grad\varphi \, .$$

Мы умеем рисовать силовые линии поля. Нельзя ли нарисовать поле с точки зрения скаляра.

Возьмем единичный положительный заряд и переместим его из точки A на бесконечно малый отрезок так, чтобы работа поля при этом была равна нулю.

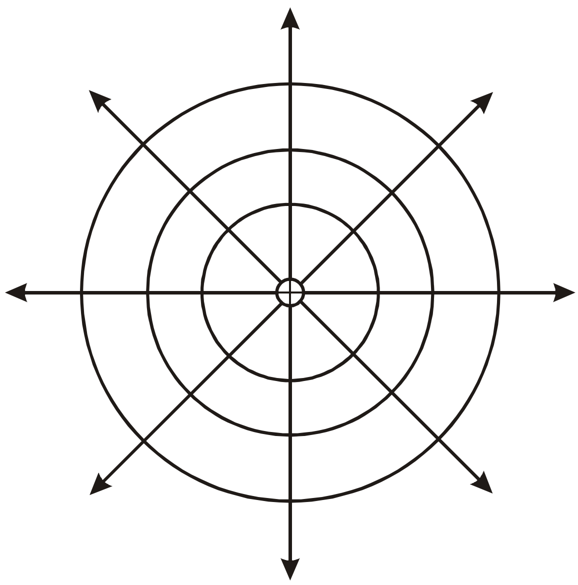
То есть, мы должны шагнуть в направлении, перпендикулярном силовой линии поля в этой точке.

Это условие удовлетворяет не только отрезку, но и плоскости. Таким образом, мы можем выделить в окрестности точки некоторую плоскость dS, перпендикулярном вектору $\vec{E}$.

Оказывается, что точка A лежит на некоторой поверхности произвольного вида. При любых перемещениях по ней работа сил поля равна нулю. Такая поверхность называется *эквипотенциально*. В каждой точке эта поверхность перпендикулярна силовой линии.

Пример. Поле точечного заряда.

Концентрические сферы.

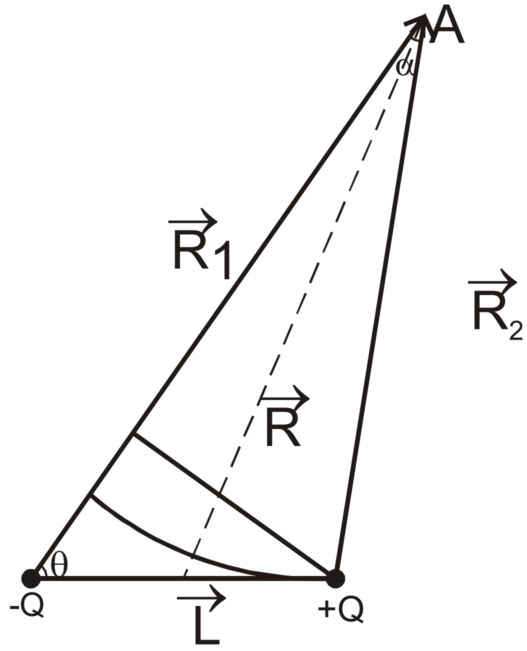


Электрический диполь.

Электрическим диполем называется пара точечных зарядов разного знака, одинаковых по модулю, жестко закрепленных на одинаковом расстоянии друг от друга. Суммарный заряд диполя равен нулю.

Для характеристики диполя вводят понятие *дипольного момента* ($\vec{d}$). Проведем вектор из отрицательного заряда в положительный. Тогда дипольным моментом называется вектор $\vec{d} = q \cdot \vec{l}$. $[d] = К \cdot м$.

Рассчитаем поле диполя.



Наша задача найти поле в точке A.

Это можно сделать двумя способами:

1) из принципа суперпозиции;
2) используя свойство аддитивности работы.

Если есть два поля и тело перемещать , то можно найти работу сил первого поля и работу сил второго поля по перемещению этого тела.

Потенциал точки A относительно бесконечности – это работа сил поля при перемещении единичного положительного заряда из точки A в бесконечность по любой траектории.

$$\varphi_1 = \kappa \cdot \frac{-q}{R_1} \qquad \varphi_2 = \kappa \cdot \frac{+q}{R_2}$$

$$\varphi(A) = \kappa \cdot \left(\frac{q}{R_2} - \frac{q}{R_1} \right) = \kappa q \cdot \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 \cdot R_2} \right)$$

Представим, что $R_1, R_2 >> l$. Запишем потенциал в точке A для данного приближения. Тогда $R_1 \cdot R_2 = R^2$, а дуга окружности переходит в перпендикуляр, поэтому $R_1 - R_2 \approx l \cdot \cos\theta$.

$$\varphi(A) \approx \kappa q \cdot \frac{l \cdot \cos\theta}{R^2}.$$

Потенциал поля точечного заряда на больших расстояниях убывает пропорционально первой степени расстояния, а потенциал поля диполя – пропорционально второй степени.

$$\varphi(A)=\kappa\frac{q\cdot l\cdot\cos\vartheta\cdot R}{R^3}=\kappa\frac{d\cdot R\cdot\cos\theta}{R^3}=\kappa\frac{\left(\vec{d}\cdot\vec{R}\right)}{R^3}.$$

$$grad\left(\frac{1}{R}\right)=\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right)+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right).$$

$$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

$$\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$grad\left(\frac{1}{R}\right)=-\left(\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\vec{i}+\frac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\vec{j}+\frac{z}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\vec{k}\right).$$

$$grad\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\vec{R}}{R^3}.$$

$$\varphi(A)=-\kappa(\vec{d}\cdot grad\left(\frac{1}{R}\right)).$$

$$\vec{E}=-grad\varphi$$

$$grad\varphi=grad\left(\kappa\frac{\left(\vec{d}\cdot\vec{R}\right)}{R^3}\right)=\kappa grad\left(\frac{\left(\vec{d}\cdot\vec{R}\right)}{R^3}\right)=\kappa\vec{\nabla}\left(\frac{\left(\vec{d}\cdot\vec{R}\right)}{R^3}\right)=\kappa\frac{\vec{\nabla}\left(\vec{d}\cdot\vec{R}\right)R^3-\left(\vec{\nabla}R^3\right)\left(\vec{d}\cdot\vec{R}\right)}{R^6}.$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{d}\cdot\vec{R}\right)=\vec{\nabla}\left(d_x x+d_y y+d_z z\right)=d_x\vec{i}+d_y\vec{j}+d_z\vec{k}=\vec{d}.$$

$$\vec{\nabla}\left(R^3\right)=\vec{\nabla}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}=\vec{i}\,\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}2x+\vec{j}\,\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}2y+\vec{k}\,\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}2z.$$

$$\vec{\nabla}\left(R^3\right)=3R\vec{R}.$$

$$\vec{E}=-\kappa\frac{\vec{d}R^3-3\left(\vec{d}\cdot\vec{R}\right)\vec{R}R}{R^6}.$$

$\vec{n}$ - единичный вектор в направлении точки из диполя.

$$\vec{E}=-\kappa\frac{3\left(\vec{d}\cdot\vec{n}\right)\vec{n}-\vec{d}}{R^3}.$$

Поле диполя убывает пропорционально третьей степени расстояния.

Пример 1.

$$\vec{E}=-\kappa\frac{\vec{d}}{R^3}.$$

Пример 2.

$$\vec{E}=\kappa\frac{3d\vec{n}-\vec{d}}{R^3}=\kappa\frac{3d\vec{n}-d\vec{n}}{R^3}=\kappa\frac{2d\vec{n}}{R^3}.$$

Электростатика диэлектриков.

Диэлектрики (изоляторы) – это конденсированные среды, в которых отсутствуют свободные (свободноперемещающиеся по объему) заряды.

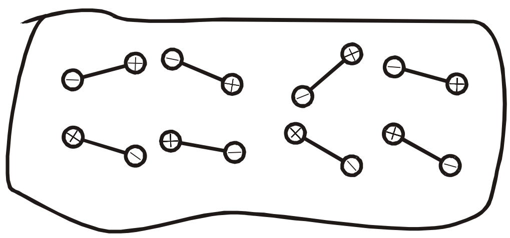
На самом деле в диэлектрике есть заряды, и они перемещаются, но их движение ограничено (например, в пределах одного ангстрема).

Пусть у нас есть диэлектрик (в нем много зарядов). Образуем внутри него полость порядка нескольких десятков атомных объемов. Поместим весь этот образец во внешнее электрическое поле. Наша задача: узнать какое поле будет внутри полости. В общем случае – сложное. По принципу суперпозиции это будет сумма внешнего поля и всех полей, которые создаются зарядами, находящимися внутри диэлектрика. Усредним поле $\vec{E}$ в каждой точке выбранной полости. То есть в каждую точку будем помещать единичный положительный заряд и измерять силу, которая на него действует.

$$\vec{E} = \frac{1}{V}\int_V \vec{E}(\vec{r})dV .$$

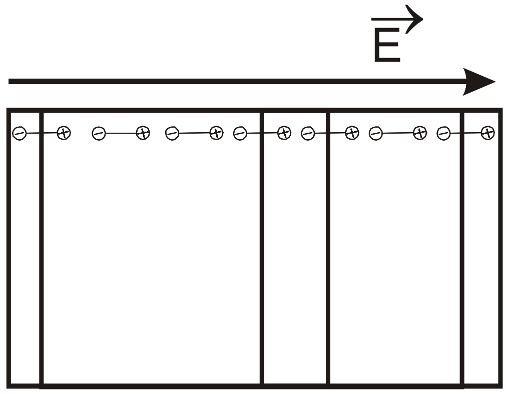
Вот так полученный вектор $\vec{E}$, будем называть *напряженностью электрического поля диэлектрика*.

Представим, что диэлектрик состоит из диполей. Причем они совершенно неупорядочены.

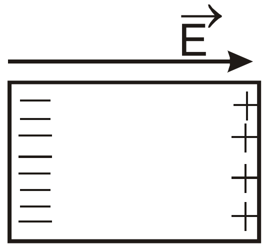


Теперь поместим диэлектрик во внешнее электрическое поле.

Диполи примут упорядоченное положение.



Выделим объемчик внутри образца. Его заряд равен нулю. Таким образом, образовалась поверхность с зарядами на гранях.



Повороты диполей могут быть небольшими, необязательно, что они выстроятся по прямой, но все равно поле внутри диэлектрика будет равно нулю. Поле диэлектрика может быть найдено, как суперпозиция двух полей.

$\vec{l},\sigma$ (поверхностная плотность заряда на стенках образца, *поляризационные заряды*). Пусть площадь стенок равна S .

Тогда дипольный момент всего образца по определению равен

$\vec{d} = \sigma S \vec{l}$. V - объем образца.

$\frac{\vec{d}}{V} = \vec{p}$ - вектор поляризации данного образца.

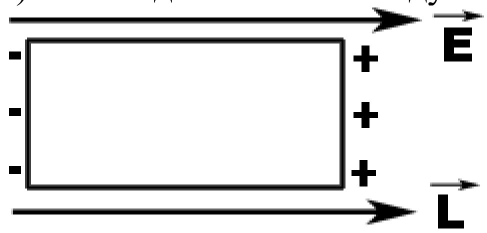
Вектор поляризации – дипольный момент единицы объема диэлектрика (поляризованного тела).

Замечания:

1) внешнее поле однородно;
2) стенки образца, перпендикулярны приложенному полю.

Лекция №5.

Заряд внутри диэлектрика – ноль, заряды есть только на гранях (поляризационные заряды) и они одинаковы по модулю.

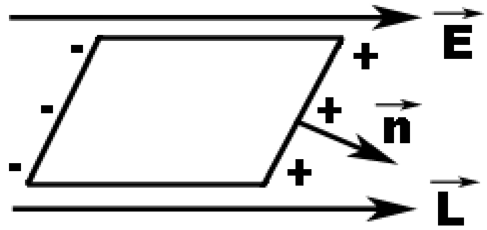


Пусть $\vec{E} \neq \vec{E}(\vec{r})$.

$\vec{d} = \sigma_{пов} * S * \vec{l}$ – аналог дипольного момента.

$\vec{P} = \frac{\vec{d}}{V} = \frac{\sigma_{пов} * S * \vec{l}}{V}$ – вектор поляризации (дипольный момент на объем диэлектрика), характеризует конкретную ситуацию.

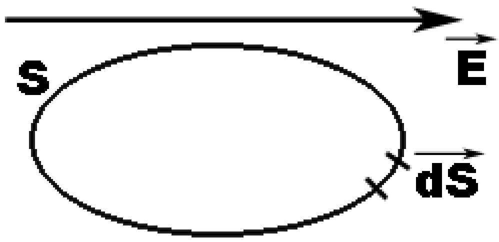
В общем случае грани диэлектрика направлены под некоторым углом к полю.



Тогда $\vec{P} = \frac{\vec{d}}{V} = \frac{\sigma_{пов} * S * \vec{l}}{S * \left(\vec{l} * \vec{n}\right)}$. Домножим скалярно обе стороны на вектор $\vec{n}$, тогда $\left(\vec{p} * \vec{n}\right) = \sigma_{пол}$. Т.е. плотность зарядов на гранях равна проекции вектора поляризации на нормаль.

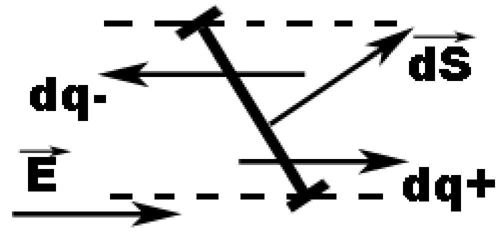
Теорема Гаусса для вектора поляризации.

Рассмотрим произвольный образец и выберем в нем замкнутую поверхность S.



Выберем на этой поверхности некоторую площадку $d\vec{S}$, малую настолько, что её можно считать частью плоскости и поле на ней можно считать однородным. Построим цилиндр, проходящий через эту площадку с направляющими параллельно вектору напряжённости внешнего поля. Тогда, под действием внешнего поля часть зарядов внутри образца изменит свое положение. При этом положительные заряды сместятся по направлению вектора напряжённости внешнего поля, а отрицательные заряды сместятся в направлении противоположном вектору напряжённости внешнего поля. Т.о.

часть положительных зарядов выйдет за площадку $d\vec{S}$, а часть наоборот войдет.



Пусть при таком поле смещение положительных зарядов dl^{+}, а отрицательных dl^{-}. Задача – посчитать какой заряд получил объемчик внутри замкнутой поверхности, т.е. $dq^{пол} = -dq^{+} - dq^{-}$ ($-dq^{+}$ - т.к. этот заряд уходит). $dq^{пол}<0$ – и образуется внутри цилиндра в результате поляризации.

Можно ввести некоторое dl среднее, на котором можно считать находящимися dq^{+} и dq^{-}. dl - некоторое эффективное расстояние. Тогда

$$d(\vec{d}) = -dq^{пол} * dl.$$

$$P = -\frac{dq^{пол} * dl}{dV} = -\frac{dq^{пол} * dl}{dS(d\vec{l} * \vec{n})}.$$

Где dV - объемчик в котором образовались заряды. Домножим скалярно обе части равенства на $dS * \vec{n}$. Тогда

$$(\vec{P} * d\vec{S}) = -dq^{пол},$$

$$\oint_S \vec{P} * d\vec{S} = -q^{пол}$$ - теорема Гаусса для вектора поляризации.

$$div\vec{P} = -\rho^{пол}.$$

Пусть $\vec{P} = const$, т.е. вещество однородно и внешнее поле тоже однородно, тогда $\rho^{пол} = 0$.

Теорема Гаусса для вектора напряжённости в диэлектрике. Вектор электрической индукции.

Выберем некоторую замкнутую поверхность внутри диэлектрика. Пусть $\vec{E} \neq \vec{E}(t)$. Тогда

$$\oint_S (\vec{E} * d\vec{S}) = 4\pi kq.$$

$$q = q^{внешнеий\_добавленный\_из\_вне} + q^{поляр.}.$$

$$\oint_S (\vec{E} * d\vec{S}) = 4\pi k(q^{внеш} + q^{поляр.}).$$

Но $q^{пол} = -\oint_S (\vec{P} * d\vec{S})$, т.е.

$$\oint_S (\vec{E} * d\vec{S}) + 4\pi k \oint_s (\vec{P} * d\vec{S}) = 4\pi kq^{внеш}.$$

$$\oint_S (\vec{E} + 4\pi k\vec{P}) * d\vec{S} = 4\pi k q^{внеш} \ .$$

$$\vec{E} + 4\pi\vec{P} = \vec{D} \text{ - в Гауссовой системе } \oint_S (\vec{D} * d\vec{S}) = 4\pi q^{внеш}$$

$$, \ \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \text{ - в системе Си } \oint_S (\vec{D} * d\vec{S}) = q^{внеш} \ .$$

$\vec{D}$ - вектор электрической индукции, вектор смещения.

<u>Поляризуемость. Диэлектрическая проницаемость.</u>

$\vec{P} = f(\vec{E})$. Будем считать, что вещество диэлектрика – изотропно, т.е. во всех направлениях имеет одинаковые свойства, $\vec{P} \uparrow\uparrow \vec{E}$, $\vec{P} = f(\vec{E})$ - непрерывная функция. Разложим в ряд Тейлора.

$$P = P(E=0) + \left.\frac{dP}{dE}\right|_{E=0} E + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2P}{dE^2}\right|_{E=0} E^2 + ...$$

Пусть $\vec{E}$ - малы, т.е. можно с хорошей погрешностью оборвать ряд на втором слагаемом, т.е. поле много меньше поля ядра. Тогда

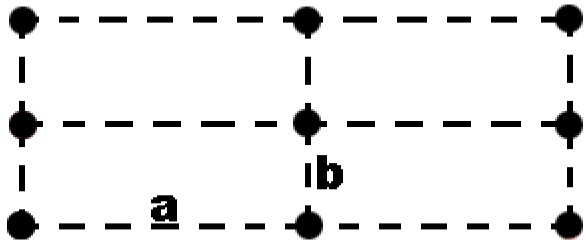
$$\vec{P} = \alpha\vec{E} \ .$$

$\left.\frac{dP}{dE}\right|_{E=0} = \alpha$ - то, что нужно найти экспериментально, α - поляризуемость.

Проведя аналогичные рассуждения для вектора электрической индукции, получим $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ - в Гауссовой системе, $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ - в системе Си. Где $\left.\frac{dD}{dE}\right|_{E=0} = \varepsilon$ - диэлектрическая проницаемость.

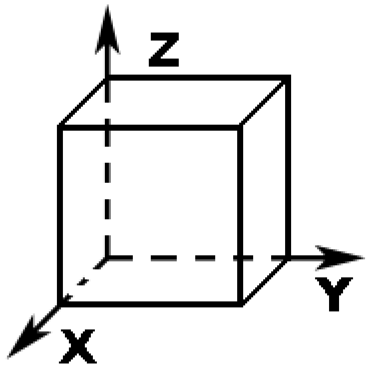
<u>Поляризуемость и диэлектрическая проницаемость.</u>

Кристаллическая среда – анизотропна.



$a \neq b$.

Рассмотрим образец кристалла в виде куба. Пусть особые направления параллельны выбранным осям.



Направим $\vec{E}$ вдоль одной из осей. Тогда

1. Пусть $\vec{E}\uparrow\uparrow\vec{i}$, тогда $E = E_X$, $P = P_X = \alpha_{XX}E_X$.
2. Пусть $\vec{E}\uparrow\uparrow\vec{j}$, тогда $E = E_Y$, $P = P_Y = \alpha_{YY}E_Y$.
3. Пусть $\vec{E}\uparrow\uparrow\vec{k}$, тогда $E = E_Z$, $P = P_Z = \alpha_{ZZ}E_Z$.
4. Пусть $\vec{E} = E\vec{i} + E\vec{j} + E\vec{k}$, тогда $\vec{P} = E(\alpha_{XX}\vec{i} + \alpha_{YY}\vec{j} + \alpha_{ZZ}\vec{k})$. Т.е. $\vec{P}$ не параллельно $\vec{E}$.

Лекция №6.

Ранее были введены следующие два вектора: $\vec{D}$ - вектор электрической индукции и $\vec{P}$ – вектор поляризации.

Вектор поляризации представляет собой некоторую векторную функцию от векторного аргумента $\vec{P}=\vec{f}(\vec{E})=f(E_x,E_y,E_z)$, или по-другому:

$\begin{cases} P_x=f_x(E_x,E_y,E_z) \\ P_y=f_x(E_x,E_y,E_z) \\ P_z=f_x(E_x,E_y,E_z) \end{cases}$ не будем писать x, y, z $\Rightarrow 1, 2, 3$, тогда $P_i=f_i(E_1,E_2,E_3)$.

Предположим, что f - непрерывна и имеет производные любого требуемого порядка. Разложим ее в ряд Тейлора в близи нуля $(E=0)$, т.е. рассматриваемые нами поля довольно слабые для подобного приближения.

$$P_i=P_i(E=0)+\left(\frac{\partial P_i}{\partial E_1}\right)_{E=0}E_1+\left(\frac{\partial P_i}{\partial E_2}\right)_{E=0}E_2+\left(\frac{\partial P_i}{\partial E_3}\right)_{E=0}E_3+$$

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial E_1^{\,2}}\right)_{E=0}E_1^{\,2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial E_1\partial E_2}\right)_{E=0}E_1E_2+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial E_1\partial E_3}\right)_{E=0}E_1E_3+$$

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial E_2^{\,2}}\right)_{E=0}E_2^{\,2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial E_2\partial E_1}\right)_{E=0}E_2E_1+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial E_2\partial E_3}\right)_{E=0}E_2E_3+$$

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial E_3^{\,2}}\right)_{E=0}E_3^{\,2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial E_3\partial E_1}\right)_{E=0}E_3E_1+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial E_3\partial E_2}\right)_{E=0}E_3E_2+\ldots$$ еще плюс 27 производных третьего порядка, плюс 81 производная четвертого порядка и т.д.

Допустим, что поле $\vec{E}$ мало тогда, с точки зрения математики, можно ограничиться линейными слагаемыми. А на физическом уровне это означает, что мы можем оборвать ряд на линейном слагаемом, если электронные облака получают очень маленькие смещения под действием поля $\vec{E}$. Числа, равные частным производным, обозначим следующим образом: $\left(\frac{\partial P_1}{\partial E_1}\right)_{E=0}=\alpha_{11}$, $\left(\frac{\partial P_1}{\partial E_2}\right)_{E=0}=\alpha_{12}\ \cdots$

$\left(\frac{\partial P_i}{\partial E_j}\right)_{E=0}=\alpha_{ij}$, т.е. в линейном приближении $P_i=\sum\alpha_{ij}E_j$, а можно еще короче: $P_i=\alpha_{ij}E_j$, где суммирование проводится по повторяющимся индексам.

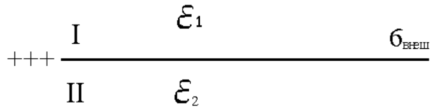
Набор из девяти величин α_{ij} называется тензор поляризуемости.

Если мы захотим рассмотреть большие поля $\vec{E}$, то уже необходимо учитывать вторые частные производные, и ввести величину $\beta_{ijk}=\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial E_j\partial E_k}\right)_{E=0}$, тогда $P_i=P_i(E=0)+\alpha_{ij}E_j+\beta_{ijk}E_jE_k$, где $P_i(E=0)$ будем считать равным нулю.

27 величин β_{ijk} называются тензором квадратичной поляризации. Эти тензоры измеряются для каждого вещества и заносятся в таблицы. Аналогичным образом расправимся с формулой $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$. Они отличаются только буквами, следовательно можно повторить те же самые рассуждения, только будут другие буквы. В линейном приближении $D_i=\varepsilon_{ij}E_j$, где $\varepsilon_{ij}=\left(\dfrac{\partial D_i}{\partial E_j}\right)_{E=0}$, 9 величин ε_{ij} называются тензором диэлектрической проницаемости. Если необходимо учесть квадратичные слагаемые, то с учетом нелинейных эффектов получим формулу $D_i=\varepsilon_{ij}E_j+\gamma_{ijk}E_jE_k$, где $\gamma_{ijk}=\dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\partial^2 D_i}{\partial E_j\partial E_k}\right)_{E=0}$.

Граничные условия для полей в диэлектрике.

Рассмотрим заряженную поверхность. Вокруг неё поля, создаваемые этой поверхностью, другие внешние поля (всё сложилось по принципу суперпозиции). Ранее мы выяснили как ведет себя вектор $\vec{E}$ вблизи заряженной поверхности, и получили две замечательные формулы: $E_{1n}-E_{2n}=k4\pi\cdot\sigma(\vec{r})$ и $E_{1\tau}-E_{2\tau}=0$. Где E_τ - проекция вектора $\vec{E}$ на любое направление, параллельное плоскости.



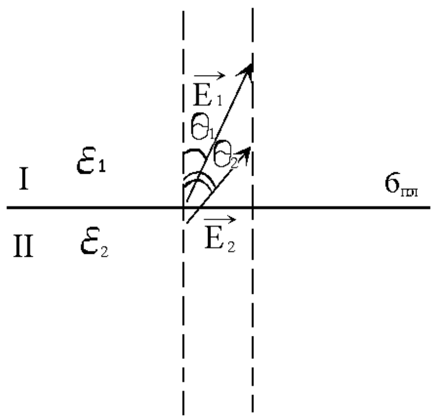
Теперь пусть эта заряженная поверхность находится внутри диэлектрика. Точно так же имеют место быть поле, создаваемое этой поверхностью, и другие внешние поля.. На этот раз σ включает в себя заряды, внесённые на пластинку из вне и заряды поляризационные. Граничные условия для вектора $\vec{E}$ так же выполняются, т.к. поле $\vec{E}$ неподвижно: $\begin{cases}E_{1n}-E_{2n}=k4\pi(\sigma_{внеш}+\sigma_{пол})\\ E_{1\tau}-E_{2\tau}=0\end{cases}$

Мы знаем, что т. Гаусса выполняется и для вектора $\vec{P}$, но вектор $\vec{P}$ не реагирует на внешние заряды – только на поляризационные. Можем записать нечто похожее на формулу $E_{1n}-E_{2n}=k4\pi(\sigma_{внеш}+\sigma_{пол})$:

$P_{1n}-P_{2n}=\sigma_{пол}$, но вот аналог формулы $E_{1\tau}-E_{2\tau}=0$ мы пока записать не можем, т.к. мы не доказывали теорему о циркуляции для вектора $\vec{P}$ (мы не можем использовать ее для вывода соотношения тангенциальных составляющих).

Для вектора $\vec{D}$ можем воспроизвести весь вывод граничных условий как и для вектора $\vec{E}$, но будем писать только $\sigma_{внеш}$ (это следует из теоремы Гаусса) таким образом получим формулу: $D_{1n}-D_{2n}=k4\pi\sigma_{внеш}$. Если $\sigma_{внеш}=0$, то нормальная компонента вектора $\vec{D}$ будет непрерывна, а для вектора $\vec{E}$ будет «скакать». Для вектора $\vec{D}$мы не доказывали теорему о циркуляции, поэтому вторую часть мы тоже оставляем пол сомнением.

Упростим задачу и вытащим из диэлектрика заряженную плоскость – останутся два диэлектрика с диэлектрическим проницаемостями ε_1 и ε_2 во внешнем электрическом поле.

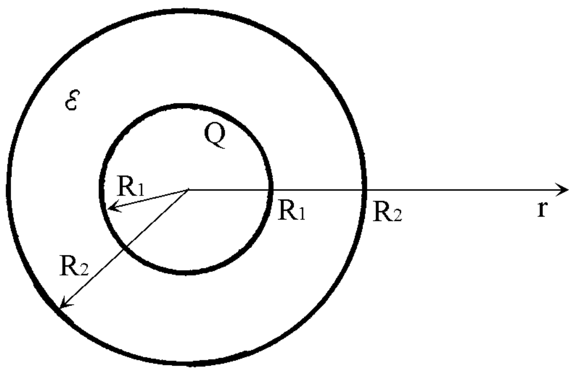


Вблизи границы раздела двух диэлектриков нарисуем вектора $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ так, чтобы тангенциальные их составляющие были одинаковы. Введем углы θ_1 и θ_2 - углы с между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ и нормалью к поверхности, тогда $E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$ (2).

Теперь рассмотрим соотношение $D_{1n} - D_{2n} = k4\pi\sigma_{внеш}$. В этом случае нормальные компоненты вектора $\vec{D}$ непрерывны $D_{1n} = D_{2n}$, поскольку $\sigma_{внеш} = 0$. Значит имеет место быть равенство $\varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\theta_2$ (2).

Поделив выражения (1) и (2) друг на друга, получим следующее соотношение $\dfrac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$. Здесь нет величины E, но есть углы θ_1 и θ_2. Значит с помощью формулы $\dfrac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ можно определить как ломаются силовые линии напряженности электрического поля на границе двух диэлектриков.

Для векторов $\vec{P}$ и $\vec{D}$ можно написать граничные условия только для нормальных компонент.



Пример.

Рассмотрим равномерно заряженную сферу радиуса R_1, которая находится внутри сферического слоя диэлектрика радиуса R_2. Поля маленькие, поэтому можно работать в линейном приближении. Найдем поле $\vec{E}$ и потенциал на любом расстоянии от центра сферы.

1. $r > R_2$: вектора $\vec{E}$ и $\vec{D}$ направлены одинаково - в радиальном направлении. Вычислим поток: $\oint_s \vec{D}\vec{ds} = \oint_s D_n ds = D\oint_s ds = 4\pi D r^2$.

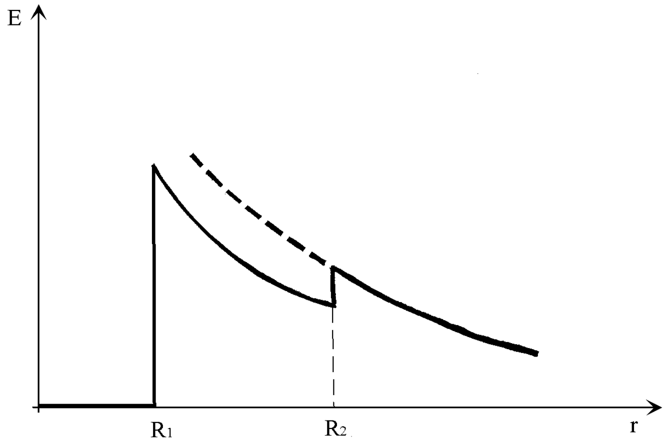
   Воспользовавшись теоремой Гаусса для вектора $\vec{D}$, получим соотношение: $4\pi D r^2 = 4\pi Q \rightarrow D = \dfrac{Q}{r^2}$, откуда $E = \dfrac{D}{\varepsilon} = \dfrac{D}{1} = \dfrac{Q}{r^2}$.

2. $R_1 < r < R_2$: поток: $\oint\limits_s \vec{D}\vec{ds} = 4\pi D r^2$

т. Гаусса: $4\pi D r^2 = 4\pi Q_{внеш} \rightarrow D = \frac{Q_{внеш}}{r^2}$,

$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q_{внеш}}{\varepsilon r^2}$.

3. $r < R_1$: для любого из векторов $\vec{E}$ или $\vec{D}$ поток равен нулю, поэтому поле $\vec{E} = 0$.



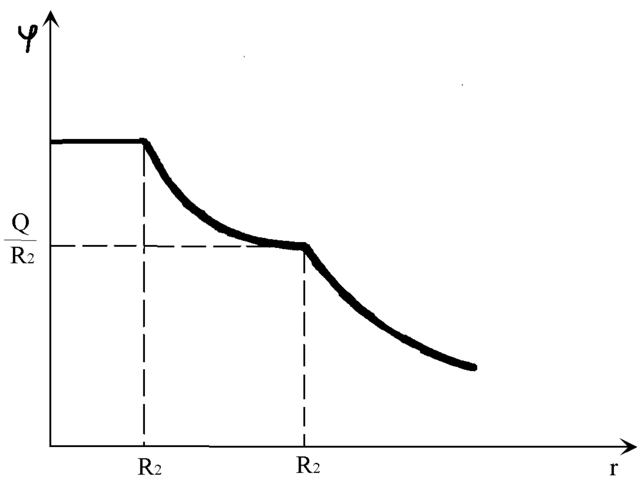
Теперь построим график потенциала.

1. $r > R_2$: $\varphi(r) = \int\limits_r^\infty \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{r}$

2. $R_1 < r < R_2$ (в диэлектрике): тащим заряд в бесконечность

$$\varphi(r) = \int\limits_r^\infty E(r) dr = \int\limits_r^{R_2} \frac{Q}{\varepsilon r^2} dr + \int\limits_\infty^{R_2} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{\varepsilon r} - \frac{Q}{\varepsilon R_2} + \frac{Q}{R_2} = \frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{Q}{R_2}.$$

3. $r < R_1$: перемещаем заряд из внутренней сферы в бесконечность, во внутренней сфере $\vec{E} = 0$. $\varphi(r) = \frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{Q}{R_2} = const$.



Функция потенциала непрерывна, иначе мы могли бы получить конечную работу при бесконечно малом перемещении.

Электростатика проводников.

В среде много свободных зарядов, они могут перемещаться на расстояния, значительно большие диаметра атома.

В изоляторе тоже можно переносить заряды. Для этого надо приложить большие поля.

В проводнике заряды могут двигаться при наложении маленьких полей (в пределе бесконечно малых). То есть, нужно потратить очень малую работу для перемещения зарядов.

Проводник – это такая среда, содержащая свободные заряды, которые можно перемещать по объему без совершения работы (*идеальный проводник*).

Такие проводники в природе существуют. Это сверхпроводники.

Идеальный проводник – это эквипотенциальное тело.

Возьмем проводник и поместим его в поле точечного заряда. Оно неоднородно и не эквипотенциально. Из определения проводника следует, что во всех точках проводника потенциалы одинаковы. Можно взять длинную плоскость такую, что на ее конце напряженность поля равна нулю. Таким образом, как бы близко мы не подносили проводник к заряду, потенциал в каждой его точке будет равен нулю, так как на конце, намного отстоящем от точечного заряда, потенциал равен нулю.

$\vec{E} = -grad\varphi, \varphi = const \Rightarrow \vec{E} = 0.$

Во всем объеме проводника поле равно нулю.

Рассмотрим проводник на границе с вакуумом. Выберем на поверхности проводника площадку dS такую маленькую, чтобы ее можно было считать частью плоскости, и электрическое поле сверху и снизу вблизи нее можно считать постоянным. Напишем граничные условия для вектора $\vec{E}$ вблизи площадки dS.

$E_{n1} - E_{n2} = 4\pi k\sigma$

$E_{\tau 1} - E_{\tau 2} = 0$

Внутри проводника $\vec{E}_2 = 0 \Rightarrow E_{n2} = 0, E_{\tau 2} = 0$.

$E_{n1} = 4\pi k\sigma, E_{\tau 1} = 0$.

Отсутствует тангенциальная компонента вектора $\vec{E}$ вблизи поверхности проводника. Это означает, что вблизи поверхности вектор $\vec{E}$ перпендикулярен поверхности.

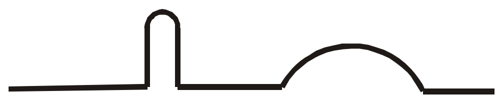
Что такое σ?

1) поместим нейтральный проводник в поле, поле растаскивает заряды, они доходят до границы, но за нее выйти не могут, т.е. заряды скапливаются у поверхности диэлектрика, тем самым образуя поверхностную плотность заряда;
2) возьмем проводник и внесем туда заряд, заряды будут двигаться без совершения работы, дойдут до границы и опять образуют поверхностную плотность;

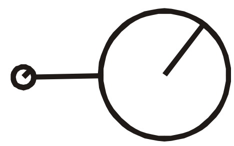
3) можно совместить два предыдущих примера, тогда $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$.

Всегда, где есть граница есть некая энергия, которая заставляет не переходит эту границу. Проводник – это стакан, в который налита электрическая жидкость. Есть граница, поэтому электрончики выстраиваются, а не улетают за пределы.

Как зависит напряженность поля от рельефа поверхности.



Пусть у нас есть некоторый проводник, имеющий заданный рельеф. На основе его мы смоделировали эквипотенциальное тело.



Относительно бесконечности $\varphi_r = \varphi_R$ по определению проводника.

$$\varphi_r = \kappa\frac{q}{r}, \varphi_R = \kappa\frac{Q}{R}$$

$$\frac{q}{r} = \frac{Q}{R}$$

$$\frac{Q}{q} = \frac{R}{r}$$

Поскольку мы говорим о поверхностных зарядах, то наше приближение достаточно точное.

$$E_r = \kappa\frac{q}{r^2}, E_R = \kappa\frac{Q}{R^2}$$

$$\frac{E_R}{E_r} = \frac{Q}{q}\cdot\frac{r^2}{R^2}$$

$$\frac{E_R}{E_r} = \frac{r}{R}$$

Поле вблизи поверхности проводника определяется только радиусом кривизны.

$r << R, E_r >> E_R$.

Чем меньше радиус кривизны, тем больше около этой поверхности напряженность поля.

Пояснение к опыту со свечей.

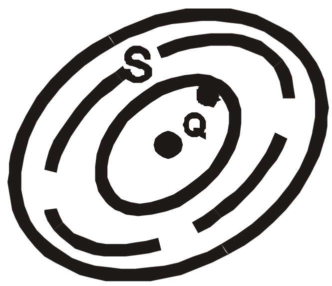
Зарядим проводник, вблизи острия $\vec{E}$ большое. В воздухе всегда есть электроны или ионы. Они бьются о другие атомы, зарядов становится много

1. Острие зарядим положительно. Тогда, образовавшиеся положительные ионы двигаются от острия, они тяжелые и

создают ветер, который задувает пламя свечи. Электроны тоже движутся, только к острию, но они легкие и их вклад мало заметен.

2. Острие зарядим отрицательно. Тогда к острию будут двигаться электроны, но они легкие и бьются об атомы при своем движении, поэтому до острия их доходит очень мало, они не могут увлечь за собой большое количество зарядов и ветер не образуют. Пламя свечи не гаснет.

Полый проводник.



Пусть у нас имеется проводник с полостью внутри. Помести в нее заряд q. Найдем, какой заряд образуется на внутренней поверхности полости. Заряд q создает поле, свободные заряды начинают двигаться и выстраиваются на границе. Выберем поверхность произвольного вида таким образом, чтобы она вся лежала внутри проводника, а полость находилась внутри этой поверхности.

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi\kappa\left(q + q'\right)$$

$$\vec{E} = 0$$

$$q + q' = 0$$

$$q = -q'$$

Каким бы не был проводник, какой бы формы не была полость, если внутрь нее внести заряд, то на внутренней стороне этой полости образуется такой же по модулю заряд, но противоположного знака.

Это утверждение сейчас называют теоремой Фарадея.

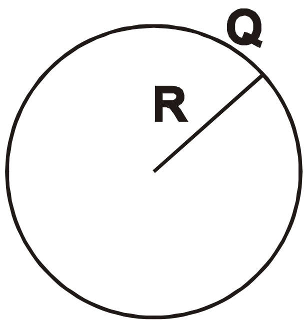
Пусть q равно нулю, тогда на внутренней поверхности полости зарядов не образуется, и поле внутри полости равно нулю.

Замечание.

Теорему Фарадея мы доказали, используя теорему Гаусса, а ее, используя закон Кулона. Таким образом, если бы в законе Кулона сила взаимодействия двух зарядов не была обратнопропорциональна второй степени расстояния, то ни одна из этих теорем не выполнялась бы. Поэтому одним из примеров проверки закона Кулона служит опыт с клетками Фарадея, основанный на теореме Фарадея.

Емкость проводников.

Зарядим проводник. Если знать количество зарядов, то какой потенциал будет у проводника.



$$\varphi = \kappa \frac{Qq}{r}$$

$$Q = \frac{r}{\kappa}\varphi$$

Между зарядом, который мы поместим и потенциалом имеет место быть коэффициент. Он характеризует проводник. Чем больше r, тем больший заряд надо поместить на проводник, его потенциал достиг заданного уровня.

СИ: $\kappa = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 r\varphi$$

Гауссова система: $\kappa = 1$

$$Q = r\varphi$$

Этот коэффициент называется *емкостью проводника*. Он характеризует только проводник и обозначается буквой C.

СИ: $c = 4\pi\varepsilon_0 r$

$$[\Phi] = \frac{K}{B}$$

Гауссова система: $C = r$

$$[C] = см$$

$$C = \frac{Q}{\varphi}$$

Емкость определяется только свойствами и геометрией проводника.

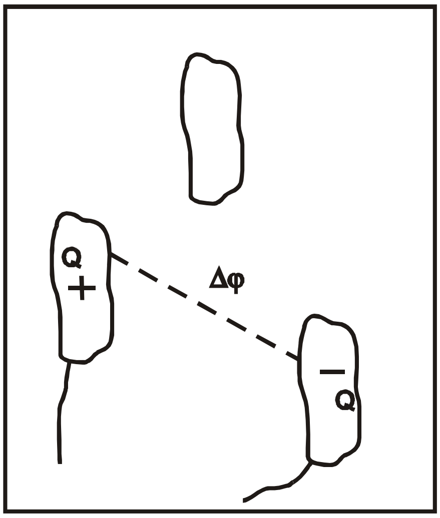
Рассмотрим два проводника. Два проводника заряжают одинаковыми по модулю, но разными по знаку зарядами и измеряют разность потенциалов.

$$|Q| = C|\Delta\varphi| \qquad\qquad Q = C \cdot \Delta\varphi$$

Такая система из двух и более проводников, возможно разделенных диэлектриком, называется *конденсатором*.

А величина C, определенная таким образом, называется *емкостью конденсатора*.

Если конденсатор состоит из двух проводников, то все ясно. Если же их больше, то необходимо определить, где обкладки. Наличие третьего проводника влияет на разность потенциалов и на емкость.



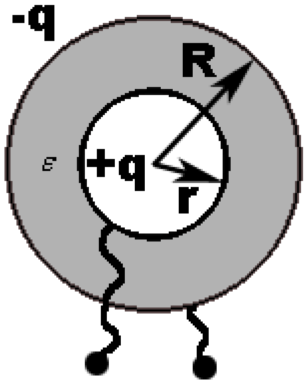
Лекция №8.

Конденсатор – некоторая система проводников и диэлектриков с выбранной парой проводников.

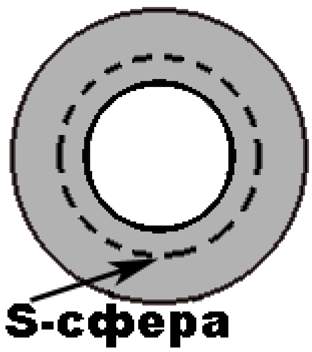
Можно выбрать сколько угодно проводников, диэлектриков и подать на два выбранных проводника некоторые противоположные заряды и померить разность потенциалов между выбранными проводниками. Она определит характеристики проводников и диэлектриков (геометрические).

$$q = C\Delta\varphi .$$

Пример: Рассмотрим сферический конденсатор (две концентрические сферы с контактами, между ними диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε).



1. Пусть диэлектрик однородный и изотропный. Зарядим обе сферы равными по модулю и противоположными по знаку зарядами.
2. Рассчитаем образовавшуюся разность потенциалов. Для этого найдем поле внутри конденсатора.
3. Выберем сферическую поверхность внутри конденсатора с центром в центре конденсатора.



Тогда (пусть $k = 1$ - Гауссова система) в силу симметричности задачи имеем

$$\oint_S \vec{D} * d\vec{S} = D 4\pi r_S^2 = 4\pi q .$$

Откуда $D = \dfrac{q}{r_S^2} = \varepsilon E$, т.о.

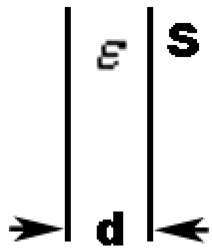
$$E = \frac{q}{\varepsilon * r_S^2}.$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta\varphi = \int_r^R E dr_S = -\frac{q}{\varepsilon * r_S}\Bigg|_r^R = q\frac{R-r}{rR\varepsilon}.$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{rR\varepsilon}{R-r}.$$

<u>Приближения:</u> Пусть $R - r << r, R$, т.е. $r \to R$, тогда $S = 4\pi R^2 \approx 4\pi Rr$. Пусть $R - r = d$, тогда $C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$ (в Гауссе).

Плоский конденсатор.



S – площадь пластинок. Пусть $\sqrt{S} >> d$. Пусть внутри однородный изотропный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε.

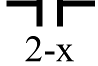
1. Помещаем на платинах разноимённые заряды $|q|$.
2. С учётом сделанных приближений можно считать поле между пластинами равным $E = E_1 + E_2 = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} = \frac{4\pi q}{\varepsilon S}$ (в Гауссовой системе).
3. Найдём разность потенциалов между пластинами.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = |\Delta\varphi| = \int_0^d \vec{E} * d\vec{r} = \frac{4\pi}{\varepsilon S} q \int_0^d dr = \frac{4\pi dq}{\varepsilon S}.$$

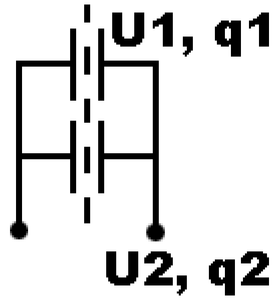
Откуда $C = \frac{q}{|\Delta\varphi|} = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$.

Параллельное и последовательное соединение конденсаторов.

<u>Замечание:</u> Обозначение любого конденсатора (плоского, сферического и т.д.) –



1) Параллельное соединение 2-х конденсаторов. Проводник – эквипотенциальное тело. На схеме 2 проводника (один слева, другой справа), т.е. левая и правая части – эквипотенциальные тела. Т.о. разность потенциалов между двумя точками разных проводников одинакова.



$$U1 = U2 = U\ .$$

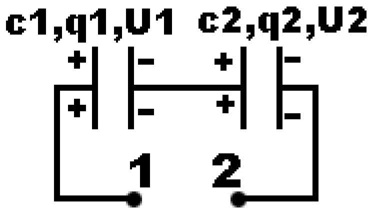
Если представить что мы создали данную разность потенциалов на каждом конденсаторе отдельно а потом соединили их, то сумма зарядов при присоединении не изменится ни справа, ни слева

$$q = q1 + q2\ .$$

Т.о., если представить два параллельно соединённых конденсатора как один, то его ёмкость будет равна

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q1}{u} + \frac{q2}{u} = C1 + C2\ .$$

2) Последовательное соединение.



Возьмём единичный положительный заряд и пронесём по пути 1-С1-С2-2. Тогда $U_{12} = U_1 + U_2$. Заряд Заряд на соединённых пластинках – 0, но заряд на обкладках не ноль и заряд на каждом конденсаторе одинаков. $q1 = q2 = q$. Т.о., если представить два последовательно соединённых конденсатора как один, то его ёмкость будет равна

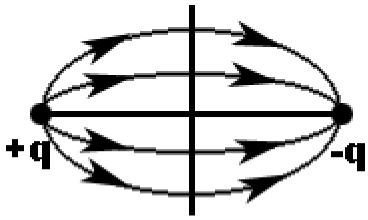
$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{U1 + U2} = \frac{C1 * C2}{C1 + C2}\ .$$

Метод изображений.

На некотором расстоянии от заряда находится бесконечная незаряженная проводящая плоскость. Надо найти силу взаимодействия точечного заряда и данной плоскости.

Попробуем найти систему зарядов такую, чтобы сила взаимодействия была такой же. Проводник – эквипотенциальная поверхность. Плоскость краями уходит в бесконечность. Пусть $\varphi(\infty) = 0$. Мы должны подобрать заряды так, чтобы φ везде был равен нулю.

Работа силы равна нулю если $\vec{F} \perp d\vec{r}$. Т.е. если напряжённость перпендикулярна плоскости. Очевидно, что одним из вариантов искомой системы зарядов будет симметричный заряд противоположного знака.



Т.о. $F = k\dfrac{q^2}{4d^2}$ - сила взаимодействия точечного заряда и плоскости, где d – расстояние между зарядом и плоскостью.

Энергия системы зарядов.

$dA = -dU$ - работа потенциальных сил равна убыли потенциальной энергии.

Рассмотрим систему из двух одноимённо заряженных разлетающихся зарядов.

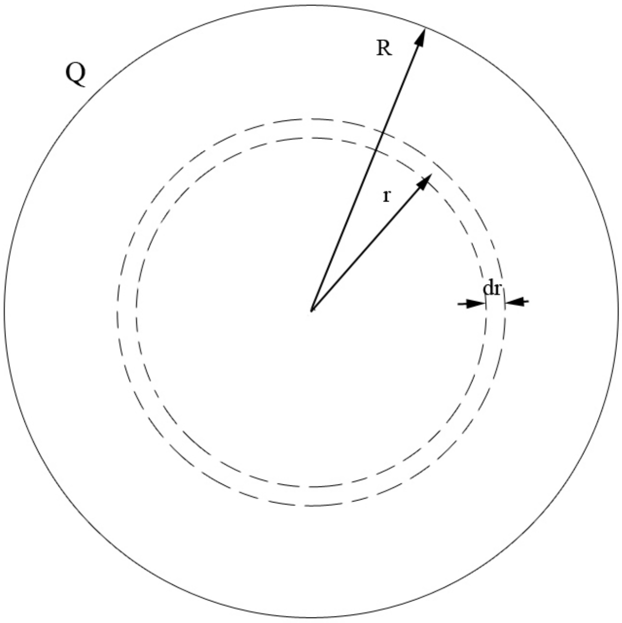
Тогда $F_{12} = F_{21}$ и $d\vec{r}_1 = d\vec{r}_2$. Найдём работу сил кулона $dA = \vec{F}_{12}d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21}d\vec{r}_2 = \vec{F}_k(d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2)$, т.е. работа зависит от взаимного перемещения.

Рассмотрим систему прикреплённую к одному из зарядов, тогда $d\vec{r}_2 = 0$, а $dA = \vec{F}_k d\vec{r}_k$. Если закрепить один заряд то мы получим всё то же самое. Это всё можно обобщить на n зарядов. Если по очереди фиксировать все заряды кроме k-го то $dA = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{ij}\vec{F}_{ij}d\vec{r}_{ij}$.

Лекция №9.

Пример1.

Посчитаем энергию однородно заряженного шара. Заметим, что шар – диэлектрик, т.к. проводник не может быть однородно заряженным (все заряды будут на поверхности).



Потенциальная энергия взаимодействия равна минус работе сил поля, совершаемой при движении каждого заряда из своего положения в бесконечность $dU = -dA$. Чтобы посчитать электростатическую энергию, будем по кусочкам удалять заряды на бесконечность, посчитаем работу поля и поменяем знак.

Будем удалять по тонким сферическим слоям, т.к. сфера однородно заряжена, симметрия сферическая. Построим тонкий сферический слой толщиной dr и радиуса r. Считая, что все остальные слои уже удалены, найдем работу dA по перемещению заряда в бесконечность. Пусть заряд положительный. Введём объемную плотность заряда $\rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. заряд слоя равен $dq = \rho dV$, где $dV \approx 4\pi r^2 dr$, тогда

$dq = 4\pi r^2 \rho dr$. Пусть dr на столько мало, что мы можем пренебречь изменением потенциала на dr. В таком приближении потенциал на сферическом слое постоянен. Тогда работу по перемещению заряда мы можем записать $dA = \varphi(r)\cdot 4\pi r^2 \rho dr$.

Запишем потенциал заряженной сферы

$\varphi(r) = k\dfrac{q(r)}{r} = k\dfrac{\rho V(r)}{r} = k\dfrac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{r} = k\dfrac{4}{3}\rho\pi r^2$. Работа по перемещению тонкого сферического слоя равна $dA = k\rho^2\dfrac{16}{3}\pi^2 r^4 dr$.

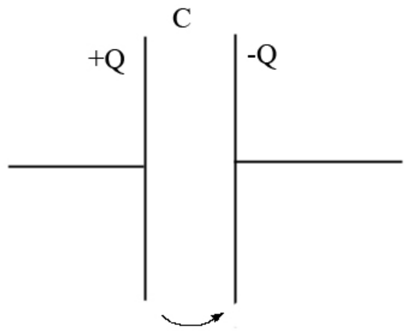
Чтобы найти работу по полному «раздеванию шарика», возьмем интеграл от R до 0, т.е. сначала снимем верхний слой.

$$A = \int_R^0 k\rho^2\frac{16}{3}\pi^2 r^4 dr = k\rho^2\frac{16}{15}\pi^2 r^5 dr\Big|_R^0 = -k\rho^2\frac{16}{15}\pi^2 R^5$$, подставляя $\rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$,

найдем $U = -A = k\dfrac{3}{5}\dfrac{Q^2}{R}$. Заметим, что потенциальная энергии шарика больше нуля, как в случае положительного знака заряда, так и отрицательного. Это объясняется тем, в обоих случаях сила и перемещение сонаправлены. Шарику выгоднее разлететься.

Пример2.

Найдем потенциальную энергию конденсатора (конденсатор любого типа). Мы знаем заряд q на конденсаторе и его емкость C, следовательно мы знаем разность потенциалов на нем. Выполняется соотношение $dU = -dA$. Чтобы заряд на конденсаторе стал равным нулю $q = 0$, достаточно заряд с одой обкладки конденсатора перенести на другую, тогда разность потенциалов будет равна нулю $U = 0$.



Найдем работу сил поля по перемещению заряда с одной пластины на другую, до того как полный заряд конденсатора станет равным нулю.

Найдем работу сил поля по перемещению заряда dq когда на конденсаторе находится уже не Q, а q. $dA = \Delta\varphi \cdot dq$,

$\Delta\varphi = -(\varphi_1 - \varphi_2) = \dfrac{q}{c}$, $dA = \dfrac{q}{c} \cdot dq$, отсюда полная работа есть интеграл от Q до 0: $A = \int\limits_Q^0 \dfrac{q}{c} \cdot dq = \left.\dfrac{q^2}{2c}\right|_Q^0 = -\dfrac{Q^2}{2c}$.

$U = -A = \dfrac{Q^2}{2c}$ эту формулу можно получить через любые две из трёх величин q, C, $\Delta\varphi$.

Пример3.

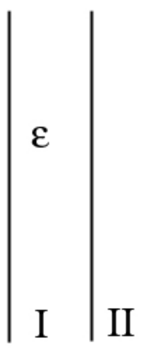
Найдем потенциал электрического диполя в однородном электрическом поле.

Найдем энергию диполя в поле, т.е. диполь удаляем целиком, это означает, что энергия взаимодействия двух зарядов не учитывается.

Запишем работу сил поля по перемещению диполя в бесконечность $A = q\cdot\varphi_{+} + q\cdot\varphi_{-} = q\cdot(\varphi_{+} - \varphi_{-})$. Здесь φ_{-} и φ_{+} - потенциалы в однородном поле, а не относительно друг друга, $(\varphi_{+} - \varphi_{-})$ - работа по перемещению единичного положительного заряда из точки "+" в точку "-". Посчитаем эту работу. Будем перемещать единичный положительный заряд по катетам, тогда работа равна $A = qEl\cdot\cos\alpha = Ed\cdot\cos\alpha = (\vec{E}\vec{D})$, итак $U = -A = -(\vec{E}\vec{D})$.

Если диполь расположен перпендикулярно полю, то его энергия равна нулю, т.к. работа по перемещению "+" и "-" зарядов будет одинакова.

Найдем энергию электрического поля в конденсаторе. Будем выражать ее через характеристики поля $\vec{E}$, $\vec{D}$, ε - электрическая проницаемость.



Рассмотрим плоский конденсатор.

Найдем энергию из тех соображений, что она равна минус работе по перемещению заряда, $A = q\Delta\varphi$. Внутри конденсатора поле $\vec{E}$ есть, а вне равно нулю.

Запишем граничные условия $D_{n1} - D_{n2} = 4\pi k\sigma$.

$D_{n2} = 0$, т.к. поле снаружи $E_{снаружи} = 0$.

$D_{n1} = 4\pi k\sigma$, $\sigma = \dfrac{q}{s}$, $D_{n1} = 4\pi k\dfrac{q}{s}$,

$q = \dfrac{D_{n1}s}{k4\pi}$, $A = \dfrac{D_{n1}s}{k4\pi}\Delta\varphi$.

Найдем работу по перемежению маленького заряда с одной обкладки конденсатора на другую, при условии, что сейчас заряд равен q.

$dA = dq\Delta\varphi$, $dq = \dfrac{s}{k4\pi}dD_{n1}$, $\Delta\varphi = El$, $dA = \dfrac{sl}{k4\pi}EdD_{n1}$,

$EdD_n = EdD\cdot\cos\alpha = (\vec{E}d\vec{D})$,

$dA = \dfrac{V}{k4\pi}(\vec{E}d\vec{D})$ сюда входят только характеристики поля о объем. Мы рассматриваем энергию чего-то, что находится в пространстве , и чем больше его объем, тем больше энергия.

$A = \int_D^0 \dfrac{V}{k4\pi}(\vec{E}d\vec{D})$.

Пусть поля небольшие, тогда $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, вектора $\vec{D}$ и $\vec{E}$ коллинеарные и не будут менять направление. $dA = \dfrac{V}{k4\pi}\varepsilon(\vec{E}d\vec{E}) = \dfrac{V}{k4\pi}\varepsilon EdE$,

$$A = \int_E^0 \frac{V}{k4\pi}\varepsilon EdE = -\frac{V}{k4\pi}\varepsilon\frac{E^2}{2}.$$

$U=-A=V\left(\frac{\varepsilon E^2}{k8\pi}\right)$, где $u=\frac{\varepsilon E^2}{k8\pi}$ - плотность энергии электростатического поля.

Мы все рассмотрели для очень небольшого кусочка конденсатора $dU=udV$ и тогда $U=\int\frac{\varepsilon E^2}{k8\pi}dV$ - энергия поля.

По этой формуле можно рассчитывать энергию любого конденсатора, т.к. здесь нет зависимости от формы конденсатора, просто объемчик где поле однородно.

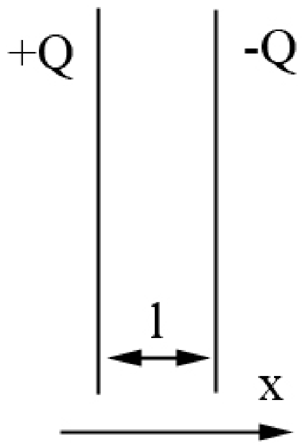
Пример.

Пондеромоторные силы, т.е. силы взаимодействия между большими проводниками (не точечные заряды), где закон Кулона как таковой не действует – мы разбиваем на маленькие кусочки.

$dU=-dA$, $dU=-\left(\vec{F}d\vec{r}\right)$

$\vec{F}=-\frac{\partial U}{\partial r}$.

Найдем с какой силой притягиваются друг к другу пластинки плоского заряженного конденсатора .



В проекции на ось X: $F=-\frac{dU}{dx}$. При смещении пластинки заряд не меняется, а емкость конденсатора изменяется.

$U=\frac{Q^2}{2C}$, $\quad dU=-\frac{Q^2}{2C}dC$,

$dC=d\left(\frac{\varepsilon s}{4\pi x}\right)=-\frac{\varepsilon s}{4\pi x^2}dx$, отсюда $dU=\frac{2\pi Q^2}{\varepsilon s}dx$,

$\frac{dU}{dx}=\frac{2\pi Q^2}{\varepsilon s}=-F$.

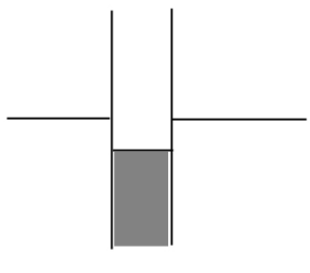
$Q=\sigma s$, где σ - поверхностная плотность.

Граничные условия: $2\pi\sigma=\frac{E}{2}$

$F=-\frac{E}{2}\frac{\sigma s}{\varepsilon}=-\frac{EQ}{2\varepsilon}$

Если $\varepsilon=1$, то $F_x=-\frac{EQ}{2}$.

Жидкость втягивается в конденсатор:



Постоянный электрический ток.

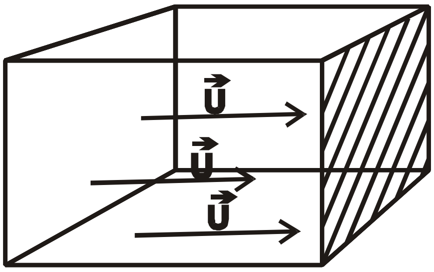
Электрический ток, плотность тока, сила тока.

Электрический ток – макроскопически упорядоченное перемещение заряженных частиц (зарядов).

Нас интересует случай, когда причиной является электрическое поле.

Основными характеристиками электрического тока являются плотность тока (векторная характеристика) и сила тока (скалярная величина).

Пусть есть большое количество зарядов e, число таких частиц в единице объема (концентрация) - n_0. Пусть все они движутся с одинаковой скоростью $\vec{u}$ (скорость упорядоченного движения).



Поместим в это пространство маленькую прямоугольную рамочку, ориентированную перпендикулярно потоку. Посчитаем заряд, прошедший через эту рамку в единицу времени. dq – заряд, прошедший через рамку за время dt . пересекут рамку те заряды, которые пресекут воображаемую поверхность dS, натянутую на рамку. $d\vec{S}\uparrow\uparrow\vec{u}$. За время dt эту поверхность пересекут частицы, заключенные в параллелепипеде с площадью основания dS и высотой udt.

$$dq = e \cdot n_0 \cdot dS \cdot u \cdot dt\,.$$

Плотность электрического тока – заряд, проходящий через единичную площадку, перпендикулярную потоку, за единицу времени.

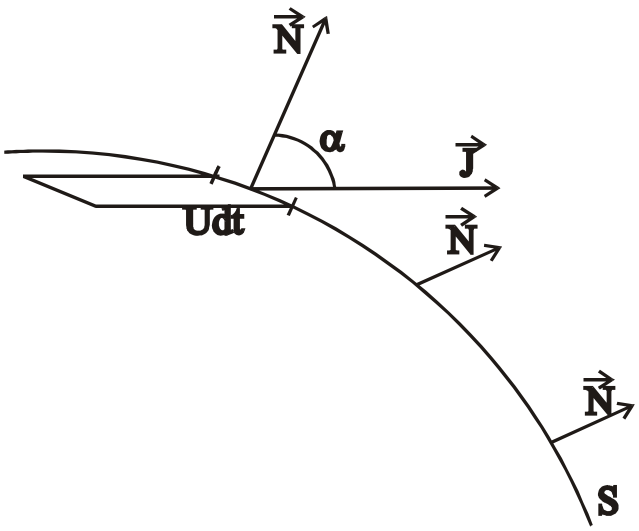
$$j = \frac{dq}{dS \cdot dt}$$

$$j = \frac{e \cdot n_0 \cdot u \cdot dS \cdot dt}{dS \cdot dt}$$

$$j = e \cdot n_0 \cdot u$$

$$\vec{j} = e \cdot n_0 \cdot \vec{u}$$

Пусть у нас есть в пространстве, в проводящей среде некоторая произвольная поверхность S с заранее выбранным направлением нормали.



Сила электрического тока через поверхность с заранее выбранным направлением нормали – это заряд, протекающий через единицу времени.

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Подсчитаем Q. Пусть в окрестности выбранной точки известна плотность тока. Очевидно, что через dS за единицу времени пройдут все частицы, лежащие в косом параллелепипеде с высотой udt.

$$I = \frac{dq_{через dS}}{dt}$$
$$dq = e \cdot n_0 \cdot u \cdot dt \cdot \cos\alpha \cdot dS$$
$$dI = e \cdot n_0 \cdot u \cdot dS \cdot \cos\alpha$$
$$dI = \left(\vec{j} \cdot d\vec{S}\right)$$
$$I = \int_S \left(\vec{j} \cdot d\vec{S}\right)$$

СИ: $[I] = [A] = \left[\frac{Кл}{c}\right]$.

Ток в $1A$ означает, что за единицу времени протекает заряд в $1Кл$.

Гауссова система: $1 аб.ед.силытока = \frac{1}{3 \cdot 10^3} A$.

Если у нас разные частицы, то понятие плотности тока можно обобщить.

$$\vec{j} = \sum_i \vec{j}_i = \sum_i e_i \cdot n_i \cdot \vec{u}.$$

Замечания.

1. Реально скорость каждой частицы складывается из двух скоростей: теплового движения и упорядоченного.

$$\vec{V}_k = \vec{V}_{tk} + \vec{u}_k$$
$$\left\langle \vec{V}_k \right\rangle = \left\langle \vec{V}_n \right\rangle + \left\langle \vec{u} \right\rangle$$
$$\left\langle \vec{V}_k \right\rangle = \left\langle \vec{u} \right\rangle.$$

Поэтому в определении плотности тока $\vec{u}$ – средняя скорость упорядоченного движения частиц.

2. Плотность тока описывает более детально поток электрического тока. Плотность тока описывает ток в окрестности выбранной точки. Это локальная характеристика. Сила тока же – это интегральная характеристика.

В общем случае $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$.

Если плотность тока является только функцией точки, то ток – *постоянный*.

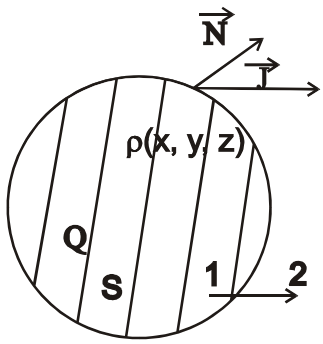
Оценим скорость упорядоченного движения электронов в металлическом проводнике площадью поперечного сечения в $1\,мм^2$ при прохождении через него тока в $1\,A$.

$$j = \frac{I}{S} = 10^6\ A/м^2$$
$$j = en_0 u$$
$$u = \left| \frac{j}{en_0} \right|$$
$$|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Кл$$
$$n_0 = 10^{22 \div 23}\ 1/см^3 = 10^{28 \div 29}\ 1/м^3$$
$$u = \left| \frac{10^6}{10^{-19} \cdot 10^{28}} \right| м/с = 10^{-3}\ м/с$$

Уравнение непрерывности. Условие стационарности.

Заряд в замкнутом объеме может изменяться, только втекая или вытекая из заданного объема через ограничивающие его поверхности.

Пусть в этом пространстве существует электрический ток. Пусть в каждой точке этого пространства определены $\vec{n}$ и $\vec{j}$. S – не перемещается и не деформируется с течением времени. Найдем убыль зарядов в данном объеме. Заряд может убыть только при пересечении площадки S.



$$-\frac{dq}{dt} = I_S = \oint_S \left(\vec{j} \cdot d\vec{S}\right)$$

$\oint_S \left(\vec{j} d\vec{S}\right) = -\frac{dq}{dt}$ – уравнение непрерывности в интегральной форме.

Уравнение непрерывности – это следствие из закона сохранения заряда.

По формуле Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \left(\vec{j} \cdot d\vec{S}\right) = \int_{V_S} div\vec{j} dV$$

$$q = \int_V \rho dV$$

$$\int_{V_S} div\vec{j} dV = -\int_V \frac{d\rho}{dt} dV$$

Поскольку это равенство справедливо для сколь угодно малой поверхности, то мы можем записать:

$div\vec{j} = -\frac{d\rho}{dt}$ – уравнение непрерывности в дифференциальной форме.

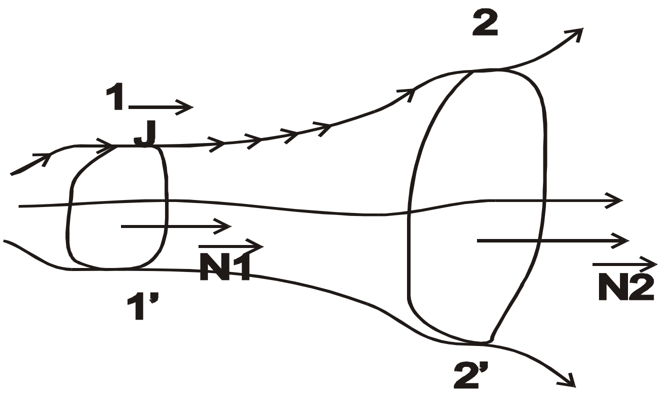
Выведем при каком условии ток будет постоянным(стационарным).

Плотность в каждой токе не меняется с течением времени: $\frac{d\rho}{dt} = 0$.

$$div\vec{j} = 0$$

$$\oint_S \left(\vec{j} \cdot d\vec{S}\right) = 0$$

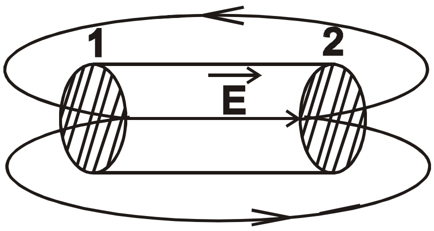
Постоянные токи можно изобразить с помощью линий тока.



Линия тока – кривая, касательные к которой в каждой точке – вектор плотности тока в данной точке. Поверхность, образованная линиями тока – *трубка тока*. $div\vec{j}=0$ – ток не имеет источника.

Линии постоянного тока всегда замкнуты. Заряд через боковую поверхность трубки не проходит, так как скорость к ней касательная. В выделенном объеме трубки тока ток должен оставаться постоянным. Сила тока, проходящего через произвольное сечение, не зависит от его положения в трубке тока.

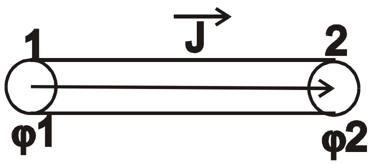
Условие существования постоянного тока.



Потенциал первого сечения больше потенциала второго сечения, значит между этими сечениями течет ток. Если течет ток, то потенциал между этими сечениями будет выравниваться, то есть ток будет нестационарным. Для поддержания постоянного тока, необходимо заряды, прошедшие по пути $1\rightarrow2$, перенести обратно по пути $2\rightarrow1$. Для этого надо совершить работу против поля. Таким образом, необходимым условием замкнутости линий тока является действие неэлектростатических сил(сторонних) на трубки тока.

Однородный участок цепи. Закон Ома.

Однородный участок – участок, на котором не действуют сторонние силы.



$$\varphi_1 - \varphi_2 = U_{12} \text{ – напряжение.}$$

Напряжение всегда пропорционально силе тока:

$I = R \cdot U_{12}$, где R – коэффициент пропорциональности(сопротивление).

Закон Ома: $I = \dfrac{U}{R}$.

Для цилиндрических проводников справедливо:

$R = \rho \dfrac{l}{S}$, где ρ – удельное сопротивление.

$$[R] = [Ом]. \qquad 1Ом = \frac{1A}{1B}.$$

Удельное сопротивление зависит от химического строения проводника, температуры и т.д.

Перейдем от конечной площади сечения к элементарной трубке тока.

$$dS, dl$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = dU$$

$$dI = jdS = \frac{dU}{\rho \dfrac{dl}{dS}}$$

$$j = \frac{dU}{\rho dl}$$

$$j = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dU}{dl}$$

$$j = \frac{1}{\rho} E$$

Закон Ома в дифференциальной форме для однородного участка цепи:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{E} = \sigma \vec{E},$$

где σ – электропроводимость.

Лекция №11.

Поле проводника с постоянным током – стационарно, а следовательно потенциально, так же как и статическое.

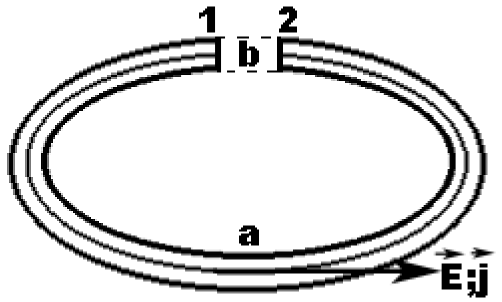
Проводник с постоянным током не эквипотенциален. В отличие от статического поля поле внутри проводника отлично от нуля.

Если сила, действующая на заряд в проводнике, мало изменяющаяся – то это регулярная сила.

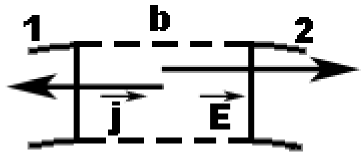
При постоянном поле скорость дрейфа также постоянна. Дрейфовая скорость определяется величиной регулярных сил действующих на объект. Сама эта скорость – установившаяся скорость. Заряд движется с $U_{дрейф} = const$ под действием регулярной силы $e\vec{E}$ и сил возникающих при хаотическом движении.

Сторонние силы. Закон Ома для неоднородного участка цепи.

Из условия стационарности $\begin{cases} div\vec{j} = 0 \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \end{cases}$ делаем вывод, что цепь постоянного тока замкнута. Рассмотрим проводник тока, малый настолько, что его можно считать трубкой тока.



В точках 1 и 2 потенциалы соответственно $\varphi 1$ и $\varphi 2$, пусть $\varphi 1 > \varphi 2$. На участке 1-а-2 течет однородный ток. Т.к.поле $\vec{E}$ - потенциально то его силовые линии должны иметь начало и конец.



На участке2-b-1 должна появиться некоторая регулярная дополнительная сила. Такие силы, отличные от электростатических, называют сторонними. Для данных сил можно ввести аналог напряжённости:

$$\vec{F}^{ст} = e\vec{E}^{ст};\ \vec{E}^{ст} = \frac{\vec{F}^{ст}}{e}$$ - напряжённость сторонних сил.

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^{ст})$$ - закон Ома для неоднородного участка цепи.

Выберем положительное направление обхода в направлении потока тока. Домножим закон Ома для неоднородного участка цепи на $\frac{d\vec{l}}{\sigma}$.

Тогда

$$\frac{\vec{j}d\vec{l}}{\sigma} = \vec{E}d\vec{l} + \vec{E}^{cm}d\vec{l}\ ;$$

$$\int\limits_{2(b)}^{1} \frac{\vec{j}d\vec{l}}{\sigma} = \int\limits_{2(b)}^{1} \vec{E}d\vec{l} + \int\limits_{2(b)}^{1} \vec{E}^{cm}d\vec{l}\ ;$$

$$\int\limits_{2(b)}^{1} \frac{\overbrace{Sj}^{I}}{\sigma S}dl = I\int\limits_{2(b)}^{1} \rho\frac{1}{S}dl = IR_{2-b-1}\ ;$$

$$\int\limits_{2(b)}^{1} \vec{E}dl = (\varphi 2 - \varphi 1)$$

$$\int\limits_{2(b)}^{1} \vec{E}^{cm}dl = \varepsilon_{2b1}$$ - алгебраическая величина.

Откуда

$$IR = (\varphi 1 - \varphi 2) + \varepsilon_{12}^{cm}$$

Т.е. произведение алгебраической величины тока на сопротивление равна разности потенциалов и ЭДС сторонних сил.

Совершим полный оборот по всему проводнику 1-a-2-b-1, тогда

$$IR_{полн} = 0 + \varepsilon_{сумм}^{cm}.$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{вн} + r_{ист}}.$$

Разветвлённые электрические цепи. Правила Кирхгофа.

Узел – точка, где сходится более двух проводников.

Ветвь – любой участок цепи без узлов.

Контур – некоторая система проводников, такая что в каждом узле контуру принадлежит лишь два проводника. Элементарный контур – тот которые нельзя разбить на отдельные контура.

Правила Кирхгофа:

1. Алгебраическая сумма токов входящих и выходящих из узла ровна нулю.
2. Сумма произведений алгебраических токов во всех ветвях данного контура на соответствующие сопротивления равна алгебраической сумме ЭДС содержащихся в этом контуре.

Первое правило Кирхгофа непосредственно следует из закона сохранения заряда во времени. Второе правило Кирхгофа следует из закона Ома для неоднородного участка цепи. Если для каждой ветви выбранного контура записать закон Ома для неоднородного участка цепи и просуммировать их то получим искомое выражение:

$$+\begin{cases} I_1R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_1 \\ I_2R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \varepsilon_2 \\ I_3R_3 = \varphi_3 - \varphi_1 + \varepsilon_3 \end{cases}$$

$$\sum_i I_iR_i = \sum_i \varepsilon_i$$

Работа и мощность в цепях постоянного тока.

Рассмотрим однородный участок цепи (нет сторонних сил). Тогда

$$dq_{1-2} = Idt\,.$$

$\partial A = dq(\varphi 1 - \varphi 2) = Udq = UIdt = \partial Q$ - Джоулево тепло в проводнике.

$P_t = \dfrac{\partial Q}{\partial t} = IU = I^2R$ - мощность генерации тепла.

Пусть проводник мал настолько, что его можно считать трубкой тока, тогда

$$\partial Q = \overbrace{j * S}^{I}\overbrace{E * l}^{U} * dt = j * E * V * dt\,.$$

Можно ввести тепловую мощность генерируемую в единице объема (удельную теплоту):

$$q_t = \frac{\partial Q}{Vdt} = jE = (\vec{j}\vec{E})\,.$$

Лекция №12.

Рассмотрим закон Джоуля - Ленца для участка цепи, когда на нем действуют электрические и сторонние силы напряженностью $\vec{E}$ и $\vec{E}^{cm}$ соответственно. Мы хотим найти удельную мощность, которая выделяется в бесконечно маленьком объемчике вблизи выбранной точки.

Известно, что мощность можно записать как скалярное произведение силы на скорость $P=\left(\vec{F}\vec{u}\right)$. Учитывая, что $\vec{E}$ и $\vec{E}^{cm}$ коллинеарные с $\vec{u}$, мощность, выделяемую при движении одного носителя заряда можно записать так $P_1=e\left(\vec{E}+\vec{E}^{cm}\right)\cdot\vec{u}=e\left(E+E^{cm}\right)\cdot u$.

А теперь запишем мощность dP, выделяемую в объеме dV, заряд в котором равен $dq=dV\cdot n\cdot e$: $dP=en\left(E+E^{cm}\right)\cdot u\cdot dV$. Величину, равную $\dfrac{dP}{dV}=en\left(E+E^{cm}\right)\cdot u=j\cdot\left(E+E^{cm}\right)$ будем называть плотностью мощности, где $j=enu$ - модуль вектора плотности тока.

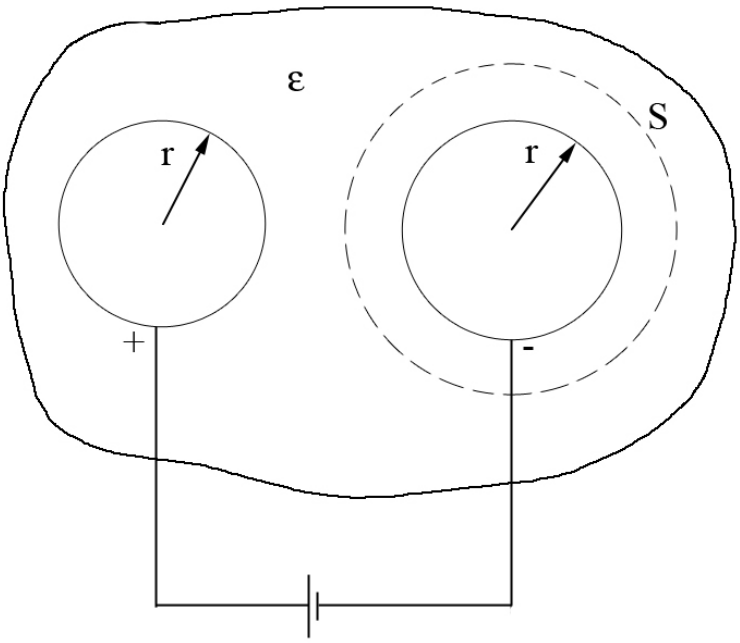
Формула $\dfrac{dP}{dV}=j\cdot\left(E+E^{cm}\right)$ была получена для маленького объема в среде, а теперь представим обозримый проводник – тонкую проволоку.

Найдем работу, которую совершают электрические и сторонние силы по перемещению заряда в проволоке $dA=I\left(\varphi_1+\varphi_2+\varepsilon\right)\cdot dt$. Здесь $\varphi_1+\varphi_2$ - работа электрических сил по перемещению единичного положительного заряда, а ε - работа сторониих сил по перемещению единичного положительного заряда. По определению мощности найдем $P=\dfrac{dA}{dt}=I\left(\varphi_1+\varphi_2+\varepsilon\right)=I^2R$.

<u>Токи в массивных проводниках.</u>

Приведем общие примеры.

Имеется бесконечная поводящая седа, н.р. земной шар. В ней есть два хороших проводника в виде шариков, расположенных на расстоянии R друг от друга, известен их радиус . Проводимость шариков много больше проводимости земного шара. Проводники соединены с источником эдс ξ. Найдем сопротивление между шариками. Для этого опишем ток, который показал бы амперметр.



Ток – поток вектора $\vec{j}$ через некоторую поверхность $I = \int\limits_s \left(\vec{j} \cdot d\vec{s}\right)$.

Поскольку ток потечет во всех направлениях, то выберем замкнутую поверхность s в виде концентрической сферы вокруг одного из шариков. Будем считать, что в среде выполняется закон Ома в дифференциальной форме $j = \sigma E$, где σ - проводимость среды в данной точке.

Итак, с одной стороны $I = \int\limits_s \left(\vec{j} \cdot d\vec{s}\right) = \sigma \int\limits_s \left(\vec{E} \cdot d\vec{s}\right) \overset{т.Гаусса}{=} \sigma \cdot 4\pi kq$.

С другой стороны:

Шарики – это хорошие проводники, помещенные в плохой диэлектрик, значит их можно рассматривать как конденсатор с “утечкой”, тогда q - заряд на конденсаторе $q = C(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Теперь в выражении $I = \sigma \cdot 4\pi kC(\varphi_1 + \varphi_2)$ посчитаем емкость.

Среду можно охарактеризовать диэлектрической проницаемостью ε - в диэлектрике поля в ε раз ослабляются $I = \sigma \cdot 4\pi kC \dfrac{\xi}{\varepsilon}$.

Сделаем оценки:

Пусть $R >> r$, найдем емкость двух шариков на расстоянии, без диэлектрика: $C = \dfrac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$ Если шарики далеко, то потенциал в любой точке поверхности S создается полями обоих шариков, причем поле дальнего шарики много меньше поля, создаваемого шариком, окруженным поверхностью S. Поэтому в вакууме приближенно $C \approx \dfrac{q}{k\dfrac{q}{r} - \left(-k\dfrac{q}{r}\right)} = \dfrac{r}{2k}$.

В диэлектрике емкость возрастает в ε раз $C = \dfrac{\varepsilon r}{2k}$.

$I = \sigma \cdot 4\pi k \cdot \dfrac{\varepsilon r}{2k} \cdot \dfrac{\xi}{\varepsilon} = 2\pi\sigma r \cdot \xi$, тогда $R = \dfrac{1}{2\pi\sigma r}$ - сюда не вошло расстояние между шариками, значит, как бы далеко не были воткнуты проводники в землю – сопротивление будет одно и тоже!

Теперь мы доказали, что если требуется передать напряжение, в качестве одного из двух проводов можно использовать землю.

Проводимость анизотропных сред.

Если записать закон Ома в дифференциальной форме в некоторой точке $\vec{j} = \vec{f}(\vec{E})$, то в общем случае функция $\vec{f}$ имеет довольно сложный вид.

I. Будем считать вектор $\vec{f}$ коллинеарным с вектором $\vec{E}$, тогда $j = f(\vec{E})$. Разложим функцию f в ряд Тейлора в близи нуля, считая, что $\vec{E}$ мало $j = j(E=0) + \left(\dfrac{\partial j}{\partial E}\right)_{E=0} E + \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\partial^2 j}{\partial E^2}\right)_{E=0} E^2 + ...$

Пусть рассматриваемый нами материал не сверхпроводник, тогда слагаемое $j(E=0)=0$. Введем следующие обозначения $\sigma = \left(\frac{\partial j}{\partial E}\right)_{E=0}$, $\zeta = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 j}{\partial E^2}\right)_{E=0}$, тогда для не сверхпроводника имеет быть место равенство $j = \sigma E + \zeta E^2 + ...$

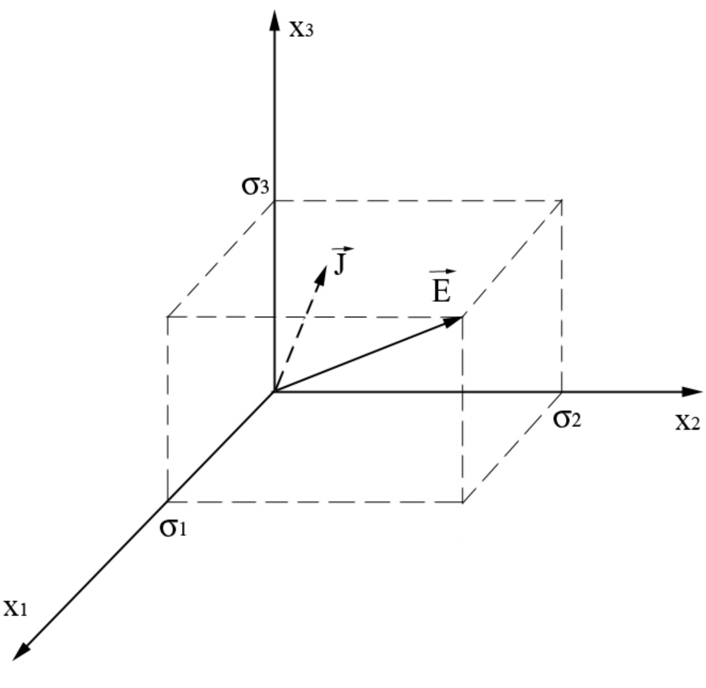
Числа σ и ζ для каждого проводника свои, но их можно измерить. σ - линейная проводимость, ζ - квадратичная проводимость. Если $\zeta \ll \sigma$, то проводник линейный. Если ζ и σ сравнимы, то проводник нелинейный.

Для линейного проводника закон Ома в дифференциальной форме выглядит следующим образом $j = \sigma E$.

II. Рассмотрим проводимость анизотропных сред (кристаллы).
$\vec{j} = \vec{f}(\vec{E})$.
Возьмем какой-нибудь кристалл и померим его проводимость в разных направлениях:
Подключим прибор последовательно и померим проводимость между гранями, перпендикулярными x_1, x_2, x_3. Полученные значения будут не обязательно одинаковы.
Померим проводимость в направлении телесной диагонали, $\vec{E}(E,E,E)$ - компоненты одинаковы. В таком случае компоненты регистрируемого тока можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} j_1 = \sigma_1 E \\ j_2 = \sigma_2 E \\ j_3 = \sigma_3 E \end{cases}$$

Поскольку $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ то $j_1 \neq j_2 \neq j_3$, значит ток потечет не в направлении вектора $\vec{E}$, а в сторону.



Запишем закон Ома в случае, когда вектор $\vec{f}$ неколлинеарный с вектором $\vec{E}$.

$$\begin{cases} j_1 = j_1(E_1, E_2, E_3) \\ j_2 = j_2(E_1, E_2, E_3) \\ j_3 = j_3(E_1, E_2, E_3) \end{cases}$$

разложим $j_1 = j_1(E_1, E_2, E_3)$ в ряд Тейлора в близи нуля как функцию трех переменных:

$$j_1 = j_1(E=0) + \left(\frac{\partial j_1}{\partial E_1}\right)_{E=0} E_1 + \left(\frac{\partial j_1}{\partial E_2}\right)_{E=0} E_2 + \left(\frac{\partial j_1}{\partial E_3}\right)_{E=0} E_3 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 j_1}{\partial E_1^{\,2}}\right)_{E=0} E_1^{\,2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 j_1}{\partial E_1 \partial E_2}\right)_{E=0} E_1 E_2 + \ldots$$

$$j_2 = j_2(E=0) + \left(\frac{\partial j_2}{\partial E_1}\right)_{E=0} E_1 + \left(\frac{\partial j_2}{\partial E_2}\right)_{E=0} E_2 + \left(\frac{\partial j_2}{\partial E_3}\right)_{E=0} E_3 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 j_2}{\partial E_1^{\,2}}\right)_{E=0} E_1^{\,2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 j_2}{\partial E_1 \partial E_2}\right)_{E=0} E_1 E_2 + \ldots$$

$$j_3 = j_3(E=0) + \left(\frac{\partial j_3}{\partial E_1}\right)_{E=0} E_1 + \left(\frac{\partial j_3}{\partial E_2}\right)_{E=0} E_2 + \left(\frac{\partial j_3}{\partial E_3}\right)_{E=0} E_3 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 j_3}{\partial E_1^{\,2}}\right)_{E=0} E_1^{\,2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 j_3}{\partial E_1 \partial E_2}\right)_{E=0} E_1 E_2 + \ldots$$

Пусть мы исследуем не сверхпроводник, и нет токов при отсутствии полей, тогда слагаемые $j_i(E=0)$ равны нулю.

Введем обозначения $\left(\frac{\partial j_k}{\partial E_l}\right)_{E=0} = \sigma_{kl}$ и $\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 j_k}{\partial E_m \partial E_s}\right)_{E=0} = \zeta_{kms}$, тогда

$j_k = \sigma_{kl} E_l + \zeta_{kms} E_m E_s + \ldots$

σ_{kl} - тензор линейной проводимости (тензор II ранга)

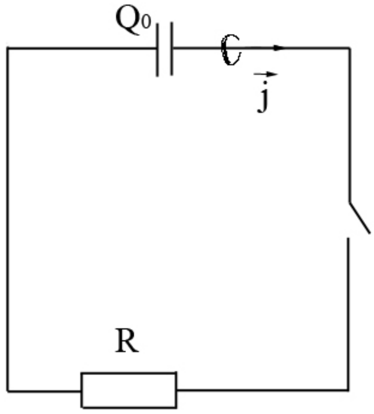
ζ_{kms} - тензор нелинейной проводимости (тензор III ранга)

Если проводник линейный $\sigma_{kl} >> \zeta_{kms}$, то закон Ома для анизотропной среды имеет вид: $j_k = \sigma_{kl} E_l$.

Процессы при разрядке и зарядке конденсаторов.

Разрядка конденсатора

Пусть у нас есть конденсатор емкостью C на котором заряд q.



Соберем цепь

И посмотрим как будет меняться сила тока $I(t)$ от времени.

Выберем сечение проводника и посмотрим, как соотносятся заряд на конденсаторе и заряд, который проходит через данное сечение в единицу времени (сила тока). Сколько протекло заряда в единицу времени, на столько же и уменьшился заряд на конденсаторе: $dQ = -Idt \;\rightarrow\; \frac{dQ}{dt} = -I$.

Знак минус, потому что убыль заряда на конденсаторе.

Запишем соотношение между емкостью C и разностью потенциалов U: $Q(t) = C\Delta\varphi$. Теперь запишем закон Ома, таким образом свяжем ток в проводнике и разность потенциалов: $I(t) = \frac{\Delta\varphi}{R}$.

Теперь решим дифференциальное уравнение: $-\dfrac{dQ}{dt}=\dfrac{Q(t)}{CR}$

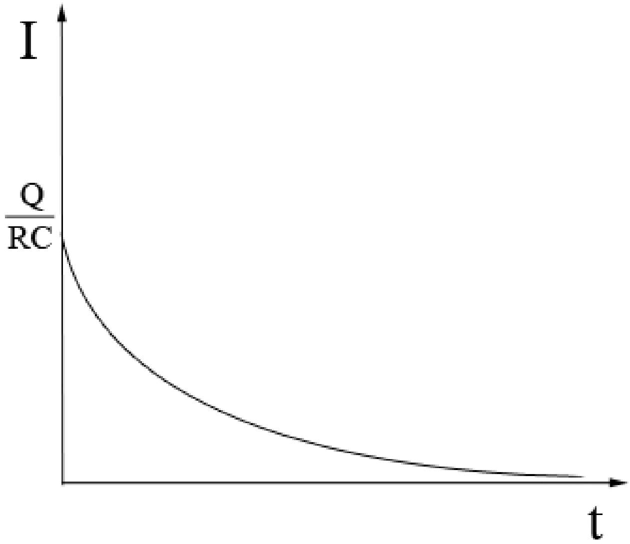
$\ln Q=-\dfrac{t}{RC}+const \;\rightarrow\; Q=Ae^{-\frac{t}{RC}}$.

При $t=0$ $Q=Q_0$, значит

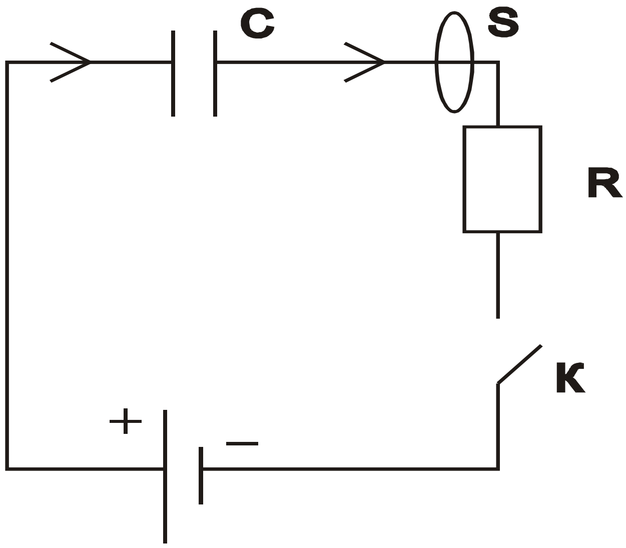
$$Q=\frac{Q_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}},$$

$$I=-\frac{dQ}{dt}=\frac{Q_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Величина $RC=\tau$ - постоянная времени. Предположим, что в данный момент времени ток во всех точках цепи одинаков – такие токи называются *квазистационарными*.



2. Зарядка конденсатора.



Считаем, что процессы квазистационарны, то есть настолько медленны, что в данный момент времени в любой точке цепи токи одинаковы. Полный заряд в единицу времени через площадку S – ток.

Сколько прошло заряда через поверхность, столько же заряда получил конденсатор.

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}.$$

Запишем закон Кирхгофа:

$$\Delta\varphi + IR = \varepsilon.$$

$\Delta\varphi$ можно записать, зная емкость конденсатора и его заряд в данный момент времени.

$$\Delta\varphi = \frac{Q}{C}$$

$$\frac{Q}{C} + \frac{dQ}{dt}R = \varepsilon$$

$$\frac{dQ}{dt}R = \varepsilon - \frac{Q}{C}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q - \varepsilon C}{RC}$$

$$\frac{dQ}{Q - \varepsilon C} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\ln(Q - \varepsilon C) = -\frac{t}{RC}$$

$$Q-\varepsilon C=Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

$$Q(t)=\varepsilon C-Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

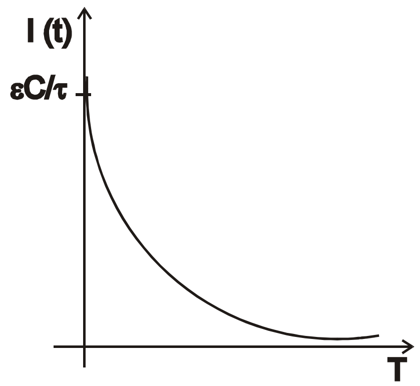
$$t=0 Q=0 \Rightarrow A=\varepsilon C$$

$$Q(t)=\varepsilon C\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$I(t)=\frac{dQ}{dt}=\frac{\varepsilon C}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\tau=RC$$

$$I(t)=\frac{\varepsilon C}{\tau}e^{-\frac{t}{RC}}$$



Постоянное магнитное поле.

Сила Лоренца.

Существует вид электрического взаимодействия, которое характерно лишь для движущихся зарядов. Это означает, что если два заряда движутся относительно друг друга с некоторой скоростью, то они взаимодействуют друг с другом не только посредством силы Кулона но и с помощью специфической силы, которая называется *магнитной силой*. Магнетизм- это следствие движения.

Можно полагать, что в процессе движения заряд создает некоторое поле, которое называется *магнитное поле*. будем обозначать силовую характеристику этого поля вектором $\vec{B}$. Эта характеристика называется *индукцией магнитного поля*.

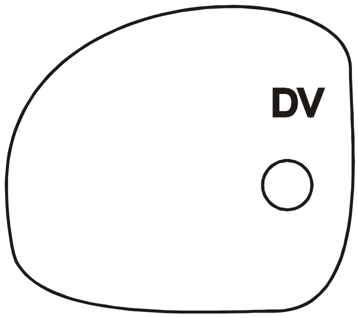
Если один заряд или система зарядов создали поле с вектором $\vec{B}$, то на другой заряд, движущийся в этом поле, действует сила:

$$\vec{F}_л = \frac{q}{c}\left[\vec{V} \times \vec{B}\right].$$

Эта сила называется *силой Лоренца*. Отметим особенность этой силы: она зависит от скорости, а скорость, как известно, в разных системах отсчета разная. Данное выражение для силы записано в Гауссовой системе. Эта система хороша тем, что в ней вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$ имеет такую же размерность, что и вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$. В системе СИ размерности этих характеристик различаются.

Сила Ампера.

Представим себе, что у нас движутся много зарядов(то есть, имеет место быть электрический ток). У нас есть проводник, в котором текут токи, двигаются заряды. В каждой точке нашего проводника определена плотность тока. Поместим проводник в магнитное поле. Найдем силы, которые действуют в проводнике.



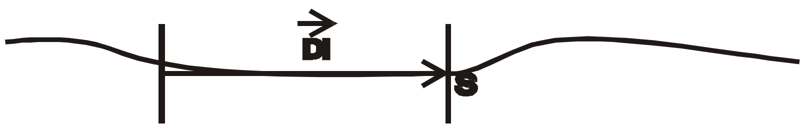
Выделим в проводнике объемчик dV, настолько малый, чтобы в нем плотность тока и индукция магнитного тока были постоянными. n – плотность зарядов (количество зарядов, движущихся в единице объема). Пусть эти заряды движутся со скоростью $\vec{u}$. Рассматривая, dV как один заряд, движущийся с известной скоростью в однородном магнитном поле, можем записать силу, действующую на dV.

$$d\vec{F} = \frac{endV}{c}\left[\vec{u} \times \vec{B}\right] = \frac{dV}{c}\left[en\vec{u} \times \vec{B}\right] = \frac{1}{c}\left[\vec{j} \times \vec{B}\right] \cdot dV .$$

Закон Ампера для проводника:

$$\vec{F} = \int_V \frac{1}{c}\left[\vec{j} \times \vec{B}\right] \cdot dV .$$

Рассмотрим частный случай.



Вместо большого проводника у нас будет проволока, по которой течет ток.. выберем участок проволоки dl, который можно считать прямолинейным. Тогда , зная что площадь поперечного сечения S, запишем dV и подставим его в закон Ампера для проводника.

$$dV = Sdl$$
$$d\vec{F} = \frac{1}{c}\left[\vec{j} \times \vec{B}\right] \cdot Sdl = \frac{1}{c}\left[S \cdot \vec{j} \times \vec{B}\right] \cdot dl$$

Предположим, что в сечении проводника плотность тока одинакова, тогда $\left|S \cdot \vec{j}\right| = I$. Введем единичный вектор в направлении dl:

$$\vec{n}dl = d\vec{l}$$
$$\vec{j} = \vec{n}j$$

Тогда выражение для силы перепишем в следующем виде:

$$d\vec{F} = \frac{I}{c}\left[d\vec{l} \times \vec{B}\right].$$

Получили закон Ампера для проволоки:

$$\vec{F} = \int_L \frac{I}{c}\left[d\vec{l} \times \vec{B}\right].$$

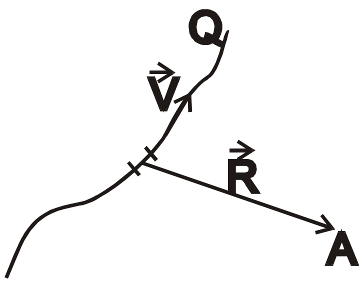
Для магнитного поля аналогично, как и для электростатического, можно ввести силовые линии. Касательные в каждой точке к силовым линиям – вектор $\vec{B}$.

Закон Био-Савара.

Найдем какое магнитное поле создает движущийся заряд. Индукция магнитного поля, созданного движущимся зарядом, будет зависеть от заряда, от расстояния и о скорости.

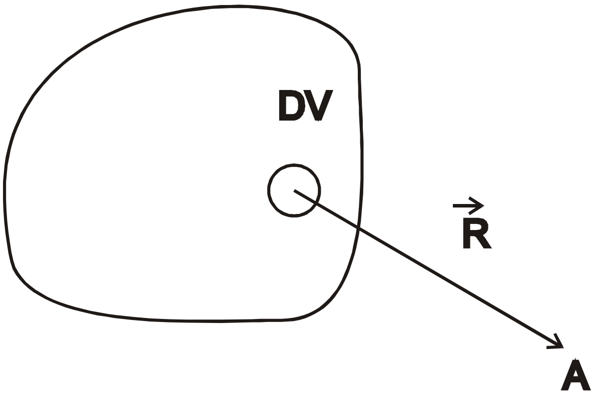
Запишем закон Био-Савара для одного заряда:

$$\vec{B} = \frac{q}{cr^3}\left[\vec{V} \times \vec{r}\right].$$



Таким способом мы можем найти магнитное поле, созданное движущимся зарядом q, в данный момент времени.

Допустим, что у нас есть тело, в котором текут токи. Эти токи можно описать $\vec{j} = \vec{j}(\vec{R})$, где $\vec{R}$ – радиус-вектор точек внутри тела.



Выберем внутри тела объемчик, настолько маленький, что внутри этого объемчика плотность тока можно считать постоянной. Запишем магнитное поле, созданное зарядами, находящимися внутри этого объемчика.

$$d\vec{B} = \frac{endV}{cr^3}\left[\vec{u} \times \vec{r}\right]$$

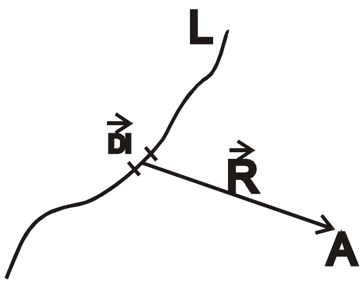
$$en\vec{u} = \vec{j}$$

Закон Био-Савара для образца:

$$\vec{B} = \int_V \frac{1}{cr^3}\left[\vec{j} \times \vec{r}\right] \cdot dV .$$

Поле, которое создается током, почти такое же, как и поле, которое создается точечным зарядом.

Рассмотри частный случай закона Био-Савара для образца, когда образцом является проволока.



$$dV = Sdl$$
$$d\vec{B} = \frac{1}{cr^3}\left[\vec{j} \times \vec{r}\right] Sdl\ .$$

Предположим, что в сечении проводника плотность тока одинакова, тогда:

$$I = \left|\vec{j} \cdot S\right|.$$

Введем единичный вектор в направлении dl, тогда:

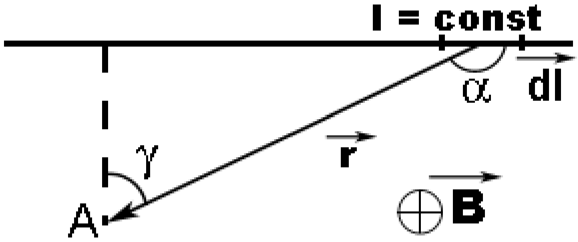
$$\vec{n}dl = d\vec{l}$$
$$\vec{j} = \vec{n}j \qquad .$$
$$d\vec{B} = \frac{I}{cr^3}\left[d\vec{l} \times \vec{r}\right]$$

Закон Био-Савара для проволоки:

$$\vec{B} = \int_L \frac{I}{cr^3}\left[d\vec{l} \times \vec{r}\right].$$

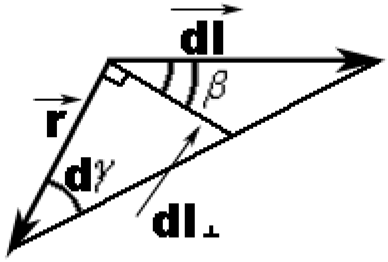
Лекция №14.

Пример: Найдём магнитное поле бесконечной прямолинейной проволоки в точке расположенной на расстоянии a от проволоки. Пусть по проволоке течёт ток $I = const$.



$d\vec{l}$ совпадает с направлением вектора плотности тока $\vec{j}$. $\vec{r}$ - радиус вектор точки А относительно $d\vec{l}$.

$$dB = \frac{I}{cr^2} dl * Sin\alpha .$$



$$Sin\alpha = Sin90° + Sin\beta = Cos\beta ,$$

$$dl * Cos\beta = dl_{\perp} .$$

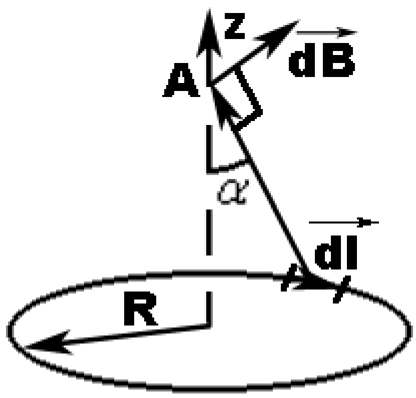
$$dB = \frac{I}{cr^2} dl_{\perp} .$$

Пусть $d\vec{l}$ мало настолько, что $dl_{\perp} = r * d\gamma$.

$$dB = \frac{I}{cr} d\gamma = \frac{I}{ca} Cos\gamma * d\gamma .$$

$$B = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{I}{ca} Cos\gamma * d\gamma = \frac{2I}{ca} .$$

Пример: Найдём магнитное поле витка по которому течёт постоянный ток I. Пусть $d\vec{l}$ мало настолько, что его можно считать участком прямой.



$\vec{r}$ - радиус-вектор в точку наблюдения.

$$d\vec{B} = \frac{I}{cr^3}\left[d\vec{l} * \vec{r}\right].$$

Из симметрии задачи, очевидно, что вектор магнитной индукции направлен по оси соленоида. Тогда

$$dB_Z = \frac{I}{cr^2} dl * \cos\alpha .$$

$$B = \int \frac{I}{cr^2} \cos\alpha * dl = \frac{2\pi RI}{cr^2} \cos\alpha .$$

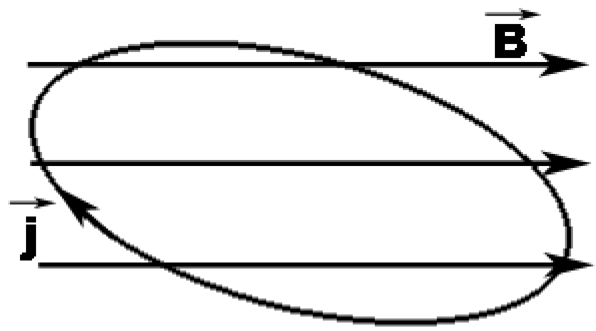
Т.е. в центре витка магнитная индукция $B = \dfrac{2\pi I}{cR}$.

Виток с током в однородном магнитном поле.

Пусть есть плоский виток произвольной формы. Рассмотрим два случая направления вектора магнитной индукции.

1. Вектор магнитной индукции лежит в плоскости витка.

Разобьём плоскость витка на узкие полоски параллельные вектору $\vec{B}$. Пусть они узки настолько, что отсекаемые участки проволоки можно считать прямолинейными.



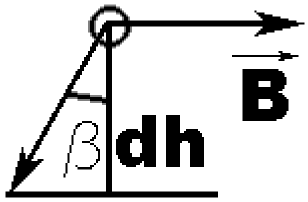
Выберем два отрезка, отсечённых одной полоской, и найдем действующие на них силы.

Рассмотрим участок $d\vec{l}_1$.

$$dF_1 = \frac{I}{c} dl * B * \sin\alpha .$$

Опустим перпендикуляр от одной полоски к другой.

$$\alpha = 90^\circ + \beta ;\ \sin\alpha = \cos\beta .$$



$$dF_1 = \frac{I}{c} Bdh .$$

Для участка $d\vec{l}_2$ можно провести аналогичные рассуждения

$$dF_2 = \frac{I}{c} Bdh .$$

Но $d\vec{F}_1 \uparrow\downarrow d\vec{F}_2$. Тогда $\vec{F} = \oint \frac{I}{c} \left[d\vec{l} * \vec{B} \right] = \oint (d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2) = 0$. Но моменты, создаваемые этими силами не равны нулю.

$$d\vec{M} = \left[\vec{r}_1 d\vec{F}_1 \right] + \left[\vec{r}_2 d\vec{F}_2 \right].$$

Найдем момент сил относительно точки приложения силы $d\vec{F}_2$. Тогда

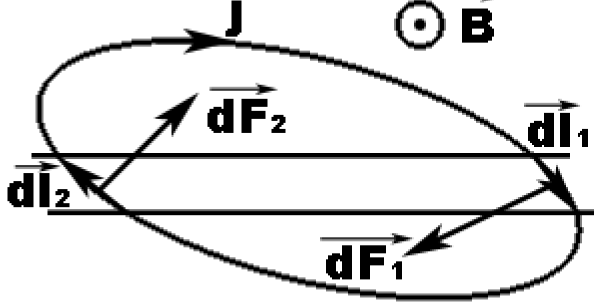
$$dM = r * \frac{I}{c} * B * dh \approx \frac{I}{c} * B * dS .$$

Пусть направление плотности тока – положительное направление обхода. Тогда можно ввести величину магнитного момента:

$$\vec{\mu} = \frac{I}{c} \vec{S} .$$

$$\vec{M} = \left[\vec{\mu} * \vec{B} \right].$$

2. Пусть $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости витка.



Тогда $dF_1 = \frac{I}{c} dl_1 * B$. Обе силы лежат в плоскости тела. $d\vec{M} = 0$. Возникшие силы будут пытаться деформировать виток.

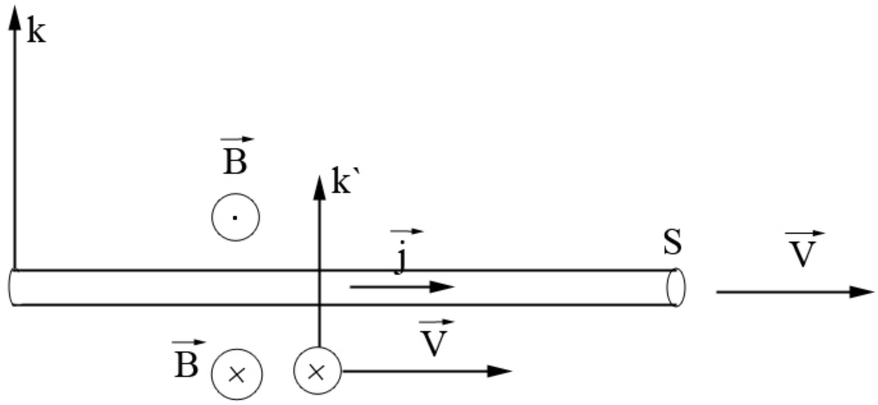
3. Поле направлено косо по отношению к плоскости витка. Тогда его можно разложить на составляющие: перпендикулярную и лежащую в плоскости витка. Тогда момент возникающих сил

$$\vec{M} = \left\lfloor \vec{\mu} * \vec{B} \right\rfloor; \; M = \mu * B_{перпен} = \mu * B * \sin \alpha \,.$$

Где α - угол между вектором нормали витка и вектором магнитной индукции.

Лекция №15.

Пусть имеет место быть длинный прямолинейный проводник, по которому течет ток $\vec{j}$. Считаем, что средняя скорость движения положительных зарядов в нем равна $\vec{V}$.



Пусть рядом с проводником движется положительный заряд с такой же скоростью $\vec{V}$. Найдем силу, которая будет действовать на движущийся заряд в разных системах отсчета.

В k - системе, которая неподвижна относительно проволоки:

В момент времени, когда скорость заряда $\vec{V}$ коллинеарная с вектором $\vec{j}$, сила Лоренца, действующая на заряд равна $F_л = \frac{1}{c} qVB$, учитывая, что $B = \frac{2I}{rc}$, а $I = \int\limits_s \left(\vec{j} \cdot d\vec{s}\right) = j \cdot S = q^+ nV \cdot S = \rho^+ VS$ получим следующее выражение для модуля силы Лоренца $F_л = \frac{2\rho^+ qV^2}{c^2 r} S$.

В k` - системе, в которой заряд q и заряды в проводнике не движутся друг относительно друга.

Относительная скорость движения зарядов равна нулю, поэтому сила магнитного взаимодействия равна нулю $F_л = 0$. Получается что сила зависит от выбора инерциальной системы отсчета! Но этого быть на может! Значит мы что-то не учли.

Преобразования скоростей должны выполняться не по преобразованиям Галилея, а с помощью формул специальной теории относительности!

Подчитаем $F_л$` в $k$`-системе, она должна совпадать с $F_л$.

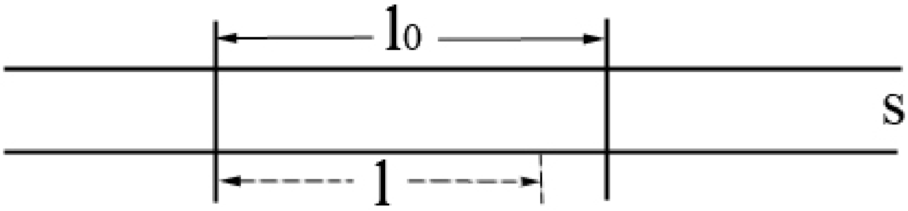
Есть две системы счета: первая – движется, другая – покоится. Тогда в системе отсчета, где стержень неподвижен его длинна L_0 - собственная длинна. Его длинна в системе отсчета, относительно которой стержень движется, будет $L = L_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$, $L \le L_0$ (Лоренцево сокращение длинны).

Найдем как преобразуется заряд и плотность заряда в различных системах отсчета.

<u>Заряд</u>, как и скорость света, во всех системах отсчета постоянна. Это подтверждает множество экспериментальных фактов. Заряд – инвариант – не зависит от системы отсчета.

Рассмотрим <u>плотность заряда</u>.

Возьмем проволоку сечения S, длинны l.



S -перпендикулярна скорости движения системы отсчета.

$Q = Q_0 \;\Rightarrow\; \rho l S = \rho_0 l_0 S \;\Rightarrow\; \rho = \rho_0 \frac{l_0}{l} = \rho_0 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$, итак $\boxed{\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}}$, где

ρ_0 - плотность заряда в неподвижной системе отсчета.

ρ - плотность заряда с точки зрения наблюдателя, относительно которого проволока с зарядом движется.

ρ^+ - плотность положительного заряда, который создает ток .

ρ^- - плотность заряда, который остался в узлах кристаллической решетки – неподвижный.

ρ_0^+ и ρ_0^- - плотности заряда в других системах отсчета.

Мы работаем в $k`$-системе: положительный заряд покоится, а отрицательный движется в противоположную сторону со скоростью $\vec{V}$.

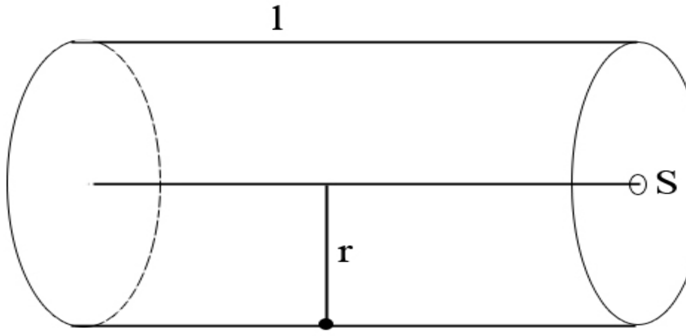
В одной системе отсчета собственная плотность заряда одна, в другой – другая.

В $k`$-системе: $\rho = \frac{\rho^-}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \rho^+\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = \frac{\rho^-}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \rho^-\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = \frac{V^2/c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\rho^-$

Получили плотность заряда в $k`$-системе $\rho = \frac{V^2/c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\rho^-$.

Если мы относительно проволоки покоимся (проволока в руках), то $\rho = 0$. Если мы бежим за положительным зарядом, то плотность $\rho \neq 0$, где ρ составляют ионы в узлах кристаллической решетки, которая движется в обратном направлении – проволока кажется заряженной.

Рассмотрим силу, действующую на заряд q, на расстоянии r от тонкой проволоки толщиной S.



Запишем т. Гаусса: $\oint Eds = 4\pi\rho lS$, $2\pi rlE = 4\pi\rho lS \;\Rightarrow\; E = \dfrac{2\rho}{r}S$, подставляя сюда $\rho = \dfrac{V^2/c^2}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\rho^-$, найдем $F = qE = \dfrac{2\dfrac{V^2}{c^2}\rho^- q}{r\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}S$.

$$F_{Кул} \cong \frac{2V^2\rho^- q}{rc^2}S$$

В $k`$-системе: силы Лоренца уже не будет, но появится сила кулона, такая же по модулю и направлению. Положительный заряд будет притягиваться к проводнику, плотность заряда которого равна ρ^- .

Векторный потенциал.

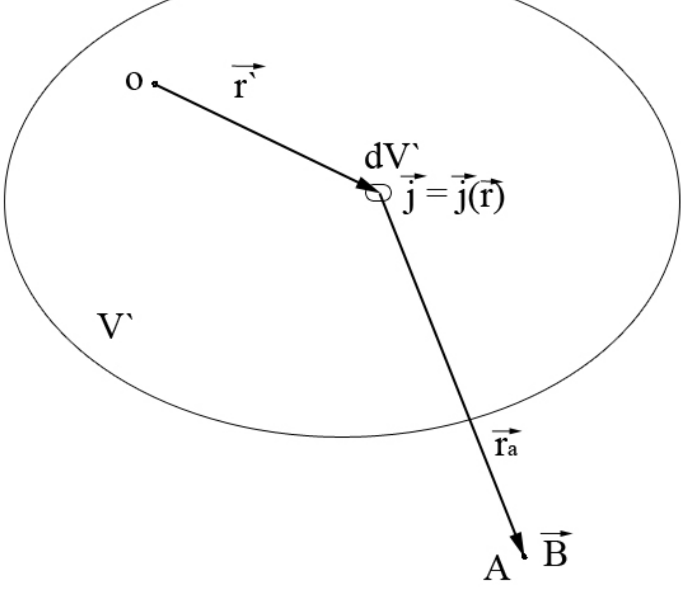
Ранее все свойства электростатического поля мы определили с помощью следующих соотношений:

1. т. Гаусса $\oint \vec{E}d\vec{s} = 4\pi q$, $div\vec{E} = 4\pi\rho$
2. Т. с циркуляции $\oint \vec{E}d\vec{l} = 0$, $rot\vec{E} = 0$
3. $\vec{E} = -grad\varphi$.

Найдем подобные соотношения для магнитного поля.
Найдем аналог $\vec{E} = -grad\varphi$.
Вектор $\vec{B}$ выражается через дифференциальный оператор от некоторой величины.
Пусть есть образец -среда, в которой текут токи.

$\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$

$\vec{r}`$ - радиус вектор выбранного маленького объема образца относительно точки О. Из каждого такого объема будем проводить в точку наблюдения А вектор $\vec{r_a}$ (это не радиус - вектор).



Запишем закон Био-Савара в этих обозначениях: $\vec{B}=\frac{1}{c}\int\limits_{V`}\frac{\left[\vec{j}\times\vec{r_a}\right]}{r_a^3}dV`$.

Вектора $\vec{r`}$ и $\vec{r_a}$ независимы.

<u>Вспомогательная формула:</u>

$$grad_a\left(\frac{1}{r_a}\right)=\frac{\partial}{\partial x_a}\left(\frac{1}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}}\right)\cdot\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y_a}\left(\frac{1}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}}\right)\cdot\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z_a}\left(\frac{1}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}}\right)\cdot\vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_a}\left(\frac{1}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}}\right)=-\frac{2x_a}{2\left(x_a^2+y_a^2+z_a^2\right)^{3/2}}=-\frac{x_a}{r_a^3}$$

$$grad_a\left(\frac{1}{r_a}\right)=-\left[\frac{x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k}}{r_a^3}\right]=-\frac{\vec{r_a}}{r_a^3}.$$

Воспользуемся ей: $\vec{B}=-\frac{1}{c}\int\limits_{V`}\left[\vec{j}\times grad_a\left(\frac{1}{r_a}\right)\right]dV`=\frac{1}{c}\int\limits_{V`}\left[grad_a\left(\frac{1}{r_a}\right)\times\vec{j}\right]dV`$

<u>Еще одна вспомогательная формула:</u>

$rot_a\left(\frac{\vec{j}}{r_a}\right)=\left[\vec{\nabla_a}\times\frac{\vec{j}}{r_a}\right]=\left[\vec{\nabla_a}\times\vec{j}\right]\frac{1}{r_a}+\left[\vec{\nabla_a}\frac{1}{r_a}\times\vec{j}\right]$, но $\left[\vec{\nabla_a}\times\vec{j}\right]\frac{1}{r_a}=0$, т.к. дифференцирование идет по переменной, от которой $\vec{j}$ не зависит; $\vec{j}=\vec{j}\left(\vec{r`}\right)\neq\vec{j}\left(\vec{r_a}\right)$.

$rot_a\left(\frac{\vec{j}}{r_a}\right)=\left[grad_a\left(\frac{1}{r_a}\right)\times\vec{j}\right]$ - это и есть подынтегральное выражение в формуле $\vec{B}=\frac{1}{c}\int\limits_{V`}\left[grad_a\left(\frac{1}{r_a}\right)\times\vec{j}\right]dV`$, значит $\vec{B}=\frac{1}{c}\int\limits_{V`}rot_a\left(\frac{\vec{j}}{r_a}\right)dV`$ здесь интегрирование по "штрихам", а ротор по "а", следовательно, порядок интегрирования и дифференцирования можно поменять. $\vec{B}=\frac{1}{c}rot_a\int\limits_{V`}\left(\frac{\vec{j}}{r_a}\right)dV`$. Величина

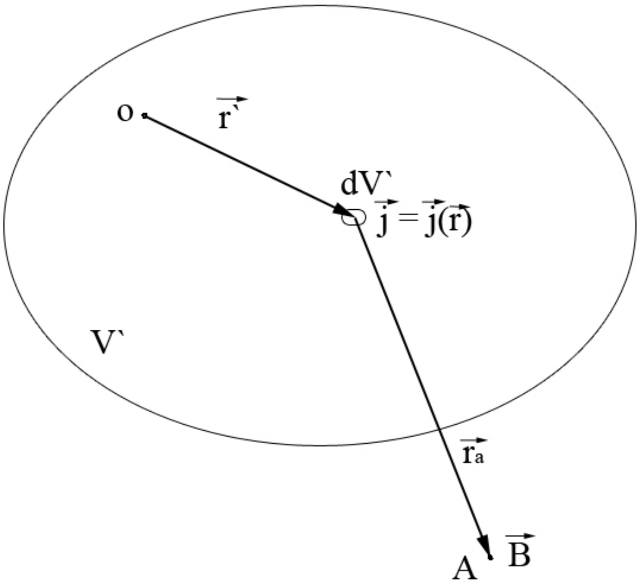
$\int\limits_{V`}\left(\frac{\vec{j}}{r_a}\right)dV`$ - интеграл от вектора по объему, является вектором. Обозначим

$\boxed{\vec{A}=\frac{1}{c}\int\limits_{V`}\left(\frac{\vec{j}}{r_a}\right)dV`}$, тогда $\boxed{\vec{B}=rot\vec{A}}$.

Вектор $\vec{A}$ - называется векторный потенциал магнитного поля в точке А.

Т. Гаусса для магнитного поля.

Запишем сначала в дифференциальной форме, а потом в интегральной.



Поток через бесконечно маленький кубик:

$div\vec{B} = \left(\vec{\nabla}_a \left[\vec{\nabla}_a \vec{A}\right]\right) = \left(\vec{\nabla}_a, вектор \perp набла\right) =$

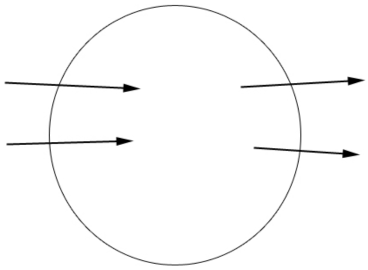
, итак т. Гаусса для вектора $\vec{B}$:

$\boxed{div\vec{B} = 0}$

По теореме Остроградского-Гаусса: $\int\limits_v div\vec{B}dV = \oint\limits_s \left(\vec{B}d\vec{s}\right) = 0$,

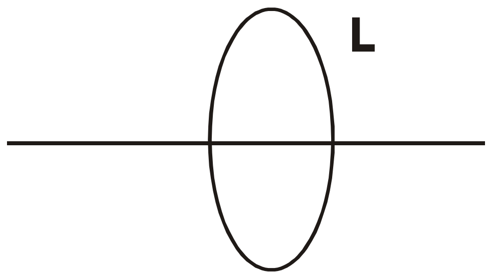
$\boxed{\oint\left(\vec{B}d\vec{s}\right) = 0}$

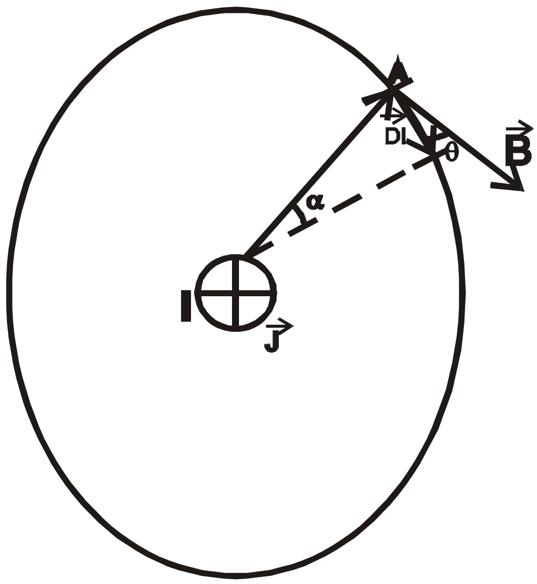
Это можно представлять так: сколько силовых линий магнитной индукции $\vec{B}$ вошло в поверхность, столько и вышло – для любой поверхности. В электростатике были заряды на которых начинались или кончались силовые линии. Магнитные силовые линии не имеют начала и конца, значит, магнитных зарядов не существует. Силовые линии $\vec{B}$ всегда замкнуты!



Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля.

Рассмотрим провод с током, выделим в нем прямолинейный участок и выделим в нем замкнутый контур L.





Зафиксируем некую точку A, проведем к ней радиус вектор. В этой точке провод будет создавать магнитное поле. Из точки A построим прямолинейный участок контура $d\vec{l}$.

$$\vec{B} \perp \vec{r}$$

$$\left(\vec{B} \cdot d\vec{l}\right) = Bdl\cos\theta$$

$$dl\cos\theta = dl_B$$

α – очень маленький, поэтому

$$dl = rd\alpha$$

$$\left(\vec{B} \cdot d\vec{l}\right) = Brd\alpha$$

Выполним такое разбиение для каждого участка контура и просуммируем, учтя, что индукция магнитного поля, созданного длинным проводом равна: $B = \dfrac{2I}{cr}$.

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L Brd\alpha$$

$$\oint_L Brd\alpha = \oint_L \frac{2Ir}{cr}d\alpha = \oint_L \frac{2I}{c}d\alpha = \frac{2I}{c}\oint_L d\alpha$$

$$\oint_L d\alpha = 2\pi$$

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{4\pi I}{c}$$

Пусть теперь имеется много проводов, и они пересекают поверхность, натянутую на контур L.

$$\sum_i \oint_L \left(\vec{B}_i d\vec{l}\right) = \sum_i \frac{4\pi}{c} I_i \ .$$

Суммирование идет по i, а интегрирование идет по l, поэтому суммирование интегрирование можно поменять местами.

$$\oint \left(\vec{B}d\vec{l}\right) = \frac{4\pi}{c}\sum_i I_i \ .$$

Циркуляция вектора магнитной индукции $\vec{B}$ по произвольному замкнутому контуру, равна сумме всех токов, пересекающих поверхность, натянутую на этот контур с коэффициентом $\frac{4\pi}{c}$.

Обобщим. Пусть у нас имеется среда, в которой некотором образом текут токи. Они определены в каждой точке вектором плотности тока $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$.

Выберем произвольный замкнутый контур L. Разбив его на маленькие кусочки, можно считать, что внутри кусочка $\vec{j} = const$. Тогда $I = \sum_K \vec{j}_k d\vec{S}_K$. Поэтому $I = \int_{S_L} \left(\vec{j}d\vec{S}\right)$. Тогда теорема о циркуляции может быть записана следующим образом:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int_{S_L} \left(\vec{j}d\vec{S}\right).$$

Пусть имеется среда и контур L. Натянем на этот контур поверхность. Тогда, согласно теореме Стокса, циркуляцию вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру можно представить как поток ротора вектора $\vec{B}$ через поверхность, натянутую на данный контур.

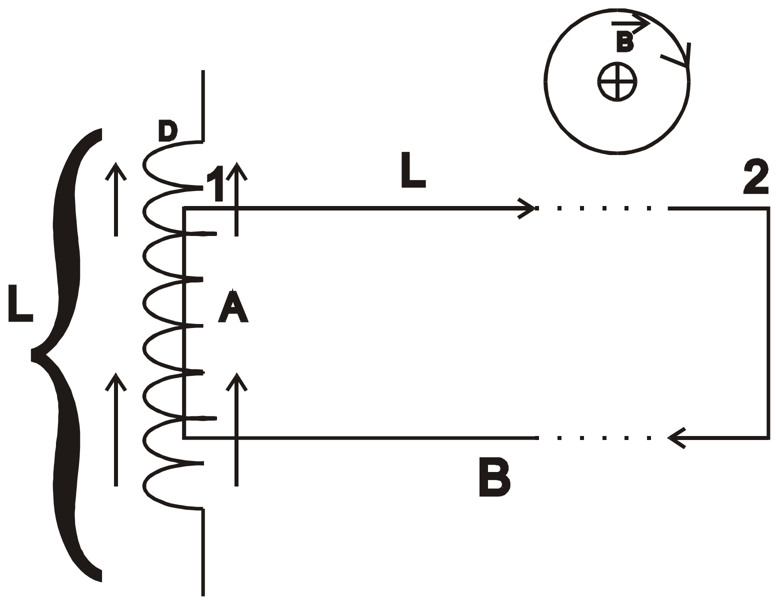
$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \int_{S_L} \left(rot\vec{B}d\vec{S}\right)$$

$$\int_{S_L} rot\vec{B}d\vec{S} = \int \frac{4\pi}{c}\vec{j}d\vec{S}.$$

Имеем два интеграла одного смысла (поток) по одной и той же поверхности, поэтому:

$$rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}\ .$$

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$.
Пример. Поле длинного соленоида (катушки).



Найдем индукцию магнитного поля внутри катушки (внутри катушки поле $\vec{B}$ параллельно оси катушки). Катушка такова, что диаметр сечения катушки много меньше длины катушки.

Выберем замкнутый контур в форме прямоугольника, одна сторона которого находится внутри катушки, другая – на бесконечности. Запишем теорему о циркуляции:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\sum I\ .$$

Если контур не очень большой по сравнению с длинной соленоида, то внутри поле можно считать одинаковым.

$$Ba + 0 + 0 = \frac{4\pi}{c}IN\ .$$

По боковым сторонам циркуляция равна нулю, так как направление обхода контура перпендикулярно направлению вектора магнитной индукции $\vec{B}$ внутри соленоида. По второй стороне прямоугольника, параллельной оси соленоида, циркуляция вектора $\vec{B}$ равна нулю, так как эта сторона находится на бесконечности. N – количество витков, которые охватил контур. Допустим, что намотка такова, что на единицу длины приходится n витков. Тогда: $N = n \cdot a$ и $Ba = \frac{4\pi}{c} nIa$. Получили поле внутри соленоида:

$$B = \frac{4\pi}{c} I \cdot n \ .$$

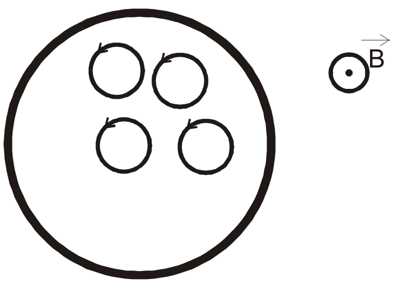
Магнитное поле в веществе.

Вещество реагирует на магнетизм и само обладает магнетизмом. Что является причиной магнетизма в веществе? Магнитное поле создается движущимися зарядами (токами). Следовательно, если вещество обладает магнетизмом, значит в веществе есть ток.

1. Электрон движется вокруг ядра.
2. Электрон обладает магнетизмом, который связан с собственным механическим моментом – спином.
3. Такими же магнитными моментами обладают частицы, входящие в состав атома.

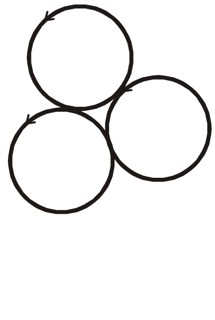
Будем считать, что всегда в веществе текут молекулярные токи. Эти токи почти всегда ответственны за все явления магнетизма.

Рассмотрим цилиндр.

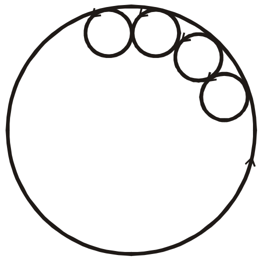


Пусть этот цилиндр имеет магнитные свойства. Это означает, что в этом цилиндре имеют место быть молекулярные токи, и они упорядочены.

В местах касания ток равен нулю.



На границе , где нет касаний величина тока отлична от нуля.



Таким образом, мы можем забыть про множество токов внутри рассматриваемого цилиндра, а говорить только о токе, который течет по поверхности цилиндра. Получили, что никакого магнетизма нет, только по поверхности потек ток в ту или иную сторону, и этот ток создал магнитное поле.

Введем понятие вектора намагниченности среды $\vec{J}$. Вектор $\vec{J}$ определяется следующим образом:

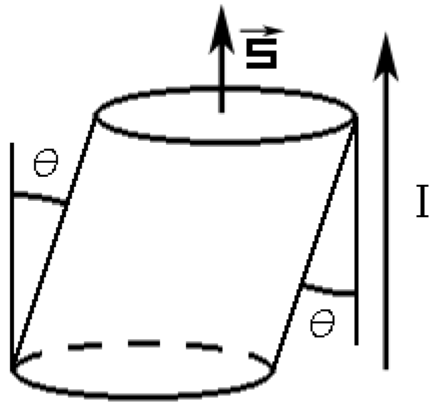
$$\vec{J} = \frac{\vec{\mu}}{V},$$

где $\vec{\mu} = \frac{1}{c} I \cdot \vec{S}$ – магнитный момент.

$$J = \frac{I_m}{c} \cdot \frac{S}{V}$$

$$J = \frac{I_m}{c \cdot L} \quad .$$

$$I_m = J \cdot c \cdot L$$



Пусть дан косой цилиндр. Найдём $J_{цилиндр}$.

$$J \cdot V = J \cdot S \cdot l \cdot \cos\theta;$$

$$J \cdot \cos\theta = J_l;$$

$$J_{гран} = I_m \frac{S}{c};$$

$$J_l \cdot S \cdot l = I_m \frac{S}{c} \Rightarrow J_l \cdot l = \frac{I_m}{c};$$

$$J_l = \frac{1}{c}\frac{I_m}{l} = \frac{1}{c} i_m.$$

I_m - полный ток по поверхности.

i_m - ток на единицу длины

Теорема о циркуляции вектора B в веществе.

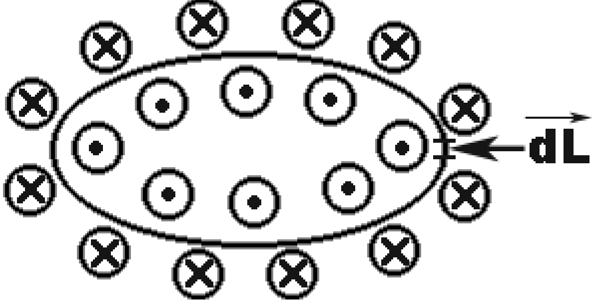
Введём вектор B в веществе, для этого выберем некоторую полость, большую, чем межатомное расстояние. Такую, чтобы в неё можно было поместить некоторую катушку.

$$\oint \vec{B} * d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \sum I.$$

Но в теореме о циркуляции вектора магнитной индукции ничего не сказано о природе токов текущих через выбранную поверхность. Обозначим через I - токи проводимости (т.е. токи от батарейки). А через $I_m = I_A$ - токи, связанные с намагничиванием, токи Ампера. Тогда

$$\oint \vec{B} * d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\left(I + I_m\right).$$

Построим вокруг контура некоторый тор – замкнутый цилиндр.



Ток Ампера движется по тору. Тогда

$$I_m = \oint\limits_L i_m dl \text{, где } i_m \text{ - ток на единицу длины.}$$

$$I_m = \oint\limits_L i_m dl = c\oint\limits_L \overbrace{\vec{I}_l}^{I*\cos\theta} dl = c\oint\limits_L (\vec{I} * d\vec{l}).$$

$$\oint\limits_L (\vec{B} * d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c} I + \frac{4\pi}{c} \oint\limits_l (\vec{I} * d\vec{l}).$$

$$\oint ((\vec{B} - 4\pi\vec{I}) * d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c} I.$$

$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{J}$ - напряжённость магнитного поля $\vec{B}$.

$\oint\limits_L \vec{H} * d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I$ - циркуляция вектора $\vec{H}$ по замкнутому контуру L равна полному току проводимости по поверхности, натянутой на этот контур с точностью до коэффициента $\frac{4\pi}{c}$.

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Магнитная проницаемость и восприимчивость.

$$\begin{cases} \vec{B} = f(\vec{H}) \\ \vec{I} = f(\vec{H}) \end{cases}$$

Пусть функции «хорошие»: $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{H}$ и $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{H}$. Тогда разложим данные функции в ряд Тейлора вблизи ноля:

$$B = \underbrace{B(H = 0)}_{0} + \underbrace{\left(\frac{dB}{dH}\right)_{H=0}}_{\mu} * B + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 B}{dH^2}\right)_{H=0} * B^2 + \ldots$$

Если вещество не ферромагнетик, то $B(H = 0) = 0$.

Если поля небольшие, то $\vec{B} = \mu\vec{H}$ (μ - магнитная проницаемость, измеряется практически).

Аналогично $\vec{J} = \eta\vec{H}$, $\eta = \left(\frac{dI}{dH}\right)_{H=0}$ - магнитная восприимчивость вещества.

$\eta > 0$ - парамагнетик.

$\eta < 0$ - диамагнетик.

Т.к. $\vec{H} = \mu\vec{H} - 4\pi\eta\vec{H}$, то $\mu = 1 + 4\pi\eta$. "μ" может быть больше или меньше единицы.

$\mu > 1$ - парамагнетик.

$\mu < 1$ - диамагнетик.

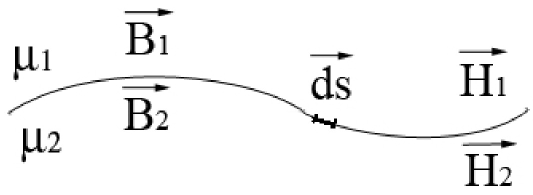
Ферромагнетик – сильно нелинейное вещество.

Лекция №18.

Граничные условия для векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$ на границах раздела двух сред.

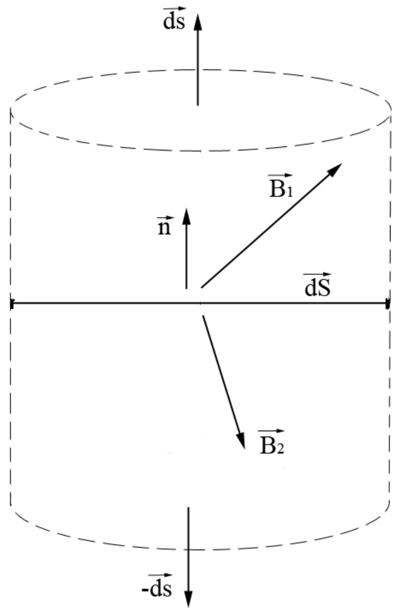
Рассмотрим две полу бесконечные среды, состоящие из двух магнетиков, которые возможно являются проводниками. Один магнетик характеризуется магнитной проницаемостью μ_1, а другой μ_2. Поле характеризуется функцией $\vec{B}(\vec{r})$, по границе раздела возможно течет ток $\vec{j}(\vec{r})$.

Выберем площадку ds на границе раздела двух сред. ds на столько мала, что плотность тока на ней можно считать постоянной, и поле $\vec{B}$ по разные стороны от площадки ds тоже постоянно.



Зададим вектор нормали $\vec{n}$ и запишем т. Гаусса для вектора $\vec{B}$: $\int\limits_s \vec{B}\vec{ds} = 0$.

Выдерем поверхность S в виде цилиндра с основанием ds и высотой h. Запишем поток вектора $\vec{B}$ через поверхность S: $\vec{B_1}\vec{ds} + \vec{B_2}\vec{ds} + d\phi_{бок} = 0$.



Устремим h к нулю, тогда $S_{бок} \to 0$, $d\phi_{бок} \to 0$

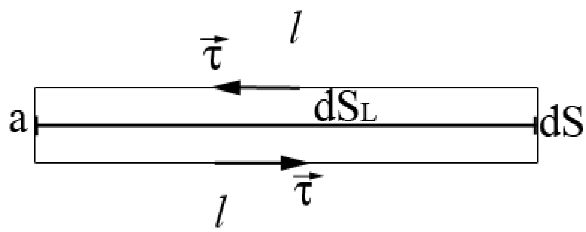
$\left(\vec{B_1}\vec{ds}\right) = ds\left(\vec{B_1}\vec{n}\right) = B_{1n}ds$, где B_{1n} - нормальная компонента вектора $\vec{B}$.

С учетом того, что основания цилиндра имеют разные направления нормали, а мы хотим записать в проекции на вектор $\vec{n}$, то $B_{1n}ds - B_{2n}ds = 0$, т.о. получаем граничные условия вектора $\vec{B}$:

$$\boxed{B_{1n} - B_{2n} = 0}$$

Выбреем замкнутый контур в виде прямоугольника со сторонами a и l и запишем теорему о циркуляции для вектора $\vec{H}$ по данному замкнутому контуру L:

$\oint\limits_L \vec{H}\vec{dl} = \frac{4\pi}{c} I$.



Поскольку вблизи площадки вектора $\vec{B}$ и $\vec{H}$ постоянны, то можем не писать интеграл, и т.к.

$\vec{H}\overrightarrow{dl} = \vec{H}\vec{\tau}l = H_\tau l$, то $H_{1\tau}l - H_{2\tau}l + C_{бок} = \dfrac{4\pi}{c}I$

Если $a \to 0$, то $C_{бок} \to 0$.

I - поток вектора $\vec{j}$ через замкнутую поверхность $I = \left(\vec{j}\,\overrightarrow{ds_L}\right)$.

Введем вектор линейной плотности тока i - ток на единицу длинны, тогда $I = i_n l$. Таким образом получаем формулу

$$\boxed{H_{1\tau} - H_{2\tau} = \frac{4\pi}{c} i_n}$$

На границе раздела двух сред вектор $\vec{H}$ прерывается и величина этого раздела с точностью до коэффициента равна нормальной компоненте линейной плотности тока проводимости (от батарейки).

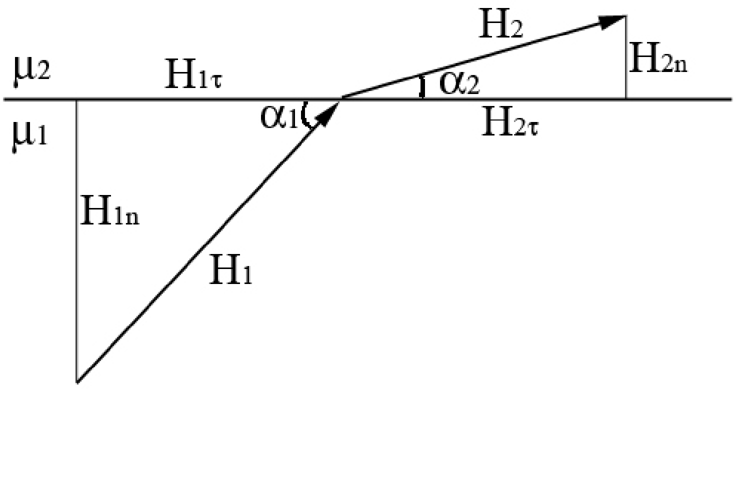
Замечания:

1. $H_{1n} - H_{2n} \neq 0$!!!
2. Для вектора $\vec{B}$ можно написать формулу похожую на $H_{1\tau} - H_{2\tau} = \dfrac{4\pi}{c} i_n$, но в нее будут входить молекулярные токи, а что с ними делать – не знаем – бесполезная формула!

Геометрическая интерпретация.

Пусть на границе раздела двух сред не текут токи проводимости $i = 0$,

тогда $\begin{cases} B_{1n} - B_{2n} = 0 \\ H_{1\tau} - H_{2\tau} = 0 \\ B_1 = \mu H_1 \\ B_2 = \mu H_2 \end{cases}$,



при условии, что поля не очень сильные. Тогда

$H_1 \cos\alpha_1 = H_2 \cos\alpha_2$ и

$\mu_1 H_1 \sin\alpha_1 = \mu_2 H_2 \sin\alpha_2$

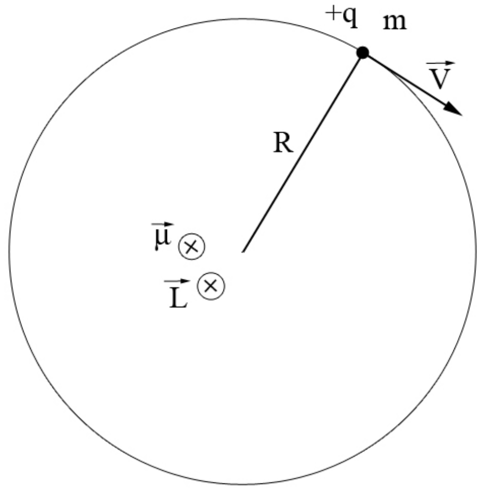
Поделив одно выражение на другое получим

$$\boxed{\mu_1 tg\alpha_1 = \mu_2 tg\alpha_2}$$

Гиромагнитное отношение.

Предположим, что по окружности движется шарик массы m, зарядом q и постоянной скоростью V.

Так как он заряжен и движется по окружности, то его можно рассматривать как виток с током, поэтому можно говорить о его магнитном моменте $\vec{\mu} = \frac{1}{c} I\vec{S}$.



С другой стороны, есть момент инерции и момент импульса $\vec{L} = \left[\vec{r} \times \vec{P}\right]$.

Вектора $\vec{\mu}$ и $\vec{L}$ коллинеарные. Если $q<0$, то $\vec{\mu}$ и $\vec{L}$ противоположно направлены. Найдем отношение длин этих векторов $\frac{\mu}{L}$ - *гиромагнитное отношение*.

Учитывая, что ток в витке можно записать так: $I = \frac{Nq}{t}$, то $\mu = \frac{1}{c} IS = \frac{1}{c}\frac{N}{t} q\pi R^2 = \frac{1}{c}\frac{V}{2\pi R^2} q\pi R^2 = \frac{V}{2c} Rq$.

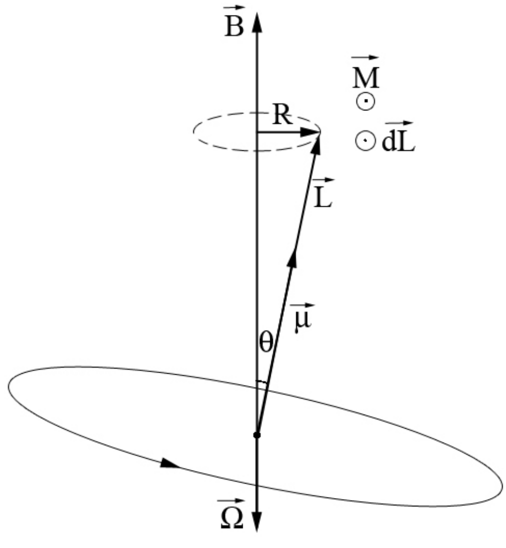
$L = RmV$

$$\boxed{\frac{\mu}{L} = \frac{1}{2c}\left(\frac{q}{m}\right)}.$$

Видим, что *гиромагнитное отношение* не зависит от характера движения электрона (от его скорости, от того по какому радиусу он движется).

<u>Прецессия атомных магнетиков в магнитном поле.</u>

Задача: Пусть по окружности движется заряженная частица. Охарактеризуем ее магнитным моментом $\vec{\mu}$. Есть масса m, скорость V, $\vec{L}$ - ее момент импульса. Вся эта система находится во внешнем магнитном поле, что будет происходить дальше?



Эту движущуюся частицу можно рассматривать как маленький виток с током, (порядка одного ангстрема). На таких расстояниях поле $\vec{B}$ можно считать однородным. На подобный виток с током действует момент сил $\vec{M} = \left[\vec{\mu} \times \vec{B}\right]$. Запишем уравнение динамики твердого тела: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, т.е. $d\vec{L} \uparrow\uparrow \vec{M}$ вектор $\vec{L}$ будет крутиться (прецессировать) вокруг вектора $\vec{B}$.

$dL = M \cdot dt = \mu B \sin\vartheta \cdot dt$

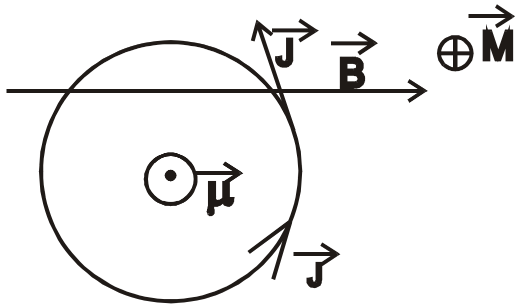
Конец вектора $\vec{L}$ будет описывать окружность радиуса $R = L\sin\vartheta$
$dL = L\sin\vartheta\cdot\Omega dt$.

$$\boxed{\Omega = \left(\frac{\mu}{L}\right)B}$$

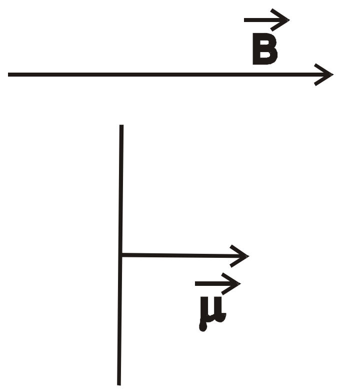
Угловая скорость прецессии выражается через фундаментальную характеристику частицы, умноженную на величину B.
Эту формулу получил Лармор. Ω - ларморова частота.

Парамагнетики. Диамагнетики. Ферромагнетики.

1. Каждый атом или атомный фрагмент в веществе имеет ненулевой магнитный момент (электроны движутся вокруг атома, т. е. есть токи есть магнитный момент; у атома есть спин).

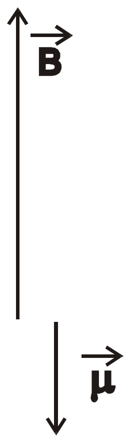


Поместим наше тело во внешнее магнитное поле. обозначим атом как виток с током. Поле будем считать однородным. На виток не действуют силы (их геометрическая сумма равна нулю), но действует момент сил. Так будет выглядеть картина.



Суммарное поле будет больше. Это модель парамагнетика(вещество, у атомов которого есть ненулевой магнитный момент).

2. У атомов или атомных фрагментов вещества нет магнитного момента. Электрон, вращающиеся вокруг ядра, представляют собой своеобразные замкнутые токи (виток с током). Если поместить атом во внешнее магнитное поле, то электронная орбита начнет прецессировать(подробнее в лекции № 18).



Электронная орбита будет прецессировать около направления поля с ларморовской частотой. Прецессия электронной орбиты эквивалентна некоторому дополнительному вращению электрона, которое дает дополнительный магнитный момент. Этот дополнительный магнитный момент ориентирован против поля. Это модель диамагнетика.

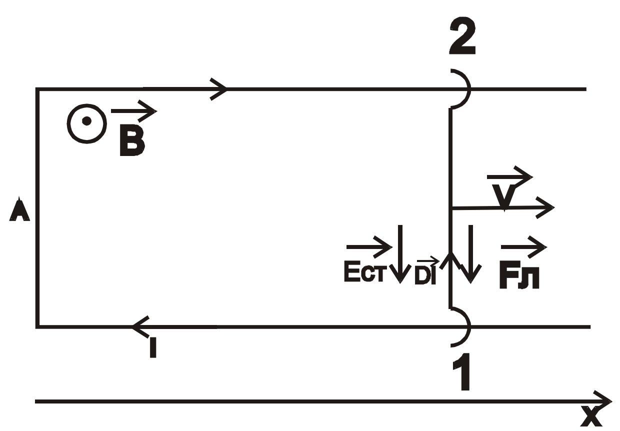
3. Ферромагнетик характеризуется двумя свойствами:
   1) образец ферромагнетика имеет спонтанную намагниченность: $J(B=0)\neq 0$;
   2) зависимость B и H сильно нелинейная(соотношение $\vec{B}=\mu\vec{H}$ не выполняется; при разных значениях H μ – разное).

   Особенностью ферромагнетиков является наличие гистерезиса. Функция $\vec{B}=f(\vec{H})$ – неоднозначная (некоторому значению H соответствует несколько значений B).

   К ферромагнетикам относятся некоторые металлы, кобальт, редкоземельные металлы и их сплавы. Ферромагнетизм – чисто квантовый эффект.

Электромагнитная индукция.

Эффект электромагнитной индукции открыл Фарадей в 1831 году.



Пусть имеется проводник(провод). По проводу может скользит металлическая перемычка. На электроны в проводнике будет действовать сила Лоренца:

$$\vec{F}_Л = \frac{1}{c} q\left[\vec{V} \times \vec{B}\right].$$

При таком движении в проводнике будет наблюдаться упорядоченное движение зарядов вниз, т. е. пойдет ток(т.к. проводник лежит на проводнике, то ток будет циркулировать). Сменим направление движение перемычки, тогда сила Лоренца поменяет направление на противоположное, в туже сторону будет направлена плотность тока.

Сила Лоренца не электрическая сила, поэтому ее можно считать сторонней. Найдем силу, действующую на единичный положительный заряд, это будет напряженность поля сторонней силы.

$$\vec{E}^{ст} = \frac{\vec{F}_Л}{q} = \frac{1}{c}\left[\vec{V} \times \vec{B}\right].$$

Найдем работу сил стороннего поля по перемещению единичного положительного заряда(ЭДС).

$$\varepsilon^{ИНД} = \oint \vec{E}^{ст} d\vec{l} = \int\limits_{1\to 2} \vec{E}^{ст} d\vec{l} = -\frac{1}{c} VBa = -\frac{1}{c}\frac{dx}{dt} aB.$$

Интеграл $\int\limits_S \vec{B} d\vec{S} = \phi$ – поток вектора $\vec{B}$ через поверхность S, называется магнитным потоком.

$$\varepsilon^{инд} = -\frac{1}{c}\frac{d(axB)}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d(SB)}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{dS \cdot B}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}.$$

$$\varepsilon^{инд} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Эта формула справедлива для любой формы изменения магнитного потока.

1) Можно все стороны рамки деформировать и не только в плоскости, но и в пространстве, тогда поток можно выразить как $\int\limits_S \vec{B} d\vec{S}$;
2) можно рамку не трогать, а измерять $\vec{B}$;
3) можно измерять угол между $\vec{B}$ и $d\vec{S}$ (повернуть рамку).

Это невозможно доказать при помощи тех постулатов, которые нам известны. Это фундаментальное свойство электромагнитного поля.

$$\varepsilon^{инд} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\varepsilon^{инд} = \oint\left(\vec{E}^{ст} d\vec{l}\right) = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Сила Лоренца не совершает работу. При изменении магнитного потока электроны перемещает электрическое поле. при изменении магнитного потока возникает электрическое поле, отличное от электростатического. Работа по замкнутому контуру не равна нулю и она зависит от пути, следовательно для такого поля нельзя вести понятие потенциала. Такое поле называется *вихревым электрическим полем*.

$$\oint_L\left(\vec{E}^{вихр} d\vec{l}\right) = \int_S rot\vec{E}^{вихр} d\vec{S} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S}$$

$$\int_S rot\vec{E}^{вихр} d\vec{S} = -\int_S \frac{1}{c}\frac{d\vec{B}}{dt}d\vec{S}$$

$$rot\vec{E}^{вихр} = -\frac{1}{c}\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Уравнение $rot\vec{E}^{вихр} = -\frac{1}{c}\frac{d\vec{B}}{dt}$ выражает закон Фарадея в дифференциальной форме.

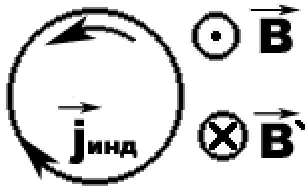
Нет площадей, проводников и т.д., есть точка, в которой меняется индукция магнитного поля и в ней возникает вихревое электрическое поле.

Правило Ленца.

$$\varepsilon^{инд} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\vec{B}}{dt}$$

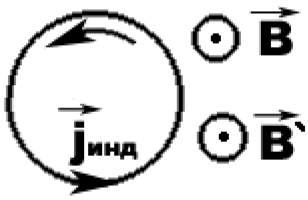
Рассмотрим виток, помещенный в однородное, но изменяющееся во времени магнитное поле. Выберем направление обхода по правилу правого винта по вектору магнитной индукции.



1. Пусть $\frac{dB}{dt} > 0$, тогда $\frac{d\Phi}{dt} > 0$. Тогда $\varepsilon^{инд} < 0$, т.е. если мы понесём пробный заряд по направлению обхода то работа вихревого поля будет отрицательна.

Любой электрический ток создаёт магнитное поле, т.е. поле $\vec{B}'$, создаваемое током индукции, направлено против $\vec{B}$.

2. Пусть $\frac{dB}{dt} < 0$, тогда $\frac{d\Phi}{dt} < 0$. Тогда $\varepsilon^{инд} > 0$, т.е. работа сторонних сил по этому контуру в выбранном направлении положительна, т.е. ток потечёт по направлению обхода.

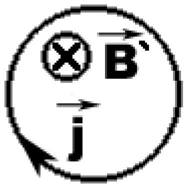


Поле $\vec{B}'$, создаваемое током индукции, сонаправлено с $\vec{B}$.

Правило Ленца: При изменении магнитного потока, индукционный ток в витке направлен так, чтобы возникшее при этом «дополнительное магнитное поле $\vec{B}'$» препятствовало изменению магнитного потока.

Индуктивность проводников.

Пусть есть виток, по которому течёт ток. Этот ток создаёт собственное магнитное поле, следовательно, можно посчитать магнитный поток $\vec{B}'$ в этом витке $\Phi = \int(\vec{B}' * d\vec{S})$.



Нельзя ли при некоторых условиях записать формулу проще Магнитный поток зависит от тока (закон Био-Савара) и от геометрии витка (круглый, квадратный и т.д.). Попробуем описать поток так $\Phi = \frac{L}{c} I$; L - некоторое число характеризующее геометрию витка. L - индуктивность проводника.

$$\varepsilon^{инд} = -\frac{d\Phi}{dt} * \frac{1}{c};$$

$$\varepsilon^{инд} = -\frac{1}{c^2} * \frac{d}{dt}(L * I).$$

Т.е. при наличии тока $\vec{j}$ проводник может деформировать самого себя. Если проводник жёсток то $L = const$, тогда

$$\varepsilon^{инд} = -\frac{L}{c^2} * \frac{dI}{dt}.$$

__Пример:__ Найдём индуктивность катушки о которой известно: длина l; N - число витков. Пусть $l >> d$.

Найдём магнитный поток в контуре L , который охватывает всю катшку и одним ребром уходит на бесконечность. Тогда $\oint\limits_L \vec{B} * d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} * I * N$.

$$B * l + \overbrace{d\Phi_{бок}}^{=0} = \frac{4\pi}{c} * I * N.$$

$$B = \frac{4\pi}{c} * I * n;\ n = \frac{N}{l}.$$

Пусть площадь сечения - S. В – однородно.

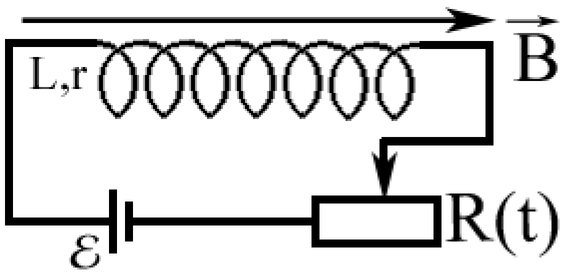
$$\Phi = B * S * N = \frac{4\pi}{c} N^2 * \frac{S}{l} I = \frac{I * L}{c},$$

$$L = 4\pi * N^2 \frac{S}{l}.$$

__Замечание:__ На краях поле не однородно, но т.к. $l >> d$ то пренебрегаем этой погрешностью, т.е. краевые эффекты считаем незначительными.

Самоиндукция.

Рассмотрим следующую схему :



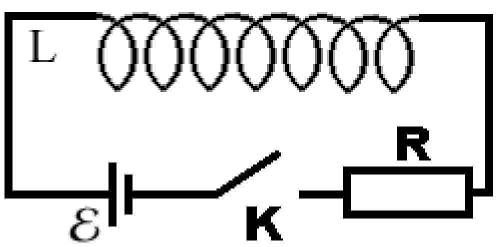
Если $R(t)=const$, то в катушке будет постоянное магнитное поле. Пусть $R(t)$ - меняется во времени. Тогда ток, текущий в контуре, станет переменным. Тогда переменным будет и поток в катушке, следовательно возникнет $\varepsilon^{инд}=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$. Т.о. появится дополнительная ЭДС и ток не будет подчиняться закону $I=\frac{\varepsilon}{r+r_0+R}$. Магнитный поток меняется за счёт изменения собственного магнитного поля в результате изменения тока.

Явление возникновения $\varepsilon^{инд}$ в проводнике под влиянием тока текущего через этот проводник – самоиндукция.

1. $\frac{dR}{dt}<0$, т.е. сопротивление уменьшается, следовательно $\frac{dI}{dt}>0$, $\frac{d\Phi}{dt}>0$, $\varepsilon^{инд}<0$. Тогда $\varepsilon^{инд}$ и $\varepsilon^{батар}$ имеют разные знаки, т.е. полное ЭДС $\varepsilon^{полн}=\varepsilon-\left|\varepsilon^{инд}\right|$ уменьшается. Т.о. изменение тока будет меньше чем без катушки.

2. $\frac{dR}{dt}>0$, т.е. сопротивление увеличивается, следовательно $\frac{dI}{dt}<0$, $\frac{d\Phi}{dt}<0$, $\varepsilon^{инд}>0$. Тогда $\varepsilon^{инд}$ и $\varepsilon^{батар}$ имеют одинаковые знаки, т.е. полное ЭДС $\varepsilon^{полн}=\varepsilon+\left|\varepsilon^{инд}\right|$ увеличивается. Т.о. изменение тока будет меньше чем без катушки.

Пример: Найдём ток который потечёт по контуру в случае замыкания ключа К.



Запишем второе правило Кирхгофа для всего контура $IR=\varepsilon+\varepsilon^{инд}$. Пусть катушка жёсткая, т.е. $L=const$.

20

$$\varepsilon^{инд} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L * I) = -\frac{1}{c^2} * L * \frac{dI}{dt}.$$

Тогда

$$IR = \varepsilon - \frac{1}{c^2} L * \frac{dI}{dt}.$$

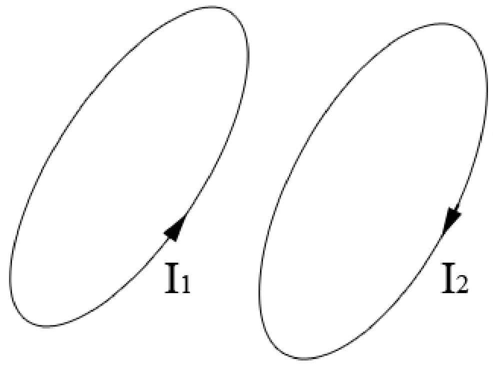
Откуда $I(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, где $\tau = \frac{L}{Rc^2}$.

Т.о. наличие индуктивности препятствует скачкообразному изменению тока.

Лекция №21.

Взаимная индукция.

Пусть есть две катушки, по которым текут токи I_1 и I_2.



Катушки находятся достаточно близко, чтобы внутри катушки I_1 было поле, создаваемое катушкой I_2, и наоборот, внутри катушки I_2 было поле, создаваемое катушкой I_1.

Запишем суммарный поток вектора $\vec{B}$ через катушку

$$\Phi_1 = \Phi_1(I_1, I_2, конструктивные\_характеристики\_контуров(размеры, ориентация))$$

Поток $\Phi = \frac{1}{c}LI$ является линейным по току, значит поток через катушку I_1 можно записать следующим образом: $\Phi_1 = \frac{1}{c}L_1I_1 + \frac{1}{c}L_{12}I_2$ здесь $\frac{1}{c}L_1I_1$ - часть магнитного потока, которая создается собственным током, $\frac{1}{c}L_{12}I_2$ - часть магнитного потока, которая создается током I_2, L_{12} - коэффициент, размерность которого совпадает с L_1.

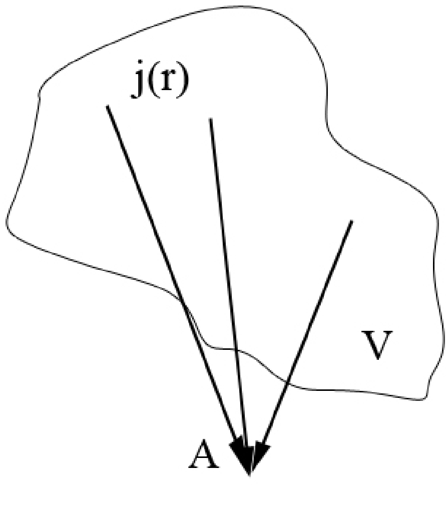
Аналогично запишем поток через катушку I_2: $\Phi_2 = \frac{1}{c}L_2I_2 + \frac{1}{c}L_{21}I_1$.

L_1, L_2 - индуктивности катушек по определению (поток своего поля через себя).

Коэффициенты L_{12} и L_{21} называются коэффициентами взаимной индукции.

Докажем, что $L_{12} = L_{21}$.

По з. Био-Савара $\vec{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r})}{R`}dV$



(аналог $\varphi = \int \frac{q}{r}dr$) $\vec{B} = rot\vec{A}$

$$I_1 = 0 \quad I_2 \neq 0$$

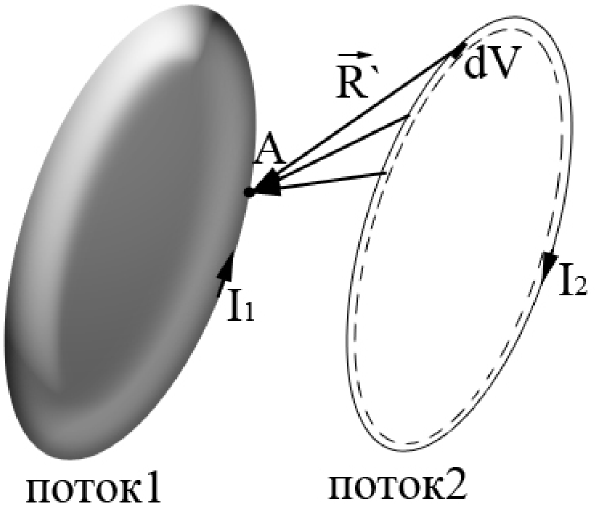
$$\varepsilon^{инд} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_1}{dt},\ \Phi_1 = \frac{1}{c}L_{12}I_2,$$

$$\Phi_1 = \int_{s1} \vec{B}d\vec{S} = \int_{s1} rot\vec{A}d\vec{S}$$

$$\varepsilon_1^{инд} = -\frac{1}{c^2}L_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r})}{R`} dV \,,\ \vec{j}dV = \vec{j}Sd\vec{l} = Id\vec{l} \,,\ \vec{A} = \frac{1}{c}\oint \frac{I_2}{R`} d\vec{l}_2 \,,$$

$$\Phi_1 = \int_s rot\vec{A}d\vec{S} = \oint_{по\_витку1} \vec{A}d\vec{l}_1 = \frac{1}{c}\oint_{по\_витку1}\oint_{по\_витку2} \frac{I_2}{R`} d\vec{l}_2 d\vec{l}_1 = \left[\frac{1}{c}\oiint_{по\_виткам} \frac{I}{R`} d\vec{l}_2 d\vec{l}\right] I_2 \,,$$



$\oiint_{по\_виткам} \frac{I}{R`} d\vec{l}_2 d\vec{l} = L_{12}$. Теперь наоборот.

$\underline{I_1 \neq 0}\_\underline{I_2 = 0}$

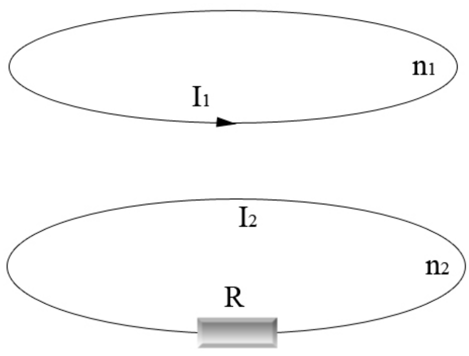
$\Phi_2 = \frac{1}{c} L_{21} I_1$. Проделаем те же самые рассуждения (один виток создает векторный потенциал, а по другому считаем поток).

$$\Phi_2 = \left[\frac{1}{c}\oint_{по\_витку2}\oint_{по\_витку1} \frac{I}{R`} d\vec{l}_1 d\vec{l}_2\right] I_1$$

, $\oint_{по\_витку2}\oint_{по\_витку1} \frac{I}{R`} d\vec{l}_1 d\vec{l}_2 = L_{21}$ в этом интеграле переменные интегрирования независимые, поэтому их можно менять местами, т.о. видим, что $L_{12} = L_{21}$.

Из коэффициентов индукции можно составить тензор $L_{ij} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$, где $L_{11} = L_1$, $L_{22} = L_2$, $L_{12} = L_{21}$.

<u>Трансформатор.</u>



Трансформатор представляет собой две близко расположенные катушки. Одна из них подключается к источнику переменной ЭДС, по ней течет ток I_1, число витков в ней равно n_1. Друга катушка, у которой число витков равно n_2, нагружается на сопротивление R, по ней течет индуцированный ток I_2.

$$\Phi_2 = \frac{1}{c} L_2 I_2 + \frac{1}{c} L_{12} I_1 \,,$$

$$\varepsilon_2^{инд} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{1}{c^2} L_{12}\frac{dI_1}{dt} - \frac{1}{c^2} L_2 \frac{dI_2}{dt}$$

Две катушки гальванически не связанны – сопротивление между ними равно бесконечности. Разность потенциалов между ними равна нулю. Чем больше коэффициент самоиндукции L_{12}, тем больше $\varepsilon_2^{инд}$.

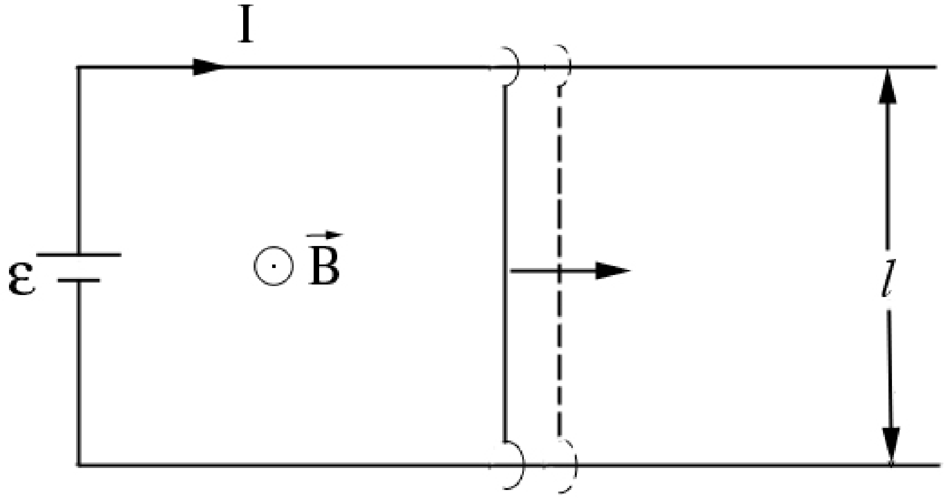
Если катушки очень близко (намотаны одна на другую), то B_1 пропорционально nB_0, где B_0-поле одного витка, одно и то же поле $\vec{B}_1$ пронизывает оба витка. $\Phi_2 = S \cdot B_1 \cdot n_2 = S \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot B_0$.

$\varepsilon_2^{инд} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_2}{dt} = -S \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot \frac{1}{c}\frac{dB_0}{dt}$, изменяя n_1 и n_2 мы можем регулировать $\varepsilon_2^{инд}$. B_0 - результат индукции и самоиндукции. Можно увеличить $\varepsilon_2^{инд}$, увеличив n.

$\varepsilon_2^{инд}$ зависит от изменения тока, поэтому, чтобы увеличить $\varepsilon_2^{инд}$, надо увеличить частоту тока I_1, или обеспечить резкие перепады напряжения в сети.

Энергия магнитного поля.

Если по проводникам катушки текут токи, то катушка обладает энергией, зависящей от I и индуктивности(конструкции).



Рассмотрим, изображенный выше, контур и найдем работу внешних сил при бесконечно медленном перемещении подвижной перемычки на dx, (мы не учитываем $\varepsilon^{инд}$).

$\delta A = \left(\vec{F}_A d\vec{x}\right)$, $F_A = \frac{1}{c} IBl$ - сила Ампера.

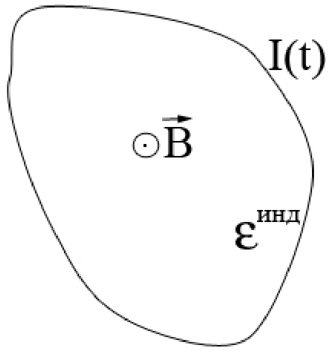
$\delta A = \frac{1}{c} IBl \cdot dx = \frac{1}{c} I \cdot d\left(xBl\right) = \frac{1}{c} I \cdot d\Phi$.

$A = \frac{1}{c} I \cdot \left(\Phi_2 - \Phi_1\right)$.

Если мы будем двигать перемычку быстро, то надо учитывать $\varepsilon^{инд}$, $B`$, будет другой ток, но все равно будет выполняться формула

$A = \frac{1}{c} I \cdot \left(\Phi_2 - \Phi_1\right)$.

Другая задача:



Найдем работу, которую совершает ток (эта работа переходит в тепло). $\delta A = \varepsilon^{инд} I dt$,
$\varepsilon^{инд} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c^2}L\frac{dI}{dt}$, $\delta A = -\frac{1}{c^2}LIdI$. Работа тока, которая совершается при изменении потока Φ пропорциональна току I.

Потенциальная энергия равна работе сил поля, взятой с противоположным знаком.

$$dU = -\delta A = \frac{1}{c^2}LIdI.$$

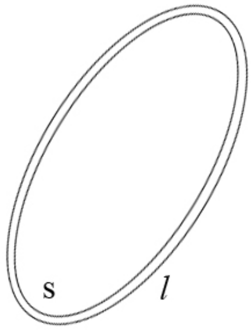
Найдем потенциальную энергию катушки, которую она приобрела при включении(ток через нее изменялся от нуля до значения I)

$$U = \int_0^I \frac{1}{c^2}LIdI = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{LI^2}{2}.$$

Раньше, когда мы считали энергию электрического поля, полагали, что в каждой точке поля есть конденсатор.

Рассмотрим энергию магнитного поля, но не будем представлять пространство, как совокупность бесконечно маленьких катушек в каждой точке, а найдем энергию из общих соображений.

Пусть есть виток, который создает поле $\vec{B}$.



$$\delta A = \varepsilon^{инд} Idt = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}Idt. \quad \Phi = \int_s \vec{B}d\vec{S}$$

$d\Phi = d\int_s \vec{B}d\vec{S} = \int_s d\vec{B}d\vec{S}$. d - характеризует временное изменение магнитного поля. d внесли под знак интеграла, т.к. со временем dS не меняется, в отличии от $\vec{B}$.

$$dU = -\delta A = \frac{1}{c}I\int_s d\vec{B}d\vec{S}, \quad \vec{B} = rot\vec{A}$$

$d\vec{B} = d(rot\vec{A}) = rot d\vec{A}$ (d – по времени, rot – по координатам, поэтому возможен такой переход).

$$dU = \frac{1}{c}I\int_s rot d\vec{A}d\vec{S} = (по\_т.Стокса) = \frac{1}{c}I\oint_l d\vec{A}d\vec{l} = \frac{1}{c}\oint_l d\vec{A}Id\vec{l}$$

$$Id\vec{l} = jdSd\vec{l} = \vec{j}dV.$$

Ток во всех точках пространства, кроме контура, равен нулю. Поэтому можно взять интеграл не по контуру, а по всему пространству.

$$dU = \int_{по\_простр-ву}\left(d\vec{A}d\vec{j}\right)dV.$$

Запишем теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$:

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} rot\vec{H}$$

$$dU = \frac{1}{4\pi}\int_V d\vec{A} rot\vec{H} dV$$

$$div\left[\vec{H}d\vec{A}\right] = \left(\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{H}d\vec{A}\right]\right) = d\vec{A}\left[\vec{\nabla}\vec{H}\right] - \vec{H}\left[\vec{\nabla}d\vec{A}\right] = d\vec{A} rot\vec{H} - \vec{H} rot d\vec{A}$$

$$d\vec{A} rot\vec{H} = div\left[\vec{H}d\vec{A}\right] + \vec{H} rot d\vec{A}$$

$$dU = \frac{1}{4\pi}\int_V \left(div\left[\vec{H}d\vec{A}\right] + \vec{H} rot d\vec{A}\right)dV = \frac{1}{4\pi}\oint_S \left[\vec{H}d\vec{A}\right]d\vec{S} + \frac{1}{4\pi}\int_V \vec{H} rot d\vec{A} dV$$

Поверхность S охватывает все пространство и находится там, где полем можно пренебречь. То есть $\vec{H}$ берутся по той поверхности, где поля уже нет, следовательно $\vec{H} = 0$. Таким образом, можно записать

$$dU = \frac{1}{4\pi}\int_V \vec{H} d\vec{B} dV .$$

Видно, что энергия выражается только через полевые характеристики.

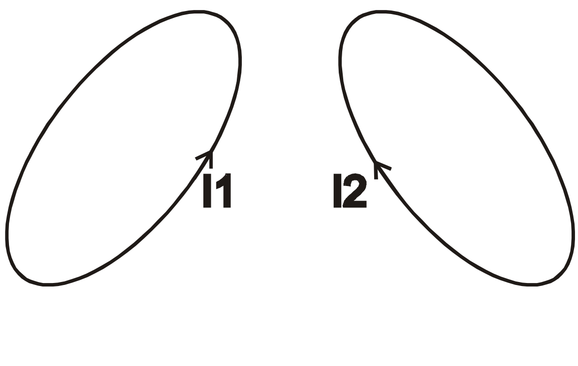
Допустим, поле изменялось от 0 до B, и оно однородно по объему V, тогда энергия однородного магнитного поля имеет вид, где $\vec{H}$ и $\vec{B}$ в объеме V:

$$U = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{H}\vec{B}\right)\cdot V .$$

В вакууме энергия магнитного поля имеет вид: $U = \frac{1}{4\pi}B^2V$.

Энергия магнитного поля линейного магнетика имеет вид: $U = \frac{1}{4\pi}\mu B^2 V$.

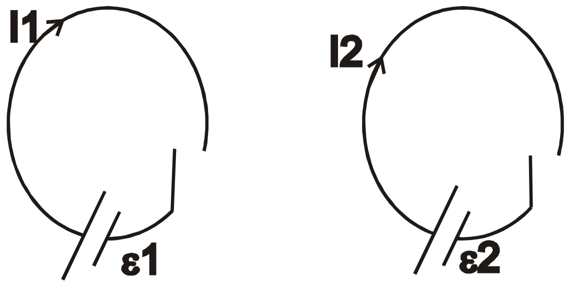
4. Магнитная энергия двух контуров с током.



Если размеры контуров пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием между ними, то энергия равна сумме энергий первого и второго контуров.

Рассмотрим случай, когда имеет место быть взаимная индукция.

Пусть в эти контуры включены батарейки с выключателем.



Представим, что мы одновременно включаем оба источника. Они будут совершать работу. Переменный магнитный поток создает ЭДС самоиндукции. По правилу Ленца источник будет совершать работу против ЭДС самоиндукции, кроме этого второй контур создает переменное магнитное поле, возникает ЭДС индукции и источник также совершает работу против сил поля.

$$\partial A_{ЭДС}^{доп} = \partial A_{ЭДСинд} = dU$$

$$dU = \partial A_{ЭДС}^{доп} = \varepsilon_1^{самоинд} I_1 dt + \varepsilon_1^{вз.инд} I_1 dt + \varepsilon_2^{самоинд} I_2 dt + \varepsilon_2^{вз.инд} I_2 dt$$

$$dU = \left(\frac{1}{c^2} L_1 \frac{dI_1}{dt} I_1 + \frac{1}{c^2} L_{12} \frac{dI_2}{dt} I_1 + \frac{1}{c^2} L_2 \frac{dI_2}{dt} I_2 + \frac{1}{c^2} L_{12} \frac{dI_1}{dt} I_2 \right) dt$$

$$dU = \frac{1}{c^2} \left(L_1 dI_1 I_1 + L_{12} dI_2 I_1 + L_{12} dI_2 I_1 + L_2 dI_2 I_2 \right) .$$

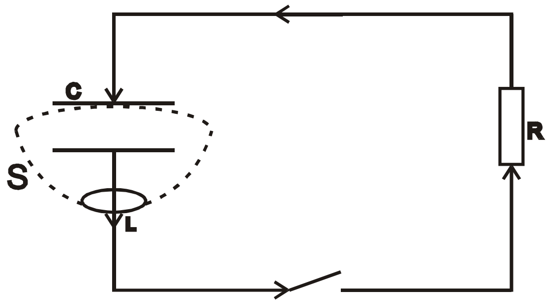
$$dU = \frac{1}{c^2} \left(d\left(\frac{L_1 I_1^2}{2} \right) + d\left(\frac{L_2 I_2^2}{2} \right) + d\left(L_{12} I_1 I_2 \right) \right)$$

$$dU = d\left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + L_{12} I_1 I_2 \right) \right]$$

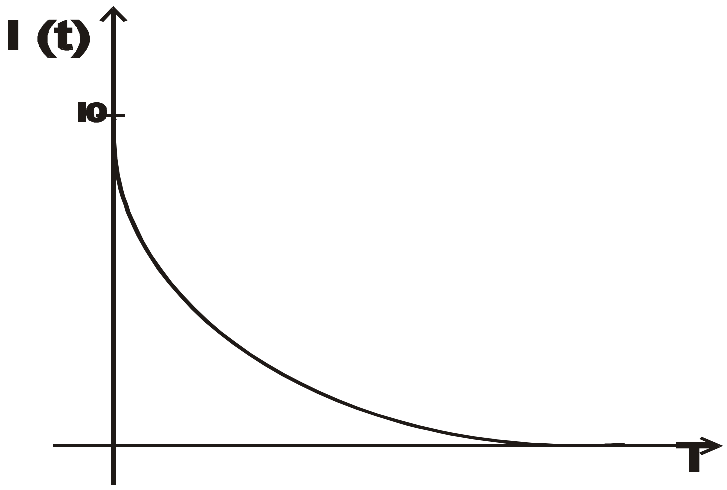
Все величины существенно положительны, поэтому, когда катушки взаимодействуют, энергия повышается.

Токи смещения.

Понятие токов смещения ввел Максвелл.



Допустим, мы разряжаем конденсатор через сопротивление.



В цепи течет ток (переменный), то есть мы можем записать теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$.

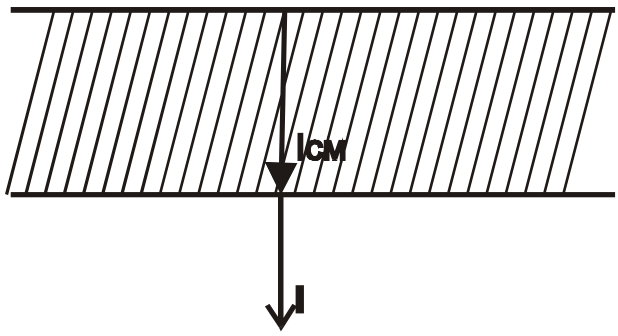
$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I$$
$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

S – произвольная поверхность, главное, чтобы она опиралась на контур L. Внутри конденсатора токи не текут (вакуум или диэлектрик), следовательно, циркуляция равна нулю.

Максвелл предположил, везде токи замкнуты, и внутри конденсатора ток тоже течет. Он фиктивны, и называется током смещения. Он характеризуется плотностью тока смещения, и тогда теорема о циркуляции записывается следующим образом:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\left(I + I_{см}\right)$$
$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \vec{j}_{см}\right).$$

Найдем, чему равен ток смещения в конденсаторе.



$$I = I_{см} = \frac{dQ}{dt}$$

$$I_{см} = \frac{d}{dt}(\sigma \cdot S)$$

$$D_n = D = 4\pi\sigma$$

$$\sigma = \frac{D}{4\pi}$$

$$I_{см} = \frac{d}{dt}\left(\frac{DS}{4\pi}\right)$$

$$I_{см} = \frac{S}{4\pi}\left(\frac{dD}{dt}\right)$$

$$j_{см} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial D}{dt}$$

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{dt}\right)$$

Нет токов смещения, только изменяется электрическое поле в конденсаторе.

Если у нас конденсатор без токов, мы как-то меняем в нем поле, т.е. $\vec{j} = 0$. Никаких токов нет, есть переменное электрическое поле, оно порождает вихревое магнитное.

$$rot\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{dt}.$$

Уравнения Максвелла.

1. $$\begin{aligned} rot\vec{H} &= \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{dt}\right) \\ \oint_L \vec{H}d\vec{l} &= \frac{4\pi}{c}\left(I + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial\vec{D}}{dt}d\vec{S}\right) \end{aligned}.$$

2. $\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$
$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

3. $\oint\limits_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi q$
$div\vec{E} = 4\pi\rho$.

4. $div\vec{B} = 0$
$\oint \vec{B}d\vec{S} = 0$.

Первое и второе уравнение показывают связь магнитного и электрического полей. Электромагнитное поле – единая субстанция. Третье и четвертое уравнение говорят о том, какие заряды у нас есть: магнитных зарядов нет, электрические заряды есть. Переменные магнитное и электрические поля порождают друг друга. Уравнения Максвелла выполняются всегда и везде.

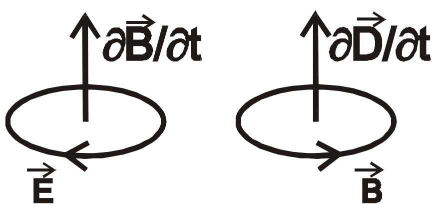
Свойства:

1. Линейность.
2. Релятивистки инвариантны и инвариантны относительно преобразований Галилея.
3. Не симметричны относительно векторов электрических и магнитных зарядов.

Пусть у нас нет зарядов и токов, тогда:

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$rot\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{dt}.$$

Вихревые поля создаются не зарядами, а переменными магнитными и электрическими полями.



Правило Ленца наоборот.

<u>Системы единиц.</u>

В механике имеют место быть 3 системы единиц: СИ, СГС, техническая система. Нет никакого принципиального различия между СИ и СГС. Основные единицы:

СИ	СГС
кг, м, с	г, см, с

Размерности у всех единиц одинаковы, отличие только в степени:

В сИ $[F]=[H]=[m]*[a]=[кг*м*с^{-2}]$ а в СГС $[F]=[дин]=[m]*[a]=[г*см*с^{-2}]$, т.о. $1H=10^5 дин$. Аналогично в СИ $[A]=[Дж]=[F]*[x]=[кг*м^2*с^{-2}]$ а в СГС $[A]=[эрг]=[F]*[x]=[г*см^2*с^{-2}]$, т.о. $1Дж=10^7 эрг$. Т.е. никакого принципиального различия нет – это по существу одна и та же система.

Электричество.

СГСЕ = Гауссова (см, г, с)	СИ (кг, м, с, А = Кл/с 4 основных базисных величины, т.е. Кл и А не связан с килограммом, метром, секундой)
$[F_{кул}]=\frac{[q]^2}{[r]^2}$; $[q]=[F]^{\frac{1}{2}}[r]=[г^{\frac{1}{2}}*см^{\frac{3}{2}}*с^{-1}]$, т.е. заряд выражается через основные единицы. $[E]=\frac{[F]}{[q]}=\frac{[q]}{[r]^2}$; $[F_л]=[k]*[q]*[V]*[B]$. Запишем эти формулы так, чтобы размерность В и Е были одинаковы, т.к. они характеристики полей и схожи по назначению. Для этого $[k]=\frac{1}{[V]}$; откуда $\vec{F}_л=\frac{1}{c}q[\vec{V}\vec{B}]$. с – электродинамическая постоянная.	$[E]=\frac{[H]}{[Кл]}$; $[B]=\frac{H*c}{Кл*л}$; $[E]\neq[B]$.

Закон Био-Савара.

СИ:

$$[B]=[k]\frac{[q]*[V]}{[r]^2}=[k]*\frac{Кл*м}{с*м^2},$$

но $$[B]=\frac{[F]}{[q]*[V]}=\frac{H*c}{Кл*м}=[k]\frac{Кл}{с*м}=[k]\frac{A}{м},$$

откуда $$[k]=[\mu_0]=\frac{H}{A^2}.$$

Ёмкость: $[C]=\frac{[q]}{[\Delta\varphi]}$; но $[\Delta\varphi]=\frac{[A]}{[q]}=\frac{[H*м]}{[Кл]}=\frac{[H*м]}{[A*c]}=[1Вольт]$, откуда $[C]=\frac{[q]}{[\Delta\varphi]}=\frac{[A^2*c^2]}{[H*м]}=[1Фарада]$.

$$[E]=[k]\frac{[q]}{[r]^2};\ \frac{1}{[k]}=[\varepsilon_0]=\frac{[A^2*c^2]}{[H*м^2]}.$$

СГСЕ: $[\Delta\varphi]=\frac{[A]}{[q]}=\frac{[эрг]}{[ед.зар.]}=\frac{[Дин*см]}{[ед.зар.]}$, $[C]=\frac{[q]}{[\Delta\varphi]}=\frac{[1ед.зар.]^2}{[Дин*см]}=\frac{[Дин^{\frac{1}{2}}*см]^2}{[Дин*см]}=см$,

22

$$[C] = см.$$