Вариант № 3

1. Найти производную плоского скалярного поля $u = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке $M(3,1)$ по направлению вектора $\vec{MN}$, где точка N имеет координаты $(6,5)$.

2. Найти векторные линии поля $\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

3. Доказать, что векторное поле $\vec{A} = u\,\mathrm{grad}v$ всюду ортогонально векторному полю $\mathrm{rot}\,\vec{A}$.

4. Применяя формулу Стокса, найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{A} = -y^3\vec{i} + x^3\vec{j} + \left(x^2 + y^2\right)\vec{k}$$

вдоль параллелограмма C в плоскости $z = 0$ со сторонами $y = x$, $y = x + a$, $x = a$, $x = 3a$.

Вариант № 9

1. Температурное поле задано функцией $T = x^2y - y^2z + 1$. В каком направлении больше всего происходит возрастание температуры T в точке $M\,(1, 1, 1)$?

2. Пользуясь формулой Стокса, найти циркуляцию поля скоростей точек твердого тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Ox, вдоль произвольной замкнутой кривой C, расположенной в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

3. Пусть u и v - дважды непрерывно-дифференцируемые скалярные поля. Доказать, что векторное поле $[\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v]$ - соленоидальное.

4. Найти поток Π векторного поля

$$\vec{A} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} - xyz^2\vec{k}$$

из области T, лежащей в первом октанте и ограниченной сверху поверхностью $z = xy$, а с боков - плоскостями $x = 1$, $y = 1$.

Вариант № 10

1. Дано скалярное поле $u = z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Построить поверхности уровня и поверхности равного модуля градиента поля.

2. Убедившись в потенциальности векторного поля
$$\vec{A} = \frac{2}{(y+z)^{1/2}}\vec{i} - \frac{x}{(y+z)^{3/2}}\vec{j} - \frac{x}{(y+z)^{3/2}}\vec{k},$$
найти работу поля вдоль пути, соединяющего в первом октанте точки $M\,(1,1,3)$ и $N\,(2,4,5)$.

3. Доказать вторую формулу Грина в пространстве
$$\iiint\limits_T \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dv = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds$$
где область T ограничена замкнутой поверхностью S, а $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности S.

4. Найти циркуляцию векторного поля
$$\vec{A} = y^2 z^2 \vec{i} + x^2 z^2 \vec{j} + x^2 y^2 \vec{k}$$
вдоль замкнутой кривой C: $x = a\cos t$, $y = a\cos 2t$, $z = a\cos 3t$, пробегаемой в направлении возрастания параметра t.

Вариант № 11

1. Найти производную поля $u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$ по направлению, перпендикулярному к линии уровня поля u, проходящей через данную точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$.

2. В установившемся потоке несжимаемой идеальной жидкости скорость каждой частицы направлена к началу координат и по величине равна $1/r^2$ ($\vec{r}$ - радиус-вектор частицы). Вычислить количество жидкости, вытекающей из области T за единицу времени.

3. Применяя вектор "набла", найти $\Delta\left(uv\right)$, где u и v - скалярные поля.

4. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{A} = -y^2\vec{i} + x^2\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$$

вдоль кривой C, полученной пересечением поверхностей $x^2 + y^2 = x + y$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(z \geq 0)$.

Вариант № 13

1. Найти производную плоского скалярного поля $u = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке $M(3,1)$ по направлению вектора $\vec{MN}$, где точка N имеет координаты $(6,5)$.

2. Найти векторные линии поля $\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

3. Доказать, что векторное поле $\vec{A} = u\,\mathrm{grad}\,v$ всюду ортогонально векторному полю $\mathrm{rot}\,\vec{A}$.

4. Применяя формулу Стокса, найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{A} = -y^3\vec{i} + x^3\vec{j} + \left(x^2 + y^2\right)\vec{k}$$

вдоль параллелограмма C в плоскости $z = 0$ со сторонами $y = x$, $y = x + a$, $x = a$, $x = 3a$.

Вариант № 17

1. Найти векторные линии поля $\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$.

2. Показать, что центрально-симметричное векторное поле

$$\vec{A} = -\frac{f(r)}{r}\vec{r}$$

где $f(r)$ - дифференцируемая функция, является потенциальным и найти его потенциал.

3. Применяя формулу Стокса, вычислить поток ротора поля

$$\vec{A} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$$

через часть поверхности $z^2 = 4\left(1 - x^2 - y^2\right)^4$, "накрывающей" начало координат плоскости xOy.

4. Найти поток векторного поля

$$\vec{A} = x^2y\vec{i} - xy^2\vec{j} + z\left(x^2 + y^2\right)\vec{k}$$

из области T, ограниченной поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$.

Вариант № 18

1. Найти производную плоского скалярного поля $u = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке $M\,(3, 1)$ по направлению вектора $\vec{MN}$, где точка N имеет координаты $(6, 5)$.

2. Найти векторные линии поля $\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

3. Доказать, что векторное поле $\vec{A} = u\,\mathrm{grad}v$ всюду ортогонально векторному полю $\mathrm{rot}\,\vec{A}$.

4. Применяя формулу Стокса, найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{A} = -y^3\vec{i} + x^3\vec{j} + \left(x^2 + y^2\right)\vec{k}$$

вдоль параллелограмма C в плоскости $z = 0$ со сторонами $y = x$, $y = x + a$, $x = a$, $x = 3a$.

Вариант № 19

1. Температурное поле задано функцией $T = x^2y - y^2z + 1$. В каком направлении больше всего происходит возрастание температуры T в точке $M\,(1,1,1)$?

2. Пользуясь формулой Стокса, найти циркуляцию поля скоростей точек твердого тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Ox, вдоль произвольной замкнутой кривой C, расположенной в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

3. Пусть u и v - дважды непрерывно-дифференцируемые скалярные поля. Доказать, что векторное поле $[\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v]$ - соленоидальное.

4. Найти поток П векторного поля

$$\vec{A} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} - xyz^2\vec{k}$$

из области T, лежащей в первом октанте и ограниченной сверху поверхностью $z = xy$, а с боков - плоскостями $x = 1$, $y = 1$.

Вариант № 20

1. Дано скалярное поле $u = z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Построить поверхности уровня и поверхности равного модуля градиента поля.

2. Убедившись в потенциальности векторного поля
$$\vec{A} = \frac{2}{(y+z)^{1/2}}\vec{i} - \frac{x}{(y+z)^{3/2}}\vec{j} - \frac{x}{(y+z)^{3/2}}\vec{k},$$
найти работу поля вдоль пути, соединяющего в первом октанте точки $M(1,1,3)$ и $N(2,4,5)$.

3. Доказать вторую формулу Грина в пространстве
$$\iiint\limits_T \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dv = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds$$
где область T ограничена замкнутой поверхностью S, а $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности S.

4. Найти циркуляцию векторного поля
$$\vec{A} = y^2z^2\vec{i} + x^2z^2\vec{j} + x^2y^2\vec{k}$$
вдоль замкнутой кривой C: $x = a\cos t$, $y = a\cos 2t$, $z = a\cos 3t$, пробегаемой в направлении возрастания параметра t.