Задача № 1.

На какую кинетическую энергию должен быть рассчитан ускоритель заряженных частиц с массой покоя m_0, чтобы с их помощью можно было исследовать структуры с линейными размерами l? Решить задачу для электронов и протонов в случае $l = 10^{-15}\,м$, что соответствует характерному размеру атомных ядер.

Решение:

Воспользуемся соотношением неопределённостей Гейзенберга:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar \qquad (1)$$

В нашем случае $\Delta x = l$, поэтому:

$$l \cdot \Delta p \approx \hbar \qquad (2)$$

Импульс частицы $p = \langle p \rangle + \Delta p$, где $\langle p \rangle$ - среднее значение, Δp - неопределённость импульса. Значит, минимальное значение импульса равняется его неопределённости. Учитывая (2), можем записать:

$$l \cdot \Delta p = l \cdot p_{\min} = \hbar \qquad (3)$$

Кинетическая энергия частицы связана с её импульсом следующим выражением (будем считать, что частица релятивистская):

$$p_{\min} = \frac{1}{c}\sqrt{K_{\min}(K_{\min} + 2m_0c^2)} \qquad (4)$$

Подставим (4) в (3) и получим уравнение:

$$\frac{l}{c}\sqrt{K_{\min}(K_{\min} + 2m_0c^2)} = \hbar \qquad (5)$$

Возведём обе части уравнения (5) в квадрат:

$$K_{\min}(K_{\min} + 2m_0c^2) = \left(\frac{\hbar c}{l}\right)^2$$

Сделав алгебраические преобразования, приходим к квадратному уравнению относительно $K_{\min}$:

$$K_{\min}^2 + 2m_0c^2K_{\min} - \left(\frac{\hbar c}{l}\right)^2 = 0 \qquad (6)$$

Решая это квадратное уравнение, получим корни:

$$K_{\min} = -m_0c^2 \pm c\sqrt{m_0^2c^2 + \frac{\hbar^2}{l^2}}$$

Отрицательный корень физического смысла не имеет, поэтому в качестве окончательного результата берём положительный корень:

$$K_{\min} = c\sqrt{m_0^2c^2 + \frac{\hbar^2}{l^2}} - m_0c^2 \qquad (7)$$

Решим задачу для электронов:
Масса покоя электрона: $m_e = 9.1\cdot 10^{-31}\,кг$

Подставляя числовые значения в (7), получим:

$$K_{\min} = 3\cdot 10^8\sqrt{(9.1\cdot 10^{-31})^2\cdot 9\cdot 10^{16} + \frac{(1.054\cdot 10^{-34})^2}{10^{-30}}} - 9.1\cdot 10^{-31}\cdot 9\cdot 10^{16} = 3.15\cdot 10^{-11}\,Дж \approx 197\,МэВ$$

Решим задачу для протонов:
Масса покоя протона: $m_p = 1.672\cdot 10^{-27}\,кг$

Подставляя числовые значения в (7), получим:

$$K_{\min} = 3\cdot 10^8\sqrt{(1.672\cdot 10^{-27})^2\cdot 9\cdot 10^{16} + \frac{(1.054\cdot 10^{-34})^2}{10^{-30}}} - 1.672\cdot 10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{16} = 3.29\cdot 10^{-12}\,Дж \approx 21\,МэВ$$

Ответ:

$$K_{\min} = c\sqrt{m_0^2c^2 + \frac{\hbar^2}{l^2}} - m_0c^2$$

для электронов: $K_{\min} = 197\,МэВ$
для протонов: $K_{\min} = 21\,МэВ$

Задача № 2.

При каком значении кинетической энергии дебройлевская длина волны электрона равна его комптоновской длине волны?

Решение:

Дебройлевская длина волны электрона:

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{p} \qquad (1)$$

где p – импульс электрона. Будем считать, что мы имеем дело с релятивистским электроном, тогда его импульс связан с кинетической энергией следующим соотношением:

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{K(K+2mc^2)} \qquad (2)$$

m - здесь и далее масса покоя электрона.
Подставим (2) в выражение (1), тогда получим для дебройлевской длины волны соотношение:

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{K(K+2mc^2)}} \qquad (3)$$

Комптоновская длина волны электрона:

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc} \qquad (4)$$

По условию задачи $\lambda_Б = \lambda_C$, поэтому мы можем записать:

$$\frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{K(K+2mc^2)}} = \frac{2\pi\hbar}{mc} \qquad (5)$$

Упростив это выражение и возведя обе части в квадрат, получим квадратное уравнение относительно K:

$$K^2 + 2mc^2 K - m^2c^4 = 0 \qquad (6)$$

Решая это уравнение, получим корни:

$$K_{1,2} = -mc^2 \pm mc^2\sqrt{2}$$

Отрицательный корень не имеет физического смысла, поэтому в качестве результата возьмём положительный корень:

$$K = mc^2(\sqrt{2} - 1) \qquad (7)$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$K = 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}(\sqrt{2} - 1) = 3.3 \cdot 10^{-14}\,Дж = 20.5кэВ$$

Ответ:

$K = mc^2(\sqrt{2} - 1)$;
$K = 20.5кэВ$.

Задача № 3.

Электрон с длиной волны де Бройля $\lambda_1 = 100\text{пм}$, двигаясь в положительном направлении оси x, встречает на своём пути прямоугольный порог высотой $U = 100\text{эВ}$. Определите длину волны де Бройля частицы после прохождения порога.

Решение:

Дебройлевская длина волны:

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{p} \qquad (1)$$

где p - импульс частицы. В нашем случае $p = \sqrt{2mK}$, где m - масса покоя электрона (электрон считаем нерелятивистским). Тогда длина волны де Бройля электрона до прохождения порога:

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{p_1} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mK_1}} \qquad (2)$$

После прохождения порога:

$$\lambda_2 = \frac{2\pi\hbar}{p_2} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mK_2}} \qquad (3)$$

Разделим (2) на (3):

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \qquad (4)$$

После прохождения порога кинетическая энергия электрона уменьшается до значения $K_2 = K_1 - U$ (рисунок 1), поэтому получим:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} = \sqrt{\frac{K_1 - U}{K_1}} = \sqrt{1 - \frac{U}{K_1}} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 - \frac{U}{K_1}}} \qquad (5)$$

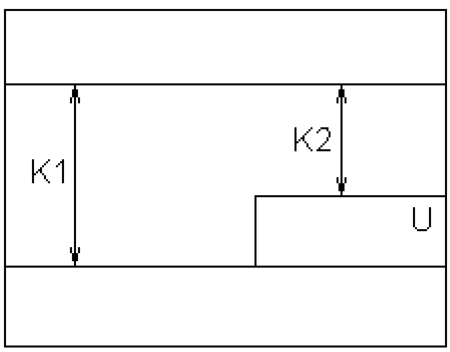


Рисунок 1

K_1 найдём из уравнения (2):

$$K_1 = \frac{2\pi^2\hbar^2}{m\lambda_1^2}$$

и подставим в уравнение (5):

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 - \frac{m\lambda_1^2 U}{2\pi^2\hbar^2}}} \qquad (6)$$

Подставляя числовые значения, получим: $\lambda_2 = 173\,пм$

Ответ:

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 - \frac{m\lambda_1^2 U}{2\pi^2\hbar^2}}}$$

$\lambda_2 = 173\,пм$

Задача № 4.

Поток нейтронов проходит через узкие радиальные щели в двух дисках из кадмия, поглощающего нейтроны. Диски насажены на общую ось так, что щели повёрнуты друг относительно друга на угол α. Диски вращаются с угловой скоростью $\omega = 400\,рад/с$, расстояние между ними $L = 1м$. Найти угол α, если длина волны де Бройля пропускаемых таким устройством нейтронов равна $\lambda = 0.1нм$.

Решение:

Длина волны де Бройля нейтронов:

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{p} \qquad (1)$$

где p - импульс нейтронов, равный $p = mv$.
На рисунке 1 приведена схема установки:

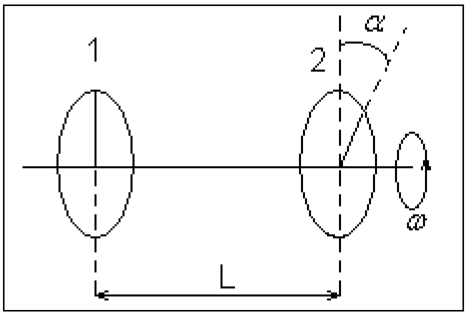


Рисунок 1

Пусть Δt - время, за которое диски поворачиваются на угол α. Это время равно:

$$\Delta t = \frac{\alpha}{\omega} \qquad (2)$$

Если нейтрон, пролетевший через первую щель, за время Δt пролетает расстояние между щелями, то он пройдёт через вторую щель. Скорость таких нейтронов равна:

$$v = \frac{L}{\Delta t} = \frac{\omega L}{\alpha} \qquad (3)$$

Импульс такого нейтрона равен:

$$p = mv = \frac{m\omega L}{\alpha} \qquad (4)$$

Длина волны нейтрона такого нейтрона:

$$\lambda_{Б} = \frac{2\pi\hbar\alpha}{m\omega L} \qquad (5)$$

Отсюда найдём угол α :

$$\alpha = \frac{m\omega L\lambda_{Б}}{2\pi\hbar} \qquad (6)$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$\alpha = 5.5 \cdot 10^{-5}\, рад = 11.35''$$

Ответ:

$$\alpha = \frac{m\omega L\lambda_{Б}}{2\pi\hbar}$$

$$\alpha = 5.5 \cdot 10^{-5}\, рад = 11.35''$$

Задача № 5.

Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $U = 50B$, попадает из вакуума в металл, внутренний потенциал которого $\varphi = 5B$. Найдите показатель преломления металла n_e для электронной волны де Бройля.

Решение:

Показатель преломления для дебройлевской волны электрона равен:

$$n_e = \frac{v_в}{v_с} \qquad (1)$$

где $v_в$, $v_с$ - фазовые скорости дебройлевской волны в вакууме и среде соответственно. Учитывая, что фазовая скорость равна $v_ф = \frac{\omega}{k}$, а $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, где λ - дебройлевская длина волны, получим:

$$n_e = \frac{v_в}{v_с} = \frac{k_с}{k_в} = \frac{\lambda_в}{\lambda_с} \qquad (2)$$

По определению длина волны де Бройля:

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{p} \qquad (3)$$

где p – импульс электрона.
В вакууме кинетическая энергия электрона была равна $K_1 = eU$, его импульс:

$$p_1 = \sqrt{2mK_1} = \sqrt{2meU} \qquad (4)$$

Дебройлевская длина волны электрона в вакууме:

$$\lambda_в = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meU}} \qquad (5)$$

В металле энергия электрона увеличится на величину $e\varphi$. На рисунке 1 представлены графики зависимости $\varphi(x)$ и $U(x) = -e\varphi(x)$. Из рисунка справа ясно, что $K_2 = K_1 + e\varphi = e(U + \varphi)$. Тогда длина волны де Бройля электрона в металле:

$$\lambda_с = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2me(U + \varphi)}} \qquad (6)$$

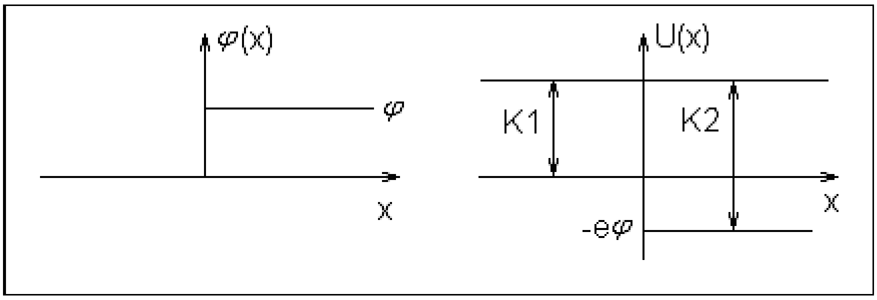


Рисунок 1

Используя (2), найдём показатель преломления:

$$n_e = \frac{\lambda_в}{\lambda_c} = \sqrt{\frac{U+\varphi}{U}} = \sqrt{1+\frac{\varphi}{U}} \qquad (7)$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$n_e = 1.05$$

Ответ:

$$n_e = \sqrt{1+\frac{\varphi}{U}}$$

$$n_e = 1.05$$

Задача № 6.

Условие Брэгга-Вульфа с учётом преломления электронных волн в кристалле имеет вид $2d\sqrt{n_e^2 - \cos^2\theta} = k\lambda$, где d - межплоскостное расстояние, n_e - показатель преломления, θ - угол скольжения, k - порядок отражения. Найдите с помощью этого условия внутренний потенциал φ монокристалла серебра, если пучок электронов, ускоренный разностью потенциалов $U = 85B$, образует максимум 2-ого порядка при брэгговском отражении от кристаллических плоскостей с $d = 0.204нм$ под углом $\theta = 30^o$.

Решение:

Показатель преломления для дебройлевской волны электрона равен:

$$n_e = \frac{v_в}{v_c} \qquad (1)$$

где $v_в$, v_c - фазовые скорости дебройлевской волны в вакууме и среде соответственно. Учитывая, что фазовая скорость равна $v_ф = \dfrac{\omega}{k}$, а $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, где λ - дебройлевская длина волны, получим:

$$n_e = \frac{v_в}{v_c} = \frac{k_c}{k_в} = \frac{\lambda_в}{\lambda_c} \qquad (2)$$

По определению длина волны де Бройля:

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{p} \qquad (3)$$

где p – импульс электрона.
В вакууме кинетическая энергия электрона была равна $K_1 = eU$, его импульс:

$$p_1 = \sqrt{2mK_1} = \sqrt{2meU} \qquad (4)$$

Дебройлевская длина волны электрона в вакууме:

$$\lambda_в = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meU}} \qquad (5)$$

В кристалле энергия электрона увеличится на величину $e\varphi$. На рисунке 1 представлены графики зависимости $\varphi(x)$ и $U(x) = -e\varphi(x)$. Из рисунка справа ясно, что $K_2 = K_1 + e\varphi = e(U + \varphi)$. Тогда длина волны де Бройля электрона в кристалле:

$$\lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2me(U+\varphi)}} \qquad (6)$$

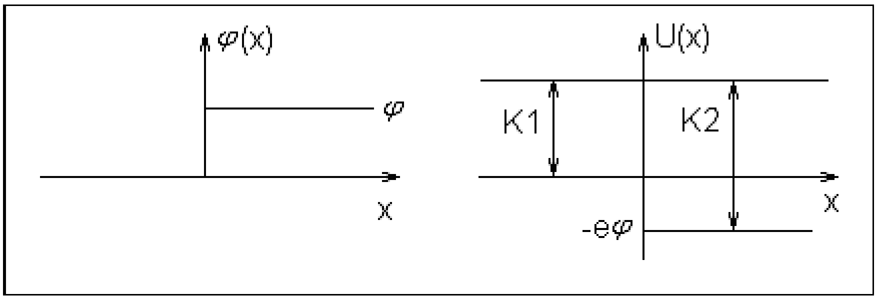


Рисунок 1

Используя (2), найдём показатель преломления:

$$n_e = \frac{\lambda_в}{\lambda_c} = \sqrt{\frac{U+\varphi}{U}} = \sqrt{1+\frac{\varphi}{U}} \qquad (7)$$

Из соотношения (7) определим внутренний потенциал кристалла:

$$\varphi = U(n_e^2 - 1) \qquad (8)$$

Воспользуемся условием Вульфа-Брэггов для того, чтобы определить показатель преломления n_e:

$$2d\sqrt{n_e^2 - \cos^2\theta} = k\lambda \qquad (9)$$

Возведём обе части в квадрат и найдём n_e^2:

$$4d^2(n_e^2 - \cos^2\theta) = k^2\lambda_в^2 = k^2\frac{4\pi^2\hbar^2}{2meU}$$

$$n_e^2 = k^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2meUd^2} + \cos^2\theta \qquad (10)$$

Подставим полученное значение в уравнение (8):

$$\varphi = U\left(k^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2meUd^2} + \cos^2\theta - 1\right) = U\left(k^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2meUd^2} - \sin^2\theta\right) \qquad (11)$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$\varphi = 14.9B$$

Ответ:

$$\varphi = U\left(k^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2meUd^2} - \sin^2\theta\right)$$

$$\varphi = 14.9B$$

Задача № 7.

Коллимированный пучок электронов, прошедших ускоряющую разность потенциалов $U = 30кВ$, падает нормально на тонкую поликристаллическую фольгу золота. На фотопластинке, расположенной за фольгой на расстоянии $l = 20см$ от неё, получена дифракционная картина, состоящая из ряда концентрических окружностей. Радиус первой окружности $r = 3.4мм$. Определите: а) брэгговский угол $\theta_Б$, соответствующий первой окружности; б) длину волны де Бройля электронов λ; в) постоянную d кристаллической решётки золота.

Решение:

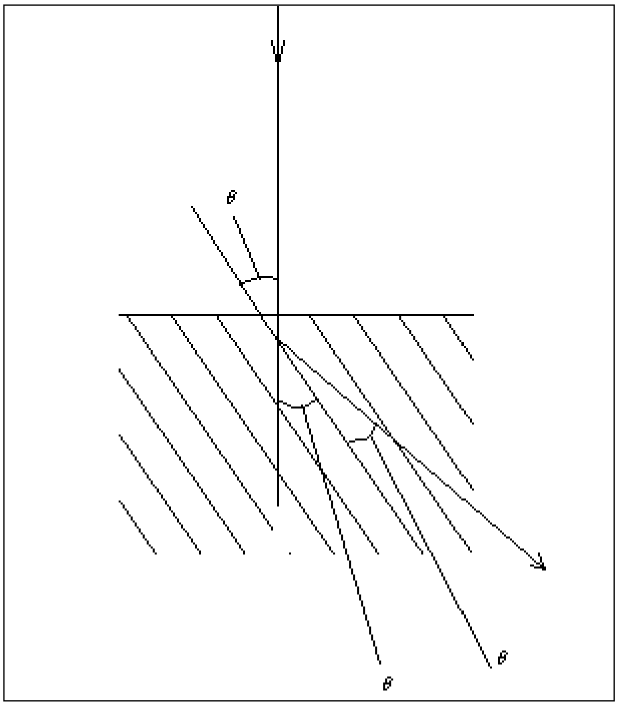


Рисунок 1

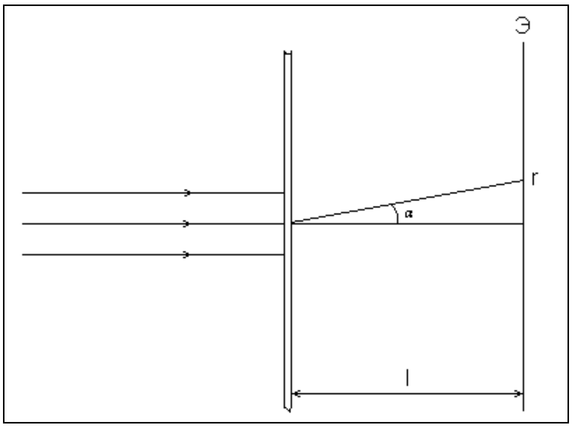


Рисунок 2

Используя рисунок 2, определим угол α:

$$tg\alpha = \frac{r}{l} \Rightarrow \alpha = arctg\left(\frac{r}{l}\right) \qquad (1)$$

Как видно из рисунка 1, угол $\alpha = 2 \cdot \theta_Б$, где $\theta_Б$ - брэгговский угол скольжения. Таким образом, мы можем найти брэгговский угол, соответствующий первой окружности:

$$\theta_Б = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{r}{l}\right) = 8.5 \cdot 10^{-3}\, рад = 29' \qquad (2)$$

Длина волны де Бройля падающих на золотую фольгу электронов:

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{p} \qquad (3)$$

где p - импульс электронов. Считая электроны релятивистскими, определим их импульс:

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{K(K + 2mc^2)} \tag{4}$$

где $K = eU$ - кинетическая энергия электрона, а m - масса покоя электрона. Тогда дебройлевская длина волны электронов равняется:

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{eU(eU + 2mc^2)}} = 6.98 \cdot 10^{-12}\,м = 6.98\,пм \tag{5}$$

Воспользуемся условием Вульфа-Брэггов:

$$2d\sin\theta_Б = k\lambda_Б \tag{6}$$

где d - постоянная кристаллической решётки, k - порядок максимума (в нашем случае максимум первого порядка $k = 1$). Найдём из выражения (6) постоянную кристаллической решётки, учитывая, что значение $\theta_Б$ и $\lambda_Б$ определяются соответственно выражениями (2) и (5):

$$d = \frac{\lambda_Б}{2\sin\theta_Б} = 4.1 \cdot 10^{-10}\,м = 4.1\,нм \tag{7}$$

Ответ:

а) $\theta_Б = 29'$

б) $\lambda_Б = 6.98\,пм$

в) $d = 4.1\,нм$.

Задача № 8.

Параллельный пучок электронов, ускоренный разностью потенциалов $U = 25B$, падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, расстояние между которыми $l = 50мкм$. Определите расстояние между соседними максимумами интерференционной картины на экране, отстоящим от щелей на расстоянии $L = 100см$.

Решение:

Найдём длину волны де Бройля, соответствующую электрону:

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{p} \quad (1)$$

где $p = \sqrt{2mK}$ - импульс электрона, $K = eU$ - его кинетическая энергия. Таким образом, длина волны де Бройля электрона:

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meU}} \quad (2)$$

На рисунке 1 представлена схема установки:

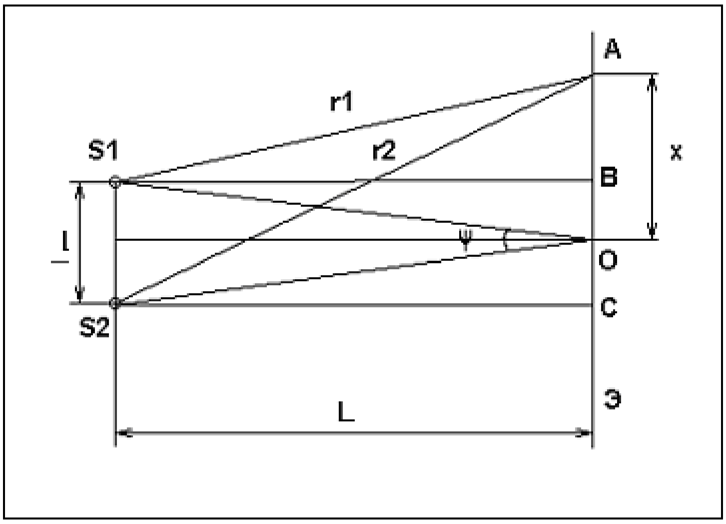


Рисунок 1

S1 и S2 –щели (вторичные источники). В результате интерференции волн от этих двух вторичных источников на экране появляется интерференционная картина. Из прямоугольных треугольников S_1AB и S_2AC по теореме Пифагора:

$$r_1^2 = \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + L^2 \quad (3)$$

$$r_2^2 = \left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + L^2 \quad (4)$$

Вычтем из уравнения (4) уравнение (3):

$$r_2^2 - r_1^2 = \left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + L^2 - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 - L^2 = 2xl \qquad (5)$$

Но, так как $r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1)$, где $r_2 - r_1$ - оптическая разность хода двух интерферирующих волн Δ, а $r_2 + r_1 \approx 2L$, так как $r_2 - r_1 \ll L$, то мы можем записать:

$$2L \cdot \Delta \approx 2xl \qquad (6)$$

Если оптическая разность хода двух волн равна целому числу волн $\Delta = k\lambda$, то образуется максимум. Используя уравнение (6) и условие максимумов, определим положение максимумов на экране x_k:

$$x_k = \frac{k\lambda L}{l} \qquad (7)$$

Тогда расстояние между соседними максимумами:

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{(k+1)\lambda L}{l} - \frac{k\lambda L}{l} = \frac{\lambda L}{l} \qquad (8)$$

Подставим в выражение (8) дебройлевскую длину волны электронов, падающих на диафрагму, получим:

$$\Delta x = \frac{2\pi\hbar L}{l\sqrt{2meU}} \qquad (9)$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$\Delta x = 4.9 \cdot 10^{-7}\, м = 0.49\, мкм$$

Ответ:

$\Delta x = 0.49\, мкм$.

Задача № 9.

Узкий пучок электронов, прошедших ускоряющую разность потенциалов $U = 50B$, падает нормально на поверхность некоторого монокристалла. Определите, под каким углом к нормали к поверхности кристалла наблюдается максимум отражения электронов первого порядка, если расстояние между отражающими атомными плоскостями кристалла составляет $d = 0.2нм$.

Решение:

Длина волны де Бройля электронов, прошедших ускоряющую разность потенциалов U:

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mK}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meU}} \tag{1}$$

где $p = \sqrt{2mK}$ - импульс электрона, а $K = eU$ - его кинетическая энергия.
Воспользуемся условием Вульфа-Брэггов:

$$2d\sin\theta = k\lambda_Б \tag{2}$$

где θ - угол скольжения (показан на рисунке 1), k - порядок максимума (в нашем случае $k = 1$). Таким образом, учитывая выражение для дебройлевской длины волны электрона (1), условие Вульфа-Брэггов в нашем случае примет вид:

$$2d\sin\theta = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meU}} \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{\pi\hbar}{d\sqrt{2meU}}\right) \tag{3}$$

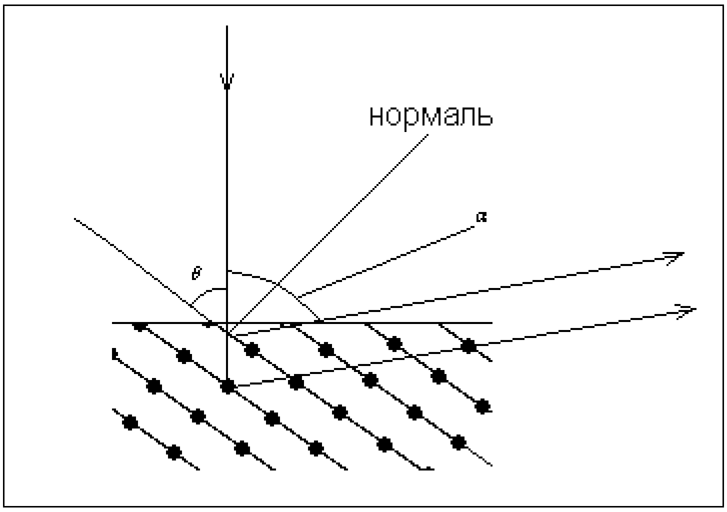


Рисунок 1

Из рисунка 1 видно, что:

$$\frac{\alpha}{2} + \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \pi - 2\cdot\theta \tag{4}$$

Учитывая выражение для угла скольжения θ, получим, что угол α, который необходимо найти, равен:

$$\alpha = \pi - 2 \cdot \arcsin\left(\frac{\pi\hbar}{d\sqrt{2meU}}\right) = 2.69\,\textit{рад} = 128.57^{o} \qquad (5)$$

Ответ:

$\alpha = 128.57^{o}$.

Задача № 10.

Нерелятивистская частица массой m_1, обладающая кинетической энергией E_k, налетает на покоящуюся частицу массой m_2. Найдите дебройлевские длины волн обеих частиц в системе их центра масс.

Решение:

Для начала определим скорость центра масс:

$$v_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \qquad (1)$$

так как в нашем случае $v_2 = 0$. Скорость первой частицы до соударения v_1 найдём, используя выражение для её кинетической энергии:

$$E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2E_k}{m_1}} \qquad (2)$$

Найдём скорости частиц в системе их центра масс до соударения:

$$\begin{aligned} v_{1c} &= v_1 - v_c = v_1 - \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = v_1\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) \\ v_{2c} &= v_2 - v_c = -\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \end{aligned} \qquad (3)$$

Пусть скорости частиц в системе их центра масс после соударения равны v_{1c}' и v_{2c}'. Тогда для системы центра масс запишем закон сохранения полной механической энергии и закон сохранения импульса (в системе центра масс сумма импульсов всех частиц, как известно, равна нулю):

$$\frac{m_1 v_{1c}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2c}^2}{2} = \frac{m_1 (v_{1c}')^2}{2} + \frac{m_2 (v_{2c}')^2}{2} \qquad (4)$$

$$m_1 v_{1c}' + m_2 v_{2c}' = 0 \qquad (5)$$

Решая систему уравнений (4) и (5), получим:

$$v_{1c}' = -\frac{m_2}{m_1 (m_2^2 + m_1 m_2)} \cdot \sqrt{m_1 m_2 (m_1 + m_2)(m_1 v_{1c}^2 + m_2 v_{2c}^2)} \qquad (6)$$

$$v_{2c}' = \frac{1}{(m_2^2 + m_1 m_2)} \cdot \sqrt{m_1 m_2 (m_1 + m_2)(m_1 v_{1c}^2 + m_2 v_{2c}^2)} \qquad (7)$$

С учётом выражений (3), получим:

$$v_{1c}\,' = -\frac{m_2}{m_1(m_2^2+m_1m_2)}\cdot\sqrt{m_1m_2(m_1+m_2)\left(m_1v_1^2\left(1-\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2+m_2v_1^2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\right)} = -\frac{m_1m_2^2v_1}{m_1(m_2^2+m_1m_2)} = -\frac{m_2^2}{(m_2^2+m_1m_2)}v_1 \qquad (8)$$

$$v_{2c}\,' = \frac{1}{(m_2^2+m_1m_2)}\cdot\sqrt{m_1m_2(m_1+m_2)\left(m_1v_1^2\left(1-\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2+m_2v_1^2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\right)} = \frac{m_1m_2}{(m_2^2+m_1m_2)}v_1 \qquad (9)$$

Найдём импульсы этих частиц в системе центра масс:

$$p_{1c}\,' = m_1v_{1c}\,' = -\frac{m_1m_2^2}{(m_2^2+m_1m_2)}v_1 \qquad (10)$$

$$p_{2c}\,' = m_2v_{2c}\,' = \frac{m_1m_2^2}{(m_2^2+m_1m_2)}v_1 \qquad (11)$$

Подставляя сюда выражение для v_1 из уравнения (2), получим:

$$p_{1c}\,' = -\frac{m_1m_2^2}{(m_2^2+m_1m_2)}\sqrt{\frac{2E_k}{m_1}} = -\frac{m_2^2}{(m_2^2+m_1m_2)}\sqrt{2m_1E_k} \qquad (12)$$

$$p_{2c}\,' = \frac{m_1m_2^2}{(m_2^2+m_1m_2)}\sqrt{\frac{2E_k}{m_1}} = \frac{m_2^2}{(m_2^2+m_1m_2)}\sqrt{2m_1E_k} \qquad (13)$$

Найдём дебройлевские длины волн частиц в системе их центра масс:

$$\lambda_{1Бc}\,' = \lambda_{2Бc}\,' = \frac{2\pi\hbar}{p_{2c}\,'} = \pi\hbar\frac{(m_2^2+m_1m_2)}{m_2^2}\sqrt{\frac{2}{m_1E_k}} \qquad (14)$$

Ответ:

$$\lambda_{1Бc}\,' = \lambda_{2Бc}\,' = \pi\hbar\frac{(m_2^2+m_1m_2)}{m_2^2}\sqrt{\frac{2}{m_1E_k}}\,.$$

Задача № 11.

Считая, что минимальная энергия E нуклона (протона или нейтрона) в ядре равна 10МэВ, оцените, исходя из соотношения неопределённостей, линейные размеры ядра.

Решение:

Импульс нуклона в ядре равен:

$$p = \langle p \rangle + \Delta p \tag{1}$$

где $\langle p \rangle$ - среднее значение импульса нуклона, Δp - неопределённость импульса. Если среднее значение импульса равняется нулю $\langle p \rangle = 0$, то минимальное значение импульса имеет порядок его неопределённости, то есть $p_{\min} = \Delta p$. Отсюда следует, что минимальная энергия нуклона в ядре равняется:

$$E_{\min} = \frac{\Delta p^2}{2m} \tag{2}$$

Из уравнения (2) найдём неопределённость импульса нуклона в ядре:

$$\Delta p = \sqrt{2mE_{\min}} \tag{3}$$

где $m = 1.6 \cdot 10^{-27}\,кг$ - масса нуклона. Воспользуемся первым соотношением неопределённостей Гейзенберга:

$$\Delta p_x \Delta x \sim \hbar \tag{4}$$

В нашем случае неопределённость импульса $\Delta p = \sqrt{2mE_{\min}}$, а $\Delta x = l_{\min}$ - минимальные линейные размеры ядра. Поэтому выражение (4) можно переписать в следующем виде:

$$\sqrt{2mE_{\min}} \cdot l_{\min} \sim \hbar \tag{5}$$

Из выражения (5) можно оценить минимальные линейные размеры ядра $l_{\min}$:

$$l_{\min} \sim \frac{\hbar}{\sqrt{2mE_{\min}}} = 1.47 \cdot 10^{-15}\,м \tag{6}$$

Ответ:

$l_{\min} = 1.47 \cdot 10^{-15}\,м$.

Задача № 12.

Кинетическая энергия электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10эВ. Используя соотношение неопределённостей, оцените минимальные линейные размеры атома.

Решение:

Импульс электрона в атоме водорода равен:

$$p = < p > + \Delta p \tag{1}$$

где $< p >$ - среднее значение импульса электрона в атоме водорода, а Δp - неопределённость импульса. Из выражения (1) следует, что минимальное значение импульса электрона в атоме водорода по порядку величины равняется его неопределённости $p_{\min} = \Delta p$ в случае, когда среднее значение импульса равняется нулю $< p >= 0$. В этом случае минимальная кинетическая энергия электрона $K_{\min}$ определяется следующим образом:

$$K_{\min} = \frac{\Delta p^2}{2m} \tag{2}$$

Отсюда найдём неопределённость импульса:

$$\Delta p = \sqrt{2mK_{\min}} \tag{3}$$

где $m = 9.1 \cdot 10^{-31} кг$ - масса электрона. Воспользуемся первым соотношением неопределённостей Гейзенберга:

$$\Delta p_x \Delta x \sim \hbar \tag{4}$$

В нашем случае неопределённость импульса $\Delta p = \sqrt{2mK_{\min}}$, а $\Delta x = l_{\min}$ - минимальные линейные размеры атома. В этом случае выражение (4) примет вид:

$$\sqrt{2mK_{\min}} \cdot l_{\min} \sim \hbar \tag{5}$$

Отсюда найдём минимальные линейные размеры атома водорода $l_{\min}$:

$$l_{\min} \sim \frac{\hbar}{\sqrt{2mK_{\min}}} = 6.18 \cdot 10^{-11} м \tag{6}$$

Ответ:

$l_{\min} = 6.18 \cdot 10^{-11} м$.

Задача № 13.

Покажите, используя соотношение неопределённостей, что электроны не могут входить в состав атомного ядра. Линейные размеры ядра считать равными $5 \cdot 10^{-15}\,м$, а энергию связи нуклонов в ядре равной 10МэВ.

Решение:

Предположим, что электрон водит в состав ядра, то есть его местоположение сосредоточено в области с линейными размерами порядка размеров ядра $l = 5 \cdot 10^{-15}\,м$. Воспользуемся первым соотношением неопределённостей Гейзенберга:

$$\Delta p_x \Delta x \sim \hbar \qquad (1)$$

Определим из него неопределённость импульса электрона, учитывая наше предположение:

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{l} \qquad (2)$$

Значение импульса электрона равняется:

$$p = < p > + \Delta p \qquad (3)$$

где $< p >$ - среднее значение импульса электрона, а Δp - его неопределённость. Из выражения (3) можно сделать вывод, что минимальное значение импульса электрона имеет порядок его неопределённости, так как в этом случае нужно положить $< p >= 0$, то есть $p_{\min} = \Delta p$. Тогда минимальное значение кинетической энергии электрона находится следующим образом:

$$K_{\min} = \frac{\Delta p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ml^2} = 1.5\,ГэВ \qquad (4)$$

Мы получили значение кинетической энергии электрона в ~ 150 раз превосходящее значение энергии связи нуклонов в ядре, что доказывает, что электрон не может входить в состав атомного ядра.

Ответ: Электрон в состав атомного ядра входить не может на основании соотношения неопределённостей Гейзенберга.

Задача № 14.

Покажите, что соотношения неопределённостей позволяют сделать вывод об устойчивости атома, то есть о том, что электрон при движении по круговой орбите не может упасть на ядро.

Решение:

В классическом понимании выражение «электрон упал на ядро» следовало бы понимать в том смысле, что его импульс и координата приняли значения равные нулю, что в свою очередь означает, что координата и импульс электрона одновременно имеют абсолютно точное значение равное нулю, то есть неопределённости этих двух физических величин равны нулю. А это противоречит первому соотношению неопределённостей Гейзенберга:

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar \qquad (1)$$

То есть, если, например, в некоторый момент времени импульс частицы точно определён, то в этот момент времени координата частица неопределенна совершенно. Следовательно, соотношение неопределённостей Гейзенберга позволяет сделать вывод об устойчивости атома.

Ответ: соотношения неопределённостей Гейзенберга позволяют сделать вывод об устойчивости атома.

Задача № 15.

Свободно движущаяся нерелятивистская частица имеет относительную неопределённость кинетической энергии порядка $1.6\cdot 10^{-4}$. Оцените, во сколько раз неопределённость координаты такой частицы больше её дебройлевской длины волны.

Решение:

Пусть ΔK - абсолютная неопределённость кинетической энергии. Тогда неопределённость импульса частицы:

$$\Delta p = \sqrt{2m\Delta K} \qquad (1)$$

Воспользуемся первым соотношением неопределённостей Гейзенберга:

$$\Delta p_x \Delta x \approx \hbar \qquad (2)$$

Найдём неопределённость координаты частицы:

$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\Delta K}} \qquad (3)$$

Пусть кинетическая энергия частицы равняется K, тогда импульс частицы $p = \sqrt{2mK}$. Длина волны де Бройля частицы равняется:

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mK}} \qquad (4)$$

Найдём отношение неопределённости координаты частицы к её дебройлевской длине волны:

$$\frac{\Delta x}{\lambda_Б} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\Delta K}} \cdot \frac{\sqrt{2mK}}{2\pi\hbar} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\left(\Delta K/K\right)}} \qquad (5)$$

Отношение $\frac{\Delta K}{K} = 1.6\cdot 10^{-4}$ - это относительная неопределённость кинетической энергии частицы. Таким образом, $\frac{\Delta x}{\lambda_Б} = 12.59$.

Ответ:

$$\frac{\Delta x}{\lambda_Б} = 12.59.$$

Задача № 16.

Используя соотношение неопределённостей энергии и времени, определите естественную ширину $\Delta\lambda$ спектральной линии излучения атома при переходе его из возбуждённого состояния в основное. Среднее время жизни атома в возбуждённом состоянии $\tau = 10^{-8}c$, а длина волны излучения $\lambda = 600нм$.

Решение:

Воспользуемся соотношением неопределённостей Гейзенберга энергии и времени:

$$\Delta E \Delta t \approx \hbar \qquad (1)$$

В нашем случае $\Delta t = \tau = 10^{-8}c$ - среднее время жизни атома в возбуждённом состоянии. Поэтому неопределённость энергии при переходе из возбуждённого состояния в основное:

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\tau} \qquad (2)$$

Учитывая, что $\Delta E = \hbar\Delta\omega$, определим ширину спектральной линии:

$$\Delta\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} \approx \frac{1}{\tau} \qquad (3)$$

Длина волны и частота излучения связаны следующим соотношением:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \qquad (4)$$

Продифференцируем (4) и получим следующее выражение:

$$d\lambda = -\frac{2\pi c}{\omega^2}d\omega = -\frac{\lambda^2}{2\pi c}d\omega \qquad (5)$$

Прейдём к конечным приращениям и опустим знак минус, так как он показывает только то, что при увеличении частоты длина волны излучения уменьшается, поэтому в нашем случае он не существенен:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c}\Delta\omega = \frac{\lambda^2}{2\pi c\tau} = 1.9 \cdot 10^{-5}нм \qquad (6)$$

Ответ:

$\Delta\lambda = 1.9 \cdot 10^{-5}нм$.

Задача № 17.

Частица массой m_0 движется в потенциальном поле, в котором её потенциальная энергия равна $U = \frac{kx^2}{2}$ (гармонический осциллятор). Оцените с помощью соотношения неопределённостей минимально возможную энергию частицы в этом поле.

Решение:

Энергия частицы равняется:

$$E = <E> + \Delta E \qquad (1)$$

где $<E>$ - среднее значение энергии частицы, а ΔE - неопределённость энергии. Из выражения (1) видно, что минимальное значение энергии частицы, в случае $<E> = 0$, равняется по порядку величины её неопределённости $E_{\min} \sim \Delta E$. В этом случае неопределённость импульса частицы:

$$\Delta p = \sqrt{2m_0 \Delta E} = \sqrt{2m_0 E_{\min}} \qquad (2)$$

С наибольшей степенью вероятности частица находится в области местонахождения классического осциллятора $-x_0 < x < x_0$, где x_0 - амплитуда колебаний классического осциллятора, которую определим, решая следующее уравнение:

$$U(x_0) = E_{\min} \Rightarrow \frac{m_0 \omega_0^2 x_0^2}{2} = E_{\min} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{2E_{\min}}{m_0}} \qquad (3)$$

где $m_0 \omega_0^2 = k$.

Неопределённость частицы в этом потенциальном поле $\Delta x \sim x_0 = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{2E_{\min}}{m_0}}$.

Воспользуемся первым соотношением неопределённостей Гейзенберга:

$$\Delta x \Delta p_x \sim \hbar \qquad (4)$$

Подставляя в уравнение (4) выражения, полученные для неопределённостей импульса и координаты, получим:

$$\sqrt{2m_0 E_{\min}} \cdot \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{2E_{\min}}{m_0}} \sim \hbar \Rightarrow E_{\min} \sim \frac{\hbar \omega_0}{2} \qquad (5)$$

Это значение соответствует нулевой энергии квантового гармонического осциллятора.

Ответ:

$$E_{\min} \sim \frac{\hbar \omega_0}{2}.$$

Задача № 18.

Оцените относительную ширину $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ спектральной линии, если известны время жизни атома в возбуждённом состоянии $\tau = 10^{-8} c$ и длина волны излучаемого фотона $\lambda = 500 нм$.

Решение:

Воспользуемся соотношением неопределённостей Гейзенберга для энергии и времени:

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \qquad (1)$$

В нашем случае $\Delta t = \tau = 10^{-8} c$ - среднее время жизни атома в возбуждённом состоянии, а $\Delta E = \hbar\Delta\omega$, поэтому из выражения (1) определим ширину спектральной линии $\Delta\omega$:

$$\hbar\Delta\omega\tau \sim \hbar \Rightarrow \Delta\omega \sim \frac{1}{\tau} \qquad (2)$$

Частота и длина волны связаны соотношением:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \qquad (3)$$

Относительная ширина спектральной линии равна:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi c\tau} = 2.65 \cdot 10^{-8} \qquad (4)$$

Ответ:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = 2.65 \cdot 10^{-8}.$$

Задача № 20.

Оцените с помощью соотношения неопределённостей Гейзенберга неопределённость скорости электрона в атоме водорода, полагая размер атома $a = 10^{-10}\,м$. Сравните полученную величину со скоростью электрона на первой боровской орбите.

Решение:

Воспользуемся первым соотношением неопределённостей Гейзенберга:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar \qquad (1)$$

В нашем случае неопределённость координаты $\Delta x = a = 10^{-10}\,м$ - размер атома, а неопределённость импульса $\Delta p = m\Delta v$, где m - масса электрона, а Δv - неопределённость скорости электрона. Тогда выражение (1) примет вид:

$$m\Delta v \cdot a \geq \hbar \qquad (2)$$

Из этого уравнения найдём неопределённость скорости электрона:

$$\Delta v \geq \frac{\hbar}{ma} = 1.2 \cdot 10^6\ {}^{м}\!/\!_{с} \qquad (3)$$

Из постулатов Бора для атома водорода следует, что момент импульса электрона квантуется:

$$L = n\hbar, n = 1, 2, ... \qquad (4)$$

Учитывая определение момента импульса, имеем:

$$mvr_n = n\hbar \qquad (5)$$

Между электроном и ядром действуют кулоновские силы притяжения, которые вызывают ускорение электрона при его движении по круговой орбите. На основании второго закона Ньютона можем записать:

$$\frac{mv^2}{r_n} = \frac{e^2}{r_n^2}k \qquad (6)$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ - введена из-за использования системы СИ. Из системы уравнений (5) и (6) определим радиусы орбит электронов:

$$r_n = \frac{\hbar^2}{me^2}\frac{n^2}{k} \qquad (7)$$

и скорости электронов на этих орбитах:

$$v_n = \frac{e^2}{n\hbar}k \qquad (8)$$

Для первой боровской орбиты $n = 1$, поэтому скорость электрона на этой орбите равна:

$$v_1 = \frac{e^2}{\hbar}k = 2.2 \cdot 10^6 \ м/с \qquad (9)$$

Из выражений (3) и (9) видим, что скорость электрона и неопределённость его скорости на первой боровской орбите в атоме водорода имеют один и тот же порядок.

Ответ:

$v = 2.2 \cdot 10^6 \ м/с$,

$\Delta v = 1.2 \cdot 10^6 \ м/с$.

Задача № 21.

Пользуясь решением задачи о гармоническом осцилляторе, найдите энергетический спектр частицы массой m_0 в потенциальной яме вида

$$U(x) = \begin{cases} \infty, x < 0 \\ \dfrac{kx^2}{2}, x > 0 \end{cases}$$

Здесь $k = m_0\omega_0^2$, а ω_0 - собственная частота гармонического осциллятора.

Решение:

В задаче о квантовом гармоническом осцилляторе частица находится в потенциальной яме вида:

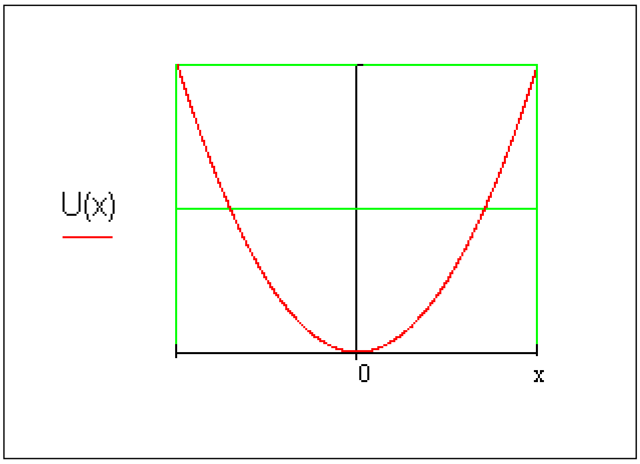


Рисунок 1

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} = \frac{m_0\omega_0^2 x^2}{2}$$

Составим уравнение Шредингера для частицы, находящейся в потенциальном поле вида, показанного на рисунке 1:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2}\left(E - \frac{m_0\omega_0^2 x^2}{2}\right)\psi = 0 \qquad (1)$$

Значения энергии квантового гармонического осциллятора оказываются квантованными:

$$E_v = \left(v + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 \qquad (2)$$

где квантовое число v принимает значения $v = 0,1,2,\ldots$. Значение $E_0 = \dfrac{\hbar\omega_0}{2}$ называется нулевым энергетическим уровнем. Решения дифференциального уравнения (1) являются пси-функциями, описывающими стационарные состояния квантового гармонического осциллятора. Они имеют вид:

$$\psi_v(x) = H_v(\xi)\cdot\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \qquad (3)$$

где $\xi = \dfrac{x}{x_0}$, а $x_0 = \sqrt{\dfrac{\hbar}{m_0\omega_0}}$. $H_v(x)$ – специальные функции, которые называются полиномами Чебышева-Эрмита. Они вычисляются следующим образом:

$$H_v(\xi) = \frac{(-1)^v}{\sqrt{2^v v!\sqrt{\pi}}} \frac{d^v \exp\left(-\dfrac{\xi^2}{2}\right)}{d\xi^v} \qquad (4)$$

Первые три нормированные пси-функции, описывающие состояния квантового осциллятора, приведены ниже. Их графики на рисунке 2.

$$v = 0 \qquad \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \qquad (5)$$

$$v = 1 \qquad \psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2x_0\sqrt{\pi}}}\frac{2x}{x_0}\exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \qquad (6)$$

$$v = 2 \qquad \psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{8x_0\sqrt{\pi}}}\left(\frac{4x^2}{x_0^2} - 2\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \qquad (7)$$

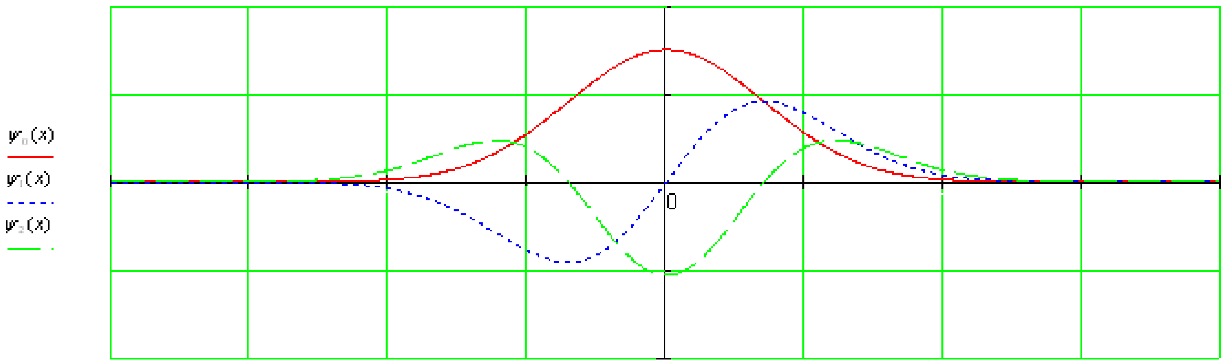
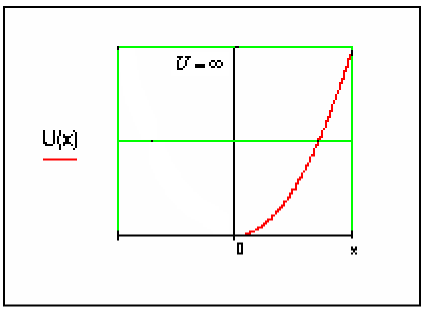


Рисунок 2

В нашей задаче потенциальная яма имеет вид, представленный на рисунке 3:



$$U(x) = \begin{cases} \infty, x < 0 \\ \dfrac{kx^2}{2}, x > 0 \end{cases}$$

Рисунок 3

Поэтому уравнение Шредингера для области $x > 0$ будет иметь такой же вид, как и для квантового гармонического осциллятора (уравнение (1)). В области $x < 0$ потенциальная энергия равняется бесконечности, поэтому частица в этой области находиться не может. Значит, плотность вероятности местонахождения частицы, а, следовательно, и пси-функция частицы для области $x < 0$ будут равняться нулю. Поэтому мы должны из множества собственных состояний квантового осциллятора исключить те состояния, пси-функции которых не удовлетворяют условию непрерывности пси-функций, которое в нашем случае имеет вид:

$$\psi_n(0) = 0 \qquad (8)$$

Как видно из уравнений (5), (6) и (7):

$$\psi_0(0) \neq 0$$
$$\psi_1(0) = 0$$
$$\psi_2(0) \neq 0$$

и так далее. Значит, пси-функции с чётным квантовым числом, условию непрерывности не удовлетворяют и пси-функциями стационарных состояний нашей задачи не являются. Поэтому из энергетического спектра квантового осциллятора нужно исключить значения энергий, соответствующих чётным значениям квантового числа v. Сделав замену $v = 2n+1, n = 0,1,2,...$, получим энергетический спектр частицы для нашей задачи:

$$E_n = \left(2n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega_0, n = 0,1,2,... \qquad (9)$$

Ответ:

$$E_n = \left(2n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega_0, n = 0,1,2,....$$

Задача № 22.

Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода имеет вид $\psi(r) = A\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$, где r - расстояние электрона до ядра, a - первый радиус боровской орбиты. Определите наиболее вероятное расстояние $r_{вер}$ электрона от ядра.

Решение:

Как известно, квадрат модуля пси-функции определяет плотность вероятности нахождения частицы в единице объёма. Найдём вероятность нахождения электрона в шаровом слое единичной толщины. Вероятность нахождения электрона в объёме dV равна: $dP = |\psi|^2 dV = A^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)dV$. Теперь в качестве объёма dV возьмём шаровой слой толщиной dr, его объём: $dV = 4\pi r^2 dr$. Вероятность нахождения электрона в таком шаровом слое равна:

$$dP = A^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)4\pi r^2 dr \qquad (1)$$

Отсюда можно заключить, что вероятность нахождения электрона в шаровом слое единичной толщины:

$$\frac{dP}{dr} = 4\pi A^2 r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) = Cr^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) \qquad (2)$$

где $C = 4\pi A^2 = const$. Наиболее вероятное расстояние $r_{вер}$ электрона от ядра можно определить, если найти значение r, при котором функция (2) имеет максимум. Для этого найдём первую производную по r от функции (2):

$$\frac{d^2P}{dr^2} = 2Cr\exp\left(-\frac{2r}{a}\right) - \frac{2Cr^2}{a}\exp\left(-\frac{2r}{a}\right) \qquad (3)$$

Приравнивая (3) к нулю, получаем:

$$2Cr_{вер}\exp\left(-\frac{2r_{вер}}{a}\right) - \frac{2C{r_{вер}}^2}{a}\exp\left(-\frac{2r_{вер}}{a}\right) = 0 \Rightarrow r_{вер} = a \qquad (4)$$

То есть наиболее вероятное расстояние электрона от ядра равно первому боровскому радиусу a. На рисунке 1 представлены графики пси-функции основного состояния электрона в атоме водорода, плотности вероятности нахождения электрона в единице объёма и плотности вероятности нахождения электрона в шаровом слое единичной толщины.

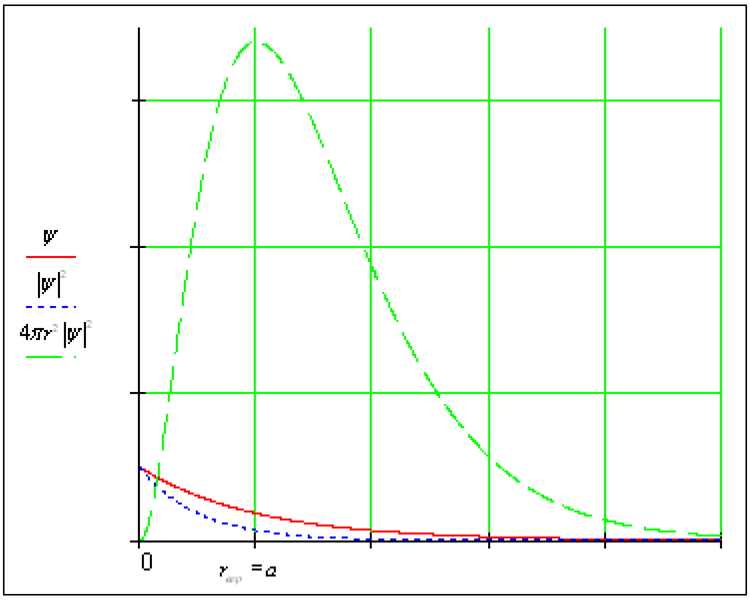


Рисунок 1

Ответ:

$r_{вер} = a$

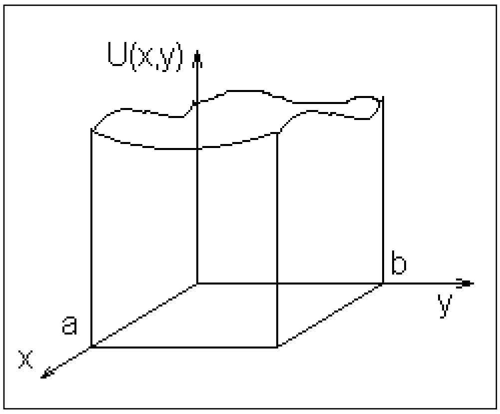
Задача № 23.

Частица находится в двумерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Координаты x и y частицы лежат в пределах 0 < x < a, 0 < y < b, где a и b – стороны ямы. Определите вероятность нахождения частицы с наименьшей энергией в области:

а) $0 < x < \frac{a}{4}$; б) $0 < y < \frac{b}{4}$; в) $0 < x < \frac{a}{4}, 0 < y < \frac{b}{4}$.

Решение:

Частица находится в потенциальной яме, имеющей следующий вид (рисунок 1):



$$U(x, y) = \begin{cases} \infty, M \notin \Omega \\ 0, M \in \Omega \end{cases}$$

$$\Omega = \begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < b \end{cases}$$

$$M(x, y)$$

Рисунок 1

Составим уравнение Шредингера для области Ω:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 \qquad (1)$$

или в виде:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + k^2\psi = 0 \qquad (2)$$

где $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$. Решение дифференциального уравнения (2) имеет вид:

$$\psi(x, y) = A\sin(k_1 x + \alpha_1)\sin(k_2 y + \alpha_2) \qquad (3)$$

Используем естественные условия, накладываемые на пси-функцию. Так как вне области Ω частица находиться не может, то её пси-функция вне области Ω равна нулю. Тогда из условия непрерывности пси-функций:

$$\psi(0, y) = 0 \Rightarrow \sin\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$
$$\psi(x, 0) = 0 \Rightarrow \sin\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$\psi(a,y)=0 \Rightarrow \sin k_1 a=0 \Rightarrow k_1 a=\pm\pi n_1, n_1=1,2,3...$
$\psi(x,b)=0 \Rightarrow \sin k_2 b=0 \Rightarrow k_2 b=\pm\pi n_2, n_2=1,2,3...$

С учётом этих условий пси-функция примет вид:

$$\psi(x,y)=A\sin\left(\frac{\pi}{a}n_1 x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}n_2 y\right) \qquad (4)$$

Найдём вторые производные по x и по y от пси-функции:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}&=-k_1^2 A\sin\left(k_1 x\right)\sin\left(k_2 y\right)=-k_1^2\psi\\ \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}&=-k_2^2 A\sin\left(k_1 x\right)\sin\left(k_2 y\right)=-k_2^2\psi\end{aligned} \qquad (5)$$

Подставим их в уравнение Шредингера (2):

$$-k_1^2\psi-k_2^2\psi+k^2\psi=0 \Rightarrow k^2=k_1^2+k_2^2 \qquad (6)$$

Учитывая, что $k^2=\frac{2m}{\hbar^2}E$, получим:

$$k^2=\frac{2m}{\hbar^2}E=\frac{\pi^2}{a^2}n_1^2+\frac{\pi^2}{b^2}n_2^2=\pi^2\left(\frac{n_1^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}\right) \Rightarrow E_{n_1,n_2}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}\right) \qquad (7)$$

Мы получили энергетический спектр частицы. Значит, в потенциальной яме энергия частицы имеет определённые дискретные значения, которые определяются выражением (7). В состоянии с наименьшей энергией оба квантовых числа равны единице $n_1=1, n_2=1$.
Для того, чтобы определить постоянную А в выражении для пси-функции (4) воспользуемся условием нормировки:

$$A^2\int_0^a\int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi}{a}n_1 x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{b}n_2 y\right)dxdy=1 \Rightarrow A=\sqrt{\frac{4}{ab}} \qquad (8)$$

Пси-функция имеет вид:

$$\psi_{n_1,n_2}(x,y)=\sqrt{\frac{4}{ab}}\sin\left(\frac{\pi}{a}n_1 x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}n_2 y\right) \qquad (9)$$

Пси-функция основного состояния $n_1=1, n_2=1$:

$$\psi_{1,1}(x,y)=\sqrt{\frac{4}{ab}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \qquad (10)$$

Плотность вероятности нахождения частицы в единице объёма равно квадрату модуля пси-функции:

$$\rho(x,y) = \frac{dP}{dxdy} = \left|\psi_{1,1}\right|^2 = \frac{4}{ab}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{b}y\right) \qquad (11)$$

Найдём вероятности нахождения частицы в областях:

а) $0 < x < \frac{a}{4}$

$$P\left(0 < x < \frac{a}{4}\right) = \frac{4}{ab}\int_0^{\frac{a}{4}}\int_0^{b}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{b}y\right)dxdy = 0.091 = 9.1\%$$

б) $0 < y < \frac{b}{4}$

$$P\left(0 < y < \frac{b}{4}\right) = \frac{4}{ab}\int_0^{a}\int_0^{\frac{b}{4}}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{b}y\right)dxdy = 0.091 = 9.1\%$$

в) $0 < x < \frac{a}{4}, 0 < y < \frac{b}{4}$

$$P\left(0 < x < \frac{a}{4}, 0 < y < \frac{b}{4}\right) = \frac{4}{ab}\int_0^{\frac{a}{4}}\int_0^{\frac{b}{4}}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{b}y\right)dxdy = 0.008 = 0.8\%$$

Ответ:

а) 9.1%, б) 9.1%, в) 0.8%.

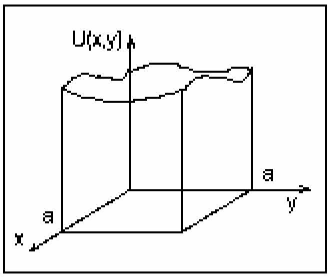
Задача № 24.

Частица находится в двумерной квадратной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками во втором возбуждённом состоянии. Сторона ямы равна а. Определите вероятность нахождения частицы в области:

а) $\frac{a}{3} < x < \frac{2a}{3}$; б) $\frac{a}{3} < y < \frac{2a}{3}$; в) $\frac{a}{3} < x < \frac{2a}{3}, \frac{a}{3} < y < \frac{2a}{3}$.

Решение:

Частица находится в потенциальной яме, имеющей следующий вид:



$$U(x,y) = \begin{cases} \infty, M \notin \Omega \\ 0, M \in \Omega \end{cases}$$

$$\Omega = \begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < a \end{cases}$$

$$M(x,y)$$

Составим уравнение Шредингера для области Ω:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0 \qquad (1)$$

или в виде:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k^2\psi = 0 \qquad (2)$$

где $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\psi(x,y) = A\sin(k_1 x + \alpha_1)\sin(k_2 x + \alpha_2) \qquad (3)$$

Используем естественные условия, накладываемые на пси-функцию. Вне области Ω частица находиться не может, поэтому её пси-функция вне области Ω равна нулю. Используя условие непрерывности, получим:

$$\psi(0,y) = 0 \Rightarrow \sin\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$
$$\psi(x,0) = 0 \Rightarrow \sin\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$
$$\psi(a,y) = 0 \Rightarrow \sin k_1 a = 0 \Rightarrow k_1 a = \pm\pi n_1, n_1 = 1,2,3,...$$
$$\psi(x,a) = 0 \Rightarrow \sin k_2 a = 0 \Rightarrow k_2 a = \pm\pi n_2, n_2 = 1,2,3,...$$

Тогда пси-функция примет вид:

$$\psi(x,y) = A\sin\left(\frac{\pi}{a} n_1 x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a} n_2 y\right) \qquad (4)$$

Найдём вторые производные от пси-функции по x и по y:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -k_1^2 A\sin(k_1 x)\sin(k_2 y) = -k_1^2\psi$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -k_2^2 A\sin(k_1 x)\sin(k_2 y) = -k_2^2\psi \qquad (5)$$

Подставим эти производные в уравнение Шредингера (2):

$$-k_1^2\psi - k_2^2\psi + k^2\psi = 0 \Rightarrow k^2 = k_1^2 + k_2^2 \qquad (6)$$

Учитывая, что $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$, получим:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E = \frac{\pi^2}{a^2}n_1^2 + \frac{\pi^2}{a^2}n_2^2 = \frac{\pi^2}{a^2}(n_1^2 + n_2^2) \Rightarrow E_{n_1,n_2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n_1^2 + n_2^2) \qquad (7)$$

Мы получили энергетический спектр частицы, находящейся в квадратной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Из выражения (7) видно, что энергия частицы зависит от двух квантовых чисел n_1 и n_2. В таблице 1 приведены несколько возможных значений n_1 и n_2 и соответствующее им $n_1^2 + n_2^2$, которое определяет значение энергии.

Таблица 1.

№ уровня	n_1	n_2	$n_1^2 + n_2^2$
1	1	1	2
2	1	2	5
	2	1	
3	2	2	8

Как видно из таблицы, некоторые энергетические уровни вырождены, то есть существует несколько состояний, описываемых различными пси-функциями, но имеющими одно и то же значение энергии. Второму возбуждённому состоянию соответствуют квантовые числа $n_1 = 2, n_2 = 2$ (так как $n_1 = 1, n_2 = 1$ соответствует основному состоянию, второй уровень – первое возбуждённое состояние, третий – второе возбуждённое состояние).
Определим константу А в выражении для пси-функции (4), используя условие нормировки:

$$A^2\int_0^a\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}n_1 x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}n_2 y\right)dxdy = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{4}{a^2}} = \frac{2}{a} \qquad (8)$$

Тогда пси-функции собственных состояний имеют вид:

$$\psi_{n_1,n_2}(x,y) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}n_1 x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}n_2 y\right) \qquad (9)$$

Во втором возбуждённом состоянии:

$$\psi_{2,2}(x,y)=\frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2y\right) \tag{10}$$

Найдём функцию плотности вероятности нахождения частицы в единице объёма:

$$\rho(x,y)=\left|\psi_{2,2}\right|^2=\frac{4}{a^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2y\right) \tag{11}$$

Теперь определим искомые вероятности:

а) $\frac{a}{3}<x<\frac{2a}{3}$

$$P\left(\frac{a}{3}<x<\frac{2a}{3}\right)=\frac{4}{a^2}\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}}\int_{0}^{a}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2y\right)dxdy=0.1955=19.55\%$$

б) $\frac{a}{3}<y<\frac{2a}{3}$

$$P\left(\frac{a}{3}<y<\frac{2a}{3}\right)=\frac{4}{a^2}\int_{0}^{a}\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2y\right)dxdy=0.1955=19.55\%$$

в) $\frac{a}{3}<x<\frac{2a}{3},\frac{a}{3}<y<\frac{2a}{3}$

$$P\left(\frac{a}{3}<x<\frac{2a}{3},\frac{a}{3}<y<\frac{2a}{3}\right)=\frac{4}{a^2}\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}}\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2y\right)dxdy=0.038=3.8\%$$

Ответ:

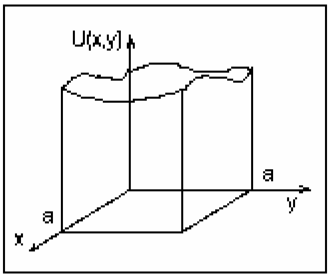
а) 19.55%; б) 19.55%; в) 3.8%.

Задача № 25.

Частица массой m_0 находится в основном состоянии в двумерной квадратной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите энергию частицы, если максимальное значение плотности вероятности местонахождения частицы равно w_m.

Решение:

Частица находится в потенциальной яме, имеющей следующий вид:



$$U(x,y)=\begin{cases}\infty, M\notin\Omega\\ 0, M\in\Omega\end{cases}$$

$$\Omega=\begin{cases}0<x<a\\ 0<y<a\end{cases}$$

$$M(x,y)$$

Предположим, что сторона ямы равна a.
Составим уравнение Шредингера для области Ω:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi=0 \qquad (1)$$

или в виде:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+k^2\psi=0 \qquad (2)$$

где $k^2=\frac{2m}{\hbar^2}E$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\psi(x,y)=A\sin(k_1x+\alpha_1)\sin(k_2x+\alpha_2) \qquad (3)$$

Используем естественные условия, накладываемые на пси-функцию. Вне области Ω частица находиться не может, поэтому её пси-функция вне области Ω равна нулю. Используя условие непрерывности, получим:

$$\psi(0,y)=0\Rightarrow\sin\alpha_1=0\Rightarrow\alpha_1=0$$
$$\psi(x,0)=0\Rightarrow\sin\alpha_2=0\Rightarrow\alpha_2=0$$
$$\psi(a,y)=0\Rightarrow\sin k_1a=0\Rightarrow k_1a=\pm\pi n_1, n_1=1,2,3,...$$
$$\psi(x,a)=0\Rightarrow\sin k_2a=0\Rightarrow k_2a=\pm\pi n_2, n_2=1,2,3,...$$

Тогда пси-функция примет вид:

$$\psi(x,y)=A\sin\left(\frac{\pi}{a}n_1x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}n_2y\right) \qquad (4)$$

Найдём вторые производные от пси-функции по x и по y:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -k_1^2 A\sin(k_1x)\sin(k_2y) = -k_1^2\psi$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -k_2^2 A\sin(k_1x)\sin(k_2y) = -k_2^2\psi \qquad (5)$$

Подставим эти производные в уравнение Шредингера (2):

$$-k_1^2\psi - k_2^2\psi + k^2\psi = 0 \Rightarrow k^2 = k_1^2 + k_2^2 \qquad (6)$$

Учитывая, что $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$, получим:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E = \frac{\pi^2}{a^2}n_1^2 + \frac{\pi^2}{a^2}n_2^2 = \frac{\pi^2}{a^2}(n_1^2 + n_2^2) \Rightarrow E_{n_1,n_2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n_1^2 + n_2^2) \qquad (7)$$

Мы получили энергетический спектр частицы, находящейся в квадратной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Из выражения (7) видно, что энергия частицы зависит от двух квантовых чисел n_1 и n_2. В таблице 1 приведены несколько возможных значений n_1 и n_2 и соответствующее им $n_1^2 + n_2^2$, которое определяет значение энергии.

Таблица 1.

№ уровня	n_1	n_2	$n_1^2 + n_2^2$
1	1	1	2
2	1	2	5
	2	1	
3	2	2	8

Основному состоянию соответствуют значения $n_1 = 1, n_2 = 1$.

Определим константу А в выражении для пси-функции (4), используя условие нормировки:

$$A^2\int_0^a\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}n_1x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}n_2y\right)dxdy = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{4}{a^2}} = \frac{2}{a} \qquad (8)$$

Тогда пси-функции собственных состояний имеют вид:

$$\psi_{n_1,n_2}(x,y) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}n_1x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}n_2y\right) \qquad (9)$$

В основном состоянии $n_1 = 1, n_2 = 1$, поэтому пси-функция имеет вид:

$$\psi_{1,1}(x,y) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \qquad (10)$$

Плотность вероятности – это квадрат модуля пси-функции:

$$w(x,y) = |\psi_{1,1}|^2 = \frac{4}{a^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}y\right) \qquad (11)$$

Графический вид плотности вероятности местонахождения частицы в основном состоянии представлен на рисунке 1:

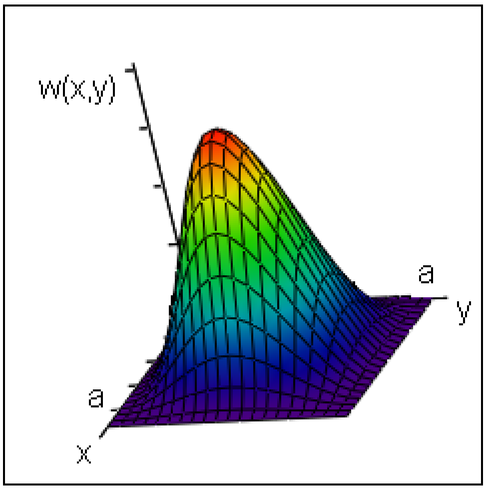


Рисунок 1

Максимальное значение, которое принимает функция синус, это единица (Как нетрудно убедиться, координаты максимума функции плотности вероятности равны $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$).

Поэтому максимальное значение плотности вероятности:

$$w_m = \frac{4}{a^2} \Rightarrow a^2 = \frac{4}{w_m} \qquad (12)$$

Исходя из энергетического спектра частицы в квадратной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками (7) и учитывая выражение (12), можем найти значение энергии частицы в основном состоянии $n_1 = 1, n_2 = 1$:

$$E_{1,1} = \frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2} = \frac{\pi^2\hbar^2 w_m}{4m} \qquad (13)$$

Ответ:

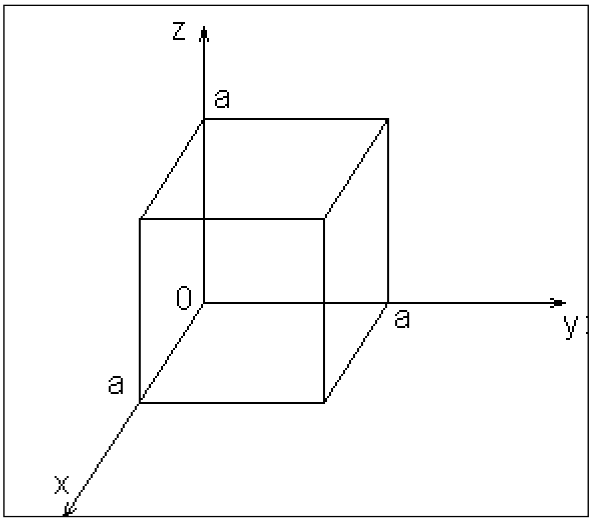
$$E_{1,1} = \frac{\pi^2\hbar^2 w_m}{4m}$$

Задача № 26.

Частица массой m_0 находится в кубической потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Найдите длину ребра куба, если разность энергий 6-ого и 5-ого уровней равна ΔE. Чему равна кратность вырождения 6-ого и 5-ого уровней?

Решение:

Потенциальная яма имеет вид (рисунок 1):



$$U = \begin{cases} \infty, M \notin \Omega \\ 0, M \in \Omega \end{cases}$$

$$\Omega = \begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < a \\ 0 < z < a \end{cases}$$

$$M(x, y, z)$$

Рисунок 1

Составим уравнение Шредингера для области Ω:

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 \qquad (1)$$

или в виде:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0 \qquad (2)$$

где $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\psi(x, y, z) = A \sin(k_1 x + \alpha_1) \sin(k_2 y + \alpha_2) \sin(k_3 z + \alpha_3) \qquad (3)$$

Используем естественные условия, накладываемые на пси-функцию. Вне области Ω частица находиться не может, значит, плотность вероятности, а значит, и пси-функция вне области Ω равны нулю. Учитывая этот факт и условие непрерывности пси-функций, получим:

$$\psi(0, y, z) = 0 \Rightarrow \sin \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$
$$\psi(x, 0, z) = 0 \Rightarrow \sin \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$
$$\psi(x, y, 0) = 0 \Rightarrow \sin \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$$

$$\psi(a,y,z)=0 \Rightarrow \sin k_1 a = 0 \Rightarrow k_1 a = \pm\pi n_1, n_1 = 1,2,3,...$$
$$\psi(x,a,z)=0 \Rightarrow \sin k_2 a = 0 \Rightarrow k_2 a = \pm\pi n_2, n_2 = 1,2,3,...$$
$$\psi(x,y,a)=0 \Rightarrow \sin k_3 a = 0 \Rightarrow k_3 a = \pm\pi n_3, n_3 = 1,2,3,...$$

В этом случае пси-функция примет вид:

$$\psi(x,y,z) = A\sin k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z = A\sin\left(\frac{\pi}{a}n_1 x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}n_2 y\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}n_3 z\right) \qquad (4)$$

Найдём частные производные от выражения (4) по x, y и z:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -k_1^2 A\sin k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z = -k_1^2\psi$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -k_2^2 A\sin k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z = -k_2^2\psi$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -k_3^2 A\sin k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z = -k_3^2\psi$$

и подставим их в уравнение Шредингера (2), получим:

$$-k_1^2\psi - k_2^2\psi - k_3^2\psi + k^2\psi = 0 \Rightarrow k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \qquad (5)$$

Учитывая, что $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$, получим:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E = \frac{\pi^2}{a^2}n_1^2 + \frac{\pi^2}{a^2}n_2^2 + \frac{\pi^2}{a^2}n_3^2 = \frac{\pi^2}{a^2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \qquad (6)$$

Отсюда получим энергетический спектр частицы:

$$E_{n_1,n_2,n_3} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \qquad (7)$$

Энергия частицы зависит от трёх квантовых чисел n_1, n_2, n_3. Составим таблицу (таблица 1), в которой рассмотрим несколько первых энергетических уровней (сумма квадратов трёх квантовых чисел $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ определяет энергию частицы):

Таблица 1:

№ уровня	n_1	n_2	n_3	$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$
1	1	1	1	3
2	1	1	2	6
	1	2	1	
	2	1	1	
3	1	2	2	9
	2	1	2	
	2	2	1	
4	1	1	3	11
	1	3	1	

	3	1	1	
5	2	2	2	12
6	1	2	3	14
	1	3	2	
	2	1	3	
	2	3	1	
	3	1	2	
	3	2	1	

Как видно из таблицы, может существовать несколько состояний частицы, описываемых различными пси-функциями, но в которых частица имеет одно и то же значение энергии. Такие энергетические уровни называются вырожденными, а число квантовых состояний, в которых частица имеет одно и тоже значение энергии называется кратностью вырождения. Значит, 5-ый энергетический уровень не вырожден, потому что существует только одно состояние, в котором частица имеет такое значение энергии, а 6-ой уровень имеет кратность вырождения 6. Определим разность энергий 6-ого и 5-ого уровней:

$$\Delta E = E_6 - E_5 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\cdot 14 - \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\cdot 12 = \frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2} \qquad (8)$$

Отсюда найдём ребро куба:

$$a = \frac{\pi\hbar}{\sqrt{m\Delta E}} \qquad (9)$$

Ответ:

$$a = \frac{\pi\hbar}{\sqrt{m\Delta E}}$$

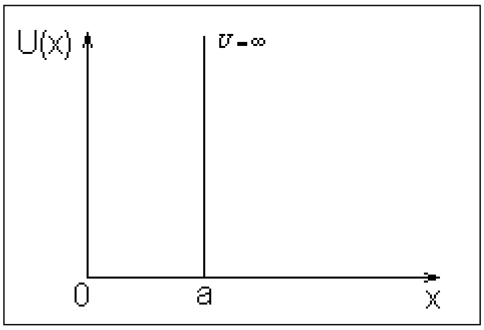
5-ый уровень не вырожден, кратность вырождения 6-ого уровня равна 6.

Задача № 27.

Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, имеющими ширину a. В каких точках интервала $0 < x < a$ плотность вероятности обнаружения частицы одинакова для основного и второго возбуждённого состояний?

Решение:

Частица находится в потенциальной яме, имеющей вид (рисунок 1):



$$U(x) = \begin{cases} \infty, x < 0 \\ 0, 0 < x < a \\ \infty, x > a \end{cases}$$

Рисунок 1

Составим уравнение Шредингера для области $0 < x < a$:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0 \qquad (1)$$

или в виде:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0 \qquad (2)$$

где $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\psi(x) = A\sin(kx + \alpha) \qquad (3)$$

Воспользуемся естественными условиями, накладываемыми на пси-функцию. В области, где потенциальная энергия равна бесконечности, частица находиться не может, поэтому плотность вероятности нахождения частицы, а значит и пси-функция в этих областях ($x < 0, x > a$) равны нулю. Имея в виду этот факт и условие непрерывности пси-функций, получим:

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$
$$\psi(a) = 0 \Rightarrow \sin ka = 0 \Rightarrow ka = \pm\pi n, n = 1, 2, 3, ...$$

Тогда пси-функция примет вид:

$$\psi(x) = A\sin\left(\frac{\pi}{a}nx\right) \qquad (4)$$

Учитывая, что $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$, получим:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E = \frac{\pi^2}{a^2}n^2 \Rightarrow E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2 \qquad (5)$$

Мы получили энергетический спектр частицы, находящейся в потенциальной яме заданного вида. Определим коэффициент А в выражении (4), используя условие нормировки:

$$A^2\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}nx\right)dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}} \qquad (6)$$

Пси-функции собственных состояний частицы в потенциальной яме:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}nx\right) \qquad (7)$$

Пси-функция основного состояния $n = 1$:

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \qquad (8)$$

Значит, плотность вероятности нахождения частицы в основном состоянии:

$$\rho_1(x) = |\psi_1|^2 = \frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \qquad (9)$$

Аналогично, для второго возбуждённого $n = 3$:

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot 3x\right) \qquad (10)$$

$$\rho_3(x) = |\psi_3|^2 = \frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 3x\right) \qquad (11)$$

Для того, чтобы узнать, в каких точках интервала $0 < x < a$ плотность вероятности местонахождения одинакова для основного и второго возбуждённого состояний, приравняем выражения (9) и (11):

$$\rho_1(x) = \rho_3(x) \Rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 3x\right) \qquad (12)$$

Решая это уравнения на интервале $0 < x < a$, находим решения: $0, \frac{a}{4}, \frac{a}{2}, \frac{3a}{4}, a$.

Графики плотностей вероятностей приведены на рисунке 2:

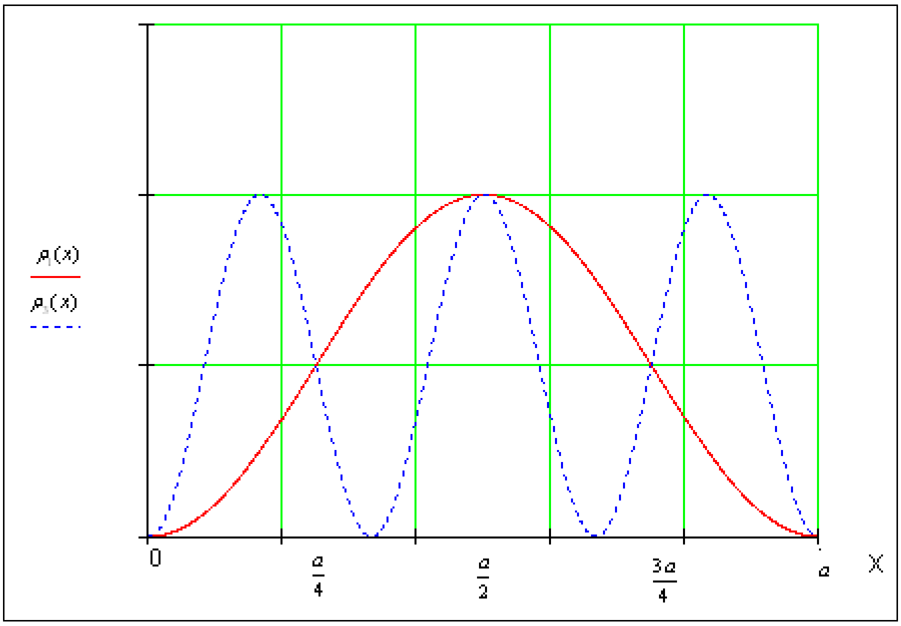


Рисунок 2

Ответ:

$0, \frac{a}{4}, \frac{a}{2}, \frac{3a}{4}, a$.

Задача № 28.

Квантовый гармонический осциллятор находится в основном состоянии. Найдите вероятность P обнаружения частицы в области $-a < x < a$, где a - амплитуда классических колебаний.

Решение:

Квантовый гармонический осциллятор представляет собой частицу, находящуюся в потенциальном поле вида:

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \qquad (1)$$

График потенциальной энергии изображён на рисунке 1:

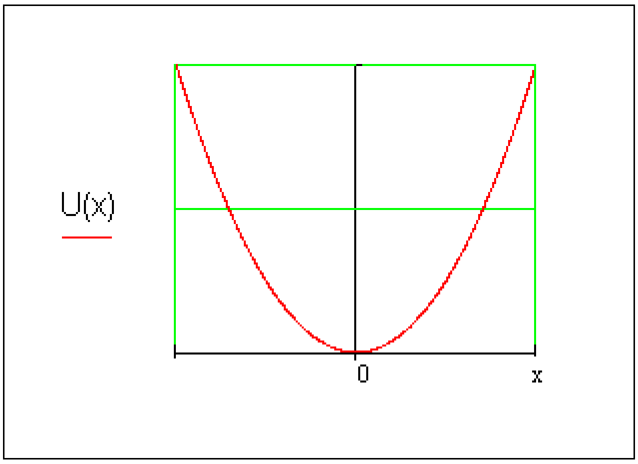


Рисунок 1

В этом случае составляют уравнение Шредингера:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\right)\psi = 0 \qquad (2)$$

Это дифференциальное уравнение имеет решение только при дискретных значениях E. Таким образом, энергия квантового гармонического осциллятора квантуется и может принимать следующие значения:

$$E_v = \left(v + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0, v = 0,1,2,... \qquad (3)$$

В основном состоянии квантовое число $v = 0$, поэтому энергия квантового гармонического осциллятора в основном состоянии равна:

$$E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} \qquad (4)$$

Определим амплитуду классических колебаний:

$$\frac{\hbar\omega_0}{2}=\frac{m\omega_0^2a^2}{2}\Rightarrow a=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \qquad (5)$$

Решения дифференциального уравнения (4) имеют вид:

$$\psi_v(\xi)=e^{\frac{\xi^2}{2}}H_v(\xi) \qquad (6)$$

где $H_v(\xi)$ - полиномы Чебышева-Эрмита, которые определяются следующим образом:

$$H_v(\xi)=\frac{(-1)^v}{\sqrt{2^v v!\sqrt{\pi}}}e^{\xi^2}\frac{d^v e^{-\xi^2}}{d\xi^v} \qquad (7)$$

где $\xi=\frac{x}{a}, a=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$. Для основного состояния $v=0$, имеем пси-функцию:

$$\psi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \qquad (8)$$

Квадрат модуля пси-функции определяет плотность вероятности нахождения частицы:

$$\rho_0(x)=|\psi_0|^2=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \qquad (9)$$

Чтобы найти вероятность нахождения частицы в области $-a<x<a$ нужно проинтегрировать (9) по пределам области:

$$P=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int_{-a}^{a}\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=0.8427=84.27\% \qquad (10)$$

Ответ:

$P=0.8427=84.27\%$.

Задача № 29.

Частица массой m_0 находится в одномерном потенциальном поле $U(x)$ в стационарном состоянии, описываемом волновой функцией $\psi(x) = A\exp(-\alpha x^2)$, где A и α - постоянные ($\alpha > 0$). Найдите энергию частицы и вид функции $U(x)$, если $U(0) = 0$.

Решение:

Стационарные состояния частицы описываются пси-функциями, которые являются решениями уравнения Шредингера:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0 \qquad (1)$$

Найдём вторую производную от данной волновой функции по x:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial x} = A\exp(-\alpha x^2)(-2\alpha x) = -2A\alpha x\exp(-\alpha x^2) \\ &\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -2A\alpha\exp(-\alpha x^2) - 2A\alpha x\exp(-\alpha x^2)(-2\alpha x) = 4A\alpha^2x^2\exp(-\alpha x^2) - 2A\alpha\exp(-\alpha x^2) \end{aligned} \qquad (2)$$

Подставим в уравнение Шредингера (1):

$$4A\alpha^2x^2\exp(-\alpha x^2) - 2A\alpha\exp(-\alpha x^2) + \frac{2m_0}{\hbar^2}(E-U(x))A\exp(-\alpha x^2) = 0 \qquad (3)$$

Разделим обе части уравнения на $2A\exp(-\alpha x^2)$ и получим:

$$2\alpha^2x^2 - \alpha + \frac{m_0}{\hbar^2}(E-U(x)) = 0 \qquad (4)$$

Учитывая, что $U(0) = 0$, получим:

$$-\alpha + \frac{m_0}{\hbar^2}E = 0 \Rightarrow E = \frac{\alpha\hbar^2}{m_0} \qquad (5)$$

Подставим полученное значение энергии в уравнение (4) и определим вид потенциальной энергии:

$$2\alpha^2x^2 - \alpha + \frac{m_0}{\hbar^2}\left(\frac{\alpha\hbar^2}{m_0} - U(x)\right) = 0 \Rightarrow U(x) = \frac{2\alpha^2\hbar^2}{m_0}x^2 \qquad (6)$$

Ответ:

$$E = \frac{\alpha\hbar^2}{m_0}$$

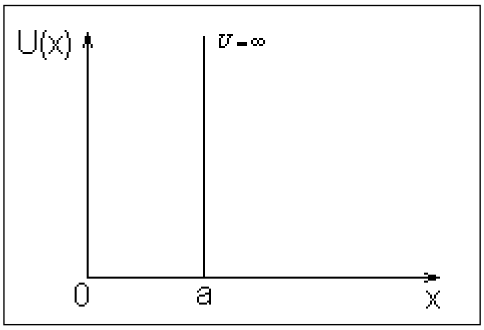
$$U(x) = \frac{2\alpha^2\hbar^2}{m_0} x^2$$

Задача № 30.

Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите отношение вероятностей нахождения частицы в средней трети ямы для первого и второго возбуждённых состояний.

Решение:

Пусть сторона ямы равна a.
Частица находится в потенциальной яме, имеющей вид (рисунок 1):



$$U(x) = \begin{cases} \infty, x < 0 \\ 0, 0 < x < a \\ \infty, x > a \end{cases}$$

Рисунок 1

Составим уравнение Шредингера для области $0 < x < a$:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0 \qquad (1)$$

или в виде:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0 \qquad (2)$$

где $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\psi(x) = A \sin(kx + \alpha) \qquad (3)$$

Воспользуемся естественными условиями, накладываемыми на пси-функцию. В области, где потенциальная энергия равна бесконечности, частица находиться не может, поэтому плотность вероятности нахождения частицы, а значит и пси-функция в этих областях ($x < 0, x > a$) равны нулю. Имея в виду этот факт и условие непрерывности пси-функций, получим:

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$
$$\psi(a) = 0 \Rightarrow \sin ka = 0 \Rightarrow ka = \pm \pi n, n = 1, 2, 3, ...$$

Тогда пси-функция примет вид:

$$\psi(x) = A\sin\left(\frac{\pi}{a}nx\right) \qquad (4)$$

Учитывая, что $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$, получим:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E = \frac{\pi^2}{a^2}n^2 \Rightarrow E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2 \qquad (5)$$

Мы получили энергетический спектр частицы, находящейся в потенциальной яме заданного вида. Определим коэффициент А в выражении (4), используя условие нормировки:

$$A^2\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}nx\right)dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}} \qquad (6)$$

Пси-функции собственных состояний частицы в потенциальной яме:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}nx\right) \qquad (7)$$

В первом возбуждённом состоянии $n = 2$ (так как $n = 1$ соответствует основному состоянию). Тогда пси-функция первого возбуждённого состояния равна:

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2x\right) \qquad (8)$$

Плотность вероятности нахождения частицы в этом состоянии определяет квадрат модуля пси-функции:

$$\rho_2(x) = \frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2x\right) \qquad (9)$$

Аналогично для второго возбуждённого состояния пси-функция и плотность вероятности равны:

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot 3x\right) \qquad (10)$$

$$\rho_3(x) = \frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 3x\right) \qquad (11)$$

Вероятности нахождения частицы в средней трети потенциальной ямы для первого и второго возбуждённых состояний найдём, интегрируя (9) и (11) по пределам $x_1 = \frac{a}{3}, x_2 = \frac{2a}{3}$:

$$P_2\left(\frac{a}{3}<x<\frac{2a}{3}\right)=\frac{2}{a}\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2x\right)=0.1955$$

$$P_3\left(\frac{a}{3}<x<\frac{2a}{3}\right)=\frac{2}{a}\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 3x\right)=0.3333$$

Тогда

$$\frac{P_2}{P_3}=\frac{0.1955}{0.3333}=0.5866$$

Ответ:

$$\frac{P_2}{P_3}=0.5866\,.$$

Задача № 31.

Электрон с энергией $E = 4.9эВ$ падает на прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 5эВ$. Оцените, при какой ширине барьера d коэффициент прохождения электрона через барьер D будет равен 0.2 ?

Решение:

Вид прямоугольного потенциального барьера представлен на рисунке 1:

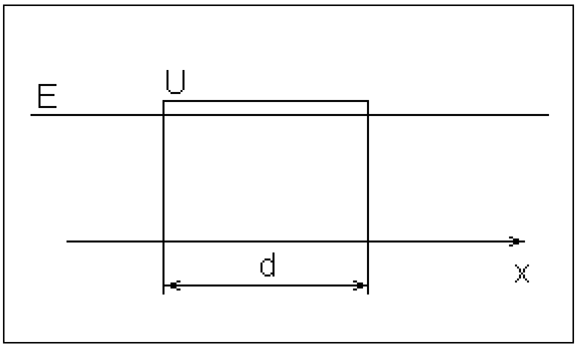


Рисунок 1

Коэффициент прохождения частицы через потенциальный барьер определяется следующим выражением:

$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(U(x)-E)}dx\right) \qquad (1)$$

где пределы интегрирования x_1 и x_2 являются решениями уравнения:

$$U(x) = E \qquad (2)$$

В случае прямоугольного потенциального порога:

$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}d\sqrt{2m(U-E)}\right) \qquad (3)$$

где d - ширина, а U - высота потенциального порога. Прологарифмируем обе части уравнения (3):

$$\ln D = -\frac{2}{\hbar}d\sqrt{2m(U-E)} \qquad (4)$$

Отсюда найдём ширину порога:

$$d = -\frac{\hbar \ln D}{\sqrt{8m(U-E)}} \qquad (5)$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$d \approx 5 \cdot 10^{-10} \, м = 0.5 нм$$

Ответ:

$$d = -\frac{\hbar \ln D}{\sqrt{8m(U-E)}}$$

$$d \approx 0.5 нм \, .$$

Задача № 32.

Электрон, обладающий энергией $E = 50эВ$, встречает на своём пути потенциальный порог высотой $U = 20эВ$. Определите вероятность отражения электрона от этого порога.

Решение:

Вид потенциального порога представлен на рисунке 1:

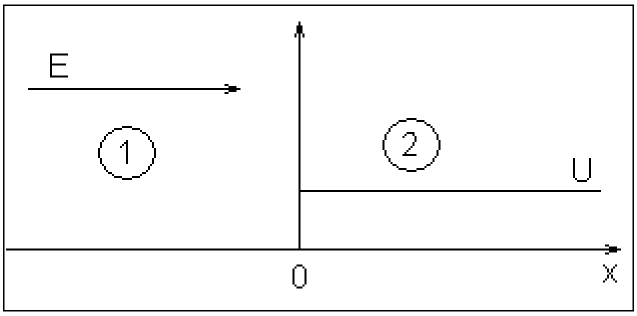


Рисунок 1

Составим уравнения Шредингера для областей 1 и 2:

Для области 1: $$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi_1 = 0 \qquad (1)$$

Для области 2: $$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi_2 = 0 \qquad (2)$$

Или в виде:

Для области 1: $$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + k_1^2\psi_1 = 0 \text{, где } k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E \qquad (3)$$

Для области 2: $$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + k_2^2\psi_2 = 0 \text{, где } k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E-U) \qquad (4)$$

Решения дифференциальных уравнений (3) и (4) имеют вид:

$$\psi_1(x) = A_1\exp(ik_1x) + B_1\exp(-ik_1x) \qquad (5)$$

$$\psi_2(x) = A_2\exp(ik_2x) + B_2\exp(-ik_2x) \qquad (6)$$

В выражении (5) первое слагаемое является уравнением падающей волны де Бройля электрона, а второе слагаемое – уравнение отражённой волны. В области 2 есть только прошедшая волна, которой соответствует первое слагаемое уравнения (6), поэтому коэффициент $B_2 = 0$. Уравнение (6) примет вид:

$$\psi_2(x) = A_2\exp(ik_2x) \qquad (7)$$

Используя условие непрерывности пси-функций, для точки $x = 0$ запишем:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow A_1 + B_1 = A_2 \qquad (8)$$

Используя условие гладкости пси-функций, для точки $x = 0$ можем записать:

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0) \Rightarrow k_1 A_1 - k_1 B_1 = k_2 A_2 \qquad (9)$$

Используя уравнения (8) и (9), найдём:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \qquad (10)$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \qquad (11)$$

Рассмотрим поток плотности вероятности, который определяется также как и поток любой другой физической величины: $P \sim vA^2$, где v - скорость частицы, а A^2 - квадрат амплитуды волновой функции, характеризующий плотность вероятности местонахождения частицы. Так как скорость частицы $v \sim p \sim k$, то для падающей, отражённой и прошедшей волн де Бройля электрона в нашем случае можно записать:

Для падающей волны: $P \sim k_1 A_1^2$ (12)

Для отражённой волны: $P' \sim k_1 B_1^2$ (13)

Для прошедшей волны: $P'' \sim k_2 A_2^2$ (14)

Теперь определим коэффициенты, учитывая также выражения (10) и (11):

Коэффициент отражения: $$R = \frac{P'}{P} = \frac{k_1 B_1^2}{k_1 A_1^2} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 \qquad (15)$$

Коэффициент пропускания: $$D = \frac{P''}{P} = \frac{k_2 A_2^2}{k_1 A_1^2} = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \qquad (16)$$

Сумма коэффициентов отражения и пропускания равна 1:

$$R + D = 1 \qquad (17)$$

Определим коэффициент отражения в нашем случае, учитывая, что $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ и $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}$:

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E-U}}{\sqrt{E} + \sqrt{E-U}}\right)^2 \qquad (18)$$

Подставляя числовые значения, получим:

$R = 0.016 = 1.6\%$

Ответ:

Вероятность отражения от потенциального барьера (коэффициент отражения) равна:

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E-U}}{\sqrt{E} + \sqrt{E-U}} \right)^2$$

$R = 0.016 = 1.6\%$.

Задача № 33.

Частица массой m_0 падает на прямоугольный потенциальный порог высотой U_0. Энергия частицы равна E, причём $E > U_0$. Найдите коэффициент отражения R и коэффициент прозрачности D этого барьера. Убедитесь, что значения этих коэффициентов не зависят от направления движения падающей частицы (слева направо или справа налево).

Решение:

Вид потенциального порога представлен на рисунке 1:

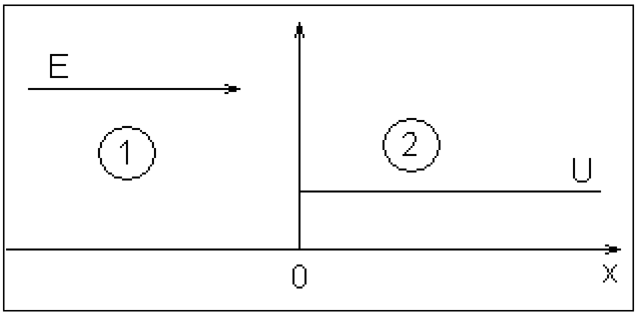


Рисунок 1

Составим уравнения Шредингера для областей 1 и 2:

Для области 1: $$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi_1 = 0 \qquad (1)$$

Для области 2: $$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi_2 = 0 \qquad (2)$$

Или в виде:

Для области 1: $$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + k_1^2\psi_1 = 0, \text{ где } k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E \qquad (3)$$

Для области 2: $$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + k_2^2\psi_2 = 0, \text{ где } k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E-U) \qquad (4)$$

Решения дифференциальных уравнений (3) и (4) имеют вид:

$$\psi_1(x) = A_1\exp(ik_1x) + B_1\exp(-ik_1x) \qquad (5)$$

$$\psi_2(x) = A_2\exp(ik_2x) + B_2\exp(-ik_2x) \qquad (6)$$

В выражении (5) первое слагаемое является уравнением падающей волны де Бройля электрона, а второе слагаемое – уравнение отражённой волны. В области 2 есть только прошедшая волна, которой соответствует первое слагаемое уравнения (6), поэтому коэффициент $B_2 = 0$. Уравнение (6) примет вид:

$$\psi_2(x) = A_2\exp(ik_2x) \qquad (7)$$

Используя условие непрерывности пси-функций, для точки $x = 0$ запишем:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow A_1 + B_1 = A_2 \qquad (8)$$

Используя условие гладкости пси-функций, для точки $x = 0$ можем записать:

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0) \Rightarrow k_1 A_1 - k_1 B_1 = k_2 A_2 \qquad (9)$$

Используя уравнения (8) и (9), найдём:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \qquad (10)$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \qquad (11)$$

Рассмотрим поток плотности вероятности, который определяется также как и поток любой другой физической величины: $P \sim vA^2$, где v - скорость частицы, а A^2 - квадрат амплитуды волновой функции, характеризующий плотность вероятности местонахождения частицы. Так как скорость частицы $v \sim p \sim k$, то для падающей, отражённой и прошедшей волн де Бройля электрона в нашем случае можно записать:

Для падающей волны: $P \sim k_1 A_1^2$ (12)

Для отражённой волны: $P' \sim k_1 B_1^2$ (13)

Для прошедшей волны: $P'' \sim k_2 A_2^2$ (14)

Теперь определим коэффициенты, учитывая также выражения (10) и (11):

Коэффициент отражения: $$R = \frac{P'}{P} = \frac{k_1 B_1^2}{k_1 A_1^2} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 \qquad (15)$$

Коэффициент пропускания: $$D = \frac{P''}{P} = \frac{k_2 A_2^2}{k_1 A_1^2} = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \qquad (16)$$

Сумма коэффициентов отражения и пропускания (коэффициента прозрачности потенциального порога) равна 1:

$$R + D = 1 \qquad (17)$$

При изменении направления движения частицы k_1 и k_2 меняются местами. Как видно из выражений для коэффициентов отражения и пропускания, при замене k_1 на k_2 и k_2 на k_1, коэффициенты не изменяются, значит, они не зависят от направления движения частицы.

Учитывая, что $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ и $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}$ найдём коэффициенты отражения и пропускания:

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - U}}{\sqrt{E} + \sqrt{E + U}} \right)^2 \tag{18}$$

$$D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{4\sqrt{E(E - U)}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E - U})^2} \tag{19}$$

Ответ:

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - U}}{\sqrt{E} + \sqrt{E + U}} \right)^2$$

$$D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{4\sqrt{E(E - U)}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E - U})^2}\,.$$

Задача № 34.

Найдите коэффициент прохождения частицы массой m_0 через треугольный потенциальный барьер вида:

$$U(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ U_0\left(1 - \dfrac{x}{d}\right), 0 < x < d \\ 0, x > d \end{cases}$$

в зависимости от энергии частицы E при $E < U_0$.

Решение:

Вид потенциального барьера представлен на рисунке 1:

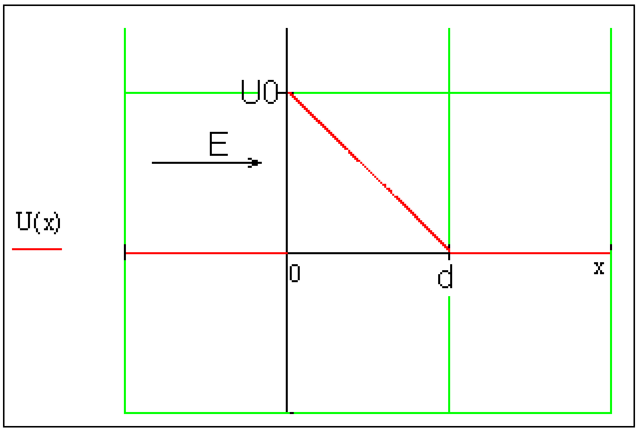


Рисунок 1

Коэффициент прохождения частицы через потенциальный барьер определяется выражением:

$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m_0(U(x)-E)}dx\right) \qquad (1)$$

где пределы интегрирования являются решениями уравнения:

$$U(x) = E \qquad (2)$$

Определим пределы интегрирования в нашем случае. Нижний предел интегрирования равен $x_1 = 0$. Верхний предел является корнем уравнения:

$$U_0\left(1 - \frac{x_2}{d}\right) = E \Rightarrow x_2 = d\left(1 - \frac{E}{U_0}\right) \qquad (3)$$

Подставив вид потенциальной энергии и пределы интегрирования в нашем случае в выражение (1), найдём коэффициент прохождения частицы через потенциальный барьер в зависимости от энергии частицы:

$$D(E) \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{0}^{d\left(1-\frac{E}{U_0}\right)} \sqrt{2m_0\left(U_0\left(1-\frac{x}{d}\right) - E \right)} dx \right) = \exp\left(-\frac{4d\sqrt{2m}(U_0 - E)^{\frac{3}{2}}}{3\hbar U_0} \right) \qquad (4)$$

Ответ:

$$D(E) = \exp\left(-\frac{4d\sqrt{2m}(U_0 - E)^{\frac{3}{2}}}{3\hbar U_0} \right).$$

Задача № 35.

Найдите коэффициент прохождения частицы массой m_0 через потенциальный барьер вида

$$U(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ U_0\left(1 - \dfrac{x^2}{d^2}\right), 0 < x < d \\ 0, x > d \end{cases}$$

в зависимости от энергии частицы E при $E < U_0$.

Решение:

Вид данного потенциального барьера представлен на рисунке 1:

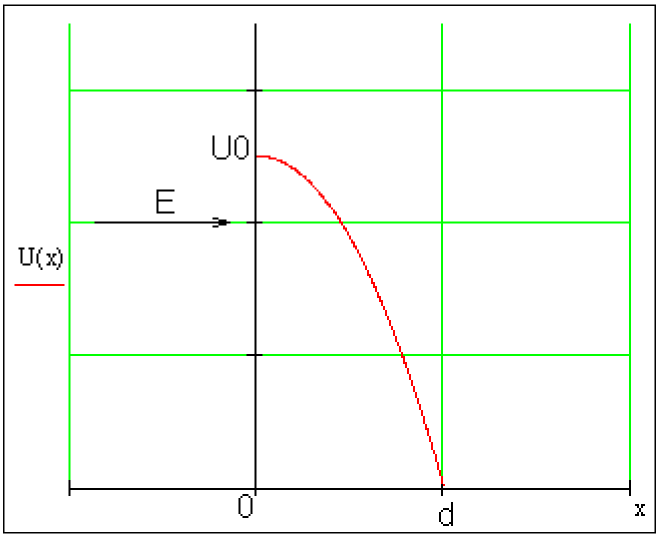


Рисунок 1

Коэффициент прохождения частицы через потенциальный барьер определяется выражением:

$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m_0(U(x)-E)}dx\right) \qquad (1)$$

где пределы интегрирования являются корнями уравнения:

$$U(x) = E \qquad (2)$$

Определим пределы интегрирования в нашем случае. Нижний предел равен $x_1 = 0$. Верхний предел определим, решая уравнение:

$$U_0\left(1 - \frac{x_2^2}{d^2}\right) = E \Rightarrow x_2 = \pm d\sqrt{1 - \frac{E}{U_0}}$$

Берём положительный корень, так как отрицательный не принадлежит интервалу $0 < x < d$. Значит, $x_2 = d\sqrt{1-\dfrac{E}{U_0}}$. Подставим в выражение (1) вид потенциальной энергии и пределы интегрирования в нашем случае и найдём коэффициент прохождения частицы через потенциальный барьер в зависимости от энергии частицы:

$$D(E) \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int\limits_0^{d\sqrt{1-\frac{E}{U_0}}}\sqrt{2m_0\left(U_0\left(1-\frac{x^2}{d^2}\right)-E\right)}dx\right) = \exp\left(-\frac{\pi d(U_0-E)}{\hbar}\sqrt{\frac{m_0}{2U_0}}\right) \qquad (3)$$

Ответ:

$$D(E) \approx \exp\left(-\frac{\pi d(U_0-E)}{\hbar}\sqrt{\frac{m_0}{2U_0}}\right).$$

Задача № 36.

Найдите коэффициент прохождения частицы массой m_0 через потенциальный барьер вида

$$U(x)=\begin{cases}0, x<-d\\ U_0\left(1-\dfrac{x^2}{d^2}\right), -d<x<0\\ 0, x>0\end{cases}$$

в зависимости от энергии частицы E при $E<U_0$.

Решение:

Вид данного потенциального барьера представлен на рисунке 1:

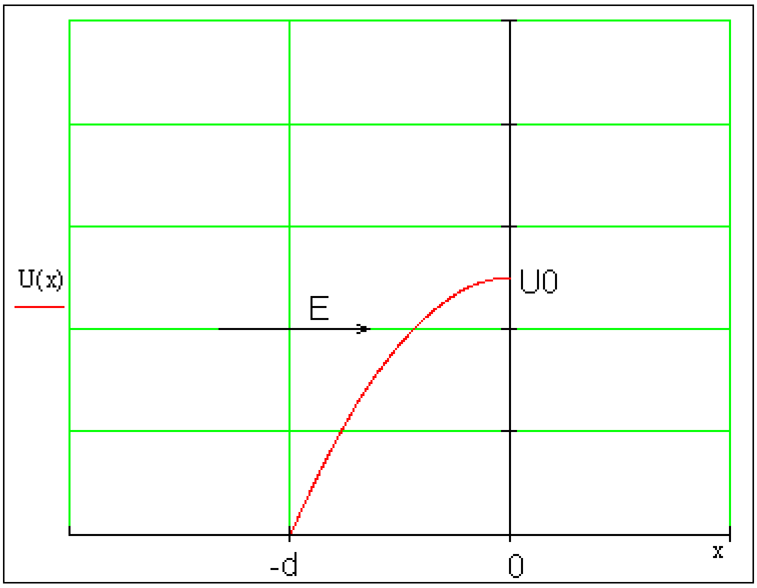


Рисунок 1

Коэффициент прохождения частицы через потенциальный барьер определяется выражением:

$$D\approx\exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m_0(U(x)-E)}dx\right) \qquad (1)$$

где пределы интегрирования x_1 и x_2 являются решениями уравнения:

$$U(x)=E \qquad (2)$$

В нашем случае верхний предел интегрирования $x_2=0$, а нижний найдём из уравнения:

$$U_0\left(1-\frac{x_1^2}{d^2}\right)=E\Rightarrow x_1=\pm d\sqrt{1-\frac{E}{U_0}}$$

Берём отрицательный корень, так как положительный не принадлежит интервалу $-d < x < 0$. Значит, $x_1 = -d\sqrt{1-\frac{E}{U_0}}$. Подставим в выражение (1) вид потенциальной энергии в нашем случае и пределы интегрирования найдём коэффициент прохождения частицы через потенциальный барьер в зависимости от энергии частицы E:

$$D(E) \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int\limits_{-d\sqrt{1-\frac{E}{U_0}}}^{0}\sqrt{2m_0\left(U_0\left(1-\frac{x^2}{d^2}\right)-E\right)}dx\right) = \exp\left(-\frac{\pi d(U_0-E)}{\hbar}\sqrt{\frac{m_0}{2U_0}}\right) \qquad (3)$$

Ответ:

$$D(E) \approx \exp\left(-\frac{\pi d(U_0-E)}{\hbar}\sqrt{\frac{m_0}{2U_0}}\right).$$

Задача № 37.

Считая, что радиоактивный α-распад происходит за счёт туннелирования α-частицы через потенциальный барьер, получите закон радиоактивного α-распада, определяющий зависимость числа нераспавшихся ядер от времени распада t. Скорость α-частицы в материнском ядре равна v, радиус ядра - r_0, коэффициент прозрачности потенциального барьера - D, число нераспавшихся ядер в начальный момент времени - N_0.

Решение:

Вид потенциального барьера, который преодолевает α-частица при радиоактивном α-распаде представлен на рисунке 1:

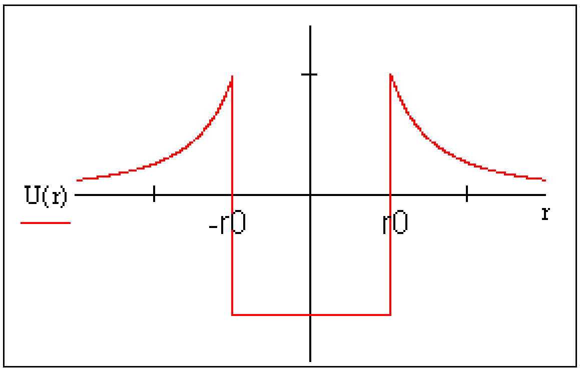


Рисунок 1

На расстояниях порядка ядерного ядра действуют ядерное силы, конкретный вид которых до конца не известен, поэтому будем предполагать, что на интервале $-r_0 < r < r_0$ график потенциальной энергии имеет вид потенциальной ямы. Как увидим далее, это предположение на решение не влияет. На расстояниях больше порядка r_0 ядерные силы уже не действуют, но действую кулоновские силы притяжения α-частицы и ядра:

$$U(r) = \frac{2Ze^2}{r}k, \text{ где } k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Предположим, что радиоактивный α-распад происходит за счёт туннелирования α-частицы через потенциальный барьер из области ядра. Если коэффициент прозрачности потенциального барьера равен D, значит, из N нераспавшихся ядер в некоторый момент времени за время τ_0 распадётся DN ядер. Время τ_0 определяет время, которое необходимо α-частицы, чтобы покинуть материнское ядро. Оно равно:

$$\tau_0 = \frac{2r_0}{v} \qquad (1)$$

Возьмём достаточно малый промежуток времени dt, за который число нераспавшихся ядер можно считать постоянным. Тогда за время dt происходит $\frac{dt}{\tau_0}$ тактов деления, при этом число нераспавшихся ядер уменьшается на:

$$dN = -DN\frac{dt}{\tau_0} = -\frac{Dv}{2r_0}Ndt \qquad (2)$$

Знак минус показывает уменьшение числа нераспавшихся ядер. Приведём выражение (2) к виду, удобному для интегрирования:

$$\frac{dN}{N} = -\frac{Dv}{2r_0}dt \qquad (3)$$

Проинтегрировав обе части, получим:

$$N(t) = C\exp\left(-\frac{Dv}{2r_0}t\right) \qquad (4)$$

где C - некоторая постоянная, которую определим, используя начальные условия:

$$N(0) = C = N_0 \qquad (5)$$

Таким образом, мы пришли к закону радиоактивного распада:

$$N(t) = N_0\exp\left(-\frac{Dv}{2r_0}t\right) \qquad (6)$$

Как известно, закон радиоактивного распада имеет вид:

$$N(t) = N_0\exp\left(-\lambda t\right) \qquad (7)$$

В нашем случае, предполагая, что радиактивный α-распад происходит за счёт туннелирования α-частицы через потенциальный барьер, для постоянной распада мы получили следующее выражение:

$$\lambda = \frac{Dv}{2r_0} \qquad (8)$$

Ответ:

$$N(t) = N_0\exp\left(-\lambda t\right)$$

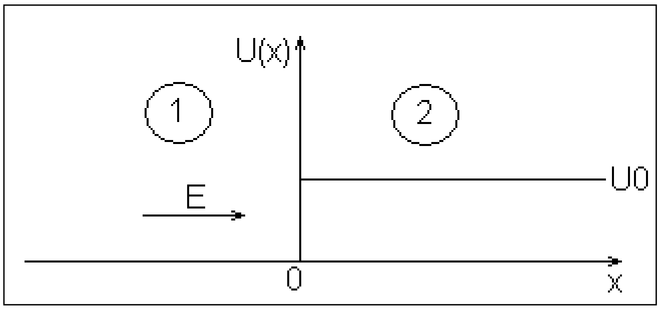
$$\lambda = \frac{Dv}{2r_0}.$$

Задача № 38.

Частица массой m_0 падает на прямоугольный потенциальный порог высотой U_0. Энергия частицы равна E, причём $E < U_0$. Найдите эффективную глубину проникновения частицы в область порога, то есть на расстоянии от границы порога до точки, в которой плотность вероятности нахождения частицы уменьшается в e раз.

Решение:

На рисунке 1 показан вид потенциального порога:



$$U(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ U_0, x > 0 \end{cases}$$

Рисунок 1

Составим уравнение Шредингера для областей 1 и 2:

Для области 1: $$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2} E\psi_1 = 0 \qquad (1)$$

Для области 2: $$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2}(E - U_0)\psi_2 = 0 \qquad (2)$$

Или в виде:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + k_1^2 \psi_1 = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + k_2^2 \psi_2 = 0 \qquad (4)$$

где $k_1^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2} E$ и $k_2^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2}(E - U_0)$. Заметим, что, так как мы рассматриваем случай, когда $E < U_0$, то k_2 будет чисто мнимым. Решения дифференциальных уравнений (3) и (4) имеют вид:

$$\psi_1(x) = A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x) \qquad (5)$$

$$\psi_2(x) = A_2 \exp(ik_2 x) + B_2 \exp(-ik_2 x) \qquad (6)$$

Первое слагаемое выражения (5) соответствует падающей волне де Бройля частицы, второе слагаемое – отражённой волне. Первое слагаемое выражения (6) соответствует

$B_2 = 0$. Тогда выражение (6) примет вид:

$$\psi_2(x) = A_2 \exp(ik_2 x) \qquad (7)$$

Используем естественные условия, накладываемые на пси-функцию. Из условия непрерывности пси-функций, имеем для точки $x = 0$:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow A_1 + B_1 = A_2 \qquad (8)$$

Используя условие гладкости пси-функций в точке $x = 0$, получим:

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0) \Rightarrow k_1 A_1 - k_1 B_1 = k_2 A_2 \qquad (9)$$

Из уравнений (8) и (9) найдём:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \qquad (10)$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \qquad (11)$$

Рассмотрим поток плотности вероятности. Он определяется также как и поток других физических величин: $\Phi \sim vA^2$, где v - скорость частицы, а A^2 - квадрат амплитуды пси-функции, который определяет плотность вероятности нахождения частицы. Учитывая, что $v \sim p \sim k$, получим:

$$\Phi \sim kA^2 \qquad (12)$$

В нашем случае, для падающей, отражённой и прошедшей волн потоки плотности вероятности:

Для падающей волны: $\Phi \sim k_1 A_1^2$ (13)

Для отражённой волны: $\Phi' \sim k_1 B_1^2$ (14)

Для прошедшей волны: $\Phi'' \sim k_2 A_2^2$ (15)

Тогда мы можем найти коэффициенты отражения и пропускания:

Коэффициент отражения: $$R = \frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{k_1 B_1^2}{k_1 A_1^2} = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2 \qquad (16)$$

Учитывая, что при $E < U_0$ k_2 чисто мнимое, имеем $R = 1$. Тогда коэффициент пропускания равен нулю. Но это не значит, что частица не может находиться в области 2. Поведение частицы в области 2 описывается пси-функцией (7), тогда плотность вероятности нахождения частицы равна:

$$\rho(x)=\left|\psi_2\right|^2=\rho(0)\exp(2ik_2x)=\rho(0)\exp(-2\kappa x) \quad (17)$$

Мы сделали замену $\kappa=ik_2=\frac{\sqrt{2m_0(U_0-E)}}{\hbar}$. Пусть l - эффективная глубина проникновения частицы в область потенциального порога, то есть такое расстояние от границы порога, на котором плотность вероятности нахождения частицы уменьшается в e раз. Тогда:

$$\rho(l)=\frac{\rho(0)}{e}=\rho(0)\exp(-2\kappa l)\Rightarrow -2\kappa l=-1\Rightarrow l=\frac{1}{2\kappa} \quad (18)$$

Учитывая, что $\kappa=\frac{\sqrt{2m_0(U_0-E)}}{\hbar}$, получим для эффективной глубины проникновения частицы в область потенциального порога выражение:

$$l=\frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0(U_0-E)}}=\frac{\hbar}{\sqrt{8m_0(U_0-E)}} \quad (19)$$

Ответ:

$$l=\frac{\hbar}{\sqrt{8m_0(U_0-E)}}\,.$$

Задача № 39.

Частица с энергией E падает на прямоугольный потенциальный порог высотой U_0. Найдите приближённое выражение для коэффициента отражения R для случая $\frac{U_0}{E} \ll 1$.

Решение:

Вид потенциального порога представлен на рисунке 1:

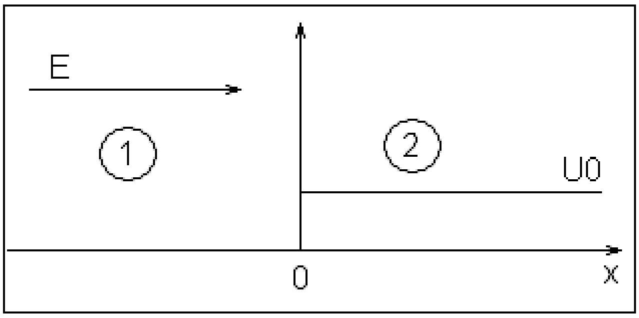


Рисунок 1

Составим уравнения Шредингера для областей 1 и 2:

Для области 1: $$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi_1 = 0 \qquad (1)$$

Для области 2: $$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U_0)\psi_2 = 0 \qquad (2)$$

Или в виде:

Для области 1: $$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + k_1^2\psi_1 = 0, \text{ где } k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E \qquad (3)$$

Для области 2: $$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + k_2^2\psi_2 = 0, \text{ где } k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E-U_0) \qquad (4)$$

Решения дифференциальных уравнений (3) и (4) имеют вид:

$$\psi_1(x) = A_1\exp(ik_1x) + B_1\exp(-ik_1x) \qquad (5)$$

$$\psi_2(x) = A_2\exp(ik_2x) + B_2\exp(-ik_2x) \qquad (6)$$

В выражении (5) первое слагаемое является уравнением падающей волны де Бройля электрона, а второе слагаемое – уравнение отражённой волны. В области 2 есть только прошедшая волна, которой соответствует первое слагаемое уравнения (6), поэтому коэффициент $B_2 = 0$. Уравнение (6) примет вид:

$$\psi_2(x) = A_2\exp(ik_2x) \qquad (7)$$

Используя условие непрерывности пси-функций, для точки $x=0$ запишем:
$\psi_1(0)=\psi_2(0)\Rightarrow A_1+B_1=A_2$ (8)

Используя условие гладкости пси-функций, для точки $x=0$ можем записать:

$\psi_1{}'(0)=\psi_2{}'(0)\Rightarrow k_1A_1-k_1B_1=k_2A_2$ (9)

Используя уравнения (8) и (9), найдём:

$$\frac{B_1}{A_1}=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} \quad (10)$$

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{2k_1}{k_1+k_2} \quad (11)$$

Рассмотрим поток плотности вероятности, который определяется также как и поток любой другой физической величины: $P \sim vA^2$, где v - скорость частицы, а A^2 - квадрат амплитуды волновой функции, характеризующий плотность вероятности местонахождения частицы. Так как скорость частицы $v \sim p \sim k$, то для падающей, отражённой и прошедшей волн де Бройля электрона в нашем случае можно записать:

Для падающей волны: $P \sim k_1A_1^2$ (12)
Для отражённой волны: $P' \sim k_1B_1^2$ (13)
Для прошедшей волны: $P'' \sim k_2A_2^2$ (14)

Теперь определим коэффициенты, учитывая также выражения (10) и (11):

Коэффициент отражения: $$R=\frac{P'}{P}=\frac{k_1B_1^2}{k_1A_1^2}=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2 \quad (15)$$

Коэффициент пропускания: $$D=\frac{P''}{P}=\frac{k_2A_2^2}{k_1A_1^2}=\frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2} \quad (16)$$

Сумма коэффициентов отражения и пропускания (коэффициента прозрачности потенциального порога) равна 1:

$R+D=1$ (17)

Учитывая, что $k_1=\dfrac{\sqrt{2m_0E}}{\hbar}$ и $k_2=\dfrac{\sqrt{2m_0(E-U_0)}}{\hbar}$ для коэффициента отражения получим:

$$R=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{E}-\sqrt{E-U_0}}{\sqrt{E}+\sqrt{E-U_0}}\right)^2=\left(\frac{1-\sqrt{1-\dfrac{U_0}{E}}}{1+\sqrt{1-\dfrac{U_0}{E}}}\right)^2 \quad (18)$$

Учитывая условие $\frac{U_0}{E} \ll 1$, получим: $R \approx 0$, то есть при $\frac{U_0}{E} \ll 1$ отражённая дебройлевская волна практически отсутствует.

Ответ:

$$R = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}} \right)^2 \approx 0 .$$

Задача № 41.

Определите возможные результаты измерений квадрата модуля момента импульса L^2 для частицы, находящейся в состоянии, описываемой волновой функцией $\psi(\theta,\varphi) = A\sin\theta\cos\varphi$, где θ - полярный угол, φ - азимутальный угол, A - некоторая нормировочная постоянная.

Решение:

Если в некотором состоянии некоторая физическая величина принимает точно определённые значения, то такие значения называются собственными значениями этой физической величины, а пси-функции, которые описывают такие собственные состояния, являются решениями операторного уравнения:

$$\hat{Q}\psi = Q\psi \qquad (1)$$

где $\hat{Q}$ - оператор некоторой физической величины Q, а в правой части уравнения Q - собственное значение этой физической величины. В нашем случае необходимо найти собственные значения квадрата модуля момента импульса, поэтому уравнение (1) в данном случае имеет вид:

$$\hat{L^2}\psi = L^2\psi \qquad (2)$$

где $\hat{L^2}$ - оператор квадрата модуля момента импульса, который в сферических координатах имеет вид:

$$\hat{L^2} = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \qquad (3)$$

Подставим в операторное уравнение (2) вид оператора и пси-функцию и после преобразований получим:

$$2\hbar^2 A\sin\theta\cos\varphi = L^2 A\sin\cos\varphi \Rightarrow L^2 = 2\hbar^2 \qquad (4)$$

Таким образом, собственное значение квадрата момента импульса в данном состоянии равняется $L^2 = 2\hbar^2$.

Ответ:

$L^2 = 2\hbar^2$.

Задача № 42.

Определите возможные результаты измерений проекции момента импульса L_z на выделенное направление для частицы, находящейся в состоянии, описываемом волновой функцией $\psi(\theta,\varphi) = A\sin\theta\cos\varphi$, где θ - полярный угол, φ - азимутальный угол, A - некоторая нормировочная постоянная.

Решение:

Если некоторая физическая величина имеет точно определённые значения в некотором состоянии, то такое состояние называется собственным. Пси-функции собственных состояний являются решением операторного уравнения:

$$\hat{Q}\psi = Q\psi \qquad (1)$$

где $\hat{Q}$ - оператор физической величины Q, в правой части Q - собственное значение этой физической величины. В нашей задаче необходимо определить собственные значения проекции момента импульса L_z, поэтому операторное уравнение (1) в нашем случае имеет вид:

$$\hat{L}_z\psi = L_z\psi \qquad (2)$$

где $\hat{L}_z$ - оператор проекции момента импульса на ось z , который в сферических координатах имеет вид:

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad (3)$$

Найдём собственные пси-функции, соответствующие состояниям, в которых проекция момента импульса на ось имеет определённые значения. Для этого решим операторное уравнение:

$$\hat{L}_z\psi = L_z\psi \Rightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = L_z\psi \qquad (4)$$

Решая дифференциальное уравнение (4), получим:

$$\psi_m = C\exp\left(im\varphi\right) \qquad (5)$$

где $m = \dfrac{L_z}{\hbar}, m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ C - постоянная, которую найдём из условия нормировки:

$$\int_0^{2\pi}\left|\psi_m\right|^2 d\varphi = 1 \Rightarrow C^2\int_0^{2\pi}\left|\exp(im\varphi)\right|^2 d\varphi = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad (6)$$

В этом случае собственные пси-функции имеют вид:

$$\psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\varphi) \qquad (7)$$

Определим постоянную A в выражении для пси-функции данного состояния, используя условие нормировки:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} |\psi|^2 d\theta d\varphi = 1 \Rightarrow A^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos^2\varphi d\theta d\varphi = 1 \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \qquad (8)$$

Тогда пси-функция данного состояния имеет вид:

$$\psi = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin\theta \cos\varphi \qquad (9)$$

Разложим эту пси-функцию в ряд по собственным пси-функциям (7), учитывая, что $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$:

$$\psi = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin\theta \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin\theta \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\theta \psi_{-1} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\theta \psi_1 \qquad (10)$$

Пси-функция (9) раскладывается по двум собственным пси-функциям, имеющим квантовые числа $m = \pm 1$. Соответственно, проекция момента импульса на произвольную ось z в состоянии, описываемом пси-функцией (9), принимает значения:

$$L_z = m\hbar = \pm\hbar \qquad (11)$$

Ответ:

$L_z = \pm\hbar$.

Задача № 43.

Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода имеет вид $\psi(r) = A\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$, где r - расстояние электрона от ядра, a - радиус первой боровской орбиты. Определите среднее значение квадрата расстояния $<r^2>$ электрона от ядра в этом состоянии.

Решение:

Из постулатов квантовой механики следует, что среднее значение некоторой физической величины Q в состоянии, описываемом пси-функцией ψ, определяется следующим образом:

$$<Q> = \int \psi^* \hat{Q} \psi\, dx \qquad (1)$$

В нашем случае необходимо определить среднее значение квадрата расстояния электрона от ядра в основном состоянии в атоме водорода. Пси-функция электрона в основном состоянии имеет следующий вид:

$$\psi(r) = A\exp\left(-\frac{r}{a}\right) \qquad (2)$$

где ψ^* - функция, сопряжённая к пси-функции ψ.
Поэтому в нашем случае получим, что среднее значение квадрата расстояния определяет следующее выражение:

$$<r^2> = \int \psi^* r^2 \psi\, dV = \int_0^\infty \psi^* r^2 \psi \cdot 4\pi r^2 dr \qquad (3)$$

где $dV = 4\pi r^2 dr$. Определим в данной пси-функции неизвестную константу A из условия нормировки:

$$\int \psi^* \psi\, dV = 1 \Rightarrow 4\pi A^2 \int_0^\infty r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) dr = 1 \Rightarrow A^2 = \frac{1}{\pi a^3} \qquad (4)$$

Тогда пси-функция основного состояния электрона в атоме водорода имеет вид:

$$\psi(r) = \sqrt{\frac{1}{\pi a^3}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \qquad (5)$$

Подставляя в выражение (3) пси-функцию (5), получим:

$$<r^2> = 4\pi A^2 \int_0^\infty r^4 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) dr = 4\pi \cdot \frac{1}{\pi a^3} \cdot \frac{3}{4} a^5 = 3a^2 \qquad (6)$$

Ответ:

$$< r^2 >= 3a^2 .$$

Задача № 44.

Частица находится в двумерной квадратной потенциальной яме с непроницаемыми стенками во втором возбуждённом состоянии. Найдите среднее значение квадрата импульса частицы $< p^2 >$, если сторона ямы равна a.

Решение:

Вид потенциальной ямы представлен на рисунке 1:

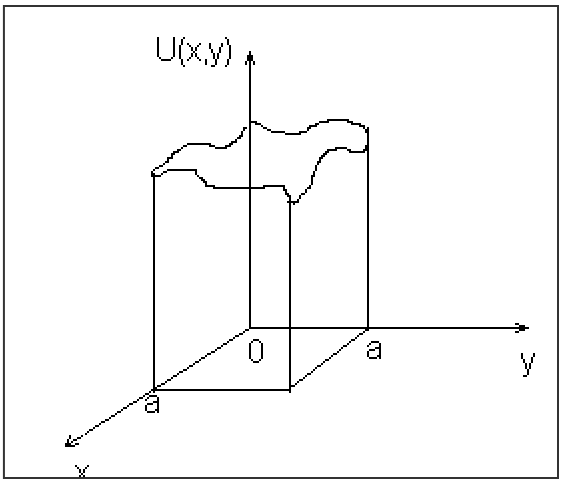


Рисунок 1

$$U(x,y) = \begin{cases} \infty, M \notin \Omega \\ 0, M \in \Omega \end{cases}$$

$$\Omega = \begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < a \end{cases}$$

$$M(x,y)$$

Составим уравнение Шредингера для области Ω:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 \qquad (1)$$

или в виде:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + k^2\psi = 0 \qquad (2)$$

где $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\psi(x,y) = A\sin(k_1x + \alpha_1)\sin(k_2y + \alpha_2) \qquad (3)$$

Используем естественные условия, накладываемые на пси-функцию. Вне области Ω потенциальная энергия частицы равняется бесконечности, поэтому частица вне области Ω находиться не может. Значит, плотность вероятности нахождения частицы, а, значит, и пси-функция вне области Ω равны нулю. Из условия непрерывности пси-функций:

$$\psi(0,y) = 0 \Rightarrow \sin\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$
$$\psi(x,0) = 0 \Rightarrow \sin\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$
$$\psi(a,y) = 0 \Rightarrow \sin k_1a = 0 \Rightarrow k_1a = \pm\pi n_1, n_1 = 1,2,3,...$$
$$\psi(x,a) = 0 \Rightarrow \sin k_2a = 0 \Rightarrow k_2a = \pm\pi n_2, n_2 = 1,2,3,...$$

Значит, пси-функция имеет вид:

$$\psi(x,y) = A\sin\left(\frac{\pi}{a}n_1x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}n_2y\right) \qquad (4)$$

Дважды дифференцируя выражение (4) по x и по y, получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= -k_1^2A\sin(k_1x)\sin(k_2y) = -k_1^2\psi \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} &= -k_2^2A\sin(k_1x)\sin(k_2y) = -k_2^2\psi\end{aligned} \qquad (5)$$

Подставим производные (5) в уравнение Шредингера (2):

$$-k_1^2\psi - k_2^2\psi + k^2\psi = 0 \Rightarrow k^2 = k_1^2 + k_2^2 \qquad (6)$$

Учитывая, что $k^2 = \dfrac{2m}{\hbar^2}E$, получим:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E = \frac{\pi^2}{a^2}\left(n_1^2+n_2^2\right) \Rightarrow E_{n_1,n_2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\left(n_1^2+n_2^2\right) \qquad (7)$$

Мы получили энергетический спектр частицы в двумерной квадратной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Как видно из выражения (7) энергия частицы зависит от двух квантовых чисел. В таблице 1 приведено несколько значений квантовых чисел n_1 и n_2, а также значение выражения $n_1^2+n_2^2$, которое определяет значение энергии в данном состоянии.

Таблица 1.

№ уровня	n_1	n_2	$n_1^2+n_2^2$
1	1	1	2
2	1	2	5
	2	1	
3	2	2	8

Как видно из таблицы во втором возбуждённом состоянии (третий энергетический уровень) $n_1 = 2, n_2 = 2$.

Определим постоянную A в выражении (4), используя условие нормировки:

$$\int_0^a\int_0^a|\psi|^2dxdy = 1 \Rightarrow A^2\int_0^a\int_0^a\sin^2\left(\frac{\pi}{a}n_1x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}n_2y\right)dxdy = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{4}{a^2}} = \frac{2}{a} \qquad (8)$$

Тогда пси-функции собственных состояний частицы имеют вид:

$$\psi_{n_1,n_2}(x,y) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}n_1x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}n_2y\right) \qquad (9)$$

Пси-функция второго возбуждённого состояния:

$$\psi_{2,2}(x,y) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2y\right) \tag{10}$$

Из постулатов квантовой механики среднее значение какой-нибудь физической величины Q в состоянии, описываемом пси-функцией ψ, определяется следующим образом:

$$< Q >= \int \psi^* \hat{Q} \psi \, dx \tag{11}$$

где $\hat{Q}$ - оператор физической величины Q, а ψ^* - функция, сопряжённая к пси-функции ψ. Операторы проекций импульса на координатные оси x,y,z имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{p}_x &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \\ \hat{p}_y &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y} \\ \hat{p}_z &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \tag{12}$$

Формулы, связывающие физические величины в классической физике, в квантовой физике справедливы для операторов этих физических величин. Поэтому мы можем записать:

$$\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\hbar^2\nabla^2 \tag{13}$$

В нашем двумерном случае:

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{14}$$

Найдём среднее значение квадрата импульса частицы в состоянии, описываемом пси-функцией (10):

$$< p^2 >= \int_0^a\int_0^a \psi_{2,2}^* \hat{p}^2 \psi_{2,2} dxdy = \frac{4}{a^2}\int_0^a\int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2y\right)\left(-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2y\right)\right)dxdy = \frac{32\pi^2\hbar^2}{a^4}\int_0^a\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2y\right)dxdy = \frac{8\pi^2\hbar^2}{a^2}$$

Ответ:

$$< p^2 >= \frac{8\pi^2\hbar^2}{a^2}.$$

Задача № 45.

Частица массой m_0 находится в одномерной потенциальной яме с непроницаемыми стенками во втором возбуждённом состоянии. Найдите среднее значение кинетической энергии частицы $< E_k >$, если ширина ямы равна a.

Решение:

Вид потенциальной ямы представлен на рисунке 1:

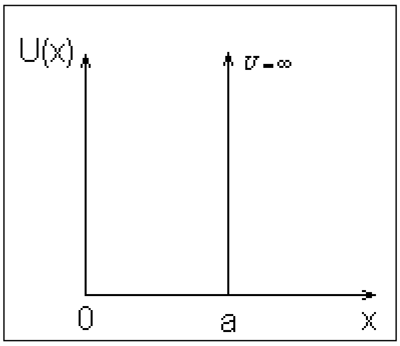


Рисунок 1

$$U(x) = \begin{cases} \infty, x < 0 \\ 0,, 0 < x < a \\ \infty, x > a \end{cases}$$

Составим уравнение Шредингера для области $0 < x < a$:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2} E\psi = 0 \qquad (1)$$

или в виде:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2\psi = 0 \qquad (2)$$

где $k^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2} E$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\psi(x) = A\sin(kx + \alpha) \qquad (3)$$

Используем естественные условия, накладываемые на пси-функцию. Так как в области $x < 0$ потенциальная энергия равняется бесконечности, то частица находиться в области $x < 0$ не может. Следовательно, плотность вероятности, а, значит, и пси-функция в области $x < 0$ равны нулю. Из условия непрерывности пси-функции для точки $x = 0$ получим:

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Аналогично, из условия непрерывности пси-функции для точки $x = a$ получим:

$$\psi(a) = 0 \Rightarrow \sin ka = 0 \Rightarrow ka = \pm\pi n, n = 1, 2, 3, ...$$

Тогда пси-функции собственных состояний частицы в данной потенциальной яме имеют вид:

$$\psi(x) = A\sin\left(\frac{\pi}{a}nx\right) \tag{4}$$

Учитывая, что $k^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2}E$, получим:

$$k^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2}E = \frac{\pi^2}{a^2}n^2 \Rightarrow E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_0a^2}n^2 \tag{5}$$

Мы получили энергетический спектр частицы в потенциальной яме. Определим постоянную A в выражении для пси-функции (4), используя условие нормировки:

$$\int_0^a |\psi|^2 dx = 1 \Rightarrow A^2\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}nx\right)dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}} \tag{6}$$

Тогда пси-функции собственных состояний имеют следующий вид:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}nx\right) \tag{7}$$

Во втором возбуждённом состоянии $n = 3$ (так как $n = 1$ - это основное состояние, $n = 2$ - первое возбуждённое), поэтому пси-функция второго возбуждённого состояния имеет вид:

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot 3x\right) \tag{8}$$

Из постулатов квантовой механики среднее значение какой-нибудь физической величины Q в состоянии, описываемом пси-функцией ψ, определяется следующим образом:

$$< Q >= \int \psi^* \hat{Q}\psi\, dx \tag{9}$$

где $\hat{Q}$ - оператор физической величины Q, а ψ^* - функция, сопряжённая к пси-функции ψ. Операторы проекций импульса на координатные оси x,y,z имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{p}_x &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \\ \hat{p}_y &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y} \\ \hat{p}_z &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \tag{10}$$

Формулы, связывающие физические величины в классической физике, в квантовой физике справедливы для операторов этих физических величин. Поэтому мы можем записать:

$$\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\hbar^2\nabla^2 \qquad (11)$$

Операторы квадрата импульса и кинетической энергии связаны выражением:

$$\hat{E}_k = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 \qquad (12)$$

В нашем одномерном случае оператор кинетической энергии имеет вид:

$$\hat{E}_k = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad (13)$$

Тогда среднее значение кинетической энергии во втором возбуждённом состоянии определяется выражением:

$$< E_k >= \int_0^a \psi_3^* \hat{E}_k \psi_3 dx = \frac{2}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot 3x\right)\left(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot 3x\right)\right)\right)dx = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2m_0a^2} \qquad (14)$$

Ответ:

$$< E_k >= \frac{9\pi^2\hbar^2}{2m_0a^2}.$$

Задача № 46.

Возможные значения проекции момента импульса на произвольную ось равны $m\hbar$, где $m = l, l-1, ..., -l+1, -l$. Считая, что эти проекции равновероятны и оси равноправны, покажите, что в состоянии с определённым значением l среднее значение квадрата момента импульса $< L^2 > = \hbar^2 l(l+1)$.

Решение:

Формулы, связывающие физические величины в классической физике, в квантовой физике справедливы для средних значений. Следовательно, среднее значение квадрата момента импульса равняется сумме средних значений квадратов проекций момента импульса на все координатные оси:

$$< L^2 > = < L_x^2 > + < L_y^2 > + < L_z^2 > \qquad (1)$$

Так как мы предполагаем все координатные оси равноправными, то $< L_x^2 > = < L_y^2 > = < L_z^2 >$, поэтому выражение (1) можно переписать:

$$< L^2 > = 3 < L_z^2 > \qquad (2)$$

Проекция момента импульса на произвольную ось z при определённом значении l может принимать $2l+1$ значений:

$$L_z = m\hbar \qquad (3)$$

где $m = l, l-1, ..., -l+1, -l$. Считая, что эти проекции равновероятные найдём среднее значение квадрата проекции момента импульса:

$$< L_z^2 > = \frac{\sum_m (m\hbar)^2}{2l+1} = \hbar^2 \frac{\sum_m m^2}{2l+1} = \frac{\hbar^2}{2l+1} \frac{l(l+1)(2l+1)}{3} = \frac{\hbar^2}{3} l(l+1) \qquad (4)$$

Подставив это выражение для $< L_z^2 >$ в выражение (2), получим, что среднее значение квадрата момента импульса равняется:

$$< L^2 > = \hbar^2 l(l+1) \qquad (5)$$

Ответ:

$< L^2 > = \hbar^2 l(l+1)$.

Задача № 47.

В некоторый момент времени координатная часть волновой функции частицы, находящейся в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками $(0 < x < a)$, имеет вид $\psi(x) = Ax(a-x)$. Найдите среднюю кинетическую энергию частицы в этом состоянии, если масса частицы равна m_0.

Решение:

Из постулатов квантовой механики следует, что среднее значение некоторой физической величины Q в квантовом состоянии, описываемом пси-функцией ψ, определяется следующим образом:

$$< Q >= \int \psi^* \hat{Q} \psi dx \qquad (1)$$

где $\hat{Q}$ - определитель физической величины Q, а ψ^* - функция, сопряжённая к пси-функции ψ. Операторы проекций импульса на координатные оси x,y,z имеют вид:

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$
$$\hat{p}_y = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y} \qquad (2)$$
$$\hat{p}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}$$

Формулы, связывающие физические величины в классической физике, в квантовой физике справедливы для операторов этих физических величин. Поэтому мы можем записать:

$$\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\hbar^2\nabla^2 \qquad (3)$$

Операторы квадрата импульса и кинетической энергии связаны выражением:

$$\hat{K} = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 \qquad (4)$$

где m_0 - масса частицы. В нашем одномерном случае оператор кинетической энергии имеет вид:

$$\hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad (5)$$

Определим постоянную A в выражении для пси-функции, описывающей состояние частицы, используя условие нормировки:

$$\int_0^a |\psi|^2 \, dx = 1 \Rightarrow A^2 \int_0^a x^2 (a-x)^2 dx = 1 \Rightarrow A^2 = \frac{30}{a^5} \qquad (6)$$

Тогда пси-функция состояния частицы имеет вид:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{30}{a^5}} x(a-x) \qquad (7)$$

Подставляя в выражение (1) оператор кинетической энергии и данную пси-функцию, найдём среднее значение кинетической энергии частицы:

$$< K >= \int_0^a \psi^* \hat{K} \psi \, dx = A^2 \int_0^a x(a-x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \big(x(a-x) \big) \right) dx = \frac{5\hbar^2}{m_0 a^2} \qquad (8)$$

Ответ:

$$< K >= \frac{5\hbar^2}{m_0 a^2} .$$

Задача № 48.

В некоторый момент времени частица находится в состоянии, описываемом волновой функцией, координатная часть которой имеет вид $\psi(x) = A\exp\left(-\frac{x^2}{a^2} + ikx\right)$, где A и a - некоторые постоянные, а k - заданный параметр, имеющий размерность обратной длины. Найдите для данного состояния средние значения координаты $<x>$ и проекции импульса частицы $<p_x>$.

Решение:

Из постулатов квантовой механики следует, что среднее значение некоторой физической величины Q в состоянии, описываемом пси-функцией ψ, определяется следующим образом:

$$<Q> = \int \psi^* \hat{Q} \psi \, dx \qquad (1)$$

где $\hat{Q}$ - оператор физической величины Q, а ψ^* - функция, сопряжённая к пси-функции ψ. Операторы физических величин, средние значения которых необходимо определить, имеют вид:

$$\begin{aligned} &\hat{x} = x \\ &\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \qquad (2)$$

Определим постоянную A в выражении для пси-функции, описывающей состояние частицы, используя условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \Rightarrow A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-2\frac{x^2}{a^2}\right) dx = 1 \Rightarrow A^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}} \qquad (3)$$

Тогда пси-функция, описывающая состояние частицы, имеет вид:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} + ikx\right) \qquad (4)$$

Сопряженная к пси-функции (4) функция имеет следующий вид:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - ikx\right) \qquad (5)$$

Подставляя в выражение (1) операторы физических величин, средние значения которых необходимо найти, и пси-функцию, описывающую состояние частицы, получим:

$$< x >= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{x} \psi dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - ikx\right) x \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} + ikx\right) dx = 0$$

$$\tag{6}$$

$$< p_x >= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{p}_x \psi dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - ikx\right)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\exp\left(-\frac{x^2}{a^2} + ikx\right)\right)\right) dx =$$

$$= A^2 \hbar \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - ikx\right)\left(\frac{2ix}{a^2} + k\right)\exp\left(-\frac{x^2}{a^2} + ikx\right) dx = \frac{2iA^2\hbar}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-2\frac{x^2}{a^2}\right) + kA^2\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-2\frac{x^2}{a^2}\right) = \hbar k$$

Ответ:

$< x >= 0$

$< p_x >= \hbar k$.

Задача № 49.

В некоторый момент времени координатная часть волновой функции частицы, находящейся в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками $(0 < x < a)$, имеет вид $\psi(x) = A\sin^2\frac{\pi x}{a}$. Найдите вероятность пребывания частицы в основном состоянии.

Решение:

Вид потенциальной ямы, в которой находится частица, представлен на рисунке 1:

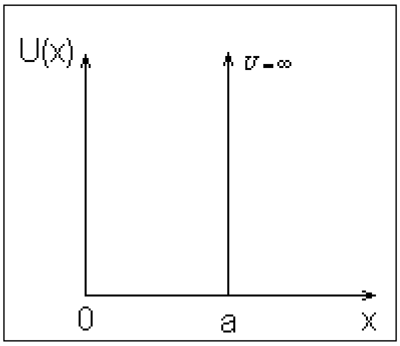


Рисунок 1

$$U(x) = \begin{cases} \infty, x < 0 \\ 0,, 0 < x < a \\ \infty, x > a \end{cases}$$

Найдём пси-функции собственных состояний частицы в потенциальной яме. Составим уравнение Шредингера для области $0 < x < a$:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 \qquad (1)$$

или в виде:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + k^2\psi = 0 \qquad (2)$$

где $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\psi(x) = A\sin(kx + \alpha) \qquad (3)$$

Воспользуемся естественными условиями, накладываемыми на пси-функцию. В области $x < 0$ потенциальная энергия равняется бесконечности, поэтому частица находится в области $x < 0$ не может. Следовательно, плотность вероятности нахождения частицы, а, значит, и пси-функция частицы в области $x < 0$ равны нулю. Из условия непрерывности пси-функций для точки $x = 0$, получим:

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Аналогично, применив условие непрерывности пси-функций, для точки $x = a$ получим:

$$\psi(a) = 0 \Rightarrow \sin ka = 0 \Rightarrow ka = \pm\pi n, n = 1, 2, 3, ...$$

Тогда пси-функции собственных состояний имеют вид:

$$\psi_n(x) = A\sin\left(\frac{\pi}{a}nx\right) \qquad (4)$$

Учитывая, что $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$, получим:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E = \frac{\pi^2}{a^2}n^2 \Rightarrow E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2 \qquad (5)$$

Мы получили энергетический спектр частицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Определим постоянную A в выражении для пси-функций собственных состояний частицы (4), используя условие нормировки:

$$\int_0^a |\psi|^2\, dx = 1 \Rightarrow A^2\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}nx\right)dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}} \qquad (6)$$

Тогда пси-функции собственных состояний имеют вид:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}nx\right) \qquad (7)$$

По условию частица в некоторый момент времени находится в состоянии, описываемом пси-функцией:

$$\psi(x) = A\sin^2\frac{\pi x}{a} \qquad (8)$$

Используя условие нормировки, определим постоянную A в выражении (8):

$$\int_0^a |\psi|^2\, dx = 1 \Rightarrow A^2\int_0^a \sin^4\left(\frac{\pi}{a}x\right) = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{8}{3a}} \qquad (9)$$

Тогда пси-функция (8) имеет вид:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{8}{3a}}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \qquad (10)$$

Разложим пси-функцию (10) в ряд по пси-функциям собственных состояний (7):

$$\psi(x) = C_1\psi_1 + C_2\psi_2 + C_3\psi_3 + \ldots \qquad (11)$$

где $C_1, C_2, \ldots$ - коэффициенты, которые определяются следующим образом:

$$C_n = \int_0^a \psi_n^*\psi\, dx \qquad (12)$$

где ψ_n^* - функция, сопряжённая к собственной пси-функции ψ_n, ψ - пси-функция, описывающая состояние частицы. Найдём несколько первых коэффициентов разложения:

$$C_1 = \int_0^a \psi_1^* \psi \, dx = \frac{4}{\sqrt{3}a} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx = \frac{16\sqrt{3}}{9\pi} \quad (13)$$

$$C_2 = \int_0^a \psi_2^* \psi \, dx = \frac{4}{\sqrt{3}a} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a} \cdot 2x\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx = 0 \quad (14)$$

$$C_3 = \int_0^a \psi_3^* \psi \, dx = \frac{4}{\sqrt{3}a} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a} \cdot 3x\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx = -\frac{16\sqrt{3}}{45\pi} \quad (15)$$

$$C_4 = \int_0^a \psi_4^* \psi \, dx = \frac{4}{\sqrt{3}a} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a} \cdot 4x\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx = 0 \quad (16)$$

$$C_5 = \int_0^a \psi_5^* \psi \, dx = \frac{4}{\sqrt{3}a} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a} \cdot 5x\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx = -\frac{16\sqrt{3}}{315\pi} \quad (17)$$

Значит, разложение пси-функции (10) в ряд по собственным пси-функциям (7) имеет вид:

$$\psi = \frac{16\sqrt{3}}{9\pi}\psi_1 - \frac{16\sqrt{3}}{45\pi}\psi_3 - \frac{16\sqrt{3}}{315\pi}\psi_5 + \dots \quad (18)$$

Если в собственных состояниях некоторая физическая величина Q имеет определённые собственные значения, то в состоянии описываемом пси-функцией ψ, которая не является пси-функцией собственного состояния, физическая величина Q определённого значения иметь не будет. Если пси-функцию ψ разложить в ряд по пси-функциям собственных состояний, то вероятность того, что значение физической величины Q будет равно Q_1 - собственному значению в состоянии, описываемом пси-функцией ψ_1, определяет квадрат модуля первого коэффициента в разложении $|C_1|^2$. Аналогично, вероятность того, что значение физической величины Q примет значение Q_2, определяет $|C_2|^2$, и так далее. Следовательно, вероятность нахождения частицы в основном состоянии в нашем случае определяет квадрат модуля первого коэффициента в разложении (18), значит:

$$P_1 = |C_1|^2 = \left|\frac{16\sqrt{3}}{9\pi}\right|^2 = 0.96 = 96\% \quad (19)$$

Ответ:

$P_1 = 96\%$.

Задача № 50.

Найдите средние значения кинетической и потенциальной энергий квантового осциллятора с частотой ω_0 в основном состоянии, описываемом волновой функцией $\psi(x) = A\exp\left(-\frac{m_0\omega_0 x^2}{2\hbar}\right)$, где A - некоторая постоянная, а m_0 - масса осциллятора.

Решение:

Из постулатов квантовой механики следует, что среднее значение некоторой физической величины Q в состоянии, описываемом пси-функцией ψ, определяется следующим образом:

$$<Q> = \int \psi^* \hat{Q} \psi \, dx \qquad (1)$$

где $\hat{Q}$ - оператор физической величины Q, а ψ^* - функция, сопряжённая к пси-функции ψ. А среднее значение некоторой функции координат $f(x)$ определяется так:

$$<f> = \int \psi^* f(x) \psi \, dx \qquad (2)$$

Найдём оператор кинетической энергии. Операторы проекций импульса на координатные оси x,y,z имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{p}_x &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \\ \hat{p}_y &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y} \\ \hat{p}_z &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \qquad (3)$$

Формулы, связывающие физические величины в классической физике, в квантовой физике справедливы для операторов этих физических величин. Поэтому мы можем записать:

$$\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\hbar^2\nabla^2 \qquad (4)$$

Операторы квадрата импульса и кинетической энергии связаны выражением:

$$\hat{K} = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 \qquad (5)$$

где m_0 - масса частицы. В нашем одномерном случае оператор кинетической энергии имеет вид:

$$\hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad (6)$$

Пси-функция, описывающая состояние квантового осциллятора, имеет вид:

$$\psi(x) = A\exp\left(-\frac{m_0\omega_0 x^2}{2\hbar}\right) \qquad (7)$$

Из условия нормировки определим постоянную A:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2 dx = 1 \Rightarrow A^2\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{m_0\omega_0 x^2}{\hbar}\right)dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt[4]{\frac{m_0\omega_0}{\pi\hbar}} \qquad (8)$$

Тогда пси-функция (7) примет вид:

$$\psi(x) = \sqrt[4]{\frac{m_0\omega_0}{\pi\hbar}}\exp\left(-\frac{m_0\omega_0 x^2}{2\hbar}\right) \qquad (9)$$

Найдём среднее значение кинетической энергии квантового осциллятора, подставив в выражение (1) оператор кинетической энергии (6) и пси-функцию (9):

$$<K> = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\hat{K}\psi\, dx = A^2\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{m_0\omega_0 x^2}{2\hbar}\right)\left(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\exp\left(-\frac{m_0\omega_0 x^2}{2\hbar}\right)\right)\right)dx = \frac{\hbar\omega_0}{4} \qquad (10)$$

Потенциальная энергия квантового осциллятора имеет вид:

$$U(x) = \frac{m_0\omega_0^2 x^2}{2} \qquad (11)$$

Подставив в выражение (2) вид потенциальной энергии м пси-функцию (9), найдём среднее значение потенциальной энергии:

$$<U> = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^* U(x)\psi\, dx = A^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m_0\omega_0^2 x^2}{2}\exp\left(-\frac{m_0\omega_0 x^2}{\hbar}\right)dx = \frac{\hbar\omega_0}{4} \qquad (12)$$

Ответ:

$$<K> = \frac{\hbar\omega_0}{4},$$

$$<U> = \frac{\hbar\omega_0}{4}.$$

Задача № 51.

Докажите, что квадрат момента импульса частицы L^2 может быть одновременно измерим с кинетической энергией частицы E_k.

<u>Указание</u>: Рассмотрите коммутатор операторов $\hat{L}^2$ и $\hat{E}_k$.

Решение:

Коммутатором операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ двух физических величин называется выражение:

$$[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \tag{1}$$

Если коммутатор двух операторов физических величин равен нулю, то есть операторы коммутируют между собой ($\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$), то эти две физические величины могут быть измерены одновременно точно, если коммутатор двух операторов не равен нулю, то эти две физические величины одновременно неизмеримы. Таким образом, нам необходимо выяснить, равен ли нулю коммутатор операторов квадрата момента импульса и кинетической энергии:

$$[\hat{L}^2,\hat{E}_k] = \hat{L}^2\hat{E}_k - \hat{E}_k\hat{L}^2 \tag{2}$$

Оператор квадрата момента импульса имеет вид:

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2\Delta_{\theta,\varphi} \tag{3}$$

где $\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ - угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат. Оператор кинетической энергии имеет вид:

$$\hat{E}_k = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\right) \tag{4}$$

где $\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$, а $\Delta_{\theta,\varphi}$ - угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат. Таким образом, коммутатор определителей кинетической энергии и квадрата момента импульса равняется:

$$[\hat{L}^2,\hat{E}_k] = \frac{\hbar^4}{2m}[\Delta_{\theta,\varphi},\Delta_r] + \frac{\hbar^4}{2m}\frac{1}{r^2}[\Delta_{\theta,\varphi},\Delta_{\theta,\varphi}] \tag{5}$$

Выясним, чему равны коммутаторы операторов $[\Delta_{\theta,\varphi},\Delta_r]$ и $[\Delta_{\theta,\varphi},\Delta_{\theta,\varphi}]$. Операторы $\Delta_{\theta,\varphi}$ и Δ_r

$\Delta_{\theta,\varphi}$ и Δ_r коммутируют,

поэтому $[\Delta_{\theta,\varphi},\Delta_r] = 0$. Коммутатор одного и того же оператора равен нулю

$[\Delta_{\theta,\varphi}, \Delta_{\theta,\varphi}] = \Delta_{\theta,\varphi}\Delta_{\theta,\varphi} - \Delta_{\theta,\varphi}\Delta_{\theta,\varphi} = 0$. Поэтому из выражения (5) видно, что коммутатор операторов кинетической энергии и квадрата момента импульса равен нулю $[\hat{L}^2, \hat{E}_k] = 0$. Значит, кинетическая энергия и квадрат момента импульса частицы могут быть измерены одновременно.

Ответ: $[\hat{L}^2, \hat{E}_k] = 0 \Rightarrow$ кинетическая энергия и квадрат момента импульса частицы могут быть измерены одновременно.