Вопрос 1. *Определение случайного процесса. Понятие статистического ансамбля. Вероятностное описание случайного процесса с помощью многомерных плотностей вероятностей. Основные свойства многомерных плотностей вероятностей случайного процесса.*

Если для каждого значения момента времени $\mathbf{t}$ зависимая переменная $\mathbf{x}$ представляет собой случайную величину, то процесс $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ называется *случайным процессом*. Случайная величина задаётся набором возможных значений и вероятностями их появления. Если случайная величина непрерывна, то вводится плотность вероятностей.

Множество реализаций (детерминированных функций) $\mathbf{x_i}(\mathbf{t})$ случайного процесса $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ будем называть *статистическим ансамблем* данного случайного процесса.

Рассмотрим некоторый случайный процесс $\mathbf{x}(\mathbf{t})$. Введём некоторую функцию $\mathbf{w}(\mathbf{x},\mathbf{t})$ — *одномерную плотность вероятностей* случайной величины $\mathbf{x}$ - так, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x_0} \le \mathbf{x}(\mathbf{t}) < \mathbf{x_0} + \mathbf{dx}) = \mathbf{w}(\mathbf{x},\mathbf{t})\mathbf{dx},$$

где $\mathbf{p}(\mathbf{x_0} \le \mathbf{x}(\mathbf{t}) < \mathbf{x_0} + \mathbf{dx})$ — вероятность того, что случайная процесс $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ в некоторый фиксированный момент времени примет какое-либо значение $\mathbf{x}$ из интервала от $\mathbf{x_0}$ до $\mathbf{x_0} + \mathbf{dx_0}$. При этом $\mathbf{dx_0}$ — дифференциально-малая величина.

Вероятность $\mathbf{p}$ того, что случайный процесс $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ в момент времени $\mathbf{t_0}$ примет значение $\mathbf{x}$ из интервала от $\mathbf{x_0}$ до $\mathbf{x_0} + \mathbf{dx_0}$ определим следующим образом:

$$\mathbf{p} = \lim_{\mathbf{m}\to\infty} \frac{\mathbf{m_{dx}}}{\mathbf{m}},$$

где $\mathbf{m}$ — общее число испытаний, а $\mathbf{m_{dx}}$ — число испытаний, когда случайный процесс $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ в момент времени $\mathbf{t_0}$ принимал значения $\mathbf{x}$ из интервала от $\mathbf{x_0}$ до $\mathbf{x_0} + \mathbf{dx_0}$.

Одномерная плотность вероятностей обладает следующими *свойствами*:

- Свойством положительной определённости

$$\mathbf{w}(\mathbf{x},\mathbf{t}) \ge \mathbf{0}$$

- Свойством нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}(\mathbf{x},\mathbf{t_0})\mathbf{dx} = \mathbf{1}$$

Средним значением $\mathbf{m_x}$ случайного процесса $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ называется следующая величина

$$\mathbf{m_x}(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x},\mathbf{t})\mathbf{dx}.$$

Дисперсией или среднеквадратичным отклонением $\sigma_{\mathbf{x}}^2$ случайного процесса $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ называется величина

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}^2(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x},\mathbf{t})\mathbf{dx} = \mathbf{m_{x^2}} - \mathbf{m_x^2}.$$

Одномерная плотность вероятностей не даёт нам представления о скорости случайного процесса. Она позволяет оценить лишь вероятностные соотношения процесса в выбранный нами момент времени.

Аналогично одномерной можно ввести $\mathbf{n}$ -мерную плотность вероятностей. То есть $\mathbf{w}(\mathbf{x_1 t_1}; \mathbf{x_2 t_2}; \cdots; \mathbf{x_n}, \mathbf{t_n})\mathbf{dx_1 dx_2} \cdots \mathbf{dx_n}$ — есть вероятность того, что в момент времени $\mathbf{t_1}$ случайный процесс $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ примет значение $\mathbf{x}$ из интервала от $\mathbf{x_1}$ до $\mathbf{x_1} + \mathbf{dx_1}$, в момент времени $\mathbf{t_2}$ — из интервала от $\mathbf{x_2}$ до $\mathbf{x_2} + \mathbf{dx_2}$, …, в момент времени $\mathbf{t_n}$ — из интервала от $\mathbf{x_n}$ до $\mathbf{x_n} + \mathbf{dx_n}$. $\mathbf{n}$ -мерная плотность вероятностей обладает следующими *свойствами*:

- Свойством положительной определённости

$$\mathbf{w}(\mathbf{x_1}, \mathbf{t_1}; \mathbf{x_2}, \mathbf{t_2}; \cdots; \mathbf{x_n}, \mathbf{t_n}) \ge \mathbf{0}$$

- Свойством нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}(\mathbf{x_1}, \mathbf{t_1}; \mathbf{x_2}, \mathbf{t_2}; \cdots; \mathbf{x_n}, \mathbf{t_n})\mathbf{dx_1} \cdots \mathbf{dx_n} = \mathbf{1}$$

- Свойством симметрии

$$\mathbf{w}(\mathbf{x_1}, \mathbf{t_1}; \mathbf{x_2}, \mathbf{t_2}; \cdots; \mathbf{x_n}, \mathbf{t_n}) = \mathbf{w}(\mathbf{x_2}, \mathbf{t_2}; \mathbf{x_1}, \mathbf{t_1}; \cdots; \mathbf{x_n}, \mathbf{t_n}) = \cdots = \mathbf{w}(\mathbf{x_n}, \mathbf{t_n}; \mathbf{x_2}, \mathbf{t_2}; \cdots; \mathbf{x_1}, \mathbf{t_1})$$

- Свойством согласованности

$$w(x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_m,t_m)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}w(x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_n,t_n)dx_{m+1}\cdots dx_n\,.$$

Вопрос 2. *Двумерная условная плотность вероятностей случайного процесса и её основные свойства. Зависимость условной плотности вероятностей от разности времён для процесса с конечным вероятностным последействием. Многомерные условные плотности вероятностей, их свойства и связь с многомерными безусловными плотностями вероятностей.*

Рассмотрим значения случайного процесса $x(t)$ в два различных момента времени t_1 и t_2. Для этого введём двумерную плотность вероятностей $w(x_1,t_1;x_2,t_2)$. Плотность вероятностей $w(x_2,t_2)$ случайного процесса $x(t)$ при условии, что в момент времени t_1 случайный процесс принял значение x_1, называется *условной плотностью вероятностей* случайного процесса $x(t)$ и обозначается $w(x_2,t_2/x_1,t_1)$.

$$w(x_2,t_2/x_1,t_1)=\frac{w(x_2,t_2;x_1,t_1)}{w(x_1,t_1)}.$$

Двумерная условная плотность вероятностей обладает *свойствами* одномерной плотности вероятностей по отношению к своему основному аргументу:

- Свойством положительной определённости

$$w(x_2,t_2/x_1,t_1)\ge 0$$

- Свойством нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty}w(x_2,t_2/x_1,t_1)dx_2=1.$$

Если ввести параметр $\tau=t_2-t_1$, то условная двумерная плотность вероятности в пределе при $\tau\to 0$ будет стремиться к δ-функции:

$$w(x_2,t_2/x_1,t_1)\xrightarrow{\tau\to 0}\delta(x_2-x_1).$$

Если же устремить параметр τ к бесконечности, то условная двумерная плотность вероятностей будет стремиться к одномерной плотности вероятностей $w(x_2,t_2)$:

$$w(x_2,t_2/x_1,t_1)\xrightarrow{\tau\to\infty}w(x_2,t_2).$$

Аналогично можно ввести и условную многомерную плотность вероятностей:

$$w(x_n,t_n/x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_{n-1},t_{n-1})=\frac{w(x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_n,t_n)}{w(x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_{n-1},t_{n-1})}.$$

Таким образом, для того, чтобы вычислить n-мерную плотность вероятностей необходимо задать 1 одномерную и $n-1$ условных плотностей вероятностей:

$$w(x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_n,t_n)=w(x_1,t_1)\cdot w(x_2,t_2/x_1,t_1)\cdot\cdots\cdot w(x_n,t_n/x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_{n-1},t_{n-1}).$$

Вопрос 3. *Классификация случайных процессов по их вероятностному последействию. Совершенно случайные процессы и Марковские процессы, их описание. Уравнение Смолуховского для условной плотности вероятностей Марковского процесса.*

Совершенно случайные процессы – это случайные процессы, значения которых в любой момент времени являются статистически независимыми.

Две величины называются *статистически независимыми*, если справедливо соотношение

$$w(x_1,t_1;x_2,t_2)=w(x_1,t_1)\cdot w(x_2,t_2).$$

Для совершенно случайного процесса имеет место соотношение

$$w(x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_n,t_n)=w(x_1,t_1)\cdot w(x_2,t_2)\cdot\cdots\cdot w(x_n,t_n)=\prod_{i=1}^{n}w(x_i,t_i).$$

Реализация совершенно случайного процесса разрывна в каждой точке

Марковский случайный процесс – это случай процесс для которого плотность вероятностей в i-ый момент времени определяется только значением процесса, принятым в $i-1$-ый момент времени. То есть, для любых n упорядоченных моментов времени

$$t_1<t_2<\cdots<t_n$$

справедливо следующее выражение:

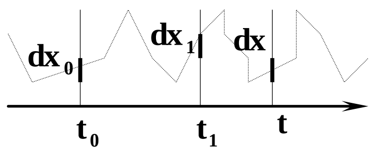
$$w(x_n,t_n/x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_{n-1},t_{n-1})=w(x_n,t_n/x_{n-1},t_{n-1}).$$

Марковский процесс – это процесс без последействия, то есть его значение в следующий момент времени не зависит от значений в предыдущие моменты, а определяется только настоящего значения. Для Марковских процессов справедлива формула

$$w(x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_n,t_n)=w(x_1,t_1)\cdot\prod_{i=2}^{n} w(x_i,t_i/x_{i-1},t_{i-1}).$$

Таким образом для задания Марковского процесса достаточно задать двумерную плотность вероятностей этого процесса.

Формула Смолуховского:



$$w(x,t/x_0,t_0)=\int w(x_1,t_1/x_0,t_0)\cdot w(x,t/x_1,t_1)dx_1$$

Вопрос 4. *Детерминированные и квазидетерминированные процессы, их описание в рамках теории случайных процессов, выражения для* $\mathbf{n}$*-мерных плотностей вероятностей.*

Рассмотрим случайный процесс $x(t)$. Пусть справедливо равенство

$$x(t)=s(t),$$

где $s(t)$ - детерминированный процесс. Пусть

$$s(t)=A_0\cos(\omega_0 t+\varphi_0).$$

Опишем этот процесс на языке случайных процессов. Тогда

$$w(x_1,t_1)=\delta(x_1-s(t_1));\ w(x_2,t_2)=\delta(x_2-s(t_2));\ \cdots;\ w(x_n,t_n)=\delta(x_n-s(t_n))$$

$$w(x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_n,t_n)=\prod_{i=1}^{n}\delta(x_i-s(t_i)).$$

Квазидетерминированный случайный процесс – это процесс, реализации которого описываются функциями времени заданного вида, содержащими один или несколько случайных параметров

$$x(t)=s(t,\lambda),$$

где λ — случайный параметр. Для квазидетерминированных случайных процессов справедливы следующие соотношения:

$$w(x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_n,t_n/\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\delta(x_i-s(t_i,\lambda))\ —$$

при условии фиксированного параметра λ.

Из свойств условных плотностей вероятностей следует, что последнее соотношение можно переписать в виде

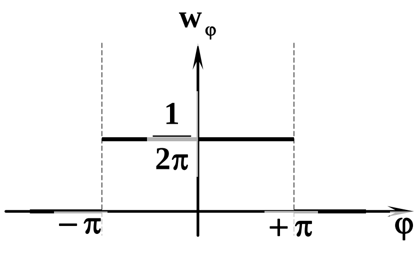
$$w(x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_n,t_n,\lambda)=w_\lambda(\lambda)w(x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_n,t_n/\lambda).$$

Таким образом, мы получаем, что для квазидетерминированного процесса плотность вероятности записывается следующим образом:

$$w(x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_n,t_n)=\int_{-\infty}^{+\infty} w_\lambda(\lambda)\cdot\prod_{i=1}^{n}\delta(x_i-s(t_i,\lambda))\cdot d\lambda .$$

Вопрос 5. *Квазигармонический процесс* $x(t)=A_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$ *со случайной начальной фазой, равномерно распределённой в интервале* $[-\pi;\pi]$. *Его одномерная плотность вероятностей.*

Рассмотри квазигармонический процесс $x(t)=A_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$. Пусть фаза φ является случайной величиной равномерно распределённой в интервале $[-\pi;\pi]$. Вычислим его одномерную плотность вероятностей. Для этого вспомним определение:



$$w(x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_n,t_n)=\int_{-\infty}^{+\infty} w_\lambda(\lambda)\cdot\prod_{i=1}^{n}\delta(x_i-s(t_i,\lambda))\cdot d\lambda .$$

В нашем случае в качестве параметра λ выступает случайная фаза φ равномерно распределённая в интервале $[-\pi;\pi]$. Из свойства нормировки плотности вероятностей w_φ получаем её явный вид:

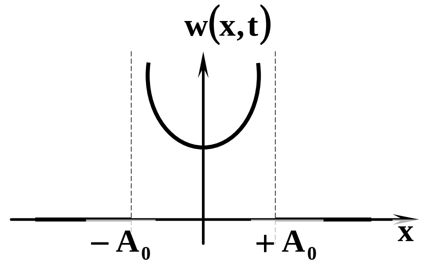
$$w_\varphi(\varphi)=\begin{cases}0, & \varphi<-\pi\\ \frac{1}{2\pi}, & \varphi\in[-\pi;\pi].\\ 0, & \varphi>\pi\end{cases}$$

Подставляя полученный результат в общую формулу, получим

$$w(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\delta(x-s(t,\varphi))d\varphi=-\frac{1}{2\pi}\left[\left.\frac{1}{A_0\,sin(\omega_0 t+\varphi)}\right|_{\varphi=arccos\left(\frac{x}{A_0}\right)-\omega_0 t}+\left.\frac{1}{A_0\,sin(\omega_0 t+\varphi)}\right|_{\varphi=\pi-arccos\left(\frac{x}{A_0}\right)-\omega_0 t}\right].$$

В итоге будем иметь, что

$$w(x,t)=\begin{cases}0, & x<-A_0\\ \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{A_0^2-x^2}}, & x\in[-A_0;A_0].\\ 0, & x>A_0\end{cases}$$



В итоге мы получили плотность вероятностей квазидетерминированного процесса $x(t)$. Заметим, что функция $w(x,t)$ не зависит от частоты ω.

Вопрос 6. *Многомерная характеристическая функция случайного процесса и её основные свойства.*

n-*мерной характеристической функцией* $\theta(u_1,t_1;u_2,t_2;\cdots;u_n,t_n)$ случайного процесса $x(t)$ называется n-кратное Фурье преобразование от n-мерной плотности вероятностей этого процесса по истинным аргументам x_1, x_2, …, x_n:

$$\theta(u_1,t_1;u_2,t_2;\cdots;u_n,t_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}w(x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_n,t_n)\cdot e^{j(u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_nx_n)}dx_1\cdots dx_n=\left\langle e^{j(u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_nx_n)}\right\rangle.$$

Соответственно, n-мерная плотность вероятностей этого процесса есть обратное n-кратное Фурье преобразование от его n-мерной характеристической функции:

$$w(x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_n,t_n)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(u_1,t_1;u_2,t_2;\cdots;u_n,t_n)\cdot e^{-j(u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_nx_n)}du_1\cdots du_n.$$

Основные свойства характеристической функции:

- Свойство нормировки
$$\theta(0,t_1;0,t_2;\cdots;0,t_n)=1$$
- Свойство ограниченности по модулю
$$|\theta(u_1,t_1;u_2,t_2;\cdots;u_n,t_n)|\le\theta(0,t_1;0,t_2;\cdots;0,t_n)=1$$
- Свойство симметрии
$$\theta(u_1,t_1;u_2,t_2;\cdots;u_n,t_n)=\theta(u_2,t_2;u_1,t_1;\cdots;u_n,t_n)=\cdots\theta(u_n,t_{n\text{т}};u_2,t_2;\cdots;u_1,t_1)$$
- Свойство комплексной сопряженности
$$\theta(u_1,t_1;u_2,t_2;\cdots;u_n,t_n)=\theta^*(-u_1,t_1;-u_2,t_2;\cdots;-u_n,t_n)$$
- Свойство согласованности
$$\theta(u_1,t_1;u_2,t_2;\cdots;u_m,t_m)=\theta(u_1,t_1;u_2,t_2;\cdots;u_m,t_m;0,t_{m+1};0,t_{m+2};\cdots;0,t_n).$$

Для совершенно случайного процесса

$$\theta(u_1,t_1;u_2,t_2;\cdots;u_n,t_n)=\prod_{i=1}^{n}\theta(u_i,t_i).$$

Вопрос 7. *Моментные функции случайного процесса. Среднее значение и корреляционная функция. Связь моментных функций с характеристической функцией.*

Введём так называемые *моментные функции* $\alpha_s(t_1,t_2,\cdots,t_s)$ следующим образом:

$$\alpha_s(t_1,t_2,\cdots,t_s)=\int\cdots\int x_1x_2\cdots x_s w(x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_s,t_s)dx_1\cdots dx_s=\langle x(t_1)\cdot x(t_2)\cdots x(t_s)\rangle,$$

где s — порядок моментной функции.

В частности, моментная функция первого порядка $\alpha_1(t)$ процесса $x(t)$ является статистическим средним этого процесса:

$$\alpha_1(t)=m_x(t)=\langle x(t)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot w(x,t)\cdot dx,$$

а моментная функция второго порядка $\alpha_2(t_1,t_2)$ есть *корреляционная функция* процесса $x(t)$:

$$\alpha_2(t_1,t_2)=K_x[t_1,t_2]=\langle x(t_1)\cdot x(t_2)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2w(x_1,t_1;x_2,t_2)dx_1dx_2.$$

Можно показать, что моментная функция $\mathbf{s}$-ого порядка связана с характеристической функцией следующим образом:

$$\left.\frac{\partial^s \theta_X(u_1,t_1;u_2,t_2;\cdots;u_n,t_n)}{\partial u_{k_1}\partial u_{k_2}\cdots\partial u_{k_S}}\right|_{u_{k_1}=u_{k_2}=\cdots=u_{k_S}=0} = j^S\left\langle x(t_{k_1})\cdot x(t_{k_2})\cdot\dots\cdot x(t_{k_S})\right\rangle = j^S\cdot\alpha_S(t_{k_1},t_{k_2},\cdots,t_{k_S}).$$

Тогда характеристическую функцию можно представить в виде следующего ряда:

$$\theta_X(u_1,t_1;u_2,t_2;\cdots;u_n,t_n)=1+j\cdot\sum_{k=1}^{n}[\alpha_1(t_k)\cdot u_k]+\frac{j^2}{2!}\sum_{k_1,k_2=1}^{n}[\alpha_2(t_{k_1},t_{k_2})u_{k_1}u_{k_2}]+\cdots+\frac{j^S}{s!}\sum_{k_1,k_2\cdots k_S=1}^{n}[\alpha_S(t_{k_1},t_{k_2},\cdots,t_{k_S})u_{k_1}u_{k_2}\cdots u_{k_S}]+\cdots$$

Вопрос 8. *Кумулянтные функции случайного процесса, их связь с характеристической функцией. Связь между кумулянтными и моментными функциями (на примере функций 1-ого и 2-ого порядков).*

Наряду с моментными функциями вводятся *кумулянтные функции* $\chi_S(t_1,t_2,\cdots,t_S)$ как коэффициенты разложения в ряд Тейлора логарифма от характеристической функции:

$$\ln\theta_x(u_1,t_1;u_2,t_2;\cdots;u_n,t_n)=\ln\theta_x(u_1,t_1;u_2,t_2;\cdots;u_n,t_n)\Big|_{u_1=u_1=\cdots u_1=0}+\sum_{S=1}^{\infty}\left[\frac{j^S}{s!}\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_S}\chi_S(t_{k_1},t_{k_2},\cdots,t_{k_S})u_{k_1}u_{k_2}\cdots u_{k_S}\right]$$

где

$$\chi_S(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\frac{1}{j^S}\left.\frac{\partial^S \ln\theta_x(u_1,t_1;u_2,t_2;\cdots;u_n,t_n)}{\partial u_{k_1}\partial u_{k_2}\cdots\partial u_{k_S}}\right|_{u_{k_1}=u_{k_2}=\cdots u_{k_S}=0}.$$

В частности, можно показать, что

$$\chi_1(t_k)=\alpha_1(t_k)=m_x(t_k)$$

а также, что

$$\chi_2(t_{k_1},t_{k_2})=\alpha_2(t_{k_1},t_{k_2})-\alpha_1(t_{k_1})\alpha_1(t_{k_2})$$

Вопрос 9. *Ковариационная функция случайного процесса. Дисперсия. Понятия некоррелированности и статистической независимости двух значений случайного процесса. Коэффициент корреляции.*

В силу важности кумулянтной функции 2-ого порядка для неё придумали отдельное название – *ковариационная функция*:

$$B_x[t_1,t_2]=\chi_2(t_1,t_2)=\alpha_2(t_1,t_2)-\alpha_1(t_1)\alpha_2(t_2).$$

Таким образом, мы видим, что ковариационная функция является частным случаем корреляционной функцией случайного процесса с нулевым средним:

$$B_x[t_1,t_2]=K_x[t_1,t_2]-m_x(t_1)\cdot m_x(t_2).$$

В частности, ковариационная функция случайного процесса $B_x[t_1,t_2]$ в одинаковые моменты времени называется *дисперсией* $\sigma_x^2(t_1)$:

$$B_x[t_1,t_1]=\left\langle x^2(t_1)\right\rangle-\left\langle x(t_1)\right\rangle^2=\sigma_x^2(t_1).$$

Если в какие-то моменты времени t_1 и t_2 ковариационная функция $B_x[t_1,t_2]$ случайного процесса $x(t)$ обращается в нуль, то значения этого процесса $x(t_1)$ и $x(t_2)$ в соответствующие моменты времени называются *некоррелированными*.

Если в какие-то моменты времени t_1 и t_2 двумерная плотность вероятностей $w_x(x_1,t_1;x_2t_2)$ случайного процесса $x(t)$ распадается на произведение одномерных плотностей вероятностей, т.е.

$$w_x(x_1,t_1;x_2t_2)=w_{x_1}(x_1,t_1)\cdot w_{x_2}(x_2t_2),$$

то значения этого процесса $x(t_1)$ и $x(t_2)$ в соответствующие моменты времени называются *статистически независимыми*.

Таким образом, получаем, что если два значения $x(t_1)$ и $x(t_2)$ случайного процесса $x(t)$ статистически независимы, то они некоррелированы. Обратное утверждение в общем случае не верно.

Введём *коэффициент корреляции* $R_x[t_1,t_2]$ следующим образом:

$$R_x[t_1,t_2]=\frac{B_x[t_1,t_2]}{\sigma_x(t_1)\cdot\sigma_x(t_2)}.$$

Он показывает степень коррелированности (т.е. степень *линейной* зависимости) двух значений случайного процесса.

Вопрос 10. *Гауссовские случайные процессы, их* $\mathbf{n}$*-мерные характеристическая функция и плотность вероятностей. Информация, необходимая для полного описания гауссовского случайного процесса.*

Гауссовским случайным процессом называется случайный процесс, у которого все высшие моментные функции, начиная с 3-его порядка равны нулю. Гауссовские случайные процессы описываются $\mathbf{n}$-мерной характеристической функцией вида

$$\theta_x(u_1,t_1;u_2,t_2;\cdots;u_n,t_n)=exp\left\{j\cdot\sum_{k=1}^{n}m_x(t_k)\cdot u_k+\frac{j^2}{2!}\sum_{k,\ell=1}^{n}B_x[t_k,t_\ell]\cdot u_k\cdot u_\ell\right\},$$

а соответствующая ей $\mathbf{n}$-мерная функция плотности вероятностей выглядит так

$$w(x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_n,t_n)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\left[j\cdot\vec{m}_x\vec{u}-\frac{1}{2}\cdot\vec{u}^T\hat{B}_x\vec{u}\right]}e^{-j\cdot\vec{x}\cdot\vec{u}}d\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\|\hat{B}_x\|}}exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{m}_x)^T\hat{B}_x^{-1}(\vec{x}-\vec{m}_x)\right\}.$$

Здесь были введены следующие обозначения:

$$\vec{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix};\vec{m}_x=\begin{bmatrix}m_x(t_1)\\m_x(t_2)\\\vdots\\m_x(t_n)\end{bmatrix};\hat{B}_x=\begin{bmatrix}B_x[t_1,t_1]&B_x[t_1,t_2]&\cdots&B_x[t_1,t_n]\\B_x[t_2,t_1]&B_x[t_2,t_2]&\cdots&B_x[t_2,t_n]\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\B_x[t_n,t_1]&B_x[t_n,t_2]&\cdots&B_x[t_n,t_n]\end{bmatrix};\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}x(t_1)\\x(t_2)\\\vdots\\x(t_n)\end{bmatrix};\langle x(t)\rangle=\begin{bmatrix}\langle x(t_1)\rangle\\\langle x(t_2)\rangle\\\vdots\\\langle x(t_n)\rangle\end{bmatrix},$$

значок ^{T} означает транспонирование, а $\hat{B}_x^{-1}$ — матрица, обратная к $\hat{B}_x$.

Основные свойства гауссовских случайных процессов исчерпывающим образом определяются заданием среднего значения среднего значения случайной величины и корреляционной функции.

Вопрос 11. *Ковариационная матрица* $\mathbf{n}$ *отсчётов случайного процесса и её основные свойства.*

Гауссовские процессы, как мы теперь знаем, описываются следующей характеристической функцией

$$\theta_x(u_1,t_1;u_2,t_2;\cdots;u_n,t_n)=exp\left\{j\cdot\sum_{k=1}^{n}m_x(t_k)\cdot u_k+\frac{j^2}{2!}\sum_{k,\ell=1}^{n}B_x[t_k,t_\ell]\cdot u_k\cdot u_\ell\right\}$$

Эту характеристическую функцию можно представить в следующем виде:

$$\theta_x(u_1,t_1;u_2,t_2;\cdots;u_n,t_n)=\theta_x(\vec{u})=exp\left\{j\cdot\vec{m}_x^T\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{u}^T\hat{B}_x\vec{u}\right\},$$

где введены следующие обозначения:

$$\vec{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix};\vec{m}_x=\begin{bmatrix}m_x(t_1)\\m_x(t_2)\\\vdots\\m_x(t_n)\end{bmatrix};\hat{B}_x=\begin{bmatrix}B_x[t_1,t_1]&B_x[t_1,t_2]&\cdots&B_x[t_1,t_n]\\B_x[t_2,t_1]&B_x[t_2,t_2]&\cdots&B_x[t_2,t_n]\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\B_x[t_n,t_1]&B_x[t_n,t_2]&\cdots&B_x[t_n,t_n]\end{bmatrix},$$

значок ^{T} означает транспонирование. Аналогично можно ввести следующие обозначения:

$$\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}x(t_1)\\x(t_2)\\\vdots\\x(t_n)\end{bmatrix};\langle x(t)\rangle=\begin{bmatrix}\langle x(t_1)\rangle\\\langle x(t_2)\rangle\\\vdots\\\langle x(t_n)\rangle\end{bmatrix}.$$

Во вновь введённых обозначениях матрица

$$\hat{B}_x=\left\langle(\vec{x}(t)-\vec{m}_x(t))\cdot(\vec{x}(t)-\vec{m}_x(t))^T\right\rangle$$

называется *ковариационной матрицей*. Перечислим основные *свойства* ковариационной матрицы:

- Свойство положительной определённости

Для произвольного вектора $\vec{u}$ квадратичная форма с этой матрицей всегда больше либо равна нулю.

$$\vec{u}^T\hat{B}_x\vec{u}\geq 0.$$

Доказательство:

Рассмотрим следующее утверждение

$$\left\langle\left(\vec{x}^T(t)\cdot\vec{u}\right)^2\right\rangle\geq 0.$$

Это выражение не вызывает сомнений в его справедливости. Далее проделаем следующие операции:

$$\left\langle\left((\vec{x}(t)-\vec{m}_x(t))^T\cdot\vec{u}\right)^2\right\rangle\geq 0$$

$$\left\langle \left(\left(\vec{x}(t) - \vec{m}_x(t) \right)^T \cdot \vec{u} \right) \cdot \left(\left(\vec{x}(t) - \vec{m}_x(t) \right)^T \cdot \vec{u} \right) \right\rangle \geq 0$$

$$\vec{u}^T \cdot \left\langle \left(\vec{x}(t) - \vec{m}_x(t) \right) \cdot \left(\vec{x}(t) - \vec{m}_x(t) \right)^T \right\rangle \cdot \vec{u} \geq 0 ▩$$

- Свойство симметричности

$$B_x[t_1, t_2] = \langle (x(t_1) - m_x(t_1)) \cdot (x(t_2) - m_x(t_2)) \rangle = \langle (x(t_2) - m_x(t_2)) \cdot (x(t_1) - m_x(t_1)) \rangle = B_x[t_2, t_1]$$

- На главной диагонали этой матрицы стоят дисперсии.

Вопрос 12. *Основные свойства гауссовских случайных процессов. Выражение* n *-мерных моментных функций гауссовского случайного процесса с нулевым средним значением через ковариационную функцию.*

Вспомним, что Гауссовские случайные процессы описываются следующей n -мерной плотностью вероятностей:

$$w(x_1, t_1; x_2, t_2; \cdots; x_n, t_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \left\| \hat{B}_x \right\|}} exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\vec{x} - \vec{m}_x \right)^T \hat{B}_x^{-1} \left(\vec{x} - \vec{m}_x \right) \right\},$$

откуда следуют *основные свойства* гауссовских случайных процессов:

- Для полного описания гауссовского случайного процесса необходимо и достаточно задать среднее значения случайного процесса и его корреляционную функцию (видно непосредственно из формулы для плотности вероятностей).
- Для гауссовских случайных процессов понятия некоррелированности и статистической независимости совпадают.

Доказательство:

Пусть у нас есть n значений случайного процесса $x(t)$ в моменты времени $t_1, t_2, \cdots, t_n$, соответственно. Мы знаем, что для любых случайных величин из их статистической независимости следует их некоррелированность. То есть, если $x(t_k)$ и $x(t_\ell)$ статистически независимы, то их ковариационная функция равна

$$B_x[t_k, t_\ell] = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \\ \sigma_x^2, & k = \ell \end{cases}.$$

Откуда следует, что ковариационная матрица для нашего процесса, если его значения статистически независимы, становится диагонализированной:

$$\hat{B}_x = \begin{bmatrix} \sigma_x^2(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_x^2(t_n) \end{bmatrix}.$$

Тогда обратная к ней матрица тоже будет диагональной:

$$\hat{B}_x^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_x^2(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/\sigma_x^2(t_n) \end{bmatrix}.$$

Теперь, подставив эту матрицу в формулу для n -мерной плотности вероятностей гауссовского случайного процесса, мы получим

$$w(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot \sigma_x^2(t_1) \cdot \cdots \cdot \sigma_x^2(t_n)}} \cdot exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m_x(t_i))^2}{\sigma_x^2(t_i)} \right\}.$$

Видно, что эта n -мерная плотность вероятностей распадается на произведение n одномерных:

$$w(\vec{x}, t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2(t_i)}} exp\left\{ -\frac{(x_i - m_x(t_i))^2}{2\sigma_x^2(t_i)} \right\}. ▩$$

- В результате любого линейного преобразования гауссовского случайного процесса получается гауссовский случайный процесс.

То есть, если $x(t)$ — гауссовский случайный процесс, то

$$y(t) = \alpha \cdot x(t) + \beta \text{ —}$$

тоже гауссовский случайный процесс.

- Любая линейная комбинация совместных гауссовских случайных процессов также будет являться Гауссовским случайным процессом.

То есть, если $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ и $\mathbf{y}(\mathbf{t})$ — совместно Гауссовские случайные процессы, то

$$\mathbf{z}(\mathbf{t}) = \alpha \cdot \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \beta \cdot \mathbf{y}(\mathbf{t}) \text{ —}$$

тоже гауссовский случайный процесс. Здесь α и β могут быть как константами, так и детерминированными функциями времени.

- Любая условная плотность вероятностей гауссовского случайного процесса так же имеет Гауссовские распределение.
- С помощью линейного преобразования статистически зависимые (коррелированные) значения гауссовского случайного процесса можно преобразовать в систему статистически независимых (некоррелированных) гауссовских величин.

Доказательство:

Пусть мы имеем набор коррелированных случайных значений $\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{t}$. Произведём следующее линейное преобразование:

$$\vec{\mathbf{y}}_\mathbf{t} = \hat{\mathbf{A}}^\mathrm{T} \cdot \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{t} + \vec{\mathbf{b}}.$$

Покажем, что с помощью вектора $\vec{\mathbf{b}}$ можно обратить в нуль средние значения:

$$\langle \vec{\mathbf{y}}_\mathbf{t} \rangle = \hat{\mathbf{A}}^\mathrm{T} \langle \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{t} \rangle + \vec{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{\mathbf{b}} = -\hat{\mathbf{A}}^\mathrm{T} \cdot \vec{\mathbf{m}}_\mathbf{x}.$$

Таким образом, получим

$$\vec{\mathbf{y}}_\mathbf{t} = \hat{\mathbf{A}}^\mathrm{T} \cdot (\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{t} - \vec{\mathbf{m}}_\mathbf{x}).$$

Теперь запишем условие некоррелированности:

$$\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{y} = \langle \vec{\mathbf{y}}_\mathbf{t} \cdot \vec{\mathbf{y}}_\mathbf{t}^\mathrm{T} \rangle = \langle \hat{\mathbf{A}}^\mathrm{T} (\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{t} - \vec{\mathbf{m}}_\mathbf{x}) \cdot (\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{t} - \vec{\mathbf{m}}_\mathbf{x})^\mathrm{T} \hat{\mathbf{A}} \rangle = \hat{\mathbf{A}}^\mathrm{T} \cdot \langle (\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{t} - \vec{\mathbf{m}}_\mathbf{x}) \cdot (\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{t} - \vec{\mathbf{m}}_\mathbf{x})^\mathrm{T} \rangle \cdot \hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^\mathrm{T} \cdot \hat{\mathbf{B}}_\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{A}}$$

Из свойств положительно определённых симметричных матриц следует, что матрицу $\hat{\mathbf{A}}$ можно подобрать таким образом, чтобы матрица $\hat{\mathbf{B}}_\mathbf{y}$ оказалась диагональной.▩

- Любые моментные функции гауссовского случайного процесса могут быть выражены через его ковариационную матрицу и среднее значение.

Доказательство:

Это утверждение вытекает из 1-ого свойства. Положим все средние значения равными нулю (для удобства). Тогда

$$\alpha_1 = \mathbf{m}_\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\alpha_{2n+1} = \mathbf{0}$$

$$\alpha_2[\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2] = \mathbf{B}_\mathbf{x}[\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2]$$

$$\alpha_4[\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, \mathbf{t}_4] = \mathbf{B}_\mathbf{x}[\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2] \cdot \mathbf{B}_\mathbf{x}[\mathbf{t}_3, \mathbf{t}_4] + \mathbf{B}_\mathbf{x}[\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_3] \cdot \mathbf{B}_\mathbf{x}[\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_4] + \mathbf{B}_\mathbf{x}[\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_4] \cdot \mathbf{B}_\mathbf{x}[\mathbf{t}_3, \mathbf{t}_2]$$

▩

Вопрос 13. *Стационарные случайные процессы. Понятия стационарности в узком и широком смыслах, их взаимоотношение.*

Рассмотрим все известные нам случайные процессы с другой стороны. Случайный процесс $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ называется *стационарным в широком смысле (в строгом смысле)*, если все его $\mathbf{n}$ -мерные плотности вероятностей инвариантны относительно любого сдвига во времени, т.е.

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{t}_2; \cdots; \mathbf{x}_n, \mathbf{t}_n) = \mathbf{w}(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}_1 + \tau; \mathbf{x}_2, \mathbf{t}_2 + \tau; \cdots; \mathbf{x}_n, \mathbf{t}_n + \tau).$$

В частности, одномерная плотность вероятностей

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \equiv \mathbf{w}(\mathbf{x}).$$

Для двумерной плотности вероятностей

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{t}_2) = \mathbf{w}(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}_1 + \tau; \mathbf{x}_2, \mathbf{t}_2 + \tau) = | \tau = -\mathbf{t}_1 | = \mathbf{w}(\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1).$$

Среднее значение и дисперсия стационарного случайного процесса будет постоянной величиной, а его корреляционная функция будет зависеть только от разности моментов времени:

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{dx} = \mathbf{m}_\mathbf{x} = \mathbf{const};$$

$$\sigma_\mathbf{x}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}^2 \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{dx} - \mathbf{m}_\mathbf{x}^2 = \mathbf{const};$$

$$\mathbf{K}_\mathbf{x}[\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_1 + \tau] = \langle \mathbf{x}(\mathbf{t}_1) \cdot \mathbf{x}(\mathbf{t}_1 + \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \tau) \cdot \mathbf{dx}_1 \cdot \mathbf{dx}_2 = \mathbf{K}_\mathbf{x}[\tau]$$

Случайный процесс $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ называется *стационарным в широком смысле*, если его среднее значение постоянно, а корреляционная функция зависит только от разности моментов времени.

Нетрудно заметить, что из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле. Обратное утверждение в общем случае не верно.

Для гауссовских процессов понятия стационарности в широком и узком смыслах совпадают.

Вопрос 14. *Стационарность квазидетерминированных случайных процессов (рассмотреть на примерах* $x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ *и* $x(t) = s(t+\tau)$*, где* φ *и* τ *— случайные величины,* $s(t)$ *— детерминированная периодическая функция).*

Рассмотрим сначала процесс $x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$, где φ — случайный параметр. Пусть значения φ равномерно распределены в интервале от $[-\pi;\pi]$. Для того чтобы доказать, что $x(t)$ — стационарный случайный процесс вычислим его среднее значение и корреляционную функцию.

$$\langle x(t)\rangle = \langle A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)\rangle.$$

Постоянную амплитуду можно вынести из под знака усреднения. Далее, представим косинус суммы следующим образом:

$$\cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos(\omega_0 t)\cos(\varphi) - \sin(\omega_0 t)\sin(\varphi).$$

Детерминированные функции $\sin(\omega_0 t)$ и $\cos(\omega_0 t)$ тоже можно вынести из под знака усреднения, так как усреднение производится по случайной фазе (по статистическому ансамблю), а не по времени. Следовательно, будем иметь

$$\langle x(t)\rangle = A_0 \cos(\omega_0 t)\langle\cos(\varphi)\rangle - A_0 \sin(\omega_0 t)\langle\sin(\varphi)\rangle.$$

Вычислим средние:

$$\langle\cos(\varphi)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\varphi)\cdot w(\varphi)\cdot d\varphi = \frac{1}{2\pi}\sin(\varphi)\Big|_{-\pi}^{+\pi} = 0$$

$$\langle\sin(\varphi)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\sin(\varphi)\cdot w(\varphi)\cdot d\varphi = -\frac{1}{2\pi}\cos(\varphi)\Big|_{-\pi}^{+\pi} = 0.$$

В итоге, получаем

$$\langle x(t)\rangle = 0$$

Теперь вычислим корреляционную функцию:

$$K_x[t, t+\tau] = \langle x(t)\cdot x(t+\tau)\rangle = \langle A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)\cdot A_0 \cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \varphi)\rangle.$$

Представим произведение косинусов через их сумму:

$$\cos(\omega_0 t + \varphi)\cdot\cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \varphi) = \frac{1}{2}\left[\cos(2\omega_0 t + 2\varphi + \omega_0\tau) + \cos(\omega_0\tau)\right].$$

Далее разложим косинус суммы:

$$\cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau + \varphi) = \cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau)\cos(\varphi) - \sin(2\omega_0 t + \omega_0\tau)\sin(\varphi).$$

Заметим, что $\cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau), \sin(2\omega_0 t + \omega_0\tau), \cos(\omega_0\tau)$ — детерминированные функции и их можно вынести за знак усреднения. Тогда получим

$$K_x[t, t+\tau] = \frac{A_0^2}{2}\left[\cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau)\langle\cos(\varphi)\rangle - \sin(2\omega_0 t + \omega_0\tau)\langle\sin(\varphi)\rangle + \cos(\omega_0\tau)\right] = \frac{A_0^2}{2}\cos(\omega_0\tau) = K_x[\tau].$$

Таким образом, мы показали, что данный квазигармонический процесс является стационарным в широком смысле. Для того, чтобы показать, что он является стационарным в узком смысле, необходимо вычислять его моментные функции высших порядков, которые все окажутся нулями.

Рассмотрим теперь второй процесс:

$$x(t) = s(t+\tau),$$

где $s(t)$ — детерминированная периодическая функция с периодом T, а τ — случайный параметр. Пусть τ равномерно распределена на периоде T. Тогда

$$\langle x(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t+\tau)w(\tau)d\tau = \frac{1}{T}\int_0^T s(t+\tau)d\tau = |\, t+\tau = u\,| = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s(u)du.$$

Так как функция $s(t)$ периодична, то

$$\int_t^{t+T} s(u)du = \int_0^T s(u)du.$$

Но тогда ни в пределы интегрирования, ни в подынтегральное выражение время t не входит. Значит,

$$m_x = \mathrm{const}.$$

Теперь вычислим корреляционную функцию:

$$\mathbf{K_x}[t,t+\tau'] = \langle s(t+\tau)\cdot s(t+\tau+\tau')\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(t+\tau)\cdot s(t+\tau+\tau')\cdot d\tau = |u=t+\tau| = \frac{1}{T}\int_0^T s(u)\cdot s(u+\tau')\cdot du = K_x[\tau].$$

Таким образом, мы показали, что и этот процесс является стационарным в широком смысле.

Вопрос 15. *Эргодичность случайных процессов. Вывод необходимых и достаточных условий эргодичности по отношению к среднему значению.*

Случайный процесс $\mathbf{x(t)}$ обладает свойством *эргодичности* относительно своего среднего, если среднее по времени

$$\bar{x}^T = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

при $\mathbf{T\to\infty}$ сходится к среднему по статистическому ансамблю, т.е.

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = m_x.$$

Здесь под знаком предела мы рассматриваем сходимость в среднеквадратическом смысле, т.е.

$$\lim_{T\to\infty}\left\langle\left[\bar{x}^T - m_x\right]\right\rangle = 0 \Leftrightarrow \lim_{T\to\infty}\sigma^2_{\bar{x}^T} = 0.$$

Заметим, что нестационарный процесс не может быть эргодическим. Найдём необходимое и достаточное условие эргодичности случайного процесса по отношению к его среднему значению. Для этого найдём явное выражение для дисперсии оценки:

$$\sigma^2_{\bar{x}^T} = \left\langle\left[\bar{x}^T - m_x\right]^2\right\rangle = \left\langle\left[\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt - \langle x\rangle\right]^2\right\rangle = \left\langle\frac{1}{T^2}\left(\int_0^T[x(t)-\langle x\rangle]dt\right)^2\right\rangle = \left\langle\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T[x(t_1)-\langle x\rangle][x(t_2)-\langle x\rangle]dt_1\cdot dt_2\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T\langle[x(t_1)-\langle x\rangle][x(t_2)-\langle x\rangle]\rangle dt_1\cdot dt_2 = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T B_x[t_1,t_2]\cdot dt_1\cdot dt_2 = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T B_x[t_2-t_1]\cdot dt_1\cdot dt_2 = \begin{bmatrix}\tau = t_2 - t_1\\ t_0 = \dfrac{t_2+t_1}{2}\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_{-T}^{+T}B_x[\tau]\cdot d\tau\int_{\tau/2}^{T-\tau/2}dt_0 = \frac{1}{T^2}\int_{-T}^{+T}(T-|\tau|)\cdot B_x[\tau]\cdot d\tau = \frac{2}{T}\int_0^T\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)\cdot B_x[\tau]\cdot d\tau.$$

Итак, мы получили, что для того, чтобы процесс был эргодическим относительно своего среднего, нужно удовлетворить следующему условию:

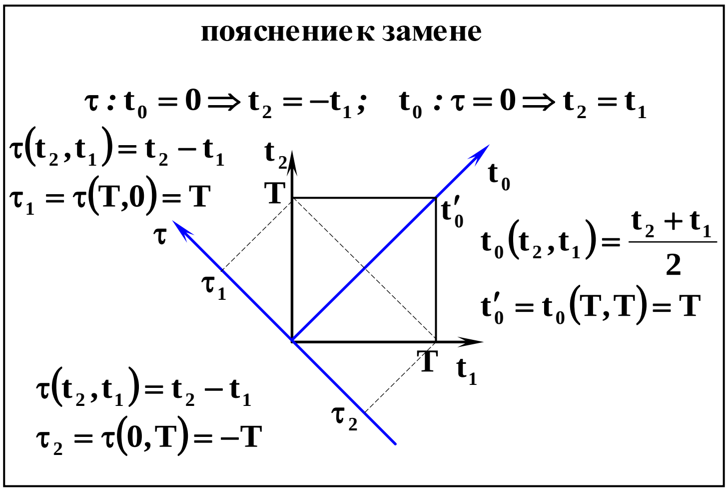
$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)\cdot B_x[\tau]\cdot d\tau\right\} = 0$$

Можно ужесточить это условие:

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T B_x[\tau]\cdot d\tau\right\} = 0 \text{ —}$$

достаточное условие Слуцкого. Можно записать ещё более сильное условие:

$$\lim_{T\to\infty}\{B_x[\tau]\} = 0.$$



Вопрос 16. *Привести пример стационарного, но неэргодического случайного процесса (статистического ансамбля) с доказательством и обсуждением причин неэргодичности.*

Рассмотрим следующий случайный процесс:

$$x(t) = \xi(t) + A,$$

где $\xi(t)$ — эргодический процесс, т.е. он удовлетворяет следующему условию:

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T\left(1+\frac{|\tau|}{T}\right)B_x[\tau]\cdot d\tau\right\} = 0,$$

а $\mathbf{A}$ — случайная величина. Пусть, кроме того, справедливы следующие соотношения:

$$\langle\xi(t)\rangle = 0 \Rightarrow K_\xi[\tau] = B_\xi[\tau]; \quad \langle A\rangle = 0.$$

Пусть мы знаем плотность вероятностей $\mathbf{w_A}$ случайной величины $\mathbf{A}$ и пусть $\mathbf{A}$ и $\xi(\mathbf{t})$ — некоррелированы. Проверим выполнение условий стационарности и эргодичности для процесса $\mathbf{x(t)}$.

$$\langle \mathbf{x(t)} \rangle = \langle \xi(\mathbf{t}) \rangle + \langle \mathbf{A} \rangle = \mathbf{0} \text{ —}$$

первое условие стационарности выполняется. Проверим второе:

$$\mathbf{B_x[t.t+\tau]} = \langle \mathbf{x(t)\cdot x(t+\tau)} \rangle = \langle \xi(\mathbf{t})\xi(\mathbf{t}+\tau) + \mathbf{A}\cdot\xi(\mathbf{t}) + \mathbf{A}\cdot\xi(\mathbf{t}+\tau) + \mathbf{A}^2 \rangle = \mathbf{B}_\xi[\tau] + \langle \mathbf{A}^2 \rangle \text{ —}$$

второе условие стационарности выполнено. Значит, процесс $\mathbf{x(t)}$ является стационарным. Теперь проверим выполнение условия эргодичности:

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)\mathbf{B}_\xi[\tau]\cdot d\tau\right\} + \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)\langle \mathbf{A}^2 \rangle\cdot d\tau\right\} = \frac{\langle \mathbf{A}^2 \rangle}{2} \neq 0 \text{ —}$$

условие эргодичности процесса не выполняется! Значит, процесс $\mathbf{x(t)}$ не является эргодическим.

Физическая сущность неэргодичности случайного процесса состоит в том, что такой процесс обладает бесконечной памятью реализаций. Т.е. если в какой-либо реализации при $\mathbf{t = t_0}$ среднее значение было равно $\mathbf{A_0}$, то и при $\mathbf{t \to \infty}$ среднее значение останется таким же.

Вопрос 17. *Необходимое и достаточное условия эргодичности по отношению к корреляционной функции случайного процесса (для произвольного и гауссовского процессов).*

Случайный процесс называется эргодическим относительно какой-либо статистической характеристики (моментных функций, характеристической функции, кумулянтных функций, дисперсии, корреляционной функции и т.д.), если среднее значение по времени от этой статистической характеристики в одной реализации совпадает со средним значением этой величины по статистическому ансамблю.

Случайный процесс $\mathbf{x(t)}$называется эргодическим в строгом смысле, если он эргодичен относительно всех своих характеристик.

Сделаем обобщение эргодичности на примере корреляционной функции. Пусть $\mathbf{x(t)}$ — строго стационарный случайный процесс. Для него корреляционная функция определяется равенством

$$\mathbf{K_x}[\tau] = \langle \mathbf{x(t)\cdot x(t+\tau)} \rangle.$$

Временной аналог корреляционной функции

$$\mathbf{K_x^T}[\tau] = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{x(t)\cdot x(t+\tau)dt}.$$

Процесс является эргодическим по отношению к корреляционной функции, если выполняется следующее условие:

$$\lim_{T\to\infty}\mathbf{K_x^T}[\tau] = \mathbf{K_x}[\tau].$$

Здесь под знаком предела понимается сходимость в среднеквадратическом смысле.

Выведем необходимое и достаточное условия эргодичности. Для этого введём вспомогательный случайный процесс

$$\mathbf{y(t) = x(t)\cdot x(t+\tau)},$$

тогда корреляционную функцию процесса $\mathbf{x(t)}$ можно представить следующим образом:

$$\mathbf{K_x}[\tau] = \langle \mathbf{y(t)} \rangle.$$

Тогда для того, чтобы процесс $\mathbf{x(t)}$ был эргодичен относительно своей корреляционной функции необходимо и достаточно, чтобы процесс $\mathbf{y(t)}$ был эргодичен относительно своего среднего значения. Таким образом, условие эргодичности процесса $\mathbf{x(t)}$ относительно его корреляционной функции можно записать так:

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{|\tau'|}{T}\right)\mathbf{B_y}[\tau']\cdot d\tau'\right\} = \mathbf{0}.$$

Распишем теперь, что представляет из себя ковариационная функция вспомогательного случайного процесса:

$$\mathbf{B_y}[\tau'] = \langle \mathbf{y(t)\cdot y(t+\tau')} \rangle - \langle \mathbf{y(t)} \rangle\langle \mathbf{y(t+\tau')} \rangle = \langle [\mathbf{x(t)\cdot x(t+\tau)}]\cdot[\mathbf{x(t+\tau')\cdot x(t+\tau+\tau')}] \rangle - \langle \mathbf{x(t)\cdot x(t+\tau)} \rangle\langle \mathbf{x(t+\tau')\cdot x(t+\tau+\tau')} \rangle$$

Так как процесс стационарен, то мы можем переписать это выражение следующим образом:

$$\mathbf{B_y}[\tau'] = \alpha_4(\mathbf{0},\tau,\tau',\tau+\tau') - \mathbf{K_x^2}[\tau].$$

Таким образом, задача об отыскании условия эргодичности стационарного случайного процесса свелась к задаче исследования моментной функции 4-ого порядка. В общем случае это довольно-таки сложная задача. Поэтому мы ограничимся рассмотрением гауссовских случайных процессов. Для гауссовских случайных процессов, как известно, моментная функция 4-ого порядка может быть представлена через ковариационную функцию. Рассмотрим для простоты случай, когда среднее значение процесса является нулём $\langle \mathbf{x(t)} \rangle = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{K_x[\tau] = B_x[\tau]}$$

$$\boldsymbol{\alpha_4^x(0,\tau,\tau',\tau+\tau') = B_x[t_1,t_2]\cdot B_x[t_3,t_3] + B_x[t_1,t_3]\cdot B_x[t_2,t_3] + B_x[t_1,t_4]\cdot B_x[t_2,t_3] = B_x^2[\tau] + B_x^2[\tau'] + B_x[\tau+\tau']\cdot B_x[\tau'-\tau]}$$

Условие эргодичности заключается в стремлении моментной функции 4-ого порядка к квадрату корреляционной функции:

$$\lim_{\mathbf{T}\to\infty} \mathbf{B_y[T] = 0}.$$

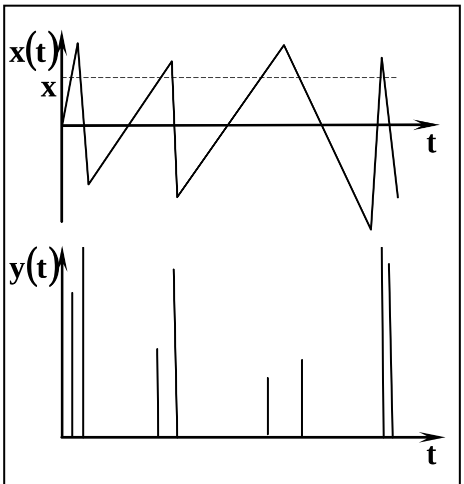
Таким образом, это условие можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{B_x^2[\tau] + B_x^2[\tau'] + B_x[\tau+\tau']\cdot B_x[\tau'-\tau] = K_x^2[\tau]},$$

при $\boldsymbol{\tau' \to \infty}$. Пусть при $\boldsymbol{\tau' \to \infty}$ ковариационная функция случайного гауссовского процесса стремиться к нулю. Тогда в качестве условия эргодичности случайного гауссовского процесса относительно своей корреляционной функции можно записать такое условие:

$$\mathbf{B_x[\tau] = K_x[\tau]}.$$

Вопрос 18. *Достаточное условие эргодичности случайного процесса по отношению к одномерной плотности вероятностей. Экспериментальное определение одномерной плотности вероятностей эргодического случайного процесса.*



чем больше $\mathbf{x_t'(t)}$, тем больше $\mathbf{y(t)}$

Рассмотрим случайный процесс, описываемый следующей одномерной плотностью вероятностей

$$\mathbf{w(x,t) = \langle \delta(x - x(t)) \rangle}.$$

Введём вспомогательный случайный процесс

$$\mathbf{y(t) = \delta(x - x(t))}.$$

Так как стационарность – необходимое условие эргодичности, то будем считать, что $\mathbf{x(t)}$ — стационарный процесс. Тогда мы можем записать следующее:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B_y[\tau] = \langle y(t)\cdot y(t+\tau) \rangle - \langle y(t) \rangle \langle y(t+\tau) \rangle =} \\
&\mathbf{= \langle \delta(x - x(t))\cdot \delta(x - x(t+\tau)) \rangle - \langle \delta(x - x(t)) \rangle \langle \delta(x - x(t+\tau)) \rangle =} \\
&\mathbf{= w(x,t;x,t+\tau) - w(x,t)\cdot w(x,t+\tau)}
\end{aligned}$$

Достаточное условие эргодичности

$$\lim_{\tau\to\infty} \mathbf{B_y[\tau] = 0}$$

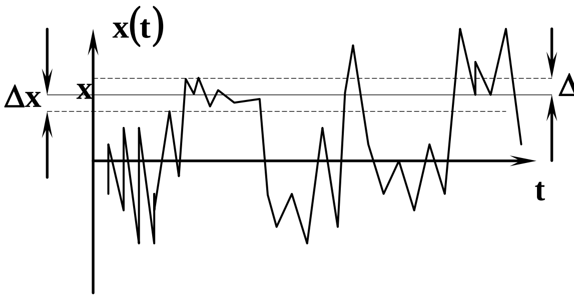
в данном случае равносильно условию статистической независимости:

$$\mathbf{w(x,t,x,t+\tau) = w(x,t)\cdot w(x,t+\tau)},$$

где $\boldsymbol{\tau \to \infty}$.

Таким образом, чтобы процесс был эргодическим относительно одномерной плотности вероятностей достаточно, чтобы он обладал конечной памятью, т.е. чтобы далеко отстоящие по времени значения были статистически независимы.

Теперь рассмотрим эргодический процесс $\mathbf{x(t)}$ и найдём его одномерную плотность вероятностей. Для этого введём вспомогательный случайный процесс



$$\mathbf{y(t) = \delta(x - x(t)) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Delta x}, & x \in [x - \Delta x; x + \Delta x] \\ 0, & x \notin [x - \Delta x; x + \Delta x] \end{cases}}.$$

Введём временной аналог плотности вероятностей $\boldsymbol{\varpi(x)}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\varpi}\mathbf{(x)} = \lim_{\mathbf{T}\to\infty} \overline{\mathbf{y(t)}}^{\mathbf{T}} = \lim_{\mathbf{T}\to\infty} \left\{ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{T}} \mathbf{y(t)dt} \right\}.$$

С учётом определения $\mathbf{y(t)}$ получим следующее:

$$\boldsymbol{\varpi}\mathbf{(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\Delta x}} \lim_{\mathbf{T}\to\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{1, x \in 2\Delta x} \\ \mathbf{0, x \notin 2\Delta x} \end{pmatrix} \mathbf{dt} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\Delta x}} \lim_{\mathbf{T}\to\infty} \frac{\mathbf{T_{\Delta x}}}{\mathbf{T}},$$

где $\mathbf{T_{\Delta x}}$ — время пребывания случайного процесса в слое $\mathbf{[x - \Delta x; x + \Delta x]}$. А так как процесс эргодический, то можно записать следующее:

$$\omega(x)\cdot\Delta x=\lim_{T\to\infty}\frac{T_{\Delta x}}{T}=w(x)\cdot\Delta x,$$

где $w(x)$ — статистическая плотность вероятностей.

Вопрос 19. *Общее описание совокупности двух случайных процессов. Понятие статистической независимости двух случайных процессов. Взаимные корреляционная и ковариационная функции. Понятие некоррелированности двух случайных процессов.*

Пусть у нас есть некоторое устройство, на вход которого подаётся некоторый сигнал $x(t)$, а с выхода его снимается другой сигнал $y(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ — два случайных процесса. Опишем совокупность этих двух случайных процессов.

Полное вероятностное описание совокупности 2-ух случайных процессов задаётся $n+n'$-мерной плотностью вероятностей

$$w_{xy}(x_1,t_1,;x_2,t_2;\cdots;x_n,t_n;y_1,t_1';y_2,t_2';\cdots y_{n'},t_{n'}').$$

Если эту плотность вероятностей умножить на

$$dx_1\cdot dx_2\cdot\dots\cdot dx_n\cdot dy_1\cdot dy_2\cdot\dots\cdot dy_{n'},$$

то мы получим вероятность того, что

$$\begin{cases} x_i\in[x_i;x_i+dx_i]\\ y_j\in[y_j;y_j+dy_j]\\ i\in[1;n];\quad j\in[1;n'] \end{cases}.$$

Статистический ансамбль совокупности случайных процессов можно представить как статистический ансамбль пар реализаций.

Совместная $n+n'$-мерная плотность вероятностей 2-ух случайных процессов обладает всеми свойствами n-мерной плотности вероятностей 1-ого случайного процесса, кроме свойства симметрии:

- Свойством положительности
- Свойством нормировки
- Свойством согласованности

Свойство симметрии верно только для пар (x_i,t_i) или (y_i,t_i).

Два случайных процесса $x(t)$ и $y(t)$ называются статистически независимыми, если для любых n и n', и для любых моментов времени $t_1,t_2,\cdots,t_n,t_1',t_2',\cdots,t_{n'}'$ $n+n'$-мерная плотность вероятностей распадается на произведение n и n'-мерных плотностей вероятностей:

$$w_{xy}(x_1,t_1,;x_2,t_2;\cdots;x_n,t_n;y_1,t_1';y_2,t_2';\cdots y_{n'},t_{n'}')=w_x(x_1,t_1,;x_2,t_2;\cdots;x_n,t_n)\cdot w_y(y_1,t_1';y_2,t_2';\cdots y_{n'},t_{n'}').$$

В противном случае эти два процесса считаются статистически зависимыми.

Совокупность случайных процессов можно описывать характеристической функцией:

$$\theta_{xy}(u_1,t_1;u_2,t_2;\cdots;u_n,t_n;v_1,t_1';v_2,t_2';\cdots;v_{n'},t_{n'}')=\left\langle exp\left\{j\cdot\sum_{i=1}^{n}u_i x(t_i)+j\cdot\sum_{k=1}^{n'}v_k y(t_k)\right\}\right\rangle_{\substack{x(t_j)\\ y(t_k)}}.$$

Также для совокупности случайных процессов можно ввести моментные функции $s+p$-ого порядка:

$$\alpha_{S,P}^{X,Y}(t_1,t_2,\cdots t_S,t_1',t_2',\cdots,t_P')=\langle x(t_1)\cdot x(t_2)\cdot\dots\cdot x(t_S)\cdot y(t_1')\cdot y(t_2')\cdot\dots\cdot y(t_P')\rangle.$$

Если процессы $x(t)$ и $y(t)$ статистически независимы, то их совместные моментные функции $s+p$-ого порядка распадаются на произведение моментных функций s-ого и p-ого порядков:

$$\alpha_{S,P}^{X,Y}=\alpha_S^X\cdot\alpha_P^Y.$$

Наиболее важными, с практической точки зрения, характеристиками совокупностей случайных процессов являются их моментные функции 1-ого и 2-ого порядков. Например,

$$\alpha_{1,1}^{X,Y}(t_1,t_2)=\langle x(t_1)\cdot y(t_2)\rangle=K_{XY}[t_1,t_2]\text{ —}$$

взаимная корреляционная функция двух случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$.

$$B_{XY}[t_1,t_2]=K_{XY}[t_1,t_2]-m_X(t_1)\cdot m_y(t_2)\text{ —}$$

взаимная ковариационная функция двух случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$.

Заметим, что

$$K_{XY}[t_1,t_2]=K_{YX}[t_2,t_1];\quad B_{XY}[t_1,t_2]=B_{YX}[t_2,t_1].$$

Два случайных процесса $x(t)$ и $y(t)$ называются взаимно некоррелированными, если взаимная ковариационная функция тождественно обращается в нуль или их взаимная корреляционная функция распадается на произведение:

$$\mathbf{B}_{XY}[t_1,t_2]=0 \Leftrightarrow \mathbf{K}_{XY}[t_2,t_1]=\langle x(t_1)\cdot y(t_2)\rangle=\langle x(t_1)\rangle\cdot\langle y(t_2)\rangle .$$

Из статистической независимости двух случайных процессов следует их некоррелированность. Обратное утверждение в общем случае не верно.

Вопрос 20. *Понятия стационарности, эргодичности, гауссовости совокупности двух случайных процессов. Разобрать пример двух стационарных, но нестационарно связанных случайных процессов.*

На совокупность двух случайных процессов легко распространяются понятия стационарности и эргодичности.

Совокупность двух случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$ называется *строго стационарной*, если их совместная $n+n'$-мерная плотность вероятностей инвариантна сдвигу во времени.

Совокупность двух случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$ называется *стационарной в широком смысле*, если их средние значения постоянны, а все их корреляционные и ковариационные функции зависят только от разностей моментов времени.

Нетрудно показать, что взаимная корреляционная функция стационарной совокупности двух случайных процессов обладает следующим свойством симметрии:

$$\mathbf{K}_{XY}[\tau]=\mathbf{K}_{YX}[-\tau].$$

Совокупность случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$ называется гауссовской, если они имеют совместное гауссовское распределение, т.е. если

$$\vec{x}_t=\begin{bmatrix} x(t_1)\\ x(t_2)\\ \vdots\\ x(t_n)\end{bmatrix};\quad \vec{y}_t=\begin{bmatrix} y(t'_1)\\ y(t'_2)\\ \vdots\\ y(t'_{n'})\end{bmatrix} —$$

два случайных вектора, то совокупность называется гауссовской при выполнении того условия, что вектор

$$\vec{z}_t=\begin{bmatrix}\vec{x}_t\\ \vec{y}_t\end{bmatrix}$$

имеет гауссовское распределение.

Рассмотрим теперь, в качестве примера, следующие процессы

$$x(t)=\xi(t)\cdot \cos(\omega_0 t)+\eta(t)\cdot \sin(\omega_0 t);\quad y(t)=\xi(t)\cdot \sin(\omega_0 t)+\eta(t)\cdot \cos(\omega_0 t);$$

где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — некоррелированные случайные процессы с нулевыми средними, т.е.

$$\langle\xi(t)\rangle=\langle\eta(t)\rangle=0;\quad \mathbf{K}_{\xi\eta}[t,t+\tau]=0$$

Пусть, кроме того,

$$\mathbf{K}_{\xi}[\tau]=\mathbf{K}_{\eta}[\tau]\equiv \mathbf{K}[\tau].$$

Нетрудно заметить, что при таком определении случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$ являются стационарными по отдельности, т.е.

$$m_x(t)=0=\mathrm{const};\ m_y(t)=0=\mathrm{const};\ \mathbf{K}_X[t,t+\tau]=\mathbf{K}_X[\tau]=\mathbf{K}[\tau]\cdot\cos(\omega\ \tau);\ \mathbf{K}_Y[t,t+\tau]=\mathbf{K}_Y[\tau]=\mathbf{K}[\tau]\cdot\cos(\omega_0\tau).$$

Теперь рассмотрим их взаимную корреляционную функцию:

$$\mathbf{K}_{XY}[t,t+\tau]=\langle\xi(t)\cdot\xi(t+\tau)\rangle\cdot\cos(\omega_0 t)\cdot\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau)+\langle\eta(t)\cdot\eta(t+\tau)\rangle\cdot\sin(\omega_0 t)\cdot\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau)=\mathbf{K}[\tau]\sin(\omega_0\tau+2\omega_0 t),$$

Откуда получаем, что

$$\mathbf{K}_{XY}[t,t+\tau]\neq\mathbf{K}_{XY}[\tau].$$

Следовательно, мы получили, что совокупность двух стационарных процессов есть нестационарный процесс.