1. Введение. К проблеме апорий в науке.

Двадцать четыре столетия назад Зенон Элейский, первый древнегреческий философ, указывал на невозможность логически непротиворечивого осмысления движения тел, хотя и не сомневался в чувственно удостоверяемой реальности последнего. Зеноном сформулирован ряд апорий, связанных с проблемой движения. Но не меньший интерес в гносеологическом, логическом и специально-научном плане представляют и апории, с которыми столкнулся знаменитый элеец при анализе проблемы «многого в бытии», проблемы получения протяженного отрезка при аддитивном синтезе так называемых непротяженных точек(метрическая апория), и другие. «Трудности, нашедшие отражение в апориях Зенона, - подчеркивала С. Яновская, - и в наши дни нельзя считать преодоленными». Поэтому апории Зенона не перестают интересовать и математиков, и физиков, и философов, и ученых некоторых других направлений. Интерес к апориям в настоящее время связан с проблемами научного познания пространства, времени, движения и строения систем в самом широком смысле, а также с проблемами «начал» науки в смысле истории возникновения исходных понятий о природе(«тело», «точка», «место», «мера», «число», «множество», «конечное», «бесконечное» и другие) и в плане дискуссий, в ходе которых уточнялся смысл этих понятий и которые переросли в итоге в проблему основания математики, вообще начал точного естествознания.

2. Апории Зенона.

Исследование парадоксов Зенона лучше всего начать со знакомства с истории интерпретации его аргументов, что сразу ведет нас в многообразие связанных с ними проблем и позволит найти собственный путь к разрешению загадок Зенона. Для этого требуется определить направляющие точки зрения, которые основаны на фактах или более убедительных предположениях.

2.1. Апории относительно множества. Первая теоретическая постановка проблемы бесконечности.

2.1.1. Дошедшие до нас апории Зенона.

Дошедшие до нас апории Зенона можно подразделить на две группы: в одних «опровергается» существование «многого», причем «многое» понимается как актуально существующая, то есть заданная всем набором своих элементов, некоторая полная, завершенная совокупность; в других вскрываются противоречия, связанные с отображением движения в логике понятий. Однако и те, и другие тесно связаны между собой.

К апориям первой группы относятся те, которые призваны опровергнуть признание бытия «многого». Суть их в следующем: если существующих вещей много, то их должно быть столь много, сколько их есть, - не больше и не меньше. А если их столь много, сколько их есть, то их число ограничено. Но, с другой стороны, если существующих вещей много, то их число неограниченно, ибо всегда существуют другие вещи между существующими и снова другие между теми и так далее.

Оставаясь на позициях конструктивного направления в понимании множеств, попытаемся с помощью средств символической логики представить в явном виде логическую противоречивость апории, прикрываемую подменой мысли о подлинной бесконечности мыслью о фиктивной бесконечности количества элементов космического универсального множества, ошибочно выдаваемого за актуально бесконечное множество. С этой целью сформулируем апорию в виде, удобном для формализации: «Если в мире существует многое, то оно одновременно и конечно, и бесконечно». Обозначив предикаты «быть многим» S(x), «быть конечным» через P(x), а «быть бесконечным» через ùP(x), вышепроизведенное высказывание мы можем выразить следующим образом:

"x (S(x) ® (P(x) ÙùP(x)))

Перед нами логически ложная импликация, опираясь на которую, Зенон сделал вывод вообще о немыслимости существования многого в бытии. Однако ошибка Зенона не в том, что он возмущался допущением, согласно которому «многое» одновременно конечно и бесконечно по числу его элементов, а лишь в том, что он заявил о немыслимости существования какого бы то ни было «многого», тогда как следовало отрицать только такое «многое», которое в действительности не существует и даже невозможно, то есть актуальное бесконечное многое или потенциально бесконечное многое – подлинная реальность.

Но как только мы осознали этот факт, не остается иного выхода, кроме как отвергнуть те предпосылки, из которых логически необходимо вытекает противоречащий им вывод о «несуществовании многого в бытии». Этого шага Зенон не сделал, чему мы можем, казалось бы, удивляться; однако и сейчас еще не утихают споры вокруг восходящей к Зенону проблемы актуально бесконечных множеств. Оставаясь при мнении, что если существует многое в бытии, то оно одновременно и конечно, и бесконечно, и не видя логических путей и средств опровержения этого мнения, Зенон не мог интуитивно согласиться с таким мнением и поэтому сделал субъективно вполне последовательный шаг – отказался от признания многого в бытии, не поверил в его существование.

К сожалению, до сего времени еще недостаточно четко осознается принципиальный характер не вполне понятой и Зеноном дилеммы: или признать конечность реально существующего многого в бытии, или же в противном случае оно реально не существует, ибо в принципе невозможно логически последовательно получить вывод о существовании многого при признании не только конечности, но и актуальной бесконечности его. В этом убеждает нас и многовековое существование все еще неразрешимой проблемы апорий, и использование средств современной логики; в противном случае надо открыто выразить недоверие последней.

2.1.2. Апория «о месте» и «метрическая апория».

К рассмотренной апории примыкают приводимые Аристотелем зеноновские апории «о месте» и «метрическая». Первую Аристотель излагает так: «…если все существующее помещается в известном месте, то ясно, что будет и место места, и так идет в бесконечность».

Аристотель писал: «ничто ведь не препятствует, чтобы первичное место было в другом… не как в месте, а так, как здоровье заключается в теплом как свойство, а теплое в теле как состояние. Таким образом, нет необходимости идти в бесконечность».

Разъяснения Аристотеля о месте как о некотором состоянии вещи или даже о свойстве некоторого состояния нельзя признать удачной аргументацией.

Пример с теплом как «свойством здоровья» не избавляет от требования «места месту», если место как-то подобно теплу, ибо тепло, как и любое состояние вещи, «разлить по всей вещи», и вместе с ней занимает то же самое место, что и вещь, обладающая этим состоянием.

Рассуждения, аналогичные по своей структуре только что рассмотренной апории, встречаются и в современных основаниях математики, когда идущий в бесконечность натуральный ряд чисел порождается из «ничего» (из Ø) посредством того, что сначала рассматривается Ø; затем множество {Ø}, единственным элементом которого является Ø; далее множество {Ø, {Ø}} и так далее.

А возражения, которые выдвигаются против этой процедуры в наши дни, родственны возражениям Аристотеля – они основаны на том, что нельзя и мысленно объединить во множество вещи, которые не существуют раздельно друг от друга.

2.1.3. Логическая структура апорий данного типа

может быть представлена конъюнкцией:

"x (S(x) ® P(x)) Ù ∃ x (ùS(x) Ù P(x)),

обнаруживающей нарушение принципа логической непротиворечивости мысли, где S(x) – знак предиката «быть вещью» или «быть подлинным (не равным Ø) множеством», P(x) – «обладать местом», или «быть множеством вообще».

Уход в бесконечность в анализируемых апориях – результат приведенной логической некорректности в сфере мысли. Некорректность такого рода выражена уже, например, в заявке строить натуральный ряд чисел, не опираясь ни на что. На самом же деле вместо абстракции «ничто» при таких построениях используются знаки Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}} и так далее, то есть опять-таки совершается подмена несуществующего объекта мысли («Ø») вполне материальными символами, реализующими «тайну» построения натурального ряда из «ничего».

В тесной связи с рассмотренной апорией находится и метрическая апория Зенона, то есть апория, связанная с размерами объекта, конструируемого из «ничего». Аристотель писал об этом: «Если что-нибудь, будучи прибавлено к какой-нибудь вещи или отнято от нее, не делает эту вещь больше, соответственно меньше, тогда, по словам Зенона, оно не принадлежит к числу существующего, причем существующая, очевидно, понимается как величина телесная: ведь именно такая величина обладает бытием в полной мере… точка же и 1(0) не создадут увеличения ни при каких обстоятельствах».

«Данная апория, - пишет Ю.А. Петров, - вскрывала трудности, связанные с представлением конечного тела в виде бесконечной совокупности неделимых. Эти неделимые в свою очередь представлялись не имеющими измерений точками. Их сумма полагалась равной нулю, из чего следовало, что тело, имеющее измерение, лишено измерения. Если же неделимые представлялись имеющими измерение, то тело большим по величине. В обоих случаях получались противоречия».

Перед нами действительно одна из труднейших апорий, нерешенных и поныне, ибо связана она с представлением о протяженном теле или отрезке времени, составленных по предположению, из не имеющих соответственно протяжения или длительности «точек» и «мгновений».

2.1.4. «Взгляд со стороны». Суждения мыслителей.

Ещё со времен Евклида философы и математики сомневались в справедливости понимания протяженного континуума как совокупности непротяженных элементов. Этим вопросом, кроме Зенона, уделяли внимание такие мыслители, как Аристотель, Кавальери, Текет, Паскаль, Больцано, Лейбниц, Кантор, У. Джеймс, Бриджмен и другие. Так, например, Бриджмен, писал: «если бы линию понимали так, что она буквально состоит из совокупности точек нулевой длины, а интервал времени представляет собою сумму неделящихся мгновений, тогда уже само это понимание было бы парадоксальным».

Однако в последнее время предпринимаются попытки доказать возможность получения, например, протяженного отрезка из непротяженных точек. Так,

А. Грюнбаум считает, что современная теория точечных множеств позволяет «преодолеть противоречивый характер утверждений о том, что положительный линейный интервал состоит из непротяженных элементов - точек». Эти толкования не в состоянии помочь А. Грюнбауму избежать основной трудности – доказать возможность получения протяженной длины из непротяженных каких бы то ни было объектов, ибо не столь важно, какова их конкретная природа или названия, но важно то, что они не обладают протяженностью.

На аналогичных позициях находился и Б. Рассел, считавший точку и момент объектами, не имеющими измерений. Однако, по его мнению, из бесконечного континуального множества этих объектов состоят реальное пространство и время. Б. Рассел утверждал, что если отбросить идеи об актуально бесконечных малых, трудности бесконечности и непрерывности, дескать, исчезают, а «… аргументы Зенона, в большинстве своем веские, не поднимают серьезных затруднений».

Оценивая подобного рода подходы к решению обсуждаемой апории Зенона, С. Яновская, на мой взгляд, правильно подчеркивала, что «таким образом отнюдь не решаются гносеологические трудности, связанные с неконструктивностью «построения» протяженных объектов в виде актуально-бесконечных (к тому же еще и несчетных) множеств непротяженных элементов». Некорректность подобных решений анализируемой апории должна быть ясна из того, что суммирование какого угодно множества не обладающих протяженностью точек не дает нам хоть какой-нибудь минимально протяженной величины: «Ведь сколько раз ни повторять ничто, ничего и не получится». Однако, если располагать актуально бесконечными малыми, но реальными протяженными какими-то квантами пространственно-временного типа, то, опираясь на движение и свойство отражения объектов, можно получить сколь угодно протяженные конечные тела.

2.1.5. Понимание меры множества в современной математике.

Данная апория показала, что нельзя определить меру отрезка как сумму мер «неделимых», что понятие меры множества вовсе не является чем-то очевидно заключенным в самом понятии множества и что мера множества, вообще говоря, не равна сумме мер его элементов. Теперь мы определяем меру множества при помощи покрытий его системами интервалов, причем понимается, что интервалы уже имеют определенную длину (меру).

Затронутые нами проблемы прерывности и непрерывности, конечного и бесконечного, пространства и времени при анализе зеноновской метрической апории (создание протяженного тела из непротяженных точек) непосредственным образом примыкают к кругу вопросов, связанных с апориями движения, также сформулированными знаменитым элейцем. Этих апорий четыре: «Дихотомия» и «Ахиллес» затрагивают трудности понимания движения при предположении неограниченной делимости пути и времени, а «Стрела» и «Стадий» выражают затруднения при обратных предположениях, то есть при допущении неделимых элементов пути и времени (проблема квантов пространства и времени).

2.2. Апории относительно движения.

Аргументы о движении известны нам только по краткому разбору их Аристотелем в «Физике» и комментариям Симплиция, Филопона и Фемистия. Симплиций утверждает, что он имел в своем распоряжении сочинение Зенона, и его комментарии относительно множества подтверждают это. Но комментарии о движении, хотя по некоторым замечаниям очевидно, что он знал и эту часть сочинения, не содержат ничего нового, отличного от Аристотеля, возможно, из-за общепризнанной трудности этих аргументов. Филопон и Фемистий тоже лишь повторяют аристотелевские суждения.

2.2.2. Апория «Дихотомия».

2.2.2.1. Формулировка апории.

Пусть AB – отрезок длины 1 и точка M движется из A в B. Прежде чем дойти до B, она должна «отсчитать» бесконечное множество «середин» A1 , A2, … , An , … ; значит, точка B никогда не будет достигнута. Движущееся тело никогда не достигнет конца пути, потому что оно должно сначала дойти до середины пути, затем до середины остатка пути и так далее.

2.2.2.2. Соображения античных математиков.

Гегель дает следующий комментарий аргументам Зенона: «Зенон здесь указывает на бесконечную делимость пространства: так как пространство и время абсолютно непрерывны, то нигде нельзя остановиться с делением… Движение оказывается прохождением этого бесконечного количества моментов; оно поэтому никогда не кончается, движущееся, следовательно, не может дойти до своего конечного пункта».

Аналогичные соображения можно найти и у Аристотеля. Гегель справедливо отмечает, что уже Аристотель наметил правильный путь решения данной апории Зенона, обратив внимание на то, что пространство и время не актуально разделены бесконечным образом, а лишь потенциально делимы до бесконечности. На эту важную мысль Аристотеля обратил внимание В.И. Ленин, конспектируя «Историю философии» Гегеля: «Движущийся к цели должен сначала пройти половину пути к ней. А от этой половины сначала её половину и так далее без конца.

Аристотель ответил: пространство и время бесконечно делимы (в возможности)… но не бесконечно разделены (в действительности)…»

Развивая идею Аристотеля о непрерывности как непрерывной делимости, а не актуализированной разделенности, Гегель писал: «Делимость как возможность есть всеобщее, в ней положены как непрерывность, так и отрицательность, или точка, но положены как моменты, а не как сами по себе». Гегель, стало быть, рассматривает делимость как возможность деления.

2.2.2.3. Логическая несостоятельность вывода Зенона.

Один из математических вопросов, связанных с данной апорией, состоит в следующем: допустимо ли пользоваться актуальной бесконечностью, допустимо ли, например, рассматривать весь натуральный ряд уже построенным и ввести некоторое новое, трансфинитное число, следующее за всеми натуральными?

Теория множеств Г. Кантора (70-е гг. XIX века) отвечает на этот вопрос положительно. Кантор определяет порядковые трансфинитные числа. Если воспользоваться ими, можно сказать, что точка М достигает А1 в момент t1, А2 - в момент t2 , … , Аn - в момент tn , а точка В - в момент tω , где ω – первое число, следующее за всем натуральным рядом. Заметим, что Р. Бэр с помощью точно такой же конструкции ввел первый трансфинит ω, который и является порядковым типом множества натуральных чисел. Однако с введением теории множеств затруднения, связанные с актуальной бесконечностью, вовсе не были преодолены. Они приняли только другую форму и вновь выступили в виде парадоксов теории множеств. В одном из них, так называемом парадоксе Бурали-Форти, рассматривается порядковый тип множества всех порядковых типов. Приписывание ему порядкового номера приводит к противоречию. В настоящее время существует точка зрения, согласно которой свободное оперируемое с актуально бесконечными множествами, даже счетными, неправомерно.

2.2.3. Апория «Стадий» («Стадион»).

2.2.3.1. Формулировка апории.

Пусть по стадиону движутся по параллельным прямым равные массы с равной скоростью, но в противоположных направлениях. Пусть ряд А1, А2, А3, А4 означает неподвижные массы. Ряд В1, В2, В3, В4 означает массы, движущиеся вправо, а ряд Г1, Г2, Г3, Г4 означает массы, движущиеся влево.

Будем теперь рассматривать массы Аi, Вi, Гi , как неделимые. В неделимый момент времени Вi и Гi проходят неделимую часть пространства. Действительно, если бы в неделимый момент времени некоторое тело проходило более одной неделимой части пространства, то неделимый момент времени был бы делим, если же меньше, то можно было бы разделить неделимую часть пространства. Рассмотрим теперь движение неделимых Вi и Гi друг относительно друга: за два неделимых момента времени В4 пройдет две неделимые части Аi и одновременно отсчитает четыре неделимых части Гi , то есть неделимый момент окажется делимым.

Этой апории можно придать и несколько другую форму. За одно и то же время t точка В4 проходит половину пути отрезка А1А4 и целый отрезок Г1Г4 . Но каждому неделимому моменту времени отвечает неделимая часть пространства, проходимая за это время. Тогда в некотором отрезке α и 2α содержится «одинаковое» число точек, «одинаковое» в том смысле, что между точками обоих отрезков можно установить взаимно однозначное соответствие. Этим впервые было установлено такое соответствие между точками отрезков различной длины. Если считать, что мера отрезка получается как сумма мер неделимых, то вывод является парадоксальным.

2.2.3.2. Логическая ошибка в основе апории «Стадий»

скрывается за неявно выраженным нарушением логических законов построения мыслей. Это нарушение состоит в подспудном признании взаимной относительности движения тел А1 и А2, поскольку в апории все же идет речь о движении тела А1 относительно тела А2(или наоборот), при одновременном явном отрицании этой относительности, так как игнорируется такой параметр этого движения, как скорость ω реляционного движения, равная сумме модулей скоростей υ1 и -υ2 движений тел А1 и А2 по отношению к телу А0. В явном виде логически противоречивая структура данной апории может быть представлена формулой ∃x (P(x) ÙùP(x)), где лишь исключающие друг друга пропозициональные функции означают одновременно признание и отрицание предикатов относительности и реальности реляционного движения тел А1 и А2.

2.2.4. «Ахиллес и черепаха».

2.2.4.1. Суть апории.

Быстроногий Ахиллес никогда не догонит черепаху, если в начале движения черепаха находилась на некотором расстоянии впереди него. Действительно, пусть начальное расстояние есть α и пусть Ахиллес бежит в k раз быстрее черепахи. Когда Ахиллес пройдет расстояние α, черепаха отползет на α/k, когда Ахиллес пройдет это расстояние, черепаха отползет на α/k2, и так далее, то есть всякий раз между состязающимися будет оставаться отличное от нуля расстояние.

2.2.4.2. Противоречивость апории.

В этой апории, помимо того же затруднения отсчитанной бесконечности, имеется и еще одно. Предположим, что в некоторый момент времени tω Ахиллес догонит черепаху. Запишем путь Ахиллеса

SA= $\alpha + \frac{\alpha}{k} + \frac{\alpha}{k^2} + \ldots$

и путь черепахи

SA= $\frac{\alpha}{k} + \frac{\alpha}{k^2} + \ldots$

Каждому отрезку пути $\frac{\alpha}{k^n}$, пройденному Ахиллесом, соответствует отрезок пути $\frac{\alpha}{k^{n+1}}$ черепахи. Поэтому к моменту встречи Ахиллес должен пройти «столько же» отрезков пути, сколько и черепаха. С другой стороны, каждому отрезку пути $\frac{\alpha}{k^n}$, пройденному черепахой, можно сопоставить равный ему по величине отрезок пути Ахиллеса. Но, кроме того, Ахиллес должен пробежать еще один отрезок длины α, то есть он должен пройти на единицу больше отрезков, чем черепаха. Если количество отрезков, пройденное последней, есть α, то получаем

1+α= α.

Это последнее затруднение: «часть равна целому» - явилась впоследствии предметом размышления Галилея, Николая Кузанского и многих других, которые давали этому парадоксу различные интерпретации. Чешский ученый Б. Болцано в первой половине XIX века установил, что любое бесконечное множество может быть приведено во взаимно однозначное соответствие со своей правильной частью. Теперь это свойство иногда принимается в качестве определения бесконечного множества.

Зенон, как известно, не отрицавший реальности движения, не смог лишь логически последовательно осмыслить последнее, допуская трудно обнаружимое нарушение основных логических принципов. Констатируя этот факт, В.И. Ленин высказал свое замечание: «Вопрос не в том, есть ли движение, а как его выразить в логике понятий», чтобы избежать при этом формально логической непоследовательности. Задача эта вполне разрешима уже с помощью средств, которыми располагает современная символическая логика и которые позволяют логически непротиворечиво отобразить диалектическую противоречивость объективно реального процесса движения.

2.2.5. Апория «Стрела».

2.2.5.1. Формулировка апории.

Если время и пространство состоят из неделимых частиц, то летящая стрела неподвижна, так как в каждый неделимый момент времени она занимает равное себе положение, то есть покоится, а отрезок времени и есть сумма таких неделимых моментов.

Эта апория направлена против представления о непрерывной величине как о сумме бесконечного числа неделимых частиц.

2.2.5.2. Основная логическая ошибка в апории «Стрела»

однотипна ошибкам в уже рассмотренных нами апориях: налицо непосредственное нарушение прежде всего логического принципа тождества, а отсюда следует нарушение прочих принципов. Оно выражается в неявном смешении понятий покоя и механического движения, осуществляемом посредством употребления понятия «находиться», «пребывать» в качестве ближайшего родового понятия по отношению к понятиям покоя и движения. Однако покой тела в онтологическом плане не является движением (в противном случае движение действительно должно было бы считать суммой состояний покоя), а выступает как абсолютное, недиалистическое отрицание механического движения в момент пересечения последнего. Поэтому и в логическом плане нельзя считать «покой» и «движение» видовыми в отношении понятий «находиться», «пребывать».

3. Влияние Зенона на философию Древней Греции как подтверждение реконструированного учения.

В своей работе я коснулся только некоторых математико-философских вопросов, связанных с парадоксами Зенона. Но сам Зенон придал своим апориям ярко выраженный физический смысл: он направил их против возможности движения. Основной вопрос состоит в соотношении математической модели и реального физического пространства.

В апориях Зенона предполагается, что пространство в малом устроено так же, как и в большом, факты из области движения величин определенного порядка переносятся на все величины. Между тем согласно современным физическим взглядам физические величины вовсе не являются делимыми до бесконечности. Современная физика открывает все новые и новые замечательные факты о строении микромира. Д. Гильберт и П. Бернайс в своей книге «Основания математики» (1934) писали, что решение парадокса «дихотомия» состоит «в указании на то обстоятельство, что мы вовсе не обязательно должны верить в то, что математическое пространственно-временное представление движения имеет физическое значение для произвольно малых интервалов пространства и времени; скорее, мы имеем все основания предполагать, что эта математическая модель экстраполирует факты из некоторой области опыта, а именно из области движений в пределах того порядка величин, который пока доступен нашему наблюдению, экстраполирует просто в смысле образования идей, подобно тому, как механика сплошной среды совершает экстраполяцию, предполагающую непрерывное заполнение пространства материей… Ситуация оказывается сходной во всех случаях, когда имеется вера в возможность непосредственного узрения(актуальной) бесконечности как данной посредством опыта или восприятия… Более подробное исследование показывает затем, что бесконечность вовсе не была нам дана, а была только интерполирована или экстраполирована посредством некоторого интеллектуального процесса».

Мы видим, что апории Зенона затронули действительно глубокие и сложные вопросы. Как же ответила на них античная наука? В частности, как она разрешила вопрос о том, допустимо ли пользоваться в математике актуально бесконечно большими и актуально бесконечно малыми величинами? Мы можем судить о тех точках зрения, которые имели место в античной математике, и о тех дискуссиях, которые там велись, по косвенным данным, главным образом по сообщениям Аристотеля и других философов этого времени.

Четырьмя парадоксами Зенон очень хорошо достигает того, чего хотел. Он логически строго показывает, что в пифагорейских представлениях о движении, пространстве и времени что-то неверно. Эти демонстрационные примеры Зенона не убедили более поздних мыслителей принять выводы Парменида, однако заставили этих мыслителей проникнуться уважением к формальной логике и увидеть новые возможности ее применения. Еще они, естественно, заставили их попытаться сформулировать пифагорейские понятия по-новому, таким образом, чтобы исключить показанные Зеноном противоречия. Эти попытки имели много форм: у Анаксагора – отказ от представления об отдельных точках и замена их непрерывной последовательностью, у Аристотеля – полное отделение арифметики от геометрии, а в атомистической теории – лежащее в ее основе четкое разграничение физической и математической «делимости».

Список литературы

Грюнбаум А. Философские проблемы пространства и времени. М., 1969.

История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Том 1, 1970.

Комарова В. Я. Учение Зенона Элейского. //Вестник Ленинградского университета, 1981.

Манеев А. К. Философский анализ зеноновских апорий. Минск, 1972.