МИНИСТЕРСТВО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКИОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методическое пособие

Составители: М.Д.Улымжиев,
Л.И.Инхеева,
И.Б.Юмов,
С.Ж.Юмова

Издательство ВСГТУ
Улан-Удэ – 2004

Рецензия

На методическое пособие по теории функций комплексного переменного для студентов 2 курса специальности «ЭСПП», выполненную к.ф-м.н., и.о.доц. Улымжиевым М.Д., к.ф-м.н., и.о.доц. Юмовым И.Б., ст. преп. Инхеевой Л.И., ст. преп. Юмовой С.Ж.

В работе изложен кратко теоретический материал по следующим темам: дифференцирование и интегрирование функций комплексного переменного, разложение функций комплексного переменного в ряд Лорана, классификация особых точек, вычеты. Приведены примеры решения задач по всем темам, варианты заданий по всем темам для самостоятельной работы.

Содержание работы соответствует ГОСВО ЕН. Данная работа удовлетворяет всем требованиям к методическим пособиям и рекомендуется к изданию в РИО ВСГТУ.

Рецензент: к.ф-м.н., и.о. доц. Васильева Е.Г.

В работе изложен кратко теоретический материал по следующим темам: дифференцирование и интегрирование функций комплексного переменного, разложение функций комплексного переменного в ряд Лорана, классификация особых точек, вычеты. Приведены примеры решения задач по всем темам, варианты заданий по всем темам для самостоятельной работы.

Ключевые слова: теория функций комплексного переменного, ряд Лорана, дифференцирование, интегрирование, особые точки, вычеты, разложение функций.

Подписано в печать 13.09.2004 г.
Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 2,09, уч.изд. л. 1,5.
Тираж 70 экз. Заказ № 130.

Издательство ВСГТУ.
г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40, в.

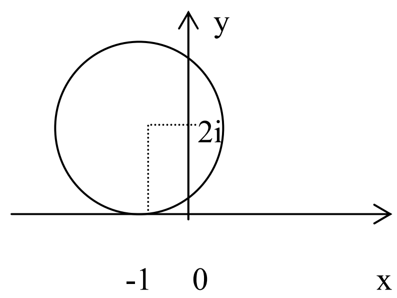
1. Подмножества комплексной плоскости

Равенство

$$|z-z_0|=R \tag{1}$$

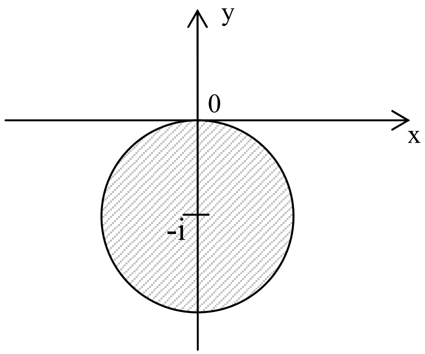
задает на комплексной плоскости окружность с центром в точке z_0 радиуса R.

Пример 1. Построим окружность $|z+1-2i|=2$. Запишем данное уравнение в виде (1) $|z-(-1+2i)|=2$. Центром окружности является точка $z_0=-1+2i$, радиус окружности равен 2.

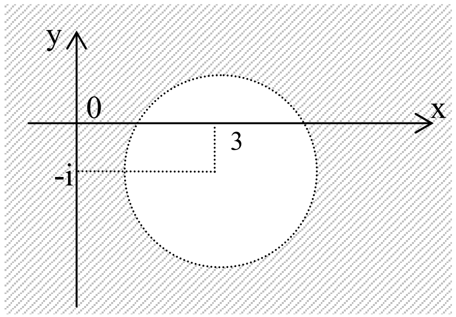


Неравенство $|z-z_0|<R$ задает круг с центром в точке z_0 радиуса R, граница которого не содержится в круге. Неравенство $|z-z_0|\le R$ задает круг с центром в точке z_0 радиуса R. При этом граница круга содержится в данном множестве. Неравенства $|z-z_0|>R$, $|z-z_0|\ge R$ задают внешность круга.

Пример 2. Построим на комплексной плоскости множество, заданное неравенством $|z+i|\le 1$. Перепишем неравенство в виде $|z-(-i)|\le 1$

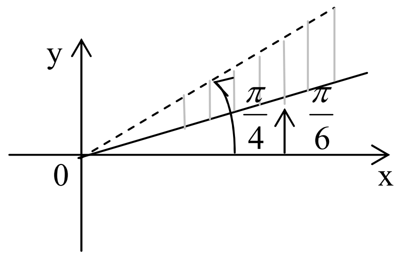


Пример 3. Построим область, заданную неравенством $|z-3+i|>2$. Запишем неравенство в виде $|z-(3-i)|>2$

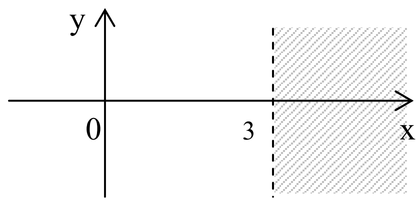


Неравенство $\varphi_0 \le \arg z \le \varphi_1$ задает на комплексной плоскости сектор, ограниченный лучами $\varphi=\varphi_0$, $\varphi=\varphi_1$. При этом границы сектора могут содержаться или не содержаться в данном секторе, в зависимости от того, является ли соответствующее неравенство нестрогим или строгим.

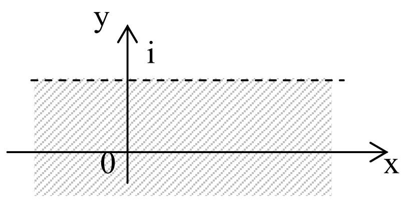
Пример 4. Построим множество, заданное неравенством $\frac{\pi}{6} \le \arg z < \frac{\pi}{4}$



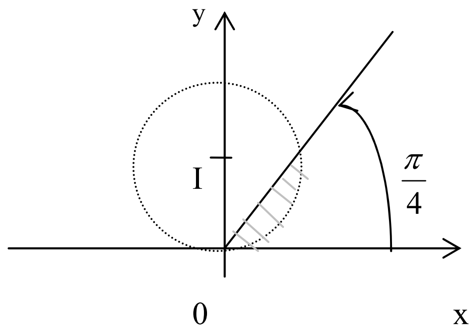
Пример 5. Построим область, заданную неравенством $\operatorname{Re} z > 3$. Имеем: $z = x + iy$, $\operatorname{Re} z = x$. Таким образом, неравенство можно записать в виде $x > 3$. Данное неравенство задает правую полуплоскость, ограниченную прямой $x = 3$.



Пример 6. Построим область, заданную неравенством $\operatorname{Im} z \le 1, \operatorname{Im} z = y \Rightarrow y \le 1$



Пример 7. Построить область, заданную неравенством $|z-i|<1$, $0\le \arg z\le \frac{\pi}{4}$



2. Действительная и мнимая части функции комплексного переменного

Пусть М – подмножество комплексной плоскости. Пусть каждой точке $z=x+iy$ множества М поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел $w=u+iv$. Тогда говорят, что на множестве М задана функция комплексного переменного $w=f(z)$. В первом случае функция называется однозначной, во втором – многозначной. Функции $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ называются, соответственно, действительной и мнимой частями функции $f(z)$.

Пример. Найти действительную и мнимую части функции $w=7\overline{z}^2-z$

Решение. Имеем: $z=x+iy$, $\overline{z}=x-iy$.

$7\overline{z}^2-z=7(x-iy)^2-(x+iy)=7(x^2-i2xy+i^2y^2)-x-iy=$

$7(x^2-i2xy-y^2)-x-iy=7x^2-i14xy-7y^2-x-iy=$

$=7x^2-7y^2-x+i(-14xy-y)$

$\Rightarrow\ u=7x^2-7y^2-x$, $v=-14xy-y$.

3. Элементарные функции комплексного переменного

А) *Показательная функция* $w=e^z\equiv\exp(z)$.

Значения показательной функции комплексного переменного $z=x+iy$ находятся по формуле Эйлера:

$$\exp(z)=\exp(x+iy)=\exp(x)\,(\cos y+i\sin y) \qquad (2)$$

Пример 1. Найти значение функции $w=e^z$ в точке $z_0=-1+i\pi$

Решение. $e^{z_0}=e^{-1+i\pi}=e^{-1}(\cos\pi+i\sin\pi)=e^{-1}(-1+i\cdot 0)=-1/e$.

Пример 2. Найти действительную и мнимую части функции $w=e^{-iz^2}$.

Решение.

$-iz^2=-i(x+iy)^2=-i(x^2+i2xy+i^2y^2)=-i(x^2-y^2+i2xy)=$

$=-ix^2+iy^2-i^2 2xy=2xy+i(y^2-x^2)$.

Используя равенство (2), получим:

$$e^{-iz^2}=e^{2xy+i(y^2-x^2)}=e^{2xy}(\cos(y^2-x^2)+i\sin(y^2-x^2))=$$

$$=e^{2xy}(\cos(y^2-x^2)+ie^{2xy}i\sin(y^2-x^2)$$

$$u=e^{2xy}(\cos(y^2-x^2),\ \ v=e^{2xy}\sin(y^2-x^2)$$

Б) *Тригонометрические функции* $w=\sin z$, $w=\cos z$. Значения данных тригонометрических функций находятся по формулам:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad (3)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad (4)$$

В) *Гиперболические функции* $w = \operatorname{ch} z$, $w = \operatorname{sh} z$.

Значения данных гиперболических функций находятся по формулам:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

Справедливы равенства

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz, \ \operatorname{ch} z = \cos iz \qquad (5)$$

Отсюда

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y + i \cos x \cdot \operatorname{sh} y \qquad (6)$$

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cdot \operatorname{ch} y - i \sin x \cdot \operatorname{sh} y \qquad (7)$$

Г) *Логарифмическая функция.*

Логарифмическая функция является многозначной функцией, значения которой находятся по формуле:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi \ \ k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $\arg z$ – главное значение аргумента ($0 \le \arg z < 2\pi$). Значение функции, которое получается при k = 0, называется главным значением и обозначается

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z.$$

Пример 3. Найти все значения $\ln(1-\sqrt{3}i)$. Найти главное значение $\operatorname{Ln}(1-\sqrt{3}i)$.

Решение. Найдем модуль и аргумент числа z = $1-\sqrt{3}i$

$$|z| = \left|1-\sqrt{3}i\right| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

Обозначим $\varphi = \arg z$, тогда $\cos\varphi = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{1}{2}$,

$\sin\varphi = \dfrac{y}{|z|} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Таким образом

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z = \ln 2 + i(\frac{5\pi}{3} + 2\pi k), \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln 2 + i\frac{5\pi}{3}..$$

4. Разложение некоторых элементарных функций в степенной ряд

1) $\exp(z) = 1 + \dfrac{z}{1!} + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \ldots$

2) $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \dfrac{z^6}{6!} + \ldots$

3) $\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + \ldots$

4) $\operatorname{sh} z = z + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} + \dfrac{z^7}{7!} + \ldots$

5) $\operatorname{ch} z = 1 + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} + \dfrac{z^6}{6!} + \ldots$

Разложение 1) – 5) справедливы на своей комплексной плоскости.

6) $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$

7) $\dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$

8) $\ln(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \dfrac{z^4}{4} + \ldots$

9) $\ln(1-z) = -z - \dfrac{z^2}{2} - \dfrac{z^3}{3} - \dfrac{z^4}{4} - \ldots$

Разложения 6) – 9) справедливы в круге $|z|<1$.

5. Дифференцирование функций комплексного переменного

Определение. Говорят, что функция $w=f(z)$ дифференцируема в точке z_0, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. Этот предел называется производной функции $w=f(z)$ в точке z_0 и обозначается символом $f'(z_0)$:

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

Определение. Говорят, что функция $w=f(z)$ аналитична в точке z_0, если она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки.

Определение. Говорят, что функция $w=f(z)$ аналитична в области *G*, если она дифференцируема в каждой точке области *G*.

Теорема. Если функция $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z=x+iy$, то в точке (x,y) выполняются равенства

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases} \qquad (8)$$

Обратно, если функции $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x,y) как функции действительных переменных и в точке (x,y) выполняются равенства (8), то функция $w=f(z)$ дифференцируема в точке $z=x+iy$. При этом производная функции $w=f(z)$ в точке $z=x+iy$ находится по формуле:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (9)$$

Замечание. Равенства (8) называются условиями Коши-Римана.

Пример. Проверить, является ли функция $w=e^{-7iz}$ дифференцируемой и найти значение её производной в точке $z_0=\pi-3i$.

Решение. Найдем действительную и мнимую части данной функции:

$$e^{-7iz}=e^{-7i(x+iy)}=e^{7y-i7x}=e^{7y}\cos(-7x)+ie^{7y}\sin(-7x)=$$
$$=e^{7y}\cos 7x-ie^{7y}\sin 7x$$

(см. формулу(2)).

Таким образом $u=e^{7y}\cos 7x$, $v=-7e^{7y}\sin 7x$.

Проверим, выполняются ли условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(e^{7y}\cos 7x)'_x=-7e^{7y}\sin 7x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=(e^{7y}\cos 7x)'_y=7e^{7y}\cos 7x,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=(-e^{7y}\sin 7x)'_x=-7e^{7y}\cos 7x,\ \frac{\partial v}{\partial y}=(-e^{7y}\sin 7x)'_y=-7e^{7y}\sin 7x$$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ $\Rightarrow$ функция $f(z)$ дифференцируема.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}=-7e^{7y}\sin 7x-i7e^{7y}\cos 7x,$$

$$f'(z_0)=f'(\pi-3i)=-7e^{7\cdot(-3)}\sin 7\pi-i7e^{7\cdot(-3)}\cos 7\pi=$$
$$=-7e^{-21}\sin 7\pi-i7e^{-21}\cos 7\pi=7i/e^{21}.$$

6. Нахождение аналитической функции

по её действительной или мнимой части

Определение. Функция $\varphi=\varphi(x,y)$ действительных переменных x и y называется гармонической в области *G*, если она имеет непрерывные частные производные второго порядка в области *G* и в этой области выполняется равенство:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \qquad (10)$$

Уравнение (10) называется уравнением Лапласа.

Теорема. Если функция $w = f(z)$ аналитична в области G, то её действительная и мнимая части являются гармоническими функциями в этой области.

Теорема. Любая гармоническая в односвязной области функция является действительной (мнимой) частью некоторой аналитической в этой области функции.

Пример. Проверить, что функция $v = x^2 - y^2$ является мнимой частью некоторой аналитической функции и найти эту функцию, если $f(0) = 1$.

Решение. Проверим, что функция $v = x^2 - y^2$ является гармонической:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (x^2 - y^2)'_x = 2x, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = (2x)'_x = 2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = (x^2 - y^2)'_y = -2y, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = (-2y)'_y = -2.$$

Т.о. $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow$ функция $v = x^2 - y^2$ является гармонической. Следовательно, функция $v = x^2 - y^2$ является мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$. В силу условий Коши–Римана имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -2y.$$

Интегрируя последнее равенство по переменной x, получим

$$u = \int (-2y)\partial x = -2xy + C(y).$$

Функцию $C(y)$ найдем, используя второе условие Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(-2xy + C(y)\right)'_y = -2x + C'(y) \Rightarrow -2x + C'(y) = -2x = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = C \Rightarrow u = -2xy + C.$$

Следовательно, $f(z) = u + iv = -2xy + C + i(x^2 - y^2)$.

Константу C найдем из условия $f(0) = 1$.

$f(0) = 1 \Rightarrow f(0 + i \cdot 0) = 1 \Rightarrow -2 \cdot 0 \cdot 0 + C + i(0^2 - 0^2) = 1 \Rightarrow C = 1$.

Таким образом, функция $w = f(z)$ имеет вид

$$f(z) = -2xy + 1 + i(x^2 - y^2).$$

7. Интегрирование функций комплексного переменного

Вычисление интеграла от функции $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ вдоль кривой Γ сводится к вычислению двух криволинейных интегралов 2 [го] рода по формуле :

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int_\Gamma v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy \qquad (11)$$

Пример 1. Вычислить $\int_\Gamma (\bar{z}^2 + z)dz$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $z_0 = 1 + i$ и $z_1 = 2 + 3i$.

Решение. Найдем уравнение линии Γ как уравнение прямой, проходящей через точки (1,1) и (2,3):

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1} \Rightarrow x - 1 = \frac{y-1}{2} \Rightarrow y = 2x - 1, \quad dy = y'dx = (2x-1)'dx = 2dx.$$

Найдем действительную и мнимую части подынтегральной функции:

$$\bar{z}^2 + z = (x - iy)^2 + x + iy = x^2 - i2xy - y^2 + xiy =$$
$$= x^2 - y^2 + x + i(y - 2xy).$$

Вычислим интеграл по формуле (11):

$$\int_\Gamma (\bar{z}^2 + z)dz = \int_\Gamma (x^2 - y^2 + x + i(y - 2xy))dz = \int_\Gamma (x^2 - y^2 + x)dx -$$

$$-(y-2xy)dy+i\int\limits_{\Gamma}(y-2xy)dx+(x^2-y^2)dy,$$

$$\int\limits_{\Gamma}(x^2-y^2+x)dx-(y-2xy)dy=\int\limits_1^2(x^2-(2x)^2+x)dx-(2x-2x\cdot(2x))2dx=$$

$$=\int\limits_1^2(x^2-4x^2+x)dx-(2x-4x^2)2dx=\int\limits_1^2(5x^2-3x)\,dx=\frac{3}{2}x^2\Big|_1^2=$$

$$=\frac{40}{3}-\frac{5}{3}-(6-\frac{3}{2})=\frac{35}{3}-\frac{9}{2}=\frac{43}{6},$$

$$\int\limits_{\Gamma}(y-2xy)dx+(x^2-y^2+x)dy=\int\limits_1^2(2x-4x^2)dx+(x^2-4x^2+x)\cdot 2dx=$$

$$=\int\limits_1^2(2x-4x^2-6x^2+2x)dx=\int\limits_1^2(-10x^2+4x)dx=(-10x^3/3)\Big|_1^2+2x^2\Big|_1^2=$$

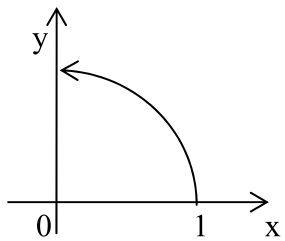
$$=-\frac{80}{3}+\frac{10}{3}+8-2=-\frac{70}{3}+6=-\frac{52}{3}.$$

Ответ: $\int\limits_{\Gamma}(\overline{z}^2+z)dz=\frac{43}{6}-\frac{52}{3}i$.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{\Gamma}\operatorname{Im}z^2dz$, где Г – часть окружности радиуса 1 с центром в O, расположенная в первой четверти (направление обхода – против часовой стрелки).

Решение. Запишем параметрические уравнения окружности:

$$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\ 0\le t\le\pi/2.\end{cases}$$



Отсюда

$$dx=x'\,dt=-\sin t\,dt,$$
$$dy=y'\,dt=\cos t\,dt.$$

$$z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy,\qquad \operatorname{Im}z^2=2xy$$

$$\int\limits_{\Gamma}\operatorname{Im}z^2dz=\int\limits_{\Gamma}2xy\,dz=\int\limits_{\Gamma}2xy\,dx-0\,dy+i\int\limits_{\Gamma}0\,dx+2xy\,dx=\int\limits_{\Gamma}2xy\,dx+i\int\limits_{\Gamma}2xy\,dy$$

$$\int\limits_{\Gamma}2xy\,dx=\int\limits_0^{\pi/2}2\cos t\sin t(-\sin t)\,dt=-2\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2t\cos t\,dt=$$

$$=\left|\begin{matrix}\tau=\sin t\\ d\tau=\cos t dt\\ \tau_н=\sin 0=0\\ \tau_в=\sin\frac{\pi}{2}=1\end{matrix}\right|=-2\int\limits_0^1\tau^2\,d\tau=-\frac{2}{3}\tau^3\Big|_0^1=-\frac{2}{3},$$

$$\int\limits_{\Gamma}2xy\,dy=\int\limits_0^{\pi/2}2\cos t\sin t\cos t\,dt=2\int\limits_0^{\pi/2}\sin t\cos^2t\,dt=\left|\begin{matrix}\tau=\cos t\\ d\tau=-\sin t\,dt\\ \tau_н=\cos 0=1\\ \tau_в=\cos\frac{\pi}{2}=0\end{matrix}\right|=$$

$$=-2\int\limits_1^0\tau^2\,d\tau=2\int\limits_0^1\tau^2\,d\tau=\frac{2}{3}\tau^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}.$$

Отсюда $\int\limits_{\Gamma}\operatorname{Im}z^2dz=-\frac{2}{3}+i\frac{2}{3}.$

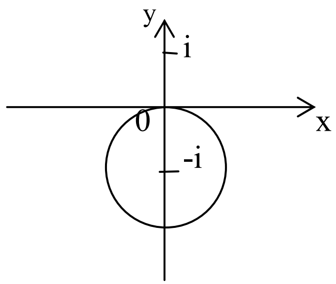
8. Теорема Коши. Интеграл Коши

Теорема Коши. Пусть функция $w=f(z)$ аналитична в односвязной области G и непрерывна на границе Г этой области. Тогда

$$\oint\limits_{\Gamma}f(z)\,dz=0.$$

Пример 1. Вычислить $\oint\limits_{|z+i|=1}\frac{e^z}{z-i}dz$.

Решение. Подынтегральная функция аналитична внутри и на окружности $|z+i|=1$, так как точка $z=i$, в которой функция не дифференцируема, лежит вне окружности.



В силу теоремы Коши, $\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{e^z}{z-i} dz = 0$.

Теорема. Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в односвязной области G и непрерывна на границе Г этой области. Тогда для любой точки $z_0 \in G$ справедливо равенство

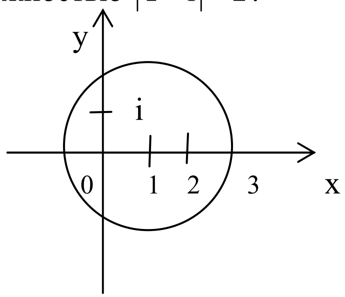
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \qquad (12)$$

где направление обхода контура Г – положительное (против часовой стрелки).

Замечание. Формула (12) называется *формулой Коши*.

Пример 2. Вычислить $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z-i} dz$.

Решение. Точка $z_0 = i$ лежит внутри круга, ограниченного окружностью $|z-1| = 2$.



Функция $w = e^z$ дифференцируема в круге и на границе круга. Поэтому, в силу формулы Коши, получаем

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{e^z}{z-i} dz = 2\pi i \cdot e^i .$$

9. Ряд Лорана

Если функция $w = f(z)$ аналитична в кольце $r < |z - z_0| < R$, то она разлагается в этом кольце в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n . \qquad (13)$$

Коэффициенты C_n ряда Лорана находятся по формулам:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

где Г – произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая в кольце. Разложение в ряд Лорана единственно.

Ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n$ называется главной частью ряда Лорана.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n$ называется правильной частью ряда Лорана.

На практике для разложения функций в ряд Лорана используют известные разложения элементарных функций в ряд Тейлора.

Замечание. Разложить функцию $w = f(z)$ в окрестности точки z_0 означает разложить её в ряд Лорана в кольце $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Пример 1. Разложить функцию $f(z) = (z+1)\exp\left(\frac{2}{z+1}\right)$ в ряд Лорана по степеням $z + 1$.

Решение. Воспользуемся разложением показательной функции в ряд Тейлора (см. п. 3.):

$$\exp(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ... ,$$

$$\exp\left(\frac{2}{z+1}\right)=1+\frac{\frac{2}{z+1}}{1!}+\frac{\left(\frac{2}{z+1}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{2}{z+1}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{2}{z+1}\right)^4}{4!}+K=$$

$$=1+\frac{2}{z+1}+\frac{4}{2!(z+1)^2}+\frac{8}{3!(z+1)^3}+\frac{16}{4!(z+1)^4}+K=$$

$$=1+\frac{2}{z+1}+\frac{2}{(z+1)^2}+\frac{4}{3(z+1)^3}+\frac{2}{3(z+1)^4}+K,$$

$$(z+1)^3e^{\frac{2}{z+1}}=(z+1)^3+2(z+1)^2+2(z+1)+\frac{4}{3}+\frac{2}{3(z+1)}+\ldots .$$

Главная часть ряда Лорана: $\frac{2}{3(z+1)}+\ldots$.

Правильная часть ряда Лорана $(z+1)^3+2(z+1)^2+2(z+1)+\frac{4}{3}$.

Данное разложение справедливо в кольце $0<\left|z-z_0\right|<+\infty$.

Пример 2. Найти все разложения в ряд Лорана по степеням z функции $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-3)}$

Решение. Разложим данную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)}=\frac{A}{(z-1)}+\frac{B}{(z-3)}\Rightarrow 1=A(z-3)+B(z-1)\Rightarrow$$

$$1=Az-3A+Bz-B,$$

$$z^1\left|\,0=A+B,\right.$$

$$z^0\left|\,1=-3A-B.\right.$$

Решив систему, получим $A=-1/2$, $B=1/2$.

Таким образом, $f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-3}$.

а) Разложим каждую из функций $\frac{1}{z-1}$, $\frac{1}{z-3}$ в ряд Лорана в окрестности нуля (здесь и далее используется формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии):

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-1-z-z^2-z^3-\ldots .$$

Данное разложение справедливо в круге $\left|z\right|<1$.

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3-z}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\frac{z^3}{27}+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}-\frac{z}{9}-\frac{z^2}{27}-\frac{z^3}{81}-\ldots .$$

Данное разложение справедливо при $\left|z/3\right|<1$, т. е. внутри круга $\left|z\right|<3$. Отсюда

$$f(z)=-\frac{1}{2}(-1-z-z^2-z^3-\ldots)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}-\frac{z}{9}-\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{8}{9}z+\frac{26}{27}z^2+\frac{80}{81}z^3+\ldots\right)=\frac{1}{3}+\frac{4}{9}z+\frac{13}{27}z^2+\frac{40}{81}z^3+\ldots .$$

Данное разложение справедливо в круге $\left|z\right|<1$.

б) Разложим функцию $\frac{1}{z-1}$ в ряд Лорана в окрестности ∞, а функцию $\frac{1}{z-3}$ в окрестности 0. (разложение функции $\frac{1}{z-3}$ в окрестности 0 было получено в пункте *а*)).

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots\right)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\ldots$$

Данное разложение справедливо при $\left|1/z\right|<1$, т. е. в кольце $1<\left|z\right|<+\infty$.

Отсюда

$$f(z)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\ldots\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{z}{9}+\frac{z^2}{27}+\ldots\right).$$

Данное разложение справедливо в кольце $1<\left|z\right|<3$.

в) Разложим функцию $\frac{1}{z-1}$, $\frac{1}{z-3}$ в ряд Лорана в окрестности ∞. (Разложение функции $\frac{1}{z-1}$ в окрестности ∞ было получено в п. *б*).).

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=\frac{1}{z}(1+\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}+\frac{27}{z^3}+...)=\frac{1}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{9}{z^3}+\frac{27}{z^4}+... .$$

Данное разложение справедливо при $|3/z|<1$, т.е. в кольце $3<|z|<+\infty$.

Таким образом,

$$f(z)=-\frac{1}{2}(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+...)+\frac{1}{2}(\frac{1}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{9}{z^3}+...)=\frac{1}{2}(\frac{2}{z^2}+\frac{8}{z^3}+\frac{26}{z^4}+\frac{80}{z^5}+...).$$

Данное разложение справедливо в кольце $|z|>3$.

10. Классификация особых точек

Определение. Точка z_0 называется особой точкой функции $f(z)$, если функция не дифференцируема в этой точке.

Определение. Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если функция дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0 за исключением самой точки z_0.

Существуют три типа изолированных особых точек.

Определение. Изолированная особая точка функции $f(z)$ называется устранимой особой точкой, если в разложении в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 отсутствует главная часть.

Определение. Изолированная особая точка функции $f(z)$ называется полюсом, если в разложении в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 главная часть содержит конечное число членов. При этом наибольшее число $n\in \mathrm{N}$ такое, что $C_{-n}\neq 0$, называется порядком полюса.

Определение. Изолированная особая точка функции $f(z)$ называется существенно особой точкой, если в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 главная часть содержит бесконечное число членов.

Замечание. Полюс первого порядка называют также простым полюсом.

Пример. Классифицировать особые точки функции

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^4}\cdot\sin 2(z-1)$$

Решение. Единственной особой точкой функции является точка $z=1$. Разложим функцию в ряд Лорана в окрестности этой точки. Для этого воспользуемся разложением в ряд Тейлора функции $\sin(z)$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+... .$$

Получаем

$$\sin 2(z-1)=2(z-1)-\frac{8(z-1)^3}{3!}+\frac{32(z-1)^5}{5!}-\frac{128(z-1)^7}{7!}+...,$$

$$\frac{1}{(z-1)^4}\sin 2(z-1)=\frac{2}{(z-1)^3}-\frac{4}{3(z-1)}+\frac{4(z-1)}{15}-\frac{8(z-1)^3}{315}+... .$$

Главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых, поэтому $z=1$ – полюс третьего порядка.

11. Нули аналитической функции.

Связь между нулём и полюсом

Определение. Точка z_0 называется нулем аналитической в точке z_0 функции $f(z)$, если $f(z_0)=0$.

Определение. Точка z_0 называется нулем кратности n аналитической в точке z_0 функции $f(z)$, если выполняются равенства:

$f(z_0)=0$, $f'(z_0)=0$, $f''(z_0)=0$, ..., $f^{(n-1)}(z_0)=0$, $f^{n}(z_0)\neq 0$.

Пример. Найти нули функции $f(z)=z(e^z-1)$ и определить их кратность.

Решение. Единственным нулем данной функции является точка $z=0$. Определим кратность этого нуля:

$f(0)=0\cdot(e^0-1)=0$,

$f'(z)=e^z-1+ze^z$, $\quad$, $f'(0)=e^0-1+0e^0=0$,

$f''(z)=e^z+e^z+ze^z=2e^z+ze^z$, $\quad f''(0)=2e^0+0e^0\neq 0$.

Таким образом, точка $z=0$ является нулем кратности 2 функции $f(z)=z(e^z-1)$.

Теорема 1. Для того, чтобы точка z_0 была нулем кратности n функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы она была представлена в виде

$$f(z)=(z-z_0)^n g(z),$$

где $g(z)$ – аналитическая в точке z_0 функция, причем $g(z_0)\neq 0$.

Пример. Найти нули функции $f(z)=(z-1)(z^2-3z+2)$ и определить их кратность.

Решение. Разложим функцию $f(z)$ на множители. Для этого найдем корни квадратного трехчлена z^2-3z+2: $z_{1,2}=\dfrac{3\pm 1}{2}$,

$z_1=1$, $z_2=2$.

$z^2-3z+2=(z-1)(z-2)\Rightarrow(z-1)(z^2-3z+2)=(z-1)^2(z-2)$

Таким образом, функция имеет два нуля: точки $z=1$ и $z=2$. Определим кратность этих нулей:

1) $z=1$, $\quad f(z)=(z-1)^2\cdot g(z)$, где $g(z)=z-2$,

$g(1)=1-2=-1\neq 0\Rightarrow z=1$ – нуль кратности 2 функции $f(z)$.

2) $z=2$, $f(z)=(z-2)\cdot g(z)$, где $g(z)=(z-1)^2$,

$g(2)=(2-1)^2=1\neq 0\Rightarrow z=2$ – нуль кратности 1 функции $f(z)$.

Теорема 2. (О связи между нулем и полюсом). Пусть $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – функции, аналитические в точке z_0, причем точка z_0 является нулем кратности n функции $\psi(z)$ и не является нулем

функции $\varphi(z)$. Тогда точка z_0 является полюсом порядка n функции

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

Пример. Найти и классифицировать особые точки функции

$$f(z)=\frac{e^z}{(z+3i)(z^2+9)}.$$

Решение. Разложим знаменатель дроби на множители:

$$z^2+9=z^2-i^2 3^2=(z-3i)(z+3i)\Rightarrow\quad f(z)=\frac{e^z}{(z-3i)(z+3i)^2}.$$

Таким образом, функция имеет две особые точки: $z=3i$, $z=-3i$. Определим тип этих особых точек с помощью теорем 1 и 2:

1) $z=3i$, $\quad\psi(z)=(z-3i)g(z)$, $\quad g(z)=(z+3i)^2$,

$g(3i)=(3i+3i)^2=-36\neq 0\Rightarrow z=3i$ – нуль кратности 1 знаменателя дроби, $\varphi(3i)=e^{3i}\neq 0\Rightarrow z=3i$ – простой полюс функции $f(z)$;

2) $z=-3i$, $\psi(z)=(z+3i)g(z)$,

$g(z)=z-3i$, $g(-3i)=-6i\neq 0\Rightarrow z=-3i$ – нуль кратности 1 знаменателя дроби, $\varphi(-3i)=e^{-3i}\neq 0\Rightarrow z=-3i$ – полюс второго порядка функции $f(z)$.

Теорема 3. Пусть $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – функции, аналитические в точке z_0, причем точка z_0 является нулем кратности n функции $\varphi(z)$ и нулем кратности m функции $\psi(z)$. Тогда

1) Если $n\geq m$, то точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$.
2) Если $n<m$, то точка z_0 является полюсом порядка $m-n$ функции $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$.

12. Вычеты

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется коэффициент C_{-1} (коэффициент при $\dfrac{1}{z-z_0}$) разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0. Вычет функции $f(z)$ в точке z_0 обозначается через $\operatorname*{res}_{z_0} f(z)$.

Пример. Найти вычет функции $f(z)=z^3e^{2/z}$ в особой точке.

Решение. Особой точкой функции $f(z)$ является точка $z = 0$. Разложим функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$.

$$e^z = 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots,$$

$$e^{\frac{2}{z}} = 1+\frac{2}{z}+\frac{4}{2!z^2}+\frac{8}{3!z^3}+\frac{16}{4!z^4}+\ldots,$$

$$z^3e^{\frac{2}{z}} = z^3+2z^2+2z+\frac{4}{3}+\frac{2}{3z}+\ldots.$$

По определению вычетом функции в точке $z = 0$ является коэффициент при $1/z$. Отсюда $\operatorname*{res}_0 z^3e^{2/z}=2/3$.

Вычеты функции в полюсах можно вычислять, не разлагая функцию в ряд Лорана. Если z_0 – простой полюс функции $f(z)$, то вычет функции в точке z_0 вычисляется по формуле

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z). \tag{14}$$

Если z_0 – полюс порядка n функции $f(z)$, где $n\ge 2$, то вычет функции в точке z_0 находится по формуле

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right] \tag{15}$$

Пример. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+3i)(z^2+9)}$ в особых точках.

Решение. Как было показано в примере 1 п. 11. особыми точками функции являются точки $z=-3i$ и $z=3i$, причем точка $z = -3i$ является полюсом второго порядка, а точка $z = 3i$ является простым полюсом функции. Отсюда, по формулам (14) и (15) получаем:

$$\operatorname*{res}_{3i}\frac{e^z}{(z+3i)(z^2+9)}=\lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{e^z}{(z+3i)(z^2+9)}=\lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{e^z}{(z+3i)^2(z-3i)}$$

$$=\lim_{z\to 3i}\frac{e^z}{(z+3i)^2}=\frac{e^{3i}}{(3i+3i)^2}=-\frac{e^{3i}}{36},$$

$$\operatorname*{res}_{-3i}\frac{e^z}{(z+3i)(z^2+9)}=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -3i}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z+3i)^2\frac{e^z}{(z+3i)^2(z-3i)}\right]=$$

$$=\lim_{z\to -3i}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{z-3i}\right]=\lim_{z\to -3i}\frac{e^z(z-3i)-e^z}{(z-3i)^2}=\frac{e^{-3i}(-3i-3i)-e^{-3i}}{(-3i-3i)^2}=$$

$$=\frac{e^{-3i}(-6i-1)}{-36}=\frac{1}{36}e^{-3i}(1+6i).$$

13. Вычисление интеграла по замкнутому контуру с помощью вычетов

Теорема (основная теорема о вычетах). Пусть функция $f(z)$ аналитическая в области G за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и непрерывна на границе Г области G. Тогда справедливо равенство

$$\oint_{\Gamma} f(z)\partial z=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_k} f(z). \tag{16}$$

Правило вычисления интеграла по замкнутому контуру с помощью основной теоремы о вычетах:

1) Найти особые точки подынтегральной функции.

2) Нарисовать на комплексной плоскости контур интегрирования и особые точки функции.
3) Вычислить вычеты подынтегральной функции в тех особых точках, которые попали внутрь контура интегрирования.
4) Интеграл будет равен сумме данных вычетов, умноженной на $2\pi i$.

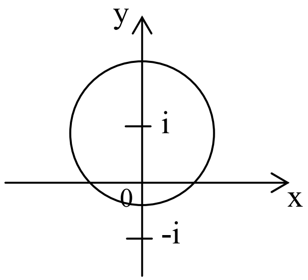
Пример 1. Вычислить $\oint\limits_{|z-i|=3/2} \dfrac{\cos z}{z^4+z^2}dz$

Решение. Найдем особые точки подынтегральной функции. Для этого разложим знаменатель функции на множители:

$z^4+z^2=(z^2+1)=z^2(z-i)(z+i)$.

Особыми точками функции являются точки $z_1=0$, $z_2=-i$, $z_3=i$.

Изобразим на комплексной плоскости точки z_1,z_2,z_3 и контур интегрирования.



Внутри контура интегрирования попадают особые точки z_1,z_2. Определим тип этих особых точек с помощью теорем 1 и 2 п. 11:

Обозначим: $\varphi(z)=\cos z$, $\psi(z)=z^4+z^2$

1) $z=0$, $\psi(z)=z^2g(z)$, $g(z)=z^2+1$, $g(0)=1\neq 0 \Rightarrow z=0$ – нуль кратности 2 знаменателя, $\varphi(0)=\cos 0=1\neq 0\Rightarrow z=0$ – полюс второго порядка функции $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^4+z^2}$.

2) $z=i$, $\psi(z)=(z-i)g(z)$, $g(z)=z^2(z+i)$, $g(i)=i^2(i+i)=-2i\neq 0\Rightarrow z=i$ – нуль кратности 1 для знаменателя, $\varphi(i)=\cos i\neq 0 \Rightarrow z=i$ – простой полюс функции

$$f(z)=\frac{\cos z}{z^4+z^2}.$$

Вычислим вычеты в этих точках с помощью формул (14) и (15):

$$\operatorname*{res}_0 \frac{\cos z}{z^4+z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\frac{\cos z}{z^2(z^2+1)}\right]=\lim_{z\to 0}\left[\frac{\cos z}{z^2+1}\right]'=\lim_{z\to 0}\frac{-\sin z(z^2+1)-2z\cos z}{(z^2+1)^2}=0$$

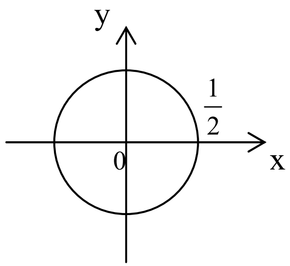
$$\operatorname*{res}_i \frac{\cos z}{z^4+z^2}=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{\cos z}{z^2(z-i)(z+i)}=\lim_{z\to i}\frac{\cos z}{z^2(z+i)}=\frac{\cos i}{i^2(i+i)}=-\frac{\cos i}{2i}=-2i\cos i$$

отсюда, согласно основной теоремы о вычетах, получаем:

$$\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{\cos z}{z^4+z^2}dz=2\pi i(0-2i\cos i)=4\pi\cos i$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1/2}\dfrac{\cos z-1}{z^5}dz$.

Решение. Подынтегральная функция имеет единственную особую точку $z=0$, которая лежит внутри контура интегрирования.



Так как числитель функции обращается в 0 в особой точке $z = 0$, то теорема 2 п. 11 в данном случае неприемлема. Поэтому найдем вычет в точке $z=0$, разлагая функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$:

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots ,$$

$$\cos z - 1 = -\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\frac{z^6}{720}+\ldots ,$$

$$\frac{\cos z-1}{z^5} = -\frac{1}{2z^3}+\frac{1}{24z}-\frac{z}{720}+\ldots .$$

Отсюда $\operatorname*{res}_0 \frac{\cos z -1}{z^5} = \frac{1}{24}$,

$$\oint_{|z|=1/2} \frac{\cos z-1}{z^5}\,dz = 2\pi i\cdot\frac{1}{24}=\frac{\pi i}{12}.$$

14. Вычисление несобственных интегралов от функций действительной переменной с помощью вычетов

Теорема. Пусть $f(z)$ – аналитическая в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа особых точек $z_1,\ z_2,\ z_3,\ldots,z_n$, и непрерывная функция на действительной оси.

Пусть, кроме этого, существует конечный предел $\lim\limits_{z\to\infty} z^2 f(z)$. Тогда справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_k} f(z). \qquad (17)$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Решение. Найдем особые точки подынтегральной функции. $x^2+1 = x^2-(-1) = x^2-i^2 = (x-i)(x+i)$. Отсюда

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{(x-i)^2(x+i)^2}$$

Подынтегральная функция имеет две особые точки $z=i$, $z=-i$, причем в верхней полуплоскости лежит только точка $z=i$.

Определим тип этой особой точки с помощью теорем 1, 2 п. 11:

$\psi(z) = (z-i)^2 g(z)$, $g(z) = (z+i)^2$,

$g(i) = (i+i)^2 = -4 \ne 0 \Rightarrow z=i$ – нуль кратности 2 для знаменателя.

$\varphi(i) = 1\ne 0 \Rightarrow z = i$ – полюс второго порядка функции

$$f(z) = \frac{1}{(x-i)^2(x+i)^2}.$$

Вычислим вычет в точке $z=i$

$$\operatorname*{res}_i \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\cdot\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to i}\left[(z+i)^{-2}\right]' = \lim_{z\to i}\left(-\frac{2}{(z+i)^3}\right) = -\frac{2}{(i+i)^3} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$$

Отсюда, в силу теоремы, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$.

15. Задачи для самостоятельного решения

А) Изобразить область, заданную неравенствами:

1) $|z-1|\le 1$, $|z-1|\ge 2$;

2) $|z-1|\le 2$, $\operatorname{Re} z>1$;

3) $|z-1-i|<1$, $0\le \arg z\le \frac{\pi}{4}$;

4) $|z|<2$, $\operatorname{Re} z\ge 1$, $0\le \arg z\le \frac{\pi}{3}$;

5) $|z+1|\ge 1$, $|z|<2$;

6) $|z-i|\le 2$, $0<\operatorname{Im} z<2$;

7) $1<z\bar{z}<2$, $\operatorname{Re} z>0$, $0\le \operatorname{Im} z\le 1$.

Б) Представить комплексное число в алгебраической форме:

1) $\ln(-1+i)$,

2) $\exp(2-\frac{\pi}{3}i)$,

3) $\ln(1+\sqrt{3}i)$,

4) $\cos(\frac{\pi}{6}+2i)$,

5) $\sin(\frac{\pi}{3}+i)$,

6) $\operatorname{sh}(2-\pi i)$,

7) $\operatorname{ch}(2+\frac{\pi i}{2})$.

В) Проверить, что функция $u(v)$ является действительной (соответственно, мнимой) частью аналитической функции $f(z)$. Найти функцию $f(z)$, если известно её значение в точке z_0:

1) $u=x^2-y^2+x$, $f(0)=0$,

2) $u=x^3-3xy^2+1$, $f(0)=1$,

3) $v=e^x\cos y$, $f(0)=1+i$,

4) $u=1-\sin ye^x$, $f(7-\pi i)=1-(e^z+7)i$.

5) $v=1-\frac{y}{x^2+y^2}$, $f(1)=1+i$,

6) $v=2xy-2y$, $f(0)=1$,

7) $v=3x^2y-y^3-y$, $f(0)=0$,

Г) Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой:

1) $\int_\Gamma (y+1-xi)dz$, где Г – отрезок, соединяющий точки $z_0=1$, $z_1=-i$.

2) $\int_\Gamma (x^2+y^2 i)dz$, где Г – отрезок прямой, соединяющий точки $z_0=1+i$, $z_1=2+3i$.

3) $\int_\Gamma (\bar{z}^2-7z)dz$, где Г – участок параболы $y=x^2$, соединяющий точки $z_0=0$, $z_1=1+i$.

4) $\int_\Gamma z\cdot\operatorname{Re} z^2dz$, где Г – участок окружности радиуса 3 с центром в нуле,
расположенный в первой четверти.

5) $\int_\Gamma \operatorname{Im} z^3dz$, Г - отрезок прямой, соединяющий точки $z_0=0$, $z_1=1+2i$.

6) $\int_\Gamma |z|\operatorname{Re} z^2dz$, Г – полуокружность радиуса 2 с центром в нуле,
расположенная в верхней полуплоскости.

7) $\int_\Gamma (3\bar{z}-2z)dz$, Г - участок параболы $y=x^2$, соединяющий точки
$z_0=0$, $z_1=2+4i$.

Д) Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью теоремы Коши или формулы Коши:

1) $\oint_{|z|=1}\frac{\sin z}{z-2i}dz$,

2) $\oint_{|z+i|=2}\frac{e^z}{z}dz$,

3) $\oint_{|z-2|=1/2}\frac{e^z}{z^2-2z}dz$,

4) $\oint_{|z-i|=2}\frac{z^2+1}{z-1}dz$.

5) $\oint_{|z+1+i|=2}\frac{e^z}{z^2+1}dz$,

6) $\oint_{|z-i|=1}\frac{\cos z+z}{z-i}dz$,

7) $\oint_{|z-1-i|=2}\frac{z}{z^2-1}dz$,

Е) Разложить данную функцию в ряд Лорана в окрестности точки z_0:

1) $(z-2)^3\cos\dfrac{2}{z-2}$, $z_0=2$.

2) $\dfrac{1}{(z+1)^5}e^{3(z+1)}$, $z_0=-1$.

3) $\dfrac{1}{z^5\ln(1+3z)}$, $z_0=0$.

4) $\dfrac{1}{(z+3)^4}\sin 2(z+3)$, $z_0=-3$.

5) $\sin\dfrac{z}{z-1}$, $z_0=1$.

6) $e^{\frac{z}{z-3}}$, $z_0=3$.

7) $z\cdot\cos\dfrac{z}{z-3}$, $z_0=3$.

Ж) Определить тип особых точек для данной функции:

1) $z\sin\dfrac{6}{z^2}$, 2) $(z+7)^3 e^{\frac{7}{(z+7)^2}}$,

3) $(z-1)\cos\dfrac{2}{(z-1)^3}$, 4) $\dfrac{1}{(z+3)^5}\sin 2(z+3)$,

5) $\dfrac{e^z}{(z^2+9)(z-3i)}$, 6) $\dfrac{z^2+1}{(z^2-3z+2)(z^2-1)}$,

7) $\dfrac{\cos z}{z^7+z^5}$.

З) Вычислить интеграл:

1) $\oint\limits_{|z-1-i|=2}\dfrac{2\,dz}{z^2(z-1)}$, 2) $\oint\limits_{|z-i|=3/2}\dfrac{e^z}{z^4+4z^2}dz$,

3) $\oint\limits_{|z-2|=1/2}\dfrac{\cos z}{(z^2-3z+2)^2}dz$, 4) $\oint\limits_{|z-1/2|=1}\dfrac{e^z+1}{z^2-z}dz$,

5) $\oint\limits_{|z-1+i|=2}\dfrac{\cos z}{ze^z-z}dz$, 6) $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\sin 2z^2}{z^7}dz$,

7) $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{e^z}{\cos z}dz$.

И) Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(x^2-x+1)^2}dx$, 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(x^2+4)^2(x^2+16)}dx$,

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2}dx$, 4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(x^2+2)^2(x^2+10)^2}dx$,

5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(1+x^2)^3}dx$, 6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(x^2-10x+29)^2}dx$,

7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2+10}{(x^2+4)^2}dx$.

Литература

1. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. Н., Наука, 1984;
2. Бугров Я.С., Никольский С.И. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М., Наука, 1980;
3. Краснов М.Д., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости.- Задачи и упражнения., М., Наука, 1971;
4. Сборник задач для втузов. Пол редакцией Ефимова А.В., Демидовича Б.П., т.2, М., Наука, 1981;
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах., ч.2, М., Высшая школа, 1986.