

1. Докажите, что для двух квадратных матриц $\hat{\mathbf{A}}$ и $\hat{\mathbf{B}}$ имеет место соотношение $\text{Tr}(\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}) = \text{Tr}(\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}})$.
2. Вычислите $e^{i\pi\hat{\mathbf{A}}}$, где $\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
3. Какие из перечисленных операторов являются эрмитовыми: \hat{p}_x^3 , $\hat{x}\hat{p}_x$, $\hat{x}\hat{p}_x\hat{x}$, $\hat{L}_x\hat{L}_y$, $\hat{L}_z\hat{p}_z$, $\hat{L}_x\hat{x}$?
4. Вычислите $e^{i\alpha\hat{p}_x/\hbar} f(x)$.
5. Найдите средние значения и дисперсии координаты и импульса в состоянии с волновой функцией $\psi = Ce^{\frac{ip_0x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}}$
6. Для частицы с энергией $E > 0$ и гамильтонианом $\hat{H} = \hat{p}_x^2 / (2m) + \alpha \delta(x)$ найти вероятности прохождения и отражения от δ -образного барьера ($\alpha > 0$).
7. Волновая функция состояния Для частицы с энергией $E > 0$ и гамильтонианом $\hat{H} = \hat{p}_x^2 / (2m) + \alpha \delta(x)$ найти вероятности прохождения и отражения от δ -образной ямы ($\alpha < 0$).
8. квантовой частицы имеет вид $\Psi(x) = \phi(x)e^{\frac{ip_0x}{\hbar}}$, где $\phi(x)$ - действительная функция, нормированная к единице (т.е. $\int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x) dx = 1$). Найти среднее значение импульса частицы.
9. В одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками и шириной a находится электрон, состояние которого описывается волновой функцией $\Psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}$. Определить вероятность обнаружения электрона в области $\frac{3}{8}a \leq x \leq \frac{5}{8}a$.
10. Найти дисперсию проекции спина на ось z в состоянии $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
11. Найти дисперсию проекции спина на ось x в состоянии $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.
12. Частица находится в одномерной потенциальной яме шириной a с бесконечными стенками в состоянии $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$. Найти среднее значение и дисперсию импульса p_x .
13. В одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками и шириной a находится электрон, состояние которого описывается волновой функцией $\Psi(x) = \sqrt{\frac{8}{3a}} \sin^2 \frac{\pi x}{a}$. Определить вероятность пребывания электрона в первом состоянии.
14. Для гамильтониана $\hat{H} = \hat{p}_x^2 / (2m)$ найдите операторы \hat{x} и \hat{p}_x в представлении Гейзенберга.
15. Найти собственные функции и собственные числа оператора проекции момента на ось x в матричном представлении:

$$\hat{L}_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$