1) Электрический заряд. Закон Кулона.

Эл. заряд – численная (количественная) характеристика состояния заряженного тела
Эл. поле – материальный объект, который осуществляет взаимодействие между заряженными телами и обнаруживаемое по действию на них.
Эл. поле материально, если оно может совершить работу, т.е. обладает энергией. Не сущ. заряда без тела.
Заряды бывают двух типов: условно обозначаемые “+” и “-”. Одинаково заряженные тела отталкиваются, разноимённо заряженные притягиваются. заряды всегда создаются парами (+ и -).
Закон сохранения эл. зарядов: в любой замкнутой системе алгебраическая сумма зарядов постоянна.
( )

$$-\frac{dq}{dt}=\oint_S \vec{j}\,d\vec{S}$$

Т.к. основное св-во заряда взаимодействие с некоторыми силами, то измерять заряд будем с помощью этих сил:

$$\frac{F_1}{F_2}=const=\frac{q_1}{q_2}$$

- отношение сил характеризует отношение зарядов. q_1 примем за эталон и назовем единицей заряда, тогда:

$$q_2=q_{эт}\frac{F_2}{F_{эт}}.$$

Опыт показывает, что сила спадает обратно пропорционально квадрату расстояния между зарядами.
Пусть a – характерный размер заряженных тел, r – расстояние между ними. В случае, если $a \ll r$, сила взаимодействия между телами определяется по формуле: $\vec{F}=\kappa\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, где q_1, q_2 - величина зарядов, κ - коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц.
k – с такой силой взаимодействуют 2 точечных заряда на расстоянии 1 м друг от друга
Закон Кулона:

$$\vec{F}=\kappa\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Гауссова система:

$$\kappa=1, F=\frac{q_1 q_2}{r^2}, [q]=H^{\frac{1}{2}}м.$$

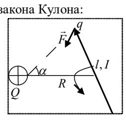
СГС: $[q]=дин^{\frac{1}{2}}см$ - величина заряда СГСЕ.
СИ: $\kappa=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, $[\varepsilon_0]=\frac{ф}{м}$.
1Кл = 3*10^9 ед. СГС
Экспериментальная основа закона Кулона:

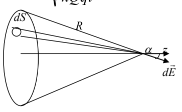
$$F=k\frac{Qq}{R^2}; M=F\frac{l}{2}\alpha$$

$$I\ddot{\alpha}=-k\frac{Qq}{R^2}\frac{l}{2}\alpha$$

$$\ddot{\alpha}=-\frac{kQql}{IR^2 2}\alpha; \ddot{\alpha}=-\omega^2\alpha$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2IR^2}{kQql}}$$





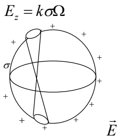
$$dq=\sigma dS; dS_\perp \perp R$$

$$dS_\perp=dS\cos\alpha$$

$$dE=k\frac{dq}{R^2}$$

$$dE_z=k\frac{dq}{R^2}\cos\alpha=\frac{k\sigma dS\cos\alpha}{R^2}$$

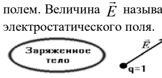
$$E_z=k\sigma\Omega$$



$\vec{E}=0$ - внутри сферы
С какой точностью E=0, с такой точностью мы берем «2» в законе Кулона при R^2.

2) Электрическое поле. Напряженность. Силовые линии. Теорема Гаусса для электростатического поля.

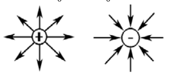
Эл. поле – материальный объект, который осуществляет взаимодействие между заряженными телами и обнаруживаемое по действию на них.
Эл. поле материально, если оно может совершить работу, т.е. обладает энергией. Не сущ. заряда без тела. На заряд действует электрическое поле. Сила рассматривается, как взаимодействие заряда с полем. Величина $\vec{E}$ называется *напряженностью* электростатического поля.



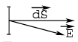
Частный случай для точечного заряда: $\vec{E}=\kappa\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$.
Из принципа суперпозиции для сил следует принцип суперпозиции полей. Пусть имеются n зарядов, $\vec{E}_n(\vec{r})$ – их поля. $\vec{E}(\vec{r})=\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i(\vec{r})$.

$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}$ - сила, которая действует на заряд, помещенный в данную точку поля.
Величина напряженности определяется густотой силовых линий. Силовые линии начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах. Касательная к силовой линии в каждой точке будет совпадать с направлением вектора напряженности электрического поля.

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{1}{4\pi R^2}=\frac{N}{S}$$



Рассмотрим некоторую поверхность S, в которой имеется электрическое поле. Выберем на поверхности S малую площадку dS, настолько малую, что ее можно считать частью плоскости. Построим нормаль к этой площадке.
$d\vec{S}=dS\cdot\vec{n}$.



Пусть dS настолько мало, что вектор электрического поля на dS постоянен. Введем величину $d\Phi$.

$$d\Phi=\left(\vec{E}\cdot d\vec{S}\right)=\left(\vec{E}\cdot\vec{n}\right)dS=EdS\cos\alpha.$$

Величина $d\Phi$ называется *потоком вектора* $\vec{E}$ через площадку dS. Если мы разобьем все поверхность S на площадки dS и их просуммируем, то получим *поток вектора* $\vec{E}$ через поверхность S.

$$\Phi=\int_S\left(\vec{E}\cdot d\vec{S}\right)=\int_S\left(\vec{E}\cdot\vec{n}\right)dS=\int_S EdS\cos\alpha$$

Теорема Гаусса: поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность S равен $\oint_S\left(\vec{E}d\vec{S}\right)=\kappa 4\pi q$,
где q – полный заряд, содержащийся внутри поверхности S.
Доказательство.
1)Точечный заряд и поверхность в виде сферы с центром в точечном заряде. Поскольку модуль вектора напряженности поля точечного заряды определяется r^2, то модуль вектора напряженности во всех точках сферы постоянен. Из закона Кулона следует, что вектор напряженности направлен по радиусу.

$$\oint_S\left(\vec{E}\cdot d\vec{S}\right)=\oint\left(\vec{E}\cdot\vec{n}\right)dS=\oint_S E\cdot dS=E\oint_S dS=E4\pi r^2=\frac{\kappa q}{r^2}r^2 4\pi=\kappa 4\pi q$$

2)Точечный заряд и произвольная поверхность, окружающая точечный заряд. Выберем площадку dS на поверхности. Она должна быть настолько мала. Чтобы можно было ее считать плоскостью и вектор напряженности электрического поля на ней считать постоянным.

$$d\Phi=\left(\vec{E}\cdot d\vec{S}\right)=\left(\vec{E}\cdot\vec{n}\right)dS=E\cos\alpha dS=E\cdot dS_0=\frac{\kappa q}{r^2}dS_0$$

, где $\frac{dS_0}{r^2}$ – конус, под которым из точки q можно увидеть выбранную площадку.

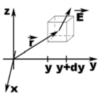
$$d\Phi=\kappa q d\Omega$$

$$\Phi=\oint_S\kappa q d\Omega=\kappa q\oint_S d\Omega=\kappa 4\pi q$$

3)Заряженное тело внутри произвольной поверхности. Разобьем заряженное тело на множество кусочков, удовлетворяющих второму постулату. Введем функцию плотности заряда $\rho(\vec{r})$. По доказанному выше следует, что для каждого точечного заряда теорема Гаусса выполняется. $d\Phi_{dV}=4\pi\kappa\rho(\vec{r})dV,$
где $\rho(\vec{r})dV=dq$.

$$\Phi=\oint_V 4\pi\kappa\rho(\vec{r})dV=4\pi\kappa\oint_V\rho(\vec{r})dV=4\pi\kappa q$$

Пусть в пространстве задано электрическое поле и распределен заряд, распределение задано характеризующей функцией $\rho=\frac{dq}{dV}$, $\rho=\rho(\vec{r})$.



Построим кубик с гранями перпендикулярными и параллельными плоскостям осей с ребрами $dx; dy; dz$ малыми настолько, что ρ и E внутри кубика можно было бы считать постоянными (внутри кубика E=const, но на гранях уже может различаться). Тогда

$$d\Phi=\left[E_y(x,y+dy,z)*dx*dz-E_y(x,y,z)*dx*dz\right]+$$

$$+\left[E_x(x+dx,y,z)*dy*dz-E_x(x,y,z)*dy*dz\right]+$$

$$+\left[E_z(x,y,z+dz)*dx*dy-E_z(x,y,z)*dx*dy\right]=$$

$$=\left[\frac{dE_y}{dy}+\frac{dE_x}{dx}+\frac{dE_z}{dz}\right]*dx*dy*dz$$

Откуда получаем

$$d\Phi=\left[\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right]*dV=$$

$$=div\vec{E}*dV\overset{по\_теор\_Гаусса}{=}k4\pi\rho*dV$$

дифференциальную форму теоремы Гаусса:

$$div\vec{E}(x,y,z)=k\pi 4*\rho(x,y,z).$$

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(E_R R^2\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

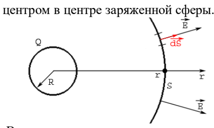
ПРИМЕРЫ:
1) Поле заряженной сферы.
R – радиус сферы, Q – заряд, равномерно распределенный по поверхности сферы .
1) $r>R$ Выберем точку, находящуюся на расстоянии r от центра сферы. Окружим сферу воображаемой поверхностью, проходящей через эту точку, и для нее запишем теорему Гаусса. Поле выбранной поверхности симметрично, так как симметрично поле источника.

$$\Phi=\oint_S\left(\vec{E}\cdot d\vec{S}\right)=\oint_S E\cdot dS=E\oint_S dS=E4\pi r^2=4\pi\kappa Q$$

$$E=\frac{\kappa Q}{r^2}, \vec{E}=\frac{\kappa Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Большая сфера создает такое же поле, как и точечный заряд.

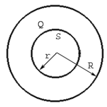
2)Рассчитаем поле заряженной сферы. Пусть есть заряженная сфера радиуса R с положительным зарядом Q, найдем электростатическое поле этой сферы на некотором расстоянии r от её центра. Пусть $r>R$. Проведем сферу S радиуса r с центром в центре заряженной сферы.



В силу симметричности задачи очевидно, что поле создаваемое заряженной сферой на сфере радиуса r везде одинаково по модулю и направлено по радиусу. Тогда поток через эту сферу запишется так:

$$\Phi=\oint_S\left(\vec{E}*d\vec{S}\right)=E\oint_S dS=E4\pi*r^{2\,2}\overset{по\_Теор\_Гаусса}{=}4\pi*k*Q$$

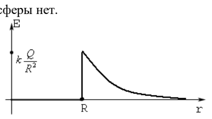
.
Откуда - $\vec{E}=k*\frac{Q}{r^2}*\frac{\vec{r}}{r}$. Т.е. заряженная сфера создаёт вне себя такое же поле как и такой же точечный заряд находящийся в центре этой сферы
Пусть $r<R$.



Тогда поток через эту сферу запишется так:
.

$$\Phi=\oint_S\left(\vec{E}*d\vec{S}\right)=E\oint_S dS=E4\pi*r^{2\,2}\overset{по\_Теор\_Гаусса}{=}0$$

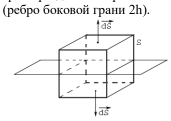
Откуда - $\vec{E}=\vec{0}$. Т.е. поля внутри заряженной сферы нет.



3)Рассмотрим поле бесконечной, однородной, тонкой, заряженной плоскости. Выберем площадку ΔS с зарядом Δq.
- поверхностная плотность

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta S}=\frac{dq}{dS}=\sigma$$

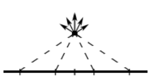
заряда. $\sigma=\sigma(\vec{r})$ - общий случай. Если $\sigma=const$ то плоскость однородно заряженная.
Рассмотрим однородно заряженную плоскость, с плотностью заряда σ. Выберем на ней некоторое $d\vec{S}$, малое настолько, что $E_{d\vec{S}}$ можно считать постоянным. Рассмотрим параллелепипед S, такой что его верхние грани параллельны заряженной плоскости и по площади равны dS, а боковые грани разделены заряженной плоскостью пополам (ребро боковой грани 2h).



Тогда поток через этот параллелепипед равен

$$d\Phi=d\Phi_{вер}+d\Phi_{ниж}+d\Phi_{бок}.$$

Рассмотрим некоторую точку не лежащую на данной плоскости. Опустим из неё перпендикуляр на данную плоскость и от полученной точки отсчитаем в разные стороны симметричные полоски одинаковой длины, малые настолько, что создаваемое ими поле можно считать одинаковым.

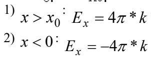


Проссумируем попарно напряженности от всех полосок. Из элементарной геометрии очевидно, что $\vec{E}_{сумм}$ располагается по нормали к плоскости.
Тогда $d\Phi_{бок}$ =0, т.к. вектор площади боковой поверхности перпендикулярен напряженности. Но очевидно, что $d\Phi_{вер}=d\Phi_{ниж}$. Откуда

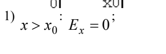
$$d\Phi=2d\Phi_{вер}=2E(h)*dS\overset{по\_теор\_Гаусса}{=}4\pi k*\sigma*dS$$

$$E=2\pi k*\sigma.$$

Т.о. поле зависит только от σ и по модулю одинаково в каждой точке.
4) Найдем поле 2-х заряженных бесконечных плоскостей.
Пусть обе плоскости заряжены одинаково. По принципу суперпозиции обе плоскости действуют независимо.



1) $x>x_0$: $E_x=4\pi*k*\sigma$;
2) $x<0$: $E_x=-4\pi*k*\sigma$;
3) $0<x<x_0$: $E_x=0$.
Пусть обе плоскости заряжены разноимённо.



1) $x>x_0$: $E_x=0$;
2) $x<0$: $E_x=0$;
3) $0<x<x_0$: $E_x=-4\pi*k*\sigma$.

3) Потенциал. Связь потенциала и напряженности. Потенциальность электростатического поля.

Найдём работу сил электростатического поля по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2.

$$A=\int_{1\to 2}(\vec{F}d\vec{r})=q\int_{1\to 2}(\vec{E}d\vec{r})=q\int_{1\to 2}k\frac{Q}{r^2}*\frac{\vec{r}}{r}d\vec{r}=qQk\int_{1\to 2}\frac{1}{r^3}(\vec{r}d\vec{r})$$

.

$$(\vec{r}d\vec{r})=r*dr*Cos(\theta).$$

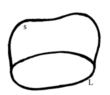
$dr*Cos(\theta)=d|\vec{r}|$ - изменение $\vec{r}$ по модулю.
Тогда

$$A_{1\to 2}=qQk\int\frac{dr}{r^2}=qQk\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

Т.е. важно лишь изменение расстояния. Работа сил поля точечного заряда по перемещению заряда из точки 1 в точку 2 не зависит от пути. Т.о.

$$\oint\vec{F}d\vec{r}=0.$$

<u>Теор.:</u> Циркуляция вектора напряженности электростатического поля равна нулю.
Работа сил электростатического поля по перемещению заряда по замкнутому контуру равна нулю $\oint\vec{E}\vec{dr}=0$. Эта формула справедлива не только для поля точечного заряда, но и для электростатического поля вообще.
Работа сил электростатического поля по замкнутому контуру $\oint\vec{E}\vec{dr}$ называется циркуляцией вектора напряженности электростатического поля.
Равенство $\oint\vec{E}\vec{dr}=0$ называется теоремой о циркуляции в интегральной форме.
Если имеется произвольный замкнутый контур L, и на него натянута произвольная замкнутая поверхность S, наложено электростатическое поле $\vec{E}$, то согласно т. Стокса, циркуляция вектора напряженности электростатического поля по контуру L равна потоку ротора поля $\vec{E}$ через поверхность S.

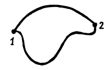


$$\oint_L\vec{E}\vec{dr}=\oint_s rot\vec{E}\cdot\vec{ds}$$

Поскольку $\oint_L\vec{E}\vec{dr}=0$, то и $\oint_s rot\vec{E}\cdot\vec{ds}=0$ при любой форме поверхности S. Теперь легко записать теорему о циркуляции в дифференциальной форме $rot\vec{E}=0$, она справедлива в каждой точке пространства.
Дифференциальный оператор набла $\vec{\nabla}$ - это вектор, компоненты которого – частные производные по координатам $\vec{\nabla}=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$.
Rot – векторное произведение оператора набла $\vec{\nabla}$ на вектор поля, ротор которого мы берем. Записав $rot\vec{E}$ в виде символического определителя, теорему о циркуляции вектора $\vec{E}$ можно представить следующим образом

$$rot\vec{E}=\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_X & E_Y & E_Z\end{vmatrix}=0$$

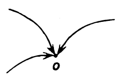
Так же следует отметить, что в отличие от т. Гаусса, т. о циркуляции в таком виде справедлива только в электростатическом поле, т.е. когда заряды неподвижны, или движутся равномерно. Если поля переменные т. о циркуляции не выполняется.
Рассмотрим произвольное электростатическое поле а пространстве. В это поле поместим единичный положительный заряд. Выберем в пространстве две точки 1 и 2. Найдем работу сил поля по перемещению единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2.



Эту работу будем обозначать следующим образом

$$A_{1\to 2}=\varphi_1-\varphi_2\equiv-\Delta\varphi.$$

А по определению, это интеграл по некоторой траектории $A_{1\to 2}=\int_{1\to 2}\left(\vec{E}d\vec{r}\right)$. Эта работа не зависит от пути, поэтому такую работу можно назвать характеристикой этих двух точек данного поля. Данная работа называется разностью потенциалов между точками 1 и 2.
Если рассматриваемое нами поле постоянно, то можно зафиксировать одну любую точку и объявить, что потенциал этой точки равен нулю $\varphi_2=0$. Работа по перемещению заряда из любой точки 1 в фиксированную точку, у которой потенциал считается равным нулю, характеризует не пару точек, а одну, из которой движется заряд. Работу по перемещению из любой точки пространства в некоторую фиксированную, будем называть потенциалом, причем потенциал этой фиксированной точки не обязательно равен нулю. Таким образом, каждую точку пространства можно охарактеризовать потенциалом, тем самым мы получим скалярное поле.



$$-d\varphi = \vec{E}d\vec{l}$$

$$\vec{E}d\vec{l} = \vec{E}\vec{i}\,dx = E_x dx$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

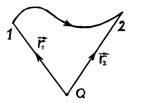
$$\vec{E} = -(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k})$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

$$\vec{E} = -grad\varphi.$$

Мы умеем рисовать силовые линии поля. Нельзя ли нарисовать поле с точки зрения скаляра.
Возьмем единичный положительный заряд и переместим его из точки A на бесконечно малый отрезок так, чтобы работа поля при этом была равна нулю. То есть, мы должны шагнуть в направлении, перпендикулярном силовой линии поля в этой точке. Это условие удовлетворяет не только отрезку, но и плоскости. Таким образом, мы можем выделить в окрестности точки некоторую плоскость dS, перпендикулярную вектору $\vec{E}$.
Оказывается, что точка A лежит на некоторой поверхности произвольного вида. При любых перемещениях по ней работа сил поля равна нулю. Такая поверхность называется *эквипотенциальной*. В каждой точке эта поверхность перпендикулярна силовой линии.

ПРИМЕР:
Рассмотрим точечный заряд величины Q. Разность потенциалов поля, создаваемого точечным зарядом равна



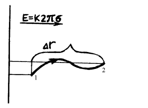
$$\varphi_1 - \varphi_2 = kQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

. Разность потенциалов больше нуля $\varphi_1 - \varphi_2 > 0$, если $Q > 0$ и $r_1 < r_2$. Чем ближе к заряду, тем потенциал больше. Чтобы считать $\varphi_2 = 0$, точку 2 надо взять в бесконечности $r_2 \to \infty$. В данном случае потенциал произвольной точки 1 определяется как

$$\varphi_1 = k\frac{Q}{r_1}$$

- работа сил поля точечного заряда по перемещению единичного положительного точечного заряда из точки 1 в бесконечность.
Пример2. рассмотрим бесконечную заряженную плоскость. Разность потенциалов поля, создаваемого бесконечной заряженной плоскостью.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{1\to 2} k2\pi\sigma \cdot dr = k2\pi\sigma \cdot \int_{r_1}^{r_2} dr = k2\pi\sigma \cdot \Delta r$$



Предположим, что потенциал – работа по перемещению положительного единичного заряда из точки 1 в бесконечность, тогда

$$\varphi_1 = \int_{r_1}^{\infty} k2\pi\sigma \cdot dr \to \infty$$

Это означает, что ноль мы должны задать в любой конкретной точке, но не бесконечности. Если к числам φ_1 и φ_2 добавить любое число, то $\Delta\varphi$ не изменится. В этом смысле потенциал – величина относительная. Для нас представляет интерес только разность потенциалов, а не сам потенциал.

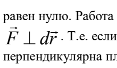
4) Теорема единственности. Метод изображений.

Зная распределение зарядов найти потенциал и напряжённость в каждой точке.

$$\varphi(x_0) - ?$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=x_0} = E(x_0) - ?$$

Нужно знать граничные условия.
Если известны граничные условия по координате, то сущ. единственное решение.
Если при заданном распределении заряда $\rho(x,y,z)$ и граничных условиях φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ мы угадали решение $\varphi(x,y,z)$, которое удовлетворяет уравнению Пуассона ($\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$), то другого можно не искать, это решение единственное с точностью до константы. Существует много доказательств теоремы единственности. Мы угадываем решение, исходя из начальных условий, и считаем, что в некоторой области пространства оно единственное.
На некотором расстоянии от заряда находится бесконечная незаряженная проводящая плоскость. Надо найти силу взаимодействия точечного заряда и данной плоскости.
Попробуем найти систему зарядов такую, чтобы сила взаимодействия была такой же. Проводник – эквипотенциальная поверхность. Плоскость краями уходит в бесконечность. Пусть $\varphi(\infty) = 0$. Мы должны подобрать заряды так, чтобы φ везде был равен нулю. Работа силы равна нулю, если $\vec{F} \perp d\vec{r}$. Т.е. если напряжённость перпендикулярна плоскости. Очевидно, что одним из вариантов искомой системы зарядов будет симметричный заряд противоположного знака.



Т.о.

$$F = k\frac{q^2}{4d^2}$$

- сила взаимодействия точечного заряда и плоскости, где d – расстояние между зарядом и плоскостью.

$$E_\tau = 0$$

$$\varphi(A) = \varphi_+ + \varphi_- = 0$$

$$R = \frac{d}{\cos\theta}$$

$$E_n = E_{n+} + E_{n-} = \frac{2kq}{d^2}\cos^3\theta$$

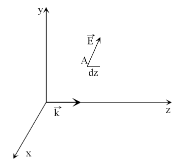
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}; \sigma = -\frac{q\cos^3\theta}{2\pi d^2}$$

$$l = dtg\theta; dS = 2\pi dl$$

$$dl = \frac{dd\theta}{\cos^2\theta}; dq = -q\sin\theta d\theta$$

5) Уравнения Пуассона и Лапласа.

Рассмотрим в пространстве произвольное электростатическое поле. Введем декартовую систему координат. Зафиксируем некоторую точку А и построим вокруг неё меленький кубик, на столько маленький, что внутри него не меняется поле и объёмная плотность заряда. Его ребра параллельны осям координат и называются dx, dy и dz. Поместим туда единичный положительный заряд с посчитаем работу по его перемещению вдоль оси oz на dz.



Эта работа равна
$A = \varphi_1 - \varphi_2 = -d\varphi = (\vec{E}\vec{k})dz = E_z dz$, где $\vec{k}$ -орт.
Из этого равенства получим следующее соотношение $E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$. Проделав ту же операцию по другим координатам получим:
$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$. Теперь сконструируем вектор

$$\vec{E} = -\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -grad\varphi$$

Теперь вспомним т. Гаусса в дифференциальной форме: $divE(\vec{r}) = k4\pi\rho(\vec{r})$
Дивергенция вектора $\vec{E}$ выражается следующим образом:

$$divE(\vec{r}) = (\vec{\nabla}\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z},$$

а дивергенция от градиента потенциала:

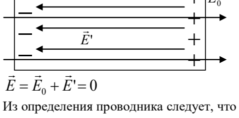
$$div \cdot grad\varphi = (\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\varphi)) = \vec{\nabla}\left(\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi$$

где $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа (лапласиан) обозначается символами $\nabla^2\varphi$, или $\Delta\varphi$. Итак, получается, что в электростатике справедлива следующая формула:
$\Delta\varphi = -k4\pi\rho(\vec{r})$ видим, что потенциал определяется через объёмную плотность заряда в точке. Это уравнение можно решить в очень ограниченном числе случаев.
Следует заметить частный случай, когда мы рассматриваем точку, в которой нет зарядов, но рядом может находиться заряженное тело, тогда в этой точке $\Delta\varphi = 0$.

6) Электрическое поле в присутствии проводников. Граничные условия для вектора E.

Проводник – среда, содержащая свободные заряды, которые можно свободно перемещать по объему без совершения работы. Носители заряда – электроны. $\rho = 0$ - совокупная плотность зарядов. Идеальный проводник – эквипотенциальное тело. Внутри металла поле равно нулю.

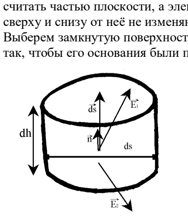


$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0$$

Из определения проводника следует, что во всех точках проводника потенциалы одинаковы.

$$\vec{E} = -grad\varphi, \varphi = const \Rightarrow \vec{E} = 0.$$

Внутри металла свободных зарядов нет, они только на поверхности.
Рассмотрим тонкую поверхность. Пусть $\sigma(\vec{r})$ - поверхностная плотность заряда. Исследуем особенности электростатического поля сверху и снизу от поверхности. Выберем на поверхности площадку ds, на столько малую, что её можно считать частью плоскости, а электрическое поле сверху и снизу от неё не изменяются.
Выберем замкнутую поверхность в виде цилиндра так, чтобы его основания были параллельны площадке ds.

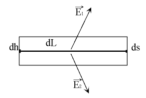


Поскольку цилиндрик на столько мал, что вектора $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ на его поверхности постоянны, то поток электростатического поля $E(\vec{r})$ через него можно записать следующим образом

$$d\phi = (\vec{E}_1 d\vec{s}) - (\vec{E}_2 d\vec{s}) + d\phi_{бок} = (\vec{E}_1\vec{n})ds - (\vec{E}_2\vec{n})ds + d\phi_{бок} =$$

$$= (E_{1n} - E_{2n})ds + d\phi_{бок}$$

, где E_{1n} и E_{2n} проекции векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ на перпендикуляр к площадке, $d\phi_{бок}$ - поток через боковую поверхность цилиндра (им пренебрегаем).
По теореме Гаусса $(E_{1n} - E_{2n})ds = k4\pi \cdot dq$, где $dq = \sigma(\vec{r})ds$ - заряд на площадке, откуда $E_{1n} - E_{2n} = k4\pi \cdot \sigma(\vec{r})$. Итак, при переходе через поверхность нормальная компонента вектора $\vec{E}$ испытывает скачок, равный $\sigma(\vec{r})$ с точностью до константы $k4\pi$.
Найдем соотношение для тангенциальной компоненты вектора $\vec{E}$ при переходе через поверхность. Опять же выберем на поверхности площадку ds, на столько малую, что её можно считать частью плоскости, а электрическое поле сверху и снизу от неё не изменяются.

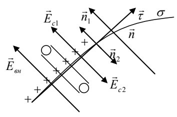


Теперь выберем замкнутый контур в виде прямоугольника т.о., чтобы площадка ds его пересекала под прямым углом. Длины сторон прямоугольника, параллельных площадке равны dl, а боковые dh. Запишем циркуляцию вектора $\vec{E}$ по замкнутому контуру L

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = (\vec{E}_1 d\vec{l}) - (\vec{E}_2 d\vec{l}) + L_{бок} \xrightarrow{dh\to 0} \vec{E}_1 d\vec{l} - \vec{E}_2 d\vec{l} =,$$

$$= (E_{1\tau} - E_{2\tau})dl = 0$$

где $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau}$ - тангенциальные составляющие вектора $\vec{E}$ к площадке. $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ тангенциальная составляющая вектора $\vec{E}$ всегда непрерывна.



$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_{вн} + \vec{E}_c$$

$$E_\tau = E_{\tau вн} + E_{\tau c} = 0$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_в + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}_1$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_в + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}_2$$

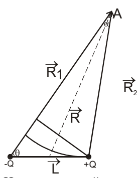
$$\vec{E}_{вн} = \frac{\vec{E}_1 + \vec{E}_2}{2}; (\vec{n}_2 = -\vec{n}_1)$$

7) Электрический диполь. Поле диполя. Энергия диполя в поле.

Электрическим диполем называется пара точечных зарядов разного знака, одинаковых по модулю, жестко закрепленных на одинаковом расстоянии друг от друга. Суммарный заряд диполя равен нулю.
Для характеристики диполя вводят понятие *дипольного момента* ($\vec{d}$). Проведем вектор из отрицательного заряда в положительный. Тогда дипольным моментом называется вектор $\vec{d} = q \cdot \vec{l}$.

$$[d] = K \cdot м.$$

Рассчитаем поле диполя.



Наша задача найти поле в точке A.
Это можно сделать двумя способами:
1) из принципа суперпозиции;
2) используя свойство аддитивности работы.
Если есть два поля и тело перемещать, то можно найти работу сил первого поля и работу сил второго поля по перемещению этого тела.
Потенциал точки A относительно бесконечности – это работа сил поля при перемещении единичного положительного заряда из точки A в бесконечность по любой траектории.

$$\varphi_1 = \kappa \cdot \frac{-q}{R_1} \qquad \varphi_2 = \kappa \cdot \frac{+q}{R_2}$$

$$\varphi(A) = \kappa \cdot \left(\frac{q}{R_2} - \frac{q}{R_1}\right) = kq \cdot \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 \cdot R_2}\right)$$

Представим, что $R_1, R_2 >> l$. Запишем потенциал в точке A для данного приближения. Тогда $R_1 \cdot R_2 = R^2$, а дуга окружности переходит в перпендикуляр, поэтому $R_1 - R_2 \approx l \cdot \cos\theta$.

$$\varphi(A) \approx kq \cdot \frac{l \cdot \cos\theta}{R^2}.$$

Потенциал поля точечного заряда на больших расстояниях убывает пропорционально первой степени расстояния, а потенциал поля диполя – пропорционально второй степени.

$$\varphi(A) = \kappa\frac{q \cdot l \cdot \cos\vartheta \cdot R}{R^3} = \kappa\frac{d \cdot R \cdot \cos\theta}{R^3} = \kappa\frac{(\vec{d} \cdot \vec{R})}{R^3}$$

$$\vec{E}_\parallel = \frac{k2\vec{p}}{R^3}; \vec{E}_\perp = -\frac{k\vec{p}}{R^3}$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\vec{p}_2 = \vec{p} - \vec{p}_1$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{k}{R^3}(2\vec{p}_1 - \vec{p}_2) = \frac{k}{R^3}(3\vec{p}_1 - \vec{p})$$

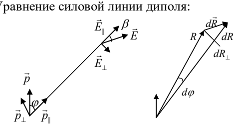
$$p_1 = p\cos\alpha = \frac{\vec{p}\vec{R}}{R}$$

$$\vec{p}_1 = \frac{(\vec{p}_1\vec{R})\vec{R}}{R^2}$$

$$E^2 = \frac{k^2}{R^6}(9p_1^2 + p^2 - 6\vec{p}_1\vec{p}) = \frac{k^2p^2}{R^6}(3\cos^2\alpha + 1)$$

$$E = \frac{kp}{R^3}\sqrt{3\cos^2\alpha + 1}$$

Поле диполя убывает пропорционально третьей степени расстояния.
Уравнение силовой линии диполя:



dR – удлинение расстояния, $d\vec{R}$ - перемещение

$$tg\varphi = \frac{p_\perp}{p_\parallel}; tg\beta = \frac{E_\perp}{E_\parallel} = \frac{p_\perp}{2p_\parallel} = \frac{1}{2}tg\varphi$$

перемещение происходит по силовой линии

$$dR_\perp = dRtg\beta = Rd\varphi$$

$$\frac{d\varphi}{tg\varphi} = \frac{dR}{2R}$$

$$\frac{d\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{dR}{2R}$$

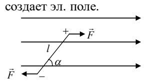
$$\ln\sin\varphi = \frac{1}{2}(\ln R + C)$$

$$R(\varphi) = R_0\sin^2\varphi$$

Дипольный момент может хар-ть не только систему пары зарядов, но любую систему зарядов, в которой $\sum q_i = 0$:

$$\vec{p} = \sum q_i\vec{R}_i = \sum q_i(\vec{R}'_i + \vec{a}) = \sum q_i\vec{R}'_i + \vec{a}\sum q_i = \sum q_i\vec{R}'_i$$

Чтобы система имела дипольный момент, центр положительных зарядов не должен совпадать с центром отрицательных зарядов, но такая система создает эл. поле.



Работа совершается полем, значит диполь в поле обладает энергией. В неоднородном поле диполь поворачивается и втягивается в область сильного поля.

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$\vec{M} = [\vec{l} * \vec{F}] = [\vec{l} * q * \vec{E}] = [p * \vec{E}]$$

$$M = pE\sin\alpha$$

положения равновесия соответствуют:
$\alpha = 0$ - устойчивое положение равновесия
$\alpha = \pi$ - неустойчивое положение равновесия
При вращении диполя эл. поле совершает над ним работу:

$$\delta A = Md\alpha = pE\sin\alpha d\alpha = -pEd(\cos\alpha)$$

$$W = -pE\cos\alpha$$

$$W = -\vec{p} * \vec{E}$$

$$Неоднородное\_поле:$$

$$\vec{F} = q(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)$$

$$\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\partial E}{\partial x}l_x + \frac{\partial E}{\partial y}l_y + \frac{\partial E}{\partial z}l_z =$$

$$= \frac{\partial E}{\partial x}dx + \frac{\partial E}{\partial y}dy + \frac{\partial E}{\partial z}dz$$

$$\vec{F} = \frac{\partial E}{\partial x}p_x + \frac{\partial E}{\partial y}p_y + \frac{\partial E}{\partial z}p_z = (\vec{p} * \nabla)\vec{E}$$

$$-\delta A = dW = -p\cos\alpha dE + pE\sin\alpha d\alpha$$

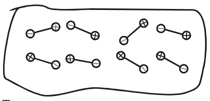
- работа по втягиванию диполя в поле.

8) Диэлектрики. Поляризация диэлектриков. Вектор P.

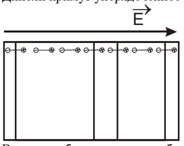
Диэлектрики (изоляторы) – это конденсированные среды, в которых отсутствуют свободные (свободно перемещающиеся по объему) заряды.
На самом деле в диэлектрике есть заряды, и они перемещаются, но их движение ограничено (например, в пределах одного ангстрема).
Пусть у нас есть диэлектрик (в нем много зарядов). Образуем внутри него полость порядка нескольких десятков атомных объемов. Поместим весь этот образец во внешнее электрическое поле. Наша задача: узнать какое поле будет внутри полости. В общем случае – сложное. По принципу суперпозиции это будет сумма внешнего поля и всех полей, которые создаются зарядами, находящимися внутри диэлектрика. Усредним поле $\vec{E}$ в каждой точке выбранной полости. То есть в каждую точку будем помещать единичный положительный заряд и измерять силу, которая на него действует.

$$\vec{E} = \frac{1}{V}\int_V \vec{E}(\vec{r})dV.$$

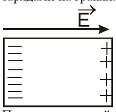
Вот так полученный вектор $\vec{E}$, будем называть *напряженностью электрического поля диэлектрика.*
Представим, что диэлектрик состоит из диполей. Причем они совершенно неупорядочены.



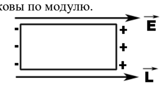
Теперь поместим диэлектрик во внешнее электрическое поле.
Диполи примут упорядоченное положение.



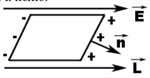
Выделим объемчик внутри образца. Его заряд равен нулю. Таким образом, образовалась поверхность с зарядами на гранях.



Повороты диполей могут быть небольшими, необязательно, что они выстроятся по прямой, но все равно поле внутри диэлектрика будет равно нулю. Поле диэлектрика может быть найдено, как суперпозиция двух полей.
$\vec l, \sigma$ (поверхностная плотность заряда на стенках образца, *поляризационные заряды*). Пусть площадь стенок равна S.
Тогда дипольный момент всего образца по определению равен $\vec d = \sigma S \vec l$ · V - объем образца.
$\frac{\vec d}{V} = \vec p$ - вектор поляризации данного образца.
Вектор поляризации – дипольный момент единицы объема диэлектрика (поляризованного тела).
Замечания:
1)внешнее поле однородно;
2)стенки образца, перпендикулярны приложенному полю.
Заряд внутри диэлектрика – ноль, заряды есть только на гранях (поляризационные заряды) и они одинаковы по модулю.



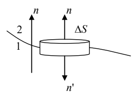
Пусть $\vec E \neq \vec E(\vec r)$.
$\vec d = \sigma_{пов} * S * \vec l$ – аналог дипольного момента.
$\vec P = \frac{\vec d}{V} = \frac{\sigma_{пов} * S * \vec l}{V}$ – вектор поляризации (дипольный момент на объем диэлектрика), характеризует конкретную ситуацию.
В общем случае грани диэлектрика направлены под некоторым углом к полю.



Тогда $\vec P = \frac{\vec d}{V} = \frac{\sigma_{пов} * S * \vec l}{S * (\vec l * \vec n)}$. Помножим скалярно обе стороны на вектор $\vec n$, тогда $(\vec p * \vec n) = \sigma_{пол}$. Т.е. плотность зарядов на гранях равна проекции вектора поляризации на нормаль.
$\vec P = \beta \varepsilon_0 \vec E; \vec P = \chi \varepsilon_0 \vec E$
$\chi = n\beta$
$div \vec E = \frac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0}$
χ - характеристика вещества, диэлектрическая восприимчивость молекул. β - коэффициент, характеризующий поляризуемость молекул. n – концентрация.

9) Граничные условия для вектора P.

Рассмотрим поведение вектора P на границе раздела двух однородных изотропных диэлектриков. У таких диэлектриков объемного избыточного связанного заряда нет, и в результате поляризации появляется только поверхностный связанный заряд. Найдем связь между поляризованностью P и поверхностной плотностью σ' связанных зарядов на границе раздела диэлектриков.

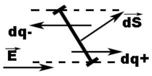


Выбираем цилиндр такой, чтобы во всех точках P был бы одинаков. n- общая нормаль к границе раздела. Потоком через боковую поверхность пренебрегаем.
$P_{2n}\Delta S + P_{1n'}\Delta S = -\sigma' \Delta S$
$P_{1n'} = -P_{1n}$
$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$
На границе раздела нормальная составляющая вектора P испытывает разрыв, величина которого зависит от σ'.
Если среда 2 вакуум, то $P_{2n} = 0$, и условие приобретает вид $P_n = \sigma'$ · $\sigma' = \chi\varepsilon_0 E_n$

10) Теорема Гаусса для вектора P.

Рассмотрим произвольный образец и выберем в нем замкнутую поверхность S.

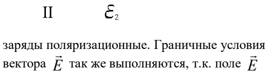
Выберем на этой поверхности некоторую площадку $d\vec S$, малую настолько, что её можно считать частью плоскости и поле на ней можно считать однородным. Построим цилиндр, проходящий через эту площадку с направляющими параллельно вектору напряжённости внешнего поля. Тогда, под действием внешнего поля часть зарядов внутри образца изменит свое положение. При этом положительные заряды сместятся по направлению вектора напряжённости внешнего поля, а отрицательные заряды сместятся в направлении противоположном вектору напряжённости внешнего поля. Т.о. часть положительных зарядов выйдет за площадку $d\vec S$, а часть наоборот войдет.



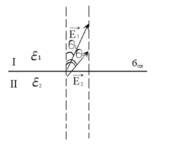
Пусть при таком поле смещение положительных зарядов dl^+, а отрицательных dl^-. Задача – посчитать какой заряд получил объемчик внутри замкнутой поверхности, т.е.
$dq^{пол} = -dq^+ - dq^-$ ($-dq^+$ - т.к. этот заряд уходит). $dq^{пол}$<0 – и образуется внутри цилиндра в результате поляризации.
Можно ввести некоторое dl среднее, на котором можно считать находящимися dq^+ и dq^-. dl - некоторое эффективное расстояние. Тогда
$d(\vec d) = -dq^{пол} * dl$.
$P = -\frac{dq^{пол} * dl}{dV} = -\frac{dq^{пол} * dl}{dS(d\vec l * \vec n)}$.
Где dV - объем, в котором образовались заряды. Домножим скалярно обе части равенства на $dS * \vec n$. Тогда $(\vec P * d\vec S) = -dq^{пол}$,
$\oint_S \vec P * d\vec S = -q^{пол}$ - теорема Гаусса для вектора поляризации.
$div \vec P = -\rho^{пол}$.
Пусть $\vec P = const$, т.е. вещество однородно и внешнее поле тоже однородно, тогда $\rho^{пол} = 0$.
$-q' = \oint_S (\vec P d\vec S) = \chi\varepsilon_0 \oint_S (\vec E d\vec S) = \chi(q + q')$
$\oint_S (\vec E d\vec S) = \frac{q + q'}{\varepsilon_0}; q' = \frac{-\chi q}{1+\chi}$
σ' - есть всегда.
$\rho' = 0$ если: нет свободных зарядов ($\rho = 0$), диэлектрик изотропный.

11)Вектор D. Теорема Гаусса и граничные условия.

Выберем некоторую замкнутую поверхность внутри диэлектрика. Пусть $\vec E \neq \vec E(t)$. Тогда
$$\oint_S (\vec E * d\vec S) = 4\pi k q$$
$$q = q^{внешней\_добавленный\_из\_вне} + q^{поляр.}$$
$$\oint_S (\vec E * d\vec S) = 4\pi k (q^{внеш} + q^{поляр.})$$
Но $q^{пол} = -\oint_S (\vec P * d\vec S)$, т.е.
$$\oint_S(\vec E * d\vec S) + 4\pi k \oint_S (\vec P * d\vec S) = 4\pi k q^{внеш}$$
$$\oint_S (\vec E + 4\pi k \vec P) * d\vec S = 4\pi k q^{внеш}$$
$\vec E + 4\pi \vec P = \vec D$ - в Гауссовой системе
$$\oint_S (\vec D * d\vec S) = 4\pi q^{внеш},$$
$\vec D = \varepsilon_0 \vec E + \vec P$ - в системе Си $\oint_S (\vec D * d\vec S) = q^{внеш}$.
$\vec D$ - вектор электрической индукции, вектор смещения.
Рассмотрим заряженную поверхность. Вокруг неё поля, создаваемые этой поверхностью, другие внешние поля (всё сложилось по принципу суперпозиции). Ранее мы выяснили, как ведет себя вектор $\vec E$ вблизи заряженной поверхности, и получили две замечательные формулы:
$E_{1n} - E_{2n} = k4\pi \cdot \sigma(\vec r)$ и $E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0$. Где E_τ - проекция вектора $\vec E$ на любое направление, параллельное плоскости.
Теперь пусть эта заряженная поверхность находится внутри диэлектрика. Точно так же имеют место быть поле, создаваемое этой поверхностью, и другие внешние поля.. На этот раз σ включает в себя заряды, внесённые на пластинку из вне и



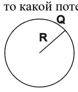
заряды поляризационные. Граничные условия для вектора $\vec E$ так же выполняются, т.к. поле $\vec E$ неподвижно:
$$\begin{cases} E_{1n} - E_{2n} = k4\pi(\sigma_{внеш} + \sigma_{пол}) \\ E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0 \end{cases}$$
Мы знаем, что т. Гаусса выполняется и для вектора $\vec P$, но вектор $\vec P$ не реагирует на внешние заряды – только на поляризационные. Можем записать нечто похожее на формулу
$E_{1n} - E_{2n} = k4\pi(\sigma_{внеш} + \sigma_{пол})$:
$P_{1n} - P_{2n} = \sigma_{пол}$, но вот аналог формулы $E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0$ мы пока записать не можем, т.к. мы не доказывали теорему о циркуляции для вектора $\vec P$ (мы не можем использовать ее для вывода соотношения тангенциальных составляющих).
Для вектора $\vec D$ можем воспроизвести весь вывод граничных условий, как и для вектора $\vec E$, но будем писать только $\sigma_{внеш}$ (это следует из теоремы Гаусса) таким образом, получим формулу:
$D_{1n} - D_{2n} = k4\pi\sigma_{внеш}$. Если $\sigma_{внеш} = 0$, то нормальная компонента вектора $\vec D$ будет непрерывна, а для вектора $\vec E$ будет «скакать». Для вектора $\vec D$ мы не доказывали теорему о циркуляции, поэтому вторую часть мы тоже оставляем под сомнением.
Упростим задачу и вытащим из диэлектрика заряженную плоскость – останутся два диэлектрика с диэлектрическим проницаемостями ε_1 и ε_2 во внешнем электрическом поле.
Вблизи границы раздела двух диэлектриков нарисуем вектора $\vec E_1$ и $\vec E_2$ так, чтобы тангенциальные их составляющие были одинаковы.
Введем углы θ_1 и θ_2 - углы с между векторами $\vec E_1$ и $\vec E_2$ и нормалью к поверхности, тогда



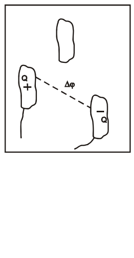
$E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$ (2).
Теперь рассмотрим соотношение $D_{1n} - D_{2n} = k4\pi\sigma_{внеш}$. В этом случае нормальные компоненты вектора $\vec D$ непрерывны $D_{1n} = D_{2n}$, поскольку $\sigma_{внеш} = 0$.
Значит имеет место быть равенство
$\varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\theta_2$ (2).
Поделив выражения (1) и (2) друг на друга, получим следующее соотношение $\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$.
Здесь нет величины E, но есть углы θ_1 и θ_2.
Значит с помощью формулы $\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ можно определить, как ломаются силовые линии напряженности электрического поля на границе двух диэлектриков.
Для векторов $\vec P$ и $\vec D$ можно написать граничные условия только для нормальных компонент.

12) Электроемкость. Конденсатор. Емкость конденсаторов.

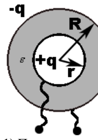
Зарядим проводник. Если знать количество зарядов, то какой потенциал будет у проводника.



$$\varphi = \kappa\frac{Qq}{r}$$
$$Q = \frac{r}{\kappa}\varphi$$
Между зарядом, который мы поместим, и потенциалом имеет место быть коэффициент. Он характеризует проводник. Чем больше r, тем больший заряд надо поместить на проводник, его потенциал достиг заданного уровня.
СИ: $\kappa = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$
$Q = 4\pi\varepsilon_0 r\varphi$
Гауссова система: $\kappa = 1$
$Q = r\varphi$
Этот коэффициент называется *емкостью проводника*. Он характеризует только проводник и обозначается буквой C.
СИ: $c = 4\pi\varepsilon_0 r$
$[\Phi] = \frac{K}{B}$
Гауссова система: $C = r$ $[C] = см$ $C = \frac{Q}{\varphi}$
Емкость определяется только свойствами и геометрией проводника.
Рассмотрим два проводника. Два проводника заряжают одинаковыми по модулю, но разными по знаку зарядами и измеряют разность потенциалов.
$|Q| = C|\Delta\varphi|$ $Q = C\cdot\Delta\varphi$
Такая система из двух и более проводников, возможно разделенных диэлектриком, называется *конденсатором*.
А величина C, определенная таким образом, называется *емкостью конденсатора*.
Если конденсатор состоит из двух проводников, то все ясно. Если же их больше, то необходимо определить, где обкладки. Наличие третьего проводника влияет на разность потенциалов и на емкость.



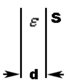
Конденсатор – некоторая система проводников и диэлектриков с выбранной парой проводников. Можно выбрать сколько угодно проводников, диэлектриков и подать на два выбранных проводника некоторые противоположные заряды и померить разность потенциалов между выбранными проводниками. Она определит характеристики проводников и диэлектриков (геометрические).
$q = C\Delta\varphi$.
Рассмотрим сферический конденсатор (две концентрические сферы с контактами, между ними диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε).



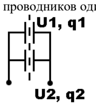
1) Пусть диэлектрик однородный и изотропный. Зарядим обе сферы равными по модулю и противоположными по знаку зарядами.
2) Рассчитаем образовавшуюся разность потенциалов. Для этого найдем поле внутри конденсатора.
3) Выберем сферическую поверхность внутри конденсатора с центром в центре конденсатора.

S-сфера

Тогда в силу симметричности задачи имеем
$$\oint_S \vec D * d\vec S = D4\pi r_S^2 = 4\pi kq$$
Откуда $D = \frac{kq}{r_S^2} = \varepsilon\varepsilon_0 E$, т.о. $E = \frac{kq}{\varepsilon * r_S^2}$.
$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta\varphi = \int_r^R E dr_S = -\frac{kq}{\varepsilon * r_S}\Big|_r^R = kq\frac{R-r}{rR\varepsilon}$$
$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{Rr}{R-r}$$
Приближения: Пусть $R - r << r, R$, т.е. $r \to R$, тогда $S = 4\pi R^2 \approx 4\pi Rr$. Пусть $R - r = d$, тогда $C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$ (в Гауссе).



S – площадь пластинок. Пусть $\sqrt{S} >> d$. Пусть внутри однородный изотропный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε.
1) Помещаем на платинах разноимённые заряды $|q|$.
2) С учётом сделанных приближений можно считать поле между пластинами равным
$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon S}.$$
3) Найдём разность потенциалов между пластинами.
$$\varphi_1 - \varphi_2 = |\Delta\varphi| = \int_0^d \vec E * d\vec r = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon S}q\int_0^d dr = \frac{qd}{\varepsilon_0\varepsilon S}$$
Откуда $C = \frac{q}{|\Delta\varphi|} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$.
Цилиндрический конденсатор:
$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon h}{\ln(R/r)}$$
h – высота, r и R – внутренний и внешний радиусы.
Обозначение любого конденсатора (плоского, сферического и т.д.) – 
1) Параллельное соединение 2-х конденсаторов. Проводник – эквипотенциальное тело. На схеме 2 проводника (один слева, другой справа), т.е. левая и правая части – эквипотенциальные тела. Т.о. разность потенциалов между двумя точками разных проводников одинакова.



$U1 = U2 = U$
$q = q1 + q2$
$$C = \frac{q}{U} = \frac{q1}{u} + \frac{q2}{u} = C1 + C2$$
2)Последовательное соединение.

$U_{12} = U_1 + U_2$
$q1 = q2 = q$
$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{U1+U2} = \frac{C1*C2}{C1+C2}.$$

13) Энергия электрического поля.

Рассмотрим систему из двух точечных зарядов. Найдем алгебраическую сумму элементарных работ сил $\vec F_{12}$ и $\vec F_{21}$, с которыми эти заряды взаимодействуют.

Найдём работу сил кулона

$dA=\vec{F}_{12}d\vec{r}_1+\vec{F}_{21}d\vec{r}_2=\vec{F}_k(d\vec{r}_1-d\vec{r}_2)$, т.е. работа зависит от взаимного перемещения.

Рассмотрим систему прикреплённую к одному из зарядов, тогда $d\vec{r}_2=0$, а $dA=\vec{F}_k d\vec{r}_k$.

Получается, что сумма элементарных работ в произвольной К – системе отсчета всегда равна элементарной работе, которую совершает сила, действующая на один заряд, в системе отсчета, где другой заряд покоится. Сила $\vec{F}_k$ консервативная.

Поэтому работа данной силы может быть представлена, как убыль потенциальной энергии заряда 1 в поле заряда 2 или как убыль потенциальной энергии взаимодействия пары зарядов: $\delta A_{1,2}=-dW_{12}$.

Аналогично для системы из трех зарядов:

$$\delta A=\delta A_{1,2}+\delta A_{1,3}+\delta A_{2,3}$$

$$\delta A_{i,k}=-dW_{ik}$$

$$\delta A=-d(W_{12}+W_{13}+W_{23})=-dW$$

W – энергия взаимодействия данной системы зарядов. Каждое слагаемое зависит от расстояния между зарядами, поэтому энергия W данной системы зарядов есть функция ее конфигурации.

Энергия взаимодействия: Представим каждое слагаемое в симметричном виде

$W_{ik}=1/2(W_{ik}+W_{ki})$, где $W_{ik}=W_{ki}$.

Тогда:

$$W=\frac{1}{2}((W_{12}+W_{13})+(W_{21}+W_{23})+(W_{31}+W_{32}))$$

Каждая сумма в скобках – это энергия взаимодействия i-го заряда с остальными.

Получаем $W=\frac{1}{2}\sum W_i$, где $W_i=q_i\cdot\varphi_i$.

φ_i - потенциал, создаваемый в месте нахождения i-го заряда всеми остальными зарядами системы.

$$W=\frac{1}{2}\sum q_i\cdot\varphi_i$$

Если заряды распределены непрерывно, то, разлагая систему зарядов на совокупность элементарных зарядов $dq=\rho dV$, получаем $W=\frac{1}{2}\int\rho\varphi dV$, где

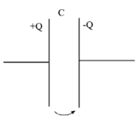
φ - потенциал, создаваемый всеми зарядами системы в элементе объемом dV.

$W=W_1+W_2+W_{12}$, где W_1 - энергия взаимодействия элементов первого шарика, W_2 - то же, но для второго шарика, W_{12} - энергия взаимодействия элементов заряда первого шарика с элементами второго. Первые две энергии – собственные энергии зарядов, а третья- энергия их взаимодействия.

Энергия уединенного проводника:

$$W=\frac{q\varphi}{2}=\frac{C\varphi^2}{2}=\frac{q^2}{2C}$$

Энергия конденсатора:



$$W=\frac{1}{2}(q_+\varphi_++q_-\varphi_-)$$

$$q_-=-q_+$$

$$W=\frac{1}{2}q_+(\varphi_+-\varphi_-)=\frac{1}{2}qU$$

$$W=\frac{qU}{2}=\frac{CU^2}{2}=\frac{q^2}{2C}$$

Подставим в формулу выражение $C=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{h}$.

$$W=\frac{CU^2}{2}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2h}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left(\frac{U}{h}\right)^2 Sh$$

$$\frac{U}{h}=E;Sh=V$$

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0E^2V$$

Эта формула справедлива для однородного поля, заполняющего объем V.

$$W=\int\frac{\varepsilon\varepsilon_0E^2}{2}dV=\int\frac{ED}{2}dV$$

Подынтегральное выражение имеет смысл энергии, заключенной в объеме V. Из последних двух формул следует, что электрическая энергия распределена в пространстве с объемной плотностью $w=\frac{\varepsilon\varepsilon_0E^2}{2}=\frac{ED}{2}$. Все это справедливо для изотропного диэлектрика $(P=\chi\varepsilon_0E)$.

Пусть одно тело создает в окружающем пространстве поле E_1, а другое – поле E_2.

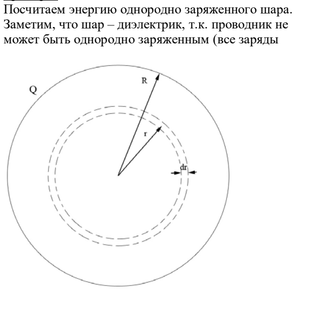
Результирующее поле $E=E_1+E_2$. Поэтому полная энергия данной системы равна:

$W=\int\frac{\varepsilon_0E_1^2}{2}dV+\int\frac{\varepsilon_0E_2^2}{2}+\int\varepsilon_0E_1E_2dV$. При всех возможных перемещениях заряженных тел, не изменяющих конфигурации зарядов на каждом теле, собственная энергия не изменяется. И изменение полной энергии определяется изменением взаимной энергии.

ПРИМЕРЫ:

Пример1.

Посчитаем энергию однородно заряженного шара. Заметим, что шар – диэлектрик, т.к. проводник не может быть однородно заряженным (все заряды будут на поверхности).



Потенциальная энергия взаимодействия равна минус работе сил поля, совершаемой при движении каждого заряда из своего положения в бесконечность $dU=-dA$. Чтобы посчитать электростатическую энергию, будем по кусочкам удалять заряды на бесконечность, посчитаем работу поля и поменяем знак.

Будем удалять по тонким сферическим слоям, т.к. сфера однородно заряжена, симметрия сферическая. Построим тонкий сферический слой толщиной dr и радиуса r. Считая, что все остальные слои уже удалены, найдем работу dA по перемещению заряда в бесконечность. Пусть заряд положительный. Введём объемную плотность заряда . заряд слоя равен $dq=\rho dV$,

$$\rho=\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

где $dV\approx4\pi r^2dr$, тогда $dq=4\pi r^2\rho dr$.

Пусть dr на столько мало, что мы можем пренебречь изменением потенциала на dr. В таком приближении потенциал на сферическом слое постоянен. Тогда работу по перемещению заряда мы можем записать $dA=\varphi(r)\cdot4\pi r^2\rho dr$.

Запишем потенциал заряженной сферы

$$\varphi(r)=k\frac{q(r)}{r}=k\frac{\rho V(r)}{r}=k\frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{r}=k\frac{4}{3}\rho\pi r^2$$

. Работа по перемещению тонкого сферического слоя равна $dA=k\rho^2\frac{16}{3}\pi^2r^4dr$.

Чтобы найти работу по полному «раздеванию шарика», возьмем интеграл от R до 0, т.е. сначала снимем верхний слой.

$$A=\int_R^0 k\rho^2\frac{16}{3}\pi^2r^4dr=k\rho^2\frac{16}{15}\pi^2r^5dr\Big|_R^0=-k\rho^2\frac{16}{15}\pi^2R^5$$

, подставляя , найдем

$$\rho=\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$U=-A=k\frac{3}{5}\frac{Q^2}{R}$. Заметим, что потенциальная энергии шарика больше нуля, как в случае положительного знака заряда, так и отрицательного. Это объясняется тем, в обоих случаях сила и перемещение сонаправлены. Шарику выгоднее разлететься.

Пример2.

Найдем потенциальную энергию конденсатора (конденсатор любого типа).

Мы знаем заряд q на конденсаторе и его емкость C, следовательно мы знаем разность потенциалов на нем. Выполняется соотношение $dU=-dA$.

Чтобы заряд на конденсаторе стал равным нулю $q=0$, достаточно заряд с одой обкладки конденсатора перенести на другую, тогда разность потенциалов будет равна нулю $U=0$.

Найдем работу сил поля по перемещению заряда с одной пластины на другую, до того как полный заряд конденсатора станет равным нулю.

Найдем работу сил поля по перемещению заряда dq когда на конденсаторе находится уже не Q, а q. $dA=\Delta\varphi\cdot dq$, $\Delta\varphi=-(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{q}{c}$,

$dA=\frac{q}{c}\cdot dq$, отсюда полная работа есть интеграл от Q до 0:

$$A=\int_Q^0\frac{q}{c}\cdot dq=\frac{q^2}{2c}\Big|_Q^0=-\frac{Q^2}{2c}$$

$U=-A=\frac{Q^2}{2c}$ эту формулу можно получить через любые две из трёх величин q, C, $\Delta\varphi$.

Пример3.

Найдем потенциал электрического диполя в <u>однородном</u> электрическом поле.

Найдем энергию диполя в поле, т.е. диполь удаляем целиком, это означает, что энергия взаимодействия двух зарядов не учитывается. Запишем работу сил поля по перемещению диполя в бесконечность

$A=q\cdot\varphi_++q\cdot\varphi_-=q\cdot(\varphi_+-\varphi_-)$. Здесь φ_- и φ_+ - потенциалы в однородном поле, а не относительно друг друга, $(\varphi_+-\varphi_-)$ - работа по перемещению единичного положительного заряда из точки "+" в точку "-". Посчитаем эту работу.

Будем перемещать единичный положительный заряд по катетам, тогда работа равна

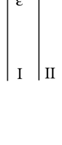
$A=qEl\cdot\cos\alpha=Ed\cdot\cos\alpha=(\vec{E}\vec{D})$, итак

$U=-A=-(\vec{E}\vec{D})$. Если диполь расположен перпендикулярно полю, то его энергия равна нулю, т.к. работа по перемещению "+" и "-" зарядов будет одинакова.

Найдем энергию электрического поля в конденсаторе. Будем выражать ее через характеристики поля $\vec{E}$, $\vec{D}$, ε - электрическая проницаемость.

Рассмотрим плоский конденсатор.

Найдем энергию из тех соображений, что она равна минус работе по перемещению заряда, $A=q\Delta\varphi$. Внутри конденсатора поле $\vec{E}$ есть, а вне равно нулю.



Запишем граничные условия

$D_{n1}-D_{n2}=4\pi k\sigma$.

$D_{n2}=0$, т.к. поле снаружи

$E_{снаружи}=0$. $D_{n1}=4\pi k\sigma$, $\sigma=\frac{q}{s}$, $D_{n1}=4\pi k\frac{q}{s}$,

$q=\frac{D_{n1}s}{k4\pi}$, $A=\frac{D_{n1}s}{k4\pi}\Delta\varphi$.

Найдем работу по перемежению маленького заряда с одной обкладки конденсатора на другую, при условии, что сейчас заряд равен q.

$dA=dq\Delta\varphi$, $dq=\frac{s}{k4\pi}dD_{n1}$, $\Delta\varphi=El$,

$$dA=\frac{sl}{k4\pi}EdD_{n1},$$

$$EdD_n=EdD\cdot\cos\alpha=(\vec{E}d\vec{D}),$$

$dA=\frac{V}{k4\pi}(\vec{E}d\vec{D})$ сюда входят только характеристики поля о объем. Мы рассматриваем энергию чего-то, что находится в пространстве , и чем больше его объем, тем больше энергия.

$$A=\int_D^0\frac{V}{k4\pi}(\vec{E}d\vec{D}).$$

Пусть поля небольшие, тогда $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$, вектора $\vec{D}$ и $\vec{E}$ коллинеарные и не будут менять направление.

$$dA=\frac{V}{k4\pi}\varepsilon(\vec{E}d\vec{E})=\frac{V}{k4\pi}\varepsilon EdE,$$

$$A=\int_E^0\frac{V}{k4\pi}\varepsilon EdE=-\frac{V}{k4\pi}\varepsilon\frac{E^2}{2}.$$

$U=-A=V\left(\frac{\varepsilon E^2}{k8\pi}\right)$, где $u=\frac{\varepsilon E^2}{k8\pi}$ - плотность энергии электростатического поля.

Мы все рассмотрели для очень небольшого кусочка конденсатора $dU=udV$ и тогда $U=\int\frac{\varepsilon E^2}{k8\pi}dV$ - энергия поля.

По этой формуле можно рассчитывать энергию любого конденсатора, т.к. здесь нет зависимости от формы конденсатора, просто объемчик где поле однородно.

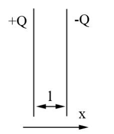
Пример.

Пондеромоторные силы, т.е. силы взаимодействия между большими проводниками (не точечные заряды), где закон Кулона как таковой не действует – мы разбиваем на маленькие кусочки.

$dU=-dA$, $dU=-(\vec{F}d\vec{r})$

$$\vec{F}=-\frac{\partial U}{\partial r}.$$

Найдем с какой силой притягиваются друг к другу пластинки плоского заряженного конденсатора .



В проекции на ось X:

$F=-\frac{dU}{dx}$. При смещении пластинки заряд не меняется, а емкость конденсатора изменяется.

$U=\frac{Q^2}{2C}$, $dU=-\frac{Q^2}{2C}dC$, отсюда

$$dC=d\left(\frac{\varepsilon s}{4\pi x}\right)=-\frac{\varepsilon s}{4\pi x^2}dx$$

$$dU=\frac{2\pi Q^2}{\varepsilon s}dx,\ \frac{dU}{dx}=\frac{2\pi Q^2}{\varepsilon s}=-F.$$

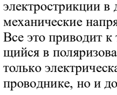
$Q=\sigma s$, где σ - поверхностная плотность.

Граничные условия: $2\pi\sigma=\frac{E}{2}$

$$F=-\frac{E}{2}\frac{\sigma s}{\varepsilon}=-\frac{EQ}{2\varepsilon}$$

Если $\varepsilon=1$, то $F_x=-\frac{EQ}{2}$.

Жидкость втягивается в конденсатор:



14) Силы, действующие на проводник и поверхность диэлектрика в электрическом поле.

Опыт показывает, что на диэлектрик в электрическом поле действуют силы. Эти силы возникают и в тех случаях, когда диэлектрик в целом не заряжен. Причиной их возникновения является в конечном счете действие неоднородного электрического поля на дипольные молекулы поляризованного диэлектрика.

Под действием указанных электрических сил поляризованный диэлектрик деформируется. Это явление называют электрострикцией. Вследствие электрострикции в диэлектрике возникают механические напряжения.

Все это приводит к тому, что на проводник, находящийся в поляризованном диэлектрике, действует не только электрическая сила, зависящая от зарядов на проводнике, но и дополнительная механическая сила со стороны диэлектрика. В общем случае влияние диэлектрика на результирующую силу, испытываемую проводником, не может быть учтено никакими простыми соотношениями. Однако во многих случаях эти силы можно вычислить достаточно просто без детального анализа их происхождения - с помощью закона сохранения энергии.

Энергетический метод определения сил является наиболее общим. Он позволяет, отвлекаясь от причин возникновения сил, автоматически учитывать все силовые взаимодействия (электрические и механические) и поэтому приводит к правильному результату.

Наиболее просто обстоит дело в случае, когда заряженные проводники отключены от источников напряжения. В этом случае заряды на проводниках остаются постоянными, и мы можем утверждать, что работа всех внутренних сил системы при медленных перемещениях проводников и диэлектриков совершается целиком за счет убыли электрической энергии системы (или ее поля). Здесь предполагается, что при указанных перемещениях не происходит преобразования электрической энергии в другие формы, или, считается, что такие преобразования пренебрежимо малы. Таким образом, для бесконечно малых перемещений можно записать

$\delta A=-dW\big|_q$,где символ q подчеркивает, что убыль энергии системы должна быть вычислена при постоянных зарядах на проводниках.

Уравнение является исходным для определения сил, действующих на проводники и диэлектрики в электрическом поле. Пусть нас интересует сила, действующая на данное тело (проводник или диэлектрик). Совершим бесконечно малое поступательное перемещение dx этого тела в интересующем нас направлении X. Тогда работа искомой силы F на перемещении dx есть

$\delta A=F_xdx$, где Fx — проекция силы F на положительное направление оси X. После подстановки последнего выражения для δA в и деления на dx получим:

$$F_x=-\frac{\partial W}{\partial x}\Big|_q.$$

Сила зависит только от положения тел и распределения зарядов в данный момент. Она не может зависеть от того, как будет развиваться энергетический процесс в том случае, если система придет в движение под действием сил. А это значит, что для вычисления Fx по формуле нет надобности подбирать такой режим, при котором обязательно все заряды проводников оставались бы постоянными (q = const). Надо просто найти приращение dW при условии, что q=const, а это - чисто математическая операция.

Заметим, что если перемещения проводить при постоянном потенциале на проводниках, то соответствующий расчет приводит к другой формуле для силы:

$$F_x=+\frac{\partial W}{\partial x}\Big|_\varphi$$

Однако результат расчета Fx по этой формуле оказывается одинаковым, как и должно быть.

Силы в жидком диэлектрике. Из формулы предыдущего примера видно, что сила взаимодействия обкладок плоского конденсатора в жидком диэлектрике в ε раз меньше, чем в вакууме (где ε = 1). Этот результат, как показывает опыт, можно обобщить: при заполнении всего пространства, где есть электрическое поле, жидким или газообразным диэлектриком силы взаимодействия между заряженными проводниками (при неизменных зарядах на них) уменьшаются в ε раз:

$$F=\frac{F_0}{\varepsilon}$$

Отсюда следует, что два точечных заряда q_1 и q_2, находящиеся на расстоянии r друг от друга внутри безграничного жидкого или газообразного диэлектрика, взаимодействуют с силой

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1q_2|}{\varepsilon r^2}$$

т. е. тоже в ε раз меньшей, чем в вакууме. Эта формула выражает закон Кулона для точечных зарядов в безграничном диэлектрике.

Следует обратить особое внимание на то, что в последнем законе под точечными подразумеваются сторонние заряды, сосредоточенные на макроскопических телах, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними. Таким образом, закон в отличие от закона Кулона в вакууме имеет весьма ограниченную область применения: диэлектрик должен быть однородным, безграничным, обязательно жидким или газообразным, а взаимодействующие тела — точечными в макроскопическом смысле.

Интересно, что в однородном жидком или газообразном диэлектрике, заполняющем все пространство, где есть поле, как напряженность E, так и сила F, действующая на точечный заряд q, в ε раз меньше Eo и Fo при отсутствии диэлектрика. А это значит, что сила F, действующая на точечный заряд q, определяется в этом случае такой же формулой, как и в вакууме:

$\vec{F}=q\vec{E}$, где E напряженность поля в диэлектрике в том месте, куда помещают сторонний заряд q. Только в этом случае по силе F формула позволяет определить поле E в диэлектрике. Следует обратить внимание, что на сам сторонний заряд будет действовать другое поле — не то, что в самом диэлектрике.

Поверхностная плотность силы. Рассмотрим плоский конденсатор в жидком диэлектрике. Пусть конденсатор заряжен и отключен от источника напряжения — чтобы заряд конденсатора и поле E внутри него не менялись при раздвигании обкладок. Энергия конденсатора — это энергия поля внутри него. Она равна

$W=\frac{1}{2}EDSx$, где S — площадь каждой обкладки, x — расстояние между ними (Sx — объем, занимаемый полем). Сила, действующая на верхнюю обкладку,

$$F_x=-\frac{\partial W}{\partial x}\Big|_q=-\frac{1}{2}EDS,$$

откуда поверхностная плотность силы

$$f=\frac{\vec{E}\vec{D}}{2}$$

Поверхностная плотность силы, действующей на проводник, равна объемной плотности электрической энергии вблизи поверхности. Направлена эта сила всегда по нормали к поверхности, причем наружу проводника (стремясь его растянуть) независимо от знака поверхностного заряда.

Рассмотрим однородный диэлектрик в неоднородном поле.
1) Пусть существует свободный заряд в диэлектрике.

$$\vec{F} = q\vec{E} = -q\,grad\varphi$$

Если заряд распределен по объему, то:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = -\frac{dq}{dV}grad\varphi = -\rho\,grad\varphi$$

- объемная плотность силы.
2) Если их нет, то действующая на диполь сила равна:

$$\vec{F} = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} = p_x\frac{\partial E_x}{\partial x}\vec{i} + p_y\frac{\partial E_y}{\partial y}\vec{j} + p_z\frac{\partial E_z}{\partial z}\vec{k}$$

p – сумма всех дипольных моментов, входящих в кусок вещества

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = \frac{(d\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}}{dV} = (\vec{P}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} =$$

$$= (\varepsilon-1)\varepsilon_0(\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} = \frac{1}{2}(\varepsilon-1)\varepsilon_0\,gradE^2$$

$d\vec{p}$ - сумма дипольных моментов, входящих в малый объем V.

$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$ - т.к. диэлектрик однородный.

Диэлектрик втягивается в область сильного поля.
Рассмотрим случай, когда поле однородно, а диэлектрик – нет.

$$\vec{F} = \sigma'\vec{E};\ \Delta E_n = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

Плоская граница:

Пластины раздвигаются.

$$E_1 = \frac{Q}{S\varepsilon\varepsilon_0};\ E_0 = -\frac{Q}{S\varepsilon_0}$$

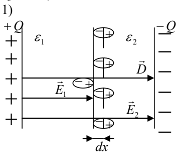
$$W = \frac{1}{2}EDSx$$

Q=const – конденсатор отсоединен от ЭДС.
D=const
x – виртуальное перемещение

$$\vec{F} = -\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right|_Q = -\frac{1}{2}EDS$$

$$f_S = -\frac{dF}{dS} = \frac{ED}{2} = w$$

- поверхностная плотность силы
f_S - давление (p).
Рассмотрим другую задачу:
Q=const, D=cconst
1)



На границе возникла поверхностная плотность связных зарядов. Пусть граница совершила виртуальное перемещение dx. В слое изменилась энергия поля.

$$dW\,|_Q = \left(\frac{SDE_2}{2} - \frac{SDE_1}{2}\right)dx = \frac{SD^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)$$

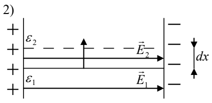
$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_1};\ E_2 = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_2}$$

$$F = -\left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_Q = \frac{Q^2}{2S\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)$$

$$f_S = \frac{F}{S} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = w_1 - w_2$$

$$f_S = p = w_1 - w_2$$

2)



$$E_1 = E_2 = E$$

$$D_1 = \varepsilon_0\varepsilon_1 E$$

$$D_2 = \varepsilon_0\varepsilon_2 E$$

$$dW\big|_U = \left(\frac{ED_2}{2} - \frac{ED_1}{2}\right)Sdx$$

$$F = -\frac{\partial W}{\partial x} = \left(\frac{ED_1}{2} - \frac{ED_2}{2}\right)S$$

$$f_S = \frac{F}{S} = \frac{1}{2}E(D_1 - D_2) = \frac{1}{2}E^2\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

направлена в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью.

15) Поляризация полярных диэлектриков

Причина поляризации диэлектриков заключается в том, что атомы и молекулы всех тел содержат элементарные заряженные частицы. В электрическом поле происходит смещение этих частиц, и поэтому возникает электрический момент. Однако в различных диэлектриках эти смещения имеют разный характер.
Молекулы многих веществ построены из незаряженных атомов. Примером может служить молекула водорода. Подобные молекулы названы неполярными. Молекулы многих других веществ, напротив, содержат атомы в заряженном состоянии, т.е. ионы (полярные молекулы). Полярной является молекула воды, которая содержит отрицательный ион кислорода и два положительных иона водорода.
Рассмотрим диэлектрик с полярными молекулами. В этом случае каждая молекула имеет определенный дипольный момент p_0 уже в отсутствие поля. Однако, вследствие теплового движения, в отсутствие поля молекулы расположены совершенно хаотично, и поэтому векторная сумма всех моментов диполей в среднем близка к нулю. При наложении внешнего электрического поля на каждый диполь действуют силы, стремящиеся ориентировать его параллельно электрическому полю. Поэтому возникает частичное упорядочение в расположении диполей, тем большее, чем сильнее внешнее поле и чем ниже температура. В этом случае сумма всех дипольных моментов молекулы уже не равна нулю, и диэлектрик приобретает электрический момент. Такой тип поляризации называют ориентационной или дипольной поляризацией.
В твердых диэлектриках мы находим еще один тип смещения зарядов, приводящий к поляризации. Кристаллические решетки многих веществ построены из положительных и отрицательных ионов. Примером может служить кристалл хлористого цезия. Элементарная ячейка его решетки представляет собой центрированный куб, в вершинах которого находятся положительные ионы Cs+, а в центре — отрицательные ионы C1~. Рассматривая все ионы Cs+ и все ионы C1- порознь, мы находим, что они образуют две простые кубические решетки, сдвинутые по отношению друг к другу в направлении диагонали куба на расстояние половины диагонали.
В электрическом поле на каждую из простых решеток действуют различные по модулю и направлению силы и решетки смещаются по отношению друг к другу. Вследствие этого в некоторых кристаллах может возникнуть электрический момент. Этот тип поляризации называют поляризацией ионного смещения или просто ионной поляризацией.

Рассмотрим, от чего зависит диэлектрическая проницаемость газообразных полярных диэлектриков и как именно. Сначала будем считать, что молекулы недеформируемы, т.е. не будем учитывать электронную поляризацию.
Электрический момент единицы объема такого диэлектрика есть

$$P = \frac{1}{V}\sum_i p_{Ei}$$

где p_{Ei} — проекция электрического момента какой-либо i-й молекулы на направление внешнего поля, а V — объем диэлектрика. Но, по определению среднего значения,

$$\frac{1}{V}\sum_i p_{Ei} = n\overline{p}_E$$

где n — число молекул в единице объема, а $\overline{p}_E$ — среднее значение проекции дипольного момента молекул на направление поля. Поэтому вычисление поляризованности сводится к определению $\overline{p}_E$.

Расчет, согласно законам статистической физики, дает

$$\overline{p}_E = \frac{p_0^2}{3kT}E'$$

Здесь p_0 — постоянный дипольный момент одной молекулы, к = 1,38 • 10~23 Дж/К — постоянная Больцмана, T — термодинамическая температура диэлектрика, E' — напряженность поля, действующего на диполь. При выводе предположено, что поле E' не очень велико и вызывает только слабую упорядоченность в расположении диполей.
Отметим, что результат качественно понятен и без расчетов: чем больше поле E', тем сильнее ориентация диполей, тем больше будет и проекция дипольного момента на направление поля; напротив, чем выше температура, тем сильнее дезориентирующее влияние теплового движения, тем меньше и проекция дипольного момента.

$$\frac{(\varepsilon-1)}{(\varepsilon+2)} = \frac{p_0^2 n}{9\varepsilon_0 kT}$$

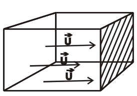
Диэлектрическая проницаемость полярных диэлектриков зависит от температуры и уменьшается при нагревании.
Положение упрощается для газообразных диэлектриков. Вследствие слабой их поляризуемости в них можно считать внутреннее поле E' равным среднему полю E. Это значит, что в левой части формулы нужно положить $\varepsilon + 2 \approx 3$.
Если в газообразном диэлектрике молекулы обладают в отсутствие поля постоянным дипольным моментом и, кроме того, могут деформироваться в электрическом поле, то диэлектрическая проницаемость газа равна

$$\varepsilon = 1 + n\left(\beta + \frac{p_0}{3\varepsilon_0 kT}\right)$$

Здесь второе слагаемое описывает электронную поляризацию смещения, а третье — дипольную (ориентационную) поляризацию.

16) Электрический ток. Плотность тока. Закон сохранения электрического заряда.

Электрический ток – макроскопически упорядоченное перемещение заряженных частиц (зарядов).
Нас интересует случай, когда причиной является электрическое поле.
Основными характеристиками электрического тока являются плотность тока (векторная характеристика) и сила тока (скалярная величина).
Пусть есть большое количество зарядов e, число таких частиц в единице объема (концентрация) - n_0. Пусть все они движутся с одинаковой скоростью $\vec{u}$ (скорость упорядоченного движения).



Поместим в это пространство маленькую прямоугольную рамочку, ориентированную перпендикулярно потоку. Посчитаем заряд, прошедший через эту рамку в единицу времени.
dq – заряд, прошедший через рамку за время dt. пересекут рамку те заряды, которые пресекут воображаемую поверхность dS, натянутую на рамку. $d\vec{S} \uparrow\uparrow \vec{u}$. За время dt эту поверхность пересекут частицы, заключенные в параллелепипеде с площадью основания dS и высотой udt. $dq = e\cdot n_0\cdot dS\cdot u\cdot dt$.
Плотность электрического тока – заряд, проходящий через единичную площадку, перпендикулярную потоку, за единицу времени.

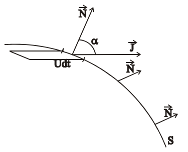
$$j = \frac{dq}{dS\cdot dt}$$

$$j = \frac{e\cdot n_0\cdot u\cdot dS\cdot dt}{dS\cdot dt}$$

$$j = e\cdot n_0\cdot u$$

$$\vec{j} = e\cdot n_0\cdot\vec{u}$$

Пусть у нас есть в пространстве, в проводящей среде некоторая произвольная поверхность S с заранее выбранным направлением нормали.



Сила электрического тока через поверхность с заранее выбранным направлением нормали – это заряд, протекающий через единицу времени.

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Подсчитаем Q. Пусть в окрестности выбранной точки известна плотность тока. Очевидно, что через dS за единицу времени пройдут все частицы, лежащие в косом параллелепипеде с высотой udt.

$$I = \frac{dq_{через dS}}{dt}$$

$$dq = e\cdot n_0\cdot u\cdot dt\cdot\cos\alpha\cdot dS$$

$$dI = e\cdot n_0\cdot u\cdot dS\cdot\cos\alpha$$

$$dI = \left(\vec{j}\cdot d\vec{S}\right)$$

$$I = \int_S\left(\vec{j}\cdot d\vec{S}\right)$$

СИ:

$$[I] = [A] = \left[\frac{Кл}{c}\right].$$

Ток в $1A$ означает, что за единицу времени протекает заряд в $1Кл$.
Гауссова система:

$$1аб.ед.силытока = \frac{1}{3\cdot 10^3}A.$$

Если у нас разные частицы, то понятие плотности тока можно обобщить.

$$\vec{j} = \sum_i\vec{j}_i = \sum_i e_i\cdot n_i\cdot\vec{u}.$$

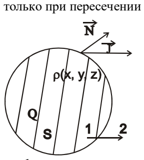
Замечания.
1) Реально скорость каждой частицы складывается из двух скоростей: теплового движения и упорядоченного.

$$\vec{V}_k = \vec{V}_{tk} + \vec{u}_k$$

$$\left\langle\vec{V}_k\right\rangle = \left\langle\vec{V}_n\right\rangle + \left\langle\vec{u}\right\rangle$$

$$\left\langle\vec{V}_k\right\rangle = \left\langle\vec{u}\right\rangle.$$

Поэтому в определении плотности тока $\vec{u}$ – средняя скорость упорядоченного движения частиц.
2) Плотность тока описывает более детально поток электрического тока. Плотность тока описывает ток в окрестности выбранной точки. Это локальная характеристика. Сила тока же – это интегральная характеристика.
В общем случае $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r},t)$. Если плотность тока является только функцией точки, то ток – постоянный. Оценим скорость упорядоченного движения электронов в металлическом проводнике площадью поперечного сечения в $1мм^2$ при прохождении через него тока в $1A$.
Заряд в замкнутом объеме может изменяться, только втекая или вытекая из заданного объема через ограничивающие его поверхности. Пусть в этом пространстве существует электрический ток. Пусть в каждой точке этого пространства определены $\vec{n}$ и $\vec{j}$. S – не перемещается и не деформируется с течением времени. Найдем убыль зарядов в данном объеме. Заряд может убыть только при пересечении площадки S.



$$-\frac{dq}{dt} = I_S = \oint_S\left(\vec{j}\cdot d\vec{S}\right),\quad \oint_S\left(\vec{j}d\vec{S}\right) = -\frac{dq}{dt}$$

- уравнение непрерывности в интегральной форме.
Уравнение непрерывности – это следствие из закона сохранения заряда. По формуле Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S\left(\vec{j}\cdot d\vec{S}\right) = \int_{V_S}div\vec{j}dV$$

$$q = \int_V\rho dV$$

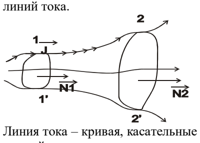
$$\int_{V_S}div\vec{j}dV = -\int_V\frac{d\rho}{dt}dV$$

Поскольку это равенство справедливо для сколь угодно малой поверхности, то мы можем записать: $div\vec{j} = -\dfrac{d\rho}{dt}$ – уравнение непрерывности в дифференциальной форме.
Выведем, при каком условии ток будет постоянным (стационарным).
Плотность в каждой точке не меняется с течением времени: $\dfrac{d\rho}{dt} = 0$.

$$div\vec{j} = 0$$

$$\oint_S\left(\vec{j}\cdot d\vec{S}\right) = 0$$

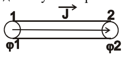
Постоянные токи можно изобразить с помощью линий тока.



Линия тока – кривая, касательные к которой в каждой точке – вектор плотности тока в данной точке. Поверхность, образованная линиями тока – трубка тока. $div\vec{j} = 0$ – ток не имеет источника. Линии постоянного тока всегда замкнуты. Заряд через боковую поверхность трубки не проходит, так как скорость к ней касательная. В выделенном объеме трубки тока ток должен оставаться постоянным. Сила тока, проходящего через произвольное сечение, не зависит от его положения в трубке тока.

17) Электрический ток в металлах. Вывод законов Ома и Джоуля – Ленца.

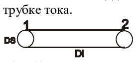
Однородный участок – участок, на котором не действуют сторонние силы.



$\varphi_1 - \varphi_2 = U_{12}$ – напряжение.
Напряжение всегда пропорционально силе тока:
$I = R\cdot U_{12}$, где R – коэффициент пропорциональности (сопротивление).
Закон Ома: $I = \dfrac{U}{R}$.
Для цилиндрических проводников справедливо:
$R = \rho\dfrac{l}{S}$, где ρ – удельное сопротивление.

$$[R] = [Ом].\quad 1Ом = \frac{1A}{1B}.$$

Удельное сопротивление зависит от химического строения проводника, температуры и т.д. Перейдем от конечной площади сечения к элементарной трубке тока.



$$dS, dl$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = dU$$

$$dI = jdS = \frac{dU}{\rho\frac{dl}{dS}}$$

$$j = \frac{dU}{\rho dl}$$

$$j = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{dU}{dl}$$

$$j = \frac{1}{\rho}E$$

Закон Ома в дифференциальной форме для однородного участка цепи:
$\vec{j} = \dfrac{1}{\rho}\cdot\vec{E} = \sigma\vec{E}$, где σ – электропроводимость.
Поле проводника с постоянным током – стационарно, а, следовательно, потенциально, так же как и статическое. Проводник с постоянным током не эквипотенциален. В отличие от статического поля поле внутри проводника отлично от нуля. Если сила, действующая на заряд в проводнике, мало изменяющаяся – то это регулярная сила. При постоянном поле скорость дрейфа также постоянна. Дрейфовая скорость определяется величиной регулярных сил действующих на объект. Сама эта скорость – установившаяся скорость. Заряд движется с $U_{дрейф} = const$ под действием регулярной силы $e\vec{E}$ и сил, возникающих при хаотическом движении.
Рассмотрим однородный участок цепи (нет сторонних сил). Тогда

$$dq_{1-2} = Idt.$$

$$\partial A = dq(\varphi1 - \varphi2) = Udq = UIdt = \partial Q$$

Джоулево тепло в проводнике.

$$P_t = \frac{\partial Q}{\partial t} = IU = I^2R$$

- мощность генерации тепла.
Пусть проводник мал настолько, что его можно считать трубкой тока, тогда

$$\partial Q = \overbrace{j*S}^{I}\overbrace{E*l}^{U}*dt = j*E*V*dt.$$

Можно ввести тепловую мощность генерируемую в единице объема (удельную теплоту):

$$q_t = \frac{\partial Q}{Vdt} = jE = (\vec{j}\vec{E}).$$

Рассмотрим закон Джоуля - Ленца для участка цепи, когда на нем действуют электрические и сторонние силы напряженностью $\vec{E}$ и $\vec{E}^{ст}$ соответственно. Мы хотим найти удельную мощность, которая выделяется в бесконечно маленьком объемчике вблизи выбранной точки. Известно, что мощность можно записать как скалярное произведение силы на скорость $P = \left(\vec{F}\vec{u}\right)$. Учитывая, что $\vec{E}$ и $\vec{E}^{ст}$ коллинеарные

с $\vec u$, мощность, выделяемую при движении одного носителя заряда можно записать так
$P_1 = e(\vec E + \vec E^{cm})\cdot \vec u = e(E + E^{cm})\cdot u$.

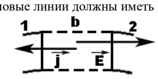
А теперь запишем мощность dP, выделяемую в объеме dV, заряд в котором равен $dq = dV\cdot n\cdot e$:
$dP = en(E + E^{cm})\cdot u\cdot dV$. Величину, равную
$\frac{dP}{dV} = en(E + E^{cm})\cdot u = j\cdot(E + E^{cm})$ будем называть плотностью мощности, где $j = enu$ - модуль вектора плотности тока.

Формула $\frac{dP}{dV} = j\cdot(E + E^{cm})$ была получена для маленького объема в среде, а теперь представим обозримый проводник – тонкую проволоку.
Найдем работу, которую совершают электрические и сторонние силы по перемещению заряда в проволоке $dA = I(\varphi_1 + \varphi_2 + \varepsilon)\cdot dt$. Здесь $\varphi_1 + \varphi_2$ - работа электрических сил по перемещению единичного положительного заряда, а ε - работа сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда. По определению мощности найдем
$P = \frac{dA}{dt} = I(\varphi_1 + \varphi_2 + \varepsilon) = I^2R$.

18) ЭДС. Закон Ома для неоднородного участка и для полной цепи. Правила Кирхгофа.

Из условия стационарности
$$\begin{cases} div\vec j = 0 \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \end{cases}$$
делаем вывод, что цепь постоянного тока замкнута.
Рассмотрим проводник тока, малый настолько, что его можно считать трубкой тока.

В точках 1 и 2 потенциалы соответственно $\varphi 1$ и $\varphi 2$, пусть $\varphi 1 > \varphi 2$. На участке 1-а-2 течет однородный ток. Т.к. поле $\vec E$ - потенциально, то его силовые линии должны иметь начало и конец.

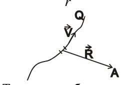


На участке 2-b-1 должна появиться некоторая регулярная дополнительная сила. Такие силы, отличные от электростатических, называют сторонними. Для данных сил можно ввести аналог напряжённости:
$\vec F^{cm} = e\vec E^{cm}$; $\vec E^{cm} = \frac{\vec F^{cm}}{e}$ - напряжённость сторонних сил.
$\vec j = \sigma(\vec E + \vec E^{cm})$ - закон Ома для неоднородного участка цепи.
Выберем положительное направление обхода в направлении потока тока. Помножим закон Ома для неоднородного участка цепи на $\frac{d\vec l}{\sigma}$.

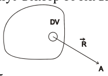
Тогда
$$\frac{\vec j d\vec l}{\sigma} = \vec E d\vec l + \vec E^{cm} d\vec l;$$
$$\int_{2(b)}^{1}\frac{\vec j d\vec l}{\sigma} = \int_{2(b)}^{1}\vec E d\vec l + \int_{2(b)}^{1}\vec E^{cm} d\vec l;$$
$$\int_{2(b)}^{1}\frac{\overset{I}{Sj}}{\sigma S}dl = I\int_{2(b)}^{1}\rho\frac{1}{S}dl = IR_{2-b-1};$$
$$\int_{2(b)}^{1}\vec E dl = (\varphi 2 - \varphi 1)$$
$$\int_{2(b)}^{1}\vec E^{cm} dl = \varepsilon_{2b1}$$ - алгебраическая величина.
Откуда
$$IR = (\varphi 1 - \varphi 2) + \varepsilon_{12}^{cm}$$
Т.е. произведение алгебраической величины тока на сопротивление равно разности потенциалов и ЭДС сторонних сил.
Совершим полный оборот по всему проводнику 1-а-2-b-1, тогда
$$IR_{полн} = 0 + \varepsilon^{cm}_{сумм}.$$
Узел – точка, где сходится более двух проводников.
Ветвь – любой участок цепи без узлов.
Контур – некоторая система проводников, такая, что в каждом узле контуру принадлежит лишь два проводника. Элементарный контур – тот, который нельзя разбить на отдельные контуры.
Правила Кирхгофа:
1) Алгебраическая сумма токов входящих и выходящих из узла ровна нулю.
2) Сумма произведений алгебраических токов во всех ветвях данного контура на соответствующие сопротивления равна алгебраической сумме ЭДС содержащихся в этом контуре.
Первое правило Кирхгофа непосредственно следует из закона сохранения заряда во времени. Второе правило Кирхгофа следует из закона Ома для неоднородного участка цепи. Если для каждой ветви выбранного контура записать закон Ома для неоднородного участка цепи, и просуммировать их, то получим искомое выражение:
$$+\begin{cases} I_1R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_1 \\ I_2R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \varepsilon_2 \\ I_3R_3 = \varphi_3 - \varphi_1 + \varepsilon_3 \end{cases}$$
$$\sum_i I_iR_i = \sum_i \varepsilon_i$$

19) Магнитное поле тока. Закон Био – Савара – Лапласа.

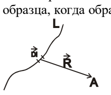
Найдем какое магнитное поле создает движущийся заряд. Индукция магнитного поля, созданного движущимся зарядом, будет зависеть от заряда, от расстояния и о скорости.
Запишем закон Био-Савара для одного заряда:
$$\vec B = k\frac{q}{r^3}[\vec V\times\vec r]; k = \frac{\mu_0}{4\pi}.$$



Таким способом мы можем найти магнитное поле, созданное движущимся зарядом q, в данный момент времени.
Допустим, что у нас есть тело, в котором текут токи. Эти токи можно описать $\vec j = \vec j(\vec R)$, где $\vec R$ – радиус-вектор точек внутри тела.

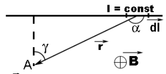


Выберем внутри тела объемчик, настолько маленький, что внутри этого объемчика плотность тока можно считать постоянной. Запишем магнитное поле, созданное зарядами, находящимися внутри этого объемчика.
$$d\vec B = k\frac{endV}{r^3}[\vec u\times\vec r]$$
$$en\vec u = \vec j$$
Закон Био - Савара для образца:
$$\vec B = \int_V k\frac{1}{r^3}[\vec j\times\vec r]\cdot dV$$
Поле, которое создается током, почти такое же, как и поле, которое создается точечным зарядом.
Рассмотри частный случай закона Био-Савара для образца, когда образцом является проволока.

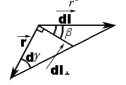


$$dV = Sdl$$
$$d\vec B = k\frac{1}{r^3}[\vec j\times\vec r]Sdl$$
Предположим, что в сечении проводника плотность тока одинакова, тогда:
$$I = |\vec j\cdot S|.$$
Введем единичный вектор в направлении dl, тогда:
$$\vec n dl = d\vec l$$
$$\vec j = \vec n j$$
$$d\vec B = k\frac{I}{r^3}[d\vec l\times\vec r]$$
Закон Био-Савара для проволоки:
$$\vec B = \int_L k\frac{I}{r^3}[d\vec l\times\vec r]$$

Пример: Найдём магнитное поле бесконечной прямолинейной проволоки в точке расположенной на расстоянии a от проволоки. Пусть по проволоке течёт ток $I = const$.



dl совпадает с направлением вектора плотности тока $\vec j$. $\vec r$ - радиус вектор точки А относительно $d\vec l$.
$$dB = k\frac{I}{r^2}dl * Sin\alpha$$

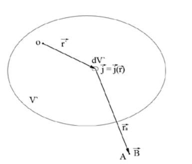


$$Sin\alpha = Sin90° + Sin\beta = Cos\beta' dl * Cos\beta = dl_{\perp}$$
$$dB = k\frac{I}{r^2}dl_{\perp}$$
Пусть dl мало настолько, что $dl_{\perp} = r * d\gamma$.
$$dB = k\frac{I}{r}d\gamma = k\frac{I}{a}Cos\gamma * d\gamma$$
$$B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} k\frac{I}{a}Cos\gamma * d\gamma = k\frac{2I}{a}$$

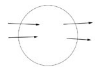
Пример: Найдём магнитное поле витка, по которому течёт постоянный ток I. Пусть dl мало настолько, что его можно считать участком прямой.

$\vec r$ - радиус-вектор в точку наблюдения.
$$d\vec B = k\frac{I}{r^3}[d\vec l * \vec r]$$
Из симметрии задачи, очевидно, что вектор магнитной индукции направлен по оси соленоида. Тогда
$$dB_Z = k\frac{I}{r^2}dl * \cos\alpha.$$
$$B = \int k\frac{I}{r^2}\cos\alpha * dl = k\frac{2\pi RI}{r^2}\cos\alpha.$$
Т.е. в центре витка магнитная индукция $B = k\frac{2\pi I}{R}$.

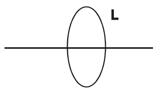
20) Индукция магнитного поля B. Поток и циркуляция вектора B.

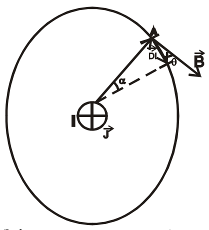


Запишем сначала в дифференциальной форме, а потом в интегральной.
Поток через бесконечно маленький кубик:
$$div\vec B = (\vec\nabla_a[\vec\nabla_a\vec A]) = (\vec\nabla_a, вектор \perp набла) = 0$$
, итак, т. Гаусса для вектора $\vec B$: $\boxed{div\vec B = 0}$
По теореме Остроградского-Гаусса:
$$\int_V div\vec B dV = \oint_S(\vec B d\vec s) = 0,$$
$$\boxed{\oint(\vec B d\vec s) = 0}$$
Это можно представлять так: сколько силовых линий магнитной индукции $\vec B$ вошло в поверхность, столько и вышло – для любой поверхности. В электростатике были заряды, на которых начинались и кончались силовые линии. Магнитные силовые линии не имеют начала и конца, значит, магнитных зарядов не существует. Силовые линии $\vec B$ всегда замкнуты!

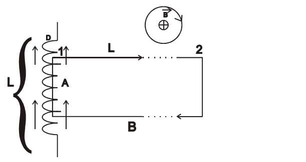


Рассмотрим провод с током, выделим в нем прямолинейный участок и выделим в нем замкнутый контур L.





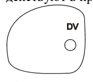
Зафиксируем некую точку A, проведем к ней радиус вектор. В этой точке провод будет создавать магнитное поле. Из точки A построим прямолинейный участок контура $d\vec l$.
$$\vec B\perp\vec r$$
$$(\vec B\cdot d\vec l) = Bdl\cos\theta$$
$$dl\cos\theta = dl_B$$
α – очень маленький, поэтому
$$dl = rd\alpha$$
$$(\vec B\cdot d\vec l) = Brd\alpha$$
Выполним такое разбиение для каждого участка контура и просуммируем, утня, что индукция магнитного поля, созданного длинным проводом равна:
$$B = k\frac{2I}{r}.$$
$$\oint_L\vec Bd\vec l = \oint_L Brd\alpha$$
$$\oint_L Brd\alpha = \oint_L k\frac{2Ir}{r}d\alpha = \oint_L k2Id\alpha = k2I\oint_L d\alpha$$
$$\oint_L d\alpha = 2\pi$$
$$\oint_L\vec Bd\vec l = \mu_0 I$$
Пусть теперь имеется много проводов, и они пересекают поверхность, натянутую на контур L.
$$\sum_i\oint_L(\vec B_i d\vec l) = \sum_i\mu_0 I_i$$
Суммирование идет по i, а интегрирование идет по l, поэтому суммирование интегрирование можно поменять местами.
$$\oint(\vec Bd\vec l) = \mu_0\sum_i I_i.$$
Циркуляция вектора магнитной индукции $\vec B$ по произвольному замкнутому контуру, равна сумме всех токов, пересекающих поверхность, натянутую на этот контур с коэффициентом μ_0.
Обобщим. Пусть у нас имеется среда, в которой некоторым образом текут токи. Они определены в каждой точке вектором плотности тока $\vec j = \vec j(\vec r)$.
Выберем произвольный замкнутый контур L. Разбив его на маленькие кусочки, можно считать, что внутри кусочка $\vec j = const$. Тогда
$I = \sum_K\vec j_K d\vec S_K$. Поэтому $I = \int_{S_L}(\vec jd\vec S)$. Тогда теорема о циркуляции может быть записана следующим образом:
$$\oint_L\vec Bd\vec l = \mu_0\int_{S_L}(\vec jd\vec S).$$
Пусть имеется среда и контур L. Натянем на этот контур поверхность. Тогда, согласно теореме Стокса, циркуляцию вектора $\vec B$ по замкнутому контуру можно представить как поток ротора вектора $\vec B$ через поверхность, натянутую на данный контур.
$$\oint_L\vec Bd\vec l = \int_{S_L}(rot\vec Bd\vec S).$$
$$\int_{S_L}rot\vec Bd\vec S = \int\mu_0\vec jd\vec S$$
Имеем два интеграла одного смысла (поток) по одной и той же поверхности, поэтому:
$$rot\vec B = \mu_0\vec j.$$
Теорема о циркуляции вектора $\vec B$.
Пример. Поле длинного соленоида (катушки).



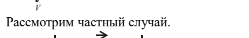
Найдем индукцию магнитного поля внутри катушки (внутри катушки поле $\vec B$ параллельно оси катушки). Катушка такова, что диаметр сечения катушки много меньше длины катушки.
Выберем замкнутый контур в форме прямоугольника, одна сторона которого находится внутри катушки, другая – на бесконечности.
Запишем теорему о циркуляции:
$$\oint_L\vec Bd\vec l = \mu_0\sum I.$$ Если контур не очень большой по сравнению с длинной соленоида, то внутри поле можно считать одинаковым.
$Ba + 0 + 0 = \mu_0 IN$. По боковым сторонам циркуляция равна нулю, так как направление обхода контура перпендикулярно направлению вектора магнитной индукции $\vec B$ внутри соленоида. По второй стороне прямоугольника, параллельной оси соленоида, циркуляция вектора $\vec B$ равна нулю, так как эта сторона находится на бесконечности.
N – количество витков, которые охватил контур.
Допустим, что намотка такова, что на единицу длины приходится n витков. Тогда: $N = n\cdot a$ и
$Ba = \mu_0 nIa$. Получили поле внутри соленоида:
$$B = \mu_0 I\cdot n.$$

21) Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле.

Представим себе, что у нас движется много зарядов (то есть, имеет место быть электрический ток). У нас есть проводник, в котором текут токи, двигаются заряды. В каждой точке нашего проводника определена плотность тока. Поместим проводник в магнитное поле. Найдем силы, которые действуют в проводнике.



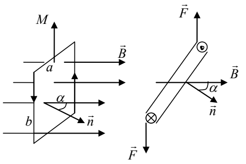
Выделим в проводнике объемчик dV, настолько малый, чтобы в нем плотность тока и индукция магнитного тока были постоянными. n – плотность зарядов (количество зарядов, движущихся в единице объема). Пусть эти заряды движутся со скоростью $\vec u$. Рассматривая, dV как один заряд, движущийся с известной скоростью в однородном магнитном поле, можем записать силу, действующую на dV.
$$d\vec F = endV[\vec u\times\vec B] = dV[en\vec u\times\vec B] = [\vec j\times\vec B]\cdot dV.$$
Закон Ампера для проводника:
$$\vec F = \int_V[\vec j\times\vec B]\cdot dV$$
Рассмотрим частный случай.



Вместо большого проводника у нас будет проволока, по которой течет ток. Выберем участок проволоки dl, который можно считать прямолинейным. Тогда, зная, что площадь поперечного сечения S, запишем dV и подставим его в закон Ампера для проводника.
$$dV = Sdl$$
$$d\vec F = [\vec j\times\vec B]\cdot Sdl = [S\cdot\vec j\times\vec B]\cdot dl$$
Предположим, что в сечении проводника плотность тока одинакова, тогда $|S\cdot\vec j| = I$. Введем единичный вектор в направлении dl:
$$\vec n dl = d\vec l$$
$$\vec j = \vec n j$$
Тогда выражение для силы перепишем в следующем виде:
$$d\vec F = I[d\vec l\times\vec B].$$
Получили закон Ампера для проволоки:
$$\vec F = \int_L I[d\vec l\times\vec B]$$
Для магнитного поля аналогично, как и для электростатического, можно ввести силовые линии. Касательные в каждой точке к силовым линиям – вектор $\vec B$.

22) Рамка с током в магнитном поле.

Рассмотрим плоский контур с током I в однородном магнитном поле B. Сила, действующая на контур стоком в однородном магнитном поле, равна 0. Если результирующая сил, действующих на систему, равна нулю, то суммарный момент этих сил не зависит от точки, относительно которой определяются моменты этих сил. Результирующий момент амперовых сил равен: $\vec{M}=\oint\left[\vec{r},d\vec{F}\right]$, где $d\vec{F}=I\left[d\vec{l},\vec{B}\right]$. Получаем: $\vec{M}=\left[\vec{p}_m\vec{B}\right]$, где p_m - магнитный момент контура с током (для плоского контура $\vec{p}_m=IS\vec{n}$).



$M=p_mB\sin\alpha$

Силы действующие на стороны a перпендикулярны им и вектору B и стремятся растянуть рамку. Силы действующие на стороны b равны: $F=IbB$. Эти силы стремятся повернуть контур так, чтобы его вектор $\vec{p}_m$ оказался сонаправлен с вектором B. На контур действует пара сил, момент которой равен произведению плеча пары $a\sin\alpha$ на силу F:

$M=IbBa\sin\alpha$

$ab=S$

$Iba=p_m$

$M=p_mB\sin\alpha$

23) Сила Лоренца.

Существует вид электрического взаимодействия, которое характерно лишь для движущихся зарядов. Это означает, что если два заряда движутся относительно друг друга с некоторой скоростью, то они взаимодействуют друг с другом не только посредством силы Кулона но и с помощью специфической силы, которая называется *магнитной силой*. Магнетизм- это следствие движения.

Можно полагать, что в процессе движения заряд создает некоторое поле, которое называется *магнитное поле*. Будем обозначать силовую характеристику этого поля вектором $\vec{B}$. Эта характеристика называется *индукцией магнитного поля*.

Если один заряд или система зарядов создали поле с вектором $\vec{B}$, то на другой заряд, движущийся в этом поле, действует сила:

$\vec{F}_л=q\left[\vec{V}\times\vec{B}\right]$.

Эта сила называется *силой Лоренца*. Отметим особенность этой силы: она зависит от скорости, а скорость, как известно, в разных системах отсчета разная.

$\vec{F}=q\vec{E}+q\left[\vec{v}\cdot\vec{B}\right]$

24) Магнитные свойства вещества. Вектор намагниченности J.

Вещество реагирует на магнетизм и само обладает магнетизмом. Что является причиной магнетизма в веществе? Магнитное поле создается движущимися зарядами (токами). Следовательно, если вещество обладает магнетизмом, значит, в веществе есть ток.

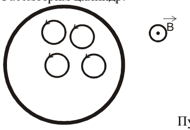
1) Электрон движется вокруг ядра.

2) Электрон обладает магнетизмом, который связан с собственным механическим моментом – спином.

3)Такими же магнитными моментами обладают частицы, входящие в состав атома.

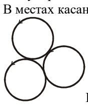
Будем считать, что всегда в веществе текут молекулярные токи. Эти токи почти всегда ответственны за все явления магнетизма.

Рассмотрим цилиндр.

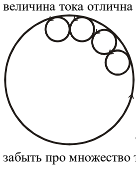


Пусть этот цилиндр имеет магнитные свойства. Это означает, что в этом цилиндре имеют место быть молекулярные токи, и они упорядочены.

В местах касания ток равен нулю.



На границе, где нет касаний, величина тока отлична от нуля.



Таким образом, мы можем забыть про множество токов внутри рассматриваемого цилиндра, а говорить только о токе, который течет по поверхности цилиндра.

Получили, что никакого магнетизма нет, только по поверхности потек ток в ту или иную сторону, и этот ток создал магнитное поле.

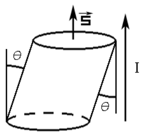
Введем понятие вектора намагниченности среды $\vec{J}$. Вектор $\vec{J}$ определяется следующим образом:

$\vec{J}=\dfrac{\vec{p}_m}{V}$, где $\vec{p}_m=I\cdot\vec{S}$ – магнитный момент.

$J=I_m\cdot\dfrac{S}{V}$.

$J=\dfrac{I_m}{L}$

$I_m=J\cdot L$



Пусть дан косой цилиндр. Найдём $J_{цилиндр}$.

$J\cdot V=J\cdot S\cdot l\cdot\cos\theta$;

$J\cdot\cos\theta=J_l$;

$J_{гран}=I_mS$;

$J_l\cdot S\cdot l=I_mS\Rightarrow J_l\cdot l=I_m$; $J_l=\dfrac{I_m}{l}=i_m$. I_m - полный ток по поверхности. i_m - ток на единицу длины

25) Напряженность магнитного поля H. Теорема о циркуляции.

Введём вектор B в веществе, для этого выберем некоторую полость, большую, чем межатомное расстояние. Такую, чтобы в неё можно было поместить некоторую катушку.

$\oint\vec{B}*d\vec{l}=\mu_0\sum I$

Но в теореме о циркуляции вектора магнитной индукции ничего не сказано о природе токов текущих через выбранную поверхность. Обозначим через I - токи проводимости (т.е. токи от батарейки). А через $I_m=I_A$ - токи, связанные с намагничиванием, токи Ампера. Тогда

$\oint\vec{B}*d\vec{l}=\mu_0(I+I_m)$.

Построим вокруг контура некоторый тор – замкнутый цилиндр.

Ток Ампера движется по тору. Тогда

$I_m=\oint\limits_L\vec{J}dl$ $\oint\limits_L(\vec{B}*d\vec{l})=\mu_0I+\mu_0\oint\limits_l(\vec{I}*d\vec{l})$.

$\oint((\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{J})*d\vec{l})=I$ $\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{J}$ - напряжённость магнитного поля $\vec{B}$.

$\oint\limits_L\vec{H}*d\vec{l}=I$ - циркуляция вектора $\vec{H}$ по замкнутому контуру L равна полному току проводимости по поверхности, натянутой на этот контур с точностью до коэффициента

$rot\vec{H}=\vec{j}$.

$\begin{cases}\vec{B}=f(\vec{H})\\ \vec{J}=f(\vec{H})\end{cases}$

Если поля небольшие, то $\vec{B}=\mu\mu_0\vec{H}$ (μ - магнитная проницаемость, измеряется практически).

Аналогично $\vec{J}=\chi\cdot\vec{H}$, χ - магнитная восприимчивость вещества.

$\chi>0$ - парамагнетик. $\chi<0$ - диамагнетик.

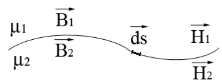
Т.к. $\vec{H}=\mu\vec{H}-\chi\vec{H}$, то $\mu=1+\chi$. "μ" может быть больше или меньше единицы.

$\mu>1$ - парамагнетик. $\mu<1$ - диамагнетик.

Ферромагнетик – сильно нелинейное вещество.

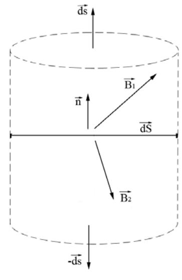
26) Граничные условия для B и H. Преломление силовых линий на границе магнетиков.

Рассмотрим две полу бесконечные среды, состоящие из двух магнетиков, которые возможно являются проводниками. Один магнетик характеризуется магнитной проницаемостью μ_1, а другой μ_2. Поле характеризуется функцией



$\vec{B}(\vec{r})$, по границе раздела, возможно, течет ток $\vec{j}(\vec{r})$.

Выберем площадку ds на границе раздела двух сред. ds на столько мала, что плотность тока на ней можно считать постоянной, и поле $\vec{B}$ по разные стороны от площадки ds тоже постоянно. Зададим вектор нормали $\vec{n}$ и запишем т. Гаусса для



вектора $\vec{B}$:

$\oint\limits_s\vec{B}d\vec{s}=0$.

Выберем поверхность S в виде цилиндра с основанием ds и высотой h. Запишем поток вектора $\vec{B}$ через поверхность S:

$\vec{B}_1d\vec{s}+\vec{B}_2d\vec{s}+d\phi_{бок}=0$.

Устремим h к нулю, тогда $S_{бок}\to0$,

$d\phi_{бок}\to0$

$\left(\vec{B}_1d\vec{s}\right)=ds\left(\vec{B}_1\vec{n}\right)=B_{1n}ds$, где

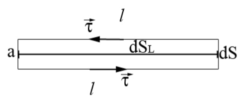
B_{1n} - нормальная компонента вектора $\vec{B}$.

С учетом того, что основания цилиндра имеют разные направления нормали, а мы хотим записать в проекции на вектор $\vec{n}$, то $B_{1n}ds-B_{2n}ds=0$, т.о. получаем граничные условия вектора $\vec{B}$:

$\boxed{B_{1n}-B_{2n}=0}$

Выберем замкнутый контур в виде прямоугольника со сторонами a и l, и запишем теорему о циркуляции для вектора $\vec{H}$ по данному замкнутому контуру L:

$\oint\limits_L\vec{H}d\vec{l}=I$.



Поскольку вблизи площадки вектора $\vec{B}$ и $\vec{H}$ постоянны, то можем не писать интеграл, и т.к.

$\vec{H}d\vec{l}=\vec{H}\vec{\tau}l=H_\tau l$, то

$H_{1\tau}l-H_{2\tau}l+C_{бок}=I$

Если $a\to0$, то $C_{бок}\to0$.

I - поток вектора $\vec{j}$ через замкнутую поверхность

$I=\left(\vec{j}\,d\vec{s}_L\right)$. Введем вектор линейной плотности тока i - ток на единицу длинны, тогда $I=i_nl$.

Таким образом получаем формулу

$\boxed{H_{1\tau}-H_{2\tau}=i_n}$

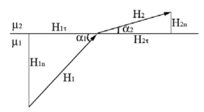
На границе раздела двух сред вектор $\vec{H}$ прерывается, и величина этого раздела с точностью до коэффициента равна нормальной компоненте линейной плотности тока проводимости (от батарейки).

Замечания:

1) $H_{1n}-H_{2n}\neq0$

2) Для вектора $\vec{B}$ можно написать формулу похожую на $H_{1\tau}-H_{2\tau}=i_n$, но в нее будут входить молекулярные токи, а что с ними делать – не знаем – бесполезная формула!

Пусть на границе раздела двух сред не текут токи проводимости $i=0$, тогда $\begin{cases}B_{1n}-B_{2n}=0\\ H_{1\tau}-H_{2\tau}=0\\ B_1=\mu H_1\\ B_2=\mu H_2\end{cases}$, при условии, что поля не очень сильные.



Тогда $H_1\cos\alpha_1=H_2\cos\alpha_2$ и

$\mu_1H_1\sin\alpha_1=\mu_2H_2\sin\alpha_2$

Поделив одно выражение на другое получим

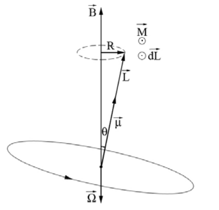
$\boxed{\mu_1tg\alpha_1=\mu_2tg\alpha_2}$

27) Классическая теория диамагнетизма.

Магнитные свойства веществ гораздо разнообразнее, чем электрические. Вещества для которых $\mu<1$, называются диамагнетиками, а вещества с $\mu>1$ - парамагнетиками. Так как магнитная восприимчивость $\chi=\mu-1$, то для парамагнетиков она положительна, а для диамагнетиков – отрицательна.

Отрицательное значение χ в диамагнетиках обозначает, что намагниченность направлена против намагничивающего поля. Когда на диамагнетик действует поле, он выталкивается из него и устанавливается перпендикулярно полю. Объяснение диамагнетизма было дано Ланжевеном. Рассмотрим какую либо электронную орбиту внутри атома и предположим, что в некоторый момент времени включили внешнее магнитное поле. Движение электрона изменится, а именно – возникнет ларморова прецессия.

Пусть по окружности движется заряженная частица. Охарактеризуем ее магнитным моментом $\vec{p}_m$. Есть масса m, скорость $\vec{V}$, $\vec{L}$ - ее момент импульса. Вся эта система находится во внешнем магнитном поле, что будет происходить дальше? Эту движущуюся частицу можно рассматривать как маленький виток с током, (порядка одного ангстрема).



На таких расстояниях поле $\vec{B}$ можно считать однородным. На подобный виток с током действует момент сил $\vec{M}=\left[\vec{p}_m\times\vec{B}\right]$. Запишем уравнение динамики твердого тела: $\dfrac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$, т.е. $d\vec{L}\uparrow\uparrow\vec{M}$ вектор $\vec{L}$ будет крутиться (прецессировать) вокруг вектора $\vec{B}$.

$dL=M\cdot dt=p_mB\sin\vartheta\cdot dt$

Конец вектора $\vec{L}$ будет описывать окружность радиуса $R=L\sin\vartheta$

$dL=L\sin\vartheta\cdot\Omega dt$.

$\boxed{\Omega=\left(\dfrac{p_m}{L}\right)B}$, где $\dfrac{p_m}{L}=\dfrac{\bar{e}}{2m}$ - гиромагнитное отношение.

Угловая скорость прецессии выражается через фундаментальную характеристику частицы, умноженную на величину B.

Эту формулу получил Лармор. Ω - ларморова частота.

$I'_л=\dfrac{\bar{e}}{T_л}=\dfrac{\bar{e}\Omega}{2\pi}$

$p'_m=I'_лS_л=\bar{e}\dfrac{\Omega}{2\pi}\pi R'_л$

$\left\langle\vec{r}'_л\right\rangle=\dfrac{2}{3}R^2$

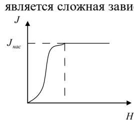
$p'_m=-\dfrac{\bar{e}^2}{6m}R^2B$

знак «-» отображает, что $\vec{p}'_m\uparrow\downarrow\vec{B}$.

28) Ферромагнетики.

В магнитном отношении все вещества можно разделить на слабомагнитные (парамагнетики и диамагнетики) и сильномагнитные (ферромагнетики). Пара- и диамагнетики при отсутствии магнитного поля не намагничены и характеризуются однозначной зависимостью намагниченности J от H. Ферромагнетиками называют вещества, которые могут обладать спонтанной намагниченностью, т.е. намагничены уже при отсутствии внешнего магнитного поля. Типичные представители ферромагнетиков – это железо, кобальт и т.д.

Характерной особенностью ферромагнетиков является сложная зависимость J(H) и B(H).

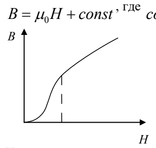


- основная кривая намагничивания.

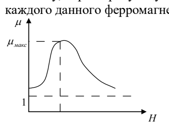
Уже при сравнительно небольших H намагниченность J достигает насыщения.

Магнитная индукция также растет с увеличением H: $B=\mu_0(H+J)$, а после насыщения продолжает расти с увеличением H по линейному закону:

$B=\mu_0H+const$, где $const=\mu_0J_{нас}$.



Из-за нелинейной зависимости B(H) для ферромагнетиков нельзя ввести магнитную проницаемость μ как определенную постоянную величину, характеризующую магнитные свойства каждого данного ферромагнетика.



Магнитная проницаемость для ферромагнетиков может достигать очень больших значений.

Для ферромагнетиков характерно явление магнитного гистерезиса: связь B и H или J и H оказывается неоднозначной, а определяется предшествующей историей намагничивания ферромагнетика. Если первоначально ненамагниченный ферромагнетик намагничивать, увеличивая H от нуля до значения, при котором наступает насыщение, а затем уменьшать H, то кривая намагничивания пройдет не по первоначальному пути, а выше. Если дальше изменять H в обратном направлении, то кривая намагничивания пройдет ниже. Получившуюся кривую называют петлей гистерезиса. Когда в точках 1 и 4 достигается насыщение, получается максимальная петля гистерезиса.

Видно, что в точке 2 при H=0 намагничивание не исчезает и характеризуется остаточной индукцией. Ей соответствует остаточная намагниченность. С этим связано существование постоянных магнитов. Величина B обращается в ноль лишь под действием поля H_c, имеющего направление, противоположное полю, вызвавшего

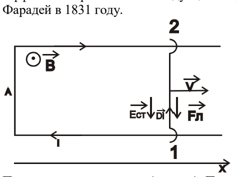
намагниченность. Величина H_c называется коэрцитивной силой.
При перемагничивании ферромагнетик нагревается. В единице объема выделяется теплота численно равная площади петли гистерезиса:

$$Q_{ед} = \oint HdB = S_n.$$

При увеличении температуры способность ферромагнетиков намагничиваться уменьшается, уменьшается и намагниченность насыщения. При температуре Кюри ферромагнитные свойства исчезают.
При определенных условиях в кристаллах ферромагнетика возникают обменные силы, которые заставляют магнитные моменты электронов устанавливаться параллельно друг другу. Возникают области спонтанного (самопроизвольного) намагничивания – домены. Каждый домен имеет определенный магнитный момент. Их направления различны, при отсутствии внешнего поля, а их сумма равна нулю. При включении внешнего поля домены, ориентированные по полю, растут за счет доменов, ориентированных против поля. Происходит переориентация магнитных моментов. Этот процесс необратимый, что и служит причиной гистерезиса.

29) Явление и закон электромагнитной индукции.

Эффект электромагнитной индукции открыл Фарадей в 1831 году.



Пусть имеется проводник(провод). По проводу может скользит металлическая перемычка. На электроны в проводнике будет действовать сила Лоренца: $\vec{F}_Л = q[\vec{V} \times \vec{B}]$.
При таком движении в проводнике будет наблюдаться упорядоченное движение зарядов вниз, т. е. пойдет ток(т.к. проводник лежит на проводнике, то ток будет циркулировать). Сменим направление движение перемычки, тогда сила Лоренца поменяет направление на противоположное, в туже сторону будет направлена плотность тока.
Сила Лоренца не электрическая сила, поэтому ее можно считать сторонней. Найдем силу, действующую на единичный положительный заряд, это будет напряженность поля сторонней силы.

$$\vec{E}^{ст} = \frac{\vec{F}_Л}{q} = [\vec{V} \times \vec{B}]$$

. Найдем работу сил стороннего поля по перемещению единичного положительного заряда (ЭДС).

$$\varepsilon^{ИНД} = \oint \vec{E}^{ст} d\vec{l} = \int_{1\to 2} \vec{E}^{ст} d\vec{l} = -VBa = -\frac{dx}{dt} aB$$

. Интеграл $\int_S \vec{B} d\vec{S} = \phi$ – поток вектора $\vec{B}$ через поверхность S, называется магнитным потоком.

$$\varepsilon^{инд} = -\frac{d(axB)}{dt} = -\frac{d(SB)}{dt} = -\frac{dS \cdot B}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

$$\varepsilon^{инд} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Эта формула справедлива для любой формы изменения магнитного потока.
1) Можно все стороны рамки деформировать и не только в плоскости, но и в пространстве, тогда поток можно выразить как $\int_S \vec{B} d\vec{S}$;
2) можно рамку не трогать, а изменять $\vec{B}$;
3) можно изменять угол между $\vec{B}$ и $d\vec{S}$ (повернуть рамку).
Это невозможно доказать при помощи тех постулатов, которые нам известны. Это фундаментальное свойство электромагнитного поля.

$$\varepsilon^{инд} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\varepsilon^{инд} = \oint \left(\vec{E}^{cm} d\vec{l}\right) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Сила Лоренца не совершает работу. При изменении магнитного потока электроны перемещает электрическое поле. При изменении магнитного потока возникает электрическое поле, отличное от электростатического. Работа по замкнутому контуру не равна нулю и она зависит от пути, следовательно, для такого поля нельзя вести понятие потенциала. Такое поле называется вихревым электрическим полем.

$$\oint_L \left(\vec{E}^{вихр} d\vec{l}\right) = \int_S rot\vec{E}^{вихр} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

$$\int_S rot\vec{E}^{вихр} d\vec{S} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S}$$

$$rot\vec{E}^{вихр} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Уравнение $rot\vec{E}^{вихр} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$ выражает закон Фарадея в дифференциальной форме.
Нет площадей, проводников и т.д., есть точка, в которой меняется индукция магнитного поля и в ней возникает вихревое электрическое поле.

$$\varepsilon^{инд} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad rot\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

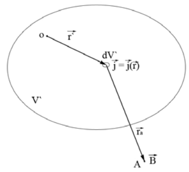
Рассмотрим виток, помещенный в однородное, но изменяющееся во времени магнитное поле. Выберем направление обхода по правилу правого винта по вектору магнитной индукции.

1) Пусть $\frac{dB}{dt} > 0$, тогда $\frac{d\Phi}{dt} > 0$. Тогда $\varepsilon^{инд} < 0$, т.е. если мы понесём пробный заряд по направлению обхода, то работа вихревого поля будет отрицательна.
Любой электрический ток создаёт магнитное поле, т.е. поле $\vec{B}'$, создаваемое током индукции, направлено против $\vec{B}$.
2) Пусть $\frac{dB}{dt} < 0$, тогда $\frac{d\Phi}{dt} < 0$. Тогда $\varepsilon^{инд} > 0$, т.е. работа сторонних сил по этому контуру в выбранном направлении положительна, т.е. ток потечёт по направлению обхода.

Поле $\vec{B}'$, создаваемое током индукции, сонаправлено с $\vec{B}$.
<u>Правило Ленца:</u> При изменении магнитного потока, индукционный ток в витке направлен так, чтобы возникшее при этом «дополнительное магнитное поле $\vec{B}'$» препятствовало изменению магнитного потока.

30) Векторный потенциал.

Ранее все свойства электростатического поля мы определили с помощью следующих соотношений:
1) т. Гаусса $\oint \vec{E} d\vec{s} = 4\pi kq$, $div\vec{E} = 4\pi k\rho$
2) Т. с циркуляции $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$, $rot\vec{E} = 0$
3) $\vec{E} = -grad\varphi$.
Найдем подобные соотношения для магнитного поля.
Найдем аналог $\vec{E} = -grad\varphi$.



Вектор $\vec{B}$ выражается через дифференциальный оператор от некоторой величины.
Пусть есть образец - среда, в которой текут токи.

$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$$

$\vec{r}\,`$ - радиус вектор выбранного маленького объема образца относительно точки О. Из каждого такого объема будем проводить в точку наблюдения А вектор $\vec{r}_a$ (это не радиус - вектор).
Запишем закон Био-Савара в этих обозначениях:

$$\vec{B} = k\int_{V`} \frac{[\vec{j} \times \vec{r}_a]}{r_a^3} dV`.$$

Вектора $\vec{r}\,`$ и $\vec{r}_a$ независимы.

<u>Вспомогательная формула:</u>

$$grad_a\left(\frac{1}{r_a}\right) = \frac{\partial}{\partial x_a}\left(\frac{1}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}}\right) \cdot \vec{i} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y_a}\left(\frac{1}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}}\right) \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z_a}\left(\frac{1}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}}\right) \cdot \vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_a}\left(\frac{1}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}}\right) = -\frac{2x_a}{2(x_a^2 + y_a^2 + z_a^2)^{3/2}} = -\frac{x_a}{r_a^3}$$

$$grad_a\left(\frac{1}{r_a}\right) = -\left[\frac{x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}}{r_a^3}\right] = -\frac{\vec{r}_a}{r_a^3}.$$

Воспользуемся ей:

$$\vec{B} = -k\int_{V`}\left[\vec{j} \times grad_a\left(\frac{1}{r_a}\right)\right] dV` = k\int_{V`}\left[grad_a\left(\frac{1}{r_a}\right) \times \vec{j}\right] dV`$$

<u>Еще одна вспомогательная формула:</u>

$$rot_a\left(\frac{\vec{j}}{r_a}\right) = \left[\vec{\nabla}_a \times \frac{\vec{j}}{r_a}\right] = [\vec{\nabla}_a \times \vec{j}]\frac{1}{r_a} + \left[\vec{\nabla}_a \frac{1}{r_a} \times \vec{j}\right]$$

, но $[\vec{\nabla}_a \times \vec{j}]\frac{1}{r_a} = 0$, т.к. дифференцирование идет по переменной, от которой $\vec{j}$ не зависит;

$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}\,`) \neq \vec{j}(\vec{r}_a).$$

$$rot_a\left(\frac{\vec{j}}{r_a}\right) = \left[grad_a\left(\frac{1}{r_a}\right) \times \vec{j}\right]$$

- это и есть подынтегральное выражение в формуле $\vec{B} = k\int_{V`}\left[grad_a\left(\frac{1}{r_a}\right) \times \vec{j}\right] dV`$, значит $\vec{B} = k\int_{V`} rot_a\left(\frac{\vec{j}}{r_a}\right) dV`$ здесь интегрирование по “штрихам”, а ротор по “а”, следовательно, порядок интегрирования и дифференцирования можно поменять. $\vec{B} = k\,rot_a\int_{V`}\left(\frac{\vec{j}}{r_a}\right) dV`$. Величина $\int_{V`}\left(\frac{\vec{j}}{r_a}\right) dV`$ - интеграл от вектора по объему, является вектором.
Обозначим $\boxed{\vec{A} = k\int_{V`}\left(\frac{\vec{j}}{r_a}\right) dV`}$, тогда $\boxed{\vec{B} = rot\vec{A}}$.

Вектор $\vec{A}$ - называется векторный потенциал магнитного поля в точке А.

31) Явление самоиндукции. Индуктивность. Примеры вычисления.

Пусть есть виток, по которому течёт ток. Этот ток создаёт собственное магнитное поле, следовательно, можно посчитать магнитный поток $\vec{B}'$ в этом витке $\Phi = \int (\vec{B}' * d\vec{S})$.

Нельзя ли при некоторых условиях записать формулу проще Магнитный поток зависит от тока (закон Био-Савара) и от геометрии витка (круглый, квадратный и т.д.). Попробуем описать поток так $\Phi = LI$; L - некоторое число характеризующее геометрию витка. L - индуктивность проводника.
$\varepsilon^{инд} = -\frac{d\Phi}{dt}$; $\varepsilon^{инд} = -\frac{d}{dt}(L * I)$ Т.е. при наличии тока $\vec{j}$ проводник может деформировать самого себя. Если проводник жёсток то $L = const$, тогда

$$\varepsilon^{инд} = -L\frac{dI}{dt}.$$

<u>Пример:</u> Найдём индуктивность катушки о которой известно: длина l; N - число витков. Пусть $l >> d$.

Найдём магнитный поток в контуре L , который охватывает всю катушку и одним ребром уходит на бесконечность. Тогда

$$\oint_L \vec{B} * d\vec{l} = I * N.$$

$$B * l + \overbrace{d\Phi_{бок}}^{=0} = I * N.$$

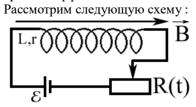
$B = I * n$; $n = \frac{N}{l}$.

Пусть площадь сечения - S. В – однородно.

$$\Phi = B * S * N = N^2 * \frac{S}{l} I = I * L,$$

$$L = N^2 \frac{S}{l}.$$

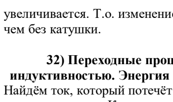
<u>Замечание:</u> На краях поле не однородно, но т.к. $l >> d$ то пренебрегаем этой погрешностью, т.е. краевые эффекты считаем незначительными.
Рассмотрим следующую схему :



Если $R(t) = const$, то в катушке будет постоянное магнитное поле. Пусть $R(t)$ - меняется во времени.
Тогда ток, текущий в контуре, станет переменным. Тогда переменным будет и поток в катушке, следовательно возникнет $\varepsilon^{инд} = -\frac{d\Phi}{dt}$. Т.о. появится дополнительная ЭДС и ток не будет подчиняться закону $I = \frac{\varepsilon}{r + r_0 + R}$. Магнитный поток меняется за счёт изменения собственного магнитного поля в результате изменения тока.
Явление возникновения $\varepsilon^{инд}$ в проводнике под влиянием тока текущего через этот проводник – самоиндукция.
1) $\frac{dR}{dt} < 0$, т.е. сопротивление уменьшается, следовательно $\frac{dI}{dt} > 0$, $\frac{d\Phi}{dt} > 0$, $\varepsilon^{инд} < 0$.
Тогда $\varepsilon^{инд}$ и $\varepsilon^{батар}$ имеют разные знаки, т.е. полное ЭДС $\varepsilon^{полн} = \varepsilon - \left|\varepsilon^{инд}\right|$ уменьшается.
Т.о. изменение тока будет меньше чем без катушки.
2) $\frac{dR}{dt} > 0$, т.е. сопротивление увеличивается, следовательно $\frac{dI}{dt} < 0$, $\frac{d\Phi}{dt} < 0$, $\varepsilon^{инд} > 0$.
Тогда $\varepsilon^{инд}$ и $\varepsilon^{батар}$ имеют одинаковые знаки, т.е. полное ЭДС $\varepsilon^{полн} = \varepsilon + \left|\varepsilon^{инд}\right|$ увеличивается. Т.о. изменение тока будет меньше чем без катушки.

32) Переходные процессы в цепях с индуктивностью. Энергия проводника с током.

Найдём ток, который потечёт по контуру в случае замыкания ключа К.



Запишем второе правило Кирхгофа для всего контура $IR = \varepsilon + \varepsilon^{инд}$. Пусть катушка жёсткая, т.е. $L = const$.

$$\varepsilon^{инд} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(L * I) = -L * \frac{dI}{dt}.$$

Тогда

$$IR = \varepsilon - L * \frac{dI}{dt}.$$

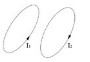
Откуда $I(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, где $\tau = \frac{L}{R}$.
Т.о. наличие индуктивности препятствует скачкообразному изменению тока.
Случай размыкания ключа К. Ток через индуктивность L начнет убывать:

$$\varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt}.$$

Закон Ома: $I = \frac{\varepsilon_s}{R}$ или $RI = -L\frac{dI}{dt}$.
Получаем: $\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$

$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, где $\tau = \frac{L}{R}$ - время релаксации (время, за которое сила тока уменьшается в е раз).

33) Взаимоиндукция. Теорема взаимности.



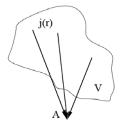
Пусть есть две катушки, по которым текут токи I_1 и I_2
Катушки находятся достаточно близко, чтобы внутри катушки I_1 было поле, создаваемое катушкой I_2, и наоборот, внутри катушки I_2 было поле, создаваемое катушкой I_1.
Запишем суммарный поток вектора $\vec{B}$ через катушку

$$\Phi_1 = \Phi_1\begin{pmatrix} I_1, I_2, конструктивные\_ \\ хар - ки\_контуров \\ (размеры, ориентация) \end{pmatrix}$$

Поток $\Phi = LI$ является линейным по току, значит поток через катушку I_1 можно записать следующим образом: $\Phi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2$ здесь $L_1 I_1$ - часть магнитного потока, которая создается собственным током, $L_{12} I_2$ - часть магнитного потока, которая создается током I_2, L_{12} - коэффициент, размерность которого совпадает с L_1.
Аналогично запишем поток через катушку I_2:

$$\Phi_2 = L_2 I_2 + L_{21} I_1.$$

L_1, L_2 - индуктивности катушек по определению (поток своего поля через себя).
Коэффициенты L_{12} и L_{21} называются коэффициентами взаимной индукции.
Докажем, что $L_{12} = L_{21}$.



По з. Био-Савара $\vec{A} = \int \frac{\vec{j}(\vec{r})}{R`} dV$ (аналог $\varphi = \int \frac{q}{r} dr$)

$$\vec{B} = rot\vec{A}$$

$$I_1 = 0 \quad I_2 \neq 0$$

$$\varepsilon^{инд} = -\frac{d\Phi_1}{dt}, \quad \Phi_1 = L_{12} I_2,$$

$$\Phi_1 = \int_{s1} \vec{B} d\vec{S} = \int_{s1} rot\vec{A} d\vec{S}$$

$$\varepsilon_1^{инд} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

$$\vec{A} = \int \frac{\vec{j}(\vec{r})}{R`} dV, \quad \vec{j} dV = \vec{j} S d\vec{l} = I d\vec{l},$$

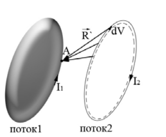
$$\vec{A} = \oint \frac{I_2}{R`} d\vec{l}_2,$$

$$\Phi_1 = \int_s rot\vec{A} d\vec{S} =$$

$$= \oint_{по\_витку1} \vec{A} d\vec{l}_1 = \oint_{по\_витку1} \oint_{по\_витку2} \frac{I_2}{R`} * d\vec{l}_2 d\vec{l}_1 =$$

$$= \left[\oint\!\!\oint_{по\_виткам} \frac{I}{R`} d\vec{l}_2 d\vec{l}\right] I_2$$

$$\oint\!\!\oint_{по\_виткам} \frac{I}{R`} d\vec{l}_2 d\vec{l} = L_{12}.$$



Теперь наоборот.

$$I_1 \neq 0 \quad I_2 = 0$$

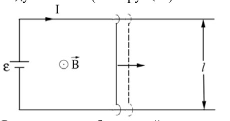
$\Phi_2 = L_{21} I_1$. Проделаем те же самые рассуждения (один виток создает векторный потенциал, а по другому считаем поток).

$$\Phi_2 = \left[\oint_{по\_витку2} \oint_{по\_витку1} \frac{I}{R`} d\vec{l}_1 d\vec{l}_2\right] I_1,$$

в этом интеграле $\oint_{по\_витку2} \oint_{по\_витку1} \frac{I}{R`} d\vec{l}_1 d\vec{l}_2 = L_{21}$ переменные интегрирования независимые, поэтому их можно менять местами, т.о. видим, что $L_{12} = L_{21}$.
Из коэффициентов индукции можно составить тензор $L_{ij} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$, где $L_{11} = L_1$, $L_{22} = L_2$, $L_{12} = L_{21}$.

34) Энергия магнитного поля.

Если по проводникам катушки текут токи, то катушка обладает энергией, зависящей от I и индуктивности (конструкции).



Рассмотрим, изображенный выше, контур и найдем работу внешних сил при бесконечно медленном перемещении подвижной перемычки на dx, (мы не учитываем $\varepsilon^{инд}$).

$\delta A = \left(\vec{F}_A d\vec{x}\right)$, $F_A = IBl$ - сила Ампера.

$\delta A = IBl \cdot dx = I \cdot d(xBl) = I \cdot d\Phi$.

$A = I \cdot (\Phi_2 - \Phi_1)$.

Если мы будем двигать перемычку быстро, то надо учитывать $\varepsilon^{инд}$, B`, будет другой ток, но все равно будет выполняться формула

$A = I \cdot (\Phi_2 - \Phi_1)$.

Другая задача:

Найдем работу, которую совершает ток (эта работа переходит в тепло).

$\delta A = \varepsilon^{инд} I dt$,

$\varepsilon^{инд} = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -L\dfrac{dI}{dt}$,

$\delta A = -LIdI$. Работа тока, которая совершается при изменении потока Φ, пропорциональна току I.

Потенциальная энергия равна работе сил поля, взятой с противоположным знаком.

$dU = -\delta A = LIdI$.

Найдем потенциальную энергию катушки, которую она приобрела при включении (ток через нее изменялся от нуля до значения I)

$$U = \int_0^I LIdI = \frac{LI^2}{2}.$$

Раньше, когда мы считали энергию электрического поля, полагали, что в каждой точке поля есть конденсатор.

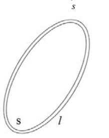
Рассмотрим энергию магнитного поля, но не будем представлять пространство, как совокупность бесконечно маленьких катушек в каждой точке, а найдем энергию из общих соображений.

Пусть есть виток, который создает поле $\vec{B}$.

$$\delta A = \varepsilon^{инд} I dt = -\frac{d\Phi}{dt} I dt \quad \Phi = \int_s \vec{B} d\vec{S}$$

$$d\Phi = d\int_s \vec{B} d\vec{S} = \int_s d\vec{B} d\vec{S}.$$

d - характеризует временное изменение магнитного поля. d внесли под знак интеграла, т.к. со временем dS не меняется, в отличие от $\vec{B}$.



$$dU = -\delta A = I\int_s d\vec{B} d\vec{S},$$

$\vec{B} = rot\vec{A}$

$d\vec{B} = d(rot\vec{A}) = rot d\vec{A}$ (d – по времени, rot – по координатам, поэтому возможен такой переход).

$$dU = I\int_s rot d\vec{A} d\vec{S} = (по\_т.Стокса) =$$

$$= I\oint_l d\vec{A} d\vec{l} = \oint_l d\vec{A} I d\vec{l}$$

$Id\vec{l} = jdSd\vec{l} = \vec{j}dV$.

Ток во всех точках пространства, кроме контура, равен нулю. Поэтому можно взять интеграл не по контуру, а по всему пространству.

$$dU = \int_{по\_простр-ву} \left(d\vec{A} d\vec{j}\right) dV$$

Запишем теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$:

$\vec{j} = rot\vec{H}$

$dU = \int_V d\vec{A} rot\vec{H} dV$

$div\left[\vec{H}d\vec{A}\right] = \left(\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{H}d\vec{A}\right]\right) = d\vec{A}\left[\vec{\nabla}\vec{H}\right] - \vec{H}\left[\vec{\nabla}d\vec{A}\right] =$

$= d\vec{A} rot\vec{H} - \vec{H} rot d\vec{A}$

$d\vec{A} rot\vec{H} = div\left[\vec{H}d\vec{A}\right] + \vec{H} rot d\vec{A}$

$dU = \int_V \left(div\left[\vec{H}d\vec{A}\right] + \vec{H} rot d\vec{A}\right) dV =$

$= \oint_S \left[\vec{H}d\vec{A}\right] d\vec{S} + \dfrac{1}{4\pi}\int_V \vec{H} rot d\vec{A} dV$

Поверхность S охватывает все пространство и находится там, где полем можно пренебречь. То есть $\vec{H}$ берутся по той поверхности, где поля уже нет, следовательно $\vec{H} = 0$. Таким образом, можно записать

$$dU = \int_V \vec{H} d\vec{B} dV$$

Видно, что энергия выражается только через полевые характеристики.

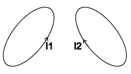
Допустим, поле изменялось от 0 до B, и оно однородно по объему V, тогда энергия однородного магнитного поля имеет вид, где $\vec{H}$ и $\vec{B}$ в объеме V: $U = \left(\vec{H}\vec{B}\right) \cdot V$.

В вакууме энергия магнитного поля имеет вид:

$U = B^2 V$.

Энергия магнитного поля линейного магнетика имеет вид: $U = \mu B^2 V$.

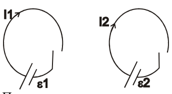
<u>Магнитная энергия двух контуров с током.</u>



Если размеры контуров пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием между ними, то энергия равна сумме энергий первого и второго контуров.

Рассмотрим случай, когда имеет место быть взаимная индукция.

Пусть в эти контуры включены батарейки с выключателем.



Представим, что мы одновременно включаем оба источника. Они будут совершать работу.

Переменный магнитный поток создает ЭДС самоиндукции. По правилу Ленца источник будет совершать работу против ЭДС самоиндукции, кроме этого второй контур создает переменное магнитное поле, возникает ЭДС индукции и источник также совершает работу против сил поля.

$$\partial A_{ЭДС}^{доп} = \partial A_{ЭДСинд} = dU$$

$$dU = \partial A_{ЭДС}^{доп} = \varepsilon_1^{самоинд} I_1 dt + \varepsilon_1^{вз.инд} I_1 dt + \varepsilon_2^{самоинд} I_2 dt + $$
$$+ \varepsilon_2^{вз.инд} I_2 dt$$

$$dU = \begin{pmatrix} L_1\dfrac{dI_1}{dt}I_1 + L_{12}\dfrac{dI_2}{dt}I_1 + L_2\dfrac{dI_2}{dt}I_2 + \\ + L_{12}\dfrac{dI_1}{dt}I_2 \end{pmatrix} dt$$

$$dU = \left(L_1 dI_1 I_1 + L_{12} dI_2 I_1 + L_{12} dI_2 I_1 + L_2 dI_2 I_2\right)$$

$$dU = \left(d\left(\frac{L_1 I_1^2}{2}\right) + d\left(\frac{L_2 I_2^2}{2}\right) + d\left(L_{12} I_1 I_2\right)\right)$$

$$dU = d\left[\left(\frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + L_{12} I_1 I_2\right)\right]$$

Все величины существенно положительны, поэтому, когда катушки взаимодействуют, энергия повышается.

35) Силы, действующие на поверхность раздела магнетиков.

Наиболее общим методом определения сил в магнитном поле является энергетический. В этом методе используют выражение для энергии магнитного поля.

Ограничимся случаем, когда система состоит из двух контуров с токами I_1 и I_2. Магнитная энергия такой системы может быть представлена в виде

$W = \dfrac{1}{2}\left(I_1\Phi_1 + I_2\Phi_2\right)$, где Φ_1 и Φ_2 — полные магнитные потоки, пронизывающие контуры 1 и 2 соответственно. Это выражение нетрудно получить из формулы $W = \dfrac{L_1 I_1^2}{2} + \dfrac{L_2 I_2^2}{2} + L_{12} I_1 I_2$, если представить последнее слагаемое как сумму $\dfrac{1}{2}L_{12} I_1 I_2 + \dfrac{1}{2}L_{21} I_2 I_1$, а затем учесть, что $\Phi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2$, $\Phi_2 = L_2 I_2 + L_{21} I_1$

Согласно закону сохранения энергии работа δA^*, которую совершают источники тока, включенные в контуры 1 и 2, идет на теплоту δQ, на приращение магнитной энергии системы dW (из-за движения контуров или изменения токов в них) и на механическую работу $\delta A_{мех}$ (вследствие перемещения или деформации контуров):

$\delta A^* = \delta Q + dW + \delta A_{мех}$

Мы предположили, что емкость контуров пренебрежимо мала, и поэтому электрическую энергию учитывать не будем.

В дальнейшем нас будет интересовать не вся работа источника тока δA^*, а только та ее часть, которая совершается против ЭДС индукции и самоиндукции (в каждом контуре). Эта работа (мы назвали ее дополнительной) равна

$\delta A^{доп} = -\left(\xi_{i1} + \xi_{s1}\right) I_1 dt - \left(\xi_{i2} + \xi_{s2}\right) I_2 dt$.

Учитывая что для каждого контура

$\xi_i + \xi_s = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, перепишем, выражение для дополнительной работы в виде

$\delta A^{доп} = I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2$

Именно эта часть работы источников тока (работа против э. д. с. индукции и самоиндукции), связанная с изменением потоков Φ_1 и Φ_2, и идет на приращение магнитной энергии системы и на механическую работу.

$I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2 = dW + \delta A_{мех}$

Эта формула является основной для расчета механической работы $\delta A_{мех}$, а из нее и сил в магнитном поле.

Можно получить и более простые выражения для $\delta A_{мех}$, если считать, что в процессе перемещения остаются неизменными или все магнитные потоки сквозь контуры, или токи в них. Рассмотрим это более подробно.

1. Если потоки постоянны, $\Phi_k = const$, то $\delta A_{мех} = -dW|_\Phi$, где символ Ф подчеркивает, что приращение магнитной энергии системы должно быть вычислено при постоянных потоках через контуры.

2. Если токи постоянны, $I_k = const$, то $\delta A_{мех} = dW|_I$

Действительно, при $I_k = const$ следует, что

$dW|_I = \dfrac{1}{2}\left(I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2\right)$

т. е. в этом случае приращение магнитной энергии системы равно половине дополнительной работы источников ЭДС. Другая половина этой работы идет на совершение механической работы. Иначе говоря, при постоянстве токов $dW|_I = \delta A_{мех}$, что и требовалось показать.

Оба полученные выражения определяют механическую работу одной и той же силы, т. е. можно написать:

$\vec{F}d\vec{l} = -dW|_\Phi = dW|_I$

Для вычисления силы с помощью этих формул, конечно, нет необходимости подбирать такой режим, при котором обязательно оставались бы постоянными или магнитные потоки, или токи. Надо просто найти приращение dW магнитной энергии системы при условии, что либо $\Phi_k = const$, либо $I_k = const$, а это является чисто математической операцией.

Магнитное давление. Полученное в последнем примере выражение для давления можно обобщить на случай, когда по разные стороны от поверхности с током (током проводимости или током намагничивания) магнитное поле разное — $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ - В этом случае, оказывается, магнитное давление

$$p = \left|\frac{\vec{B}_1\vec{H}_1}{2} - \frac{\vec{B}_2\vec{H}_2}{2}\right|$$

причем дело обстоит так, как если бы область с большей плотностью магнитной энергии была бы областью большего давления.

Рассматриваем только линейные магнетики

$\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}; \vec{H}_0; \vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}_0$

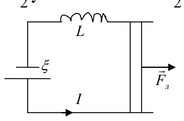
$\vec{H}$ зависит только от макроскопических токов I.

$W_0 = \dfrac{1}{2}\int \vec{H}_0\vec{B}_0 dV$

$W = \dfrac{1}{2}\int \vec{H}_0\vec{B} dV$

$W_{магн} = W - W_0 = \dfrac{1}{2}\int \vec{H}_0(\vec{B} - \vec{B}_0) dV =$

$= \dfrac{1}{2}\int \mu_0\vec{H}_0\vec{H}_0(\mu - 1) dV = \dfrac{1}{2}\int \vec{B}_0\vec{J} dV$



$\delta A_\xi = (-\xi_i) dq = L\dfrac{dI}{dt} dq = Id\Phi$

$\delta A_\xi = Id\Phi = dW_{мп} + \delta A_{мех}$

$\delta A_{мех} = F_k dx_k$

$Id\Phi = dW_{мп} + \sum_k F_k dx_k$

$1)\Phi = const$

$d\Phi = 0$

$F_x = -\left(\dfrac{\partial W_м}{\partial x_k}\right)_\Phi$

$W_{мп} = F(\Phi, x)$

$2) I = const$

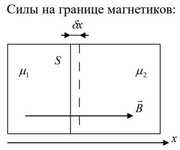
$W_{мп} = \dfrac{1}{2}\Phi I = \dfrac{LI^2}{2}$

$dW_{мп} = \dfrac{1}{2} Id\Phi$

$F_x = \left(\dfrac{\partial W}{\partial x_k}\right)_I$

$W = F(I, x)$

Силы на границе магнетиков:

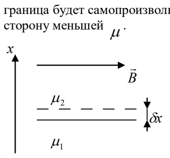


$\Phi = BS = const$

$$\delta W_п = S(w_1 - w_2)\delta x = S\left(\frac{B^2}{2\mu_1\mu_0} - \frac{B^2}{2\mu_2\mu_0}\right)$$

$$p = f = \frac{F_x}{S} = \frac{B^2}{2\mu_0}\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right)$$

граница будет самопроизвольно смещаться в сторону меньшей μ.



$I = const$

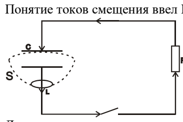
$$\delta W_м = S\left(\frac{\mu_0\mu_1 H^2}{2} - \frac{\mu_0\mu_2 H^2}{2}\right)\delta x$$

$$p = f = \frac{F_x}{S} = \frac{\mu_0 H^2}{2}(\mu_1 - \mu_2)$$

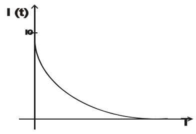
граница смещается в сторону меньшей μ

36) Ток смещения. Гипотеза Максвелла.

Понятие токов смещения ввел Максвелл.



Допустим, мы разряжаем конденсатор через сопротивление.



В цепи течет ток (переменный), то есть мы можем записать теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$.

$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I$.

$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}$

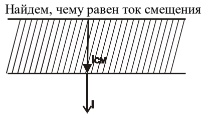
S – произвольная поверхность, главное, чтобы она опиралась на контур L. Внутри конденсатора токи не текут (вакуум или диэлектрик), следовательно, циркуляция равна нулю.

Максвелл предположил, везде токи замкнуты, и внутри конденсатора ток тоже течет. Он фиктивен, и называется ток смещения. Он характеризуется плотностью тока смещения, и тогда теорема о циркуляции записывается следующим образом:

$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \left(I + I_{см}\right)$.

$rot\vec{H} = \left(\vec{j} + \vec{j}_{см}\right)$

Найдем, чему равен ток смещения в конденсаторе.



$I = I_{см} = \dfrac{dQ}{dt}$

$I_{см} = \dfrac{d}{dt}(\sigma \cdot S)$

$D_n = D = \sigma$

$\sigma = D$

$I_{см} = \dfrac{d}{dt}(DS)$

$I_{см} = S\left(\dfrac{dD}{dt}\right)$

$j_{см} = \dfrac{\partial D}{dt}$

$rot\vec{H} = \left(\vec{j} + \dfrac{\partial\vec{D}}{dt}\right)$

Нет токов смещения, только изменяется электрическое поле в конденсаторе. Если у нас конденсатор без токов, мы как-то меняем в нем поле, т.е. $\vec{j} = 0$. Никаких токов нет, есть переменное электрическое поле, оно порождает вихревое магнитное.

$$rot\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{dt}.$$

37) Поток энергии. Вектор Пойнтинга.

Если в какой-то определенной области уменьшается, то это может происходить за счет ее вытекания через границы рассматриваемой области. В этом отношении существует аналогия с законом сохранения заряда ($\oint \vec{j} d\vec{S} = -\dfrac{dq}{dt}$). Смысл этого закона в том, что убыль заряда в данном объеме за единицу времени равна потоку вектора $\vec{j}$ сквозь поверхность, охватывающую этот объем. В случае закона сохранения энергии следует признать, что существует не только плотность энергии w, в данной области, но и некоторый вектор S, характеризующий поток энергии.

Если говорить об энергии электромагнитного поля, то его полная энергия в данном объеме будет изменяться как за счет вытекания ее из объема, так и за счет того, что поле передает свою энергию веществу, т.е. производит работу над веществом:

$-\dfrac{dW}{dt} = \oint \vec{S} d\vec{A} + P$, где dA – элемент поверхности. Это уравнение выражает теорему Пойнтинга: убыль энергии за единицу времени в данном объеме равна потоку энергии сквозь поверхность, ограниченную этим объемом, плюс работа в единицу времени (мощность), которую поле производит над зарядами вещества внутри данного объема. $W = \int wdV$, где w – плотность энергии поля. $P = \int \vec{j}\vec{E} dV$, где j – плотность тока, E – напряженность электрического поля.

За время dt поле E совершит над точечным зарядом q работу $\delta A = q\vec{E} \cdot \vec{u} dt$, где u – скорость заряда.

Отсюда мощность равна $dP = \rho\vec{u}\vec{E} dV = \vec{j}\vec{E} dV$.

Пойнтинг получил выражения для плотности энергии w и вектора S, воспользовавшись уравнениями Максвелла. Если среда не содержит сегнетоэлектриков и ферромагнетиков, то плотность энергии электромагнитного поля:

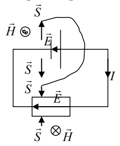
$w = \dfrac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \dfrac{\vec{B}\vec{H}}{2}$

$w_{эл} = \dfrac{\vec{D}\vec{E}}{2} = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$

$w_м = \dfrac{\vec{B}\vec{H}}{2} = \dfrac{\mu\mu_0 H^2}{2}$

Плотность потока энергии электромагнитного поля – вектор, называемый вектором Пойнтинга:

$$\vec{S} = \left[\vec{E} \times \vec{H}\right].$$



В объеме источника энергия вытекает в окружающее пространство. Втекает в проводник из окружающего пространства, где есть поле.
Все тепло, выделяемое на R, втекает перпендикулярно току вместе с вектором S.

$$S = EH; H2\pi r = I; H = \frac{I}{2\pi r}$$

$$E = \frac{U}{L} = \frac{IR}{L} = \frac{I\rho L}{\pi r^2 L} = \frac{I\rho}{\pi r^2}$$

$$S = \frac{I^2 \rho}{2\pi^2 r^3}$$

$$\frac{dQ}{dt} = S2\pi rL = I^2 R$$

38) Система уравнений Максвелла.

1)

$$rot\vec{H} = \left(\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{dt}\right).$$

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j}_{np} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{S}$$

2)

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S}.$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

3)

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int \rho dV.$$

$$div\vec{D} = \rho$$

4)

$$div\vec{B} = 0.$$

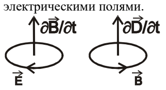
$$\oint \vec{B}d\vec{S} = 0$$

Первое и второе уравнение показывают связь магнитного и электрического полей.
Электромагнитное поле – единая субстанция.
Третье и четвертое уравнение говорят о том, какие заряды у нас есть: магнитных зарядов нет, электрические заряды есть. Переменные магнитные и электрические поля порождают друг друга.
Уравнения Максвелла выполняются всегда и везде.
Свойства:
1) Линейность.
2) Релятивистки инвариантны и инвариантны относительно преобразований Галилея.
3) Не симметричны относительно векторов электрических и магнитных зарядов.
Пусть у нас нет зарядов и токов,
тогда: Вихревые поля создаются не

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$rot\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{dt}$$

зарядами, а переменными магнитными и электрическими полями.



Правило Ленца наоборот.

39) Относительность электрического и магнитного полей.

Заряд любой частицы – релятивистки инвариантная величина.
Теорема Гаусса для поля E справедлива во всех инерциальных системах отсчета.
Законы преобразования полей:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}'_{\perp} + \left[\vec{v}_0\vec{B}\right]}{\sqrt{1 - \left(v_0/c\right)^2}}$$

$$\vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - \left[\vec{v}_0\vec{E}\right]/c^2}{\sqrt{1 - \left(v_0/c\right)^2}}$$

Инварианты электромагнитного поля:

$$\vec{E}\vec{B} = inv$$

$$E^2 - c^2B^2 = inv$$

Найдем работу, совершаемую проводником с током против ξ_i

$$A = \int_0^\infty (-\xi_i)dq = \int_0^\infty L\frac{dI}{dt}Idt = \int_0^{I_0} LIdI = \frac{LI_0^2}{2} = W_m$$

$$\xi = \frac{\delta A}{dq}$$

энергия магнитного поля катушки есть энергия проводника с током.
На примере соленоида покажем, что энергию индуктивности проводника с током можно представить как энергию, размазанную по полю

$$L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{l} = \frac{\mu\mu_0 n^2 l^2 S}{l} = \mu\mu_0 n^2 V$$

$$теорема\_о\_циркуляции\_H:$$

$$\oint \vec{H}d\vec{l} = \sum I_k$$

$$Hdl = IdN = Indl$$

$$H = nI; I = \frac{H}{n}$$

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 VH^2}{2}$$

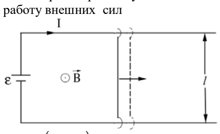
H везде одинакова. Можно ввести понятие объемной плотности энергии магнитного поля

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{(\vec{B}\vec{H})}{2}$$

$$\Phi = LI; W_m = \frac{LI^2}{2}$$

$$W_m = \frac{\Phi I}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}$$

Рассмотрим перемычку в магнитном поле и найдем работу внешних сил



$\delta A = \left(\vec{F}_A d\vec{x}\right)$, $F_A = IBl$ - сила Ампера.

$$\delta A = IBl \cdot dx = I \cdot d\left(xBl\right) = I \cdot d\Phi.$$

$$A = I \cdot \left(\Phi_2 - \Phi_1\right).$$