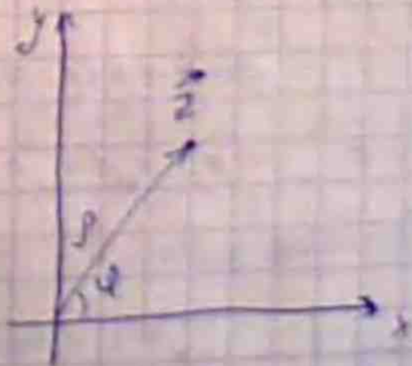
ТФКП

$i = \sqrt{-1}$

$z = x + iy$

$x = Re(z)$

$y = Im(z)$



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$

$\rho = |z|$ — модуль комплексного числа

$\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\varphi = \mathrm{Arg}(z) = \arg(z) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

$\varphi_0 \le \arg(z) < \varphi_0 + 2\pi$

$\arg(z) = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

$z = 0$ — нулевое комплексное число

$x = 0, \; y = 0$

$\rho = 0$

Операция комплексного сопряжения

$z^* = \bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\varphi}$

$z_1 \pm z_2 = z = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

$x = x_1 \pm x_2$

$y = y_1 \pm y_2$

$z_1 \cdot z_2 = z = \rho e^{i\varphi} = \rho_1 e^{i\varphi_1} \rho_2 e^{i\varphi_2} =$

$= \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

$\rho = \rho_1 \rho_2$

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

$\frac{z_1}{z_2} = z = \rho e^{i\varphi} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} =$

$= \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

$\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2} \qquad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

Введем понятие бесконечного [illegible]

[illegible] на - го

$z = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}$

$\rho_2 \to 0$

$z_2 \to 0$

$\Rightarrow \rho \to \infty$ z бесконечно

хотя не допускаем

$\rho > R$ - бесконечно удалённая точка

R может быть сколь угодно большим

ограничивающее число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = x + iy = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{|z|^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + iy_1x_2 - ix_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\rho_2^2}}_{Re} + i\underbrace{\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{\rho_2^2}}_{Im}$$

$w = \sqrt[n]{z}$

$z = \rho e^{i\varphi} = \rho e^{i(\varphi + 2\pi m)} \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$

$w = r e^{i\psi}$

$$r e^{i\psi} = \sqrt[n]{\rho e^{i(\varphi + 2\pi m)}}$$

$$r e^{i\psi} = \rho^{1/n} e^{i\frac{\varphi}{n} + i2\pi\frac{m}{n}}$$

$$r = \rho^{1/n}$$

$$\psi_m = \frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{m}{n}$$

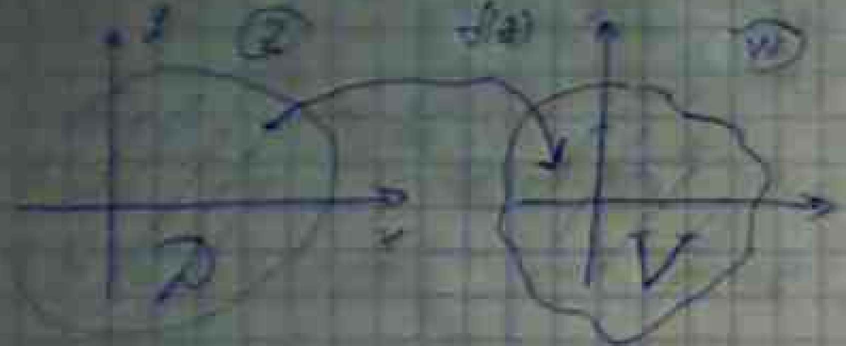
$m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

n-корней

Функции комплексного переменного

z независимая $f(z)$

Ф-ей комплексн. перем. будем считать некий закон или операцию в соотв. с которой каждому комплексному числу z ставится в соотв. другое комплексное число w



$w = u(x, y) + i\, v(x, y)$

$z = x + iy$

$w = r e^{i\psi}$

$r = |w| = \sqrt{u^2 + v^2}$

$\mathrm{tg}\, \psi = \frac{v}{u}$

Область задания D - область определения функции f(z)

V - область значений

1 $f(z) = z + a$

$a = a_x + i a_y$

При области перемещения на a

2 $f = cz$, $c = q e^{iQ}$

$w = cz$

$r e^{i\psi} = q\rho e^{i(\varphi + Q)}$

$r = q\rho$

$\psi = \varphi + Q$

3 $f(z) = 1/z$ - операция инверсии

$w = r e^{i\psi} = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}$

$r = \frac{1}{\rho}$ $\psi = -\varphi$

Непрерывность функции

имеем бесконечное множеств. путями

$z_1, z_2, z_3 \dots z_n$
$z_1', z_2', \dots z_n'$ } стремятся к одному числу

$\lim_{z \to z_0} f(z) = W_0$ $z_1'' \dots z_2'' \quad z_n'' \dots$

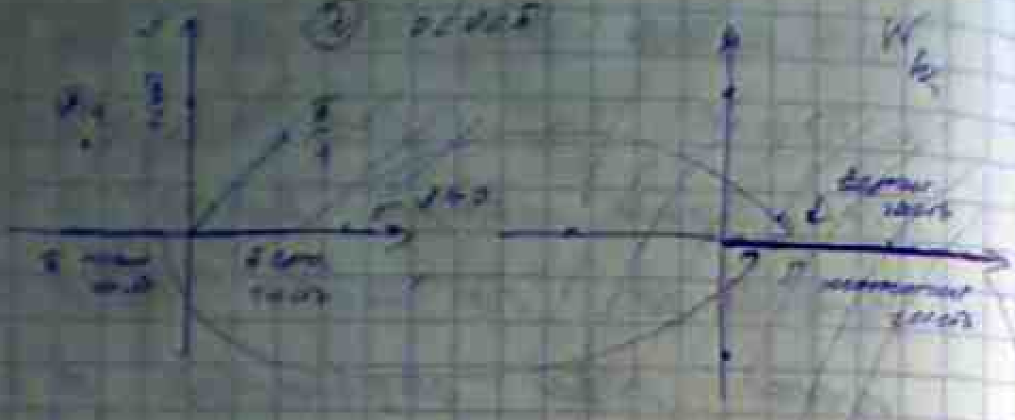
Если независимо от пути стремления к точке z_0 для функции $f(z)$ будет пред. одно и тоже значение то оно будет пределом этой функции в т. z_0

W_0 назыв пределом z_0 и $f(z)$
если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall z \ 0 < |z - z_0| < \delta$
$0 < |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Функция будет непрер в т. z_0, если $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ (предел функции в т. z_0 равен ее значению в этой точке)

Понятие о многозначных функциях

$f(z) = z^2$
$w = z^2$



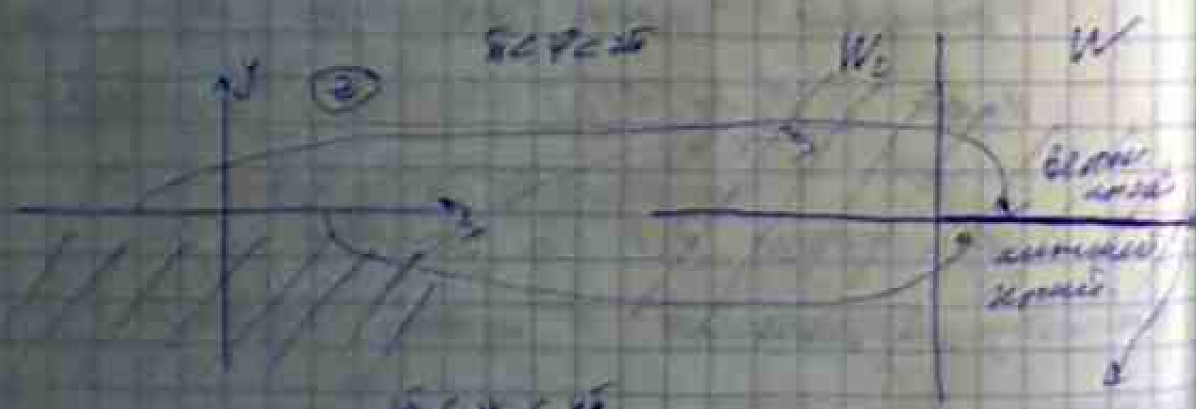
отображение на всю плоскость

разрез

$r = e^{i\varphi} = \rho^2 e^{2i\theta}$

$r = \rho^2$, $\varphi = 2\theta$

$\operatorname{Im}(z) > 0 \to W_2$



в разрез

$\operatorname{Im}(z) < 0 \to W_2$

взаимно однозначное соответствие

$\operatorname{Im}(z) > 0 \rightleftarrows W_1$

$\operatorname{Im}(z) < 0 \rightleftarrows W_2$

$\longleftrightarrow$

Риманова поверхность

$w = z^2$ — ∞-л

с бесконечным числом листов

$w = z^2$ — 2-л

с двумя листами

Т.о. обход вокруг точки по замкнутому контуру переводит нас с одного листа на другой лист.

Точками ветвления функции (точки разветвления)

$z = \sqrt{w}$ имеет 2 ветви

Аналитические функции

Условие Коши Римана

$f'(z)$ - ?

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Если предел не будет зависеть от направления $\Rightarrow f'(z)$ существует

$\Rightarrow$ Если значения будут разными

$\Rightarrow \lim$ не $\exists \Rightarrow$ функция недифференцируемая

Дифференц. функции назыв. аналитическими

недифференц. — неаналитическими

$\Delta z = \varepsilon e^{i\varphi}$

$\Delta z \to 0 \Rightarrow \varepsilon \to 0$

φ - произв.

$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{f(x+iy+\overbrace{\varepsilon\cos\varphi}^{\Delta x} + i\overbrace{\varepsilon\sin\varphi}^{\Delta y}) - f(x+iy)}{\varepsilon e^{i\varphi}} =$$

$$= \frac{u(x+\varepsilon\cos\varphi,\ y+\varepsilon\sin\varphi) + i v(x+\varepsilon\cos\varphi,\ y+\varepsilon\sin\varphi)}{\varepsilon e^{i\varphi}}$$

$$- \frac{u(x,y) + i v(x,y)}{\varepsilon e^{i\varphi}} =$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\varepsilon\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\varepsilon\sin\varphi + i\frac{\partial v}{\partial x}\varepsilon\cos\varphi + i\frac{\partial v}{\partial y}\varepsilon\sin\varphi + O(\varepsilon)}{\varepsilon e^{i\varphi}} =$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} + i\frac{\partial v}{\partial x}\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2} + O(\varepsilon)}{e^{i\varphi}}$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) +$$

$$+ \frac{e^{-2i\varphi}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

– условие аналитичности функции

независимость величины производ. от пути

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial (iy)}(u + iv) =$$

$$= -\frac{df}{d(iy)}$$

$$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}$$

$\Delta z = \Delta x \;\to\; f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$\Delta z = i\Delta y$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \;\Big|\; \dfrac{\partial}{\partial x} \quad \times \;\Big|\; \dfrac{\partial}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \;\Big|\; \dfrac{\partial}{\partial y} \quad \times \;\Big|\; \dfrac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} \quad \Rightarrow \boxed{\Delta u = 0}$$

$+$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} \quad \Rightarrow \boxed{\Delta v = 0}$$

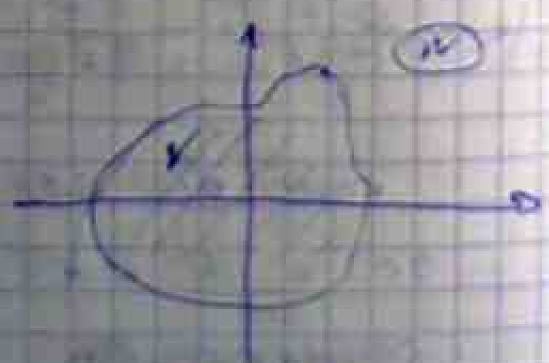
Если $f(z)$ явл. аналитической то и u и v будут гармоническими функциями

Тh об обратной функции:

Если ф-я $f(z)$ - аналитическая в некоторой области D и $f'(z) \neq 0$, то тогда можно опред. обратную функцию $z = f^{-1}(w)$ причём область значений ф-и $w = f(z)$ (V) будет явл. областью определения обратной ф-и, а область опред. D ф-и $f(z)$ будет явл. областью значений обратной функции

D (z) $w = f(z)$

V (w) $w = f(z)$



$z = f^{-1}(w)$ V - Обл. опред.

D - множ. значений

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \qquad w = f(z)$$

$$\to \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \to z = f^{-1}(w)$$

$$\det = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\det = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \neq 0$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$$

До см., что обратная ф-я аналитическая.

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{dw/dz} = \frac{1}{dw/dz}$$

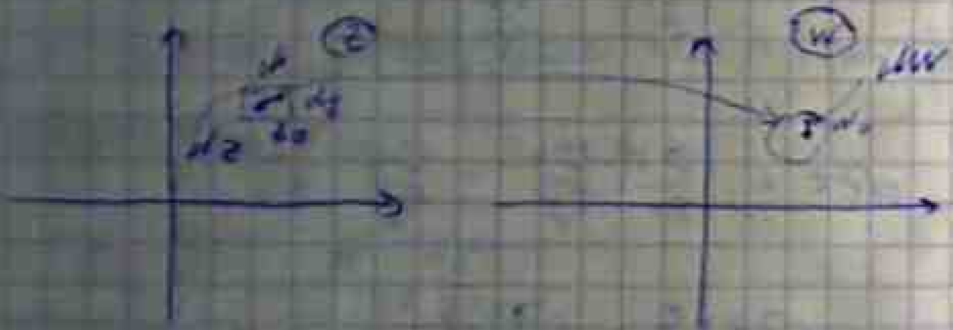
$$\Rightarrow \frac{dz}{dw} \ne \frac{0}{\infty}$$

$\Rightarrow$ обратная ф-я дифф-ма $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ явл. аналитической

Конформные отображения

$w = f(z)$



$w_0 = f(z_0)$

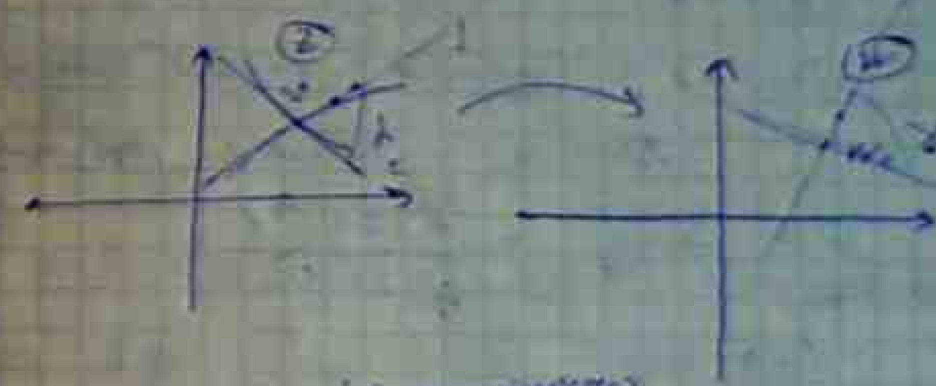
$dw = f'(z_0)\,dz$

$dw = dr\,e^{i\psi}$ $\quad dz = d\rho\,e^{i\varphi}$

$f'(z_0) = k$ - конст $= q e^{i\alpha}$

$dr\,e^{i\psi} = q e^{i\alpha}\,d\rho\,e^{i\varphi}$

$$\begin{cases} dr = q\,d\rho \\ \psi = \varphi + \alpha \end{cases} \qquad q = |f'(z_0)|$$



(в окрестности) бесконечно малой

$d\rho$ - меняется, φ - конст

dr - меняется ψ = конст

Кривые пересекаются под теми же углом. Такое отображение сохраняющее углы наз-ся конформным и осуществляется с помощью аналитической функции.

Если $f'(z)=0 \Rightarrow$ конформность нарушается

$f(z) = z + a$ сдвиг

$f(z) = kz$ растяж. и поворот

$f(z) = kz + a$ растяж., поворот, смещение

Дробно линейные функции

$$w = \frac{a+bz}{c+dz} = \frac{b(z+a/b)}{d(z+c/d)}$$

α, λ, β

$d \neq 0$

$$w = \lambda \frac{z+\alpha}{z+\beta} \qquad \alpha \neq \beta$$

$$w = \lambda\left(1 + \frac{\alpha-\beta}{z+\beta}\right)$$

$$\frac{w}{\lambda} - 1 = \frac{\alpha-\beta}{z+\beta}$$

$$z+\beta = \frac{\lambda(\alpha-\beta)}{w-\lambda}$$

$$z = \frac{\lambda(\alpha-\beta)}{w-\lambda} - \beta = \frac{\lambda\alpha - \lambda\beta - \beta w + \lambda\beta}{w-\lambda} =$$

$$= \frac{\lambda\alpha - \beta w}{w-\lambda}$$

$z_0 = -\beta$ - особая точка $w=\infty$

$w_0 = \lambda$ - особая точка $z=\infty$

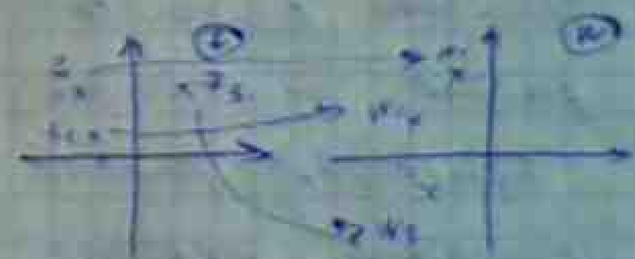
$$\frac{dw}{dz} = \frac{-\lambda(\alpha-\beta)}{(z-\beta)^2} \neq 0$$

Th: Для того, чтобы произвольно задать дробно-линейную ф-ю, осуществл. конформное отображение z на w, необходимо установить закон соответствия между тремя точками

$z_1 \to w_1$

$z_2 \to w_2$

$z_3 \to w_3$



$w_1 = w(z_1)$ известно z_1, z_2, z_3

$w_2 = w(z_2)$ неизвестно α, β, λ

$w_3 = w(z_3)$

$$w = \lambda + \frac{(\alpha-\beta)\lambda}{z-\beta}$$

1 шаг $t = z - \beta$

$(z) \to (t)$ отобразить

2 шаг $S = 1/t$ $(t) \to (S)$

3 шаг $w = \lambda + \lambda(\alpha-\beta) S$

$(S) \to (w)$

Теорема о круговом свойстве дробно-линейной функции

С помощью дробно-линейной функции любая окружность отображается в окружность (в том числе нес как прег и об

окружность бесконечного радиуса (прямые линии))

окружность в (z) может отобр в окружность или прямую в (w)

необходимо показать что инверсии не меняет окружность

$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

$A = 0 \Rightarrow$ окружн вырожд в прямую

$D = 0 \Rightarrow$ окружн проходит через начало

$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w}$$

$$x + iy = \frac{1}{u+iv} = \frac{u - iv}{u^2+v^2}$$

$$x = \frac{u}{u^2+v^2} \qquad x^2+y^2 = \frac{1}{u^2+v^2}$$

$$y = -\frac{v}{u^2+v^2}$$

$$\frac{A}{u^2+v^2} + \frac{Bu}{u^2+v^2} - \frac{Cv}{u^2+v^2} + D = 0$$

$D(u^2+v^2) + Bu - Cv + A = 0$ –

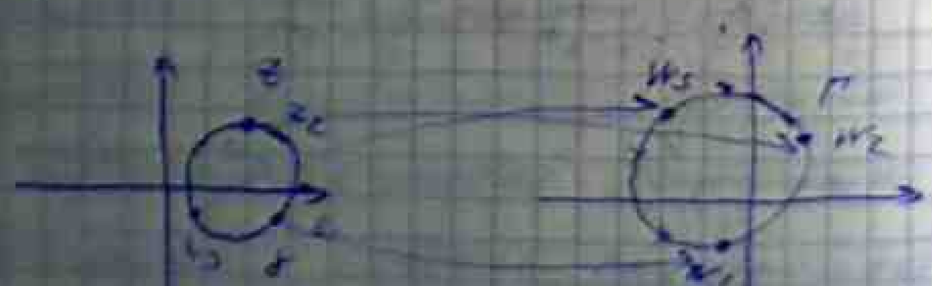
окружность

$A = 0$ окружн. проход. ч/з $(0,0)$

$D = 0$ прямая

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$

Если окружн. котор. хотим отобразить из (z) на (w) с границей Γ, то можно использовать дробно-линейную функцию



Возьмём точки з точки с окружности [illegible]

Берём точки з Г. с Γ

заданными – сто

$z_1 \to w_1$

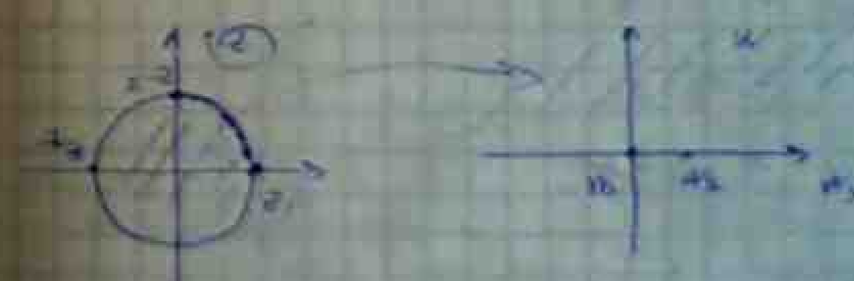
$z_2 \to w_2$

$z_3 \to w_3$

$\Rightarrow$ мы полностью определим ф-ю w

Этим ф-й дробно-лин. раз отобр. любой внутр. окружн. в внешнюю внутреннюю окружность $\exists$ бесконечно много

Пр. Отобразить $|z| < 1 \to Im(w) > 0$



$z_1 = 1 \to w_1 = 0$

$z_2 = i \to w_2 = 1$

$z_3 = -1 \to w_3 = \infty$

$$w=\lambda\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

$$0=\lambda\frac{1-\alpha}{1-\beta} \Rightarrow \alpha=1$$

$$\infty=\lambda\frac{-1-1}{-1-\beta} \Rightarrow \beta=-1$$

$$1=\lambda\frac{i-1}{i+1}=\lambda i$$

$$\lambda=-i$$

$W=-i\dfrac{z-1}{z+1}$ – искомая функция

Зададим соотв. по рисунку

$z_1=1 \Rightarrow w_1=0$

$z_2=i \Rightarrow w_2=2$

$z_3=-1 \Rightarrow w_3=\infty$

z w

$$2=\lambda\frac{i-1}{i+1} \Rightarrow \lambda=-i\cdot 2$$

$$W=-2i\frac{z-1}{z+1}$$

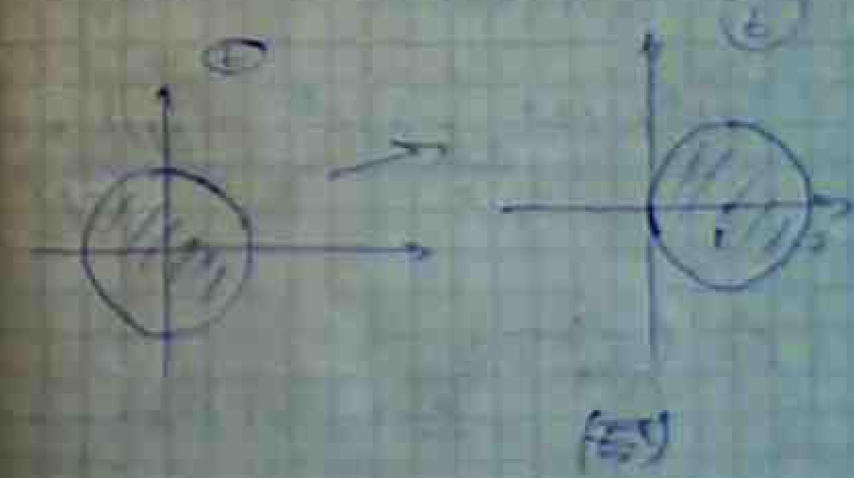
$$W=-i\frac{z-1}{z+1}$$

$$W=-i\frac{z-1}{z+1}$$

$$w=-i\left(\frac{z+1-2}{z+1}\right)=-i\left(1-\frac{2}{z+1}\right)=$$

$$=-i+\frac{2i}{z+1}$$

1 шаг $t=z+1$



$(t_x-1)^2+t_y^2=1$

$t = t_x + i t_y$

2 шаг:

$s = \frac{1}{t}$

$t = \frac{1}{s}$

$t_x = \frac{s_x}{|s|^2} \qquad t_y = -\frac{s_y}{|s|^2}$

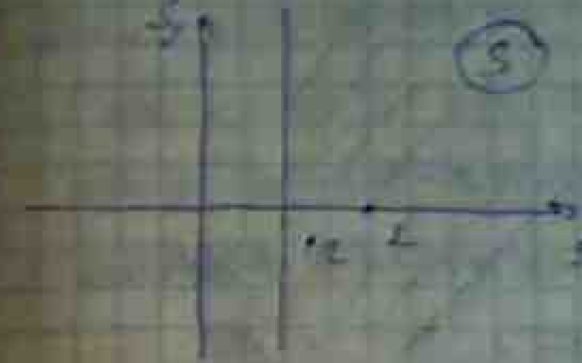
$t_x - 1 = \frac{s_x - |s|^2}{|s|^2}$

$\frac{s_x^2 + |s|^4 - 2 s_x |s|^2 + s_y^2}{|s|^4} =$

$= \frac{|s|^2 + |s|^4 - 2 s_x |s|^2}{|s|^4} \qquad \frac{|s|^2 + 1 - 2 s_x}{|s|^2} =$

$= 1 - \frac{1 - 2 s_x}{|s|^2} = 1$

$s_x = \frac{1}{2}$

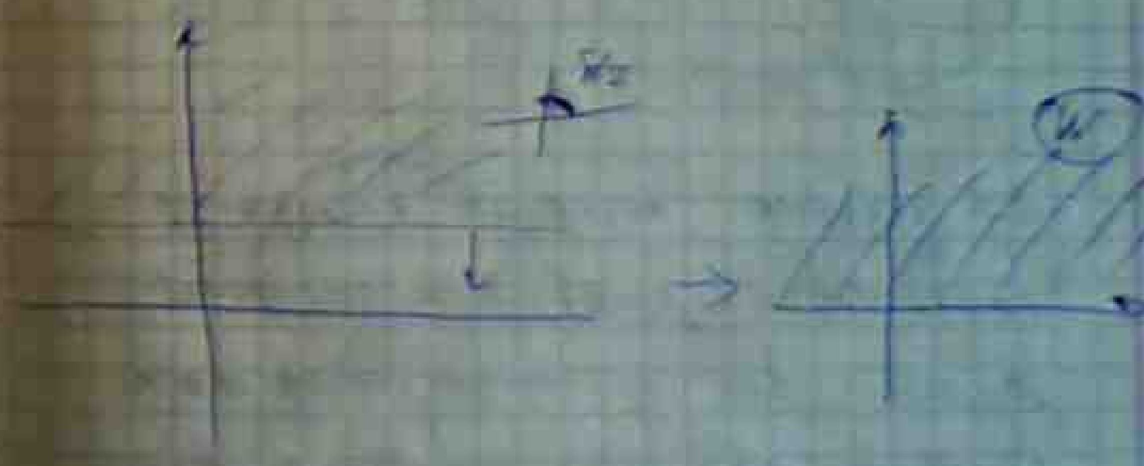


$t \to s \Rightarrow s = \bar{s}$

3 шаг

$w = \frac{2i}{s} - i = 2\bar{s}i - i =$

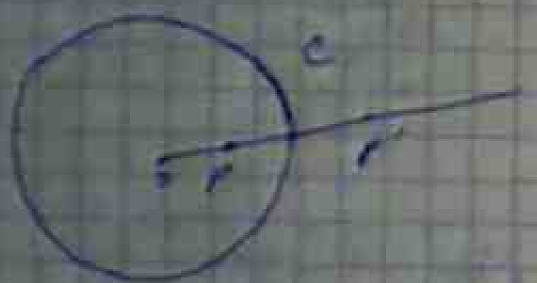
$= 2e^{i\pi/2} s - i$



свойство №2

Точки симметричны относительно окружности.

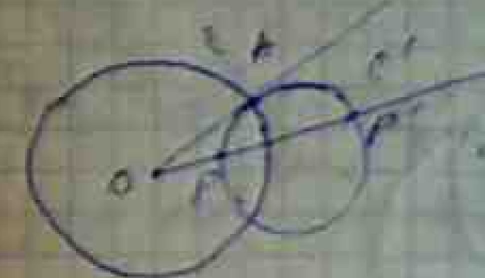
Если есть окружность =>
из центра окр. провести луч.
Берем на луче т. P и P'
Если $OP \cdot OP' = R^2$, то
(инверсия) такие точки наз.
симметр. относит. окружности



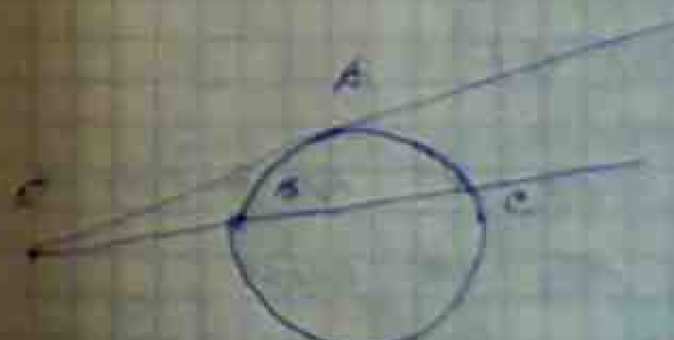
Т. симметр. относит. окружности отображаются дробно-линейной ф-ей в т. симметричные относит. образа этой окружности.

Утверждение 1

Если центр т. симм. относит. окружности с проводим окружность с' то окр. с и с' будут ортогональны



Д-во



$\boxed{CA^2 = CB \cdot DC}$

$OA^2 = OP \cdot OP'$

т.к. P и P' - симм. отн. окр =>
$OP \cdot OP' = R^2$ => $OA = R$
=> т. A лежит и на окр c и на c'

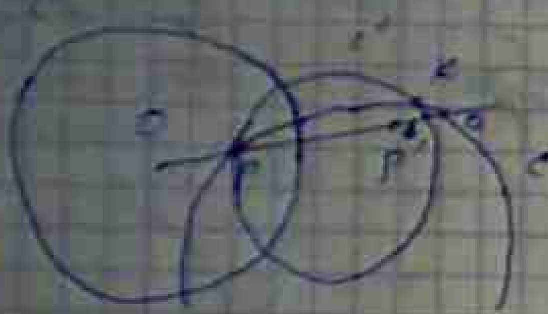
=> т. А лен. с т. пересеч.

окружностей

=> OA касат. к C' и ⊥ к C

=> C ⊥ C' => C и C' ортогональны

Утверждение 2



P и P' - симм. отн. O

инв. симм. P инв. в отн. окружн. (отн. C)

Если инв. и окружн. ортогональ. окружн. C то они перпендикулярны в т. симметр. относит. окружн. C

Д-во от утв. 3

$OP \cdot OA = r^2$

т.к. C' орт. C => $OP \cdot OA = R^2$

для C'' $OP \cdot OB = R^2$

т.к. A, B, O лежат на одной прямой => это возможно если $OA = OB$ => $A = B$

=> $K = A = B$ => в эти т. окр. пересекаются и совпадают с A и B

$OP \cdot OK = OP \cdot OA = OP \cdot OB = R^2$

$K = P'$, т.к. P' - т. симм. относит. окр. C

=> обе окружн. ортогон. окр. C должны проход. через P'

∎

совпадение

нужно лишь построить
=> шар с нашей р-ст в
симм. K

Проведем через P и P'
2 всевозможные окружности C' и C''
ортогональные C

то имеем дробно-линейные =>

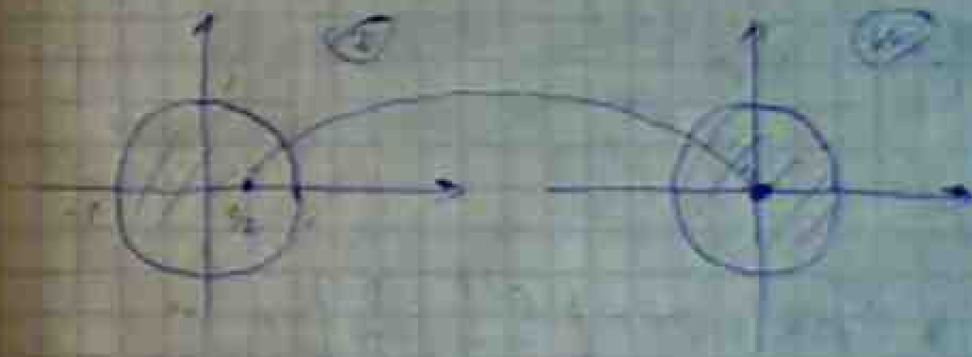
$C' \to K'$, $C'' \to K''$

=> K' и K'' будут [illegible]
которые к в силу симметричности
построить
Если C' и C'' [illegible]
в т. P и P' => в силу
симметричного K' и K'' тоже
пересекаются в точках
т. Q и Q'
=> но т. к. [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] ровно окр.

в симметричные относительно окружности K
Q и Q' симметричны отн. K

■

Зад. Отобразить единичный круг
на себя так, чтобы
т. с коорд. $\frac{1}{2}$ отобразилась
бы в центр нового круга



=> ищем дробно-линейные ф-и

$$W = \lambda \frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

$z_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow W_1 = 0$

z_2 = симм. отн. окружности

=> $z_2 = 2 \Rightarrow W_2 = \infty$

$$0 = \lambda \frac{\frac12+\alpha}{\frac12+\beta} \Rightarrow \alpha = -\frac12$$

$$\infty = \lambda \frac{2-\frac12}{1+2\beta} \Rightarrow \beta = -2$$

$$w = \lambda \frac{z-\frac12}{z-2}$$

$$z_3 = e^{i\varphi} \to w_3 = e^{i\varphi'}$$

$$e^{i\varphi'} = \lambda \frac{e^{i\varphi}-\frac12}{e^{i\varphi}-2}$$

$$|e^{i\varphi'}| = 1 = |\lambda| \left| \frac{e^{i\varphi}-\frac12}{e^{i\varphi}-2} \right| =$$

$$= |\lambda| \sqrt{\frac{(e^{i\varphi}-\frac12)(e^{-i\varphi}-\frac12)}{(e^{i\varphi}-2)(e^{-i\varphi}-2)}} =$$

$$= |\lambda| \sqrt{\frac{1+\frac14-\frac12\cdot 2\cos\varphi}{1+4-2\cdot 2\cos\varphi}} =$$

$$= |\lambda| \sqrt{\frac{5/4-\cos\varphi}{5-4\cos\varphi}} = \frac{|\lambda|}{2}$$

$\Rightarrow |\lambda| = 2$

тогда вид преобразования

$$\Rightarrow w = 2e^{i\alpha}\frac{z-\frac12}{z-2} = e^{i\alpha}\frac{2z-1}{z-2}$$

$w = \frac{2z-1}{z-2}$ — в частности при $\alpha = 0$

Интегрирование функций комплексного переменного

Γ — контур

$f(z)$

[illegible] будет корректн.

$$\Rightarrow \int_\Gamma f(z)\,dz = \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k$$

Свойства интегралов

1) $\int_1^2 f(z)\,dz = -\int_2^1 f(z)\,dz$

2) $\int_1^2 f(z)\,dz = \int_1^3 f(z)\,dz + \int_3^2 f(z)\,dz$

т. 3 лежит на контуре Г

либо на его продолж.

3) $\int_1^2 (f_1(z) + f_2(z))\,dz = \int_1^2 f_1(z)\,dz + \int_1^2 f_2(z)\,dz$

4) Th о модуле

$\left|\int_Г f(z)\,dz\right| \leq \int_Г |f(z)|\,|dz|$

где $dz = |dz|$

5) Th Коши

Для произв. односвязной обл. любой замкнутый контур в ней обл. может быть стянут в точку не выходя за пределы области

Th Коши. Интеграл по любому замкнутому контуру Г от f(z) аналитической в некотор. обл. D полностью [illegible] в себе контур Г равен нулю

$\oint_Г f(z)\,dz = 0$

Док-во

f(z) - аналит.

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma} (u+iv)(dx+idy) =$$

$$= \oint_{\Gamma} (udx - vdy) + i\oint_{\Gamma} (udy + vdx)$$

$$\iint \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\right)dxdy = \oint_{\partial D} (Mdy - Ndx)$$

1-й интеграл

$M = -v$

$N = -u$

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma} (udx - vdy) = \iint \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy =$$

$$= -\iint \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

2-й интеграл

$M = u$, $N = v$

$$\oint_{\Gamma} udy + vdx = \iint \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy = 0$$

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

ф-я аналитична везде

Следствие.

Если в области D ф-я $f(z)$ аналитическая $\Rightarrow$ интеграл от этой ф-ии по контуру Γ не зависит от пути интегрирования, а зависит только от положения нач. и конечной т.

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$$

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz$$

$$\int_{\Gamma} f(z)dz - \int_{\Gamma_1} f(z)dz =$$

$$= \int_{\Gamma} f(z)dz + \int_{-\Gamma_1} f(z)dz$$

$\Gamma + (-\Gamma_1)$ – замкнутый контур

$\Gamma + (-\Gamma_1) = C$

$$\oint_{C} f(z)dz = \int_{\Gamma} f(z)dz + \int_{-\Gamma_1} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz$$

Область назыв многосвязной если в этой области можно выбрать з[амкн.] конт[ур] что его нельзя [illegible] деформиро[ванием] [illegible] внутрь за[illegible] этой области.

Th Коши для многосвязной обл.

разрез с [illegible] к границам и разрезу

Утв Многосвязная обл всегда может быть превращена в односвязную с помощью разреза

$$\oint_{C} f(z)dz$$

Есть многосв обл D и аналит f(z)

$C = \Gamma_2 - \Gamma_1 + \delta_1^+ + \Gamma_2 + \Gamma_1 + \delta_1^- + \delta_2^-$

Применим Th Коши для

односв. области

$\Rightarrow \oint_C f(z)dz = 0$

$$\oint_C f(z)dz = 0 = \int_{-\Gamma_0} + \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\delta_1^+} + \int_{\delta_1^-} + \int_{\delta_1}$$

$$= \int_{\delta_2}$$

$$\boxed{\oint_{\Gamma_0} f(z)dz = \oint_{\Gamma_1} f(z)dz + \oint_{\Gamma_2} f(z)dz}$$

$$\boxed{\oint_{\Gamma_0} f(z)dz = \sum_{n=1}^{N} \oint_{\Gamma_n} f(z)dz}$$

$\sum_{j=0}^{N} \oint_{\Gamma_j} f(z)dz = 0$ — одинаков. положение обхода (условие)

1. не важно интеграл по замкнутому контуру $= 0$

D – много-связной

Предположим что в т. контура Γ_1 $f(z)$ - аналитическая, в т. контура Γ_2 $f(z)$ аналитична и в полосе между контурами.

$$\oint_{\Gamma_1} f(z)dz = \oint_{\Gamma_2} f(z)dz$$

Доказать.

разрез

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0 = \oint_{\Gamma_1} + \int_{\gamma} + \int_{-\Gamma_2} + \int_{\delta} =$$

$$= \oint_{\Gamma_1} - \oint_{\Gamma_2} \Rightarrow$$

$$\oint_{\Gamma_1} f(z)dz = \oint_{\Gamma_2} f(z)dz$$

Интеграл Коши

$$I = \oint_C \frac{dz}{z-z_0}$$

$$f(z) = \frac{1}{z-z_0}$$

$z = z_0$ — утрата аналитичности

1) 

2) 

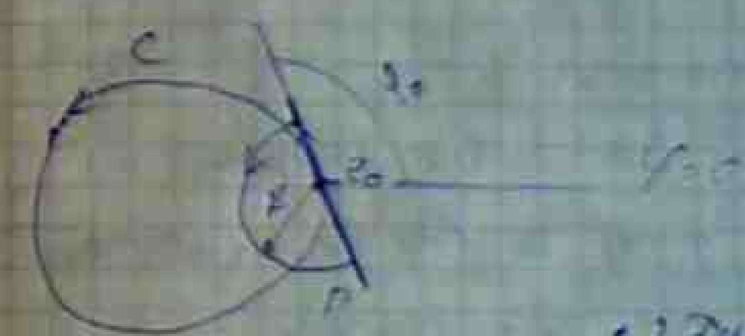
$I = 0$

2) $$\oint_C f(z)dz = \oint_{\gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} \;(=)$$

$z - z_0 = \varepsilon e^{i\varphi}$ $\quad dz = i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi$

$$(=) \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} = 2\pi i$$

$I = 2\pi i$

3) 

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-z_0}$$

1) Дуга
$z - z_0 = \varepsilon e^{i\varphi}$

2) Касат.
$y - y_0 = k(x - x_0)$

$d(z-z_0) = d(x-x_0) + \ldots = (1+ik)\ldots$

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{(1+ik)\,d(x-x_0)}{(1+ik)(x-x_0)} \;(=)$$

$$\textcircled{=}\ i\pi + \int_{-5}^{5} \frac{dx}{x} = i\pi$$

v.p.

0

$$I = \begin{cases} 0 & z_0 \text{ вне контура} \\ 2\pi i & z_0 \text{ внутри контура} \\ i\pi, & z_0 \in \text{контуру} \end{cases}$$

Формула Коши

$$I = \oint_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}$$

$f(z)$ аналитическая внутри контура включая его

z_0 лежит внутри контура

$\varepsilon \to 0$ $\quad \varepsilon$ – радиус

$$I = \oint_\Gamma = \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} =$$

$$= \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(z_0)\,dz}{z-z_0} + \oint_{C_\varepsilon} \frac{(f(z)-f(z_0))\,dz}{z-z_0} =$$

$$= 2\pi i\, f(z_0) + \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(z_0+\varepsilon e^{i\varphi}) - f(z_0)}{\varepsilon e^{i\varphi}}\,dz =$$

$$= 2\pi i\, f(z_0) + \lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{C_\varepsilon} f'(z_0)\,dz =$$

$$= 2\pi i\, f(z_0) + \lim_{\varepsilon \to 0} f'(z_0)\, i\varepsilon \int_0^{2\pi} e^{i\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\pi i\, f(z_0)$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}$$

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{t-z}}$$

Следствия:

– у аналитич. ф-и $f(z)$ существ. произв. до любого порядка

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2}$$

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^3}$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}$$

– ф-я аналитическая на всей комплексной плоскости вплоть до бесконечности явл. константой

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2}$$

радиус окружности увел. до бесконечности

Γ - окружность радиуса R

$$|f'(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2} \right| \le \frac{1}{2\pi} \int \frac{|f(t)|\,R\,d\varphi}{R^2} =$$

$$dt = iRe^{i\varphi}d\varphi$$

$$|dt| = R\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} |f(t)|\,d\varphi$$

$|f(t)| \le M$ - конечное число

$$|f'(z)| \le \frac{M}{R}$$

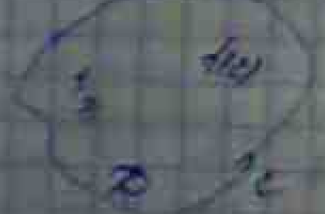
Если $|f'(z)| = 0 \Rightarrow f'(z) = 0$

$\Rightarrow f(z) = const$

Теорема о максимуме модуля функции

Пусть, что в замкн. обл. D ф-я $f(z)$ – аналит. тогда максимум значения модуля ф-и достиг. на границе D

D^n-бо



$\Rightarrow f^n(z)$ – аналитична

$$f^n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f^n(t)dt}{t-z}$$

$$|f^n(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint \frac{f^n(t)dt}{t-z}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\oint \frac{|f^n(t)|dt}{|t-z|}$$

$$|f(z)|^n \le \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{|f(t)|^n dt}{|t-z|} \le$$

$t \in \partial D$ ∂D – границу обл. D

$$|f(t)|_{max} = M$$

$$|t-z|_{min} = \delta$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{M^n dl}{\delta} = \frac{M^n l}{2\pi\delta}$$

$$|f(z)| \le M\left(\frac{l}{2\pi\delta}\right)^{1/n}$$

$n \to \infty$

$\Rightarrow |f(z)| \le M \Rightarrow |f(z)| \le |f(t)|_{max}$

■

Ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

$z_1, z_2, \dots z_i \dots$

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n$

$\sum x_n$, $\sum y_n$

⇒ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится то сходятся $\sum x_n$ и $\sum y_n$ и наоборот

$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n)$ сход. абсолютно если сходится $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$

$|x_n| \le |z_n|$

$|y_n| \le |z_n|$

⇒ если сход. $\sum |z_n|$, то сходятся $\sum |x_n|$, $\sum |y_n|$

Функциональные ряды

Допустим, что в D могут задан несколько функций $f_n(z)$

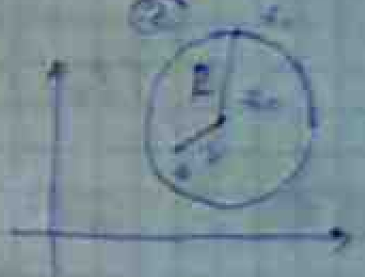
⇒ $\sum f_n(z)$ сходится если он точно сходится в каждой точке внутри D.

если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ что

$\sum_{k=N}^{\infty} |f_k(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in D$

⇒ функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно

Если ряд сход. равномерно то тогда сумма этого ряда будет какая-то непрерывная функция.



Th Абеля

$f_k(z) = (z - z_0)^k$

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ (*)

$|z_1 - z_0| = R$

$|z - z_0| = r$

(*): $r < R$ точки лежат внутри шара

Если $\sum_{k=1}^{\infty} c_k (z_1 - z_0)^k$ сход. абсолютно

⇒ (*) для нас тоже абсолютно сходится при любом z: $r < R$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k| R^k$ сходится

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k| R^k = M$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k| |z-z_0|^k$

$|c_k| r^k < |c_k| R^k$

$0 \le \sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k < M$ / огранич

$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k$ сходится

$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ сходится

абсолютно

Следствие.

1 область сходимости степенного ряда всегда круг

2 Если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ расходится в т. $z=z_1$ $\Rightarrow$ он расходится в любой точке вне.

Вне окружности предела $|z-z_0| > |z_1-z_0|$

ТА Тейлора

$f(z)$ – аналитична в D

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(t)\,dt}{t-z}$

$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{t-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}}$

Введем q вспомним

$(1+q+q^2+q^3+\dots+q^n)(1-q) =$

$= 1 - q^{N+1}$

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1-q^{N+1}}{1-q} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1-|q|^{N+1} e^{i(N+1)\varphi}}{1-q}$$

Если $|q|>1$ $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ расходится

Если $|q|<1$ $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |q|^n = \frac{1}{1-|q|}$$ при $|q|<1$

Если $|q|=1$ ряд расходится

Область сходимости $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$

$$\left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}} =$$

$$= \frac{1}{t-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^k$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)\,dt}{t-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{k+1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{k!}\, \frac{k!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{k+1}} = f^{(k)}(z_0)$$

$$\textcircled{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

=> т.е. $f(z)$ аналит. в [illegible] круге радиуса R с центром в z_0 может быть разложена в степенной ряд вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \text{где}$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}$$

C внутри радиуса R

$f(z)$ аналит. в круге R_2

=> можно взять контур C_2

=> в качестве z можно брать z_0 [illegible] внутри R_1

круге можно [illegible] [illegible]

$f(z)$ - аналитическая

[illegible] в [illegible] [illegible] т.е. [illegible]

Следствие: степени ф-ю можно представить в круге

Областью сход. будет круг с центром в z_0 и радиусом равным расстоянию от точки z_0 до ближайшей особой точки

Особые точки аналит.

[illegible]

Определение $f(z)$ - аналит. ф-ия

(Пример $f(z) = \frac{1}{z}$ аналитична в C)

в [illegible] есть [illegible] [illegible]

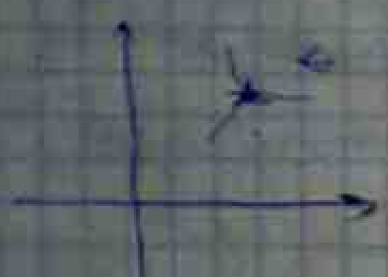
точки в [illegible] [illegible] [illegible]

z_0 – точки где ф-я $f(z)$ неаналит.

1. Точка устранимого разрыва (устранимые особые точки)

$f(z)$ – аналит. в z_0 – неаналит.

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ => точка устранимого разрыва



$$\Rightarrow f(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0 \\ A, & z = z_0 \end{cases}$$

Пример $\dfrac{z^2+1}{z-i} = f(z)$

$z_0 = i$ – неаналит.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^2+1}{z-i} = \lim_{z \to i} \frac{(z+i)(z-i)}{(z-i)} = 2i$$

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2+1}{z-i}, & z \neq i \\ 2i, & z = i \end{cases} \rightarrow f(z) = z+i$$

2. Полюс

$\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$

$f(z) = \dfrac{1}{z-1}$

$\lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0)^n f(z)$

n – конечное число

n – число и уже которым нет полюса

будет отличен от нуля и от бескон.

будет порядок максимального полюса

[illegible] ряда [illegible] $n \to \infty$

ряд Лорана [illegible] $\to 0$

$f(z) = ctg^3 z \qquad z_0 = 0$

$\lim\limits_{z \to 0} z f(z) = \lim\limits_{z \to 0} z\, ctg^3 z = \lim\limits_{z \to 0} \frac{z \cos^3 z}{\sin^3 z} = \infty$

$n = 1$

$\lim\limits_{z \to 0} z^2 ctg^3 z = \lim\limits_{z \to 0} \frac{z^2 \cos^3 z}{\sin^3 z} = 1$

$n = 2$

$\lim\limits_{z \to 0} z^3 f(z) \neq 0$

$n = 3$

$\Rightarrow z = 0$ для [illegible] $ctg^3 z$ полюс 3-го порядка

3) Существенно особая точка

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не $\exists$

$f(z) = e^{1/z} \qquad z_0 = 0$

1) $\lim\limits_{x \to +0} e^{1/x} = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to -0} e^{1/x} = 0$

3) $\lim\limits_{y \to 0} e^{1/(iy)} = \lim\limits_{y \to 0} e^{-i/y}$

$\lim\limits_{y \to 0} \left(\cos \frac{1}{y} - i \sin \frac{1}{y}\right)$ не $\exists$

Тв Пикара: Ф-я $f(z)$ в любой сколь угодно малой окр-ти с центром в сущ. особой точке может принимать бесконечное число раз любое комплексное значение, кроме может быть одного

$f(z)$

z_0

Q — комплексное число $\Rightarrow$

найдем бесконечно много точек, где $Q = f(z)$

$e^{\frac{1}{z}} = a$

$a = |a| e^{i\varphi}$

§ $\ln a$

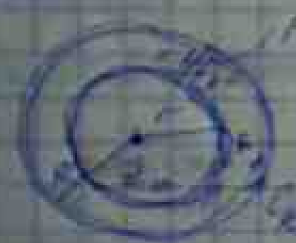
$z = \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{\ln a + 2\pi k i} = \frac{1}{\ln|a| + i(\varphi + 2\pi k)}$

$|z| < R$

Ряд Лорана

Это [illegible] ряд в [illegible] можно [illegible] [illegible] в [illegible] [illegible] [illegible] ?

$f(z)$ имеет [illegible] особую т. z_0



[illegible] внутри круга R и на [illegible] [illegible] особые точки

$\Gamma = C_R + l^{+} + C_r + l^{-}$

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$

$\oint_\Gamma = \oint_{C_R} + \oint_{l} + \oint_{l} + \oint_{C_r} = \oint_{C_R} - \oint_{C_r}$

$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} =$

$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z_0 - (z - z_0)} =$

$= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} =$

$= q \quad |q| < 1$

$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_{C_R} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}$

$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$

$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \neq \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ (!!)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{-C_r}\frac{f(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{-C_r}\frac{f(t)\,dt}{t-z_0-(z-z_0)} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(t)\,dt}{z-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{t-z_0}{z-z_0}} \; = $$

$= q \quad |q|<1$

сумма геометр. прогр.

$$= -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint_{-C_r}\frac{f(t)\,dt}{(z-z_0)^{n+1}}(t-z_0)^n =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{-n-1}}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$$C_{-n-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} f(t)(t-z_0)^n\,dt$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{-n-1}}{(z-z_0)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$$

$$C_n = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{n+1}}, & n \geq 0 \\ \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} f(t)(t-z_0)^{-n-1}\,dt & n<0 \end{cases}$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n}$$ ряд Лорана

1. Если ряд Лорана не сод. отриц. степеней ⇒ устранимая т.
2. Если ряд сод. конечное число членов с отриц. степенями ⇒ полюс, или этим порядок полюса совп. с макс. отриц. степенью
3. Если ряд Лорана сод. бесконечн. число членов с отриц. степенями, то это существенно особая т.

$f(z) = \sum_{n\geq 0} + \sum_{n<0}$

обл. сходимости $\sum_{n\geq 0}$

обл. сходим. $\sum_{n<0}$

Вывод: обл. сход. ряда Лорана всегда кольцо

Аналитическое продолжение

Если $f(z)$ аналит. в D =>
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

=> знач. ф-и на всей обл. D опр. его значение на контуре.

Нули аналитической функции

Если в некот. т. $z=z_0$ $f(z)=0$ то т. z_0 назыв нулем ф-и $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 \ldots$$

=> z_0 – нуль ф-и

=> $c_0 =$

может иметь ...

$c_0 = c_1 = \ldots = c_{k-1} = 0$ => т. z_0 наз. нулем ф-и $f(z)$ k-го порядка

$$\Rightarrow f(z) = c_k(z-z_0)^k + c_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \ldots =$$
$$= (z-z_0)^k \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_{k+n}(z-z_0)^n}_{\varphi(z)}$$

$(z-z_0)^k \varphi(z)$

$\varphi(z_0) \neq 0$

Опр. Функции $f(z)$ и $F(z)$ аналит.

$f(z)$ и $F(z)$ являются совпадать

в ... и ... непрерыв.

Если $f(z)$ аналитична в D =>

f и $f'(z)$ аналитичны в D

Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ и этот

ряд сходится в $|z-z_0|<R$ =>

=> $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \ldots (z-z_0)^n$ имеет

тот же радиус сходимости

Теорема о нулях

Пусть D — обл. $f(z)$ аналитична

Задана бесконечная посл.

$\{z_n\}$ такая что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$

$z_n \neq a \in D$ внутренняя точка

$f(z_n) = 0$

Тогда во всей области D

[illegible] тождеств. 0 =>

=> $f(z) \equiv 0$

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 \ldots$

$f(a) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$

$f(z) = c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$

$(z-a)(f_1(z))$

$f_1(z) = \frac{f(z)}{z-a} = c_1 + c_2(z-a) + c_3(z-a)^2 + \ldots$

$z = z_n \to a$

$f_1(z_n) = \frac{f(z_n)}{z_n - a} = 0$

$c_1 = c_1 + c_2(z_n - a) + c_3(z_n - a)^2 + \ldots = 0$

$c_1 = 0$

$f_2(z) = \frac{f_1(z)}{z-a} = \frac{f(z)}{(z-a)^2} = c_2 + c_3(z-a) + \ldots$

=> c_2, $c_3 = 0$ и т.д.

=> все коэф-ты $c = 0$

=> $c_n = 0$ => $f(z) \equiv 0$

[illegible]

обл. сходимости круга

=> $f(z) = 0$ в круге R_0

Возьмем z

Можно взять номера

$\{z_n\}$ такую что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = b$

повторив все те операции

=> $f(z) \equiv 0$ в круге R_1

снова можно взять $\{z_n\}$ такую

что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$

Т.к. в круге K_1

не имеет нулей кроме

точки z' => $f(z')=0$

=> $f(z)=0$ в к. K_1

т. е. => $f(z)=0$ в D ■

Если ф-я аналитическая в конечной обл. D то в этой области она может обращаться в ноль конечное число раз (если $f(z) \not\equiv 0$)

Th единственности

Если в конечн. D задана 2 аналит. ф-и $f_1(z)$ и $f_2(z)$ и задана некая посл. номеров чисел $\{z_n\}$ с в. т. этой последов. $f_1(z_n)=f_2(z_n)$ =>

=> $f_1(z)=f_2(z)$ во всей обл. D

$f(z)=f_1(z)-f_2(z)$ => $f(z)=0$

во всей обл. D => $f_1(z)=f_2(z)$ ■

Следствия

1) Если значения аналит. функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ которые имеют общую обл. аналит. D совпадают на некой кривой L, $L \in D$ (целиком) то $f_1(z)=f_2(z)$ во всей области аналит. D

2) Если $f_1(z)$ - аналит. в обл. D_1, а $f_2(z)$ - аналит. в обл. D_2 и эти области имеют пересечение $D=D_1 \cap D_2$ и при этом $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают в D то существ. единств. аналит. ф-я

$$f(z)=\begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \\ f_2(z), & z \in D_2 \end{cases}$$

3) ... единств. аналит. в $D_1 \cup D_2$

Т.е. единственность ...

1) В обл. D задана бесконечную посл. множеств $\{z_n\}$ $\exists$ единств. аналит. ф-я принимающая заданные значения в т. этой последов.

2) В обл. D $\exists$ единств. аналит. ф-я $f(z)$ которая принимает заданные значения на небольшой кривой в D

3) В обл. D $\exists$ единств. аналит. ф-я принимающая заданные значения в небольш. подобл. обл. D

Если значения ф-и известны среди всех пределов (=0) значения ф-и может быть

продолжение можно построить на обл. D с точки множеств с небольшой кривой или с небольш. обл.

Продолжение с действ. оси

$f(x)$

Этими аналит. продолж. с помощью степенн. рядов

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$

Этот степенной ряд сх. на всей действ. оси. Ненулевой радиус сх. ∞

на всей оси $\qquad y=0$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-x_0)^n$

ряд будет сход. на всей комплексной плоскости

$\sum |c_n| |z - x_0|^n$ R

2. Если $f(x)$ аналит. на $[a\ b]$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ будет сход.

на комплексной открытой обл.

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ — это продолжение

[illegible] (непр.)

без пред. каких. аналит.

продолжении.

Все соотношения остаются

и мнимы [illegible]

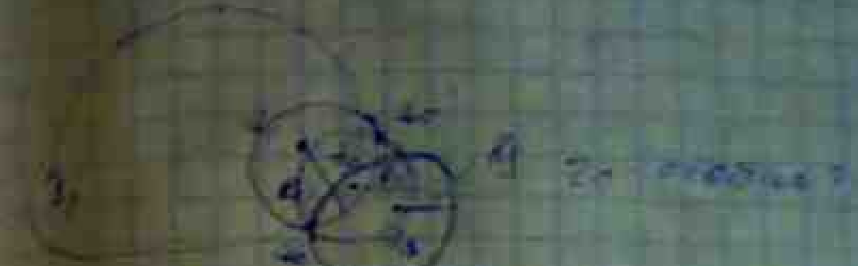
($\sin^2 z + \cos^2 z = 1$)

Общие принципы

аналитического продолж-

ения

Следствие



$f_2(z)$ задана в D_2.

$f(z)$ аналит. (можно [illegible] (не только

в этой обл.

Берём т. z_1

$\Rightarrow f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_1)^n$ это ряд с

радиус R_1

в новой обл. берём ещё 1 т. z_2

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_2)^n$

$|z - z_1| = R_2$

радиус R_3

[illegible]

пока [illegible] особые точки

[illegible] или новой обл.

Продолжение по совершении если отрезок вокруг z_0 лежит в D

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(N)} (z - z_N)^n$$

Если $f_N(z) \equiv f(z)$ $\Rightarrow$ z_0 не явл. т. ветвления

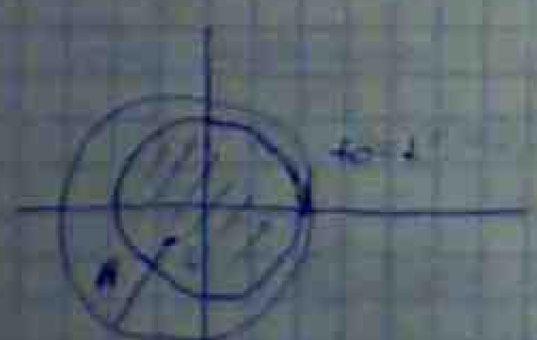
Если $f_N(z) \not\equiv f(z)$ $\Rightarrow$ z_0 т. ветвления

Пример

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (1)$$

$|z| < 1$ обл. сходимости

$$f_1(z) = \frac{1}{1-z}$$



$\exists$ ряд сходящ. аналит. ф-ю только

внутри единичного круга, вне этого круга аналитич. ф-ю не задает

$z_1 \ne 1$ особые т.

$$f(z_1) = \frac{1}{1-z_1}$$

$$f'(z_1) = \frac{1}{(1-z_1)^2}$$

$$f''(z_1) = \frac{1 \cdot 2}{(1-z_1)^3} \qquad f^{(n)}(z_1) = \frac{n!}{(1-z_1)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_1)^n}{(1-z_1)^{n+1}} = f_2(z)$$

Найдем радиус сход.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|z-z_1|^{n+1}}{|1-z_1|^{n+2}} \cdot \frac{|1-z_1|^{n+1}}{|z-z_1|^{n}} < 1$$

$$|z - z_1| < |1 - z_1|$$

$$R = |1 - z_1|$$

$f_1(z)$ $f_2(z)$ сходимость

сходятся в круге K_1 и вне круга K_2

$D_1 \cup D_2 \to \frac{1}{1-z}$

Теорема вычетов.

$f(z)$ D

z_1, z_2, z_3 особые точки

N штук

$\oint_\Gamma f(z)dz =$

контура с внутренности

C_n лежит в Γ

$= \sum_{n=1}^{N} \oint_{C_n} f(z)dz$

$\oint_{C_1} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \oint_{C_1} (z-z_1)^n dz =$

$z - z_1 = \rho e^{i\varphi}$

$dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$

$= \sum_n c_n i \int_0^{2\pi} d\varphi\, \rho^{n+1} e^{i(n+1)\varphi} =$

$= i \sum_n c_n \rho^{n+1} \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i(n+1)\varphi} =$

$\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i(n+1)\varphi} = \frac{e^{i(n+1)\varphi}}{i(n+1)} \Big|_0^{2\pi} =$

$= \frac{e^{i(n+1)2\pi} - 1}{i(n+1)} = 0$, если $n \neq -1$

$n = -1$ $\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i(n+1)\varphi} = 2\pi$

$= 2\pi i c_{-1}$

$\oint_{C_1} f(z)dz = 2\pi i c_{-1}$

$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$ — вычет ф-и $f(z)$

в z_0

$$\boxed{C_{-1} = \operatorname{Res}(f(z), z_0)}$$

$\Rightarrow \oint_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{N} \oint_{C_j} f(z)dz =$

$= 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res}(f(z), z_j)$ — Th о вычете

Вычет в полюсе 1-го порядка

(z_0 — особая точка (полюс 1-го порядка))

$f(z) = \frac{C_{-1}}{z-z_0} + C_0 + C_1(z-z_0) + \dots$

$(z-z_0)f(z) = C_{-1} + C_0(z-z_0) + C_1(z-z_0)^2$

$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z) = C_{-1}$

$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$

$Q_m(z) = 0$ — $z_1, z_2, \dots z_m$

$Q_m(z) = A(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\dots(z-z_m)$

— полюса 1-го порядка

$\operatorname{Res}\left(\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, z_j\right) = \lim_{z\to z_j} \frac{(z-z_j)P_n(z)}{Q_m(z)} =$

$= \lim_{z\to z_j} \frac{(z-z_j)P_n(z)}{\underbrace{Q_m(z_j)}_{=0} + Q_m'(z_j)(z-z_j) + \frac{1}{2}Q_m''(z_j)(z-z_j)^2} =$

$= \frac{P_n(z_j)}{Q_m'(z_j)}$

Вычет в полюсе n-го порядка

$f(z) = \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{C_{-(n-1)}}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots +$

$+ \frac{C_{-1}}{z-z_0} + C_0 + C_1(z-z_0) + \dots$

$(z-z_0)^n f(z) = C_{-n} + C_{-(n-1)}(z-z_0) + \dots +$

$+ c_{-1}(z-z_0)^{n-1} + c_0(z-z_0)^n + \dots$

вычисляем производ. $n-1$ порядка

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right] = (n-1)!\, C_{-1} +$$

$$+ n!\, C_0 (z-z_0) + \dots$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f(z)(z-z_0)^n\right] = (n-1)!\, C_{-1}$$

C_{-1}

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f(z)(z-z_0)^n\right]$$

Применение теории вычетов к вычисл. действ. интегралов.

1. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx =$

$= \int_{C}\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}\,dz$

Re z

Im z = 0

$C = C_r + (\operatorname{Im} z = 0)$ $\qquad r\to\infty$

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{\operatorname{Im} z=0} + \int_{C_r}$$

$$\int_{C_r}\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}\,dz =$$

$P_n(z)\approx A z^n$ $\quad$ при $r\to\infty$

$Q_m(z)\approx B z^m$

$= \int_{C_r}\frac{A}{B}\, z^{n-m}$

$$\left|\int_{C} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}\,dz\right| = \left|\int_{C_r} \frac{A}{B}\, z^{n-m}\,dz\right| \le$$

$$\le \left|\frac{A}{B}\right| r^{n+1-m} \int_0^{\pi} d\varphi = \pi \left|\frac{A}{B}\right| r^{n+1-m}$$

$dz = r e^{i\varphi} d\varphi$

$\Rightarrow m > n+1$

[illegible] [illegible] [illegible]

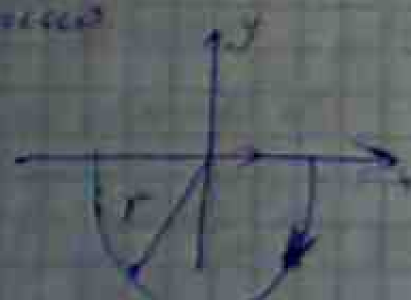
[illegible] условие [illegible] [illegible]

[illegible] на L

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\left(\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, z_j\right)$$

$\operatorname{Im} z_j > 0$

Иначе



$m \ge n+2$

[illegible] направл. обхода

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx = -2\pi i \sum_{j} \operatorname{Res}\left(\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, z_j\right)$$

$\operatorname{Im} z_j < 0$

7. $\int_0^{2\pi} F(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi = I$

F — рациональная функция своих аргументов

интеграл по контуру

$\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$ $\quad \sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$

$z = e^{i\varphi}$ $\quad |z| = 1$

$\cos\varphi = \dfrac{z+1/z}{2} = \dfrac{z^2+1}{2z}$

$\sin\varphi = \dfrac{z-1/z}{2i} = \dfrac{z^2-1}{2iz}$

$dz = ie^{i\varphi}d\varphi = iz\,d\varphi$

$d\varphi = \dfrac{dz}{iz}$

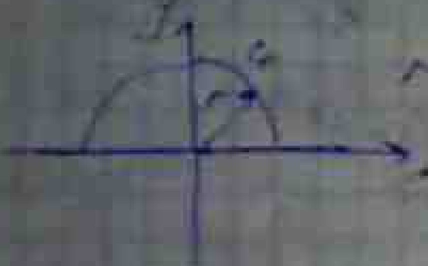
$$I = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz} =$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{F}{z}, z_k\right)$$

$$|z_k| < 1$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x}\,dx = \int f(z) e^{i\alpha z}\,dz$$

$$\operatorname{Im} z > 0$$



$r \to \infty$

Лемма Жордана

Если $\alpha > 0$ $\int_{C_r} f(z) e^{i\alpha z}\,dz \to 0$, при

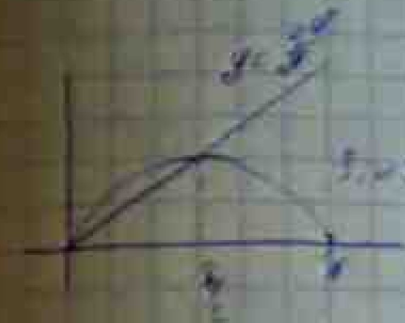
$r \to \infty$, если $f(z) \to 0$

$$|f(z)|_{|z|=r} = M(r)$$

$$\lim_{r\to\infty} M(r) = 0$$

$$\left|\int_{C_r} f(z) e^{i\alpha z}\,dz\right| \le \int_0^{\pi} M(r) e^{-\alpha r \sin\varphi}\, r\,d\varphi =$$

$$e^{i\alpha z} = e^{i\alpha r\cos\varphi}\, e^{-\alpha r \sin\varphi}$$



$$= 2M(r)\,r \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha r \sin\varphi}\,d\varphi \le$$

$$\le 2M(r)\,r \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha r \frac{2\varphi}{\pi}} =$$

$$= 2r\,M(r)\,\pi \left.\frac{e^{-\frac{2\alpha r\varphi}{\pi}}}{2\alpha r}\right|_{\pi/2}^{0} =$$

$$\frac{\pi M(r)}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha r}\right)$$

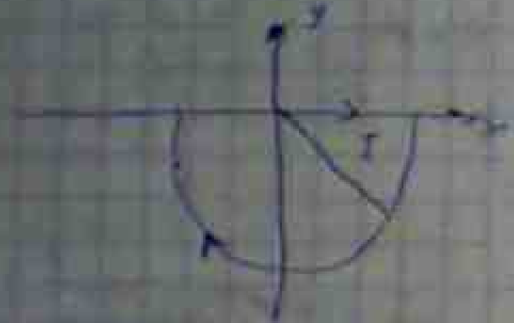
$$\left|\int_{C_r} f(z) e^{i\alpha z}\,dz\right| \le \frac{\pi M(r)}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha r}\right) \to 0$$

$r \to \infty$ $\quad \alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \sin x\, e^{i\alpha x} = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(\sin z\, e^{i\alpha z}, z_j)$$

$$\mathrm{Im}(z_j) > 0$$

Если $\alpha < 0$



$$e^{i\alpha z} \quad e^{i\alpha R e^{i\varphi}} \quad e^{-\alpha R \sin\varphi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx = -2\pi i \sum \mathrm{Res}$$

$$\mathrm{Im}(z_j) < 0$$

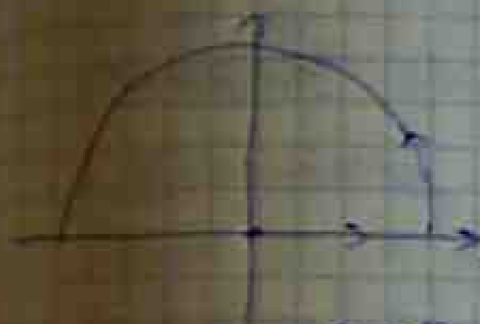
Пример

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx =$$

$$\frac{1}{2}\, \mathrm{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} = \int_{\mathrm{Im} z = 0} \frac{e^{iz}}{z} dz = \oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz$$

$\alpha = 1$



$\frac{e^{iz}}{z}$ $z=0$ — полюс 1-го порядка

Особая т. на границе

Если особая т. явл. полюсом 1-го порядка, то тогда вклад этой т. в интеграл равен вычету в этой точке умноженному на πi. Если полюс более высокого порядка то тогда необх. регуляриз. ...

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) =$$

$$= \pi i \lim_{z\to 0} \frac{z\, e^{iz}}{z} = \pi i$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\pi i) = \frac{\pi}{2}$$

Теорема о сумме вычетов

Вычет бесконечно удаленной точки.

$f(z)$ — регулярна на всей $\bar{\mathbb{C}}$ и имеет конечное число особых точек.

C совп. с C_∞ обход по ч.с.

$z=\infty$ — может быть особой

относительно особых т. C контура-ми

Все точки лежат внутри контура (кроме может быть бесконечной) особых точек нет.

$$\mathrm{Res}(f(z),\infty) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\infty} f(z)\,dz =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz = -\sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f(z), z_j)$$

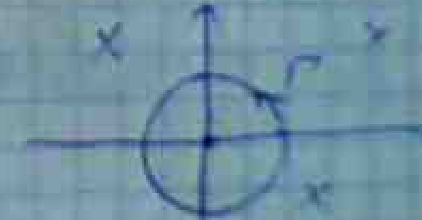
Сумма вычетов ф-и во всех ее особых точках включая бесконечно-удаленную $=0$

$$\boxed{\mathrm{Res}(f(z),\infty) + \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f(z), z_j) = 0}$$

$$\mathrm{Res}(f(z),\infty) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\infty} f(z)\,dz$$

$z = \frac{1}{t}$ $\quad z=\infty \Rightarrow t=0$

$dz = -\frac{dt}{t^2}$



$\operatorname{Res}(f(z), \infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(1/t)}{t^2}\, dt =$

$= -\operatorname{Res}\left(\frac{f(1/t)}{t^2}, 0\right)$

Пример:

$f(z) = \frac{z}{z+1}$, $z_0 = -1$

$z = \frac{1}{t}$ $\quad z \to \infty \Rightarrow t = 0$

$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t\left(\frac{1}{t}+1\right)} = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4$

$z = \infty$ не явл. особой точкой

$\operatorname{Res}\left(\frac{f(1/t)}{t^2}, 0\right) =$

$F(t) = \frac{f(1/t)}{t^2} = \frac{1}{t^2(1+t)}$

$t = 0$ — полюс 2-го порядка

$= \lim\limits_{t \to 0} \frac{d}{dt}\left(t^2 F(t)\right) =$

$= \lim\limits_{t \to 0} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+t}\right) = -1$

$\operatorname{Res}(f(z), \infty) = 1$

$f(z) = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots$

$\operatorname{Res} = C_{-1}$

$C_{-1} = -1$

Остается только бесконечно удаленной точки $z = \infty$ не особая и вычет $\neq 0$ (в отличие)

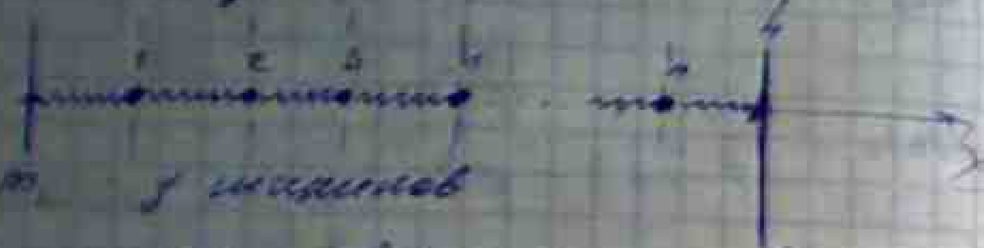
Целые функции

Аналитические во всей комплексной плоскости

$\Rightarrow$ ОТ нет

Уравнение мат. физики

Уравнение колебаний струны



m, l шариков

шарики двигаются вдоль стержней

$q_i(t) \to u(x,t)$

$n \to \infty$

$l \to 0$

струна должна быть натянута

$l > l_0$ иначе переформировка пружин

$L = T - U$

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2 \to \frac{1}{2}\int_0^l dx\, \rho(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

$m = \rho(x)dx$

линейная плотность

$$U_{вн} = -\sum_1 f_i(t)\, q_i \to -\int_0^l dx\, f(x,t)\, u(x,t)$$

плотность сил

$$U_{упр} = \frac{\kappa}{2}(\Delta l_i)^2$$

$$\Delta l_i = \sqrt{l^2 + (q_{i+1} - q_i)^2} - l_0 \to$$

$$\to \sqrt{l^2 + (u(x+l) - u(x))^2} - l_0 \approx$$

$$u(x+l) - u(x) \approx \frac{\partial u}{\partial x}\, l$$

$$\approx \sqrt{l^2 + l^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} - l_0 = l\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} - l_0 =$$

$$= l\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) - l_0 = \underbrace{(l - l_0)}_{\Delta l} + \frac{l}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

$$U_{упр} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\kappa}{2} \Delta l_i^2 =$$

$$= \sum_{i} \frac{\kappa}{2} \left(\Delta l^2 + \Delta l\, l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right) \Rightarrow$$

это натяжение мембр

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ l \to 0}} \kappa \Delta l = T(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^l dx\, T(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l dx\, \rho(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \int_0^l dx\, p(x,t)\, u -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^l dx\, T(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \underbrace{\left(\frac{\rho(x)}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + p(x,t)\, u - \frac{T(x)}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right)}_{F}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial u_t}\right) = 0$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = p(x,t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_x} = -T(x) \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_t} = \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\boxed{\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right) = p(x,t)} \; -$$

ур. колебаний струны

Частн.

$T(x) = T = const$

$\rho(x) = \rho = const$

$$\frac{T}{\rho} = V^2$$

$p(x,t) = 0$ — внешних сил нет

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

c — скорость распространения

Ур-е имеет много решений

Решение задачи колебаний струны

1) Начальные условия

$u(x,0) = u_0(x)$

$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$

2) граничные условия

$u(0,t) = u(l,t) = 0$ — если закреплены концы

$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$ — если концы свободны

$u(0,t) = a(t)$

$u(l,t) = b(t)$ — если концы движутся по заданному закону

3) $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = f(t)$

2 НУ и 2 ГУ

НУ должно удовлетворять граничным

Метод разделения переменных

$u(x,t) = T(t)\,\Phi(x)$

$$\ddot{T}\Phi - v^2 T \Phi'' = 0 \quad \Big| : T\Phi$$

$$\underbrace{\frac{\ddot{T}}{T}}_{\text{зависит от } t} = v^2 \underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}}_{\text{зависит от } x}$$

⇒ равенство должно выполняться при $\forall t$ и $\forall x$

$f(t) \equiv g(x)$

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -k^2 \qquad \frac{T''}{T} = -\omega^2$$

$$\boxed{\omega = kv}$$

$$\Phi'' + k^2\Phi = 0$$

$$\begin{cases} \Phi = A_1 \cos kx + A_2 \sin kx \\ T = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \end{cases}$$

$$u = \Phi T$$

→ необходимо задать НУ и ГУ

концы закреплены

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

$$\Phi(0) = \Phi(l) = 0$$

$$\Phi(0) = A_1 = 0$$

$$\Phi(l) = A_2 \sin kl = 0$$

$$kl = \pi n$$

$$k = k_n = \frac{\pi n}{l}$$

$$\omega = \omega_n = \frac{\pi v n}{l}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2l/n$$

$$\frac{n\lambda_n}{2} = l$$ → должно быть целое число полуволн

$$u(x,t) = \sin\frac{\pi n x}{l}\left(C_n \cos\omega_n t + S_n \sin\omega_n t\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \cos\omega_n t \sin\frac{\pi n x}{l} + S_n \sin\omega_n t \sin\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$\dot u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-C_n \sin\omega_n t \sin\frac{\pi n x}{l}\,\omega + S_n \omega_n \cos\omega_n t \sin\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n}{l}x = u_0(x) \quad \Big| \sin\frac{\pi m x}{l},\ \int_0^l$$

$$\dot u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \omega_n \sin\frac{\pi n}{l}x = \vartheta(x)$$

$\Rightarrow$ ряд Фурье

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx$$

$$S_n = \frac{2}{\pi n}\int_0^l V(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

Уравнение колебаний плоской мембраны

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,0) &= u_0(x,y) \\ u_t(x,y,0) &= v(x,y) \end{aligned}\right\} \text{НУ}$$

или границы закреплены

$$u(x,y,t)\Big|_{гр} = 0$$

границы свободны

$$(\operatorname{grad} u, \vec{n})\Big|_{гр} = 0$$

вектор нормали к границе

колебания трёхмерной жидкой среды

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \Delta u$$

$n(\vec r, 0) = u_0(\vec r)$
$\dot u(\vec r, 0) = v(\vec r)$ } Н.У.

граничные условия

закреплено:

$u(\vec r, t)\big|_{гр} = 0$

свободно:

$(\operatorname{grad} u, \vec n)\big|_{гр} = 0$

3D: $u = T(t)\,A(x)\,B(y)\,C(z)$

Уравнение диффузии

N_0 - общее число частиц

$n(\vec r, t)$ - концентрация

$n(\vec r, t) = \frac{dN}{dV}$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V n\,dV = \int_V \frac{\partial n}{\partial t}\,dV$$

Закон Фика: Если в нач. вещ. где конц. восп. частиц пойдёт поток частиц из обл. с большей в меньшую

$\vec j$ - плотность потока частиц - отражает количество частиц, пересекающих единичную площадку по нормали к ней в единицу времени.

$$\vec j = -D(\vec r)\operatorname{grad} n = -D(\vec r)\frac{\partial n}{\partial r}$$

$$\frac{dN}{dt} = \oint \vec j\, d\vec S \;=$$

$$= \int \operatorname{div}(D(\vec r)\operatorname{grad} n)\,dV$$

$$\int_V dV\left(\frac{\partial n}{\partial t} - \operatorname{div}(D(\vec r)\operatorname{grad} n)\right) = 0$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div}(\underbrace{D(\vec r)}\operatorname{grad} n)$$

коэффициент диффузии

Δ однородную среду

$D(\vec r) = D = \text{const}$

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n}$$

1 НУ

$n(\vec r, 0) = n_0(\vec r)$

2 ГУ

$n(\vec r, t)\big|_{\text{границ}} = n_1$

или (тело изолировано)

$(\vec j, \vec n)\big|_{\text{гран}} = 0 \rightarrow \frac{\partial n}{\partial \vec n}\Big|_{\text{гр}} = 0$

$\frac{\partial n}{\partial \vec n}\Big|_{\text{гр}} = 0$

Ур-е диффузии

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div}(D(\vec r)\operatorname{grad} n) + g(\vec r, t)$$

наличие источников

<u>Уравнение теплопроводности</u>

тело помещено в среду

$T(\vec r, t)$

$\vec j = -\underbrace{\text{æ}(\vec r)}\operatorname{grad} T$

коэфф теплопроводности

$$c(\vec r)\rho(\vec r)\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\text{æ}(\vec r)\operatorname{grad} T)$$

$\Delta Q = cm\Delta T$

Если среда однородна

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T} \quad a = \frac{\text{æ}}{c\rho}$$

- НУ

$$T(\vec{r}, 0) = T_0(\vec{r})$$

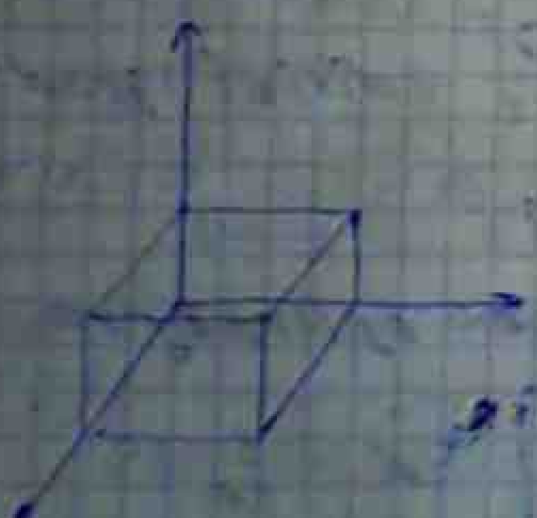
- ГУ

$$T(\vec{r}, t)\Big|_{гр} = T_{внеш}$$

- или (если тело теплоизолиров)

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}\Big|_{гр} = 0$$

Метод разделения применим в случае, когда тело имеет форму параллелепипеда.



$a \neq b \neq c$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n$$ — ур-е диффузии

$$n = T(t)\,P(x)\,Q(y)\,R(z)$$

$$\dot{T}PQR = D \cdot T \cdot (P''_x QR + PQ''_y R + PQR''_z) \Big| \cdot \frac{1}{TPQR}$$

$$\frac{\dot{T}}{T} = D\left(\frac{P''_x}{P} + \frac{Q''_y}{Q} + \frac{R''_z}{R}\right)$$

$$\frac{P''}{P} = -k_x^2, \quad \frac{Q''}{Q} = -k_y^2, \quad \frac{R''}{R} = -k_z^2$$

$$\frac{\dot{T}}{T} = -Dk^2$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$$T = A e^{-Dk^2 t}$$

$$P(x) = A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x$$

$$Q(y) = B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y$$

$$R(z) = C_1 \cos k_z z + C_2 \sin k_z z$$

НУ

$n|_{\text{гр}} = n_1$

Введем

$u = n - n_1$ $\quad n = n_1 + u$

$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$

$\Delta n = \Delta u$

$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u$

$n(\vec{r}, 0) = n_0(\vec{r})$

$u(\vec{r}, 0) = n_0(\vec{r}) - n_1$

$u(t, \vec{r})|_{\text{гр}} = \underline{\underline{0}}$!!!

$P(0) = P(a) = 0$

$A_2 \sin k_n a = 0$

$k_n a = \pi n$

$k_n = \frac{\pi n}{a}$ $\quad k_l = \frac{\pi l}{c}$

$k_y = \frac{\pi m}{b}$

$u = \sum_{n,l,m} u_{nml} e^{-Dk^2_{nlm} t} P_n(x) Q_m(y) R_l(z)$

Если брать не $-k^2$ а k^2, то мы никогда не удовлетв. НУ и ГУ.

Гамма функция

аналог интегр. $n!$

$$\boxed{\Gamma(z) = \int_0^\infty dt\, t^{z-1} e^{-t}}$$

$t^{z-1} = t^{x-1} t^{iy} e^{iy\ln t} =$

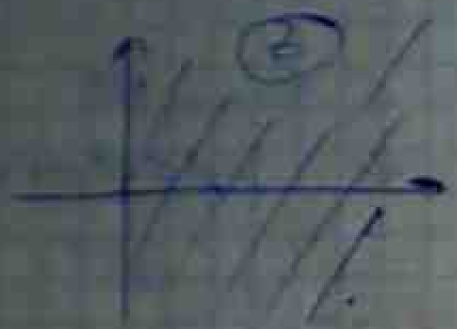
$= e^{(z-1)\ln t}$

$|e^{iy\ln t}| = 1$

$t^{x-1} e^{-t}$ => на бескон. расход. нет

$\int_0 t^{x-1} dt$ $\quad x > 0$ => имеется интегр.

если $Re\, z > 0$ — ф-я аналитична



Δ $Im\, z = 0$ и расм. $\Gamma(z)$ от действ. положит. числа

$Re(z) > 0$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty dt\, t^{x-1} e^{-t} =$$

$$= -\int_0^\infty d(e^{-t})\, t^x = -t^x e^{-t}\Big|_0^\infty +$$

$$+ x\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

допустим

есть $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ — продолжено на всю компл. плоскость

по Th

если 2 ф-и совп. на некот. множ., значит они совп. везде

$\Rightarrow$ $\boxed{\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)}$

Полюса Гамма-функции

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

$z = -n + \varepsilon, \quad \varepsilon \to 0$

$$\Gamma(-n+\varepsilon) = \frac{\Gamma(-n+1+\varepsilon)}{-n+\varepsilon} = \frac{\Gamma(-n+2+\varepsilon)}{(-n+\varepsilon)(-n+1+\varepsilon)} =$$

$$= \frac{\Gamma(-n+n+1+\varepsilon)}{(-n+\varepsilon)(-n+1+\varepsilon)\dots(-n+n-1+\varepsilon)} =$$

$$= \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{(-n+\varepsilon)\dots(-1+\varepsilon)\varepsilon} = \frac{\Gamma(1+\varepsilon)(-1)^n}{(n-\varepsilon)(\dots)(1-\varepsilon)\varepsilon} =$$

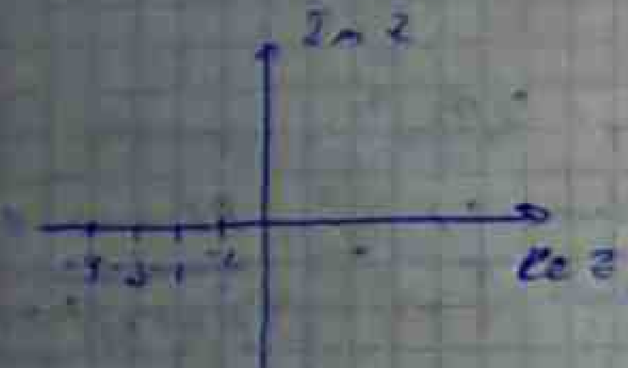
$$= \frac{(-1)^n\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon\prod_{k=1}^{n}(k-\varepsilon)}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\Gamma(-n-\varepsilon) = \frac{(-1)^n\Gamma(1)}{n!}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon} =$$

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty dt\, e^{-t} = 1$$

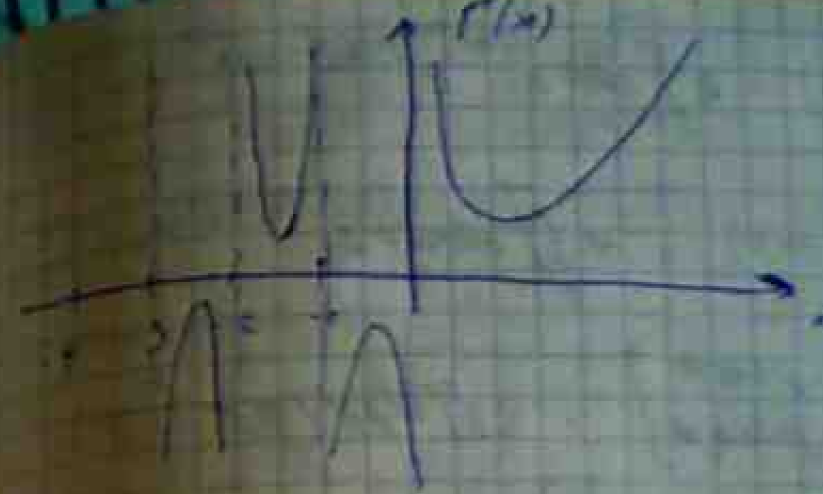
$$= \frac{(-1)^n}{n!}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\lim_{z\to -n}\Gamma(z) = -\frac{(-1)^n}{n!}\lim_{z\to -n}\frac{1}{z+n}$$



$z=-n$ — полюса I-го порядка

$$\mathrm{Res}(\Gamma(z), -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$$



$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots$$

$$= n!\,\Gamma(1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty dt\, e^{-t} = 1$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(z-1) = \Gamma(z)$$

$\{$ $\mathrm{Im}\, z = 0$

$0 < z = x < 1$

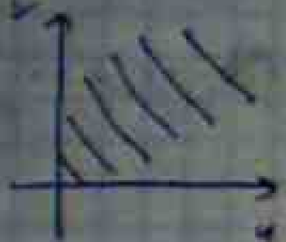
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\, e^{-t} t^{x-1} = \begin{bmatrix} t=u^2 \\ dt = 2u\,du \end{bmatrix} =$$

$$= 2\int_0^\infty du\, e^{-u^2} u^{2x-1}$$

$$\Gamma(1-x) = 2\int_0^\infty dv\, e^{-v^2} v^{1-2x}$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = 4\iint_0^\infty du\,dv\, e^{-(u^2+v^2)}\left(\frac{u}{v}\right)^{2x-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} u=\rho\cos\varphi \\ v=\rho\sin\varphi \end{bmatrix} = 4\iint d\rho\, d\varphi\, \rho\, e^{-\rho^2} (\operatorname{ctg}\varphi)^{2x-1} =$$



$$= 4\int_0^\infty d\rho \int_0^{\pi/2} d\varphi\, \rho\, e^{-\rho^2} (\operatorname{ctg}\varphi)^{2x-1} =$$

$$= 4\int_0^\infty d\rho\, \rho\, e^{-\rho^2} \int_0^{\pi/2} d\varphi\, (\operatorname{ctg}\varphi)^{2x-1} =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (\operatorname{ctg}\varphi)^{2x-1} d\varphi = \begin{bmatrix} \varphi = \operatorname{arcctg}\sqrt{w} \\ d\varphi = -\frac{1}{1+w}\frac{dw}{2\sqrt{w}} \end{bmatrix} =$$

$$= -\int_\infty^0 \frac{dw}{\sqrt{w}} \frac{w^x}{\sqrt{w}} \frac{1}{1+w} =$$

$$\sqrt{w} = \operatorname{ctg}\varphi \Rightarrow \begin{matrix} w=\infty \\ w=0 \end{matrix}$$

$$= \int_0^\infty \frac{dw\, w^{x-1}}{1+w} = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

известен из ТФКП

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

$$\boxed{\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}}$$

Вычисление интегралов вида

$$\int_C (-z)^{a-1} Q(z)\, dz$$

$$z = \frac{1}{2}$$

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

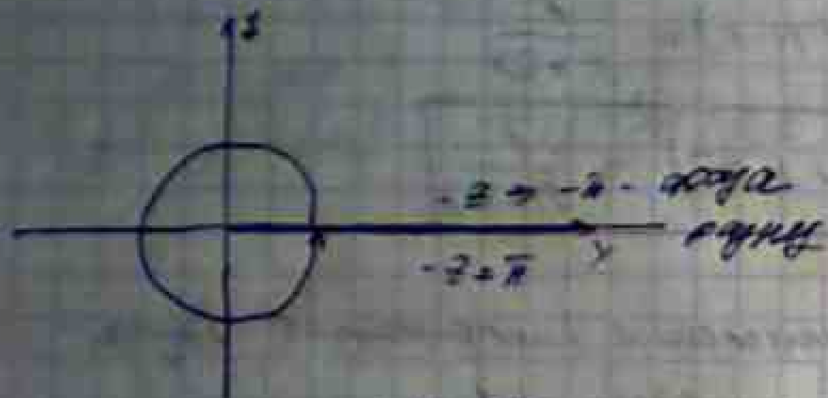
C — не конкретизируем

$$\lim_{z\to 0} (-z)^{a} Q(z) = 0$$

$$\lim_{z\to \infty} (-z)^{a} Q(z) = 0$$

a — действительное

$Q(z)$ - рациональная, нет особых точек на неположительной части действит. оси.



$\Delta\varphi = 2\pi$

$(-z)^{a-1}$ ⇒ набирает фазу $2\pi(a-1)$

$$e^{i2\pi(a-1)} = e^{2\pi a i} \neq 1$$

⇒ $z = 0$ - точка ветвления ⇒

⇒ ф-я многозначна

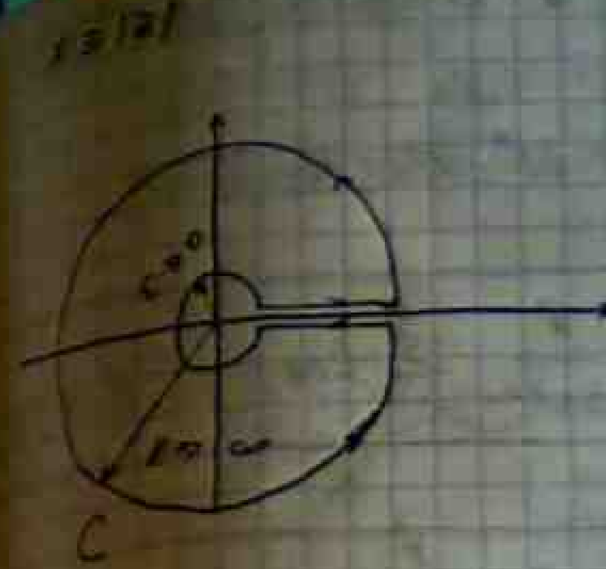
Сделаем ф-ю однозначной ⇒

⇒ сделаем разрез $(\mathrm{Im}\, z = 0 \ \mathrm{Re}\, z > 0)$

$(-z)^{a-1} = x e^{-i(a-1)\pi}$ на верхнем берегу

$(-z)^{a-1} = x e^{i(a-1)\pi}$ на нижнем берегу разреза

$z = |z|$



$$\left|\int_{C_\varepsilon} (-z)^{a-1} Q(z)\,dz\right| \le \varepsilon^{a-1}\, 2\pi\varepsilon\, \mathrm{Max}\,|Q(\varepsilon e^{i\varphi})| =$$

$$= 2\pi\varepsilon^{a}\, \mathrm{Max}\,|Q(\varepsilon e^{i\varphi})| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

$$\left|\int_{C_R} (-z)^{a-1} Q(z)\,dz\right| \le 2\pi R^{a}\, \mathrm{Max}\,|Q(R e^{i\varphi})| \to$$

$\to 0$ (по условию)

⇒ остается инт-ал по действ. оси

$$\oint_C (-z)^{a-1} Q(z)\,dz = \int_0^\infty e^{-i\pi(a-1)} x^{a-1} Q(x)\,dx +$$

$$+ \int_\infty^0 e^{i\pi(a-1)} x^{a-1} Q(x)\,dx = (-e^{-i\pi a} + e^{i\pi a})\cdot$$

$= \int_0^\infty dx\, x^{a-1} Q(x) = 2i \sin \pi a \int_0^\infty dx\, x^{a-1} Q(x) =$

$= 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}\left((-z)^{a-1} Q(z), z_j\right)$

$$\boxed{\int_0^\infty dx\, x^{a-1} Q(x) = \frac{\pi}{\sin \pi a} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}\left((-z)^{a-1} Q(z), z_j\right)}$$

$$\int_0^\infty \frac{dw\, w^{x-1}}{1+w} = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

$$Q(w) = \frac{1}{1+w}$$

$$\frac{w^x}{1+w} \xrightarrow[w\to\infty]{} 0$$

$w=-1$ - особые точка

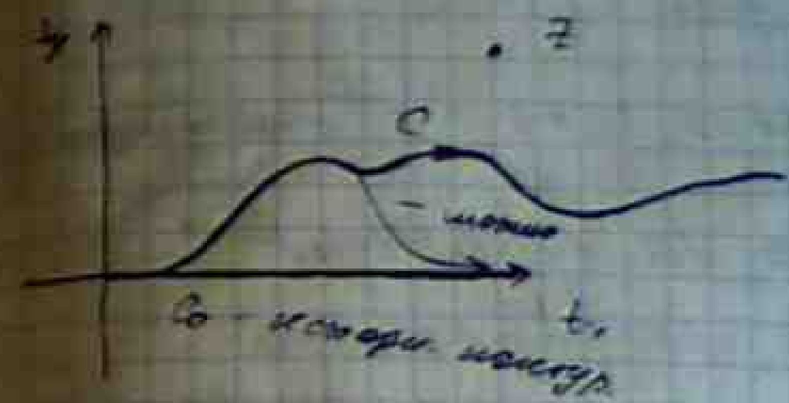
$$\mathrm{Res}\left[\frac{(-z)^{x-1}}{1+z}, z_0=-1\right] =$$

$$= \lim_{z\to -1}\left(\frac{(-z)^{x-1}\cancel{(1+z)}}{\cancel{(1+z)}}\right) = 1$$

Асимптотика Г ф-и при

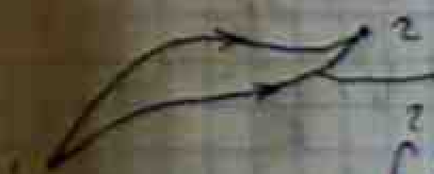
$|z| \to \infty$, $\mathrm{Re}\, z > 0$

Формула Стирлинга



$|z| >> 1$

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty dt\, t^z e^{-t} =$$



измен. обход внутри
нет особых точек.

$\int_1^z f(z)dz$ - аналит. ф-я

$$= \int_C dt\, t^z e^{-t} =$$

$t = t_x + i t_y$

$$= \int_C dt\, e^{z\ln t - t}$$

$$f(t) = z\ln t - t$$

$$f' = \frac{z}{t} - 1$$

$f'(t)=0 \Rightarrow t_0 = z$ – т. экстремума

$$f(t) \approx f(t_0) + \underbrace{f'(t_0)(t-t_0)}_{0\text{ – т.к. экстр.}} + \frac{f''(t_0)}{2}(t-t_0)^2 + \dots$$

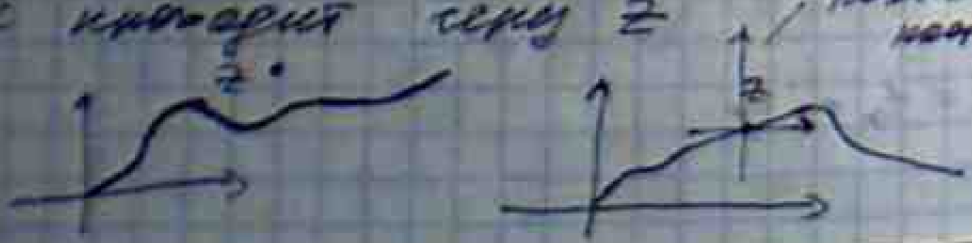
$$f''(t_0) = -\frac{z}{t_0^2} = -\frac{1}{z}$$

$$f(t_0) = z\ln z - z = \ln\left(\frac{z}{e}\right)^z$$

$$\Gamma(z+1) \approx \int_C dt\, e^{\ln\left(\frac{z}{e}\right)^z} e^{-\frac{(t-z)^2}{2z}} =$$

$$= \left(\frac{z}{e}\right)^z \int_C dt\, e^{-\frac{(t-z)^2}{2z}} =$$

C проходит через z / новые направления

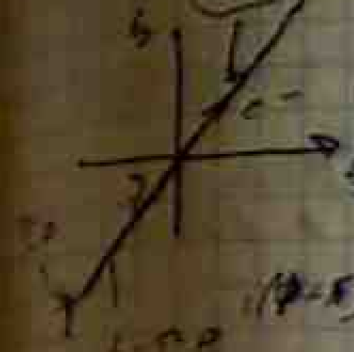


$$= \left(\frac{z}{e}\right)^z \int_C dt\, e^{-t^2/2z} =$$

$z = \rho e^{i\varphi}$ $\quad t = \tau e^{i\Phi}$ $\quad \tau = |z|$

$$\frac{t^2}{2z} = \frac{\tau^2}{2\rho} e^{i(2\Phi-\varphi)}$$

$t = \tau e^{i\Phi}$ контур прямой



$$\frac{t^2}{2z} = \frac{\tau^2}{2\rho} e^{i(2\Phi-\varphi)} e^{2\pi i} = \frac{\tau^2}{2\rho} e^{i(2\Phi-\varphi)}$$

$$= \left(\frac{z}{e}\right)^z \Big(\int_0^\infty d\tau\, e^{i\Phi} e^{-\frac{\tau^2}{2\rho} e^{i(2\Phi-\varphi)}} -$$

$$- \int^0 d\tau\, e^{i(\Phi+\pi)} e^{-\frac{\tau^2}{2\rho} e^{i(2\Phi-\varphi)}} +$$

$$\int^{t_0} dt\, e^{-t^2/2z} \Big) =$$

выберем $\varphi = \psi/2$

$$= \left(\frac{z}{e}\right)^z e^{i\frac{\psi}{2}} \left[\int_0^\infty d\tau\, e^{-\tau^2/2\rho} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\tau_0} d\tau\, e^{-\tau^2/2\rho} \right] + \left(\frac{z}{e}\right)^z \int_{-z}^{\tau_0} d\tau\, e^{-\tau^2/2\rho}$$

$\rho \gg 1$ по условию

$\tau \sim \sqrt{\rho}$ — ш. затух. exp (уменьш. в e раз)

$1 \ll \sqrt{\rho} \ll \rho$

$\tau_0 \sim \rho \gg \sqrt{\rho}$

$$\approx 2\left(\frac{z}{e}\right)^z e^{i\psi/2} \int_0^\infty d\tau\, e^{-\tau^2/2\rho} =$$

$$= \left(\frac{z}{e}\right)^z e^{i\psi/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-\tau^2/2\rho} =$$

$$= \left(\frac{z}{e}\right)^z e^{i\psi/2} \sqrt{2\pi\rho} = \sqrt{2\pi}\sqrt{\rho e^{i\psi}}\left(\frac{z}{e}\right)^z =$$

$$= \sqrt{2\pi}\, z^{z+1/2} e^{-z}$$

$$\boxed{\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi}\, z^{z+1/2} e^{-z}}$$ — формула Стирлинга

$z = n \gg 1$

$\Gamma(n+1) = n! \approx \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}$

$\mathrm{Re}\, z > 0$

$\mathrm{Re}\, z < 0$ не подходит, т.к. в этой обл. есть особые точки.