МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКЕ

Практикум

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 «Радиофизика» , 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем»

Нижний Новгород
2018

УДК **539.18;**
ББК В22.314
М-29

М-29 Маругин А.В., Савикин А.П., Шарков В.В., Шаркова О.В. СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКЕ: Практикум. — Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2018. - 34 с.

Данная методическая разработка включает в себя подборку задач по основам квантовой механики и квантовой электроники. В каждом из разделов практикума представлены физические задачи, посвященные изучению основных принципов и эффектов квантовой физики, приведены указания по их решению.

Задачник предназначен в качестве основного методического материала для проведения практических занятий со студентами радиофизического факультета, обучающихся по направлениям «Радиофизика», «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и специальности «Информационная безопасность телекоммуникационных систем».

Рецензент:
доцент кафедры общей физики радиофизического факультета Менсов С.Н.

Ответственный за выпуск:
зам. председателя методической комиссии радиофизического факультета ННГУ
д.ф.-м.н., профессор **Е.З.Грибова**

УДК **539.18**
ББК В22.314

Задачи по квантовой механике

1. Волновая функция и операторы.

1.1. Проверить эрмитовость операторов $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}, \hat{T} = -\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}, \hat{L}_i = \varepsilon_{ijk}x_j p_k$.

1.2. Найти операторы $(AB)^+, [A,B]^+$, где A,B - произвольные операторы.

1.3. Даны две матрицы $\hat{a}$ и $\hat{B}$, удовлетворяющие соотношениям $\hat{a}\cdot\hat{a} = 0$, $\hat{a}\cdot\hat{a}^+ + \hat{a}^+\cdot\hat{a} = I$ и $\hat{B} = \hat{a}^+\cdot\hat{a}$.

1) Показать, что $\hat{B}^2 = \hat{B}$.

2) Предполагая, что матрица $\hat{B}$ невырожденная, найти матрицы $\hat{a}$ и $\hat{B}$ в представлении, в котором матрица $\hat{B}$ диагональна.

3) Существует ли представление, в котором матрица $\hat{a}$ диагональна?

1.4. Для операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}^+$ выполняются следующие соотношения: $\hat{A}\cdot\hat{A}^+ + \hat{A}^+\cdot\hat{A} = I$; $\hat{A}\cdot\hat{A} = 0$; $\hat{A}^+\cdot\hat{A}^+ = 0$. Показать, что собственные значения оператора $\hat{A}^+\cdot\hat{A}$ есть 0 или 1.

1.5. Волновая функция частицы $\psi(x,y,z) = \delta(x-a)\delta(y-b)\delta(z)$.

1) Определены ли в этом состоянии координата, энергия и импульс частицы?

2) Найти распределение вероятностей для импульса.

3) Чему равны средние значения импульса и его дисперсия?

4) Чему равно среднее значение кинетической энергии?

1.6. Найти в p-представлении волновую функцию, описывающую состояние свободной частицы с заданной кинетической энергией.

1.7. На частицу массы m действует поле тяготения Земли. Напишите оператор энергии частицы. Какой энергетический спектр у этой частицы - непрерывный или дискретный?

1.8. Для частицы в свободном пространстве известно, что в момент времени $t=t_0$ $p_x=p_0$, $y=y_0$ и $z=0$. Спин частицы равен 1/2. Написать ее волновую функцию в этот момент времени.

2. *Движение квантовой частицы в потенциальных полях.*

2.1. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы равна $a = 4 \cdot 10^{-10}\, м$. Найти:

1) с помощью соотношения неопределённостей минимально возможную энергию;

2) энергетический спектр электрона в стационарных состояниях;

3) число энергетических уровней в интервале $(E, E + dE)$ и длину волны фотона, испускаемого при переходе $E_4 \to E_2$.

2.2. Для частицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками и шириной a

1) найти нормированные волновые функции стационарных состояний;

2) вычислить вероятность её нахождения с наименьшей энергией в области $\frac{1}{4}a \le x \le \frac{3}{4}a$;

3) вычислить $\overline{(\Delta x)^2}, \overline{(\Delta p_x)^2}$ и получить соотношение неопределённостей для координаты x и импульса p_x.

2.3. В одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками и шириной a находится электрон, состояние которого описывается волновой функцией $\psi(x) = A\sin^2 \frac{\pi x}{a}$.

Определить:

1) нормировочную постоянную A;

2) среднее значение кинетической энергии электрона;

3) вероятность пребывания электрона в основном состоянии.

2.4. Частица массой m_0 и энергией E падает на прямоугольный барьер

$$U(x)=\begin{cases} U_0, 0<x<a, \\ 0, x<0; x>a. \end{cases}$$

1) Найти для случая $E>U_0$ коэффициенты прозрачности D и отражения R;

2) вычислить коэффициент прозрачности D при $E\to U_0$;

3) определить первые два значения энергии E, при которых частица (электрон) беспрепятственно проходит через барьер, если $U_0=15эВ$ и $a=10^{-10}$ м.

2.5. Частица массы m движется в одномерном потенциальном поле $U(x)=\frac{kx^2}{2}$ (гармонический осциллятор). Найти энергию частицы в основном состоянии с помощью

1) соотношения неопределённостей ($\Delta x\cdot\Delta p_x\approx\frac{\hbar}{2}$);

2) уравнения Шрёдингера, если волновая функция частицы в этом состоянии $\Psi(x)=Ae^{-\alpha x^2}$, где A – нормировочный коэффициент, $\alpha=const>0$;

3) в условиях предыдущей задачи оценить кинетическую энергию осциллятора. Вычислить среднее значение его потенциальной энергии.

2.6. Стационарное состояние линейного гармонического осциллятора с частотой ω и массой m описывается волновой функцией $\Psi(x)=Ae^{\frac{-\alpha x^2}{2}}$, где $\alpha=\frac{m\omega}{\hbar}$. Вычислить

1) нормировочный коэффициент A;

2) средние значения координаты $\bar{x}$ и импульса $\overline{p_x}$;

3) средние квадратичные отклонения $\overline{(\Delta x)^2}$ и $\overline{(\Delta p_x)^2}$, проверив соотношение неопределённостей для координаты x и импульса p_x.

2.7. Линейный гармонический осциллятор с частотой ω, массой m и зарядом e помещён в постоянное однородное электрическое поле $\vec{E}$.

1) Найти потенциальную энергию заряженного осциллятора и записать стационарное уравнение Шрёдингера;

2) какую новую переменную следует ввести, чтобы преобразовать стационарное уравнение Шрёдингера к виду, известному для случая отсутствия электрического поля?

3) Найти энергетический спектр и волновые функции стационарных состояний.

2.8. Стационарное состояние линейного гармонического осциллятора с частотой ω и массой m описывается волновой функцией $\Psi(x) = Ae^{-\alpha x^2}$.

1) Найти значение параметра α и энергию E осциллятора;

2) вычислить наиболее вероятное значение координаты x;

3) изобразить примерный график распределения плотности вероятности $\varpi(x)$ различных значений *x* в этом состоянии.

2.9. Линейный гармонический осциллятор находится в стационарном состоянии с наименьшей энергией. Найти:

1) наиболее вероятное значение координаты $x_{вер}$ у осциллятора;

2) значения координаты $x_{кл}$, соответствующие границам классической области движения осциллятора; изобразить примерный график распределения плотности вероятности $\varpi(x)$ различных значений x в этом состоянии;

3) вероятность пребывания осциллятора вне классических границ.

2.10. Используя стационарное уравнение Шредингера, рассмотреть вопрос о непрерывности волновой функции в точке $x = 0$, в которой потенциальная энергия частицы $U(x)$ а) изменяется на конечное значение, б) $U(x) = \alpha\delta(x)$.

2.11. Найти коэффициент отражения и коэффициент прохождения частицы через потенциальный барьер $V(x) = \alpha\delta(x)$.

2.12. Найти уровни энергии и волновые функции частицы в потенциале $V(x) = -\alpha\delta(x)$.

3. ***Орбитальный момент. Сферическая система координат.***

3.1. Система находится в свободном пространстве и имеет орбитальный момент импульса $L^2 = 2\hbar^2$. Известно также, что вероятность обнаружить любое значение проекции L_z одинакова и равна 1/3. Записать волновую функцию этого состояния. (Состояние "чистое").

3.2. При измерении проекции момента импульса L_z в некотором состоянии получили среднее значение $\langle L_z \rangle = \hbar/2$. Пользуясь шаровыми функциями $Y_{l\,m}(\theta,\varphi)$, напишите хотя бы одну волновую функцию, которая описывала бы такое состояние.

3.3. Волновая функция некоторой системы в сферических координатах определяется выражением (A – нормировочная константа): $\Psi(r,\theta,\varphi) = AR(r)\sin\theta\cos\varphi$, причем $\int\limits_0^\infty R^2(r)\cdot r^2 dr = 1$. Какие значения квадрата момента импульса и его проекции на ось z могут быть измерены в этом состоянии?

3.4. Волновая функция некоторой системы в сферических координатах определяется выражением (A – нормировочная константа): $\Psi(r,\theta,\varphi) = AR(r)\sin^2\theta\sin 2\varphi$, причем $\int_0^\infty R^2(r) r^2 dr = 1$. Какие значения квадрата момента импульса и его проекции на ось z могут быть измерены в этом состоянии и с какой вероятностью?

3.5. Волновая функция некоторой системы в сферических координатах определяется выражением $\Psi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} R(r) Y(\theta)\sin\varphi$. Какие значения проекции момента импульса на ось z могут быть измерены в этом состоянии и с какой вероятностью?

3.6. Для частицы, движущейся в центрально-симметричном поле

1) получить выражение оператора $\hat{L}_z$ в сферических координатах, выбрав ось OZ в качестве полярной оси;

2) определите собственные функции и собственные значения оператора $\hat{L}_z$, найденного в предыдущей задаче.

3) Частица находится в состоянии, описываемом волновой функцией $\Psi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\varphi$, где φ – угол вращения вокруг оси OZ. Определите, с какой вероятностью измерение даст различные значения проекций момента импульса L_z.

3.7. Для оператора проекции момента импульса $\hat{L}_z$

1) непосредственными вычислениями убедиться в ортогональности собственных функций, принадлежащих различным собственным значениям; вычислить матричные элементы и показать, что в своём собственном представлении оператор $\hat{L}_z$ диагонален;

2) определить собственные значения и их вероятности для системы, находящейся в состоянии $\Psi(\varphi) = A(1+\cos\varphi)^2$;

3) в состоянии $\Psi(r,\theta,\varphi)$ реализуется его определённое собственное значение. Показать, что средние значения $\overline{L}_x$ и $\overline{L}_y$ в этом состоянии равны 0.

3.8. Частица с массой M движется в свободном трехмерном пространстве с моментом количества движения, равным 0 (S-состояние). Найти энергетический спектр и нормированные функции стационарных состояний. Вычислить средний импульс в стационарном состоянии.

3.9. Частица с массой M движется по окружности радиуса R. Найти волновую функцию этого стационарного состояния и среднее значение проекции момента количества движения.

3.10. Найдите энергетический спектр и волновые функции жесткого плоского ротатора.

3.11. Найдите вращательный спектр двухатомной молекулы.

Указания: Выразить вращательную энергию симметричного волчка через полный момент и проекцию орбитального момента на ось вращения.

3.12. Напишите соотношение неопределенностей для различных проекций орбитального момента количества движения.

4. Спиновый момент квантовой частицы.

4.1. Напишите соотношение неопределенностей для различных проекций спинового момента количества движения в состоянии $\bar{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.2. Напишите соотношение неопределенностей для проекций спинового момента количества движения в состоянии $\overleftarrow{S}(s_z) = \overleftarrow{\alpha}$.

4.3. Запишите матрицы $\hat{\bar{S}}^2$ и $\hat{S}_z$ в S^2, S_z - представлении для частицы со спином, равным единице.

4.4. Найти уровни энергии и стационарные состояния частицы со спином ½ в постоянном магнитном поле, направленном по z. Пространственное движение частицы не учитывать.

4.5. В S_z- представлении найти:

1) оператор проекции спина на ось z’(θ,φ);

2) собственные функции и собственные значения оператора $\hat{S}_{z'}$;

3) вероятность получить при измерении проекции спина на ось z' значения $+\frac{\hbar}{2}$ и $-\frac{\hbar}{2}$, если первоначально частица находилась в состоянии α (или β).

4.6. Какие из спиновых функций в системе из двух электронов: $\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1(\alpha_2+\beta_2)$; $\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)$; $\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)$; $\alpha_1\alpha_2$; $\alpha_1\beta_2$ и $\beta_1\beta_2$ - являются собственными функциями операторов $\hat{S}_z=\hat{s}_{1z}+\hat{s}_{2z}$ и $\hat{S}^2=(\vec{s}_1+\vec{s}_2)^2$. Определить средние значения S_z и S^2 в состояниях, описываемых собственными функциями операторов $\hat{S}_z$ и $\hat{S}^2$.

4.7. Спиновое состояние частицы со спином ½ описывается нормированной волновой функцией вида $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Чему равно среднее значение проекции спина на ось x в этом состоянии?

4.8. Пучок частиц в опыте Штерна-Герлаха распространяется вдоль оси *X*. Состояние каждой отдельной частицы описывается следующими функциями: $\psi(s_z,t=0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix}$, $\psi(s_z,t=0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\psi(s_z,t=0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Определить количество пучков и их интенсивность после прохождения магнитного поля, градиент которого направлен по оси Y.

5. ***Атом водорода. Радиальные зависимости для волновой функции.***

5.1. Частица массой m_0 с нулевым орбитальным моментом (s-состояние) находится в сферически-симметричном потенциальном ящике радиуса r_0 с абсолютно непроницаемыми стенками. Определить:

1) волновые функции стационарных состояний;

2) наиболее вероятное значение расстояния $r_{вер}$ и вероятность нахождения частицы в области $r \le r_{вер}$;

3) энергетический спектр частицы. Используя соотношение неопределённостей $\overline{(\Delta r)^2} \cdot \overline{(\Delta p)^2} \ge \frac{\hbar^2}{4}$, подтвердить вывод о том, что $E_{\min} = E_1 \ne 0$.

5.2. Для атома водорода в основном состоянии определить:

1) энергию ионизации;

2) как изменятся с учётом движения ядра выражения энергии ионизации и постоянной Ридберга;

3) напряжённость $\vec{E}(\vec{r})$ электрического поля, созданного электронным облаком, если волновая функция электрона $\Psi_{100}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$, где a_0 - первый боровский радиус.

5.3. В атоме водорода:

1) с помощью соотношения неопределённостей $\Delta r \cdot \Delta p \approx \hbar$ оценить минимально возможную энергию электрона и соответствующее эффективное расстояние его от ядра;

2) волновая функция электрона в основном состоянии имеет вид $\Psi(r) = Ae^{-\frac{r}{a_0}}$, где a_0 - первый боровский радиус. Определить наиболее вероятное расстояние между электроном и ядром;

3) в условиях предыдущей задачи вычислить среднее значение потенциальной энергии электрона в поле ядра.

5.4. Электрон в атоме водорода находится в стационарном состоянии, описываемом сферически симметричной волновой функцией $\Psi(r) = A(1 + ar)e^{\alpha r}$, где A, α, a – некоторые постоянные.

1) С помощью уравнения Шрёдингера найти значение постоянных α, a и энергию E электрона.

2) Определить, в каком квантовом состоянии находится электрон. Какова кратность вырождения энергетического уровня.

3) Вычислить среднее расстояние $\bar{r}$ электрона от ядра.

5.5. Для основного состояния атома водорода вычислить:

1) наиболее вероятное расстояние $r_{вер}$ электрона от ядра и вероятность пребывания электрона в области $r \le r_{вер}$;

2) вероятность нахождения электрона вне классических границ поля;

3) средний электростатический потенциал поля, создаваемого электронным облаком в центре атома. Оценить среднюю энергию взаимодействия электронного облака с ядром.

5.6. Электрон в атоме водорода находится в состоянии |*n*, *l*, *m*>. Чему равны средние значения проекций момента импульса? Написать соотношение неопределенностей для различных проекций момента количества движения в этом состоянии.

5.7. Электрон в атоме водорода находится в состоянии $\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$,

Вычислить среднее кинетической энергии электрона.

6. <u>*Вычисление средних значений и дисперсий физических величин.*</u>

6.1. Волновая функция состояния квантовой частицы имеет вид $\Psi(x) = \varphi(x) e^{\frac{ip_0 x}{\hbar}}$, , где φ(x) - действительная функция, нормированная к единице. Найти среднее значение импульса частицы.

6.2. Свободная частица описывается волновой функцией *Ψ(x) = A· Sin (πx/a)* при |x| ≤ *a* и Ψ(x)=0 при |x| > *a*. Найдите нормированное распределение вероятностей по импульсам. Движение считать одномерным.

6.3. Свободная частица имеет равномерное распределение вероятностей по импульсам в интервале значений *(- P_o ÷ + P_o): C(p) = C* , если |*p*| ≤

p_o и $C(p) = 0$, если $|p| > p_o$. Найдите ее нормированную волновую функцию. Движение считать одномерным.

6.4. Свободная частица массы m находится в стационарном состоянии. Найти распределение вероятностей для импульса, средний импульс и дисперсию импульса (движение считать одномерным).

6.5. Спиновая волновая функция электрона равна $\bar{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$. Найти среднее значение проекций спина S_x, S_y, S_z.

6.6. Вычислите среднее значение $< S_x >$ в состоянии электрона $\overleftarrow{S}(s_z) = \overleftarrow{\alpha}$

6.7. Для частицы массой m_0, находящейся на n-ом энергетическом уровне в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками вычислить средние значения $\overline{x}$ и $\overline{p_x}$; определить средние значения квадрата импульса $\overline{p_x^2}$ и кинетической энергии $\overline{E_k}$; получить распределение вероятностей по импульсам

6.8. Состояние частицы описывается функцией $\psi(x,y,z) = \frac{1}{2\pi\hbar}\exp\left(\frac{ip_0x}{\hbar}\right)\delta\left(y\right)$.

Найти распределение вероятностей для проекции импульсов и координат частицы. Вычислить средние значения и дисперсии импульса и координат.

6.9. . Волновая функция частицы $\Psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y_{l,m}(\theta,\varphi)$.Найдите среднее значение проекции момента количества движения на ось X.

6.10. Плоский жесткий ротатор находится в состоянии $\Psi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(k\varphi)$ где k - целое число. Найти среднее значение проекции момента ротатора L_z (z - ось вращения).

6.11. Волновая функция некоторой системы в сферических координатах определяется выражением (A – нормировочная константа):

$\Psi(r,\theta,\phi) = AR(r)\sin\theta \cdot cos\varphi$, причем $\int\limits_0^\infty R^2(r)\cdot r^2 dr = 1$. Чему равно среднее значение проекции момента импульса L_z в этом состоянии?

6.12. Волновая функция некоторой системы в сферических координатах определяется выражением $\Psi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} R(r)Y(\theta)\sin\varphi$. Найти среднее значение и дисперсию проекции момента импульса на ось z в этом состоянии?

6.13. Найти дисперсию проекции спина на ось y в состоянии $\bar{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$

6.14. Твердое тело вращается относительно оси oz и находится в состоянии с волновой функцией $\psi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\varphi$. Найти среднее значение и дисперсию энергии вращения и проекции момента импульса L_z .

6.15. Частица с зарядом e (спин равен 0) описывается волновой функцией $\Psi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} R_{21}(r)\left[Y_{1,1}(\theta,\phi) - Y_{1,-1}(\theta,\phi)\right]$ (Y-орбиталь). Найти средние значения электрического и магнитного моментов этой частицы.

Указание: использовать соотношения для операторов повышения $\hat{L}_+$ и понижения $\hat{L}_-$ орбитального момента частицы и условие ортогональности сферических полиномов.

6.16. Электрон в атоме водорода находится в состоянии $|n, l, m>$. Найти средние значения z и p_z в этом состоянии.

6.17. Электрон в атоме водорода находится в состоянии $|n, l, m>$. Найти средние значения x и p_x в этом состоянии.

7. <u>***Стационарная теория возмущений.***</u>

7.1. На систему с двумя энергетическими уровнями $E_1^{(0)}$ и $E_2^{(0)}$ наложено однородное электрическое поле, энергия взаимодействия с которым $\hat{V} = -\hat{\vec{d}} \cdot \vec{E}$. Определить уровни энергии системы в этом поле, если $d_{11}=d_{22}=0$.

7.2. Применяя стационарную теорию возмущений, найти поправки к уровням энергии квантовой частицы в потенциальной яме с бесконечно-высокими стенками, связанные с наличием в центре ямы $\delta-$образного потенциального барьера:

$V(x) = \alpha\delta(x - a/2), 0 < x < a, \alpha > 0; U(x) = \infty, x > a, x < 0.$

7.3. К квантовому кольцу, расположенному в плоскости (x, y), приложено постоянное электрическое поле ε, направленное по оси x, энергия взаимодействия с которым описывается оператором $V(\phi) = -e\varepsilon x = -e\varepsilon r_o cos\phi$. Здесь e- заряд частицы, запертой на кольце радиуса r_o. В рамках теории возмущений вычислить сдвиг энергетических уровней, а также изменение волновой функции данной частицы.

7.4. На одномерный гармонический осциллятор с единичным зарядом и массой М действует однородное постоянное электрическое поле с напряженностью $\vec{E} = E_0\vec{x}_0$. Вычислить поправки к уровням энергии в первом и во втором порядке теории возмущений.

7.5. Как изменятся уровни энергии осциллятора при учете ангармонизма колебаний, описываемого возмущением вида $V(x) = \lambda x^3 + \zeta x^4$? Расчет провести с точностью до второго порядка по малому параметру λ и с точностью до первого порядка по малому параметру ζ. Оценить пределы применимости полученных результатов.

7.6. В первом порядке теории возмущений рассчитайте поправку к основному энергетическому уровню заряженной частицы в потенциальном ящике под действием однородного статического электрического поля.

7.7. На частицу в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме шириной *a* наложено возмущение вида $V(x) = V_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$. В первом порядке теории возмущений найти сдвиг энергии основного состояния $\Psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$.

7.8. В первом порядке теории возмущений рассчитайте поправку к основному уровню энергии электрона в атоме водорода при наложении на атом однородного статического электрического поля.

7.9. Рассмотреть эффект Штарка (расщепление энергетических уровней во внешнем однородном электрическом поле, направленном по оси z) в атоме водорода для состояния с главным квантовым числом $n = 2$. Полностью ли при этом снимается вырождение энергетических уровней электрона?

7.10. Найти расщепление энергетических уровней атома водорода в $1S$-состоянии за счет взаимодействия магнитных моментов электрона и ядра, полагая оператор возмущения равным $V = A(\vec{\sigma}^e \cdot \vec{\sigma}^p)$, где $\vec{\sigma}^e, \vec{\sigma}^p$ – матрицы Паули электрона и протона, A - постоянная размерности энергии. Какова кратность вырождения каждого из уровней?

7.11. Нормальный эффект Зеемана. Бесспиновая частица находится в сферически симметричном поле, уровни энергии E_{nl}. В первом порядке теории возмущений найти сдвиг энергетических уровней частицы и ее волновую функцию при наложении внешнего магнитного поля, направленного по *z*.

8. Нестационарная теория возмущений.

8.1. Частица с зарядом е и массой M находится в свободном одномерном пространстве, имея в момент времени t=0 волновую функцию вида 1) $\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp(\frac{ip_0x}{\hbar})$ или 2) $\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}}\sin(\frac{p_0x}{\hbar})$. Какое из этих состояний является стационарным? Найти волновую функцию и среднюю плотность электрического тока данной частицы в момент t>0.

8.2. Волновая функция электрона в атоме водорода в начальный момент времени $t=0$ имеет вид: $\Psi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[R_{10}(r)Y_{00}(\theta,\varphi)+R_{21}(r)Y_{11}(\theta,\varphi)\right]$. Записать волновую функцию для $t>0$. Будет ли излучать атом? На какой частоте?

8.3. В начальный момент времени $t=0$ система находится в состоянии $\psi_1^{(0)}$, относящемся к двукратно вырожденному энергетическому уровню E_0. Определить вероятность того, что в момент $t>0$ система будет находиться в состоянии $\psi_2^{(0)}$ при условии, что переход возможен под действием постоянного возмущения $V_{12}=V_{21}=V_0$.

Указание: Решить задачу в рамках нестационарного уравнения Шредингера, представив волновую функцию системы в виде суперпозиции $\psi_1^{(0)}$ *и* $\psi_2^{(0)}$.

8.4. Вычислить вероятность возбуждения заряженного гармонического осциллятора электрическим импульсом вида $E(t)=A_0\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right)$. Считать, что осциллятор до включения поля находился в основном состоянии.

8.5. На заряженную частицу с массой m и зарядом е, движущуюся в свободном пространстве, действует электромагнитный импульс: $\vec{E}=\begin{cases}E_0\vec{i}_0\sin\omega t; 0\le t\le\tau\\ 0; t\le 0\\ 0; t\ge\tau\end{cases}$. В первом порядке теории возмущений найдите вероятность перехода к моменту времени t > 0 частицы из состояния с импульсом p_0 в состояние с импульсом p (движение считать одномерным).

8.6. Заряженная частица (заряд e) находится в одномерном потенциальном ящике размером a в состоянии $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)$. На частицу действует электромагнитный импульс $\vec{E} = \begin{cases} E_0 \vec{i}_0 \sin \omega t; 0 \le t \le \tau \\ 0; t \le 0 \\ 0; t \ge \tau \end{cases}$. В первом порядке теории возмущений найдите к моменту времени *t > 0* вероятность перехода с уровня *n* на уровень *m* (*n*, *m* - целые числа).

8.7. Плоский жесткий заряженный (заряд *e*) ротатор находится в состоянии $\Psi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(k\varphi)$ где *k* – целое число. В момент времени *t* на него накладывается магнитное поле $\vec{H} = \begin{cases} H_0 \vec{i}_0 \sin \omega t; 0 \le t \le \tau \\ 0; t \le 0 \\ 0; t \ge \tau \end{cases}$ где $\vec{i}^{\,0}$ - единичный вектор вдоль оси вращения на (ось *z)*. В первом порядке теории возмущений найдите к моменту времени *t > 0* вероятность перехода ротатора с уровня *n* на уровень *m*.

Задачи по квантовой электронике

9. Уравнение Шредингера для двухуровневой системы.

9.1. Обосновать возможность применения теории возмущения к модели взаимодействия атома водорода с возбуждающим его на длине волны *λ=121 нм* электрическим полем с интенсивностью *1 кВт/см²*

9.2. Вычислить частоту Раби осцилляций при точном резонансе для перехода с 1 на 2 энергетический уровень идеальной одномерной квантовой ямы. Ширина ямы *10 нм*, интенсивность внешнего поля *10 Вт/см²*.

Ответ: $3\cdot10^{10}$ рад/с.

9.3. Для двухуровневой системы получить временную зависимость для вероятности нахождения электрона на уровнях от времени под действием внешнего переменного электрического поля на частоте $\omega=\omega_{12}+\delta\omega$, где ω_{12} – частота перехода, $\delta\omega$ – отстройка.

9.4. Двухуровневая система с частотой перехода ω_{12} находится под воздействием электромагнитного поля с напряженностью $E = E_0\cdot\cos\omega t$, где $\omega \approx \omega_{12}$ (резонансное поле). В момент включения поля квантовая система находилась на нижнем энергетическом уровне E_1. Найти волновую функцию системы в произвольный момент времени $t>0$ и определить вероятность перехода квантовой системы к моменту времени t_0 на верхний уровень.

Указание: Использовать исходную систему уравнений для коэффициентов разложения волновой функции $(\Psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2)$*, возникающую из нестационарного уравнения Шредингера подстановкой* ψ *в виде суперпозиции состояний. Затем свести систему к единому дифференциальному уравнению второго порядка, для определения констант использовать начальное условие.*

9.5. На двухуровневую систему, находящуюся в верхнем состоянии, действует переменное поле на частоте перехода в течение трех четвертей периода осцилляций Раби. Какова будет величина и зависимость от времени дипольного момента перехода после выключения поля в этом случае. Что изменится, если длительность внешнего электрического импульса имеет произвольное значение τ_0?

10. Квантовая теория излучения и поглощения. Матричные элементы оператора взаимодействия. Правила отбора.

10.1. Можно ли одновременно измерить напряженности квантованных электрического и магнитного полей? Ответ обосновать расчетом.

Указание: Использовать разложение напряженностей электрического и магнитного полей по модам вектор-потенциала, а также условия ортогональности мод.

10.2. Покажите, что в рамках кулоновской калибровки поля операторы канонического импульса заряженной частицы $\hat{p}_k$ и оператор вектор-потенциала $\hat{\vec{A}}(r_k)$ перестановочны между собой.

10.3. На систему возбужденных двухуровневых атомов с дипольным моментом d_{ba}, направленным по оси *OZ*, падает внешнее резонансное ($w = w_{ba}$) электромагнитное поле, состоящее из двух плоских волн. Эти плоские волны имеют одинаковую интенсивность *I*, но распространяются под углом 90° друг к другу (по осям *OZ* и *OY*). Как происходит взаимодействие этих волн с системой диполей? Какова вероятность электродипольного излучения такой группы возбужденных атомов в направлении под углом 45° между падающими внешними волнами?

10.4. Покажите, что однофотонные переходы между уровнями *2S* и *1S* атома водорода запрещены в электродипольном, магнитодипольном и электроквадрупольном приближениях.

10.5. Можно ли получить индуцированное (лазерное) излучение в линейном гармоническом осцилляторе (ансамбль одинаковых частиц) в электродипольном приближении? Ответ обосновать расчетом.

10.6. Используя ортогональность шаровых (сферических) функций Y_{lm_l}, покажите, что правила отбора для магнитодипольного (орбитального) излучения атома сводятся к соотношениям: $\Delta l = 0$, $\Delta m_l = 0,\pm 1$, $\Delta S = 0$, $\Delta m_s = 0$, $n_a = n_b$.

Указание: Использовать представление волновой функции электрона в сферической системе координат и условия ортогональности сферических и спиновых функций.

10.7. Используя ортогональность спиновых функций $\chi_{s,ms}$, покажите, что правила отбора для магнитодипольного (спинового) излучения сводятся к соотношениям:

$\Delta S = 0$, $\Delta m_l = 0$, $\Delta l = 0$, $\Delta m_s = 0,\pm 1$, $n_a = n_b$.

10.8. Сформулировать правила отбора для электродипольных переходов в квантовом гармоническом осцилляторе.

Указание: Использовать свойство полиномов Чебышева-Эрмита $\Psi_n(x)$ *:*

$\xi \cdot \Psi_n(\xi) = \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \Psi_{n-1}(\xi) + \sqrt{\frac{n+1}{2}} \cdot \Psi_{n+1}(\xi)$, *где* $\xi = x/x_0$ *– безразмерная координата,*

$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$ *(m и* ω_0 *– масса и частота осциллятора соответственно).*

10.9. Для идеальной одномерной квантовой ямы (потенциальный двусторонний барьер с бесконечно высокими стенками) указать незапрещенные в электродипольном приближении переходы. Вычислить матричные элемент оператора электродипольного взаимодействия для перехода с 1-ого на 2-ой энергетические уровни для ямы с шириной *50 нм*.

10.10. Для электрона в атоме водорода, находящегося в *3P* возбуждённом состоянии указать переход при электродипольном взаимодействии с максимальным значением частоты. Найти матричный элемент оператора взаимодействия для этого перехода.

Указание: Учесть правила отбора для электродипольного перехода. Выражение для радиальной части волновой функции начального состояния имеет вид:

$$R_{31}(r) = \frac{4}{27\sqrt{6}} \cdot \exp(-\frac{r}{3r_B}) \cdot \frac{r}{r_B} \cdot (1 - \frac{r}{6r_B})$$

10.11. Атом находится в поле теплового электромагнитного излучения. Напишите выражения для вероятности индуцированного излучения и поглощения для такого атома.

10.12. Для двухуровневого парамагнетика со спином 1/2, помещенного в систему из постоянного $\vec{H}_0$ и резонансного переменного магнитных полей $\vec{H}_{\sim}$, найти матричный элемент перехода и показать, что его значение равно 0 при $\vec{H}_{\sim} \parallel \vec{H}_0$.

11. Уширение спектральных линий. Ширина линии излучения.

11.1. Известно, что время жизни электрона в возбужденном состоянии двухуровневой системы равно τ_0. Получить выражение для наблюдаемой на данном переходе спектральной формы линии люминесценции.

11.2. Рассчитать ширину линии для *2P-1S* перехода (случай $0 \Rightarrow 0$ - перехода), в атоме водорода.

Ответ: $A_{sp} = \Delta\omega = (2/3)^8 \cdot \dfrac{q^8}{r_B c^3 \hbar^4}$, *где q –заряд электрона,* r_B *–боровский радиус.*

$\Delta\omega \sim 8 \cdot 10^8$ *рад/с*

11.3. Для выбранного конкретного физического механизма получить спектральное выражение для неоднородно уширенного контура спектральной линии. Оценить её ширину для типичных параметров одной из возможных неоднородных лазерных сред.

11.4. Типичное время жизни для разрешённого электродипольного перехода в видимой части оптического спектра составляет *10 нс*. Что можно сказать об оценке значения для естественной ширины линии активной среды для ультрафиолетового лазера, излучающего на длине волны *100 нм.*

11.5. Доплеровская ширина линии в двухуровневом газе - *500 МГц*. Оценка времени жизни верхнего уровня ~ 10^{-8} *с*. Предложить метод (возможную оптическую схему) измерения ширины внутридоплеровского однородного лоренцевского контура.

11.6. Оценить ширину лэмбовского провала для *He-Ne* лазера и сравнить полученное значение с доплеровской шириной линии усиления. Использовать для оценки типичные количественные параметры такого излучателя.

11.7. Определить естественную, доплеровскую и столкновительную ширину линии для перехода неона $3S_2 \rightarrow 2P_4$ (λ=*632,8 нм*) в *He-Ne* разряде при давлениях P_{He} = *1 тор*, P_{Ne} = 0,2 *тор* и температуре смеси $T = 400^o K$. Остальные параметры: времена жизни - $\tau(3S_2)$ = *60 нс*, $\tau(2P_4)$ = *20 нс*, эффективное сечение молекулы неона $S_{эфф.} = 6 \cdot 10^{-18}$ *см*^{2}.

11.8. Что является доминирующим механизмом уширения линии в поглощающей ячейке SF_6, облучаемого CO_2-лазером ($\lambda = 10{,}6$ *мкм*, мощность *50 Вт*), если лазерный пучок в фокусе имеет диаметр *0,5 мм*, сечение молекулы $SF_6 \sim 5\cdot10^{-14}$ *см*^{2}, температура ячейки $T=300^oK$, давление P = *100 тор*, эффективное сечение взаимодействия $\sigma = 3\cdot10^{-17}$ *см*^{2}

Ответ: Сравнение доплеровской, столкновительной, естественной линий и полевого уширения показывает, что доминирующий вклад вносит столкновительный эффект.

11.9. Найти ширину линии спонтанного излучения квантового гармонического осциллятора при переходе E_1-E_0. Можно ли зарегистрировать это значение экспериментально при облучении такой среды внешним полем на частоте перехода?

Ответ: $\Delta\omega = \frac{2}{3}\frac{\omega^2 q^2}{mc^3}$. *Использовать для расчетов прямые вычисления матричных элементов для гармонического осциллятора или свойства волновых функций осциллятора, связывающие их между собой.*

11.10. Линия люминесценции иона Nd^{3+} в стекле для рабочего перехода Nd-лазера имеет ширину *~10 нм*. Нижний уровень рабочего перехода дезактивируется со скоростью 10^8 c^{-1} . Что можно сказать о ширине верхнего уровня и характере уширения линии люминесценции?

12. <u>Взаимодействие двухуровневой среды с резонансным полем.</u>

12.1. Исходя из уравнений для матрицы плотности 2-х уровневой среды и предполагая среду электродипольной, выведите уравнения для поляризации и разности населенностей этой среды в условиях ее взаимодействия с внешним квазимонохроматическим резонансным электромагнитным полем.

12.2. Исходя из уравнений Блоха, для изотропного парамагнетика, помещенного в высокочастотное резонансное магнитное поле, найти выражение для вектора намагниченности $\vec{M}$ и динамической магнитной восприимчивости χ.

12.3. Для 2-х уровневой среды без диссипации $(T_1=T_2=\infty)$ найдите выражение для поляризации при наложении на среду резонансного внешнего поля $E = E_o \cdot cos\ (\omega_{21}t)$.

12.4. Используя стационарные решения материальных уравнений для двухуровневой электродипольной среды, взаимодействующей с резонансным электромагнитным полем, получите выражение для энергии, передаваемой этой средой диссипативной подсистеме (термостату).

12.5. На 2-х уровневый атомный газ в ячейке воздействует поле $E\ (t)= E_o \cdot cos\ (\omega_0 t)$, ω_0 - частота атомного перехода. В условиях стационарного режима получите выражение для мощности наблюдаемого при этом спонтанного излучения (соударениями в газе пренебречь). Что изменится при учете столкновений между молекулами газа и стенками ячейки.

12.6. Исходя из стационарных решений уравнений для двухуровневой среды во внешнем поле, получите выражение для диэлектрической проницаемости ε на частотах ω вблизи резонанса ω_{12}, а также связь мощности, поглощаемой 2-х уровневой средой при взаимодействии с резонансным полем, и мнимой части восприимчивости этой среды.

13. ***<u>Коэффициент усиления двухуровневой среды. Инверсия населенностей.</u>***

13.1. Отношение населенностей двух уровней для вещества, находящегося в состоянии равновесия при температуре *300^oK*, равно *10*. Вычислить частоту излучения, соответствующую переходу между этими уровнями. Что можно сказать о равновесной разности населенностей для перехода в видимой части оптического спектра?

Ответ: $1,4\cdot10^{13}$ Гц

13.2. Оценить минимальную мощность оптической накачки с полным поглощением световой энергии в кристалле, необходимую для получения инвертированной среды в твердотельном лазере с концентрацией активных частиц $N = 2\cdot10^{19}$ *см*$^{-3}$, объемом кристалла $V = 10$ *см*^{3}. Частота середины полосы оптической накачки равна $\nu = 5,45\cdot10^{14}$ *Гц*, время жизни частиц на верхнем рабочем уровне $\tau_{сп} = 3\cdot10^{-3}$ *сек.*

Ответ: 12 кВт.

13.3. Для соседних продольных мод резонатора Фабри-Перо длиной *1м*, заполненного активной средой с шириной лоренцевой линии излучения на рабочем переходе $\Delta\omega = 2\cdot 10^{12}$ рад/сек, сделайте оценку относительной разницы коэффициентов (показателей) усиления.

Ответ: Относительная разность усиления для центральной и соседней моды составляет $\sim (\delta\omega_p/\Delta\omega)^2 \approx 10^{-6}$.

13.4. Линия перехода в двухуровневой среде на длине волны $\lambda = 0,5$ мкм имеет форму Лоренца с шириной, определяемой спонтанным излучением. Определить линейный коэффициент усиления слабого сигнала, если концентрация инверсии $\Delta N = 10^9$ *см*$^{-3}$, а вероятность спонтанного излучения 10^7 сек $^{-1}$. Зависит ли коэффициент усиления от дипольного момента перехода?

Ответ: ~ 1 см$^{-1}$

13.5. Используя уравнение переноса излучения в стационарной активной среде квантового усилителя: $\frac{dI}{dz} = -\alpha I + \frac{g_0 I}{1 + u^2 + I}$, где z –ось распространения волны, найдите выражение для максимально возможной величины $I_{макс}$ на выходе усилителя.

Обозначения: I – безразмерная интенсивность, полученная нормировкой на насыщающую интенсивность рабочего перехода $I_{нас}$; α – коэффициент нерезонансных потерь в среде; $g_0 = \frac{\hbar\omega \cdot N_{инв}}{2T_1 I_{нас}}$ *- коэффициент ненасыщенного усиления,* $u = (\omega - \omega_0) \cdot T_2$ *- безразмерная расстройка частоты.*

Ответ: $I_{макс} = I_{нас} \cdot \left(\frac{g_0}{\alpha} - 1 - u^2 \right)$

13.6. Возбужденный уровень молекулы E_4 связан с тремя ниже расположенными уровнями E_1, E_2 и E_3 радиационными переходами с вероятностями $A_{43} = 5 \cdot 10^7 c^{-1}$, $A_{42} = 3 \cdot 10^7 c^{-1}$ и $A_{41} = 2 \cdot 10^7 c^{-1}$. Вычислить время жизни, обусловленное спонтанным распадом верхнего уровня и относительные населенности $N_{1(2,3)} / N_4$ для случая непрерывного возбуждения уровня E_4 при условии, что времена жизни остальных уровней составляют $\tau_1 = 10^{-8}$ *с*, $\tau_2 = 5 \cdot 10^{-7}$ *с*, $\tau_3 = 5 \cdot 10^{-9}$ *с*. На каком-то из переходов можно в рамках данной схемы создать инверсию? Какая требуется накачка из основного состояния E_0, чтобы обеспечить инверсию населенностей на переходе $E_4 \rightarrow E_1$?

13.7. Считая для рубинового лазера, что $W_{32} > P_{31}, A_{31}$ и используя уравнения баланса населенностей, покажите, что разность населенностей на рабочей паре уровней E_2 и E_1 удовлетворяет уравнению: $\frac{dN}{dt} = \frac{N - N_{0эфф}}{T_{1эфф}}$ при отсутствии лазерной генерации. Найдите выражения для $N_{o\ эфф}$ и $T_{1\ эфф}$. Как эти выражения зависят от мощности поля накачки ?

Обозначения: $P_{13} = P_{31}$ - вероятность поглощения фотона накачки и индуцированного излучения на этой частоте ; W_{32} - вероятность безызлучательного перехода между уровнями 3 и 2, A_{31} – вероятность спонтанного излучения на рабочем переходе

14. <u>Оптические лазерные резонаторы.</u>

14.1. Используя определение добротности резонатора (контура) Q : $\frac{dW}{dt} = -\frac{\omega_{рез}}{Q}W$ (где W - запасенная в резонаторе энергия моды) и концепцию плоских волн в оптическом резонаторе Фабри-Перо с коэффициентом отражения зеркал по мощности R_1 и R_2, покажите, что добротность такого резонатора равна $Q = -\frac{2L\omega_{рез}}{c \cdot \ln(R_1 R_2)}$, где L - длина резонатора.

14.2. Рассчитать добротность Q_p и время жизни фотона $\tau_ф$ в резонаторе Фабри-Перо с плоскими зеркалами. Расстояние между зеркалами $L = 0{,}2$ *м*, коэффициенты отражения зеркал $R_1 = R_2 = 0{,}95$, рабочая длина волны $\lambda = 0{,}6$ *мкм*. Коэффициент поглощения среды, заполняющей резонатор, $\alpha = 0{,}01$ *см*$^{-1}$. Дифракционными потерями пренебречь.

Ответ: $\tau_Ф \approx 3 \cdot 10^{-9}$ *с*, $Q_p \approx 8 \cdot 10^6$.

14.3. В рамках одномерной модели распространения лазерного пучка в резонаторе Фабри-Перо, исходя из определения добротности, показать, что абсолютная ширина линии открытого оптического резонатора с плоскими зеркалами не зависит от частоты. Оценить частотный интервал между продольными модами и ширину линии такого резонатора для $R=0{,}99$ и $L= 1$ *м*.

14.4. Для гелий-неонового лазера ($\lambda = 632{,}8$ *нм*) с типичными для этого типа лазеров параметрами сделайте оценку для числа продольных мод, попадающих в контур спектральной линии усиления.

14.5. Показать, что абсолютная ширина линии оптического резонатора с плоскими зеркалами при условии отсутствия дифракционных потерь не зависит от частоты. Оценить (в $см^{-1}$) интервал между продольными модами и ширину линии такого резонатора для $R=0,99$ и $L= 1\ м$.

15. <u>Пороговое условие лазерной генерации.</u>

15.1. Лазер работает на однородно-уширенном переходе на длине волны $\lambda = 1\ мкм$, ширина линии усиления *500 МГц*. Вероятность спонтанного излучения на рабочем переходе составляет $A_{сп} = 10^7\ с^{-1}$. Параметры резонатора Фабри-Перо: длина $L = 0,5\ м$, полные потери на проход *0,02*. Определить пороговую концентрацию инверсии.

Ответ: $8{\cdot}10^7\ см^{-3}$

15.2. Найти значение ненасыщенного коэффициента усиления для работающего полупроводникового лазера на *GaAs* с минимальным уровнем внутренних потерь, длиной активной области *300 мкм* при использовании сколов по кристаллическим поверхностям в качестве зеркал.

Ответ : $\sim 40\ см^{-1}$

15.3. Рассчитайте величину минимальной концентрации активных ионов Cr^{3+} в работающем рубиновом ОКГ. Необходимые для расчета параметры взять из справочной литературы

Ответ: $\sim 5{\cdot}10^{16}\ см^{-3}$

15.4. Рассчитайте минимально необходимую мощность источника накачки для неодимового лазера на кристалле *YAG*, если эффективность преобразования энергии накачки ($\lambda \sim 800\ нм$) в возбуждение рабочего перехода составляет *20%*. Как изменится оценка порогового уровня накачки, если использовать для возбуждения продольную накачку лазерным пучком.

Указание: Использовать для исходного расчета следующий набор параметров этого ОКГ: вероятность спонтанного излучения на рабочем переходе $A_{32} = 5 \cdot 10^3$ $с^{-1}$, пороговая разность населенностей $N_{0эфф} = 10^{16}$ $см^{-3}$, объем рабочей среды, взаимодействующий с полем $V=10$ $см^3$.
Ответ: 450 Вт.

15.5. Рассчитать необходимую пороговую инверсию перехода газового лазера ($\lambda=500$ *нм*), если спонтанное время жизни на рабочем переходе $\tau = 2 \cdot 10^{-8}$ $с^{-1}$, ширина линии усиления $\Delta\nu = 1$ *ГГц*, длина резонатора $L = 25$ *см*, а потери в резонаторе при двойном проходе составляют *5%.*

Ответ: ~$1{,}5 \cdot 10^8$ $см^{-3}$.

15.6. Лазерная среда имеет доплеровский профиль усиления с шириной $\Delta\nu = 2$ *ГГц.* Однородная ширина равна $\Delta\nu_0 = 50$ *МГц,* а вероятность спонтанного перехода $A = 10^8$ $с^{-1}$. Пусть частота одной из мод резонатора ($L = 30$ *см*) совпадает с центральной частотой профиля усиления. Какова пороговая инверсия для центральной моды и при какой инверсии генерация начнется на соседних модах, если потери в резонаторе составляют *10%* ?

16. Лазерная генерация. Параметры стационарного режима лазерной генерации.

16.1. Покажите, исходя из уравнений лазера, что в стационарном режиме одномодовой генерации разность населенностей равна пороговому значению.

16.2. Резонатор инжекционного полупроводникового лазера образован естественными гранями кристалла с коэффициентами отражения $R_1=R_2=0{,}37$. Определите пороговый уровень усиления для резонаторов длиной $L = 400$ *мкм* и $L = 100$ *мкм*, если внутренние потери составляют $\alpha_{внут} = 5$ $см^{-1}$. Что произойдет, если на грани резонатора нанести дополнительные отражающие покрытия с $R_1 = 0{,}98$ и $R_2 = 1$? Нарисуйте качественно и сравните вид зависимости мощности генерации от тока для таких лазеров.

16.3. Считая одно зеркало в резонаторе Фабри-Перо "глухим" ($R_1 = 1$), а другое полупрозрачным ($R_2 = R$), найдите зависимость мощности лазера от R. Существует ли оптимальная величина R ?

16.4. Оценить квантовый КПД He-Ne лазеров, работающих на разных переходах с мощностью порядка *10 мВт*. Что можно сказать об электронном КПД накачки в разряде, если известно, что потребляемая от сети мощность составляет *15 Вт*.

16.5. Сделайте численные оценки насыщающей интенсивности для рабочих переходов в рубиновом и неодимовом лазерах. Как связана с этим параметром мощность, генерируемая лазером? Какой из этих лазеров обладает большей мощностью?

Указание : Использовать выражение насыщающей интенсивности в виде $I_{нас} = \dfrac{c\hbar^2}{8\pi \cdot d_{12}^2 \cdot T_1 T_2}$ *и типичные параметры для указанных твердотельных сред.*

16.6. Мощность непрерывной генерации полоскового полупроводникового лазера равна *10 мВт*, длина волны излучения $\lambda = 0{,}8$ *мкм*, ширина спектральной линии генерации $\Delta\nu = 100$ *МГц,* размеры ближнего поля составляют *1мкм × 10 мкм*. До какой температуры надо нагреть тепловой источник света, чтобы его спектральная яркость в заданном диапазоне достигла яркости на зеркале лазера?

Указание: Пересчитать мощность лазерного излучения в спектральную яркость (Дж/см^3·Гц), использовать для сравнительной оценки выражение для равновесного теплового спектра излучения.

Ответ: ~$2\cdot10^{10}$ град.

16.7. Нарисуйте качественно график и объясните зависимость выходной мощности лазера от величины отражения выходного зеркала резонатора.

16.8. Оцените максимально возможную величину затягивания частоты генерирующей моды в лазере на рубине. При проведении оценок руководствоваться типичными для данного вида лазеров количественными параметрами.

Ответ: Оценки для сдвига частоты из-за эффекта затягивания для типичных параметров Cr^{3+} *- лазера лежат в кГц-диапазоне*

16.9. Частота моды пассивного плоскопараллельного Фабри-Перо резонатора ($L = 15$ *см*) сдвинута на $0,5 \cdot \Delta\nu_{Doppl}$ от центра гауссовской линии усиления газового лазера с $\lambda = 633$ *нм*. Оценить эффект затягивания моды генерации, если ширина моды резонатора $\Delta\nu_p = 20$ *МГц*, а $\Delta\nu_{Doppl} = 1$ *ГГц*.

Ответ: ~ 10 МГц

16.10. Определить оптимальные коэффициенты отражения зеркал резонатора лазера, позволяющие получить максимальную выходную мощность. Длина резонатора $L = 50$ *см*, коэффициент ненасыщенного усиления на проход $g_o = 0,2$ *см*$^{-1}$, коэффициент потерь на проход $\alpha = 0,05$ см$^{-1}$. Дифракционными потерями пренебречь.

Литература

1. Давыдов А.С. *Квантовая механика*. – М.: Наука, 1973. – 703 с.

2. Блохинцев Д.И. *Основы квантовой механики*. - М.: Наука, 1983. – 664 с.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика* – М.: Физматлит, 2001. – 808 с.

4. Страховский Г.Н., Успенский А.В. *Основы квантовой электроник*и - М.: «Высшая школа», 1979, 336с.

5. Карлов Н.В. *Лекции по квантовой электронике* - М.: «Наука», 1983, 320с.

6. Ярив А. *Квантовая электроника* - М.: «Сов.радио»,1980, 460с.

7. Я.И.Ханин *Лекции по квантовой радиофизике* - Нижний Новгород, ИПФ РАН, 2005г., 224с.

Алексей Валентинович **Маругин,**
Александр Павлович **Савикин,**
Валерий Валерьевич **Шарков,**
Ольга Витальевна **Шаркова**

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКЕ

Практикум

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.