Содержание курса “Теория функций комплексного переменного”
2 курс, 3 семестр

Введение.

1. Комплексные числа и функции комплексного переменного.
Комплексные числа и действия над ними. Геометрическая интерпретация. Предел последовательности комплексных чисел. Введение бесконечно удаленной точки, стереографическая проекция комплексного числа, сфера Римана. Понятие функции комплексного переменного, непрерывность. Дифференцирование функции комплексного переменного, условия Коши-Римана в декартовых и полярных координатах. Свойства аналитических функций. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексного переменного.

2. Элементы теории конформных отображений.
Определение и общие свойства конформного отображения. Отображения, осуществляемые некоторыми элементарными функциями. Основные принципы конформного отображения. Основная задача теории конформных отображений. Теорема Римана. Круговое свойство отображения, осуществляемого дробно-линейной функцией.

3. Интегрирование функции комплексного переменного.
Определение и основные свойства интеграла от функции комплексного переменного. Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей. Первообразная аналитической функции, неопределенный интеграл. Формула Коши, интеграл Коши. Аналитическая зависимость интеграла от параметра. Существование производных всех порядков у аналитической функции. Теорема о максимуме модуля аналитической функции. Теоремы Морера и Лиувилля, основная теорема высшей алгебры.

4. Ряды аналитических функций.
Равномерная сходимость рядов функций комплексного переменного. Свойства равномерно сходящихся рядов. Теоремы Вейерштрасса. Степенные ряды. Ряд Тейлора. Единственность определения аналитической функции. Аналитическое продолжение. Понятие полной аналитической функции. Ряд Лорана. Классификация изолированных особых точек однозначных функций.

5. Теория вычетов и ее приложения.
Определение вычета функции относительно конечной изолированной особой точки и бесконечно удаленной точки. Формулы вычисления вычета относительно простого полюса и полюса порядка m. Основная теорема о вычетах, теорема о сумме вычетов в расширенной комплексной плоскости. Вычисление тригонометрических интегралов с помощью вычетов. Вычисление главных значений по Коши несобственных интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана. Вычисление главных значений несобственных интегралов, содержащих тригонометрические функции, с помощью вычетов. Логарифмический вычет. Теорема о подсчета числа нулей функции комплексного переменного.

6. Преобразование Лапласа. Свойства преобразования. Примеры применения.

<u>Рекомендуемая основная литература</u>.

1. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Физматлит, 2004.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987.

3. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: Физматлит, 2002.

4. Семерикова Н.П., Дубков А.А., Харчева А.А. Ряды аналитических функций. Учебно-методическое пособие (электр.). Нижний Новгород: ННГУ, 2016 (35 с.) http://www.unn.ru/books/met_files/raf-2016.pdf

Вопросы для контроля

1. Предел последовательности комплексных чисел. Необходимое и достаточное условие сходимости.
2. Теорема об ограниченной последовательности. Критерий Коши.
3. Введение бесконечно удаленной точки (комплексного числа $z=\infty$). Сфера Римана.
4. Определение функции комплексного переменного, ее геометрический смысл. Многозначность и однолистность отображения.
5. Определение предела функции комплексного переменного по Коши и по Гейне. Непрерывность и ее геометрический смысл.
6. Примеры отображений, осуществляемых простейшими непрерывными функциями (линейная, квадратичная, отображение инверсии).
7. Определение производной функции комплексного переменного. Необходимое условие дифференцируемости функции комплексного переменного (условия Коши-Римана). Формула нахождения производной.
8. Достаточные условия дифференцируемости функции комплексного переменного. Понятие аналитической функции.
9. Условия Коши-Римана в полярных координатах. Формула вычисления производной. Пример: степенная функция.
10. Условия Коши-Римана для модуля и аргумента функции. Формула вычисления производной. Пример: показательная функция.
11. Простейшие свойства аналитических функций.
12. Свойства действительной и мнимой частей аналитической функции.
13. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексного переменного. Свойства сохранения углов и постоянства растяжения.
14. Определение конформного отображения. Основная задача теории конформных отображений. Функции, осуществляющие конформные отображения.
15. Конформные отображения, осуществляемые линейной и степенной функциями. Поверхность Римана.
16. Конформное отображение, осуществляемое показательной функцией. Пример: отображение бесконечной вертикальной полосы на верхнюю полуплоскость.
17. Основные принципы конформного отображения.
18. Теорема Римана. Невозможность конформного отображения многосвязной области на односвязную. Условия единственности отображения.
19. Основные свойства конформного отображения, осуществляемого дробно-линейной функцией.
20. Отображение верхней полуплоскости на единичный круг с помощью дробно-линейной функции.
21. Определение интеграла от функции комплексного переменного, его вычисление.
22. Свойства интеграла от функции комплексного переменного.
23. Теорема Коши для односвязной области.
24. Обобщение теоремы Коши на случай многосвязной области.
25. Теорема о первообразной аналитической функции в односвязной области.
26. Введение неопределенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
27. Вывод формулы Коши. Следствия: формула среднего значения.

28. Принцип максимума модуля аналитической функции.
29. Аналитическая зависимость интеграла от параметра.
30. Существование производных всех порядков у аналитической функции.
31. Теоремы Морера и Лиувилля. Основная теорема алгебры.
32. Равномерная сходимость рядов функций комплексного переменного. Достаточный признак Вейерштрасса. Критерий Коши.
33. Первая теорема Вейерштрасса для рядов аналитических функций.
34. Свойства равномерно сходящихся рядов. Вторая теорема Вейерштрасса для рядов аналитических функций.
35. Теорема Абеля об области абсолютной и равномерной сходимости степенного ряда.
36. Следствия теоремы Абеля. Круг и радиус сходимости степенного ряда.
37. Формула Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.
38. Теорема Тейлора.
39. Нули аналитической функции. Целая функция. Единственность определения аналитической функции.
40. Определение аналитического продолжения. Аналитическое продолжение в комплексную плоскость элементарных функций действительного переменного и соотношений между ними.
41. Аналитическое продолжение с помощью степенных рядов. Понятие полной аналитической функции.
42. Определение ряда Лорана. Область его сходимости. Теорема о разложении аналитической функции в ряд Лорана.
43. Правильные и особые точки. Классификация изолированных особых точек. Ограниченность функции в окрестности устранимой особой точки.
44. Поведение функции в окрестности полюса.
45. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса.
46. Разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, классификация изолированной особой точки $z=\infty$.
47. Определение вычета. Вычисление вычетов.
48. Основная теорема теории вычетов. Теорема о сумме вычетов в расширенной комплексной плоскости.
49. Вычисление интегралов, содержащих тригонометрические функции, с помощью вычетов.
50. Вычисление главных значений несобственных интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ с помощью вычетов.
51. Лемма Жордана. Вычисление главных значений несобственных интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)e^{imx}dx$ с помощью вычетов.
52. Логарифмический вычет. Вычисление вычетов логарифмической производной функции.
53. Теорема о числе нулей и полюсов, ее геометрический смысл.