Замена переменных

№3484. Выражение $w=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

преобразовать к полярным координатам, полагая $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$.

Решение

Функцию $u=u(x(r,\varphi),y(r,\varphi))$ будем дифференцировать по r и φ, рассматривая ее как сложную функцию.

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}=-r\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Найдем $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ по методу Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r,\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial r} & \sin\varphi\\ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r}-\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\cos\varphi & \dfrac{\partial u}{\partial r}\\ -r\sin\varphi & \dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\end{vmatrix}=r\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r}+\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Для того, чтобы найти $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ используем найденное

$\dfrac{\partial}{\partial x}(u)=\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial r}(u)-\dfrac{\sin\varphi}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}(u).$ Подставляем в эту формулу $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ вместо u, получаем

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-\dfrac{\sin\varphi}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right),$ или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)=$$

$$=\cos\varphi\left(\cos\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \varphi}\right)-\frac{\sin\varphi}{r}\left(-\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r}+\cos\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi\partial r}-\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)=$$

$$=\cos^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \varphi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi\partial r}\right)+\frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Аналогично, используя

$\dfrac{\partial}{\partial y}(u)=\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial r}(u)+\dfrac{\cos\varphi}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}(u),$ находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=$$

$$\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\varphi\,\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\,\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)=$$

$$=\sin\varphi\left(\sin\varphi\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\right)+\frac{\cos\varphi}{r}\left(\cos\varphi\,\frac{\partial u}{\partial r}+\sin\varphi\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right)=$$

$$=\sin^2\varphi\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\right)+\frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

В результате получаем

$$\boxed{w=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}}.$$

№3495. Преобразовать уравнение, принимая u и v за новые независимые переменные:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ u=xy,\ v=\frac{x}{y}.$$

Решение

Вопрос сводится к замене производных от z по x и y, входящих в уравнение, производными от z по u и v. Для этого находим dz, z=z(u(x,y),v(x,y)), пользуясь инвариантностью формы первого дифференциала:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Находим d^2z:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}dv^2+\frac{\partial z}{\partial u}d^2u+\frac{\partial z}{\partial v}d^2v.$$ (считаем, для простоты, что смешанные производные от функции z равны), где

$$du=ydx+xdy,\ \ dv=\frac{ydx-xdy}{y^2},\ d^2u=2dxdy,\ d^2v=-\frac{2}{y^3}\left(ydxdy-xdy^2\right).$$

С другой стороны,

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Приравниваем выражения d^2z:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(ydx+xdy)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}(ydx+xdy)\frac{ydx-xdy}{y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{(ydx-xdy)^2}{y^4}+$$

$$+\frac{\partial z}{\partial u}2dxdy-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{2}{y^3}\left(ydxdy-xdy^2\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Раскрывая скобки и сравнивая коэффициенты при dx^2, dy^2 в обеих частях равенства, приходим к следующим соотношениям:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Подставляя эти выражения производных от z в данное уравнение, находим

$$4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{2x}{y}\frac{\partial z}{\partial v}=0, \text{ или } 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}=0, \text{ или } \boxed{2u\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}=0.}$$

№3515. Преобразовать уравнение, принимая u и v за новые независимые переменные, а $w=w(u,v)$ за новую функцию:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, u=x+y, v=x-y, w=xy-z$$

Решение

Вопрос сводится к замене производных от z по x и y, входящих в уравнение, производными от w по u и v. Для этого удобно использовать выражение второго дифференциала d^2z:

$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial z}{\partial x}d^2x+\frac{\partial z}{\partial y}d^2y$. (считаем, для простоты, что смешанные производные от функции z равны)

С другой стороны, из формул преобразования имеем

$z=xy-w, \quad dz=ydx+xdy-dw,$

$$d^2z=2dxdy-d^2w=2dxdy-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}dv^2+\frac{\partial w}{\partial u}d^2u+\frac{\partial w}{\partial v}d^2v\right)$$

(считаем, для простоты, что смешанные производные от функции w равны)

$du=dx+dy, dv=dx-dy$.

Так как x и y – независимые переменные, то $d^2x=d^2y=0$, и поэтому и $d^2u=d^2v=0$.

Приравниваем выражения d^2z, заменяя при этом во втором из них du и dv их выражениями через dx и dy. Получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2=2dxdy-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}(dx+dy)^2-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\left(dx^2-dy^2\right)-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}(dx-dy)^2$$

Раскрывая скобки и сравнивая коэффициенты при $dx^2, dxdy, dy^2$ в обеих частях равенства, приходим к следующим соотношениям:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2-2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

Подставляя эти выражения производных от z в данное уравнение, находим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2-4\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0, \text{ или } \boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}.}$$

Домашнее задание **№№ 3487, 3488, 3489, 3514, 3516.**