Оглавление

1. Понятие функции комплексной переменной

Определение. Будем говорить, что в комплексной области D определена ***функция*** $w = f(z)$, если каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие одно комплексное значение w (однозначная функция) или несколько значений w (многозначная функция).

Пусть $z = x + iy$ и $w = u + iv$. Тогда зависимость $w = f(z)$ между комплексной функцией w и комплексной переменной z может быть описана с помощью двух действительных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ действительных переменных x и y.

Обозначается: $u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z); v(x, y) = \mathrm{Im}\, f(z)$.

Определение. Функция $f(z)$ называется ***однолистной*** функцией в области D, если в различных точках z этой области она принимает различные значения.

Определение. Функция $w = f(z)$ называется ***непрерывной*** в точке $z_0 \in D$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $\forall z \in D: |z - z_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Обозначается: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Если функция $f(z)$ непрерывна во всех точках области D, то говорят, что функция $f(z)$ непрерывна в области D.

Замечание. Из непрерывности функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ следует непрерывность ее действительной $u(x, y)$ и мнимой $v(x, y)$ частей. Верно и обратное, если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0), то $f(z) = u + iv$ непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$.

Пример 1. Найти действительную и мнимую части функции $f(z) = i\,\bar{z} + 2z^2$.

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда $\bar{z} = x - iy$.

Получим

$$f(z) = i(x - iy) + 2(x + iy)^2 =$$
$$= ix + y + 2(x^2 + 2xyi - y^2) =$$
$$= y + 2x^2 - 2y^2 + i(x + 4xy).$$

Тогда

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = y + 2x^2 - 2y^2;$$
$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = x + 4xy.$$

Пример 2. Определить функцию $f(z) = u + iv$, если заданы ее действительная и мнимая части:

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - 2y - 1; v(x, y) = 2xy + 2x.$$

Решение. Так как $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$; $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, то $f(z) = u + iv =$

$$= \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 - 2 \cdot \frac{z-\bar{z}}{2i} - 1 + i \cdot 2 \cdot \frac{z+\bar{z}}{2} \cdot \frac{z-\bar{z}}{2i} + 2i \cdot \frac{z+\bar{z}}{2} =$$
$$= \frac{z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4} + \frac{z^2-2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4} + zi - \bar{z}i - 1 + \frac{z^2-\bar{z}^2}{2} + i(z + \bar{z}) =$$
$$= \frac{z^2+\bar{z}^2}{2} + 2zi - 1 + \frac{z^2-\bar{z}^2}{2} = z^2 + 2zi - 1.$$

Пример 3. Вычислить значение функции $w = \frac{\sqrt{z}+i}{\sqrt{z}-i}$ в точке $z_0 = i$.

Решение. Находим $\sqrt{i} = \sqrt{1 \cdot e^{\pi i/2}} = e^{\frac{(\pi/2+2\pi k)i}{2}}$, где $k = 0, 1$.

Тогда при $k = 0$ получим

$$w_0=\frac{e^{\frac{\pi}{4}i}+i}{e^{\frac{\pi}{4}i}-i}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}+i}{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}-i}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}+i}{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}-i}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-i^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}i+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\sqrt{2}+1}=\frac{\frac{1}{2}+\sqrt{2}\,i+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\,i}{2-\sqrt{2}}.$$

Аналогично при $k=1$ получим

$$w_1=\frac{e^{\frac{3\pi}{4}i}+i}{e^{\frac{3\pi}{4}i}-i}=\frac{\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}+i}{\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}-i}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}+i}{-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}-i}=\frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\right)}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-i^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2}=$$

$$=\frac{-\sqrt{2}\,i}{2-\sqrt{2}}.$$

Примеры для самостоятельного решения:

1. Найти действительную и мнимую части функции

$$f(z)=\frac{\bar{z}}{i}+\frac{i}{\bar{z}}.$$

2. Определить функцию $f(z)=u+iv$, если заданы ее действительная и мнимая части:

$$u(x,y)=\frac{1}{x};\,v(x,y)=\frac{1}{y}.$$

3. Вычислить значение функции $w=z+\sqrt[4]{z}$ в точке $z_0=-1$.

Ответы:

1. $u(x,y) = -y - \frac{y}{x^2+y^2}$; $v(x,y) = -x + \frac{x}{x^2+y^2}$.

2. $f(z) = \frac{-4\bar{z}}{z^2-\bar{z}^2}$.

3. $w_0 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $w_1 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$;
$w_2 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $w_3 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Основные элементарные функции комплексной переменной

Следующие функции (как однозначные, так и многозначные) называются *основными элементарными функциями:*

1. Дробно-рациональная функция:

$$w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}.$$

Частные случаи:

а) линейная функция $w = az + b$, где $a, b \in \mathbb{C}$;
б) степенная функция $w = z^n$, где $n \in \mathbb{N}$;
в) дробно-линейная функция $w = \frac{az+b}{cz+d}$,
где $a, b, c, d \in \mathbb{C};\ ad - bc \neq 0$.
2. Показательная функция:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(cos\, y + i\, sin\, y). \qquad (2.1)$$

3. Тригонометрические функции:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};$$
$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z};\ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \qquad (2.2)$$

4. Гиперболические функции:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2};\ \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2};\ \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z};\ \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \qquad (2.3)$$

Замечание. Формулы связи тригонометрических и гиперболических функций:

$$\cos iz = \operatorname{ch} z; \quad \operatorname{ch} iz = \cos z;$$
$$\sin iz = \mathrm{i}\operatorname{sh} z; \quad \operatorname{sh} iz = \mathrm{i}\sin z. \qquad (2.4)$$

5. Логарифмическая функция (многозначная):

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z} \tag{2.5}$$

или $\operatorname{Ln} z = \ln z + 2\pi k i$, где $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ называется главным значением логарифма.

6. Обратные тригонометрические и гиперболические функции (многозначные)

Определим функцию $w = \operatorname{Arccos} z$ как обратную по отношению к функции $z = \cos w$. Тогда заменяя $\cos w$ через $\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$ и полагая для краткости $e^{iw} = t$, получим $z = \frac{t+t^{-1}}{2}$. Отсюда

$$t^2 - 2zt + 1 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим

$$t = z + \sqrt{z^2-1}.$$

Имеем

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2-1}.$$

Получим

$$w = \frac{1}{i}\operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right).$$

Итак,

$$w = \operatorname{Arccos} z = \frac{1}{i}\operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right). \tag{2.6}$$

Определим функцию $w = \operatorname{Arctg} z$ как обратную по отношению к функции $z = \operatorname{tg} w$. Тогда заменяя $\operatorname{tg} w = \frac{\sin w}{\cos w}$ через $\frac{1}{i}\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}}$, получим

$$z = \frac{1}{i}\frac{e^{-iw}\left(e^{2iw}-1\right)}{e^{-iw}\left(e^{2iw}+1\right)}.$$

Отсюда

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz}.$$

Из последнего уравнения при $z \neq \pm i$ находим

$$w = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}.$$

Итак,

$$w = \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz} = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i+z}{i-z}. \tag{2.7}$$

Аналогично определяются обратные тригонометрические и гиперболические функции:

$$\operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right); \tag{2.8}$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{z+i}; \tag{2.9}$$

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right); \tag{2.10}$$

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right); \tag{2.11}$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}; \tag{2.12}$$

$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}. \tag{2.13}$$

7. Общая степенная функция (многозначная):

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}, \text{ где } a \in \mathbb{C}. \tag{2.14}$$

8. Общая показательная функция (многозначная):

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}, \text{ где } a \in \mathbb{C}. \tag{2.15}$$

Пример 1. Найти действительную и мнимую части функции

$$w = e^{1-z}.$$

Решение. Пусть $z = x + iy$, тогда по формуле (2.1) имеем

$$w = e^{1-x-iy} = e^{1-x} \cdot e^{-iy} = e^{1-x}(\cos y - i \sin y).$$

Отсюда $\qquad u(x,y) = \operatorname{Re} w = e^{1-x} \cos y;$

$$v(x,y) = \operatorname{Im} w = -e^{1-x} \sin y.$$

Пример 2. Найти действительную и мнимую части функции

$$w = \sin(z - i).$$

Решение. Пусть $z = x + iy$.

Тогда, используя формулу

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

и формулы (2.4) связи тригонометрических и гиперболических функций, получим

$$\begin{gathered} w = \sin(x + iy - i) = \sin\big(x + i(y-1)\big) = \\ = \sin x \cos i(y-1) + \cos x \sin i(y-1) = \\ = \sin x \operatorname{ch}(y-1) + i \cos x \operatorname{sh}(y-1). \end{gathered}$$

Отсюда

$$\begin{gathered} u(x,y) = \operatorname{Re} w = \sin x \operatorname{ch}(y-1); \\ v(x,y) = \operatorname{Im} w = \cos x \operatorname{sh}(y-1). \end{gathered}$$

Пример 3. Вычислить значение $\cos\left(\frac{\pi}{4} + i\right)$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Тогда

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + i\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos i - \sin\frac{\pi}{4}\sin i.$$

Используя формулы (2.4) связи тригонометрических и гиперболических функций, получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+i\right)=\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{ch}1-i\sin\frac{\pi}{4}\operatorname{sh}1=\frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{ch}1-i\operatorname{sh}1).$$

Пример 4. Вычислить значение $\operatorname{th}(\pi i)$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.3):

$$\operatorname{th}(\pi i)=\frac{\operatorname{sh}\pi i}{\operatorname{ch}\pi i}.$$

Используя формулы (2.4) связи тригонометрических и гиперболических функций, получим

$$\operatorname{th}(\pi i)=\frac{i\sin\pi}{\cos\pi}=\frac{i\cdot 0}{-1}=0.$$

Пример 5. Вычислить значение $\operatorname{Ln}(-1)$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.5):

$$\operatorname{Ln}(-1)=\ln|-1|+i(\arg(-1)+2\pi k).$$

Так как $|-1|=1, \arg(-1)=\pi$, получим

$$\operatorname{Ln}(-1)=\ln 1+i(\pi+2\pi k)=\pi i(1+2k).$$

Пример 6. Вычислить значение $\operatorname{Ln}(1+i)$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.5):

$$\operatorname{Ln}(1+i)=\ln|1+i|+i(\arg(1+i)+2\pi k).$$

Так как $|1+i|=\sqrt{2}, \arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$, получим

$$\operatorname{Ln}(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right).$$

Пример 7. Записать в алгебраической форме $\operatorname{Arcsin} i$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.8):

$$\operatorname{Arcsin} i = \frac{1}{i}\operatorname{Ln}\left(i \cdot i + \sqrt{1 - i^2}\right) = -i \cdot \operatorname{Ln}\left(-1 + \sqrt{2}\right) =$$

$$= -i\left(\ln\left|-1 + \sqrt{2}\right| + i\left(\arg\left(-1 + \sqrt{2}\right) + 2\pi k\right)\right).$$

Так как $\left|-1 + \sqrt{2}\right| = \sqrt{2} - 1, \arg\left(-1 + \sqrt{2}\right) = 0$, получим

$$\operatorname{Arcsin} i = -i \ln\left(\sqrt{2} - 1\right) + 2\pi k.$$

Пример 8. Записать в алгебраической форме $\operatorname{Arctg}\left(\frac{i}{3}\right)$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.7):

$$\operatorname{Arctg}\left(\frac{i}{3}\right) = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)\Bigg|_{z=\frac{i}{3}} = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}\right) = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\frac{i}{2}\left(\ln\left|\frac{1}{2}\right| + i\left(\arg\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi k\right)\right).$$

Так как $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \arg\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, получим

$$\operatorname{Arctg}\left(\frac{i}{3}\right) = -\frac{i}{2}\ln\frac{1}{2} + \pi k = \frac{i}{2}\ln 2 + \pi k.$$

Пример 9. Вычислить значение $(1 - i)^i$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.14):

$$(1 - i)^i = e^{i\operatorname{Ln}(1-i)} = e^{i\left(\ln|1-i| + i(\arg(1-i) + 2\pi k)\right)}.$$

Так как $|1 - i| = \sqrt{2}, \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$, получим

$$(1 - i)^i = e^{i\ln\sqrt{2} - \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)} = e^{\frac{\pi}{4} - 2\pi k}\left(\cos\ln\sqrt{2} + i\sin\ln\sqrt{2}\right).$$

Пример 10. Найти значение модуля функции $w = \sin z$ в точке $z = \pi + i\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)$.

Решение. Пусть $z = x + iy$.

Тогда $w = \sin x\, \mathrm{ch} y + i \cos x\, \mathrm{sh} y$. Модуль функции $\sin z$ равен

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x\, \mathrm{ch}^2 y + \cos^2 x\, \mathrm{sh}^2 y} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 x\, \mathrm{ch}^2 y + \mathrm{sh}^2 y(1 - \sin^2 x)} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 x\, (\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y) + \mathrm{sh}^2 y}.$$

Используя тождество $\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y = 1$, получим

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y}.$$

В точке $z = \pi + i \ln(2 + 5)$ находим значение модуля

$$\left|\sin\left(\pi + i \ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right)\right| = \sqrt{\sin^2 \pi + \mathrm{sh}^2\left(\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right)} =$$

$$= \mathrm{sh}\left(\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right) = \frac{e^{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)} - e^{-\ln(2+5)}}{2} = \frac{2 + \sqrt{5} - \frac{1}{2+\sqrt{5}}}{2} =$$

$$= \frac{2 + \sqrt{5} - \frac{2-\sqrt{5}}{4-5}}{2} = 2.$$

Вывод: тригонометрическая функция $\sin z$ в комплексной области может принимать значения по модулю большие единицы.

Примеры для самостоятельного решения:

1. Найти действительную и мнимую части функции $w = e^{-z}$.
2. Найти действительную и мнимую части функции $w = e^{\bar{z}^2}$.
3. Найти действительную и мнимую части функции $w = \cos z$.
4. Найти действительную и мнимую части функции $w = \mathrm{ch}\,(z + i)$.
5. Вычислить значение $\mathrm{Ln}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$.
6. Вычислить значение $\mathrm{sh}\, i$.
7. Вычислить значение $\mathrm{ctg}\,\left(\frac{i}{2} + \pi\right)$.
8. Записать в алгебраической форме $\mathrm{Arccos}\, i$.
9. Вычислить значение i^i.
10. Вычислить значение $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$.

Ответы:

1. $u = e^{-x}\cos y\,; v = -e^{-x}\sin y$.
2. $u = e^{x^2-y^2}\cos 2xy\,; v = -e^{x^2-y^2}\sin 2xy$.
3. $u = \cos x \operatorname{ch} y$; $v = -\sin x \operatorname{sh} y$.
4. $u = \operatorname{ch} x \cos(y+1)\,; v = \operatorname{sh} x \sin(y+1)$.
5. $\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$.
6. $i \sin 1$.
7. $-i \operatorname{cth} \frac{\pi}{2}$.
8. $\frac{i}{2}\ln 2 + \pi k$.
9. $e^{-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$.
10. $e^{-\left(4k+\frac{1}{2}\right)\pi}$.

3. Дифференцирование функции комплексной переменной. Условия Коши—Римана

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой области D комплексной переменной z.

Обозначим: $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$; $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, где точки $z \in D, z + \Delta z \in D$.

Определение. Функция $w = f(z)$ называется ***дифференцируемой в точке*** $z \in D$, если отношение $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ имеет конечный предел при Δz стремящемся к нулю произвольным образом. Этот предел называется ***производной*** функции $f(z)$ в точке z и обозначается:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Теорема 1 (условия Коши—Римана). Если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то в точке (x_0, y_0) существуют частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ по x и y, причем эти производные связаны ***условиями Коши—Римана***:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (3.1)$$

Условия Коши—Римана (3.1) являются необходимыми условиями дифференцируемости функции $w = f(z)$ в точке $z = x + iy$.

Теорема 2. Если в точке (x_0, y_0) функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы, а их частные производные связаны равенствами (3.1), то функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема по комплексной переменной z в точке $z_0 = x_0 + iy_0$.

При выполнении условий теоремы производная $f'(z_0)$ может быть представлена в одной из следующих форм:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (3.2)$$

Определение. Функция $w = f(z)$ называется ***аналитической в точке*** $z \in D$, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w = f(z)$ называется ***аналитической в области*** D, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Свойства аналитических функций

1. Если функция $f(z)$ аналитическая в области D, то она непрерывна в этой области.

2. Если функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитические в области D, то функции $f(z) \pm g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$, $\frac{f(z)}{g(z)}$ (при $g(z) \neq 0$) являются аналитическими в этой области. При этом имеют место формулы:

$$(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z);$$

$$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z);$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}.$$

3. Если $w = f(z)$ аналитическая в области D, а в области $\mathcal{G}$ ее значений функция $\varsigma = \varphi(w)$ аналитическая, то сложная функция $\varsigma = F(z) = \varphi(f(z))$ аналитическая в D.

4. Если $\mathrm{w = f(z)}$ аналитическая в области D, причем $|f'(z)| \neq 0$ в окрестности точки $z_0 \in D$, то в окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ определена обратная функция $z = \varphi(w)$, являющаяся аналитической функцией комплексной переменной w, при этом $\varphi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

Формулы дифференцирования функций комплексной переменной аналогичны соответствующим формулам дифференцирования функций действительной переменной.

Замечание. В полярных координатах условия Коши—Римана (3.1) принимают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi};\;\; \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}. \tag{3.3}$$

При этом производная находится по формуле:

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right). \tag{3.4}$$

Действительно, так как в полярных координатах $x = r\cos\varphi\,, y = r\sin\varphi$, имеем

$$\frac{\partial u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial(\mathrm{r}\cos\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial r} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi;$$

$$\frac{\partial v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial r} =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial v}{\partial y}r\cos\varphi.$$

Преобразуем два последних выражения, используя условия Коши-Римана (3.1), получим

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi;\; \frac{\partial v}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial y}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial u}{\partial x}r\cos\varphi.$$

Тогда, сравнивая с первыми двумя выражениями, находим

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi};\; \frac{\partial v}{\partial \varphi} = r\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi};\ \ \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Геометрический смысл производной функции комплексной переменной

Пусть $w=f(z)$ аналитическая в точке z_0 функция и $f'(z_0)\neq 0$.

Тогда модуль производной $k=|f'(z_0)|$ геометрически равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $w=f(z)$. Точнее, при $k>1$ имеет место растяжение, а при $k<1$ сжатие.

Аргумент производной $\varphi=\arg f'(z_0)$ геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой γ, проходящей через точку z_0, чтобы получить касательную в точке $w_0=f(z_0)$ к образу Γ этой кривой при отображении $w=f(z)$. При этом если $\varphi>0$, то поворот происходит против часовой стрелки, а если $\varphi<0$, то по часовой стрелке.

Вывод: геометрический смысл модуля и аргумента производной состоит в том, что при отображении, осуществляемом аналитической функцией, удовлетворяющей условию $f'(z_0)\neq 0,\ k=|f'(z_0)|$ определяет коэффициент преобразования подобия бесконечно малого линейного элемента в точке z_0, а $\varphi=\arg f'(z_0)$ – угол поворота этого элемента.

Замечание. При отображении аналитической функции $f(z)$, у которой $f'(z_0)\neq 0$, угол φ между кривыми γ_2 и γ_1, пересекающимися в точке z_0, равен углу Φ между их образами Γ_2 и Γ_1, пересекающимися в точке w_0(свойство сохранения углов). Аналогично, при отображении аналитической функции с $f'(z_0)\neq 0$ бесконечно малые элементы преобразуются подобным образом с коэффициентом подобия $k=|f'(z_0)|$ (свойство постоянства растяжения).

Определение. Отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки w_0, осуществляемое аналитической функцией $w=$

$f(z)$ и обладающее в точке z_0 свойством сохранения углов и постоянства растяжений, называется ***конформным отображением***.

Гармонические функции

Определение. Функция двух действительных переменных $u(x, y)$ называется ***гармонической*** в области D, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ или } \Delta u = 0. \tag{3.5}$$

Замечание. Действительная и мнимая части аналитической в области D функции $f(z)$ являются гармоническими функциями.

Действительно, пусть в области D задана аналитическая функция $f(z) = u(u, v) + iv(x, y)$. Тогда всюду в этой области выполняются условия Коши—Римана (3.1).

Так как аналитическая функция имеет в области D производные всех порядков, то действительные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют частные производные любого порядка. Продифференцируем первое равенство (3.1) по x, второе – по y и сложим их, учитывая, что $\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial x}$, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Аналогично, продифференцируем первое равенство (3.1) по y, второе – по x, а затем вычтем второе равенство из первого, получим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

С другой стороны, если $u(x,y)$ и $v(x,y)$ любые две гармонические функции, то $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ вовсе не обязана быть аналитической. Для аналитичности $f(z)$ нужно, чтобы $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дополнительно удовлетворяли условиям Коши—Римана (3.1).

Определение. Две гармонические функции, удовлетворяющие условиям Коши—Римана (3.1), называются ***сопряженной парой гармонических функций***.

Замечание. На практике по заданной действительной части $u(x,y)$ аналитической функции $f(z)$, находят ее мнимую часть с точностью до константы по формуле:

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx+\frac{\partial u}{\partial x}\,dy, \tag{3.6}$$

так как $dv=\frac{\partial v}{\partial x}\,dx+\frac{\partial v}{\partial y}\,dy=-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx+\frac{\partial u}{\partial x}\,dy.$

Здесь криволинейный интеграл вычисляется вдоль любого кусочно-гладкого пути, соединяющего точки (x_0,y_0) и (x,y).

Пример 1. Является ли функция $w=\bar{z}$ аналитической?

Решение. Пусть $z=x+iy$. Тогда $w=\overline{x+\imath y}=x-iy$.

Отсюда $u=\operatorname{Re}w=x$; $v=\operatorname{Im}w=-y$.

Находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\frac{\partial u}{\partial y}=0,\frac{\partial v}{\partial x}=0,\frac{\partial v}{\partial y}=-1.$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$, то есть первое условие Коши—Римана не выполняется, то функция ни в одной точке не дифференцируема, а значит, и не является аналитической ни в одной точке.

Пример 2. Является ли функция $w=z\,Im\,z$ аналитической?

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда $Im\, z = y$. Следовательно, $w = (x + iy)y = xy + iy^2$.

Отсюда $u = Re\, w = xy$; $v = Im\, w = y^2$.

Находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \frac{\partial u}{\partial y} = x, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 2y.$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ только при $y = 0$; $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ только при $x = 0$, то условия Коши—Римана выполняются только в точке $z = 0$. Следовательно, функция дифференцируема только в точке $z = 0$ и нигде не аналитична.

Пример 3. Проверить аналитичность функции $w = e^z$.

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Отсюда $u = Re\, w = e^x \cos y$; $v = Im\, w = e^x \sin y$.

Эти функции дифференцируемы, причем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, то есть условия Коши—Римана выполняются в любой точке z и функция $w = e^z$ является аналитической во всей плоскости. Имеем

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

Пример 4. Проверить аналитичность функции $w = \cos z$.

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$w = \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy =$$

$$= \cos x\ \mathrm{ch} y - i \sin x\ \mathrm{sh} y.$$

Отсюда $u = Re\, w = \cos x\, \mathrm{ch} y;\ v = Im\, w = -\sin x\, \mathrm{sh} y.$

Эти функции дифференцируемы, причем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x\, \mathrm{ch} y, \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x\, \mathrm{sh} y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\cos x\, \mathrm{sh} y, \frac{\partial v}{\partial y} = -\sin x\, \mathrm{ch} y.$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, то есть условия Коши—Римана выполняются в любой точке z и функция $w = \cos z$ является аналитической во всей плоскости. Имеем

$$(\cos z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x\, \mathrm{ch} y - i \cos x\, shy =$$

$$= -(\sin x\ \mathrm{ch} y + i \cos x\ \mathrm{sh} y) = -(\sin x \cos iy + \cos x \sin iy)$$

$$= -\sin(x + iy) = -\sin z.$$

Пример 5. Найти область аналитичности и производную функции $f(z) = z \cdot e^{-z}$.

Решение. Представим функцию в виде

$$f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z), \text{ где } f_1(z) = z, f_2(z) = e^{-z}.$$

Рассмотрим функцию $f_1(z) = z = x + iy$.

Здесь $u = x, v = y$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 1.$$

Условия Коши—Римана выполняются во всех точках, следовательно, функция $f_1(z) = z$ аналитична во всей плоскости.

Рассмотрим функцию

$$f_2(z) = e^{-z} = e^{-x-iy} = e^{-x}(\cos y - i\sin y).$$
$$\text{Здесь } u = e^{-x}\cos y\,, v = -e^{-x}\sin y.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x}\cos y\,, \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-x}\sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-x}\sin y\,, \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-x}\cos y.$$

Условия Коши—Римана выполняются во всех точках, следовательно, функция $f_2(z) = e^{-z}$ аналитична во всей плоскости.

Тогда по свойству 2 их произведение $f(z) = z \cdot e^{-z}$ является аналитической функцией во всей плоскости, при этом

$$f'(z) = z'e^{-z} + z(e^{-z})' = e^{-z} - ze^{-z} = (1-z)e^{-z}.$$

Пример 6. Найти коэффициент растяжения k и угол поворота φ для заданного отображения $w = z^3$ в точке $z_0 = 1 + i$.

Решение. Имеем $w' = 3z^2$. Тогда $w'|_{1+i} = 3(1+i)^2 = 3(1 + 2i + i^2) = 6i$. Переходя к показательной форме записи, получим $w'|_{1+i} = 6i = 6e^{\frac{\pi}{2}i}$.

Значит,

$$k = 6, \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 7. Проверить гармоничность функции $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $0 \le |z| < \infty$. Найти аналитическую функцию по ее действительной части.

Решение. Находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2;\ \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x.$$

Подставляя в уравнение Лапласа (3.5), получим тождество

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x \equiv 0.$$

Следовательно, $u(x, y)$ гармоническая функция.

Тогда по формуле (3.6) имеем

$$v(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy =$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} 6xy\, dx + (3x^2 - 3y^2)\, dy.$$

Выберем в качестве кусочно-гладкого пути ломаную ABC (рис.3.1), соединяющую точки $A(x_0, y_0)$, $B(x, y_0)$ и $C(x, y)$.

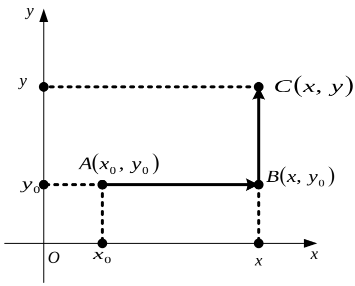

Рис. 3.1

Тогда вдоль AB: $y = y_0, dy = 0$ и вдоль BC: $x = const, dx = 0$. Учитывая свойство аддитивности криволинейного интеграла, получим

$$v(x, y) = \int_{AB} 6xy\, dx + (3x^2 - 3y^2)\, dy +$$

$$+ \int_{BC} 6xy\, dx + (3x^2 - 3y^2) dy =$$

$$= \int_{AB} 6xy_0\, dx + \int_{BC} (3x^2 - 3y^2)\, dy =$$

$$= \int_{x_0}^{x} 6xy_0\, dx + \int_{y_0}^{y} (3x^2 - 3y^2)\, dy =$$

$$= 6y_0 \frac{x^2}{2}\Big|_{x_0}^{x} + (3x^2y - y^3)|_{y_0}^{y} =$$

$$= 3x^2y_0 - 3x_0^2y_0 + 3x^2y - y^3 - 3x^2y_0 + y_0^3 =$$

$$= 3x^2y - y^3 + C, \textit{ где } C = -3x_0^2y_0 + y_0^3.$$

Тогда

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) =$$

$$= (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) + iC =$$

$$= (x + iy)^3 + iC = z^3 + iC.$$

Пример 8. Проверить гармоничность функции $v(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $0 \le |z| < \infty$. Найти аналитическую функцию по ее мнимой части.

Решение. Находим частные производные

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}; \ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}; \ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Подставляя в уравнение Лапласа $\Delta v = 0$, получим тождество

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \equiv 0.$$

Следовательно, $v(x, y)$ гармоническая функция.

Тогда из $du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = \frac{\partial v}{\partial y}\,dx - \frac{\partial v}{\partial x}\,dy$ имеем

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y}\,dx - \frac{\partial v}{\partial x}\,dy =$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy.$$

Выберем в качестве кусочно-гладкого пути ломаную ABC, соединяющую точки $A(x_0, y_0)$, $B(x, y_0)$ и $C(x, y)$. Тогда вдоль $AB: y = y_0, dy = 0$ и вдоль $BC: x = const, dx = 0$. Учитывая свойство аддитивности криволинейного интеграла, получим

$$u(x,y) = \int_{AB} \frac{x}{x^2+y_0^2}\,dx + \int_{BC} \frac{y}{x^2+y^2}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+y_0^2)\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_{y_0}^{y} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+y_0^2) - \frac{1}{2}\ln(x_0^2+y_0^2) +$$

$$+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+y_0^2) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C,$$

где $C = \frac{1}{2}\ln(x_0^2+y_0^2)$.

Тогда

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C =$$

$$= \ln|z| + i\arg z + C = \ln z + C.$$

Примеры для самостоятельного решения:

1. Является ли аналитической функция $w = z\,Re(z)$?
2. Пользуясь условиями Коши—Римана, выяснить, является ли функция $w = z^2 \cdot \bar{z}$ аналитической.
3. Проверить аналитичность функции $w = \operatorname{sh} z$?
4. Является ли аналитической функция $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$?
5. Пользуясь условиями Коши—Римана, выяснить, является ли функция $w = e^{z^2}$ аналитической.
6. Показать, что функция $f(z) = \frac{z\cos z}{1+z^2}$ аналитическая и найти ее производную.
7. Проверить гармоничность функции $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$, $0 \leq |z| < \infty$. Найти аналитическую функцию по ее действительной части.

8. Проверить гармоничность функции $v(x,y) = 2e^x \sin y$, $0 \leq |z| < \infty$. Найти аналитическую функцию по ее мнимой части.
9. Проверить гармоничность функции $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $0 < |z| < \infty$. Найти аналитическую функцию по ее действительной части.
10. Проверить гармоничность функции $v(x,y) = 2(2\operatorname{sh} x \sin y + xy)$, $0 \leq |z| < \infty$. Найти аналитическую функцию по ее мнимой части.

Ответы:

1. Функция дифференцируема только в точке $z = 0$, не аналитическая ни в одной точке.
2. Нет.
3. Функция аналитическая всюду на плоскости, причем $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$.
4. Функция аналитическая всюду, причем $(z^n)' = nz^{n-1}$.
5. Да.
6. $f'(z) = \frac{(1-z^2)\cos z - z(1+z^2)\sin z}{(1+z^2)^2}$.
7. $v(x,y) = 2xy + y + C; f(z) = z^2 + z + iC$.
8. $u(x,y) = 2e^x \cos y + C; f(z) = 2e^z + C$.
9. $v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + C;\ f(z) = \frac{1}{z} + iC$.
10. $u(x,y) = 4\operatorname{ch} x \cos y - y^2 + x^2 + C;\ f(z) = 4\operatorname{ch} z + z^2 + C$.

4. Интегрирование функций комплексной переменной

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и непрерывна в области D, в которой лежит кусочно-гладкая кривая C конечной длины (рис.4.1), заданная параметрическими уравнениями

$$C: x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta.$$

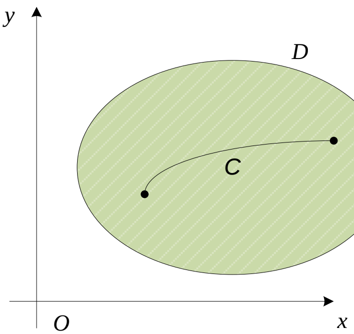

Рис. 4.1

Здесь $x(t), y(t)$ – кусочно-гладкие функции, причем ${x'}^2(t) + {y'}^2(t) \neq 0$.

Тогда задана комплексная функция $z(t) = x(t) + iy(t)$ действительной переменной t.

Разобьем кривую C на n частичных дуг точками деления $z_0, z_1, \dots, z_n$. Обозначим: $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. Составим интегральную сумму $S(z_k, z_k^*) = \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*) \cdot \Delta z_k$, где точки z_k^* принадлежат k-ой дуге.

Определение. Если при $\max|\Delta z_k| \to 0$ существует предел интегральных сумм $S(z_k, z_k^*)$, не зависящий ни от способа разбиения кривой C, ни от выбора точек z_k^*, то этот предел называется ***интегралом от функции $f(z)$ по кривой*** C.

Обозначается: $\int_C f(z)dz = \lim\limits_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*) \cdot \Delta z_k$.

Пусть $f(z_k^*) = u(P_k^*) + i\,v(P_k^*)$, где $P_k^*(x_k^*, y_k^*)$ – точка k-й дуги кривой C; $\Delta z_k = \Delta x_k + i\,\Delta y_k$.

Тогда

$$S(z_k, z_k^*) = \sum_{k=1}^{n}(u(P_k^*)\,\Delta x_k - v(P_k^*)\,\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n}(u(P_k^*)\,\Delta y_k + \\ + v(P_k^*)\,\Delta x_k).$$

Следовательно, интеграл сводится к вычислению криволинейных интегралов:

$$\int_C f(z)dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C u\,dy + v\,dx. \qquad (4.1)$$

Свойства интегралов:

1. $\int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz.$
2. $\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = \int_{C_1+C_2} f(z)dz.$
3. $\int_C af(z)dz = a\int_C f(z)dz$, где a – комплексная постоянная.
4. $\int_C (f_1(z) + f_2(z))\,dz = \int_C f_1(z)dz + \int_C f_2(z)dz.$
5. $\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|\,ds.$

Замечание. Если кривая C задана параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t)$, а начальная и конечная точки дуги C соответствуют значениям параметра $t = t_0, t = t_1$, то

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))\,z'(t)dt, \qquad (4.2)$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то имеет место ***формула Ньютона—Лейбница***

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z)\Big|_{z_0}^{z_1} = \Phi(z_1) - \Phi(z_0), \qquad (4.3)$$

где $\Phi(z)$ – какая-либо первообразная для функции $f(z)$, т.е. $\Phi'(z) = f(z)$ в области D.

Если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ аналитические в односвязной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то имеет место ***формула интегрирования по частям***

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\varphi'(z)dz = [f(z)\varphi(z)]\big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} \varphi(z)f'(z)dz. \qquad (4.4)$$

Пусть задана аналитическая функция $z = \varphi(\zeta)$, устанавливающая взаимно однозначное соответствие между кривыми C и Γ, тогда имеет место ***формула замены переменной***

$$\int_C f(z)dz = \int_\Gamma f\big(\varphi(\zeta)\big)\varphi'(\zeta)\, d\zeta. \qquad (4.5)$$

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \int_{C_R} \frac{dz}{z-z_0}$, где C_R – окружность радиуса R с центром в точке z_0 (рис.4.2).

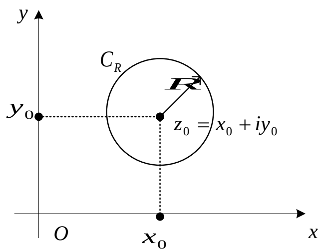

Рис. 4.2

Решение. Положим для точек окружности

$$C_R\colon z = z_0 + Re^{i\varphi}, \text{ где } 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Тогда $dz = iRe^{i\varphi}\, d\varphi$. Получим по формуле (4.5)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\varphi}\, d\varphi}{Re^{i\varphi}} = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

Отсюда следует, что интеграл I не зависит ни от радиуса R, ни от точки z_o.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_C (2z+1)\bar{z}\,dz$, где C – дуга окружности $|z|=1, 0 \le \arg z \le \pi$ (рис. 4.3).

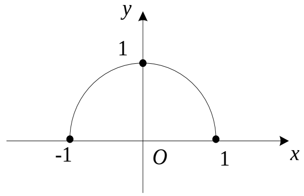

Рис. 4.3

Решение. Положим $z = e^{i\varphi}, 0 \le \varphi \le \pi$. Тогда $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$. Получим по формуле (4.5)

$$\int_C (2z+1)\bar{z}\,dz = \int_0^{\pi}\left(2e^{i\varphi}+1\right)e^{-i\varphi}\cdot ie^{i\varphi}\,d\varphi =$$
$$= i\int_0^{\pi}\left(2e^{i\varphi}+1\right)d\varphi = i\left(\frac{2}{i}e^{i\varphi}+\varphi\right)\Big|_0^{\pi} =$$
$$= 2e^{i\pi}+i\pi-2 = -4+i\pi.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_C Im\,z\,dz$, где $C = \{(x,y)|y=2x^2, 0 \le x \le 1\}$.

Решение. Положим $z = x+iy$. Тогда

$$\mathrm{I}m\,z = y;\ dz = dx + i\,dy.$$

Получим по формуле (4.1)

$$\int_C Im\,z\,dz = \int_C y(dx+i\,dy) = \int_C y\,dx + i\int_C y\,dy =$$
$$= \int_0^1 2x^2\,dx + i\int_0^1 2x^2\cdot 4x\,dx =$$
$$= \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 + i\frac{8x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}+2i\,.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_C e^{\bar{z}}\,dz$, где C – отрезок прямой от точки $z_0 = \pi$ до точки $z_1 = -i\pi$ (рис. 4.4).

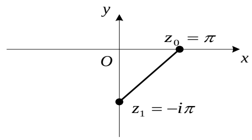

Рис. 4.4

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точки $(\pi, 0)$ и $(0, -\pi)$, будет иметь вид $y = x - \pi, 0 \le x \le \pi$. Тогда параметрические уравнения прямой: $x = t, y = t - \pi$ или в комплексной форме $z = x + iy = t + i(t - \pi)$, где действительная переменная t изменяется от π до 0. Отсюда $dz = (1 + i)\,dt$. Получим по формуле (4.2)

$$\int_C e^{\bar{z}}\,dz = \int_\pi^0 e^{t-i(t-\pi)}(1+i)dt = (1+i)e^{i\pi}\int_\pi^0 e^{(1-i)t}\,dt =$$
$$= -(1+i)\left.\frac{e^{(1-i)t}}{1-i}\right|_\pi^0 = -\frac{(1+i)^2}{1-i^2}\left(1 - e^{(1-i)\pi}\right) =$$
$$= -i\left(1 - e^{\pi}e^{-i\pi}\right) = -i(1 + e^{\pi})\,.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $I = \int_C (z^2 + z\bar{z})\,dz$, где C – дуга параболы $y = 2x^2$, соединяющая точки $z_0 = 0$ и $z_1 = 1 + 2i$ (рис.4.5).

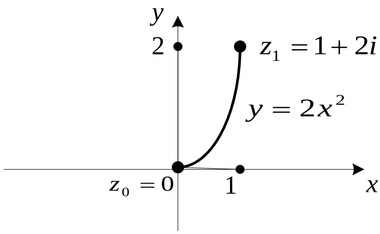

Рис. 4.5

Решение. Найдем действительную и мнимую части подынтегральной функции. Так как

$$z^2 + z\,\bar{z} = (x+iy)^2 + (x+iy)(x-iy) =$$

$$= x^2 + 2ixy + i^2y^2 + x^2 - i^2y^2 = 2x^2 + 2ixy.$$

Отсюда $u = 2x^2, v = 2xy$. Учитывая, что $dz = dx + i\,dy$, по формуле (4.1) получим

$$I = \int_C (z^2 + z\overline{z})\,dz =$$

$$= \int_C 2x^2\,dx - 2xy\,dy + i\int_C 2xy\,dx + 2x^2\,dy.$$

Вдоль кривой C имеем $y = 2x^2, dy = 4xdx, 0 \le x \le 1$. Отсюда

$$I = \int_0^1 (2x^2 - 2x \cdot 2x^2 \cdot 4x)\,dx +$$

$$+i\int_0^1 (2x \cdot 2x^2 + 2x^2 \cdot 4x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 (2x^2 - 16x^4)\,dx + 12\,i\int_0^1 x^3\,dx =$$

$$= \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{16x^5}{5}\right)\Big|_0^1 + 12i\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{16}{5} + 3i = -\frac{38}{15} + 3i.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int_{1+i}^{2-i} \sin z\,dz$.

Решение. Так как подынтегральная функция $f(z) = \sin z$ аналитична всюду, то применяя формулу Ньютона—Лейбница (4.3), получим

$$\int_{1+i}^{2-i} \sin z\;dz = \cos z|_{1+i}^{2-i} = \cos(2-i) - \cos(1+i) =$$

$$= \cos 2\cos i + \sin 2\sin i - (\cos 1\cos i - \sin 1\, sin\, i) =$$

$$= \cos 2\;\text{ch}1 + i\sin 2\;\text{sh}1 - \cos 1\;\text{ch}1 + i\sin 1\;\text{sh}1 =$$

$$= (\cos 2\;\text{ch}1 - \cos 1\;\text{ch}1) + i(\sin 2\;\text{sh}1 + \sin 1\;\text{sh}1).$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int_C \ z^2 \cos z \, dz$, где C – отрезок прямой от точки $z_0 = i$ до точки $z_1 = 1$.

Решение. Функции $f(z) = z^2$ и $\varphi(z) = \cos z$ являются аналитическими. Применяя формулу интегрирования по частям (4.4), получим

$$\int_i^1 z^2 (sin\, z)' dz = (z^2\, sin\, z)|_i^1 - 2\int_i^1 z\ \ sin\, z\ \ dz =$$

$$= sin\, 1 - i^2\, sin\, i + 2\int_i^1 z\, (cos\, z)' dz =$$

$$= sin\, 1 + i\, \mathrm{sh}1 + 2\left((z\, cos\, z)|_i^1 - \int_i^1 cos\, z\ \ dz\right) =$$

$$= sin\, 1 + i\, \mathrm{sh}1 + 2\, cos\, 1 - 2i\, cos\, i - 2 sin\, z|_i^1 =$$

$$= sin\, 1 + i\, \mathrm{sh}1 + 2\, cos\, 1 - 2i\, \mathrm{ch}1 - 2\, sin\, 1 + 2\, sin\, i =$$

$$= 2\, cos\, 1 - sin\, 1 + 3i\, \mathrm{sh}1 - 2i\, \mathrm{ch}1.$$

Однозначные ветви многозначной функции. Точки ветвления

Пусть в области D задана многозначная *функция* $w = f(z)$. Однозначная функция $w = \varphi(z)$, аналитическая в области D, называется ***однозначной ветвью*** функции $f(z)$, если для любой точки $z_0 \in D$ значение $\varphi(z_0)$ принадлежит множеству значений функции $f(z)$ в точке z_0.

Например, функция $w = z^n$ каждой точке z_0 ставит в соответствие единственную точку w_0, но функция $z = \sqrt[n]{w}$ одной и той же точке w_0 ставит в соответствие n различных точек плоскости z; при этом, если $w = \rho e^{i\theta}$, то эти n значений находятся по формуле

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2\pi k}{n}},\ \ k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Многозначная в области D функция может иметь как конечное число однозначных ветвей $\left(w = \sqrt[n]{z}\right)$, так и бесконечное число ветвей $(w = \mathrm{Ln}\, z)$.

Точка z комплексной плоскости, обладающая тем свойством, что обход вокруг нее в достаточно малой окрестности влечет за собой переход от одной ветви многозначной функции к другой, называется ***точкой ветвления*** рассматриваемой многозначной функции. Так, точками ветвления функции $w = \sqrt[n]{z}$ являются точки $z = 0$ и $z = \infty$. В каждой из своих точек ветвления многозначная функция принимает только одно значение, т.е. различные однозначные ветви функции в этих точках совпадают.

При интегрировании многозначной функции необходимо выделять ее однозначную ветвь.

Пример 8. Вычислить интеграл $\int_C \frac{dz}{\sqrt[3]{z}}$, где C – верхняя дуга окружности $|z| = 1$. Для $\sqrt[3]{z}$ берется та ветвь, для которой $\sqrt[3]{1} = 1$.

Решение. Функция $\sqrt[3]{z}$ является многозначной:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|}\, e^{\frac{i}{3}(\varphi+2\pi k)}, k = 0, 1, 2,$$

где $\varphi = \arg z$.

Условию $\sqrt[3]{1} = 1 \cdot e^{i\frac{2\pi k}{3}} = 1$ отвечает та однозначная ветвь этой функции, для которой $\mathrm{k} = 0$. Тогда

$$\sqrt[3]{z}_{k=0} = 1 \cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{3}}{}_{k=0} = e^{\frac{i\varphi}{3}}.$$

Положим $z = |z|e^{i\varphi} = e^{i\varphi}$ на кривой C, где $|z| = 1$, а φ меняется от 0 до π. Тогда $dz = ie^{i\varphi}\, d\varphi$. Получим

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt[3]{z}} = \int_0^{\pi} \frac{ie^{i\varphi}\, d\varphi}{e^{\frac{i\varphi}{3}}} = i\int_0^{\pi} e^{\frac{i2\varphi}{3}}\, d\varphi = i\,\frac{3}{2i}\, e^{\frac{i2\varphi}{3}}\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{3}{2}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1\right) = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\int_C \frac{\mathrm{Ln}\, z}{z}\, dz$, где C – дуга окружности $|z| = 1$, лежащая в первой четверти. Для $\mathrm{Ln}\, z$ берется та ветвь, для которой $\mathrm{Ln}\, 1 = 2\pi i$.

Решение. Функция $\mathrm{Ln}\, z$ является многозначной:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}.$$

Имеем

$$\mathrm{Ln}\, 1 = \ln|1| + i(\arg 1 + 2\pi k) = 2\pi k i, k \in \mathbb{Z}.$$

Условию $\mathrm{Ln} 1 = 2\pi i$ удовлетворяет та однозначная ветвь функции, для которой $\mathrm{k} = 1$. Тогда

$$\mathrm{Ln}\, z_{k=1} = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)_{k=1} = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi).$$

Так как z находятся на единичной окружности, где $|z| = 1$, тогда

$$\mathrm{Ln}\, z_{k=1} = i(\arg z + 2\pi).$$

По формуле Ньютона—Лейбница, получим

$$\int_C \frac{\mathrm{Ln}\, z}{z}\, dz = \int_1^i \mathrm{Ln}\, z\, d(\mathrm{Ln}\, z) = \left.\frac{(\mathrm{Ln}\, z)^2}{2}\right|_1^i =$$

$$= \frac{1}{2}\left(i^2(\arg i + 2\pi)^2 - i^2(\arg 1 + 2\pi)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)^2 + (2\pi)^2\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{25}{4}\pi^2 + 4\pi^2\right) = -\frac{9}{8}\pi^2.$$

Примеры для самостоятельного решения:

1. Вычислить интеграл $\int_C (iz^2 - 2\bar{z})\, dz$, где C – дуга окружности $|z| = 2, 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$.

2. Вычислить интеграл $\int_C Re(z + z^2)\, dz$, где C – дуга параболы $y = x^2$, соединяющей точки $z_0 = 0$ и $z_1 = 1 + i$.

3. Вычислить интеграл $\int_C z\, Im\, z^2\, dz$, где C – дуга окружности $|z| = 1, -\pi \le \arg z \le 0$.

4. Вычислить интеграл $\int_C \bar{z} e^z\, dz$, где C – отрезок прямой, соединяющей точки $z_0 = 1$ и $z_1 = i$.

5. Вычислить интеграл $\int_C e^z\, dz$, где C: а) дуга параболы $y = x^2$, соединяющая точки $z_0 = 0$ и $z_1 = 1 + i$; б) отрезок прямой, соединяющий эти же точки.

6. Вычислить интеграл $\int_1^i (3z^4 - 2z^3)\, dz$.

7. Вычислить интеграл $\int_1^i z e^z\, dz$.

8. Вычислить интеграл $\int_C Re(\sin z) \cos z\ dz$, где C: $|Im\, z| \le 1, Re\, z = \frac{\pi}{4}$.

9. Вычислить интеграл $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$, где C – дуга окружности $|z| = 2, 0 \le \arg z \le \pi$, обход по часовой стрелке. Для $\sqrt{z}$ берется та ветвь, для которой $\sqrt{1} = 1$.

10. Вычислить интеграл $\int_C z \operatorname{Ln} z\, dz$, где $C = \{z|\ |z| = 1\}$. Для $\operatorname{Ln} z$ берется та ветвь, для которой $\operatorname{Ln}(-1) = \pi i$.

Ответы:

1. $\frac{8}{3} - i\left(\frac{8}{3} + 4\pi\right)$.
2. $\frac{19}{30} + i\frac{5}{6}$.
3. $-\frac{\pi}{2}$.
4. $-e + 2\sin 1 + i(e - 2\cos 1)$.
5. *а)* $e\cos 1 - 1 + ie\sin 1$; *б)* $e\cos 1 - 1 + ie\sin 1$.
6. $\frac{3}{5}(i - 1)$.
7. $(i - 1)e^i$.
8. $\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh}2 + \frac{1}{2}\right)i$.
9. $2\sqrt{2}(1 - i)$.
10. πi.

5. Интегральная формула Коши

Определение. Кусочно-гладкая замкнутая кривая, не имеющая точек самопересечения, называется ***замкнутым контуром***.

Положительным направлением обхода контура считается направление, при котором внутренняя область, ограниченная данным замкнутым контуром, остается слева от направления движения.

Теорема 1 (Коши). Пусть в односвязной области D задана однозначная аналитическая функция $f(z)$. Тогда интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру Г, целиком лежащему в области D, равен нулю, то есть

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0. \tag{5.1}$$

Теорема 2 (Коши). Если функция $f(z)$ является аналитической функцией в односвязной области D, ограниченной кусочно-гладким контуром C, и непрерывна в замкнутой области $\overline{D} = D \cup C$, то интеграл от $f(z)$ по границе C области D равен нулю, т.е.

$$\int_C f(z)dz.$$

Теорема 3 (обобщение). Пусть $f(z)$ является аналитической функцией в многосвязной области D, ограниченной извне контуром C_0, а изнутри контурами $C_1, C_2, \dots, C_n$, и $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$. Тогда $\int_C f(z)dz = 0$, где C — полная граница области D, состоящая из контуров $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$, причем обход границы C происходит в положительном направлении (рис.5.1).

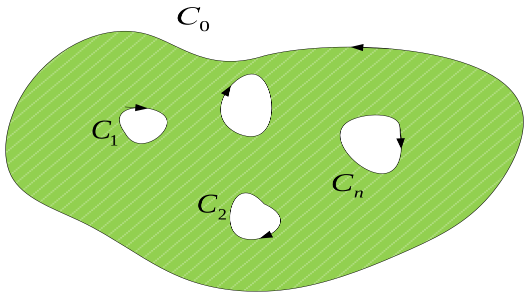

Рис. 5.1

Замечание. Если $f(z)$ аналитическая функция в односвязной области D, то интеграл не зависит от пути интегрирования (так как по замкнутому контуру интеграл равен нулю).

Интегральная формула Коши

Пусть $f(z)$ аналитическая функция в односвязной области D, ограниченной контуром C. Пусть $z_0 \in D$ и $\gamma \in D$ – контур, охватывающий z_0 (рис.5.2), то справедлива ***интегральная формула Коши***

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz. \qquad (5.2)$$

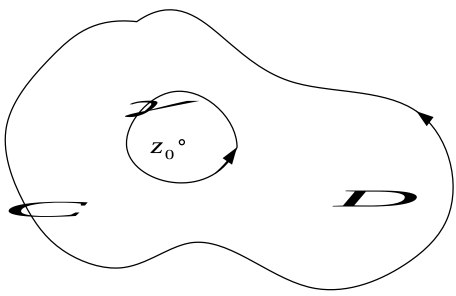

Рис. 5.2

При этом функция $f(z)$ имеет всюду в D производные любого порядка, для которых справедливы формулы

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz. \qquad (5.3)$$

Пример 1. Вычислить интегралы (обход контуров против часовой стрелки):

1) $\int_{|z|=1}\frac{z^2}{z-2i}dz$; 2) $\int_{|z|=4}\frac{z^2}{z-2i}dz$.

Решение

1) Подынтегральная функция $\frac{z^2}{z-2i}$ является аналитической всюду, кроме точки $z = 2i$. Эта точка лежит вне круга, ограниченного контуром $|z| = 1$ (рис.5.3).

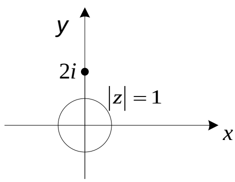

Рис. 5.3

Тогда в области, ограниченной контуром $|z| = 1$, подынтегральная функция является аналитической. Следовательно, по теореме 1 получим $\int_{|z|=1}\frac{z^2}{z-2i}dz = 0$.

2) Внутри окружности $|z| = 4$ знаменатель обращается в нуль в точке $z_0 = 2i$. Применим интегральную формулу Коши (5.2):

$$\int_{|z|=4}\frac{z^2}{z-2i}dz = 2\pi i \cdot z^2|_{z=2i} = 2\pi i \cdot 4i^2 = -8\pi.$$

Пример 2. Вычислить интегралы (обход контуров против часовой стрелки):

1) $\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{1+z^2}$;   2) $\int_{|z-i|=1}\frac{dz}{1+z^2}$; 3) $\int_{|z+i|=1}\frac{dz}{1+z^2}$.

Решение

1) Подынтегральная функция $\frac{1}{1+z^2}$ является аналитической всюду, кроме точек $z=\pm i$. Эти точки лежат вне круга, ограниченного контуром $|z|=\frac{1}{2}$ (рис.5.4).

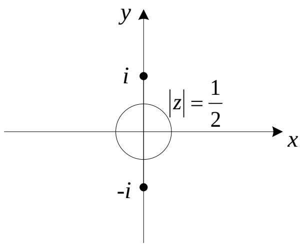

Рис. 5.4

Тогда в области, ограниченной контуром $|z|=\frac{1}{2}$, подынтегральная функция является аналитической. Следовательно, по теореме 1 получим $\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{1+z^2}=0$.

2) Внутри окружности $|z-i|=1$ знаменатель обращается в нуль в точке $z_0=i$ (рис.5.5).

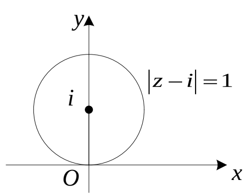

Рис. 5.5

Преобразуем интеграл к виду

$$I = \int_{|z-i|=1} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{|z-i|=1} \frac{dz}{(z-i)(z+i)} = \int_{|z-i|=1} \frac{\frac{1}{z+i}dz}{z-i}.$$

Применим интегральную формулу Коши (5.2):

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{z+i}\Big|_{z=i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

3) Внутри окружности $|z+i| = 1$ знаменатель обращается в нуль в точке $z_0 = -i$. Преобразуем интеграл к виду

$$I = \int_{|z+i|=1} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{|z+i|=1} \frac{dz}{(z-i)(z+i)} = \int_{|z+i|=1} \frac{\frac{1}{z-i}dz}{z+i}.$$

Применим интегральную формулу Коши (5.2):

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{z-i}\Big|_{z=-i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{-2i} = -\pi.$$

Пример 3. Вычислить интегралы (обход контуров против часовой стрелки):

1) $\int_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1} dz$;   2) $\int_{|z|=4} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1} dz$.

Решение

1) Подынтегральная функция $\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1}$ является аналитической всюду, кроме точек $z = \pm 1$. Внутри окружности $|z-1| = 1$ знаменатель обращается в нуль в точке $z_0 = 1$. Преобразуем интеграл и применим интегральную формулу Коши (5.2):

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1} dz = \int_{|z-1|=1} \frac{\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z+1}dz}{z-1} = 2\pi i \cdot \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z+1}\Big|_{z=1} =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2} = \pi i.$$

2) Внутри контура интегрирования знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в точках $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$. Рассмотрим многосвязную область D, ограниченную окружностью $\Gamma = \{z||z| = 4\}$ и внутренними контурами $\gamma_1 = \left\{z\middle||z-1| = \frac{1}{2}\right\}$ и $\gamma_2 = \left\{z\middle||z+1| = \frac{1}{2}\right\}$. В этой области D функция $f(z) = \frac{sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1}$ является аналитической и по теореме 3 имеем:

$$\int_{\Gamma^+} \frac{sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1} dz + \int_{\gamma_1^-} \frac{sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1} dz + \int_{\gamma_2^-} \frac{sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1} dz = 0.$$

Отсюда

$$\int_{\Gamma^+} \frac{sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1} dz = -\int_{\gamma_1^-} \frac{sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1} dz - \int_{\gamma_2^-} \frac{sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1} dz =$$

$$= \int_{\gamma_1^+} \frac{sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1} dz + \int_{\gamma_2^+} \frac{sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1} dz =$$

$$= \int_{\gamma_1^+} \frac{\frac{sin\frac{\pi z}{2}}{z+1} dz}{z-1} + \int_{\gamma_2^+} \frac{\frac{sin\frac{\pi z}{2}}{z-1} dz}{z+1} =$$

$$= 2\pi i \cdot \left.\frac{sin\frac{\pi z}{2}}{z+1}\right|_{z=1} + 2\pi i \cdot \left.\frac{sin\frac{\pi z}{2}}{z-1}\right|_{z=-1} =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{sin\frac{\pi}{2}}{2} + 2\pi i \cdot \frac{sin\frac{-\pi}{2}}{-2} = \pi i + \pi i = 2\pi i.$$

Пример 4. Вычислить интеграл (обход контуров против часовой стрелки):

$$\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^2+2z}.$$

Решение. Внутри контура интегрирования знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в точках $z_1 = 0$ и $z_2 = -2$. Рассмотрим многосвязную область D, ограниченную окружностью $\Gamma = \{z||z| = 3\}$ и внутренними контурами $\gamma_1 = \left\{z\middle||z| = \frac{1}{2}\right\}$ и $\gamma_2 = \left\{z\middle||z+2| = \frac{1}{2}\right\}$ (рис.5.6).

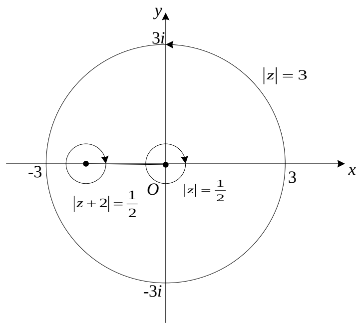

Рис. 5.6

В этой области D функция $f(z)=\frac{1}{z^2+2z}$ является аналитической и по теореме 3 имеем:

$$\int_{\Gamma^+}\frac{dz}{z^2+2z}+\int_{\gamma_1^-}\frac{dz}{z^2+2z}+\int_{\gamma_2^-}\frac{dz}{z^2+2z}=0.$$

Отсюда

$$\int_{\Gamma^+}\frac{dz}{z^2+2z}=-\int_{\gamma_1^-}\frac{dz}{z^2+2z}-\int_{\gamma_2^-}\frac{dz}{z^2+2z}=$$

$$=\int_{\gamma_1^+}\frac{dz}{z^2+2z}+\int_{\gamma_2^+}\frac{dz}{z^2+2z}=\int_{\gamma_1^+}\frac{\frac{1}{z+2}dz}{z}+\int_{\gamma_2^+}\frac{\frac{1}{z}dz}{z+2}=$$

$$=2\pi i\cdot\left.\frac{1}{z+2}\right|_{z=0}+2\pi i\cdot\left.\frac{1}{z}\right|_{z=-2}=$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{2}+2\pi i\cdot\frac{1}{-2}=0.$$

Пример 5. Вычислить интеграл (обход контуров против часовой стрелки):

$$\int_{|z+i|=1}\frac{\sin z}{(z+i)^3}dz.$$

Решение. Подынтегральная функция $\frac{\sin z}{(z+i)^3}$ является аналитической всюду, кроме точки $z=-i$, лежащей внутри контура интегрирования. Применим формулу (5.3), учитывая, что $n+1=3 \Longrightarrow n=2$:

$$\int_{|z+i|=1} \frac{\sin z}{(z+i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \cdot (\sin z)''|_{z=-i} =$$

$$= \frac{2\pi i}{2} \cdot (-\sin z)|_{z=-i} = \pi i \cdot \sin i = -\pi \operatorname{sh} 1.$$

Пример 6. Вычислить интеграл (обход контуров против часовой стрелки):

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^3} \cos \frac{\pi}{z+1} dz.$$

Решение. Внутри окружности $|z| = \frac{1}{2}$ знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в точке $z = 0$. Применим формулу (5.3), учитывая, что $n+1=3 \Longrightarrow n=2$:

$$I = \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^3} \cos \frac{\pi}{z+1} dz = \frac{2\pi i}{2!} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{z+1}\right)''\Big|_{z=0}.$$

Так как

$$\left(\cos \frac{\pi}{z+1}\right)' = \pi \sin \frac{\pi}{z+1} \cdot (z+1)^{-2};$$

$$\left(\cos \frac{\pi}{z+1}\right)'' = -\pi^2 \cos \frac{\pi}{z+1} \cdot (z+1)^{-4} - 2\pi \sin \frac{\pi}{z+1} \cdot (z+1)^{-3},$$

Получим

$$I = \pi i(-\pi^2 \cos \pi - 2\pi \sin \pi) = \pi^3 i.$$

Примеры для самостоятельного решения:

Вычислить интегралы (обход контуров против часовой стрелки):

1. $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^2}{z+i} dz.$
2. $\int_{|z|=2} \frac{z^2}{z+i} dz.$
3. $\int_{|z|=4} \frac{e^{2z}}{z-\pi i} dz.$
4. $\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2} dz.$
5. $\int_{|z-1|=1} \frac{ze^z}{(z^2+1)(z-1)} dz.$
6. $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{ze^z}{(z^2+1)(z-1)} dz.$
7. $\int_{|z-1+i|=\sqrt{2}} \frac{ze^z}{(z^2+1)(z-1)} dz.$
8. $\int_{|z-1=1|} \frac{sin\frac{\pi z}{4}}{(z-1)^2(z-3)} dz.$
9. $\int_{|z|=1} \frac{\text{sh}^2 z}{z^3} dz.$
10. $\int_{|z|=3} \frac{z \sin z}{(z-2)^3} dz.$

Ответы:

1. 0.
2. $-2\pi i.$
3. $2\pi i.$
4. 0.
5. $\pi e i.$
6. 0.
7. $\frac{\pi}{2}(1-i)e^i + \pi e i.$
8. $-\frac{i}{8}\pi(\pi+2)\sqrt{2}.$
9. $2\pi i.$
10. $2\pi i(cos\, 2 - sin\, 2).$

6. Ряды в комплексной плоскости

Пусть имеем ряд с комплексными членами

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, \text{ где } z_n = x_n + iy_n. \tag{6.1}$$

Ряд (6.1) ***сходится*** тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

Ряд (6.1) называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд

$$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots . = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|. \tag{6.2}$$

Пример 1. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{3^n}$ сходится.

Решение. Воспользуемся формулой: $\cos in = \frac{e^{-n}+e^{n}}{2}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{2\cdot 3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n}}{2\cdot 3^n} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3e)^n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n.$$

По признаку Коши ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3e)^n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n$ сходятся, так как для них $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$. Значит, сходится исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{3^n}$.

Пример 2. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$ сходится и найти его сумму.

Решение. Это ряд геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, где $q = \frac{1+i}{2}$. Воспользуемся определением сходимости ряда:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Так как $|q| = \left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, тогда $q^n \to 0$ при $n \to \infty$. Получим

$$S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1+i}{2}} = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{1-i^2} = 1 + i.$$

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$ сходится и его сумма равна $1 + i$

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$.

Решение. Воспользуемся формулой Эйлера:

$$e^{in} = cos\, n + i\, sin\, n.$$

Тогда вопрос о сходимости данного ряда сводится к вопросу о сходимости рядов с действительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\, n}{n^2} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin\, n}{n^2}.$$

Каждый из этих рядов сходится абсолютно. Значит, исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$ сходится абсолютно.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\pi/n}}{n}$.

Решение. Имеем $e^{i\pi/n} = cos\frac{\pi}{n} + i\, sin\frac{\pi}{n}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\frac{\pi}{n}}{n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin\frac{\pi}{n}}{n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^2}$ сходится.

Следовательно, данный ряд расходится.

Ряды функций комплексной переменной

Пусть в области D определена бесконечная последовательность однозначных функций комплексной переменной $\{u_n(z)\}$.

Выражение вида $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ называется ***функциональным рядом***.

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ называется ***сходящимся*** в области D, если для любой фиксированной точки $z \in D$ соответствующий ему числовой ряд сходится.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится в области D, то в этой области можно определить однозначную функцию $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, которая называется ***суммой ряда***.

Равномерная сходимость

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ называется равномерно сходящимся в области D к функции $f(z)$, если для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon)$, что при $\forall n \geq N$ неравенство

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z) \right| < \varepsilon \qquad (6.3)$$

выполняется сразу для всех точек $z \in D$.

Теорема (признак Вейерштрасса). Если всюду в области D члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ могут быть мажорированы членами абсолютно сходящегося числового ряда, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в D.

Свойства равномерно сходящихся рядов

1. Если функции $u_n(z)$ непрерывны в области D, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ равномерно сходится в D к функции $f(z)$, то $f(z)$ непрерывна в D.

2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ непрерывных функций $u_n(z)$ сходится равномерно в области D к функции $f(z)$, то интеграл от этой функции по любой кусочно-гладкой кривой C, целиком лежащей в области D, можно вычислять путем почленного интегрирования ряда, то есть

$$\int_C f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C u_n(z)dz.$$

3. Пусть функции $u_n(z)$ являются аналитическими в области D, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в любой замкнутой подобласти $\overline{D}'$ области D к функции $f(z)$. Тогда:

1) $f(z)$ является аналитической в области D;

2) $f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$;

3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно в любой замкнутой подобласти $\overline{D}'$ области D.

Пример 5. Найти области абсолютной и равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n^n}$.

Решение. Воспользуемся признаком Коши. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|z+i|^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z+i|}{n} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно на всей плоскости и равномерно сходится в любой ограниченной области.

Пример 6. Найти области абсолютной и равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n (z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|1+i|^{n+1}|z+i|^{n+1}}{(n+2)(n+3)} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{|1+i|^n|z+i|^n} =$$

$$= |1+i| \cdot |z+i| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+3} = \sqrt{2} \cdot |z+i|.$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно при $|z+i| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

При $|z+i| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ получим сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Итак, ряд сходится абсолютно и равномерно при $|z+i| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Примеры для самостоятельного решения:

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i2\pi}}{n\sqrt{n}}$.
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\pi/n}}{\sqrt{n}}$.
3. Пользуясь признаком Даламбера, исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{3^n}$.
4. Пользуясь признаком Коши, исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3i}{(1+i)n+2}\right)^n$.
5. Найти области абсолютной и равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5(z-i)^{2n+1}}{n!}$.
6. Найти области абсолютной и равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3i)^n}{(1-3i)^n}$.

Ответы:

1. Сходится.
2. Расходится.
3. Сходится абсолютно.
4. Сходится абсолютно.
5. Ряд сходится абсолютно на всей плоскости и равномерно сходится в любой ограниченной области.
6. Ряд сходится абсолютно при $|z-3i| < \sqrt{10}$ и равномерно сходится при $|z-3i| \leq \rho < \sqrt{10}$.

7. Степенной ряд

Определение. Ряд вида

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \qquad (7.1)$$

где c_n — некоторые комплексные числа, z_0 – фиксированная точка комплексной плоскости, называется ***степенным рядом***.

Члены ряда (7.1) являются аналитическими функциями на всей комплексной плоскости.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится для всех z: $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$; причем в круге $|z - z_0| \leq \rho < |z_1 - z_0|$ ряд сходится равномерно.

Следствие 1. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ расходится в некоторой точке z_1, то он расходится для всех z: $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

Следствие 2. Для любого степенного ряда существует такое число R, что внутри круга $|z - z_0| < R$ ряд сходится, а вне этого круга расходится.

Область $|z - z_0| < R$ называется ***кругом сходимости***, а число R ***радиусом сходимости*** степенного ряда.

В круге $|z - z_0| \leq \rho < R$ ряд сходится абсолютно.

Замечание. $0 \leq R \leq \infty$. При $R = 0$ степенной ряд сходится лишь в точке z_0. При $R = \infty$ ряд сходится в любой точке z.

Следствие 3. Внутри круга сходимости степенной ряд сходится к аналитической функции.

Следствие 4. Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз, причем радиус сходимости полученных рядов равен радиусу сходимости исходного ряда.

Следствие 5. Коэффициенты степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ находятся по формулам

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0). \tag{7.2}$$

Следствие 6. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ находится по формулам:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \text{ или } R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}. \tag{7.3}$$

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^2 2^n}$.

Решение. Применим признак Даламбера:

$$u_n = \frac{(z-1)^n}{n^2 2^n};\ u_{n+1} = \frac{(z-1)^{n+1}}{(n+1)^2 2^{n+1}}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(z-1)^{n+1} \cdot n^2 2^n}{(n+1)^2 2^{n+1} \cdot (z-1)^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(z-1) \cdot n^2}{(n+1)^2 \cdot 2}\right| = \frac{|z-1|}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{|z-1|}{2}.$$

Отсюда получим, что ряд сходится в круге $|z - 1| < 2$. Далее, на границе круга при $|z - 1| = 2$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который сходится.

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^2 2^n}$ сходится абсолютно в замкнутом круге $|z - 1| \leq 2$, причем сходимость в этом замкнутом круге равномерная. Радиус сходимости $R = 2$.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (z-2)^{2n}}{n}$.

Решение. Применим признак Коши:

$$u_n = \frac{2^n(z-2)^{2n}}{n}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n(z-2)^{2n}}{n}\right|} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(z-2)^2}{\sqrt[n]{n}} = 2(z-2)^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 2(z-2)^2.$$

Отсюда получим, что ряд сходится в круге $|z-2| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Далее, на границе круга при $|z-2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится.

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(z-2)^{2n}}{n}$ сходится абсолютно в круге $|z-2| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, причем сходится равномерно в области $|z-2| \le \rho < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Радиус сходимости $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Пример 3. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} cos\, in \cdot z^n$.

Решение. Имеем

$$c_n = cos\, in = \frac{e^{-n}+e^n}{2} = \mathrm{ch}\, n.$$

По формуле (7.3) получим

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{ch\, n}{ch\,(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{ch\, n}{ch\, n \cdot ch1 + sh\, n \cdot sh1} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{ch1 + \mathrm{th}\, n \cdot sh1} = \frac{1}{ch1 + sh1} = e^{-1},$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{th}\, n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{e^n - e^{-n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+e^{-2n}}{1-e^{-2n}} = 1.$

Пример 4. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + i\sqrt{3}\right)^n z^n$.

Решение. Имеем

$$|c_n| = \left|1 + i\sqrt{3}\right|^n = \left(\sqrt{1+3}\right)^n = 2^n.$$

По формуле (7.3) получим

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

Примеры для самостоятельного решения:

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{1+in}$.
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-1-i)^n}{3^n}$.
3. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (sin\, in) z^n$.
4. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i}\right)^n$.

Ответы:

1. Абсолютно сходится при $|z+i| < 1$ и сходится равномерно при $|z+i| \le \rho < 1$.
2. Абсолютно сходится при $|z-1-i| < 3$ и сходится равномерно при $|z-1-i| \le \rho < 3$.
3. $R = \frac{1}{e}$.
4. $R = \sqrt{2}$.

8. Ряд Тейлора

Теорема Тейлора. Функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z-z_0|<R$, однозначно представима в этом круге сходящимся степенным ***рядом Тейлора***

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \qquad (8.1)$$

коэффициенты которого определяются по формулам (рис.8.1):

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{|z-z_0|=\rho\\ \rho<R}}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\,,\ n=0,1,2,\ldots \qquad (8.2)$$

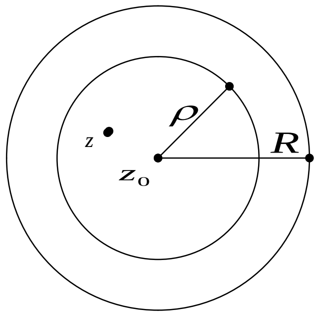

Рис. 8.1

Следствие. Если функция f(z) аналитична в области D и точка $z_0\in D$, то в круге $|z-z_0|<R(z_0,D)$, где $R(z_0,D)$ – наименьшее расстояние от точки z_0 до границы области D или до ближайшей точки z', в которой функция $f(z)$ не аналитична, $f(z)$ может быть представлена в виде степенного ряда (8.1), коэффициенты которого вычисляются по формулам (8.2).

Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$

1. $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $(|z| < +\infty)$.
2. $sin\, z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots =$
$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(|z| < +\infty)$.
3. $cos\, z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots =$
$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ $(|z| < +\infty)$.
4. $\text{sh}\, z = z + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(|z| < +\infty)$.
5. $\text{ch}\, z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ $(|z| < +\infty)$.
6. $\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \cdots$
$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ $(|z| < 1)$.

Здесь $\ln z$ – главная ветвь логарифма для многозначной функции

$$\text{Ln}\,(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^n}{n} + \cdots + 2\pi n i,$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

7. $(1 + z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \cdots +$
$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots =$
$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n$ $(|z| < 1)$.

Здесь z^α — главная ветвь степенной функции.

8. Частный случай разложения (7): при $\alpha = -1$ получим бесконечную геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1); \tag{8.3}$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots + (-1)^n z^n + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \quad (|z| < 1). \qquad (8.4)$$

Пример 1. Разложить в ряд по степеням z функцию

$$f(z) = \frac{z}{3+5z}.$$

Решение. Преобразуем функцию следующим образом

$$f(z) = \frac{z}{3+5z} = \frac{z}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{5}{3}z}.$$

Используя разложение (8.4), получим

$$f(z) = \frac{z}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{5}{3}z\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{5^n z^{n+1}}{3^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{5^{n-1} z^n}{3^n}.$$

При этом ряд сходится при $\left|\frac{5}{3}z\right| < 1$, то есть при $|z| < \frac{3}{5}$.

Пример 2. Разложить в ряд по степеням z функцию

$$f(z) = \frac{2z+1}{(z-3)^2}.$$

Решение. Преобразуем функцию следующим образом

$$f(z) = \frac{2z+1}{(z-3)^2} = -(2z+1) \cdot \left(\frac{1}{z-3}\right)'.$$

Используя разложение (8.3), получим

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

При этом ряд сходится при $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$, то есть при $|z| < 3$.

По следствию 4 о почленном дифференцировании степенного ряда имеем

$$\left(\frac{1}{z-3}\right)' = \left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z^n)'}{3^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{3^{n+1}}.$$

Окончательно получим

$$f(z) = (2z+1)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{3^{n+1}} =$$

$$= (2z+1)\cdot\left(\frac{1}{3^2}+\frac{2z}{3^3}+\frac{3z^2}{3^4}+\frac{4z^3}{3^5}+\cdots\right) =$$

$$= \frac{2z}{3^2}+\frac{2\cdot 2z^2}{3^3}+\frac{2\cdot 3z^3}{3^4}+\frac{2\cdot 4z^4}{3^5}+\cdots+\frac{1}{3^2}+\frac{2z}{3^3}+\frac{3z^2}{3^4}+\frac{4z^3}{3^5}+\cdots =$$

$$= \frac{1}{3^2}+\left(\frac{2\cdot 1}{3^2}+\frac{2}{3^3}\right)z+\left(\frac{2\cdot 2}{3^3}+\frac{3}{3^4}\right)z^2+\left(\frac{2\cdot 3}{3^4}+\frac{4}{3^5}\right)z^3+\cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2\cdot n}{3^{n+1}}+\frac{n+1}{3^{n+2}}\right)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{6n+n+1}{3^{n+2}}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(7n+1)z^n}{3^{n+2}},$$

$|z| < 3.$

Пример 3. Разложить в ряд по степеням z функцию

$$f(z) = \frac{1-z}{2z^2+5z+2}.$$

Решение. Разложим функцию в сумму простейших дробей

$$f(z) = \frac{1-z}{(2z+1)(z+2)} = \frac{A}{2z+1}+\frac{B}{z+2}.$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, получим

$$A(z+2)+B(2z+1) = 1-z.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} z^1&: A+2B=-1 \\ z^0&: \ 2A+B=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A&=1, \\ B&=-1. \end{aligned}$$

Получим

$$f(z) = \frac{1}{2z+1}-\frac{1}{z+2}.$$

Применяя к каждой из дробей разложение (8.4), находим

$$f(z) = \frac{1}{1+2z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2z)^n - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(2^n - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

При этом ряд сходится при одновременном выполнении условий $|2z| < 1$ *и* $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, то есть при $|z| < \frac{1}{2}$ и $|z| < 2$.

Окончательно получим, что ряд сходится при $|z| < \frac{1}{2}$.

Пример 4. Разложить в ряд по степеням z функцию

$$f(z) = \ln(1 + z - 2z^2).$$

Решение. Находим корни квадратного трехчлена:

$$z_1 = -\frac{1}{2};\ z_2 = 1.$$

Разложим квадратный трехчлен на множители

$$1 + z - 2z^2 = -2\left(z + \frac{1}{2}\right)(z - 1) = (2z + 1)(1 - z).$$

Тогда

$$f(z) = \ln(1 + 2z)(1 - z) = \ln(1 + 2z) + \ln(1 - z).$$

Используя разложение (6), получим

$$f(z) = 2z - \frac{(2z)^2}{2} + \frac{(2z)^3}{3} - \frac{(2z)^4}{4} + \cdots - z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \cdots =$$

$$= z + \frac{-2^2 - 1}{2} z^2 + \frac{2^3 - 1}{3} z^3 + \frac{-2^4 - 1}{4} z^4 + \cdots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n - 1}{n} z^n.$$

При этом ряд сходится при $|2z| < 1$ и $|z| < 1$, то есть при $|z| < \frac{1}{2}$.

Пример 5. Разложить в ряд по степеням z функцию

$$f(z) = \operatorname{arctg} z.$$

Решение. Продифференцируем заданную функцию

$$f'(z) = (\operatorname{arctg} z)' = \frac{1}{1+z^2}.$$

Используя разложение (8.4), находим

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}, \ \ |z| < 1.$$

Проинтегрировав почленно последнее равенство, получим

$$f(z) = \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^z z^{2n} dz =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, |z| < 1.$$

Пример 6. Разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{1-z},$$

если $z_0 = 3i$.

Решение. Преобразуем функцию

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-3i-(z-3i)} = \frac{1}{1-3i} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{z-3i}{1-3i}\right)}.$$

Используя разложение (8.3), получим

$$f(z) = \frac{1}{1-3i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-3i}{1-3i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3i)^n}{(1-3i)^{n+1}}.$$

Ряд сходится при $\left|\frac{z-3i}{1-3i}\right| < 1$, отсюда $|z-3i| < |1-3i|$. Так как $|1-3i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$, то ряд сходится при $|z-3i| < \sqrt{10}$.

Примеры для самостоятельного решения:

1. Разложить в ряд по степеням z функцию $f(z) = \frac{z}{3+5z}$.
2. Разложить в ряд по степеням z функцию $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)^2}$.
3. Разложить в ряд по степеням z функцию $\mathrm{f}(z) = \frac{1-2z}{3z^2+7z+2}$.
4. Разложить в ряд по степеням z функцию $f(z) = \ln(1+2z-3z^2)$.
5. Разложить в ряд по степеням z функцию $f(z) = \arcsin z$.
6. Разложить в ряд по степеням $(z-z_0)$ функцию $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$, если $z_0 = i$.

Ответы:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}3^{n-1}}{2^n} z^n$, $|z| < \frac{2}{3}$.
2. $1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(3^n - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$, $|z| < \frac{1}{3}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}3^n-1}{n} z^n$, $|z| < \frac{1}{3}$.
5. $z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z| < 1$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-i)^n}{(2i)^n}$, $|z-i| < 2$.

9. Ряд Лорана

Определение. Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n =$$

$$= \cdots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots +$$

$$+ c_n (z-z_0)^n + \cdots,$$

где z_0 – фиксированная точка комплексной плоскости, c_n – некоторые комплексные числа, называется ***рядом Лорана***.

Ряд Лорана понимается как сумма двух рядов

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n; \ \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

и рассматривается как сходящийся тогда и только тогда, когда сходятся оба ряда.

Ряд $f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ называется ***главной частью ряда Лорана***. Сходится при $|z-z_0| > r$. Ряд $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ называется ***правильной частью ряда Лорана***. Сходится при $|z-z_0| < R$. Тогда:

1) если $r > R$, то ряд (9.1) всюду расходится;

2) если $r < R$, то ряд (9.1) сходится в кольце $r < |z-z_0| < R$, где

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|} \text{ или } r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{-n-1}}{c_{-n}}\right|; \tag{9.2}$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \text{ или } R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|. \tag{9.3}$$

Итак, областью сходимости ряда Лорана является круговое кольцо $r < |z-z_0| < R$, если $r < R$ (рис.9.1), причем ряд сходится внутри этой области абсолютно и равномерно к аналитической функции $f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$.

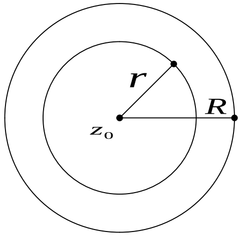

Рис. 9.1

Пример 1. Найти область сходимости и сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^n}.$$

Решение. Так как это ряд геометрической прогрессии с $q = \frac{1}{z-2}$, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{z-2}} = \frac{z-2}{z-3}.$$

Ряд сходится при $|z-2| > 1$.

Пример 2. Найти область сходимости и сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n i^n 2^n}{(z+i)^{n+1}}.$$

Решение. Применим признак Коши к ряду из модулей:

$$u_n = \frac{n|i|^n 2^n}{|z+i|^{n+1}}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n|i|^n 2^n}{|z+i|^{n+1}}} = \frac{|i|\cdot 2}{|z+i|} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \frac{2}{|z+i|}.$$

Отсюда получим, что ряд сходится при $|z+i| > 2$.

Используя свойство почленного дифференцирования, находим сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ni^n 2^n}{(z+i)^{n+1}} = \left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n 2^n}{(z+i)^n}\right)' =$$

$$= -\left(\frac{1}{1-\frac{2i}{z+i}}\right)' = -\left(\frac{z+i}{z-i}\right)' = \frac{2i}{(z-i)^2}.$$

Пример 3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(z+i)^{2n}}{2^n(n+1)} + \frac{4n^2}{3^n(z+i)^n}\right).$$

Решение.

1) Рассмотрим правильную часть ряда Лорана $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^{2n}}{2^n(n+1)}$. Для нее по признаку Даламбера имеем

$$u_n = \frac{|z+i|^{2n}}{2^n(n+1)}, \; u_{n+1} = \frac{|z+i|^{2n+2}}{2^{n+1}(n+2)}.$$

Тогда

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z+i|^{2n+2}}{2^{n+1}(n+2)} \cdot \frac{2^n(n+1)}{|z+i|^{2n}} =$$

$$= \frac{|z+i|^2}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{|z+i|^2}{2}.$$

Следовательно, правильная часть ряда Лорана сходится при $|z+i| < \sqrt{2}$, то есть $R = \sqrt{2}$.

2) Рассмотрим главную часть ряда Лорана $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{3^n(z+i)^n}$. Для нее имеем

$$c_{-n} = \frac{4n^2}{3^n}.$$

Тогда по формуле (9.2) находим

$$r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_{-n}|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{4n^2}{3^n}}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}4^{1/n}n^{2/n}=\frac{1}{3}.$$

Главная часть ряда Лорана сходится при $|z+i|>\frac{1}{3}$.

Итак, $r=\frac{1}{3}<R=\sqrt{2}$. Следовательно, исходный ряд сходится в кольце $\frac{1}{3}<|z+i|<\sqrt{2}$.

Пример 4. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(z-2i)^n}{3^n(n^2+1)}+\frac{n2^n}{(z-2i)^n}\right).$$

Решение

1) Рассмотрим правильную часть ряда Лорана $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{3^n(n^2+1)}$. Имеем

$$c_n=\frac{1}{3^n(n^2+1)},\ c_{n+1}=\frac{1}{3^{n+1}((n+1)^2+1)}.$$

Тогда по формуле (9.3) находим

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\left((n+1)^2+1\right)}{3^n(n^2+1)}=$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}=3.$$

Следовательно, правильная часть ряда Лорана сходится при $|z-2i|<3$.

2) Рассмотрим главную часть ряда Лорана $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{(z-2i)^n}$. Для нее имеем

$$c_{-n}=n2^n.$$

Тогда по формуле (9.2) находим

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n2^n} = 2 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 2.$$

Главная часть ряда Лорана сходится при $|z-2i|>2$

Итак, $r=2<R=3$. Следовательно, исходный ряд сходится в кольце $2<|z-2i|<3$.

Пример 5. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n z^n}$.

Решение. Имеем главную часть ряда Лорана $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n z^n}$. Тогда

$$c_{-n} = \frac{n!}{n^n};\ \ c_{-n-1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.$$

По формуле (9.2) находим

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{-n-1}}{c_{-n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Ряд сходится при $|z|>\frac{1}{e}$.

Пример 6. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{e^{in+1/2}}.$$

Решение

1) Рассмотрим главную часть ряда Лорана $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{(z-1)^n}$. Для нее имеем

$$c_{-n} = e^{in};\ \ c_{-n-1} = e^{i(n+1)}.$$

Тогда по формуле (9.2) находим

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{-n-1}}{c_{-n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{e^{i(n+1)}}{e^{in}}\right| = \left|e^{i}\right| = 1.$$

Главная часть ряда Лорана сходится при $|z-1| > 1$.

2) Рассмотрим правильную часть ряда Лорана $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{e^{in+1/2}}$. Для нее имеем

$$c_n = \frac{1}{e^{in+1/2}},\ c_{n+1} = \frac{1}{e^{i(n+1)+1/2}}.$$

Тогда по формуле (9.3) находим

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{e^{i(n+1)+1/2}}{e^{in+1/2}}\right| = \left|e^{i}\right| = 1.$$

Правильная часть ряда Лорана сходится при $|z-1| < 1$.

Следовательно, исходный ряд всюду расходится.

Разложение функций в ряд Лорана

Теорема Лорана. Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $r < |z-z_0| < R$, однозначно представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана (9.1), коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}\,d\varsigma\,, r < \rho < R. \tag{9.4}$$

Замечание. ***Рядом Лорана функции*** $\mathbf{f(z)}$ ***в окрестности точки*** $\mathbf{z} = \infty$ называется ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \tag{9.5}$$

сходящийся в некотором кольце $r < |z| < +\infty$ (окрестность бесконечно удаленной точки). При этом главной частью ряда Лорана является ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, а правильной частью ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$.

Пример 7. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z+3)}$$

в окрестности точки $z_0 = 2$.

Решение. Разложим правильную дробь в сумму простейших дробей:

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z+3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+3}.$$

Отсюда

$$A(z+3) + B(z-2) = 1.$$

Подставляя $z = 2$, находим $A = \frac{1}{5}$. Подставляя $z = -3$, находим $B = -\frac{1}{5}$. Имеем

$$f(z) = \frac{1}{5(z-2)} - \frac{1}{5(z+3)}.$$

Первое слагаемое уже имеет нужный вид, так как является степенью разности $(z-2)$. Преобразуем второе слагаемое:

$$\frac{1}{5(\mathrm{z}+3)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5+(\mathrm{z}-2)} = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{1+\frac{\mathrm{z}-2}{5}} = \frac{1}{25} \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} (-1)^{\mathrm{n}} \left(\frac{\mathrm{z}-2}{5}\right)^{\mathrm{n}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{5^{n+2}}.$$

Это правильная часть ряда Лорана, которая сходится при $\left|\frac{z-2}{5}\right| < 1$, то есть $|z-2| < 5$.

Главная часть ряда Лорана состоит из одного слагаемого $f_1(z) = \frac{1}{5(z-2)}$. Это функция, аналитическая при $|\mathrm{z}-2| > 0$.

Итак, ряд Лорана данной функции имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{5(z-2)} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-2)^n}{5^{n+2}}.$$

Ряд сходится в кольце $0 < |z-2| < 5$.

Пример 8. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z+3)}$$

в окрестности точки $z_0 = -3$.

Решение. Из предыдущего примера имеем

$$f(z) = \frac{1}{5(z-2)} - \frac{1}{5(z+3)}.$$

Второе слагаемое уже имеет нужный вид, так как является степенью разности $(z+3)$. Преобразуем первое слагаемое:

$$\frac{1}{5(z-2)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(z+3)-5} = -\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+3}{5}} =$$

$$= -\frac{1}{25} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+3}{5}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{5^{n+2}}.$$

Это правильная часть ряда Лорана, которая сходится при $\left|\frac{z+3}{5}\right| < 1$, то есть $|z+3| < 5$.

Главная часть ряда Лорана состоит из одного слагаемого $f_1(z) = -\frac{1}{5(z+3)}$. Это функция, аналитическая при $|z+3| > 0$.

Итак, ряд Лорана данной функции имеет вид

$$f(z) = -\frac{1}{5(z+3)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{5^{n+2}}.$$

Ряд сходится в кольце $0 < |z+3| < 5$.

Пример 8. Функция $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ аналитична в областях: 1) D_1: $|z|<1$; 2) D_2: $1<|z|<2$; 3) D_3: $|z|>3$. Разложить в каждой из этих областей f(z) в ряд по степеням z (для D_1 это будет ряд Тейлора).

Решение. Разложим правильную дробь в сумму простейших дробей:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}.$$

Отсюда

$$\mathrm{A}(\mathrm{z}-2)+\mathrm{B}(\mathrm{z}-1)=1.$$

Подставляя $z=1$, находим $A=-1$. Подставляя $z=2$, находим $B=1$. Имеем

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}.$$

Тогда

$$-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \text{ при } |z|<1;$$

$$-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} \text{ при } |z|>1;$$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \text{ при } |z|<2;$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} \text{ при } |z|>2.$$

Получим

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$$

при $z\in D_1$: $|z|<1$;

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

при $z \in D_2$: $1 < |z| < 2$;

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} - 1}{z^n}$$

при $z \in D_3$: $|z| > 2$.

Пример 9. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$ в окрестности точки $z_0 = 0$.

Решение. Воспользуемся разложением (3) из предыдущего раздела:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots.$$

Тогда

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^3} = \frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots}{z^3} =$$

$$= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2!z} + \frac{z}{4!} - \frac{z^3}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n-3}}{(2n)!} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2!z} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-3}}{(2n)!}, \; 0 < |z| < \infty.$$

Главная часть ряда Лорана состоит из двух слагаемых $f_1(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2!z}$. Правильная часть ряда Лорана имеем вид $f_2(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-3}}{(2n)!}$.

Пример 10. Разложить функцию $f(z) = z^2 e^{1/z}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$.

Решение. Сделаем замену $\frac{1}{z} = \eta$. Тогда точке $z_0 = \infty$ отвечает $\eta_0 = 0$. Функция примет вид $f(z) = f\left(\frac{1}{\eta}\right) = \frac{1}{\eta^2} e^{\eta}$. Используя разложение (1) из предыдущего раздела, получим

$$e^{\eta} = 1 + \eta + \frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^3}{3!} \ldots + \frac{\eta^n}{n!} + \cdots.$$

Тогда

$$f\left(\frac{1}{\eta}\right) = \frac{1}{\eta^2}\left(1 + \eta + \frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^3}{3!} \dots + \frac{\eta^n}{n!} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\eta} + \frac{1}{2!} + \frac{\eta}{3!} \dots + \frac{\eta^{n-2}}{n!} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\eta} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\eta^{n-2}}{n!} = \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\eta} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{(n-2)!}.$$

Возвращаясь к переменной z, получим

$$f(z) = z^2 + z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-2)! z^n},\ 0 < |z| < \infty.$$

Здесь главная часть ряда Лорана состоит из двух слагаемых $f_1(z) = z^2 + z$, а правильная часть имеет вид $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-2)! z^n}$.

Примеры для самостоятельного решения:

1. Найти область сходимости и сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1+i)^n}{(z+i)^{n+1}}$.
2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$.
3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(z-i)^n}{3^n(n+1)} + \frac{\sqrt{n}}{2^n(z-i)^n}\right)$.
4. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ в окрестности точки $z_0 = 1$.
5. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ в окрестности точки $z_0 = 3$.
6. Функция $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ аналитична в областях: 1) $D_1\colon |z| < 2$; 2) $D_2\colon 2 < |z| < 3$; 3) $D_3\colon |z| > 3$. Разложить в каждой из этих областей $f(z)$ в ряд по степеням z (для D_1 это будет ряд Тейлора).
7. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ в окрестности точки $z_0 = 0$.
8. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = z^3 e^{1/z}$ в окрестности точки $z_0 = 0$.

9. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ в окрестности точки $z_0 = \infty$.

10. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$ в окрестности точки $z_0 = \infty$.

Ответы:

1. $f(z) = \frac{1+i}{(z-1)^2}, |z+i| > \sqrt{2}$.
2. $2 < |z| < 4$.
3. $\frac{1}{2} < |z-i| < 3$.
4. $f(z) = -\frac{1}{2(z-1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+2}}, 0 < |z-1| < 2$.
5. $f(z) = \frac{1}{2(z-3)} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-3)^n}{2^{n+2}}, 0 < |z-3| < 2$.
6. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n$; 2) $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{z^n}$.
7. $\frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \cdots$.
8. $z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \cdots$.
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+1}}, |z| > 1$.
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-3}}{(2n)!}, |z| > 0$.

10. Нули функции. Изолированные особые точки

I. Нули функции

Пусть функция f(z) является аналитической в точке z_0.

Определение. Точка z_0 называется ***нулем n-го порядка функции*** $f(z)$, если

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Если $n = 1$, то точка z_0 называется простым нулем.

Точка z_0 является ***нулем n-го порядка функции*** $f(z)$, аналитической в точке z_0, тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности этой точки имеет место равенство

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Пример 1. Найти нули функции $f(z) = sin^2 z$ и определить их порядки.

Решение. Приравнивая $f(z)$ к нулю, получим $sin\, z = 0$, откуда $z_n = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Так как $f'(z_n) = 2\, sin\, \pi n \cdot cos\, \pi n = sin\, 2\pi n = 0$; $f''(z_n) = 2\, cos\, 2\pi n = 2 \neq 0$, то $z_n = \pi n$ являются нулями второго порядка.

Пример 2. Найти нули функции $f(z) = e^z - 1$ и определить их порядки.

Решение. Приравнивая $f(z)$ к нулю, получим $e^z = 1$, откуда $z = 2\pi n i, n \in \mathbb{Z}$.

Так как $f'(z_n) = e^{2\pi n i} = 1 \neq 0$, то $z_n = 2\pi n i$ являются простыми нулями.

Пример 3. Найти нули функции $f(z) = \frac{z^6}{z - \sin z}$ и определить их порядки.

Решение. Приравнивая $f(z)$ к нулю, находим $z_0 = 0$.

Используя разложение $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$, получим

$$f(z) = \frac{z^6}{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \cdots} = \frac{z^6}{z^3\left(\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \cdots\right)} = \frac{z^3}{\left(\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \cdots\right)}.$$

Положим $\varphi(z) = \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \cdots}$. Тогда $f(z) = z^3\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – функция, аналитическая в точке $z_0 = 0$, причем $\varphi(z_0) = 6 \neq 0$. Следовательно, точка $z_0 = 0$ является нулем 3-го порядка.

II. Изолированные особые точки

Определение. Точка z_0 называется ***правильной*** точкой для аналитической в области D функции $f(z)$, если существует степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ с радиусом сходимости $R(z_0)$ такой, что в общей части круга сходимости $|z - z_0| < R(z_0)$ и области D сумма этого ряда $\varphi_{z_0}(z)$ совпадает с $f(z)$. Точки, не являющиеся правильными, называются ***особыми***.

Определение. Точка z_0 называется ***изолированной особой точкой*** функции $f(z)$, если $f(z)$ однозначная аналитическая функция в кольце $0 < |z - z_0| < R$, а z_0 – особая точка.

Классификация изолированных особых точек

1. Устранимая особая точка

Определение. Изолированная особая точка z_0 называется ***устранимой особой точкой***, если существует конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Теорема 1. Для того чтобы точка z_0 была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы ряд Лорана функции $f(z)$ в точке z_0 не содержал главной части (то есть все коэффициенты c_n с отрицательными номерами равны 0).

2. Полюс

Определение. Изолированная особая точка z_0 называется ***полюсом***, если предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Для того чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Точку z_0 называют полюсом n-го порядка функции $f(z)$, если эта точка является нулем n-го порядка для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$. При $n = 1$ полюс называют простым.

Для того чтобы точка z_0 была полюсом n-го порядка функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n},$$

где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Теорема 2. Для того чтобы точка z_0 была полюсом n-го порядка функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в точке z_0 имела конечное число членов, не более n, причем $c_{-n} \neq 0$, то есть

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

3. Существенно особая точка

Определение. Изолированная особая точка z_0 называется ***существенно особой точкой***, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не существует.

Теорема 3. Для того чтобы точка z_0 была существенно особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в точке z_0 содержала бесконечно много членов.

Замечание. Исследование характера бесконечно удаленной точки удобно проводить заменой $z = \frac{1}{\eta}$, при этом $z_0 = \infty \Longrightarrow \eta_0 = 0$.

Пример 4. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{1}{(z^2+i)^3}$ и определить их характер.

Решение. Находим особые точки функции: $z^2 + i = 0$. Отсюда

$$z = \sqrt{-i} = \sqrt{e^{-\frac{\pi}{2}i}} = e^{\frac{\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)i}{2}},$$

где $k = 0, 1$.

Имеем $z_{k=0} = e^{-\frac{\pi}{4}i}$; $z_{k=1} = e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

Исследуем точку $z_{k=0} = e^{-\frac{\pi}{4}i}$. Представим функцию в виде

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+i)^3} = \frac{1}{\left(z-e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^3\left(z-e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^3} = \frac{\varphi(z)}{\left(z-e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^3},$$

где $\varphi(z) = \frac{1}{\left(z-e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^3}$ аналитична в точке $z_{k=0} = e^{-\frac{\pi}{4}i}$ и $\varphi\left(e^{-\frac{\pi}{4}i}\right) \neq 0$. Следовательно, $z_{k=0} = e^{-\frac{\pi}{4}i}$ является полюсом 3-го порядка.

Аналогично, записав функцию в виде $f(z) = \frac{\psi(z)}{\left(z-e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^3}$, где $\psi(z) = \frac{1}{\left(z-e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^3}$, заключаем, что $z_{k=1} = e^{\frac{3\pi}{4}i}$ является полюсом 3-го порядка.

Пример 5. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ и определить их характер.

Решение. Находим особые точки функции: $\sin z = 0$. Отсюда $z_n = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим функцию $\varphi(z) = \sin z$. Для нее $\varphi(z_n) = 0$; $\varphi'(z_n) = \cos z_n = (-1)^n \neq 0$. Следовательно, точки $z_n = \pi n$ являются простыми нулями функции $\varphi(z)$, а значит, $z_n = \pi n$ полюсы 1-го порядка функции $f(z)$.

Пример 6. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{z}{(z+1)^3(e^z-1)}$ и определить их характер.

Решение. Находим особые точки функции: $z + 1 = 0$; $e^z - 1 = 0$. Отсюда $z_1 = -1$; $z_n = 2\pi n i, n \in \mathbb{Z}$.

Исследуем характер точки $z_1 = -1$. Представим функцию в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z+1)^3}$, где $\varphi(z) = \frac{1}{e^z-1}$ аналитична в точке $z_1 = -1$ и $\varphi(z_1) \neq 0$. Следовательно, $z_1 = -1$ является полюсом 3-го порядка.

Исследуем характер точек $z_n = 2\pi n i$. Обозначим $\psi(z) = e^z - 1$. Так как $\psi(2\pi n i) = 0$; $\psi'(2\pi n i) = e^{2\pi n i} = 1 \neq 0$, то $z_n = 2\pi n i$ простые нули функции $\psi(z)$. Значит, $z_n = 2\pi n i$ полюсы 1-го порядка функции $f(z)$.

Пример 7. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{z(\pi-z)}{\sin 2z}$ и определить их характер.

Решение. Находим особые точки функции: $\sin 2z = 0$. Отсюда $z_n = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

При $n = 0$ точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой, так как

$\lim\limits_{z\to 0} \frac{z(\pi-z)}{\sin 2z} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\pi-z}{2} = \frac{\pi}{2}$ (используя первый замечательный предел).

При $n = 2$ точка $z_2 = \pi$ является устранимой особой точкой, так как

$\lim\limits_{z\to \pi} \frac{z(\pi-z)}{\sin 2z} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{z\to \pi} \frac{\left(z(\pi-z)\right)'}{(\sin 2z)'} = \lim\limits_{z\to \pi} \frac{(\pi-z)-z}{2\cos 2z} = \frac{\pi}{2}$ (используя правило Лопиталя).

Исследуем характер точек $z_n = \frac{\pi n}{2}, n \neq 0; n \neq 2$. Обозначим $\varphi(z) = sin\,2z$. Так как $\varphi\left(\frac{\pi n}{2}\right) = sin\,\pi n = 0$; $\varphi'\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 2\,cos\,\pi n = 2 \cdot (-1)^n \neq 0$, то $z_n = \frac{\pi n}{2}$ простые нули функции $\varphi(z)$. Значит, $z_n = \frac{\pi n}{2}, n \neq 0; n \neq 2$ полюсы 1-го порядка функции $f(z)$.

Пример 8. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{1 - cos\,z}{z^5}$ и определить их характер.

Решение. Находим особые точки функции: $z_0 = 0$. Раскладывая функцию $cos\,z$ в ряд Тейлора по степеням z, получим разложение в ряд Лорана исходной функции:

$$f(z) = \frac{1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right)}{z^5} = \frac{1}{z^5}\left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^3 2!} - \frac{1}{z4!} + \frac{z}{6!} - \cdots.$$

Так как главная часть ряда Лорана содержит конечное число членов, причем $c_{-3} = \frac{1}{2} \neq 0$, то $z_0 = 0$ полюс 3-го порядка функции $f(z)$.

Пример 9. Выяснить характер бесконечно удаленной точки для функции $f(z) = e^{-z}$.

Решение. Сделаем замену: $z = \frac{1}{\eta}$. Тогда $z_0 = \infty \Rightarrow \eta_0 = 0$. Раскладывая функцию $f\left(\frac{1}{\eta}\right)$ в ряд Лорана в точке $\eta_0 = 0$, получим

$$f\left(\frac{1}{\eta}\right) = e^{-\frac{1}{\eta}} = 1 - \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^2 2!} - \frac{1}{\eta^3 3!} + \cdots.$$

Так как главная часть ряда Лорана содержит бесконечно много членов, то $\eta_0 = 0$ является существенно особой точкой. Следовательно, $z_0 = \infty$ существенно особая точка функции $f(z)$.

Пример 10. Выяснить характер бесконечно удаленной точки для функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}} + 2z^2 - 5$.

Решение. Сделаем замену: $z = \frac{1}{\eta}$. Тогда $z_0 = \infty \Longrightarrow \eta_0 = 0$. Получим $f\left(\frac{1}{\eta}\right) = e^{\eta} + \frac{2}{\eta^2} - 5$. Раскладывая функцию e^{η} в ряд Лорана в точке $\eta_0 = 0$, получим

$$f\left(\frac{1}{\eta}\right) = 1 + \eta + \frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^3}{3!} + \cdots + \frac{2}{\eta^2} - 5 =$$

$$= \frac{2}{\eta^2} - 4 + \eta + \frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^3}{3!} + \cdots.$$

Так как главная часть ряда Лорана содержит только одно слагаемое, причем $c_{-2} = 2 \neq 0$, то $\eta_0 = 0$ является полюсом 2-го порядка. Следовательно, $z_0 = \infty$ полюс 2-го порядка функции $f(z)$.

Примеры для самостоятельного решения:

1. Найти нули функции $f(z) = z^4 + z^2$ и определить их порядки.
2. Найти нули функции $f(z) = z^2 \sin z$ и определить их порядки.
3. Найти нули функции $f(z) = \frac{z^6}{1+z-e^z}$ и определить их порядки.
4. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{1}{(z^2-i)^2}$ и определить их характер.
5. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)(z+2)^3}$ и определить их характер.
6. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{1}{z^3(1-\cos z)}$ и определить их характер.
7. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{\operatorname{tg}(z-1)}{z-1}$ и определить их характер.
8. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{\sin z}{z^5}$ и определить их характер.
9. Выяснить характер бесконечно удаленной точки для функции $f(z) = \cos z$.

10. Выяснить характер бесконечно удаленной точки для функции $f(z) = 1 - z + 2z^2$.

Ответы:

1. $z_0 = 0$ нуль 2-го порядка; $z_1 = i$ и $z_2 = -i$ простые нули.
2. $z_0 = 0$ нуль 3-го порядка; $z_n = \pi n$ $(n = \pm 1, \pm 2, \dots)$ простые нули.
3. $z_0 = 0$ нуль 4-го порядка.
4. $z_0 = e^{\frac{\pi}{4}i}$ и $z_1 = e^{\frac{5\pi}{4}i}$ полюсы 2-го порядка.
5. $z_0 = 0$ и $z_1 = 1$ полюсы 1-го порядка; $z_2 = -2$ полюс 3-го порядка.
6. $z_0 = 0$ полюс 5-го порядка; $z_n = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ полюсы 1-го порядка.
7. $z_0 = 1$ устранимая особая точка; $z_n = 1 + \frac{\pi(2n+1)}{2}, n \in \mathbb{Z}$, полюсы 1-го порядка.
8. $z_0 = 0$ полюс 4-го порядка.
9. Существенно особая точка.
10. Полюс 2-го порядка.

11. Вычеты функций

Пусть z_0 – изолированная особая точка однозначной аналитической функции $f(z)$.

Определение. ***Вычетом*** аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, обозначаемое символом $\underset{z_0}{res}\, f(z)$ и определяемое равенством

$$\underset{z_0}{res}\, f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz, \tag{11.1}$$

взятому в положительном направлении по любому лежащему в области аналитичности функции $f(z)$ замкнутому контуру γ, содержащему единственную особую точку z_0.

Замечание. Если z_0 – правильная или устранимая точка, то $\underset{z_0}{res}\, f(z) = 0$.

1. Пусть z_0 – полюс 1-го порядка функции $f(z)$. Тогда

$$\underset{z_0}{res}\, f(z) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z). \tag{11.2}$$

Замечание. Если $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0, \psi'(z_0) \neq 0$, то есть z_0 – полюс 1-го порядка функции $f(z)$. Тогда

$$\underset{z_0}{res}\, f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{11.3}$$

2. Пусть z_0 – полюс n-го порядка функции $f(z)$. Тогда

$$\underset{z_0}{res}\, f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z - z_0)^n f(z)]. \tag{11.4}$$

3. Пусть z_0 – существенно особая точка. Тогда

$$\underset{z_0}{res}\, f(z) = c_{-1}. \tag{11.5}$$

Пример 1. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{2}z^2}$ в ее особых точках.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \frac{\pi}{2}$.

В точке $z_1 = 0$ имеем

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z^2}{z^2\left(z - \frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z - \frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}.$$

Следовательно, $z_1 = 0$ является устранимой особой точкой, поэтому $\underset{0}{res}\, f(z) = 0$.

В точке $z_2 = \frac{\pi}{2}$ имеем $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z^2}{z^2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)} = \infty$. Следовательно, точка $z_2 = \frac{\pi}{2}$ полюс 1-го порядка функции $f(z)$. Тогда по формуле (11.2) получим

$$\underset{\frac{\pi}{2}}{res}\, f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2}\right) f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z^2}{z^2} = \frac{4}{\pi^2} \sin\frac{\pi^2}{4}.$$

Пример 2. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{1}{z^3(z^2+4)^2}$ в ее особых точках.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются точки: $z_1 = 0$ полюс 3-го порядка; $z_2 = 2i$ и $z_3 = -2i$ полюсы 2-го порядка.

В точке $z_1 = 0$ вычет находим по формуле (11.4) при $n = 3$:

$$\underset{0}{res}\, f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left[z^3 f(z)\right] = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{(z^2+4)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[\frac{-4z}{(z^2+4)^3}\right] = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{-4\left(z^2+4\right)^3 + 4z\cdot 3\left(z^2+4\right)^2\cdot 2z}{(z^2+4)^6} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{4\left(5z^2-4\right)}{(z^2+4)^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-16}{4^4} = -\frac{1}{32}.$$

В точке $z_2 = 2i$ вычет находим по формуле (11.4) при $n = 2$:

$$\underset{2i}{res} f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 2i} \frac{d}{dz} [(z - 2i)^2 f(z)] =$$

$$= \lim_{z \to 2i} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{z^3 (z+2i)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z \to 2i} [-3z^{-4}(z + 2i)^{-2} - 2(z + 2i)^{-3} z^{-3}] =$$

$$= \frac{-3}{-16 \cdot 16} + \frac{2}{-8i \cdot 64i} = \frac{4}{256} = \frac{1}{64}.$$

В точке $z_3 = -2i$ вычет находим по формуле (11.4) при $n = 2$:

$$\underset{-2i}{res} f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to -2i} \frac{d}{dz} [(z + 2i)^2 f(z)] =$$

$$= \lim_{z \to -2i} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{z^3 (z-2i)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z \to -2i} [-3z^{-4}(z - 2i)^{-2} - 2(z - 2i)^{-3} z^{-3}] = \frac{1}{64}.$$

Пример 3. Найти вычет функции $f(z) = cos\frac{1}{z}$ относительно точки $z_0 = 0$.

Решение. Разложение функции в ряд Лорана в точке $z_0 = 0$ имеет вид:

$$cos\frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{4! z^4} - \frac{1}{6! z^6} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)! z^{2n}} + \cdots.$$

Так как главная часть ряда Лорана содержит бесконечно много слагаемых, следовательно, $z_0 = 0$ существенно особая точка. Тогда по формуле (11.5) имеем

$$\underset{0}{res} f(z) = c_{-1} = 0.$$

Пример 4. Найти вычеты функции $f(z) = \operatorname{tg} z$ в ее особых точках.

Решение. Особыми точками функции будут $z_n = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Так как $\cos z_n = 0, \sin z_n \neq 0$, то это полюсы 1-го порядка. Тогда по формуле (11.3) имеем

$$\underset{z_n}{res} f(z) = \frac{\sin z_n}{(\cos z)'|_{z=z_n}} = \frac{\sin z_n}{-\sin z_n} = -1.$$

Вычет в бесконечно удаленной точке

Функция $f(z)$ аналитична в бесконечно удаленной точке $z = \infty$, если функция $f\left(\frac{1}{\eta}\right)$ аналитична в точке $\eta = 0$. Например, функция $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ аналитична в точке $z = \infty$, так как функция $f\left(\frac{1}{\eta}\right) = \sin\eta$ аналитична в точке $\eta = 0$.

Определение. Бесконечно удаленная точка $z = \infty$ комплексной плоскости называется ***изолированной особой точкой*** однозначной аналитической функции $f(z)$, если можно указать такое R, что вне круга $|z| > R$ функция $f(z)$ не имеет особых точек, находящихся на конечном расстоянии от $z = 0$.

Например, функция $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ имеет в бесконечности неизолированную особенность, так как полюсы $z_n = \pi n$ этой функции накапливаются в бесконечности при $n \to \infty$.

Пусть $z = \infty$ изолированная особая точка функции $f(z)$. Так как функция $f(z)$ аналитична в круговом кольце $R < |z| < \infty$, то ее можно разложить в ряд Лорана: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$.

Возможны следующие случаи:

1) Точка $z = \infty$ называется ***устранимой особой точкой*** функции $f(z)$, если ряд Лорана не содержит членов с положительными степенями z, то есть

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n},$$

или существует конечный предел $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = const$, не зависящий от способа предельного перехода.

Если $c_0 = c_{-1} = \dots = c_{-m+1} = 0, c_{-m} \neq 0$, то $z = \infty$ является нулем порядка m.

2) Точка $z = \infty$ называется ***полюсом m-го порядка*** функции $f(z)$, если ряд Лорана содержит конечное число m членов с положительными степенями z, то есть

$$f(z) = c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_1 z + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n},$$

или эта функция неограниченно возрастает по модулю при $z \to \infty$ независимо от предельного перехода.

3) Точка $z = \infty$ называется ***существенно особой точкой*** функции $f(z)$, если ряд Лорана содержит бесконечное число членов с положительными степенями z, то есть

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n,$$

или в зависимости от выбора последовательности $\{z_n\} \to \infty$ можно получить $\{f(z_n)\}$, сходящуюся к любому наперед заданному пределу.

Определение. ***Вычетом*** аналитической функции $f(z)$ ***в точке*** $z = \infty$ называется комплексное число $\underset{\infty}{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z) dz$, где γ – произвольный замкнутый контур, проходимый ***по часовой стрелке*** (так что окрестность точки $z = \infty$ остается слева), вне которого функция $f(z)$ является аналитической и не имеет особых точек, отличных от $z = \infty$.

Отсюда следует, что

$$\underset{\infty}{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} f(z) dz = -c_{-1}. \quad (11.6)$$

Пример 5. Найти вычет функции $f(z) = \frac{2z+1}{z}$ в бесконечности.

Решение. Имеем $f(z) = \frac{2z+1}{z} = 2 + \frac{1}{z}$. Это выражение можно рассматривать как лорановское разложение функции в окрестности бесконечно удаленной точки. Так как $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 2$, то $z = \infty$ является устранимой особой точкой, при этом $f(\infty) = 2$.

Здесь $c_{-1} = 1$, тогда $\underset{\infty}{res}\, f(z) = -1$.

Замечание. Вычет аналитической функции относительно бесконечно удаленной устранимой особой точки, в отличие от конечной особой устранимой точки, может оказаться отличным от нуля.

Пример 6. Найти вычет функции $f(z) = e^{1/z}$ в бесконечности.

Решение. Рассмотрим разложение функции в окрестности ∞:

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots.$$

Отсюда $z = \infty$ является устранимой особой точкой и $\underset{\infty}{res}\, f(z) = -c_{-1} = -1$.

Пример 7. Найти вычет функции $f(z) = \frac{z^4+z}{z^6-1}$ в бесконечности.

Решение. Сделаем замену $z = \frac{1}{\eta}$. Тогда $z = \infty \Longrightarrow \eta = 0$. Имеем

$$f\left(\frac{1}{\eta}\right) = \frac{\frac{1}{\eta^4}+\frac{1}{\eta}}{\frac{1}{\eta^6}-1} = \frac{\eta^2+\eta^5}{1-\eta^6} = \frac{\eta^2(1+\eta^3)}{1-\eta^6}.$$

Отсюда $\eta = 0$ является нулем 2-го порядка. Значит в лорановском разложении $c_{-1} = 0$.

Получим $\underset{\infty}{res}\, f(z) = 0$.

Пример 8. Найти вычет функции $f(z) = z\cos^2\frac{\pi}{z}$ в бесконечности.

Решение. Воспользуемся формулой понижения степени $\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$ и разложим косинус в ряд:

$$f(z) = z\frac{1+\cos\frac{2\pi}{z}}{2} = z\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{z}\right) =$$

$$= z\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2\pi)^2}{2!z^2}+\frac{(2\pi)^4}{4!z^4}-\cdots\right)\right) =$$

$$= z\left(1-\frac{\pi^2}{z^2}+\frac{2\pi^4}{z^4}-\cdots\right) = z-\frac{\pi^2}{z}+\frac{2\pi^4}{z^3}-\cdots.$$

Отсюда точка $z = \infty$ является полюсом 1-го порядка и $\underset{\infty}{res}\, f(z) = -c_{-1} = \pi^2$.

Примеры для самостоятельного решения:

1. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{z^2+4}{z-1}$ в ее особых точках.
2. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$ в ее особых точках.
3. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{z^3}{(z^2+1)^2}$ в ее особых точках.
4. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-1)}$ в ее особых точках.
5. Найти вычеты функции $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ относительно точки $z_0 = 0$.
6. Найти вычеты функции $f(z) = z^3\sin\frac{1}{z^2}$ в ее особых точках.
7. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{e^{iz}}{\sin z}$ в ее особых точках.
8. Найти вычет функции $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ в бесконечности.
9. Найти вычет функции $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$ в бесконечности.
10. Найти вычет функции $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$ в бесконечности.

Ответы:

1. $\underset{1}{res}\frac{z^2+4}{z-1}=5.$
2. $\underset{0}{res}\frac{\operatorname{tg} z}{z^2-\frac{\pi}{4}z}=0;\ \underset{\frac{\pi}{4}}{res}\frac{\operatorname{tg} z}{z^2-\frac{\pi}{4}z}=\frac{4}{\pi}.$
3. $\underset{i}{res}\frac{z^3}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{2};\ \underset{-i}{res}\frac{z^3}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{2}.$
4. $\underset{-1}{res}\frac{e^z}{(z+1)^3(z-1)}=-\frac{17}{54e};\ \underset{1}{res}\frac{e^z}{(z+1)^3(z-1)}=\frac{e}{8}.$
5. $\underset{0}{res}\, sin\frac{1}{z}=1.$
6. $\underset{0}{res}\, z^3\, sin\frac{1}{z^2}=0.$
7. $\underset{\pi n}{res}\frac{e^{iz}}{sin\, z}=1.$
8. $\underset{\infty}{res}\, sin\frac{1}{z}=-1.$
9. $\underset{\infty}{res}\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}=0.$
10. $\underset{\infty}{res}\frac{cos\, z}{z^3}=\frac{1}{2}.$

12. Теорема Коши о вычетах

Теорема 1 (Коши основная). Пусть функция $f(z)$ является аналитической всюду в замкнутой области $\overline{D}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_N$, лежащих внутри области D. Тогда

$$\int_{\Gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \underset{z_k}{res} f(z), \qquad (12.1)$$

где Γ^+ – полная граница области D, проходимая в положительном направлении (рис.12.1).

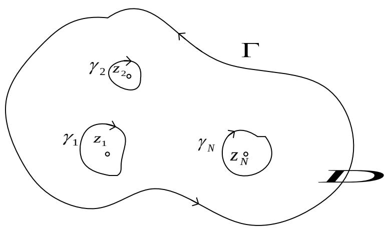

Рис. 12.1

Теорема 2. Пусть функция $f(z)$ является аналитической на полной комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_{N-1}$ и $z_N = \infty$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{N} \underset{z_k}{res} f(z) = 0. \qquad (12.2)$$

Пример 1. Используя теоремы о вычетах, вычислить интеграл $\int_C \frac{dz}{z^4+1}$, где C: $|z-1| = 1$.

Решение. Находим особые точки функции $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$:

$$z^4 = -1 \Longrightarrow z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{\pi i}} = e^{\frac{\pi+2\pi k}{4}i},$$

где $k = 0, 1, 2, 3$.

Это полюсы 1-го порядка. Так как внутри контура C находятся две особые точки (рис.12.2) $z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i}$ (при $k = 0$) и $z_2 = e^{\frac{7\pi}{4}i} = e^{-\frac{\pi}{4}i}$ (при $k = 3$), применяя первую теорему о вычетах, получим

$$\int_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\left(\underset{z_1}{res}\frac{1}{z^4+1} + \underset{z_2}{res}\frac{1}{z^4+1}\right).$$

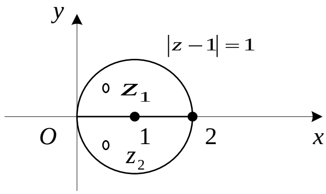

Рис. 12.2

Находим вычеты по формуле (11.3):

$$\underset{z_1}{res}\frac{1}{z^4+1} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=z_1} = \frac{1}{4e^{\frac{3\pi}{4}i}} = \frac{1}{4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{2(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})};$$

$$\underset{z_2}{res}\frac{1}{z^4+1} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=z_2} = \frac{1}{4e^{-\frac{3\pi}{4}i}} = \frac{1}{4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{2(-\sqrt{2}-i\sqrt{2})}.$$

Подставляя значения вычетов в формулу, получим

$$\int_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\left(\frac{1}{2(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})} + \frac{1}{2(-\sqrt{2}-i\sqrt{2})}\right) =$$

$$= \pi i \cdot \frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2-2i^2} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{2}i.$$

Пример 2. Используя теоремы о вычетах, вычислить интеграл $\int_C \frac{e^z\,dz}{z^2(z^2+9)}$, где C: $|z| = 1$.

Решение. Находим особые точки функции $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$: $z_1 = 0$ полюс 2-го порядка; $z_{2,3} = \pm 3i$ полюсы 1-го порядка. Так как внутри контура C находится только одна особая точка $z_1 = 0$, то, применяя первую теорему о вычетах, получим

$$\int_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \cdot \underset{0}{res} \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}.$$

Находим вычет по формуле (11.4) при $n = 2$:

$$\underset{0}{res} \frac{e^z}{z^2(z^2+9)} = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z^2+9}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z(z^2+9-2z)}{(z^2+9)^2} = \frac{1}{9}.$$

Тогда получим

$$\int_C \frac{e^z\,dz}{z^2(z^2+9)} = \frac{2\pi i}{9}.$$

Пример 3. Используя теоремы о вычетах, вычислить интеграл $\int_C \left(sin\frac{1}{z}\right)^n, n \in \mathbb{N}$, где C: $|z| = R$.

Решение. Функция $f(z) = \left(sin\frac{1}{z}\right)^n$ имеет существенно особую точку $z = 0$.

При $n = 1$ получим разложение подынтегральной функции в ряд Лорана

$$sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \cdots.$$

Отсюда $\underset{0}{res}\, sin\frac{1}{z} = c_{-1} = 1$. Тогда, применяя первую теорему о вычетах, получим

$$\int_C sin\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \cdot \underset{0}{res}\, sin\frac{1}{z} = 2\pi i.$$

При $n = 2, 3, \dots$ имеем $\underset{0}{res}\left(sin\frac{1}{z}\right)^n = 0$, так как разложение $\left(sin\frac{1}{z}\right)^n = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \cdots\right)^n$ не содержит z^{-1}, то есть $c_{-1} = 0$.

Тогда $\int_C \left(sin\frac{1}{z}\right)^n dz = 0$.

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\int_C \frac{1}{z-1} sin\frac{1}{z}dz, \text{ где } C: |z| = 2.$$

Решение. Так как внутри контура C функция $f(z) = \frac{1}{z-1} sin\frac{1}{z}$ имеет две особые точки $z_1 = 1$ и $z_2 = 0$, то по формуле (12.1) имеем

$$\int_C \frac{1}{z-1} sin\frac{1}{z}dz = 2\pi i\left(\underset{1}{res}\, f(z) + \underset{0}{res}\, f(z)\right).$$

Точка $z_1 = 1$ полюс 1-го порядка, следовательно, вычет находим по формуле (11.2):

$$\underset{1}{res}\, f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1} sin\frac{1}{z} = sin\,1.$$

Для определения характера особой точки $z_2 = 0$ разложим функция $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этой точки:

$$f(z) = -\frac{1}{1-z}\cdot sin\frac{1}{z} =$$

$$= -(1 + z + z^2 + \cdots)\cdot\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \cdots\right) =$$

$$= -\left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \cdots\right)\frac{1}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \cdots + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Таким образом, ряд Лорана содержит бесконечно много членов с отрицательными степенями z. Следовательно, точка $z_2 = 0$ является существенно особой точкой и поэтому

$$\underset{0}{res}\, f(z) = c_{-1} = -\left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \cdots\right) = -sin\,1.$$

Тогда

$$\int_C \frac{1}{z-1} sin\frac{1}{z}dz = 2\pi i(sin\,1 - sin\,1) = 0.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int_C \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$, где $C: |z| = 1; n \in \mathbb{N}; 0 \leq |a| < 1 < |b|$.

Решение. Функция $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n (z-b)^n}$ имеет две особые точки $z_1 = a$ и $z_2 = b$. Это полюсы n-го порядка. Внутри контура C лежит только точка $z_1 = a$, то по формуле (12.1) имеем

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^n} = 2\pi i \cdot \underset{a}{res}\, f(z).$$

Находим вычет по формуле (11.4):

$$\underset{a}{res}\, f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-a)^n f(z)\right) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{1}{(z-b)^n}\right).$$

Вычислим $(n-1)$ -ую производную функции $w = \frac{1}{(z-b)^n}$. Имеем

$$w' = ((z-b)^{-n})' = -n(z-b)^{-n-1};$$

$$w'' = -n(-n-1)(z-b)^{-n-2} = \frac{n(n+1)}{(z-b)^{n+2}};$$

$$w''' = -n(-n-1)(-n-2)(z-b)^{-n-3} = -\frac{n(n+1)(n+2)}{(z-b)^{n+3}};$$

И так далее, получим для $(n-1)$-ой производной

$$w^{(n-1)} = (-1)^n \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(2n-2)}{(z-b)^{2n-1}}.$$

Тогда

$$\underset{a}{res}\, f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} (-1)^n \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(2n-2)}{(z-b)^{2n-1}} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(2n-2)}{(a-b)^{2n-1}}.$$

Окончательно получим

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^n} = 2\pi i \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(2n-2)}{(a-b)^{2n-1}}.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int_C \left(\sin\frac{1}{z^2} + e^{z^2}\cos z\right)dz$, где $C: |z| = \frac{2}{3}$.

Решение. Особой точкой функции $f(z) = \sin\frac{1}{z^2} + e^{z^2}\cos z$ является точка $z_0 = 0$, лежащая внутри области, ограниченной контуром C. Для определения характера этой точки разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$, используя разложения синуса, косинуса и экспоненты:

$$f(z) = \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!\,z^6} + \cdots\right) +$$

$$+\left(1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \cdots\right)\cdot\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!z^6} + \cdots\right) + 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \cdots.$$

Отсюда видно, что ряд Лорана содержит бесконечно много членов с отрицательными степенями z, значит, $z_0 = 0$ является существенно особой точкой. Находим вычет в этой точке

$$\underset{0}{res}\, f(z) = c_{-1} = 0.$$

Тогда

$$\int_C \left(\sin\frac{1}{z^2} + e^{z^2}\cos z\right)dz = 2\pi i \cdot \underset{0}{res}\, f(z) = 0.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int_C \frac{z^3}{2z^4+1}dz$, где $C: |z| = 1$.

Решение. Функция $f(z) = \frac{z^3}{2z^4+1}$ имеет внутри окружности $|z| = 1$ четыре особые точки $z_k = \sqrt[4]{-\frac{1}{2}}$, являющиеся полюсами 1-го порядка. Для вычисления данного интеграла удобно использовать формулу (12.2):

$$\sum_{k=1}^{4} \underset{z_k}{res}\, f(z) + \underset{\infty}{res}\, f(z) = 0.$$

Следовательно,

$$\int_C \frac{z^3}{2z^4+1}dz = 2\pi i\left(-\underset{\infty}{res}\,f(z)\right).$$

Для нахождения вычета функции в бесконечно удаленной точке сделаем замену $z = \frac{1}{\eta}$ и разложим функцию $f\left(\frac{1}{\eta}\right)$ в ряд Лорана в окрестности точки $\eta = 0$:

$$f\left(\frac{1}{\eta}\right) = \frac{\frac{1}{\eta^3}}{\frac{2}{\eta^4}+1} = \frac{\eta}{2+\eta^4} = \frac{\eta}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\eta^4}{2}} = \frac{\eta}{2}\left(1-\frac{\eta^4}{2}+\frac{\eta^8}{2^2}-\cdots\right) =$$
$$= \frac{\eta}{2}-\frac{\eta^5}{2^2}+\frac{\eta^9}{2^3}-\cdots.$$

Отсюда $f(z) = \frac{1}{2z}-\frac{1}{2^2z^5}+\frac{1}{2^3z^9}-\cdots$. Ряд Лорана не содержит положительных степеней z, следовательно, $z = \infty$ является устранимой особой точкой. Тогда $\underset{\infty}{res}\,f(z) = -c_{-1} = -\frac{1}{2}$.

Окончательно получим

$$\int_C \frac{z^3}{2z^4+1}dz = 2\pi i\cdot\frac{1}{2} = \pi i.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int_C \frac{z^9}{(z^2+1)^2(z^2+2)^3}dz$, где $C{:}\ |z| = 3$.

Решение. Функция $f(z) = \frac{z^9}{(z^2+1)^2(z^2+2)^3}$ имеет внутри окружности $|z| = 3$ четыре особые точки z_k, являющиеся кратными полюсами. Для вычисления данного интеграла удобно использовать формулу (12.2):

$$\sum_{k=1}^{4}\underset{z_k}{res}\,f(z) + \underset{\infty}{res}\,f(z) = 0.$$

Следовательно,

$$\int_C \frac{z^9}{(z^2+1)^2(z^2+2)^3}dz = 2\pi i\left(-\underset{\infty}{res}\,f(z)\right).$$

Находим вычет функции в бесконечно удаленной точке:

$$f(z) = \frac{z^9}{(z^2+1)^2(z^2+2)^3} = \frac{z^9}{z^4\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^2 \cdot z^6\left(1+\frac{2}{z^2}\right)^3} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^2\left(1+\frac{2}{z^2}\right)^3}.$$

Отсюда видно, что правильная часть лорановского разложения этой функции в окрестности бесконечно удаленной точки начинается с члена $\frac{1}{z}$. Тогда $\underset{\infty}{res}\, f(z) = -1$. Таким образом,

$$\int_C \frac{z^9}{(z^2+1)^2(z^2+2)^3} dz = 2\pi i.$$

Примеры для самостоятельного решения:

1. Вычислить интеграл $\int_C z \operatorname{tg} z\, dz$, где C: $|z| = 1$.
2. Вычислить интеграл $\int_C \frac{z^2}{(z^2+1)^2} dz$, где C: $|z - i| = 1$.
3. Вычислить интеграл $\int_C \frac{e^z}{z^3(z+1)} dz$, где C: $|z| = 2$.
4. Вычислить интеграл $\int_C \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} dz$, где C: $|z - i| = 3$.
5. Вычислить интеграл $\int_C z^2 \sin\frac{1}{z} dz$, где C: $|z| = \frac{1}{2}$.
6. Вычислить интеграл $\int_C \frac{\sin \pi z}{z^2-z} dz$, где C: $|z| = \sqrt{3}$.
7. Вычислить интеграл $\int_C (z+1)e^{1/z} dz$, где C: $|z| = \frac{1}{3}$.
8. Вычислить интеграл $\int_C \frac{dz}{1+z^{12}}$, где C: $|z| = 2$.
9. Вычислить интеграл $\int_C \frac{e^z}{z-1} dz$, где C: $|z| = 3$.
10. Вычислить интеграл $\int_C \frac{z^9}{z^{10}-1} dz$, где C: $|z| = 3$.

Ответы:

1. 0.
2. $\frac{\pi}{2}$.
3. $(1 - 2e^{-1})\pi i$.
4. $2(1 - e^{-1})\pi i$.
5. $-\frac{\pi i}{3}$.
6. 0.
7. $3\pi i$.
8. 0.
9. $2\pi i e$.
10. $2\pi i$.

13. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов

I. Интегралы вида $\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi$, где R – рациональная функция

Сводятся к контурным интегралам с помощью замены: $z = e^{i\varphi}$. Очевидно, что $|z| = 1, 0 \le \varphi \le 2\pi$ и точка z один раз опишет окружность против часовой стрелки. Тогда $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$. Отсюда $d\varphi = \frac{dz}{iz}$.

Имеем

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{2}(z + z^{-1}) = \frac{z^2+1}{2z};$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{2i}(z - z^{-1}) = \frac{z^2-1}{2iz}. \qquad (13.1)$$

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+a\cos x}$, $|a| < 1$.

Решение. Сделаем замену $z = e^{ix}; dx = \frac{dz}{iz}; \cos x = \frac{z^2+1}{2z}$. Получим

$$I = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{1+\frac{a(z^2+1)}{2z}} \frac{dz}{z} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{az^2+2z+a}.$$

Находим особые точки подынтегральной функции: $z_{1,2} = -\frac{1}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{a^2-1}}$ (полюсы 1-го порядка). Так как $z_1 \cdot z_2 = 1$, то лишь одна из этих точек лежит внутри круга $|z| = 1$. Это точка $z_1 = -\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2-1}}$.

Тогда по основной теореме Коши о вычетах получим

$$I = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \underset{z_1}{res} \frac{1}{az^2+2z+a} =$$

$$= 4\pi \cdot \lim_{z \to z_1} \left((z - z_1) \cdot \frac{1}{a(z-z_1)(z-z_2)} \right) =$$

$$= 4\pi \cdot \frac{1}{a(z_1 - z_2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos x \, dx}{1 - 2\sin x + a^2}, \ 0 < a < 1.$$

Решение. Сделаем замену

$$z = e^{ix}; dx = \frac{dz}{iz}; \cos x = \frac{z^2+1}{2z}; \ \sin x = \frac{z^2-1}{2iz}.$$

Получим

$$I = \int_{|z|=1} \frac{(z^2+1)dz}{2z \cdot iz\left(1 - 2a\frac{(z^2-1)}{2iz} + a^2\right)} = -\frac{1}{2a}\int_{|z|=1} \frac{(z^2+1)dz}{z\left(z^2 - \frac{a^2+1}{a}iz - 1\right)}.$$

Находим особые точки подынтегральной функции

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z\left(z^2 - \frac{a^2+1}{a}iz - 1\right)}:$$

$$z_1 = 0;$$

$$Z_{2,3} = \frac{\frac{a^2+1}{a}i \pm \sqrt{-\left(\frac{a^2+1}{a}\right)^2 + 4}}{2} = \frac{\frac{a^2+1}{a}i \pm \sqrt{4 - \frac{a^4+2a^2+1}{a^2}}}{2} =$$

$$= \frac{\frac{a^2+1}{a}i \pm \sqrt{-\frac{(a^2-1)^2}{a^2}}}{2} = \frac{\frac{a^2+1}{a}i \pm i\frac{|a^2-1|}{|a|}}{2} = \frac{(a^2+1)i \pm i(1-a^2)}{2a},$$

так как $0 < a < 1$. Отсюда

$$z_2 = \frac{(a^2+1)i - i(1-a^2)}{2a} = ai; \ z_3 = \frac{(a^2+1)i + i(1-a^2)}{2a} = \frac{i}{a}.$$

Это полюсы 1-го порядка. Так как $0 < a < 1$, то внутри круга $|z| = 1$ лежат точки $z_1 = 0$ и $z_2 = ai$.

Тогда по основной теореме Коши о вычетах получим

$$I = -\frac{1}{2a} \cdot 2\pi i \left(\underset{z_1}{res}\, f(z) + \underset{z_2}{res}\, f(z) \right).$$

Находим вычеты функции в этих точках:

$$\underset{z_1}{res}\, f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z^2+1}{z^2 - \frac{a^2+1}{a} i z - 1} = -1;$$

$$\underset{z_2}{res}\, f(z) = \lim_{z \to z_2} \left((z - z_2) \cdot \frac{z^2+1}{z(z-z_2)(z-z_3)} \right) =$$

$$= \lim_{z \to ai} \frac{z^2+1}{z\left(z - \frac{i}{a}\right)} = \frac{-a^2+1}{ai\left(ai - \frac{i}{a}\right)} = 1.$$

Окончательно получим

$$I = -\frac{1}{2a} \cdot 2\pi i(-1+1) = 0.$$

II. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Лемма 1. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости $Im\, z > 0$ всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и существуют положительные числа R_0, M, δ такие, что для всех $|z| > R_0$ выполняется $|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$. Тогда

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R'} f(z)dz = 0,$$

где контур C_R' — полуокружность $|z| = R$, лежащая в верхней полуплоскости (рис.13.1).

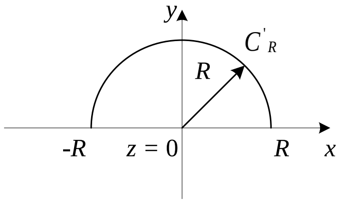

Рис. 13.1

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$, заданная на всей действительной оси $-\infty < x < +\infty$, может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость $Im\, z \geq 0$, причем ее аналитическое продолжение, функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы 1 и не имеет особых точек на действительной оси. Тогда существует несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \underset{z_k}{res}\, f(z), \qquad (13.2)$$

где z_k — особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости.

Замечание. Если $f(x)$ четная функция и удовлетворяет условиям теоремы 1, то

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx. \qquad (13.3)$$

Пример 3. Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$, которая на действительной оси, то есть при $z = x$, совпадает с $f(x) = \frac{1}{x^4+1}$. Функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и имеет в верхней полуплоскости особые точки $z_{0,1} = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}$, где $k = 0, 1$. Это полюсы 1-го порядка. Тогда по формуле (13.2) получим

$$I = 2\pi i\left(\underset{z_0}{res}\frac{1}{z^4+1} + \underset{z_1}{res}\frac{1}{z^4+1}\right) =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{i\pi/4}} + \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{i3\pi/4}}\right) = \frac{2\pi i}{4}\left(\frac{1}{e^{i3\pi/4}} + \frac{1}{e^{i9\pi/4}}\right) =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left(\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $I = \int_0^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a > 0$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}$ является четной, то по замечанию имеем

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$, которая на действительной оси, то есть при $z = x$, совпадает с $f(x)$. Функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и имеет в верхней полуплоскости особую точку $z = ai$, полюс 2-го порядка. Тогда по формуле (13.2) получим

$$I = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\,\underset{ai}{res}\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2} = \pi i\lim_{z\to ai}\left((z-ai)^2\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}\right)' =$$

$$= \pi i\lim_{z\to ai}\left(\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right)' = \pi i\lim_{z\to ai}\frac{2z(z+ai)^2 - z^2\cdot 2(z+ai)}{(z+ai)^4} =$$

$$= \pi i\lim_{z\to ai}\frac{2zai}{(z+ai)^3} = \pi i\cdot\frac{2a^2i^2}{(2ai)^3} = \frac{\pi}{4a}.$$

III. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)dx$, где $a > 0$

Лемма 2 (Жордана). Пусть функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости $Im\, z > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и равномерно относительно $\arg z$ $(0 \le \arg z \le \pi)$ стремится к нулю при $|z| \to \infty$. Тогда при $a > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R'} e^{iaz} f(z)dz = 0,$$

где C_R' — дуга полуокружности $|z| = R$ в верхней полуплоскости.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$, заданная на действительной оси $-\infty < x < +\infty$, может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость $Im\, z \ge 0$, а ее аналитическое продолжение $f(z)$ в верхней полуплоскости удовлетворяет условиям леммы Жордана и не имеет особых точек на действительной оси. Тогда при $a > 0$ существует несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \underset{z_k}{res}\left[e^{iaz} f(z)\right], \qquad (13.4)$$

где z_k — особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости.

Замечание 1. Если $f(x)$ четная функция, то

$$\int_0^{+\infty} f(x) \cos ax\, dx = \pi \cdot Re\left[i \sum_{k=1}^{N} \underset{z_k}{res}\left(e^{iaz} f(z)\right)\right] =$$
$$= -\pi \cdot Im\left[\sum_{k=1}^{N} \underset{z_k}{res}\left(e^{iaz} f(z)\right)\right].$$

Замечание 2. Если $f(x)$ нечетная функция, то

$$\int_0^{+\infty} f(x) \sin ax\, dx = \pi \cdot Re\left[\sum_{k=1}^{N} \underset{z_k}{res}\left(e^{iaz} f(z)\right)\right].$$

Пример 5. Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \mu x}{x^2 + a^2} dx,\ \mu > 0, a > 0.$$

Решение. Подынтегральная функция является действительной частью функции $f(x) = \frac{e^{i\mu x}}{x^2+a^2}$, значения которой совпадают со значениями на действительной оси функции $f(z) = \frac{e^{i\mu z}}{z^2+a^2}$. Функция $F(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$ имеет в верхней полуплоскости полюс первого порядка в точке $z_0 = ia$ и $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$, то есть выполнены все условия теоремы 2, поэтому

$$I = Re\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\mu x}}{x^2+a^2}dx = Re\left[2\pi i \cdot \underset{z_0}{res}\frac{e^{i\mu z}}{z^2+a^2}\right] =$$

$$= Re\left[2\pi i \cdot \left.\frac{e^{i\mu z}}{2z}\right|_{z=ia}\right] = Re\left[2\pi i \cdot \frac{e^{-\mu a}}{2ia}\right] = \frac{\pi}{a}e^{-\mu a}.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+x+1}dx$.

Решение. Подынтегральная функция является действительной частью функции $f(x) = \frac{xe^{ix}}{x^2+x+1}$, значения которой совпадают со значениями на действительной оси функции $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2+z+1}$. Функция $F(z) = \frac{z}{z^2+z+1}$ имеет в верхней полуплоскости полюс первого порядка в точке $z_0 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$, то есть выполнены все условия теоремы 2, поэтому

$$I = Re\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+x+1}dx = Re\left[2\pi i \cdot \underset{z_0}{res}\frac{ze^{iz}}{z^2+z+1}\right] =$$

$$= Re\left[2\pi i \cdot \left.\frac{ze^{iz}}{2z+1}\right|_{z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right] = Re\left[2\pi i \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{-\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{-1+i\sqrt{3}+1}\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot Re\left[\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(cos\frac{1}{2} - i\,sin\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}\,sin\frac{1}{2} - cos\frac{1}{2}\right).$$

Пример 7. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+b^2} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

Решение. Подынтегральная функция является четной, тогда

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+b^2} dx.$$

Подынтегральная функция является мнимой частью функции $f(x) = \frac{xe^{iax}}{x^2+b^2}$, значения которой совпадают со значениями на действительной оси функции $f(z) = \frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}$. Функция $F(z) = \frac{z}{z^2+b^2}$ имеет в верхней полуплоскости полюс первого порядка в точке $\mathrm{z}_0 = \mathrm{bi}$ и $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$, то есть выполнены все условия теоремы 2, поэтому

$$I = \frac{1}{2} Im \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{iax}}{x^2+b^2} dx = \frac{1}{2} Im \left[2\pi i \cdot \underset{z_0}{res} \frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2} \right] =$$

$$= \pi \cdot Im \left[i \cdot \frac{ze^{iaz}}{2z} \Big|_{z=bi} \right] = \pi \cdot Im \left[\frac{-be^{-ab}}{2bi} \right] =$$

$$= \pi \cdot Im \left[\frac{i}{2} e^{-ab} \right] = \frac{\pi}{2} e^{-ab}.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx\,, \;\; \alpha > 0.$

Решение. Подынтегральная функция является четной, тогда

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{1}{2} Im \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x} dx.$$

Обозначим $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x} dx$. Этот интеграл имеет смысл как главное значение несобственного интеграла второго рода:

$$I_1 = V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x} dx = \lim_{\substack{\rho\to 0 \\ R\to\infty}} \left\{ \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{\alpha x}}{x} dx + \int_{\rho}^{R} \frac{e^{\alpha x}}{x} dx \right\}.$$

Рассмотрим в верхней полуплоскости $Im\, z \geq 0$ замкнутый контур (рис.13.2)

$$\Gamma = \{[-R, -\rho];\ |z| = \rho;\ [\rho,\ R];\ |z| = R\}.$$

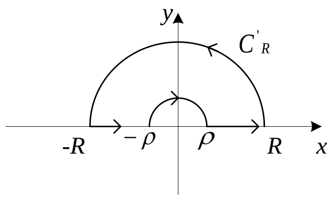

Рис. 13.2

Функция $f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{z}$ является аналитическим продолжением в верхнюю полуплоскость $Im\, z > 0$ функции $f(x) = \frac{e^{\alpha x}}{x}$, заданной на положительной части действительной оси $0 < x < +\infty$, в области, ограниченной контуром Г, особых точек не имеет. Поэтому по теореме Коши получим

$$\int_\Gamma f(z)dz =$$

$$= \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{\alpha x}}{x} dx + \int_\rho^R \frac{e^{\alpha x}}{x} dx + \int_{C_\rho'^-} \frac{e^{\alpha z}}{z} dz + \int_{C_R'^+} \frac{e^{\alpha z}}{z} dz = 0. \quad (13.5)$$

В силу леммы Жордана последнее слагаемое $\int_{C_R'^+} \frac{e^{\alpha z}}{z} dz \to 0$ при $R \to \infty$.

Рассмотрим третье слагаемое и сделаем замену переменной $z = \rho e^{i\varphi}$, учитывая, что полуокружность проходится в отрицательном направлении (против часовой стрелки), получим

$$\int_{C_\rho'^-} \frac{e^{\alpha z}}{z} dz = \int_\pi^0 \frac{e^{i\alpha\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}}{\rho e^{i\varphi}} i\rho e^{i\varphi} d\varphi =$$

$$= i\int_\pi^0 e^{i\alpha\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} d\varphi.$$

Подынтегральная функция здесь является непрерывной функцией параметра ρ и при $\rho \to 0$ ее предел равен 1. Поэтому

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho'^-}\frac{e^{\alpha z}}{z}dz=-i\pi.$$

Переходя в равенстве (13.5) к пределу при $\rho \to 0$ *и* $R \to \infty$, получим

$$I_1 = V.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\alpha x}}{x}dx = i\pi.$$

Отсюда

$$I=\frac{1}{2}Im\,I_1=\frac{\pi}{2},\ \alpha>0.$$

При $\alpha < 0$ имеет место формула $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=-\frac{\pi}{2}$.

Примеры для самостоятельного решения:

1. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin x+2}$.
2. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\cos x},\ a>1$.
3. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)^2}, a>b>0$.
4. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$.
5. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.
6. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, a>0,\ b>0$.
7. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2-2x+2}dx$.
8. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx$.
9. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}dx$.
10. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\mu x}{x^2+a^2}dx,\ \mu>0, a>0$.

Ответы:

1. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.
2. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.
3. $\frac{2\pi a}{\sqrt{(a^2-b^2)^3}}$.
4. $\frac{\pi}{2}$.
5. $\sqrt{2}\pi$.
6. $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$.
7. $e^{-1}\pi \sin 1$.
8. $\frac{\pi}{2} e^{-4}(\sin 2 + 2\cos 2)$.
9. $\frac{\pi}{6} e^{-3}$.
10. $\frac{\pi}{2} e^{-\mu a}$.

Библиографический список

1. Волковыский Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: Учебное пособие для вузов / Волковыский Л.И. Лунц Г.Л., Араманович И.Г. – 4-е изд., перераб. - М.: Физматлит, 2002. – 302 с.

2. Краснов М.Л., Киселев И.А., Макаренко Г.И., Функции комплексного переменного: Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие, изд.3-е, испр. – М.Едиториал УРСС, 2003. – 208 с.

3. Сборник задач по математике для втузов: В 4 ч.: Учебное пособие. Ч.2: Специальные разделы математического анализа / Болгов В. А. [и др.]; Под общ.ред. Ефимов А. В., Демидович Б. П. - М.: Наука, 1995. – 368с.

4. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной: Учеб.: Для вузов. – 6-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 336 с.

5. Шведенко С.В. Начала математического анализа на комплексной плоскости: Курс лекций: Учебное пособие для студентов вузов/Шведенко Сергей Владимирович, Федеральное агенство по образованию; МИФИ (Технический университет). – М.: МИФИ, 2006. – 328 с.