

## Вопросы и задачи к зачету по курсу «Квантовая механика»

Дана волновая функция  $\psi(x)$ . Отнормируйте и нарисуйте график плотности вероятности величины  $x$

1.  $\psi(x) = \theta(x + L/2) - \theta(x - L/2)$

2. 
$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ x + a & -a < x < 0 \\ -x + a & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

3.  $\psi(x) = \frac{1+i}{x^2+a^2}$

4.  $\psi(x) = \frac{1+e^{i\pi/4}}{\sqrt{x^2+a^2}}$

5.  $\psi(x) = \frac{x}{x^2+a^2}$

6.  $\psi(x) = \sinh \alpha (x - x_0) \cosh^{-2} \alpha (x - x_0)$

7.  $\psi(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{x^2+a^2}}$

8.  $\psi(x) = \frac{\exp ik_1 x + \exp ik_2 x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

9.  $\psi(x) = \exp \left\{ i \frac{(x-x_1)^2}{a^2} - \frac{(x-x_2)^2}{b^2} + icx \right\}$

10.  $\psi(x) = \exp \left\{ -e^{i\pi/4} \frac{(x-x_2)^2}{b^2} + icx \right\}$

11. Найдите собственные функции оператора импульса в координатном представлении, Отнормируйте их.

12. Вычислите коммутатор  $[\hat{p}\hat{x}] = \hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p}$

13. Напишите собственные функции оператора импульса в импульсном представлении

14. Напишите уравнение Шредингера для свободной частицы в импульсном представлении

15. Как найти  $\psi(p)$ , если известна  $\psi(x)$ . Запишите связь в обычных обозначениях и обозначениях

Дирака. Докажите, что нормировка сохраняется  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(p)|^2 dp$

В следующих примерах найдите  $\psi(p)$  по данным  $\psi(x)$ , предварительно отнормировав  $\psi(x)$ .

Найдите связь ширины в  $x$  и  $p$  представлениях

16.  $\psi(x) \sim \theta(x + L/2) - \theta(x - L/2)$

17.  $\psi(x) \sim \sin \frac{\pi x}{L}, x \in [0, L]$

18.  $\psi(x) \sim \frac{1}{(x-x')^2+a^2}$

19.  $\psi(x) \sim \exp\{-u|(x-x')|\}$

20.  $\psi(x) \sim \exp\left\{-\frac{x^2}{4b^2}\right\}$

21. Дайте определение оператора производной физической величины по времени. Выведите выражение для него.

22. Как по волновой функции  $\psi(a)$  найти функцию  $\psi(b)$ . Запишите в обычных обозначениях и обозначениях Дирака

23. Дайте определение самосопряженного, или эрмитового оператора
24. Докажите, что если операторы имеют общие собственные функции, то они коммутируют.
25. Докажите, что оператор импульса эрмитов.
26. Определение матрицы оператора в каком-либо представлении. Запись в обычных и Дираковских обозначениях. Докажите матричность произведения.
27. Общий вид оператора в  $x$  представлении. Как записать операторы: единичный, координаты и импульса в матричном виде в  $x$  представлении.
28. Как связаны  $\psi_x(p)$  и  $\psi_p(x)$  или вообще  $\psi_a(b)$   $\psi_b(a)$  . Запишите в обозначениях Дирака
29. Почему замена представления осуществляется унитарным оператором.
30. Как выглядит оператор в своем собственном представлении.
31. Два определения функции от оператора. Докажите эквивалентность
32. Уравнение Шредингера. Стационарные состояния. Матрицы операторов в энергетическом представлении.
33. Найдите решение начальной задачи для нестационарного уравнение Шредингера для свободного движения. С какой скоростью распространяется огибающая и заполнение широкого волнового пакета.
34. Из общего решения нестационарного уравнение Шредингера для свободного движения оцените время применимости классического описания.
35. Дайте определение оператора эволюции  $\hat{U}(t)$ . Докажите его унитарность.
36. Найдите оператор эволюции в энергетическом представлении.
37. Гейзенберговские уравнения движения.
38. Коммутационные соотношения для гейзенберговских операторов.
39. На примере свободного движения покажите эквивалентность подходов Шредингера и Гейзенберга.