Лекция 1. Вопрос 1. Матрицы, осн. действия над матрицами

Матрицей $A_{m\times n}$ наз-ся прямоугольная таблица из чисел, где m строк и n столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \text{ - наз-ся элементом матрицы.}$$

Если $m = n$, матрица наз-ся квадратной.

Специальные виды матриц.

Диагональная $\quad a_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$

Частный случай единичная: все $\lambda_i = 1$

Верхняя треугольная матрица: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

Симметричная

$a_{ij} = a_{ji}$

Операция замены строк столбцами наз-ся транспонированием. При этом:

$a_{ij} = a_{ji}$, $A \to A^T$

Для симметричных матриц $A = A^T$

Эрмитова

Операция $A \to \bar{A}^T$ наз-ся эрмитовым сопряжением $\bar{A}^T \equiv A^+$. При этом $(a^+)_{ij} = \bar{a}_{ji}$.

Если $A = A^+$, то матрица наз-ся эрмитовой. Для неё всегда $a_{ii} \in R$.

В случае, когда $a_{ij} = -a_{ji}$ матрица наз-ся антисимметричной. Для неё всегда $a_{ii} = 0$

когда $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$, матрица антиэрмитова.

Матрицы A и B наз-ся равными, если у них одинаково кол-во строк и столбцов и $a_{ij} = b_{ij}$

Операции над матрицами.

1) Умножение матрицы на число.

Все элементы матрицы умножаются на это число: $(\alpha \cdot A)_{ij} = \alpha a_{ij}$

2) Суммой двух матриц порядка $m\times n$ наз-ся матрица порядка $m\times n$, каждый элемент которой представлен в виде суммы соответствующих элементов слагаемых матриц

$C_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Прямой суммой двух квадратных матриц $A_{m\times m}$ и $B_{n\times n}$ наз-ся матрица $C_{m+n \times m+n}$ по строению: $C = A \oplus B = \begin{pmatrix} \boxed{A}_m & 0 \\ 0 & \boxed{B}_n \end{pmatrix}$

Произведение матриц.

Произведение AB определено, если число строк B равно числу столбцов A. ($A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$)

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на матрицу $B_{n\times p}$ наз-ся матрица $C_{m\times p}$, такая, что $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$

Частный случай: (строка $1\times n$) $\times$ $\begin{pmatrix}\text{столбец} \\ n\times 1\end{pmatrix}$ = число

$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}^T \vec{b}$ - запись скал. произведения в матричной форме.

Свойства произведения.

1) Некоммутативность

В общем случае $AB \neq BA$, но $AB = BA$, если одна из них диагональная, а вторая квадратная.

Пусть D - диагональная матрица.

$$(DA)_{ij} = \sum_k d_{ik} \cdot a_{kj} = \sum_k \lambda_i \delta_{ik} a_{kj} \xlongequal[k=i]{\neq 0 \text{ только когда}} \lambda_i a_{ij}$$

$$(AD)_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot d_{kj} = \sum_k a_{ik} \cdot \lambda_i \delta_{kj} \xlongequal[k=j]{\neq 0 \text{ только когда}} \lambda_i a_{ij}$$

$AD = DA$.

2) Ассоциативность сочет. св-во

$(AB)C = A(BC)$

$(AB)C = D$, $d_{ij} = \sum_l (AB)_{il} \times c_{lj} = \sum_l \left(\sum_p a_{ip} \cdot b_{pl}\right) c_{lj} = \sum_l \sum_p a_{ip} b_{pl} c_{lj}$

$A(BC) = D$, $d_{ij} = \sum_p a_{ip} \cdot (BC)_{pj} = \sum_p \left(\sum_l b_{pl} c_{lj}\right) a_{ip} = \sum_l \sum_p a_{ip} b_{pl} c_{lj}$

3) Дистрибутивность. распред. св-во

$A(B+C) = AB + AC$

4) транспонирование.

$(AB)^T = B^T A^T$

$$(A^T B^T)_{ij} = \sum_k A^T_{ik} B^T_{kj} = \sum_k B_{jk} A_{ki} = (BA)_{ji} = (BA)^T_{ij}$$

Определитель.

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, кот. наз-ся детерминантом (определителем) матрицы A: $\det(A)$ или $\Delta(A)$.

① Определитель можно найти как сумму произведений элементов некоторого ряда (строки/столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения.

по строке: $\det A_{n\times n} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ {i - свободный индекс} по столбцу $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ {j - свободный индекс}

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} - это минор этого элемента, взятый со знаком (+) если сумма $i+j$ четная и "-" - если нечетная.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \bar{M}_{ij} = (-1)^{i+j} \bar{M}_{ij}$,

Минором элемента a_{ij} наз-ся определитель, полученный из исходного вычеркиванием i строки и j-го столбца.

② С помощью **беспорядков.**

Пусть есть квадратная матрица n-го порядка $A_{n\times n}$.

Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ целые положительные числа $1, \dots, n$ в произвольном порядке. такой набор чисел наз-ся перестановкой. Всего из чисел $1, \dots, n$ можно составить $n!$ перестановок $\lambda_1, \dots \lambda_n$.

Образуем из чисел в перестановке $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ всевозможные пары (λ_i, λ_j). Говорят, что пара (λ_i, λ_j) образует беспорядок, если $i < j$, а $\lambda_i > \lambda_j$. Например, беспорядок образует пара $(\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2)$.

Число беспорядков в перестановке $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ обозначают $N(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Ⓟ $N(1,2,5,3,4) = 2$ {беспорядки образуют пары $(5,3)$ и $(5,4)$}.

Вернемся к нашей матрице

$$\det A_{n\times n} = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} (-1)^{N(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} a_{\lambda_1, 1} \times a_{\lambda_2, 2} \times \dots \times a_{\lambda_n, n}. \quad (*)$$

суммирование идёт по всем перестановкам.

Ⓟ Пусть дана $A_{3\times3}$

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \det A_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A_{3\times3} = (-1)^{N(1,2,3)} \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^{N(1\,3\,2)} a_{11} a_{32} a_{23} + (-1)^{N(2,1,3)} a_{21} a_{12} a_{33} + (-1)^{N(2,3,1)} a_{21} a_{32} a_{13} + (-1)^{N(3,1,2)} a_{31} a_{12} a_{23} + (-1)^{N(3,2,1)} a_{31} a_{22} a_{13} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{21} a_{12} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13}.$$

Док-во ф-лы для $\det A_{n\times n}$ через беспорядки. (по индукции)

Докажем сначала, что (*) верна для $A_{2\times2}$

$$\det A_{2\times2} = (-1)^{N(1,2)} a_{11} a_{22} + (-1)^{N(2,1)} a_{21} a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \text{ - доказано.}$$

Предположим, (*) верна для $A_{n-1, n-1}$, где $n \geq 2$. Докажем, что тогда (*) верна для $A_{n\times n}$

Запишем разложение $\det A_{n\times n}$ по 1-ому столбцу:

$$\det A_{n\times n} = \sum_{\lambda_1 = 1}^{n} (-1)^{\lambda_1 + 1} a_{\lambda_1, 1} \bar{M}_{\lambda_1, 1}. \quad \bar{M}_{\lambda_1, 1} \text{ - определитель матрицы } n-1\text{-го порядка, для которого верна}$$

(*) по предположению.

$$\bar{M}_{\lambda_1, 1} = \sum_{\lambda_2, \dots, \lambda_n} (-1)^{N(\lambda_2, \dots, \lambda_n)} a_{\lambda_2, 2} \times \dots \times a_{\lambda_n, n}, \text{ таким образом,}$$

$$\det A_{n\times n} = \sum_{\lambda_1 = 1}^{n} \sum_{\lambda_2, \dots, \lambda_n \neq \lambda_1} (-1)^{\lambda_1 + 1} (-1)^{N(\lambda_2, \dots, \lambda_n)} a_{\lambda_1, 1} \cdot a_{\lambda_2, 2} \cdot \dots \cdot a_{\lambda_n, n} = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} (-1)^{\lambda_1 + 1} (-1)^{N(\lambda_2, \dots, \lambda_n)} a_{\lambda_1, 1} \cdot \dots \cdot a_{\lambda_n, n}$$

Из перестановки $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ помимо пар подмножества $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ можно составить только пары $(\lambda_1, \lambda_2), \dots, (\lambda_1, \lambda_n)$, из которых ровно $\lambda_1 - 1$ пар образуют беспорядки. Поэтому $N(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 - 1 + N(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Но $(-1)^{\lambda - 1 + N(\lambda_2, \dots, \lambda_n)} = (-1)^{\lambda + 1 + N(\lambda_2, \dots, \lambda_n)}$. Поэтому

$$\det A_{n\times n} = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} (-1)^{N(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} a_{\lambda_1, 1} \cdot \dots \cdot a_{\lambda_n, n} \text{ - мы пришли к выражению (*)}$$

③ По т. Лапласа (б/д)

Пусть дана матрица $A_{n\times n}$

∀ перестановки $i_1, \dots i_k$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$

$j_1, \dots j_k$, причём $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ (1)

Определитель, составленный из элементов, стоящий на пересечении этих k строк и столбцов наз-ся минором I типа. $M_{I\text{ типа}} = M^{i_1, \dots, i_k}_{j_1, \dots, j_k}$. После вычеркивания этих строк и столбцов остается определитель, кот. назовем минором II типа. $\bar{M}_{II\text{ типа}} = \bar{M}^{i_1, \dots, i_k}_{j_1, \dots, j_k}$

Определитель матрицы $A_{n\times n}$ с учётом принятых обозначений:

$$\det A_{n\times n} = \sum_{j_1, \dots, j_k} (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} M^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k} \bar{M}^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k} \text{ - по } k \text{ строкам, } \sim~~по~~ \text{ перестан. } j_1 \dots j_k \text{ с учетом (1)}$$

Ⓟ Разложим определитель матрицы $A_{3\times3}$ по первым 2-м строкам:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot a_{33} + (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} a_{32} + (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot a_{31} \ominus$$

Свойства определителей.

① Равноправие строк и столбцов. $\det A = \det A^T$.

② Антисимметрия при перестановке двух строк. $\det\left(\frac{a}{b}\right) = -\det\left(\frac{b}{a}\right)$

Док-во: Запишем т. Лапласа для строк a и b: $\det\left(\frac{a}{b}\right) = \sum\limits_{j_1 j_2} (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} M^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} \bar{M}^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}$

Так как $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$, то при замене i на j $M^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}$ сменит знак, а так как $\bar{M}^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}$ от этих строк не зависит, то и весь $\det\left(\frac{a}{b}\right)$ сменит знак.

③ Линейность определителя.
Если одну строку в определителе можно представить в виде линейной комбинации других, не имеющих отношение к определителю, то

$\left|\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{}\right| = \alpha\left|\frac{a}{}\right| + \beta\left|\frac{b}{}\right| + \gamma\left|\frac{c}{}\right|$

Док-во: Разложим det по этой строке
$\det A = \sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}(\alpha a_{ij}+\beta b_{ij}+\gamma c_{ij})\cdot\bar{M}_{ij} = \alpha\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\bar{M}_{ij} + \beta\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b_{ij}\bar{M}_{ij} + \gamma\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}c_{ij}\bar{M}_{ij}$

Следствия из свойств 1-3

а) det матрицы с 2-мя одинаковыми рядами $=0$ (следует из 2-го свойства).

б) Умножение матрицы на число.
$\det\left(\frac{\alpha a}{}\right) = \alpha\det\left(\frac{a}{}\right)$; $\det\begin{pmatrix}\alpha a_1 \\ \dots \\ \alpha a_n\end{pmatrix} = \alpha^n \det\begin{pmatrix}a_1 \\ \dots \\ a_n\end{pmatrix}$

в) $\det\left(\frac{0\,0\,0}{}\right) = 0$.

г) $\det\left(\frac{a}{\alpha a}\right) = 0$ {вынести α и воспользоваться а)}

д) $\det\left(\frac{a+\alpha b}{b}\right) = \det\left(\frac{a}{b}\right) + \alpha\det\left(\frac{b}{b}\right) = \det\left(\frac{a}{b}\right)$ Если к строке матрицы прибавить другую строку, умноженную на число, определитель не изменится.

④ Сумма произведений элементов некоторой строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$.

Поскольку A_{ij} не зависит от a_{ij}, то равенство — тождество относительно $a_{i1}, \dots, a_{in}$. Заменив в нём $a_{i1}, \dots, a_{in}$ на $a_{j1}, \dots, a_{jn}$, где j — любая другая строка, мы слева получим det матрицы с 2-мя одинаковыми рядами, т.е. 0.

$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \dots + a_{jn}A_{in} = 0$

⑤ Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных членов.

$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a \\ 0 & a_{22} & \dots & a \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{pmatrix} \overset{\text{по 1 столбцу}}{=} a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots \\ 0 & \dots & \\ 0 & 0 & a_{nn}\end{vmatrix} \overset{\text{по 1 столбцу}}{=} a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$

⑥ Определитель суммы и произведения матриц

$\det(A+B)$ — не выражается через $\det A$ и $\det B$.

$\det(AB) = \det A\cdot\det B$

$\det(A\oplus B) = \det A\cdot\det B$

$\det\begin{pmatrix} A_{n\times n} & 0 \\ 0 & B_{m\times m}\end{pmatrix} \overset{\text{по строкам}}{=} \det A_{n\times n}\cdot\det B_{m\times m}$, т.к. det матрицы, содерж. хотя бы 1-ну нулевую строку =

Обратная матрица.

Матрица B наз-ся правой обратной по отношению к A, если $AB=E$, а C — левой обратной, если $CA=E$. Докажем, что $B=C$.

$C = CE = C(AB) = (CA)B = EB = B$. Поэтому обратную матрицу просто обозначают за A^{-1}.

Условие сущ-я обратной матрицы.

Для матрицы A $\exists$ обратная матрица $A^{-1} \Leftrightarrow$, когда $\det A \neq 0$.

Необходимость:

$AA^{-1} = E \Rightarrow \det A\cdot\det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$

Достаточность:

Пусть $\det A \neq 0$. Тогда мы можем составить матрицу:

$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta}\end{pmatrix}$

Докажем, что B — обратная по отношению к A.

A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в матрице A.

Г дополнения элементов другого ряда (св-во ④).

$BA = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta}a_{11} + \frac{A_{21}}{\Delta}a_{21} + \dots + \frac{A_{n1}a_{n1}}{\Delta} & \frac{A_{11}}{\Delta}a_{12} + \frac{A_{21}}{\Delta}a_{22} + \dots + \frac{A_{n1}a_{n2}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{11}}{\Delta}a_{1n} + \frac{A_{21}}{\Delta}a_{2n} + \dots + \frac{A_{n1}a_{nn}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta}a_{11} + \frac{A_{22}}{\Delta}a_{21} + \dots + \frac{A_{n2}}{\Delta}a_{n1} & \frac{A_{12}}{\Delta}a_{12} + \frac{A_{22}}{\Delta}a_{22} + \dots + \frac{A_{n2}}{\Delta}a_{n2} & \dots & \frac{A_{12}}{\Delta}a_{1n} + \frac{A_{22}}{\Delta}a_{2n} + \dots + \frac{A_{n2}}{\Delta}a_{nn} \\ \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta}a_{11} + \frac{A_{2n}}{\Delta}a_{21} + \dots + \frac{A_{nn}}{\Delta}a_{n1} & \frac{A_{1n}}{\Delta}a_{12} + \frac{A_{2n}}{\Delta}a_{22} + \dots + \frac{A_{nn}}{\Delta}a_{n2} & \dots & \frac{A_{1n}}{\Delta}a_{1n} + \frac{A_{2n}}{\Delta}a_{2n} + \dots + \frac{A_{nn}}{\Delta}a_{nn}\end{pmatrix} = E$

Числители дробей элементов главной диагонали — определители матрицы A (сумма произведений элементов столбцов на их алг. дополнения), остальные элементы $=0$, т.к. в числителе — сумма произведений элементов ряда на соответствующие дополнения элементов

Лекция 3 Вопрос 5 Лин. нез. строк и ранг матрицы

Ранг (и системы линейных уравнений) {системы - след. лист?

Предыстория.

Вспомним про термин линейной зависимости.

Пусть есть 3 строки $\alpha_n = (\alpha_{11}, \alpha_{12} \dots \alpha_{1n})$, b_n и c_n. Составим уравнение

$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$. (1), где 0 - нулевая строка.

Система строк a, b и c наз-ся линейно зависимой, если можно подобрать такие α, β, γ, чтобы (1) выполнялось и не все $\alpha, \beta, \gamma = 0$.

(Т) Условие линейной зависимости строк a, b и c.

Чтобы строки a, b и c были линейно зависимы необходимо и достаточно, чтобы одна строка раскладывалась по лин. комбинации остальных. ($a = \lambda_1 b + \lambda_2 c$)

Необходимость:

Пусть выполняется (1) и, к примеру, $\alpha \neq 0$, тогда можно поделить (1) на α:

$a = -\frac{\beta}{\alpha} b - \frac{\gamma}{\alpha} c$ - мы разложили строку a по лин. комб. остальных строк

Достаточность:

Пусть $a = \lambda_1 b + \lambda_2 c$, т.е.

$a - \lambda_1 b - \lambda_2 c = 0$ (=> коэф. перед $a \neq 0$ (=> a, b и c по опред.-ю линейно зависимы.

Непосредственно лекция.

Пусть дана матрица $A_{m \times n}$. Будем составлять различные миноры I типа (1×1, 2×2, ...). Выберем определитель самого большого порядка K, который не равен нулю. Число K наз-ся рангом, а этот отличный от нуля минор - базисным; строки и столбцы, из которых он состоит - базисными. Базисных миноров может быть несколько.

(П) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $R = 3$; $M_r = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 30$

(Т) о базисном миноре.

Базисные строки (столбцы) линейно независимы, остальные строки (столбцы) есть лин. комбинации базисных. (докажем для строк)

Первая часть: если бы баз. строки была линейно зависимы, то по следствию 2) из свойств 1-3 определителя (см. лекцию 2) базисный минор был бы равен нулю, что противоречит определению.

Вторая часть.

Т.к. базисный минор - минор, отличный от нуля наибольшего порядка, то любой минор порядка $r+1$ будет ~~отличного от нуля~~ равен нулю

Пусть у матрицы $A_{m \times n}$ $m > r$ и $n > r$, тогда не все строки и столбцы матрицы базисные, и, собственно появляется смысл доказывать 2 положение.

Т.к. $M_{r+1} = 0$, от перестановки строк и столбцов значение M_{r+1} не изменится. Поместим базисный минор в левый верхний угол:

$$M_{r+1} = \begin{vmatrix} M_r & a_{1j} \\ & \dots \\ a_{k1} \dots & a_{kj} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{по } j \text{ столбцу}} a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{kj} A_{kj} = 0 \quad \text{но } A_{kj} = M_r \neq 0. \quad | : A_{kj}$$

$$a_{kj} = -\frac{a_{1j} A_{1j}}{A_{kj}} - \frac{a_{2j} A_{2j}}{A_{kj}} - \dots - \frac{a_{k-1j} A_{k-1j}}{A_{kj}}$$

$$a_{kj} = \lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \dots + \lambda_r a_{rj}$$

- это означает, что k-я строка является лин. комб. базисных строк

Следствия.

1) Макс. число лин. независимых строк равно макс. числу лин. независимых столбцов.
2) Для того, чтобы $\det A = 0$ <=> чтобы все строки / столбцы были лин. зависимы.
3) Ранг не меняется при транспонировании
4) $A\left(\boxed{A'}\right)$ Если базисный минор нах-ся в подматрице A' $R(A) = R(A')$
5) $R(AB) \le \min(R(A), R(B))$

$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$ => столбцы AB - есть лин. комбинации столбцов A, а строки - лин. комб. строк B.

Лекция 3 часть 2. ~~Вопросы~~. С-ма лин. уравнений. Теорема Кронекера - Капелли. Ф-лы Крамера.

Системы линейных уравнений.

Система наз-ся *совместной*, если имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если ни одного.

Совместная с-ма наз-ся *определённой*, если она имеет единственное решение и *неопределённой* - если несколько решений (больше одного). Если решений больше одного (неопред) то каждое решение называется *частным*. Совокупность всех частных решений наз-ся общим.

$\ast$ систему из m линейных уравнений с n-неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

в векторном виде:

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b} \qquad (2)$$

в матричном виде:

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (3) \qquad AX=B$$

Если $\vec{b}=\vec{0}$, система (1) наз-ся *однородной*. Однородная система всегда совместна всегда есть ~~не~~тривиальные решения ($\vec{x}=\vec{0}$). Но могут быть и нетривиальные решения, т.е. $\vec{x}\neq\vec{0}$. Тогда из (2) $\Rightarrow$ линейная ~~незав~~ зависимость векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, а значит столбцы матрицы A линейно зависимы и $R(A) < n$ $\{$т.к. $\det A_{n\times n}=0\}$. Условие $\operatorname{rang} A < n$ - и есть условие существования нетривиальных решений однородной системы $A\vec{x}=\vec{0}$. В частности если $n=m$, $\det A = 0$.

Критерий Кронекера-Капелли.

(существования решения неоднородной системы $A\vec{x}=\vec{b}$)

Помимо основной матрицы A вводят ещё расширенную матрицу $\bar{A} = (A|\vec{b})$.

Т) Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\bar{A}$.

Необходимость:

Пусть (1) совместна и $\exists$ решение $\vec{x}$ такое, что $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$, т.е. $\vec{b}$ - есть лин. комбинация векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$. Тогда дополнительный столбец расширенной матрицы есть лин. комбинация остальных столбцов, т.е. его можно занулить элементарными преобразованиями и выкинуть, не изменив при этом ранга матрицы $\bar{A}$ $\operatorname{rang}(A|\vec{b}) = \operatorname{rang}(A|\vec{0}) = \operatorname{rang}(A)$)

Достаточность:

Пусть ранги основной и расширенной матриц совпадают, тогда базисный минор матрицы A будет базисным минором и для матрицы $\bar{A}$, а по т. о базисном миноре строки (столбцы), не входящие в минор есть лин. комбинации строк, входящих в базисный минор, т.е. столбец $\vec{b}$ есть лин. комб. столбцов матрицы A:

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{b},$$

а значит существуют числа (λ_1, λ_n), кот. удовлетворяют уравнению (2). Это и есть решение системы (1).

Две теоремы без доказательства:

Т1) Если ранг совместной системы (1) равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Т2) Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

Нахождение решений систем с кол-ом уравнений, равным кол-ву неизвестных ($m=n$)

(Формулы Крамера).

$\ast$ систему из n уравнений с n-неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

или в матричном виде:

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (2)$$

Т) Если Δ (определитель матрицы A) $\neq 0$, то система (1) имеет единственное решение $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ (где Δ_i - определитель матрицы, полученной из основной заменой i-ого ~~строки~~ го столбца на столбец свободных членов.

1) Сначала докажем, что решение единственно.

По критерию Кронекера-Капелли, система (1) совместна, если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\bar{A}$. Поскольку по условию теоремы $\Delta\neq 0$, то $\operatorname{rang} A_{n\times n} = n$, а матрица $\bar{A}$ имеет n строк, а потому больше n её ранг быть не может, как не может быть и меньше n, т.к. в состав матрицы $\bar{A}$ входит матрица A с рангом n. $\Rightarrow$ $\operatorname{rang}\bar{A}_{n\times(n+1)} = n$ также. Итак, система (1) совместна.

Т.к. число неизвестных равно рангу матрицы A, то по Т.1 система (1) имеет единственное решение.

2) Теперь найдём это решение.

Для этого умножим уравнения ... дополнения элементов i-го столбца основной матрицы, а затем сложим их.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(a_{1i} A_{1j} + a_{2i} A_{2j} + \ldots + a_{ni} A_{nj} \right) = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \ldots + b_n A_{nj}$$

Поскольку $a_{1i} A_{1j} + a_{2i} A_{2j} + \ldots + a_{ni} A_{nj} \begin{cases} = 0, & i \neq j \\ \neq 0, & i = j \end{cases}$, как произведения элементов одного столбца на алг. дополнения другого (см. св. 4 лекция 2).

$$x_j \left(a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{nj} A_{nj} \right) = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \ldots + b_n A_{nj}$$

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$ – формула Крамера.

3) Формулу (3) можно вывести проще: домножим (2) на A^{-1}:

$$A^{-1} A \vec{x} = A^{-1} \vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1} \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} b_1 + \frac{A_{21}}{\Delta} b_2 + \ldots + \frac{A_{n1}}{\Delta} b_n \\ \frac{A_{12}}{\Delta} b_1 + \frac{A_{22}}{\Delta} b_2 + \ldots + \frac{A_{n2}}{\Delta} b_n \\ \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} b_1 + \frac{A_{2n}}{\Delta} b_2 + \ldots + \frac{A_{nn}}{\Delta} b_n \end{pmatrix}.$$

(Вопрос 7).

Системы однородных линейных уравнений.
Фундаментальная система решений.

Рассмотрим однородную систему m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1) \qquad \text{или} \qquad A\vec{X} = \vec{0} \ (1a)$$

Так как все $b_i = 0$, из ф-лы (3) вопроса (8) получаем решение системы:

$$\vec{X} = \begin{cases} x_1 \\ x_r \\ c_{r+1} \\ c_n \end{cases} \quad x_i = \frac{M_i(-a_{i,r+1}c_{r+1} - \dots - a_{in}c_n)}{M} \quad (2)$$

Докажем, что все решения (1) образуют линейное пространство:

$$A(\lambda_1\vec{X}_1 + \lambda_2\vec{X}_2) = \lambda_1 A\vec{X}_1 + \lambda_2 A\vec{X}_2 = \lambda_1\cdot\vec{0} + \lambda_2\cdot\vec{0} = \vec{0}.$$

Так как лин. комб решений (1) – также решение (1), то пространство множества решений явл. лин. пространством.

Размерность этого пространства $(n-r)$ {этот очевидный факт примем без доказательства}.

Любая совокупность из $(n-r)$ линейно независимых решений (1) является базисом этого пространства и называется фундаментальной системой решений {ФСР} (?)

Выделяют ФСР, отвечающую наборам значений: $\begin{bmatrix} c_{r+1}=1 & c_{r+2}=0 & \dots & c_n=0 \\ c_{r+1}=0 & c_{r+2}=1 & \dots & c_n=0 \\ c_{r+1}=0 & c_{r+2}=0 & \dots & c_n=1 \end{bmatrix}$,

такая ФСР наз-ся нормальной.

Общее решение системы (1) есть всё множ-во элементов линейного пространства решений (1), то есть линейная оболочка ФСР:

$$\vec{X} = c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2 + \dots + c_{n-r}\vec{X}_{n-r} \quad (3)$$

(П) Решить:

$$\begin{cases} \boxed{x_1 + x_2} + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ \boxed{x_1 - x_2} + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2x_3 - 3x_4 \\ x_1 - x_2 = x_4 - x_3 \end{cases}$$

$$x_1 = -\frac{3}{2}x_3 - x_4; \quad x_2 = -\frac{1}{2}x_3 - 2x_4$$

$$I)\ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

общее решение: $\vec{X} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$.

Докажем 2 утверждения, кот. можно включить и в вопрос (8), т.к. они относятся и к неоднородной системе:

1) Сумма любого решения неоднородной системы с $\forall$ решением соответствующей однородной системы есть решение этой неоднородной системы.

$$+\begin{cases} A\vec{X} = \vec{b} \\ A\vec{y} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow A(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{b}$$

2) Разность двух произвольных решений неоднородной системы явл. решением соответствующей однородной системы:

$$-\begin{cases} A\vec{X} = \vec{b} \\ A\vec{y} = \vec{b} \end{cases} \quad A(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$$

Из этих утверждений $\Rightarrow$, что сумма частного решения неоднородной с-мы и общего решения однородной системы есть общее решение неоднородной системы.

$$\vec{X}_{\text{общ неодн}} = \vec{X}_{\text{ч. неодн}} + \vec{X}_{\text{общ однородн.}}$$

Обычно за частное решение неоднородной системы берут:

$\vec{X}_0 = \left(\frac{M_1(b_i)}{M}, \dots, \frac{M_r(b_i)}{M}, 0, 0, \dots, 0\right)$, т.е. все $c_{r+1}, \dots, c_n$ полагают равными 0.

(Вопрос 8)

Общее решение системы неоднородных линейных уравнений.

Пусть у нас имеется система (1) m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Предположим, что (1) совместна, то есть ранг основной и расширенной матрицы равны r.

Перестановкой уравнений и неизвестных всегда можно добиться, чтобы базисный минор основной матрицы нах-ся в левом верхнем углу.

По т. о базисном миноре, все строки этой матрицы, начиная с (r+1)-ой явл. лин. комбинациями первых r строк. Другими словами, каждое ур-е, начиная с (r+1) явл. лин. комбинацией первых r уравнений, то есть их следствием. И при выполн. и первых r-уравнений, все остальные обращаются в тождества.

Таким образом, достаточно найти решения первых r уравнений. Перепишем их в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases} \quad (2)$$

Придадим неизвестным $x_{r+1}, \ldots, x_n$ произвольные значения $c_{r+1}, \ldots, c_n$. Для произвольных $c_{r+1}, \ldots, c_n$ $\exists$ единственное решение $x_1, \ldots, x_r$, так как ранг основной матрицы (2) равен r – числу неизвестных.

Если обозначим за $M_i(d_i)$ определитель, полученный заменой i-го столбца определителя основной матрицы (2) на столбец из $(d_1, d_2, \ldots, d_j, \ldots d_r)$, то решения (2):

$$x_i = \frac{M_i}{m}(b_i - a_{i,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{in}c_n) \quad (3)$$

Таким образом, общее решение системы неоднородных линейных уравнений с линейно независимыми уравнениями:

$$\vec{X} = \left.\begin{cases} x_1 \\ x_r \\ c_{r+1} \\ c_n \end{cases} x_i = \frac{M_i(b_i - a_{i,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{in}c_n)}{m}\right\} (4)$$, где $c_{r+1}, \ldots, c_n$ – произвольные значения

1)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$$

Найдем базисный минор:

$$(-3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 10 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & - \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Итак, r = 2; линейно независимы первые 2 ур-я:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 = 8 - 2x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

Зададим произвольные $x_3 = c_3$; $x_4 = c_4$

$$+\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 - c_3 + c_4 \\ x_1 + x_2 = 8 - 2c_3 - 3c_4 \end{cases}$$

$$x_1 = 6 - \frac{3}{2}c_3 - c_4; \quad x_2 = 2 - \frac{1}{2}c_3 - 2c_4$$

Таким образом, общее решение системы:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 - \frac{3}{2}c_3 - c_4 \\ 2 - \frac{1}{2}c_3 - 2c_4 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$, где $c_3; c_4 - \forall \in R$

Вопрос 9.

Линейные пространства, базис и размерность.

Множ-во элементов L произвольной природы наз. **линейным пространством**, если:

1.) $\forall \vec{x}, \forall \vec{y} \in L$ ставится в соответствии $\vec{x}+\vec{y} \in L$, кот. наз-ся суммой.

2.) $\forall \vec{x} \in L$ ставится в соответствие $\vec{y} = \lambda \vec{x}$ и $\forall \lambda \in C$

Эти правила должны удовлетворять восьми аксиомам:

1) $\vec{x}+\vec{y} = \vec{y}+\vec{x}$ {перемест. закон}
2) $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} = \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ {сочет. закон}
3) $\exists\ \vec{o}: \vec{o}+\vec{x} = \vec{x}$
4) $\exists$ противоположный $\vec{x}$ элемент $(-\vec{x})$: $\vec{x}+(-\vec{x}) = \vec{o}$
5) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
6) $\lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x}$
7) $(\lambda+\mu)\vec{x} = \lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$
8) $\lambda(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$

$\Big\}$ распределительный закон.

Примеры линейных пространств.

1) Пространство векторов R_n
2) $\{ \mathbb{R} \}$ $x > 0$, если:
   "$\vec{x}+\vec{y}$" $= x \cdot y$
   "λx" $= x^{\lambda}$
3) Пространство непрерывных функций
4) Пространство многочленов P_n степени не выше n.

Примеры нелинейных пространств.

1) Множ-во многочленов степени, точно равной n. {при "+" может понизиться}.
2) Множ-во всех многочленов с "+" коэффициентами {при $\cdot(-1)$ $P_n \cdot (-1) \notin$

Свойства линейных пространств.

1) $\exists!\ \vec{o}$
2) $\forall \vec{x}\ \exists!\ (-\vec{x})$: $\vec{x}+(-\vec{x}) = \vec{o}$
3) $\forall \vec{x}$: $(-\vec{x}) = -1 \cdot \vec{x}$

Базис и размерность.

Элементы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in L$ наз-ся линейно зависимыми, если выражение $\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\dots+\lambda_n\vec{x}_n = \vec{o}$ и не все $\lambda_i = 0$

Т: Система $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ — линейно зависима, когда один из элементов явл. лин. комб. остальных.

Следствия:

1) Если в системе есть $\vec{o}$, то с-ма линейно зависит
2) Если часть элементов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ линейно зависит, то и вся с-ма л. зависит

Опр-е: С-ма лин. независимых элементов $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ в л. пр-ве L наз-ся базисом лин. пространства L, если для $\forall \vec{x} \in L$ $\exists$ набор чисел $(x_1, \dots x_n)$, что

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\dots+x_n\vec{e}_n$$

Т: Для $\forall \vec{x}\ \exists!$ разложение в базисе $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$:

от обратного:

пусть 2 разл-я:

$$-\begin{cases} \vec{x} = x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\dots+x_n\vec{e}_n \\ \vec{x} = y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+\dots+y_n\vec{y}_n \end{cases}$$

$$\vec{o} = (x_1-y_1)\vec{e}_1+(x_2-y_2)\vec{e}_2+\dots+(x_n-y_n)\vec{e}_n$$

т.к. по опр-ю базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ — лин. независимы, то

$(x_1-y_1) = 0$, $x_1 = y_1$
$(x_2-y_2) = 0$, $x_2 = y_2$
$(x_n-y_n) = 0$, $x_n = y_n$

Размерность

Размерностью $\dim L$ пространства L наз-т наибольшее число лин. незав. элементов в L.

Неск. утверждений:

1) $\Leftrightarrow$ Если $\dim L = n$, то $\forall$ n лин-незав. элементов $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ образуют базис в L.
2) Для $\forall \vec{x} \in L$, $\dim L = n$:
   $\vec{x} = \vec{e}_1x_1+\vec{e}_2x_2+\dots+\vec{e}_nx_n$, если $\vec{e}_1, \vec{e}_n$ — лин. независимы.
3) Если $\dim L = n$, то $\forall$ $n+1$ - элементов $\in L$ лин. зависимы.

(Вопрос 10.)

Подпространства линейных пространств

Опр-е. Если для $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L, L_1$,

1) $\vec{x} + \vec{y} \in L_1$
2) $\lambda \vec{x} \in L_1$, то L_1 – подпространство л. пр-ва L.

Подпространства $L_1 = \{\vec{0}\}$ и $L_1 = L$ наз-ся несобственными.

Выберем в L n элементов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$.
Всё множ-во их лин. комбинаций наз-ся линейной оболочкой $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$. ($LS$)
Любое подпространство, содержащее $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ содержит их лин. комб. $\Rightarrow$ L_S – наименьшее подпространство, содержащее $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$.

Размерность.

Если $\{\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_k\}$ – базис в подпространстве L_1, то его можно дополнить элементами $\{\vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_n\}$ до базиса в пространстве L.
Размерность LS равна макс. числу лин. независимых элементов в наборе $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$.
Пусть в наборе $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\}$ есть r лин. независимых элементов, тогда остальные $k-r$ могут быть построены как лин комб-и ~~её~~ первых r $\Rightarrow$ $\dim LS = r$.

Сумма и пересечение.

Всё множ-во $\vec{x}$: $\vec{x} \in L_1$ и $\vec{x} \in L_2$ называется пересечением подпространств $L_1 \cap L_2$, $L_1 \wedge L_2$.
Всё множ-во $\vec{x}$: $\vec{x} \in L_1$ или $\vec{x} \in L_2$ называется суммой подпространств $L_1 + L_2$; $L_1 \cup L_2$.

Т) $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 \cup L_2) + \dim(L_1 \cap L_2)$.

Обозначим за L_U сумму $L_1 \cup L_2$, а за $L_\cap$ – пересечение $L_1 \cap L_2$.
Пусть $\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_k$ – базис в $L_\cap$, достроим его до базиса в L_1 и L_2:

$L_1 : \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{g}_1, \ldots \vec{g}_l\}$
$L_2 : \{\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_k, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m\}$

$\dim L_\cap = k$; $\dim L_1 = k + l$; $\dim L_2 = k + m$.
Осталось доказать, что $\dim L_U = k + l + m$. Для этого достаточно показать, что элементы $\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_k, \vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_l, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$ образуют базис в L_U.
Т. для этого докажем, что
а) $\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_k, \vec{g}_1, \ldots \vec{g}_l, \vec{f}_1, \ldots \vec{f}_m$ лин. независимы
б) любой элемент суммы $L_1 \cup L_2$ представляет собой лин. комб. а)

а) Пусть лин. комб. а) представляет собой нулевой элемент:
$\alpha_1 \vec{g}_1 + \ldots + \beta_1 \vec{e}_1 + \ldots + \beta_k \vec{e}_k + \gamma_1 \vec{f}_1 + \ldots + \gamma_m \vec{f}_m = \vec{0}$, тогда
$\alpha_1 \vec{g}_1 + \ldots + \alpha_l \vec{g}_l + \beta_1 \vec{e}_1 + \ldots + \beta_k \vec{e}_k = -\gamma_1 \vec{f}_1 - \ldots - \gamma_m \vec{f}_m$, но (1)
т. к. левая часть – элемент L_1, а правая – L_2, то оба элемента равны, а значит принадлежат $L_\cap$ и разклад. по $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\}$

$\gamma_1 \vec{f}_1 + \ldots + \gamma_m \vec{f}_m = \lambda_1 \vec{e}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{e}_k$, но $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k; \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m\}$ – лин незав $\Rightarrow$ все γ_i и $\lambda_i = 0$

Но в силу (1) и все α_i и $\beta_i = 0$; значит $\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_k, \vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_l, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$ – лин незав

б) $$\vec{X} = \underbrace{\alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{e}_k + \beta_1 \vec{g}_1 + \ldots + \beta_l \vec{g}_l}_{L_1} + \underbrace{\gamma_1 \vec{f}_1 + \ldots + \gamma_m \vec{f}_m}_{L_2}$$

$\vec{x}$ явл. суммой элемента из L_1 и из L_2 $\Rightarrow$ $\vec{X} \in L_1 \cup L_2$.

Разложение пространства в прямую сумму подпространств.

L является прямой суммой L_1 и L_2 ($L = L_1 \oplus L_2$) если для $\forall \vec{x} \in L$ $\exists!$ $x_1 \in L_1$ и $x_2 \in L_2$ $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$.

Т) Для того, чтобы L было прямой суммой L_1 и L_2 необходимо и достаточно, чтобы
1) $L_1 \cap L_2 = \{\vec{0}\}$
2) $\dim L = \dim L_1 + \dim L_2$

Достаточность (если 1) и 2), то L – прямая сумма)
Пусть $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\}$ – базис в L_1
$\{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_l\}$ – базис в L_2
Докажем, что $\{\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_k, \vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_l\}$ – базис в L, для этого нужно показать, что эта с-ма векторов линейно независима.
с-ма векторов л/нез, если
$\alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{e}_k + \beta_1 \vec{g}_1 + \ldots + \beta_l \vec{g}_l = 0$ и не все $\alpha_i, \beta_i = 0$.
$\alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{e}_k = -\beta_1 \vec{g}_1 - \ldots - \beta_l \vec{g}_l$
элемент L_1 = элементу L_2, но по условию $L_1 \cap L_2 = \{\vec{0}\}$, то есть.
$\alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{e}_k = \vec{0}$ $\Rightarrow$ все $\alpha_i = 0$
$\beta_1 \vec{g}_1 + \ldots + \beta_l \vec{g}_l = \vec{0}$ $\Rightarrow$ все $\beta_i = 0$ $\Rightarrow$ с-ма $\{\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_k, \vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_l\}$ – лин / незав. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\vec{X} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{e}_k + \beta_1 \vec{g}_1 + \ldots + \beta_l \vec{g}_l$ – единственно, как разложение по базису $\Rightarrow$ $L = L_1 \oplus L_2$.

__Необходимость.__

Если $L = L_1 \oplus L_2$, то

$\vec{x} \overset{!}{=} \alpha_1 \vec{g}_1 + \dots + \alpha_k \vec{g}_k + \beta_1 \vec{f}_1 + \dots + \beta_n \vec{f}_n$.

поскольку разложение ! то вектора $\vec{g}_i$ и $\vec{f}_i$ линейно независимы, значит

$\dim L = \cancel{\dim}\ k + n = \dim L_1 + \dim L_2$

Преобразование базисов и координат векторов. Матрица преобразования.

Пусть $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ и $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'\}$ - 2 базиса n-мерного линейного пространства R.

Разложим новый (штрихованный) базис по старому

$$\vec{e}_1' = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{12}\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{1n}\vec{e}_n \qquad (1)$$
$$\vec{e}_n' = \alpha_{n1}\vec{e}_1 + \alpha_{n2}\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{nn}\vec{e}_n$$

То есть переход от старого базиса к новому осуществляется с помощью матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$\det A \neq 0$, иначе баз. вектора были бы лин. зависимы

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vec{e}_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_n \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Обратный переход осуществляется с помощью матрицы $B = A^{-1}$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \ldots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \ldots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \ldots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vec{e}_n' \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Преобразование координат.

$$X = x_1'\vec{e}_1' + x_2'\vec{e}_2' + \ldots + x_n'\vec{e}_n' = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$$

Подставим (1) и приравняем коэф. при $\vec{e}_i$:

$$x_1 = a_{11}x_1' + a_{21}x_2' + \ldots + a_{n1}x_n'$$
$$x_2 = a_{12}x_1' + a_{22}x_2' + \ldots + a_{n2}x_n'$$
$$\ldots$$
$$x_n = a_{1n}x_1' + a_{2n}x_2' + \ldots + a_{nn}x_n'$$

Связь ~~не~~ старых и новых координат осуществляется с помощью матрицы:

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \vec{X} = S \cdot \vec{X}', \quad S = A^T$$

обратная связь осуществляется с помощью матрицы:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{12}}{\Delta} & \ldots & \frac{A_{1n}}{\Delta} \\ \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \ldots & \frac{A_{2n}}{\Delta} \\ \frac{A_{n1}}{\Delta} & \frac{A_{n2}}{\Delta} & \ldots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}; \quad \vec{X}' = S^{-1}\vec{X}.$$

(Вопрос 12)

Эвклидовы пространства. Свойства скалярного произведения.
[Матрица Грама, ортонормированный базис. Комплексные эвклидовы пространства.

(Опр-е) Линейное пространство L наз-ся вещественным эвклидовым пространством, если $\forall$ $\vec{x}$ и $\vec{y}$ ставится в соответствие число $(\vec{x},\vec{y})$ - скалярное произведение.

Скалярное произведение удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $(\vec{x},\vec{y})=(\vec{y},\vec{x})$
2) $(\vec{x}_1+\vec{x}_2,\vec{y})=(\vec{x}_1,\vec{y})+(\vec{x}_2,\vec{y})$
3) $(\lambda\vec{x},\vec{y})=\lambda(\vec{x},\vec{y})=(\vec{x},\lambda\vec{y})$
4) $\forall\vec{x}\neq\vec{0}$: $(\vec{x},\vec{x})>0$
$(\vec{x},\vec{x})=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{0}$

(Примеры эвклидовых пространств:)

1) Пространство векторов R_n $(\vec{x},\vec{y})$ - как в анал. геометрии
$(\vec{x},\vec{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$
2) Пространство непрерывных на $[\alpha,\beta]$ функций
$(f,g)=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx.$

Неравенство Коши-Буняковского.

$(\vec{x},\vec{y})^2\leq(\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y})$

для $\forall\ \lambda\in R$ (так) $(\lambda\vec{x}-\vec{y},\lambda\vec{x}-\vec{y})=\lambda^2(\vec{x},\vec{x})-2\lambda(\vec{x},\vec{y})+(\vec{y},\vec{y})_{\geq0}$ - квадр. ~~ур-е~~ $\underset{\text{нерав-во}}{}$ относ. λ.

$D\leq0$: $4(\vec{x},\vec{y})^2-4(\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y})\leq0$

$(\vec{x},y)^2\leq(\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y})$

Норма

(Опр-е) $\forall$ элементу $\vec{x}$ можно поставить в соответствие вещественное число $\|\vec{x}\|$, кот удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $\|\vec{x}\|>0$ $\forall\vec{x}>0$
2) $\|\lambda\vec{x}\|=|\lambda|\|\vec{x}\|$
3) $\forall\vec{x},\vec{y}$: $\|\vec{x}+\vec{y}\|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$ - неравенство Минковского. (Δ)

$\forall$ эвклидово пространство явл. нормированным, если $\|\vec{x}\|=\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}$.

Запишем для этого случая неравенство треугольника.

$\|\vec{x}+\vec{y}\|=\sqrt{(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})}=\sqrt{(\vec{x},\vec{x})+2(\vec{x},\vec{y})+(\vec{y},\vec{y})}\leq\{(\vec{x},\vec{y})\leq\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}\sqrt{(\vec{y},\vec{y})}\}\leq\sqrt{(\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}+\sqrt{(\vec{y},\vec{y})})^2}=$
$=\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$

Итак, $\|\vec{x}+\vec{y}\|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$

По аналогии с векторной алгеброй можно ввести угол между элементами эвклидова пространства:

$\cos\alpha=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$

Заметим, что $(\vec{a},\vec{b})^2\leq(\vec{a},\vec{a})(\vec{b},\vec{b})$, поэтому $\cos\alpha\leq1$

Будем называть 2 элемента ортогональными, если $\cos\alpha=0$, т.е. если $(\vec{a},\vec{b})=0$.

Если $\vec{x}\perp\vec{y}$, то $\|x+y\|^2=(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})=(\vec{x},\vec{x})+2(\vec{x},\vec{y})+(\vec{y},\vec{y})=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2$

Ортонормированный базис

n элементов $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n\}$ образуют ~~базис~~ ортонормированный базис в E_n, если:

$(\vec{e}_i,\vec{e}_k)=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases}=\delta_{i,k}$.

Это действительно базис:

$\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+\dots+\lambda_n\vec{e}_n=\vec{0}$ (1)

Докажем, например, что $\lambda_1=0$. Умножим (1) на $\vec{e}_1$ скалярно:

$\lambda_1(\vec{e}_1,\vec{e}_1)+\lambda_2(\vec{e}_2,\vec{e}_1)+\dots+\lambda_n(\vec{e}_n,\vec{e}_1)=\vec{0}$

$\lambda_1=0$.

Свойства ортонормированного базиса:

1) В ортонормированном базисе скалярное произведение двух любых элементов равно сумме произведений их соответствующих координат

В любом $(\vec{x},\vec{y})=(\sum_i x_i\vec{e}_i,\sum_j y_j\vec{e}_j)=\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}x_iy_j$, где $\Gamma_{ij}=(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$; Γ - матрица Грама.

В ортонормированном базисе $\Gamma=E \Rightarrow (\vec{x},\vec{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$

2) Координаты произвольного элемента относительно ортонормированного базиса равны скалярным произведениям этого элемента на соответствующие базисные ~~вектора~~ элементы.

$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\dots+x_n\vec{e}_n \quad |\cdot\vec{e}_k$

$(\vec{x},\vec{e}_k)=x_k.$

Комплексные евклидовы пространства.

Комплексное линейное пространство R называется комплексным евклидовым пространством, если выполнены следующие два требования:

1) Имеется правило, посредством которого любым двум элементам $\vec{x}$ и $\vec{y}$ этого пространства ставится в соответствие комплексное число, называемое скалярным произведением этих элементов, и обозначаемое символом $(\vec{x}, \vec{y})$.

2) Указанное правило подчиняется четырём аксиомам:

1) $(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{(\vec{y}, \vec{x})}$ — эрмитова симметричность. Без неё нарушается (4), т. к. $(\lambda\vec{x}, \lambda\vec{x})$ было бы $= \lambda^2 (\vec{x}, \vec{x})$. А если $\lambda = i$, то $= -(\vec{x}, \vec{x})$

2) $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = (\vec{x}_1, \vec{y}) + (\vec{x}_2, \vec{y})$

3) $(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \lambda (\vec{x}, \vec{y})$

4) $(\vec{x}, \vec{x})$ - вещественное неотрицательное число, равное нулю, когда $\vec{x}$ - нулевой элемент.

Неравенства Коши - Буняковского и треугольника выглядят так же:

Коши - Буняковского:

$$|(\vec{x}, \vec{y})|^2 \le (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y})$$

треугольника:

$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$$

Скалярное произведение определим ~~как~~ соотношением:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 \overline{y}_1 + x_2 \overline{y}_2 + \dots + x_n \overline{y}_n$$

Вопрос

Метод ортогонализации Грамма-Шмидта

Теорема: В любом Евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Докажем теорему и найдём такой базис для n-мерного Эвкл. пространства E.

Согласно опр-ю размерности простр-ва E, в нём найдётся n линейно независимых элементов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$.

Докажем $\exists$ ортонорм. базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ методом мат. индукции.

Для построения первого элемента $\vec{e}_1$ достаточно просто нормировать $\vec{f}_1$: $\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}$.

Пусть m - целое число $< n$. Допустим, мы уже построили m базисных элементов: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m$. Докажем, что к ним можно присоединить ещё один $\vec{e}_{m+1}$ {$\vec{e}_{m+1}$ - также принадлежит L}.

Пусть $\vec{e}_{m+1}$ имеет вид:

$$\vec{e}_{m+1} = a_{m+1}\{\vec{f}_{m+1} - (\vec{f}_{m+1}, \vec{e}_m)\vec{e}_m - (\vec{f}_{m+1}, \vec{e}_{m-1})\vec{e}_{m-1} - \dots - (\vec{f}_{m+1}, \vec{e}_1)\vec{e}_1\} \quad (1) \quad // \text{Усл. обозн: } \vec{e}_{m+1} = a_{m+1}\cdot\{\}$$

1) Элемент $\vec{e}_{m+1}$ линейно выражается через $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_{m+1}$, т.к. каждый из $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m$ выражается через $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_m$ линейно. $\Rightarrow$ все элементы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{m+1}$ представляют линейные комбинации $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_{m+1}$ $\Rightarrow$ они принадлежат пространству L.

2) $\vec{e}_{m+1}$ не явл. нулевым, если только $a_{m+1} \neq 0$. Иначе бы лин комб {} элементов $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{m+1}$ была бы $= 0$, чего не может быть так как $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_{m+1}$ лин независимы и коэф. перед $\vec{f}_{m+1} \neq 0$.

3) Т.к. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m$ попарно ортогональные и имеют норму 1:

$\vec{e}_i \vec{e}_j = \{^{1,\, i=j}_{0,\, i\neq j} = \delta_{ij}$, то для $k < m+1$:

$$(\vec{e}_{m+1}, \vec{e}_k) = a_{m+1}\{(\vec{f}_{m+1}, \vec{e}_k) - (\vec{f}_{m+1}, \vec{e}_m)\overset{0}{(\vec{e}_m, \vec{e}_k)} - \dots - (\vec{f}_{m+1}, \vec{e}_k)(\vec{e}_k, \vec{e}_k) - \dots - (\vec{f}_{m+1}, \vec{e}_1)\overset{0}{(\vec{e}_1, \vec{e}_k)}\} =$$
$$= a_{m+1}\{(\vec{f}_{m+1}, \vec{e}_k) - (\vec{f}_{m+1}, \vec{e}_k)\} = \vec{0},$$

значит элемент $\vec{e}_{m+1}$ ортогонален всем $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m$.

4) Подберём a_{m+1} такое, чтобы $\|\vec{e}_{m+1}\| = 1$. Этого можно добиться, если положить $a_{m+1} = \dfrac{1}{\|\{\}\|}$.

Поскольку $\|\vec{e}_i\| = 1$; $\|\vec{e}_{m+1}\| = 1$ и $\vec{e}_{m+1}$ ортогонален всем $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m$, по индукции мы доказали, что можно найти n попарно ортогональных и имеющих нормы, равные 1 элементов пространства L. $\Rightarrow$ в L $\exists$ ортонормированный базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$.

Вот алгоритм нахождения элементов ортонормированного базиса:

① $\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}$

② $\vec{e}_2 = \dfrac{\vec{f}_2 - \left(\vec{f}_2, \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}\right)\cdot\frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}}{\left\|\vec{f}_2 - \left(\vec{f}_2, \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}\right)\cdot\frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}\right\|}$

...

ⓚ $\vec{e}_k = \dfrac{\vec{g}_k}{\|\vec{g}_k\|}$, где $\vec{g}_k = \vec{f}_k - (\vec{f}_k, \vec{e}_{k-1})\vec{e}_{k-1} - (\vec{f}_k, \vec{e}_{k-2})\vec{e}_{k-2} - \dots - (\vec{f}_1, \vec{e}_1)\vec{e}_1$

...

ⓝ $\vec{e}_n = \dfrac{\vec{g}_n}{\|\vec{g}_n\|}$, где $\vec{g}_n = \vec{f}_n - (\vec{f}_n, \vec{e}_{n-1})\vec{e}_{n-1} - (\vec{f}_n, \vec{e}_{n-2})\vec{e}_{n-2} - \dots - (\vec{f}_n, \vec{e}_1)\vec{e}_1$

Замечание: В $\forall$ n-мерном эвкл пространстве $\exists$ много ортонормированных базисов. В частности, беря в качестве $\vec{f}_1$ разные элементы из набора $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_m\}$, мы получим n разных ортонормированных базисов.

Пример:

В пространстве P_2 с базисом $(1, t, t^2)$ и скалярным произведением $(\vec{f}, \vec{g}) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$, построить ортонормированный базис.

① Пусть $\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}$. $\|\vec{f}_1\| = \sqrt{(\vec{f}_1, \vec{f}_1)} = \sqrt{3}$. $\boxed{\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}}$

② $\vec{e}_2 = \dfrac{\vec{g}_2}{\|\vec{g}_2\|}$, где $\vec{g}_2 = \vec{f}_2 - (\vec{f}_2, \vec{e}_1)\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(\vec{f}_2, \vec{e}_1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = t$ $\quad \|\vec{g}_2\| = \sqrt{2}$

$(\vec{f}_2, \vec{e}_1) = \{-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\} = 0$ $\quad \boxed{\vec{e}_2 = \frac{t}{\sqrt{2}}}$

③ $\vec{e}_3 = \dfrac{\vec{g}_3}{\|\vec{g}_3\|}$, $\vec{g}_3 = \vec{f}_3 - (\vec{f}_3, \vec{e}_2)\vec{e}_2 - (\vec{f}_3, \vec{e}_1)\vec{e}_1$ $= t^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 1/\sqrt{3} = t^2 - \frac{2}{3}$

$(\vec{f}_3, \vec{e}_2) = \{-t\cdot t^2 + 0 + t\cdot t^2\} = 0$ $\quad \Rightarrow$

$(\vec{f}_3, \vec{e}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1 + 0 + 1\} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\|\vec{g}_3\| = \sqrt{(\vec{g}_3, \vec{g}_3)} = \sqrt{(1-\frac{2}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2 + (1-\frac{2}{3})^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + 1 - \frac{4}{3} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\boxed{\vec{e}_3 = \frac{t^2 - \frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}}}$$

(Вопрос 17)

Линейные операторы, свойства. Матрица лин. оператора. Преобразование матрицы лин. оператора при замене базиса.

Опр-е| Оператором $\hat{A}$, действующим из V в W наз-ся отображение, сопоставляющее каждому элементу $\vec{x}$ пространства V некоторый элемент $\vec{y}$ пространства W.
$\vec{y} = \hat{A}\vec{x}$

Оператор $\hat{A}$ наз-ся линейным, если для любых $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ пространства V и любого комплексного числа λ выполняются соотношения:

1) $\hat{A}(\vec{x}_1+\vec{x}_2) = \hat{A}\vec{x}_1 + \hat{A}\vec{x}_2$ (св-во аддит.)
2) $\hat{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\hat{A}\vec{x}$ (св-во однородности).

Замечание: Если W совпадает с V, то лин. оператор $\hat{A}$, действующий из V в V наз-ся линейным преобразованием пространства V.

Действия:

1) Сумма: Пусть $\hat{A}$ и $\hat{B}$ действуют из V в W. Суммой $\hat{A}$ и $\hat{B}$ назовём оператор, опред. равенством
$(\hat{A}+\hat{B})\vec{x} = \hat{A}\vec{x} + \hat{B}\vec{x}$
2) Произведение на скаляр: $(\lambda\hat{A})\vec{x} = \lambda(\hat{A}\vec{x})$

Нулевым оператором назовём оператор $\hat{0}$, отображающий все элементы пространства V в нулевой элемент пространства W.
$\hat{0}\,x = \vec{0} \quad \forall x \in V$

Противоположным $\hat{A}$ наз-ся оператор $(-\hat{A}) : -\hat{A} = (-\hat{A})$

Множ-во линейных операторов, действующих из V в W с указанными операциями суммы и произведения, с выбранным нулевым и противоположным элементами сами образуют линейное пространство.

Свойства // Дальше все операторы действуют из V в V

Назовём единичным оператором оператор $\hat{E} : \hat{E}\cdot\vec{x} = \vec{x}$

Произведением операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ назовём оператор $(\hat{A}\hat{B})$, действующий по правилу:
$(\hat{A}\hat{B})\vec{x} = \hat{A}(\hat{B}\vec{x})$

Отметим, что $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$

$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = [\hat{A}\hat{B}]$ — коммутатор

$\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} = \{\hat{A}\hat{B}\}$ — антикоммутатор

свойства:

1) $\lambda(\hat{A}\hat{B}) = (\lambda\hat{A})\hat{B}$
2) $(\hat{A}+\hat{B})\hat{C} = \hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{C}$
3) $\hat{A}(\hat{B}+\hat{C}) = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}$
4) $(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C})$

Линейный оператор $\hat{B}$ наз-ся обратным для оператора $\hat{A}$, если выполняется соотношение:
$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = \hat{E}$

Обратный $\hat{A}$ оператор обозначается $\hat{A}^{-1}$

Будем говорить, что оператор $\hat{A}$ действует взаимнооднозначно из V в V, если двум различным элементам $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ отвечают различные элементы $\vec{y}_1 = \hat{A}\vec{x}_1$ и $\vec{y}_2 = \hat{A}\vec{x}_2$

Утверждение: Для того, чтобы лин. оператор $\hat{A}$ имел обратный необходимо и достаточно, чтобы он ~~что~~ действовал взаимно однозначно из V в V.

Необходимость:

Пусть $\hat{A}$ имеет обратный, но действует не взаимно однозначно $\Rightarrow$ некот. разным элементам $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ отвечает один и тот же $y = \hat{A}\vec{x}_1 = \hat{A}\vec{x}_2$, тогда $\hat{A}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \vec{0} \;|\cdot \hat{A}^{-1}$
$(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2$, что противоречит предположению и доказывает, что $\hat{A}$ действует взаимно однозначно.

Достаточность:

Пусть $\hat{A}$ действует взаимно однозначно $\Rightarrow \vec{y} = \hat{A}\vec{x}$ и всегда найдётся такой $\hat{A}^{-1}$, что:
$\hat{A}^{-1}\vec{y} = \hat{A}^{-1}\hat{A}\vec{x} = \vec{x} \Rightarrow \hat{A}^{-1}$ — обратный $\hat{A}$.

Ядро и образ

Ядром линейного оператора $\hat{A}$ наз-ся множ-во всех тех элементов $\vec{x}$ пространства V, для которых $\hat{A}\vec{x} = \vec{0}$ $(Ker\hat{A})$

если $Ker\hat{A} = \vec{0}$, то $\hat{A}$ действует взаимно однозначно из V в V.

Образом линейного оператора $\hat{A}$ наз-ся всё множ-во элементов $\vec{y} = \hat{A}\vec{x}$ $(Im\hat{A})$

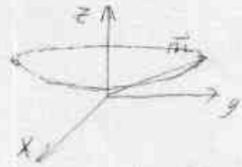
Пусть $r = \dim(Im\hat{A})$
$q = \dim(Ker\hat{A})$

Если $n = \dim(L)$, то $\dim(Im\hat{A}) + \dim(Ker\hat{A}) = \dim(L)$
$r + q = n.$

(Вопрос 15.)

Инвариантные подпространства. Собственные значения и собственные вектора линейных операторов.

∡ поворот вокруг OZ в 3D



$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Элементы, леж. в плоскости XOY преобраз. в элементы, леж. в плоск. XOY. Элементы $\parallel OZ$ после преобр. остаются $\parallel OZ$.

опр-е| Пространство V_1 наз-ся инвариантным подпространством оператора A, если для каждого $\vec{x}$, принадлежащего V_1 элемент $\hat{A}\vec{x} \in V_1$.

Для $\forall$ оператора $\hat{A}$ $\ker\hat{A}$ и $\operatorname{Im}\hat{A}$ - инвар. подпространства.

Если базис в L выбрать так, чтобы k базисных векторов инвар. подпространства были векторами этого базиса, то

$$\begin{array}{c} \hat{A}\vec{e}_1 \; \hat{A}\vec{e}_k \; \hat{A}\vec{e}_{k+1} \; \hat{A}\vec{e}_n \\ A = \left(\begin{array}{ccc|c} & k\times k & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \text{нечто} \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right) \end{array}$$ - имеет клеточно-треугольный вид.

Если L есть прямая сумма инвариантных подпространств $L = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus \ldots \oplus M_l$,

$\dim M_i = n_i$: {наш случай}

$$\hat{A} = \left\| \begin{matrix} \boxed{n_1 \times n_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{n_2 \times n_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{n_l \times n_l} \end{matrix} \right\|$$ - клеточно-диагональный.

Пусть A - диагональная:

$$A = \left\| \begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \; \lambda_n \end{matrix} \right\|,$$

$\hat{A}\vec{X}_1 = \lambda \vec{X}_1$

опр-е| Число λ наз-ся собственным значением оператора $\hat{A}$, ~~отвеча~~ если $\exists\, \vec{x} \neq \vec{o}$:

$$\hat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}, \quad (1)$$

$\vec{x}$ наз-ся собственным вектором оператора $\hat{A}$, отвечающим собственному значению λ.

Перепишем (1)

$$(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{o}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \quad (1a)$$

Сист. имеет нетрив. реш-я, если $\det(A - \lambda E) = 0$ (2) - ур-е n-го порядка относ. λ.

(2) наз-ся характеристическим ур-ем.

Докажем, что $\det(A - \lambda E)$ - инвариант.

Пусть S - матрица замены базиса, тогда

$$\det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}ES) = \det(S^{-1}(A - \lambda E)S) = \det \underbrace{S^{-1}}_{=\frac{1}{\det S}} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det S = \underline{\det(A - \lambda E)}$$

$$\det(A - \lambda E) = \sum_{k=0}^{n} d_k \lambda^k$$

Т.к. $\det(A - \lambda E)$ - инв, то и все d_k - инв.

в частности, $d_{n-1} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \underline{\operatorname{Tr}} A$ - инвариант

(T) Если собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ различны, то отвечающие им собственные вектора $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ линейно независимы

Докажем по индукции.

Поскольку $\vec{e}_1 \neq \vec{o}$, $\vec{e}_1$ - лин. независим

Пусть лин. независимы m векторов. Докажем, что лин. независимы $m+1$ векторов.

Допустим, $\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k \vec{e}_k = \vec{o} \quad | \cdot \hat{A}$

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k \hat{A}\vec{e}_k = \vec{o}$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k \lambda_k \vec{e}_k = \vec{o}$$

Вычтем из (3) (1), умнож. на λ_{m+1}: {последнее слаг. уйдётся}

$$\sum_{k=1}^{m} (\lambda_k - \lambda_{m+1}) \alpha_k \vec{e}_k = \vec{o}$$

по условию $\lambda_k \neq \lambda_{m+1} \Leftrightarrow$ все $\alpha_k = 0 \Leftrightarrow \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ - лин. независимы.

Следствие: если характ. многочлен оператора $\hat{A}$ имеет n различных корней, то в некот. базисе матрица оператора A имеет диагональный вид

Поскольку собств. вектора л. нез., их можно взять за базис

Матричная запись линейного оператора.

Разложим $\vec{x}$ - произвольный элемент V_n

$\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{e}_k$

Пусть $\hat{A}$ - лин оператор из V_n в V_n. Найдём его матрицу.

$\hat{A}\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \hat{A}\vec{e}_k \ominus$

Полагая $\hat{A}\vec{e}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\vec{e}_i \ominus \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k a_{ik}\right)\vec{e}_i$

Квадратная матрица $A = (a_{ik})$ наз-ся матрицей линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$

$$A = \begin{array}{c} \hat{A}\vec{e}_1 \quad \dots \quad \hat{A}\vec{e}_n \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

столбцы - координаты новых ~~базисных~~ преобразованных базисных векторов в старом базисе.

$\hat{A}\vec{x} = A\vec{x}$

$\mathrm{Ker}\,\hat{A}$ - множ-во векторов, для которых $A\vec{x} = 0$:

$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - система n уравнений с n неизвестными. Ядро - есть линейная оболочка ФСР.

Преобразование матрицы оператора при замене базиса.

Пусть $\tilde{\vec{e}}_i = U\vec{e}_i$, тогда

$A = U^{-1}\tilde{A}U$

(T) Матрицы A и $\tilde{A}$ оператора $\hat{A}$ в базисах $\{\vec{e}_k\}$ и $\{\tilde{\vec{e}}_k\}$ связаны соотношением:

$A = U^{-1}\tilde{A}U$, где $\tilde{e}_k = \sum_{i=1}^{n} u_k^i \vec{e}_i$, $k = 1, \dots, n$.

Док-во:

Пусть „новый" базис связан со „старым" соотношением:

$\tilde{\vec{e}}_k = \sum_{i=1}^{n} u_k^i \vec{e}_i$

С одной стороны, $\hat{A}\tilde{\vec{e}}_k = \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} u_k^i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} u_k^i \hat{A}\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} u_k^i \sum_{j=1}^{n} a_i^j \vec{e}_j$ (1)

С другой: $\hat{A}\tilde{\vec{e}}_k = \tilde{A}\tilde{\vec{e}}_k = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_k^j \tilde{\vec{e}}_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_k^j \cdot \sum_{i=1}^{n} u_j^i \vec{e}_i$ (2)

Из „(1) и (2)":

$$\sum_{i=1}^{n} u_k^i \sum_{j=1}^{n} a_i^j \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_k^j \sum_{i=1}^{n} u_j^i \vec{e}_i, \quad k = 1, \dots, n.$$

Переиндексируем справа i и j:

$$\sum_{i=1}^{n} u_k^i \sum_{j=1}^{n} a_i^j \vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_k^i \sum_{j=1}^{n} u_i^j \vec{e}_j, \text{ откуда}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_k^i \sum_{j=1}^{n} a_i^j \vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_k^i \sum_{j=1}^{n} u_i^j \vec{e}_j, \quad i, k = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} u_k^i a_i^j\right)\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_k^i u_i^j\right)\vec{e}_j$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_k^i a_i^j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_k^i u_i^j$$

$\cancel{AU = U\tilde{A}}$ $\quad UA = \tilde{A}U$

$\cancel{\tilde{A} = U^{-1}AU}$ $\quad \underline{\tilde{A} = UAU^{-1};\ A = U^{-1}\tilde{A}U}$

Доказательство из Александрова.

Пусть S: $\begin{pmatrix} \vec{e}_1{}' \\ \vec{e}_2{}' \\ \vec{e}_n{}' \end{pmatrix} = S^T\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_n \end{pmatrix}$, тогда (см. Вопрос 11): $\underline{\vec{x}} = S\vec{x}{}'$, $\underline{\vec{y}} = S\vec{y}{}'$ // другое опр. S: $(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_n{}') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)\cdot S$

Пусть $\vec{y} = A\vec{x}$, а в базисе $\{\vec{e}_k{}'\}$ $\vec{y}{}' = A'x'$, значит

$\underbrace{S\vec{y}{}'}_{\vec{y}} = A \cdot \underbrace{S\vec{x}{}'}_{\vec{x}}$ $\quad \{\vec{y} = A\vec{x}\} \mid \cdot S^{-1}$

$\vec{y}{}' = \underline{S^{-1}AS}\,\vec{x}{}'$

$\boxed{A' = S^{-1}AS}$

1) Чтобы найти собств. значения надо решить хар-ое уравнение

2) Чтобы найти собств. вектора надо решить с-му (1) для каждого λ_k.
если есть кратные собств. знач-я:

(T) Пусть $\hat{A}$ - лин. оператор, действующий в n-мерном эвклидовом пространстве E. Существует базис, образованный из собственных и присоединённых векторов оператора $\hat{A}$, в котором

1) $\hat{A}\vec{e}_k^{\,1} = \lambda_k \vec{e}_k^{\,1}$, $k = 1, \ldots, l$, где $\vec{e}_k^{\,1}$ - собств. вектора.

2) $\hat{A}\vec{e}_k^{\,m} = \lambda_k \vec{e}_k^{\,m} + \vec{e}_k^{\,m-1}$, $m = 2, 3, \ldots n_k$, где $\vec{e}_k^{\,m}$ - присоединённый вектор.

$\sum\limits_k n_k = n$.

3) Матрица A при этом имеет следующий клеточный вид:

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_l \end{Vmatrix}, \quad \text{где} \quad A_k = \begin{Vmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{Vmatrix}$$ - K-мерная жорданова клетка.

(Вопрос 16)

Линейные операторы в эвклидовых пространствах. Сопряжённый оператор

Определение:

Оператор $\hat{A}^*$ из $L(V,V)$ наз-ся сопряжённым к лин. оператору A, если для $\forall x,y \in V$ выполняется соотношение:

$$(A\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x}, A^*\vec{y}). \quad (1)$$

Свойства:

1) Если V - вещественное, $(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}^T \Gamma \vec{y}$

$(A\vec{x})^T \Gamma \vec{y} = \vec{x}^T \Gamma A^* \vec{y}$, $\Gamma (AB)^T = A^T B^T$: $\quad // (A\vec{x})^T = \vec{x}^T A^T$

$A^T \Gamma = \Gamma A^*$

$A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma \quad (2)$

Если Γ - в ортонорм. базисе: $\Gamma = E = \Gamma^{-1}$

$A^* = A^T \quad (3)$

2) $(A^T)^T = A \Rightarrow (A^*)^* = A \quad (4)$

3) по (1): $((A+B)\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x}, (A+B)^*\vec{y})$

с друг. стороны: $((A+B)\vec{x},\vec{y}) = (A\vec{x},\vec{y}) + (B\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x}, A^*\vec{y}) + (\vec{x}, B^*\vec{y}) = (\vec{x}, (A^*+B^*)\vec{y})$

Значит: $(A+B)^* = A^* + B^* \quad (5)$

4) $((\lambda A)\vec{x},\vec{y}) = (\lambda(A\vec{x}),\vec{y}) = \lambda(A\vec{x},\vec{y}) = \lambda(\vec{x}, A^* y) = (\vec{x}, \bar{\lambda} A^* \vec{y}) = (\vec{x}, (\bar{\lambda} A^*)\vec{y})$ ~~(6)~~

$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^* \quad (6)$

5) $((AB)\vec{x},\vec{y}) = (A\vec{x}, B^*\vec{y}) = (\vec{x}, A^*(B^*\vec{y})) = (\vec{x}, (A^*B^*)\vec{y})$

$(AB)^* = A^* B^* \quad (7)$

(Вопрос 17.)

Самосопряжённые операторы, свойства собственных значений и с. векторов. Диагональный вид самосопряжённых операторов.

Определение:

Линейный оператор $\hat A$ из $L(V,V)$ называют самосопряжённым, если справедливо равенство: $\hat A^* = \hat A$.

Теорема 1.

Если оператор $\hat A$ самосопряжённый, то для $\forall x \in V$ скалярное произведение $(A\vec x, \vec x)$ вещественное число.

Док-во:

$(A\vec x, \vec x) = \overline{(\vec x, A\vec x)}$ — с одной стороны, и

$(A\vec x, \vec x) = (\vec x, A^*\vec x) = (\vec x, A\vec x)$ — с другой.

Число равно своему комплексно сопряжённому, когда оно вещественно $\Rightarrow (A\vec x, \vec x) \in R$.

Теорема 2.

Собственные значения самосопряжённого оператора вещественны.

Док-во:

$(A\vec x, \vec x) = \cancel{\lambda(\vec x} (\lambda\vec x, \vec x) = \lambda(\vec x, \vec x)$

т.к. $\in R$; $(\vec x, \vec x) \in R \Rightarrow \lambda \in R$.

Теорема 3.

Если $\hat A$ — самосопряж. оператор, то собственные вектора, соответствующие различным собственным значениям ортогональны.

Док-во:

$$\begin{cases} A\vec x_1 = \lambda_1 \vec x_1 \\ A\vec x_2 = \lambda_2 \vec x_2 \end{cases} \Big\| \begin{matrix} (A\vec x_1, \vec x_2) = \lambda_1(\vec x_1, \vec x_2) \\ (\vec x_1, A\vec x_2) = \lambda_2(\vec x_1, \vec x_2) \end{matrix} \Big\| - \begin{cases} (A\vec x_1, \vec x_2) = \lambda_1(\vec x_1, \vec x_2) \\ (A\vec x_1, \vec x_2) = \lambda_2(\vec x_1, \vec x_2) \end{cases} \Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}(\vec x_1, \vec x_2) = 0$$

$(\vec x_1, \vec x_2) = 0 \Rightarrow \vec x_1$ и $\vec x_2$ ортогональны.

Теорема 4.

Если подпространство M инвар. относ. с.с.о. $\hat A$, то и его ортогональное дополнение $M^\perp$ также инвариантно относ. $\hat A$.

Док-во:

$\hat A\vec x \in M \Rightarrow (A\vec x, \vec y) = 0$, где $y \in M^\perp$

т.к. $\hat A$ — с.с.о.: $(\vec x, \hat A\vec y) = 0 \Rightarrow$ для $\forall y \in M^\perp$ действие оператора $\hat A$ на этот вектор приводит к вектору, тоже $\perp$ M $\forall$ элементу M, т.е. $\hat A\vec y \in M^\perp$.

Если в качестве баз. векторов взять собственные, то оператор $\hat A$ примет диагональный вид

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{Vmatrix}$$

Если среди собств. значений есть кратные, то баз. векторы линейно зависимы, матрица будет блочно-диагональной.

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{\lambda_k}\, p & \\ & & & & \lambda_n \end{Vmatrix}$$, где p — кратность с. зн. λ_k.

(Вопрос 18)

Ортогональные и унитарные операторы.

Определение:

Линейный оператор $\hat P$, действующий в в вещественном эвклидовом пространстве V наз-ся ортогональным, если для $\forall \vec x, \vec y \in V$ выполняется:

$$(\hat P\vec x, \hat P\vec y) = (\vec x, \vec y) \quad (1)$$

Из определения следует, что если $\vec e_1, \vec e_2, \dots, \vec e_n$ - ортонормированный базис, то и $\hat P\vec e_1, \hat P\vec e_2, \dots, \hat P\vec e_n$ - также ортонорм. базис.

Теорема (1)

Для того, чтобы $\hat P$ был ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

н $$P^* = P^{-1} \quad (2).$$

(⇒): Если $\hat P$ - ортогональный, то из (1) следует:

$(P\vec x, P\vec y) = (\vec x, \vec y)$

Но $(P\vec x, P\vec y) = (P^*P\vec x, \vec y)$.

$(P^*P\vec x, \vec y) = (\vec x, \vec y)$

$((P^*P - E)\vec x, \vec y) = 0$

д т.к. $\vec x$ и $\vec y$ - $\forall \in V$, то $P^*P = E$, таким образом P^* и P - обратные $\Rightarrow P^* = P^{-1}$

(⇐) $(P\vec x, P\vec y) = (P^*P\vec x, \vec y) = (P^{-1}P\vec x, \vec y) = (E\vec x, \vec y) = (\vec x, \vec y)$

Определение 2.

Матрица P наз-ся ортогональной, если $P^TP = PP^T = E$, то есть $P^T = P^{-1}$.

Предложение 1: Если $\{\vec e_k\}$ - ортонорм. базис, то оператор $\hat P$ будет ортогональным тогда и только тогда, когда его матрица в базисе $\{\vec e_k\}$ ортогональна.

В ортонорм. базисе $\Gamma = E$:

$(P\vec x, \vec y) = (\vec x, P^*\vec y)$

$(P\vec x)^T \Gamma \vec y = \vec x^T \Gamma P^* \vec y$

т.к. $\Gamma = E$:

$\vec x^T P^T \vec y = \vec x^T P^* \vec y$

$P^T = P^*$ - для $\forall$ оператора в ортонорм. базисе.

(⇒) По Т1: $P^* = P^{-1} \Rightarrow P^T = P^{-1} \Rightarrow$ P - ортогональна по определению.

(⇐) $P^T = P^{-1} \Rightarrow P^* = P^{-1} \Rightarrow$ По Т1 $\hat P$ - ортогональный оператор.

Предложение 2.

Собственные значения ортогонального оператора по модулю = 1.

$\hat P\vec x = \lambda \vec x$

$(P\vec x, P\vec x) = \lambda^2 (\vec x, \vec x) = (\vec x, \vec x) \Rightarrow |\lambda| = 1$

Предложение 3.

Если $\hat P_1$ и $\hat P_2$ ортогональны, то их произведение также ортогонально.

$((\hat P_1\hat P_2)\vec x, (\hat P_1\hat P_2)\vec y) = (\hat P_1(\hat P_2\vec x), \hat P_1(\hat P_2\vec y)) = (\hat P_2\vec x, \hat P_2\vec y) = (\vec x, \vec y)$

Унитарный оператор - обобщение ортогонального на случай комплексного пр-ва.

теорема (1) верна.

Предложение 4

В ортонормированном базисе $A^* = \bar A^T = A^+$, а для ун. опер. U: $U^{-1} = U^+$

Док-во:

$(A\vec x, \vec y) = (\vec x, A^*\vec y)$

$\vec x^T A^T \bar{\vec y} = \vec x^T \bar A^* \bar{\vec y}$

$A^T = \bar A^* \Rightarrow A^* = A^+ = \{\text{по Т1}\} = A^{-1}$

Определение Матрица U наз-ся унитарной, если $U^+ = U^{-1}$.

Предложения (1), (2) и (3) верны.

Определение Линейный оператор A наз-ся нормальным, если $A^*A = AA^*$. И ортогон. и унитарные операторы явл. нормальными.

Теорема 2 (б/д)

Оператор $\hat A$ нормальный $\Leftrightarrow$, когда он имеет полную ортонормированную систему базисных векторов. В этом базисе матрица A диагональна.

(Вопрос 19)

Билинейные и квадратичные формы. Матрица билинейной формы. Преобразование матрицы при замене базиса.

Числовая функция $B(\vec{x},\vec{y})$, аргументами которой являются всевозможные векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ вещественного линейного пространства L называют билинейной формой, если для $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in L_n$ $\forall \lambda, \mu \in R$:

1) $B(\vec{x}+\vec{z},\vec{y}) = B(\vec{x},\vec{y}) + B(\vec{z},\vec{y})$
2) $B(\vec{x},\vec{y}+\vec{z}) = B(\vec{x},\vec{y}) + B(\vec{x},\vec{z})$
3) $B(\lambda\vec{x},\mu\vec{y}) = \lambda\mu B(\vec{x},\vec{y})$

Другими словами, билинейная форма представляет собой числовую функцию $B(\vec{x},\vec{y})$ двух векторных аргументов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, определённую на всевозможных векторах $\vec{x}$ и $\vec{y}$ вещественного линейного пространства и линейную по каждому из этих аргументов.

3-е условие в случае комплексного пространства: $B(\lambda\vec{x},\mu\vec{y}) = \lambda\bar{\mu} B(\vec{x},\vec{y})$

Если для $\forall \vec{x},\vec{y} \in$ $\begin{cases} \text{а) вещ. пр-ву } L: & B(\vec{x},\vec{y}) = B(\vec{y},\vec{x}), \text{ то } B \text{ – симметричная б. ф.} \\ \text{б) комп. пр-ву } L^*: & B(\vec{x},\vec{y}) = \overline{B(\vec{y},\vec{x})}, \text{ то } B \text{ – эрмитова б. ф.} \end{cases}$

Пример симметричной или эрмитовой б. ф. – скалярное произведение $(\vec{x},\vec{y})$ {смотря в каком пространстве заданы элементы $\vec{x}$ и $\vec{y}$}

Если $\forall \vec{x},\vec{y}$ ~~∈~~ вещ. пространства $B(\vec{x},\vec{y}) = -B(\vec{y},\vec{x})$, то B наз-ся антисимметричной б. ф.

Матрица билинейной формы

Пусть в L есть базис $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$; Разложим по нему элементы $\vec{x}$ и $\vec{y}$

$\vec{x} = \sum_i \xi_i \vec{e}_i$; $\vec{y} = \sum_j \eta_j \vec{e}_j$

тогда $B(\vec{x},\vec{y}) = B\left(\sum_i \xi_i \vec{e}_i, \sum_j \eta_j \vec{e}_j\right) = \sum_{i,j}\left(\xi_i \eta_j \cdot B(\vec{e}_i,\vec{e}_j)\right) = \xi^T B \eta =$

$= (\xi_1,\dots,\xi_n)\cdot\|B\|\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots \\ \eta_n\end{pmatrix}$; на выходе – число.

B наз-ся матрицей билинейной формы

$B = \{b_{ij}\} = \{B(\vec{e}_i,\vec{e}_j)\}$

Ранг б. ф. – ранг матрицы этой формы в произвольном базисе $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$, при переходе к другому базису не меняется

$\operatorname{rang} B = \operatorname{rang}\{b_{ij}\}$

Если $\operatorname{rang} B = n$ – порядку матрицы $\{b_{ij}\}$, то форма B наз-ся невырожденной

(П) $n=3$.

$B(\vec{x},\vec{y}) = 3x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 2x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2 \Rightarrow B = \left\|\begin{matrix}0&2&2\\2&3&-1\\2&-1&3\end{matrix}\right\|$ – симметричная

$\operatorname{rang} B = \operatorname{rang}\left\|\begin{matrix}0&2&2\\2&3&-1\\2&-1&3\end{matrix}\right\| = 3$, т.к. $\det\left\|\begin{matrix}0&2&2\\2&3&-1\\2&-1&3\end{matrix}\right\| = -2\begin{vmatrix}2&-1\\2&3\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}2&3\\2&-1\end{vmatrix} = -16 + (-16) = -32.$

Квадратичные формы

Квадратичной формой наз-ся числовая функция $A(\vec{x},\vec{x}) = A(\vec{x})$ одного векторного аргумента $\vec{x}$, кот. получается из симметричной билинейной формы $B(\vec{x},\vec{y})$ при условии, что $\vec{y} = \vec{x}$.

$A(\vec{x}) = (x_1,\dots,x_n)\cdot\left\|\begin{matrix}a_{ij} = b_{ij}\\ a_{ij} = a_{ji}\end{matrix}\right\|\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j$

Наш (П): $A(\vec{x}) = B(\vec{x},\vec{x}) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$

Изменение матрицы б. ф. при переходе к новому базису.

Пусть $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ – старый базис, а $\{\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_n\}$ – новый, причём:

$(\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_n) = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\cdot S$, то есть $\vec{f}_k = \sum_i \vec{e}_i \cdot s_{ik}$

$\begin{cases}\vec{f}_k = \sum_i \vec{e}_i s_{ik}\\ \vec{f}_l = \sum_j \vec{e}_j s_{jl}\end{cases}$

Как выразить $\underset{\text{элементы матрицы б.ф. в новом базисе}}{b^f_{k,l}}$ через $\underset{\text{матрица б.ф. в старом базисе}}{B^e}$ и $\underset{\text{матрица перехода}}{S}$?

$b^f_{kl} = B(\vec{f}_k,\vec{f}_l) = B\left(\sum_i \vec{e}_i s_{ik}, \sum_j \vec{e}_j s_{jl}\right) = \sum_{i,j} s_{ik}s_{jl}B(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = \sum_{i,j} s_{ik}s_{jl}b^e_{ij} = \sum_i s_{ik}\left(\sum_j b^e_{ij}\cdot s_{jl}\right)$

$= \sum_i s_{ik}\cdot(B^e\cdot S)_{il} = \sum_i s^T_{ki}\cdot(B^eS)_{il} = (S^T\cdot B^e\cdot S)_{kl} \Rightarrow \boxed{B^f = S^TB^eS}$

Дополнения к вопросу о квадратичных формах:

1) Пусть $B(\vec{x},\vec{y})$ – симметричная б.ф. Ей соответствует квадратичная форма $A(\vec{x}) = B(\vec{x},\vec{x})$.

$B(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) = B(\vec{x},\vec{x}) + B(\vec{y},\vec{y}) + B(\vec{x},\vec{y}) + B(\vec{y},\vec{x}) = $ {в силу симметричности $B(\vec{x},\vec{y}) = B(\vec{y},\vec{x})$} $= B(\vec{x},\vec{x}) + B(\vec{y},\vec{y}) + 2B(\vec{x},\vec{y})$

$\Rightarrow B(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}\{B(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) - B(\vec{x},\vec{x}) - B(\vec{y},\vec{y})\}$

2) Если $\forall\vec{x}$: 1) $A(\vec{x}) < 0$ – A наз-ся отрицательно опр. кв. ф.
2) $A(\vec{x}) \geq 0$ – A наз-ся неотрицательной кв. ф.
3) $\exists\vec{x},\vec{y}$: $A(\vec{x}) > 0$, $A(\vec{y}) < 0$ $\Rightarrow$ A – знакопер. кв. ф.

(Вопрос 20)

Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к диагональному виду

Пусть кв. форма в базисе $\{\vec{e}_i\}$ имеет вид: $A(\vec{x})=\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$.

Наша задача: найти такой базис $\{\vec{f}_i\}$, в котором матрица кв. ф. $A(\vec{x})$ имеет наиболее простой вид — диагональный: $a_{ij}\neq 0$, когда $i=j$ и $=0$ при $i\neq j$: в новом базисе

$$A(x)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\dots+\lambda_ny_n^2.$$

Такой вид кв. ф. называется каноническим; числа $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ — канонические коэффициенты.

Задача сводится к нахождению коэффициентов $\{\lambda_i\}$ и матрицы перехода от $(x_1,\dots,x_n)$ к $(y_1,\dots,y_n)$: $\begin{pmatrix}y_1\\y_n\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}x_1\\x_n\end{pmatrix}$.

Метод Лагранжа.

Пусть в $\{\vec{e}_i\}$: $A(\vec{x})=\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$. где x_i — любая, но та, квадрат кот. входит в $A(\vec{x})$

Выделим группу слагаемых, содержащих x_i. Если коэффициент при $x_i^2 = 0$, то делаем замену: $x_1'=x_1-x_2$; $x_2'=x_1+x_2$, $x_3'=x_3,\dots,x_n'=x_n$, если коэф. $a_{12}\neq 0$. {Если он $=0$, но если $a_{1k}\neq 0$, то $x_1'=x_1-x_k$; $x_k'=x_1+x_k$...}. При такой замене коэф. при x_1^2 уже не будет нулевым. Итак, пусть $a_{11}\neq 0$, тогда

$$A(\vec{x})=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\dots+2a_{1n}x_1x_n+\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j \ominus$$

$\ast$ сумму: $a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\dots+2a_{1n}x_1x_n$ выделим полный квадрат:

$$\ominus\ a_{11}\left\{x_1+\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3+\dots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)\right\}^2+\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}^{*}x_ix_j$$

Сделаем замену $y_1=x_1+\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\dots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)$

$$A(\vec{x})=a_{11}y_1^2+\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}^{*}x_ix_j$$

$\ast$ $\sum\limits_{i,j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j$ и проделаем с ней то же самое. Ясно, что через конечное число шагов мы приведём кв. квадратичную форму $A(\vec{x})$ к каноническому виду. При этом:

$$y_1=x_1+\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\dots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)$$
$$y_2=x_2+\left(\frac{a_{23}^{*}}{a_{22}^{*}}x_3+\dots+\frac{a_{2n}^{*}}{a_{22}^{*}}x_n\right)$$
$$\dots$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\dots\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&\frac{a_{12}}{a_{11}}&\dots&\frac{a_{1n}}{a_{11}}\\0&1&\frac{a_{23}^{*}}{a_{22}^{*}}\dots&\frac{a_{2n}^{*}}{a_{22}^{*}}\\\dots\end{pmatrix}}_{S}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ast\end{pmatrix}$$ — так определяется S.

(П) $A(\vec{x})=3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3 \ominus (1)$

1) Выберем слаг., содержащие квадрат координаты.

$$3x_2^2+4x_1x_2-2x_2x_3=3\left(x_2+\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_3\right)^2-3\left\{\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_3\right\}^2$$

Сделаем замену $y_2=x_2+\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_3$, тогда (1):

$$\ominus\ 3y_2^2-3\left\{\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_3\right\}^2+3x_3^2+4\cancel{x_1x_2}+4x_1x_3-2\cancel{x_2}x_3=3y_2^2-\frac{4}{3}x_1^2+\frac{4}{3}x_1x_3-\frac{1}{3}x_3^2+3x_3^2+4\cancel{x_1x_2}+4x_1x_3-2\cancel{x_2}x_3=3y_2^2-\frac{4}{3}x_1^2+\frac{8}{3}x_3^2+4\cancel{x_1x_2}+\frac{16}{3}x_1x_3-2\cancel{x_2}x_3 \ominus$$

$\ast$ слагаемые с x_1: $-\frac{4}{3}x_1^2+4\cancel{x_1x_2}+\frac{16}{3}x_1x_3=-\frac{4}{3}\left(x_1-\cancel{\frac{3}{2}x_2}+2x_3\right)^2+\frac{4}{3}\left\{4x_3^2\right\}$

Обозначим $y_1=x_1-2x_3$:

$$\ominus\ 3y_2^2-\frac{4}{3}y_1^2+8x_3^2\ominus$$

$y_3=x_3$: $\ominus\ 3y_2^2-\frac{4}{3}y_1^2+8y_3^2$, где

$$\begin{cases}y_1=x_1-2x_3\\y_2=x_2+\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_3\\y_3=x_3\end{cases}\quad(\Rightarrow)\quad S=\begin{Vmatrix}1&0&-2\\\frac{2}{3}&1&-\frac{1}{3}\\0&0&1\end{Vmatrix}$$

Вопрос 21

Метод ортогональных преобразований приведения квадратичной формы к диагональному виду.

Линейное преобразование A Эвклидова пространства E_n наз-ся присоединенным билинейной форме B, если для $\forall$ векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из E_n выполнено равенство:

$$B(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x}, \hat{A}\vec{y})$$

Выразим матрицу A через матрицу B.

$$\cancel{x^T B} \quad \xi^T B \eta = \xi^T \Gamma A \eta \iff \Gamma A = B \iff \underline{A = \Gamma^{-1} B}$$

Если базис ортонормирован, то $A = B$.

Предложение Для симм. билин. формы оператор $\hat{A}$ - самосопряжённый.

Симм: $B(\vec{x},\vec{y}) = B(\vec{y},\vec{x})$

$$\begin{array}{ccc} B(\vec{x},\vec{y}) & = & B(\vec{y},\vec{x}) \\ \parallel & & \parallel \\ (\vec{x}, \hat{A}\vec{y}) & & (\vec{y}, \hat{A}\vec{x}) \\ \parallel & & \\ (A\vec{y},\vec{x}) & & \end{array}$$

Итак, $(A\vec{y},\vec{x}) = (\vec{y}, A\vec{x}) \iff A = A^* -$ самосопр.

Метод ортогональных преобразований.

Поскольку $\hat{A}$ - самосопряжённый оператор, его собственные вектора ортогональны $\Rightarrow$ нормируя их, мы получим базис, в котором матрица A примет диагональный вид, где на элементы диагонали - собственные значения, так как в ортонормированном базисе $B = A$, то матрица билинейной формы, а значит и соответствующей ей квадратичной формы диагональны

(Вопрос 22)

Метод Якоби приведения квадратичной формы к диагональному виду.

При некоторых доп. условиях, налагаемых на квадратичную форму $A(\vec{x},\vec{x})$ можно указать конкретные формулы перехода от базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ к каноническому базису $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n)$, а также формулы для канонических коэффициентов.

Преобразование базисных векторов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ наз-ся треугольным, если оно имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = \alpha_{21}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_n = \alpha_{n1}\vec{e}_1 + \alpha_{n2}\vec{e}_2 + \dots + \alpha_{nn}\vec{e}_n \end{cases} \quad (1)$$

Так как $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$ л/нез, они образуют базис.

Введём в рассмотрение угловые миноры $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_{n-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = |a_{11}|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \dots$$

(Т) Пусть миноры $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$ матрицы (a_{ij}) квадратичной формы $A(\vec{x},\vec{x})$ отличны от нуля, тогда $\exists!$ треугольное преобразование базиса $(\vec{e}_i)$, которое приведёт форму $A(\vec{x},\vec{x})$ к каноническому виду.

Коэффициенты формы $A(\vec{x})$ вычисляются по формулам: $b_{ij} = A(\vec{f}_i, \vec{f}_j)$.

В каноническом базисе матрица A имеет диагональный вид: $b_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$, или, поскольку матрица симметрична, $b_{ij} = 0$, $\forall\, i < j$:

$$A(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = 0, \quad i < j \quad (2)$$

подставим $\vec{f}_i$ из (1):

$$A(\alpha_{i1}\vec{e}_1 + \alpha_{i2}\vec{e}_2 + \dots + \alpha_{ii}\vec{e}_i, \vec{f}_j) = 0, \quad j = 2, \dots, n$$

% может быть $= 0$, если:

$$A(\vec{e}_1, \vec{f}_j) = 0; \quad A(\vec{e}_2, \vec{f}_j) = 0$$

как видно из с-мы (1), условие (2) выполняется, если выполняются равенства:

$$A(\vec{e}_1, \vec{f}_j) = 0; \; A(\vec{e}_2, \vec{f}_j) = 0; \dots; \; A(\vec{e}_{j-1}, \vec{f}_j) = 0$$

В частности, пусть $j = 3$. В 3-ем столбце должны быть нулевыми b_{13} и b_{23}. Это будет справедливо, если $A(\vec{e}_1, \vec{f}_3) = A(\vec{e}_2, \vec{f}_3) = 0$ (3)

Снова вернёмся к с-ме (1), и вытащим из неё:

$$\vec{f}_j = \alpha_{j1}\vec{e}_1 + \alpha_{j2}\vec{e}_2 + \dots + \alpha_{j,j-1}\vec{e}_{j-1} + \vec{e}_j$$

В частности, для $j = 3$: $\vec{f}_3 = \alpha_{31}\vec{e}_1 + \alpha_{32}\vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3$

и подставим $\vec{f}_j$ в (3); получим линейную с-му уравнений для неизвестных α_{jk}

n^{+*} обозначим $A(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = a_{ij}$

$$\begin{cases} \alpha_{j1}a_{11} + \alpha_{j2}a_{12} + \dots + \alpha_{j,j-1}a_{1,j-1} + a_{1j} = 0 \\ \alpha_{j,j-1}a_{j-1,j} + \alpha_{j2}a_{j-1,2} + \dots + \alpha_{j,j-1}a_{j-1,j-1} + a_{j-1,j} = 0 \end{cases}$$

Это неоднородная система лин. ур-й из $(j-1)$ ур-й с $(j-1)$ неизвестными крамеровского типа. По условию теоремы, её определитель Δ_{j-1} отличен от нуля. $\Rightarrow$ она имеет ! решение. Теорема доказана.

Найдём $\{\alpha_{ij}\}$ и λ_i.

По ф-лам Крамера, $\alpha_{j,k} = \frac{\Delta_k}{\Delta}$ (4), где Δ_k - минор, в кот. к-ый столбец заменён на $\begin{pmatrix} -a_{1j} \\ -a_{j-1,j} \end{pmatrix}$

Теперь, зная связь базисов $\{\vec{f}_i\}$ и $\{\vec{e}_i\}$ найдём канонические коэффициенты λ_i.

$$\lambda_j = A(\vec{f}_j, \vec{f}_j) = A(\alpha_{j1}\vec{e}_1 + \alpha_{j2}\vec{e}_2 + \dots + \alpha_{j,j-1}\vec{e}_{j-1} + \vec{e}_j, \vec{f}_j) = A(\vec{e}_j, \vec{f}_j) = A(\vec{e}_j, \alpha_{j1}\vec{e}_1 + \alpha_{j2}\vec{e}_2 + \dots + \alpha_{j,j-1}\vec{e}_{j-1} + \vec{e}_j) =$$

$$= \alpha_{j1}a_{1j} + \alpha_{j2}a_{2j} + \dots + \alpha_{j,j-1}a_{j-1,j} + a_{jj} \quad (5)$$

Обозначим за $\Delta_{j-1,i}$ минор матрицы (a_{ij}), расположенный на пересечении строк с номерами $1, 2, \dots, j-1$ и столбцов с номерами $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, j$, тогда

$$\alpha_{ji} = (-1)^{j+i}\frac{\Delta_{j-1,i}}{\Delta_{j-1}} \quad (6)$$

подставим (5) в (6):

$$\lambda_j = \left\{(-1)^{j+1} \cdot \frac{\Delta_{j-1,1}}{\Delta_{j-1}} a_{1j} + (-1)^{j+2}\Delta_{j-1,2} \cdot a_{2j} + \dots + (-1)^{2j-1}\Delta_{j-1,j-1} \cdot a_{j-1,j} + a_{jj}\Delta_{j-1}\right\} \cdot \frac{1}{\Delta_{j-1}}$$

Числитель последнего соотношения представляет собой сумму произведений элементов строки с номером j в определителе Δ_j на алгебраические дополнения этих элементов в указанном определителе. Значит, числитель равен Δ_j.

$$\lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}, \quad j = 2, 3, \ldots, n.$$

$$\lambda_1 = A(\vec{f}_1, \vec{f}_1) = A(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = a_{11} = \Delta_1$$

Итак,

$$\lambda_1 = \Delta_1; \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}; \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}; \ldots; \quad \lambda_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

Вопросы к экзамену по курсу «Линейная алгебра»

1. Матрицы. Основные операции над матрицами.
2. Определители. Основные свойства. Формула полного разложения. $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot M_{1j}$
3. Определители. Формулировка теоремы Лапласа.
4. Обратная матрица. $a_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j} \cdot \overline{M}_{ij} / \det A$
5. Линейная независимость строк и ранг матрицы. (Усл. нез; Опр.; Т. о базисном миноре)
6. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Формулы Крамера.
7. Системы однородных линейных уравнений. Фундаментальная система решений.
8. Общее решение системы неоднородных линейных уравнений. (лин. пр-во)
9. Линейные пространства. Базис и размерность.
10. Подпространства линейных пространств. (прямая сумма)
11. Преобразование базисов и координат векторов. Матрица преобразования.
12. Евклидовы пространства. Свойства скалярного произведения. Матрица Грама. Ортонормированный базис. Комплексные евклидовы пространства.
13. Метод ортогонализации Грама-Шмидта.
14. Линейные операторы, свойства. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.
15. Инвариантные подпространства. Собственные значения и собственные вектора линейных операторов.
16. Линейные операторы в евклидовых пространствах. Сопряженный оператор.
17. Самосопряженные операторы. Свойства собственных значений и собственных векторов. Диагональный вид самосопряженных операторов.
18. Ортогональные и унитарные операторы.
19. Билинейные и квадратичные формы. Матрица билинейной формы. Преобразование матрицы при замене базиса.
20. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к диагональному виду.
21. Метод ортогональных преобразований приведения квадратичной формы к диагональному виду.
22. Метод Якоби приведения квадратичной формы к диагональному виду.
23. Классификация квадратичных форм. Критерий Сильвестра.

Вырожденный и невырожд. спектр операторов,
связь эрмит. и ...
совместный спектр,
понятия о полном наборе.
Оператор сдвига $\frac{d}{dx}$ (бесконечно малый сдвиг)

Матричные операторы

Связь унитарных и эрмитовых операторов.

μ $\hat{U} \hat{u}^{+}_{\mu\mu} = \hat{E}_{1}$
$\hat{U} |\vec{x}\rangle = \mu |\vec{x}\rangle$

$\langle \vec{x} | \hat{U}^{+} = \mu^{*} \langle x |$ $\quad |\mu^2| = 1 \quad \mu = e^{i\lambda} \quad \hat{U} = \exp(i\hat{A})$
$\hat{A}^{+} = \hat{A}$