Задача № 5.19.

При поочерёдном освещении поверхности некоторого металла светом с $\lambda_1 = 0.35 мкм$ и $\lambda_2 = 0.54 мкм$ обнаружили, что соответствующие максимальные скорости фотоэлектронов отличаются друг от друга в $\eta = 2,0$ раза. Найти работу выхода с поверхности этого металла.

Решение:

Воспользуемся уравнением Эйнштейна для фотоэффекта. Эти уравнения для двух этих случаев имеют вид:

$$\hbar\omega_1 = A + K_{\max 1} = A + \frac{mv_{\max 1}^2}{2} \tag{1}$$

$$\hbar\omega_2 = A + K_{\max 2} = A + \frac{mv_{\max 2}^2}{2} \tag{2}$$

Здесь A - работа выхода, m - масса электрона. Учитывая, что частота и длина волны связаны следующим соотношением:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \tag{3}$$

Уравнения (1) и (2) запишем в следующем виде:

$$\frac{mv_{\max 1}^2}{2} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} - A \tag{4}$$

$$\frac{mv_{\max 2}^2}{2} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_2} - A \tag{5}$$

Разделим уравнение (4) на уравнение (5):

$$\left(\frac{v_{\max 1}}{v_{\max 2}}\right)^2 = \eta^2 = \frac{\dfrac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} - A}{\dfrac{2\pi\hbar c}{\lambda_2} - A} \tag{6}$$

Отсюда определим работу выхода с поверхности металла:

$$A = \frac{2\pi\hbar c}{\eta^2 - 1}\left(\frac{\eta^2}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) \tag{7}$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$A = 3.012 \cdot 10^{-19}\, Дж = 1.9\, эВ$$

Ответ:

$$A = \frac{2\pi\hbar c}{\eta^2 - 1}\left(\frac{\eta^2}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right),$$

$$A = 3.012 \cdot 10^{-19}\, \text{Дж} = 1.9\, \text{эВ}.$$

Задача № 6.235.

Температура поверхности Солнца $T_0 = 5500 K$. Считая, что поглощательная способность Солнца и Земли равна единице и что Земля находится в состоянии теплового равновесия, оцените её температуру.

Решение:

Найдём поток энергии, излучаемый поверхностью Солнца:

$$\Phi_0 = R_0 S = \sigma T_0^4 \cdot 4\pi r_0^2 \qquad (1)$$

где $R_0 = \sigma T_0^4$ - энергетическая светимость поверхности Солнца (по закону Стефана-Больцмана, учитывая, что Солнце мы считаем абсолютно чёрным телом), а $S = 4\pi r_0^2$ - площадь поверхности Солнца, где r_0 - радиус Солнца. Найдём часть этого потока энергии, которая поглощается Землёй. Будем считать, что поглощение происходит также как и излучение. Пусть l - средний радиус земной орбиты, тогда плотность потока энергии излучения на расстоянии l от центра Солнца имеет значение:

$$j = \frac{\Phi_0}{4\pi l^2} = \sigma T_0^4 \left(\frac{r_0}{l}\right)^2 \qquad (2)$$

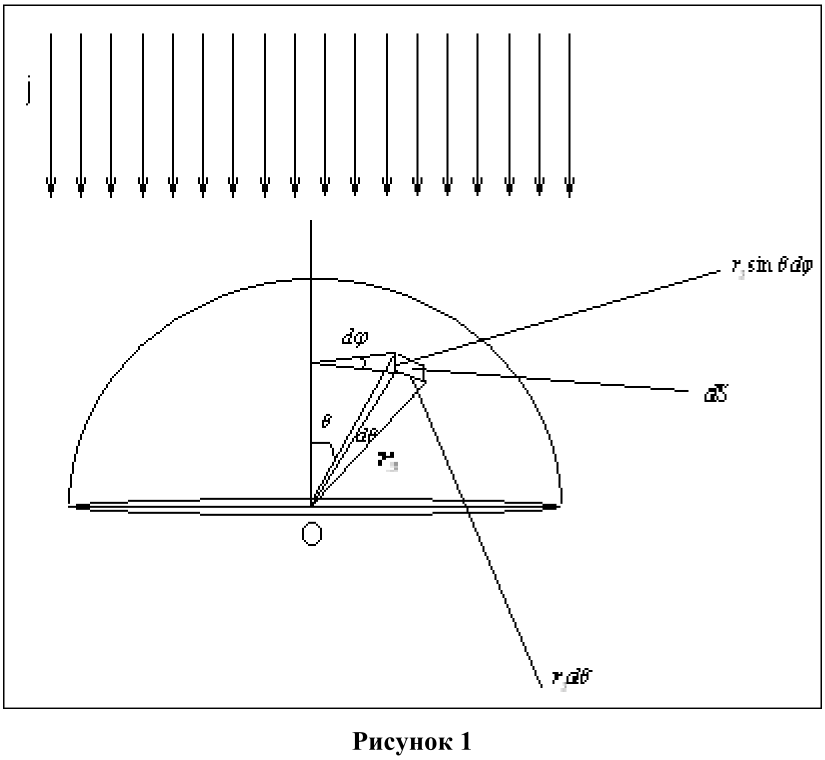

Рисунок 1

Выделим на поверхности Земли элементарную площадку, площадь которой $dS = r_з^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. Поток электромагнитной энергии, поглощаемый этой площадкой:

$$d\Phi = j dS \cos\theta = j r_з^2 \sin\theta \cos\theta d\theta d\varphi \qquad (3)$$

Тогда поток, поглощаемый всей полусферой земной поверхности, равен:

$$\Delta \Phi = j r_З^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = j\pi r_З^2 \qquad (4)$$

Так как Земля находится в состоянии теплового равновесия, то она излучает такой же поток энергии, который и поглощает. Пусть $R_З$ - энергетическая светимость Земли, тогда излучаемый поток энергии:

$$\Delta \Phi = R_З \cdot 4\pi r_З^2 \qquad (5)$$

По закону Стефана-Больцмана, считая Землю абсолютно чёрным телом, получим:

$$R_З = \sigma T_З^4 \qquad (6)$$

Приравнивая выражения (4) и (5) на основании того, что Земля находится в состоянии теплового равновесия, получим:

$$j\pi r_З^2 = \sigma T_З^4 \cdot 4\pi r_З^2 \Rightarrow 4\sigma T_З^4 = \sigma T_0^4 \left(\frac{r_0}{l}\right)^2 \Rightarrow T_З = T_0 \sqrt{\frac{r_0}{2l}} \qquad (7)$$

Подставляя числовые значения, получим:

$T_З \approx 266K$

Ответ:

$T_З \approx 266K$.

Задача № 6.240.

Получить с помощью формулы Планка приближённые выражения для объёмной спектральной плотности излучения u_ω в области, где:

1) $\hbar\omega \ll kT$ (формула Рэлея-Джинса);
2) $\hbar\omega \gg kT$ (формула Вина).

Решение:

Формула Планка для спектральной плотности энергии излучения имеет вид:

$$u(\omega,T)=\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1} \qquad (1)$$

1) Рассмотрим случай $\hbar\omega \ll kT$. При $\hbar\omega \to 0$ мы приближаемся к классическому случаю – предположению о том, что энергия излучения не квантована. Разложим экспоненту в ряд (при $\frac{\hbar\omega}{kT}\to 0$):

$$\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)=1+\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2+\ldots \qquad (2)$$

Пренебрегая членами, начиная со второго порядка, приближённо получим:

$$\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\approx 1+\frac{\hbar\omega}{kT} \qquad (3)$$

Подставляя приближённое выражение (3) в выражение (1), получим:

$$u(\omega,T)\approx\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{1}{1+\frac{\hbar\omega}{kT}-1}=\frac{\omega^2}{\pi^2c^3}kT \qquad (4)$$

Мы получили формулу Рэлея-Джинса для спектральной плотности энергии излучения. Значения спектральной плотности энергии излучения, полученное с помощью формулы Рэлея-Джинса удовлетворительно совпадают с экспериментальными значениями только в области длинных волн. Этот факт согласуется с нашим первоначальным предположением $\hbar\omega \ll kT$ - область малых частот или больших длин волн.

2) Теперь рассмотрим случай $\hbar\omega \gg kT$. Из формулы Планка для спектральной плотности энергии излучения (1) автоматически имеем:

$$u(\omega,T)=\omega^3F\left(\frac{\omega}{T}\right) \qquad (5)$$

где $F\left(\frac{\omega}{T}\right)=\frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar}{k}\left(\frac{\omega}{T}\right)\right)-1}$. Выражение (5) – формула Вина.

Итак, с помощью формулы Планка для спектральной плотности энергии излучения мы пришли к формуле Рэлея-Джинса и формуле Вина.

Ответ:

1) $u(\omega,T)\approx\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}kT$,

2) $u(\omega,T)=\omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right)$.

Задача № 3.

При каком значении кинетической энергии дебройлевская длина волны электрона равна его комптоновской длине волны?

Решение:

Дебройлевская длина волны электрона равняется:

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{p} \qquad (1)$$

где p - импульс электрона. Считая электрон релятивистским, имеем:

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{K(K+2mc^2)} \qquad (2)$$

где K - кинетическая энергия электрона. Таким образом, выражение (1) примет вид:

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{K(K+2mc^2)}} \qquad (3)$$

Комптоновская длина волны электрона равняется:

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc} \qquad (4)$$

где m - масса покоя электрона. Для того, чтобы найти кинетическую энергию электрона, при которой его дебройлевская длина волны равняется его комптоновской длине волны, приравняем выражения (3) и (4) и получим:

$$\lambda_Б = \lambda_C$$

$$\frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{K(K+2mc^2)}} = \frac{2\pi\hbar}{mc}$$

$$\sqrt{K(K+2mc^2)} = mc^2 \qquad (5)$$

Возведём в квадрат обе части выражения (5) и получим квадратное уравнение относительно K:

$$K^2 + 2mc^2K - m^2c^4 = 0 \qquad (6)$$

Это уравнение имеет следующие корни:

$$K = -mc^2 \pm \sqrt{2}mc^2$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условиям задачи, поэтому кинетическая энергия электрона равняется:

$$K = mc^2(\sqrt{2} - 1) \tag{7}$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$K = 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot (\sqrt{2} - 1) = 3.4 \cdot 10^{-14}\ \textit{м}$$

Ответ: Кинетическая энергия электрона, при которой дебройлевская длина волны равняется его комптоновской длине волны, равняется:

$$K = mc^2(\sqrt{2} - 1)$$

$$K = 3.4 \cdot 10^{-14}\ \textit{м}$$

Задача № 15.

Свободно движущаяся нерелятивистская частица имеет относительную неопределённость кинетической энергии порядка $1.6 \cdot 10^{-4}$. Оцените, во сколько раз неопределённость координаты такой частицы больше её дебройлевской длины волны.

Решение:

Пусть движущаяся нерелятивистская частица имеет импульс p. В этом случае её кинетическая энергия равняется:

$$K = \frac{p^2}{2m} \tag{1}$$

Найдём дифференциал выражения (1):

$$dK = \frac{p}{m} dp \tag{2}$$

Такая же связь будет и между неопределённостями кинетической энергии и импульса, то есть:

$$\Delta K = \frac{p}{m} \Delta p \tag{3}$$

Учитывая выражения (1) и (3), получим, что относительная неопределённость кинетической энергии частицы равняется:

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{p \Delta p}{m} \cdot \frac{2m}{p^2} = 2 \frac{\Delta p}{p} \tag{4}$$

Соотношение неопределённостей Гейзенберга для координаты и проекции импульса имеет вид:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar \tag{5}$$

Поэтому неопределённость координаты частицы равняется:

$$\Delta x \sim \frac{\hbar}{\Delta p} \tag{6}$$

Дебройлевская длина волны частицы:

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{p} \tag{7}$$

Найдём отношение неопределённости координаты частицы и её дебройлевской длины волны:

$$\frac{\Delta x}{\lambda_Б} = \frac{\hbar}{\Delta p} \cdot \frac{p}{2\pi\hbar} = \frac{1}{\pi\left(\frac{2\Delta p}{p}\right)} \quad (8)$$

Согласно выражению (4), $\frac{2\Delta p}{p}$ равняется относительной неопределённости кинетической энергии частицы $\frac{\Delta K}{K}$, поэтому выражение (8) примет вид:

$$\frac{\Delta x}{\lambda_Б} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\Delta K}{K}\right)^{-1} \quad (9)$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$\frac{\Delta x}{\lambda_Б} = \frac{1}{3.14}(1.6 \cdot 10^{-4})^{-1} \approx 2 \cdot 10^3$$

Ответ: Отношение неопределённости координаты частицы к её дебройлевской длине волны равняется:

$$\frac{\Delta x}{\lambda_Б} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\Delta K}{K}\right)^{-1}$$

$$\frac{\Delta x}{\lambda_Б} \approx 2 \cdot 10^3$$

Задача № 27.

Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, имеющей ширину a. В каких точках интервала $0 < x < a$ плотность вероятности обнаружения частицы одинакова для основного и второго возбуждённого состояний?

Решение:

Потенциальная яма имеет вид, представленный на рисунке 1:

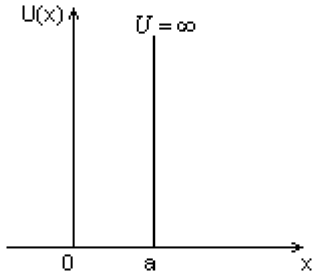

Рисунок 1

$$U(x) = \begin{cases} \infty, x < 0 \\ 0, 0 < x < a \\ \infty, x > a \end{cases}$$

Составим уравнение Шредингера для области $0 < x < a$:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0 \tag{1}$$

или в виде:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0 \tag{2}$$

где $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\psi(x) = A\sin(kx + \alpha) \tag{3}$$

Используя условие непрерывности на краях ямы (в точках $x = 0$ и $x = a$), получим:

$$\begin{aligned} &\sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ &\sin ka = 0 \Rightarrow ka = \pm\pi n, n = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{4}$$

С учётом выражений (4) волновая функция (3) примет вид:

$$\psi(x) = A\sin\left(\frac{\pi}{a} nx\right) \tag{5}$$

Постоянную A в выражении (5) найдём, используя условие нормировки:

$$\int |\psi|^2 dx = 1 \Rightarrow A^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a} nx\right) dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}} \qquad (6)$$

В этом случае волновые функции собственных состояний частицы в потенциальной яме имеют вид:

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a} nx\right) \qquad (7)$$

Физический смысл пси-функции заключается в том, что её квадрат модуля определяет плотность вероятности местонахождения частицы. Поэтому плотность вероятности обнаружения частицы, находящейся в $n-ом$ собственном состоянии, равняется:

$$\rho_n = |\psi_n|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{\pi}{a} nx\right) \qquad (8)$$

Для основного состояния ($n=1$) имеем:

$$\rho_1 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) \qquad (9)$$

Для второго возбуждённого состояния ($n=3$) имеем:

$$\rho_3 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{3\pi}{a} x\right) \qquad (10)$$

Найдём точки интервала $0 < x < a$, в которых выполняется $\rho_1 = \rho_3$. Для этого составим уравнение:

$$\frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{3\pi}{a} x\right) \qquad (11)$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) = \sin^2\left(\frac{3\pi}{a} x\right)$$

Учитывая тригонометрическое соотношение $\sin^2 \gamma = \frac{1-\cos 2\gamma}{2}$, получим:

$$\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi}{a} x\right)}{2} = \frac{1-\cos\left(\frac{6\pi}{a} x\right)}{2}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{a} x\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{a} x\right)$$

Воспользуемся тригонометрическим соотношением $\cos 3\gamma = 4\cos^3\gamma - 3\cos\gamma$ и получим:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) = 4\cos^3\left(\frac{2\pi}{a}x\right) - 3\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$$

$$\cos^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\left(\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) - 1\right) = 0$$

Отсюда получим, что $\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) = 0$ или $\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) = 1$. Отсюда получим:

$\frac{2\pi}{a}x = \frac{\pi}{2} + \pi p_1$ или $\frac{2\pi}{a}x = 2\pi p_2$, где p_1 и p_2 - целые числа. Поэтому $x = \frac{a}{4} + \frac{a}{2}p_1$, $x = ap_2$. Интервалу $0 < x < a$ принадлежат решения $x = \frac{a}{4}$ и $x = \frac{3a}{4}$. Поэтому в точках $x_1 = \frac{a}{4}, x_2 = \frac{3a}{4}$ плотности вероятностей для основного и второго возбуждённого состояний одинаковы. Графики функций (9) и (10) приведены на рисунке 2:

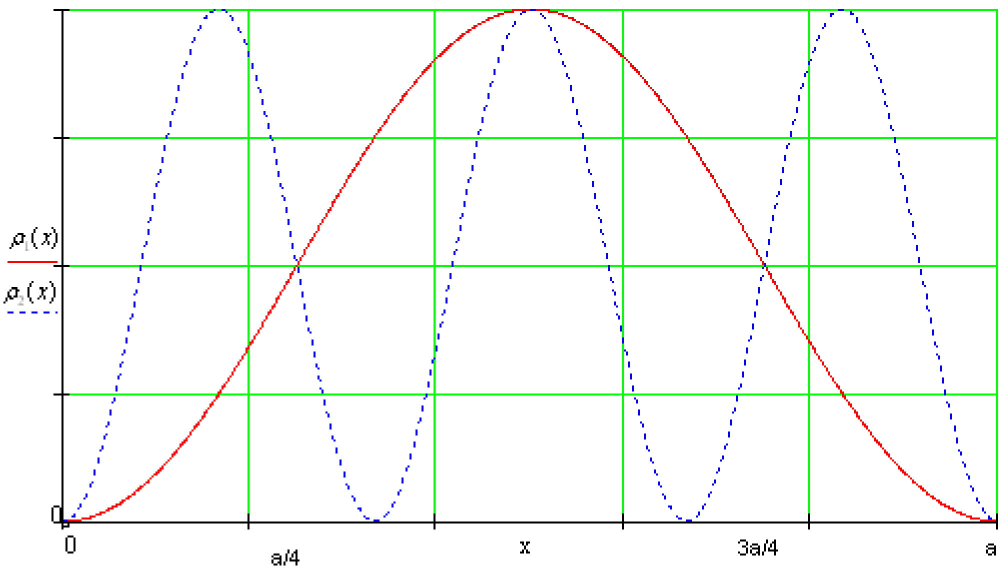

Рисунок 2

Ответ: В точках $x_1 = \frac{a}{4}, x_2 = \frac{3a}{4}$ плотности вероятностей обнаружения частицы одинаковы для основного и второго возбуждённого состояний.

Задача № 39.

Частица с энергией E падает на прямоугольный потенциальный порог высотой U_0. Найдите приближённое выражение для коэффициента отражения R для случая $\frac{U_0}{E} \ll 1$.

Решение:

Прямоугольный потенциальный порог имеет вид, представленный на рисунке 1:

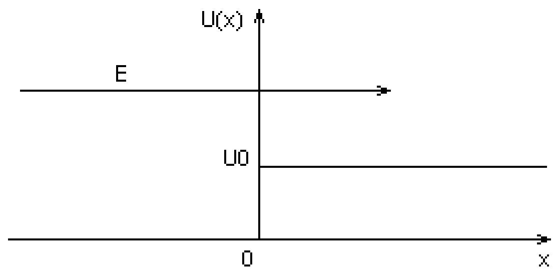

Рисунок 1

$$U(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ U_0, x > 0 \end{cases}$$

Составим уравнение Шредингера для области $x < 0$:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi_1 = 0 \qquad (1)$$

Для области $x > 0$:

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0)\psi_2 = 0 \qquad (2)$$

Запишем дифференциальные уравнения (1) и (2) в виде:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + k_1^2 \psi_1 = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + k_2^2 \psi_2 = 0 \qquad (4)$$

где $k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$ и $k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)$. В нашем случае $E > U_0$. Решения дифференциальных уравнений (3) и (4) имеют вид:

$$\psi_1(x) = A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x) \qquad (5)$$

$$\psi_2(x) = A_2 \exp(ik_2 x) + B_2 \exp(-ik_2 x) \qquad (6)$$

Первое слагаемое выражения (5) соответствует падающей дебройлевской волне, второе слагаемое – отражённой волне. В области $x > 0$ существует только прошедшая волна, которой соответствует первое слагаемое выражения (6), поэтому коэффициент $B_2 = 0$. Таким образом, выражение (6) примет вид:

$$\psi_2(x) = A_2 \exp(ik_2 x) \tag{7}$$

Волновая функция частицы должна удовлетворять стандартным условиям. Используя условие непрерывности в точке $x = 0$, получим:

$$A_1 + B_1 = A_2 \tag{8}$$

Используя условие гладкости (непрерывности первых производных), получим:

$$k_1 A_1 - k_1 B_1 = k_2 A_2 \tag{9}$$

Из уравнений (8) и (9) следует:

$$k_1 A_1 - k_1 B_1 = k_2 A_1 + k_2 B_1$$
$$(k_1 - k_2) A_1 = (k_1 + k_2) B_1$$

Откуда получим:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \tag{10}$$

Так как квадрат амплитуды волновой функции в нашем случае характеризует плотность вероятности местонахождения частицы, а скорость движения частицы $v \sim k$, то поток плотности вероятности:

$$P \sim vA^2 \sim kA^2 \tag{11}$$

Для падающей дебройлевской волны поток плотности вероятности:

$$P \sim k_1 A_1^2 \tag{12}$$

Для отражённой дебройлевской волны поток плотности вероятности:

$$P' \sim k_1 B_1^2 \tag{13}$$

Коэффициент отражения частицы от потенциального порога равняется:

$$R = \frac{P'}{P} = \frac{B_1^2}{A_1^2} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \tag{14}$$

Так как $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar}$, получим:

$$R=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2mE}-\sqrt{2m(E-U_0)}}{\sqrt{2mE}+\sqrt{2m(E-U_0)}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{E}-\sqrt{E-U_0}}{\sqrt{E}+\sqrt{E-U_0}}\right)^2=\left(\frac{1-\sqrt{1-\dfrac{U_0}{E}}}{1+\sqrt{1-\dfrac{U_0}{E}}}\right)^2 \qquad (15)$$

Теперь рассмотрим случай $\frac{U_0}{E} \ll 1$. В этом случае в числителе выражения (15) получим нуль. Таким образом, $R \approx 0$, то есть дебройлевская волна практически полностью проходит в область потенциального порога.

Ответ: В случае $\frac{U_0}{E} \ll 1$ коэффициент отражения $R = 0$, то есть дебройлевская волна практически полностью проходит в область потенциального порога.

Задача № 41.

Определите возможные результаты измерений квадрата модуля момента импульса L^2 для частицы, находящейся в состоянии, описываемой волновой функцией $\psi(\theta,\varphi) = A\sin\theta\cos\varphi$, где θ - полярный угол, φ - азимутальный угол, A - некоторая нормировочная постоянная.

Решение:

Волновая функция частицы имеет вид:

$$\psi(\theta,\varphi) = A\sin\theta\cos\varphi \tag{1}$$

Единственно возможными результатами измерений квадрата модуля момента импульса являются только собственные значения соответствующего оператора, которые находятся из решения уравнения:

$$\hat{L}^2\psi = L^2\psi \tag{2}$$

где оператор квадрата момента импульса равняется:

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \tag{3}$$

Таким образом, спектр собственных значений оператора $\hat{L}^2$ является дискретным:

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1) \tag{4}$$

Каждому значению l соответствует $(2l+1)$ собственных волновых функций $\psi_{l,m} = Y_{l,m}$, отличающихся значением m.

Определим постоянную A в выражении (1), используя условие нормировки:

$$A^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\varphi\sin\theta d\theta d\varphi = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \tag{5}$$

Таким образом, выражение (1) примет вид:

$$\psi(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\theta\cos\varphi \tag{6}$$

Воспользуемся формулой Эйлера $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$ и преобразуем волновую функцию (6) к виду:

$$\psi(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\theta\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}Y_{1,1} + \frac{1}{\sqrt{2}}Y_{1,-1} \tag{7}$$

где $Y_{1,1}(\theta,\varphi)=\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}$ и $Y_{1,-1}(\theta,\varphi)=\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}$ - собственные функции оператора $\hat{L}^2$, отвечающие квантовому числу $l=1$. Таким образом, мы разложили заданную волновую функцию по собственным функциям оператора $\hat{L}^2$, которые отвечают значению квантового числа $l=1$, поэтому в квантовом состоянии, описываемом волновой функцией (7), возможный результат измерений квадрата модуля момента импульса определим, используя выражение (4):

$$L^2=\hbar^2 l(l+1)=2\hbar^2 \qquad (8)$$

Ответ: Возможный результат измерений квадрата модуля момента импульса: $L^2=\hbar^2$.

Задача № 2.

Определить возраст древних деревянных предметов, если удельная активность изотопа ^{14}C у них составляет $\eta = 3/5$ удельной активности этого же изотопа в только что срубленных деревьях. Период полураспада ^{14}C равен $T = 5570$ лет.

Решение:

Воспользуемся законом радиоактивного распада:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{1}$$

где N_0 - начальное количество нераспавшихся ядер (в момент времени $t = 0$), а λ - постоянная распада. Учитывая, что удельная активность равняется: $A_{óä}(t) = \dfrac{\lambda N(t)}{m}$, то для активностей получим соотношение аналогичное (1). Для этого нужно умножить обе части уравнения (1) на постоянную распада, делённую на массу $\dfrac{\lambda}{m}$:

$$\frac{\lambda N(t)}{m} = \frac{\lambda N_0 e^{-\lambda t}}{m} \Rightarrow A_{óä}(t) = A_{0\,óä} e^{-\lambda t} \tag{2}$$

В нашем случае $\dfrac{A_{óä}}{A_{0\,óä}} = e^{-\lambda t} = \eta$. Учитывая, что постоянная распада $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T}$, где T - период полураспада, получим:

$$\frac{A_{óä}}{A_{0\,óä}} = e^{-\lambda t} = 2^{-\frac{t}{T}} = \eta \tag{3}$$

Отсюда следует, что возраст деревянных предметов, составляет:

$$t = T \log_2 \frac{1}{\eta} \tag{4}$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$t = 5570 \cdot \log_2 \frac{5}{3} = 4105 \text{ ëåò}$$

Ответ: возраст древних деревянных предметов составляет 4105 лет.

Задача № 3.

Кинетическая энергия частицы равна её энергии покоя. Как изменится длина волны де Бройля частицы, если её кинетическую энергию увеличить в два раза?

Решение:

Длина волны де Бройля равняется:

$$\lambda_{\acute{A}} = \frac{2\pi\hbar}{p} \qquad (1)$$

где p - импульс частицы.

По условию кинетическая энергия частицы равняется её энергии покоя: $K_1 = mc^2$. Если кинетическую энергию увеличить в 2 раза, тогда получим $K_2 = 2mc^2$. Учитывая соотношение между кинетической энергией и импульсом частицы, получим:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{c}\sqrt{K_1(K_1 + 2mc^2)} = \frac{1}{c}\sqrt{mc^2(mc^2 + 2mc^2)} = \sqrt{3}mc \\ p_2 &= \frac{1}{c}\sqrt{K_2(K_2 + 2mc^2)} = \frac{1}{c}\sqrt{2mc^2(2mc^2 + 2mc^2)} = 2\sqrt{2}mc \end{aligned} \qquad (2)$$

В этих двух случаях соответствующие длины волн де Бройля этой частицы равняются:

$$\begin{aligned} \lambda_{\acute{A}1} &= \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3}mc} \\ \lambda_{\acute{A}2} &= \frac{2\pi\hbar}{2\sqrt{2}mc} = \frac{\pi\hbar}{\sqrt{2}mc} \end{aligned} \qquad (3)$$

Тогда их отношение:

$$\frac{\lambda_{\acute{A}1}}{\lambda_{\acute{A}2}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3}mc}\frac{\sqrt{2}mc}{\pi\hbar} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 1.63$$

Таким образом, длина волны де Бройля частицы уменьшится в 1.63 раза.

Ответ: длина волны де Бройля частицы уменьшится в 1.63 раза.

Задача № 4.

Частица находится в двумерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Координаты x, y частицы лежат в пределах 0<x<a, 0<y<b, где a и b - стороны ямы. Найти вероятность нахождения частицы с наименьшей энергией в области a/3<x<a/2.

Решение:

Потенциальная яма, в которой находится частица, имеет следующий вид (рисунок 1):

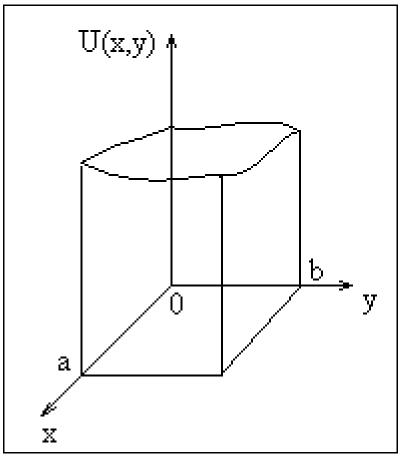

Рисунок 1 (Вид потенциальной ямы)

Потенциальная энергия частицы:

$$U(x,y)=\begin{cases}\infty, M\notin\Omega\\ 0, M\in\Omega\end{cases}, \text{ где } \Omega=\begin{cases}0<x<a\\ 0<y<b\end{cases}$$
$$M(x,y)$$

Составим уравнение Шредингера для области Ω:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi=0 \qquad (1)$$

Запишем его в следующем виде:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+k^2\psi=0 \qquad (2)$$

где $k^2=\frac{2m}{\hbar^2}E$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\psi(x,y)=A\sin(k_1x+\alpha_1)\sin(k_2y+\alpha_2) \qquad (3)$$

На волновую функцию вида (3), которая является решением дифференциального уравнения (2), накладываются естественные условия. Учитывая, что за границами области
Ω Ω
Ω

равняется нулю. Кроме того, так как физический смысл волновой функции состоит в том, что квадрат её модуля есть плотность вероятности местонахождения частицы, тогда, следовательно, и волновая функция вне области Ω равняется нулю. Воспользовавшись условием непрерывности волновой функции, имеем, что на границе области Ω она также равняется нулю. Таким образом, получим:

$$\begin{aligned} &\psi(0,y)=0 \Rightarrow \sin\alpha_1=0 \Rightarrow \alpha_1=0 \\ &\psi(x,0)=0 \Rightarrow \sin\alpha_2=0 \Rightarrow \alpha_2=0 \end{aligned} \tag{4}$$

Отсюда следует, что волновая функция имеет вид:

$$\psi(x,y)=A\sin(k_1x)\sin(k_2y) \tag{5}$$

Кроме того, другие два условия непрерывности волновой функции на границе области Ω:

$$\begin{aligned} &\psi(a,y)=0 \Rightarrow \sin k_1a=0 \Rightarrow k_1a=\pm\pi n_1, \text{ãäå}\, n_1=1,2,3,... \\ &\psi(x,b)=0 \Rightarrow \sin k_2b=0 \Rightarrow k_2b=\pm\pi n_2, \text{ãäå}\, n_2=1,2,3,... \end{aligned} \tag{6}$$

Чисто формально, условиям (6) удовлетворяют и значения k_1 и k_2 при $n_1=0$ или $n_2=0$. С физической же точки зрения это означает, что волновая функция в этом случае во всех точках равняется нулю, что эквивалентно факту отсутствия частицы в потенциальной яме. Мы этот случай рассматривать не будем. Продифференцируем выражение (5) дважды по x и по y и подставим в уравнение Шредингера (2):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial x}=k_1A\cos(k_1x)\sin(k_2y) \\ &\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-k_1^2A\sin(k_1x)\sin(k_2y)=-k_1^2\psi \\ &\frac{\partial\psi}{\partial y}=k_2A\sin(k_1x)\cos(k_2y) \\ &\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-k_2^2A\sin(k_1x)\sin(k_2y)=-k_2^2\psi \end{aligned} \tag{7}$$

Подставим вторые производные в уравнение Шредингера (2) и получим:

$$-k_1^2\psi-k_2^2\psi+k^2\psi=0 \Rightarrow k^2=k_1^2+k_2^2 \tag{8}$$

Учитывая, что $k^2=\dfrac{2m}{\hbar^2}E$, и используя выражение (8) получим энергетический спектр частицы в заданной потенциальной яме:

$$k^2=\frac{2m}{\hbar^2}E=k_1^2+k_2^2=\pi^2\left(\frac{n_1^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}\right) \tag{9}$$

Отсюда следует, что энергия частицы равняется:

$$E_{n_1,n_2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}\right) \quad (10)$$

Таким образом, энергия частицы зависит от двух квантовых чисел $n_1 = 1, 2, 3, ...$ и $n_2 = 1, 2, 3, ...$, следовательно, энергетический спектр частицы является дискретным. Волновая функция частицы имеет вид:

$$\psi(x, y) = A\sin\left(\frac{\pi}{a}n_1 x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}n_2 y\right) \quad (11)$$

Постоянную A определим из условия нормировки. То есть, физический смысл волновой функции состоит в том, что квадрат её модуля является плотностью вероятности местонахождения частицы. Как мы выяснили, в области Ω частица находится достоверно, то есть вероятность её нахождения в данной области равняется единице, таким образом, интеграл от плотности вероятности местонахождения частицы по всей области Ω должен равняться единице. Плотность вероятности нахождения частицы:

$$\rho(x, y) = |\psi|^2 = A^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a}n_1 x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{b}n_2 y\right) \quad (12)$$

Таким образом, по условию нормировки получим:

$$\int_0^a\int_0^b |\psi|^2 dxdy = 1 \Rightarrow A^2\int_0^a\int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi}{a}n_1 x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{b}n_2 y\right)dxdy = 1 \Rightarrow A^2 \cdot \frac{1}{4}ab = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{4}{ab}} \quad (13)$$

Таким образом, волновые функции собственных состояний частицы в заданной потенциальной яме имеют вид:

$$\psi_{n_1,n_2}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}}\sin\left(\frac{\pi}{a}n_1 x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}n_2 y\right) \quad (14)$$

Учитывая, что энергетический спектр частицы определяет выражение (10), имеем, что наименьшую энергию частица имеет в собственном состоянии при значениях квантовых чисел $n_1 = 1$ и $n_2 = 1$. В этом состоянии волновая функция частицы имеет вид:

$$\psi_{1,1}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \quad (15)$$

Волновая функция (15) графически представлена на рисунке 2:

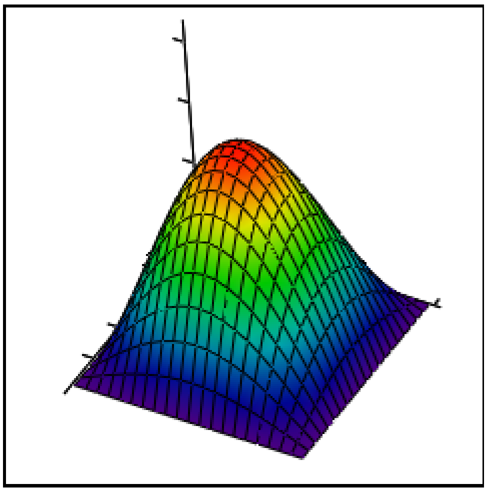

Рисунок 2 (Волновая функция $\psi_{1,1}(x,y)$)

Так как физический смысл волновой функции состоит в том, что квадрат её модуля есть плотность вероятности местонахождения частицы, то плотность вероятности в состоянии, описываемом волновой функцией (15), равняется:

$$\rho_{1,1}(x,y) = \frac{4}{ab}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{b}y\right) \tag{16}$$

Графически функция плотности вероятности представлена на рисунке 3:

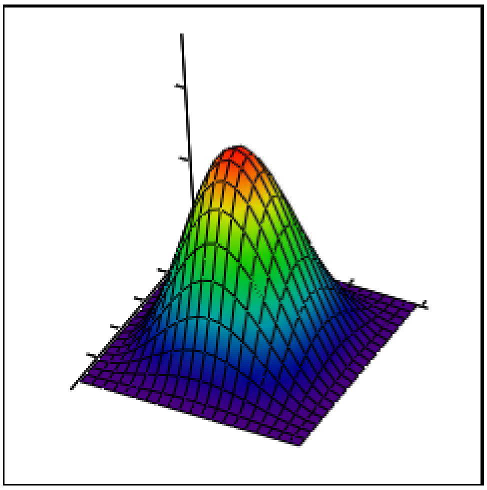

Рисунок 3 (Плотность вероятности $\rho_{1,1}(x,y)$)

Найдём вероятность нахождения частицы в области $\frac{a}{3} < x < \frac{a}{2}$. Для этого проинтегрируем выражение (16) по x в указанных пределах, а по y – в пределах потенциальной ямы:

$$P = \int_{\frac{a}{3}}^{\frac{a}{2}}\int_0^b \rho_{1,1}(x,y)dxdy = \frac{4}{ab}\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{a}{2}}\int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{b}y\right)dxdy = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{12\pi} \approx 0.304 = 30.4\%$$

Ответ: вероятность нахождения частицы в области $\frac{a}{3} < x < \frac{a}{2}$ равняется 30.4 %.

Задача № 5.

В начальный момент активность некоторого радиоизотопа составляла A_0 --- 10,8 Бк. Какова будет его активность по истечении половины периода полураспада?

Решение:

Активность радиоизотопа равняется:

$$A = \lambda N \tag{1}$$

где λ - постоянная распада, а N - число нераспавшихся ядер. Закон радиоактивного распада имеет вид:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{2}$$

Умножим обе части уравнения (2) на постоянную распада λ и получим:

$$\lambda N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \tag{3}$$

Здесь A_0 - активность радиоизотопа в начальный момент времени. Таким образом, мы получили закон, по которому изменяется активность. Постоянная распада и период полураспада связаны следующим образом:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} \tag{4}$$

Используя выражение (4) в уравнении (3), получим:

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t} = A_0 2^{-\frac{t}{T}} \tag{5}$$

Найдём активность радиоизотопа по истечении половины периода полураспада:

$$A\left(\frac{T}{2}\right) = A_0 2^{-\frac{T}{2T}} = A_0 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \tag{6}$$

Подставляя числовое значение активности в начальный момент времени, получим:

$$A\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{10.8}{\sqrt{2}} = 7.6\,\acute{A}\hat{e}$$

Ответ: Активность по истечении половины периода полураспада составит 7.6 Бк.

Задача № 8.

Сколько β - частиц испускает за один час 1,0 мкг ^{24}Na, период полураспада которого Т = 15 ч?

Решение:

Закон радиоактивного распада имеет вид:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \qquad (1)$$

где N_0 - число нераспавшихся ядер в начальный момент времени, λ - постоянная распада. Пусть в некоторый момент времени $t = t_1$ количество нераспавшихся ядер равняется $N(t_1) = N_1 = N_0 e^{-\lambda t_1}$. Пусть Δt - некоторый промежуток времени. Тогда количество нераспавшихся ядер в момент времени $t = t_1 + \Delta t$ равняется $N(t_1 + \Delta t) = N_2 = N_0 e^{-\lambda(t_1+\Delta t)}$. Количество ядер, распавшихся за время, Δt равняется:

$$\Delta N = N_2 - N_1 = N_0 e^{-\lambda(t_1+\Delta t)} - N_0 e^{-\lambda t_1} = N_0 e^{-\lambda t_1} + N_0 e^{-\lambda \Delta t} - N_0 e^{-\lambda t_1} = N_0 e^{-\lambda \Delta t}$$

Закон радиоактивного распада в дифференциальной форме имеет вид:

$$dN = -\lambda N dt \qquad (2)$$

Разделим переменные в дифференциальном уравнении (2):

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

Задача № 14.

Частица массы m, обладающая энергией E, налетает на потенциальный порог, высота которого $U_0>E$. Найти эффективную глубину проникновения частицы в область порога.

Решение:

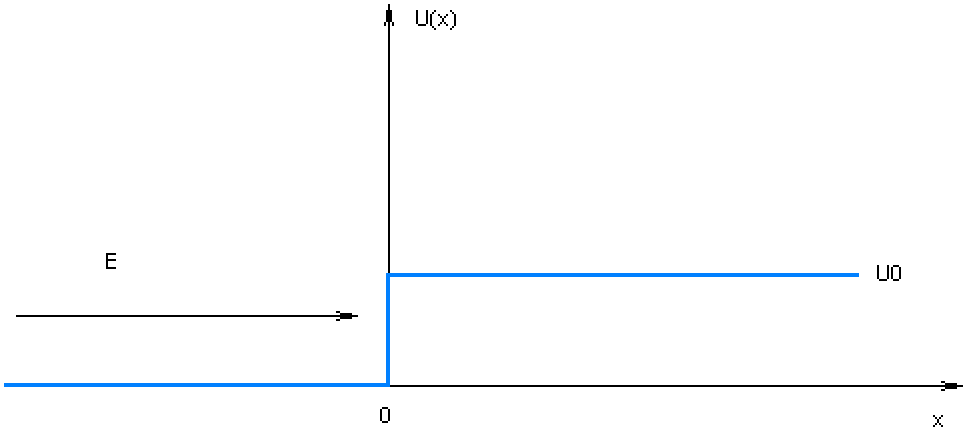

Рисунок 1

Потенциальная энергия имеет вид:

$$U(x)=\begin{cases}0, x<0\\ U_0, x>0\end{cases}$$

Составим уравнение Шредингера для области $x<0$:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi_1=0 \qquad (1)$$

Или в виде:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+k_1^2\psi_1=0 \qquad (2)$$

Составим уравнение Шредингера для области $x>0$:

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U_0)\psi_2=0 \qquad (3)$$

Или в виде:

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+k_2^2\psi_2=0 \qquad (4)$$

В уравнениях (2) и (4):

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \qquad\qquad k_2^2 = \frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2} \tag{5}$$

Дифференциальные уравнения (2) и (4) имеют решения следующего вида:

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} \tag{6}$$
$$\psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} \tag{7}$$

В уравнении (6) первое слагаемое соответствует падающей дебройлевской волне, второе слагаемое – отражённой дебройлевской волне. Для области $x > 0$ мы имеем только волну, распространяющуюся в положительном направлении, поэтому второму слагаемому в уравнении (7) не соответствует никакая дебройлевская волна. Значит, мы должны принять, что коэффициент $B_2 = 0$. Тогда уравнение (7) примет вид:

$$\psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} \tag{8}$$

Согласно стандартным условиям, накладываемым на решения уравнения Шредингера, имеем:

- по условию непрерывности волновой функции:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \tag{9}$$

$$A_1 + B_1 = A_2 \tag{10}$$

- по условию гладкости волновых функций (непрерывности первых производных):

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0) \tag{11}$$

$$k_1 A_1 - k_1 B_1 = k_2 A_2 \tag{12}$$

Подставляя уравнение (10) в уравнение (12), получим:

$$k_1 A_1 - k_1 B_1 = k_2 A_1 + k_2 B_1$$

Отсюда:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \tag{13}$$

Разделим уравнение (10) на A_1 и воспользуемся выражением (13):

$$\frac{A_2}{A_1} = 1 + \frac{B_1}{A_1} = 1 + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \tag{14}$$

Квадрат амплитуды волновой функции определяет плотность вероятности её местонахождения, поэтому поток плотности вероятности $\rho \sim vA^2$. Учитывая, что скорость частицы $v \sim k$, получим:

$$\rho \sim kA^2 \tag{15}$$

Для падающей дебройлевской волны поток плотности вероятности:

$$\rho \sim k_1 A_1^2 \tag{16}$$

Для отражённой дебройлевской волны поток плотности вероятности:

$$\rho' \sim k_1 B_1^2 \tag{17}$$

Для прошедшей дебройлевской волны поток плотности вероятности:

$$\rho'' \sim k_2 A_2^2 \tag{18}$$

Теперь определим коэффициент отражения дебройлевской волны налетающей частицы от потенциального порога:

$$R = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{k_1}{k_1}\left(\frac{B_1}{A_1}\right)^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 \tag{19}$$

В нашем случае $E < U_0$, поэтому $k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}} = i\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}} = i\kappa$ является комплексным с действительной частью, равной нулю. В этом случае коэффициент отражения R равняется:

$$R = \left|\frac{k_1 - i\kappa}{k_1 + i\kappa}\right|^2 = 1 \tag{20}$$

То есть в нашем случае отражение частицы от потенциального порога является полным. Однако частицы с разной вероятность на различную глубину могут проникать в область потенциального порога. Физический смысл волновой функции состоит в том, что квадрат модуля волновой функции определяет плотность вероятности местонахождения частицы. Определим плотность вероятности нахождения частицы в области потенциального порога:

$$P(x) = |\psi_2(x)|^2 = P(0)e^{2ik_2x} = P(0)e^{-2\kappa x} \tag{21}$$

где $P(0)$ - плотность вероятности нахождения частицы в точке $x = 0$. Эффективная глубина проникновения частицы в области потенциального порога – это расстояние от начала порога до точки, в которой плотность вероятности уменьшается в e раз. Исходя из этого, получим:

$$\frac{P(l_{эф})}{P(0)} = e^{-2\kappa l_{эф}} = e^{-1} \Rightarrow 2\kappa l_{эф} = 1 \Rightarrow l_{эф} = \frac{1}{2\kappa} \qquad (22)$$

Учитывая, что $\kappa = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$, получим, что эффективная глубина проникновения частицы в область потенциального порога равняется:

$$l_{эф} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0 - E)}} = \frac{\hbar}{\sqrt{8m(U_0 - E)}} \qquad (23)$$

Ответ: эффективная глубина проникновения частицы в область потенциального порога равняется $l_{эф} = \frac{\hbar}{\sqrt{8m(U_0 - E)}}$.

Задача № 24.

Частица массы m находится в основном состоянии в двумерной квадратной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найти энергию частицы, если максимальное значение плотности вероятности местонахождения частицы равно P_{max}.

Решение:

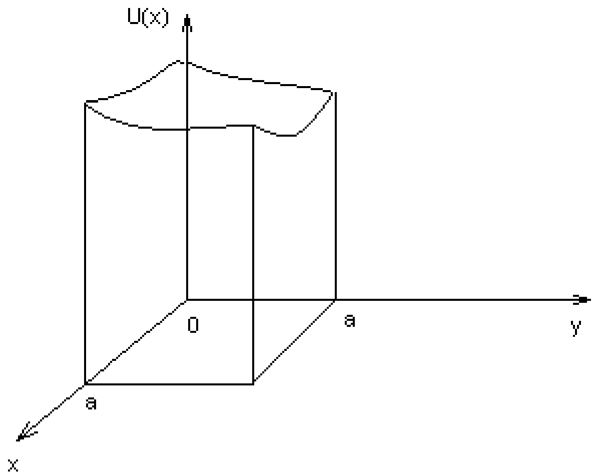

Рисунок 1

Потенциальная энергия имеет вид:

$$U(x) = \begin{cases} 0, M \in \Omega \\ \infty, M \notin \Omega \end{cases} \qquad \Omega = \begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < a \end{cases} \qquad M(x, y)$$

Составим уравнение Шредингера для области Ω:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0 \qquad (1)$$

Запишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k^2\psi = 0$$

где $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\psi(x, y) = A\sin(k_1 x + \alpha_1)\sin(k_2 y + \alpha_2) \qquad (2)$$

На волновые функции, решения дифференциального уравнения (1), накладываются стандартные условия: непрерывность, гладкость, однозначность и конечность. Используя условие непрерывности волновой функции вида (2) на краях потенциальной ямы, получим:

$$\psi(0,0) = A\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0 \qquad (3)$$

$$\psi(a,a) = A\sin(k_1 a)\sin(k_2 a) = 0 \qquad (4)$$

Из выражения (4), получим:

$$\begin{aligned} k_1 a &= \pm\pi n_1, n_1 = 1, 2, 3, ... \\ k_2 a &= \pm\pi n_2, n_2 = 1, 2, 3, ... \end{aligned} \qquad (5)$$

В этом случае уравнение (2) примет вид:

$$\psi(x,y) = A\sin\left(\frac{\pi}{a} n_1 x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a} n_2 y\right) \qquad (6)$$

Продифференцируем выражение (6) в виде $\psi(x,y) = A\sin(k_1 x)\sin(k_2 y)$ дважды по x и по y, и подставим в уравнение Шредингера (1):

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -k_1^2 A\sin(k_1 x)\sin(k_2 y) = -k_1^2\psi$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -k_2^2 A\sin(k_1 x)\sin(k_2 y) = -k_2^2\psi$$
$$-k_1^2\psi - k_2^2\psi + k^2\psi = 0$$

Учитывая, что $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$, получим:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E = k_1^2 + k_2^2 = \frac{\pi^2}{a^2}n_1^2 + \frac{\pi^2}{a^2}n_2^2 = \frac{\pi^2}{a^2}(n_1^2 + n_2^2) \qquad (7)$$

Отсюда получим, что энергия частицы в потенциальной яме величина дискретная. Энергетический спектр частицы:

$$E_{n_1,n_2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\left(n_1^2 + n_2^2\right) \qquad (8)$$

Задача 1.15.

Две одинаковые частицы массы m с дебройлевскими длинами волн λ_1 и λ_2 движутся перпендикулярно друг другу. Найти дебройлевские длины волн частиц в системе их центра масс.

Решение:

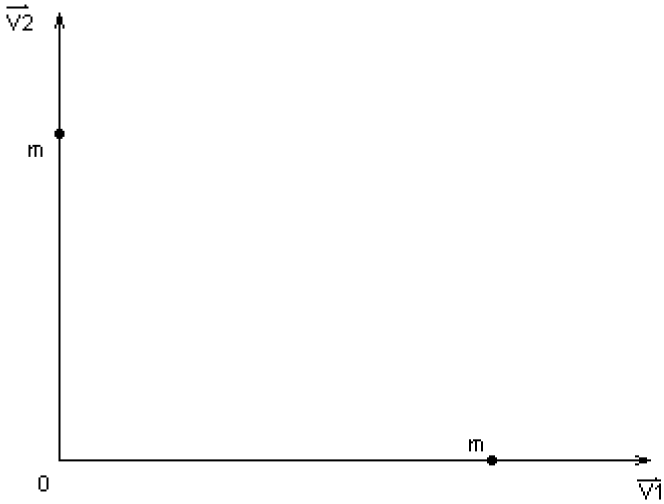

Рисунок 1

Дебройлевская волна частицы равняется:

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mv} \qquad (1)$$

где $p = mv$ - импульс частицы.
Найдём скорости частиц, используя выражение (1). Так как

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{mv_1} \qquad \lambda_2 = \frac{2\pi\hbar}{mv_2}$$

Тогда скорости частиц v_1 и v_2 равняются:

$$v_1 = \frac{2\pi\hbar}{m\lambda_1} \qquad v_2 = \frac{2\pi\hbar}{m\lambda_2} \qquad (2)$$

Скорость центра масс определяется следующим выражением:

$$\vec{v}_C = \frac{m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2}{2m} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} \qquad (3)$$

Вектора $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_C$ изображены на рисунке 2:

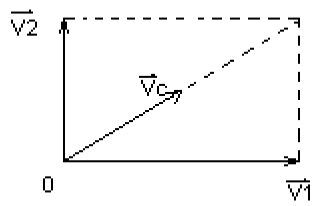

Рисунок 2

Из рисунка 2 следует, что скорость центра масс равняется:

$$v_C = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{2} \tag{4}$$

Учитывая выражения (2), имеем:

$$v_C = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\pi\hbar}{m\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi\hbar}{m\lambda_2}\right)^2} = \frac{\pi\hbar}{m}\sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}} = \frac{\pi\hbar\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{m\lambda_1\lambda_2} \tag{5}$$

Определим скорости частиц в Ц – системе, связанной с центром масс. Эти скорости равняются:

$$\vec{v}_{C1} = \vec{v}_1 - \vec{v}_C \qquad \vec{v}_{C2} = \vec{v}_2 - \vec{v}_C \tag{6}$$

На рисунке 3 показаны векторы скоростей частиц $\vec{v}_{C1}$ и $\vec{v}_{C2}$:

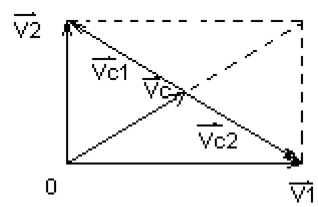

Рисунок 3

Так как конец вектора $\vec{v}_C$ совпадает с точкой пересечения диагоналей прямоугольника, построенного на векторах $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, то в нашем случае из рисунка (3) следует, что $v_{C1} = v_{C2} = v_C$, таким образом, модули всех этих 3-ёх векторов равны.

$$v_{C1} = v_{C2} = v_C = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{2} = \frac{\pi\hbar\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{m\lambda_1\lambda_2} \tag{7}$$

Так как в системе центра масс сумма импульсов частиц равняется нулю, что и выполняется ($\vec{p}_{C1} + \vec{p}_{C2} = 0$) в нашем случае, то векторы $\vec{p}_{C1}$ и $\vec{p}_{C2}$ равны по модулю и противоположны по направлению, поэтому дебройлевские длины волн двух частиц в системе их центра масс будут равны. Используя выражение (1), найдём их:

$$\lambda_{C1} = \lambda_{C2} = \frac{2\pi\hbar}{mv_{C1}} = \frac{2\pi\hbar}{mv_{C2}} = \frac{2\pi\hbar}{m} \cdot \frac{m\lambda_1\lambda_2}{\pi\hbar\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \qquad (8)$$

Ответ: дебройлевские длины волн частиц в системе их центра масс равняются:

$$\lambda_{C1} = \lambda_{C2} = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}$$

Задача 2.15.

Прямолинейная траектория частицы в камере Вильсона представляет собой цепочку маленьких капелек тумана, размер которых $d = 1$ мкм. Можно ли, наблюдая след электрона с кинетической энергией $E_K = 1$ кэВ, обнаружить отклонение в его движении от классических законов?

Решение:

Воспользуемся соотношение неопределённостей Гейзенберга:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (1)$$

Считая неопределённость координаты $\Delta x = d$ определим неопределённость проекции импульса на координатную ось x:

$$\Delta p_x \approx \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\hbar}{2d} = \frac{1.054 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 10^{-6}} \approx 5 \cdot 10^{-29} \, \frac{кг \cdot м}{с} \qquad (2)$$

Определим импульс электрона:

$$p = \sqrt{2mE_K} = \sqrt{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 1.6 \cdot 10^{-16}} = 1.7 \cdot 10^{-23} \, \frac{кг \cdot м}{с} \qquad (3)$$

Из (2) и (3), что проекция неопределённости импульса на шесть порядков меньше значения импульса, поэтому, наблюдая трек электрона в камере Вильсона, обнаружить отклонение в его движении от классических законов нельзя.

Ответ: нет.

Задача 2.17.

Используя соотношения неопределенностей Гейзенберга, получите оценочное соотношение, определяющее границы применимости классической механики для описания движения частицы в некоторой области пространства с характерным линейным размером L.

Решение:

Соотношение неопределённостей Гейзенберга имеет вид:

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (1)$$

Импульс частицы определяется следующим образом $p = \langle p \rangle + \Delta p$, где $\langle p \rangle$ - среднее значение импульса, а Δp - его неопределённость. Так как частица движется в области пространства с характерными размерами L, то неопределённость координаты Δx будем считать равной L, а среднее значение импульса $\langle p \rangle = 0$. Тогда можно считать, что $p \approx \Delta p$, а неопределённость импульса определим из соотношения неопределённостей Гейзенберга, учитывая, что $p \approx \Delta p \geq \frac{\hbar}{2L}$. Найдем длину волны де Бройля, для данной частицы:

$$\lambda_Б = \frac{2\pi\hbar}{p} \approx \frac{2\pi\hbar}{\Delta p} \leq 4\pi L \qquad (2)$$

Если рассматривать соотношение между дебройлевской длиной волны $\lambda_Б$ и характерными размерами области пространства L, в котором движется частица, по порядку величины, то получим, что если дебройлеская длина волны частицы $\lambda_Б << L$, то можно использовать законы классической механики, в случае, если $\lambda_Б$ сравнима по порядку величины с характеристическими линейными размерами области пространства L, то нужно применять законы квантовой механики.

Задача 3.1

Частица находится в двумерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Координаты x и y частицы лежат в пределах $0 < x < a$, $0 < y < b$, где a и b - стороны ямы. Определите вероятность нахождения частицы с наименьшей энергией в области: а) $0 < x < \frac{a}{4}$ (P_1); б) $0 < y < \frac{b}{4}$ (P_2); в) $0 < x < \frac{a}{4}$, $0 < y < \frac{b}{4}$ (P_3). Убедитесь, что $P_1 \cdot P_2 = P_3$.

Решение:

Двумерная потенциальная яма имеет вид, представленный на рисунке 1:

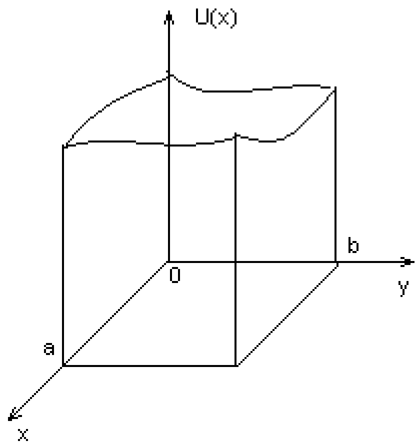

Рисунок 1

$$\Omega = \begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < b \end{cases}$$

$$U(M) = \begin{cases} 0, M \in \Omega \\ \infty, M \notin \Omega \end{cases}$$

$$M(x, y)$$

Составим уравнение Шредингера для области Ω:

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0 \qquad (1)$$

Запишем уравнение Шредингера в виде:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k^2 \psi = 0 \qquad (2)$$

где $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$.

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\psi(x, y) = A \sin(k_1 x + \alpha_1) \sin(k_2 y + \alpha_2) \qquad (3)$$

Воспользуемся граничными условиями, которые накладываются на волновую функцию. Из условия непрерывности следует:

$$\psi(0,y)=0 \Rightarrow \sin\alpha_1=0 \Rightarrow \alpha_1=0$$
$$\psi(x,0)=0 \Rightarrow \sin\alpha_2=0 \Rightarrow \alpha_2=0 \qquad (4)$$

Учитывая (3) и (4), что волновая функция примет вид:

$$\psi(x,y)=A\sin k_1x\sin k_2y \qquad (5)$$

Далее из условий непрерывности волновой функции на границе области Ω:

$$\begin{aligned}&\psi(a,y)=0 \Rightarrow \sin k_1a=0 \Rightarrow k_1a=\pi n_1 \Rightarrow k_1=\frac{\pi}{a}n_1, n_1=1,2,3,....\\&\psi(x,b)=0 \Rightarrow \sin k_2b=0 \Rightarrow k_2b=\pi n_2 \Rightarrow k_2=\frac{\pi}{b}n_2, n_2=1,2,3,....\end{aligned} \qquad (6)$$

Следовательно, волновая функция будет иметь вид:

$$\psi_{n_1,n_2}(x,y)=A\sin\left(\frac{\pi n_1x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi n_2y}{b}\right) \qquad (7)$$

Найдём частные производные второго порядка $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$ от пси-функции $\psi(x,y)=A\sin k_1x\sin k_2y$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\psi}{\partial x}=k_1A\cos k_1x\sin k_2y\\&\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-k_1^2A\sin k_1x\sin k_2y=-k_1^2\psi\\&\frac{\partial\psi}{\partial y}=k_2A\sin k_1x\cos k_2y\\&\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-k_2^2A\sin k_1x\sin k_2y=-k_2^2\psi\end{aligned} \qquad (8)$$

Подставим полученные выражения для $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$ в уравнение Шредингера (2) и получим:

$$-k_1^2\psi-k_2^2\psi+k^2\psi=0 \Rightarrow k_1^2+k_2^2=k^2 \qquad (9)$$

Так как $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$, то определим из уравнения (9) энергетический спектр частицы:

$$\left(\frac{\pi n_1}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi n_2}{b}\right)^2=\frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow E_{n_1,n_2}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}\right) \qquad (10)$$

где $n_1 = 1, 2, 3, ...; n_2 = 1, 2, 3, ...$ - квантовые числа. Из выражения (10) следует, что энергетический спектр частицы является дискретным, и наименьшее значение энергии соответствует значениям квантовых чисел $n_1 = n_2 = 1$:

$$E_{1,1} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \tag{11}$$

Соответствующая этому состоянию волновая функция имеет вид:

$$\psi_{1,1}(x, y) = A \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \tag{12}$$

Используя условие нормировки волновой функции найдём коэффициент A:

$$\int_0^a \int_0^b |\psi|^2 dxdy = 1 \Rightarrow A^2 \int_0^a \int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) dxdy = 1 \Rightarrow A^2 \frac{ab}{4} = 1 \Rightarrow A = \frac{2}{\sqrt{ab}} \tag{13}$$

Таким образом, волновая функция $\psi_{1,1}(x, y)$ имеет следующий вид:

$$\psi_{1,1}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \tag{14}$$

Квадрат модуля волновой функции определяет плотность вероятности нахождения частицы. Найдём функцию плотности вероятности нахождения частицы, находящейся в состоянии, описываемом волновой функцией (14):

$$\rho = |\psi_{1,1}|^2 = \frac{4}{ab} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \tag{15}$$

Графически функция плотности вероятности - рисунок 2:

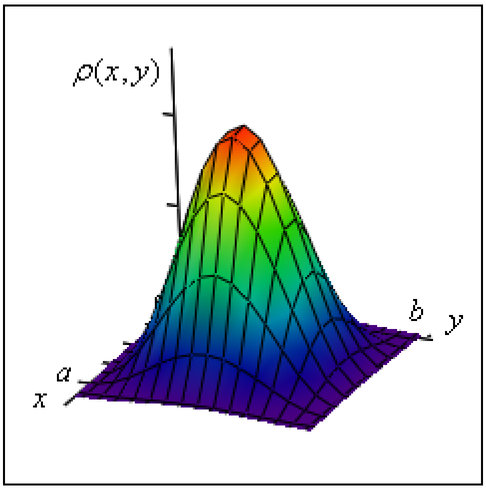

Рисунок 2

Найдём вероятность нахождения частицы в области $0 < x < \frac{a}{4}$:

$$P_1 = \int_0^{\frac{a}{4}}\int_0^{b} \frac{4}{ab}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)dxdy = \frac{\pi - 2}{4\pi} \approx 0.091 = 9.1\% \qquad (16)$$

Найдём вероятность нахождения частицы в области $0 < y < \frac{b}{4}$:

$$P_2 = \int_0^{a}\int_0^{\frac{b}{4}} \frac{4}{ab}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)dxdy = \frac{\pi - 2}{4\pi} \approx 0.091 = 9.1\% \qquad (17)$$

Найдём вероятность нахождения частицы в области $0 < x < \frac{a}{4}$, $0 < y < \frac{b}{4}$:

$$P_3 = \int_0^{\frac{a}{4}}\int_0^{\frac{b}{4}} \frac{4}{ab}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)dxdy = \frac{\pi^2 - 4\pi + 4}{16\pi^2} = \left(\frac{\pi - 2}{4\pi}\right)^2 \approx 0.0083 = 0.83\% \qquad (18)$$

Из (18) следует, что $P_3 = P_1 \cdot P_2$.

Ответ: Вероятности нахождения частицы равняются:

$0 < x < \frac{a}{4}$:	$P_1 \approx 0.091 = 9.1\%$
$0 < y < \frac{b}{4}$:	$P_2 \approx 0.091 = 9.1\%$
$0 < x < \frac{a}{4}$, $0 < y < \frac{b}{4}$:	$P_3 = P_1 \cdot P_2 \approx 0.0083 = 0.83\%$

Задача 3.15.

Частица массы m локализована в трехмерной сферически симметричной потенциальной яме радиуса a с непроницаемыми стенками. Найдите волновые функции и уровни энергии частицы для состояний, в которых волновая функция зависит только от r.

Указание: Волновую функцию частицы следует искать в виде $\psi(r) = \dfrac{u(r)}{r}$.

Решение:

Потенциальная яма имеет вид, представленный на рисунке 1:

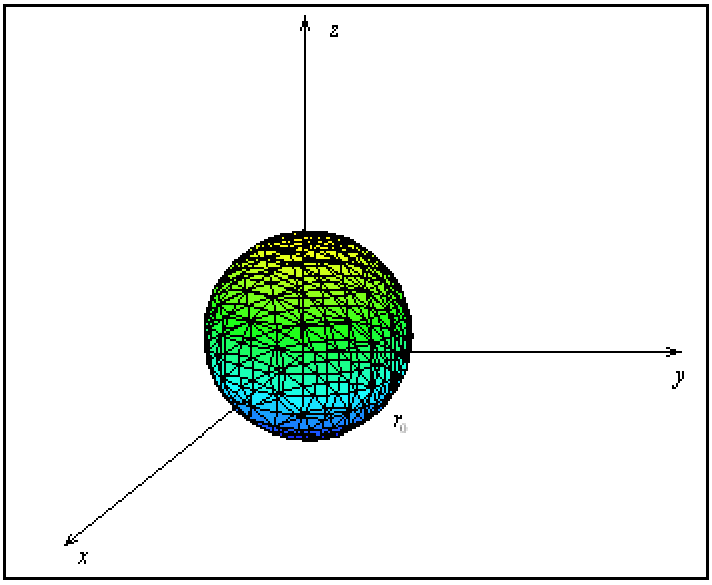

Рисунок 1

$$U(r) = \begin{cases} 0, r < a \\ \infty, r > a \end{cases}$$

Составим уравнение Шредингера для области $r < a$:

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 \tag{1}$$

Запишем уравнение (1) в виде:

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \tag{2}$$

где $k^2 = \dfrac{2m}{\hbar^2}E$. Оператор Лапласа в сферических координатах имеет вид:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{3}$$

Так как мы будем искать только те волновые функции, которые зависят только от r, то воспользуемся частью (3), которая зависит только от r. С учётом этого уравнение (2) можно записать:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+k^2\psi=0 \qquad (4)$$

Будем искать решение дифференциального уравнения (4) в виде:

$$\psi(r)=\frac{u(r)}{r} \qquad (5)$$

Тогда производные $\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$ и $\frac{\partial\psi}{\partial r}$ имеют вид:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right)=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{r}-u\frac{1}{r^2} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{1}{r}-\frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{r^2}-\frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{r^2}+u\frac{2}{r^3}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{1}{r}-\frac{\partial u}{\partial r}\frac{2}{r^2}+u\frac{2}{r^3} \qquad (7)$$

$$\nabla^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{1}{r}-\frac{\partial u}{\partial r}\frac{2}{r^2}+u\frac{2}{r^3}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{2}{r^2}-u\frac{2}{r^3}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{1}{r} \qquad (8)$$

Учитывая (5) и (8) запишем уравнение (4) в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{1}{r}+k^2\frac{u}{r}=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+k^2u=0 \qquad (9)$$

Решение дифференциального уравнения (8) имеет вид:

$$u(r)=A\sin\left(kr\right) \qquad (10)$$

В области $r>a$ частица находится не может, поэтому плотность вероятности нахождения частицы и соответственно волновая функция частицы в области $r>a$ равняется нулю. Согласно условию непрерывности, накладываемым на волновую функцию имеем:

$$\psi(a)=0$$

Значит, и $u(a)=0$:

$$u(a)=A\sin\left(ka\right)=0\Rightarrow ka=\pi n\Rightarrow k=\frac{\pi n}{a},\textit{где}\, n=1,2,3,... \qquad (11)$$

Учитывая, что $k^2 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}$, имеем:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \Rightarrow E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2$$

Таким образом, энергетический спектр частицы:

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2 \qquad (12)$$

где $n = 1, 2, 3, ...$ - квантовое число.

Учитывая выражение (11), функция (10) имеет вид:

$$u_n(r) = A\sin\left(\frac{\pi n}{a}r\right) \qquad (13)$$

Учитывая выражение (5), волновые функции частицы имеют вид:

$$\psi_n(x) = \frac{u_n(r)}{r} = \frac{A}{r}\sin\left(\frac{\pi n}{a}r\right) \qquad (14)$$

Используя условие нормировки определим постоянную A:

$$\int_0^r |\psi|^2 \cdot 4\pi r^2 dr = 1$$

$$\int_0^r \frac{A^2}{r^2}\sin^2\left(\frac{\pi n}{a}r\right)\cdot 4\pi r^2 dr = 1 \Rightarrow 4\pi A^2 \int_0^r \sin^2\left(\frac{\pi n}{a}r\right)dr = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \qquad (15)$$

Поэтому волновые функции частицы имеют вид:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{\pi n}{a}r\right)$$

Ответ: энергетический спектр частицы:

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2$$

Волновые функции:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{\pi n}{a}r\right),\ n = 1, 2, 3, ...$$

Задача 4.15.

Частица массы m_0, обладающая энергией E, падает на прямоугольный потенциальный барьер высотой U_0 и шириной a. Энергия частицы $E > U_0$. Найдите значения энергии частицы E, при которых она будет беспрепятственно проходить через этот барьер. Вычислите первые два значения E для электрона при $U_0 = 10{,}0$ эВ и $a = 0{,}50$ нм.

Решение:

Потенциальный барьер имеет вид, представленный на рисунке 1:

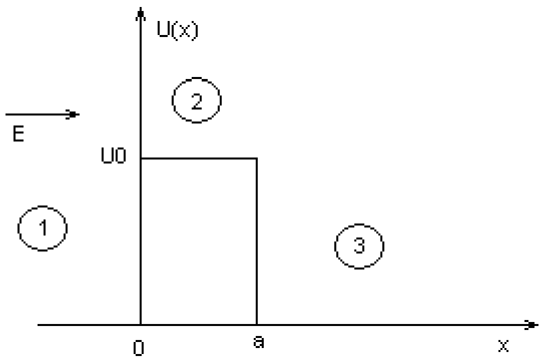

Рисунок 1

Потенциальная энергия имеет вид:

$$U(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ U_0, 0 < x < a \\ 0, x > a \end{cases}$$

Составим уравнение Шредингера:

Для области 1 ($x < 0$): $$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi_1 = 0 \quad (1)$$

Для области 2 ($0 < x < a$): $$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0)\psi_2 = 0 \quad (2)$$

Для области 3 ($x > a$): $$\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi_3 = 0 \quad (3)$$

Обозначим $k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$ и $k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0)$ и перепишем дифференциальные уравнения (1), (2), (3) в виде:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + k_1^2 \psi_1 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+k_2^2\psi_2=0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2}+k_1^2\psi_3=0 \quad (6)$$

Решения дифференциальных уравнений (4), (5), (6) имеют вид:

$$\psi_1(x)=A_1e^{ik_1x}+B_1e^{-ik_1x} \quad (7)$$

$$\psi_2(x)=A_2e^{ik_2x}+B_2e^{-ik_2x} \quad (8)$$

$$\psi_3(x)=A_3e^{ik_1x}+B_3e^{-ik_1x} \quad (9)$$

Каждое уравнение соответствует сумме дебройлевских волн, распространяющихся в данной области пространства. Будем считать, что частица движется слева направо, тогда $\psi_1(x)$ - сумма падающей $A_1e^{ik_1x}$ и отражённой $B_1e^{-ik_1x}$ дебройлевских волн. Из этого можем заключить, что так как $A_1e^{ik_1x}$ соответствует падающей волне, то коэффициент $A_1=1$. Волновая функция $\psi_3(x)$ соответствует прошедшей волне де Бройля, поэтому волна в области 3, распространяющаяся в отрицательном направлении оси x отсутствует, поэтому коэффициент $B_3=0$. С учётом вышеизложенного перепишем уравнения (7), (8), (9) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\psi_1(x)&=e^{ik_1x}+B_1e^{-ik_1x}\\ \psi_2(x)&=A_2e^{ik_2x}+B_2e^{-ik_2x}\\ \psi_3(x)&=A_3e^{ik_1x}\end{aligned} \quad (10)$$

Теперь воспользуемся граничными условиями, накладываемыми на волновую функцию, а именно непрерывностью и гладкостью. Исходя из условия непрерывности волновой функции в точках $x=0$ и $x=a$, имеем:

$$\psi_1(0)=\psi_2(0)\Rightarrow 1+B_1=A_2+B_2 \quad (11)$$
$$\psi_2(a)=\psi_3(a)\Rightarrow A_2e^{ik_2a}+B_2e^{-ik_2a}=A_3e^{ik_1a} \quad (12)$$

Первые производные $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\psi_1{}'(x)&=ik_1e^{ik_1x}-ik_1B_1e^{-ik_1x}\\ \psi_2{}'(x)&=ik_2A_2e^{ik_2x}-ik_2B_2e^{-ik_2x}\\ \psi_3{}'(x)&=ik_1A_3e^{ik_1x}\end{aligned} \quad (13)$$

Из условия непрерывности в точках $x=0$ и $x=a$:

$$\psi_1{}'(0)=\psi_2{}'(0)\Rightarrow ik_1-ik_1B_1=ik_2A_2-ik_2B_2 \quad (14)$$
$$\psi_2{}'(a)=\psi_3{}'(a)\Rightarrow ik_2A_2e^{ik_2a}-ik_2B_2e^{-ik_2a}=ik_1A_3e^{ik_1a} \quad (15)$$

Получим систему 4 уравнений (11),(12),(14),(15):

$$\begin{cases} 1+B_1 = A_2 + B_2 \\ A_2 e^{ik_2 a} + B_2 e^{-ik_2 a} = A_3 e^{ik_1 a} \\ ik_1 - ik_1 B_1 = ik_2 A_2 - ik_2 B_2 \\ ik_2 A_2 e^{ik_2 a} - ik_2 B_2 e^{-ik_2 a} = ik_1 A_3 e^{ik_1 a} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 1+B_1 = A_2 + B_2 \\ A_2 e^{ik_2 a} + B_2 e^{-ik_2 a} = A_3 e^{ik_1 a} \\ k_1 - k_1 B_1 = k_2 A_2 - k_2 B_2 \\ k_2 A_2 e^{ik_2 a} - k_2 B_2 e^{-ik_2 a} = k_1 A_3 e^{ik_1 a} \end{cases} \tag{16}$$

Из системы уравнений (16) определим A_3:

$$A_3 = \frac{4k_1 k_2 e^{-ik_1 a}}{(k_1+k_2)^2 e^{-ik_2 a} - (k_1-k_2)^2 e^{ik_2 a}} \tag{17}$$

Коэффициент прохождения частицы через потенциальный барьер определяется отношением потоков плотностей вероятности прошедшей и падающей волн де Бройля:

$$D = \frac{\rho"}{\rho} \tag{18}$$

Поток плотности вероятности $\rho \sim k\left|A\right|^2$, соответственно для падающей волны де Бройля $\rho \sim k\left|A\right|^2 = k_1 \cdot 1 = k_1$, для прошедшей $\rho" \sim k_1\left|A_3\right|^2$, тогда коэффициент прохождения частицы через потенциальный барьер равняется:

$$D = \frac{\rho"}{\rho} = \frac{k_1\left|A_3\right|^2}{k_1} = \left|A_3\right|^2 = \frac{1}{1+\dfrac{(k_1^2-k_2^2)^2}{4k_1^2 k_2^2}\sin^2(k_2 a)} \tag{19}$$

Соответственно, коэффициент прохождения частицы через потенциальный барьер равняется 1, если:

$$\sin^2(k_2 a) = 0 \Rightarrow \sin(k_2 a) \Rightarrow k_2 a = \pi n, n = 1,2,3,... \tag{20}$$

Учитывая, что $k_2 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-U_0)}$, получим:

$$\frac{a}{\hbar}\sqrt{2m(E-U_0)} = \pi n$$

$$E - U_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2$$

Откуда получим, значения энергии, при которых частица может беспрепятственно проходить потенциальный барьер:

$$E_n = U_0 + \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2, n = 1, 2, 3, ... \tag{21}$$

Найдём первых два значения для электрона:

$$E_1 = 1.6\cdot 10^{-18} + \frac{3.14^2\cdot(1.054\cdot 10^{-34})^2}{2\cdot 9.1\cdot 10^{-31}\cdot 25\cdot 10^{-20}} = 1.84\cdot 10^{-18}\ \text{Дж} = 12\ \text{эВ}$$

$$E_2 = 1.6\cdot 10^{-18} + \frac{3.14^2\cdot 4\cdot(1.054\cdot 10^{-34})^2}{2\cdot 9.1\cdot 10^{-31}\cdot 25\cdot 10^{-20}} = 2.56\cdot 10^{-18}\ \text{Дж} = 16\ \text{эВ}$$

Ответ: значения энергии, при которых частица будет беспрепятственно преодолевать потенциальный барьер данного вида:

$$E_n = U_0 + \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2, n = 1, 2, 3, ...$$

$$E_1 = 1.84\cdot 10^{-18}\ \text{Дж} = 12\ \text{эВ}$$

$$E_2 = 2.56\cdot 10^{-18}\ \text{Дж} = 16\ \text{эВ}$$

Задача 5.15.

В момент времени $t=0$ волновая функция частицы в одномерной потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками имеет вид:

$$\psi = C\psi_1 + C\psi_2$$

где C - некоторая константа, ψ_1 - волновая функция основного состояния, а ψ_2 - равновероятная суперпозиция основного и второго возбужденного состояний. Найдите волновую функцию $\Psi(x,t)$ и среднее значение импульса частицы в данном состоянии.

Решение:

Потенциальная яма имеет вид, представленный на рисунке 1:

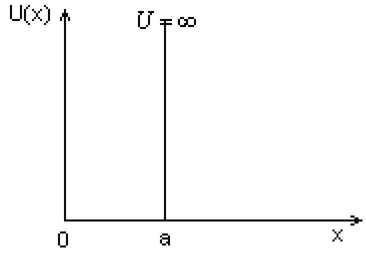

Рисунок 1

$$U(x) = \begin{cases} \infty, x < 0 \\ 0, 0 < x < a \\ \infty, x > a \end{cases}$$

Составим уравнение Шредингера для стационарных состояний для области $0 < x < a$:

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + k^2\psi = 0 \qquad (2)$$

где $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\psi(x) = A\sin(kx+\alpha) \qquad (3)$$

На волновую функцию вида (3) налагаются граничные условия. Из условия непрерывности следует:

$$\begin{aligned}&\psi(0)=0\Rightarrow \sin\alpha=0\Rightarrow\alpha=0\\&\psi(a)=0\Rightarrow \sin ka=0\Rightarrow ka=\pi n, где\, n=1,2,3,...\end{aligned}\tag{4}$$

Таким образом, собственные волновые функции имеют вид:

$$\psi_n(x)=A\sin\left(\frac{\pi}{a}nx\right)\tag{5}$$

где $n=1,2,3,...$ - квантовое число. Найдём энергетический спектр частицы в потенциальной яме данного вида. Так как $k^2=\frac{2m}{\hbar^2}E$, то:

$$k^2=\frac{2m}{\hbar^2}E=\frac{\pi^2n^2}{a^2}\Rightarrow E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2\tag{6}$$

Таким образом, в потенциальной яме данного вида, значение энергии частицы может принимать одно из значений дискретного энергетического спектра (6). Определим постоянную A в выражении для собственных волновых функций (5), использууюусловие нормировки:

$$\int_0^a|\psi_n|^2\,dx=1\Rightarrow A^2\int_0^a\sin^2\left(\frac{\pi}{a}nx\right)dx=1\Rightarrow A=\sqrt{\frac{2}{a}}\tag{7}$$

Значит, волновые функции собственных состояний имеют вид:

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}nx\right)\tag{8}$$

Волновая функция основного состояния частицы (при $n=1$), имеет вид:

$$\psi_1=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\tag{9}$$

Волновая функция второго возбуждённого состояния (при $n=3$), имеет вид:

$$\psi_3=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)\tag{10}$$

Равновероятная суперпозиция основного и второго возбуждённого состояний:

$$\psi_{1,3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)=\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right)\right)$$

Таким образом, волновая функция ψ имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\psi &= C\psi_1 + C\psi_{1,3} = C\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right)\right)\right) = \\
&= C\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right)\right)
\end{aligned}
\tag{11}
$$