Пространство R^n. Его линейная структура.

Рассмотрим пространство R^n, элементами кот. явл. набор чисел $X=(X_1,X_2,\dots,X_n)$. Если n=2, то рассм. пространство двухмерное, если n=3, то трехмерное.

Пусть $X=(X_1,X_2,\dots,X_n)$, $Y=(Y_1,Y_2,\dots,Y_n)$. Тогда линейное пространство обладает след. св-ми:

Св-ва сложения:

1) Ассоциативность $(X+Y)+Z=(Y+Z)+X$

2) $\exists$ нейтрального эл-та $\exists\ \vec{0}=(0,\dots,0)\in R^n\ \forall\in R^n\ X+\vec{0}=X$

3) $\exists$ противоположного эл-та

$\forall X=(X_1,X_2,\dots,X_n)\in R^n$

$\exists\ -X=(-X_1,\dots,X_n)$

$X+(-X)=\vec{0}$

4) Коммутативность

$\forall X,Y\in R^n\ X+Y=Y+X$

Св-ва умножения на число

1) Ассоциативность

$(\lambda\cdot\mu)X=\lambda\cdot(\mu X)$

2) $\exists$ нейтрального эл-та

$\exists\,1\in R^n\ ,\forall X\in R^n$

$1\cdot X=X$

3) Дистрибутивность

$(\lambda+\mu)X=\lambda X+\mu X$

$\lambda(X+Y)=\lambda X+\lambda Y$

Если эти два действия выполняются, то R^n– линейное векторное пространство.

Линейная зависимость и линейная независимость

Векторы $\vec{X},\vec{Y},\dots,\vec{Z}$ – линейно зависимы, если $\exists\ \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in R$ такие, что $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\neq 0$, а $\lambda_1\vec{X}+\lambda_2\vec{Y}+\dots+\lambda_n\vec{Z}=0$.

Векторы $\vec{X},\vec{Y},\dots,\vec{Z}$ – линейно независимы, если $\exists\ \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in R$, такие, что $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n=0$, а $\lambda_1\vec{X}+\lambda_2\vec{Y}+\dots+\lambda_n\vec{Z}=0$.

Примером линейно независимых векторов могут служить базисные вектора:

$\vec{e}_1=(1,0,\dots,0);\vec{e}_2=(0,1,0,\dots,0);\vec{e}_n=(0,\dots,0,1)$

Размерность пространства – максимальное число линейно независимых векторов.

Базис – любой набор из максимального числа линейно независимых векторов. $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ – стандартный базис в R^n.

Пусть $\vec{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ – произвольный вектор из R^n. Тогда этот вектор представим в виде комбинации:

$\vec{X}=X_1\vec{e}_1+X_2\vec{e}_2+\dots+X_n\vec{e}_n$

$\vec{X}-X_1\vec{e}_1-X_2\vec{e}_2-\dots-X_n\vec{e}_n=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{X},\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ – ëèí. çàâèñ.

Откуда $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ – система из максимального числа лин. независ. векторов.

Скалярное произведение, норма, метрика в R^n

Скалярное произведение.

Пусть

$\vec{X}=\{X_1,X_2,\dots,X_n\},\vec{Y}=\{Y_1,Y_2,\dots,Y_n\}$.

Тогда $(\vec{X}\cdot\vec{Y})=(X_1Y_1+X_2Y_2+\dots+X_nY_n)$.

Евклидово пространство – линейное векторное пространство, в кот. введена операция скалярного произведения.

Св-ва скалярного произведения.

1) Коммутативность

$(\vec{X}\cdot\vec{Y})=(\vec{Y}\cdot\vec{X})$

2) Однородность

$\lambda(\vec{X}\cdot\vec{Y})=(\lambda\vec{X}\cdot\vec{Y})$

3) Дистрибутивность

$(\vec{X}+\vec{Y},\vec{Z})=(\vec{X},\vec{Z})+(\vec{Y},\vec{Z})$

4) Невырожденность

$(\vec{X},\vec{Y})=0\Leftrightarrow\vec{X}=0$

Норма.

$\|\vec{X}\|=\sqrt{(\vec{X},\vec{X})}$

Нер-во Коши-Буниковского

$|(\vec{X},\vec{Y})|\le\|\vec{X}\|\cdot\|\vec{Y}\|$

Док-во:

$(\lambda x-y,\lambda x-y)\ge 0\ \forall\lambda\in R$

$\lambda^2(x,x)-2\lambda(x,y)+(y,y)\ge 0$

åñëè $\lambda=0$, òî íåð–âî âåðíî

åñëè $\lambda\neq 0$, òî íåð–âî êâàäð. èíî îíî âûï. ïðè $\lambda\in R$

$\Rightarrow D=(2(x,y))^2-4(x,y)(y,y)\le 0$

$(x,y)^2\le(x,x)(y,y)$

$\sqrt{(x,y)^2}\le\sqrt{(x,x)}\cdot\sqrt{(y,y)}$

$|(x,y)|\le\|x\|\cdot\|y\|$

Св-ва нормы.

1) $\|x\|\ge 0$

2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$

3) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

Метрика.

$\rho(x,y)=\|x-y\|$ – метрика (расстояние между эл-ми X и Y.

Св-ва метрики.

1) Неотрицательность:

$\rho(x,y)\ge 0$

2) Симметрия

$\rho(x,y)=\rho(y,x)$

3) Нер-во треугольника:

$\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$

4) Невырожденность:

$\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$

Открытые и замкнутые множ-ва в R^n, огранич. и неогранич. множ-ва в R^n.

$B(a,r)$ – открытый шар = $\{x\in R^n/\rho(x,a)<r\}$

$B[a,r]$ – замкнутый шар = $\{x\in R^n/\rho(x,a)\le r\}$

Опр. Пусть множ-во $X\subset R^n$, тогда x–внутренняя точка множ-ва X, если найдётся открытый шар с центром в точке x, целиком лежащий в окрестности множ-ва X.

$\exists B(x,\varepsilon):B(x,\varepsilon)\subset X$

Опр. Множ-во X назыв. открытым, если каждая его точка внутренняя.

Пример: Пусть дан шар

$B(a,r)=\{x\in R^n/\rho(a,x)<r\}$.

Покажем, что оно открыто. Возьмём любую точку $x\in B(a,r)$ и найдём $\varepsilon>0$ такое, что $B(x,\varepsilon)\subset B(a,r)$.

$\varepsilon=r-\rho(a,x)$.

Пусть

$y\in B(x,\varepsilon)\Leftrightarrow\rho(y,x)<\varepsilon$

$\rho(a,y)\le\rho(y,x)+\rho(x,a)<r-\rho(x,a)+$

$+\rho(x,a)=r\Leftrightarrow y=B(a,r)$

Замкнутое множество.

Множ-во явл. замкн., если его дополнение открыто:

Опр. X–замкнуто, если дополнение $CX=R^n\backslash X$ – открыто.

Пример: $B[a,r]$ – замкнутый шар. $CB[a,r]=\{x\in R^n/\rho(a,x)>r\}$

Опр. Множ-во X – ограничено, если оно содержится в нек. замкнутом шаре.

X – огран. в R^n, если

$\exists B[a,r]:X\subset B[a,r]$

X – неогран. в R^n, если

$\forall B[a,r]:X\backslash B[a,r]\neq\varnothing$

Компакт в пространстве R^n – замкнутое и огранич. множ-во (пример – замкн. шар).

Функции нескольких переменных, определение и график.

$f:D\to R;D\subset R^n$

Числовые функции – правило, по кот. каждому эл-ту из множва $D\in R^n$ (D – обл. определения) соответствует одно и только одно число.

График функции двух переменных.

$Gr\,f=\{(x,y,f(x,y))/(x,y)\in D\}$

Предел функции и непрерывность.

$f:D\to R,D\in R^2$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)=A$

Опр. A предел f(x,y) при $x\to a$, $y\to b$, если для $\forall$ ε-окрестности A найдётся δ-окрестность точек a,b, такая, что для всех значений из обл. определения функции, попадающей в δ-окрестность a,b значения функции попадают в ε-окрестность a,b.

Пусть a,b – числа. $A\in$расш. числ. прямой.

$B((a,b),\delta)=\{(x,y)\in R^2\,|\,\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\}$

По Коши:

$A\in R,\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall(x,y)\in D$

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\Rightarrow|f(x,y)-A|<\varepsilon$

По Гейне:

$\forall\{x_n,y_n\}_{n\in N}\subset D$

$(x_n,y_n)\to(a,b)\Rightarrow f(x_n,y_n)\to A$

Св-ва пределов:

1) Если предел существует, то он единственный.

Док-во: Предположим, что $\exists$ два разных предела:

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)=A$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)=B,\ A\neq B$

Зафиксируем $\varepsilon>0$. Тогда:

$1)\exists\delta_1>0\ \forall(x,y)\in D$

$(x,y)\in B((a,b),\delta_1)\Rightarrow|f(x,y)-A|<\varepsilon$

$2)\exists\delta_2>0\ \forall(x,y)\in D$

$(x,y)\in B((a,b),\delta_2)\Rightarrow|f(x,y)-B|<\varepsilon$

Тогда для $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ выполняются оба нер-ва $\forall(x,y)\in B((a,b),\delta)$.

Предположим

$$\varepsilon=\frac{|B-A|}{2}=\left|\left(\frac{B-f(x,y)}{2}\right)+\left(\frac{A+f(x,y)}{2}\right)\right|\le$$

$$\le\left|\frac{B-f(x,y)}{2}\right|+\left|\frac{f(x,y)-A}{2}\right|<\varepsilon$$

Получили явное противоречие $\Rightarrow$ предположение о неединственности предела неверно и предел единственен.

2) Если f(x,y) в точке (a,b) имеет конечный предел, то она ограничена в некоторой окрестности точки (a,b).

Если $\exists\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)=A\in R$, òî $\exists B((a,b),r)$ такая, что $\exists M\in R\ \ |f(x,y)|<M$. $\forall(x,y)\in B((a,b),r)$

3) Если $\exists\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)=A\in R$ и $\exists\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}g(x,y)=B\in R$, то

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}(f(x,y)+g(x,y))=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)+\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}g(x,y)=A+B$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)\cdot g(x,y) = A\cdot B$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{A}{B},\ \text{åñëè}\ B\neq 0$$

4)Предел композиции:

Если $f: D_1\to D_2; D_1\in R^2; D_2\in R$, $g: D_2\to D_3\subset R$.

Тогда определена композиция: $g(f(x,y))$.

Если $\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = A, \lim_{z\to A} g(z) = B$, тогда $\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} g(f(x,y)) = B$

Непрерывность.

Опр. $f(x,y)$ непр. в точке (x_0,y_0) если $\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

По Коши: $f(x,y)$ – непр. в точке (x_0,y_0) если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \text{òàêî å, ÷òî}\ \forall(x,y)\in B((x_0,y_0),\delta)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

По Гейне: Пусть $\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ – приращение функции, тогда функция $f(x,y)$ – непрерывна в точке (x_0,y_0) если

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \Delta f = 0$$

Св-ва функций, непр. в точке:

1)Если две функции непрерывны в точке, тогда их сумма, произведение или частное также непрерывная функция.

2)Если f(z), g(x,y) – непрерывны в точке, то их композиция f(g(x,y)) также непрерывна.

3)Функция непр. на множ-ве, если она непрерывна в каждой точке этого множ-ва.

Св-ва функций непрерывных на компакте:

1)Непрерывный образ компакта – есть компакт.

2)Если функция непрерывна на компакте, то она ограничена.

3)Если функция непрерывна на компакте, то она достигает своего sup и inf.

4)Если функция непрерывна на компакте, то она равномерно непрерывна на нём.

Опр. Функция f(x,y) непр. на компакте K если:

$$\forall(x_0,y_0)\in K,\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon,(x_0,y_0))>0$$
$$\forall(x,y)\in K, (x,y)\in B((x_0,y_0),\delta)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

Опр. Функция f(x,y) равномерно непр. на компакте K, если:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \forall(x_1,y_1)\in K\ \forall(x_2,y_2)\in K$$
$$\forall\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))<\delta\Rightarrow$$
$$\Rightarrow|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$$

Из равномерной непрерывности всегда следует непрерывность, а вот обратное не всегда верно, но если функция ограничена на компакте, то $\Rightarrow$ она равномерно непрерывна на нём.

Дифференцируемость функции в точке.

Понятие производной для функции многих переменных не определяется, вместо этого существует понятие частной производной.

Опр. Частной производной функции f(x,y) называется предел отношения частного приращения функции к соотв. приращению переменной, стремящемуся к нулю.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

Дифференцируемость.

Функция f(x,y) дифференцируема в точке (x_0,y_0) если её приращение представимо в виде главной и линейной части(дифференциал) и б.м более высокого порядка чем норма вектора составленного из приращения переменной, т.е

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \bar{o}(\|h\|)$$

где A,B – некот. числа, $\vec{h}=\{\Delta x,\Delta y\}; \|\vec{h}\| = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

Необходимое условие дифференцируемости:

Если функция $f(x_0,y_0)$ дифференцируема в точке, тогда:

1) f(x,y) непр. в этой точке,

2) ∃ частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = A$, $\frac{\partial f}{\partial y} = B$

Док-во:

1)По условию $\Delta f = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \bar{o}(\|h\|)$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta f = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \bar{o}(\|h\|)\right) = 0$$

$\Rightarrow$ ф-я по определению непрерывна.

2)Если $\Delta y = 0$, то: $\vec{h}=\{\Delta x,0\}$; $\|\vec{h}\| = |\Delta x|$. Из определению дифференцируемости:

$$f(x_0+\Delta x,y_0) - f(x_0,y_0) = A\cdot\Delta x + \bar{o}(|\Delta x|)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\cdot\Delta x+\bar{o}(|\Delta x|)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\bar{o}(|\Delta x|)}{\Delta x} = A$$
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Схема исследования на дифференцируемость:

1) Вычисл. частные производные: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

2)Записываем предполагаемый дифференциал: $df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

3)Проверяем условие дифференцируемости: $\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\Delta f - df}{\|h\|} = 0$

Th достаточное условие дифференцируемости:

Пусть у функции f(x,y) ∃ $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) и $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в (x_0,y_0), тогда функция дифференцируема в (x_0,y_0).

Док-во: Проверяем дифференцируемость функции по схеме:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y$$

Покажем, что выполняются условия дифференцируемости:

$$\frac{\Delta f - df}{\|h\|}\to 0\ (h\to 0); \|h\| = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$
$$\Delta f - df = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) -$$
$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y;$$
$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) =$$
$$=\left(f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)\right) +$$
$$+\left(f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)\right) =$$
$$=[\text{÷àñò í û å ï ðèðàù åí èÿ}] = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y +$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\Delta x$$
$$\left|\frac{\Delta f - df}{\|h\|}\right| = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\Delta x -}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$
$$\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y}{\dots}\leq$$
$$\leq\left|\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right| +$$
$$+\left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right| =$$
$$=\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|\cdot\frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} +$$
$$+\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|\cdot\frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$$
$$\frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\leq 1; \frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\leq 1$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|\to 0$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|\to 0$$

$\Rightarrow$ф-я дифференцируема в точке (x_0,y_0).

Приближённые вычисления с помощью дифференциала.

Пусть функция f(x,y) дифференцируема в точке (x_0,y_0). Тогда приращение функции можно записать в виде:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x +$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \bar{o}(\|h\|)$$

При малых приращениях последнее слагаемое мало, откуда можем записать:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x +$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y$$

Геометрический смысл частной производной и дифференциала.

Пусть z = z(x,y). Графиком функции z(x,y) явл. нек. поверхность. $y=y_0$ – есть уравнение плоск-ти при фиксированном значении y_0. Пусть $(x_0, y_0, z(x_0,y_0))$ – точка, лежащая на нек. кривой, образ. пересечением пов-ти z=z(x,y) с плоск-ю $y=y_0$. Тогда $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = tg\gamma$ – тангенс угла наклона касательной к полученной кривой в точке $(x_0,y_0,z(x_0,y_0))$.

Таким образом уравнение касательной плоскости(плоскости, прох. через две касательные прямые) приобретает вид:

$$z = z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = z_0 + dz$$

Как видно из ур-я кас. плоскости: $dz = z - z_0$, т.е геометрический смысл дифференциала состоит в том, что он равен приращению аппликаты кас. плоскости к поверхности в точке $(x_0,y_0,z(x_0,y_0))$.

Уравнение нормали к пов-ти заданной явно:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)} = -(z-z_0)$$

Уравнение кас. плоскости к пов-ти заданной неявно:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0) +$$
$$+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0) = 0$$

Уравнение нормали к пов-ти, заданной неявно:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$$

Производная сложной функции.

Th. Пусть z(x,y) дифференцируема в точке (x_0,y_0); x=x(t), y=y(t) – дифференцируемы в точке t_0. $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$, тогда z=(x(t),y(t)) – тоже дифференцируема в t_0 и производная вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Док-во: $\frac{dz}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}$. Дадим точке t_0 приращение Δt, при этом функции $x(t)$, $y(t)$ также получат приращения: $\Delta x=x(t_0+\Delta t)-x(t_0)$, $\Delta y=y(t_0+\Delta t)-y(t_0)$, $\Delta z=z(t_0+\Delta t)-z(t_0) = z(x(t_0+\Delta t),y(t_0+\Delta t))-z(x(t_0),y(t_0))$.

Поскольку $z(x,y)$ дифференцируема в т. (x_0,y_0), то приращения функции представимы в виде:

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+\bar{o}(\|h\|)$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\Delta y}{\Delta t}+\frac{\bar{o}(\|h\|)}{\Delta t}$$

$$if\ \ \Delta t\to 0\ \ then$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\bar{o}(\|h\|)}{\Delta t}$$

Покажем, что последнее слагаемое стремиться к нулю:

$$\left|\frac{\bar{o}(\|h\|)}{\Delta t}\right|=\left(\frac{\bar{o}(\|h\|)}{\|h\|}\right)\cdot\frac{\|h\|}{|\Delta t|}=0\cdot\frac{\|h\|}{|\Delta t|}$$

$$\frac{\|h\|}{|\Delta t|}=\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{|\Delta t|}=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\to$$

$$\to\sqrt{x'^2(t_0)+y'^2(t_0)}\to\text{÷èñëó}$$

$$0\cdot\text{÷èñëî}=0$$

В итоге получим:

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Частный случай: формула полной производной:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Слож. ф-я многих переменных:

Пусть задана функция: $\begin{cases}z=z(x,y)\\x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$, причём $z=z(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0), а ф-ции $x(u,v)$, $y(u,v)$ дифферец. в точке u_0,v_0. Где $x_0=x(u_0,v_0)$, $y_0=y(u_0,v_0)$. Тогда:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)$$

Инвариантность формы полного дифференциала первого порядка. Правила вычисления дифференциала.

Пусть $z=z(x,y)$, при этом x,y–независимые переменные, тогда: $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Пусть теперь $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$. Тогда:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)du+$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)+$$
$$+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Св-во инвариантности дифференциала первого порядка заключается в том, что он имеет один и тот же вид не зависимо от того являются ли x,y – независимыми переменными, либо в свою очередь зависят от каких либо переменных u,v.

Св-ва дифференциала:

$$1)\ d(c\cdot f)=c\cdot df$$
$$2)\ d(f+g)=df+dg$$
$$3)\ d(f\cdot g)=g\cdot df+f\cdot dg$$
$$4)\ d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\cdot df-f\cdot dg}{g^2}$$

Производная от неявной функции.

Пусть ф-я $y(x)$ задана неявно ур-м $F(x,y)=0$, тогда:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Док-во: $F(x,y)=0$, $y=y(x)$. Продифференцируем след. уравнение: $F(x,y(x))=0$: $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$. Выражая производную от $y(x)$ получим:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Градиент. Производная по направлению. Их геометрический смысл.

Градиент – вектор, составленный из частных производных функции.

Производная по направлению. Рассмотрим функцию $F(x,y,z)$. Зафиксируем точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, а $M(x,y,z)$ – произвольная точка. $\vec{l}=M_0M$.

Производной в напр. **l** называется: $\frac{\partial F}{\partial l}=\lim\limits_{M\to M_0}\frac{F(M)-F(M_0)}{|M_0M|}$.

Частная производная – частный случай производной по направлению в направлении координатных осей.

Теорема 1. Если ф-я $F(x,y,z)$ дифференц. в точке (x_0,y_0,z_0), тогда ∃ производная по любому направлению, исходящему из этой точки, причём:

$$\frac{\partial F}{\partial l}=\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cdot\cos\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\cdot\cos\beta+$$
$$+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\cdot\cos\gamma$$

Док-во:

$$|M_0M|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

Запишем уравнение луча M_0M в параметрическом виде: $\begin{cases}x=x_0+t\cdot\cos\alpha\\y=y_0+t\cdot\cos\beta\\z=z_0+t\cdot\cos\gamma\end{cases}$, тогда вектор $\mathbf{M_0M}$ представим в виде: $|M_0M|=\sqrt{t^2\cos^2\alpha+t^2\cos^2\beta+t^2\cos^2\gamma}=t$.

В этом случае:

$$\frac{\partial F}{\partial l}=\lim_{t\to 0}\frac{F(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-F(x_0,y_0,z_0)}{t}=$$
$$=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma$$

Теорема 2. Производная в направлении градиента равна длине градиента:

Док-во:

$$gradF=\left\{\frac{\partial F}{\partial x};\frac{\partial F}{\partial y};\frac{\partial F}{\partial z}\right\}$$

$$\cos\alpha=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{|gradF|};\cos\beta=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{|gradF|};\cos\gamma=\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{|gradF|}$$

$$\frac{\partial F}{\partial l}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{|gradF|}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{|gradF|}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{|gradF|}=$$
$$=\frac{1}{|gradF|}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right)=\frac{|gradF|^2}{|gradF|}=|gradF|$$

Теорема 3. В заданной точке производная по направлению достигает своего наибольшего значения в направлении градиента.

Док-во: Пусть **h** – единичный вектор в направлении **l**. $\bar{h}=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$.

Производную в направлении **l** можно представить в виде: $\frac{\partial F}{\partial l}=(gradF;\bar{h})$. По неравенству Коши-Буниковского:

$$(gradF;\bar{h})\le|gradF|\cdot|\bar{h}|$$
$$|gradF|\cdot|\bar{h}|\cdot\cos\theta\le|gradF|\cdot|\bar{h}|$$

где θ - угол между вектором направления и градиентом. Если векторы направления и градиент сонаправлены, то угол θ=0, ⇒ Cosθ=1 и нер-во превращается в равенство и ⇒ Производная максимальна.

Геометрический смысл градиента: Пусть функция двух переменных $F(x,y)=0$ задаёт неявно нек. кривую $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$, тогда: $\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=0$, ⇒ вектора $\left\{\frac{\partial F}{\partial x};\frac{\partial F}{\partial y}\right\}$ и $\left\{\frac{\partial x}{\partial t};\frac{\partial y}{\partial t}\right\}$ – ортогональны, ⇒ Градиент – вектор нормали к кривой в данной точке.

Геометрический смысл производной по направлению: Производная по направлению численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой, образованной пересечением поверхности с плоскостью, в которой одновременно лежит прямая, проходящая через вектор направления и прямая, параллельная оси Oz, к прямой, проходящей через вектор направления.

Производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.

Производная второго порядка – это производная от производной 1-го порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

При некоторых условия смеш. производные равны.

Теорема о равенстве смешанных производных. Пусть ф-я $f(x,y)$ имеет в некот. окрестности точки (x_0,y_0) все частные производные 1-го и 2-го порядков, кроме того смеш. производные непрерывны в точке (x_0,y_0), тогда смеш. производные в т. (x_0,y_0) равны.

Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных.

Пусть у функции $f(x,y)$ ∃ частные производные любого порядка ⇒ смеш. производные 2-го порядка равны, т.к произв. 2-го порядка дифференцируемы, а ⇒ и непрерывны.

Дифференциал 2-го порядка – это дифференциал от дифференциала 1-го порядка.

$$d^2 f = d(df)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy$$

$$dx, dy - const$$

$$d^2 f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy\right)dx +$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy\right)dy =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)dxdy +$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)dy^2 =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)dxdy +$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)dy^2$$

Можно записать в общем виде:

$$d^n = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n$$

Св-во инвариантности для дифференциалов высших порядков в общем случае не выполняется:

Пусть x=x(t),y=y(t), тогда:

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx\right) +$$
$$+d\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial f}{\partial x}d^2x + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy +$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy +$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y\right)$$

Если последняя скобка равна нулю, то инвариантность выполняется, что возможно лишь в том случае если зависимости x(t),y(t) являются линейными.

Формула Тейлора для функций многих переменных:

∃ ф-ю F(x,y) у кот. в нек. окр-ти точки (x_0,y_0) ∃ частные производные 1-го, 2-го, (n+1)-го порядков, причём произ-я (n+1)-го порядка непрерывна в т.(x_0,y_0) (для ∃ дифференциала). Тогда формула Тейлора в точке (x_0,y_0) имеет вид:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y) +$$
$$+\frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y) +$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y,\Delta x,\Delta y), 0<\theta<1$$

Экстремум. Необходимые и достаточные условия экстремума.

Опр. Точка (x_0,y_0) – точка локального Max функции z=z(x,y), если ∃ B((x_0,y_0),ε), такое, что ∀(x,y)∈B ⇒ z(x,y)≤z(x_0,y_0). (Если z(x,y)≥z(x_0,y_0) то это точка лок. минимума).

Опр. Точка локального экстремума – точка, кот. является либо точкой Min, либо точкой Max.

Необходимое условие т. Экстремума.

Пусть z=z(x,y) дифференц. в т (x_0,y_0) и точка (x_0,y_0) – точка лок. максимума(минимума), тогда:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

Док-во: Т.к ф-я дифференц., то по необх. условию дифференц. частные производные существуют. Запишем по определению частной производной:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{z(x_0+\Delta x,y_0) - z(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

Если Δx>0 то

$$\frac{z(x_0+\Delta x,y_0) - z(x_0,y_0)}{\Delta x} \le 0.$$

Если Δx<0 то

$$\frac{z(x_0+\Delta x,y_0) - z(x_0,y_0)}{\Delta x} \ge 0$$

⇒в точке (x_0,y_0) произ-я равна нулю. Также можно сказать и про производную по y.

1-е достаточное условие Экстремума.

Пусть z=z(x,y) имеет в некоторой окрестности U((x_0,y_0),ε) имеет частные производные до 2-го порядка включительно, причём произв. 2-го порядка непрерывны(для ∃ дифференциала).

Тогда

1)если $d^2z(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)>0$ то (x_0,y_0) – точки Min.

2)если $d^2z(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)<0$ то (x_0,y_0) – точка Max.

3)если знак $d^2z(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)<0$ не определён, то (x_0,y_0) – не явл. точкой экстремума.

4)если $d^2z=0$, то требуется дополнительное исследование.

Док-во:

$$z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = z(x_0,y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x +$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \frac{1}{2!}d^2z(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y,\Delta x,\Delta y)$$
$$z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - z(x_0,y_0) =$$
$$= \frac{1}{2!}d^2z(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y,\Delta x,\Delta y)$$

Если $d^2z>0$, то Δz>0 – т. Min;

Если $d^2z<0$, то Δz<0 – т. Max.

2-е достаточное условие:

1) $\exists \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\frac{\partial^2 z}{\partial y^2};\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

2) $\frac{\partial z}{\partial x}=0;\frac{\partial z}{\partial y}=0$

Введём обозначение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=A;\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=B;\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=C$, тогда $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$

Тогда:

1)Если Δ>0, то (x_0,y_0) – т. экстремума.

при A>0 – т. Min; при A<0 – т. Max.

2)Если Δ<0, то (x_0,y_0) – не явл. т. экстремума.

3)Если Δ=0, то требуется доп. исследование.

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции в замкнутой и ограниченной области.

z=z(x,y). D–компакт в R^2. z(x,y) – непр. в области D. Ф-я непрерывная на компакте достигает своей точной верхней и нижней грани.

Схема исследования:

1)Вычисляем $\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}$.

Находим критические точки (точки в кот. частные производные равны нулю или хотя бы одна из них не существует),

2)Из найденных крит. точек выбираются те, кот. попали внутрь области и вычисл. значения функции в этих точках.

3)Исследуется поведение функции на границе области. Из уравнения границы нужно выразить одну переменную через другую, подставить в уравнение функции и исследовать её на наиб. и наим. значение как функцию от одной переменной на отрезке.

4)Из всех полученных значений выбрать наиб. и наим.

Условный экстремум.

Необх. найти экстремум функции при условии уравнения связи. Пусть z(x,y) – иссл. функция, φ(x,y) – уравнение связи.

1 способ. Из уравнения связи выражаем одну переменную через другую и подставляем в уравнение функции. Затем исследуем функцию от одной переменной на экстр.

2 способ. Если нельзя выразить, то применяют метод множителей Лагранжа.

1)Пусть ф-я Лагранжа F(x,y,λ)=z(x,y)+λφ(x,y).

2)Нах. стац. точки из системы
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=0 \end{cases}.$$

3)Если $d^2F>0$, то – т. Min, Если $d^2F<0$, то т. Max.

Теорема о существовании неявной функции.

Теорема о существовании единственной неявной функции.

Пусть:

1)F(x,y,z) – непрерывна в окр-ти т. (x_0,y_0,z_0), $F(x_0,y_0,z_0)=0$.

2)∃ $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)$ в окр-ти точки (x_0,y_0,z_0).

3) $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)$ – непрерывна, $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, тогда:

1)∀ сколь угодно малого ε>0 ∃ δ>0 такое, что ∀(x,y)∈$B_\delta(x_0,y_0)$ ∃ единственное z=z(x,y), явл. решением уравнения F(x,y,z)=0 и $|z-z_0|<\varepsilon$.

2)z(x,y) непрерывна в т. (x_0,y_0).

3)Если F(x,y,z) дифференц. в т. (x_0,y_0,z_0), то z(x,y) дифференц. в т. (x_0,y_0,z_0).

Особые точки поверхностей и плоских кривых.

Пусть поверхность задана неявно F(x,y,z)=0, z=z(x,y).

Опр. Особой точкой называется такая точка, в которой все частные производные F равны нулю. В окр-ти особой точки ни одну из переменных нельзя выразить явно. В окр-ти особой точки пов-ть нельзя спроектировать однозначно не на одну из плоскостей. Например: $x^2+y^2-z^2=0$ (двуполостной конус).

Неявная функция, заданная системой функциональных уравнений.

Пусть m функций от n переменных $z_1(x_1,\ldots,x_n)$, $z_2(x_1,\ldots,x_n),\ldots,z_m(x_1,\ldots,x_n)$ заданы системой ур-й:

$$\begin{cases} F_1(z_1,\ldots,z_m,x_1,\ldots,x_n)=0 \\ \ldots \\ F_m(z_1,\ldots,z_m,x_1,\ldots,x_n)=0 \end{cases} \qquad (***)$$

Якобиан(определитель Якоби) – определитель матрицы, составленной из частных производных.

$$\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(z_1,\ldots,z_m)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \frac{\partial F_1}{\partial z_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial z_m}\\ \frac{\partial F_2}{\partial z_1} & \frac{\partial F_2}{\partial z_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial z_m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial F_m}{\partial z_1} & \frac{\partial F_m}{\partial z_2} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial z_m}\end{vmatrix}$$

<u>Теорема о существовании единственности решения:</u>
Пусть выполн. след. условия:
1)Пусть функции $F_1,F_2,\ldots,F_n$ дифференц. в некот. окр-ти точки $M_0\left(\overset{0}{z}_1,\overset{0}{z}_2,\ldots,\overset{0}{z}_m,\overset{0}{x}_1,\ldots,\overset{0}{x}_n\right)$.
2)Значения функций: $F_1\big|_{M_0}=F_2\big|_{M_0}=\ldots=F_m\big|_{M_0}=0$.
3) $\frac{\partial F_1}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial F_1}{\partial z_m},\ldots,\frac{\partial F_m}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial F_m}{\partial z_m}$ непр. в точке M_0.
4) $\left.\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(z_1,\ldots,z_m)}\right|_{M_0}\neq 0$
Тогда для ∀ сколь угодно малых $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_m>0$ ∃ δ окр-ть точки M_0, в кот. ∃! решение системы (***) такое, что $\left|z_1-\overset{0}{z}_1\right|<\varepsilon_1,\ldots,\left|z_m-\overset{0}{z}_m\right|<\varepsilon_m$.
$z_1,\ldots,z_m$ дифференц., т.к ∃ изначально условие дифф-ти.
<u>Нахождение производной. $\frac{\partial z_i}{\partial x_l}$</u>
<u>1 способ.</u> Дифф. каждое уравнение системы по переменной x_L по правилу слож. функции:

$$\begin{cases}\frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial x_l}+\frac{\partial F_1}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial z_2}{\partial x_l}+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial z_m}\cdot\frac{\partial z_m}{\partial x_l}+\frac{\partial F_1}{\partial x_l}=0\\ \ldots\\ \frac{\partial F_m}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial x_l}+\frac{\partial F_m}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial z_2}{\partial x_l}+\ldots+\frac{\partial F_m}{\partial z_m}\cdot\frac{\partial z_m}{\partial x_l}+\frac{\partial F_m}{\partial x_l}=0\end{cases}$$

Откуда решая по правилу Крамера находим:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_l}=-\frac{\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(z_1,\ldots,z_{i-1},x_l,z_{i+1},\ldots,z_m)}}{\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(z_1,\ldots,z_m)}}$$

<u>2 Способ.</u> Нужно брать дифференциалы от каждого из ур-й системы (***) и из общего вида дифференциала найти ч. производную.

<u>Замена переменных.</u>

В ряде вопросов мат. анализа, а также в др. разделах математики часто встреч. задачи замены переменных. Пусть задана некоторая система $\begin{cases}u=u(x,y,z)\\ v=v(x,y,z)\\ w=w(x,y,z)\end{cases}$, где x,y–переменные, z(x,y)–функция. Чтобы ввести новую функцию w(u,v) необходимо, чтобы система была разрешима относительно функции z, а первые два ур-я системы относит. переменных x,y. Чтобы выразить производные $\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}$ через новые переменные u,v прим. след. метод: Выделяем дифференциал от каждого ур-я системы:

$$\begin{cases}du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\\ dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz\\ dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz\end{cases}$$

С другой стороны:
$$dw=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv$$
Подстановкой получим:

$$\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz=\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\right)+$$
$$+\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz\right)$$
$$dz=\frac{\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial z}}dx+\frac{\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial z}}dy$$

Из общего вида дифференциала находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial z}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial z}}$$

<u>Задача о массе плоской пластины.</u>

Пусть дана неоднородная пластина D, причём ρ(x,y) – переменная плотность. Разделим пластину на n частей, причём так, чтобы: $D=\bigcup_{i=1}^{n}D_i$, а $D_i\bigcap D_j$ имеет нулевую площадь (пересекаться могут только на границе). Пусть d_i – диаметр области D_i(наибольшее расстояние между точками, леж. внутри области). $\lambda=Max_{i=1\ldots n}(d_i)$. Если λ мало, то диаметр каждой области мал и в силу непрерывности можно считать, что плотность в области D_i можно считать одинаковой. Тогда
$$m_i\approx\rho(x_i,y_i)\cdot S_{D_i}$$
$$m=\sum_{i=1}^{n}m_i\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i)\cdot S_{D_i}$$
При λ→0, то:
$$m=\lim_{\lambda\to 0}\rho(x_i,y_i)\cdot S_{D_i}$$

<u>Определение двойного интеграла.</u>

Пусть задана произвольная функция f(x,y) на компакте D (ф-я ограничена на D). Разобьём компакт D на n частей D_i, так, что $D=\bigcup_{i=1}^{n}D_i$, а $D_i\bigcap D_j$ имеет нулевую площадь, $d_i=sup\sqrt{(x_i'-x_i'')^2+(y_i'-y_i'')^2}$, где $(x_i',x_i'')\in D_i;(y_i',y_i'')\in D_i$. Пусть $\lambda=Max_{i=1\ldots n}(d_i)$ – мелкость разбиения. $\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)S_{D_i}$ – интегральная сумма, где (x_i,y_i) – произв. точка из D_i. Если ∃ предел интегральных сумм при λ →0 и он не зависит не от разбиения, не от точки (x_i,y_i), то этот предел назыв. двойным интегралом по области D от функции f(x,y).
$$\iint_D f(x,y)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)S_{D_i}$$
<u>Через суммы Дарбу:</u>
Разобьём область D так, что $D=\bigcup_{i=1}^{n}D_i$, а $D_i\bigcap D_j$ даёт нулёвую площадь. Тогда $M_i=\sup f(x,y);(x,y)\in D_i$, $m_i=\sup f(x,y);(x,y)\in D_i$. В этом случае: $\overline{D}=\sum_{i=1}^{n}M_i\cdot S_i;\underline{D}=\sum_{i=1}^{n}m_i\cdot S_i$ – верх. и ниж. суммы Дарбу. $\iint_{\overline{D}}f(x,y)dxdy=\sup(\underline{D})$, $\iint^{\underline{D}}f(x,y)dxdy=\inf(\overline{D})$ – верх. и ниж. дв. интегралы при мелкости разбиения стрем. к нулю.
Двойным интегралом называется предел верхних или нижних сумм Дарбу при мелкости разбиения стрем. к нулю, при условии, что в пределе они совпадают.

<u>Геометрический смысл двойного интеграла.</u>

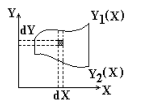
Двойной интеграл по области D численно равен объёму тела, ограниченного снизу областью D на плоскости XoY, по бокам цилиндрической поверхностью ∥ оси Z и прох. через границу области D, а сверху поверхностью z=z(x,y).

<u>Необходимое и достаточное условие интегрируемости. Свойства двойного интеграла.</u>

<u>Необходимое условие.</u> Ограниченность функции на области D, т.к суммы Дарбу могут быть составлены только для ограниченных функций.
<u>Достаточное условие.</u> Непрерывность. Т.к если ф-я непрерывна на компакте D, то она непрерывна и на компактах D_i ⇒ в по св-ву непр. функций она достигает на каждой области D своего супремума и инфимума.

<u>Вычисление двойного интеграла.</u>

<u>Опр.</u> Элементарной областью в напр. Oy назыв. область, ограниченную снизу и сверху функциями $y_1(x)$, $y_2(x)$ соответственно и прямыми x=a, x=b по бокам.
При след. условиях: 1) Функция f(x,y) – интегрируема в области D, 2) Для ∀ фиксир. x∈[a,b] функция f(x,y) интегрируема на $[y_1(x),y_2(x)]$, 3) $y_1(x),y_2(x)$ – непрерывны на [a,b].
В случае элементарной области двойной интеграл вычисляется по формуле: $\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy$.



Док-во: (На примере массы пластины).
Выделим элементарную пластину dxdy. Если dxdy малы, f(x,y) в силу непрерывности можно считать постоянной. f(x,y)dxdy – масса элементарной площадки, тогда: $dx\cdot\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)dy$ – масса элементарной пластинки, а $\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy$ – масса всей пластины.

<u>Криволинейные интегралы I-го и II-го рода.</u>

<u>Криволинейный интеграл 1-го рода.</u> Рассмотрим кривую $\gamma:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}t\in[a;b]$. Пусть x(t), y(t) дифференц. на [a,b] и их производные непр. на [a,b], кроме быть может конечного числа точек. $(x'(t))^2+(y'(t))^2>0$ при всех

t∈[a,b], кроме конечного числа точек. γ – кусочно-гладкая кривая. Пусть f(x,y) определена в некот. области D, γ∈D. Рассмотрим разбиение кривой γ конечным набором точек. $A=A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n=B$. Внутри каждого участка кривой выберем точку с координатами $(\xi_K,\eta_K)\in\cup A_{K-1}A_K$. Составим сумму $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_K,\eta_K)\Delta S_K$, где ΔS_K – длина участка кривой $A_{K-1}A_K$. $\Delta S=\mathrm{Max}(\Delta S_K)$. Если ∃ предел сумм при $\Delta S\to 0$ и этот предел не зависит не от разбиения, не от точек (ξ_K,η_K), то этот предел называется криволинейным интегралом 1-го рода от функции f(x,y) по кривой γ.

$$\int_\gamma f(x,y)\,dS=\lim_{\Delta S\to 0}\sum_{K=1}^{n} f(\xi_K,\eta_K)\Delta S_K$$

<u>Физический смысл криволин. интеграла 1-го рода.</u> Если функцию f(x,y) трактовать как плотность кривой в каждой точке (x,y), то при малых ΔS плотность в каждой точке можно считать постоянной. $f(\xi_K,\eta_K)\cdot\Delta S_K\approx m_{\cup A_{K-1}A_K}$, тогда $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_K,\eta_K)\Delta S_K\approx m$, а ⇒ $\int_\gamma f(x,y)\,dS=m$.

<u>Вычисление криволин. интеграла 1-го рода.</u>

$$\gamma:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases} t\in[a;b]$$

$$dS=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

$$\int_\gamma f(x,y)\,dS=\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

×àñòíûé ñëó÷àé:

$$\gamma: y=y(x), x\in[a,b]$$

$$\int_\gamma f(x,y)\,dS=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(t))^2}\,dx$$

<u>Св-ва криволин. интеграла 1-го рода.</u>

1)Значение интеграла не зависят от направления крвой:

$$\int_{AB} f(x,y)\,dS=\int_{BA} f(x,y)\,dS$$

2)Линейность

$$\int_\gamma(\alpha f(x,y)+\beta g(x,y))\,dS=\alpha\int_\gamma f(x,y)\,dS+\beta\int_\gamma g(x,y)\,dS$$

3)Аддитивность по кривой:

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(x,y)\,dS=\int_{\gamma_1} f(x,y)\,dS+\int_{\gamma_2} f(x,y)\,dS$$

4)Если f(x,y)≥0 ∀ (x,y)∈γ, то

$$\int_\gamma f(x,y)\,dS\ge 0$$

5)

$$\left|\int_\gamma f(x,y)\,dS\right|\le\int_\gamma |f(x,y)|\,dS$$

6)Теорема о среднем: Если f(x,y) – непрерывна на γ, то ∃ точка $(x_0,y_0)\in\gamma$ такая, что:

$$\int_\gamma f(x,y)\,dS=f(x_0,y_0)\cdot l(\gamma)$$

<u>Криволинейный интеграл 2-го рода.</u>

Пусть задана кривая $\gamma:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases} t\in[a;b]$ причём на кривую накладываются условия такие же как и для крив. интеграла 1-го рода. Возьмём произвольное разбиение кривой точками $A=A_0, A_1, \ldots, A_{K-1}, A_K, \ldots, A_n=B$, причём $A_0(x_0,y_0)$, $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2), \ldots, A_K(x_K,y_K), \ldots, A_n(x_n,y_n)$. $\Delta x_K=x_K-x_{K-1}$, K=1,…,n

$\Delta y_K=y_K-y_{K-1}$, K=1,…,n

ΔS – Максимум длин дуг $\cup A_{K-1}A_K$, K=1,…,n. Выберем внутри каждой дуги $\cup A_{K-1}A_K$ точку (ξ_K,η_K). Пусть заданы функции P(x,y), Q(x,y) – непрерывные в области D, γ∈D. Составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n}\left(P(\xi_K;\eta_K)\cdot\Delta X_K+Q(\xi_K;\eta_K)\cdot\Delta Y_K\right)$$

Если ∃ предел интегральных сумм при $\Delta S\to 0$ и он не зависит не от разбиения, не от точек (ξ_K,η_K), то он называется криволинейным интегралом 2-го рода:

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$$

<u>Физический смысл криволин. интеграла 2-го рода.</u>

Можно рассматривать как работу силы $\vec F(x,y)=\{P(x,y);Q(x,y)\}$ по перемещению материальной точки вдоль кривой γ.

<u>Св-ва криволин. интеграла 2-го рода.</u>

1)Зависимость от направления кривой:

$$\int_{-\gamma} P\,dx+Q\,dy=-\int_\gamma P\,dx+Q\,dy$$

2)Линейность.

3)Аддитивность по кривой.

<u>Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода.</u>

$$\gamma:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases} t\in[a;b]$$

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=$$
$$=\int_a^b P(x(t),y(t))x'(t)\,dt+Q(x(t),t(t))y'(t)\,dt$$

Положительным направлением обхода считается обход против часовой стрелки.

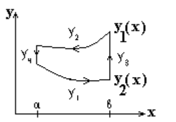
<u>Формула Грина.</u>

Связывает криволинейный интеграл 2-го рода по замкнутому контуру с двойным интегралом по области D, ограниченной этим контуром.

Пусть D – область ограниченная кусочно-гладким контуром γ. Направление обхода γ положительно. Пусть в области D заданы некоторые непрерывные функции P(x,y), Q(x,y), причём непрерывны также их частные производные $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x};\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$. Тогда:

$$\int_{\gamma+} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

<u>Док-во:</u>

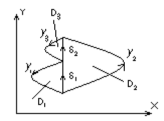


1)Покажем, что $\iint_D-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_{\gamma+}P(x,y)\,dx$. Пусть D – элементарная область в направлении оси OY.

$$\iint_D-\frac{\partial P}{\partial x}dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}-\frac{\partial P}{\partial x}dy=\int_a^b dx\left(-P(x,y)\right)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}=$$
$$=-\int_a^b P(x,y_2(x))\,dx+\int_a^b P(x,y_1(x))\,dx=$$
$$=\int_{\gamma_1}P(x,y)\,dx+\int_{\gamma_2}P(x,y)\,dx$$

Добавим интегралы по контурам γ_3, γ_4. x=b⇒dx=0 $\int_{\gamma_3}P(x,y)\,dx=0$.

$$\iint_D-\frac{\partial P}{\partial x}dxdy=\int_{\gamma_2}P\,dx+\int_{\gamma_4}P\,dx+\int_{\gamma_1}P\,dx+\int_{\gamma_3}P\,dx=$$
$$=\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4}P\,dx=\int_{\gamma+}P\,dx$$



2)Пусть D – произвольная область, но разбивается на конечное число элементарных областей.

$$\iint_D-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy=\iint_{D_1}-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy+\iint_{D_2}-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy+$$
$$+\iint_{D_3}-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy=\int_{\gamma_1+\delta_1}P\,dx+\int_{-\delta_1+\gamma_2-\delta_2}P\,dx+\int_{\delta_1+\gamma_3}P\,dx=$$
$$=\int_{\gamma_1+\delta_1-\delta_1+\gamma_2-\delta_2+\delta_2+\gamma_3}P\,dx=\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}P\,dx=\int_{\gamma+}P\,dx$$

Аналогичным образом доказывается

$$\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\int_{\gamma+}Q\,dy$$

Также аналогично доказывается для элементарной области в направлении Ox.

<u>Площадь фигуры в криволинейных координатах.</u>

1) <u>Площадь фигуры через двойной интеграл.</u>

$S=\iint_D dxdy$ (док-во через суммы Дарбу).

2)<u>Площадь через криволинейный интеграл.</u>

По формуле Грина: $\int_{\gamma+}P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$ ãäå $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\right)=1$. В частности:

$$S=\int_{\gamma+}x\,dy;\ S=\int_{\gamma+}-y\,dx;\ \frac{1}{2}\int_{\gamma+}x\,dy-y\,dx$$

3)<u>Площадь в криволинейных координатах.</u>

<u>Понятие криволинейных координат.</u>

Пусть задана СК Оξη и заданы формулы перехода к декартовым СК: $\begin{cases}x=x(\xi,\eta)\\ y=y(\xi,\eta)\end{cases}$. $\frac{\partial x}{\partial\xi};\frac{\partial x}{\partial\eta};\frac{\partial y}{\partial\xi};\frac{\partial y}{\partial\eta}$ – Íåïðåðûâíû. В СК Оξη задана область Δ →D с границей γ. Будем считать, что Якобиан перехода

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial\eta}\\ \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\eta}\end{vmatrix}\ne 0$$

. При этом можно найти зависимость ξ, η через x,y. Если Якобиан положителен, то при переходе γ’ к γ направление сохраняется, а если отрицателен, то меняется на противоположное.

Пусть на плоскости Оξη задана прямоугольная сетка координат, образованная прямыми ξ=const, η=const. ξ=C ⇒ $\begin{cases}x=x(c,\eta)\\ y=y(c,\eta)\end{cases}$, y(x) задана параметрически, где η – параметр. При отображении семейство прямых ξ=const переходят в семейство кривых на плоскость XoY. Аналогично и для η=const. Таким образом на плоскости XoY задаётся криволинейная сетка координат.

<u>Площадь фигуры в криволин. СК.</u>

Пусть площадь вычисляется по формуле: $S = \int\limits_{\gamma+} x\,dy$.

Зададим новую кривую $\gamma' : \begin{cases} \xi = \xi(t) \\ \eta = \eta(t) \end{cases} t \in [a,b]$. При этом γ-образ кривой γ' также задаётся параметрически: $\gamma : \begin{cases} x = x(\xi(t), \eta(t)) \\ y = y(\xi(t), \eta(t)) \end{cases} t \in [a,b]$. Подставляя в исх. формулу получим:

$$S = \int_a^b x(\xi(t),\eta(t))\,dy(\xi(t),\eta(t)) =$$
$$= \int_a^b x(\xi(t),\eta(t)) \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{d\eta}{dt} \right) dt =$$
$$= \int_a^b x(\xi(t),\eta(t)) \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dt} dt + \int_a^b x(\xi(t),\eta(t)) \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{d\eta}{dt} dt =$$
$$= \int\limits_{\gamma+} x(\xi(t),\eta(t)) \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + x(\xi(t),\eta(t)) \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta =$$
$$= [\text{ô − ëà Ãðèí à}] =$$
$$= \pm \iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(x(\xi(t),\eta(t)) \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(x(\xi(t),\eta(t)) \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right) d\xi d\eta =$$
$$= \pm \iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} + x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} - x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} \right) d\xi d\eta =$$
$$= \iint\limits_{\Delta} |I|\, d\xi d\eta$$

Замена переменных в двойном интеграле.

Пусть $\begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases}$ – формула перехода к новой СК. $\frac{\partial x}{\partial \xi}; \frac{\partial x}{\partial \eta}; \frac{\partial y}{\partial \xi}; \frac{\partial y}{\partial \eta}$ – непрерывны в некоторой области Δ. Δ, D – компакты (D – образ Δ). f(x,y) – непрерывна на D.

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\Delta} f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) \cdot |I|\, d\xi d\eta$$

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

Док-во: Т.к f(x,y) – непрерывна на D, то она равномерно непрерывна на нём. ∀ε>0 ∃δ>0 ∀(x_1,y_1)∈D ∀(x_2,y_2)∈D. Из того, что ρ((x_1,y_1),(x_2,y_2))<δ ⇒ |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|>ε. Возьмём разбиение области D так, что $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, а $D_i \bigcap D_j$ даёт нулевую площадь. Пусть d_i<δ – диаметр области. Преобразуем левую часть формулы:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} f(x,y)\,dxdy = [\text{ò . î ñðåäí åì }] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i) \cdot S_{D_i} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i) \cdot \iint\limits_{\Delta_i} |I|\, d\xi d\eta;$$

Преобразуем правую часть:

$$\iint\limits_{\Delta} f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) |I|\, d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Delta_i} f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) |I|\, d\xi d\eta$$

Оценим разность между левой и правой частью:

$$\left| \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy - \iint\limits_{\Delta} f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) \cdot |I|\, d\xi d\eta \right| =$$
$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Delta_i} \left(f(x_i,y_i) - f(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i) \right) \cdot |I|\, d\xi d\eta \right| \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Delta_i} \left| f(x_i,y_i) - f(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i) \right| \cdot |I|\, d\xi d\eta <$$
$$< [\text{â ñèëó í åï ðåðû âí î ñò è}] < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \cdot S_D = \varepsilon \cdot S_D$$

Т.к ε – сколь угодно мало, то разность в формуле равна нулю, что и требовалось доказать.

Понятие площади поверхности.

Пусть задана поверхность z=z(x,y). (x,y)∈D, D∈R^2. Пусть ∃ $\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}$ и они непрерывны в области D. Функция дифференцируема в области D ⇒ в каждой точке ∃ касат. плоскость. Рассмотрим разбиение области D на конечное число областей (T-разбиение), причём так, что $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, а $D_i \bigcap D_j$ – даёт нулевую площадь. В каждой области D_i выберем точку (x_i,y_i)∈D_i. Проведём кас. плоскость в каждой точке $(x_i,y_i,z(x_i,y_i))$. В кас. плоскости выберем такую область D’$_i$, которая проектируется на область D_i. $\sigma(T) = \sum_{i=1}^{n} S_{D_i'}$ – площадь многогранника. λ=Max(d_i), d_i–диаметр области. Если ∃ предел сумм площадей и он не зависит не от разбиения, не от точек (x_i,y_i), то этот предел называется площадью поверхностью.

$$\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sigma(T) \quad \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} S_{D_i'}$$

Площадь проекции. Вычисление площади поверхности заданной явно.

1)<u>Площадь проекции.</u>

Пусть плоскость XoY’ наклонена к плоскости XoY под углом γ. В плоскости XoY’ выделим область D’. Из каждой точки D’ опускаем перпендикуляр на XoY(D – проекция D’ на XoY). Найдём формулы перехода от координат XoY’ к XoY: $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \cos\gamma \end{cases}$. Найдём Якобиан перехода $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\gamma \end{vmatrix} = \cos\gamma$.

$$S_D = \iint\limits_{D'} |I|\, dx'dy' = |\cos\gamma| \cdot \iint\limits_{D'} dx'dy' = |\cos\gamma| \cdot S_{D'}$$

2)<u>Площадь поверхности.</u>

Пусть z=z(x,y), (x,y)∈D. ∃ $\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}$ – непрерывны в D.

Тогда: $$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dxdy$$

Док-во: По определению $\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} S_{D_i'}$, где $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ – разбиение области D, D’$_i$ – область в касательной плоскости, проведённой в точке $(x_i,y_i,z(x_i,y_i))$, (x_i,y_i)∈D_i, такая, что D_i – проекция D’$_i$ на плоскость XoY.

По предыдущ. пункту: $S_{D_i} = |\cos\gamma_i| \cdot S_{D_i'} \;\Rightarrow\; S_{D_i'} = \frac{S_{D_i}}{|\cos\gamma_i|}$. Найдём Cosγ’, где γ’ – угол между кас. плоскостью и плоскостью XoY. Запиш. ур-е касат. плоскости: $z = z(x_i,y_i) + \frac{\partial z}{\partial x}(x_i,y_i)(x - x_i) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_i,y_i)(y - y_i)$.

Найдём векторы нормалей к касат. плости и к плоскости XoY: $\vec{N}_1 \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}(x_i,y_i), \frac{\partial z}{\partial y}(x_i,y_i), -1 \right\}; \vec{N}_2 \{0,0,-1\}$, тогда:

$$\cos\gamma_i = \frac{(\vec{N}_1; \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_i,y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x_i,y_i)\right)^2 + 1}}$$
$$S_{D_i'} = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_i,y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x_i,y_i)\right)^2 + 1} \cdot S_{D_i}$$
$$\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_i,y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x_i,y_i)\right)^2 + 1} \cdot S_{D_i}$$
$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dxdy$$

Площадь поверхности, заданной параметрически.

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \quad (u,v) \in D \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

∃ все частные производные x,y,z и они непрерывны в области D. Найдём $\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}$. Возьмём дифференциалы:

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \\ dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + 0 \cdot dz = dx \\ \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + 0 \cdot dz = dy \\ \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv - 1 \cdot dz = 0 \end{cases}$$

По формуле Крамера найдём dz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = -C$$
$$\Delta_{dz} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & dx \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & dy \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = dx \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} - dy \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$
$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$
$$dz = -\frac{A}{C} dx + \frac{B}{C} dy$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{A}{C}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{B}{C}.$$
$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \cdot dxdy$$
$$dxdy = |C|\, dudv$$
$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv$$

Запишем в др. форме:

$$\vec{r}(u,v) = \{x(u,v); y(u,v); z(u,v)\}$$
$$\vec{r}_u = \left\{ \frac{\partial x}{\partial u}; \frac{\partial y}{\partial u}; \frac{\partial z}{\partial u} \right\}; \vec{r}_v = \left\{ \frac{\partial x}{\partial v}; \frac{\partial y}{\partial v}; \frac{\partial z}{\partial v} \right\}$$

Векторы **r**$_u$, **r**$_v$ лежат в касат. плоскости ⇒ вектор нормали можно найти

$$\vec{N} = [\vec{r}_u; \vec{r}_v]$$
$$\vec{N}^2 = |\vec{r}_u|^2 \cdot |\vec{r}_v|^2 \cdot \sin^2(\vec{r}_u ? \vec{r}_v) = |\vec{r}_u|^2 \cdot |\vec{r}_v|^2 \cdot (1 - \cos^2\varphi) =$$
$$= |\vec{r}_u|^2 \cdot |\vec{r}_v|^2 - (\vec{r}_u; \vec{r})^2$$
$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$
$$\vec{N}^2 = A^2 + B^2 + C^2$$
$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{|\vec{r}_u|^2 \cdot |\vec{r}_v|^2 - (\vec{r}_u; \vec{r}_v)^2}\, dudv$$
$$|\vec{r}_u|^2 = E; |\vec{r}_v|^2 = G; (\vec{r}_u; \vec{r}_v) = F$$
$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$