Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Пространство $\mathbf{R}^n$. Линейная структура.

Элементом пространства $\mathbf{R}^n$ является набор из n действительных чисел: $x=(x_1,...,x_n),\ x_i\in\mathbf{R},\ i=1,...,n$.

При $n=2$ пространство $\mathbf{R}^2$ – плоскость.

При $n=3$ пространство $\mathbf{R}^3$ – трехмерное пространство.

Во множестве $\mathbf{R}^n$ можно ввести действия сложения и умножения на число.

Суммой элементов $x=(x_1,...,x_n)$ и $y=(y_1,...,y_n)$ называется элемент $x+y=(x_1+y_1,...,x_n+y_n)$. Действие сложения обладает следующими свойствами:
1. $(x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативность);
2. $x+y=y+x$ (коммутативность);
3. $\exists\,\vec{0}=(0,...,0)\ \forall x\in\mathbf{R}^n\ x+\vec{0}=x$ (существование нулевого элемента);
4. $\forall x=(x_1,...,x_n)\in\mathbf{R}^n\ \exists -x=(-x_1,...,-x_n)\in\mathbf{R}^n:\ x+(-x)=\vec{0}$ (существование противоположного элемента).

Произведением элемента $x=(x_1,...,x_n)$ на число α называется элемент $\alpha\cdot x=(\alpha\cdot x_1,...,\alpha\cdot x_n)$. Действие умножения на число обладает следующими свойствами:
1. $\alpha\cdot(\beta\cdot x)=(\alpha\cdot\beta)\cdot x$;
2. $\exists 1\in\mathbf{R}:\forall x\in\mathbf{R}^n\ 1\cdot x=x$;
3. $(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$;
4. $\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$.

Если во множестве введены операции сложения и умножения на число, обладающие указанными свойствами, то такое множество называется линейным пространством. Элемент линейного пространства можно называть вектором.

В линейном пространстве можно ввести понятия линейной зависимости и независимости.

Определение. Векторы $x, y, \ldots, z$ называются линейно зависимыми, если найдутся константы $c_1, ..., c_k$ такие что $c_1^{\,2}+\ldots+c_k^{\,2}\neq 0$, для которых $c_1\cdot x+\ldots+c_k\cdot z=0$. В этом случае говорят, что существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.

Пример. Векторы $x=(1,2,3);\ y=(3,6,9);\ z=(5,7,8)$ линейно зависимы. Нетривиальная линейная комбинация, равная нулю, например, такая $3\cdot x-1\cdot y+0\cdot z=0$.

Определение. Векторы $x, y,...,z$ называются линейно независимыми, если только тривиальная линейная комбинация может быть равной нулю, то есть из того что $c_1x+\ldots+c_kz=0$, вытекает, что $c_1=\ldots=c_k=0$.

Определение. Размерностью пространства называется максимальное число линейно независимых векторов в этом пространстве.
Базис пространства–это любой набор из максимального числа линейно независимых векторов. Стандартный базис в пространстве $\mathbf{R}^n$ – это набор векторов $\vec{e}_1 = (1,0,...,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,...,0)$, ... , $\vec{e}_n = (0,0,...,1)$.
Любой элемент $x = (x_1, \dots, x_n)$ пространства $\mathbf{R}^n$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов $x = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + x_n \cdot \vec{e}_n$; числа $x_1,...,x_n$ называются координатами вектора x в данном базисе.

В пространстве $\mathbf{R}^n$ можно ввести скалярное произведение, тогда это пространство становится евклидовым. Скалярное произведение двух векторов $x = (x_1,...,x_n)$ и $y = (y_1,...,y_n)$ определяется по формуле

$$\boxed{(x, y) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}.$$

Скалярное произведение удовлетворяет следующим аксиомам:
1) $\forall x \in \mathbf{R}^n \quad (x, x) \geq 0; \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2) $\forall x \in \mathbf{R}^n \quad \forall y \in \mathbf{R}^n \quad (x, y) = (y, x);$
3) $\forall x \in \mathbf{R}^n \quad \forall y \in \mathbf{R}^n \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad (\lambda \cdot x, y) = \lambda \cdot (x, y);$
4) $\forall x \in \mathbf{R}^n \quad \forall y \in \mathbf{R}^n \quad \forall z \in \mathbf{R}^n \quad (x, y + z) = (x, y) + (x, z).$

В любом евклидовом пространстве можно ввести норму элемента через скалярное произведение $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Такая норма называется евклидовой. В пространстве $\mathbf{R}^n$ норма элемента $x = (x_1, \dots, x_n)$ вычисляется по формуле $\boxed{\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}}$.
Норма удовлетворяет следующим аксиомам:
1) $\forall x \in \mathbf{R}^n \quad \|x\| \geq 0; \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2) $\forall x \in \mathbf{R}^n \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|;$
3) $\forall x \in \mathbf{R}^n \, \forall y \in \mathbf{R}^n \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Через норму элемента можно определить метрику (расстояние между двумя элементами) по формуле $\boxed{\rho(x, y) = \|x - y\|}$.
Метрика удовлетворяет следующим аксиомам:
1) $\forall x \in \mathbf{R}^n \quad \rho(x, x) \geq 0; \quad \rho(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2) $\forall x \in \mathbf{R}^n \, \forall y \in \mathbf{R}^n \quad \rho(x, y) = \rho(y, x);$
3) $\forall x \in \mathbf{R}^n \, \forall y \in \mathbf{R}^n \, \forall z \in \mathbf{R}^n \quad \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$

Неравенство Коши-Буняковского: модуль скалярного произведения не превосходит произведения норм $|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$.

Доказательство. По свойству 1) скалярного произведения $(x-\lambda y, x-\lambda y) \ge 0$ для всякого числа $\lambda \in \mathbf{R}$. Раскроем скобки, пользуясь свойствами 2) – 4) скалярного произведения, получим $(x,x) - 2\lambda \cdot (x,y) + \lambda^2 \cdot (y,y) \ge 0$.

При $\lambda \ne 0$ это квадратное неравенство относительно переменной λ.

Так как оно справедливо для любого числа $\lambda \ne 0$, то его дискриминант должен быть неположителен $D = 4 \cdot (x,y)^2 - 4 \cdot (x,x) \cdot (y,y) \le 0$. Значит, выполняется неравенство $(x,y)^2 \le (x,x) \cdot (y,y)$. Извлекая корень из каждой части этого неравенства, получаем то, что требовалось доказать.

Открытые, замкнутые, ограниченные множества в $\mathbf{R}^n$.

Открытым шаром $B(x,r)$ с центром в точке $x \in \mathbf{R}^n$ и радиусом $r \in \mathbf{R}$ называется множество, состоящее из элементов, отстоящих от центра на расстояние меньшее радиуса, то есть $B(x,r) = \{\, y \in \mathbf{R}^n \mid \rho(x,y) < r \}$.

Аналогично определяется *замкнутый шар* $B[x,r] = \{\, y \in \mathbf{R}^n \mid \rho(x,y) \le r \}$ с центром в точке $x \in \mathbf{R}^n$ и радиусом $r \in \mathbf{R}$.

Через понятие шара вводится следующее важное определение:

$\varepsilon -$*окрестность* точки $x \in \mathbf{R}^n$ это открытый шар с центром в этой точке радиуса ε, будем ее обозначать $U_\varepsilon(x) = B(x,\varepsilon)$.

Пусть задано произвольное множество $G \subset \mathbf{R}^n$. Точка $x \in G$ называется *внутренней точкой* множества G, если найдется окрестность этой точки, целиком лежащая в множестве G. *Множество открыто*, если любая его точка является внутренней. Множество F называется *замкнутым,* если его дополнение $CF = \mathbf{R}^n \setminus F$ открыто.

Множество из $\mathbf{R}^n$ называется *ограниченным*, если оно целиком содержится в некотором замкнутом шаре.

Понятие функции многих переменных.

Пусть $D -$некоторое множество из пространства $\mathbf{R}^n$.

Определение. Функцией f, определенной на множестве D и принимающей действительные значения, будем называть правило, при котором каждому элементу x из множества D соответствует одно и только одно число $y \in \mathbf{R}$, такое что $f(x) = y$. Будем использовать обозначение $f: D \to \mathbf{R}$.

Пример 1. Найти область определения функции $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$.

Решение. Область определения задается системой неравенств:

$$\begin{cases} x + y \ge 0; \\ x - y \ge 0. \end{cases}$$

На плоскости это будет угол – замкнутое, неограниченное множество (см. рис.1).

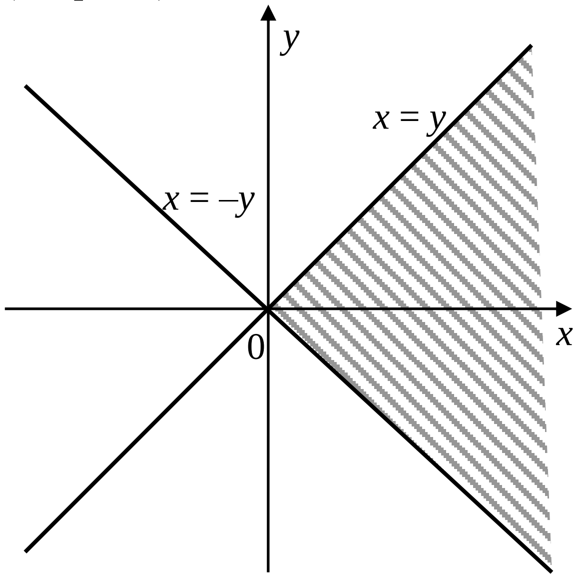

Рис. 1

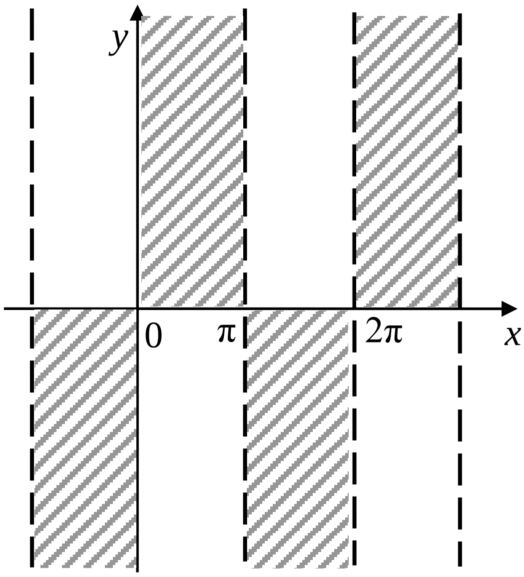

Рис. 2

Пример 2. Найти область определения функции $z = \ln(y \cdot \sin x)$.

Решение. Область определения задается совокупность системой неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y > 0; \\ \sin x > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} y < 0; \\ \sin x < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

На плоскости это множество, состоящее из полуполос, не включая их границу. Множество является открытым, неограниченным (см. рис.2).

Рассмотрим теперь функцию двух переменных $z = f(x, y)$, определенную на множестве $D \subset \mathbf{R}^2$.

График функции – это множество в трехмерном пространстве, состоящее из точек $\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbf{R}^3 | \ (x, y) \in D\}$.

Линии уровня функции – это множество точек, определяемых уравнением $z = const$, то есть $f(x, y) = c$.

Пример. Найти линии уровня и построить график функции $z = x^2 + y^2$.

Решение. Уравнение $x^2 + y^2 = c$ при $c < 0$ не имеет решений, при $c = 0$ его решение является единственная точка $(0,0)$, при $c > 0$ линией уровня является окружность с центром в точке $(0,0,c)$ и радиусом $\sqrt{c}$, лежащая в плоскости $z = c$. Графиком функции является параболоид вращения.

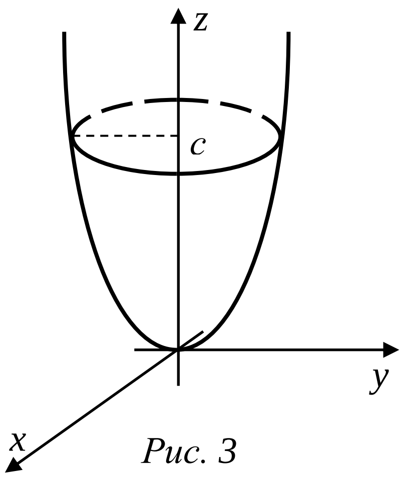

Рис. 3

Предел функции многих переменных.

Пусть задана функция $f:D\to\mathbf{R}$, $D\subset\mathbf{R}^n$.

Определение. Элемент $A\in\overline{\mathbf{R}}$ из расширенной числовой прямой называется пределом функции f при значении переменной x, стремящемся к a, если для любой $\varepsilon-$окрестности A найдется $\delta-$окрестность точки a, такая что для всякого значения переменной x из области определения функции, лежащего в $\delta-$окрестность точки a, значение $f(x)$ попадает в $\varepsilon-$окрестность A. Обозначается $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Определение предела функции так же, как и в случае функции одной переменной можно расписать по Коши и по Гейне.

Определение предела функции двух переменных по Коши:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ \forall(x,y)\in D: \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \Rightarrow \left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon.$$

Определение предела функции двух переменных по Гейне:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A \Leftrightarrow \forall(x_n,y_n)\in D: (x_n,y_n)\to(a,b) \Rightarrow f(x_n,y_n)\to f(a,b).$$

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

Решение. Перейдем к полярным координатам $\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\varphi \\ y=\rho\cdot\sin\varphi \end{cases}$.

При $x\to0,\ y\to0$ переменные $\rho\to0,\ \varphi-$любое. Тогда предел примет вид

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=\lim_{\rho\to0}\rho\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi=0.$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2}$.

Решение. Покажем, что данный предел не существует, пользуясь определением предела по Гейне.

Пусть $x_n=\dfrac{1}{n}\to0,\ y_n=\dfrac{1}{n}\to0$.

При подстановке в предел получаем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{2}$.

Пусть теперь $x'_n=\dfrac{3}{n}\to 0,\ y'_n=\dfrac{1}{n}\to 0$.

При подстановке в предел получаем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3}{n^2}}{\frac{9}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\dfrac{3}{10}$.

Если предел функции существует, то он единственный. Так как $\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{3}{10}$,

то данный предел не существует.

Непрерывность функции многих переменных.

<u>Определение</u>. Функция непрерывна в точке, если предел функции в этой точке равен значению функции в данной точке.
Для функции двух переменных: $f(x,y)$ непрерывна в точке (x_0,y_0), если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

Определение непрерывности функции в точке по Коши:
$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ \forall(x,y)\in D:\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\Rightarrow\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|<\varepsilon.$$

Определение непрерывности функции в точке по Гейне:
$$\forall(x_n,y_n)\in D:(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)\ \Rightarrow\ f(x_n,y_n)\to f(x_0,y_0).$$

Определение непрерывности функции в точке через приращение:
$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta f=0$, где $\Delta x=x-x_0,\ \Delta y=y-y_0$ $-$ приращения переменных,

$$\Delta f=f(x,y)-f(x_0,y_0)\ -\text{приращение функции.}$$

<u>Определение</u>. Функция непрерывна на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.
<u>Определение</u>. Функция $f(x,y)$ равномерно непрерывна на множестве M, если $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall(x_{1,}y_1)\in M\ \forall(x_{2,}y_2)\in M$:
$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta\Rightarrow\left|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\right|<\varepsilon$.

Равномерная непрерывность функции на множестве – это более сильное условие, чем просто непрерывность. Если для фиксированного $\varepsilon>0$

найдется $\delta > 0$, удовлетворяющее условию равномерной непрерывности, то это же $\delta > 0$ подходит для определения непрерывности в каждой точке этого множества. Обратное неверно. Однако, если множество обладает некоторыми дополнительными свойствами, то на нем непрерывность и равномерная непрерывность могут совпадать.

Определение. Компакт в пространстве $\mathbf{R}^n$ – это ограниченное и замкнутое множество.

Свойства функций, непрерывных на компакте.

1. Непрерывный образ компакта есть компакт.
2. Функция, непрерывная на компакте, ограничена на нем.
3. Если функция непрерывна на компакте, то она достигает на нем своих точных верхней и нижней граней.
4. Функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нем.

Дифференцируемость функции многих переменных.

Для того чтобы формулы не были слишком громоздкими, часто будем рассматривать функцию двух либо трех переменных. В основном, все определения и теоремы могут быть обобщены на случай n переменных.

Понятие частных производных

Пусть задана функция $z = f(x, y)$, определенная на множестве $D \subset \mathbf{R}^2$ и принимающая действительные значения. Точка (x_0, y_0) является внутренней точкой области определения.

Определение. Частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке (x_0, y_0) обозначается одним из следующих символов $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$, $z'_x(x_0, y_0)$ и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Аналогично, частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной y в точке (x_0, y_0) вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Пример. Найти по определению частные производные функции $z = x \cdot \sin y$ в точке $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\Delta x,\frac{\pi}{2}\right)-f\left(1,\frac{\pi}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)\cdot\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}}{\Delta x}=1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(1,\frac{\pi}{2}+\Delta y\right)-f\left(1,\frac{\pi}{2}\right)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Delta y\right)-\sin\frac{\pi}{2}}{\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\cos\Delta y-1}{\Delta y}=-\lim_{\Delta y\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\Delta y}{2}}{\Delta y}=-\lim_{\Delta y\to 0}\frac{2\cdot\left(\frac{\Delta y}{2}\right)^2}{\Delta y}=-\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{2}=0.$$

При вычислении частной производной по переменной x, вторую переменную y считаем фиксированной. Поэтому можно вычислять частную производную так же, как производную функции одной переменной, пользуясь правилами и таблицей производных. Так, для функции из последнего примера

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x\cdot\sin y\right)'_x=\sin y\cdot(x)'_x=\sin y;\quad \frac{\partial z}{\partial x}\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x\cdot\sin y\right)'_y=x\cdot(\sin y)'_y=x\cdot\cos y;\quad \frac{\partial z}{\partial y}\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Геометрический смысл частной производной функции двух переменных.

Пусть функция $z=f(x,y)$ задает некоторую поверхность в пространстве, $y=y_0$ – плоскость, параллельная плоскости XOY. В пересечении поверхности с плоскостью получается некоторая кривая. Тогда геометрический смысл частной производной по переменной x в точке (x_0,y_0) выражается формулой $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\mathbf{tg}\alpha$, где α – угол наклона касательной прямой в точке (x_0,y_0) к кривой, являющейся пересечением поверхности $z=f(x,y)$ и плоскости $y=y_0$.

Физический смысл частной производной.

Частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ – это скорость изменения функции $z=f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) в направлении оси Ox.

Дифференцируемость функции в точке.

<u>Определение</u>. Функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), если ее приращение представимо в виде суммы главной части, линейной относительно приращений переменных, и бесконечно малой более высокого порядка, чем норма вектора, составленного из приращений переменных:
$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + o(\|h\|)$, где A, B – числа,
$h = (\Delta x, \Delta y)$, $\|h\| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{o(\|h\|)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0$.

Главная линейная часть приращения $df(x_0, y_0) = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$ называется дифференциалом функции $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0).

<u>Теорема</u> (необходимое условие дифференцируемости).
Пусть функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), тогда
1) функция $f(x,y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0);
2) $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Доказательство.
1) Докажем непрерывность функции по определению через приращение функции
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta f = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} (f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \left(A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + o(\|h\|)\right) = 0.$$
2) Положим в определении дифференцируемости $\Delta y = 0$, получим
$f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = A\cdot\Delta x + o(|\Delta x|)$. Вычисляя частную производную по переменной x в точке (x_0, y_0) по определению, получаем
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{A\cdot\Delta x + o(|\Delta x|)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} = A.$$

Аналогично доказывается, что $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует формула для вычисления дифференциала функции двух переменных $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot\Delta y$.

Так как $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, то получаем формулу $\boxed{df = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot dy}$.

Эта величина называется полным дифференциалом функции, а каждое слагаемое является частным дифференциалом, соответствующим данной переменной.

Необходимое условие дифференцируемости не является достаточным. Если функция непрерывна и имеет частные производные по всем переменным в данной точке, то она может быть не дифференцируемой в этой точке.

Схема исследования функции на дифференцируемость.
1) Вычисляем частные производные функции в точке.
2) Составляем предполагаемый дифференциал.
3) Проверяем, выполняется ли условие дифференцируемости

$$\frac{\Delta f - df}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \to 0.$$

Пример. Функция $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 \cdot y}$ удовлетворяет необходимому условию дифференцируемости функции в точке $x_0 = y_0 = 0$, но не дифференцируема в этой точке.
Вычислим частные производные функции в точке $(0,0)$ по определению:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Составим предполагаемый дифференциал

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot \Delta y = 0.$$

Проверим условие дифференцируемости: $\dfrac{\Delta f - df}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \to 0.$

Величина, стоящая слева, записывается так

$$\frac{\Delta f - df}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2 \cdot \Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}.$$

Покажем, что предел $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2 \cdot \Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ не существует, пользуясь определением предела по Гейне.

Если $\Delta x = \dfrac{1}{n}, \Delta y = \dfrac{1}{n}$, то при подстановке в выражение под знаком предела получаем $\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{n}} : \sqrt{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{n}\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Если же $\Delta x = \dfrac{3}{n}, \Delta y = \dfrac{4}{n}$, то при подстановке в выражение под знаком предела получаем $\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{n}\right)^2 \cdot \dfrac{4}{n}} : \sqrt{\left(\dfrac{3}{n}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{n}\right)^2} = \dfrac{\sqrt[3]{36}}{5}$. Так как получились разные значения, то предела не существует. Условие дифференцируемости не выполняется.

Теорема (достаточное условие дифференцируемости).
Пусть функция $f(x,y)$ имеет обе частные производные в некоторой окрестности точки (x_0,y_0), которые непрерывны в самой точке (x_0,y_0). Тогда функция дифференцируема в точке (x_0,y_0).

Доказательство. Запишем приращение функции в виде
$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \left(f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)\right) + $$
$$+\left(f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)\right).$$
По теореме Лагранжа приращение функции по переменной x, стоящее в первой скобке, можно представить как частную производную по переменной x в некоторой промежуточной точке, умноженную на приращение переменной. Аналогично можно записать слагаемое во второй скобке. Тогда
$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0+\theta_1\cdot\Delta x, y_0+\Delta y\right)\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0+\theta_2\cdot\Delta y\right)\cdot\Delta y.$$
Проверим условие дифференцируемости:
$$\frac{\Delta f - df}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} =$$
$$= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0+\theta_1\cdot\Delta x, y_0+\Delta y\right)\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0+\theta_2\cdot\Delta y\right)\cdot\Delta y - \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\cdot\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$
Оценим эту величину по модулю:
$$\frac{\left|\Delta f - df\right|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0+\theta_1\cdot\Delta x, y_0+\Delta y\right) - \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\right|\cdot\frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} +$$
$$+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0+\theta_2\cdot\Delta y\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\right|\cdot\frac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.$$
Так как $\frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \le 1$, $\frac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \le 1$, а, в силу непрерывности частных производных в точке (x_0,y_0), разности частных производных под знаком модуля стремятся к нулю, то условие дифференцируемости $\frac{\Delta f - df}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \to 0$ выполнено. Теорема доказана.

Приближенные вычисления с помощью дифференциала.

Пусть функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0), то есть выполняется равенство

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot \Delta y + o(\|h\|).$$

Так как последнее слагаемое в правой части является бесконечно малой более высокого порядка, чем норма вектора, составленного из приращений переменных, то при малых приращениях переменной последнее слагаемое в этой формуле можно отбросить, заменив точное равенство приближенным. Таким образом, получаем формулу для приближенных вычислений

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot \Delta y.$$

Эта формула будет тем точнее, чем меньше приращения переменных.

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt{(2{,}98)^2 + (4{,}01)^2}$.

Решение. Введем функцию $f(x) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда нужно вычислить значение функции $f(2{,}98;\ 4{,}01)$. Выберем близкую точку $x_0 = 3;\ y_0 = 4$, в которой значения функции, а также ее частных производных, вычисляются хорошо. Формула для приближенных вычислений примет вид

$$f(2{,}98; 4{,}01) \approx f(3,4) + \frac{\partial f}{\partial x}(3,4)\cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(3,4)\cdot \Delta y.$$

Приращения переменных $\Delta x = 2{,}98 - 3 = -0{,}02;\ \Delta y = 4{,}01 - 4 = 0{,}01.$ Значение функции $f(3,4) = 5$. Вычислим частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial x}(3,4) = \frac{3}{5} = 0{,}6;\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Подставляя все в формулу, получим

$f(2{,}98; 4{,}01) \approx 5 + 0{,}6\cdot(-0{,}02) + 0{,}8\cdot 0{,}01$ или $\sqrt{(2{,}98)^2 + (4{,}01)^2} \approx 4{,}996$.

Производная сложной функции.

Теорема. Пусть внешняя функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0). Внутренние функции $x = x(t),\ y = y(t)$ дифференцируемы в точке t_0, причем $x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0)$. Тогда сложная функция $f(t) = f(x(t),\ y(t))$ также дифференцируема в точке t_0 и ее производная вычисляется по формуле

$\frac{df}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0)\cdot\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0)\cdot\frac{dy}{dt}(t_0)$. Или более кратко

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}}.$$

Доказательство. По определению производной функции $f(t)$ имеем

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Преобразуем числитель дроби. Учитывая, что $x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0)$ и $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0), \quad \Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$, получаем

$$f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = f(x(t_0 + \Delta t),\ y(t_0 + \Delta t)) - f(x(t_0),\ y(t_0)) =$$

$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Так как внешняя функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то

$$f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y + o(\|h\|).$$

Подставляя это в производную функции $f(t)$, получаем

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y + o(\|h\|)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\|h\|)}{\Delta t}.$$

Покажем, что последнее слагаемое равно нулю

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\|h\|)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} \cdot \frac{\|h\|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \lim_{\|h\| \to 0} \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} \cdot \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = 0,$$

так как $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \dfrac{o(\|h\|)}{\|h\|} = 0$, а $x_t',\ y_t'$ – конечны и, в силу непрерывности функций $x = x(t),\ y = y(t)$ в точке t_0, величина $\|h\| \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Итак,

$\dfrac{df}{dt}(t_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \dfrac{dx}{dt}(t_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \dfrac{dy}{dt}(t_0)$ и теорема доказана.

В частном случае, когда внешняя функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), внутренняя функция $y = y(x)$ дифференцируема в точке x_0, тогда сложная функция $f(x) = f(x,\ y(x))$ также дифференцируема в точке x_0 и ее производная вычисляется так $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx}$. Эта формула называется формула полной производной.

Аналогичную теорему можно доказать для случая частных производных сложной функции.

<u>Теорема.</u> Пусть внешняя функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0). Внутренние функции $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$ дифференцируемы в точке

(u_0,v_0), причем $x_0 = x(u_0,v_0),\ y_0 = y(u_0,v_0)$. Тогда сложная функция $f(u,v) = f(x(u,v),\ y(u,v))$ также дифференцируема в точке (u_0,v_0) и ее частные производные вычисляются по формулам

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}; \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}}.$$

Пример 1. Для функции $z = \arcsin\frac{x}{y},\ y = \sqrt{x^2+1}$ найти частную и полную производные по переменной x.

Решение. 1) Вычислим частную производную по переменной x, считая переменную y постоянной

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\arcsin\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}.$$

Если подставить $y = \sqrt{x^2+1}$, то получим $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$.

2) Применим формулу полной производной $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$.

Частная производная по переменной y равна

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\arcsin\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}.$$

При $y = \sqrt{x^2+1}$ частная производная $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Производная функции y по переменной x равна $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Подставляя эти выражения в формулу для полной производной, получаем

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{x^2+1}.$$

Пример 2. Доказать, что функция $u = \sin x + F(\sin y - \sin x)$ удовлетворяет равенству $\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos x + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos y = \cos x\cdot\cos y$.

Решение. Функция $F(\sin y - \sin x)$ является сложной. Внешняя функция $F(t)$, а внутренняя $t = \sin y - \sin x$. Вычислим частные производные функции u, считая производную от второго слагаемого по правилу сложной функции:

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \cos x + \dfrac{dF}{dt} \cdot (\sin y - \sin x)'_x = \cos x - \dfrac{dF}{dt} \cdot \cos x$; $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{dF}{dt} \cdot \cos y$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos x + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos y = \left(\frac{dF}{dt} \cdot \cos y \right) \cdot \cos x + \left(\cos x - \frac{dF}{dt} \cdot \cos x \right) \cdot \cos y =$$

$$= \frac{dF}{dt} \cdot \cos y \cdot \cos x + \cos x \cdot \cos y - \frac{dF}{dt} \cdot \cos x \cdot \cos y = \cos x \cdot \cos y,$$

что и требовалось доказать.

Инвариантность формы полного дифференциала.

Полный дифференциал функции $f(x, y)$ вычисляется по формуле $df = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$, если $x, y -$независимые переменные.

Инвариантность формы полного дифференциала заключается в том, что форма его одинакова, независимо от того, являются ли переменные независимыми или они сами функции от новых переменных. Покажем это. Пусть $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$. Тогда, подставив эти функции в $f(x, y)$, получим сложную функцию $f(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$. Ее дифференциал равен $df = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot du + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot dv$. Частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial u}, \dfrac{\partial f}{\partial v}$ вычисляются по правилу сложной функции $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u}$; $\quad \dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial v}$.

Подставим эти выражения в формулу для дифференциала

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) \cdot du + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) \cdot dv.$$

Раскроем скобки в правой части и перегруппируем слагаемые

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy,$$

что и требовалось доказать.

Правила вычисления дифференциала.

Рассмотрим функции нескольких переменных $u(x_1, x_2, ..., x_n),\ v(x_1, x_2, ..., x_n)$. Справедливы следующие правила для вычисления дифференциалов:

1) $d(c \cdot u) = c \cdot du$, где $c = const$;

2) $d(u + v) = du + dv$;

3) $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$;

4) $d\left(\dfrac{u}{v} \right) = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

Доказательство. Докажем, например, формулу 4). В силу свойства инвариантности дифференциала справедливы равенства

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)'_u\cdot du+\left(\frac{u}{v}\right)'_v\cdot dv=\frac{1}{v}\cdot du-\frac{u}{v^2}\cdot dv=\frac{v\cdot du-u\cdot dv}{v^2}.$$

Остальные формулы доказываются аналогично.

Производная неявной функции.

Пусть функция $y(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y)=0$. Предположим, что функции $y(x)$ и $F(x,y)$ дифференцируемы. Тогда дифференцируема сложная функция $F(x)=F(x,y(x))$ и ее производная вычисляется по формуле полной производной $F'(x)=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$.

Так как $F(x)\equiv 0$, то $F'(x)\equiv 0$ и $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$. Отсюда получаем формулу для вычисления производной неявной функции $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ или $\boxed{y'(x)=-\frac{F_x'}{F_y'}}$.

Пример. Найти производную функции $y(x)$, заданной уравнением $y^3+2y=2x$.

Решение. Функция $y(x)$ задается неявно уравнением $F(x,y)=0$, где $F(x,y)=y^3+2y-2x$. Частные производные этой функции равны $F_x'=-2,\ F_y'=3y^2+2$. Подставляя в формулу для вычисления производной функции, заданной неявно, получаем $y'(x)=\frac{2}{3y^2+2}$.

Пусть теперь функция $z(x,y)$ задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$. Предположим, что функции $z(x,y)$ и $F(x,y,z)$ дифференцируемы. Тогда дифференцируема сложная функция $F(x,y,z(x,y))$. Вычисляя ее частные производные по формуле сложной функции и учитывая, что функция тождественно равна нулю, получаем $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

Отсюда следуют формулы для вычисления частных производных неявной функции $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$.

Пример. Найти частные производные функции $z(x,y)$, заданной неявно уравнением $e^z + z - x^2 y + 1 = 0$.

Решение. Функция $F(x,y,z) = e^z + z - x^2 y + 1$ задает неявно функцию $z(x,y)$.

Вычислим ее частные производные: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -2xy,\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -x^2,\quad \dfrac{\partial F}{\partial z} = e^z + 1.$

Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \dfrac{2xy}{e^z + 1};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \dfrac{x^2}{e^z + 1}.$

Касательная плоскость и нормальная прямая к поверхности.

Первый случай: поверхность задана явным уравнением.
Пусть функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0).
Определение. Плоскость $z = Ax + By + C$ называется касательной к поверхности $z = f(x,y)$ в точке (x_0, y_0), если $f(x,y)$ представима в виде

$$f(x,y) = Ax + By + C + o(\|h\|), \tag{1}$$

где $h = (\Delta x, \Delta y) = (x - x_0, y - y_0)$. Найдем уравнение касательной плоскости.
Подставим $x = x_0,\ y = y_0$ в (1), получим $f(x_0, y_0) = Ax_0 + By_0 + C$. Отсюда находим $C = f(x_0, y_0) - Ax_0 - By_0$. Подставляя в (1), получаем
$f(x,y) = Ax + By + f(x_0, y_0) - Ax_0 - By_0 + o(\|h\|)$ или
$f(x,y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\|h\|)$.
Так как функция дифференцируема в точке (x_0, y_0), то
$A = f'_x(x_0, y_0),\ \ B = f'_y(x_0, y_0)$. Подставляя найденные значения констант A, B, C в уравнение касательной плоскости, имеем

$\boxed{z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$ — уравнение касательной плоскости к графику функции $z = f(x,y)$ в точке (x_0, y_0).

Определение. Нормальная прямая – это прямая, проходящая через точку $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ перпендикулярно к касательной плоскости.
Найдем уравнение нормальной прямой.
Вектор нормали $\{f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1\}$ к касательной плоскости также является направляющим вектором для нормальной прямой. Используя уравнение прямой, имеющей заданный направляющий вектор и проходящей через заданную точку, имеем

$\boxed{\dfrac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \dfrac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \dfrac{z - z_0}{-1}}$ — уравнение нормальной прямой к графику функции $z = f(x,y)$ в точке (x_0, y_0).

Второй случай: поверхность задана неявно.
Пусть функция $z = f(x,y)$ задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$, причем функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), а функция $F(x,y,z)$ дифференцируема в точке $M(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$. Тогда частные производные функции $z = f(x,y)$ вычисляются по формулам
$f'_x(x_0, y_0) = -\dfrac{F'_x(M)}{F'_z(M)}, \quad f'_y(x_0, y_0) = -\dfrac{F'_y(M)}{F'_z(M)}$. Подставив эти выражения в уравнения касательной плоскости и нормальной прямой, выведенные в первом случае, получаем

$\boxed{F'_x(M)(x-x_0) + F'_y(M)(y-y_0) + F'_z(M)(z-z_0) = 0}$ —
уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ к графику функции $z = f(x,y)$, заданной неявно уравнением $F(x,y,z)=0$.

$\boxed{\dfrac{x-x_0}{F'_x(M)} = \dfrac{y-y_0}{F'_y(M)} = \dfrac{z-z_0}{F'_z(M)}}$ — уравнение нормальной прямой в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ к графику функции $z = f(x,y)$, заданной неявно уравнением $F(x,y,z)=0$.

Пример. К эллипсоиду $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x - y + 2z = 0$.
Решение. Вектор $\vec{N}_1 = \{1, -1, 2\}$ является нормальным вектором к данной плоскости. Вектор $\vec{N}_2 = \left\{F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M)\right\}$ является вектором нормали к касательной плоскости в точке $M(x_0, y_0, z_0)$. Вычисляя частные производные функции $F = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$, находим $\vec{N}_2 = \{2x_0, 4y_0, 2z_0\}$.
Тогда уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид
$2x_0 \cdot (x-x_0) + 4y_0 \cdot (y-y_0) + 2z_0 \cdot (z-z_0) = 0$ или
$x_0 \cdot x + 2y_0 \cdot y + z_0 \cdot z - \left({x_0}^2 + 2{y_0}^2 + {z_0}^2\right) = 0$.
Из условия, что точка (x_0, y_0, z_0) лежит на эллипсоиде, имеем
${x_0}^2 + 2{y_0}^2 + {z_0}^2 = 1$.
Так как плоскости параллельны, то векторы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ тоже параллельны, поэтому их координаты пропорциональны: $\dfrac{2x_0}{1} = \dfrac{4y_0}{-1} = \dfrac{2z_0}{2} = k$. Отсюда находим $x_0 = \dfrac{k}{2},\ y_0 = -\dfrac{k}{4},\ z_0 = k$. Уравнение касательной плоскости примет вид $\dfrac{k}{2} \cdot x - \dfrac{k}{2} \cdot y + k \cdot z - 1 = 0$ или $x - y + 2z = \dfrac{2}{k}$.

Так как точка $x_0 = \frac{k}{2},\ y_0 = -\frac{k}{4},\ z_0 = k$ лежит на эллипсоиде, то

$\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{8} + k^2 = 1$, отсюда $k = \pm\sqrt{\frac{8}{11}}$. Тогда

$x - y + 2z = \pm\sqrt{\frac{11}{2}}$ $-$искомые касательные плоскости.

Геометрический смысл дифференциала.

Пусть функция $z = z(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0). Ее дифференциал находится по формуле

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)$.

С другой стороны, уравнение касательной плоскости в точке $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$ имеет вид $z = z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)$. Отсюда видно, что $dz = z - z_0$. Итак, геометрический смысл дифференциала функции двух переменных состоит в том, что дифференциал функции в точке равен приращению аппликаты касательной плоскости, проведенной к графику функции в данной точке.

Градиент функции.

Градиент функции – это вектор, составленный из частных производных. Так, если функция $f = f(x,y,z)$, то ее градиент $gradf = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\}$.

Геометрический смысл градиента.

1) Рассмотрим кривую γ, заданную неявно уравнением $F(x,y) = 0$. Зададим кривую параметрически $\gamma:\ \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$ Подставим параметрические уравнения в функцию $F(x,y)$, получим функцию $\Phi(t) = F(x(t), y(t)) \equiv 0$. Продифференцируем последнее равенство по правилу сложной функции $\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = 0$. Левая часть этого равенства представляет собой скалярное произведение градиента $gradF = \left\{\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right\}$ и вектора $\vec{a} = \left\{\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right\}$, являющегося касательным вектором к кривой γ. Из равенства $(gradF, \vec{a}) = 0$ видно, что $gradF$ перпендикулярен касательному вектору к кривой, значит $gradF$ является вектором нормали к кривой γ.

2) Рассмотрим теперь поверхность, заданную неявным уравнением $F(x,y,z)=0$. Уравнение касательной плоскости к этой поверхности в точке $M(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид $\frac{\partial F}{\partial x}(M)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(M)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(M)(z-z_0)=0$.

Отсюда видно, что $gradF$ является вектором нормали к данной поверхности в точке $M(x_0,y_0,z_0)$.

Производная по направлению.

Производная по направлению – это обобщение понятия частной производной. Частная производная функции – это производная в направлении координатных осей.

Зафиксируем точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Зададим направление вектором, имеющим начало в этой точке $\vec{l}=\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$, где $M(x,y,z)$.

Определение. Производной функции $f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ по направлению $\vec{l}=\overrightarrow{M_0M}$ называется величина $\frac{\partial f}{\partial l}(M_0)=\lim\limits_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{\|M_0M\|}$.

Теорема. Пусть функция $f(x,y,z)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0,z_0). Тогда у нее существует производная в этой точке по любому направлению и она вычисляется по формуле

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial l}(M_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cdot\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\cdot\cos\gamma}\text{, где}$$

$$\cos\alpha=\frac{x-x_0}{\|\vec{l}\|},\quad \cos\beta=\frac{y-y_0}{\|\vec{l}\|},\quad \cos\gamma=\frac{z-z_0}{\|\vec{l}\|}.$$

Доказательство. Рассмотрим вектор единичной длины $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ в данном направлении, где $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – углы, которые составляет вектор $\overrightarrow{M_0M}$ с осями координат. Направляющие косинусы вычисляются по формулам

$$\cos\alpha=\frac{x-x_0}{\|\vec{l}\|},\quad \cos\beta=\frac{y-y_0}{\|\vec{l}\|},\quad \cos\gamma=\frac{z-z_0}{\|\vec{l}\|}.$$

Запишем параметрические уравнения луча M_0M:

$$\begin{cases} x=x_0+t\cdot\cos\alpha, \\ y=y_0+t\cdot\cos\beta, \qquad \text{где } t\ge 0. \\ z=z_0+t\cdot\cos\gamma, \end{cases}$$

Длина вектора $\overrightarrow{M_0M}$ равна

$$\|M_0M\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = \sqrt{(t\cdot\cos\alpha)^2 + (t\cdot\cos\beta)^2 + (t\cdot\cos\gamma)^2} = t$$

По определению производная по направлению равна

$\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = \lim\limits_{M\to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\|M_0M\|}$. Подставляя сюда координаты точек M и M_0,

а также длину вектора $\overrightarrow{M_0M}$, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = \lim_{t\to+0} \frac{f(x_0 + t\cdot\cos\alpha,\, y_0 + t\cdot\cos\beta,\, z_0 + t\cdot\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}.$$

Эта величина является производной, найденной по определению для сложной функции $f(x_0 + t\cdot\cos\alpha,\, y_0 + t\cdot\cos\beta,\, z_0 + t\cdot\cos\gamma)$ в точке $t_0 = 0$.

Здесь внешняя функция $f(x, y, z)$, а внутренние функции

$x = x_0 + t\cdot\cos\alpha,\; y = y_0 + t\cdot\cos\beta,\; z = z_0 + t\cdot\cos\gamma$.

Применяя теорему о производной сложной функции, получаем формулу

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cdot\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cdot\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\cdot\cos\gamma,$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Вычислить производную функции $u = x^2\cdot y^2\cdot z^2$ в точке $A(1,-1,3)$ по направлению от этой точки до точки $B(0,1,1)$.

Решение. Найдем координаты вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB} = \{-1,2,-2\}$, его длина равна $|AB| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$, направляющие косинусы этого вектора находятся делением соответствующей координаты на длину вектора:

$\cos\alpha = -\frac{1}{3},\; \cos\beta = \frac{2}{3},\; \cos\gamma = -\frac{2}{3}$.

Вычислим частные производные данной функции

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\cdot y^2\cdot z^2,\;\; \frac{\partial u}{\partial x}(A) = 18;\;\; \frac{\partial u}{\partial y} = 2y\cdot x^2\cdot z^2,\;\; \frac{\partial u}{\partial y}(A) = -18;$

$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z\cdot y^2\cdot x^2,\;\; \frac{\partial u}{\partial z}(A) = 6.$ Подставляя найденные значения в формулу

$\frac{\partial u}{\partial l}(A) = \frac{\partial u}{\partial x}(A)\cdot\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(A)\cdot\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(A)\cdot\cos\gamma$, находим

$$\frac{\partial u}{\partial l}(A) = 18\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + (-18)\cdot\frac{2}{3} + 6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -22.$$

Пример 2. Найти производную функции $z = arctg\,\dfrac{y}{x}$ в точке $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ в направлении окружности $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Решение. Производная в направлении кривой – это производная в направлении касательной к этой кривой. Найдем угол наклона касательной к окружности в точке M. Известно, что $tg\alpha = y'(x)$. Окружность задана неявно уравнением $F(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$, по формуле производной неявной функции $y'(x) = -\dfrac{F_x'}{F_y'} = -\dfrac{2x - 2}{2y} = \dfrac{1 - x}{y}$; $y'(x)\big|_M = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Отсюда $tg\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Направляющие косинусы $\cos\alpha = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\beta = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$.

Вычислим частные производные данной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(M) = \frac{1}{4} \cdot (-2\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(M) = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}.$$

Подставляя найденные значения в формулу производной по направлению $\dfrac{\partial z}{\partial l}(M) = \dfrac{\partial z}{\partial x}(M) \cdot \cos\alpha + \dfrac{\partial z}{\partial y}(M) \cdot \cos\beta$, находим

$$\frac{\partial z}{\partial l}(M) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Теорема. Пусть функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0, z_0). Тогда производная по направлению в данной точке принимает свое наибольшее значение в направлении градиента и равна длине градиента.

Доказательство.

Производная по произвольному направлению вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \cdot \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \cdot \cos\gamma.$$

Рассмотрим направление градиента $\vec{l} = grad f = \left\{\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right\}$.

Направляющие косинусы в этом направлении равны

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\|gradf\|}, \ \cos\beta = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\|gradf\|}, \ \cos\gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\|gradf\|} .$$

Подставляя их в формулу, находим

$$\frac{\partial f}{\partial (gradf)} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\|gradf\|} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\|gradf\|} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\|gradf\|} =$$

$$= \frac{1}{\|gradf\|}\cdot\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right) = \frac{(\|gradf\|)^2}{\|gradf\|} = \|gradf\|.$$

Итак, показали, что производная в направлении градиента равна длине градиента.

Пусть теперь $\vec{a} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} -$ произвольное направление.

Производная по этому направлению равна скалярному произведению векторов $\vec{a}$ и $gradf$:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\cos\gamma = (gradf, \vec{a}).$$

Применим неравенство Коши-Буняковского о том, что модуль скалярного произведения не превосходит произведения норм векторов, тогда $\left|\frac{\partial f}{\partial l}\right| = |(gradf, \vec{a})| \le \|gradf\|\cdot\|\vec{a}\|$. Так как $\|\vec{a}\| = 1$, то для произвольного направления выполняется неравенство $\left|\frac{\partial f}{\partial l}\right| \le \|gradf\|$ и теорема доказана.

Геометрический смысл производной по направлению функции f(x,y). Производная по направлению функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) равна тангенсу угла наклона касательной прямой к поверхности $z=f(x,y)$, проведенной точке (x_0, y_0, z_0) в этом направлении.

Пример. Найти наибольшую крутизну подъема поверхности $z = x^y$ в точке $M(2,2,4)$.

Решение. Крутизна подъема поверхности в данной точке и в заданном направлении – это угол между касательной прямой к поверхности, проведенной в данной точке в этом направлении, и горизонтальной плоскостью. С учетом геометрического смысла производной по направлению, нам нужно найти наибольшее из значений, которое может принимать производная по направлению в данной точке. По доказанной выше теореме, наибольшее значение производной по направлению достигается в направлении градиента, и в этом направлении она равна длине градиента. Итак, если $\alpha -$искомая крутизна, то $\mathrm{tg}\ \alpha = \|gradf\|$. Найдем

частные производные в данной точке:
$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial x}(M) = 4$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^{y} \cdot \ln x$, $\frac{\partial z}{\partial y}(M) = 4 \cdot \ln 2$.
Тогда $tg\alpha = \sqrt{4^2 + (4 \cdot \ln 2)^2} \approx 4{,}87$. Отсюда $\alpha \approx 78^{\circ}$.

Производные высших порядков.

Пусть функция $z = z(x, y)$ имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$. Тогда можно определить в точке (x_0, y_0) производные второго порядка:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0 + \Delta x, y_0) - \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)}{\Delta x}$ – вторая частная производная функции $z = z(x, y)$ по переменной x в точке (x_0, y_0);

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)}{\Delta y}$ – вторая частная производная функции $z = z(x, y)$ по переменной y в точке (x_0, y_0);

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)}{\Delta y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial z}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0) - \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Производные $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ называются смешанными производными функции $z = z(x, y)$ в точке (x_0, y_0).
Аналогично определяются производные третьего порядка. Например,
$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$; $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$; $\frac{\partial^3 z}{\partial^2 y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)$; и т.д.

Пример 1. Вычислить все производные второго порядка для функции
$z = \ln\left(tg\,\frac{x + y^2}{2}\right)$.
Решение. Найдем сначала производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ctg\,\frac{x+y^2}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x+y^2}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sin\frac{x+y^2}{2}\cdot\cos\frac{x+y^2}{2}}=\frac{1}{\sin\left(x+y^2\right)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=ctg\,\frac{x+y^2}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x+y^2}{2}}\cdot y=\frac{y}{\sin\frac{x+y^2}{2}\cdot\cos\frac{x+y^2}{2}}=\frac{2y}{\sin\left(x+y^2\right)}.$$

Затем находим частные производные второго порядка, как производные от первых производных:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_x=\left(\frac{1}{\sin\left(x+y^2\right)}\right)'_x=-\frac{\cos\left(x+y^2\right)}{\left(\sin\left(x+y^2\right)\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_y=\left(\frac{2y}{\sin\left(x+y^2\right)}\right)'_y=\frac{2\cdot\sin\left(x+y^2\right)-4y^2\cos\left(x+y^2\right)}{\left(\sin\left(x+y^2\right)\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y=\left(\frac{1}{\sin\left(x+y^2\right)}\right)'_y=-\frac{2y\cdot\cos\left(x+y^2\right)}{\left(\sin\left(x+y^2\right)\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_x=\left(\frac{2y}{\sin\left(x+y^2\right)}\right)'_x=\frac{-2y\cos\left(x+y^2\right)}{\left(\sin\left(x+y^2\right)\right)^2}.$$

Видно, что смешанные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ равны между собой.

Однако это выполняется не всегда, что показывает следующий пример.

Пример 2. Показать, что для функции $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{ïðè}\ \ (x,y)\neq 0;\\ 0 & \text{ïðè}\ \ (x,y)=0.\end{cases}$

смешанные производные в точке $(0,0)$ не равны между собой.

Решение. Найдем сначала производные первого порядка.

Если $(x,y)\neq(0,0)$, то частные производные можно считать по правилам вычисления производной и по таблице:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}\right)=\frac{\left(3x^2y-y^3\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot\left(x^3y-xy^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}\right)=\frac{\left(x^3-3y^2x\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot\left(x^3y-xy^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

В точке $(0,0)$ нужно искать частные производные по определению:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0;\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0.$$

Найдем также по определению смешанные производные в точке $(0,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = -1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1.$$

Итак, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, что и требовалось показать.

Следующая теорема формулирует достаточные условия равенства смешанных производных.

Теорема 1 (о равенстве смешанных производных).
Пусть в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) существуют обе смешанные производные второго порядка, которые непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда смешанные производные равны между собой
.

Доказательство. Введем функцию

$$W(h,k) = \frac{1}{h \cdot k} \cdot \left(f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0) \right).$$

Пусть $\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$, тогда $W(h,k) = \frac{1}{h \cdot k} \cdot \left(\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) \right)$.

Применим к функции $\varphi(x)$ на отрезке $[x_0, x_0 + h]$ теорему Лагранжа:

$$W(h,k) = \frac{1}{h \cdot k} \cdot \varphi'_x(x_0 + \theta_1 h) \cdot h = \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h,\ y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h,\ y_0) \right).$$

Теперь применим теорему Лагранжа к функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y)$, зависящей от переменной y, на отрезке $[y_0, y_0 + k]$, тогда

$$W(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h,\ y_0 + \theta_2 k) \text{, где } 0 < \theta_1 < 1 \text{ и } 0 < \theta_2 < 1. \qquad (1)$$

С другой стороны, если ввести функцию $\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$, то

$$W(h,k) = \frac{1}{h \cdot k} \cdot \left(\psi(y_0 + k) - \psi(y_0) \right) = \frac{1}{h} \cdot \psi'_y(y_0 + \theta'_2 k) =$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h,\ y_0 + \theta'_2 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0 + \theta'_2 k) \right).$$ Затем

$$W(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta'_1 h,\ y_0 + \theta'_2 k) \text{, где } 0 < \theta'_1 < 1 \text{ и } 0 < \theta'_2 < 1. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) имеем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0+\theta_1 h,\ y_0+\theta_2 k)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+\theta_1' h,\ y_0+\theta_2' k)$$. Отсюда

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0+\theta_1 h,\ y_0+\theta_2 k)=\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+\theta_1' h,\ y_0+\theta_2' k).$$

Так как смешанные производные непрерывны в точке (x_0, y_0), то получаем $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,\ y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,\ y_0)$, что и требовалось доказать.

Теорема 2 (обобщение теоремы 1). Если все смешанные частные производные порядка m функции $u=f(x_1,...,x_n)$ существуют в некоторой окрестности точки M_0 и непрерывны в точке M_0, то они не зависят в точке M_0 от порядка дифференцирования.

Следующая теорема дает другие достаточные условия равенства смешанных производных.

Теорема 3. Если все частные производные порядка $(m-1)$ функции $u=f(x_1,...,x_n)$ существуют в некоторой окрестности точки M_0 и дифференцируемы в точке M_0, то смешанные производные порядка m не зависят в точке M_0 от порядка дифференцирования.

Дифференциалы высших порядков.

Пусть функция $f(x,y)$ дифференцируема, тогда ее дифференциал вычисляется по формуле $df=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot h_1+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot h_2$,

где $h_1, h_2 -$ приращения переменных.

Определение. Вторым дифференциалом функции называется дифференциал от ее первого дифференциала $d^2 f=d(df)$.

Выведем формулу для вычисления второго дифференциала функции двух переменных, пользуясь правилами вычисления дифференциала и считая приращения переменных постоянными. Считаем, что все производные второго порядка существуют и непрерывны.

$$d^2 f=d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot h_1+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot h_2\right)=h_1\cdot d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+h_2\cdot d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=$$

$$=h_1\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot h_1+\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cdot h_2\right)+h_2\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot h_1+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot h_2\right).$$

Раскрывая скобки и учитывая, что при наложенных условиях на функцию смешанные производные равны, получаем формулу $d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot h_1^{\,2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot h_2^{\,2}$. Так как $h_1 = dx,\ h_2 = dy$, то формула для вычисления дифференциала второго порядка функции имеет вид

$$\boxed{d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot dy^2}\ .$$

Аналогично можно вывести формулу для вычисления дифференциала третьего порядка

$$\boxed{d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \cdot dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} \cdot dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \cdot dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \cdot dy^3}\ .$$

Символ $d = \frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy$ назовем оператором дифференциала. При действии этого оператора на функцию $f(x, y)$ получается первый дифференциал функции $df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$.

Второй дифференциал функции можно считать действием оператора $d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy \right)^2$ на функцию $f(x, y)$.

Для произвольной степени n дифференциал порядка n находится по формуле $d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy \right)^n f$.

Пример. Для функции $z = \sin(2x + y)$ найти дифференциал третьего порядка в точке $(0, \pi)$.

Решение. Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cos(2x + y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \cos(2x + y).$$

Вычислим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4\sin(2x + y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin(2x + y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2\sin(2x + y).$$

Вычислим частные производные третьего порядка

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = -8\cos(2x + y), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -\cos(2x + y),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = -4\cos(2x + y), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = -2\cos(2x + y).$$

Найдем значения третьих производных в точке $A(0,\pi)$:

$$\left.\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right|_A = 8, \quad \left.\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right|_A = 1, \quad \left.\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}\right|_A = 4, \quad \left.\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}\right|_A = 2.$$

Подставляя найденные значения в формулу для третьего дифференциала, находим $d^3 z\,(0,\pi) = 8dx^3 + 12dx^2dy + 6dxdy^2 + dy^3$ или

$d^3 z\,(0,\pi) = (2dx + dy)^3$.

Свойство инвариантности для дифференциалов высших порядков не выполняется.

Формула Тейлора.

Теорема. Пусть функция $z = f(x,y)$ в некоторой $\delta -$окрестности точки (x_0, y_0) определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка $(n+1)$ включительно. Тогда для всех Δx и Δy, удовлетворяющих условию $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} < \delta$, существует такое $\theta \in (0.1)$, что справедлива формула

$$\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0) = df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}\cdot d^2 f(x_0,y_0) + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot d^n f(x_0,y_0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\cdot d^{n+1} f\big((x_0,y_0) + \theta(\Delta x, \Delta y)\big), \text{ где } 0 < \theta < 1, \quad \Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0.$$

Более кратко формулу Тейлора в точке $M_0(x_0, y_0)$ можно записать

$f(x,y) = T_n(x,y) + R_n(\Delta x, \Delta y)$,

где первое слагаемое является многочленом Тейлора:

$$T_n(x,y) = f(M_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cdot(y - y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^2 f\Bigg|_{M_0} + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^n f\Bigg|_{M_0},$$

а второе слагаемое $R_n(\Delta x, \Delta y) = \dfrac{1}{(n+1)!}\cdot d^{n+1} f\big((x_0,y_0) + \theta(\Delta x, \Delta y)\big)$ – остаточный член в форме Лагранжа.

Доказательство. Зафиксируем Δx и Δy так, что $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} < \delta$, тогда все точки вида $(x_0 + t\cdot\Delta x,\ y_0 + t\cdot\Delta y)$, где $0 \le t \le 1$, лежат на отрезке, соединяющем точки (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$, и поэтому все они принадлежат $\delta -$окрестности точки (x_0, y_0). Вследствие этого определена сложная функция $F(t) = f(x_0 + t\cdot\Delta x,\ y_0 + t\cdot\Delta y)$. Очевидно, что

$$\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0) = F(1) - F(0). \qquad (1)$$

Так как внешняя функция $f(x,y)$ в $\delta-$окрестности имеет непрерывные частные производные до порядка $(n+1)$ включительно, то функция $F(t)$ на отрезке $[0,1]$ также имеет $(n+1)$ непрерывную производную. Поэтому ее можно разложить в точке $t_0 = 0$ по формуле Тейлора:

$$F(t) - F(0) = F'(0)\cdot t + \frac{1}{2!}\cdot F''(0)\cdot t^2 + ... + \frac{1}{n!}\cdot F^{(n)}(0)\cdot t^n + \frac{1}{(n+1)!}\cdot F^{(n+1)}(\theta\cdot t)\cdot t^{n+1}.$$

Полагая в этой формуле $t = 1$, получаем

$$F(1) - F(0) = F'(0) + \frac{1}{2!}\cdot F''(0) + ... + \frac{1}{n!}\cdot F^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}\cdot F^{(n+1)}(\theta). \qquad (2)$$

Вычислим производные функции $F(t)$ по правилу производной сложной функции:

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + t\cdot\Delta x,\ y_0 + t\cdot\Delta y)\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + t\cdot\Delta x,\ y_0 + t\cdot\Delta y)\cdot\Delta y;$$

$$F''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\cdot\Delta x\cdot\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\Delta y^2 \ .$$

По индукции легко установить, что

$$F^{(k)}(t) = \left(\Delta x\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f\Bigg|_{\substack{x = x_0 + t\Delta x\\ y = y_0 + t\Delta y}} = d^k f(x_0 + t\cdot\Delta x, y_0 + t\cdot\Delta y).$$

Подставляя $t = 0$ в эту формулу, находим $F^{(k)}(0) = d^k f(x_0, y_0)$, $k = 1,...,n$.

При $k = n+1$ и $t = \theta$ имеем $F^{(n+1)}(\theta) = d^{n+1} f(x_0 + \theta\cdot\Delta x, y_0 + \theta\cdot\Delta y)$.

Отсюда и из формул (1) и (2) получаем

$$\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0) = df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}\cdot d^2 f(x_0,y_0) + ... + \frac{1}{n!}\cdot d^n f(x_0,y_0) +$$

$+\dfrac{1}{(n+1)!}\cdot d^{n+1} f\big((x_0,y_0) + \theta(\Delta x,\Delta y)\big)$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Остаточный член в формуле Тейлора может быть записан в форме Пеано $R_n(\Delta x,\Delta y) = o(\rho^{n+1})$ при $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$.

Замечание 2. При $n = 0$ из формулы Тейлора получается формула Лагранжа конечных приращений

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta\cdot\Delta x,\ y_0 + \theta\cdot\Delta y)\cdot\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \theta\cdot\Delta x,\ y_0 + \theta\cdot\Delta y)\cdot\Delta y$, где $0 < \theta < 1$.

Пример. Разложить функцию $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$ по формуле Тейлора в точке $M_0(0,1)$ до членов второго порядка включительно.

Решение. Формула Тейлора до членов второго порядка имеет вид

$$f(x,y) = f(M_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cdot(y-y_0) +$$

$$+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)\cdot(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(M_0)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)\cdot(y-y_0)^2\right) + R_2.$$

Вычислим частные производные $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}\cdot e^{\frac{x}{y}}$; $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\cdot e^{\frac{x}{y}}$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{y^2}\cdot e^{\frac{x}{y}}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = -\frac{x+y}{y^3}\cdot e^{\frac{x}{y}}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2+2xy}{y^4}\cdot e^{\frac{x}{y}}.$$

В точке $M_0(0{,}1)$ имеем $f(M_0)=1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)=0$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)=1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(M_0)=-1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)=0.$$

Подставляя эти значения в формулу Тейлора, получим

$$e^{\frac{x}{y}} = 1 + x + \frac{1}{2}\cdot x^2 - x\cdot(y-1) + R_2.$$

Остаточный член в форме Пеано $R_2 = o(x^2 + (y-1)^2)$.

Замена переменных в дифференциальных выражениях.

I. Замена переменных в дифференциальных выражениях, содержащих обыкновенные производные.

Постановка задачи. Пусть задано выражение $\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$, содержащее переменную x, функцию $y(x)$ и ее производные $y'(x),\ y''(x),\ \ldots,\ y^{(n)}(x)$. Нужно в этом выражении перейти к переменной t и функции $u(t)$.

Пусть старые и новые переменные связаны между собой формулами замены: $\begin{cases} g_1(x,y,t,u)=0, \\ g_2(x,y,t,u)=0. \end{cases}$

Допустим, что существуют функции $x = f_1(t,u)$ и $y = f_2(t,u)$, заданные неявно данной системой, и они дифференцируемы достаточное число раз. Так как $u = u(t)$, то эти функции будут зависеть от одной переменной $x(t) = f_1(t,u(t))$, $y(t) = f_2(t,u(t))$. Подставляя их в систему, получаем

$$\begin{cases} g_1(x(t), y(t), t, u(t)) = 0, \\ g_2(x(t), y(t), t, u(t)) = 0. \end{cases}$$

Алгоритм решения задачи замены переменных.

1) Дифференцируя уравнения системы по правилу производной сложной функции, получим линейную систему относительно $x'(t)$ и $y'(t)$.

2) Находим $x'(t)$ и $y'(t)$ из полученной системы.

3) Находим производную $y'(x)$ по правилу производной от функции, заданной параметрически $y'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

4) Затем находим вторую производную

$$y''(x)=(y'(x))'_x=\frac{(y'(x))'_t}{x'(t)}=\frac{1}{x'(t)}\cdot\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'_t=\frac{y''(t)\cdot x'(t)-y'(t)\cdot x''(t)}{\left(x'(t)\right)^3}.$$

Аналогично находятся производные более высоких порядков.

5) Подставляя переменную x, функцию $y(x)$ и ее производные $y'(x),\ y''(x),\ \ldots,y^{(n)}(x)$, выраженные через новые переменные u и t, в $\Phi(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})$, осуществляем замену переменных.

Пример 1. В дифференциальном уравнении $y\cdot y'+x\cdot y^2+x^3=0$ перейти к новым переменным u и t, где $u-$ функция от переменной t. Формулы замены имеют следующий вид: $\begin{cases}u^2-y^2-x^2=0,\\ x^2-t^2+u^2=0.\end{cases}$

1) Продифференцируем уравнения системы по переменной t:

$$\begin{cases}2u\cdot u'-2y\cdot y'-2x\cdot x'=0,\\ 2x\cdot x'-2t+2u\cdot u'=0.\end{cases}$$

2) Из второго уравнения системы выражаем $x'_t=\dfrac{t-u\cdot u'}{x}$ и подставляем в первое уравнение: $u\cdot u'-y\cdot y'-t+u\cdot u'=0$. Отсюда $y'_t=\dfrac{2u\cdot u'-t}{y}$.

3) Находим производную $y'(x)=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{2u\cdot u'-t}{t-u\cdot u'}\cdot\dfrac{x}{y}$.

4) Так как выражение содержит только первую производную, то четвертый пункт не нужен.

5) Подставим найденные выражения в дифференциальное уравнение

$\dfrac{2u\cdot u'-t}{t-u\cdot u'}\cdot x+x\cdot y^2+x^3=0$. Поделим это равенство на x. Учитывая, что $y^2+x^2=u^2$, получаем $\dfrac{2u\cdot u'-t}{t-u\cdot u'}+u^2=0$. Выполняя несложные преобразования, получаем $u'(u^3-2u)=t(u^2-1)$ дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Важные частные случаи.

Первый случай. Формулы замены разрешимы относительно старых переменных, то есть старые переменные выражены через новые $\begin{cases} x = x(u,t), \\ y = y(u,t). \end{cases}$

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $\left(1+x^2\right)^2 \cdot y'' = y$, перейдя к новым переменным $x = tg\, t$, $y = \dfrac{u}{\cos t}$.

Решение.

1), 2) Найдем производные от старых переменных по переменной t:

$$x'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad y'(t) = \frac{u' \cdot \cos t + u \cdot \sin t}{\cos^2 t}.$$

3) Находим производную $y'(x) = \dfrac{y'_t}{x'_t} = u' \cdot \cos t + u \cdot \sin t$.

4) Вторую производную находим по формуле

$$y''(x) = \frac{(y'(x))'_t}{x'(t)} = \left(u' \cdot \cos t + u \cdot \sin t\right)'_t \cdot \cos^2 t = (u'' + u) \cdot \cos^3 t.$$

5) Подставляем найденное выражение в первоначальное уравнение $\left(1+tg^2 t\right)^2 \cdot (u''+u) \cdot \cos^3 t = \dfrac{u}{\cos t}$. Учитывая, что $1 + tg^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$, получаем $u'' = 0$, отсюда решением уравнения является функция $u(t) = C_1 t + C_2$.

Второй случай. Нужно поменять местами функцию и переменную.
В этом случае пользуемся формулами для производной обратной функции

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}; \quad y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение $\dfrac{y''}{(y')^3} - x = 0$.

Решение. Поменяем местами функцию y и переменную x.

Первая производная заменяется по формуле $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$. Вторая производная $y''(x)$ выражается через производные функции $x(y)$ следующим образом

$$y''(x) = \left(y'(x)\right)'_x = \left(\frac{1}{x'_y}\right)'_x = -\frac{1}{\left(x'_y\right)^2} \cdot x''(y) \cdot y'(x) = -\frac{x''}{(x')^3}.$$

Подставляем полученные формулы в дифференциальное уравнение, получаем $x'' + x = 0$ – дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Оно более простое, чем первоначальное дифференциальное уравнение.

II. Замена переменных в дифференциальных выражениях, содержащих частные производные.

Постановка задачи. Пусть задано выражение $\Phi(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, ...)$, содержащее переменные x, y, функцию $z(x, y)$ и ее частные производные первого и более высоких порядков. Нужно в этом выражении перейти к переменным u, v и к функции $w(u, v)$.

Рассмотрим случай, когда формулы перехода к новым переменным заданы в явном виде

$$\begin{cases} x = f_1(u, v, w), \\ y = f_2(u, v, w), \\ z = f_3(u, v, w). \end{cases}$$

Алгоритм решения задачи замены переменных.

1) Вычислить дифференциалы от обеих частей каждого равенства:

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial f_1}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial f_1}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial f_1}{\partial w} \cdot dw, \\ dy = \frac{\partial f_2}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial f_2}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial f_2}{\partial w} \cdot dw, \\ dz = \frac{\partial f_3}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial f_3}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial f_3}{\partial w} \cdot dw. \end{cases}$$

2) Для функции $w(u, v)$ записываем дифференциал $dw = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot dv$ и подставляем его во все три уравнения последней системы, получаем

$$\begin{cases} dx = A_1 \cdot du + B_1 \cdot dv, \\ dy = A_2 \cdot du + B_2 \cdot dv, \\ dz = A_3 \cdot du + B_3 \cdot dv. \end{cases} \quad \text{где } A_i = \frac{\partial f_i}{\partial u} + \frac{\partial f_i}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial u}, \quad B_i = \frac{\partial f_i}{\partial v} + \frac{\partial f_i}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial v}, \ i = 1,2,3.$$

3) Если $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то первые два уравнения системы однозначно разрешимы относительно du и dv. По правилу Крамера находим

$$du = \frac{1}{\Delta}\left(B_2 dx - B_1 dy\right), \ dv = \frac{1}{\Delta}\left(-A_2 dx + A_1 dy\right).$$

4) В третье уравнение системы подставляем du и dv, выраженные через dx и dy. Тогда получим $dz = A(u, v, w, w'_u, w'_v) \cdot dx + B(u, v, w, w'_u, w'_v) \cdot dy$, где

$$A(u, v, w, w'_u, w'_v) = \frac{A_3 B_2 - A_2 B_3}{\Delta}, \quad B(u, v, w, w'_u, w'_v) = \frac{-A_3 B_1 + A_1 B_3}{\Delta}.$$

Учитывая формулу полного дифференциала $dz = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv$, отсюда находим $\frac{\partial z}{\partial x} = A(u, v, w, w'_u, w'_v)$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y} = B(u, v, w, w'_u, w'_v)$.

5) Для вычисления частных производных второго порядка можно поступить следующим образом. В формуле $z'_x = A(u, v, w, w'_u, w'_v)$ берем дифференциалы от правой и левой частей

$$z''_{xx}dx + z''_{xy}dy = A'_u du + A'_v dv + A'_w dw + A'_{w'_u} dw'_u + A'_{w'_v} dw'_v .$$

Подставим сюда сначала выражения $dw = w'_u du + w'_v dv$, $dw'_u = w''_{uu} du + w''_{uv} dv$, $dw'_v = w''_{vu} du + w''_{vv} dv$, а затем $du = \frac{1}{\Delta}\left(B_2 dx - B_1 dy\right)$, $dv = \frac{1}{\Delta}\left(-A_2 dx + A_1 dy\right)$.

Приравнивая коэффициенты при dx, dy в обеих частях полученного равенства, находим z''_{xx}, z''_{xy}. Выражение для z''_{yy} получим аналогично, вычислив дифференциалы от правой и левой частей в формуле $z'_y = B(u, v, w, w'_u, w'_v)$.

Важный частный случай. Функция не меняется, меняются только переменные.

Пример. Записать лапласиан $\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ в полярных координатах.

Решение.

Формулы перехода к полярным координатам имеют вид $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi, \\ y = \rho \cdot \sin\varphi. \end{cases}$

Найдем дифференциалы от правой и левой частей для каждого из уравнений системы: $\begin{cases} dx = \cos\varphi \cdot d\rho - \rho \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi, \\ dy = \sin\varphi \cdot d\rho + \rho \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi. \end{cases}$

Решаем систему относительно переменных $d\rho$ и $d\varphi$ по правилу Крамера.

Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho \cdot \sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho \cdot \cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$ Тогда

$$d\rho = \frac{1}{\rho} \cdot \begin{vmatrix} dx & -\rho \cdot \sin\varphi \\ dy & \rho \cdot \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos\varphi \cdot dx + \sin\varphi \cdot dy,$$

$$d\varphi = \frac{1}{\rho} \cdot \begin{vmatrix} \cos\varphi & dx \\ \sin\varphi & dy \end{vmatrix} = \frac{\cos\varphi}{\rho} \cdot dy - \frac{\sin\varphi}{\rho} \cdot dx .$$

В формулу полного дифференциала $dz = \frac{\partial z}{\partial \rho} \cdot d\rho + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot d\varphi$ подставляем $d\rho$ и $d\varphi$, выраженные через dx и dy, получаем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \rho} \cdot (\cos\varphi \cdot dx + \sin\varphi \cdot dy) + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \left(\frac{\cos\varphi}{\rho} \cdot dy - \frac{\sin\varphi}{\rho} \cdot dx \right).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены при dx и dy, получаем

$$dz=\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\cos\varphi-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)\cdot dx+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\sin\varphi+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)\cdot dy.$$

Отсюда находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\cos\varphi-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\rho};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\sin\varphi+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\rho}.$$

Так как в полученных формулах функция произвольна и $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$,

то чтобы найти вторую частную производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, нужно в формуле для

вычисления первой частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ заменить функцию z на

функцию $\frac{\partial z}{\partial x}$, получим $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\cos\varphi-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\sin\varphi}{\rho}$. Тогда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\cos\varphi-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)\cdot\cos\varphi-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\cos\varphi-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)\cdot\frac{\sin\varphi}{\rho}.$$

Отсюда $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}\cdot\cos\varphi-\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\rho}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\rho^2}\right)\cdot\cos\varphi-$

$$-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi\partial\rho}\cdot\cos\varphi-\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\sin\varphi-\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\sin\varphi}{\rho}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)\cdot\frac{\sin\varphi}{\rho}.$$

После несложных преобразований находим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}\cdot\cos^2\varphi+\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\varphi}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{\rho}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{\rho^2}+\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\rho}.$$

Аналогично вычисляя вторую частную производную $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, находим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}\cdot\sin^2\varphi+\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\varphi}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{\rho}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{\rho^2}+\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{\rho}.$$

Затем подставляем эти выражения в лапласиан и получаем формулу для лапласиана в полярных координатах

$$\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{1}{\rho^2}+\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\frac{1}{\rho}.$$

Экстремум функции нескольких переменных.

Для простоты излагаем теорию для функций двух переменных. Но она также верна в случае функций большего числа переменных.

Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0,y_0).

Определение. Точка (x_0, y_0) называется точкой локального максимума, если найдется окрестность этой точки, такая что для всякой точки (x, y), лежащей в этой окрестности, выполняется неравенство $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$.

Определение. Точка (x_0, y_0) называется точкой локального минимума, если найдется окрестность этой точки, такая что для всякой точки (x, y), лежащей в этой окрестности, выполняется неравенство $f(x, y) \ge f(x_0, y_0)$.

Определение. Точка (x_0, y_0) называется точкой локального экстремума, если она либо точка локального минимума либо точка локального максимума.

Замечание 1. Если неравенство строгое, то соответствующая точка будет либо точкой строгого локального максимума либо точкой строгого локального минимума либо точкой строгого локального экстремума

Замечание 2. Слово «локальный» в определении означает, что значение функции максимально (минимально) только в данной окрестности исследуемой точки, а не на всей области определения. Часто для краткости слово «локальный» опускают и говорят «точка максимума (минимума, экстремума)», подразумевая под этим «точку локального максимума (минимума, экстремума)».

Теорема (необходимые условия экстремума). Пусть (x_0, y_0) является точкой локального экстремума функции $z = f(x, y)$. Тогда либо в этой точке обе частные производные равны нулю либо в точке (x_0, y_0) хотя бы одна из частных производных не существует или бесконечна.

Доказательство. Пусть (x_0, y_0) является точкой локального максимума (минимума) функции $z = f(x, y)$. При фиксированном значении $y = y_0$ функция $z = f(x, y_0)$ как функция одной переменной x принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если в этой точке существует конечная частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, то выполняются условия теоремы Ферма и тогда по теореме Ферма в этой точке производная должна быть равна нулю. Таким образом, в точке экстремума либо $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ либо не существует конечной частной производной по переменной x. Те же рассуждения можно применить к $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Теорема доказана.

Замечание. Точки, удовлетворяющие необходимому условию экстремума, называются критическими. Те из критических точек, в которых обе частные производные обращаются в ноль, называются стационарными точками.

Пример 1. Рассмотрим функцию $z = 4 - (x^2 + y^2)$. Она имеет конечные частные производные во всех точках области определения. Найдем стационарные точки из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} -2x = 0, \\ -2y = 0. \end{cases}$$ Точка $(0,0)$ является стационарной.

Очевидно, что точка $(0,0)$ является точкой максимума данной функции.
РИСУНОК

Пример 2. Рассмотрим функцию $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ее частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ непрерывны всюду, кроме точки $(0,0)$.

При $(x, y) \neq (0,0)$ частные производные не обращаются в ноль, стационарных точек у функции нет. В точке $(0,0)$ запишем частные производные по определению

$\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{z(\Delta x, 0) - z(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$. Данный предел не существует, так как при $\Delta x > 0$ выражение под знаком предела равно 1, а при $\Delta x < 0$ выражение под знаком предела равно (–1). Итак, частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ не существует, поэтому точка $(0,0)$ является критической. Точно также можно показать, что $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0)$ не существует; хотя для того, чтобы точка была критической, достаточно того, что одна из частных производных не существует. Очевидно, что точка $(0,0)$ является точкой минимума данной функции.
РИСУНОК

Пример 3. Рассмотрим функцию $z = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^4}$. Частные производные этой функции равны $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{y}$. Стационарных точек у функции нет. Критической точкой будет точка $(0,0)$, в которой одна из частных производных обращается в бесконечность $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \infty$, а вторая частная производная конечна $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=0$. Очевидно, что точка $(0,0)$ является точкой минимума данной функции.

Пример 4. Рассмотрим функцию $z=xy$. Обе ее частные производные всюду существуют и конечны. Из системы $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=y=0, \\ \frac{\partial z}{\partial y}=x=0 \end{cases}$ находим единственную стационарную точку $(0,0)$. Однако, точка $(0,0)$ не является точкой экстремума. Значение в стационарной точке $z(0,0)=0$. В любой сколь угодно малой окрестности точки $(0,0)$ найдутся точки, в которых значение функции положительно (если x и y одинаковых знаков), значит $(0,0)$ не является точкой максимума. Также в любой сколь угодно малой окрестности точки $(0,0)$ найдутся точки, в которых значение функции отрицательно (если x и y разных знаков), значит $(0,0)$ не является точкой минимума.

Последний пример говорит о том, что необходимое условие экстремума не является достаточным. Следующие теоремы формулируют условия, при которых стационарная точка является точкой экстремума.

Теорема 1 (достаточные условия экстремума).
Пусть (x_0,y_0) является стационарной точкой функции $z=f(x,y)$, то есть $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0.$ Найдется окрестность $B((x_0,y_0),r)$ точки (x_0,y_0), в которой существуют все частные производные второго порядка, непрерывные в самой точке (x_0,y_0). Тогда возможны следующие случаи.

1) Если $d^2f((x_0,y_0),(h_1,h_2))>0$ для всех приращений (h_1,h_2), таких что $0<h_1^{\,2}+h_2^{\,2}<r$, то (x_0,y_0) является точкой локального минимума.

2) Если $d^2f((x_0,y_0),(h_1,h_2))<0$ для всех приращений (h_1,h_2), таких что $0<h_1^{\,2}+h_2^{\,2}<r$, то (x_0,y_0) является точкой локального максимума.

3) Если $d^2f((x_0,y_0),(h_1,h_2))$ принимает значения разных знаков для некоторых приращений (h_1',h_2') и (h_1'',h_2''), то (x_0,y_0) не является точкой локального экстремума функции $z=f(x,y)$.

4) Если $d^2f((x_0,y_0),(h_1,h_2))\ge 0$ или $d^2f((x_0,y_0),(h_1,h_2))\le 0$, то (x_0,y_0) может быть точкой локального экстремума функции $z=f(x,y)$, а может и не быть.

Доказательство.

1) Разложим функцию $z = f(x, y)$ по формуле Тейлора порядка $n = 1$ в окрестности точки (x_0, y_0). Найдется $0 < \theta < 1$, такое что

$$\Delta f = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} \cdot d^2 f(x_0 + \theta \cdot h_1, y_0 + \theta \cdot h_2).$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, то первое слагаемое в правой части равно нулю. Второй дифференциал функции находится по формуле

$$d^2 f(x_0 + \theta \cdot h_1, y_0 + \theta \cdot h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + \theta \cdot h_1, y_0 + \theta \cdot h_2) \cdot h_1^{\ 2} +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta \cdot h_1, y_0 + \theta \cdot h_2) \cdot h_1 \cdot h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + \theta \cdot h_1, y_0 + \theta \cdot h_2) \cdot h_2^{\ 2}.$$

Обозначим через $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0),\ \ B = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x_0, y_0),\ \ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0)$.

Так как вторые частные производные непрерывны в точке (x_0, y_0), то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + \theta \cdot h_1, y_0 + \theta \cdot h_2) = A + \alpha_{11},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta \cdot h_1, y_0 + \theta \cdot h_2) = B + \alpha_{12},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + \theta \cdot h_1, y_0 + \theta \cdot h_2) = C + \alpha_{22},$$

где $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$ − бесконечно малые величины при $h_1 \to 0,\ h_2 \to 0$.

Отсюда получаем ,что

$$\Delta f = \frac{1}{2} \cdot \left(A \cdot h_1^{\ 2} + 2B \cdot h_1 \cdot h_2 + C \cdot h_2^{\ 2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha_{11} \cdot h_1^{\ 2} + 2\alpha_{12} \cdot h_1 \cdot h_2 + \alpha_{22} \cdot h_2^{\ 2}\right).$$

Длина вектора из приращений находится по формуле $\|h\| = \sqrt{h_1^{\ 2} + h_2^{\ 2}}$. Тогда

$$\frac{2\Delta f}{\|h\|^2} = \left(A \cdot \left(\frac{h_1}{\|h\|}\right)^2 + 2B \cdot \frac{h_1}{\|h\|} \cdot \frac{h_2}{\|h\|} + C \cdot \left(\frac{h_2}{\|h\|}\right)^2\right) + \left(\alpha_{11} \cdot \left(\frac{h_1}{\|h\|}\right)^2 + 2\alpha_{12} \cdot \frac{h_1}{\|h\|} \cdot \frac{h_2}{\|h\|} + \alpha_{22} \cdot \left(\frac{h_2}{\|h\|}\right)^2\right)$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой значения функции $\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ в точках $\left(\frac{h_1}{\|h\|}, \frac{h_2}{\|h\|}\right)$. Все эти точки принадлежат единичной окружности. Так как единичная окружность есть компакт, то непрерывная функция $\varphi(x, y)$ достигает на компакте своей нижней грани, обозначим ее m, а приращение на котором она достигается $\left(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2\right)$.

Так как $m = A \cdot \left(\frac{\tilde{h}_1}{\|h\|}\right)^2 + 2B \cdot \frac{\tilde{h}_1}{\|h\|} \cdot \frac{\tilde{h}_2}{\|h\|} + C \cdot \left(\frac{\tilde{h}_2}{h}\right)^2 = d^2 f\left((x_0, y_0), \left(\frac{\tilde{h}_1}{\|h\|}, \frac{\tilde{h}_2}{\|h\|}\right)\right) > 0$

по условию, то для любых значений приращений

$$A\cdot\left(\frac{h_1}{\|h\|}\right)^2+2B\cdot\frac{h_1}{\|h\|}\cdot\frac{h_2}{\|h\|}+C\cdot\left(\frac{h_2}{\|h\|}\right)^2\geq m>0.$$

Второе слагаемое $\alpha=\alpha_{11}\cdot\left(\frac{h_1}{\|h\|}\right)^2+2\alpha_{12}\cdot\frac{h_1}{\|h\|}\cdot\frac{h_2}{\|h\|}+\alpha_{22}\cdot\left(\frac{h_2}{\|h\|}\right)^2$ оценим по модулю $|\alpha|\leq|\alpha_{11}|+2\cdot|\alpha_{12}|+|\alpha_{22}|$. Так как $\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{22}$ − бесконечно малые величины при $h_1\to 0,\ h_2\to 0$, то $|\alpha|\leq\frac{m}{2}$ для достаточно малых приращений. Тогда знак величины $\frac{2\Delta f}{\|h\|^2}$ определяется знаком первого слагаемого, а следовательно эта величина положительна и $\Delta f=f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)>0$ для всех достаточно малых приращений. Это означает, что точка (x_0,y_0) является точкой локального минимума, что и требовалось доказать.

2) Этот пункт доказывается аналогично пункту 1).

3) В этом случае можно доказать, что в достаточно малой окрестности точки (x_0,y_0) на двух разных лучах с центром в точке (x_0,y_0) в направлении векторов (h_1',h_2') и (h_1'',h_2'') приращение функции принимает значения разных знаков, поэтому точка (x_0,y_0) не является точкой локального экстремума.

4) В этом случае приведем конкретные примеры.

4а) Рассмотрим функцию $f(x,y)=x^4+y^2$. Точка $(0,0)$ является стационарной точкой этой функции. Второй дифференциал функции в этой точке $d^2f((0,0),(h_1,h_2))=2h_2^{\ 2}\geq 0$. Очевидно, что точка $(0,0)$ является точкой локального минимума данной функции.

4б) Рассмотрим функцию $f(x,y)=-x^4-y^2$. Точка $(0,0)$ является стационарной точкой этой функции. Второй дифференциал функции в этой точке $d^2f((0,0),(h_1,h_2))=-2h_2^{\ 2}\leq 0$. Очевидно, что точка $(0,0)$ является точкой локального максимума данной функции.

4в) Рассмотрим функцию $f(x,y)=x^3+y^2$. Точка $(0,0)$ является стационарной точкой этой функции. Второй дифференциал функции в этой точке $d^2f((0,0),(h_1,h_2))=2h_2^{\ 2}\geq 0$. Однако, точка $(0,0)$ не является точкой локального экстремума данной функции. Действительно, значение функции в этой точке $f(0,0)=0$, а $f(x,0)=x^3$ принимает знак переменной x. Значит, в любой сколь угодно малой окрестности точки $(0,0)$ функция принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Теорема доказана.

Для практического применения более удобны другие достаточные условия экстремума. Введем необходимые определения.

Определение.
Квадратичной формой от переменных $x_1,...,x_n$ называется выражение вида

$$A(x)=A(x_1,...,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j .$$

Если $a_{ij} = a_{ji}$, то квадратичная форма называется симметричной и матрица, соответствующая этой квадратичной форме, определяется однозначно.

Определение.

Квадратичная форма называется положительно определённой, если $A(x) > 0$ для всякого ненулевого элемента $x \in R^n$.

Квадратичная форма называется отрицательно определённой, если $A(x) < 0$ для всякого ненулевого элемента $x \in R^n$.

Квадратичная форма называется неопределённой, если она принимает и положительные и отрицательные значения.

Примером квадратичной формы может служить второй дифференциал для функции многих переменных $f(x_1,...,x_n)$. Он имеет вид

$$d^2 f = A(dx_1,...,dx_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \cdot dx_i dx_j$$

и является квадратичной формой от переменных $dx_1,...,dx_n$.

В терминах квадратичных форм предыдущую теорему можно переформулировать так

Теорема (достаточные условия экстремума).

Пусть $x^{(0)} = (x_1^{(0)},...,x_n^{(0)})$ является стационарной точкой функции $f(x_1,...,x_n)$. Найдется окрестность $B(x^{(0)},r)$ точки $x^{(0)}$, в которой существуют все частные производные второго порядка, непрерывные в самой точке $x^{(0)}$. Тогда возможны следующие случаи:

1) Если $d^2 f(x^{(0)}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)}) \cdot dx_i dx_j$ является положительно определенной квадратичной формой, тогда точка $x^{(0)}$ является точкой локального минимума.

2) Если $d^2 f(x^{(0)}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)}) \cdot dx_i dx_j$ является отрицательно определенной квадратичной формой, тогда точка $x^{(0)}$ является точкой локального максимума.

3) Если $d^2 f(x^{(0)}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)}) \cdot dx_i dx_j$ является неопределенной

квадратичной формой, тогда точка $x^{(0)}$ не является точкой локального экстремума.

Установить, является квадратичная форма положительно или отрицательно определённой, помогает следующая теорема.

Критерий Сильвестра.

Симметричная квадратичная форма $A(x) = A(x_1, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ является

1) положительно определённой тогда и только тогда, когда все её угловые миноры положительны:

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots \ , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0;$$

2) отрицательно определённой тогда и только тогда, когда знаки угловых миноров чередуются:

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \ \ldots \ , (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Из первого достаточного условия экстремума и критерия Сильвестра вытекает теорема о втором достаточном условии экстремума. Также для простоты сформулируем и докажем её для функции двух переменных.

Теорема 2 (достаточные условия экстремума).
Пусть (x_0, y_0) является стационарной точкой функции $z = f(x, y)$,

то есть $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$ В некоторой окрестности точки (x_0, y_0)

существуют все частные производные второго порядка, непрерывные в самой точке (x_0, y_0).

Обозначим через $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \ B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0), \ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0),$

и составим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$. Тогда возможны случаи.

1) Если $\Delta > 0$, то (x_0, y_0) является точкой локального экстремума, причем при $A > 0$ точка (x_0, y_0) является точкой локального минимума,

а при $A<0$ точка (x_0, y_0) является точкой локального максимума.
2) Если $\Delta<0$, то (x_0, y_0) не является точкой локального экстремума.
3) Случай $\Delta=0$ требует дополнительного исследования, точка (x_0, y_0) может быть точкой локального экстремума, а может и не быть.

Доказательство. Второй дифференциал функции находится по формуле $d^2 f((x_0, y_0),(h_1 h_2)) = A\cdot h_1^{\ 2} + 2B\cdot h_1\cdot h_2 + C\cdot h_2^{\ 2}$.

1) Если $\Delta = A\cdot C - B^2 > 0$, то числа A и C отличны от нуля.
Так как $A\neq 0$, то второй дифференциал можно записать в виде

$$d^2 f((x_0, y_0),(h_1 h_2)) = A\cdot\left(h_1 + \frac{B}{A}\cdot h_2\right)^2 + \frac{AC-B^2}{A}\cdot h_2^{\ 2}.$$

При $A>0$ и $A\cdot C - B^2 > 0$ оба слагаемых в правой части неотрицательны и одновременно обращаются в ноль только при нулевых приращениях. Тогда $d^2 f((x_0, y_0),(h_1 h_2)) > 0$ для ненулевых приращений и по предыдущей теореме точка (x_0, y_0) является точкой локального минимума.

При $A<0$ и $A\cdot C - B^2 > 0$ оба слагаемых в правой части неположительны и одновременно обращаются в ноль только при нулевых приращениях.. Тогда $d^2 f((x_0, y_0),(h_1 h_2)) < 0$ для ненулевых приращений и по предыдущей теореме точка (x_0, y_0) является точкой локального максимума.

2) Пусть теперь $\Delta = A\cdot C - B^2 < 0$. Покажем, что в этом случае найдутся два различных вектора приращений, для которых $d^2 f((x_0, y_0),(h_1, h_2))$ принимает значения разных знаков. Тогда по предыдущей теореме (x_0, y_0) не является точкой локального экстремума функции $z = f(x,y)$. Для приращений $(h_1,0)$ величина второго дифференциала равна $d^2 f((x_0, y_0),(h_1,0)) = A\cdot h_1^{\ 2}$. Пусть теперь вектор приращений $(Bh,-Ah)$, для него величина второго дифференциала $d^2 f((x_0, y_0),(Bh,-Ah)) = A\cdot\left(AC-B^2\right)\cdot h^2$. Очевидно, что полученные значения имеют разные знаки.
3) Во всех примерах, приведенных в пунктах 4а), 4б), 4в) доказательства предыдущей теоремы определитель $\Delta=0$, однако стационарная точка точка в них может быть точкой локального экстремума, а может и не быть.
Теорема доказана.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $z = 3x^2y - x^3 - y^4$.
Решение. Частные производные определены и непрерывны на всей области определения функции, поэтому критическими могут быть только стационарные точки функции. Найдем их из системы

$$\begin{cases} z'_x = 6xy - 3x^2 = 0, \\ z'_y = 3x^2 - 4y^3 = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\cdot(2y - x) = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем стационарные точки функции $(0,0)$ и $(6,3)$.
Проверим, выполняется ли для них достаточное условие экстремума.
Найдем частные производные второго порядка:
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y - 6x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12y^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x.$

Для точки $(6,3)$: $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(6,3) = -18$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(6,3) = 36$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(6,3) = -108$.

Определитель $\Delta = A \cdot C - B^2 = 18 \cdot 108 - 36^2 = 3 \cdot 18 \cdot 36 - 2 \cdot 18 \cdot 36 = 18 \cdot 36 > 0$, значит точка $(6,3)$ является точкой экстремума. Так как $A < 0$, то точка $(6,3)$ является точкой максимума.

Для точки $(0,0)$: $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = 0$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = 0$.

Определитель $\Delta = A \cdot C - B^2 = 0$, поэтому требуется дополнительное исследование. Значение функции в этой точке $z(0,0) = 0$. При $y = 0$ значение функции $z(x,0) = -x^3$. Если $x > 0$, то $z(x,0) < 0$, значит точка $(0,0)$ не может быть точкой минимума, так как в сколь угодно малой окрестности ее найдутся точки, в которых значение функции меньше чем $z(0,0)$. Если $x < 0$, то $z(x,0) > 0$, значит точка $(0,0)$ не может быть точкой максимума, так как в сколь угодно малой окрестности ее найдутся точки, в которых значение функции больше. Итак, точка $(0,0)$ не является точкой экстремума.

Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

Задача состоит в том, чтобы найти экстремум функции $f(x_1,\dots,x_n)$ при условии уравнений связи $\varphi_i(x_1,\dots,x_n) = 0,\ i = 1,\dots,k$. Такой экстремум называется условным. Дадим более точные определения.
Определение. Функция $f(x_1,\dots,x_n)$ имеет в точке M_0 строгий (нестрогий) условный минимум при условиях уравнений связи $\varphi_i(x_1,\dots,x_n) = 0,\ i = 1,\dots,k$, если найдётся окрестность точки M_0, такая что для всех точек M из этой окрестности, удовлетворяющим уравнениям связи, выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$ ($f(M) \geq f(M_0)$).
Аналогично даётся определение условного максимума.

Для решения задачи нахождения условного экстремума есть два основных способа.

Первый способ. Метод исключения неизвестных.
Если из уравнений связи можно выразить k переменных через остальные, то, подставив эти выражения в функцию $f(x_1,\dots,x_n)$, получим задачу на обычный экстремум.

Пример 1. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии уравнения связи $x + y - 1 = 0$.

Решение.

Выразим из уравнения связи переменную y через x, получим $y = 1 - x$. Подставим это выражение в функцию, получим $z(x) = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$. Для нахождения экстремума этой функции от одной переменной найдем стационарную точку из уравнения $z'(x) = 4x - 2 = 0$. В стационарной точке $x_0 = \dfrac{1}{2}$ производная меняет знак с минуса на плюс, значит, точка $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ является точкой условного минимума функции $z = x^2 + y^2$. РИСУНОК

Этот пример легко наглядно проиллюстрировать. Графиком функции $z = x^2 + y^2$ является параболоид вращения. Уравнение связи $x + y - 1 = 0$ задаёт в пространстве плоскость. Пересечением плоскости и параболоида является плоская кривая. Точка обычного экстремума этой кривой и будет точкой условного экстремума для данной функции $z = x^2 + y^2$.

Второй способ. <u>Метод множителей Лагранжа.</u>

Составляем функцию Лагранжа

$F(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_k) = f(x_1,\dots,x_n) + \lambda_1 \cdot \varphi_1(x_1,\dots,x_n) + \dots + \lambda_k \cdot \varphi_k(x_1,\dots,x_n)$.

Находим стационарные точки этой функции из системы

$$\begin{cases} F'_{x_i} = 0, & i = 1,\dots,n; \\ F'_{\lambda_j} = 0, & j = 1,\dots,k. \end{cases}$$

Для проверки достаточного условия экстремума вычисляем для функции Лагранжа второй дифференциал в стационарной точке $M_0 = (x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$, подставив соответствующие значения констант $\lambda_1,\dots,\lambda_k$. Затем дифференцируем уравнения связи, выражаем из них $dx_1,\dots,dx_k$ через $dx_{k+1},\dots,dx_n$ и подставляем эти выражения во второй дифференциал. Тогда d^2F будет квадратичной формой от переменных $dx_{k+1},\dots,dx_n$ в точке $M'_0 = (x_{k+1}^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$. Если эта квадратичная форма положительно определена, то в точке $M_0 = (x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$ условный минимум; если отрицательно определена, то условный максимум. Если данная квадратичная форма неопределенная, то M_0 не является точкой условного экстремума.

Пример 2. Найти экстремум функции $u = x + y + z^2$ при условии уравнений связи $z - x = 1, \quad y - xz = 1$.

Решение.

В этой задаче имеем два уравнения связи $\varphi_1 = z - x - 1$ и $\varphi_2 = y - xz - 1$.

Составим функцию Лагранжа

$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1)$.

Находим стационарные точки этой функции из системы

$$\begin{cases} F_x' = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0; \\ F_y' = 1 + \lambda_2 = 0; \\ F_z' = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0; \\ z - x - 1 = 0; \\ y - xz - 1 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим стационарную точку $M_0 = (-1,1,0)$ при значениях $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$.

Второй дифференциал функции Лагранжа вычисляется по формуле

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}dz^2 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y}dzdy + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}dxdz\right).$$

Вычисляя вторые частные производные, имеем

$$d^2F = 2dz^2 - 2\lambda_2 dxdz = 2dz^2 + 2dxdz.$$

Затем дифференцируем уравнения связи

$$\begin{cases} dz - dx = 0; \\ dy - xdz - zdx = 0. \end{cases}$$

Из этих уравнений выражаем дифференциалы dx и dy через dz в точке M_0:

$$\begin{cases} dx = dz; \\ dy = -dz. \end{cases}$$

Подставляя $dx = dz$ во второй дифференциал, получаем $d^2F = 4dz^2$. Второй дифференциал является положительно определённой квадратичной формой от dz. Значит, точка $M_0 = (-1,1,0)$ будет точкой условного минимума.

Отметим, что этот пример также можно решить методом исключения неизвестных.

Наибольшее (наименьшее) значение функции.

Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определена и непрерывна на компакте $D \subset \mathbf{R}^n$. Тогда функция достигает на нём своего наибольшего и наименьшего значения.

Алгоритм нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции на компакте.

1) Вычислить частные производные функции.

2) Найти критические точки функции: либо те, в которых обе частные производные равны нулю либо те, в которых хотя бы одна из частных производных не существует конечная.
3) Выбрать из найденных критических точек те, которые попали в исследуемую область. Вычислить значения функции в отобранных критических точках.
4) Исследовать функцию на границе области. Это задача нахождения условного экстремума данной функции, в которой уравнением связи является уравнение границы. Находим точки возможного условного экстремума либо методом исключения неизвестных либо методом множителей Лагранжа. Вычисляем значения функции в найденных точках.
5) Из вычисленных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2$ внутри эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, если $a > b$.

Решение. Частные производные функции существуют и непрерывны всюду, поэтому у функции могут быть только стационарные точки. Находим из системы $\begin{cases} z'_x = 2x = 0, \\ z'_y = 2y = 0 \end{cases}$ стационарную точку $(0,0)$.

Значение функции в стационарной точке $z(0,0) = 0$.

Исследуем значения функции на границе области. Из уравнения границы находим $y^2 = b^2 - \dfrac{b^2}{a^2} \cdot x^2$. Подставляя это выражение в уравнение функции, получаем $z = b^2 + \left(1 - \dfrac{b^2}{a^2}\right) \cdot x^2$, где $x \in [-a, a]$. Производная этой функции $z'(x) = 2 \cdot \left(1 - \dfrac{b^2}{a^2}\right) \cdot x$ обращается в ноль в точке $x = 0$, которая лежит на отрезке изменения переменной. Значение функции в этой точке $z(0, \pm b) = b^2$.

Значения функции на концах отрезка изменения переменной $z(\pm a, 0) = a^2$.

Так как $a > b$, то наибольшее значение функции $z(\pm a, 0) = a^2$ достигается на границе области. Наименьшее значение $z(0,0) = 0$ принимается внутри области.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 3y^2 + y$ в области, задаваемой неравенствами $D\colon\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le x + y \le 1.$

Решение. Найдем стационарные точки функции из системы

$\begin{cases} z'_x = 2x + 2y = 0, \\ z'_y = 2x - 6y + 1 = 0. \end{cases}$ Отсюда получаем единственную стационарную

точку $\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$, не лежащую в данной области.

Исследуем значения функции на границе области. Граница состоит из трех отрезков.

1) Отрезок OA задается уравнением $y = 0,\ 0 \le x \le 1$. Подставляя это в функцию, получаем $z = x^2,\ x \in [0,1]$. Для нее стационарная точка $x = 0$, она не попадает внутрь отрезка. Значения функции на концах отрезка $z(0,0) = 0$ и $z(1,0) = 1$.
2) Отрезок OB задается уравнением $x = 0,\ 0 \le y \le 1$. Подставляя это в функцию, получаем $z = y - 3y^2,\quad y \in [0,1]$. Стационарная точка находится из уравнения $z'(y) = 1 - 6y = 0$. Точка $y = \frac{1}{6}$ попадает в отрезок $[0,1]$. Значение функции в этой точке $z\left(0, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}$. Значение функции на одном из концов отрезка найдено в предыдущем пункте, а на втором конце $z(0,1) = -2$.
3) Отрезок AB задается уравнением $y = 1 - x,\ 0 \le x \le 1$. Подставляя это в функцию, получаем $z = -4x^2 + 7x - 2,\ x \in [0,1]$. Ее стационарная точка находится из уравнения $z'(x) = 7 - 8x = 0$. Точка $x = \frac{7}{8}$ попадает в отрезок $[0,1]$. Значение функции в этой точке $z\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right) = \frac{17}{16}$.

Из полученных значений функции выбираем самое большое $z\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right) = \frac{17}{16}$ и самое маленькое $z(0,1) = -2$.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ в области, задаваемой неравенством $x^2 + y^2 + z^2 \le 100$.

Решение. Находим стационарную точку функции $u(x, y, z)$ из системы

$$\begin{cases} u'_x = 2x = 0, \\ u'_y = 4y = 0, \\ u'_z = 6z = 0. \end{cases}$$

Стационарная точка $M_1(0,0,0)$. Она лежит внутри области. Значение функции в данной точке $u(M_1) = 0$.

Исследуем функцию на границе области. Для этого составим функцию Лагранжа $F(x,y,z,\lambda)=x^2+2y^2+3z^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-100)$.

Найдём её стационарные точки из системы

$$\begin{cases} 2x+2\lambda x=0, \\ 4y+2\lambda y=0, \\ 6z+2\lambda z=0, \\ x^2+y^2+z^2-100=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим шесть точек возможного условного экстремума.
При $\lambda=-1$ две точки $M_2(10{,}0{,}0)$ и $M_3(-10{,}0{,}0)$;
при $\lambda=-2$ две точки $M_4(0{,}10{,}0)$ и $M_5(0{,}-10{,}0)$;
при $\lambda=-3$ две точки $M_6(0{,}0{,}10)$ и $M_7(0{,}0{,}-10)$.

Вычисляем значения функции в найденных точках:
$u(M_2)=u(M_3)=100$, $u(M_4)=u(M_5)=200$, $u(M_6)=u(M_7)=300$.

Наименьшее значение функция принимает во внутренней точке, оно равно $u(M_1)=0$; наибольшее значение функция принимает на границе области и оно равно $u(M_6)=u(M_7)=300$.

Теоремы существования и единственности неявной функции.

1. Случай функции одной переменной.

Рассматриваем случай, когда функция $y(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y)=0$.

<u>Теорема 1.</u> Пусть выполняются следующие условия:

1) функция $F(x,y)$ непрерывна в некоторой окрестности $B(x_0,y_0)$ точки (x_0,y_0);
2) $F(x_0,y_0)=0$;
3) существует частная производная F'_y в окрестности $B(x_0,y_0)$;
4) F'_y непрерывна в точке (x_0,y_0);
5) $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

Тогда выполняется следующее:

1) Для любого достаточно малого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$, такое, что для всякого значения переменной $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ существует единственное значение $y=y(x)$ из интервала $(y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon)$ и для него выполняется равенство $F(x,y)=0$.
2) Функция $y=y(x)$ непрерывна в точке x_0.

3) Если дополнительно требовать, чтобы в окрестности $B(x_0, y_0)$ существовала частная производная F'_x, непрерывная в точке (x_0, y_0), то существует производная функции $y(x)$ в точке x_0 и вычисляется по формуле $\frac{dy}{dx}(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$.

Доказательство.
По условию $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Пусть для определённости $F'_y(x_0, y_0) > 0$.
Так как F'_y непрерывна в точке (x_0, y_0), то найдётся окрестность $U(x_0, y_0)$, такая, что для всех значений переменных $(x, y) \in U(x_0, y_0)$ выполняется неравенство $F'_y(x, y) > 0$. Возьмём окрестность $U(x_0, y_0)$ прямоугольной $U(x_0, y_0) = \{(x, y) \in R^2 \big| \, |x - x_0| < \xi, \ |y - y_0 < \eta|\}$, выбрав значения ξ и η достаточно малыми для того, чтобы окрестность $U(x_0, y_0)$ лежала внутри окрестности $B(x_0, y_0)$. Тогда в окрестность $U(x_0, y_0)$ выполняются все условия теоремы.
РИСУНОК

Рассмотрим функцию $\varphi_{x_0}(y) = F(x_0, y)$, она непрерывна на интервале $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$. Производная этой функции $\varphi'_{x_0}(y) = F'_y(x_0, y) > 0$, поэтому функция $\varphi_{x_0}(y)$ возрастает на интервале $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$.
Зафиксируем $\varepsilon > 0$, такое что $\varepsilon < \eta$. Так как $\varphi_{x_0}(y_0) = F(x_0, y_0) = 0$, то $\varphi_{x_0}(y_0 - \varepsilon) < 0$, а $\varphi_{x_0}(y_0 + \varepsilon) > 0$.
В силу непрерывности функции $F(x, y)$ при фиксированном значении переменной $y_0 - \varepsilon$ найдётся положительное число δ_1, такое, что для всех значений переменной $x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$ значения функции отрицательны $F(x, y - \varepsilon) < 0$; а также найдётся положительное число δ_2, такое, что для всех значений переменной $x \in [x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2]$ значения функции положительны $F(x, y - \varepsilon) > 0$. Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \xi\}$. Тогда для всех $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
Функция $\varphi_x(y) = F(x, y)$ непрерывна на отрезке $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков. Тогда для каждого фиксированного $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ внутри отрезка найдется точка $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, такая что $\varphi_x(y) = 0$, то есть $F(x, y) = 0$. Так как для каждого фиксированного $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ функция $\varphi_x(y)$ возрастает, то такая точка единственная.
Итак, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое, что для всякого значения переменной $x \in (x_0 - \delta, \ x_0 + \delta)$ существует единственное значение $y = y(x)$ из интервала $(y_0 - \varepsilon, \ y_0 + \varepsilon)$ и для него выполняется равенство $F(x, y) = 0$. Пункт 1) доказан. Непосредственно из определения непрерывности функции в точке из утверждения пункта 1) вытекает

непрерывность функции $y = y(x)$ в точке x_0, то есть пункт 2) также доказан. Доказательство пункта 3) вытекает из того, что если в окрестности $B(x_0, y_0)$ существуют обе частные производные F'_x и F'_y, непрерывные в точке (x_0, y_0), то функция $F(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0). В этом случае требуемая формула доказана раньше.
Теорема доказана.

2. Случай функции нескольких переменных.

Рассмотрим функцию нескольких переменных $f(x_1,...,x_n)$, заданную неявно уравнением $F(x_1,...,x_n, f) = 0$. Без доказательства приведём теорему.
Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

1) функция $F(x_1,...,x_n, f)$ непрерывна в некоторой окрестности $B(M_0)$ точки $M_0(x_1^0,...,x_n^0, f^0)$;
2) $F(M_0) = 0$;
3) существует частная производная F'_f в окрестности $B(M_0)$;
4) F'_f непрерывна в точке M_0;
5) $F'_f(M_0) \neq 0$.

Тогда выполняется следующее:

1) Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое, что для всякого значения переменной $x = (x_1,...,x_n)$ из δ-окрестности точки $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$ существует единственное значение $f = f(x)$ из интервала $(f_0 - \varepsilon,\ f_0 + \varepsilon)$, для которого выполняется равенство $F(x_1,...,x_n, f) = 0$.
2) Функция $f(x_1,...,x_n)$ непрерывна в точке $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$.
3) Если дополнительно требовать, чтобы в окрестности $B(M_0)$ существовали все частные производные F'_{x_i} $(i = 1,...,n)$, непрерывные в точке $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$, то существуют частные производные функции $f(x_1,...,x_n)$ в точке x^0 и вычисляются по формуле $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = -\dfrac{F'_{x_i}(M_0)}{F'_f(M_0)}$.

Неявные функции, определяемые системой уравнений

1. Случай функции одной переменной.

Пусть система $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$

задает неявно две функции одного переменного $y(x)$, $z(x)$.

Подставим их в уравнения системы, получим

$$\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) = 0, \\ \Phi(x, y(x), z(x)) = 0. \end{cases}$$

Дифференцируем эти тождества по переменной x по правилу производной сложной функции

$$\begin{cases} F'_x + F'_y \cdot y'(x) + F'_z \cdot z'(x) = 0, \\ \Phi'_x + \Phi'_y \cdot y'(x) + \Phi'_z \cdot z'(x) = 0. \end{cases}$$

Это система линейных уравнений относительно неизвестных $y'(x)$ и $z'(x)$:

$$\begin{cases} F'_y \cdot y'(x) + F'_z \cdot z'(x) = -F'_x, \\ \Phi'_y \cdot y'(x) + \Phi'_z \cdot z'(x) = -\Phi'_x. \end{cases}$$

то система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{D(F,\Phi)}{D(x,z)} : \frac{D(F,\Phi)}{D(y,z)}; \qquad z'(x) = \frac{dz}{dx} = -\frac{D(F,\Phi)}{D(y,x)} : \frac{D(F,\Phi)}{D(y,z)}.$$

2. Случай функции многих переменных.

Рассмотрим функции $z_1 = z_1(x_1,\ldots,x_n), \ldots, z_m = z_m(x_1,\ldots,x_n)$, заданные системой уравнений

$$\begin{cases} F_1(z_1,\ldots,z_m, x_1,\ldots,x_n) = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \\ F_m(z_1,\ldots,z_m, x_1,\ldots,x_n) = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Решением этой системы является набор функций, таких, что при подстановке их в систему все уравнения обращаются в тождество.

Введем понятие <u>определителя Якоби</u> – это определитель, составленный из частных производных. Он уже использовался в предыдущем пункте.

$$\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(z_1,\ldots,z_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial z_m} \\ . & . & . \\ \frac{\partial F_m}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{vmatrix}$$

В обозначении определителя Якоби сверху указываются функции, от которых вычисляются производные, а снизу переменные, по которым дифференцируются эти функции. Этот определитель также называется якобиан.

<u>Теорема о существовании и единственности неявных функций, определяемых системой функциональных уравнений.</u>

Пусть выполняются следующие условия:

1) функции $F_1(z_1,...,z_m,x_1,...,x_n),...,F_m(z_1,...,z_m,x_1,...,x_n)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0(z_1^0,...,z_m^0,x_1^0,...,x_n^0)$;
2) функции $F_1(z_1,...,z_m,x_1,...,x_n),...,F_m(z_1,...,z_m,x_1,...,x_n)$ обращаются в ноль в точке $M_0(z_1^0,...,z_m^0,x_1^0,...,x_n^0)$;
3) $\dfrac{D(F_1,...,F_m)}{D(z_1,...,z_m)}(M_0) \neq 0.$

Тогда для любых достаточно малых положительных $\varepsilon_1,...,\varepsilon_m$ найдётся $\delta > 0$, такое, что для всякого значения переменной $x = (x_1,...,x_n)$ из $\delta -$окрестности точки $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$ существуют и единственны функции $z_1 = z_1(x_1,...,x_n),\ ...\ , z_m = z_m(x_1,...,x_n)$, такие что:
1) выполняются неравенства $\left|z_1 - z_1^0\right| < \varepsilon_1,\ ...\ , \left|z_m - z_m^0\right| < \varepsilon_m$;
2) эти функции являются решением системы $(*)$;
3) функции непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки M_0.

Вычисление частных производных функций $z_i = z_i(x_1,...,x_n),\ i = 1,...,m,$ определяемых системой $(*)$, можно производить двумя способами.
Первый способ. Дифференцируем каждое уравнение системы $(*)$ по переменной x_l. По правилу сложной функции получаем
$$\frac{\partial F_i}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial x_l} + \frac{\partial F_i}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial z_2}{\partial x_l} + ... + \frac{\partial F_i}{\partial z_m}\cdot\frac{\partial z_m}{\partial x_l} + \frac{\partial F_i}{\partial x_l} = 0 \quad (i = 1,...,m).$$
Это система линейных уравнений относительно переменных $\dfrac{\partial z_1}{\partial x_l},...,\dfrac{\partial z_m}{\partial x_l}$.
Если определитель этой системы (якобиан) $\dfrac{D(F_1,...,F_m)}{D(z_1,...,z_m)} \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера
$$\frac{\partial z_k}{\partial x_l} = -\frac{D(F_1,...,F_m)}{D(z_1,...,z_{k-1},x_l,z_{k+1},...,z_m)} : \frac{D(F_1,...,F_m)}{D(z_1,...,z_m)}.$$
Второй способ. Можно брать дифференциалы от правой и левой частей каждого из уравнений системы $(*)$. Получим систему уравнений относительно переменных $dz_1,...,dz_m$. Так как $dz_i = \dfrac{\partial z_i}{\partial x_1}\cdot dx_1 + ... + \dfrac{\partial z_i}{\partial x_n}\cdot dx_n$, то найдя дифференциалы, мы найдём частные производные.
Пример. Функции $u(x,y,z),\ v(x,y,z)$ удовлетворяют системе уравнений:
$$\begin{cases} uv = 3x - 2y + z, \\ v^2 = x^2 + y^2 + z^2. \end{cases}$$

1) Найти частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}$.

2) Доказать, что выполняется тождество $x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

Решение. Возьмём дифференциалы от правой и левой частей каждого из уравнений системы:

$$\begin{cases} d(uv) = d(3x - 2y + z), \\ d(v^2) = d(x^2 + y^2 + z^2). \end{cases}$$

Получим относительно переменных dx, dy, dz систему уравнений:

$$\begin{cases} vdu + udv = 3dx - 2dy + dz, \\ vdv = xdx + ydy + zdz. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы выражаем $dv = \frac{x}{v}dx + \frac{y}{v}dy + \frac{z}{v}dz$.

Учитывая формулу полного дифференциала $dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$,

находим частные производные $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{v}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{v}, \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{z}{v}$.

Подставив в первое уравнение системы дифференциал dv, получим

$$vdu = \left(3 - \frac{ux}{v}\right)dx - \left(2 + \frac{uy}{v}\right)dy + \left(1 - \frac{uz}{v}\right)dz.$$

Учитывая формулу полного дифференциала $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$,

находим частные производные $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3v - ux}{v^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2v + uy}{v^2}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{v - uz}{v^2}$.

Пункт 1) задания сделан.

Для проверки пункта 2) подставим найденные частные производные в левую часть доказываемого тождества:

$$x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x(3v - ux) - y(2v + uy) + z(v - uz)}{v^2} =$$

$$= \frac{v(3x - 2y + z) - u(x^2 + y^2 + z^2)}{v^2}.$$

Учитывая первоначальные уравнения системы, получаем требуемое тождество. Пункт 2) доказан.