Пространство R^n. Его линейная структура.

Рассмотрим пространство R^n, элементами кот. явл. набор чисел X=(X_1,X_2,…,X_n). Если n=2, то рассм. пространство двухмерное, если n=3, то трехмерное.

Пусть X=(X_1,X_2,…,X_n), Y=(Y_1,Y_2,…,Y_n). Тогда линейное пространство обладает след. св-ми:

Св-ва сложения:

1) Ассоциативность

(X+Y)+Z=(Y+Z)+X

2)∃ нейтрального эл-та

$\exists\ \vec{0}=(0,...,0)\in R^n\ \forall\in R^n\ X+\vec{0}=X$

3)∃ противоположного эл-та

$\forall X=(X_1,X_2,...,X_n)\in R^n$

$\exists\ -X=(-X_1,...,X_n)$

$X+(-X)=\vec{0}$

4)Коммутативность

$\forall X,Y\in R^n\ X+Y=Y+X$

Св-ва умножения на число

1)Ассоциативность

$(\lambda\cdot\mu)X=\lambda\cdot(\mu X)$

2)∃ нейтрального эл-та

$\exists\,1\in R^n\ ,\forall X\in R^n$

$1\cdot X=X$

3)Дистрибутивность

$(\lambda+\mu)X=\lambda X+\mu X$

$\lambda(X+Y)=\lambda X+\lambda Y$

Если эти два действия выполняются, то R^n– линейное векторное пространство.

Линейная зависимость и линейная независимость

Векторы $\vec{X},\vec{Y},...,\vec{Z}$ – линейно зависимы, если $\exists\ \lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\in R$ такие, что $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\neq 0$, а $\lambda_1\vec{X}+\lambda_2\vec{Y}+...+\lambda_n\vec{Z}=0$. Векторы $\vec{X},\vec{Y},...,\vec{Z}$ – линейно независимы, если $\exists\ \lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\in R$, такие, что $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n=0$, а $\lambda_1\vec{X}+\lambda_2\vec{Y}+...+\lambda_n\vec{Z}=0$. Примером линейно независимых векторов могут служить базисные вектора:

$\vec{e}_1=(1,0,...,0);\vec{e}_2=(0,1,0,...,0);\vec{e}_n=(0,...,0,1)$

Размерность пространства – максимальное число линейно независимых векторов.

Базис – любой набор из максимального числа линейно независимых векторов. $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ – стандартный базис в R^n.

Пусть $\vec{X}=(X_1,X_2,...,X_n)$ – произвольный вектор из R^n. Тогда этот вектор представим в виде комбинации:

$$\vec{X}=X_1\vec{e}_1+X_2\vec{e}_2+...+X_n\vec{e}_n$$

$$\vec{X}-X_1\vec{e}_1-X_2\vec{e}_2-...-X_n\vec{e}_n=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{X},\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n-\text{ëèí. çàâèñ.}$$

Откуда $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ – система из максимального числа лин. независ. векторов.

Скалярное произведение, норма, метрика в R^n

Скалярное произведение.

Пусть $\vec{X}=\{X_1,X_2,...,X_n\},\vec{Y}=\{Y_1,Y_2,...,Y_n\}$.

Тогда $(\vec{X}\cdot\vec{Y})=(X_1Y_1+X_2Y_2+...+X_nY_n)$.

Евклидово пространство – линейное векторное пространство, в кот. введена операция скалярного произведения.

Св-ва скалярного произведения.

1)Коммутативность

$(\vec{X}\cdot\vec{Y})=(\vec{Y}\cdot\vec{X})$

2)Однородность

$\lambda(\vec{X}\cdot\vec{Y})=(\lambda\vec{X}\cdot\vec{Y})$

3)Дистрибутивность

$(\vec{X}+\vec{Y},\vec{Z})=(\vec{X},\vec{Z})+(\vec{Y},\vec{Z})$

4)Невырожденность

$(\vec{X},\vec{Y})=0\Leftrightarrow\vec{X}=0$

Норма.

$\|\vec{X}\|=\sqrt{(\vec{X},\vec{X})}$

Нер-во Коши-Буниковского

$|(\vec{X},\vec{Y})|\le\|\vec{X}\|\cdot\|\vec{Y}\|$

Док-во:

$(\lambda x-y,\lambda x-y)\ge 0\ \forall\lambda\in R$

$\lambda^2(x,x)-2\lambda(x,y)+(y,y)\ge 0$

$\text{åñëè}\ \lambda=0,\text{òî íåð-âî âåðíî}$

$\text{åñëè}\ \lambda\neq 0,\text{òî íåð-âî êâàäð. èíî}$

$\text{îíî âûï. ïðè}\ \lambda\in R$

$\Rightarrow D=(2(x,y))^2-4(x,y)(y,y)\le 0$

$(x,y)^2\le(x,x)(y,y)$

$\sqrt{(x,y)^2}\le\sqrt{(x,x)}\cdot\sqrt{(y,y)}$

$|(x,y)|\le\|x\|\cdot\|y\|$

Св-ва нормы.

1) $\|x\|\ge 0$

2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$

3) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

Метрика.

$\rho(x,y)=\|x-y\|$ – метрика (расстояние между эл-ми X и Y.

Св-ва метрики.

1)Неотрицательность:

$\rho(x,y)\ge 0$

2)Симметрия

$\rho(x,y)=\rho(y,x)$

3)Нер-во треугольника:

$\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$

4)Невырожденность:

$\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$

Открытые и замкнутые множ-ва в R^n, огранич. и неогранич. множ-ва в R^n.

$B(a,r)$ – открытый шар = $\{x\in R^n/\rho(x,a)<r\}$

$B[a,r]$ – замкнутый шар = $\{x\in R^n/\rho(x,a)\le r\}$

Опр. Пусть множ-во $X\subset R^n$, тогда x–внутренняя точка множ-ва X, если найдётся открытый шар с центром в точке x, целиком лежащий в окрестности множ-ва X.

$\exists B(x,\varepsilon):B(x,\varepsilon)\subset X$

Опр. Множ-во X назыв. открытым, если каждая его точка внутренняя.

Пример: Пусть дан шар $B(a,r)=\{x\in R^n/\rho(a,x)<r\}$. Покажем, что оно открыто. Возьмём любую точку $x\in B(a,r)$ и найдём ε >0 такое, что $B(x,\varepsilon)\subset B(a,r)$.

$\varepsilon=r-\rho(a,x)$.

Пусть

$y\in B(x,\varepsilon)\Leftrightarrow\rho(y,x)<\varepsilon$

$\rho(a,y)\le\rho(y,x)+\rho(x,a)<r-\rho(x,a)+$

$+\rho(x,a)=r\Leftrightarrow y=B(a,r)$

Замкнутое множество.

Множ-во явл. замкн., если его дополнение открыто:

Опр. X–замкнуто, если дополнение CX=R^n\X – открыто.

Пример: $B[a,r]$ – замкнутый шар.

$CB[a,r]=\{x\in R^n/\rho(a,x)>r\}$

Опр. Множ-во X – ограничено, если оно содержится в нек. замкнутом шаре.

X – огран. в R^n, если $\exists B[a,r]:X\subset B[a,r]$

X – неогран. в R^n, если

$\forall B[a,r]:X\setminus B[a,r]\neq\varnothing$

Компакт в пространстве R^n – замкнутое и огранич. множ-во (пример – замкн. шар).

Функции нескольких переменных, определение и график.

$f:D\to R;D\subset R^n$

Числовые функции – правило, по кот. каждому эл-ту из множва $D\in R^n$ (D – обл. определения) соответствует одно и только одно число.

График функции двух переменных.

$Gr\,f=\{(x,y,f(x,y))/(x,y)\in D\}$

Предел функции и непрерывность.

$f:D\to R,D\in R^2$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)=A$

Опр. A предел f(x,y) при x→a, y→b, если для ∀ ε-окрестности A найдётся δ-окрестность точек a,b, такая, что для всех значений из обл. определения функции, попадающей в δ-окрестность a,b значения функции попадают в ε-окрестность a,b.

Пусть a,b – числа. A∈расш. числ. прямой.

$B((a,b),\delta)=\left\{(x,y)\in R^2\mid\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\right\}$

По Коши:

$A\in R,\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall(x,y)\in D$

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\Rightarrow|f(x,y)-A|<\varepsilon$

По Гейне:

$\forall\{x_n,y_n\}_{n\in N}\subset D$

$(x_n,y_n)\to(a,b)\Rightarrow f(x_n,y_n)\to A$

Св-ва пределов:

1)Если предел существует, то он единственный.

Док-во: Предположим, что ∃ два разных предела:

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)=A$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)=B,\ \ A\neq B$

Зафиксируем ε >0. Тогда:

$1)\exists\delta_1>0\ \forall(x,y)\in D$

$(x,y)\in B((a,b),\delta_1)\Rightarrow|f(x,y)-A|<\varepsilon$

$2)\exists\delta_2>0\ \forall(x,y)\in D$

$(x,y)\in B((a,b),\delta_2)\Rightarrow|f(x,y)-B|<\varepsilon$

Тогда для $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ выполняются оба нер-ва $\forall(x,y)\in B((a,b),\delta)$.

Предположим

$$\varepsilon=\frac{|B-A|}{2}=\left|\left(\frac{B-f(x,y)}{2}\right)+\left(\frac{A+f(x,y)}{2}\right)\right|\le$$

$$\le\left|\frac{B-f(x,y)}{2}\right|+\left|\frac{f(x,y)-A}{2}\right|<\varepsilon$$

Получили явное противоречие ⇒ предположение о неединственности предела неверно и предел единственен.

2)Если f(x,y) в точке (a,b) имеет конечный предел, то она ограничена в некоторой окрестности точки (a,b).

Если

$$\exists\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)=A\in R,\text{òî}\ \exists B((a,b),r)$$

такая, что $\exists M\in R\ \ |f(x,y)|<M$.

$$\forall(x,y)\in B((a,b),r)$$

3)Если $\exists\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)=A\in R$ и $\exists\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}g(x,y)=B\in R$, то

$$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}(f(x,y)+g(x,y))=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)+\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}g(x,y)=A+B$$

$$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)\cdot g(x,y)=A\cdot B$$

$$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{A}{B},\ \text{åñëè}\ B\neq 0$$

4)Предел композиции:

Если $f:D_1\to D_2;D_1\in R^2;D_2\in R$, $g:D_2\to D_3\subset R$. Тогда определена композиция: $g(f(x,y))$.

Если $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)=A,\lim\limits_{z\to A}g(z)=B$, тогда

$$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}g(f(x,y))=B$$

Непрерывность.

Опр. $f(x,y)$ непр. в точке (x_0,y_0) если $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

По Коши: $f(x,y)$ – непр. в точке (x_0,y_0) если

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \text{òàêîå, ÷òî}\ \forall(x,y)\in B((x_0,y_0),\delta)\Rightarrow$

$\Rightarrow|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$

По Гейне: Пусть $\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ – приращение функции, тогда функция $f(x,y)$ – непрерывна в точке (x_0,y_0) если

$$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\Delta f=0$$

Св-ва функций, непр. в точке:

1)Если две функции непрерывны в точке, тогда их сумма, произведение или частное также непрерывная функция.

2)Если f(z), g(x,y) – непрерывны в точке, то их композиция f(g(x,y)) также непрерывна.

3)Функция непр. на множ-ве, если она непрерывна в каждой точке этого множ-ва.

Св-ва функций непрерывных на компакте:

1)Непрерывный образ компакта – есть компакт.

2)Если функция непрерывна на компакте, то она ограничена.

3)Если функция непрерывна на компакте, то она достигает своего sup и inf.

4)Если функция непрерывна на компакте, то она равномерно непрерывна на нём.

Опр. Функция f(x,y) непр. на компакте K если:

$\forall(x_0,y_0)\in K,\ \ \forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta=\delta(\varepsilon,(x_0,y_0))>0$

$\forall(x,y)\in K,(x,y)\in B((x_0,y_0),\delta)\Rightarrow$

$\Rightarrow|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$

Опр. Функция f(x,y) равномерно непр. на компакте K, если:

$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \ \forall(x_1,y_1)\in K\ \ \forall(x_2,y_2)\in K$

$\forall\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))<\delta\Rightarrow$

$\Rightarrow|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$

Из равномерной непрерывности всегда следует непрерывность, а вот обратное не всегда верно, но если функция ограничена на компакте, то ⇒ она равномерно непрерывна на нём.

Дифференцируемость функции в точке.

Понятие производной для функции многих переменных не определяется, вместо этого существует понятие частной производной.

Опр. Частной производной функции f(x,y) называется предел отношения частного приращения функции к соотв. приращению переменной, стремящемуся к нулю.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

Дифференцируемость.

Функция f(x,y) дифференцируема в точке (x_0,y_0) если её приращение представимо в виде главной и линейной части(дифференциал) и б.м более высокого порядка чем норма вектора составленного из приращения переменной, т.е

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\overline{o}(\|h\|)$$

где A,B – некот. числа, $\vec{h}=\{\Delta x,\Delta y\};\|\vec{h}\|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

Необходимое условие дифференцируемости:

Если функция f(x_0,y_0) дифференцируема в точке, тогда:

1) f(x,y) непр. в этой точке,

2) ∃ частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=A$, $\frac{\partial f}{\partial y}=B$

Док-во:

1)По условию

$$\Delta f=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\overline{o}(\|h\|)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta f=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\overline{o}(\|h\|)\right)=0$$

⇒ ф-я по определению непрерывна.

2)Если Δy = 0, то: $\vec{h}=\{\Delta x,0\}$; $\|\vec{h}\|=|\Delta x|$. Из определению дифференцируемости:

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)=A\cdot\Delta x+\overline{o}(|\Delta x|)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\cdot\Delta x+\overline{o}(|\Delta x|)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overline{o}(|\Delta x|)}{\Delta x}=A$$

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Схема исследования на дифференцируемость:

1) Вычисл. частные производные:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

2)Записываем предполагаемый дифференциал:

$df=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

3)Проверяем условие дифференцируемости:

$\lim\limits_{\|h\|\to 0}\frac{\Delta f-df}{\|h\|}=0$

Th достаточное условие дифференцируемости:

Пусть у функции f(x,y) ∃ $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) и $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в (x_0,y_0), тогда функция дифференцируема в (x_0,y_0).

Док-во: Проверяем дифференцируемость функции по схеме:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y$$

Покажем, что выполняются условия дифференцируемости:

$$\frac{\Delta f-df}{\|h\|}\to 0(h\to 0);\|h\|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$\Delta f-df=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y;$$

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$$

$$=(f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0))+$$

$$+(f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0))=$$

$$=[\text{÷àñò íûå ïðèðàù åíèÿ}]=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)\Delta x$$

$$\left|\frac{\Delta f-df}{\|h\|}\right|=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)\Delta x-}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$$\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y}{...}\le$$

$$\le\left|\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|+$$

$$+\left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)\Delta x-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|=$$

$$=\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|\cdot\frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+$$

$$+\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|\cdot\frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$$

$$\frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\le 1;\frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\le 1$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|\to 0$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|\to 0$$

⇒ф-я дифференцируема в точке (x_0,y_0).

Приближённые вычисления с помощью дифференциала.

Пусть функция f(x,y) дифференцируема в точке (x_0,y_0). Тогда приращение функции можно записать в виде:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+\overline{o}(\|h\|)$$

При малых приращениях последнее слагаемое мало, откуда можем записать:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y$$

Геометрический смысл частной производной и дифференциала.

Пусть z = z(x,y). Графиком функции z(x,y) явл. нек. поверхность. y=y_0 – есть уравнение плоск-ти при фиксированном значении y_0. Пусть (x_0, y_0, z(x_0,y_0)) – точка, лежащая на нек. кривой, образ. пересечением пов-ти z=z(x,y) с плоск-ю y=y_0. Тогда $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=tg\gamma$ – тангенс угла наклона касательной к полученной кривой в точке (x_0,y_0,z(x_0,y_0)). Таким образом уравнение касательной плоскости(плоскости, прох. через две касательные прямые) приобретает вид:

$$z=z_0+\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=z_0+dz$$

Как видно из ур-я кас. плоскости: $dz=z-z_0$, т.е геометрический смысл дифференциала состоит в том, что он равен приращению аппликаты кас. плоскости к поверхности в точке (x_0,y_0,z(x_0,y_0)).

Уравнение нормали к пов-ти заданной явно:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)}=-(z-z_0)$$

Уравнение кас. плоскости к пов-ти заданной неявно:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0)+$$

$$+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)=0$$

Уравнение нормали к пов-ти, заданной неявно:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$$

Производная сложной функции.

Th. Пусть $z(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0); $x=x(t)$, $y=y(t)$ – дифференцируемы в точке t_0. $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$, тогда $z=(x(t),y(t))$ – тоже дифференцируема в t_0 и производная вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Док-во: $\frac{dz}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}$. Дадим точке t_0 приращение Δt, при этом функции $x(t)$, $y(t)$ также получат приращения: $\Delta x=x(t_0+\Delta t)-x(t_0)$, $\Delta y=y(t_0+\Delta t)-y(t_0)$, $\Delta z=z(t_0+\Delta t)-z(t_0)=z(x(t_0+\Delta t),y(t_0+\Delta t))-z(x(t_0),y(t_0))$. Поскольку $z(x,y)$ дифференцируема в т. (x_0,y_0), то приращения функции представимы в виде:

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+\overline{o}(\|h\|)$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\Delta y}{\Delta t}+\frac{\overline{o}(\|h\|)}{\Delta t}$$

$$if\quad \Delta t\to 0\quad then$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{o}(\|h\|)}{\Delta t}$$

Покажем, что последнее слагаемое стремиться к нулю:

$$\left|\frac{\overline{o}(\|h\|)}{\Delta t}\right|=\left(\frac{\overline{o}(\|h\|)}{\|h\|}\right)\cdot\frac{\|h\|}{|\Delta t|}=0\cdot\frac{\|h\|}{|\Delta t|}$$

$$\frac{\|h\|}{|\Delta t|}=\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{|\Delta t|}=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\to$$

$$\to\sqrt{x'^2(t_0)+y'^2(t_0)}\to \text{÷èñëó}$$

$$0\cdot\text{÷èñëî}=0$$

В итоге получим:

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Частный случай: формула полной производной:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Слож. ф-я многих переменных:

Пусть задана функция: $\begin{cases}z=z(x,y)\\x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$, причём $z=z(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0), а ф-ции $x(u,v)$, $y(u,v)$ диффереӵ. в точке u_0,v_0. Где $x_0=x(u_0,v_0)$, $y_0=y(u_0,v_0)$. Тогда:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)$$

Инвариантность формы полного дифференциала первого порядка. Правила вычисления дифференциала.

Пусть $z=z(x,y)$, при этом x,y–независимые переменные, тогда:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Пусть теперь $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$. Тогда:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)du+$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)+$$

$$+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Св-во инвариантности дифференциала первого порядка заключается в том, что он имеет один и тот же вид не зависимо от того являются ли x,y – независимыми переменными, либо в свою очередь зависят от каких либо переменных u,v.

Св-ва дифференциала:

$$1)\,d(c\cdot f)=c\cdot df$$
$$2)\,d(f+g)=df+dg$$
$$3)\,d(f\cdot g)=g\cdot df+f\cdot dg$$
$$4)\,d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\cdot df-f\cdot dg}{g^2}$$

Производная от неявной функции.

Пусть ф-я $y(x)$ задана неявно ур-м $F(x,y)=0$, тогда:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Док-во: $F(x,y)=0$, $y=y(x)$. Продифференцируем след. уравнение: $F(x,y(x))=0$: $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$. Выражая производную от $y(x)$ получим:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Градиент. Производная по направлению. Их геометрический смысл.

Градиент – вектор, составленный из частных производных функции.

Производная по направлению. Рассмотрим функцию $F(x,y,z)$. Зафиксируем точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, а $M(x,y,z)$ – произвольная точка. $\vec{l}=M_0M$. Производной в напр. **l** называется:

$$\frac{\partial F}{\partial l}=\lim_{M\to M_0}\frac{F(M)-F(M_0)}{|M_0M|}.$$

Частная производная – частный случай производной по направлению в направлении координатных осей.

Теорема 1. Если ф-я $F(x,y,z)$ дифференц. в точке (x_0,y_0,z_0), тогда $\exists$ производная по любому направлению, исходящему из этой точки, причём:

$$\frac{\partial F}{\partial l}=\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cdot\cos\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\cdot\cos\beta+$$
$$+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\cdot\cos\gamma$$

Док-во:

$|M_0M|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$. Запишем уравнение луча M_0M в параметрическом виде: $\begin{cases}x=x_0+t\cdot\cos\alpha\\y=y_0+t\cdot\cos\beta\\z=z_0+t\cdot\cos\gamma\end{cases}$, тогда вектор **$M_0M$** представим в виде: $|M_0M|=\sqrt{t^2\cos^2\alpha+t^2\cos^2\beta+t^2\cos^2\gamma}=t$. В этом случае:

$$\frac{\partial F}{\partial l}=\lim_{t\to 0}\frac{F(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-F(x_0,y_0,z_0)}{t}=$$
$$=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma$$

Теорема 2. Производная в направлении градиента равна длине градиента:

Док-во:

$$gradF=\left\{\frac{\partial F}{\partial x};\frac{\partial F}{\partial y};\frac{\partial F}{\partial z}\right\}$$

$$\cos\alpha=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{|gradF|};\cos\beta=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{|gradF|};\cos\gamma=\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{|gradF|}$$

$$\frac{\partial F}{\partial l}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{|gradF|}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{|gradF|}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{|gradF|}=$$

$$=\frac{1}{|gradF|}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right)=\frac{|gradF|^2}{|gradF|}=|gradF|$$

Теорема 3. В заданной точке производная по направлению достигает своего наибольшего значения в направлении градиента.

Док-во: Пусть **h** – единичный вектор в направлении **l**. $\vec{h}=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$. Производную в направлении **l** можно представить в виде: $\frac{\partial F}{\partial l}=(gradF;\vec{h})$. По неравенству Коши-Буниковского:

$$(gradF;\vec{h})\le|gradF|\cdot|\vec{h}|$$

$$|gradF|\cdot|\vec{h}|\cdot\cos\theta\le|gradF|\cdot|\vec{h}|$$

где θ - угол между вектором направления и градиентом. Если векторы направления и градиент сонаправлены, то угол $\theta=0$, $\Rightarrow$ $\mathrm{Cos}\theta=1$ и нер-во превращается в равенство и $\Rightarrow$ Производная максимальна.

Геометрический смысл градиента: Пусть функция двух переменных $F(x,y)=0$ задаёт неявно нек. кривую $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$, тогда: $\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=0$, $\Rightarrow$ вектора $\left\{\frac{\partial F}{\partial x};\frac{\partial F}{\partial y}\right\}$ и $\left\{\frac{\partial x}{\partial t};\frac{\partial y}{\partial t}\right\}$ – ортогональны, $\Rightarrow$ Градиент – вектор нормали к кривой в данной точке.

Геометрический смысл производной по направлению: Производная по направлению численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой, образованной пересечением поверхности с плоскостью, в которой одновременно лежит прямая, проходящая через вектор направления и прямая, параллельная оси Oz, к прямой, проходящей через вектор направления.

Производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.

Производная второго порядка – это производная от производной 1-го порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

При некоторых условия смеш. производные равны.

Теорема о равенстве смешанных производных.

Пусть ф-я $f(x,y)$ имеет в некот. окрестности точки (x_0,y_0) все частные производные 1-го и 2-го порядков, кроме того смеш. производные непрерывны в точке (x_0,y_0), тогда смеш. производные в т. (x_0,y_0) равны.

Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных.

Пусть у функции $f(x,y)$ $\exists$ частные производные любого порядка $\Rightarrow$ смеш. производные 2-го порядка равны, т.к произв. 2-го порядка дифференцируемы, а $\Rightarrow$ и непрерывны. Дифференциал 2-го порядка – это дифференциал от дифференциала 1-го порядка.

$$d^2f=d(df)$$

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy$$

$$dx,dy-const$$

$$d^2f=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy\right)dx+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy\right)dy=$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)dxdy+$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)dy^2=$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)dxdy+$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)dy^2$$

Можно записать в общем виде:

$$d^n=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n$$

Св-во инвариантности для дифференциалов высших порядков в общем случае не выполняется:

Пусть $x=x(t)$,$y=y(t)$, тогда:

$$d^2f=d(df)=d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)=d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx\right)+$$
$$+d\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)=d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx+\frac{\partial f}{\partial x}d^2x+d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x}d^2x+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y\right)$$

Если последняя скобка равна нулю, то инвариантность выполняется, что возможно лишь в том случае если зависимости $x(t)$,$y(t)$ являются линейными.

Формула Тейлора для функций многих переменных:

$\exists$ ф-ю $F(x,y)$ у кот. в нек. окр-ти точки (x_0,y_0) $\exists$ частные производные 1-го, 2-го, (n+1)-го порядков, причём произ-я (n+1)-го порядка непрерывна в т.(x_0,y_0) (для $\exists$ дифференциала). Тогда формула Тейлора в точке (x_0,y_0) имеет вид:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)+$$
$$+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)+...+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y,\Delta x,\Delta y),0<\theta<1$$

Экстремум. Необходимые и достаточные условия экстремума.

Опр. Точка (x_0,y_0) – точка локального Max функции $z=z(x,y)$, если $\exists$ $B((x_0,y_0),\varepsilon)$, такое, что $\forall(x,y)\in B\Rightarrow z(x,y)\le z(x_0,y_0)$. (Если $z(x,y)\ge z(x_0,y_0)$ то это точка лок. минимума).

Опр. Точка локального экстремума – точка, кот. является либо точкой Min, либо точкой Max.

Необходимое условие т. Экстремума.

Пусть $z=z(x,y)$ дифференц. в т (x_0,y_0) и точка (x_0,y_0) – точка лок. максимума(минимума), тогда:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)=0$$

Док-во: Т.к ф-я дифференц., то по необх. условию дифференц. частные производные существуют. Запишем по определению частной производной:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z(x_0+\Delta x,y_0)-z(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

Если $\Delta x>0$ то $\frac{z(x_0+\Delta x,y_0)-z(x_0,y_0)}{\Delta x}\le 0$.

Если $\Delta x<0$ то $\frac{z(x_0+\Delta x,y_0)-z(x_0,y_0)}{\Delta x}\ge 0$

$\Rightarrow$в точке (x_0,y_0) произ-я равна нулю. Также можно сказать и про производную по y.

1-е достаточное условие Экстремума.

Пусть $z=z(x,y)$ имеет в некоторой окрестности $U((x_0,y_0),\varepsilon)$ имеет частные производные до 2-го порядка включительно, причём произв. 2-го порядка непрерывны(для $\exists$ дифференциала).

Тогда

1)если $d^2z(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)>0$ то (x_0,y_0) – точки Min.

2)если $d^2z(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)<0$ то (x_0,y_0) – точка Max.

3)если знак $d^2z(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)<0$ не определён, то (x_0,y_0) – не явл. точкой экстремума.

4)если $d^2z=0$, то требуется дополнительное исследование.

Док-во:

$$z(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=z(x_0,y_0)+\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+\frac{1}{2!}d^2z(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y,\Delta x,\Delta y)$$
$$z(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-z(x_0,y_0)=$$
$$=\frac{1}{2!}d^2z(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y,\Delta x,\Delta y)$$

Если $d^2z>0$, то $\Delta z>0$ – т. Min;

Если $d^2z<0$, то $\Delta z<0$ – т. Max.

2-е достаточное условие:

1) $\exists\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\frac{\partial^2 z}{\partial y^2};\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

2) $\frac{\partial z}{\partial x}=0;\frac{\partial z}{\partial y}=0$

Введём обозначение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=A;\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=B;\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=C$, тогда

$$\Delta=\begin{vmatrix}A&B\\B&C\end{vmatrix}$$

Тогда:

1)Если $\Delta>0$, то (x_0,y_0) – т. экстремума. при A>0 – т. Min; при A<0 – т. Max.

2)Если $\Delta<0$, то (x_0,y_0) – не явл. т. экстремума.

3)Если $\Delta=0$, то требуется доп. исследование.

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции в замкнутой и ограниченной области.

$z=z(x,y)$. D–компакт в R^2. $z(x,y)$ – непр. в области D. Ф-я непрерывная на компакте достигает своей точной верхней и нижней грани.

Схема исследования:

1)Вычисляем $\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}$. Находим критические точки (точки в кот. частные производные равны нулю или хотя бы одна из них не существует),

2)Из найденных крит. точек выбираются те, кот. попали внутрь области и вычисл. значения функции в этих точках.

3)Исследуется поведение функции на границе области. Из уравнения границы нужно выразить одну переменную через другую, подставить в уравнение функции и исследовать её на наиб. и наим. значение как функцию от одной переменной на отрезке.

4)Из всех полученных значений выбрать наиб. и наим.

Условный экстремум.

Необх. найти экстремум функции при условии уравнения связи. Пусть $z(x,y)$ – иссл. функция, $\varphi(x,y)$ – уравнение связи.

1 способ. Из уравнения связи выражаем одну переменную через другую и подставляем в уравнение функции. Затем исследуем функцию от одной переменной на экстр.

2 способ. Если нельзя выразить, то применяют метод множителей Лагранжа.

1)Пусть ф-я Лагранжа $F(x,y,\lambda)=z(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$.

2)Нах. стац. точки из системы $\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=0\\\frac{\partial F}{\partial y}=0\\\frac{\partial F}{\partial\lambda}=0\end{cases}$.

3)Если $d^2F>0$, то – т. Min, Если $d^2F<0$, то т. Max.

Теорема о существовании неявной функции.

Теорема о существовании единственной неявной функции.

Пусть:

1)$F(x,y,z)$ – непрерывна в окр-ти т. (x_0,y_0,z_0), $F(x_0,y_0,z_0)=0$.

2)$\exists$ $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)$ в окр-ти точки (x_0,y_0,z_0).

3) $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)$ – непрерывна, $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\ne 0$, тогда:

1)$\forall$ сколь угодно малого $\varepsilon>0$ $\exists$ $\delta>0$ такое, что $\forall(x,y)\in B_\delta(x_0,y_0)$ $\exists$ единственное $z=z(x,y)$, явл. решением уравнения $F(x,y,z)=0$ и $|z-z_0|<\varepsilon$.

2)$z(x,y)$ непрерывна в т. (x_0,y_0).

3)Если $F(x,y,z)$ дифференц. в т. (x_0,y_0,z_0), то $z(x,y)$ дифференц. в т. (x_0,y_0,z_0).

Особые точки поверхностей и плоских кривых.

Пусть поверхность задана неявно $F(x,y,z)=0$, $z=z(x,y)$.

Опр. Особой точкой называется такая точка, в которой все частные производные F равны нулю. В окр-ти особой точки ни одну из переменных нельзя выразить явно. В окр-ти особой точки пов-ть нельзя спроектировать однозначно не на одну из плоскостей. Например: $x^2+y^2-z^2=0$ (двуполостной конус).

Неявная функция, заданная системой функциональных уравнений.

Пусть m функций от n переменных $z_1(x_1,\ldots,x_n)$, $z_2(x_1,\ldots,x_n)$,…,$z_m(x_1,\ldots,x_n)$ заданы системой ур-й:

$$\begin{cases}F_1(z_1,...,z_m,x_1,...,x_n)=0\\...\\F_m(z_1,...,z_m,x_1,...,x_n)=0\end{cases}\qquad(***)$$

Якобиан(определитель Якоби) – определитель матрицы, составленной из частных производных.

$$\frac{\partial(F_1,...,F_m)}{\partial(z_1,...,z_m)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial z_1}&\frac{\partial F_1}{\partial z_2}&...&\frac{\partial F_1}{\partial z_m}\\\frac{\partial F_2}{\partial z_1}&\frac{\partial F_2}{\partial z_2}&...&\frac{\partial F_2}{\partial z_m}\\...&...&...&...\\\frac{\partial F_m}{\partial z_1}&\frac{\partial F_m}{\partial z_2}&...&\frac{\partial F_m}{\partial z_m}\end{vmatrix}$$

Теорема о существовании единственности решения:

Пусть выполн. след. условия:

1)Пусть функции $F_1,F_2,\ldots,F_n$ дифференц. в некот. окр-ти точки $M_0\left(\overset{0}{z_1},\overset{0}{z_2},...,\overset{0}{z_m},\overset{0}{x_1},...,\overset{0}{x_n}\right)$.

2)Значения функций: $F_1\big|_{M_0}=F_2\big|_{M_0}=...=F_m\big|_{M_0}=0$.

3) $\frac{\partial F_1}{\partial z_1},...,\frac{\partial F_1}{\partial z_m},...,\frac{\partial F_m}{\partial z_1},...,\frac{\partial F_m}{\partial z_m}$ непр. в точке M_0.

4) $\left.\frac{\partial(F_1,...,F_m)}{\partial(z_1,...,z_m)}\right|_{M_0}\ne 0$

Тогда для $\forall$ сколь угодно малых $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_m>0$ $\exists$ δ окр-ть точки M_0, в кот. $\exists!$ решение системы (***) такое, что $\left|z_1-\overset{0}{z_1}\right|<\varepsilon_1,...,\left|z_m-\overset{0}{z_m}\right|<\varepsilon_m$. $z_1,\ldots,z_m$ дифференц., т.к $\exists$ изначально условие дифф-ти.

Нахождение производной. $\frac{\partial z_i}{\partial x_l}$.

1 способ. Дифф. каждое уравнение системы по переменной x_L по правилу слож. функции:

$$\begin{cases}\frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial x_l}+\frac{\partial F_1}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial z_2}{\partial x_l}+...+\frac{\partial F_1}{\partial z_m}\cdot\frac{\partial z_m}{\partial x_l}+\frac{\partial F_1}{\partial x_l}=0\\...\\\frac{\partial F_m}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial x_l}+\frac{\partial F_m}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial z_2}{\partial x_l}+...+\frac{\partial F_m}{\partial z_m}\cdot\frac{\partial z_m}{\partial x_l}+\frac{\partial F_m}{\partial x_l}=0\end{cases}$$

Откуда решая по правилу Крамера находим:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_l}=-\frac{\frac{\partial(F_1,...,F_m)}{\partial(z_1,...,z_{i-1},x_l,z_{i+1},...,z_m)}}{\frac{\partial(F_1,...,F_m)}{\partial(z_1,...,z_m)}}$$

2 Способ. Нужно брать дифференциалы от каждого из ур-й системы (***) и из общего вида дифференциала найти ч. производную.

Замена переменных.

В ряде вопросов мат. анализа, а также в др. разделах математики часто встреч. задачи замены переменных. Пусть задана некоторая система $\begin{cases}u=u(x,y,z)\\v=v(x,y,z)\\w=w(x,y,z)\end{cases}$, где x,y–переменные, $z(x,y)$–функция. Чтобы ввести новую функцию $w(u,v)$ необходимо, чтобы система была разрешима относительно функции z, а первые два ур-я системы относит. переменных x,y. Чтобы выразить производные $\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}$ через новые переменные u,v прим. след. метод:

Выделяем дифференциал от каждого ур-я системы:

$$\begin{cases} du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz \\ dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz \\ dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz \end{cases}$$

С другой стороны:

$$dw=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv$$

Подстановкой получим:

$$\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz=\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\right)+$$
$$+\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz\right)$$

$$dz=\frac{\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial z}}dx+\frac{\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial z}}dy$$

Из общего вида дифференциала находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial z}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial z}}$$

Задача о массе плоской пластины.

Пусть дана неоднородная пластина D, причём ρ(x,y) – переменная плотность. Разделим пластину на n частей, причём так, чтобы: $D=\bigcup_{i=1}^{n}D_i$, а $D_i\bigcap D_j$ имеет нулевую площадь (пересекаться могут только на границе). Пусть d_i – диаметр области D_i(наибольшее расстояние между точками, леж. внутри области). $\lambda=\mathrm{Max}_{i=1\ldots n}(d_i)$. Если λ мало, то диаметр каждой области мал и в силу непрерывности можно считать, что плотность в области D_i можно считать одинаковой. Тогда

$$m_i\approx\rho(x_i,y_i)\cdot S_{D_i}$$
$$m=\sum_{i=1}^{n}m_i\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i)\cdot S_{D_i}$$

При λ→0, то:

$$m=\lim_{\lambda\to0}\rho(x_i,y_i)\cdot S_{D_i}$$

Определение двойного интеграла.

Пусть задана произвольная функция f(x,y) на компакте D (ф-я ограничена на D). Разобьём компакт D на n частей D_i, так, что $D=\bigcup_{i=1}^{n}D_i$, а $D_i\bigcap D_j$ имеет нулевую площадь, $d_i=sup\sqrt{(x_i'-x_i'')^2+(y_i'-y_i'')^2}$, где $(x_i',x_i'')\in D_i;(y_i',y_i'')\in D_i$. Пусть $\lambda=\mathrm{Max}_{i=1\ldots n}(d_i)$ – мелкость разбиения. $\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)S_{D_i}$ – интегральная сумма, где (x_i,y_i) – произв. точка из D_i.

Если ∃ предел интегральных сумм при λ→0 и он не зависит не от разбиения, не от точки (x_i,y_i), то этот предел назыв. двойным интегралом по области D от функции f(x,y).

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)S_{D_i}$$

Через суммы Дарбу: Разобьём область D так, что $D=\bigcup_{i=1}^{n}D_i$, а $D_i\bigcap D_j$ даёт нулёвую площадь. Тогда . В этом случае:

$$M_i=\sup f(x,y);(x,y)\in D_i$$
$$m_i=\sup f(x,y);(x,y)\in D_i$$

– верх. и ниж. суммы Дарбу.

$$\overline{D}=\sum_{i=1}^{n}M_i\cdot S_i;\underline{D}=\sum_{i=1}^{n}m_i\cdot S_i$$

– верх. и ниж. дв. интегралы

$$\iint_{\underline{D}}f(x,y)dxdy=\sup(\underline{D})$$
$$\iint^{D}f(x,y)dxdy=\inf(\overline{D})$$

при мелкости разбиения стрем. к нулю.

Двойным интегралом называется предел верхних или нижних сумм Дарбу при мелкости разбиения стрем. к нулю, при условии, что в пределе они совпадают.

Геометрический смысл двойного интеграла.

Двойной интеграл по области D численно равен объёму тела, ограниченного снизу областью D на плоскости XoY, по бокам цилиндрической поверхностью ‖ оси Z и прох. через границу области D, а сверху поверхностью z=z(x,y).

Необходимое и достаточное условие интегрируемости. Свойства двойного интеграла.

Необходимое условие. Ограниченность функции на области D, т.к суммы Дарбу могут быть составлены только для ограниченных функций.

Достаточное условие. Непрерывность. Т.к если ф-я непрерывна на компакте D, то она непрерывна и на компактах D_i ⇒ в по св-ву непр. функций она достигает на каждой области D своего супремума и инфимума.

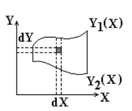
Вычисление двойного интеграла.

Опр. Элементарной областью в напр. Оy назыв. область, ограниченную снизу и сверху функциями $y_1(x)$, $y_2(x)$ соответственно и прямыми x=a, x=b по бокам.

При след. условиях: 1) Функция f(x,y) –интегрируема в области D, 2) Для ∀ фиксир. x∈[a,b] функция f(x,y) интегрируема на $[y_1(x),y_2(x)]$, 3) $y_1(x),y_2(x)$ – непрерывны на [a,b].

В случае элементарной области двойной интеграл вычисляется по формуле: .

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy$$



Док-во: (На примере массы пластины). Выделим элементарную пластину dxdy. Если dxdy малы, f(x,y) в силу непрерывности можно считать постоянной. f(x,y)dxdy – масса элементарной площадки, тогда: $dx\cdot\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)dy$ – масса элементарной пластинки, а $\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy$ – масса всей пластины.

Криволинейные интегралы I-го и II-го рода.

Криволинейный интеграл 1-го рода. Рассмотрим кривую $\gamma:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}t\in[a;b]$. Пусть x(t), y(t) дифференц. на [a,b] и их производные непр. на [a,b], кроме быть может конечного числа точек. $(x'(t))^2+(y'(t))^2>0$ при всех t∈[a,b], кроме конечного числа точек. γ – кусочно-гладкая кривая. Пусть f(x,y) определена в некот. области D, γ∈D. Рассмотрим разбиение кривой γ конечным набором точек. $A=A_0,A_1,A_2,\ldots,A_n=B$. Внутри каждого участка кривой выберем точку с координатами $(\xi_K,\eta_K)\in\cup A_{K-1}A_K$. Составим сумму $\sum_{k=1}^{n}f(\xi_K,\eta_K)\Delta S_K$, где ΔS_K – длина участка кривой $A_{K-1}A_K$. $\Delta S=\mathrm{Max}(\Delta S_K)$.

Если ∃ предел сумм при ΔS→0 и этот предел не зависит не от разбиения, не от точек (ξ_K,η_K), то этот предел называется криволинейным интегралом 1-го рода от функции f(x,y) по кривой γ.

$$\int_\gamma f(x,y)dS=\lim_{\Delta S\to0}\sum_{K=1}^{n}f(\xi_K,\eta_K)\Delta S_K$$

Физический смысл криволин. интеграла 1-го рода.

Если функцию f(x,y) трактовать как плотность кривой в каждой точке (x,y), то при малых ΔS плотность в каждой точке можно считать постоянной. $f(\xi_K,\eta_K)\cdot\Delta S_K\approx m_{\cup A_{K-1}A_K}$, тогда $\sum_{k=1}^{n}f(\xi_K,\eta_K)\Delta S_K\approx m$, а ⇒ $\int_\gamma f(x,y)dS=m$.

Вычисление криволин. интеграла 1-го рода.

$$\gamma:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}t\in[a;b]$$
$$dS=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$$
$$\int_\gamma f(x,y)dS=\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$$

×àñòí û é ñëó÷àé:

$$\gamma:y=y(x),x\in[a,b]$$
$$\int_\gamma f(x,y)dS=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(t))^2}dx$$

Св-ва криволин. интеграла 1-го рода.

1)Значение интеграла не зависят от направления крвой:

$$\int_{AB}f(x,y)dS=\int_{BA}f(x,y)dS$$

2)Линейность

$$\int_\gamma(\alpha f(x,y)+\beta g(x,y))dS=\alpha\int_\gamma f(x,y)dS+\beta\int_\gamma g(x,y)dS$$

3)Аддитивность по кривой:

$$\int_{\gamma_1+\to\gamma_2}f(x,y)dS=\int_{\gamma_1}f(x,y)dS+\int_{\gamma_2}f(x,y)dS$$

4)Если f(x,y)≥0 ∀ (x,y)∈γ, то

$$\int_\gamma f(x,y)dS\geq0$$

5)

$$\left|\int_\gamma f(x,y)dS\right|\leq\int_\gamma|f(x,y)|dS$$

6)Теорема о среднем:

Если f(x,y) – непрерывна на γ, то ∃ точка (x_0,y_0)∈γ такая, что:

$$\int_\gamma f(x,y)dS=f(x_0,y_0)\cdot l(\gamma)$$

Криволинейный интеграл 2-го рода.

Пусть задана кривая $\gamma:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}t\in[a;b]$ причём на кривую накладываются условия такие же как и для крив. интеграла 1-го рода. Возьмём произвольное разбиение кривой точками $A=A_0,A_1,\ldots,A_{K-1},A_K,\ldots,A_n=B$, причём $A_0(x_0,y_0)$, $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2),\ldots,A_K(x_K,y_K),\ldots,A_n(x_n,y_n)$.

$\Delta x_K=x_K-x_{K-1}$, K=1,…,n

$\Delta y_K=y_K-y_{K-1}$, K=1,…,n

ΔS – Максимум длин дуг $\cup A_{K-1}A_K$, K=1,…,n. Выберем внутри каждой дуги $\cup A_{K-1}A_K$ точку (ξ_K,η_K). Пусть заданы функции P(x,y), Q(x,y) – непрерывные в области D, γ∈D. Составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n}\left(P(\xi_K;\eta_K)\cdot\Delta X_K+Q(\xi_K;\eta_K)\cdot\Delta Y_K\right)$$

Если ∃ предел интегральных сумм при ΔS→0 и он не зависит не от разбиения, не от точек (ξ_K,η_K), то он называется криволинейным интегралом 2-го рода:

$$\int_\gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

Физический смысл криволин. интеграла 2-го рода.

Можно рассматривать как работу силы $\vec{F}(x,y)=\{P(x,y);Q(x,y)\}$ по перемещению материальной точки вдоль кривой γ.

Св-ва криволин. интеграла 2-го рода.

1)Зависимость от направления кривой:

$$\int_{-\gamma}Pdx+Qdy=-\int_\gamma Pdx+Qdy$$

2)Линейность.

3)Аддитивность по кривой.

Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода.

$$\gamma:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}t\in[a;b]$$
$$\int_\gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$
$$=\int_a^b P(x(t),y(t))x'(t)dt+Q(x(t),t(t))y'(t)dt$$

Положительным направлением обхода считается обход против часовой стрелки.

Формула Грина.

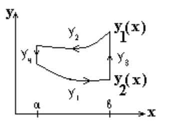
Связывает криволинейный интеграл 2-го рода по замкнутому контуру с двойным интегралом по области D, ограниченной этим контуром.

Пусть D – область ограниченная кусочно-гладким контуром γ. Направление обхода γ положительно.

Пусть в области D заданы некоторые непрерывные функции P(x,y), Q(x,y), причём непрерывны также их частные производные $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x};\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$. Тогда:

$$\int_{\gamma+}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Док-во:

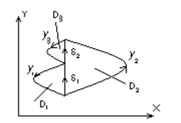


1)Покажем, что $\iint_D-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_{\gamma+}P(x,y)dx$. Пусть D – элементарная область в направлении оси OY.

$$\iint_D-\frac{\partial P}{\partial x}dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}-\frac{\partial P}{\partial x}dy=\int_a^b dx\left(-P(x,y)\right)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}=$$
$$=-\int_a^b P(x,y_2(x))dx+\int_a^b P(x,y_1(x))dx=$$
$$=\int_{\gamma_1}P(x,y)dx+\int_{\gamma_2}P(x,y)dx$$

Добавим интегралы по контурам γ_3, γ_4. x=b⇒dx=0 .

$$\int_{\gamma_3}P(x,y)dx=0$$
$$\iint_D-\frac{\partial P}{\partial x}dxdy=\int_{\gamma_2}Pdx+\int_{\gamma_4}Pdx+\int_{\gamma_1}Pdx+\int_{\gamma_3}Pdx=$$
$$=\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4}Pdx=\int_{\gamma+}Pdx$$



2)Пусть D – произвольная область, но разбивается на конечное число элементарных областей.

$$\iint_D-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy=\iint_{D_1}-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy+\iint_{D_2}-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy+$$
$$+\iint_{D_3}-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy=\int_{\gamma_1+\delta_1}Pdx+\int_{-\delta_1+\gamma_2-\delta_2}Pdx+\int_{\delta_1+\gamma_3}Pdx=$$
$$=\int_{\gamma_1+\delta_1-\delta_1+\gamma_2-\delta_2+\delta_2+\gamma_3}Pdx=\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}Pdx=\int_{\gamma+}Pdx$$

Аналогичным образом доказывается

$$\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\int_{\gamma+}Qdy$$

Также аналогично доказывается для элементарной области в направлении Ox.

Площадь фигуры в криволинейных координатах.

1) Площадь фигуры через двойной интеграл.

(док-во через суммы Дарбу).

$$S=\iint_D dxdy$$

2)Площадь через криволинейный интеграл.

По формуле Грина: $\int_{\gamma+}Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,\ \text{ãäå}\ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\right)=1$. В частности:

$$S=\int_{\gamma+}xdy;S=\int_{\gamma+}-ydx;\frac{1}{2}\int_{\gamma+}xdy-ydx$$

3)Площадь в криволинейных координатах.

Понятие криволинейных координат.

Пусть задана СК Oξη и заданы формулы перехода к декартовым СК: $\begin{cases}x=x(\xi,\eta)\\y=y(\xi,\eta)\end{cases}$. В СК Oξη $\frac{\partial x}{\partial\xi};\frac{\partial x}{\partial\eta};\frac{\partial y}{\partial\xi};\frac{\partial y}{\partial\eta}-\text{Í åï ðåðû âí û}$. задана область Δ→D с границей γ. Будем считать, что Якобиан перехода $I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi}&\frac{\partial x}{\partial\eta}\\\frac{\partial y}{\partial\xi}&\frac{\partial y}{\partial\eta}\end{vmatrix}\neq0$. При этом можно найти зависимость ξ, η через x,y. Если Якобиан положителен, то при переходе γ’ к γ направление сохраняется, а если отрицателен, то меняется на противоположное.

Пусть на плоскости Oξη задана прямоугольная сетка координат, образованная прямыми ξ=const, η=const. ξ=C ⇒ $\begin{cases}x=x(c,\eta)\\y=y(c,\eta)\end{cases}$, y(x) задана параметрически, где η – параметр. При отображении семейство прямых ξ=const переходят в семейство кривых на плоскость XoY. Аналогично и для η=const. Таким образом на плоскости XoY задаётся криволинейная сетка координат.

Площадь фигуры в криволин. СК.

Пусть площадь вычисляется по формуле: $S=\int_{\gamma+}xdy$.

Зададим новую кривую $\gamma':\begin{cases}\xi=\xi(t)\\\eta=\eta(t)\end{cases}t\in[a,b]$. При этом γ-образ кривой γ’ также задаётся параметрически: $\gamma:\begin{cases}x=x(\xi(t),\eta(t))\\y=y(\xi(t),\eta(t))\end{cases}t\in[a,b]$.

Подставляя в исх. формулу получим:

$$S=\int_a^b x(\xi(t),\eta(t))dy(\xi(t),\eta(t))=$$
$$=\int_a^b x(\xi(t),\eta(t))\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt}+\frac{\partial y}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{dt}\right)dt=$$
$$=\int_a^b x(\xi(t),\eta(t))\frac{\partial y}{\partial\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt}dt+\int_a^b x(\xi(t),\eta(t))\frac{\partial y}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{dt}dt=$$
$$=\int_{\gamma+}x(\xi(t),\eta(t))\frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi+x(\xi(t),\eta(t))\frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta=$$
$$=[\text{ô – ëà Ãðèí à}]=$$
$$=\pm\iint_\Delta\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(x(\xi(t),\eta(t))\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(x(\xi(t),\eta(t))\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right)d\xi d\eta=$$
$$=\pm\iint_\Delta\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\eta}+x\cdot\frac{\partial^2y}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial y}{\partial\xi}-x\cdot\frac{\partial^2y}{\partial\eta\partial\xi}\right)d\xi d\eta=$$
$$=\iint_\Delta|I|d\xi d\eta$$

Замена переменных в двойном интеграле.

Пусть $\begin{cases}x=x(\xi,\eta)\\y=y(\xi,\eta)\end{cases}$ – формула перехода к новой СК. $\frac{\partial x}{\partial\xi};\frac{\partial x}{\partial\eta};\frac{\partial y}{\partial\xi};\frac{\partial y}{\partial\eta}$ – непрерывны в некоторой области Δ.

Δ, D – компакты (D – образ Δ). f(x,y) – непрерывна на D.

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_\Delta f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))\cdot|I|d\xi d\eta$$
$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi}&\frac{\partial x}{\partial\eta}\\\frac{\partial y}{\partial\xi}&\frac{\partial y}{\partial\eta}\end{vmatrix}$$

Док-во: Т.к f(x,y) – непрерывна на D, то она равномерно непрерывна на нём. ∀ε>0 ∃δ>0 $\forall(x_1,y_2)\in D$ $\forall(x_2,y_2)\in D$. Из того, что $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))<\delta$ ⇒ $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|>\varepsilon$. Возьмём разбиение области D так, что $D=\bigcup_{i=1}^{n}D_i$, а $D_i\bigcap D_j$ даёт нулевую площадь.

Пусть $d_i<\delta$ – диаметр области. Преобразуем левую часть формулы:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\sum_{i=1}^{n}\iint_{D_i}f(x,y)dxdy=[\text{ò. î ñðåäí åì}]=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\cdot S_{D_i}=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\cdot\iint_{\Delta_i}|I|d\xi d\eta;$$

Преобразуем правую часть:

$$\iint_\Delta f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))|I|d\xi d\eta=\sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta_i}f(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i)|I|d\xi d\eta$$

Оценим разность между левой и правой частью:

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy-\iint_\Delta f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))\cdot|I|d\xi d\eta\right|=$$
$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta_i}\left(f(x_i,y_i)-f(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i)\right)\cdot|I|d\xi d\eta\right|\leq$$
$$\leq\sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta_i}|f(x_i,y_i)-f(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i)|\cdot|I|d\xi d\eta<$$
$$<[\text{â ñèëó í åï ðåðû âí î ñò è}]<\sum_{i=1}^{n}\varepsilon\cdot S_D=\varepsilon\cdot S_D$$

Т.к ε – сколь угодно мало, то разность в формуле равна нулю, что и требовалось доказать.

Понятие площади поверхности.

Пусть задана поверхность z=z(x,y). (x,y)∈D, D∈R^2. Пусть ∃ $\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}$ и они непрерывны в области D.

Функция дифференцируема в области D ⇒ в каждой точке ∃ касат. плоскость. Рассмотрим разбиение области D на конечное число областей (T-разбиение), причём так, что $D=\bigcup_{i=1}^{n}D_i$, а $D_i\bigcap D_j$ – даёт нулевую площадь. В каждой области D_i выберем точку $(x_i,y_i)\in D_i$. Проведём кас. плоскость в каждой точке $(x_i,y_i,z(x_i,y_i))$. В кас. плоскости выберем такую область D'_i, которая проектируется на область D_i. $\sigma(T)=\sum_{i=1}^{n}S_{D_i'}$ – площадь многогранника. $\lambda=\mathrm{Max}(d_i)$, d_i–диаметр области. Если ∃ предел сумм площадей и он не зависит не от разбиения, не от точек (x_i,y_i), то этот предел называется площадью поверхностью.

$$\sigma=\lim_{\lambda\to0}\sigma(T)\quad\sigma=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}S_{D_i'}$$

Площадь проекции. Вычисление площади поверхности заданной явно.

1)Площадь проекции. Пусть плоскость XoY’ наклонена к плоскости XoY под углом γ. В плоскости XoY’ выделим область D’. Из каждой точки D’ опускаем перпендикуляр на XoY(D – проекция D’ на XoY). Найдём формулы перехода от координат XoY’ к XoY: $\begin{cases}x=x'\\y=y'\cos\gamma\end{cases}$. Найдём Якобиан перехода .

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial x'}&\frac{\partial x}{\partial y'}\\\frac{\partial y}{\partial x'}&\frac{\partial y}{\partial y'}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0\\0&\cos\gamma\end{vmatrix}=\cos\gamma$$

$$S_D=\iint_{D'}|I|dx'dy'=|\cos\gamma|\cdot\iint_{D'}dx'dy'=|\cos\gamma|\cdot S_{D'}$$

2) Площадь поверхности. Пусть z=z(x,y), (x,y)∈D. ∃
– непрерывны в D. Тогда:

$$\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}dxdy$$

Док-во: По определению , где

$$\sigma = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} S_{D_i'} \qquad D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$$

– разбиение области D, D'_i – область в касательной плоскости, проведённой в точке $(x_i,y_i,z(x_i,y_i))$, $(x_i,y_i)\in D_i$, такая, что D_i – проекция D'_i на плоскость XoY.

По предыдущ. пункту: .

$$S_{D_i} = \left|\cos\gamma_i\right| \cdot S_{D_i'} \;\Rightarrow\; S_{D_i'} = \frac{S_{D_i}}{\left|\cos\gamma_i\right|}$$

Найдём Cosγ', где γ' – угол между кас. плоскостью и плоскостью XoY. Запиш. ур-е касат. плоскости:
.

$$z = z(x_i,y_i) + \frac{\partial z}{\partial x}(x_i,y_i)(x-x_i) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_i,y_i)(y-y_i)$$

Найдём векторы нормалей к касат. плости и к плоскости XoY:
, тогда:

$$\vec{N}_1\left\{\frac{\partial z}{\partial x}(x_i,y_i),\frac{\partial z}{\partial y}(x_i,y_i),-1\right\};\vec{N}_2\{0,0,-1\}$$

$$\cos\gamma_i = \frac{\left(\vec{N}_1;\vec{N}_2\right)}{\left|\vec{N}_1\right|\cdot\left|\vec{N}_2\right|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_i,y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x_i,y_i)\right)^2 + 1}}$$

$$S_{D_i'} = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_i,y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x_i,y_i)\right)^2 + 1} \cdot S_{D_i}$$

$$\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x_i,y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x_i,y_i)\right)^2 + 1} \cdot S_{D_i}$$

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}dxdy$$

Площадь поверхности, заданной параметрически.

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \quad (u,v)\in D \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

∃ все частные производные x,y,z и они непрерывны в области D. Найдём . Возьмём дифференциалы:

$$\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv \\ dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial x}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + 0\cdot dz = dx \\ \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + 0\cdot dz = dy \\ \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv - 1\cdot dz = 0 \end{cases}$$

По формуле Крамера найдём dz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & -1 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = -C$$

$$\Delta_{dz} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & dx \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & dy \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = dx\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} - dy\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$dz = -\frac{A}{C}dx + \frac{B}{C}dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{A}{C};\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{B}{C}.$$

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\cdot dxdy$$

$$dxdy = |C|dudv$$

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}dudv$$

Запишем в др. форме:

$$\vec{r}(u,v) = \{x(u,v);y(u,v);z(u,v)\}$$

$$\vec{r}_u = \left\{\frac{\partial x}{\partial u};\frac{\partial y}{\partial u};\frac{\partial z}{\partial u}\right\};\vec{r}_v = \left\{\frac{\partial x}{\partial v};\frac{\partial y}{\partial v};\frac{\partial z}{\partial v}\right\}$$

Векторы $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ лежат в касат. плоскости ⇒ вектор нормали можно найти

$$\vec{N} = [\vec{r}_u;\vec{r}_v]$$

$$\vec{N}^2 = |\vec{r}_u|^2\cdot|\vec{r}_v|^2\cdot\sin^2(\vec{r}_u ? \vec{r}_v) = |\vec{r}_u|^2\cdot|\vec{r}_v|^2\cdot(1-\cos^2\varphi) =$$

$$= |\vec{r}_u|^2\cdot|\vec{r}_v|^2 - (\vec{r}_u;\vec{r})^2$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

$$\vec{N}^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{|\vec{r}_u|^2\cdot|\vec{r}_v|^2 - (\vec{r}_u;\vec{r}_v)^2}dudv$$

$$|\vec{r}_u|^2 = E;|\vec{r}_v|^2 = G;(\vec{r}_u;\vec{r}_v) = F$$

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}dudv$$