ДОМАШНЯЯ КОНТРОЛЬНАЯ ПО “ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ”

1. Даны три попарно независимых события, которые не могут произойти одновременно. Определить максимально возможное значение вероятности суммы этих событий.

2. Вероятность поступления k вызовов на телефонную станцию за время t равна $P_k(t)$. Количества вызовов за любые два соседних промежутка времени независимы. Составить функциональное уравнение для определения функции $P_k(t)$. Проверить, что функция:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},\ \lambda > 0$$

служит решением этого уравнения.

3. В схеме Бернулли с параметрами n и p введем случайную величину ξ_i – длительность серии ”неуспехов”, предшествующей i-ому успеху. Для определенности фиктивное $(n+1)$-ое испытание будем считать успешным. Одинаково ли распределены случайные величины ξ_i?

4. Доказать, что если ξ и η связаны линейной зависимостью $\eta = a\xi + b$, то

$$r_{\xi\eta} = \left\{ \begin{array}{rl} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{array} \right| .$$

5. Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены на интервале $(0,1)$. Найти математическое ожидание и дисперсию модуля их разности $\zeta = |\xi - \eta|$.

6. На свадьбу пришло $2n$ гостей, причем одинаковое количество женщин и мужчин. Гостей посадили за круглый стол. Какова вероятность, что каждый из гостей будет окружен лицами другого пола?

7. В урне m белых и n черных шаров. Из урны вынимают $2k$ шаров ($2k < m$, $2k < n$). Найти вероятность того, что среди них будет больше белых, чем черных.

8. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет в ”яблочко” мишени, равна 0.2, а в остальную часть мишени – 0.5. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах четыре пули окажутся в ”яблочке” и 4 – в остальной части мишени.

9. Из урны, в которой находятся два белых и три черных шара, вынимается сразу два шара. Найти математическое ожидание и дисперсию числа появившихся при этом белых шаров.

10. Предположим, что совместное распределение n случайных величин такого, что коэффициент корреляции между любыми двумя из них равен ρ. Доказать, что
$$\rho \geq \frac{1}{1-n}.$$

11. Случайная точка A равномерно распределена на единичной сфере с центром в начале координат. Найти закон распределения проекций точки A на экваториальную плоскость и полярную ось сферы.

12. На отрезке AB длины L наудачу поставлены две точки M и N. Определить вероятность того, что длины каждого из трех образовавшихся отрезков не превосходят заданной величины α $(L/3 < \alpha < L)$.

13. Из чисел $1, 2, \ldots, n$ одно за другим выбирают наугад два числа. Какова вероятность того, что разность между первым и вторым выбранным числом будет не меньше $m \quad (m > 0)$?

14. Пусть μ_k -k-ый центральный момент случайной величины ξ. Доказать, что
$$\mu_4\mu_2 - \mu_3^2 \geq \mu_2^3.$$

15. Задана плотность распределения случайного вектора (ξ, η)
$$f_{\xi\eta}(x,y) = \left\{ \begin{array}{cc} \sin(x+y)/2, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{array} \right| ,$$
где $D = \{(x,y) : x \in [0, \pi/2], \quad y \in [0, \pi/2]\}$. Найти математические ожидания и дисперсии составляющих ξ,η.

16. Неотрицательные случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют одинаковые плотности вероятности $f_{\xi_i}(x) = e^{-x} \cdot 1(x)$. Найти плотность вероятности случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$.

17. Смешаны две группы деталей, содержащие n_1 и n_2 деталей каждая. Число бракованных деталей в каждой группе (ξ и η соответственно) имеет биномиальное распределение:
$$P\{\xi = k\} = C_{n_1}^k p^k q^{n_1-k}, \qquad k = 0, 1, ...n_1,$$

$$P\{\eta = k\} = C_{n_2}^k p^k q^{n_2-k}, \qquad k = 0, 1, ...n_2.$$

Найти ряд распределения с.в. $\zeta = \xi + \eta$.

18. Что вероятнее выиграть у равносильного противника:

    а) три партии из четырех или пять из восьми?

    б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти из восьми?

19. Определить условия, при которых третий центральный момент биномиальной случайной величины равен нулю.

20. Пусть каждая из случайных величин ξ и η принимает ровно два значения. Доказать, что из равенства $M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta$ следует независимость ξ и η.

21. Неотрицательные случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют одинаковые плотности вероятности $f_{\xi_i}(x) = e^{-x} \cdot 1(x)$. Найти плотность вероятности случайной величины $\eta = \min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$.

22. Пусть с.в. $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ независимы и имеют распределение Коши:

$$f_{\xi_i}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2} \qquad (a > 0), \quad i = 1, 2, ...n.$$

Как распределена с.в. $\eta = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i / n$?

23. Определить вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом, начиная с 00001.

24. Интенсивность грозовых разрядов ξ аппроксимируется логарифмически нормальным распределением

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\beta x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\beta^2} (\ln x - a)^2\right\} \cdot 1(x).$$

Найти $M\xi$ и $D\xi$.

25. Неотрицательные случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют одинаковые плотности вероятности $f_{\xi_i}(x) = e^{-x} \cdot 1(x)$. Найти плотность вероятности случайной величины $\eta = \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$.

26. На вход радиолокационного устройства с вероятностью p поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью $(1-p)$ - только одна помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует наличие какого-то сигнала с вероятностью p_1 (вероятность пропуска цели - $(1-p_1)$); если только помеха, то с вероятностью p_2 (ложная тревога). Известно, что устройство зарегистрировало наличие какого-то сигнала. Найти вероятность того, что в возмущении, поступившем на вход радиолокационного устройства, действительно имеется полезный сигнал.

27. Вероятность того, что частица на участке пути $[l, l+dl]$ столкнется с другой частицей равна λdl. Найти функцию распределения длины свободного пробега (без столкновений) ξ, а также ее математическое ожидание и дисперсию.

28. Двумерный дискретный случайный вектор (т.е. вектор, компонентами которого служат дискретные случайные величины) удобно задавать таблицей вероятностей его возможных значений. Дана таблица вероятностей для совокупности двух дискретных случайных величин ξ и η:

$\xi\backslash\eta$	-1	0
0	$1/4$	$5/12$
1	$1/6$	$1/6$

Найти коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$.

29. Случайный вектор (ξ, η) имеет нормальное распределение с параметрами $(0, 0, \sigma^2, \sigma^2, 0)$. Найти закон распределения полярных координат (ρ, φ) вектора (ξ, η).

30. Найти вероятность того, что корни квадратного уравнения $x^2 + 2ax + b = 0$ вещественны, если значения коэффициентов a, b равновозможны в квадрате $-1 \le a \le 1, -1 \le b \le 1$.

31. Доказать, что если $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \subset B$, то

$$P(B) \ge 1 + \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - n.$$

32. Из партии в 5 изделий наудачу взято одно изделие, оказавшееся бракованным. Какая гипотеза о количестве бракованных изделий в партии наиболее правдоподобна?

33. Автоматическая линия выпускает бракованное изделие с вероятностью p. Переналадка линии производится сразу после выпуска бракованного изделия. Найти среднее число всех изделий, изготовляемых между двумя переналадками.

34. Случайная величина ξ имеет плотность вероятности $f_\xi(x)$, а случайная величина η связана с ней функциональной зависимостью $\eta = \xi^2$. Найти функцию распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ совокупности случайных величин (ξ, η).

35. Компоненты скорости $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ частицы, имеющей единичную массу, независимы друг от друга и распределены нормально с параметрами $(0, a^2)$. Найти закон распределения кинетической энергии частицы W и величины скорости $|\vec{v}|$.

36. Доказать *неравенство Белла*: для $\forall A, B, C \in F$

$$P(AB) \leq P(AC) + P\left(B\bar{C}\right).$$

37. Игральная кость бросается 16 раз. Найти наивероятнейшее количество появлений числа очков, кратного трем.

38. Найти вероятность того, что при извлечении из полной колоды n игральных карт все они окажутся разных значений.

39. Доцент может добраться до института на трамвае, двигаясь в любом направлении кольцевого маршрута. Движение в обоих направлениях происходит строго по расписанию с интервалом в 5 минут. Верно ли, что вероятность поехать налево у доцента, не отличающегося пунктуальностью, равна 0.5?

40. Разыскивая специальную книгу, студент решил обойти три библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно: есть книга в ее фонде или нет. В том случае, когда книга имеется в фонде, одинаково вероятно: взята она читателем или нет. Что более вероятно – достанет студент книгу или нет, если известно, что фонды библиотек комплектуются независимо друг от друга?

41. Имеется N лунок, по которым случайным образом разбрасываются M шариков. Найти вероятность того, что в данную лунку попадет ровно k шариков.

42. Неотрицательная случайная величина ξ имеет функцию распределения $F_\xi(x)$. Доказать, что если $M\xi$ существует, то

$$M\xi = \int\limits_0^\infty \left[1 - F_\xi(x)\right] dx.$$

43. Дана таблица вероятностей совокупности двух дискретных независимых случайных величин ξ и η:

$\xi\backslash\eta$	0	1
0	α	β
1	γ	δ

Каково количество независимых элементов в данной таблице ?

44. Имеется система двух случайных величин (ξ, η) с заданной плотностью вероятности $f_{\xi\eta}(x, y)$. Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины $\zeta = \max\{\xi, \eta\}$. Рассмотреть случай независимых и одинаково распределенных по закону Коши случайных величин ξ и η:

$$f_\xi(x) = f_\eta(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

45. Найти вероятность того, что из трех наудачу взятых отрезков с длинами, не превышающими длину единичного отрезка, можно составить треугольник.

46. Источник излучения находится над поверхностью прозрачного вещества с показателем преломления $n > 1$. Найти плотность вероятности и функцию распределения случайной величины β - угла преломления луча в прозрачной среде, если все направления лучей от источника в воздухе равновероятны.

47. Электронный луч в кинескопе подвергается воздействию случайного скачкообразного напряжения таким образом, что пятно на экране за единицу времени перемещается на единичное расстояние параллельно одной из осей координат, каждый раз либо продолжая прежнее направление движения, либо меняя его на $\pm 90^0$ с вероятностями $1/3$. Найти математическое ожидание радиус-вектора пятна $\vec{\xi}(n)$ в момент n при условии, что $\vec{\xi}(0) = (0, 0)$, $\vec{\xi}(1) = (1, 0)$.

48. Система двух случайных величин ξ и η описывается плотностью вероятности $f_{\xi\eta}(x, y)$. Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины $\zeta = \min\{\xi, \eta\}$. Рассмотреть случай независимых ξ и η из датчика случайных чисел RND.

49. Случайные величины ξ и η независимы и имеют распределение Пуассона:

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad P\{\eta = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (\lambda > 0)\,.$$

Найти ряд распределения с.в. $\zeta = \xi + \eta$.

50. Из полной колоды карт (52 карты) одновременно извлекают две. Рассматриваются две случайные величины: ξ - число вынутых тузов, η - число вынутых карт красной масти. Зависимы ли случайные величины ξ и η?

51. Двое разыгрывают апельсин путем "выбрасывания" каждым из игроков пальцев на одной руке и последующего суммирования их количества. Одинаковы ли вероятности четного и нечетного количества "выброшенных" пальцев?

52. Трое игроков поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет "герб". Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

53. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0.1. Какова вероятность того, что в сообщении из 10 знаков: а) нет искажений, б) ровно три искажения, в) не более трех искажений?

54. Случайная величина ξ распределена по показательному закону:

$$f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot 1(x)\,.$$

Каким функциональным преобразованием можно превратить ее в случайную величину η, распределенную по закону Коши:

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)} \quad ?$$

55. Определить плотность вероятности суммы двух независимых с.в., каждая из которых равномерно распределена в интервале (a, b).