...тоянные токи. Электростатика

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = 0 \\ \operatorname{div}\vec{j} = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t} = 0} \operatorname{div}\vec{j} = 0$$

$\vec{j} = \sigma\vec{E} + \vec{j}^{\,ст} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^{ст})$, σ – проводимость среды

$\vec{j}^{\,ст} = \sigma\vec{E}^{ст}$

1) $\sigma \neq 0, \infty$

$\vec{E} \neq 0$

2) $\operatorname{div}\vec{j} = 0$

$\vec{j}$ – линии тока замкнуты

3) $\vec{E}^{ст}$ – вихр

$$\frac{\vec{j}}{\sigma} = \vec{E} + \vec{E}^{ст}$$

$$\oint_L \frac{\vec{j}}{\sigma}\, d\vec{l} = \underbrace{\oint_L \vec{E}\, d\vec{l}}_{=0} + \underbrace{\oint_L \vec{E}^{ст} d\vec{l}}_{=\mathcal{E}^{ст}} \text{ (сторонняя ЭДС)}$$

$\vec{E} = -\nabla\varphi$

$\operatorname{div}\vec{j} = 0$

$\operatorname{div}(-\sigma\nabla\varphi + \vec{j}^{\,ст}) = 0$

$\operatorname{div}(\sigma\nabla\varphi) = \operatorname{div}\vec{j}^{\,ст}$

$\sigma = const$

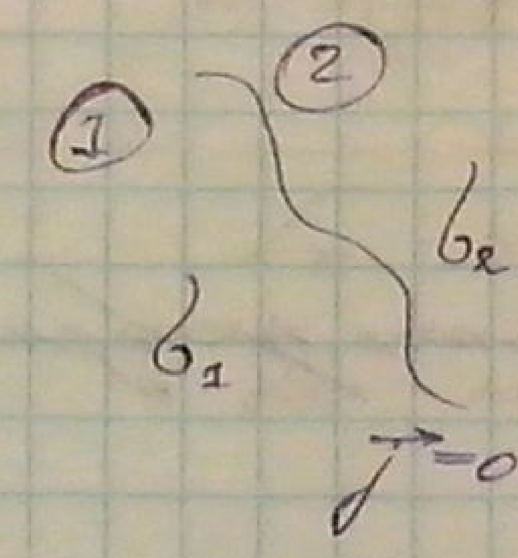
$\operatorname{div}\nabla = \Delta$

$\Delta\varphi = \frac{1}{\sigma}\operatorname{div}\vec{j}^{\,ст}$

$\vec{j}^{\,ст} = \sigma\vec{E}^{ст}$

$\Delta\varphi = \operatorname{div}\vec{E}^{ст}$

Граничные условия для плотности тока



1) $\vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}$

$\vec{j} = \sigma\vec{E}$

$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma}$

$$\boxed{\frac{\vec{j}_{1\tau}}{\sigma_1} = \frac{\vec{j}_{2\tau}}{\sigma_2}}$$

2) $\operatorname{div}\vec{j} = 0$, $\oint_S \vec{j}\, d\vec{S} = 0$

$(\vec{n}_{12}, \vec{j}_2 - \vec{j}_1) = 0$

$$\boxed{j_{1n} = j_{2n}}$$

$\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$

$\varepsilon_2 E_{2n} - E_{1n}\varepsilon_1 = 4\pi\sigma^e$

σ^e – плотн. поверхностного эл. заряда на границе раздела сред.

Примеры:

1) граница с идеальными зарядами
(идеальный изолятор)

$\sigma_2 = 0$

$\vec j_2 = \sigma_2 \vec E_2$

$\vec j_2 = 0$ ($j_{2n} = 0$)

→ $j_{1n} = 0$

→ $E_{1n} = 0$

$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0\right)$

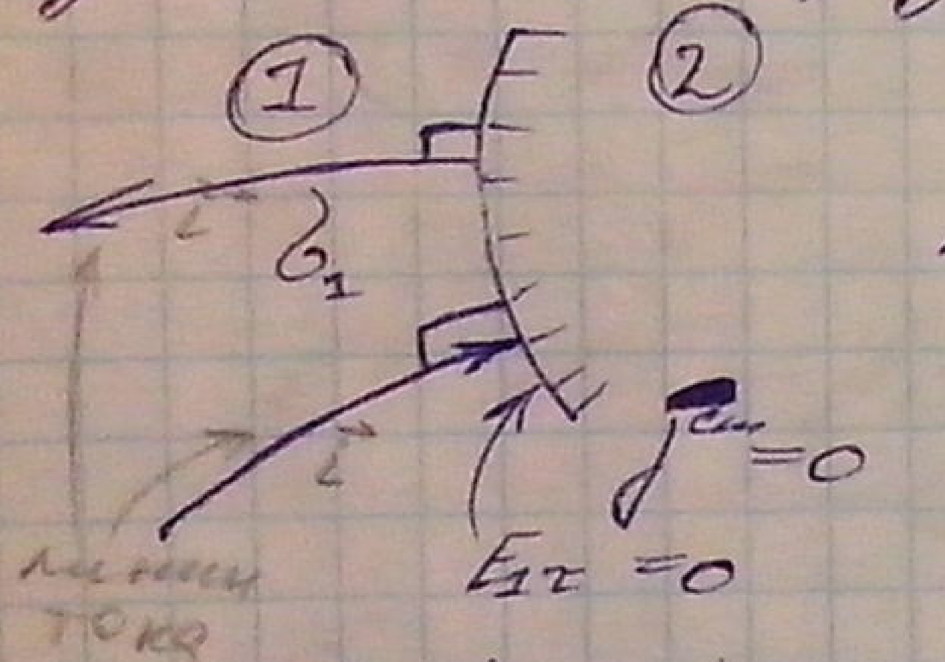
$\vec j^{ст} = 0$

$j_{1n} = 0$

$j_{1n} = \sigma E_{1n}$

$E_{1n} = 0$; $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0$

2) гр. усл. на границе идеального проводника
(идеальный электрод)



$\sigma_2 = \infty$

$\vec E_2 = 0$ ($E_{2\tau} = 0$)

$\vec j^{ст} = 0$

$E_{1\tau} = 0$

$j_{1\tau} = \sigma_1 E_{1\tau} = 0$

Формальная аналогия эл. стат и токостат.

Эл. стат.	Токост.
φ	φ
$\vec E = -\nabla\varphi$	$\vec E = -\nabla\varphi$
$\vec D = \varepsilon \vec E$	$\vec j = \sigma \vec E$
$\operatorname{div} \vec D = 0$	$\operatorname{div} \vec j = 0$
$(\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi) = 0)$	$(\operatorname{div}(\sigma\nabla\varphi) = 0)$

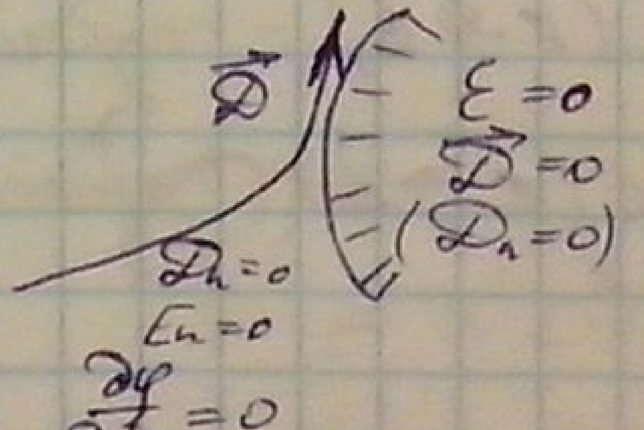
гр. условия

E_τ – непрер	E_τ – непрер
D_n – непрер	j_n – непрер

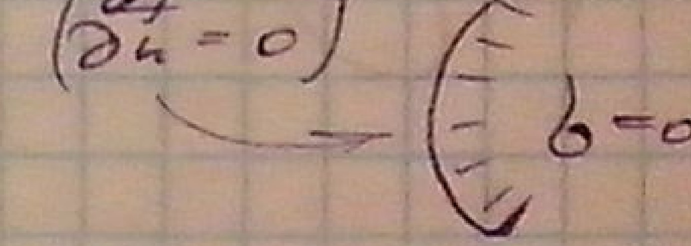
на гр. идеал. проводн

$E_\tau = 0$ ($\varphi = const$)	$E_\tau = 0$ ($\varphi = const$)
$\oint_S \varepsilon E_n dS = 4\pi Q$	$\oint_S \sigma E_n dS = I$ (*)

на гр. идеальн. изолятора



$j_n = 0$ $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0\right)$



$\vec E \rightleftarrows \vec E$

$(\varphi \rightleftarrows \varphi)$

$\vec D \rightleftarrows \vec j$

$\varepsilon \rightleftarrows \sigma$

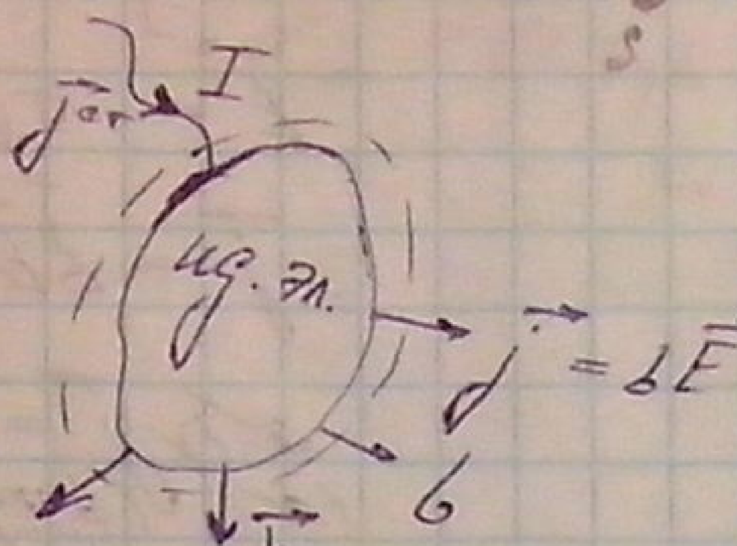
$4\pi Q \rightleftarrows I$

$\left(Q \rightleftarrows \frac{I}{4\pi}\right)$

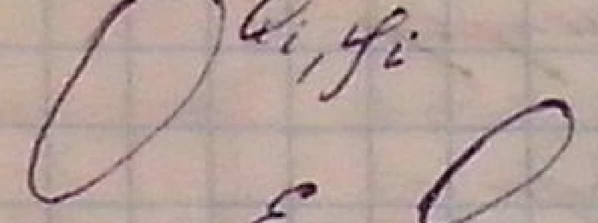
(*) $\operatorname{div}\vec j = 0$ $\int \operatorname{div}\vec j\, dV = 0$

$\oint_S \vec j\, d\vec S = 0$, $\vec j = b\vec E + \vec j^{\,ст}$

$\oint_S b\vec E\, d\vec S + \underbrace{\oint_S \vec j^{\,ст} d\vec S}_{-I} = 0 \Rightarrow \oint_S b E_n\, dS = I$



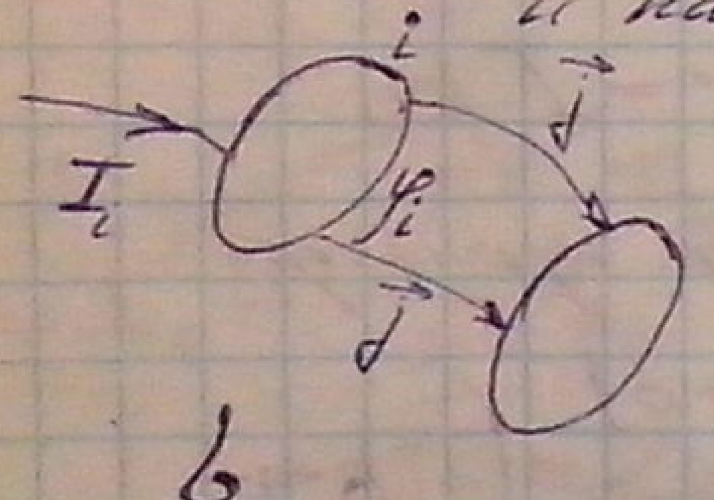
Примеры: 1) имеем набор проводников



$\varphi_i = \sum_k b_{ik} Q_k$

$Q_i = \sum_k c_{ik} \varphi_k$

и набор идеальн. электродов:



$\varphi_i = \frac{1}{4\pi} \sum_k b_{ik}(\varepsilon \to b) I_k$

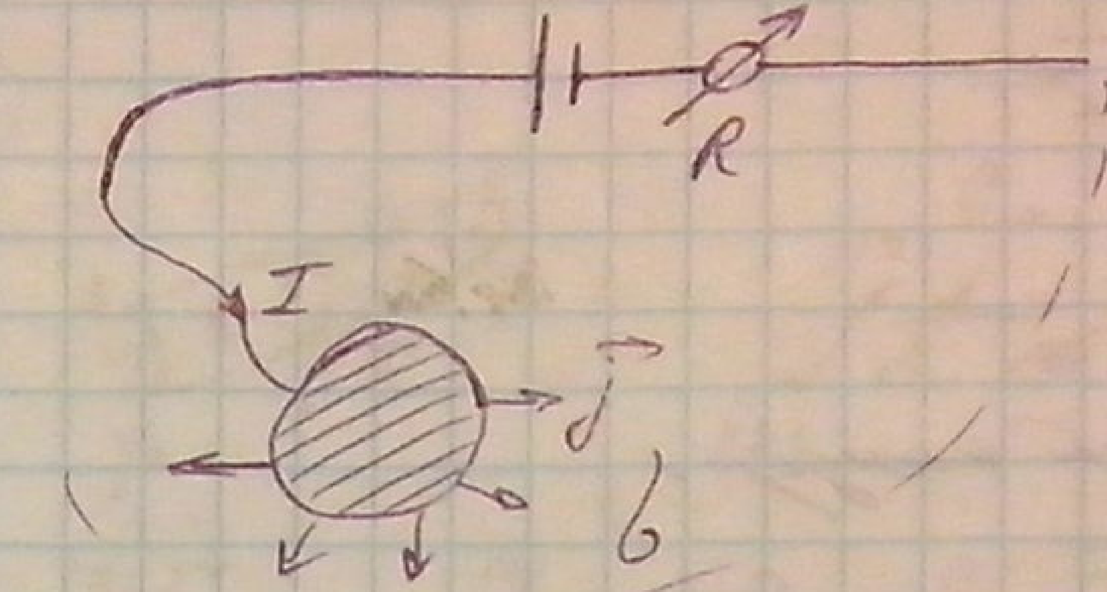
$I_i = 4\pi \sum_k c_{ik}(\varepsilon \to b) \varphi_k$

$R_{ik} = \frac{1}{4\pi} b_{ik}(\varepsilon \to b)$ – сопротивление

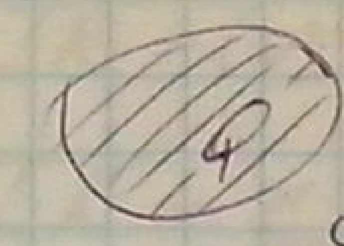
$G_{ik} = 4\pi c_{ik}(\varepsilon \to b)$ – проводимость

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_i &= \sum_k R_{ik} I_k \\ I_i &= \sum_k G_{ik} \varphi_k \end{aligned}}$$

② Задача о нахождении сопротивления между идеальн. электродом и бесконечностью.

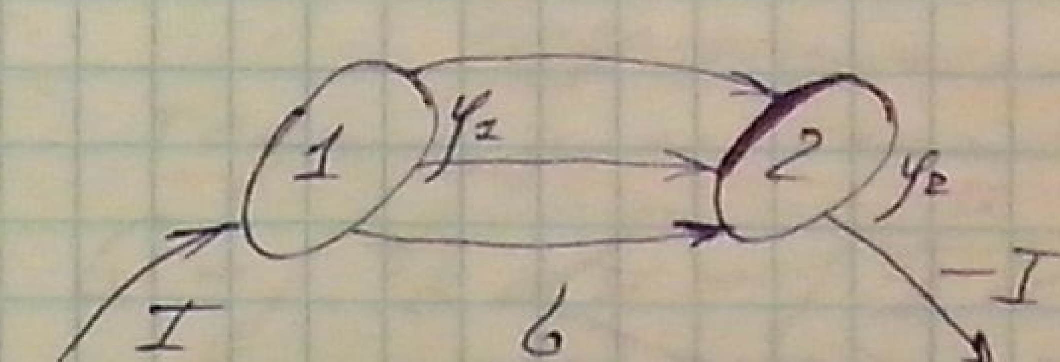


$R = \frac{\varphi}{I}$, $\varphi = \varphi - \varphi(\infty)$ $\to \frac{\varphi}{4\pi Q} = \frac{1}{4\pi C(\varepsilon)} \to \frac{1}{4\pi C(\varepsilon \to b)} = \frac{1}{4\pi b C_0}$

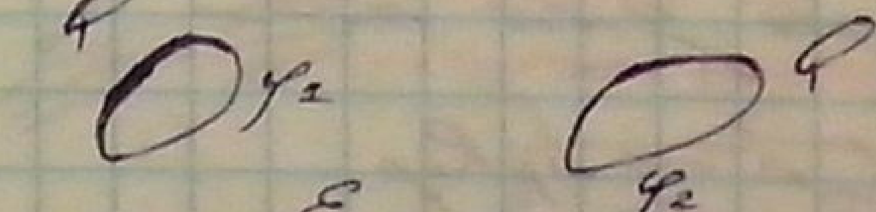


$Q/\varphi = C$ $C(\varepsilon) = \varepsilon C_0$ $\boxed{R = \frac{1}{4\pi b C_0}}$

3) Сопротивл. электролита между 2-мя идеальн. электродами.

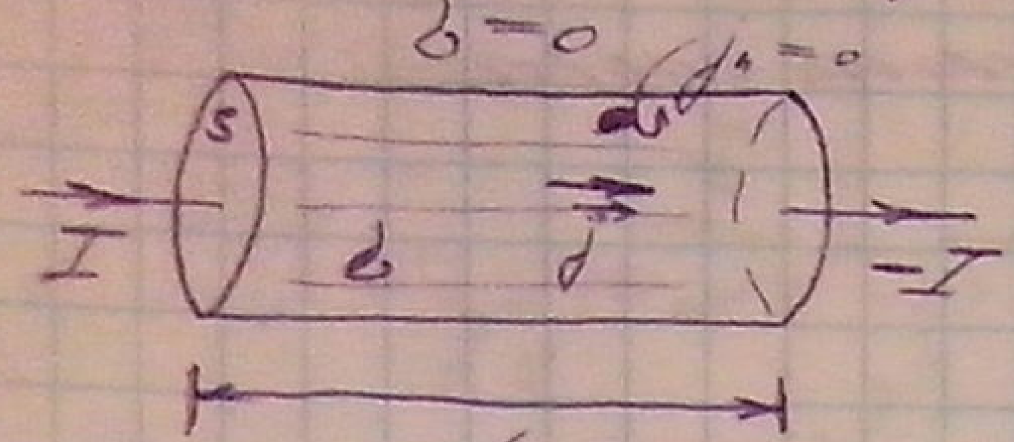


$R = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} \to \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{4\pi Q} = \frac{1}{4\pi C} \to \frac{1}{4\pi C(\varepsilon \to b)} = \frac{1}{4\pi b C_0}$

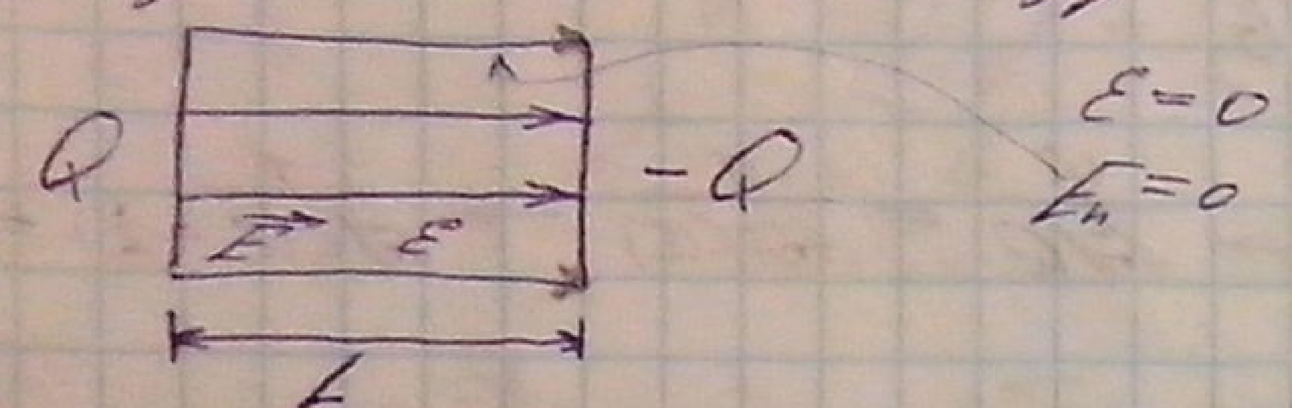


$C = \varepsilon C_0$

Сопротивление прямого провода



По сути, плоский кондер:



$C = \varepsilon \underbrace{\frac{1}{4\pi}\frac{S}{L}}_{C_0}$; $C_0 = \frac{1}{4\pi}\frac{S}{L}$

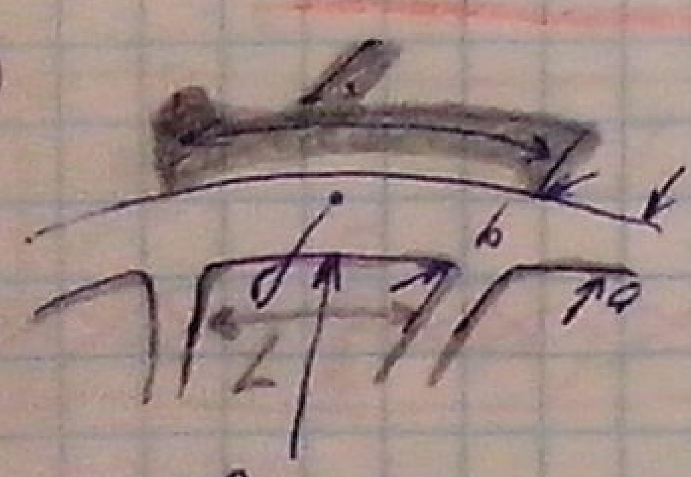
$R = \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{L}{S}$

$$\boxed{R = \frac{L}{\sigma S}}$$

$R = \frac{1}{4\pi C(\varepsilon \to \sigma)} = \frac{1}{4\pi C_0 \sigma}$

Квазилинейные проводники. Законы Кирхгофа для них.

(1)



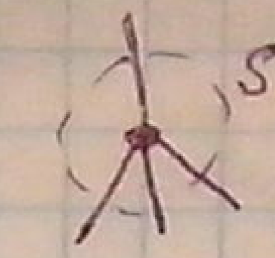
$R_{кр}$ – радиус кривизны

$a, b \ll L, R_{кр}$

$$\boxed{j = \frac{I}{S}}$$

$\operatorname{div} \vec j = 0$

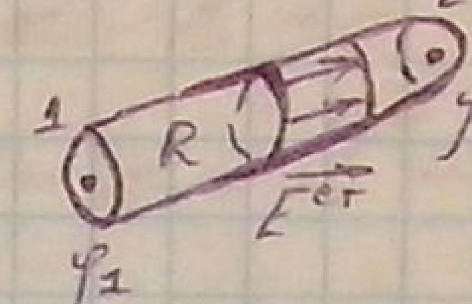
$\oint_S \vec j\, d\vec S = 0$



$\sum_k I_k = 0$ – 1-ый з. Кирхгофа

(2)

$\vec j = \sigma(\vec E + \vec E^{ст})$



$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{\vec j}{\sigma}\, d\vec l = \underbrace{\int_{(1)}^{(2)} \vec E\, d\vec l}_{\varphi_1 - \varphi_2} + \underbrace{\int_{(1)}^{(2)} \vec E^{ст}\, d\vec l}_{\mathcal{E}^{ст}_{12}}$$

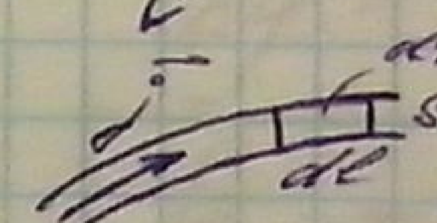
$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{\vec j}{\sigma}\, d\vec l = \int_{(1)}^{(2)} \frac{j}{\sigma}\, dl = \int_{(1)}^{(2)} \frac{1}{\sigma}\frac{I}{S}\, dl = I\int_{(1)}^{(2)} \frac{1}{\sigma}\frac{dl}{S} = IR$$

$IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}^{ст}_{12}$

$IR = \mathcal{E}^{ст} = \oint_L \vec E^{ст}\, d\vec l$ } II з. Кирхгофа

Энергетические соотношения теории пост. токов. Закон Дж.-Ленца

$$Q = \int_V \frac{\vec j^2}{\sigma}\, dv = \int_V \frac{j^2}{\sigma}\, dv = \int_V \frac{1}{\sigma}\frac{I^2}{S^2}\, \underbrace{dv}_{S dl} = I^2 \int_L \frac{1}{\sigma}\frac{dl}{S} = I^2 R$$



$$\boxed{Q = I^2 R}$$

$Q = \int_V q\, dv$

$q = \vec j \vec E = \frac{\vec j^2}{\sigma}$ – из вывода теор. Пойнтинга.