Александр Игоревич

1. Борисенко А.И., Тарапов И.Е.

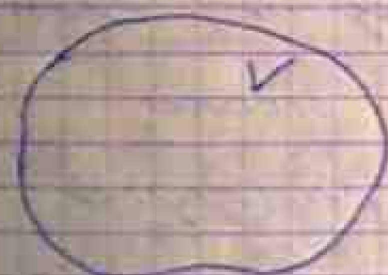
ВА и начала Т. исчисления

2. Кочин Н.Е.

В. исчисл. и начала Т. исчисления

3. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Т. исчисл.

Векторная алгебра



V - множество

a, b, c, ..., - элементы множества

1. $\forall a, b \in V$

$a + b = c \in V$

2. $\forall a \in V$

$\alpha \cdot a \in V$

$\alpha a = b \in V$ α - число

Аксиомы:

1. $a + b = b + a$
2. $(a+b)+c = a+(b+c)$
3. $\exists 0;\ a + 0 = a$

4. $\forall a \; \exists (-a)$ $\quad a+(-a)=0$

5. $1 \cdot a = a$

6. $\alpha(\beta a) = \beta(\alpha a)$ $\quad \alpha, \beta$ - числа

$= (\alpha\beta)a$

7. $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$

8. $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$

Определение: Любое множество элементов на котором введены операции сложения и умножения на число, удовлетвор. аксиомам образует линейное (векторное) пространство, соответственно сами элементы называются векторами.

$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ - многочлены образуют векторное пространство => их можно назвать векторами.

Множество действительных матриц => матрицы тоже можно назвать векторами (в т.ч. неодинаковых размеров)

Определение: N векторов называются линейно зависимыми, если существует такая нетривиальная линейная комбинация этих векторов, которая равна нулевому вектору.

$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$

1° Если векторы лин. зависимы, то один из них можно представить в виде линейной комбинации всех остальных.

2° Если из N векторов часть линейно зависима, то и все векторы лин. зависимы.

3° Если среди N векторов есть хотя бы один $\bar{0}$, то все векторы линейно зависимы.

Определение: размерностью векторного пространства называется максимальное [illegible] или приравнивать векторов

к нулю

<u>Базисом</u> векторного пространства размерности

n назыв. любую совокупность n

линейно независимых векторов

$a_1, \dots, a_n$ — базис

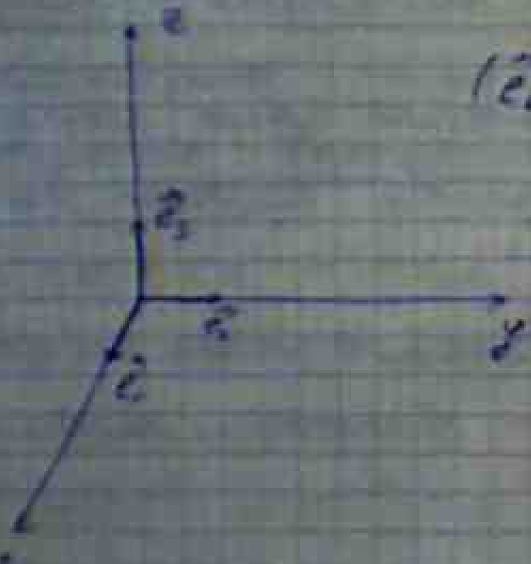
$\alpha_0 x + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0$

$\Downarrow$

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \quad \left(x_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_0}\right)$

набор коэф-тов x_i назыв. координатами

<u>Декартова</u> <u>система</u> <u>координат</u>



$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$

$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\vec{e}_i \equiv x_i\vec{e}_i$!!!

Правило Эйнштейна

По всякому индексу повторяющемуся

в выражении дважды подразумевает-

ся суммирование, а знак суммы

опускается

$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$

$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$

$(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$

$(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0$

$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$

$(\vec{x}, \vec{y}) = (x_i\vec{e}_i, y_j\vec{e}_j) = x_i y_j (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = x_i \underbrace{y_j \delta_{ij}}_{y_i} =$

$= x_i y_i$

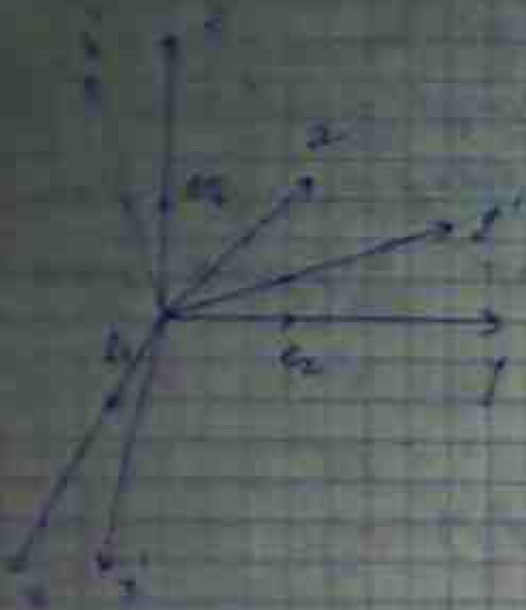
$y_j \delta_{1j} = y_1 \underbrace{\delta_{11}}_{1} + y_2 \underbrace{\delta_{12}}_{0} + y_3 \underbrace{\delta_{13}}_{0} = y_1$

Преобразование компонент

векторов при повороте системы

координат

$\vec a = a_i \vec e_i \;|\; \vec e_j \to (\vec a \, \vec e_j) = \underbrace{a_i \underbrace{(\vec e_i \, \vec e_j)}_{\delta_{ij}}}_{a_j}$



$\vec e_i \to \vec e_i'$

$\vec a = a_i' \vec e_i'$

$a_j = (\vec e_j \;\; \vec a)$

$a_i' = (\vec e_i' \cdot \vec a) = (\vec e_i' \; a_j \vec e_j) = a_j \underbrace{(\vec e_i' \cdot \vec e_j)}_{\alpha_{ij}} =$

$= \alpha_{ij} a_j$

α_{ij} – матрица поворота

$\alpha_{ij} = (\vec e_i' \cdot \vec e_j) = \cos \widehat{\vec e_i' \vec e_j}$

$a_i = \alpha_{ij} a_j \to (\vec e_i \cdot \vec a) = \alpha_{ij} (\vec e_j \cdot \vec a)$

$\vec e_i' = \alpha_{ij} \vec e_j$

$\alpha_{ij} = (\vec e_i' \cdot \vec e_j)$

$(\vec e_i' \cdot \vec e_j') = \delta_{ij}$

с другой стороны

$(\vec e_i' \cdot \vec e_j') = (\alpha_{ik} \vec e_k, \alpha_{jl} \vec e_l) =$

$= \alpha_{ik} \alpha_{jl} \delta_{kl} = \alpha_{ik} \alpha_{jk}$

$\alpha_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij}$

$\alpha_{ik} \alpha^T_{kj} = \delta_{ij}$

$(\alpha \cdot \alpha^T)_{ij} = \delta_{ij}$

$\alpha^{-1} \;|\; \alpha \cdot \alpha^T = E \to \alpha^{-1} = \alpha^T$

$a_i' = \alpha_{ij} a_j \;|\; \alpha_{ik}$

$\alpha_{ik} a_i' = \underbrace{\alpha_{ij} \alpha_{ik}}_{\delta_{jk}} a_j = a_k$

[illegible] $= \alpha^T_{ki} A_i$

[illegible] Тензорная алгебра

Опр Любая совокупность трёх величин, заданных в каждом базисе нумеруемых одним индексом, изменяющимся от 1 до 3 образует тензор I ранга в трёхмерном пространстве, если при повороте декартовой системы координат эти величины в старом и новом базисах связаны линейным законом

$$A_i' = \alpha_{ij} A_j$$

$$A_k = \alpha^T_{kn} A_n'$$

$\underbrace{\underset{3}{A_i}\, B_i}_{9_{kn}}$ - два тензора I ранга

$$\underbrace{A_i' B_j'} = \alpha_{ik} A_k \alpha_{jn} B_n = \alpha_{ik} \alpha_{jn} \underbrace{A_k B_n}$$

Опр Совокупность (любая) 9 величин, заданных в каждом базисе и нумеруемых 2 индексами каждый изменяющийся от 1 до 3 образует тензор II ранга в 3D, если при повороте декартовой с.к. эти величины в старом и новом базисах связаны линейным законом:

$$T_{ij}' = \alpha_{ik} \alpha_{jn} T_{kn}$$

$$T_{mn} = \alpha^T_{mi} \alpha^T_{nj} T_{ij}'$$

Опр Любая совокупность 3^n величин заданная в каждом базисе и нумеруемая n индексами изменяющимися от 1 до 3 образует тензор ранга n в трёхмерном пр-ве, если при повороте декартовой с.к. эти величины в старом и новом базисе связаны линей

...ним законом:

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_2} = \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \dots \alpha_{i_2 j_2} T_{j_1 j_2 j_3 \dots j_2}$$

Действия над тензорами.

1. **Сложение тензора**

$$A_{ij} + B_{ij} = C_{ij}$$

Тензоры должны быть одного ранга.

$$\underset{T}{\underline{A_{ij}}} + \underset{T}{\underline{B_{ij}}} = \underset{?}{\underline{C_{ij}}}$$

$$\underline{C'_{ij}} = A'_{ij} + B'_{ij} = \alpha_{in}\alpha_{jm}A_{nm} + \alpha_{in}\alpha_{jm}B_{nm} =$$

$$= \alpha_{in}\alpha_{jm}(A_{nm} + B_{nm}) = \underline{\alpha_{in}\alpha_{jm}C_{nm}}$$

=> сумма тензоров явл. тензором того же ранга

$$\underset{T}{\underline{A_{ij}}} + \underset{T}{\underline{B_{mn}}} = \underset{\text{4 ранга}}{\underline{C_{ijnm}}}$$

$$C'_{ijnm} = A'_{ij} + B'_{nm} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}A_{kl} + \alpha_{nk}\alpha_{ml}B_{kl} =$$

$=?$ => C_{ijnm} — не тензор 4 ранга

2. **Умножение**

$$A_i B_{jk} = C_{ijk}$$

перемножать можно тензоры любых рангов, при этом получается тензор суммарного ранга

$$\underline{C'_{ijk}} = A'_i B'_{jk} = \alpha_{in}A_n\alpha_{jm}\alpha_{kp}B_{mp} =$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \cdot \sum_{j=1}^{3} y_j = (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$$

$$= \alpha_{in}\alpha_{jm}\alpha_{kp}A_n B_{mp} = \underline{\alpha_{in}\alpha_{jm}\alpha_{kp}C_{nmp}}$$

3. **Свертка**

$$T_{ijk}$$

$$T_{iik} = A_k$$

В результате свертки ранг тензора уменьшается на 2.

$A:$

$$\left(\ldots \right)$$

$$\underline{A_k'} = T_{iik}' = \underbrace{\alpha_{in}^{T} \alpha_{im}^{T}}_{\alpha_{ni}\alpha_{mi} = \delta_{nm}} \alpha_{kp}^{T} T_{nmp}' =$$

$$= \delta_{nm} \alpha_{kp}^{T} T_{nmp}' = \alpha_{kp}^{T} T_{nnp}' = \underline{\alpha_{kp}^{T} A_p'}$$

$\Rightarrow$ это тензор I ранга

4 Скалярное умножение тензоров (умножение с последующей сверткой)

$$\underbrace{R_{ijk}}_{T} \cdot \underbrace{A_k}_{T} = \underbrace{T_{ij}}_{?}$$

$$\underline{T_{ij}} = R_{ijk} A_k = \alpha_{in}^{T} \alpha_{jm}^{T} \alpha_{kp}^{T} R_{nmp}' \cdot \alpha_{ka}^{T} A_a' =$$

$$= \alpha_{in}^{T} \alpha_{jm}^{T} \delta_{pa} R_{mnp}' A_a' = \alpha_{in}^{T} \alpha_{jm}^{T} R_{nmp}' A_p' =$$

$$= \underline{\alpha_{in}^{T} \alpha_{jm}^{T} T_{nm}'}$$

$\Rightarrow$ это тензор 2-го ранга

5. Теорема деления

Если в некоторой с.к. существует 3^R величин $T_{i_1 i_2 \ldots i_R}$ и для любого тензора $A_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ ранга r выражение $T_{i_1 i_2 \ldots i_r i_{r+1} \ldots i_R} A_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ образует тензор ранга $R-r$, то совокупность $T_{i_1 \ldots i_R}$ образует тензор ранга R

$R = 3$, $r = 2$

T_{ijk}, A_{ij} (тензор 2 ранга)

$T_{ijk} A_{ij}$ – тензор 1 ранга $\Rightarrow$ T_{ijk} – тензор 3-го ранга.

$$\underbrace{T_{ijk}}_{?} \underbrace{A_{ij}}_{T} = \underbrace{C_k}_{T}$$

$$C_k' = T_{ijk}' A_{ij}' = T_{ijk}' \alpha_{in} \alpha_{jm} A_{nm}$$

$C_k' = \alpha_{kn} C_n = \alpha_{kn} T_{ijn} A_{ij} =$

$= \alpha_{kn} T_{ijn} \alpha_{im}^{T} \alpha_{jp}^{T} A'_{mp} =$

$= \alpha_{kn} \alpha_{mi} \alpha_{pj} T_{ijn} A'_{mp}$

$C_k' = T'_{ijk} A'_{ij} = T'_{mpk} A'_{mp}$

$T'_{mpk} A'_{mp} = \alpha_{kn} \alpha_{mi} \alpha_{pj} T_{ijn} A'_{mp}$

$A'_{mp} (T'_{mpk} - \alpha_{kn} \alpha_{mi} \alpha_{pj} T_{ijn}) = 0$

$\underline{T'_{mpk}} = \underline{\alpha_{mi} \alpha_{pj} \alpha_{kn} T_{ijn}}$

Симметрия тензоров

$A_{ij} = \pm A_{ji}$

Если $A_{ij} = A_{ji}$ – тензор симметричный

Если $A_{ij} = -A_{ji}$ – тензор антисимметричный

$B_{ijk} = \pm B_{jik}$

$B_{ijk} = -B_{kji}$

$N_3 = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n+1}{2} n = \frac{n(n+1)}{2}$

для симметр.

$N_4 = \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$ – для антисимметричного тензора

Теорема Св-ва симметрии (антисимметрии) инвариантное свойство

$T_{ij} = \pm T_{ji}$

До-ать, что $T'_{ij} = \pm T'_{ji}$

$T'_{ij} = \alpha_{in} \alpha_{jm} T_{nm} = \alpha_{in} \alpha_{jm} (\pm T_{mn}) =$

$= \pm \underline{\alpha_{jm} \alpha_{in} T_{mn}} = \pm T'_{ji}$

т.к. [illegible]

Т.к. любой тензор 2-го ранга может быть представлен в виде суммы симметричного и антисимметричного

$$T_{ij} = \frac{T_{ij} + T_{ji}}{2} + \frac{T_{ij}}{2} - \frac{T_{ji}}{2} =$$

$$= \underbrace{\tfrac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})}_{S_{ij}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})}_{A_{ij}}$$

$$\underline{S_{ij}} = \tfrac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) = \tfrac{1}{2}(T_{ji} + T_{ij}) = \underline{S_{ji}}$$

S_{ij} – симметричный тензор 2 ранга

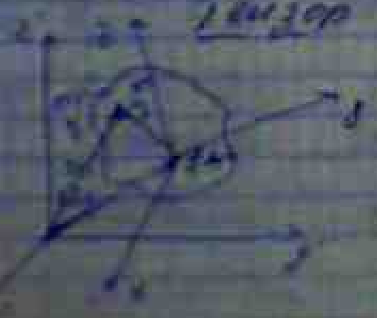
$$\underline{A_{ij}} = \tfrac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = -\tfrac{1}{2}(T_{ji} - T_{ij}) = \underline{-A_{ji}}$$

A_{ij} – антисимметричный тензор 2 ранга

$\vec{j} = \underbrace{\sigma}\vec{E}$ – проводимость

$j_n = \underbrace{\sigma_{nk}}E_k$ – тензор проводимости

Тензор инерции



$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_c$$

$$d\vec{r}' = d\vec{r}_c + [\vec{r}' \, d\vec{\varphi}] \mid dt$$

$$\vec{v} = \vec{v}_c + [\vec{r}' \times \vec{\omega}]$$

$$T = \sum \frac{m\vec{v}^2}{2} = \sum \frac{m}{2}\left(\vec{v}_c^{\,2} + 2(\vec{v}_c[\vec{r}' \times \vec{\omega}]) + [\vec{r}' \times \vec{\omega}]^2\right)$$

$$\sum \frac{m}{2}\vec{v}_c^{\,2} = \frac{M\vec{v}_c^{\,2}}{2}$$

$$\sum m(\vec{v}_c[\vec{r}' \times \vec{\omega}]) = \sum m(\vec{r}'[\vec{\omega}\,\vec{v}_c])$$

$$= \Big(\underbrace{\frac{\sum m\vec{r}'}{M}}_{\to 0}[\vec{\omega}\,\vec{v}_c]\Big)M = 0$$

$$\sum \frac{m}{2}[\vec{r}' \times \vec{\omega}]^2 = \sum \frac{m}{2}\left|[\vec{r}' \times \vec{\omega}]\right|^2 =$$

$$= \sum \frac{m}{2} r^2\omega^2 \sin^2(\widehat{\vec{r}\,\vec{\omega}}) = \sum \frac{m}{2} r^2\omega^2(1 - \cos^2(\widehat{\vec{r}\,\vec{\omega}}))$$

$$= \frac{1}{2}\sum m\left(r^2\omega^2 - (\vec{r}\,\vec{\omega})^2\right) = \frac{1}{2}\sum m\left(x_k^2\omega_i^2 - x_i\omega_i\right.$$

$$\left. x_j\omega_j\right) =$$

$$\omega_i^2 = \omega_i\omega_i = \omega_i\omega_j\delta_{ij}$$

$\frac{1}{2}\underbrace{\sum m(x_k^2\delta_{ij}-x_i x_j)}_{I_{ij}}\omega_i\omega_j$

I_{ij} — тензор инерции

$$T=\frac{MV_c^2}{2}+\frac{1}{2}J_{ij}\omega_i\omega_j$$

Приведение симметричного тензора 2-го ранга к диагональному виду

$P_{ij}=P_{ji}$

$P_{ij}A_j=\lambda A_i$

вектор A — собственный вектор

λ — собственное значение

$$P_{ij}A_j-\lambda\underbrace{A_i}_{\delta_{ij}A_j}=0$$

$$(P_{ij}-\lambda\delta_{ij})A_j=0$$

$$\det(P_{ij}-\lambda\delta_{ij})=0$$

$\Downarrow$

$\Rightarrow\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$

T1: Собственные значения симметричного тензора 2 ранга действительные

T2: Два собств. вектора симметричного тензора 2 ранга, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны

$\vec{A}^{(1)}\sim\lambda_1$

$\vec{A}^{(2)}\sim\lambda_2$ $\qquad\lambda_1\neq\lambda_2$

$P_{ij}A_j^{(1)}=\lambda_1A_i^{(1)}\quad|\cdot A_i^{(2)}$

$P_{ij}A_j^{(2)}=\lambda_2A_i^{(2)}\quad|\cdot A_i^{(1)}$

$$A_i^{(2)}P_{ij}A_j^{(1)}-\underbrace{A_i^{(1)}P_{ij}A_j^{(2)}}_{A_j^{(2)}P_{ji}A_i^{(1)}}=\lambda_1A_i^{(1)}A_i^{(2)}-$$

$$-\lambda_2A_i^{(1)}A_i^{(2)}$$

$$0=(\vec{A}^{(1)}\cdot\vec{A}^{(2)})\underbrace{(\lambda_1-\lambda_2)}_{\neq0}$$

$\Downarrow$

$\vec{A}^{(1)}\perp\vec{A}^{(2)}$

Любой тенз. в собств. с.к. — это диагональная матрица на ее диагонали ст. собств. с.зн.

Тензорная поверхность

$T_{ij} x_i x_j = 1$ — для симметричного тензора 2-го ранга

$\lambda_i \delta_{ij}$

$$\sum_{ij} \lambda_i \delta_{ij} x_i x_j = 1$$

$$\sum_i \lambda_i x_i x_i = 1$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1$$

Если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$, то эллипсоид

Инварианты тензоров II ранга

$$\det|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 \underbrace{(T_{11} + T_{22} + T_{33})}_{I_1} + \lambda \underbrace{\left(\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} \right)}_{I_2} - \underbrace{\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}}_{I_3} = 0$$

коэф. при λ являются инвар.

Если симметр. тензор II ранга, в его собств. сист. координат

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$I_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3$$

$$I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

$$I_1 = Sp(T_{ij}) = T_{ii}$$

Изотропные тензоры

Опр. Тензор назыв. изотропным, если при поворотах декартовой с.к. его компоненты не меняются

Все тензоры 0 ранга изотропны

Изотропный тензор 2 ранга

2 ранг δ_{ij}

$$\delta'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}\delta_{kl} = \alpha_{ik}\alpha_{jk} = \delta_{ij}$$

III ранг ε_{ijk} – тензор Леви-Чивита

абсолютно антисимметричный тензор III ранга

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = 1 \\ \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1 \end{cases}$$

ост. компоненты $= 0$

$$\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$$

$$\varepsilon'_{ijk} = \alpha_{in}\alpha_{jm}\alpha_{kl}\varepsilon_{nml} =$$

$$= \alpha_{i1}\alpha_{j2}\alpha_{k3} + \alpha_{i3}\alpha_{j1}\alpha_{k2} + \alpha_{i2}\alpha_{j3}\alpha_{k1} -$$

$$- \alpha_{i2}\alpha_{j1}\alpha_{k3} - \alpha_{i3}\alpha_{j2}\alpha_{k1} - \alpha_{i1}\alpha_{j3}\alpha_{k2} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{i3} \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \alpha_{j3} \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \alpha_{k3} \end{vmatrix} =$$

$$\vec{e}_i' = \alpha_{ij}\vec{e}_j$$

$$\vec{e}_i' = \alpha_{i1}\vec{e}_1 + \alpha_{i2}\vec{e}_2 + \alpha_{i3}\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_j' = \alpha_{j1}\vec{e}_1 + \alpha_{j2}\vec{e}_2 + \alpha_{j3}\vec{e}_3$$

$$= (\vec{e}_i', \vec{e}_j', \vec{e}_k') = \Delta_{ijk}$$

$$(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3') = (\vec{e}_1', \underbrace{[\vec{e}_2' \times \vec{e}_3']}_{\vec{e}_1'}) = 1$$

$$\Delta_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$$

$$\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$$

Тензор Леви-Чивита в векторных выражениях.

1) векторное произведение

$$\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}] =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\,\overbrace{(a_2 b_3 - a_3 b_2)}^{c_1} + \vec{j}\,\underbrace{(a_3 b_1 - a_1 b_3)}_{c_2} + \vec{k}\,\underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}_{c_3}$$

$$c_i = \varepsilon_{ijk} a_{jk}$$

$$c_1 = \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 =$$

$$= a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$$\boxed{[\vec{a} \times \vec{b}]_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k}$$

2 Смешанное произведение

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}\,[\vec{b} \times \vec{c}]) = a_i [\vec{b} \times \vec{c}]_i =$$

$$= a_i \varepsilon_{ijk} b_j c_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

$$\boxed{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k}$$

3 Двойное векторное произведение.

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]]_i = \varepsilon_{ijk} a_j [\vec{b} \times \vec{c}]_k =$$

$$= \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m =$$

$$= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} a_j b_l c_m \ominus$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

$$\ominus (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m =$$

$$= \delta_{il} \delta_{jm} a_j b_l c_m - \delta_{im} \delta_{jl} a_j b_l c_m =$$

$$= a_j b_i c_j - a_j b_j c_i = b_i (\vec{a}\,\vec{c}) - c_i (\vec{a}\,\vec{b})$$

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b})$$

Тензорные поля.

$\rho(\vec{r})$

1 Тензорное поле нулевого ранга

2 $\vec{E}(\vec{r})$ Тензорное поле первого ранга

Если в каждой т. пр-ва [illegible] соответствует значение компонент тензора, то говорят, что задано

Скалярное поле

$$\varphi(x_1, x_2, x_3)$$

$$x_i' = \alpha_{ij} x_j$$

$$\varphi'(x_1', x_2', x_3')$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i'} \mid \varphi'(x_1', x_2', x_3') = \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x_i'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} =$$

$$x_j = \alpha_{ij}^T x_i'$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i'} (\alpha_{jk}^T x_k') = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \alpha_{jk}^T \underbrace{\frac{\partial x_k'}{\partial x_i'}}_{\delta_{ik}} =$$

$$= \alpha_{jk}^T \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \delta_{ik} = \alpha_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \nabla_i \varphi = \mathrm{grad}_i\, \varphi$$

Оператор градиента

$$\mathrm{grad}\, \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \vec{e}_i$$

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_i \nabla_i = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

1. $\varphi(\vec{r}) = r$

$\mathrm{grad}\, r = ?$

$$\mathrm{grad}_i\, r = \frac{\partial r}{\partial x_i} =$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\mathrm{grad}_i\, r = \frac{x_i}{r} \qquad (\vec{r} = x_i \vec{e}_i)$$

$$\mathrm{grad}\, r = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\mathrm{grad}_i\, r = \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{x_k^2} = \frac{1}{2\sqrt{x_k^2}} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_k)^2 =$$

$$= \frac{1}{2r} \cdot 2 x_m \underbrace{\frac{\partial x_m}{\partial x_i}}_{\delta_{im}} = \frac{x_m \delta_{im}}{r} = \frac{x_i}{r}$$

2. $\mathrm{grad}(\vec a\,\vec r)$

$$\mathrm{grad}_i(\vec a\,\vec r) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\vec a\,\vec r) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}(a_j x_j) = a_j\,\delta_{ij} = a_i$$

$$\mathrm{grad}(\vec a\,\vec r) = \vec a$$

Дивергенция и ротор векторного поля

$$\mathrm{div}\,\vec A = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = (\vec\nabla\,\vec A)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec A = [\vec\nabla \times \vec A] = \vec e_i\,[\vec\nabla \times \vec A]_i =$$

$$= \vec e_i\,\varepsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j}$$

1) $\vec A = \vec r$

$$\mathrm{div}\,\vec r = (\vec\nabla\,\vec r) = \frac{\partial}{\partial x_i}x_i = \delta_{ii} = 3$$

$$\mathrm{rot}_i\,\vec r = [\vec\nabla\,\vec r]_i = \varepsilon_{ijk}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}x_k}_{\delta_{jk}} =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\,\delta_{jk} = \varepsilon_{ikk} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec r = \vec 0$$

2) $\vec A = \vec a\,\sin(\vec b\,\vec r)$

$$\mathrm{div}\,(\vec a\,\sin(\vec b\,\vec r)) = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i \sin(\vec b\,\vec r)) =$$

$$= a_i\cos(\vec b\,\vec r)\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec b\,\vec r)}_{b_i} = (\vec a\,\vec b)\cos(\vec b\,\vec r)$$

$$\mathrm{rot}_i\,(\vec a\,\sin(\vec b\,\vec r)) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(a_k \sin(\vec b\,\vec r)) =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\,a_k\cos(\vec b\,\vec r)\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(\vec b\,\vec r)}_{b_j} =$$

$$= \cos(\vec b\,\vec r)\underbrace{\varepsilon_{ijk}\,b_j\,a_k}_{[\vec b \times \vec a]_i} = [\vec b \times \vec a]_i\cos(\vec b\,\vec r)$$

$$\mathrm{rot}\,(\vec a\,\sin(\vec b\,\vec r)) = [\vec b \times \vec a]\cos(\vec b\,\vec r)$$

1. Векторное поле назыв. потенциальным, если его rot = 0

2. Векторное поле назыв. соленоидальным, если его div = 0

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \vec{e}_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = [\vec{\nabla}\times\vec{A}] = \vec{e}_i\,\varepsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j}$$

Дифференциальные операции второго порядка

1. $$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\varphi =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = \Delta\varphi$$

2. $$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\operatorname{grad}_k\varphi =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k} = 0$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = \vec{0}$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] потенциальным

3. $$\operatorname{grad}_i\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial A_j}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 A_j}{\partial x_i\partial x_j}$$

4. $$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{rot}_i\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j} =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i\partial x_j} = 0$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = (\vec{\nabla}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{A}])$$

$\Rightarrow$ ротор. поле вихревое

5. $$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = [\vec{\nabla}\times[\vec{\nabla}\times\vec{A}]] = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}[\vec{\nabla}\times\vec{A}]_k =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{klm}\frac{\partial A_m}{\partial x_l} = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial^2 A_m}{\partial x_j\partial x_l} = \frac{\partial^2 A_j}{\partial x_j\partial x_i} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j\partial x_j} =$$

$$= \frac{\partial^2 A_j}{\partial x_i\partial x_j} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\vec{A} - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})A$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

6. $$(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} = \Delta\vec{A}$$

1. $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi$

2. $\operatorname{div}(\varphi\vec A) = \varphi \operatorname{div}\vec A + (\vec A \operatorname{grad}\varphi)$

3. $\operatorname{div}[\vec A \times \vec B] = (\vec B \operatorname{rot}\vec A) - (\vec A \operatorname{rot}\vec B)$

4. $\operatorname{rot}[\vec A \times \vec B] = (\vec B \vec\nabla)\vec A - (\vec A \vec\nabla)\vec B + \vec A \operatorname{div}\vec B - \vec B \operatorname{div}\vec A$

5. $(\vec\nabla \vec A)\vec B = \vec B \operatorname{div}\vec A + (\vec A \vec\nabla)\vec B$

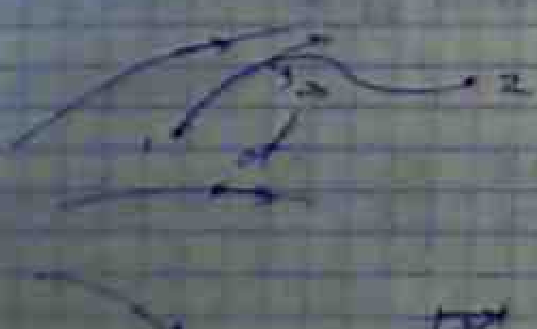
$(\vec A \operatorname{div}\vec B)_i = A_i \operatorname{div}\vec B = A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_j}$

$(\vec A \vec\nabla) B_i = A_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j}$

Интегральное представление дифференциальных операторов

Интегральное исчисление векторного анализа

a)



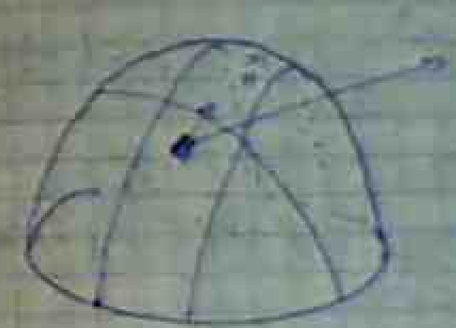
Разобьём путь 1-2 на маленькие кусочки

$(\vec e_i \vec A_i)$

$\sum_i (\vec e^i \vec A^i) \xrightarrow{n\to\infty} \int_1^2 (\vec A d\vec\ell)$

$\oint_\ell (\vec A d\vec\ell)$

г)

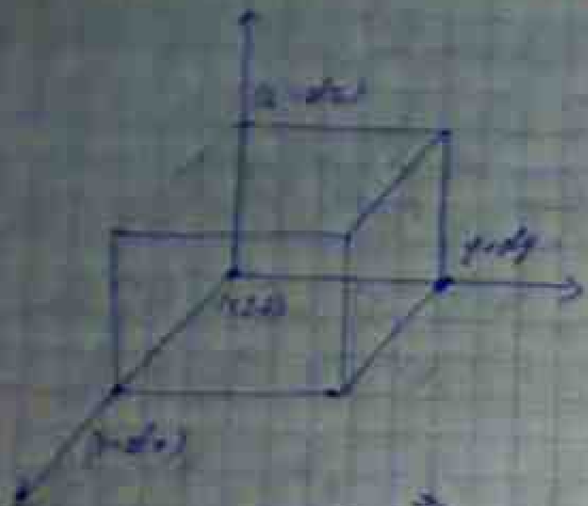


$\sum (\vec n^i \vec A^i)\Delta S_i$

$\Rightarrow \int_S (\vec A \vec n) dS = \int_S (\vec A d\vec S)$

$\oint (\vec A d\vec S)$

$\oint \varphi d\vec S$



$$\sum \varphi d\vec{S} = \varphi(x+dx, y, z)\, dy\, dz\, \vec{i} -$$

$$- \varphi(x, y, z)\, dy\, dz\, \vec{i} + (\varphi(x, y+dy, z) -$$

$$- \varphi(x, y, z))\, dx\, dz\, \vec{j} + (\varphi(x, y, z+dz) - \varphi(x,y,z))\, dx\, dy$$

$$\varphi(x+dx, y, z) = \varphi(x, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx\, dy\, dz\, \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx\, dy\, dz\, \vec{j} +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial z} dx\, dy\, dz\, \vec{k} = \operatorname{grad}\varphi\, dV$$

$$\sum \varphi d\vec{S} = \operatorname{grad}\varphi\, dV$$

$$\oint_S \varphi\, d\vec{S} = \int_V \operatorname{grad}\varphi\, dV = (\operatorname{grad}\varphi)_M \cdot V$$

$$(\operatorname{grad}\varphi)_M = \frac{\oint_S \varphi\, d\vec{S}}{V}$$

$$\operatorname{grad}\varphi = \lim_{V\to 0} \frac{\oint_S \varphi\, d\vec{S}}{V}$$

$$\vec{\nabla} = \lim_{V\to 0} \frac{\oint_S d\vec{S}}{V}$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = \lim_{V\to 0} \frac{\oint_S (\vec{A}\, d\vec{S})}{V}$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = [\vec{\nabla}\,\vec{A}] = \lim_{V\to 0} \frac{\oint_S [\vec{A}\times\vec{n}]\, dS}{V}$$

$$\oint_S \varphi\, d\vec{S} = \int_V \left(\vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dV$$

$$\oint_S (\vec{A}\, d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div}\vec{A}\, dV$$ – Th Остроградского-Гаусса

$$\oint_L (\vec{A}\, d\vec{l}) = \int_S (\operatorname{rot}\vec{A}\, d\vec{S})$$ – Th Стокса

Теорема Гельмгольца.

Любое векторное поле можно разложить на вихревую и потенциальную составляющую

$\vec{A} = \vec{D} + \vec{V}$

$\mathrm{rot}\,\vec{D} = 0$

$\mathrm{div}\,\vec{V} = 0$

$\mathrm{div}\,\vec{A} = \mathrm{div}\,\vec{D}$ =

$\vec{D} = \mathrm{grad}\,\varphi$

= $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi = \Delta\varphi$

$\underline{\Delta\varphi = \mathrm{div}\,\vec{A}}$

$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{rot}\,\vec{V}$ =

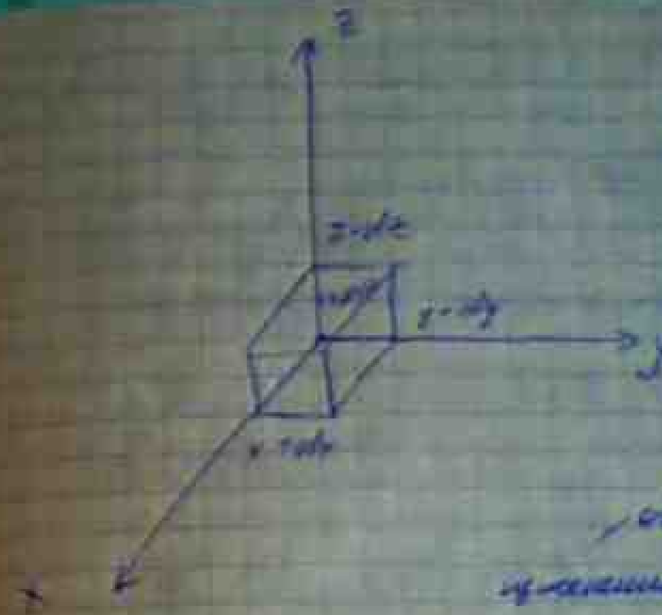
$\vec{V} = \mathrm{rot}\,\vec{B}$

= $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{B} - \Delta\vec{B}$

$\vec{B}$ – вихревое поле $\Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

$\Delta\vec{B} = -\mathrm{rot}\,\vec{A}$

Физический смысл дивергенции



$dV = dx\,dy\,dz$

$dm = dm_+ + dm_-$

изменение массы

$dm_+ = \rho(x,y,z)\cdot v_x(x,y,z)\,dt\,dy\,dz$

$dm_- = -\rho(x+dx,y,z)\,v_x(x+dx,y,z)\,dt\,dy\,dz$

$dm_x = -dt\,dy\,dz\,(\rho v_x(x+dx,y,z) - \rho v_x(x,y,z)) =$

(раскладываем в ряд)

$= -dt\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\,dx = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\,dV\,dt$

$dm_x = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\,dV\,dt$

$dm = -dV\,dt\left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\right)$

$= -dV\,dt\,\mathrm{div}(\rho\vec{v})$

$dm = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\, dV$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0$

Криволинейные координаты

$(x, y, z) \to (q_1, q_2, q_3)$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{vmatrix} \neq 0$$

$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 =$

$= \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}}_{\vec{e}_i} dq_i$

$d\vec{r} = \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i}}_{\vec{e}_i} dx_i$

$\vec{e}_i = \vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$

$\vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\vec{k}$

$|\vec{e}_1| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} = H_1$

$|\vec{e}_2| = H_2$

$|\vec{e}_3| = H_3$

H_1, H_2, H_3 - коэффициенты Ламэ

$\vec{n}_i = \frac{\vec{e}_i}{H_i}$

$|\vec{n}_i| = 1$

Криволинейные СК будем называть ортогональными если

$(\vec{n}_i, \vec{n}_j) = \delta_{ij}$

$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = H_i^2 \delta_{ij}$ (сферические и цилиндрические СК)

Метрический тензор

$d\vec r = \vec e_i \, dq_i$

$dr^2 = \vec e_i \, dq_i \, \vec e_k \, dq_k = \underbrace{(\vec e_i \vec e_k)}_{g_{ik}} dq_i \, dq_k =$

$= g_{ik} \, dq_i \, dq_k$

g_{ik} — метрический тензор.

$g_{ik} = H_i^2 \delta_{ik}$ — для ортогон. систем

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} H_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & H_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & H_3^2 \end{pmatrix}$$

Цилиндрическая СК

$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 =$

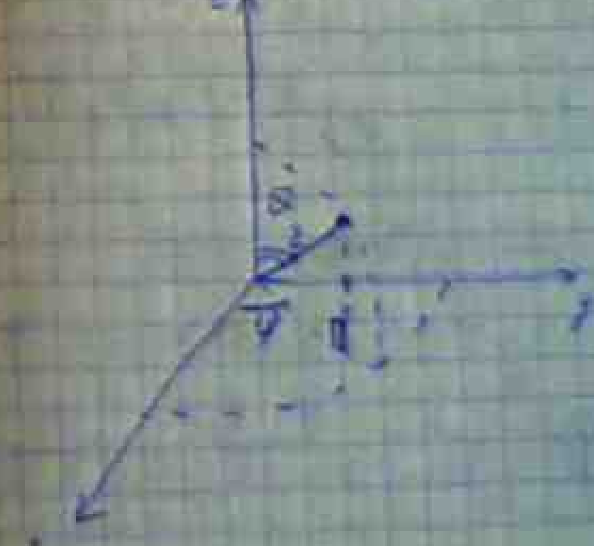
$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = d\rho \cos\varphi - \rho \sin\varphi \, d\varphi \\ dy = d\rho \sin\varphi + \rho \cos\varphi \, d\varphi \\ dz = dz \end{cases}$$

$= d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$H_\rho = 1, \; H_\varphi = \rho, \; H_z = 1$

Сферическая СК



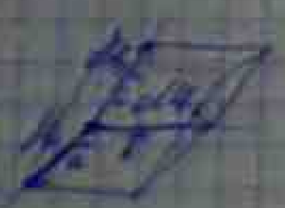
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dr\sin\theta\cos\varphi + r\,d\theta\cos\theta\cos\varphi - r\,d\varphi\sin\theta\sin\varphi \\ dy = dr\sin\theta\sin\varphi + r\,d\theta\cos\theta\sin\varphi + r\,d\varphi\sin\theta\cos\varphi \\ dz = dr\cos\theta - r\,d\theta\sin\theta \end{cases}$$

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2\sin^2\theta +$$
$$+ r^2 d\theta^2\cos^2\theta + r^2 d\varphi^2\sin^2\theta + 2r\,dr\,d\theta\sin\theta\cos\theta +$$
$$+ dr^2\cos^2\theta - 2r\,dr\,d\theta\sin\theta\cos\theta + r^2 d\theta^2\sin^2\theta =$$
$$= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$H_r = 1$, $H_\theta = r$, $H_\varphi = r\sin\theta$

Якобиан



$$dV = (\vec a, \vec b, \vec c) = \underbrace{(\vec r_1, \vec r_2, \vec r_3)}_{J}\, dq_1\, dq_2\, dq_3 =$$

[illegible]

$$= H_1 H_2 H_3 (\vec n_1, \vec n_2, \vec n_3)\, dq_1\, dq_2\, dq_3$$

в [illegible] системе

$$dV = H_1 H_2 H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3$$

в СК (сферической)

$J = r^2\sin\theta$

в цилиндрич. СК

$J = \rho$

$J = \sqrt{\det g_{ij}}$

Дифференциальные операции

в криволинейных СК

$$\vec\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\vec E_i = \frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\vec E_i}_{\operatorname{grad} q_j} =$$

$\operatorname{grad} q_1 = ?$

$$dq_1 = \frac{\partial q_1}{\partial x}dx + \frac{\partial q_1}{\partial y}dy + \frac{\partial q_1}{\partial z}dz =$$

$$= (\operatorname{grad} q_1, d\vec{r})$$

$$dq_1 = (\operatorname{grad} q_1, d\vec{r})$$

$$d\vec{r} = \vec{e}_j \, dq_j$$

$$dq_1 = \underbrace{(\operatorname{grad} q_1, \vec{e}_j)}_{\delta_{ij}} dq_j$$

$$(\operatorname{grad} q_1, \vec{e}_1) = 1$$

С др. стороны

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = H_1^2 \Rightarrow \left(\frac{\vec{e}_1}{H_1^2}, \vec{e}_1\right) = 1$$

$$\operatorname{grad} q_1 = \frac{\vec{e}_1}{H_1^2}$$

$$= \sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial q_j}\frac{\vec{e}_j}{H_j^2} = \sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial q_j}\frac{\vec{e}_j}{H_j^2} =$$

$$= \sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial q_j}\frac{\vec{n}_j H_j}{H_j^2} = \sum_j \frac{1}{H_j}\frac{\partial \varphi}{\partial q_j}\vec{n}_j$$

В сферич. СК

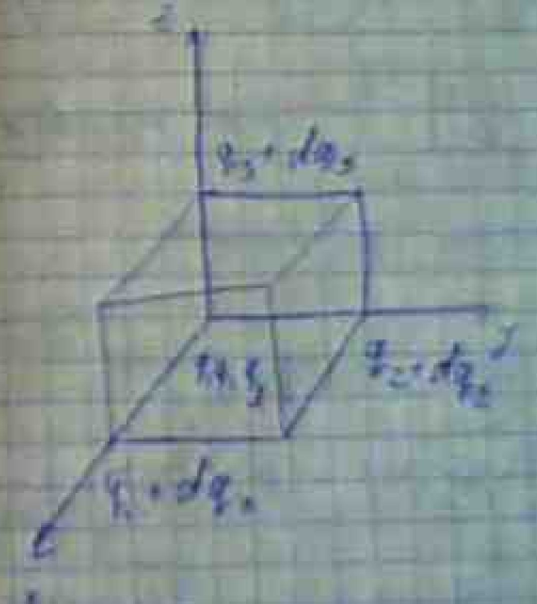
$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

В цилиндрич. СК

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{e}_z$$

$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$
$\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ — единичные векторы

$$\operatorname{div}\vec{A} = \lim_{V \to 0}\frac{\oint(\vec{A}, d\vec{S})}{V}$$



$$V = H_1 H_2 H_3 \, dq_1 \, dq_2 \, dq_3$$

$$\oint(\vec{A}, d\vec{S}) =$$

$$= \vec{A}(q_1+dq_1, q_2, q_3) \cdot \underbrace{\vec{n}_1 H_2 H_3 \, dq_2 \, dq_3}_{\text{по сечен.}} -$$

$$- (\vec{A} H_2 H_3)(q_1, q_2, q_3)\,\vec{n}_1 \, dq_2 \, dq_3 +$$

$$- (\vec{A}\, H_1 H_3)(q_1, q_2 + dq_2, q_3)\, \vec{n}_2 -$$

$$- (\vec{A}\, H_1 H_3)(q_1, q_2, q_3)\, n_2 \big)\, dq_1\, dq_3 +$$

$$+ \left(\text{нижн. и верх. грани} \right) = n_1\, dq_2\, dq_3 \frac{\partial}{\partial q_1} (\vec{A} H_2 H_3)\, dq_1 +$$

$$+ n_2\, dq_1\, dq_3 \frac{\partial}{\partial q_2} (\vec{A} H_1 H_3)\, dq_2 + n_3\, dq_1\, dq_2 \frac{\partial}{\partial q_3}(\vec{A} H_1 H_2) \times$$

$$\times dq_3 = dq_1\, dq_2\, dq_3 \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 H_1 H_3) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 H_1 H_2) \right)$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 H_1 H_2) \right)$$ — для криволинейных ортогональных

Цилиндрич. сис. координат

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (A_\rho \rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z \rho) \right) =$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (A_\rho \rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\rho}{\rho} \frac{\partial (A_z \rho)}{\partial z}$$

Сферич. сис. координат

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} (A_r r^2 \sin\theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta r \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi r) \right) =$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (A_r r^2) + \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin\theta) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vec{n}_1}{H_2 H_3} & \dfrac{\vec{n}_2}{H_1 H_3} & \dfrac{\vec{n}_3}{H_1 H_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 A_1 & H_2 A_2 & H_3 A_3 \end{vmatrix}$$

ц. с. к.

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vec{n}_\rho}{\rho} & \vec{n}_\varphi & \dfrac{\vec{n}_z}{\rho} \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \rho} - \frac{\partial (A_\varphi \rho)}{\partial z}\right) +$$

$$+ \vec{n}_\varphi \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) + \vec{n}_z \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial (A_\varphi \rho)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)$$

ССК

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{n}_r \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (A_\varphi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right) +$$

$$+ \vec{n}_\theta \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial (A_\varphi r)}{\partial r}\right) +$$

$$+ \vec{n}_\varphi \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (A_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)$$

Лапласиан

$$\Delta \psi = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\psi =$$

$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial \psi}{\partial q_3}\right)\right)$$ — для криволин. ортогональных систем.

Преобразование компонент векторов при инверсии СК

$\vec{a} = \{1, 2, 3\}$

$\vec{b} = \{3, 2, 1\}$

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$$

$\vec{c} = \{-4, 8, -4\}$

$\overline{\vec{a}} = \{-1, -2, -3\}$

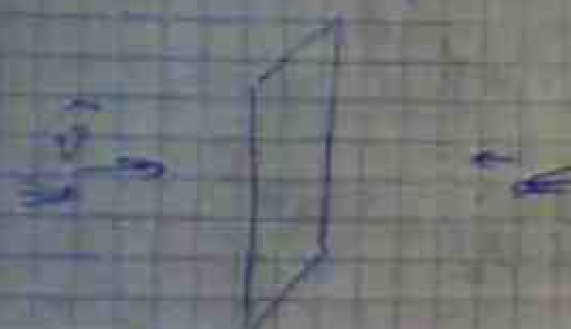
$\overline{\vec{b}} = \{-3, -2, -1\}$

$[\overline{\vec{a}} \times \overline{\vec{b}}] = \{-4, 8, -4\}$

$\overline{\vec{c}} = \{4, -8, 4\}$

Если мы переходим от правой СК к левой СК или обратно вектор остается без изменения (но направлении не меняется) то их называют полярными векторами. Если же вектор меняет свое направление на противоположное (его компоненты меняют знак) то этот вектор аксиальный (или осевой или псевдовектор)

а)



$\vec{v}$ - полярный вектор

б)

$\vec{\omega}$ - аксиальный вектор

можно складывать и вычитать векторы только одного типа.

$$\vec{p}\,' = -\vec{p}$$

$$\vec{a}\,' = \vec{a}$$

$$\overline{(\vec{a}_1+\vec{a}_2)} = \vec{a}_1\,' + \vec{a}_2\,' = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

$$\overline{(\vec{p}+\vec{a})} = -\vec{p} + \vec{a}$$

Скаляры

I рода

II рода (псевдоскаляры)

$$\overline{(\vec{a}_1 \vec{a}_2)} = (\vec{a}_1 \vec{a}_2)$$

$$\overline{(\vec{p}_1 \vec{p}_2)} = (\vec{p}_1 \vec{p}_2)$$

$$\overline{(\vec{a} \vec{p})} = -(\vec{a} \vec{p})$$ - псевдоскаляр

$[\vec{p}_1 \times \vec{p}_2] = \vec{a}$ - аксиальный

$(\vec{a}_1 [\vec{p}_1 \times \vec{p}_2])$ - скаляр I рода

$(\vec{r}_1 \cdot [\vec{r}_2 \times \vec{r}_3])$ - псевдоскаляр

$[\vec{a}_1 \times \vec{a}_2]$ - аксиальный

$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ - скаляр I рода

$[\vec{a} \times \vec{r}]$ - полярный