Матрицы. Основные операции над матрицами.

Матрица – прямоугольная таблица из чисел. Обозначение: ‖ ‖, ( ), [ ].
$a_{ij}=(A)_{ij}$ – элемент матрицы. $A_{m\times n}$ – прямоугольная матрица из m строк и n столбцов. Если m=n, то $A_{n\times n}=A_{m\times m}$ – квадратная матрица.

Специальные типы матриц:

1)Единичная матрица $E=\begin{pmatrix}1&&0\\&1&\\&&\ddots\\0&&1\end{pmatrix}$

$E_{ij}=\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j\\0, i\ne j\end{cases}$ – символ Кронекера.

2)Диагональная матрица: $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&&0\\&\lambda_2&\\&&\ddots\\0&&\lambda_n\end{pmatrix}$. Если все $\lambda_k=\lambda$, то матрица назыв. скалярной матрицей.

3)Треугольная матрица $\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\&\ddots&\vdots\\0&&a_{nn}\end{pmatrix}$ – верхняя треугольная, $\begin{pmatrix}a_{11}&&0\\\vdots&\ddots&\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$ – нижняя треугольная.

Квадратные матрицы:

1)Если $A^T=A$, то A – симметричная матрица.
2)Если $A^T=-A$, то A – антисимметричная (кососимметричная) матрица.
3)Если $a_{ij}=\overline{a}_{ji}$, то A – Эрмитова матрица.
4)Если $a_{ij}=-\overline{a}_{ji}$, то A – антиэрмитова матрицы.

Действия над матрицами:

Унарные операции (с участием одной матрицы):

1)Умножение матрицы на число.
$C=\alpha\cdot A$
$c_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$

2)Комплексное сопряжение.
$a_{ij}\in C$
$(\overline{A})_{ij}=\overline{a}_{ij}$
$\overline{a}_{ij}=\alpha_{ij}-i\cdot\beta_{ij}$

3)Транспонирование.
$(A^T)_{ij}=a_{ji}$

Бинарные операции (при участии двух матриц):

1)Сложение:
$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}$
$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

2)Умножение:
$C_{n\times m}=A_{n\times p}\cdot B_{p\times m}$
$c_{ij}=\sum_{K=1}^n a_{ik}\cdot b_{kj}$

а)умножение матриц ассоциативно:
$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$

Док-во:

1) $D=(A\cdot B)\cdot C$
$d_{il}=\sum_k\left(\sum_j a_{ij}\cdot b_{jk}\right)\cdot c_{kl}$

2) $D=A\cdot(B\cdot C)$
$d_{il}=\sum_j a_{ij}\left(\sum_k b_{jk}\cdot c_{kl}\right)$

ì åíÿåì ïîðÿäîê ñóììèðîâàíèÿ:

$d_{il}=\sum_j a_{ij}\left(\sum_k b_{jk}\cdot c_{kl}\right)=\sum_k\left(\sum_j a_{ij}\cdot b_{jk}\right)\cdot c_{kl}$

б)Матрицы не коммутируемы в общем случае, но коммутируемы в частных случаях.
аа) $[A,B]=A\cdot B-B\cdot A$ – коммутатор матриц A и B. Если [A,B]=0, то матицы коммутируемы.
бб) $\{A,B\}=A\cdot B+B\cdot A$ – антикоммутатор матриц A и B.
в) $(AB)^T=B^TA^T$

$(A^T)_{ij}=a_{ji};(B^T)=b_{ji}$

$(B^TA^T)_{ji}=\sum_k b_{jk}\cdot a_{ki}=\sum_k b_{kj}a_{ik}=$

$=\sum_k a_{ik}b_{kj}=(AB)^T$

г)tr(AB)=tr(BA)

$tr(AB)=\sum_i\sum_k a_{ik}b_{ki}$

$tr(BA)=\sum_i\sum_k b_{ik}a_{ki}=tr\left((AB)^T\right)=$

$=tr(AB)$

3)Прямая сумма.
$C=A\oplus B$
$C=\begin{Vmatrix}A&0\\0&B\end{Vmatrix}$

Определители. Основные св-ва. Формула полного разложения.

1×1:
$|a_{11}|=a_{11}$

2×2:
$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$

3×3:
$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+$

$+(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=$

$=\sum_{j=1}^n(-1)^{1+j}\cdot a_{1j}\overline{M}_{1j}$

M_{ij} – минор(дополнение) – определитель, полученный вычёркиванием i-й строки и j-го столбца.
$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot\overline{M}_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.
Определение. Детерминант квадратной матрицы A_n это: $\det(A_n)=\sum_{j=1}^n(-1)^{1+j}a_{1j}\overline{M}_{1j}$.
Эта формула верна также для разложения по любой строке:

$\det(A_n)=\sum_{j=1}^n(-1)^{i+j}a_{ij}\overline{M}_{ij}$

$\det(A_n)=\sum_{j=1}^n(-1)^{i+j}a_{ij}\overline{M}_{ij}$

Св-ва определителей:

1) $\det(A)=\det(A^T)$

2)Антисимметрия. При перестановки двух строк(столбцов) детерминант меняет знак:
$\det(A)\to-\det(A)$

Док-во:. По формуле Лапласа:
$\det(A)=\sum_{j_1,j_2}(-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2}\cdot M^{i_1i_2}_{j_1j_2}\cdot\overline{M}^{i_1i_2}_{j_1j_2}$

Меняем строки i_1 и i_2, тогда минор $\overline{M}^{i_1i_2}_{j_1j_2}$ не меняет знака, т.к эти строки вычеркнуты, а минор $M^{i_1i_2}_{j_1j_2}$ – меняет знак как дётерминант 2-го порядка:

$\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{11}&a_{12}\end{pmatrix}\Rightarrow$ и весь детерминант меняет знак.

3)Линейность. Пусть например i-я строка – есть линейная комбинация строк $(b_1\ldots b_n)$ и $(c_1\ldots c_n)$. $(a_1\ldots a_n)=\alpha\cdot(b_1\ldots b_n)+\beta\cdot(c_1\ldots c_n)$
тогда
$\det A=\alpha\cdot\det A_1+\beta\cdot\det A_2$

$A_1=\begin{pmatrix}b_1&\cdots&b_n\end{pmatrix}i-\text{я};A_2=\begin{pmatrix}c_1&\cdots&c_n\end{pmatrix}i-\text{я}$

Док-во:
Разложим detA, $\det A_1$ и $\det A_2$ по i-й строке:

$\det A_1=\sum_{j=1}^n(-1)^{i+j}\cdot b_{ij}\cdot M_{ij}$

$\det A_2=\sum_{j=1}^n(-1)^{i+j}\cdot c_{ij}\cdot M_{ij}$

$\det A=\sum_{j=1}^n(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot\overline{M}_{ij}=$

$=\sum_{j=1}^n(-1)\cdot(\alpha\cdot b_{ij}+\beta\cdot c_{ij})\cdot M_{ij}=$

$=\alpha\cdot\sum_{j=1}^n(-1)^{i+j}\cdot b_{ij}\cdot M_{ij}+$

$+\beta\cdot\sum_{j=1}^n(-1)^{i+j}\cdot c_{ij}\cdot M_{ij}=$

$=\alpha\det A_1+\beta\det A_2$

Следствия из св-в 1-3:

1)Детерминант с одинаковыми строками или столбцами равен нулю (из антисимметрии).

2) $\det\begin{pmatrix}\cdots&\cdots&\cdots\\\alpha\cdot a_{1i}&\cdots&\alpha\cdot a_{ni}\\\cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix}=\alpha\cdot\det\begin{pmatrix}\cdots&\cdots&\cdots\\a_{1i}&\cdots&a_{ni}\\\cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix}$

(из линейности).

3)детерминант с нулевой строкой равен нулю (из линейности).

4)детерминант матрицы, в которой одна из строк кратна (умножена на некоторое число) другой строке равен нулю.(из следствий 1,2)

5)если к одной из строк матрицы прибавить другую строку, умноженную на некоторое число, то детерминант не изменится.

$\det\begin{pmatrix}a_1+\alpha b_1&\cdots&a_n+\alpha b_n\\\vdots&&\vdots\\b_1&\cdots&b_n\end{pmatrix}=$

$=\det\begin{pmatrix}a_1&\cdots&a_n\\\vdots&&\vdots\\b_1&\cdots&b_n\end{pmatrix}+\alpha\cdot\det\begin{pmatrix}b_1&\cdots&b_n\\\vdots&&\vdots\\b_1&\cdots&b_n\end{pmatrix}=$

$=\det\begin{pmatrix}a_1&\cdots&a_n\\\vdots&&\vdots\\b_1&\cdots&b_n\end{pmatrix}$

Частные случаи детерминанта:

1) $\begin{vmatrix}a_{11}&&0\\\vdots&\ddots&\\\ddots&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$,

2)Детерминант блочной матрицы равен произведению детерминантов блоков:

$\begin{vmatrix}A_n&|&\\-&|&-\\B_n&|&C_n\end{vmatrix}=\det A_n\cdot\det C_n$

(из ф-лы Лапласа).
$\det(A\oplus B)=\det A\cdot\det B$

3) $\det AB=\det A\cdot\det B$

Формула полного разложения:
Рассмотрим набор чисел $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. Все $\alpha_k\in Z$ и равны 1,2,…n. Среди них нет совпадающих. Этот набор называют перестановкой. Число перестановок n!.
Рассмотрим различные пары (α_i,α_j) – образует беспорядок, если $\alpha_i>\alpha_j$ при i<j. Например (1,2) – не образ. беспорядок, а (2,1) – образует. Обозначим число беспорядков, образ. парами (α_i,α_j) из набора $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ через $N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$.
Утверждение.

$\det A=\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}\cdot a_{\alpha_1 1}\cdot a_{\alpha_2 2}\cdot\ldots\cdot a_{\alpha_n n}$

эта формула содержит n! слагаемых.
Докажем по математической индукции:
1)Для n=1; $\alpha_1=1$, N=0 ⇒ detA=a_{11}.
2)Для n=2; N(1,2)=0; N(2,1)=1.,
$\det A=(-1)^0a_{11}a_{22}+(-1)^1a_{21}a_{12}$
3)Предположим, что ф-ла верна для (n-1) при n>2.
4)Покажем, что ф-ла верна и для n. Разложим детерминант n-го порядка по 1-му столбцу:

$\det A=\sum_{\alpha_1=1}^n(-1)^{1+\alpha_1}a_{\alpha_1 1}\overline{M}_{\alpha_1 1}$, где M – детерминант порядка (n-1). По предположению индукции:

$\overline{M}_{\alpha_1 1}=\sum_{\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(-1)^{N(\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}a_{\alpha_2 2}\ldots a_{\alpha_n n}$, тогда подставляя получим:

$\det A=\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(-1)^{\alpha_1+1+N(\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}a_{\alpha_1 1}\ldots a_{\alpha_n n}$.

Осталось доказать, что
$(-1)^{\alpha_1+1+N(\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}=(-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}$,
С числом α_1 мы можем образовать пары $\alpha_1\alpha_2,\alpha_1\alpha_3,\ldots,\alpha_1\alpha_n$. Причём чисел меньших чем α_1 будет ровно (α_1-1), а это означает, что $N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=N(\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n)+\alpha_1-1$, а значит, что
$(-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}=(-1)^{N(\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n)}+\alpha_1+1$ и
тогда предложенная формула верна.

Определители. Формулировка теоремы Лапласа.

1×1:
$|a_{11}|=a_{11}$

2×2:
$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$

3×3:
$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+$

$+(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=$

$=\sum_{j=1}^n(-1)^{1+j}\cdot a_{1j}\overline{M}_{1j}$

M_{ij} – минор(дополнение) – определитель, полученный вычёркиванием i-й строки и j-го столбца.
$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot\overline{M}_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.
Определение. Детерминант квадратной матрицы A_n это: $\det(A_n)=\sum_{j=1}^n(-1)^{1+j}a_{1j}\overline{M}_{1j}$.
Эта формула верна также для разложения по любой строке:

$\det(A_n)=\sum_{j=1}^n(-1)^{i+j}a_{ij}\overline{M}_{ij}$

$\det(A_n)=\sum_{i=1}^n(-1)^{i+j}a_{ij}\overline{M}_{ij}$

Теорема Лапласа:
Обобщение разложения детерминанта по нескольким строкам. Рассмотрим целое число k<n и наборы индексов:
$1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n$
$1\le j_1<j_2<\ldots<j_k\le n$
Введём миноры двух типов:
1)Миноры 1-го типа:
$M^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}$ – детерминант порядка k, составленный из элементов $(a_{i_1j_1};a_{i_kj_k})$.
2)Миноры 2-го порядка (дополнительные).
$\overline{M}^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}$ – детерминант порядка (n-k), составленный из элементов, оставшихся после вычёркивания строк $i_1,\ldots,i_k$ и столбцов $j_1,\ldots,j_k$. Теорема Лапласа состоит в том, что ∀k<n и ∀ фиксированного набора $i_1,\ldots,i_k$, $j_1,\ldots,j_k$:

$\det A=\sum_{j_1\ldots j_k}(-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k}\cdot M^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}\cdot\overline{M}^{i_k\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}$

Частный случай k=1 – разложение по i-й строке.

Обратная матрица.

Рассмотрим матрицу A порядка n.
1)Матрица B называется правой обратной, если: AB=E.
2)Матрица C назыв. левой обратной, если: CA=E.
Если существуют матрицы B и C, то они совпадают:
C=CE=C(AB)=(CA)B=B.
Теорема. Матрица, обратная к данной существует тогда и только тогда, когда детерминант исходной матрицы отличен от нуля (невырожденная матрица).
Док-во:
Необходимость. Пусть ∃ A^{-1}, тогда из определения $AA^{-1}=E$ и св-ва детерминанта произведения ⇒, что $\det(AA^{-1})=\det(E)=1=\det A\cdot\det A^{-1}$ ⇒ $\det A\ne0$ и $\det A^{-1}\ne0$.
Достаточность. Пусть detA=Δ≠0. Составим матрицу B из элементов $b_{ij}=\frac{A_{ji}}{\Delta}$, где A_{ji} – алгебраическое дополнение элемента a_{ji}.
$A_{ji}=(-1)^{j+i}\overline{M}_{ji}$; $a^{-1}_{ij}=b_{ij}=\frac{A_{ji}}{\Delta}$. Вычислим (AB):

$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}0, j\ne i\\1, j=i\end{cases}$

Докажем, что $\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk}=0$ åñëè $i\ne j$.
Рассмотрим матрицу B у которой i-я и j-я строки совпадают. Разложим детерминант матрицы по i-й и j-й строкам:
$\det B=\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}=0$, но элементы i-й и j-й строки совпадают, поэтому детерминант можно также записать в виде:
$\det B=\sum_{k=1}^n a_{jk}A_{ik}=0$, что и требовалось доказать.

Свойства обратных матриц:
1)$(A^{-1})^{-1}=A$
2) $\det A^{-1}=\frac{1}{\det A}$
3)$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$
4)$(\alpha A)^{-1}=\alpha^{-1}\cdot(A^{-1})$
5)$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
6)$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
7)$(A^{-1})^K=(A^K)^{-1}$

Линейная независимость строк. Ранг матрицы.

Линейно-независимые строки – это такие строки $A=(a_1,\ldots,a_n)$, $B=(b_1,\ldots,b_n)$, $C=(c_1,\ldots,c_n)$ для которых αA+βB+γC=(0,…,0) и все α=β=γ=0.
Теорема о линейной зависимости строк.
Для того, чтобы строки A,B,C были линейно зависимы ⇔ одна из строк является линейной комбинацией остальных.
Док-во:
Необходимость. Пусть A,B,C – линейно зависимы, тогда αA+βB+γC=(0,…,0) и не все α=β=γ=0. Пусть α≠0. Разделим равенство на α, тогда $A=-\frac{\beta}{\alpha}B-\frac{\gamma}{\alpha}C$, т.е A – есть линейная комбинация строк B и C.
Достаточность. Пусть A есть линейная комбинация B и C. Тогда ∃ числа η и λ такие, что A=ηB+λC. Перепишем в виде: (-1)A+ηB+λC=0. Это выражение и есть

условие линейной зависимость и хотя бы один коэффициент (-1) не равен нулю.

Ранг матрицы. Рассмотрим матрицу

$$A_{m\times n}=\begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Рассмотрим минор k-го порядка, образованный из некоторых k строк и k столбцов. *Рангом* матрицы $A_{m\times n}$ называется такое число r при кот. выполняются условия: 1)$M_r\neq0$, 2)любой минор (r+1)-го и высших порядков равен нулю. Строки (столбцы) составляющие минор $M_r\neq0$ называются *базисными* строками (столбцами). Любой минор $M_r\neq0$ называется базисным минором.

Теорема о базисном миноре. Базисные строки(столбцы) линейно независимы. Любая строка(столбец) матрицы A является линейной комбинацией базисных строк(столбцов).

Док-во:

1)Если строки были линейно зависимы, то хотя одна из этих строк являлась линейной комбинацией остальных и тогда можно было бы вычесть целиком из этой строки указанную линейную комбинацию и получить полностью нулевую строку, но это противоречит тому, что детерминант базисного минора не равен нулю.

2)Скажем, что M_r находится в левом верхнем углу. Введём j=1,…,n и k=1,…m. Построим минор более высшего порядка M_{r+1}:

$$M_{r+1}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & | & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & | & \vdots \\ - & - & - & | & a_{rj} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kr} & \cdots & a_{kj} \end{vmatrix}.$$

Докажем, что этот минор равен нулю при любых j и k. Если j≤r или k≤r, то $M_{r+1}=0$ как детерминант с двумя совпадающими строками или столбцами. Если j>r или k>r, то минор (r+1)-го порядка равен нулю по определению. Разложим M_{r+1} по последнему столбцу, обозначив не зависящие от j алгебраические дополнения: $A_{1j}=c_1$, $A_{2j}=c_2$,…, $A_{rj}=c_r$,…, $A_{kj}=c_{r+1}$. В итоге получим:

$$M_{r+1}=c_1a_{1j}+c_2a_{2j}+\ldots+c_ra_{rj}+c_{r+1}a_{kj}=0$$

$$a_{kj}=-\frac{c_1}{c_{r+1}}a_{1j}-\frac{c_2}{c_{r+1}}a_{2j}-\ldots-\frac{c_r}{c_{r+1}}a_{rj}$$

т.е любая строка – есть линейная комбинация базисных строк.

Следствие 1: число лин/нез строк равно числу л/нез. столбцов.

Следствие 2: $\det A_n=0$ ⇔ если его строки(столбцы) явл. лин/завис.

Необходимость. Если $\det A_n=0$, то базисный минор имеет порядок r<n, т.е хотя бы одна из строк не является базисной и по теореме о базисном миноре является линейной комбинацией остальных ⇒ все строки линейно зависимы.

Достаточность. Если строки A л/завис., то по теореме о л/завис строк, одна из строк есть лин. комбинация остальных, тогда, вычитая эту комбинация из указанной строки получаем целиком нулевую строку ⇒ детерминант матрицы равен нулю.

Св-ва ранга матрицы:

1)rangA=rangA^T

2)Если в A выделить подматрицу, т.е A'⊂A, то rangA'≤rangA.

3)rangA не меняется при элементарных преобразованиях A: а)умножение на число, б) вычитание из строки(столбца) линейной комбинации других строк(столбцов). A~A'(эквивалентна) при элементарных преобразованиях.

4)Если C=AB, то rangC≤min(rangA,rangB)

Док-во: рассм расширенную матрицу D: $\left\| A_{m\times n} \mid AB_{m\times p} \right\|$. По св-ву (2) rangAB≤rangD.

Столбцы AB есть л/комб. столбцов A: $(AB)_{ij}=\sum\limits_k a_{ik}b_{kj}$ ⇒ достраивание AB не даёт увеличения ранга D ⇒ rangD=rangA, тогда rang(AB)≤rangA. Аналогичное можно проделать с матрицей B и тогда утверждение будет доказано.

Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Формулы Крамера.

Рассматриваем систему m линейных уравнений с n неизвестными ($x_1…x_n$).

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Введём матрицу $A_{m\times n}=\|a_{ij}\|$, вектор $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и вектор $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. Тогда исходную систему можем записать в матричном виде: $A\vec{x}=\vec{b}$ или $x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+\ldots+x_n\vec{a}_n=\vec{b}$, где $\vec{a}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ – столбцы матрицы A.

Задача о решении системы уравнений равносильна разложению вектора **b** по векторам $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,…,\mathbf{a}_n$ с неизв. коэф. $x_1,x_2,…,x_n$. Данная задача не всегда имеет решение. Если система имеет хотя бы одно решение, то она назыв. *совместной*. Если вектор **b**=0, то система *однородная*. Если **b**=0, то ∃ тривиальное решение (0,…,0). Нетривиальное решение ∃ ⇔ если столбцы A л/завис., т.е rangA<n.

Введём расширенную матрицу:

$$A_1=\begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \vline & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vline & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & \vline & b_m \end{Vmatrix}$$

Теорема Кронекера-Капелли. Система совместна ⇔ rangA=rangA_1.

Док-во:

Необходимость. Пусть система совместна, т.е ∃ $x_1=c_1,x_2=c_2,…,x_n=c_n$ такие, что $c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2+\ldots+c_n\vec{a}_n=\vec{b}$. Число линейно независимых столбцов равно rangA. **b** выражается через $\mathbf{a}_1,…,\mathbf{a}_n$ и через $\mathbf{a}_1,…,\mathbf{a}_r$ ⇒ число л/нез. столбцов не изменилось и осталось rangA, т.е rangA=rangA_1.

Достаточность. Пусть rangA=rangA_1=r, те столбцы $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,…,\mathbf{a}_r$ базисные, а остальные все через них выражаются, в том числе и $\vec{b}=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\vec{a}_i$. Матрица A является базисным минором и A_1 также ⇒ не все $c_1,c_2,…,c_n$ равны нулю ⇒ ∃ решение.

Системы Крамеровского типа (m=n). Δ≠0 ⇒ rangA=n=rangA_1, т.к в A_1 нет минором больше n.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \,\big|\cdot A_{1j} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \,\big|\cdot A_{nj} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\left(a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}\right)=$$
$$=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj}$$

Левая часть. $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} 0 \text{ ï ðè } i\neq j \\ \Delta \text{ ï ðè } i=j \end{cases}$ ⇒

$$x_j\Delta=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj}$$

Правая часть. Это есть разложение по j-му столбцу детерминанта $\begin{vmatrix} & b_1 & \\ & \vdots & \\ & b_n & \end{vmatrix}$ ⇒

$x_j=\dfrac{\Delta_j}{\Delta}$ – ф-ла Крамера.

Формулы для элементов обратной матрицы через формулы Крамера.

$A\cdot A^{-1}=E$. Запишем её для i-го столбца матрицы E:

$$A\vec{x}_i=\vec{e}_i=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

j-я компонента $\mathbf{x}_i$ находится по ф-ле Крамера: $x_i^j=\dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, где

$$\Delta^j=\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{vmatrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{vmatrix}.$$
$$j$$

Раскрыв по j-му столбцу получим:

$$x_i^j=a_{ij}^{-1}=\frac{(-1)^{i+j}}{\Delta}\bar{M}_{ji}$$

Системы однородных линейных уравнений. Фундаментальная система решений.

Найдём общее решение системы: Пусть базисный минор M порядка r=rangA=rangA_1 расположен в верхнем левом углу. Тогда независимы лишь первые r уравнений, а остальные являются их следствиями и их можно не рассматривать.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=b_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

Перенесём вправо все переменные из базисных столбцов, т.е $x_{r+1},x_{r+2},…,x_n$. Тогда получим систему в виде:

$$x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+\ldots+x_r\vec{a}_r=$$
$$=\vec{b}-x_{r+1}\vec{a}_{r+1}-x_{r+2}\vec{a}_{r+2}-\ldots-x_n\vec{a}_n$$

Обозначим:

$$x_{r+1}=C_{r+1};x_{r+2}=C_{r+2};\ldots;x_n=C_n$$

Тогда по формулам Крамера:

$$x_j=\frac{1}{M}\cdot M_j\left(\vec{b}-C_{r+1}\vec{a}_{r+1}-\ldots-C_n\vec{a}_n\right)$$

Св-ва решений однородной системы:

$$x_j=-\frac{1}{M}\left(C_{r+1}M_j\left(\vec{a}_{r+1}\right)+\ldots+C_nM_j\left(\vec{a}_n\right)\right)$$

1)Содержат (n-r) произвольных постоянных.

2)Если $\vec{x}^{(1)}$ и $\vec{x}^{(2)}$ – два решения системы, то их линейная комбинация – тоже решение.

$$A\vec{x}^{(1)}=\vec{0};A\vec{x}^{(2)}=\vec{0}$$

$$A\left(\alpha\vec{x}^{(1)}+\beta\vec{x}^{(1)}\right)=\alpha A\vec{x}^{(1)}+\beta A\vec{x}^{(2)}=\vec{0}$$

3)Решение однородной системы – есть элементы векторного пространства размерности (n-r).

Фундаментальная система решений.

Определение. ФСР – это любая совокупность (n-r) л/нез. решений $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n$ однородной системы. ФСР много, но выберем самую простую из них

$$\vec{X}=\begin{array}{r} 1 \\ \\ \\ \overline{\quad r} \\ r+1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} -\dfrac{M_1\left(\vec{a}_{r+1}\right)}{M} & \vdots & -\dfrac{M_1\left(\vec{a}_n\right)}{M} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\dfrac{M_r\left(\vec{a}_{r+1}\right)}{M} & \vdots & -\dfrac{M_r\left(\vec{a}_n\right)}{M} \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

можно также записать в виде:

$$x_1=\begin{pmatrix} \underline{\text{ïî êðàì åðó}} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};x_2=\begin{pmatrix} \underline{\text{ïî êðàì åðó}} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};\ldots;$$

$$x_{n-r}=\begin{pmatrix} \underline{\text{ïî êðàì åðó}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение системы неоднородных линейных уравнений.

Св-ва решений неоднородной системы.

1)Пусть $\vec{C}$ – решение системы $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\vec{a}_k=\vec{b}$, а $\vec{d}$ – решение системы $\sum\limits_{k=1}^{r}x_k\vec{a}_k=-\sum\limits_{k=r+1}^{n}x_k\vec{a}_k$, тогда их сумма $\vec{c}+\vec{d}$ тоже есть решение неоднородной системы.

$$\sum_k\left(c_k+d_k\right)\vec{a}_k=\sum_k c_k\vec{a}_k+\sum_k d_k\vec{a}_k=\vec{b}$$

$$\text{ò.ê} \sum_k d_k\vec{a}_k=\vec{0}$$

2)Пусть $\vec{C}$ и $\vec{C}'$ – решение неоднородной системы, тогда их разность $\vec{C}-\vec{C}'$ – есть решение

$$\sum_k\left(C_k+C_k'\right)\vec{a}_k=\sum_k C_k\vec{a}_k-\sum_k C_k'\vec{a}_k=\vec{0}$$

Общее решение неоднородной системы.

Пусть мы знаем частное решение неоднородной системы $\vec{X}_{\div.\acute{\imath}}$:

$\vec{X}_{\hat{\imath}.\acute{\imath}}-\vec{X}_{\div.\acute{\imath}}=\vec{X}_{o.o}$, тогда искомое:

$$\vec{X}_{\hat{\imath}.\acute{\imath}}=\vec{X}_{\div.\acute{\imath}}+\vec{X}_{\hat{\imath}.\hat{\imath}}\quad;\quad\vec{X}_{\hat{\imath}.\hat{\imath}}=\sum_{k=1}^{n-r}\alpha_k\vec{x}_k$$

Для поиска $\vec{X}_{\div.\acute{\imath}}$ используем след. систему: $\sum\limits_{k=1}^{r}x_k\vec{a}_k=\vec{b}-\sum\limits_{k=r+1}^{n}x_k\vec{a}_k$, в кот. положим все $x_{r+1}=\ldots=x_n=0$. Остаётся система Крамеровского типа

$\sum\limits_{k=1}^{r}x_k\vec{a}_k=\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}$ – её решение и есть $\vec{X}_{\div.\acute{\imath}}$.

Линейные пространства. Базис и размерность.

Множество L некоторых элементов $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n$ назыв. линейным (векторным) пространством, если:

1)Имеется правило сложения: $\forall\vec{x},\vec{y}\in L\ \exists\ \text{ýë}-\text{ò}\ \ "\vec{x}+\vec{y}"$, кот. назыв. суммой.

2)Имеется правило умножения элементов $\vec{x}$ на число $\lambda\in R,\lambda\in C$. ∃ $"\lambda\cdot\vec{x}"\in L$.

3)Правила 1 и 2 удовлетворяют следующим аксиомам:

а) $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$,

б) $\left(\vec{x}+\vec{y}\right)+\vec{z}=\vec{x}+\left(\vec{y}+\vec{z}\right)$,

в)∃ нулевой элемент: $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}\ \forall\vec{x}\in L$

г)∃ противоположный эл-т $-\vec{x}$: $\vec{x}+\left(-\vec{x}\right)=\vec{0}\ \forall\vec{x}\in L$

д)∃ нейтрального элемента (единичного): $1\cdot\vec{x}=\vec{x}\ \forall\vec{x}\in L$

е) $\lambda\left(\mu\vec{x}\right)=\left(\lambda\vec{x}\right)\mu$

ж) $\left(\lambda+\mu\right)\vec{x}=\lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$

з) $\lambda\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=\lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$

Примеры линейных пространств:

1)Векторное пространство.

2)Пространство всех положительных чисел.

3)Множество всех непрерывных функций на [a,b].

4)Множество всех многочленов $P_n(t)$, степени не выше n.

Базис и размерность.

Если n элементов пространства л/незав., а (n+1), (n+2),… – уже л/завис, то число n назыв. *размерностью* пространства.

$$\dim A^n=n$$
$$\dim\{x\}=1$$
$$\dim\{P_n\}=n+1$$
$$\dim\left\{C_{[a;b]}\right\}=\infty$$

Утверждение. Элементы $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n$ лин/завис. ⇔ когда один из них явл. лин/комб. остальных.

Необходимость. $\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_n\vec{x}_n=0$. Пусть $\alpha_1\neq0$, тогда поделим на α_1 и перепишем в виде: $x_1=-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{x}_2-\ldots-\dfrac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{x}_n$, т.е $\vec{x}_1$ – лин/комб.

Достаточность. Пусть $\vec{x}_1=\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_n\vec{x}_n$. Переписав в виде: $(-1)\vec{x}_1-\alpha_2\vec{x}_2-\ldots-\alpha_n\vec{x}_n=\vec{0}$ убеждаемся, что система $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n$ – л/завис., т.к хотя бы один из коэф. отличен от нуля.

Отсюда следуют также два элементарных утверждения:

1)Если следи элементов системы есть нулевой, то система л/завис.

2)Если часть системы л/завис., то и вся система л/завис.

Рассмотрим n-мерное пространство A^n.

1)Покажем, что элементы $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ л/незав., а ∀ э-т $\vec{x}$ образует с ними лин./завис. систему.

$$\vec{e}_1=\left(1,0,\ldots,0\right)$$
$$\vec{e}_2=\left(0,1,0,\ldots,0\right)$$
$$\vec{e}_n=\left(0,0,\ldots,0,1\right)$$

Рассмотрим л/комб. $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$:

$\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\ldots+\alpha_n\vec{e}_n=\vec{0}$. Вектор с координатами $\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right)$ равен нулю только тогда, когда все его компоненты равны нулю. Любой вектор $\vec{x}$ имеет координаты $\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$, т.е $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n$ и перенося $\vec{x}$ вправо убеждаемся, что система л/зав.

Совокупность л/незав. элементов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ из пространства L назыв. *Базисом* этого лин. пространства, если для $\forall\ \vec{x}\in L$ найдутся такие числа $\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$, что $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n$

2)Разложение $\forall\ \vec{x}\in L$ по базису единственно.

Пусть ∃ два разложения:

$$\begin{cases} \vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n \\ \vec{x}=x_1'\vec{e}_1+x_2'\vec{e}_2+\ldots+x_n'\vec{e}_n \end{cases}\Rightarrow\qquad,$$

$$\Rightarrow\left(x_1-x_1'\right)\vec{e}_1+\left(x_2-x_2'\right)\vec{e}_2+\ldots+$$
$$+\left(x_n-x_n'\right)\vec{e}_n=\vec{0}$$

а так как $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – лин/незав., то все

$$\begin{cases} x_1 - x_1' = 0 \\ x_2 - x_2' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n - x_n' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' \\ x_2 = x_2' \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_n' \end{cases}$$

Основное назначение базиса в том, что с помощью него можно проводить операции над элементами пространства, оперируя только координатами этого элемента в некотором базисе.

$"\vec{x} + \vec{y}" \Rightarrow (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$

$"\lambda\vec{x}" \Rightarrow (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$

Примеры базиса:

1)в A^n – ∀ n лин/незав. векторов.

2)в {x} – любое число $A_0 \neq 0$.

Размерность.

Линейное пространство назыв. n-мерным, если в нём существует n лин/незав. элементов, а само число n назыв. размерностью пространства.

$n = \dim L$

Линейное пространство бесконечномерно, если в нем существует любое число лин/нез. элементов.

Если размерность пространства равна n, то ∀ n л/нез. элементов образуют базис.

Док-во. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – любая система из n лин/нез. элементов пространства L. Если $\forall\, \vec{x} \in L$, то по определению размерности система из (n+1) эл-тов л/зав, т.е $\alpha_0\vec{x} + \alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{0}$ и не все $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ равны нулю ⇒

$$\vec{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\vec{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0}\vec{e}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_n}\vec{e}_n \Rightarrow \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$$

образуют базис.

Если линейное пространство имеет базис, состоящий из n элементов, то размерность его равна n.

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – явл. базисом в пространстве L, тогда достаточно доказать, что ∀ (n+1) эл-тов этого пространства $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{n+1}$ лин/завис. Для этого разложим элементы по базису:

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \ldots a_{1n}\vec{e}_n \\ \vec{x}_2 = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots a_{2n}\vec{e}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{x}_{n+1} = a_{(n+1)1}\vec{e}_1 + a_{(n+1)2}\vec{e}_2 + \ldots a_{(n+1)n}\vec{e}_n \end{cases}$$

Очевидно линейная зависимость элементов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{n+1}$ эквивалентна лин/зав строк матрицы:

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(n+1)1} & a_{(n+1)2} & \cdots & a_{(n+1)n} \end{matrix} \right\|$$

, но строки указанной матрицы линейно зависимы, т.к порядок базисного минора этой матрицы (содерж. (n+1) строк и n столбцов) не превосходит n и ⇒ хотя бы одна их (n+1) ей строк не явл. базисной и представляет собой лин/комб. базисных строк, т.е хотя бы один из эл-в $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{n+1}$ явл. лин. комб. остальных и ⇒ система л/зав.

Изоморфизм линейных пространств.

Два произвольных вещественных пространства *Изоморфны*, если между элементами этих пространств можно установит взаимнооднозначное соответствие так, что если элементам $\vec{x}$ и $\vec{y}$ пространства L соответствуют эл-ты $\vec{x}'$ и $\vec{y}'$ пространства L’, то элементу $\vec{x} + \vec{y}$ отвечает элемент $\vec{x}' + \vec{y}'$, а эл-ту $\lambda\vec{x}$ отвечает эл-т $\lambda\vec{x}'$

Если в L ∃ линейная комбинация $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{x}_n = \vec{0}$, то ей отвечает лин/комб. в L’: $\alpha_1\vec{x}_1' + \alpha_2\vec{x}_2' + \ldots + \alpha_n\vec{x}_n' = \vec{0}$, т.е число лин/незав. эл-тов в L и L’ одно и тоже и ⇒ dimL=dimL’.

Теорема. Любые пространства, размерности кот. совпадают являются изоморфными.

Док-во: рассмотрим некоторый эл-т $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ в L и сопоставим ему эл-т $\vec{x}' = x_1\vec{e}_1' + x_2\vec{e}_2' + \ldots + x_n\vec{e}_n'$ в L’ с теми же координатами, тогда векторам, полученным сложением или умножением в L однозначно соответствует вектор, полученным сложением или умножением в L’ ⇒ пространства L и L’ изоморфны.

Подпространства линейных пространств.

L_1 – подпространство L, если $L_1 \subset L$ – подмножество L и L_1 – само явл. линейным пространством и если удовлетворяет следующим свойствам: 1)Если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ принадлежит подмножеству L, то эл-т $\vec{x} + \vec{y}$ тоже принадлежит подмн. L, 2)Если $\vec{x}$ принадлеж. подпростр. L, то $\lambda\vec{x}$ тоже принадл. подпмнож-ву L.

Рассмотрим эл-ты $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$. Совокупность всех лин/комб. $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_m\vec{x}_m$ с различными наборами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *линейной оболочкой пространства* $L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m)$.

Т.к любое подпространство, содержащее элементы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ обязано содержать все линейные комбинации с ними, то ⇒ размерность линейной оболочки равна максимальному числу лин/незав. элементов в системе $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$.

Сумма и пересечение лин. подпространств.

Совокупность всех эл-в $\vec{x}$ пространства L, принадлежащих одновременно подпространству L_1 и L_2 наз. *пересечением* подпространств L_1 и L_2.

Совокупность эл-в вида $\vec{x} + \vec{y}$, где $\vec{x} \in L_1, \vec{y} \in L_2$ назыв. суммой подпространств.

Теорема. Сумма размерностей произвольных подпространств L_1 и L_2 конечномерного пространства L равна сумме размерности пересечения этих подпространств и размерности суммы этих подпространств.

Док-во. Пусть $k = \dim L_1 \bigcap L_2$. Выберем базис в пересечении $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$. Дополним базис в подпространстве L_1 до базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k, \vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_l$, а базис в L_2 до базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$. Достаточно доказать, что элементы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k, \vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_l, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$ явл. базисом суммы подпространств L_1 и L_2. Докажем, что эл-ты лин/незав. Пусть они лин/завис., тогда ∃ числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ не все равные нулю такие, что

$$\alpha_1\vec{g}_1 + \ldots + \alpha_l\vec{g}_l + \beta_1\vec{e}_1 + \ldots + \beta_k\vec{e}_k + \ldots + \\ + \gamma_1\vec{f}_1 + \ldots + \gamma_m\vec{f}_m = \vec{0}$$

Перепишем в виде:

$$\alpha_1\vec{g}_1 + \ldots + \alpha_l\vec{g}_l + \beta_1\vec{e}_1 + \ldots + \beta_k\vec{e}_k = -\gamma_1\vec{f}_1 - \\ - \ldots - \gamma_m\vec{f}_m$$

Правая часть – это элемент L_2, а левая часть элемент L_1 ⇒ как левая, так и правая часть принадлежат пересечению подпространств L_1 и L_2. Обе части раскладываются по базису $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k)$, $-\gamma_1\vec{f}_1 - \ldots - \gamma_m\vec{f}_m = \lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{e}_k$. В силу лин/независ. базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$ равенство $-\gamma_1\vec{f}_1 - \ldots - \gamma_m\vec{f}_m = \lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{e}_k$ возможно только если

$\gamma_1 = \ldots = \gamma_m = \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$. Из

$$\alpha_1\vec{g}_1 + \ldots + \alpha_l\vec{g}_l + \beta_1\vec{e}_1 + \ldots + \beta_k\vec{e}_k = -\gamma_1\vec{f}_1 - \\ - \ldots - \gamma_m\vec{f}_m$$

при $\gamma_1 = \ldots = \gamma_m = 0$ следует, что лин/комб.

$\alpha_1\vec{g}_1 + \ldots + \alpha_l\vec{g}_l + \beta_1\vec{e}_1 + \ldots + \beta_k\vec{e}_k = \vec{0}$.

Элементы базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k, \vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_l$ равны нулю ⇔ когда все

$\alpha_1 = \ldots = \alpha_l = \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$

Т.е

$$\alpha_1\vec{g}_1 + \ldots + \alpha_l\vec{g}_l + \beta_1\vec{e}_1 + \ldots + \beta_k\vec{e}_k = -\gamma_1\vec{f}_1 - \\ - \ldots - \gamma_m\vec{f}_m$$

имеет место тогда, когда все коэффициенты равны нулю, т.е $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k, \vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_l, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$ есть базис в L_1+L_2. Таким образом получаем, что $\dim L_1=k+l$, $\dim L_2=k+m$, $\dim(L_1+L_2)=k+l+m$, $\dim(L_1 \cap L_2)=k$ ⇒ $\dim L_1+\dim L_2=2k+l+m=$ $=(k+l+m)+k=\dim(L_1+L_2)+\dim(L_1 \cap L_2)$.

Прямая сумма подпространств.

Пространство L составляет прямую сумму подпространств L_1 и L_2 если каждый элемент $\vec{x}$ пространства L может быть представлен единственным образом в виде суммы $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2; \vec{x}_1 \in L_1, \vec{x}_2 \in L_2$.

Для того, чтобы n-мерное пространство L составляло прямую сумму подпространств L_1 и L_2 достаточно, чтобы пересечение L_1 и L_2 содержало только нулевой элемент и чтобы размерность L была равна сумме размерностей L_1 и L_2.

Док-во. Выберем базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ в пространстве L_1 и базис $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ в пространстве L_2. Докажем, что объединение этих базисов – есть базис всего пространства L. Предположим, что некоторая лин./комб. элементов представляет собой нулевой элемент, т.е справедливо рав-во:

$\alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{e}_k + \beta_1\vec{g}_1 + \ldots + \beta_l\vec{g}_l = \vec{0}$ или

$\alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{e}_k = -\beta_1\vec{g}_1 - \ldots - \beta_l\vec{g}_l$. Так как левая часть явл. элементом L_1, а правая L_2, а пересечение L_1 и L_2 содерж. лишь нулевой элемент, то как левая, так и правая часть представляет собой нулевой элемент, а это (т.к они базисы) возможно только при

$\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0, \beta_1 = \ldots = \beta_l = 0 \Rightarrow$ элементы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_l$ – линейно независимы. Пусть теперь $\vec{x}$ – эл-т L. Разложим $\vec{x}$ по базису:

$\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{e}_k + \mu_1\vec{g}_1 + \ldots + \mu_l\vec{g}_l$ или

$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, где $\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{e}_k$, а

$\vec{x}_2 = \mu_1\vec{g}_1 + \ldots + \mu_l\vec{g}_l$. Осталось доказать, что разложение единственно. Предположим, что ∃ ещё одно разложение

$\vec{x} = \vec{x}_1' + \vec{x}_2'\ ;\ \vec{x}_1' \in L_1, \vec{x}_2' \in L_2$, тогда вычитанием получаем:

$(\vec{x}_1 - \vec{x}_1') + (\vec{x}_2 - \vec{x}_2') = \vec{0}$. Т.к $(\vec{x}_1 - \vec{x}_1') \in L_1$, а $(\vec{x}_2 - \vec{x}_2') \in L_2$, а в пересечении пространств L_1 и L_2 лежит нулевой элемент, то:

$$\begin{cases} (\vec{x}_1 - \vec{x}_1') = \vec{0} \\ (\vec{x}_2 - \vec{x}_2') = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{x}_1 = \vec{x}_1' \\ \vec{x}_2 = \vec{x}_2' \end{cases}$$

и разложение единственно.

Преобразование базисов и координат векторов. Матрица преобразования.

Пусть ∃ линейное пространство L. Базис в L: $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, новый базис: $\{\vec{e}_1', \ldots, \vec{e}_n'\}$. Перейдём от нового базиса к старому. Разложим каждый вектор нового базиса по старому базису:

$$\vec{e}_i' = \sum_{j=1}^{n} S_{ji}\vec{e}_j$$

т.е j-й столбец матрицы S_{ji} есть столбец координат i-го вектора нового базиса в старом базисе.

$$S_{n\times n} = \begin{pmatrix} & \vdots & i & \vdots & \\ & \vdots & S_{1i} & \vdots & \\ & \vdots & S_{2i} & \vdots & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & \vdots & S_{ni} & \vdots & \end{pmatrix}$$

т.к $\vec{e}'$ лин/незав., то столбцы S лин/незав. и $\det S \neq 0$.

В матричном виде $\|\vec{e}_1' \cdots \vec{e}_n'\| = \|\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n\| \cdot S$.

Обратный переход: $\|\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n\| = \|\vec{e}_1' \cdots \vec{e}_n'\| \cdot S^{-1}$.

Преобразование координат векторов.

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\vec{e}_i$$

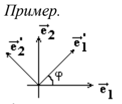
$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k'\vec{e}_k' = \sum_k \xi_k' \sum_j S_{jk}\vec{e}_j = \sum_j \left(\sum_k S_{jk}\xi_k' \right)\vec{e}_j$$

$$\xi_j = \sum_{k=1}^{n} S_{jk}\xi_k'$$

или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \vdots \\ \xi_n' \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \vdots \\ \xi_n' \end{pmatrix} = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

Пример.



$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \cos\varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin\varphi \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2' = -\sin\varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos\varphi \cdot \vec{e}_2 \end{cases}$$

$$S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Евклидовы пространства. Свойства скалярного произведения. Матрица Грамма. Ортонормированный базис. Комплексные евклидовы пространства.

Пусть ∃ линейное пространство L. L назыв. вещественным евклидовым пространством, если $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L$ ставится в соответствие вещественное число $(\vec{x}, \vec{y})$, назыв. скалярным произведением $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и удовлетворяющее аксиомам:

1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$

2) $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = (\vec{x}_1, \vec{y}) + (\vec{x}_2, \vec{y})$

3) $(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda \cdot (\vec{x}, \vec{y}), \forall\lambda \in R$

4) $(\vec{x}, \vec{x}) > 0, \vec{x} \neq \vec{0}\ \ (\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

Примеры.

1)A^n

2)$C_{[a,b]}$,

$$\big(x(t), y(t)\big) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt$$

Св-ва Евклидовых пространств.

1)Для $\forall \vec{x}, \vec{y} \in P_E \Rightarrow (\vec{x}, \vec{y})^2 \leq (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y})$ – нер-во Коши-Буниковского.

Док-во: $\forall\lambda \in R\quad (\lambda\vec{x} - \vec{y}, \lambda\vec{x} - \vec{y}) \geq 0$.

$$(\lambda\vec{x} - \vec{y}, \lambda\vec{x} - \vec{y}) = \lambda^2(\vec{x}, \vec{x}) - 2\lambda(\vec{x}, \vec{y}) + \\ + (\vec{y}, \vec{y}) \geq 0$$

í åð – âî âûï î ëí ÿåò ñÿ ò î ëüêî ï ðè

$$D = 4\lambda^2\left((\vec{x}, \vec{y})^2 - (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}) \right) \leq 0, \text{ò .å}$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \leq (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y})$$

2)Евклидово пространство назыв. *нормированным*, если для $\forall\vec{x} \in L$ ставится в соответствие вещественное число, называемое *нормой* (длиной). Причём указанное правило подчиняется след. условиям:

а) $\|\vec{x}\| > 0\ \ \forall\vec{x} \neq \vec{0}, \|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

б) $\forall\lambda \in R\ \ \|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$

в)

$\forall\vec{x}, \vec{y} \in L$, $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| = \sqrt{(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y})} = \\ = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y})} \leq$$

â ñèëó í åð – âà êî ø è – áóí ÿêî âñêî ãî ≤

$$\leq \sqrt{(\vec{x}, \vec{x}) + 2\sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} \cdot \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} + (\vec{y}, \vec{y})} \leq \\ \leq \sqrt{\left(\sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} + \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} \right)^2} \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

3)В вещественном евклидовом пространстве можно ввести угол:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|},$$

$\vec{x}, \vec{y}$ – *î ðò î ãî í àëüí û , åñëè* $(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

Матрица Грамма.

$\exists(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. $\forall\vec{x}, \vec{y} \in E^n$

$$\vec{x} = \sum_k x_k\vec{e}_k; \vec{y} = \sum_m y_m\vec{e}_m$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_k x_k\vec{e}_k, \sum_m y_m\vec{e}_m \right) = \sum_{k,m=1}^{n} x_k y_m (\vec{e}_k, \vec{e}_m)$$

$\Gamma_{km} = \Gamma_{mk} = (\vec{e}_k, \vec{e}_m)$ – *ì àò ðèöà Ãðàì à*

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}\Gamma\vec{y} = (x_1, \ldots, x_n)(\Gamma_{ik})_{n\times n}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ – *åñëè* Γ *åäèí è÷í àÿ*

$$\Gamma = \delta_{km} = (\vec{e}_k, \vec{e}_m) = \begin{cases} 1, k = m \\ 2, k \neq m \end{cases}$$

такие базисы, в кот. матрица Грама единичная называются ортонормированными. Из ортонормированности ⇒ лин./незав.

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{0} \,\big|\, \cdot\vec{e}_k$$

$$\alpha_1(\vec{e}_1, \vec{e}_k) + \ldots + \alpha_k(\vec{e}_k, \vec{e}_k) + \ldots + \\ + \alpha_n(\vec{e}_n, \vec{e}_k) = 0$$

$$\alpha_k = 0, k = 1, \ldots, n \Rightarrow \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$$

Ортогонализация Грамма-Шмидта.

Пусть $\vec{f}_1 \ldots \vec{f}_n$ – базис в евклидовом пространстве. Тогда ортогонализовать можно по след. алгоритму:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{f}_1}{\sqrt{(\vec{f}_1, \vec{f}_1)}}; \vec{e}_2 = \frac{\vec{q}_2}{\sqrt{(\vec{q}_2, \vec{q}_2)}};$$

$$\vec{q}_2 = \vec{f}_2 - (\vec{f}_2, \vec{e}_1)\vec{e}_1$$

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{f}_2, \vec{e}_1) - (\vec{f}_2, \vec{e}_1) \cdot 1 = 0$$

…………

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{q}_n}{\sqrt{(\vec{q}_n, \vec{q}_n)}}$$

$$\vec{q}_n = \vec{f}_n - (\vec{f}_n, \vec{e}_{n-1})\vec{e}_{n-1} - \ldots - (\vec{f}_n, \vec{e}_1)\vec{e}_1$$

Пусть E_n – n-мерное евклидово пространство, а $M \subset E^n$ – подпространство.

$\vec{x}_m \in M$

Совокупность $M^\perp$ всех элементов $\vec{x}_m^\perp \in M^\perp$ таких, что $(\vec{x}_m^\perp, \vec{x}_m) = 0$ наз. ортогональным дополнением подпространства M. Причём

$M \cap M^\perp = \vec{0}$

$M + M^\perp = M \oplus M^\perp$

Любые E^n с одинаковой размерностью изоморфны между собой.

Комплексные Евклидовы пространства.

Если $(\vec{x},\vec{y}) \in C$, то E^n назыв. унитарным (эрмитовым), если:

1) $(\vec{x},\vec{y}) = \overline{(\vec{y},\vec{x})}$

2) $(\vec{x}_1+\vec{x}_2,\vec{y}) = (\vec{x}_1,\vec{y}) + (\vec{x}_2,\vec{y})$

3) $\begin{cases}(\lambda\vec{x},\vec{y}) = \lambda(\vec{x},\vec{y}) \\ (\vec{x},\lambda\vec{y}) = \lambda(\vec{x},\vec{y})\end{cases}, \begin{cases}(\lambda\vec{x},\vec{y}) = \overline{\lambda}(\vec{x},\vec{y}) \\ (\vec{x},\lambda\vec{y}) = \overline{\lambda}(\vec{x},\vec{y})\end{cases}$

4) $\forall\vec{x} \quad (\vec{x},\vec{x}) \in R_n$

$(\vec{x},\vec{x}) > 0, \vec{x} \neq 0$

$(\vec{x},\vec{x}) = 0, \vec{x} = 0$

Эрмитово сопряжение: $(a_{ij})^{\dagger} = \overline{a}_{ji}$. Матрица Грамма в эрмитовых пространствах – эрмитова. $\Gamma_{ij} = \overline{\Gamma}_{ji}$.

В эрмитовых пространствах также справедливо нер-во Коши-Буниковского.

$\lambda \in C$

$(\lambda\vec{x}-\vec{y},\lambda\vec{x}-\vec{y}) = (\lambda\vec{x},\lambda\vec{x}) - (\lambda\vec{x},\vec{y})$

$-(\vec{y},\lambda\vec{x}) + (\vec{y},\vec{y}) = \lambda\overline{\lambda}(\vec{x},\vec{x}) - \lambda(\vec{x},\vec{y}) -$

$-\overline{\lambda}(\vec{y},\vec{x}) + (\vec{y},\vec{y}) =$

$$\lambda = te^{-i\varphi}$$

$= t^2 - 2t\left|(\vec{x},\vec{y})\right| + (\vec{y},\vec{y}) \geq 0$

$\lambda(\vec{x},\vec{y}) = te^{-i\varphi}\left|(\vec{x},\vec{y})\right|e^{i\varphi}$

$te^{i\varphi}\left|(\vec{x},\vec{y})\right|e^{-i\varphi}$

$z = |z|e^{i\varphi}$

$\overline{z} = |z|e^{-i\varphi}$

Метод Грамма-Шмидта.

Ортогонализация Грамма-Шмидта.

Пусть $\vec{f}_1 \ldots \vec{f}_n$ – базис в евклидовом пространстве. Тогда ортогонализовать можно по след. алгоритму:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{f}_1}{\sqrt{(\vec{f}_1,\vec{f}_1)}}; \vec{e}_2 = \frac{\vec{q}_2}{\sqrt{(\vec{q}_2,\vec{q}_2)}};$$

$\vec{q}_2 = \vec{f}_2 - (\vec{f}_2,\vec{e}_1)\vec{e}_1$

$(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = (\vec{f}_2,\vec{e}_1) - (\vec{f}_2,\vec{e}_1)\cdot 1 = 0$

…………

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{q}_n}{\sqrt{(\vec{q}_n,\vec{q}_n)}}$$

$\vec{q}_n = \vec{f}_n - (\vec{f}_n,\vec{e}_{n-1})\vec{e}_{n-1} - \ldots - (\vec{f}_n,\vec{e}_1)\vec{e}_1$

Линейные операторы, свойства. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.

Пусть $\vec{x} \in L_1$, $\vec{y} \in L_2$, где L_1 и L_2 – некоторые пространства. Пусть есть правило перехода: $\vec{x} \xrightarrow{\widehat{A}} \vec{y}$. Правило отображения $\vec{x} \in L_1$ в $\vec{y} \in L_2$ называется лин. оператором, если:

1) $\forall\vec{x}_1,\vec{x}_2 \in L_1$

$\widehat{A}(\vec{x}_1+\vec{x}_2) = \widehat{A}\vec{x}_1 + \widehat{A}\vec{x}_2$

2) $\forall\lambda \in C$

$\widehat{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\widehat{A}\vec{x}$

Если $L_1=L_2=L$, то оператор $\widehat{A}$ осуществляет линейные преобразования пространства L. $\vec{x}_{\in L} \xrightarrow{\widehat{A}} \widehat{A}\vec{x} \in L$.

Преобразование $L \xrightarrow{\widehat{A}} L$ может быть и обратимое.

$\forall\vec{x}$

$\vec{y} = \widehat{A}\vec{x} \to \exists\widehat{A}^{-1} : \vec{x} = \widehat{A}^{-1}\vec{y}$

Свойства.

1) $(\lambda\widehat{A}_1 + \mu\widehat{A}_2)\vec{x} = \lambda(\widehat{A}_1\vec{x}) + \mu(\widehat{A}_2\vec{x})$

2)∃ единичный оператор. $\widehat{1}\vec{x} = \vec{x} \ \forall\vec{x} \in L$

3)∃ противоположного оператора. $(-\widehat{A})\vec{x} = (-1)\widehat{A}\vec{x}$

4)Произведение операторов. $(\widehat{A}\widehat{B})\vec{x} = \widehat{A}(\widehat{B}\vec{x}); (\widehat{B}\widehat{A})\vec{x} = \widehat{B}(\widehat{A}\vec{x})$

$\widehat{A}\widehat{B} \neq \widehat{B}\widehat{A}$

$\widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A} = [\widehat{A},\widehat{B}]$ – *êî ì ì óò àò î ð*

$\widehat{A}\widehat{B} + \widehat{B}\widehat{A} = \{\widehat{A},\widehat{B}\}$ – *àí ò èêî ì ì óò àò î ð*

5)∃ нулевого оператора $\widehat{0}\vec{x} = \vec{0}$.

Для данного оператора не всегда существует обратный. Выясним, при каких условиях обратимость возможна. Для обратного оператора:

$\widehat{A}\widehat{A}^{-1} = \widehat{A}^{-1}\widehat{A} = \widehat{1}$

$\widehat{A}^{-1}\widehat{A}\vec{x} = \vec{x}$

Таким образом если оператор $\widehat{A}$ имеет обратный $\widehat{A}^{-1}$, то из условия, что $\widehat{A}\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

Теорема. Для того, чтобы оператор имел обратный необходимо и достаточно, чтобы он действовал взаимно однозначно из L_1 в L_2.

Оператор действует взаимно однозначно, если для $\forall\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2 \Rightarrow \widehat{A}\vec{x}_1 \neq \widehat{A}\vec{x}_2$, т.е если различным элементам пространства соответствуют разные образы.

Док-во:

Необходимость. Пусть оператор $\widehat{A}$ имеет обратный, но не действует взаимно однозначно из L в L. Это означает, что некоторым различным элементам $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$, $\vec{x}_2 - \vec{x}_1 \neq 0$ отвечает один и тот же элемент $\vec{y} = \widehat{A}\vec{x}_1 = \widehat{A}\vec{x}_2$, но тогда $\widehat{A}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \vec{0}$, а т.к оператор имеет обратный, то $(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \vec{0}$, что противоречит различности элементов $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ ⇒ предположение не верно.

Достаточность. Пусть оператор $\widehat{A}$ действует взаимно однозначно из L в L. Тогда каждому элементу $\vec{y} \in L$ соответствует элемент $\vec{x} \in L$ такой, что $\vec{y} = \widehat{A}\vec{x}$, но тогда ∃ такой оператор $\widehat{A}^{-1}$, обладающий свойством $\widehat{A}^{-1}\vec{y} = \widehat{A}^{-1}(\widehat{A}\vec{x}) = \vec{x}$. Оператор явл. линейным, т.к он обратный к данному.

Матричное представление оператора.

Разложим произвольный элемент $\vec{x}$ по базису в пространстве L: $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k\vec{e}_k$. Пусть $\widehat{A}$ – линейный оператор, тогда: $\widehat{A}\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k(\widehat{A}\vec{e}_k)$. Теперь разложим $\widehat{A}\vec{e}_k$ по базису $\widehat{A}\vec{e}_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}\vec{e}_j$. Тогда

$$\widehat{A}\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j=1}^{n} a_{jk}\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k\right)\vec{e}_j$$

$y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k$

$A = (a_{jk})$ – *ì àò ðèöà ëèí .î ï åðàò î ðà. â áàçèñå* $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$

$\vec{y} = A\vec{x}$

Число линейно независимых вектором определяется рангом матрицы оператора и определяет размерность подпространства, построенного на $\widehat{A}\vec{e}_1,\widehat{A}\vec{e}_2,\ldots,\widehat{A}\vec{e}_n$. Это подпространство назыв. *образом* оператора $\widehat{A}$ и обозначается как $im\widehat{A}$.

$rang\widehat{A} = \dim(im\widehat{A}) = rangA$. Ядро оператора $\widehat{A}$ – это множество $\vec{x}$ таких, что $\widehat{A}\vec{x} = \vec{0}$ и обозначается как $\ker\widehat{A}$. $\ker\widehat{A}$ – это подпространство в L. $\widehat{A}\vec{x} = \vec{0}$ – эквивалентно системе однородных уравнений $\begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{Vmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$

$\vec{x}$, составляющее $\ker\widehat{A}$ – есть решение системы. Базис в $\ker\widehat{A}$ – это ФСР линейной системы.

dim($\ker\widehat{A}$)=кол-ву лин/незав. решений.

dim($\ker\widehat{A}$)=R-r=dimL-dim($im\widehat{A}$)

$\widehat{A}^{-1}$ ∃ *åñëè* $\widehat{A}\vec{e}_1\ldots\widehat{A}\vec{e}_n$ *ëèí / í åçàâ.*

$\ker(\widehat{A}) = \{\vec{0}\}, im(\widehat{A}) = L$

Преобразование матрицы оператора при изменении базиса.

$\{e\} \xrightarrow{S} \{e'\}$

$(\vec{e}'_1\ldots\vec{e}'_n) = (\vec{e}_1\ldots\vec{e}_n)\cdot S$

$\vec{x} : \begin{pmatrix}x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = S\cdot\begin{pmatrix}x'_1 \\ \vdots \\ x'_n\end{pmatrix}$

$\vec{y} = \widehat{A}\vec{x}$

$\vec{\eta}$ – *ñò î ëáåö êî î ðä. y â* $\{e\}$

$\vec{\eta} = A\vec{\xi}$

Â í î âî ì áàçèñå $\{e'\}$ âû ðàæåí èå $\vec{y} = \widehat{A}\vec{x}$ èì ååò äð. ì àòðè÷í óþ çàï èñü ñ äð. ì àòð. A'

$\vec{\eta}' = A'\vec{\xi}'$

Ñâÿçü ì åæäó A è A':

$\vec{\eta} = A\vec{\xi}$

$\begin{cases}\vec{\eta} = S\vec{\eta}' \\ \vec{\xi} = S\vec{\xi}'\end{cases} \Rightarrow S\vec{\eta}' = AS\vec{\xi}' \Big| \cdot S^{-1}$

$\vec{\eta}' = S^{-1}AS\vec{\xi}'$

$A' = S^{-1}AS$

Åñëè S – *ì àò ðèöà ï î âî ðî ò à,ò î*

$S^{-1} = S^T$

$A' = S^TAS$

Инвариантные подпространства. Собственные значения и собственные вектора линейных операторов.

Инвариантные подпространства.

Пусть ∃ пространство L и M⊂L – подпространство. Пусть ∃ линейный оператор $\widehat{A}$. Если $\forall\vec{x} \in M$; $\widehat{A}\vec{x} \in M$, то M назыв. *инвариантным* относительно оператора $\widehat{A}$ подпространством.

Пример. Поворот вокруг оси Oz на угол φ. $A_\varphi = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, где M – плоскость XoY.

Св-ва.

1) $M = \{\vec{0}\} - inv \ \forall\widehat{A}$

2)M=L – inv ∀ $\widehat{A} \in L$

3)∀M⊂L – inv $\widehat{A} = \widehat{1}$ и $\widehat{A} = \widehat{0}$

4) *äëÿ* $\forall\widehat{A} \ \ \ker\widehat{A}$ *è* $im\widehat{A} - inv$

Собственные значения.

Если для $\widehat{A}$ ∃ λ∈C и $\vec{x} \neq \vec{0}$ такие, что $\widehat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, то λ назыв. собственным значением $\widehat{A}$, а $\vec{x}$ – собственным вектором, отвечающим данному собственному значению. Всё множество собственных векторов, назыв. собственным подпространством $\widehat{A}$, отвечающему λ.

Если $\vec{x}$ – собств. вектор, то и $\alpha\vec{x}$ – собственный вектор

$\widehat{A}(\alpha\vec{x}) = \alpha\widehat{A}\vec{x} = \alpha\lambda\vec{x} = \lambda\alpha\vec{x}$

Нахождение собств. значений и собственных векторов в базисе.

Пусть $\vec{e}_1\ldots\vec{e}_n$ – базис в L и A – матрица оператора $\widehat{A}$ в этом базисе. Подставляем в условие $\widehat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}-\lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$$

Если в базисе $\vec{e}_1\ldots\vec{e}_n$ все базисные вектора – собственные и отвечают различным собственным значениям $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, то матрица оператора имеет диагональный вид:

$\widehat{A}\vec{e}_k = \lambda_k\vec{e}_k$

$$A = e_k\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Система, записанная выше для поиска собственных значений имеет решение $\vec{x} \neq 0$ ⇔ когда Rang(A-λE)<n, т.е $\det(A-\lambda E) = 0$. Это уравнение называется характеристическим для матрицы A. Многочлен от λ, равный f(λ)=det(A-λE), назыв. характеристическим многочленом, т.е λ_k – это корни уравнения f(λ)=0., k=1,…,n. После нахождения всех корней отдельно для каждого λ решается система уравнений из которой находятся собственные вектора.

Теорема. Если все собств. значения $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ различны, то все n собственных векторов $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n$ – лин/независ.

Док-во. Докажем по матем. индукции.

1)Для одного вектора утверждение очевидно выполняется. Т.к $\vec{x}_1$ — ненулевой вектор и он лин/независ.

2)Пусть утверждение верно для m векторов (m<n) $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$.

3)Присоединим ещё один вектор $\vec{e}_{m+1}$ и предположим, что $\alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_{m+1}\vec{e}_{m+1} = \vec{0}$ и не все α_k=0. Подействуем оператором на лин. комбинацию:

$\widehat{A}(\alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_{m+1}\vec{e}_{m+1}) = \vec{0}$

$\lambda_1\alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_{m+1}\alpha_{m+1}\vec{e}_{m+1} = \vec{0}$

Умножим первоначальную лин/комб. на λ_{m+1}: $\lambda_{m+1}(\alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_{m+1}\vec{e}_{m+1}) = \vec{0}$. Вычтем из предыдущего равенства это и получим:

$\sum_{k=1}^{m}(\lambda_k - \lambda_{m+1})\alpha_k\vec{e}_k = \vec{0}$. По условию все λ_k различны ⇒ $(\lambda_k - \lambda_{m+1}) \neq 0, k \leq m \Rightarrow \alpha_k = 0$.

⇒ все векора лин/незав. Таким образом по индукции добираемся до n векторов и теорема доказана.

Если все λ_k различны, то матрица A диагональная $A = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

Кратные корни. Пусть λ_0 – корень кратности S, тогда размерность собственного подпространства $\dim M_0 \leq S$.

$\widehat{A}\vec{x} = \lambda_0\vec{x}, \vec{x} \in M_0$

Ï óñò ü $\dim M_0 = k$

Выберем в M_0 базис $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_k$. Тогда для ∀ $\vec{e}_i$, i=1,…,k имеем $\widehat{A}\vec{e}_i = \lambda_0\vec{e}_i$. Тогда матрица A имеет вид:

$$A = \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_k \\ \\ \\ \end{array}\left\Vert\begin{array}{ccc|c} \lambda_0-\lambda & & 0 & \\ & \ddots & & B \\ 0 & & \lambda_0-\lambda & \\ \hline & & & \\ & 0 & & C-\lambda E \\ & & & \end{array}\right\Vert$$

$\det(A-\lambda E) = (\lambda_0-\lambda)^k\det(C-\lambda E)$

Видим, что λ_0 – корень кратности ≥ k. По условию кратность λ_0 равна S, т.е S≥k, или S=k.

Св-ва характеристического уравнения.

1)Коэффициенты det(A-λE)=f(λ) не зависят от базиса, в котором записана A. $A' = S^{-1}AS$, где S – матрица перехода. $(A-\lambda E)' = \det(S^{-1}(A-\lambda E)S) = \det S^{-1}\cdot\det(A-\lambda E)\cdot\det S = \det(A-\lambda E)$. Коэф. не зависящие от базиса назыв. инвариантами преобразования S.

$$\det(A-\lambda E) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\sum_{i=1}^{n}a_{ii} + \ldots + \det A$$

$trA = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$

$\det A = \lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n$

Линейные операторы в евклидовых пространствах. Сопряжённый оператор.

Рассматриваем вещественное линейное евклидово пространство:

$(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n}x_iy_i\Gamma_{ij}$

$\Gamma_{ij} = (\vec{e}_i,\vec{e}_j)$ – *ì àò ðèöà Ãðàì à*

Â î ðò î í î ðì èðî âàí í î ì áàçèñå

Γ – *åäèí è÷í àÿ*

$(\vec{x},\vec{y}) = x^T\Gamma y$

$x = \begin{pmatrix}x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix}y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$

Пусть ∃ некоторый оператор $\widehat{A}$: E→E. Оператор $\widehat{A}^*$, удовлетвор. условию: $(\widehat{A}\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\widehat{A}^*\vec{y})$ называется сопряжённым оператором для оператора $\widehat{A}$. Найдём матрицу $\widehat{A}^*$ в некотором базисе:

$(Ax)^T\cdot\Gamma\cdot y = x^T\cdot\Gamma\cdot A^*y$

$x^TA^T\Gamma y = x^T\Gamma A^*y$

$A^T\Gamma = \Gamma A^*$

$A^* = \Gamma^{-1}A^T\Gamma$

В ортонормированном базисе:

$\Gamma = E, \Gamma^{-1} = E, A^* = A^T$

Св-ва:

1)Т.к $(A^T)^T \Rightarrow (\widehat{A}^*)^* = \widehat{A}$

2)Т.к $(AB)^T = B^TA^T \Rightarrow (\widehat{A}\widehat{B})^* = \widehat{B}^*\widehat{A}^*$

3)Т.к $\det A = \det A^T \Rightarrow \det A^* = \det A$

4) $\widehat{A}$ и $\widehat{A}^*$ имеют общий набор собственных значений.

Самосопряжённые операторы. Свойства собственных значений и собственных векторов. Диагональный вид самосопряжённого оператора.

Если $\widehat{A}^* = \widehat{A}$, то оператор $\widehat{A}$ назыв. самосопряжённым оператором(ССО).

$\forall\vec{x},\vec{y} \quad (\widehat{A}\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\widehat{A}\vec{y})$

Если $\widehat{A}$ – ССО, то $\forall\vec{x} \quad (\widehat{A}\vec{x},\vec{x})$ – вещественное число (также и в компл. пространстве).

$(\vec{x},\vec{y}) = \overline{(\vec{y},\vec{x})} \Rightarrow (\widehat{A}\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\widehat{A}\vec{y})$

Св-ва:

1)Если $\widehat{A}$ – ССО, то

$(\widehat{A}\vec{x},\vec{x}) = (\vec{x},\widehat{A}\vec{x}) \Rightarrow (\vec{x},\widehat{A}\vec{x}) \in R$

2)Если $\hat{A}$ – ССО, то его собственные значения $\lambda_k \in R$. Пусть $\vec{x}$ – собственный вектор. $(\hat{A}\vec{x},\vec{x})=(\lambda\vec{x},\vec{x})=\lambda(\vec{x},\vec{x})\Rightarrow\lambda\in R$

3)Собственные вектора $\hat{A}$ если $\hat{A}$ – ССО, отвечающие различным собственным значениям ортогональны (и в компл. пространстве).

Док-во:

$$\left.\begin{matrix}\hat{A}\vec{x}_1=\lambda_1\vec{x}_1\\ \hat{A}\vec{x}_2=\lambda_2\vec{x}_2\end{matrix}\right|\Rightarrow\left.\begin{matrix}(\hat{A}\vec{x}_1,\vec{x}_2)=\lambda_1(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\\(\vec{x}_1,\hat{A}\vec{x}_2)=\lambda_2(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\end{matrix}\right|$$

Âû÷òåì :

$$0=(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\cdot(\lambda_1-\lambda_2)\Rightarrow(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=0$$

4)Если подпространство $M\subset E$ инвариантно относительно ССО $\hat{A}$, то и его ортогональное дополнение $M^\perp$ также инвариантно относительно $\hat{A}$.

Док-во:

$\forall\vec{y}\in M^\perp\quad(\vec{x},\vec{y})=0$

Ðàññì. $(\hat{A}\vec{x},\vec{y})=(\vec{x}_1,\vec{y}_2)=0$

Åñëè $\hat{A}$ – ÑÑÎ, òî

$(\hat{A}\vec{x},\vec{y})=0=(\vec{x},\hat{A}\vec{y})\Rightarrow\hat{A}\vec{y}\in M^\perp$

Основная теорема о самосопряжённых операторах.

Если $\hat{A}$ – ССО в E, то в E существует ортонормированный базис из собственных векторов $\hat{A}$.

Док-во: Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – собственные значения $\hat{A}$ и $M_1\ldots M_n$ – собственные подпространства. Обозначим $L=M_1\cup M_2\cup\ldots\cup M_n$ – это прямая сумма. Покажем, что L=E. L – инвариантно относительно $\hat{A}$: $\forall\vec{x}\in L$ имеем

$\vec{x}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_n\vec{x}_n,\ \vec{x}_k\in M_k$ и

$\hat{A}\vec{x}=\hat{A}(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_n\vec{x}_n)=$

$=\alpha_1\lambda_1\vec{x}_1+\alpha_2\lambda_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_n\lambda_n\vec{x}_n\in L$

Если L – инвариантно относительно $\hat{A}$, то и его $L^\perp$ также инвариантно $\hat{A}$. Рассмотрим $\hat{A}$ в $L^\perp$ (ограничение $\hat{A}$ на $L^\perp$). Если бы $\dim L^\perp>0$, то в $L^\perp$ можно вычислить матрицу $\hat{A}$ и найти какое-то собственное значение и собственный вектор. Но по построению L в него входят все $\vec{x}_k$ и λ_k. $E=L\oplus L^\perp$. В $L^\perp$ нет ничего кроме 0. В данном инвариантном подпространстве M_k собственные вектора могут быть не ортогональны, но базис можно ортогонализовать, например по методу Грамма-Шмидта.

Если в ортонормированном базисе – матрица A симметрична ($A^T=A$), т.е $\hat{A}$ – ССО, то $\exists$ новый ортонормированный базис (f) собственные вектора, матрица перехода к которому:

$S(l)\to(f)$ – ортогональная матрица.

$A_f=S^{-1}A_lS$ – диагональная матрица.

Собственные вектора $\hat{A}_i$:

$(\vec{f}_1\ldots\vec{f}_n)=(\vec{e}_1\ldots\vec{e}_n)S$

$$S=\begin{pmatrix}f_1 & f_n\\ \begin{pmatrix}f_{11}\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\end{pmatrix}\\ A_{1n} & \end{pmatrix}$$

Если $\exists$ ортонормированный базис из собственных векторов $\hat{A}$ $(\lambda_k\in R)$, в котором A – диагональная матрица, то $\hat{A}$ – самосопряжённая.

Ортогональные и унитарные операторы.

Ортогональный оператор (оператор поворота) – такой оператор, кот. сохраняет своё скалярное произведение, т.е $\forall\vec{x},\vec{y}\quad(\hat{A}\vec{x},\hat{A}\vec{y})=(\vec{x},\vec{y})$. Вводя сопряжение получим: $(\hat{A}\vec{x},\hat{A}\vec{y})=(\vec{x},\hat{A}^*\hat{A}\vec{y})=(\vec{x},\vec{y})\Rightarrow$

$\Rightarrow\hat{A}^{-1}=\hat{A}^*$

Т.к в ортонормированном базисе $A^*=A^T$, то обратная матрица для ортогонального оператора $\hat{A}$ есть транспонированная:

$A^{-1}=A^T$

Св-ва:

1)Собственные значения ортогонального оператора $\hat{A}$ по модулю равны 1 (в том числе и в компл. простр.)

$(\hat{A}\vec{x},\hat{A}\vec{x})=(\vec{x},\vec{x})$, $\vec{x}$ – собственный вектор, λ – собственные значения.

$(\lambda\vec{x},\lambda\vec{x})=\lambda\bar{\lambda}(\vec{x},\vec{x})\Rightarrow|\lambda|=1$

â $R:\lambda=\pm1$

2)Произведение $\hat{A}_1\hat{A}_2$ есть ортогональный оператор (два последовательных поворота – есть поворот)

$(\hat{A}_1\hat{A}_2\vec{x},\hat{A}_1\hat{A}_2\vec{y})=(\hat{A}_1\vec{x}_1,\hat{A}_1\vec{y}_1)=$

$=\big|_{A_1-\text{îðò.}}=(A_2\vec{x}_2,A_2\vec{y})\big|_{A_2-\text{îðò.}}=(\vec{x},\vec{y})$

ССО и Ортогональные операторы в комплексных (эрмитовых, унитарных) пространствах.

$(\vec{x},\vec{y})=\overline{(\vec{y},\vec{x})}$

$(\vec{x},\vec{y})=x^T\Gamma\bar{y}$; $\Gamma_{ij}=(\vec{e}_i,\vec{e}_j)=\bar{\Gamma}_{ji}$,

ò.å Γ – ýðì èòîâà.

$(\hat{A}\vec{x},\vec{y})=(\vec{x},\hat{A}^*\vec{y})$

$(Ax)^T\Gamma\bar{y}=x^T\Gamma\overline{(A^*y)},x^TA^T\Gamma\bar{y}=x^T\Gamma\bar{A}^*\bar{y}$

$A^T\Gamma=\Gamma\bar{A}^*\big|\cdot\Gamma^{-1}\Rightarrow\bar{A}^*=\Gamma^{-1}A^T\Gamma\Rightarrow$

$\Rightarrow A^*=\bar{\Gamma}^{-1}\bar{A}^T\bar{\Gamma}$

Â îðòîíîðì èð. áàçèñå:

$\Gamma=E,A^*=\bar{A}^T=A^\dagger$ – ýðì èòîâî ñîïðÿæ.

Если $\hat{A}$ – ССО, то $A=A^\dagger$ – его матрица эрмитова.

1)Собств/знач. $\in$ R.

2)Собств./вектора ($\lambda_k\neq\lambda_m$) ортогональный ССО – Эрмитов оператор.

3)Если $(\hat{A}\vec{x},\hat{A}\vec{y})=(\vec{x},\vec{y})$,то оператор назыв. унитарным.

$(\hat{A}\vec{x},\hat{A}\vec{y})=(\vec{x},\hat{A}^*\hat{A}\vec{y})=(\vec{x},\vec{y})=\hat{A}^*=\hat{A}^{-1}$

для унитарного оператора в ортонормированном базисе $A^*=A^\dagger$

4)В базисе из собственных векторов эрмитова матрица унитарна: $A^{-1}=S^{-1}AS$, S — унитарная матрица переходит от исходного ортонормированного базиса {e} к ортонормированному базису из собственных векторов оператора $\hat{A}$; $S^{-1}=S^\dagger$.

Билинейные и квадратичные формы. Матрица билинейной формы. Преобразование матрицы при замене базиса.

Билинейная форма – Числовая функция, аргументом кот. явл. всевозможные векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ линейного пространства L и линейную по каждому из этих аргументов, т.е

$B(\lambda\vec{x},\vec{y})=\lambda B(\vec{x},\vec{y})\quad B(\vec{x},\lambda\vec{y})=\lambda B(\vec{x},\vec{y})$

Квадратичная форма – это билинейная форма, аргументом кот. служат одни и те же векторы $\vec{x}$: $A(\vec{x})=B(\vec{x},\vec{x})$.

Преобразование Матрицы при изменении базиса.

Билинейная форма:

$\{e\}\xrightarrow{S}\{f\}$

$\vec{f}_k=\sum_i S_{ik}\vec{e}_i$

$b^e_{ij}=B(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$

$b^f_{ij}=B(\vec{f}_i,\vec{f}_j)$

$$b^f_{kl}=B(\vec{f}_k,\vec{f}_l)=B\left(\sum_i S_{ik}\vec{e}_i,\sum_j S_{jl}\vec{e}_j\right)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^n S_{ik}S_{jl}B(\vec{e}_i,\vec{e}_j)=\sum_{i=1}^n S^T_{ki}\left(\sum_{j=1}^n b^e_{ij}S_{jl}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^n S^T_{ki}(B^eS)_{il}$$

$B^f=S^TB^eS$

$Rang(B^e)=Rang(B^f)$ – это инвариант замены базиса.

Если Rang(B)<n, то б.ф – вырожденная.

Если B(**x**,**y**)=B(**y**,**x**), то б.ф – симметричная.

Квадратичная форма.

$$A(\vec{x})=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j=\xi^TA\xi$$

$A^f=S^TA^eS$

Кв. форма полож. определённая, если A(x)>0, отриц. опр. если A(x)<0, если и та и другая, то знакопеременная.

Если A(x) полож. определённая, то полярная ей B(x,y) удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения в евклидовом пространстве.

Билинейная форма в комплексном пространстве.

Выполняются аксиомы:

1) $(\vec{x},\vec{y})=\overline{(\vec{y},\vec{x})}$,

2) $(\vec{x}_1+\vec{x}_2,\vec{y})=(\vec{x}_1,\vec{y})+(\vec{x}_2,\vec{y})$

3) $(\lambda\vec{x},\vec{y})=\lambda(\vec{x},\vec{y})$

4) $B(\vec{x},\mu\vec{y})=\bar{\mu}B(\vec{x},\vec{y})$

$B(\lambda\vec{x},\lambda\vec{x})=|\lambda|^2B(\vec{x},\vec{x})$

В базисе: $B(\vec{x},\vec{y})=\xi^TB\bar{\eta}$

Замена базиса: $B_f=S^TB_e\bar{S}$

Эрмитова б.ф: $B(\vec{x},\vec{y})=\overline{B(\vec{y},\vec{x})}$

Биллин. и квадратичн. формы в евклидовых пространствах.

Линейный оператор $\hat{A}$ назыв. присоед. к б.ф B(x,y), если $\forall\vec{x},\vec{y}:B(\vec{x},\vec{y})=(\vec{x},\hat{A}\vec{y})$.

Для любой B(x,y) оператор $\hat{A}$ определён однозначно в базисе.

$B(\vec{x},\vec{y})=\xi^TB\eta$

$(\vec{x},\hat{A}\vec{y})=\xi^TA\eta$

$B=\Gamma A$

В ортонормированном базисе Г=E и матрицы б.ф и соотв. ей оператора $\hat{A}$ совпадают: B=A.

Симметричным б.ф соответствует ССО.

$B(\vec{x},\vec{y})=B(\vec{y},\vec{x})=(\vec{x},\hat{A}\vec{y})=(\vec{y},\hat{A}\vec{x})$

$(\vec{x},\hat{A}\vec{y})=(\hat{A}\vec{x},\vec{y})$

Симметричным б.ф отвечает ССО с симм. матрицей. В базисе из ортонормированных собств. векторов его матрица диагональна

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к диагональному виду.

Заключается в последовательном выделении полных квадратов. Рассмотрим на примере:

$A(\vec{x})=3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$

Выделим коэф. при квадр. слагаемом, не равном нулю. При x_2.

Выпишем все слагаемые с x_2:

$$3x_2^2+4x_1x_2-2x_2x_3=3\left(x_2+\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_3\right)^2-$$

$$\frac{4}{3}x_1^2-\frac{1}{3}x_3^2+\frac{4}{3}x_1x_3$$

Перепишем

$A(x_1,x_2,x_3)=A(x_1,y_2,x_3)=$

$$=3y_2^2+\frac{8}{3}x_3^2-\frac{4}{3}x_1^2+\frac{16}{3}x_1x_3=A_1(x_1,x_3)$$

С $A_1(x_1,x_3)$ поступим также. Выделим с x_1:

$$-\frac{4}{3}x_1^2+\frac{16}{3}x_1x_3=-\frac{4}{3}(x_1-2x_3)^2+\frac{16}{3}x_3^2$$

$y_1=x_1-2x_3$

$y_3=x_3$

$$A(\vec{x})=-\frac{4}{3}y_1^2+3y_2^2+8y_3^2$$

$$\begin{cases}y_1=x_1-2x_3\\ y_2=\frac{2}{3}x_1+x_2-\frac{1}{3}x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$$

$$S=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};A_y=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3} & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

Метод ортогональных преобразований приведения квадратичной формы к диагональному виду.

Биллин. и квадратичн. формы в евклидовых пространствах.

Линейный оператор $\hat{A}$ назыв. присоед. к б.ф B(x,y), если $\forall\vec{x},\vec{y}:B(\vec{x},\vec{y})=(\vec{x},\hat{A}\vec{y})$.

Для любой B(x,y) оператор $\hat{A}$ определён однозначно в базисе.

$B(\vec{x},\vec{y})=\xi^TB\eta$

$(\vec{x},\hat{A}\vec{y})=\xi^TA\eta$

$B=\Gamma A$

В ортонормированном базисе Г=E и матрицы б.ф и соотв. ей оператора $\hat{A}$ совпадают: B=A.

Симметричным б.ф соответствует ССО.

$B(\vec{x},\vec{y})=B(\vec{y},\vec{x})=(\vec{x},\hat{A}\vec{y})=(\vec{y},\hat{A}\vec{x})$

$(\vec{x},\hat{A}\vec{y})=(\hat{A}\vec{x},\vec{y})$

Симметричным б.ф отвечает ССО с симм. матрицей. В базисе из ортонормированных собств. векторов его матрица диагональна

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Зададимся вопросом: С какой A матрица кв.ф имеет диаг. вид:

$$A(\vec{x})=(x_1\ldots x_n)\begin{Vmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{Vmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=$$

$=\lambda_1x_1^2+\ldots+\lambda_nx_n^2$

Привести A(x) к канонич. виду можно, найдя собственные значения её симметричной матрицы и построив ортонормированный базис из её собственных векторов. Матрица перехода S к этому ортонормированному базису от исходного ортонормированного базиса ортогональна.

$$A_{\text{ñ/â}}=S^TA_{\text{èñõ.}}S,A_{\text{ñ/â}}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$S=\|(\vec{x}_1)\cdots(\vec{x}_n)\|$; $\vec{x}_k$ – ñîáñò. âåêòîðà, îò â. ñîáñò. çíà÷.

Метод Якоби приведения квадратичной формы к диагональному виду.

Введём понятие треугольного преобразования базисных векторов. Преобраз. базисн. векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ назыв. треугольным, если:

$$\begin{cases}\vec{f}_1=\vec{e}_1\\ \vec{f}_2=\alpha_{21}\vec{e}_1+\vec{e}_2\\ \vec{f}_3=\alpha_{31}\vec{e}_1+\alpha_{32}\vec{e}_2+\vec{e}_3\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \vec{f}_n=\alpha_{n1}\vec{e}_1+\alpha_{n2}\vec{e}_2+\ldots+\vec{e}_n\end{cases}$$

Т.к определитель матрицы треугольного преобразования отличен от нуля (равен 1), то векторы $\vec{f}_1,\vec{f}_2,\ldots,\vec{f}_n$ образуют базис.

Введём в рассмотрение угловые миноры матрицы $A(e)=a_{ij}$ коэф. формы A(x,x) в базисе (e), обозначив их символами $\Delta_1,\Delta_2,\ldots\Delta_n$:

$$\Delta_1=a_{11};\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\ldots$$

Теорема. Пусть миноры $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_{n-1}$ матрицы (a_{ij}) квадратичной формы A(x,y) отличны от нуля. Тогда существует единственное треугольное преобразование базисных векторов ***e****$_1$,* ***e****$_2$, …,* ***e****$_n$, с помощью которого форму A(x,x) можно привести к канонич. виду.*

Док-во. Коэф. b_{ij} формы A(x,x) в базисе $\vec{f}_1,\vec{f}_2,\ldots,\vec{f}_n$ вычисляются по формулам $b_{ij}=A(\vec{f}_i,\vec{f}_j)$. Если форма A(x,x) в базисе $\vec{f}_1,\vec{f}_2,\ldots,\vec{f}_n$ имеет кононич. вид, то $b_{ij}=0$ при $i\neq j$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно построить с помощью треугольного преобразования такой базис $\vec{f}_1,\vec{f}_2,\ldots,\vec{f}_n$ в кот. будут выполнены условия: $A(\vec{f}_i,\vec{f}_j)=0$ ïðè $i\neq j$. Но для начала убедимся что данное преобразование единственно. Ввиду линейности квадр. формы A(x,x) по каждому аргументу видим, что заявленные соотношения выполняются если:

$$A(\vec{e}_1,\vec{f}_j)=0;A(\vec{e}_2,\vec{f}_j)=0,\ldots,\qquad(1)$$

$A(\vec{e}_{j-1},\vec{f}_j)=0$

$j=2,3,\ldots,n$

Поставляем сюда f_j из треуг. преобаз.

$$\vec{f}_j=\alpha_{j1}\vec{e}_1+\alpha_{j2}\vec{e}_2+\ldots+\alpha_{j,j-1}\vec{e}_{j-1}+\vec{e}_j\quad(2).$$

Используя линейность A(x,x) по каждому аргументу и обозначение $A(\vec{e}_i,\vec{e}_j)=a_{ij}$, получим в результате след. линейн. систему уравнений для неизв. коэф. α_{ik}

$$\begin{cases}\alpha_{j1}a_{11}+\alpha_{j2}a_{12}+\ldots+\alpha_{j,j-1}a_{1,j-1}+a_{1j}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{j1}a_{j-1,1}+\alpha_{j,2}a_{j-1,2}+\ldots+\alpha_{j,j-1}a_{j-1,j-1}+a_{j-1,j}=0\end{cases}$$

Определитель этой системы равен Δ_{j-1}. По условию $\Delta_{j-1}\neq0$ $\Rightarrow$ система имеет единственное решение $\Rightarrow$ можно построить единственное треугольное преобразование базисных векторов, с помощью которого форма A(x,x) приводится к канонич. виду.

Выведем формулы для нахождения коэффициентов искомого преобразования α_{ij} и канонических коэффициентов λ_j.

Обозначим символом $\Delta_{j-1,j}$ минор матрицы (a_{ij}), расположенной на пересечении строк этой матрицы с номерами 1,2,…,j-1 и столбцов с номерами 1,2,…,i-1,i+1,…,j. Тогда по формулам Крамера имеем:

$$\alpha_{ji}=(-1)^{j+i}\frac{\Delta_{j-1,i}}{\Delta_{j-1}}$$

Займёмся выч. канонич. коэф. λ_j.

Так как $\lambda_j=b_{jj}=A(\vec{f}_j,\vec{f}_j)$, то из выражения (2) для f_j и формул (1) получим:

$\lambda_j=A(\vec{f}_j,\vec{f}_j)=$

$=A(\alpha_{j1}\vec{e}_1+\alpha_{j2}\vec{e}_2+\ldots+\alpha_{j,j-1}\vec{e}_{j-1}+\vec{e}_j,\vec{f}_j)=$

$=A(\vec{e}_j,\vec{f}_j)+$

$+A(\vec{e}_j,\alpha_{j1}\vec{e}_1+\alpha_{j2}\vec{e}_2+\ldots+\alpha_{j,j-1}\vec{e}_{j-1}+\vec{e}_j)=$

$=\alpha_{j1}a_{1j}+\alpha_{j2}a_{j2}+\ldots+\alpha_{j,j-1}a_{j-1,j}+a_{j,j}$

Подставляя сюда выше полученную формулу для коэф. получим:

$$\lambda_j = \frac{(-1)^{j+1} a_{1j}\Delta_{j-1,1} + (-1)^{j+2} a_{2j}\Delta_{j-1,2} + \ldots}{\Delta_{j-1}}$$

$$\underline{+(-1)^{2j-1} a_{j-1}\Delta_{j-1,j-1} + a_{jj}\Delta_{j-1}}$$

Числитель последнего представляет собой сумму произведений элементов строки j в определителе Δ_j на алгебраические дополнения этих элементов в указанном определителе. Следовательно этот числитель равен Δ_j. Поэтому:

$$\lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}},\ j = 2,3,\ldots,n$$

Т.к $\lambda_1 = A\left(\vec{f}_1, \vec{f}_1\right) = A\left(\vec{e}_1, \vec{e}_1\right) = a_{11} = \Delta_1$, то отсюда и из полученной формулы находим канонич. коэф-ты:

$$\lambda_1 = \Delta_1, \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \lambda_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

Классификация квадратичных форм. Критерий Сильвестра.

Закон инерции: при любом способе приведения к каноническому виду кол-во положительных p и отрицательных q=(r-p) коэффициентов одинаково.

Классификация:

Пусть n – размерность пространства.

r – ранг кв. формы (число не равных нулю канонич. коэф.)

p, q – число полож. и отриц. коэф.

p+q=r

1)Знакопеременные

$\exists\, \vec{x}_1, \vec{x}_2 \neq 0 \to A(\vec{x}_1) > 0, A(\vec{x}_2) < 0$

2)Полуопределённые

$\exists\, \vec{x} \neq 0, A(\vec{x}) \geq 0$

3)Знакоположительные, r=n, p=r, q=0

4)Знакоотрицательные, r=n, q=r, p=0

5)Знакопеременные, p>0, q>0

6)Полуопределённость r<n

7)Полуположительные, r<n, p>0, q=0

8)Полуотрицательные, r<n, q>0, p=0

Критерий Сильвестра:

Квадр. форма полож. определена ⇔ $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$ и отрицательно определена ⇔ $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots$

Необходимость. Докажем сначала, что из знакоопределённости ⇒ все $\Delta_k \neq 0$. Предположим, что некоторый $\Delta_k = 0$. Рассмотрим систему уравнений на

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1k}\xi_k = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}\xi_1 + a_{k2}\xi_2 + \ldots + a_{kk}\xi_k = 0 \end{cases}$$

Определитель этой системы $\Delta = \Delta_k = 0$ ⇒ система имеет ненулевое решение. Умножим 1-е уравнение системы на ξ_1, второе на ξ_2,… и сложим их:

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}\xi_i\xi_j = A_k(\vec{x}_0) = 0$$

, что противоречит знакоопределённости.

Т.к все $\Delta_k \neq 0$, то можем применить метод Якоби. Тогда канонич. коэф. запишутся в виде:

$$\lambda_1 = \Delta_1, \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \lambda_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

Если форма положительно определена, то знаки всех коэф. положительны, ⇒ все угловые миноры положительны, если отрицательно определена, то все коэф. отрицательны и угловые миноры чередуются, причём $\Delta_1 < 0$.

Достаточность. При всех $\Delta_k \neq 0$ применяем метод Якоби и получаем критерий Сильвестра.