# Формула Тейлора

Если функция $f(x,y)$ имеет в некоторой окрестности точки $(a,b)$ непрерывные все частные производные до $(n-1)$ -го порядка включительно и производные порядка $n$, непрерывные в точке $(a,b)$, то в этой окрестности справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x,y) = f(a,b) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} d^i f(a,b) + o\left(\rho^n\right)$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $dx = \Delta x = x - a$, $dy = \Delta y = y - b$.

Аналогичные формулы имеют место для функции более чем двух переменных.

**№3581**. Функцию $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $A(1,-2)$.

Находим значение функции в точке $A(1,-2)$:
$f(1,-2) = 2 \cdot 1^2 - 1 \cdot (-2) - (-2)^2 - 6 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 5 = 5$,
и производные в точке $A(1,-2)$:

$$f'_x = 2 \cdot 2x - y + 0 - 6 + 0 + 0 = \left(4x - y - 6\right)\Big|_{(1,-2)} = 0,$$

$$f'_y = 0 - x - 2y - 0 - 3 + 0 = \left(-x - 2y - 3\right)\Big|_{(1,-2)} = 0,$$

$$f''_{xx} = 4 - 0 + 0 = 4,$$

$$f''_{xy} = 0 - 1 + 0 = -1,$$

$$f''_{yy} = -0 - 2 - 0 = -2.$$

Понятно, что производные старших порядков равны нулю. Также как для функции одного переменного многочлен представляется многочленом Тейлора без остаточного члена.
Запишем многочлен Тейлора в окрестности точки $A(1,-2)$ в соответствии с формулой (1):

$$f(1,-2) = 5 + \frac{1}{1!}\left(0(x-1) + 0(y+2)\right) + \frac{1}{2!}\left(4(x-1)^2 + 2(-1)(x-1)(y+2) + (-2)(y+2)^2\right) =$$

$$= 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2.$$

**№3588**. Упростить выражение $\cos(x+y+z) - \cos x \cos y \cos z$, считая $x, y, z$ малыми по модулю

Раз $x, y, z$ малы по модулю, то задачу решит разложение функции

$$f(x,y,z) = \cos(x+y+z) - \cos x \cos y \cos z$$

в окрестности точки $A(0,0,0)$.

Значение функции в точке $A(0,0,0)$:

$$f(0,0,0) = 0.$$

Находим производные (ограничиваясь вторым порядком):

$$f'_x = -\sin(x+y+z) + \sin x \cos y \cos z\Big|_A = 0,$$

$$f'_y = -\sin(x+y+z) + \cos x \sin y \cos z\Big|_A = 0,$$

$$f'_z = -\sin(x+y+z) + \cos x \cos y \sin z\Big|_A = 0,$$

$$f''_{xx} = -\cos(x+y+z)+\cos x\cos y\cos z\big|_A = 0,$$
$$f''_{yy} = -\cos(x+y+z)+\cos x\cos y\cos z\big|_A = 0,$$
$$f''_{zz} = -\cos(x+y+z)+\cos x\cos y\cos z\big|_A = 0,$$
$$f''_{xy} = -\cos(x+y+z)-\sin x\sin y\cos z\big|_A = -1,$$
$$f''_{yz} = -\cos(x+y+z)-\cos x\sin y\sin z\big|_A = -1,$$
$$f''_{xz} = -\cos(x+y+z)-\cos x\sin y\sin z\big|_A = -1.$$

Таким образом,

$\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z \approx$

$$\approx 0+\frac{1}{1!}\cdot 0\cdot(x+y+z)+\frac{1}{2!}\Big((0)(x^2+y^2+z^2)+2(-1)(xy+yz+zx)\Big) = -(xy+yz+zx).$$

**№3595.** Разложить по формуле Маклорена $f(x,y)=e^x\sin y$ до $o(\rho^5)$, где $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, $\Delta x = x$, $\Delta y = y$.

Так как функция представляет собой произведение функций одного переменного, воспользуемся известными разложениями:

$$f(x,y)=e^x\sin y=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)\left(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}+o(y^5)\right)=$$
$$=y+xy+\left(-\frac{y^3}{3!}+\frac{yx^2}{2!}\right)+\left(\frac{yx^3}{3!}-\frac{xy^3}{3!}\right)+\left(\frac{y^5}{5!}-\frac{x^2y^3}{2!3!}+\frac{yx^4}{4!}\right)+o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^5\right)$$

**Пример 22.1.** Разложить функцию $f(x,y)=2^{x-3y}$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки $M_0(2,1)$.

◇

$$f(M_0)=2^{-1}=\frac{1}{2}.$$

Пользуясь свойством инвариантности формы первого дифференциала функции одной переменной ($d\varphi(u)=\varphi'(u)du$) и правилом нахождения дифференциала разности, находим

$$df=d(2^{x-3y})=2^{x-3y}\ln 2\, d(x-3y)=\ln 2\cdot 2^{x-3y}(dx-3dy),\quad df(M_0)=\frac{\ln 2}{2}(dx-3dy).$$

Здесь $dx$, $dy$ — приращения независимых переменных. Находим второй дифференциал, помня, что $dx$, $dy$ не изменяются, поэтому выражение $dx-3dy$ — константа:

$$d^2f=d(\ln 2\cdot 2^{x-3y}(dx-3dy))=\ln 2\cdot d\left(2^{x-3y}\right)(dx-3dy)=\ln^2 2\cdot 2^{x-3y}(dx-3dy)^2,$$
$$d^2f(M_0)=\frac{\ln^2 2}{2}(dx-3dy)^2.$$
$$d^3f=d\left(\ln^2 2\cdot 2^{x-3y}(dx-3dy)^2\right)=\ln^3 2\cdot 2^{x-3y}(dx-3dy)^3,\quad d^3f(M_0)=\frac{\ln^3 2}{2}(dx-3dy)^3.$$

По индукции легко вывести, что

$$d^nf=\ln^n 2\cdot 2^{x-3y}(dx-3dy)^n,\quad d^nf(M_0)=\frac{\ln^n 2}{2}(dx-3dy)^n.$$

Подставим найденные дифференциалы в точке $M_0$ в формулу (14.58), учитывая равенства $dx=x-2$, $dy=y-1$, и получим искомое разложение в некоторой окрестности точки $M_0(2,1)$:

$$2^{x-3y}=\frac{1}{2}+\tfrac{\ln 2}{2}((x-2)-3(y-2))+\tfrac{\ln^2 2}{2!\cdot 2}((x-2)-3(y-2))^2+\tfrac{\ln^3 2}{3!\cdot 2}((x-2)-3(y-2))^3+$$
$$+\ldots+\tfrac{\ln^n 2}{n!\cdot 2}((x-2)-3(y-2))^n+o\left(\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\right)^n\right).$$

**Домашнее задание №№ 3582, 3585, 3586, 3587.**