Метод разделения переменных (метод Фурье)

Общие принципы метода разделения переменных

Для простейшего уравнения с частными производными разделение переменных – это поиски решений вида

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$$

Где $X(x)$ – функция, зависящая только от переменной x, а $T(t)$ – зависящая только от t.

Общая идея заключается в том, чтобы найти бесконечное число таких решений уравнения с частными производными (которые удовлетворяют граничным условиям и, т.к. ГУ однородные, ergo, их сумма тоже будет удовлетворять ГУ). Эти простейшие функции $u_n(x, t) = X_n(x)\cdot T_n(t)$ (называемые **фундаментальными решениями)** являются как бы элементарными кирпичиками, из которых строится решение нашей задачи. Решение нашей задачи $u(x, t)$ находится в виде такой линейной комбинации фундаментальных, решений $X_n(x)T_n(t)$, что результирующая сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cdot X_n\cdot(x)\cdot T_n\cdot(t)$$

удовлетворяет начальным условиям. Поскольку эта **сумма** удовлетворяет уравнению и граничным условиям, она является решением исходной задачи. Нам осталось проделать все эти выкладки достаточно подробно.

Разделение переменных

1. Нахождение элементарных решений уравнения с частными производными.

Мы хотим найти функцию $u(x, t)$, которая является решением следующей задачи:

$$\text{(УЧП)} \quad u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\text{(ГУ)} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty,$$

$$\text{(НУ)} \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Будем искать решения, представимые в виде *u(x, t) = X(x)·T(t)*. Для этого подставим выражение *X(x)·T(t)* в уравнение. В результате подстановки получаем:

$$X\cdot(x)T'\cdot(t)=a^2\cdot X''\cdot(x)\cdot T\cdot(t)$$

Теперь выполним операцию, присущую данному методу, разделим обе части последнего уравнения на $\alpha^2 \cdot X(x) \cdot T(t)$, в результате чего получаем

$$\frac{T'\cdot(t)}{a^2\cdot(T\cdot(t))}=\frac{X''\cdot(x)}{X\cdot(x)}$$

Про это выражение говорят, что в нем переменные разделены, т. е. левая часть уравнения зависит только от *t*, а правая часть – только от x. Так как *x* и *t не зависят один от другого,* то каждая часть этого уравнения должна быть константой. Обозначим эту константу *k*, тогда

$$\frac{T'}{a^2\cdot T}=\frac{X''}{X}=k$$

или

$$T'-k\cdot a^2\cdot T=0,$$
$$X''-k\cdot X=0.$$

Теперь можно решить каждое из этих обыкновенных дифференциальных уравнений. Произведение соответствующих решений будет удовлетворять исходному уравнению с частными производными. (Заметим, что мы существенно упростили исходное уравнение с частными производными второго порядка, превратив его в два обыкновенных дифференциальных уравнения.)

Обратим теперь внимание на следующее важное обстоятельство: константа разделения *k* должна быть *отрицательной*') (другими словами, функции *T(t)* должны стремиться к нулю при $t \to \infty$), иначе получаются только тривиальные решения *X(x)* ≡ 0. Имея это в виду, введем обозначение $k = -\lambda^2$, где λ не равно нулю (в этом случае выражение $-\lambda^2$ будет всегда отрицательным). С учетом нового обозначения для константы разделения два обыкновенных дифференциальных уравнения запишутся в виде:

$$T' + \lambda^2 \cdot a^2 \cdot T = 0,$$
$$X'' + \lambda^2 \cdot X = 0.$$

Решим эти уравнения. Они являются уравнениями стандартно типа. Их общие решения записываются в виде:

$$T \cdot (t) = A \cdot e^{-\lambda^2 \alpha^{21}} (A - произвольная\, точка),$$
$$X \cdot (x) = A \cdot \sin(\lambda \cdot x) + B \cdot (\lambda \cdot x) (A, Б - произвольная\, точка).$$

Следовательно, функции вида:

$$u \cdot (x, t) = e^{-\lambda^2 \cdot \alpha^2 \cdot t} \cdot [A \cdot \sin(\lambda \cdot x) + B \cdot \sin(\lambda \cdot x)]$$

(где *A*, *B и* λ – произвольные постоянные) удовлетворяют УЧП. Итак, у нас есть теперь бесконечный набор функций, удовлетворяющих исходному уравнению с частными производными.

2. Нахождение решений, удовлетворяющих граничным условиям.

Положение сейчас таково: у нас есть бесконечное множество решений исходного уравнения, но не все они удовлетворяют граничным или начальным условиям. Следующий шаг состоит в выборе такого *подмножества* решений вида:

$$e^{-\lambda^2 \cdot \alpha^2 \cdot t} \cdot [A \cdot \sin(\lambda \cdot x) + B \cdot \cos(\lambda \cdot x)]$$

Чтобы сделать это, подставим решения в граничные условия. В результате получаем:

$$u(0, t) = Be^{-\lambda^2 \alpha^2 t} = 0 \Rightarrow B = 0,$$
$$u(1, t) = Ae^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \sin \lambda = 0 \Rightarrow \sin \lambda = 0.$$

Второе граничное условие накладывает ограничение на возможные значения константы разделения λ: она должна быть решением уравнения sin(λ) = 0. Другими словами, необходимо потребовать выполнения отношений:

$$\lambda = \pm \pi, \pm 2\pi \ldots$$

или

$$\lambda_n = \pm n \cdot \pi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Итак, мы закончили выполнение второго шага и располагаем бесконечным набором функций:

$$u_n(x, t) = A_n e^{-(n+\alpha)^2 \cdot t} \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot x), \quad n = 1, 2 \ldots$$

каждая из которых удовлетворяет уравнению с частными производными и граничным условиям. Полученные функции являются теми кирпичиками, из которых мы построим решение нашей задачи. Это решение будет представлять собой некоторую сумму из этих простейших функций, конкретный вид которой будет зависеть от начальных условий.

3. Нахождение решения, удовлетворяющего уравнению и начальным условиям.

Последний (и, вероятно, наиболее интересный с математической точки зрения) шаг заключается в нахождении такой суммы фундаментальных решений:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-(n\cdot\pi\cdot\alpha)^2\cdot t}\cdot\sin(n\pi x)$$

т..е. в подборе таких коэффициентов A_n, что функция будет удовлетворять начальному условию.

Подстановка суммы в начальное условие дает:

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot\sin(\pi x)$$

Для нахождения коэффициентов A_n, воспользуемся ортогональностью системы функций {sin(π·n·x)} на промежутке [0, ℓ]. Умножим обе части равенства на sin(π·m·x) и проинтегрируем от 0 до 1 (в пределах граничных условий). Т.к. sin(π·m·x)·sin(π·n·x) = 0 при n ≠ m, в результате получаем:

$$\int_0^1 \phi(x)\cdot\sin(m\cdot\pi x)dx=A_m\int_0^1 \sin^2(m\cdot\pi x)dx=\frac{A_m}{2}$$

Решая уравнение относительно A_n, получаем

$$\int_0^1 \varphi(x)\sin(m\pi x)\,dx=A_m\int_0^1 \sin^2(m\pi x)\,dx=\frac{A_m}{2}$$

Это выражение совпадает с разложением функции *φ(x)* в ряд Фурье по синусам.

Таким образом, мы получили решение нашей задачи, которое можно записать в виде:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\cdot\pi a)^2\cdot t}\cdot\sin(\pi\cdot n\cdot x),$$

Для расчетов берутся первые n членов ряда.