Министерство образования Российской Федерации
Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

В.Н. КОШЕЛЕВ, А.И. САИЧЕВ, Г.А. УТКИН

ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

Нижний Новгород
2004

УДК 517.1

Кошелев В.Н., Саичев А.И., Уткин Г.А. Основы векторного анализа. *Учебное пособие.* Нижний Новгород. Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2005. 131 с.

В основе настоящего пособия лежат лекции, читаемые студентам радиофизического факультета Нижегородского государственного университета. В отличие от традиционных подходов широко применяются “векторные методы” для вычисления криволинейных и в особенности поверхностных интегралов. Все основные понятия векторного анализа и теории поля даются в инвариантном (не зависящем от системы координат виде), а затем излагается как их можно использовать в конкретных (в том числе и криволинейных) системах координат.

Оглавление

Глава 1

Некоторые сведения из анализа

Напомним некоторые понятия анализа, которыми мы будем неоднократно пользоваться при построении этого курса.

1.1 Отображения. Понятие функции

Определение 1.1 *Пусть A и B - два множества любой природы. Если каждому элементу $a \in A$ ставится в соответствие один элемент $b \in B$ по некоторому закону f, который мы обозначим через $f(a) = b$, то говорят, что задана функция f из множества A в множество B (или отображение множества A в множество B).*

Множество A называют областью определения функции f. Элементы $f(a)$ называют значениями функции. Множество всех значений функции f называют областью значений функции или областью изменения функции.

Для обозначения отображения множества A в множество B по закону f будем использовать следующую символическую запись:

$$f : A \to B.$$

Запись

$$f : (E \subset A) \to B$$

будет означать, что подмножество E множества A отображается в множество B.

Определение 1.2 *Пусть A и B - два множества и $f : A \to B$. Если $E \subset A$, то $f(E)$ определяется как множество всех элементов $f(a)$ для $a \in E$*

$$f(E) = \{f(a) : a \in E\}.$$

Множество $f(E)$ называется образом множества E при отображении $f : A \to B$.

В этих обозначениях $f(A)$ - множество значений функции $f : A \to B$,

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\}.$$

П р и м е р ы

1) Функцию $y = \sqrt{1 - x^2}$ можно задать, используя выше указанные обозначения, следующим образом

$$\sqrt{1 - x^2} : A \to B,$$

где

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \le x \le 1\}, \qquad B = \mathbb{R}, \qquad f(A) = \{y \in \mathbb{R} : 0 \le y \le 1\}.$$

Здесь множество значений $f(A)$ принадлежит множеству $B = \mathbb{R}$,

$$f(A) \subset B$$

– это одна возможная ситуация.

2) Для функции $y = x$ можно записать

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad A = \mathbb{R}, \qquad B = \mathbb{R}, \qquad f(A) = \mathbb{R}.$$

В этом случае

$$f(A) = B$$

и мы наблюдаем другую ситуацию.

Различая два возможных случая в приведенных примерах, приходим к следующему определению:

Определение 1.3 *Пусть $f : A \to B$*

1. *Если $f(A) \subset B$, то говорят, что f осуществляет отображение множества A “в” множество B.*

2. *Если $f(A) = B$ то говорят, что f осуществляет отображение множества A “на” множество B.*

Заметим, что поскольку включение одного множества в другое не исключает равенства этих множеств (в приведенном только-что определении включение $f(A) \subset B$ не исключает равенства $f(A) = B$), то отображение множества A на множество B можно рассматривать одновременно как и отображение множества A в множество B (рис. 1.1).

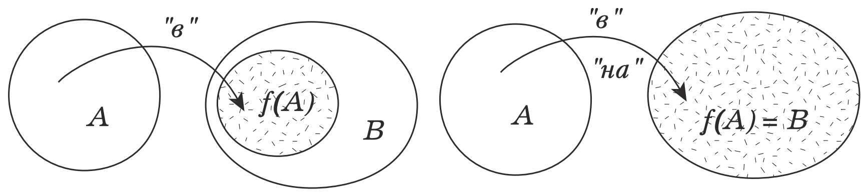


Рис. 1.1. Отображения “в” и “на”

Определение 1.4 *Пусть* $f : A \to B$ *и* $F \subset B$. *Прообразом множества* F *при отображении* $f : A \to B$ *называется множество элементов* $a \in A$, *для которых выполняется* $f(a) \in F$.

Обозначение

$$f^{-1}(F) = \{a \in A : f(a) \in F\}.$$

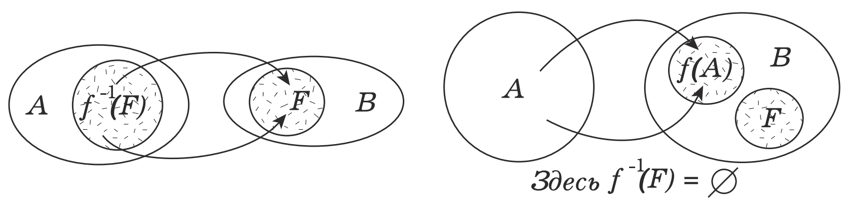


Рис. 1.2. Прообраз множества F

Определение 1.5 *Отображение* $f : A \to B$ *называется взаимно однозначным отображением* A *“в”* B, *если при каждом* $b \in B$ *множество* $f^{-1}(b)$ *состоит не более чем из одного элемента множества* A *(либо один элемент, либо* $f^{-1} = \varnothing$*).*

Определение 1.6 *Если* $f : A \to B$ *есть взаимно однозначное отображение* A *“на”* B, *то говорят, что* f *устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами* A *и* B.

1.2 Символика

I. Запись $A \Rightarrow B$ означает, что “утверждение A влечет за собой утверждение B”.

II. $A \Leftrightarrow B$ – “утверждения A и B эквивалентны”.

III. $\forall$ – квантор общности. Используется вместо слов “Для всех ...”, “Любой ...”.

IV. $\exists$ - квантор существования. Используется вместо слов “Существует ...”, “Имеется ...”.

V. Символ “ , ” используется вместо слов “удовлетворяющих”. Используется также как и обычная запятая (разделительный знак).

VI. Символ “ : ” используется вместо слов “Имеет место свойство ...”.

Предложения “Для всех ...” и “Существует ...” часто сопровождаются некоторыми ограничениями. Эти ограничения обычно записывают в круглых скобках.

П р и м е р ы

1) Определение четной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на языке символики записывается так

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : f(-x) = f(x).$$

2) Нечетная функция $f : (E \subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$(\forall x \in E) : f(-x) = -f(x).$$

3) Периодическая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(\exists T > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x + T) = f(x).$$

4) Возрастающая функция $f : (E \subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$(\forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E, x_1 < x_2) : f(x_1) < f(x_2).$$

1.3 Евклидово конечно-мерное пространство

Определение 1.7 *Прямым произведением*

$$\prod_{k=1}^{m} A_k = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_m$$

множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$ называется множество, элементами которого являются всевозможные упорядоченные наборы $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $a_m \in A_m$. Если $A_1 = A_2 = \cdots = A_m = A$, то произведение m множеств $A \times A \times\ A \times \cdots \times A$ называется m-й степенью множества A и обозначается A^m.

Определение 1.8 *В соответствии с определением степени множества*

$$\mathbb{R}^k = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{k-\text{раз}}$$

есть множество упорядоченных наборов действительных чисел "длины k"

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называют координатами элемента

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

а сами элементы $\vec{x}$ называют векторами или точками.

В множестве $\mathbb{R}^k$ определим следующие операции

I. *Сложение. Если $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$, то*

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_k + y_k). \tag{1.1}$$

II. *Умножение на действительное число. Если $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, то*

$$\alpha\vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_k). \tag{1.2}$$

III. *Скалярное произведение векторов.*

$$(\vec{x}, \vec{y}\,) = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_k y_k = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i. \tag{1.3}$$

IV. *Норма (длина) вектора.*

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{x}\|_{\mathbb{R}^k} = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2} = \left\{\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.4}$$

V. *Расстояние между точками $\vec{x}$ и $\vec{y}$.*

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_k - y_k)^2}. \tag{1.5}$$

Множество $\mathbb{R}^k$, в котором определены сложение векторов, умножения вектора на действительное число, скалярное произведение векторов, норма и расстояние по формулам (1.1)-(1.5), *называется конечномерным евклидовым пространством (k-мерным евклидовым пространством $\mathbb{R}^k$).*

З а м е ч а н и я

1. Если в этом определении положить $k = 1$, то $\mathbb{R}^1$ совпадает с множеством действительных чисел, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. В этом случае скалярное произведение становится обычным произведением действительных чисел, а норма совпадает с обычным модулем, $\|x\|_{\mathbb{R}} = |x|$.

2. В формуле (1.3) скалярное произведение обозначается двумя способами $(\vec{x}, \vec{y}\,)$ и $\vec{x} \cdot \vec{y}$. В дальнейшем будем использовать обе эти записи.

3. Помимо введенных операций в пространстве $\mathbb{R}^3$ вводится также векторное произведение двух векторов, которое будем обозначать $[\vec{x}, \vec{y}\,]$ или $\vec{x} \times \vec{y}$.

4. Для скалярного и векторного произведений мы также будем пользоваться обозначениями $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ и $[\vec{a} \times \vec{b}]$.

1.4 Основные понятия в пространстве $\mathbb{R}^k$

Для иллюстрации понятий, введенных в этом пункте, используем плоскость (пространство $\mathbb{R}^2$).

Определение 1.9 *Окрестностью $O_r(\vec{x}_0)$ точки $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^k$ радиуса r называют множество точек $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$, таких, что $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r$,*

$$O_r(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\}.$$

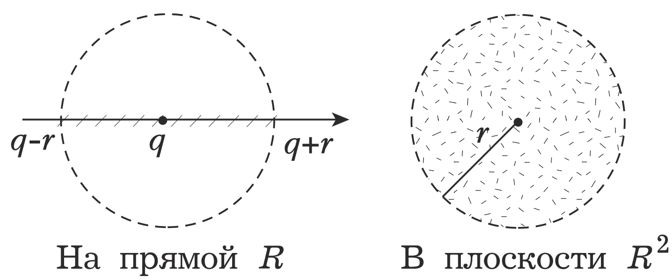


Рис. 1.3. Примеры окрестностей

Определение 1.10 *Пусть $E \subset \mathbb{R}^k$. Точка $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^k$ называется предельной точкой множества E, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку $\vec{x} \in E$, такую,что $\vec{x} \neq \vec{x}_0$.*

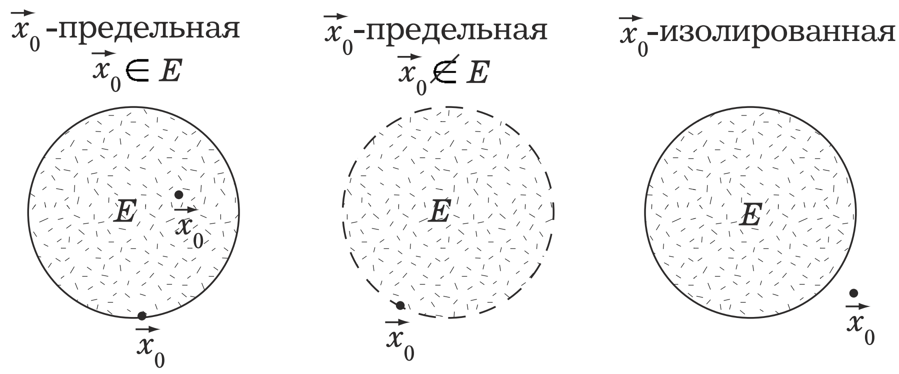


Рис. 1.4. Предельные и изолированные точки

Предельная точка может как принадлежать множеству E, так и не принадлежать E.

Определение 1.11 *Если $\vec{x}_0 \in E$ и $\vec{x}_0$ не является предельной точкой множества E, то $\vec{x}_0$ называется изолированной точкой множества E.*

Иными словами, точка $\vec{x}_0 \in E \subset \mathbb{R}^k$ является изолированной точкой множества E, если можно указать окрестность точки $\vec{x}_0$, в которой не содержится других точек из E.

Определение 1.12 *Множество $E \subset \mathbb{R}^k$ называется замкнутым, если все его предельные точки принадлежат этому множеству.*

Определение 1.13 *Точка $\vec{x}_0$ множества $E \subset \mathbb{R}^k$ называется внутренней точкой множества E, если существует окрестность $O_r(\vec{x}_0)$, целиком лежащая в множестве E, т.е. $O_r(\vec{x}_0) \subset E$.*

Определение 1.14 *Точка $\vec{x}_0$ называется граничной точкой множества $E \subset \mathbb{R}^k$, если в любой ее окрестности $O_r(\vec{x}_0)$ существуют точки как принадлежащие E, так и не принадлежащие этому множеству. Совокупность всех граничных точек множества называется его границей.*

Определение 1.15 *Открытым множеством в пространстве $\mathbb{R}^k$ называется множество, у которого все его точки внутренние.*

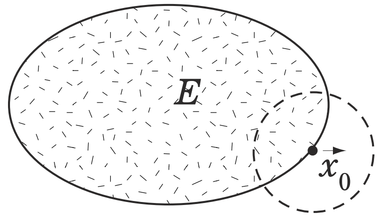


Рис. 1.5. Граничная точка множества E

Определение 1.16 *Множество $E \subset \mathbb{R}^k$ называется связным, если для любых двух точек из этого множества можно указать путь, лежащий в этом множестве и соединяющий эти две точки. В противном случае множество называется несвязным.*

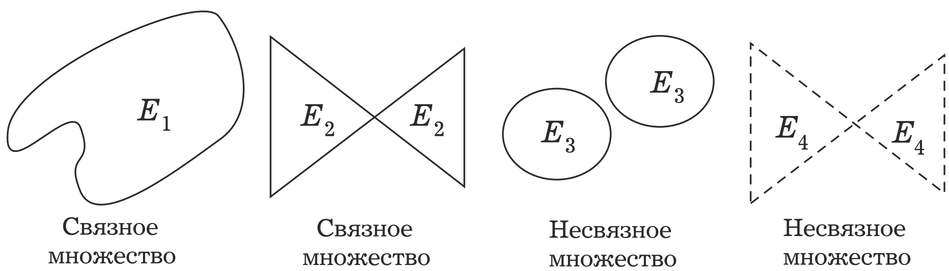


Рис. 1.6. Примеры связных и несвязных множеств

Очевидно, что любое множество, содержащее изолированные точки, не является связным.

Определение 1.17 *Областью в пространстве $\mathbb{R}^k$ называется открытое связное множество.*

Условимся в дальнейшем буквой E обозначать любое множество в $\mathbb{R}^k$, а другими буквами, например, Ω, D, G, T – области в $\mathbb{R}^k$.

Определение 1.18 *Область G на плоскости $\mathbb{R}^2$ называется односвязной, если любой замкнутый контур, лежащий в области G, содержит внутри себя только точки этой области.*

Определение 1.19 *Замкнутой областью $\bar{G}$ в $\mathbb{R}^k$ будем называть область G с присоединенной к ней границей.*

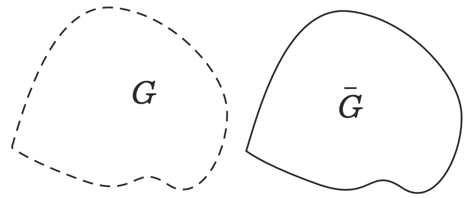


Рис. 1.7. Область G и замкнутая область $\bar{G}$

Определение 1.20 *Множество $E \subset \mathbb{R}^k$ называют ограниченным, если существует окрестность $O_r(\vec{x}_0)$ конечного радиуса r такая, что E целиком лежит в этой окрестности, т.е. $E \subset O_r(\vec{x}_0)$.*

Определение 1.21 *Диаметром $d(E)$ множества $E \subset \mathbb{R}^k$ называется точная верхняя граница множества расстояний между любыми двумя точками множества E:*

$$d(E) = \operatorname{diam} E = \sup_{\vec{x} \in E,\, \vec{y} \in E} \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Определение 1.22 *Векторы $\vec{e}_i \in \mathbb{R}^k$, $i = 1, 2, \dots, k$*

$$\begin{array}{l} \vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0,) \\ \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0,) \\ \vec{e}_3 = (0, 0, 1, \dots, 0, 0,) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{e}_k = (0, 0, 0, \dots, 0, 1,) \end{array} ,$$

i-я координата которых равна 1, а остальные координаты равны 0, назовем базисом в $\mathbb{R}^k$.

Если $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, \dots, k$ – базис в $\mathbb{R}^k$, то вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ из $\mathbb{R}^k$ можно разложить по базису $\vec{e}_i$

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_k\vec{e}_k = \sum_{i=1}^{k} x_i\vec{e}_i,$$

где коэффициенты разложения (координаты вектора) вычисляются по формулам

$$x_i = (\vec{x}, \vec{e}_i).$$

Определение 1.23 *Последовательностью $\{\vec{x}_n\}$ в пространстве $\mathbb{R}^k$ называется функция натурального аргумента*

$$\vec{x}_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k.$$

Определение 1.24 *Вектор* $\vec{a} \in \mathbb{R}^k$ *называется пределом последовательности* $\{\vec{x}_n\} \subset \mathbb{R}^k$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется номер* $N = N(\varepsilon)$, *такой, что при всех* $n > N$ *выполняется* $\|\vec{x}_n - \vec{a}\|_{\mathbb{R}^k} < \varepsilon$, *или на языке символики*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N) : \|\vec{x}_n - \vec{a}\|_{\mathbb{R}^k} < \varepsilon.$$

При этом говорят, что последовательность $\{\vec{x}_n\}$ *сходится к* $\vec{a}$ *в* $\mathbb{R}^k$, *и пишут*

$$\lim_{n \to \infty} \vec{x}_n = \vec{a} \quad \textit{или} \quad \vec{x}_n \overset{\mathbb{R}^k}{\to} \vec{a}.$$

Справедлива так называемая *теорема о покоординатной сходимости*, которая гласит следующее:

Последовательность векторов $\vec{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn})$ *сходится в* $\mathbb{R}^k$ *к вектору* $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *тогда и только тогда, когда последовательности его координат* x_{in} *сходятся в* $\mathbb{R}$ *к* a_i, *т.е.*

$$\vec{x}_n \overset{\mathbb{R}^k}{\to} \vec{a} \iff \begin{cases} x_{in} \overset{\mathbb{R}}{\to} a_i, \\ i = 1, 2, \ldots, k. \end{cases}$$

Глава 2

Векторные функции

Мы переходим к изучению основных объектов векторного анализа – векторных функций. Так же, как и и для функции действительного переменного, введем для векторных функций понятия предела, непрерывности, дифференцирования и интегрирования, необходимые при дальнейшем изучении векторного анализа.

Начнем с определения векторных функций.

Определение 2.1

1. *Функцию* $\vec{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ *назовем векторной функцией одной переменной и будем обозначать*

$$\vec{f}(x)=(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_m(x)).$$

2. *Функцию* $\vec{f}:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ *назовем векторной функцией многих переменных и будем обозначать*

$$\vec{f}(\vec{x}\,)=(f_1(\vec{x}\,),f_2(\vec{x}\,),\ldots,f_m(\vec{x}\,)),$$

где $f_j(\vec{x}\,)=f_j(x_1,x_2,\ldots,x_k)$, $j=1,2,\ldots,m$.

2.1 Предел векторной функции

Следуя традициям классического анализа, дадим определение предела векторной функции по Коши и по Гейне.

Определение 2.2 По Коши. *Пусть* $\vec{f}:(E\subset\mathbb{R}^k)\to\mathbb{R}^m$ *– функция, отображающая множество* E *из* $\mathbb{R}^k$ *в* $\mathbb{R}^m$*, и* $\vec{x}_0$ *– предельная точка* *множества E. Вектор $\vec{A}$ из $\mathbb{R}^m$ называется пределом функции $\vec{f}(\vec{x}\,)$ при $\vec{x} \to \vec{x}_0$,*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}\,) = \vec{A},$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любого $\vec{x}$ из E, удовлетворяющего условию $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_{\mathbb{R}^k} < \delta$, выполняется неравенство $\|\vec{f}(\vec{x}\,) - \vec{A}\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$, или на языке символики:

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0)\,(\forall\vec{x} \in E, 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_{\mathbb{R}^k} < \delta) : \|\vec{f}(\vec{x}\,) - \vec{A}\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon.$$

Определение 2.3 <u>По Гейне</u>. *Пусть $\vec{f} : (E \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^m$ и $\vec{x}_0$ – предельная точка множества E. Вектор $\vec{A}$ из $\mathbb{R}^m$ называется пределом функции $\vec{f}(\vec{x}\,)$ при $\vec{x} \to \vec{x}_0$, если*

$$(\forall\{\vec{x}_n\} \subset E,\, \vec{x}_n \neq \vec{x}_0,\, \vec{x}_n \overset{\mathbb{R}^k}{\to} \vec{x}_0) : \vec{f}(\vec{x}_n) \overset{\mathbb{R}^m}{\to} \vec{A}.$$

Эквивалентность этих определений доказывается также, как и для функции действительного переменного.

Если использовать определение предела функции по Гейне и теорему о покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^m$, то получим следующую теорему.

Теорема 2.1
Пусть $\vec{f} : (E \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^m$ и $\vec{x}_0$ – предельная точка множества E, $\vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_m)$ – вектор из $\mathbb{R}^m$. Тогда

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}\,) = \vec{A} \iff \begin{cases} \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_j(\vec{x}\,) = A_j \\ j = 1, 2, \ldots, m \end{cases}.$$

Теорема 2.2
Пусть $\vec{f} : (E \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^m$ и $\vec{g} : (E \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^m$ – две векторные функции, $h : (E \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ – скалярная функция, $\vec{x}_0$ – предельная точка множества E и

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}\,) = \vec{A}, \quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}\,) = \vec{B}, \quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} h(\vec{x}\,) = c.$$

Тогда

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}\,) + \vec{g}(\vec{x}\,)) = \vec{A} + \vec{B}, \quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} h(\vec{x}\,)\vec{f}(\vec{x}\,) = c\vec{A},$$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}\,) \cdot \vec{g}(\vec{x}\,) = \vec{A} \cdot \vec{B}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\vec{f}(\vec{x}\,) = (f_1(\vec{x}\,), f_2(\vec{x}\,), \ldots, f_m(\vec{x}\,)), \quad \vec{g}(\vec{x}\,) = (g_1(\vec{x}\,), g_2(\vec{x}\,), \ldots, g_m(\vec{x}\,)),$$

$$\vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_m), \quad \vec{B} = (B_1, B_2, \ldots, B_m)$$

и c – постоянное число. Тогда

$$\begin{aligned}
&\vec{f}(\vec{x}\,) + \vec{g}(\vec{x}\,) = (f_1(\vec{x}\,) + g_1(\vec{x}\,), f_2(\vec{x}\,) + g_2(\vec{x}\,), \ldots, f_m(\vec{x}\,) + g_m(\vec{x}\,)),\\
&h(\vec{x}\,)\vec{f}(\vec{x}\,) = (h(\vec{x}\,)f_1(\vec{x}\,), h(\vec{x}\,)f_2(\vec{x}\,), \ldots, h(\vec{x}\,)f_m(\vec{x}\,)),\\
&\vec{A} + \vec{B} = (A_1 + B_1, A_2 + B_2, \ldots, A_m + B_m),\\
&c\vec{A} = (cA_1, cA_2, \ldots, cA_m).
\end{aligned}$$

По теореме 2.1. имеем

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_j(\vec{x}\,) = A_j, \quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g_j(\vec{x}\,) = B_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

и в силу теоремы о предельных переходах в сумме и произведении для вещественных функций

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (f_j(\vec{x}\,) + g_j(\vec{x}\,)) = A_j + B_j, \quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} h(\vec{x}\,)f_j(\vec{x}\,) = cA_j.$$

Откуда, снова используя теорему 2.1, получаем

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}\,) + \vec{g}(\vec{x}\,)) = \vec{A} + \vec{B}, \quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} h(\vec{x}\,)\vec{f}(\vec{x}\,) = c\vec{A}.$$

Аналогично,

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}\,) \cdot \vec{g}(\vec{x}\,) = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \sum_{j=1}^{m} f_j(\vec{x}\,)g_j(\vec{x}\,) = \sum_{j=1}^{m} A_j B_j = \vec{A} \cdot \vec{B}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.3

Если $\vec{f} : (E \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^3$, $\vec{g} : (E \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^3$, $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{B} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x}_0$ *– предельная точка множества* E *и* $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}\,) = \vec{A}$, $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}\,) = \vec{B}$, *то*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}\,) \times \vec{g}(\vec{x}\,) = \vec{A} \times \vec{B}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$, то

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}\,) \times \vec{g}(\vec{x}\,) = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \left((f_2 g_3 - f_3 g_2)\,\vec{i} + (f_3 g_1 - f_1 g_3)\,\vec{j} + (f_1 g_2 - f_2 g_1)\,\vec{k} \right) =$$

$$= (A_2 B_3 - A_3 B_2)\,\vec{i} + (A_3 B_1 - A_1 B_3)\,\vec{j} + (A_1 B_2 - A_2 B_1)\,\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \vec{A} \times \vec{B}.$$

2.2 Непрерывность векторной функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4 *Векторная функция $\vec{f} : (E \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^m$ называется непрерывной в точке $\vec{x}_0$ множества E, если*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon, \vec{x}_0) > 0)(\forall \vec{x} \in E, \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_{\mathbb{R}^k} < \delta) : \|\vec{f}(\vec{x}\,) - \vec{f}(\vec{x}_0)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon.$$

Если $\vec{x}_0$ – предельная точка множества E, то определение непрерывности функции в точке эквивалентно существованию предела

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}\,) = \vec{f}(\vec{x}_0).$$

Векторная функция называется непрерывной на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Легко видеть, что в изолированных точках любая функция непрерывна. Поэтому свойства непрерывных функций достаточно изучить в предельных точках.

ТЕОРЕМА 2.4
1. *Пусть $\vec{f} : (E \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^m$, $\vec{g} : (E \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^m$, $h : (E \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции в точке $\vec{x}_0$ множества E. Тогда $\vec{f}(\vec{x}\,)+\vec{g}(\vec{x}\,)$, $h(\vec{x})\vec{f}(\vec{x}\,)$, $\vec{f}(\vec{x}\,) \cdot \vec{g}(\vec{x}\,)$ – непрерывные функции в точке $\vec{x}_0$.*

2. *Пусть $\vec{f} : (E \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^3$ и $\vec{g} : (E \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^3$ – непрерывные функции в точке $\vec{x}_0$ множества E. Тогда векторное произведение $\vec{f}(\vec{x}\,) \times \vec{g}(\vec{x}\,)$ – непрерывная функция в точке $\vec{x}_0$.*

Доказательство этой теоремы следует из теорем 2.2 и 2.3.

2.3 Дифференцируемые функции

Напомним, что буквой E мы обозначаем любое множество из $\mathbb{R}^k$, а буквой Ω – область в $\mathbb{R}^k$. Дадим теперь очень важные определения, первые два из которых нам известны из курса классического анализа.

Определение 2.5 *Функция действительного переменного*

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}$$

называется дифференцируемой в точке $x_0 \in (a, b)$, если ее приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \tag{2.1}$$

где A – постоянное число, а $\alpha(\Delta x) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ при $\Delta x \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$. Величину $A \cdot \Delta x$ называют дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают

$$df(x_0) \;=\; A \cdot \Delta x.$$

Если $f(x)$ – дифференцируемая функция действительного переменного, то $A = f'(x_0)$ и $df(x_0) = f'(x_0)\,dx$.

Определение 2.6 *Функция многих переменных*

$$f : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$$

называется дифференцируемой в точке $\vec{x}_0$ области Ω, если ее приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f(\vec{x}_0) = \vec{A} \cdot \Delta \vec{x} + \vec{\alpha}(\Delta \vec{x}) \cdot \Delta \vec{x}, \tag{2.2}$$

где $\vec{A} \in \mathbb{R}^k$ – постоянный вектор, называемый градиентом функции $f(\vec{x}\,)$ в точке $\vec{x}_0$, $\vec{A} = \operatorname{grad} f(\vec{x}_0)$, а векторная функция $\vec{\alpha}(\Delta\vec{x}) \xrightarrow{\mathbb{R}^k} \vec{0}$ при $\Delta\vec{x} \xrightarrow{\mathbb{R}^k} \vec{0}$. Величину $\vec{A} \cdot \Delta\vec{x}$ называют дифференциалом функции $f(\vec{x}\,)$ в точке $\vec{x}_0$ и обозначают

$$df(\vec{x}_0) \;=\; \vec{A} \cdot \Delta \vec{x}.$$

Если $f(\vec{x}\,) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, то

$$\vec{A} = \operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_k} \right),$$

$$\Delta\vec{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_k) = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_k),$$

$$df(\vec{x}_0) = \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_k} dx_k.$$

Определение 2.7 *Векторная функция одного переменного*

$$\vec{f} : (a,b) \to \mathbb{R}^m$$

называется дифференцируемой в точке $x_0 \in (a,b)$, *если ее приращение в этой точке можно представить в виде*

$$\Delta\vec{f}(x_0) = \vec{A} \cdot \Delta x + \vec{\alpha}(\Delta x) \cdot \Delta x, \qquad (2.3)$$

где $\vec{A}$ *– постоянный вектор из* $\mathbb{R}^m$, *а* $\vec{\alpha}(\Delta x) \xrightarrow{\mathbb{R}^m} \vec{0}$ *при* $\Delta x \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$. *Величину* $\vec{A} \cdot \Delta x$ *называют дифференциалом функции* $\vec{f}(x)$ *в точке* x_0 *и обозначают*

$$d\vec{f}(x_0) = \vec{A} \cdot \Delta x.$$

Определение 2.8 *Векторная функция многих переменных*

$$\vec{f} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^m$$

называется дифференцируемой в точке $\vec{x}_0$ *области* Ω, *если ее приращение в этой точке можно представить в виде*

$$\Delta\vec{f}(\vec{x}_0) = A \cdot \Delta\vec{x} + \alpha(\Delta\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x}, \qquad (2.4)$$

где A *– постоянная матрица*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mk} \end{pmatrix}, \quad \alpha(\Delta\vec{x}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mk} \end{pmatrix}$$

и $\alpha_{ij} \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ *при* $\Delta\vec{x} \xrightarrow{\mathbb{R}^k} \vec{0}$. *Вектор* $A \cdot \Delta\vec{x}$ *называют дифференциалом функции* $\vec{f}(\vec{x}\,)$ *в точке* $\vec{x}_0$ *и обозначают*

$$d\vec{f}(\vec{x}_0) = A \cdot \Delta\vec{x}.$$

З а м е ч а н и е. Во всех выше приведенных определениях условия дифференцирования функции в точке (2.1)-(2.4) фактически выглядит одинаково,

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где величины A, α и Δx принимают различный смысл, в зависимости от того, о дифференцируемости какой функции идет речь. Знак умножения также принимает различную трактовку: умножение числа на число или умножение числа на вектор или скалярное произведение векторов или, наконец, умножение матрицы на вектор.

Определение 2.9 *Функция называется дифференцируемой в области (на интервале), если она дифференцируема в каждой точке этой области (интервала).*

2.4 Дифференцирование векторной функции одной переменной

Здесь мы введем понятие производной векторной функции одного переменного и изучим ее свойства.

Определение 2.10 *Производной* $\vec{f}\,'(x_0)$ *функции* $\vec{f}:(a,b)\to\mathbb{R}^m$ *в точке* $x_0\in(a,b)$ *называется предел*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\vec{f}(x)-\vec{f}(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\vec{f}(x_0)}{\Delta x}. \qquad (2.5)$$

Теорема 2.5
Если функция $\vec{f}:(a,b)\to\mathbb{R}^m$ *дифференцируема в точке* $x_0\in(a,b)$, *то она имеет производную* $\vec{f}\,'(x_0)$ *и* $d\vec{f}(x_0)=\vec{f}\,'(x_0)dx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec{f}(x)$ дифференцируема в точке $x_0\in(a,b)$, т.е.

$$\Delta\vec{f}(x_0)=\vec{A}\cdot\Delta x+\vec{\alpha}(\Delta x)\cdot\Delta x,$$

где $\vec{\alpha}(\Delta x)\overset{\mathbb{R}^m}{\to}\vec{0}$ при $\Delta x\overset{\mathbb{R}}{\to}0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\vec{f}(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\vec{A}+\vec{\alpha})=\vec{A}+\vec{0}=\vec{A}=\vec{f}\,'(x_0)$$

и $d\vec{f}(x_0)=\vec{A}\Delta x=\vec{f}\,'(x_0)dx$.

Теорема 2.6
Пусть $\vec{f}:(a,b)\to\mathbb{R}^m$ *дифференцируема в точке* $x_0\in(a,b)$ *и*

$$\vec{f}(x)=(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_m(x)).$$

Тогда

$$\vec{f}\,'(x_0)=(f_1'(x_0),f_2'(x_0),\ldots,f_m'(x_0)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 2.1

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\vec{f}(x_0)}{\Delta x}\Longleftrightarrow\begin{cases}\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_j(x_0)}{\Delta x}=f_j'(x_0),\\ j=1,2,\ldots,m\end{cases}$$

и, следовательно, $\vec{f}\,'(x_0)=(f_1'(x_0),f_2'(x_0),\ldots,f_m'(x_0))$.

Следующая теорема, самостоятельное доказательство которой предлагается читателю, устанавливает правила дифференцирования векторной функции.

Теорема 2.7
Если $\vec{f}:(a,b)\to\mathbb{R}^m,\ \vec{g}:(a,b)\to\mathbb{R}^m,\ h:(a,b)\to\mathbb{R}$ *дифференцируемые функции в точке* $x_0\in(a,b)$, *то*

$$\begin{aligned}
&(\vec{f}+\vec{g})'(x_0)=\vec{f}\,'(x_0)+\vec{g}\,'(x_0),\\
&(h\vec{f})'(x_0)=h'(x_0)\vec{f}(x_0)+h(x_0)\vec{f}\,'(x_0),\\
&(\vec{f}\cdot\vec{g})'(x_0)=\vec{f}\,'(x_0)\cdot\vec{g}(x_0)+\vec{f}(x_0)\cdot\vec{g}\,'(x_0),\\
&\vec{f}_x^{\,\prime}(h(x_0))=\vec{f}_h^{\,\prime}(h(x_0))h'(x_0).
\end{aligned}$$

Сверх того, если $\vec{f}:(a,b)\to\mathbb{R}^3,\ \vec{g}:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ *дифференцируемые функции в точке* $x_0\in(a,b)$, *то*

$$(\vec{f}\times\vec{g})'(x_0)=\vec{f}\,'(x_0)\times\vec{g}(x_0)+\vec{f}(x_0)\times\vec{g}\,'(x_0).$$

2.5 Геометрический смысл производной векторной функции

Для функции действительного переменного $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, как известно, геометрический смысл производной $f'(x_0)$ непосредственно связывают с кривой на плоскости (графиком функции $f(x)$). Аналогично геометрический смысл производной векторной функции одного переменного связывают с кривой в пространстве $\mathbb{R}^3$. Поэтому дадим определение кривой в $\mathbb{R}^3$. Но вначале введем более общее понятие – понятие годографа.

Определение 2.11 *Пусть* $\vec{f}:(E\subset\mathbb{R}^k)\to\mathbb{R}^3$. *Поместим начало вектора* $\vec{f}(\vec{x}\,)$ *в фиксированную точку* O *пространства* $\mathbb{R}^3$. *Множество концов вектора* $\vec{f}(\vec{x}\,),\ \vec{x}\in E$, *назовем годографом векторной функции* $\vec{f}(\vec{x}\,)$.

Определение 2.12 *Годограф непрерывной векторной функции*

$$\vec{f}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$$

назовем кривой C, *функцию* $\vec{f}(x)$ *– векторным заданием кривой* C *или параметризацией кривой* C, *а аргумент* x *– параметром.*

Определение 2.13 *Кривая* C, *на которой задано направление обхода, называется ориентированной кривой.*

Поскольку на кривой можно задать два направления обхода, то обход связывают с возрастанием или убыванием параметра x. Принято считать, что на ориентированной кривой направление обхода задается возрастанием параметра (если не оговорено противное).

Теорема 2.8

Пусть ориентированная кривая C задана векторным уравнением $\vec{r} = \vec{f}(x), a \leq x \leq b$, и $\vec{f}(x)$ – дифференцируемая функция в точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда вектор $\vec{r}\,' = \vec{f}\,'(x_0)$ касается кривой C в точке, определяемой значением параметра x_0, и направлен в сторону возрастания аргумента x.

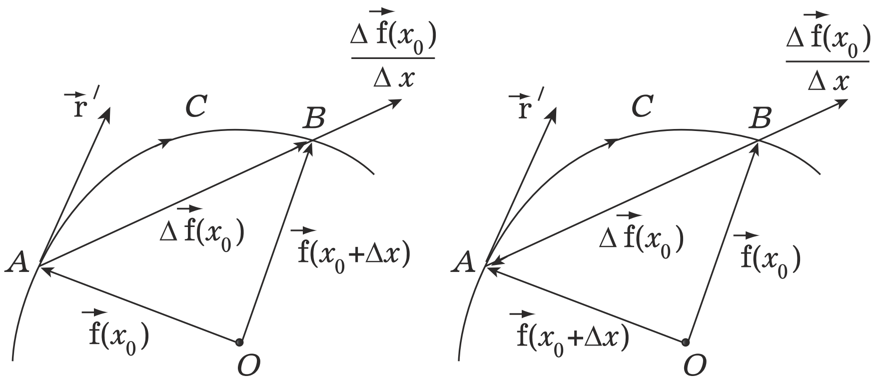


Рис. 2.1. Геометрический смысл производной векторной функции

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если приращение параметра положительно, $\Delta x > 0$, то вектор $\Delta \vec{f}(x_0)$ совпадает с вектором $\overrightarrow{AB}$ (рис. 2.1, слева) и, следовательно, вектор $\dfrac{\Delta \vec{f}(x_0)}{\Delta x}$ имеет то же направление, что и $\overrightarrow{AB}$.

Если $\Delta x < 0$, то вектор $\Delta \vec{f}(x_0)$ имеет направление, противоположное вектору $\overrightarrow{AB}$, но так как $\Delta x < 0$, то и в этом случае вектор $\dfrac{\Delta \vec{f}(x_0)}{\Delta x}$ имеет то же направление, что и $\overrightarrow{AB}$.

Итак, вектор $\dfrac{\Delta \vec{f}(x_0)}{\Delta x}$ всегда имеет одно и то же направление и направлен в сторону возрастания параметра x. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем утверждение теоремы.

2.6 Дифференцирование векторной функции многих переменных

Определение 2.14 *Пусть* $\vec{f} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^m$ *– функция, отображающая область* Ω *из* $\mathbb{R}^k$ *в пространство* $\mathbb{R}^m$*. Частной производной* $\dfrac{\partial \vec{f}(\vec{x}_0)}{\partial x_i}$ *по переменной* x_i *в точке* $\vec{x}_0$ *области* Ω *называют предел*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + t\vec{e}_i) - \vec{f}(\vec{x}_0)}{t}, \tag{2.6}$$

где $\vec{e}_i$ *– вектор базиса в* $\mathbb{R}^k$ *(единичный вектор, все координаты которого кроме* i*-ой равны нулю, а* i*-я координата равна* 1*).*

Теорема 2.9
Если $\vec{f} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^m$ *дифференцируема в точке* $\vec{x}_0 \in \Omega$*, то все ее частные производные существуют и*

$$d\vec{f}(\vec{x}_0) = (df_1(\vec{x}_0), df_2(\vec{x}_0), \ldots, df_m(\vec{x}_0)).$$

Доказательство. Пусть $\vec{f} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемая функция в точке $\vec{x}_0 \in \Omega$, т.е.

$$\Delta\vec{f}(\vec{x}_0) = A \cdot \Delta\vec{x} + \alpha(\Delta\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x},$$

где $\alpha_{ij} \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ при $\Delta\vec{x} \xrightarrow{\mathbb{R}^k} \vec{0}$. Полагая $\Delta\vec{x} = t\vec{e}_i$, имеем

$$\lim_{t\to 0} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + t\vec{e}_i) - \vec{f}(\vec{x}_0)}{t} = \lim_{t\to +0} (A \cdot \vec{e}_i + \alpha \cdot \vec{e}_i) = A \cdot \vec{e}_i =$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mk} \end{pmatrix} \cdot \vec{e}_i = (A_{1i}, A_{2i}, \ldots, A_{mi}) = \frac{\partial \vec{f}(\vec{x}_0)}{\partial x_i}.$$

Откуда $A_{ij} = \dfrac{\partial f_j(\vec{x}_0)}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k,\ \ j = 1, 2, \ldots, m)$ и

$$d\vec{f}(\vec{x}_0) = A \cdot \Delta\vec{x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_k \end{pmatrix} =$$

$$= (df_1(\vec{x}_0), df_2(\vec{x}_0), \ldots, df_m(\vec{x}_0)).$$

Теорема доказана.

2.7 Производная по направлению

Определение 2.15 *Пусть* $\vec{f} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^m$ $(m \geq 1, k \geq 2)$. *Производной по направлению* $\vec{l} \in \mathbb{R}^k$ *в точке* $\vec{x}_0$ *области* Ω *назовем предел*

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{x}_0)}{\partial l} = \lim_{t \to 0} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{l}\,) - \vec{f}(\vec{x}_0)}{t}. \tag{2.7}$$

Из определения частной производной (2.6) видно, что $\dfrac{\partial \vec{f}(\vec{x}_0)}{\partial x_i}$ – это производная по направлению вектора базиса $\vec{e}_i$.

Теорема 2.10
Если $f : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* $\vec{x}_0 \in \Omega$, *то* $\dfrac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial l}$ *существует и равна*

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial l} = (\operatorname{grad} f(\vec{x}_0), \vec{l}). \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть $f : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $\vec{x}_0 \in E$, т.е.

$$\Delta f(\vec{x}_0) = \vec{A} \cdot \Delta\vec{x} + \vec{\alpha}(\Delta\vec{x}) \cdot \Delta\vec{x},$$

где $\vec{\alpha}(\Delta\vec{x}) \xrightarrow{\mathbb{R}^k} 0$ при $\Delta\vec{x} \xrightarrow{\mathbb{R}^k} 0$ и

$$\vec{A} = \operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_k} \right).$$

Полагая $\Delta\vec{x} = t \cdot \vec{l}$, получаем

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial l} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{l}\,) - f(\vec{x}_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} (\vec{A} \cdot \vec{l} + \vec{\alpha}(\Delta\vec{x}) \cdot \vec{l}) = \vec{A} \cdot \vec{l} = (\operatorname{grad} f(\vec{x}_0), \vec{l}).$$

Теорема 2.11
Если $\vec{f} : (\Omega \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^m$ *дифференцируема в точке* $\vec{x}_0 \in \Omega$, *то производная* $\dfrac{\partial \vec{f}(\vec{x}_0)}{\partial l}$ *в любом направлении* $\vec{l}$ *существует и равна*

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{x}_0)}{\partial l} = \left(\frac{\partial f_1(\vec{x}_0)}{\partial l}, \frac{\partial f_2(\vec{x}_0)}{\partial l}, \dots, \frac{\partial f_m(\vec{x}_0)}{\partial l}\right). \tag{2.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в теореме 2.10., получаем

$$\lim_{t\to 0} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + t\cdot\vec{l}\,) - \vec{f}(\vec{x}_0)}{t} = A\cdot\vec{l} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_k \end{pmatrix} =$$

$$= \Big((\operatorname{grad} f_1(\vec{x}_0), \vec{l}\,), (\operatorname{grad} f_2(\vec{x}_0), \vec{l}\,), \dots, (\operatorname{grad} f_m(\vec{x}_0), \vec{l}\,)\Big) =$$

$$= \left(\frac{\partial f_1(\vec{x}_0)}{\partial l}, \frac{\partial f_2(\vec{x}_0)}{\partial l}, \dots, \frac{\partial f_m(\vec{x}_0)}{\partial l}\right).$$

Заметим, наконец, что производные высших порядков, как и в обычном анализе, вводятся по индукции, и кратное дифференцирование векторной функции эквивалентно покоординатному дифференцированию.

2.8 Формула Тейлора

Для функции $\vec{f} : (E \subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$ введем обозначение

$$\vec{f}_{x_1 x_2 \dots x_m} = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_m(x_m)).$$

Аналогично для функции $\vec{f} : (E \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^m$

$$\vec{f}_{\vec{x}_1 \vec{x}_2 \dots \vec{x}_m} = (f_1(\vec{x}_1), f_2(\vec{x}_2), \dots, f_m(\vec{x}_m)).$$

Теорема 2.12
Пусть $\vec{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, n *– целое неотрицательное число,* $\vec{f}(x) \in C^n[a,b]$ *и* $\vec{f}^{\,(n+1)}(x)$ *существует в любой точке* $x \in (a,b)$. *Если* x_0 *и* x *две любые*

точки сегмента $[a, b]$, то справедлива формула Тейлора

$$\vec{f}(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{\vec{f}^{\,(p)}(x_0)}{p\,!}(x - x_0)^p + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\vec{f}^{\,(n+1)}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_m}, \tag{2.10}$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ – некоторые точки, лежащие между x_0 и x.

Эту формулу будем называть формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При условиях теоремы для каждой координаты $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, векторной функции $\vec{f}(x)$ можно записать формулу Тейлора для функции одного переменного

$$f_i(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{f_i^{\ (p)}(x_0)}{p\,!}(x - x_0)^p + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f_i^{\ (n+1)}(\xi_i), \tag{2.11}$$

где точки ξ_i лежат между x_0 и x. Используя правила сложения векторов, умножения вектора на число, и применяя (2.11), получим

$$\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)) = \sum_{p=0}^{n} \frac{\vec{f}^{\,(p)}(x_0)}{p\,!}(x - x_0)^p +$$

$$+\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}(f_1^{\ (n+1)}(\xi_1), f_2^{\ (n+1)}(\xi_2), \ldots, f_m^{\ (n+1)}(\xi_m)) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \frac{\vec{f}^{\,(p)}(x_0)}{p\,!}(x - x_0)^p + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\vec{f}^{\,(n+1)}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_m}.$$

С л е д с т в и е 1. Если в только что доказанной теореме предположить, что $\vec{f}^{\,(n+1)}(x)$ ограничена на $[a, b]$ (это возможно, например, согласно первой теореме Вейерштрасса о непрерывных функциях, когда $\vec{f}(x) \in C^{n+1}[a, b]$), то

$$\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\vec{f}^{\,(n+1)}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_m} = \vec{0}((x - x_0)^n),$$

где $\vec{0}((x - x_0)^n)$ бесконечно малая векторная величина при $x \to x_0$ более высокого порядка малости, чем $(x - x_0)^n$, и формула Тейлора (2.10) принимает вид формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$\vec{f}(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{\vec{f}^{\,(p)}(x_0)}{p\,!}(x - x_0)^p + \vec{0}((x - x_0)^n). \tag{2.12}$$

С л е д с т в и е 2. Если в (2.10) положить $n = 0$, то получим формулу конечных приращений для векторной функции

$$\vec{f}(x) - \vec{f}(x_0) = \vec{f}'_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_m} \cdot (x - x_0). \tag{2.13}$$

2.9 Интегрирование векторных функций

Аналогично интегралу от функции действительного переменного введем понятие определенного интеграла от векторной функции одного переменного.

Определение 2.16 *Пусть $\vec{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ – ограниченная функция и множество точек $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, таких что*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b,$$

образует произвольное разбиение сегмента $[a, b]$. Составим интегральную сумму

$$\sigma(P, \vec{f}, t_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}(t_i)\Delta x_i,$$

где t_i – произвольная точка сегмента $[x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Введем обозначение $\mu(P) = \max\limits_i \Delta x_i$.

Вектор $\vec{A} \in \mathbb{R}^m$ называется пределом интегральной суммы $\sigma(P, \vec{f}, t_i)$ при $\mu(P) \to 0$, если

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0)\ (\forall P \in [a, b], \mu(P) < \delta)\ (\forall t_i \in [x_{i-1}, x_i]) :$$

$$\|\sigma(P, \vec{f}, t_i) - \vec{A}\| < \varepsilon.$$

Если предел интегральной суммы существует, то будем говорить, что функция $\vec{f}(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$ и будем писать $\vec{f}(x) \in \mathcal{R}[a, b]$. Этот предел будем называть интегралом от векторной функции $\vec{f}(x)$ по сегменту $[a, b]$

$$\int_a^b \vec{f}(x)\,dx = \lim_{\mu(P)\to 0} \sigma(P, \vec{f}, t_i). \tag{2.14}$$

Из этого определения легко получить, что

$$\int_a^b \vec{f}(x)\,dx = \left(\int_a^b f_1(x)\,dx, \int_a^b f_2(x)\,dx, \ldots, \int_a^b f_m(x)\,dx \right).$$

Сформулируем основные свойства интегралов от векторной функции. Их доказательство проводится аналогично доказательству свойств интеграла от функции действительного переменного.

1. Если $\vec{f}(x) \in C[a,b]$, то $\vec{f}(x) \in \mathcal{R}[a,b]$.

2. Если $\vec{f}(x) \in \mathcal{R}[a,b]$, $\vec{g}(x) \in \mathcal{R}[a,b]$, то для любых действительных чисел α и β функция $\alpha\vec{f}(x) + \beta\vec{g}(x) \in \mathcal{R}[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b (\alpha\vec{f}(x) + \beta\vec{g}(x))\,dx = \alpha\int\limits_a^b \vec{f}(x)\,dx + \beta\int\limits_a^b \vec{g}(x)\,dx.$$

3. Если $\vec{f}(x) \in \mathcal{R}[a,b]$, то для любого c, $a < c < b$, $\vec{f}(x) \in \mathcal{R}[a,c]$, $\vec{f}(x) \in \mathcal{R}[c,b]$ и

$$\int\limits_a^b \vec{f}(x)\,dx = \int\limits_a^c \vec{f}(x)\,dx + \int\limits_c^b \vec{f}(x)\,dx.$$

4. Если $\vec{f}(x) \in \mathcal{R}[a,b]$ и $\vec{F}\,'(x) = \vec{f}(x)$ на $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b \vec{f}(x)dx = \vec{F}(b) - \vec{F}(a).$$

Теорема 2.13

(Теорема о среднем). *Если $\vec{f}(x) \in C[a,b]$, то существуют точки ξ_1,ξ_2,…,ξ_m сегмента $[a,b]$ такие, что*

$$\int\limits_a^b \vec{f}(x)\,dx = \vec{f}_{\xi_1\xi_2\,\ldots\,\xi_m}\cdot(b-a). \tag{2.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждая координата $f_i(x)$ векторной функции $\vec{f}(x)$ – непрерывная функция на $[a,b]$ и, следовательно, существуют ξ_i из $[a,b]$ такие, что $\int\limits_a^b f_i(x)dx = f_i(\xi_i)(b-a)$. Но тогда

$$\int\limits_a^b \vec{f}(x)\,dx = \left(\int\limits_a^b f_1(x)\,dx, \int\limits_a^b f_2(x)\,dx, \ldots, \int\limits_a^b f_m(x)\,dx\right) =$$

$$= (f_1(\xi_1)(b-a), f_2(\xi_2)(b-a), \ldots, f_m(\xi_m)(b-a)) =$$

$$= (f_1(\xi_1), f_2(\xi_2), \ldots, f_m(\xi_m))(b-a) = \vec{f}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_m} \cdot (b-a).$$

Аналогично векторной функции действительного переменного вводится понятие кратного интеграла и его свойства для векторной функции многих переменных. Сформулируем для кратного интеграла только теорему о среднем (через $mes\, D$ обозначена мера области D).

Теорема 2.14

Пусть D – ограниченная, замкнутая, измеримая область в $\mathbb{R}^k$ и функция $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^m$ – непрерывная в D. Тогда существуют $\vec{\xi_i} \in D$ такие, что

$$\int\limits_D \vec{f}(\vec{x}\,)dx_1dx_2\cdots dx_k = \vec{f}_{\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2\ldots\vec{\xi}_k} \cdot mes\, D. \tag{2.16}$$

Глава 3

Криволинейные интегралы

Введенный в курсе анализа определенный интеграл для функции действительного переменного можно рассматривать как интегрирование функции вдоль направленного отрезка конечной длины. Эту ситуацию можно обобщить для произвольной кривой (также конечной длины) не только лежащей в плоскости, но и расположенной в пространстве. Таким образом, мы придем к понятию интеграла вдоль кривой – криволинейному интегралу, изучению которого и посвящена эта глава. Преследуя эту цель, начнем с изучения самой кривой.

3.1 Пространственные кривые

Напомним определение пространственной кривой, которое было введено раннее при обсуждении геометрического смысла производной векторной функции одного переменного.

Определение 3.1 *Годограф непрерывной векторной функции*

$$\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

назовем кривой C в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Функцию $\vec{r}$ называют векторной параметризацией кривой C.

Кривую C можно задать

1) с помощью векторной функции

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t),\ t \in [a, b],$$

2) в явном виде

$$y = y(x), z = z(x),\ x \in [a, b],$$

3) параметрически

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \ t \in [a, b].$$

Если известно явное или параметрическое задание кривой, то всегда можно перейти к векторному заданию:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\,\vec{i} + y(x)\,\vec{j} + z(x)\,\vec{k}, \quad & x \in [a, b], \\ \vec{r} &= x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}, \quad & t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Определение 3.2

1. *Кривая C называется простой, если параметризация*

$$\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

   осуществляет взаимно однозначное отображение $[a, b]$ в $\mathbb{R}^3$.

2. *Простая кривая C называется гладкой, если ее параметризация – непрерывно дифференцируемая функция на $[a, b]$.*

3. *Простая кривая C называется кусочно гладкой, если ее параметризация $\vec{r} = \vec{r}\,(t), t \in [a, b]$, непрерывно дифференцируемая функция на $[a, b]$ за исключением конечного числа точек $t_i \in [a, b]$. Иными словами, кривая C состоит из конечного числа гладких кусков.*

Из этого определения следует: простая кривая не имеет точек самопересечения; гладкая кривая имеет в каждой точке единственную касательную и эта касательная непрерывно изменяется при переходе от точки к точке; кусочно гладкая кривая состоит из конечного числа гладких дуг и точки, в которых соединяются эти дуги, – это угловые точки (в них существуют только, так называемые, односторонние касательные).

3.2 Длина кривой

Введем важное понятие длины кривой и способ ее вычисления.

Определение 3.3 *Пусть C – кривая в пространстве $\mathbb{R}^3$ ($C \subset \mathbb{R}^3$), соединяющая точки A и B. Разобьем эту кривую точками*

$$A = A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i, \ldots, A_n = B$$

так, чтобы они шли в порядке возрастания индекса от точки A к точке B. Соединив последовательно эти точки отрезками, получим ломаную линию

$$A_0A_1 \dots A_{i-1}A_i \dots A_n,$$

вписанную в кривую C. Периметр p этой ломаной равен

$$p = \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{A_{i-1}A_i}|.$$

Длиной $L = L[C]$ кривой C называется точная верхняя граница множества периметров всевозможных вписанных в кривую ломаных

$$L = \sup\{p\}.$$

Если это число конечное, то кривая называется спрямляемой.

Следующую лемму, которую часто используют как определение длины кривой, мы примем без доказательства (через $d(A_{i-1}A_i)$ обозначается диаметр дуги $A_{i-1}A_i$).

Лемма 3.1
Если C спрямляемая кривая, соединяющая точки A и B, то ее длина $L[C]$ равна пределу

$$L[C] = \lim_{\max d(A_{i-1}A_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{A_{i-1}A_i}|,$$

где $A = A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, \dots, A_n = B$ любые точки, расположенные на кривой в порядке следования от точки A к точке B.

Наконец приведем теорему о вычислении длины кривой

Теорема 3.1
Если C – гладкая кривая с параметризацией $\vec{r}\,(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, то длина кривой C существует и равна

$$L = \int\limits_a^b |\vec{r}\,'(t)|\, dt. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разобьем отрезок $[a, b]$ точками

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = b,$$

которым на кривой C соответствуют точки

$$A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_i, \ldots, A_n = B.$$

Периметр вписанной ломаной в кривую C равен

$$p = \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{A_{i-1}A_i}| = \sum_{i=1}^{n} |\vec{r}\,(t_i) - \vec{r}\,(t_{i-1})|.$$

Используем формулу конечных приращений (2.13)

$$\vec{r}\,(t_i) - \vec{r}\,(t_{i-1}) = \vec{r}\,'_{\xi_1\xi_2\xi_3}\Delta t_i,$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 – точки из интервала (t_{i-1}, t_i). Тогда

$$p = \sum_{i=1}^{n} |\vec{r}\,'_{\xi_1\xi_2\xi_3}|\Delta t_i.$$

Откуда, переходя к пределу, получаем

$$L[C] =$$

$$= \lim_{\max d(A_{i-1}A_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{A_{i-1}A_i}| = \lim_{\max \Delta t_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} |\vec{r}\,'_{\xi_1\xi_2\xi_3}|\Delta t_i = \int\limits_a^b |\vec{r}\,'(t)|\,dt.$$

Последний предельный переход требует более детального доказательства, которое мы здесь опускаем.

3.3 Естественный параметр. Дифференциал длины дуги кривой

Пусть C – спрямляемая кривая, соединяющая точки A и B. Для любой точки $M \in C$ введем естественный параметр $s,\ 0 \le s \le L$ (L – длина C), равный длине дуги AM, отсчитываемый от точки A.

Если на кривой C длины L введен естественный параметр, то

$$L = \int\limits_0^L ds.$$

Если $\vec{r}\,(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ – векторная параметризация кривой C, то $s = s(t)$ и

$$s(t) = \int\limits_a^t |\vec{r}\,'(t)|\,dt. \qquad L = \int\limits_0^L ds = \int\limits_a^b |\vec{r}\,'(t)|\,dt.$$

Рассмотрим сегмент $[t_0, t_0 + \Delta t] \subset (a,b)$. Тогда

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} |\vec{r}\,'(t)|\,dt.$$

Так как кривая C гладкая, то $|\vec{r}\,'(t)|$ непрерывная функция, и по теореме о среднем существует точка $\xi \in [t_0, t_0 + \Delta t]$ такая, что

$$\Delta s = |\vec{r}\,'(\xi)| \int\limits_a^t dt = |\vec{r}\,'(\xi)|\Delta t.$$

В силу непрерывности $|\vec{r}\,'(t)|$ в точке t_0 имеем $|\vec{r}\,'(\xi)| = |\vec{r}\,'(t_0)| + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Тогда

$$\Delta s = |\vec{r}\,'(t_0)|\Delta t + \alpha \cdot \Delta t,$$

т.е. $s(t)$ дифференцируемая функция и ее дифференциал равен (в силу произвольности точки t_0)

$$ds = |\vec{r}\,'(t)|\,dt.$$

Этот дифференциал будем называть дифференциалом длины дуги кривой. Отсюда в частности следует, что если

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k},$$

то

$$\vec{r}\,'(t) = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j} + z'(t)\,\vec{k},$$

$$ds = \sqrt{{x'}^2 + {y'}^2 + {z'}^2}\,dt = \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2 + (z'(t)dt)^2},$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Итак квадрат элемента длины дуги кривой вычисляется по формуле

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Эта формула является естественным аналогом известной теоремы Пифагора.

Рассмотрим в точке M кривой C единичный вектор $\vec{\tau}$, касательный к кривой C, направленный в сторону возрастания параметра (положительный обход кривой). Тогда

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}.$$

Если в формуле для ds

$$ds = |\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

положить $t = s$, то получаем $ds = |\vec{r}\,'(s)|\,ds$ и

$$|\vec{r}\,'(s)| = 1.$$

Но тогда, если s естественный параметр, касательный вектор $\vec{\tau}$ равен

$$\vec{\tau} = \vec{r}\,'(s) = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k},$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ направляющие косинусы вектора касательной к кривой C. Отсюда имеем

$$\cos\alpha = x'(s), \quad \cos\beta = y'(s), \quad \cos\gamma = z'(s).$$

3.4 Криволинейный интеграл первого рода

Определение 3.4 *Пусть $C \subset \mathbb{R}^3$ – спрямляемая кривая, соединяющая точки A и B, и $f(M) : C \to \mathbb{R}$ ограниченная функция, определенная на кривой C. Разобьем кривую C точками*

$$A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_i, \ldots, A_n = B$$

на дуги $A_{i-1}A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Выберем на каждой из дуг $A_{i-1}A_i$ точку M_i и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i,$$

где Δs_i – длина дуги $A_{i-1}A_i$.

1. *Число A называется пределом интегральной суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$ при $\max d(A_{i-1}A_i) \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое,*

что для любых разбиений кривой C на дуги $A_{i-1}A_i$, удовлетворяющих условию $\max d(A_{i-1}A_i) < \delta$, выполняется

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i - A\right| < \varepsilon$$

независимо от выбора точек M_i.

2. *Если предел*

$$\lim_{\max d(A_{i-1}A_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$$

существует, то его называют криволинейным интегралом первого рода и обозначают

$$\int\limits_C f(M)\,ds \qquad \text{или} \qquad \int\limits_C f(x,y,z)\,ds.$$

З а м е ч а н и е. Из предыдущего определения следует, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления обхода кривой.

Ф и з и ч е с к и й   с м ы с л.

Если кривая C "нагружена" массой с линейной плотностью $\rho = f(M)$, то $f(M_i)\Delta s_i$ приближенно равно массе дуги $A_{i-1}A_i$, а сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$$

– это масса всей кривой, вычисленная приближенно. Но тогда

$$\int\limits_C f(M)\,ds$$

представляет из себя массу кривой C.

Теорема 3.2

Пусть C – гладкая кривая с параметризацией

$$\vec{r}(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$$

и $f(M)$, $M \in C$, – функция, интегрируемая на этой кривой. Тогда

$$\int\limits_C f(M)\,ds = \int\limits_a^b f(\vec{r}(t))|\vec{r}\,'(t)|\,dt. \tag{3.2}$$

Запись $f(\vec{r}\,(t))$ в формуле (3.2) означает, что если, например, $\vec{r}\,(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + y(t)\,\vec{k}$, то $f(\vec{r}\,(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разобьем сегмент $[a, b]$ на интервалы

$$[t_{i-1}, t_i],\ \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

точками

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

тогда кривая C разбивается на дуги $A_{i-1}A_i$ точками A_i, соответствующими значениям t_i. Выбрав на дуге $A_{i-1}A_i$ точку M_i, составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i.$$

Длина дуги $A_{i-1}A_i$ вычисляется по формуле

$$\Delta s_i = L[A_{i-1}A_i] = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} |\vec{r}\,'(t)|\,dt.$$

Откуда по теореме о среднем $\Delta s_i = |\vec{r}\,'(\eta_i)|\Delta t_i$, где $\eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Выберем точку $M_i = \vec{r}\,(\eta_i)$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} f(\vec{r}\,(\eta_i))|\vec{r}\,'(\eta_i)|\Delta t_i.$$

Переходя к пределу при $\max \Delta t_i \to 0$ (тогда в силу непрерывности функции $\vec{r}\,(t)$ и $\max d(A_{i-1}A_i) \to 0$), имеем

$$\int\limits_C f(M)\,ds = \int\limits_a^b f(\vec{r}\,(t))|\vec{r}\,'(t)|\,dt.$$

Приведем несколько примеров применения формулы (3.2).

П р и м е р ы

1) Вычислить интеграл $\int\limits_C (x + y + z)\,ds$ вдоль кривой C, заданной уравнениями $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Р е ш е н и е. Векторное задание кривой C имеет вид

$$\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}.$$

Вычислим величину $|\vec{r}\,'(t)|$. Используя правило покоординатного дифференцирования векторной функции, получаем

$$\vec{r}\,'(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k},$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.$$

Далее применяем формулу (3.2)

$$\int\limits_C (x+y+z)\,ds = \int\limits_0^{2\pi} (\cos t + \sin t + t)\sqrt{2}\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin t - \cos t + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi^2\sqrt{2}.$$

2) Вычислить интеграл $\int\limits_C y\,ds$, где C – кривая на плоскости $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 2$.

Р е ш е н и е. В качестве параметра на кривой возьмем переменную y. Тогда $x = y^2$, $0 \le y \le \sqrt{2}$, и векторное уравнение кривой принимает вид

$$\vec{r}\,(y) = y^2\,\vec{i} + y\,\vec{j} + 0\,\vec{k}, \quad 0 \le y \le \sqrt{2}.$$

Применяя формулу (3.2) получаем

$$|\vec{r}\,'(y)| = \sqrt{(2y)^2 + 1} = \sqrt{1 + 4y^2},$$

$$\int\limits_C y\,ds = \int\limits_0^{\sqrt{2}} y\sqrt{1+4y^2}\,dy = \frac{1}{12}(1+4y^3)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{6}.$$

3) Интеграл $\int\limits_C f(x,y)\,ds$, где кривая C задается уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, привести к определенному интегралу.

Р е ш е н и е. В декартовых прямоугольных координатах кривая C будет задана уравнениями $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, или в векторном виде

$$\vec{r}\,(\varphi) = \rho(\varphi)\cos\varphi\,\vec{i} + \rho(\varphi)\sin\varphi\,\vec{j}.$$

Но тогда

$$\vec{r}\,'(\varphi)| = \sqrt{(\rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi)^2 + (\rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi)^2} =$$

$$= \sqrt{\rho^2(\varphi) + {\rho'}^2(\varphi)}$$

и

$$\int\limits_C y\, ds = \int\limits_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + {\rho'}^2(\varphi)}\, d\varphi. \qquad (3.3)$$

Равенство (3.3) обычно принимают в качестве формулы вычисления криволинейного интеграла первого рода, если кривая задана в полярных координатах.

3.5 Криволинейный интеграл второго рода

Определение 3.5 *Пусть C – гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$ и*

$$\vec{A}(M) : C \to \mathbb{R}^3$$

– ограниченная векторная функция. Положим

$$f(M) = (\vec{A}\,(M), \vec{\tau}\,(M)), \qquad M \in C,$$

где $\vec{\tau}(M)$ – касательный единичный вектор в точке M к кривой C, направление которого совпадает с направлением обхода кривой. Интеграл

$$\int\limits_C f(M)\, ds = \int\limits_C (\vec{A}\,(M), \vec{\tau}\,(M))\, ds$$

называется криволинейным интегралом второго рода.

Замечание. Из определения следует, что криволинейный интеграл второго рода зависит от выбранного обхода на кривой, при этом, если C кривая, соединяющая точки A и B, то

$$\int\limits_{AB} (\vec{A}, \vec{\tau}\,)\, ds = -\int\limits_{BA} (\vec{A}, \vec{\tau}\,)\, ds.$$

Физический смысл.

Рассмотрим силовое поле $\vec{F}\,(M) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Вычислим работу этого поля вдоль ориентированной кривой $C = AB$ (рис. 3.1). Разобьем кривую C точками

$$A = A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i, \ldots, A_n = B$$

на дуги $A_{i-1}A_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Работа при перемещении вдоль дуги $A_{i-1}A_i$ приближенно равна $(\vec{F}\,(M_i^*), \vec{\tau}\,(M_i^*))\Delta s_i$, где M_i^* – любая точка на дуге

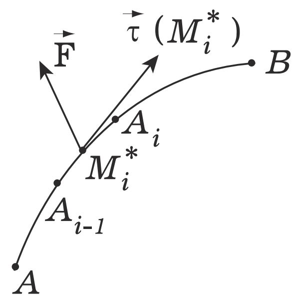


Рис. 3.1. Физический смысл криволинейного интеграла 2-го рода

$A_{i-1}A_i$, а Δs_i – длина дуги $A_{i-1}A_i$. Вдоль всей кривой работа равна приближенно

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}\,(M_i^*), \vec{\tau}\,(M_i^*))\Delta s_i.$$

Переходя к пределу при $\max d(A_{i-1}A_i) \to 0$, получаем, что работа силового поля вдоль кривой C равна

$$\int\limits_C (\vec{F}\,(M), \vec{\tau}\,(M))\,ds.$$

Теорема 3.3
(Вычисление криволинейного интеграла второго рода). *Пусть C – гладкая кривая, заданная уравнением*

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}, \qquad t \in [a, b],$$

и

$$\vec{A}\,(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}$$

– непрерывная векторная функция, заданная на кривой C.

Тогда криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_C (\vec{A}, \vec{\tau}\,)\,ds$ существует и может быть вычислен по формуле

$$\int\limits_C (\vec{A}, \vec{\tau}\,)\,ds = \int\limits_a^b (\vec{A}, \vec{r}\,')\,dt \tag{3.4}$$

или более подробно

$$\int\limits_C (\vec{A}, \vec{\tau}\,)\,ds = \int\limits_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t)+$$

$$+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование интеграла следует из непрерывности функции $(\vec{A},\vec{\tau}\,)$. Используя теорему о вычислении интеграла первого рода, а также формулу (3.2), имеем

$$\int\limits_C (\vec{A},\vec{\tau}\,)\,ds = \int\limits_a^b \left(\vec{A},\frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}\right)|\vec{r}\,'(t)|\,dt = \int\limits_a^b (\vec{A},\vec{r}\,')\,dt.$$

З а м е ч а н и е. Если

$$\vec{r}\,(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k},$$

$$\vec{A}\,(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k},$$

то

$$\int\limits_C (\vec{A},\vec{\tau}\,)\,ds = \int\limits_a^b (P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t)+$$

$$+Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t))\,dt =$$

$$= \int\limits_C P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \int\limits_C \vec{A}\cdot d\vec{r}.$$

Поэтому чаще всего для обозначения криволинейного интеграла второго рода используют две последние записи.

3.6 Формула Грина

Формула Грина устанавливает связь криволинейного интеграла второго рода вдоль замкнутой плоской кривой с двойным интегралом и позволяет вывести условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования на плоскости. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования в пространстве мы обсудим чуть позже.

Определение 3.6 *Область $G \subset \mathbb{R}^2$ будем называть простой, если ее можно разбить как на конечное число трапеций первого типа*

$$\{y_1(x) \le y \le y_2(x), a \le x \le b\},$$

так и на конечное число трапеций второго типа

$$\{x_1(y) \le x \le x_2(y), c \le y \le d\}.$$

Теорема 3.4

Пусть

1) *G – простая область, ограниченная кусочно гладкой границей C, представляющей из себя один или несколько замкнутых контуров,*

2) *$P(x,y) \in C^1(G)$, $Q(x,y) \in C^1(G)$ (непрерывно дифференцируемы в области G) и $P(x,y) \in C(\bar{G})$, $Q(x,y) \in C(\bar{G})$ (непрерывны в замкнутой области $\bar{G}$).*

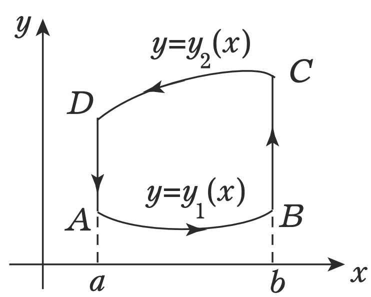
Тогда имеет место формула Грина

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy, \tag{3.5}$$

где обход по контурам границы C берется такой, что область G остается слева.

Доказательство. Рассмотрим вначале область G_1, имеющую вид криволинейной трапеции первого типа (рис. 3.2)

$$G_1 = \{y_1(x) \le y \le y_2(x),\ a \le x \le b\}.$$



3.2. Криволинейная трапеция первого типа

Границу $ABCD$ области G_1 будем считать положительно ориентированной (при обходе по границе область G остается слева). Преобразуем двойной интеграл $\iint\limits_{G_1} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$. Имеем

$$\iint\limits_{G_1} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy =$$

$$= \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))]\, dx = \int_a^b P(x, y_2(x))\, dx - \int_a^b P(x, y_1(x))\, dx.$$

Каждый из последних двух интегралов будем рассматривать как криволинейный

$$\int_a^b P(x, y_2(x))\, dx = \int_{DC} P(x, y)\, dx = -\int_{CD} P(x, y)\, dx,$$

$$-\int_a^b P(x, y_1(x))\, dx = -\int_{AB} P(x, y)\, dx.$$

Учитывая, что на отрезках BC и DA выполняется

$$-\int_{BC} P(x, y)\, dx = 0, \qquad -\int_{DA} P(x, y)\, dx = 0,$$

получаем

$$\iint_{G_1} \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy =$$

$$= -\int_{AB} P(x, y)\, dx - \int_{BC} P(x, y)\, dx - \int_{CD} P(x, y)\, dx - \int_{DA} P(x, y)\, dx,$$

т.е.

$$\int_{ABCD} P(x, y)\, dx = -\iint_{G_1} \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy.$$

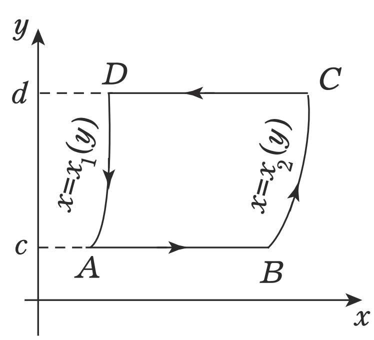


Рис.3.3. Криволинейная трапеция второго типа

Рассмотрим еще одну область

$$G_2 = \{x_1(y) \le x \le x_2(y),\ c \le y \le d\},$$

представляющую из себя криволинейную трапецию второго типа (со сторонами, параллельными оси y) (рис. 3.3). Имеем в этом случае

$$\iint\limits_{G_2} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx =$$

$$= \int\limits_c^d [Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)]\,dy = \int\limits_c^d Q(x_2(y), y)\,dy - \int\limits_c^d Q(x_1(y), y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{BC} Q(x, y)\,dy + \int\limits_{DA} Q(x, y)\,dy + \int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy + \int\limits_{CD} Q(x, y)\,dy$$

или

$$\int\limits_{ABCD} Q(x, y)\,dy = \iint\limits_{G_2} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy.$$

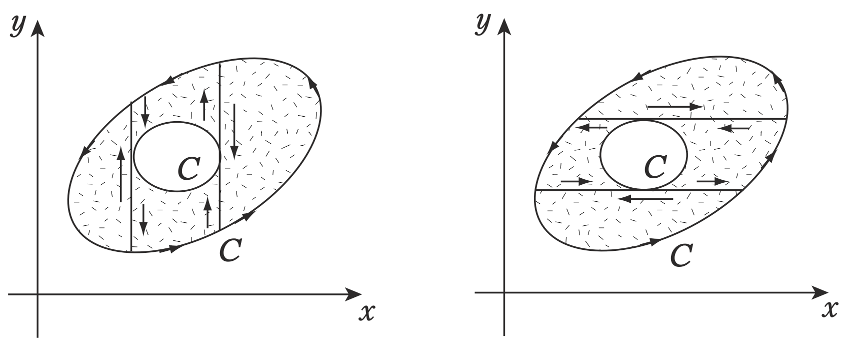


Рис. 3.4. Разбиение простой области G на конечное число криволинейных трапеций первого типа (рисунок слева) и на конечное число криволинейных трапеций второго типа (рисунок справа)

Теперь рассмотрим произвольную простую область G. Ее можно разбить на конечное число трапеций вида G_1,

$$G_{1i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

с границами C_{1i} (рис. 3.4 слева), для каждой из которых выполняется равенство

$$\int\limits_{C_{1i}} P(x,y)\,dx = -\iint\limits_{G_{1i}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy,$$

или на конечное число трапеций вида G_2,

$$G_{2i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

с границами C_{2i} (рис. 3.4 справа), для каждой из которых выполняется равенство

$$\int\limits_{C_{2i}} Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{G_{2i}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy.$$

В первом случае имеем

$$\int\limits_{C} P(x,y)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{C_{1i}} P(x,y)\,dx = -\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{G_{1i}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = -\iint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy.$$

В этом выражении слева стоит интеграл, равный сумме интегралов по контурам C_{1i}. Каждая из вспомогательных линий этих контуров входит при интегрировании дважды с разными знаками, поэтому интегралы по ним взаимно уничтожаются. Аналогично, во втором случае имеем

$$\int\limits_{C} Q(x,y)\,dy = \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{C_{2i}} Q(x,y)\,dy = \sum_{i=1}^{m}\iint\limits_{G_{2i}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \iint\limits_{G} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy.$$

Складывая почленно два равенства

$$\int\limits_{C} P(x,y)\,dx = -\iint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy, \qquad \int\limits_{C} Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{G} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy,$$

получаем формулу Грина

$$\int\limits_{C} Pdx + Qdy = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy.$$

3.7 Независимость криволинейного интеграла на плоскости от пути

Как применение формулы Грина выведем здесь условие независимости криволинейного интеграла второго рода на плоскости от пути интегрирования.

Теорема 3.5

Пусть G – ограниченная, простая, односвязная область в $\mathbb{R}^2$. Функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – непрерывно дифференцируемые в замкнутой области $\bar{G}$. C – любой простой замкнутый контур в области $\bar{G}$, ограничивающий простую область $G(C)$.

Для того, чтобы обращался в нуль криволинейный интеграл

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

необходимо и достаточно, чтобы всюду в области G выполнялось равенство

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – любая точка внутри области G, а C – любой простой замкнутый контур в $\bar{G}$, окружающий эту точку и ограничивающий простую область $G(C)$. Если

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = 0,$$

то по формуле Грина имеем

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{G(C)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

По теореме о среднем для двойного интеграла

$$\iint\limits_{G(C)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \left(\frac{\partial Q(M^*)}{\partial x} - \frac{\partial P(M^*)}{\partial y}\right) \cdot S = 0,$$

где S – площадь области $G(C)$, а M^* – некоторая точка, лежащая в этой области.

Непрерывно изменяя контур C, будем стягивать область $G(C)$ в точку M_0. При этом $M^* \to M_0$. Разделив последнее равенство на S и затем переходя к пределу, получаем

$$\lim_{G(C)\to M_0} \frac{1}{S} \iint\limits_{G(C)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy =$$

$$= \lim_{M^*\to M_0} \left(\frac{\partial Q(M^*)}{\partial x} - \frac{\partial P(M^*)}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q(M_0)}{\partial x} - \frac{\partial P(M_0)}{\partial y} = 0.$$

Отсюда и следует в силу произвольности точки (x_0, y_0) выполнение условия

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

всюду в области G.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Получается непосредственно из формулы Грина.
Теорема доказана.

Рассмотрим в области G две произвольные кусочно гладкие кривые, соединяющие точки A и B (рис. 3.5).

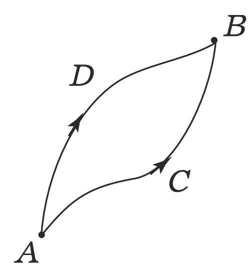


Рис. 3.5. К вопросу о независимости криволинейного интеграла первого рода от пути интегрирования

При выполнении условий теоремы имеем

$$\int\limits_{ACBDA} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dx = 0.$$

Но

$$\int\limits_{ACBDA} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dx =$$

$$= \int\limits_{ACB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dx - \int\limits_{ADB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{ACB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dx = \int\limits_{ADB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dx.$$

Таким образом криволинейный интеграл $\int\limits_C P\,dx + Q\,dy$ не зависит от пути интегрирования, если $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ всюду в области G. Но последнее соотношение является необходимым и достаточным условием того, что выражение $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ будет полным дифференциалом. Окончательно этот важный результат сформулируем в виде теоремы:

Теорема 3.6
Для того, чтобы интеграл

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

не зависел от формы пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы подинтегральное выражение $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ *было в рассматриваемой области* G *дифференциалом от некоторой функции двух переменных.*

П р и м е р. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_C \left(\mathrm{e}^{-x}\cos y - y^2\right)\,dx + \left(\mathrm{e}^{-x}\sin y - 2xy\right)\,dy,$$

где C – верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = 2ax$, пробегаемая от точки $A(0,0)$ до точки $B(2a,0)$ (рис. 3.6).

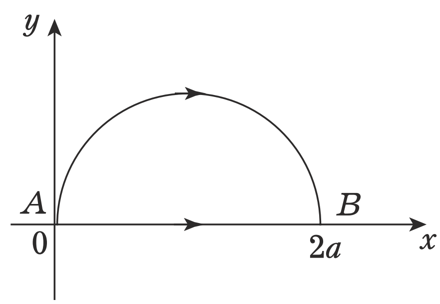


Рис. 3.6. Полуокружность заменяем на отрезок AB для не зависящего от пути интеграла

Непосредственное вычисление этого интеграла сопряжено с техническими трудностями. Однако замечая, что выражение под знаком интеграла есть полный дифференциал,

$$\frac{\partial\left(\mathrm{e}^{-x}\cos y - y^2\right)}{\partial y} \equiv \frac{\partial\left(\mathrm{e}^{-x}\sin y - 2xy\right)}{\partial x},$$

мы заменим интеграл по верхней полуокружности C на интеграл по отрезку действительной оси AB. Учитывая, что на этом отрезке $y = 0$, получаем

$$\int\limits_C \left(\mathrm{e}^{-x}\cos y - y^2\right)\,dx + \left(\mathrm{e}^{-x}\sin y - 2xy\right)\,dy =$$

$$= \int\limits_{AB} \left(\mathrm{e}^{-x}\cos y - y^2\right)\,dx + \left(\mathrm{e}^{-x}\sin y - 2xy\right)\,dy = \int\limits_0^{2a} \mathrm{e}^{-x}\,dx = 1 - \mathrm{e}^{-2a}.$$

Глава 4

Поверхностные интегралы

В этой главе, подобно криволинейным интегралам, введем понятия поверхностных интегралов первого и второго рода, дадим формулы для их вычисления, основанные на векторном задании поверхности, обсудим физический смысл этих интегралов, а также покажем связь поверхностных интегралов с другими известными интегралами.

Прежде чем приступить к изучению поверхностных интегралов, необходимо, очевидно, ввести понятия поверхности и площади поверхности.

4.1 Поверхность. Способы задания поверхности

Определение 4.1 *Пусть D - односвязная замкнутая область в $\mathbb{R}^2$. Годограф непрерывной векторной функции*

$$\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$$

назовем поверхностью S.

Различают три вида задания (параметризации) поверхности.

1. Векторное задание поверхности

$$\vec{r} = \vec{r}\,(u, v), \qquad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

2. Параметрическое задание

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v), \end{cases} \qquad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

3. Явное задание

$$z = z(x, y), \qquad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

Зная параметрическое или явное задание поверхности, можно перейти к ее векторному заданию

$$\vec{r}\,(u, v) = x(u, v)\,\vec{i} + y(u, v)\,\vec{j} + z(u, v)\,\vec{k}, \qquad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

или

$$\vec{r}\,(x, y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z(x, y)\,\vec{k}, \qquad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

Определение 4.2

1. *Поверхность S называется простой, если ее параметризация*

$$\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$$

осуществляет взаимно однозначное отображение области D плоскости в трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$.

2. *Простая поверхность S называется гладкой, если ее параметризация $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$ – непрерывно дифференцируемая функция в D.*

3. *Простая поверхность S называется кусочно гладкой, если ее параметризация $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$ – непрерывно дифференцируемая функция в D за исключением конечного числа кривых $C_i \subset D$.*

Отметим геометрический смысл понятий, фигурирующих в последнем определении. У простой поверхности отсутствуют участки касания и самопересечения. Гладкая поверхность имеет во всех точках касательную плоскость. Кусочно гладкая поверхность состоит из конечного числа ее гладких частей.

4.2 Нормаль и касательная плоскость к поверхности

Рассмотрим гладкую поверхность S с параметризацией

$$\vec{r} = \vec{r}\,(u, v), \qquad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

Пусть $M_0 \in S$ – точка, определяемая параметрами $u = u_0$, $v = v_0$ (рис. 4.1).

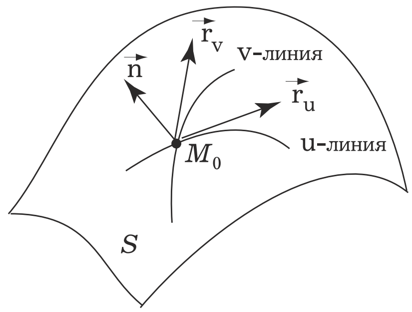


Рис. 4.1. Векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$, определяющие касательную плоскость, и $\vec{n}$ – вектор нормали.

Функции $\vec{r}\,(u, v_0)$ и $\vec{r}\,(u_0, v)$ определяют кривые, лежащие на поверхности S и проходящие через точку M_0 (u-линия и v-линия). Очевидно, что частная производная $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ – это касательный вектор к u-линии, а $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ – касательный вектор к v-линии. Эти векторы определяют касательную плоскость к поверхности S в точке M_0. Единичный вектор $\vec{n}\,(M_0)$, перпендикулярный к этой касательной плоскости и проходящий через точку M_0, называется нормалью к поверхности S в точке M_0. Легко видеть,что вектор нормали в точке M_0 коллинеарен векторному произведению $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$:

$$\vec{n}\,(M_0) \| [\vec{r}_u(u_0, v_0), \vec{r}_v(u_0, v_0)].$$

Очевидно, что если векторы $\vec{n}$, $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ образуют правую тройку, то

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}.$$

Уравнение касательной плоскости к поверхности S в точке M_0 имеет вид

$$(\vec{\rho} - \vec{r}_0, [\vec{r}_u, \vec{r}_v]) = 0,$$

где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор точки касания, а $\vec{\rho}$ – радиус-вектор произвольной точки касательной плоскости.

Если поверхность задана в явном виде $z = z(x, y)$, то

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z(x, y)\,\vec{k},$$

и уравнение касательной плоскости

$$(\vec{\rho} - \vec{r}_0, [\vec{r}_x, \vec{r}_y]) = 0$$

в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = z(x_0, y_0)$, запишется так

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$z - z_0 = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0).$$

Если же поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z},$$

и уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

4.3 Односторонние и двусторонние поверхности

Пусть S – гладкая поверхность. Возьмем на S некоторую внутреннюю точку M_0, проведем через нее нормаль $\vec{n}\,(M_0)$ и выберем на этой нормали направление (рис. 4.2). Проведем теперь на S через точку M_0 любой

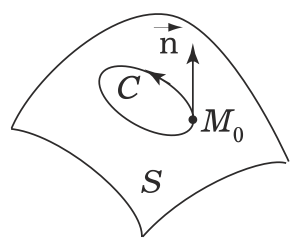


Рис. 4.2. Двусторонняя поверхность. Обход по любому замкнутому контуру на поверхности, не имеющему общих точек с границей, не меняет направление нормали

замкнутый контур C, не пересекающий границы поверхности, и будем передвигать вдоль C вектор нормали, меняя его направление непрерывно.

Определение 4.3 *Гладкая поверхность S называется двусторонней, если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности S и не имеющему общих точек с ее границей, не меняет направление нормали к поверхности. Если же на поверхности существует хотя бы один контур, при обходе по которому направление нормали меняется на противоположное, то поверхность называется односторонней.*

Классическим примером односторонней поверхности является лист Мебиуса. Модель его можно получить, если прямоугольный лист бумаги $ABCD$, перекрутив один раз, склеить так, чтобы точка A совпала с C, а B с D (рис. 4.3).

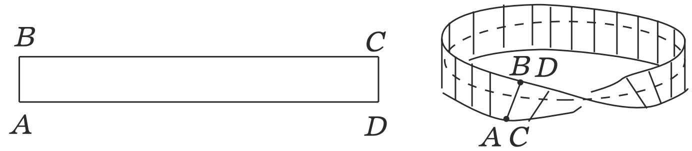


Рис. 4.3. Односторонняя поверхность – лист Мебиуса. Обход по замкнутому контуру, отмеченному пунктирной линией, меняет направление нормали на противоположное

Пусть S – двусторонняя поверхность. Возьмем на ней любую точку M_0 и припишем ей определенное направление нормали. Возьмем какую-нибудь другую точку M_1, соединим M_0 с M_1 произвольным путем K, не имеющим общих точек с границей поверхности, и будем передвигать нормаль из точки M_0 в M_1 непрерывным образом. Тогда нормаль займет в точке M_1 определенное положение, не зависящее от пути K.

Таким образом на двусторонней поверхности выбор направления нормали в одной точке определяет направление нормали во всех точках поверхности.

Определение 4.4 *Совокупность точек двусторонней поверхности S, с приписанным в них по выше указанному правилу направлением нормали, назовем стороной поверхности и обозначим $(M, \vec{n}\,(M))$, $M \in S$. В этих обозначениях $(M, -\vec{n}\,(M))$, $M \in S$, другая сторона поверхности.*

В дальнейшем будем рассматривать только двусторонние поверхности. Для таких поверхностей справедлива следующая лемма.

Лемма 4.1
Пусть S – гладкая ограниченная двусторонняя поверхность. Существует такое число $\delta > 0$, что любая ее часть S_i, диаметр которой меньше δ, однозначно проектируется на касательную плоскость, проходящую через любую точку этой части.

4.4 Площадь поверхности

Опираясь на лемму 4.1 мы теперь можем дать определение площади поверхности.

Определение 4.5 *Пусть S – гладкая ограниченная двусторонняя поверхность. Разобьем S на конечное число частей S_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, каждая из которых однозначно проектируется на касательную плоскость, проходящую через любую точку этой части. Обозначим через S_i^k проекцию S_i на касательную плоскость в некоторой точке $M_i \in S_i$, а через ΔS_i^k – площадь этой проекции. Составим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i^k$ всех площадей этих проекций.*

1. *Число σ называется пределом суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i^k$ при $\max d(S_i) \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для любых разбиений S_i поверхности S, для которых $\max d(S_i) < \delta$, выполняется*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i^k - \sigma \right| < \varepsilon$$

независимо от выбора точек M_i.

2. *Если существует конечный предел*

$$\sigma[S] = \lim_{\max d(S_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i^k,$$

то поверхность S называется квадрируемой, а само число $\sigma[S]$ называется площадью поверхности.

Приведем теорему, позволяющую вычислять площадь поверхности.

Теорема 4.1
Если гладкая ограниченная двусторонняя поверхность с кусочно гладкой границей задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, то площадь

поверхности существует и равна

$$\sigma[S] = \iint\limits_D |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| \, dudv. \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что параметризация $\vec{r}\,(u,v)$ гладкой поверхности S – непрерывно дифференцируемая функция, т.е. частные производные $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ – непрерывны и, следовательно, функция $|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|$ будет непрерывной в области D. Но тогда двойной интеграл в формуле (4.1) существует.

Рассмотрим разбиение S_i поверхности S, введенное в определении 4.5. Тогда область D разбивается на ячейки D_i, для которых выполняется

$$d(D_i) \to 0 \quad \text{при} \;\; d(S_i) \to 0.$$

Выберем точки $M_i \in S_i$ и проведем касательные плоскости, касающиеся поверхности $\mathcal{S}$ в этих точках. В каждой точке M_i выберем местную декартову прямоугольную систему координат, приняв за плоскость (x, y) касательную в точке M_i плоскость, а ось z пустим по направлению нормали к поверхности в точке M_i. Тогда уравнение части поверхности $\mathcal{S}_i$ можно записать в виде

$$x = x(u,v)\,, \quad y = y(u,v)\,, \quad z = z(u,v)\,, \quad (u,v) \in D_i \subset D.$$

При этом проекция S_i^k на касательную плоскость, проходящую через точку M_i, задается функциями

$$x = x(u,v)\,, \quad y = y(u,v)\,, \quad z = 0\,, \quad (u,v) \in D_i\,,$$

устанавливающими взаимно однозначное соответствие областей $\mathcal{S}_i^k$ плоскости (x, y) и D_i плоскости (u, v).

Пользуясь формулой замены переменных в двойном интеграле, запишем площадь области S_i^k в виде

$$\Delta S_i^k = \iint\limits_{S_i^k} dxdy = \iint\limits_{D_i} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv\,.$$

Здесь фигурирует якобиан перехода от переменных (u, v) к переменным (x, y)

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}.$$

Он тесно связан с векторным произведением касательных к поверхности S векторов. Действительно, упомянутое векторное произведение, в выбранной выше системе координат (x, y, z), равно

$$[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, \vec{k}.$$

Следовательно

$$|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \qquad \Rightarrow \qquad \Delta S_i^k = \iint\limits_{D_i} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\, dudv\,.$$

Пользуясь непрерывностью модуля векторного произведения $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$, применим теорему о среднем (2.16) для двойного интеграла

$$\Delta S_i^k = \iint\limits_{D_i} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\, dudv = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|_{u_i^*, v_i^*} \cdot \Delta D_i,$$

где $(u_i^*, v_i^*) \in D_i$, а через ΔD_i обозначена площадь ячейки D_i.

Таким образом, сумма площадей всех проекций $\mathcal{S}_i^k$ на соответствующие касательные плоскости равна

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i^k = \sum_{i=1}^{n} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|_{u_i^*, v_i^*} \cdot \Delta D_i.$$

Переходя к пределу получаем

$$\lim_{\max d(S_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i^k = \lim_{\max d(D_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|_{u_i^*, v_i^*} \cdot \Delta D_i = \iint\limits_{D} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\, dudv.$$

Последний предел существует, т.к. функция $|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|$ интегрируема в области D.

Только что доказанная теорема позволяет ввести следующее определение:

Определение 4.6 *Ограниченная двусторонняя поверхность с кусочно гладкой границей, допускающая непрерывно дифференцируемую (гладкую) параметризацию, называется допустимой поверхностью.*

З а м е ч а н и е. В дальнейшем под кусочно гладкой поверхностью будем понимать поверхность, которую можно разбить на конечное число допустимых ее частей (поверхностей).

Приведем примеры вычисления площадей поверхности.

П р и м е р ы

1) Вычислить площадь σ части гиперболического параболоида $z = xy$, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$.

Р е ш е н и е. Введем цилиндрические координаты

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Запишем векторное уравнение поверхности в этих координатах

$$\vec{r}\,(\varphi,\rho) = \rho\cos\varphi\,\vec{i} + \rho\sin\varphi\,\vec{j} + \frac{\rho^2}{2}\sin 2\varphi\,\vec{k}, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi,\ \ 0 \le \rho \le a.$$

Вычислим модуль векторного произведения $[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\rho]$

$$[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\rho] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & \rho^2\cos 2\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi & \rho\sin 2\varphi \end{vmatrix} = \rho^2\sin\varphi\,\vec{i} + \rho^2\cos\varphi\,\vec{j} - \rho\,\vec{k},$$

$$|[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\rho]| = \sqrt{\rho^4 + \rho^2} = \rho\sqrt{1+\rho^2}.$$

Площадь поверхности вычислим по формуле (4.1)

$$\sigma = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho = \frac{2\pi}{3}(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^a = \frac{2\pi}{3}(\sqrt{(1+a^2)^3} - 1).$$

2) Вычислить площадь σ одного витка винтовой поверхности (геликоида), заданной уравнениями $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = hv$ $(h > 0)$, $(0 \le u \le a,\ 0 \le v \le 2\pi)$.

Р е ш е н и е. Векторное уравнение поверхности имеет вид

$$\vec{r}\,(u,v) = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + hv\,\vec{k}, \qquad 0 \le u \le a,\ 0 \le v \le 2\pi.$$

Вычисляем площадь поверхности

$$[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & h \end{vmatrix} = h\sin v\,\vec{i} - h\cos v\,\vec{j} + u\,\vec{k},$$

$$|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = \sqrt{u^2 + h^2},$$

$$\sigma = \int\limits_0^{2\pi} dv \int\limits_0^a \sqrt{u^2 + h^2}\, du = 2\pi \left(\frac{u}{2}\sqrt{u^2 + h^2} + \frac{h^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 + h^2}| \right)\Bigg|_0^a =$$

$$= \pi(a\sqrt{a^2 + h^2} + h^2 \ln(a + \sqrt{a^2 + h^2}) - h^2 \ln h).$$

4.5 Поверхностные интегралы первого рода

Определение 4.7 *Пусть в точках допустимой поверхности S задана ограниченная функция $f(M)$, $M \in S$. Разобьем поверхность S кусочно гладкими кривыми на n частей $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Обозначим через ΔS_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, площадь S_i, а через $d(S_i)$ – диаметр S_i. Возьмем в каждой из этих частей произвольную точку $M_i \in S_i$ и составим интегральную сумму*

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i.$$

1. *Число A называется пределом интегральной суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$ при $\max d(S_i) \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для любых разбиений S_i поверхности S, удовлетворяющих условию $\max d(S_i) < \delta$, выполняется*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i - A \right| < \varepsilon$$

независимо от выбора точек M_i.

2. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{\max d(S_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i,$$

то функция $f(M)$ называется интегрируемой по поверхности S, а значение предела называют поверхностным интегралом первого рода и обозначают

$$\iint\limits_S f(M)\, dS.$$

З а м е ч а н и е. Из этого определения следует, что поверхностный интеграл первого рода не зависит от выбранной стороны поверхности.

Ф и з и ч е с к и й   с м ы с л.

Если на поверхности S непрерывно распределена масса с поверхностной плотностью $\rho = f(M)$, то значения $f(M_i)\Delta S_i$ приближенно равны массе тех частей S_i, на которые разбивается поверхность S, а сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$$

– это масса всей поверхности, вычисленная приближенно. Но тогда

$$\iint\limits_{S} f(M)\,dS$$

представляет из себя массу поверхности S.

Приведем теорему о вычислении поверхностного интеграла первого рода.

Теорема 4.2

Пусть допустимая поверхность S имеет непрерывно дифференцируемую параметризацию $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ и $f(M)$, $M \in S$, – функция, интегрируемая на поверхности S. Тогда вычисление поверхностного интеграла первого рода сводится к вычислению двойного интеграла по формуле

$$\iint\limits_{S} f(M)\,dS = \iint\limits_{D} f(\vec{r}\,(u,v))|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,dudv. \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разобьем поверхность S кусочно гладкими кривыми на n частей $S_1, S_2, \ldots, S_n$, тогда область D разбивается на соответствующее число ячеек $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Выбрав в каждой из этих частей поверхности произвольную точку $M_i \in S_i$ составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i,$$

где площадь ΔS_i части поверхности S_i вычисляется по формуле

$$\Delta S_i = \sigma[S_i] = \iint\limits_{D_i} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,dudv.$$

Применяя теорему о среднем (2.16) для двойного интеграла, получаем $\Delta S_i = |[\vec{r}_u(u_i^*, v_i^*), \vec{r}_v(u_i^*, v_i^*)]|\Delta D_i$, где $(u_i^*, v_i^*) \in D_i$. Выберем точку $M_i = \vec{r}\,(u_i^*, v_i^*)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\vec{r}\,(u_i^*, v_i^*))|[\vec{r}_u(u_i^*, v_i^*), \vec{r}_v(u_i^*, v_i^*)]|\Delta D_i.$$

Переходя к пределу при $\max d(S_i) \to 0$ (тогда и $\max d(D_i) \to 0$) получаем

$$\iint\limits_S f(M)\,dS = \lim_{\max d(S_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i =$$

$$= \lim_{\max d(D_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\vec{r}\,(u_i^*, v_i^*))|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]_{u_i^*, v_i^*} \cdot \Delta D_i = \iint\limits_D f(\vec{r}\,(u,v))|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,dudv.$$

З а м е ч а н и е . Также как и для определенного интеграла и кратных интегралов от функций действительного переменного можно установить, что когда функция $f : S \to \mathbb{R}$ - непрерывна на допустимой (квадрируемой) поверхности S, то она и интегрируема по поверхности S. Тогда если в предыдущей теореме положить, что поверхность S задана уравнением

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\,\vec{i} + y(u,v)\,\vec{j} + z(u,v)\,\vec{k}, \qquad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

и $f(x,y,z)$ – непрерывная функция на поверхности S, то формулу (4.2) можно записать так

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds = \iint\limits_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,dudv. \tag{4.3}$$

В случае явного задания поверхности $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ формула (4.3) принимает вид

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \tag{4.4}$$

Действительно, в этом случае

$$\vec{r}\,(x,y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z(x,y)\,\vec{k},$$

$$[\vec{r}_x, \vec{r}_y] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial z}{\partial x}\,\vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\,\vec{j} + \vec{k},$$

и $|[\vec{r}_x, \vec{r}_y]| = \sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$.

Приведем примеры применения формулы (4.2).

П р и м е р ы

1) Вычислить интеграл $\displaystyle\iint\limits_S (x + y + z)\,dS$, где S – верхняя полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.

Р е ш е н и е. Запишем уравнение поверхности в сферических координатах

$$\begin{cases} x = a\cos\theta\,\cos\varphi, \\ y = a\cos\theta\,\sin\varphi, \\ z = a\sin\theta, \end{cases} \qquad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\right),$$

где угол θ отсчитывается от плоскости (x, y).

Векторное задание сферы имеет вид

$$\vec{r}\,(\theta, \varphi) = a\cos\theta\,\cos\varphi\,\vec{i} + a\cos\theta\,\sin\varphi\,\vec{j} + a\sin\theta\,\vec{k}.$$

Вычислим $|[\vec{r}_\theta, \vec{r}_\varphi]|$:

$$[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\theta] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\cos\theta\,\sin\varphi & a\cos\theta\cos\varphi & 0 \\ -a\sin\theta\,\cos\varphi & -a\sin\theta\,\sin\varphi & a\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= a^2\cos^2\theta\,\cos\varphi\,\vec{i} + a^2\cos^2\theta\,\sin\varphi\,\vec{j} + a^2\cos^2\theta\,\sin\theta\,\vec{k},$$

$$|[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\theta]| = a^2\sqrt{\cos^4\theta\,\cos^2\varphi + \cos^4\theta\,\sin^2\varphi + \cos^2\theta\,\sin^2\theta} = a^2\cos\theta.$$

Применяя формулу (4.2) получаем

$$\iint\limits_S (x + y + z)\,dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos\theta(\cos\varphi + \sin\varphi) + a\sin\theta)a^2\cos\theta\,d\varphi d\theta =$$

$$= a^3 \int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi)\, d\varphi \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta + a^3 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, \cos\theta\, d\theta =$$

$$= 2\pi a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, \cos\theta\, d\theta = \pi a^3.$$

2) Вычислить интеграл $\iint\limits_S (y+z)\, dS$, где S – лежащая в первом октанте ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) часть поверхности, полученная вращением первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, вокруг оси x.

Р е ш е н и е. При фиксированном x точка циклоиды, вращаясь, описывает в плоскости, перпендикулярной оси x, окружность радиуса $R = y = a(1 - \cos t)$ и с центром, лежащим на оси x. Если обозначить через φ угол, который образует этот радиус с частью плоскости $z = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, то точка $M \in S$ поверхности S будет иметь координаты

$$\begin{aligned} &x = a(t - \sin t), \\ &y = R\cos\varphi = a(1 - \cos t)\cos\varphi, \\ &z = R\sin\varphi = a(1 - \cos t)\sin\varphi, \end{aligned}$$

где $0 \leq t \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Запишем теперь векторное уравнение поверхности

$$\vec{r}\,(t, \varphi) = a(t - \sin t)\,\vec{i} + a(1 - \cos t)\cos\varphi\,\vec{j} + a(1 - \cos t)\sin\varphi\,\vec{k}.$$

Вычислим $|[\vec{r}_t, \vec{r}_\varphi]|$:

$$[\vec{r}_t, \vec{r}_\varphi] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a(1 - \cos t) & a\sin t\, \cos\varphi & a\sin t\, \sin\varphi \\ 0 & -a(1 - \cos t)\sin\varphi & a(1 - \cos t)\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= a^2(1 - \cos t) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 - \cos t & \sin t\, \cos\varphi & \sin t\, \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= a^2(1 - \cos t)(\sin t\,\vec{i} - (1 - \cos t)\cos\varphi\,\vec{j} - (1 - \cos t)\sin\varphi\,\vec{k}\,),$$

$$|[\vec{r}_t, \vec{r}_\varphi]| = a^2(1 - \cos t)\sqrt{\sin^2 t + (1 - \cos t)^2\cos^2\varphi + (1 - \cos t)^2\sin^2\varphi} =$$

$$= a^2(1 - \cos t)\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a^2\sin^2\frac{t}{2}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}} = 4a^2\sin^3\frac{t}{2}.$$

Используя затем формулу (4.2), получаем

$$\iint_S (y+z)\,dS = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi + \cos\varphi)\,d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \sin^5 \frac{t}{2}\,dt = \frac{512}{15}a^4.$$

4.6 Поверхностные интегралы второго рода

Определение 4.8 *Пусть S – допустимая поверхность. Фиксирована одна из ее сторон и $\vec{n}\,(M)$, $M \in S$, – нормаль выбранной стороны. Пусть далее задана ограниченная векторная функция $\vec{A} : S \to \mathbb{R}^3$. Определим функцию $f(M) = (\vec{A}\,(M), \vec{n}\,(M))$, $M \in S$. Тогда интеграл*

$$\iint_S f(M)\,ds = \iint_S (\vec{A}\,(M), \vec{n}\,(M))\,dS$$

называется поверхностным интегралом второго рода.

Из определения следует, что поверхностный интеграл второго рода зависит от выбранной стороны поверхности, причем при переходе с одной стороны на другую меняет знак на противоположный.

З а м е ч а н и е 1. Если в пространстве $\mathbb{R}^3$ с помощью ортонормированного базиса $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ введена декартова прямоугольная система координат, то

$$\vec{A}\,(M) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k},$$

$$\vec{n}\,(M) = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k},$$

и

$$\iint_S (\vec{A}\,(M), \vec{n}\,(M))\,dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \iint_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy, \tag{4.5}$$

где $dydz = \cos\alpha\,dS$, $dzdx = \cos\beta\,dS$, $dxdy = \cos\gamma\,dS$ – проекции элемента dS на координатные плоскости yz, zx, xy.

Обратно, если поверхностный интеграл второго рода записан в виде (4.5), то легко восстановить векторную функцию $\vec{A} = A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j} + A_z\,\vec{k}$.

Первой ее координатой A_x будет выражение, стоящее перед элементом $dydz$, в котором отсутствует переменное x, вторая координата A_y – перед $dzdx$ (отсутствует y), третья координата A_z – перед $dxdy$ (отсутствует z).

З а м е ч а н и е 2. Из соотношений(4.5) нетрудно заключить, что справедливо следующее равенство (при условии существования входящих в него интегралов)

$$\iint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_S P\,dydz + \iint\limits_S Q\,dzdx + \iint\limits_S R\,dxdy. \tag{4.6}$$

Ф и з и ч е с к и й   с м ы с л. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ движется жидкость, частицы которой имеют в каждой точке $M \in \mathbb{R}^3$ скорость $\vec{V}\,(M)$. Вычислим количество жидкости, протекающей через двустороннюю поверхность S в указанную сторону за единицу времени (это количество жидкости принято называть потоком поля скоростей $\vec{V}\,(M)$). С этой целью разобьем поверхность S кусочно гладкими кривыми на n ячеек S_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Будем полагать, что скорость частиц жидкости, протекающих через ячейку S_i постоянна и равна значению $\vec{V}\,(M_i)$, где M_i наугад выбранная точка ячейки S_i. Тогда поток через ячейку S_i приближенно равен $(\vec{V}\,(M_i), \vec{n}\,(M_i))\Delta S_i$, где $\vec{n}\,(M_i)$ – нормаль выбранной стороны, указывающая направление потока. Поток же жидкости через всю поверхность S приближенно равен

$$\Pi \approx \sum_{i=1}^{n} (\vec{V}\,(M_i), \vec{n}\,(M_i))\Delta S_i.$$

Переходя к пределу при $\max d(S_i) \to 0$, получаем, что поток (количество жидкости, протекающей через поверхность S за единицу времени) равен поверхностному интегралу второго рода

$$\Pi = \lim_{\max d(S_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\vec{V}\,(M_i), \vec{n}\,(M_i))\Delta S_i = \iint\limits_S (\vec{V}\,(M), \vec{n}\,(M))\,dS.$$

Теорема 4.3

Пусть допустимая поверхность S имеет гладкую параметризацию

$$\vec{r} = \vec{r}\,(u, v) \qquad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

и функция $\vec{A}(M)$ непрерывна на поверхности S.

Тогда вычисление поверхностного интеграла второго рода от функции $\vec{A}(M)$ сводится к вычислению двойного интеграла от смешанного произведения $(\vec{A}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) = (\vec{A}(\vec{r}(u,v)), \vec{r}_u(u,v), \vec{r}_v(u,v))$ по формуле

$$\iint\limits_S (\vec{A}(M), \vec{n}(M))\, dS = \iint\limits_D (\vec{A}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)\, dudv, \tag{4.7}$$

где вектора $\vec{n}$, $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ образуют правую тройку (для правой системы координат).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если в точке M поверхности S вектор нормали $\vec{n}$ и векторы $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, определяющие касательную плоскость, образуют правую тройку, то

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}.$$

Используя формулу (4.2) для вычисления поверхностного интеграла первого рода, получаем

$$\iint\limits_S (\vec{A}(M), \vec{n}(M))\, dS = \iint\limits_D \left(\vec{A}, \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}\right) |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\, dudv =$$

$$= \iint\limits_D (\vec{A}, [\vec{r}_u, \vec{r}_v])\, dudv = \iint\limits_D (\vec{A}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)\, dudv.$$

Приведем примеры применения формулы (4.7).

П р и м е р ы

1) Вычислить интеграл $\iint\limits_S yz\, dydz + x^2\, dzdx + yz\, dxdy$, где S – внешняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y \geq 0$.

Р е ш е н и е. Запишем уравнение сферы в явном виде

$$y = y(x,z) = \sqrt{a^2 - x^2 - z^2}, \qquad (x,z) \in D = \{(x,z),\ x^2 + z^2 \leq a^2\}.$$

Тогда векторная функция $\vec{A}$ на поверхности S равна

$$\vec{A}(x,z) = z\, y(x,z)\, \vec{i} + x^2\, \vec{j} + z\, y(x,z)\, \vec{k},$$

а векторное задание поверхности имеет вид

$$\vec{r}(x,z) = x\, \vec{i} + y(x,z)\, \vec{j} + z\, \vec{k}.$$

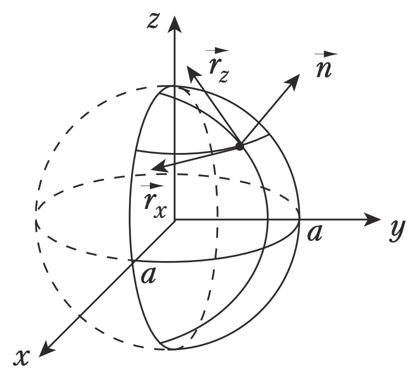


Рис. 4.4. Правая тройка векторов $\vec{n}$, $\vec{r}_z$, $\vec{r}_x$ на полусфере

Вектор $\vec{r}_x$ – касательный к x-линии, которая получается в результате пересечения сферы плоскостью $z = \text{const}$, направлен в сторону возрастания параметра x (рис. 4.4). Аналогично вектор $\vec{r}_z$ строится как касательный к z-линии (пересечение сферы с плоскостью $x = \text{const}$) и направлен в сторону возрастания параметра z. Из рисунка видно, что тройка векторов $\vec{n}$, $\vec{r}_z$, $\vec{r}_x$ образует правую тройку. Следовательно, для вычисления интеграла мы должны найти смешанное произведение $(\vec{A}, \vec{r}_z, \vec{r}_x)$. Учитывая, что $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{x}{y}$ и $\dfrac{\partial y}{\partial z} = -\dfrac{z}{y}$, где $y = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, имеем

$$(\vec{A}, \vec{r}_z, \vec{r}_x) = \begin{vmatrix} zy & x^2 & zy \\ 0 & -\dfrac{z}{y} & 1 \\ 1 & -\dfrac{x}{y} & 0 \end{vmatrix} = x^2 + z^2 + zx.$$

Используя формулу (4.7), получаем

$$\iint\limits_S yz\,dydz + x^2\,dzdx + yz\,dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} (x^2 + z^2 + zx)\,dxdy.$$

Интеграл в правой части вычисляем, переходя к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$,

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} (x^2 + z^2 + zx)\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a (1 + \cos\varphi\,\sin\varphi)\rho^3\,d\rho = \frac{\pi a^4}{2}.$$

2) Вычислить интеграл $\iint\limits_S zy^2\,dydz + x\,dzdx + yz^2\,dxdy$, где S – внутренняя сторона цилиндра $y^2 = 2px$, $0 \le x \le 2p$, $0 \le z \le q$, т.е. та сторона цилиндра, которая видна, если смотреть с положительного направления оси x.

Р е ш е н и е. В качестве параметров при задании поверхности возьмем независимые переменные y и z. Тогда явное задание цилиндра имеет вид

$$x = \frac{y^2}{2p}, \qquad -2p \le y \le 2p,\ 0 \le z \le q.$$

Используя это задание введем векторную параметризацию поверхности и запишем функцию $\vec{A}\,(x,z)$

$$\vec{r}\,(y,z) = \frac{y^2}{2p}\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}, \qquad \vec{A}\,(x,z) = zy^2\,\vec{i} + \frac{y^2}{2p}\,\vec{j} + yz^2\,\vec{k}.$$

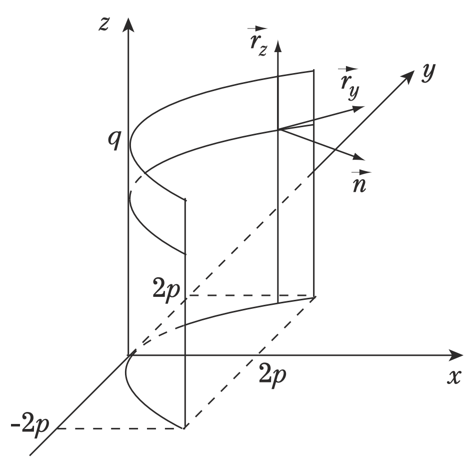


Рис. 4.5. Правая тройка векторов $\vec{n}$, $\vec{r}_y$, $\vec{r}_z$ на внутренней стороне цилиндра

Также, как и в предыдущем примере, приходим к заключению, что тройка векторов $\vec{n}$, $\vec{r}_y$, $\vec{r}_z$ образует правую тройку (рис. 4.5). Вычисляя вначале смешанное произведение $(\vec{A}, \vec{r}_y, \vec{r}_z)$, а затем и сам интеграл, получаем

$$(\vec{A}, \vec{r}_y, \vec{r}_z) = \begin{vmatrix} zy^2 & \dfrac{y^2}{2p} & yz^2 \\ \dfrac{y}{p} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = zy^2 - \frac{y^3}{2p^2},$$

$$\iint\limits_S zy^2\,dydz + x\,dzdx + yz^2\,dxdy = \int\limits_0^q dz \int\limits_{-2p}^{2p} \left(zy^2 - \frac{y^3}{2p^2} \right) dy = \frac{8}{3}p^3q^2.$$

3) Вычислить интеграл $\iint\limits_S y\,dydz - x\,dzdx + x\,dxdy$, где S – верхняя сторона геликоида (винтовой поверхности) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$, $0 \le v \le 2\pi$, $0 \le u \le a$.

Р е ш е н и е. Запишем векторное задание поверхности S

$$\vec{r}\,(u,v) = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + av\,\vec{k}.$$

Интегрируемая по поверхности векторная функция равна

$$\vec{A}\,(u,v) = u\sin v\,\vec{i} - u\cos v\,\vec{j} + av\,\vec{k}.$$

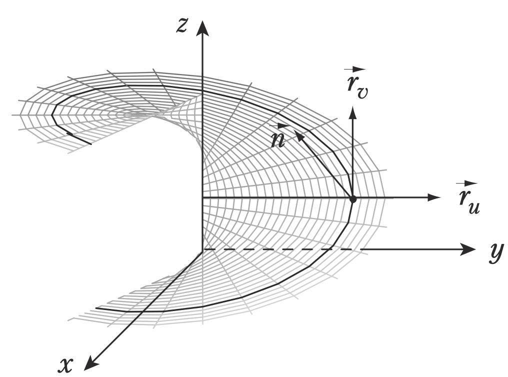


Рис. 4.6. Правая тройка векторов n, $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ на верхней стороне винтовой поверхности

Рассмотрим u-линию и v-линию на геликоиде, проходящие через фиксированную точку M (рис. 4.6). Легко видеть, что u-линии ($v = \mathrm{const}$) получаются в результате пересечения плоскостей $\dfrac{z}{a} = \mathrm{const}$ с геликоидом и представляют собой отрезки, перпендикулярные оси z. Касательный вектор $\vec{r}_u$ направлен по такому отрезку в сторону от оси z. При фиксированных значениях параметра $u = c$ получаем v-линии, которые являются винтовыми линиями, расположенными на цилиндрах $x^2 + y^2 = c^2$. Касательный вектор $\vec{r}_v$ к подобной линии направлен в сторону возрастания параметра v и, следовательно, в сторону увеличения z. Теперь легко сообразить, что тройка векторов n, $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ – правая.

Используя формулу (4.7), вычисляем поверхностный интеграл

$$(\vec{A}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) = \begin{vmatrix} u\sin v & -u\cos v & av \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix} = au(1+v),$$

$$\iint\limits_S y\,dydz - x\,dzdx + x\,dxdy = \int\limits_0^a au\,du \int\limits_0^{2\pi} (1+v)\,dv = \pi(1+\pi)a^3.$$

Мы покажем другой способ вычисления поверхностного интеграла второго рода, когда поверхность S, по которой производится интегрирование, однозначно проектируется на координатные плоскости xy, xz и yz. В этом случае в некоторых задачах вычисление поверхностного интеграла второго рода может быть проведено проще.

Пусть допустимая поверхность одновременно может быть представлена одним из явных уравнений $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D_{xy}$ или $x = x(y,z)$, $(y,z) \in D_{yz}$ или $y = y(z,x)$, $(z,x) \in D_{zx}$. Рассмотрим вначале интеграл

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\,dxdy.$$

Для этого интеграла с учетом явного задания $z = z(x,y)$ имеем

$$\vec{A}(x,y) = R(x,y,z(x,y))\,\vec{k}, \quad \vec{r}(x,y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z(x,y)\,\vec{k}.$$

Обратимся к формуле (4.7). Очевидно, что для верхней стороны поверхности тройка векторов $\vec{n}$, $\vec{r}_x$, $\vec{r}_y$ будет правой, а для нижней стороны правую тройку образуют векторы $\vec{n}$, $\vec{r}_y$, $\vec{r}_x$. Для верхней стороны поверхности

$$(\vec{A}, \vec{r}_x, \vec{r}_y) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & R(x,y,z(x,y)) \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = R(x,y,z(x,y)).$$

Для нижней стороны

$$(\vec{A}, \vec{r}_y, \vec{r}_x) = -(\vec{A}, \vec{r}_x, \vec{r}_y) = -R(x,y,z(x,y)).$$

Таким образом

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\,dxdy = \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,dxdy, \tag{4.8}$$

где знак “ + ” берется, если интеграл вычисляется по верхней стороне поверхности S, и “ - ”, если по нижней. Учитывая, что на верхней стороне поверхности нормаль $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ образует острый угол с осью z и значит $\cos\gamma > 0$, а на нижней – тупой угол с осью z и $\cos\gamma < 0$, формулу (4.8) можно записать так

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\,dxdy = \operatorname{sign}(\cos\gamma) \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,dxdy. \tag{4.9}$$

Проведя аналогичные рассуждения для двух других интегралов справа в (4.6), получаем формулу вычисления поверхностного интеграла второго рода, когда поверхность может быть однозначно спроектирована на любую из координатных плоскостей

$$\iint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \operatorname{sign}(\cos\alpha) \iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,dydz +$$

$$+\operatorname{sign}(\cos\beta) \iint\limits_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,dzdx + \operatorname{sign}(\cos\gamma) \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,dxdy. \tag{4.10}$$

П р и м е р. Вычислить интеграл $\iint\limits_S (a^2x + by^2 + cz^2)\,dydz$, где S – внутренняя сторона цилиндра $y^2 = 2px$, $0 \le x \le 2p$, $0 \le z \le q$.

Р е ш е н и е. Легко видеть, что поверхность цилиндра однозначно проектируется (вдоль оси x) на плоскость (y,z) (рис. 4.5), а явное задание поверхности имеет вид $x = \dfrac{y^2}{2p}$, $(x,y) \in D$, где область D – прямоугольник $\{-2p \le y \le 2p, 0 \le z \le q\}$. Нормаль $\vec{n}$ на указанной стороне образует острый угол с осью x. Поэтому $\cos\alpha > 0$. Используя формулу (4.10) получаем

$$\iint\limits_S (a^2x + by^2 + cz^2)\,dydz = \operatorname{sign}(\cos\alpha) \iint\limits_D \left(a^2\frac{y^2}{2p} + by^2 + cz^2\right) dydz =$$

$$= \int_{-2p}^{2p} dy \int_{0}^{q} \left(\left(\frac{a^2}{2p} + b \right) y^2 + cz^2 \right) dz = \frac{4pq}{3}(2a^2p + 4bp^2 + cq^2).$$

4.7 Формула Гаусса-Остроградского

Приведем ниже важную формулу, широко применяемую как в математике так и в различных разделах физики. Она устанавливает связь между поверхностными интегралами второго рода и тройными интегралами. Эту формулу принято называть формулой Гаусса-Остроградского. Предварительно введем некоторые понятия.

Определение 4.9 *Ограниченную область $T_z \subset \mathbb{R}^3$ будем называть z-цилиндрической, если она заключена между двумя гладкими поверхностями $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$, т.е.*

$$T_z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y),\ (x, y) \in D_{xy}\}.$$

Аналогично определим x-цилиндрическую область

$$T_x = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x_1(y, z) \le x \le x_2(y, z), (y, z) \in D_{yz}\}$$

и y-цилиндрическую область

$$T_y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y_1(x, z) \le y \le y_2(x, z), (x, z) \in D_{xz}\}.$$

Определение 4.10 *Область $T \subset \mathbb{R}^3$ называется простой, если ее можно разбить как на конечное число z-цилиндрических областей, так и на конечное число x-цилиндрических плоскостей и на конечное число y-цилиндрических областей.*

Нетрудно понять, что любая ограниченная область с кусочно гладкой границей является простой областью.

Теорема 4.4
Если область $T \subset \mathbb{R}^3$ ограничена кусочно-гладкой двусторонней поверхностью S и $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – нормаль к внешней стороне поверхности S (рис. 4.7), функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны в $T + S$ и непрерывно дифференцируемы в T, то имеет место формула Гаусса-Остроградского

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dT. \quad (4.11)$$

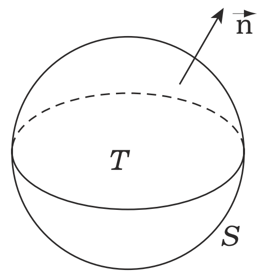


Рис. 4.7. Геометрическая иллюстрация к формуле Гаусса-Остроградского

Доказательство. Выбрав соответствующую сторону замкнутой поверхности S, разобьем область T на конечное число z-цилиндрических областей $T_z^i = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z_{1i}(x,y) \leq z \leq z_{2i}(x,y),\ (x,y) \in D_{xy}^i\}$, $i = 1,2,\ldots,n$, ограниченных гладкими поверхностями S_1^i и S_2^i, заданных уравнениями $z = z_{1i}(x,y)$ и $z = z_{2i}(x,y)$, $(x,y) \in D_{xy}^i$. При этом вся поверхность S, за исключением быть может "стенок", параллельных оси z, разбивается на конечное число ее частей S_1^i и S_2^i.

Применяя правило сведения тройного интеграла к повторному, а затем используя формулу (4.9), последовательно произведем действия

$$\iiint\limits_{T_z^i} \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}^i} dxdy \int\limits_{z_{1i}(x,y)}^{z_{2i}(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}^i} R(x,y,z_{2i}(x,y))\, dxdy - \iint\limits_{D_{xy}^i} R(x,y,z_{1i}(x,y))\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S_2^i} R(x,y,z)\, dS + \iint\limits_{S_1^i} R(x,y,z)\, dS.$$

Суммируя эти равенства по $i = 1,2,\ldots,n$, получим

$$\iiint\limits_{T} \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint\limits_{S} R(x,y,z)\, dxdy = \iint\limits_{S} R(x,y,z)\cos\gamma\, dS. \qquad (4.12)$$

В последний интеграл формулы (4.12) включены также "стенки" поверхности S, параллельные оси z, на которых $\cos\gamma = 0$ и, следовательно, значение этого интеграла на них равно нулю.

Аналогично

$$\iiint\limits_{T} \frac{\partial P}{\partial x}\, dydz = \iint\limits_{S} P(x,y,z)\cos\alpha\, dS, \qquad (4.13)$$

$$\iiint\limits_T \frac{\partial Q}{\partial y}\, dzdx = \iint\limits_S Q(x,y,z)\cos\beta\, dS. \qquad (4.14)$$

Складывая почленно равенства (4.12), (4.13) и (4.14), получаем формулу Гаусса-Остроградского.

4.8 Формула Стокса

Помимо формулы Гаусса-Остроградского, ключевую роль в векторном анализе и его разнообразных приложениях играет формула Стокса. Она устанавливает связь поверхностных интегралов второго рода с криволинейными интегралами.

Теорема 4.5
Если C – простой кусочно-гладкий контур, ограничивающий кусочно-гладкую двустороннюю поверхность S, а функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны в $S+C$ и непрерывно дифференцируемы на S, то имеет место формула Стокса

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS, \qquad (4.15)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к поверхности S, направленной в ту сторону поверхности S, которая остается слева при обходе по контуру C (рис. 4.8).

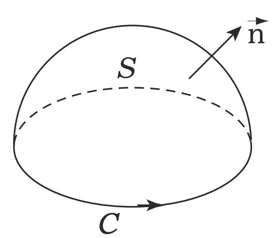


Рис. 4.8. Геометрическая иллюстрация к формуле Стокса

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для простоты доказательства предположим, что поверхность S однозначно проектируется на три координатные плоскости (x,y), (y,z) и (z,x). В общем случае, когда поверхность задана в виде $\vec{r}\,(u,v) = x(u,v)\,\vec{i} + y(u,v)\,\vec{j} + z(u,v)\,\vec{k}$, доказательство проводится точно также с незначительными усложнениями в выкладках.

Прежде всего заметим, что формула (4.15) получается, если почленно сложить три равенства

$$\int\limits_C P\,dx = \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) dS, \tag{4.16}$$

$$\int\limits_C Q\,dy = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right) dS, \tag{4.17}$$

$$\int\limits_C R\,dz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right) dS. \tag{4.18}$$

Докажем справедливость этих равенств. Пусть $z = z(x,y)$ – уравнение допустимой поверхности S, ограниченной контуром C, а область D_{xy} – проекция этой поверхности на координатную плоскость (x,y), ограниченная контуром L, который очевидно получается проектированием кривой C на эту же координатную плоскость. Выберем верхнюю сторону поверхности S, согласовав при этом обход по контуру C с выбранной стороной таким образом, чтобы эта сторона оставалась слева. Преобразуем интеграл по кривой C, стоящий в левой части равенства (4.16), заменив его интегралом по кривой L

$$\int\limits_C P(x,y,z)\,dx = \int\limits_L P(x,y,z(x,y))\,dx.$$

К интегралу справа применим формулу Грина (3.5). Тогда

$$\int\limits_C P(x,y,z)\,dx = -\iint\limits_{D_{xy}} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy. \tag{4.19}$$

Преобразуем теперь интеграл в правой части равенства (4.16). Используя формулу (4.7), получаем

$$\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial z}\,\vec{j} - \frac{\partial P}{\partial y}\,\vec{k}, \qquad \vec{r}\,(x,y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z(x,y)\,\vec{k},$$

$$(\vec{A}, \vec{r}_x, \vec{r}_y) = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial P}{\partial z} & -\dfrac{\partial P}{\partial y} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) dS = -\iint\limits_{D_{xy}} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy. \qquad (4.20)$$

Сравнивая (4.19) и (4.20) приходим к заключению о справедливости равенства (4.16). Аналогично устанавливаются равенства (4.17) и (4.18).

З а м е ч а н и е. Если ввести дифференциальные операторы $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$, $\dfrac{\partial}{\partial z}$, умножение которых на функцию $f(x, y, z)$ означает операцию дифференцирования: $\dfrac{\partial}{\partial x} \cdot f(x, y) = \dfrac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$, то формулу Стокса можно записать в более компактном виде

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS. \qquad (4.21)$$

Действительно, раскладывая определитель в формуле (4.21) по первой строке, мы получим выражение, стоящее под интегралом в правой части формулы (4.15).

Как немедленное применение формулы Стокса приведем здесь условие независимости криволинейного интеграла второго рода в пространстве от пути интегрирования. Дадим предварительно следующее определение.

Определение 4.11 *Область T в пространстве $\mathbb{R}^3$ называется поверхностно связной, если для любого замкнутого контура в области T можно указать кусочно гладкую поверхность, лежащую в T, границей которой служит этот контур.*

Теорема 4.6

Пусть T – поверхностно связная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ и функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – непрерывны в этой области вместе со своими частными производными первого порядка. Для того, чтобы интеграл

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

не зависел от формы кривой AB, лежащей в области T и соединяющей любые две ее точки A и B, необходимо и достаточно, чтобы подинтегральное выражение

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

было полным дифференциалом некоторой функции трех переменных.

Не останавливаясь на доказательстве необходимости этого условия покажем, что его достаточность следует из формулы Стокса. Действительно, если выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ представляет из себя полный дифференциал, то всюду в области T выполняются условия полного дифференциала

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Но тогда интеграл справа в формуле Стокса (4.15) равен нулю и значит криволинейный интеграл слева в формуле Стокса также равен нулю для любого замкнутого контура, находящегося в области T. Откуда следует, что криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ не зависит от пути, соединяющего точки A и B.

П р и м е р. Вычислить интеграл $\int\limits_C (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy + (z^2 - xy)\,dz$, где C – один виток винтовой линии $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = \dfrac{h}{2\pi}\varphi$, $(0 \le \varphi \le 2\pi)$.

Р е ш е н и е. Подинтегральное выражение представляет полный дифференциал. Действительно,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial (x^2 - yz)}{\partial y} = -z = \frac{\partial (y^2 - xz)}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial (x^2 - yz)}{\partial z} = -y = \frac{\partial (z^2 - xy)}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial (y^2 - xz)}{\partial z} = -x = \frac{\partial (z^2 - xy)}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y},$$

и условия полного дифференциала выполняются. Но тогда интеграл не зависит от пути интегрирования и виток винтовой линии, соединяющий точки $A(a,0,0)$ и $B(a,0,h)$, можно заменить на прямолинейный отрезок, соединяющий эти же точки. Получаем

$$\int\limits_C (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy + (z^2 - xy)\,dz = \int\limits_0^h z^2\,dz = \frac{h^3}{3}.$$

Глава 5

Теория поля

В этой главе мы переходим к изучению одного из основных математических аппаратов современной физики – теории поля. С этой целью введем понятия скалярного и векторного полей. При изучении каждого из этих полей сначала определяются их глобальные характеристики (поверхность уровня, векторная линия, векторная трубка, поток поля и т.д), а затем локальные характеристики, характеризующие поле в отдельных точках – так называемые дифференциальные операции теории поля (градиент, дивергенция, ротор) – и подробно обсуждается физический смысл этих операций. В заключении введем понятия специальных полей и рассмотрим вопрос о разложении векторного поля на его специальные составляющие. Все понятия теории поля в настоящей главе даются независимо от систем координат, и только после их определения мы покажем, как ими оперировать в конкретной системе координат.

5.1 Скалярные и векторные поля

Термин *поле* обычно употребляется в физике для обозначения части пространства (или всего пространства), в котором рассматривается некоторое физическое явление. Так, например, температура воздуха в различных точках пространства образует поле температур, а атмосферное давление – поле давлений. Электрический заряд создает вокруг себя электростатическое поле, земля – гравитационное поле и т.д. Мы будем рассматривать два типа полей – скалярное и векторное.

Определение 5.1 *Будем говорить, что в области Ω пространства $\mathbb{R}^3$ задано скалярное поле, если в Ω определена однозначная скалярная функция*

$$u : (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}.$$

Определение 5.2 *Поверхностью уровня скалярного поля $u(M)$ называется множество точек $M \in \Omega$, в которых $u(M)$ принимает конечное фиксированное значение c.*

Уравнение поверхности уровня имеет вид

$$u(M) = c.$$

Укажем основные свойства поверхностей уровня.

1). Поверхности уровня (отвечающие различным значениям c) заполняют всю область Ω.

2). Никакие две поверхности $u(M) = c_1$ и $u(M) = c_2$, $c_1 \neq c_2$, не имеют общих точек.

Действительно, если бы существовала общая точка M_0, такая, что $u(M_0) = c_1$, $u(M_0) = c_2$, то в силу однозначности функции $u(M)$ постоянная c_1 равнялась бы c_2.

3). Через точку $M_0 \in \Omega$ проходит поверхность уровня с уравнением

$$u(M) = u(M_0).$$

Определение 5.3 *Будем говорить, что в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ определено векторное поле, если задана однозначная векторная функция $\vec{A}(M)$*

$$\vec{A} : (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3.$$

Если в этом определении векторы $\vec{A}(M)$ – это силы в некотором физическом процессе, то такое поле принято называть силовым полем. Силовыми полями являются, например, поле тяготения земли или электростатическое поле – поле векторов напряженности, создаваемое точечным зарядом.

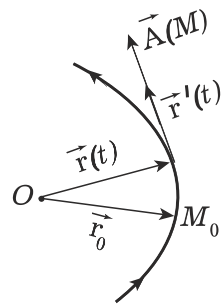
Определение 5.4 *Пусть задано векторное поле*

$$\vec{A} : (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3.$$

Кривая $C \subset \Omega$ называется векторной линией (для силового векторного поля - силовой линией) поля $\vec{A}$, если в каждой точке этой кривой направление касательной к ней совпадает с направлением $\vec{A}$ в этой точке.

В вопросах, связанных с изучением векторных полей, важную роль играет задача о нахождении векторной линии поля $\vec{A}(M)$, проходящей через точку $M_0 \in \Omega$ (рис 5.1). Аналитически эта задача формулируется так: найти векторную функцию $\vec{r}\,(t)$, удовлетворяющую следующим условиям ($\lambda \not\equiv 0$ - скалярная величина):

$$\begin{cases} \vec{r}\,'(t) = \lambda \vec{A} \\ \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0. \end{cases}$$



5.1. Иллюстрация к построению векторной линии

Если векторное поле задано в виде

$$\vec{A}\,(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k},$$

то

$$\vec{r}\,(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}, \qquad \vec{r}(t_0) = x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j} + z_0\,\vec{k} = \vec{r}_0,$$

и задача о нахождении векторной линии сводится к решению системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} \tag{5.1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \qquad y(t_0) = y_0, \qquad z(t_0) = z_0. \tag{5.2}$$

Опираясь на теорему существования решения систем дифференциальных уравнений можно утверждать, что, например, для непрерывно дифференцируемого отличного от нуля векторного поля задача (5.1)-(5.2) имеет единственное решение. Иными словами область, где определено такое векторное поле, сплошь заполняется векторными линиями и через каждую точку области Ω проходит одна и только одна векторная линия (векторные линии не пересекаются).

Определение 5.5 *Пусть задано векторное поле*

$$\vec{A} : (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3.$$

Замкнутое множество, ограниченное гладкой поверхностью $S \subset \Omega$, называется векторной трубкой, если для любой точки M поверхности S выполняется

$$(\vec{n}(M), \vec{A}(M)) = 0,$$

где $\vec{n}(M)$ – вектор нормали к поверхности S (рис. 5.2).

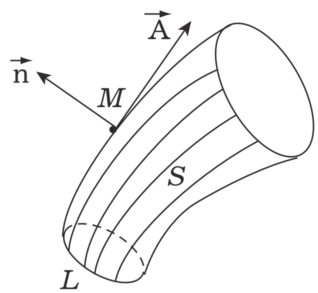


Рис. 5.2. Векторная трубка

Если выделить некоторый контур $L \subset \Omega$, отличный от векторной линии, и провести через все точки контура векторные линии, то получим поверхность, называемую *векторной поверхностью*. Из определения векторной трубки следует, что векторная трубка состоит из векторной поверхности и части пространства, ограниченной этой поверхностью. Откуда в частности можно заключить, что векторная линия C целиком содержится в векторной трубке, если одна точка C содержится в этой трубке. Иными словами векторная линия или целиком лежит в векторной трубке или находится вне ее.

Определение 5.6 *Пусть задано векторное поле*

$$\vec{A} : (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3.$$

Возьмем двустороннюю поверхность $S \subset \Omega$ и выберем определенную ее сторону $(M, \vec{n}\,(M))$.

1. *Поверхностный интеграл*

$$\iint\limits_S (\vec{n}\,(M), \vec{A}\,(M))\, dS$$

называется потоком векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в указанную сторону.

2. *Поверхностный интеграл*

$$\iint\limits_S [\vec{n}\,(M), \vec{A}\,(M)]\,dS$$

называется вращением поля $\vec{A}$ по выбранной стороне поверхности S.

5.2 Производная по объему

Введем важное понятие производной по объему, которое позволит определить дифференциальные операции в скалярных и векторных полях. Предварительно дадим определения аддитивной функции области и ее предела.

Определение 5.7 *Пусть T – произвольная область в пространстве $\mathbb{R}^k$. Скалярная или векторная функция области $F(T)$ называется аддитивной, если для нее выполняются следующие условия:*

1. *Если функция $F(T)$ определена для областей T_1 и T_2, то она определена и для их объединения $T_1 \bigcup T_2 = T_1 + T_2$.*

2. *Если области T_1 и T_2 не имеют общих внутренних точек, то*

$$F(T_1 + T_2) = F(T_1) + F(T_2).$$

Определение 5.8 *Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$ – произвольная область с объемом $V(T) > 0$ и $F(T)$ скалярная или векторная аддитивная функция области T со значениями в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Будем говорить, что предел $F(T)$ при стягивании области T в фиксированную точку $M_0 \in \mathbb{R}^3$ равен числу или вектору A,*

$$\lim_{T \to M_0} F(T) = A,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что для любой области T, принадлежащей δ-окрестности точки M_0, выполняется $\|F(T) - A\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$, или на языке символики

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)\ (\forall\, T \subset O_\delta(M_0)) : \ \|F(T) - A\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon.$$

Отметим, что в определении предела аддитивной функции области точка M_0 может любым способом располагаться по отношению к области T (может находится внутри области, вне этой области или на границе этой области).

Определение 5.9 *Производной по объему от аддитивной функции области $F(T)$, где $T \subset \mathbb{R}^3$, в точке $M_0 \in \mathbb{R}^3$ называется предел*

$$\lim_{T \to M_0} \frac{F(T)}{V(T)}.$$

П р и м е р ы

1) Пусть в некоторой области Ω пространства $\mathbb{R}^3$ непрерывным образом распределена масса некоторого вещества. Тогда каждой подобласти $T \subset \Omega$ с объемом $V(T) > 0$ отвечает масса вещества $m(T)$, содержащегося в T, представляющая собой аддитивную функцию области. Отношение

$$\frac{m(T)}{V(T)}$$

задает среднюю плотность распределения масс в области T, а предел

$$\lim_{T \to M_0} \frac{m(T)}{V(T)} = \rho(M_0)$$

– объемную плотность масс в точке M_0. Таким образом производной по объему от массы вещества является ее объемная плотность.

2) Рассматривая непрерывное распределение зарядов в области Ω, мы можем определить суммарный заряд в области T как аддитивную функцию $q(T)$, $T \subset \Omega$. Тогда производная по объему от этой функции есть не что иное как плотность электрического заряда.

Операция дифференцирования по объему допускает естественное обобщение, которое нам удобно назвать производной по мере.

Определение 5.10 *Пусть T – любая измеримая область в пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 2)$ и $\mu(T) > 0$ – ее мера. Пусть, далее, определена аддитивная функция области $F(T)$. Производной по мере от $F(T)$ в точке $M_0 \in \mathbb{R}^k$ будем называть предел*

$$\lim_{T \to M_0} \frac{F(T)}{\mu(T)}.$$

Если в этом определении положить $k = 3$, то мы придем к понятию производной по объему, а при $k = 2$ – к производной по площади.

5.3 Градиент скалярного поля

Перейдем к изучению локальных характеристик полей – дифференциальных операций первого порядка, позволяющих исследовать поведение поля в отдельно взятых точках. Одной из таких характеристик является *градиент* скалярного поля.

Определение 5.11 *Пусть* $u : (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ *- скалярное поле и* $T \subset \Omega$ *- любая область, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью* S*. Градиентом скалярного поля в точке* M_0 *области* Ω *будем называть производную по объему от аддитивной векторной функции*

$$\vec{F}\,(T) = \iint\limits_S \vec{n}\,(M) u(M)\, dS,$$

где $\vec{n}$ *- внешняя нормаль к поверхности* S*:*

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \lim_{T \to M_0} \frac{1}{V(T)} \iint\limits_S \vec{n}\,(M) u(M)\, dS. \tag{5.3}$$

Из определения градиента прежде всего следует, что градиент это векторная величина. Иными словами поле градиента скалярной функции $u(M)$ – векторное поле.

Теорема 5.1
Если $u(x, y, z) \in C^1(\Omega)$*, то ее градиент в любой точке* $M(x, y, z)$*, лежащей внутри области* Ω*, существует и вычисляется по формуле*

$$\operatorname{grad} u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\vec{k}. \tag{5.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T \subset \Omega$ - область, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью S, и $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ - нормаль к внешней стороне поверхности S. Используя формулу Гаусса-Остроградского (4.11) и затем теорему о среднем для интеграла от векторной функции (2.16), получим

$$\iint\limits_S \vec{n}\,(M) u(M)\, dS =$$

$$= \vec{i} \iint\limits_S u(M) \cos\alpha\, dS + \vec{j} \iint\limits_S u(M) \cos\beta\, dS + \vec{k} \iint\limits_S u(M) \cos\gamma\, dS =$$

$$= \vec{i} \iiint\limits_T \frac{\partial u}{\partial x}\, dT + \vec{j} \iiint\limits_T \frac{\partial u}{\partial y}\, dT + \vec{k} \iiint\limits_T \frac{\partial u}{\partial z}\, dT =$$

$$= \iiint\limits_T \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\, \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\, \vec{k} \right) dT = V(T) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\, \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\, \vec{k} \right)_{M_1 M_2 M_3},$$

где M_1, M_2, M_3 - некоторые точки из области T. Напомним, что в наших обозначениях подстановка точек $M_1 M_2 M_3$ в вектор означает, что первая его координата вычисляется в точке M_1, вторая – в точке M_2, третья – в точке M_3. Очевидно,что $M_i \to M_0$, $i = 1, 2, 3$, когда $T \to M_0$.

По определению градиента и в силу непрерывности первых производных функции $u(x, y, z)$ имеем

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \lim_{T \to M_0} \frac{1}{V(T)} \iint\limits_S \vec{n}\,(M) u(M)\, dS =$$

$$= \lim_{M_i \to M_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\, \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\, \vec{k} \right)_{M_1 M_2 M_3} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\, \vec{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\, \vec{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\, \vec{k}.$$

С л е д с т в и е. В ходе доказательства предыдущей теоремы мы получили равенство

$$\iint\limits_S \vec{n}\,(M) u(M)\, dS = \iiint\limits_T \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\, \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\, \vec{k} \right) dT,$$

которое можно записать в инвариантном виде

$$\iint\limits_S \vec{n} u\, dS = \iiint\limits_T \operatorname{grad} u\, dT, \tag{5.5}$$

поскольку все величины, входящие в него, вводились независимо от системы координат.

Если в формуле (5.5) положить $u(M) \equiv 1$, то приходим к равенству

$$\iint\limits_S \vec{n}\,(M)\, ds = 0.$$

Получили интересный результат: сумма всех векторов нормали замкнутой кусочно-гладкой поверхности S, ограничивающей область T, равна нулю. Это свойство нормали становится особенно наглядным, если в качестве поверхности S взять, например, куб.

З а м е ч а н и е. Мы определили градиент скалярного поля независимо от системы координат, а затем доказали формулу (5.5). Можно было бы ввести понятие градиента по формуле (5.5), как это обычно делается для скалярной функции многих переменных, но тогда пришлось бы доказывать его независимость от системы координат.

5.4 Свойства градиента скалярного поля

1. С в я з ь с п р о и з в о д н о й по н а п р а в л е н и ю. Пусть $u : (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемое скалярное поле, $u(x, y, z) \in C^1(\Omega)$, и $\vec{l}$, $\|\vec{l}\| = 1$, - любое направление в $\mathbb{R}^3$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u, \vec{l}\,). \tag{5.6}$$

Формула (5.6) была установлена нами ранее (теорема 2.10) для скалярной функции любого числа переменных, а значит и для 3-х переменных тоже.

2. Ф и з и ч е с к и й с м ы с л. Вектор $\operatorname{grad} u$, вычисленный в точке M пространства $\mathbb{R}^3$, указывает направление наибыстрейшего возрастания поля u в этой точке, а длина этого вектора равна скорости возрастания поля в этом направлении.

В самом деле,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\operatorname{grad} u| \cos(\operatorname{grad} \widehat{u, \vec{l}}\,)$$

принимает наибольшее значение, если $\operatorname{grad} u \uparrow\uparrow \vec{l}$.

3. С в я з ь с п о в е р х н о с т ь ю у р о в н я. Для непрерывно дифференцируемого скалярного поля $u : (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ в каждой точке M_0 области Ω вектор $\operatorname{grad} u(M_0)$ перпендикулярен к поверхности уровня $u(M) = u(M_0)$, проходящей через эту точку.

В самом деле, уравнение касательной плоскости к поверхности уровня $u(M) = u(M_0)$ в точке M_0 имеет вид

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

Откуда заключаем, что вектор

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\,\vec{k}$$

перпендикулярен к этой плоскости в точке M_0 и, следовательно, к поверхности $u(M) = u(M_0)$.

4. Д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы е с в о й с т в а. Если u и v дифференцируемые скалярные поля, а $f(u,v)$ – дифференцируемая функция своих аргументов, то

$$\operatorname{grad} f(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v. \tag{5.7}$$

В частности, положив в (5.7) функцию $f(u,v)$ равной $u+v$, $u\,v$ или $\dfrac{u}{v}$, получаем

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v,\\
&\operatorname{grad} u\,v = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v,\\
&\operatorname{grad} \frac{u}{v} = \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}.
\end{aligned}$$

т.е. градиент обладает теми же дифференциальными свойствами, что и дифференциал функции.

Данное свойство удобно доказывать в декартовой системе координат, опираясь на правила вычисления частных производных:

$$\begin{gathered}
\operatorname{grad} f(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\vec{i} + \\
+ \left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{k} = \\
= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}\right) = \\
= \frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad} v.
\end{gathered}$$

П р и м е р ы

1) Найти $\operatorname{grad} r$, где $r = |\vec{r}|$, $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ – радиус вектор точки $M(x,y,z)$.

Р е ш е н и е. По формуле вычисления градиента получаем

$$\begin{gathered}
\operatorname{grad} r = \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial z}\vec{k} = \\
= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k}.
\end{gathered}$$

Таким образом
$$\operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r}.$$

2) Рассмотрим поле потенциала точечного положительнго заряда q
$$u = \frac{q}{r}.$$

Поверхностями уровня этого поля являются концентрические сферы с центром в точке, где помещен заряд q (рис. 5.3).

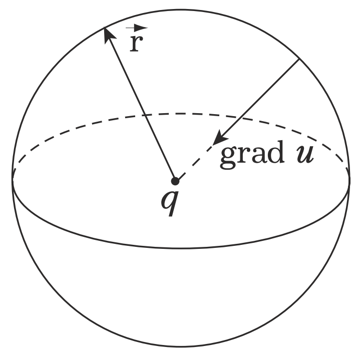


Рис. 5.3. Поверхность уровня и градиент поля потенциала точечного заряда

Градиент поля равен
$$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} \frac{q}{r} = \left(\frac{q}{r}\right)' \operatorname{grad} r = -\frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

и направлен к центру сферы, в сторону наискорейшего возрастания поля.

5.5 Дивергенция векторного поля

Обсудим еще одну, имеющую многочисленные применения, дифференциальную операцию первого порядка. Ее называют *дивергенцией*. В противоположность операции градиента, превращающего скалярное поле в векторное, дивергенция действует на векторные поля, а результатом действия этой операции оказывается скалярное поле.

Определение 5.12 *Пусть* $\vec{A} : (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ *- векторное поле и* $T \subset \Omega$ *- любая область, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью* S.

Дивергенцией векторного поля $\vec{A}$ в точке M_0 области Ω будем называть производную по объему от потока векторного поля $\vec{A}(M)$

$$\iint\limits_S (\vec{n}\,(M), \vec{A}\,(M))\,dS,$$

где $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности S:

$$\mathrm{div}\vec{A}\,(M_0) = \lim_{T\to M_0} \frac{1}{V(T)} \iint\limits_S (\vec{n}\,(M), \vec{A}\,(M))\,dS. \tag{5.8}$$

Теорема 5.2
Если

$$\vec{A}\,(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$$

- непрерывно дифференцируемое поле в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, то дивергенция поля $\vec{A}$ в любой точке $M(x,y,z) \in \Omega$ существует и вычисляется по формуле

$$\mathrm{div}\,\vec{A}\,(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{5.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем точку $M_0 \in \Omega$ и пусть S - поверхность, а T - область в определении дивергенции. Применяя формулу Гаусса-Остроградского а затем теорему о среднем для тройного интеграла, получаем

$$\iint\limits_S (\vec{n}\,(M), \vec{A}\,(M))dS = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \iiint\limits_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dT = V(T)\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)_{M=M^*},$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S, а M^* некоторая точка области T, причем $M^* \to M_0$ при $T \to M_0$. Используя определение дивергенции, имеем

$$\mathrm{div}\vec{A}\,(M_0) = \lim_{T\to M_0} \frac{1}{V(T)} \iint\limits_S (\vec{n}\,(M), \vec{A}\,(M))\,dS =$$

$$= \lim_{M^*\to M_0} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)_{M=M^*} = \frac{\partial P(M_0)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M_0)}{\partial y} + \frac{\partial R(M_0)}{\partial z}.$$

С л е д с т в и е. Применяя понятие дивергенции, формулу Гаусса-Остроградского можно записать в инвариантном (не зависящим от выбора системы координат) виде

$$\iint\limits_S (\vec{n}, \vec{A})\, dS = \iiint\limits_T \operatorname{div} \vec{A}\, dT. \tag{5.10}$$

Ф и з и ч е с к и й с м ы с л д и в е р г е н ц и и. Если $\vec{A}(M)$, $M \in \Omega$, - поле скоростей частиц несжимаемой жидкости, движущейся стационарно, то

$$\iint\limits_S (\vec{n}, \vec{A})\, dS$$

определяет количество жидкости, протекающей через поверхность S за единицу времени. Отношение

$$\frac{1}{V(T)} \iint\limits_S (\vec{n}, \vec{A})\, dS$$

потока жидкости через замкнутую поверхность S к объему $V(T)$ области T, ограниченной этой поверхностью, представляет собой среднюю плотность источников (стоков), т.е. количество жидкости, возникающей (или исчезающей) за единицу времени в единице объема области T. Дивергенция поля скоростей жидкости

$$\lim_{T \to M_0} \frac{1}{V(T)} \iint\limits_S (\vec{n}, \vec{A})\, dS$$

представляет плотность источников (стоков) в точке M_0. Иными словами дивергенция указывает на наличие источников (стоков) в векторном поле.

Будем говорить, что в точке M_0 области находится источник, если $\operatorname{div} \vec{A}(M_0) > 0$, или сток, если $\operatorname{div} \vec{A}(M_0) < 0$. Тогда формула Гаусса-Остроградского также допускает физическую интерпретацию:

Поток векторного поля через замкнутую поверхность S из области T равен "сумме источников", расположенных в области T.

5.6 Ротор векторного поля

Кроме введенных выше понятий градиента и дивергенции, в приложениях часто встречается еще одна дифференциальная операция первого порядка, называемая *ротором*, и отображающая векторные поля в векторные поля.

Определение 5.13 *Пусть* $\vec{A} : (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ *- векторное поле и* $T \subset \Omega$ *- любая область, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью* S. *Ротором векторного поля* $\vec{A}$ *в точке* M_0 *области* Ω *будем называть производную по объему от вращения векторного поля* $\vec{A}(M)$

$$\iint\limits_S [\vec{n}(M), \vec{A}(M)]\, dS,$$

где $\vec{n}$ *- внешняя нормаль к поверхности* S*:*

$$\mathrm{rot}\vec{A}(M_0) = \lim_{T \to M_0} \frac{1}{V(T)} \iint\limits_S [\vec{n}(M), \vec{A}(M)]\, dS. \tag{5.11}$$

Из этого определения следует, что ротор векторного поля $\mathrm{rot}\,\vec{A}(M_0)$ – векторная величина, определяющая плотность вращения векторного поля в точке M_0.

Теорема 5.3
Если

$$\vec{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$$

– непрерывно дифференцируемое поле в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, *то ротор в любой точке* $M(x,y,z)$ *области* Ω *существует и вычисляется по формуле*

$$\mathrm{rot}\,\vec{A}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{5.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем точку $M_0 \in \Omega$ и пусть S - поверхность, а T - область в определении ротора. Воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского, а затем теоремой о среднем для тройного интеграла от векторной функции

$$\iint\limits_S [\vec{n}, \vec{A}] ds = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \vec{i} \iint\limits_S (R\cos\beta - Q\cos\gamma)\, dS +$$

$$+ \vec{j} \iint\limits_S (P\cos\gamma - R\cos\alpha)\, dS + \vec{k} \iint\limits_S (Q\cos\alpha - P\cos\beta)\, dS =$$

$$= \iiint\limits_T \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \right\} dT =$$

$$= \iiint\limits_T \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dT = V(T) \left. \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \right|_{M_1 M_2 M_3},$$

где M_1, M_2, M_3 - точки, принадлежащие области T, для которых очевидно выполняется $M_1 \to M_0$, $M_2 \to M_0$, $M_3 \to M_0$ при $T \to M_0$. Откуда, используя определение ротора, получаем

$$\operatorname{rot} \vec{A}\,(M_0) = \lim_{T \to M_0} \frac{1}{V(T)} \iint\limits_S [\vec{n}\,(M), \vec{A}\,(M)] dS = \left. \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \right|_{M = M_0}.$$

С л е д с т в и е. Используя формулу (5.12), равенство

$$\iint\limits_S [\vec{n}, \vec{A}\,]\, dS = \iiint\limits_T \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dT,$$

полученное в ходе доказательства предыдущей теоремы, можно записать в инвариантном (не зависящим от системы координат) виде, так как все величины, входящие в это равенство, вводились независимо от системы координат

$$\iint\limits_S [\vec{n}, \vec{A}\,]\, dS = \iiint\limits_T \operatorname{rot} \vec{A}\, dT. \tag{5.13}$$

Последняя формула означает, что вращение векторного поля по внешней границе S области T равна сумме плотностей вращения векторного поля в области T.

Ф и з и ч е с к и й с м ы с л р о т о р а. Будем снова рассматривать векторное поле $\vec{A}\,(M)$ как поле скоростей движущейся несжимаемой жидкости. Внесем в жидкость маленькое колесико K с центром в точке M_0 и лопастями, расположенными по ободу, имеющее возможность вращаться вокруг своей оси, определяемой единичным вектором $\vec{l}$ (рис. 5.4). Под действием движущейся жидкости это колесико начнет

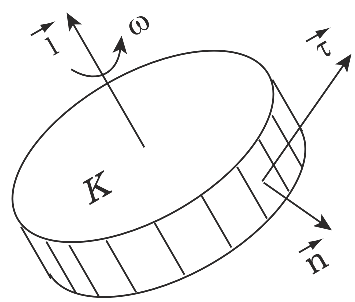


Рис. 5.4. К определению скорости вращения колесика в жидкости

вращаться. Подсчитаем угловую скорость вращения. Величину угловой скорости будем считать положительной, если колесико вращается против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\vec{l}$.

Естественно считать, что линейная скорость v_k каждой точки обода колесика будет равна среднему арифметическому величин $(\vec{A}(M), \vec{\tau}(M))$ по всем лопастям обода, где $\vec{\tau}(M)$ единичный вектор касательной к ободу, направленный в сторону вращения, т.е.

$$v_k = \frac{1}{2\pi RH} \iint\limits_{S_o} (\vec{A}(M), \vec{\tau}(M))\, dS,$$

где S_o - поверхность обода, R и H - радиус и толщина колесика. При этом величина угловой скорости равна

$$\omega_k = \frac{v_k}{R} = \frac{1}{2V} \iint\limits_{S_o} (\vec{A}, \vec{\tau}\,)\, dS,$$

где $V = \pi R^2 H$ - объем колесика.

Пусть $\vec{n}$ - единичный вектор нормали точки обода колесика. Тогда векторы $\vec{l}$, $\vec{n}$, $\vec{\tau}$ образуют правую тройку, и

$$\vec{\tau} = [\vec{l}, \vec{n}\,].$$

Отсюда, используя свойство смешанного произведения, находим

$$(\vec{A}, \vec{\tau}\,) = (\vec{A}, [\vec{l}, \vec{n}\,]) = (\vec{l}, [\vec{n}, \vec{A}\,])$$

и

$$\omega_k = \frac{1}{2V} \iint\limits_{S_o} (\vec{l}, [\vec{n}, \vec{A}\,])\, dS = \frac{1}{2}(\vec{l}, \frac{1}{V} \iint\limits_{S_o} [\vec{n}, \vec{A}\,]\, dS).$$

Поверхностный интеграл в последнем выражении можно распространить на полную поверхность S колесика, так как на верхнем и нижнем основании колесика $\vec{n} \parallel \vec{l}$ и $(\vec{l}, [\vec{n}, \vec{A}\,]) = 0$.

Итак
$$\omega_k = \frac{1}{2}(\vec{l}, \frac{1}{V}\iint\limits_S [\vec{n}, \vec{A}\,]\, dS).$$

Переходя в последнем выражении к пределу при $K \to M_0$, имеем
$$\omega(\vec{l}\,) = \frac{1}{2}(\vec{l}, \operatorname{rot}\vec{A}\,).$$

Величина $\omega(\vec{l}\,)$ принимает наибольшее значение равное $\dfrac{1}{2}|\operatorname{rot}\vec{A}|$, когда $\vec{l} \uparrow\uparrow \operatorname{rot}\vec{A}$.

Таким образом, ротор поля $\vec{A}\,(M)$ есть вектор, имеющий в данной точке M направление вектора наибольшей угловой скорости вращения бесконечно малого колесика с центром в точке M, вращаемого полем, и по модулю равный удвоенной угловой скорости вращения этого колесика.

5.7 Оператор Гамильтона

Векторный дифференциальный оператор
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}$$
называют оператором Гамильтона или вектором “набла”.

С помощью оператора ∇ удобно записывать дифференциальные операции первого порядка. Действительно, пусть $u(x, y, z)$ – скалярное, а $\vec{A}\,(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}$ – векторное поле. Тогда умножив вектор набла справа на скалярное поле $u(x, y, z)$ или, как еще говорят, *подействовав* оператором набла на поле u, получим его градиент
$$\operatorname{grad} u = \nabla\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\vec{k}. \tag{5.14}$$

Аналогично, дивергенция векторного поля равна скалярному произведению вектора набла и заданного векторного поля $\vec{A}$
$$\operatorname{div}\vec{A} = (\nabla, \vec{A}\,) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \tag{5.15}$$

а ротор равен векторному произведению набла с данным вектором

$$\operatorname{rot}\vec{A} = [\nabla, \vec{A}\,] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{5.16}$$

Определения градиента, дивергенции и ротора, связав их с оператором ∇, можно записать так

$$\nabla u = \lim_{T\to M} \frac{1}{V(T)} \iint\limits_S \vec{n} u\, dS,$$

$$(\nabla, \vec{A}\,) = \lim_{T\to M} \frac{1}{V(T)} \iint\limits_S (\vec{n}, \vec{A}\,)\, dS,$$

$$[\nabla, \vec{A}\,] = \lim_{T\to M} \frac{1}{V(T)} \iint\limits_S [\vec{n}, \vec{A}\,]\, dS.$$

Заметим, что в каждом из этих равенств вектор нормали под знаком интеграла дублирует то действие, которое оказывает вектор ∇ на скалярное поле $u(M)$ или на векторное поле $\vec{A}\,(M)$.

Наконец, формулы (5.5), (5.10), (5.13), полученные как следствие к теоремам о вычислении градиента, дивергенции и ротора, приобретают легко запоминающийся вид

$$\iint\limits_S \vec{n} u\, dS = \iiint\limits_T \nabla u\, dT,$$

$$\iint\limits_S (\vec{n}, \vec{A}\,)\, dS = \iiint\limits_T (\nabla, \vec{A}\,)\, dT,$$

$$\iint\limits_S [\vec{n}, \vec{A}\,]\, dS = \iiint\limits_T [\nabla, \vec{A}\,]\, dT,$$

где переход от поверхностного интеграла к тройному интегралу сопровождается заменой вектора нормали на вектор набла. Отметим еще, что три последние формулы в совокупности составляют содержание так называемой *общей теоремы Гаусса-Остроградского.*

5.8 Действия с вектором "набла"

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что на вектор ∇ можно перенести действия, справедливые для обычных векторов. Именно это обстоятельство и дает возможность получать с помощью вектора ∇ ряд формул векторного анализа, применяя аппарат векторной алгебры.

Следует, однако, иметь в виду, что аналогия между обычными векторами и вектором ∇ - неполная. А именно, формулы, содержащие дифференциальный оператор ∇, аналогичны обычным формулам в том случае, если они не содержат произведений переменных величин, т.е. до тех пор, пока не приходится применять входящие в ∇ операции дифференцирования к произведению переменных величин (в том числе к скалярному и векторному произведению). В этом случае необходимо учитывать правило дифференцирования для произведения. Условимся каждый раз отмечать в формулах знаком "$\overset{\downarrow}{x}$" тот сомножитель x, к которому применяется вектор ∇.

В качестве примера вычислим $\operatorname{div}[\vec{A},\vec{B}\,]$. Учитывая, что дифференциальный оператор действует на произведение (в данном случае – векторное) запишем

$$\operatorname{div}[\vec{A},\vec{B}\,] = (\nabla,[\vec{A},\vec{B}\,]) = (\nabla,[\overset{\downarrow}{\vec{A}},\vec{B}\,]) + (\nabla,[\vec{A},\overset{\downarrow}{\vec{B}}\,]).$$

Для вычисления $(\nabla,[\overset{\downarrow}{\vec{A}},\vec{B}\,])$ используем известное свойство смешанного произведения: при циклической перестановке векторов смешанное произведение не меняется. Производя циклическую перестановку мы должны не забывать, что вектор ∇ действует на функцию $\vec{A}$, и значит вектор $\vec{A}$ всегда должен находится после вектора набла. Имеем

$$(\nabla,[\overset{\downarrow}{\vec{A}},\vec{B}\,]) = (\vec{B},[\nabla,\vec{A}\,]) = (\vec{B},\operatorname{rot}\vec{A}\,).$$

Переставив местами в $(\nabla,[\vec{A},\overset{\downarrow}{\vec{B}}\,])$ два соседних вектора (при этом смешанное произведение меняет знак) получим

$$(\nabla,[\vec{A},\overset{\downarrow}{\vec{B}}\,]) = -(\vec{A},[\nabla,\vec{B}\,]) = -(\vec{A},\operatorname{rot}\vec{B}\,).$$

Окончательно можем записать

$$\operatorname{div}[\vec{A},\vec{B}\,] = (\vec{B},\operatorname{rot}\vec{A}\,) - (\vec{A},\operatorname{rot}\vec{B}\,).$$

Выше были введены следующие действия с вектором ∇:

$$\nabla u = \operatorname{grad} u, \quad (\nabla, \vec{A}\,) = \operatorname{div} \vec{A}, \quad [\nabla, \vec{A}\,] = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Естественно поставить вопрос о введении действий

$$u\nabla, \quad (\vec{A}, \nabla), \quad [\vec{A}, \nabla],$$

которые также приводят к понятию дифференциальных операторов, порожденных вектором “набла”.

Первый из них $u\nabla$ не заслуживает роль самостоятельного оператора в силу очевидных равенств

$$(u\nabla)\, v = u(\nabla\, v), \quad (u\nabla, \vec{A}\,) = u(\nabla, \vec{A}\,), \quad [u\nabla, \vec{A}\,] = u[\nabla, \vec{A}\,].$$

Обсудим остальные операторы

О п е р а т о р $(\vec{A}, \nabla)$. Если $\vec{A} = A_x\, \vec{i} + A_y\, \vec{j} + A_z\, \vec{k}$, то:

$$(\vec{A}, \nabla) = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

В качестве примера применения оператора $(\vec{A}, \nabla)$ вычислим градиент скалярного произведения векторов. Имеем

$$\operatorname{grad} (\vec{A}, \vec{B}\,) = \nabla(\vec{A}, \vec{B}\,) = \nabla(\overset{\downarrow}{\vec{A}}, \vec{B}\,) + \nabla(\vec{A}, \overset{\downarrow}{\vec{B}}\,).$$

Преобразуем вначале слагаемое $\nabla(\vec{A}, \overset{\downarrow}{\vec{B}}\,)$. С этой целью рассмотрим двойное векторное произведение $[\vec{A}, [\nabla, \vec{B}\,]]$. Расписываем его по известной формуле $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}\,]] = \vec{b}\,(\vec{a}, \vec{c}\,) - \vec{c}\,(\vec{a}, \vec{b}\,)$, не забывая при этом, что вектор ∇ действует на функцию $\vec{B}$. Поэтому приведенную формулу мы вынуждены применить в несколько измененном виде:

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}\,]] = \vec{b}\,(\vec{a}, \vec{c}\,) - (\vec{a}, \vec{b}\,)\vec{c}.$$

Имеем

$$[\vec{A}, [\nabla, \vec{B}\,]] = \nabla(\vec{A}, \overset{\downarrow}{\vec{B}}\,) - (\vec{A}, \nabla)\vec{B}.$$

Откуда следует

$$\nabla(\vec{A}, \overset{\downarrow}{\vec{B}}\,) = [\vec{A}, [\nabla, \vec{B}\,]] + (\vec{A}, \nabla)\vec{B} = [\vec{A}, \operatorname{rot} \vec{B}\,] + A_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}.$$

Аналогично

$$\nabla(\overset{\downarrow}{\vec{A}}, \vec{B}\,) = \nabla(\vec{B}, \overset{\downarrow}{\vec{A}}\,) = [\vec{B}, \operatorname{rot}\vec{A}\,] + B_x\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} + B_y\frac{\partial\vec{A}}{\partial y} + B_z\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}.$$

Окончательно получаем

$$\operatorname{grad}(\vec{A}, \vec{B}\,) = A_x\frac{\partial\vec{B}}{\partial x} + A_y\frac{\partial\vec{B}}{\partial y} + A_z\frac{\partial\vec{B}}{\partial z} +$$

$$+B_x\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} + B_y\frac{\partial\vec{A}}{\partial y} + B_z\frac{\partial\vec{A}}{\partial z} + [\vec{A}, \operatorname{rot}\vec{B}\,] + [\vec{B}, \operatorname{rot}\vec{A}\,].$$

Оператор Лапласа Δ. Если в операторе $(\vec{A}, \nabla)$ вектор $\vec{A}$ заменить на ∇, то получим дифференциальный оператор, называемый оператором Лапласа:

$$(\nabla, \nabla) = \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Оператор $[\vec{A}, \nabla]$.

$$[\vec{A}, \nabla] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(A_y\frac{\partial}{\partial z} - A_z\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{i} + \left(A_z\frac{\partial}{\partial x} - A_x\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(A_x\frac{\partial}{\partial y} - A_y\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{k}.$$

С помощью этого оператора можно вычислить, например, векторное произведение векторов $\vec{A}$ и $\operatorname{grad} u$:

$$[\vec{A}, \operatorname{grad} u] = [\vec{A}, \nabla u] = [\vec{A}, \nabla]u =$$

$$= \left(A_y\frac{\partial u}{\partial z} - A_z\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{i} + \left(A_z\frac{\partial u}{\partial x} - A_x\frac{\partial u}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(A_x\frac{\partial u}{\partial y} - A_y\frac{\partial u}{\partial x}\right)\vec{k}.$$

В этом примере в выражении $[\vec{A}, \nabla\, u]$ скалярная величина u выносится за знак векторного произведения и ставится после $[\vec{A}, \nabla]$, так как дифференциальный оператор ∇ должен действовать на функцию u (записанную после ∇), в то время как для обычных векторов скалярный множитель можно записывать как до так и после векторного произведения.

Н у л е в о й о п е р а т о р $[\nabla, \nabla] = \vec{0}$. Он получается, если в предыдущем операторе положить $\vec{A} = \nabla$. Приведем пример применения нулевого оператора:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = [\nabla, \nabla u] = [\nabla, \nabla]u = \vec{0}u = \vec{0}.$$

З а м е ч а н и е. Хотя на вектор набла переносятся практически все действия векторной алгебры, тем не менее для вектора набла невозможно ввести понятие коллинеарных векторов. Поясним это на примере. В векторной алгебре для коллинеарных векторов $\alpha\vec{a}$ и $\beta\vec{a}$ векторное произведение равно нулю, $[\alpha\vec{a}, \beta\vec{a}] = \vec{0}$, в то время как аналогичная ситуация для вектора набла может привести к отличному от нуля результату. Например, $[\nabla x, \nabla y] = [\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k} \neq \vec{0}$.

5.9 Потенциальное поле

Введем понятие потенциального поля – одного из специальных полей, широко применяемых в физических приложениях теории поля.

Определение 5.14 *Векторное поле* $\vec{A} : (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ *называется потенциальным, если его можно представить в виде*

$$\vec{A} = \operatorname{grad} u(M).$$

Функция $u(M)$, $M \in \Omega$, *называется потенциалом векторного поля.*

Характерная особенность потенциального поля состоит в том, что его векторные линии представляют собой линии градиента его потенциала, т.е. линии наибольшего изменения этого потенциала.

Сам потенциал для потенциального поля определяется неоднозначно, как это утверждает следующая теорема.

Теорема 5.4
Если векторное поле $\vec{A} : (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ *имеет потенциал, то этот потенциал определяется с точностью до постоянного слагаемого.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\vec{A} = \operatorname{grad} u$ и $\vec{A} = \operatorname{grad} v$, то $\operatorname{grad}(u-v) = 0$ и производная $\dfrac{\partial(u-v)}{\partial l} = (\operatorname{grad}(u-v), \vec{l}\,) = 0$ по любому направлению всюду в области Ω. Следовательно, $u - v \equiv c$.

Установим теперь критерий потенциальности поля.

Теорема 5.5
Для того, чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле

$$\vec{A} : (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$$

было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы ротор этого поля равнялся нулю всюду в области Ω:

$$\operatorname{rot} \vec{A} \equiv \vec{0}. \tag{5.17}$$

Пользуясь инвариантностью определения ротора, достаточно доказать эту теорему в конкретной системе координат, в качестве которой мы возьмем прямоугольные декартовы координаты. Тогда векторное поле $\vec{A}(M)$ представимо в виде

$$\vec{A}\,(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}, \qquad (x, y, z) \in \Omega.$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть поле $\vec{A}(M)$ – потенциальное, т.е. представимо в виде $\vec{A} = \operatorname{grad} u$. Но тогда

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = [\nabla, \nabla u] = [\nabla, \nabla] u = \vec{0}.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{0}$ во всех точках области Ω, т.е. всюду в области Ω выполняется равенство

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}.$$

Тогда имеют место три тождества

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial y},$$

которые являются условиями полного дифференциала для выражения $Pdx + Qdy + Rdz$. Следовательно,

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = du, \quad \text{где} \quad P = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q = \frac{\partial u}{\partial y},\ R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Откуда следует представление поля $\vec{A}$ через градиент скалярной функции

$$\vec{A} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k} = \frac{\partial u}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\vec{k} = \operatorname{grad} u,$$

и поле $\vec{A}$ потенциальное.

5.10 Циркуляция векторного поля

С потенциальным полем тесно связывают понятие циркуляции векторного поля.

Определение 5.15 *Пусть* $\vec{A} : (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ *– векторное поле, C – кусочно-гладкая кривая, лежащая в области Ω, с параметризацией $\vec{r}\,(t)$. Криволинейный интеграл*

$$\int\limits_C \vec{A} \cdot d\vec{r} \tag{5.18}$$

называется циркуляцией векторного поля вдоль кривой C.

Если $\vec{A}$ – силовое поле, то его циркуляция вдоль кривой C представляет собой работу этого поля вдоль пути C.

Используя формулу Стокса (4.21), циркуляцию по замкнутому контуру, ограничивающему кусочно гладкую поверхность S, можно свести к поверхностному интегралу. Действительно, если $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – вектор нормали к поверхности S, то

$$\oint\limits_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint\limits_S (\vec{n}, [\nabla, \vec{A}\,])\,dS = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\vec{A}, \vec{n}\,)\,dS.$$

Получили формулу Стокса в инвариантном виде

$$\oint\limits_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\vec{A}, \vec{n}\,)\,dS, \tag{5.19}$$

которая гласит, что циркуляция по замкнутому контуру, ограничивающему поверхность S, равна потоку ротора этого поля через поверхность S. При этом не стоит забывать, что обход по контуру C совершается так, что выбранная сторона поверхности остается слева.

Для потенциального поля $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{0}$. Тогда из формулы (5.19) следует, что циркуляция потенциального поля по любому кусочно гладкому замкнутому контуру, лежащему в области определения поля, равна нулю:

$$\oint\limits_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Это свойство циркуляции часто принимают за определение потенциального поля. Нетрудно доказать, что подобное определение будет эквивалентно введенному нами ранее определению 5.14. Из этого свойства в частности следует, что интеграл от потенциального поля $\vec{A}$

$$\int_{M_0}^{M} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

вдоль кривой C, соединяющий точки M_0 и M, не зависит от пути интегрирования. Последний факт позволяет вычислить потенциал такого поля. Действительно, используя представления поля в декартовых прямоугольных координатах имеем

$$\int_{M_0}^{M} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{M_0}^{M} (\operatorname{grad} u, d\vec{r}) =$$

$$= \int_{M_0}^{M} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy + \frac{\partial u}{\partial z}\, dz \right) = \int_{M_0}^{M} du = u(M) - u(M_0).$$

Откуда следует, что скалярный потенциал $u(M)$ потенциального поля ищется по формуле

$$u(M) = \int_{M_0}^{M} \vec{A} \cdot d\vec{r} + c, \tag{5.20}$$

(c – произвольная постоянная). Отсюда же следует, что работа силового потенциального поля вдоль пути C, соединяющего точки M и M_0, не зависит от пути и равна разности потенциалов в этих точках

$$\int_{C} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{M_0}^{M} \vec{A} \cdot d\vec{r} = u(M) - u(M_0).$$

5.11 Соленоидальное поле

Представим теперь другой тип специальных полей – соленоидальное поле.

Определение 5.16 *Векторное поле* $\vec{A} : (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ *называется соленоидальным, если его можно представить в виде*

$$\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{B}\,(M).$$

Функцию $\vec{B}\,(M)$, $M \in \Omega$, называют векторным потенциалом поля $\vec{A}$.

Каждому соленоидальному полю отвечает множество векторных потенциалов. “Степень свободы” задания векторного потенциала определяет следующая теорема.

Теорема 5.6
Если векторное поле $\vec{A} : (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ имеет векторный потенциал, то этот потенциал определяется с точностью до $\operatorname{grad}\varphi$, где φ – произвольное непрерывно дифференцируемое скалярное поле.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть поле $\vec{A}$ имеет два векторных потенциала $\vec{B}$ и $\vec{C}$. Тогда оно представимо в виде $\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{B}$ и $\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{C}$. Вычитая из первого равенства второе получаем, что $\operatorname{rot}(\vec{B} - \vec{C}) = \vec{0}$ во всех точках области Ω и, следовательно, согласно критерия потенциальности поле $\vec{B} - \vec{C}$ – потенциальное. В силу определения потенциального поля $\vec{B} - \vec{C} = \operatorname{grad}\varphi$.

Следующая теорема позволяет сформулировать критерий соленоидальности векторного поля.

Теорема 5.7
Для того, чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле

$$\vec{A} : (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$$

было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы дивергенция этого поля равнялась нулю всюду в области Ω:

$$\operatorname{div}\vec{A} \equiv 0. \tag{5.21}$$

Как и в случае потенциального поля доказательство проведем в декартовых прямоугольных координатах.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть поле $\vec{A}$ – соленоидальное, т.е. представимо в виде $\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{B}$. Но тогда

$$\operatorname{div}\vec{A} = \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{B}\,) = (\nabla, [\nabla, \vec{B}\,]) = ([\nabla, \nabla], \vec{B}\,) = (\vec{0}, \vec{B}\,) = 0.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть задано векторное поле

$$\vec{A} = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}, \qquad (x,y,z) \in \Omega,$$

и $\operatorname{div}\vec{A} = 0$. Надо показать, что это векторное поле можно представить в виде $\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{B}$, где $\vec{B} = B_1(x,y,z)\,\vec{i} + B_2(x,y,z)\,\vec{j} + B_3(x,y,z)\,\vec{k}$, и функции

$B_i(x,y,z)$, $i=1,2,3$, подлежат определению. Расписывая выражение для ротора $\vec{B}$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \left(\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}\right)\vec{k},$$

приходим к выводу, что функции $B_i(x,y,z)$ должны удовлетворять следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{cases} P = \dfrac{\partial B_3}{\partial y} - \dfrac{\partial B_2}{\partial z} \\ Q = \dfrac{\partial B_1}{\partial z} - \dfrac{\partial B_3}{\partial x} \\ R = \dfrac{\partial B_2}{\partial x} - \dfrac{\partial B_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Чтобы показать, что поле $\vec{A}$ имеет векторный потенциал, достаточно найти любое частное решение (B_1, B_2, B_3) этой системы. Для простоты положим $B_3(x,y,z) \equiv 0$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} P = -\dfrac{\partial B_2}{\partial z} \\ Q = \dfrac{\partial B_1}{\partial z} \\ R = \dfrac{\partial B_2}{\partial x} - \dfrac{\partial B_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Интегрируя первые два уравнения, получаем

$$B_1 = \int\limits_{z_0}^{z} Q(x,y,z)\,dz, \qquad B_2 = -\int\limits_{z_0}^{z} P(x,y,z)\,dz + \varphi(x,y),$$

где z_0 – некоторая фиксированная точка, а функция $\varphi(x,y)$ определяется из условия, что найденные при интегрировании функции удовлетворяют двум последним уравнениям системы. Подставляем найденные функции $B_1(x,y,z)$ и $B_2(x,y,z)$ в третье уравнение

$$R(x,y,z) = -\int\limits_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\,dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Используем четвертое уравнение

$$R(x,y,z) = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Откуда, после вычисления интеграла

$$R(x,y,z) = R(x,y,z) - R(x,y,z_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

получим условие для нахождения функции φ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = R(x,y,z_0).$$

Займемся изучением общих свойств соленоидального поля.

Теорема 5.8
Поток соленоидального поля через любую замкнутую кусочно-гладкую поверхность S равен нулю.

Доказательство. Поскольку для соленоидального поля $\mathrm{div}\vec{A} \equiv 0$, то утверждение теоремы немедленно следует из формулы Гаусса-Остроградского

$$\iint\limits_{S} (\vec{A},\vec{n}\,)\,dS = \iiint\limits_{T} \mathrm{div}\,\vec{A}\,dT = 0.$$

Следствие 1. Если S_1 и S_2 две кусочно-гладкие замкнутые не пересекающиеся поверхности (рис. 5.5), причем в области между этими поверхностями поле не содержит источников и стоков, то потоки векторного поля через эти поверхности в одну и ту же сторону равны. Действительно, в этом случае в области между этими поверхностями $\mathrm{div}\,\vec{A} \equiv 0$ и поле $\vec{A}$ будет потенциальным. Применяя предыдущую теорему, получаем

$$\iint\limits_{S_2} (\vec{A},\vec{n}_2)\,dS + \iint\limits_{S_1} (\vec{A},-\vec{n}_1)\,dS = 0.$$

Откуда следует, что

$$\iint\limits_{S_1} (\vec{A},\vec{n}_1)\,dS = \iint\limits_{S_2} (\vec{A},\vec{n}_2)\,dS.$$

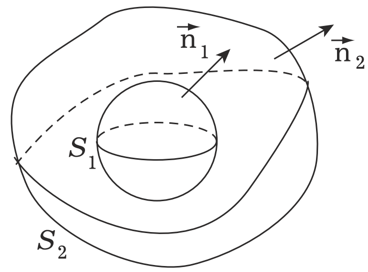


Рис. 5.5. Поток соленоидального поля через поверхности S_1 и S_2 не меняется

С л е д с т в и е 2. В формуле Стокса

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{A}, \vec{n}\,)\, dS,$$

в качестве поверхности S можно брать любую кусочно гладкую поверхность, ограниченную контуром C, так как в области между любыми двумя такими поверхностями $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}\,) \equiv 0$.

Следующая теорема устанавливает так называемый закон интенсивности векторной трубки.

Теорема 5.9
Поток соленоидального поля через любое сечение векторной трубки не меняется.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим любую векторную трубку, заключенную между двумя ее сечениями S_1 и S_2 (рис. 5.6). Эти сечения вместе с боковой поверхностью S_3 образуют замкнутую поверхность S. Так как поле $\vec{A}$ соленоидальное, то его поток через эту поверхность равен нулю

$$\iint_S (\vec{A}, \vec{n}\,)\, dS = 0$$

или

$$\iint_{S_1} (\vec{A}, -\vec{n}_1)\, dS + \iint_{S_2} (\vec{A}, \vec{n}_2)\, dS + \iint_{S_3} (\vec{A}, \vec{n}_3)\, dS = 0.$$

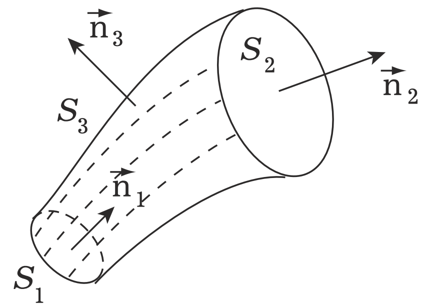


Рис. 5.6. Поток соленоидального поля через любое сечение векторной трубки не меняется

Но по определению векторной трубки $(\vec{A}, \vec{n}_3) \equiv 0$ и интеграл по поверхности S_3 равен нулю. Тогда

$$\iint\limits_{S_1} (\vec{A}, \vec{n}_1)\, dS = \iint\limits_{S_2} (\vec{A}, \vec{n}_2)\, dS,$$

что и доказывает теорему.

5.12 Лапласово векторное поле

Понятие лапласового векторного поля тесно связано с понятием гармонической функции. Поэтому его иногда называют гармоническим полем.

Определение 5.17 *Векторное поле* $\vec{A} : (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ *называется лапласовым, если одновременно выполняются соотношения*

$$\operatorname{rot} \vec{A}\,(M) \equiv \vec{0}, \quad \operatorname{div} \vec{A}\,(M) \equiv 0.$$

Таким образом, лапласово поле является одновременно и потенциальным и соленоидальным.

Так как лапласово поле потенциальное, то существует скалярная функция (потенциал лапласового поля) $u(M)$ такая, что $\vec{A} = \operatorname{grad} u(M)$, которая в силу условия $\operatorname{div} \vec{A}\,(M) \equiv 0$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}\,(\operatorname{grad} u(M)) = 0, \tag{5.22}$$

называемому уравнением Лапласа. Используя оператор Гамильтона, левую часть этого уравнения можно записать так

$$\operatorname{div}\,(\operatorname{grad} u) = (\nabla, \nabla u) = (\nabla, \nabla) u = \nabla^2 u = \Delta u$$

и уравнение Лапласа (5.22) принимает вид

$$\Delta u = 0 \tag{5.23}$$

или в декартовых прямоугольных координатах

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{5.24}$$

Всякая функция $u(M)$, которая удовлетворяет уравнению Лапласа, называется гармонической функцией.

Во многих приложениях: математической физике, электродинамике и т.д., потенциал лапласового поля ищут внутри некоторой области, ограниченной кусочно гладкой поверхностью, когда известно поведение поля на границе области. При этом довольно часто возникает вопрос о единственности решения подобной задачи – единственности определения лапласового поля. Этот вопрос позволяют решить теоремы единственности, одну из которых мы здесь приводим.

Теорема 5.10
Если лапласово поле $\vec{A}\,(M)$, $M \in \Omega$, на границе S области $T \subset \Omega$ имеет нулевую нормальную составляющую $(\vec{A}, \vec{n}\,)\big|_S = 0$, то внутри области T это поле равно нулю, $\vec{A}\,(M) \equiv 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec{A} = \operatorname{grad} u$ – лапласово поле. Тогда всюду в области Ω дивергенция этого поля равна нулю, $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, и

$$\operatorname{div}(u\vec{A}) = (\nabla, u\vec{A}\,) = (\nabla, \overset{\downarrow}{u}\,\vec{A}\,) + (\nabla, u\,\overset{\downarrow}{\vec{A}}\,) = (\vec{A}, \nabla u) + u(\nabla, \vec{A}\,) =$$

$$= (\vec{A}, \operatorname{grad} u) + u \operatorname{div} \vec{A} = (\vec{A}, \operatorname{grad} u) = (\vec{A}, \vec{A}\,).$$

Применяя формулу Гаусса-Остроградского, находим

$$\iint\limits_S u(\vec{A}, \vec{n}\,)\, dS = \iint\limits_S (\vec{n}, u\vec{A}\,)\, dS = \iiint\limits_T \operatorname{div}(u\vec{A}\,)\, dT = \iiint\limits_T (\vec{A}, \vec{A}\,)\, dT.$$

Так как $(\vec{A}, \vec{n}\,)\big|_S = 0$, то

$$\iiint\limits_T (\vec{A}, \vec{A}\,)\, dT = 0,$$

и в силу непрерывности функции $\vec{A}$ имеем $\vec{A}\,(M) \equiv 0$, $M \in T$.

С л е д с т в и е. Если два лапласовых поля $\vec{A}(M)$ и $\vec{B}(M)$, $M \in \Omega$, на границе области $T \subset \Omega$ имеют одинаковые нормальные составляющие, то внутри области T эти поля совпадают.

Для доказательства нужно применить только-что доказанную теорему к лапласову полю $\vec{C}(M) = \vec{A}(M) - \vec{B}(M)$.

5.13 Основная теорема векторного анализа. Обратная задача

После определения специальных полей появляется возможность рассмотреть вопрос о разложении произвольного векторного поля на более простые его составляющие. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, которую обычно называют основной теоремой векторного анализа.

Теорема 5.11
Любое непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{A} : (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ *можно представить в виде суммы двух полей*

$$\vec{A} = \vec{B} + \vec{C},$$

где $\vec{B}$ *– потенциальное и* $\vec{C}$ *– соленоидальное поле.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\vec{B} = \operatorname{grad}\varphi$, где φ – функция, которую нужно определить. Для того, чтобы $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} - \operatorname{grad}\varphi$ было соленоидальным, нужно потребовать выполнения условия

$$\operatorname{div}\vec{C} = \operatorname{div}\vec{A} - \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = 0.$$

Отсюда следует, что φ должна удовлетворять так называемому уравнению Пуассона

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \operatorname{div}\vec{A}$$

или

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}\vec{A}.$$

Известно, что это уравнение имеет решение.

Представляет интерес *обратная задача векторного анализа.* Она состоит в восстановлении векторного поля $\vec{A}$, если известны его ротор и дивергенция. Аналитически эта задача ставится так:

Пусть даны векторное поле $\vec{B}(M)$ и скалярное поле $u(M)$. Необходимо построить векторное поле $\vec{A}(M)$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{A}(M) = u(M), \\ \operatorname{rot}\vec{A}(M) = \vec{B}(M). \end{cases}$$

Относительно поля $\vec{B}\,(M)$ предположим также, что $\operatorname{div}\vec{B} \equiv 0$. Если это условие не выполнено, то задача заведомо не имеет решения, так как в силу теоремы 5.7 всякий ротор должен иметь нулевую дивергенцию. Согласно основной теореме векторного анализа векторное поле $\vec{A}\,(M)$ будем искать в виде суммы потенциального $\vec{A}_1(M)$ и соленоидального полей $\vec{A}_2(M)$ полей. Но тогда нужно потребовать, чтобы поля $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ удовлетворяли системам

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{A}_1 = 0 \\ \operatorname{div}\vec{A}_1 = u(M) \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{rot}\vec{A}_2 = \vec{B} \\ \operatorname{div}\vec{A}_2 = 0 \end{cases}$$

Решение первой системы ищем в виде $\vec{A}_1 = \operatorname{grad}\varphi$. Первое уравнение этой системы будет выполняться для любой дифференцируемой функции φ. Потребуем, чтобы выполнялось и второе уравнение первой системы, которое принимает вид

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = u.$$

А это уравнение Пуассона. Оно имеет решение.

Далее, так как $\operatorname{div}\vec{B} \equiv 0$, то из теоремы 5.7 следует, что первое уравнение второй системы имеет решение. Обозначим его через $\vec{A}_0$. Поскольку поле $\vec{A}_2$ – соленоидальное, то согласно теореме 5.6 оно представимо в виде $\vec{A}_2 = \vec{A}_0 + \operatorname{grad}\psi$, где ψ – функция подлежащая определению. Так как $\vec{A}_2$ должна удовлетворять второму уравнению второй системы, то для функции ψ также получаем уравнение Пуассона

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi = -\operatorname{div}\vec{A}_0,$$

и это уравнение также имеет решение. Поставленная задача решена.

5.14 Дифференциальные операции второго порядка

Операции $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div}\vec{A}$, $\operatorname{rot}\vec{A}$, как мы уже отмечали, – это дифференциальные операции первого порядка. Повторное применение этих операций называют дифференциальными операциями второго порядка.

Все дифференциальные операции второго порядка можно свести в следующую таблицу (на тех местах, где операция не имеет смысла, ставим звездочку):

	grad u	div $\vec{A}$	rot $\vec{A}$
grad	$*$	grad (div $\vec{A}$)	$*$
div	div (grad u)	$*$	div (rot $\vec{A}$)
rot	rot (grad u)	$*$	rot (rot $\vec{A}$)

Отметим следующие правила повторного применения оператора ∇:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} = \nabla(\nabla,\vec{A}\,) = \nabla^2\vec{A} + [\nabla,[\nabla,\vec{A}\,]]\\
&\operatorname{div}\operatorname{grad}u = (\nabla,\nabla u) = \nabla^2 u\\
&\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = (\nabla,[\nabla,\vec{A}\,]) = 0\\
&\operatorname{rot}\operatorname{grad}u = [\nabla,\nabla u] = \vec{0}\\
&\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = [\nabla,[\nabla,\vec{A}\,]] = \nabla(\nabla,\vec{A}\,) - \nabla^2\vec{A},
\end{aligned}$$

где $\nabla^2 = \Delta$ – оператор Лапласа, который действует на векторную функцию

$$\vec{A}\,(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$$

по правилу

$$\nabla^2\vec{A} = \Delta\vec{A} = \Delta P(x,y,z)\,\vec{i} + \Delta Q(x,y,z)\,\vec{j} + \Delta R(x,y,z)\,\vec{k}.$$

Глава 6

Криволинейные координаты

В предыдущей главе мы ввели важные для физики понятия – градиент, дивергенцию и ротор и научились вычислять их значения в декартовой прямоугольной системе координат. Однако не все задачи, как физические так и математические, успешно решаются в декартовой системе координат.

Систему координат выбирают в зависимости от условий поставленной проблемы, в первую очередь учитывая ее симметрию. Например, задачу об остывании круглого цилиндра решают в цилиндрических координатах, потенциал лапласова поля внутри сферы ищут в сферических координатах, для центральных силовых полей (гравитационных, электростатических) пользуются системой, одной из координат которой служит расстояние в радиальном направлении. Число подобных примеров мы могли бы продолжить.

В этой главе вводится понятие криволинейных координат. Мы научимся вычислять дифференциальные операции теории поля в этих системах координат и, в частности, в сферической и цилиндрической системах, которые наиболее часто применяются в прикладных задачах. Знакомство с новыми системами начнем с декартовой косоугольной системы координат, которая определяется с помощью косоугольного базиса. Важным объектом в этой системе (как впрочем и во всех других системах) является понятие взаимного базиса.

6.1 Основной и взаимный базисы

К понятию взаимного базиса приводит задача о разложении любого ненулевого вектора по базису, которая заключается в нахождении координат вектора в этом базисе.

Пусть e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$,

$$(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

и

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{e}_i$$

– разложение вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ по базису e_i. Умножая обе части этого равенства скалярно на e_k

$$(\vec{x}, \mathrm{e}_k) = \sum_{i=1}^{n} x_i (\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_k) = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ik} = x_k,$$

получаем, что координаты вектора $\vec{x}$ в ортонормированном базисе находятся по формулам

$$x_i = (\vec{x}, \mathrm{e}_i).$$

Пусть теперь e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, – произвольный косоугольный базис в $\mathbb{R}^k$ и $\vec{A}$ – некоторый вектор из $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим задачу о нахождении коэффициентов разложения вектора $\vec{A}$ по косоугольному базису e_i. Решение этой задачи возможно, если ввести понятие взаимного базиса.

Определение 6.1 *Пусть векторы* e_i*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*, образуют базис в пространстве* $\mathbb{R}^n$*. Назовем его основным. Будем говорить, что векторы* e^k*,* $k = 1, 2, \ldots, n$ *образуют взаимный базис для базиса* e_i*, если*

$$(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}^k) = \delta_i^k = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = k. \end{cases} \tag{6.1}$$

Из этого определения следует, что базис e_i будет взаимным к базису e^k, т.е. понятие основного и взаимного базиса обратимо. Мы всегда можем поменять их местами, объявив взаимный базис основным, а основной – взаимным. Сверх того, если базис e_i в $\mathbb{R}^n$ – ортонормированный, то основной и взаимный базисы совпадают и координаты вектора $\vec{A}$ в основном и взаимном базисе также совпадают. Иначе обстоит дело с косоугольным базисом, что и приводит нас к следующему определению,

Определение 6.2 *Координаты вектора* $\vec{A}$ *в основном базисе* e_i *называются контравариантными координатами и обозначаются* A^i*. Координаты* $\vec{A}$ *во взаимном базисе* e^k *называются ковариантными и обозначаются* A_k*.*

Разложения вектора $\vec{A}$ по базисам e_i и e^k имеют вид

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^{n} A^i \mathrm{e}_i, \qquad \vec{A} = \sum_{k=1}^{n} A_k \mathrm{e}^k. \tag{6.2}$$

Умножим первое равенство скалярно на e^k. Тогда

$$(\vec{A}, \mathrm{e}^k) = \sum_{i=1}^{n} A_i(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}^k) = \sum_{i=1}^{n} A_i \delta_i^k = A^k.$$

Таким образом

$$A^k = (\vec{A}, \mathrm{e}^k). \tag{6.3}$$

Аналогично

$$A_k = (\vec{A}, \mathrm{e}_k), \tag{6.4}$$

т.е. координаты в разложении вектора по данному базису находятся с помощью взаимного базиса.

Возникает вопрос, как найти взаимный базис, если известен основной. Поскольку большинство физических задач рассматриваются в трехмерном пространстве, ответ на этот вопрос дадим для пространства $\mathbb{R}^3$.

Теорема 6.1

Пусть e_i, $i = 1, 2, 3$ *– базис в* $\mathbb{R}^3$. *Назовем его основным. Обозначим через* $V = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$. *Тогда векторы* e^k, *равные*

$$\mathrm{e}^1 = \frac{[\mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3]}{V}, \quad \mathrm{e}^2 = \frac{[\mathrm{e}_3, \mathrm{e}_1]}{V}, \quad \mathrm{e}^3 = \frac{[\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2]}{V}, \tag{6.5}$$

образуют взаимный базис для e_i.

Оба базиса либо левые, либо правые.

Доказательство. Равенства (6.5) устанавливаются непосредственной проверкой. Проверим, например, соотношения $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}^1) = 1$ и $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}^2) = 0$. Остальные соотношения проверяются аналогично.

$$(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}^1) = \left(\mathrm{e}_1, \frac{[\mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3]}{V}\right) = \frac{1}{V}(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3) = 1,$$

$$(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}^2) = \left(\mathrm{e}_1, \frac{[\mathrm{e}_3, \mathrm{e}_1]}{V}\right) = \frac{1}{V}(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_3, \mathrm{e}_1) = 0.$$

Для доказательства второго утверждения вычислим

$$V' = (\mathrm{e}^1, \mathrm{e}^2, \mathrm{e}^3) = (\mathrm{e}^1, [\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^3]) = \frac{1}{V^3}([\mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3], [[\mathrm{e}_3, \mathrm{e}_1], [\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2]]).$$

Используя формулу преобразования двойного векторного произведения $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]] = \vec{b}\,(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a},\vec{b}\,)$ получаем

$$[[\mathrm{e}_3,\mathrm{e}_1],[\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2]] = \mathrm{e}_1([\mathrm{e}_3,\mathrm{e}_1],\mathrm{e}_2) - \mathrm{e}_2([\mathrm{e}_3,\mathrm{e}_1],\mathrm{e}_1) = \mathrm{e}_1(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3) = V\mathrm{e}_1,$$

$$V' = \frac{1}{V^3}([\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3],V\mathrm{e}_1) = \frac{1}{V^2}(\mathrm{e}_1,[\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3]) = \frac{1}{V}.$$

Таким образом $V\,V' = 1$. Это соотношение показывает, что смешанные произведения $(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3)$ и $(\mathrm{e}^1,\mathrm{e}^2,\mathrm{e}^3)$ принимают один и тот же знак, т.е. оба базиса либо левые либо правые.

З а м е ч а н и е. В формулах (6.5) индексы у базисных векторов образуют циклическую перестановку чисел 1 2 3, что облегчает запоминание этих формул.

6.2 Криволинейные координаты в пространстве

Определение 6.3 *Пусть x, y, z – прямоугольные декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$. Упорядоченная тройка чисел q_1, q_2, q_3 называется криволинейными координатами в $\mathbb{R}^3$, если каждой тройке q_1, q_2, q_3 ставится в соответствие точка $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ с помощью функций*

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3), \tag{6.6}$$

удовлетворяющих условиям

1) *функции $x(q_1, q_2, q_3)$, $y(q_1, q_2, q_3)$, $z(q_1, q_2, q_3)$ – дважды непрерывно дифференцируемые,*

2) *якобиан $I = \dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \neq 0$.*

Первое условие в этом определении требует непрерывность вторых производных функций $x(q_1, q_2, q_3)$, $y(q_1, q_2, q_3)$ и $z(q_1, q_2, q_3)$. Вообще для введения криволинейных координат достаточно непрерывности первых производных. Наше требование к криволинейным координатам позволяет шире использовать их в физических приложениях. Отличие же от нуля якобиана дает возможность выразить переменные (q_1, q_2, q_3) через (x, y, z), что позволяет одновременно с функциями (6.6) рассматривать функции

$$q_1 = q_1(x, y, z), \quad q_2 = q_2(x, y, z), \quad q_3 = q_3(x, y, z). \tag{6.7}$$

Основным понятием в криволинейных координатах является понятие локального базиса. Если мы рассмотрим декартову систему координат, то в каждой точке пространства $\mathbb{R}^3$ можно задать один и тот же базис, получаемый параллельным переносом. Иначе обстоит дело в системе криволинейных координат. В последнем случае в каждой точке пространства будет находиться свой базис, меняющийся при переходе от одной точки к другой. Этот базис называют локальным базисом. Следующая теорема позволяет находить аналитические выражения для локальных базисов.

Теорема 6.2
Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы криволинейные координаты q_1, q_2, q_3 и радиус-вектор точки $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ равен

$$\vec{r}(q_1, q_2, q_3) = x(q_1, q_2, q_3)\vec{i} + y(q_1, q_2, q_3)\vec{j} + z(q_1, q_2, q_3)\vec{k}.$$

Тогда

1) *система векторов*

$$\mathrm{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \tag{6.8}$$

образует базис в данной точке (локальный базис),

2) *система векторов*

$$\mathrm{e}^k = \nabla q_k = \operatorname{grad} q_k \tag{6.9}$$

образует взаимный базис (локальный взаимный базис).

Доказательство.

1). Из курса векторной алгебры известно, что для того, чтобы векторы e_1, e_2, e_3 образовывали базис в пространстве $\mathbb{R}^3$ (были некомпланарны), необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ было отлично от нуля. Вычисляя это смешанное произведение в нашем случае получаем

$$(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial q_1} & \dfrac{\partial y}{\partial q_1} & \dfrac{\partial z}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial x}{\partial q_2} & \dfrac{\partial y}{\partial q_2} & \dfrac{\partial z}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial q_3} & \dfrac{\partial y}{\partial q_3} & \dfrac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \neq 0,$$

т.е. векторы $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$ – некомпланарны и, следовательно, образуют базис.

2). Чтобы доказать, что векторы (6.9) образуют взаимный базис, нужно проверить соотношения (6.1)

$$(\mathrm{e}^k, \mathrm{e}_i) = (\nabla q_k, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}) = \frac{\partial q_k}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial q_k}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial q_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_i} = \frac{\partial q_k}{\partial q_i} = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & k = i. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Другие важные понятия в криволинейной системе координат – это координатные поверхности и координатные линии.

Определение 6.4 *Поверхность*

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, c_3), \\ y = y(q_1, q_2, c_3), \\ z = z(q_1, q_2, c_3), \end{cases}$$

где $c_3 = const$, *называется координатной поверхностью* $q_3 = c_3$. *Аналогично определяются координатные поверхности* $q_1 = c_1$ *и* $q_2 = c_2$.

Кривая

$$\begin{cases} x = x(q_1, {}_2, c_3), \\ y = y(q_1, {}_2, c_3), \\ z = z(q_1, {}_2, c_3), \end{cases}$$

называется координатной линией q_1. *Аналогично определяются координатные линии* q_2 *и* q_3.

Таким образом видно, что координатная q_i-линия – это кривая вдоль которой изменяется только координата q_i. С введением понятий координатных линий локальный базис приобретает довольно ясную геометрическую интерпретацию. Действительно, вектор $\mathrm{e}_i = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ – частная про-

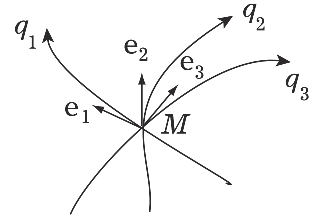


Рис. 6.1. Локальный базис в точке M

изводная, которая вычисляется при фиксированных q_k, $k \neq i$, и так как

$\vec{r}(q_1, q_2, q_3)$ при фиксированных q_k, $k \neq i$, определяют q_i-линию, то вектор базиса e_i касается этой линии и направлен в сторону возрастания q_i (рис. 6.1).

6.3 Ортогональные криволинейные координаты

Почти всегда в приложениях используются криволинейные координаты, у которых координатные линии взаимно перпендикулярны в каждой точке пространства, что приводит к понятию ортогональных криволинейных координат.

Определение 6.5 *Система криволинейных координат называется ортогональной, если любой ее локальный базис* e_i *– ортогональный.*

Следующая теорема устанавливает критерий ортогональности криволинейных координат.

Теорема 6.3
Для того, чтобы криволинейные координаты, определяемые функциями

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3),$$

были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия

$$\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j} \equiv 0, \quad i \neq j. \tag{6.10}$$

Доказательство. Необходимость и достаточность следует из равенства

$$(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j}.$$

Используя предыдущую теорему, вычислим квадрат элемента длины в ортогональных криволинейных координатах

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\,dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\,dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\,dq_3\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\,dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\,dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3}\,dq_3\right)^2 +$$

$$+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\,dq_1+\frac{\partial z}{\partial q_2}\,dq_2+\frac{\partial z}{\partial q_3}\,dq_3\right)^2=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j}+\frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j}\right)dq_i dq_j=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2\right]dq_i^2.$$

Вводя обозначения

$$H_i=|\mathrm{e}_i|=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2},$$

перепишем формулу для dl^2 так:

$$dl^2=H_1^2\,dq_1^2+H_2^2\,dq_2^2+H_3^2\,dq_3^2.$$

Величины H_1, H_2 и H_3, входящие в последнее выражение, называют параметрами (коэффициентами) Ламэ, отвечающими прямоугольным криволинейным координатам q_1, q_2, q_3.

Рассмотрим теперь бесконечно малый параллелепипед с вершиной в точке $M(q_1,q_2,q_3)$ и с боковыми гранями $q_i=const$, $q_i+dq_i=const$, построенный на координатных линиях, как на ребрах (рис. 6.2).

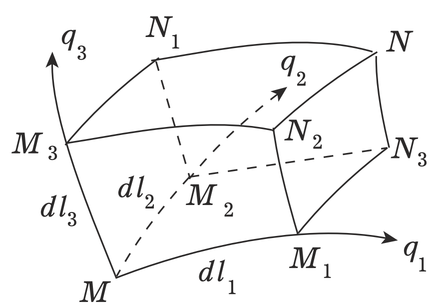


Рис. 6.2. Бесконечно малый параллелепипед, построенный на координатных линиях

Принимая во внимание, что вдоль каждого ребра меняется только одна из переменных, мы получим из соотношения для dl^2 длины этих ребер

$$dl_1=H_1\,dq_1,\quad dl_2=H_2\,dq_2,\quad dl_3=H_3\,dq_3.$$

Площади $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ граней $q_1 = const$, $q_2 = const$, $q_3 = const$ соответственно равны

$$d\sigma_1 = H_2 H_3\, dq_2 dq_3, \quad d\sigma_2 = H_3 H_1\, dq_3 dq_1, d\sigma_3 = H_1 H_2\, dq_1 dq_2.$$

Наконец, элементарный объем равен

$$dv = dl_1 dl_2 dl_3 = H_1 H_2 H_3\, dq_1 dq_2 dq_3.$$

6.4 Дифференциальные операции теории поля в ортогональных криволинейных координатах

Пусть $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ – ортонормированный локальный базис, заданный в ортогональных криволинейных координатах:

$$\vec{i}_1 = \frac{\mathrm{e}_1}{H_1}, \quad \vec{i}_2 = \frac{\mathrm{e}_2}{H_2}, \quad \vec{i}_3 = \frac{\mathrm{e}_3}{H_3},$$

где $\mathrm{e}_i = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$, и пусть заданы скалярное поле

$$u(q_1, q_2, q_3)$$

и векторное поле

$$\vec{A}\,(q_1, q_2, q_3) = A_1(q_1, q_2, q_3)\,\vec{i}_1 + A_2(q_1, q_2, q_3)\,\vec{i}_2 + A_3(q_1, q_2, q_3)\,\vec{i}_3.$$

Подсчитаем выражения для $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div} \vec{A}$, $\operatorname{rot} \vec{A}$ и Δu.

Г р а д и е н т – это вектор

$$\operatorname{grad} u = a_1\,\vec{i}_1 + a_2\,\vec{i}_2 + a_3\,\vec{i}_3,$$

координаты которого в ортонормированном базисе вычисляются по формулам

$$a_k = (\operatorname{grad} u, \vec{i}_k).$$

После несложных преобразований получаем

$$a_k = (\operatorname{grad} u, \vec{i}_k) = \frac{1}{H_k}(\operatorname{grad} u, \mathrm{e}_k) =$$

$$= \frac{1}{H_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_k}\right) = \frac{1}{H_k}\frac{\partial u}{\partial q_k}.$$

Таким образом

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\,\vec{i}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\,\vec{i}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\,\vec{i}_3. \tag{6.11}$$

Д и в е р г е н ц и я. Возьмем точку $M(q_1, q_2, q_3)$ и определим в ней ортонормированный базис $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$, после чего рассмотрим бесконечно малый параллелепипед $MM_2N_3M_1M_3N_1NN_2$ (рис. 6.2). Обозначим через T область, ограниченную этим параллелепипедом, S – его поверхность. Объем параллелепипеда равен

$$V(T) = H_1H_2H_3\,dq_1dq_2dq_3.$$

Поток поля $\vec{A}$ через две противоположные грани $q_1 = const$ и $q_1 + dq_1 = const$ равен (с точностью до бесконечно малой более высокого порядка, чем $V(T)$, при $T \to M$)

$$(\vec{A}, \vec{i}_1)\,d\sigma_1\big|_{q_1+dq_1} - (\vec{A}, \vec{i}_1)\,d\sigma_1\big|_{q_1} =$$

$$= (A_1H_2H_3\big|_{q_1+dq_1} - A_1H_2H_3\big|_{q_1})\,dq_2dq_3 = \frac{\partial(A_1H_2H_3)}{\partial q_1}\,dq_1dq_2dq_3.$$

Аналогично находятся потоки поля $\vec{A}$ через две пары других противоположных граней. Для потока поля через всю поверхность S имеем

$$\iint\limits_S (\vec{n}, \vec{A}\,)\,dS =$$

$$= \left(\frac{\partial(A_1H_2H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_1A_2H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1H_2A_3)}{\partial q_3}\right) dq_1dq_2dq_3 + o(V(T)).$$

Откуда по определению дивергенции получаем

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial(A_1H_2H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_1A_2H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1H_2A_3)}{\partial q_3}\right). \tag{6.12}$$

Р о т о р. Используя все тот же параллелепипед $MM_2N_3M_1M_3N_1NN_2$ (рис. 6.2) найдем выражение для ротора поля $\vec{A}$. Будем предполагать, что ортонормированный локальный базис $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ – правый. Тогда на поверхности $q_1 = const$ имеем

$$[\vec{n}, \vec{A}\,]\,dS\big|_{q_1} = -[\vec{i}_1, \vec{A}\,]\,d\sigma_1 = [\vec{A}, \vec{i}_1]\,d\sigma_1 = [\vec{A}, [\vec{i}_2, \vec{i}_3]]\,d\sigma_1 =$$
$$= \{\vec{i}_2(\vec{A}, \vec{i}_3) - \vec{i}_3(\vec{A}, \vec{i}_2)\}\,d\sigma_1 = [A_3\vec{i}_2 - A_2\vec{i}_3]H_2H_3\big|_{q_1}dq_2dq_3.$$

Для поверхности $q_1 + dq_1 = const$

$$[\vec{n}, \vec{A}]\, dS\big|_{q_1+dq_1} = [A_2\vec{i}_3 - A_3\vec{i}_2] H_2 H_3\big|_{q_1+dq_1} dq_2 dq_3.$$

Тогда

$$\iint\limits_{q_1=const} [\vec{n}, \vec{A}]\, dS + \iint\limits_{q_1+dq_1=const} [\vec{n}, \vec{A}]\, dS =$$

$$= \left[\frac{\partial(A_2 H_2 H_3\, \vec{i}_3)}{\partial q_1} - \frac{\partial(A_3 H_3 H_2\, \vec{i}_2)}{\partial q_1}\right] dq_1 dq_2 dq_3 + o_1(V).$$

Аналогично

$$\iint\limits_{q_2=const} [\vec{n}, \vec{A}]\, dS + \iint\limits_{q_2+dq_2=const} [\vec{n}, \vec{A}]\, dS =$$

$$= \left[\frac{\partial(A_3 H_3 H_1\, \vec{i}_1)}{\partial q_2} - \frac{\partial(A_1 H_1 H_3\, \vec{i}_3)}{\partial q_2}\right] dq_1 dq_2 dq_3 + o_2(V),$$

$$\iint\limits_{q_3=const} [\vec{n}, \vec{A}]\, dS + \iint\limits_{q_3+dq_3=const} [\vec{n}, \vec{A}]\, dS =$$

$$= \left[\frac{\partial(A_1 H_1 H_2\, \vec{i}_2)}{\partial q_3} - \frac{\partial(A_2 H_2 H_1\, \vec{i}_1)}{\partial q_3}\right] dq_1 dq_2 dq_3 + o_3(V),$$

и по определению ротора

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \lim_{T \to M} \frac{1}{V(T)} \iint\limits_{S} [\vec{n}, \vec{A}]\, dS =$$

$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \left[\frac{\partial(A_3 H_3 H_1\, \vec{i}_1)}{\partial q_2} - \frac{\partial(A_2 H_2 H_1\, \vec{i}_1)}{\partial q_3}\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial(A_1 H_1 H_2\, \vec{i}_2)}{\partial q_3} - \frac{\partial(A_3 H_3 H_2\, \vec{i}_2)}{\partial q_1}\right] + \left[\frac{\partial(A_2 H_2 H_3\, \vec{i}_3)}{\partial q_1} - \frac{\partial(A_1 H_1 H_3\, \vec{i}_3)}{\partial q_2}\right] \right\}.$$

Откуда, дифференцируя как произведение каждое из слагаемых и учитывая, что $H_1\, \vec{i}_1 = \mathrm{e}_1$, $H_2\, \vec{i}_2 = \mathrm{e}_2$, $H_3\, \vec{i}_3 = \mathrm{e}_3$, получаем

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\left[\frac{\partial(A_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(A_2H_2)}{\partial q_3}\right]H_1\,\vec{i}_1 + \right.$$
$$+\left[\frac{\partial(A_1H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(A_3H_3)}{\partial q_1}\right]H_2\,\vec{i}_2 + \left.\left[\frac{\partial(A_2H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(A_1H_1)}{\partial q_2}\right]H_3\,\vec{i}_3\right\} +$$
$$+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{A_1H_1\left(\frac{\partial \mathrm{e}_2}{\partial q_3} - \frac{\partial \mathrm{e}_3}{\partial q_2}\right) + \right.$$
$$\left. +A_2H_2\left(\frac{\partial \mathrm{e}_3}{\partial q_1} - \frac{\partial \mathrm{e}_1}{\partial q_3}\right) + A_3H_3\left(\frac{\partial \mathrm{e}_1}{\partial q_2} - \frac{\partial \mathrm{e}_2}{\partial q_1}\right)\right\}.$$

В силу непрерывности вторых производных функции $\vec{r}(q_1, q_2, q_3)$

$$\frac{\partial \mathrm{e}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial \mathrm{e}_k}{\partial q_i}.$$

Поэтому выражение во вторых фигурных скобках у $\operatorname{rot}\vec{A}$ равно нулю и

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\begin{vmatrix} H_1\,\vec{i}_1 & H_2\,\vec{i}_2 & H_3\,\vec{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1A_1 & H_2A_2 & H_3A_3 \end{vmatrix}. \tag{6.13}$$

О п е р а т о р Л а п л а с а. Легко видеть, что оператор Лапласа $\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$ равен

$$\Delta u =$$
$$= \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right\}.$$

6.5 Сферические полярные координаты

Введем криволинейные координаты $q_1 = \rho$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$ с помощью соотношений

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$$

В отличие от сферических координат, где угол θ отсчитывается от плоскости (x, y), будем называть эти координаты сферическими полярными координатами. Угол θ, называемый полярным углом, отсчитывается от

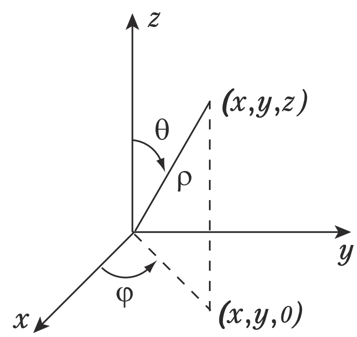


Рис. 6.3. Определение сферических координат

оси z, которую называют полярной осью. Угол φ, отсчитываемый от положительной полуоси x в плоскости (x, y), называют азимутальным углом (рис. 6.3).

Введенные координаты меняются в пределах

$$0 \le \rho < +\infty, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Сферические полярные координаты имеют следующие семейства координатных поверхностей:

1. Концентрические сферы с общим центром в начале координат, $\rho = const$.

2. Концентрические поверхности прямых круговых конусов с полярной осью z и вершинами в начале координат, $\theta = const$.

3. Полуплоскости, проходящие через ось z, $\varphi = const$.

Координатными линиями в сферических координатах являются следующие линии:

1. ρ-линия – лучи, выходящие из начала координат.

2. φ-линия – окружности на сфере, параллельные плоскости (x, y), так называемые параллели.

3. θ-линия – полуокружности на сфере, лежащие в полуплоскостях, проходящих через полярную ось z, так называемые меридианы.

Векторное задание сферических координат имеет вид

$$\vec{r}(\rho,\theta,\varphi) = \rho\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \rho\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \rho\cos\theta\,\vec{k}.$$

Соответственно локальный базис e_ρ, e_θ, e_φ равен

$$\mathrm{e}_\rho = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k},$$

$$\mathrm{e}_\theta = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \rho\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \rho\cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \rho\sin\theta\,\vec{k},$$

$$\mathrm{e}_\varphi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -\rho\sin\theta\sin\varphi\,\vec{i} + \rho\sin\theta\cos\varphi\,\vec{j}\,.$$

Докажем ортогональность координат:

$$(\mathrm{e}_\rho,\mathrm{e}_\theta) = \rho\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + \rho\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi - \rho\sin\theta\cos\theta = 0,$$

$$(\mathrm{e}_\rho,\mathrm{e}_\varphi) = -\rho\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi + \rho\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

$$(\mathrm{e}_\theta,\mathrm{e}_\varphi) = -\rho^2\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Ортогональность этих координат легко усмотреть и из геометрических соображений (рис. 6.4), так как координатные линии взаимно ортогональны в каждой точке, через которую они проходят.

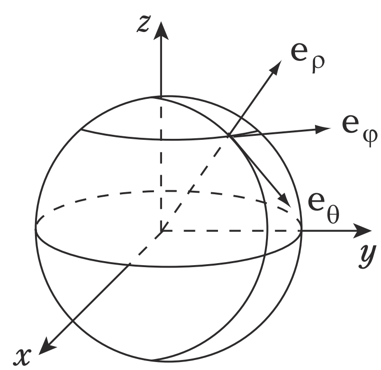


Рис. 6.4. Локальный базис в сферических координатах

Вычислим коэффициенты Ламэ:

$$H_1 = H_\rho = |\mathrm{e}_\rho| = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta} = 1,$$

$$H_2 = H_\theta = |\mathrm{e}_\theta| = \sqrt{\rho^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta} = \rho,$$

$$H_3 = H_\varphi = |\mathrm{e}_\varphi| = \sqrt{\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi} = \rho\sin\theta.$$

Итак

$$H_1 = H_\rho = 1, \quad H_2 = H_\theta = \rho, \quad H_3 = H_\varphi = \rho \sin\theta. \tag{6.14}$$

Ортонормированный локальный базис имеет вид

$$\begin{aligned}
\vec{i}_\rho &= \frac{\mathrm{e}_\rho}{H_\rho} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k},\\
\vec{i}_\theta &= \frac{\mathrm{e}_\theta}{H_\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k},\\
\vec{i}_\varphi &= \frac{\mathrm{e}_\varphi}{H_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}\,.
\end{aligned}$$

Пусть $u = u(\rho, \theta, \varphi)$ – скалярное поле, а

$$\vec{A}(\rho,\theta,\varphi) = A_\rho(\rho,\theta,\varphi)\,\vec{i}_\rho + A_\theta(\rho,\theta,\varphi)\,\vec{i}_\theta + A_\varphi(\rho,\theta,\varphi)\,\vec{i}_\varphi$$

– векторное поле. Подставляя в (6.11), (6.12) и (6.13) коэффициенты Ламэ (6.14), получаем формулы для вычисления градиента, дивергенции и ротора в сферических координатах

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\,\vec{i}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\,\vec{i}_\theta + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\vec{i}_\varphi, \tag{6.15}$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\sin\theta A_\rho) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\rho\sin\theta A_\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho A_\varphi)\right], \tag{6.16}$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{i}_\rho & \rho\,\vec{i}_\theta & \rho\sin\theta\,\vec{i}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_\rho & \rho A_\theta & \rho\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}. \tag{6.17}$$

Заменяя в формуле (6.16) координаты вектора $\vec{A}$ на координаты градиента (6.15), запишем выражение для оператора Лапласа

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}. \tag{6.18}$$

6.6 Цилиндрические координаты

Введем цилиндрические криволинейные координаты $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$ с помощью функций

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

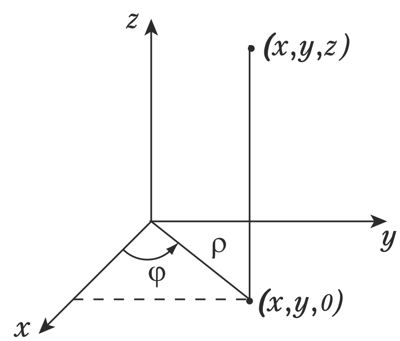


Рис. 6.5. Определение цилиндрических координат

Введенные координаты изменяются в пределах

$$0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty.$$

Координатные поверхности:

1. $\rho = const$ – концентрические круговые цилиндры с общей осью z.
2. $\varphi = const$ – полуплоскости, выходящие из оси z.
3. $z = const$ – плоскости, параллельные плоскости (x, y).

Координатные линии:

1. ρ-линия – лучи, выходящие из точки на оси z и лежащие в плоскости, параллельной плоскости (x, y).
2. φ-линия – концентрические окружности с центром на оси z и лежащие в плоскостях, параллельных плоскости (x, y).
3. z-линия – образующие на концентрических круговых цилиндрах с общей осью z (параллельны оси z).

Векторное задание цилиндрических координат принимает вид

$$\vec{r}(\rho, \varphi, z) = \rho\cos\varphi\,\vec{i} + \rho\sin\varphi\,\vec{j} + z\,\vec{k}.$$

Локальный базис для цилиндрических координат изображен на рис. 6.6. Он вычисляется по следующим формулам

$$\mathrm{e}_\rho = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}\,,$$
$$\mathrm{e}_\varphi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -\rho\sin\varphi\,\vec{i} + \rho\cos\varphi\,\vec{j}\,,\ .$$
$$\mathrm{e}_z = \frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \vec{k}\,.$$

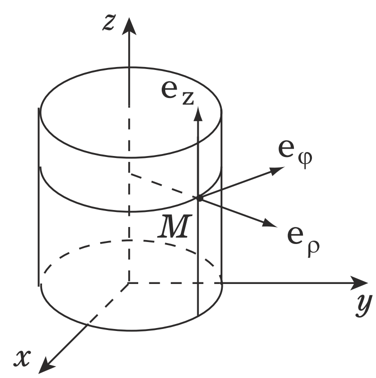


Рис. 6.6. Локальный базис в цилиндрических координатах

Ортогональность координат проверяется устно. Вычислим параметры Ламэ:

$$H_1 = H_\rho = |\mathrm{e}_\rho| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1,$$

$$H_2 = H_\varphi = |\mathrm{e}_\varphi| = \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^\varphi} = \rho,$$

$$H_3 = H_z = |\mathrm{e}_z| = 1.$$

Ортонормированный локальный базис имеет вид

$$\vec{i}_\rho = \frac{\mathrm{e}_\rho}{H_\rho} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j},$$
$$\vec{i}_\varphi = \frac{\mathrm{e}_\varphi}{H_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j},$$
$$\vec{i}_z = \frac{\mathrm{e}_z}{H_z} = \vec{k}.$$

Если $u = u(\rho, \varphi, z)$ – скалярное поле, а

$$\vec{A}(\rho, \varphi, z) = A_\rho(\rho, \varphi, z)\,\vec{i}_\rho + A_\varphi(\rho, \varphi, z)\,\vec{i}_\varphi + A_z(\rho, \varphi, z)\,\vec{i}_z$$

– векторное поле, то градиент, дивергенция и ротор этих полей вычисляются по формулам

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\,\vec{i}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\vec{i}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\,\vec{i}_z, \tag{6.19}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_z)\right], \tag{6.20}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{i}_\rho & \rho\,\vec{i}_\varphi & \vec{i}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}, \tag{6.20}$$

которые устанавливаются также как и для сферических координат.

И наконец запишем выражение для оператора Лапласа в цилиндрических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{6.21}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Арфкен Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970
2. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1967.
3. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1967.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Наука, 1980. Ч. II.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968.
6. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Наука, 1966.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970. Т. III.