

Сложноселективные задачи целочисленной цифровой фильтрации

Владимир БУГРОВ,
доцент, к. т. н.
bug@rf.unn.ru

В статье рассмотрены вопросы целочисленного моделирования и синтеза рекурсивных цифровых фильтров с учетом возможностей их аппаратной реализации на цифровых платформах с целочисленной арифметикой вычислений. Приводится постановка и решение задачи многофункционального синтеза БИХ-фильтров методами целочисленного нелинейного математического программирования. Эффективность применения данного подхода проиллюстрирована на нескольких характерных примерах решения задач синтеза рекурсивных целочисленных фильтров со сложными селективными требованиями, также проведен анализ теоретических и экспериментальных характеристик синтезированных фильтров.

Введение

К числу наиболее востребованных алгоритмов цифровой обработки сигналов относится, как известно, цифровая фильтрация. В современных цифровых системах ее доля может достигать половины общего объема цифровых вычислений. Являясь устройствами частотной селекции входного сигнала, цифровые фильтры обычно разрабатываются на основе требований к их частотным характеристикам, среди которых следует назвать амплитудно-частотную (АЧХ), фазочастотную (ФЧХ), а также групповой или фазовой задержки. В настоящее время существует множество прикладных задач с весьма сложными требованиями к амплитудной селекции полезного сигнала. Наиболее высокие возможности для решения столь сложных задач имеют рекурсивные цифровые фильтры (БИХ-фильтры). Однако классическое проектирование рекурсивных цифровых фильтров по аналоговому прототипу с применением метода билинейного преобразования либо различных подходов, базирующихся на нем, не позволяют, как это показано в [1–3], синтезировать БИХ-фильтры со сложной формой АЧХ, не дают возможности удовлетворить постоянно возрастающие селективные требования. Вещественный формат представления данных при билинейном преобразовании вынуждает квантовать их значения, что приводит к весьма нежелательным для работы БИХ-фильтра последствиям, например, к искажению частотных характеристик, возникновению шумов квантования, необходимости масштабирования вещественных коэффициентов фильтра и возможности появления малых предельных циклов при квантовании ре-

зультатов внутренних вычислений. К тому же проектное решение в вещественных числах может быть реализовано только на специализированных сигнальных процессорах, тогда как наиболее перспективная на сегодняшний день программируемая логика и микропроцессорные контроллеры предполагают использование целочисленных решений, целочисленной арифметики вычислений.

Однако возможность прямого синтеза цифровых БИХ-фильтров со сложными селективными требованиями непосредственно в целочисленном пространстве состояний может быть предоставлена методологией целочисленного нелинейного программирования (ЦНП), общее описание которой приведено в работах [1–6]. Под пространством состояний в данном случае понимается, прежде всего, многомерное пространство целочисленных параметров (коэффициентов фильтра), входных x_n и выходных y_n сигналов — целочисленных временных последовательностей, а также базовые целочисленные операции над данными в алгоритме цифровой фильтрации. Идеология ЦНП позволяет эффективно проектировать целочисленные рекурсивные фильтры с заданной разрядностью представления данных при максимальном выполнении требований к совокупности частотных характеристик фильтра при произвольной форме их задания. Важное преимущество подобных целочисленных цифровых фильтров (ЦЦФ) заключается в отсутствии процедуры квантования как коэффициентов фильтра, так и результатов промежуточных вычислений в ходе расчета отклика фильтра в реальном времени, а следовательно, и отсутствии негативных последствий квантования данных, перечисленных выше.

Некоторые задачи синтеза рекурсивных ЦЦФ с произвольно заданными селективными требованиями приведены в [2, 7]. В настоящей же статье рассматриваются и другие характерные примеры решения задач синтеза целочисленных фильтров со сложными селективными требованиями; эти задачи выполняются компьютерным пакетом ЦНП (версии 3.1). Приведенные примеры иллюстрируют принципиальные возможности данного подхода к многофункциональному поисковому проектированию цифровых систем.

Моделирование и синтез рекурсивного ЦЦФ

Рекурсивные фильтры, являясь дискретными линейными системами с обратной связью (рекурсией), обладают значительно большими селективными возможностями по сравнению с нерекурсивными, а потому позволяют реализовать требуемые сложные формы частотных характеристик цифрового фильтра значительно меньшим порядком фильтра. Что касается структуры построения рекурсивных фильтров, то в [3, 8] дано сравнение каскадных, параллельных, прямых и волновых структур построения цифровых БИХ-фильтров и показано, что наилучшей из них является каскадная структура. Поэтому сегодня построение рекурсивных ЦЦФ в форме каскадного соединения звеньев первого или второго порядка прямой формы на практике используется наиболее часто.

Передачная функция для рекурсивного ЦЦФ, состоящего из каскадного соединения m -звеньев второго порядка ($m = N/2$), имеет следующий вид [1, 3]:

Экстремальная задача синтеза (5) записана относительно целочисленного пространства I^{6m} параметров (коэффициентов фильтра), размерностью $6m$. Ограничения (6) задают границы изменения этих целочисленных коэффициентов, а соотношение (7) определяет принадлежность коэффициентов a_{0i} биномиальному ряду. В процессе синтеза функциональные ограничения (8) контролируют условие устойчивости рекурсивного фильтра по всем полюсам коэффициента передачи в интервале до R_{\max} , а ограничения (9) масштабируют коэффициенты передачи звеньев в заданный интервал. Многофункциональное задание целевой функции наиболее часто формируется в виде взвешенной суммы (10) частных целевых функций $f_i(\mathbf{IX})$, которые определяют выполнение функциональных требований по той или иной частотной характеристике фильтра [4]:

$$F(\mathbf{IX}) = \sum_i \beta_i f_i(\mathbf{IX}). \quad (10)$$

Коэффициент β_i задает значимость (вес) характеристики (i -го частотного окна). Сами частные целевые функции $f_i(\mathbf{IX})$ формирует функциональный редактор пакета синтеза по критерию минимума среднеквадратичной ошибки

$$f_i(\mathbf{IX}) = \sqrt{\frac{1}{p} \times \sum_{n=1}^p [Y_n(\mathbf{IX}) - Y_n^T]^2}, \quad (11)$$

либо максимальной ошибки:

$$f_i(\mathbf{IX}) = \{|Y_n(\mathbf{IX}) - Y_n^T|^2\}, \quad (12)$$

где $Y_n(\mathbf{IX})$ — текущее значение характеристики фильтра на n -й дискретной частоте диапазона определения, а Y_n^T — требуемое значение частотной характеристики.

Поисковое итеративное решение экстремальной задачи ЦНП (5) в заданном пространстве параметров осуществляет программный алгоритмический комплекс [4, 11], обращаясь к модельному блоку программы для расчета текущих функциональных характеристик фильтра. Вектор \mathbf{IX}° , минимизирующий скалярную целевую функцию $F(\mathbf{IX})$ на множестве допустимых целочисленных решений (6), является эффективным решением задачи параметрического ЦНП-синтеза рекурсивного ЦЦФ.

Следует отметить, что в отличие от аналитического расчета по известным классическим алгоритмам поисковое проектирование цифрового фильтра является, безусловно, интеллектуальным процессом, интеллектуальным проектированием. Множество сценариев решения сложной проектной задачи может быть предложено, много специфических приемов и навыков может быть применено опытным проектировщиком-поисковиком для успешного решения сложной задачи.

Типовым сценарием поискового проектирования каскадных ЦЦФ считается сценарий

в стиле динамического программирования, то есть как последовательность поисковых задач с поэтапным повышением порядка проектируемого фильтра. На первом, стартовом этапе используют структуру низкого порядка — обычно это звено 2-го или 4-го порядка, не выше. Естественно, выполнение совокупных требований таким фильтром будет низкое. При этом на данном этапе рекомендуется использовать в компьютерном пакете ЦНП модель поиска с более высокой (сложной) стратегией, что понижает вероятность пропуска глобального экстремума. На втором этапе уже данное решение используется в качестве исходного решения. Порядок фильтра при этом повышают путем дублирования найденных ранее коэффициентов звена (что в пакете синтеза может делаться автоматически). После нескольких подобных итераций и определяется итоговый порядок проектируемого фильтра, при котором погрешность выполнения сложных совокупных требований лежит в пределах заданного допуска.

Фильтр нижних частот с линейной фазой

В целочисленном пространстве параметров методом ЦНП рекурсивные фильтры нижних частот (ФНЧ) с линейной ФЧХ синтезируются относительно просто. Можно отметить, что в данном случае речь идет, прежде всего, об обеспечении технической линейности фазочастотной характеристики, когда допустимая нелинейность фазы в полосе пропускания фильтра не превышает $2-3^\circ$, что является совершенно приемлемым для абсолютного большинства технических приложений, хотя повышением порядка фильтра обычно может быть получена и значительно меньшая фазовая нелинейность в заданной полосе частот.

В работах [2, 12] приведено решение задач синтеза рекурсивных ФНЧ относительно низкого порядка. В данном же разделе рассматривается пример синтеза малоразрядного ФНЧ высокого порядка с достаточно сложными требованиями по амплитудной селективности и фазовой линейности: в полосе пропускания 0–490 Гц с коэффициентом передачи $K = 1$ (0 дБ) и допуском $\pm 0,5$ дБ нелинейность ФЧХ не должна превышать 2° при высоком внеполосном подавлении сигнала (-40 дБ) и заданной ширине переходной зоны при частоте дискретизации 2 кГц.

Целевая функция при синтезе рекурсивного ФНЧ с линейной фазой наиболее часто формируется в виде взвешенной суммы частных целевых функций $f_{\text{АЧХ}}(\mathbf{IX})$ и $f_{\text{ФЧХ}}(\mathbf{IX})$, обеспечивающих соответственно выполнение требований как к амплитудной селективности фильтра и к линейности его фазы

$$F(\mathbf{IX}) = \beta_1 f_{\text{АЧХ}}(\mathbf{IX}) + \beta_2 f_{\text{ФЧХ}}(\mathbf{IX}), \quad (13)$$

$$f_{\text{ФЧХ}}(\mathbf{IX}) = \Delta\varphi_{\max} = \max|\varphi(\mathbf{IX}) - \varphi^L|, \quad (14)$$

где φ^L — требуемая линейная ФЧХ фильтра нижних частот, а функций $f_{\text{АЧХ}}(\mathbf{IX})$ определяется соотношением (11).

Относительно целевой функции (13) задача дискретного целочисленного программирования для синтеза ФНЧ в форме каскадного соединения восьми звеньев 2-го порядка прямой формы с разрядностью представления данных $W_k = 8$ бит записывается так:

$$F^\circ(\mathbf{IX}^\circ) = \min F(\mathbf{IX}) \quad \mathbf{IX} \in I^{40}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} -127 \leq a_{di} \leq 127 & \quad d = \overline{1,2} \quad i = \overline{1,8} \\ -127 \leq b_{di} \leq 127 & \quad d = \overline{1,2} \quad i = \overline{1,8}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$a_{0i} = 128 \quad i = \overline{1,8}, \quad (17)$$

$$|Z_{pj}| < 0,98. \quad (18)$$

Таким образом, минимизация целевого функционала осуществлялась на 40-мерном целочисленном пространстве параметров в допустимой области (16) при фиксированных нормирующих коэффициентах (17) и выполнении функциональных ограничений (18) устойчивости рекурсивного ЦЦФ по всем полюсам коэффициента передачи с радиусами, не превышающими $R_{\max} = 0,98$ в z -плоскости.

Для ввода структуры ФНЧ в программу используем встроенный топологический редактор ЦНП-пакета (рис. 2), позволяющий сформировать файл исходных данных к решению конкретной задачи синтеза с указанием числа варьируемых коэффициентов, их начальных значений и границ изменения, а также возможного их дублирования в случае необходимости.

Как видно, исходная стартовая точка синтеза ФВЧ в данном случае выбрана произвольно, то есть никак не является неким прототипом искомого технического решения, что и характерно для модельных поисковых алгоритмов целочисленной минимизации.

В таблице 1 приведены оптимальные значения целочисленных 8-битовых коэффициентов передаточной функции по синтезу с одинаковой значимостью ($\beta_1 = \beta_2$) требований к АЧХ и ФЧХ проектируемого фильтра, а графики его частотных характеристик представлены на рис. 3. Максимальный радиус полюсов передаточной функции при этом был равен $R_{\max} = 0,92$.

Таблица 1. Оптимальные коэффициенты целочисленного ФНЧ

Звено фильтра	Коэффициенты передаточной функции фильтра					
	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
1	128	-64	37	124	89	14
2	128	-124	53	-7	12	-20
3	128	-95	9	16	-44	-127
4	128	-2	0	-113	-94	-120
5	128	-48	68	-25	56	97
6	128	-53	0	27	-1	-127
7	128	-40	2	-12	45	61
8	128	-2	109	14	1	-127

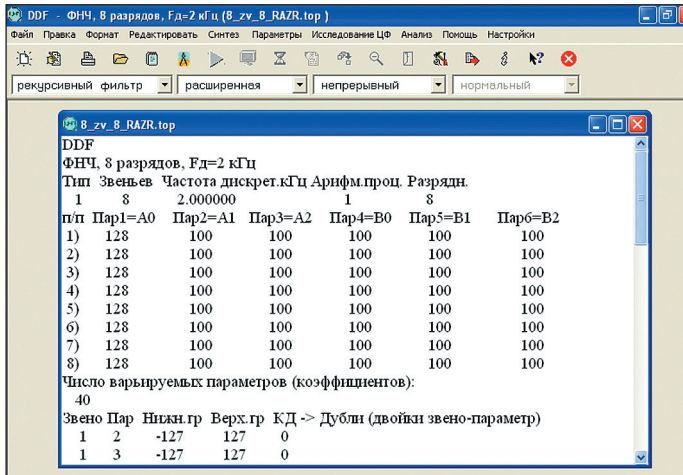


Рис. 2. Формирование файла исходных данных в топологическом редакторе

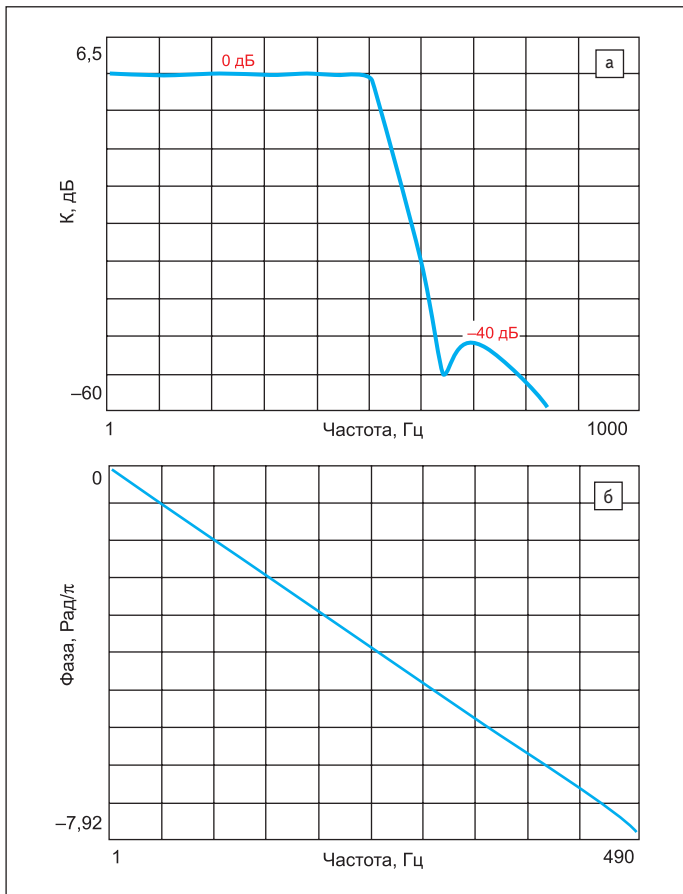


Рис. 3. Характеристики ФНЧ по синтезу: а) АЧХ; б) ФЧХ в полосе пропускания

Практическая реализация ФНЧ осуществлялась на многофункциональном микроконтроллере MSP430F1611 фирмы Texas Instruments [13] с целочисленным RISC-ядром. Особенности данного микроконтроллера являются его низкое энергопотребление, невысокая стоимость, а также возможность вычислений только в формате с фиксированной точкой. Результаты измерения частотных характеристик фильтра на всем интервале Найквиста для частоты дискретизации 2 кГц приведены на рис. 4.

Все требования по функциональным характеристикам рекурсивного целочисленного ФНЧ были выполнены с хорошей точностью. При этом фазовые искажения $\Delta\phi(\omega)$ в полосе пропускания фильтра не превышали 2° .

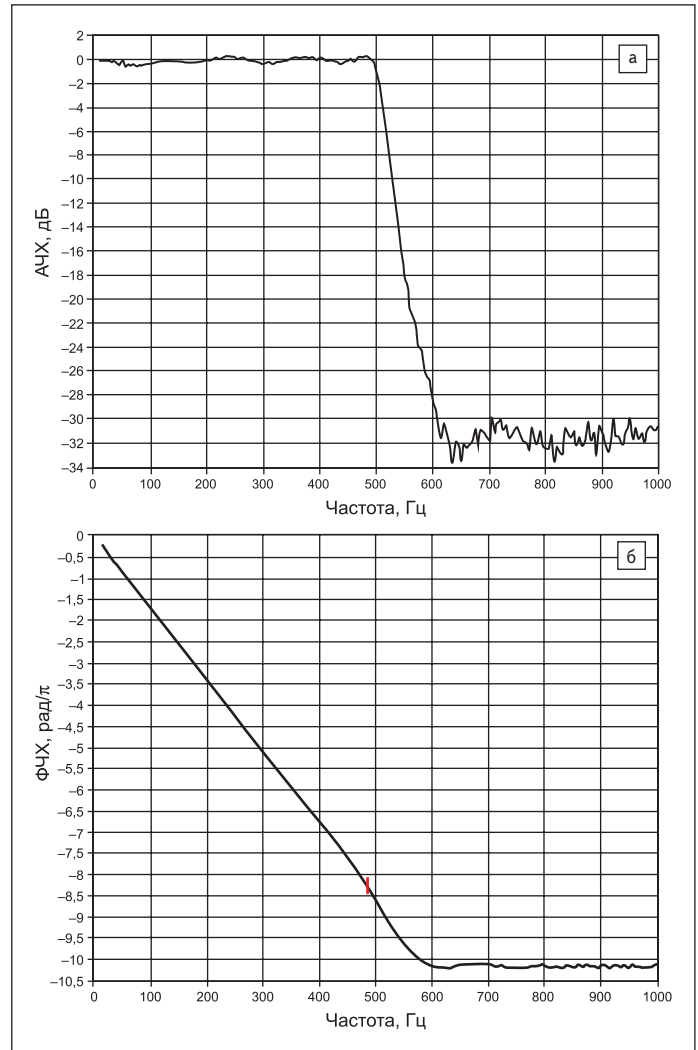


Рис. 4. Экспериментальные измерения: а) АЧХ; б) ФЧХ 8-битового ФНЧ

Переходная $g(t)$ - и импульсная $h(t)$ -характеристики данного фильтра в ЦНП-пакете рассчитывались применением обратного дискретного преобразования Фурье (рис. 5).

Фильтр верхних частот с линейной фазой

При синтезе рекурсивного ФВЧ с линейной в полосе пропускания фазой целевая функция также формировалась по соотношениям (13, 14) в виде взвешенной суммы частных целевых функций $f_{\text{АЧХ}}(\mathbf{IX})$ и $f_{\text{ФЧХ}}(\mathbf{IX})$, обеспечивающих соответственно выполнение требований как к амплитудной селекции фильтра, так и к линейности его фазы. Графики требуемых АЧХ и ФЧХ приведены на рис. 6 (выделены красным цветом).

Относительно целевой функции задача дискретного целочисленного программирования для синтеза рекурсивного ФВЧ в форме каскадного соединения пяти звеньев 2-го порядка прямой формы с разрядностью представления данных $W_k = 10$ бит записывается так:

$$F^\circ(\mathbf{IX}^\circ) = \min F(\mathbf{IX}) \quad \mathbf{IX} \in I^{25}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} -511 \leq a_{di} \leq 511 & \quad d = \overline{1,2} \quad i = \overline{1,5} \\ -511 \leq b_{di} \leq 511 & \quad d = \overline{1,2} \quad i = \overline{1,5}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$a_{0i} = 512 \quad i = \overline{1,5}, \quad (21)$$

$$|Z_{pj}| < 0,98, \quad (22)$$

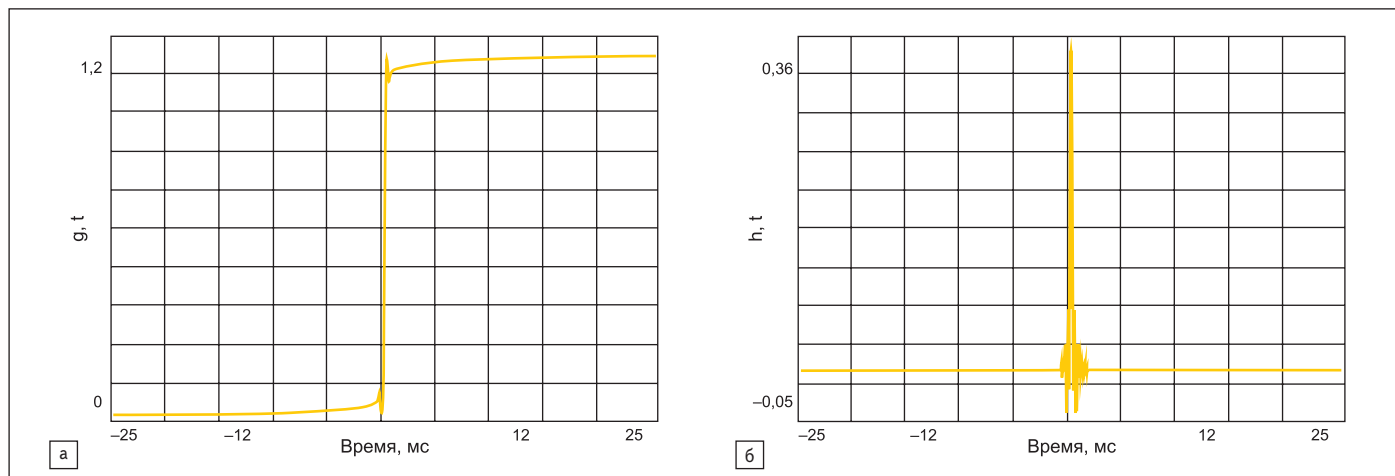


Рис. 5. Характеристики фильтра: а) переходная; б) импульсная

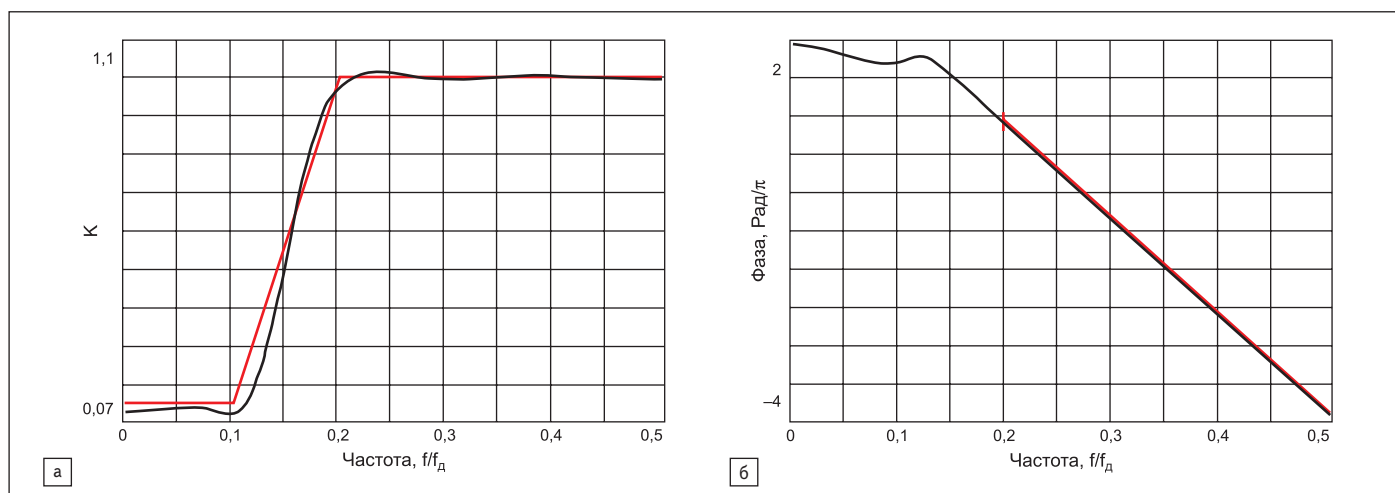


Рис. 6. Характеристики ФВЧ по синтезу: а) АЧХ; б) ФЧХ

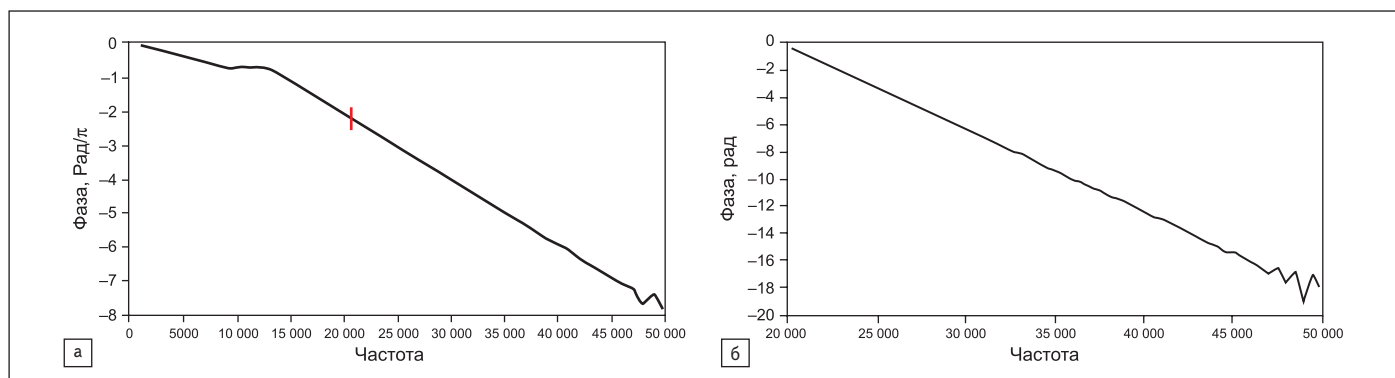


Рис. 7. Экспериментальные измерения ФЧХ: а) на всем интервале Найквиста; б) только в полосе пропускания фильтра

$$1 \leq |K_i(e^{j\omega})| \leq 3 \quad i = \overline{1,5}. \quad (23)$$

Таким образом, минимизация целевого функционала осуществлялась на 25-мерном целочисленном пространстве параметров в допустимой области (20) при фиксированных нормирующих коэффициентах (21) и выполнении функциональных ограничений устойчивости (22) рекурсивного ЦЦФ по всем полюсам коэффициента

передачи с радиусами, не превышающими $R_{\max} = 0,98$. Ограничения (23) масштабировали коэффициенты передачи пяти каскадов фильтра в заданный интервал.

В таблице 2 приведены оптимальные значения целочисленных 10-битовых коэффициентов передаточной функции ФВЧ, а также достигнутые значения коэффициентов усиления его звеньев. АЧХ и ФЧХ фильтра по синтезу представлены на рис. 6. Время

Таблица 2. Оптимальные коэффициенты целочисленного ФВЧ

Звено фильтра	Коэффициенты передаточной функции фильтра					Усиление звена K_{\max}
	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2	
1	225	56	18	8	89	1,14
2	130	60	-130	183	-105	2,25
3	-207	144	35	254	-142	2,61
4	-30	71	-36	-187	-387	2,44
5	-202	66	122	392	-249	2,93

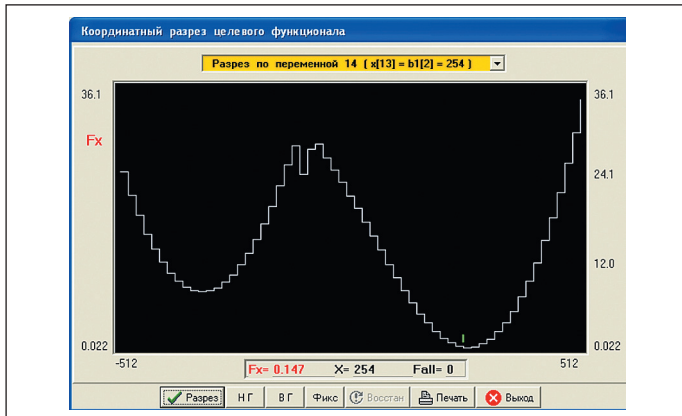
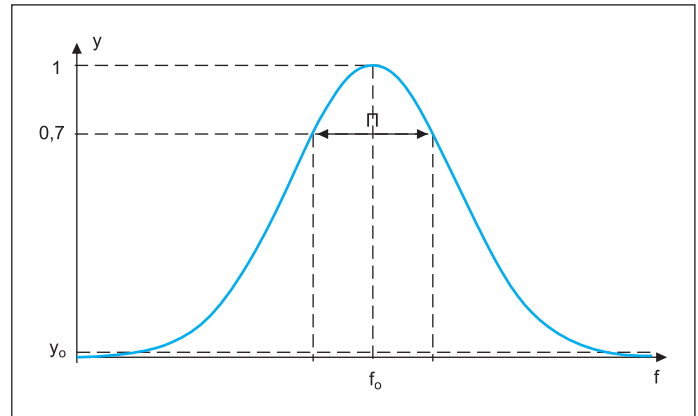
Рис. 8. Разрез целевой функции по параметру b_1 третьего звена

Рис. 9. Гауссова характеристика фильтра

решения данной задачи на стандартном персональном компьютере не превышало 10 мин.

В качестве цифровой платформы для аппаратной реализации синтезированного ФВЧ была выбрана программируемая логическая схема Spartan 3AN FPGA фирмы Xilinx. Программирование осуществлялось на языке VHDL под заданную структуру фильтра и найденные целочисленные коэффициенты ее звеньев (табл. 2).

Измерение частотных характеристик фильтра осуществляется на реальном сигнале с помощью автоматизированной панорамной измерительной системы, разработанной в среде виртуальных приборов LabVIEW. Экспериментальные графики ФЧХ фильтра для частоты дискретизации 100 кГц приведены на рис. 7. Поскольку выходной сигнал снимался непосредственно с цифро-аналогового преобразователя, наблюдается возрастание шумов измерения вблизи частоты Найквиста, где эффекты квантования наиболее выражены.

Как видно из приведенных графиков, требования по функциональным характеристикам рекурсивного целочисленного ФВЧ были выполнены с высокой точностью. Фазовые искажения $\Delta\phi(\omega)$ в полосе пропускания фильтра не превышали 3° .

Исследование целевой функции в точке целочисленного оптимума (рис. 8) показывает ее сложный, полимодальный характер. Однако дискретная минимизация данной функции с помощью глобального алгоритма направленного сканирования на сетке кода Грея [4, 11] позволила применением модельной стратегии поиска эффективно и надежно решать подобную задачу, также не имея практически никакого начального приближения (прототипа).

Узкополосный гауссов фильтр

Фильтры специальной формы частотных характеристик широко используются в современной радиоэлектронной аппаратуре. К таким устройствам в первую очередь

можно отнести гауссовы фильтры, амплитудно-частотная характеристика которых близка к гауссовой кривой [14, 15].

Нормированная резонансная характеристика для гауссовой кривой (рис. 9) определяется следующим образом:

$$y(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{\alpha}}, \quad (24)$$

где $\xi = f - f_0$ — абсолютная расстройка от резонансной частоты, а параметр α определяет нормированную полосу пропускания гауссовой кривой:

$$\alpha = n^2 / (4 \ln \sqrt{2}),$$

здесь n — абсолютная полоса пропускания по уровню 0,7.

Как известно, фильтры с гауссовой характеристикой имеют самое короткое из возможных время установления колебаний при отсутствии выбросов за фронтом. Это главное достоинство гауссовых фильтров широко используется в современной радиоэлектронике, как аналоговой, так и цифровой. Если же говорить о принципах построения цифровых гауссовых фильтров, то из общей теории электрических фильтров известно, что при каскадном (последовательном) соединении m звеньев 2-го порядка (цифровых резонаторов) АЧХ системы стремится к гауссовой кривой [14].

Формально для оценки степени близости текущей АЧХ фильтра к гауссовой кривой удобно использовать среднеквадратичная погрешность σ в полосе пропускания фильтра по заданному уровню (уровень y_0 на рис. 9):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{p} \times \sum_{i=1}^p [y(\xi_i) - y^r(\xi_i)]^2}, \quad (25)$$

где $y(\xi_i)$ — текущее значение характеристики в i -й дискретной точке определения, а $y^r(\xi_i)$ — значение идеальной гауссовой характеристики в этой точке.

Конкретная задача дискретного целочисленного программирования для синтеза узкополосного рекурсивного гауссова фильтра с центральной частотой 700 Гц и относитель-

ной полосой пропускания 1,4% (частота дискретизации $F_s = 2$ кГц) в форме каскадного соединения восьми звеньев второго порядка с разрядностью представления данных $W_k = 10$ бит выглядит так:

$$F^o(\mathbf{IX}^o) = \min F(\mathbf{IX}) \quad \mathbf{IX} \in I^{40}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} -511 \leq a_{di} \leq 511 & \quad d = \overline{1,2} \quad i = \overline{1,8} \\ -511 \leq b_{di} \leq 511 & \quad d = \overline{1,2} \quad i = \overline{1,8}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} a_{0i} &= 512 \quad i = \overline{1,8}, \\ |Z_{pj}| &< 0,98, \\ 0,8 \leq |K_i(e^{j\omega})| &\leq 4 \quad i = \overline{1,8}. \end{aligned} \quad (28)$$

Вектор \mathbf{IX}^o , минимизирующий скалярную целевую функцию $F(\mathbf{IX})$ на множестве допустимых целочисленных решений (27), является эффективным решением задачи параметрического синтеза рекурсивного гауссова фильтра. Специфика задачи в данном случае заключалась в необходимости контроля всего главного интервала цифровых частот гауссова фильтра, так как при поисковом решении задачи синтеза (26) возможно появление боковых лепестков АЧХ фильтра, уровень которых должен быть минимален. Поэтому целевой функционал данной задачи формировался в виде аддитивной свертки (29) четырех частных целевых функций $f_i(\mathbf{IX})$, которые определяли ту или иную область АЧХ гауссова фильтра:

$$F(\mathbf{IX}) = \beta_1 f_1(\mathbf{IX}) + \beta_2 f_2(\mathbf{IX}) + \beta_3 f_3(\mathbf{IX}). \quad (29)$$

Здесь:

- частная целевая функция $f_1(\mathbf{IX})$ с весом $\beta_1 = 1$ формировала зону основного гауссова лепестка фильтра, рассчитанного по соотношению (24) для заданной полосы пропускания фильтра, и определялась среднеквадратичной ошибкой (25) отклонения текущей АЧХ фильтра от идеальной гауссовой АЧХ. Таким образом, данное частотное окно контролировало основной гауссов лепесток в интервале уровня $y_0 = 0,01$ (–40 дБ) подавления побочных лепестков (рис. 9);

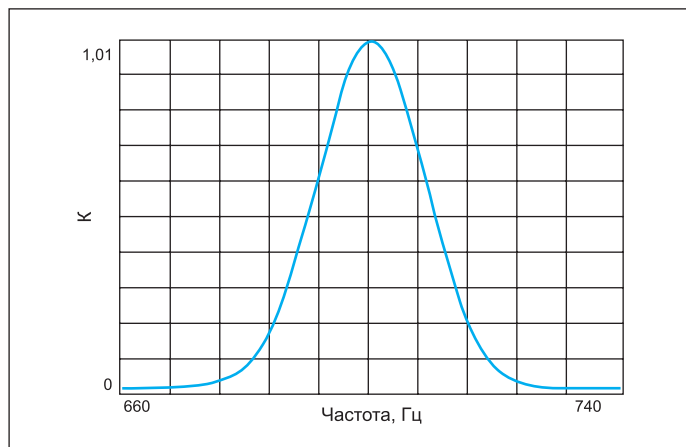


Рис. 10. АЧХ гауссова фильтра по синтезу

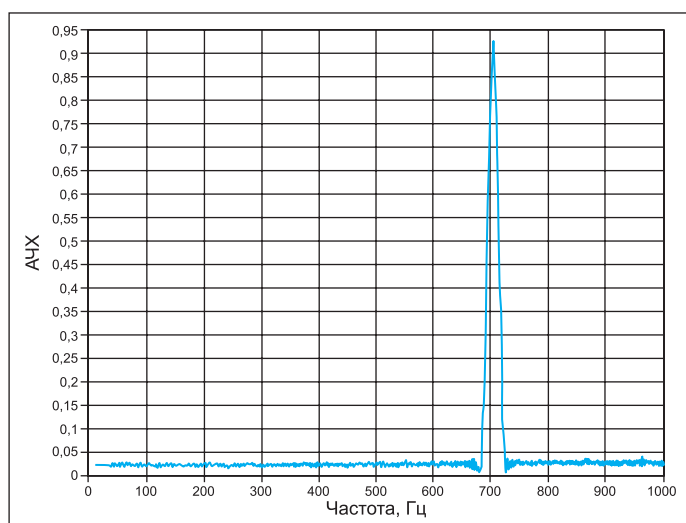


Рис. 11. Измерение АЧХ фильтра на всем интервале Найквиста

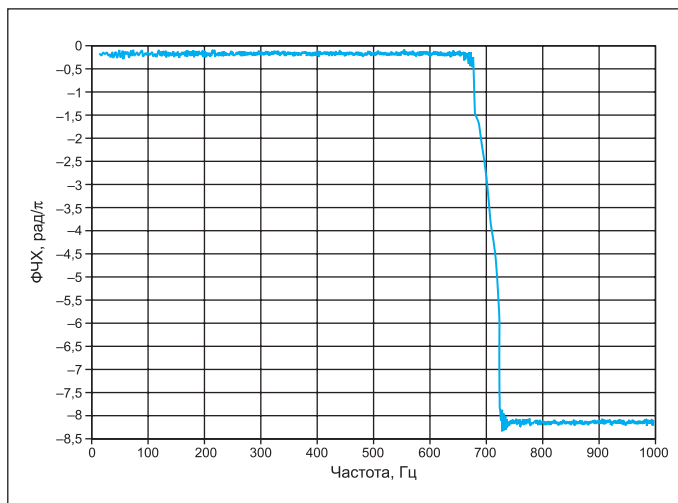


Рис. 13. Измерение ФЧХ фильтра на интервале Найквиста

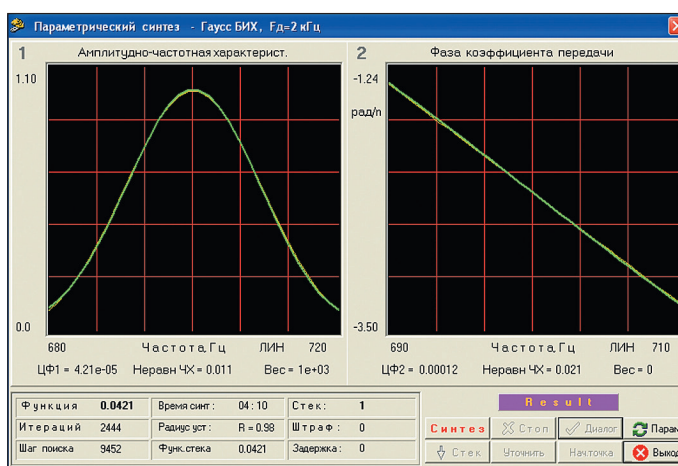


Рис. 14. Панель синтеза гауссова фильтра в точке целочисленного оптимума

- частная целевая функция $f_2(IX)$ с весом $\beta_1 = 0,2$ определяла внеполосное (вне гауссова лепестка) подавление побочных лепестков на интервале цифровых частот ниже гауссова лепестка;
- частная целевая функция $f_3(IX)$ с весом $\beta_1 = 0,2$ определяла внеполосное подавление побочных лепестков по уровню y_0 на интервале цифровых частот выше основного гауссова лепестка вплоть до частоты Найквиста.

Указанные характеристики графически вводились в соответствующее окно функционального редактора пакета ЦНП-синтеза и затем оцифровывались. Время решения экстремальной задачи (26) на стандартном персональном компьютере не превышало 5 мин при полном выполнении условий устойчивости работы гауссова фильтра.

В таблице 3 приведены оптимальные значения целочисленных 10-битовых коэффициентов передаточной функции узкополосного гауссова фильтра, а также максимальные значения коэффициентов усиления его звеньев. На рис. 10 представлен график его АЧХ по синтезу, а на рис. 11–13 — экспериментальное из-

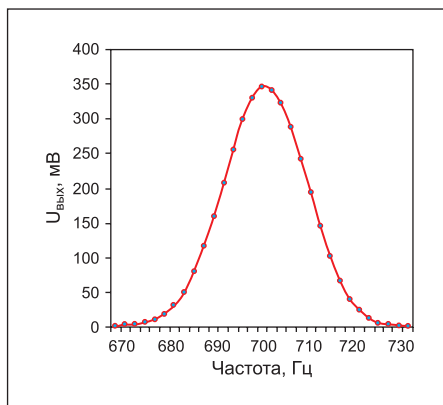


Рис. 12. Измерение АЧХ фильтра в полосе центральной частоты (700 Гц)

мерение характеристик гауссова фильтра, реализованного на МК MSP430F1611. Состояние панели синтеза программы в точке целочисленного оптимума (табл. 3) показано на рис. 14.

Как видно из рисунков, все требования по функциональным показателям и характеристикам узкополосного гауссова фильтра выполнены с высокой точностью, а средне-

Таблица 3. Оптимальные коэффициенты узкополосного гауссова фильтра

Звено фильтра	Коэффициенты передаточной функции фильтра					Усиление звена K_max
	a ₁	a ₂	b ₀	b ₁	b ₂	
1	285	119	298	420	270	1,64
2	48	26	-102	-241	0	1,13
3	267	202	191	253	192	1,04
4	301	238	39	12	-5	2,5
5	310	241	-49	-9	-26	3,42
6	276	244	-30	-12	-26	1,92
7	294	240	-29	-24	-30	0,86
8	386	242	-27	-22	-29	0,9

квадратичная ошибка (СКО) реализации гауссовой формы АЧХ была минимальной (СКО = 0,012).

Двухполосный гауссов фильтр с кратными частотами резонанса

Методология ЦНП позволяет эффективно решать и задачи синтеза многополосных гауссовых ЦЦФ с заданным соотношением центральных резонансных частот. Такие фильтры находят широкое применение в цифровой ра-

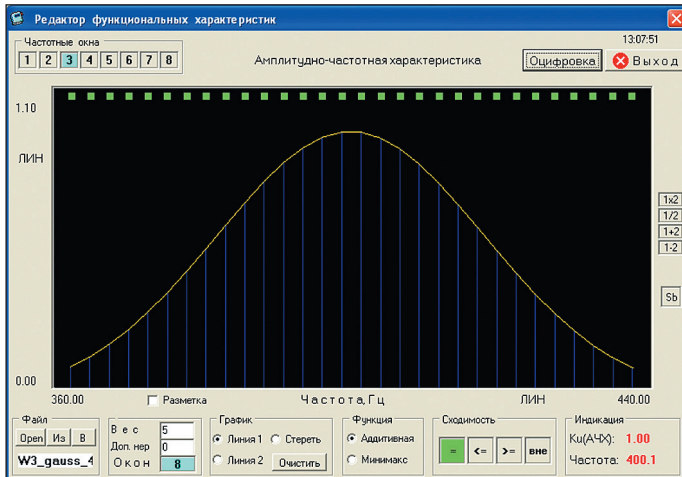


Рис. 15. Ввод требуемой гауссовой характеристики в полосу первого резонанса (400 Гц)

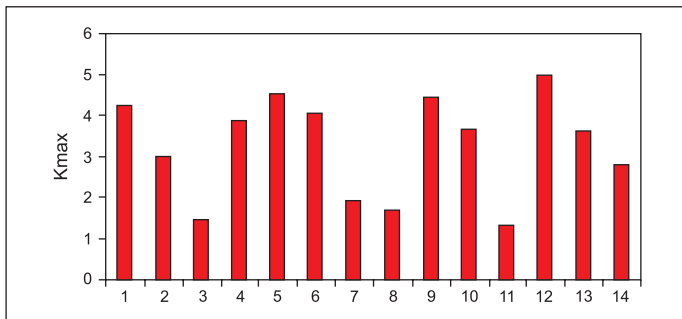


Рис. 16. Распределение усиления по звеньям фильтра

диоэлектронике, например в цифровых системах кодирования и криптозащиты. Ниже, в качестве примера, рассмотрена задача синтеза двухполосного гауссова ЦЦФ с кратным соотношением резонансных частот при фиксированной ширине полосы пропускания гауссовой АЧХ.

Общая постановка задачи ЦНП-синтеза такого фильтра практически ничем не отличалась от приведенной выше задачи синтеза однополосного гауссова ЦЦФ за исключением более высокого порядка синтезируемого фильтра и более сложного целевого функционала, который в данном случае формировался функциональным редактором в виде взвешенной суммы уже пяти частных целевых функций:

$$F(\mathbf{IX}) = \beta_1 f_1(\mathbf{IX}) + \beta_2 f_2(\mathbf{IX}) + \beta_3 f_3(\mathbf{IX}) + \beta_4 f_4(\mathbf{IX}) + \beta_5 f_5(\mathbf{IX}), \quad (30)$$

- частная целевая функция $f_1(\mathbf{IX})$ с весом $\beta_1 = 0,2$ определяла внеполосное (вне гауссова лепестка) подавление побочных лепестков АЧХ по уровню 0,01 (–40 дБ) на интервале цифровых частот ниже первого гауссова лепестка;
- частная целевая функция $f_2(\mathbf{IX})$ с весом $\beta_2 = 1$ формировала зону первого гауссова лепестка фильтра с центральной частотой 400 Гц, рассчитанного по соотношению (24) для заданной полосы пропускания 30 Гц, и определялась среднеквадратичной ошибкой (25) отклонения текущей АЧХ фильтра от идеальной гауссовой АЧХ в данном частотном диапазоне;
- частная целевая функция $f_3(\mathbf{IX})$ с весом $\beta_3 = 0,2$ определяла внеполосное подавление побочных лепестков АЧХ по уровню 0,01 (–40 дБ) на интервале между центральными частотами гауссовых АЧХ;
- частная целевая функция $f_4(\mathbf{IX})$ с весом $\beta_4 = 1$ формировала зону второго гауссова лепестка фильтра с центральной частотой 800 Гц и такой же полосой пропускания 30 Гц (рис. 16а);
- частная целевая функция $f_5(\mathbf{IX})$ с весом $\beta_5 = 0,2$ определяла внеполосное подавление побочных лепестков по уровню y_0 на интервале цифровых частот выше второго гауссова лепестка вплоть до частоты Найквиста.

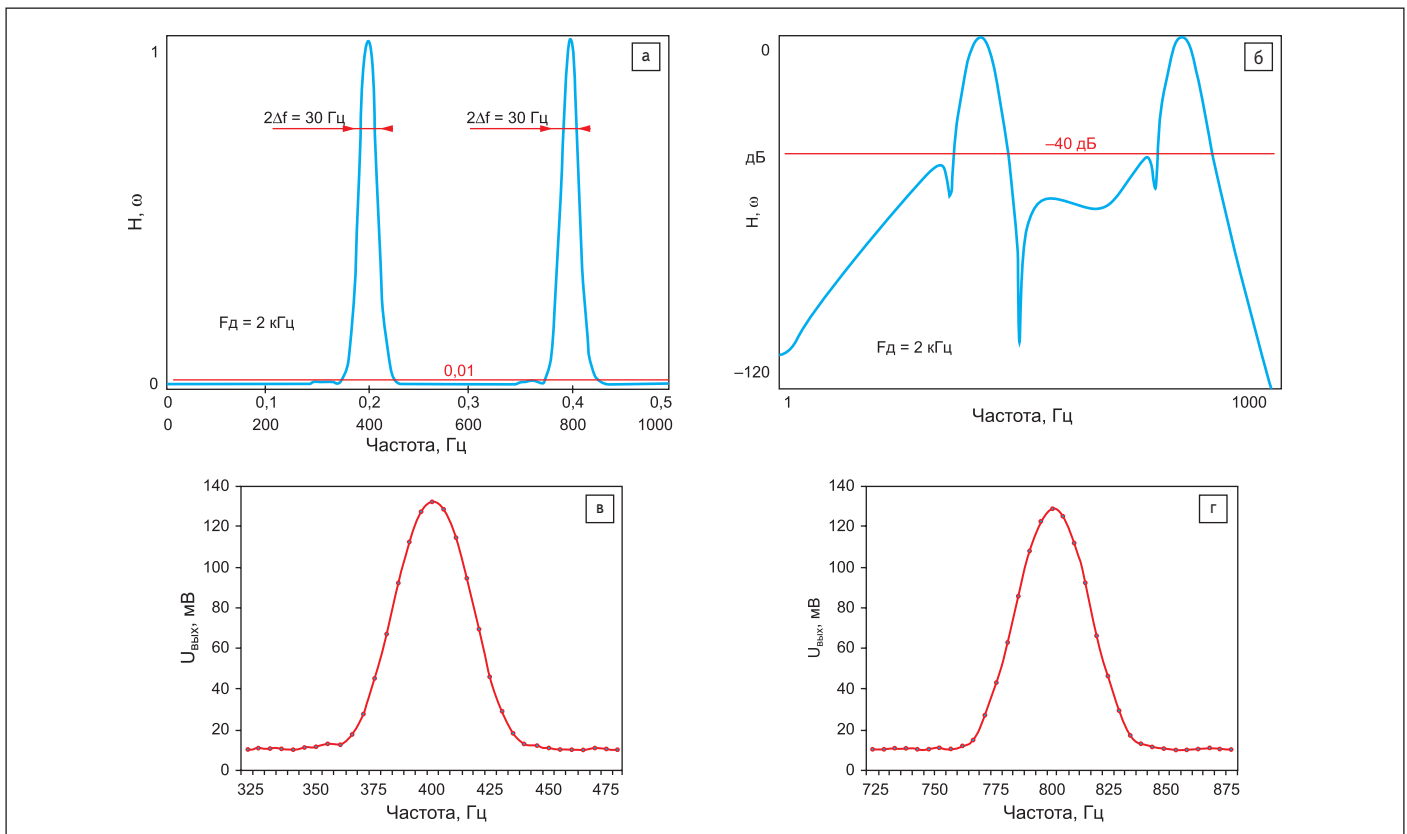


Рис. 17. а) АЧХ фильтра на интервале Найквиста; б) АЧХ фильтра (дБ); в) измерение АЧХ фильтра в полосе первого резонанса (400 Гц); г) измерение АЧХ фильтра в полосе второго резонанса (800 Гц)

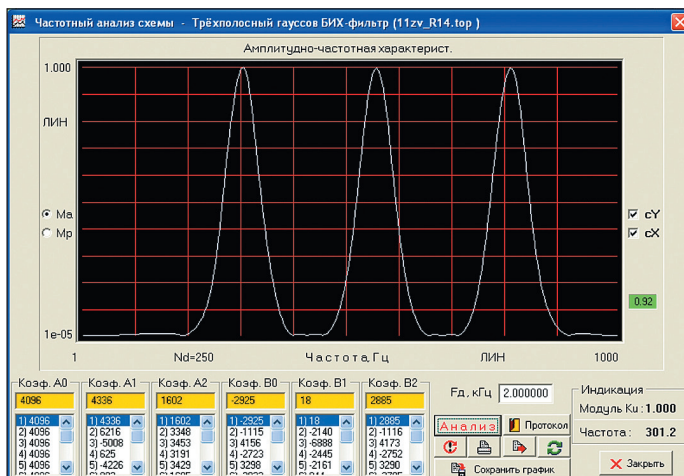


Рис. 18. Исследование АЧХ трехполосного гауссова фильтра

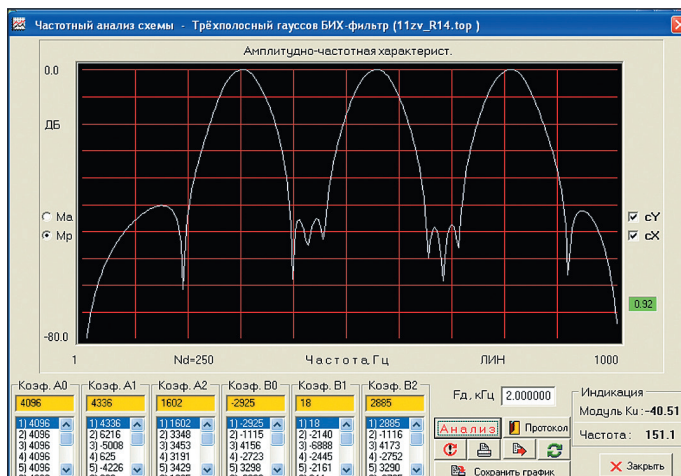


Рис. 19. АЧХ трехполосного гауссова фильтра (дБ)

Таблица 4. Оптимальные коэффициенты двухполосного фильтра

Звено фильтра	Коэффициенты передаточной функции фильтра					Усиление звена Kmax
	a ₁	a ₂	b ₀	b ₁	b ₂	
1	1397	790	-550	-6	426	4,21
2	-705	916	1171	-1126	1167	2,97
3	138	30	-843	-43	606	1,46
4	-499	874	0	-443	-247	3,88
5	-577	842	147	-128	-624	4,52
6	1607	897	378	239	223	4,03
7	-483	871	698	-98	703	1,92
8	-155	26	-465	-648	-463	1,7
9	-575	731	-549	33	751	4,45
10	1452	836	-515	-562	-708	3,65
11	-178	367	-853	111	-853	1,3
12	1586	869	-597	-336	176	4,99
13	1443	847	-598	-452	50	3,67
14	1422	813	-593	-445	-8	2,78

Указанные характеристики графически вводились в соответствующее окно функционального редактора пакета ЦНП и затем оцифровывались (пример на рис. 15).

Время решения задачи синтеза по целевому функционалу (30) не превышало 30 мин при полном выполнении условий устойчивости работы двухполосного гауссова фильтра и требуемом уровне масштабирования сигнала.

В таблице 4 приведены оптимальные значения целочисленных 12-битовых коэффициентов передаточной функции фильтра (нормирующие коэффициенты всех звеньев были одинаковы $a_{0i} = 1024$). Максимальные значения коэффициентов усиления отдельных его звеньев отображены на рис. 16. На рис. 17а,б приведены графики АЧХ по синтезу, а на рис. 17в,г — экспериментальное измерение резонансных кривых фильтра, реализованного на МК MSP430F1611 при частоте дискретизации 2 кГц.

В таблице 5 приведены функциональные показатели синтезированного двухполосного гауссова ЦЦФ по результатам компьютерного синтеза и экспериментальных измерений.

Как видно из рисунков и таблицы, все требования по функциональным показателям и характеристикам двухполосного гауссова

Таблица 5. Функциональные показатели двухполосного фильтра

Функциональные показатели фильтра	Синтез на ЭВМ	Измерение
Частота первого резонанса, Гц	400	400
Частота второго резонанса, Гц	800	800
Полоса пропускания, Гц	30	32
СКО выполнения гауссовой кривой	≤0,01	0,008
Уровень подавления боковых лепестков АЧХ не менее, дБ	-40	-42
Коэффициент передачи	1	0,98
Разрядность представления данных, бит	12	12
Фазовые искажения в полосе, °	≤2	≤2
Порядок рекурсивного ЦНП-фильтра	28	28

фильтра были выполнены с высокой точностью, а ошибка реализации гауссовой формы АЧХ была минимальной (СКО = 0,008).

Следует также заметить, что в интервале Найквиста ЦНП-синтезом можно поставить и большее число гауссовых кривых (резонансов). На рис. 18, в качестве примера показано исследование в модуле анализа программы АЧХ гребенчатого трехполосного гауссова БИХ-фильтра 22-го порядка с разрядностью представления данных 14 бит и подавлением боковых лепестков на уровне не хуже -40 дБ (рис. 19).

Полосовой фильтр тракта УПЧИ телеприемника

Еще один характерный пример селективных фильтров специальной формы частотной характеристики — цифровой рекурсивный фильтр тракта усиления промежуточной частоты изображения (УПЧИ) телеприемника. АЧХ такого фильтра, как известно, имеет сложную форму (рис. 20а) с горизонтальной площадкой по уровню 0,1 под несущую частоту звукового сопровождения и линейным высокочастотным склоном в области несущей частоты изображения [16, 17].

При синтезе целочисленного рекурсивного фильтра тракта УПЧИ в пакете ЦНП 3.1 применялась естественная фрагментация данной АЧХ в четыре частотные окна функ-

ционального редактора. Это необходимо для качественной оцифровки и реализации требуемой формы характеристики в области несущей звука, полосы пропускания, линейного высокочастотного склона и обеспечения нужного уровня подавления в области частоты Найквиста. Целевой функционал в данном случае имел следующий вид:

$$F(\mathbf{IX}) = \beta_1 f_1(\mathbf{IX}) + \beta_2 f_2(\mathbf{IX}) + \beta_3 f_3(\mathbf{IX}) + \beta_4 f_4(\mathbf{IX}). \quad (31)$$

Весовые коэффициенты оконных целевых функций определялись практически в ходе поэтапного решения следующей экстремальной задачи целочисленного программирования:

$$F^*(\mathbf{IX}^0) = \min F(\mathbf{IX}) \quad \mathbf{IX} \in I^{60}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} -2047 \leq a_{di} \leq 2047 & \quad d = \overline{1,2} \quad i = \overline{1,12} \\ -2047 \leq b_{di} \leq 2047 & \quad d = \overline{1,2} \quad i = \overline{1,12}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} a_{0i} &= 1024 \quad i = \overline{1,12}, \\ |Z_{pi}| &< 0,98, \end{aligned} \quad (34)$$

$$0,8 \leq |K_i(e^{j\omega})| \leq 6 \quad i = \overline{1,12}. \quad (35)$$

Таким образом синтезировался рекурсивный ЦЦФ 24-го порядка в форме каскадного соединения 12 звеньев 2-го порядка с разрядностью представления данных $W_k = 12$ бит при частоте дискретизации 75 МГц. Минимизация целевого функционала (31) осуществлялась на 60-мерном целочисленном пространстве параметров в допустимой области (33) при фиксированных нормирующих коэффициентах и выполнении функциональных ограничений устойчивости фильтра (34) и масштабирования (35) максимальных значений коэффициентов усиления звеньев в заданный интервал. Вектор \mathbf{IX}^0 , минимизирующий скалярную целевую функцию, является эффективным решением задачи синтеза рекурсивного фильтра тракта УПЧИ. График АЧХ синтезированно-

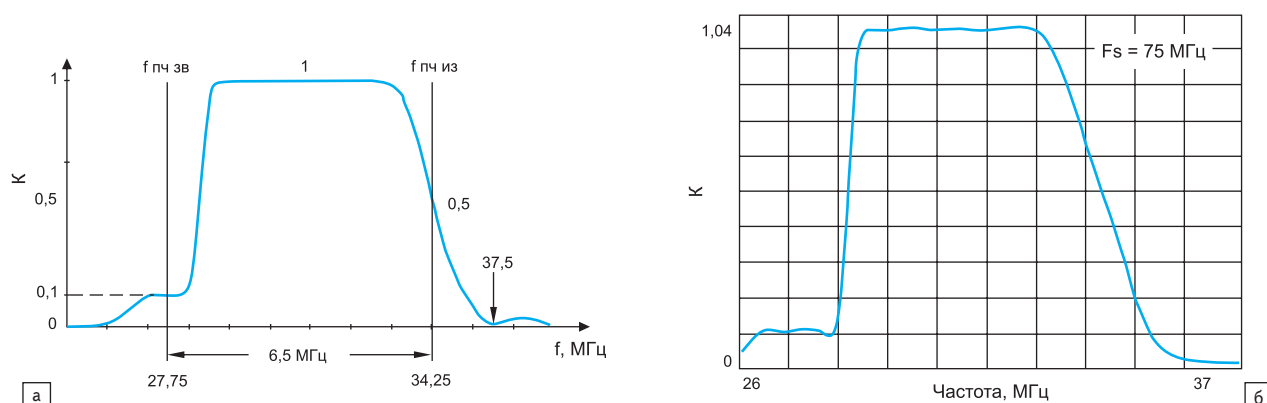


Рис. 20. а) Требуемая характеристика фильтра; б) АЧХ фильтра УПЧИ по синтезу

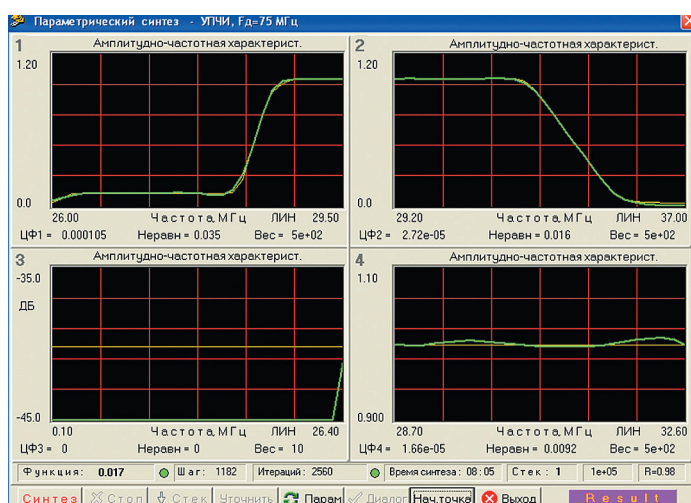


Рис. 21. Панель синтеза фильтра в точке целочисленного оптимума

Таблица 6. Оптимальные коэффициенты рекурсивного УПЧИ

Звено фильтра	Коэффициенты передаточной функции фильтра					Усиление звена Kmax
	a ₁	a ₂	b ₀	b ₁	b ₂	
1	1374	822	-255	136	414	3,31
2	1734	844	234	325	228	1,68
3	1460	980	306	206	182	5,71
4	891	285	485	139	16	0,87
5	1876	914	-203	-92	97	2,75
6	1019	401	-588	-277	316	1,46
7	1193	974	286	216	196	2,54
8	833	329	-683	-155	336	1,47
9	1103	466	483	-227	258	2,64
10	960	330	68	-37	261	0,93
11	1187	458	704	181	-75	1,79
12	1155	503	642	227	-226	1,69

Необходимый уровень масштабирования усиления подтверждают приведенные в таблице 6 максимальные значения коэффициентов усиления каскадов. Все коэффициенты усиления звеньев находятся в поле заданного интервала.

Заключение

Поисковые методы целочисленного нелинейного программирования в приложении к задачам синтеза линейных цифровых фильтров со сложными селективными требованиями

го фильтра приведен на рис. 20б, а в таблице 6 представлены оптимальные значения целочисленных 12-битовых коэффициентов передаточной функции фильтра, а также достигнутые значения коэффициентов усиления отдельных его звеньев (нормирующие коэффициенты всех звеньев были одинаковы $a_{0i} = 1024$).

Время решения данной задачи на стандартном персональном компьютере не превышало 30 мин, причем значение целевого функционала (27) в начальной точке составляло 7930, а значение в точке оптимума было равно 0,017 при полном выполнении условий устойчивости работы фильтра. Состояние панели синтеза программы в точке оптимума приведено на рис. 21.

Практическая реализация осуществлялась на ПЛИС Spartan 3AN FPGA фирмы Xilinx. Программирование проводилось на языке VHDL под заданную структуру фильтра и найденные целочисленные коэффициенты ее звеньев (табл. 6). Ручное измерение частотной характеристики фильтра осуществляется на реальном сигнале методом вольт-

метра — генератора. Экспериментальный график АЧХ фильтра для частоты дискретизации 100 кГц представлен на рис. 22.

Как видно из приведенных теоретических и экспериментальных графиков, требования к форме АЧХ рекурсивного целочисленного фильтра тракта УПЧИ телеприемника были выполнены с высокой точностью.

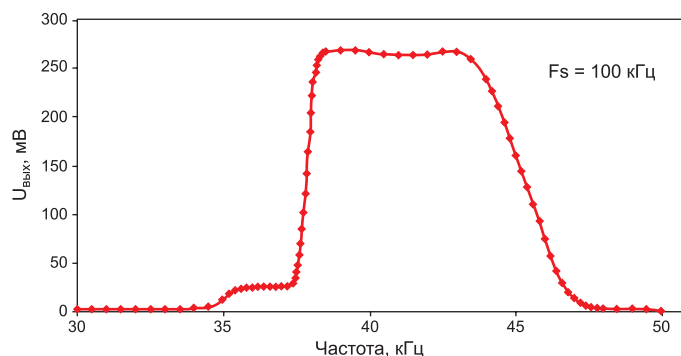


Рис. 22. Экспериментальное измерение АЧХ фильтра

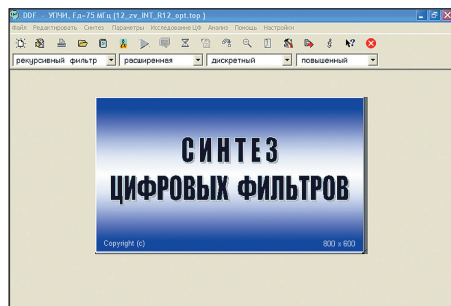


Рис. 23. Основная панель программы целочисленного проектирования

ями являются перспективной альтернативой традиционным аналитическим подходам к проектированию цифровых фильтров [9, 10]. Принципиальное отличие ЦНП-синтеза заключается в том, что в данном случае для удовлетворения требуемого функционирования фильтра на стадии его проектирования осуществляется прямой поиск нужных коэффициентов фильтра в многомерном целочисленном пространстве проектирования, используя для этого математическую модель цифрового фильтра. Критерием поиска является соответствие текущего функционирования синтезируемого фильтра его функционированию по всей совокупности необходимых характеристик. Современные алгоритмические комплексы целочисленной минимизации позволяют решать такую задачу весьма надежно и эффективно при выполнении внешних требований к работе цифрового фильтра. Это предоставит возможность существенно повысить качество проектируемых цифровых фильтров, сократить время их разработки и заметным образом снизить их стоимость.

Из материалов, приведенных в статье видно, что в сравнении с традиционными подходами, синтез цифровых фильтров пакетом ЦНП 3.1 (рис. 23) позволяет:

1. Осуществлять синтез фильтра по совокупности заданных его частотных характеристик, причем селективные требования к характеристикам могут быть весьма сложными, а частотная шкала — линейная, логарифмическая и т. д.

2. Устойчивость решения для целочисленных БИХ-фильтров гарантируется приоритетным выполнением функциональных условий устойчивости в процессе ЦНП-синтеза фильтра.
3. Глобальная модельная идеология поиска определяет высокую надежность отыскания эффективного решения экстремальной задачи ЦНП практически из любой начальной точки. Хорошего начального приближения (прототипа) здесь не понадобится. Как правило, в проектных задачах со сложными селективными требованиями оптимальное решение определяется не из начальной точки, заданной пользователем, а из точки, сгенерированной самим поисковым алгоритмом решения задачи.
4. Необходимое масштабирование сигнала в каскадных структурах может быть обеспечено непосредственно в ходе ЦНП-синтеза целочисленного фильтра. Здесь не нужно использовать косвенные приемы масштабирования усиления, например, применением L_p -нормы.
5. Целочисленная дискретизация пространства параметров (коэффициентов) фильтра позволяет получать проектные решения в целых числах, что снимает все ограничения по арифметике вычислений при реализации ЦНП-фильтров на любых цифровых платформах (сигнальных процессорах, контроллерах, FPGA) с заданной разрядностью представления данных, а также на кристаллах заказных или полузаказных СБИС. ■

Литература

1. Бугров В. Н. Проектирование цифровых фильтров методами целочисленного нелинейного программирования // Вестник ННГУ. 2009. № 6.
2. Шкелев Е. И., Бугров В. Н., Пройдаков В. И., Артемьев В. В. Целочисленные цифровые фильтры — эффективное решение для 8-битовых цифровых платформ // Компоненты и технологии. 2013. № 10.
3. Бугров В. Н., Пройдаков В. И., Артемьев В. В. Поисковые технологии проектирования целочисленных цифровых фильтров. Часть 1 // Компоненты и технологии. 2014. № 6.
4. Бугров В. Н., Пройдаков В. И., Артемьев В. В. Поисковые технологии проектирования целочисленных цифровых фильтров. Часть 2 // Компоненты и технологии. 2014. № 8.
5. Бугров В. Н., Пройдаков В. И., Артемьев В. В. Поисковые технологии проектирования целочисленных цифровых фильтров. Часть 3 // Компоненты и технологии. 2015. № 1.
6. Бугров В. Н., Пройдаков В. И., Артемьев В. В. Синтез цифровых фильтров методами целочисленного нелинейного программирования. 17-я международная конференция «Цифровая обработка сигналов и ее применение. DSPA-2915» / Тезисы докладов. М.: НТО РЭС им. А. С. Попова, 2015.
7. Бугров В. Н. Синтез целочисленных рекурсивных фильтров с произвольно заданными селективными требованиями // DSPA. 2016. № 2.
8. Dempster A. G., Macleod M. D. IIR digital filter design using minimum adder multiplier blocks // IEEE Trans on Circuits and Systems-II. 1998. Vol. 45. N 6.
9. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
10. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов: практический подход. М.: Вильямс, 2004.
11. Воинов Б. С., Бугров В. Н., Воинов Б. Б. Информационные технологии и системы: поиск оптимальных, оригинальных и рациональных решений. М.: Наука, 2007.
12. Артемьев В. В., Бугров В. Н. Синтез цифровых рекурсивных фильтров с линейной фазой // Компоненты и технологии. 2013. № 7.
13. Семенов Б. Ю. Микроконтроллеры MSP430. Первое знакомство. М.: Солон-пресс, 2006.
14. Бугров В. Н. Целочисленное проектирование гауссовых цифровых фильтров // Вестник ННГУ. 2012. № 3.
15. Мингазин А. Т. Синтез БИХ-фильтров малой сложности с характеристиками, близкими к гауссовой кривой // Компоненты и технологии. 2013. № 11.
16. Джакония В. Е. Телевидение. М.: Горячая линия — Телеком, 2007.
17. Бриллиантов Д. П., Куликов Б. Н., Роксман М. А. Переносные цветные телевизоры. М.: Радио и связь, 1989.