Тройной интеграл: определение, вычисление, св-ва, классы интегрируемых функций.

Определение. Пусть задана произвольная функция f(x,y,z) на компакте Ω. f(x,y,z) – ограничена на компакте Ω. Разобьём компакт Ω на n частей, причём так, что $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$, а $\Omega_i \bigcap \Omega_j$ – компакт нулевого объёма. Введём понятие диаметра области:

$$d_i = \sup\left(\sqrt{(x_i'-x_i'')^2+(y_i'-y_i'')^2+(z_i'-z_i'')^2}\right),$$

причём $(x_i',x_i'')\in\Omega_i, (y_i',y_i'')\in\Omega_i, (z_i',z_i'')\in\Omega_i$.

Введём понятие мелкости разбиения: $\lambda = \max\limits_{i=1,\dots,n}(d_i)$. Введём понятие интегральной суммы: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)V_{\Omega_i}$, где ($x_i$,$y_i$,$z_i$) – произвольная точка из Ω_i. Если существует предел интегральных сумм при λ→0 и он не зависит не от разбиения, не от точек x_i, y_i, z_i, то такой предел назыв. тройным интегралом по области Ω от функции f(x,y,z).

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)V_{\Omega_i}$$

Вычисление тройного интеграла.

По элементарной области. Пусть $\Omega\subset R^3$. Ω – элементарная область в направлении оси z, если область ограничена по бокам цилиндрической поверхностью ‖ оси Oz, снизу функцией z=f_1(x,y), сверху функцией z=f_2(x,y). Пусть D – проекция области Ω на плоскость xOy, $D\subset R^2$. Пусть также: 1)f(x,y,z) интегрируема в области Ω как функция трёх переменных, 2)для фиксированных (x,y)∈D функция f(x,y,z) как функция от z интегрируема на области [f_1(x,y), f_2(x,y)].

Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

Свойства тройного интеграла.

1) $$\iiint\limits_{\Omega} c\cdot f(x,y,z)\,dxdydz = c\cdot\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$$

2) $$\iiint\limits_{\Omega}\big(f(x,y,z)+g(x,y,z)\big)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)\,dxdydz$$

3) $\Omega=\Omega_1\bigcup\Omega_2$, $\Omega_1\bigcap\Omega_2$ – компакт нулевого объёма, тогда:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)\,dxdydz$$

4) $$\iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \Omega$$

5) $$\left|\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz\right| \le \iiint\limits_{\Omega}\left|f(x,y,z)\right|dxdydz$$

6)Если $f(x,y,z)\ge 0, \forall(x,y,z)\in\Omega$, то $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz \ge 0$

7)Если $f(x,y,z)\le g(x,y,z), \forall(x,y,z)\in\Omega$, то $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz \le \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)\,dxdydz$

8)Если $m\le f(x,y,z)\le M$, то:

$$m\cdot\Omega \le \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz \le M\cdot\Omega$$

9)Теорема о среднем:

Если $m\le f(x,y,z)\le M$, то ∃ μ∈[m,M] такая, что

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \mu\cdot\Omega$$

Классы интегрируемых функций.

Необходимое условие интегрируемости – ограниченность функции на области Ω. Это условие не явл. достаточным. В качестве примера приведём функцию, аналогичную функции Дирихле:

$$\begin{cases} 1,(x,y,z)\in\Omega\bigcap Q^3 \\ 0,\text{ï ðè î ñò àëüí û õ } (x,y,z)\in\Omega \end{cases}$$

Верхние суммы Дарбу не совпадают с нижними.

Достаточное условие интегрируемости – непрерывность функции на Ω.

Вычисление объёмов тел.

$$V=\iiint\limits_{V} dxdydz$$

Док-во: Пусть f(x,y,z)=1. $V=\bigcup_{i=1}^{n}V_i$, $V_i\bigcap V_j$ – имеет нулевой объём, тогда:

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\cdot\text{î áú, ì }(V_i) =$$

$$\text{ãäå }(x_i,y_i,z_i)\in V_i$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\big(1\cdot\text{î áú, ì }(V_i)\big) = V$$

Частные случаи.

1)Пусть область V – элементарная в напр. оси Oz.

$$V=\iiint\limits_{V} dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} dz = \iint\limits_{D}\big(f_2(x,y)-f_1(x,y)\big)dxdy$$

2)Пусть V – элем. область, причём снизу ограничена плоскостью XoY.

z_1=0, z_2=f(x,y)≥0, тогда:

$$V=\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$$

, где D – проекция области V на плоскость XoY.

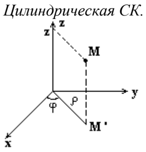
Формула замены переменных в тройных интегралах, якобиан. Цилиндрическая и сферическая системы координат. Объём эллипсоида.

Пусть $\begin{cases} x=x(u,v,w) \\ y=y(u,v,w) \\ z=z(u,v,w) \end{cases}$, причём ∃ все частные производные $\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial x}{\partial v},\dots$ – все непрерывные на области V.

$$I=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}\ne 0$$

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)\cdot|I|\,dudvdw$$

Цилиндрическая СК.



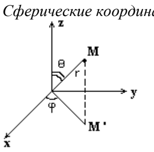
$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$ – ф-ла перехода.

$M(\rho,\varphi,z) - \text{öèëèí äð.êî î ðä.}$

$$I=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\rho$$

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,x)\,dxdydz = \iiint\limits_{V} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$$

Сферические координаты.



$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$ – ф-ла перехода

$M(r,\theta,\varphi)$ – сферические координаты.

$$I=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\cos\theta\begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}+$$

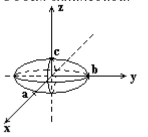
$$+r\sin\theta\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}=$$

$$=r^2\cos^2\theta\sin\theta+r^2\sin^3\theta=r^2\sin\theta$$

Тогда:

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

Объём эллипсоида.



Введём эллипсоидальные координаты:

$$\begin{cases} x=a\cdot r\cdot\sin\theta\cos\varphi \\ y=b\cdot r\cdot\sin\theta\sin\varphi \\ z=c\cdot r\cdot\cos\theta \end{cases}$$

$$I=\begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & a\cdot r\cos\theta\cos\varphi & -a\cdot r\sin\theta\sin\varphi \\ b\sin\theta\sin\varphi & b\cdot r\cos\theta\sin\varphi & b\cdot r\sin\theta\cos\varphi \\ c\cdot\cos\varphi & -c\cdot r\cdot\sin\theta & 0 \end{vmatrix}= =abc\cdot r^2\sin\theta$$

$$V=\iiint\limits_{V} dxdydz = abc\int_0^1 r^2dr\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{4}{3}\pi abc$$

Физические приложения криволинейных интегралов: длина и масса кривой, статические моменты, момент инерции, центр тяжести кривой, работа переменной силы.

1) Длина кривой:

$$L(\gamma)=\int\limits_{\gamma} dS$$

2)Масса кривой:

$$m=\int\limits_{\gamma}\rho(x,y)\,dS$$

, где ρ(x,y) – ф-я плотности.

3)Статические моменты:

$$S_x=\int\limits_{\gamma} y\cdot\rho(x,y)\,dS$$

$$S_y=\int\limits_{\gamma} x\cdot\rho(x,y)\,dS$$

4)Моменты инерции:

$$I_x=\int\limits_{\gamma} y^2\cdot\rho(x,y)\,dS$$

$$I_y=\int\limits_{\gamma} x^2\cdot\rho(x,y)\,dS$$

$$I_o=\int\limits_{\gamma}(x^2+y^2)\cdot\rho(x,y)\,dS$$

5)Центр тяжести:

$$x_c=\frac{S_y}{m}=\frac{\int\limits_{\gamma} x\cdot\rho(x,y)\,dS}{\int\limits_{\gamma}\rho(x,y)\,dS}$$

$$y_c=\frac{S_x}{m}=\frac{\int\limits_{\gamma} y\cdot\rho(x,y)\,dS}{\int\limits_{\gamma}\rho(x,y)\,dS}$$

6)Работа переменной силы.

Пусть некоторая сила $\vec F(x,y)=\vec F\big(P(x,y),Q(x,y)\big)$, перемещает материальную мачку вдоль кривой γ, тогда работа этой силы вычисл. след. образом:

$$\delta A=\left(\vec F;d\vec l\right)\quad,\quad d\vec l=\{dx,dy\}$$

$$\delta A=P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$$

$$A=\int\limits_{\gamma} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$$

Потенциальные поля. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.

В механике очень важную роль играют особые поля, в кот. работа силы поля по перемещению матер. точки вдоль кривой зависит от начальной точки кривой и конечной точки, но не зависит от пули по кот. она проходит.

$$A=\int\limits_{\gamma} Pdx+Qdy$$

Такие поля назыв. потенциальными, т.к ∃ такая функция U(x,y) что дифференциальная форма стоящая под значком интеграла является полным дифференциалом от этой функции.

∃ U(x,y). dU=Pdx+Qdy.

$$A=\int\limits_{\gamma} Pdx+Qdy=\int\limits_{A}^{B} dU=U\Big|_A^B$$

, где A – начало, B – конец.

Теорема. Необходимые и достаточные условия полного дифференциала.

Пусть ∃ P(x,y), Q(x,y), $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y),\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ – непрерывны в области D (односвязная область – т.е нет разрывов). Тогда ∃ U(x,y) такая, что dU=Pdx+Qdy ⇔ $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

Док-во. Необходимость. Пусть ∃ U(x,y) такая, что dU=Pdx+Qdy. Запиш. общ. вид полного дифф-ла: $dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy$, тогда: $P=\frac{\partial U}{\partial x};Q=\frac{\partial U}{\partial y}$. Найдём производные $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$; $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}$. По теореме о равенстве смешных производных они равны, т.к по условию $\frac{\partial P}{\partial y};\frac{\partial Q}{\partial x}$ – непрерывны.

Достаточность. Пусть $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Покажем, что ∃ U(x,y) такая, что dU=Pdx+Qdy. Из общего вида дифференциала ⇒ $\frac{\partial U}{\partial x}=P$; $\frac{\partial U}{\partial y}=Q$ ⇒ U можно найти из системы дифф. уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}=P(x,y) \\ \frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y) \end{cases}$$

1)Интегрируем 1-е уравнение:

$$U=\int P(x,y)\,dx+C(y)$$

2)Второе уравнение запиш. в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx+C'(y)$$

3)Из второго уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx+C'(y)=Q(x,y)$$

$$C'(y)=Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx$$

Покажем, что функция, стоящая справа не зависит от x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx\right)= =\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int P(x,y)\,dx\right)= =\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$$

⇒ правая часть уравнения не зависит от x.

$$C(y)=\int\left(Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx\right)dy$$

$$U=\int P(x,y)\,dx+C(y)$$

Независимость криволин. инт. от пути интегрирования. Если $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, то интеграл не зависит от пути интегрирования ⇒ можно брать любой путь (чаще всего берут путь ‖ коорд. осям).

В случае пространственной кривой такие интегралы не зависят от пути, если дифференциальная форма является полным дифференциалом: dU=Pdx+Qdy+Rdz. $P=\frac{\partial U}{\partial x};Q=\frac{\partial U}{\partial y};R=\frac{\partial U}{\partial z}$. Условия ∃ полного дифференциала:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y} \end{cases}$$

Поверхностный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, примеры.

Пусть поверхность σ задана явно z(x,y), где (x,y)∈D.

Функция z(x,y) – дифференцируема, $\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}$ – непрерывны в области D ⇒ в каждой точке ∃ касательная плоскость. Такая поверхность назыв. гладкой (нет пик и рёбер). Если поверхность разбив. на конечное число гладких поверхностей, то такая поверхность – кусочно-гладкая.

Пусть f(x,y,z) определена в каждой точке поверхности.

Определение поверхн. интеграла.

Разобьём поверхность на конечное число частей, причём так, что: $\sigma=\bigcup_{k=1}^{n}\sigma_k$, а $\sigma_k\bigcap\sigma_m$ – имеет нулевую площадь. Введём понятие диаметра поверхности: d_k – наибольшее расстояние между точками поверхности σ_k. Тогда $\lambda=\max\limits_{k=1,\dots,n} d_k$ – мелкость разбиения. Выбираем произвольные точки (x_k,y_k,z_k)∈σ_k.

Составим сумму: $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\cdot\sigma_k$ – интегральная сумма. Если существует предел интегральных сумм и он не зависит не от разбиения, не от точек (x_k,y_k,z_k), то он назыв. поверхностным интегралом по поверхности σ от функции f(x,y,z).

$$\iint_\sigma f(x,y,z)\,d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\sigma_k$$

Аналогичное определение если пов-ть задана y=y(x,z) и.т.д

Свойства поверхн. интеграла.

1)
$$\iint_\sigma k\cdot f(x,y,z)\,d\sigma=k\cdot\iint_\sigma f(x,y,z)\,d\sigma$$

2)
$$\iint_\sigma\big(f(x,y,z)+g(x,y,z)\big)d\sigma=$$
$$=\iint_\sigma f(x,y,z)\,d\sigma+\iint_\sigma g(x,y,z)\,d\sigma$$

3)Если $\sigma=\sigma_1\cup\sigma_2$, $\sigma_1\cap\sigma_2$ – имеет нулевую площадь, то:

$$\iint_\sigma f(x,y,z)\,d\sigma=\iint_{\sigma_1} f(x,y,z)\,d\sigma+$$
$$+\iint_{\sigma_2} f(x,y,z)\,d\sigma$$

4)
$$\iint_\sigma d\sigma=\sigma$$

5)Если f(x,y,z)≤g(x,y,z) ∀(x,y,z) на поверхности, то:

$$\iint_\sigma f(x,y,z)\,d\sigma\le\iint_\sigma q(x,y,z)\,d\sigma$$

6)
$$\left|\iint_\sigma f(x,y,z)\,d\sigma\right|\le\iint_\sigma\left|f(x,y,z)\right|d\sigma$$

7)Теорема о среднем: Если f(x,y,z) – непр.

, где
$$\iint_\sigma f(x,y,z)\,d\sigma=f(x_0,y_0,z_0)\cdot\sigma$$

$(x_0,y_0,z_0)\in\sigma$.

Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода.

$$\sigma=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$ – площадь поверхности заданной явно z=z(x,y).

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$ – элемент площади, тогда:

$$\iint_\sigma f(x,y,z)\,d\sigma=$$
$$=\iint_D f\big(x,y,z(x,y)\big)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

D – проекция поверхности на XoY.

Если пов-ть задана y=y(x,z), то:

$$\iint_\sigma f(x,y,z)\,d\sigma=$$
$$=\iint_D f\big(x,y(x,z),z\big)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz$$

D – проекция на XoZ.

Если пов-ть задана x=x(y,z), то:

$$\iint_\sigma f(x,y,z)\,d\sigma=$$
$$=\iint_D f\big(x(y,z),y,z\big)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz$$

D – проекция на YoZ.

Примеры.

1)Вычислить $\iint_\sigma x\,d\sigma$, где σ – часть сферы, леж. в 1-ом октанте.

Решение.

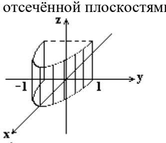
Выразим пов-ть явно:

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$
$$z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$
$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

Найдём дифференциал поверхности:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$
$$d\sigma=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$
$$\iint_\sigma x\,d\sigma=R\iint_D\frac{x\,dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=$$
$$=-R\int_0^R dy\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{d\left(R^2-x^2-y^2\right)}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=$$
$$=-R\int_0^R\left(\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\Big|_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\right)dy=$$
$$=R\int_0^R\sqrt{R^2-y^2}\,dy=\begin{bmatrix}y=R\sin t\\ dy=R\cos t\end{bmatrix}=$$
$$=R\int_0^{\pi/2}R\cos t\cdot R\cos t\,dt=\frac{R^3}{2}\int_0^{\pi/2}\big(1+\cos(2t)\big)dt$$
$$=\frac{R^3}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi R^3}{4}$$

2)Вычислить: $\iint_\sigma x(y+z)\,d\sigma$, где σ – часть цилиндрической поверхности $x=\sqrt{1-y^2}$, отсечённой плоскостями z=0, z=2.



$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x\ge 0\end{cases}$$

$$\iint_\sigma x(y+z)\,d\sigma=$$
$$=\iint_D\sqrt{1-y^2}\,(y+z)\sqrt{1+\frac{y^2}{1-y^2}}\,dydz=$$
$$=\iint_D(y+z)\,dydz=\int_{-1}^{1}dy\int_0^2(y+z)\,dz=$$
$$=\int_{-1}^{1}\left(yz+\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^2dy=\int_{-1}^{1}(2y+2)\,dy=4$$

Поверхностный интеграл 2-го рода: определение, свойства, вычисление, примеры.

Пусть поверхность задана явно z=z(x,y). Причём поверхность гладкая z – непр., $\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}$ – непр. Рассмотрим двухсторонние поверхности. Введём понятие ориентации поверхности. Будем выделять внешнюю и внутреннюю поверхности.

Назовём внешней стороной поверхности такую, нормаль к которой составляет с осью Oz острый угол. Внутренняя сторона поверхности – такая, что нормаль к ней составляет тупой угол.

Определение поверх. интеграла 2-го рода.

Пусть f(x,y,z) – задана на поверхности σ, z=z(x,y) – уравнение поверхности. (x,y)∈D, D – проекция поверхности на XoY. Рассм. разбиение области D на конечное число частей: $D=\bigcup_{k=1}^{n}D_k$, $D_k\bigcap D_m$ – нулевая площадь. В каждой области D_k выделим произвольную точку (x_k,y_k).

$$\sum_{k=1}^{n}f\big(x_k,y_k,z(x_k,y_k)\big)\cdot S_{D_k}$$ – интегральная сумма. Введём диаметр области d_k равный максимальному расстоянию между точками в области D_i. Введём понятие мелкости разбиения $\lambda=\max_{k=1,\dots,n}d_k$. Если ∃ предел интегральных сумм и он не зависит от разбиения, не от точек x_k,y_k, то этот назыв. поверхностным интегралом 2-го рода по поверхности σ от ф-ции f(x,y,z).

$$\iint_\sigma f(x,y,z)\,dxdy=$$
$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f\big(x_k,y_k,z(x_k,y_k)\big)\cdot S_{D_k}$$

Предел положителен, если поверхность внешняя и отрицательный, если поверхность внутренняя.

$$\iint_\sigma P(x,y,z)\,dydz+Q(x,y,z)\,dxdz+R(x,y,z)\,dxdy=$$
$$=\iint_\sigma P(x,y,z)\,dydz+\iint_\sigma Q(x,y,z)\,dxdz+$$
$$+\iint_\sigma R(x,y,z)\,dxdy$$

Свойства.

1)Зависимость от ориентации поверхности.

Меняем ориентацию → меняем знак.

2)Константа выносится за знак интеграла.

3)Интеграл от суммы равен сумме интегралов.

4)аддитивность по поверхности.

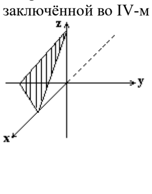
Вычисление.

$$\iint_\sigma f(x,y,z)\,d\sigma=\pm\iint_D f\big(x,y,z(x,y)\big)\,dxdy$$

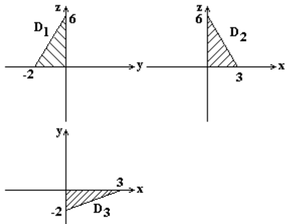
D – проекция σ на XoY. (+) – если пов-ть внешняя, (-) – если пов-ть внутренняя.

Примеры.

Вычислить $\iint_\sigma -xdydz+zdzdx+5dxdy$, где σ – верхняя часть плоскости 2x-3y+z=6, заключённой во IV-м октанте.



$$\bar N=\{2,-3,1\},\ \left|\bar N\right|=\sqrt{14}$$
$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}}>0;\ \cos\beta=-\frac{3}{\sqrt{14}}<0$$
$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}}>0$$



$$I=-\iint_\sigma xdydz+\iint_\sigma zdzdx+\iint_\sigma 5dxdy$$

1)
$$-\iint_\sigma xdydz=-\iint_{D_1}\left(3+\frac{3}{2}y-\frac{z}{2}\right)dydz=$$
$$=-\int_{-2}^{0}dy\int_0^{6+3y}\left(3+\frac{3}{2}y-\frac{z}{2}\right)dz=$$
$$=-\int_{-2}^{0}dy\left(3\left(1+\frac{y}{2}\right)z-\frac{z^2}{4}\right)\Big|_0^{6+3y}=$$
$$=\int_{-2}^{0}\left(9\left(1+\frac{y}{2}\right)(2+y)-\frac{9}{4}(2+y)^2\right)dy=$$
$$=-9\int_{-2}^{0}\left(2+y+y+\frac{y^2}{2}-1-y-\frac{y^2}{4}\right)dy=$$
$$=-9\int_{-2}^{0}\left(\frac{y^2}{4}+y+1\right)dy=-9\left(\frac{y^3}{12}+\frac{y^2}{2}+y\right)\Big|_{-2}^{0}=$$
$$=9\left(-\frac{2}{3}+2-2\right)=-6$$

2)
$$\iint_\sigma zdzdx=-\iint_{D_2}zdzdx=-\int_0^3dx\int_0^{6-2x}zdz=$$
$$=-\int_0^3\frac{(6-2x)^2}{2}dx=-2\int_0^3(3-x)^2dx=$$
$$=\left(-\frac{2}{3}\right)(3-x)^3\Big|_0^3=-18$$

3)
$$\iint_\sigma 5dxdy=5\iint_{D_3}dxdy=15$$

I= -6 -18+15= -9

Физические приложения поверхностных интегралов.

1)Масса поверхности:
$$m=\iint_\sigma\rho(x,y,z)\,d\sigma$$

2)Момент инерции:
$$I_x=\iint_\sigma\left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,d\sigma$$ – момент инерции относительно оси Ox.

3)Статический момент:
$$S_{xy}=\iint_\sigma x\rho(x,y,z)\,d\sigma$$ – относит. плоскости YoZ

4)Центр тяжести:
$$x_c=\frac{S_{yz}}{m};\ y_c=\frac{S_{xz}}{m};\ z_c=\frac{S_{xy}}{m}$$

Формула Остроградского-Гаусса.

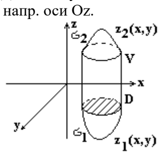
Формула связ. тройной интеграл по трёхмерной обл-ти с поверхностным интегралом по поверхности, огранич. данную область.

Пусть $V\in R^3$. V разбивается на конечное число элем. областей в направлении любой оси. На области заданы функции P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) – непр. и их частные производные также непр. ⇒

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=$$
$$=\oiint_\sigma Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$$

σ – пов-ть, кот. огранич. данную область.

Док-во. Пусть V – элементарная область в напр. оси Oz.



$$\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial z}{\partial z}dz=$$
$$=\iint_D dxdy\,R(x,y,z)\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}=$$
$$=\iint_D R\big(x,y,z_2(x,y)\big)dxdy-$$
$$-\iint_D R\big(x,y,z_1(x,y)\big)dxdy=$$
$$=\iint_{\sigma_2}R(x,y,z)\,dxdy+\iint_{\sigma_1}R(x,y,z)\,dxdy+$$
$$+\iint_D R(x,y,z)\,dxdy=\oiint_\sigma R(x,y,z)\,dxdy$$
$$\iint_D R(x,y,z)\,dxdy=0$$

Если область разбивается на конечное число элементарных областей в направлении оси Oz, то в силу аддитивности тройного и поверхностного интеграла получ. соотношение также верно.

Аналогично получаем:

$$\iiint_V\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz=\oiint_\sigma Pdydz$$
$$\iiint_V\frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz=\oiint_\sigma Qdzdx$$

Складывая получ. соотношения получим формулу Остроградского-Гаусса.

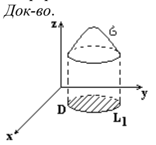
Формула Стокса.

Связывает поверх. интеграл II-го рода с криволин. интегралом II-го рода по границе этой поверхности.

$$\iint_\sigma\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+$$
$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$$

P,Q,R – непрерывны, производные также непрерывны.

Док-во.



Пусть поверхность задана функцией z = z(x,y), тогда

$$\int_L P(x,y,z)\,dx=\int_{L_1}P\big(x,y,z(x,y)\big)dx=$$
$$=\int_{L_1}Pdx+0\cdot dy=[\hat{o}-\ddot{e}\grave{a}\ \tilde{A}\eth\grave{e}\acute{i}\ \grave{a}]=$$
$$=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(0)-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=[\ddot{I}\ \eth\hat{i}\ \grave{e}\varsigma\hat{a}.\ \tilde{n}\ddot{e}\hat{i}\ \ae\ .\ \hat{o}.]=$$
$$=\iint_D\left(-\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy=-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy-$$
$$-\iint_D\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}dxdy$$

Найдём производную $-\frac{\partial z}{\partial y}$ из условия параллельности нормального вектора $\left\{\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y};(-1)\right\}$ единичному вектору нормали {cos(α),cos(β),cos(γ)} ⇒ все их координаты пропорциональны:

$$\frac{\partial z}{\partial x}:\frac{\partial z}{y}:(-1)=\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma\Rightarrow$$
$$\Rightarrow-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$
$$-\iint_D\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}dxdy=\iint_D\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy$$

Ï î ô îð ì óëå ï ëî ù àäè ï î â−ò è :

$$\frac{dxdy}{\cos\gamma}=dS\ ;\ \ \cos\beta\cdot dS=dxdz$$
$$\iint_D\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy=\iint_D\frac{\partial P}{\partial z}dxdz$$

Итак получили:

$$\int_L P(x,y,z)\,dx=-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy+\iint_D\frac{\partial P}{\partial z}dxdz=$$
$$=\iint_\sigma\frac{\partial P}{\partial z}dxdz-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

Совершенно аналогично получаем:

$$\int_L Qdy=\iint_\sigma\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy-\frac{\partial Q}{\partial z}dydz$$
$$\int_L Rdz=\iint_\sigma\frac{\partial R}{\partial y}dydz-\frac{\partial R}{\partial x}dxdz$$

Складывая полученные соотношения получаем формулу Стокса.

Определение и примеры несобственных интегралов I-го и II-го рода.

Несобственный интеграл – обобщение понятия определённого интеграла Римана на отрезке. Интеграл Римана определяется от ограниченной функции на ограниченном промежутке. Несобственный интеграл определяется на неограниченном промежутке.

Несобств. интеграл I-го рода.

Пусть f(x) определена на $[0,+\infty]$.

Рассмотрим $\forall$ A$\in[0,+\infty]$

a A x

и для f(x) интегрируема по Риману на [a,A].

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ – несобственный интеграл 1-го рода. Если этот предел существует и конечен, то интеграл сходится, а если бесконечен или не существует, то интеграл расходится.

Пример.

1) $\int_1^{+\infty}\sin xdx = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A \sin xdx = \lim_{A\to+\infty}\left(-\cos x\right)\Big|_1^A = \lim_{A\to+\infty}\left(\cos(1)-\cos(A)\right) = \text{í å ñóù åñò âóåò}$

$\Rightarrow$ интеграл расходится.

2)

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^P} = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{dx}{x^P} = \begin{cases}\lim_{A\to+\infty}\frac{x^{1-P}}{1-P}\Big|_1^A\ ;\ P\ne1\\ \lim_{A\to+\infty}\ln(x)\Big|_1^A=+\infty\ ;\ P=1\end{cases} = \begin{cases}+\infty\ ;\ P\le1\\ \frac{1}{P-1}\ ;\ P>1\end{cases}$$

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^P}$ – сходится при p>1 и расходится при p≤1.

Несобственный интеграл 2-го рода.

Несобственным интегралом 2-го рода назыв. интеграл от неограниченной функции.

Пусть f(x,y) определена на [a,b), где a$\in$R, b$\in$R. $\forall$b'$\in$(a,b)$\to$f(x)$\in$R. Пусть b – особая точка: $\lim_{x\to b^-} f(x)=\infty$ – односторонний предел.

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b'\to b}\int_a^{b'} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ – несобств. интеграл 2-го рода. Если предел $\exists$ и он конечен, то интеграл сходится, если не $\exists$ или бесконечен, то интеграл расходится.

Пример.

$$\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+0}\int_A^1\frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{A\to+0}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_A^1 = \lim_{A\to+0}\frac{1-A^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases}\infty,\alpha\ge1\\ \frac{1}{1-\alpha},\alpha<1\end{cases}$$

Сходится при α<1, расходится при α≥1.

Замечание. Для несобственного интеграла можно использовать замену переменных и интегрирование по частям. При замене переменных несобственный интеграл переходит в определённый интеграл Римана и наоборот.

Пример.

1) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{bmatrix}x=\sin t\\ dx=\cos tdt\end{bmatrix} = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos tdt}{|\cos t|} = \frac{\pi}{2}$

2) $I=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)dx = \begin{bmatrix}x=2t\\ dx=2dt\end{bmatrix} =$

$= 2\int_0^{\pi/4}\ln(2\sin t\cos t)dt =$

$= 2\cdot\left(\int_0^{\pi/4}\ln 2dt + \int_0^{\pi/4}\ln\sin tdt + \int_0^{\pi/4}\ln\cos tdt\right) =$

$\int_0^{\pi/4}\cos tdt = \begin{bmatrix}t=\frac{\pi}{2}-x\\ dt=-dx\end{bmatrix} = -\int_0^{\pi/4}\sin xdx$

Â èòî ãå:

$I=\frac{\pi}{2}\ln2$

Критерии сходимости несобственных интегралов.

Объединим несобственные интегралы 1-го и 2-го рода: $\int_a^b f(x)dx$: 1)b=∞,

2) $\lim_{x\to b} f(x)dx=\infty$, b$\in$R. Пусть f(x) определена на [a,b). f(x) интегрируема на [a,b') для $\forall$b'$\in$[a,b). Пусть b' – произвольная точка из (a,b), тогда $\int_{b'}^b f(x)dx$ – остаток для $\int_a^b f(x)dx$, где b – особая точка.

1-й критерий сходимости.

1)Если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то сходится любой из его остатков, 2)Если хотя бы один из остатков сходится, то сходится и весь интеграл.

Док-во.

1)Нужно показать, что $\exists$ $\lim_{A\to b}\int_{b'}^A f(x)dx$ и он конечен. По условию $\exists$ предел: $\lim_{A\to b}\int_a^A f(x)dx$, тогда:

$\int_{b'}^A f(x)dx = \int_a^A f(x)dx - \int_a^{b'} f(x)dx$

$\lim_{A\to b}\int_{b'}^A f(x)dx = \lim_{A\to b}\int_a^A f(x)dx - \int_a^{b'} f(x)dx$

$\int_a^{b'} f(x)dx - \text{î ï ð.èí ò åãðàë = ÷èñëî} \Rightarrow$

$\Rightarrow\exists\ \lim_{A\to b}\int_{b'}^A f(x)dx\ \text{è í î êî í å÷åí}$

2) $\int_a^A f(x)dx = \int_a^{b'} f(x)dx + \int_{b'}^A f(x)dx$

$\int_a^{b'} f(x)dx - \text{î ï ðåäåë, í î û é = ÷èñëî} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{Âñëè}\ \exists\ \lim_{A\to b}\int_{b'}^A f(x)dx\ ,\ \text{ò î}\ \exists$

$\lim_{A\to b}\int_a^A f(x)dx - \text{êî í å÷í û é}$

2-й критерий(критерий Коши))

$\int_a^b f(x)dx$ – сходится $\Leftrightarrow$ $\forall$ε>0 $\exists$δ>0 такое, что $\forall$$b_1\in$(b-δ,b) $\forall$$b_2\in$(b-δ,b) $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

Док-во. Рассматриваем функцию $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, тогда сходимость несобственного интеграла означает существование такого предела $\lim_{x\to b}F(x)=K\in R$

По критерию коши о существовании конечного предела имеем:

Предел $\lim_{x\to b}F(x)$ – конечен, если $\forall$ε>0 $\exists$ δ>0 $\forall b_1\in U_\delta(b)$ $\forall b_2\in U_\delta(b)$ $\Rightarrow$ $|F(b_2)-F(b_1)|<\varepsilon$ U_δ = (b-δ,b).

$F(b_2)-F(b_1) = \left|\int_a^{b_2} f(x)dx - \int_a^{b_1} f(x)dx\right| = \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|$

3-й критерий сходимости)

Пусть f(x)≥0 $\forall$x$\in$[a,b) тогда несобств. интеграл сходится $\Leftrightarrow$ $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ – ограничена на [a,b).

Док-во.

Необходимость. Пусть $\int_a^b f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow$ когда $\exists$ $\lim_{x\to b}F(x)$ конечный, а если у ф-ции $\exists$ конечный предел в точке, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки: $\exists$δ>0 $\forall$x$\in$(b-δ,b) $|F(x)|\le M_1$

Рассмотрим F(x) на [a,b-δ]. Пусть x$\in$(a,b-δ).

$F(b-\delta) = \int_a^{b-\delta} f(x)dx = \int_a^x f(t)dx + \int_x^{b-\delta} f(t)dx$

$\text{ò.ê}\ f(t)\ge0,\ \text{ò î}\ \int_x^{b-\delta} f(t)dx\ge0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x)\le F(b-\delta)\quad \forall x\in[a,b-\delta]$

$\text{Ï óñòü}\ M=\max\left(M_1,F(b-\delta)\right)\ \text{ò î ãäà}$

$F(x)\le M\quad\forall x\in[a,b)$

$F(x) - \text{î ãðàí è÷åí à.}$

Достаточность.

По условию F(x) – ограничена. Покажем, что F(x) – возрастающая если $x_1<x_2$. $x_1,x_2\in$[a,b).

$F(x_2) = \int_a^{x_2} f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\ge0 \Rightarrow F(x_2)\ge F(x_1)$

Когда функция возрастает и ограничена, то $\Rightarrow$ существует конечный предел, равный супремуму. $\exists$ $\lim_{x\to b}F(x)$ – конечный предел $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx$ – сходится.

Признаки сравнения несобственных интегралов от неотрицательных функций.

Признаки сравнения нужны для того, чтобы, не вычисляя интеграл, узнать сходится он или расходится.

1-й признак сравнения)

Пусть заданы 0≤g(x)≤f(x) при a≤x≤b, тогда 1)если $\int_a^b f(x)dx$ –сходится, то $\int_a^b g(x)dx$ также сходится, 2)если $\int_a^b g(x)dx$ – расходится, то $\int_a^b f(x)dx$ также расходится.

Док-во:

1)По условию $\int_a^b f(x)dx$ – сходится, а это возможно $\Leftrightarrow$ $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ ограничена на [a,b), т.е $\exists$ M$\in$R такое, что $|f(x)|\le M\quad\forall x\in[a,b)$. Рассмотрим $b(x)=\int_a^x g(t)dt$. Т.к g(t)≤f(t), то: $0\le b(x)\le F(x)$ $\Rightarrow$ $|b(x)|\le M$ $\forall$ x$\in$[a,b)

$\Rightarrow$ по крит. сходимости $\int_a^b g(x)dx$ – сходится.

2)Предположим, что $\int_a^b f(x)dx$ – сходится, тогда по пункту 1 $\int_a^b g(x)dx$ – также сходится, что противоречит условию 2-го пункта $\Rightarrow$ предположение не верно и интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится.

Замечание. При использовании признаков сравнения сравниваем обычно с $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$. 1-й признак сравнения приближённый, не точный.

2-й признак сравнения)

Пусть $\exists$ f(x)≥0, g(x)≥0. Требуется сравнить интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$, где b – особая точка. Если $\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=K\ne\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}$, тогда $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ ведут себя одинаково.

Док-во.

(Сводится 1 –му признаку сравнения).

$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=K \Leftrightarrow \left[\text{ï î î ï ð. ï ðåäåëà}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in(b-\delta,b)$

$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right|\le\varepsilon$

Пусть $\varepsilon=\frac{K}{2}>0$, тогда $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right|<\frac{K}{2}$ $\Rightarrow$

$\frac{K}{2}<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{3K}{2}$.

1)Если $\int_a^b g(x)dx$ сходится и $f(x)<\frac{3K}{2}g(x)$, то по 1-му признаку сравнения $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx$ тоже сходится.

2)Если $\int_a^b f(x)dx$ –сходится и $g(x)<\frac{2}{K}f(x)$ $\Rightarrow$ $\int_a^b g(x)dx$ также сходится по 1-му признаку сравнения.

Замечание. Если K=1, то функции эквивалентны.

Абсолютная сходимость несобственного интеграла. Пример условно сходящегося несобственного интеграла.

Пусть подинтегральая функция произвольного знака. $\int_a^b f(x)dx$, где b – особая точка.

Определение. $\int_a^b f(x)dx$ – сходится абсолютно, если сходится $\int_a^b|f(x)|dx$

Пример.

$\int_1^{+\infty}\frac{\cos xdx}{x^2}$; $f(x)=\frac{\cos x}{x^2}$

$|f(x)|=\frac{|\cos x|}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} - \text{ñõ-ñÿ} \Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{\cos xdx}{x^2} - \text{ñõ-ñÿ àáñ.}$

Теорема. Если $\int_a^b f(x)dx$ – сходится абсолютно, то $\int_a^b f(x)dx$ – сходится.

Док-во. (По критерию Коши).

Зафиксируем ε>0. Т.к $\int_a^b|f(x)|dx$ – сходится, то по крит. Коши: $\forall$ε>0 $\exists$δ>0 $\forall b_1\in$(b-δ,b) $\forall b_2\in$(b-δ,b) и т.е ф-я неотрицательная, то $\Rightarrow$ $\int_{b_1}^{b_2}|f(x)|dx<\varepsilon$

По св-ву определённого интеграла: $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|\le\int_{b_1}^{b_2}|f(x)|dx$, тогда $\forall$ε>0 $\exists$δ>0

$\forall b_1\in$(b-δ,b) $\forall b_2\in$(b-δ,b) $\Rightarrow$

$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx - \text{ñõ-ñÿ}$

Обратное не верно.

Пример.

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \begin{bmatrix}u=\frac{1}{x} & du=-\frac{1}{x^2}\\ dv=\sin xdx & v=-\cos x\end{bmatrix} = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty}\frac{\cos xdx}{x^2} - \text{ñõ-ñÿ}$$

Докаж., что интеграл не сх-ся абсолютно:

$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|dx}{x}$

$\frac{|\sin x|}{x}\ge\frac{\sin^2x}{x}=\frac{1-\cos2x}{2x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos2x}{2x}$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}dx - \text{ðàñõ.}$

$\int_1^{+\infty}\frac{\cos2xdx}{2x} - \text{ñõî ä-ñÿ}$

$\left(\text{äî êàç. ò àê æ å êàê è}\ \int_1^{+\infty}\frac{\sin xdx}{x}\right)$

$\Rightarrow$ интеграл не сходится абсолютно.

Определение. Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится условно, если он сходится, а $\int_a^b|f(x)|dx$ – расходится.

Пример. Вышеописанный $\int_1^{+\infty}\frac{\sin xdx}{x}$.

Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов.

Признак Дирихле. Исследуем сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx$, где b – особая точка. Пусть:

1) $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ – ограничена на [a,b],

2)$\exists$ g'(x) – непрерывная на [a,b),

3)g'(x) знакопостоянна,

4) $\lim_{x\to b}g(x)=0$,

Тогда $\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx$ – сходится.

Док-во. (по критерию Коши).

Зафиксируем ε>0. По условию $\exists$ M$\in$R: |F(x)|≤M $\forall$x$\in$[a,b). По определению предела: $\lim_{x\to b}g(x)=0$ для $\frac{\varepsilon}{4M}>0$ $\exists$δ>0 $\forall$x$\in$(b-δ,b) $\Rightarrow$ $|g(x)|<\frac{\varepsilon}{4M}$. Рассмотрим

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)\,dx\right| = \begin{bmatrix} u=g(x) & du=g'(x) \\ dv=f(x)dx & v=F(x) \end{bmatrix} =$$

$$= \left| g(x)F(x)\Big|_{b_1}^{b_2} - \int_{b_1}^{b_2} F(x)g'(x)\,dx \right| =$$

$$= \left| g(b_2)F(b_2) - g(b_1)F(b_1) - F(\xi)\int_{b_1}^{b_2} g'(x)\,dx \right| =$$

$$= \left| g(b_2)F(b_2) - g(b_1)F(b_1) - F(\xi)g(b_2) + \right.$$
$$\left. + F(\xi)g(b_1) \right| \le$$
$$\le |g(b_2)|\cdot|F(b_2)| + |g(b_1)||F(b_1)| + |F(\xi)||g(b_2)| +$$
$$+ |F(\xi)||g(b_1)| < M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 4 = \varepsilon$$

Итак для ∀ε>0 ∃δ>0 ∀x∈(b-δ,b) ⇒

⇒ $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)\right| < \varepsilon$ ⇒ интеграл сходится

по критерию Коши.

Признак Абеля. Рассмотрим сходимость $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$, где b – особая точка. Пусть:

1) $\int_a^b f(x)\,dx$ – сходится,

2)∃ g'(x) – непр. на [a,b),

3)g'(x) знакопостоянна.

4)g(x) ограничена на [a,b),

Тогда $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ – сходится.

Док-во: (по критерию Коши сходимости несобств. инт.)

Зафиксируем ε>0. Тогда по условию ∃ M∈R такое, что |g(x)|≤M. $\int_a^b f(x)\,dx$ – сходится ⇔ по крит. Коши, когда ∀ $\frac{\varepsilon}{2M}$ >0 ∃δ>0 $\forall b_1\in(b-\delta,b)$, $\forall b_2\in(b-\delta,b)$ ⇒ $\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx = F(b_2)-F(b_1) < \frac{\varepsilon}{2M}$. Распишем интеграл произведения:

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)\,dx\right| =$$

$$= \begin{bmatrix} u=g(x) & du=g'(x)dx \\ dv=f(x)dx & v=F(x) \end{bmatrix} =$$

$$\left| F(x)g(x)\Big|_{b_1}^{b_2} - \int_{b_1}^{b_2} F(x)g'(x)\,dx \right| =$$

$$= \left[\text{â ñèëó í åï ð.}\ g'(x)\right] =$$
$$= \left| F(b_2)g(b_2) - F(b_1)g(b_1) - \right.$$
$$\left. - F(\xi)\big(g(b_2)-g(b_1)\big) \right| =$$
$$= \left[\xi\in(b_1;b_2)\right] =$$
$$= \left| g(b_1)\big(F(\xi)-F(b_1)\big) + \right.$$
$$\left. + g(b_2)\big(F(b_2)-F(\xi)\big) \right| <$$
$$< 2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon$$

Несобственные двойные и тройные интегралы. Примеры. Вычисление интеграла Пуассона.

Несобственный двойной интеграл.

НДИ 1-го рода.

Рассмотрим двойной интеграл по области D: $\iint_D f(x,y)\,dxdy$. Несобственным интегралом 1-го рода назыв. интеграл по неограниченной области D при f(x,y) – ограниченной. Пусть ∀ ограниченная B⊂D и ∃ $\iint_B f(x,y)\,dxdy$, тогда

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{B\to D}\iint_B f(x,y)\,dxdy$$

Пример. $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy$, где D – 1-я четверть.

Пусть B_R – четверть круга $\begin{cases} x^2+y^2\le R^2 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$.

Тогда:

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \lim_{R\to+\infty}\iint_{B_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho = \lim_{R\to+\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\rho^2}\Big|_0^R =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\left(\lim_{R\to+\infty} e^{-R^2}\right) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Вычисление интеграла Пуассона.

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^{+\infty} dx\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy = I^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Признаки сравнения для двойных интегралов 1-го рода.

$f(x,y) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^P}$. Если P>0, то $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ – сходится. Если $f(x,y) \ge \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^P}\quad (P\le 2)$, то $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ – расходится.

НДИ 2-го рода.

Это НДИ от такой функции, у кот. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \infty$, $(x_0,y_0)\in D$

и область D – ограничена.

Пример.

$\iint_D \frac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy$, где $D:\ x^2+y^2\le R^2$

$$\iint_D \frac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy =$$

$$= \lim_{r\to 0}\iint_{B_r}\frac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy =$$

$$= \lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_r^R \frac{\cos\rho^2}{\rho^2}\cdot\rho\,d\rho = \begin{bmatrix} z=\rho^2 \\ d\rho=\dfrac{dz}{2\rho} \end{bmatrix} =$$

$$= \pi\cdot\lim_{r\to 0}\int_{r^2}^{R^2}\frac{\cos z}{z}\,dz =$$

$$= \begin{bmatrix} u=\dfrac{1}{z} & du=-\dfrac{1}{z^2}dz \\ dv=\cos z\,dz & v=\sin z \end{bmatrix} =$$

$$= \pi\cdot\lim_{r\to 0}\left(\frac{\sin z}{z}\Big|_{r^2}^{R^2} + \int_{r^2}^{R^2}\frac{\sin z\,dz}{z^2}\right) =$$

$$= \pi\cdot\left(\frac{\sin R^2}{R^2} - 1 + \lim_{r\to 0}\int_{r^2}^{R^2}\frac{\sin z\,dz}{z^2}\right);$$

$$\frac{\sin z\,dz}{z^2} \sim \frac{z}{z^2} = \frac{1}{z};\ \int_0^{R^2}\frac{dz}{z} - \text{ðàñõ.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ðàñõ. è âåñü èí ò åãðàë.}$$

Признаки сравнения для НДИ 2-го рода.

Если $f(x,y) \le \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^P}$, $P<2$, то $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ – сходится. Если $f(x,y) \ge \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^P}$, $P\ge 2$, то интеграл расходится.

Несобственные тройные интегралы.

НТИ 1-го рода)

Пусть V – неограниченная область, f(x,y,z) – ограниченная функция, тогда

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{\Omega\to V}\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$$

НТИ 2-го рода)

Это тройной интеграл от функции у которой $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = \infty$, по ограниченной области V.

Собственные интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, предельный переход, интегрирование и дифференцирование по параметру под значком интеграла.

Рассмотрим $F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$ – определена на некотором множестве y. При каждом фиксированном y это определённый интеграл Римана на отрезке a(y)≤y≤b(y). Наиболее часто встречается, что a(y), b(y) – числа, а функция задана на отрезке [c,d], тогда f(x,y) определена на прямоугольнике П=[a,b]×[c,d].

Теорема. Непрерывность СИЗП.

Пусть f(x,y) непрерывна в П=[a,b]×[c,d], тогда $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ непрерывна на y∈[c,d].

Док-во: функция непрерывна на отрезке, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка. Возьмём $\forall y_0\in[c,d]$ и докажем, что F(y) непрерывна в точке y_0. Докажем, что $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta F = 0$,

$$\Delta F = F(y_0+\Delta y) - F(y_0) =$$

$$= \int_a^b \big(f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0)\big)\,dx$$

f(x) непрерывна на П – компакт ⇒ равномерно непрерывна на П. ∀ε>0 ∃δ>0 $\forall(x_1,y_1)\in\Pi$ $\forall(x_2,y_2)\in\Pi$ $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))<\delta$ ⇒ $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\Delta F = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall|\Delta y|<\delta, \text{ò î}$$
$$|\Delta F| < \varepsilon$$

В определении равномерной непрерывности для $\frac{\varepsilon}{b-a}$ найдём δ>0 такое, что выполняется условие равномерной непрерывности. |Δy|<δ ⇒

$$\rho\big((x,y_0+\Delta y),(x,y_0)\big) =$$
$$= \sqrt{(x-x)^2 + (y_0+\Delta y-y_0)^2} =$$
$$= |\Delta y| < \delta$$

тогда

$$|f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\ \text{è}$$

$$|\Delta F| = \left|\int_a^b \big(f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0)\big)\,dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b |f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0)|\,dx <$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon$$

$$\text{Èò àê}\ \lim_{\Delta y\to 0}\Delta F = 0$$

Предельный переход под знаком СИЗП.

Пусть f(x,y) непр. в П, тогда

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx$$

Док-во:

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx = \lim_{y\to y_0} F(y) =$$
$$= \left[\text{ò åî ðåì à 1}\right] = F(y_0) =$$
$$= \int_a^b f(x,y_0)\,dx = \left[\text{ò .ê}\ f(x,y) - \text{í åï ð.}\right] =$$
$$= \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx$$

Интегрируемость СИЗП.

Пусть f(x,y) – непр. в П, тогда $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ интегрируема на [c,d], причём

$$\int_c^d F(y)\,dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$$

Док-во:

$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx = \iint_{\text{Ï}} f(x,y)\,dxdy =$. П – элементарная область как в напр. оси Ox, так и в напр. оси Oy.

$$= \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$$

Дифференцируемость СИЗП.

Пусть f(x,y) непрерывна в П и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ – непр. в П, тогда

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx$$

Док-во:

$$F'(y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\int_a^b \big(f(x,y+\Delta y) - f(x,y)\big)\,dx =$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\int_a^b \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\,dx =$$

$$= \int_a^b \left(\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\right)dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Определение сходимости и равномерной сходимости и связь между ними. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости НИЗП.

$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$, y∈Y, a – число.

При каждом фиксированном y – это будет просто несобственный интеграл 1-го рода: он может либо сходиться, либо расходиться.

Определение сходимости.

НИЗП сходится поточечно на некотором множестве, если при каждом значении параметра y из этого множества несобственный интеграл сходится.

$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ – сходится поточечно, если $\forall y_0\in Y$ $\int_a^{+\infty} f(x,y_0)\,dx$ – сходится к числу $F(y_0)$. По определению того, что несобственный интеграл сходится: $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x,y_0)\,dx = F(y_0)$ ⇔ ∀ε>0 $\exists M(\varepsilon,y_0)>0$ $\forall b>M(\varepsilon,y_0)$ ⇒

$$\left|F(y_0) - \int_a^b f(x,y_0)\,dx\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,y_0)\,dx\right| < \varepsilon$$

т.е остаток несобств. интеграла в точке y_0 мал.

Определение абс. сходимости.

НИЗП сходится абсолютно, если: $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ – сходится абсолютно в точке y_0.

Определение равномерной сходимости.

$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится к F(y) равномерно на множестве Y, если ∀ε>0 ∃M(ε) ∀b>M(ε) ∀y∈Y ⇒

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\int_a^b f(x,y)\,dx - F(y)\right| < \varepsilon$$

Отличие равномерной сходимости от поточеченой состоит в том, что в поточечной сходимости $M(\varepsilon,y_0)$ зависит от точки y_0, т.е для каждой точки это разные числа, а в равномерной сходимости число M(ε) одно и то же для всех y из Y. (все остатки равномерно малы).

Связь между равномерной и поточечной сходимостью.

Из равномерной сходимости всегда следует поточечная, т.к если ∃ M(ε) одинаковое для всех y ⇒ можно найти M для каждой точки, а если не найдём для каждой точки, то не найдём и для всех.

Критерий Коши равномерной сходимости.

$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ – сходится равномерно на Y ⇔ ∀ε>0 ∃ M(ε)>0 $\forall b_1>M(\varepsilon)$, $\forall b_2>M(\varepsilon)$, ∀y∈Y ⇒ $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$

Признак Вейерштрасса. Устанавливает равномерную сходимость НИЗП.

Пусть $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$, $|f(x,y)| \le \varphi(x)\ \ \forall y\in Y$, $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ – сходится. Тогда $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ – сходится равномерно.

Док-во: (по критерию Коши). Зафиксируем ε>0. По условию $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ – сходится.

Тогда по критерию Коши для несоб. интеграла без параметра ∃ M(ε)>0 $\forall b_1>M(\varepsilon)$, $\forall b_2>M(\varepsilon)$ ⇒ $\int_{b_1}^{b_2}\varphi(x)\,dx < \varepsilon$.

Оценим:

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right| \le \int_{b_1}^{b_2}|f(x,y)|\,dx \le \int_{b_1}^{b_2}\varphi(x)\,dx < \varepsilon$$

Итак для ∀ε>0 ∃ M(ε)>0 $\forall b_1>M(\varepsilon)$, $\forall b_2>M(\varepsilon)$ ∀y∈Y ⇒

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx - \text{ñõî ä-ñÿ}$$
$$\text{ðàâí î ì åðí î}$$

Непрерывность несобственных интегралов, зависящих от параметра. Предельный переход под знаком такого интеграла.

Теорема1. О непрерывности НИЗП. Пусть f(x,y) непрерывна в области D: [a,+∞)×[c,d] и $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ – сходится равномерно на [c,d]. Тогда $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ непрерывна на [c,d].

Док-во:

Покажем, что $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta F = 0$. Зафиксируем ε>0.

Для $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ из определения равномерной сходимости $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ $\Rightarrow \exists\, M(\varepsilon)>0$

$\forall b>M(\varepsilon) \Rightarrow \left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Введём

функцию $\varphi(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ – она

непрерывна, т.к ф-я f(x,y) непрерывна на D $\Rightarrow$ для $\forall\ \frac{\varepsilon}{2}>0$ $\exists\,\delta>0\ \forall\ |\Delta y|<\delta \Rightarrow$ $|\Delta\varphi|<\frac{\varepsilon}{3}$

$$|\Delta F| = |F(y+\Delta y)-F(y)| =$$

$$= \left|\int\limits_a^{+\infty} f(x,y+\Delta y)\,dx - \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| =$$

$$= \left|\int\limits_a^{b} f(x,y+\Delta y)\,dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x,y+\Delta y)\,dx -\right.$$

$$\left.-\int\limits_a^{b} f(x,y)\,dx - \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| \le |\Delta\varphi| +$$

$$+\left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y+\Delta y)\,dx\right| + \left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Итак $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall\ |\Delta y|<\delta \Rightarrow |\Delta F|<\varepsilon$

Теорема2. Предельный переход под знаком НИЗП.

Пусть f(x,y) непр. в области D=[a,+∞)×[c,d], $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ – сходится равномерно на [c,d]. Тогда $\forall y_0\in$[c,d]:

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^{+\infty}\lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx$$

Док-во:

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)\,dx = \lim_{y\to y_0} F(y) =$$

$$= [\text{ï î ò. î í åï ð.}] =$$

$$= F(y_0) = \int\limits_0^{+\infty} f(x,y_0)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx$$

Интегрирование и дифференцирование по параметру НИЗП.

Теорема1. Интегрируемость НИЗП.

Пусть f(x,y) – непр. в области D=[a,+∞)×[c,d]. $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ – сходится равномерно, тогда $F(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ – интегрируема на [c,d], причём

$$\int\limits_c^d F(y)\,dy = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx =$$

$$= \int\limits_a^{+\infty} dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$$

Док-во:

F(y) – непрерывна по теореме о непрерывности. ⇒ F(y) интегрируема на [c,d]: $\int\limits_c^d F(y)\,dy = \int\limits_c^a dy\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$. Покажем, что $\int\limits_a^{+\infty} dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$.

Зафиксируем ε>0. По условию $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ – сходится равномерно. Тогда для

$$\frac{\varepsilon}{d-c}>0\ \ \exists M(\varepsilon)\ \ \forall b>M(\varepsilon)$$

$$\left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}$$

$$\left|\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy - \int\limits_c^d dy\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| =$$

$$= \left|\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx - \int\limits_c^d dy\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| =$$

$$= \left|\int\limits_c^d dy\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}\int\limits_c^d dy = \varepsilon$$

$$\left|\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy - \int\limits_c^d dy\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$$ для

сколь угодно большого b. ⇒

$$\int\limits_a^{+\infty} dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

Теорема2. Дифференцирование НИЗП(правило Лейбница).

Пусть f(x,y), $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ – непрерывны в D, $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ – сходится, $\int\limits_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ – сходится равномерно. Тогда

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx$$

Док-во: $\int\limits_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ – сходится равномерно на [c,d] ⇒ сходится равномерно на [c,t] ∀t∈[c,d].

По теореме об интегрируемости

$$\int\limits_c^t dy\int\limits_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} dx\int\limits_c^t\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_a^{+\infty} dx\big(f(x,t)-f(x,c)\big) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx -$$

$$-\int\limits_a^{+\infty} f(x,c)\,dx\ \ ;$$

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,c)\,dx - \text{ñõî ä – ñÿ (ýò î ÷èñëî ï î óñë.)}$$

$$\int\limits_c^d dy\int\limits_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx + K$$

Дифференцируем это равенство по переменной t: (в левой части интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной(по теореме о непрерывности) функции).

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dx = \frac{d}{dt}\int\limits_a^{+\infty} f(x,t)\,dx$$

Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Признак Дирихле:

$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)g(x)\,dx$ – исследуем на сходимость. Пусть:

1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ – равномерно ограничена на некотором отрезке [c,d],

2)∃ g'(x) – непрерывна и знакопостоянна на [a,+∞],

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$,

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)g(x)\,dx$ – сходится на Y.

Признак Абеля:

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x,y)\,dx$ – исследуем на сходимость. Пусть:

1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ – сходится,

2) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ – непрерывна и знакопостоянна на [a,+∞],

3)g(x,y) равномерно ограничена на Y:

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x,y)\,dx$ – сходится равномерно на Y.

Применение теории НИЗП к вычислению интегралов без параметра.

Вычислим интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

Введём интеграл с параметром:

$$F(a)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,dx\quad (a\ge 0)$$

при a=0 получаем исходный интеграл.

Воспользуемся правилом Лейбница:

1) $\int\limits_0^{+\infty} e^{ax}\frac{\sin x}{x}\,dx$ – сходится (по признаку Абеля)

2) $f(x,a)=e^{-ax}\frac{\sin x}{x}$ – непр. при x>0, a≥0

$\frac{\partial f}{\partial a}=-e^{-ax}\sin x$ – непрерывна при x>0, a≥0.

3)

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial a}\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin x\,dx$$

$$\left|e^{-ax}\sin x\right| \le e^{-ax} < e^{-a_0 x}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a_0}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a_0}$$

$$\text{Ñõ – ñÿ ðàâí î ì åðí î í à } \forall\,[a_0,+\infty),$$

$$\text{ãäå } a_0>0$$

$$F'(a)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial a}\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin x\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u=e^{-ax} & du=-ae^{-ax}dx \\ dv=-\sin x\,dx & v=\cos x \end{bmatrix} =$$

$$= e^{-ax}\cos x\Big|_0^{+\infty} + a\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos x\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u=e^{-ax} & du=-ae^{-ax}dx \\ dv=\cos x\,dx & v=\sin x \end{bmatrix} =$$

$$= -1 + a\left(e^{-ax}\sin x\Big|_0^{+\infty} + a\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin x\,dx\right) =$$

$$= -1 - a^2F'(a)$$

$$F'(a) = -\frac{1}{1+a^2}\ ;\ F(a) = -arctg(a)+C$$

$$\text{Í àéä. Ñ:}$$

$$\left|e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\right| = e^{-ax}\frac{|\sin x|}{|x|} < e^{-ax}$$

$$\text{ï ðè } a\to+\infty\ \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a}\to 0$$

$$F(a)\to 0 \text{ ï ðè } a\to+\infty \text{ î òêóäà:}$$

$$0 = -\frac{\pi}{2}+C \Rightarrow C=\frac{\pi}{2}$$

$$F(a) = -arctg(a)+\frac{\pi}{2}$$

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = F(0) = \frac{\pi}{2}$$

Гамма-функция Эйлера и её свойства.

$$\Gamma(S)=\int\limits_0^{+\infty} x^{S-1}e^{-x}\,dx$$

Св-ва:

1)ООФ: S – лежит в области определения функции, если при этом значении параметра несобственный интеграл сходится. Особые точки x=0, x=+∞.

Разобьём на два интеграла. Каждый из них имеет одну особую точку.

$$\Gamma(S)=\int\limits_0^1 x^{S-1}e^{-x}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} x^{S-1}e^{-x}\,dx$$

а)Рассмотрим 1-й интеграл: $\int\limits_0^1 x^{S-1}e^{-x}\,dx$.

При 0≤x≤1 ⇒ $\frac{1}{e}\le e^{-x}\le 1$

$$\frac{1}{e}x^{S-1} < x^{S-1}e^{-x} < x^{S-1}$$

По признаку сравнения $\int\limits_0^1 x^{S-1}e^{-x}\,dx$ ведёт себя также как и $\int\limits_0^1 x^{S-1}\,dx = \int\limits_0^1\frac{dx}{x^{1-S}}$ – сходится при S>0.

б)Рассмотрим 2-й интеграл:

$$\int\limits_1^{+\infty} x^{S-1}e^{-x}\,dx$$

Т.к при x → +∞ e^{x} растёт медленнее, чем x^{S-1} с основанием x>1, тогда:

$$x^{S-1} < e^{x/2}$$

$$x^{S-1}e^{-x} < e^{x/2}\cdot e^{-x}$$

$\int\limits_1^{+\infty} e^{-x/2}\,dx = -2e^{-x/2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{e}}$, тогда по признаку сравнения $\int\limits_1^{+\infty} x^{S-1}e^{-x}\,dx$ – сходится при ∀S∈R.

Сумма двух интегралов сходится тогда, когда сходится и 1-й интеграл ⇒ исходный интеграл сходится при S>0, т.е область определения S>0.

2)Докажем, что Γ(S) сходится равномерно на любом отрезке [S_1,S_2] где S_1>0.

$$\Gamma(S)=\int\limits_0^1 x^{S-1}e^{-x}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} x^{S-1}e^{-x}\,dx$$

а)Рассмотрим $\int\limits_0^1 x^{S-1}e^{-x}\,dx$. 0<x<1, S_1<x<S_2.

$$x^{S-1} < x^{S_1-1}$$

$$x^{S-1}e^{-x} < x^{S_1-1}e^{-x}$$

$$\int\limits_0^1 x^{S_1-1}e^{-x}\,dx - \text{ñõî ä. êàê è â 1 – î ì}$$

$$\int\limits_0^1 x^{S_1-1}e^{-x}\,dx - \text{ñõî ä. ðàâí î ì åðí î ï î}$$

$$\text{ò .Âåéåðø ò ðàññà}$$

б)Рассмотрим

$$\int\limits_1^{+\infty} x^{S-1}e^{-x}\,dx$$

$$x^{S-1} < x^{S_2-1},\ \int\limits_1^{+\infty} x^{S_2-1}e^{-x}\,dx - \text{ñõî ä. êàê â ñâ – âå 1}$$

$$\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} x^{S-1}e^{-x}\,dx - \text{ñõî ä. ðàâí î ì åðí î ï î}$$

$$\text{ò .Âåéåðø ò ðàññà}$$

$$\Gamma(S) - \text{ñõî ä. ðàâí î ì åðí î í à } [S_1;S_2]$$

3)Γ(S) – непрерывна на (0,+∞).

Пусть S_0 – произвольная точка S_0∈(0,+∞) ∃ [S_1,S_2] и 0<S_1<S_2. По свойству 2: Γ(S) равномерно сходится на [S_1,S_2] ⇒ Γ(S) непрерывна на [S_1,S_2] ⇒ Γ(S) непр. в т. S_0.

Т.к точка S_0 – произвольная, то ⇒ Γ(S) непр. на всей области определения.

4)Γ(S)>0 ∀S>0.

5)Γ(S+1)=S Γ(S) – основное св-во гамма-функции.

Док-во:

$$\Gamma(S+1)=\int\limits_0^{+\infty} x^S e^{-x}\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u=x^S & du=s\cdot x^{S-1} \\ dv=e^{-x}dx & v=-e^{-x} \end{bmatrix} =$$

$$= -x^S e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + s\cdot\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx = s\cdot\Gamma(s)$$

6)Γ(n+1)=n!

$$\Gamma(1)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

$$\Gamma(n+1)=n\cdot\Gamma(n)=n\cdot(n-1)\cdot\Gamma(n-1)=\ldots=$$

$$= n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$$

Γ(S) можно считать продолжением функции n! заданной только для целых неотрицательных чисел на множестве всех положительных чисел. Значение Γ(S) в любой точке S>0 можно выразить через некоторое значение Γ(S) на интервале (0,1)

7)Пусть S≠N, обозначим n=[S] – целая часть числа. Тогда:

Γ(S) = (S-1)Γ(S-1) = (S-1)(S-2)Γ(S-2)=…= =(S-1)(S-2)…(S-n)Γ(S-n), где (S-n)∈(0,1).

8)Дифференцируемость Γ(S).

$$\Gamma(S)=\int\limits_0^{+\infty} x^{S-1}e^{-x}\,dx$$

$$\Gamma'(S)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial S}\left(x^{S-1}e^{-x}\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} x^{S-1}e^{-x}\ln x\,dx$$

$$\Gamma''(S)=\int\limits_0^{+\infty} x^{S-1}e^{-x}\ln^2 x\,dx$$

9)График Γ(S), S>0.

$$\lim_{S\to 0}\Gamma(S)=\lim_{S\to 0}\frac{\Gamma(S+1)}{S} = +\frac{1}{0} = +\infty \Rightarrow$$

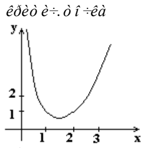
$$\Rightarrow S=0 - \text{âåðò .àñèì ï ò î ò à.}$$

$$\Gamma(1)=1\,;\,\Gamma(2)=1$$

$$\Rightarrow \exists S_0\in(1,2)\ \ \Gamma'(S_0)=0$$

$$\Gamma''(S)>0 \Rightarrow \Gamma'(S)\ \text{âî çðàñò .} \Rightarrow S_0 - \text{åäèí ñò â.}$$

$$\text{êðèò è÷. ò î ÷êà}$$



10)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}-1}e^{-x}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= \begin{bmatrix} x=t^2 \\ dx=2tdt \end{bmatrix} = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

11)Значения Γ(S) в полуцелых числах

$$\Gamma\left(K+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2K-1)!!}{2^K}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(K+1)=\left(K-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(K-\frac{1}{2}\right)=$$

$$= \left(K-\frac{1}{2}\right)\left(K-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{2}\right)=\ldots=$$

$$= \left(K-\frac{1}{2}\right)\left(K-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$= \frac{(2K-1)(2K-3)\ldots 1}{2^K}\sqrt{\pi} = \frac{(2K-1)!!}{2^K}\sqrt{\pi}$$

12)Формула дополнения:

$$\Gamma(S)\cdot\Gamma(S-1)=\frac{\pi}{\sin\pi S}$$

13)Асимптотическая формула:

$\Gamma(x+1)=x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}\,(1+\alpha(x))$, где α(x)→0 при x → +∞.

$n!\approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ – формула Стирлинга.

Бета-функция и её свойства.

$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ – интеграл Эйлера I-го рода (несобственный интеграл II-го рода).

Свойства.

1)Область определения состоит из таких p и q, при кот. интеграл сходится. ∃ две особые точки x=0, x=1. Разделим интеграл на два:

$$B(p,q)=\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+$$
$$+\int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

а)Рассмотрим 1-й интеграл (x = 0 – особая точка):

$$\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$
$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim x^{p-1}\ (\text{ïðè } x\to 0)$$
$$\int_0^{1/2} x^{p-1}dx=\int_0^{1/2}\frac{dx}{x^{1-p}}-\text{ñõî ä.åñëè } p>0$$

б)Рассмотрим $\int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$, где x=1 – особая точка.

$$\int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$
$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim(1-x)^{q-1}\ (\text{ïðè } x\to 1)$$
$$\int_{1/2}^1\frac{dx}{(1-x)^{1-q}}=[t=1-x]=\int_0^{1/2}\frac{dt}{t^{1-q}}-\text{ñõî ä.}$$
$$\text{ïðè } q>0$$

Тогда сумма двух интегралов, а ⇒ и сам исходный интеграл сходится при p>0, q>0.

2)B(p,q) равномерно сходится в любом угле $p>p_0>0$, $q>q_0>0$.

Док-во:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$
$$0<x<1;\ p>p_0;\ x^{p-1}<x^{p_0-1}$$
$$0<1-x<1;\ q>q_0;\ (1-x)^{q-1}<(1-x)^{q_0-1}$$
$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}<x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}$$
$$\Rightarrow\int_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}dx-\text{ñõî ä. ï î 1 – ì ó ï ðèçí.}$$

Тогда по т. Вейерштрасса интеграл сходится равномерно в заданном угле.

3)B(p,q) непрерывна на p>0, q>0

Док-во:

Пусть p_0, q_0 – произвольные точки из $(0,+\infty)$. Пусть ∃ $[p_1,p_2]$, $[q_1,q_2]$. По св-ву 2 интеграл равномерно сходится на $[p_1,p_2]$, $[q_1,q_2]$ ⇒ он непрерывен в точках p_0,q_0. Т.к точки p_0, q_0 – произвольные, то интеграл непрерывен на всей области определения.

4)B(p,q)>0 при p>0,q>0.

5)B(p,q)=B(q,p)

Док-во:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=[t=1-x]=$$
$$=\int_0^1(1-t)^{p-1}t^{q-1}dt=B(q,p)$$

6)
$$B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$$

Док-во:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=$$
$$=\begin{bmatrix}u=(1-x)^{q-1} & du=(1-q)(1-x)^{q-2}dx\\ dv=x^{p-1}dx & v=\frac{1}{p}x^p\end{bmatrix}=$$
$$B(p,q)=\frac{1}{p}(1-x)^{q-1}x^p\Big|_0^1+$$
$$+\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx$$
$$x^p(1-x)^{q-2}=x\cdot x^{p-1}(1-x)^{q-2}=$$
$$=(1-(1-x))x^{p-1}(1-x)^{q-2}=x^{p-1}(1-x)^{q-2}-$$
$$-x^{p-1}(1-x)^{q-1}$$
$$B(p,q)=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx-$$
$$-\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$
$$B(p,q)=\frac{q-1}{p}B(p,q-1)-\frac{q-1}{p}B(p,q)$$
$$B(p,q)\cdot\frac{p+q-1}{p}=\frac{q-1}{p}B(p,q-1)$$
$$B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)=$$
$$=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)$$

7)Связь между B(p,q) и Г(S):

m∈N, n∈N

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$
$$B(p,1)=\int_0^1 x^{p-1}dx=\frac{1}{p}x^p\Big|_0^1=\frac{1}{p}$$
$$B(m,n)=[\text{ñâ – âî } 6]=\frac{n-1}{m+n-1}B(m,n-1)=$$
$$=\frac{n-1}{m+n-1}\cdot\frac{n-2}{m+n-2}\cdot B(m,n-2)=$$
$$=\ldots=\frac{n-1}{m+n-1}\cdot\frac{n-2}{m+n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{m+1}B(m,1)=$$
$$=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}=\frac{\Gamma(n)\cdot\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)}$$

8)B(p,q) через несобственный интеграл I-го рода:

$$B(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}dt}{(1+t)^{p+q}}$$

Док-во:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=$$
$$=\left[x=\frac{t}{t+1};dx=\frac{dt}{(1+t)^2}\right]=$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p-1}}\cdot\frac{1}{(t+1)^{p-1}}\frac{dt}{(t+1)^2}=$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}dt}{(1+t)^{p+q}}$$

9)
$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\quad\forall p>0,\forall q>0$$

Док-во:

$$\Gamma(S)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx=\begin{bmatrix}x=ty\\ dx=tdy\end{bmatrix}=$$
$$=\int_0^{+\infty}t^{s-1}y^{s-1}e^{-ty}tdy=t^s\int_0^{+\infty}y^{s-1}e^{-ty}dy$$
$$\frac{\Gamma(s)}{t^s}=\int_0^{+\infty}y^{s-1}e^{-ty}dy,$$
$$s=p+q\,;\,t\to t+1$$
$$\frac{\Gamma(p+q)}{(t+1)^{p+q}}=\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-ty-y}dy$$

Домножим это равенство на t^{p+1} и проинтегрируем по t от 0 до $+\infty$.

$$\Gamma(p+q)\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}dt}{(1+t)^{p+q}}=\int_0^{+\infty}t^{p-1}dt\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-ty-y}dy$$
$$\Gamma(p+q)\cdot B(p,q)=\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-y}dy\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-ty}dt=$$
$$=\Gamma(p+q)\cdot B(p,q)=\Gamma(p)\int_0^{+\infty}y^{q-1}e^{-y}dy$$
$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

10)Формула дополнения:

$$B(p,1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$$

Док-во:

$$B(p,1-p)=[\text{ñâ – âî } 9]=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)}=$$
$$=[\text{ñâ – âî 12 äëÿ ãàì ì à – ô – öèè}]=$$
$$=\frac{\pi}{\sin p\pi}$$

Вычисление интегралов с помощью Г и В-функций.

Примеры.

1)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}dx}{(1+x)^2}==$$
$$B(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}dx}{(1+x)^{p+q}};$$
$$p=\frac{5}{4};q=\frac{3}{4};$$
$$==B\left(\frac{5}{4};\frac{3}{4}\right)=\frac{\frac{5}{4}-1}{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}-1}B\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\left(\pi/4\right)}=$$
$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

2)

$$\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{5/2}(\cos x)^{3/2}dx=$$
$$=\begin{bmatrix}\sin^2 x=z\\ \cos^2 x=1-z\\ dz=2\sin x\cos xdx\\ dx=\frac{dz}{2\sin x\cos x}\end{bmatrix}=$$
$$=\int_0^1 z^{5/4}(1-z)^{3/4}\frac{dz}{2z^{1/2}(1-z)^{1/2}}=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 z^{3/4}(1-z)^{1/4}dz=$$
$$=B\left(\frac{7}{4};\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2}\frac{\frac{7}{4}-1}{\frac{7}{4}+\frac{5}{4}-1}B\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)=$$
$$=\frac{3}{16}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{3\pi\sqrt{2}}{64}$$

3)

$$\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{p-1}(\cos x)^{q-1}dx=$$
$$=\begin{bmatrix}\sin^2 x=z\\ \cos^2 x=1-z\\ dz=2\sin x\cos xdx\\ dx=\frac{dz}{2\sin x\cos x}\end{bmatrix}=$$
$$=\int_0^1 z^{\frac{p-1}{2}}(1-z)^{\frac{q-1}{2}}\frac{dz}{2z^{1/2}(1-z)^{1/2}}=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 z^{\frac{p}{2}-1}(1-z)^{\frac{q}{2}-1}dz=\frac{1}{2}B\left(\frac{p}{2};\frac{q}{2}\right)=$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$

4)

$$\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{2K}dx=\frac{\Gamma\left(K+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(2K+1)}=$$
$$=\frac{(2K-1)!!\sqrt{\pi}}{2^{K+1}\cdot K!}\sqrt{\pi}=\frac{(2K-1)!!\cdot\pi}{2^{K+1}K!}$$

Векторные поля, линии и трубки: примеры.

Поля.

1)Говорят, что в некоторой области $\Omega\subset R^3$ задано векторное поле, если каждой точке из этой области сопоставлен в соответствие вектор

$$\vec{a}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

Примеры:

а)Поле скоростей стационарного потока жидкости. Определяется так: область Ω заполненная жидкостью, текущей в каждой точке с некоторой скоростью $\vec{\upsilon}$, не зависящей от времени, но зависящей от точки. Поставив в соответствие каждой точке M из области Ω вектор $\vec{\upsilon}(M)$ получим векторное поле, называемое полем скоростей.

б)Поле тяготения. Пусть в пространстве распределена некоторая масса. На материальную точку с массой 1, помещённой в данную точку действует некоторая гравитационная сила. Эти силы определены в каждой точке и образуют некоторое векторное поле, назыв. полем тяготения, отвечающим данному распределению масс, или гравитационным полем.

в)Электростатическое поле. Если в пространстве распределены каким-либо образом электрические заряды, то на электрич. заряд, помещённый в точку M эти заряды действуют с определённой силой и, образованное этими силами ,векторное поле назыв. электростатическим полем.

Векторные линии и трубки.

Пусть в некоторой области Ω задано векторное поле с коорд. (P,Q,R).

Опред. векторной линии.

Кривая, лежащая в области Ω назыв. векторной линией, если в каждой точке этой кривой, направление касательной к этой кривой совпадает с направлением векторного поля:

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$
$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Т.к векторы параллельны, то их коорд. пропорциональны:

$$\frac{p(x,y,z)}{dx}=\frac{Q(x,y,z)}{dy}=\frac{R(x,y,z)}{dz}$$

Определение. Векторное поле назыв. плоским, если все вектора поля параллельны одной и той же плоскости и в каждой плоскости, параллельной указанной векторное поле одно и то же. (напр. магнитное поле беск. провода).

Определение векторной трубки.

Ограниченная некоторой поверхностью Σ часть пространства, в котором задано векторное поле $\vec{a}$ назыв. векторной трубкой, если в каждой точке поверхности Σ нормаль к этой поверхности ⊥ вектору $\vec{a}$ в этой точке, иначе говоря – это часть пространства, состоящая из целых векторных линий – поверхность Σ целиком состоит из векторных линий.

Если векторное поле – это поле скоростей стац. потока жидкости, то векторная линия – это траектория движения частиц жидкости, а векторная трубка – это часть пространства, которую при своём движении охватывает некоторый объём жидкости.

Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция векторного поля. Физический смысл теоремы Остроградского – Гаусса.

Определение потока вектора через поверхность.

Рассмотрим частный случай, когда $\vec{a}$ – поле скоростей стац. потока жидкости П. Потоком жидкости через поверхность Σ назыв. кол-во жидкости, протекающее через поверхность Σ за единицу времени. Рассмотрим простейший слечай, когда скорость $\vec{\upsilon}$ – постоянна и поверхность Σ – плоская, тогда кол-во жидкости за единицу времени, при этом поток жидкости равен объёму цилиндра с основанием S и образующей $\vec{\upsilon}$:

$$h=(\vec{\upsilon};\vec{n})$$
$$\text{Ï}=(\vec{\upsilon};\vec{n})\cdot S$$

В общем случае считаем, что скорость $\vec{\upsilon}$ меняется непрерывно и поверхность Σ – гладкая, т.е имеет в каждой точке непрерывно меняющуюся кас. плоскость. Разобьём поверхность на столь малые части, что каждые из этих частей можно считать плоской, а скорость на ней постоянной. Т.к поток жидкости через поверхность равен сумме потоков через все её части, то:

$$\text{Ï}\approx\sum_{K=1}^n(\vec{\upsilon},\vec{n})\Big|_{M_K}\cdot\Delta\sigma_K$$

, если диаметр частей d→0, то:

$$\text{Ï}=\iint_\Sigma(\vec{\upsilon},\vec{n})d\sigma$$

Свойства потока:

1)Линейность:

$$\vec{a},\vec{b}-\text{âåêò. ï î ëÿ}\quad\lambda,\mu\in R$$
$$\iint_\Omega\left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b},\vec{n}\right)d\sigma=\lambda\iint_\Omega(\vec{a},\vec{n})d\sigma+$$
$$+\mu\iint_\Omega(\vec{a},\vec{n})d\sigma$$

2)Аддитивность по поверхности.

$$\Omega=\Omega_1\bigcup\Omega_2\ ;\ \Omega_1\bigcap\Omega_2-\text{í óëåâ. ï ëî ù .}$$
$$\iint_\Omega(\vec{a},\vec{n})d\sigma=\iint_{\Omega_1}(\vec{a},\vec{n})d\sigma+\iint_{\Omega_2}(\vec{a},\vec{n})d\sigma$$

3)Зависимость от ориентации. Если меняется ориентации поверхности, то вектор нормали меняется на противоположный ⇒ поток меняет знак.

Вычисление потока.
1)В декартовой С/К:

$$\vec{n}=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$$

ïî ô – ëå ïëîù . ïðîåêöèè :

$$dxdy=\cos\gamma\cdot d\sigma$$

$$dydz=\cos\alpha\cdot d\sigma$$

$$dxdz=\cos\beta\cdot d\sigma$$

Ìîæíî ïåðåéòè îò ïîâ.èíò 1 – ãî ð.ê ïîâ.èíò 2 – ãî ðîäà è íàîáîðîò .

$$\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

$$\text{Ï}=\iint_{\Omega}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma=$$

$$=\iint_{\Omega}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma=$$

$$=\iint_{\Omega}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$$

2)Проектирование на одну из коорд. плоскостей. Если поверхность однозначно проектируется на одну из координатных плоскостей, например на XoY и её можно задать явно уравнением z=z(x,y), где z(x,y) – непрерывна и имеет частные производные в области Ω.

$$\vec{N}=\left\{-\frac{\partial z}{\partial x};-\frac{\partial z}{\partial y};1\right\}$$

$$\vec{n}=\pm\frac{-\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}}$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}}>0$$

$$\text{Ï}=\iint_{\Omega}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma$$

$$d\sigma=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}\,dxdy$$

$$\cos\alpha=\frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}};$$

$$\cos\beta=\frac{-\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}}$$

Òîãäà :

$$\text{Ï}=\pm\iint_{D}\left(P(x,y,z(x,y))\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\right.$$

$$\left.+Q(x,y,z(x,y))\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+R(x,y,z(x,y))\right)dxdy$$

Поток вектора через замкнутую поверхность.

$$\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

$$P;Q;R;\frac{\partial P}{\partial x};\frac{\partial Q}{\partial y};\frac{\partial R}{\partial z}-\text{íåïð. â }\Omega$$

$$S-\text{çàìêí. ïîâ-òü â }\Omega$$

$$\text{Ï}=\iint_{S}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=$$

$$=\iiint_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

V – îáëàñòü, îãðàíè÷. ïîâ – þ S.

Физический смысл потока через поверхность.
Рассмотрим векторное поле скоростей стац. потока жидкости. Если поток через нек. замкнутую поверхность S положителен, значит внутри области, образованной этой поверхностью выходит больше жидкости, чем в неё входит. В этом случае говорят, что в этой области есть источник, образующий жидкость. Если поток отрицательный, то ⇒ из области выходит меньше жидкости, чем в неё входит. В этом случае имеются стоки. Поток вектора через замкнутую поверхность говорит о наличии источников или стоков в области, ограниченной этой поверхностью и об их производительности, т.к поток – это кол-во жидкости, прох. за единицу времени.
Дивергенция векторного поля.
Это ещё одна числовая характеристика, кот. описывает поведение векторного поля в каждой точке этого поля. Пусть в некоторой области Ω задано некоторое поле. Возьмём произвольную точку M из этой области. Окружим точку M произвольной замкнутой поверхностью S, леж. в области Ω, например S – сфера малого радиуса с центром в точке M, тогда:

$\dfrac{\iint_S(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma}{V}$ – производительность единицы объёма – средняя плотность потока.
Определение дивергенции.
Если ∃ предел этого отношения если область V стремится в точку M, то этот предел назыв. дивергенцией векторного поля в точке M.

$$div(\vec{a}(M))=\lim_{V\to M}\frac{\iint_S(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma}{V}$$

Физический смысл – плотность потока в точке M.
Вычисления дивергенции.

$$\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

$$\iint_S(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=$$

$$=[\text{ò. î ñðåäíåì}]=\left.\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right|_{\tilde{M}}\cdot V_1$$

$$\text{ãäå }\tilde{M}\in V_1$$

$$div(\vec{a}(M))=\lim_{V_1\to M}\left.\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right|_{\tilde{M}}$$

$$div(\vec{a}(M))=\left.\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right|_{M}$$

Физический смысл теоремы Остроградского-Гаусса.

$$\oiint_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=$$

$$=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$\oiint_S(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma=\iiint_V div(\vec{a})\,dxdydz$$

Поток вектора через внешнюю сторону замкнутой поверхности равен тройному интегралу по области, ограниченной этой поверхностью, о дивергенции этой области.
Свойства дивергенции:

1) $div(C)=0$

2) $div(C_1\vec{a}_1+\ldots+C_n\vec{a}_n)=$
$=C_1div(\vec{a}_1)+\ldots+C_ndiv(\vec{a}_n)$

3)
åñëè U(m) – ñêàëÿðíàÿ ô – ÿ, òî

$$div(U\cdot\vec{a})=U\cdot div(\vec{a})+grad(U\vec{a})$$

$$\vec{a}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$$

$$U\cdot\vec{a}=(UP)\vec{i}+(UQ)\vec{j}+(UR)\vec{k}$$

$$div(U\cdot\vec{a})=\frac{\partial}{\partial x}(U\cdot P)+\frac{\partial}{\partial y}(U\cdot Q)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(U\cdot R)=\frac{\partial U}{\partial x}P+\frac{\partial U}{\partial y}Q+\frac{\partial U}{\partial z}R+$$

$$+U\frac{\partial P}{\partial x}+U\frac{\partial Q}{\partial y}+U\frac{\partial R}{\partial z}=$$

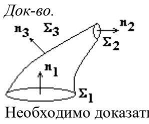
$$=U\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial U}{\partial x}P+\frac{\partial U}{\partial y}Q+\frac{\partial U}{\partial z}R\right)=$$

$$=U\cdot div(\vec{a})+grad(U\cdot\vec{a})$$

Трубчатые (соленоидальные) поля. Закон сохранения интенсивности векторной трубки.

Поле назыв. соленоидальным в некоторой области Ω, если дивергенция равна нулю в каждой точке этого поля.
Из теоремы Остроградского-Гаусса ⇒ что поток вектора через любую замкнутую поверхность в трубчатом поле равен нулю. Примером такого поля может служить поле скоростей стационарного потока жидкости без истоков и стоков.
Закон сохранения интенсивности вект. трубки.
Важное свойство трубчатого поля – закон сохранения интенсивности векторной трубки.
Поток вектора через любое сечение векторной трубки в соленоидальном поле постоянен.
Док-во.



Необходимо доказать, что

$$\iint_{\Sigma_1}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma=\iint_{\Sigma_2}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma$$

Дополним поверхность Σ_1 и Σ_2 до замкнутой пов-ти, добавив к ней боковую поверхность векторной трубки Σ_3. Пусть $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3$.

$$\iint_{\Sigma}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma=\iint_{\Sigma_1}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma-$$

$$-\iint_{\Sigma_2}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma+\iint_{\Sigma_3}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma=0$$

$$\text{Ïîîïðåä. âåêò. òðóáêè ò.ê }\vec{n}_3\perp\vec{a}\text{ òî :}$$

$$\iint_{\Sigma_3}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\iint_{\Sigma_1}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma=\iint_{\Sigma_2}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma$$

Следствие:
Поток вектора через любую поверхность, натянутую на данный контур, одинаковый, если поле соленоидальное.

Ротор, циркуляция. Физический смысл теоремы Стокса.

$$rot(\vec{a})\ ;\ \vec{a}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}\,.$$

Ротор векторного поля – это вектор, который определяется как:

$$rot(\vec{a})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Если в каждой точке области ротор равен нулю в каждой точке, то поле в этой области назыв. безвихревым. Т.к ротор – это вектор, то он создаёт некоторое векторное поле. Рассчитаем дивергенцию этого векторного поля:

$$div(rot(\vec{a}))=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2R}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2Q}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2P}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2R}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2Q}{\partial x\partial z}-$$

$$-\frac{\partial^2P}{\partial y\partial z}=0$$

если смешанные производные – непрерывные. Т.е поле ротора – трубчатое поле.
Циркуляция.

$$\text{Ö}=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$$

Циркуляция векторного поля $\vec{a}$ по замкнутому контуру L, обходимого против часовой стрелки можно записать:

$$\text{Ö}=\oint_L(\vec{a},d\vec{r})\ ;\ \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

Теорема Стокса:

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx$$

где σ – поверхность, натянутая на контур L.
– векторная

$$\oint_L(\vec{a},d\vec{r})=\iint_{\sigma}(rot(\vec{a}),\vec{n})\,d\sigma$$

форма теоремы Стокса.
Циркуляция вектора по замкнутому ориентированному контуру L равно потоку ротора этого вектора через поверхность, натянутую на контур L.
Нормаль и поверхность ориентированы таким образом, что если встать в конец нормали, то обход контура L совершается против часовой стрелки (по правилу правого винта).

$$\oint_L(\vec{a},d\vec{r})=\iint_{\sigma}(rot(\vec{a}),\vec{n})\,d\sigma=$$

$$=\left.(rot(\vec{a}),\vec{n})\right|_{\tilde{M}}\cdot S=\left.\text{Ïð}_{\vec{n}}(rot(\vec{a}))\right|_{\tilde{M}}\cdot S$$

$$\left.\text{Ïð}_{\vec{n}}(rot(\vec{a}))\right|_{\tilde{M}}=\frac{\oint_L(\vec{a},d\vec{r})}{S}$$

$$\left.\text{Ïð}_{\vec{n}}(rot(\vec{a}))\right|_{M}=\lim_{S\to M}\frac{\oint_L(\vec{a},d\vec{r})}{S}$$

Проекция вектора $rot(\vec{a})$ на любое направление равно поверхностной плотности циркуляции в данной точке.
Ротор $\vec{a}$ – это вектор, длина которого равна наибольшей поверхностной плотности циркуляции в данной точке. Направление совпадает с направлением нормали, для которой достигается критическая поверхностная плотность. Ориентация вектора нормали $\vec{n}$ согласована с ориентацией контура площади S по правилу правого винта.
Физический смысл ротора.
Пусть твёрдое тело вращается вокруг некоторой оси.

l – îñü âðàùåíèÿ

$$l=Oz$$

$$\vec{\omega}=\omega\vec{k}$$

$$\vec{\upsilon}=[\vec{\omega},\vec{r}]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&\omega\\x&y&z\end{vmatrix}=-y\omega\vec{i}+x\omega\vec{j}$$

$$rot(\vec{\upsilon})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ -y\omega&x\omega&0\end{vmatrix}=2\omega\vec{k}$$

Ротор поля скоростей сонаправлен с угловой скоростью и по модулю в два раза больше.

Свойства ротора.

1) $rot(C)=0$

2) $rot(C_1\vec{a}_1+\ldots+C_n\vec{a}_n)=C_1rot(\vec{a}_1)+\ldots+$
$+C_nrot(\vec{a}_n)$

3)

$$rot(U\cdot\vec{a})=U\cdot rot(\vec{a})+[grad(U),\vec{a}]$$

$$rot(U\cdot\vec{a})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ U\cdot P&U\cdot Q&U\cdot R\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial y}(UR)-\frac{\partial}{\partial z}(UQ)\right)\vec{i}-$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}(UR)-\frac{\partial}{\partial z}(UP)\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}(UQ)-\frac{\partial}{\partial y}(UP)\right)\vec{k}=\left(\frac{\partial U}{\partial y}R+U\frac{\partial R}{\partial y}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial U}{\partial z}Q-U\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial U}{\partial x}R+U\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial z}P-\right.$$

$$\left.-U\frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial U}{\partial x}Q+U\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}P-U\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=U\cdot\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial U}{\partial x}&\frac{\partial U}{\partial y}&\frac{\partial U}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}$$

Из условий существования полного дифференциала ⇒ что поле потенциально ⇔ когда ротор равен нулю.
Оператор Гамильтона.
Оператор Гамильтона позволяет более кратко записывать основные операции векторного поля.

$$\vec{\nabla}=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$grad(U)=\vec{\nabla}U$$

$$div(\vec{a})=(\vec{\nabla};\vec{a})$$

$$rot(\vec{a})=(\vec{\nabla};\vec{a})$$

Ñâîéñòâà :

1) $\vec{\nabla}\vec{N}=0$

2) $(\vec{\nabla};C)=0\,,\,[\vec{\nabla};C]=0$

3) $(\vec{\nabla};\vec{a}+\vec{b})=(\vec{\nabla};\vec{a})+(\vec{\nabla};\vec{b})$

4) $[\vec{\nabla};\vec{a}+\vec{b}]=[\vec{\nabla};\vec{a}]+[\vec{\nabla};\vec{b}]$