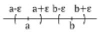
1.Теорема о единственности сходящейся последовательности

Если предел числовой последовательности существует и конечен, то он единственен

Предположим, что существуют и конечны $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Пусть $a < b$, тогда интервалы $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ и $(b-\varepsilon;\ b+\varepsilon)$, где, например, $\varepsilon = \frac{|b-a|}{3}$ должны одновременно содержать все члены числовой последовательности, кроме конечного их числа, что невозможно, так как эти интервалы не имеют общих точек. Предположение неверное $\Rightarrow a = b$



2.Теорема об ограниченности сходящейся последовательности

Любая сходящаяся последовательность ограничена

По условию $\{x_n\}$ сходится $\Rightarrow$ существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \underset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow}$ для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon)$: для $\forall\ n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ для $\forall\ n > N(\varepsilon)$. $A = \max\{|a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|\}$. Тогда $|x_n| \le A$ для $\forall\ n \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \{x_n\}$ ограничена

3.Теорема о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел

Если существует и конечен $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то функция $y = f(x)$ - локально ограниченная

По условию существует и конечен $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \mathring{U}(a)$: для $\forall\ x \in \mathring{U}(a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Пусть $\varepsilon = 1 \Rightarrow |f(x) - A| < 1$ для $\forall\ x \in \mathring{U}(a)$. $|f(x)| - |A| \le |f(x) - A| < 1$ для $\forall\ x \in \mathring{U}(a) \Rightarrow |f(x)| < 1 + |A| = c$ для $\forall\ x \in \mathring{U}(a) \Rightarrow f(x)$ - локально ограниченная.

4.Теорема о сохранении функцией знака своего предела

Если существует и конечен $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $A > 0$ $(A < 0)$, то $\exists\ \mathring{U}_\delta(a)$ такая, что для $\forall\ x \in \mathring{U}_\delta(a)$ $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$

По условию существует и конечен $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \mathring{U}_\delta(a)$: для $\forall\ x \in \mathring{U}_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

1)Пусть по условию $A > 0$. Возьмём $\varepsilon = A$, тогда $|f(x) - A| < A$; $0 < f(x) < 2A$ для $\forall\ x \in \mathring{U}_\delta(a)$

2)Пусть по условию $A < 0$. Возьмём $\varepsilon = -A$ $(\varepsilon > 0)$, тогда $|f(x) - A| < \varepsilon$; $2A < f(x) < 0$ для $\forall\ x \in \mathring{U}_\delta(a)$

5.Теорема о предельном переходе в неравенстве

Если существуют и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ и для $\forall\ x \in \mathring{U}(a)$ выполняется неравенство $f(x) \ge g(x)$, то $A \ge B$

По условию $f(x) \ge g(x)$ для $\forall\ x \in \mathring{U}(a) \Rightarrow f(x) - g(x) \ge 0$ для $\forall\ x \in \mathring{U}(a) \Rightarrow$ (По теореме о сохранении знака своего предела) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) \ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) \ge 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) \ge \lim\limits_{x\to a} g(x) \Leftrightarrow A \ge B$

6.Теорема о пределе промежуточной функции

Если существуют и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$ и $\exists\ \mathring{U}(a)$ такая, что для $\forall\ x \in \mathring{U}(a)$ выполняется неравенство $f(x) \le h(x) \le g(x)$, то $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$

По условию существуют и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \mathring{U}_1(a)$: для $\forall\ x \in \mathring{U}_1(a) \Rightarrow f(x) > A - \varepsilon$; $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \mathring{U}_2(a)$: для $\forall\ x \in \mathring{U}_2(a) \Rightarrow g(x) < A + \varepsilon$. Рассмотрим $\mathring{U}(a) \subset \mathring{U}_1(a) \cap \mathring{U}_2(a)$. Тогда для $\forall\ x \in \mathring{U}(a)$ выполняется неравенство $A - \varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < A + \varepsilon \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon$ для $\forall\ x \in \mathring{U}(a) \Leftrightarrow$ $|h(x) - A| < \varepsilon$ для $\forall\ x \in \mathring{U}(a) \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$

7.Теорема о пределе произведения функций

Если существуют и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x) * g(x)) = A * B = \lim\limits_{x\to a} f(x) * \lim\limits_{x\to a} g(x)$

По условию существуют и конечны $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Rightarrow$ (По теореме о связи функций, её предела и бесконечно малой) $\Rightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$ функция; $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \Rightarrow g(x) = B + \beta(x)$, где $\beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$ функция. $f(x) * g(x) =$ $= (A + \alpha(x)) * (B + \beta(x)) = A * B + \alpha(x) * B + \beta(x) * A + \alpha(x) * \beta(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x) * g(x)) = A * B = \lim\limits_{x\to a} f(x) * \lim\limits_{x\to a} g(x)$

8.Теорема о пределе сложной функции

Если существует и конечен $\lim\limits_{x\to a} f(x) = y_0$, причём $f(x) \ne y_0$ в $\mathring{U}(a)$ и существует и конечен $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = A$, то существует и конечен $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = A$

По условию существуют и конечны $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = A \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_1 == \delta_1(\varepsilon) > 0$: для $\forall\ y: 0 < |y - y_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - A| < \varepsilon$; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = y_0 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ для $\forall\ \delta_1 > 0\ \exists\ \delta_2 = \delta_2(\delta_1) > 0$: для $\forall\ x: 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - y_0| < \delta_1$ для $\forall\ \varepsilon \underset{\exists}{\to} \delta_1 \underset{\exists}{\to} \delta_2$. Для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$: для $\forall\ x: 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow |g(f(x)) - A| < \varepsilon \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = A$

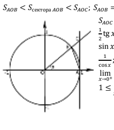
9.Доказательство первого замечательного предела

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$y = \frac{\sin x}{x}$ - чётная $\Rightarrow$ пределы слева и справа совпадают.

Рассмотрим предел функции справа: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

$S_{AOB} < S_{\text{сектора } AOB} < S_{AOC}$; $S_{AOB} = \frac{1}{2}\sin x$; $S_{\text{сектора } AOB} = \frac{x}{2}$;



$S_{AOC} = \frac{1}{2} * OA * \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$; $\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$;

$\sin x < x < \operatorname{tg} x$; $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$; $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$;

$\lim\limits_{x\to 0^+} \cos x \le \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} < \lim\limits_{x\to 0^+} 1$;

$1 \le \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \le 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

10.Теорема о связи функции, её предела и бесконечно малой

Если существует и конечен $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$ функция и наоборот, если $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$ функция, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Необходимость: По условию существует и конечен $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \mathring{U}(a)$: для $\forall\ x \in \mathring{U}(a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$ для $\forall\ x \in \mathring{U}(a) \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ $\underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, где $\alpha(x) = f(x) - A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$

Достаточность: По условию $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \mathring{U}(a)$: для $\forall\ x \in \mathring{U}(a) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$, где $\alpha(x) = f(x) - A \Rightarrow$ $|f(x) - A| < \varepsilon$ для $\forall\ x \in \mathring{U}(a) \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

11.Теорема о произведении бесконечно малой функции на ограниченную

Если $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$ функция, $f(x)$ - ограниченная функция, то $\alpha(x) * f(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$ функция

По условию $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$ функция $\underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \mathring{U}_1(a)$: для $\forall\ x \in \mathring{U}_1(a) \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{c}$; $f(x)$ - ограниченная функция $\underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} |f(x)| < c$, где c - const, для $\forall\ x \in \mathring{U}_2(a) \Rightarrow |\alpha(x) * f(x)| < \frac{\varepsilon}{c} * c = \varepsilon$ для $\forall\ x \in \mathring{U}_1(a) \cap \mathring{U}_2(a) = \mathring{U}(a) \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to a} f(x) * \alpha(x) = 0 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \alpha(x) * f(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$ функция

12.Теорема о связи между бесконечно большой и бесконечно малой

Если $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$ функция, $\alpha(x) \ne 0$, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая при $x \to a$ функция. Если $f(x)$ - бесконечно большая при $x \to a$ функция, то $\frac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая при $x \to a$ функция

1)По условию $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$ функция $\underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \mathring{U}(a)$: для $\forall\ x \in \mathring{U}(a) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$; $\alpha(x) \ne 0 \Rightarrow \exists\ \frac{1}{\alpha(x)}$. $\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon} = k$ для $\forall\ x \in \mathring{U}(a) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая при $x \to a$ функция

2)По условию $f(x)$ - бесконечно большая при $x \to a$ функция $\underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ для $\forall\ k > 0$ $\exists\ \mathring{U}(a)$: для $\forall\ x \in \mathring{U}(a) \Rightarrow |f(x)| > k$. Рассмотрим $\frac{1}{f(x)}$: $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{k} = \varepsilon$ для $\forall\ x \in \mathring{U}(a) \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \frac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая при $x \to a$ функция

13.Теорема о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела

Если бесконечно малые функции $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$ и $g(x) \sim h(x)$ при $x \to a$, не равные нулю в $\mathring{U}(a)$, то $f(x) \sim h(x)$ при $x \to a$

По условию $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$; $g(x) \sim h(x)$ при $x \to a \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = 1$. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} * \frac{g(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} * \lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} = 1 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} f(x) \sim h(x)$ при $x \to a$

14.Теорема о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых

(Бесконечно малые функции $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$) $\Leftrightarrow$ $(f(x) - g(x) = \bar{o}(f(x))$ и $f(x) - g(x) = \bar{o}(g(x)))$

Необходимость: По условию $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$; $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right) = 0$ $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}\right) = 0 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} f(x) - g(x) = \bar{o}(g(x))$

По условию $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$; $\lim\limits_{x\to a}\left(-\frac{g(x)}{f(x)} + 1\right) = 0$; $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}\right) = 0 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} f(x) - g(x) = \bar{o}(f(x))$.

Достаточность: По условию $f(x) - g(x) = \bar{o}(f(x)) \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}\right) = 0$; $\lim\limits_{x\to a}\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right) = 0$; $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$. По условию $f(x) - g(x) = \bar{o}(g(x)) \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}\right) = 0$; $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right) = 0$; $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$.

15.Теорема о сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков

Если $\alpha(x), \beta(x), \dots, \gamma(x)$ - бесконечно малые при $x \to a$ функции, то $\alpha(x) + \beta(x) + \dots + \gamma(x) \sim \alpha(x)$ при $x \to a$, где $\lim\limits_{x\to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0, \dots, \lim\limits_{x\to a} \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 0$

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x) + \beta(x) + \dots + \gamma(x)}{\alpha(x)} = 1 + \lim\limits_{x\to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} + \dots + \lim\limits_{x\to a} \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 1 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \alpha(x) + \beta(x) + \dots + \gamma(x) \sim \alpha(x)$ при $x \to a$

16.Теорема о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x = a$, то функции $f(x) \pm g(x), f(x) * g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$, где в последнем $g(x) \ne 0$, непрерывны в точке $x = a$

По условию $f(x)$ непрерывна в точке $x = a \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. По условию $g(x)$ непрерывна в точке $x = a \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$.

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a) \pm g(a) \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} f(x) \pm g(x)$ непрерывна в точке $x = a$

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) * g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) * \lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a) * g(a) \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} f(x) * g(x)$ непрерывна в точке $x = a$

3) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна при $g(x) \ne 0$ в точке $x = a$

17.Теорема о непрерывности сложной функции

Если функция $z = g(y)$ непрерывна в точке $y = b$, а функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, причём $f(a) = b$, то сложная функция $z = g(f(x))$ непрерывна в точке $x = a$

По условию $z = g(y)$ непрерывна в точке $y = b \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \exists \lim\limits_{y\to b} g(y) = g(b)$. По условию $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \lim\limits_{y\to b} g(y) = g(b) = g(f(a)) \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} g(f(x))$ непрерывна в точке $x = a$

18.Теорема о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$ и $f(a) > 0$ $(f(a) < 0)$, то $\exists\ U_\delta(a)$, в которой $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$

По условию $f(x)$ непрерывна в точке $x = a \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \exists$ конечный $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

1)Пусть $f(a) > 0 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ U_\delta(a)$: для $\forall\ x \in U_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \Leftrightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$, где пусть, например, $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} \Rightarrow f(x) > f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2} > 0$ для $\forall\ x \in U_\delta(a)$.

2)Пусть $f(a) < 0 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \exists$ конечный $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -|f(a)|$. Заменим $f(x) = -g(x)$, тогда $\lim\limits_{x\to a} g(x) = |f(a)| \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ U_\delta(a)$: для $\forall\ x \in U_\delta(a) \Rightarrow |g(x) - |f(a)|| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(a)| - \varepsilon < g(x) < |f(a)| + \varepsilon$, где пусть, например, $\varepsilon = \frac{|f(a)|}{2} \Rightarrow g(x) > |f(a)| - \frac{|f(a)|}{2} = \frac{|f(a)|}{2}$. Вернёмся к прежней записи: $-f(x) > \frac{|f(a)|}{2} \Rightarrow f(x) < -\frac{|f(a)|}{2} < 0$ для $\forall\ x \in U_\delta(a)$.

19.Теорема о непрерывности элементарных функций. Доказательство непрерывности функции $y = \sin x$

Основные элементарные функции $x^n, a^x, \log_a x, \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$, $\arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$ непрерывны в своей области определения.

Функция $y = \sin x$ непрерывна в $(-\infty; +\infty)$

По определению $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$, где $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, x - $\forall$ точка $\in D_f$. $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2} * \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2} * \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta x * \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 0 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} y = \sin x$ непрерывна в $(-\infty; +\infty)$

20.Свойства функций, непрерывных на отрезке

1)Первая теорема Вейерштрасса: Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке

2)Вторая теорема Вейерштрасса: Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она достигает хотя бы в одной точке этого отрезка свои максимальное и минимальное значения

3)Первая теорема Больцано - Коши: Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $f(a) * f(b) < 0$, то существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, в которой $f(c) = 0$

4)Вторая теорема Больцано - Коши: Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $f(a) \ne f(b)$, то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(a) < f(c) < f(b)$ или $f(b) < f(c) < f(a)$

5)Теорема о непрерывности обратной функции: Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a, b]$, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$ строго монотонная на $[f(a),\ f(b)]$

21.Определение точки разрыва функции. Классификация точек разрыва

Точка $x = x_0$, в которой нарушается хотя бы одно из условий непрерывности функции, называется точкой разрыва функции $f(x)$, а сама функция называется разрывной в этой точке.

1)Точка $x = x_0$ называется точкой разрыва I рода, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует, но существуют и конечны $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A \ne \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = B$

2)Точка $x = x_0$ называется точкой устранимого разрыва, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует, но или $x_0 \notin D_f$, или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ne f(x_0)$

3)Точка $x = x_0$, в которой хотя бы один из односторонних пределов функции в этой точке не существует (в частности равен ∞), называется точкой разрыва II рода

4)Точка $x = x_0$, в которой хотя бы один из односторонних пределов функции в этой точке равен ∞, называется точкой разрыва II рода с бесконечным скачком

22.Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты

Прямая $y = kx + b$ есть правая (левая) наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда существуют и конечны $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = b$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k\right.$ и $\left.\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - kx) = b\right)$

Необходимость: По условию $y = kx + b$ - правая наклонная асимптота $\underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} y_{\text{крив.}} - y_{\text{ас.}} \to 0$ при $x \to +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right) = 0$, где $x \ne 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$. Из первого предела: $b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx)$

Достаточность: По условию существует и конечен $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \Rightarrow b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} y = kx + b$ - правая наклонная асимптота

23.Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке

Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке $x = a$ необходимо и достаточно, чтобы в этой точке функция имела конечную производную, то есть существует конечный $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = f'(a)$

Необходимость: По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = a \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \Delta y = A * \Delta x + \alpha(\Delta x) * \Delta x \mid * \frac{1}{\Delta x \ne 0}$, где $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x) \Rightarrow$ (По теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой) $\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A = f'(a)$

Достаточность: По условию существует конечный $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) \Rightarrow$ (По теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой) $\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) + \alpha(\Delta x)$, где $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x) = 0 \Rightarrow \Delta y = f'(a) * \Delta x + \alpha(\Delta x) * \Delta x \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$

24.Теорема о связи дифференцируемости и непрерывности функции

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке

По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \Delta y = A * \Delta x + \alpha(\Delta x) * \Delta x \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0} A * \Delta x + \alpha(\Delta x) * \Delta x = 0 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} f(x)$ непрерывна в точке x

25.Теорема о производной произведения двух дифференцируемых функций

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то функция $u(x) * v(x)$ дифференцируема в точке x и $(u * v)' = u'v + uv'$

По условию $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке $x \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ существуют и конечны $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x)$. $y = u(x) * v(x)$; $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$; $\Delta y = uv + \Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v - uv$. $(u * v)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = v\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'v + uv'$

26.Теорема о производной частного двух дифференцируемых функций

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то функция $\frac{u(x)}{v(x)}$ дифференцируема в точке x и $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, где $v(x) \ne 0$

По условию $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке $x \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ существуют и конечны $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x)$. $y = \frac{u(x)}{v(x)}$; $y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$; $\Delta y = \frac{uv + \Delta uv - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)\Delta x} = \frac{v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim_{\Delta x\to 0}(v + \Delta v)} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, где $v(x) \ne 0$

27.Теорема о производной сложной функции

Если функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u и функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x, то сложная функция $y = f(u(x))$ дифференцируема в точке x и $y' = f'_u * u'_x = f'(u) * \varphi'(x)$

По условию $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке $x \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ существует конечный $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x)$; $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ существует конечный $\lim\limits_{\Delta u\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y' = f'(u)$. $y'(x) = y'_x \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y\Delta u}{\Delta u\Delta x} = \lim\limits_{\Delta u\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} * \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u * u'_x = f'(u) * \varphi'(x)$, где из $\Delta x \to 0 \Rightarrow$ (По определению непрерывности функции) $\Rightarrow \Delta u \to 0$

28.Теорема о производной обратной функции

Если строго монотонная в $U(x)$ функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то обратная функция $x = \varphi(y)$ дифференцируема в точке y и $x'_y = \frac{1}{y'_x}$

По условию $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ существует конечный $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = y'(x)$

$\varphi'(y) = x'_y \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}$, где $\Delta x \to 0 \Rightarrow$ (По определению непрерывности функции) $\Rightarrow \Delta y \to 0$

29.Свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка

Дифференциал функции $y = f(u)$ не зависит от того, является ли u независимой переменной или функцией другой независимой переменной

1)Пусть $y = f(u)$, где u - независимая переменная. $dy = f'(u)du$ (По опр.)

2)Пусть $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования сложной функции: $y'_x = y'_u * u'_x \mid * dx$; $dy = y'_u * u'_x\, dx = f'(u)du$

30.Теорема Ферма

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и точка x_0 - точка локального экстремума функции, то $f'(x_0) = 0$

По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ существует конечный $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Пусть x_0 - точка локального максимума $\underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} f(x) \le f(x_0)$ для $\forall\ x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \le 0$ $(x_0 + \Delta x \in U_\delta(x_0))$

1)Пусть $\Delta x > 0$. $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \le 0 \Rightarrow$ (По теореме о предельном переходе в неравенстве) $\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0) \le 0$

2)Пусть $\Delta x < 0$. $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ge 0 \Rightarrow$ (По теореме о предельном переходе в неравенстве) $\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0) \ge 0$

$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, так как по условию $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

31.Теорема Ролля

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема в (a, b) и $f(a) = f(b)$, то существует по крайней мере одна точка $x_0 \in (a, b)$, в которой $f'(x_0) = 0$

По условию $f(x)$ непрерывна на $[a, b] \Rightarrow$ (По второй теореме Вейерштрасса) $\Rightarrow$ функция $y = f(x)$ достигает на этом отрезке свои минимальное и максимальное значения. $M = \max f(x)$; $m = \min f(x)$. Возьмём случаи: $m = M$ и $M > m$.

1)$m = M = c = const = f(a) = f(b) \Rightarrow f'(c) = 0$ для $\forall\ x \in (a, b)$

2)$M > m$:

$a)$ $f(a) = f(b) = m \Rightarrow$ своё максимальное значение функция достигает в точке $a < x_0 < b \Rightarrow x_0$ - точка локального экстремума. По условию функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow$ (По теореме Ферма) $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

$b)$ $f(a) = f(b) = M \Rightarrow$ своё минимальное значение функция достигает в точке $a < x_0 < b \Rightarrow x_0$ - точка локального экстремума. По условию функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow$ (По теореме Ферма) $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

$c)$ $f(a) = f(b) \ne m \ne M \Rightarrow$ своё минимальное и максимальное значения функция достигает внутри отрезка $\Rightarrow x_1, x_2$ - точки локального экстремума. По условию функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_1 и $x_2 \Rightarrow$ (По теореме Ферма) $\Rightarrow f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

32.Теорема Лагранжа

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема в (a, b), то существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Обозначим $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ и рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x - a)$. $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема в (a, b), $F(a) = 0$, $F(b) = 0 \Rightarrow$ (По теореме Ролля) $\Rightarrow$ существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $F'(c) = 0$. $F'(x) = f'(x) - \lambda$; $F'(c) = f'(c) - \lambda = 0$;

$f'(c) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

33.Теорема Коши

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы в (a, b) и $g'(x) \ne 0$ для $\forall\ x \in (a, b)$, то существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Пусть $g(b) \ne g(a)$ так как если бы $g(b) = g(a)$, то функция $g(x)$ удовлетворяла бы условиям теоремы Ролля $\Rightarrow$ существует точка $x_0 \in (a, b)$, $g'(x_0) = 0$, что противоречит условию теоремы: по условию $g'(x) \ne 0$.

Обозначим $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ и рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \lambda(g(x) - g(a))$. $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема в (a, b), $F(a) = 0$, $F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} * (g(b) - g(a)) = 0 \Rightarrow$ (По теореме Ролля) $\Rightarrow$ существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $F'(c) = 0$. $F'(x) = f'(x) - \lambda * g'(x)$; $F'(c) = f'(c) - \lambda * g'(c) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

34.Теорема Лопиталя - Бернулли для предела отношения двух бесконечно малых функций

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:

1)Бесконечно малые при $x \to a$ (бесконечно большие при $x \to a$)

2)Дифференцируемы в $\mathring{U}(a)$, кроме, быть может, самой точки a

3)$g'(x) \ne 0$ для $\forall\ x \in \mathring{U}(a)$, кроме, быть может, самой точки a

4)Существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

то существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Пусть по условию $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$. Доопределим функцию до непрерывности в $U^+(a)$: $[a, x], x > a$. Пусть $f(a) = 0$ и $g(a) = 0$, тогда $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, x]$, дифференцируемы в (a, x) и $g'(x) \ne 0$ в (a, x) по условию $\Rightarrow$ (По теореме Коши) $\Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, где $a < c < x$, $f(a) = 0$, $g(a) = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$; $a < c < x \Rightarrow$ если $x \to a^+$, то $c \to a^+$; по условию существует $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim\limits_{c\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

35.Сравнение роста показательной, степенной и логарифмической функций на бесконечности

При $x \to +\infty$: $y = a^x \to +\infty$, $y = \log_a x \to +\infty$, $y = x^n \to +\infty$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(a^x)'}{(x^n)'} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(a^x \ln a)'}{(n * x^{n-1})'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(a^x \ln^2 a)'}{(n(n-1) * x^{n-2})'} = \dots = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x (\ln a)^n}{n(n-1)(n-2) * \dots * 2 * 1} = +\infty \Rightarrow y = a^x$ растёт быстрее $y = x^n$ при $x \to +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)'}{(x^n)'} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x \ln a * n * x^{n-1}} = 0 \Rightarrow y = \log_a x$ растёт медленнее любой положительной степени x

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)'}{(a^x)'} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x \ln a * a^x \ln a} = 0 \Rightarrow y = \log_a x$ растёт медленнее на $+\infty$ функции $y = a^x$

36.Формула Тейлора

Пусть функция $y = f(x)$ $n + 1$ раз дифференцируема в $U(a)$ $P_n(x) = C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + C_3(x - a)^3 + \dots + C_n(x - a)^n$ - разложение многочлена по степеням $(x - a)$

$f(x) \approx P_n(x)$, то есть $f(a) = P_n(a)$; $f'(a) = P'_n(a)$; ...; $f^{(n)}(a) = P_n^{(n)}(a)$

$P_n(a) = C_0 = f(a) \Rightarrow C_0 = f(a)$

$P'_n(a) = C_1 = f'(a) \Rightarrow C_1 = \frac{f'(a)}{1!}$

$P''_n(x) = 2C_2 + 3 * 2C_3(x - a) + 4 * 3C_4(x - a)^2 + \dots + n(n - 1)C_n(x - a)^{n-2}$

$P''_n(a) = 2C_2 = f''(a) \Rightarrow C_2 = \frac{f''(a)}{2!}$

$P'''_n(x) = 3 * 2C_3 + 4 * 3 * 2C_4(x - a) + \dots + n(n - 1)(n - 2)C_n(x - a)^{n-3}$

$P'''_n(a) = 3!\,C_3 = f'''(a) \Rightarrow C_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$

$P_n^{IV}(x) = 4!\,C_4 + \dots + n(n - 1)(n - 2)(n - 3)C_n(x - a)^{n-4}$

$P_n^{IV}(a) = 4!\,C_4 = f^{IV}(a) \Rightarrow C_4 = \frac{f^{IV}(a)}{4!}$

$P_n^{(n)}(x) = n(n - 1)(n - 2) * \dots * 2 * 1 * C_n = P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \Rightarrow C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$ - многочлен Тейлора

$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x)$ - формула Тейлора

37.Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Если функция $y = f(x)$ имеет в $U(a)$ непрерывное производное до $(n + 1)$-го порядка, то для $\forall\ x \in U(a)$ существует точка $\xi \in (a, x)$ такая, что $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$

Обозначим $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1} = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} * Q(x)$, $Q(x)$-? $f(x)$ запишем в следующем виде:

$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} * Q(x)$

Рассмотрим вспомогательную функцию, где x, a - фиксированные. Вместо a подставляем t: $F(t) = f(x) - f(t) - \frac{(x-t)}{1!}f'(t) - \dots - \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} * Q$

$F'(t) = -f'^{(t)} - \frac{(-1)}{1!}f'(t) - \frac{(x-t)}{1!}f''(t) - \frac{2(x-t)(-1)}{2!}f''(t) - \frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t) - \frac{3(x-t)^2(-1)}{3!}f'''(t) - \dots - \frac{n(x-t)^{n-1}(-1)}{n!}f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) - \frac{(n+1)(x-t)^n(-1)}{(n+1)!}Q$

После сокращений остаётся выражение: $F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!}Q$

$F(t)$ дифференцируема в (a, x); $F(a) = 0$; $F(x) = 0 \Rightarrow$ (По теореме Ролля) $\Rightarrow$ существует точка $\xi \in (a, x)$; $F'(\xi) = 0$

$F'(\xi) = -\frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi) + \frac{(x-\xi)^n}{n!}Q = 0 \Leftrightarrow Q = f^{(n+1)}(\xi)$

Таким образом $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$

38.Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

По теореме о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$, $\xi \in (a, x)$ или $\xi = a + \theta(x - a)$, где $0 < \theta < 1$

Уменьшая $U(a)$ получим, что функция $y = f^{(n+1)}(x)$ непрерывна на $[a - \delta, a + \delta] \Rightarrow$ (По первой теореме Вейерштрасса) $\Rightarrow f^{(n+1)}(x)$ ограничена на этом отрезке, то есть $|f^{(n+1)}(x)| \le M_n$, где M_n - число, не зависящее от x, но зависящее от n. Тогда $|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x - a|^{n+1} \le \frac{M_n}{(n+1)!}|x - a|^{n+1}$. Исследуем $R_n(x)$ при $x \to a$: $\lim\limits_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim\limits_{x\to a} \frac{M_n(x-a)^{n+1}}{(n+1)!(x-a)^n} = \frac{M_n}{(n+1)!}\lim\limits_{x\to a}(x - a) = 0 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} R_n(x) = \bar{o}((x - a)^n)$

Формула Маклорена для функции $y = e^x$ с остаточным членом в форме Лагранжа

$f(x) = e^x$

$f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$

$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$

$f(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$, где $R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} * x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$

39.Формула Маклорена для функции $y = \sin x$ с остаточным членом в форме Лагранжа

$f(x) = \sin x$; $f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$; $f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$; $f'''(0) = -1$

$f^{(2k+1)}(x) = \sin\left(x + (2k + 1) * \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \cos x$; $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$

$f^{(2k+2)}(x) = \sin\left(x + (2k + 2) * \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1}\sin x$; $f^{(2k+2)}(0) = 0$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n(x)$,

где $R_n(x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} * \sin\left(\theta x + (2n + 2) * \frac{\pi}{2}\right)$, $0 < \theta < 1$

40.Формула Маклорена для функции $y = \cos x$ с остаточным членом в форме Лагранжа

$f(x) = \cos x$; $f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; $f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$; $f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$; $f'''(0) = 0$

$f^{(2k)}(x) = \cos\left(x + 2k * \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k * \cos x$; $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$

$f^{(2k+1)}(x) = \cos\left(x + (2k + 1) * \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1} * \sin x$; $f^{(2k+1)}(0) = 0$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x)$

где $R_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} * \cos\left(\theta x + (2n + 1) * \frac{\pi}{2}\right)$, $0 < \theta < 1$

41.Формула Маклорена для функции $y = \ln(1 + x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа

$f(x) = \ln(1 + x)$; $f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$; $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$; $f''(0) = -1$

$f'''(x) = -\frac{(-2)}{(1+x)^3}$; $f'''(0) = 2!$

$f^{IV}(x) = \frac{2(-3)}{(1+x)^4}$; $f^{IV}(0) = -3!$

$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$;

$f^n(0) = (-1)^{n-1}(n - 1)!$

$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n(n)!}{(1+x)^{n+1}}$;

$f^{(n+1)}(0) = (-1)^n(n)!$

$\ln(1 + x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 - \frac{3!}{4!}x^4 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n + R_n(x) =$

$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n} + R_n(x)$, где

$R_n(x) = \frac{x^{n+1} * (-1)^n * n!}{(n+1)!(1+\theta x)^{n+1}}$, $0 < \theta < 1$

42.Формула Маклорена для функции $y = (1 + x)^\alpha$ с остаточным членом в форме Лагранжа

$f(x) = (1 + x)^\alpha$; $f(0) = 1$

$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1}$; $f'(0) = \alpha$

$f''(x) = \alpha(\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha-2}$; $f''(0) = \alpha(\alpha - 1)$

$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - (n - 1))(1 + x)^{\alpha-n}$;

$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - (n - 1))$

$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n)(1 + x)^{\alpha-(n+1)}$

$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + R_n(x)$,

где $R_n(x) = \frac{x^{n+1}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}}{(n+1)!}$, $0 < \theta < 1$

43.Необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции

Для того, чтобы дифференцируемая в (a, b) функция $y = f(x)$ не убывала, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \ge 0$ для $\forall\ x \in (a, b)$

Необходимость: По условию функция $y = f(x)$ не убывает в $(a, b) \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} f(x + \Delta x) - f(x) \ge 0$ при $\Delta x > 0$; $f(x + \Delta x) - f(x) \le 0$ при $\Delta x < 0$; по условию $y = f(x)$ дифференцируема в $(a, b) \Rightarrow \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ge 0 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ существует конечный $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \ge 0$ для $\forall\ x \in (a, b)$

Достаточность: Пусть по условию $f'(x) \ge 0$ для $\forall\ x \in (a, b)$. Возьмём $\forall\ x_1,\ x_2 \in (a, b)$ такие, что $x_1 < x_2$. По условию $f(x)$ дифференцируема в $(a, b) \Rightarrow f(x)$ непрерывна на $[x_1, x_2]$, $f(x)$ дифференцируема в $(x_1, x_2) \Rightarrow$ (По теореме Лагранжа) $\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где $c \in (x_1,\ x_2)$; $x_2 - x_1 > 0$; $f'(c) \ge 0$ по условию, так как $c \in (a,\ b) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \ge 0 \Leftrightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ при $x_1 < x_2 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} y = f(x)$ не убывает в (a, b)

44.Необходимое и достаточное условие невозрастания дифференцируемой функции

Для того, чтобы дифференцируемая в (a, b) функция $y = f(x)$ не возрастала, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \le 0$ для $\forall\ x \in (a, b)$

Необходимость: По условию функция $y = f(x)$ не возрастает в $(a, b) \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} f(x + \Delta x) - f(x) \le 0$ при $\Delta x > 0$; $f(x + \Delta x) - f(x) \ge 0$ при $\Delta x < 0$; по условию $y = f(x)$ дифференцируема в $(a, b) \Rightarrow \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \le 0 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ существует конечный $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \le 0$ для $\forall\ x \in (a, b)$

Достаточность: Пусть по условию $f'(x) \le 0$ для $\forall\ x \in (a, b)$. Возьмём $\forall\ x_1,\ x_2 \in (a, b)$ такие, что $x_1 < x_2$. По условию $f(x)$ дифференцируема в $(a, b) \Rightarrow f(x)$ непрерывна на $[x_1, x_2]$, $f(x)$ дифференцируема в $(x_1, x_2) \Rightarrow$ (По теореме Лагранжа) $\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где $c \in (x_1,\ x_2)$; $x_2 - x_1 > 0$; $f'(c) \le 0$ по условию, так как $c \in (a,\ b) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \le 0 \Leftrightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ при $x_1 < x_2 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} y = f(x)$ не возрастает в (a, b)

45.Достаточное условие возрастания дифференцируемой функции

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в (a, b) и для $\forall\ x \in (a, b)$ $f'(x) > 0$, то функция $y = f(x)$ возрастает в этом интервале

Пусть по условию $f'(x) > 0$ для $\forall\ x \in (a, b)$. Возьмём $\forall\ x_1,\ x_2 \in (a, b)$ такие, что $x_1 < x_2$. По условию $f(x)$ дифференцируема в $(a, b) \Rightarrow f(x)$ непрерывна на $[x_1, x_2]$, $f(x)$ дифференцируема в $(x_1, x_2) \Rightarrow$ (По теореме Лагранжа) $\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где $c \in (x_1,\ x_2)$; $x_2 - x_1 > 0$; $f'(c) > 0$ по условию, так как $c \in (a,\ b) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ при $x_1 < x_2 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} y = f(x)$ возрастает в (a, b)

46.Достаточное условие убывания дифференцируемой функции

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в (a, b) и для $\forall\ x \in (a, b)$ $f'(x) < 0$, то функция $y = f(x)$ убывает в этом интервале

Пусть по условию $f'(x) < 0$ для $\forall\ x \in (a, b)$. Возьмём $\forall\ x_1,\ x_2 \in (a, b)$ такие, что $x_1 < x_2$. По условию $f(x)$ дифференцируема в $(a, b) \Rightarrow f(x)$ непрерывна на $[x_1, x_2]$, $f(x)$ дифференцируема в $(x_1, x_2) \Rightarrow$ (По теореме Лагранжа) $\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где $c \in (x_1,\ x_2)$; $x_2 - x_1 > 0$; $f'(c) < 0$ по условию, так как $c \in (a,\ b) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ при $x_1 < x_2 \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} y = f(x)$ убывает в (a, b)

47.Первое достаточное условие экстремума (по первой производной)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в $U(x_0)$ и дифференцируема в $\mathring{U}(x_0)$, кроме, быть может, самой точки x_0, x_0 - критическая точка функции, и $f'(x) > 0$ для $\forall\ x \in U^-(x_0)$, $f'(x) < 0$ для $\forall\ x \in U^+(x_0)$ ($f'(x)$ меняет знак с + на - при переходе через точку x_0) ($f'(x) < 0$ для $\forall\ x \in U^-(x_0)$, $f'(x) > 0$ для $\forall\ x \in U^+(x_0)$ ($f'(x)$ меняет знак с - на + при переходе через точку x_0)), то x_0 - точка локального максимума (минимума) $f(x)$

1)Пусть по условию $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$

2)По условию x_0 - критическая точка функции $\underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0) \nexists\ (= \infty)$. Возьмём $\forall\ x_1, x_2 \in U(x_0)$ такие, что $x_1 < x_0 < x_2$

3)По условию $f(x)$ непрерывна в $U(x_0)$ и дифференцируема в $\mathring{U}(x_0)$ кроме, быть может, самой точки $x_0 \Rightarrow f(x)$ непрерывна на $[x_1, x_0]$ и $[x_0, x_2]$, $f(x)$ дифференцируема в $(x_1,\ x_0)$ и $(x_0,\ x_2) \Rightarrow$ (По теореме Лагранжа) $\Rightarrow f(x_1) - f(x_0) = f'(c_1)(x_1 - x_0)$, $f(x_2) - f(x_0) = f'(c_2)(x_2 - x_0)$, где $c_1 \in (x_1, x_0)$, $c_2 \in (x_0, x_2)$.

Рассмотрим $U^-(x_0)$: по условию $f'(c_1) > 0$, $x_1 - x_0 < 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_0) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_0)$ для $\forall\ x_1 \in U^-(x_0)$; рассмотрим $U^+(x_0)$: по условию $f'(c_2) < 0$, $x_2 - x_0 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_0) < 0 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_0)$ для $\forall\ x_2 \in U^+(x_0) \Rightarrow f(x) < f(x_0)$ для $\forall\ x \in U(x_0) \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} x_0$ - точка локального максимума.

Аналогично для точки локального минимума

48.Второе достаточное условие экстремума (по второй производной)

Если в стационарной точке x_0 функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема и $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$, то x_0 - точка локального минимума (максимума) $f(x)$

Пусть по условию $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ функция $f'(x)$ возрастает в $U(x_0)$, x_0 - стационарная точка по условию $\Rightarrow f'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ при $x < x_0$, $f'(x) > 0$ при $x > x_0 \Rightarrow$ (По первому достаточному условию экстремума) $\Rightarrow x_0$ - точка локального минимума. Аналогично для точки локального максимума

49.Достаточное условие выпуклости функций

Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в (a, b) и $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$ для $\forall\ x \in (a, b)$, то график функции имеет выпуклость, направленную вверх (вниз) в (a, b)

По условию $y = f(x)$ дифференцируема в $(a, b) \Rightarrow$ существует касательная к кривой в точках (a, b). Пусть по условию $f''(x) < 0$ для $\forall\ x \in (a, b)$. Возьмём $\forall\ x_0 \in (a, b)$. Докажем, что график функции лежит под касательной, проведённой к кривой в точке $(x_0, f(x_0))$. Уравнение касательной: $y_{\text{кас.}} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, $y_{\text{кас.}} = \bar{y}$. Вычитаем из $y = f(x)$: $y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа $\Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(c_1)(x - x_0)$, где $c_1 \in (x, x_0) \Rightarrow y - \bar{y} = f'(c_1)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - \bar{y} = (x - x_0)(f'(c_1) - f'(x_0))$. Функция $f'(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа $\Rightarrow f'(c_1) - f'(x_0) = f''(c_2)(c_1 - x_0)$, где $c_2 \in (c_1, x_0) \Rightarrow y - \bar{y} = f''(c_2)(c_1 - x_0)(x - x_0)$.

1)Рассмотрим $U^-(x_0)$: $x < x_0 \Rightarrow x < c_1 < c_2 < x_0$. $x - x_0 < 0$; $c_1 - x_0 < 0$; по условию $f''(c_2) < 0 \Rightarrow y - \bar{y} < 0$ для $x < x_0$

2)Рассмотрим $U^+(x_0)$: $x > x_0 \Rightarrow x > c_1 > c_2 > x_0$. $x - x_0 > 0$; $c_1 - x_0 > 0$; по условию $f''(c_2) < 0 \Rightarrow y - \bar{y} < 0$ для $x > x_0$

Таким образом $y - \bar{y} < 0$ для $\forall\ x \in U(x_0) \Leftrightarrow y - y_{\text{кас.}} < 0 \Rightarrow$ график функции находится под касательной, проведённой в точке $(x_0, f(x_0)) \underset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$ график функции имеет выпуклость, направленную вверх в точке $(x_0, f(x_0))$, а так как $x_0 \in (a, b) \Rightarrow\Rightarrow$ график функции имеет выпуклость, направленную вверх в (a, b). Аналогично для $f''(x) > 0$

50.Необходимое условие точки перегиба

Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в $\mathring{U}(x_0)$, кроме, быть может, самой точки x_0 и $(x_0, f(x_0))$ - точка перегиба графика функции, то $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0) \nexists\ (= \infty)$.

1)Пусть по условию $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0. Предположим, что $f''(x_0) \ne 0$ $(f''(x_0) > 0$ или $f''(x_0) < 0) \Rightarrow$ (По достаточному условию выпуклости функции) $\Rightarrow$ график функции имеет определённое направление выпуклости в $U(x_0)$, что противоречит условию теоремы, так как по условию $(x_0, f(x_0))$ - точка перегиба $\Rightarrow f''(x_0) = 0$

2)По условию $f(x)$ не является дважды дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \nexists\ (= \infty)$

51.Достаточное условие точки перегиба

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и дважды дифференцируема в $\mathring{U}(x_0)$, кроме, быть может, самой точки x_0 и $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0) \nexists\ (= \infty)$ и существует касательная к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ и $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то $(x_0, f(x_0))$ - точка перегиба

1)По условию $f''(x)$ меняет знак. Пусть, например, $f''(x) < 0$ для $x < x_0$; $f''(x) > 0$ для $x > x_0 \Rightarrow$ кривая выпукла вверх в $U^-(x_0)$ и кривая выпукла вниз в $U^+(x_0) \Rightarrow (x_0, f(x_0))$ - точка перегиба.

2)Аналогично при $f''(x) > 0$ для $x < x_0$; $f''(x) < 0$ для $x > x_0$