

Министерство образования и науки Российской Федерации

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

Учебно-научный и инновационный комплекс
«Физические основы информационно-телекоммуникационных систем»

Курин В.В.
Грязнова И.Ю.
Клемина А.В.
Мартьянов А.И.

УМК "ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД"

Исследование закономерностей обтекания плоским воздушным потоком цилиндрических тел, включая обтекание профиля крыла

Исследование характеристик воздушного потока в пограничном слое обдуваемой плоской пластины

Изучение течения воздуха в диффузорах с различными углами раскрытия на аэродинамическом стенде ТМЖ М1.

Мероприятие 2.2. Развитие сетевой интеграции с ведущими университетами страны, научно – исследовательскими институтами РАН, предприятиями – партнерами, создание новых форм взаимодействия.

2.2.1. Разработка новых и модернизация существующих УМК для подготовки молодых специалистов для академических институтов и предприятий высокотехнологических секторов экономики

Учебная дисциплина: «Основы механики сплошных сред»

Специальность «010801 Радиофизика и электроника»

Направления: «010800.62 Радиофизика», «010300.62 Фундаментальная информатика и информационные технологии»

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ АЭРОДИНАМИКИ.....	4
2. ОБТЕКАНИЕ ПЛОСКИМ ВОЗДУШНЫМ ПОТОКОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ..	14
3. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ.....	24
4. ДИФфуЗОР.....	36
5. ОСНОВЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ АЭРОДИНАМИКИ.....	53
5.1. АЭРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ.....	53
5.2 ОБТЕКАНИЕ КРЫЛА.....	55
5.3. МЕТОДЫ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ.....	57
6. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.....	60
6.1. ОПИСАНИЕ СТЕНДА.....	60
6.2 ОПИСАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ.....	66
6.2.1. МИКРОМАНОМЕТР.....	66
6.2.2. БАТАРЕЙНЫЙ МАНОМЕТР.....	71
6.2.3. ПРИЕМНИКИ СТАТИЧЕСКОГО И ПОЛНОГО ДАВЛЕНИЯ.....	72
6.2.4. СВИДЕТЕЛЬСТВО О ПОВЕРКЕ ПРИЕМНИКА ВОЗДУШНОГО ДАВЛЕНИЯ..	77
6.3. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ.....	
6.3.1. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ОБТЕКАНИЯ ПЛОСКИМ ВОЗДУШНЫМ ПОТОКОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ, ВКЛЮЧАЯ ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЯ КРЫЛА.....	78
6.3.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЗДУШНОГО ПОТОКА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ОБДУВАЕМОЙ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ.....	81
6.3.3. ИЗУЧЕНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВОЗДУХА В ДИФфуЗОРАХ С РАЗЛИЧНЫМИ УГЛАМИ РАСКРЫТИЯ НА АЭРОДИНАМИЧЕСКОМ СТЕНДЕ ТМЖ М1.....	84
СПИСОК ЦИТИРУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	86
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК ПО АЭРОДИНАМИКЕ.....	87

ВВЕДЕНИЕ

Аэродинамика – наука, изучающая движение газообразных жидкостей и реакции, которые возникают на помещенные в них твердые тела. Аэродинамика является частью гидродинамики. Принципиальная разница между аэродинамикой и гидродинамикой заключается в том, что газообразная жидкость, с которой оперирует аэродинамика, является жидкостью сжимаемой, тогда как в гидродинамике рассматривается жидкость несжимаемая. Однако и в аэродинамике во многих случаях газообразную среду (воздух) считают также несжимаемой. Свое техническое приложение аэродинамика получила главным образом в авиации, где она касается изучения обтекания твердых тел, определенных форм и нахождения сил, действующих на эти тела. Как и в гидродинамике, в аэродинамике часто рассматривают идеальную газообразную жидкость без вязкости, поскольку интегрирование уравнений движения вязкой жидкости настолько сложно, что может быть выполнено лишь в немногих частных случаях.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ АЭРОДИНАМИКИ

Одним из фундаментальных уравнений аэродинамики (как и гидродинамики) является **уравнение неразрывности** или закон сохранения вещества. Он выражает тот факт, что масса жидкости в объеме, охватывающем все время одни и те же частицы, сохраняется.

Получим уравнение неразрывности в дифференциальной и интегральной форме. Для этого рассмотрим некоторый объем жидкости (газа) V , состоящий все время из одних и тех же частиц, т.е. движущийся вместе с жидкостью (здесь и в дальнейшем не будем делать различие между жидкостью и газом). Очевидно, что масса жидкости в этом объеме будет сохраняться с течением времени, т.е.

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = 0,$$

где ρ - плотность жидкости. Поменяв порядок дифференцирования и интегрирования, получим:

$$\iiint_V \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right] dV = 0,$$

где \vec{v} - скорость течения жидкости.

Поскольку объем V был выбран произвольно, то приравняв нулю подынтегральное выражение, получаем искомое уравнение неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (1.1-a)$$

Используя связь между полной производной по времени от скалярной функции координат и времени $\rho = \rho(x, y, z, t)$ и ее частной производной:

$$\frac{d\rho}{dt} = (\vec{v} \nabla) \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

Выражение (1.1) можно представить также в другом виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \rho + \rho \nabla \vec{v} = 0$$

или, объединяя последние слагаемые, можно записать:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (1.1-б)$$

Для того чтобы получить интегральную форму уравнения неразрывности, проинтегрируем выражение (1.1-б) по фиксированному объему V и воспользуемся теоремой Гаусса-Остроградского:

$$\iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV = \oiint_S \vec{n} \rho \vec{v} dS,$$

где \vec{n} - внешняя нормаль к поверхности S , ограничивающей объем V . В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = - \oiint_S \vec{n} \rho \vec{v} d\vec{S},$$

т.е. изменение массы жидкости внутри фиксированного объема равно массе жидкости (с обратным знаком), вытекающей в единицу времени из объема через его поверхность. Заметим, что этот физический факт можно было бы взять за исходный, и с помощью обратных преобразований получить дифференциальную форму уравнения неразрывности, как это сделано, например, в работе [1].

Интересным и важным следствием уравнения неразрывности, в том числе, как мы увидим в дальнейшем, и для задач аэродинамики является тот факт, что поле скорости несжимаемой жидкости (для которой $\frac{d\rho}{dt} = 0$) соленоидально:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (1.1-в).$$

Вторым фундаментальным уравнением гидродинамики (включая и аэродинамику), является уравнение движения жидкости. Получим его сначала для идеальной, т.е. лишенной вязкости, жидкости. Это уравнение называется **уравнением Эйлера**. Опять рассмотрим объем жидкости, состоящий все время из одних и тех же частиц, то есть движущийся вместе с жидкостью, и запишем для него II закон Ньютона:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{v} dV = \vec{F} + \vec{F}_S ,$$

где $\vec{F} = \iiint_V \rho \vec{f} dV$ - внешняя объемная сила,

$\vec{F}_S = - \oint_S \vec{n} p dS = - \iiint_V \nabla p dV$ - сила, действующая на объем V со стороны окружающей

среды через ограничивающую поверхность S .

Поменяв порядок дифференцирования и интегрирования, имеем

$$\iiint_V \left[\frac{d(\rho \vec{v})}{dt} + \rho \vec{v} (\nabla \vec{v}) \right] dV = \iiint_V [-\nabla p + \rho \vec{f}] dV .$$

Поскольку объем V был выбран произвольно, то приравняем подынтегральные выражения:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{v} (\nabla \vec{v}) = -\nabla p + \rho \vec{f} .$$

Воспользуемся уравнением неразрывности (1.1-а):

$$\vec{v} \frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{v} (\nabla \vec{v}) = 0 ,$$

и тогда окончательно получим

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} . \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) является дифференциальной формой уравнения Эйлера.

Состояние движущейся жидкости определяется пятью скалярными величинами: тремя компонентами скорости \vec{v} и какими-либо двумя термодинамическими величинами, например, давлением p и плотностью ρ . Поэтому полная система гидродинамических уравнений должна содержать пять скалярных уравнений. Для идеальной жидкости это уравнение Эйлера (1.2), уравнение неразрывности (1.1) и уравнение состояния, связывающее термодинамические величины. Если жидкость является баротропной, т.е. давление зависит только от плотности, то уравнение состояния имеет вид

$$p = p(\rho).$$

Важнейшим следствием уравнения движения идеальной жидкости является **уравнение Бернулли**. Для вывода этого уравнения воспользуемся векторным тождеством

$$(\vec{v} \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - [\vec{v}, \text{rot} \vec{v}]$$

и запишем уравнение Эйлера (1.2) в следующем виде:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + w - gz \right) = [\vec{v}, \text{rot} \vec{v}],$$

где w - функция энтальпии, \vec{g} - ускорение свободного падения, а направление оси z совпадает с направлением вектора \vec{g} .

Рассмотрим частные случаи.

- Если движение стационарное $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ и безвихревое (потенциальное) $\text{rot} \vec{v} = 0$, то

$$\frac{v^2}{2} + w - gz = \text{const}, \quad (1.3-a)$$

причем постоянная сохраняется во всем потоке.

Если при этом жидкость однородна и несжимаема, то получаем классическое уравнение, предложенное Даниилом Бернулли в 1738 году для описания стационарного потенциального движения однородной несжимаемой жидкости:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - gz = const, \quad (1.3-б)$$

- Если движение жидкости стационарное и вихревое $rot\vec{v} \neq 0$, то

$$\frac{v^2}{2} + w - gz = const_l, \quad (1.3-в)$$

при этом постоянная различна для разных линий тока. Напомним, что линией тока называют линию, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором скорости \vec{v} в этой точке.

- Если движение нестационарное $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \neq 0$ и безвихревое $rot\vec{v} = 0$, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w - gz = F(t), \quad (1.3-г)$$

где φ - потенциал скорости ($\vec{v} = \nabla \varphi$), $F(t)$ - произвольная функция времени.

Перейдем к выводу еще одного закона, знание которого нам пригодятся впоследствии, - **закона сохранения импульса**. Рассмотрим импульс единицы объема $\rho \vec{v}$ и найдем производную по времени от его i -ой компоненты:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.4-а)$$

Из уравнения Эйлера (1.2) следует, что первое слагаемое в правой части уравнения (1.4-а)

равно $f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$, где f_i - внешняя сила, действующая на единицу объема.

Второе слагаемое в правой части уравнения (1.4-а) несложно получить из уравнения

неразрывности (1.1-б), оно равно $-v_i \sum_{k=1}^3 \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$.

Вводя тензор плотности потока импульса $\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k$, где δ_{ik} - символ Кронекера, выражение (1.4-а) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = f_i - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1.4-б)$$

здесь по дважды встречающемуся индексу подразумевается суммирование.

Проинтегрируем равенство (1.4-б) по произвольному фиксированному объему V , ограниченному поверхностью S с внешней нормалью \vec{n} , и используем теорему Гаусса-Остроградского:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho v_i dV = \iiint_V f_i dV - \oiint_S \Pi_{ik} n_k dS. \quad (1.4-в)$$

Таким образом, изменение импульса в объеме V связано с действием внешних объемных сил и потоком импульса через граничную поверхность S . В векторном виде выражение (1.4-в) можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \vec{v} dV = \iiint_V \vec{f} dV - \oiint_S (p\vec{n} + \rho \vec{v}(\vec{v}\vec{n})) dS. \quad (1.4-г)$$

Отметим важное следствие закона сохранения импульса (1.4-г): если движение жидкости стационарно и отсутствуют массовые силы, то поток тензора плотности импульса через любую взятую в жидкости замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oiint_S (p\delta_{ik} + \rho v_i v_k) n_k dS = 0. \quad (1.4-д)$$

Напомним, что все приведенные выше уравнения (1.2)-(1.4) описывают движение идеальной жидкости. Однако на течение реальной жидкости существенное влияние оказывает вязкость. Еще в начале XX века Джон фон Нейманн отмечал, что красивые математические задачи, решенные в рамках приближения идеальной жидкости, ничего общего с движениями реальных жидкостей не имеют. Он называл теоретиков, которые занимались подобными расчетами, людьми, изучающими “сухую воду”. Первые опыты,

показывающие влияние сил вязкости на сопротивление при малых скоростях, принадлежат Кулону и Дюбуа. Основы учения о движении вязкой жидкости были заложены в 1821 г. французским ученым Навье и получили завершение в 1845 г. в работах Стокса, поэтому уравнение движения вязкой жидкости называется **уравнением Навье-Стокса**.

Для вывода этого уравнения запишем закон сохранения импульса (1.4-б) в случае отсутствия внешних сил:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1.5)$$

где $\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k$ - тензор плотности потока импульса. Действие вязких сил можно учесть, вводя в Π_{ik} дополнительное слагаемое σ_{ik} , называемое тензором вязких напряжений и характеризующее величину i -ой компоненты вязкой силы, действующей на единичную площадку, ориентированную перпендикулярно k -ой оси. Тогда тензор плотности потока импульса примет вид:

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma_{ik}. \quad (1.6)$$

Поскольку трение может возникнуть только в случае, когда различные участки жидкости движутся с разными скоростями, тензор вязких напряжений σ_{ik} должен зависеть от производных скорости по координатам [2]. Предполагая, что эти градиенты невелики, представим тензор вязких напряжений σ_{ik} в виде разложения по ним, удерживая только линейные члены. Из требования обращения в нуль σ_{ik} в случае, если жидкость вращается как целое, следует, что градиенты скорости должны входить в σ_{ik} только в комбинациях:

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \frac{\partial v_k}{\partial x_k},$$

равных нулю при таких движениях. Свободный член в σ_{ik} должен быть равен нулю, в силу того, что σ_{ik} обращается в нуль при движении жидкости (газа) с постоянной скоростью. Наиболее общим выражением для тензора второго ранга, удовлетворяющего указанным выше условиям, является:

$$\sigma_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \xi \delta_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \quad (1.7)$$

где η и ξ - коэффициенты вязкости, не зависящие ни от скоростей, ни от их градиентов. Для несжимаемой жидкости согласно (1.1-в) $div \vec{v} = 0$, и второе слагаемое в (1.7) обращается в нуль.

Уравнение Навье-Стокса можно получить при подстановке выражения для тензора плотности потока импульса в виде (1.6) с учетом (1.7) в уравнение (1.5) и полагая, что коэффициенты вязкости не зависят от координат.

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + (\eta + \xi) \nabla (\nabla \vec{v}) \quad (1.8)$$

Для несжимаемой жидкости имеем:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}, \quad (1.9)$$

где $\nu = \eta / \rho$ - кинематическая вязкость жидкости.

Частицы вязкой жидкости прилипают к поверхности обтекаемого тела, поэтому их скорость на границе равна нулю (это так называемое граничное условие “прилипания”). Тогда можно вычислить силу, действующую на твердое тело со стороны установившегося (стационарного) потока вязкой жидкости:

$$F_i = - \iint_S p n_i dS + \iint_S \sigma_{ik} n_k dS,$$

где \vec{n} - внешняя нормаль к поверхности тела S . Здесь первое слагаемое представляет собой результирующую сил давления жидкости на тело, а второе определяет вязкую силу. Следовательно, вязкая сила, действующая на единицу поверхности тела, равна

$$f_i|_S = \sigma_{ik} n_k|_S. \quad (1.10)$$

В заключение данного раздела остановимся на условиях, при которых поток жидкости (газа) можно считать несжимаемым. При адиабатическом изменении давления на Δp плотность жидкости изменится на

$$\Delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p} \right)_s \Delta p. \quad (1.11)$$

Но согласно уравнению Бернулли (1.3) колебания давления в стационарно движущейся жидкости - порядка $\Delta p \sim \rho v^2$. Производная $\left(\frac{\partial\rho}{\partial p} \right)_s$ представляет собой квадрат скорости звука в жидкости. Таким образом, из (1.11) находим оценку:

$$\Delta\rho \sim \rho v^2 / c^2. \quad (1.12)$$

Жидкость можно считать несжимаемой, если выполняется условие:

$$\Delta\rho / \rho \ll 1. \quad (1.13)$$

Из выражений (1.12) и (1.13) следует, что необходимым условием несжимаемости жидкости (газа) является малость скорости ее движения по сравнению со скоростью звука:

$$v \ll c. \quad (1.14)$$

Условие малости числа Маха $M = v / c$, эквивалентное условию (1.14), достаточно, однако, только при стационарном движении. Оценки показывают, что ошибка, обусловленная принятием газов за несжимаемые жидкости, возрастает пропорционально квадрату скорости [3]. Так, предположение о несжимаемости газов при скорости 100 м/с влечет за собой ошибку порядка 4%. Однако при очень многих расчетах такая погрешность вполне допустима.

При нестационарном течении жидкости или газа необходимо выполнение еще одного условия. Получим его, опираясь на следующие качественные соображения [1].

Пусть τ и l - величины порядка промежутков времени и расстояний соответственно, на которых скорость жидкости испытывает заметное изменение. Сравнив члены $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ и $\frac{\nabla p}{\rho}$ в уравнении Эйлера (1.2), получим, по порядку величины:

$$\frac{v}{\tau} \sim \frac{\Delta p}{l\rho}.$$

Следовательно, изменение давления можно оценить следующим образом:

$$\Delta p \sim l \rho v / \tau ,$$

а соответствующее изменение плотности согласно выражению (1.11) есть

$$\Delta \rho \sim l \rho v / \tau c^2 .$$

Сравним теперь члены $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ и $\operatorname{div} \rho \vec{v}$ в уравнении неразрывности (1.1-б).

Производной $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ можно пренебречь (то есть считать, что $\rho = \text{const}$) в случае, если:

$$\frac{\Delta \rho}{\tau} \ll \frac{\rho v}{l} .$$

Таким образом, приходим к оценке характерного времени изменения скорости потока жидкости или газа:

$$\tau \gg \frac{l}{c} . \quad (1.15)$$

Условие (1.15) имеет простой наглядный смысл – оно означает, что время, в течение которого звуковой сигнал пройдет расстояние l , мало по сравнению со временем τ , в течение которого заметно изменяется движение жидкости и, таким образом, дает возможность рассматривать процесс распространения взаимодействий в жидкости как мгновенный.

Выполнение обоих условий (1.14) и (1.15) достаточно для того, чтобы можно было считать жидкость несжимаемой.

2. ОБТЕКАНИЕ ПЛОСКИМ ВОЗДУШНЫМ ПОТОКОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ

Рассмотрим потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости (газа). Для описания движения идеальной несжимаемой жидкости запишем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g},$$
$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Используя векторное тождество $(\vec{v} \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v}$ в уравнении Эйлера, и применив к нему операцию rot , получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{rot} [\vec{v}, \operatorname{rot} \vec{v}],$$
$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Если движение жидкости потенциальное, то $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$, и система принимает вид:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 0,$$
$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Введем потенциал скорости Φ : $\vec{v} = \operatorname{grad} \Phi$. Тогда имеем

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = 0,$$
$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = 0.$$

Таким образом, решение задач о потенциальном течении идеальной несжимаемой жидкости сводится к решению одного скалярного уравнения

$$\Delta \Phi = 0 \tag{2.1}$$

с учетом граничных условий. Уравнение (2.1) носит название уравнения Лапласа, хотя еще Д'Аламбер и Эйлер в 1761 году занимались решением подобных уравнений для задач гидродинамики. При соприкосновении идеальной жидкости с твердым телом должно выполняться так называемое граничное условие «непроникания»:

$$\vec{v}\vec{n}|_S = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_S = 0, \quad (2.2)$$

если тело покоится (\vec{n} - нормаль к поверхности раздела), и

$$\vec{v}\vec{n}|_S = \vec{v}_0\vec{n} \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_S = \vec{v}_0\vec{n}, \quad (2.3)$$

если тело движется со скоростью \vec{v}_0 .

Полнее всего теория потенциального движения идеальной несжимаемой жидкости разработана в случае плоского потенциального течения (когда от одной координаты, например, от z , ничего не зависит, и $v_z=0$).

Введем новую функцию $\psi(x, y, t)$ - **функцию тока** – так, чтобы уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

удовлетворялось автоматически. Для этого положим:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.4)$$

Термин «функция тока» обусловлен тем, что линиями тока течения являются линии $\psi = const$.

В случае потенциального течения, когда $rot \vec{v} = 0$, функция тока удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \psi = 0. \quad (2.5)$$

Введем для плоского течения функцию потенциала скорости φ : $\vec{v} = \text{grad} \varphi$. Тогда

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (2.6)$$

Несложно показать, что линии тока ($\psi = \text{const}$) ортогональны изопотенциальным линиям ($\varphi = \text{const}$).

Соотношения (2.4) и (2.6) с математической точки зрения совпадают с условиями Коши - Римана, выражающими собой тот факт, что функция

$$F(z) = \varphi + i\psi \quad (2.7)$$

является аналитической функцией комплексного аргумента $z = x + iy$, т.е. обладает свойством дифференцируемости. Функцию $F(z)$ называют **комплексным потенциалом**, а функцию $W = \frac{dF}{dz}$ - комплексной скоростью. Следовательно, любой аналитической функции комплексной переменной можно поставить в соответствие некое плоское потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости.

Отметим, что нахождение комплексного потенциала (5.4), определяющего плоское безвихревое движение несжимаемой жидкости, может быть сведено к разысканию одной функции тока ψ , так как потенциал φ связан с ψ известными условиями Коши — Римана, позволяющими определить φ в виде квадратуры по известной функции ψ .

Для примера покажем, как происходит движение жидкости, описываемое комплексным потенциалом

$$F(z) = az, \quad (2.7-a)$$

где a - вещественная постоянная.

Поскольку $z = x + iy$, то $F(z) = ax + iay$. С другой стороны, комплексный потенциал выражается через потенциал скорости φ и функцию тока ψ формулой (2.7).

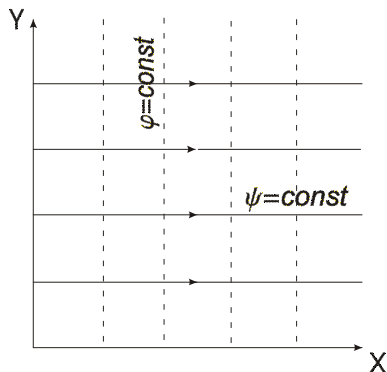


Рис.2.1.

Следовательно, в данном случае

$$\varphi = ax ,$$

$$\psi = ay .$$

Компоненты вектора скорости можно найти либо через функцию потенциала, используя выражения (2.6), либо через функцию тока, используя соотношения (2.4). Несложно вычислить, что

$$v_x = a ,$$

$$v_y = 0 .$$

Линии тока и эквипотенциальные линии данного течения расположены как показано на рис.2.1.

Для решения более сложных задач удобно использовать **аппарат конформных изображений**, широко применяемый в теории аналитических функций. Допустим, у нас решена какая-нибудь определенная задача о двумерном потенциальном течении в некоторой области с определенными граничными условиями, т. е. найден комплексный потенциал $F(z)$. Перейдем с помощью конформного преобразования к другой комплексной переменной ζ , связанной с z формулой

$$z = f(\zeta).$$

При этом комплексный потенциал $F(z)$ преобразуется к виду:

$$F(z) = F[f(\zeta)] = \Phi(\zeta) ,$$

который в плоскости ζ будет соответствовать какому-то новому течению. С помощью этой процедуры иногда удается получить решение весьма сложных задач.

Решим задачу о стационарном обтекании кругового цилиндра однородным потоком жидкости (газа) со скоростью на бесконечности v_0 методом конформного преобразования. Пусть на плоскости $z = x + iy = r \exp(i\theta)$ задана окружность $r = R$, где R - радиус цилиндра (рис.2.2).

Будем искать решение уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \quad (2.8)$$

при следующих граничных условиях:

- на поверхности цилиндра при $r = R$ нормальная компонента скорости равна нулю,
- при $r \rightarrow \infty$ невозмущенный поток имеет компоненты скорости $v_x = -v_0$, $v_y = 0$.

Выражая последние через потенциал скорости, запишем граничные условия в виде:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{r=R} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{r \rightarrow \infty} = -v_0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (2.9)$$

Напомним, что функция тока ψ также удовлетворяет уравнению Лапласа (2.5) и вместе с функцией потенциала скорости φ образует комплексный потенциал $F(z)$ (2.7).

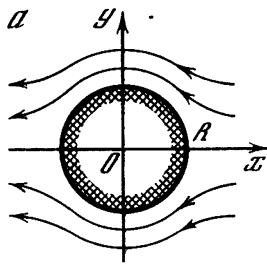


Рис.2.2.

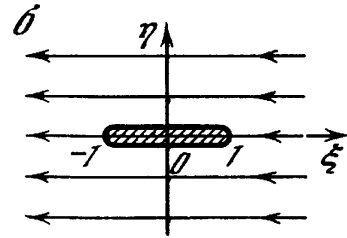


Рис.2.3.

Отобразим область вне окружности $|z| > R$ конформным преобразованием на плоскость ζ с разрезом от -1 до +1, изображенную на рис. 2.3. Это преобразование называется преобразованием Жуковского [2]:

$$\zeta = \xi + i\eta = \left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right) / 2. \quad (2.10)$$

При этом окружность $z = R \exp(i\theta)$ стягивается в отрезок, простирающийся по ξ от -1 до 1 и проходимый дважды. В результате комплексный потенциал примет вид:

$$\Phi(\zeta) = \Phi \left[\left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right) / 2 \right] = \varphi_1(\xi, \eta) + i\psi_1(\xi, \eta).$$

Первое граничное условие из (2.9) переходит в условие:

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0,$$

Поскольку при конформном преобразовании сохраняются углы между линиями (в данном случае сохраняется прямой угол между границей и нормалью к ней).

При $r \rightarrow \infty$ имеем:

$$\zeta = \xi + i\eta \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{z}{R} = \frac{x}{2R} + \frac{iy}{2R},$$

что при $r \rightarrow \infty$ дает переход:

$$\varphi(x, y) \quad \rightarrow \quad \varphi_1\left(\frac{x}{2R}, \frac{y}{2R}\right).$$

Следовательно,

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{r \rightarrow \infty} = -v_0 = \frac{1}{2R} \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} \right|_{\kappa \rightarrow \infty}, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{r \rightarrow \infty} = 0 = \frac{1}{2R} \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \right|_{\kappa \rightarrow \infty},$$

где $\kappa = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, откуда получаем искомые новые граничные условия на бесконечности:

$$(\partial \varphi_1 / \partial \xi)_{\kappa \rightarrow \infty} = -2Rv_0, \quad (\partial \varphi_1 / \partial \eta)_{\kappa \rightarrow \infty} = 0.$$

Таким образом, мы получили задачу об обтекании бесконечно узкой полосы набегающим из бесконечности потоком со скоростью $2Rv_0$. Решением этой задачи, как было показано ранее, является поток со скоростью, одинаковой во всех точках пространства. Комплексный потенциал такого потока нам известен и равен (аналогично (2.7-а))

$$\Phi(\xi) = -2Rv_0\xi.$$

Возвращаясь от переменной ζ к переменной z в соответствии с формулой (2.10), получим выражение для комплексного потенциала исходной задачи:

$$F(z) = -2Rv_0 \zeta(z) = -Rv_0(z/R + R/z) = -v_0[r \exp(i\theta) + (R^2/r) \exp(-i\theta)]. \quad (2.11)$$

Отсюда для потенциала скорости имеем:

$$\varphi = \operatorname{Re} F(z) = -v_0[r + R^2/r] \cos \theta. \quad (2.12)$$

Соответственно для компонент скорости получаем:

$$\begin{aligned} v_r &= \partial \varphi / \partial r = -v_0(1 - R^2/r^2) \cos \theta, \\ v_\theta &= r^{-1} \partial \varphi / \partial \theta = v_0(1 + R^2/r^2) \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Несложно проверить, что граничные условия (2.9) выполняются.

При этом на поверхности цилиндра ($r = R$) находим:

$$v_r = 0, \quad v_\theta = 2v_0 \sin \theta. \quad (2.14)$$

Из (2.14) следует, что максимальная скорость имеет место в плоскости миделя (при $\theta = \pm \pi/2$), где $v = v_\theta = 2v_0$.

Зная скорость, можно в любой точке жидкости найти давление, используя теорему Бернулли (1.3-б). Поскольку нам известно распределение скорости по поверхности цилиндра (2.14), мы можем определить давление на ней:

$$p = p_0 + \rho(v_0^2 - v^2)/2 = p_0 + \rho v_0^2(1 - 4 \sin^2 \theta)/2. \quad (2.15)$$

Здесь давление на бесконечности обозначено p_0 . Из формулы (2.15) следует, что давление в лобовой точке ($\theta = 0$) превышает давление на бесконечности. Такой же величины оно достигает и в симметричной точке за цилиндром ($\theta = \pi$). При приближении к плоскости миделя ($\theta = \pm \pi/2$) давление монотонно падает до величины, меньшей p_0 . В качестве характеристики, описывающей распределение давления, вводят **коэффициент давления**:

$$K = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (2.16)$$

Коэффициент давления K не зависит ни от радиуса цилиндра, ни от плотности жидкости, ни от скорости потока. Это одно из проявлений общего закона гидродинамического подобия.

Благодаря закону подобия, приведенную выше теорию обтекания цилиндра можно проверить экспериментально, измеряя зависимость коэффициента давления от угла θ для какого-то определенного случая радиуса цилиндра, скорости набегающего потока и плотности жидкости или газа, а полученный результат будет относиться к любому случаю обтекания цилиндра.

Однако эксперименты с реальными жидкостями и газами не подтверждают формулу (2.16). Эксперименты показывают [2], что значение K действительно равно единице в передней критической точке ($\theta = 0$), где поток разветвляется и уменьшается при приближении к плоскости миделя ($\theta = \pm \pi/2$). Однако на ней коэффициент давления не падает до значения $K = -3$, как это должно бы было быть в соответствии с формулой (2.16), и в критической точке за цилиндром ($\theta = \pi$) не возрастает снова до $K = 1$. Это обусловлено тем, что в реальной жидкости безотрывное обтекание цилиндра, изображенное на рис.2.2, невозможно. Линии тока в области $\pi/2 < \theta < \pi$ отрываются от поверхности цилиндра, и в этой области образуются вихри. Тем не менее это не означает, что теория обтекания тел идеальной жидкостью не имеет смысла, для хорошо обтекаемых тел (например, крыла самолета) эта теория подтверждается опытами гораздо лучше, чем для цилиндра.

Кроме того, из симметричности выражения для давления (2.15) относительно плоскости миделя вытекает парадокс Даламбера-Эйлера, который формулируется следующим образом: при обтекании тела с гладкой поверхностью идеальной несжимаемой жидкостью сила лобового сопротивления, действующая на него со стороны потока, равна нулю.

При обтекании однородным потоком также равна нулю и сила, действующая в перпендикулярном потоку направлении, что следует из симметричности выражения для давления (2.15) относительно плоскости $\theta = 0$. В случае же **циркуляционного обтекания** тела эта сила может быть отличной от нуля. Ее называют **подъемной силой** по аналогии с подъемной силой крыла самолета.

Вернемся к описанию плоских потенциальных течений с помощью комплексного потенциала. Несложно показать, используя полярные координаты, что движение жидкости, определяемое комплексным потенциалом

$$F(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z, \quad (2.17)$$

где Γ - вещественная постоянная, представляет собой вращение частиц жидкости (газа) вокруг точки $r = 0$ со скоростью, обратно пропорциональной расстоянию r до этой точки. Это так называемый вихревой источник с циркуляцией вдоль линии тока, равной Γ .

Теперь наложим на изученное нами течение, возникающее при обтекании цилиндра, циркуляционное движение вокруг его оси. Математическое описание совокупного течения можно осуществить, взяв для комплексного потенциала сумму выражений (2.11) для симметричного потока и (2.17) для циркуляционного течения. В результате для суммарного течения имеем:

$$F(z) = -v_0(z + R^2/z) + \Gamma \ln(z)/2\pi i. \quad (2.18)$$

Отсюда, выделив потенциал скорости φ и функцию тока ψ , как и прежде, можно найти все характеристики течения. На поверхности цилиндра ($r = R$), нормальная компонента скорости равна нулю. Тангенциальная же компонента скорости является суммой тангенциальных компонент двух составляющих поток течений:

$$v|_{r=R} = v_\theta|_{r=R} = 2v_0 \sin \theta + \Gamma/2\pi R. \quad (2.19)$$

Подставляя найденное значение скорости на поверхности цилиндра в уравнение Бернулли (1.3), найдем распределение давления в рассматриваемом случае:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{1}{2} \rho \left[v_0^2 - \left(2v_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 \right] = \\ &= p_0 + \frac{1}{2} \rho \left[v_0^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) - \frac{2\Gamma v_0}{\pi R} \sin \theta - \left(\frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Из формулы (2.20) видно, что давление симметрично относительно плоскости миделя, откуда следует, что нет силы, действующей на цилиндр в направлении потока, то есть опять имеет место парадокс Даламбера-Эйлера. Однако давление на поверхности цилиндра несимметрично относительно плоскости $\theta = 0$, следовательно, значения давления на нижней и верхней половинах поверхности цилиндра будут разными. Этот результат можно пояснить следующим образом. Наложим мысленно на симметричный поток (рис. 2.2) циркуляционное течение против часовой стрелки ($\Gamma > 0$). Тогда над цилиндром скорости обоих течений будут складываться, а под цилиндром – вычитаться. Значит, скорость сверху будет больше, чем снизу. Следовательно, по теореме Бернулли давление снизу будет больше, чем давление сверху, и на цилиндр будет действовать результирующая сила, направленная вверх, по оси y , так называемая подъемная сила. Величина этой силы, отнесенная к единице длины образующей цилиндра, равна

$$F_y = -2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} pR \sin \theta d\theta. \quad (2.21-a)$$

Покажем это. В силу симметрии давления относительно плоскости миделя интегрирование поля давлений достаточно провести в интервале углов от $-\pi/2$ до $\pi/2$ и затем результат удвоить. Элемент площади цилиндра равен $Rd\theta$, проекция на вертикальную ось силы, действующей по нормали на единичную площадку, равна $-p \sin \theta$, что и приводит в результате к формуле (2.21-a).

Подстановка в (2.21-a) выражения для давления (2.20) с учетом только несимметричного члена дает

$$F_y = \frac{2\Gamma v_0 \rho}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \rho v_0 \Gamma. \quad (2.21-b)$$

Таким образом, подъемная сила оказывается пропорциональной скорости набегающего потока v_0 и величине циркуляции Γ .

Формула (2.21-б) носит название **формулы Жуковского** и справедлива при обтекании любого цилиндрического тела, не обязательно кругового сечения.

3. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

На течение любой реальной жидкости существенное влияние оказывает вязкость. В идеальной жидкости, находящейся в поле потенциальных сил, не может возникать вихрей – потенциальное течение жидкости всегда остается потенциальным. Неверным является также положение теории идеальной жидкости о существовании отличной от нуля тангенциальной составляющей скорости на поверхности твердого тела. Опыт, однако, показывает, что на поверхности любого неподвижного тела все компоненты скорости частиц жидкости равны нулю.

Учет свойства вязкости жидкостей и газов ведет к повышению порядка дифференциальных уравнений движения и в связи с этим появляются добавочные краевые условия на границах объема движущейся среды. Типичными примерами таких условий являются условие полного прилипания жидкости или газа к подвижным телам или неподвижным граничным стенкам и условие непрерывности трех компонент вектора силы напряжения на поверхностях контакта двух сред.

При рассмотрении задачи об обтекании тел идеальной жидкостью условие обтекания сводится к равенству нормальных составляющих скоростей жидкости и тела на поверхности тела. На поверхности тела касательные составляющие скоростей тела и жидкости различны, поэтому в рамках идеальной жидкости вдоль поверхности тела возможно проскальзывание частиц жидкости относительно тела. Нетрудно видеть, что влияние вязкости на поле скоростей проявляется существенным образом за счет граничных условий, которые запрещают такое проскальзывание.

Опыт и качественные теоретические соображения указывают, что в некоторых важных случаях на движение жидкости существенное влияние оказывает условие отсутствия проскальзывания жидкости только непосредственно вблизи самой границы, в тонком слое, окутывающем поверхность обтекаемого тела.

В связи с этим возникла теория тонкого пограничного слоя на границах вязкой жидкости — тонкого слоя, внутри которого нельзя пренебрегать вязкостью и ввести который имеет смысл, если число Рейнольдса потока велико. В этой теории принимается, что имеется основной поток жидкости, которую можно рассматривать как идеальную, и имеется тонкий пограничный слой, внутри которого жидкость рассматривается как вязкая; на границе пограничного слоя эти два течения непрерывно сопрягаются. Существенно отметить сразу, что такое представление о структуре поля скоростей вязкой жидкости приемлемо во многих типичных классах задач, но в ряде случаев эта точка зрения не отвечает действительности. Подробное знакомство с теорией пограничного слоя

позволяет более определенно разъяснить и выделить задачи, в которых эта теория перестает успешно действовать.

Представление о пограничном слое оказалось плодотворным по двум главным причинам. Во-первых, появилась возможность производить построение теории движения вязкой жидкости и газа на основе известных решений уравнений для идеальной жидкости и газа. Во-вторых, сложные уравнения Навье - Стокса в тонком пограничном слое оказалось возможным заменить более простыми уравнениями теории пограничного слоя.

Уравнения и основные понятия теории пограничного слоя были установлены в 1904 г. Л. Прандтлем [5].

В пограничном слое, так же как и при течении в трубе, режимы движения жидкостей или газов могут быть как ламинарными, так и турбулентными. При разных режимах течения основные характеристики движения жидкости и законы, управляющие ламинарным или осредненным турбулентным движением в пограничном слое, получаются резко отличающимися друг от друга. Рассмотрим теорию ламинарного пограничного слоя.

Для получения уравнений теории пограничного слоя рассмотрим основную модельную задачу об обтекании несжимаемой вязкой жидкостью неподвижной тонкой пластинки, поставленной по скорости набегающего поступательного потока перед пластинкой (рис. 3.1) [6].

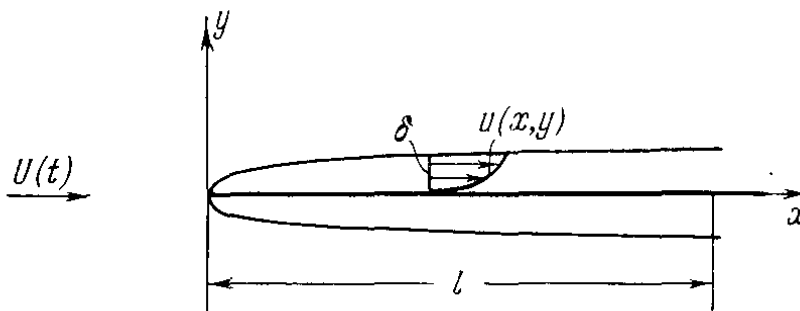


Рис. 3.1. Пограничный слой на обтекаемой пластинке

Вывод уравнений движения в пограничном слое основан на оценках - гипотезах о порядке различных членов в уравнениях Навье - Стокса и пренебрежении малыми членами; сохраняются только конечные члены.

Для плоскопараллельного движения в плоскости xy имеем следующие уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}
\tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0
\tag{3.2}$$

Под членами этих уравнений указаны их оценки по величине δ (толщина пограничного слоя). Справедливость этих оценок обсуждается ниже.

Пусть l - некоторый характерный размер, например длина пластинки. Обозначим через δ «толщину» пограничного слоя. По основному допущению примем, что на расстоянии δ по нормали от обтекаемой пластинки имеется «граница» пограничного слоя, на которой скорости жидкости извне и изнутри пограничного слоя практически совпадают (практическая малость разности скоростей в процентном или в некотором другом отношении определяется дополнительным условием). Величина δ или, точнее, отношение x/δ принимается в качестве основной малой величины. Воспользуемся преобразованием:

$$x = l\xi, \quad y = \delta\eta
\tag{3.3}$$

и предположим, что в пограничном слое переменные ξ , η и x изменяются в конечных пределах, а интервал изменения переменной y имеет порядок δ . Далее примем, что величины $U(t)$, и $u(x, t)$, их производные по времени и производные $\partial u/\partial x$, $\partial^2 u/\partial x^2$ внутри пограничного слоя и на его границе с основным потоком конечны.

Из равенств

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},
\tag{3.4}$$

так как u и η изменяются в конечных пределах, следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta^2}.
\tag{3.5}$$

Далее, из уравнения неразрывности (3.2) имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad v = -\int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy \sim \delta, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \sim \delta, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \delta. \quad (3.6)$$

На основании этих оценок под каждым членом уравнений (3.1) и (3.2) указан порядок его величины.

Первое из уравнений (3.1) показывает, что при конечных l и U должно быть конечным v/δ^2 , в безразмерном виде должно быть

$$\frac{\delta^2}{l^2} \approx \frac{v}{Ul} \quad \text{или} \quad \delta \approx l \sqrt{\frac{v}{Ul}} \quad (3.7)$$

Эти прикидочные оценки и послужили основой для упрощения уравнений Навье - Стокса в пограничном слое. После сохранения в (3.1) только конечных членов получаются следующие уравнения пограничного слоя:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \quad \text{или} \quad p = p(x, t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

К этим уравнениям необходимо добавить уравнение неразрывности (3.2). Уравнения (3.8) остаются нелинейными. Поперек пограничного слоя давление сохраняется постоянным и определяется значением на границе слоя в основном потоке, рассчитываемым из теории идеальной жидкости, следовательно, в уравнении (3.8) член $\partial p / \partial x$ можно считать известным.

В отличие от уравнений Навье - Стокса система уравнений (3.8) и (3.3) поддается решению в ряде важных случаев. При приближенных расчетах эта система применяется не только для исследования движения в пограничном слое на плоской пластинке, но и для исследования движения в пограничном слое на криволинейных профилях. Более формальный математический вывод уравнений (3.8) с более определенной формулировкой соответствующих предположений можно дать следующим способом. В уравнениях (3.8) и (3.3) сделаем следующее преобразование переменных:

$$\begin{aligned} x &= lx_1, & u &= U_0 u_1, \\ y &= \sqrt{\frac{\nu l}{U_0}} y_1, & v &= \sqrt{\frac{\nu U_0}{l}} v_1, & t &= \frac{l}{U_0} t_1, & p &= U_0^2 p_1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

где l и U_0 - некоторые постоянные - характерные линейный размер и скорость. Выполнив это преобразование, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}, \\ \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_1^2}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} &= 0,\end{aligned}\tag{3.10}$$

где $R=U_0 l/\nu$ - число Рейнольдса. Эти уравнения представляют собой точные уравнения Навье — Стокса, записанные в соответствующих безразмерных переменных.

Предположим теперь, что при $R \rightarrow \infty$ все величины с индексом 1 в (3.9) и (3.10) сохраняют конечные значения. После перехода к пределу при $R \rightarrow \infty$ из (3.10) получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial y_1}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} &= 0.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Эти уравнения после обратного преобразования с помощью (3.9) переходят в уравнения (3.8) и (3.3). Таким образом, уравнения пограничного слоя можно рассматривать в некотором смысле как предельную форму уравнений Навье - Стокса, когда число Рейнольдса $R=U_0 l/\nu$ стремится к бесконечности.

В задачах об обтекании профилей необходимо решать систему (3.11) со следующими граничными условиями: $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ при $y_1 = 0$ (условие прилипания на профиле) и $u_1 = U(x, t)/U_0$ при $y_1 = \infty$ (условие на внешней границе пограничного слоя), причем внутри пограничного слоя $p_1(x, t)$ не зависит от y_1 и определяется из решения задачи о внешнем обтекании.

Задача о внешнем обтекании профиля идеальной жидкостью в первом приближении может быть решена без учета наличия пограничного слоя, так как для толщины пограничного слоя по (3.7) имеем

$$\frac{\delta}{l} \approx \sqrt{\frac{\nu}{U_0 l}} = \frac{1}{\sqrt{R}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty,$$

т. е. толщина пограничного слоя получается очень малой при больших значениях числа Рейнольдса, характерных для многих практически важных задач.

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ПРИ ОБТЕКАНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ.

Дадим теперь полное решение задачи об установившемся пограничном слое на абсолютно гладкой тонкой неподвижной пластинке — полуплоскости $y = 0, x \geq 0$ (см. рис. 3.1), когда скорость U_0 набегающего потока постоянна и направлена по оси x (по пластинке).

В этом случае уравнения (3.8) и (3.3) приобретают вид

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

так как движение установившееся, а внешний поток представляет собой поступательное движение с постоянным давлением p_0 .

На пластинке имеем условие прилипания

$$\text{при } y = 0, x \geq 0 \quad u = v = 0, \quad (3.13)$$

на внешней границе пограничного слоя

$$\text{при } y = \infty \quad u = U_0. \quad (3.14)$$

АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЯ

Так как в рассматриваемой задаче нет характерного линейного размера, то система размерных и безразмерных определяющих параметров имеет вид

$$U_0, \quad \nu, \quad x, \quad y \quad \text{и} \quad \frac{y}{x}, \quad \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}. \quad (3.15)$$

Поэтому искомые функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ можно представить через безразмерные функции f и Φ вида

$$u = U_0 f\left(\frac{y}{x}, \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}\right), \quad v = \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} \Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}\right) \quad (3.16)$$

Если теперь в уравнениях (3.12) и в граничных условиях (3.13) и (3.14) совершить замену переменных:

$$x = lx_1, \quad y = \sqrt{\frac{vl}{U_0}} y_1, \quad u = U_0 u_1, \quad v = \sqrt{\frac{vU_0}{l}} v_1, \quad (3.17)$$

то получим

$$\begin{aligned} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} &= 0 \\ \text{и при } x_1 \geq 0, y_1 = 0 \quad u_1 = v_1 &= 0, \\ \text{а при } y_1 = \infty \quad u_1 &= 1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Уравнения и граничные условия для функций $u_1(x_1, y_1)$ и $v_1(x_1, y_1)$ не содержат параметра l , поэтому решение системы (3.18) не должно зависеть от l . Из (3.16) получим

$$\begin{aligned} \frac{u}{U_0} = u_1 &= f\left(\frac{y_1}{x_1 \sqrt{\frac{U_0 l}{v}}}, \frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right) = f\left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right), \\ \frac{v}{\sqrt{\frac{vU_0}{l}}} = v_1 &= \frac{1}{\sqrt{x_1}} \Phi\left(\frac{y_1}{x_1 \sqrt{\frac{U_0 l}{v}}}, \frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x_1}} \Phi\left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

так как аргумент $y_1 / \left(x_1 \sqrt{\frac{U_0 l}{v}}\right)$ содержит параметр l , от которого решение не зависит.

Из формул (3.19) вытекает, что уравнения с частными производными (3.18) приводятся в данной задаче к обыкновенным уравнениям с одной независимой переменной

$$\xi = \frac{y_1}{\sqrt{x_1}} = \frac{y}{\sqrt{\frac{vx}{U_0}}}. \quad (3.20)$$

В общем случае из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0$$

следует, что для плоскопараллельных движений несжимаемой жидкости существует функция тока $\psi(x_1, y_1)$ такая, что

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \quad \text{и} \quad v_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

Полагая

$$f(\xi) = \varphi'(\xi) = \varphi'\left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right)$$

найдем

$$\psi = \sqrt{x_1} \varphi\left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right)$$

Таким образом, на основании уравнения неразрывности получим, что компоненты u_1 и v_1 выражаются через функцию $\varphi(\xi)$ в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi'(\xi), \\ v_1 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_1}} [\xi \varphi'(\xi) - \varphi(\xi)]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Подставляя (3.21) в уравнение движения, после простых преобразований получаем

$$2\varphi''(\xi) + \varphi''(\xi) \varphi(\xi) = 0. \quad (3.22)$$

Для получения решения этого нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка необходимо найти функцию $\varphi(\xi)$ в интервале $0 < \xi < \infty$, удовлетворяющую уравнениям (3.22) и на концах интервала $0 < \xi < \infty$ следующим граничным условиям, вытекающим из (3.18):

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi'(\infty) = 1. \quad (3.23)$$

Для определения функции $\varphi(\xi)$ требуется решить краевую задачу. Эту краевую задачу легко свести к задаче Коши с данными на одном конце, если воспользоваться следующим общим свойством решений уравнения (3.22).

Пусть $\varphi_0(\xi)$ — некоторое решение уравнения (3.22); непосредственной проверкой легко убедиться, что функция

$$\varphi(\xi) = \alpha^{1/3} \varphi_0(\alpha^{1/3} \xi) \quad (3.24)$$

также является решением уравнения (3.22) при любом постоянном α .

Определим теперь функцию $\varphi_0(\xi)$ как решение следующей задачи Коши для уравнения (3.22):

$$\varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = 0, \quad \varphi_0''(0) = 1. \quad (3.25)$$

С помощью уравнения (3.22) и данных Коши (3.25) функцию $\varphi_0(\xi)$ нетрудно рассчитать известными численными методами для любых $\xi > 0$. По данным расчета можно определить предел

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \varphi'(\xi) = k \neq 1, \quad \text{причем} \quad k^{3/2} = \frac{1}{0,332}. \quad (3.26)$$

Определим теперь в формуле (3.24) постоянную α таким образом, чтобы удовлетворялось условие (3.23) при $\xi \rightarrow \infty$.

$$\text{Имеем } \varphi'(\xi) = \alpha^{2/3} \varphi_0'(\eta), \quad \eta = \alpha^{1/3} \xi \quad \text{и} \quad \varphi''(\xi) = \alpha \varphi_0''(\eta), \quad \varphi''(0) = \alpha.$$

$$\text{Отсюда следует, что } \lim_{\xi \rightarrow \infty} \varphi'(\xi) = \alpha^{2/3} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \varphi_0'(\eta) = \alpha^{2/3} k.$$

Очевидно, что для получения искомого решения для функции $\varphi(\xi)$ с помощью формулы (3.24) достаточно положить $\alpha^{2/3} k = 1$ или на основании (3.26)

$$\alpha = \frac{1}{k^{3/2}} = 0,332. \quad (3.27)$$

Следовательно, полное решение представляется формулами (3.21) и (3.24) при $\varphi_0(\xi)$, определенной из численного решения задачи Коши (3.25).

ТОЛЩИНА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Согласно (3.21) распределение продольной компоненты скорости в пограничном слое определяется формулой

$$\frac{u}{U_0} = \varphi' \left(\sqrt{\frac{y}{\nu x}} \right)$$

и представляется кривой, вид которой изображен на рис. 3.1. Если толщину пограничного слоя $y = \delta$ определить, например, из условия $u/U_0 = 0,995$, т. е.

$$U_0 - u \approx 0,005 U_0 \approx 0,5\% U_0,$$

то величину δ можно вычислить из уравнения

$$0,995 = \varphi' \left(\sqrt{\frac{\delta}{\nu x}} \right). \quad (3.28)$$

Из расчета функции $\varphi'(\xi)$ и из (3.28) следует, что

$$\delta = 5,16 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}. \quad (3.29)$$

При большой скорости U_0 , малой вязкости $(\mu/\rho) = \nu$ и умеренных значениях координаты x толщина пограничного слоя δ получается весьма малой.

При $x > 0$ и больших $y > 0$ вдали от пластинки за счет торможения жидкости в пограничном слое линии тока смещаются на величину δ^* (рис. 3.2), определяемую формулой

$$\delta^* U_0 = \int_0^\infty (U_0 - u) dy = U_0 \int_0^\infty [1 - \varphi'(\xi)] d\xi \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} = U_0 \cdot 1,72 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}.$$



Рис. 3.2. К определению толщины пограничного слоя δ и толщины вытеснения δ^*

$$\text{Отсюда } \delta^* = 1,72 \sqrt{\frac{vx}{U_0}} \approx \frac{\delta}{3}.$$

Аналогичным образом толщину пограничного слоя δ и толщину вытеснения δ^* можно определять при решении других задач об обтекании профилей с заданным переменным распределением давлений на внешней границе пограничного слоя. В некоторых случаях дальнейшие уточнения распределения давлений по обтекаемому телу во внешнем обтекании тела идеальной жидкостью можно получать для тел, утолщенных по нормальям на величину толщины вытеснения δ^* .

В плоских задачах при обтекании профилей давление по обтекаемому профилю, равное давлению на внешней границе пограничного слоя, переменное, и поэтому в подобных задачах в уравнениях (3.8) продольный градиент давления по профилю (производная $\partial p / \partial x$) будет отличен от нуля.

ПЕРЕХОД ОТ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ К ТУРБУЛЕНТНОМУ

Движение жидкости и газа в пограничном слое на поверхности обтекаемых тел, как и движение жидкости в трубе, может быть ламинарным и турбулентным. При больших значениях числа Рейнольдса в передней части обтекаемой поверхности тела развивается ламинарный пограничный слой, который на некотором расстоянии от переднего края тела переходит в турбулентный пограничный слой. Так же как и при движении жидкости в трубах, имеются характерные признаки — характерные значения числа Рейнольдса, при которых в пограничном слое ламинарное движение сменяется турбулентным. Явление перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный имеет много общего с явлением перехода ламинарных движений в трубах в турбулентные.

Область перехода или точка перехода характеризуется возникновением в пограничном слое интенсивных пульсаций скорости, давления, плотности (в сжимаемых средах) и т. п. Распределения скоростей по сечению в ламинарном и в турбулентном пограничных слоях, вообще говоря, резко отличаются друг от друга. Так же как и при турбулентных движениях в трубах, в турбулентном пограничном слое происходит интенсивное перемешивание макроскопических частиц жидкости в поперечном направлении, за счет этого в турбулентном пограничном слое происходит выравнивание средних скоростей. Вместе с этим прилипание на обтекаемых стенках приводит к появлению более резких градиентов скоростей вблизи стенок, что вызывает резкое увеличение поверхностных сил трения и соответственно сопротивления трения.

При обтекании гладких поверхностей в турбулентном пограничном слое на обтекаемой поверхности возникает очень тонкий ламинарный подслой, в котором

скорости жидкости вообще невелики, пульсации скорости практически отсутствуют, но имеются очень большие поперечные градиенты скорости, вызывающие большие значения напряжений силы трения.

Теоретическое исследование и расчет турбулентного пограничного слоя, так же как и расчет турбулентных движений жидкостей в трубах, основаны на эмпирических данных о законах распределения средних скоростей и других характеристик и на специальных интегральных соотношениях, устанавливаемых с помощью различных законов сохранения.

4. ДИФFUЗОР

Диффузор в гидроаэромеханике - это участок проточного канала (трубопровода), в котором происходит торможение потока жидкости или газа [7]. Поперечное сечение диффузора может быть круглым, прямоугольным, кольцевым, эллиптическим, а также несимметричным. По своему назначению и геом. форме диффузор— устройство, обратное соплу. Вследствие падения средней скорости v давление p в направлении течения растет и кинетическая энергия потока частично преобразуется в потенциальную. В отличие от сопла, преобразование энергии в диффузоре сопровождается заметным возрастанием энтропии и уменьшением полного давления. Разность полных давлений на входе и выходе диффузора характеризует его гидравлическое сопротивление и называется потерями. Потерянная часть кинетической энергии потока затрачивается на образование вихрей, работу против сил трения и необратимо переходит в теплоту. Движение жидкости (газа) в направлении роста давления в потоке, т. е. существование положительного градиента давления в направлении течения, - основное отличительное свойство диффузора.

В случае несжимаемой жидкости, а также при дозвуковой скорости газа v_1 перед входом в диффузор он имеет форму сходящегося или цилиндрического канала, в котором после торможения средняя скорость становится дозвуковой. Дальнейшее торможение дозвуковой скорости осуществляется в расходящемся дозвуковом диффузоре, присоединённом к сверхзвуковому диффузору (рис. 4.1).

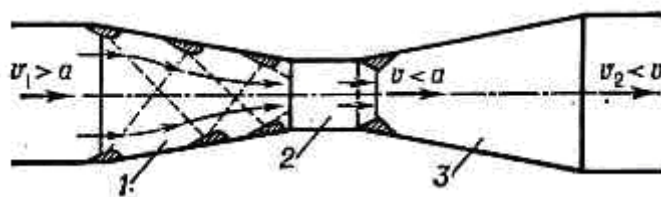


Рис. 4.1. Сверхзвуковой диффузор прямоугольного сечения. 1 — сходящаяся часть;
2 — горловина (цилиндрический. участок);
3 — расходящаяся часть.

Вязкость оказывает решающее влияние на течение в диффузоре. В пограничном слое скорость под действием вязкости быстро убывает, обращаясь в нуль на стенке диффузора. Кинетическая энергия в пограничном слое меньше, чем в остальной части потока, а статическое давление в данном поперечном сечении почти постоянно. Т. к. средняя скорость по длине диффузора падает, а давление растет, то в сечении, расположенном на некотором расстоянии от входа в диффузор, кинетическая энергия

потока вблизи стенки недостаточна для того, чтобы переместить жидкость или газ против сил давления, возрастающих в направлении потока. Вблизи этого сечения начинается отрыв потока от стенки и возникает возвратное течение. В результате у стенки диффузора образуются области циркуляционного движения (рис. 4.2). Слой жидкости между оторвавшимся от стенки и основными потоками неустойчив и периодически свертывается в вихри, которые сносятся вниз по потоку.

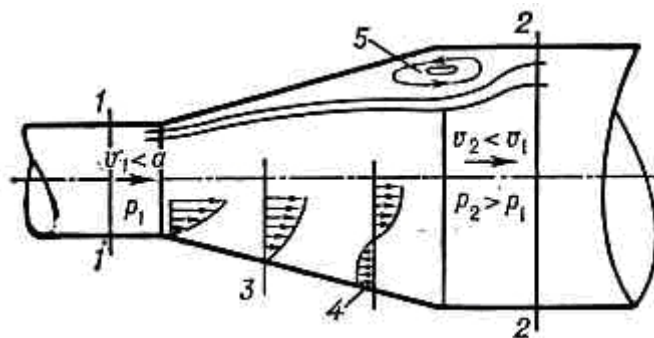


Рис. 4.2. Дозвуковой диффузор круглого сечения.

- 1 — сечение перед входом в диффузор;
- 2 — сечение за диффузором; 3 — профиль скорости;
- 4 — возвратное течение; 5 — циркуляционное течение.

Место расположения отрыва в диффузоре зависит от толщины пограничного слоя, от величины положительного градиента давления, определяемого геометрической формой диффузора, а также от профиля скорости и степени турбулентности потока перед входом в диффузор. В случае сверхзвуковой скорости перед входом в диффузор торможение потока осуществляется в ударных волнах, взаимодействующих между собой и отражающихся от его стенок. Давление в потоке, прошедшем через ударную волну, резко увеличивается, и под воздействием большого положительного градиента давления в местах отражения ударных волн от стенок может происходить отрыв пограничного слоя (штриховка на рис. 4.1). Потери полного давления при торможении сверхзвукового потока в диффузоре намного больше, чем при торможении дозвукового потока. Площадь горловины (наиболее узкого поперечного сечения) сверхзвукового диффузора оказывает решающее воздействие на течение и потери в нем.

Диффузоры применяются, когда необходимо затормозить поток жидкости или газа с наименьшими потерями. Они используются в газо-, нефте- и воздухопроводах, в гидравлических магистралях, в турбомашинах всех типов, в воздушно-реактивных двигателях, эжекторах, МГД - генераторах, аэродинамических трубах, стендах для

испытаний ракетных двигателей и др. Теория течения в Д. недостаточно разработана, его основные характеристики и оптимальную форму определяют на основании результатов экспериментальных исследований и их теоретического обобщения.

Диффузоры являются составной частью реактивных двигателей, всевозможных машин и испытательных установок. В частности, в аэродинамических трубах поток, прошедший рабочую часть, дозвуковую или сверхзвуковую, обладает значительной механической энергией. Этот поток должен быть заторможен, поэтому в аэродинамических трубах имеются диффузорные каналы. Проблема уменьшения потерь в диффузорах — это проблема сохранения ценной механической энергии для обеспечения в случае аэродинамических труб экономичности установки, а в случае реактивных двигателей для получения тяги.

Разберем только плоскую задачу, т. е. будем изучать движение вязкой жидкости между двумя плоскими стенками, наклонёнными друг к другу под углом α [4]. Естественно предположить, что движение будет чисто радиальным (рис. 4.3).

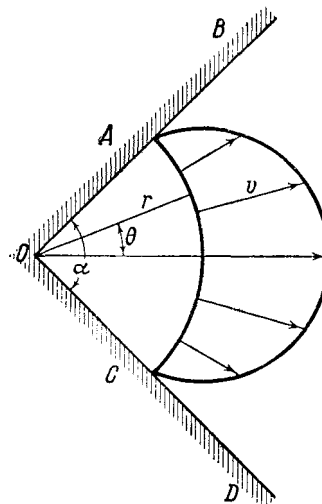


Рис. 4.3.

В соответствии с этим возьмём уравнения гидромеханики в цилиндрических координатах и поставим себе задачей найти точное решение этих уравнений следующего вида:

$$v_r = v(r, \theta), \quad v_\theta = v_z = 0.$$

Уравнения гидродинамики в цилиндрических координатах в этом случае будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
v \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right), \\
0 &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{2v}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \\
\frac{\partial (rv)}{\partial r} &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.1}$$

Последнее из этих уравнений показывает, что

$$rv(r, \theta) = u(\theta). \tag{4.2}$$

Очевидно, $u(\theta)$ даёт нам распределение скоростей в единичном расстоянии от начала координат. Среднее из равенств (4.1) приводит теперь к равенству

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{2\mu}{r^2} \frac{du}{d\theta},$$

откуда следует, что

$$p(r, \theta) = \frac{2\mu}{r^2} u(\theta) + f(r).$$

Наконец, подставляя это выражение для p в первое уравнение (4.1), легко найдём следующее дифференциальное уравнение для определения функции $u(\theta)$:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + 4u + \frac{u^2}{v} = \frac{f'(r)r^3}{\mu},$$

Откуда видно, что как левая, так и правая части являются постоянной величиной. Итак,

$$f'(r) = \frac{\mu C}{r^3}, \text{ откуда } f(r) = -\frac{\mu C}{2r^2} + C_1 \text{ и окончательно}$$

$$p(r, \theta) = \frac{2\mu}{r^2} \left[u(\theta) - \frac{C}{4} \right] + C_1. \tag{4.3}$$

С другой стороны, $u(\theta)$ должно удовлетворять уравнению:

$$u'' + 4u + \frac{u^2}{v} - C = 0, \tag{4.4}$$

которое легко интегрируется в квадратурах. А именно, умножив предыдущее уравнение на u' , можно после этого просто его проинтегрировать, в результате получим:

$$\frac{u'^2}{2} + 2u^2 + \frac{u^3}{3\nu} - Cu - C_2 = 0.$$

Решаем это уравнение относительно u' :

$$u' = \frac{du}{d\theta} = \pm \sqrt{\frac{2}{3\nu} (-u^3 - 6\nu u^2 + 3\nu Cu + 3\nu C_2)},$$

разделяем переменные и интегрируем:

$$\sqrt{\frac{2}{3\nu}} \theta = \pm \int \frac{du}{\sqrt{-u^3 - 6\nu u^2 + 3\nu Cu + 3\nu C_2}}. \quad (4.5)$$

Если воспользоваться эллиптическими функциями, то можно дать явное выражение зависимости u от θ . А именно, переписываем предыдущее равенство в виде:

$$\frac{i\theta}{\sqrt{6\nu}} = \pm \int \frac{du}{\sqrt{4u^3 + 24\nu u^2 - 12\nu Cu - 12\nu C_2}} \quad (4.6)$$

и полагаем $u(\theta) = -2\nu + u_1(\theta)$.

Тогда $du = du_1$, $4u^3 + 24\nu u^2 - 12\nu Cu - 12\nu C_2 = 4u_1^3 - g_2 u_1 - g_3$, где g_2 и g_3 – новые произвольные постоянные.

Если значение θ при $u = \infty$ есть θ_0 , то, как следует из (4.6)

$$\frac{i(\theta - \theta_0)}{\sqrt{6\nu}} = \pm \int_{\infty}^{u_1} \frac{du_1}{\sqrt{4u_1^3 - g_2 u_1 - g_3}}.$$

Таким образом, θ является известной функцией от u_1 и, обратно, u_1 будет известной функцией от θ . Эта функция хорошо исследована, а именно, она непосредственно выражается через эллиптическую функцию P Вейерштрасса. Итак,

$$u_1 = \wp\left(\frac{i(\theta - \theta_0)}{\sqrt{6\nu}}, g_2, g_3\right), \text{ и, значит,}$$

$$u(\theta) = -2\nu + \wp\left(\frac{i(\theta - \theta_0)}{\sqrt{6\nu}}, g_2, g_3\right). \quad (4.7)$$

Остается исследовать полученное решение, представленное формулами (4.5) и (4.7). Последняя из этих формул содержит три произвольных постоянных: θ_0 , g_2 и g_3 , для определения которых мы имеем как раз три условия. Прежде всего на стенках диффузора, уравнения которых пусть будут $\theta = \pm \alpha/2$, должно выполняться условие прилипания жидкости к стенкам:

$$u\left(\pm \frac{\alpha}{2}\right) = 0. \quad (4.8)$$

Кроме того, мы должны выразить ещё условие, что через любое поперечное сечение диффузора в каждую единицу времени проходит определённый объём жидкости. Этот объём выражается, очевидно, формулой:

$$Q = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} v(r, \theta) \cdot r \, d\theta = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} u(\theta) \, d\theta. \quad (4.9)$$

Величина Q называется обильностью источника и будем считать ее заданной. Если Q положительно, мы имеем дело с источником, т. е. с расходящимся течением в диффузоре; если же Q отрицательно, то мы имеем дело со стоком, т. е. со сходящимся течением.

Итак, для определения трёх произвольных постоянных θ_0 , g_2 и g_3 мы получили три уравнения (4.8) и (4.9). Кроме того ясно, что искомая функция $u(\theta)$ не должна обращаться внутри промежутка $(-\alpha/2, \alpha/2)$ в бесконечность. Мы не будем в полном объёме решать вопрос о том, имеет ли поставленная нами задача решения и, если имеет, то сколько будет этих решений и каков будет их характер. Нашей главной задачей будет показать, что сходящиеся и расходящиеся течения в диффузоре имеют при некоторых условиях совершенно различный характер.

Целесообразно при этом сразу же ввести в рассмотрение безразмерные величины. Основной безразмерной величиной является число Рейнольдса **R**. Формула (4.9) показывает, что в нашем случае величина Q имеет как раз размерность, равную произведению размерности скорости на размерность длины. Поэтому через абсолютное значение величины Q удобно будет определить число Рейнольдса формулой:

$$R = \frac{|Q|}{\gamma}. \quad (4.10)$$

Вместо величины $u(\theta)$ введем в рассмотрение величину $U(\theta)$, полагая

$$u(\theta) = |Q| U(\theta). \quad (4.11)$$

Уравнение (4.7) перейдет в

$$U'' + 4U + RU^2 - D = 0, \quad (4.12)$$

а формула (4.5) превратится в

$$\theta \sqrt{\frac{2R}{3}} = \pm \int \frac{dU}{\sqrt{-U^3 - \frac{6}{R}U^2 + D_1U + D_2}}, \quad (4.13)$$

где D, D_1, D_2 – новые произвольные постоянные.

Также формулы (4.8) и (4.9) перейдут в

$$U\left(\pm \frac{\alpha}{2}\right) = 0; \quad \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} U(\theta) d\theta = \pm 1; \quad (4.14)$$

причём в последней формуле имеет место знак плюс для источника и знак минус для стока.

Разложим теперь полином, стоящий под знаком корня в формуле (4.13), на простые множители:

$$U^3 + \frac{6}{R}U^2 - D_1U - D_2 = (U - e_1)(U - e_2)(U - e_3).$$

Сравнение коэффициентов при U^2 в двух частях этого равенства показывает, что

$$e_1 + e_2 + e_3 = -\frac{6}{R} \quad (4.15)$$

Формула (4.13) принимает теперь вид:

$$\theta \sqrt{\frac{2R}{3}} = \pm \int \frac{dU}{\sqrt{(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3)}} \quad (4.16)$$

Полином третьей степени с вещественными коэффициентами, стоящий в правой части равенства, имеет три корня, один из которых всегда вещественный, два же других корня могут оказаться или вещественными, или же комплексно сопряжёнными.

Разберем сначала случай, когда имеется один вещественный корень e_1 и два комплексно сопряжённых e_2 и e_3 . Тогда для всех вещественных U имеет место неравенство $(U - e_2)(U - e_3) > 0$ и следовательно, для вещественности корня, входящего в интеграл (4.16) необходимо считать $e_1 - U \geq 0$, так что U ограничено сверху числом e_1 . Но мы знаем, что на стенках U обращается в нуль, следовательно, U меняется в пределах: $0 \leq U \leq e_1$, причем e_1 должно быть положительным. Ясно, что мы имеем дело с источником.

Пусть теперь все три корня вещественны. Расположим их в порядке убывания $e_1 \geq e_2 \geq e_3$. Вследствие равенства (4.15) e_3 отрицательно и $e_3 \leq -\frac{2}{R}$. Очевидно теперь, что $(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3) > 0$, если $-\infty < U < e_3$ или $e_2 < U < e_1$, что $(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3) < 0$, если $e_3 < U < e_2$ или $e_1 < U < \infty$.

Так как выражение, входящее под знаком корня в формулу (4.16), не может быть отрицательно, то ясно, что U должно изменяться либо в пределах от $-\infty$ до e_3 либо в пределах от e_2 до e_1 . Но первый случай должен быть исключён, так как U должно принимать на стенках значение 0. Итак, мы должны иметь: $e_2 \leq U \leq e_1$.

Различим теперь случаи источника и стока. При этом как в том, так и в другом случаях мы ограничимся рассмотрением только наиболее интересного случая, когда во всем диффузоре имеет место течение одного направления, т. е. вытекание в случае источника, втекание в случае стока. Ясно тогда, что в случае источника U положительно, причем на стенках обращается в нуль. Это может быть только, если $e_1 > 0$, $e_2 \leq 0$, причём U лежит в промежутке $0 \leq U \leq e_1$. Напротив, в случае стока U отрицательно, поэтому должно быть $e_2 < 0$, $e_1 > 0$ и $e_2 \leq U \leq 0$.

Резюмируя сказанное, получаем: в случае стока все корни вещественны, причём:

$$e_2 \leq U \leq 0, \quad e_1 \geq 0, \quad e_3 \leq -\frac{2}{R}. \quad (4.17)$$

в случае же источника есть один вещественный положительный корень e_1 и два корня e_2 и e_3 либо отрицательных, либо комплексно сопряжённых, причём

$$0 \leq U \leq e_1. \quad (4.18)$$

Рассмотрим теперь подробнее случай источника. Из симметрии ясно, что максимальное значение функции U , равное e_1 , достигается на оси диффузора, т. е. при $\theta = 0$. При увеличении θ значение U уменьшается, следовательно, в формуле (4.16) нужно взять знак минус и за нижний предел нужно взять e_1 . Итак, в случае источника:

$$\theta \sqrt{\frac{2R}{3}} = - \int_{e_1}^U \frac{dU}{\sqrt{(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3)}} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\alpha}{2}\right) \quad (4.19)$$

Значению $U = 0$ соответствует угол $\theta = \alpha/2$. Это дает нам равенство

$$\alpha \sqrt{\frac{R}{6}} = \int_0^{e_1} \frac{dU}{\sqrt{(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3)}} \quad (4.20)$$

Так как $\sqrt{\frac{2R}{3}} d\theta = - \frac{dU}{\sqrt{(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3)}}$ и $\int_0^{\frac{\alpha}{2}} U(\theta) d\theta = \frac{1}{2}$ (в случае источника), получаем условие

$$\sqrt{\frac{R}{6}} = \int_0^{e_1} \frac{U dU}{\sqrt{(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3)}} \quad (4.21)$$

Три равенства (4.15), (4.20) и (4.21) служат для определения трёх величин e_1 , e_2 и e_3 при заданных R и α . Однако эта система не всегда имеет решение; покажем это при помощи простых оценок.

Из равенства (4.15) имеем:

$$(U - e_2)(U - e_3) = U^2 - (e_2 + e_3)U + e_2e_3 = U^2 + \left(e_1 + \frac{6}{R}\right)U + e_2e_3,$$

и так как для случая источника $e_2e_3 > 0$ (т.к. e_2 и e_3 либо комплексно сопряжённые, либо $e_3 \leq e_2 \leq 0$), то $(U - e_2)(U - e_3) \geq \left(e_1 + \frac{6}{R}\right)U$. Поэтому из равенства (4.20) находим:

$$\alpha \sqrt{\frac{R}{6}} < \int_0^{e_1} \frac{dU}{\sqrt{(e_1 - U)U\left[e_1 + \frac{6}{R}\right]}}$$

и так как

$$\int_0^{e_1} \frac{dU}{\sqrt{U(e_1 - U)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi,$$

то получаем оценку

$$\alpha \sqrt{\frac{R}{6}} < \frac{\pi}{\sqrt{e_1 + \frac{6}{R}}} \quad \text{или} \quad \alpha < \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{Re_1}{6}}}. \quad (4.22)$$

Видно, таким образом, что угол α во всяком случае должен быть меньше π .

Пусть теперь угол α задан. Из условий (4.18), (4.20) и (4.21) сразу можно вывести неравенство:

$$\sqrt{\frac{R}{6}} < e_1 \int_0^{e_1} \frac{dU}{\sqrt{(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3)}} = e_1 \alpha \sqrt{\frac{R}{6}}$$

откуда следует, что $e_1 \alpha > 1$.

С другой стороны из (4.22) вытекает, что $\frac{Re_1 \alpha^2}{6} < \pi^2 - \alpha^2$, т. е. вследствие предыдущего равенства

$$R < \frac{6(\pi^2 - \alpha^2)}{\alpha^2}. \quad (4.23)$$

Итак, расходящееся течение в диффузоре рассматриваемого типа не может иметь места при больших числах Рейнольдса. Следовательно, при больших числах Рейнольдса вытекание жидкости из диффузора может происходить только таким образом, что внутри диффузора области вытекания жидкости будут сменяться областями втекания.

Таким образом, для случая расходящегося течения в диффузоре заданного угла раствора $\alpha < \pi$ мы имеем следующую картину; при малых числах Рейнольдса имеет место симметричное течение рассматриваемого типа; при увеличении числа Рейнольдса наступит момент, когда на стенке не только U , но и U' обратятся в нуль. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса будут существовать только такие решения, в которых области вытекания жидкости будут сопровождаться областями втекания.

нуль.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса будут существовать только такие решения, в которых области вытекания жидкости будут сопровождаться областями втекания. А именно, мы будем иметь вытекание в некоторой области $-\beta < \theta < \beta$, где $\beta < \alpha/2$, и втекание около стенок в областях $\beta < \theta < \alpha/2$ и $-\alpha/2 < \theta < -\beta$. Будут существовать также и более сложные картины течения, в которых имеет место вытекание около одной стенки (в некотором интервале $-\alpha/2 < \theta < \gamma$) и втекание около другой ($\gamma < \theta < \alpha/2$). Число таких чередующихся областей втекания и вытекания может быть сколь угодно большим, причём при увеличении числа Рейнольдса растёт и минимальное число чередующихся областей вытекания и втекания жидкости.

Если бы вязкость отсутствовала, то течение жидкости представлялось бы простыми формулами:

$$U = \frac{1}{\alpha}, \quad p = p_0 - \frac{\rho Q^2}{2\alpha^2 r^2} \quad (4.24)$$

т. е. жидкость вытекала бы во всех направлениях с одинаковой скоростью.

Мы видим, что расходящееся течение в диффузоре при больших числах Рейнольдса резко отличается от соответствующего потенциального течения. Обратим ещё внимание на то, что расходящееся течение в диффузоре есть течение против градиента давления, так как в потенциальном потоке давление быстро убывает при $r \rightarrow 0$.

В случае стока мы имеем совсем другую картину. Напишем для этого случая основные формулы. Мы знаем, что в случае стока

$$e_2 \leq U \leq 0, \quad e_1 \geq 0, \quad e_3 \leq -\frac{2}{R} \quad (4.25)$$

Считая течение симметричным относительно оси диффузора, мы должны принять, что минимальное значение функции U , равное e_2 , получается при $\theta = 0$. При увеличении θ увеличивается и U , следовательно, в формуле (4.16) надо взять знак плюс и за нижний предел надо взять e_2 . Итак, в случае стока

$$\theta \sqrt{\frac{2R}{3}} = \int_{e_2}^U \frac{dU}{\sqrt{(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3)}} \quad (4.26)$$

Условие $U(\alpha/2) = 0$ дает равенство:

$$\alpha \sqrt{\frac{\mathbf{R}}{6}} = \int_{e_2}^0 \frac{dU}{\sqrt{(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3)}} \quad (4.27)$$

а последнее условие (4.14) – равенство:

$$\sqrt{\frac{\mathbf{R}}{6}} = - \int_{e_2}^0 \frac{U dU}{\sqrt{(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3)}} \quad (4.28)$$

Наконец, мы имеем основное соотношение (4.15):

$$e_1 + e_2 + e_3 = -\frac{6}{\mathbf{R}} \quad (4.29)$$

Для случая стока симметричное решение рассматриваемого типа имеет место как для случая очень малых, так и для случая очень больших чисел Рейнольдса. Случай малых чисел Рейнольдса разберем сразу и для случая стока и для случая источника. Используем уравнение (4.12):

$$U'' + 4U + \mathbf{R}U^2 - D = 0,$$

где D – произвольная постоянная. Так как \mathbf{R} – малая величина, то можно пренебречь членом $\mathbf{R}U^2$, получаем уравнение:

$$U'' + 4U = D, \quad (4.30)$$

которое непосредственно интегрируется $U = \frac{D}{4} + A \cos 2\theta + B \sin 2\theta$, а постоянные A, B, D – находятся из трех условий:

$$U\left(\pm \frac{\alpha}{2}\right) = 0, \quad \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} U(\theta) d\theta = \pm 1.$$

В результате всех преобразований и подстановок искомое решение имеет следующий вид:

$$U(\theta) = \pm \frac{\cos 2\theta - \cos \alpha}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha} \quad (4.31)$$

Воспользовавшись формулами (4.2) и (4.11), получим для радиальной скорости течения выражение:

$$v(r, \theta) = \frac{Q (\cos 2\theta - \cos \alpha)}{r (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)} \quad (4.32)$$

пригодное одновременно и для случая источника и для случая стока. Как видим, распределение скорости в случае малых чисел Рейнольдса получилось по косинусоиде как для случая расходящегося, так и для случая сходящегося течения.

Остановимся ещё на частном случае малого угла раствора диффузора. В этом случае результат значительно упростится, если функции, входящие в формулу (4.32), разложить в ряды по возрастающим степеням θ и α и ограничиться главными членами полученных разложений:

$$v(r, \theta) = \frac{3Q}{2r} \frac{\alpha^2 - 4\theta^2}{\alpha^3} \quad (4.33)$$

Видно, получилось распределение скорости по параболе, чего и следовало ожидать, ибо, в силу малости угла α , мы приблизились к случаю течения между двумя параллельными стенками, причём, вследствие малости R , влиянием сил инерции можно пренебречь.

Рассмотрим теперь случай очень больших чисел Рейнольдса R . Как мы знаем уже, в этом случае симметричное течение рассматриваемого типа невозможно, если течение расходящееся. Остаётся исследовать случай стока. В основу рассуждений мы положим уравнения (4.27), (4.28) и (4.29). Угол α мы считаем заданной величиной, не превосходящей 2π , величину же R будем считать очень большой.

Введем теперь в интегралы (4.27) и (4.28) вместо U новую переменную ψ , положив

$$U = e_2 + (e_1 - e_2) \cos^2 \psi = e_1 - (e_1 - e_2) \sin^2 \psi, \quad (4.34)$$

и введем еще один параметр $k < 1$:

$$k^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} \quad (4.35)$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} e_1 - U &= (e_1 - e_2) \sin^2 \psi, & U - e_2 &= (e_1 - e_2) \cos^2 \psi, \\ U - e_3 &= (e_1 - e_3) (1 - k^2 \sin^2 \psi), & dU &= -2(e_1 - e_2) \sin \psi \cos \psi d\psi, \end{aligned}$$

при этом значению $U = e_2$ соответствует значение $\psi = \pi/2$, а значению $U=0$ значение $\psi = \psi_0$, где ψ_0 есть решение уравнения

$$\sin \psi_0 = \sqrt{\frac{e_1}{e_1 - e_2}}, \quad \cos \psi_0 = \sqrt{\frac{-e_2}{e_1 - e_2}} \quad \left(0 < \psi_0 < \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.36)$$

Простое вычисление теперь показывает, что равенство (4.27) перейдет в:

$$\alpha \sqrt{\frac{R}{6}} = \frac{2}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_{\psi_0}^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad (4.37)$$

а равенство (4.28) примет вид:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{R}{6}} &= -\frac{2}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_{\psi_0}^{\pi/2} \frac{[e_1 - (e_1 - e_2) \sin^2 \psi] d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \\ &= -\frac{2e_3}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_{\psi_0}^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} - 2\sqrt{e_1 - e_3} \int_{\psi_0}^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Полученные равенства показывают, что k должно быть очень близко к 1, так как в противном случае эллиптические интегралы имеют конечное значение, и правые части формул (4.37) и (4.38) были бы конечными, в то время как левые части этих формул, по предположению, очень велики. Итак, k мало отличается от 1; по формуле (4.35) это означает, что $e_3 \approx e_2$. Тогда из формулы (4.29), пренебрегая правой частью, получаем $e_1 \approx -2e_2$.

В соответствии с этим упрощаются формулы (4.37) и (4.38), первая принимает вид:

$$\alpha \sqrt{\frac{R}{6}} = \frac{2}{\sqrt{-3e_2}} \int_{\psi_0}^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}},$$

во второй формуле можно отбросить правой части второй интеграл, имеющий конечное значение, в результате получим:

$$\sqrt{\frac{\bar{R}}{6}} = -\sqrt{-\frac{4}{3}} e_2 \int_{\psi_0}^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}$$

Сравнение двух полученных соотношений показывает, что должно быть

$$e_2 = -\frac{1}{\alpha} \quad \text{и} \quad \int_{\psi_0}^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = \sqrt{\frac{\bar{R}\alpha}{8}}. \quad (4.39)$$

Для определения угла ψ_0 мы имеем формулы (4.36), которые дают нам:

$$\sin \psi_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \cos \psi_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \psi_0 = 54^\circ 44'. \quad (4.40)$$

Остаётся отыскать k , для этого заметим, что:

$$\int_{\psi_0}^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} - \int_0^{\psi_0} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}$$

и что при k близких к единице, мы имеем приближённые равенства:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} &\approx \ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} \quad 1), \\ \int_0^{\psi_0} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} &\approx \int_0^{\psi_0} \frac{d\psi}{\cos \psi} = \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \right) \Big|_{\psi'=0}^{\psi=\psi_0} = \\ &= \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi_0}{2} \right) = \ln \frac{1 + \sin \psi_0}{\cos \psi_0} = \ln (\sqrt{3} + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Поэтому равенство (4.39) дает нам, что

$$\ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \sqrt{\frac{\bar{R}\alpha}{8}},$$

откуда $1 - k^2 = 16 (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 e^{-\sqrt{\frac{\bar{R}\alpha}{2}}}$. Но по формуле (4.35) мы имеем: $1 - k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$

и приближённо $e_1 - e_3 \approx 3e_2$, поэтому $e_2 - e_3 = -48 (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 e_2 e^{-\sqrt{\frac{\bar{R}\alpha}{2}}}$

Итак, при больших числах Рейнольдса R симметричное течение рассматриваемого типа для случая сходящегося течения в диффузоре существует и определяется следующими приближёнными значениями параметров:

$$\begin{aligned} e_2 &= -\frac{1}{\alpha}, \quad e_3 = -\frac{1}{\alpha} \left[1 + 48 (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 e^{-V\sqrt{R\alpha/2}} \right] \\ e_1 &= \frac{2}{\alpha}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Остается найти распределение скоростей. Из равенства (4.26) после простых вычислений получим:

$$\theta \sqrt{\frac{R}{6}} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_{\psi}^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$$

Рассуждая, как выше, получим:

$$\begin{aligned} \int_{\psi}^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} &\approx \ln \frac{4}{\sqrt{1 - k^2}} - \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{R\alpha}{8}} + \ln (\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \right) \end{aligned}$$

Так как ещё $e_1 - e_3 \approx 3/\alpha$, то легко находим, что

$$\sqrt{\frac{R}{2\alpha}} = \sqrt{\frac{R\alpha}{8}} + \ln (\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \right). \quad (4.42)$$

Но по основной формуле (4.34):

$$U = e_2 + (e_1 - e_2) \cos^2 \psi = -\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\alpha} \cos^2 \psi. \quad (4.43)$$

Так как

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \frac{2}{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \right)} = \\ &= \frac{2}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) e^{V\sqrt{R/2\alpha} (\alpha/2 - \theta)} + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) e^{-V\sqrt{R/2\alpha} (\alpha/2 - \theta)}} \quad \text{и} \quad v(r, \theta) = -\frac{QU}{r}, \end{aligned}$$

то мы находим окончательное выражение для распределения скорости:

$$v(r, \theta) = \frac{Q}{r^\alpha} \left\{ 1 - \frac{12}{[(\sqrt{3} + \sqrt{2}) e^{\sqrt{R/2\alpha} (\alpha/2 - \theta)} + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) e^{-\sqrt{R/2\alpha} (\alpha/2 - \theta)}]^2} \right\}. \quad (4.44)$$

Легко теперь видеть, что почти во всём секторе $0 < \theta < \alpha/2$, за исключением непосредственной близости стенки, значение скорости $v(r, \theta)$ очень мало отличается от значения Q/r^α (см. рис. 4.4, построенный для $\alpha = 60^\circ$, $R = 100$).

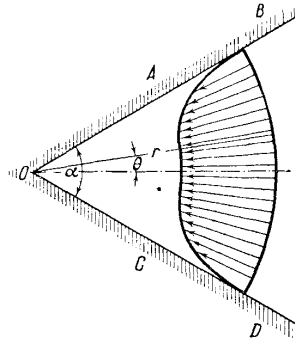


Рис. 4.4.

Только при значениях θ , близких к $\alpha/2$, значение показательной функции $e^{\sqrt{R/2\alpha} (\alpha/2 - \theta)}$ будет невелико, и второй член в фигурных скобках предыдущей формулы сильно повлияет на величину $v(r, \theta)$.

Итак, для случая сходящегося течения в диффузоре течение при больших числах Рейнольдса очень мало отличается от потенциального течения идеальной жидкости. Только вблизи стенок происходит очень быстрое изменение скорости от значений, соответствующих потенциальному потоку идеальной жидкости, до нулевых значений, требуемых условиями прилипания вязкой жидкости к стенкам. Обратим внимание на то, что сходящееся течение в диффузоре происходит в направлении падения давления. В то время, как при малых числах Рейнольдса сходящееся и расходящееся течения в диффузоре имеют одинаковый характер, при больших числах Рейнольдса течения носят совершенно различный характер, а именно, сходящееся течение всюду, кроме непосредственной близости стенок, мало отличается от потенциального течения, расходящееся же течение резко отличается от потенциального течения.

5. ОСНОВЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ АЭРОДИНАМИКИ

Основы практической аэродинамики подробно изложены в целом ряде фундаментальных работ (см. Библиографический список), мы лишь очертим основные идеи и методы экспериментов в этой области.

Аэродинамический расчет любого летательного аппарата связан с определением аэродинамических сил и моментов, действующих на него [8]. В ряде случаев эта задача может быть решена теоретическим путем, но далеко не всегда, поэтому экспериментальный путь оказывается в большинстве случаев более надежным. Чаще всего экспериментальные исследования проводятся на моделях летательных аппаратов. Ответы на вопрос, какими должны быть условия проведения опыта для того, чтобы результаты испытаний могли быть применены на практике, можно найти при изучении законов подобия.

5.1. АЭРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

Закон аэродинамического подобия является основой всей экспериментальной аэродинамики. В аэродинамических лабораториях обычно исследуются небольшие модели летательных аппаратов или модели его частей. По результатам исследования этих моделей судят о летных свойствах летательных аппаратов или об аэродинамических характеристиках его частей.

Опыт показал, что результаты экспериментальных исследований модели не всегда совпадают с данными, которые имеет натура [8]. Это происходит потому, что обтекание модели потоком в условиях, создаваемых в аэродинамической лаборатории, и тела в натуральных условиях не подобны. Для того чтобы по полученным аэродинамическим характеристикам модели судить об аэродинамических характеристиках натуры, надо знать законы перехода от модели к натуре.

Теория аэродинамического подобия рассматривает два отдельных вопроса:

1. Как перейти от аэродинамических характеристик модели к аэродинамическим характеристикам натуры, если при исследовании модели подобие явлений было обеспечено.

2. Какие условия необходимо соблюдать при исследовании модели для того, чтобы обеспечить аэродинамическое подобие явлений.

В механике различают три вида подобия: *геометрическое*, *кинематическое* и *динамическое*. Два тела считаются *геометрически подобными*, если сходственные отрезки тел пропорциональны и углы между сходственными отрезками равны между собой. В

аэродинамике к этим условиям добавляется требование равенства углов, характеризующих положение тела в потоке, т.е. равенство углов атаки и скольжения.

Потоки считаются *кинематически подобными*, если скорости в сходственных точках пропорциональны и углы ориентировки векторов скоростей в сходственных точках одинаковы. Иначе говоря, кинематическое подобие предполагает наличие геометрического подобия поля векторов скоростей.

Явления обтекания тел потоком считаются *динамически подобными* в том случае, если силы, действующие на сходственные элементы, пропорциональны и углы ориентировки соответствующих векторов сил равны между собой. Это означает, что динамическое подобие предполагает наличие геометрического подобия поля векторов сил.

Для соблюдения механического подобия двух явлений требуется одновременное выполнение геометрического, кинематического и динамического подобия. Первые два условия являются необходимыми, но недостаточными. Достаточность условий подобия явлений обеспечивает динамическое подобие.

В жидкости действуют различные силы: давления, трения, тяжести, инерции, упругости и т.д. Соответственно, существует несколько критериев подобия, каждое из которых связывает две различные силы различной природы.

При соблюдении каждого из критериев по отдельности имеет место *частичное* подобие. Если выполняются все критерии подобия, то имеет место *полное* подобие.

Запишем основные *критерии подобия*:

1. Число Фруда, характеризующее в уравнении Навье-Стокса (1.9) отношение сил инерции к силам тяжести: $Fr = v^2 / gl$;

2. Число Рейнольдса, характеризующее в (1.9) отношение сил инерции к силам вязкости: $Re = Vl / \nu$;

3. Число Струхала, характеризующее инерционные гидродинамические силы, возникающие при нестационарном движении жидкости и равное отношению нелинейного слагаемого в (1.9) к нестационарному: $Sh = V\tau / l$;

4. Число Эйлера, характеризующее отношение сил давления к силам инерции: $Eu = \Delta p / \rho V^2$.

Здесь l - характерный линейный размер; V - характерная скорость; ν - кинематический коэффициент вязкости; τ - интервал времени; Δp - разность давлений; ρ - плотность жидкости; $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ - ускорение свободного падения.

При движении сжимаемой жидкости (газа) с большими скоростями в число критериев подобия входит число Маха, под которым понимают отношение характерной скорости к скорости звука c : $M = V / c$.

При $M < 1$ течения газа называют дозвуковыми, при $M > 1$ -сверхзвуковыми.

Не все критерии подобия в каждом конкретном случае имеют одинаковую значимость. Для течений газа, близких к скорости звука и превосходящих ее, необходимо учитывать подобие по числам Маха. При числах Маха $M < 0,4$ влиянием сжимаемости можно пренебречь и главным критерием считать число Re . В динамических задачах аэромеханики (фигурные полеты и т.д.) и в течениях жидкостей со свободной поверхностью (испытания над- и подводных судов и др.) главный критерий - число Fr .

5.2 ОБТЕКАНИЕ КРЫЛА

Рассмотрим обтекание крыла потоком несжимаемой жидкости. Выделим в потоке линию тока, которая течет из бесконечности и в точке A разветвляется, обходя контур крыла (рис. 5.1).

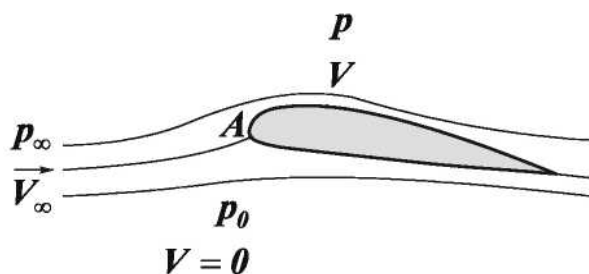


Рис. 5.1

Выберем на этой линии тока две точки: одну - далеко перед крылом, другую - в произвольной точке на контуре крыла. Обозначим давление и скорость в первой из этих точек соответственно через p_∞ и V_∞ , во второй - через p и V . Запишем для выделенной линии тока уравнение Бернулли (1.3):

$$p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} = p + \frac{\rho V^2}{2} = \text{const},$$

$$p - p_\infty = \frac{\rho V_\infty^2}{2} - \frac{\rho V^2}{2}.$$

Обозначив через $\Delta p = p - p_\infty$ избыточное давление в произвольной исследуемой точке на контуре крыла и выполнив преобразования, получим

$$\Delta p = \frac{\rho V_\infty^2}{2} \left(1 - \frac{V^2}{V_\infty^2} \right).$$

В экспериментальной аэродинамике при определении давления, действующего на обтекаемые потоком тела, используют безразмерный коэффициент, называемый *коэффициентом давления*:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2.$$

В рассматриваемом нами случае коэффициент давления будет представлять отношение избыточного давления в некоторой исследуемой точке $\Delta p = p - p_\infty$ к скоростному напору невозмущенного потока вдали от тела:

$$q_\infty = \rho V_\infty^2 / 2:$$

Точка, в которой линия тока разветвляется, называется *критической точкой*, или *точкой полного торможения потока*. Скорость в критической точке $V = 0$.

Запишем уравнение Бернулли для точки в невозмущенном потоке и критической точки:

$$p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} = p_0 = \text{const},$$

где p_0 - давление в критической точке (*полное давление*), равное сумме статического давления p_∞ и скоростного напора на бесконечности.

Если местное давление p превышает давление невозмущенного потока p_∞ ($V < V_\infty$), то $C_p > 0$, а величина $\Delta p = p - p_\infty$ называется *избыточным давлением*. Если же давление p понижено по сравнению с p_∞ ($V > V_\infty$), то $C_p < 0$, а величина $\Delta p = p - p_\infty$ отрицательна и называется *разряжением*. При больших углах атаки коэффициент давления на верхней поверхности профиля может достигать больших отрицательных значений, в то время как на нижней поверхности он изменяется в диапазоне $0 < C_p < +1$.

5.3. МЕТОДЫ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В настоящее время аэродинамический эксперимент достиг большого совершенства. Методы, применяемые для его осуществления, очень разнообразны [8].

В первую очередь следует отметить принцип обратимости явлений обтекания. Этот принцип заключается в том, что силовое взаимодействие потока и тела одинаково независимо от того, движется ли тело в покоящейся среде или среда обтекает тело со скоростью, противоположной той, которую имело тело. Важно, чтобы скорость движения тела и скорость невозмущенного потока в случае обращения движения были равны друг другу. Принцип обратимости имеет огромное значение для всей современной аэродинамики, так как он позволяет экспериментировать с неподвижными моделями летательных аппаратов и их частей в потоке движущегося газа. Основным условием при этом должно являться сохранение динамического подобия *модели* и *натуры*.

Все методы исследования могут быть разделены на две группы:

- 1) методы исследований, при которых среда неподвижна, а тело движется;
- 2) методы исследований, при которых тело неподвижно, а среда движется.

Каждая группа включает в себя ряд экспериментальных путей получения относительного движения тела и среды.

К первой группе относятся следующие способы получения относительного движения тела и среды:

- прямолинейное движение тела (падение тела, аэродинамическая тележка, летные испытания);
- криволинейное движение тела (ротативная машина, летные испытания).

Ко второй группе относятся:

- использование естественного ветра;
- аэродинамические трубы.

Остановимся подробнее на второй группе методов аэродинамических исследований, основанной на обращении движения, т.е. испытываемое тело неподвижно, а среда движется. Рассмотрим эксперименты, проводимые в аэродинамических трубах, представляющих собой каналы, в которых с помощью вентилятора создается искусственный воздушный поток.

Первой аэродинамической трубой в Европе была труба «воздуходувка», построенная К.Э. Циолковским в 1897 году. Первые трубы были небольших размеров, скорость потока в них была так же небольшой. В настоящее время экспериментальные исследования в аэродинамических трубах получили широкое распространение.

Современные аэродинамические трубы можно разбить на два следующих класса: 1) *трубы с незамкнутым потоком* (рис.5.2) и 2) *трубы с замкнутым потоком*.

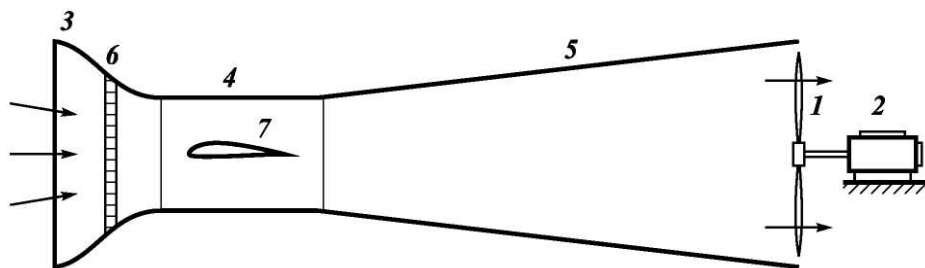


Рис.5.2 Схема трубы с незамкнутым потоком

В аэродинамической трубе с незамкнутым потоком воздух засасывается в трубу вентилятором 1, который приводится во вращение электромотором постоянного тока 2. Использование электромотора постоянного тока позволяет плавно регулировать обороты, а следовательно, и скорость потока. Передняя входная часть трубы 3 называется *коллектором*. Из коллектора воздух поступает в *рабочую часть* трубы 4, а затем в плавно расширяющуюся часть трубы 5, которая называется *диффузором*. У входа в рабочую часть устанавливается *спрямляющая решетка* 6, которая предназначена для создания в рабочей части равномерного потока. Испытуемая модель 7 устанавливается в рабочей части аэродинамической трубы.

В аэродинамической трубе с замкнутым потоком воздух, засасываемый вентилятором, не выбрасывается в помещение, а поступает в так называемый обратный канал. В результате этого происходит непрерывная циркуляция потока. Как правило, скорость потока в рабочей части аэродинамической трубы с замкнутым потоком выше, чем в аэродинамической трубе с незамкнутым потоком.

Целью ряда аэродинамических исследований является получение качественной картины течения. *Аэродинамические спектры* —картины обтекания различных тел потоком воздуха или воды - позволяют правильно понять физическую сущность процессов обтекания, создать достоверные модели исследуемых аэродинамических процессов, установить несовершенство в обтекании того или иного тела и ввести соответствующие коррективы в его форму, так как нарушение плавного обтекания в большинстве случаев приводит к ухудшению аэродинамических характеристик.

Рис. 5.3. Движущийся шар при $Re = 0,10$.
Мелкие магниевые опилки освещены тонким световым ножом, который создает тень от шара [9]

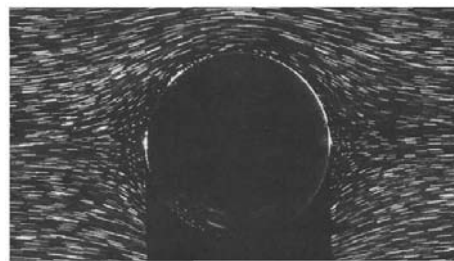


Рис. 5.4. Симметричный профиль под углом атаки 6° , $Re = 20000$.
Дымовая визуализация [9]

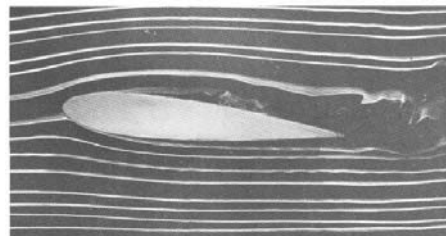


Рис. 5.5. Визуализация в аэродинамической трубе с помощью метода шелковинок [8]

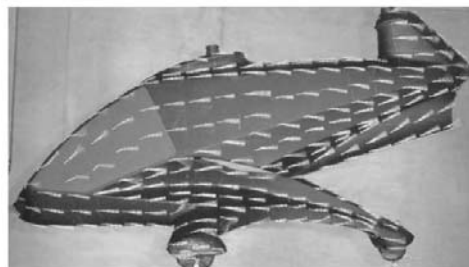
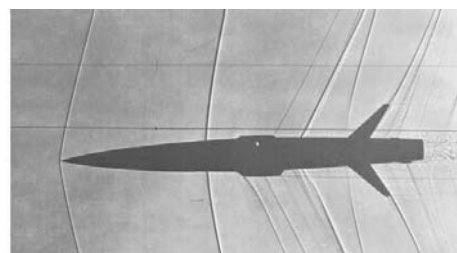


Рис. 5.6. Модель самолета при $M = 1,1$.
Фотография получена теньвым методом [9]



Для примера на рис. 5.3-5.6 показаны различные способы визуализации аэродинамических течений.

6. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

6.1. ОПИСАНИЕ СТЕНДА

Аэродинамический универсальный (модернизированный) стенд ТМЖ – 1М предназначен для проведения лабораторных работ по курсу «Основы механики сплошных сред».

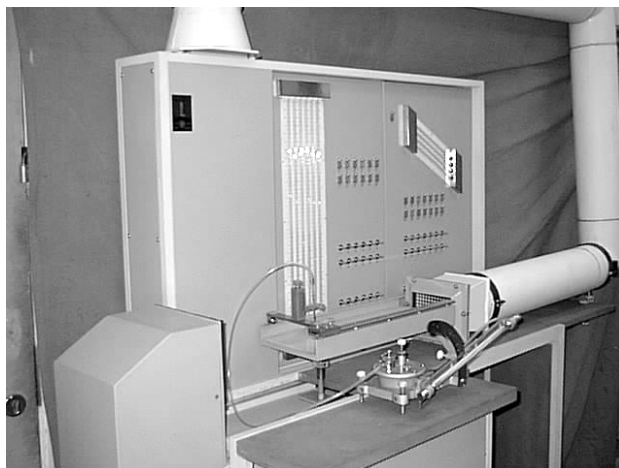


Рис. 6.1.1. Внешний вид аэродинамического стенда

На стенде наглядно демонстрируются различные аэродинамические явления, экспериментально изучаются:

- структура плоских и осесимметричных потоков,
- структура пограничного слоя на пластинке.

В процессе выполнения лабораторных работ студенты знакомятся с методами и средствами измерения аэродинамических параметров. На стенде проводятся следующие лабораторные работы:

1. Обтекание кругового цилиндра и крылового профиля.
2. Пограничный слой на пластине.
3. Течение в диффузоре.

Внешний вид стенда представлен на рис. 6.1.2. Стенд выполнен в напольном исполнении и представляет собой разборную конструкцию, которая состоит из секции верхней, секции нижней с подсоединенным к ней вентилятором. Верхняя секция состоит из сварного каркаса 1, на котором закреплены две панели 6 и 7. Панели выполнены в виде открывающихся дверок, на лицевой поверхности которых расположены шесть вертикальных и четыре наклонных пьезометров 12, 13, штуцера 14 для подключения к исследуемым точкам модуля и "опросные" гнезда 15, к которым через переходник подсоединяется микроманометр. На внутренней поверхности панелей размещены батареи

питания пьезометров. Все внутренние соединения на панелях ведутся по схеме пневмогидравлической соединений (рис. 6.1.3).

Верхняя секция имеет панель 3, выполненную в виде жесткого короба, на поверхности которого с помощью магнитов может быть закреплен графический материал, необходимый для выполнения лабораторных работ. За панелью установлен воздухопровод 5, соединенный с фланцем 16 вентилятора 8.

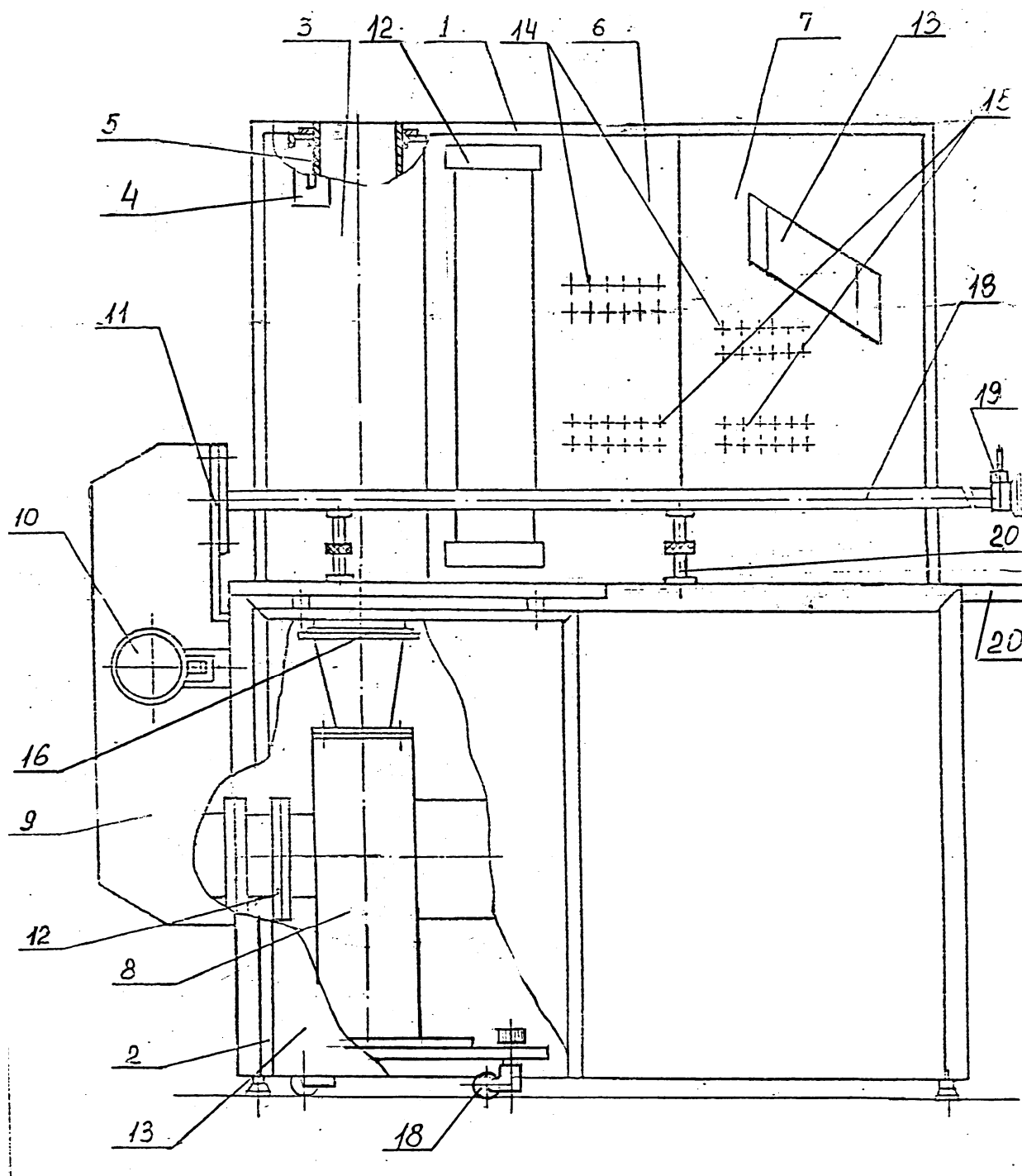


Рис. 6.1.2. Схематическое изображение аэродинамического стенда

Нижняя секция выполнена в виде тумбы 2, в которой размещен вентилятор 8, и рабочей поверхности стола. Стол имеет выдвижную столешницу 20, на которой устанавливается исследуемый модуль.

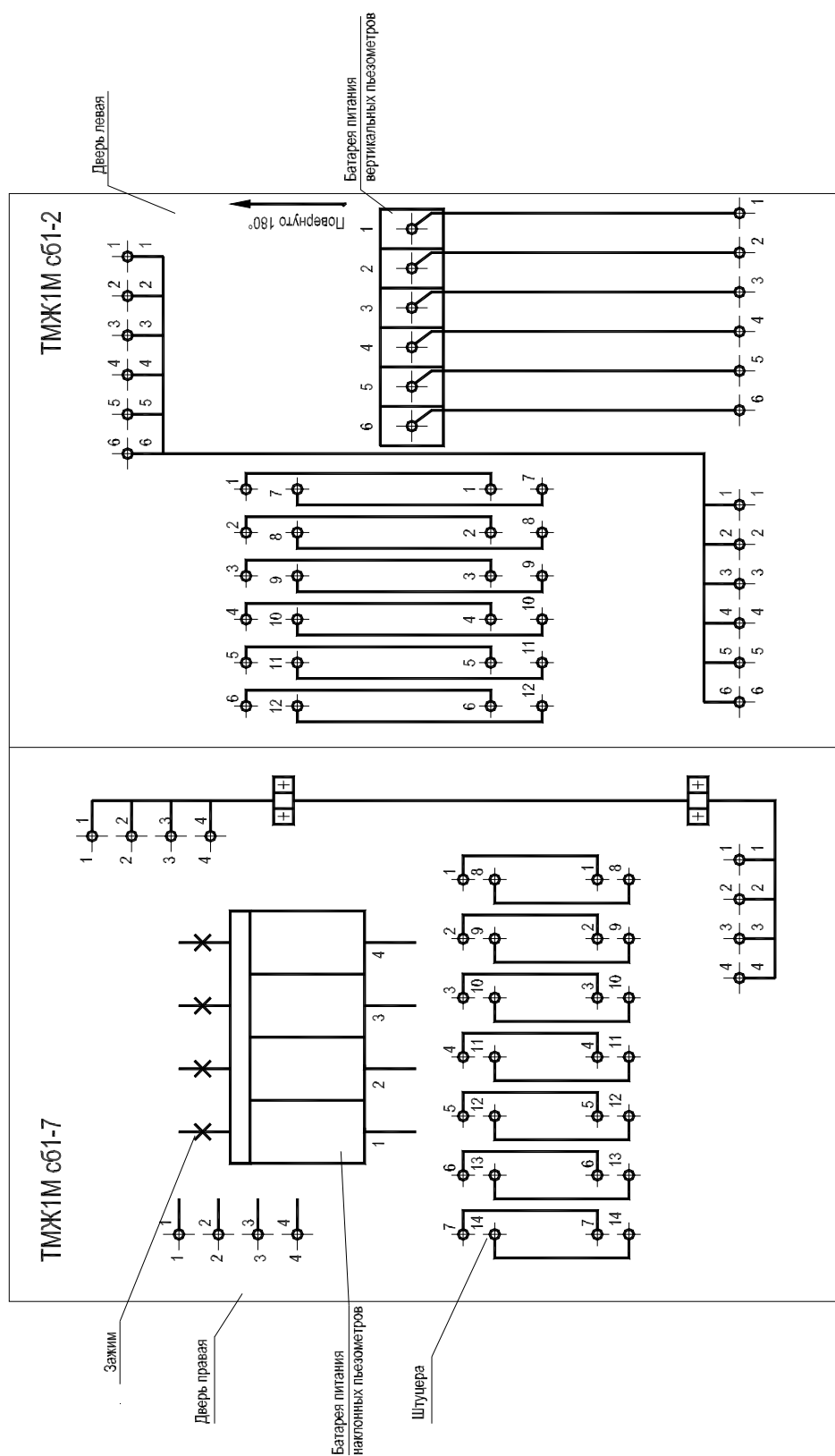


Рис. 6.1.3. Схема внутренних соединений в стенде

Вентилятор размещен на отдельном основании, имеющем четыре колесных опоры 18. Входной фланец вентилятора соединен через гибкий патрубок 12 с воздухопроводом, который имеет фланец 11 для подсоединения исследуемого модуля.

Тумба с вентилятором закрыта панелью 13, воздухопровод, закрыт кожухом 9.

В средней части всасываемого воздухопровода расположен регулятор расхода воздуха, выполненный в виде дроссельной заслонки, позволяющей плавно изменять расход воздуха в пределах регулирования. Механизм управления заслонкой - ручка 10, вынесена на наружную поверхность воздухопровода. Стенд комплектуется девятью модулями 18.

Модули с 1 по 8 представляют собой трубу с прямоугольным или круглым сечением. Для снятия характеристик воздушного потока в исследуемых точках на модулях расположены штуцера, которые воздушными каналами связаны с внутренней поверхностью проточного канала модуля. Для проведения лабораторных работ штуцера на модулях соединяются со штуцерами на панелях 6, 7 гибкими трубками.

Каждый модуль имеет на одном конце фланец для подсоединения к стенду, на другом конце (входном) - направляющий корпус 15 для установки цилиндрического зонда.

Каждый модуль имеет регулируемые по высоте опоры 21 для горизонтальной установки на столешнице стенда.

Для выполнения данных лабораторных работ используются модули № 3 – 4, № 5, №9.

Модуль № 3 представляет собой трубу прямоугольного сечения, внутри которой расположен цилиндр с отверстием на боковой исследуемой поверхности. Цилиндр соединен с ручкой, позволяющей поворачивать его вокруг вертикальной оси для изменения ориентации отверстия относительно направления воздушного потока. Отверстие соединено со штуцером для снятия показаний.

Модуль № 4 представляет собой трубу прямоугольного сечения, внутри которой расположено крыло (крыловой профиль) с отверстиями на боковой исследуемой поверхности. Крыло соединено с ручкой, позволяющей поворачивать его вокруг вертикальной оси для изменения ориентации отверстий относительно направления воздушного потока. Отверстия соединены воздушными каналами со штуцерами для снятия показаний.

Модуль № 5 представляет собой трубу круглого сечения с различными диаметрами входного и выходного участков. Между входным и выходным участками должны устанавливаться исследуемые диффузоры с углом конуса 8°, 20°, 60°.

Конструкция модуля № 5 позволяет проводить измерения распределение профиля скорости потока воздуха в нескольких поперечных сечениях модулей с помощью цилиндрических зондов. Зонды устанавливаются на координатном устройстве, обеспечивающем плавное перемещение зонда в плоскости поперечного сечения и отсчет глубины погружения по миллиметровой шкале.

Модуль № 9 представляет собой пластину, закрепленную в жестком каркасе и установленную на столешнице. Пластина обдувается воздушным потоком через сопло, соединенное с воздухопроводом 5 съемным патрубком. Измерения характеристик воздушного потока в пограничном слое пластины проводятся с помощью плоского зонда, закрепленного на координатном устройстве с миллиметровой шкалой. Зонд имеет возможность перемещаться в вертикальной плоскости и вдоль оси пластины.

Стенд с комплектом модулей обеспечивает возможность наглядной демонстрации аэродинамических явлений и определения аэродинамических параметров опытным и расчетным путем.

ПОДГОТОВКА ИЗДЕЛИЯ К РАБОТЕ

1. Снять панель 13 с тумбы 2 (рис. 6.1.1). Освободить болты, крепящие воздухопровод 5. Вентилятор 8 закатить в тумбу, предварительно приподняв воздухопровод. Соединить входной фланец вентилятора с фланцем гибкого трубопровода 12 крепежными болтами. Выставить соосность выходного фланца 16 вентилятора и воздухопровода 5, зафиксировать вентилятор с помощью рукояток колесных опор 18 в неподвижном состоянии. Воздухопровод опустить до полного прижатия к фланцу вентилятора и затянуть болты. Вентилятор подключить к стенду, согласно схемы электрической (рис. 6.1.3). Панель 13 закрепить на тумбе 2.

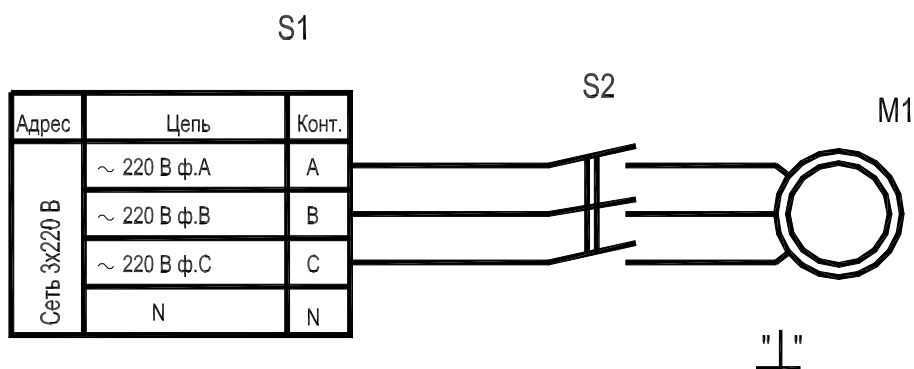


Рис. 6.1.3. Электрическая схема

2. Заполнить батареи питания пьезометров на панели 6 водой таким образом, чтобы уровень воды в пьезометрических трубках соответствовал нулевой отметке.

3. Заполнить батареи питания пьезометров на панели 7 водой таким образом, чтобы уровень воды в пьезометрических трубках соответствовал нулевой отметке. Затем зажимами перекрыть трубки, расположенные на крышке батареи питания согласно схемы пневмогидравлической соединений (рис. 6.1.2).

4. Соединить исследуемый модуль с фланцем всасывающего воздухопровода 11 с помощью гаек.

5. Подключить исследуемые точки модуля к штуцерам на лицевых панелях с помощью гибких трубок.

Обозначив разность высот уровней жидкости через $H = \Delta h + h$, запишем разность давления

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho_{ж} g H = \rho_{ж} g (\Delta h + h).$$

Обозначим через α угол наклона трубки, тогда высота $h = l \sin \alpha$, и выражение для разности давления примет вид

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho_{ж} g l \sin \alpha \left(f / (F \sin \alpha) + 1 \right).$$

Обозначим выражение $f / (F \sin \alpha) + 1 = \varphi$, где величина φ называется *коэффициентом микроманометра*. Тогда разность давлений

$$\Delta p = \rho_{ж} g l \varphi \sin \alpha.$$

Коэффициент микроманометра зависит от площади сечений резервуара и трубки микроманометра и от угла ее наклона. Величина коэффициента микроманометра характеризует данный микроманометр и определяется его *тарировкой*, т.е. сравнением показаний данного микроманометра с показаниями эталонного.

Множитель $\sin \alpha$ представляет собой коэффициент наклона трубки микроманометра. Чем меньше угол наклона трубки, тем больше при фиксированной разности давлений Δp длина столбика жидкости l ; следовательно, с уменьшением угла α относительная ошибка уменьшается, а точность определения давления повышается.

На практике для определения разности давлений используется выражение

$$\Delta p = \frac{\rho_{ж}}{\rho_{э}} k l g \text{ [Па]},$$

где $k = \varphi \rho_{э} \sin \alpha$ - фактор микроманометра, $\rho_{э}$ - плотность эталонной жидкости (спирта), $\rho_{ж}$ - плотность жидкости, залитой в микроманометр, l - показания микроманометра. Значения фактора, соответствующие определенным углам наклона трубки, указаны на механизме наклона микроманометра 6, рис. 6.2.1: 0,1, 0,2, 0,4, 0,8.

В данном лабораторном комплексе используется микроманометр многодиапазонный с наклонной трубкой ММН-2400 (5)-1,0, предназначенный для измерения избыточного вакуумметрического давления и разности давлений.

ТЕХНИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ

микроманометра многодиапазонного с наклонной трубкой ММН-2400 (5)-1,0

Класс точности микроманометра – 1,0.

Рабочая жидкость – спирт этиловый ректификованный ГОСТ 18300-72 с плотностью $0,8095 \pm 0,0005 \text{ г/см}^3$ при температуре $20 \pm 0,5^\circ \text{ С}$.

Температура рабочей жидкости при измерениях – от 10 до 35° С выше нуля.

В таблице, расположенной ниже, приведены соответственно значения фактор микроманометра k , верхний предел измерения и цена наименьшего деления шкалы.

Величина k	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8
Верхний предел измерения, Ра	600	900	1200	1800	2400
Верхний предел измерения, кгс/м ²	60	90	120	180	240
Цена наименьшего деления шкалы N Ра	2	3	4	6	8
Цена наименьшего деления шкалы N кгс/м ²	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8

УСТРОЙСТВО МИКРОМАНОМЕТРА

многодиапазонного с наклонной трубкой ММН-2400 (5)-1,0

Устройство микроманометра многодиапазонного с наклонной трубкой ММН-2400 (5)-1,0 показано на рис. 6.2.3. На плите 21 укреплен резервуар 22, герметически закрытый крышкой 16. На ней расположены: трехходовой кран 17, пробка 18. закрывающая отверстие для заливки и слива спирта, и регулятор нулевого положения мениска 19, служащий для установки мениска спирта в измерительной трубке против нулевого деления шкалы.

К стойке 14 плиты 21 конусной осью крепится кронштейн 6 с колодками 12 и 1, которые соединены стеклянной измерительной трубкой, снабженной защитным кожухом 4. Концы измерительной трубки 5 входят в отверстия колодок 12 и 1 и уплотнены в них сальниками с резиновыми уплотнительными кольцами 2 и зажимными штуцерами 10.

Левая колодка соединена резиновой трубкой 13 с резервуаром 22, правая колодка соединена резиновой трубкой 3 с трехходовым краном 17. Измерительная трубка 5 устанавливается так, что геометрическая ось вращения кронштейна 6 проходит через нуль шкалы. Шкала, нанесенная на стеклянную измерительную трубку, имеет длину 300 мм, наименьшее деление шкалы – 1 мм.

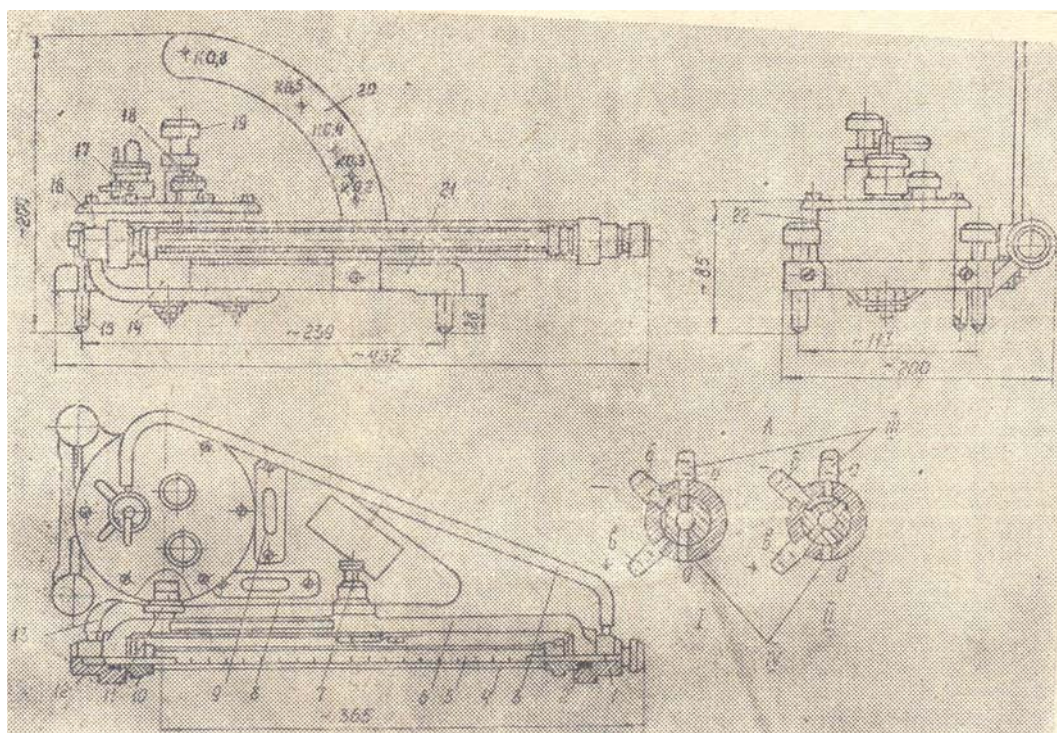


Рис. 6.2.3. Микроманометр многодиапазонный с наклонной трубкой ММН-2400 (5)-1,0. А – схема подключения трехходового крана; I – при контроле нуля, II – при замерах; III – к стеклянной трубке; IV – в атмосферу.

Для установки кронштейна с измерительной трубкой на требуемый угол наклона к плите 21 прикреплен дуга 20 с пятью отверстиями, соответствующими определенным значениям постоянной k , величина которой обозначена на дуге против каждого отверстия. Кронштейн 6 фиксируется на дуге 20 в необходимом положении с помощью фиксатора 7, который укреплен во втулке кронштейна.

Для установки микроманометра в горизонтальное положение при градуировке и при замерах на плите установлены два уровня 8 и 9 с цилиндрическими ампулами. Прибор приводится в горизонтальное положение двумя регулировочными ножками 15. Заливка спирта в резервуар прибора и слив его осуществляется через отверстие в крышке прибора, закрытое пробкой 18.

Прибор присоединяют к местам замера резиновыми трубками, надеваемыми на штуцеры трехходового крана 17.

Трехходовой кран имеет три штуцера, обозначенные буквами **а**, **б** и **в** и отверстие **о** для сообщения с атмосферой.

Штуцер **а** используется для постоянного соединения крана со стеклянной измерительной трубкой.

При измерении избыточного давления резиновая трубка, идущая от места замера, надевается на штуцер **б**. При измерении разности давления плюсовая трубка надевается на штуцер **в**, а минусовая - на штуцер **б**.

Каналы в трехходовом кране расположены так, что при повороте его пробки против часовой стрелки до упора резервуар и измерительная стеклянная трубка сообщаются с атмосферой, а отверстия к штуцерам **б** и **в** перекрываются; при этом положении трехходового крана контролируется «нуль».

При повороте пробки по часовой стрелке до упора штуцер **в** сообщается с резервуаром, а штуцер **б** – со штуцером **а** и через него – с измерительной стеклянной трубкой; при этом положении трехходового крана производят замеры.

Принцип действия прибора основан на том, что измеряемое давление газа (или разность давлений) уравнивается давлением столба рабочей жидкости, который образуется в наклонной трубке (к трубке подводится меньшее давление). При этом условии уровень спирта в измерительной трубке будет повышаться, а в резервуаре – понижаться.

Истинное значение измеряемой величины $Hд$ связано с видимой длиной столба спирта $Hв$ в измерительной трубке выражением $Hд = N Hв, Pa$ (кгс/м²). Величина N есть цена деления шкалы.

Примечание: $1 \text{ кгс/см}^2 = 100000 \text{ Pa}$.

ПОРЯДОК РАБОТЫ

Пользоваться микроманометром рекомендуется в такой последовательности:

- Установить прибор на устойчивом столе;
- Отрегулировать регулировочными ножками положение прибора так, чтобы в каждом уровне пузырек стоял в центре;
- Установить кронштейн с измерительной трубкой в крайнее верхнее положение, соответствующее $k=0,8$;
- Повернуть пробку трехходового крана против часовой стрелки до упора;
- Вывернуть из крышки пробку 18 и залить в резервуар этиловый спирт (с плотностью $0,8095 \pm 0,0005 \text{ г/см}^3$) в таком количестве, чтобы уровень его в измерительной стеклянной трубке установился приблизительно против нулевого деления шкалы, а затем поставить на место пробку 18, затянув ее до отказа;
- Надеть на штуцер **б** трехходового крана отрезок резиновой трубки и поставить пробку крана в рабочее положение, поворачивая ее по часовой стрелке до упора. Поднять подсосом уровень спирта в измерительной стеклянной трубке примерно до

конца шкалы и убедиться в отсутствии воздушных пробок в столбике спирта. При обнаружении воздушных пробок выдуть их вместе со спиртом в резервуар;

- Повернуть пробку трехходового крана против часовой стрелки до упора, поставить кронштейн с измерительной трубкой на необходимый наклон и регулятором уровня окончательно скорректировать «нуль»;
- Соединить прибор с объектом измерения и проверить положение микроманометра по уровням, в случае необходимости подрегулировать его регулировочными ножками;
- Повернуть пробку трехходового крана по часовой стрелке до упора и приступить к отсчетам.

Во время работы следует периодически контролировать «нуль» прибора, ставя трехходовой кран в положение контроля, а также следить за положением прибора по уровням.

Отсчет должен производиться с точностью $\frac{1}{4}$ шкалы.

Если спирт будет иметь плотность, отличную от $0,8095 \pm 0,0005 \text{ г/см}^3$, то для получения истинного значения измеряемой величины вводят поправку n таким образом, что истинное значение измеряемой величины определяется из выражения $H_d = H_v + N n$, Ра (кгс/м^2), где H_v – отсчет по шкале микроманометра, N – цена деления шкалы, n – поправка, значение которой необходимо узнать у лаборанта.

6.2.2. БАТАРЕЙНЫЙ МАНОМЕТР

Для измерения давления одновременно в нескольких точках обтекаемого тела используют батарейные манометры (рис. 6.2.4), представляющие собой ряд стеклянных трубок, нижний конец которых подсоединен к общему резервуару. К верхнему концу каждой трубки манометра подводят давление от соответствующей точки. Отсчетные трубки имеют общую шкалу. Также как и наклонная трубка микроманометра, панель может изменять угол наклона α . К резервуару манометра подводят давление, с которым будет производиться сравнение (обычно атмосферное). Тогда высота подъема жидкости в каждой трубке будет соответствовать разности давления в исследуемой точке и атмосферного давления.

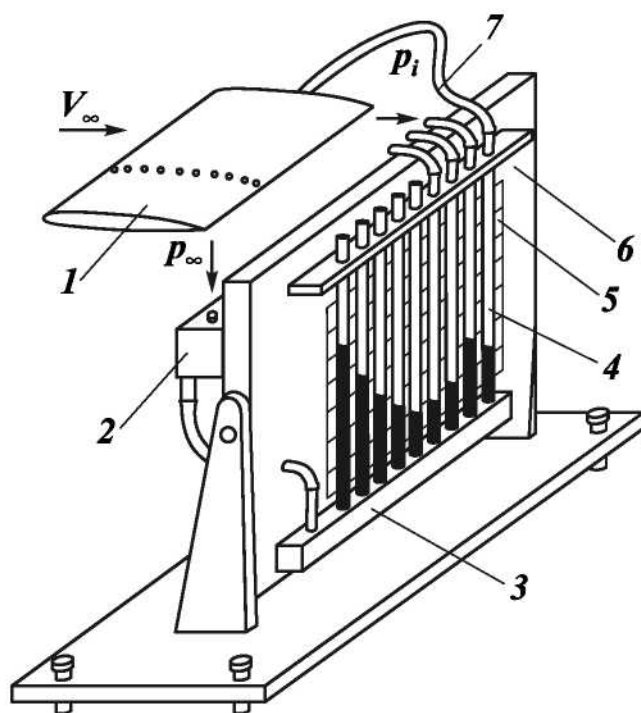


Рис. 6.2.4. Батарейный манометр:
 1 - модель;
 2 - резервуар (бачок);
 3 - коллектор;
 4 - отсчетные трубки;
 5 - шкала;
 6 - панель;
 7 - соединительные трубки

Трубки батарейного манометра могут иметь различный внутренний диаметр. Вследствие капиллярного эффекта уровень подъема жидкости в отсчетных трубках будет различным, поэтому перед началом эксперимента фиксируются их начальные значения l_{0i} . По аналогии с микроманометром выражение для разности давления в i -й точке будет иметь следующий вид:

$$\Delta p_i = \frac{\rho_{ж.б.м}}{\rho_э} k_{б.м} (l_i - l_{0i}) g,$$

где l_i - высота уровня жидкости в i -й трубке, $k_{б.м}$ - фактор батарейного манометра, аналогичный фактору микроманометра; $\rho_{ж.б.м}$ — плотность жидкости, залитой в батарейный манометр.

6.2.3. ПРИЕМНИКИ СТАТИЧЕСКОГО И ПОЛНОГО ДАВЛЕНИЯ

Течение воздуха в дозвуковом аэродинамическом потоке, как было показано в п.1, можно считать несжимаемым и одномерным. В этом случае связь между полным p_0 , статическим p и динамическим $q = \rho V^2 / 2$ (скоростным напором) давлениями можно представить в виде

Для восприятия статического давления на стенке канала или поверхности обтекаемого твердого тела применяются *приемники статического давления*. Они представляют собой отверстия в поверхности тела (рис. 6.2.5). Ось отверстия должна быть нормальна к поверхности тела в исследуемой точке. Диаметр отверстий должен быть минимальным из возможных, так как большие размеры отверстия вызывают дополнительные возмущения потока, что приводит к искажению измеряемого давления. Однако отверстия диаметром менее $0,2\text{ мм}$ не выполняют, так как действие давления будет запаздывать из-за дросселирующего эффекта отверстия. Рекомендуемый диаметр отверстий - $0,25 - 0,5\text{ мм}$.

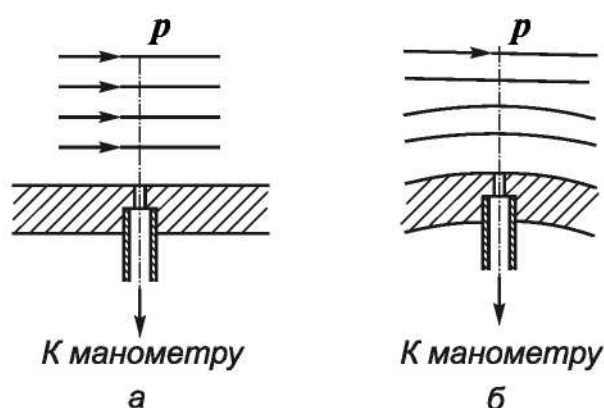


Рис.6.2.5 Измерение статического давления: а - на плоской стенке;
б - на криволинейной стенке

При измерении статического давления в сечении аэродинамической трубы в ее стенке выполняется целая серия отверстий, расположенных в одной плоскости, перпендикулярной оси трубы. Исследуемое сечение по внешней стороне окружают герметичным коллектором, в котором происходит осреднение давления, воспринятого в различных точках сечения. Давление от коллектора передается к микроманометру.

Для измерения полного давления применяется насадок в виде цилиндрической трубки с отверстием, обращенным против потока (рис. 6.2.6).

Форма носовой части насадка и отношение диаметра приемного отверстия к наружному диаметру при совпадении оси трубки с направлением потока не влияют на измерение полного давления в широком диапазоне скоростей. Поэтому обычно применяют насадок в виде трубки с тупым носком.

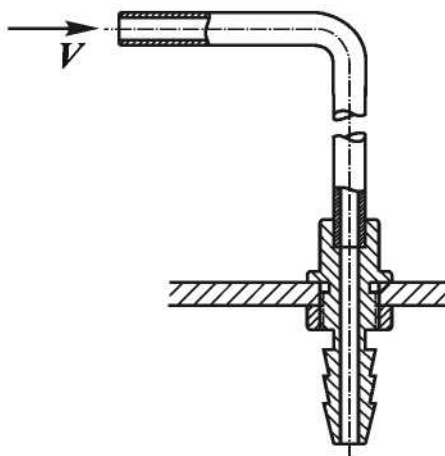


Рис. 6.2.6. Приемник полного давления

Для измерения скоростного напора, представляющего собой разность полного и статического давлений, применяются *комбинированные насадки* (*насадки Пито-Прандтля* или *приемники воздушного давления (ПВД)*, рис. 6.2.7). В комбинированном насадке объединены насадки полного p_0 и статического давления p .

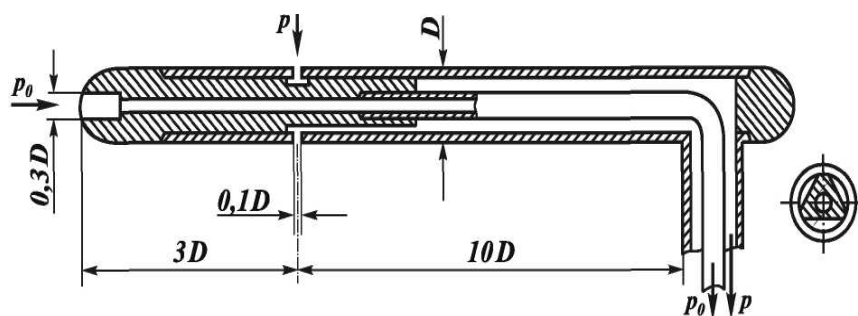


Рис. 6.2.7.

Между перепадом давления Δp_H , измеренным микроманометром, соединенным с комбинированным насадком, и истинным значением перепада давления Δp существует простая связь

$$\Delta p_H = p_{0H} - p_H = \frac{1}{\psi} (p_0 - p) = \frac{1}{\psi} \Delta p,$$

где ψ - коэффициент насадка, зависящий от его геометрической формы и положения приемных отверстий. Для комбинированных насадков коэффициент ψ постоянен и близок к единице в широком диапазоне чисел Re .

Измерение величины скоростного напора в исследуемой точке потока производится с помощью комбинированного насадка и микроманометра (рис. 6.2.8). В исследуемой точке скоростной напор будет равен

$$q = \frac{\rho V^2}{2} = p_0 - p = \psi \Delta p_H = \psi \frac{\rho_{жс}}{\rho_э} k_n l_n g,$$

где l_n - показания микроманометра, подключенного к ПВД, k_n - фактор микроманометра.

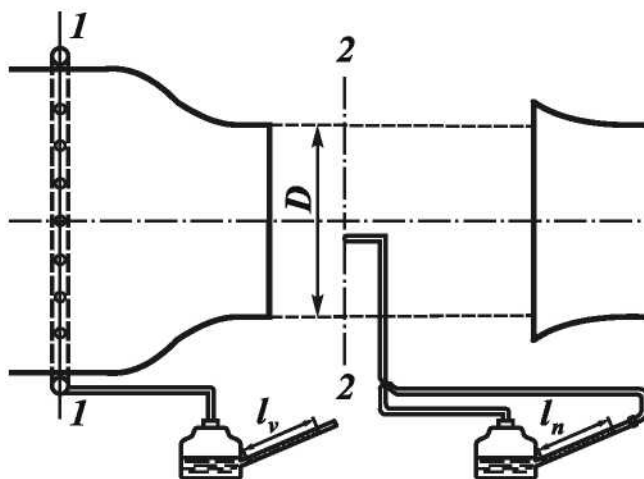


Рис. 6.2.8. Определение величин скоростного напора и скорости потока

Скорость в исследуемой точке потока будет равна

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho} \psi \frac{\rho_{жс}}{\rho_э} k_n l_n g}.$$

Скоростной напор в открытой рабочей части дозвуковой аэродинамической трубы определяется по перепаду давления в форкамере и рабочей части. Для измерения статического давления в форкамере выполняется ряд приемников статического давления, объединенных в один коллектор. С помощью резиновой трубки давление из коллектора подается к чашке микроманометра. Верхний конец отсчетной трубки микроманометра оставляют открытым, т.к. среднее статическое давление в открытой рабочей части аэродинамической трубы равно атмосферному давлению.

Для получения формулы, определяющей величину скоростного напора в рабочей части, запишем уравнение Бернулли и уравнение расхода для сечений 1-1 и 2-2 (рис. 6.2.8):

$$p_{\phi} + \frac{\rho V_{\phi}^2}{2} = p_{\infty} + \frac{\rho V_{\infty}^2}{2} + \xi \frac{\rho V_{\infty}^2}{2}; \quad S_{\phi} V_{\phi} = S_{\infty} V_{\infty},$$

где S_{ϕ} и S_{∞} - площади первого и второго сечений; ξ - коэффициент гидравлических потерь между рассматриваемыми сечениями.

Выразим разность давлений:

$$\begin{aligned} p_{\phi} - p_{\infty} &= \frac{\rho V_{\infty}^2}{2} \left[1 - \frac{V_{\phi}^2}{V_{\infty}^2} + \xi \right] = \\ &= \frac{\rho V_{\infty}^2}{2} \left[1 - \frac{S_{\infty}^2}{S_{\phi}^2} + \xi \right]. \end{aligned}$$

Обозначим

$$1 / \left[1 - (S_{\infty} / S_{\phi})^2 + \xi \right] = \mu,$$

Параметр μ называется коэффициентом поля рабочей части аэродинамической трубы.

Тогда формула для определения скоростного напора в рабочей части примет вид

$$q_{\infty} = \frac{\rho V_{\infty}^2}{2} = \Delta p \mu.$$

При измерении скоростного напора с помощью микроманометра рабочие формулы для скоростного напора и скорости потока:

$$\begin{aligned} q_{\infty} &= \frac{\rho_{жс}}{\rho_г} \mu k_v l_v g; \\ V_{\infty} &= \sqrt{\frac{2 \rho_{жс}}{\rho} \mu k_v l_v g}, \end{aligned}$$

где l_v - показания микроманометра, подключенного к форкамере аэродинамической трубы, k_v - фактор микроманометра.

6.2.4. СВИДЕТЕЛЬСТВО О ПОВЕРКЕ ПРИЕМНИКА ВОЗДУШНОГО ДАВЛЕНИЯ

Объект поверки: нестандартный комбинированный приемник воздушного давления (ПВД) ТМЖ1м 17–5; ТМЖ1м 20 (2 штуки); ТМЖ1м 13–18.

В таблице приведены значения скоростного коэффициента $P_d/P_{пвд}$ при углах скоса потока относительно оси приемных отверстий ПВД 0° и 180° .

№	Тип ПВД	Шифр ПВД	Длина ПВД, мм	Р _д /Р _{пвд} при угле скоса потока		Ср. квадр.отн. отклонение опр. величины Р _д /Р _{пвд} , %	Предельная отн. погр. опр. величины Р _д /Р _{пвд} , %
				0°	180°		
61	Удлиненный	ТМЖ1м 17-5	206	0,60	0,60	±1,8	±3,6
62	Удлиненный	ТМЖ1м	206	0,59	0,61	±1,4	±2,9
63	Средний	ТМЖ1м	36	0,59	0,58	±1,7	±3,4
64	Средний	ТМЖ1м	36	0,60	0,61	±1,4	±2,8

Объект поверки: плоский приемник воздушного давления (ПВД) типа «ПС» ТМЖ1м 18–6.

В таблице приведены значения относительных поправок при измерении избыточного полного давления поверяемым приемником $\Delta P = [(P_{пвд} - P_{полн})/P_{полн}] \cdot 100\%$ при углах скоса потока (скольжения) $\beta = -30^\circ \div +30^\circ$.

№	β (град)	- 30	- 15	0	+15	+30
14	ΔP (%)	- 20	- 6	- 2	- 4	- 14

Дата поверки: сентябрь 2009 г.

6.3. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

6.3.1. ИСЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ОБТЕКАНИЯ ПЛОСКИМ ВОЗДУШНЫМ ПОТОКОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ, ВКЛЮЧАЯ ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЯ КРЫЛА

ЦИЛИНДР:

Круглый цилиндр является эталонным телом, на котором можно демонстрировать закономерности обтекания плоским потоком цилиндрических тел. Основой для такой демонстрации и анализа физических явлений является диаграмма распределения давлений по поверхности цилиндра. Поэтому основной задачей данной работы является экспериментальное определение давлений в различные точки поверхности цилиндра, построение полярной диаграммы и сопоставление её с аналогичной диаграммой, построенной по формулам потенциального обтекания. Сопоставительный анализ экспериментальной и теоретической диаграмм позволяет иллюстрировать ряд гидродинамических явлений и понятий, таких, например, как критическая точка на поверхности цилиндра, области отрицательных и положительных градиентов давления, отрывов пограничного слоя и др.

ЗАДАНИЕ

1. Провести измерение распределения давления по поверхности цилиндра при обтекании его плоским потоком при трех различных значениях скоростей набегающего потока (значения скоростей задаются перед выполнением работы).
2. В полярных координатах построить диаграмму распределения давления в зависимости от угла между направлением на точку наблюдения и вектором скорости набегающего потока.
3. Исследовать зависимость разности давлений при углах 0° и 180° от скорости набегающего потока.

ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Измерения проводятся на аэродинамическом стенде с использованием модуля №3. Модуль представляет из себя прямоугольный канал, изготовленный из оргстекла, имеющий на входе сужающее сопло с цилиндрической гидродинамической трубкой, которая служит для измерения скорости в канале. В центральной части канала помещен круглый цилиндр, высота которого равна высоте канала. В середине образующей цилиндра имеется небольшое отверстие, которое через расположенный в торце цилиндра штуцер соединяется с измерительным узлом (либо микроманометр, либо манометрическая

трубка на наружной панели стенда). Цилиндр может вращаться вокруг оси на 360^0 (при 0^0 измерительное отверстие ориентировано навстречу потоку).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Распределение давления по поверхности цилиндра, обтекаемого однородным плоским потоком идеальной несжимаемой жидкости.
2. Влияние вязкого трения на характер распределения давления на поверхности жесткого цилиндра при его ламинарном обтекании плоским потоком.
3. Поле скоростей в окрестности цилиндра при обтекании его плоским потоком идеальной жидкости.

КРЫЛО:

Крыловой профиль является фигурой, обтекание которой плоским потоком представляет существенный теоретический и практический интерес, как при проектировании крылатых летальных аппаратов, так и при проектировании гидро- и аэротурбин. Целью работы является построение диаграммы распределения давления по поверхности исследуемого профиля.

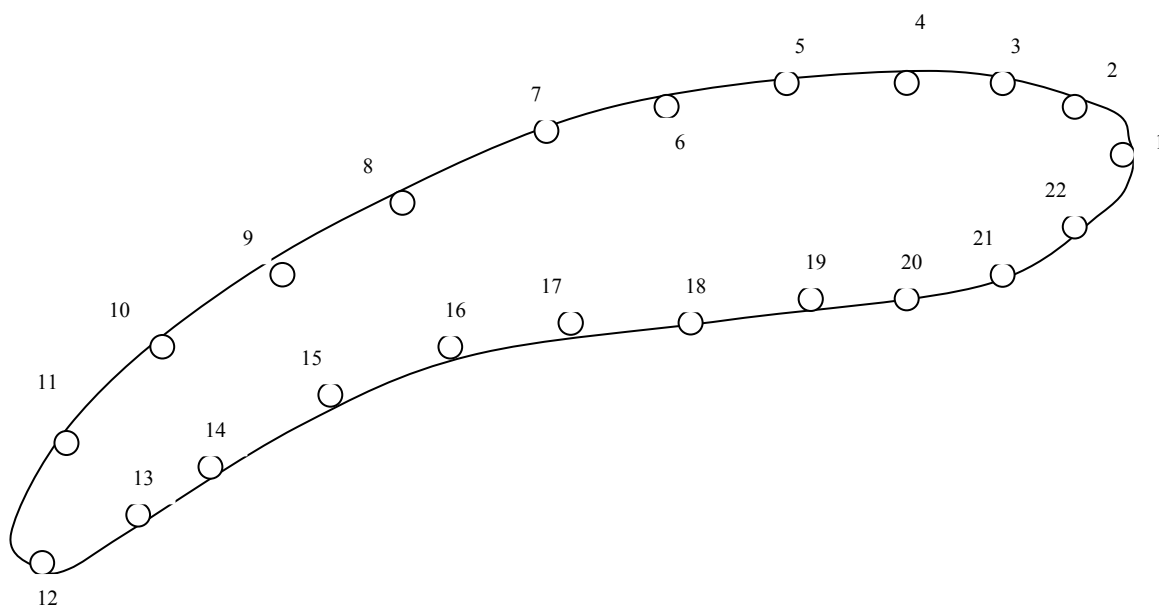


Рис. 6.3. Вид крыла

ЗАДАНИЕ

1. Провести измерение распределения давления по поверхности крылового профиля при различных углах атаки, включая нулевой угол и двух углов в диапазоне от 3^x до 6^{th} и от 15^{th} до 20^{th} градусов (конкретные значения углов задаются перед выполнением задания).

2. По полученным экспериментальным результатам построить диаграмму распределения давления по поверхности крыла.
3. Провести оценку подъёмной силы крыла и её зависимости от угла атаки.

ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ.

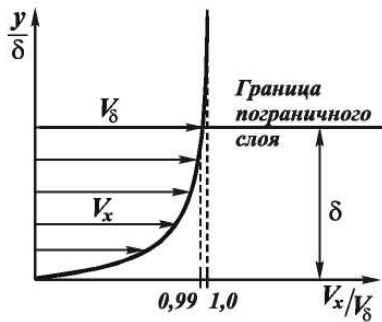
Работа выполняется на модуле №4, представляющим из себя прямоугольный канал из оргстекла. Крыловой профиль помещен в центр канала на вращающемся кронштейне. На боковой поверхности крылового профиля имеются отверстия, которые через внутренние каналы и гибкие трубки соединяются с гнездами опросной панели стенда. Для разных углов атаки с опросной панели с помощью микроманометра ММН-7 снимаются показания давления в соответствующих точках боковой поверхности крылового профиля при различных углах атаки. (Фланец выходного воздуховода должен быть направлен в сторону от входного торца канала).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое коэффициент давления?
2. Как влияет угол атаки на картину распределения давления?
3. Как экспериментально определить коэффициент давления?
4. Какие модели используются для экспериментальных исследований распределения давления по поверхности тел?
5. Как измеряется статическое давление на поверхности крыла?
6. Как по картине распределения давления по поверхности тела вычислить коэффициент подъёмной силы?

6.3.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЗДУШНОГО ПОТОКА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ОБДУВАЕМОЙ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Толщина пограничного слоя δ - величина условная. Внешней границей пограничного слоя принято считать ту линию, на которой скорость отличается от местной скорости внешнего потока на 1% (рис 5.3.2.1). Вне пограничного слоя течение можно считать потенциальным.



Для плоской пластины теоретические значения скорости ламинарного и турбулентного пограничных слоев определяют по формулам

$$\frac{V_{xL}}{V_\delta} = \left[\frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right], \quad \frac{V_{xT}}{V_\delta} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^n.$$

Показатель степени n зависит от числа Рейнольдса, найденного по толщине пограничного слоя S : $R_\delta = V_\delta S / \nu$. Показатель степени выбирается из табл.

R_δ	10^4	10^5	10^6	10^7
n	1/6	1/7	1/8	1/9

Для определения толщины ламинарного и турбулентного пограничных слоев на плоской пластинке используются зависимости

$$\delta_L = 5,8 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}, \quad \delta_T = 0,37 \frac{x}{\sqrt[5]{Re_x}}, \quad Re_x = \frac{V_\delta x}{\nu},$$

где R_x - число Рейнольдса, определяемое по длине пластины; x - расстояние от передней кромки пластины до сечения, в котором измеряют толщину пограничного слоя; V_δ - скорость на границе пограничного слоя в данном сечении; ν - кинематический коэффициент вязкости.

Измерение характеристик воздушного потока в пограничном слое пластины проводится на аэродинамическом стенде (см. пункт 6.1) на открытом модуле №9, который представляет собой плоскую пластину из оргстекла, закрепленную в жестком каркасе и установленную на подвижной столешнице. Пластина обдувается воздушным потоком через сопло, соединенное с гибким воздухопроводом съемным патрубком с защитной решеткой. Измерения характеристик воздушного потока в пограничном слое проводится с помощью плоского зонда (трубка Пито с узкой горизонтальной щелью параллельной пластине). Штуцер зонда соединяется гибкой трубкой с измерителем давления, в качестве которого используется либо микроманометр (инструкция в приложении 6.2.1), либо один

из пьезометров (манометрическая трубка, открытый конец которой выведен на штуцер на передней панели стенда). Зонд закрепляется на координатном устройстве, которое позволяет осуществлять горизонтальное (вдоль оси пластины) и вертикальное перемещение.

ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Ознакомиться с электрической и аэродинамической схемой измерительного стенда.
2. Установить на столешнице и зафиксировать фланец гибкого воздуховода. Присоединить к нему входной фланец модуля №9 с решеткой. (Совмещение фланцев достигается регулировкой опорных винтовых стоек).
3. Закрепить измерительный зонд в узел крепления координатного устройства, задав правильную, для планируемых измерений, ориентацию. Соединить гибким шлангом штуцер зонда и измерительного устройства.

ВНИМАНИЕ: при установке зонда соблюдать осторожность, не допуская механического воздействия на кромку щелевой насадки.

4. Убедиться в отсутствии посторонних незакрепленных предметов на трассе воздушного потока и около всасывающего фланца. Поставить дроссельную заслонку 10 всасываемого воздуховода в положение 0 (закрыто), включить вентилятор (красный тумблер в левой верхней части панели стенда).
5. Поднять рабочий торец зонда на максимально возможную высоту над поверхностью пластины и, приоткрывая заслонку, проследить за показаниями микроманометра. Зафиксировать минимальное и максимальное показания манометра. Эти значения определяют границы динамического диапазона последующих измерений.
6. Провести измерения зависимости показаний манометра от положения зонда при 3-х различных положениях заслонки (задаются исполнителю перед выполнением работы).

Для получения двумерной картины пространственного распределения скорости потока рекомендуется провести серию измерений пространственного распределения амплитуды давления по вертикали на 10-ти различных расстояниях от кромки обдуваемой пластины и по горизонтали на 5-ти высотах над плоскостью, начиная от поверхности с шагом 2 – 2,5 мм.).

ВНИМАНИЕ: перемещении зонда непосредственно по пластине производить по направлению потока, во избежание его повреждения.

ЗАДАНИЕ

1. Используя плоский щуп провести измерение пространственного распределения амплитуды давления воздуха над обдуваемой плоскостью.
2. По результатам измерений вычислить значение скорости потока в измеряемых точках и построить графики распределения зависимости скорости от расстояния до поверхности плоскости на различных расстояниях от передней кромки плоскости.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое пограничный слой?
2. Режимы течения в пограничном слое.
3. Как изменяется статическое давление в пограничном слое по нормали к поверхности тела?
4. По каким законам происходит изменение скорости в ламинарном и турбулентном пограничных слоях?
5. Что такое число Рейнольдса? Его физический смысл.
6. Как изменяется толщина пограничного слоя вдоль пластинки?
7. В чем отличие ламинарного и турбулентного пограничных слоев?
8. Чему равна скорость потока на поверхности пластинки? Дать объяснение.
9. Распределение скорости потока вязкой жидкости над жесткой плоскостью.
10. Описание плоского течения через потенциал и функцию тока.
11. Граничные условия для потенциала и функции тока на твердых непроницаемых границах.

6.3.3. ИЗУЧЕНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВОЗДУХА В ДИФFUЗОРАХ С РАЗЛИЧНЫМИ УГЛАМИ РАСКРЫТИЯ НА АЭРОДИНАМИЧЕСКОМ СТЕНДЕ ТМЖ М1

Диффузоры являются важной частью проточных каналов многих гидро- и аэро-аппаратов. Течение в диффузорах характеризуется рядом сложных гидродинамических явлений, особенно при сверхзвуковых скоростях течения. В настоящей работе исследуется динамика течения в расширяющемся диффузоре в режиме существенно дозвуковых скоростях потока.

ЗАДАНИЕ

1. Провести измерение осредненного давления в поперечном сечении диффузора на различных расстояниях от входного сечения расширяющегося канала воздуховода при 3-х значениях расхода (положение дроссельной заслонки задается перед выполнением работы).
2. Провести измерение профиля скоростей в поперечных сечениях потока в местах расположения входных каналов для измерительного зонда при различных значениях расхода.
3. По полученным экспериментальным данным построить графики распределения давления и профилей скоростей по длине испытуемого модуля.

Примечание: Работа выполняется на 2-х или 3-х модулях.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Работа выполняется на модуле №5, который представляет собой комплект из 3-х диффузоров с одинаковой степенью расширения (отношения площади широкого сечения к площади узкого), но с разными углами раскрытия, а значит с разными длинами. Поскольку при отрывных течениях распределение давления в поперечных сечениях может быть существенно неравномерным, для его осреднения делается несколько точек отбора на периметре сечения, штуцеры которых закольцовываются, а на измерительный блок выводятся осредненное таким способом давление. Модуль соединяется с входным фланцем вентилятора. Перед входным соплом модуля недопустимо присутствие незакрепленных предметов.

Измерение поля скоростей в сечениях проводится в местах расположения отверстий, в которые вставляется измерительный зонд, закрепленный в микрометрической вертикальной подаче.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Уравнение движения изотермической идеальной несжимаемой жидкости в трубе переменного сечения.
2. Распределение скорости по сечению цилиндрической трубы при ламинарном течении вязкой несжимаемой жидкости.
3. Начальный и стабилизированный участки течения в трубе.

СПИСОК ЦИТИРУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 335 с.
3. Титъенс О. Гидро- и аэромеханика. Т.1,2 М.-Л.: Государственное технико-теоретическое изд-во, 1933-1935.
4. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1, 2. М.: Наука, 1963.
5. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. М.: Научно – издательский центр «РХД». 2000 г.
6. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Том 4. – М.: Наука. 1970 г.
7. Техническая энциклопедия. Том 1. – 1956.
8. Соляник П.Н., Сугайло М.Л., Чмовш В.В. Экспериментальная аэродинамика. Учебное пособие. Харьков: ХАИ. 2007. – 96 с.
9. Альбом течений жидкости и газа: Пер. с англ. Сост. М. Ван - Дайк. - М.: Мир. 1986. - 184 с.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК ПО АЭРОДИНАМИКЕ

1. Алтухов В.А., Губчик А.А., Демидов В.С. Руководство к лабораторным работам по аэродинамике. - М.: ВВИА. 1963. - 261 с.
2. Андренко Г.И. Коэффициент продольного момента самолета: Учеб. пособие. - Х.: ХАИ. 1958. - 11 с.
3. Андренко Г.И. Тарировка аэродинамического насадка: Учеб. пособие. - Х.: ХАИ. 1958. - 9 с.
4. Андренко Г.И. Тарировка микроманометра: Учеб. пособие. - Х.: ХАИ. 1958. - 13 с.
5. Аржаников Н.С., Мальцев В.Н. Аэродинамика. - М.: Оборонгиз. 1956. - 483 с.
6. Горлин СМ., Слезингер И.И. Аэромеханические измерения. - М.: Наука. 1964. - 720 с.
7. Горшенин Д.С. Руководство к практическим занятиям в аэродинамической лаборатории. - М.: Машиностроение. 1967. - 224 с.
8. Закс Н.А. Основы экспериментальной аэродинамики. - М.: Оборонгиз. 1953. - 371 с.
10. Лабораторный практикум / Под ред. С.Г. Попова. - М.: МАИ. 1972. - 115 с.
11. Мартынов А.К. Экспериментальная аэродинамика. - М.: Оборонгиз. 1958. - 348 с.
12. Меншиков В.И. Определение аэродинамических характеристик профиля в потоке газа: Учеб. пособие для курсового и дипломного проектирования. - Х.: ХАИ. 1974. - 88 с.
13. Мельников А.П. Основы прикладной аэродинамики. - Л.: ЛКВВИА. 1953. - 580 с.
14. Ткаченко Я.Е. Аэродинамические коэффициенты крыла: Учеб. пособие. - Х.: ХАИ. 1958. - 25 с.
15. Ткаченко Я.Е. Коэффициенты лобового сопротивления шара и осесимметричных тел: Учеб. пособие. - Х.: ХАИ. 1958. - 15 с.
16. Ткаченко Я.Е., Андренко Г.И. Аэродинамические трубы и поле скорости потока: Учеб. пособие. - Х.: ХАИ. 1958. - 27 с.
17. Фабрикант Н.Я. Аэродинамика. - М.: Наука. 1964. - 814 с.
18. Федоров Е.Я. Руководство к лабораторным работам в аэродинамической лаборатории. - Казань: Казан, авиац. ин-т. 1968. - 81 с.
19. Федявский К.К., Войткунский Я.И., Фадеев Ю.И. Гидромеханика. - Л.: Судостроение. 1968. - 568 с.
20. Фефелов М.А. Визуализация дозвуковых потоков и определение параметров потока в рабочей части дозвуковой аэродинамической трубы: Метод, указания к лаб. работе. - Х.: ХАИ. 1981. - 23 с.

21. Фефелов М.А. Визуализация сверхзвуковых потоков и определение параметров потока в рабочей части сверхзвуковой аэродинамической трубы: Метод, указания к лаб. работе. - Х.: ХАИ. 1981. - 20 с.
22. Фефелов М.А. Измерение параметров пограничного слоя: Метод, указания к лаб. работе. -Х.: ХАИ. 1983. - 18 с.
23. Фефелов М.А. Определение аэродинамических характеристик весовым методом: Метод, указания к лаб. работе. - Х.:ХАИ. 1983. - 29 с.
24. Фефелов М.А. Определение распределения давления по поверхности тела: Метод, указания к лаб. работе. - Х.: ХАИ. 1983. - 26 с.
25. Флоринский О.В. Распределение давления по поверхности крыла: Учеб. пособие. -Х.: ХАИ. 1958. - 17 с.