Задачи по специальной теории относительности

Основные постулаты: 1) принцип относительности, 2) скорость света в пустоте $c = const \cong 3 \times 10^{10}$ см/с – одна и та же во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от скорости источника света.

Кинематика. Основные понятия: инерциальные системы отсчета; синхронизация часов, находящихся в разных точках (внутри каждой системы отсчета).

Преобразования Лоренца. Если система отсчета K’ движется относительно системы отсчета K («неподвижной») со скоростью $\vec{V}$|| Oz || Oz'и при $t = t' = 0$ начала отсчета обеих систем совпадают, то координаты и время некоторого (любого) события в системах K и K’ связаны между собой *преобразованиями Лоренца*

$$z' = \frac{z-Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, x' = x, y' = y, t' = \frac{t-(V/c^2)z}{\sqrt{1-\beta^2}}), \quad (*)$$

где $\beta = V/c$.

Задачи из сборника Батыгина и Топтыгина

Задача 543. Часы, покоящиеся в системе S' в точке (x_0', y'_0, z'_0), в момент t'_0 проходят мимо точки (x_0, y_0, z_0) системы отсчета S, в которой часы в этот момент времени показывают время t_0. Записать формулы преобразования Лоренца для этого случая.

Решение. Если записать исходные формулы преобразования Лоренца (*) для двух различных событий (1 и 2) и найти из них соответствующие разности координат и времени этих событий в двух системах отсчета ($\Delta z = z_2 - z_1, \Delta z' = z'_2 - z'_1$ и т.д.), то мы увидим, что эти разности в двух системах отсчета связаны тем же преобразованием (*):

$$\Delta z' = \frac{\Delta z - V\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \Delta x' = \Delta x, \Delta y' = \Delta y, \Delta t' = \frac{\Delta t-(V/c^2)\Delta z}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (1)$$

Пусть первое событие – то, которое дано в условии задачи (помеченное индексом 0), а второе – любое другое событие, Тогда координаты и время этого (т.е. любого другого) события в системах отсчета S’ и S связаны между собой формулами, получаемыми из (1), если в них положить $\Delta z = z - z_0, \Delta z' = z' - z'_0$ и т.д., т.е. ОТВЕТ:

$$z' - z'_0 = \frac{z-z_0-V(t-t_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}, x' - x'_0 = x - x_0, y' - y'_0 = y - y_0, t' - t'_0 = \frac{t-t_0-(V/c^2)(z-z_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (1)$$

Задача 545. Стержень, движущийся вдоль самого себя со скоростью V в некоторой (неподвижной) системе отсчета, пролетает мимо некоторой фиксированной точки P этой системы отсчета за время Δt (измеренное в этой же неподвижной системе отсчета). Показать, что произведение $V\Delta t$ есть длина этого стержня в неподвижной системе отсчета, т.е. соответствует формуле Лоренцева сокращения длины движущегося отрезка.

Решение. Свяжем со стержнем систему отсчета K'. Неподвижная система отсчета – K. Два события: 1) мимо точки P пролетает передний конец стержня, 2) мимо той же точки P пролетает задний конец стержня. Оси z и z' параллельны стержню и его скорости.

Преобразования Лоренца для разности координат этих двух событий в системах K и K':

$$z'_1 - z'_2 = \frac{z_1 - z_2 - V(t_1 - t_2)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Левая часть этого равенства (разность координат концов стержня в системе, где он покоится) есть «собственная» длина стержня l_0. Разность $z_2 - z_1$= 0, т.к. оба события в системе отсчета K происходят в одной точке P. Разность $t_1 - t_2 = -\Delta t$ («минус», т.к. первое событие наступает раньше второго, т.е. $t_1 < t_2$). Тогда из (1) находим $V\varDelta t = l_0 \sqrt{1-\beta^2}$, что и требовалось доказать.

Задача 547. «Световые часы»: Два зеркала укреплены на концах стержня длины l. Световой импульс («зайчик») бегает туда-сюда, отражаясь от зеркал. Стержень вместе с зеркалами движется со скоростью V в направлении собственной длины. Найти соотношение между периодами бегания зайчика в связанной с этими часами (т.е. в движущейся) системе отсчета K' и в неподвижной (в которой стержень вместе с зеркалами летят со скоростью V) системе отсчета K. Использовать постулат постоянства (одинаковости) скорости света во всех системах отсчета.

Решение Два этапа движения зайчика: (1) от заднего зеркала (зеркала 1) к переднему зеркалу (зеркалу 2); (2) Обратно – от зеркала 2 к зеркалу 1 . Найдем времена каждого из этих этапов в двух системах отсчета.

1 этап - зайчик бежит от зеркала 1 к зеркалу 2:

В системе K': $T_1^{'} = l/c$.

В системе K: путь, пройденный зайчиком $cT_1 = l\sqrt{1-\beta^2} + VT_1$ (сумма двух длин – расстояния между зеркалами в системе K в момент выхода зайчика из зеркала 1 в системе K и пути, пройденного зеркалом 2 за время T_1 (аналогия: один автомобиль (зайчик) догоняет другой автомобиль (зеркало 2)). Отсюда $T_1 = l\sqrt{1-\beta^2}/(c-V)$.

2 этап - зайчик бежит назад - от зеркала 2 к зеркалу 1:

В системе K’: $T_2^{'} = T_1^{'} = l/c$.

В системе K: время T_2: $cT_2 = l\sqrt{1-\beta^2} - VT_2$, отсюда $T_2 = l\sqrt{1-\beta^2}/(c+V)$

(время встречи двух автомобилей, едущих навстречу друг другу).

Полные периоды колебаний туда и обратно:

В системе K’: $T' = T_1^{'} + T_2^{'} = 2l/c$

В системе K: $T = T_1 + T_2 = l\sqrt{1-\beta^2}(\frac{1}{c-V} + \frac{1}{c+V}) = 2l/(c\sqrt{1-\beta^2})$.

Ответ: $T' = T\sqrt{1-\beta^2}$, т.е. $T' < T$.

Задача 548. (Не вошла в список обязательных). Решить ту же задачу, что и **547,** для случая, когда световые часы движутся в направлении, перпендикулярном стержню, на которых укреплены зеркала.

Решение. Опишем те же самые два этапа движения зайчика, что и в предыдущей задаче, в разных систем отсчета.

В системе отсчета К’, связанной с часами, время каждого этапа то же самое, полный период $T^{'} = 2T_1^{'} = 2l/c$, где l - собственная длина стержня.

В неподвижной системе отсчета К зайчик движется от зеркала к зеркалу по ломаной линии, длины отрезков этой линии $L_1 = L_2$ и времена $T_1 = T_2$, за которые зайчик их пробегает, одинаковы для обоих этапов (просто из симметрии). Зайчик движется по этим отрезкам со скоростью света c, поэтому $L_1 = cT_1 = \sqrt{l^2 + (VT_1)^2}$. (1) Второе равенство – теорема Пифагора, L_1- гипотенуза прямоугольного треугольника, один из его катетов – расстояние между зеркалами l, которое одинаково в обеих системах отсчета, т.к. стержень движется поперек себя, а другой катет – путь VT_1, пройденный за время T_1 зеркалом. Отсюда находим $T_1^2(c^2 - V^2) = l^2, T_1 = l/(c\sqrt{1-\beta^2})$, полный период $T = 2l/c\sqrt{1-\beta^2}$. Соотношение между периодами получилось то же самое, что и в предыдущей задаче, при продольном движении зеркала: $T' = T\sqrt{1-\beta^2} < T$.

Задача 551. Два масштаба, каждый из которых имеет длину покоя l_0, равномерно движутся навстречу друг другу параллельно общей оси z, Наблюдатель, связанный с одним из них, заметил, что между совпадением левых и правых концов масштабов прошло время $\varDelta t$. Какова относительная скорость масштабов? В каком порядке совпадают их концы для наблюдателей, связанных с каждым из масштабов, а также для наблюдателя, относительно которого оба масштаба движутся с одинаковой скоростью в противоположные стороны?

Решение. Относительная скорость – это скорость одного из масштабов в системе отсчета, в которой другой масштаб покоится. В системе отсчета К, связанной с масштабом, который движется слева направо, другой масштаб движется справа налево с относительной скоростью v и имеет в системе К длину $l' = l_0\sqrt{1-(v/c)^2}$. Поскольку эта длина меньше длины l_0 покоящегося в системе К масштаба, в момент, когда совпадут их правые концы, левый конец движущегося масштаба еще не долетит до левого конца покоящегося и будет находиться от него на расстоянии, равном разности длин $\varDelta l = l_0 - l' = l_0(1-\sqrt{1-(v/c)^2})$. Это расстояние он пройдет за время $\Delta l/v$, равное величине Δt, заданной в условии задачи. Таким образом, получаем уравнение $l_0(1-\sqrt{1-(v/c)^2} = v\varDelta t$**,** решая которое находим искомую величину скорости

$$v = \frac{2\varDelta t l_0}{(\varDelta t)^2 + (l_0/c)^2}.$$

Для наблюдателя, связанного с масштабом, летящим справа налево, сначала совпадут левые концы масштабов, а потом правые. В системе отсчета, в которой масштабы имеют равные и противоположно направленные скорости, совпадение правых и левых концов происходит одновременно.

Задача 559. Два масштаба, каждый из которых имеет в своей системе отсчета длину l_0, движутся навстречу друг другу с равными скоростями V относительно некоторой системы отсчета. Какова длина каждого из масштабов l, измеренная в системе отсчета, связанной с другим масштабом?

Решение. В системе отсчета, связанной с одним из масштабов, скорость другого масштаба (так называемая относительная скорость), при их встречном движении, согласно релятивистскому закону сложения скоростей, равна

$$V_{отн} = \frac{V+V}{1+\frac{V\cdot V}{c^2}} = \frac{2V}{1+(V/c)^2} \qquad (1)\,.$$

Длина этого другого масштаба, согласно лоренцеву закону сокращения длины отрезка, движущегося в данной (связанной с первым масштабом) системе отсчета со скоростью $V_{отн}$, равна

$$l = l_0\sqrt{1-(V_{отн}/c)^2} \qquad (2)$$

Подставляя (1) в (2) и выполняя несложные преобразования, получаем ответ:

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{(2V/c)^2}{[1+(V/c)^2]^2}} = l_0\frac{1-(V/c)^2}{1+(V/c)^2}.$$

Задача 575. Найти частоту ω световой волны, наблюдаемую при поперечном эффекте Доплера (направление распространения света перпендикулярно направлению движения источника в системе, связанной с приемником света). Каково направление распространения рассматриваемой волны в системе, связанной с источником?

Решение. Пусть приемник покоится в системе К (которую назовем неподвижной), а источник покоится в системе К', которая движется относительно К со скоростью $\vec{V}$. Частота и волновой вектор световой волны в системе К равны соответственно ω и $\vec{k}$, а в системе К' – соответственно ω' и $\vec{k}'$. Если (как и в лоренцевых формулах преобразования координат и времени) скорость движущейся системы направлена по оси z, а оси z и z' параллельны), то формулы преобразования частоты и продольной компоненты волнового вектора (согласно закону преобразования компонент четырех-вектора $(\vec{k}, i\omega/c)$) имеют вид:

$$\omega' = \frac{\omega-(k_z V)}{\sqrt{1-\beta^2}},\ k_z' = \frac{k_z-(\omega V/c^2)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (*)$$

Обозначим через ω_0 частоту волны в системе, связанной с источником. Согласно условиям задачи, $\omega' = \omega_0$, а продольная проекция волнового вектора $k_z = 0$. Тогда на основании первой из приведенных формул получаем

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\beta^2},$$

что и является ответом на первый вопрос задачи. Таким образом, если принимаемое излучение приходит с направления, перпендикулярного скорости испускающего это излучение источника, то приемник зарегистрирует частоту, меньшую «собственной» частоты источника (измеряемой в той системе отсчета, где источник покоится). Это – так называемое «красное смещение» или поперечный эффект Допплера.

Для определения направления распространения волны в системе К', связанной с источником, найдем продольную компоненту $k_z^{'}$ волнового вектора $\vec{k}'$. Из второй формулы (*), с учетом того, что $k_z = 0$, получаем $k_z^{'} = -\frac{\omega V/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{\omega_0 V}{c^2}$. В то же время полная длина (модуль) этого вектора на основании дисперсионного уравнения для плоской волны (справедливого в любой инерциальной системе отсчета) равна $|k^{'}| = \omega_0/c$, и следовательно угол α, образуемый им с положительным направлением оси z', определяется формулой $cos\,\alpha = k_z^{'}/|k'| = -V/c$. Знак «минус» указывает здесь на то, что волновой вектор (в случае, если он в неподвижной системе отсчета перпендикулярен скорости источника), отклоняется от этого перпендикуляра в сторону, противоположную направлению движения.

Задача 576. Длина волны света, излучаемого некоторым источником, в той системе отсчета, где источник покоится, равна λ_0. Какую длину волны λ зарегистрируют:
а) наблюдатель, приближающийся со скоростью V к источнику?
б) наблюдатель, удаляющийся с такой же скоростью от источника?

Решение. Если система отсчета К’ движется со скоростью V в направлении оси *z* некоторой (назовем ее неподвижной) системы отсчета К, то, согласно формулам преобразования частоты,

$$\omega' = \frac{\omega-(k_z V)}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \qquad (1),$$

где ω' - частота плоской волны в системе К’, ω и k_z - соответственно частота и проекция волнового вектора на ось *z* этой же плоской волны в системе К.
Пусть источник покоится в системе К, а наблюдатель в системе К’. Тогда, если наблюдатель удаляется от источника (это случай (б)), то $k_z = (\omega/c) > 0$ и, согласно (1),

$$\omega' = \frac{\omega-(\omega V)/c}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = \omega\frac{1-(V/c)}{\sqrt{[1-(V/c)][1+(V/c)]}} = \omega\sqrt{\frac{1-(V/c)}{1+(V/c)}}$$ (частота уменьшается).

Длина волны обратно пропорциональна частоте, поэтому

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1+(V/c)}{1-(V/c)}}$$ - это ответ в случае (б)

(длина волны для удаляющегося наблюдателя увеличивается:
.
В случае (а) (наблюдатель приближается к источнику) проекция волнового вектора на ось *z* отрицательна: $k_z = (\omega/c) < 0$ и ответ получится из предыдущего путем изменения знака перед скоростью V:

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1-(V/c)}{1+(V/c)}}$$ - это ответ в случае (а)

(длина волны для приближающегося наблюдателя уменьшается).

Задача 579. Зеркало движется нормально к собственной плоскости со скоростью $\vec{V}$, найти закон отражения плоской монохроматической волны от такого зеркала (заменяющий закон равенства углов падения и отражения при $V = 0$), а также закон преобразования частоты при отражении. Рассмотреть, в частности, случай $V \to c$.

Решение. Продольные оси координат z и z' неподвижной (К) и движущейся (связанной с зеркалом) систем отсчета направим в сторону его внутренней (направленной за зеркало) нормали. Углы падения волны на зеркало, образуемые волновыми векторами с внутренней нормалью, обозначим в этих системах отсчета соответственно α и α'. Тогда в формулах преобразования частоты и волнового вектора (см. формулы (*) предыдущей задачи) можно положить $k_z = k\cos\alpha\,, k_z' = k'\cos\alpha\,'$ и. учитывая, что $k = \omega/c$, $k' = \omega'/c$, переписать эти формулы в виде

$$\omega' = \omega\frac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{1}$$

$$k_z' = k\frac{\cos\alpha-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2}$$

В этой и последующей формулах величина β может иметь любой знак: $\beta = \pm|V|/c$; «плюс» – если проекции скорости зеркала и волнового вектора падающей волны на ось z одного знака, т.е. зеркало «убегает» от волны, «минус» –, если знаки этих проекций различны, т.е. зеркало «набегает» на волну.

Из (1) и (2) может быть получена формула, определяющая угол падения волны α' в системе отсчета К', связанной с движущимся зеркалом:

$$\cos\alpha\,' = \frac{k_z'}{k'} = \frac{(\omega/c)(\cos\alpha-\beta)}{(\omega'/c)\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\cos\alpha-\beta}{1-\beta\cos\alpha}. \tag{3}$$

Очевидно, что в системе К', где зеркало неподвижно, угол отражения равен углу падения α', а чтобы рассчитать угол отражения в неподвижной системе отсчета (назовем этот угол α''), можно воспользоваться той же формулой (3) еще раз, поскольку при таком расчете системы К и К' просто меняются ролями и связь между углами α'' и α' должна быть такой же, как между углами α' и α. Делая в формуле (3) соответствующую замену ($\alpha \to \alpha', \alpha' \to \alpha''$) и выполняя несложные преобразования, получаем ответ на первый вопрос задачи:

$$\cos\alpha\,'' = \frac{\cos\alpha'-\beta}{1-\beta\cos\alpha'} = \frac{\frac{\cos\alpha-\beta}{1-\beta\cos\alpha}-\beta}{1-\beta\frac{\cos\alpha-\beta}{1-\beta\cos\alpha}} = \frac{(1+\beta^2)\cos\alpha-2\beta}{1-2\beta\cos\alpha+\beta^2}. \tag{4}$$

Заметим, что угол отражения α'' определяется в этой формуле (как это обычно принято в случае отражения от неподвижного зеркала) как угол между волновым вектором отраженной волны и *внешней* нормалью к зеркалу (направленной навстречу падающей волне). Поэтому знак перед правой частью здесь противоположен приведенному в ответе к этой задаче в задачнике Батыгина и Топтыгина)

Как видим, результат существенно зависит от знака β, и в этой связи необходимо отметить, что в некоторой области параметров, а именно, при положительных $\beta > \cos\alpha$ (т.е. при достаточно высокой скорости «убегания» зеркала от волны) постановка задачи теряет простой и наглядный физический смысл (или во всяком случае требует от авторов задачников каких-то дополнительных пояснений и физического осмысления, отсутствующих как у Батыгина с Топтыгиным, так и у Векштейна). В самом деле, как следует из (3), проекции волнового вектора падающей волны на ось z в системах К и К’ в этом случае имеют разные знаки, а угол отражения α''при условии $cos\,\alpha < 2\beta/(1+\beta^2)$ оказывается больше $\pi/2$, т.е. «отраженная» волна бежит к зеркалу. Этот результат может быть истолкован таким образом, что падающая и отраженная волны при преобразовании координат и времени, соответствующем переходу от К к К', в этом случае меняются местами (бывшая падающая переходит в отраженную, а отраженная – в падающую). Хотя суммарные поля обеих волн при этом, конечно, удовлетворяют необходимым граничным условиям и уравнениям Максвелла, на вопрос о том, какой реальной постановке задачи (в частности, каким реальным начальным условиям) это может соответствовать, ответить затруднительно. Надо сказать, что не нашел удовлетворительной трактовки этот вопрос и в известном обстоятельном обзоре Болотовского и Столярова, посвященном отражению волн от движущихся границ (Успехи физических наук,

Частота падающей волны ω' в системе отсчета К', связанной с зеркалом, определяется формулой (1). Этой же величине ω' в системе К' равна и частота отраженной волны, а частоту отраженной волны ω'' в неподвижной системе отсчета К можно рассчитать, очевидно, на том же основании и тем же способом, что и описанный выше расчет косинуса угла отражения: в формуле (1) надо выполнить замену $\omega' \to \omega'', \omega \to \omega', \alpha \to \alpha'$ и вновь воспользоваться формулами (1) и (3):

$$\omega'' = \omega' \frac{1-\beta\, cos\,\alpha'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega \frac{1-\beta\, cos\,\alpha}{\sqrt{1-\beta^{2\cdot}}} \cdot \frac{1-\beta\frac{cos\,\alpha-\beta}{1-\beta\, cos\,\alpha}}{\sqrt{1-\beta^{2\cdot}}} = \omega \frac{1-2\beta\, cos\,\alpha+\beta^2}{1-\beta^2}. \tag{4}$$

В случае нормального падения ($\alpha = 0$) из (4) получаем:

$$\omega'' = \omega \frac{1-\beta}{1+\beta}. \tag{5}$$

В предельно релятивистском случае (при $|\beta| \to 1$), как следует из (5), частота отраженной волны в неподвижной системе отсчета $\omega'' \to 0$, если $\beta > 0$ (зеркало убегает от волны), и $\omega'' \to \infty$, если $\beta < 0$ (зеркало движется навстречу волне).

Задача 625. Найти скорость v частицы с массой m и зарядом e, прошедшей разность потенциалов V (начальная скорость равна нулю). Упростить общую формулу для нерелятивистского и ультрарелятивистского случаев (учесть по два члена разложения(?) - ***хватит и по одному***).

Решение. Энергия частицы увеличится на величину eV:
была mc^2, стала $W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = mc^2 + eV$. Из последнего равенства находим скорость

$v = \sqrt{\frac{2eV}{m} \cdot \frac{1+\frac{eV}{2mc^2}}{\left(1+\frac{eV}{mc^2}\right)^2}}$ При $eV << mc^2$: $v \approx \sqrt{2eV/m}$

При $eV >> mc^2$: $v \approx c$

Задача 642. Частица с массой m_1 и скоростью v сталкивается с покоящейся частицей массы m_2 и поглощается ею. Найти массу m и скорость V образовавшейся частицы.

Решение. Полная энергия сохраняется (хотя часть энергии упорядоченного движения переходит в тепловую), импульс тоже сохраняется.

Энергия частицы, образовавшейся после слияния обеих частиц, $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$. Импульс этой частицы $p = \frac{mV}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$. Отсюда $V = \frac{pc^2}{E}$ - по этой формуле и будем искать скорость.

Импульс $p = p_{\text{нач}} = \frac{m_1 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$. Энергия $E = E_{нач} = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + m_2 c^2$. Тогда

$$V = \frac{pc^2}{E} = \frac{m_1 v c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}\left(\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + m_2 c^2\right)} = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2\sqrt{1-(v/c)^2}}$$ - ответ для величины V

Далее ищем массу образовавшейся частицы. Формула, связывающая импульс и энергию любой частицы: $\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2$. Отсюда:

$$m^2 = \frac{E^2}{c^4} - \frac{p^2}{c^2} = \frac{E_{\text{нач}}^2}{c^4} - \frac{p_{\text{нач}}^2}{c^2} = \frac{m_1^2}{1-(v/c)^2} + m_2^2 + \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \frac{(m_1 v/c)^2}{1-(v/c)^2} == m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Ответ: $m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}}$.

Задача 694. Найти пробег l (имеется в виду путь, пройденный до остановки, т.е. до момента обращения скорости в нуль) релятивистской заряженной частицы с зарядом e, массой m и начальной энергией W в тормозящем однородном электрическом поле E, параллельном начальной скорости.

Решение. В начальный момент энергия частицы W, а в момент остановки энергия равна mc^2. Разность этих энергий равна работе электрического поля, которая равна eEl, т.е. $W - mc^2 = eEl$. Отсюда $l = (W - mc^2)/(eE)$ - ответ.

Задачи из сборника Векштейна

Задача 4.34. Монохроматический свет частоты ω падает нормально к поверхности плоского зеркала, движущегося равномерно со скоростью v в направлении распространения падающего света. Определить частоту отраженного света (имеется в виду – в той же (неподвижной) системе отсчета K, в которой задана частота ω падающего света).

Решение. Раз зеркало движется в направлении распространения света, значит, оно удаляется от источника этого света, и, значит, в системе отсчета K', связанной с этим удаляющимся зеркалом, частота падающего на него света равна (см. приведенное выше решение **Задачи 576** (б) из Батыгина и Топтыгина)

$$\omega'_{пад} = \frac{\omega - kv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \omega \frac{1-(v/c)}{\sqrt{[1-(v/c)][1+(v/c)]}} = \omega\sqrt{\frac{1-(v/c)}{1+(v/c)}}. \quad (1)$$

Поскольку зеркало в системе K' неподвижно, частота отраженного им света $\omega'_{\text{отр}}$ в этой системе отсчета K' равна частоте падающего света ω', т.е. определяется той же самой формулой (1).

$$\omega'_{отр} = \omega\sqrt{\frac{1-(v/c)}{1+(v/c)}} \qquad (2)$$

Наблюдатель, покоящийся в неподвижной системе K, удаляется со скоростью v от зеркала, т.е. перемещается в направлении распространения отраженного им света. Это значит, что искомая частота отраженного света $\omega_{\text{отр}}$ в неподвижной системе отсчета K выражается через частоту отраженного света $\omega'_{\text{отр}}$ в системе K' при помощи той же формулы (2), которая выражает частоту $\omega'_{\text{отр}}$ через частоту ω:

$$\omega_{отр} = \omega'_{отр}\sqrt{\frac{1-(v/c)}{1+(v/c)}} = \omega\sqrt{\frac{1-(v/c)}{1+(v/c)}}\cdot\sqrt{\frac{1-(v/c)}{1+(v/c)}} = \frac{1-(v/c)}{1+(v/c)}\,.$$

Последнее равенство и является ответом в поставленной задаче.

Задача 4.35. Совпадает с задачей **574** из Батыгина и Топтыгина.

Задача 4.37. Определить движение релятивистской заряженной частицы (масса *m,* заряд q) в однородном постоянном электрическом поле. Начальная скорость частицы равна нулю. **Решение.** Пусть поле направлено по оси z и при $t = 0$ координата заряда $z = 0$. Тогда скорость $v = v_z = dz/dt$. Уравнение движения частицы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = qE.$$

Интегрируем его: $\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = qEt$, находим скорость v:

$v = \frac{dz}{dt} = \frac{q}{m} Et \left[1 + \left(\frac{qEt}{mc}\right)^2\right]^{-1/2}$. Еще раз интегрируем, находим закон движения $z(t)$:

$z = \int_0^t v(t)dt = \frac{mc^2}{qE}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{mc}\right)^2} - 1\right]$,$y = x = 0$ - ответ

Задача 4.46. Масса покоя частицы m**.** Выразить ее скорость v

1) через полную энергию W,
2) через кинетическую энергию T,
3) через импульс p.

Решение. 1) Полная энергия частицы $W = mc^2/\sqrt{1-(v/c)^2}$**.** Отсюда $v = c\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{W}\right)^2}$.

2) Кинетическая энергия частицы T (по определению) есть разность ее полной энергии и энергии покоя: $T = W - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right)$. Отсюда $v = c\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{mc^2+T}\right)^2}$.

3) Импульс частицы $p = mv/\sqrt{1-(v/c)^2}$. Отсюда $v = \frac{pc}{\sqrt{p^2+(mc)^2}}$.

Задача 4.47. Неподвижный π -мезон распадается на μ -мезон и нейтрино $(m = 0)$. Зная массы π - и μ -мезонов, вычислить кинетическую энергию μ -мезона.

Решение. Согласно закону сохранения энергии, энергия неподвижного π -мезона (до распада) $m_\pi c^2$ равна сумме энергии μ -мезона $m_\mu c^2/\sqrt{1-\beta^2}$ ($\beta = v/c$, v - скорость μ -мезона) и нейтрино W_ν, т.е.

$$m_\pi c^2 = m_\mu c^2/\sqrt{1-\beta^2} + W_\nu. \quad (1)$$

Согласно закону сохранения импульса, суммарный импульс обеих образовавшихся после распада частиц равен нулю (т.к. до распада π -мезон был неподвижен), и, следовательно, импульсы обеих образовавшихся частиц противоположны по направлению и равны друг другу по абсолютной величине, т.е. (с учетом того, что импульс нейтрино, как частицы с нулевой массой покоя, равен W_ν/c) имеем

$$\frac{m_\mu c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{W_\nu}{c}. \quad (2)$$

Исключая из полученной системы уравнений (1) и (2) энергию нейтрино W_ν, находим величину $\beta = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2}$. Подставляя эту величину в выражение для кинетической энергии μ -мезона $T = W_\mu - m_\mu c^2 = m_\mu c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$, получаем ответ

$$T = \frac{(m_\pi - m_\mu)^2}{2m_\pi}c^2.$$

Задача В. 4.51. π_0-мезон с массой (покоя) m летит со скоростью v и распадается на два γ - кванта. Под каким углом эти кванты разлетаются?

Решение. Четырех-вектор импульса $\mathbf{P}_4\{\mathbf{p}, i\frac{E}{c}\}$ $\Rightarrow\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows$ $p^2 - \frac{E^2}{c^2} = const$ (квадрат четырех-вектора есть инвариант). Отсюда (или непосредственно из выражений для трехмерного импульса $\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-(\mathbf{v}/c)^2}}$ и энергии $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\mathbf{v}/c)^2}}$) следует:

$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2$. $\Rightarrow$ при $m = 0$ (γ -квант – фотон): $E = pc$

Законы сохранения (до и после испускания):

а) энергии: $\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = 2E_\gamma = 2p_\gamma c.$ (1)

б) импульса: поперечный импульс = 0 ⇒ скорость$\mathbf{v}$– биссектриса угла разлета фотонов θ, продольный импульс $\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = 2p_\gamma \cos\frac{\theta}{2}$. (2)

Делим (2) на (1): $\cos(\theta/2) = v/c, \sin(\theta/2) = \sqrt{1-(v/c)^2}$ - (ответ)

Задача В. 4.53. Возбужденное атомное ядро переходит в основное состояние путем испускания γ -кванта. Масса ядра в основном состоянии m. Энергия возбуждения ΔW. Определить частоту γ -кванта ω.

Решение. Законы сохранения (до и после перехода в основное состояние):

Энергия: (до) $mc^2 + \Delta W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \hbar\omega$ (после), (1)

(учли, что энергия фотона E $=\hbar\omega$). Полный импульс до (а следовательно, и после) равен нулю ⇒импульсы ядра и фотона противоположны направлены и равны по модулю:

$\frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\hbar\omega}{c}$ (2)

(учли, что импульс фотона $p_\gamma = \hbar\omega/c$) Решаем систему уравнений (1), (2): исключаем β и находим частоту. Из (2) ⇒ $\frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \left(\frac{h\omega}{mc^2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{\left(\frac{h\omega}{mc^2}\right)^2 + 1}$. После этого из (1): $\omega = \frac{\Delta W}{\hbar}(1 - \frac{\Delta W}{2mc^2+2\Delta W})$ - ответ