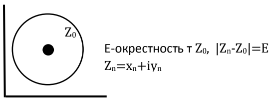
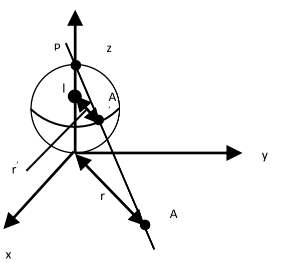
1.Предел последовательности К чисел.
Последовательностью К чисел наз пронумерованное мн-во К чисел $\{Z_n\}=\{Z_1, Z_2,\dots\}$
Число $z_0 \in \mathbb{C}$ наз пределом послед $\{Z_n\}$, если $(\forall \mathcal{E}>0)(\exists N = N(\mathcal{E}))$: $(\forall n>=N(\mathcal{E})):|Z_n-Z_0|<\mathcal{E}$.
$|Z_n-Z_0|=\sqrt{(Z_n-Z_0)(Z_n-Z_0)}$. $\lim(n\mapsto\infty)(Z_n)= Z_0$.
Необходимое и достаточное условие сходимости К чисел $\{Z_n\}$ является сходимость последовательностей$\{x_n\}\{y_n\}$ одновременно.



Док-во:необх
$\exists\lim(n\Rightarrow\infty)(Z_n)= Z_0$
$|Z_n-Z_0|=\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}$;
$Z_0=x_0+iy_0$;
$(\forall \mathcal{E}>0)(\exists N=N(\mathcal{E}))$: $(\forall n>=N(\mathcal{E})):|x_n-x_0|<\mathcal{E}$ и $|y_n-y_0|<\mathcal{E}$; $\exists\lim(n\mapsto\infty)(x_n)= x_0$; $\exists\lim(n\mapsto\infty)(y_n)= y_0$;
$\Leftarrow$достаточность: $\exists\lim(n\mapsto\infty)(x_n)= x_0 \Longrightarrow (\forall \mathcal{E}>0)(\exists N_1 = N_1(\mathcal{E}))$: $(\forall n>=N_1(\mathcal{E})):|x_n-x_0|<\mathcal{E}$;
$\exists\lim(n\mapsto\infty)(y_n)= y_0 \Longrightarrow (\forall \mathcal{E}>0)(\exists N_2 = N_2(\mathcal{E}))$: $(\forall n>=N_2(\mathcal{E})):|y_n-y_0|<\mathcal{E}$; $N(\mathcal{E})=\max\{N_1(\mathcal{E}), N_2(\mathcal{E})\}$; $(\forall E>0)(\exists N = N(\mathcal{E}))$: $(\forall n>=N(\mathcal{E})):(|x_n-x_0|<\mathcal{E}$ и $|y_n-y_0|<\mathcal{E}) \Longrightarrow |Z_n-Z_0|<\sqrt{2}*\mathcal{E}$; $\exists\lim(n\mapsto\infty)(Z_n)= Z_0 = x_0+iy_0$.

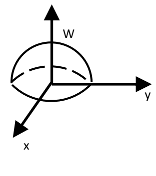
2.Теорема об ограниченной последовательности. Критерий Коши.
Из всякой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Послед $\{Z_n\}$ наз ограниченной, если $\exists M>0,|Z_n|<M$, $n \in M$.
Д-во: $|Z_n|=\sqrt{x^2+y^2}$; $\{x_n\}\{y_n\}$-ограниченные$\Longrightarrow\exists M>0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n|<M$ и $|y_n|<M$.
Из $\forall$ ограниченной действ послед $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность при $n_i\mapsto\infty$,$\{x_{n_i}\}\mapsto x_0$, этой подпоследовательности соответствует послед $\{y_{n_i}\}$, в которой можно выделить сходящуюся подпоследовательность при $n_{ik}\mapsto\infty$, $\{y_{n_{ik}}\}\mapsto y_0$ ей соответствует $\{x_{n_{ik}}\}$из $\{x_{n_i}\}$. $\{x_{n_{ik}}\}\mapsto x_0$.
$Z_{n_{ik}}$ из Z_n сходится.
Критерий Коши: послед К чисел $\{Z_n\}$-сх-ся СОГДА $(\forall \mathcal{E}>0)(\exists N = N(\mathcal{E}))$: $(\forall n>=N(\mathcal{E})$ и $\forall p \in \mathbb{N}):|Z_{n+p}-Z_n|<\mathcal{E}$.

3.Введение бесконечно удаленной точки. Сфера Римана.
$(\forall R>0)(\exists N = N(R))$: $(\forall n>=N(R))|Z_n|>R$. Послед $\{Z_n\}$ неограниченно возрастает; $\lim(n\mapsto\infty)(Z_n)= \infty$; $Z=\infty$-бесконечно удаленная точка. Пл-ть $\mathbb{C}$ комплексных чисел с добавление б/у точки наз расширенной и обозначается $\mathbb{C}$ с чертой(сверху).
$Z=\infty$, $|Z|=\infty$, $\forall ArgZ$.
Стереографическая проекция К числа

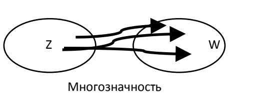


$P(0,0,1)$; $A(x,y,0)$; $A'(x',y',z')$; Из подобия треуг-ов$\Longrightarrow r'/r=l/1$; составим ур-ие прямой через P и A$\Longrightarrow(x'-0)/(x-0)=(y'-0)/(y-0)=(z'-1)/(0-1)=t$; $x'=xt$; $y'=yt$; $z'=1-t$; ур-ие сферы: $x'^2+y'^2+(z'-1/2)^2=(1/2)^2$; подставляем $x'=xt$; $y'=yt$; $z'=1-t$ и получим $t=1/(1+y^2+x^2)=1/(1+r^2) \Longrightarrow A'(x/(1+r^2), y/(1+r^2), r^2/(1+r^2))$; $r'=\sqrt{x^2/(1+r^2)^2 + y^2/(1+r^2)^2}=r/(1+r^2)$;

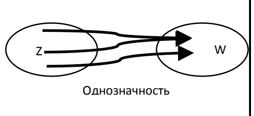
4.Определение функции К переменного, ее геом смысл. Многозначность и однолистность отображения.
Опр: Пусть на мн-ве E комплексной плоскости $\mathbb{C}$ задан закон f, ставящий соответствие $\forall$ точке мн-ва E некоторое К число W. На мн-ве E задана ф-я К переменного $W=f(Z)$, $Z\in E$.
Опр:Точка Z внутр т. мн-ва E, если $\exists$ $\mathcal{E}$ окружность т. Z, все точки которой принадлежат E (на границе уже не внутр т.).
Опр: Мн-во E область, если выполняются 2 условия. (1) $\forall$ т. мн-ва E внутренняя и (2) $\forall$ две точки мн-ва E можно соединить ломанной, все точки которой принадлежат E.
Опр: Т. Z внешняя точка обл. G, если $\exists$ $\mathcal{E}$ окружность т. Z, все точки которой не принадлежат G.
Опр: Т. Z граничная точка мн-ва G, если в $\forall$ окрестности этой т. есть т-и принадлежащие G и не принадлежащие. Все граничные точки образуют границу.
Опр: замкнутое мн-во это область, полученная присоединением всех граничных точек. Обознач. большой буквой с чертой.
Если $\forall$ область можно стянуть в т. – односвязность. Если нет, то – многосвязность (например область с дыркой).
Опр: обл G ограниченная, если она целиком лежит внутри круга некоторого радиуса R, в противном случае неограниченная.



Опр ф-ии К переменного (уточненное):однозначная ф-я к переменного Z, заданная в обл G, определяется з-ном f, ставящим в соответствие т. $Z\in G$ комплексное число $W=f(Z)$.G-обл существования. Мн-во чисел W наз обл изменения. $Z=x+iy \Longrightarrow W=f(x+iy)=U(x,y)+iV(x,y)$. Под заданием ф-ии К переменного понимается задание 2-х ф-ий действительного переменного $U(x,y)$ и $V(x,y)$. $|W|=\sqrt{U^2+v^2}$.
Если каждому Z соответствует лишь одно значение W , то функцию называют однозначной. Если некоторым z соответствует более чем одно значение W , функцию называют многозначной.
Точка W образ, а Z прообраз, при отображении обл G на мн-во D.



Многозначность



Однозначность

Например: $W^2=Z$-многозначность, $W=Z^2$-однозначность (многолистная ф-я, обратная будет многозначной). Обратное отображение наз обратной ф-ей $Z=f^{(-1)}(W)$.
Опр:ф-я наз однолистной в обл G, если в различных точках обл G она принимает различные значения (взаимно-однозначное отображение). Т.е. обратная ф-я к однолистной тоже однолистна, напр: $W=aZ+b$, $Z=(W-b)/a$.
Геом смысл:отображение одной области на другую.

5.Определение предела ф-ии по Коши и по Гейне. Непрерывность и ее геом смысл.
По Гейне: если независимо от выбора послед $\{Z_n\} \in G$ такой что $\lim_{n\mapsto\infty}(Z_n)= Z_0 \in G$, послед соответствующих значений $f(Z)(f(Z_n))_{n\mapsto\infty}\mapsto W_0$, то т. W_0 предел ф-ии, $W_0=\lim_{Z\mapsto Z_0}f(Z)$. Можно выбрать $\forall$ послед, а W_0 одно и тоже.
По Коши: W_0 наз пределом ф-ии, если при Я $Z\mapsto Z_0$ $(\forall \mathcal{E}>0)(\exists \Delta=\Delta(\mathcal{E})>0)$: $\forall Z|Z-Z_0|<\Delta(\mathcal{E})$: $|f(Z)-W_0|< \mathcal{E}$.
Непр ф-ии К переменного: ф-я f(Z) непр в т. $Z_0\in G$, если $\lim_{z\mapsto z_0}f(Z)= f(Z_0)$. Если ф-я непр во всех т-ах G, то она наз непр в обл G. $f(Z)=U(x,y)+iv(x,y)$ $\Longrightarrow$одновременная непр-сть для U и v.
Св-ва непр-ых ф-ий(1)$f_1(Z)\pm f_2(Z)$-непр, если непр-вны $f_1(Z)$ и $f_2(Z)$. (2) $f_1(Z)* f_2(Z)$-непр. (3) $f_1(Z)/f_2(Z)$-непр, если $f_2(Z) \neq 0$. (4) Если f(Z) непр в G, то $\exists M>0:|f(Z)|\leq M$, $\forall Z\in G$.

6. Определение производной ф-ии К переменного. Необх условие дифференцируемости ф-ии К переменного (условия Коши-Римана). Ф-ла нахождения производной.
Пусть f(Z) определена в обл G комплексной пл-ти Z. Если для $\forall Z_0 \in G$ $\exists\lim_{\Delta z\mapsto 0}((f(Z_0+\Delta Z)-f(Z_0))/ \Delta Z)$, то этот предел наз производной ф-ии в т. Z_0, $f'(Z_0)$-ф-ия дифференцируется в точке Z_0. С $\forall$ направления предел один и тот же.
Если ф-ия $f(Z)=U(x,y)+iv(x,y)$ дифференцируема в т $Z_0=x_0+iy_0$ обл G, то $\exists$-ют частные производные функций $U'_x(x,y)$, $U'_y(x,y)$, $v'_x(x,y)$, $v'_y(x,y)$, которые связаны соотношением Коши-Римана, т.е. $U'_x= v'_y$ и $U'_y=- v'_x$ обозначается условие (C-R).
Док-во:
$f'(Z_0)= \lim_{\Delta z\mapsto 0}((f(Z_0+\Delta Z)-f(Z_0))/ \Delta Z)$; (1)для удобства берем направление совпадающее с осью Ox, т.е. $\Delta Z=\Delta x \Longrightarrow \lim_{\Delta x\mapsto 0}((U(x_0+\Delta x, y_0)+iv(x_0+\Delta x, y_0)- [U(x_0, y_0)+iv(x_0, y_0)])/\Delta x)= \lim_{\Delta x\mapsto 0}((U(x_0+\Delta x, y_0)- U(x_0, y_0))/ \Delta x+i (v(x_0+\Delta x, y_0)- v(x_0, y_0))/ \Delta x)= U'_x(x_0,y_0)+iv'_x(x_0,y_0)$, если идем по горизонтали, т.е. по Ox.
(2) $\Delta Z=i\Delta y \Longrightarrow \lim_{\Delta y\mapsto 0}((U(x_0, y_0+\Delta y)+iv(x_0, y_0+\Delta y)- [U(x_0, y_0)+iv(x_0, y_0)])/i\Delta y)= \lim_{\Delta y\mapsto 0}((U(x_0, y_0+\Delta y)- U(x_0, y_0))/ i\Delta y+(v(x_0, y_0+\Delta y)- v(x_0, y_0))/ \Delta y)= -U'_y(x_0,y_0)i+v'_y(x_0,y_0)$, если идем по вертикали, т.е. по Oy. Сравнив действительные и мнимые части получим условие (C-R). $\Longrightarrow$ф-ла для нахождения производной: $f'(Z_0)=U'_x+iv'_x=-U'_y i+v'_y$.
Обратная теорема: если в точке (x_0,y_0) комплексной пл-ти Z $\exists$-ют U'_x, U'_y, v'_x, v'_y, связанные соотношением (C-R), то ф-ия $f(Z)=U+iv$ дифференцируема в точке $Z_0=x_0+iy_0$. Док-во: самостоятельно.

7. Условие Коши-Римана в полярных координатах. Формула вычисления производной.
$z=x+iy=re^{i\varphi}$
$f(z)=f(re^{i\varphi})=u(r,\varphi)+iv(r,\varphi)$
рис
одно направление: при зафиксированном радиусе меняем угол, второе: при зафиксированном угле идем по радиусу.
2) $f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=u(r_0+ir,\varphi_0)+iv(r_0+\Delta r,\varphi_0)-u(r_0,v_0)-iv(r_0,v_0)=[u(r_0+\Delta r,\varphi_0)-u(r_0,\varphi_0)]+i[v(r_0+\Delta r,\varphi_0)-v(r_0,\varphi_0)]$
$\Delta z=(r_0+\Delta r)e^{i\varphi_0}-r_0e^{i\varphi_0}= \Delta re^{i\varphi_0}$
$\lim_{(\Delta r\to 0)} [u(r_0+\Delta r,\varphi_0)-u(r_0,\varphi_0)]+ i[v(r_0+\Delta r,\varphi_0)-v(r_0,\varphi_0)]/ (r_0,\varphi_0)\Delta re^{i\varphi_0}=e^{-i\varphi_0}[u_r(r_0,\varphi_0)+ iv_r(r_0,\varphi_0)]$
1)$\Delta z=r_0e^{(i\varphi_0+ \Delta\varphi)}-r_0e^{i\varphi_0}= r_0e^{i\varphi_0}(^{i\Delta\varphi}-1)=\backslash e^x-1\to x, \Delta\varphi\to 0\backslash=r_0e^{i\varphi_0 i} \Delta\varphi$
$\Delta f=[u(r_0,\varphi_0+\Delta\varphi)-u(r_0,\varphi_0)]+ i[v(r_0, \varphi_0+\Delta\varphi)-v(r_0,\varphi_0)]$
$\lim_{(\Delta r\to 0)} [u(r_0,\varphi_0+\Delta\varphi)-u(r_0,\varphi_0)]+ i[v(r_0,\varphi_0+\Delta\varphi)-v(r_0,\varphi_0)]/ r_0e^{i\varphi_0}i\Delta\varphi=[u_\varphi(r_0,\varphi_0)+ iv_\varphi(r_0,\varphi_0)]/ir_0e^{i\varphi_0}$
$e^{-i\varphi_0}[u_r+ iv_r]= e^{-i\varphi_0}/ir_0 [u_\varphi+ iv_\varphi]$
$u_r+ iv_r=1 /r_0 [u_\varphi-iv_\varphi] \to$ **$u_r=v_\varphi/r_0$, $v_r=-u_\varphi/r_0$ (CR)**
$f'(z)=e^{-i\varphi}(u_r+ iv_r)$ – способ вычисления производной

8. Понятие аналитической функции. Свойства аналитических функций.
Функция $w=f(z)$ называется аналитической в области G, если она дифференцируема в области G а ее производные непрерывны.
$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$, $z=x+iym$ $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$
$u_x=e^x\cos y$, $v_y=ex\cos y$, $u_y=-e^x\sin y$, $v_x=e^x\sin y$ – выполняется (CR)
$(e^z)'=u_x+iv_x=e^x[\cos y+i\sin y]=e^z$ – аналитическая в G
$W=\ln z \to z= e^w$
$r e^{i\varphi}=e^{u+iv}=e^ue^{iv}$
$r=e^\varphi$, $\varphi=v+2\pi k$, $k\in Z \to u=\ln r$, $v=\varphi+2\pi k =\arg z+2\pi k$
$W=LnZ=\ln r+i(\varphi+2\pi k)$, $k\in Z$
$u_r=1/r$, $v_\varphi=1$, $v_r=0$, $u_\varphi=0$ – (CR) выполняется, но $r\neq 0$
$(Lnz)'= e^{-i\varphi}(u_r+ iv_r)= e^{-i\varphi}(1/r)=1/re^{i\varphi}=1/z$
Lnz – аналитична в плоскости С, кроме z=0
Свойства
$f(z)\in C^1$
1. если f(z) аналитична в обл G, то она непрерывна в G.
2. если f(z), g(z) аналитичны в G, то $f(z)\pm g(z)$, $f(z)*g(z)$, $f(z)/g(z)$ $[g(z)\neq 0]$ аналитичны в G.
3. если $w=f(z)$ аналитична в G со значениями в обл D плоскости W, а g(w) аналитична в D, то g(f(z)) аналитична G. $\exists$ $[g(f(z))]'=g_w' f_z'$
4. если $w=f(z)$ аналитична в G, $|f'(z)|\neq 0$ в окрестности т. $z_0\in G$, то в в окрестности т. $z_0\in G$ существует обратная функция $z=f^{-1}(w)$, которая аналитична и ее производная равна $[f^{-1}(w)]_w'=1/f'(z)$.
5. если у аналитической функции $w=f(z)$ известна действительная часть u(x,y), то мнимая восстанавливается с точностью до const.
6. $w=f(z)$ – аналитична в G, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$
1) $u(x,y)=C$ – семейство u-линий
2) $v(x,y)=C$ – семейство v-линий
u и v –линии пересекаются под прямым углом
рис
grad u : $du=dc=0$, $u_xdx+u_ydy=0$
$gradu=(u_x\ u_y)$
$(grad\ u, dr)=0$, $dr=dxi+dyj$
$(gradu+gradv)=u_xv_x+u_yv_y=-u_xu_y+u_yu_x=0$
(CR) выполняется, т.к. функции аналитичны : $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ (CR)
7. Если $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ аналитична в G и $\exists$ u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy}, то u(x,y), v(x,y) – гармонические (т.е. являются решениями уравнения Лапласа $u_{xx}+u_{yy}=0$, $v_{xx}+v_{yy}=0$, $\Delta u=0$, $\Delta v=0$, треугольник называется Лапласиан)

12. Конформное отображение, осуществляемое показательной функцией. Пример: отображение бесконечной вертикальной полосы на верхнюю полуплоскость.
Показательная функция $w=e^z=e^xe^{iy}= \{|w|=e^x=|w|e^{i\arg w},\arg w=y\}$
$W=e^z$, $z=\ln w$, $(e^z)'=e^z\neq 0$
Вся плоскость $z \to e^z \to$ конформно отображаются на бесконечную поверхность Римана.
Пример. $\xi=e^{i\pi/2}t=(\cos\pi/2+i\sin\pi/2)t=it$

9. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексного переменного. Свойства сохранения углов и постоянства растяжения.
$f'(z_0)=\lim[f(z_0+\Delta z)-f(z_0)]/\Delta z=|f'(z_0)|e^{i\arg f(z_0)}$
смысл arg $f'(z_0)$:
задана аналитическая функция f(z) в обл G
γ переходит в Г, r – касательная к γ в т.z_0, τ– касательная к г в т.w_0
γ: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\leq t\leq\beta$, $z=x+iy=x(t)+iy(t)=z(t)$ – комплексно-значная функция, $tg\alpha=y'(t_0)/x'(t_0)=y_x'(t_0)$
Г: $w=f(z(t))$, $\alpha\leq t\leq\beta$, $f_t'=f_z'*z_t'$, $w'(z(t_0))=f'(z_0)*z_t'(t_0)$
$\arg w'(t_0)= \arg f'(z_0)+\arg z'(t_0)$
$\arg f'(z_0)= \arg w'(t_0)-\arg z'(t_0)$
$\arg f'(z_0)=\beta-\alpha$ смысл аргумента производной функции в комплексной плоскости z d фиксированной точке z_0 описывает угол поворота касательной кривой проведенной в т.z_0 при переходе ее в комплексную плоскость w.
Смысл $|f'(z_0)|$
$|(f(z_0+\Delta z)-f(z_0))/\Delta z|=|(w_0+\Delta w-w_0)/\Delta z |=|\Delta w/\Delta z|=|\Delta w|/|\Delta z|$ - коэффициент растяжения
$\Delta z\to 0$ $\lim_{(\Delta z\to 0)}|\Delta w|/|\Delta z|=|f'(z_0)|$ - коэффициент растяжения в т.z_0.
Модуль производной аналитической функции в точке z_0 имеет смысл коэффициента растяжения бесконечно малых отрезков, проведенных из z_0 в плоскости z и ее образа в плоскости w.
a) Свойство постоянства растяжения. При отображении бесконечно малые линейные элементы преобразуются подобным образом.
b) Свойство сохранения углов.
Конформное отображение сохраняет углы между кривыми в точках их пересечения.
Отображение: бесконечно малая окружность → бесконечно малую окружность; бесконечно малый треугольник → бесконечно малый треугольник.

10. Определение конформного отображения. Основная задача теории конформных отображений. Функции, осуществляющие конформные отображения.
Взаимно-однозначное отображение области G комплексной плоскости z на область D комплексной плоскости w называется конформным если это отображение во всех точках области G обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений бесконечно малых элементов.
Фундаментальной задачей в теории конформных отображений является: заданы области G и D, надо определить функцию с помощью которой осуществляется переход.
Теорема. Пусть функция f(z) является однозначной, взаимно одноместной и аналитичной в области G комплексной плоскости z, причем $f'(z)\neq 0$ для любого $z\in G$. Тогда функция f осуществляет конформное отображение области G на область значений D в плоскости w. (доказательство из конформности и геометрического смысла модуля).
Обратная теорема. Пусть функция f(z) осуществляет конформное отображение I рода области G плоскости z, на область D плоскости w и ограничена в G. Тогда функция f(z) является однозначной, одноместной и аналитичной в области G и $f'(z)\neq 0$ для любого $z\in G$.
$w=f(z)$ – аналитическая функция. Они являются конформными 1 рода
$w=z=x-iy$ – не аналитическая , из условия CR.
Рис конформное отображение 2 рода.
$w=f(z)$ – аналитична, однозначна, одноместна
$w=f(z)$ – все конформные 2 рода, где f(z) аналитична (углы сохраняются только по величине, но не по направлению).
Рис
Функции, осуществляющие конформные отображения: линейная, степенная, показательная

11. Конформные отображения, осуществляемые линейной и степенной функциями. Поверхность Римана.
1.Линейная функция $w=az+b$, $a,b\in C$, $a\neq 0$, $z=(w-b)/a \to$ функция однозначна и одноместна. $w'=a\neq 0$
Можно сделать вывод , что функция аналитичная , одноместная и однозначная. Следовательно она имеет конформное отображение расширенной плоскости z на расширенную плоскость w.
рис
$z=(w-b)/a \to \xi=t/(a+bt)$ – однозначная, одноместная , значит конформная.
$\xi_t'=a/(a+bt)^2\neq 0$. $t=0 \to \xi'\neq 0$
|a| - коэффициент растяжения, arg a – угол поворота, b – параллельный перенос
2. Степенная функция $w=z^n$, $n\in N$ $(n>1)$
$z=w^{1/n}$
γ_1: $0<r<\infty$, $\varphi=0$, $z=r\theta^{i\varphi}=r$
γ_2: $z=re^{i2\pi/n}$
$Г_1$: $w=r^n$, $0<r<\infty$
$Г_2$: $w=r^ne^{i2\pi}$
Степенная функция разворачивает сектор на всю плоскость с разрезом $w'=nz^{n-1}\neq 0$, $z\neq 0$ рис Риман предложил слить границы.

13. Основные принципы конформного отображения.
а)Взаимнооднознач. соответствие
f(z) - однозначная, однолистная, аналитическая, $f'(z)\neq 0$, для любого $z\in G$
Однолистность f(z) - необходимое усл-е конформности
Теор. Пусть ф-ция $w=f(z)$ явл-ся однознач. и аналит. в обл-ти G и осущ-ляет взаимнооднозн. обл-ть D пл-ти W. Тогда это отображение явл-ся конформным.
Пояснение к док-ву:
1)f(z) - однолистная
2)Показать, что $f'(z)\neq 0$ для любого $z\in G$
б)Принцип соответствия границ
Направление обхода по замкнутой кривой в компл.плос-ти Z наз-ся "+", если обл.G, замыкаемая кривой C, остается с левой стороны от направления движения.
При отображении C в $\overline{C}$ сохраняется направление обхода, если при непрерывном движении т. по кривой C в положит.направлении пл-ти G соответствующая т. пл-ти W в обл.D тоже будет двигаться в положит. направлении
Теор.Пусть в конечной обл.G пл-ти Z огран. контуром C, задана однознач. аналит. ф-ция f(z), непр. в обл.$\overline{G}$=GUC и осущ. взаимнооднозн. отображение контура C в контур Г в пл-ти W. Тогда, если при данном отображении контуров сохр. напр-е обхода, то ф-ция f(z) осущ. конформ. отображ. обл.G на обл.D, замыкаемой конуром Г в пл-ти W.
в)Принцип симметрии
Теор.Пусть в огран. обл.G, граница которой C имеет прямолинейный участок C' задана ф-ция $w=f(z)$ которая осущ-ляет конформ. отображение обл.G на обл.D. При этом участок C' переходит в прямолин. участок Г', границы Г обл.D. Тогда в обл.$\overline{G}$, яв-ся зеркальной G относительно C' можно построить ф-цию $w=f(z)$, яв-ся аналит. продолжением исходной $w=f(z)$ в обл.$\overline{G}$. При этом новая ф-ция $w=f(z)$ будет осущ. конформ. отображение обл.$\overline{G}$ на обл.$\overline{D}$, которое яв-ся зеркальным обл.D относительно участка Г'.

14. Теорема Римана. Невозможность конформного отображение многосвязной области на односвязную. Условие единственности отображения.

Теор. Всякую односвязную обл.G компл. пл-ти Z, граница которой состоит более чем из одной точки, можно конформно отобразить на внутренность единичного круга в пл-ти W.

Возможно лишь конформное отображение одинаковой связности.

Теор. о единственности конформ. отображения. Ф-ция w=f(z) осущ. конформ. отображение односвязной обл.G пл-ти Z на внутренность единичного круга |w|<1, так, что f(z0)=0, arg f'(z0)=α (z0ϵG, αϵR) находится единственным образом.

Замеч. Достаточно найти 3 точки, чтобы однозначно найти ф-цию w=f(z)

15. Основные свойства конформного отображения, осуществляемого дробно-линейной функцией.

1) Теор. Задание соответствия 3 различ. точкам в пл-ти Z 3-х точек в пл-ти W дробно-лин. отображения опред. однозначно.

Док-во: $w_1=\lambda\frac{z_1+\alpha}{z_1+\beta}$ ∪ $w_2=\lambda\frac{z_2+\alpha}{z_2+\beta}$ ∪ $w_3=\lambda\frac{z_3+\alpha}{z_3+\beta}$

Решая систему, находим (λ,α,β)

2) Круговое св-во.

Теор. Дробно-лин. ф-ция переводит окружности на пл-ти Z, в окружности на W. Прямые включ. в сем-ва окр-стей, т.к. могу рассматриваться как окр-сти беск. большого радиуса.

Док-во. w=1/z ⇒z=1/w=1/(u+iv)=(u-iv)/(u^2+v^2)

x=u/(u^2+v^2), y = -v/(u^2+v^2)

A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 ⇒ A/(u^2+v^2)+Bu/(u^2+v^2)-Cv/(u^2+v^2)+D=0 ⇒ D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0 - окр-сть в пл-ти Z, проход. через начало координат.

если A=0, то пол-ся прямая в пл-ти Z, D(u^2+v^2)+Bu-Cv=0 - окр-сть в пл-ти W проход. через начало коорд.

если D=0, то окр-сть в пл-ти Z переходит в прямую в пл-ти W.

3) Теор. При отображении осуществ. дробно-лин. ф-цией, точки симметричные относит. некот. окр-сти переходят в точки относительно образа этой окр-сти в пл-ти W.

Док-во: вытекает из принципа зеркальности конформных отображений.

16. Отображение верхней полуплоскости на единичный круг с помощью дробно-линейной функции.

Отобразим обл.G с помощью дробно-лин. ф-ции в обл.D:

G:Im z >0 w = $\lambda\frac{\alpha+z}{\beta+z}$ D: |w|<1

Решение: C→Γ; C: y=0, -∞<x<∞ ⇒ z=x; Γ: |w|<1

w = $\lambda\frac{\alpha+z}{\beta+z}$, $|w|=|\lambda|\frac{|x+\alpha|}{|x+\beta|}=1$ (-∞<x<∞) ⇒ |λ|=1 ⇒ $\lambda=e^{i\varphi}$

$\begin{cases} z=-\alpha;\ \operatorname{Im}(-\alpha)>0, \operatorname{Im}(\alpha)<0 \\ z=-\beta; \end{cases}$ ⇒ $-\bar\alpha$=-β ⇒ $\bar\alpha$=β

$w=e^{i\varphi}\frac{z+\alpha}{z+\bar\alpha}$, Im(α)>0

17. Определение интеграла от функции комплексного переменного, его вычисление.

AB - кусочно-гладкая кривая

$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, tϵ[α;β], $x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$ - условие гладкости

z=x(t)+iy(t)=z(t) - комплексно-значимая функция

Пусть на кривой AB задана ФКП w=f(z)ϵ[AB]. Разобьем произвол. образом отрезок AB на n-частей, α= t0 < t1 < t2 <...< tn=β; tk=zk=z(tk); $z_{k-1}z_k$ - элементарная дуга; k=$\overline{1,n}$.

Выбирается произвольным образом точка $\xi_k \epsilon z_{k-1}z_k$

$$\lim_{\max|z_{k-1}z_k|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\xi_k-\xi_{k-1})=\int_{AB} f(z)dz$$

Если A=B, то C - замк. контур; $\int_C$ f(z)dz - контурный, C+ - положительное напр-е обхода.

$\xi_k=\zeta_k+i\eta_k$ ⇒ $f(\xi_k)=u(\zeta_k,\eta_k)+iv(\zeta_k,\eta_k)$

$z_k=x_k+iy_k$, $z_{k-1}=x_{k-1}+iy_{k-1}$

$\sum_{k=1}^n[u(\zeta_k,\eta_k)(x_k-x_{k-1})-v(\zeta_k,\eta_k)(y_k-y_{k-1})]$ + $i\sum_{k=1}^n[u(\zeta_k,\eta_k)(y_k-y_{k-1})+v(\zeta_k,\eta_k)(x_k-x_{k-1})=\int udx-vdy + i\int udy+vdx=\int_{AB}f(z)dz$

u,v - кусочно-непрерывные функции; f(z) - не обязательно аналитическая

Вычисление интеграла

AB: z=z(t), tϵ[α,β]

$$\int_{AB} f(z)dz=\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

18. Свойства интеграла от функции комплексного переменного.

1)$\int_{AB}f(z)dz=-\int_{BA}f(z)dz$

2)Линейность

$\int_{AB}\alpha f(z)dz=\alpha\int_{AB}f(z)dz$, αϵC

$$\int_{AB}(f1(z)+f2(z))dz=\int_{AB}f1(z)dz+\int_{AB}f2(z)dz$$

3)Аддитивность

$$\int_{AB}f(z)dz=\int_{AC}f(z)dz+\int_{CD}f(z)dz+\int_{DB}f(z)dz$$

4)Оценка интеграла

$$\left|\int_{AB}f(z)dz\right|\le\lim_{\max|\Delta z|\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\,\Delta z_k$$

$$\le\lim_{\max|\Delta z|\to 0}\sum_{k=1}^n|f(\xi_k)|\,|\Delta z_k|=\int_{AB}|f(z)|dl$$

$M=\max\limits_{z\epsilon AB}|f(z)|$

$$\left|\int_{AB}f(z)dz\right|\le M*\text{длина дуги AB}$$

5)Вычисление интеграла

AB: z=z(t), tϵ[α,β]

$\int_{AB}f(z)dz=\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$

22. Введение неопределенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть функция f(x) определена на некотором промежутке. Совокупность всех ее первообразных на этом промежутке называется неопределённым интегралом от функции f(x) и обозначается ∫f(x)dx.

Φ(z) – бесконечно много первообразных. $\int_{z_1}^{z_2}f(z)dz=\Phi(z)\Big|_{z_1}^{z_2}$.

$\int_{z_1}^{z_2}f(z)dz=\int_{z_0}^{z_2}f(z)dz-\int_{z_0}^{z_1}f(z)dz=\Phi(z_2)-\Phi(z_1)$.

19. теорема Коши для односвязной области.

Пусть в односвязной области G задана функция f(z), являющаяся аналитичной и однозначной. Тогда интеграл от функции по любому замкнутому контуру Γ, целиком лежащем в G, будет равен 0. $\int_\Gamma f(z)dz=0$.

Док-во: формула Грина: если функции P(x,y) и Q(x,y) непрерывны в замкнутой области $\bar D$, а их частные производные в D (где $\bar D=D\cup\Gamma$), то справедлива формула $\int_\Gamma Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$.

$\int_\Gamma f(z)dz=\int_\Gamma Udx-Vdy+i\int_\Gamma Udy+Vdx$,замена в 1-м интеграле P=U(x,y),Q=-V(x,y), во втором P=V(x,y),Q=U(x,y).

Т.к. f(z)-аналитическая, то она непрерывна в G. Следовательно U_x', V_x', U_y', V_y' – непрерывные функции в D⊂G.

$=\iint_D(-V_x-U_y)dxdy+i\iint_D(U_x-V_y)dxdy=0$. Условие Коши-Римана: $\begin{cases}U_x=V_y\\ V_x=-U_y\end{cases}$.

20. Обобщение теоремы Коши на случай многосвязной области.

Пусть f(z)-аналитична и однозначна в области G, граница которой C состоит из $C=C_0^+\cup C_1^-\cup C_2^-\cup\ldots\cup C_n^-$. Тогда $\int_C f(z)dz=0$.

Док-во: Υ_1[б], …, Υ_m – искусственные разрезы. $\Gamma=C_0\cup\Upsilon_1\uparrow\cup C_1^-\cup\Upsilon_1\downarrow\cup\ldots\cup\Upsilon_m\uparrow\cup C_m^-\cup\Upsilon_m\downarrow$ - граница односвязной области при введении разрезов. По теореме Коши $\int_\Gamma f(z)dz=0$.

$\int_{C_0}f(z)dz+\int_{\Upsilon_1\uparrow}f(z)dz+\int_{C_1^-}f(z)dz+\int_{\Upsilon_1\downarrow}f(z)dz+\cdots+\int_{\Upsilon_m\uparrow}f(z)dz+\int_{C_m^-}f(z)dz+\int_{\Upsilon_m\downarrow}f(z)dz=0.$ => $\int_C f(z)dz=0$.

$\int_{C_0^+}f(z)dz\neq 0$.

f(z) – аналитическая в односвязной области G, z₀ϵG – фиксированная точка.

$\int_\Upsilon f(z)dz=0$ => $\int_{\Upsilon_2}f(z)dz-\int_{\Upsilon_1}f(z)dz=0$ =>

$\int_{\Upsilon_2}f(z)dz=\int_{\Upsilon_1}f(z)dz$.

$\int_{\Upsilon_k}f(z)dz=\Phi(z)=\int_{z_0}^z f(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}$*, где Φ(z) – первообразная.*

21. Теорема о первообразной аналитической функции в односвязной области.

Пусть функция f(z) определена и непрерывна в односвязной области G и интеграл от этой функции равен по любому замкнутому контуру Γ, целиком лежащем в области G. Тогда $\Phi(z)=\int_{z_0}^z f(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}$ *является аналитической в области G и ее производная* $\Phi'(z)=f(z)$.

Док-во: существует $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}$ =?

$\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}=\frac{\int_{z_0}^{z+\Delta z}f(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}-\int_{z_0}^z f(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}}{\Delta z}=\frac{\int_z^{z+\Delta z}f(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}}{\Delta z}$.

$\left|\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{\Delta z}\right|*\left|\int_z^{z+\Delta z}f(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}-f(z)dz\right|$ = *из определения интеграла* $\int_z^{z+\Delta z}1*d\mathfrak{z}=\Delta z$, $=\left|\frac{1}{\Delta z}\right|*\left|\int_z^{z+\Delta z}[f(\mathfrak{z})-f(z)]d\mathfrak{z}\right|\le\left|\frac{1}{\Delta z}\right|*\int_z^{z+\Delta z}|f(\mathfrak{z})-f(z)|dl\le\max|f(\mathfrak{z})-f(z)|*|\Delta z|*\left|\frac{1}{\Delta z}\right|$.

$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}=\Phi'(z)$ => $\Phi'(z)=f(z)$.

23. Формула Коши. Формула среднего значения(фсз).

f(z) – однозначна и аналитична в односвязной области G, z₀ – фиксированная точка внутри контура Γ⊂G, z₀ЄG. C_ρ*: |z-z₀|=ρ – внутри Γ.*

$\varphi(z)=\frac{f(z)}{z-z_0}$ *– аналитична везде внутри области G, кроме точки z₀. В кольце φ(z) – аналитическая. Тогда по обобщенной теореме Коши* $\int_{C^+}\varphi(z)dz=\int_{C_\rho^+}\varphi(z)dz$.

Интеграл не зависит от формы контура, то мы можем что угодно делать с окрестностью. Интеграл не зависит от ρ. C_ρ: |z-z₀|=ρ, z-z₀=$\rho e^{i\varphi}$(0≤φ≤2Π)=>dz=$i\rho e^{i\varphi}d\varphi$ => $\int_{C_\rho^+}\varphi(z)dz=\int_0^{2\Pi}\frac{f(z_0+\rho e^{i\varphi})}{\rho e^{i\varphi}}i\rho e^{i\varphi}d\varphi=i\int_0^{2\Pi}f(z_0+\rho e^{i\varphi})d\varphi=i\int_0^{2\Pi}[f(z_0+\rho e^{i\varphi})-f(z_0)]d\varphi+i\int_0^{2\Pi}f(z_0)d\varphi=2\Pi if(z_0)+i\int_0^{2\Pi}[f(z_0+\rho e^{i\varphi})-f(z_0)]d\varphi$.

$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho^+}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\Pi if(z_0)+\lim_{\rho\to 0}i\int_0^{2\Pi}[f(z_0+\rho e^{i\varphi})-f(z_0)]d\varphi=2\Pi if(z_0)$. *f(z) – аналитична => f(z) – непрерывна.*

$f(z_0)=\frac{1}{2\Pi i}\int_{C^+}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$ *– формула Коши.*

Фсз: $\bar\lambda=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N\lambda_k$.

C_{R0}: |z-z₀|=ρ, z-z₀=R₀ei(0≤φ≤2Π)=>dz=$iR_0e^{i\varphi}d\varphi$

=> $f(z_0)=\frac{1}{2\Pi i}\int_0^{2\Pi}\frac{f(z_0+R_0e^{i\varphi})}{R_0e^{i\varphi}}iR_0e^{i\varphi}d\varphi=\frac{1}{2\Pi R_0}\int_0^{2\Pi}f(z_0+R_0e^{i\varphi})R_0d\varphi=\frac{1}{2\Pi R_0}\int_{C_{R_0}^+}f(z)dl$.

24. Принцип максимума модуля аналитической функции.

Пусть функция f(z) является аналитической в области G и непрерывна в замкнутой области $\bar G=G\cup\Gamma$. Тогда или |f(z)|=const для любой zЄG, или |f(z)| достигает максимального значения на границе Γ.

Док-во: Поскольку f(z)=U(x,y)+iV(x,y), то $|f(z)|=\sqrt{U^2(x,y)+V^2(x,y)}$ – непрерывна в области $\bar G$(вытекает из аналитичности f(z) внутри G и непрерывности в $\bar G$).

Существует z₀ЄG, где |f(z₀)|-max. Для любой точки zЄG: |f(z)|≤|f(z₀)|=M.

M=f(z₀)= $\frac{1}{2\Pi R_0}\int_{C_{R_0}^+}f(z)dl$. =>

M=f(z₀)= $\frac{1}{2\Pi R_0}\left|\int_{C_{R_0}^+}f(z)dl\right|\le\frac{1}{2\Pi R_0}\int_{C_{R_0}^+}|f(z)|dl\le\frac{1}{2\Pi R_0}M\int_{C_{R_0}^+}dl$=M => M≤M.

Значит $\frac{1}{2\Pi R_0}\int_{C_{R_0}^+}|f(z)|dl$=M.

Внутри контура C_{R0} |f(z)|=m для всех z.

Для любой zЄG: |f(z)|=M=const.

Точка z₁ лежит внутри C_{R0}: |f(z₁)|=M. Для любой z из круга, замыкаемого C_{R1}: |z-z₁|<R₁ : |f(z₁)|=M₁.

Путем конечного числа построений, мы приходим к выводу, что |f(z)|=M. |f(z)|=const во всех точках.

Замечание: если аналитическая функция f(z) в области G не обращается в 0 ни в одной точке(например e^z), то справедлив принцип минимума модуля: минимальные значения |f(z)| достигаются на границе G.

27)теорема Морера : пусть ф-я f(z) явл. Непрерывной в односвязной обл-ти G и интеграл по любому контуру C равен 0. Тогда f(z)-аналитическая в обл-ти G.

Док-во: $\int_C f(z)dz=0\to\int_{z_0}^z f(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}=F(z)$

Т.к. ∃$F'(z)$(непрерывна)= f(z) (непрерывна), то F(z)-аналитич. в обл-ти G.

Значит ∃$F^{(n)}(z)$ – тоже аналитическая.

∃$F''^{(z)}$(аналитич.) = $f'(z)$

25) Аналитическая зависимость интеграла от параметра.

Расмотрим ф-ию 2-ух комплексных переменных fi(z,ʒ).Для ней z=x+iy∈ G, ʒ = ξ + iη ∈ C.

Условия на fi(z,ʒ):

А) для ∀ʒ ∈ C ф- я fi(z,ʒ) явл. Аналит. В обл. G.

В) для ∀ʒ ∈ C и ∀z ∈ G ф − и fi(z,ʒ) и $\frac{\partial fi(z,ʒ)}{\partial z}$ явл. Непрерывными по совокупности аргументов

Теор: ф-ия F(z) явл . аналитической в области G, а её производную можно вычислить под знаком интеграла, т.е. справедлива ф-ла

F'(z)=$\int_C\frac{\partial fi(z,ʒ)}{\partial z}$dʒ

Док-во:

fi(z,ʒ)=U(x,y,ξ,η)+iV (x,y,ξ,η)

dʒ=dξ+dη

F(z)= $\int_C$ U dξ-V dη+i$\int_C$ U dη + Vdξ

Из условия (В) вытекает : ∃U_x,U_y,V_x,V_y и они непрерывны по совокупности аргументов

$U_x=\frac{\partial}{\partial x}(\int_C$ U dξ − V dη)=$\int_C$ U_x dξ − V_x dη

$U_y=\int_C U_y$ dξ − V_y dη

$V_x=\int_C U_x$ dη + V_x dξ

$V_y=\int_C U_y$ dξ + V_y dη

$\begin{cases}U_x=V_y\\ U_y=-V_x\end{cases}$(CR)-?

Из усл-я (а) вытекает : $\begin{cases}U_x=V_y\\ U_y=-V_x\end{cases}$(CR)

$\begin{cases}U_x=\int_C U_x\,dξ+U_y\,dη\\ V_y=\int_C U_y\,dη+U_x dξ\end{cases}$--> $U_x=V_y$

$\begin{cases}U_y=\int_C U_y\,dξ-U_x\,dη\\ -V_x=\int_C -U_x\,dη+U_y dξ\end{cases}$--> $U_y=-V_x$

Усл-е CR выполняется=> F(z)- аналит. Ф-ия

∃$F'(z)=U_x+iV_x$=$\int_C U_x$ dξ + U_y dη+i$\int_C U_x$ dη − U_ydξ=$\int_C U_x$ (dξ − I dη) + U_y(dη − I dξ) =

$\int_C U_x dʒ-iU_y dʒ=\int_C(U_x+iV_x)dʒ=\int_C\frac{\partial fi(z,ʒ)}{\partial z}$dʒ

26)теорема о существовании производных всех порядков у аналитич. ф-ни

Теор:Пусть ф-ия f(z) явл. Аналит. В обл-ти G и непрерывной в обл-ти Ḡ=G∪ Γ. Тогда во всех точках обл-ти G существуют производные любого порядка ф-ии f(z).$f^{(n)}=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(ʒ)}{(ʒ-z)^{n+1}}$dʒ-обобщенная ф-ла Коши. Рассмотрим точки не очень близкие к границе (D⊂G). Для ∀z ∈: $|z-ʒ|\ge d$.

$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(ʒ)}{(ʒ-z)}$dʒ-ф-а Коши.

А) fi(z,ʒ)= $\frac{f(ʒ)}{(ʒ-z)}$-аналитическая в обл-ти D.

В) $\frac{f(ʒ)}{(ʒ-z)}$, $\frac{f(ʒ)}{(ʒ-z)^2}$- непрерывность.

Из доказанной теоремы ∃$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f(ʒ)}{(ʒ-z)}\right)$dʒ=$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(ʒ)}{(ʒ-z)^2}$dʒ

Аналогично рассуждая приходим к выводу, что

f’’(z)= $\frac{2}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(ʒ)}{(ʒ-z)^3}$dʒ

$f^{(n)}=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(ʒ)}{(ʒ-z)^{n+1}}$dʒ

Теорема доказана для любой внутренней точки z.

28) Теорема Лиувилля.

Теор Пусть в расширенной комплексной области Ĉ задана аналит-я ф-я f(z) с ограниченным модулем: $\exists M>0:|f(z)|\in M$*для* ∀z ∈ Ĉ *.*

Тогда f(z) может быть только константой.

Док-во:

Воспользуемся ф-лой $f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(ʒ)}{(ʒ-z)^2}$dʒ=$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(ʒ)}{(ʒ-z)^2}$dʒ

Для ∀ʒ ∈ C_R: $|f(z)|\le M$ C_R: $|ʒ-z|=R$

$0\le|f'(z)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_R}\frac{f(ʒ)}{(ʒ-z)^2}dʒ\right|\le\frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_R}\frac{M}{R^2}dl\right|\le M/R$

$0\le|f'(z)|\le M/R$ для любой окрестности .

R→ ∞ => $|f'(z)|$=0 => $f'(z)$=0 => $f'(z)$= const

29)основная теорема высшей алгебры

Всякий многочлен P(z)=$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$*(где* $a_i\in C$*)имеет, по крайней мере, хотя бы один нуль.*

Док-во(от противного):

Пусть P(z) не имеет ни одного нуля , т.е. нигде не обращается в нуль на всей комплексной области

∀z ∈ Ĉ : P(z)≠0

f(z)=1/P(z)- ф-ия , аналитическая во всей Ĉ

$\lim_{z\to\infty}f(z)=\lim 1/_{z\to\infty}P(z)=0$

∃R > 0 для∀z : |z| ≥R

|f(z)| ≤ 1

По теор. О принципе нах. Модуля: ∀z : |z|<R : |f(z)| ≤ 1

Отсюда следует, что на все пл-ти для : ∀z ∈ Ĉ : |f(z)| ≤ 1

=> f(z)=C! //(c=const)

Получено противоречие f(z)=1/R(z) и f(z)=C!

30) Опред . равномерной сходимости

Функц . ряд $\sum_{n=1}^\infty f_n(z)$ *наз. Равномерно сходящимся в области G,если* $\forall\mathcal{E}>0:\exists N=N(\mathcal{E}):\forall n\ge N(\mathcal{E}):\left|\sum_{n=1}^\infty f_n(z)\right|<\mathcal{E}$ *одновременно для всех z из G.*

Достаточный признак Вейерштрасса : если для всех zЄ G члены функционального ряда мажорируются членами сходящегося числ-го ряда, то функциональный ряд сходится равномерно в G.

Док-во: Имеем функц. ряд$\sum_{n=1}^\infty f_n(z)$ *и числ. ряд*$\sum_{n=1}^\infty a_n$*- сходящийся.* $\forall n\in N:|f_n(z)|\le a_n$

$\sum_{n=1}^\infty a_n$: $\forall\mathcal{E}>0\ \exists N=N(\mathcal{E}):\forall n\ge N(\mathcal{E}):\left|\sum_{k=n+1}^\infty a_k\right|<\mathcal{E}$

Расмотрим $\left|\sum_{k=n+1}^\infty f_k(z)\right|\le\sum_{k=n+1}^\infty|f_k(z)|\le\sum_{k=1}^\infty a_k<\mathcal{E}$

$\to\left|\sum_{k=n+1}^\infty f_k(z)\right|<\mathcal{E}$

Критерий Коши:

Функ. Ряд $\sum_{n=1}^\infty f_n(z)$ *сход. Равномерно согда,*

$:\forall\mathcal{E}>0\ \exists N=N(\mathcal{E})\ \forall N\ge N(\mathcal{E})\ \forall n\ge N(\mathcal{E})$*и* $\forall p\in N:\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}f_k(z)\right|<\mathcal{E}$

Одновременно для всех z из G.

Док-во как в обл-ти действит ф-ий.

31)Первая теорема Вейерштрасса для рядов аналитических функций.

Пусть члены функционального ряда $f_n(z)$ –аналитические функции в области G , а сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ равномерно сходится в $\overline{D} \subset G$ тогда имеют место следующие предположения :

1) сумма ряда f(z) является аналитической в области G
2) функциональный ряд можно по членно дифференцировать в области G
3) ряд составленный из производных $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ равномерно сходится в области $\overline{D} \subset G$

Док-во: 1)
Выберем произвольную точку $z_0 \in G$ (рис1)
Выберем односвязную область $\overline{D} \subset G$ содержащая точку z_0 .В области $\overline{D}$ выберем контур $\Gamma \subset \overline{D}$
z_0 внутри контура.
По свойству (1) f(z)- непрерывная в области D.По свойству (2)
$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_\Gamma f_n(z)dz}_{\text{по коши}=0, f_n(z)-\text{аналитические}} = 0$ следовательно по теореме Морера f(z)-аналитическая в D.
Док-во: 2)
$\min_{з\in C}|з - z_0| = d > 0$ рассмотрим исходный функциональный ряд $.\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$.На контуре C ряд равномерно сходится, а значит по свойству (2) : $\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz$
По теореме Коши $\frac{2\Pi i}{K!} f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Pi i}{K!} f_n^{(k)}(z_0)$ => $\exists f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z_0)$
Док-во: 3)
$\min_{з\in C}|з - z_0| = d$.Рассмотрим остаток функционального рядя $r_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} f_m(z) = \underbrace{f(z)}_{\text{аналитична по положению (1)}} - \underbrace{\sum_{m=1}^{n} f_m(z)}_{\text{сумма аналитична}}$ =>
разность 2 − ч аналитических функций = аналитической вункции => $r_n(z)$ − аналитическая.
Обобщенная формула Коши $\frac{k!}{2\Pi i}\int_C \frac{f_n(з)}{(з-z_0)^{k+1}}dз = r_n^{(k)}(z_0)$
из равномерной сходимости :
$\sum_{n=1}^{\infty} f_{(n)}(z)$: $\forall\varepsilon > 0, \exists № = №(\varepsilon): \forall n \geq №(\varepsilon): |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)| < \varepsilon$

$$\left|\sum_{m=n+1}^{\infty} f_m^{(k)}(z)\right| \underbrace{=} \left|r_{n+1}^{(k)}(z)\right| = \frac{k!}{2\Pi}\left|\int_C \frac{r_{n+1}(з)}{(з-z_0)^{k+1}}\right| \leq \frac{k!}{2\Pi}\int_C \frac{|r_{n+1}(з)|}{|з-z_0|^{k+1}}dl < \frac{k!}{2\Pi d^{k+1}}\varepsilon * \text{длина (c)} = \epsilon' \text{ пришли к крит. равномерной сходимости.}$$

---

32)**Свойства равномерной сходимости рядов. Вторая теорема Вейерштрасса для рядов аналитических функций.**

Свойство 1:
Если функции $f_n(z)$ непрерывны а сам функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ равномерно сходится в области G к функции f(z) , то сумма эта непрерывна в области G.
Свойство 2:
Если функциональный ряд непрерывных функций сходится равномерно , тогда справедлива след. формула : $\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Gamma f_n(z)dz.$
Вторая теорема Вейерштрасса :
Пусть $f_n(z)$- аналитична в области G, непрерывна в области $\bar{G} = G \cup \Gamma$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится на границе Γ , тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$- равномерно сходится в области $\bar{G}$.
Док-во:
рассмотрим часть функционального ряда $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(з)\right| < \varepsilon$, $з \in \Gamma$
$\forall\varepsilon > 0, \exists № = №(\varepsilon): \forall n \geq №(\varepsilon), \forall p \in N$: $\underbrace{\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(з)\right|}_{\text{тическая ф−я и непрерывная в области } \bar{G}} < \varepsilon$
по теореме о максимума модуля
$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| \underset{\smile}{\leq} \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(з)\right| < \varepsilon$ ПО критерию Коши $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ – сходится равномерно.

---

33) **Теорема Абеля об области абсолютной равномерной сходимости степенного ряда .**

Если степенной ряд , $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ сходится в точке $z_1 \neq z_0$, но он сходится абсолютно в области $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$
Док-во:
Выберем z из условия $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ следовательно есть $q = \frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|} < 1$ из сходимости
$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ по необходимому признаку
$\lim_{n\to\infty} C_n(z-z_0)^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0, |C_n(z-z_0)^n| \leq M$
$|C_n| \leq \frac{M}{|z_1-z_0|^n}$, тогда справедлива оценка $|C_n(z-z_0)^n| = |C_n||z_1 - z_0|^n \leq (z-z_0)^n * \frac{M}{(z_1-z_0)^n} = Mq^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ −сх-ся => $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n(z-z_0)^n|$ −сходится.

1) По достаточному признаку Вейерштрасса
$|C_n(z-z_0)^n| = |C_n||z_1 - z_0|^n \leq \frac{M}{|z_1-z_0|^n} * |z_1 - z_0|^n = M\left(\frac{\rho}{|z_1-z_0|}\right)^n = M\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{|z_1-z_0|}\right)^n$- сходится т.к геометрическая прогрессия .

---

34)**Следствия из теоремы Абеля .Круг и радиус сходимости степенного ряда.**

Следствие1:
Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ расходится в точке $z_2 \neq z_0$, то он расходится в области $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$
Док-во: "от противного": Допустим в области $\exists z_3 \neq z_0$ $|z_3 - z_0| > |z_2 - z_0|$ в котором ряд сходится , тогда в круге $|z_3 - z_0| > |z - z_0|$ ряд сходится абсолютно.
Следствие 2:
Для всякого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ $\exists R \geq 0$, что внутри круга сходимости $|z - z_0| < R$
ряд сходится абсолютно , а $|z - z_0| > R$ – расходится . на границе $|z - z_0| = R$ требуется проверка ,может сходится или расходиться.
Следствие 3:
Внутри круга сходимости ряд сходится к аналитической функции .(Вытекает из первой теоремы Вейерштрасса)
Следствие 4:
Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно интегрировать и дифференцировать ,n кол раз , причем радиус сходимости ряда не изменится.
Следствие 5:
Коэффициенты степенного ряда вычисляются по формуле: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$, $C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

---

35)**Формула Коши–Адамара для радиуса сходимости степенного ряда .**

Радиус сходимости R степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ находится по формуле :R=$\frac{1}{r}$; $r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$
Док-во:
0<r<∞ сначала возьмем точку внутри круга и докажем что в ней сходится , затем возьмем точку вне круга и докажем , что расходится.
1)
$\forall z_1 : |z_1 - z_0| < R = \frac{1}{r} \Rightarrow r|z_1 - z_0| < 1$ => выполнимы след условия $\sqrt[n]{|C_n|} < r + \epsilon$
Выберем в качестве $\epsilon = \frac{1-r|z_1-z_0|}{2|z_1-z_0|} > 0$, $\sqrt[n]{|C_n|} < r + \frac{1-r|z_1-z_0|}{2|z_1-z_0|}$ | * $|z_1 - z_0|$ =>

$$\sqrt[n]{|C_n|}|z_1 - z_0| < r|z_1 - z_0| + \frac{1 - r|z_1 - z_0|}{2} = \frac{1 + r|z_1 - z_0|}{2} = q < 1$$

$C_n|z_1 - z_0|^n < q^n, \forall n \geq №(\varepsilon)$ означает , что числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ мажорируется сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ => Вывод : ряд сходится абсолютно .(доказано что ряд сходится внутри круга)
2)Доказательство расходимости:
$\forall z_2 : |z_2 - z_0| > R = \frac{1}{r} \Rightarrow r|z_2 - z_0| > 1$
Для $\forall\varepsilon > 0$, найдется ∞ элементов больших $r - \varepsilon$
Выберем $\epsilon = \frac{r|z_2-z_0|-1}{|z_2-z_0|} > 0$, $\sqrt[n]{|C_n|} > r - \varepsilon = r - \frac{r|z_2-z_0|-1}{|z_2-z_0|} = \frac{1}{|z_2-z_0|}$, $\sqrt[n]{|C_n|}|z_2 - z_0| > 1 \Rightarrow |C_n||z_2 - z_0| > 1$ вытекает нарушение признака сходимости числового ряда.
Вывод : ряд расходится
3)частный случай r=0 =>R=∞ =>Ряд сходится везде.
$\forall\varepsilon \in C,\ r = 0$ – единственная предельная точка =>∃ $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$=0,
$\forall\varepsilon > 0, \exists № = №(\varepsilon): \forall n \geq №(\varepsilon): \sqrt[n]{|c_n|} < \varepsilon$ Выберем $\varepsilon = \frac{q}{|z-z_0|}$ $q < 1$
$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{q}{|z-z_0|} \Rightarrow |c_n||z - z_0|^n < q^n$; $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ – сходится =>ряд абсолютно сходится на все й комплексной плоскости ю
4) r=∞ => $R = 0$
$\forall z \neq z_0$ – ряд расходится

Для $\forall M > 0$ существует ∞ число элементов $\sqrt[n]{|c_n|} > M$.Выберем $M = \frac{q}{|z-z_0|}$ $q < 1$
$\sqrt[n]{|c_n|} > \frac{q}{|z-z_0|}$; $|c_n||z - z_0|^n > q^n > 1$ не выполняется необходимый признак сходимости =Ю ряд сходится в R=0.

---

36) **Теорема Тейлора.**

Функция f(z) – аналитична внутри круга $|z - z_0| < R$ может быть представлена в этом круге сходящимся степенным рядом $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$, который определяется однозначно.
Док-во:
$C_\rho: |z - z_0| = \rho < R$ $\forall z$ – внутри круга $|z - z_0| < R$ затем берем C_ρ так что z внутри круга $|z - z_0| < \rho$
$f(z) = \frac{1}{2\Pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(з)}{з-z}dз$; $\frac{1}{з-z} = \frac{1}{з-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{(з-z_0)} * \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{з-z_0}} = \frac{1}{(з-z_0)} * \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{з-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(з-z_0)^{n+!}}$
$q = \frac{|z-z_0|}{|з-z_0|} = \frac{|z-z_0|}{\rho} < 1$
тогда $f(z) = \frac{1}{2\Pi i}\int_{C_\rho} f(з) * \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(з-z_0)^{n+1}}dз = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$: $C_n = \frac{1}{2\Pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(з)}{(з-z_0)^{n+1}}dз$
по обобщенной формуле Коши $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$-Ряд Тейлора.

---

37. Нули аналитической функции. Целая функция. Единственность определения аналитической функции.

f(z)-аналит. в обл.G,непрервна на границе Г.
$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{з-z}dз$
Опр: Пусть ф-я f(z) явл-ся аналитической в обл.G, т. $z_0 \in G$ называется *нулем аналитической ф-и f(z)*, если $f(z_0) = 0$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(z-z_0)^n = C_1(z-z_0) + C_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

C_0 = 0-для того чтобы $f(z_0) = 0$. Если $C_1 \neq 0$-нуль первого порядка.

Опр: Ф-я комплексной переменной, аналитическая на всей комплексной плоскости $C(z \neq 0)$, называется *целой ф-й*.
Целая ф-я в любой ограниченной части комплексной плоскости имеет лишь конечное число нулей.(на расширенной компл. плоскости C,лишь счетное множество нулей).
Т: Пусть ф-и f(z) и $g(z)$-аналитичны в обл.G и совпадают на посл-ти точек z_n, сх-ся к т. а,т.е. $\{z_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \in G : f(z_n) = g(z_n)$ имеют одно и тоже значение, тогда f(z)= $g(z)$во всей области G.
Док-во : Введем разностную ф-ю.
$n(z) = f(z) - g(z)$ $n(z_n) = f(z_n) - g(z_n) = 0$ => $\{z_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \in G$ => n(z) во всей G.

$g(z)$

---

38. Определение аналитического продолжения. Аналитическое продолжение в комплексную плоскость элементарных функций действительного переменного и соотношений между ними.

Опр. Пусть на отрезке $[a, b]$ действительной оси x задана непрерывная ф-я f(x). Тогда в некоторой области G комплексной плоскости, содержащей отрезок $[a, b]$ действительной оси, может существовать только одна аналитическая ф-я f(z) комплексного переменного z,принимающая данные значения F(x) на отрезке $[a, b]$. Будем называть *ф-ю f(z) аналитическим продолжением с действительной оси ф-и f(x)* в комплексную область G.
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, сходятся при ∀ значениях x.
Если в разложениях заменить x на z, то убедиться, что ряды сходятся на всей комплексной плоскости, т.е. определяют целые ф-и комплексного переменного z. Эти ф-и являются аналитическим продолжением на всю комплексную плоскость элементарных ф-й действительного переменного e^x, sinx, cosx.
$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$,$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $e^{x_1} * e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$.

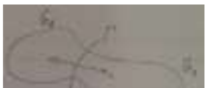
---

39. Аналитическое продолжение с помощью степенных рядов, через границу, на поверхность Римана. Полная аналитическая функция.

Аналитическое продолжение с помощью степенных рядов:
Берем т. $z_0 \in G$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$, $|z - z_0| < R_0$
Случай, когда круг вышел за границу.

$F(z) = \begin{cases} f(z),\ z \in G \\ \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n, z \in G_{R_0} \end{cases}$, G_{R_0}- внутренность круга , $|z - z_0| < R_0$

$f_2(z)$-аналит.в G_2
$f_1 = f_2$ на границе



Аналитическое продолжение через границу:
$f_1(z)$-аналит.в G_1

$\Gamma = G_1 \cap G_2$.

$F(z) = \begin{cases} f_1(z), z \in G_1 \\ f_2(z), z \in G_2 \end{cases}$ -единственное продолжение.
F(z)-аналит. продолжение $f_1(z)$ или $f_1(z)$ на обл. G_1 и G_2.
Опр.полной ф-и: Ф-я F(z), полученная путем аналит.продолжения вдоль всевозможных цепочек обл-й, исходящих из обл.G первонач.задана ф-и f(z) называется *полной аналитической ф-й*,а ее обл.существования R наз-ся *естественной обл.существования полной аналитической ф-и.*

---

40. Определение ряда Лорана. Область его сходимости. Теорема о разложении аналитической функции в ряд Лорана.

Опр: Ряд вида $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n$, где z_0-фиксирующая т. плоскости C и C_n-компл. числа, называется *ряд Лорана*.
Обл. сходимости: Представим ряд в виде:
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n + \sum_{\{n=-m\}}^{-1} C_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}$
Где сх-ся 1й ряд: $|z - z_0| < R$, $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}}$.
Для 2го ряда: $\frac{1}{z-z_0} = W$ => $\sum_{m=1}^{\infty} C_{-m}W^m$-сх-ся |W|<r
$r = \frac{1}{\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|C_{-m}|}}$ => $\frac{1}{z-z_0} < r$ => $|z - z_0| > \frac{1}{r}$ –внешность круга.
Теорема: Ф-я f(z), аналит. в круговом кольце $r_1 < |z - z_0| < R$ однозначно представляется в нем рядом Лорана.
Док-во:
Доп-е построение (2 окр-ти):
$C_{R_1}: |z - z_0| = R_1$
$C_{R_2}: |z - z_0| = R_2$
$r_1 < R_1 < R_2 < R$
Выбираем т. z: $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Т. должна попасть внутрь пунк-го кольца.
Применяем ф-лу Коши для многосвязной обл.
$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_2}}\frac{f(з)}{(з-z)}dз + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1}^-}\frac{d(з)}{(з-z)}dз$, $|z - z_0| < |з - z_0| = R$

---

41. Правильные и особые точки. Классификация изолированных особых точек. Теорема об устранимой точке.

Точка z_0 называется *изолированной особой точкой функции f(z)*, если ф-я f(z) аналитична в самой точке z_0, т.е. если ф-я аналитична в вырожденном кольце $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.
Изолированная особая точка z_0 называется *устранимой особой точкой функции f(z)*, если существует конечный предел ф-и f(z) при $z \to z_0$.
Изолированная особая точка z_0 называется полюсом функции f(z), если $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.
Изолированная особая точка z_0 называется существенно особой точкой, если эта точка и не устранимая, и не полюс, т.е. не существует предел ф-и f(z) при $z \to z_0$ (ни конечного, ни бесконечного).
Теорема: Для того чтобы z_0 была устранимой особой точкой ф-и f(z), необходимо и достаточно, чтобы 0 разложенные ф-и в ряд Лорана в окрестности этой точки не содержало отрицательных степеней $(z - z_0)$: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$, $0 < |z - z_0| < R$.

---

42. Теорема о поведении функции в окрестности полюса.

Теорема: Для того чтобы точка z_0 была полюсом ф-и f(z), необходимо и достаточно, чтобы разложение ф-и в ряд Лорана в окрестности этой точки содержало лишь конечное число членов с отрицательными степенями $(z - z_0)$:
$f(z) = \sum_{n=-k}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n$, $C_{-k} \neq 0$, $k > 0$, $0 < |z - z_0| < R$.
В этом случае точка z_0 называется *полюсом k ф-и f(z).* В случае k=1 полюс называется простым.
Теорема о полюсе: Если ф-я f(z), аналитическая в окрестности изолированной особой т. z_0, неограниченно возрастает по модулю при $z \to z_0$, то эта т. полюс.
Д-во: $\forall A > 0$ $\exists\delta - \delta(A) > 0$: $\forall z$: $|z - z_0| < \delta$: $|f(z)| > A$.
Тогда $g(z) = \frac{1}{f(z)} \neq 0$ в окр-ти.
$\forall\varepsilon < \frac{1}{A} > 0$ $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall z$: $|z - z_0| < \delta$: $|g(z)| < \frac{1}{A} = \varepsilon$ =>
∃ $\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$!
Для ф-и $g(z)$т. $z - z_0$ –УОТ.
$g(z) = (z - z_0)^m n(z)$, $n(z_0) \neq 0$-т.к. предел =0, $m > 0$, m ∈ N.
$f(z) = \frac{1}{n(z)(z-z_0)^m} = \frac{\Psi(z)}{(z-z_0)^m}$.
Если т. z_0 явл-ся нулем кратности m для ф-и $g(z)$, то для ф-и $f(z) = \frac{1}{g(z)}$ т. z_0- полюс m-го порядка.

43. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса

Какого бы ни было $\varepsilon > 0$, в любой окрестности существенноособой точки z_0 функции f(z) найдется хотя бы одна точка z_1, в которой значение функции $f(z)$ отличается от произвольно заданного комплексного числа B меньше, чем на ε.
Доказательство:
Предположим, что теорема неверна, т.е. при заданном комплексном числе B и заданном $\varepsilon > 0$
найдется такое $\mu_0 > 0$, что во всех точках z из μ_0-окрестности точки z_0 значение функции отличается от заданного B больше чем на ε:
$|z - z_0| < \mu_0$, $|f(z) - B| > \varepsilon$ (1)
Рассмотрим вспомогательную функцию $\psi(z) = \frac{1}{f(z)-B}$. В силу условия (1) функция $\psi(z)$определена и ограничена в μ_0-окрестности точки z_0. Следовательно, по теореме о том что если точка z_0 является устранимой особой точкой функции f(z), то существует предельное значение $\lim_{z\to z_0} f(z)=c_0$, точка z_0 является устранимой особой точкой функции $\psi(z)$. Это означает, что разложение функции в окрестности точки будет иметь вид:

$$\varphi(z) \quad (z - z_0)^m \tilde{\varphi}(z) \quad \tilde{\varphi}(z) \neq 0$$

Тогда в силу определений функции $\varphi(z)$, в данной окрестности точки z_0 имеет место следующее разложение функции f(z):

$$f(z) = (z - z_0)^{-m}\varphi(z) + B$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\tilde{\varphi}(z)}$$

Где аналитическай функция ограничена в μ_0-окрестности точки z_0. Но такое разложение означает, что точка z_0 является полюсом или правильной точкой функции $f(z)$, и разложение последней в ряд Лорана должно содержать конечное число членов, что противоречит условию теоремы.

---

44. Разложение функции в ряд Лорана в окрестностях бесконечно удаленной точки

Бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является изолированной особой точкой однозначной аналитической функции f(z) , если можно указать такое значение R, что вне круга |z|>R функция f(z) не имеет особых точке, находящихся на конечном расстоянии от точки z=0. Так как f(z) является аналитической функцией в круговом кольце R<|z|<∞, то ее можно разложить в ряд Лорана: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, R<|z|<∞ (1) сходящийся k f(z) в данном кольце. Так же как и для конечной изолированной особой точки z_0 здесь возможны 3 случая:
1)Точка z=∞ называется устранимой особой точкой функции f(z), если разложение (1) не содержит членов с положительными степенями z, т.е. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$,если при $z \to \infty$ существует конечное предельное значение функции f(z), не зависящее от способа предельного перехода. Если $c_0 = c_{-1} = \ldots = c_{-m+1} = 0, c_{-m} \neq 0$, то бесконечно удаленная точка является нулем m-ого порядка функции f(z).
2) Точка z=∞ называется полюсом порядка m функции f(z), если разложение (1) содержит конечное m число членов с положительными степенями z, т.е. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{m} c_n z^n$,и если эта функция неограниченно возрастает по модулю при $z \to \infty$ независимо от способа предельного перехода
3) Точка z=∞ называется существенно особой точкой функции f(z) , если разлодение содержит бесконечное число членов с положительными степенями z, т.е. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, или если в зависимтости от выбора последовательности $\{z\} \to \infty$ можно получить последовательность значений $\{f(z)\}$, сходящуюся к любому заданному пределу.
Очевидно доказательство эквивалентности всех приведенных выще определений характера изолированной особой точки z=∞ может быть приведено как и для случая конечной изолированной особой точки.

---

45. Определение вычета в конечной точке комплексной плоскости и в бесконечно удаленной. Вычисление вычетов.

Пусть точка z_0 является изолированной особой точкой однозначной аналитической функции f(z). Согласно предыдущим рассмотрениям в окрестности этой точки функция f(z) может быть единственным образом разложена в ряд Лорана: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ (1),
где $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$ (2) , и в частности $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(\xi)d\xi$ (3)
Вычетом аналитической функции f(z) в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i}\int_c f(\xi)d\xi$ взятому в положительном направлении по любому лежащему в области аналитичности функции f(z) замкнутому контуру γ, содержащему единственную особую точку z_0 функции f(z).
Для вычисления вычета может быть применена формула:$res[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(\xi)d\xi = c_{-1}$
Однако в ряде случаев может быть указан более простой способ вычисления вычета.

1) Пусть точка z_0 является полюсом первого порядка функции f(z). Тогда в окрестности этой точки имеет место разложение: $f(z) = c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0)^1 + \cdots$

Умножив обе части на $(z - z_0)$ и перейдя к пределу при $z \to z_0$ получим: $c_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$. Заметим, что в данном случае функция f(z) в окрестности точки z_0 может быть записана в виде отношений двух аналитических функций: $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, а точка z_0 является нулем первого порядка функции $\psi(z)$, т.е. $\psi(z) = (z - z_0)\psi`(z_0) + \frac{\psi``(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \cdots, \psi`(z_0) \neq 0$

Тогда формула вычисления вычета в полюсе первого порядка: $res[f(z), z_0] = \frac{\varphi(z)}{\psi`(z)}$

2) Пусть точка z_0 является полюсом порядка m функции f(z). Согласно предущему в окрестности этой точки имеет место разложение: $f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0)^1 + \cdots$

Умножим обе части на $(z - z_0)^m$ получим:
$$(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) \quad + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \cdots$$
Возьмем производную порядка (m-1) от обеих частей этого равенства и перейдя к пределу при $z \to z_0$ получим: :
$res[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z - z_0)^m f(z)]$

3) Пусть точка z=∞ является изолированной особой точкой аналитической функции f(z).

Вычетом аналитической функции f(z) в точке z=∞ называется комплексное число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i}\int_{c^-} f(\xi)d\xi = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c^+} f(\xi)d\xi$, *где C-произвольный контур, вне которого функция f(z) является аналитической и не имеет общих особых точек, отличных от ∞. Очевидно в силу определения коэффициентов ряда Лорана имеет место формула:* $res[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i}\int_{c^+} f(\xi)d\xi = -c_{-1}$

---

46. Основная теорема теории вычетов

Пусть функция f(z) является аналитической всюду в замкнутой области β, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_k (k = 1, \ldots, N)$ лежащих внутри области β.
Тогда $\int_{\Gamma^+} f(\xi)d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res[f(z), z_k]$, где Γ^+ представляет собой полную границу области β, проходимую в положительном направлении.
Доказательство:
Выделим каждую из особых точек z_k функции f(z) замкнутым контуром $\gamma_к$, не содержащим внутри других особых точек кроме точки z_k.
Рассмотрим многосвязную область, ограниченную контуром Γ и всеми контурами $\gamma_к$. Внутри этой области функция f(z) является всюду аналитической. Поэтому по теореме коши получим : $\int_{\Gamma^+} f(\xi)d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res[f(z), z_k]$
Большое практическое значение этой формулы заключается в том, что во многих случаях оказывается гораздо проще вычислить вычеты функции f(z) в особых точках, лежащих внутри области интегрирования, чем непосредственно вычислять интеграл, стоящий в левой части.

---

47 Теорема о сумме вычетов в расширенной комплексной плоскости

Пусть функция f(z) является аналитической на некоторой расширенной комплексной плоскости за исключением конечного числа особых точек $z_k = (1, \ldots, n)$ с включение точки $z_n = \infty$. Тогда: $\sum_{k=1}^{n} res[f(z), z_k] = 0$
Доказательство: Действительно, рассмотрим замкнутый контур C, содержащий внутри все (n-1) особые точки z_k расположенные на конечном расстоянии от точки z=0. По основной теореме вычетов:
$\frac{1}{2\pi i}\int_{c^+} f(\xi)d\xi = \sum_{k=1}^{n-1} res[f(z), z_k]$.Но в силу: $res[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i}\int_{c^+} f(\xi)d\xi = -c_{-1}$
Интеграл стоящий слева, равен вычету функции в точке z=∞, взятому с обратным знаком, откуда и получим теорему о сумме вычетов в комплексной плоскости.
Доказанная теорема иногда позволяет упростить вычисления интеграла от функции комплексной переменной по замкнутому контуру. Пусть функция f(z) является однозначной аналитической на всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и требуется вычислить интеграл от f(z) по некоторому замкнутому контуру Γ. Если внутри Γ сожержиться много особых точек функции f(z), то вычисление $\int_{\Gamma^+} f(\xi)d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res[f(z), z_k]$ может быть весьма трудоемким. При этом может оказаться что, вне Γ f(z) имеет лишь несколько особых точек $z_k = (1, \ldots, n)$, значения вычетов в которых, а также вычет в бесконечно удаленной точке определяется достаточно просто. Тогда удобно вместо прямого вычисления искомого интеграла воспользоваться следствием:

$$\int_{\Gamma^+} f(\xi)d\xi = -2\pi i \sum_{k=1}^{N} res[f(z), z_k] - 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res[f(z), \infty]$$

---

48 Обобщение формулы Коши на случай неограниченной области

Пусть f(z) аналитическая и непрерывна внутри G и непрерывна на Г

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} 2\pi i f(z_0), \text{если } z_0 \text{ находится внутри Г} \\ 0, \text{вне Г} \end{cases}$$

$2\pi i \, res \frac{f(z)}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0)$-*вывод с помощью теории вычетов*
F(z) аналитическая в области G являющеяся внешностью контура Г.
F(z) непрывывна на Г

$$\exists f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z)$$

Рассмотрим 2 случая:
А) z_0 –в не области G(внутри Г)

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = -2\pi i \sum_{k=1}^{N} res \frac{f(z)}{z_k - z_0} = -2\pi i(-f(\infty)) = 2\pi i f(\infty)$$

$$res_{z=\infty} \frac{f(z)}{z - z_0} = res_{z=\infty} \frac{f(z)}{z(1 - \frac{z_0}{z})}$$

$$= res_{z=\infty} \frac{f(z)}{z} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_0^k}{z^k} = res_{z=\infty} \frac{1}{z}(f(\infty) + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots) \sum_{k=0}^{n} \frac{z_0^k}{z^k} = -f(\infty)$$

Б) z_0 – в области G(вне Г)

$$res_{z=z_0} \frac{f(z)}{z - z_0} = f(z_0)$$

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = -2\pi i[f(\infty) - f(z_0)]$$

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} 2\pi i f(\infty), \text{если } z_0 \text{ находится внутри Г} \\ 2\pi i[f(\infty) - f(z_0)], \text{вне Г} \end{cases}$$

---

49. Вычисление интегралов, содержащих тригонометрические функции, с помощью вычетов.

Это интеграл вида I = $_0\int^{2\pi}$ R(sinϕ, cosϕ)dϕ, где R – дробно-рациональная (полином/полином) функция своих аргументов. Интегралы такого типа легко могут быть сведены к интегралам от аналитич. функции комплексного переменного по замкнутому контуру. Для этого сделаем замену переменной интеграла, введя комплексную переменную $z=e^{i\phi}$. Очевидно, что dϕ=dz/iz, cosϕ = $1/2(e^{i\phi}+ e^{-i\phi})$ = 1/2(z+1/z)) = $(z^2+1)/2z$; sinϕ = $1/2(e^{i\phi}+e^{-i\phi})$ = 1/2i(z-1/z)) = $(z^2-1)/2iz$. При этом 0≤ϕ≤2π, z пробег окружностьть |z|=1 в положительном направлении. Таким образом, в силу общих свойств аналитических функций подынтегральная функция, являющаяся рациональной Ř = $(a_1z^m+a_2z^{m-1}+\ldots)/(b_1z^n+b_2z^{n-1}+\ldots)$, представляет собой функцию, аналитич. внутри круга |z|=1 всюду за исключением конечного N≤m числа особых точек z_k, являющихся нулями знаменателя Ř. Таким образом, в силу основной теоремы теории вычетов I = $_0\int^{2\pi}$ R($(z^2-1)/2iz$; $(z^2+1)/2z$) dz/iz = 2π ∑ $res_{z=zk}$((1/z)*R($(z^2-1)/2iz$; $(z^2+1)/2z$)). Точки z_k являются полюсами функции Ř. Пусть a_k – порядок полюса z_k (очевидно, что $_{k=1}\sum^N a_k \leq m$). Тогда по формуле вычисления вычета в полюсе m-порядка, I=

$$2\pi \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(a_k - 1)!} \lim_{z->zk} \frac{d^{\alpha k-1}}{dz^{\alpha k-1}} [(z - z_k)^{ak} \tilde{R}(z)] \;;$$

<u>*Пример*</u>: вычислить интеграл $I = \int_o^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + a\cos\varphi}, |a| < 1$. Решение: $z=e^{i\phi}$,

таким образом I= $I = 1 \backslash i \int_{|z|=1} \frac{1}{1 + a \backslash 2(z + 1 \backslash z)} \frac{dz}{z}$ =

$2 \backslash i \int_{|z|=1} \frac{dz}{az^2 + 2z + a}$. Особыми точками являются нули знаменателя

$z_{1,2}$ = $-1 \backslash a \pm \sqrt{(1 \backslash a^2) - 1}$. Это полюсы первого порядка. Так как $z_1z_2=1$, то ясно что лишь одна из этих точек лежит внутри круга |z|=1 как легко видеть, это точка z_1 = $-1 \backslash a + \sqrt{(1 \backslash a^2) - 1}$ поэтому в силу основной теоремы теории вычетов

$$I = 4\pi Выч\left[1 \backslash (az^2 + 2z + a), z_1\right] = 4\pi * 1 \backslash a(z - z_2)|_{z=z1} = 2\pi \backslash \sqrt{1 - a^2}$$

---

50. Определение главного значения по Коши несобственного интеграла. Вычисление главных значений несобственных интегралов вида $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ с помощью вычетов.

Главным значение по Коши несобственного интеграла первого рода $\int_{-\infty}^{\infty}$ f(x)dx называется значение предела.
V.P. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$ (Valeur Principale – главное значение)
<u>*Лемма 1*</u>*:* Пусть функция f(z) является аналит. в верхней полуплоскости(Im z > 0) всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k, k=1‾m и существуют числа R_0>M>0, б>0 такие, что $|f(z)|<M/(|z|^{1+б})$ при $|z|>R_0$. Тогда $\int_{C'} f(z)dz \to$ (при $R \to \infty$) → 0, C' – верхняя полуокружность: |z|=R, Im z > 0.
<u>*Доказательство*</u>*:* оценим $0<|\int_{C'} f(z)dz| = \int_{C'} |f(z)|dl <$ $\int_{C'} M/|z|^{1+б} = M/R^{1+б}\pi R = \pi M/R^б \to$ (при $R \to \infty$) → 0
<u>*Замечания*</u>*: 1.* Если условие леммы выполняется при $\phi_1 \leq \arg z \leq \phi_2$, то $\lim_{R\to\infty} \int_{C''} f(z)dz = 0$ C'': |z|=R, $\phi_1 \leq \arg z \leq \phi_2$.
2. Если f(z) является аналит. в окрестности z=∞ и точка z=∞ — нуль не ниже второго порядка функции f(z), то лемма справедлива. f(z)=$(C_{-2}/z^2)+(C_{-3}/z^3)+\ldots=(1/z^2)*\Psi(z)$
$\lim_{z\to\infty} \Psi(z) = C_2$; $|f(z)|=|\Psi(z)|/|z^2| \leq N/|z|^2$
<u>*Теорема 1*</u>*:* Пусть функция действительного переменного f(z), заданная на всей числовой оси (-∞, ∞) может быть аналитически продолжена в верхнюю полуплоскость (Im z > 0), причем её аналитическое продолжение f(z) удовлетворяет условиям Леммы 1 и не имеет особых точек на действительной оси, тогда главное значение по Коши (v.p.) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_k res_{z=z_k} f(z)$ (Im z_k > 0), где z_k — особые точки f(z) в верхней полуплоскости.
<u>*Доказательство:*</u> $R>R_0$: $|f(z)| \leq M/|z|^{1+б}$, $|z|>R_0$
По условию теоремы функция f(z) в верхней полуплоскости имеет конечное число особых точек z_k, причем все они удовлетворяют условию $|z_k|<R_0$. Рассмотрим замкнутый контур, состоящий из отрезка действительной оси $-R \leq x \leq R (R>R_0)$ и полуокружности C',|z|=R в верхней полуплоскости. В силу основной теоремы теории вычетов $\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C'} f(z)dz = 2\pi i \sum_k res_{z=z_k} f(z)$ (Im z_k > 0) .
Так как выполнены условия Леммы 1, то предел второго слагаемого в левой части при $R \to \infty$ равен нулю; правая часть при $R>R_0$ от R не зависит. Отсюда следует, что предел первого слагаемого существует.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^4 + 1}. \qquad (5.33)$$

Аналитическое продолжение подынтегральной функции в верхнюю полуплоскость, функция $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы 5.3. Ее особыми точками в верхней полуплоскости являются точки $z_{0,1} = e^{i\frac{\pi + 2\pi k}{4}}$ ($k = 0, 1$), причем обе эти точки — полюсы первого порядка. Поэтому

$$I = 2\pi i \left\{ Выч\left[\frac{1}{1+z^4}, e^{i\frac{\pi}{4}}\right] + Выч\left[\frac{1}{1+z^4}, e^{i\frac{3\pi}{4}}\right] \right\} = 2\pi i \left\{ \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} + \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} \right\} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. \qquad (5.34)$$

51. Лемма Жордана. Вычисление главных значений несобственных интегралов вида $\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)e^{imx}dx$ с помощью вычетов.

Лемма Жордана: Пусть функция f(z) является аналит. в верхней полуплоскости (Im z > 0) за исключением конченого числа изолированных особых точек и равномерно относительно arg z (0≤ arg z≤π) стремится к 0 при |z|→∞. Тогда $\lim_{R\to\infty}\int_{C'} e^{ia\xi}f(\xi)d\xi \quad = 0$ (*), где C' – дуга полуокружности |z| = R в верхней полуплоскости z.

Доказательство: Условие равномерного стремления f(z) к нулю означает, что |z|=R имеет место оценка $|f(z)|<\mu_R$, |z|=R, где $\mu_R\to 0$ при R→∞. С помощью этого оценим исследуемый интеграл. Сделаем замену $\xi=Re^{i\phi}$ и воспользуемся очевидным соотношением sinϕ≥2ϕ/π при 0≤ϕ≤π/2, тогда получим $|\int_{C'} e^{ia\xi}f(\xi)d\xi| \le$ $\mu_R R\int_0^{\pi}|e^{ia\xi}|d\varphi = \mu_R R\int_0^{\pi}e^{-aRsin\varphi}d\varphi = 2\mu_R R\int_0^{\pi/2}e^{-aRsin\varphi}d\varphi <$ $2\mu_R R\int_0^{\pi}e^{-2aR\varphi/\pi}d\varphi = \left(\frac{\pi}{a}\right)*\mu_R(1-e^{-aR}) \to_{R\to\infty} 0$, что и доказывает лемму.

Замечание: Если a<0, а функция f(z) удовлетворяет условиям леммы Жордана в нижней полуплоскости, то формула (*) имеет место при интегрировании по дуге полуокружности C' в нижней полуплоскости z. Аналогичные утверждения имеют место и при a=±iα, α>0) при интегрировании соответственно в правой (Re z ≥ 0) и левой (Re z ≤ 0) полуплоскости z.

Важная форма леммы Жордана для дальнейших приложений: $\lim\limits_{R\to\infty}$ $\int_{C'} e^{-a\xi}f(\xi)d\xi = 0$

Теорема 2: Пусть f(z), заданная на всей числовой оси (-∞, ∞), может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость Im z ≥ 0, а её аналит. продолжение f(z) в верхней полуплоскости удовлетворяет условиям леммы Жордана и не имеет особых точек на дествительной оси. Тогда интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)dx$, a>0, существует и равен

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Выч[e^{iaz}f(z), z_k]$$, где z_k – особые точки f(z) в верхней полуплоскости z.

Доказательство: По условию теоремы особые точки z_k удовлетворяют условию $|z_k|<R_0$. Рассмотрим в верхней полуплоскости замкнутый контур, состоящий из отрезка действительной оси -R≤x≤R, R>R_0 и дуги C' полуокружности |z|=R в верхней полуплоскости z. По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{-R}^{R} e^{iax}f(x)dx + \int\limits_{C'} e^{ia\varsigma}f(\varsigma)d\varsigma = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res[e^{iaz}f(z), z_k]$$. По лемме Жордана предел второго слагаемого в левой части при R→∞ равен нулю. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Пример 3. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^2+a^2}dx, \quad \alpha > 0, \quad a > 0. \qquad (5.43)$$

Чтобы иметь возможность воспользоваться леммой Жордана, заметим, что в силу формулы Эйлера

$$I = \operatorname{Re} I_1 = \operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{x^2+a^2}dx. \qquad (5.44)$$

Аналитическое продолжение подынтегральной функции интеграла I_1 — функция $e^{i\alpha z}\frac{1}{z^2+a^2}$ — удовлетворяет условиям теоремы 5.4 и имеет в верхней полуплоскости единственную особую точку $z_1 = ia$, являющуюся полюсом первого порядка. Поэтому

$$I_1 = 2\pi i \text{ Выч}\left[\frac{e^{i\alpha z}}{z^2+a^2}, ia\right] = 2\pi i\frac{e^{-\alpha a}}{2ia} = \frac{\pi}{a}e^{-\alpha a}.$$

Отсюда

$$I = \operatorname{Re} I_1 = \frac{\pi}{a}e^{-\alpha a}. \qquad (5.45)$$

Замечания: 1. Если f(x) является четной функцией, удовлетворяющей условиям теоремы 2, то при a>0

$$\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\cos axdx = \pi\operatorname{Re} i\sum_{k=1}^{n} Выч[e^{iaz}f(z), z_k] = -\pi\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n} Выч[e^{iaz}f(z), z_k]$$

2. Если f(x) является нечетной функцией, удовлетворяющей условиям теоремы 2, то при a>0

$$\left(\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\sin axdx = \pi\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} Выч[e^{iaz}f(z), z_k]\right)$$

---

53. Логарифмический вычет. Вычисление вычетов логарифмической производной функции.

Пусть в G задана однозначная аналит. функция, имеющая конечное число изолированных особых точек типа полюсов $z=z_k$. На Г нет ни особых точек, ни нулей.

Рассмотрим функцию $\varphi(z) = [\ln f(z)]' = f'(z)/f(z)$. Особые точки $\varphi(z)$ — полюса $z=z_k$ и нули f(z).

По определению под логарифмическими вычетами понимается вычет функции $f'(z)/f(z)$ $res_{z=z_k}\frac{f'(z)}{f(z)} = (1/2\pi i)\int_\gamma (f'(z)/f(z))dz$, z_k — полюс порядка p_k, $f(z) = \Psi(z)/(z-z_k)^{p_k}$, $\Psi(z_k)\neq 0$, $\ln f(z) =$ $\ln\Psi(z) - p_k\ln(z-z_k)$, $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)} - \frac{p_k}{z-z_k}$,

$res\frac{f'(z)}{f(z)} = -p_k$ *(1)*

z_j — нуль f(z) кратности n_j.

$f(z) = (z-z_j^0)^{n_j}\varphi(z), \varphi(z_j^0)\neq 0, \ln f = n_j\ln(z-z_j^0) + \ln\varphi(z), \frac{f'}{f} =$ $\frac{n_j}{z-z_j^0} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$

$res_{z=z_j^0}\frac{f'(z)}{f(z)} = n_j$ *(2)*

---

52. Вычисление главных значений несобственных интегралов смешанного типа.

Главным значением (по Коши) несобственного интеграла второго рода $\int_a^b f(x)dx$ особой точки x=c (a<c<b), где $f(x)\to\infty$ называется значение предела.

V.P. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}[\int_0^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx]$

По теореме 1: V.P. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_k res_{z=z_k} f(z) - \sum_k\int_{\gamma_j} f(z)dz$, x_j — полюс первого порядка для f(z), f(z)= $(C_{-1}/z-x_j)+\sum_{m=0}^{\infty}C_m(z-x_j)^m =$ $-i\int_0^{\pi}[C_{-1} + \sum_{m=0}^{\infty}C_m\varepsilon^{m+1}e^{i(m+1)\varphi}]\,d\varphi$

V.P. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{(Im\, z_k>0)} res f(x) + \pi i\sum_{j=1}^{m} res_{z=x_j}f(z)$

---

54. Теорема о числе нулей и полюсов. Её геометрический смысл.

Теорема: Пусть функция f(z)—аналитична в замкнутой области Ḡ=G U Г, за исключением конечного числа полюсов внутри области G. Тогда разность между полным количеством нулей и полюсов равна: N-P=(1/2πi)$\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$, где N=$\sum_j n_j$—полное число нулей. P=$\sum_k p_k$—полное число полюсов.

Доказательство: Для доказательства заметим, что интеграл по Г от функции $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ может быть вычислен с помощью основной теоремы теории вычетов, причем так как все особые точки функции $\varphi(z)$ — это нули и полюсы функции f(z), а вычеты в этих точках определяются формулами (1) и (2), то $\int_{\Gamma+}\varphi(\xi)d\xi = 2\pi i\sum_{m=1}^{M} res[\varphi(z), z_m] = 2\pi i(\sum_j n_j - \sum_k p_k) = 2\pi i(N-P)$, что и доказывает теорему.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma+}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma+} d\ln f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma+} d\,[\ln|f(\zeta)| + i\arg f(\zeta)] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma+} d\ln|f(\zeta)| + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma+} d\arg f(\zeta).$$

Отметим простой геометрический
смысл доказанной теоремы, для чего преобразуем интеграл
Действительная функция $\ln|f(\xi)|$ является однозначной функцией, поэтому её вариация при обходе точкой ξ замкнутого контура Г равна нулю. Следовательно, первое слагаемое в правой части равно нулю. Второе слагаемое представляет собой полную вариацию аргумента функции $f(\xi)$ при обходе точкой ξ замкнутого контура Г, деленную на 2π. Итак, N-P=(1/2π)Var[arg f(z)]$_{\Gamma+}$.

Будем изображать значения функции $\omega = f(z)$ точками на комплексной плоскости ω. Так как функция f(z) непрерывна на контуре Г, то при полном обходе точкой z контура Г на плоскости z соответствующая ей точка на плоскости ω описывает некоторый замкнутый контур C. При этом точка $\omega = 0$ может оказаться как вне, так и внутри области, ограниченной контуром C. В первом случае вариация аргумента ω при полном обходе C, очевидно, равна нулю. Во втором случае вариация аргумента ω определяется числом полных обходов вокруг точки $\omega = 0$, которые совершает точка ω при своем движении по контуру C. При этом точка ω может обходить точку $\omega = 0$ как против часовой стрелки, так и по часовой стрелке. Итак, разность между полным числом нулей и полюсов функции f(z) в области G определяется числом оборотов, которые совершает точка $\omega = f(z)$ вокруг точки $\omega = 0$ при положительном обходе точкой z контура Г. Эти соображения часто оказываются существенными при подсчете полного числа нулей аналитической функции в заданной области. При этом во многих случаях соответствующие вычисления можно значительно облегчить благодаря теореме Руше.

Теорема 5.6 (теорема Руше). *Пусть функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ являются аналитическими в замкнутой области $\bar{\mathcal{G}}$, причем на границе Г области $\mathcal{G}$ имеет место неравенство*

$$|f(z)|_\Gamma > |\varphi(z)|_\Gamma. \qquad (5.94)$$

Тогда полное число нулей в области $\mathcal{G}$ функции $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ равно полному числу нулей функции $f(z)$.