Механика Ньютона.

Основные величины:
Положение точки характеризуется радиус-вектором **r**(t).

Скорость: $\upsilon(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec r}{\Delta t}=\frac{d\vec r}{dt}=\{\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z\}$

Ускорение: $\vec w(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec\upsilon}{\Delta t}=\frac{d\vec\upsilon}{dt}=\{w_x,w_y,w_z\}$

Импульс: $\vec p=m\vec\upsilon$

Момент импульса: $\vec M=[\vec r;\vec p]$

Основные законы:
1)2-й закон Ньютона:
$m\vec w=\vec F_{внеш.}$, или $\dot{\vec p}=\vec F_{внеш.}$, или $m\ddot{\vec r}=\vec F_{внеш.}$

2)Ур-е моментов:
$\frac{d\vec M}{dt}=[\dot{\vec r},\vec p]+[\vec r,\dot{\vec p}]=[\vec r,\vec F_{внеш.}]=\vec K$
где **K** – момент силы.

Работа и кинет. энергия:
$$A=\int_1^2(\vec F,d\vec r)=[F=m\dot{\vec\upsilon},d\vec r=\vec\upsilon dt]=$$
$$=\int_1^2 m(\dot{\vec\upsilon},\vec\upsilon)dt=\frac12 m\int_1^2\frac{d}{dt}(\vec\upsilon^2)dt=$$
$$=\frac12 m(\upsilon_2^2-\upsilon_1^2)=T_2-T_1=\Delta T$$
$$T=\frac{m\upsilon^2}{2}$$

Силовые поля.

Потенциальные силовые поля: Это такие поля, в которых на частицу действует сила, работа которой по замкнутому контуру равняется нулю, т.е
$$\oint(\vec F,d\vec l)=\iint(rot\vec F,d\vec S)=0$$
$$rot\vec F=0$$
Известно соотношение:
$$rot(grad\vec A)=0$$
Тогда силу можем представить как:
$\vec F\sim gradU(\vec r,t)$, где U – потенц. энергия.
Учитывая св-ва градиента:
$$\vec F=-gradU=-\vec\nabla U$$
$$F_x=-\frac{\partial U}{\partial x};F_y=-\frac{\partial U}{\partial y};F_z=-\frac{\partial U}{\partial z}$$
Если это соотношение верно, то поле – потенциально.
Потенциальные поля разделяют на:
1)Стационарные: U=U(**r**),
2)Нестационарные: U=U(**r**,t),
В непотенциальном поле (например поле сил вязкого трения): $\oint(\vec F,d\vec l)\neq 0$ и
$\vec F\neq -gradU$.

Работа в потенциальном поле:
$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz=$$
$$=-F_xdx-F_ydy-F_zdz=-(\vec F,d\vec r)$$
$$A=\int_1^2(\vec F,d\vec r)=-\int_1^2 dU=-\Delta U$$

Закон сохранения полной механической энергии:
$$T_2-T_1=U_1-U_2$$
$$T_2+U_2=T_1+U_1$$
$$E_{мех.}=T+U$$
$$E^{(1)}_{мех.}=E^{(2)}_{мех.}$$
Если система находится в стационарном потенциальном поле, то система – консервативная.
Если поле не стационарно, то:
$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz+\frac{\partial U}{\partial t}dt$$
$$A=\int_1^2(\vec F,d\vec r)=\int_1^2\frac{\partial U}{\partial t}dt-\int_1^2 dU=U_1-U_2+$$
$$+\int_1^2\frac{\partial U}{\partial t}dt=T_2-T_1$$
$$\Delta E_{мех.}=E^{(2)}_{мех.}-E^{(1)}_{мех.}=\int_1^2\frac{\partial U}{\partial t}dt\neq 0$$
$$\frac{d}{dt}(T+U)=\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec\upsilon^2}{2}+U(\vec r,t)\right)=m(\dot{\vec\upsilon},\vec\upsilon)+$$
$$+\frac{\partial U}{\partial\vec r}\cdot\frac{d\vec r}{dt}+\frac{\partial U}{\partial t}=\vec\upsilon(m\dot{\vec\upsilon}-\vec F)+\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial U}{\partial t}$$
$$\frac{dE_{мех.}}{dt}=\frac{\partial U}{\partial t}$$
Таким образом, если поле стационарно, то полная механическая энергия сохраняется.

Задачи механики:
1)Прямая: **r**(t)⇒**υ**,**w**,**F**.
2)Обратная: **F**⇒**r**(t).
В непотенциальных полях: $\vec F=-f(\vec\upsilon,\vec r,t)\cdot\vec\upsilon$
Гироскопические силы: Сила Лоренца
$$\vec F_л=\frac{q}{c}[\vec\upsilon,\vec H]$$

Механика Лагранжа.

Обобщённые координаты, скорости, число степеней свободы.
Определение: Число независимых координат, полностью определяемых положение системы в пространстве в любой момент времени называют числом степеней свободы (например у маятника на нерастяжимой нити – одна степень свободы, его положение можно описать одной обобщённой координатой – углом отклонения от положения равновесия).

Обозначим: q(t) – обобщённая координата, тогда q'(t) – обобщённые скорости.

Связи в механике Лагранжа.
1)Голономные – связи, кот. можно неявно описать выражением: $f(q_1,q_2,\ldots,q_n,t)=0$. (Например $x^2+y^2-l^2=0$ – нерастяжимость нити маятника),
2)Неголономные – связи, кот. можно неявно описать уравнением: $f(\vec q,\dot{\vec q},t)=0$,
3)Склерономные.

Определение числа степеней свободы:
Пусть n – число частиц в системе, S – число уравнений голономных связей, N – число степеней свободы, тогда N=3n-S.

Принцип наименьшего действия в механике (вариационный метод Гамильтона).

Пусть известно положение частицы в моменты времени t_1 и t_2. Задача – найти траекторию движения частицы между этими точками. Введём функцию:
$L=L(q,\dot q,t)$ – ф-я Лагранжа.
Введём ф-ю S, зависящую от траектории:
$S(q(t))=\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot q,t)dt$ – интеграл действия системы.

Принцип Гамильтона: Всякая механическая система с течением времени эволюционирует так, что действие её минимально.

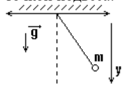
Нахождение траектории:
Обозначим: $\delta q(t)=\tilde q(t)-q(t)$ – вариация координаты. Зададим ε и потребуем, чтобы:
$|\delta q(t)|<\varepsilon$ и $|\delta\dot q(t)|<\varepsilon$ и $\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$.
$$\Delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(L(q+\delta q,\dot q+\delta\dot q,t)-L(q,\dot q,t)\right)dt\approx$$
$$\approx\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial\dot q}\delta\dot q\right)dt$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial\dot q}\delta\dot q dt=\frac{\partial L}{\partial\dot q}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\delta q\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q}\right)dt$$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot q}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}=0\ (по\ условию)$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\delta q\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q}\right)\right)dt=\delta S=0\ (по\ неизв.\ Th)$$
$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q}\right)=0$$
получили ДУ Лагранжа, решая кот. можно найти траекторию
Для отыскания частного решения необходимо задать начальные условия:
$q(t_0)=q_0$; $\dot q(t_0)=\dot q_0$.

Если система имеет большее число степеней свободы, то:
$$\vec q=\{q_1,q_2,\ldots,q_N\};\ \dot{\vec q}=\{\dot q_1,\dot q_2,\ldots,\dot q_N\}$$
$$N=3n-S$$
Получаем систему ур-й:
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0;\ i=1,\ldots,N$$
Всего 2N начальных условий. Найдём условие, при кот. ур-е Лагранжа перейдёт в ур-е Ньютона:
Пусть $L=T-U$
$$T=\frac{m}{2}\sum_{i=1}^3\dot x_i^2;\ U=U(\vec r,t);$$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot x_i}=\frac{\partial T}{\partial\dot x_i}=m\dot x_i;$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=-\frac{\partial U}{\partial x_i}$$
$$F_i=-\frac{\partial U}{\partial x_i};\ В\ итоге:$$
$$m\ddot x_i-F_i=0$$

Величины ур-я Лагранжа.
1) $p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}$ – обобщённый импульс системы. Размерность кинематического импульса и обобщённого импульса не должны совпадать в общем случае.
2) $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ – обобщённая сила.

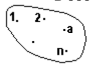
Пример: Свободная частица:
$$L=T=\frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)$$
$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ z=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot x=\dot\rho\cos\varphi-\rho\dot\varphi\sin\varphi\\ \dot y=\dot\rho\sin\varphi+\rho\dot\varphi\cos\varphi\\ \dot z=\dot z\end{cases}$$
$$\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2=\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2+\dot z^2$$
$$L=\frac{m}{2}(\dot z^2+\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2)$$
$$p_z=\frac{\partial L}{\partial\dot z}=m\dot z;\ p_\rho=\frac{\partial L}{\partial\dot\rho}=m\dot\rho;$$
$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=m\rho^2\dot\varphi$$

Свойства функций Лагранжа.
1)Умножение функции Лагранжа на число не меняет уравнения движения (число не равно нулю).
$$L(q_i,\dot q_i,t)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$
$$L=C\cdot L_1$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1}{\partial\dot q_i}\right)-\frac{\partial L_1}{\partial q_i}=0$$
2)Если две функции Лагранжа отличаются на полную производную по времени от некоторой функции координат q и времени t, то уравнение движения неизменно.
$$L_1=L-\frac{d}{dt}f(q,t)$$
$$S=\int_{t_1}^{t_2}Ldt=\int_{t_1}^{t_2}L_1dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial f}{\partial t}dt=$$
$$=S_1+f(q_2,t_2)-f(q_1,t_1)$$
$$\Delta S=S-S_1=f(q_2,t_2)-f(q_1,t_1)=const$$
$$\delta S=0$$
3)Пусть некоторая система состоит из подсистем A и B, тогда:
$$\begin{cases}L_{AB}=L_A+L_B+L_A^B\\ \lim\limits_{r\to\infty}L_{AB}=L_A+L_B\end{cases}$$
Пример: Математический маятник с движ. точкой подвеса:



$$\begin{cases}x=l\sin\varphi+a\cos\omega t\\ y=l\cos\varphi\end{cases}$$
$$U=-mgy=-mgl\cos\varphi$$
$$L=\frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2)-U=\frac{m}{2}(l^2\dot\varphi^2+a^2\omega^2\sin^2\omega t-$$
$$-2al\omega\dot\varphi\cos\varphi\sin\omega t)+mgl\cos\varphi$$
$$\begin{cases}\dot x=l\cos\varphi\dot\varphi-a\omega\sin\omega t\\ \dot y=-l\sin\varphi\dot\varphi\end{cases}$$
$$\frac{df}{dt}=\frac{m}{2}a^2\omega^2\sin^2\omega t-не\ учит.\ по\ св-ву\ (2)$$
$$L=\frac{m}{2}(l^2\dot\varphi^2-2al\omega\dot\varphi\cos\varphi\sin\omega t)+mgl\cos\varphi$$

Свойства кинетической энергии частиц в обобщённых координатах.

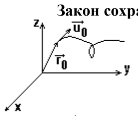


$$T=\sum_{a=1}^n\frac{m_a\upsilon_a^2}{2}=\sum_{a=1}^n\frac{m_a}{2}\sum_{i=1}^3\dot x_{ai}^2$$
Пусть теперь нам удобна новая обобщённая СК $q_1,q_2,\ldots q_N$, где N=3n-S, где S–число голономных связей.
$$x_{ai}=f_i^{(a)}(q_1,q_2,\ldots,q_N)$$
$$\dot x_{ai}=\sum_{\alpha=1}^N\frac{\partial f_i^{(a)}}{\partial q_\alpha}\dot q_\alpha$$
$$T=\sum_{a=1}^n\sum_{i=1}^3\frac{m_a}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^N\frac{\partial f_i^{(a)}}{\partial q_\alpha}\dot q_\alpha\right)\cdot\left(\sum_{\beta=1}^N\frac{\partial f_i^{(a)}}{\partial q_\beta}\dot q_\beta\right)=$$
$$=\sum_{\alpha,\beta=1}^N\dot q_\alpha\dot q_\beta\left(\sum_{a=1}^n\sum_{i=1}^3\frac{m_a}{2}\cdot\frac{\partial f_i^{(\alpha)}}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial f_i^{(\beta)}}{\partial q_\beta}\right)=$$
$$=\sum_{\alpha,\beta=1}^N\dot q_\alpha\dot q_\beta a_{\alpha\beta}\ ,где$$
$$a_{\alpha\beta}=\left(\sum_{a=1}^n\sum_{i=1}^3\frac{m_a}{2}\cdot\frac{\partial f_i^{(\alpha)}}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial f_i^{(\beta)}}{\partial q_\beta}\right)$$
Вывод: кинетическая энергия в обобщённых координатах всегда квадратичная функция обобщённых координат.

Законы сохранения.

Интегралами движения мех. системы называют величины, сохраняющие свои значения с течением времени.
$$f(q,\dot q,t)=const\ (всегда)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$
$$\begin{cases}q=f_1(t,C_1,C_2)\\ \dot q=f_2(t,C_1,C_2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=f_1(q,\dot q,t)\\ C_2=f_2(q,\dot q,t)\end{cases}$$
В системе с 1-й степенью свободы ∃ в общем случае 2 интеграла движения. Если N>1, то переходим к системе ур-й Лагранжа:
$$\begin{cases}q_1=f_1(t,\vec C)\\ q_2=f_2(t,\vec C)\\ \vdots\\ q_N=f_N(t,\vec C)\end{cases}$$
$$\vec C=\{C_1,C_2,\ldots,C_{2N}\}$$
Т.к 2N нач. условий.
$$\begin{cases}\dot q_1=g_1(t,\vec C)\\ \vdots\\ \dot q_N=g_N(t,\vec C)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=F_1(\vec q,\dot{\vec q},t)\\ C_2=F_2(\vec q,\dot{\vec q},t)\\ \vdots\\ C_{2N}=F_{2N}(\vec q,\dot{\vec q},t)\end{cases}$$
Всего 2N интегралов движения. Среди 2N интегралов выделяют 7 интегралов, связанных с симметрией пространства для данной выбранной механической системы.
1)Полная механическая энергия.
2)Импульс (3 проекции).
3)Момент импульса (3 проекции).

Закон сохранения энергии.



$\vec r(t_0)=\vec r_0$; $\dot{\vec r}(t_0)=\vec\upsilon_0$;
Через время δt повторяем опыт с теми же условиями. Если в эквивалентные моменты времени точка занимает те же положения, то ⇒ пространство однородно по времени. Однородность пространства по времени означает закон сохранения энергии:
$$L(q,\dot q,t)=L(q,\dot q,t+\delta t)$$
Рассмотрим вариацию функции Лагранжа δL:
$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial t}\delta t=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial t}=0$$
Этот результат – факт однородности пространства (Если в L присутствует t, то энергия не сохраняется).
$$E=T+U=const$$
$$\frac{dL}{dt}=\sum_{i=1}^N\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot q_i+\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\ddot q_i\right)+\frac{\partial L}{\partial t}=$$
$$=\sum_{i=1}^N\left(\dot q_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\right)+\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\ddot q_i\right)+\frac{\partial L}{\partial t}$$
$$\dot q_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\right)+\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\ddot q_i=\frac{d}{dt}\left(\dot q_i\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\right)$$
$$Если\ \frac{\partial L}{\partial t}=0,\ то:$$
$$\frac{dL}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^N\dot q_i\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^N\dot q_i\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}-L\right)=0$$
$$\sum_{i=1}^N\dot q_i\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}-L=const$$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}=\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}$$
$$\sum_{i=1}^N\dot q_i\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}=2T\ (По\ Th\ об\ однор.\ ф-х)$$
$$T-однор.\ степ\ 2\ по\ \dot q$$
$$const=2T-(T-U)=T+U$$
Теорема Эйлера об однородных функциях:
Пусть $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – однородная функция степени m, тогда:
$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i=m\cdot f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

Закон сохранения импульса.

Если пространство однородно по координатам, то имеет место закон сохранения обобщённого импульса.

Если (1) и (2) одинаковы при наложении, то пространство однородно по координатам.
$$L=L(\vec r,\vec\upsilon,t)$$
$$L=L(\vec r+\vec a,\vec\upsilon,t)$$
$$L(\vec r+\vec a,\vec\upsilon,t)=L(\vec r,\vec\upsilon,t)$$
$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial\vec r}\delta\vec r=\frac{\partial L}{\partial\vec r}\vec a=0\Rightarrow\frac{\partial L}{\partial\vec r}=0$$
Это и есть закон сохранения обобщённого импульса.
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\vec\upsilon}\right)-\frac{\partial L}{\partial\vec r}=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial\vec\upsilon}=\vec p\vec r=const$$

Закон сохранения момента импульса.

Изотропия – однородность пространства по направлению. Выдвинем предположение: если $\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$, то $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right)=0$, т.е
⇒ M_z=const. Док-во:
$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=p_\varphi=const$$
$$R=r\sin\theta$$
$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial\vec r}\delta\vec r+\frac{\partial L}{\partial\vec\upsilon}\delta\vec\upsilon$$
$$\delta\vec r=[\delta\vec\varphi,\vec r];\ |\delta\vec r|=r\delta\varphi\sin\theta=R\delta\varphi$$
$$\delta\vec\upsilon=[\delta\vec\varphi,\vec\upsilon]$$
$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial\vec r}[\delta\vec\varphi,\vec r]+\frac{\partial L}{\partial\vec\upsilon}[\delta\vec\varphi,\vec\upsilon]=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\vec\upsilon}\right)[\delta\vec\varphi,\vec r]+$$
$$+\frac{\partial L}{\partial\vec\upsilon}[\delta\vec\varphi,\vec\upsilon]=\dot{\vec p}[\delta\vec\varphi,\vec r]+\vec p[\delta\vec\varphi,\vec\upsilon]=\delta\vec\varphi[\vec r,\dot{\vec p}]+$$
$$+\delta\vec\varphi[\dot{\vec r},\vec p]=\delta\vec\varphi\frac{d}{dt}[\vec r,\vec p]=0\Rightarrow\vec M=const$$

Одномерное движение.

Это движение механической системы с одной степенью свободы:

$L = \frac{1}{2}a(q)\cdot\dot{q}^2 - U(q)$

$Если\ q = x,\ тогда: L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x)$

$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{dU}{dx}$

$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = const;$

$\dot{x} = \sqrt{\frac{2(E-U)}{m}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E-U(x)}$

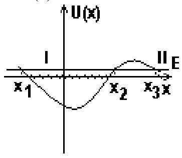
$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E-U(x)}} \Rightarrow$

$\Rightarrow t(x) = \sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} + C$

Какова структура пространства в области движения частицы.

$E \geq U(x)$ – движение возможно.

$E = U(x) \Rightarrow x_i$ – точки остановки системы.



$x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $x \geqslant x_3$ – области, доступные для движения.

I – финитное движение (ограниченное).

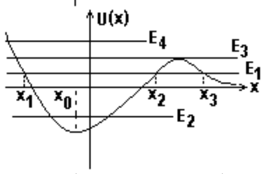
II – инфинитное движение(неограниченное).

Финитное движение – колебательное движение $\Rightarrow$ можем ввести величину – период колебательного движения.

$T(E) = \sqrt{\frac{m}{2}}\cdot 2\int\limits_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$

$T(E) = \sqrt{2m}\int\limits_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$

Фазовое пространство системы – пространство её скоростей и координат.



Линия на фазовой плоскости – фазовая траектория, а набор фазовых траекторий при различных уровнях энергии E – фазовый портрет системы.

$F_{x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x_i}$

Положения равновесия и их устойчивость.

$L = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - U(q)$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = a(q)\dot{q}$

$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\dot{q}^2}{2}a'(q) - \frac{\partial U}{\partial q}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = a'(q)\dot{q}^2 + a(q)\ddot{q}$

$a'(q)\dot{q}^2 + a(q)\ddot{q} - \frac{\dot{q}^2}{2}a'(q) + \frac{\partial U}{\partial q} = 0$

$a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}a'(q)\dot{q}^2 + \frac{\partial U}{\partial q} = 0$

Получено уравнение Лагранжа при одномерном движении.

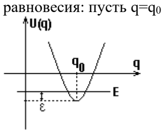
$Если\ \begin{matrix}\ddot{q} = 0\\ \dot{q} = 0\end{matrix}\Bigg| \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial q} = 0 - полож.равн - я$

$q_i - положения\ равновесия.$

Положения равновесия бывают:

1)Устойчивое, 2)Неустойчивое, 3)Безразличное.

Изучим движение вблизи положения равновесия: пусть $q = q_0$ – устойчиво.



$T = \frac{a(q)}{2}\dot{q}^2$

$x = q - q_0$

$a(q) \approx a(q_0) \approx a_0$

$T \approx \frac{a_0}{2}\dot{x}^2$

$U(q) \approx U(q_0) + \frac{dU}{dq}\Big|_{q_0}x + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dq^2}\Big|_{q_0}x^2 + \ldots =$

$= U_0 + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dq^2}\Big|_{q_0}x^2$

$При\ устойчивом\ положении\ равновесия:$

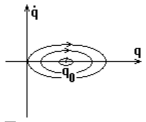
$\alpha = \frac{d^2U}{dq^2}\Big|_{q_0} > 0$

$U(q) \approx U_0 + \frac{\alpha}{2}x^2$

$L = \frac{a_0}{2}\dot{x}^2 - U_0 - \frac{\alpha}{2}x^2$

$\varepsilon = E - U_0 > 0$

$\varepsilon = \frac{a_0}{2}\dot{x}^2 + \frac{\alpha}{2}x^2 = const$



Положению равновесия соответствует тип – центр.

Уравнение Лагранжа имеет вид:

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = a_0\dot{x};\ \frac{\partial L}{\partial x} = -\alpha x$

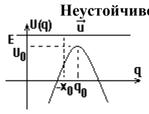
$Ур - е\ Лагранжа:$

$a_0\ddot{x} + \alpha x = 0$

$\omega_0^2 = \frac{\alpha}{a_0}$

$x(t) = A\cos(\omega t + \beta)$

Неустойчивое равновесие.



$x = q - q_0$

$x(0) = -x_0$

$\upsilon_x(0) = \upsilon_0$

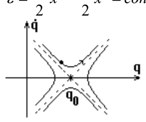
$\varepsilon = E - U_0$

$U \approx U_0 - \frac{1}{2}\alpha x^2$

$L = \frac{a_0}{2}\dot{x}^2 - U_0 + \frac{\alpha}{2}x^2$

$\alpha = -\frac{d^2U}{dq^2}\Big|_{q_0} > 0$

$\varepsilon = \frac{a_0}{2}\dot{x}^2 - \frac{\alpha}{2}x^2 = const$



$\ddot{x} - \frac{\alpha}{a_0}x = 0$

$\frac{\alpha}{a_0} = k > 0$

$x(t) = Ae^{\sqrt{k}t} + Be^{-\sqrt{k}t}$

$A = \frac{-x_0 + \sqrt{x_0^2 + \frac{2\varepsilon}{a_0 k}}}{2};\ B = \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 + \frac{2\varepsilon}{a_0 k}}}{2}$

Преобразования Галилея.

Инерциальная СО – такая система отсчёта(тело отсчёта+часы), относительно кот. тело будет двигаться равномерно и прямолинейно, если на него не действуют др. тела.

В ИСО все законы физики протекают одинаково. Время однородно, а пространство однородно и изотропно для механической системы. Течение времени носит абсолютный характер(течение времени одинаково).

$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}';\ \vec{R} = \vec{V}t$

$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t;\ \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{V}$

$\vec{a} = \vec{a}'$

<u>Преобразование интегралов движения, связ. с симметрией пространства при преобраз. Галилея.</u>

1)Импульс

$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$

$\vec{p} = \sum_{a=1}^{N}m_a\vec{\upsilon}_a = \sum_{a=1}^{N}m_a(\vec{\upsilon}_a + \vec{V}) = \vec{p}' + \mu\vec{V}$

$\mu = \sum_{a=1}^{N}m_a$

Найдём такую K′ в кот. импульс равен нулю.

$\vec{p}' = 0;\ \Rightarrow \vec{p} = \mu\vec{V}$

$\vec{V} = \frac{\vec{p}}{\mu} = \frac{\sum_a m_a\vec{\upsilon}_a}{\sum_a m_a} = \vec{V}_0 - скорость\ ц.масс$

2)Энергия.

$\vec{\upsilon}_a = \vec{\upsilon}_a' + \vec{V};\ \vec{r}_a = \vec{r}_a' + \vec{V}t$

$E = \sum_a\frac{m_a}{2}\vec{\upsilon}_a^2 + U(\vec{r}_a) = \sum_a\frac{m_a}{2}(\vec{\upsilon}_a' + \vec{V})^2 + U =$

$= \sum_a\frac{m_a}{2}\upsilon_a'^2 + \frac{1}{2}\sum_a m_a V^2 + \sum_a m_a\vec{\upsilon}_a'\vec{V} + U =$

$= E' + \frac{\mu}{2}V^2 + \vec{V}\sum_a m_a\vec{\upsilon}_a' + U$

$E = E' + \frac{\mu}{2}V^2 + \vec{V}\vec{p}'$

Если K′ СО – система центра масс, то p′=0 $\Rightarrow$ $E = E' + \frac{\mu}{2}V^2$ (теорема Кёнига).

Замечание: В системе K′ полная мех. энергия не постоянна (не явл. интегралом движения, т.к

$U = U(r' - \vec{V}t) \Rightarrow \frac{\partial U'}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial L'}{\partial t} \neq 0$)

3)Момент импульса:

$\vec{M} = \sum_a m_a[\vec{r}_a; \vec{\upsilon}_a]$

$\vec{r}_a = \vec{r}_a' + \vec{\upsilon}t;\ \vec{\upsilon}_a = \vec{\upsilon}_a' + \vec{\upsilon}$

$\vec{M} = \sum_a m_a[\vec{r}_a' + \vec{\upsilon}t; \vec{\upsilon}_a' + \vec{\upsilon}] =$

$= \sum_a m_a[\vec{r}_a'; \vec{\upsilon}_a'] + \sum_a m_a[\vec{r}_a'; \vec{\upsilon}] + t\sum_a[\vec{\upsilon}, m_a\vec{\upsilon}_a']$

$+ 0 = \vec{M}' + \mu\sum_a\left[\frac{m_a\vec{r}_a'}{\mu}, \vec{\upsilon}\right] + t\mu\sum_a\left[\vec{\upsilon}, \frac{m_a\vec{\upsilon}_a'}{\mu}\right] =$

$= \vec{M}' + [\vec{R}', \mu\vec{\upsilon}] + t[\mu\vec{\upsilon}, \vec{\upsilon}_0']$

$где\ \vec{R}'\ и\ \vec{\upsilon}_0' - рад.вектор\ и\ скорость\ ц.масс$

Инвариантность уравнений движения относительно преобразований Галилея.

Выясним как преобразуется уравнение Лагранжа при переходе из K→K′.

<u>В K системе</u>:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$

<u>В K′ системе</u>:

$x_i = x_i' + V_i t$

$\dot{x}_i = \upsilon_i = \dot{x}_i' + V_i$

$L = \sum_{i=1}^{3}\frac{m}{2}\dot{x}_i^2 - U = \sum_i\frac{m}{2}(\dot{x}_i' + V_i)^2 - U =$

$= \sum_i\frac{m}{2}(\dot{x}_i'^2 + V_i^2 + 2\dot{x}_i'V_i) - U = L' +$

$+ \frac{d}{dt}\sum_i\frac{m}{2}(V_i^2 t + 2x_i'V_i) = L' + f(x_i', t)$

При переходе в K′ систему функции L и L′ отличаются на полную производную координат по времени$\Rightarrow$по св-ву ф-ции Лагранжа уравнение движение не меняется.

$1)\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'}\ в\ силу\ однородности\ времени$

$2)\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_j\frac{\partial f}{\partial x_j'}\cdot\frac{\partial x_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_j'}\cdot\frac{\partial \dot{x}_j'}{\partial x_i}$

$T.к\ \dot{x}_j' \neq g(x_j), то \Rightarrow \frac{\partial \dot{x}_j'}{\partial x_i} = 0$

$A\ т.к\ x_i = x_i' + V_i t,\ то\ \frac{\partial x_j'}{\partial x_i} = \delta_{ij}$

$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_j'}\delta_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x_i'}$

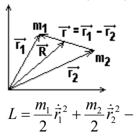
3)Аналогично $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i'}$

В системе K′ уравнение Лагранжа имеет вид: $\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_i'}\right) - \frac{\partial L'}{\partial x_i'} = 0$.

Приведённая масса. Задача двух тел.

Две частицы движутся в поле и взаимодействуют между собой. Как найти решение. Пусть U(r) – зависит только от расстояния между частицами.

$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$



$L = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$

$S = 6;$

$Введём:$

$\begin{cases}\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2\\ \vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}\\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}\end{cases}$

$L = \frac{m_1}{2}\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2$

$-U(r)$

$L = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1 m_2^2}{2(m_1 + m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2 +$

$+ \frac{m_2 m_1^2}{2(m_1 + m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\vec{R}}\dot{\vec{r}} - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\vec{R}}\dot{\vec{r}} -$

$-U(r) = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\dot{\vec{r}}^2 - U(r)$

$L = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - U(r)$

$\mu = m_1 + m_2;\ m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} - прив.\ масса.$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = 0$

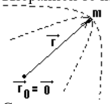
$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} = const = \mu\dot{\vec{R}}$

Скорость центра масс постоянна $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$, а сами частицы движутся вокруг центра масс. При наложении внешнего поля движение центра масс будет ускоренным $\mu\ddot{\vec{R}} \neq const$.

Движение в центральном поле.

$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - U(r)$

Пусть частиц не две, а одна и m–её масса. Ф-я Лагранжа имеет такой вид, а радиус-вектор $\vec{r}$ пусть характеризует положение частицы в пространстве относительно выбранной точки O.



Силовые поля, потенциальная энергия частиц в которых зависит только от расстояния до частицы от некоторой фиксированной точки пространств, называется центральными силовыми полями. E=const.

$\vec{M} = const\ в\ центральном\ поле$

$\vec{F} = -gradU(\vec{r}) = -\frac{dU}{dr}\vec{\nabla}r$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

$\vec{\nabla}r = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{\vec{r}}$

$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{dU}{dr}\hat{\vec{r}}$

Т.е сила направлена либо к центру поля, либо от центра поля.

$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d}{dt}[m\vec{r}, \vec{\upsilon}] = \frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{p}] = [\dot{\vec{r}}, \vec{p}] + [\vec{r}, \dot{\vec{p}}] =$

$= [\vec{r}, \dot{\vec{p}}] = -\frac{dU}{dr}[\vec{r}, \hat{\vec{r}}] = -\frac{dU}{dr}\left[\vec{r}, \frac{\vec{r}}{r}\right] = 0$

$\vec{M} = const = [\vec{r}, \vec{p}]$

Из факта сохранение момента импульса выпекает одно из свойств траектории частицы в центральном поле:

1)Движение в центральном поле происходит в плоскости векторов $\vec{r}$ и $\vec{\upsilon}$ перпендикулярно к вектору момента импульса $\vec{M}$

Введём связь между декартовыми координатами x и y и полярными координатами:

$\begin{cases}x = r\cos\varphi\\ y = r\sin\varphi\end{cases}$

$\vec{\upsilon}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$

$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \cos nt = mr^2\dot{\varphi} = M_z = M$

$\dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2}$

$E = T + U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) =$

$= \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$

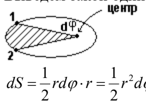
$где\ \frac{M^2}{2mr^2} - центробежная\ энергия$

$(энергия\ центробеж.\ силы)$

$U_{эфф.}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$

$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - U_{эфф.}(r)$

Выведем закон один из законов Кеплера.



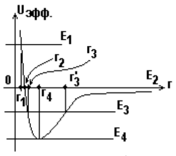
$dS = \frac{1}{2}rd\varphi\cdot r = \frac{1}{2}r^2d\varphi\Big|:dt$

$\frac{dS}{dt} = \frac{r^2}{2}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{r^2}{2}\cdot\frac{M}{mr^2} = \frac{M}{2m} = const$

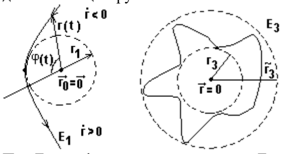
За равные промежутки времени радиус-вектор покрывает равные площади.

$U_{эфф.}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$

Изобразим на графике. График центробежной энергии имеет вид «квадратичной гиперболы». Пусть график зависимости $U_{эфф.}(r)$ имеет вид:



Разрешенными областями для движения являются области, где $E>U_{эфф.}(r)$.
E1: $r>r_1$
E2: $r>r_2$
E3: $r_3<r<r_3'$ (∃ точки остановки по r)
E4: $r=r_4$
Поскольку $\vec{\upsilon}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$, то ⇒ в точках остановки ∃ лишь чисто вращательное движение к центру поля или от него.



При E_1 – инфинитное движение, при E_3 – финитное движение (траектория целиком лежит внутри кольца).

$$E = const = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$$

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{эфф.}(r)\right)}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{эфф.}(r)\right)}} = dt$$

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dr}{\sqrt{E - U_{эфф.}(r)}}$$

Зависимость $\varphi(t)$ можно найти из

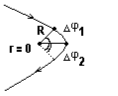
$$mr^2\dot{\varphi} = M\ ;\ \dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2}$$

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{M}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U_{эфф.}(r)}}\ ;\ \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{d\varphi}{dr}$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{M}{\sqrt{2m}}\cdot\frac{1}{r^2\sqrt{E - U_{эфф.}(r)}}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{M}{\sqrt{2m}}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{эфф.}(r)}}$$

Это – уравнение траектории в центральном поле.
2)Траектория частицы в центральном поле всегда симметрична относительно линии, соединяющей центр поля и точку минимального удаления частицы от центра поля.



$$\Delta\varphi_1 = -\frac{M}{\sqrt{2m}}\int_R^{r_{\min}}\frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{эфф.}(r)}} =$$

$$= \frac{M}{\sqrt{2m}}\int_{r_{\min}}^{R}\frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{эфф.}(r)}} = \Delta\varphi_2$$

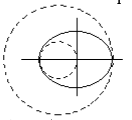
<u>Найдём условие замкнутости траектории</u>:

$$\Delta\varphi = 2\frac{M}{\sqrt{2m}}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{эфф.}(r)}}$$

Траектория будет замкнута, если:
$k\Delta\varphi = 2\pi n,\ где\ k, n \in Z$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi n}{k}$$

Рассмотрим частные случаи:
1)n=1, k=1
$\Delta\varphi = 2\pi$
Эллиптическая траектория:



2)n=1, k=2

Падение на центр поля.

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} \ge 0 - движение\ есть$$

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - \frac{M^2}{2mr^2} - U(r) \ge 0\ \Big|\cdot r^2$$

$$Er^2 - \frac{M^2}{2m} \ge U(r)r^2$$

$При\ r \to 0$

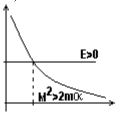
$$-\frac{M^2}{2m} \ge \lim_{r\to 0}U(r)r^2 - необх.\ ус-е\ пад-я$$

Рассмотрим несколько случаев:

$$1)U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$$

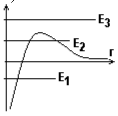
$\alpha > 0, n \ge 2$

$a)n = 2$



Ни при каких значениях E не удаётся достичь центра поля.

Падение на центр поля возможно.
б)n>2



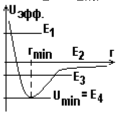
При E_1 – падение есть, при E_2 – падение возможно, при E_3 – падение возможно при определённых условиях.
2)n=1. (случай Кулоновского поля). Решим задачу Кеплера.

Задача Кеплера.

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

$$U_{эфф.}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$



$$U'_{эфф.} = -\frac{M^2}{mr^3} + \frac{\alpha}{r^2} = 0\ \Big|\cdot r^3$$

$$\alpha r = \frac{M^2}{m} \Rightarrow r_{\min} = \frac{M^2}{m\alpha}$$

$$U_{\min} = \frac{M^2m^2\alpha^2}{2mM^4} - \frac{m}{M^2} = \frac{m\alpha^2}{2M^2} - \frac{m\alpha^2}{M^2} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}$$

<u>Найдём траекторию частицы в Кулоновском поле.</u>

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{M}{\sqrt{2m}}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{E - \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r}}} =$$

$$= \left[z = \frac{1}{r}\right] = -\frac{M}{\sqrt{2m}}\int\frac{dz}{\sqrt{E - \frac{M^2}{2m}z^2 + \alpha z}} =$$

$$= -\int\frac{dz}{\sqrt{\frac{2mE}{M^2} - z^2 + \frac{2m\alpha}{M^2}z}} =$$

$$= -\int\frac{d\left(z - \frac{m\alpha}{M^2}\right)}{\sqrt{\frac{2mE}{M^2} - \left(z - \frac{m\alpha}{M^2}\right)^2 + \frac{m^2\alpha^2}{M^4}}} =$$

$$= \left[\xi = z - \frac{m\alpha}{M^2}\right] = -\int\frac{d\xi}{\sqrt{\left(\frac{2mE}{M^2} + \frac{m^2\alpha^2}{M^4}\right) - \xi^2}} =$$

$$= \arccos\left(\frac{z - \frac{m\alpha}{M^2}}{\sqrt{\frac{2mE}{M^2} + \frac{m^2\alpha^2}{M^4}}}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{\frac{M^2}{m\alpha r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}}\right)$$

Введём:

$$p = \frac{M^2}{m\alpha} - параметр\ орбиты$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \arccos\left(\frac{\frac{p}{r} - 1}{e}\right)$$

$$\frac{p}{r} - 1 = e\cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)},\ \varphi_0 = 0$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

e – эксцентриситет.
Это–уравнение траектории.
1)Пусть

$$E = U_{\min} = E_4 = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2M^2}{m\alpha^2}\cdot\left(-\frac{m\alpha^2}{2M^2}\right)} = 0$$

$r = p$
окружность.
2)Пусть $E=E_3$, $U_{\min}<E_3<0$

$$r_1 = \frac{p}{1+e}\ ;\ r_2 = \frac{p}{1-e}$$

найдём ур-е в декарт. коорд.

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}$$

$$r = \frac{p}{1 + e\frac{x}{r}} = \frac{pr}{r + ex}$$

$r + ex = p\,|\,\hat{}2$

$$x^2 + y^2 = p^2 - 2pex + e^2x^2$$

$$x^2\left(1 - e^2\right) + 2pex + y^2 = p^2$$

$$\left(1 - e^2\right)\left(x^2 + \frac{2pe}{1 - e^2}x\right) =$$

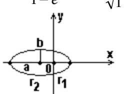
$$= \left(1 - e^2\right)\left(\left(x + \frac{pe}{1 - e^2}\right)^2 - \frac{p^2e^2}{\left(1 - e^2\right)^2}\right)$$

$$\left(1 - e^2\right)\left(x + \frac{pe}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 = p^2\left(1 + \frac{e^2}{1 - e^2}\right)$$

Эллипс:

$$\frac{\left(x + \frac{pe}{1 - e^2}\right)^2}{\left(\frac{p}{1 - e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}\right)^2} = 1$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2}\ ;\ b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}$$



$$S = \pi ab = \frac{\pi p^2}{\left(1 - e^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{M}{2m}$$

$$S = \frac{M}{2m}T(E) = \frac{\pi p^2}{\left(1 - e^2\right)^{3/2}}$$

$$T(E) = \frac{2\pi mp^2}{M\left(1 - e^2\right)^{3/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\alpha^2}{8|E|^3}}$$

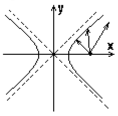
Зависит только от E, а от M не зависит – это особенность Кулоновского поля.
3)$E_2=0$ ⇒ e=1:

$$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi}$$

При $r\to+\infty$ ⇒ $\cos\varphi\to-1$
$-\pi<\varphi<\pi$ – парабола.
4)$E_1>0$ ⇒ e>1 ⇒ гипербола.

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

$при\ r \to +\infty \Rightarrow \varphi \to \pm\varphi_0$



В Кулоновском поле M и E – сохраняются, а также сохраняется вектор Рунге-Ленца:

$$\vec{R} = \left[\vec{\upsilon}, \vec{M}\right] - \frac{\alpha}{r}\vec{r} = const$$

Док-во:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\left[\vec{\upsilon}, \vec{M}\right] - \frac{\alpha}{r}\vec{r}\right) = \left[\dot{\vec{\upsilon}}, \vec{M}\right] + \left[\vec{\upsilon}, \dot{\vec{M}}\right] -$$

$$-\alpha\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right);$$

$$Найдём\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right):$$

$$Пусть\ \vec{a} = \frac{\vec{r}}{r}\ ;\ a_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_jx_j}}$$

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{da_i}{dx_k}\cdot\frac{dx_k}{dt} =$$

$$= \left(\delta_{ik}\frac{1}{\sqrt{x_jx_j}} - \frac{1}{2}\frac{x_i}{\left(x_jx_j\right)^{3/2}}2\delta_{kf}x_f\right)\dot{x}_k =$$

$$= \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{x_jx_j}} - \frac{x_ix_k\dot{x}_k}{\left(x_jx_j\right)^{3/2}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right)}{r^3}$$

Продолжим:

Поскольку $\dot{\vec{M}} = 0$, то:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \left[\ddot{\vec{r}}, \left[\vec{r}, m\dot{\vec{r}}\right]\right] - \alpha\frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \alpha\frac{\vec{r}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right)}{r^3} =$$

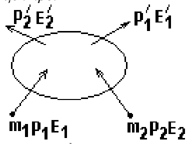
$$= \left[m\ddot{\vec{r}}, \left[\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right]\right] - \alpha\frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \alpha\frac{\vec{r}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right)}{r^3} =$$

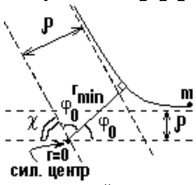
$$= \alpha\left(-\left[\frac{\vec{r}}{r^3}, \left[\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right]\right] - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \frac{\vec{r}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right)}{r^3}\right) =$$

$$= \alpha\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right) + \frac{\dot{\vec{r}}}{r^3}\left(\vec{r}, \vec{r}\right) - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \frac{\vec{r}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right)}{r^3}\right) = 0$$

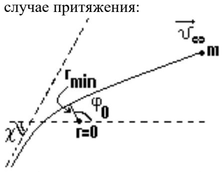
Распады и столкновения частиц.

Рассеяние частиц на неподвижном силовом центре.





ρ – прицельный параметр – расстояние кот. частица прошла бы, если бы не было взаимодействия. Траектория частицы должна лежать в одной плоскости и быть симметричной.
χ – угол рассеяния. Если притяжение, то $\chi=|\pi-2\varphi_0|$, если отталкивание, то $\chi=\pi-2\varphi_0$. В случае притяжения:



$$\varphi_0 = \left|\frac{M}{\sqrt{2m}}\int_{\infty}^{r_{\min}}\frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{эфф.}(r)}}\right| =$$

$$= \frac{M}{\sqrt{2m}}\int_{\infty}^{r_{\min}}\frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{эфф.}(r)}}$$

Все интегралы движения вычисляем на бесконечном расстоянии от силового центра:

$$E = \frac{m\upsilon_\infty^2}{2}\ ;\ \upsilon_\infty = -\dot{r} \Rightarrow E = \frac{m\dot{r}^2}{2}]$$

$$M = mr^2\dot{\varphi}$$

$$При\ r \to \infty, \varphi \to 0 \Rightarrow \sin\varphi \approx \varphi = \frac{\rho}{r}$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\rho}{r^2}\dot{r} = \frac{\rho\upsilon_\infty}{r^2}\ ;\ M = mr^2\frac{\rho\upsilon_\infty}{r^2} = m\rho\upsilon_\infty$$

$$\varphi_0 = \frac{m\rho\upsilon_\infty}{\sqrt{2m}}\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{m\upsilon_\infty^2}{2} - U(r) - \frac{m^2\rho^2\upsilon_\infty^2}{2mr^2}}} =$$

$$= \frac{m\rho\upsilon_\infty}{\sqrt{2m}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m\upsilon_\infty^2}}\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{m\upsilon_\infty^2}}} \Rightarrow$$

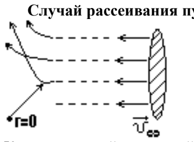
$$\Rightarrow \varphi_0 = \rho\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{m\upsilon_\infty^2}}}$$

$$r_{\min}\ опред.\ из\ E = U_{эфф.}$$

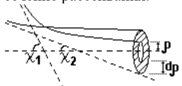
$$1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{m\upsilon_\infty^2} = 0 \to r_{\min}$$

Если силовой центр – отталкивающий, то:

Случай рассеивания пучка частиц.



Количественной величиной рассеивания является сечение рассеивания: $d\sigma = \frac{dj}{n}$, где
dj – число частиц, рассеянных в интервале углов χ (от χ до χ+dχ) за единицу времени.
n – число частиц пучка, прошедших за ту же самую единицу времени через единичную площадку, перпендикулярно движению частиц.
dσ – дифференциальное эффективное сечение рассеивания.



$\chi_1-\chi_2=d\chi$; $d\sigma=2\pi\rho d\rho$; $\rho=\rho(\chi)$

$d\rho=\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|d\chi$; $d\sigma=2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|d\chi$

$d\Omega=\sin\chi\cdot d\chi d\alpha$ *– телесный угол рассеивания.*

$$d\sigma=\frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|d\Omega$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|$ *– ф-я, опред. интенсивность процесса в заданном направлении.*

Формула Резерфорда:

$$U(r)=\frac{\alpha}{r}$$

$$\varphi_0=\rho\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{dr}{r^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2\alpha}{rm\upsilon_\infty^2}}}$$

$$r_{min}:1-\frac{\rho^2}{r_{min}^2}-\frac{2\alpha}{r_{min}m\upsilon_\infty^2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{min}=\frac{\alpha}{m\upsilon_\infty^2}+\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\alpha}{m\upsilon_\infty^2}\right)^2}$$

$$\varphi_0=\arccos\left(\frac{\alpha/m\rho\upsilon_\infty^2}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{m\rho\upsilon_\infty^2}\right)^2}}\right)$$

$$\cos^2\varphi_0=\frac{\left(\alpha/m\rho\upsilon_\infty^2\right)^2}{1+\left(\frac{\alpha}{m\rho\upsilon_\infty^2}\right)^2};$$

$$\frac{1}{\cos^2\varphi_0}=\left(\frac{m\rho\upsilon_\infty^2}{\alpha}\right)^2+1$$

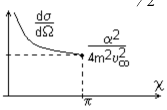
$$tg^2\varphi_0=\left(\frac{m\rho\upsilon_\infty^2}{\alpha}\right)^2$$

$$\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|=\frac{\alpha}{m\upsilon_\infty^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\chi/2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\alpha}{2m\upsilon_\infty^2\sin^2\chi/2}$$

$$d\sigma=\frac{\alpha}{m\upsilon_\infty^2}\cdot\frac{ctg\,\chi/2}{2\sin\chi/2\cos\chi/2}\cdot\frac{\alpha}{2m\upsilon_\infty^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\sin^2\chi/2}d\Omega$$

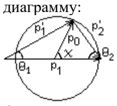
$$d\sigma=\left(\frac{\alpha}{2m\upsilon_\infty^2}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4\chi/2}$$



Под малыми углами χ рассеивается больше частиц.

Рассеяние на не неподвижном силовом центре.

В случае рассеяния пучка частиц на не неподвижном силовом центре, а на других, первоначально покоящихся частицах можно сказать, что формула $d\sigma=2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|d\chi$ определяет эффективное сечение в зависимости от угла рассеяния в системе центра масс. Для нахождения эфф. сеч. рассеяния в зависимости от угла рассеяния θ в лабораторной системе отсчёта нужно поступить след. образом. Пусть частица массой m_2 покоится, а частица массой m_1 налетает на неё. Нарисуем векторную диаграмму:



Откуда:

$$tg\theta_1=\frac{p_0\sin\chi}{m_1V_c+p_0\cos\chi}$$

найдём V_c:

$$\vec p_1=m_1\upsilon_1'+m_2\upsilon_2'\,|:(m_1+m_2)$$

$$\vec V_c=\frac{\vec p_1}{m_1+m_2}=\frac{m_1\vec\upsilon}{m_1+m_2}$$

$$p_0=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{отн}=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\upsilon$$

подставляя находим:

$$tg\theta_1=\frac{m_2\sin\chi}{m_1+m_2\cos\chi}$$

$$\theta_2=\frac{\pi-\chi}{2}$$

Выражая отсюда χ и подставляя в формулу получаем выражение для эффективных сечений.

Распад частиц.

Рассмотрим самопроизвольный распад частиц:

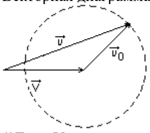
$$E_{вн.}=E_{вн.1}+E_{вн.2}+E_{K1}+E_{K2}$$

$\vec p_{10}+\vec p_{20}=0$; $|\vec p_{10}|=|\vec p_{20}|$; $p_{10}=p_{20}=p_0$

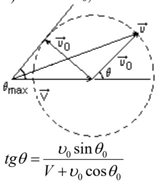
$$\varepsilon=E_{вн.}-E_{вн.1}-E_{вн.2}=\frac{p_0^2}{2m_1}+\frac{p_0^2}{2m_2}=$$

$$=\frac{p_0^2}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)=\frac{p_0^2}{2m},\ где\ m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

Векторная диаграмма:



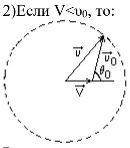
1)Если V>υ0, то:



$$tg\theta=\frac{\upsilon_0\sin\theta_0}{V+\upsilon_0\cos\theta_0}$$

$$\sin\theta_{max}=\frac{\upsilon_0}{V}$$

2)Если V<υ0, то:



Вектор υ может иметь любое направление.

Найдём распределение по энергиям.

Найдём вероятность распада в L системе отсчёта(лабораторной СО) от энергии осколков в случае изотропного распада (по любому направлению).

$$dW=\frac{d\Omega}{4\pi}$$

$$d\Omega=2\pi\sin\theta_0d\theta_0$$

$$\upsilon^2=V^2+\upsilon_0^2+2(\vec V,\vec\upsilon_0)\{2V\upsilon_0\cos\theta_0\}$$

$$d(\cos(\theta_0))=\frac{d(\upsilon^2)}{2V\upsilon_0}$$

$T=\frac{m\upsilon^2}{2}$; $dT=\frac{m}{2}d(\upsilon^2)$

$$d(\cos\theta_0)=\frac{dT}{mV\upsilon_0}$$

$dW=\frac{dT}{2mV\upsilon_0}$ *– вероятность того, что осколок получит энегию от T до T + dT*

Малые колебания.

I)Рассм. свободные колебания в системе с одной степенью свободы.

$$L=\frac{a(q)}{2}\dot q^2-U(q)$$

Пусть q_0 – устойчивое положение равновесия, тогда:

$\left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{q_0}=0$; $U''(q_0)>0$

Обозначим: $x=q-q_0$

Выберем грубое приближение

$$a(q)\approx a(q_0)=a_0$$

$$U(q)\approx U(q_0)+U'(q_0)x+\frac{U''(q_0)}{2}x^2$$

Для простоты будем считать, что $U(q_0)=0$, *тогда:*

$U(q)\approx\frac{U''(q_0)}{2}x^2$; *обозн.* $U''(q_0)=K>0$

$L=\frac{a_0}{2}\dot x^2-\frac{K}{2}x^2$; *Пусть* $a_0\equiv m$, *тогда*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot x}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

$m\ddot x+Kx=0$; $\ddot x+\frac{K}{m}x=0$; *обозн.* $\frac{K}{m}=\omega^2$

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$$

Найдём энергию колебаний:

$$E=T+U=\frac{m}{2}\dot x^2+\frac{K}{2}x^2=$$

$$=\frac{m}{2}A^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi)+\frac{K}{2}A^2\cos^2(\omega t+\varphi)=$$

$$=\frac{KA^2}{2}$$

Найдём условие малости колебаний:

1)Верность приближения:

$$a(q)\approx a(q_0)=a_0=m$$

$$a(q_0)>>a'(q_0)x$$

т.к $x\sim A$, *то:* $A<<\frac{a(q_0)}{a'(q_0)}$

2)Верность приближения:

$$U(q)\approx\frac{U''(q_0)}{2}x^2$$

$$\left|\frac{U''(q_0)}{2}x^2\right|>>\left|\frac{U'''(q_0)}{6}x^3\right|$$

Откуда

$$A<<\frac{U''(q_0)}{U'''(q_0)}$$

Из этих двух нер-в можно сформировать общее нер-во:

$$A<<\min\left[\frac{a(q_0)}{a'(q_0)};\frac{U''(q_0)}{U'''(q_0)}\right]$$

Замечание:

1)Уравнение движения – линейное однородное ДУ 2-го порядка с пост. коэф. – особенность малых колебаний,

2)Период(частота) не зависят от энергии(амплитуды).

3)Решение x(t) содержит только одну частоту (гармонику, моду), поэтому колебания – гармонические.

II)Вынужденные колебания в системе с одной степенью свободы.

$$F_{вн.}=F(t)$$

$$U_{доб.}=-xF(t)$$

$$L=\frac{a_0}{2}\dot x^2-\frac{K}{2}x^2+xF(t)$$

$$m\ddot x+Kx=F(t)$$

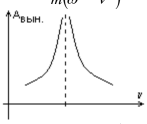
Приведём к стандартному виду:

$$\ddot x+\omega^2x=\frac{F(t)}{m}$$

Пусть $F(t)=F_0\cos(\nu t+\beta)$

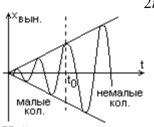
$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)+\frac{F_0}{m(\omega^2-\nu^2)}\cos(\nu t+\beta)$$

$$A_{вын.}=\frac{F_0}{m(\omega^2-\nu^2)}$$



При малых колебаниях необходимо выполнение условия A>Aвын. При ν=ω:

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)+\frac{F_0}{2m\omega}t\sin(\nu t+\beta)$$



Найдём энергию колебаний:

$$\ddot x+\frac{K}{m}x=\frac{F(t)}{m}$$

$$\ddot x+i\omega\dot x-i\omega\dot x+\omega^2x=\frac{F(t)}{m}$$

Введём: $\xi=\dot x+i\omega x$

$$\dot\xi-i\omega(\dot x+i\omega x)=\frac{F(t)}{m}$$

Итак:

$$\dot\xi-i\omega\xi=\frac{F(t)}{m}$$

$$\xi(t)=\xi_0e^{i\omega t}+\int_0^t\frac{F(\tau)}{m}e^{i\omega(t-\tau)}d\tau$$

Отсюда можно сделать вывод, что полная механическая энергия в такой системе не сохраняется.

$t=0:$ *осц. покоится*

$$t\neq0:\Delta E=\frac{m}{2}|\xi(t)|^2-\frac{m}{2}|\xi(0)|^2$$

Колебания при наличии трения.

$$\vec F_{c.}=-\alpha\vec\upsilon$$

Пусть q_0 *– уст. полож. равновесия*

$x=q-q_0$ *– отклонение от равновесия*

Рассмотрим малые колебания $(x\to0)$

$$f_{тр.}=f_{тр.}(\dot x)$$

$$f_{тр.}(\dot x)\approx f_{тр.}(0)+f'_{тр.}(0)\dot x=-\alpha\dot x$$

$$f_{тр.}(\dot x)\approx-\alpha\dot x$$

Тогда уравнение Лагранжа примет вид:

$$\ddot x+\omega^2x=-\frac{\alpha}{m}\dot x$$

Обозначим: $2\gamma=\frac{\alpha}{m}$; $\omega^2=\frac{K}{m}$

$$\ddot x+2\gamma\dot x+\omega^2x=0$$

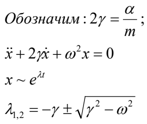
$$x\sim e^{\lambda t}$$

$$\lambda_{1,2}=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega^2}$$

1) $\gamma^2-\omega^2<0,\ \gamma<<\omega$

$$\lambda_{1,2}=-\gamma\pm i\omega$$

$$x(t)=x_0e^{-\gamma t}\cos(\omega t+\varphi)$$



Построим фазовую диаграмму:

$$\dot x=-\gamma x_0e^{-\gamma t}\cos(\omega t+\varphi)-x_0\omega e^{-\gamma t}\sin(\omega t+\varphi)$$

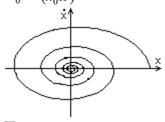
При $\gamma<<\omega$

$$\dot x\approx-x_0\omega e^{-\gamma t}\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\frac{\dot x^2}{(x_0\omega)^2}=e^{-2\gamma t}\sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$\left(\frac{x(t)}{x_0}\right)^2=e^{-2\gamma t}\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$\frac{x^2}{x_0^2}+\frac{\dot x^2}{(x_0\omega)^2}=e^{-2\gamma t}=e^{-\frac{2\alpha}{m}t}$$



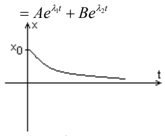
Положение равновесия – типа «фокус».

2) $\gamma>\omega$

$$\lambda_{1,2}=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega^2}$$

$$x(t)=Ae^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}+Be^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}=$$

$$=Ae^{\lambda_1t}+Be^{\lambda_2t}$$



Найдём фазовую траекторию:

$$\dot x=A\lambda_1e^{\lambda_1t}+B\lambda_2e^{\lambda_2t}$$

Введём

$$\begin{cases}\xi=\dot x-\lambda_1x=B(\lambda_2-\lambda_1)e^{\lambda_2t}\\ \eta=\dot x-\lambda_2x=A(\lambda_1-\lambda_2)e^{\lambda_1t}\end{cases}$$

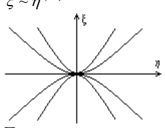
$$\begin{cases}\frac{\xi}{B(\lambda_2-\lambda_1)}=e^{\lambda_2t}\\ \frac{\eta}{A(\lambda_1-\lambda_2)}=e^{\lambda_1t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1t=\ln\frac{\xi}{B(\lambda_2-\lambda_1)}\\ \lambda_2t=\ln\frac{\eta}{A(\lambda_1-\lambda_2)}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{\ln\frac{\xi}{B(\lambda_2-\lambda_1)}}{\ln\frac{\eta}{A(\lambda_1-\lambda_2)}}$$

$$\left(\frac{\eta}{A(\lambda_1-\lambda_2)}\right)^{\lambda_2}=\left(\frac{\xi}{B(\lambda_2-\lambda_1)}\right)^{\lambda_1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\eta^{\lambda_2}\sim\xi^{\lambda_1}$$

$$\xi\sim\eta^{\lambda_2/\lambda_1}$$



Положение равновесия – типа «узел».

3) $\gamma=\omega$

$$\lambda_{1,2}=-\gamma$$

$$x(t)=(C_1+C_2t)e^{-\gamma t}$$

апериодические колебания.

Колебания систем с несколькими степенями свободы.

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,n=1}^{N}(m_{in}\dot x_i\dot x_n-k_{in}x_ix_n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\sum_{i,n}\left(m_{in}\frac{\partial(\dot x_i\dot x_n)}{\partial x_j}-k_{in}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}x_n+x_i\frac{\partial x_n}{\partial x_j}\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}k_{in}\delta_{ij}x_n-\frac{1}{2}k_{in}\delta_{nj}x_i=-\frac{1}{2}k_{jn}x_n-\frac{1}{2}k_{ij}x_i=$$

$$=k_{js}x_s$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot x_j}=m_{js}\dot x_s$$

$$m_{js}\ddot x_s+k_{js}x_s=0$$

$j=1,\dots,N$; $s=1,\dots,N$

$$x_s(t)=A_se^{i\omega t}$$

$$\ddot x_s(t)=-\omega^2A_se^{i\omega t}$$

$$-m_{js}\omega^2A_se^{i\omega t}+k_{js}A_se^{i\omega t}=0$$

$$A_s(k_{js}-\omega^2m_{js})=0$$

Чтобы однородная система имела нетривиальное решение, необходимо выполнение условия:

$$\det(k_{js}-\omega^2m_{js})=0$$

Решая полученное уравнение, находим частоты: $\omega_\alpha,\alpha=1,\dots,N$. Затем находим амплитуды: A_α. Амплитуды можно представить также через алгебраические дополнения:

$$A_s^{(\alpha)}=\Delta_{s\alpha}C_\alpha$$

$$x_s^{(\alpha)}=A_s^{(\alpha)}e^{i\omega_\alpha t}=\Delta_s^{(\alpha)}C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}$$

$$x_s(t)=\sum_{\alpha=1}^{N}\Delta_{s\alpha}C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}$$

Введём: $\theta_\alpha(t)=C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}$

$$x_s(t)=\sum_{\alpha=1}^{N}\Delta_{s\alpha}\theta_\alpha(t)$$

$\theta_\alpha(t)$ – нормальные координаты (нормальные колебания – колебания, происходящие с одной частотой).

$$L=\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\left(\dot\theta_\alpha^2-\omega_\alpha^2\theta_\alpha^2\right)$$ – функция Лагранжа в нормальных координатах.

$$m_\alpha=\sum_{i,n}\Delta_{i\alpha}\Delta_{n\alpha}m_{in}$$

$$m_\alpha\omega_\alpha^2=\sum_{i,n}\Delta_{i\alpha}\Delta_{n\alpha}k_{in}$$

$$\ddot\theta_\alpha+\omega_\alpha^2\theta_\alpha=0$$

Многомерные колебания при наличии трения.

$$f_{тр.i}=-\alpha_{ik}\dot x_k$$

$$\alpha_{ik}=\alpha_{ki}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot x_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}=-\alpha_{ik}\dot x_k=-\frac{\partial F}{\partial\dot x_i}$$

$$F=\frac{\alpha_{ik}}{2}\dot x_i\dot x_k-\textit{диссипативная сила системы}$$

$$(\textit{отвечает за рассеяние мех. энергии})$$

Найдём потери энергии:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\dot x_i\frac{\partial L}{\partial\dot x_i}-L\right)=\ddot x_i\frac{\partial L}{\partial\dot x_i}+\dot x_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot x_i}\right)-$$

$$-\frac{\partial L}{\partial x_i}\dot x_i-\frac{\partial L}{\partial\dot x_i}\ddot x_i=\dot x_i\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot x_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)=$$

$$=-\dot x_i\frac{\partial F}{\partial\dot x_i}=-2F(\textit{по Th Эйлера})$$

$$\frac{dE}{dt}=-2F$$

Вынужденные колебания при наличии трения.

$$\ddot x+2\gamma\dot x+\omega_0^2x=\frac{f}{m}\sin(\nu t+\beta)$$

$$\textit{Пусть }\beta=0$$

$$x\sim C_1\cos\nu t+C_2\sin\nu t$$

$$\dot x\sim\nu C_2\cos\nu t-\nu C_1\sin\nu t$$

$$\ddot x\sim-\nu^2C_2\sin\nu t-\nu^2C_1\cos\nu t$$

$$\begin{cases}C_1\left(\omega_0^2-\nu^2\right)+2\gamma\nu C_2=0\\ C_2\left(\omega_0^2-\nu^2\right)-2\gamma\nu C_1=\dfrac{f}{m}\end{cases}$$

$$C_1=-\frac{f}{m}\cdot\frac{2\gamma\nu}{4\gamma^2\nu^2+\left(\omega_0^2-\nu^2\right)^2}$$

$$C_2=\frac{f}{m}\cdot\frac{\omega_0^2-\nu^2}{4\gamma^2\nu^2+\left(\omega_0^2-\nu^2\right)^2}$$

Можно также искать решение в виде:

$$x\sim A\sin(\nu t+\delta)$$

$$\delta-\textit{разность фаз между колеб. и вынужд. силой}$$

$$x\sim A\sin\nu t\cos\delta+A\cos\nu t\sin\delta$$

$$\begin{cases}C_1=A\sin\delta\\ C_2=A\cos\delta\end{cases}$$

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\ ;\ tg\delta=\frac{C_1}{C_2}=-\frac{2\gamma\nu}{\omega_0^2-\nu^2}$$

$$x_{вын.}(t)\sim\frac{f}{m\sqrt{4\gamma^2\nu^2+\left(\omega_0^2-\nu^2\right)^2}}\sin(\nu t+\delta)$$

Построим график зависимости $x_{вын.max}(\nu)$:

Найдём ν^*:

$$\left(4\gamma^2\nu^2+\left(\omega_0^2-\nu^2\right)^2\right)'=8\gamma^2\nu+$$

$$+2\left(\omega_0^2-\nu^2\right)\cdot(-2\nu)=0$$

$$\nu=0-\textit{не имеет физ. смысла.}$$

$$\nu^*=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}$$

Рассмотрим случай

$$\gamma<<\omega_0$$

$$\nu=\omega_0+\varepsilon\ ;\ \varepsilon<<\omega_0,\nu$$

Преобраз. знаменатель

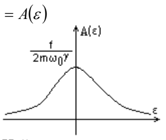
$$\sqrt{4\gamma^2\nu^2+\left(\omega_0^2-\nu^2\right)^2};$$

$$4\gamma^2\nu^2\approx4\gamma^2\omega_0^2$$

$$\left(\omega_0^2-\nu^2\right)^2\approx(\omega_0-\nu)^2(\omega_0+\nu)^2\approx4\omega_0^2\varepsilon^2$$

$$A\approx\frac{f}{m\sqrt{4\gamma^2\omega_0^2+4\omega_0^2\varepsilon^2}}=\frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\gamma^2+\varepsilon^2}}=$$

$$=A(\varepsilon)$$



Найдём потери энергии:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot x^2}{2}+\frac{kx^2}{2}\right)=\dot x(m\ddot x+kx)=$$

$$=m\dot x\left(\ddot x+\omega_0^2x\right)=m\dot x\left(-2\gamma\dot x+\frac{f}{m}\sin\nu t\right)=$$

$$=-2m\gamma\dot x^2+f\dot x\sin\nu t=\left(\frac{dE}{dt}\right)_{дисс.}+\left(\frac{\partial E}{dt}\right)_{внеш.}$$

Усредним по времени потери энергии за счёт диссипативных сил за период колебаний силы:

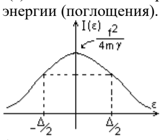
$$\dot x=\frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\gamma^2+\varepsilon^2}}\nu\cos(\nu t+\delta)$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{дисс.}=-\frac{f^2\nu^2\gamma\cos^2(\nu t+\delta)}{2m\omega_0^2\left(\gamma^2+\varepsilon^2\right)}\approx$$

$$\approx-\frac{f^2\gamma\cos^2(\nu t+\delta)}{2m\left(\gamma^2+\varepsilon^2\right)}$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{дисс.}=-\frac{f^2\gamma}{4m\left(\gamma^2+\varepsilon^2\right)}=I(\varepsilon)$$

$I(\varepsilon)$ – интенсивность процесса диссипации энергии (поглощения).



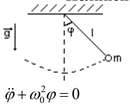
Δ – полуширина на полувысоте.

$$\frac{I_{\max}}{2}=\frac{f^2}{8m\gamma}=I\left(\pm\frac{\Delta}{2}\right)$$

$$\frac{f^2}{8m\gamma}=\frac{f^2\gamma}{4m\left(\gamma^2+\dfrac{\Delta^2}{4}\right)}$$

$$2\gamma^2=\gamma^2+\frac{\Delta^2}{4}\Rightarrow\Delta=2\gamma=\frac{\alpha}{m}$$

Нелинейные колебания.



$$\ddot\varphi+\omega_0^2\varphi=0$$

$$\omega_0^2=\frac{g}{l}\ ;\varphi\to0$$

$$\varphi(t)=\varphi_0\cos(\omega_0t+\alpha)$$

Если колебания не малые, то необходимо учесть нелинейные слагаемые при разложении периодической функции:

$$\sin\varphi\approx\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\ldots$$

$$\ddot\varphi+\omega_0^2\varphi-\gamma\varphi^3=0$$

Учтём нелинейность:

$$L=\sum_{i,k}\frac{a_{ik}}{2}\dot q_i\dot q_k-U(\vec q)$$

Пусть q_{0i} – положение равновесия.

$$x_i(t)=q_i(t)-q_{0i}$$

$$L\approx\sum_{i,k}\frac{m_{ik}}{2}\dot x_i\dot x_k-\sum_{i,k}\frac{K_{ik}}{2}x_ix_k+$$

$$+\sum_{i,j,k}\frac{n_{ijk}}{2}\dot x_i\dot x_j\dot x_k-\sum_{i,j,k}\frac{l_{ijk}}{3!}x_ix_jx_k$$

$$m_{ik}=a_{ik}\big|_{\vec q_0}\ ;\ K=U''_{q_iq_k}\big|_{\vec q_0}$$

$$m_{ijk}=\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\bigg|_{\vec q_0}$$

$$l_{ijk}=\frac{\partial^3U}{\partial q_i\partial q_j\partial q_k}\bigg|_{\vec q_0}$$

Решать уравнение лучше всего в нормальных координатах.

$$L=\frac{1}{2}\sum_\alpha\left(\dot Q_\alpha^2-\omega_\alpha^2Q_\alpha^2\right)+\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\lambda_{\alpha\beta\gamma}}{2}\dot Q_\alpha\dot Q_\beta\dot Q_\gamma-$$

$$-\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\mu_{\alpha\beta\gamma}}{3!}Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma$$

$$\sqrt{m_\alpha}\theta_\alpha=Q_\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}=0$$

$$\frac{\partial\tilde L}{\partial Q_\alpha}=\sum_{\sigma\beta\gamma}\frac{\lambda_{\sigma\beta\gamma}}{2}\dot Q_\sigma\dot Q_\beta\frac{\partial Q_\gamma}{\partial Q_\alpha}-$$

$$-\sum_{\sigma\beta\gamma}\frac{\mu_{\sigma\beta\gamma}}{3!}\frac{\partial}{\partial Q_\alpha}\left(Q_\sigma Q_\beta Q_\gamma\right)=$$

$$=\sum_{\sigma\beta}\frac{\lambda_{\sigma\beta\lambda}}{2}\dot Q_\sigma\dot Q_\beta+$$

$$+\sum_{\sigma\beta\gamma}\frac{\mu_{\sigma\beta\gamma}}{3!}\left(Q_\beta Q_\gamma\delta_{\sigma\alpha}+Q_\sigma\left(Q_\gamma\delta_{\beta\alpha}+Q_\beta\delta_{\gamma\alpha}\right)\right)$$

$$\frac{\partial\tilde L}{\partial\dot Q_\alpha}=\sum_{\sigma\beta\gamma}\frac{\lambda_{\sigma\beta\gamma}}{2}Q_\gamma\left(\dot Q_\beta\delta_{\sigma\alpha}+\dot Q_\sigma\delta_{\beta\alpha}\right)$$

$$\ddot Q_\alpha+\omega_\alpha^2Q_\alpha=f_\alpha\left(Q,\dot Q,\ddot Q\right)$$

Ищем решение в виде ряда последовательными приближениями:

$$Q_\alpha(t)=Q_\alpha^{(0)}(t)+Q_\alpha^{(1)}(t)+\ldots$$

$$Q_\alpha^{(0)}(t)=a_\alpha\cos(\omega_\alpha t+\varphi_\alpha)$$

$$\ddot Q_\alpha+\omega_\alpha^2Q_\alpha=0$$

$$Q_\alpha^{(1)}<<Q_\alpha^{(0)}$$

1)

$$Q_\alpha(t)=Q_\alpha^{(0)}+Q_\alpha^{(1)}$$

$$\ddot Q_\alpha^{(0)}+\omega_\alpha^2Q_\alpha^{(0)}+\ddot Q_\alpha^{(1)}+\omega_\alpha^2Q_\alpha^{(1)}=f_\alpha\left(Q^{(0)},\dot Q^{(0)},\ddot Q^{(0)}\right)$$

Пусть например в правой части :

$$Q_\alpha^{(0)}Q_\beta^{(0)}=a_\alpha\cos(\omega_\alpha t+\varphi_\alpha)\cdot a_\beta\cos(\omega_\beta t+\varphi_\beta)=$$

$$=\frac{a_\alpha a_\beta}{2}\left(\cos\left((\omega_\alpha+\omega_\beta)t+\varphi_\alpha+\varphi_\beta\right)+\right.$$

$$\left.+\cos\left((\omega_\alpha-\omega_\beta)t+\varphi_\alpha-\varphi_\beta\right)\right)$$

В правой части появляются периодические ф-ции с суммарными и разностными частотами $\Rightarrow$ решение ищем в виде, содержащем такие же функции.

2)

$$Q_\alpha=Q_\alpha^{(0)}+Q_\alpha^{(1)}+Q_\alpha^{(2)}$$

$$Q_\alpha^{(0)}\sim a_\alpha\ ;\ Q_\alpha^{(1)}\sim a_\alpha^2\ ;\ Q_\alpha^{(2)}\sim a_\alpha^3$$

$$Q_\alpha^{(2)}<<Q_\alpha^{(1)}$$

$$\ddot Q_\alpha^{(0)}+\omega_0^2Q_\alpha^{(0)}=0$$

$$\ddot Q_\alpha^{(1)}+\omega_\alpha^2Q_\alpha^{(1)}+\omega_\alpha^2Q_\alpha^{(2)}+\ddot Q_\alpha^{(2)}=$$

$$=f_\alpha\left(Q^{(0)}+Q^{(1)},\dot Q^{(0)}+\dot Q^{(1)},\ddot Q^{(0)}+\ddot Q^{(1)}\right)\approx$$

$$\approx f_\alpha\left(Q^{(0)},\dot Q^{(0)},\ddot Q^{(0)}\right)+\sum_\beta\frac{\partial f_\alpha}{\partial Q_\beta^{(0)}}Q_\beta^{(1)}+$$

$$+\frac{\partial f_\alpha}{\partial\dot Q^{(0)}}\dot Q^{(1)}+\frac{\partial f_\alpha}{\partial\ddot Q^{(0)}}\ddot Q^{(1)}$$

$$\ddot Q_\alpha^{(2)}+\omega_\alpha^2Q_\alpha^{(2)}=\frac{\partial f_\alpha}{\partial Q^{(0)}}Q^{(1)}+\frac{\partial f}{\partial\dot Q^{(0)}}\dot Q^{(1)}+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial\ddot Q^{(0)}}\ddot Q^{(1)}$$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial Q^{(0)}}Q^{(1)}\sim Q_\alpha^{(0)}Q^{(1)}\sim\cos(\omega_\alpha t+\varphi_\alpha)\cdot$$

$$\cdot\left(\cos\left((\omega_\alpha+\omega_\beta)t+\xi_{\alpha\beta}\right)+\cos\left((\omega_\alpha-\omega_\beta)t+\eta_{\alpha\beta}\right)\right)$$

Как видим имеются резонансные слагаемые, однако в замкнутой системе где отсутствует источник энергии, нарастание амплитуды колебаний не может происходить, а $\Rightarrow$ чтобы убрать такие рез. слагаемые нужно считать, что частота не явл. постоянной, а явл. функцией амплитуды, представляемой сходящимся рядом:

$$\omega_\alpha=\omega_\alpha^{(0)}+\omega_\alpha^{(1)}+\ldots$$

Для того, чтобы понять к чему приводит нелинейность нужно использовать метод последовательных приближений, суть которого в следующем: Решение Q(t) ищется в виде сходящегося ряда по степеням амплитуды, одновременно с представлением частоты в виде сходящегося ряда. Рассмотрим одномерный нелинейный осциллятор.

$$x_0=0-\textit{равновесие}$$

$$L=\frac{m}{2}\dot x^2-\frac{m\omega_0^2}{2}x^2-\frac{m\alpha}{3}x^3-\frac{m\beta}{4}x^4$$

$$\ddot x+\omega_0^2x=-\alpha x^2-\beta x^3$$

$$x(t)=x^{(0)},\omega=\omega_0$$

$$\ddot x^{(0)}+\omega^2x^{(0)}=0$$

$$x^{(0)}(t)=A\cos(\omega t+\varphi),\omega=\omega_0$$

$$\textit{Пусть }\varphi=0$$

1)

$$x(t)=x^{(0)}+x^{(1)}\ ;\ \omega=\omega_0+\omega_1\ ;\ \omega_1\sim a$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\ddot x^{(1)}+\omega_0^2x^{(1)}=-\alpha x^{(0)2}-\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\ddot x^{(0)}=$$

$$=-\frac{\alpha}{2}a^2-\frac{\alpha a^2}{2}\cos2\omega t+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)a\cos\omega_0t=$$

$$=-\frac{\alpha}{2}a^2-\frac{\alpha a^2}{2}\cos2\omega_0t-2a\omega_0\omega_1\cos\omega_0t$$

$$2a\omega_0\omega_1\cos\omega_0t-\textit{рез. слагаемой}\Rightarrow\omega_1=0$$

$$\ddot x^{(1)}+\omega_0^2x^{(1)}=-\frac{\alpha a^2}{2}-\frac{\alpha a^2}{2}\cos2\omega t$$

$$x^{(1)}(t)=-C_1-C_2\cos2\omega t$$

$$C_1=\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}\ ;\ C_2=-\frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}$$

$$x(t)=x^{(0)}(t)+x^{(1)}(t)=a\cos\omega t+\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{3}\cos2\omega t-1\right)$$

2)

$$x(t)=x^{(0)}+x^{(1)}+x^{(2)}$$

$$\omega=\omega_0+\omega_2\ ;\ \omega_2\sim a^2$$

$$\ddot x^{(1)}+\omega^2x^{(1)}+\ddot x^{(2)}+\omega^2x^{(2)}=-\alpha\left(x^{(0)}+x^{(1)}\right)^2-$$

$$-\beta x^{(0)3}+2\omega_0\omega_2x^{(0)}\approx-\alpha x^{(0)2}-2\alpha x^{(0)}x^{(1)}-$$

$$-\beta x^{(0)3}+2\omega_0\omega_2x^{(0)}$$

$$\ddot x^{(2)}+\omega^2x^{(2)}=-2\alpha x^{(0)}x^{(1)}-\beta x^{(0)3}+2\omega_0\omega_2x^{(0)}=$$

$$=-2\alpha a\cos\omega t\left(\frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}\cos2\omega t-\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}\right)-$$

$$-\beta a^2\frac{1}{2}\cos\omega t(1+\cos2\omega t)+2\omega_0\omega a\cos\omega t=$$

$$=-\alpha^2\frac{a^3}{6\omega_0^2}\cos3\omega t-\frac{\alpha^2a^3}{6\omega_0^2}\cos\omega t+\frac{\alpha^2a^3}{\omega_0^2}\cos\omega t-$$

$$-\frac{\beta a^3}{2}\cos\omega t-\frac{\beta a^3}{4}\cos3\omega t-\frac{\beta a^4}{4}\cos\omega t+$$

$$+2\omega_0\omega_2a\cos\omega t=-\frac{a^3}{2}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2}\right)\cos3\omega t+$$

$$+\left(\frac{5}{6}\frac{\alpha^2a^3}{\omega_0^2}-\frac{3}{4}\beta a^3+2\omega_0\omega_2a\right)\cos\omega t$$

$$\omega_2=\frac{\frac{3}{4}\beta\alpha^2-\frac{5}{6}\frac{\alpha^2a^2}{\omega_0^2}}{2\omega_0}\sim a^2$$

$$\ddot x^{(2)}+\omega_0^2x^{(2)}=-\frac{a^3}{2}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2}\right)\cos3\omega t$$

$$x^{(2)}(t)=\frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2}\right)\cos3\omega t$$

Общие свойства нелинейных систем.

1)Зависимость периода колебаний(частоты) от энергии(амплитуды).

Введём параболическую аппроксимацию пот. энергии вблизи равновесия.

$$u(x)=E$$

$$E=\frac{kA^2}{2}=\frac{m\omega_0^2}{2}A^2$$

$$\omega=\omega_0+\omega_2=\omega_0+\left(\frac{3}{2}\beta-\frac{5}{3}\frac{\alpha^2}{\omega_0^2}\right)\cdot\frac{A^2}{4\omega_0^2};$$

$$A^2=\frac{2E}{m\omega_0^2}$$

$$\omega=\omega(E)=\omega_0+\left(\frac{3}{2}\beta-\frac{5}{3}\frac{k^2}{\omega_0^2}\right)\cdot\frac{E}{2m\omega_0^4}$$

В общем случае:

Если E порядка U_{max}, то $\Rightarrow$ $T\sim\ln(U_m/(U_m-E))$.

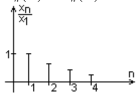
2)Нелинейные колебания имеют негармонический характер.

$$x(t)=x(t+T(E))$$

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_n(E)e^{in\omega(E)t}$$

$$x_n(E)=\frac{1}{T(E)}\int_0^{T(E)}x(t)e^{-in\omega(E)t}dt$$

$$x_n(E)=x_{-n}(E)$$



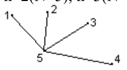
Если в спектре есть только одна гармоника x_1, то это гармонические колебания, в противном случае колебания негармонические, т.к колебания есть суперпозиция колебаний с разными частотами.

Движение твёрдого тела.

<u>Опр.</u> Твёрдым телом назовём совокупность матер. точек, расстояние между кот. в процессе движ. не изменяется.

$$r_{ij}=\left|\vec r_i-\vec r_j\right|=const$$

Пусть n–число частиц, N – число независимых координат. Если n=1, то N=3, n=2(N=5), n=3(N=6), n=4(N=6),…



Например нет смысла задавать расстояние r_{45}, т.к точка 5 лежит на пересеч. сфер, центры кот. в т. 1 и 2, а расстояние r_{35} фиксирует положение этой точки однозначно.

Число независимых координат, достаточных для описания N=6.

Кинематика твёрдого тела.

R – рад.вектор до точки тела, относ. неподвижной СК. **r** – рад.вектор до точки тела, относ. подвижн. СК. O′ – начало подвижн. СК(центра масс), O″ – начало новой подвижн. СК.

$$\vec q=\vec R+\vec r$$

$$d\vec q=d\vec R+d\vec r$$

$$d\vec q=d\vec R+\left[\delta\vec\varphi,\vec r\right]:dt$$

$$\frac{d\vec q}{dt}=\frac{d\vec R}{dt}+\left[\frac{\delta\vec\varphi}{dt},\vec r\right]$$

$$\vec\upsilon=\vec V+\left[\vec\Omega,\vec r\right]$$

Рассмотрим другую точку тела для кот.

$$\overline{O'O''}=\vec a$$

$$\vec R'=\vec R+\vec a$$

$$\vec r=\vec a+\vec r'\Rightarrow\vec r'=\vec r-\vec a$$

$$\vec q=\vec R+\vec r$$

$$\vec\upsilon=\vec V'+\left[\vec\Omega',\vec r'\right]=\vec V+\left[\vec\Omega,\vec r\right]$$

$$\vec V'+\left[\vec\Omega',\vec r'\right]=\vec V'+\left[\vec\Omega',\vec r\right]-\left[\vec\Omega',\vec a\right]=$$

$$=\vec V+\left[\vec\Omega',\vec r\right]$$

Получаем рав – во :

$$\vec V+\left[\vec\Omega',\vec r\right]=\vec V+\left[\vec\Omega,\vec r\right]\Rightarrow\vec\Omega'=\vec\Omega$$

Угловая скорость вращения одинакова относительно любой оси. Тогда:

$$\vec V=\vec V'-\left[\vec\Omega,\vec a\right]$$

Можно найти такую СК, что V′=0. Ось, прох. через начало такой системы – мгновенная ось: $\vec V=-\left[\vec\Omega,\vec a\right]$.

Тензор инерции твёрдого тела.

$T=\sum_a \frac{m_a}{2}\upsilon_a^2$; $\vec\upsilon=\vec V+[\vec\Omega,\vec r]$

$$T=\sum\frac{m}{2}\left(\vec V+[\vec\Omega,\vec r]\right)^2=\sum\frac{m}{2}\left(V^2+2\vec V[\vec\Omega,\vec r]+[\vec\Omega,\vec r]^2\right)$$

Введём угол θ между $\vec r$ и $\vec\Omega$

$$T=\frac{\mu}{2}V^2+\sum\left(m\vec V[\vec\Omega,\vec r]\right)+\sum\frac{m}{2}\left(1-\cos^2\theta\right)\Omega^2r^2=\frac{\mu}{2}V^2+\sum m\vec r[\vec V,\vec\Omega]+\sum\frac{m}{2}\left(\Omega^2r^2-(\vec\Omega,\vec r)^2\right)$$

$$T=\frac{\mu}{2}V^2+\sum\frac{m}{2}\left(\Omega^2r^2-(\vec\Omega,\vec r)^2\right)$$

$$T=\frac{\mu}{2}V^2+\sum_a\frac{m_a}{2}\left(r_a^2\delta_{ik}\Omega_i\Omega_k-\Omega_i x_{ai}\Omega_k x_{ak}\right)=\frac{\mu}{2}V^2+\frac12\Omega_i\Omega_k\sum_a m_a\left(r_a^2\delta_{ik}-x_{ai}x_{ak}\right)$$

$$T=\frac{\mu V^2}{2}+T_{вр.}$$

$$T_{вр.}=\frac12 I_{ik}\Omega_i\Omega_k$$

Функция Лагранжа:

$$L=\frac{mV^2}{2}+\frac12 I_{ik}\Omega_i\Omega_k-U(\vec r)$$

$$I_{ik}=\int_{(V)}\rho(\vec r)\left(\vec r^2\delta_{ik}-x_ix_k\right)dV$$

Тензор I_{ik} – симметричный.
Путём преобразований поворота тензор матрица I_{ik} приводится к диагональному виду, где на диагонали стоят главные значения тензора инерции, а сама повёрнутая СК будет называться системой главных осей инерции.
Замечание: если все три значения различны, т.е не равны друг другу попарно, то тело называется асимметрическим волчком. Если две координаты совпадают, то мы имеем дело с симметричным волчком. Когда все три совпадают, то это шаровой волчок.
Преобразование компонент тензора инерции при сдвиге СК:

$\vec r'=\vec r-\vec a$; $I'_{ik}=I_{ik}+\mu\left(a^2\delta_{ik}-a_ia_k\right)$

Момент импульса
Собственная момент импульса – момент импульса, выч. относительно оси, прох. через центр масс.

$$\vec\upsilon_a=[\vec\Omega,\vec r_a]$$

$$\vec M=\sum_a m_a[\vec r_a,\vec\upsilon_a]=\sum m[\vec r,[\vec\Omega,\vec r]]=\sum m\left(\vec\Omega r^2-\vec r(\vec r,\vec\Omega)\right)$$

$$M_i=\sum m\left(\Omega_ir^2-x_i\Omega_kx_k\right)=\Omega_k\sum_a m_a\left(\delta_{ik}r_a^2-x_{ai}x_{ak}\right)=I_{ik}\Omega_k$$

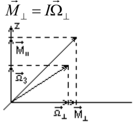
1) Рассмотрим шаровой волчок:
$I_1=I_2=I_3=I$

$$\begin{cases}M_x=I\Omega_x\\ M_y=I\Omega_y\\ M_z=I\Omega_z\end{cases};\ \vec M=I\vec\Omega;\ \vec M\parallel\vec\Omega$$

2)Рассмотрим симметрический волчок
$I_1=I_2\neq I_3$;

$$\vec M=\vec M_\parallel+\vec M_\perp;\ \vec M_\parallel=I_3\vec\Omega_3$$

$$\vec M_\perp=I\vec\Omega_\perp$$



$$M_i=I_{ik}\Omega_k$$

Уравнения движения твёрдого тела.

$$\vec R=\vec R(t)$$

$$\vec p=\sum_{a=1}^N\vec p_a=\sum_a m_a\vec\upsilon_a=\mu\vec V$$

$$\dot{\vec p}=\sum_a\dot{\vec p}_a=\mu\dot{\vec V}=\sum_a\vec f_a=\vec F$$

Вычислим момент импульса в лабораторной неподвижной СО:

$$\vec M_0=\sum m\left[\vec R+\vec r,\vec V+[\vec\Omega,\vec r]\right]=\sum m[\vec R,\vec V]+\sum m[\vec r,\vec V]+\sum m[\vec R,[\vec\Omega,\vec r]]+\sum m[\vec r,[\vec\Omega,\vec r]]=[\vec R,\vec p]+\sum m[\vec r,[\vec\Omega,\vec r]]$$

$$\vec M=\sum m[\vec r,[\vec\Omega,\vec r]]$$

$$\frac{d\vec M_0}{dt}=[\dot{\vec R},\vec p]+[\vec R,\dot{\vec p}]+\sum m\left[\vec r,\frac{d}{dt}[\vec\Omega,\vec r]\right]=[\vec R,\vec F]+\sum[\vec r,\dot{\vec p}]=[\vec R,\vec F]+\sum[\vec r,\vec f]=\vec K_0$$

$$\vec K_0=\vec K_0+[\vec R,\vec F]$$

$$\vec K=\sum[\vec r,\vec f]$$

Где K – собственный момент силы.
Найдём уравнение движения вектора **M**.

$$\vec K=\sum[\vec r,\vec f-m\dot{\vec w}]=\sum[\vec r,\vec f]-\sum[\vec r,m\vec w]=\sum[\vec r,\vec f]-\sum[m\vec r,\vec w]=\sum[\vec r,\vec f]$$

$$\dot{\vec M}=\sum[\vec r,\vec f]$$

$$\delta\vec R=0$$

$$\delta\varphi\neq0$$

$$\delta\vec r=[\delta\vec\varphi,\vec r]$$

$$\delta u=\frac{\partial u}{\partial\varphi}\delta\vec\varphi=\sum\frac{\partial u}{\partial\vec r_a}\delta\vec r_a=\sum\frac{\partial u}{\partial\vec r}[\delta\vec\varphi,\vec r]=\sum\left(\vec f\cdot[\delta\vec\varphi,\vec r]\right)=-\sum\delta\vec\varphi[\vec r,\vec f]=-\delta\vec\varphi\cdot\sum[\vec r,\vec f]=-(\delta\vec\varphi,\vec K)$$

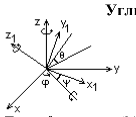
$$\vec K=-gradU=-\frac{\partial U}{\partial\vec\varphi}$$

$$\vec M=\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec\varphi}};\ \vec K=-\frac{\partial U}{\partial\vec\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial\dot{\vec\varphi}}\right)=-\frac{\partial U}{\partial\vec\varphi}$$

$$\vec K=\frac{\partial L}{\partial\vec\varphi};\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\vec\varphi}=0;\ \frac{d\vec M}{dt}=\vec K$$

Углы Эйлера.



Где φ,θ,ψ – углы Эйлера.
Вычислим вращательную энергию.

$$T_{вращ.}=\frac12 I_{ik}\Omega_i\Omega_k=\frac12\left(I_1\Omega_1^2+I_2\Omega_2^2+I_3\Omega_3^2\right)$$

$$\Omega_i=\dot\theta_i+\dot\varphi_i+\dot\psi_i$$

Спроецируем на подвижн. СК

$$\begin{cases}\dot\theta_1=\dot\theta\cos\psi\\ \dot\theta_2=-\dot\theta\sin\psi\\ \dot\theta_3=0\end{cases};\ \varphi,\psi\in[0,2\pi];\ \theta\in[0,\pi]$$

$$\begin{cases}\dot\psi_1=0\\ \dot\psi_2=0\\ \dot\psi_3=\dot\psi\end{cases};\ \begin{cases}\dot\varphi_1=\dot\varphi\sin\theta\sin\psi\\ \dot\varphi_2=\dot\varphi\sin\theta\cos\psi\\ \dot\varphi_3=\dot\varphi\cos\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Omega_1=\dot\theta\cos\psi+\dot\varphi\sin\theta\sin\psi\\ \Omega_2=\dot\varphi\sin\theta\cos\psi-\dot\theta\sin\psi\\ \Omega_3=\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta\end{cases}$$

Возводим в квадрат кажд. сроку и умножаем на соотв. момент инерции. Рассмотрим симметрический волчок. Пусть $x_3(z_1)$ – ось волчка. Пусть для простоты ψ=0, тогда:

$$\begin{cases}\Omega_1=\dot\theta\\ \Omega_2=\dot\varphi\sin\theta\\ \Omega_3=\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi\end{cases}$$

$$T_{вращ.}=\frac12\left(I_1\dot\theta^2+I_2\dot\varphi^2\sin\theta^2+I_3\left(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta\right)^2\right)$$

Пусть на систему не действуют внешние силы ⇒ L=$T_{вращ.}$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=const=M_z=I_1\dot\varphi\sin^2\theta+I_3\left(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta\right)\cos\theta$$

Пусть **M**=const и M||Oz, тогда:

$$\begin{cases}M_3=M\cos\theta=I_3\left(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta\right)\\ M_2=M\sin\theta=I_1\dot\varphi\sin\theta\\ M_1=0=I_1\dot\theta\end{cases}$$

При свободном вращении волчка угол θ=const.

$$M=I_1\dot\varphi\Rightarrow\varphi(t)=\varphi_0+\frac{M}{I_1}t$$

$$M\cos\theta=I_3\left(\dot\psi+\frac{M}{I_1}\cos\theta\right)$$

преобраз. выражение

$$I_3\dot\psi=M\cos\theta\left(1-\frac{I_3}{I_1}\right)$$

$$\dot\psi=\frac{M}{I_3}\cos\theta\left(1-\frac{I_3}{I_1}\right)=const$$

$$\psi(t)=\psi_0+\frac{M}{I_3}\cos\theta\left(1-\frac{I_3}{I_1}\right)t$$

$$\dot\varphi=\Omega_{прецессии}$$

Уравнения Эйлера.

$$\begin{cases}\frac{d\vec p}{dt}=\mu\frac{d\vec V}{dt}=\vec F=\sum\vec f\\ \frac{d\vec M}{dt}=\vec K=\sum[\vec r,\vec f]\end{cases}$$

Выберем СК, чтобы уравнение решалось легко. Пусть некоторый вектор **A** не изменяется в процессе движения СК, тогда в неподвижной:

$$\frac{d\vec A}{dt}=[\vec\Omega,\vec A]$$

Запишем в подвижной СК:

$$\frac{d\vec A}{dt}=\left(\frac{d\vec A}{dt}\right)'+[\vec\Omega,\vec A]$$

Тогда можем записать:

$$\begin{cases}\left(\frac{d\vec p}{dt}\right)'+[\vec\Omega,\vec p]=\vec F\\ \left(\frac{d\vec M}{dt}\right)'+[\vec\Omega,\vec M]=\vec K\end{cases}$$

Проектируем уравнения на оси x_1,x_2,x_3:

$$\begin{cases}\mu\frac{dV_1}{dt}+\Omega_2\mu V_3-\Omega_3\mu V_2=F_1\\ \mu\frac{dV_2}{dt}+\Omega_3\mu V_1-\Omega_1\mu V_3=F_2\\ \mu\frac{dV_3}{dt}+\Omega_1\mu V_2-\Omega_2\mu V_1=F_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{dM_1}{dt}+\Omega_2M_3-\Omega_3M_2=K_1\\ \frac{dM_2}{dt}+\Omega_3M_1-\Omega_1M_3=K_2\\ \frac{dM_3}{dt}+\Omega_1M_2-\Omega_2M_1=K_3\end{cases}$$

$$M_i=I_{ik}\Omega_k$$

$M_i=I_i\Omega_i$ (*не сумма*)

$$\begin{cases}\frac{d\Omega_1}{dt}+\Omega_2\Omega_3\left(\frac{I_3-I_2}{I_1}\right)=\frac{K_1}{I_1}\\ \frac{d\Omega_2}{dt}+\Omega_1\Omega_3\left(\frac{I_1-I_3}{I_2}\right)=\frac{K_2}{I_2}\\ \frac{d\Omega_3}{dt}+\Omega_1\Omega_2\left(\frac{I_2-I_1}{I_3}\right)=\frac{K_3}{I_3}\end{cases}$$

Эти уравнение – уравнения Эйлера.
Не рассматриваем поступательное движение V=0. При свободном вращении K=0. Если волчок симметрический, то $I_1=I_2\neq I_3$.

$$\begin{cases}\frac{d\Omega_1}{dt}+\Omega_2\Omega_3\left(\frac{I_3-I_2}{I_1}\right)=0\\ \frac{d\Omega_2}{dt}+\Omega_1\Omega_3\left(\frac{I_1-I_3}{I_2}\right)=0\\ \frac{d\Omega_3}{dt}+\Omega_1\Omega_2\left(\frac{I_2-I_1}{I_3}\right)=0\end{cases}$$

из 3-го ур-я: $\frac{d\Omega_3}{dt}=0\Rightarrow\Omega_3=const$

$$\omega=\Omega_3\frac{I_3-I_2}{I_1}>0$$

$$\begin{cases}\dot\Omega_1+\Omega_2\omega=0\\ \dot\Omega_2-\Omega_1\omega=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Omega_1(t)=\Omega_{10}\cos(\omega t+\varphi)\\ \Omega_2(t)=\Omega_{10}\sin(\omega t+\varphi)\end{cases}$$

Асимметрический волчок.

$$I_1\neq I_2\neq I_3$$

$$\begin{cases}\frac{dM_1}{dt}+M_2M_3\left(\frac{1}{I_2}-\frac{1}{I_3}\right)=0\ \Big|\cdot2M_1\\ \frac{dM_2}{dt}+M_3M_1\left(\frac{1}{I_3}-\frac{1}{I_1}\right)=0\ \Big|\cdot2M_2\\ \frac{dM_3}{dt}+M_1M_2\left(\frac{1}{I_1}-\frac{1}{I_2}\right)=0\ \Big|\cdot2M_3\end{cases}$$

$$2M_1\dot M_1+2M_2\dot M_2+2M_3\dot M_3=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(M_1^2+M_2^2+M_3^2\right)=0$$

$M^2=const$ – *интеграл движения.*

$$L=\frac12 I_i\Omega_i^2;\ \frac{\partial L}{\partial t}=0$$

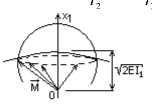
Сохраняется полная механическая энергия:

$$E=\frac{I_1}{2}\Omega_1^2+\frac{I_2}{2}\Omega_2^2+\frac{I_3}{2}\Omega_3^2$$

$$E=\frac12\left(\frac{M_1^2}{I_1}+\frac{M_2^2}{I_2}+\frac{M_3^2}{I_3}\right)=const$$

Вектор **M** оканчивается на сфере постоянного радиуса и одновременно на эллипсоиде E=const. Для определённости положим, что $I_1<I_2<I_3$, тогда:

$$2EI_1=M_1^2+\frac{I_1}{I_2}M_2^2+\frac{I_1}{I_3}M_3^2\leq M^2$$



Пусть $M>\sqrt{2EI_3}$. Движение запрещено, т.к эллипсоид лежит внутри сферы. Если $M<\sqrt{2EI_3}$, то движение возможно. Если $M=\sqrt{2EI_3}$, то момент направлен в одну точку, либо вверх, либо вниз. Движение волчка неустойчиво.

Механика Гамильтона.

Это такой подход к описанию механических систем, когда рассмотрение динамики осуществляется путём задания координат импульсов системы.

$$L=L(q_i,\dot q_i,t)$$

$$dL=\frac{\partial L}{\partial t}dt+\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}d\dot q_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0;\ p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}$$

$$dL=\frac{\partial L}{\partial t}dt+\dot p_idq_i+p_id\dot q_i=\frac{\partial L}{\partial t}dt+d\left(\dot p_iq_i\right)-q_id\dot p_i+p_id\dot q_i=dL$$

$$d\left(\dot p_iq_i-L\right)=q_id\dot p_i-p_id\dot q_i-\frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$dL=\frac{\partial L}{\partial t}dt+d\left(p_i\dot q_i\right)-\dot q_idp_i+\dot p_idq_i$$

$$d\left(p_i\dot q_i-L\right)=\dot q_idp_i-\dot p_idq_i-\frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$H=p_i\dot q_i-L$ *ф-я Гамильтона*

$$H=H(p_i,q_i,t)$$

$$dH=\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial H}{\partial t}dt$$

$$\begin{cases}\dot q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}\\ \dot p_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{cases};\ \frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}$$

Система канонических уравнений Гамильтона. Решение описывает динамику механической системы.
Если $H=H(p_i,t)$

$\dot p_i=0\Rightarrow p_i=const$

Независимость H от какой либо координаты приводит к сохранению соответствующей координаты обобщённого импульса.
Если $H=H(t)\Rightarrow E=const=H$

Скобки Пуассона.

Пусть $f=f(p_i,q_i,t)$ – некоторая ф-я свойства, тогда:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot p_i+\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot q_i=\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}+\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Введём скобку Пуассона:

$$\{H,f\}=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)$$

Скобка Пуассона между функцией Гамильтона и функцией состояния f.

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\{H,f\}$$

Если $\{H,f\}=0$ *и* $\frac{\partial f}{\partial t}=0$, *то* $f=const$

Если есть две функции $f(p_i,q_i,t)$ и $g(p_i,q_i,t)$, то:

$$\{f,g\}=\sum_{i=1}^N\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right).$$

Свойства скобок Пуассона:

1) $\{f,g\}=-\{g,f\}$
2) $\{f_1+f_2,g\}=\{f_1,g\}+\{f_2,g\}$
3) $\{f,const\}=0$
4) $\{f_1\cdot f_2,g\}=f_1\{f_2,g\}+f_2\{f_1,g\}$
5) $\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}$
6) $\{f,p_k\}=-\frac{\partial f}{\partial q_k}$; $\{f,q_k\}=\frac{\partial f}{\partial p_k}$

p_k – *комп. импульса*

7) *Тождество Якоби:* $\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$
8) *Теорема Пуассона:* *Если f и g – интегралы движ, то:* $\{f,g\}=const$ – *тоже интегр. движ.*

Док-во:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=0;\ \frac{\partial g}{\partial t}=0$$

$$\frac{d}{dt}\{f,g\}=\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}+\{H,\{f,g\}\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}-\{g,\{H,f\}\}-\{f,\{g,H\}\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t}+\{H,f\},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}+\{H,g\}\right\}=0$$

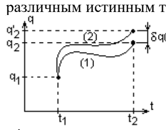
Действие как функция координат и времени.

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(\dot q,q,t)dt$$

$$\delta S=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

Как изменится действие мех. системы, если перейдём от одной истинной траектории к другой. Действие – величина, характеризующая систему, движ. по различным истинным траекториям.



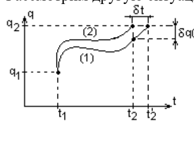
$$q_2'=q_2+\delta q$$

Выч. 1-ю вариацию:

$$dS=\int_{t_1}^{t_2}\left(L(q+\delta q,\dot q+\delta\dot q,t)-L(q,\dot q,t)\right)dt\approx\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial\dot q}\delta\dot q\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\delta q\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q}\delta q\right)-\delta q\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q}\right)\right)=\delta q\frac{\partial L}{\partial\dot q}\Big|_{t_2}$$

$$\delta S=\delta q\cdot p\Rightarrow p_i=\frac{\partial S}{\partial q_i}$$

Рассмотрим другую ситуацию:



$t_2' = t_2 + \delta t$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q, \dot q + \delta\dot q, t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot q,t)dt =$$
$$= \int_{t_2}^{t_2+\delta t} L(q+\delta q,\dot q+\delta \dot q,t)dt +$$
$$+\int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q,\dot q+\delta\dot q,t)dt - \int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot q,t)dt \approx$$
$$\approx \delta t\cdot L(q,\dot q,t) + \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}\left(\delta q\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)+0=$$
$$=\delta t L(q,\dot q,t)+p\delta q\big|_{t_2} = [\delta q = -\dot q\delta t] =$$
$$= -\delta t(p\dot q - L) = \delta S$$
$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

В системе:

$$S = S(q_i,t)$$
$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial S}{\partial t}\delta t = p_i\delta q_i - H\delta t$$
$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1,q_2,\dots,q_N,\frac{\partial S}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial S}{\partial q_N}\right)=0$$

уравнение Гамильтона-Якоби.

Принцип наименьшего действия в гамильтоновской механике.

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot q,t)dt$$
$$S=\int_{t_1}^{t_2}(p_i\dot q_i - H)dt = \int_1^2(p_i dq_i - Hdt)$$
$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\left(p_i\delta\dot q_i + \dot q_i\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i\right)dt =$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\dot q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}(p_i\delta q_i) - \delta q_i p_i -\right.$$
$$\left.-\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\dot q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i -$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\dot p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i = 0\,[\text{т.к траек. истинная}]$$
$$\begin{cases}\dot q_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}\\ \dot p_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\end{cases}$$

В данной системе уравнений импульсы и координаты – независимые равноправные переменные.

Канонические преобразования.

Т.к p_i и q_i – независимые переменные, то изменение, например, координаты не изменяет импульса. Перейдём к новым импульсам и новым координатам: $p_i,q_i\to\pi_i,Q_i$

$$\begin{cases}\dot\pi_i = -\dfrac{\partial\tilde H}{\partial Q_i}\\ \dot Q_i = \dfrac{\partial \tilde H}{\partial\pi_i}\end{cases};\ H\to\tilde H$$
$$\delta\tilde S = 0 = \int_1^2(\pi_i dQ_i - \tilde H dt) = \delta S = \int_1^2(p_i dq_i - Hdt)$$

1) $(I) = const\cdot(II)$

2) $(I) = (II) + dF_1$

$p_idq_i - Hdt = \pi_i dQ_i - \tilde H dt + dF_1$; $F(1)=F(2)$

F_1 – производящая функция канонического преобразования: $p\to\pi$, $q\to Q$.

$$dF_1 = p_i dq_i - \pi_i dQ_i - (H-\tilde H)dt$$
$$F_1 = F_1(q_i,Q_i,t)$$
$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}dQ_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}dt$$
$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i};\ \pi_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i};\ \tilde H = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Условие разрешимости связей. Докажем, что условием разрешимости связей между старыми и новыми переменными будут условия вида:

$$\det\left(\frac{\partial\vec Q}{\partial\vec q}\right)\ne 0,\infty$$

Пусть $N\ne 1$, тогда:

$$\Delta Q_i = Q_i - Q_{i0}$$
$$\Delta p_i = p_i - p_{i0}$$

Как зная изменение Δp_i найти изменение ΔQ_i:

$$\Delta Q_i = \frac{\Delta Q_i}{\Delta p_j}\Delta p_j;\ j=1,\dots,N$$
$$\Delta Q_i = A_{ij}\Delta p_j$$
$$|\Delta Q\rangle = \hat A|\Delta p\rangle$$
$$\begin{pmatrix}\Delta Q_1\\ \Delta Q_2\\ \vdots\\ \Delta Q_N\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\Delta Q_1}{\Delta p_1} & \dfrac{\Delta Q_1}{\Delta p_2} & \cdots & \dfrac{\Delta Q_1}{\Delta p_N}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\Delta Q_N}{\Delta p_1} & \dfrac{\Delta Q_N}{\Delta p_2} & \cdots & \dfrac{\Delta Q_N}{\Delta p_N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta p_1\\ \Delta p_2\\ \vdots\\ \Delta p_N\end{pmatrix}$$

Если ∃ A^{-1}, то $|\Delta p\rangle = A^{-1}|\Delta Q\rangle$. Он ∃ если $\det(A_{ij})\ne 0,\infty$. Разрешить связи возможно выразив одни координаты через другие.

Различные производящие функции.

1)

$$F_2 = F_1 + \pi_i Q_i$$
$$dF_2 = dF_1 + \pi_i dQ_i + Q_i d\pi_i =$$
$$= p_i dq_i - \pi_i dQ_i + \pi_i dQ_i + Q_i d\pi_i + (\tilde H - H)dt =$$
$$= p_i dq_i + Q_i d\pi_i + (\tilde H - H)dt$$
$$F_2 = F_2(q,\pi,t)$$
$$dF_2 = \frac{\partial F_2}{\partial t}dt + \frac{\partial F_2}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial F_2}{\partial \pi_i}d\pi_i$$
$$\begin{cases}p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i}\\ Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial\pi_i}\\ \tilde H = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t}\end{cases}$$
$$\det\left(\frac{\partial\vec\pi}{\partial\vec p}\right)\ne 0,\infty$$

2)

$$F_3 = F_1 - p_i q_i$$
$$dF_3 = dF_1 - p_i dq_i - q_i dp_i = p_i dq_i - \pi_i dQ_i +$$
$$+(\tilde H - H)dt - p_i dq_i - q_i dp_i = -\pi_i dQ_i +$$
$$+(\tilde H - H)dt - q_i dp_i$$
$$F_3 = F_3(Q,p,t)$$
$$\pi_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i};\ q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i};\ \tilde H = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$
$$\det\left(\frac{\partial\vec Q}{\partial\vec q}\right)\ne0,\infty$$

3)

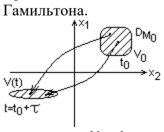
$$F_4 = F_1 + \pi_i Q_i - p_i q_i$$
$$dF_4 = dF_1 + \pi_i dQ_i + Q_i d\pi_i - p_i dq_i - q_i dp_i =$$
$$= Q_i d\pi_i - q_i dp_i + (\tilde H - H)dt$$
$$F_4 = F_4(\pi,p,t)$$
$$Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial\pi_i};\ q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i};\ \tilde H = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

Теорема Лиувилля.

Рассмотрим абстрактную систему (например мат. маятник), ур-е движ. кот. явл. ДУ 1-го порядка. Запишем уравнение в общем виде для абстрактной системы:

$$\dot x_i = f_i(x_i,t);\ i=1,\dots,M$$

Пусть в некоторый момент времени t_0 система занимает ограниченный объём. С течением времени τ этот объём фазового пространства системы изменяется V(t). Уравнение движения системы – уравнения Гамильтона.



$$V_0 = V(t_0) = \iint\limits_{D_{M_0}}\dots\int d\vec x_0 = \int\limits_{D_{M_0}}\dots\int dx_{01}dx_{02}\dots dx_{0M}$$
$$V(t) = \int\limits_{D_M}\dots\int dx_1dx_2\dots dx_M =$$
$$= \int\limits_{D_{M_0}}\dots\int dx_{01}dx_{02}\dots dx_{0M}\cdot I$$
$$I = \det\left(\frac{\partial\vec x}{\partial\vec x_0}\right) = \begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial x_{01}} & \dfrac{\partial x_1}{\partial x_{02}} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial x_{0M}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial x_M}{\partial x_{01}} & \dfrac{\partial x_M}{\partial x_{02}} & \cdots & \dfrac{\partial x_M}{\partial x_{0M}}\end{vmatrix}$$
$$x_i(t) = x_i(t_0+\tau)\approx x_i(t_0) + \tau\frac{\partial x_i}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = x_{0i}+$$
$$+\tau\cdot f_i(x_{0i},t_0)$$
$$\frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} = \delta_{ij} + \tau\frac{\partial f_i}{\partial x_{0j}}$$

Итак в итоге получаем:

$$I = \begin{vmatrix}1+\tau a_{11} & \tau a_{12} & \cdots & \tau a_{1M}\\ \tau a_{21} & 1+\tau a_{22} & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ \tau a_{M1} & \tau a_{M2} & \cdots & 1+\tau a_{MM}\end{vmatrix}\approx$$
$$\approx[\text{прен. } \tau^2 \text{ и выше}] \approx 1 + \tau(a_{11}+a_{22}+\dots a_{MM}) =$$
$$= 1 + \tau\sum_{i=1}^M \frac{\partial f_i}{\partial x_{0i}} = 1 + \tau\cdot div\vec f$$
$$V(t) = V(t_0+\tau)\approx$$
$$\approx\int\limits_{D_{M_0}}\dots\int dx_{01}dx_{02}\dots dx_{0M}(1+\tau\cdot div\vec f)=$$
$$= V_0 + \tau\int\limits_{D_{M_0}}\dots\int div\vec f d\vec x_0$$
$$\frac{V(t)-V_0}{\tau}\approx \frac{dV}{dt}\Big|_{t_0} = \int\limits_{D_{M_0}}\dots\int div\vec f d\vec x_0$$

Напомним, что M=2N (N импульсов и N координат). Произведём канонические преобразования:

$$\begin{cases}\dot x_1 = \dot p_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} = f_1\\ \dot x_2 = \dot p_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2} = f_2\\ \dots\dots\dots\dots\\ \dot x_N = \dot p_N = -\dfrac{\partial H}{\partial q_N} = f_N\\ \dot x_{N+1} = \dot q_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} = f_{N+1}\\ \vdots\\ \dot x_M = \dot q_N = \dfrac{\partial H}{\partial p_N} = f_M\end{cases}$$

Найдём $div\vec f$

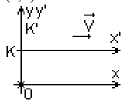
$$div\vec f = \sum_{i=1}^N\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial^2H}{\partial q_1\partial p_1} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_2\partial p_2}-\dots-$$
$$-\frac{\partial^2 H}{\partial p_N\partial q_N} + \frac{\partial^2H}{\partial p_1\partial q_1}+\frac{\partial^2H}{\partial p_2\partial q_2}+\dots+\frac{\partial^2H}{\partial p_N\partial q_N}=0$$
$$\Rightarrow V = const$$

Законы движения в релятивистском случае.

1 Постулат. Во всех инерциальных системах законы физики проходят одинаково. Эксперимент показывает, что с – наиб. скорость ⇒ её можно использовать как постоянную во всех инерциальных СО ⇒ время утрачивает абсолютных характер.

2 принцип. Скорость света с=300000 км/с, испущенного источником не зависит от движения источника ⇒ время теряет абсолютный смысл.

Событие характеризуется 4 координатами (**r**, t).



Пусть в момент t=0 начала систем K и K′ совпадают. K′ движ. относ. K со скоростью V. В центре в момент совмещения начал вспыхивает лампа. Тогда (**r′**,t) – коорд. события в K′ системе. Тогда можно записать:

$$K: c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$
$$K': c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$$

Т.к законы природы протекают одинаково, то ⇒ x и x′,… – линейное преобразование (т.к оно не изменяет коорд. движ-я).

$$(\vec r',t') = f(\vec r,t)$$

где f – линейное преобразование, завис от скорости V.

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \chi^2(V)\cdot$$
$$\cdot(c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2)$$
$$\begin{cases}y' = \chi(V)y\\ z' = \chi(V)z\end{cases};\ \begin{cases}y = \chi(-V)y'\\ z = \chi(-V)z'\end{cases};\ \chi(V)\cdot\chi(-V) = 1$$
$$\Rightarrow \chi(V) = \chi(-V)\Rightarrow\chi^2(V) = 1$$
$$\begin{cases}y = y'\\ z = z'\end{cases}$$
$$c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$$
$$\begin{cases}x' = a_{11}x + a_{12}ct\\ ct' = a_{21}x + a_{22}ct\end{cases}$$
$$c^2t^2 - x^2 = a_{21}^2x^2 + a_{22}^2c^2t^2 + 2a_{21}a_{22}xct -$$
$$- a_{11}^2x^2 - a_{12}^2c^2t^2 - 2a_{11}a_{12}xct$$
$$\begin{cases}a_{22}^2 - a_{12}^2 = 1\\ a_{11}^2 - a_{21}^2 = 1\\ a_{21}a_{22} - a_{11}a_{12} = 0\\ a_{11}V + a_{12}c = 0\end{cases}$$

откуда:

$$\begin{cases}ct' = \dfrac{ct - x\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ x' = \dfrac{x - \beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{cases} \text{– прям. пр. Лоренца}$$
$$\begin{cases}y = y'\\ z = z'\\ ct = \dfrac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ x = \dfrac{x' + \beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{cases} \text{– обр. преоб. Лоренца.}$$

Законы преобразования времени.

Пусть в КСО одновременно в точках x_1 и x_2 загораются лампы. Выясним будут ли события одновременными в K′CO.

$$ct_1' = \frac{ct_0 - \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}};\ ct_2' = \frac{ct_0-\beta x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$c(t_2'-t_1') = \frac{\beta(x_1-x_2)}{\sqrt{1-\beta^2}}<0$$

сначала загорается 2-я лампа, а затем первая.

Сокращение длины.

Пусть в K′CO – стержень.

$$x_2' - x_1' = l_0$$
$$l = x_2 - x_1$$

Пусть t_0 – момент измерения координат концов отрезка l_0, тогда:

$$x_2' = \frac{x_2-\beta ct_0}{\sqrt{1-\beta^2}};\ x_1' = \frac{x_1 - \beta ct_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2-x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$$

Замедление времени.

Пусть между двумя событиями в системе K′ прошло время τ_0. Часы в точке x'_0. Сколько времени прошло в системе K.

$$ct_1 = \frac{ct_1' + \beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}};\ ct_2 = \frac{ct_2'+\beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$c(t_2-t_1) = \frac{c(t_2'-t_1')}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Закон сложения скоростей.

$$\vec\upsilon = \frac{d\vec r}{dt};\ \vec\upsilon' = \frac{d\vec r'}{dt'}$$
$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'+Vdt'}{dt'+V\big/c^2\, dx'} = \frac{dx'\left(1+V\dfrac{dt'}{dx'}\right)}{dt'\left(1+\dfrac{V}{c^2}\dfrac{dx'}{dt'}\right)}=$$
$$=\frac{\upsilon_x'+V}{1+\dfrac{V\upsilon_x'}{c^2}};$$
$$\upsilon_{y,z} = \frac{\upsilon'_{y,z}\sqrt{1-\beta^2}}{1+\dfrac{V\cdot\upsilon_x'}{c^2}}$$

Изменение направления вектора скорости.

Пусть система движ. в плоскости XY. Система K покоится. XY: z=z′, $\upsilon_z=0$, тогда:

$$K:\begin{cases}\upsilon_x = \upsilon\cos\theta\\ \upsilon_y = \upsilon\sin\theta\end{cases};\ K':\begin{cases}\upsilon_x' = \upsilon'\cos\theta\\ \upsilon_y' = \upsilon'\sin\theta\end{cases}$$
$$\upsilon\cos\theta = \frac{\upsilon'\cos\theta' + V}{1+\dfrac{V\upsilon'\cos\theta'}{c^2}}$$
$$\upsilon\sin\theta = \frac{\upsilon'\sin\theta'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\dfrac{V\upsilon'\cos\theta'}{c^2}}$$
$$tg\theta = \frac{\upsilon'\sin\theta'\sqrt{1-\beta^2}}{V+\upsilon'\cos\theta'}$$

Четырёхмерный интервал.

$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = inv$ – инвариант относительно преобразований Лоренца.

Назовём 4-х интервалом между двумя событиями величину, квадрат кот. опр. след. образом:

$$S_{12} = c^2(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 -$$
$$-(z_2-z_1)^2 = c^2\Delta t_{12}^2 - l_{12}^2$$
$$S_{12} = S_{12}'$$

1) $S^2_{12}>0 \Rightarrow S'^2_{12}>0$. ∃ такая CO, что события произойдут в разные моменты времени в одной точке пространства. Такой интервал времени подобный.

2) $S^2_{12}=0$ – светоподобный интервал. Это уравнение ЭМ волны.

3) $S^2_{12}<0$. Можем найти такую CO в кот. одновременно происходят события в разных точках пространства. Такой интервал – пространственно-подобный. $S_{12}' = il_{12} = S_{12}$ – мнимый интервал и ~ пространственному расстоянию. Такой интервал – пространственно-подобный.

Пространство-время Минковского. 4-х векторы и 4-х тензоры. Ковариантные и контравариантные компоненты тензоров.

Совокупность (**r**, t) составляет пространство-время Минковского. Траектория – мировая линия, а каждая точка этой линии – мировая точка.

4-х векторы и 4-х тензоры. Законы физики(ур-я) не должны изменяться при преобразованиях 4-х мерного базиса. Пусть x^μ – 4-х вектор координат. (μ=0,1,2,3).

$x^\mu = (x^0,x^1,x^2,x^3) = (ct,x,y,z) = (ct,\mathbf r)$.

$$\begin{cases}x^{0'} = \dfrac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ x^{1'} = \dfrac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ x^{2'} = x^2\\ x^{3'} = x^3\end{cases}$$

Правило: если два повторяющихся индекса и один вверху, а др. внизу, то по ним производится сумма.

$x^{\mu'} = L_\nu^\mu x^\nu$

$$L^{\mu}_{\nu}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$dx^{\mu'}=L^{\mu}_{\nu}dx^{\nu}$$

$$x^{\mu'}=f\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right)$$

$$dx^{\mu'}=\frac{\partial f}{\partial x^0}dx^0+\frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial f}{\partial x^3}dx^3=$$

$$=\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}dx^{\nu}$$

$$L^{\mu}_{\nu}=\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}$$

<u>Опр.</u> Контравариантным 4-х вектором называется совокупность 4-х величин, кот. при поворотах 4-х мерного базиса преобразуются также как и дифференциал координат x^μ.

$$A^{\mu'}=L^{\mu}_{\nu}A^{\nu}=\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}A^{\nu}=\partial_{\nu}x^{\mu'}A^{\nu}$$

Если индекс вверху, то вектор задан контравариантными компонентами.

<u>Опр.</u> Скаляром в 4-х мерном пространстве называется величина, кот. не меняется при 4-х мерных поворотах базиса.

Пусть φ – 4-х скаляр. Рассмотрим совокупность 4-х величин:

$$B_{\mu}=\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}}=\partial_{\mu}\varphi$$

Назовём B_μ – 4-х градиентом скаляра φ.

$$B'_{\mu}=\frac{\partial\varphi'}{\partial x^{\mu'}}=\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu'}}=\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}}=\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}}B_{\nu}$$

$$B'_{\mu}=\Lambda^{\nu}_{\mu}B_{\nu}$$

<u>Опр.</u> Ковариантным 4-х вектором B_μ называется совокупность 4-х величин, кот. при повороте 4-х мерного базиса преобразуются также как компоненты 4-х градиента 4-х скаляра. При этом матрицей преобразования является матрица, элементы кот. определяются частной производной новых координат по старым.

$$\Lambda^{\nu}_{\mu}=\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}}$$

<u>4-х тензоры</u>. $T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}$ – тензор n раз контравариантный и m раз ковариантный.

$$\left(T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}\right)'=L^{\alpha_1}_{\gamma_1}L^{\alpha_2}_{\gamma_2}\ldots L^{\alpha_n}_{\gamma_n}\Lambda^{\delta_1}_{\beta_1}\Lambda^{\delta_2}_{\beta_2}\ldots\Lambda^{\delta_m}_{\beta_m}T^{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_m}$$

(Λ – матрица обратная к L).

Рассмотрим тензор 2-го ранга в 4-х мерном пространстве:

$$T^{\alpha}_{\beta}\ ;\ Sp\left(T^{\alpha}_{\beta}\right)=T^{\alpha}_{\alpha}$$

Рассмотрим закон преобразования следа при повороте 4-х базиса:

$$\left(T^{\alpha}_{\alpha}\right)'=L^{\alpha}_{\gamma}\Lambda^{\delta}_{\alpha}T^{\gamma}_{\delta}=\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x^{\alpha'}}T^{\gamma}_{\delta}=\delta^{\delta}_{\gamma}T^{\gamma}_{\delta}=T^{\gamma}_{\gamma}$$

– 4-х скаляр.

Пусть есть 2 вектора: A^μ – ковар., B_ν – контравар. Рассмотрим скалярное произведение: $AB=A^\mu B_\mu$. Как найти ковар. компоненты по известным контравар.:

$dS^2=(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, где $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор.

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_{\mu\nu}g^{\alpha\nu}=\delta^{\alpha}_{\mu}\ ;\ g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}$$

$$dS^2=g^{\mu\nu}dx_{\mu}dx_{\nu}$$

$$dx^{\mu}=g^{\mu\nu}dx_{\nu}\ ;\ dx_{\nu}=g_{\mu\nu}dx^{\mu}$$

$$A^{\mu}=\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$$

$$A_0=g_{00}A^0+g_{10}A^1+g_{20}A^2+g_{30}A^3=A^0$$

$$A_1=g_{01}A^0+g_{11}A^1+g_{21}A^2+g_{31}A^3=-A^1$$

$$A_2=-A^2\ ;\ A_3=-A^3$$

$$A^{\mu}=\left(A^0,\vec{A}\right);\ A_{\mu}=\left(A^0,-\vec{A}\right)$$

Релятивистская механика.

Рассмотрим принцип наименьшего действия для свободной частицы. Масса покоя m. Скорость движения υ~c.

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L\,dt\ ;\ \delta S=0$$

Уравнения движения должны быть Лоренцево-инвариантны. Действие $\Rightarrow$ должно быть также Лоренцево-инвариантно. Т.к действие Лоренцево-инвариантно, то $\Rightarrow$ S пропорционально величине, кот. не меняется при преобразованиях Лоренца. Эта величина интервал dS.

$$S=-\alpha\int_{t_1}^{t_2}ds$$

$$ds^2=c^2dt^2-\left(d\vec{r}\right)^2\Rightarrow ds=\sqrt{c^2-\upsilon^2}\,dt=$$

$$=c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,dt$$

$$S=-\alpha c\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,dt$$

Константу α найдём из предельного перехода в нерелятивистский случай.

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{m\upsilon^2}{2}dt$$

$$S=-\alpha c\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,dt$$

Пусть теперь υ<<c, тогда:

$$\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\approx 1-\frac{\upsilon^2}{2c^2}$$

$$S=-\alpha c\int_{t_1}^{t_2}dt+\alpha c\int_{t_1}^{t_2}\frac{\upsilon^2dt}{2c^2}=\frac{\alpha}{2c}\int_{t_1}^{t_2}\upsilon^2dt$$

$$-\alpha c\int_{t_1}^{t_2}dt-\textit{константа}\left(\textit{не вл. на движ.}\right)$$

$$\alpha=mc$$

$$S=-mc^2\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,dt$$

действие свободной нерелятивистской частицы.

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\vec{\upsilon}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\vec{r}}=0$$

$$\textit{если}\ \frac{\partial L}{\partial\vec{r}}=0,\ \textit{то}\ p=\frac{\partial L}{\partial\vec{\upsilon}}=const$$

$$\vec{p}=\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

при $\upsilon<<c$ *получаем*

$$\vec{p}\approx m\vec{\upsilon}$$

Найдём выражение полной энергии E:

$$E=\vec{p}\vec{\upsilon}-L=\frac{m\upsilon^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}=$$

$$=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

Если υ=0, то $E=E_{пок.}=mc^2$

<u>Функция Гамильтона.</u> $H\left(\vec{p}\right)=\sqrt{c^2\vec{p}^2+m^2c^4}$

<u>Кинетическая энергия</u>.

$$E_{кин.}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-mc^2$$

<u>Если тело состоит из нескольких частиц</u>.

$$mc^2=\sum_a m_ac^2+\sum_a E_{внутр.a}+U_{вз-я}$$

Масса покоя полной частицы не равна сумме масс покоя составных частиц, т.е $m\neq\sum_a m_a$

4-х векторы скорости, ускорения, импульса, силы. 4-х тензор момента импульса.

1)Скорость.

$$u^{\mu}=\frac{dx^{\mu}}{ds}\ ;\ u_{\mu}=\frac{dx_{\mu}}{ds}$$

$$ds=c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,dt$$

$$u^0=\frac{dx^0}{ds}=\frac{dx^0}{cdt\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\ ;$$

$$u^i=\frac{dx^i}{cdt\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{\upsilon^i}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\ ;$$

$$u^{\mu}=\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}};\frac{\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right\}$$

$$ds^2=inv=dx^{\mu}dx_{\mu}\Big|:ds^2\Rightarrow u^{\mu}u_{\mu}=1$$

4-х вектор скорости u_μ и u^μ – есть единичный вектор, касательный к мировой линии.

2)Ускорение.

$$w^{\mu}=\frac{du^{\mu}}{ds}=\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2}$$

$$u^{\mu}u_{\mu}=1\Big|\frac{d}{ds}$$

$$0=\frac{du^{\mu}}{ds}u_{\mu}+u^{\mu}\frac{du_{\mu}}{ds}=w^{\mu}u_{\mu}+u^{\mu}w_{\mu}=$$

$$=w^{\mu}u_{\mu}+g^{\mu\alpha}u_{\alpha}g_{\mu\nu}w^{\nu}=w^{\mu}u_{\mu}+\partial_{\alpha\nu}u_{\alpha}w^{\nu}=$$

$$=w^{\mu}u_{\mu}+u_{\nu}w^{\nu}=2w^{\beta}u_{\beta}=0$$

Скалярное произведение $w^\beta u_\beta=0\Rightarrow w^\beta$ и u_β – ортогональны.

3)Импульс.

$$p^{\mu}=mcu^{\mu}=\left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\left(\frac{E}{c},\vec{p}\right)$$

$$\begin{cases}\frac{E'}{c}=\frac{E/c-\beta p^x}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ p^{x'}=\frac{p^x-\beta\frac{E}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ;\ \frac{\vec{p}}{E}=\frac{m\vec{\upsilon}}{mc^2}=\frac{\vec{\upsilon}}{c^2}\\ p^{y'}=p^y\\ p^{z'}=p^z\end{cases}$$

$$\vec{\upsilon}=\frac{c^2\vec{p}}{E}\ ;\ E-\textit{полная энергия.}$$

$$p^{\mu}p_{\mu}=m^2c^2u^{\mu}u_{\mu}=m^2c^2-\textit{в любой СО}$$

$$m^2c^2=\frac{E^2}{c^2}-\vec{p}^2\Rightarrow H\left(\vec{p}\right)=E=\sqrt{m^2c^4+c^2p^2}$$

4)Сила.

$$f^{\mu}=mcw^{\mu}=\frac{dp^{\mu}}{ds}$$

$$f^{\mu}p_{\mu}=m^2c^2w^{\mu}u_{\mu}=0$$

$$f^{\mu}\perp p^{\mu}$$

$$f^{\mu}=\frac{dp^{\mu}}{ds}=\frac{d\left(mcu^{\mu}\right)}{cdt\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

$$f^{\mu}=\left(\frac{\vec{\upsilon}\vec{f}}{c};\vec{f}\right)\cdot\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

f – вектор в 3D, уд. уравнению $\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{f}$

Релятивистское уравнение движения:

$$\frac{dp^{\mu}}{ds}=f^{\mu}$$

$$\frac{dp^{\mu}}{ds}=mcw^{\mu}$$

ДУ движения для релятивистской частицы.

5)Тензор момента импульса.

$$M^{\mu\nu}=x^{\mu}p^{\nu}-x^{\nu}p^{\mu}$$

а)$M^{\mu\nu}$=-$M^{\nu\mu}$

б)Шесть независимых компонент.

в)Является ли тензор M – тензорной константой.

$$\frac{dM^{\mu\nu}}{ds}=p^{\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}+x^{\mu}\frac{dp^{\nu}}{ds}-p^{\mu}\frac{dx^{\nu}}{ds}-$$

$$-x^{\nu}\frac{dp^{\mu}}{ds}=$$

$$=p^{\nu}u^{\mu}+x^{\mu}f^{\nu}-p^{\mu}u^{\nu}-x^{\nu}f^{\mu}=$$

$$=mc\left(u^{\nu}u^{\mu}-u^{\mu}u^{\nu}\right)$$

$$f=0\ \textit{поскольку частица свободна}$$

г)

$$M^{\alpha\alpha}=0$$

$$M^{0i}=x^0p^i-x^ip^0=ctp^i-x^i\frac{E}{c}=$$

$$=\left(ct\vec{p}-\frac{\vec{r}E}{c}\right)_i=c\left(t\vec{p}-\frac{E\vec{r}}{c^2}\right)_i$$

$$M^{\mu\nu}=$$

$$\begin{pmatrix} 0 & c\left(tp_x-\frac{Ex}{c^2}\right) & c\left(tp_y-\frac{Ey}{c^2}\right) & c\left(tp_z-\frac{Ez}{c^2}\right) \\ c\left(\frac{Ex}{c^2}-tp_x\right) & 0 & M_z & -M_y \\ c\left(tp_y-\frac{Ey}{c^2}\right) & -M_z & 0 & M_x \\ c\left(tp_z-\frac{Ez}{c^2}\right) & M_y & -M_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{12}=x^1p^2-x^2p^1=xp_y-yp_x=M_z$$

$$M^{13}=-M_y$$

$$M^{23}=M_x$$

$$t\vec{p}-\frac{E\vec{r}}{c^2}=\overrightarrow{const}$$

$$\sum_a t\vec{p}_a-\frac{E_a\vec{r}_a}{c^2}=\overrightarrow{const}-\textit{для сист. частиц.}$$

<u>Центр масс.</u>

$$\sum_a E_a=const$$

$$t\frac{\sum_a\vec{p}_a}{\sum_a E_a}-\frac{\sum_a E_a\vec{r}_a}{c^2\sum_a E_a}=\vec{\xi}$$

$$\textit{где}\ \vec{R}_c=\frac{\sum_a E_a\vec{r}_a}{\sum_a E_a}$$

Дифференцируем обе части по времени:

$$0=\frac{\sum_a\vec{p}_a}{\sum_a E_a}-\frac{1}{c^2}\frac{d\vec{R}_c}{dt}\ ;$$

$$\vec{V}_c=c^2\frac{\sum_a\vec{p}_a}{\sum_a E_a}$$

Распады в релятивистской механике.

Рассмотрим процесс распада частицы с массой покоя M на частицы с массами покоя m_1 и m_2. E_1 и E_2 – полные энергии частиц. Рассмотрим инерциальную СО в кот. частицы покоятся.

$$Mc^2=E_1+E_2=\frac{m_1c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_1^2}{c^2}}}+\frac{m_2c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_2^2}{c^2}}}$$

$$M\neq m_1+m_2,\ M>m_1+m_2$$

$$\vec{p}_1+\vec{p}_2=0\Rightarrow\left|\vec{p}_1\right|=\left|\vec{p}_2\right|=p$$

$$\vec{p}_1=-\vec{p}_2$$

$$E=\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}$$

$$E=c\sqrt{\vec{p}^2+m^2c^2}$$

$$\begin{cases}p^2=\frac{E^2}{c^2}-m^2c^2\\ \frac{E_1^2}{c^2}-m_1^2c^2=\frac{E_2^2}{c^2}-m_2^2c^2\end{cases}$$

$$E_1=\frac{M^2+m_1^2-m_2^2}{2M}c^2\ ;\ E_2=\frac{M^2+m_2^2-m_1^2}{2M}c^2$$

Слипание частиц.

Пусть частица массой покоя m_2 покоится, а частица массой покоя m_1 налетает на неё.

$$E=E_1+E_2=E_1+m_2c^2$$

$$\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_1=\frac{m_1\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\ ,\textit{т.к}\ \vec{p}_2=0$$

$$\Rightarrow\frac{E^2}{c^2}-M^2c^2=\frac{E_1^2}{c^2}-m_1^2c^2$$

$$\vec{V}=\frac{c^2\vec{p}}{E}=\frac{c^2\vec{p}_1}{E_1+m_2c^2}$$

$$M^2=m_1^2+m_2^2+\frac{2m_2E_1}{c^2}$$

Упругие столкновения релятивистских частиц.

При упругих столкновениях массы частиц не меняются.

$$p_1^{\mu}+p_2^{\mu}=p_1^{\mu'}+p_2^{\mu'}$$

$$p_1^{\mu'}=p_1^{\mu}+p_2^{\mu}-p_1^{\mu'}$$

$$\begin{cases}p_1'^{\mu}p'_{1\mu}=p_1^{\mu}p_{1\mu}+p_2^{\mu}p_{2\mu}+p_2'^{\mu}p'_{2\mu}+2p_1^{\mu}p_{2\mu}-\\ -2p_1^{\mu}p'_{2\mu}-2p_2^{\mu}p'_{2\mu}\\ p_2'^{\mu}p'_{2\mu}=p_1^{\mu}p_{1\mu}+p_2^{\mu}p_{2\mu}+p_1'^{\mu}+2p_1^{\mu}p_{2\mu}-\\ -2p_1^{\mu}p'_{1\mu}-2p_2^{\mu}p'_{1\mu}\end{cases}$$

$$p^{\mu}=\left(\frac{E}{c},\vec{p}\right)$$

$$\vec{p}=\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\ ;\ p^{\mu}p_{\mu}=m^2c^2$$

$$\begin{cases}m_1^2c^2=m_1^2c^2+m_2^2c^2+m_2^2c^2\\ m_2^2c^2=m_1^2c^2+m_2^2c^2+m_1^2c^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}0=m_1^2c^2+p_1^{\mu}p_{2\mu}-p_1^{\mu}p'_{1\mu}-p_2^{\mu}p'_{1\mu}\\ 0=m_2^2c^2+p_1^{\mu}p_{2\mu}-p_1^{\mu}p'_{2\mu}-p_2^{\mu}p'_{2\mu}\end{cases}$$

Пусть одна частица массой m_1 налетает на другую массой m_2 и частица массой m_2 распадается на две частицы под углами θ_1 и θ_2 к линии движения 1-й частицы m_1.

$$\vec{p}_2=0\Rightarrow p_2^{\mu}=p_{2\mu}=\left\{m_2c,0\right\}$$

$$p_1^{\mu}p_{2\mu}=\frac{E_1}{c}\cdot m_2c=m_2E_1$$

$$p_2^{\mu}p'_{2\mu}=m_2E'_2$$

$$p_2^{\mu}p'_{1\mu}=m_2E'_1$$

$$p_1^{\mu}p'_{1\mu}=\frac{E_1E'_1}{c^2}-p_1p'_1\cos\theta_1$$

$$p_1^{\mu}p'_{2\mu}=\frac{E_1E'_2}{c^2}-p_1p_2\cos\theta_2$$

Подставляем всё с систему:

$$\cos\theta_1=\frac{1}{p_1p'_1}\left(\frac{E_1E'_1}{c^2}+m_2\left(E'_1-E_1\right)-m_1^2c^2\right)$$

$$\cos\theta_2=\frac{1}{p_1p'_2}\left(\frac{E_1E'_2}{c^2}+m_2\left(E'_2-E_1\right)-m_2^2c^2\right)$$

<u>Пример:</u> Пусть сталкиваются две частицы – фотон и электрон, тогда:

$$m_e=m\ ;\ \upsilon_e=0$$

$$m_1=0\ ;\ \upsilon_\gamma=c$$

$$\vec{p}=\frac{E}{c}\vec{n}$$

$$E=\hbar\omega\ ;\ \hbar=1{,}0546\cdot10^{-27}\ эрг\cdot c$$

$$\omega=ck$$

$$\vec{p}=\hbar\vec{k}\ ;\ k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\cos\theta_1=\frac{\hbar\omega\frac{\hbar\omega'}{c^2}+m\hbar\left(\omega'-\omega\right)}{\hbar\frac{\omega}{c}\hbar\frac{\omega'}{c}}=$$

$$=1+\frac{mc}{2\pi\hbar}\left(\lambda-\lambda'\right)$$

$$\Delta\lambda=\frac{2\pi\hbar}{mc}\left(1-\cos\theta_1\right)$$

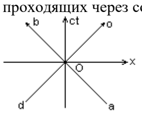
Угол рассеяния не зависит от длины волны фотона – эффект Комптона.

Световой конус.

Рассмотрим интервал:

$$\Delta S_{12}^2=c^2\Delta t_{12}^2-l_{12}^2$$

Пусть некоторое событие O является началом отсчёта времени и координат в четырёхмерной системе координат. Проследим, как по отношению к событию O будут располагаться все остальные события. Для наглядности будем рассматривать только одну простр. координату и время. Прямолинейное равномерное движение этой частицы изобразится прямой линией, наклоненной к оси t под углом, тангенс которого равен скорости частицы. Поскольку наибольшая скорость частицы c, то ∃ наибольший угол наклона к оси t(45º). Изобразим на плоскости распространение двух сигналов в противоположных направлениях, проходящих через событие O:



1)Область bOo. Здесь $\Delta S^2_{12}>0$. то $\Delta t>0 \Rightarrow$ здесь интервал времени-подобный и эта область – область абсолютного будущего. Все события здесь происходят после события O.
2)Область dOa. Здесь $\Delta S^2>0$, но $\Delta t<0$, т.е все события происходят до события O. Здесь интервал времени-подобный и эта область – область абсолютного прошлого.
3)Области bOd и oOa. Здесь $\Delta S^2<0$ и этот интервал пространственно-подобный. В этой области события происходят в разных точках пространства и могут происходить как после события O, так и до него или одновременно с ним.

Замечание:
1)Два события могут быть связанны причинно-следственной связью только в том случае, если интервал между ними времени-подобный(поскольку любое взаимодействие не может распространяться со скоростью, большей скорости света).
2)Если рассматривать все три пространственные координаты события, то мы получили бы конус в четырёхмерной системе координат, ось которого направлена вдоль оси t – световой конус. Области абс. прошлого и абс. будущего изображаются соответствующими внутренними полостями конуса.