

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

Библиотека Исследовательской школы
«Колебательно-волновые процессы в природных и искусственных средах»

В.И. Некоркин

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Учебно-методические материалы для магистрантов и аспирантов

Нижний Новгород, 2014

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ: Составитель: Некоркин В.И. Учебно-методические материалы для магистрантов и аспирантов Исследовательской школы «Колемательно-волновые процессы в природных и искусственных средах». – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 32 с.

Учебно-методические материалы предназначены для аспирантов ННГУ, обучающиеся по направлению подготовки 03.06.01 «Физика и астрономия» (специальности 01.04.03 – «Радиофизика», 01.04.06 – «Акустика») и магистрантов ННГУ, обучающиеся по направлениям подготовки 011800 – «Радиофизика», 010300 – «Фундаментальная информатика и информационные технологии». Рассматриваются основы теории параметрических колебаний. Изложение базируется на представлениях и подходах современной нелинейной динамики и, в частности, методе точечных отображений. Описаны теория Флоке, явление параметрического резонанса, параметрические колебания маятника, динамика маятника с вибрирующей точкой подвеса, колебания осциллятора с медленно изменяющейся частотой. Для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области радиофизики, прикладной математики и математического моделирования.

Учебно-методические материалы подготовлены в соответствии с Программой повышения конкурентоспособности Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2013 – 2020 годы и Программой развития Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского как национального исследовательского университета на 2009 – 2018 годы.

© В.И. Некоркин, 2014

© Нижегородский госуниверситет
им. Н.И. Лобачевского, 2014

Оглавление

| | |
|--|----------|
| Введение | 4 |
| 1.1 Теория Флоке | 6 |
| 1.1.1 Общее решение | 6 |
| 1.1.2 Отображение через период | 9 |
| 1.1.3 Устойчивость нулевого решения | 11 |
| 1.2 Основные режимы линейных параметрических систем | 13 |
| 1.2.1 Параметрические колебания и резонанс | 14 |
| 1.2.2 Параметрические колебания маятника | 17 |
| 1.3 Динамика маятника с вибрирующей точкой подвеса | 26 |
| 1.4 Колебания линейного осциллятора с медленно изменяющейся частотой | 28 |
| Литература | 32 |

Введение

Известно, что действие внешней периодической силы на колебательную систему может существенно изменить её динамику и вызвать появление новых режимов, не существующих при отсутствии силового внешнего воздействия. Однако возможен и другой способ внешнего воздействия на колебательную систему. Непосредственно на систему внешняя периодическая сила не действует, но параметры изменяются во времени по определенному закону за счет внешнего воздействия. Возникающие в таких системах колебания называются параметрическими. Простейшими системами, в которых возможны параметрические колебания, являются маятник с изменяющейся во времени длиной (примером такого маятника являются качели), колебательный контур с изменяющейся во времени емкостью и др. Системы, в которых возможно возбуждение параметрических колебаний, принято называть параметрическими. Системы, основанные на принципе параметрического возбуждения, широко распространены в природе и технике. Например, к ним относятся параметрические усилители и генераторы электромагнитных колебаний, работающие как в области относительно низких частот (до 100 ГГц), так и в СВЧ диапазоне. Параметрические устройства (усилители и генераторы) с успехом используются и в оптическом диапазоне. Например, в Институте Прикладной Физики РАН построена петтаваттная лазерная система, основанная на схеме оптического параметрического усиления.

Параметрические колебательные системы можно разделить на два главных класса - резонансные и нерезонансные, свойства которых существенно различаются между собой. В резонансных системах период изменения параметров находится в целочисленном соотношении с периодом собственных колебаний. В таких системах, в такт изменениям энергии, соответствующим собственным колебаниям, вносится энергия, вызванная работой внешнего воздействия. При определенных условиях это может приводить к эффекту раскачки колебаний за счет накапливающейся в системе энергии. Этот эффект лежит в основе работы параметрических усилителей и генераторов. К нерезонансным колебательным параметрическим системам относятся системы, в которых параметры изменяются очень быстро или очень медленно по сравнению с характерными временными масштабами изменения переменных системы. Динамика линейных параметрических систем при периодическом изменении параметров описывается линейными дифференциальными уравнениями с периоди-

ческими коэффициентами, в основе теории которых лежит теория Флоке.

1.1 Теория Флоке

Мы рассмотрим теорию Флоке [1, 2] для систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Однако заметим, что изложенные ниже положения этой теории справедливы для систем произвольного порядка.

1.1.1 Общее решение

Рассмотрим линейную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2, \\ \dot{x}_2 = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $p_{jk}(t+T) = p_{jk}(t)$, то есть все коэффициенты $p_{jk}(t)$ являются периодическими функциями времени t одного и того же периода. Запишем общее решение системы (1.1), которое в матричной форме имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = X(t) \cdot \mathbf{C}, \quad (1.2)$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

В (1.2) C_1 и C_2 - произвольные константы, а вектора

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

являются линейно независимыми и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений.

Покажем, что в качестве фундаментальной системы решений системы (1.1) можно выбрать векторы $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$, удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$\varphi_1(0) = 1, \quad \psi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \psi_2(0) = 1. \quad (1.3)$$

Согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений, вектора $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ будут линейно независимы, если так называемый определитель Вронского

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \psi_1(t) \\ \varphi_2(t) & \psi_2(t) \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

отличен от нуля. Для $W(t)$ справедлива формула Лиувилля

$$W(t) = W(0) \times \exp \left\{ \int_0^t [p_{11}(t) + p_{22}(t)] dt \right\} \quad (1.5)$$

Из (1.4) и (1.5) следует, что $W(0) = 1$ и, следовательно, $W(t)$ отличен от нуля при всех t и $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, удовлетворяющие начальным условиям (1.3), образуют фундаментальную систему решений.

В силу периодичности коэффициентов $p_{jk}(t)$, векторы $\varphi(t+T)$ и $\psi(t+T)$ будут также решениями системы (1.1), которые, однако, не совпадают с $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. С другой стороны, как всякое решение линейной системы, его можно выразить через фундаментальную систему решений

$$\varphi(t+T) = a\varphi(t) + b\psi(t), \psi(t+T) = c\varphi(t) + d\psi(t), \quad (1.6)$$

где a, b, c, d – произвольные постоянные. Из (1.6), принимая во внимание условия (1.3), получаем

$$a = \varphi_1(T), \quad b = \varphi_2(T), \quad c = \psi_1(T), \quad d = \psi_2(T). \quad (1.7)$$

Соотношения (1.7) означают, что постоянные a, b, c, d нам будут известны, если найдена фундаментальная система решений системы (1.1).

Покажем, что существует решение $\mathbf{x}(t)$ системы (1.1), которое через период воспроизводит себя с точностью до постоянного множителя, т.е.

$$\mathbf{x}(t+T) = s\mathbf{x}(t), \quad (1.8)$$

где s – некоторое постоянное число. Поскольку любое решение системы (1.1) можно получить из общего решения (1.2) соответствующим выбором постоянных, то решение $\mathbf{x}(t)$, удовлетворяющее (1.8), можно представить в виде

$$\mathbf{x}(t) = A\varphi(t) + B\psi(t), \quad (1.9)$$

где A и B – некоторые константы. Из (1.9) вытекает, что

$$\mathbf{x}(t+T) = A\varphi(t+T) + B\psi(t+T), \quad (1.10)$$

Подставляя (1.9) и (1.10) в (1.8), получим

$$A\varphi(t+T) + B\psi(t+T) = s[A\varphi(t) + B\psi(t)], \quad (1.11)$$

Из (1.11), принимая во внимание (1.6), имеем

$$[A(a-s) + Bc]\varphi(t) + [bB + B(d-s)]\psi(t) = 0. \quad (1.12)$$

Равенство (1.12) должно выполняться при любом t . Поскольку векторы $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ линейно независимы, то это возможно только в том случае, если будут одновременно выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} A(a-s) + Bc = 0, \\ Ab + B(d-s) = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Система (1.13) – система алгебраических однородных уравнений, которая имеет нетривиальное решение, если её определитель равен нулю. Раскрывая этот определитель, получим уравнение

$$s^2 - (a + d)s + (ad - bc) = 0. \quad (1.14)$$

Заметим, что свободный член в уравнении (1.14) может быть вычислен по коэффициентам исходной системы (1.1). Действительно, из (1.4) вытекает, что

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(T) & \psi_1(T) \\ \varphi_2(T) & \psi_2(T) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

С другой стороны,

$$W(T) = W(0) \times \exp \left\{ \int_0^T [p_{11}(t) + p_{22}(t)] dt \right\} = \exp \left\{ \int_0^T [p_{11}(t) + p_{22}(t)] dt \right\}.$$

Следовательно,

$$ad - bc = \exp \left\{ \int_0^T [p_{11}(t) + p_{22}(t)] dt \right\}, \quad (1.15)$$

т.е. свободный член в уравнении (1.14) может быть вычислен через коэффициенты $p_{11}(t)$ и $p_{22}(t)$ исходной системы.

Пусть s_1 и s_2 – корни уравнения (1.14) и предположим, что они не кратны. В этом случае система (1.13) имеет два нетривиальных решения, удовлетворяющих условиям

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{c}{s_1 - a} = \frac{s_1 - d}{b}, \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{c}{s_2 - a} = \frac{s_2 - d}{b}. \quad (1.16)$$

Следовательно, существуют два решения вида (1.9), которые удовлетворяют условию (1.8), т.е.

$$\mathbf{x}_1(t + T) = s_1 \mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t + T) = s_2 \mathbf{x}_2(t). \quad (1.17)$$

Заметим, что из (1.17) вытекает, что через n периодов будут выполняться условия

$$\mathbf{x}_1(t + nT) = (s_1)^n \mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t + nT) = (s_2)^n \mathbf{x}_2(t). \quad (1.18)$$

Решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ линейно независимы и могут быть выбраны в качестве фундаментальной системы решений системы (1.1).

Покажем, что решение $\mathbf{x}_1(t)$ и $\mathbf{x}_2(t)$ можно представить в виде

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \Phi_1(t), \mathbf{x}_2(t) = e^{\lambda_2 t} \Phi_2(t), \quad (1.19)$$

где $\Phi_j(t)$, $j = 1, 2$ – периодические вектор-функции периода T , имеющие вид

$$\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t) \\ \Phi_{21}(t) \end{pmatrix}, \Phi_2(t) = \begin{pmatrix} \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

В (1.19) λ_j - постоянные числа связаны с s_i следующей формулой

$$\lambda_j = \frac{1}{T} [\ln |s_j| \pm i(\arg s_j + 2\pi k)], \quad (1.21)$$

где $j = 1, 2$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Постоянные числа s_j называются **мультипликаторами**, а λ_j - **характеристическими показателями** системы (1.1).

Прежде всего убедимся, что вектор-функции $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ периодичны с периодом T , т.е.

$$\Phi_j(t + T) = \Phi_j(t), \quad j = 1, 2.$$

Из (1.19) имеем

$$\Phi_j(t) = \mathbf{x}_j(t) e^{-\lambda_j t}, \quad (1.22)$$

а из (1.17) и (1.21) -

$$\mathbf{x}_j(t + T) = s_j \mathbf{x}_j(t) = e^{\lambda_j T} \mathbf{x}_j(t), \quad (1.23)$$

В силу (1.22) и (1.23) имеем

$$\Phi_j(t + T) = \mathbf{x}_j(t + T) e^{-\lambda_j(t+T)} = e^{\lambda_j T} \mathbf{x}_j(t) e^{-\lambda_j(t+T)} = \mathbf{x}_j(t) e^{\lambda_j t} = \Phi_j(t), \quad (1.24)$$

т.е. $\Phi_j(t)$, $j = 1, 2$ действительно периодичны с периодом T .

Поскольку $\mathbf{x}_1(t)$ и $\mathbf{x}_2(t)$ образуют фундаментальную систему решений, общее решение системы (1.1) может быть записано в следующем виде

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^2 C_j e^{\lambda_j t} \Phi_j(t), \quad (1.25)$$

где C_j - произвольные постоянные, а периодические функции $\Phi_j(t)$ называются функциями Флоке.

1.1.2 Отображение через период

Система (1.1) является неавтономной и ее траектории задают отображение $g^t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, переводящее начальное условие $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^2$ в значение $\mathbf{v}(t)$ в момент t ($g^t \mathbf{x}(0) = \mathbf{v}(t)$), удовлетворяющее условию $\mathbf{v}(0) = \mathbf{x}(0)$. Заметим, что в отличие от случая линейной системы с постоянными коэффициентами, отображение g^t не удовлетворяет групповому условию). При изучении свойств системы (1.1) важную роль играет отображение g^T , которое называется [5] отображением за период. Найдем вид этого отображения.

Рассмотрим общее решение системы (1.1), которое согласно (1.25) имеет вид

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \Phi_{11}(t) + C_2 e^{\lambda_2 t} \Phi_{12}(t), \\ x_2(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \Phi_{21}(t) + C_2 e^{\lambda_2 t} \Phi_{22}(t). \end{cases} \quad (1.26)$$

Из (1.22) вытекает, что траектория системы (1.1), удовлетворяющая начальным условиям $x_1 = x_1(0)$ и $x_2 = x_2(0)$ задается следующим образом

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1^0 e^{\lambda_1 t} \Phi_{11}(t) + C_2^0 e^{\lambda_2 t} \Phi_{12}(t), \\ x_2(t) = C_1^0 e^{\lambda_1 t} \Phi_{21}(t) + C_2^0 e^{\lambda_2 t} \Phi_{22}(t). \end{cases} \quad (1.27)$$

где

$$\begin{aligned} C_1^0 &= \frac{\Delta_1}{\Delta}, \\ C_2^0 &= \frac{\Delta_2}{\Delta}, \\ \Delta_1 &= x_1(0)\Phi_{22}(0) - x_2(0)\Phi_{12}(0), \\ \Delta_2 &= x_2(0)\Phi_{11}(0) - x_1(0)\Phi_{21}(0), \\ \Delta &= \Phi_{11}(0)\Phi_{22}(0) - \Phi_{12}(0)\Phi_{21}(0). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Заметим, что из (1.22) и (1.9) следует, что

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(0) &= A_1, & \Phi_{12}(0) &= A_2, \\ \Phi_{21}(0) &= B_1, & \Phi_{22}(0) &= B_2. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Подставляя в (1.27) $t = T$ и учитывая (1.28) и (1.29), получим

$$\begin{cases} x_1(T) = \frac{A_1 B_2 s_1 - A_2 B_1 s_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} x_1(0) + \frac{(s_2 - s_1) A_1 A_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} x_2(0), \\ x_2(T) = \frac{(s_1 - s_2) B_1 B_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} x_1(0) + \frac{A_1 B_2 s_2 - A_2 B_1 s_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} x_2(0). \end{cases} \quad (1.30)$$

Используя соотношение (1.16), нетрудно показать, что

$$\frac{A_1 B_2 s_1 - A_2 B_1 s_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \equiv a, \quad \frac{(s_2 - s_1) A_1 A_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \equiv c,$$

$$\frac{(s_1 - s_2) B_1 B_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \equiv b, \quad \frac{A_1 B_2 s_2 - A_2 B_1 s_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \equiv d,$$

и система (1.30) может быть представлена в виде

$$\begin{cases} x_1(T) = ax_1(0) + cx_2(0), \\ x_2(T) = bx_1(0) + dx_2(0). \end{cases} \quad (1.31)$$

Таким образом, отображение g^T за период в векторной форме имеет вид

$$\mathbf{x}(T) = G\mathbf{x}(0), \quad (1.32)$$

где

$$G = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

1.1.3 Устойчивость нулевого решения

Система (1.31) является двумерным линейным точечным отображением, в котором роль дискретного времени играет период T , а решение $x_1 = x_2 = 0$ является его неподвижной точкой. Устойчивость неподвижной точки линейного отображения, а, следовательно, и тривиального решения системы (1.1) определяется мультипликаторами этой точки. Поскольку отображение (16.31) построено по траекториям динамической системы (1.1) с непрерывным временем, мультипликаторы s_1 и s_2 удовлетворяют условию $s_1 s_2 > 0$. Напомним, что неподвижная точка будет устойчивой, если $|s_j| < 1$, $j = 1, 2$, неустойчивой, если $|s_j| > 1$, $j = 1, 2$ и седловой, если один из мультипликаторов лежит внутри, а другой – вне единичной окружности на комплексной плоскости. Для понимания процессов, происходящих в параметрических системах дадим геометрическую интерпретацию этих условий. С помощью невырожденного преобразования координат представим систему (1.31) в виде (предлагаем читателю проделать это самостоятельно)

$$\begin{cases} u_1(T) = s_1 u_1(0), \\ u_2(T) = s_2 u_2(0). \end{cases} \quad (1.33)$$

Введем на фазовой плоскости (u_1, u_2) вектор, начало которого расположим в начале координат $u_1 = u_2 = 0$, а конец – в точке с координатами $u_1 = u_1(0)$, $u_2 = u_2(0)$ (рис. 1.1а). Исследуем преобразование этого вектора под действием отображения g^T .

Действительные мультипликаторы. При выполнении условий $|s_j| < 1$, $j=1, 2$, в силу (1.33), за одну итерацию отображения g^T длина вектора сокращается, и он поворачивается на некоторый угол. При этом в случае положительных мультипликаторов новый вектор имеет координаты того же знака, что и начальный вектор (рис. 1.1а). Если же мультипликаторы являются отрицательными, то новый вектор имеет координаты противоположного знака по сравнению с исходным вектором (рис. 1.1б). Поскольку на каждой последующей итерации длина вектора вновь сокращается, то при $n \rightarrow +\infty$ она асимптотически стремится к нулю, и, следовательно, решение $u_1 = u_2 = 0$, а значит и $x_1 = x_2 = 0$, является асимптотически устойчивым. Если хотя бы один из мультипликаторов удовлетворяет неравенству $|s_j| > 1$, то на каждой итерации отображения g^T длина начального вектора будет увеличиваться, и, следовательно, решение $x_1 = x_2 = 0$ – неустойчиво. Заметим, что когда один из мультипликаторов, например s_1 , удовлетворяет условию $|s_1| > 1$, а второй – $|s_2| < 1$, то на каждой итерации увеличение длины вектора сопровождается его асимптотическим приближением к одной из осей координат (рис. 1.1в,г).

Комплексно-сопряженные мультипликаторы. Пусть $s_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. В этом

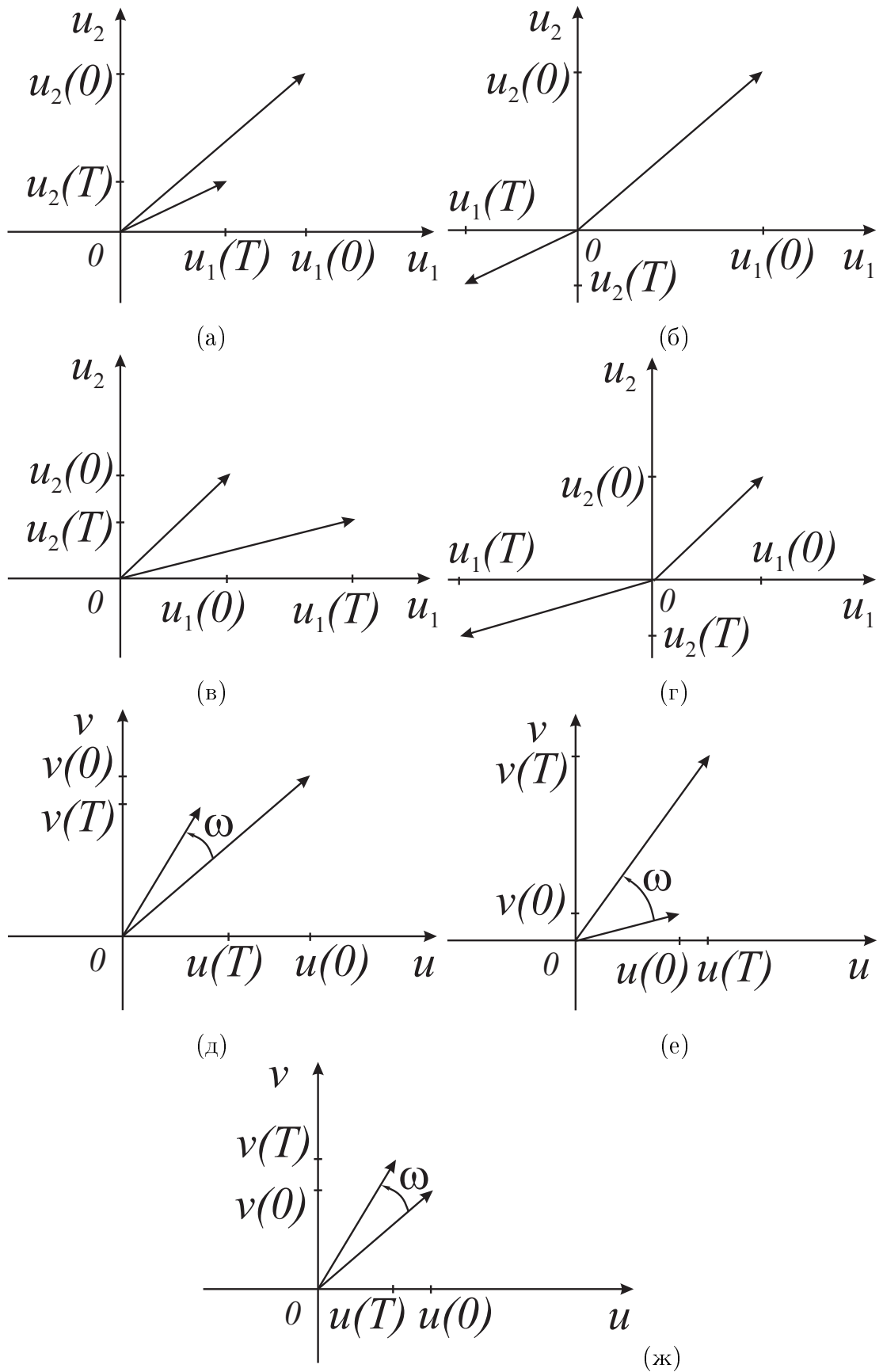


Рис. 1.1: Преобразование начального вектора за одну итерации отображения g^T . В случае действительных мультипликаторов: $0 < s_2 < s_1 < 1$ (а); $-1 < s_1 < s_2 < 0$ (б); $0 < s_2 < 1 < s_1$ (в); $s_1 < -1 < s_2 < 0$ (г). В случае комплексно-сопряженных мультипликаторов: $|s| < 1$ (д); $|s| > 1$ (е); $|s| = 1$ (ж).

случае в системе (1.33) значения $u_j(0)$ и $u_j(T)$, $j = 1, 2$ являются комплексными, т.е.

$$\begin{cases} u_j(0) &= u(0) \pm v(0), \\ u_j(T) &= u(T) \pm v(T). \end{cases} \quad (1.34)$$

Подставляя (1.34) в систему (1.33) и разделяя переменные, получим, что

$$\begin{cases} u(T) &= \alpha u(0) - \beta v(0), \\ v(T) &= \alpha u(0) + \beta v(0). \end{cases} \quad (1.35)$$

представим систему (1.35) в полярных координатах

$$\begin{cases} \varphi(T) &= \varphi(0) + \omega, \\ \rho(T) &= |s|\rho(0). \end{cases} \quad (1.36)$$

где $|s| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\alpha = |s| \cos \omega$, $\beta = |s| \sin \omega$. В силу (1.36) на плоскости (u, v) каждая итерация отображения g^T приводит к повороту начального вектора на угол ω и изменению его длины в $|s|$ раз. Следовательно, если $|s| < 1$, то длина начального вектора под действием g^T непрерывно уменьшается и асимптотически стремится к нулю (рис. 1.1д). В этом случае решение $x_1 = x_2 = 0$ является асимптотически устойчивым. При выполнении неравенства $|s| > 1$ действие g^T приводит на каждой итерации к увеличению длины вектора, и решение $x_1 = x_2 = 0$ является неустойчивым (рис. 1.1е). Если $|s| = 1$, то длина вектора на каждой итерации сохраняется, но он поворачивается на угол ω (рис. 1.1ж).

1.2 Основные режимы линейных параметрических систем

Поскольку система (1.1) является линейной, то из условий локальной устойчивости решения $x_1 = x_2 = 0$ вытекают следующие свойства линейных параметрических систем при произвольных начальных условиях:

- Параметрическая система, находящаяся в начальный момент в состоянии равновесия, останется в этом состоянии при любом $t > 0$, т.к. система (1.1) всегда имеет решение $x_1 = x_2 = 0$. Поэтому параметрическую систему, изначально находящуюся в покое нельзя вывести из этого состояния изменяя ее параметры. Например, если маятник находится в состоянии покоя, то добиться возбуждения его колебаний с помощью изменения лишь его длины нельзя.
- Состояние равновесия параметрической системы может быть как устойчивым, так и неустойчивым.

- Если состояние равновесия неустойчиво и параметрическая система выведена из этого состояния, то в ней возникнут колебания, амплитуда которых будет экспоненциально нарастать. Этот процесс нарастания размахов колебаний при периодическом изменении параметров системы называется **параметрическим резонансом**.

1.2.1 Параметрические колебания и резонанс

Установим условия возникновения параметрического резонанса в одном частном, но важном случае системы (1.1). Пусть в этой системе выполнены следующие условия: $p_{11}(t) \equiv 0$, $p_{12}(t) \equiv 0$, $p_{22}(t) \equiv 0$. Например, эти условия выполняются для таких классических уравнений физики как Маттье (Mathieu) и Хилла (Hill). При сделанных предположениях система (1.1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = p_{21}(t)x_1. \end{cases} \quad (1.37)$$

В силу (1.15), независимо от конкретного вида $p_{21}(t)$, для системы (1.37) выполняется условие $(ad - bc) = 1$ и уравнение (1.14) для нахождения мультипликаторов может быть записано в виде

$$s^2 - 2Ps + 1 = 0, \quad (1.38)$$

где $2P = a + d$. Рассмотрим динамику системы (1.37) в зависимости от значения коэффициента P .

1. Пусть $|P| < 1$. В этом случае мультипликаторы будут комплексными

$$s_{1,2} = P \pm i\sqrt{1 - P^2}.$$

Поскольку $|s| = 1$, то на фазовой плоскости (u, v) длина начального вектора за одну итерацию отображения g^T не меняется и он лишь поворачивается на угол ω (см. рис. 1.1ж). Следовательно, после некоторого числа итераций начальный вектор либо вернется в исходное состояние, либо его состояние будет несколько отличаться от исходного. В первом случае в параметрической системе будут существовать периодические колебания, а во втором – колебания, имеющие несоизмеримые частоты.

Найдем вид решения системы (1.37). Из формулы (1.25) для общего решения можно записать

$$x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \Phi_{11}(t) + C_2 e^{\lambda_2 t} \Phi_{12}(t) \quad (1.39)$$

Учитывая, что $|s| = 1$ из (1.21) находим

$$\lambda_1 = \frac{q}{T}i, \lambda_2 = -\frac{q}{T}i, \quad (1.40)$$

где $q = |\arg s_j + 2\pi k|$, $j = 1, 2$. Поскольку решение $x_1(t)$ является действительной функцией, то в силу (1.40) постоянные C_j , а также функции Флоке $\Phi_{11}(t)$, $\Phi_{12}(t)$

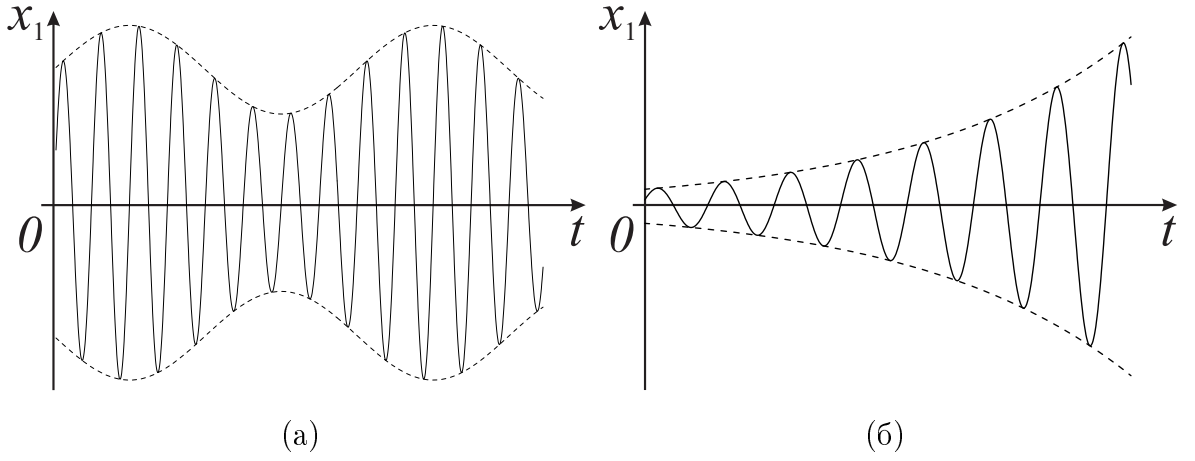


Рис. 1.2: Качественный вид параметрических колебаний: квазипериодические (а); экспоненциально нарастающие (б).

должны быть комплексно-сопряжёнными величинами. Представим их в показательной форме

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{A}{2}e^{ic} \quad , \quad C_2 = \frac{A}{2}e^{-ic}, \\ \Phi_{11}(t) &= h(t)e^{i\kappa(t)} \quad , \quad \Phi_{12}(t) = h(t)e^{-i\kappa(t)}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Подставляя (1.40) и (1.41) в (1.39), получим

$$\begin{aligned} x_1(t) &= Ah(t) \cos\left(\frac{q}{T}t + c + \kappa(t)\right) \quad \text{или} \\ x_1(t) &= H(t) \cos\left(\frac{q}{T}t + c\right) + F(t) \sin\left(\frac{q}{T}t + c\right), \end{aligned} \quad (1.42)$$

где $H(t) = Ah(t) \cos(\kappa(t))$, $F(t) = -Ah(t) \sin(\kappa(t))$. Следовательно, решение $x_1(t)$ представляет собой комбинацию двух периодических функций с периодами $T_1 = T$, поскольку $H(t)$ и $F(t)$ являются периодическими функциями периода T , и $T_2 = 2\pi T/q$. Поэтому вид $x_1(t)$ определяется тем как между собой соотносятся эти периоды или соответствующие им частоты, то есть

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2\pi}{q} \quad (1.43)$$

Если отношение (1.43) представляет рациональное число, то $x_1(t)$ периодическая функция, а если (1.43) – иррациональное число, то $x_1(t)$ квазипериодическая функция.

Таким образом, при выполнении условия $|P| < 1$ в системе (1.37) могут существовать ограниченные колебания, называемые *параметрическими*, которые будут либо периодическими, либо квазипериодическими (рис. 1.2а).

2. Пусть $|P| > 1$. При этом условии мультипликаторы $s_j, j = 1, 2$ будут действительными и $s_1 s_2 = 1$. Очевидно, что один из мультипликаторов, например s_1 , удовлетворяет неравенству $|s_1| > 1$, а другой – неравенству $|s_2| < 1$.

Рассмотрим сначала случай положительных мультипликаторов, т.е. случай $P > 1$. Воспользуемся геометрической трактовкой действия отображения g^T . В изучаемом случае на фазовой плоскости (u_1, u_2) длина начального вектора за одну итерацию отображения g^T увеличивается и он поворачивается на некоторый угол в направлении оси абсцисс (рис. 1.1в). При всех последующих итерациях такое преобразование повторяется и последовательность векторов, увеличивающейся длины, асимптотически приближается к оси абсцисс. Следовательно, независимо от выбора начального вектора, после некоторого числа итераций отображения g^T , состояние системы (1.37) будет определяться главным образом динамикой переменной u_1 : $u_1(nT) = (s_1)^n u_1(0)$ и $u_1(nT) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и в системе (1.37) существует режим параметрического резонанса. Найдем теперь вид решения $x_1(t)$ системы (1.37), отвечающего этому режиму. Из (1.21) следует, что

$$\lambda_1 = \frac{1}{T} \ln(s_1) > 0, \lambda_2 = \frac{1}{T} \ln(s_2) = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{1}{s_1}\right) = -\frac{1}{T} \ln(s_1) < 0 \quad (1.44)$$

Для того чтобы решение $x_1(t)$ было действительным, при выполнении (1.44), в (1.39) постоянные C_1, C_2 и функции Флоке $\Phi_{11}(t), \Phi_{12}(t)$ должны быть действительными величинами. Поэтому второе слагаемое в (1.39) быстро затухает и в (1.39) можно ограничиться лишь первым слагаемым, то есть

$$x_1(t) \approx C_1 \exp\left(\frac{1}{T} \ln(s_1)t\right) \Phi_{11}(t) \quad (1.45)$$

Из (1.45) вытекает, что максимальные значения $x_1(t)$ растут по закону геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $s_1 > 1$. Качественный вид решения (1.45), соответствующего режиму параметрического резонанса представлен на рисунке 1.2б. Пусть теперь мультипликаторы s_1, s_2 будут отрицательными, то есть выполнено условие $P < -1$. В этом случае на каждой итерации отображения g^T на плоскости (u_1, u_2) длина вектора возрастает и он поворачивается в направлении оси абсцисс (рис. 1.1г). Следовательно, последовательность векторов возрастающей длины асимптотически приближается к оси абсцисс, что соответствует режиму параметрического резонанса в системе (1.37). Однако, поскольку мультипликаторы отрицательны, координаты векторов воспроизводятся с точностью до множителей за две итерации отображения g^T , а не за одну, как это имеет место в случае положительных мультипликаторов. В целом, эта особенность не меняет общих свойств параметрического резонанса, который по-прежнему может быть описан соотношением (1.45), но вносит некоторые характерные черты в график функции $x_1(t)$. На графике $x_1(t)$ максимальные значения отстоят друг от друга на величину $2T$, между которыми существует еще несколько максимумов меньшей величины (см. рис. 1.5).

Пусть $P = 1$. Значения $P = \pm 1$ определяют границы, отделяющие области ограниченных параметрических колебаний и параметрического резонанса. Для этих значений P мультипликаторы являются действительными и кратными ($s_1 = s_2 = s = 1$,

если $P = 1$ и $s_1 = s_2 = s = -1$, если $P = -1$) и, следовательно, формулу (1.25) для общего решения системы (1.37) использовать нельзя. В случае кратных мультипликаторов решение имеет вид

$$x_1(t) = C_1 \exp(\lambda t) \Phi(t) + C_2 t \exp(\lambda t) \Phi(t),$$

где $\lambda = \frac{1}{T} \ln(s)$. Поскольку, в этом случае в общем решении присутствует линейно растущий во времени сомножитель решение $x_1 = x_2 = 0$ будет неустойчивым.

1.2.2 Параметрические колебания маятника

Рассмотрим маятник [3–5], совершающий малые колебания около нижнего положения равновесия, когда его длина периодически изменяется с периодом T , то есть $l(t + T) = l(t)$. Динамика такого маятника описывается уравнением

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + g\varphi/l(t) = 0 \quad (1.46)$$

где $0 < \delta$ - параметр характеризующий диссипативные потери связанные с трением. Будем считать, что длина маятника изменяется скачкообразно и на одном периоде T и задается следующим образом

$$l(t) = \begin{cases} l_0 - \frac{a_0}{2}, & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ l_0 + \frac{a_0}{2}, & \text{если } \frac{T}{2} \leq t \leq T, \end{cases}$$

где параметр l_0 удовлетворяет условию $l_0 > \frac{a_0}{2}$. Введем для удобства частоты

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{g}{l_0 - \frac{a_0}{2}}, \\ \omega_2^2 &= \frac{g}{l_0 + \frac{a_0}{2}}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Колебания маятника в консервативном случае

Пусть трение отсутствует и параметр $\delta = 0$. В этом случае при учете (1.47), уравнение (1.46) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2(t)y, \end{cases} \quad (1.48)$$

где $\omega(t + T) = \omega(t)$ и на периоде T имеет вид

$$\omega^2(t) = \begin{cases} \omega_1^2, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ \omega_2^2, & \frac{T}{2} \leq t \leq T. \end{cases} \quad (1.49)$$

Очевидно, что система (1.48) является частным случаем системы (1.37) при $p_{21}(t) = \omega^2(t)$. Поэтому для понимания динамики системы (1.48) нам достаточно выразить

коэффициент P через параметры системы и найти границы зон параметрического резонанса, которые задаются условиями $P = \pm 1$. Поскольку $2P = a + d$, то для этого нужно вычислить коэффициенты a и d , являющиеся элементами матрицы G (см. раздел 1.1.2), задающей отображение g^T . Система (1.48) является кусочно-линейной и поэтому

$$G = G_2 \cdot G_1, \quad (1.50)$$

где G_2 и G_1 определяются системой (1.48) соответственно при $\omega^2(t) = \omega_1^2$ и $\omega^2(t) = \omega_2^2$.

Матрица G_1 . Найдем два линейно-независимых решения системы (1.48) при $\omega^2(t) = \omega_1^2$. Запишем общее решение

$$x_1(t) = \varphi_1(t) \equiv A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t)$$

$$x_2(t) = \varphi_2(t) \equiv -A_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t).$$

Из условий

$$\varphi_1(0) = 1, \quad \varphi_2(0) = 0$$

находим, что $A_1 = 1$, $B_1 = 0$ и первое решение имеет вид

$$\varphi_1(t) = \cos(\omega_1 t), \quad \varphi_2(t) = -\omega_1 \sin(\omega_1 t) \quad (1.51)$$

Второе решение находится аналогично. Оно имеет вид

$$\Psi_1(t) = \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1}, \quad \Psi_2(t) = \cos(\omega_1 t). \quad (1.52)$$

Подставляя в (1.51) и (1.52) время $t = T/2$ (см. формулу (1.7)) устанавливаем, что коэффициенты матрицы G_1 задаются следующим образом

$$a_1 = \cos\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right), \quad b_1 = -\omega_1 \sin\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right),$$

$$c_1 = \frac{\sin\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right)}{\omega_1}, \quad d_1 = \cos\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right).$$

Отсюда вытекает, что

$$G_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \frac{\sin(\alpha)}{\omega_1} \\ -\omega_1 \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

где $\alpha = \omega_1 T/2$.

Матрица G_2 . Вид матрицы G_2 находится аналогично (предлагаем читателю проделать соответствующие вычисления самостоятельно). Она имеет вид

$$G_2 = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \frac{\sin(\beta)}{\omega_2} \\ -\omega_2 \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix},$$

где $\beta = \omega_2 T/2$. Перемножая матрицы G_1 и G_2 устанавливаем (см. (1.50)), что элементы матрицы G имеют вид

$$\begin{aligned} a &= \cos \alpha \cos \beta - \frac{\omega_1}{\omega_2} \sin \alpha \sin \beta, & b &= -\omega_2 \cos \alpha \cos \beta - \omega_1 \sin \alpha \cos \beta, \\ c &= \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\omega_1} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\omega_2}, & d &= \cos \alpha \cos \beta - \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$2P = a + d = 2 \cos \alpha \cos \beta - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_1 \omega_2} \sin \alpha \sin \beta. \quad (1.53)$$

Введем в (1.53)) новые параметры, имеющие ясный физический смысл

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l_0}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad \varepsilon = \frac{a}{2l_0}, \quad \gamma = \frac{T}{T_0}. \quad (1.54)$$

В (1.54) ω_0 - частота, а T_0 - период собственных колебаний маятника при отсутствии параметрического воздействия, параметр ε характеризует глубину параметрической модуляции ($0 < \varepsilon < 1$), а параметр γ - соотношение между характерным временем изменения параметра и периодом собственных колебаний маятника. Нетрудно видеть, что

$$\alpha = \frac{\pi\gamma}{\sqrt{1-\varepsilon}}, \quad \beta = \frac{\pi\gamma}{\sqrt{1+\varepsilon}}, \quad \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_1 \omega_2} = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \quad (1.55)$$

Подставляя (1.55)) в (1.53)), получим

$$\begin{aligned} P &= \cos \left(\frac{\pi\gamma}{\sqrt{1-\varepsilon}} \right) \cos \left(\frac{\pi\gamma}{\sqrt{1+\varepsilon}} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \sin \left(\frac{\pi\gamma}{\sqrt{1-\varepsilon}} \right) \sin \left(\frac{\pi\gamma}{\sqrt{1+\varepsilon}} \right). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Рассмотрим плоскость параметров (γ, ε) и построим на этой плоскости области параметрического резонанса и ограниченных колебаний. Прежде всего заметим, что эта плоскость линиями $P = 0$ (пунктирные линии на рис. 1.3) делится на чередующиеся между собой области, в которых выполняется соответственно неравенство $P < 0$ и $P > 0$. При этом, и тех и других областей существует бесконечное число. Для первого семейства областей граница параметрического резонанса задается условием $P = -1$, а для второго – $P = 1$. Условие $P = -1$ выделяет на плоскости (γ, ε) области, отмеченные на рис. 1.3 серым цветом. Они имеют форму зон, примыкающих к оси $\varepsilon = 0$ в точках $\gamma = 1/2 + k$, где $k = 0, 1, 2, \dots$. Семейство этих зон обозначим через P^- . В свою очередь, условие $P = 1$ задает границы областей, отмеченных на рис. 1.3 чёрным цветом. Они, как и в предыдущем случае, имеют форму зон, которые примыкают к оси $\varepsilon = 0$ в точках $\gamma = k$, где $k = 1, 2, 3, \dots$. Обозначим через P^+ это семейство зон. Семейства P^+ и P^- состоят из бесконечного числа зон, но каждой из них соответствует режим параметрического резонанса. Зонам семейства P^- соответствует отрицательные, а зонам семейства P^+ – положительные мультипликаторы решения $\varphi = y = 0$.

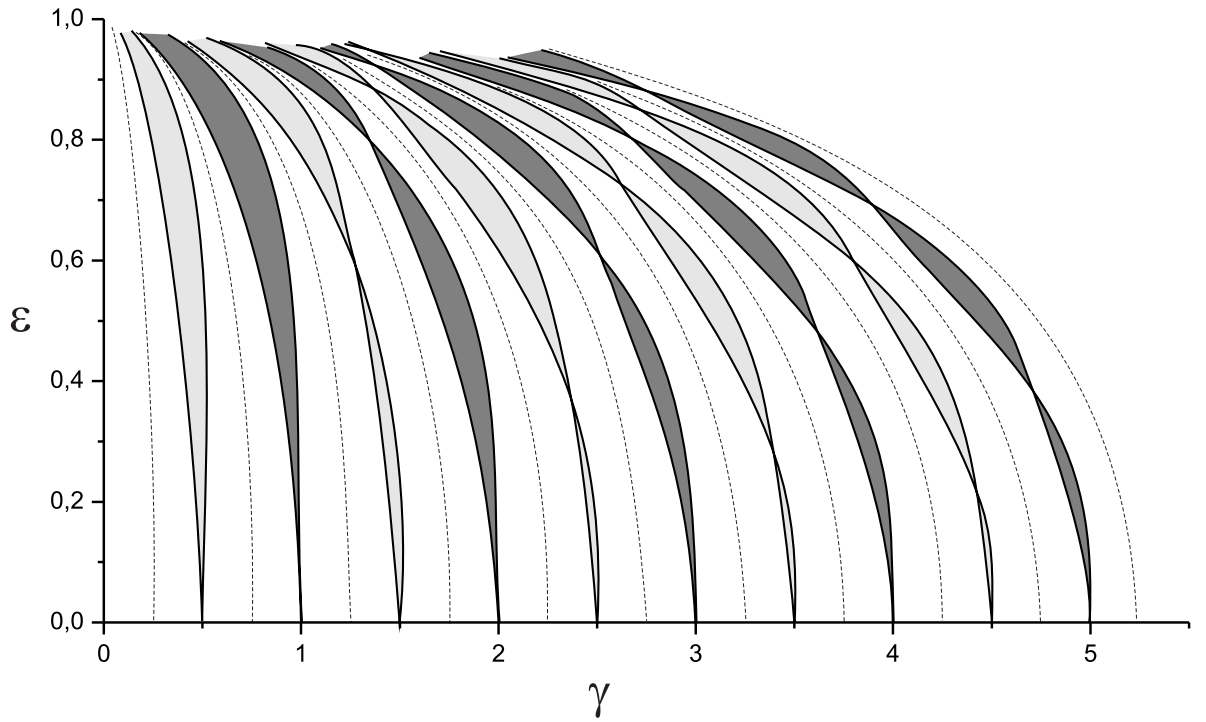
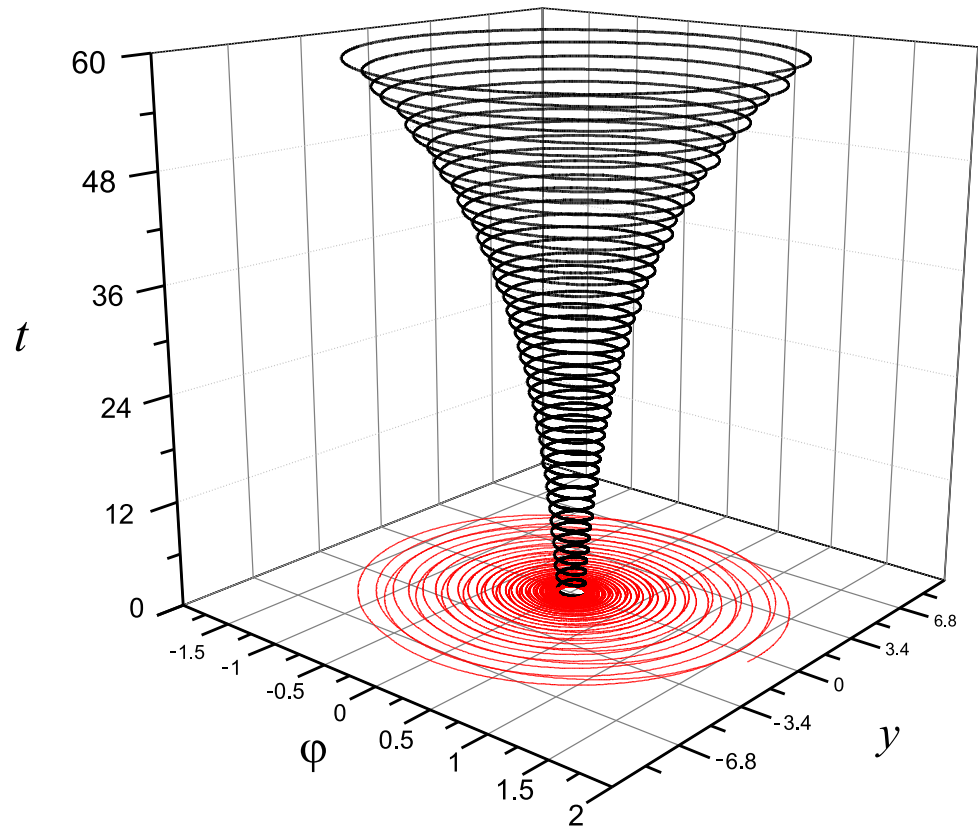
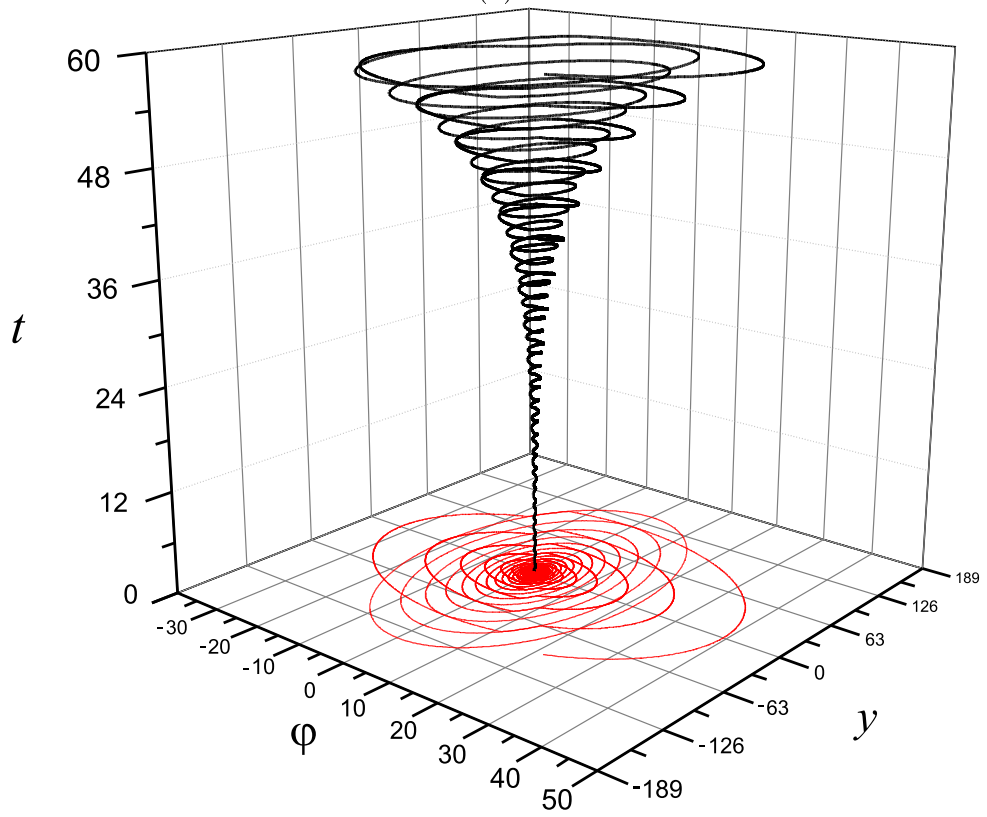


Рис. 1.3: Зоны параметрического резонанса системы (1.48) построенные численно с использованием формулы (1.56): семейство P^- (серый цвет) семейство P^+ (черный цвет).

Это отличие вносит некоторую специфику в процесс нарастания колебаний. На рис. 1.4 показано поведение траекторий системы (1.48) в трёхмерном фазовом пространстве. Рис. 1.4а соответствует одной из зон семейства P^+ , а рис. 1.4б – семейства P^- . Типичные параметрические колебания системы (1.48), соответствующие режиму параметрического резонанса, представлены на рис. 1.5. Обратим внимание, что расстояние между наибольшими значениями переменной $\varphi(t)$ составляет T для зон семейства P^+ и $2T$ для зон семейства P^- . Другая интересная особенность зон параметрического резонанса системы (1.48) наблюдается при достаточно больших значениях параметра ε . Начиная со вторых зон каждого из семейств P^+ и P^- , при некоторых ε они вырождаются в точки, подобно тому как это имеет место при $\varepsilon = 0$. Например, у вторых зон имеется по одной такой точке. С увеличением номеров зон число точек "вырождения" становится всё больше (рис. 1.3). Если параметр ε будет равен ординате такой точки, то соответствующая зона параметрического резонанса не существует при данном ε . Заметим, что вне зон параметрического резонанса колебания системы (1.48) являются ограниченными (либо периодическими, либо квазипериодическими).



(a)



(б)

Рис. 1.4: Траектории в фазовом пространстве системы (1.48), соответствующие режимам параметрического резонанса: для значений параметров из зоны семейства P^+ (а) и P^- (б).

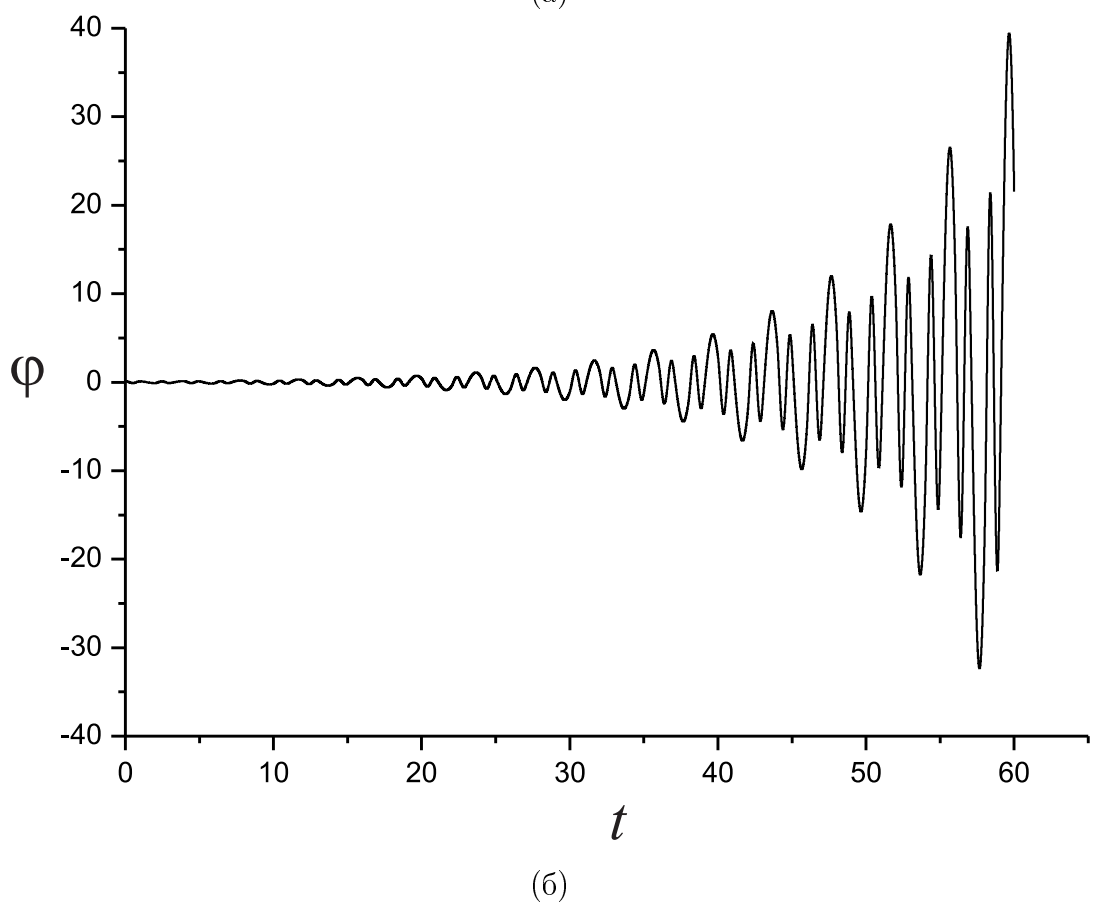
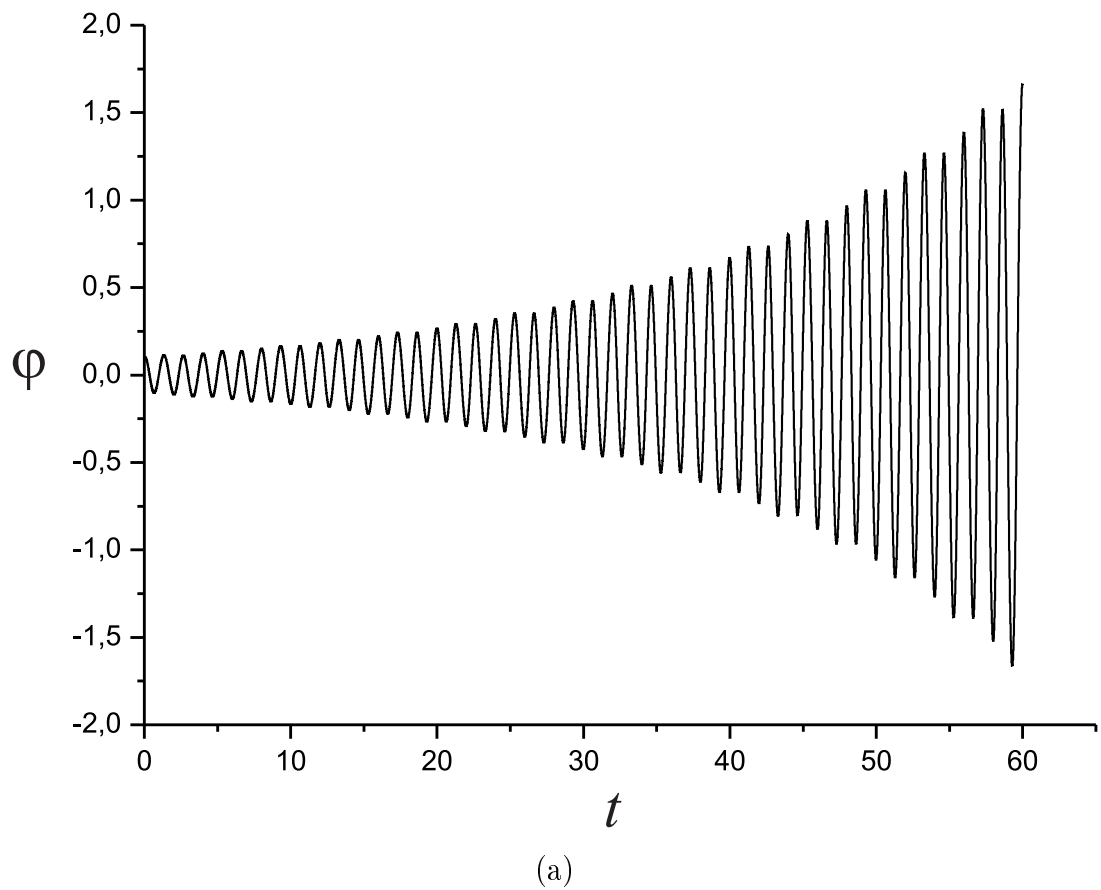


Рис. 1.5: Колебания системы (1.48), соответствующие режимам параметрического резонанса.

Колебания маятника при учете потерь

В этом случае уравнение (1.46) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2(t) - 2\delta y. \end{cases} \quad (1.57)$$

Ограничим наше рассмотрение условием достаточно слабых потерь. Будем считать, что $\delta^2 < \omega_2^2$. При этом условии в случае отсутствия параметрического воздействия маятник совершает затухающие осцилляторные колебания (на фазовой плоскости существует устойчивый фокус). Поскольку методика построения фундаментальной системы решений системы (1.57) аналогична случаю $\delta = 0$, мы не будем здесь проделывать все выкладки для нахождения этих решений, а сразу представим коэффициенты матриц G_1 и G_2 .

Коэффициенты матрицы G_1 :

$$\begin{aligned} a_1 &= e^{-\frac{\delta T}{2}} \left(\cos \alpha + \frac{\delta}{\Omega_1} \sin \alpha \right), \\ b_1 &= -e^{-\frac{\delta T}{2}} \frac{\omega_1^2}{\Omega_1} \sin \alpha, \\ c_1 &= e^{-\frac{\delta T}{2}} \frac{\sin \alpha}{\Omega_1}, \\ d_1 &= e^{-\frac{\delta T}{2}} \left(\cos \alpha - \frac{\delta}{\Omega_1} \sin \alpha \right), \end{aligned} \quad (1.58)$$

где $\Omega_1 = \sqrt{\omega_1^2 - \delta^2}$, $\alpha = \frac{\Omega_1 T}{2}$.

Коэффициенты матрицы G_2 :

$$\begin{aligned} a_2 &= e^{-\frac{\delta T}{2}} \left(\cos \beta + \frac{\delta}{\Omega_2} \sin \beta \right), \\ b_2 &= -e^{-\frac{\delta T}{2}} \frac{\omega_2^2}{\Omega_2} \sin \beta, \\ c_2 &= e^{-\frac{\delta T}{2}} \frac{\sin \beta}{\Omega_2}, \\ d_2 &= e^{-\frac{\delta T}{2}} \left(\cos \beta - \frac{\delta}{\Omega_2} \sin \beta \right), \end{aligned} \quad (1.59)$$

где $\Omega_2 = \sqrt{\omega_2^2 - \delta^2}$, $\beta = \frac{\Omega_2 T}{2}$.

Перемножая матрицы G_1 и G_2 , при учете (1.58), (1.59), можно найти матрицу G . Мы делать этого не будем, найдем лишь коэффициент P

$$2P = a + d = a_1 a_2 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + d_1 d_2 = 2e^{-\delta T} P_0,$$

где

$$P_0 = \cos \alpha \cos \beta - \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2\Omega_1 \Omega_2} \sin \alpha \sin \beta.$$

Для получения уравнения (1.14), определяющего мультипликаторы, нам осталось найти определитель матрицы G . Удобнее всего его установить используя соотношение (1.15). Действительно, в случае системы (1.57) имеем $p_{11}(t) \equiv 0$, а $p_{22}(t) = -2\delta$. Поэтому $\det G = ad - bc = e^{-2\delta T}$ и уравнение для нахождения мультипликаторов имеет вид

$$s^2 - 2e^{-\delta T} P_0 s + e^{-2\delta T} = 0 \quad (1.60)$$

Границе области существования параметрического резонанса на комплексной плоскости мультипликаторов (см. раздел 1.1.3) соответствует окружность единичного радиуса, уравнение которой можно представить в виде

$$s = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (1.61)$$

Подставляя (1.61) в уравнение (1.60) и разделяя действительные и мнимые части, получим

$$\begin{cases} \cos(2\theta) - 2e^{-\delta T} P_0 \cos \theta + e^{-2\delta T} = 0, \\ \sin(2\theta) - 2e^{-\delta T} P_0 \sin \theta = 0. \end{cases} \quad (1.62)$$

Нетрудно видеть, что второе уравнение системы (1.62) имеет решения: $\theta = 0$, $\theta = \pi$ и $\cos \theta = e^{-\delta T} P_0$. После подстановки этих решений в первое уравнение (1.62) получим соответственно

$$P_0 = \operatorname{ch}(\delta T) \quad (1.63)$$

$$P_0 = -\operatorname{ch}(\delta T) \quad (1.64)$$

$$e^{-2\delta T} = 1 \quad (1.65)$$

Очевидно, что условие (1.65) никогда не выполняется и, следовательно, граница области параметрического резонанса задается соотношениями (1.63) и (1.64). При выполнении (1.63) мультипликаторы удовлетворяют условию $s_1 = 1, s_2 = e^{-2\delta T} < 1$, а при выполнении (1.64) - условию $s_1 = -1, s_2 = -e^{-2\delta T} > -1$. При использовании параметров ε и γ (см. (1.54)) условия (1.63), (1.64) можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} & \cos\left(\frac{\pi\gamma\kappa}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right) \cos\left(\frac{\pi\gamma\sigma}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right) - \frac{1-\delta^2(1-\varepsilon^2)}{\kappa\sigma\sqrt{1-\varepsilon^2}} \times \\ & \times \sin\left(\frac{\pi\gamma\kappa}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right) \sin\left(\frac{\pi\gamma\sigma}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right) = \pm \operatorname{ch}(\delta T) \end{aligned} \quad (1.66)$$

где $\kappa = \sqrt{1 - \frac{\delta^2(1-\varepsilon)}{\omega_0^2}}$, $\sigma = \sqrt{1 - \frac{\delta^2(1+\varepsilon)}{\omega_0^2}}$.

На рис. 1.6 представлено несколько зон параметрического резонанса, построенных численно с помощью формул (1.66). Как и в случае $\delta = 0$, на плоскости (γ, ε) существует два бесконечных семейства зон, одно из которых образует зоны расположенные в областях, где $P_0 < 0$ (зоны помечены серым цветом), а другое - в областях,

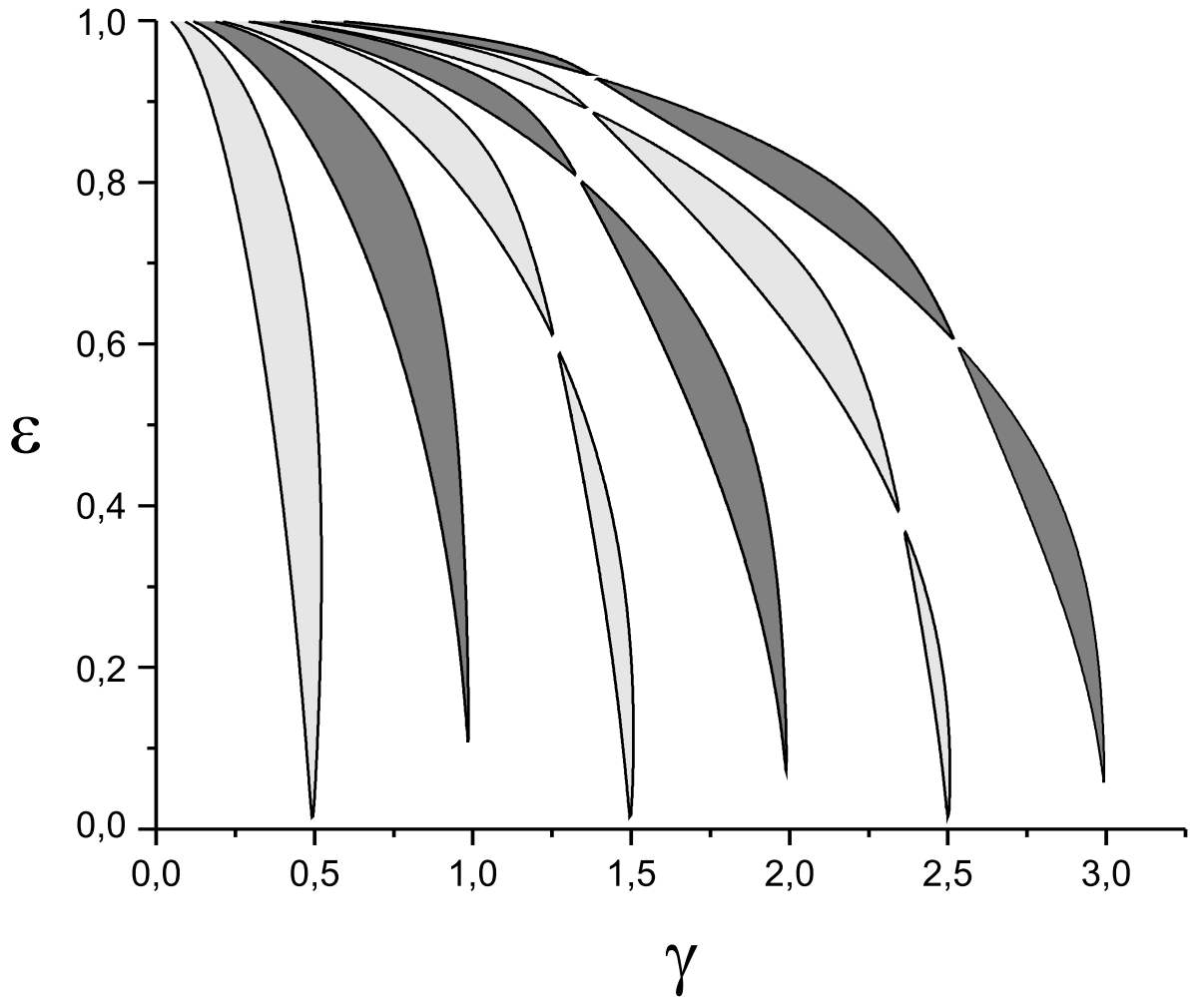


Рис. 1.6: Зоны параметрического резонанса системы (1.57).

где $P_0 > 0$. В отличие от консервативного случая $\delta = 0$ зоны параметрического резонанса к оси $\varepsilon = 0$ не примыкают. Другими словами в системе существует порог возбуждения параметрического резонанса, возникающий в результате затухания. Другая отличительная особенность диссипативного случая состоит в том, что начиная со вторых зон обеих семейств, каждая из них распадается на отдельные, несвязанные между собой подзоны (рис. 1.6). Причем этих подзон тем больше, чем больше номер основной зоны. Этот эффект приводит к тому, что при некоторых ε определенные зоны не существуют, хотя соседние с ней не исчезают. Например, при вторая зона серого семейства не существует, а две соседние зоны темного семейства присутствуют (рис. 1.6). Вне зон параметрического резонанса в системе (1.57) существуют устойчивые периодические колебания.

1.3 Динамика маятника с вибрирующей точкой подвеса

Рассмотрим маятник, точка подвеса которого совершает вертикальные колебания с амплитудой a и периодом 2τ (рис. 1.7). Будем предполагать что длина ма-

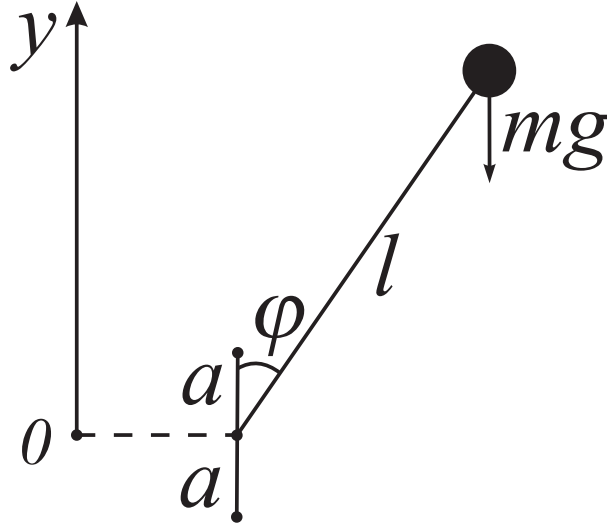


Рис. 1.7: Маятник с колеблющейся точкой подвеса («перевернутый» маятник).

ятника $l_0 \gg a$, а колебания точки подвеса являются достаточно быстрыми, то есть $\tau \ll 1$. Кроме того, пусть точка подвеса совершает равнопеременное движение с постоянным ускорением равным $\pm c$. Тогда в течение каждого полупериода ускорение точки подвеса $c = \frac{8a}{\tau^2}$, а частота её колебаний $\omega_p^2 = \frac{c}{l} = \frac{8a}{l\tau^2}$. Мы предложим также, что затухание отсутствует. При этих предположениях малые колебания маятника в окрестности верхнего положения равновесия описываются системой

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = y, \\ \dot{y} = (\omega_0^2 \pm \omega_p^2)\varphi, \end{cases} \quad (1.67)$$

где $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ – собственная частота маятника при отсутствии параметрического воздействия, а знак перед ω_p^2 изменяется через время τ . Кроме того, выполняется неравенство $\omega_p^2 > \omega_0^2$, поскольку точка подвеса колеблется достаточно быстро. Система (1.67) является кусочно-линейной и, следовательно, применима методика изложенная в разделе 1.2.2. Согласно ей матрица G , задающая отображение за период, определяется соотношением $G = G_2 \cdot G_1$. Найдем элементы матриц G_1 и G_2 .

Матрица G_1 . Пусть в начальный момент точка подвеса находится в крайнем верхнем положении. Тогда в течении полупериода динамика маятника будет описываться системой

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = y, \\ \dot{y} = p^2\varphi, \end{cases} \quad (1.68)$$

где $p^2 = \omega_0^2 + \omega_p^2$. Аналогично тому, как это было сделано в разделе 1.2.2, можно показать, что фундаментальная система решений имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &\equiv \cosh(pt), \quad \psi_1(t) \equiv \frac{1}{p} \sinh(pt), \\ \varphi_2(t) &\equiv p \sinh(pt), \quad \psi_2(t) \equiv \cosh(pt).\end{aligned}\tag{1.69}$$

Из (1.69) вытекает, что коэффициенты матрицы имеют вид

$$\begin{aligned}a_1 &= \cosh(p\tau), \quad c_1 = \frac{1}{p} \sinh(p\tau), \\ b_1 &= p \sinh(p\tau), \quad d_1 = \cosh(p\tau).\end{aligned}$$

Матрица G_2 . Рассмотрим теперь поведение маятника, когда точка подвеса движется из крайнего нижнего положения вверх. В этом случае динамика маятника в течение полупериода будет описываться системой

$$\dot{\varphi} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2 \varphi.\tag{1.70}$$

где $\omega^2 = \omega_p^2 - \omega_0^2$. На этом временном интервале фундаментальная система решений системы (1.70) задается следующим образом

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &\equiv \cos(\omega t), \quad \psi_1(t) \equiv \frac{1}{\omega} \sin(\omega t), \\ \varphi_2(t) &\equiv -\omega \sin(\omega t), \quad \psi_2(t) \equiv \cos(\omega t).\end{aligned}\tag{1.71}$$

В силу (1.71) матрица G_2 имеет следующие коэффициенты

$$\begin{aligned}a_2 &= \cos(\omega\tau), \quad b_2 = -\omega \sin(\omega\tau), \\ c_2 &= \frac{1}{\omega} \sin(\omega\tau), \quad d_2 = \cos(\omega\tau).\end{aligned}\tag{1.72}$$

Из соотношений (1.70) и (1.72) следует, что коэффициент $2P$, входящий в уравнение (1.38) для мультипликаторов, имеет вид

$$\begin{aligned}2P = a + d &= a_1 a_2 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + d_1 d_2 = \\ &= 2 \operatorname{ch}(p\tau) \cos(\omega\tau) + \left(\frac{p}{\omega} - \frac{\omega}{p} \right) \operatorname{sh}(p\tau) \sin(\omega\tau)\end{aligned}$$

Отсюда следует, что решения системы (1.67) будут ограниченными, если будет выполнено условие

$$\left| \operatorname{ch}(p\tau) \cos(\omega\tau) + \left(\frac{p}{\omega} - \frac{\omega}{p} \right) \operatorname{sh}(p\tau) \sin(\omega\tau) \right| < 1.\tag{1.73}$$

Условие (1.73) выполняется, по крайней мере, для $\tau < \frac{4a}{\sqrt{3gl}}$ (В.И. Арнольд). Здесь мы проверим выполнение этого условия численно в случае когда амплитуда колебаний точки подвеса $a = 1$ см, а длина маятника $l = 100$ см. Для этих значений параметров на рис. 1.8 представленная, построенная численно, зависимость коэффициента P от τ для $\tau < \sqrt{\frac{8a}{g}}$ (это ограничение на τ вытекает из неравенства $\omega_p^2 > \omega_0^2$).

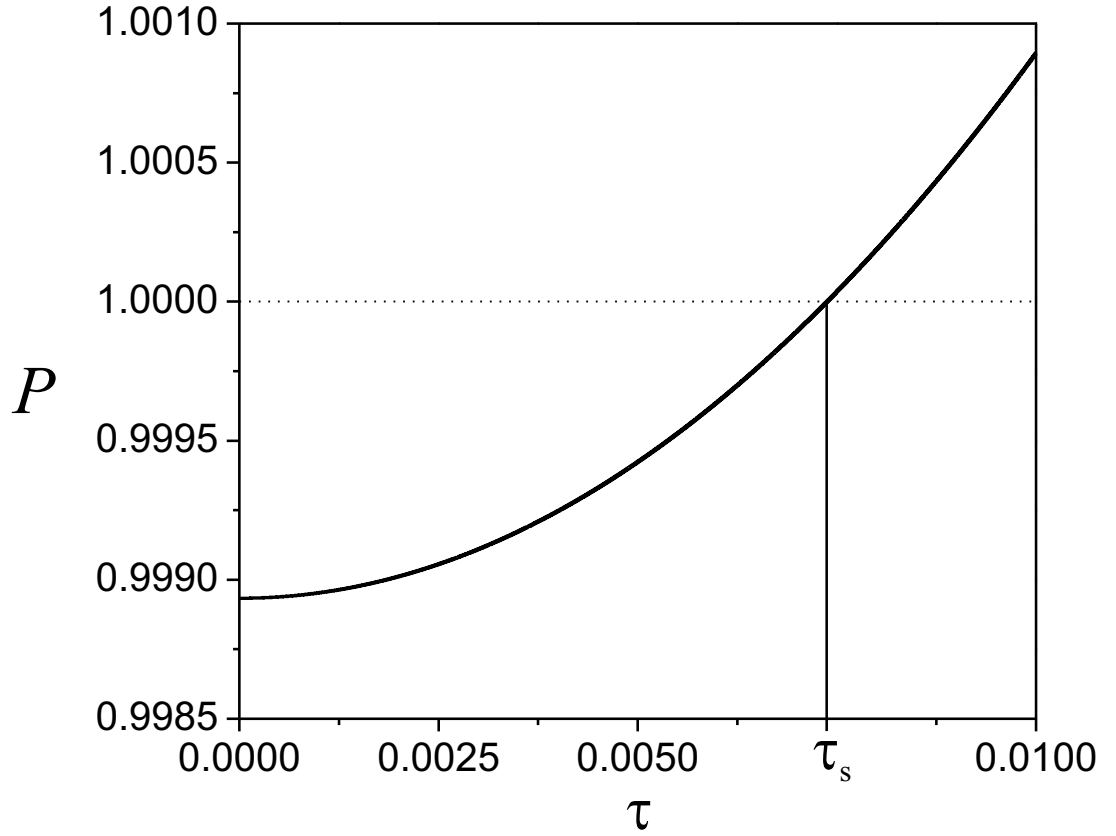


Рис. 1.8: График функции $P(\tau)$ для значений $a = 1\text{см}$ $l = 100\text{см}$.

Функция $P(\tau)$ является положительной и монотонно возрастающей функцией пересекающей прямую $P = 1$ в единственной точке $\tau = \tau_s = 0.00738$. Следовательно, для $\tau < \tau_s$ условие (1.73) выполнено и маятник совершает ограниченные колебания в окрестности верхнего, неустойчивого при отсутствии параметрического воздействия ($\omega_p \equiv 0$), состояния равновесия. Другими словами, верхнее неустойчивое положение маятника можно стабилизировать высокочастотными колебаниями точки подвеса, при условии, что число ее колебаний в единицу времени $N = \frac{1}{2\tau}$ превосходит (в данном примере) величину $N > \frac{1}{2\tau_s} \approx 68$ (колебаний в секунду).

1.4 Колебания линейного осциллятора с медленно изменяющейся частотой

Рассмотрим осциллятор, частота которого медленно изменяется во времени

$$\ddot{x} + \omega_0^2(\mu t)x = 0, \quad (1.74)$$

где функция $\omega_0(\mu t) > 0$ при всех t , а параметр $0 < \mu \ll 1$. Введем медленное время $\tau = \mu t$ и представим (1.74) в виде системы

$$\begin{cases} \mu \frac{dx}{d\tau} = y, \\ \mu \frac{dy}{d\tau} = -\omega_0^2(\tau)x. \end{cases} \quad (1.75)$$

Будем искать решение системы (1.75) методом ВКБ (Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна), согласно которому

$$\begin{cases} x = e^{\frac{s(\tau)}{\mu}} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j u_j(\tau), \\ y = e^{\frac{s(\tau)}{\mu}} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j v_j(\tau), \end{cases} \quad (1.76)$$

где $s(\tau)$, $u_j(\tau)$ и $v_j(\tau)$ — функции, которые нужно найти. Ограничим наше рассмотрение нахождением главного (нулевого по μ) приближения. Для этого требуется искать решение системы (1.75) в виде

$$\begin{cases} x = e^{\frac{s(\tau)}{\mu}} [u_0(\tau) + \mu u_1(\tau)], \\ y = e^{\frac{s(\tau)}{\mu}} [v_0(\tau) + \mu v_1(\tau)]. \end{cases} \quad (1.77)$$

Подставим решение (1.77) в систему (1.75) и сгруппируем слагаемые при одинаковых степенях μ . Для того, чтобы (1.77) были решениями системы (1.75) необходимо выполнение следующих условий

$$\mu^0 : \begin{cases} \frac{ds}{d\tau} u_0(\tau) - v_0(\tau) = 0, \\ \omega_0^2(\tau) u_0(\tau) + \frac{ds}{d\tau} v_0(\tau) = 0, \end{cases} \quad (1.78)$$

$$\mu^1 : \begin{cases} \frac{ds}{d\tau} u_1(\tau) + \frac{du_0}{d\tau} = v_1(\tau), \\ \frac{ds}{d\tau} v_1(\tau) + \frac{dv_0}{d\tau} = -\omega_0^2(\tau) u_1(\tau) \end{cases} \quad (1.79)$$

Система (1.78) является системой линейных однородных уравнений относительно функций $u_0(\tau)$, $v_0(\tau)$. Она имеет нетривиальное решение, если её определитель равен нулю, т.е.

$$\left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 + \omega_0^2(\tau) = 0. \quad (1.80)$$

Из (1.80) вытекает, что

$$\frac{ds}{d\tau} = \pm i \omega_0(\tau).$$

и

$$s(\tau) = \pm i \int_0^{\tau} \omega_0(\tau) d\tau$$

Следовательно, при выполнении (1.80) общее решение системы (1.78) имеет вид

$$\begin{cases} u_0 = \psi(\tau), \\ v_0 = \pm i \omega_0(\tau) \psi(\tau), \end{cases} \quad (1.81)$$

где $\psi(\tau)$ – произвольная функция. Система определяет пару комплексно сопряженных решений. Рассмотрим сначала одно из них:

$$u_0 = \psi(\tau), v_0 = i\omega_0(\tau)\psi(\tau) \quad (1.82)$$

Из первого уравнения в системе (1.79) при учете (1.82) имеем

$$v_1(\tau) = \frac{ds}{d\tau}u_1(\tau) + \frac{d\psi}{d\tau} \quad (1.83)$$

Подставляя (1.82) и (1.83) во второе уравнение системы (1.79), получаем уравнения для нахождения функции $\psi(\tau)$

$$2\omega_0(\tau)\frac{d\psi}{d\tau} = -\psi\frac{d\omega_0(\tau)}{d\tau} \quad (1.84)$$

Разделяя переменные в (1.84) и интегрируя находим функцию

$$\Psi(\tau) = \frac{A}{\sqrt{\omega_0(\tau)}}, \quad (1.85)$$

где A – произвольная действительная константа. Совершенно аналогично находим решение, отвечающее второй паре в (1.81).

Суммируя полученные выше результаты, получим, что

$$x(\tau) \approx \frac{A}{\sqrt{\omega_0(\tau)}} e^{\frac{i}{\mu} \int_0^\tau \omega_0(\tau) d\tau} + \frac{A}{\sqrt{\omega_0(\tau)}} e^{-\frac{i}{\mu} \int_0^\tau \omega_0(\tau) d\tau}.$$

Отсюда, возвращаясь к исходному времени t , находим, что приближенное решение уравнения (1.75) имеет вид

$$x(t) \approx \frac{2A}{\sqrt{\omega_0(\mu t)}} \cos \Theta, \quad (1.86)$$

где $\Theta = \int_0^{\mu t} \omega_0(t) dt$ – фаза. Из (1.86) следует, что амплитуда и частота осциллятора (1.75) в отличие от гармонического осциллятора, медленно (адиабатически) изменяется. Как известно, полная энергия гармонического осциллятора является постоянной величиной. Будет ли это свойство сохраняться для осциллятора (1.75)? Найдём его полную энергию

$$E = \left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2 + \omega_0^2(\mu t) \frac{x^2}{2}. \quad (1.87)$$

Вычислим производную от x , используя (1.86), т.е.

$$\dot{x} = -\frac{\dot{\omega}_0(\mu t) A \cos \Theta}{\omega_0(\mu t) \sqrt{\omega_0(\mu t)}} - \frac{2\omega_0(\mu t) A \sin \Theta}{\sqrt{\omega_0(\mu t)}}. \quad (1.88)$$

Поскольку частота $\omega_0(\mu t)$ изменяется очень медленно, первым слагаемым в (1.88) можно пренебречь и

$$\dot{x} \approx -2A\sqrt{\omega_0(\mu t)} \sin \Theta. \quad (1.89)$$

Подставляя (1.86) и (1.89) в (1.87), получим, что

$$E \approx A^2 \omega_0(\mu t). \quad (1.90)$$

Следовательно, полная энергия осциллятора (1.75) не сохраняется, а медленно изменяется во времени в соответствии с законом изменения частоты. Однако, отношение энергии, запасенной осциллятором (1.75), к его частоте при ее медленном изменении сохраняется во времени, поскольку из (1.90) следует, что

$$\frac{E}{\omega_0(\mu t)} \approx \text{const.}$$

Это отношение называется адиабатическим инвариантом.

Литература

1. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. 3-е изд., М.: Наука, 1987.
2. Шмидт Г. Параметрические колебания. М.: Мир, 1978.
3. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматлит, 1963.
5. Арнольд В.И. Математические методы классической механики: Учебное пособие. Изд. 5-е, М.: Едиториал УРСС, 2003.
6. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом, УФН, 1951, т. 44, с. 7-20.
7. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. Наукова Думка, 1971.
8. Фреман Н., Фреман П.У. ВКБ - приближение. М.: Мир, 1967.