ГЛАВА I

АФФИННЫЙ ОРТОГОНАЛЬНЫЙ ТЕНЗОР

1 Преобразование ортонормированных базисов

Рассмотрим два ортонормированных базиса $\mathbf{e}_i$ и $\tilde{\mathbf{e}}_i$ в $\mathbb{R}^n$. Из ортогональности и нормировки следует

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \delta_{ik}, \qquad (\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_k) = \delta_{ik}.$$

Условимся называть $\mathbf{e}_i$ старым базисом, а $\tilde{\mathbf{e}}_i$ – новым базисом.

Разложив векторы нового базиса $\tilde{\mathbf{e}}_i$ по старому базису $\mathbf{e}_i$, получим

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\mathbf{e}_j,\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где α_{ij} называют коэффициентами прямого преобразования, а матрицу (α_{ij}) – матрицей перехода от старого базиса $\mathbf{e}_i$ к новому $\tilde{\mathbf{e}}_i$. Разлагая векторы старого базиса $\mathbf{e}_i$ по новому $\tilde{\mathbf{e}}_i$ будем иметь

$$\mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_{kj}\tilde{\mathbf{e}}_j,\ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где β_{kj} называют коэффициентами обратного преобразования, а матрица (β_{kj}) перехода от нового базиса к старому является матрицей обратной (α_{ij}).

Умножая скалярно (1) на $\mathbf{e}_k$, находим

$$(\tilde{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\delta_{ij} = \alpha_{ik}.$$

Аналогично, умножая (2) скалярно на $\tilde{\mathbf{e}}_i$, получаем

$$(\tilde{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}_k) = \beta_{ki}.$$

Откуда следует, что

$$\beta_{ki} = \alpha_{ik},$$

т.е. матрица (β_{ij}), обратная матрице (α_{ij}), получается транспонированием матрицы (α_{ij}).

Окончательно получаем следующие формулы преобразования ортонормированных базисов

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\mathbf{e}_j, \qquad \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}\tilde{\mathbf{e}}_j.$$

Заметим, что в первой формуле прямого преобразования индекс суммирования у α_{ij} – второй, а во второй формуле обратного преобразования индекс суммирования у α_{ji} – первый.

2 Определение аффинного ортогонального тензора

Определение 1. *Скалярная величина L, инвариантная относительно перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису, называется аффинным ортогональным тензором нулевого ранга.*

Определение 2. *Пусть объект L в $\mathbb{R}^n$ определяется в каждом ортонормированном базисе $\mathbf{e}_i$ совокупностью n^p чисел*

$$L_{i_1 i_2 \cdots i_p},$$

где $i_s = 1, 2, \ldots, n;\; s = 1, 2, \ldots, p.$

Если при переходе от базиса $\mathbf{e}_i$ к любому новому ортонормированному базису $\tilde{\mathbf{e}}_i$ эти числа преобразуются по закону

$$\tilde{L}_{i_1 i_2 \cdots i_p} = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_p = 1}^{n} \alpha_{i_1 j_1}\alpha_{i_2 j_2}\cdots\alpha_{i_p j_p} L_{j_1 j_2 \cdots j_p},$$

где (α_{ij}) — матрица прямого преобразования, то L называют аффинным ортогональным тензором p-го ранга в пространстве $\mathbb{R}^n$ и обозначают $L_{i_1 i_2 \cdots i_p}$.

П р и м е р ы

1) Любой вектор в $\mathbb{R}^n$ является аффинным ортогональным тензором первого ранга. Во-первых, в каждом ортонормированном базисе $\mathbf{e}_i$ вектор $\mathbf{x}$ определяется 3^1 координатами. Во-вторых, при переходе от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису координаты вектора $\mathbf{x}$ преобразуются по тензорному закону.

Действительно,

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j\right)\tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i\tilde{\mathbf{e}}_i.$$

Откуда следует

$$\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j.$$

З а м е ч а н и е. Если провести аналогичные преобразования

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \tilde{\mathbf{e}}_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \tilde{x}_j \right) \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i,$$

то получим формулу преобразования координат вектора $\mathbf{x}$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \tilde{x}_j$$

при переходе от нового ортонормированного базиса к старому ортонормированному базису, т.е. координаты вектора $\mathbf{x}$ в $\mathbb{R}^n$ преобразуются по тем же законам, что и ортонормированные базисы:

$$\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j, \qquad x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \tilde{x}_j.$$

2) Символ Кронекера

$$\delta_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j),$$

определенный в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_i$ пространства $\mathbb{R}^n$, является аффинным ортогональным тензором второго ранга.

Действительно, числа δ_{ij} имеют n^2 значений: $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Кроме того при переходе от одного ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$ к другому ортонормированному базису эти числа преобразуются по тензорному закону. В самом деле,

$$\tilde{\delta}_{ij} = (\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \mathbf{e}_k, \sum_{l=1}^{n} \alpha_{jl} \mathbf{e}_l \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \alpha_{ik} \alpha_{jl} (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \alpha_{ik} \alpha_{jl} \delta_{kl}.$$

3) Центральная (неконическая) поверхность второго порядка с центром в начале координат является аффинным ортогональным тензором второго ранга в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Ее уравнение можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} a_{km} x_k x_m = 1,$$

где матрица коэффициентов (a_{km}) — симметричная. Следовательно, поверхность задается 3^2 координатами (ее коэффициентами a_{km}).

Используя закон преобразования вектора при переходе от одного ортонормированного базиса к другому

$$x_k = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik}\tilde{x}_i\,, \qquad x_m = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{jm}\tilde{x}_j\,,$$

получим уравнение поверхности в базисе $\tilde{\mathbf{e}}_i$

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} a_{km} \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik}\tilde{x}_i \sum_{j=1}^{3} \alpha_{jm}\tilde{x}_j = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} \alpha_{ik}\alpha_{jm}a_{km}\right)\tilde{x}_i\tilde{x}_j = 1,$$

т.е.

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} \alpha_{ik}\alpha_{jm}a_{km}.$$

Следовательно, коэффициенты поверхности преобразуются по тензорному закону, и рассматриваемая поверхность – аффинный ортогональный тензор в пространстве $\mathbb{R}^3$.

3 Аффинный ортогональный тензор второго ранга как линейный оператор

Перейдем к более подробному изучению аффинного ортогонального тензора второго ранга, так как в физических приложениях наиболее часто используется именно этот тензор.

Определение 1. *Рассмотрим линейный оператор* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{y} = L\mathbf{x}.$$

Координатами оператора L *в ортонормированном базисе* $\mathbf{e}_i$ *будем называть коэффициенты разложения образов* $L\mathbf{e}_i$ *по базису* $\mathbf{e}_i$*.*

Теорема 1. *Линейный оператор* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *является аффинным ортогональным тензором второго ранга в* $\mathbb{R}^n$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего напомним, что в силу линейности оператора для любых векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ из пространства $\mathbb{R}^n$ и любых действительных чисел c_1, c_2 выполняется

$$L(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1L\mathbf{x}_1 + c_2L\mathbf{x}_2.$$

Пусть разложение образов $L\mathbf{e}_i$ по базису $\mathbf{e}_i$ имеет вид

$$L\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{n} L_{ik}\mathbf{e}_k.$$

Умножая это равенство скалярно на $\mathbf{e}_j$, получаем выражения для координат L_{ij} линейного оператора L в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_i$

$$(L\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} L_{ik}(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} L_{ik}\delta_{ik} = L_{ij}.$$

Аналогично в базисе $\tilde{\mathbf{e}}_i$

$$\tilde{L}_{ij} = (L\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j).$$

Подставляя в последнее равенство выражения

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\mathbf{e}_k, \quad \tilde{\mathbf{e}}_j = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{jm}\mathbf{e}_m,$$

имеем

$$\tilde{L}_{ij} = (L\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j) = \left(L\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\mathbf{e}_k, \sum_{m=1}^{n} \alpha_{jm}\mathbf{e}_m \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{jm}(L\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{jm}L_{km}.$$

Таким образом линейный оператор $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет n^2 координат и эти координаты преобразуются по тензорному закону. Теорема доказана.

Определение 2. *Пусть L_{ij} – аффинный ортогональный тензор второго ранга. Будем говорить, что оператор $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ порожден тензором L_{ij}, если для каждого вектора*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i$$

вектор $L\mathbf{x}$ определен по формуле

$$L\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i L\mathbf{e}_i,$$

где $L\mathbf{e}_i = \sum\limits_{k=1}^{n} L_{ki}\mathbf{e}_k$.

Теорема 2. *Оператор $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, порожденный аффинным ортогональным тензором второго ранга L_{ij}, является линейным оператором.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{e}_i,$$

то для любых постоянных действительных чисел c_1, c_2 имеем

$$L(c_1\mathbf{x}+c_2\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}(c_1x_i+c_2y_i)L\mathbf{e}_i=c_1\sum_{i=1}^{n}x_iL\mathbf{e}_i+c_2\sum_{i=1}^{n}y_iL\mathbf{e}_i=c_1L\mathbf{x}+c_2L\mathbf{y}.$$

Теорема 3. *Линейный оператор $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, порожденный аффинным ортогональным тензором второго ранга L_{ij}, не зависит от выбора ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{L}_{ij}$ – координаты тензора L_{ij} в новом базисе $\tilde{\mathbf{e}}_i$. Тогда линейный оператор $\tilde{L}$, порожденный этим тензором, для каждого вектора $\mathbf{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\tilde{\mathbf{e}}_i$ принимает значение

$$\tilde{L}\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\tilde{L}\tilde{\mathbf{e}}_i,$$

где $\tilde{L}\tilde{\mathbf{e}}_i=\sum\limits_{k=1}^{n}\tilde{L}_{ki}\tilde{\mathbf{e}}_k$.

Докажем, что

$$\tilde{L}\mathbf{x}=L\mathbf{x}.$$

В самом деле

$$\tilde{L}\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\tilde{L}\tilde{\mathbf{e}}_i=\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\sum_{k=1}^{n}\tilde{L}_{ki}\tilde{\mathbf{e}}_k=\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\alpha_{kl}\alpha_{im}L_{lm}\right)\tilde{\mathbf{e}}_k=$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{im}\tilde{x}_i\right)\sum_{l=1}^{n}L_{lm}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kl}\tilde{\mathbf{e}}_k\right)=\sum_{m=1}^{n}x_m\sum_{l=1}^{n}L_{lm}\mathbf{e}_l=\sum_{m=1}^{n}x_mL\mathbf{e}_m=L\mathbf{x}.$$

Теорема доказана.

Выясним каким образом координаты вектора $\mathbf{y}$, определенные соотношением $\mathbf{y}=L\mathbf{x}$, выражаются через координаты вектора $\mathbf{x}$.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ выбран ортонормированный базис $\mathbf{e}_i$. Разложение вектора $\mathbf{x}$ по этому базису имеет вид

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{e}_i.$$

Так как оператор L линейный, то

$$\mathbf{y}=L\mathbf{x}=$$

$$=L\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{e}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_iL\mathbf{e}_i=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{k=1}^{n}L_{ki}\mathbf{e}_k=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}x_iL_{ki}\right)\mathbf{e}_k=\sum_{k=1}^{n}y_k\mathbf{e}_k.$$

Таким образом координаты вектора $\mathbf{y}$ имеют вид

$$\begin{cases} y_1 = L_{11}x_1 + L_{12}x_2 + \dots + L_{1n}x_n \\ y_2 = L_{21}x_1 + L_{22}x_2 + \dots + L_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = L_{n1}x_1 + L_{n2}x_2 + \dots + L_{nn}x_n. \end{cases}$$

В ы в о д. Мы доказали, что каждому аффинному ортогональному тензору второго ранга однозначно ставится в соответствие линейный оператор L. С другой стороны любой линейный оператор L в $\mathbb{R}^n$ можно трактовать как аффинный ортогональный тензор. Таким образом аффинный ортогональный тензор второго ранга можно отождествить с линейным оператором, задаваемым матрицей

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix}.$$

4 Приведение симметричного аффинного ортогонального тензора второго ранга к главным осям

Определение 1. *Тензор L_{ij} называется симметричным, если для любых индексов i и j выполняется*

$$L_{ij} = L_{ji}.$$

Пользуясь результатами предыдущего пункта будем рассматривать аффинный ортогональный тензор второго ранга как линейный оператор $\mathbf{y} = L\mathbf{x}$.

Определение 2. *Собственными числами и собственными векторами аффинного ортогонального тензора L_{ij} называют собственные числа и собственные вектора линейного оператора, порождаемого этим тензором, т.е. ненулевые решения $\mathbf{x}$ и соответствующие им числа λ уравнения*

$$L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Для тензора L собственные числа λ находятся из уравнения

$$\begin{vmatrix} L_{11} - \lambda & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} - \lambda & \dots & L_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Если тензор L симметричный, то его собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – вещественны и для них находится система собственных ортонормированных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, образующих базис в пространстве $\mathbb{R}^n$. В этом базисе матрица оператора L принимает диагональный вид

$$\begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & L_n \end{pmatrix}.$$

Определение 3. *Выбор базиса* $\mathbf{e}_i$*, в котором матрица симметричного аффинного ортогонального тензора второго ранга имеет диагональный вид, называется приведением этого тензора к главным осям.*

5 Инвариантные билинейные формы

Определение 1. *Билинейной формой от* $2n$ *действительных переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_n$*, порожденной матрицей*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

называется однородный многочлен второй степени

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k.$$

Билинейная форма называется симметричной, если матрица ее коэффициентов симметричная.

Симметричная билинейная форма, у которой всегда $\mathbf{y} = \mathbf{x}$,

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k,$$

называется квадратичной формой.

Билинейная форма называется инвариантной, если при переходе от одного ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$ *к другому ортонормированному базису ее значение для данных векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *не изменяется.*

Теорема 4. *Коэффициенты инвариантной билинейной формы образуют аффинный ортогональный тензор второго ранга.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в базисе $\mathbf{e}_i$ билинейная форма имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_i y_k,$$

а в базисе $\tilde{\mathbf{e}}_i$ – вид

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \tilde{a}_{lm}\tilde{x}_l\tilde{y}_m$$

и в силу ее инвариантности выполняется равенство

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \tilde{a}_{lm}\tilde{x}_l\tilde{y}_m = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_i y_k.$$

Тогда, учитывая что

$$x_i = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{li}\tilde{x}_l, \qquad y_k = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{mk}\tilde{y}_m,$$

получаем

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \tilde{a}_{lm}\tilde{x}_l\tilde{y}_m = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_i y_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{n}\alpha_{li}\tilde{x}_l\right)\left(\sum_{m=1}^{n}\alpha_{mk}\tilde{y}_m\right) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{li}\alpha_{mk}a_{ik}\right)\tilde{x}_l\tilde{y}_m.$$

Откуда, в силу произвольности $\tilde{x}_l$ и $\tilde{y}_m$,

$$\tilde{a}_{lm} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{li}\alpha_{mk}a_{ik}.$$

Теорема 5. *Симметричная билинейная форма однозначно восстанавливается с помощью порождаемой ею квадратичной формой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в квадратичную форму

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{x})$$

вместо вектора $\mathbf{x}$ вектор $\mathbf{x}+\mathbf{y}$. В силу линейности оператора (матрицы) A и свойств скалярного произведения имеем

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y}, A(\mathbf{x}+\mathbf{y})) = (\mathbf{x}+\mathbf{y}, A\mathbf{x}+A\mathbf{y}) =$$

$$= (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, A\mathbf{y}) + (A\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, A\mathbf{y}).$$

В силу симметрии матрицы A

$$(\mathbf{y}, A\mathbf{x}) = (A\mathbf{y}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{y})$$

и

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y}, A(\mathbf{x}+\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) + (\mathbf{y}, A\mathbf{y}).$$

Откуда

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\{(\mathbf{x}+\mathbf{y}, A(\mathbf{x}+\mathbf{y})) - (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) - (\mathbf{y}, A\mathbf{y})\},$$

что и доказывает теорему.

Следствие . *Коэффициенты инвариантной квадратичной формы составляют аффинный ортогональный тензор второго ранга.*

ГЛАВА II

ТЕНЗОРЫ В АФФИННЫХ КООРДИНАТАХ

6 Тензорная символика

Условимся, что каждый индекс принимает n значений: $1, 2, 3, \ldots, n$. Символ A_i означает, что величина A_i принимает значения $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$; символ A_{ij} означает, что величина A_{ij} принимает n^2 значений и т.д. Этой символикой мы уже в некоторой степени пользовались при изучении аффинного ортогонального тензора.

Если в некотором выражении встречаются два индекса, обозначенные одной и той же буквой, то это означает, что по этим индексам (этой букве) произведено суммирование от 1 до n. Например, в пространстве $\mathbb{R}^n$ это означает, что

$$x_i \mathbf{e}^i = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}^i, \qquad a_{ik} x^{ik} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x^{ik}, \qquad A_{ii} = \sum_{i=1}^{n} A_{ii},$$

в пространстве $\mathbb{R}^3$

$$x_i \mathbf{e}^i = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}^i, \qquad a_{ik} x^{ik} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x^{ik}, \qquad A_{ii} = \sum_{i=1}^{3} A_{ii},$$

и т.д.

7 Основной и взаимный базисы

Пусть $\mathbf{e}_i$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, т.е. $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \delta_{ik}$, и

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$$

разложение вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ по базису $\mathbf{e}_i$. Умножая скалярно обе части этого равенства на $\mathbf{e}_k$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{e}_k) = x_i (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = x_i \delta_{ik} = x_k,$$

получаем, что координаты вектора $\mathbf{x}$ в ортонормированном базисе находятся по формулам

$$x_i = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i).$$

Пусть теперь $\mathbf{e}_i$ – произвольный косоугольный базис в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbf{A}$ – некоторый вектор из $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим задачу о нахождении коэффициентов разложения вектора $\mathbf{A}$ по произвольному базису $\mathbf{e}_i$. Решение этой задачи возможно, если ввести понятие взаимного базиса.

Определение 1. *Пусть векторы $\mathbf{e}_i$ образуют базис. Назовем его основным. Будем говорить, что векторы $\mathbf{e}^k$ образуют взаимный базис, если*

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k) = \delta_i^k = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Определение 2. *Координаты вектора $\mathbf{A}$ в основном базисе $\mathbf{e}_i$ называются контравариантными координатами и обозначаются A^i. Координаты $\mathbf{A}$ во взаимном базисе $\mathbf{e}^k$ называются ковариантными координатами и обозначаются A_k.*

Разложение вектора $\mathbf{A}$ по базисам $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^k$ имеет вид

$$\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{A} = A_k \mathbf{e}^k.$$

Умножим первое равенство скалярно на $\mathbf{e}^k$. Тогда

$$(\mathbf{A}, \mathbf{e}^k) = A^i (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k) = A^i \delta_i^k = A^k.$$

Таким образом

$$A^k = (\mathbf{A}, \mathbf{e}^k).$$

Аналогично

$$A_k = (\mathbf{A}, \mathbf{e}_k),$$

т.е. координаты в разложении вектора по данному базису находятся с помощью взаимного базиса.

Теорема 6. *Пусть $\mathbf{e}_i$ – базис в $\mathbb{R}^3$. Обозначим через $V = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Тогда векторы*

$$\mathbf{e}_1 = \frac{[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]}{V}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]}{V}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]}{V}$$

образуют взаимный базис для $\mathbf{e}_i$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим соотношения $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}^1) = 1$ и $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}^2) = 0$. Остальные соотношения проверяются аналогично.

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}^1) = (\mathbf{e}_1, \frac{[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]}{V}) = \frac{1}{V}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1,$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}^2) = (\mathbf{e}_1, \frac{[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]}{V}) = \frac{1}{V}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = 0.$$

8 Преобразование косоугольных базисов

Пусть в некоторой точке $M \in \mathbb{R}^n$ выбраны два векторных косоугольных базиса:

"старый"$\mathbf{e}_i$ и "новый"$\tilde{\mathbf{e}}_i$,

и пусть:

$\mathbf{e}^k$ – взаимный базис к $\mathbf{e}_i$ (старый взаимный базис),

$\tilde{\mathbf{e}}^k$ – взаимный к $\tilde{\mathbf{e}}_i$ (новый взаимный базис).

Применяя тензорную символику, будем иметь

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \alpha_i^k \mathbf{e}_k,$$

где α_i^k – коэффициенты прямого преобразования и

$$\mathbf{e}_i = \gamma_i^k \tilde{\mathbf{e}}_k,$$

где γ_i^k — коэффициенты обратного преобразования. Умножая скалярно первое из этих равенств на $\mathbf{e}^k$, а второе на $\tilde{\mathbf{e}}^k$, получаем

$$\alpha_i^k = (\tilde{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}^k), \;\; \gamma_i^k = (\mathbf{e}_i, \tilde{\mathbf{e}}^k). \tag{3}$$

Рассмотрим теперь преобразование взаимных базисов

$$\tilde{\mathbf{e}}^k = a_i^k \mathbf{e}^i, \qquad \mathbf{e}^k = b_i^k \tilde{\mathbf{e}}^i.$$

Умножим первое из этих равенств на $\mathbf{e}_i$, а второе на $\tilde{\mathbf{e}}_i$. Тогда

$$a_i^k = (\mathbf{e}_i, \tilde{\mathbf{e}}^k), \;\; b_i^k = (\tilde{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}^k). \tag{4}$$

Сравнивая (3) и (4), получаем связь между коэффициентами основных и взаимных базисов

$$a_i^k = \gamma_i^k \qquad b_i^k = \alpha_i^k.$$

Окончательно получаем закон преобразования взаимных базисов

$$\tilde{\mathbf{e}}^k = \gamma_i^k \mathbf{e}^i, \;\; \mathbf{e}^k = \alpha_i^k \tilde{\mathbf{e}}^i,$$

т.е. преобразование взаимных базисов осуществляется по обратному закону. Это означает, что коэффициентами прямого преобразования для взаимного базиса являются коэффициенты обратного преобразования для основного базиса и наоборот, коэффициентами обратного преобразования для взаимного базиса являются коэффициенты прямого преобразования для основного базиса.

И в заключение этого пункта приведем все формулы преобразования основных и взаимных базисов:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_i &= \alpha_i^k \mathbf{e}_k, & \mathbf{e}_i &= \gamma_i^k \tilde{\mathbf{e}}_k, \\ \tilde{\mathbf{e}}^k &= \gamma_i^k \mathbf{e}^i, & \mathbf{e}^k &= \alpha_i^k \tilde{\mathbf{e}}^i\,. \end{aligned}$$

9 Общее определение тензора

Определение. *Пусть дан объект (p, q) – строения, заданный с помощью n^{p+q} чисел (координат):*

$A^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ *– его координаты в старом базисе* $\mathbf{e}_i$*,*

$\tilde{A}^{l_1 l_2 \ldots l_q}_{k_1 k_2 \ldots k_p}$ *– его координаты в новом базисе* $\tilde{\mathbf{e}}_i$*.*

Если при переходе от базиса $\mathbf{e}_i$ *к базису* $\tilde{\mathbf{e}}_i$ *его координаты преобразуются по формулам*

$$\tilde{A}^{l_1 l_2 \ldots l_q}_{k_1 k_2 \ldots k_p} = \alpha^{i_1}_{k_1} \alpha^{i_2}_{k_2} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_1}_{j_1} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} A^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\,,$$

где α^i_k *– коэффициенты прямого преобразования,* γ^l_j *– коэффициенты обратного преобразования, то объект* A *называется тензором* $p+q$*-го ранга,* p*-раз ковариантным и* q*-раз контравариантным и обозначается*

$$A^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}.$$

Нижние индексы называются ковариантными индексами, а верхние – контравариантными индексами.

П р и м е р ы

1) Пусть $\mathbf{e}_i$ – старый, $\tilde{\mathbf{e}}_i$ – новый базисы, $\mathbf{e}^k$ и $\tilde{\mathbf{e}}^k$ – старый и новый взаимные базисы. Вектор $\mathbf{A}$ можно разложить по основному и взаимному базисам

$$\mathbf{A} = A^k \mathbf{e}_k \text{ и } \mathbf{A} = A_k \mathbf{e}^k,$$

где $A^k = (\mathbf{A}, \mathbf{e}^k)$ – контравариантные координаты этого вектора, а $A_k = (\mathbf{A}, \mathbf{e}_k)$ – ковариантные координаты.

Ковариантные координаты вектора $\mathbf{A}$ образуют ковариантный тензор первого ранга, а контравариантные координаты вектора $\mathbf{A}$ образуют контравариантный тензор первого ранга.

Действительно,

$$\tilde{A}_k = (\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{e}}_k) = (\mathbf{A}, \alpha^i_k \mathbf{e}_i) = \alpha^i_k (\mathbf{A}, \mathbf{e}_i) = \alpha^i_k A_i$$

и

$$\tilde{A}^k = (\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{e}}^k) = (\mathbf{A}, \gamma^k_i \mathbf{e}^i) = \gamma^k_i (\mathbf{A}, \mathbf{e}^i) = \gamma^k_i A^i\,.$$

2) Символ Кронекера

$$\delta^k_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k),$$

определенный в косоугольном базисе пространства $\mathbb{R}^n$ является тензором второго ранга, один раз ковариантным и один раз контравариантным. Покажем это:

$$\tilde{\delta}^k_i = (\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}^k) = (\alpha^m_i \mathbf{e}_m, \gamma^k_n \mathbf{e}^n) = \alpha^m_i \gamma^k_n (\mathbf{e}_m, \mathbf{e}^n) = \alpha^m_i \gamma^k_n \delta^n_m.$$

10 Метрический тензор

Определение. *Пусть* $\mathbf{e}_i$ *– основной, а* $\mathbf{e}^k$ *– взаимный базисы в* $\mathbb{R}^n$*. Совокупность чисел*

$$g_{ik} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)$$

называется ковариантным метрическим тензором, а совокупность чисел

$$g^{ik} = (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^k)$$

называется контравариантным метрическим тензором.

Из определения следует, что метрический тензор симметричный, т.е.

$$g_{ik} = g_{ki} \text{ и } g^{ik} = g^{ki}.$$

Покажем, что координаты метрического тензора преобразуются по тензорному закону:

$$\tilde{g}^{ik} = (\tilde{\mathbf{e}}^i, \tilde{\mathbf{e}}^k) = (\gamma^i_n \mathbf{e}^n, \gamma^k_m \mathbf{e}^m) = \gamma^i_n \gamma^k_m (\mathbf{e}^n, \mathbf{e}^m) = \gamma^i_n \gamma^k_m g^{mn},$$
$$\tilde{g}_{ik} = (\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_k) = (\alpha^m_i \mathbf{e}_m, \alpha^n_k \mathbf{e}_n) = \alpha^m_i \alpha^n_k (\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n) = \alpha^m_i \alpha^n_k g_{mn}.$$

Метрический тензор устанавливает связь между ковариантными и контравариантными координатами вектора. Действительно, умножим

$$\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$$

скалярно на $\mathbf{e}_k$. Получим

$$(\mathbf{A}, \mathbf{e}_k) = A^i (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k),$$

т.е.

$$A_k = g_{ik} A^i.$$

Аналогично

$$A^k = g^{ik} A_i.$$

ГЛАВА III

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

Прежде всего отметим, что все действия в тензорной алгебре вводятся для тензоров, определенных в пространстве одного и того же измерения.

11 Сложение тензоров

Определение. *Пусть A и B два тензора одинакового строения* (p, q)

$$A = A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}, \qquad B = B^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

Суммой тензоров A и B называется объект $C = A + B$, координаты которого определяются по формулам

$$C^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} + B^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

Теорема 7. *Суммой двух тензоров одинакового строения является тензор того же строения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения суммы тензоров видно, что если A и B имеют n^{p+q} координат, то тензор $C = A + B$ имеет также n^{p+q} координат. Покажем, что эти координаты преобразуются по тензорному закону:

$$\tilde{C}^{l_1 l_2 \dots l_q}_{k_1 k_2 \dots k_p} = \tilde{A}^{l_1 l_2 \dots l_q}_{k_1 k_2 \dots k_p} + \tilde{B}^{l_1 l_2 \dots l_q}_{k_1 k_2 \dots k_p} =$$

$$\alpha^{i_1}_{k_1} \alpha^{i_2}_{k_2} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_1}_{j_1} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} + \alpha^{i_1}_{k_1} \alpha^{i_2}_{k_2} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_1}_{j_1} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} B^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} =$$

$$= \alpha^{i_1}_{k_1} \alpha^{i_2}_{k_2} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_1}_{j_1} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} \left(A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} + B^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} \right) =$$

$$= \alpha^{i_1}_{k_1} \alpha^{i_2}_{k_2} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_1}_{j_1} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} C^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

12 Умножение тензоров

Определение 11.2 *Пусть даны два тензора любого строения:*

$$A = A^{j_1 j_2 \ldots j_{q_1}}_{i_1 i_2 \ldots i_{p_1}}, \qquad B = B^{l_1 l_2 \ldots l_{q_2}}_{k_1 k_2 \ldots k_{p_2}}.$$

Произведением двух тензоров A и B называется объект $C = A \cdot B$, координаты которого определяются по формулам

$$C^{j_1 j_2 \ldots j_{q_1} l_1 l_2 \ldots l_{q_2}}_{i_1 i_2 \ldots i_{p_1} k_1 k_2 \ldots k_{p_2}} = A^{j_1 j_2 \ldots j_{q_1}}_{i_1 i_2 \ldots i_{p_1}} \cdot B^{l_1 l_2 \ldots l_{q_2}}_{k_1 k_2 \ldots k_{p_2}}.$$

Теорема 8. *Произведением тензора (p_1, q_1)-строения на тензор (p_2, q_2)-строения является тензор $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$-строения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что объект $C = A + B$ имеет $p_1 + p_2$ ковариантных индексов, $q_1 + q_2$ – контравариантных индексов и, следовательно, имеет $n^{p_1+p_2+q_1+q_2}$ координат. Кроме того,

$$\tilde{C}^{n_1 n_2 \ldots n_{q_1} s_1 s_2 \ldots s_{q_2}}_{m_1 m_2 \ldots m_{p_1} r_1 r_2 \ldots r_{p_2}} = \tilde{A}^{n_1 n_2 \ldots n_{q_1}}_{m_1 m_2 \ldots m_{p_1}} \cdot \tilde{B}^{s_1 s_2 \ldots s_{q_2}}_{r_1 r_2 \ldots r_{p_2}} =$$

$$= \alpha^{i_1}_{m_1} \alpha^{i_2}_{m_2} \cdots \alpha^{i_{p_1}}_{m_{p_1}} \gamma^{n_1}_{j_1} \gamma^{n_2}_{j_2} \cdots \gamma^{n_{q_1}}_{j_{q_1}} A^{j_1 j_2 \ldots j_{q_1}}_{i_1 i_2 \ldots i_{p_1}} \times$$

$$\times \alpha^{k_1}_{r_1} \alpha^{k_2}_{r_2} \cdots \alpha^{k_{p_2}}_{r_{p_2}} \gamma^{s_1}_{l_1} \gamma^{s_2}_{l_2} \cdots \gamma^{s_{q_2}}_{l_{q_2}} B^{l_1 l_2 \ldots l_{q_2}}_{k_1 k_2 \ldots k_{p_2}} =$$

$$= \alpha^{i_1}_{m_1} \alpha^{i_2}_{m_2} \cdots \alpha^{i_{p_1}}_{m_{p_1}} \alpha^{k_1}_{r_1} \alpha^{k_2}_{r_2} \cdots \alpha^{k_{p_2}}_{r_{p_2}} \gamma^{n_1}_{j_1} \gamma^{n_2}_{j_2} \cdots \gamma^{n_{q_1}}_{j_{q_1}} \gamma^{s_1}_{l_1} \gamma^{s_2}_{l_2} \cdots \gamma^{s_{q_2}}_{l_{q_2}} \times$$

$$\times \left(A^{j_1 j_2 \ldots j_{q_1}}_{i_1 i_2 \ldots i_{p_1}} B^{l_1 l_2 \ldots l_{q_2}}_{k_1 k_2 \ldots k_{p_2}} \right) =$$

$$= \alpha^{i_1}_{m_1} \cdots \alpha^{i_{p_1}}_{m_{p_1}} \alpha^{k_1}_{r_1} \cdots \alpha^{k_{p_2}}_{r_{p_2}} \gamma^{n_1}_{j_1} \cdots \gamma^{n_{q_1}}_{j_{q_1}} \gamma^{s_1}_{l_1} \cdots \gamma^{s_{q_2}}_{l_{q_2}} C^{j_1 j_2 \ldots j_{q_1} l_1 l_2 \ldots l_{q_2}}_{i_1 i_2 \ldots i_{p_1} k_1 k_2 \ldots k_{p_2}},$$

что и доказывает согласно определению тензора теорему.

Очевидно, что при перемножении тензоров число сомножителей может быть больше двух.

Индексы в произведении ставятся в порядке их следования в множителях.

Заметим, что если мы станем перемножать тензоры в другом порядке, то получим другой результат, т.е., вообще говоря,

$$AB \neq BA.$$

13 Свертка тензоров

Определение. *Пусть*

$$A = A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$$

аффинный тензор (p, q)-строения. Выберем один ковариантный и один контравариантный индексы, например, i_1 и j_1. Положим $i_1 = i_2 = s$. Тогда объект

$$B^{j_2 j_3 \dots j_q}_{i_2 i_3 \dots i_p} = A^{s j_2 j_3 \dots j_q}_{s i_2 i_3 \dots i_p}$$

называется сверткой тензора A по паре индексов (i_1, j_1).

Аналогично определяется свертка аффинного тензора по любой паре разноименных индексов (ковариантного и контравариантного).

Лемма 1. *Пусть (α^j_i) – матрица прямого преобразования, а (γ^j_i) – матрица обратного преобразования. Тогда справедливы равенства*

$$\alpha^k_j \gamma^j_i = \delta^k_i, \qquad \alpha^j_i \gamma^k_j = \tilde{\delta}^k_i.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножая равенство

$$\mathbf{e}_i = \gamma^j_i \tilde{\mathbf{e}}_j$$

скалярно на $\mathbf{e}^k = \alpha^k_l \tilde{\mathbf{e}}^l$, получаем

$$\delta^k_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k) = (\gamma^j_i \tilde{\mathbf{e}}_j, \alpha^k_l \tilde{\mathbf{e}}^l) = \gamma^j_i \alpha^k_l (\tilde{\mathbf{e}}_j, \tilde{\mathbf{e}}^l) =$$

$$= \gamma^j_i \alpha^k_l \tilde{\delta}^l_j = \gamma^j_i (\alpha^k_l \tilde{\delta}^l_j) = \gamma^j_i \alpha^k_j = \alpha^k_j \gamma^j_i.$$

Аналогично

$$\tilde{\delta}^k_i = (\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}^k) = (\alpha^j_i \mathbf{e}_j, \gamma^k_l \mathbf{e}^l) = \alpha^j_i \gamma^k_l (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}^l) =$$
$$= \alpha^j_i \gamma^k_l \delta^l_j = \alpha^j_i (\gamma^k_l \delta^l_j) = \alpha^j_i \gamma^k_j.$$

Теорема 9. *Сверткой аффинного тензора (p, q)- строения по паре индексов является тензор $(p-1, q-1)$ -строения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, прежде всего, что после свертки по паре индексов полученный объект содержит $n^{(p-1)+(q-1)}$ координат, столько же координат, что и аффинный тензор $(p-1, q-1)$-строения. Покажем, что эти координаты преобразуются по тензорному закону. По определению тензора

$$\tilde{A}^{l_1 l_2 \dots l_q}_{k_1 k_2 \dots k_p} = \alpha^{i_1}_{k_1} \alpha^{i_2}_{k_2} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_1}_{j_1} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

Положим $k_1 = l_1 = s$. Тогда

$$\tilde{A}^{s l_2 \dots l_q}_{s k_2 \dots k_p} = \alpha^{i_1}_{s} \alpha^{i_2}_{k_2} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{s}_{j_1} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} =$$

$$= \alpha^{i_2}_{k_2} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} \big(\alpha^{i_1}_{s} \gamma^{s}_{j_1} \big) A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

Используя предыдущую лемму, получаем

$$\tilde{A}^{s l_2 \dots l_q}_{s k_2 \dots k_p} = \alpha^{i_2}_{k_2} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} \delta^{i_1}_{j_1} A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

Индексы i_1 и j_1 являются индексами суммирования, и так как $\delta^{i_1}_{j_1} = 0$ при $i_1 \neq j_1$, то справа в последнем выражении остаются только те слагаемые, для которых эти индексы равны, т.е. $i_1 = j_1 = s$. Тогда

$$\tilde{A}^{s l_2 \dots l_q}_{s k_2 \dots k_p} = \alpha^{i_2}_{k_2} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} A^{s j_2 \dots j_q}_{s i_2 \dots i_p}.$$

Но по определению свертки тензоров

$$\tilde{A}^{s l_1 \dots l_q}_{s k_2 \dots k_p} = \tilde{B}^{l_2 l_3 \dots l_q}_{k_2 k_3 \dots k_p}, \qquad A^{s j_2 \dots j_q}_{s i_2 \dots i_p} = B^{j_2 j_3 \dots j_q}_{i_2 i_3 \dots i_p}$$

и координаты свертки преобразуются по тензорному закону

$$\tilde{B}^{l_2 l_3 \dots l_q}_{k_2 k_3 \dots k_p} = \alpha^{i_2}_{k_2} \alpha^{i_3}_{k_3} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_2}_{j_2} \gamma^{l_3}_{j_3} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} B^{j_2 j_3 \dots j_q}_{i_2 i_3 \dots i_p}.$$

З а м е ч а н и е. Свертка аффинного ортогонального тензора по паре индексов, например, i_1 и i_2 определяется следующим образом

$$L_{s s i_3 \dots i_p} = \sum_{s=1}^{n} L_{s s i_3 \dots i_p}.$$

Аналогично предыдущей теореме можно показать, что в этом случае ранг тензора также понижается на 2 единицы.

П р и м е р ы

1) Если произведение аффинных ортогональных тензоров 1-го ранга $a_i b_j$ подвергнуть свертке, то получим скалярное произведение векторов **a** и **b**

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_s b_s = \sum_{s=1}^{n} a_s b_s.$$

2) Сверткой аффинного ортогонального тензора 2-го ранга a_{ij} является след матрицы (a_{ij})

$$a_{ss} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}.$$

14 Перестановка индексов

Определение. *Пусть дан тензор*

$$A = A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

Будем говорить, что объект

$$B^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_2 i_1 \dots i_p}$$

получается перестановкой двух индексов (одноименных) i_1 и i_2 в тензоре A.

Аналогично определяется перестановка любых двух одноименных индексов (ковариантных или контравариантных).

Теорема 10. *Объект, получающейся перестановкой двух одноименных индексов тензора (p, q)-строения, является тензором того же строения.*

Доказательство. Запишем для тензора

$$A = A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$$

закон преобразования координат

$$\tilde{A}^{l_1 l_2 \dots l_q}_{k_1 k_2 \dots k_p} = \alpha^{i_1}_{k_1} \alpha^{i_2}_{k_2} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_1}_{j_1} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

Поменяем местами два индекса i_1 и i_2. Тогда получим

$$\alpha^{i_2}_{k_2} \alpha^{i_1}_{k_1} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_1}_{j_1} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_2 i_1 \dots i_p} = \tilde{A}^{l_1 l_2 \dots l_q}_{k_2 k_1 \dots k_p},$$

а это означает, что $A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_2 i_1 \dots i_p}$ — тензор (p, q)-строения.

15 Симметрирование

Определение. *Если для тензора A выполняется равенство*

$$A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_2 i_1 i_3 \dots i_p} = A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 i_3 \dots i_p},$$

то говорят, что тензор A – симметричный (симметрический) по индексам i_1 и i_2.

Аналогично определяется симметричность тензора по любой паре одноименных индексов.

Тензор A называется симметричным по нескольким одноименным индексам, если он не изменяется при перестановке любых двух из этих индексов а, следовательно, и при любой их подстановке.

Операция симметрирования заключается в следующем: из одноименных индексов выбирается N индексов, над которыми производится $N!$ всевозможных перестановок, и берется среднее арифметическое полученных тензоров.

Те индексы, по которым производится симметрирование, заключаются в круглые скобки $(\ldots)$. Эти индексы мы будем называть симметрированными индексами.

П р и м е р.

$$A^l_{(ij)k} = \frac{1}{2}\big(A^l_{ijk} + A^l_{jik}\big),$$

$$A^l_{(ijk)} = \frac{1}{6}\big(A^l_{ijk} + A^l_{jki} + A^l_{kij} + A^l_{jik} + A^l_{ikj} + A^l_{kji}\big).$$

Теорема 11. *При симметрировании тензора по любой группе одноименных индексов получается тензор того же строения. При этом полученный тензор будет симметричным по симметрированным индексам.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При перестановке двух индексов а, следовательно, и при любой перестановке выбранных индексов по теореме 10.4 получаем тензор того же строения, что и исходный. При сложении тензоров одинакового строения получается тензор того же строения. Деление суммы тензоров, полученных при всех перестановках симметрированных индексов, на $N!$ можно рассматривать как умножение на тензор нулевого ранга. Поэтому согласно теореме 10.2 строение тензора не изменяется. Таким образом, производя симметрирование тензора (p, q)-строения, получаем тензор (p, q)-строения.

Симметричность тензора следует из того, что если во всех перестановках симметрированных индексов поменять местами одни и те же два индекса, то получим все те же перестановки.

16 Альтернация

Определение. *Если для тензора A выполняется равенство*

$$A^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_2 i_1 i_3 \ldots i_p} = -A^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_p},$$

то говорят, что тензор A – кососимметричный (кососимметрический) по индексам i_1 и i_2.

Тензор называется кососимметричным по нескольким одноименным индексам, если он кососимметричен по любой паре из этих индексов.

Операция альтернации заключается в следующем: из одноименных индексов данного тензора выбираем N индексов и производим $N!$ всевозможных перестановок, результаты четных перестановок берутся со своими знаками, а у результатов нечетных перестановок знак меняется на противоположный, после чего берется среднее арифметическое всех тензоров.

Те индексы, по которым осуществляется альтернация, заключаются в квадратные скобки [...]. Эти индексы будем называть альтернированными индексами.

П р и м е р

$$A^l_{[ij]k} = \frac{1}{2}\big(A^l_{ijk} - A^l_{jik}\big),$$

$$A^l_{[ijk]} = \frac{1}{6}\big(A^l_{ijk} + A^l_{jki} + A^l_{kij} - A^l_{jik} - A^l_{ikj} - A^l_{kji}\big).$$

Теорема 12. *При альтернации тензора по любой группе одноименных индексов получается тензор того же строения. При этом полученный тензор будет кососимметричным по альтернированным индексам.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично доказательству теоремы 10.5 можно установить, что в результате альтернации тензора (p, q)-строения получается тензор того же строения.

Из курса высшей алгебры известно, что при $n \geq 2$ число четных перестановок равно числу нечетных перестановок. Если в перестановке поменять местами два любых индекса, то четная перестановка перейдет в нечетную перестановку и наоборот, нечетная перестановка перейдет в четную. Отсюда и следует кососимметричность тензора, полученного в результате альтернации.

17 Подъем и опускание индексов

Лемма 2. *Свертка произведения контравариантного и ковариантного метрических тензоров равна символу Кронекера, т.е.*

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обе части разложения вектора взаимного базиса по векторам основного базиса

$$\mathbf{e}^i = c^{ij}\mathbf{e}_j$$

умножим скалярно на $\mathbf{e}^k$

$$(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^k) = c^{ij}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}^k) = c^{ij}\delta^k_j = c^{ik}.$$

Откуда следует что $c^{ij} = g^{ij}$ и, следовательно, разложение вектора взаимного базиса по основному базису имеет вид

$$\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j.$$

Умножая скалярно обе части последнего равенства на $\mathbf{e}_k$, получаем

$$\delta^i_k = (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_k) = g^{ij}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = g^{ij}g_{jk}.$$

Введем операции подъема и опускания индексов. С этой целью изменим нумерацию индексов у тензора, так чтобы для поднимаемого (или опускаемого) индекса было место, куда его следует поставить. Это место мы будем обозначать точкой, например, $A_{ij\cdot l}^{\cdot\cdot k\cdot}$. Такая запись означает, что 1-й и 2-й индекс ковариантный, 3-й контравариантный, 4-й контравариантный.

Поднимем 1-й индекс: для этого тензор умножим на g^{is} и затем произведем свертку, в которой участвует поднимаемый индекс

$$g^{is}A_{sj\cdot l}^{\cdot\cdot k\cdot} = A_{\cdot j\cdot l}^{i\cdot k\cdot}.$$

Опустим верхний индекс: для этого тензор умножим на g_{ks} и произведение свернем

$$g_{ks}A_{ij\cdot l}^{\cdot\cdot s\cdot} = A_{ijkl}.$$

Аналогично поднимают и опускают любые индексы.

Так как для метрических тензоров $g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i$, то операции подъема и опускания индексов взаимно-обратные. Например, для контравариантных координат вектора $\mathbf{A}$ имеем

$$A^i = g^{ij}A_j = g^{ij}g_{jk}A^k = \delta_k^j A^k = A^i.$$

Тензоры, полученные друг из друга путем подъема или опускания индексов, называют ассоциированными.

18 Обратный тензорный признак

Если нам дано, например, уравнение вида

$$A_{st}^r B^{st} = C^r,$$

связывающее тензоры A_{st} и B^{st} — тензоры указанных типов, то мы можем заключить, что C^r есть тензор, так как он получен умножением и последующим свертыванием.

Важно уметь распознавать тензоры обратным способом: если мы знаем, что C^r и B^{st} — тензоры, можем ли мы заключить, что A_{st}^r — тензор?

Теорема 12. *Пусть нам дано уравнение*

$$A(r,s,t)B^{st} = C^r,$$

где C^r является некоторым определенным тензором, а B^{st} — произвольный тензор. Тогда $A(r,s,t)$ есть тензор, который может быть представлен как A_{st}^r.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В старом базисе $\mathbf{e}_i$ имеем

$$A(r,s,t)B^{st} = C^r.$$

В новом базисе $\tilde{\mathbf{e}}_i$:

$$\tilde{A}(r,s,t)\tilde{B}^{st} = \tilde{C}^r.$$

Но

$$\tilde{C}^r = \gamma^r_m C^m = \gamma^r_m A(m,n,p) B^{np}.$$

А так как при переходе от базиса $\tilde{\mathbf{e}}_i$ к базису $\mathbf{e}_i$ роль коэффициентов преобразований α^j_i и γ^j_i меняется (γ^j_i становятся как бы коэффициентами прямого преобразования, а α^j_i – коэффициентами обратного преобразования), то

$$B^{np} = \alpha^n_s \alpha^p_t \tilde{B}^{st}.$$

Поэтому

$$\tilde{A}(r,s,t)\tilde{B}^{st} = \gamma^r_m \alpha^n_s \alpha^p_t A(m,n,p) \tilde{B}^{st}$$

или

$$\left[\tilde{A}(r,s,t) - \alpha^n_s \alpha^p_t \gamma^r_m A(m,n,p)\right] \tilde{B}^{st} = 0.$$

Так как B^{st}, а следовательно и $\tilde{B}^{st}$ – произвольный тензор, то все его коэффициенты при $\tilde{B}^{st}$ должны равняться нулю, т.е.

$$\tilde{A}(r,s,t) = \alpha^n_s \alpha^p_t \gamma^r_m A(m,n,p),$$

что и показывает, что $A(r,s,t)$ является аффинным тензором третьего ранга и что его правильная запись есть A^r_{st}.

ГЛАВА IV

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ ТЕНЗОРОВ

19 Тензор Инерции

Рассмотрим абсолютно твердое тело с объемной плотностью $\rho(\mathbf{r})$. Пусть $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ – поле скорости точек этого тела. Рассчитаем его кинетическую энергию. По определению она равна

$$T = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\upsilon} \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}^2(\mathbf{r})d\upsilon\,,$$

где интегрирование ведется по области υ, занятой телом.

Известно, что скорость произвольной точки абсолютно твердого тела удобно представить в виде:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]\ .$$

Здесь $\mathbf{V}$ и $\boldsymbol{\omega}$ – одинаковые для всех точек тела векторы, имеющие прозрачный физический смысл: $\mathbf{V}$ – скорость поступательного движения тела, равная скорости его центра инерции, а $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения тела. Кроме того здесь $\mathbf{r}$ – радиус-вектор в движущейся с телом системе отсчета, центр которой совпадает с центром инерции тела. Напомним, что в такой системе координат

$$\iiint\limits_{\upsilon} \mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})\,d\upsilon \equiv 0\,. \tag{5}$$

Подставив правую часть равенства для скорости тела в интеграл, выражающий его кинетическую энергию, получим:

$$T = \frac{1}{2}V^2\iiint\limits_{\upsilon}\rho(\mathbf{r})\,d\upsilon + \iiint\limits_{\upsilon}\rho(\mathbf{r})\left(\mathbf{V}\cdot[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]\right)\,d\upsilon +$$

$$+\frac{1}{2}\iiint\limits_{\upsilon}\rho(\mathbf{r})\left([\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]\cdot[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]\right)\,d\upsilon\,. \tag{6}$$

Обсудим каждое из входящих сюда слагаемых по отдельности. Первое из них дает *кинетическую энергию поступательного движения тела* и имеет такой вид:

$$T_{\text{п}} = \frac{1}{2} m\, V^2 \qquad \left(m = \iiint\limits_{v} \rho(\mathbf{r}) dv \quad \text{масса тела} \right)$$

– как если бы вся масса тела была сосредоточена в его центре инерции. Второе слагаемое в (6) равно нулю, а третье слагаемое

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \iiint\limits_{v} \rho(\mathbf{r}) \left([\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \right) dv$$

– выражает *кинетическую энергию вращательного движения тела*. Обсудим ее подробнее, для чего преобразуем входящее сюда скалярное произведение двух векторных произведений к более удобному виду. Пользуясь свойствами скалярных и векторных произведений, нетрудно показать, что

$$\left([\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \right) = r^2\, \omega^2 - \left(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} \right)^2 \; .$$

Пусть в некоторой декартовой системе координат вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ обладает координатами $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, а радиус-вектор $\mathbf{r}$ имеет координаты $\{x_1, x_2, x_3\}$. В данной системе координат полученное выражение запишется в виде:

$$r^2\, \omega^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) = \omega_l \omega_m \left(\delta_{ml} r^2 - x_l x_m \right) \; .$$

Подставив правую часть этого равенства в формулу кинетической энергии вращательного движения твердого тела, будем иметь:

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \omega_l \omega_m I_{lm} \, . \tag{7}$$

Здесь

$$I_{lm} = \iiint\limits_{v} \rho(\mathbf{r}) \left[\delta_{lm}\, r^2 - x_l x_m \right] \, dv$$

– координаты так называемого *тензора инерции абсолютно твердого тела*. В том что это действительно тензор, нетрудно убедиться с помощью следующих рассуждений: Величина кинетической энергии вращения твердого тела не зависит от ориентации системы координат. Следовательно, правая часть выражения (7) представляет собой инвариантную квадратичную форму, коэффициенты которой I_{lm} должны преобразовываться при повороте системы координат по закону преобразования координат аффинного ортогонального тензора 2-го ранга.

Геометрически, равенство (7) задает некоторый эллипсоид в декартовой системе координат $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Его называют *эллипсоидом инерции*. Направления в теле, совпадающие с полуосями эллипсоида инерции, называют *главными осями инерции* тела. Если направить оси системы координат $\{x_1, x_2, x_3\}$ вдоль главных осей инерции, то тензор инерции окажется приведенным к диагональному виду, а кинетическая энергия вращения твердого тела окажется равной:

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2}\left(I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2\right) .$$

Если все главные моменты инерции (собственные числа тензора инерции) равны, то все направления оказываются равноправными и тензор инерции в любой системе координат приобретает вид: $I_{ij} = I\delta_{ij}$. Очевидно, к телам с таким вырожденным тензором энергии относится шар. Нетрудно показать также, что главные моменты инерции одинаковы у однородного куба. Поэтому куб, наряду с шаром, называют *шаровым волчком.*

20 Тензор относительных движений сплошной среды

Рассмотрим теперь движущуюся сплошную среду. Пусть движение среды в некоторый момент времени характеризуется полем скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Сравним относительное движение частиц среды в двух бесконечно близких точках $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Оно описывается векторным дифференциалом $d\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})$, координаты которого равны:

$$\begin{aligned}
dv_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\,dx_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\,dx_3\,, \\
dv_2 &= \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\,dx_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\,dx_3\,, \\
dv_3 &= \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\,dx_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\,dx_3\,,
\end{aligned}$$

или в векторной форме:

$$d\mathbf{v} = W\,d\mathbf{r}\,,$$

где W оператор, матрица которого имеет вид:

$$W = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} .$$

Поскольку $d\mathbf{v}$ и $d\mathbf{r}$ – истинные векторы, то по обратному тензорному признаку применительно к матрицам второго ранга следует, что W – тензор.

Разложим тензор W на симметричное и антисимметричное слагаемые: $W = S + A$. Здесь

$$S = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix},$$

– симметрированный тензор W, а

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

– альтернированный. В него входят всего три независимых координаты

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right), \quad \omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right),$$
$$\omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right).$$

Разбиение тензора на симметричную и антисимметричную части обычно имеет глубокий физический смысл. Продемонстрируем это на обсуждаемом примере тензора относительных движений. Для этого заметим, что выписанные координаты антисимметричного тензора A равны координатам вектора ротора

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\mathbf{v}\,.$$

Соответственно, дифференциал поля скорости может быть представлен в виде:

$$d\mathbf{v} = S\,d\mathbf{r} + [\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}]\ ,$$

где последнее слагаемое, отвечающее антисимметричной части, уже знакомо нам по предыдущему примеру движения абсолютно твердого тела. Первое же слагаемое, содержащее симметричный тензор, ответственно за деформации – сжатия и растяжения сплошной среды.

21 Тензор деформаций

В теории упругих тел ключевую роль играет тензор деформаций. Он вводится следующим образом. Рассмотрим некоторое деформируемое тело. Пусть в исходном недеформированном состоянии каждой частице тела соответствовал свой радиус-вектор $\mathbf{r}$ с координатами $\{x_1, x_2, x_3\}$. Изменим каким либо образом расположение и конфигурацию тела. Тогда каждой точке тела будет сопоставлен новый радиус-вектор $\mathbf{r}'$. Разность между радиус-векторами нового и старого положений выделенной частицы тела образует так называемый *вектор смещения*

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}' - \mathbf{r}\,.$$

Естественно трактовать его как векторное поле, зависящее от координат первоначального положения частиц тела. В развернутой форме векторное поле смещений имеет вид:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_1\, u_1(x_1, x_2, x_3) + \mathbf{e}_2\, u_2(x_1, x_2, x_3) + \mathbf{e}_3\, u_3(x_1, x_2, x_3)\,.$$

Будем в дальнейшем считать функции u_1, u_2, u_3 – непрерывно дифференцируемыми во всей интересующей нас области пространства.

При деформировании тела меняются взаимные расположения его соседних частиц и в частности расстояния между ними. Выясним, как изменится расстояние между двумя частицами, изначально расположенными в бесконечно близких точках $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$. Очевидно, после деформирования дифференциал расстояния между ними будет равен:

$$d\mathbf{r}' = d\mathbf{r} + d\mathbf{u}\,.$$

Применяя правила дифференциального исчисления нетрудно показать, что главная часть квадрата расстояния между указанными частицами после деформации равна:

$$dr'^2 = dr^2 + 2(d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{u}) + du^2 = dr^2 + 2u_{ij}dx_i\, dx_j = dr^2 + 2d\mathbf{r}\, U\, d\mathbf{r}\,, \tag{8}$$

где координаты u_{ij} тензора U определяются равенством:

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\,. \tag{9}$$

То что это действительно тензор, вытекает из обратного тензорного признака. Этот тензор и называют тензором деформаций.

Из (8) видно, что если все координаты тензора U равны нулю, то расстояние между рассматриваемыми частицами тела не меняется, а значит тензор деформаций ответственен за явления, связанные со сжатием и растяжением тел. Как любой симметричный тензор, тензор деформаций может быть приведен к главным осям. Иными словами, в каждой точке тела можно выбрать такую систему координат, в которой отличны от нуля только диагональные координаты тензора деформаций. Обозначим их $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$. После приведения к главным осям тензора деформаций, квадрат расстояния между рассматриваемыми частицами деформируемого тела можно представить в виде:

$$dr'^2 = [1 + u^{(1)}]dx_1^2 + [1 + u^{(2)}]dx_2^2 + [1 + u^{(3)}]dx_3^2\,.$$

Последнее на физическом языке означает, что деформацию каждого бесконечно малого элемента объема тела можно представить как совокупность трех независимых деформаций – сжатий или растяжений – по трем взаимно перпендикулярным направлениям – главным осям тензора деформаций. Отсюда же следует, что относительное сжатие или растяжение вдоль произвольной i-й главной оси равно

$$\frac{dr'}{dr} = \sqrt{1+u^{(i)}}\,.$$

В большинстве прикладных проблем теории упругости оно близко к единице, а $|u^{(i)}| \ll 1$. Поэтому на практике чаще всего отбрасывают в (9) слагаемое 2-го порядка малости и используют следующее приближенное выражение для координат тензора деформаций:

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\,.$$

Заметим в заключение, что тензор деформаций входит в основное уравнение теории упругости и кристаллофизики – обобщенный закон Гука:

$$\sigma_{pq} = \lambda_{pqrs} u_{rs}\,,$$

где тензор 2-го ранга σ_{pq} называют *тензором напряжений*, а тензор 4-го ранга λ_{pqrs} – *тензором модулей упругости*.

ГЛАВА V

ПСЕВДОТЕНЗОРЫ

22 Свойства коэффициентов преобразования ортонормированных базисов

Свойство 1. *Пусть* α_{ij} *— коэффициенты прямого преобразования ортонормированных базисов в* $\mathbb{R}^n$ *(перехода от старого базиса* $\mathbf{e}_i$ *к новому базису* $\tilde{\mathbf{e}}_i$*). Тогда справедливы соотношения*

$$\alpha_{ji}\alpha_{jk} = \delta_{ik} \qquad \alpha_{ij}\alpha_{kj} = \tilde{\delta}_{ik}$$

Это свойство называют ортогональностью преобразования.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbf{e}_i$ – старый ортонормированный базис, а $\tilde{\mathbf{e}}_i$ – новый ортонормированный базис. Тогда

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \delta_{ik} \qquad (\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_k) = \tilde{\delta}_{ik}.$$

Умножим разложение вектора нового базиса по старому базису $\tilde{\mathbf{e}}_i = \alpha_{ij}\mathbf{e}_j$ скалярно на $\tilde{\mathbf{e}}_k$. Получаем

$$\tilde{\delta}_{ik} = (\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_k) = (\alpha_{ij}\mathbf{e}_j, \tilde{\mathbf{e}}_k) = (\alpha_{ij}\mathbf{e}_j, \alpha_{km}\mathbf{e}_m) = \alpha_{ij}\alpha_{km}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_m) =$$

$$= \alpha_{ij}\alpha_{km}\delta_{jm} = \alpha_{ij}(\alpha_{km}\delta_{jm}) = \alpha_{ij}\alpha_{kj}.$$

Аналогично

$$\delta_{ik} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = (\alpha_{ji}\tilde{\mathbf{e}}_j, \alpha_{mk}\tilde{\mathbf{e}}_m) = \alpha_{ji}\alpha_{mk}(\tilde{\mathbf{e}}_j, \tilde{\mathbf{e}}_m) =$$
$$= \alpha_{ji}\alpha_{mk}\tilde{\delta}_{jm} = \alpha_{ji}(\alpha_{mk}\tilde{\delta}_{jm}) = \alpha_{ji}\alpha_{jk}.$$

Свойство 2. *Для коэффициентов* α_{ij} *прямого преобразования ортонормированных базисов в пространстве* $\mathbb{R}^3$ *справедливы равенства*

$$\alpha_{im}\alpha_{jn} - \alpha_{jm}\alpha_{in} = (\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j, \mathbf{e}_r),$$

где индексы m, n, r составляют циклические перестановки чисел $1, 2, 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя формулы преобразования ортонормированных базисов

$$[\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{i3} \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \alpha_{j3} \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha_{i1}\alpha_{j2} - \alpha_{j1}\alpha_{i2})\mathbf{e}_3 + (\alpha_{i3}\alpha_{j1} - \alpha_{j3}\alpha_{i1})\mathbf{e}_2 + (\alpha_{i2}\alpha_{j3} - \alpha_{j2}\alpha_{i3})\mathbf{e}_1.$$

Умножая скалярно на $\mathbf{e}_3$ обе части последнего равенства и принимая во внимание, что $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$, получаем

$$\alpha_{i1}\alpha_{j2} - \alpha_{j1}\alpha_{i2} = (\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j, \mathbf{e}_3).$$

Аналогично

$$\alpha_{i3}\alpha_{j1} - \alpha_{j3}\alpha_{i1} = (\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j, \mathbf{e}_2),$$

$$\alpha_{i2}\alpha_{j3} - \alpha_{j2}\alpha_{i3} = (\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j, \mathbf{e}_1),$$

что и доказывает наше утверждение.

Свойство 3. *Определитель матрицы ортогонального преобразования, $\Delta = det(\alpha_{ij})$, может принимать только два значения $+1$ или -1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, используя сначала свойство о том, что определитель при транспонировании не изменяется, а затем правило умножения определителей, получаем

$$\Delta^2 = \{\det(\alpha_{ij})\}^2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{1j}\alpha_{1j} & \alpha_{1j}\alpha_{2j} & \dots & \alpha_{1j}\alpha_{nj} \\ \alpha_{2j}\alpha_{1j} & \alpha_{2j}\alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2j}\alpha_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{nj}\alpha_{1j} & \alpha_{nj}\alpha_{2j} & \dots & \alpha_{nj}\alpha_{nj} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \tilde{\delta}_{11} & \tilde{\delta}_{12} & \dots & \tilde{\delta}_{1n} \\ \tilde{\delta}_{21} & \tilde{\delta}_{22} & \dots & \tilde{\delta}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\delta}_{n1} & \tilde{\delta}_{n2} & \dots & \tilde{\delta}_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Откуда следует, что определитель матрицы коэффициентов прямого преобразования ортонормированных базисов в пространстве $\mathbb{R}^n$ может принимать только два значения, $\Delta = \pm 1$.

23 Классы преобразований систем координат в трехмерном пространстве

Все изложенное в этом пункте для пространства $\mathbb{R}^3$ без труда переносится и на пространство любой размерности.

Пусть в некоторой фиксированной точке пространства $\mathbf{R}^3$ каждый ортонормированный базис $\mathbf{e}_i$ определяет систему координат (x_1, x_2, x_3).

Преобразование ортонормированных базисов приводит либо к повороту координатных осей либо к инверсии (отражению нечетного числа) координатных осей.

Первое преобразование получается непрерывным поворотом (движением) системы координат (x_1, x_2, x_3) в любое другое положение $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$. При этом обе системы координат могут быть только правые или только левые. Для этого класса преобразования $\Delta = +1$.

Действительно, при тождественном преобразовании $\tilde{x}_1 = x_1,\ \tilde{x}_2 = x_2,\ \tilde{x}_3 = x_3$ определитель преобразования равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

А при непрерывном преобразовании системы координат коэффициенты преобразования α_{ij} представляют из себя непрерывные функции. В силу этого определитель $\Delta = det(\alpha_{ij})$ не может менять своего значения скачком с $+1$ на -1.

Второе преобразование (инверсия) системы координат заключается в том, что система (x_1, x_2, x_3) не может быть приведена к системе $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ непрерывным преобразованием. Это возможно только в том случае, когда правая система координат преобразуется в левую, или, наоборот, левая система координат преобразуется в правую. Для этого класса преобразований имеем $\Delta = -1$.

24 Полярные и аксиальные векторы

Очевидно, что при вращении системы координат векторы не меняют своего направления. Иначе ведут себя векторы при инверсии системы координат. В этом случае по своему поведению они делятся на два вида: полярные и аксиальные векторы.

Определение 1. *Векторы, которые не изменяют своего направления при преобразовании правой системы координат в левую, называются полярными векторами.*

Полярным вектором, например, является радиус-вектор $\mathbf{r}$ любой точки пространства $\mathbb{R}^3$.

Определение 2. *Векторы, изменяющие свое направление на противоположное при преобразовании правой системы координат в левую, называются аксиальными векторами или псевдовекторами.*

Примером псевдовектора является вектор $\mathbf{C}$, равный векторному произведению полярных векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{C} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}].$$

Аксиальные векторы (псевдовекторы) часто используются в физике потому, что они появляются при описании процессов, связанных с вращением. Например, угловая скорость $\omega = [\mathbf{r}, \mathbf{V}]$, момент количества движения $\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \mathbf{P}]$, момент вращения $\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}]$, магнитное поле $\mathbf{B}$, для которого $\dfrac{d\mathbf{B}}{dt} = -[\nabla, \mathbf{E}]$.

Легко видеть, что полярный вектор – это аффинный ортогональный вектор первого ранга, что нельзя сказать об аксиальном векторе. Это некий новый объект с точки зрения тензорного исчисления. В связи с этим мы приходим к понятию псевдотензора.

25 Псевдотензоры

Определение 1. *Пусть дан объект A строения (p,q), заданный в пространстве $\mathbb{R}^n$ с помощью n^{p+q} координат:*

$A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ *– его координаты в старом косоугольном базисе $\mathbf{e}_i$,*

$\tilde{A}^{l_1 l_2 \dots l_q}_{k_1 k_2 \dots k_p}$ *– его координаты в новом косоугольном базисе $\tilde{\mathbf{e}}_i$.*

Если при переходе от базиса $\mathbf{e}_i$ к базису $\tilde{\mathbf{e}}_i$ координаты объекта A преобразуются по закону

$$\tilde{A}^{l_1 l_2 \dots l_q}_{k_1 k_2 \dots k_p} = \Delta^M \alpha^{i_1}_{k_1} \alpha^{i_2}_{k_2} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_1}_{j_1} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} A^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$$

где α^i_k – коэффициенты прямого преобразования (перехода от $\mathbf{e}_i$ к $\tilde{\mathbf{e}}_i$), γ^l_j – коэффициенты обратного преобразования, Δ – определитель матрицы прямого преобразования, $\Delta = det(\alpha^i_k)$, M – постоянное число, то объект A называется псевдотензором веса M, ранга $p+q$, p-раз ковариантным и q-раз контравариантным.

Определение 2. *Пусть объект L в $\mathbb{R}^n$ определяется в каждом ортонормированном базисе $\mathbf{e}_i$ совокупностью n^p чисел*

$$L_{i_1 i_2 \cdots i_p},$$

где $i_s = 1, 2, \dots, n;\ s = 1, 2, \dots, p$.

Если при переходе от ортонормированного базиса $\mathbf{e}_i$ к любому новому ортонормированному базису $\tilde{\mathbf{e}}_i$ эти числа преобразуются по закону

$$\tilde{L}_{i_1 i_2 \cdots i_p} = \Delta \sum_{j_1, j_2, \dots, j_p = 1}^{n} \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \cdots \alpha_{i_p j_p} L_{j_1 j_2 \cdots j_p},$$

где (α_{ij}) – матрица прямого преобразования, $\Delta = det(\alpha_{ij})$, то L называют аффинным ортогональным псевдотензором p-го ранга.

Теорема 13. *Векторное произведение двух полярных векторов* **A** *и* **B** *представляет собой аффинный ортогональный псевдотензор 1-го ранга.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbf{C} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$. В старом ортонормированном базисе $\mathbf{e}_i$ координаты вектора $\mathbf{C}$ равны

$$C_r = A_m B_n - A_n B_m,$$

где индексы r, m, n образуют циклическую перестановку чисел $1, 2, 3$.

В новом ортонормированном базисе $\tilde{\mathbf{e}}_i$

$$\tilde{A}_i = \alpha_{im} A_m, \qquad \tilde{B}_j = \alpha_{jn} B_n,$$

и для циклической перестановки индексов k, i, j имеем

$$\tilde{C}_k = \tilde{A}_i \tilde{B}_j - \tilde{A}_j \tilde{B}_i = \alpha_{im}\alpha_{jn} A_m B_n - \alpha_{jm}\alpha_{in} A_m B_n =$$

$$= (\alpha_{im}\alpha_{jn} - \alpha_{jm}\alpha_{in}) A_m B_n.$$

В последней сумме слагаемые, в которых $m = n$, равны нулю. Преобразуем эту сумму

$$(\alpha_{i1}\alpha_{j2} - \alpha_{j1}\alpha_{i2})A_1B_2 + (\alpha_{i2}\alpha_{j1} - \alpha_{j2}\alpha_{i1})A_2B_1 +$$
$$+ (\alpha_{i2}\alpha_{j3} - \alpha_{j2}\alpha_{i3})A_2B_3 + (\alpha_{i3}\alpha_{j2} - \alpha_{j3}\alpha_{i2})A_3B_2 +$$
$$+ (\alpha_{i3}\alpha_{j1} - \alpha_{j3}\alpha_{i1})A_3B_1 + (\alpha_{i1}\alpha_{j3} - \alpha_{j1}\alpha_{i3})A_1B_3 =$$
$$= (\alpha_{im}\alpha_{jn} - \alpha_{jm}\alpha_{in})(A_m B_n - A_n B_m).$$

В правой части последнего выражения индексы m и n составляют циклические перестановки $(1, 2)$, $(2, 3)$ и $(3, 1)$. Отсюда следует, что

$$\tilde{C}_k = (\alpha_{im}\alpha_{jn} - \alpha_{jm}\alpha_{in}) C_r,$$

где индексы m, n и r образуют циклические перестановки чисел $1, 2, 3$. Но для таких же циклических перестановок по свойству 12.2

$$\alpha_{im}\alpha_{jn} - \alpha_{jm}\alpha_{in} = (\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j, \mathbf{e}_r).$$

Если система координат, образованная базисом $\tilde{\mathbf{e}}_i$, правая, то $[\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j] = \tilde{\mathbf{e}}_k$, если левая, то $[\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j] = -\tilde{\mathbf{e}}_k$. Эти соотношения справедливы, если индексы i, j, k представляют циклические перестановки чисел $(1, 2, 3)$. Таким образом, можем записать для указанных индексов i, j, k

$$[\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j] = \Delta \cdot \tilde{\mathbf{e}}_k.$$

Окончательно получаем

$$\tilde{C}_k = ([\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j], \mathbf{e}_r) C_r = \Delta \cdot (\tilde{\mathbf{e}}_k, \mathbf{e}_r) C_r =$$

$$= \Delta \cdot (\alpha_{kl}\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_r)C_r = \Delta \cdot \alpha_{kl}(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_r)C_r = \Delta \cdot \alpha_{kl}C_l.$$

Следовательно, векторное произведение двух полярных векторов представляет собой аффинный ортогональный псевдотензор 1-го ранга (псевдовектор).

Определение 3 *Обозначим через* $E_{i_1i_2\ldots i_p}$ *– p-раз ковариантный кососимметрический по любой паре индексов объект, для которого координаты в любом косоугольном базисе пространства* $\mathbb{R}^n$ *определены следующем образом:*

$$E_{i_1i_2\ldots i_p} = \begin{cases} 1, & \textit{если } (i_1i_2\ldots i_p) \textit{ четная перестановка } (1,2,\ldots p) \\ -1, & \textit{если } (i_1i_2\ldots i_p) \textit{ нечетная перестановка} \\ 0, & \textit{если в } (i_1i_2\ldots i_p) \textit{ есть совпадающие индексы.} \end{cases}$$

Аналогично определим q раз контравариантный кососимметрический объект

$$E^{j_1j_2\ldots j_q} = \begin{cases} 1, & \textit{если } (j_1j_2\ldots j_q) \textit{ четная перестановка } (1,2,\ldots q) \\ -1, & \textit{если } (j_1j_2\ldots j_q) \textit{ нечетная перестановка} \\ 0, & \textit{если в } (j_1j_2\ldots j_q) \textit{ есть совпадающие индексы.} \end{cases}$$

Теорема 14. *Объект* $E_{i_1i_2\ldots i_p}$ *является p раз ковариантным псевдотензором веса* -1*, а* $E^{j_1j_2\ldots j_q}$ *является q раз контравариантным псевдотензором веса* $+1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим

$$\alpha^{i_1}_{k_1}\alpha^{i_2}_{k_2}\cdots\alpha^{i_p}_{k_p}E_{i_1i_2\ldots i_p}.$$

С этой целью заметим, что

$$\alpha^{i_1}_1\alpha^{i_2}_2\cdots\alpha^{i_p}_pE_{i_1i_2\ldots i_p} = \sum \pm\alpha^{i_1}_1\alpha^{i_2}_2\cdots\alpha^{i_p}_p,$$

где сумма берется по всевозможным наборам индексов $(i_1i_2\ldots i_p)$, представляющих перестановки чисел $(1,2,\ldots,p)$. Знак $+$ соответствует четной перестановке, а знак $-$ соответствует нечетной перестановке. Вспоминая определение определителя, приходим к выводу, что последняя сумма равна определителю Δ матрицы (α^j_i) прямого преобразования

$$\alpha^{i_1}_1\alpha^{i_2}_2\cdots\alpha^{i_p}_pE_{i_1i_2\ldots i_p} = \Delta.$$

Откуда следует согласно свойств определителя

$$\alpha^{i_1}_{k_1}\alpha^{i_2}_{k_2}\cdots\alpha^{i_p}_{k_p}E_{i_1i_2\ldots i_p} =$$

$$= \begin{cases} \Delta, & \text{если } (k_1k_2\ldots k_p) \text{ четная перестановка чисел} (1,2,\ldots p) \\ -\Delta, & \text{если } (k_1k_2\ldots k_p) \text{ нечетная перестановка} \\ 0, & \text{если в } (k_1k_2\ldots k_p) \text{ есть совпадающие индексы.} \end{cases}$$

При совпадении индексов получается определитель с двумя одинаковыми строчками.

Окончательно получаем

$$\alpha_{k_1}^{i_1}\alpha_{k_2}^{i_2}\cdots\alpha_{k_p}^{i_p}E_{i_1i_2\ldots i_p}=\Delta\tilde{E}_{k_1k_2\ldots k_p}$$

или

$$\tilde{E}_{k_1k_2\ldots k_p}=\Delta^{-1}\alpha_{k_1}^{i_1}\alpha_{k_2}^{i_2}\cdots\alpha_{k_p}^{i_p}E_{i_1i_2\ldots i_p}.$$

Это и доказывает, что $E_{i_1i_2\ldots i_p}$ — p-раз ковариантный псевдотензор веса -1.

Аналогично устанавливается, что

$$\tilde{E}^{l_1l_2\ldots l_q}=\tilde{\Delta}^{-1}\gamma_{j_1}^{l_1}\gamma_{j_2}^{l_2}\cdots\gamma_{j_q}^{l_q}E^{j_1j_2\ldots j_q},$$

где $\tilde{\Delta}=det(\gamma_j^l)$.

Поскольку матрица (γ_j^l) является обратной к матрице (α_i^j), то

$$\tilde{\Delta}=det(\gamma_j^l)=\frac{1}{det(\alpha_i^j)}=\frac{1}{\Delta}$$

и

$$\tilde{E}^{l_1l_2\ldots l_q}=\Delta\gamma_{j_1}^{l_1}\gamma_{j_2}^{l_2}\cdots\gamma_{j_q}^{l_q}E^{j_1j_2\ldots j_q},$$

т.е. $E^{j_1j_2\ldots j_q}$ — q-раз контравариантный псевдотензор веса $+1$.

26 Псевдоскаляр

Определение. *Псевдотензор нулевого ранга называется псевдоскаляром. Псевдоскаляр C имеет следующий закон преобразования:*
в косоугольном базисе

$$\tilde{C}=\Delta^M\cdot C\qquad\Delta=det(\alpha_i^j),$$

в ортонормированном базисе

$$\tilde{C}=\Delta\cdot C\qquad\Delta=det(\alpha_{ij})=\pm1.$$

Теорема 15. *Пусть g_{ij} – ковариантный метрический тензор в пространстве $\mathbb{R}^3$ и $G=det(g_{ij})$ – определитель матрицы (g_{ij}). Тогда $\sqrt{G}$ является псевдоскаляром веса* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть векторы косоугольного базиса $\mathbf{e}_i$ в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ имеют разложения:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1&=e_{11}\mathbf{i}+e_{12}\mathbf{j}+e_{13}\mathbf{k}\\ \mathbf{e}_2&=e_{21}\mathbf{i}+e_{22}\mathbf{j}+e_{23}\mathbf{k}\\ \mathbf{e}_3&=e_{31}\mathbf{i}+e_{32}\mathbf{j}+e_{33}\mathbf{k}\end{aligned}$$

Для смешанного произведения этих векторов имеем

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}.$$

Возводя обе части последнего равенства в квадрат получим

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = G.$$

Откуда $\sqrt{G} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ и

$$\sqrt{\tilde{G}} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3) = (\alpha_1^i \mathbf{e}_i, \alpha_2^j \mathbf{e}_j, \alpha_3^k \mathbf{e}_k) =$$

$$= \alpha_1^i \alpha_2^j \alpha_3^k (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k).$$

Если в системе индексов (i, j, k) есть совпадающие, то

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = 0.$$

Если (i, j, k) – четная перестановка чисел $(1, 2, 3)$, то

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \sqrt{G}.$$

Если (i, j, k) – нечетная перестановка, то

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = -\sqrt{G}.$$

Поэтому

$$\sqrt{\tilde{G}} = \sqrt{G} \sum \pm \alpha_1^i \alpha_2^j \alpha_3^k,$$

где сумма берется по всем перестановкам индексов (i, j, k) и знак $+$ стоит перед слагаемыми, для которых эти перестановки четные, а знак - стоит перед слагаемыми, для которых эти перестановки нечетные. Но такая сумма равна определителю $\Delta = det(\alpha_i^j)$, т.е.

$$\sqrt{\tilde{G}} = \Delta \sqrt{G}$$

и теорема доказана.

Теорема 16. *Пусть C – псевдоскаляр веса 1, и A – псевдотензор (p, q)-строения, веса M. Тогда объект*

$$B = \frac{1}{C^M} A$$

является истинным тензором.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Координаты объекта B при переходе от базиса $\mathbf{e}_i$ к базису $\tilde{\mathbf{e}}_i$ изменяются по формулам

$$\tilde{B}^{l_1 l_2 \ldots l_q}_{k_1 k_2 \ldots k_p} = \frac{1}{\tilde{C}^M} \tilde{A}^{l_1 l_2 \ldots l_q}_{k_1 k_2 \ldots k_p} =$$

$$= \frac{1}{(\Delta \cdot C)^M} \Delta^M \alpha^{i_1}_{k_1} \alpha^{i_2}_{k_2} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_1}_{j_1} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} A^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} =$$

$$= \alpha^{i_1}_{k_1} \alpha^{i_2}_{k_2} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_1}_{j_1} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} \left(\frac{1}{C^M} A^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} \right) =$$

$$= \alpha^{i_1}_{k_1} \alpha^{i_2}_{k_2} \cdots \alpha^{i_p}_{k_p} \gamma^{l_1}_{j_1} \gamma^{l_2}_{j_2} \cdots \gamma^{l_q}_{j_q} B^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p},$$

что и доказывает теорему.

ГЛАВА VI

ТЕНЗОРНОЕ ПОЛЕ

27 Тензоры в криволинейных координатах

Определение 1.*Пусть* $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_n$ *- ортонормированный базис в* $\mathbb{R}^n$ *и вектор*

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + \cdots + x_n\mathbf{i}_n$$

определяет декартовы прямоугольные координаты точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *в пространстве* $\mathbb{R}^n$*.*

Упорядоченный набор действительных чисел $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ *называют криволинейными координатами в* $\mathbb{R}^n$*, если каждому набору* $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ *ставится в соответствие точка* $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *с помощью дважды непрерывно дифференцируемых функций*

$$x_i = x_i(x^1, x^2, \ldots, x^n),$$

якобиан которых отличен от нуля:

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)} \neq 0.$$

Очевидно, что задание криволинейных координат равносильно заданию векторной функции

$$\mathbf{r} = x_1(x^1, x^2, \ldots, x^n)\mathbf{i}_1 + x_2(x^1, x^2, \ldots, x^n)\mathbf{i}_2 + \cdots + x_n(x^1, x^2, \ldots, x^n)\mathbf{i}_n$$

Теорема 17. *Пусть в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *заданы криволинейные координаты* $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ *с помощью векторной функции* $\mathbf{r}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$*. Тогда*

1) векторы

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}$$

образуют локальный базис,

2) векторы

$$\mathbf{e}^k = \nabla x^k$$

образуют взаимный локальный базис (к $\mathbf{e}_i$*)*

В этой теореме ∇ - n-мерный векторный дифференциальный оператор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{i}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{i}_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{i}_n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Из определения криволинейных координат следует, что

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial x^1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial x^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial x^n} & \dfrac{\partial x_2}{\partial x^n} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial x^n} \end{vmatrix} \neq 0$$

Но тогда векторы

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial x^i}, \frac{\partial x_2}{\partial x^i}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial x^i} \right)$$

линейно независимые и, следовательно, образуют базис.

2) В силу определения взаимного базиса нужно доказать, что

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}, \nabla x^k \right) = \delta_i^k.$$

С одной стороны

$$(\nabla x^k, d\mathbf{r}) = \left(\nabla x^k, \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} dx^j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\nabla x^k, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} \right) dx^j.$$

С другой стороны, если вычислить это же скалярное произведение в прямоугольных координатах $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то имеем

$$(\nabla x^k, d\mathbf{r}) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial x_j}\mathbf{i}_j, \sum_{j=1}^n \mathbf{i}_j dx_j \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial x_j} dx_j = dx^k = \sum_{j=1}^n \delta_j^k dx^j.$$

Но тогда

$$\sum_{j=1}^n \left(\nabla x^k, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} \right) dx^j = \sum_{j=1}^n \delta_j^k dx^j,$$

откуда в силу произвольности переменных dx^j

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}, \nabla x^k \right) = \delta_i^k,$$

что и доказывает теорему.

Пусть теперь в пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы две системы криволинейных координат

$$x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$$

Функции

$$x_i = x_i(x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad x_i = x_i(y^1, y^2, \ldots, y^n),$$

определяющие эти системы координат, дважды непрерывно дифференцируемы и

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)} \neq 0 \qquad \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y^1, y^2, \ldots, y^n)} \neq 0$$

По теореме о системе неявных функций существуют обратные функции

$$y^i = y^i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

которые также дважды непрерывно дифференцируемы и

$$\frac{\partial(y^1, y^2, \ldots, y^n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \neq 0.$$

Следовательно криволинейные координаты y выражаются криволинейные координаты x с помощью дважды непрерывно дифференцируемых функций

$$y^i = y^i(x^1, x^2, \ldots, x^n),$$

для которых

$$\frac{\partial(y^1, y^2, \ldots, y^n)}{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)} = \frac{\partial(y^1, y^2, \ldots, y^n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)} \neq 0.$$

Для систем криволинейных координат x и y определяется основной и взаимный базисы

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \qquad \mathbf{e}^k = \nabla x^k,$$

будем называть их старыми базисами (x-старая система координат), и основной и взаимные базисы

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^i} \qquad \tilde{\mathbf{e}}^k = \nabla y^k.$$

Будем называть их новыми базисами, а систему криволинейных координат y - новой системой координат.

Теорема 18. *Пусть x - старая, а y - новая системы криволинейных координат. Тогда*

1) Основные локальные базисы преобразуются по законам

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \mathbf{e}_k \qquad \mathbf{e}_i = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \tilde{\mathbf{e}}_k.$$

2) Взаимные локальные базисы преобразуются по законам

$$\tilde{\mathbf{e}}^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\mathbf{e}^i \qquad \mathbf{e}^k = \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\tilde{\mathbf{e}}^i.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial y^i} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\mathbf{e}_k$$

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^k} \cdot \frac{\partial y^k}{\partial x^i} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\tilde{\mathbf{e}}_k$$

2) Матрица $\left(\dfrac{\partial y^k}{\partial x^i}\right)$ является обратной к матрице $\left(\dfrac{\partial x^k}{\partial y^i}\right)$, а так как взаимные базисы преобразуются по обратному закону, то

$$\tilde{\mathbf{e}}^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\mathbf{e}^i \qquad \mathbf{e}^k = \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\tilde{\mathbf{e}}^i.$$

Определение 2. *Тензором A, r раз контравариантным и s раз ковариантным (истинным тензором, абсолютным тензором, r раз контравариантным и s раз ковариантным) называется объект, который в координатной системе x определяется n^{r+s} компонентами $A^{j_1 j_2 \dots j_r}_{i_1 i_2 \dots i_s}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ и в системе y определяется n^{r+s} компонентами $\tilde{A}^{l_1 l_2 \dots l_r}_{k_1 k_2 \dots k_s}(y^1, y^2, \dots, y^n)$, связанными компонентами $A^{j_1 j_2 \dots j_r}_{i_1 i_2 \dots i_s}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ в каждой точке преобразованием*

$$\tilde{A}^{l_1 l_2 \dots l_r}_{k_1 k_2 \dots k_s} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{k_1}}\frac{\partial x^{i_2}}{\partial y^{k_2}} \cdots \frac{\partial x^{i_s}}{\partial y^{k_s}} \cdot \frac{\partial y^{l_1}}{\partial x^{j_1}}\frac{\partial y^{l_2}}{\partial x^{j_2}} \cdots \frac{\partial y^{l_r}}{\partial x^{j_r}} A^{j_1 j_2 \dots j_r}_{i_1 i_2 \dots i_s}$$

Общее число индексов $r+s$ называется рангом (валентностью) тензора A.

Определение 3. *Псевдотензором (относительным тензором) A веса W, r раз контравариантным и S ковариантным называется объект, определяемый в каждой координатной системе n^{r+s} компонентами, которые при переходе от старой системы x к новой системе y преобразуются по закону*

$$\tilde{A}^{l_1 l_2 \dots l_r}_{k_1 k_2 \dots k_s} =$$

$$= \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{k_1}}\frac{\partial x^{i_2}}{\partial y^{k_2}} \cdots \frac{\partial x^{i_s}}{\partial y^{k_s}} \cdot \frac{\partial y^{l_1}}{\partial x^{j_1}}\frac{\partial y^{l_2}}{\partial x^{j_2}} \cdots \frac{\partial y^{l_r}}{\partial x^{j_r}} A^{j_1 j_2 \dots j_r}_{i_1 i_2 \dots i_s} \left[\frac{\partial(x^1, x^2, \dots, x^n)}{\partial(y^1, y^2, \dots, y^n)}\right]^W,$$

где W - целое число. При $W=+1$ относительный тензор называют тензорной плотностью, при $W=-1$ - тензорной емкостью.

Заметим, что обратное преобразование для псевдотензоров имеет вид

$$A^{j_1 j_2 \dots j_r}_{i_1 i_2 \dots i_s} =$$

$$= \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial y^{k_2}}{\partial x^{i_2}} \cdots \frac{\partial y^{k_s}}{\partial x^{i_s}} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}} \frac{\partial x^{j_2}}{\partial y^{l_2}} \cdots \frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{l_r}} \tilde{A}^{l_1 l_2 \dots l_r}_{k_1 k_2 \dots k_s} \left[\frac{\partial(y^1, y^2, \dots, y^n)}{\partial(x^1, x^2, \dots, x^n)} \right]^W .$$

28 Тензорное поле

Определение. *Мы будем говорить, что в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ задано тензорное поле, если в каждой точке $M \in \Omega$ задан тензор одного и того же строения и одного и того же вида (аффинный ортогональный, аффинный или в криволинейных координатах).*

Для определенности рассмотрим тензорное поле в криволинейных координатах r раз контравариантное и s раз ковариантное

$$A^{j_1 j_2 \dots j_r}_{i_1 i_2 \dots i_s}(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

компоненты которого при переходе от старой системы координат x к новой системе координат y в каждой точке $M \in \Omega$ преобразуются по закону

$$\tilde{A}^{l_1 l_2 \dots l_r}_{k_1 k_2 \dots k_s}(y^1, y^2, \dots, y^n) =$$

$$\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{k_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial y^{k_2}} \cdots \frac{\partial x^{i_s}}{\partial y^{k_s}} \cdot \frac{\partial y^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial y^{l_2}}{\partial x^{j_2}} \cdots \frac{\partial y^{l_r}}{\partial x^{j_r}} A^{j_1 j_2 \dots j_r}_{i_1 i_2 \dots i_s}(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

П р и м е р ы

1) Объект dx^i является контравариантным векторным полем. Действительно

$$dy^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i.$$

2) Если $u(x^1, x^2, \dots, x^n)$ непрерывно дифференцируемое скалярное поле, то объект $\dfrac{\partial u}{\partial x^i}$ является ковариантным векторным полем, так как

$$\tilde{u}(y^1, y^2, \dots, y^n) = u(x^1(y^1, y^2, \dots, y^n), x^2(y^1, y^2, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, y^2, \dots, y^n))$$

и согласно правила дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y^j} = \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x^i}{\partial y^j} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x^i}.$$

3) Объект $g_{ij}(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j}\right)$ является ковариантным тензорным полем второго ранга.

Имеем

$$\tilde{g}_{kl}(y^1, y^2, \ldots, y^n) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^k}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^l}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial y^l}\right) =$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial x^j}{\partial y^l}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial x^j}{\partial y^l} g_{ij}(x^1, x^2, \ldots, x^n).$$

4) Объект $g^{ij}(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \left(\nabla x^i, \nabla x^j\right)$ является контравариантным тензорным полем второго ранга.

Действительно

$$\tilde{g}^{kl}(y^1, y^2, \ldots, y^n) = (\nabla y^k, \nabla y^l) = \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\nabla x^i, \frac{\partial y^l}{\partial x^j}\nabla x^j\right) = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^j} g^{ij}(x^1, x^2, \ldots, x^n).$$

5) Контравариантные A^k и ковариантные A_k координаты вектора $\mathbf{A}$ образуют контравариантное и ковариантное тензорное (векторное) поле.

В самом деле

$$\tilde{A}^i(y^1, y^2, \ldots, y^n) = (\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{e}}^i) = (\mathbf{A}, \frac{\partial y^i}{\partial x^k}\mathbf{e}^k) = \frac{\partial y^i}{\partial x^k}(\mathbf{A}, \mathbf{e}^k) = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} A^k(x^1, x^2, \ldots, x^n),$$

$$\tilde{A}_i(y^1, y^2, \ldots, y^n) = (\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{e}}_i) = (\mathbf{A}, \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\mathbf{e}_k) = \frac{\partial x^i}{\partial y^k}(\mathbf{A}, \mathbf{e}_k) = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} A_k(x^1, x^2, \ldots, x^n),$$

29 Параллельный перенос

Легко видеть, что над тензорами в криволинейных координатах (а следовательно и над тензорными полями) можно производить алгебраические операции, которые нами были введены для аффинных тензоров. Мы знаем, что в результате этих операций также получались тензоры. Операции над тензорами, в результате которых вновь получаются тензоры, принято называть тензорными операциями.

Дальнейшей нашей задачей будет введение дифференциальных операций для тензорных полей, и в первую очередь тензорных дифференциальных операций.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ контравариантное векторное поле

$$A^k = A^k(x^1, x^2, x^3).$$

Если система координат косоугольная, то при переходе от старого базиса $\mathbf{e}_i$ к новому $\tilde{\mathbf{e}}_i$ его координаты преобразуются по закону

$$\tilde{A}^i = \gamma^i_k A^k,$$

где коэффициенты преобразования γ^i_k - постоянные величины.

Пусть теперь точка, в которой определен базис $\mathbf{e}_i$, с течением времени t движется вдоль некоторой кривой C, уравнение которой $x^i = x^i(t)$. При этом базис $\mathbf{e}_i$ будет перемещаться вдоль кривой параллельно. Но тогда коэффициенты преобразования базисов γ^i_k не зависят от t. Сам же вектор A_k зависит от времени t. Дифференцируя равенство $\tilde{A}^i = \gamma^i_k A^k$ по времени, получаем

$$\dot{\tilde{A}}^i = \gamma^i_k \dot{A}^k,$$

т.е. в косоугольной (а значит и в прямоугольной) системе координат обыкновенное дифференцирование по времени вдоль кривой C - тензорная операция.

Рассмотрим криволинейную систему координат. В этом случае при движении точки, в которой определен локальный базис, вдоль кривой C, локальный базис будет изменяться, вообще говоря, произвольным образом (не будет переноситься параллельно). Этот способ изменения локального базиса будет зависеть от времени и, следовательно, коэффициенты преобразования этих базисов тоже зависят от времени. Но тогда обыкновенное дифференцирование по t закона преобразования контравариантного векторного поля при переходе от системы координат (x) к системе (y)

$$\tilde{A}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} A^k$$

приводит к следующему результату

$$\dot{\tilde{A}}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \dot{A}^k + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\right) A^k.$$

Следовательно, объект $\dot{A}^k$ в криволинейных координатах не является тензором, и обыкновенное дифференцирование в этом случае не будет тензорной операцией.

Таким образом, из приведенного примера видно, что вопрос о существовании тензорных дифференциальных операций непосредственно связано с понятием параллельного переноса. Прежде, чем подробнее заняться изучением свойств параллельного переноса, введем следующее важное понятие.

30 Символы Кристофеля

Определение. *Если пространство $\mathbb{R}^n$ отнесено к криволинейным координатам $x^1, x^2, \ldots, x^n$, то его символами Кристофеля первого рода*

$$\Gamma_{ij,k} \equiv \Gamma_{k,ij} \equiv [ij, k]$$

называются коэффициенты в разложении вектора $\dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j}$ *по взаимному базису* $\mathbf{e}^k$,

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij,k}\mathbf{e}^k, \qquad \Gamma_{ij,k} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{e}_k,$$

а символами Кристофеля второго рода

$$\Gamma^k_{ij} \equiv \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}$$

- коэффициенты в разложении вектора $\dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_j}$ *по основному базису* $\mathbf{e}_k$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\mathbf{e}_k, \qquad \Gamma^k_{ij} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{e}^k.$$

Теорема 19. *Символы Кристофеля выражаются через компоненты метрического тензора с помощью следующих формул*

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right),$$

$$\Gamma^k_{ij} = g^{km}\Gamma_{ij,m}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего напомним, что функции, определяющие криволинейные координаты имеют вторые непрерывные производные. Поэтому в силу равенства вторых смешанных производных

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^i}.$$

Дифференцируя равенство

$$g_{ik} = (\mathbf{e_i}, \mathbf{e}_k)$$

по x^j, а равенство

$$g_{jk} = (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$$

по x^i, получаем

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{e}_k + \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^j} \cdot \mathbf{e}_i,$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^i} \cdot \mathbf{e}_k + \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^i} \cdot \mathbf{e}_j.$$

Складывая почленно эти два равенства и учитывая, что

$$\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j}, \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k}, \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^j} = \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k},$$

найдем выражение для символа Кристофеля первого рода

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{e}_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k} \cdot \mathbf{e}_i - \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k} \cdot \mathbf{e}_j\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right).$$

Установим теперь связь между символами Кристофеля первого и второго рода. С этой целью равенство

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij,m}\mathbf{e}^m$$

умножим скалярно на $\mathbf{e}^k$:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{e}_k = \Gamma_{ij,m}(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}^m).$$

Откуда следует

$$\Gamma^k_{ij} = g^{km}\Gamma_{ij,m}.$$

Теорема 20. *Символы Кристофеля не являются, вообще говоря, тензорными объектами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x^1, x^2, \ldots, x^n$ - старая, а $y^1, y^2, \ldots, y^n$ - новая система координат. Используя законы преобразования базисов в криволинейных координатах,

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\mathbf{e}_k, \qquad \tilde{\mathbf{e}}^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\mathbf{e}^i,$$

получаем

$$\tilde{\Gamma}_{mn,p} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_n}{\partial y^n} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_p = \frac{\partial}{\partial y^n}\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^m}\mathbf{e}_i\right)\frac{\partial x^k}{\partial y^p}\mathbf{e}_k =$$
$$= \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^n \partial y^m}\frac{\partial x^k}{\partial y^p}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) + \frac{\partial x^i}{\partial y^m}\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial y^n}\frac{\partial x^k}{\partial y^p}\mathbf{e}_k.$$

По правилу дифференцирования сложной функции $\dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial y^n} = \dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j}\dfrac{\partial x^j}{\partial y^n}$. Подставляя эту величину в последнее равенство, получаем закон преобразования символа Кристофеля первого рода

$$\tilde{\Gamma}_{mn,p} = \frac{\partial x^i}{\partial y^m}\frac{\partial x^j}{\partial y^n}\frac{\partial x^k}{\partial y^p}\Gamma_{ij,k} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^m \partial y^n}\frac{\partial x^k}{\partial y^p}g_{ik}.$$

Первое слагаемое справа в этом выражении имеет тензорный закон преобразования. Второе слагаемое, вообще говоря, не равно нулю.

Аналогично

$$\tilde{\Gamma}^l_{mn} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_m}{\partial y^n} \cdot \tilde{\mathbf{e}}^l = \frac{\partial}{\partial y^n}\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^m}\mathbf{e}_i\right)\frac{\partial y^l}{\partial x^s}\mathbf{e}^s ='$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial y^m}\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial y^n}\frac{\partial y^l}{\partial x^s}\mathbf{e}_s + \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^n \partial y^m}\frac{\partial y^l}{\partial x^s}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^s) =$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial y^m}\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial y^n}\frac{\partial y^l}{\partial x^s}\mathbf{e}^s + \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^n \partial y^m}\frac{\partial y^l}{\partial x^s}\delta^s_i.$$

Откуда находим закон преобразования символов Кристофеля второго рода

$$\tilde{\Gamma}^l_{mn} = \frac{\partial x^i}{\partial y^m}\frac{\partial x^j}{\partial y^n}\frac{\partial y^l}{\partial x^s}\Gamma^s_{ij} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^m \partial y^n}\frac{\partial y^l}{\partial x^i}.$$

т.е. и символы Кристофеля второго рода, вообще говоря, не являются тензорным объектом. Теорема доказана.

Теорема 21. *Для символов Кристофеля справедливы следующие соотношения:*

1. $\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{k,ij}$

2. $\Gamma^k_{ij} = g^{ks}\Gamma_{ij,s} \qquad \Gamma_{ij,k} = g_{ks}\Gamma^s_{ij}$

3. $\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k} \qquad \Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$

4. $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i} = g_{js}\Gamma^s_{ik} + g_{is}\Gamma^s_{jk}$

5. $\dfrac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = -g^{is}\Gamma^j_{sk} - g^{js}\Gamma^i_{sk}$

6. $\dfrac{\partial}{\partial x^i}\ln\sqrt{|G|} = \Gamma^s_{is}, \qquad G = det(g_{ik})$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Следует из определения.

2. По теореме 22.1 $\Gamma^k_{ij} = g^{ks}\Gamma_{ij,s}$. Умножим обе части этого соотношения на g_{lk} со сверткой по индексу k. Получим

$$g_{lk}\Gamma^k_{ij} = g_{lk}g^{ks}\Gamma_{ij,s} = \delta^s_l \Gamma ij, s = \Gamma_{ij,l}.$$

3. Следует из определений символов Кристофеля

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{\partial \mathbf{e} i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{e}^k = \frac{\partial \mathbf{e} j}{\partial x^i} \cdot \mathbf{e}^k = \Gamma_{ji,k},$$

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{\partial \mathbf{e} i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{e}_k = \frac{\partial \mathbf{e} j}{\partial x^i} \cdot \mathbf{e}_k = \Gamma^k_{ji}.$$

4. Проверим первое равенство

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=\frac{\partial(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)}{\partial x^k}=\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k}\cdot\mathbf{e}_j+\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k}\cdot\mathbf{e}_i=\Gamma_{ik,j}+\Gamma_{jk,i}.$$

Второе равенство получается из первого, если использовать связь между символами Кристофеля первого и второго рода (соотношение 2.)

5. Продифференцировав по x^k равенство

$$g^{in}g_{ns}=\delta^i_s,$$

получим

$$\frac{\partial g^{in}}{\partial x^k}g_{ns}+g^{in}\frac{\partial g_{ns}}{\partial x^k}=0,$$
$$\frac{\partial g^{in}}{\partial x^k}g_{ns}=-g^{in}\frac{\partial g_{ns}}{\partial x^k}.$$

Умножим обе части этого равенства на g^{sj} с последующей сверткой в левой части по индексу s

$$\frac{\partial g^{in}}{\partial x^k}g_{ns}g^{sj}=-g^{sj}g^{in}\frac{\partial g_{ns}}{\partial x^k}.$$

Учитывая, что $g_{ns}g^{sj}=\delta^j_n$, имеем

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x_k}=-g^{sj}g^{in}\frac{\partial g_{ns}}{\partial x^k}.$$

Воспользуемся далее соотношением 4, заменяя в нем индекс i на n, а j на s. Тогда

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x_k}=-g^{sj}g^{in}\left(g_{sl}\Gamma^l_{nk}+g_{nl}\Gamma^l_{sk}\right)=-g^{sj}g_{sl}g^{in}\Gamma^l_{nk}-g^{in}g_{nl}g^{sj}\Gamma^l_{sk}=$$
$$=-\delta^j_l g^{in}\Gamma^l_{nk}-\delta^i_l g^{js}\Gamma^l_{sk}=-g^{in}\Gamma^j_{nk}-g^{js}\Gamma^i_{sk}=-g^{is}\Gamma^j_{sk}-g^{js}\Gamma^i_{sk}.$$

6. Дифференцируя определитель

$$G=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n}\\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n}\\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots}\\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn}\end{vmatrix}$$

по x^i по правилам дифференцирования определителей, получаем

$$
\frac{\partial G}{\partial x^i} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_{11}}{\partial x^i} & \dfrac{\partial g_{12}}{\partial x^i} & \cdots & \dfrac{\partial g_{1n}}{\partial x^i} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ \dfrac{\partial g_{21}}{\partial x^i} & \dfrac{\partial g_{22}}{\partial x^i} & \cdots & \dfrac{\partial g_{2n}}{\partial x^i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} + \cdots
$$

$$
\cdots + \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g_{n1}}{\partial x^i} & \dfrac{\partial g_{n2}}{\partial x^i} & \cdots & \dfrac{\partial g_{nn}}{\partial x^i} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} G_{kl},
$$

где G_{kl} - алгебраическое дополнение элемента g_{kl}.

Раскладывая определить G по k-й строке, имеем

$$
G = \sum_{j=1}^{n} g_{kj} G_{kj},
$$

$$
G g^{kl} = \sum_{j=1}^{n} g_{kj} g^{kl} G_{kj},
$$

$$
G g^{kl} = \sum_{j=1}^{n} \delta_j^l G_{kj} = G_{kl}.
$$

Заменим в выражении для производной $\dfrac{\partial G}{\partial x^i}$ алгебраическое дополнение G_{kl} на Gg^{kl}, получаем

$$
\frac{\partial G}{\partial x^i} = G g^{kl} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i}.
$$

Используем теперь соотношение 4, заменяя в нем индекс i на k, j на l, а k на i

$$
\frac{\partial G}{\partial x^i} = G g^{kl} (\Gamma_{ki,l} + \Gamma_{li,k}) = G(\Gamma_{ki}^k + \Gamma_{li}^l) = 2G\Gamma_{is}^s.
$$

Откуда следует

$$
\Gamma_{is}^s = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \ln \sqrt{|G|}.
$$

31 Условия параллельного переноса

Пусть декартовы координаты (x_1, x_2, x_3) связаны с криволинейными координатами (q^1, q^2, q^3) с помощью функций

$$
x_i = x_i(q^1, q^2, q^3).
$$

Предположим, что начало вектора **A** перемещается вдоль некоторой гладкой кривой $C : q^i = q^i(t), t \in [a, b]$, и вектор **A** остается при этом постоянным по длине и параллельным своему первоначальному положению. Тогда его координаты все время остаются постоянными, и условие параллельности векторного поля $A^i(x_1, x_2, x_3)$ вдоль кривой C можно записать в виде

$$\frac{dA^i(x_1, x_2, x_3)}{dt} = 0.$$

Но

$$A^i(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial x_i}{\partial q^k} A^k(q^1, q^2, q^3).$$

Подставив это выражение в условие параллельности, получаем

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial q^k \partial q^l} \cdot \frac{dq^l}{dt} \cdot A^k(q^1, q^2, q^3) + \frac{\partial x_i}{\partial q^k} \cdot \frac{dA^k(q^1, q^2, q^3)}{dt} = 0. \tag{10}$$

Исключим теперь из условия параллельности декартовы координаты x_i. С этой целью умножим равенство (10) на $g^{mp}\dfrac{\partial x_i}{\partial q^m}$ и произведем свертку по индексу i. Тогда

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q^m}\right) g^{mp} \frac{dA^k}{dt} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q^k \partial q^l} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q^m} g^{mp} \cdot \frac{dq^l}{dt} \cdot A^k = 0. \tag{11}$$

Но

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q^m}\right) g^{mp} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^k}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^m}\right) g^{mp} = g^{km} g^{mp} = \delta_k^p.$$

Следовательно, равенство (11) перепишется в виде

$$\delta_k^p \frac{dA^k}{dt} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q^k \partial q^l} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q^m} g^{mp} \cdot \frac{dq^l}{dt} A^k = 0$$

или

$$\frac{dA^p}{dt} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q^k \partial q^l} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q^m} g^{mp} \cdot \frac{dq^l}{dt} A^k = 0. \tag{12}$$

Преобразуем коэффициенты при $\dfrac{dq^l}{dt} A^k$. Считая известным метрический тензор

$$g_{mk} = \frac{\partial x_i}{\partial q^m} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q^k},$$

найдем от него производные по криволинейным координатам q^l

$$\frac{\partial g_{mk}}{\partial q^l} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q^m \partial q^l} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q^k} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q^k \partial q^l} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q^m}.$$

Производя циклическую перестановку индексов (m, k, l)

$$(m, k, l) \qquad (k, l, m) \qquad (l, m, k)$$

получаем равенства

$$\frac{\partial g_{mk}}{\partial q^l} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q^m \partial q^l} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q^k} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q^k \partial q^l} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q^m}.$$

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial q^m} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q^k \partial q^m} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q^l} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q^l \partial q^m} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q^k}.$$

$$\frac{\partial g_{lm}}{\partial q^k} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q^l \partial q^k} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q^m} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q^m \partial q^k} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q^l}.$$

Сложим первое и третье равенства, а затем вычтем второе. Получим

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial q^k \partial q^l} \frac{\partial x_i}{\partial q^m} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{mk}}{\partial q^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^m} \right\}$$