



IPRJ
Universidade do Estado
do Rio de Janeiro



Álgebra Linear Numérica

Notas de Aula

Ricardo Fabbri

31 de Agosto de 2018

Aula 1

O que é uma matriz?

Objetivos

- Aula introdutória informal dando visão geral e uma contextualização do curso
- Motivar alunos de engenharia da computação da importância da disciplina ao final do curso, no contexto de modelagem computacional do IPRJ/UERJ.
- O que é álgebra linear numérica: explicar termos “álgebra”, “linear”, e “numérica”. Por quê são importantes.
- Matrizes como representação numérica de transformações lineares
- Critério de avaliação

O que é uma matriz?

- Uma tabela retangular de números, porém não só.
- Associados à tabela há uma “álgebra”: operações algébricas usuais de multiplicação matriz-vetor e matriz-matriz vistas no ensino médio, que parecem arbitrárias.
- Quando falamos de matrizes em engenharia e ciência, sempre incluímos, portanto, tais operações.

- O curso se chama Álgebra Linear Numérica. Até agora, então, falamos algo de “numérico” (matrizes são um monte de números) e de “algébra” (operações). E o “linear”?
- Matrizes são representações numéricas de transformações lineares.

O que é “Linear”?

- Ao ouvir a palavra “linear”, a maioria das pessoas tem em mente uma reta ou um plano.
- “Linearidade” em matemática é uma forma de “simplicidade”.
- Esta simplicidade se manifesta em diversos níveis: o geométrico, o simbólico, e o numérico:

Simbólico: No plano simbólico ou algébrico, explica-se os fenômenos de forma operacional e abstrata, sem muita intuição conceitual sobre o significado dos símbolos ou operações.

Definição 1. (Simbolicamente Linear) *Muitos matemáticos irão definir “linear” como a qualidade de uma função ou transformação L tal que*

$$\begin{cases} L(u + v) = L(u) + L(v) & (1.1) \\ L(\alpha v) = \alpha L(v), & (1.2) \end{cases}$$

para todos vetores u e v , e escalares α .

- Tal definição, apesar de sucinta e formalmente elegante, tem pouca concretude imediata.
- “Linear” aqui significa apenas uma simplicidade formal, ou seja, as manipulações algébricas são simples.

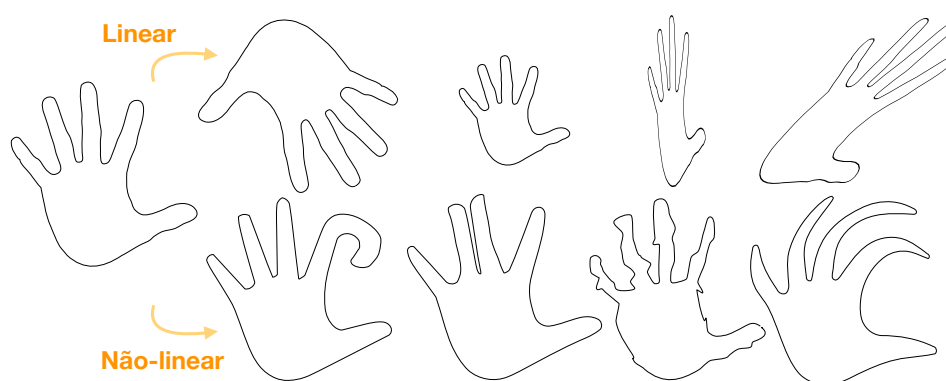
Geométrico: No plano que aqui chamamos de “geométrico”, “conceitual”, ou “visual”, os fenômenos são explicados de maneira concreta, mais próxima do objetivo ou de aplicações reais.

No mundo real, o que observamos a princípio não é numérico nem simbólico: uma bola girando, um fluido em movimento, ou um feixe de nêutrons. Muitas

vezes, conceitos próximos da realidade, independentes das convenções de símbolos ou números, são difíceis de formalizar e, portanto, não são enfatizados na maioria dos cursos de álgebra linear.

Definição 2. (Geometricamente Linear) *Chama-se “Linear” qualquer operação geométrica que combina quaisquer das seguintes operações simples: girar, esticar e refletir.*

- Tais operações são globais e realizadas sobre um mesmo ponto central (origem)
- O esticamento pode ser realizado por fatores diferentes ao longo de eixos arbitrários, e inclui achatamentos
- Geralmente, esta definição é um teorema na teoria da álgebra linear, visto apenas no final de um primeiro curso. Trata-se do teorema do SVD – *Singular Value Decomposition*, ou decomposição em valores singulares. Trata-se de um análogo de autovalores e autovetores, e é o teorema mais importante a ser explorado neste curso.
- Como exemplo, temos a seguinte figura:



A mão à esquerda sofre transformações lineares na linha acima, e não-lineares na linha abaixo. As transformações acima são lineares pois consistem em girar ou esticar cada ponto da mão globalmente pelo mesmo ângulo ou fatores de esticamento. Já as transformações na linha abaixo são não-lineares pois os pontos ou sofrem deformações locais (diferentes para cada ponto da mão), ou não são meramente girados e esticados.

Numérico: Já definimos no início da aula que uma matriz é a representação numérica de uma transformação linear, seja esta pensada pela definição geométrica ou simbólica.

- Para maior compreensão do significado dos números e operações de uma matriz, na próxima aula revisaremos o conceito de *coordenadas*.
- Também revisaremos como encontrar os números em uma matriz para uma dada transformação linear

O teorema do SVD pode ser descrito numericamente em termos de matrizes:

Teorema 1. (*SVD numerico - informal*) Toda matriz A de tamanho $m \times n$ pode ser escrita da forma:

The diagram shows the equation $A = V\Lambda U^T$. An orange arrow points from the text "Qualquer matriz" to the matrix A . Three orange arrows point from the labels "Ortogonal", "Diagonal", and "Ortogonal" to the matrices V , Λ , and U^T respectively.

Ou seja, toda matriz é uma matriz diagonal junto com matrizes ortogonais. A matriz diagonal realiza esticamento em cada eixo, e as matrizes ortogonais realizam rotações e reflexões.

- O tamanho das matrizes é

$$A_{m \times n} = V_{m \times m} \Lambda_{m \times n} U_{n \times n}^T \quad (1.3)$$

- Portanto toda matriz é, de certa forma, equivalente a uma matriz diagonal de mesmo tamanho.
- Matrizes diagonais são matrizes da seguinte forma (exemplo 3×3):

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

as quais transformam pontos (x, y, z) da seguinte forma:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \\ cz \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

ou seja, esticam cada ponto ao longo de eixos por fatores a , b e c .

- Cada fator de esticamento a , b ou c pode ser zero, o que faz com que a matriz achate completamente uma das dimensões

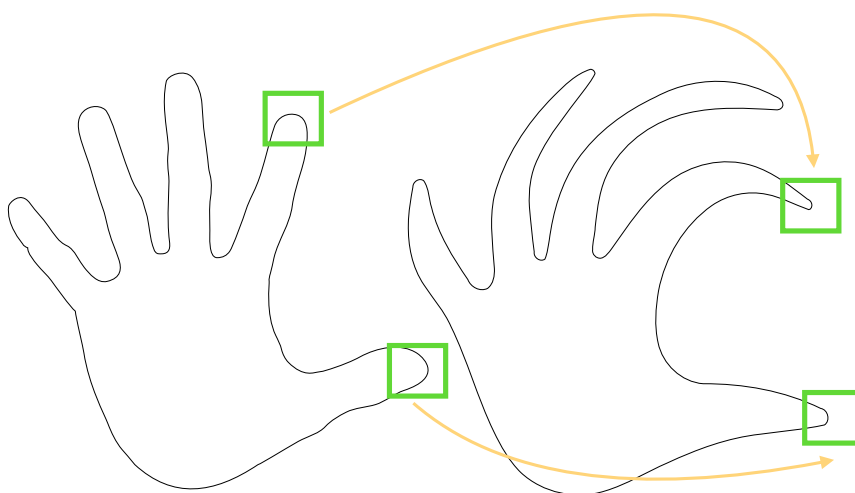
Observações

- A translação é não-linear. Pode-se mostrar que, mesmo sendo uma operação geométrica simples, a translação não tem as propriedades de simplicidade algébrica como na definição simbólica acima, e também não pode ser expressa numericamente como uma multiplicação de matrizes.
- Com alguns artifícios, é possível realizar translação com multiplicação de matrizes, porém é preciso operações não-lineares (projeção).

Para quê servem as transformações lineares, se elas são tão limitadas?

- O mundo real é não-linear
- O “Linear” foi inventado como uma simplificação do não-linear, mas em si não tem aplicação prática.
- O linear não faz sentido sem o não-linear.
- O linear só existe como artefato para modelar o não-linear.
- O paradigma é tomar um fenômeno real (e não-linear) e linearizá-lo, para usar as ferramentas deste curso.
- Em Cálculo 1, estudamos funções não-lineares de uma variável usando a derivada como linearização local (reta tangente). A reta tangente é uma transformação linear de uma variável.
- Daí a importância de se estudar cursos como análise no \mathbb{R}^n , onde fenômenos não-lineares são modelados tendo como ferramenta básica a álgebra linear.

- Álgebra linear também é o primeiro contato do aluno com n dimensões, para $n > 3$, e tem importância direta na prática, por exemplo em inteligência artificial, *machine learning*.
- Por exemplo, o paradigma de cálculo e análise no \mathbb{R}^n é estudar o não-linear realizando linearizações locais (diferenciação). Dessa forma, para se deformar a mão de forma mais geral, como na figura abaixo, pode-se usar várias transformações lineares com fatores de esticamento e rotação diferentes para cada ponto:



- Em cada quadrado verde, temos uma deformação próxima de uma rotação e um esticamento.
- Curiosidade: a deformação não-linear da mão é uma função de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ estudada em Análise no \mathbb{R}^n . A aproximação da deformação de cada quadrado verde é chamada de diferencial da função não-linear, e sua forma numérica (matricial) é estudada em álgebra linear numérica.

Tarefas

- Site: <http://wiki.nosdigitais.teia.org.br/ALN>
- Realizar tarefa 0 e tarefa 1 (datas no site).

Exercícios

1. Explique como uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$, seria considerada linear, tanto em termos simbólicos e geométricos. Qual seria a fórmula dessa função?

Aula 2

Revisão de Álgebra Linear

Objetivos

- Relebrar representação numérica de vetores
- Revisar álgebra linear não-numérica (“simbólica”)
- Estilo: revisão aprofundada para alunos que já viram a disciplina. Notação solta adequada a uma revisão.

Observações Iniciais

- A álgebra linear numérica começa com o conceito de escalares e coordenadas.
- Para haver coordenadas, é necessária a escolha de uma base
- O conceito de espaço vetorial (simbólico) permite isolar as operações que não dependem da escolha de uma base, daquelas que dependem.

Definição 3. (Espaço Vetorial Simbólico) *Um espaço vetorial \mathcal{V} sobre um corpo K é uma tupla ordenada $\mathcal{V} = (V, K, +, \cdot)$ de quatro elementos:*

$$\mathcal{V} \begin{cases} V: \text{conjunto cujos elementos são chamados “vetores”} \\ K: \text{conjunto cujos elementos são chamados “escalares”} \\ +: \text{soma de vetores} \\ \cdot: \text{multiplicação vetor-escalar,} \end{cases}$$

onde “+” satisfaz:

$$+ : V \times V \rightarrow V \quad (2.1)$$

$$(v, w) \mapsto v + w, \quad (2.2)$$

$$v + w = w + v \quad (2.3)$$

$$v + (u + w) = (v + u) + w \quad (2.4)$$

$$\exists! 0 \in V \text{ tal que } 0 + v = v, \forall v \in V \quad (2.5)$$

$$\forall v \in V, \exists! w \in V \text{ tal que } v + w = 0, \text{ simbolizado por } -v \quad (2.6)$$

e onde “.” satisfaz:

$$\cdot : K \times V \rightarrow V \quad (2.7)$$

$$(\alpha, w) \mapsto \alpha w, \quad (2.8)$$

$$v + w = w + v \quad (2.9)$$

$$v + (u + w) = (v + u) + w \quad (2.10)$$

$$\exists! 0 \in V \text{ tal que } 0 + v = v, \forall v \in V \quad (2.11)$$

$$\forall v \in V, \exists! w \in V \text{ tal que } v + w = 0, \text{ simbolizado por } -v \quad (2.12)$$

e K satisfaz as propriedades de uma estrutura algébrica chamada “corpo”, que abstrai as operações de multiplicação, soma, subtração e divisão possíveis com números, geralmente \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

- Aos programadores em C++: a definição de espaço vetorial simbólico é como uma *classe*, que define as partes e as operações permitidas.
- Na definição simbólica um vetor é apenas caracterizado pelas operações que se pode realizar com ele, e as propriedades de tais operações.
- Até o momento, a única coisa “numérica” nesta definição é o corpo de escalares K . Os vetores ainda são entidades simbólicas que podem ser somadas e multiplicadas por escalar.
- A teoria simbólica parece artificialmente trivial – todos já sabemos as propriedades convencionais de soma de vetores e multiplicação por escalar.

- No entanto, a teoria simbólica está mais próxima do conceitual que a teoria numérica, pois isola os fatores que não dependem da escolha de um sistema de coordenada.
- A conexão com o mundo numérico consiste em associar números a vetores. Para tanto, é importante definir base e, para isso, dependência linear.
- Iremos assumir que V e W são espaços vetoriais.

Definição 4. Uma combinação linear de v_1, \dots, v_n , $v_i \in V$, é uma expressão da forma

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sum \alpha_i v_i. \quad (2.13)$$

- Notação: quando não há ambiguidade, iremos omitir os índices dos somatórios \sum .

Definição 5. Os vetores v_1, \dots, v_n são ditos linearmente independentes (L.I.) se

$$\sum \alpha_i v_i \iff \alpha_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (2.14)$$

Proposição 2. v_1, \dots, v_n são L.I. se, e somente se, cada v_i não é o vetor nulo (isto é, $v_i \neq 0$) e nenhum é combinação linear dos demais

Definição 6. $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ é base de V se

$$\begin{cases} v_1, \dots, v_n \text{ são L.I. e} & (2.15) \\ \text{todo } v \in V \text{ é combinação linear dos } v_i \text{'s} & (2.16) \end{cases}$$

Finalmente, chegamos ao conceito de coordenadas (numéricas) de um vetor:

Definição 7. (Coordenadas) Dada uma base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V , então os números $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tal que

$$v = \sum \alpha_i v_i \quad (2.17)$$

são chamados de coordenadas de v em V (na base B). Quando necessário, utiliza-se a notação explícita:

$$\mathcal{X}_B(v) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

onde o símbolo “chi” \mathcal{X} dever ser lido como “coordenada de”.

- Se pensarmos no vetor simbólico $v \in V$ visualmente como uma seta desenhada no plano, suas coordenadas são um vetor numérico 2 números, sendo necessário definir a base (posição dos eixos x e y).
- Fixada uma base, existe uma relação 1-1 entre vetores simbólicos v e vetores de n números.

Teorema 3. *Dada uma base de n vetores, tem-se que:*

- *As n coordenadas de um vetor são únicas*
- *Qualquer outra base de V tem o mesmo número de elementos n , que usaremos como a definição da dimensão de V .*

Demonstração Ambos decorrem de propriedades de sistemas lineares. Os detalhes já foram vistos pelo aluno no primeiro curso de álgebra linear. ■

- Concluimos que, ao escolher uma base, V pode ser tratado como o espaço numérico K^n (por exemplo, \mathbb{R}^n) com as operações numéricas usuais de soma de vetores numéricos e multiplicação de vetor numérico por escalar.

Aula 3

Matrizes de Transformações

Objetivos

- Representação numérica de transformações lineares: matrizes.
- Conectar álgebra linear simbólica com a numérica, mas a fundo.
- Sem a conexão do numérico com o simbólico, as matrizes perdem significado.
- Como obter os números de uma matriz, a partir do que se deseja realizar na prática?
- Fixar e aprofundar o que já foi visto em outros cursos

Vimos

– revisar conceitos da aula passada

- Vetores como meros símbolos com operações algébricas de soma, e multiplicação por escalar
- Vetores numéricos como coordenadas \mathcal{X} dos vetores simbólicos em uma base.
- V e W irão representar espaços vetoriais

Vamos lembrar a definição simbólica de transformação linear introduzida na Aula 1:

Definição 8. (Simbolicamente Linear) *Uma função $L : V \rightarrow W$ é dita linear se*

$$\begin{cases} L(u + v) = L(u) + L(v) \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} L(\alpha v) = \alpha L(v), \end{cases} \quad (3.2)$$

para todos vetores u, v , e escalares α . Em vez de “função” (vetorial), usamos o termo “transformação” ou “mapa”.

Aula de Hoje: Como construir uma matriz

Definição 9. *Dado um mapa $L : V \rightarrow W$ e duas bases $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, a matriz de L relativa às bases A e B é a única matriz $\mathcal{M}_B^A(L)$ tal que:*

$$\mathcal{X}_B(L(v)) = \mathcal{M}_B^A(L) \cdot \mathcal{X}_A(v) \quad (3.3)$$

para qualquer vetor $v \in V$, onde “ \cdot ” é a multiplicação usual de matriz-vetor. Tal matriz é, portanto, uma função entre espaços numéricos de coordenadas $K^n \rightarrow K^m$ (por exemplo, de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$), realizada por multiplicação de matriz usual.

A Equação 3.3 acima é uma das equações mais importantes conectando álgebra linear simbólica com a álgebra linear numérica. O engenheiro deve memorizá-la.

Teorema 4. *As entradas numéricas da matriz $\mathcal{M}_B^A(L)$ são dadas por:*

$$\mathcal{M}_B^A(L) = \begin{bmatrix} M_B^A(L)(\mathcal{X}_A(a_1)) & M_B^A(L)(\mathcal{X}_A(a_2)) & \cdots & M_B^A(L)(\mathcal{X}_A(a_n)) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{X}_B(L(a_1)) & \mathcal{X}_B(L(a_2)) & \cdots & \mathcal{X}_B(L(a_n)) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Ou seja, escreva cada vetor a_i da base A , transformado por L , em termos da base B , e em seguida coloque-os na coluna i da matriz.

Demonstração Como $\mathcal{X}_A(a_i)$ é dado por $(0, \dots, 1, \dots, 0)^\top$, onde 1 ocorre na i -ésima entrada, então a equação 3.3 aplicada a esse vetor resulta na i -ésima coluna da matriz como sendo $\mathcal{X}_B(L(a_i))$. ■

- Implícita na definição de matriz está tanto uma transformação linear (que tem interpretações geométricas), como a escolha de uma base
- É possível, portanto, ter diversas representações numéricas (matrizes) para uma mesma transformação linear.
- A transformação identidade $L = id$, tal que $id(v) = v$, pode ter diversas representações matriciais, além da representação usual com 1's na diagonal.

Definição 10. (Matriz de mudança de base). *Dadas duas bases A e B de um mesmo espaço vetorial V , a matriz de mudança de base de A a B é a matriz do mapa identidade relativa às bases A e B , ou seja, $\mathcal{M}_B^A(id)$.*

Observações

- A matriz de mudança de base leva vetores numéricos $\mathcal{X}_A(v)$ a vetores numéricos $\mathcal{X}_B(v)$ via multiplicação usual de matrizes:

$$\mathcal{X}_B(v) = \mathcal{M}_B^A(id) \mathcal{X}_A(v). \quad (3.6)$$

- Apesar da transformação identidade id ser tal que $id(v) = v$, a matriz dessa transformação relativa a bases A e B tal que $A \neq B$ não é a matriz identidade. Em outras palavras, não é o mapa identidade no espaço numérico.

$$\mathcal{M}_B^A(id) : \mathcal{K}^n(\text{coordenadas}) \rightarrow \mathcal{K}^n(\text{coordenadas}) \quad (3.7)$$

$$\mathcal{X}_A(v) \mapsto \mathcal{M}_B^A(id) \mathcal{X}_A(v) = \mathcal{X}_B(v) \quad (3.8)$$

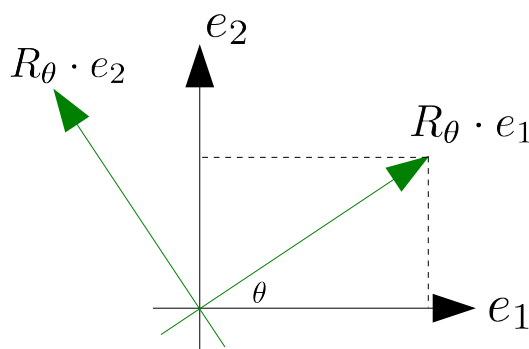
3.0.1 Rotações

Rotações 2D

Motivação:

- Dada uma rotação (geometria) como definir a matriz de rotação (álgebra)?
- Dada uma mudança de sistemas de coordenadas por uma rotação, como definir a matriz de mudança de base?
- Rotação (geométrica) é linear
 - Se sei como rotacionar base então a rotação está definida (assim funciona para qualquer transformação linear)

Problema 3.1. *Rotacionar um conjunto de pontos 2D no sentido anti-horário em torno da origem.*

Solução.

- Primeiro, o problema geométrico é dotado de uma notação simbólica
- Seja o espaço vetorial o plano 2D (\mathbb{R}^2)
- A rotação é uma transformação linear do plano no plano, indicada por Rot
- Para chegarmos a números (afinal, o curso é *numérico*), precisamos especificar coordenadas. Seja o sistema de coordenadas indicado por uma base $E = \{e_1, e_2\}$ e origem O .
- A rotação será especificada por um ângulo θ medido a partir de e_1 , no sentido anti-horário.
- Para rotacionar o objeto (conjunto de pontos), precisamos saber como rotacionar um ponto. Em seguida, aplicamos o mesmo procedimento a todos os pontos.

- Pelo diagrama acima, a rotação de um ponto em e_1 é $(\cos \theta, \sin \theta)^\top$, e de um ponto em e_2 é $(-\sin \theta, \cos \theta)^\top$.
- Como vimos, basta colocar esses vetores na coluna da matriz de rotação:

$$R_\theta = \mathcal{M}_E^E(\text{Rot}) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

- O sistema de coordenadas não é rotacionado; apenas os pontos do plano são rotacionados, fixando-se o sistema de coordenadas.
- Isso é modelado pela notação simbólica como $\mathcal{M}_E^E(\text{Rot})$, onde a base é fixa, e a transformação é Rot.
- Seguindo-se a notação e o raciocínio de forma cuidadosa, a dúvida usual quanto ao sinal de $\sin \theta$ na matriz desaparece. Controle a ansiedade!
- Outra vantagem é que o mesmo método funciona para qualquer dimensão (3D, 4D, etc)

A seguinte idéia vale para montar a representação numérica de uma matriz de rotação em qualquer dimensão:

Proposição 5. *As colunas duma matriz de rotação são a rotação dos vetores base e_1, \dots, e_n , escritas nesta própria base. As linhas da matriz de rotação são os vetores unitários que são levados aos vetores base após a rotação.*

3.0.2 Rotações 3D

Problema 3.2. *Rotacionar uma base 3D em torno da origem, e escrever a matriz que realiza a mudança de base para um ponto arbitrário.*

- A primeira dificuldade em definir os números de matrizes de rotação 3D é definir quais ângulos geométricos são positivos (rotações anti-horárias)

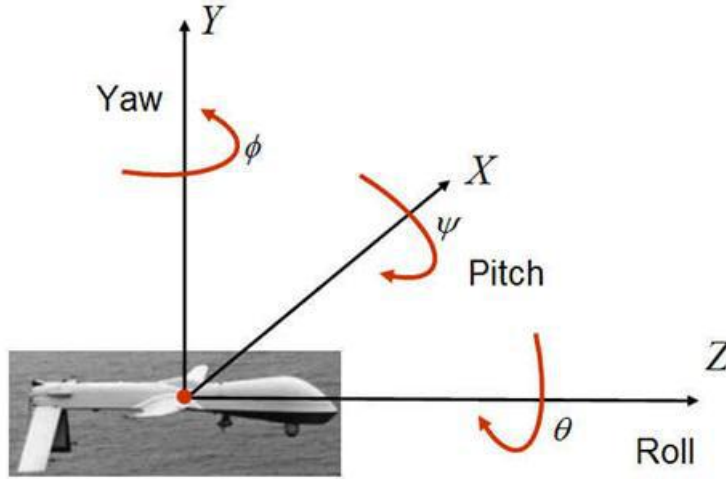
Definição 11. *(orientação) Uma base é dita de mão-direita quando as rotações por ângulos positivos são tais que, olhando-se de um vetor base em direção à origem, uma rotação anti-horária por $+90^\circ$ leva um eixo positivo em outro eixo positivo.*

- As regras da mão direita vistas em cursos de física permitem definir na prática a orientação de uma base
- O que nos interessa é a seguinte tabela:

Se o eixo de rotação é A direção de rotação por ângulo positivo é

x	$y \rightarrow z$
y	$z \rightarrow x$
z	$x \rightarrow y$

Como revisão, a figura abaixo ilustra os graus de liberdade de uma rotação e seus nomes em inglês, no caso de um drone



Em termos de tais ângulos, a matriz de rotação $R = \mathcal{M}_B^A(id)$ (neste caso, de mudança de base, e não de uma rotação geométrica, pois os pontos são fixos) pode ser decomposta como $R(\theta, \phi, \psi) = R_z(\theta)R_y(\phi)R_x(\psi)$, onde

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$R_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$R_x(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Note que cada coluna é obtida através da nossa notação:

$$\mathcal{X}_B(v) = \mathcal{M}_B^A(id)\mathcal{X}_A(v), \quad (3.12)$$

aplicada aos vetores base, onde a transformação linear L aqui é id pois estamos fixando os pontos, mas estamos realizando uma mudança de base de A para B .

- A coluna i da matriz é então $\mathcal{X}_B(a_i)$. Em outras palavras, nossa tarefa numérica é escrever cada vetor base a_i *não-rotacionado* em termos dos vetores *rotacionados*.

Exercício 3.1. *Explique detalhadamente como obter a primeira coluna de $R_z(\theta)$.*

A forma final de $R(\theta, \phi, \psi) = R_z(\theta)R_y(\phi)R_x(\psi)$ para uma rotação arbitrária seria:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \sin \psi + \sin \theta \cos \psi & -\cos \theta \sin \phi \cos \psi + \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \phi \cos \psi + \cos \theta \sin \psi \\ \sin \phi & -\cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \psi \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Exercício 3.2. *Mostre que esta é a inversa da matriz que realiza a rotação de pontos, mantendo-se a base fixa.*

Aula 4

Modelando Transformações Rígidas Numericamente

Objetivos

- Representação vetorial e numérica de transformações rígidas, nosso primeiro exemplo de transformações não-lineares (translação além de rotação)
- Fornecer exemplos mais práticos para as aulas anteriores
- Qual o poder de modelagem da álgebra matricial? Que tipos de problemas interessantes podemos tratar com essa álgebra simples?

Vimos

– revisar conceitos da aula passada

- Como modelar rotações com matrizes

Aula 5

Coordenadas Homogêneas

Objetivos

- Qual o poder de modelagem da álgebra matricial? Que tipos de problemas interessantes podemos tratar com essa álgebra simples?
- O que podemos fazer apenas com multiplicação matriz-vetor?
- Projeção perspectiva
- Pré-requisito para aulas de sistemas lineares homogêneos mais adiante no curso
- Pré-requisito para exemplo de câmeras, projeção e computação gráfica mais adiante no curso

Vimos

– revisar conceitos da aula passada

- Como modelar rotações e translações numericamente com multiplicação de matriz-vetor seguida de uma soma de vetor

Aula 6

Resolvendo sistemas lineares por SVD

SVD is the answer.
What is your problem?

Joseph Mundy

Objetivos

- Técnica genérica para resolver sistemas lineares
- Técnica mais útil em engenharia para sistemas sobredeterminados por mínimos quadrados usando SVD
- Solução aproximada de equações contraditórias típicas de medições com erro
- Técnica a ser vista não é a mais eficiente, mas é a mais usada antes de algoritmos mais específicos
- Foco será no procedimento geral, sendo a teoria aprofundada adiante

Vimos

– revisar conceitos da aula passada

- Toda matriz $A = V\Lambda U^\top$ (SVD) (ver Aula 1)
- Dado um algoritmo que realize esta decomposição na sua linguagem favorita, como resolver sistemas lineares?
- Não será necessário saber o algoritmo SVD em si, apenas entradas e saídas.

Introdução

- Central em álgebra linear numérica é resolver sistemas da forma

$$Ax = b. \quad (6.1)$$

- Em Scilab ou Matlab, por exemplo, pode-se usar a barra invertida para cegamente tentar obter uma solução:

$$x = A \backslash b, \quad (6.2)$$

onde a notação com a barra invertida “ \backslash ” sugere que x é b dividido por A , de alguma forma.

- O Scilab nesse caso escolhe o melhor algoritmo, e em geral será o SVD, conforme veremos nesta seção.
- Na prática, a matriz A e o vetor b consistem de medições com erro, repetidas inúmeras vezes.
- Devido a esse erro, não há um x que exatamente satisfaça $Ax = b$.
- Nesse caso, queremos um x que satisfaça $Ax = b$ aproximadamente. Ou seja:

$$Ax \approx b, \quad (6.3)$$

onde “ \approx ” aqui significa aproximado.

- A técnica a ser descrita nesta aula é uma maneira prática de usar o SVD.
- Muitas vezes, uma biblioteca em C terá o algoritmo SVD, porém pode não ter outras funções práticas para solução de sistemas lineares.
- Nesta aula, veremos uma técnica que transforma a equação acima numa equação homogênea do tipo $Ax \approx 0$, e em seguida resolve um problema de otimização com SVD.

Homogeneizando Sistemas Lineares

- Dado um sistema $Ax = b$, podemos gerar um sistema equivalente $\tilde{A}\tilde{x} = 0$. Dizemos que “homogeneizamos o sistema”.
- O truque tem a ver com coordenadas homogêneas, mas o procedimento a seguir pode ser compreendido mesmo sem lembrar da Aula 5.
- Suponha que a matriz A seja 2×2 . O sistema $Ax = b$ ficaria:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (6.4)$$

- Note que apenas b_1 e b_2 não estão acompanhados de variáveis
- Podemos fazer todos os termos conterem variáveis (homogêneas) multiplicando-se todas as equações (em ambos os lados) por uma nova variável w , sem alterar o resultado:

$$\begin{cases} a_{11}x_1w + a_{12}x_2w = b_1w \\ a_{21}x_1w + a_{22}x_2w = b_2w \end{cases} \quad (6.5)$$

Agora, podemos definir novas variáveis $\tilde{x}_1 = x_1w$, $\tilde{x}_2 = x_2w$, de forma que nosso novo vetor \tilde{x} fique:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} wx_1 \\ wx_2 \\ w \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -b_1 \\ a_{21} & a_{22} & -b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (6.7)$$

- Tal equação é homogênea:

$$\tilde{A}\tilde{x} = 0 \quad (6.8)$$

A solução será o Kernel de A , $\ker A$ (núcleo de A).

- Logo, usando coordenadas homogêneas, podemos reduzir qualquer sistema linear não-homogêneo a um sistema linear homogêneo

- Torna-se central, então, saber resolver:

$$Ax = 0, \quad \text{para } |x| \neq 0 \quad (6.9)$$

- Por exemplo, exigindo $|x| = 1$
- Uma vez encontrado algum elemento \tilde{x} do espaço de solução $\ker \tilde{A}$, para um sistema $\tilde{A}\tilde{x} = 0$, podemos obter a solução para o sistema original $Ax = b$
- Basta normalizar \tilde{x} para obter $w = 1$ (sistema original), o que ocorre fazendo-se:

$$x = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1/\tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_2/\tilde{x}_3 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Solução aproximada por SVD: método prático

Resolver o sistema aproximado

$$Ax \approx 0, \quad \text{e } |x| = 1, \quad (6.11)$$

é o mesmo que exigir que Ax é pequeno. Ou seja, queremos resolver o seguinte problema de otimização

$$\arg \min_{|x|=1} |Ax|. \quad (6.12)$$

- Se imaginarmos x como um círculo ou esfera unitária, $|Ax|$ será mínimo na direção do vetor singular correspondente ao menor valor singular, ou seja, basta calcular a SVD. (isto foi visto intuitivamente nas aulas anteriores)
- Algebricamente, temos que, pelo SVD de A :

$$|Ax| = |V\Lambda U^\top x| = |\Lambda U^\top x|, \quad (6.13)$$

onde a última passagem se deve ao fato de V ser ortogonal, ou seja, não altera a norma.

- Logo, queremos minimizar

$$|\Lambda U^\top x| \quad \text{tal que } |x| = 1 \quad (6.14)$$

- Como $|x| = |U^\top x|$, podemos definir $y \doteq U^\top x$.
- Então, queremos minimizar

$$|\Lambda y| \quad \text{tal que } |y| = 1. \quad (6.15)$$

- Como Λ é diagonal, e os algoritmos retornam os valores singulares σ_i na ordem decrescente, então a solução é

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

- Dessa forma, tínhamos

$$y = U^\top x \implies x = Uy \quad (6.17)$$

- Logo x é a última coluna de U na decomposição SVD de A .

O método padrão SVD para resolver $Ax \approx b$ para n variáveis x_1, \dots, x_n pode ser resumido da seguinte forma

1. Homogeneiza-se o sistema para $\tilde{A}\tilde{x} \approx 0$, que terá $n + 1$ variáveis
2. Calcula-se o SVD de \tilde{A}
3. A última coluna de U é o \tilde{x} que resolve $\tilde{A}\tilde{x} \approx 0$
4. Obtém-se x a partir de \tilde{x} ignorando-se a última coordenada do vetor normalizado $\tilde{x}/\tilde{x}_{n+1}$

Aula 7

Aprofundando em SVD

Objetivos

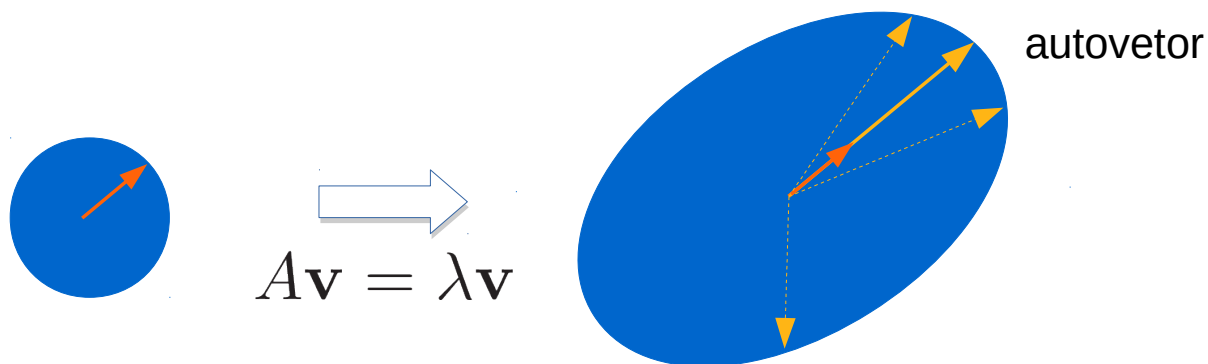
- Definição formal de SVD após ter visto como usar
- Demonstração do SVD – um dos teoremas mais importantes da álgebra linear moderna, por causa de um algoritmo de álgebra linear numérica.
- Conexão com autovalores e autovetores
- Gancho para análise de algoritmos para SVD e para autovalores e autovetores do Golub (este curso é estilo *top-bottom*)
- Interpretações gráficas de autovalores, autovetores, valores singulares e vetores singulares

Vimos

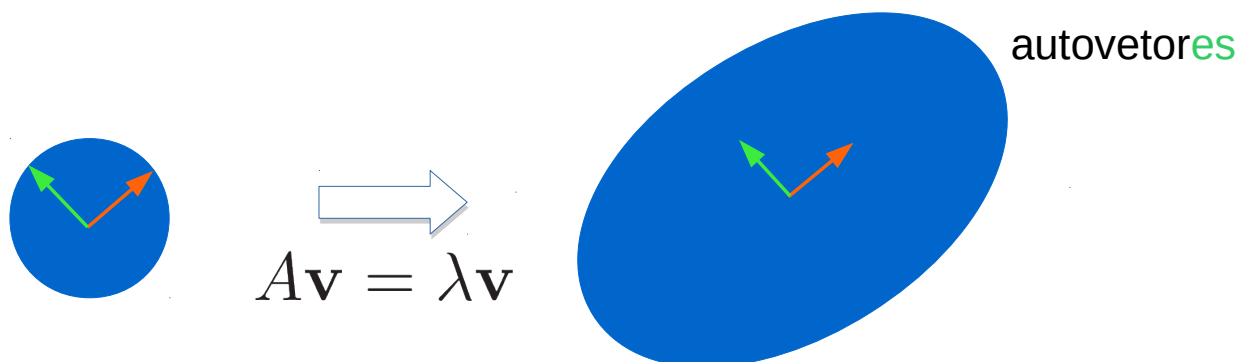
– revisar conceitos da aula passada

- Já vimos SVD operacionalmente: $A = U\Lambda V^T$
- Já vimos como SVD pode ser usado para resolver sistemas $Ax \approx b$ de forma prática, mesmo não sendo a mais eficiente em todos os casos.
- Veremos agora a definição formal de SVD

- Um autovetor de transformação linear é um vetor cuja direção é preservada pela transformação linear:



- A figura acima mostra que a matriz A estica o disco a uma elipse, uma manifestação numérica de uma transformação linear
- Se imaginarmos que o disco é feito de borracha, e a matriz A é tal que o esticamento é feito puxando-se os pontos do disco original ao longo de eixos da elipse, então a direção dos pontos ao longo dos eixos não se altera, pois os pontos apenas movem ao longo dos eixos durante o esticamento
- Para tais tipos de matrizes, podemos tomar todos os eixos da elipse como uma base:

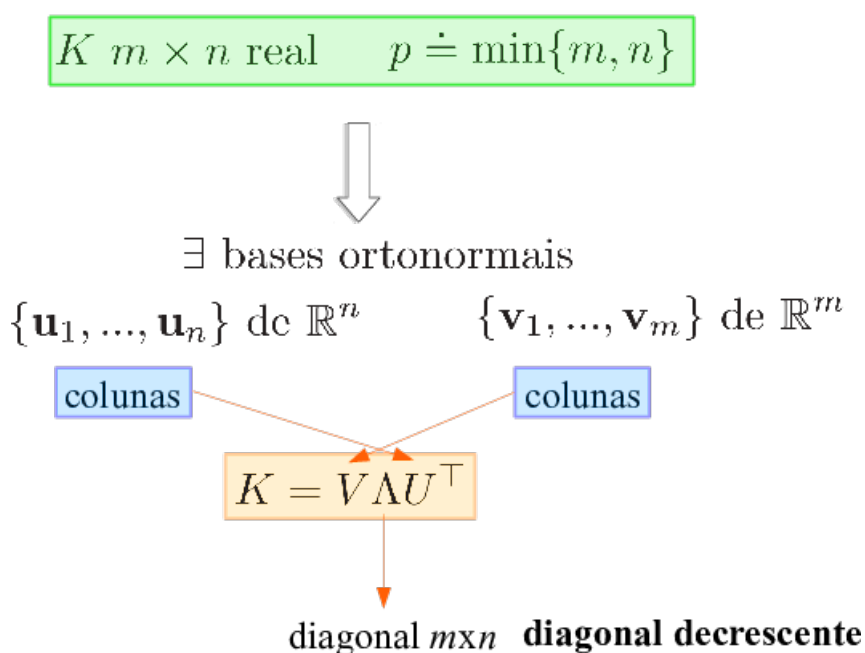


Nessa base, A fica diagonal → diagonalização

- Como fica esse raciocínio para *qualquer* matriz K de tamanho $m \times n$?

- A resposta é SVD. Veja um esquema do enunciado que veremos formalmente a seguir.

SVD - Enunciado



- Note que, diferenciar de A acima, apropriada para autovetores e autovalores, iremos utilizar a letra K para uma matriz geral.

Teorema 6. (Decomposição em Valores Singulares) *Seja K uma matriz real $m \times n$ e $p \doteq \min\{m, n\}$. Então existem bases ortonormais $\{u_1, \dots, u_n\}$ de \mathbb{R}^n e $\{v_1, \dots, v_m\}$ de \mathbb{R}^m tais que*

$$K = V \Lambda U^\top, \quad (7.1)$$

com Λ matriz diagonal $m \times n$ com elementos diagonais

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_n \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

, se $m > n = p$, ou

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

, se $p = m < n$, e as matrizes

$$V = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_m \\ | & & | \end{bmatrix}_{m \times m} \quad e \quad U = \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix}_{n \times n}$$

são ambas ortogonais. Os números $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ são chamados valores singulares de K .

Demonstração. • Note que K define uma transformação linear $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

- Note-se, também, que K é arbitrária. A idéia do teorema é montar uma matriz simétrica, adequada para o cálculo de autovalores e autovetores. Dessa forma, o SVD é reduzido a autovalores e autovetores.
- Há duas formas óbvias de montar uma matriz simétrica a partir de K :
- A primeira forma é $K = K^\top K$, uma matriz simétrica de tamanho $n \times n$.
- A segunda é $K = K K^\top$, uma matriz simétrica de tamanho $m \times m$.
- Os autovetores dessas matrizes dão os vetores singulares
- Os autovalores dessas matrizes são iguais e dão os valores singulares ao quadrado
- A seguir, vamos detalhar esses passos de uma forma menos redundante

1. Monta-se uma base ortonormal para \mathbb{R}^n (domínio)

- Seja $A = K^\top K$, a qual é real e simétrica, satisfazendo as hipóteses do teorema espectral
- Sejam u_1, \dots, u_n os vetores da base ortonormal de \mathbb{R}^n que diagonaliza A

- Sejam $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ tal que

$$Au_i = \lambda u_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.4)$$

2. Monta-se uma base ortonormal para \mathbb{R}^m (contra-domínio) Seja n_0 o índice do menor λ_i e

$$w_i \doteq Ku_i, \quad i = 1, \dots, n_0 \leq p. \quad (7.5)$$

Então os w_i são ortogonais:

$$w_i^\top w_j = u_i^\top K^\top K u_j = u_i^\top A u_j = \lambda_j u_i^\top u_j = \lambda_j \delta_{ij}, \quad (7.6)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker (1, se $i = j$, 0 se $i \neq j$) para $i, j = 1, \dots, n_0$

Definem-se

$$v_i \doteq \frac{w_i}{|w_i|} = \frac{Ku_i}{|Ku_i|}, \quad i = 1, \dots, n_0, \quad (7.7)$$

$$\sigma_i \doteq |Ku_i|. \quad (7.8)$$

Logo, v_1, \dots, v_{n_0} são ortonormais e

$$Ku_i = \sigma_i v_i \quad (7.9)$$

e

$$K^\top v_i = \frac{K^\top K}{\sigma_i} u_i = \frac{\lambda_i}{\sigma_i} u_i. \quad (7.10)$$

Ademais, $\lambda_i = \sigma_i^2$, $i = 1, \dots, n_0$, pois

$$\lambda_1 = \lambda_i u_i^\top u_i = (\lambda_i u_i)^\top u_i = (Au_i)^\top u_i \quad (7.11)$$

$$= (K^\top K u_i)^\top u_i = u_i^\top K^\top K u_i = (Ku_i)^\top (Ku_i) \quad (7.12)$$

$$= \sigma_i^2 V_i^\top V_i = \sigma_i^2, \quad i = 1, \dots, n_0 \quad (7.13)$$

- Definimos $\sigma_i \doteq 0$, para $n_0 < i \leq p$, se existir tal i
- Sejam v_i , $n_0 < i \leq m$, vetores ortonormais completando v_1, \dots, v_{n_0} a uma base ortonormal de \mathbb{R}^m

- Montando-se as matrizes

$$V = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_m \\ | & & | \end{bmatrix}_{m \times m} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix}_{n \times n},$$

as propriedades enunciadas são satisfeitas.

■

Discussão 1

- Dada a decomposição SVD $K = V\Lambda U^\top$, multiplicando-se ambos os lados por U , tem-se:

$$KU = V\Lambda, \quad (7.14)$$

ou seja

$$Ku_i = \sigma_i v_i, \quad (7.15)$$

uma equação análoga à definição de autovalores e autovetores.

- Na equação, parece ser arbitrário que ao se multiplicar um vetor, obtém-se o múltiplo de outro vetor
- É importante que u_i 's e v_i 's definem bases ortogonais para \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , respectivamente

Discussão 2

- Se $K = V\Lambda U^\top$, então $K^\top K = U\Lambda V^\top V\Lambda U^\top = U\Lambda^2 U^\top$, uma diagonalização comum com autovetores e autovalores
- E $KK^\top = V\Lambda^2 V^\top$, uma diagonalização comum com autovetores e
- O SVD fornece bases ortonormais aos seguintes espaços fundamentais de K :

$$\begin{cases} v_1, \dots, v_r \text{ base ortonormal de } \text{Im}(K) \end{cases} \quad (7.16)$$

$$\begin{cases} v_{r+1}, \dots, v_m \text{ base ortonormal de } \ker(K^\top) \end{cases} \quad (7.17)$$

$$\begin{cases} u_1, \dots, u_r \text{ base ortonormal de } \text{Im}(K^\top) \end{cases} \quad (7.18)$$

$$\begin{cases} u_{r+1}, \dots, u_n \text{ base ortonormal de } \ker(K) \end{cases} \quad (7.19)$$

Aula 8

To Do

1. Explicar melhor como retas e planos são não-lineares
2. Figura de transformações não-lineares e não-diferenciáveis (rasgar, formar bicos, etc)
3. enviar para daiara, carlos, francisco
4. Aula: Transformações rígidas: Rotação e translação
5. Aula: Coordenadas homogêneas
6. Aula: QR householder, QR givens
7. Aula: Cholesky
8. Aula: SVD: teorema e demonstração, algumas figs, relembrar autovalores
9. Aula: homogeneização de sistemas e uso de SVD sobredeterminado
10. Aula: Aplicação em imagens
11. Aula: Aplicação em câmeras
12. Aula: Aplicação em reconhecimento