Álgebra Linear Numérica

Notas de Aula

Ricardo Fabbri

28 de Agosto de 2018

Aula 1

O que é uma matriz?

Objetivos

- Aula introdutória informal dando visão geral e uma contextualização do curso
- Motivar alunos de engenharia da computação da importância da disciplina ao final do curso, no contexto de modelagem computacional do IPRJ/UERJ.
- O que é álgebra linear numérica: explicar termos "álgebra", "linear", e "numérica". Por quê são importantes.
- Matrizes como representação numérica de transformações lineares
- Critério de avaliação

O que é uma matriz?

- Uma tabela retangular de números, porém não só.
- Associados à tabela há uma "álgebra": operações algébricas usuais de multiplicação matriz-vetor e matriz-matriz vistas no ensino médio, que parecem arbitrárias.
- Quando falamos de matrizes em engenharia e ciência, sempre incluimos, portanto, tais operações.

- O curso se chama Álgebra Linear Numérica. Até agora, então, falamos algo de "numérico" (matrizes são um monte de números) e de "álgebra" (operações). E o "linear"?
- Matrizes são representações numéricas de transformações lineares.

O que é "Linear"?

- Ao ouvir a palavra "linear", a maioria das pessoas tem em mente uma reta ou um plano.
- "Linearidade" em matemática é uma forma de "simplicidade".
- Esta simplicidade se manifesta em diversos níveis: o geométrico, o simbólico, e o numérico:

Simbólico: No plano simbólico ou algébrico, explica-se os fenômenos de forma operacional e abstrata, sem muita intuição conceitual sobre o significado dos símbolos ou operações.

Definição 1. (Simbolicamente Linear) *Muitos matemáticos irão definir "linear" como a qualidade de uma função ou transformação L tal que*

$$\begin{cases} L(v+w) = L(v) + L(w) & (1.0.1) \\ L(\alpha v) = \alpha L(v), & (1.0.2) \end{cases}$$

para todos vetores v e w, e escalares α.

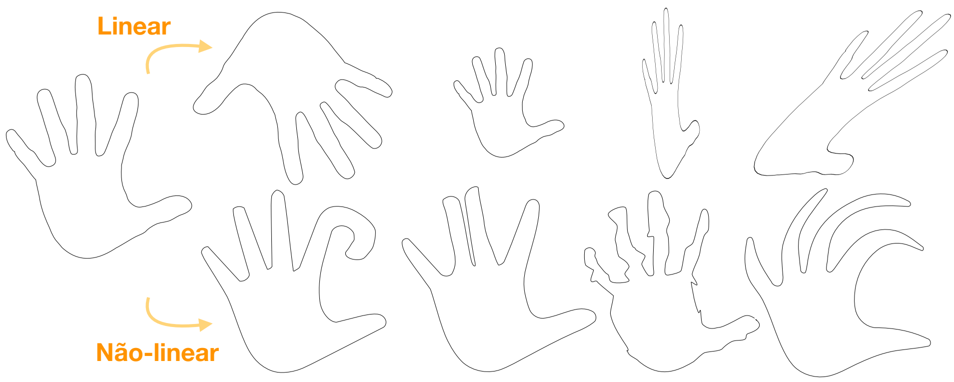
- Tal definição, apesar de suscinta e formalmente elegante, tem pouca concretude imediata.
- "Linear" aqui significa apenas uma simplicidade formal, ou seja, as manipulações algébricas são simples.

Geométrico: No plano que aqui chamamos de "geométrico", "conceitual", ou "visual", os fenômenos são explicados de maneira concreta, mais próxima do objetivo ou de aplicações reais.

No mundo real, o que observamos a princípio não é numérico nem simbólico: uma bola girando, um flúido em movimento, ou um feixe de nêutrons. Muitas vezes, conceitos próximos da realidade, independentes das convenções de símbolos ou números, são difíceis de formalizar e, portanto, não são enfatizados na maioria dos cursos de álgebra linear.

Definição 2. (Geometricamente Linear) *Chama-se "Linear" qualquer operação geométrica que combina quaisquer das seguintes operações simples: girar, esticar e refletir.*

- Tais operações são globais e realizadas sobre um mesmo ponto central (origem)
- O esticamento pode ser realizado por fatores diferentes ao longo de eixos arbitrários, e inclui achatamentos
- Geralmente, esta definição é um teorema na teoria da álgebra linear, visto apenas no final de um primeiro curso. Trata-se do teorema do SVD – *Singular Value Decompositon*, ou decomposição em valores singulares. Trata-se de um análogo de autovalores e autovetores, e é o teorema mais importante a ser explorado neste curso.
- Como exemplo, temos a seguinte figura:



A mão à esquerda sofre transformações lineares na linha acima, e não-lineares na linha abaixo. As transformações acima são lineares pois consistem em girar ou esticar cada ponto da mão globalmente pelo mesmo ângulo ou fatores de esticamento. Já as transformações na linha abaixo são não-lineares pois os pontos ou sofrem deformações locais (diferentes para cada ponto da mão), ou não são meramente girados e esticados.

Numérico: Já definimos no início da aula que uma matriz é a representação numérica de uma transformação linear, seja esta pensada pela definição geométrica ou simbólica.

- Para maior compreensão do significado dos números e operações de uma matriz, na próxima aula revisaremos o conceito de *coordenadas*.
- Também revisaremos como encontrar os números em uma matriz para uma dada transformação linear

O teorema do SVD pode ser descrito numéricamente em termos de matrizes:

Teorema 1. *(SVD numerico - informal) Toda matriz A de tamanho $m \times n$ pode ser escrita da forma:*

$$\overbrace{A}^{\text{Qualquer matriz}} = \underbrace{V}_{\text{Ortogonal}}\,\underbrace{\Lambda}_{\text{Diagonal}}\,\underbrace{U^\top}_{\text{Ortogonal}}$$

Ou seja, toda matriz é uma matriz diagonal junto com matrizes ortogonais. A matriz diagonal realiza esticamento em cada eixo, e as matrizes ortogonais realizam rotações e reflexões.

- O tamanho das matrizes é

$$A_{m\times n} = V_{m\times m}\,\Lambda_{m\times n}\,U^\top_{n\times n} \tag{1.0.3}$$

- Portanto toda matriz é, de certa forma, equivalente a uma matriz diagonal de mesmo tamanho.
- Matrizes diagonais são matrizes da seguinte forma (exemplo 3×3):

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \tag{1.0.4}$$

as quais transformam pontos (x, y, z) da seguinte forma:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \\ cz \end{bmatrix}, \tag{1.0.5}$$

ou seja, esticam cada ponto ao longo de eixos por fatores a, b e c.

- Cada fator de esticamento a, b ou c pode ser zero, o que faz com que a matriz achate completamente uma das dimensões

Observações

- A translação é não-linear. Pode-se mostrar que, mesmo sendo uma operação geométrica simples, a translação não tem as propriedades de simplicidade algébrica como na definiçao simbólica acima, e também não pode ser expressa numericamente como uma multiplicação de matrizes.

- Com alguns artifícios, é possível realizar translação com multiplicação de matrizes, porém é preciso operações não-lineares (projeção).

Para quê servem as transformações lineares, se elas são tão limitadas?

- O mundo real é não-linear

- O "Linear" foi inventado como uma simplificação do não-linear, mas em si não tem aplicação prática.

- O linear não faz sentido sem o não-linear.

- O linear só existe como artefato para modelar o não-linear.

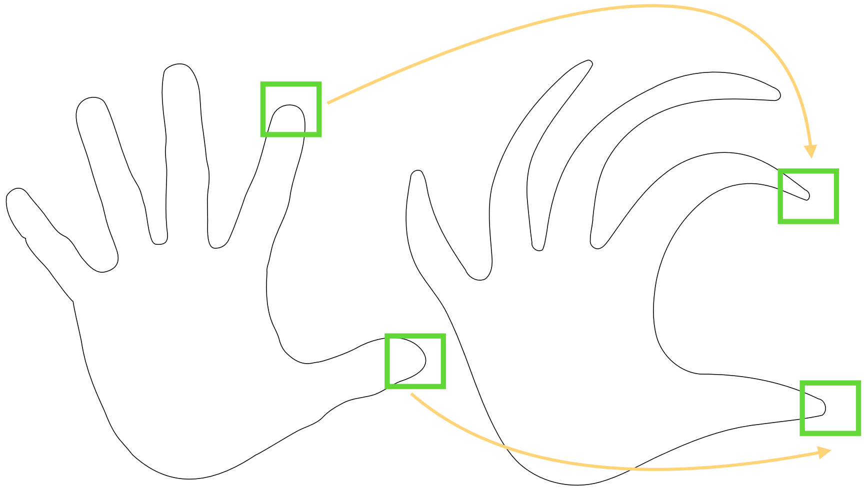
- O paradigma é tomar um fenômeno real (e não-linear) e linearizá-lo, para usar as ferramentas deste curso.

- Em Cálculo 1, estudamos funções não-lineares de uma variável usando a derivada como linearização local (reta tangente). A reta tangente é uma transformação linear de uma variável.

- Daí a importância de se estudar cursos como análise no $\mathbb{R}^n$, onde fenômenos não-lineares são modelados tendo como ferramenta básica a álgebra linear.

- Álgebra linear também é o primeiro contato do aluno com n dimensões, para $n > 3$, e tem importância direta na prática, por exemplo em inteligência artificial, *machine learning*.

- Por exemplo, o paradigma de cálculo e análise no $\mathbb{R}^n$ é estudar o não-linear realizando linearizações locais (diferenciação). Dessa forma, para se deformar a mão de forma mais geral, como na figura abaixo, pode-se usar várias transformações lineares com fatores de esticamento e rotação diferentes para cada ponto:



- Em cada quadrado verde, temos uma deformação próxima de uma rotação e um esticamento.

- Curiosidade: a deformação não-linear da mão é uma função de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ estudada em Análise no $\mathbb{R}^n$. A aproximação da deformação de cada quadrado verde é chamada de diferencial da função não-linear, e sua forma numérica (matricial) é estudada em álgebra linear numérica.

Tarefas

- Site: http://wiki.nosdigitais.teia.org.br/ALN

- Realizar tarefa 0 e tarefa 1 (datas no site).

Aula 2

Revisão de Álgebra Linear

- Relebrar representação numérica de transformações lineares
- Revisar álgebra linear não-numérica (“simbólica”)
  –

Aula 3

To Do

1. Explicar melhor como retas e planos sao nao-lineares
2. Figura de transformações nao-lineares e nao-diferenciaveis (rasgar, formar bicos, etc)