

Plano de Trabalho de Doutorado

Assinaturas de Sinais Geométricos
para Reconstrução 3D Multiperspectiva de Curvas e Superfícies

Carlos Luide Bião dos Reis

Laboratório de Visualização
Instituto Politécnico – IPRJ
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Nova Friburgo, 18 de Maio de 2022

Projetos Relacionados

FAPERJ Jovem Cientista do Nosso Estado E25/2014 204167
FAPERJ APQ1 01/09335-8
FAPERJ E28/2014/204747
UERJ Prociência 2014–2022

1 Contextualização

O presente plano de pesquisa se refere a atividades propostas para o aluno Carlos Luide Bião dos Reis, a serem realizadas a nível de doutorado no Instituto Politécnico – IPRJ/UERJ, Departamento de Modelagem Computacional. Pretende-se trabalhar diretamente em conjunto o prof. Francisco Duarte Moura Neto, do laboratório de tecnologia da informação (LTI), juntando-se os aspectos ativos recentemente das pesquisas de ambos. Pretende-se trabalhar em conjunto com outros grupos de pesquisa em outras instituições em colaboração internacional na realização de projetos e publicação de artigos. Dentre as instituições internacionais envolvidas, tem-se: University of Minneapolis (com Peter Olver), Brown University (com Benjamin Kimia) e University of Liverpool (com Peter Giblin).

2 Introdução

Na presente década está se presenciando um nível de investimentos sem precedentes em ecossistemas de tecnologia para modelagem 3D de fenômenos usando-se múltiplas imagens adquiridas por uma câmera em diferentes posições, múltiplas câmeras, ou vídeo [1]. Esse impacto cada vez maior da visão computacional 3D se deve em grande parte a tecnologias de *structure from motion* (SfM) desenvolvidas na década passada, a qual possibilitou novas ferramentas para resolver problemas chave de forma robusta e automática. No entanto, o vasto potencial das tecnologias 3D permanece ainda inexplorado, em parte devido à rentabilidade de aplicações mais simples e imediatas, e em parte devido a limitações da tecnologia evidentes na medida em que aplicativos práticos são desenvolvidos, como realidade aumentada [1]. Pode-se afirmar que tais limitações se devem a três problemas centrais: o uso de geometria projetiva clássica de pontos, sem a geometria diferencial necessária para modelar estruturas mais gerais; o uso sub-ótimo de múltiplas imagens; e a necessidade de modelos 3D mais estruturados.

O grupo de pesquisa do prof. Ricardo Fabbri tem tradição em um novo paradigma fotogramétrico para a reconstrução 3D de objetos rígidos e não-rígidos a partir de múltiplas imagens e vídeo [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. A pesquisa do prof. Fabbri tem como objetivo suplantiar as limitações supracitadas da tecnologia usual de reconstrução 3D, a qual é baseada em (e limitada por) pontos de interesse. Uma das formas para se atingir esse objetivo é empregando-se a informação disponível em curvas perceptuais em imagens, através de um modelo 3D com progressivos níveis de detalhe baseado no chamado *3D curve sketch* (esboço 3D de curvas) e o *3D curve drawing* (desenho 3D de curvas). Tendo obtido um esboço inicial dos objetos 3D através do casamento de curvas ao longo das múltiplas imagens, o modelo 3D pode ser refinado em um grafo de curvas, similar a um desenho 3D. Superfícies podem ser estendidas sobre esse desenho 3D para gerar uma reconstrução detalhada e robusta a iluminação. Além da proposta do paradigma baseado em curvas, prof. Fabbri e colaboradores foram os primeiros a introduzir a técnica CAD chamada *Lofting* de interpolação de curvas por superfícies à visão computacional em uma versão automática.

Este projeto é um segundo projeto de doutorado que objetiva unir a pesquisa em aprendizagem de máquina baseada em difusão em grafos – proveniente da colaboração entre prof. Ricardo Fabbri e prof. Francisco Duarte Moura Neto – com a pesquisa específica em reconstrução 3D do prof. Fabbri. O primeiro projeto nesta linha foi da aluna de doutorado Juliana Ventura, em andamento, o qual visa melhores algoritmos para inicializar modelos de câmera e de objetos curvilíneos com pouca textura; ou seja, visa os estágios iniciais dos sistemas de reconstrução 3D. O presente projeto, em contraste, visa os estágios finais de reconstrução 3D que tratam da reconstrução 3D de superfícies usando-se curvas, mais especificamente a reconstrução de superfícies de oclusão usando-se contornos aparentes (*apparent contours*).

A Figura 1 mostra um exemplo de técnica já bem estabelecida de reconstrução 3D de superfícies a partir de contornos de oclusão. Estas técnicas, porém, exigem aquisição controlada (condições de estúdio). O objetivo da pesquisa do prof. Fabbri é trabalhar com aquisição não-controlada.

A ideia principal é capitalizar nos avanços recentes e de alto impacto realizados pelo prof. Fabbri durante sua estadia no ICERM / Brown University, ao final de 2018 e no início de 2019 como organizador do Research Cluster em “Visão Algébrica”, onde reuniu e liderou os melhores professores visitantes e seus alunos de doutorado para investigar os problemas desta pesquisa. No início de 2019, o grupo organizado pelo prof. Fabbri conseguiu levar consigo o ex-aluno de mestrado do IPRJ David da Costa de Pinho aos Estados Unidos, e sua tese de mestrado desenvolvida no IPRJ teve grandes desdobramentos. Durante a estadia do prof. Fabbri no ICERM, um dos professores que estavam participando do programa *Nonlinear*

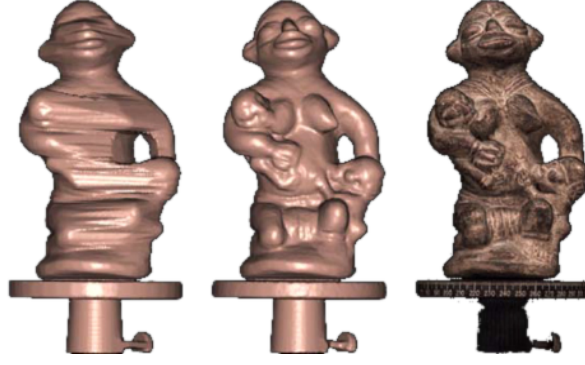


Figura 1: A reconstrução 3D clássica a partir de perfis de superfícies [9] fornece modelos detalhados (direita), porém exigem condições altamente controladas de aquisição. Elas são inicializadas pelo fecho convexo visual do objeto (esquerda), matematicamente o envelope de uma família de superfícies retro-projetadas a partir de uma família de curvas 2D (obtidas filmando-se o contorno do objeto a partir de múltiplas perspectivas).

Algebra ao final de 2018 foi o pesquisador Peter Olver, um matemático dentre os mais produtivos do mundo, que trabalha também em visão computacional e é considerado um dos expoentes dos invariantes diferenciais e grupos de Lie em EDPs. Peter Olver e prof. Fabbri iniciaram uma colaboração mais intensa em 2020, quando Olver enviou dois preprints para o prof. Fabbri abordando o problema de reconstrução 3D por técnicas de invariantes diferenciais. Em especial, os preprints de Olver formulam o problema da reconstrução 3D de superfícies como um problema da reconstrução 3D de sinais através de um conjunto de *assinaturas* desses sinais. Um problema específico que se iniciou junto ao aluno é a reconstrução 3D de superfícies através da assinatura geométrica gerada por uma família de curvas em um vídeo. Tal problema já havia sido abordado por Fabbri [2], porém a sofisticação matemática de Olver será necessária para levar essas técnicas adiante, permitindo incorporar algumas técnicas de reconstrução 3D de superfícies em um sistema prático de fotogrametria digital.

Com o acaboço de aprendizagem de máquina trabalhado entre os prof. Fabbri e prof. Moura Neto nos últimos anos, que envolve difusão em grafos e Teoria de Padrões, juntamente com as técnicas do prof. Peter Olver, será possível alavancar o *expertise* de equações diferenciais do prof. Moura Neto aos problemas de reconstrução 3D trabalhados no grupo do prof. Fabbri. Em especial, a aplicação prática de reconstrução 3D da superfície do mar a partir de múltiplas câmeras de vídeo será visada, sendo muitos dos casos curvas de oclusão conforme descrito nos preprints de Olver.

3 Reconstrução do Desenho 3D a partir de múltiplas perspectivas

Esta seção resume o trabalho anterior de Fabbri *et al.* sobre o paradigma do Desenho 3D para reconstrução de cenas (coleções de objetos) a partir de múltiplas imagens. O fundamento matemático está presente em [10], relacionando as propriedades diferenciais de uma curva 3D $\Gamma(S)$, onde Γ é um ponto 3D (possivelmente em uma curva) no sistema de coordenadas de câmera, e S é uma parametrização da curva 2D correspondente, $\gamma(s)$, onde γ é um ponto em uma imagem e s é uma parametrização da curva 3D. Usando-se a relação $\Gamma(S) = \rho(s)\gamma(S)$, onde ρ é a profundidade do ponto denotado por Γ , a geometria diferencial da curva 3D $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}, K, \dot{K}, \tau, G, G', G''\}$ é relacionada à geometria diferencial da curva $\{\gamma, \mathbf{t}, \mathbf{n}, \kappa, \dot{\kappa}, g, g', g'', \rho, \rho', \rho'', \rho'''\}$, onde $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ é o triedro de Frenet da curva 3D, *i.e.*, a tangente, normal e binormal unitário, K e τ são as curvatura e torção da curva espacial, resp., κ é a curvatura da curva numa imagem, e G e g são as velocidades de parametrização das curvas 3D e 2D, resp., e onde “’” e “'''” simbolizam a diferenciação relativa a um parâmetro espacial arbitrário (S ou s) ou parametrização por comprimento de arco, resp.

Note-se que $\dot{\kappa}$ e \dot{K} compõe modelos intrínsecos de terceira ordem das curvas, completo no mergulho no espaço Euclidiano 3D. Foi demonstrado pela primeira vez por Fabbri *et al.* [10] como essas quantias estão relacionadas. Por exemplo, o vetor tangente à curva espacial pode ser escrito como $\mathbf{T} = \rho'\gamma + \rho g\mathbf{t}$,

e a tangente à curva projetada é $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{T} - e_3^T \mathbf{T} \boldsymbol{\gamma}}{\|\mathbf{T} - e_3^T \mathbf{T} \boldsymbol{\gamma}\|}$, onde $e_3^T = (0, 0, 1)$. Outro exemplo é que a razão das velocidades de parametrização é uma quantidade intrínseca $\frac{g}{G} = \frac{\|\mathbf{T} - e_3^T \mathbf{T} \boldsymbol{\gamma}\|}{e_3^T \mathbf{T}}$. Também foi demonstrada a reconstrução de uma curva espacial (*i.e.*, de torção não-nula) pela primeira vez na literatura.

Essas relações são muito importantes para se relacionar três ou mais imagens de múltiplas vistas ou para reconstruir-se uma cena: foi mostrado como a geometria diferencial em duas vistas (tangente, curvatura, e derivada da curvatura) reconstrói a geometria diferencial em 3D (tangente, curvatura e torção em 3D), Figura 2.

Neste projeto, focaremos na continuidade da pesquisa conjunta de Fabbri com Moura Neto e Olver iniciada em 2020 (após Fabbri ter conhecido Olver no ICERM/Brown University), sendo esta última uma colaboração internacional de grande peso que depende deste projeto de tese. Em especial, neste projeto focaremos nos problemas em torno das equações diferenciais de movimento contínuo propostas por Fabbri [10], as quais regem o movimento de uma curva de contorno de uma superfície suave vista por um vídeo, em termos do movimento da câmera e da geometria da superfície.

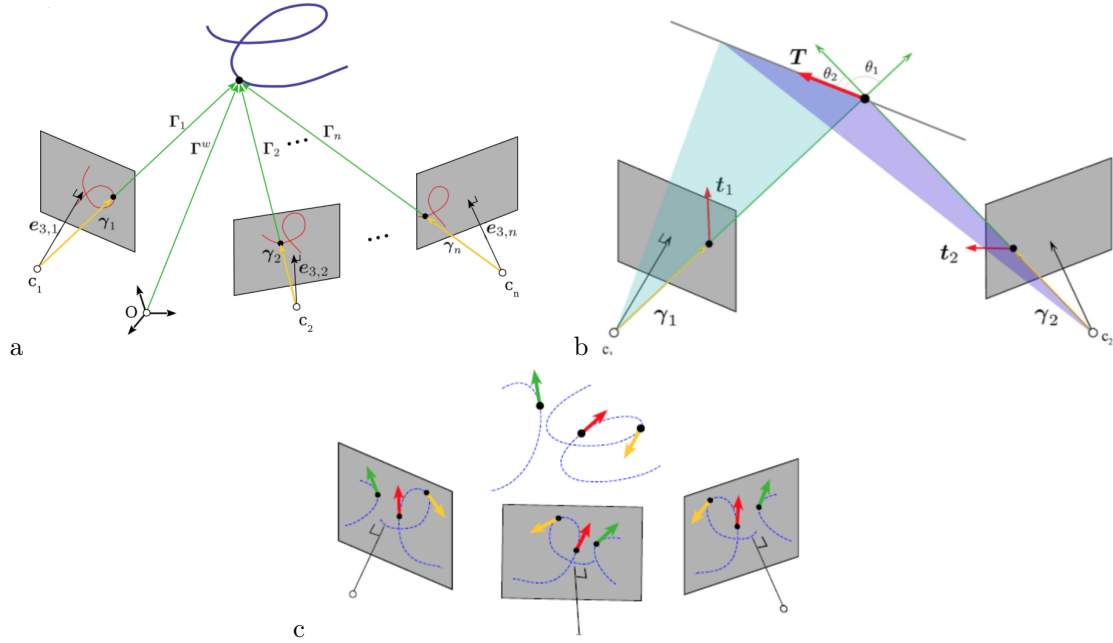


Figura 2: A geometria diferencial de uma curva 3D e suas projeções são relacionadas por equações, no caso um modelo local de primeira ordem (vetor tangente) em duas imagens reconstrói as tangentes no espaço tridimensional, e, através deste, as tangentes (modelos locais) em outras imagens.

A linha de trabalhos mais práticos de Fabbri *et al.* permite extrair um desenho 3D e superfícies acopladas, representando objetos vistos por imagens. As etapas desse sistema prático de reconstrução 3D são ilustradas na figura 3, sendo que nem todos os módulos ainda foram publicados. De maneira resumida, uma vez que as posições de câmeras tenham sido calculadas, usando-se o trabalho desenvolvido por Fabbri junto ao ex-aluno do IPRJ David de Pinho, e junto ao célebre matemático Peter Giblin, cada segmento de curva em uma imagem busca porções correspondentes de curvas em alguma outra imagem para assim hipotetizar um fragmento de curva 3D, hipótese esta que é confirmada ou refutada reprojetoando-se em outras imagens. Esse processo resulta em um conjunto inicial desorganizado de fragmentos 3D denominado “esboço 3D de curvas” [11, 10], Figure 3 (*3D curve sketch*). Neste estágio inicial de reconstrução, o esboço 3D de curvas sofre de erros de agrupamentos e fragmentações, além de redundância já que a informação ainda não foi integrada para diferentes pares de imagens, o que motivou Fabbri *et al.* [12] a explorar a conectividade topológica para produzir um grafo conexo de curvas longas, denominado “desenho 3D de curvas”, ver terceira linha na Figura 3.

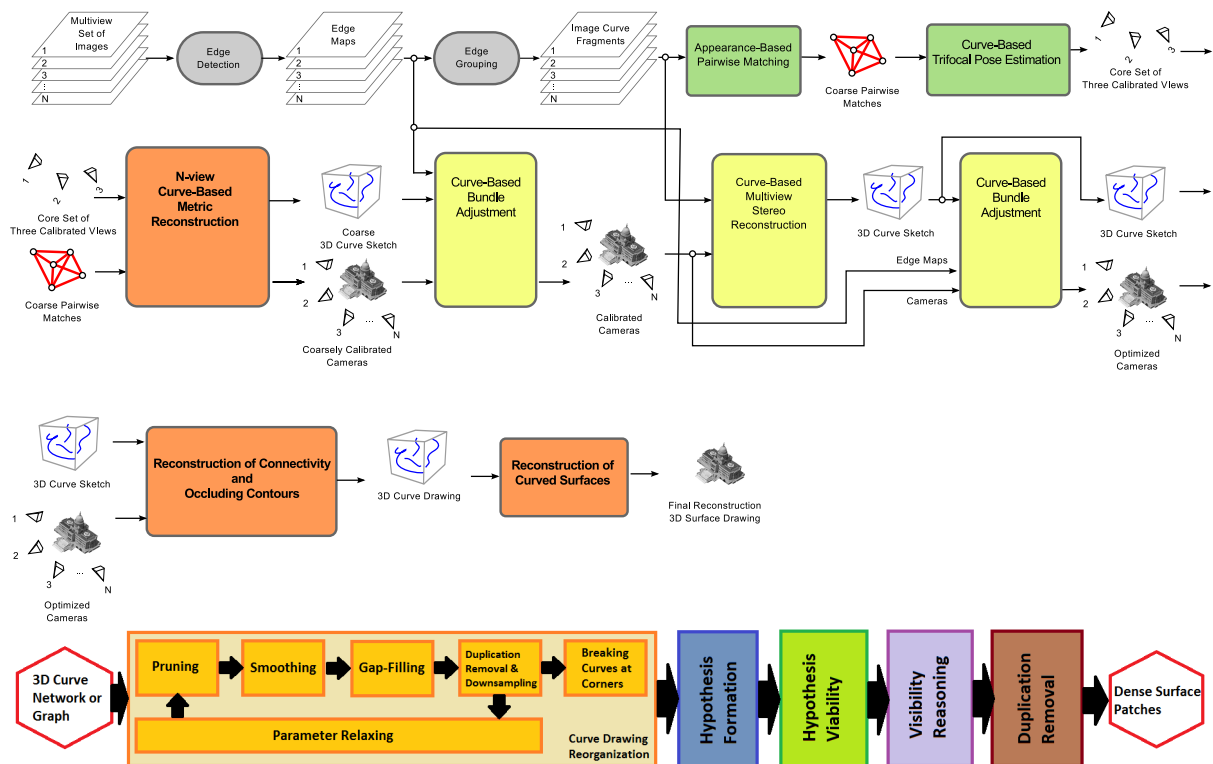


Figura 3: Uma ilustração de um sistema completo de visão 3D baseado em curvas e superfícies. Muitos desses módulos ainda estão em desenvolvimento. *Este projeto se concentra nos últimos dois módulos em laranja: “Reconstruction of Connectivity and Occluding Contours” e “Reconstruction of Curved Surfaces”.*

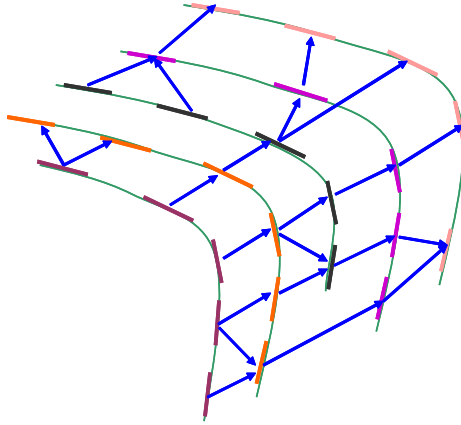


Figura 4: Hipótese local de superfície surge ligando-se uma família de curvas nas imagens. Os segmentos de retas representam bordas de objetos nas imagens, e a família de curvas é gerada variando-se o ponto de vista da câmera.

4 Objetivos

Na Figura 3 ilustrando os módulos do sistema de reconstrução 3D que compõe a pesquisa do prof. Fabbri, *pretende-se concentrar nos últimos dois módulos em laranja: “Reconstruction of Connectivity and Occluding Contours” e “Reconstruction of Curved Surfaces”*. usando-se ferramentas de aprendizagem de máquina baseada em difusão em grafos e teoria de padrões, bem como invariantes diferenciais dentro da teoria de equações diferenciais.

4.1 Objetivo Final: Reconstrução 3D de curvas de Oclusão

4.1.1 Sistema prático

Dada uma curva em uma imagem que permaneceu sem ser reconstruída após o módulo de reconstrução 3D de curvas fixas, as curvas que sobram podem ser perfis de superfícies em 3D. Primeiramente, um sistema prático poderá testar se esta curva é proveniente de uma superfície ou não. Testaremos primeiro essa curva como se fosse proveniente de uma superfície, e geraremos uma reconstrução 3D de uma hipótese de superfície local. Em seguida, testaremos essas hipóteses de que a curva é proveniente de uma superfície. Primeiramente, essa curva em 2D precisa ser casada / rastreada ao longo de pelo menos três imagens (por exemplo, o próximo quadro e o quadro anterior do vídeo), Figura 4, já que a teoria do prof. Fabbri prevê que três imagens são necessárias para uma reconstrução local. Uma vez que uma hipótese de superfície em 3D consistente com as curvas 2D é gerada, pode-se conferir se essa hipótese é fotoconsistente com outras imagens em que esta superfície é fotografada de maneira direta. Isso pode ser feito parametrizando-se a superfície com uma grade, e projetando-se esta grade de pontos de forma que as múltiplas cores interpoladas sejam minimamente consistentes ao longo de outras imagens. Se essa hipótese de superfície local for fotoconsistente, então ela fará parte da reconstrução 3D. A consistência global dessas hipóteses locais pode ser inferida usando-se os modelos de aprendizagem de máquina baseados em difusão, estudos por Moura Neto e Fabbri.

4.2 Objetivo Teórico: Expandir a abordagem teórica de Fabbri para outros grupos de projeção

A abordagem do prof. Fabbri para a reconstrução de curvas e superfícies permite a reconstrução 3D tanto do objeto como da posição das câmeras [10]. Peter Olver também publicou um artigo recente que realiza muitas partes da mesma teoria. No entanto, apesar da teoria de Olver ser mais geral que teoria Perspectiva-Euclidiana de Fabbri, os resultados alcançados por Fabbri foram mais profundos, por exemplo sendo capaz de determinar a reconstrução 3D da torção de curvas, bem como determinar a equação diferencial de curvas e contornos de oclusão. Um dos objetivos iniciais desta pesquisa de doutorado seria procurar trazer a generalidade de Olver à profundidade do trabalho de Fabbri.

5 Justificativa: as vantagens das curvas

Além de possibilitarem as inúmeras aplicações do sistema proposto citadas no início da Introdução, as curvas como *features* básicas para reconstrução 3D e calibração têm as seguintes vantagens. As curvas provenientes de descontinuidade de bordas nas imagens são mais densas e mais bem-estruturadas do que pontos isolados, e representam eficientemente a imagem ou cena 3D subjacente. Elas fornecem um bom compromisso entre uma representação altamente redundante na forma de arrays de pixels, e uma representação altamente esparsa das nuvens de pontos de interesse. Isso permite o cálculo rápido de reconstruções 3D (os *3D curve sketch*), que, apesar de não possuírem superfícies explícitas, são ainda reconhecíveis, estruturadas, e de eficiente manipulação e armazenagem. Essa eficiência representacional é evidenciada em uma tendência recente em computação gráfica de usar renderizações baseadas em curvas (*line-based rendering*) para aplicações de internet que exigem eficiência, e também por razões estéticas. A riqueza estrutural de curvas é ilustrada pelo fato de ser impossível registrar uma nova imagem não-calibrada com relação a uma nuvem de pontos 3D por si só, ao passo que essa tarefa se torna possível com curvas 3D dada a maior estruturação geométrica (p. ex., reprojetoando-se as curvas 3D na nova imagem e alinhando-as às curvas detectadas na imagem). Ademais, é bem sabido que representações baseadas em bordas representam eficiente o conteúdo de uma imagem, o que motiva uma reconstrução de curvas 3D eficiente para armazenar a informação geométrica mais relevante de uma cena 3D. Curvas também têm maior invariância do que pontos de interesse a mudanças de iluminação, são mais estáveis sob uma maior separação entre as imagens, e são mais precisamente localizadas na direção normal. Ademais, estrutura de curvas de bordas em uma imagem é correlacionada com propriedades das superfícies subjacentes: curvas estacionárias (como as de reflectância) são condições de contorno para reconstrução de superfícies, e a variação de contornos de oclusão sob diferentes pontos de vista indica a curvatura da superfície

Impacto tecnológico. As reconstruções 3D propostas, que vão além de nuvem de pontos, têm impactos em aplicações que trabalham com cenas e objetos com baixa textura, como nos casos de objetos feitos pelo homem: cenas urbanas, cenas *indoors*, carros, peças mecânicas, etc. Um exemplo são projetos provenientes do pioneiro Hololens da Microsoft [13], bem como o sistema de visão 3D de robôs e carros autônomos.

6 Metas

Elaboração de Publicações Como metas específicas deste projeto, tem-se a elaboração de publicações (idealmente 1 ou mais por ano) nas principais revistas e conferências da área. Dentre as revistas visadas, temos: International Journal of Computer Vision, IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions in Image Processing, Pattern Recognition, ACM Computing Surveys, e Journal of Mathematical Imaging and Vision. Também pretende-se enviar trabalhos completos (artigos) às mais importantes conferências na área, a saber: IEEE CVPR (Computer Vision and Pattern Recognition), IEEE ECCV (European Conference in Computer Vision), IEEE ICCV (International Conference in Computer Vision), ACM SIGGRAPH, e o IEEE SIBIGRAPH. Por se tratar de uma pesquisa interdisciplinar, também pretende-se publicar em periódicos em matemática pura, matemática aplicada e análise numérica.

7 Metodologia

A execução do projeto será dividida nas seguintes frentes, visando atingir as metas descritas na seção anterior, na ordem descrita na próxima seção:

- **Estudo de reconstrução 3D usando geometria diferencial e equações diferenciais** Será estudado o trabalho do prof. Fabbri [10], bem como o trabalho do prof. Olver [14], procurando unir a generalidade à profundidade de resultados de cada técnica. Ao mesmo tempo, a teoria necessária para a compreensão de ambos os artigos será estudada.
- **Estudo e co-autoria dos preprints de Peter Olver.** Serão estudados e, possivelmente, co-autorados, dois preprints (não publicados), enviados por Peter Olver ao prof. Fabbri [15, 16].

Ambos lidam com a reconstrução 3D das superfícies de objetos como um problema de reconstrução de sinais a partir de assinaturas ligadas a a invariantes. Nesse sentido, também será aprofundada Geometria Riemanniana, equações diferenciais e grupos de Lie.

- **Estudo de Mapas de Difusão e Teoria de Padrões.** Para se atingir uma solução global e para que se possa modelar certos parâmetros aprendendo-se de exemplos (dados), o aluno irá estudar o livro de Moura Neto e Fabbri sendo escrito sobre Mapas de Difusão e modelagem computacional.
- **Validação e Experimentos de Larga escala.** Pretende-se realizar experimentos na reconstrução em larga escala de objetos industriais partir de milhares de fotografias ou quadros de vídeo. A validação será realizada através de comparação com objetos conhecidos *a priori* e impressos em impressoras 3D.
- **Desenvolvimento de Software livre para Visão Computacional.** Pretende-se continuar o desenvolvimento de software livre, como uma forma de contribuir para a sociedade, angariar colaborações, garantir um controle de qualidade, e disseminar a pesquisa.
- **Elaboração de Publicações como descrito nas metas.**

8 Cronograma das Atividades

A tabela abaixo mostra o cronograma para as principais frentes de atuação descritas na seção anterior. Para a execução deste projeto, o período foi dividido em etapas aproximadamente anuais.

Etapas anuais do doutorado	2	3	4
Estudo comparativo de [2] (prof. Fabbri) e [14]	X		
Estudo e co-autoria dos preprints de Peter Olver [16, 15]	X		
Estudo de Mapas de Difusão e Teoria de Padrões	X	X	
Experimentos de Larga Escala		X	X
Escrita de Software Livre	X	X	X
Elaboração de Publicações	X	X	X

9 Conclusão

Este projeto propõe o avanço do paradigma baseado em curvas e superfícies para reconstrução 3D e calibração de câmeras, complementando as técnicas atuais baseadas em pontos, as quais estão sendo usadas em larga escala. A tecnologia proposta extenderá a capacidade das técnicas atuais, permitindo o processamento de uma maior variedade de objetos de interesse industrial, ao mesmo tempo impondo menos restrições na aquisição. A pesquisa também irá alavancar a colaboração internacional com o matemático Peter Olver, que também pesquisa visão computacional.

Referências

- [1] Apple ARKit Team, “Understanding arkit tracking and detection.” WWDC, 2018. 1
- [2] R. Fabbri and B. B. Kimia, “Multiview differential geometry of curves,” *International Journal of Computer Vision*, vol. 117, pp. 1–23, 2016. 1, 2, 7
- [3] R. Fabbri, *Multiview Differential Geometry in Application to Computer Vision*. Ph.D. dissertation, Division Of Engineering, Brown University, Providence, RI, 02912, July 2010. 1
- [4] R. Fabbri, P. J. Giblin, and B. B. Kimia, “Camera pose estimation using first-order curve differential geometry,” in *Proceedings of the IEEE European Conference in Computer Vision*, Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2012. 1
- [5] R. Fabbri and B. B. Kimia, “High-order differential geometry of curves for multiview reconstruction and matching,” in *Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 645–660, Springer, 2005. 1

- [6] R. Fabbri and B. B. Kimia, “3D curve sketch: Flexible curve-based stereo reconstruction and calibration,” in *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, (San Francisco, CA, USA), IEEE Computer Society Press, 2010. [1](#)
- [7] A. Usumezbas, R. Fabbri, and B. B. Kimia, “The surfacing of multiview 3d drawings via lofting and occlusion reasoning,” in *The IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, July 2017. [1](#)
- [8] A. Usumezbas, R. Fabbri, and B. B. Kimia, “From multiview image curves to 3D drawings,” in *Proceedings of the European Conference in Computer Vision*, 2016. [1](#)
- [9] C. H. Esteban and F. Schmitt, “Silhouette and stereo fusion for 3d object modeling,” *Comput. Vis. Image Underst.*, vol. 96, pp. 367–392, Dec. 2004. [2](#)
- [10] R. Fabbri and B. B. Kimia, “Multiview differential geometry of curves,” *International Journal of Computer Vision*, vol. 120, no. 3, pp. 324–346, 2016. [2](#), [3](#), [5](#), [6](#)
- [11] R. Fabbri, *Multiview differential geometry in application to computer vision*. PhD thesis, Brown University, 2011. [3](#)
- [12] A. Usumezbas, R. Fabbri, and B. B. Kimia, “From multiview image curves to 3D drawings,” in *European Conference on Computer Vision*, pp. 70–87, Springer, 2016. [3](#)
- [13] I. Nurutdinova and A. Fitzgibbon, “Towards pointless structure from motion: 3d reconstruction and camera parameters from general 3d curves,” in *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*, pp. 2363–2371, 2015. [6](#)
- [14] I. A. Kogan and P. J. Olver, “Invariants of objects and their images under surjective maps,” *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 36, p. 260–285, Jul 2015. [6](#), [7](#)
- [15] P. J. Olver, “Outline signature of a convex body,” *draft: unpublished preprint*, 2020. [6](#), [7](#)
- [16] P. J. Olver, “Reconstruction of bodies from their projections,” *draft: unpublished preprint*, 2020. [6](#), [7](#)

R. Fabbri