

Medida de valor em risco através da teoria do valor extremo: comparativo contra outras abordagens[☆]

Rafael Felipe Bressan^{a,1,*}, Daniel Augusto de Souza^{a,1}, Adriano de Amarante^{a,1}

^a *Avenida Madre Benvenuta, 2007 - Santa Mônica Florianópolis - SC 88035-901*

Abstract

Este trabalho avalia sete modelos univariados de estimação de valor em risco para seis índices de ações das Américas. Modelos condicionais e incondicionais são testados em um período fora da amostra abrigando mais de nove anos de observações diárias. A partir de três procedimentos de avaliação, cobertura incondicional, teste de independência de violações e conjunto de confiança de modelos, os melhores resultados são apresentados pelo modelo que une a teoria do valor extremo e modelagem condicional de variâncias heterocedásticas, o qual leva em conta o regime variável nas volatilidades das perdas assim como excesso de curtose.

Keywords: Value-at-Risk, Extreme Value Theory, Peaks over Threshold, Conditional EVT, GARCH models

1. Introdução

A medição do risco de mercado ao qual os portfólios dos investidores está sujeito é objeto de devoção de esforços tanto por parte das instituições e investidores em geral como por parte dos reguladores. Instituições financeiras - IF em todo o mundo, de acordo com suas regulações locais e com os princípios de Basileia (*Basel Committee on Banking Supervision* - BCBS do Banco de Compensações Internacionais - BIS) são obrigadas a reservar uma parcela de seu capital como provisionamento contra flutuações adversas do mercado, como forma de mitigar seu risco de insolvência.

Estas instituições devem manter seu risco de insolvência controlado, e a percepção externa deve ser tal que não haja desconfiança do público com sua habilidade em controlar este risco. Se a confiança na instituição se esvai e a

[☆] Agradecemos a FAPESC pelo o apoio ao desenvolvimento da pesquisa que resultou no presente artigo.

* Autor para correspondência

Email address: rfbressan@gmail.com (Rafael Felipe Bressan)

¹ Depto. de Economia/Esag/UEDESC

percepção de risco é elevada, rapidamente uma crise de liquidez pode surgir, com depositantes sacando seus recursos ao mesmo tempo em que outras fontes de *funding* também se tornam escassas. Em tal situação, é natural o banco ou IF, ir ao mercado para vender seus ativos e levantar os recursos necessários. Neste momento uma crise de liquidez no mercado pode levar a uma possível insolvência da IF pois, não há garantias que no mercado aberto, os ativos do banco serão justamente avaliados e arrematados.

Uma importante característica das séries de retornos financeiros é sua alta volatilidade, não constante e tampouco seguindo uma distribuição Normal. Assim, eventos extremos, e neste caso estamos interessados em perdas de grande magnitude, acontecem com uma frequência alta demais para serem descartadas como apenas *outliers*, e portanto passaram a atrair a atenção dos participantes do mercado, entre eles os investidores e reguladores. Estas observações induziram uma gama de estudos, empíricos e teóricos, voltados a explicar o comportamento dos retornos de séries financeiras e modelar de forma adequada as caudas da distribuição destes retornos. Não somente estes estudos são de grande relevância para o gerenciamento de risco nas instituições financeiras, como também são obrigatórios segundo o acordo de Basileia, uma vez que este requer o cálculo do Valor em Risco - VaR, para então a instituição poder projetar o seu nível requerido de capital.

De acordo com os princípios de Basileia III, BCBS (2011, 2013, 2014), as instituições financeiras supervisionadas pelos Bancos Centrais devem manter *buffers* de capital contra riscos de mercado, crédito, liquidez, entre outros. Dentro dos riscos de mercado, as duas formas mais usuais de fazer a quantificação destes são os métodos de Valor em Risco - VaR e o *Expected Shortfall* - ES. Este último relacionado ao primeiro, sendo definido como o valor esperado das perdas que excedem o VaR calculado para um determinado nível de confiança.

VaR é um quantil alto α da distribuição de perdas de um ativo ou portfólio em um determinado período de tempo, ao passo que ES é o valor esperado das perdas que excedem VaR, para um mesmo período e nível de confiança α .

O método VaR para cálculo de risco de mercado ao qual um portfólio está sujeito foi primeiramente introduzido através de RiskMetrics (1995), uma metodologia adotada pelo banco J. P. Morgan. Vem desde então sendo amplamente adotado pela indústria financeira e largamente estudado pela academia. Inúmeras variantes do modelo foram propostas e continuam sendo utilizadas com o passar dos anos. Para o cálculo do VaR é necessária uma suposição acerca da distribuição dos retornos, e por conseguinte do comportamento da cauda desta.

As variações na metodologia original de estimação do VaR surgem principalmente em função de críticas a abordagem proposta, a qual inclui a suposição de retornos independentes e igualmente distribuídos, covariâncias constantes entre os ativos de um portfólio e a distribuição normal dos retornos.

Por meio de dois artigos Artzner et al. (1997) e Artzner et al. (1999), foi introduzido na literatura o conceito de medida coerente de risco. Para uma medida ser considerada coerente, primeiramente foram introduzidas quatro propriedades cunhadas através de axiomas, as quais estas medidas deveriam possuir, invariância translacional, sub-aditividade, homogeneidade positiva, e

monotonicidade.

VaR especificamente não possui a propriedade da sub-aditividade para alguns casos, sendo esta uma das grandes críticas ao VaR. Desta forma, em casos específicos, é possível uma carteira diversificada em que sejam computados o VaR de cada um de seus ativos, ser agregada e possuir um VaR do portfólio maior que o maior VaR de seus componentes, algo que não condiz com uma medida coerente de risco. Para contornar este fato, Acerbi & Tasche (2002) propuseram o *Expected Shortfall* e comprovam que este é uma medida coerente de risco. Além de ser coerente, o ES possui uma segunda vantagem com relação ao VaR, considerando que o ES nos informa uma medida de tendência central do tamanho das perdas que excedem o valor do quantil VaR. Ou seja, o VaR nos informa apenas que uma proporção α das perdas serão menores que a medida, mas nada nos informa se esta perda extraordinária de fato ocorrer. Mesmo sendo criticado como uma medida não coerente de risco, o VaR continua a ser amplamente utilizado, mesmo que agora em conjunto com o ES.

Teoria do valor extremo - EVT, é um ramo da estatística que lida diretamente com eventos raros, extremos. Seu objetivo é modelar o comportamento assintótico de eventos que se distanciam muito da mediana de uma distribuição. Justamente por esta característica, a EVT está sendo utilizada para modelar riscos que possuem distribuição com caudas longas, um dos fatos estilizados bem conhecidos sobre retornos de ativos financeiros.

Ao utilizar a EVT, e mais especificamente o método conhecido como *peaks over threshold* – POT, se está interessado em modelar apenas a parte da cauda da distribuição das perdas de um ativo financeiro maiores que um determinado valor de limiar u . É da modelagem desta cauda, portanto, que se calcula a estimativa de VaR.

A teoria do valor extremo vem sendo utilizada nas finanças a algum tempo. Devido as características das séries financeiras, por exemplo a leptocurtose, a distribuição normal para os retornos vem sendo rechaçada, enquanto outras distribuições mais adequadas assumem o posto para descrever o comportamento das perdas e retornos de séries financeiras. A EVT, ao modelar distribuições com caudas longas, pode ser utilizada para esta finalidade. A introdução da EVT em dois estágios para a estimação de medidas condicionais de risco pode ser atribuída a McNeil & Frey (2000). Neste artigo os autores propuseram um modelo para a estimação do VaR e ES de forma condicional, tanto para período de um dia como para dez dias a frente, de acordo com o normativo de Basileia vigente a época. Seu modelo, que leva em conta as longas caudas e a natureza estocástica da volatilidade, se ajustam de forma mais fidedigna aos dados. Danielsson & Morimoto (2000) fizeram uma crítica aos modelos condicionais de cálculo do VaR para o mercado japonês e chegaram a conclusão que um modelo EVT incondicional, inclusive sem o estágio de filtragem inicial, era mais adequado para fins práticos.

Byström (2004) encontrou que ambas abordagens da EVT, máximos em bloco como POT, combinadas com análise de séries temporais tradicional (ARIMA e GARCH), no que se configura uma abordagem condicional para a estimação do VaR, têm os melhores resultados tanto em períodos ditos tranquilos como

em épocas de alta volatilidade. Voltando a aplicação da EVT para mercados emergentes, Gencay & Selcuk (2004) utilizaram a teoria de valor extremo para o cálculo de VaR e teste de estresse. Seus resultados apontam que a EVT se torna melhor a medida que o quantil utilizado para o cálculo se eleva. Além disso, encontraram que as caudas da distribuição de retornos se comportam de maneira diferente entre ganhos e perdas. Uma comparação entre diversos modelos de previsão de VaR foi realizada por Kuester et al. (2006). Encontraram que a grande maioria dos modelos subestima o risco, mesmo sendo aceitáveis do ponto de vista regulatório, sendo que o modelo condicional GARCH-EVT está entre as melhores estimativas.

Karmakar & Shukla (2014) retomam o modelo em dois estágios e fizeram uma comparação entre o modelo EVT condicional e outros modelos já consagrados no cálculo de VaR em 3 mercados desenvolvidos (EUA, Reino Unido e Japão) e 3 mercados emergentes asiáticos (Índia, Hong Kong e Coreia do Sul). O modelo GARCH adotado no primeiro estágio é diferente para cada mercado, porém com uma particularidade comum, todos são modelos assimétricos. Novamente encontram que o modelo EVT condicional é superior aos demais através de testes de cobertura incondicional e condicional.

Chavez-Demoulin et al. (2005) e Herrera & Schipp (2013) tomam um caminho diferente para modelar a EVT. Enquanto o primeiro adota o método de processos pontuais de auto-excitação², que dadas algumas condições, converge para o método POT, o segundo modela explicitamente as durações de tempo entre as observações de extremos, ou seja, as perdas em excesso ao limiar escolhido. A magnitude destas perdas continua a ser modelada através da distribuição generalizada de Pareto - GPD. Seu modelo é então chamado de *autoregressive conditional duration peaks over threshold model* - ACD-POT.

Rocco (2014) fez uma grande revisão sobre o uso da EVT em finanças. As principais aplicações encontradas foram o teste de suposições para diferentes distribuições dos dados, cálculo de medidas de risco como o VaR e ES, alocação de ativos sob restrições e otimização de portfólios, e no estudo de contágio e dependência entre mercados sob condições de alto estresse.

Mais recentemente a EVT encontrou outras formas de aplicação e cálculo. Chavez-Demoulin et al. (2016) sugeriram um modelo onde a frequência e a severidade das perdas podem ser modeladas através da EVT com covariantes. Karmakar & Paul (2016) por sua vez, fizeram uma aplicação do modelo EVT condicional a retornos intra-diários de dezesseis mercados diferentes.

O cálculo de VaR em instituições financeiras e bancos comerciais vem sendo implementado e é requerimento do comitê de Basileia. A EVT entra como uma das metodologias utilizadas neste cálculo, Longin (2000) a utilizou e propôs um modelo para agregar o risco de uma posição de mercado, em contraste a modelos univariados apenas. Testes de estresse podem ser realizados através de sua técnica. Utilizando-se de dados reais de seis grandes bancos comerciais

²Para maiores detalhes sobre processos pontuais de auto-excitação, Hawkes (1971) é a referência original.

americanos, Berkowitz & O'Brien (2002) analisou a precisão de seus modelos VaR. Ele encontrou que os bancos são amplamente conservadores em suas estimativas de VaR, com níveis de cobertura muito acima dos valores nominais. Wong et al. (2003) promoveu um estudo sobre as implicações da precisão do modelo VaR no gerenciamento do risco de mercado em bancos. Ele adotou os critérios de Basileia para realizar um estudo de *backtest* e verificou que modelos baseados em previsões de volatilidade através de GARCH não estão de acordo com estes critérios por muitas vezes. Já em um estudo recente, O'Brien & Szerszeń (2017) fez uma avaliação dos modelos de risco de mercado de bancos no pré, durante e pós crise financeira de 2008. Encontrou que tanto no pré quanto no pós crise, os bancos se comportaram de maneira excessivamente conservadora, entretanto, durante a crise financeira as violações ao VaR excederam muito seu valor esperado assim como aconteceram de forma agrupada, um sinal de má especificação nos modelos adotados. O autor comparou estes resultados com um modelo baseado em GARCH e verificou que esta alternativa é muito superior aos atuais modelos.

Este trabalho busca avaliar, através de testes estatísticos, a capacidade preditiva de sete modelos distintos de cálculo da métrica de valor em risco comumente encontrados na literatura, por meio da técnica de *backtest*. Os testes aplicados abrangem características importantes do VaR como cobertura incondicional, independência entre violações e superioridade do modelo dada uma função de perda adequada.

O restante deste artigo está assim organizado, na seção 2 é apresentada a teoria do valor extremo, seus principais resultados para séries *iid* utilizando o método *peaks over threshold* e o modelo em dois estágios com filtragem inicial a partir de um modelo AR-GARCH. Na seção 3 são apresentados os índices e seus períodos em análise. Algumas estatísticas descritivas dos retornos são calculadas. Já em 3.1 e 3.2 o modelo EVT condicional utilizado é revisto e seus parâmetros de análise são determinados a partir de uma amostra de trabalho (período dentro da amostra). Em 4, a avaliação no período fora da amostra dos modelos é realizada, testes estatísticos para cobertura condicional e incondicional são feitos na subseção 4.1, enquanto que conjuntos de confiança de modelos são apresentados para cada um dos índices em 4.2. Ao final, uma conclusão sobre os resultados encontrados e no Appendix A são apresentados em maiores detalhes os modelos analisados.

2. Modelando caudas e medidas de risco associadas com EVT

Considere uma amostra de uma variável aleatória - *va* - cujas observações sejam independentes e igualmente distribuídas - *iid*, X_i , com $i \in \mathbb{N}$, que representem as perdas financeiras de um determinado ativo, com uma função de distribuição - *df* - desconhecida $F(x) = P(X_i \leq x)$. Seja u um valor de limiar a partir do qual perdas acima deste valor sejam consideradas extremas. Os valores de excesso serão, portanto, $X_i - u$.

A EVT está interessada em investigar o comportamento da distribuição dos máximos desta *va* dados por $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ para valores de n a medida que $n \rightarrow \infty$. A sequência M_n é chamada de máximos em bloco e foi

demonstrado através do conhecido teorema de Fisher-Tippett-Gnedenko³, que a única distribuição para a qual M_n converge com $n \rightarrow \infty$ é a distribuição de valores extremos generalizada - GEV. Se esta distribuição for denotada por H_ξ , com ξ um parâmetro da distribuição, então se diz que $F \in MDA(H_\xi)$, F pertence ao domínio de máxima atração de H_ξ .

Definição 1 (GEV). Distribuição de valores extremos generalizada, é definida por sua função densidade de probabilidade - pdf - a qual é dada por:

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}), & \xi \neq 0, \\ \exp(-e^{-x}), & \xi = 0, \end{cases} \quad (1)$$

O parâmetro ξ é conhecido como parâmetro de forma da distribuição e dependendo deste valor tem-se diferentes tipos de distribuição (casos particulares da GEV). Quando $\xi = 0$ a distribuição resultante é uma Gumbel, quando $\xi > 0$ uma Fréchet surge, e por fim quando $\xi < 0$ tem-se uma Weibull.

Para as aplicações financeiras não necessitamos calcular a qual MDA pertencem nossas distribuições contínuas, bastando saber que basicamente todas as distribuições de utilidade prática estão contidas em $MDA(H_\xi)$ para algum valor de ξ (McNeil et al., 2015, p. 139).

2.1. Excessos acima de um limiar

O método POT para calcular a função de distribuição dos valores que excedem um determinado limiar de um conjunto de dados vem sendo empregado no mundo financeiro para ajustar as caudas das distribuições de retornos, ou perdas, dos ativos. Este método é preferido aquele de máximos em bloco, pois, desperdiça uma quantidade menor de dados da série original. Qualquer valor que exceda o limiar pré-determinado é considerado na distribuição dos excessos. Esta, por sua vez, é definida como:

Definição 2 (Distribuição dos excessos). Seja X uma variável aleatória com função de distribuição F . A distribuição dos excessos sobre um limiar u tem a seguinte função de distribuição:

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (2)$$

para $0 \leq x < x_F - u$, onde $x_F \leq \infty$ é o limite direito da distribuição F .

Uma importante distribuição que surge na modelagem dos excessos sobre um limiar é a distribuição generalizada de Pareto – GPD, que segue.

³Os três artigos que fundamentam este teorema são: Fisher & Tippett (1928), Gnedenko (1941, 1943).

Definição 3 (GPD). A função de distribuição de Pareto Generalizada é definida como:

$$G_{\xi,\psi}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\psi}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\psi}\right), & \xi = 0, \end{cases} \quad (3)$$

onde $\psi > 0$, e $x \geq 0$ quando $\xi \geq 0$ ou $0 \leq x \leq -\psi/\xi$ quando $\xi < 0$.

Os parâmetros ξ e ψ são conhecidos respectivamente como parâmetros de forma e escala da distribuição. A GPD tem papel fundamental na teoria de valor extremo em função do teorema de Pickands-Balkema-de Haan⁴, onde é demonstrado que, para um valor suficientemente alto do limiar u , a distribuição dos excessos $F_u(x)$ pode ser aproximada por uma GPD, $G_{\xi,\psi}(x)$.

O que este teorema prova é que para distribuições as quais os máximos em bloco normalizados convergem para uma GEV na forma da equação (1), então a distribuição dos excessos acima de um limiar destas mesmas distribuições convergem para (3), dado um valor de limiar u adequado. Como para fins práticos basicamente todas as distribuições contínuas de fato estão no $MDA(H_\xi)$ para algum valor de ξ , temos que a GPD é a distribuição a ser escolhida para modelar excessos acima de um limiar.

Ao se fazer esta suposição que a distribuição dos excessos é igual a (3), pode-se então a partir dos dados estimar os parâmetros de forma e escala e, portanto, modelar a cauda direita da distribuição de perdas de forma parametrizada com o auxílio da equação (2).

Dada a parametrização de uma GPD, é interessante saber o valor esperado desta distribuição, uma vez que esta medida de valor central fornece importante informação sobre a quantidade de risco que se está medindo, assim como a informação de que a própria distribuição foi ajustada aos dados de forma satisfatória.

O valor esperado de uma variável aleatória não negativa pode ser computado através da integral de sua cauda, $P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$. A cauda de (3) é, para $\xi \neq 0$, $(1 + \xi x/\psi)^{-1/\xi}$.

Desta forma, o valor esperado de $G_{\xi,\psi}(x)$, converge para:

$$E[G_{\xi,\psi}(X)] = \frac{\psi}{1 - \xi} \quad (4)$$

desde que $\xi < 1$.

Definição 4 (função média dos excessos). A função média dos excessos de uma variável aleatória X com média finita é dada por:

$$e(u) = E(X - u | X > u) \quad (5)$$

Ou seja, a equação (5) representa o valor esperado da função de distribuição dos excessos dada pela Definição 2. Ela representa a média de F_u como uma

⁴As referências originais são: Pickands (1975) e Balkema & de Haan (1974).

função do limiar u . Por vezes também é conhecida como função média de vida residual (*mean residual life function*).

Para uma variável distribuída na forma de $G_{\xi,\psi}(x)$, o parâmetro de escala é uma função linear em u dado por $\psi(u) = \psi + \xi u$, (Embrechts et al., 1997, Teorema 3.4.13(e)). Utilizando-se deste fato e da equação (4) chegamos ao cálculo da função média dos excessos para uma GPD, dada por:

$$e(u) = \frac{\psi + \xi u}{1 - \xi} \quad (6)$$

onde $0 \leq u < \infty$ se $0 \leq \xi < 1$ e $0 \leq u \leq -\psi/\xi$ se $\xi < 0$. É possível observar que de fato a função média dos excessos é linear em u . Esta é uma característica importante de uma distribuição de Pareto generalizada e que pode ser utilizada para auxiliar a escolha de um valor adequado do limiar u de tal forma que a suposição de convergência $F_u(x) \rightarrow G_{\xi,\psi}(x)$ seja válida.

Assim, quando da análise de uma determinada distribuição de perdas F e se deseja ajustar a cauda desta para perdas acima de um valor limiar u a uma GPD, é necessário primeiramente determinar um valor adequado de u que garanta a suposição de convergência. Um método frequentemente utilizado é o gráfico da função média dos excessos com relação a u . Analisando este gráfico, escolhe-se o menor valor de u para o qual a partir deste ponto a relação $e(u)$ vs u torna-se linear.

Deseja-se o menor valor de u para o qual a relação é linear pois, mesmo o método POT implica em grande perda de observações da série temporal, já que apenas os valores acima deste limiar são utilizados para fazer a estimação dos parâmetros ξ e ψ da GPD. Portanto, existe um *trade-off* na escolha do valor limiar u , escolhendo um valor muito baixo obtém-se uma boa quantidade de dados para estimar os parâmetros da GPD, mas a própria distribuição resultante não será GPD, uma vez que não estaremos trabalhando na região onde a relação $e(u)$ vs u é linear, e portanto os parâmetros estimados serão viesados. Por outro lado, um valor limiar muito alto impõe o custo de trabalhar com poucos dados para fazer a estimação dos parâmetros da distribuição e por conseguinte, os erros padrões dessas estimativas serão elevados.

Considerando este *trade-off*, uma saída é buscar minimizar o erro quadrado médio - MSE do parâmetro estimado. Idealmente deseja-se ter viés zero e variância mínima para um estimador entretanto, na impossibilidade de tal realização, um estimador relativamente eficiente é aquele que possui o menor MSE. Em (McNeil et al., 2015, seção 5.2.5, p. 161-162) é explorada, através de simulação de Monte Carlo, esta relação entre a escolha do limiar u e o MSE do parâmetro ξ obtido através do método POT e também da própria medida de risco $Var_{99\%}$. Chegam a conclusão que uma escolha de limiar tal que o número de excessos a este fique acima de 100 observações é adequado, e mais importante, a partir destas 100 observações o MSE é relativamente robusto, se elevando lentamente a partir de seu valor mínimo.

2.2. Estimando o VaR

Através da modelagem da cauda da distribuição F de perdas por uma GPD, é possível calcular de forma semi-paramétrica a medida de risco VaR em função dos parâmetros estimados de (3) e da distribuição empírica de F .

Sob a suposição de convergência a cauda da distribuição F , $\bar{F}(x)$, para $x \geq u$ é dada por:

$$\begin{aligned}\bar{F}(x) &= P(X > u)P(X > x|X > u) \\ &= \bar{F}(u)P(X - u > x - u|X > u) \\ &= \bar{F}(u)\bar{F}_u(x - u) \\ &= \bar{F}(u) \left(1 + \xi \frac{x - u}{\psi}\right)^{-1/\xi}\end{aligned}\tag{7}$$

Aqui x são os valores a serem observados das perdas, e portanto $x - u$ são as perdas em excesso ao limiar.

A equação (7) efetivamente separou a distribuição F , ou melhor, sua cauda, em duas partes. A primeira parte, para valores menores que u , não foi modelado analiticamente e portanto, utiliza-se a distribuição empírica das perdas, aqui representada por sua cauda $\bar{F}(u)$, que nada mais é que o número observado de excessos de u sobre o número total de observações da amostra.

A segunda parte é justamente a modelagem através de uma GPD com parâmetros ξ e ψ dado o limiar u . Por esta modelagem paramétrica pode-se conhecer as probabilidades de cauda para valores de x maiores que u .

Como a equação (7) fornece a probabilidade de cauda, então esta é igual a $1 - \alpha^5$ para um valor de $\alpha \geq 1 - \bar{F}(u)$. O valor $1 - \alpha$ é conhecido como a cobertura da medida de risco. Fazendo $\bar{F}(x) = 1 - \alpha$ na equação (7) o valor de x representará VaR_α e basta manipular esta equação para encontrá-lo como função de $\bar{F}(u)$, α e dos parâmetros ξ e ψ . O que garante a equação abaixo:

$$VaR_\alpha = q_\alpha(F) = u + \frac{\psi}{\xi} \left[\left(\frac{1 - \alpha}{\bar{F}(u)} \right)^{-\xi} - 1 \right]\tag{8}$$

Portanto, a medida de risco VaR_α , para distribuições de perdas que tiveram suas caudas modeladas através de $G_{\xi, \psi}$ com $\xi < 1$ e $\psi > 0$, pode ser calculada através da equação dada em (8). A estimativa desta medida de risco será encontrada através das estimativas dos parâmetros da GPD, assim como do limiar utilizado e de uma medida empírica de $\bar{F}(u)$ que será o número de excessos verificados sobre o total de amostras. É claro que, ao se adotar esta estimativa para $\bar{F}(u)$ se está implicitamente supondo que o número de amostras na série de perdas é significativa, assim como o número de excessos verificados. Daí a

⁵O percentil α na medida VaR_α representa um percentual desejado de perdas que sejam menores ou iguais ao valor de VaR_α . Portanto, a medida de risco VaR nada mais é que um quantil alto para o qual $\alpha\%$ das perdas devem ser menores ou iguais a este valor.

importância de se utilizar um valor u adequado, conforme explicitado na seção 2.1.

A estimativa de medida de risco desenvolvida nesta seção se qualifica como uma medida incondicional, no sentido que ela não depende do estado atual das coisas, mas sim de todo o histórico de eventos de forma uniforme. Em outras palavras, Var_α derivado a partir da equação (8) é uma medida histórica de risco associado ao ativo em análise, o qual não leva em consideração se nos eventos mais recentes a volatilidade das perdas pode ser diferente do valor histórico.

De fato, uma das características marcantes das perdas dos ativos financeiros é o chamado *clustering* de volatilidade, onde grandes volatilidades têm tendência a ficarem próximas ao longo da linha temporal. Em geral estes agrupamentos de volatilidades surgem a partir da autocorrelação destas, ou seja, a volatilidade em um período t é dependente das volatilidades verificadas em períodos anteriores. Um modelo bastante encontrado na literatura que busca modelar estas dependências é o modelo ARCH e suas variantes como GARCH, propostos por Engle (1982) e Bollerslev (1986) respectivamente.

Assim, ao passo que as estimativas de risco desenvolvidas nesta seção são valiosas para prazos mais longos, ainda é necessário desenvolver um modelo que lide com o fato das autocorrelações de volatilidades das perdas e, portanto, com o fato de a distribuição das perdas não ser independente e igualmente distribuída ao longo do tempo. O modelo proposto por McNeil & Frey (2000) pode ser utilizado para encontrar a medida de risco Var_α condicional que se deseja, ainda dentro da metodologia POT.

2.3. Modelo eGARCH-POT

Ativos financeiros possuem características de autocorrelação, senão em seus retornos propriamente ditos, ao menos em suas volatilidades ou variações absolutas. Ou seja, dada uma grande variação no momento t é de se esperar novamente uma grande variação, não necessariamente na mesma direção daquela anterior, para o momento $t+1$ e posteriores. Desta forma, medidas de risco incondicionais, conforme aquelas derivadas na subseção anterior 2.2 podem ser adequadas somente para horizontes temporais mais longos, pois implicitamente tomam em consideração os fatos mais recentes com o mesmo peso que fatos mais longínquos.

Assim, pode-se trabalhar com um modelo semelhante ao proposto por McNeil & Frey (2000) os quais fazem uma adequação dos retornos dos ativos a um modelo GARCH e posteriormente tratam os erros desta modelagem como *iid* e portanto, a metodologia de POT pode ser aplicada. Este modelo pode ser entendido como um modelo condicional para medidas de risco pois, efetivamente, é levado em conta o estado atual da previsão para a média e principalmente para a volatilidade ao se calcular o VaR. Desta forma a medida responde rapidamente às variações nos humores do mercado e pode sinalizar de forma ágil uma inadequação de capital reservado pela instituição financeira.

Além desta vantagem de cunho prático, a técnica possui uma atratividade teórica. O método POT deve ser aplicado a séries *iid* que sabidamente não é o

caso de perdas de ativos financeiros. Ao se utilizar a técnica POT nos resíduos padronizados de um modelo GARCH o que se está realizando é uma pré-filtragem destas perdas, de forma a obter resíduos padronizados que sejam *iid* e portanto, aplicável a teoria de valor extremo.

Primeiramente, neste artigo, diferentemente de McNeil & Frey (2000) ou Karmakar & Shukla (2014), foi estabelecido um mesmo modelo eGARCH para as perdas dos ativos subjacentes. Esta variação de GARCH foi proposta por Nelson (1991) e busca, além de modelar a heterocedasticidade condicional da variância, também o chamado efeito alavancagem, onde retornos positivos e negativos possuem impactos diferenciados na volatilidade do ativo. O modelo adotado foi o eGARCH(2,1) e sua variância condicional é definida por:

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^2 (\alpha_i Z_{t-i} + \gamma_i (|Z_{t-i}| - E|Z_{t-i}|)) + \beta_1 \ln \sigma_{t-1}^2 \quad (9)$$

onde os coeficientes α_i capturam o efeito do sinal do erro, enquanto que os parâmetros γ_i o efeito magnitude destes erros. O coeficiente β_1 continua a ser o chamado coeficiente garch.

Denotando X_t como sendo a perda observada no período t , μ_t e σ_t são respectivamente a média e o desvio padrão condicionais, e seja Z_t inovações *iid* com média zero e desvio padrão unitário, então tem-se que:

$$X_t = \mu_t + \sigma_t Z_t \quad (10)$$

Seja $F(x)$ a distribuição marginal de X_t , então $F_{t+1}|\mathcal{H}_t(x)$ é a distribuição preditiva da perda para o próximo período, onde \mathcal{H}_t é o conjunto de informações disponíveis ao fim do período t . Portanto, para o cálculo de VaR_α , se deseja encontrar o alfa-quantil que demarca a cauda inferior de $F_{t+1}|\mathcal{H}_t(l)$, tal que:

$$VaR_\alpha^t = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_{t+1}|\mathcal{H}_t(x) \geq \alpha\} \quad (11)$$

Este é o preditor de VaR_α calculado com informações até o período t . Este valor calculado deve ser comparado a perda realizada em $t+1$, para testar uma possível violação. Considerando que a distribuição de perdas é dada pela equação (10) e sabendo das propriedades de variáveis aleatórias e do operador de expectância, a expressão de VaR_α^t subsume a:

$$VaR_\alpha^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} z_\alpha \quad (12)$$

onde z_α é o quantil α das inovações Z_t .

Dadas estas considerações, o modelo adotado segue um formato em dois estágios para ser implementado, como segue.

- Ajustar um modelo eGARCH para os dados de perdas, sem fazer suposições

sobre a distribuição de Z . Deste modelo retira-se as estimativas de μ_{t+1} e σ_{t+1} e calcula-se as inovações implícitas resultantes, através da equação (10).

- Ao se considerar os resíduos padronizados, \hat{Z}_t como sendo as realizações da variável aleatória Z , esta pode ter sua cauda ajustada a uma GPD utilizando-se o método descrito na subseção 2.2. Encontra-se por fim o valor de z_α , com o qual é finalizado o cálculo Var_α^t através da equação dada em (12) para os valores de α iguais a 0,975 e 0,99.
- Estes passos são repetidos para cada t dentro do período de avaliação.

Agora é necessário escolher um processo que modele a série temporal dada em (10), ou seja, precisa-se especificar o comportamento de μ_t e σ_t . Por suposição, o comportamento destas variáveis é dependente de acontecimentos passados, contidos no conjunto de informações \mathcal{H}_{t-1} . Pode-se estipular um modelo eGARCH(2,1) para a volatilidade condicional e um simples AR(1) para a média condicional. A ordem destes modelos foi escolhida como uma forma de compromisso entre parcimônia e o melhor ajuste dentre diversos outros modelos e ordens para os 6 ativos sob análise. Estes modelos foram aqueles que, de forma geral, se ajustaram mais adequadamente as séries dadas.

Como critérios para a escolha deste modelo de filtro no primeiro estágio, deseja-se que as inovações Z_t , através de suas realizações na forma dos resíduos padronizados estimados no modelo possuam 2 características, ausência de autocorrelação serial em seus valores e nos seus quadrados.

Visando aplicar a teoria do valor extremo para o cálculo de VaR, não são feitas maiores suposições acerca da distribuição das inovações, mas está implícito que esta pertence ao *MDA* de uma GEV e portanto a distribuição de seus excessos sobre um limiar segue aproximadamente uma GPD.

O modelo completo para a medida condicional de risco Var_α^t dada a distribuição de perdas X_t de um ativo será, portanto:

$$X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t \quad (13)$$

$$\epsilon_t = \sigma_t Z_t \quad (14)$$

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^2 (\alpha_i Z_{t-i} + \gamma_i (|Z_{t-i}| - E|Z_{t-i}|)) + \beta_1 \ln \sigma_{t-1}^2 \quad (15)$$

$$Z_t \sim \mathcal{D}(0, 1) \text{ e } \mathcal{D} \in MDA(H_\xi) \quad (16)$$

com a equação (12) fornecendo o valor de Var_α^t , quando utilizada em conjunto com aquela dada por (8).

Este modelo é ajustado, em seu primeiro estágio, utilizando-se máxima-verossimilhança com uma distribuição normal para as inovações Z_t , mesmo sabendo que esta distribuição não é a mais adequada. Especificamente com relação a massa das caudas, a normal, mesmo em um modelo GARCH, ainda produz pouca curtose nos resíduos padronizados. Entretanto, é demonstrado,

(Gouriéroux, 1997, Capítulo 4), que é possível obter estimadores consistentes e assintoticamente normais a partir desta técnica, devendo apenas os erros padrões serem corrigidos para a obtenção de valores robustos a má especificação do modelo.

Uma vez obtidos os resíduos padronizados do modelo eGARCH, \hat{Z}_t , aplica-se a estes a teoria do valor extremo descrita em 2.2 para se obter o quantil de interesse z_α . Para tanto, considerando a definição de uma GPD dada na equação (3) e denotando sua função densidade de probabilidades por $g_{\xi,\psi}$, a função logarítmica de verossimilhança, que deve ser maximizada para a obtenção dos parâmetros ξ e ψ é:

$$\begin{aligned} \ln L(\xi, \psi; Z_j^u) &= \sum_{j=1}^{N_u} \ln g_{\xi,\psi}(Z_j^u) \\ &= -N_u \ln \psi - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{j=1}^{N_u} \ln \left(1 + \xi \frac{Z_j^u}{\psi}\right) \end{aligned} \quad (17)$$

onde N_u é o número de excessos acima do valor de limiar escolhido e Z_j^u são as inovações em excesso, de acordo com a EVT que exige as perdas em excesso ao limiar. O quantil obtido, z_α é aquele derivado de forma semi-paramétrica a partir da teoria EVT *para os resíduos padronizados*, que são tratados como realizações das inovações Z_t e portanto, ainda deve ser escalado e deslocado através da equação (12) para a obtenção da medida de risco de verdadeiro interesse, Var_α^t .

3. Dados utilizados e estatísticas descritivas

Neste trabalho serão analisadas as séries de retornos (e perdas) de seis principais índices de ações das Américas, Ibovespa para o Brasil, IPC do México, IPSA no Chile, Merval da Argentina, S&P TSE para o Canadá e S&P500 dos Estados Unidos. Os retornos coletados foram entre as datas de 01/01/2003 a 31/12/2008 para o período considerado dentro da amostra, no qual são feitas algumas análises preliminares. O período fora da amostra, de onde são retirados os resultados de *backtest* se estende de 01/01/2009 a 30/08/2017. Em dias sem negociação nos mercados, os períodos iniciam-se na data útil seguinte e terminam em data útil imediatamente anterior.

A tabela 1 apresenta algumas das estatísticas descritivas mais importantes para as séries de *retornos* dos ativos no período completo, dentro e fora da amostra. É possível verificar que os retornos não podem ser considerados normais, com a estatística de Jarque-Bera rejeitando a hipótese nula e com o alto grau de curtose em excesso verificado para todos os mercados analisados.

Também é possível verificar alguma autocorrelação serial entre os retornos através da estatística Q(10) de Ljung-Box, calculadas com auxílio da metodologia dada por Fisher & Gallagher (2012). Entretanto, esta mesma correlação serial é muito mais significativa nos quadrados dos retornos, o que corrobora os fatos estilizados de séries financeiras, vide Cont (2001).

Table 1: Estatísticas descritivas dos retornos (amostra completa de 01/01/2003 a 30/08/2017).

Descritivas	IBovespa	IPC	IPSA	Merval	S&P TSE	S&P500
Média	0.00050	0.00058	0.00045	0.00106	0.00022	0.00028
Mediana	0.00095	0.00093	0.00063	0.00149	0.00074	0.00066
Máximo	0.13677	0.10441	0.11803	0.10432	0.09370	0.10957
Mínimo	-0.12096	-0.07266	-0.07236	-0.12952	-0.09788	-0.09470
Desvp	0.01739	0.01203	0.00976	0.01981	0.01064	0.01168
Assimetria	-0.08670	0.03784	-0.01775	-0.48666	-0.71699	-0.33132
Curtose exc.	4.90756	6.58809	10.63489	3.63347	11.84413	11.61430
Jarque-Bera	3655.77	6666.52	17262.83	2125.38	21949.89	20846.78
	(0.00000)	(0.00000)	(0.00000)	(0.00000)	(0.00000)	(0.00000)
Q(10)	16.2786	42.8016	111.1084	13.3294	30.2880	59.6637
	(0.00278)	(0.00000)	(0.00000)	(0.01350)	(0.00000)	(0.00000)
$Q^2(10)$	1299.67	1012.32	919.76	752.94	2384.89	1907.90
	(0.00000)	(0.00000)	(0.00000)	(0.00000)	(0.00000)	(0.00000)
N.obs	3632	3680	3658	3598	3696	3692

Na figura A.1 é possível visualizar as séries de retornos logarítmicos em estudo. Por inspeção visual simples é possível verificar a heterocedasticidade destes retornos, corroborando as estatísticas encontradas na tabela 1. A figura A.2 é mais interessante para se apreciar a normalidade destes retornos. Tratam-se de gráficos quantil-quantil feitos entre a amostra completa dos retornos e uma distribuição normal de referência. Para todas as séries é observado um desvio da normalidade nas caudas, configurando distribuições leptocúrticas em todos os casos.

3.1. Filtro eGARCH

Voltando-se para o período dentro da amostra, o filtro proposto eGARCH(2,1) foi aplicado a estas séries, agora nas perdas que nada mais são que os retornos com o sinal trocado, e seus coeficientes estimados conforme a tabela 2. Os valores p de cada um destes coeficientes estão apresentados entre parênteses e foram calculados com base em erros-padrão robustos, de acordo com White (1982)⁶.

A função do modelo eGARCH neste primeiro estágio é a filtragem da série de perdas, de modo que os resíduos padronizados resultantes não sejam autocorrelacionados e tampouco possuam heterocedasticidade. Conforme demonstrado através dos gráficos de autocorrelação nas figuras A.3 a A.7, este foi o resultado obtido.

⁶Como era de se esperar, nem todos os coeficientes estimados são significativos ao nível de confiança de 5% (alguns nem mesmo a 10%), o que não invalida o modelo, sendo que para alguns índices específicos talvez fosse possível encontrar outro modelo GARCH mais adequado.

Table 2: Parâmetros estimados do modelo eGARCH. Valores p apresentados de acordo com erros padrão robustos e valores menores que 0,01 não são mostrados. (Período dentro da amostra entre 01/01/2003 a 31/12/2008).

Parâmetros	IBovespa	IPC	IPSA	Merval	S&P TSE	S&P500
μ	-0.00104	-0.00084	-0.00077	-0.00079	-0.00054	-0.00013 (0.41963)
ϕ_1	-0.00160 (0.93768)	0.06590	0.18028	-0.00235 (0.19700)	-0.01647 (0.64014)	-0.10160
ω	-0.30206	-0.31210	-0.46252	-0.72657 (0.48937)	-0.07680	-0.14485
α_1	0.26221	0.19674	0.15953	0.09108 (0.25260)	0.13326	0.17601
α_2	-0.15613	-0.07566 (0.04774)	-0.08164 (0.03776)	-0.02310 (0.84697)	-0.08771	-0.07410 (0.06315)
β_1	0.96259	0.96444	0.95080	0.90939	0.99150	0.98427
γ_1	-0.14167 (0.03516)	0.05800 (0.40915)	0.33726	0.06958 (0.68132)	0.09419 (0.05824)	-0.16073
γ_2	0.26916	0.10179 (0.19510)	-0.02009 (0.72923)	0.17946 (0.04203)	0.02824 (0.60813)	0.27486

Para trabalhar com o VaR em seus quantis altos e portanto, modelar a cauda direita da distribuição, passa-se a trabalhar com a distribuição das perdas dos ativos, como alertado anteriormente. Os gráficos ACF das figuras A.3 a A.7 são para as distribuições de perdas e seus quadrados na parte superior, e na parte inferior os correlogramas são apresentados para os resíduos padronizados e seus quadrados oriundos do modelo eGARCH. Através destes gráficos fica bastante evidente como a filtragem foi bem sucedida em retirar a autocorrelação encontrada originalmente nas volatilidades das perdas, que demonstra claramente a natureza heterocedástica das séries sob análise.

A tabela 3 apresenta novamente as estatísticas Jarque-Bera e Ljung-Box (Q e Q^2) desta vez para os resíduos padronizados resultantes da filtragem das perdas no primeiro estágio do modelo eGARCH-POT. Enquanto que os resíduos padronizados, assim como os retornos (e as perdas), de fato não são normais como já se esperava, as estatísticas de autocorrelação agora estão todas em favor da ausência desta. Para todos os índices analisados, não é possível rejeitar H_0 nos testes de autocorrelação, tanto para os resíduos ($Q(10)$) como para os seus quadrados ($Q^2(10)$) em evidente contraste com os valores apresentados na tabela 1 quando foram analisados os retornos destes índices.

Table 3: Estatísticas de diagnóstico para o modelo eGARCH. (Período dentro da amostra entre 01/01/2003 a 31/12/2008).

Estatística	IBovespa	IPC	IPSA	Merval	S&P TSE	S&P500
Curtose exc.	0.72736	1.09088	0.56202	3.26523	1.05074	1.50274
Jarque-Bera	49.43553 (0.00000)	110.65485 (0.00000)	34.73272 (0.00000)	745.13236 (0.00000)	140.05923 (0.00000)	215.01842 (0.00000)
Q(10)	5.06865 (0.49583)	6.51735 (0.30402)	4.76927 (0.54183)	10.79627 (0.04803)	2.48361 (0.88760)	6.62423 (0.29223)
$Q^2(10)$	2.06331 (0.93212)	2.65357 (0.86672)	7.97627 (0.17130)	3.96258 (0.67110)	4.45027 (0.59236)	4.68137 (0.55562)
Sign-bias	1.42255 (0.15508)	0.01692 (0.98650)	1.14179 (0.25373)	0.39020 (0.69645)	0.48399 (0.62847)	0.34565 (0.72966)

Sendo assim, com retornos padronizados que não são normalmente distribuídos e possuem cauda longa com excesso de curtose, mas que após filtragem não apresentam mais autocorrelação ou heterocedasticidade, pode-se passar ao segundo estágio do model eGARCH-POT, ou seja, aplicar a teoria do valor extremo através do método *peaks over threshold* para parametrizar a cauda direita das distribuições de perdas dos ativos.

3.2. Método POT

Os resíduos padronizados são tratados como as realizações do processo de inovação no modelo eGARCH(2,1). Estas inovações serão então analisadas sob a ótica da EVT para a obtenção dos parâmetros da GPD que definem a cauda direita de sua distribuição.

Para tanto, deve ser estabelecido um limiar u adequado para cada uma das séries, de modo que seja satisfeito o teorema de Pickands-Balkema-de Haan. Este valor de limiar será diferente para cada série e sua escolha deve seguir os princípios delineados na seção 2.1 através da função média dos excessos. Entretanto, considerando o *trade-off* existente entre o viés e a variância dos parâmetros da GPD estimados com relação a escolha do valor deste limiar, pode-se abordar o problema desta escolha de outra forma.

Neste artigo foi utilizado o quantil empírico a 92% para a escolha do valor do limiar. Conforme visto anteriormente, um valor de limiar que resulte em um número de excessos observados a este limiar (N_u) entre 100 e 130 parece ser o melhor limiar a ser escolhido. Considerando o tamanho da janela de dados dentro da amostra para os índices sob análise, este quantil resulta em número de excessos nesta quantidade.

A escolha do limiar através de um quantil empírico fixo também é mais adequada considerando-se que para a fase de *backtest* do modelo é necessário reavaliar o valor deste limiar para cada dia dentro do período fora da amostra, o que se tornaria inviável de ser feito através da análise gráfica da função média dos excessos.

Escolhido o limiar u , trata-se de obter a série de inovações em excesso ao limiar $Z_t^u : \{Z_t^u = Z_t - u | Z_t > u\}$, onde Z_t são as inovações, em que os resíduos

padronizados encontrados são suas realizações e Z_t^u são portanto, as inovações em excesso, conforme teorizado na seção 2.2.

A esta série de inovações em excesso é aplicada a função log-verossimilhança dada em (17) que por sua vez é maximizada em relação aos parâmetros ξ e ψ para a obtenção de suas estimativas.

A tabela 4 apresenta os valores destes parâmetros e seus erros padrão para cada um dos índices, com a estimação feita com os dados do período dentro da amostra. Também são apresentados o número de observações dentro da amostra para o total dos resíduos padronizados, assim como o número de excessos observados (N_u) para o limiar escolhido (u). Observa-se como o número de excessos varia de acordo com o índice (assim como o total de observações), porém todos ficam em torno de 120 excessos, que é considerado um valor ideal.

Table 4: Parâmetros estimados para o modelo EVT dos resíduos padronizados. (Período dentro da amostra entre 01/01/2003 a 31/12/2008).

	IBovespa	IPC	IPSA	Merval	S&P TSE	S&P500
N.obs.	1487	1514	1498	1495	1522	1511
Limiar u	1.43392	1.40554	1.40436	1.35673	1.48743	1.36357
Num.exc. N_u	119	122	120	120	122	121
Par. forma ξ	-0.01136	0.00287	0.00343	0.07085	-0.00749	-0.02867
Erro padrão	0.07900	0.08418	0.08475	0.08132	0.08595	0.06368
Par. escala ψ	0.55190	0.61094	0.55517	0.65097	0.61939	0.72245
Erro padrão	0.06679	0.07552	0.06915	0.07947	0.07732	0.08017
Quantil $z_{0.975}$	2.07183	2.12178	2.05214	2.14835	2.20595	2.19073
Quantil $z_{0.990}$	2.56831	2.68420	2.56368	2.81771	2.76663	2.82263

Na figura A.9 é possível visualizar os gráficos de ajuste das inovações em excesso de cada um dos índices contra suas distribuições GPD de referência, ou seja, aquelas com os parâmetros de forma e escala estimados para os respectivos índices. Verifica-se que a distribuição destes excessos pouco se desvia com relação a curva de referência, denotando um bom ajuste dos dados ao modelo teórico. Em contraste, quando modelados diretamente através de uma distribuição normal, as séries de retornos se afastavam consideravelmente de suas referências como já apresentado na figura A.2. Ao se utilizar um método semi-paramétrico como o proposto, modelando apenas uma parte da cauda da distribuição, a parte que interessa para a modelagem de risco, obtém-se uma estimação muito mais próxima da realidade que os dados apresentam.

4. Avaliação dos modelos

A avaliação dos modelos aqui referidos concentra-se em testar através de *backtest* o modelo EVT condicional apresentado, o qual utiliza a metodologia em dois estágios proposta por McNeil & Frey (2000) com um filtro eGARCH(2,1) e o método POT, assim como outros modelos para a estimação do VaR, como o Normal e t-Student condicionais, Normal e t-Student incondicionais, o modelo

proposto por RiskMetrics (1995) e o próprio modelo EVT incondicional, em um total de sete modelos sendo testados e comparados para fins de estimação da medida de risco. As definições destes modelos e suas formas de implementação estão descritas no Appendix A.

O modelo EVT incondicional aqui proposto é diferente daquele encontrado nas outras referências. A filtragem através de um modelo eGARCH é realizada e os resíduos padrão resultantes são utilizados para estimar o quantil desejado através da EVT, entretanto, ao se calcular a medida de risco são utilizados a média e o desvio padrão *incondicionais* do filtro, resultando em menor volatilidade do VaR. Uma vantagem teórica deste método é que se está aplicando a teoria de valor extremo a uma série *iid*, os resíduos padronizados, conforme preconizado pela teoria. Outra vantagem de cunho mais prático é que esta abordagem se torna um modelo que não possui a alta volatilidade dos modelos condicionais e apresenta de forma mais branda que os modelos incondicionais (às vezes chamados de estáticos) os agrupamentos nas violações ao VaR.

Para fazer o *backtest*, considere a série x_1, x_2, \dots, x_m , com $m \gg n$ e o conjunto de dias $T = \{n, \dots, m - 1\}$. Uma janela de dados de tamanho fixo contendo as últimas n observações é utilizada e para cada dia $t \in T$ é reestimado o valor de Var_α^t . O período de teste fora da amostra vai de 01/01/2009 a 30/08/2017, com dados diários para as perdas dos índices sob análise. O número de observações (n) dentro da janela de dados utilizada para fazer a estimação dos modelos para cada um dos índices é aquele apresentado na tabela 4 (N.obs.), esse valor é fixo para cada série. Portanto, a partir do início do período de teste, esta janela fixa avança um dia e o modelo é estimado, resultando, com auxílio da equação (12), no valor estimado de Var_α^t , ou seja, a medida de risco calculada ao final do dia t que deverá ser comparada a perda incorrida no dia a frente, $t + 1$.

O quantil para a definição do limiar u é fixo em 0,92, o que resultará em valores distintos de limiar para cada rodada do teste, e possivelmente um número diferente de excessos observados. Entretanto essas diferenças, considerando o tamanho fixo da janela de dados, será muito pequeno em torno de uma unidade apenas. Mantém-se assim, um número de excessos em torno de 120 observações, valor adequado para se fazer as estimativas dos parâmetros da GPD.

A figura A.10 apresenta o resultado do *backtest* para dois modelos, normal incondicional e EVT condicional. Entende-se por modelos incondicionais aqueles em que a volatilidade histórica de toda a janela de dados é utilizada para calcular as médias de risco. É nítido como o modelo condicional, que utiliza a previsão para a média e volatilidade das perdas e então utiliza-os para obter a medida de risco, é muito mais responsivo a alterações no regime de volatilidade do ativo. Um modelo incondicional, por sua vez, não responde de forma acentuada a variações de curto-prazo na volatilidade do ativo, pois estas observações mais extremas são atenuadas em meio a todas as outras observações utilizadas da janela de dados.

Uma violação é dita ocorrida quando a perda observada é maior que a medida de risco estimada no dia anterior, $x_{t+1} > Var_\alpha^t$ para um α dentro do conjunto de níveis de significância, neste artigo $\alpha \in \{0,975; 0,990\}$. A tabela 5 apresenta em termos percentuais as violações ocorridas para cada um dos modelos para os

níveis de cobertura dados. Os modelos condicionais apresentaram uma tendência a subestimação do risco, com um número superior de violações ao esperado. Os modelos incondicionais, ao contrário, superestimam o risco e apresentam tendência a um número menor de violações. Dentre os modelos estimados o EVT condicional apresentou as violações percentuais mais próximas ao valor esperado, $1 - \alpha$.

Table 5: Percentual de violações. (Período fora da amostra entre 01/01/2009 e 30/08/2017).

Modelo	IBovespa	IPC	IPSA	Merval	S&P TSE	S&P500
Cobertura = 1%						
EVT Condicional	1.21	0.97	1.25	1.28	1.06	1.06
Normal Condicional	1.45	1.94	1.71	2.24	1.79	2.11
t-Student Condicional	1.45	2.03	1.71	2.28	1.84	2.25
RiskMetrics	1.49	2.12	2.08	2.38	2.49	2.43
EVT Incond. Filtrada	0.75	0.60	0.74	1.19	1.20	1.33
Normal Incondicional	0.84	0.83	0.46	1.62	1.29	1.19
t-Student Incondicional	0.42	0.42	0.32	1.14	0.51	0.55
Cobertura = 2.5%						
EVT Condicional	2.47	2.49	2.55	2.90	2.30	2.34
Normal Condicional	2.61	3.23	2.78	3.57	3.64	3.81
t-Student Condicional	2.61	3.19	2.64	3.52	3.64	3.81
RiskMetrics	3.22	3.56	3.33	3.43	4.19	4.27
EVT Incond. Filtrada	1.73	1.39	1.95	2.52	2.58	2.29
Normal Incondicional	1.68	1.71	1.16	3.14	2.30	1.93
t-Student Incondicional	1.54	1.62	1.30	3.04	2.39	1.79

4.1. Testes estatísticos

Pode ser realizado um teste estatístico para verificar se o modelo para VaR_α foi corretamente especificado levando-se em consideração o seu nível de cobertura, $1 - \alpha$. Este teste foi originalmente proposto por Kupiec (1995) e pretende derivar propriedades estatísticas formais do teste utilizado para verificar a precisão de modelos VaR. Este teste permite inferir se a frequência de violações ao VaR é consistente com o valor esperado destas, o nível de cobertura. Sob a hipótese nula de um modelo corretamente especificado o número de violações segue uma distribuição binomial e o teste toma a forma de razão de verossimilhança com a seguinte estatística:

$$LR_{uc} = -2 \ln \left(\frac{(1-p)^{N-X} p^X}{(1 - \frac{X}{N})^{N-X} (\frac{X}{N})^X} \right) \quad (18)$$

onde p é o nível de cobertura, N é o número de observações do período fora da amostra e X neste caso é o número de violações ocorridas.

Este teste não faz nenhum tipo de assunção, e por conseguinte não testa, a hipótese de independência entre as violações, sendo considerado um teste de cobertura *incondicional* para o VaR.

Um teste condicional é aquele proposto, entre outros, por Christoffersen & Pelletier (2004). A hipótese de independência entre as violações está relacionada a duração entre as observações destas. O tempo que se passa entre uma violação e outra deve ser independente e não formar agrupamentos (*clusters*). Sob a hipótese nula de um modelo corretamente especificado, a duração não deve possuir memória. Como a única distribuição contínua que não possui memória é a distribuição exponencial, os autores propuseram ajustar os dados a uma distribuição Weibull da qual a exponencial é um caso particular quando o parâmetro $b = 1$ e, portanto, o teste é feito sobre este parâmetro. O teste de duração de Christoffersen é feito sob a forma de razão de verossimilhança, sendo a função densidade de uma Weibull:

$$f_W(D; a, b) = \begin{cases} a^b b D^{b-1} e^{-(aD)^b}, & D \geq 0 \\ 0, & D < 0. \end{cases} \quad (19)$$

onde D é a duração entre as violações e a e b são os parâmetros da distribuição.

Nota-se que este teste é destinado apenas a verificação da hipótese de independência das violações. Em conjunto com o teste de Kupiec, a tabela 6 fornece um panorama completo sobre a adequação das especificações de modelos VaR.

Table 6: Testes estatísticos para o VaR. Teste incondicional de Kupiec, $LRuc$, e teste de independência por duração de Christoffersen e Pelletier, $LRdur$. Os modelos testados são: EVT condicional (cevt), Normal condicional (cnorm), t-Student condicional (ct), Riskmetrics (riskmetrics), EVT incondicional (uevt), Normal incondicional (unorm) e t-Student incondicional (ut). Valores p maiores que 0,05 foram omitidos. (Período fora da amostra entre 02/01/2009 e 30/08/2017).

Modelo	Estatística	IBovespa	IPC	IPSA	Merval	S&P TSE	S&P500
Cobertura 1%							
cevt	LRuc	0.92	0.02	1.27	1.58	0.07	0.07
cevt	LRuc p-valor						
cevt	LRdur	0.98	2.04	0.29	2.34	0.37	3.92
cevt	LRdur p-valor						(0.05)
cnorm	LRuc	3.78	15.16	9.15	24.00	11.22	20.57
cnorm	LRuc p-valor		(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
cnorm	LRdur	2.46	0.58	0.02	1.99	0.02	0.39
cnorm	LRdur p-valor						
ct	LRuc	3.78	17.94	9.15	25.66	12.43	25.32
ct	LRuc p-valor		(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
ct	LRdur	2.46	0.66	0.02	2.94	0.00	0.19
ct	LRdur p-valor						
riskmetrics	LRuc	4.56	20.91	19.54	29.10	34.26	32.22
riskmetrics	LRuc p-valor	(0.03)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
riskmetrics	LRdur	1.05	0.07	4.93	3.16	0.00	2.11
riskmetrics	LRdur p-valor			(0.03)			
uevt	LRuc	1.53	4.07	1.61	0.72	0.80	2.18
uevt	LRuc p-valor		(0.04)				

Table 6: continued ...

Modelo	Estatística	IBovespa	IPC	IPSA	Merval	S&P TSE	S&P500
uevt	LRdur	1.20	3.21	10.38	8.29	35.76	28.49
uevt	LRdur p-valor			(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
unorm	LRuc	0.59	0.66	7.85	6.82	1.67	0.77
unorm	LRuc p-valor			(0.01)	(0.01)		
unorm	LRdur	2.49	9.73	7.92	4.70	40.84	31.79
unorm	LRdur p-valor		(0.00)	(0.00)	(0.03)	(0.00)	(0.00)
ut	LRuc	9.33	9.57	13.51	0.41	6.54	5.32
ut	LRuc p-valor	(0.00)	(0.00)	(0.00)		(0.01)	(0.02)
ut	LRdur	0.52	0.66	16.16	8.62	11.24	18.50
ut	LRdur p-valor			(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
Cobertura 2.5%							
cevt	LRuc	0.01	0.00	0.02	1.33	0.36	0.24
cevt	LRuc p-valor						
cevt	LRdur	0.39	0.55	0.03	2.82	0.36	0.27
cevt	LRdur p-valor						
cnorm	LRuc	0.11	4.38	0.67	8.71	10.10	13.21
cnorm	LRuc p-valor		(0.04)		(0.00)	(0.00)	(0.00)
cnorm	LRdur	0.43	0.14	0.37	0.54	0.86	0.01
cnorm	LRdur p-valor						
ct	LRuc	0.11	3.86	0.17	7.99	10.10	13.21
ct	LRuc p-valor		(0.05)		(0.00)	(0.00)	(0.00)
ct	LRdur	0.43	0.10	0.32	0.51	0.86	0.01
ct	LRdur p-valor						
riskmetrics	LRuc	4.17	8.79	5.60	6.63	21.18	23.10
riskmetrics	LRuc p-valor	(0.04)	(0.00)	(0.02)	(0.01)	(0.00)	(0.00)
riskmetrics	LRdur	7.73	1.55	3.58	1.00	0.26	2.50
riskmetrics	LRdur p-valor	(0.01)					
uevt	LRuc	5.90	13.12	2.95	0.00	0.05	0.39
uevt	LRuc p-valor	(0.02)	(0.00)				
uevt	LRdur	16.55	14.30	20.53	6.93	30.09	42.63
uevt	LRdur p-valor	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.01)	(0.00)	(0.00)
unorm	LRuc	6.69	6.24	19.86	3.27	0.36	3.19
unorm	LRuc p-valor	(0.01)	(0.01)	(0.00)			
unorm	LRdur	14.09	19.01	8.98	13.89	40.84	31.24
unorm	LRdur p-valor	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
ut	LRuc	9.39	7.91	15.52	2.40	0.10	5.01
ut	LRuc p-valor	(0.00)	(0.00)	(0.00)			(0.03)
ut	LRdur	13.54	19.03	6.98	17.92	42.74	31.96
ut	LRdur p-valor	(0.00)	(0.00)	(0.01)	(0.00)	(0.00)	(0.00)

Inspecionando a tabela 6 verifica-se como o modelo EVT condicional, especial-

mente para o nível de cobertura a 1% é superior aos demais, prevalecendo como o único modelo a não rejeitar a hipótese nula a 95% de confiança para o teste de cobertura incondicional. Apenas para o índice S&P500 este modelo obteve resultado no limiar da rejeição da hipótese nula para o teste de independência.

A tabela 7 apresenta um sumário contendo a quantidade de rejeições da hipótese nula para os valores de cobertura de cada um dos testes. Verifica-se que, de fato, o modelo EVT condicional (*cevt*) é aquele que apresenta o menor número de rejeições. Os modelos condicionais apresentam bons resultados no teste de independência (LRdur) em oposição aos modelos incondicionais. Para o teste de cobertura incondicional (LRuc), os resultados são menos evidentes, entretanto o modelo EVT condicional novamente se sobressai.

Table 7: Sumário para o número de rejeições das hipóteses nulas de um modelo corretamente especificado. Nível de confiança a 95%. De seis índices com dois testes, resulta em um total de doze rejeições possíveis. (Período fora da amostra entre 02/01/2009 e 30/08/2017).

Modelo	Cobertura 1%		Cobertura 2.5%	
	LRdur	LRuc	LRdur	LRuc
cevt	1	0	0	0
cnorm	0	5	0	4
ct	0	5	0	4
riskmetrics	1	6	1	6
uevt	4	1	6	2
unorm	5	2	6	3
ut	4	5	6	4

4.2. Teste MCS de Hansen

Outra forma de avaliar os modelos e buscar identificar aqueles superiores para um determinado nível de confiança e uma dada função de perda, é o *Model Confidence Set* - MCS de Hansen et al. (2011). O MCS é um conjunto de modelos construído de tal forma que contenha apenas os melhores modelos dado um nível de confiança. O MCS é, de certa forma, o análogo do intervalo de confiança para um parâmetro escalar. O "melhor" modelo é avaliado através de uma função de perda a ser definida pelo pesquisador.

A função de perda adotada neste trabalho é aquela definida em González-Rivera et al. (2004) como uma medida de ajuste para um modelo de VaR. A função \tilde{Q} ajustada para suavidade é definida no citado artigo como sendo:

$$\tilde{Q} = N_o^{-1} \sum_{t=n}^{m-1} [m_\delta(x_{t+1}, VaR_\alpha^t) - (1 - \alpha)] (x_{t+1} - VaR_\alpha^t) \quad (20)$$

onde $N_o = (m - 1) - n$ é o número de observações fora da amostra menos uma observação. Garantindo que o teste é feito para as estimativas de VaR_α^t apenas no período fora da amostra. A função $m_\delta(a, b) = \{1 + \exp[-\delta(a - b)]\}^{-1}$ toma o lugar da função indicador de ocorrência de uma violação e o parâmetro $\delta > 0$

controla a suavidade da curva. Esta é uma função assimétrica que penaliza mais fortemente as violações ao VaR , sendo que valores mais baixos de \tilde{Q} sinalizam um melhor ajuste.

O procedimento MCS é realizado de tal forma que é definido um conjunto M^0 contendo todos os i modelos a serem testados, sendo t o indexador de tempo e $L_{i,t}(\cdot)$ a função de perda. A ordenação dos modelos é então baseada na diferença, par a par, das funções de perdas dos modelos, $d_{ij,t} = L_{i,t} - L_{j,t}$, $\forall i, j \in M^0$. O conjunto de melhores modelos, chamado conjunto superior, pode ser definido como, $M^* \equiv \{i \in M^0 : E[d_{ij,t}] \leq 0, \forall j \in M^0\}$ e é calculado de forma iterativa através de uma sequência de testes de significância, com os modelos inferiores sendo retirados do conjunto.

Os valores p , que podem ser utilizados para o ranqueamento dos modelos, com o melhor modelo possuindo valor $p = 1$ e modelos excluídos do conjunto superior com $p < \alpha$, sendo α o nível de significância escolhido para o teste, se baseiam na estatística $T_{R,M}$ proposta pelos autores, Hansen et al. (2011), a qual mede a performance relativa de um modelo com relação a média dos modelos contidos em M^* . A tabela 8 apresenta estes valores p para todos os modelos dado um nível de cobertura da medida de risco, para cada um dos índices estudados.

Table 8: Valores p do teste MCS de Hansen et al. para cada um dos modelos dado um nível de cobertura do VaR. (Período fora da amostra entre 02/01/2009 e 30/08/2017).

Modelo	IBovespa	IPC	IPSA	Merval	S&P TSE	S&P500
Cobertura 1%						
cevt	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
cnorm	0.91	0.09	0.35	0.15	0.31	0.30
ct	0.91	0.01	0.35	0.15	0.13	0.01
riskmetrics	0.97	0.01	0.35	0.29	0.04	0.01
uevt	0.21	0.00	0.35	0.29	0.01	0.01
unorm	0.25	0.00	0.35	0.15	0.00	0.00
ut	0.00	0.00	0.00	0.15	0.00	0.00
Cobertura 2.5%						
cevt	0.23	0.98	0.93	1.00	1.00	1.00
cnorm	0.90	0.47	0.93	0.54	0.72	0.27
ct	0.90	1.00	1.00	0.54	0.77	0.71
riskmetrics	1.00	0.47	0.91	0.92	0.04	0.27
uevt	0.05	0.00	0.12	0.54	0.00	0.00
unorm	0.00	0.00	0.05	0.54	0.00	0.00
ut	0.00	0.00	0.06	0.54	0.00	0.00

Table 9: Sumário com as exclusões do conjunto de modelos superiores no teste MCS. Os modelos condicionais se revelam aqueles com o menor número de exclusões. (Período fora da amostra entre 02/01/2009 e 30/08/2017).

Modelo	Cobertura 1%	Cobertura 2.5%
cevt	0	0
cnorm	0	0
ct	2	0
riskmetrics	3	1
uevt	3	3
unorm	3	4
ut	5	4

Já a tabela 9 apresenta um sumário com a contagem das exclusões do conjunto superior para cada um dos modelos. Percebe-se claramente que os modelos condicionais são aqueles que são excluídos do conjunto um menor número de vezes, entendendo-se portanto, serem modelos mais adequados para a estimação de valor em risco.

5. Conclusão

Este artigo tratou de estimar e comparar sete modelos de VaR para seis índices de ações em mercados das Américas. Modelos condicionais e incondicionais foram estudados e comparados com base em três tipos de diferentes testes. Especial ênfase foi dada ao modelo EVT condicional o qual se utiliza da teoria do valor extremo para chegar ao resultado da medida de risco. Ao confrontar o número de violações ao VaR contra seus níveis de cobertura, encontrou-se que os modelos condicionais apresentaram uma tendência a subestimação do risco, com um número superior de violações ao esperado. Os modelos incondicionais, ao contrário, superestimam o risco e apresentam tendência a um número menor de violações. Dentre os modelos estimados o EVT condicional apresentou os percentuais de violações mais próximos ao valor esperado.

Nos testes estatísticos de cobertura incondicional e independência, a superioridade do modelo EVT condicional se apresenta de forma mais concreta. Este modelo apresentou apenas uma rejeição a hipótese nula da correta especificação para o teste de Kupiec para o índice S&P500 ao nível de confiança de 95%. Modelos condicionais, como esperado, apresentam um comportamento que levam a uma melhor performance no teste de independência, não apresentando agrupamentos de violações porém, esta performance não se repete ao teste de cobertura incondicional, salvo o modelo EVT condicional.

Aplicando a metodologia de conjunto de confiança de modelos, o modelo EVT condicional se mostra novamente de forma destacada. Ao nível de cobertura de 1% é o melhor modelo (no sentido que é aquele com p-valor igual a 1) para todos os índices analisados. Quando verificado o número de exclusões do conjunto superior, apenas os modelos EVT e normal condicionais não foram excluídos em nenhuma ocasião.

Apesar de os modelos condicionais se mostrarem mais adequados a estimação do VaR através dos testes estatísticos apresentados, este tipo de modelo, em virtude de sua grande variabilidade ao longo do tempo no valor estimado da medida de risco, impõe uma barreira de custo prático a sua implementação. Para alterar o VaR tão drasticamente e em curto período de tempo, a instituição financeira deve ser capaz de rapidamente alterar a alocação de ativos de seu portfólio, o que não é a realidade da grande maioria destas instituições. O mercado pode não possuir a liquidez ou a profundidade necessária para realizar estas operações, isso sem contar os custos envolvidos nas transações.

O modelo EVT incondicional aqui proposto une estas duas abordagens, tornando-se um modelo intermediário entre condicional e incondicional. A filtragem através de um modelo eGARCH ainda é realizada e os resíduos padrão resultantes são utilizados para estimar o quantil desejado através da EVT, entretanto, ao se calcular a medida de risco são utilizados a média e o desvio padrão *incondicionais* do filtro, resultando em menor volatilidade do VaR. Este procedimento ainda apresenta algum grau de agrupamento das violações, porém possui cobertura muito melhor que os demais modelos incondicionais, conforme a tabela 7.

Além deste *trade-off* entre superioridade teórica do modelo EVT condicional e sua implementação prática, a medida de risco VaR atualmente está sendo utilizada em conjunto com a *Expected Shortfall*. Esta última pode ser derivada a partir do modelo EVT condicional com facilidade e deve ser abordada em outro trabalho, juntamente com testes específicos para o ES com intuito de averiguação do melhor modelo.

Appendix A.

Apêndice descrevendo os modelos de estimação da medida de risco VaR_α^t utilizados neste artigo.

Appendix A.1. EVT condicional

O modelo EVT condicional (cevt) é o principal modelo analisado e descrito em detalhe na seção 2. A medida de risco é calcula diariamente utilizando-se o método POT após a filtragem dos dados através de um modelo AR(1)-eGARCH(2,1). As previsões de média, μ_{t+1} e desvio padrão condicional, σ_{t+1} do modelo eGARCH são utilizados para calcular VaR_α^t , conforme a equação 12. O quantil z_α é aquele determinado pelo valor de α após a aplicação do método POT para parametrização da cauda da distribuição das inovações e é calculado conforme a equação (8), onde z_α toma o lugar de VaR_α . O algoritmo deste modelo é o seguinte:

1. Filtro eGARCH

- 1.1. Dada uma amostra de n observações $\{t-n+1, \dots, t\}$, estimar um modelo AR(1)-eGARCH(2,1);

- 1.2. salvar os valores previstos para μ_{t+1} e σ_{t+1} e a série de resíduos padronizados, \hat{Z} ;
2. Aplicação da EVT
 - 2.1. Aplicar a equação (8) aos resíduos padronizados salvos e obter o valor estimado de z_α ;
 - 2.2. Calcular Var_α^t de acordo com a equação (12), $Var_\alpha^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}z_\alpha$;
3. Repetir os dois passos anteriores para cada $t \in T = \{n, \dots, m-1\}$

Appendix A.2. Normal condicional

Neste modelo, Normal condicional (cnorm), o mesmo filtro AR(1)-eGARCH(2,1) é utilizado para obtenção das previsões μ_{t+1} e σ_{t+1} , porém o quantil z_α da equação 12 é substituído pelo valor adequado de uma distribuição normal padrão, por exemplo para $\alpha = 99\%$, $z_\alpha = 2,326$. O restante do algoritmo segue conforme Appendix A.1.

Appendix A.3. t-Student condicional

Semelhante ao Normal condicional, o modelo t-Student condicional (ct) utiliza um quantil z_α oriundo de uma distribuição t-Student. O parâmetro de forma é calculado por máxima verossimilhança a partir dos resíduos padronizados do filtro. O restante do algoritmo segue conforme Appendix A.1.

Appendix A.4. Riskmetrics

O modelo Riskmetrics (riskmetrics) é aquele encontrado em RiskMetrics (1995), com o parâmetro $\mu = 0$ e $\lambda = 0,94$, pois utiliza-se dados diários. O modelo completo para média e desvio padrão condicionais é:

$$x_t = \epsilon_t, \quad \epsilon_t | \mathcal{H}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda)\epsilon_{t-1}^2 + \lambda\sigma_{t-1}^2 \quad (\text{A.2})$$

O algoritmo para seu cálculo, portanto, é direto.

1. Dada uma amostra de n observações $\{t-n+1, \dots, t\}$, estima-se um modelo GARCH(1,1) com parâmetros fixos, $\alpha = 0,06$ e $\beta = 0,94$;
2. os valores $\mu_{t+1} = 0$ e $\sigma_{t+1} = \sqrt{(1 - \lambda)\epsilon_t^2 + \lambda\sigma_t^2}$, são salvos;
3. o valor de z_α vem da normal padrão para o valor de α sendo utilizado, por exemplo para $\alpha = 99\%$, $z_\alpha = 2,326$;
4. Calcular Var_α^t de acordo com a equação (12), $Var_\alpha^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}z_\alpha$;
5. Repetir os passos anteriores para cada $t \in T = \{n, \dots, m-1\}$.

Appendix A.5. EVT incondicional

O modelo EVT incondicional (uevt) continua a fazer uso da metodologia POT para a parametrização da cauda da distribuição dos resíduos padronizados oriundos do filtro. Entretanto, ao invés de utilizar a previsão mais recente para os valores de média e desvio padrão, ou seja, seus valores condicionais, são calculados a média e desvio padrão **incondicionais** do modelo AR(1)-eGARCH(2,1) e imputados na equação 12.

Este modelo também é chamado de EVT incondicional filtrada, pois, diferentemente de outras abordagens incondicionais para o método POT, ainda se faz uso do filtro em primeiro estágio, como uma forma de minimizar os problemas decorrentes de aplicar o dito método a dados que não sejam *iid*. O algoritmo de cálculo desta abordagem segue:

1. Filtro eGARCH
 - 1.1. Dada uma amostra de n observações $\{t-n+1, \dots, t\}$, estimar um modelo AR(1)-eGARCH(2,1);
 - 1.2. salvar os valores incondicionais de média e desvio padrão calculados como $\bar{\mu}$ e $\bar{\sigma}$ e a série de resíduos padronizados, \hat{Z} ;
2. Aplicação da EVT
 - 2.1. Aplicar a equação (8) aos resíduos padronizados salvos e obter o valor estimado de z_α ;
 - 2.2. Calcular Var_α^t de acordo com a equação (12), $Var_\alpha^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}z_\alpha$, onde $\mu_{t+1} = \bar{\mu}$ e $\sigma_{t+1} = \bar{\sigma}$;
3. Repetir os dois passos anteriores para cada $t \in T = \{n, \dots, m-1\}$.

Appendix A.6. Normal incondicional

O modelo Normal incondicional (unorm) não faz uso da filtragem em primeiro estágio. Dada uma amostra de n observações $\{t-n+1, \dots, t\}$, simplesmente ajusta-se esta amostra de dados a uma distribuição normal através de máxima verossimilhança da qual resultarão os valores de μ e σ para o cálculo de $Var_\alpha^t = \mu + \sigma z_\alpha$. O quantil z_α é aquele previsto por uma normal padrão para o nível de cobertura desejado.

Appendix A.7. t-Student incondicional

O modelo t-Student incondicional (ut) segue o mesmo procedimento que o modelo anterior, Normal incondicional. A única diferença é que os dados são ajustados a uma distribuição t-Student onde inclusive o parâmetro de forma é estimado e utilizado para obtenção do quantil z_α .

Referências

- Acerbi, C., & Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 26, 1487–1503.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1997). Thinking Coherently. *RISK*, 10, 68–71.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9, 203–228. doi:10.1111/1467-9965.00068.
- Balkema, A. A., & de Haan, L. (1974). Residual Life Time at Great Age. *The Annals of Probability*, 2, 792–804. doi:10.1214/aop/1176996548.
- BCBS (2011). *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems*. Technical Report Bank for International Settlements - Basel Committee on Banking Supervision. URL: <http://www.bis.org/publ/bcbs189.pdf>.
- BCBS (2013). *Basel III: The liquidity coverage ratio and liquidity risk monitoring tools*. Technical Report Bank for International Settlements - Basel Committee on Banking Supervision. URL: <http://www.bis.org/publ/bcbs238.pdf>.
- BCBS (2014). *Basel III: The net stable funding ratio*. Technical Report Bank for International Settlements - Basel Committee on Banking Supervision. URL: <http://www.bis.org/bcbs/publ/d295.pdf>.
- Berkowitz, J., & O'Brien, J. (2002). How accurate are value-at-risk models at commercial banks? *The Journal of Finance*, 57, 1093–1111. URL: <http://dx.doi.org/10.1111/1540-6261.00455>. doi:10.1111/1540-6261.00455.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307–327. doi:10.1016/0304-4076(86)90063-1.
- Byström, H. N. (2004). Managing extreme risks in tranquil and volatile markets using conditional extreme value theory. *International Review of Financial Analysis*, 13, 133–152.
- Chavez-Demoulin, V., Davison, A. C., & McNeil, A. J. (2005). Estimating value-at-risk: a point process approach. *Quantitative Finance*, 5, 227–234. doi:10.1080/14697680500039613.
- Chavez-Demoulin, V., Embrechts, P., & Hofert, M. (2016). An Extreme Value Approach for Modeling Operational Risk Losses Depending on Covariates. *Journal of Risk and Insurance*, 83, 735–776. URL: <http://dx.doi.org/10.1111/jori.12059>. doi:10.1111/jori.12059.
- Christoffersen, P., & Pelletier, D. (2004). Backtesting value-at-risk: A duration-based approach. *Journal of Financial Econometrics*, 2, 84–108.

- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1, 223–236. URL: <http://dx.doi.org/10.1080/713665670>. doi:10.1080/713665670.
- Daniélsson, J., & Morimoto, Y. (2000). Forecasting extreme financial risk: a critical analysis of practical methods for the Japanese market. *Monetary and Economic Studies*, 2, 25–48.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C., & Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50, 987. doi:10.2307/1912773.
- Fisher, R. A., & Tippett, L. H. C. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24, 180–190.
- Fisher, T. J., & Gallagher, C. M. (2012). New weighted portmanteau statistics for time series goodness of fit testing. *Journal of the American Statistical Association*, 107, 777–787.
- Gencay, R., & Selcuk, F. (2004). Extreme value theory and value-at-risk: Relative performance in emerging markets. *International Journal of Forecasting*, 20, 287–303.
- Gnedenko, B. V. (1941). Limit theorems for the maximal term of a variational series. *Comptes Rendus (Doklady) de L'Académie des Sciences de l'URSS*, 32, 7–9.
- Gnedenko, B. V. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Annals of Mathematics*, 44, 423–453.
- González-Rivera, G., Lee, T.-H., & Mishra, S. (2004). Forecasting volatility: A reality check based on option pricing, utility function, value-at-risk, and predictive likelihood. *International Journal of forecasting*, 20, 629–645.
- Gouriéroux, C. (1997). *ARCH Models and Financial Applications*. Springer Series in Statistics. New York, NY: Springer New York. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-1860-9>. doi:10.1007/978-1-4612-1860-9.
- Hansen, P. R., Lunde, A., & Nason, J. M. (2011). The model confidence set. *Econometrica*, 79, 453–497.
- Hawkes, A. G. (1971). Spectra of Some Self-Exciting and Mutually Exciting Point Processes. *Biometrika*, 58, 83–90. URL: <http://www.jstor.org/stable/2334319?origin=crossref>. doi:10.2307/2334319.

- Herrera, R., & Schipp, B. (2013). Value at risk forecasts by extreme value models in a conditional duration framework. *Journal of Empirical Finance*, 23, 33–47. doi:10.1016/j.jempfin.2013.05.002.
- Karmakar, M., & Paul, S. (2016). Intraday risk management in international stock markets: A conditional evt approach. *International Review of Financial Analysis*, 44, 34–55.
- Karmakar, M., & Shukla, G. K. (2014). Managing extreme risk in some major stock markets: An extreme value approach. *International Review of Economics and Finance*, . doi:<https://doi.org/10.1016/j.iref.2014.09.001>.
- Kuester, K., Mittnik, S., & Paolella, M. S. (2006). Value-at-risk prediction: A comparison of alternative strategies. *Journal of Financial Econometrics*, 4, 53–89. URL: <http://dx.doi.org/10.1093/jjfinec/nbj002>. doi:10.1093/jjfinec/nbj002.
- Kupiec, P. H. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *The journal of Derivatives*, 3, 73–84.
- Longin, F. M. (2000). From value at risk to stress testing: The extreme value approach. *Journal of Banking & Finance*, 24, 1097 – 1130. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378426699000771>. doi:[https://doi.org/10.1016/S0378-4266\(99\)00077-1](https://doi.org/10.1016/S0378-4266(99)00077-1).
- McNeil, A. J., & Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, 7, 271–300. doi:10.1016/S0927-5398(00)00012-8.
- McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015). *Quantitative risk management: concepts, techniques and tools*. (Revised ed ed.). Princeton University Press.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, (pp. 347–370).
- O’Brien, J., & Szerszeń, P. J. (2017). An evaluation of bank measures for market risk before, during and after the financial crisis. *Journal of Banking & Finance*, 80, 215 – 234. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378426617300511>. doi:<https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2017.03.002>.
- Pickands, J. (1975). Statistical Inference Using Extreme Order Statistics. *Annals of Statistics*, 3, 119–131. doi:10.1214/aos/1176343003.
- RiskMetrics (1995). *Technical Document - 3rd Edition*. Technical Report J.P Morgan Guaranty Trust Company.

- Rocco, M. (2014). EXTREME VALUE THEORY IN FINANCE: A SURVEY. *Journal of Economic Surveys*, 28, 82–108. URL: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-6419.2012.00744.x>. doi:10.1111/j.1467-6419.2012.00744.x.
- White, H. (1982). Maximum likelihood estimation of misspecified models. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, (pp. 1–25).
- Wong, M. C. S., Cheng, W. Y., & Wong, C. Y. P. (2003). Market risk management of banks: implications from the accuracy of value-at-risk forecasts. *Journal of Forecasting*, 22, 23–33.

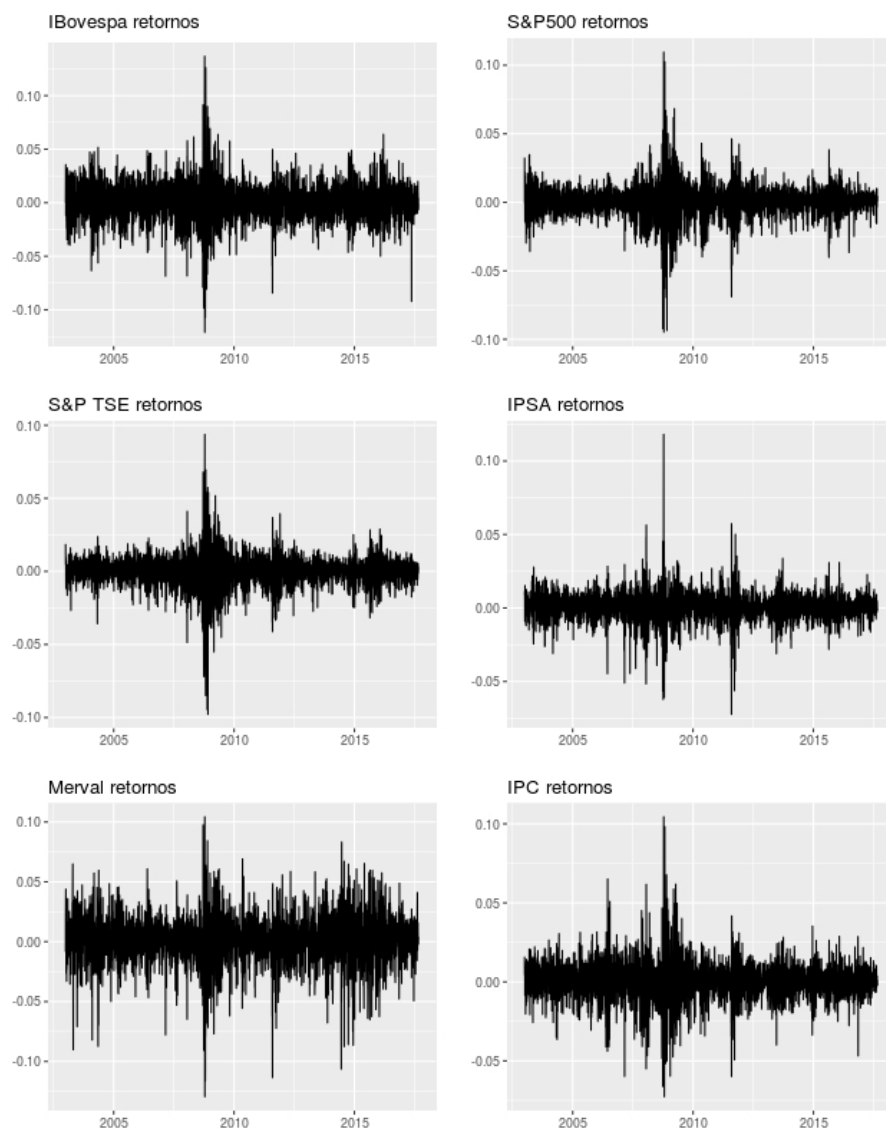


Figure A.1: Retornos dos índices do estudo. Período completo entre 01/01/2003 a 30/08/2017.

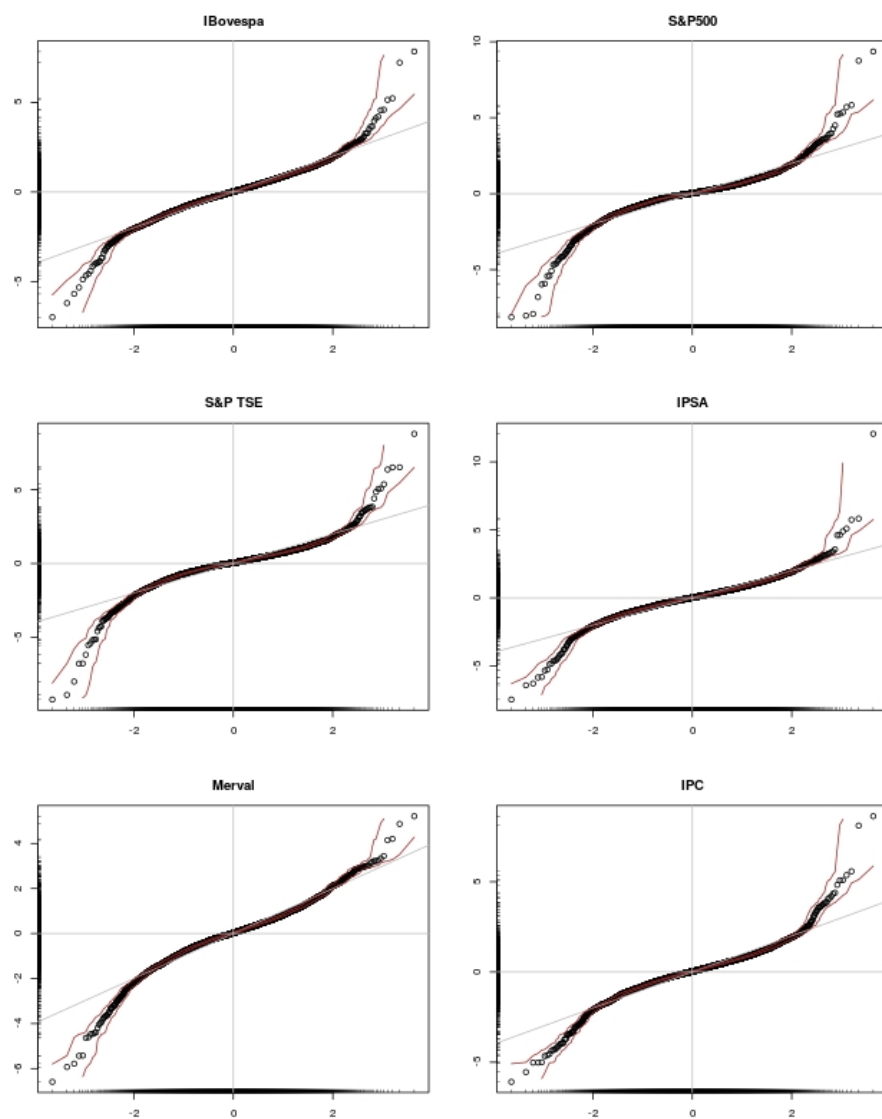


Figure A.2: Análise de normalidade dos retornos através de gráficos quantil-quantil.

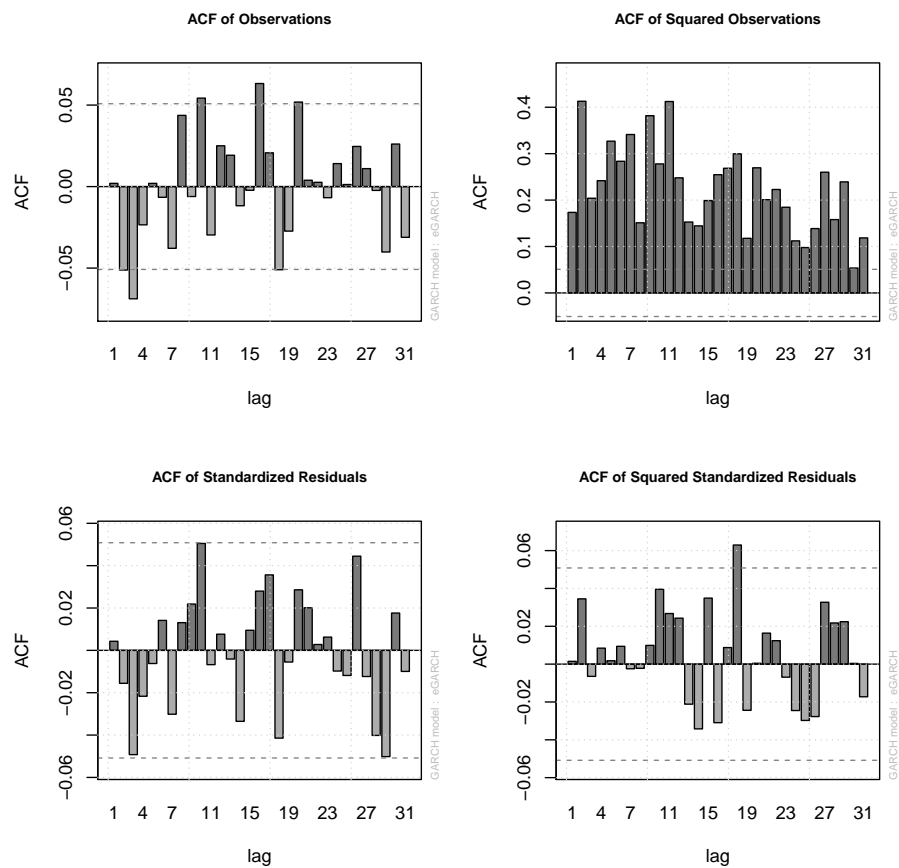


Figure A.3: Ibovespa. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. Período dentro da amostra 01/01/2013 a 31/12/2008.

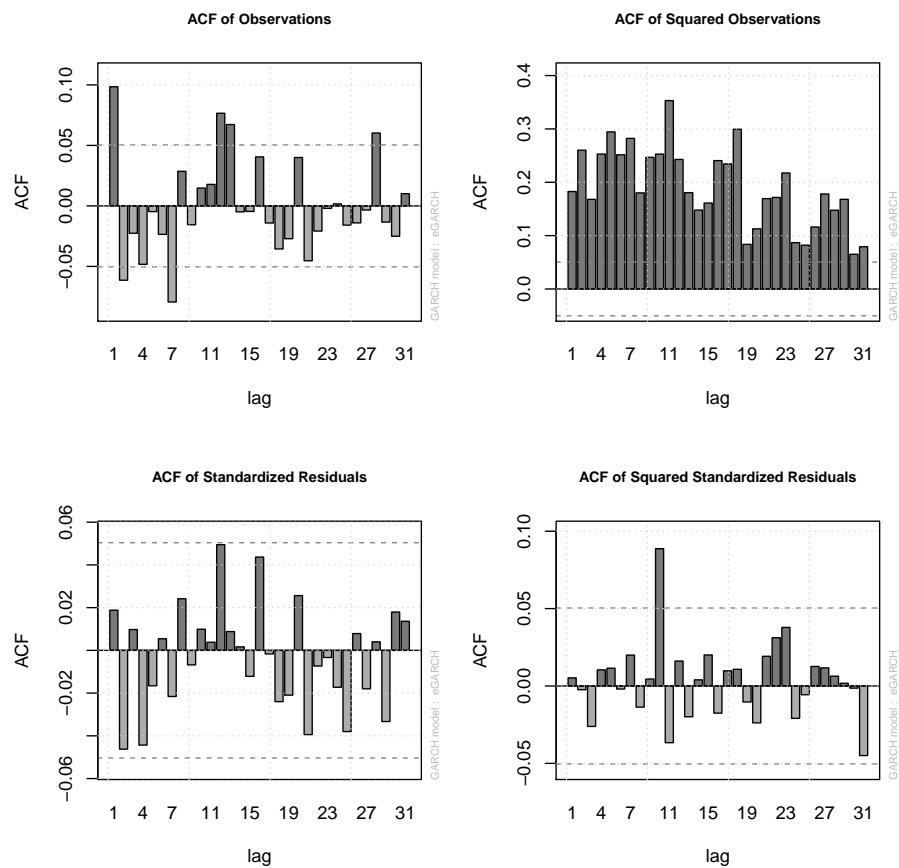


Figure A.4: IPC. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. Período dentro da amostra 01/01/2013 a 31/12/2008.

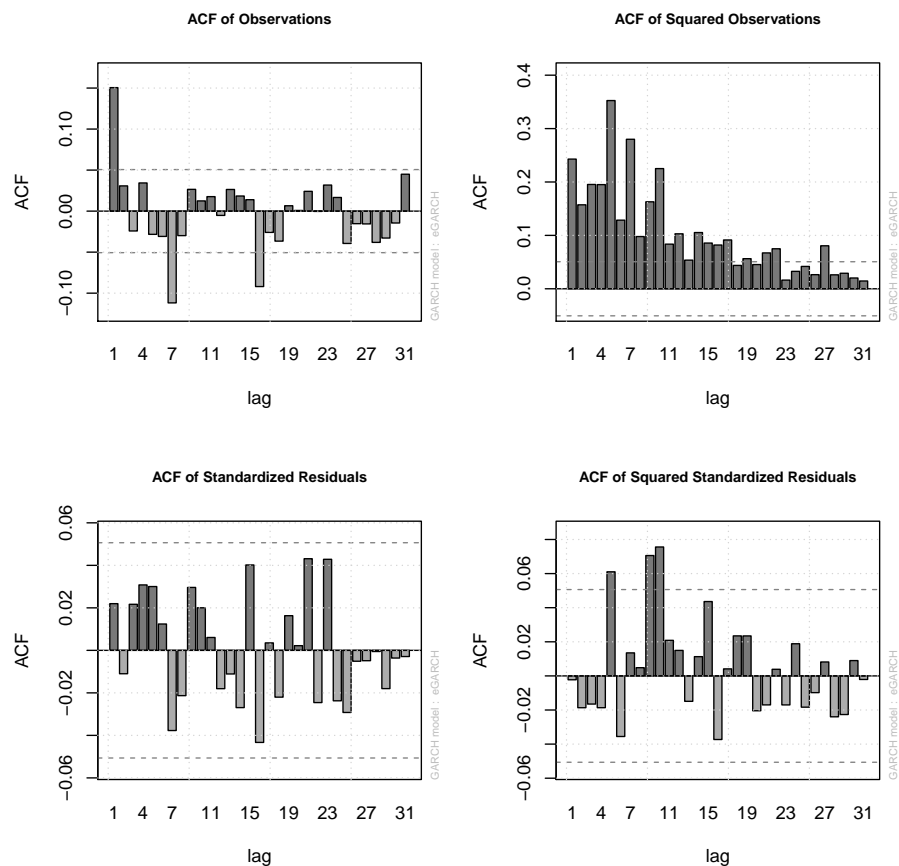


Figure A.5: IPSA. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. Período dentro da amostra 01/01/2013 a 31/12/2008.

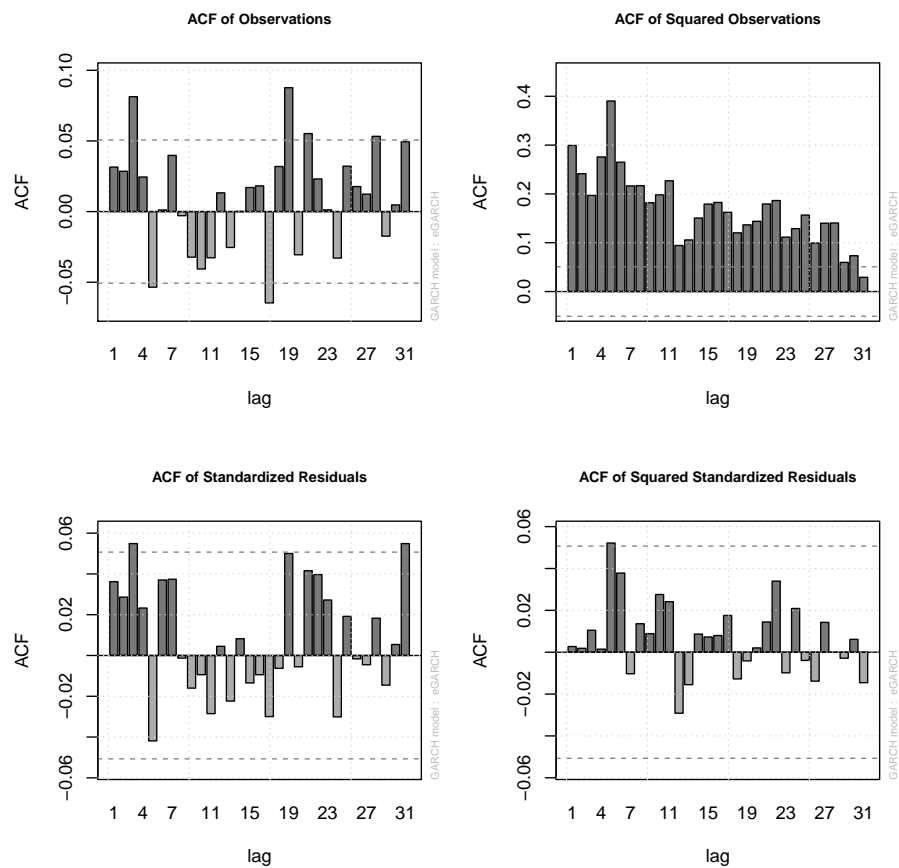


Figure A.6: Merval. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. Período dentro da amostra 01/01/2013 a 31/12/2008.

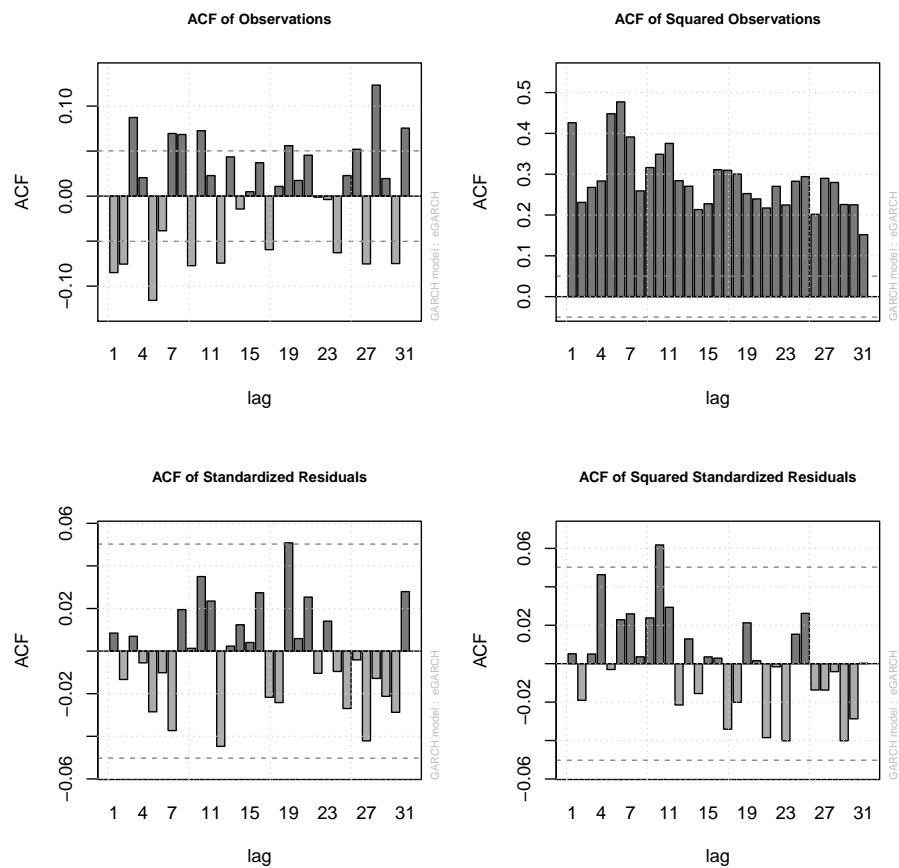


Figure A.7: S&P TSE. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. Período dentro da amostra 01/01/2013 a 31/12/2008.

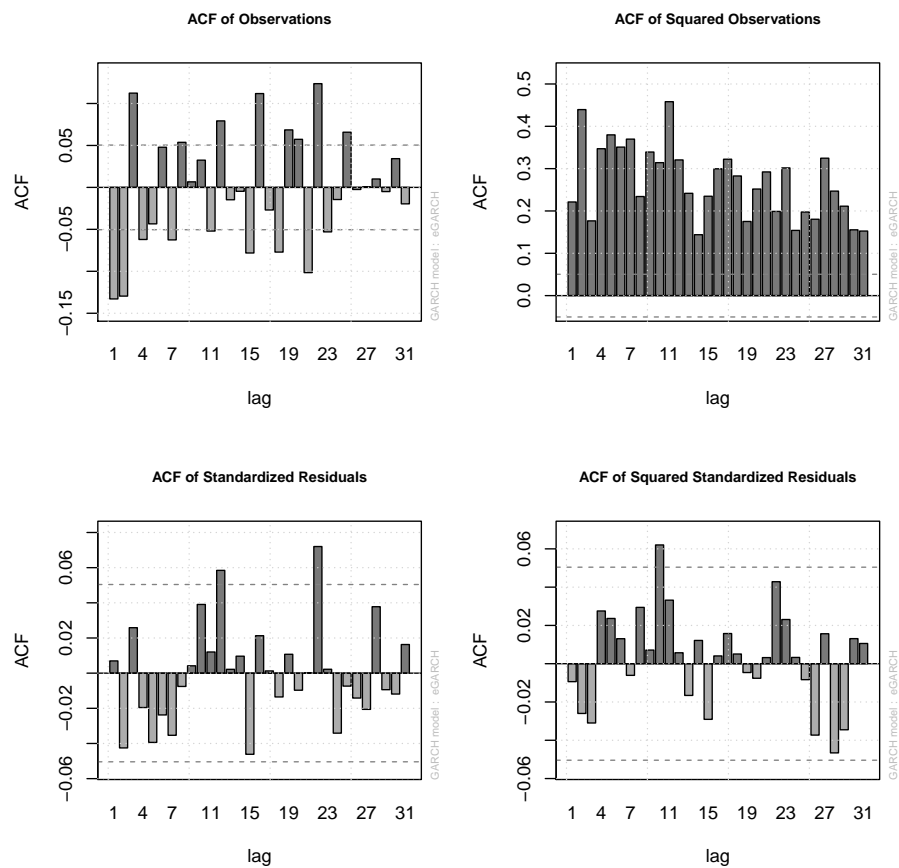


Figure A.8: S&P500. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. Período dentro da amostra 01/01/2013 a 31/12/2008.

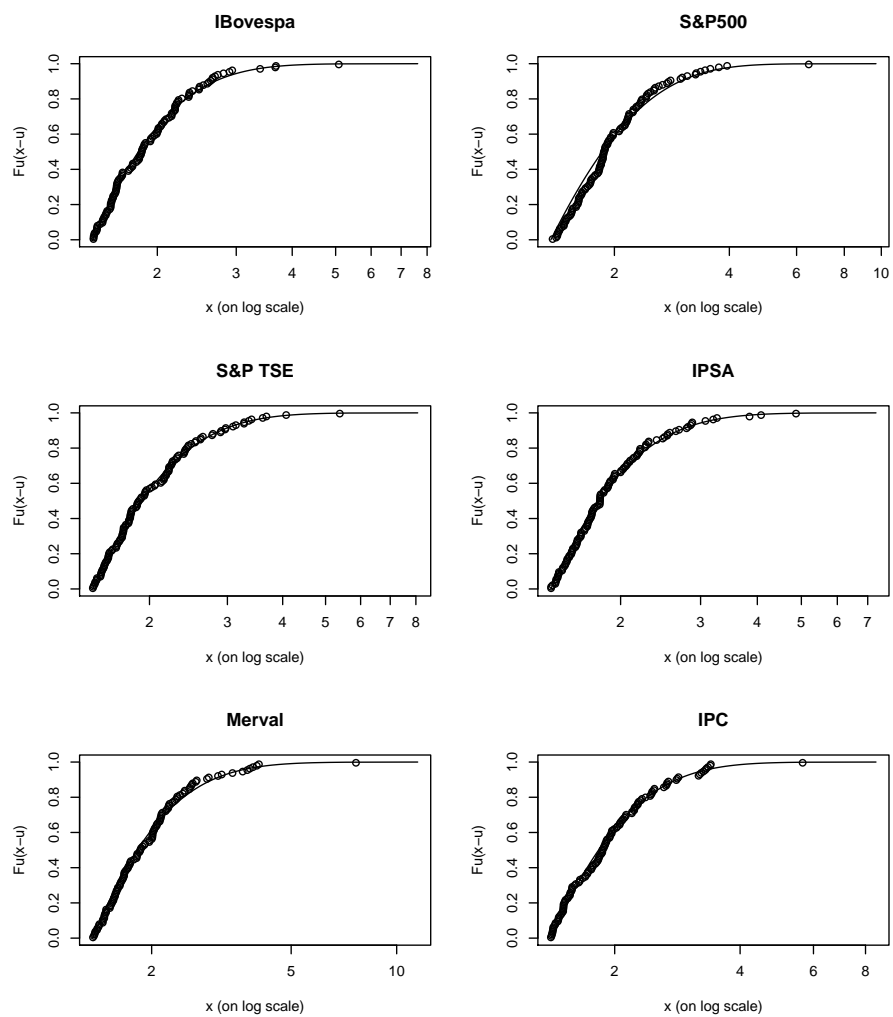


Figure A.9: Qualidade do ajuste dos dados de inovações em excesso contra uma GPD de referência. Período dentro da amostra.

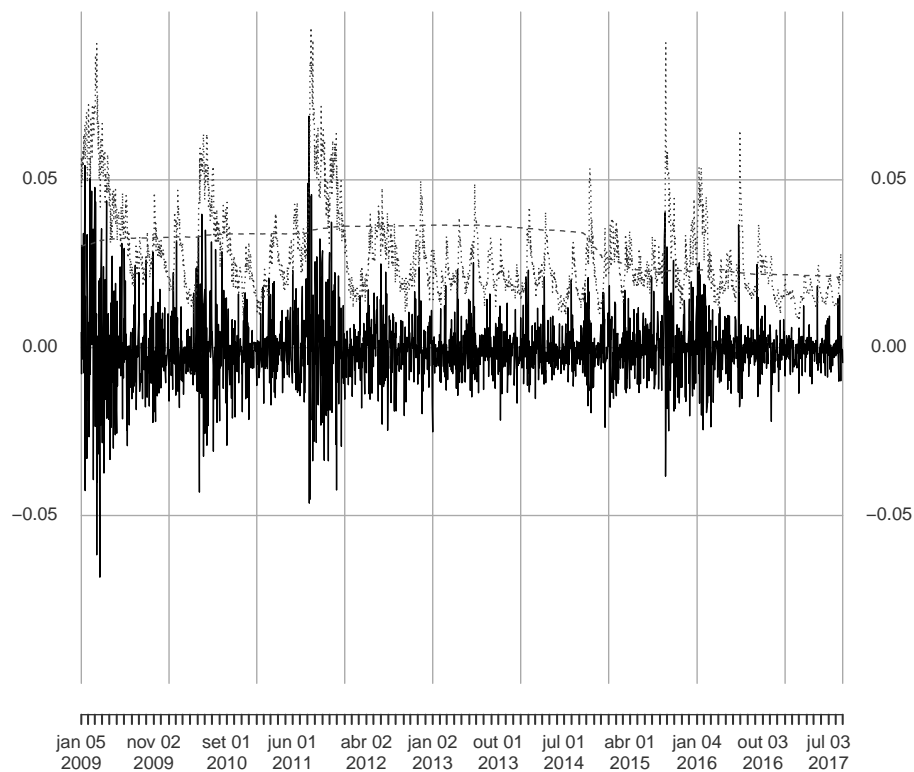


Figure A.10: Teste fora da amostra para o S&P500. O modelo EVT condicional (linha pontilhada) é muito mais reativo a mudanças na volatilidade que um modelo normal incondicional (linha tracejada).

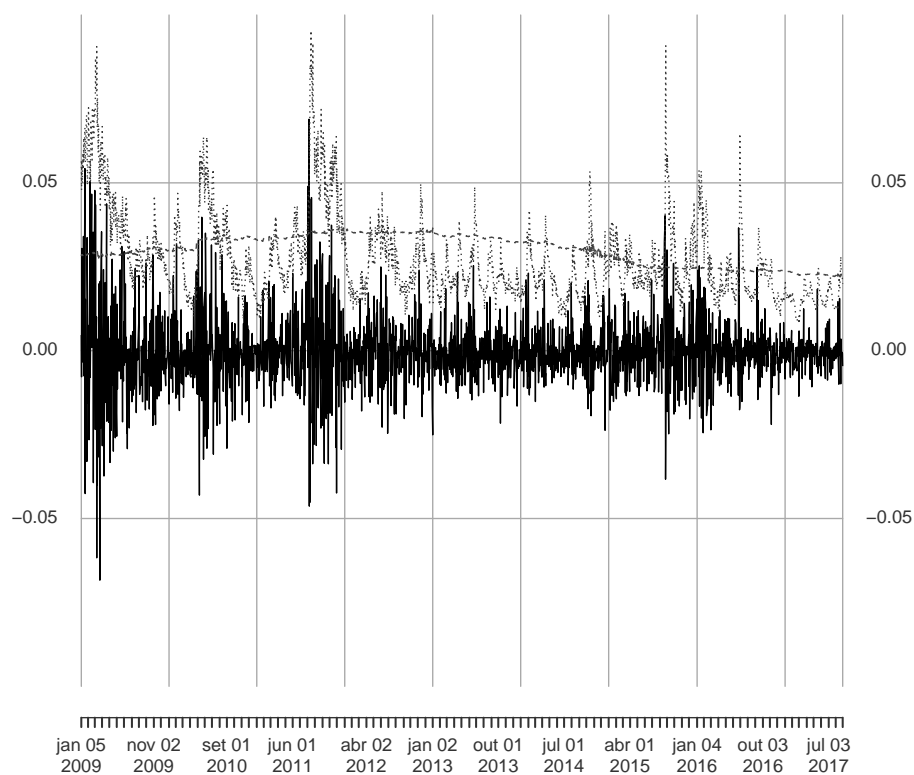


Figure A.11: Teste fora da amostra para o S&P500. O modelo EVT condicional (linha pontilhada) é muito mais reativo a mudanças na volatilidade que o modelo EVT incondicional filtrado (linha tracejada).