

Aplicando a teoria do valor extremo ao cálculo de risco de índices setoriais da Bovespa

Resumo

Este artigo faz um comparativo entre dois modelos univariados para estimação de Valor em Risco (VaR) para seis índices de ações calculados pela Bovespa. Os modelos testados são do tipo condicional com um período fora da amostra, aplicados a mais de 3 anos de observações diárias. A partir de dois procedimentos de avaliação, cobertura incondicional e teste de independência de violações ao valor em risco, os melhores resultados são apresentados pelo modelo que une a Teoria do Valor Extremo (EVT) e modelagem condicional de variâncias heterocedásticas, o qual leva em conta o regime variável nas volatilidades das perdas, assim como excesso de curtose.

Palavras-chave: valor em risco, teoria do valor extremos, picos acima de um limiar, modelos garch.

Abstract

This article makes a comparison between two univariate models of Value-at-Risk (VaR) estimation for six stock indices calculated by Bovespa. The models tested are of the conditional type and, an out-of-sample period with more than 3 years of daily observations is used. Based on two evaluation procedures, unconditional coverage and independence test of value-at-risk violations, the best results are presented by the model that links the Extreme Value Theory (EVT) and conditional modeling of heteroskedastic variances, which takes into account the variable regime in losses volatilities as well as, excess of kurtosis.

Keywords: value-at-risk, extreme value theory, peaks over threshold, conditional evt, garch models.

Área ANPEC: Área 4 - Macroeconomia, Economia Monetária e Finanças

Classificação JEL: C.22, G.10, G.21

1 Introdução

Uma classificação comum dos riscos encontrada no mercado financeiro baseia-se na fonte da incerteza subjacente. Muitas vezes, define-se o risco de um ativo financeiro como o grau de variabilidade dos retornos líquidos futuros. Essa incerteza sobre a rentabilidade esperada assume muitas formas, razão pela qual a maioria dos participantes nos mercados financeiros está sujeita a uma variedade de riscos. Uma classificação comum dos riscos encontrados no mercado financeiro baseia-se na fonte da incerteza subjacente. No setor financeiro, o tipo de risco mais conhecido é provavelmente o *risco de mercado*, o risco de mudança no valor de uma posição financeira de um portfólio devido a mudanças no valor subjacente dos componentes que essa posição depende, tais como preços de ações e títulos, taxas de câmbio, preços de *commodities*, etc.

Estimar o risco de mercado dos portfólios de investimento é uma busca constante dos investidores bem como por parte dos reguladores do Sistema Financeiro Nacional. No âmbito internacional, Instituições financeiras – IF, são obrigadas a provisionar um percentual de seu capital afim de suportar a volatilidade do mercado, e assim, minimizar o seu risco de insolvência tendo como base as legislações locais e princípios de Basileia (*Basel Committee on Banking Supervision* - BCBS do Banco de Compensações Internacionais - BIS).

A alta volatilidade dos retornos dos ativos financeiros observada em séries históricas é uma característica inerente. Tal volatilidade não segue uma distribuição normal e nem é constante ao longo do tempo. Perdas extremas são frequentes e não devem ser ignoradas ou tratadas como *outliers*, neste artigo são observadas com mais atenção as perdas de magnitude anormais, as quais impactam nos portfólios dos investidores e chamam atenção dos reguladores do mercado financeiro.

Diversos autores se interessam em entender este fenômeno por meio de estudos teóricos e empíricos com o objetivo de entender o mecanismo do comportamento dos retornos dos ativos ao longo do tempo, bem como modelar de forma adequada as caudas das distribuições dos retornos extremos, principalmente as perdas consideradas anormalmente grandes.

Como resultados práticos dos estudos na área, pode-se citar a exigência de um capital regulatório como uma das propostas do Acordo de Basileia I, o qual instituiu o conceito de capital próprio mínimo com o objetivo de proteção tanto da Instituição Financeira quanto dos próprios Sistemas Financeiros Nacionais contra o comportamento volátil de ativos de risco. Pode-se destacar também a obrigatoriedade dos signatários do acordo de Basileia em estimar o Valor em Risco (RISKMETRICS, 1995) para dimensionar a exigência de capital para as instituições financeiras. O acordo de Basileia teve mais duas versões: Basileia II (2004) e Basileia III (2010) todos com o foco em reduzir as práticas que elevam o risco financeiro causado pela incorreta avaliação de ativos ou pela excessiva alavancagem por parte dos bancos.

Junto com o VaR, outra metodologia para a mensuração do risco é o *Expected Shortfall (ES)*. Enquanto o VaR quantifica o valor máximo de perda para uma carteira de ativos, sob condições normais de mercado, durante um determinado período de tempo e com um certo nível de confiança (quantil alto α), o ES quantifica o valor esperado da perda, dado que ocorreu uma violação do VaR para o mesmo período de tempo e nível de confiança Degiannakis *et al*, (2013).

A principal crítica à metodologia de cálculo do VaR, é que esta parte do pressuposto de que os retornos dos ativos frequentemente seguem uma distribuição normal. No entanto, empiricamente pode-se constatar que as distribuições dos retornos apresentam “caudas mais longas ou pesadas” que das distribuições normais, o que causa um problema de imprecisão na estimativa de risco de perda excessiva.

Explorando essa lacuna de precisão na estimação do risco causada pelo referido pressuposto, alguns estudos surgiram na tentativa de aperfeiçoar o VaR, como, por exemplo, a aplicação da Teoria dos Valores Extremos - EVT para modelar as distribuições de retornos com caudas longas. Por esta característica, consegue-se modelar eventos que se distanciam muito da tendência central, média ou mediana, por exemplo. Esse comportamento assintótico se ajusta bem para fatos estilizados sobre os retornos de ativos financeiros.

Na prática, a EVT parte do pressuposto de que os eventos extremos ou raros têm muito mais probabilidade de ocorrer do que seria previsto pela distribuição normal simétrica de cauda mais curta, o que torna os números do VaR baseados em normalidade em medidas inadequadas do risco real Mörgel & Auer (2018).

Neste artigo procurou-se modelar, com base na metodologia da EVT, apenas o segmento da cauda da distribuição onde se localizam as perdas extremas resultantes dos retornos dos ativos financeiros escolhidos, tais perdas superiores a um limiar de referência u . Este método é conhecido como *Peaks Over Threshold (POT)*. A estimativa do VaR é o resultado da modelagem dessa cauda.

A EVT se adequa muito bem aos fatos estilizados de ativos financeiros no quesito de modelagem de perdas extremas, e em função disso vem sendo utilizada frequentemente no estudo de séries financeiras. McNeil e Frey (2000) introduziram a EVT em dois estágios para a modelagem do risco condicional. Por outro lado, Danielsson e Morimoto (2000) criticaram os modelos condicionais de estimação do VaR propondo a utilização de uma modelagem EVT incondicional e sem o primeiro estágio de filtragem com GARCH. Byström (2004) concluiu que a combinação das abordagens da EVT, máximos em bloco e POT, com análise de séries temporais tradicional (ARIMA e GARCH) têm os melhores resultados tanto em períodos mais tranquilos como naqueles de alta volatilidade.

Em uma revisão de estudos e aplicações da EVT na área de finanças, Rocco (2014) conclui que esta abordagem tem um conjunto de características desejáveis, tais como: oferece recursos, com fortes fundamentos teóricos para modelar eventos extremos de risco; fornece uma variedade de ferramentas, dentre as quais destacam-se métodos não-paramétricos e processos pontuais, o que traz flexibilidade para a aplicação; o fato de que a grande maioria das séries financeiras, mesmo apresentando comportamentos muito diferente de séries com distribuição-padrão, podem ser igualmente modeladas pela EVT, o que

também aumenta a flexibilidade e a precisão da modelagem; e, finalmente, a disponibilidade de abordagens paramétricas permite projeções e previsão de eventos extremos.

Outro estudo de revisão foi realizado por Kuester, Mittnik e Paolella (2006). Os autores concluíram que os modelos de estimativa de VaR utilizados frequentemente subestimam o risco, e que o modelo condicional GARCH-EVT apresenta melhores resultados.

No setor de crédito bancário pode-se citar alguns autores que aplicaram metodologia EVT como parte de suas estimativas de risco por meio do cálculo do VaR, dentre eles destacam-se: Longin (2000), Berkowitz e O'Brien (2002), Wong, Cheng e Wong (2003), O'Brien e Szerszeń (2017). Por outro lado, numa abordagem aplicada em economias emergentes, Gencay e Selcuk (2004) aplicaram a EVT para estimar o VaR e realizaram teste de estresse. Os autores constataram que a EVT se torna mais precisa para quantis mais elevados. Adicionalmente, concluíram que existe diferença de volatilidade entre os retornos positivos e negativos.

Este artigo busca avaliar, por meio de testes estatísticos, a capacidade preditiva de dois modelos distintos de cálculo da métrica de valor em risco comumente encontrados na literatura, por meio da técnica de *backtest*. O modelo EVT condicional em dois estágios, proposto por McNeil e Frey (2000), e o modelo associados ao grupo *RiskMetrics*, que pressupõe distribuição normal dos retornos. Os testes aplicados abrangem características importantes do VaR como cobertura incondicional e independência entre violações.

O restante deste artigo está assim organizado, na seção 2 é apresentada a teoria do valor extremo, seus principais resultados para séries *iid* utilizando o método *peaks over threshold* e o modelo em dois estágios com filtragem inicial a partir de um modelo AR-GARCH. Na seção 3 são apresentados os índices e seus períodos em análise e algumas estatísticas descritivas dos retornos são calculadas. Já em 3.1 e 3.2 o modelo EVT condicional utilizado é revisto e seus parâmetros de análise são determinados a partir de uma amostra de trabalho (período dentro da amostra). Em 4, a avaliação no período fora da amostra dos modelos é realizada. Testes estatísticos para cobertura condicional e incondicional são feitos na subseção 4.1. Um comparativo entre os níveis de risco de cada um dos índices analisados é apresentado na seção 5. Ao final, uma conclusão sobre os resultados encontrados e no Apêndice A são apresentados em maiores detalhes os modelos analisados.

2 Modelando caudas e medidas de risco associadas com EVT

Considere uma amostra de uma variável aleatória - *va* - cujas observações sejam independentes e igualmente distribuídas - *iid*, X_i , com $i \in \mathbb{N}$, que representem as perdas financeiras de um determinado ativo, com uma função de distribuição - *df* - desconhecida $F(x) = P(X_i \leq x)$. Seja u um valor de limiar a partir do qual perdas acima deste valor sejam consideradas extremas. Os valores de excesso serão, portanto, $X_i - u$.

A EVT está interessada em investigar o comportamento da distribuição dos máximos desta *va* dados por $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ para valores de n a medida que $n \rightarrow \infty$. A sequência M_n é chamada de máximos em bloco e foi demonstrada por meio do conhecido teorema de Fisher-Tippett-Gnedenko¹, que a única distribuição para a qual M_n converge com $n \rightarrow \infty$ é a distribuição de valores extremos generalizada - GEV. Se esta distribuição for denotada por H_ξ , com ξ um parâmetro da distribuição, então se diz que $F \in MDA(H_\xi)$, F pertence ao domínio de atração máximo (MDA) de H_ξ .

Definição 1 (GEV). Distribuição de valores extremos generalizada, é definida por sua função densidade de probabilidade - pdf - a qual é dada por:

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}), & \xi \neq 0, \\ \exp(-e^{-x}), & \xi = 0 \end{cases} \quad (1)$$

¹ Os três artigos que fundamentam este teorema são: Fisher e Tippett (1928), Gnedenko (1941), Gnedenko (1943).

o parâmetro ξ é conhecido como parâmetro de forma da distribuição e dependendo deste valor tem-se diferentes tipos de distribuição (casos particulares da GEV). Para as aplicações financeiras não necessitamos calcular qual *MDA* pertencem nossas distribuições contínuas, bastando saber que basicamente todas as distribuições de utilidade prática estão contidas em $MDA(H_\xi)$ para algum valor de ξ , (MCNEIL, FREY e EMBRECHTS, 2015, p. 139).

2.1 Excessos acima de um limiar

O método POT para calcular a função de distribuição dos valores que excedem um determinado limiar de um conjunto de dados vem sendo empregado no mundo financeiro para ajustar as caudas das distribuições de retornos, ou perdas, dos ativos. Este método é preferido aquele de máximos em bloco, pois, desperdiça uma quantidade menor de dados da série original. Qualquer valor que exceda o limiar pré-determinado é considerado na distribuição dos excessos. Esta, por sua vez, é definida como:

Definição 2 (Distribuição dos Excessos). Seja X uma variável aleatória com função de distribuição F . A distribuição dos excessos sobre um limiar u tem a seguinte função de distribuição:

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (2)$$

para $0 \leq x < x_F - u$, onde $x_F \leq \infty$ é o limite direito da distribuição F .

Uma importante distribuição que surge na modelagem dos excessos sobre um limiar é a distribuição generalizada de Pareto (GPD), que pode ser definida como:

Definição 3 (GPD). A função de distribuição de Pareto Generalizada é definida como:

$$G_{\xi, \psi}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \frac{\xi x}{\psi})^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\psi}\right), & \xi = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

onde $\psi > 0$, e $x \geq 0$ quando $\xi \geq 0$ ou $0 \leq x \leq -\psi/\xi$ quando $\xi < 0$.

Os parâmetros ξ e ψ são conhecidos respectivamente como parâmetros de forma e escala da distribuição. A GPD tem papel fundamental na teoria de valor extremo em função do teorema de Pickands-Balkema-de Haan², onde é demonstrado que, para um valor suficientemente alto do limiar u , a distribuição dos excessos $F_u(x)$ pode ser aproximada por uma GPD, $G_{\xi, \psi}(x)$.

O que este teorema prova é que para distribuições as quais os máximos em bloco normalizados convergem para uma GEV na forma da equação (1), então a distribuição dos excessos acima de um limiar destas mesmas distribuições convergem para (3), dado um valor de limiar u adequado. Como para fins práticos basicamente todas as distribuições contínuas de fato estão no $MDA(H_\xi)$ para algum valor de ξ , temos que a GPD é a distribuição a ser escolhida para modelar excessos acima de um limiar.

Ao fazer esta suposição que a distribuição dos excessos é igual a (3), pode-se então, a partir dos dados, estimar os parâmetros de forma e escala e, portanto, modelar a cauda direita da distribuição de perdas de forma parametrizada com o auxílio da equação (2).

Dada a parametrização de uma GPD, é interessante saber o valor esperado desta distribuição, uma vez que esta medida de valor central fornece importante informação sobre a quantidade de risco que se está medindo, assim como a informação de que a própria distribuição foi ajustada aos dados de forma satisfatória. O valor esperado de uma variável aleatória não negativa pode ser computado por meio da integral de sua cauda, $P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$. A cauda descrita em (3) é, para $\xi \neq 0$, $(1 + \xi x/\psi)^{-1/\xi}$.

Desta forma, o valor esperado de $G_{\xi, \psi}(x)$, converge para:

2 As referências originais são: Pickands (1975) e Balkema e Haan (1974).

$$E[G_{\xi,\psi}(X)] = \frac{\psi}{1-\xi}, \quad (4)$$

desde que $\xi < 1$.

Definição 4 (Função Média dos Excessos). A função média dos excessos (FME) de uma variável aleatória X com média finita é dada por.

$$e(u) = E(X - u | X > u) \quad (5)$$

Ou seja, a equação (5) representa o valor esperado da função de distribuição dos excessos dada pela Definição 2. Ela representa a média de F_u como uma função do limiar u . Por vezes também é conhecida como função média de vida residual (*mean residual life function*).

Para uma variável distribuída na forma de $G_{\xi,\psi}(x)$, o parâmetro de escala é uma função linear em u dado por $\psi(u) = \psi + \xi u$, (EMBRECHTS, KLÜPPELBERG e MIKOSCH, 1997, Teorema 3.4.13(e)). Utilizando-se deste fato e da equação (4) chega-se ao cálculo da função média dos excessos para uma GPD, dada por:

$$e(u) = \frac{\psi + \xi u}{1 - \xi}, \quad (6)$$

onde $0 \leq u < \infty$ se $0 \leq \xi < 1$ e $0 \leq u \leq -\psi/\xi$ se $\xi < 0$. É possível observar que de fato a FME é linear em u . Esta é uma característica importante de uma distribuição de Pareto generalizada e que pode ser utilizada para auxiliar a escolha de um valor adequado do limiar u de tal forma que a suposição de convergência $F_u(x) \rightarrow G_{\xi,\psi}(x)$ seja válida.

Assim, quando da análise de uma determinada distribuição de perdas F e quando se deseja ajustar a cauda desta para perdas acima de um valor limiar u a uma GPD, é necessário primeiramente determinar um valor adequado de u que garanta a suposição de convergência. Um método frequentemente utilizado é o gráfico da função média dos excessos com relação a u . Analisando este gráfico, escolhe-se o menor valor de u para o qual a partir deste ponto a relação $e(u)$ versus u torne-se linear.

Deseja-se o menor valor de u para o qual a relação é linear pois, mesmo o método POT implica em relevante perda de observações da série temporal, já que apenas os valores acima deste limiar são utilizados para fazer a estimação dos parâmetros ξ e ψ da GPD. Portanto, existe um *trade-off* na escolha do valor limiar u , escolhendo um valor muito baixo obtém-se uma boa quantidade de dados para estimar os parâmetros da GPD, mas a própria distribuição resultante não será GPD, uma vez que não se estará trabalhando na região onde a relação $e(u)$ versus u é linear, e portanto, os parâmetros estimados serão enviesados. Por outro lado, um valor limiar muito alto impõe o custo de trabalhar com poucos dados para fazer a estimação dos parâmetros da distribuição e, por conseguinte, os erros padrões dessas estimativas serão elevados.

Considerando este *trade-off*, uma saída é buscar minimizar o erro quadrado médio MSE do parâmetro estimado. Idealmente deseja-se ter viés zero e variância mínima para um estimador, entretanto, na impossibilidade de tal realização, um estimador relativamente eficiente é aquele que possui o menor MSE. Em McNeil, Frey e Embrechts (2015, p. 161-162) é explorada, por meio de simulação de Monte Carlo, esta relação entre a escolha do limiar u e o MSE do parâmetro ξ obtido com a aplicação do método POT e também da própria medida de risco $Var_{99\%}$. Chegam a conclusão que uma escolha de limiar tal que o número de excessos a este fique acima de 100 observações é adequado, e mais importante, a partir destas 100 observações o MSE é relativamente robusto, se elevando lentamente a partir de seu valor mínimo.

2.2 Estimando o VaR

Pela modelagem da cauda da distribuição F de perdas por uma GPD, é possível calcular de forma semi-paramétrica a medida de risco VaR em função dos parâmetros estimados de (3) e da distribuição empírica de F . Sob a suposição de convergência a cauda da distribuição F , $\bar{F}(x)$, para $x \geq u$ é dada por.

$$\bar{F}(x) = P(X > u)P(X > x | X > u)$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{F}(u)P(X - u > x - u | X > u) \\
&= \bar{F}(u)\bar{F}_u(x - u) \\
&= \bar{F}(u)\left(1 + \xi \frac{x - u}{\psi}\right)^{-1/\xi}
\end{aligned} \tag{7}$$

Nesse caso, x são os valores a serem observados das perdas, e, portanto, $x - u$ são as perdas em excesso ao limiar. A equação (7) efetivamente separa a distribuição F em duas partes. A primeira parte, para valores menores que u , não foi modelada analiticamente e, portanto, utiliza-se a distribuição empírica das perdas, representada por sua cauda $\bar{F}(u)$, que nada mais é que o número observado de excessos de u sobre o número total de observações da amostra. A segunda parte é justamente a modelagem por meio de uma GPD com parâmetros ξ e ψ dado o limiar u . Por esta modelagem paramétrica pode-se conhecer as probabilidades de cauda para valores de x maiores que u .

Como a equação (7) fornece a probabilidade de cauda, então esta é igual a $1 - \alpha^3$ para um valor de $\alpha \geq 1 - \bar{F}(u)$. O valor $1 - \alpha$ é conhecido como a cobertura da medida de risco. Fazendo $\bar{F}(x) = 1 - \alpha$ na equação (7) o valor de x representará VaR_α e basta manipular esta equação para encontrá-lo como função de $\bar{F}(u)$, α e dos parâmetros ξ e ψ . O que garante o resultado abaixo.

$$VaR_\alpha = q\alpha(F) = u + \frac{\psi}{\xi} \left[\left(\frac{1 - \alpha}{\bar{F}(u)} \right)^{-\xi} - 1 \right] \tag{8}$$

Portanto, a medida de risco VaR_α , para distribuições de perdas que tiveram suas caudas modeladas por meio de $G_{\xi,\psi}$ com $\xi < 1$ e $\psi > 0$, pode ser calculada utilizando-se a equação (8). A estimativa desta medida de risco será encontrada ao se estimar os parâmetros da GPD, assim como do limiar utilizado e de uma medida empírica de $\bar{F}(u)$ que será o número de excessos verificados sobre o total de amostras. É claro que, ao se adotar esta estimativa para $\bar{F}(u)$ se está implicitamente supondo que o número de amostras na série de perdas é significativa, assim como o número de excessos verificados. Daí a importância de se utilizar um valor u adequado, conforme explicitado na seção 2.1.

A estimativa da medida de risco desenvolvida nesta seção se qualifica como uma medida incondicional, no sentido que ela não depende do estado atual das coisas, mas sim de todo o histórico de eventos de forma uniforme. Em outras palavras, VaR_α derivado a partir da equação (8) é uma medida histórica de risco associado ao ativo em análise, o qual não leva em consideração se nos eventos mais recentes a volatilidade das perdas pode ser diferente do valor histórico.

Assim, ao passo que as estimativas de risco desenvolvidas nesta seção são valiosas para prazos mais longos, ainda é necessário desenvolver um modelo que lide com o fato das autocorrelações de volatilidades das perdas e, portanto, com o fato de a distribuição das perdas não ser independente e igualmente distribuída ao longo do tempo. O modelo proposto por McNeil e Frey (2000) pode ser utilizado para encontrar a medida de risco VaR_α condicional que se deseja, ainda dentro da metodologia POT.

2.3 Modelo GARCH-POT

Ativos financeiros possuem características de autocorrelação, senão em seus retornos propriamente ditos, ao menos em suas volatilidades ou variações absolutas. Ou seja, dada uma grande variação no momento t é de se esperar novamente uma grande variação, não necessariamente na mesma direção daquela anterior, para o momento $t+1$ e posteriores. Desta forma, medidas de risco incondicionais, conforme aquelas derivadas na subseção anterior 2.2 podem ser adequadas somente para horizontes temporais mais longos, pois implicitamente tomam em consideração os fatos mais recentes com o mesmo peso que fatos mais longínquos.

3 O percentil α na medida VaR_α representa um percentual desejado de perdas que sejam menores ou iguais ao valor de VaR_α . Portanto, a medida de risco VaR nada mais é que um quantil alto para o qual $\alpha\%$ das perdas devem ser menores ou iguais a este valor.

Assim, pode-se trabalhar com um modelo semelhante ao proposto por McNeil e Frey (2000) os quais fazem uma adequação dos retornos dos ativos a um modelo GARCH e posteriormente tratam os erros desta modelagem como *iid* e, portanto, a metodologia de POT pode ser aplicada. Este modelo pode ser entendido como um modelo condicional para medidas de risco pois, efetivamente, é levado em conta o estado atual da previsão para a média e principalmente para a volatilidade ao se calcular o VaR. Desta forma a medida responde rapidamente às variações nos humores do mercado e pode sinalizar de forma ágil uma inadequação de capital reservado pela instituição financeira.

Além desta vantagem de cunho prático, a técnica possui uma atratividade teórica. O método POT deve ser aplicado a séries *iid* que sabidamente não é o caso de perdas de ativos financeiros. Ao se utilizar a técnica POT nos resíduos padronizados de um modelo GARCH o que se está realizando é uma pré-filtragem destas perdas, de forma a obter resíduos padronizados que sejam *iid* e, portanto, aplicável a teoria de valor extremo. Primeiramente, neste artigo, diferentemente de McNeil & Frey (2000) ou Karmakar & Shukla (2014), foi estabelecido um mesmo modelo GARCH para as perdas dos ativos subjacentes. O modelo adotado foi o GARCH(1, 1) e sua variância condicional é definida por:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad (9)$$

onde os parâmetros α e β são conhecidos como coeficientes arch e garch respectivamente.

Denotando X_t como a perda observada no período t , μ_t e σ_t são respectivamente a média e o desvio-padrão condicionais, e seja Z_t inovações *iid* com média zero e desvio-padrão unitário, então tem-se que:

$$X_t = \mu_t + \sigma_t Z_t \quad (10)$$

Além do mais, quando toma-se $F(x)$ como a distribuição marginal de X_t , então $F_{t+1}|H_t(x)$ é a distribuição preditiva da perda para o próximo período, onde H_t é o conjunto de informações disponíveis ao fim do período t . Portanto, para o cálculo de VaR_α , se deseja encontrar o α -quantil que demarca a cauda superior de $F_{t+1}|H_t(x)$, tal que:

$$VaR_\alpha^t = \inf\{x \in \mathbb{R}: F_{t+1}|\mathcal{H}_t(x) \geq \alpha\} \quad (11)$$

Este é o preditor de VaR_α calculado com informações até o período t . Este valor calculado deve ser comparado a perda realizada em $t+1$, para testar uma possível violação. Considerando que a distribuição de perdas é dada pela equação (9) e sabendo das propriedades de variáveis aleatórias e do operador de expectância, a expressão de VaR_α^t é descrita como:

$$VaR_\alpha^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} z_\alpha, \quad (12)$$

onde z_α é o quantil α das inovações Z_t .

Dadas estas considerações, o modelo adotado segue um formato em dois estágios para ser implementado, como segue.

- Ajustar um modelo GARCH para os dados de perdas, sem fazer suposições sobre a distribuição de Z . Deste modelo retiram-se as estimativas de μ_{t+1} e σ_{t+1} e calculam-se as inovações implícitas resultantes com a equação (9).

- Ao se considerar os resíduos padronizados, \hat{Z}_t como sendo as realizações da variável aleatória Z , esta pode ter sua cauda ajustada a uma GPD utilizando-se o método descrito na subseção 2.2. Encontra-se por fim o valor de z_α , com o qual é finalizado o cálculo VaR_α^t por meio da equação (12) para os valores de α iguais a 0,975 e 0,99.

- Estes passos são repetidos para cada t dentro do período de avaliação.

Agora é necessário escolher um processo que modele a série temporal dada em (10), ou seja, precisa-se especificar o comportamento de μ_t e σ_t . Por suposição, o comportamento destas variáveis é dependente de acontecimentos passados, contidos no conjunto de informações H_{t-1} . Pode-se estipular um modelo GARCH(1, 1) para a volatilidade condicional e um simples AR(1) para a média condicional. A

ordem destes modelos foi escolhida como uma forma de compromisso entre parcimônia e um bom ajuste para os 2 índices sob análise.

Como critérios para a escolha deste modelo de filtro no primeiro estágio, deseja-se que as inovações Z_t , por meio de suas realizações na forma dos resíduos padronizados estimados no modelo possuam 2 características, ausência de autocorrelação serial em seus valores e nos seus quadrados.

Visando aplicar a teoria do valor extremo para o cálculo de VaR, não são feitos maiores pressupostos acerca da distribuição das inovações, mas está implícito que esta pertence ao *MDA* de uma GEV e, portanto, a distribuição de seus excessos sobre um limiar segue aproximadamente uma GPD.

O modelo completo para a medida condicional de risco VaR_{α}^t dada a distribuição de perdas X_t de um ativo será, portanto:

$$X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (13)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t Z_t \quad (14)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (15)$$

$$Z_t \sim \mathcal{D}(0,1) \text{ onde } \mathcal{D} \in MDA(H_{\xi}), \quad (16)$$

com a equação (12) fornecendo o valor de VaR_{α}^t , quando utilizada em conjunto com aquela dada por (8).

Uma vez obtidos os resíduos padronizados do modelo GARCH, \hat{Z}_t , aplica-se a estes a teoria do valor extremo descrita em 2.2 para se obter o quantil de interesse z_{α} . Para tanto, considerando a definição de uma GPD dada na equação (3) e denotando sua função densidade de probabilidades por $g_{\xi,\psi}$, a função logarítmica de verossimilhança, que deve ser maximizada para a obtenção dos parâmetros ξ e ψ é:

$$\begin{aligned} \ln L(\xi, \psi, Z_j^u) &= \sum_{j=1}^{N_u} \ln g_{\xi,\psi}(Z_j^u) \\ &= -N_u \ln \psi - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{j=1}^{N_u} \ln\left(1 + \xi \frac{Z_j^u}{\psi}\right), \end{aligned} \quad (17)$$

onde N_u é o número de excessos acima do valor de limiar escolhido e Z_j^u são as inovações em excesso, de acordo com a EVT que exige as perdas em excesso ao limiar. O quantil obtido, z_{α} é aquele derivado de forma semi-paramétrica a partir da teoria EVT *para os resíduos padronizados*, que são tratados como realizações das inovações Z_t e portanto, ainda deve ser escalado e deslocado por meio da equação (12) para a obtenção da medida de risco de verdadeiro interesse, VaR_{α}^t .

3 Dados utilizados e estatísticas descritivas

Neste artigo serão analisadas as séries de retornos (e perdas) de seis principais índices setoriais de ações da Bovespa. Foram escolhidos os quatro maiores índices setoriais pelo critério de valor de mercado ao final de março de 2018, índices Financeiro (IFNC), Consumo (ICON), Industrial (INDX) e Materiais (IMAT), além do índice de Governança (IGCX) e o próprio índice Bovespa (IBOV). Os retornos coletados foram entre as datas de 01/01/2009 a 31/12/2013 para o período considerado dentro da amostra, no qual são feitas algumas análises preliminares. O período fora da amostra, de onde são retirados os resultados de *backtest* se estende de 01/01/2014 a 08/05/2018. Em dias sem negociação nos mercados, os períodos iniciam-se na data útil seguinte e terminam em data útil imediatamente anterior.

A Tabela 1 apresenta algumas das estatísticas descritivas mais importantes para as séries de *retornos* dos ativos no período completo, dentro e fora da amostra. É possível verificar que os retornos não podem ser considerados normais, com a estatística de Jarque-Bera rejeitando a hipótese nula e com o alto grau de curtose em excesso verificado para todos os índices analisados.

Também se verifica grande autocorrelação serial entre os quadrados dos retornos com a estatística $Q^2(10)$ de Ljung-Box, uma *proxy* para a autocorrelação das variâncias, o que corrobora os fatos estilizados de séries financeiras, vide Cont (2001).

Tabela 1: Estatísticas descritivas dos retornos (amostra completa de 02/01/2009 08/05/2018).

Descritivas	IBOV	ICON	IFNC	IGCX	INDX	IMAT
Média	0.00034	0.00069	0.00066	0.00052	0.00047	0.00043
Máximo	0.06929	0.05183	0.09295	0.06188	0.06388	0.07572
Mínimo	-0.09211	-0.07446	-0.12288	-0.08837	-0.07370	-0.09079
Desvp	0.01497	0.01148	0.01640	0.01269	0.01247	0.01820
Assimetria	-0.03784	-0.11441	0.00658	-0.16642	-0.01978	0.08989
Curtose exc.	2.13179	2.23608	3.23913	3.06149	2.43070	1.37705
Jarque-Bera	439.98 (0.00000)	488.47 (0.00000)	1013.68 (0.00000)	916.29 (0.00000)	571.28 (0.00000)	186.72 (0.00000)
Q ² (10)	122.14 (0.00000)	104.32 (0.00000)	97.44 (0.00000)	146.68 (0.00000)	256.11 (0.00000)	230.39 (0.00000)
N.obs	2311	2311	2311	2311	2311	2311

Na Figura 1 é possível visualizar a não normalidade destes retornos. Tratam-se de gráficos quantil-quantil feitos entre a amostra completa dos retornos e uma distribuição normal de referência. Para todas as séries é observado um desvio da normalidade nas caudas, configurando distribuições leptocúrticas em todos os casos.

3.1 Filtro GARCH

Voltando-se para o período dentro da amostra, o filtro proposto GARCH(1, 1) foi aplicado nas séries de perdas e seus coeficientes estimados conforme a Tabela 2. Os valores p de cada um destes coeficientes estão apresentados entre parênteses e foram calculados com base em erros-padrão robustos, de acordo com White (1982)⁴.

A função do modelo GARCH neste primeiro estágio é a filtragem da série de perdas, de modo que os resíduos padronizados resultantes não sejam autocorrelacionados e tampouco possuam heterocedasticidade. A Tabela 3 apresenta novamente as estatísticas Jarque-Bera e Ljung-Box (Q e Q^2) desta vez para os resíduos padronizados resultantes da filtragem das perdas no primeiro estágio do modelo GARCH-POT. Enquanto que os resíduos padronizados, assim como os retornos (e as perdas), de fato não são normais como já se esperava, as estatísticas de autocorrelação agora estão todas em favor da ausência desta. Para todos os índices analisados, não é possível rejeitar H_0 nos testes de autocorrelação, tanto para os resíduos como para os seus quadrados em evidente contraste com os valores apresentados na Tabela 1 quando foram analisados os retornos destes índices. Evidência que a filtragem inicial foi bem-sucedida em remover autocorrelação serial tanto das perdas quanto da variância.

⁴ Como era de se esperar, nem todos os coeficientes estimados são significativos ao nível de significância de 5% (alguns nem mesmo a 10%), o que não invalida o modelo.

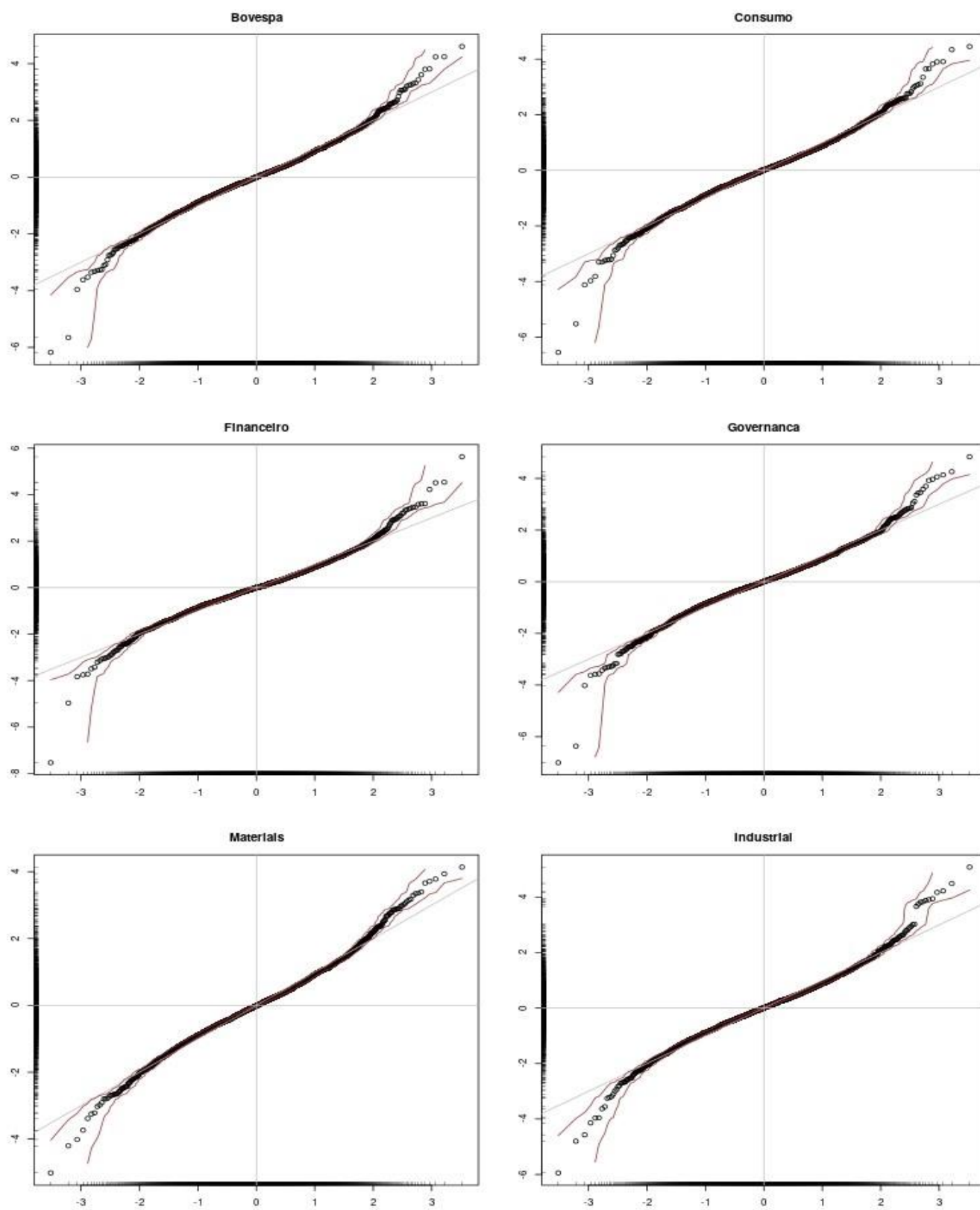


Figura 1: Análise de normalidade dos retornos por meio de gráficos quantil-quantil.

Tabela 2: Parâmetros estimados do modelo GARCH. Valores p apresentados de acordo com erros padrão robustos e valores menores que 0,01 não são mostrados. (Período dentro da amostra entre 02/01/2009 e 31/12/2013).

Parâmetros	IBOV	ICON	IFNC	IGCX	INDX	IMAT
μ	-0.00024 (0.52253)	-0.00101	-0.00069 (0.09720)	-0.00061 (0.04630)	-0.00066 (0.04057)	-0.00052 (0.27203)
φ_1	0.00320 (0.89558)	0.01723 (0.52652)	0.03415 (0.21691)	0.02786 (0.29394)	0.02146 (0.37581)	0.05601 (0.03082)
ω	0.00001	0.00000 (0.68759)	0.00001	0.00000 (0.60725)	0.00000 (0.65656)	0.00001
α_1	0.07356	0.08196	0.06498	0.09016	0.07942	0.07354
β_1	0.89605	0.89252	0.90268	0.88731	0.89702	0.89565

Tabela 3: Estatísticas de diagnóstico para o modelo GARCH. (Período dentro da amostra entre 02/01/2009 e 31/12/2013).

Estatística	IBOV	ICON	IFNC	IGCX	INDX	IMAT
Curtose exc.	1.04702	0.80399	1.07619	1.06174	0.94823	0.85436
Jarque-Bera	59.68837 (0.00000)	35.65255 (0.00000)	60.39086 (0.00000)	65.08960 (0.00000)	49.34559 (0.00000)	38.82424 (0.00000)
Q(10)	2.22678 (0.91608)	4.56100 (0.57468)	2.93792 (0.82868)	2.56408 (0.87790)	2.64320 (0.86803)	2.44096 (0.89259)
$Q^2(10)$	8.48918 (0.13786)	3.04788 (0.81307)	3.72839 (0.70876)	6.32895 (0.32562)	5.37480 (0.45069)	5.52198 (0.42978)

Sendo assim, com retornos padronizados que não são normalmente distribuídos e possuem cauda longa com excesso de curtose, mas que após filtragem não apresentam mais autocorrelação ou heterocedasticidade, pode-se passar ao segundo estágio do modelo, ou seja, aplicar a teoria do valor extremo utilizando o método *peaks over threshold* para parametrizar a cauda direita das distribuições de perdas dos ativos.

3.2 Método POT

Os resíduos padronizados são tratados como as realizações do processo de inovação no modelo GARCH. Estas inovações serão analisadas sob a ótica da EVT para a obtenção dos parâmetros da GPD que definem a cauda direita de sua distribuição.

Para tanto, deve ser estabelecido um limiar u adequado para cada uma das séries, de modo que seja satisfeito o teorema de Pickands-Balkema-de Haan. Este valor de limiar será diferente para cada série e sua escolha deve seguir os princípios delineados na seção 2.1 ao aplicar a função média dos excessos. Entretanto, considerando o *trade-off* existente entre o viés e a variância dos parâmetros da GPD estimados com relação a escolha do valor deste limiar, pode-se abordar o problema desta escolha de outra forma.

Neste artigo foi utilizado o quantil empírico a 90% para a escolha do valor do limiar. Conforme visto anteriormente, um valor de limiar que resulte em um número de excessos observados a este limiar (N_u) entre 100 e 130 parece ser o melhor limiar a ser escolhido. Ao considerar o tamanho da janela de dados dentro da amostra para os índices sob análise, este quantil resulta em quantidade adequada para o número de excessos.

A escolha do limiar por meio de um quantil empírico fixo também é mais adequada considerando-se que para a fase de *backtest* do modelo é necessário reavaliar o valor deste limiar para cada dia dentro do período fora da amostra, o que se tornaria inviável de ser feito utilizando-se a análise gráfica da função média dos excessos.

Escolhido o limiar u , obtém-se a série de inovações em excesso ao limiar $Z_t^u : \{Z_t^u = Z_t - u / Z_t > u\}$, onde Z_t são as inovações, Z_t^u são portanto, as inovações em excesso, conforme teorizado na seção 2.2. A esta série de inovações em excesso é aplicada a função log-verossimilhança dada em (16) que por sua vez é maximizada em relação aos parâmetros ξ e ψ para a obtenção de suas estimativas.

A Tabela 4 apresenta os valores estimados dos parâmetros e seus respectivos erros padrão para cada um dos índices, com a estimação feita com dados do período dentro da amostra. Também são apresentados o número de observações dentro da amostra para o total dos resíduos padronizados, assim como o número de excessos observados (N_u) para o limiar escolhido (u).

Tabela 4: Parâmetros estimados para o modelo EVT dos resíduos padronizados. (Período dentro da amostra entre 02/01/2009 a 31/12/2013).

	IBOV	ICON	IFNC	IGCX	INDX	IMAT
N.obs.	1236	1236	1236	1236	1236	1236
Limiar u	1.27441	1.21387	1.24376	1.28281	1.27872	1.24701
Num.exc. N_u	124	124	124	124	124	124
Par. forma ξ	-0.00769	-0.06855	-0.08808	0.02810	0.06821	-0.01423
Erro padrão	0.08675	0.09660	0.06545	0.10628	0.10726	0.09281
Par. escala ψ	0.57865	0.65301	0.64641	0.56854	0.51291	0.54368
Erro padrão	0.07225	0.08603	0.07164	0.07910	0.07168	0.07021
Quantil $z_{0.975}$	2.07417	2.07937	2.08917	2.08844	2.02629	1.99505
Quantil $z_{0.990}$	2.59690	2.60662	2.59265	2.63717	2.55947	2.48030

Na Figura 2 é possível visualizar os gráficos de ajuste das inovações em excesso de cada um dos índices contra suas distribuições GPD de referência, ou seja, aquelas com os parâmetros de forma e escala estimados para os respectivos índices. Verifica-se que a distribuição destes excessos pouco se desvia com relação a curva de referência, denotando um bom ajuste dos dados ao modelo teórico. Em contraste, quando modeladas diretamente por meio de uma distribuição Normal, as séries de retornos afastam-se consideravelmente de suas referências como já apresentado na Figura 1. Ao se utilizar o método semi-paramétrico proposto, modelando apenas uma parte da cauda da distribuição, a parte que interessa para a modelagem de risco, obtém-se uma estimação mais próxima da realidade que os dados apresentam.

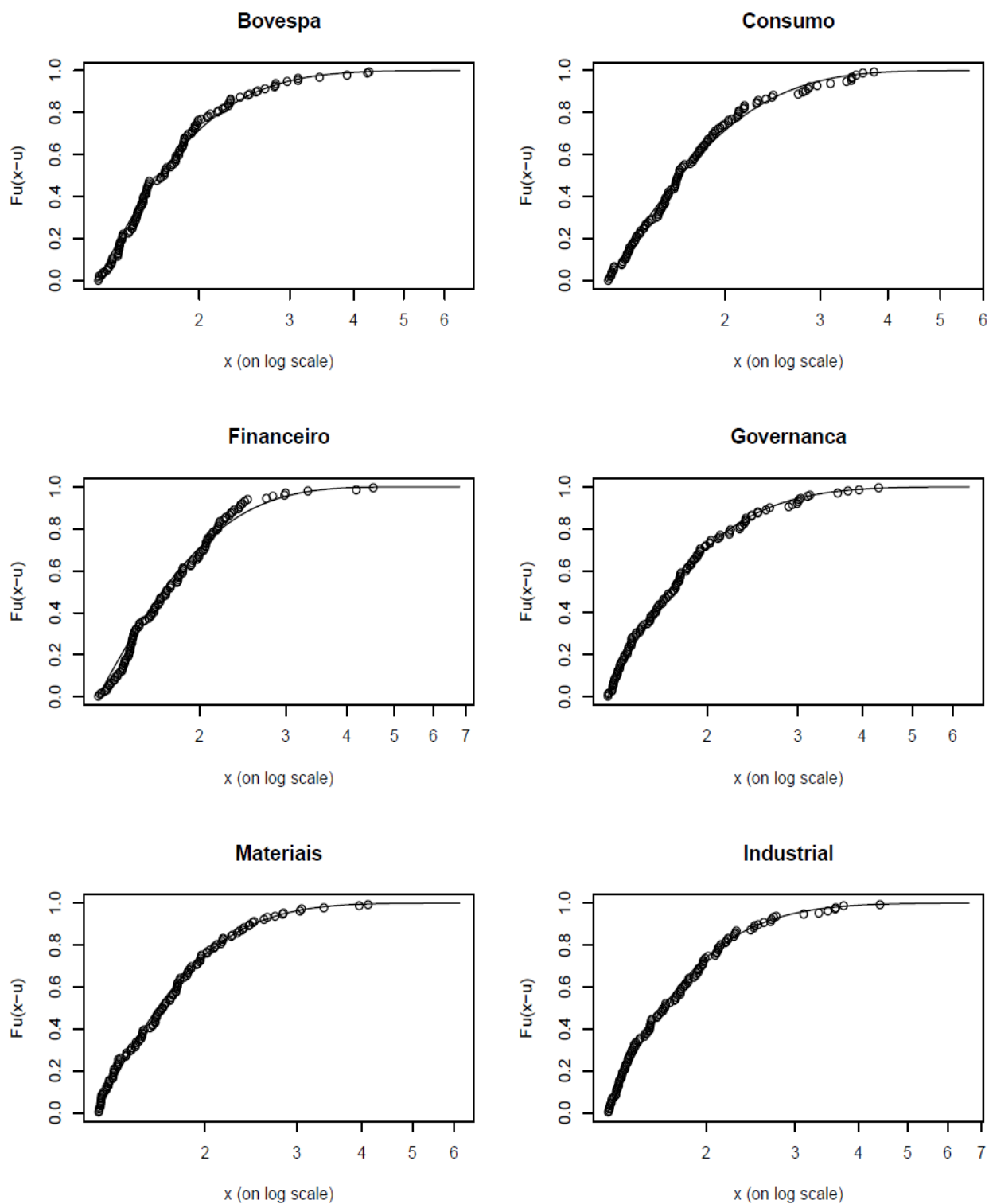


Figura 2: Qualidade do ajuste dos dados de inovações em excesso contra uma GPD de referência. Período dentro da amostra.

4 Avaliação dos modelos

A avaliação dos modelos aqui referidos concentra-se em testar por meio de *backtest* o modelo EVT condicional apresentado, o qual utiliza a metodologia em dois estágios proposta por McNeil e Frey (2000) assim como o modelo proposto por RiskMetrics (1995), sendo, portanto, dois modelos testados e comparados para fins de estimação da medida de risco. As definições destes modelos e suas formas de implementação estão descritas no Apêndice A.

Para fazer o *backtest*, considere a série x_1, x_2, \dots, x_m , com $m \gg n$ e o conjunto de dias $T = \{n, \dots, m-1\}$. Uma janela de dados de tamanho fixo contendo as últimas n observações é utilizada e para cada dia $t \in T$ é reestimado o valor de VaR_{α}^t . O período de teste fora da amostra vai de 01/01/2015 a 08/05/2018, com dados diários para as perdas dos índices sob análise. O número de observações (n) utilizadas para fazer a estimação dos modelos para cada um dos índices é aquele apresentado na Tabela 4 (N.obs.), esse valor é fixo para cada série. Portanto, a partir do início do período de teste, esta janela de tamanho fixo avança um dia e o modelo é reestimado, resultando, com auxílio da equação (12), no valor estimado de VaR_{α}^t , ou seja, a medida de risco calculada ao final do dia t que deverá ser comparada a perda incorrida no dia a frente, $t + 1$.

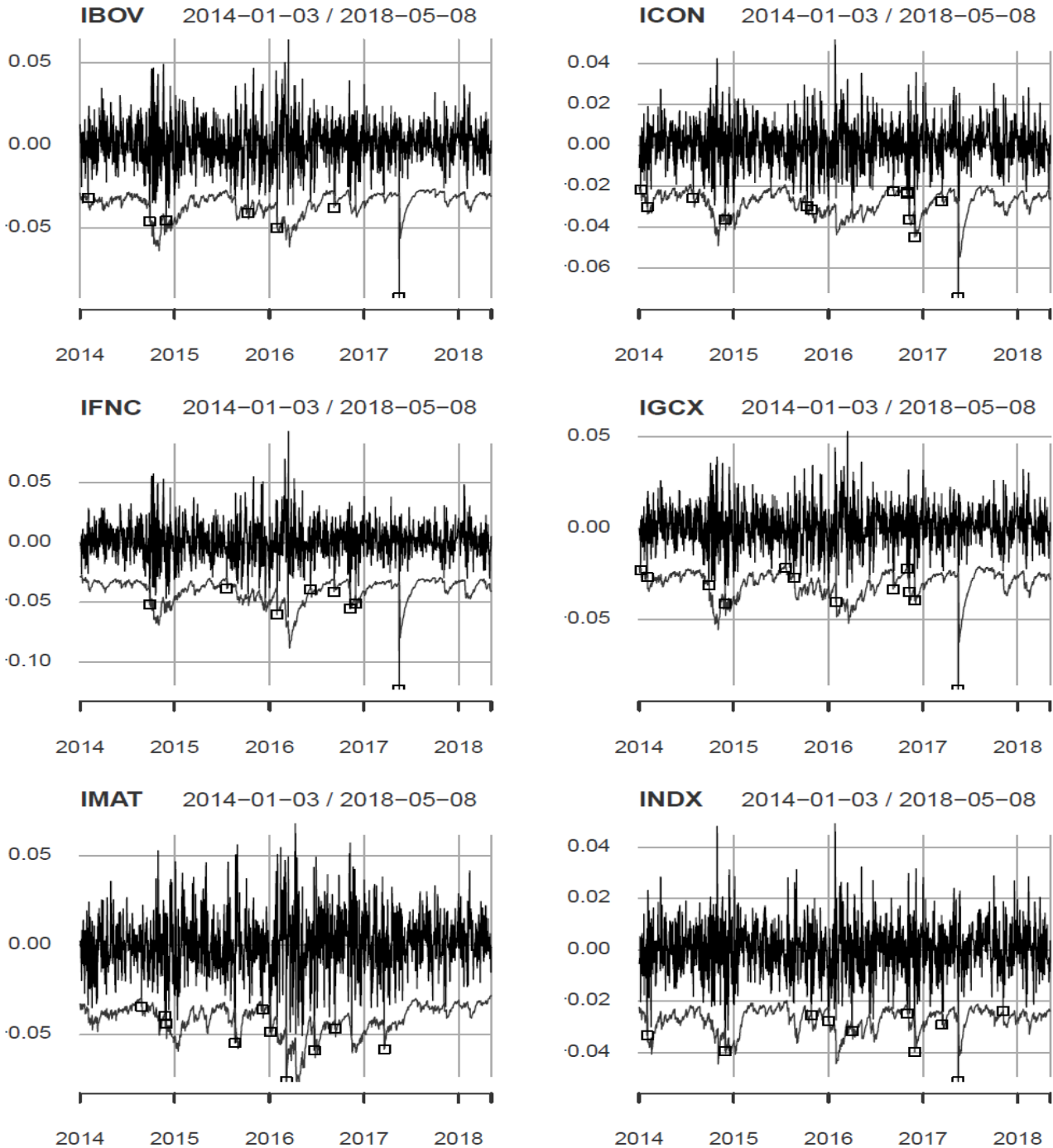


Figura 3: $VaR_{99\%}$ no modelo EVT condicional para todos os índices. Violações demarcadas.

A Figura 3 apresenta o resultado do *backtest* para o modelo EVT condicional para cada um dos índices analisados. É possível verificar como a medida condicional de risco oscila de valor, acompanhando

a volatilidade do índice, sendo especialmente reativa a grandes choques. Em comparação com o modelo *Riskmetrics*, o EVT apresenta nível de risco estimado com maior persistência após um choque de volatilidade, ou em outras palavras, uma menor taxa de decaimento. Na Figura 4 verificar-se esta condição para o índice IBovespa onde, após a grande perda ocorrida em 18 de maio de 2017, fica evidente que o modelo retorna aos seus níveis de risco anteriores de forma mais lenta que a medida *Riskmetrics*.

Uma violação é dita ocorrida quando a perda observada é maior que a medida de risco estimada no dia anterior, $x_{t+1} > VaR_{\alpha}^t$ para um α dentro do conjunto de níveis de significância, neste artigo $\alpha \in \{0,975; 0,990\}$. A Tabela 5 apresenta em termos percentuais as violações ocorridas para cada um dos modelos para os níveis de cobertura dados. Dentre os dois modelos analisados, o EVT condicional se saiu melhor nos dois níveis de cobertura.

Tabela 5: Percentual de violações. (Período fora da amostra entre 02/01/2014 e 08/05/2018).

Modelo	IBOV	ICON	IFNC	IGCX	INDX	IMAT
Cobertura = 1%						
EVT Condicional	0.65	1.21	0.74	1.12	0.93	0.93
RiskMetrics	1.02	1.68	1.12	1.30	1.40	1.40
Cobertura = 2.5%						
EVT Condicional	2.14	2.61	2.14	2.14	2.42	2.70
RiskMetrics	2.42	2.79	2.14	2.61	3.54	2.61

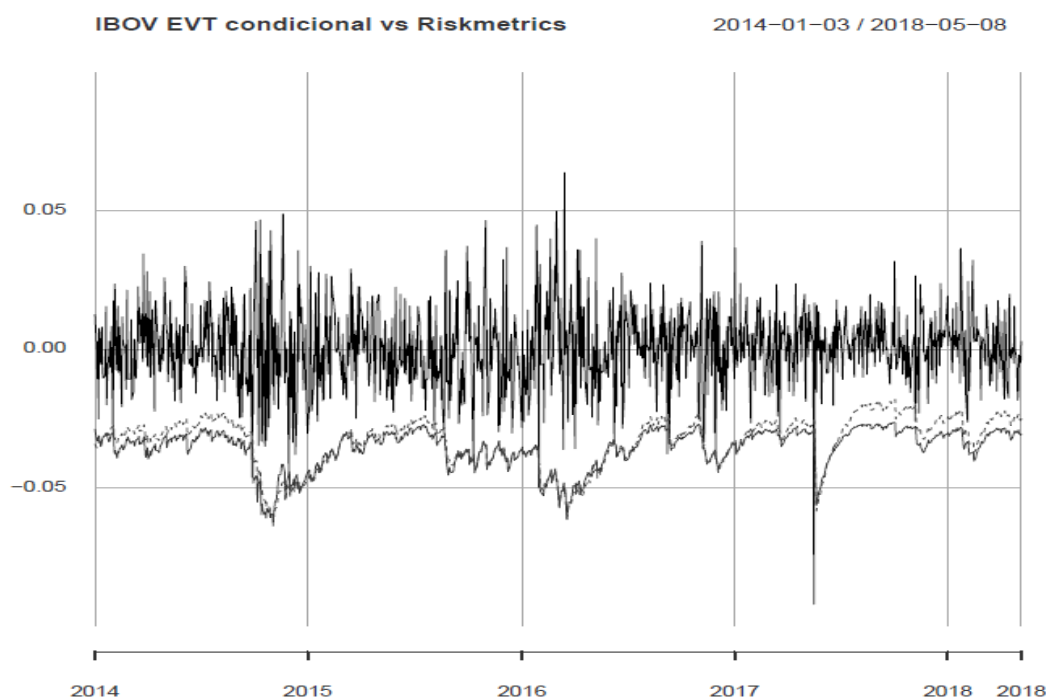


Figura 4: Teste fora da amostra para o IBOV. O modelo EVT condicional (linha sólida) possui menor taxa de decaimento após um choque de volatilidade que o modelo Riskmetrics (linha tracejada).

4.1 Testes estatísticos

Testes estatísticos podem ser realizados para verificar se o modelo para VaR_{α} foi corretamente especificado levando-se em consideração o seu nível de cobertura, $1 - \alpha$. Este teste foi originalmente proposto por Kupiec (1995) e pretende derivar propriedades estatísticas formais do teste utilizado para verificar a precisão de modelos VaR. Este teste permite inferir se a frequência de violações ao VaR é consistente com o valor esperado destas, o nível de cobertura. Sob a hipótese nula de um modelo

corretamente especificado o número de violações segue uma distribuição binomial e o teste toma a forma de razão de verossimilhança com a seguinte estatística:

$$LR_{uc} = -2 \ln \left(\frac{(1-p)^{N-X} p^X}{\left(1 - \frac{X}{N}\right)^{N-X} \left(\frac{X}{N}\right)^X} \right), \quad (18)$$

onde p é o nível de cobertura, N é o número de observações do período fora da amostra e X neste caso é o número de violações ocorridas. Este teste não faz nenhum tipo de assunção e, por conseguinte, não testa a hipótese de independência entre as violações, sendo considerado um teste de cobertura *incondicional* para o VaR.

Um teste condicional é aquele proposto, entre outros, por Christoffersen e Pelletier (2004). A hipótese de independência entre as violações está relacionada à duração entre as observações destas. O tempo que se passa entre uma violação e outra deve ser independente e não formar agrupamentos (*clusters*). Sob a hipótese nula de um modelo corretamente especificado, a duração não deve possuir memória. Como a única distribuição contínua que não possui memória é a distribuição exponencial, os autores propuseram ajustar os dados a uma distribuição Weibull da qual a exponencial é um caso particular quando o parâmetro $b = 1$. O teste de duração de Christoffersen é feito sob a forma de razão de verossimilhança.

Nota-se que este teste é destinado apenas a verificação da hipótese de independência das violações. Em conjunto com o teste de Kupiec, a Tabela 6 fornece um panorama completo sobre a adequação das especificações de modelos VaR.

Tabela 6: Testes estatísticos para VaR. Teste incondicional de Kupiec, LRuc, e teste de independência por duração de Christoffersen e Pelletier, LRdur. EVT condicional (cevt) e Riskmetrics (riskmetrics). Valores p maiores que 0,05 foram omitidos. (Período fora da amostra entre 02/01/2014 e 08/05/2018)

Modelo	Estatística	IBOV	ICON	IFNC	IGCX	INDX	IMAT
Cobertura 1%							
cevt	LRuc	1.50	0.45	0.77	0.14	0.05	0.05
cevt	Lruc p-valor						
cevt	LRdur	3.73	1.45	0.53	0.00	2.36	0.03
cevt	Lrdur p-valor						
riskmetrics	LRuc	0.01	4.12	0.14	0.91	1.52	1.52
riskmetrics	Lruc p-valor		(0.04)				
riskmetrics	LRdur	0.05	0.13	0.09	0.01	3.88	0.22
riskmetrics	Lrdur p-valor					(0.05)	
Cobertura 2.5%							
cevt	LRuc	0.59	0.05	0.59	0.59	0.03	0.17
cevt	Lruc p-valor						
cevt	LRdur	0.30	0.02	0.94	0.37	0.83	0.99
cevt	Lrdur p-valor						
riskmetrics	LRuc	0.03	0.37	0.59	0.05	4.22	0.05
riskmetrics	Lruc p-valor					(0.04)	
riskmetrics	LRdur	0.96	0.25	0.00	0.69	0.02	0.53
riskmetrics	Lrdur p-valor						

Inspeccionando a Tabela 6 verifica-se como o modelo EVT condicional, especialmente para o nível de cobertura a 1% é superior ao seu rival, prevalecendo como o único modelo a não rejeitar a hipótese nula a 95% de confiança para ambos os testes e níveis de cobertura.

Tabela 7: Sumário para o número de rejeições das hipóteses nulas de um modelo corretamente especificado. Nível de confiança a 95%. (Período fora da amostra entre 02/01/2014 e 08/05/2018).

Modelo	Cobertura 1%		Cobertura 2.5%	
	LRdur	LRuc	LRdur	LRuc
cevt	0	0	0	0
riskmetrics	1	1	0	1

A **Erro! Fonte de referência não encontrada.** apresenta um sumário contendo a quantidade de rejeições da hipótese nula para os valores de cobertura de cada um dos testes, de seis índices com dois testes, resulta em um total de doze rejeições possíveis para cada modelo. Verifica-se que, o modelo EVT condicional (*cevt*) é aquele que apresenta o menor número de rejeições.

5 Conclusão

Este artigo tratou de estimar e comparar dois modelos de VaR para seis índices de ações em segmentos diferentes da Bovespa. Os modelos EVT condicional e *Riskmetrics* foram estudados e comparados com base em dois tipos diferentes de testes. Especial ênfase foi dada ao modelo EVT condicional o qual se utiliza da teoria do valor extremo para chegar ao resultado da medida de risco. Dentre os modelos estimados, o EVT condicional apresentou os percentuais de violações mais próximos ao valor esperado.

Nos testes estatísticos de cobertura incondicional e independência, a superioridade do modelo EVT condicional se apresenta de forma mais concreta. Este modelo não apresentou rejeição a hipótese nula da correta especificação, tanto para o teste de Kupiec quanto para o teste de duração de Christoffersen e Pelletier ao nível de confiança de 95%.

Além deste *trade-off* entre superioridade teórica do modelo EVT condicional e sua implementação prática mais complexa, a medida de risco VaR atualmente está sendo utilizada em conjunto com a *Expected Shortfall*. Esta última pode ser derivada a partir do modelo EVT condicional com facilidade e deve ser abordada em outro trabalho, juntamente com testes específicos para o ES com intuito de averiguação do melhor modelo.

APÊNDICE A

Apêndice descrevendo os modelos de estimação da medida de risco VaR_{α}^t utilizados neste artigo.

Apêndice A.1. EVT condicional

O modelo EVT condicional (*cevt*) é o principal modelo analisado e descrito em detalhe na seção 2. A medida de risco é calcula diariamente utilizando-se o método POT após a filtragem dos dados através de um modelo AR(1)-GARCH(1,1). As previsões de média, μ_{t+1} e desvio-padrão condicional, σ_{t+1} do modelo GARCH são utilizados para calcular VaR_{α}^t , conforme a equação (11). O quantil z_{α} é aquele determinado pelo valor de α após a aplicação do método POT para parametrização da cauda da distribuição das inovações e é calculado de acordo com a equação (8), onde z_{α} toma o lugar de VaR_{α} . O algoritmo deste modelo é o seguinte:

1. Filtro GARCH
 - 1.1. Dada uma amostra de n observações $\{t-n+1, \dots, t\}$, estimar um modelo AR(1)GARCH(1,1);
 - 1.2. salvar os valores previstos para μ_{t+1} e σ_{t+1} e a série de resíduos padronizados, \hat{Z} .
2. Aplicação da EVT

- 2.1. Aplicar a equação (8) aos resíduos padronizados salvos e obter o valor estimado de z_α ;
- 2.2. calcular VaR_α^t de acordo com a equação (12), $VaR_\alpha^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}z_\alpha$.
3. Repetir os dois passos anteriores para cada $t \in T = \{n, \dots, m - 1\}$.

Apêndice A.2. Riskmetrics

O modelo Riskmetrics (riskmetrics) é aquele encontrado em RiskMetrics (1995), com o parâmetro $\mu = 0$ e $\lambda = 0,94$, pois utiliza-se dados diários. O modelo completo para média e desvio-padrão condicionais é:

$$x_t = \epsilon_t, \quad \epsilon_t | \mathcal{H}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (A.1)$$

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda)\epsilon_{t-1}^2 + \lambda\sigma_{t-1}^2 \quad (A.2)$$

O algoritmo para seu cálculo, portanto, é direto.

1. Dada uma amostra de n observações $\{t-n+1, \dots, t\}$, estima-se um modelo GARCH(1,1) com parâmetros fixos, $\alpha = 0,06$ e $\beta = 0,94$;
2. os valores $\mu_{t+1} = 0$ e $\sigma_{t+1} = \sqrt{(1 - \lambda)\epsilon_t^2 + \lambda\sigma_t^2}$, são salvos;
3. o valor de z_α vem da normal padrão para o valor de α sendo utilizado, por exemplo para $\alpha = 99\%$, $z_\alpha = 2,326$;
4. calcular VaR_α^t de acordo com a equação (12), $VaR_\alpha^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}z_\alpha$;
5. repetir os passos anteriores para cada $t \in T = \{n, \dots, m - 1\}$.

Referências

- BALKEMA, A. A.; HAAN, L. de. Residual Life Time at Great Age. *The Annals of Probability*, v. 2, n. 5, p.792–804, 1974.
- BERKOWITZ, J.; O'BRIEN, J. How accurate are value-at-risk models at commercial banks? *The Journal of Finance*, Blackwell Publishers, Inc., v. 57, n. 3, p. 1093–1111, 2002. ISSN 1540-6261. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/1540-6261.00455>>.
- BYSTRÖM, H. N. Managing extreme risks in tranquil and volatile markets using conditional extreme value theory. *International Review of Financial Analysis*, Elsevier, v. 13, n. 2, p. 133–152, 2004.
- CHRISTOFFERSEN, P.; PELLETIER, D. Backtesting value-at-risk: A duration-based approach. *Journal of Financial Econometrics*, Oxford University Press, v. 2, n. 1, p. 84–108, 2004.
- CONT, R. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, v. 1, n. 2, p. 223–236, 2001. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/713665670>>.
- DANIELSSON, J.; MORIMOTO, Y. Forecasting extreme financial risk: a critical analysis of practical methods for the japanese market. *Monetary and Economic Studies*, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, v. 2, n. 18, p. 25–48, 2000.
- DEGIANNAKIS S., FLOROS C., DENT P. Forecasting value-at-risk and expected shortfall using fractionally integrated models of conditional volatility: International evidence *Int. Rev. Financ. Anal.*, 27 (2013), pp. 21-33
- EMBRECHTS, P.; KLÜPPELBERG, C.; MIKOSCH, T. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. [S.l.]: Springer, 1997.
- FISHER, R. A.; TIPPETT, L. H. C. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 24, p. 180–190, 1928.
- GENCAY, R.; SELCUK, F. Extreme value theory and value-at-risk: Relative performance in emerging markets. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, v. 20, n. 2, p. 287–303, 2004
- GNEDENKO, B. V. Limit theorems for the maximal term of a variational series. *Comptes Rendus (Doklady) de L'Académie des Sciences de l'URSS*, v. 32, p. 7–9, 1941.

GNEDENKO, B. V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Annals of Mathematics*, v. 44, p. 423–453, 1943.

KUESTER, K.; MITTNIK, S.; PAOLELLA, M. S. Value-at-risk prediction: A comparison of alternative strategies. *Journal of Financial Econometrics*, v. 4, n. 1, p. 53–89, 2006. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/jjfinec/nbj002>>.

KUPIEC, P. H. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *The journal of Derivatives*, Institutional Investor Journals, v. 3, n. 2, p. 73–84, 1995.

LONGIN, F. M. From value at risk to stress testing: The extreme value approach. *Journal of Banking & Finance*, v. 24, n. 7, p. 1097 – 1130, 2000. ISSN 0378-4266. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378426699000771>>.

MCNEIL, A. J.; FREY, R. Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, v. 7, n. 3-4, p. 271–300, 2000.

MCNEIL, A. J.; FREY, R.; EMBRECHTS, P. *Quantitative risk management: concepts, techniques and tools*. Revised ed. [S.l.]: Princeton University Press, 2015.

MÖGEL, B. & AUER, B.R. How accurate are modern Value-at-Risk estimators derived from extreme value theory? *Review of Quantitative Finance and Accounting* (2018) 50: 979. <https://doi.org/10.1007/s11156-017-0652-y>

O'BRIEN, J.; SZERSZEŃ, P. J. An evaluation of bank measures for market risk before, during and after the financial crisis. *Journal of Banking & Finance*, v. 80, n. Supplement C, p. 215 – 234, 2017. ISSN 0378-4266. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378426617300511>>.

PICKANDS, J. Statistical Inference Using Extreme Order Statistics. *Annals of Statistics*, v. 3, p. 119–131, 1975.

RISKMETRICS. *Technical Document - 3rd Edition*. [S.l.], 1995.

ROCCO, M. EXTREME VALUE THEORY IN FINANCE: A SURVEY. *Journal of Economic Surveys*, Wiley Online Library, v. 28, n. 1, p. 82–108, jul 2014. ISSN 09500804. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-6419.2012.00744.x>>.

WHITE, H. Maximum likelihood estimation of misspecified models. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 1–25, 1982.

WONG, M. C. S.; CHENG, W. Y.; WONG, C. Y. P. Market risk management of banks: implications from the accuracy of value-at-risk forecasts. *Journal of Forecasting*, Wiley Online Library, v. 22, n. 1, p. 23–33, 2003.