Medidas condicionais de risco com teoria do valor extremo

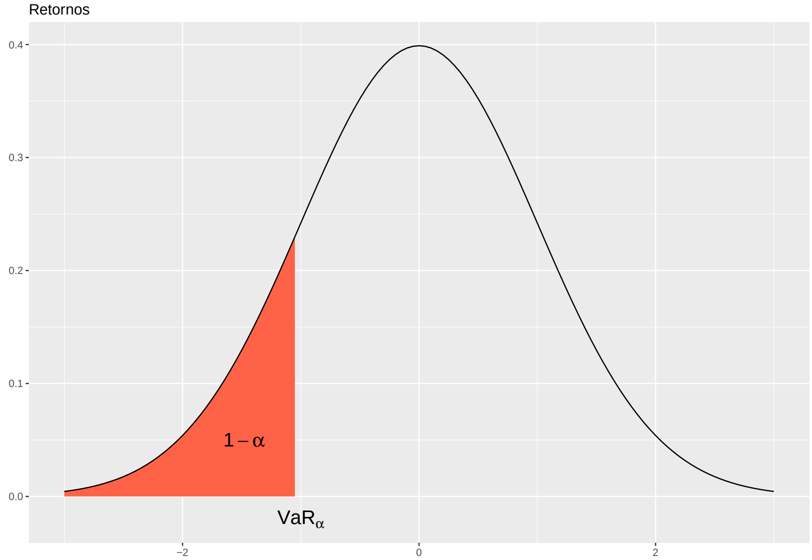
Rafael Felipe Bressan

05-11-2017

Motivação

- De acordo com os princípios do acordo de Basileia III, as instituições financeiras supervisionadas pelos Bancos Centrais devem manter *buffers* de capital contra riscos de mercado, crédito, liquidez, entre outros.
- Para riscos de mercado, as duas formas mais usuais de fazer a quantificação destes são os métodos de Valor em Risco - VaR e o *Expected Shortfall* - ES.
- Uma estimação excessiva da medida de risco gerará um excesso de capital em reserva. Custo para a instituição.
- Uma subestimação deste risco pode levar a IF a uma crise de liquidez e eventualmente a insolvência.

- VaR é um quantil α da distribuição de perdas de um ativo ou portfólio em um determinado período de tempo.
- O método VaR para cálculo de risco de mercado ao qual um portfólio está sujeito foi primeiramente introduzido pelo banco J. P. Morgan em 1995.
- Método original assumia distribuição normal das perdas, correlação constante entre ativos e era calculada de forma incondicional.

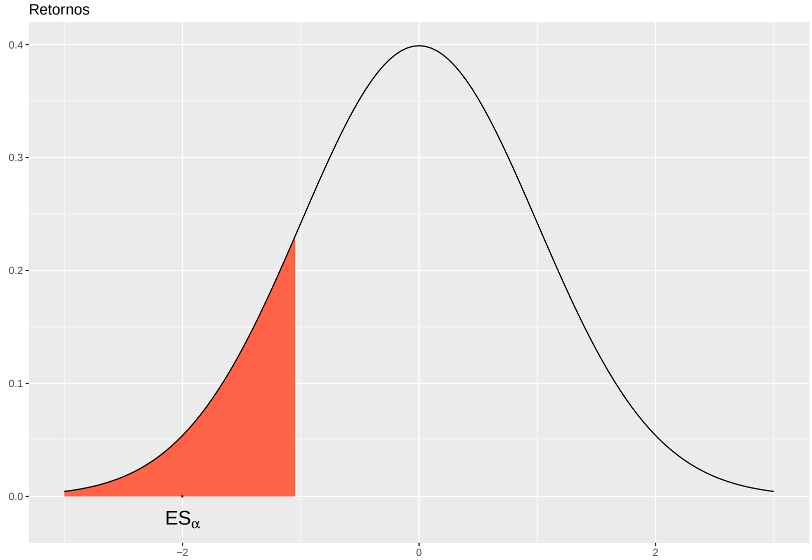

Retornos
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
1 − α
VaR$_\alpha$
−2
0
2

Expected Shortfall

- ES é o valor esperado das perdas que forem iguais ou maiores que o VaR.
- É calculado como uma média condicional.
- Medida coerente de risco. Acerbi and Tasche (2001).

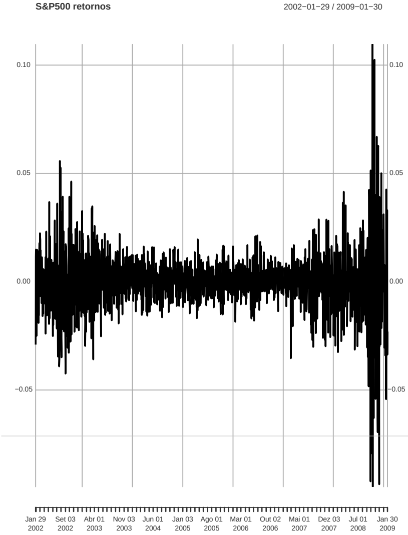
$$
\begin{aligned}
VaR_\alpha^t =& \inf\{F_{L_{t+1}}|\mathcal{G}_t(\mathcal{L}) \geq \alpha\},\\
ES_\alpha^t =& E[L_{t+1}|L_{t+1} > VaR_\alpha^t]
\end{aligned}
$$

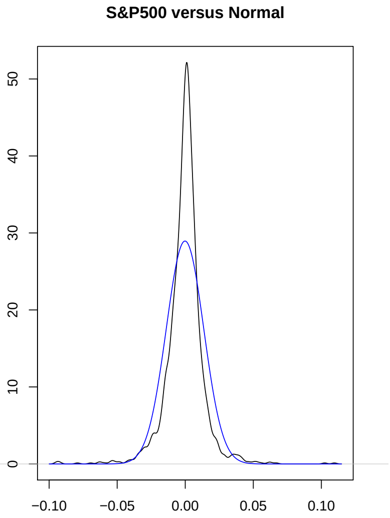
Expected Shortfall



Séries temporais de retornos possuem as seguintes características:

- Ausência de autocorrelação. Componente AR é fraco.
- Grande autocorrelação nos retornos absolutos ou retornos ao quadrado.
- Agrupamento (*Clusters*) de volatilidade.
- Persistência nas autocorrelações dos retornos ao quadrado.
- Distribuição incondicional com caudas longas (leptocúrticas).
- Distribuição condicional com algum grau de leptocurtose.
- Assimetria entre ganhos e perdas.


S&P500 retornos
2002−01−29 / 2009−01−30
0.10
0.05
0.00
−0.05
Jan 29 2002
Set 03 2002
Abr 01 2003
Nov 03 2003
Jun 01 2004
Jan 03 2005
Ago 01 2005
Mar 01 2006
Out 02 2006
Mai 01 2007
Dez 03 2007
Jul 01 2008
Jan 30 2009


S&P500 versus Normal
0
10
20
30
40
50
−0.10
−0.05
0.00
0.05
0.10

- Modelos GARCH, Bollerslev (1986) lidam com a heteroscedasticidade condicional encontrada nas séries financeiras.
- Propriedades desejáveis: leptocurtose e autocorrelação na variância
- O modelo GARCH exponencial ou eGARCH de Nelson (1991) lida também com o efeito alavancagem.

$$
\begin{aligned}
L_t =& \mu + \sum_{i=1}^{r} \phi_i L_{t-i} + \sum_{j=1}^{s} \theta_j \epsilon_{t-j} + \epsilon_t \\
\ln(\sigma_t^2) =& \omega + \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i Z_{t-i} + \gamma_i(|Z_{t-i}| - E|Z_{t-i}|)) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2) \\
\epsilon_t =& \sigma_t Z_t
\end{aligned}
$$

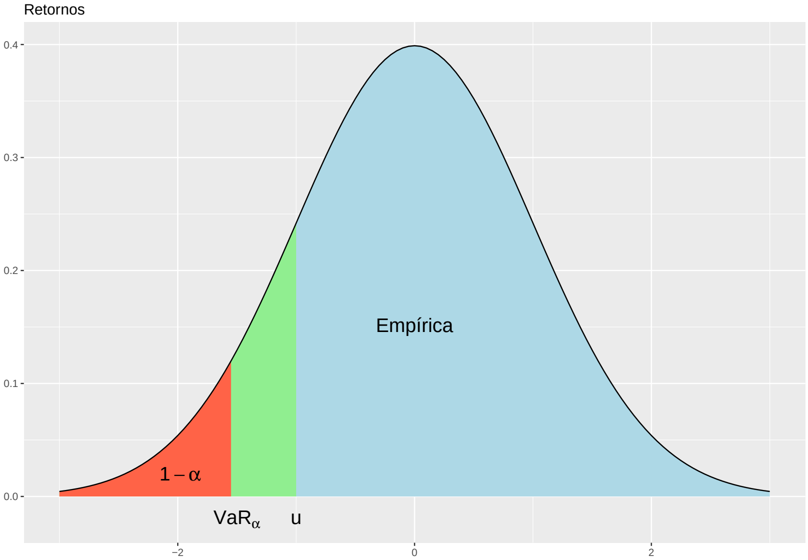
- O método peaks-over-treshold modela a distribuição dos excessos acima de um determinado limiar.

Definição [Distribuição dos excessos]: Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F \in MDA(H_\xi)$. A distribuição dos excessos sobre um limiar u tem a função de Distribuição Generalizada de Pareto - GPD:

$$G_{\xi,\beta(u)}(X) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta(u)}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0, \\ 1 - exp\left(-\frac{x}{\beta(u)}\right), & \xi = 0, \end{cases}$$

Os parâmetros ξ e β são conhecidos respectivamente como parâmetros de forma e escala da distribuição.

Teoria do valor extremo



Modelo eGARCH-EVT

- Seguiremos os passos propostos por McNeil and Frey (2000).
- Nosso modelo completo para as medidas de risco VaR_α e ES_α condicionais dada a distribuição de perdas L_t de um ativo será, portanto:

$$
\begin{aligned}
L_t =& \mu_t + \epsilon_t \\
\mu_t =& \mu + \phi_1 L_{t-1} + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} \\
\epsilon_t =& \sigma_t Z_t \\
\ln(\sigma_t^2) =& \omega + \alpha_1 Z_{t-1} + \gamma_1(|Z_{t-1}| - E|Z_{t-1}|) + \beta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2) \\
Z_t \sim& \mathcal{D}(0,1) \text{ e } \mathcal{D} \in MDA(H_\xi)
\end{aligned}
$$

VaR e ES parametrizados

- Nossas medidas de risco neste modelo condicional serão:

$$
\begin{aligned}
VaR_{\alpha}^{t} =& \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} z_{\alpha}, \\
ES_{\alpha}^{t} =& \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} E[Z|Z > z_{\alpha}]
\end{aligned}
$$

onde z_{α} é o quantil α das inovações Z.

Referências

Acerbi, Carlo, and Dirk Tasche. 2001. "Expected Shortfall: A Natural Coherent Alternative to Value at Risk." *Economic Notes* 31 (2): 379–88. doi:10.1111/1468-0300.00091.

Bollerslev, Tim. 1986. "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity." *Journal of Econometrics* 31 (3): 307–27. doi:10.1016/0304-4076(86)90063-1.

McNeil, Alexander J, and Rüdiger Frey. 2000. "Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach." *Journal of Empirical Finance* 7 (3-4): 271–300. doi:10.1016/s0927-5398(00)00012-8.

Nelson, Daniel B. 1991. "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach." *Econometrica: Journal of the Econometric Society*. JSTOR, 347–70.