

# Medidas condicionais de risco com teoria do valor extremo

Rafael Felipe Bressan

16-11-2017

1 Introdução

2 Fundamentação Teórica

3 Modelo

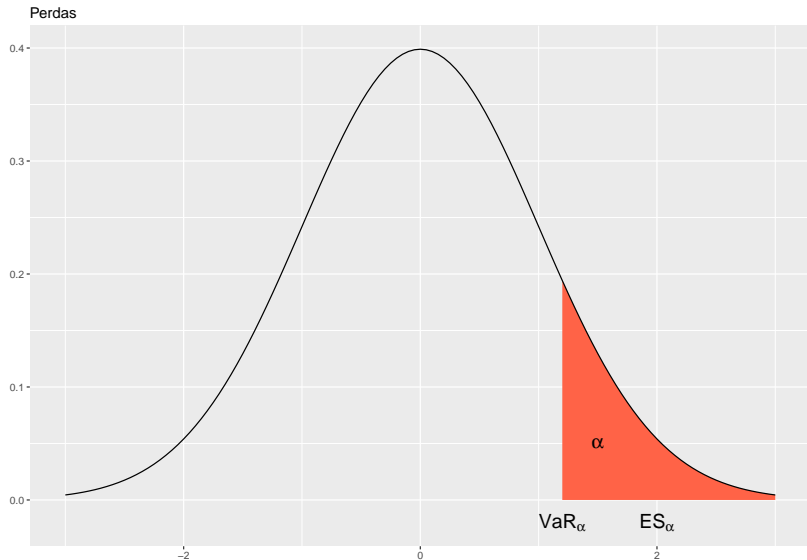
4 Resultados

- De acordo com os princípios do acordo de Basileia III, as instituições financeiras supervisionadas pelos Bancos Centrais devem manter *buffers* de capital contra riscos de mercado, crédito, liquidez, entre outros.
- Para riscos de mercado, as duas formas mais usuais de fazer a quantificação destes são os métodos de Valor em Risco - VaR e o *Expected Shortfall* - ES.
- Uma estimativa excessiva da medida de risco gerará um excesso de capital em reserva. Custo para a instituição.
- Uma subestimação deste risco pode levar a IF a uma crise de liquidez e eventualmente a insolvência.

- VaR é um quantil  $\alpha$  da distribuição de perdas de um ativo ou portfólio em um determinado período de tempo.
- O método VaR para cálculo de risco de mercado ao qual um portfólio está sujeito foi primeiramente introduzido pelo banco J. P. Morgan em 1995.
- Método original assumia distribuição normal das perdas, correlação constante entre ativos e era calculada de forma incondicional.

- ES é o valor esperado das perdas que forem iguais ou maiores que o VaR.
- É calculado como uma média condicional.
- Medida coerente de risco. Acerbi and Tasche (2001).

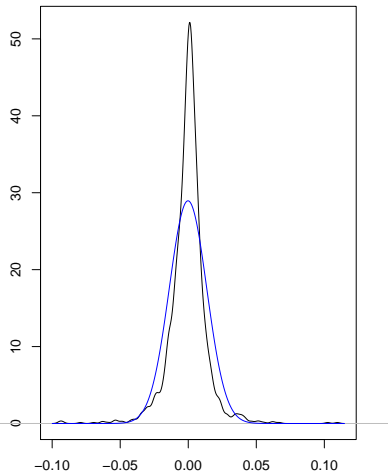
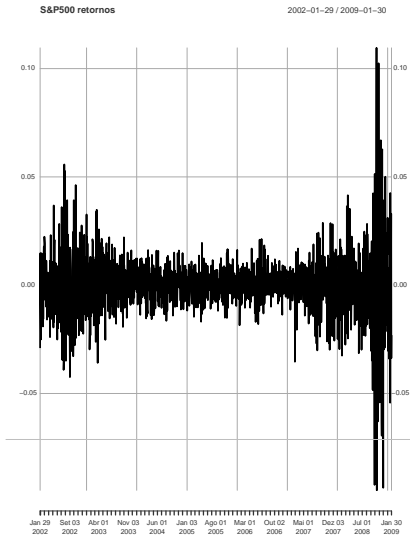
$$\begin{aligned} VaR_{\alpha}^t &= \inf\{F_{L_{t+1}} | \mathcal{G}_t(\mathcal{L}) \geq \alpha\}, \\ ES_{\alpha}^t &= E[L_{t+1} | L_{t+1} > VaR_{\alpha}^t] \end{aligned}$$



Séries temporais de retornos possuem as seguintes características:

- Ausência de autocorrelação. Componente AR é fraco.
- Grande autocorrelação nos retornos absolutos ou retornos ao quadrado.
- Agrupamento (*Clusters*) de volatilidade.
- Persistência nas autocorrelações dos retornos ao quadrado.
- Distribuição incondicional com caudas longas (leptocúrticas).
- Distribuição condicional com algum grau de leptocurtose.
- Assimetria entre ganhos e perdas.

## S&P500 versus Normal





- Modelos GARCH, Bollerslev (1986) lidam com a heteroscedasticidade condicional encontrada nas séries financeiras.
- Propriedades desejáveis: leptocurtose e autocorrelação na variância
- O modelo GARCH exponencial ou eGARCH de Nelson (1991) lida também com o efeito alavancagem.

$$L_t = \mu + \sum_{i=1}^r \phi_i L_{t-i} + \sum_{j=1}^s \theta_j \epsilon_{t-j} + \epsilon_t$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^p (\alpha_i Z_{t-i} + \gamma_i (|Z_{t-i}| - E|Z_{t-i}|)) + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2)$$

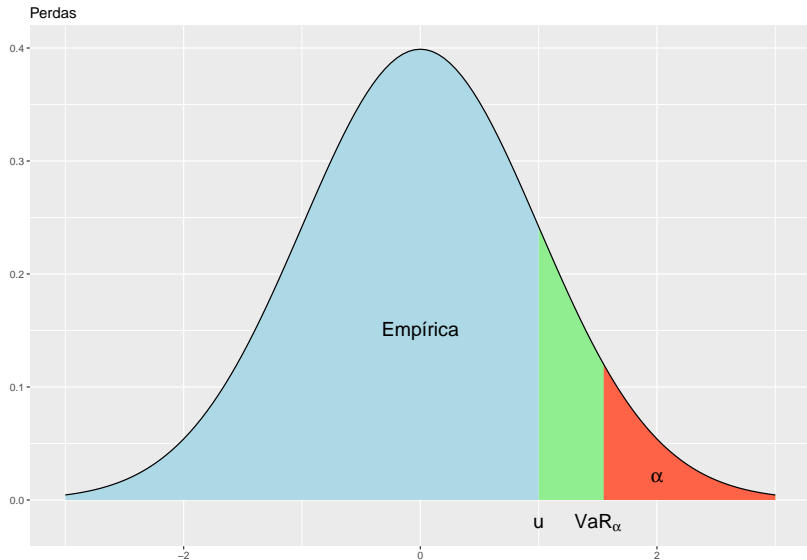
$$\epsilon_t = \sigma_t Z_t$$

- O método peaks-over-threshold modela a distribuição dos excessos acima de um determinado limiar.

**Definição** [Distribuição dos excessos]: Seja  $X$  uma variável aleatória com função de distribuição  $F \in MDA(H_\xi)$ . A distribuição dos excessos sobre um limiar  $u$  tem a função de Distribuição Generalizada de Pareto - GPD:

$$G_{\xi, \beta(u)}(X) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta(u)}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta(u)}\right), & \xi = 0, \end{cases}$$

Os parâmetros  $\xi$  e  $\beta$  são conhecidos respectivamente como parâmetros de forma e escala da distribuição.



- Seguiremos os passos propostos por McNeil and Frey (2000).
- Nosso modelo completo para as medidas de risco  $VaR_\alpha$  e  $ES_\alpha$  condicionais dada a distribuição de perdas  $L_t$  de um ativo será, portanto:

$$L_t = \mu + \phi_1 L_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t = \sigma_t Z_t$$

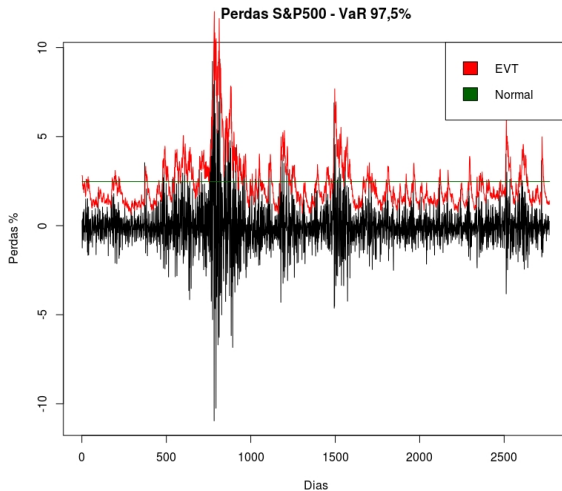
$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^2 (\alpha_i Z_{t-i} + \gamma_i (|Z_{t-i}| - E|Z_{t-i}|)) + \beta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

$$Z_t \sim \mathcal{D}(0, 1) \text{ e } \mathcal{D} \in MDA(H_\xi)$$

- Nossas medidas de risco neste modelo condicional serão:

$$\begin{aligned}VaR_{\alpha}^t &= \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} z_{\alpha}, \\ ES_{\alpha}^t &= \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} E[Z | Z > z_{\alpha}]\end{aligned}$$

onde  $z_{\alpha}$  é o quantil  $\alpha$  das inovações  $Z$ .



Modelo	Violações	Proporção
EVT	69	2.493
Normal	84	3.035

Acerbi, Carlo, and Dirk Tasche. 2001. "Expected Shortfall: A Natural Coherent Alternative to Value at Risk." *Economic Notes* 31 (2): 379–88. doi:10.1111/1468-0300.00091.

Bollerslev, Tim. 1986. "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity." *Journal of Econometrics* 31 (3): 307–27. doi:10.1016/0304-4076(86)90063-1.

McNeil, Alexander J, and Rüdiger Frey. 2000. "Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach." *Journal of Empirical Finance* 7 (3-4): 271–300. doi:10.1016/s0927-5398(00)00012-8.

Nelson, Daniel B. 1991. "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach." *Econometrica: Journal of the Econometric Society*. JSTOR, 347–70.