

# Estimação condicional de medidas de risco através da teoria do valor extremo<sup>☆</sup>

Elsevier Inc<sup>a,b</sup>, Rafael Felipe Bressan<sup>a,1,\*</sup>

<sup>a</sup> Avenida Madre Benvenuta, 2007 - Santa Mônica Florianópolis - SC 88035-901

<sup>b</sup> 360 Park Avenue South, New York

---

## Abstract

This template helps you to create a properly formatted L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X manuscript.

*Keywords:* elsarticle.cls, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, Elsevier, template

*2010 MSC:* 00-01, 99-00

---

## 1. Introdução

*A medição do risco de mercado.* ao qual os portfólios dos investidores está sujeito é objeto de devoção de esforços tanto por parte das instituições e investidores em geral como por parte dos reguladores. Instituições financeiras em todo o mundo, de acordo com suas regulações locais e com os princípios de Basileia (*Basel Committee on Banking Supervision* - BCBS do Banco de Compensações Internacionais - BIS<sup>2</sup>) para aquelas que o seguem (o Brasil é um desses países) são obrigadas a reservar uma parcela de seu capital como provisionamento contra flutuações adversas do mercado em seus portfólios de investimento.

Uma importante característica das séries de retornos financeiros é sua alta volatilidade, não constante e tampouco seguindo a distribuição Normal. Assim, eventos extremos, e neste caso estamos interessados em perdas de grande magnitude, acontecem com uma frequência alta demais para serem descartadas como

---

<sup>☆</sup>Fully documented templates are available in the elsarticle package on CTAN.

<sup>\*</sup>Corresponding author

*Email address:* rafael.bressan@edu.udesc.br (Rafael Felipe Bressan)

*URL:* www.elsevier.com (Elsevier Inc)

<sup>1</sup>Depto. de Economia/Esag/UDESC

<sup>2</sup><http://www.bis.org/bcbs/index.htm?m=3%7C14>

apenas *outliers*, e portanto passaram a atrair a atenção dos participantes do  
mercado, entre eles os investidores e também os reguladores. Estas observações  
induziram uma gama enorme de estudos, práticos e teóricos, voltados a explicar  
o comportamento dos retornos de séries financeiras e modelar de forma adequada  
as caudas da distribuição destes retornos. Não somente estes estudos são de  
grande relevância para o gerenciamento de risco nas instituições financeiras,  
como também são obrigatórios segundo o acordo de Basileia, uma vez que este  
requer o cálculo do Valor em Risco - VaR, para então a instituição poder projetar  
o seu nível requerido de capital.

De acordo com os princípios de Basileia III, on Banking Supervision (2011,  
2013a, 2014), as instituições financeiras supervisionadas pelos Bancos Centrais  
devem manter *buffers* de capital contra riscos de mercado, crédito, liquidez,  
entre outros. Dentro dos riscos de mercado, as duas formas mais usuais de fazer  
a quantificação destes são os métodos de Valor em Risco - VaR e o *Expected  
Shortfall* - ES. Este último relacionado ao primeiro, sendo definido como o valor  
esperado das perdas que excedem o valor VaR calculado para um determinado  
intervalo de confiança.

VaR é um quantil  $\alpha$  da distribuição de perdas de um ativo ou portfólio em  
um determinado período de tempo, ao passo que ES é o valor esperado das  
perdas que excedem VaR, para um mesmo intervalo de confiança  $\alpha$  e período.

O método VaR para cálculo de risco de mercado ao qual um portfólio  
está sujeito foi primeiramente introduzido através de RiskMetrics (1995), uma  
metodologia adotada pelo banco J. P. Morgan. Vem desde então sendo amplamente  
adotado pela indústria financeira e largamente estudado pela academia.  
Inúmeras variantes do modelo foram propostas e continuam sendo utilizadas com  
o passar dos anos. Para o cálculo do VaR é necessária uma suposição acerca da  
distribuição dos retornos, e por conseguinte do comportamento da cauda desta.

As variações na metodologia original de estimação do VaR surgem principal-  
mente em função de críticas a abordagem proposta, a qual inclui a suposição de  
retornos independentes e igualmente distribuídos (*iid*), covariâncias constantes  
entre os ativos de um portfólio e a distribuição normal dos retornos.

Percentuais  
de VaR por  
Basileia

Existem pe-  
nalidades  
regulatórias  
para as IF  
em que seu  
modelo VaR  
permite um  
número  
maior de  
perdas do  
que seria  
estimado  
pelo mod-  
elo. Verificar  
onde nos  
princípios de  
Basileia

45 Uma das últimas fortes críticas a medida do VaR, e que deu origem a outra métrica conhecida como *Expected Shortfall*, ou simplesmente ES, veio de dois artigos Artzner et al. (1997) e Artzner et al. (1999). Primeiramente foram introduzidas quatro propriedades cunhadas através de axiomas, as quais medidas coerentes de risco deveriam possuir, sendo elas:

- 50
- invariância a translação;
  - sub-aditividade;
  - homogeneidade positiva, e;
  - monotonicidade.

VaR especificamente não possui a propriedade da sub-aditividade para alguns  
55 casos. Para contornar este fato, Acerbi & Tasche (2002) propõe o *Expected Shortfall* e comprovam que este é uma medida coerente de risco. Além de ser coerente, o ES possui uma segunda vantagem com relação ao VaR, considerando que o ES nos informa uma medida de tendência central do tamanho das perdas que excedem o valor do quantil VaR. Ou seja, o VaR nos informa apenas que uma  
60 proporção  $\alpha$  das perdas serão menor que a medida, mas nada nos informa se esta perda extraordinária de fato ocorrer. Mesmo sendo criticado e demonstradamente uma medida não coerente de risco, o VaR continua a ser amplamente utilizado, mesmo que agora em conjunto com o ES.

Mais recentemente o Comitê de Supervisão Bancária de Basileia tem se pro-  
65 posto a adotar o *Expected Shortfall* como medida de risco de mercado. on Bank-  
ing Supervision (2013b). O Comitê cita a grande importância da escolha da medida de risco e sua calibração, e portanto estas são relevantes para as decisões de política do Banco. Entre as dificuldades encontradas pelo VaR estão mais notadamente sua inabilidade em estimar o "risco de cauda" da distribuição de  
70 perdas, uma vez que VaR não leva em conta a distribuição das perdas acima do valor de corte.

Desta forma, foi decidido que o ES seria a medida de risco favorita para a abordagem pelo banco chamada de modelos internos. Ou seja, os bancos

supervisionados devem utilizar o ES para o cálculo do risco de mercado a que  
75 estão sujeitos em seus modelos internos. O comitê também se decidiu por um  
intervalo de confiança de 97,5% para o ES, em contraposição a 99% para o  
VaR. O comitê espera que esta abordagem para o cálculo da medida de risco de  
mercado trará benefícios se comparada a antiga abordagem pelo Var, entre elas  
um modelo com resultados mais estáveis e menor sensibilidade a observações  
80 extremas (*outliers*).

*Teoria do valor extremo.* EVT da sigla em inglês, é um ramo da estatística que  
lida diretamente com eventos raros, extremos. Seu objetivo é modelar eventos  
que se distanciam muito da mediana de uma distribuição. Justamente por esta  
característica, a EVT está sendo utilizada para modelar riscos que possuem  
85 distribuição com caudas longas, um dos fatos estilizados que apresentamos sobre  
retornos de ativos financeiros.

Ao utilizarmos a EVT, e mais especificamente o método conhecido como  
*peaks over threshold* – POT, estamos interessados em modelar apenas a parte  
da cauda da distribuição das perdas de um ativo financeiro maiores que um  
90 determinado valor de limiar  $u$ . É da modelagem desta cauda, portanto, que  
faremos as estimativas de risco  $VaR_\alpha$  e  $ES_\alpha$ .

## 2. O método *peaks over threshold*

Consideremos uma amostra de uma variável aleatória (v.a.) cujas observações  
sejam independentes e igualmente distribuídas (i.i.d.),  $L_i, i \in \mathbb{N}$ , que represente  
95 as perdas financeiras de um determinado ativo.

A EVT está interessada em investigar o comportamento da distribuição dos  
máximos desta v.a. dados por  $M_n = \max(L_1, \dots, L_n)$  para vários valores de  $n$   
e a medida que  $n \rightarrow \infty$ . A sequência  $M_n$  é chamada de máximos em bloco e  
é possível demonstrar que a única distribuição para a qual  $M_n$  converge com  
100  $n \rightarrow \infty$  é a distribuição de valores extremos generalizada (GEV, da sigla em  
inglês).

**Definição 1** (MDA). Domínio de máxima atração, se a equação (??) é válida para uma  $H$  não-degenerada, então se diz que  $F \in MDA(H)$ ,  $F$  pertence ao domínio de máxima atração de  $H$ .

**Teorema 2** (Fisher-Tippett, Gnedenko). Se  $F \in MDA(H)$  para alguma  $H$  não-degenerada, então  $H$  deve ser uma distribuição do tipo de valores extremos generalizada – GEV.

O teorema 2 foi estabelecido através de três artigos, Fisher & Tippett (1928), Gnedenko (1941, 1943).

**Definição 3** (GEV). Distribuição de valores extremos generalizada, é definida por sua p.d.f (função densidade de probabilidades) a qual é dada por:

$$H_{\xi}(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}), & \xi \neq 0, \\ \exp(-e^{-x}), & \xi = 0, \end{cases} \quad (1)$$

O parâmetro  $\xi$  é conhecido como o parâmetro de forma da distribuição e dependendo deste valor teremos diferentes tipos de distribuição (casos particulares da GEV). Quando  $\xi = 0$  a distribuição resultante é uma Gumbel, quando  $\xi > 0$  uma Fréchet surge, e por fim quando  $\xi < 0$  temos uma Weibull.

Para as aplicações financeiras não necessitamos calcular a qual  $MDA$  pertencem nossas distribuições contínuas, bastando saber que basicamente todas as distribuições de utilidade prática estão contidas em  $MDA(H_{\xi})$  para algum valor de  $\xi$  (McNeil et al., 2015, p. 139).

## 2.1. Excessos acima de um limiar

O método conhecido como POT, para calcular a função de distribuição dos valores que excedem um determinado limiar de um conjunto de dados vem sendo empregado no mundo financeiro para ajustar as caudas das distribuições de retornos, ou perdas, dos ativos. Este método é preferido a teoria clássica de valores extremos (e.g. máximos em bloco), pois, desperdiça uma quantidade

menor de dados da série original. Qualquer valor que exceda o limiar pré-determinado é considerado na distribuição dos excessos. Esta distribuição dos valores da série que estão acima de um determinado limiar  $u$  é definida como:

**Definição 4** (Distribuição dos excessos). Seja  $X$  uma variável aleatória com  
130 função de distribuição  $F$ . A distribuição dos excessos sobre um limiar  $u$  tem a seguinte função de distribuição:

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (2)$$

para  $0 \leq x < x_F - u$ , onde  $x_F \leq \infty$  é o limite direito da distribuição  $F$ .

Uma importante distribuição que surge na modelagem dos excessos sobre um limiar é a distribuição generalizada de pareto – GPD, que segue.

**Definição 5** (GPD). Distribuição de Pareto Generalizada é definida por sua  
135 função de distribuição:

$$G_{\xi, \beta(u)}(X) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta(u)}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta(u)}\right), & \xi = 0, \end{cases} \quad (3)$$

onde  $\beta > 0$ , e  $x \geq 0$  quando  $\xi \geq 0$  ou  $0 \leq x \leq -\beta/\xi$  quando  $\xi < 0$ .

Os parâmetros  $\xi$  e  $\beta$  são conhecidos respectivamente como parâmetros de forma e escala da distribuição.

**140** A distribuição generalizada de Pareto tem papel fundamental na teoria de valor extremo em função do teorema de Pickands-Balkema-de Haan (Pickands (1975) e Balkema & de Haan (1974)) conforme abaixo:

**Teorema 6** (Pickands-Balkema-de Haan). Pode ser encontrada uma função  $\beta(u)$  tal que:

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{0 \leq x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0$$

se e somente se  $F \in MDA(H_\xi)$  para  $\xi \in \mathbb{R}$ .

O que este teorema nos diz é que para distribuições as quais os máximos  
145 em bloco normalizados convergem para uma GEV (na forma da equação (1)),

então a distribuição dos excessos acima de um limiar destas mesmas distribuições convergem para uma GPD, dado um valor de limiar  $u$  adequado. Como para fins práticos basicamente todas as distribuições contínuas de fato estão no  $MDA(H_\xi)$  para algum valor de  $\xi$ , temos que a GPD é a distribuição a ser escolhida para  
150 modelar excessos acima de um limiar.

Ao fazermos a suposição que a distribuição dos excessos *é igual* a uma GPD, podemos então a partir dos dados de perdas estimar os parâmetros de forma e escala e portanto, modelar a cauda direita da nossa distribuição de perdas de forma parametrizada. Esta é uma suposição, uma vez que a distribuição dos  
155 excessos não segue exatamente uma GPD, mas apenas tende a esta distribuição dado um limiar  $u$  alto e uma amostra de dados grande o suficiente.

Dada a parametrização de uma GPD, é interessante sabermos o valor esperado desta distribuição, uma vez que esta medida de valor central nos fornece importante informação sobre a quantidade de risco que estamos buscando medir,  
160 assim como a informação de que a própria distribuição foi ajustada aos dados de forma satisfatória, como será demonstrado adiante.

**Definição 7** (função média dos excessos). A função média dos excessos de uma variável aleatória  $X$  com média finita é dada por:

$$e(u) = E(X - u | X > u) \quad (4)$$

Ou seja, a equação (4) representa o valor esperado da função de distribuição  
165 dos excessos dada pela Definição 4. Ela representa a média de  $F_u$  como uma função do limiar  $u$ . Esta função por vezes também é conhecida como função média de vida residual (*mean residual life function*), sendo encontrada esta denominação em alguns pacotes de *software* estatísticos.

Para uma variável distribuída na forma de uma GPD, o parâmetro de escala  
170 é uma função linear em  $u$  dado por  $\beta(u) = \beta + \xi u$ , (Embrechts et al., 1997, Teorema 3.4.13(e)). Utilizando-se deste fato e da equação (??) chegamos ao

cálculo da função média dos excessos para uma GPD, dada por:

$$e(u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi} \quad (5)$$

onde  $0 \leq u < \infty$  se  $0 \leq \xi < 1$  e  $0 \leq u \leq -\beta/\xi$  se  $\xi < 0$ . É possível observar que de fato a função média dos excessos em uma GPD é linear em  $u$ . Esta é uma  
175 característica importante de uma GPD e que nos auxilia a escolher um valor adequado do limiar  $u$  de tal forma que a Suposição ?? faça sentido.

**Lema 8.** Sob a Suposição ?? segue que  $F_v(x) = G_{\xi, \beta + \xi(v-u)}(x)$  para qualquer valor limiar  $v \geq u$ .

Logo, a distribuição dos excessos sobre limiares mais altos que  $u$ , também  
180 segue uma GPD com o mesmo parâmetro de forma  $\xi$  e parâmetro de escala que cresce linearmente com este limiar mais alto  $v$ . Se  $\xi < 1$ , a média desta nova GPD converge e é dada por:

$$e(v) = \frac{\beta + \xi(v-u)}{1 - \xi} = \frac{\xi v}{1 - \xi} + \frac{\beta - \xi u}{1 - \xi} \quad (6)$$

Esta é a função média dos excessos sobre limiares mais altos, e está definida para  $u \leq v < \infty$  se  $0 \leq \xi < 1$  e,  $u \leq v \leq u - \beta/\xi$  se  $\xi < 0$ .

185 Esta função é muito útil para calcularmos o  $ES_\alpha$  (*expected shortfall*), considerando que  $Var_\alpha$  nada mais é que um quantil superior ao limiar  $u$  escolhido.

### 3. Modelando caudas e medidas de risco associadas

Através da modelagem da cauda da distribuição  $F$  de perdas por uma GPD, como feito na seção anterior, é possível calcularmos as medidas de riscos  
190  $Var_\alpha$  e  $ES_\alpha$  para esta distribuição de perdas em função dos parâmetros da GPD estimada e também fazendo uso da distribuição empírica de  $F$ .

Sob a Suposição ?? nós temos que a cauda da distribuição  $F$ ,  $\bar{F}(x)$ , para  $x \geq u$  é dada por:



$$\begin{aligned}
\bar{F}(x) &= P(X > u)P(X > x|X > u) \\
&= \bar{F}(u)P(X - u > x - u|X > u) \\
&= \bar{F}(u)\bar{F}_u(x - u) \\
&= \bar{F}(u) \left(1 + \xi \frac{x - u}{\beta}\right)^{-1/\xi}
\end{aligned} \tag{7}$$

Da qual se soubéssemos exatamente a distribuição  $F$  teríamos um modelo  
195 analítico para as probabilidades de perdas na cauda da distribuição. Aqui  $x$  são  
os valores a serem observados das perdas, e portanto  $x - u$  são as perdas em  
excesso ao limiar.

O que fizemos através da equação (7) foi efetivamente separar a distribuição  
 $F$ , ou melhor, sua cauda, em duas partes. A primeira parte, para valores menores  
200 que  $u$ , não foi modelado analiticamente e portanto utilizamos a distribuição  
empírica das perdas, aqui representada por sua cauda  $\bar{F}(u)$ , que nada mais é  
que o número observado de excessos de  $u$  sobre o número total de observações  
da amostra.

A segunda parte é justamente a modelagem através de uma GPD com  
205 parâmetros  $\xi$  e  $\beta$  dado o limiar  $u$ . Por esta modelagem paramétrica podemos  
conhecer as probabilidades de cauda para valores de  $x$  maiores que  $u$ .

O quantil  $\alpha$  é a inversa da função distribuição e nos retorna o valor para o  
qual um percentual  $\alpha$  de observações da amostra é menor ou igual. Assim sendo,  
 $VaR_\alpha$  nada mais é que um quantil alto para o qual determinamos que  $\alpha\%$  das  
210 perdas devem ser menores ou iguais a este valor.

Como a equação (7) fornece a probabilidade de cauda, então esta é igual a  
 $1 - \alpha$  para um valor de  $\alpha \geq F(u)$ . Fazendo  $\bar{F}(x) = 1 - \alpha$  na equação (7) o valor  
de  $x$  representará  $VaR_\alpha$  e nos basta manipular esta equação até isolarmos  $VaR_\alpha$   
como função de  $\bar{F}(u)$ ,  $\alpha$  e dos parâmetros da GPD  $\xi$  e  $\beta$ . Que nos garante a

215 equação abaixo:

$$VaR_\alpha = q_\alpha(F) = u + \frac{\beta}{\xi} \left[ \left( \frac{1-\alpha}{\bar{F}(u)} \right)^{-\xi} - 1 \right] \quad (8)$$

A medida  $ES_\alpha$  pode ser entendida como a média das perdas que excedem o valor dado por  $VaR_\alpha$ . Como o próprio  $VaR_\alpha$  é um quantil acima do valor de limiar  $u$ ,  $ES_\alpha$  é dado pelo valor do  $VaR_\alpha$  somado a função média dos excessos dada pela equação (6) fazendo  $v = VaR_\alpha$ . Esta média é convergente para valores  
220 de  $\xi < 1$  conforme já demonstrado. Ou seja,  $ES_\alpha = VaR_\alpha + e(VaR_\alpha)$ . A qual nos rende de forma mais geral:

$$ES_\alpha = \frac{VaR_\alpha}{1-\xi} + \frac{\beta - \xi u}{1-\xi} \quad (9)$$

Portanto, ambas medidas de risco  $VaR_\alpha$  e  $ES_\alpha$ , para distribuições de perdas que tiveram suas caudas modeladas através de uma GPD da forma  $G_{\xi, \beta(u)}$  com  $\xi < 1$  e  $\beta > 0$ , podem ser calculadas respectivamente através das equações  
225 dadas em (8) e (9). As estimativas destas medidas de risco serão encontradas através das estimativas dos parâmetros da GPD, assim como do limiar utilizado e de uma medida empírica de  $\bar{F}(u)$  que será o número de excessos verificados sobre o total de amostras. É claro que, ao adotarmos esta estimativa para  $\bar{F}(u)$  estamos implicitamente supondo que o número de amostras na série de perdas é  
230 significativa, assim como o número de excessos verificados. Daí a importância de se utilizar um valor  $u$  adequado, conforme explicitado na seção 2.1.

As estimativas de medidas de risco desenvolvidas nesta seção se qualificam como medidas incondicionais, no sentido que elas não dependem do estado atual das coisas, mas sim de todo o histórico de eventos de forma uniforme. Em outras  
235 palavras,  $VaR_\alpha$  e  $ES_\alpha$  derivados a partir das equações (8) e (9) são medidas históricas de risco associado ao ativo em análise, entretanto, não levam em consideração se nos eventos mais recentes a volatilidade das perdas pode ser diferente do valor histórico.

De fato, uma das características marcantes das perdas (ou retornos, como

Incluir sobre Smith e  $\bar{F}(u)$

240 o leitor preferir) dos ativos financeiros é o chamado *clustering* de volatilidade, onde grandes volatilidades (retornos positivos ou negativos) têm tendência a ficarem próximas ao longo da linha temporal. Em geral estas aglomerações de volatilidades surgem a partir da autocorrelação destas, ou seja, a volatilidade em um período  $t$  é dependente das volatilidades verificadas em períodos anteriores. Um modelo bastante encontrado na literatura que busca modelar estas dependências é o modelo ARCH e suas variantes como GARCH, propostos por Engle (1982) e Bollerslev (1986) respectivamente.

Assim, ao passo que as estimativas de risco desenvolvidas nesta seção são valiosas para prazos mais longos, ainda é necessário desenvolver um modelo 250 que lide com o fato das autocorrelações de volatilidades e portanto, que nossa variável aleatória não é independente e igualmente distribuída ao longo do tempo. O modelo proposto por McNeil & Frey (2000) pode ser utilizado para encontrar as medidas de risco  $VaR_\alpha$  e  $ES_\alpha$  condicionais que desejamos, ainda dentro da metodologia de *peaks over threshold* - POT.

#### 255 4. Modelo ARMA-GARCH-EVT

Ativos financeiros possuem características de autocorrelação, senão em seus retornos propriamente ditos, ao menos em suas volatilidades ou variações absolutas. Ou seja, dada uma grande variação no momento  $t$  é de se esperar novamente uma grande variação, não necessariamente na mesma direção daquela anterior, para o momento  $t+1$  e posteriores. Desta forma, medidas de risco 260 incondicionais, conforme aquelas derivadas na Seção 3 podem ser adequadas somente para horizontes temporais mais longos, pois implicitamente tomam em consideração os fatos mais recentes com o mesmo valor de predição que fatos mais longínquos.

265 Assim, nesta subseção trabalharemos com um modelo semelhante ao proposto por McNeil & Frey (2000) os quais fazem uma adequação dos retornos dos ativos a um modelo AR-GARCH e posteriormente tratam os erros desta modelagem como *iid* e portanto, a metodologia de POT pode ser aplicada.

Primeiramente vamos estabelecer um modelo GARCH para as perdas do  
 270 ativo subjacente. Se denotarmos  $L_t$  como sendo a perda observada no período  $t$ ,  
 $\mu_t$  e  $\sigma_t$  são respectivamente a média e o desvio padrão condicionais e mensuráveis  
 através do conjunto de informações disponíveis em  $t-1$  e seja  $Z_t$  inovações *iid*  
 com média zero e desvio padrão unitário, então temos que:

$$L_t = \mu_t + \sigma_t Z_t \quad (10)$$

Seja  $F_L(l)$  a distribuição marginal de  $L_t$ , então  $F_{L_{t+1}|\mathcal{G}_t}(l)$  é a distribuição  
 275 preditiva da perda para o próximo período, onde  $\mathcal{G}_t$  é o conjunto de informações  
 disponíveis no período  $t$ , incluindo-o. Portanto, para o cálculo das medidas condi-  
 cionais de risco estamos interessados em um quantil  $\alpha$  na cauda de  $F_{L_{t+1}|\mathcal{G}_t}(l)$ .  
 Este quantil  $\alpha$ , que será o nosso  $Var_\alpha$ , é o ínfimo  $l$  tal que o valor da distribuição  
 preditiva seja maior ou igual a  $\alpha$ . Ao passo que o valor condicional do  $ES$  será o  
 280 valor esperado das perdas previstas que sejam maiores que  $VaR$  para o mesmo  
 intervalo de confiança. Ou seja:

$$Var_\alpha^t = \inf\{l \in \mathbb{R} : F_{L_{t+1}|\mathcal{G}_t}(l) \geq \alpha\}, \quad (11)$$

$$ES_\alpha^t = E[L_{t+1} | L_{t+1} > Var_\alpha^t] \quad (12)$$

Considerando que nossa distribuição de perdas é dada pela equação (10) e  
 sabendo das propriedades de variáveis aleatórias e do operador de expectância,  
 as equações dadas acima subsumem a:

$$Var_\alpha^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} z_\alpha, \quad (13)$$

$$ES_\alpha^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} E[Z | Z > z_\alpha] \quad (14)$$

285 onde  $z_\alpha$  é o quantil  $\alpha$  das inovações  $Z$ .

Agora nos falta escolher um processo que modele nossa série temporal dada em

(10), ou seja, precisamos especificar o comportamento de  $\mu_t$  e  $\sigma_t$ . Por suposição do modelo, especificamos que o comportamento destas variáveis é dependente de acontecimentos passados, contidos no conjunto de informações  $\mathcal{G}_{t-1}$ . Dentre os diversos modelos já propostos para estimar médias e volatilidades condicionais, está o simples porém efetivo modelo eGARCH(1,1) para a volatilidade condicional e o modelo ARMA(1,2) para a média condicional. Uma extensão destes modelos básicos para outros mais complexos pode ser facilmente obtida e é vasta na literatura, como exemplo modelos GARCH-M, *Threshold* GARCH, EGARCH, etc. e modelos do tipo ARIMA, entre outros encontrados em Tsay (2010).

Implementar  
com modelo  
EGARCH

Neste trabalho, visando aplicar a teoria do valor extremo para o cálculo das medidas condicionais de risco, não faremos maiores suposições acerca da distribuição das inovações, como por exemplo assumir uma determinada distribuição (e.g. Normal ou t de Student), mas está implícito que esta pertence ao MDA de uma GEV e portanto a distribuição de seus excessos sobre um limiar segue aproximadamente uma GPD.

Dadas estas considerações, o modelo adotado segue um formato em dois estágios para ser implementado, como segue.

- Ajustar um modelo eGARCH para os dados de perdas, sem fazer suposições sobre a distribuição de  $Z$ , porém, utilizando um método de pseudo máxima verossimilhança (PML). Deste modelo tiramos as estimativas de  $\mu_{t+1}$  e  $\sigma_{t+1}$  e portanto, calculamos as inovações implícitas resultantes através da equação (10).
- Consideramos estas inovações calculadas como sendo as realizações da variável aleatória  $Z$ , a qual por suposição pode ter sua cauda ajustada a uma GPD utilizando o método descrito na seção 3. Encontraremos por fim o valor de  $z_\alpha$  e  $E[Z|Z > z_\alpha]$ , com os quais finalizamos os cálculos de nossas medidas condicionais de risco dadas em (13) e (14).

Nosso modelo completo para as medidas de risco  $Var_\alpha$  e  $ES_\alpha$  condicionais dada a distribuição de perdas  $L_t$  de um ativo será, portanto:

$$L_t = \mu_t + \epsilon_t \quad (15)$$

$$\mu_t = \mu + \phi_1 L_{t-1} + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} \quad (16)$$

$$\epsilon_t = \sigma_t Z_t \quad (17)$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha_1 Z_{t-1} + \gamma_1 (|Z_{t-1}| - E|Z_{t-1}|) + \beta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2) \quad (18)$$

$$Z_t \sim \mathcal{D}(0, 1) \text{ e } \mathcal{D} \in MDA(H_\xi) \quad (19)$$

com as equações (13) e (14) nos fornecendo os valores das medidas  $VaR_\alpha$  e  $ES_\alpha$  respectivamente, quando utilizadas em conjunto com aquelas dadas por (8) e (9).

O termo de erro  $\epsilon_t$  será uma série estritamente estacionária se  $\beta_1 + \alpha_1 < 1$ , o  
 320 que garante que a variância de nosso modelo ( $\sigma_t^2$ ) será finita, apesar de variável no tempo.

Este modelo é ajustado utilizando-se o método de pseudo máxima verossimilhança, o que significa que, apesar de não adotarmos a distribuição normal para reger as inovações  $Z_t$ , a utilizamos apenas para estimar os parâmetros do modelo.  
 325 É demonstrado na literatura, (Gouriéroux, 1997, Capítulo 4), que o método PML fornece estimadores consistentes e assintoticamente normais, assim podemos utilizar tal método para obter nossas estimativas de parâmetros e erros padrão, mesmo não aceitando a condição de normalidade das inovações.

**Exemplo 9** (Risco condicional da Apple). Como exemplo tomaremos os dados  
 330 de perdas diárias da Apple Inc. (*ticker* AAPL) compreendidas no período entre 02/01/2009 a 16/09/2016, 1.941 observações.

Seguindo o procedimento em 2 estágios, primeiramente iremos ajustar a série de perdas diárias da Apple ao modelo AR(1)-GARCH(1,1) descrito acima, considerando a distribuição condicional como uma normal.

335 A figura 1 abaixo nos mostra alguns resultados desta regressão. Seguindo os gráficos da esquerda para a direita, acima e depois abaixo, temos no primeiro gráfico as perdas observadas envoltas em uma banda composta por  $\pm 2\sigma$ . No

segundo gráfico temos a autocorrelação das próprias observações, ou seja, das perdas. Nota-se que estatisticamente não se pode afirmar que estas sejam correlacionadas e portanto, seria de se esperar que o valor de  $\phi_1$  em nosso  
340 modelo não seja significativo. No terceiro gráfico temos as autocorrelações dos quadrados das perdas, e neste caso sim, de acordo com os fatos estilizados de ativos financeiros, estes são altamente correlacionados.

Enquanto os três primeiros gráficos nos trazem informações da série de perdas original, a sequência na parte de baixo da figura 1 mostra informações  
345 acerca do modelo AR-GARCH ajustado. O primeiro deles é um gráfico do tipo QQ (quantil-quantil) muito utilizado para verificar a distribuição de variáveis aleatórias. Nele temos uma distribuição de referência, neste caso a Normal e, se a variável de interesse segue esta distribuição os pontos no gráfico QQ  
350 devem ficar todos sobre a linha contínua. Podemos perceber claramente que ao nos aproximarmos das caudas, os resíduos padronizados,  $z_t$ , se desviam consideravelmente da normalidade, apresentando caudas muito mais longas que uma distribuição normal. Para o nosso modelo isso era esperado, uma vez que sabemos que as inovações em processos estocásticos de ativos financeiros não  
355 seguem uma normal. São os excessos acima de um limiar destes resíduos que, no segundo passo de nossa modelagem, ajustaremos a uma distribuição do tipo GPD.

Ainda assim é possível observar que a filtragem dos dados promovida pelo ajuste AR-GARCH nos serviu para descorrelacionar serialmente os resíduos padronizados, conforme demonstram os dois gráficos seguintes, de forma a ser  
360 possível utilizar a técnica de valor extremo a estes resíduos.

A tabela 1 abaixo traz as informações sobre o modelo ajustado. Os valores estimados dos parâmetros, assim como seus erros padrões, estatística  $t$  e valores  $p$ . Percebe-se que de fato o modelo se ajustou aos dados, considerando que todos  
365 os parâmetros estimados são significativos com ao menos 95% de confiança com exceção do parâmetro  $\phi_1$  o qual, pelo gráfico de autocorrelação, já esperávamos fosse pouco significativo.

Ajustado este primeiro modelo, que é o equivalente a filtrar os dados originais

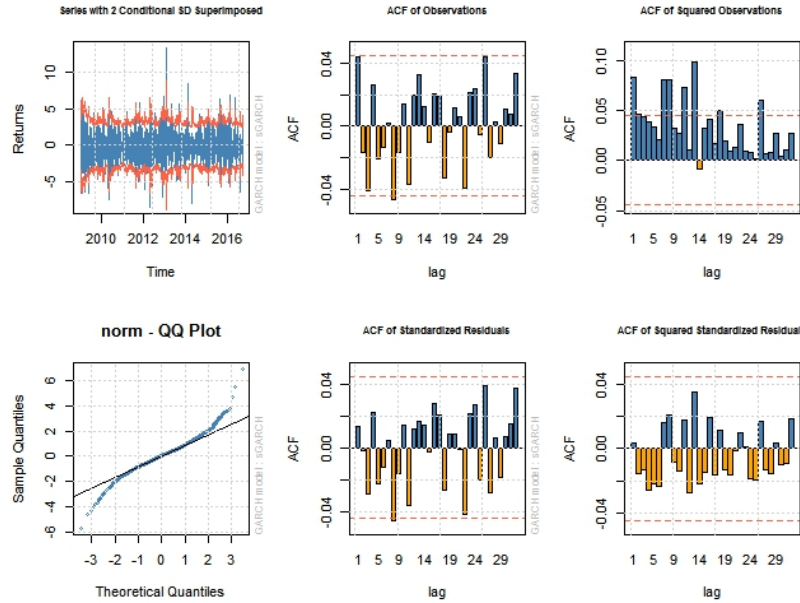


Figure 1: Ajuste de AAPL ao modelo AR(1)-GARCH(1,1). Autocorrelação nos quadrados das perdas e distribuição dos resíduos padronizados com caudas longas.

de perda com um modelo AR-GARCH de modo que os resíduos padronizados  
 370 agora sim sejam as realizações de uma variável aleatória *iid*, então podemos  
 aplicar a técnica de modelagem da cauda destes resíduos conforme a teoria de  
 valor extremo. Cabe salientar que é fundamental fazer esta filtragem nos dados,  
 uma vez que a POT supõe dados independentes e identicamente distribuídos, caso  
 contrário não teríamos a convergência dada no teorema 6 de Pickands-Balkema-de  
 375 Haan.

Table 1: Parâmetros estimados para o modelo AR-GARCH de AAPL

	Estimativa	Erro Padrão	Valor t	$\Pr(> t )$
$\mu$	-0.1683	0.0381	-4.4138	0.0000
$\phi_1$	0.0400	0.0246	1.6282	0.1035
$\omega$	0.2107	0.0514	4.1011	0.0000
$\alpha_1$	0.0876	0.0187	4.6804	0.0000
$\beta_1$	0.8445	0.0301	28.0768	0.0000

Portanto, aplicaremos agora a modelagem POT para os resíduos padronizados,



os quais sabemos não serem normalmente distribuídos e que possuem considerável curtose em excesso (vide gráfico QQ da figura 1) e encontraremos os valores de  $z_\alpha$  e  $E[Z|Z > z_\alpha]$  necessários para computar os valores de  $VaR_\alpha$  e  $ES_\alpha$  das equações (13) e (14).

Os valores de  $z_\alpha$  e  $E[Z|Z > z_\alpha]$  foram calculados para  $\alpha = 0,99$  e são apresentados na tabela 2 abaixo juntamente com os limites inferior e superior de seu intervalo de confiança a 95%. Note que  $E[Z|Z > z_\alpha]$  na tabela em questão foi chamado de  $s_{.99}$ .

Table 2: Valores de  $z_{.99}$  e  $s_{.99}$  encontrados e seus respectivos intervalos de confiança a 95%

	Inf	Estimativa	Sup
$z_{.99}$	2.40	2.61	2.89
$s_{.99}$	3.11	3.55	4.90

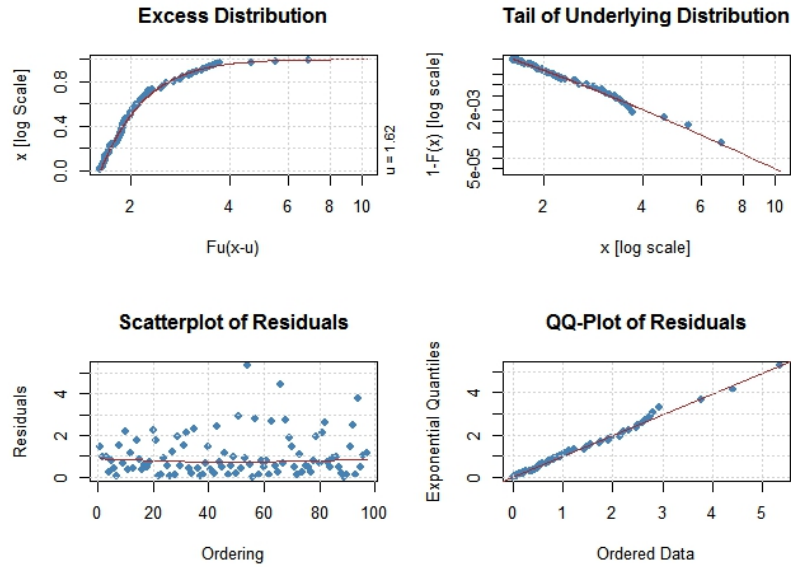


Figure 2: Ajuste dos resíduos padronizados a um modelo POT. Distribuição dos excessos acima do limiar  $u = 1,62$ .

A figura 2 traz algumas informações acerca do ajuste feito a uma GPD dos resíduos padronizados obtidos. Foi escolhido como limiar  $u$  o valor de 1,62 que é o quantil de  $z_t$  a 0,95. Esse valor foi ratificado através da análise qualitativa

do gráfico de vida média residual (MRL plot) conforme encontrado na definição 7. Com a escolha deste limiar, obtivemos 97 observações de perdas em excesso  
390 a este valor. Quantidade razoável e que nos permite calcular os parâmetros da distribuição GPD.

Pode-se verificar através da figura 2 que os ajustes feitos foram bastante satisfatórios, principalmente com a GPD capturando muito bem a curtose em excesso na cauda da distribuição dos resíduos padronizados (*tail of underlying*  
395 *distribution*) e os quantis dos próprios resíduos deste ajuste ficarem juntos dos valores teóricos esperados (*QQ plot of residuals*).

Possuímos todos os parâmetros de nosso modelo híbrido AR-GARCH-POT para então calcularmos os valores das medidas de risco condicional dadas pelas equações (13) e (14). Com o modelo AR-GARCH executado no período  $t$   
400 obtemos as estimativas de  $\mu_{t+1}$  e de  $\sigma_{t+1}$  e através do modelo POT obtemos os valores de  $z_\alpha$  e  $E[Z|Z > z_\alpha]$ , no caso do nosso exemplo escolhemos  $\alpha = 0,99$ .

Toda esta metodologia pode ser aplicada período a período, mantendo uma memória fixa das últimas  $n$  observações de perdas e que resultará em valores calculados para  $Var_\alpha^{t+1}$  e  $ES_\alpha^{t+1}$ , os quais poderão ser comparados com a  
405 realização futura de perda.

A tabela 3 abaixo apresenta as principais estatísticas descritivas para as séries em análise.

Table 3: Estatísticas descritivas dos retornos (amostra completa de 31/08/2005 a 30/08/2017).

	IBovespa	S&P500	S&P TSE	IPSA	Merval	IPC
Média	0.03124	0.02318	0.01161	0.03026	0.09226	0.04263
Mediana	0.07099	0.05903	0.07505	0.05356	0.13502	0.07561
Máximo	13.67661	10.95720	9.37023	11.80337	10.43163	10.44071
Mínimo	-12.09605	-9.46951	-9.78785	-7.23628	-12.95163	-7.26612
Desvp	1.75671	1.22793	1.13789	1.01076	2.00060	1.25450
Assimetria	-0.05097	-0.34749	-0.68193	0.01589	-0.48812	0.09110
Curtose	5.70273	11.41453	10.80965	11.19090	3.86856	6.68286
Jarque-Bera	4020.35484	16455.79566	14897.93853	15592.04569	1942.76002	5588.58043
p-valor	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Q(10)	25.71287	63.86160	50.29585	101.58891	17.64977	49.22375
p-valor	0.00415	0.00000	0.00000	0.00000	0.06117	0.00000
$Q^2(10)$	2148.66484	2820.58898	3500.46011	1257.79640	1068.06081	1551.92204
p-valor	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N.obs	2966	3020	3012	2988	2929	3001

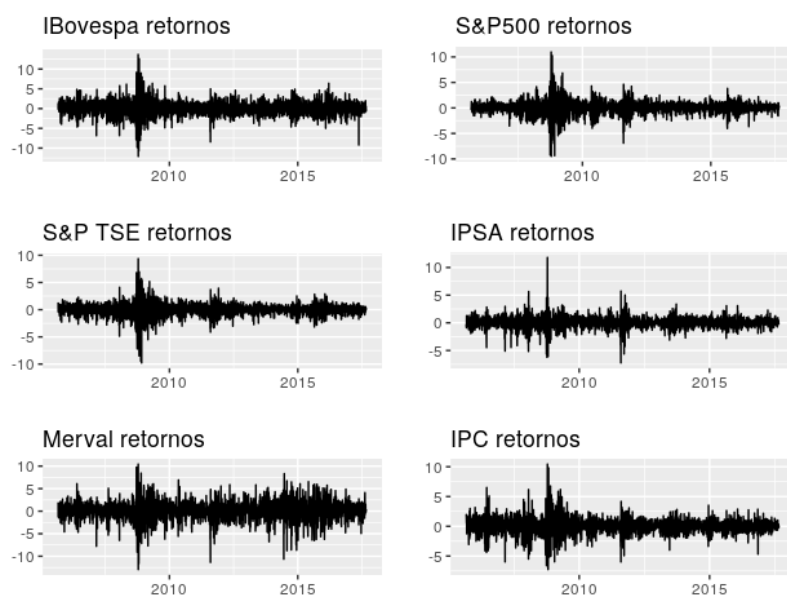


Figure 3: Retornos dos índices do estudo. Período completo entre 31/08/2005 a 30/08/2017.

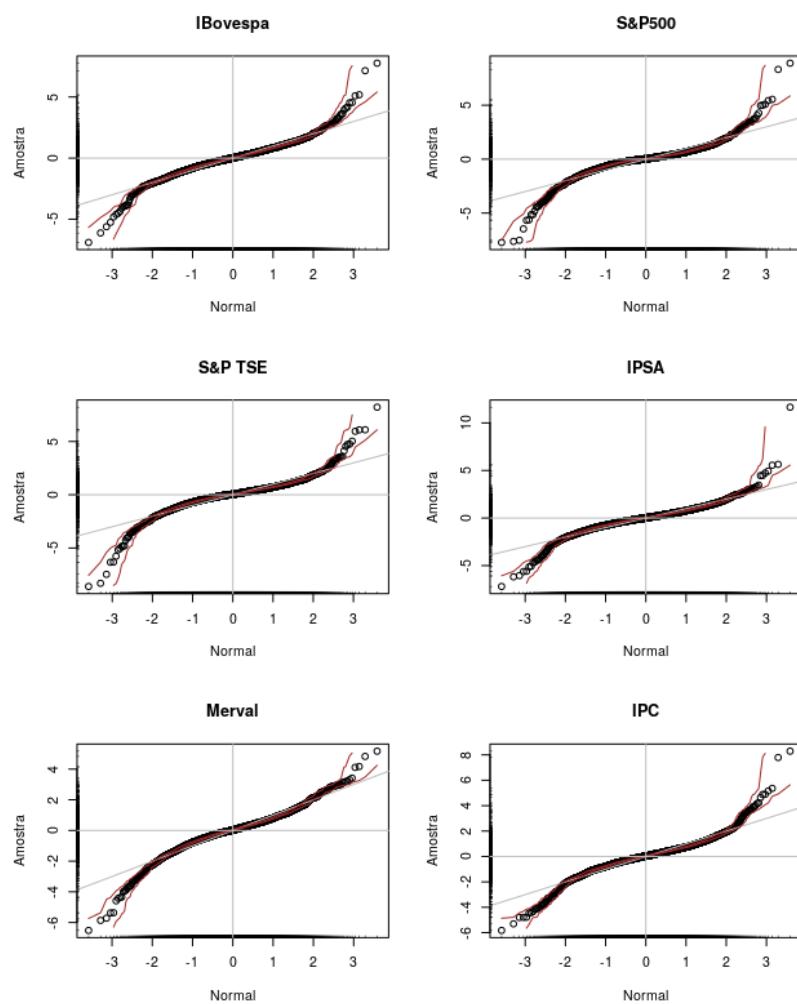


Figure 4: Análise de normalidade dos retornos através de gráficos quantil-quantil.

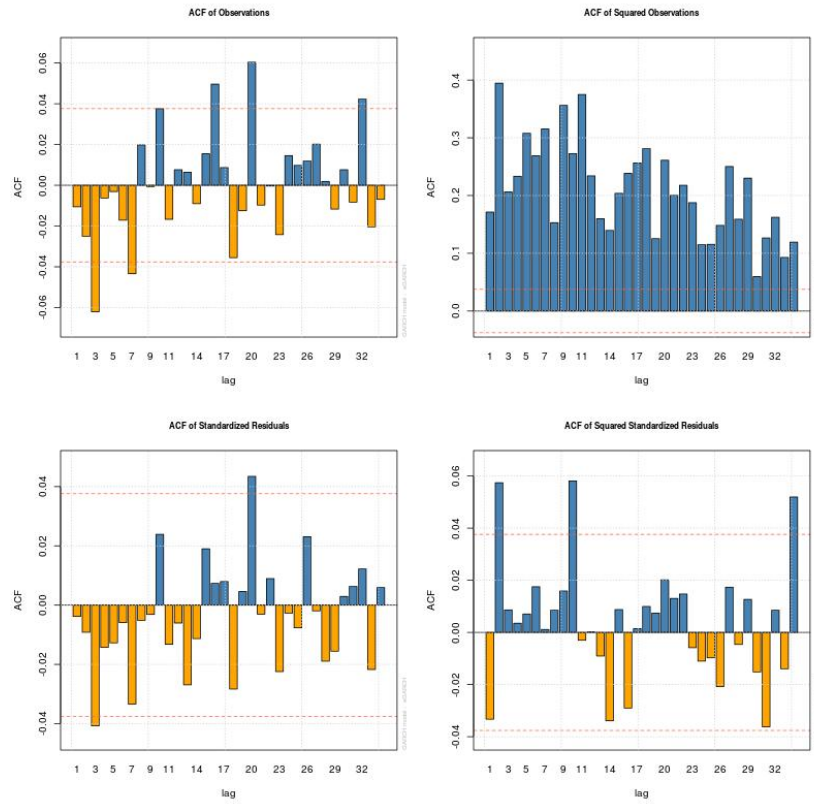


Figure 5: ACF dos retornos observados e seus quadrados, e ACF dos resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. Ibovespa 31/08/2005 a 31/08/2016.

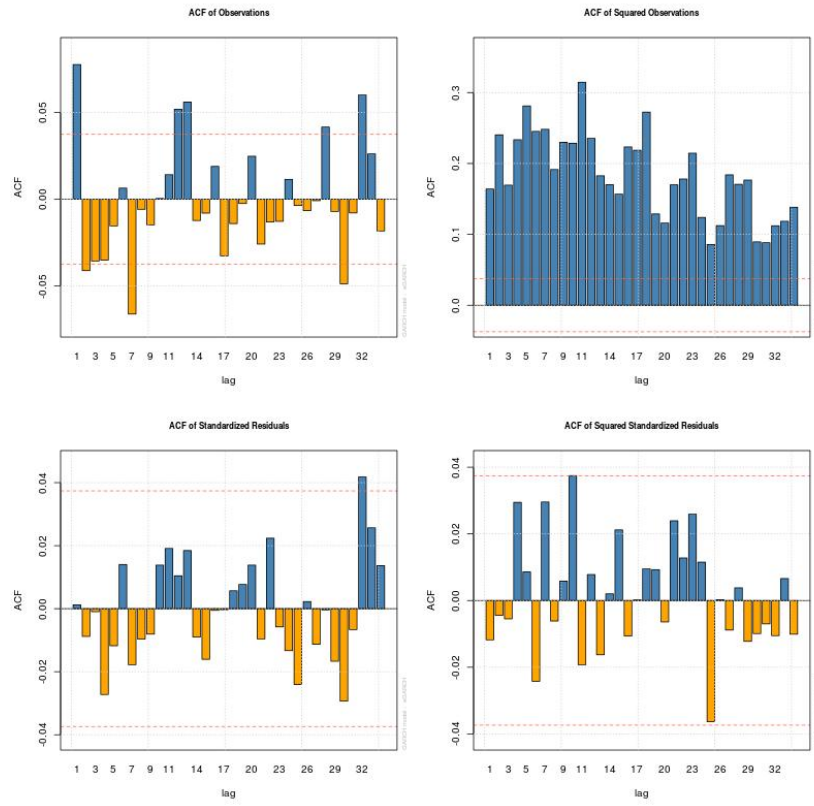


Figure 6: ACF dos retornos observados e seus quadrados, e ACF dos resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. IPC 31/08/2005 a 31/08/2016.

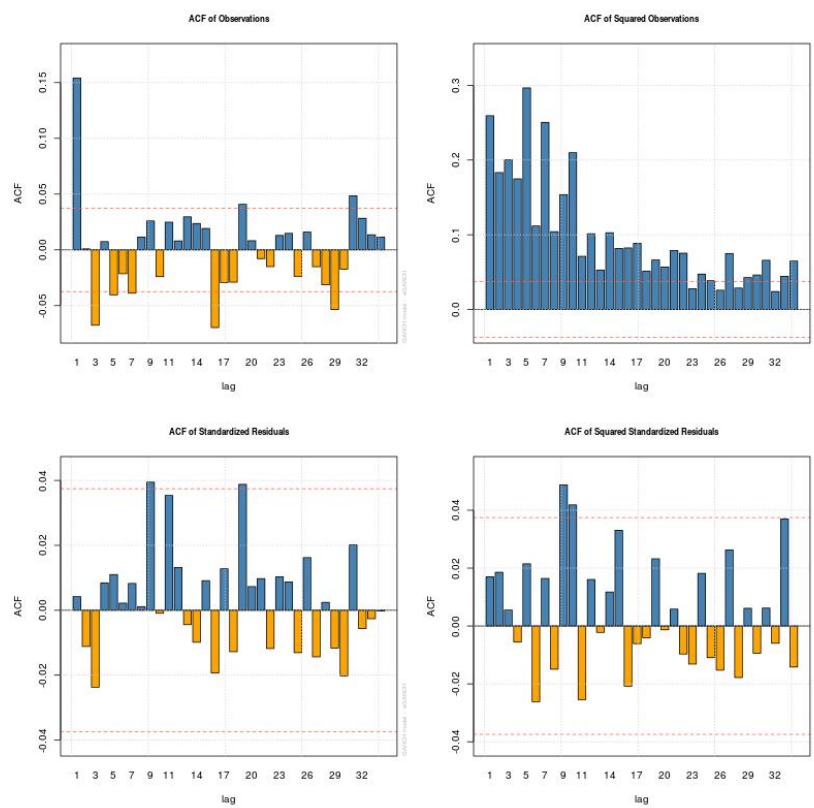


Figure 7: ACF dos retornos observados e seus quadrados, e ACF dos resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. IPSA 31/08/2005 a 31/08/2016.



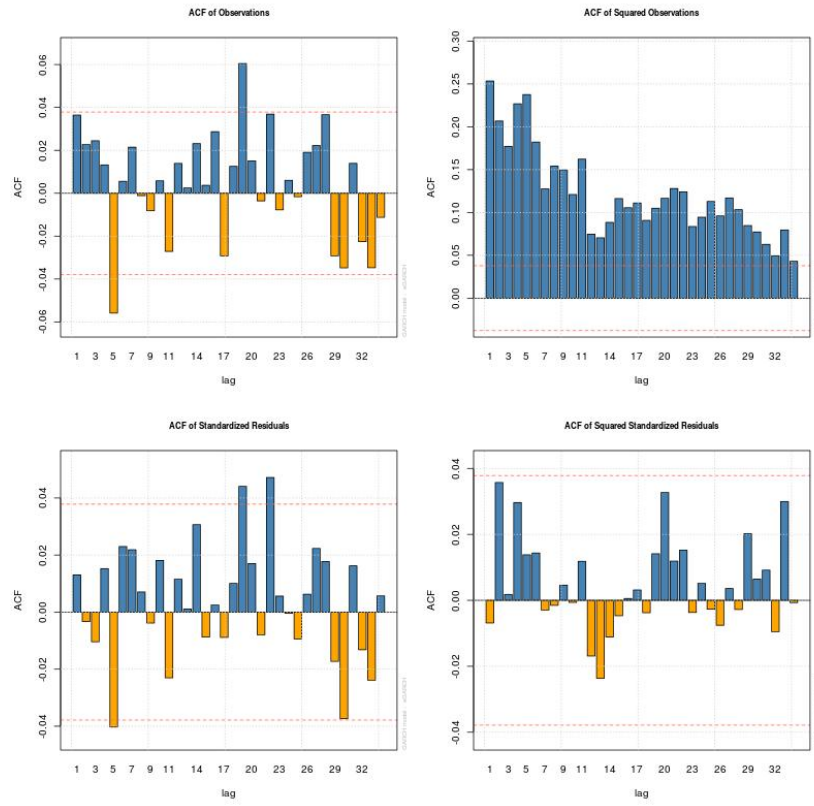


Figure 8: ACF dos retornos observados e seus quadrados, e ACF dos resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. Merval 31/08/2005 a 31/08/2016.

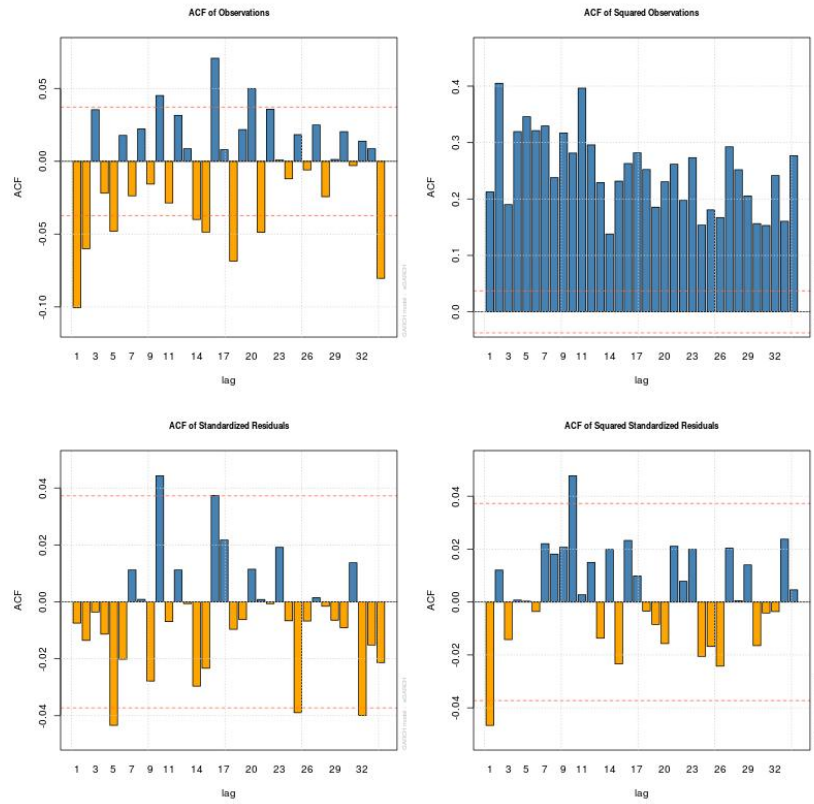


Figure 9: ACF dos retornos observados e seus quadrados, e ACF dos resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. S&P500 31/08/2005 a 31/08/2016.

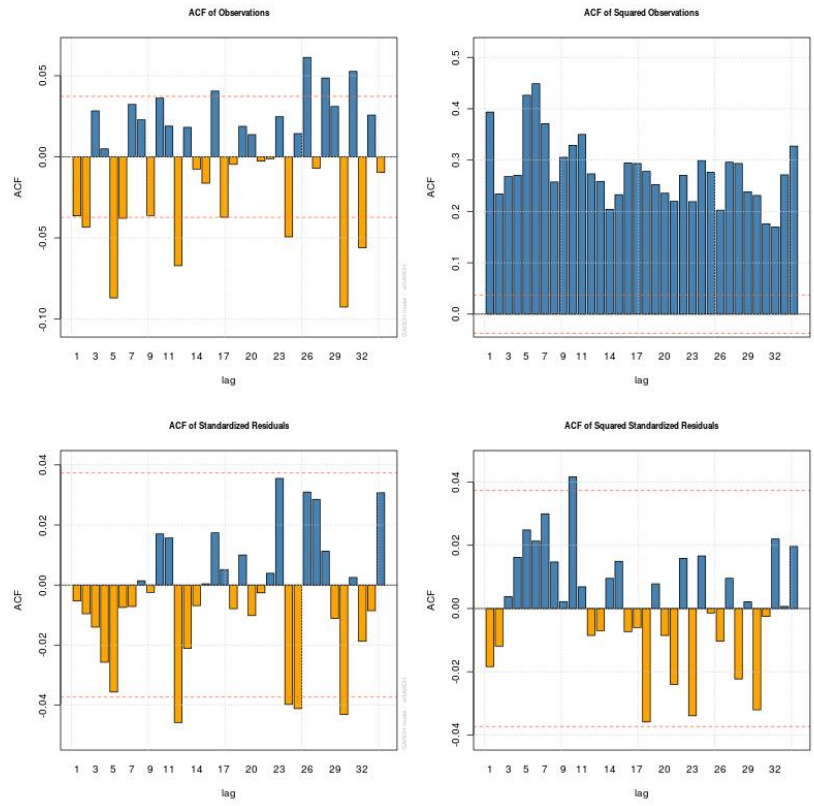


Figure 10: ACF dos retornos observados e seus quadrados, e ACF dos resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. S&P TSE 31/08/2005 a 31/08/2016.

Table 4: Parâmetros estimados do modelo eGARCH. Valores p apresentados de acordo com erros padrão robustos. (amostra de trabalho entre 31/08/2005 a 31/08/2016).

Parâmetros	IBovespa	S&P500	S&P TSE	IPSA	Merval	IPC
$\mu$	-0.03186	0.02402	0.01032	0.01459	0.09433	0.02020
	0.96859	0.00039	0.43820	0.69395	0.02822	0.23385
$\phi_1$	0.97209	0.14489	-0.80629	-0.66516	0.17543	0.57109
	0.00000	0.00000	0.00000	0.59648	0.00000	0.00000
$\theta_1$	-0.96940	-0.20334	0.83392	0.85234	-0.13354	-0.50876
	0.00000	0.00000	0.00000	0.60578	0.00000	0.00000
$\theta_2$	0.00993	-0.00651	0.02988	0.14839	0.03869	-0.04554
	0.95324	0.00373	0.12197	0.84409	0.05284	0.00903
$\omega$	0.01775	0.00128	-0.00148	-0.00539	0.09136	0.00639
	0.01405	0.73700	0.59572	0.58957	0.12582	0.04502
$\alpha_1$	-0.09008	-0.16349	-0.10064	-0.10078	-0.05566	-0.09682
	0.20855	0.00000	0.00000	0.00012	0.05829	0.00000
$\beta_1$	0.98403	0.97296	0.98669	0.96304	0.93642	0.98527
	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$\gamma_1$	0.12076	0.14015	0.10419	0.22162	0.22923	0.14051
	0.79005	0.00000	0.00000	0.00000	0.00003	0.00000

## 5. Conclusão

### References

- 410 Acerbi, C., & Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 26, 1487–1503.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1997). Thinking Coherently. *RISK*, 10, 68–71.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1999). Coherent Measures  
415 of Risk. *Mathematical Finance*, 9, 203–228. doi:10.1111/1467-9965.00068.

- Balkema, A. A., & de Haan, L. (1974). Residual Life Time at Great Age. *The Annals of Probability*, 2, 792–804. doi:10.1214/aop/1176996548.
- on Banking Supervision, B. C. (2011). Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems. URL: <http://www.bis.org/publ/bcbs189.pdf>.  
420
- on Banking Supervision, B. C. (2013a). Basel III: The liquidity coverage ratio and liquidity risk monitoring tools. URL: <http://www.bis.org/publ/bcbs238.pdf>.
- on Banking Supervision, B. C. (2013b). Fundamental review of the trading  
425 book: A revised market risk framework. URL: <http://www.bis.org/publ/bcbs265.pdf>.
- on Banking Supervision, B. C. (2014). Basel III: The net stable funding ratio. URL: <http://www.bis.org/bcbs/publ/d295.pdf>.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity.  
430 *Journal of Econometrics*, 31, 307–327. doi:10.1016/0304-4076(86)90063-1.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C., & Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50, 987.  
435 doi:10.2307/1912773.
- Fisher, R. A., & Tippett, L. H. C. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24, 180–190.
- Gnedenko, B. V. (1941). Limit theorems for the maximal term of a variational  
440 series. *Comptes Rendus (Doklady) de L'Académie des Sciences de l'URSS*, 32, 7–9.

- Gnedenko, B. V. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Annals of Mathematics*, 44, 423–453.
- Gouriéroux, C. (1997). *ARCH Models and Financial Applications*. Springer Series in Statistics. New York, NY: Springer New York.  
 445 URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-1860-9>. doi:10.1007/978-1-4612-1860-9.
- McNeil, A. J., & Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of*  
 450 *Empirical Finance*, 7, 271–300. doi:10.1016/s0927-5398(00)00012-8.
- McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015). *Quantitative risk management: concepts, techniques and tool*. (Revised ed ed.). Princeton University Press.
- Pickands, J. (1975). Statistical Inference Using Extreme Order Statistics. *Annals of Statistics*, 3, 119–131. doi:10.1214/aos/1176343003.
- 455 RiskMetrics (1995). *Technical Document - 3rd Edition*. Technical Report J.P Morgan Guaranty Trust Company.
- Tsay, R. S. (2010). *Analysis of financial time series*. (3rd ed.). Wiley.