

Medidas condicionais de risco através da teoria do valor extremo[☆]

Elsevier Inc^{a,b}, Rafael Felipe Bressan^{a,1,*}

^a Avenida Madre Benvenuta, 2007 - Santa Mônica Florianópolis - SC 88035-901

^b 360 Park Avenue South, New York

Abstract

This template helps you to create a properly formatted L^AT_EX manuscript.

Keywords: elsarticle.cls, L^AT_EX, Elsevier, template

2010 MSC: 00-01, 99-00

1. Introdução

A medição do risco de mercado. ao qual os portfólios dos investidores está sujeito é objeto de devoção de esforços tanto por parte das instituições e investidores em geral como por parte dos reguladores. Instituições financeiras em todo o mundo, de acordo com suas regulações locais e com os princípios de Basileia (Basel Committee on Banking Supervision - BCBS do Banco de Compensações Internacionais - BIS²) para aquelas que o seguem (o Brasil é um desses países) são obrigadas a reservar uma parcela de seu capital como provisionamento contra flutuações adversas do mercado em seus portfólios de investimento.

Uma importante característica das séries de retornos financeiros é sua alta volatilidade, não constante e tampouco seguindo a distribuição Normal. Assim, eventos extremos, e neste caso estamos interessados em perdas de grande magnitude, acontecem com uma frequência alta demais para serem descartadas como

[☆]Fully documented templates are available in the elsarticle package on CTAN.

^{*}Corresponding author

Email address: rafael.bressan@edu.udesc.br (Rafael Felipe Bressan)

URL: www.elsevier.com (Elsevier Inc)

¹Depto. de Economia/Esag/UDESC

²<http://www.bis.org/bcbs/index.htm?m=3%7C14>

apenas *outliers*, e portanto passaram a atrair a atenção dos participantes do
mercado, entre eles os investidores e também os reguladores. Estas observações
induziram uma gama enorme de estudos, práticos e teóricos, voltados a explicar
o comportamento dos retornos de séries financeiras e modelar de forma adequada
as caudas da distribuição destes retornos. Não somente estes estudos são de
grande relevância para o gerenciamento de risco nas instituições financeiras,
como também são obrigatórios segundo o acordo de Basileia, uma vez que este
requer o cálculo do Valor em Risco - VaR, para então a instituição poder projetar
o seu nível requerido de capital.

De acordo com os princípios de Basileia III, on Banking Supervision (2011,
2013, 2014), as instituições financeiras supervisionadas pelos Bancos Centrais
devem manter *buffers* de capital contra riscos de mercado, crédito, liquidez,
entre outros. Dentro dos riscos de mercado, as duas formas mais usuais de fazer
a quantificação destes são os métodos de Valor em Risco - VaR e o *Expected
Shortfall* - ES. Este último relacionado ao primeiro, sendo definido como o valor
esperado das perdas que excedem o valor VaR calculado para um determinado
nível de confiança.

VaR é um quantil alto α da distribuição de perdas de um ativo ou portfólio
em um determinado período de tempo, ao passo que ES é o valor esperado das
perdas que excedem VaR, para um mesmo nível de confiança α e período.

O método VaR para cálculo de risco de mercado ao qual um portfólio
está sujeito foi primeiramente introduzido através de RiskMetrics (1995), uma
metodologia adotada pelo banco J. P. Morgan. Vem desde então sendo amplamente
adotado pela indústria financeira e largamente estudado pela academia.
Inúmeras variantes do modelo foram propostas e continuam sendo utilizadas com
o passar dos anos. Para o cálculo do VaR é necessária uma suposição acerca da
distribuição dos retornos, e por conseguinte do comportamento da cauda desta.

As variações na metodologia original de estimação do VaR surgem principalmente
em função de críticas a abordagem proposta, a qual inclui a suposição de
retornos independentes e igualmente distribuídos, covariâncias constantes entre
os ativos de um portfólio e a distribuição normal dos retornos.

Definição

de VaR.

Nível ou intervalo de
confiança?

verificar em
riskmetrics

Percentuais
de VaR por
Basileia

Existem penalidades
regulatórias
para as IF
em que seu
modelo VaR
permite um
número
maior de
perdas do
que seria

45 Por meio de dois artigos Artzner et al. (1997) e Artzner et al. (1999), foi introduzido na literatura o conceito de medida coerente de risco. Para uma medida ser considerada coerente, primeiramente foram introduzidas quatro propriedades cunhadas através de axiomas, as quais estas medidas deveriam possuir, sendo elas:

- 50
- invariância a translação;
 - sub-aditividade;
 - homogeneidade positiva, e;
 - monotonicidade.

VaR especificamente não possui a propriedade da sub-aditividade para alguns
55 casos, sendo esta uma das grandes críticas ao VaR. Para contornar este fato, Acerbi & Tasche (2002) propõe o *Expected Shortfall* e comprovam que este é uma medida coerente de risco. Além de ser coerente, o ES possui uma segunda vantagem com relação ao VaR, considerando que o ES nos informa uma medida de tendência central do tamanho das perdas que excedem o valor do quantil
60 VaR. Ou seja, o VaR nos informa apenas que uma proporção α das perdas serão menores que a medida, mas nada nos informa se esta perda extraordinária de fato ocorrer. Mesmo sendo criticado e demonstradamente uma medida não coerente de risco, o VaR continua a ser amplamente utilizado, mesmo que agora em conjunto com o ES.

65 *Teoria do valor extremo*. EVT da sigla em inglês, é um ramo da estatística que lida diretamente com eventos raros, extremos. Seu objetivo é modelar o comportamento assintótico de eventos que se distanciam muito da mediana de uma distribuição. Justamente por esta característica, a EVT está sendo utilizada para modelar riscos que possuem distribuição com caudas longas, um dos fatos
70 estilizados bem conhecidos sobre retornos de ativos financeiros.

Ao utilizar a EVT, e mais especificamente o método conhecido como *peaks over threshold* – POT, se está interessado em modelar apenas a parte da cauda

da distribuição das perdas de um ativo financeiro maiores que um determinado valor de limiar u . É da modelagem desta cauda, portanto, que se calculam as
75 estimativas de risco VaR_α .

McNeil & Frey (2000) Longin (2000) *stress test* utilizando evt Wong et al. (2003) um estudo sobre as implicações da precisão do modelo VaR no gerenciamento do risco de mercado em bancos Berkowitz & O'Brien (2002) precisão
80 dos modelos em bancos comerciais Byström (2004) Gencay & Selcuk (2004) Kuester et al. (2006) comparação entre diversos modelos VaR Herrera & Schipp (2013) Rocco (2014) uma revisão sobre o uso da evt em finanças Karmakar & Shukla (2014) Chavez-Demoulin et al. (2016) Karmakar & Paul (2016) aplicação do modelo evt condicional a retornos intra-diários O'Brien & Szerszeń (2017)
85 avaliação dos modelos de risco de bancos no pré, durante e pós crise financeira de 2008

incluir as diversas literaturas sobre a aplicação da evt ao VaR

2. Modelando caudas e medidas de risco associadas

Considere uma amostra de uma variável aleatória - va - cujas observações sejam independentes e igualmente distribuídas - *iid*, $X_i, i \in \mathbb{N}$, que representem
90 as perdas financeiras de um determinado ativo, com uma função de distribuição - *df* - desconhecida $F(x) = P(X_i \leq x)$. Seja u um valor de limiar a partir do qual perdas acima deste valor sejam consideradas extremas. Os valores de excesso serão, portanto, $X_i - u$.

A EVT está interessada em investigar o comportamento da distribuição dos
95 máximos desta va dados por $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ para vários valores de n e a medida que $n \rightarrow \infty$. A sequência M_n é chamada de máximos em bloco e foi demonstrado através do conhecido teorema de Fisher-Tippett-Gnedenko, Fisher & Tippett (1928), Gnedenko (1941, 1943), que a única distribuição para a qual M_n converge com $n \rightarrow \infty$ é a distribuição de valores extremos generalizada. Se
100 esta distribuição de valores extremos generalizada - GEV - for denotada por H_ξ , com ξ um parâmetro da distribuição, então se diz que $F \in MDA(H_\xi)$, F

pertence ao domínio de máxima atração de H_ξ .

Definição 1 (GEV). Distribuição de valores extremos generalizada, é definida por sua função densidade de probabilidade - pdf - a qual é dada por:

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}), & \xi \neq 0, \\ \exp(-e^{-x}), & \xi = 0, \end{cases} \quad (1)$$

105 O parâmetro ξ é conhecido como parâmetro de forma da distribuição e dependendo deste valor tem-se diferentes tipos de distribuição (casos particulares da GEV). Quando $\xi = 0$ a distribuição resultante é uma Gumbel, quando $\xi > 0$ uma Fréchet surge, e por fim quando $\xi < 0$ tem-se uma Weibull.

Para as aplicações financeiras não necessitamos calcular a qual *MDA* per-
110 tencem nossas distribuições contínuas, bastando saber que basicamente todas as distribuições de utilidade prática estão contidas em $MDA(H_\xi)$ para algum valor de ξ (McNeil et al., 2015, p. 139).

2.1. Excessos acima de um limiar

O método POT para calcular a função de distribuição dos valores que
115 excedem um determinado limiar de um conjunto de dados vem sendo empregado no mundo financeiro para ajustar as caudas das distribuições de retornos, ou perdas, dos ativos. Este método é preferido a teoria clássica de valores extremos (e.g. máximos em bloco), pois, desperdiça uma quantidade menor de dados da série original. Qualquer valor que exceda o limiar pré-determinado é considerado
120 na distribuição dos excessos. Esta é definida como.

Definição 2 (Distribuição dos excessos). Seja X uma variável aleatória com função de distribuição F . A distribuição dos excessos sobre um limiar u tem a seguinte função de distribuição:

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (2)$$

para $0 \leq x < x_F - u$, onde $x_F \leq \infty$ é o limite direito da distribuição F .

125 Uma importante distribuição que surge na modelagem dos excessos sobre um limiar é a distribuição generalizada de pareto – GPD, que segue.

Definição 3 (GPD). Distribuição de Pareto Generalizada é definida por sua função de distribuição:

$$G_{\xi, \psi(u)}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\psi(u)}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\psi(u)}\right), & \xi = 0, \end{cases} \quad (3)$$

onde $\psi > 0$, e $x \geq 0$ quando $\xi \geq 0$ ou $0 \leq x \leq -\psi/\xi$ quando $\xi < 0$.

Os parâmetros ξ e ψ são conhecidos respectivamente como parâmetros de forma e escala da distribuição. A GPD tem papel fundamental na teoria de
130 valor extremo em função do teorema de Pickands-Balkema-de Haan, Pickands (1975) e Balkema & de Haan (1974), pois estes demonstram que, para um valor suficientemente alto do limiar u , a distribuição dos excessos $F_u(x)$ pode ser aproximada por uma GPD $G_{\xi, \psi}(x)$.

O que este teorema prova é que para distribuições as quais os máximos em
135 bloco normalizados convergem para uma GEV (na forma da equação (1)), então a distribuição dos excessos acima de um limiar destas mesmas distribuições convergem para uma GPD, dado um valor de limiar u adequado. Como para fins práticos basicamente todas as distribuições contínuas de fato estão no $MDA(H_\xi)$ para algum valor de ξ , temos que a GPD é a distribuição a ser escolhida para
140 modelar excessos acima de um limiar.

Ao se fazer esta suposição que a distribuição dos excessos *é igual* a uma GPD, pode-se então a partir dos dados de perdas estimar os parâmetros de forma e escala e, portanto, modelar a cauda direita da distribuição de perdas de forma parametrizada com o auxílio da equação (2).

145 Dada a parametrização de uma GPD, é interessante saber o valor esperado desta distribuição, uma vez que esta medida de valor central fornece importante informação sobre a quantidade de risco que se está medindo, assim como a informação de que a própria distribuição foi ajustada aos dados de forma

satisfatória.

150 O valor esperado de uma variável aleatória não negativa pode ser computado através da integral de sua cauda, $P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$. A cauda da GPD é, para $\xi \neq 0$, $(1 + \xi x/\psi)^{-1/\xi}$.

Desta forma, o valor esperado de uma GPD $G_{\xi,\psi}(x)$, converge para valores de $\xi < 1$ e é dado pela seguinte equação:

$$E[G_{\xi,\psi}(X)] = \frac{\psi}{1 - \xi} \quad (4)$$

155 **Definição 4** (função média dos excessos). A função média dos excessos de uma variável aleatória X com média finita é dada por:

$$e(u) = E(X - u | X > u) \quad (5)$$

Ou seja, a equação (5) representa o valor esperado da função de distribuição dos excessos dada pela Definição 2. Ela representa a média de F_u como uma função do limiar u . Por vezes também é conhecida como função média de vida residual (*mean residual life function*).

Para uma variável distribuída na forma de uma GPD, o parâmetro de escala é uma função linear em u dado por $\psi(u) = \psi + \xi u$, (Embrechts et al., 1997, Teorema 3.4.13(e)). Utilizando-se deste fato e da equação (4) chegamos ao cálculo da função média dos excessos para uma GPD, dada por:

$$e(u) = \frac{\psi + \xi u}{1 - \xi} \quad (6)$$

165 onde $0 \leq u < \infty$ se $0 \leq \xi < 1$ e $0 \leq u \leq -\psi/\xi$ se $\xi < 0$. É possível observar que de fato a função média dos excessos em uma GPD é linear em u . Esta é uma característica importante de uma GPD e que pode ser utilizada para auxiliar a escolha de um valor adequado do limiar u de tal forma que a suposição de convergência $F_u(x) \rightarrow G_{\xi,\psi}(x)$ seja válida.

170 **Lema 5.** Sob a Suposição ?? segue que $F_v(x) = G_{\xi,\psi+\xi(v-u)}(x)$ para qualquer valor limiar $v \geq u$.

Logo, a distribuição dos excessos sobre limiares mais altos que u , também segue uma GPD com o mesmo parâmetro de forma ξ e parâmetro de escala que cresce linearmente com este limiar mais alto v . Se $\xi < 1$, a média desta nova
175 GPD converge e é dada por:

$$e(v) = \frac{\psi + \xi(v - u)}{1 - \xi} = \frac{\xi v}{1 - \xi} + \frac{\psi - \xi u}{1 - \xi} \quad (7)$$

Esta é a função média dos excessos sobre limiares mais altos, e está definida para $u \leq v < \infty$ se $0 \leq \xi < 1$ e, $u \leq v \leq u - \psi/\xi$ se $\xi < 0$.

Esta função é muito útil para calcularmos o ES_α (*expected shortfall*), considerando que Var_α nada mais é que um quantil superior ao limiar u escolhido.

180 Através da modelagem da cauda da distribuição F de perdas por uma GPD, como feito na seção anterior, é possível calcularmos as medidas de riscos Var_α e ES_α para esta distribuição de perdas em função dos parâmetros da GPD estimada e também fazendo uso da distribuição empírica de F .

Sob a Suposição ?? nós temos que a cauda da distribuição F , $\bar{F}(x)$, para
185 $x \geq u$ é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= P(X > u)P(X > x|X > u) \\ &= \bar{F}(u)P(X - u > x - u|X > u) \\ &= \bar{F}(u)\bar{F}_u(x - u) \\ &= \bar{F}(u) \left(1 + \xi \frac{x - u}{\psi}\right)^{-1/\xi} \end{aligned} \quad (8)$$

Da qual se soubéssemos exatamente a distribuição F teríamos um modelo analítico para as probabilidades de perdas na cauda da distribuição. Aqui x são os valores a serem observados das perdas, e portanto $x - u$ são as perdas em excesso ao limiar.

190 O que fizemos através da equação (8) foi efetivamente separar a distribuição F , ou melhor, sua cauda, em duas partes. A primeira parte, para valores menores que u , não foi modelado analiticamente e portanto utilizamos a distribuição

empírica das perdas, aqui representada por sua cauda $\bar{F}(u)$, que nada mais é que o número observado de excessos de u sobre o número total de observações da amostra.

A segunda parte é justamente a modelagem através de uma GPD com parâmetros ξ e ψ dado o limiar u . Por esta modelagem paramétrica podemos conhecer as probabilidades de cauda para valores de x maiores que u .

O quantil α é a inversa da função distribuição e nos retorna o valor para o qual um percentual α de observações da amostra é menor ou igual. Assim sendo, VaR_α nada mais é que um quantil alto para o qual determinamos que $\alpha\%$ das perdas devem ser menores ou iguais a este valor.

Como a equação (8) fornece a probabilidade de cauda, então esta é igual a $1 - \alpha$ para um valor de $\alpha \geq F(u)$. Fazendo $\bar{F}(x) = 1 - \alpha$ na equação (8) o valor de x representará VaR_α e nos basta manipular esta equação até isolarmos VaR_α como função de $\bar{F}(u)$, α e dos parâmetros da GPD ξ e ψ . Que nos garante a equação abaixo:

$$VaR_\alpha = q_\alpha(F) = u + \frac{\psi}{\xi} \left[\left(\frac{1 - \alpha}{\bar{F}(u)} \right)^{-\xi} - 1 \right] \quad (9)$$

A medida ES_α pode ser entendida como a média das perdas que excedem o valor dado por VaR_α . Como o próprio VaR_α é um quantil acima do valor de limiar u , ES_α é dado pelo valor do VaR_α somado a função média dos excessos dada pela equação (7) fazendo $v = VaR_\alpha$. Esta média é convergente para valores de $\xi < 1$ conforme já demonstrado. Ou seja, $ES_\alpha = VaR_\alpha + e(VaR_\alpha)$. A qual nos rende de forma mais geral:

$$ES_\alpha = \frac{VaR_\alpha}{1 - \xi} + \frac{\psi - \xi u}{1 - \xi} \quad (10)$$

Portanto, ambas medidas de risco VaR_α e ES_α , para distribuições de perdas que tiveram suas caudas modeladas através de uma GPD da forma $G_{\xi, \psi(u)}$ com $\xi < 1$ e $\psi > 0$, podem ser calculadas respectivamente através das equações dadas em (9) e (10). As estimativas destas medidas de risco serão encontradas

através das estimativas dos parâmetros da GPD, assim como do limiar utilizado e de uma medida empírica de $\bar{F}(u)$ que será o número de excessos verificados
 220 sobre o total de amostras. É claro que, ao adotarmos esta estimativa para $\bar{F}(u)$ estamos implicitamente supondo que o número de amostras na série de perdas é significativa, assim como o número de excessos verificados. Daí a importância de se utilizar um valor u adequado, conforme explicitado na seção 2.1.

As estimativas de medidas de risco desenvolvidas nesta seção se qualificam
 225 como medidas incondicionais, no sentido que elas não dependem do estado atual das coisas, mas sim de todo o histórico de eventos de forma uniforme. Em outras palavras, VaR_α e ES_α derivados a partir das equações (9) e (10) são medidas históricas de risco associado ao ativo em análise, entretanto, não levam em consideração se nos eventos mais recentes a volatilidade das perdas pode ser
 230 diferente do valor histórico.

De fato, uma das características marcantes das perdas (ou equivalentemente, dos retornos) dos ativos financeiros é o chamado *clustering* de volatilidade, onde grandes volatilidades (retornos positivos ou negativos) têm tendência a ficarem próximas ao longo da linha temporal. Em geral estas aglomerações de volatili-
 235 dades surgem a partir da autocorrelação destas, ou seja, a volatilidade em um período t é dependente das volatilidades verificadas em períodos anteriores. Um modelo bastante encontrado na literatura que busca modelar estas dependências é o modelo ARCH e suas variantes como GARCH, propostos por Engle (1982) e Bollerslev (1986) respectivamente.

Assim, ao passo que as estimativas de risco desenvolvidas nesta seção são
 240 valiosas para prazos mais longos, ainda é necessário desenvolver um modelo que lide com o fato das autocorrelações de volatilidades e portanto, que nossa variável aleatória não é independente e igualmente distribuída ao longo do tempo. O modelo proposto por McNeil & Frey (2000) pode ser utilizado para encontrar
 245 as medidas de risco VaR_α e ES_α condicionais que desejamos, ainda dentro da metodologia de *peaks over threshold* - POT.

2.2. Modelo eGARCH-EVT

Ativos financeiros possuem características de autocorrelação, senão em seus retornos propriamente ditos, ao menos em suas volatilidades ou variações absolutas. Ou seja, dada uma grande variação no momento t é de se esperar novamente uma grande variação, não necessariamente na mesma direção daquela anterior, para o momento $t+1$ e posteriores. Desta forma, medidas de risco incondicionais, conforme aquelas derivadas na Seção 2 podem ser adequadas somente para horizontes temporais mais longos, pois implicitamente tomam em
250 consideração os fatos mais recentes com o mesmo valor de predição que fatos mais longínquos.

Assim, nesta subseção trabalharemos com um modelo semelhante ao proposto por McNeil & Frey (2000) os quais fazem uma adequação dos retornos dos ativos a um modelo AR-GARCH e posteriormente tratam os erros desta modelagem
260 como *iid* e portanto, a metodologia de POT pode ser aplicada.

Primeiramente vamos estabelecer um modelo eGARCH para as perdas do ativo subjacente. Se denotarmos L_t como sendo a perda observada no período t , μ_t e σ_t são respectivamente a média e o desvio padrão condicionais e mensuráveis através do conjunto de informações disponíveis em $t-1$ e seja Z_t inovações *iid*
265 com média zero e desvio padrão unitário, então temos que:

$$L_t = \mu_t + \sigma_t Z_t \quad (11)$$

Seja $F_L(l)$ a distribuição marginal de L_t , então $F_{L_{t+1}|\mathcal{G}_t}(l)$ é a distribuição preditiva da perda para o próximo período, onde \mathcal{G}_t é o conjunto de informações disponíveis no período t , incluindo-o. Portanto, para o cálculo das medidas condicionais de risco estamos interessados em um quantil α na cauda de $F_{L_{t+1}|\mathcal{G}_t}(l)$.
270 Este quantil α , que será o nosso VaR_α , é o ínfimo l tal que o valor da distribuição preditiva seja maior ou igual a α . Ao passo que o valor condicional do *ES* será o valor esperado das perdas previstas que sejam maiores que *VaR* para o mesmo intervalo de confiança. Ou seja:

$$VaR_{\alpha}^t = \inf\{l \in \mathbb{R} : F_{L_{t+1}}(\mathcal{G}_t(l)) \geq \alpha\}, \quad (12)$$

$$ES_{\alpha}^t = E[L_{t+1} | L_{t+1} > VaR_{\alpha}^t] \quad (13)$$

Considerando que nossa distribuição de perdas é dada pela equação (11) e sabendo das propriedades de variáveis aleatórias e do operador de expectância, as equações dadas acima subsumem a:

$$VaR_{\alpha}^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} z_{\alpha}, \quad (14)$$

$$ES_{\alpha}^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} E[Z | Z > z_{\alpha}] \quad (15)$$

onde z_{α} é o quantil α das inovações Z .

Agora nos falta escolher um processo que modele nossa série temporal dada em (11), ou seja, precisamos especificar o comportamento de μ_t e σ_t . Por suposição do modelo, especificamos que o comportamento destas variáveis é dependente de acontecimentos passados, contidos no conjunto de informações \mathcal{G}_{t-1} . Dentre os diversos modelos já propostos para estimar médias e volatilidades condicionais, está o simples porém efetivo modelo eGARCH(1,1) para a volatilidade condicional e o modelo ARMA(1,2) para a média condicional. Uma extensão destes modelos básicos para outros mais complexos pode ser facilmente obtida e é vasta na literatura, como exemplo modelos GARCH-M, *Threshold* GARCH, EGARCH, etc. e modelos do tipo ARIMA, entre outros encontrados em Tsay (2010).

Neste trabalho, visando aplicar a teoria do valor extremo para o cálculo das medidas condicionais de risco, não faremos maiores assunções acerca da distribuição das inovações, como por exemplo assumir uma determinada distribuição (e.g. Normal ou t de Student), mas está implícito que esta pertence ao MDA de uma GEV e portanto a distribuição de seus excessos sobre um limiar segue aproximadamente uma GPD.

Dadas estas considerações, o modelo adotado segue um formato em dois

Implementar
com modelo
EGARCH

estágios para ser implementado, como segue.

- Ajustar um modelo eGARCH para os dados de perdas, sem fazer suposições sobre a distribuição de Z , porém, utilizando um método de pseudo máxima verossimilhança (PML). Deste modelo tiramos as estimativas de μ_{t+1} e σ_{t+1} e portanto, calculamos as inovações implícitas resultantes através da equação (11).
- Consideramos estas inovações calculadas como sendo as realizações da variável aleatória Z , a qual por suposição pode ter sua cauda ajustada a uma GPD utilizando o método descrito na seção 2. Encontraremos por fim o valor de z_α e $E[Z|Z > z_\alpha]$, com os quais finalizamos os cálculos de nossas medidas condicionais de risco dadas em (14) e (15).

Nosso modelo completo para as medidas de risco VaR_α e ES_α condicionais dada a distribuição de perdas L_t de um ativo será, portanto:

$$L_t = \mu_t + \epsilon_t \quad (16)$$

$$\mu_t = \mu + \phi_1 L_{t-1} + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} \quad (17)$$

$$\epsilon_t = \sigma_t Z_t \quad (18)$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha_1 Z_{t-1} + \gamma_1 (|Z_{t-1}| - E|Z_{t-1}|) + \beta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2) \quad (19)$$

$$Z_t \sim \mathcal{D}(0, 1) \text{ e } \mathcal{D} \in MDA(H_\xi) \quad (20)$$

com as equações (14) e (15) nos fornecendo os valores das medidas VaR_α e ES_α respectivamente, quando utilizadas em conjunto com aquelas dadas por (9) e (10).

O termo de erro ϵ_t será uma série estritamente estacionária se $\beta_1 + \alpha_1 < 1$, o que garante que a variância de nosso modelo (σ_t^2) será finita, apesar de variável no tempo.

Este modelo é ajustado utilizando-se o método de pseudo máxima verossimilhança, o que significa que, apesar de não adotarmos a distribuição normal

para reger as inovações Z_t , a utilizamos apenas para estimar os parâmetros do modelo. É demonstrado na literatura, (Gouriéroux, 1997, Capítulo 4), que o método PML fornece estimadores consistentes e assintoticamente normais, assim podemos utilizar tal método para obter nossas estimativas de parâmetros e erros
320 padrão, mesmo não aceitando a condição de normalidade das inovações.

3. Dados utilizados e estatísticas descritivas

4. Resultados empíricos

Table 1: Estatísticas descritivas dos retornos (amostra completa de 01/01/2003 a 30/08/2017).

Descritivas	IBovespa	S&P500	S&P TSE	IPSA	Merval	IPC
Média	0.00050	0.00028	0.00022	0.00045	0.00106	0.00058
Mediana	0.00095	0.00066	0.00074	0.00063	0.00149	0.00093
Máximo	0.13677	0.10957	0.09370	0.11803	0.10432	0.10441
Mínimo	-0.12096	-0.09470	-0.09788	-0.07236	-0.12952	-0.07266
Desvp	0.01739	0.01168	0.01064	0.00976	0.01981	0.01203
Assimetria	-0.08670	-0.33132	-0.71699	-0.01775	-0.48666	0.03784
Curtose	4.90756	11.61430	11.84413	10.63489	3.63347	6.58809
Jarque-Bera	3655.76824	20846.77985	21949.89333	17262.83228	2125.37846	6666.52444
	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Q(10)	16.27860	59.66372	30.28797	111.10837	13.32940	42.80163
	0.00278	0.00000	0.00000	0.00000	0.01350	0.00000
$Q^2(10)$	1299.67247	1907.90243	2384.89328	919.76012	752.94283	1012.31695
	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N.obs	3632.00000	3692.00000	3696.00000	3658.00000	3598.00000	3680.00000

Table 2: Parâmetros estimados do modelo eGARCH. Valores p apresentados de acordo com erros padrão robustos. (amostra de trabalho entre 01/01/2003 a 31/12/2008).

Parâmetros	IBovespa	S&P500	S&P TSE	IPSA	Merval	IPC
μ	-0.00104	-0.00013	-0.00054	-0.00077	-0.00079	-0.00084
	0.00616	0.41963	0.00004	0.00296	0.00181	0.00102
ϕ_1	-0.00160	-0.10160	-0.01647	0.18028	-0.00235	0.06590
	0.93768	0.00000	0.64014	0.00000	0.19700	0.00112
ω	-0.30206	-0.14485	-0.07680	-0.46252	-0.72657	-0.31210
	0.00000	0.00000	0.00000	0.00002	0.48937	0.00000
α_1	0.26221	0.17601	0.13326	0.15953	0.09108	0.19674
	0.00000	0.00001	0.00000	0.00038	0.25260	0.00000
α_2	-0.15613	-0.07410	-0.08771	-0.08164	-0.02310	-0.07566
	0.00000	0.06315	0.00001	0.03776	0.84697	0.04774
β_1	0.96259	0.98427	0.99150	0.95080	0.90939	0.96444
	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
γ_1	-0.14167	-0.16073	0.09419	0.33726	0.06958	0.05800
	0.03516	0.00000	0.05824	0.00000	0.68132	0.40915
γ_2	0.26916	0.27486	0.02824	-0.02009	0.17946	0.10179
	0.00015	0.00000	0.60813	0.72923	0.04203	0.19510

Table 3: Estatísticas de diagnóstico para o modelo eGARCH. (amostra de trabalho entre 01/01/2003 a 31/12/2008).

Estatística	IBovespa	S&P500	S&P TSE	IPSA	Merval	IPC
Jarque-Bera	49.43553	215.01842	140.05923	34.73272	745.13236	110.65485
	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Q(10)	5.06865	6.62423	2.48361	4.76927	10.79627	6.51735
	0.49583	0.29223	0.88760	0.54183	0.04803	0.30402
$Q^2(10)$	2.06331	4.68137	4.45027	7.97627	3.96258	2.65357
	0.93212	0.55562	0.59236	0.17130	0.67110	0.86672

Table 4: Parâmetros estimados para o modelo EVT dos resíduos padronizados. (amostra de trabalho entre 01/01/2003 a 31/12/2008).

	IBovespa	S&P500	S&P TSE	IPSA	Merval	IPC
Obs. dentro amostra	1487.00000	1511.00000	1522.00000	1498.00000	1495.00000	1514.00000
Limiar	1.67111	1.79449	1.79155	1.69372	1.67380	1.72553
Número de excessos	75.00000	76.00000	77.00000	75.00000	75.00000	76.00000
Parâmetro forma GPD	-0.02626	0.17781	0.04543	0.11917	0.11235	0.02486
Erro padrão	0.09054	0.13671	0.12418	0.13746	0.10910	0.10618
Parâmetro escala GPD	0.57254	0.46220	0.56110	0.45594	0.62512	0.57423
Erro padrão	0.08399	0.08195	0.09453	0.08161	0.09897	0.08974
Quantil 97.5%	2.06927	2.13855	2.19347	2.02384	2.12667	2.12932
Quantil 99.0%	2.57816	2.65939	2.73554	2.50337	2.77909	2.67082

Table 5: Percentual de violações. (fora da amostra, dados entre 02/01/2009 e 30/08/2017).

Modelo	IBovespa	IPC	IPSA	Merval	S&P TSE	S&P500
Cobertura = 1%						
EVT Condicional	1.31	1.15	1.30	1.28	1.01	1.15
Normal Condicional	1.45	1.94	1.71	2.24	1.79	2.11
t-Student Condicional	1.45	2.03	1.71	2.28	1.84	2.25
RiskMetrics	1.49	2.12	2.08	2.38	2.49	2.43
EVT Incond. Filtrada	0.84	0.60	0.69	1.19	1.24	1.38
Normal Incondicional	0.84	0.83	0.46	1.62	1.29	1.19
t-Student Incondicional	0.42	0.42	0.32	1.14	0.51	0.55
Cobertura = 2.5%						
EVT Condicional	2.47	2.49	2.55	2.90	2.35	2.39
Normal Condicional	2.61	3.23	2.78	3.57	3.64	3.81
t-Student Condicional	2.61	3.19	2.64	3.52	3.64	3.81
RiskMetrics	3.22	3.56	3.33	3.43	4.19	4.27
EVT Incond. Filtrada	1.77	1.34	1.95	2.62	2.58	2.34
Normal Incondicional	1.68	1.71	1.16	3.14	2.30	1.93
t-Student Incondicional	1.54	1.62	1.30	3.04	2.39	1.79

Table 6: Testes estatísticos para o VaR. Teste incondicional de Kupiec e teste de independência por duração de Christoffersen e Pelletier (fora da amostra, dados entre 02/01/2009 e 30/08/2017)

Modelo	stat_name	IBovespa	IPC	IPSA	Merval	S&P TSE	S&P500
Cobertura = 1%							
cevt	uc.LRstat	1.85	0.50	1.76	1.58	0.00	0.45
cevt	uc.LRp	0.17	0.48	0.18	0.21	0.95	0.50
cevt	uLL	-143.80	-131.87	-145.14	-139.04	-118.32	-130.80
cevt	rLL	-145.11	-132.05	-145.30	-140.21	-118.43	-132.22
cevt	LRp	0.11	0.54	0.56	0.13	0.64	0.09
cnorm	uc.LRstat	3.78	15.16	9.15	24.00	11.22	20.57
cnorm	uc.LRp	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

cnorm	uLL	-156.85	-203.34	-183.37	-220.82	-191.75	-219.43
cnorm	rLL	-158.08	-203.63	-183.38	-221.81	-191.76	-219.62
cnorm	LRp	0.12	0.44	0.90	0.16	0.89	0.53
ct	uc.LRstat	3.78	17.94	9.15	25.66	12.43	25.32
ct	uc.LRp	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ct	uLL	-156.85	-211.19	-183.37	-224.15	-195.79	-231.07
ct	rLL	-158.08	-211.52	-183.38	-225.62	-195.79	-231.16
ct	LRp	0.12	0.42	0.90	0.09	0.96	0.66
riskmetrics	uc.LRstat	4.56	20.91	19.54	29.10	34.26	32.22
riskmetrics	uc.LRp	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
riskmetrics	uLL	-161.81	-219.27	-212.84	-231.60	-249.82	-245.21
riskmetrics	rLL	-162.33	-219.31	-215.30	-233.18	-249.82	-246.26
riskmetrics	LRp	0.31	0.79	0.03	0.08	0.98	0.15
uevt	uc.LRstat	0.59	4.07	2.27	0.72	1.20	2.79
uevt	uc.LRp	0.44	0.04	0.13	0.40	0.27	0.09
uevt	uLL	-97.99	-72.74	-79.23	-127.20	-125.23	-139.75
uevt	rLL	-99.23	-74.34	-84.54	-131.34	-141.07	-154.27
uevt	LRp	0.11	0.07	0.00	0.00	0.00	0.00
unorm	uc.LRstat	0.59	0.66	7.85	6.82	1.67	0.77
unorm	uc.LRp	0.44	0.42	0.01	0.01	0.20	0.38
unorm	uLL	-97.99	-94.53	-54.36	-167.73	-125.06	-120.81
unorm	rLL	-99.23	-99.40	-58.32	-170.09	-145.48	-136.71
unorm	LRp	0.11	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00
ut	uc.LRstat	9.33	9.57	13.51	0.41	6.54	5.32
ut	uc.LRp	0.00	0.00	0.00	0.52	0.01	0.02
ut	uLL	-52.47	-52.47	-33.24	-122.54	-58.19	-59.93
ut	rLL	-52.73	-52.81	-41.31	-126.85	-63.81	-69.18
ut	LRp	0.47	0.41	0.00	0.00	0.00	0.00
Cobertura = 2.5%							
cevt	uc.LRstat	0.01	0.00	0.02	1.33	0.21	0.12

cevt	uc.LRp	0.93	0.99	0.89	0.25	0.64	0.73
cevt	uLL	-245.20	-249.35	-253.09	-271.97	-238.33	-242.49
cevt	rLL	-245.40	-249.62	-253.17	-273.38	-238.59	-242.52
cevt	LRp	0.53	0.46	0.68	0.09	0.47	0.82
cnorm	uc.LRstat	0.11	4.38	0.67	8.71	10.10	13.21
cnorm	uc.LRp	0.74	0.04	0.41	0.00	0.00	0.00
cnorm	uLL	-256.25	-306.71	-271.21	-321.38	-337.09	-350.99
cnorm	rLL	-256.47	-306.78	-271.39	-321.65	-337.52	-350.99
cnorm	LRp	0.51	0.71	0.55	0.46	0.35	0.92
ct	uc.LRstat	0.11	3.86	0.17	7.99	10.10	13.21
ct	uc.LRp	0.74	0.05	0.68	0.00	0.00	0.00
ct	uLL	-256.25	-303.27	-260.36	-318.04	-337.09	-350.99
ct	rLL	-256.47	-303.33	-260.51	-318.29	-337.52	-350.99
ct	LRp	0.51	0.75	0.57	0.48	0.35	0.92
riskmetrics	uc.LRstat	4.17	8.79	5.60	6.63	21.18	23.10
riskmetrics	uc.LRp	0.04	0.00	0.02	0.01	0.00	0.00
riskmetrics	uLL	-298.80	-329.78	-311.66	-311.05	-376.43	-381.96
riskmetrics	rLL	-302.66	-330.56	-313.45	-311.55	-376.56	-383.21
riskmetrics	LRp	0.01	0.21	0.06	0.32	0.61	0.11
uevt	uc.LRstat	5.17	14.36	2.95	0.12	0.05	0.24
uevt	uc.LRp	0.02	0.00	0.09	0.73	0.82	0.63
uevt	uLL	-178.81	-142.99	-193.25	-247.35	-239.84	-217.17
uevt	rLL	-187.20	-149.74	-203.52	-251.73	-257.21	-238.75
uevt	LRp	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
unorm	uc.LRstat	6.69	6.24	19.86	3.27	0.36	3.19
unorm	uc.LRp	0.01	0.01	0.00	0.07	0.55	0.07
unorm	uLL	-171.98	-173.97	-127.49	-284.01	-214.39	-188.30
unorm	rLL	-179.03	-183.48	-131.98	-290.96	-234.81	-203.91
unorm	LRp	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ut	uc.LRstat	9.39	7.91	15.52	2.40	0.10	5.01

ut	uc.LRp	0.00	0.00	0.00	0.12	0.75	0.03
ut	uLL	-159.78	-165.72	-141.81	-275.01	-220.98	-175.90
ut	rLL	-166.55	-175.23	-145.30	-283.97	-242.35	-191.88
ut	LRp	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00

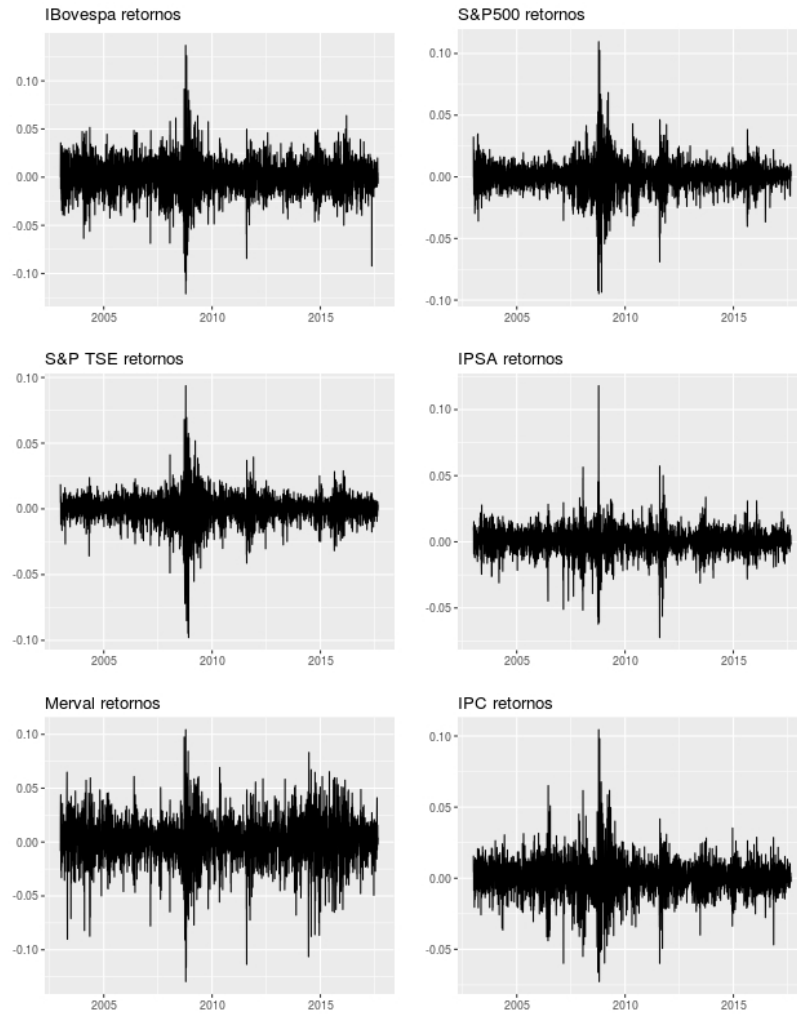


Figure 1: Retornos dos índices do estudo. Período completo entre 01/01/2003 a 30/08/2017.

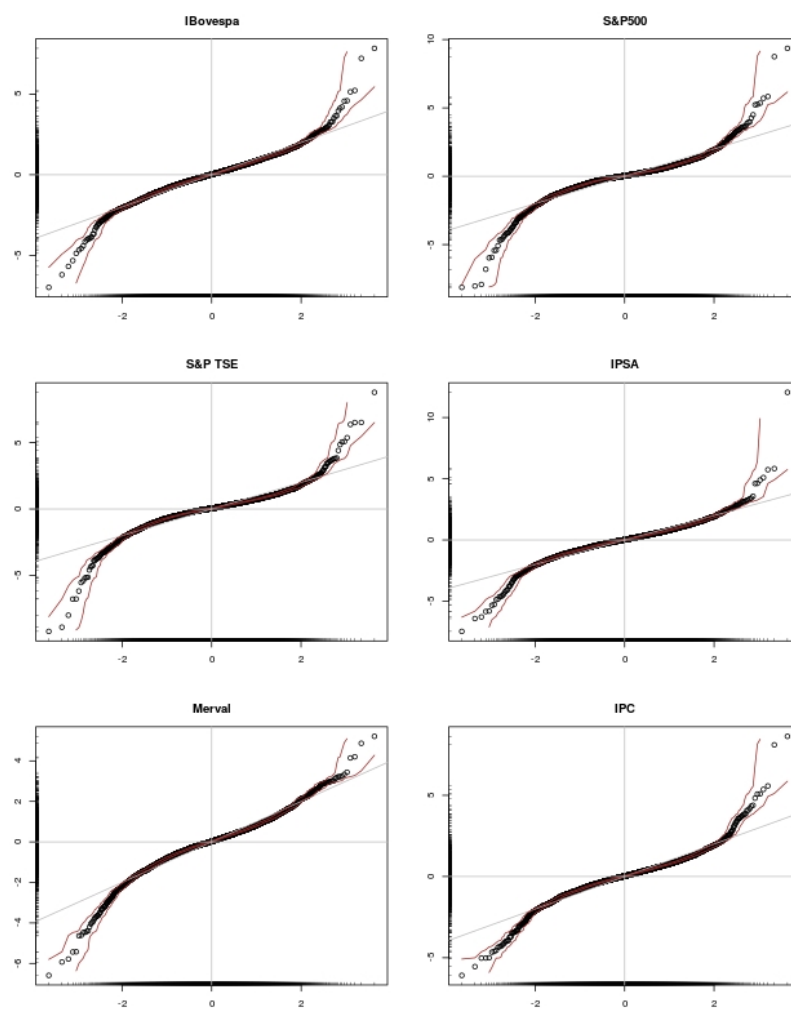


Figure 2: Análise de normalidade dos retornos através de gráficos quantil-quantil.

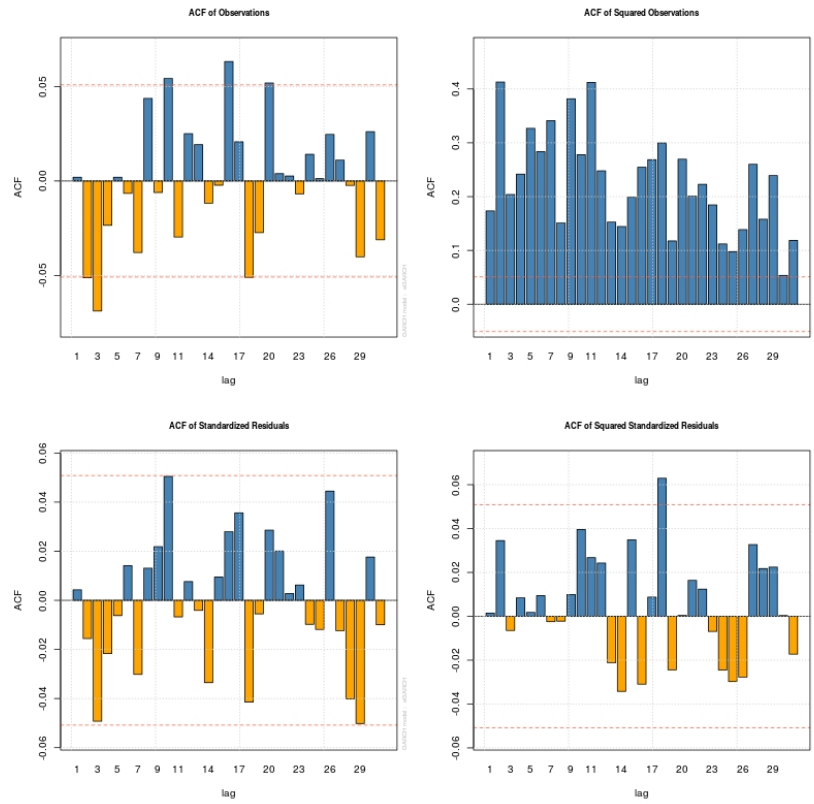


Figure 3: ACF dos retornos observados e seus quadrados, e ACF dos resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. Período dentro da amostra, Ibovespa 01/01/2013 a 31/12/2008.

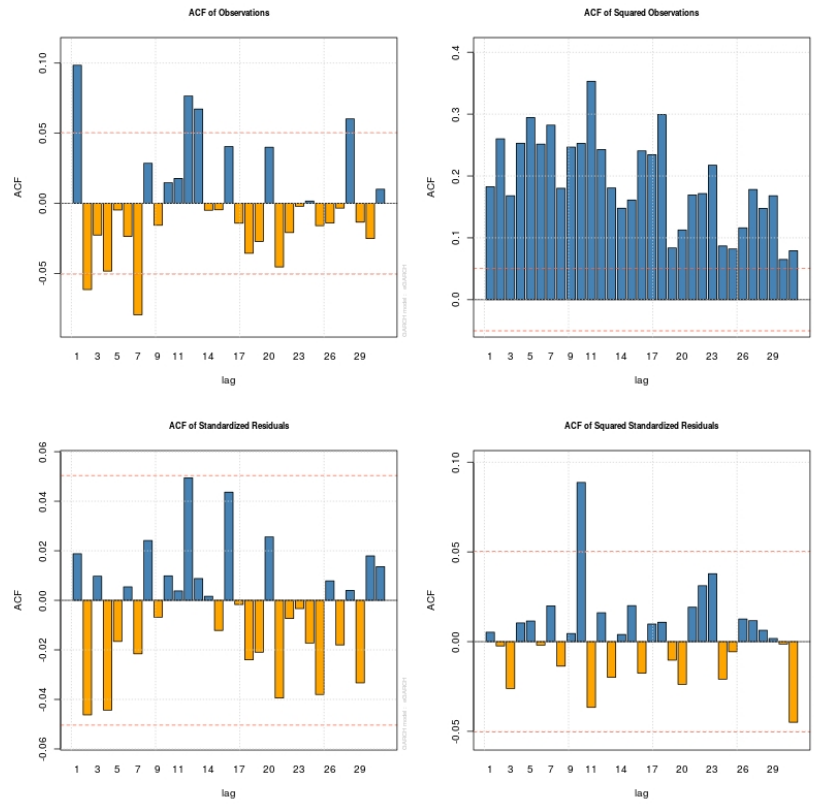


Figure 4: ACF dos retornos observados e seus quadrados, e ACF dos resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. Período dentro da amostra, IPC 01/01/2013 a 31/12/2008.

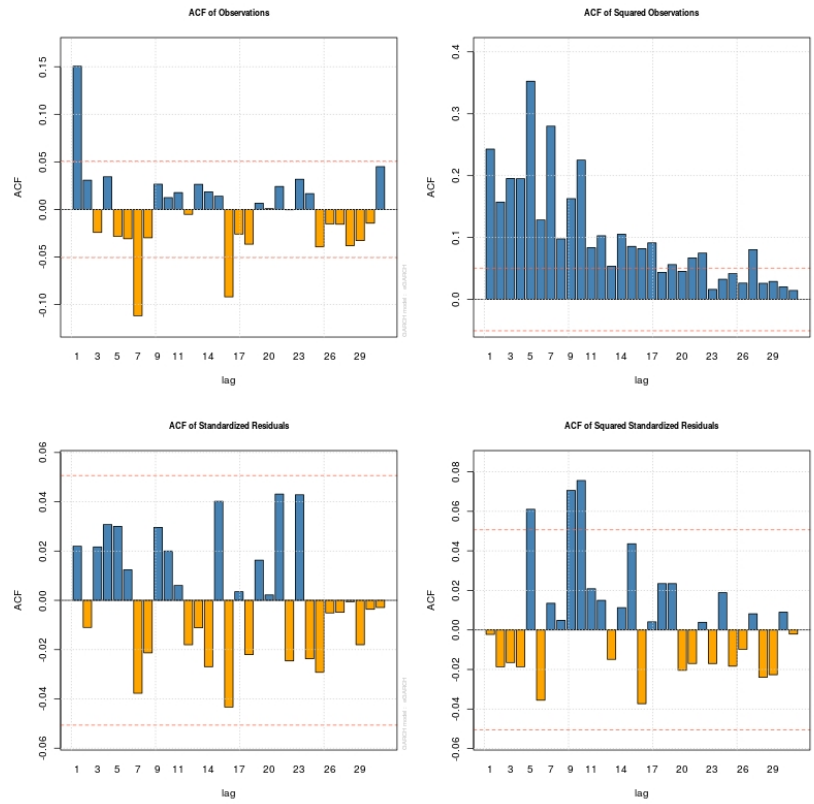


Figure 5: ACF dos retornos observados e seus quadrados, e ACF dos resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. Período dentro da amostra, IPSA 01/01/2013 a 31/12/2008.

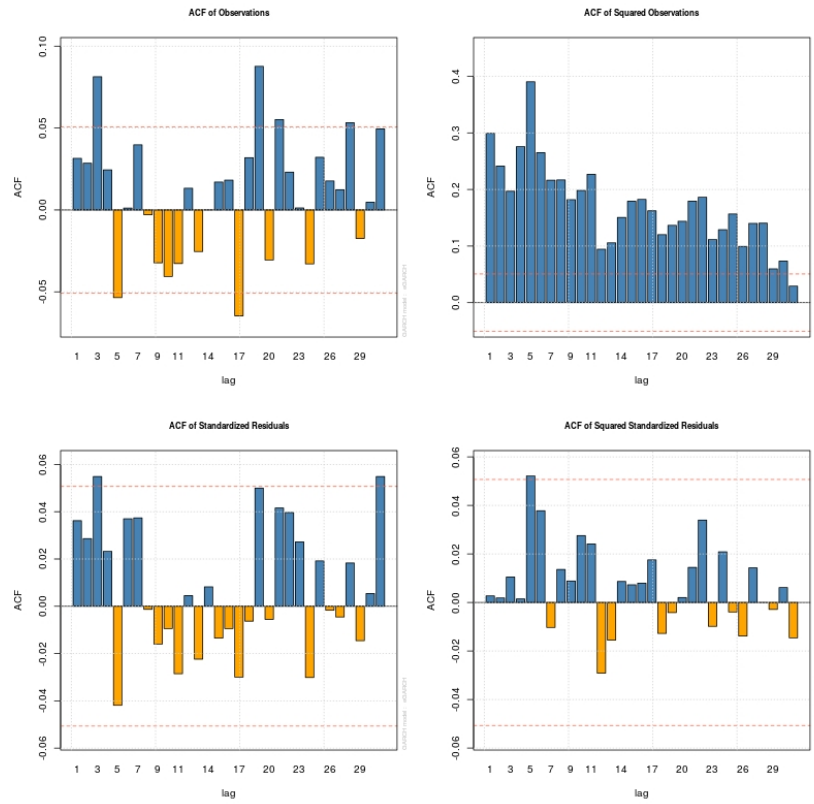


Figure 6: ACF dos retornos observados e seus quadrados, e ACF dos resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. Período dentro da amostra, Merval 01/01/2013 a 31/12/2008.

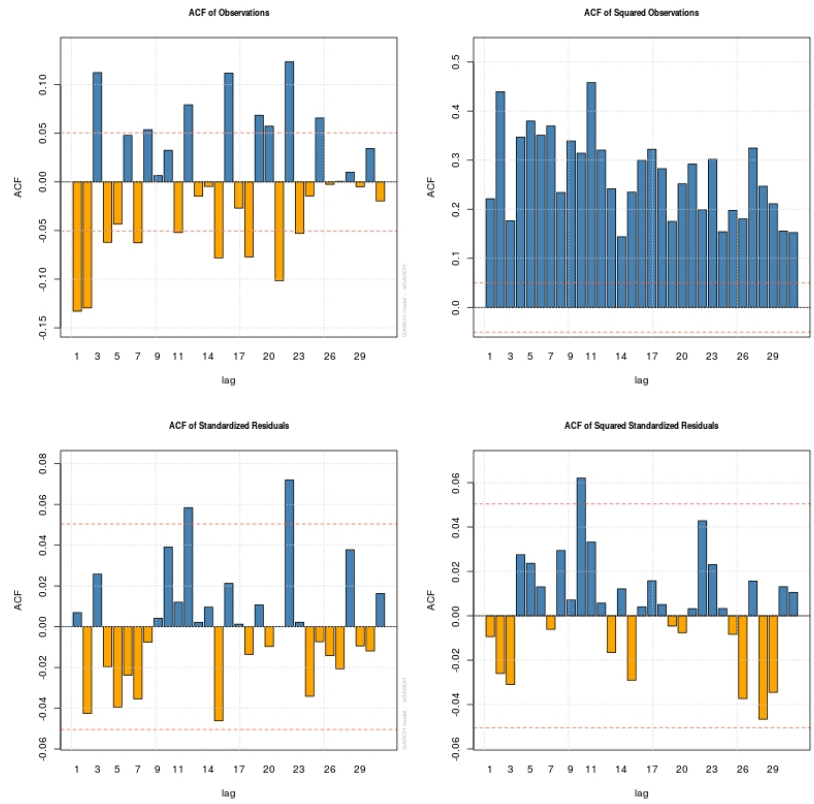


Figure 7: ACF dos retornos observados e seus quadrados, e ACF dos resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. Período dentro da amostra, S&P500 01/01/2013 a 31/12/2008.

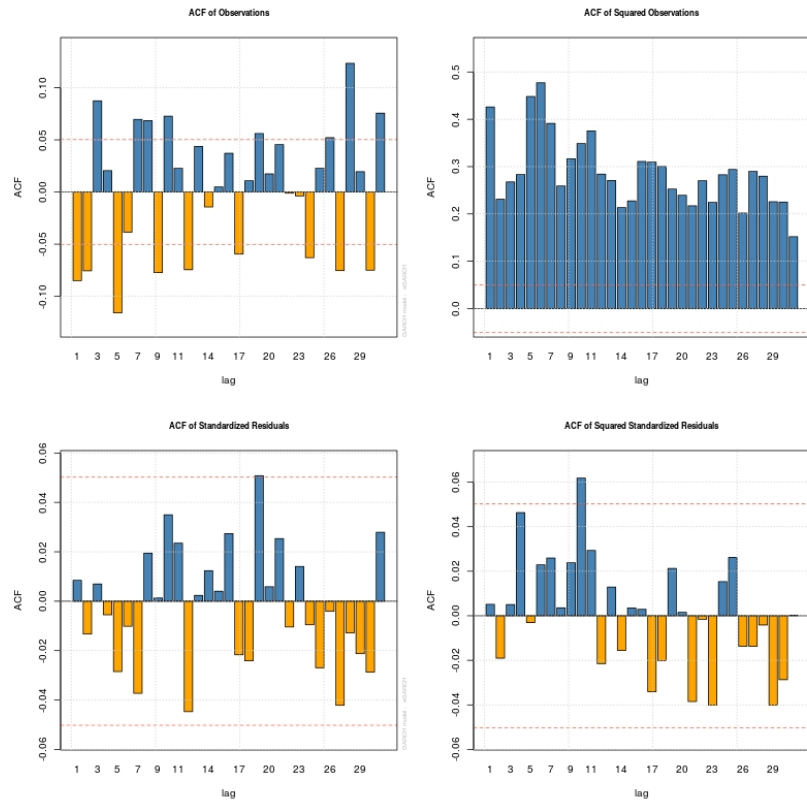


Figure 8: ACF dos retornos observados e seus quadrados, e ACF dos resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. Período dentro da amostra, S&P TSE 01/01/2013 a 31/12/2008.

5. Conclusão

Referências

- 325 Acerbi, C., & Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 26, 1487–1503.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1997). Thinking Coherently. *RISK*, 10, 68–71.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1999). Coherent Measures
330 of Risk. *Mathematical Finance*, 9, 203–228. doi:10.1111/1467-9965.00068.

- Balkema, A. A., & de Haan, L. (1974). Residual Life Time at Great Age. *The Annals of Probability*, 2, 792–804. doi:10.1214/aop/1176996548.
- on Banking Supervision, B. C. (2011). Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems. URL: <http://www.bis.org/publ/bcbs189.pdf>.
335
- on Banking Supervision, B. C. (2013). Basel III: The liquidity coverage ratio and liquidity risk monitoring tools. URL: <http://www.bis.org/publ/bcbs238.pdf>.
- on Banking Supervision, B. C. (2014). Basel III: The net stable funding ratio. URL: <http://www.bis.org/bcbs/publ/d295.pdf>.
340
- Berkowitz, J., & O'Brien, J. (2002). How accurate are value-at-risk models at commercial banks? *The Journal of Finance*, 57, 1093–1111. URL: <http://dx.doi.org/10.1111/1540-6261.00455>. doi:10.1111/1540-6261.00455.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307–327. doi:10.1016/0304-4076(86)90063-1.
345
- Byström, H. N. (2004). Managing extreme risks in tranquil and volatile markets using conditional extreme value theory. *International Review of Financial Analysis*, 13, 133–152.
- Chavez-Demoulin, V., Embrechts, P., & Hofert, M. (2016). An Extreme Value Approach for Modeling Operational Risk Losses Depending on Covariates. *Journal of Risk and Insurance*, 83, 735–776. URL: <http://dx.doi.org/10.1111/jori.12059>. doi:10.1111/jori.12059.
350
- Embrechts, P., Klüppelberg, C., & Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50, 987. doi:10.2307/1912773.
355

- 360 Fisher, R. A., & Tippett, L. H. C. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24, 180–190.
- Gencay, R., & Selcuk, F. (2004). Extreme value theory and value-at-risk: Relative performance in emerging markets. *International Journal of Forecasting*, 20, 287–303.
- 365 Gnedenko, B. V. (1941). Limit theorems for the maximal term of a variational series. *Comptes Rendus (Doklady) de L'Académie des Sciences de l'URSS*, 32, 7–9.
- Gnedenko, B. V. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Annals of Mathematics*, 44, 423–453.
- Gouriéroux, C. (1997). *ARCH Models and Financial Applications*.
 370 Springer Series in Statistics. New York, NY: Springer New York.
 URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-1860-9>. doi:10.1007/978-1-4612-1860-9.
- Herrera, R., & Schipp, B. (2013). Value at risk forecasts by extreme value models in a conditional duration framework. *Journal of Empirical Finance*, 23, 33–47.
 375 doi:10.1016/j.jempfin.2013.05.002.
- Karmakar, M., & Paul, S. (2016). Intraday risk management in international stock markets: A conditional evt approach. *International Review of Financial Analysis*, 44, 34–55.
- Karmakar, M., & Shukla, G. K. (2014). Managing extreme risk in some major
 380 stock markets: An extreme value approach. *International Review of Economics and Finance*, . doi:<https://doi.org/10.1016/j.iref.2014.09.001>.
- Kuester, K., Mittnik, S., & Paoletta, M. S. (2006). Value-at-risk prediction: A comparison of alternative strategies. *Journal of Financial Econometrics*, 4, 53–89. URL: <http://dx.doi.org/10.1093/jjfinec/nbj002>. doi:10.1093/
 385 jjfinec/nbj002.

- Longin, F. M. (2000). From value at risk to stress testing: The extreme value approach. *Journal of Banking & Finance*, 24, 1097 – 1130. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378426699000771>. doi:[https://doi.org/10.1016/S0378-4266\(99\)00077-1](https://doi.org/10.1016/S0378-4266(99)00077-1).
390
- McNeil, A. J., & Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, 7, 271–300. doi:10.1016/s0927-5398(00)00012-8.
- McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015). *Quantitative risk management: concepts, techniques and tool*. (Revised ed ed.). Princeton University Press.
395
- O’Brien, J., & Szerszeń, P. J. (2017). An evaluation of bank measures for market risk before, during and after the financial crisis. *Journal of Banking & Finance*, 80, 215 – 234. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378426617300511>. doi:<https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2017.03.002>.
400
- Pickands, J. (1975). Statistical Inference Using Extreme Order Statistics. *Annals of Statistics*, 3, 119–131. doi:10.1214/aos/1176343003.
- RiskMetrics (1995). *Technical Document - 3rd Edition*. Technical Report J.P Morgan Guaranty Trust Company.
- Rocco, M. (2014). EXTREME VALUE THEORY IN FINANCE: A SURVEY. *Journal of Economic Surveys*, 28, 82–108. URL: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-6419.2012.00744.x>. doi:10.1111/j.1467-6419.2012.00744.x.
405
- Tsay, R. S. (2010). *Analysis of financial time series*. (3rd ed.). Wiley.
- Wong, M. C. S., Cheng, W. Y., & Wong, C. Y. P. (2003). Market risk management of banks: implications from the accuracy of value-at-risk forecasts. *Journal of Forecasting*, 22, 23–33.
410