

Todo list

Percentuais de VaR por Basileia	2
Existem penalidades regulatórias para as IF em que seu modelo VaR permite um número maior de perdas do que seria estimado pelo modelo. Verificar onde nos princípios de Basileia	2
incluir as diversas literaturas sobre a aplicação da evt ao VaR	3
Teste de sign-bias não deu nenhuma rejeicao de H0. Esquecer ou implementar modelos diferentes para cada ativo?	29

Medidas condicionais de risco através da teoria do valor extremo[☆]

Elsevier Inc^{a,b}, Rafael Felipe Bressan^{a,1,*}

^aAvenida Madre Benvenuta, 2007 - Santa Mônica Florianópolis - SC 88035-901

^b360 Park Avenue South, New York

Abstract

This template helps you to create a properly formatted L^AT_EX manuscript.

Keywords: `elsarticle.cls`, L^AT_EX, Elsevier, template

2010 MSC: 00-01, 99-00

1. Introdução

A *medição do risco de mercado*, ao qual os portfólios dos investidores está sujeito é objeto de devoção de esforços tanto por parte das instituições e investidores em geral como por parte dos reguladores. Instituições financeiras em todo o mundo, de acordo com suas regulações locais e com os princípios de Basileia (*Basel Committee on Banking Supervision* - BCBS do Banco de Compensações Internacionais - BIS²) para aquelas que o seguem (o Brasil é um desses países) são obrigadas a reservar uma parcela de seu capital como provisionamento contra flutuações adversas do mercado em seus portfólios de investimento, como forma de mitigar seu risco de insolvência.

[☆]Fully documented templates are available in the elsarticle package on CTAN.

*Corresponding author

Email address: `rafael.bressan@edu.udesc.br` (Rafael Felipe Bressan)

URL: `www.elsevier.com` (Elsevier Inc)

¹Depto. de Economia/Esag/UDESC

²<http://www.bis.org/bcbs/index.htm?m=3%7C14>

10 Instituições financeiras - IF - devem manter seu risco de insolvência controlado, e a percepção externa deve ser tal que não haja desconfiança do público em geral com a habilidade da instituição em controlar este risco. Confiança é a palavra chave destas instituições e portanto, também aos reguladores. Se a confiança se esvai e a percepção de risco é elevada, rapidamente uma crise de liquidez pode surgir, com depositantes sacando
15 seus recursos e outras fontes de *funding* também sendo limitadas. Em tal situação, é natural o banco (ou IF em geral) buscar o mercado para vender seus ativos e levantar os recursos necessários. É nesse momento que uma crise de liquidez pode levar a uma crise de solvência, não há garantias que no mercado aberto, os ativos do banco serão justamente avaliados e arrematados. A crise financeira de 2008 e 2009 ainda está na
20 memória dos agentes.

Uma importante característica das séries de retornos financeiros é sua alta volatilidade, não constante e tampouco seguindo a distribuição Normal. Assim, eventos extremos, e neste caso estamos interessados em perdas de grande magnitude, acontecem com uma frequência alta demais para serem descartadas como apenas *outliers*, e portanto passaram
25 a atrair a atenção dos participantes do mercado, entre eles os investidores e também os reguladores. Estas observações induziram uma gama enorme de estudos, práticos e teóricos, voltados a explicar o comportamento dos retornos de séries financeiras e modelar de forma adequada as caudas da distribuição destes retornos. Não somente estes estudos são de grande relevância para o gerenciamento de risco nas instituições financeiras, como
30 também são obrigatórios segundo o acordo de Basileia, uma vez que este requer o cálculo do Valor em Risco - VaR, para então a instituição poder projetar o seu nível requerido de capital.

De acordo com os princípios de Basileia III, on Banking Supervision (2011, 2013, 2014), as instituições financeiras supervisionadas pelos Bancos Centrais devem manter *buffers*
35 de capital contra riscos de mercado, crédito, liquidez, entre outros. Dentro dos riscos de mercado, as duas formas mais usuais de fazer a quantificação destes são os métodos de Valor em Risco - VaR e o *Expected Shortfall* - ES. Este último relacionado ao primeiro, sendo definido como o valor esperado das perdas que excedem o valor VaR calculado para um determinado nível de confiança.

40 VaR é um quantil alto α da distribuição de perdas de um ativo ou portfólio em um determinado período de tempo, ao passo que ES é o valor esperado das perdas que excedem VaR, para um mesmo nível de confiança α e período.

O método VaR para cálculo de risco de mercado ao qual um portfólio está sujeito foi primeiramente introduzido através de RiskMetrics (1995), uma metodologia adotada
45 pelo banco J. P. Morgan. Vem desde então sendo amplamente adotado pela indústria financeira e largamente estudado pela academia. Inúmeras variantes do modelo foram propostas e continuam sendo utilizadas com o passar dos anos. Para o cálculo do VaR é necessária uma suposição acerca da distribuição dos retornos, e por conseguinte do comportamento da cauda desta.

50 As variações na metodologia original de estimação do VaR surgem principalmente em função de críticas a abordagem proposta, a qual inclui a suposição de retornos independentes e igualmente distribuídos, covariâncias constantes entre os ativos de um portfólio e a distribuição normal dos retornos.

Por meio de dois artigos Artzner et al. (1997) e Artzner et al. (1999), foi introduzido
55 na literatura o conceito de medida coerente de risco. Para uma medida ser considerada coerente, primeiramente foram introduzidas quatro propriedades cunhadas através de

Percentuais de VaR por Basileia

Existem penalidades regulatórias para as IF em que seu modelo VaR permite um número maior de perdas do que seria estimado pelo modelo. Verificar onde nos princípios de Basileia

axiomas, as quais estas medidas deveriam possuir, invariância a translação, sub-aditividade, homogeneidade positiva, e monotonicidade.

VaR especificamente não possui a propriedade da sub-aditividade para alguns casos, sendo esta uma das grandes críticas ao VaR. Para contornar este fato, Acerbi & Tasche (2002) propõe o *Expected Shortfall* e comprovam que este é uma medida coerente de risco. Além de ser coerente, o ES possui uma segunda vantagem com relação ao VaR, considerando que o ES nos informa uma medida de tendência central do tamanho das perdas que excedem o valor do quantil VaR. Ou seja, o VaR nos informa apenas que uma proporção α das perdas serão menores que a medida, mas nada nos informa se esta perda extraordinária de fato ocorrer. Mesmo sendo criticado e demonstradamente uma medida não coerente de risco, o VaR continua a ser amplamente utilizado, mesmo que agora em conjunto com o ES.

Teoria do valor extremo. EVT da sigla em inglês, é um ramo da estatística que lida diretamente com eventos raros, extremos. Seu objetivo é modelar o comportamento assintótico de eventos que se distanciam muito da mediana de uma distribuição. Justamente por esta característica, a EVT está sendo utilizada para modelar riscos que possuem distribuição com caudas longas, um dos fatos estilizados bem conhecidos sobre retornos de ativos financeiros.

Ao utilizar a EVT, e mais especificamente o método conhecido como *peaks over threshold* – POT, se está interessado em modelar apenas a parte da cauda da distribuição das perdas de um ativo financeiro maiores que um determinado valor de limiar u . É da modelagem desta cauda, portanto, que se calculam as estimativas de risco VaR_α .

McNeil & Frey (2000) Longin (2000) *stress test* utilizando evt Wong et al. (2003) um estudo sobre as implicações da precisão do modelo VaR no gerenciamento do risco de mercado em bancos Berkowitz & O'Brien (2002) precisão dos modelos em bancos comerciais Byström (2004) Gencay & Selcuk (2004) Kuester et al. (2006) comparação entre diversos modelos VaR Herrera & Schipp (2013) Rocco (2014) uma revisão sobre o uso da evt em finanças Karmakar & Shukla (2014) Chavez-Demoulin et al. (2016) Karmakar & Paul (2016) aplicação do modelo evt condicional a retornos intra-diários O'Brien & Szerszeń (2017) avaliação dos modelos de risco de bancos no pré, durante e pós crise financeira de 2008

incluir as diversas literaturas sobre a aplicação da evt ao VaR

2. Modelando caudas e medidas de risco associadas com EVT

Considere uma amostra de uma variável aleatória - va - cujas observações sejam independentes e igualmente distribuídas - *iid*, X_i , com $i \in \mathbb{N}$, que representem as perdas financeiras de um determinado ativo, com uma função de distribuição - *df* - desconhecida $F(x) = P(X_i \leq x)$. Seja u um valor de limiar a partir do qual perdas acima deste valor sejam consideradas extremas. Os valores de excesso serão, portanto, $X_i - u$.

A EVT está interessada em investigar o comportamento da distribuição dos máximos desta va dados por $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ para vários valores de n e a medida que $n \rightarrow \infty$. A sequência M_n é chamada de máximos em bloco e foi demonstrado através do conhecido teorema de Fisher-Tippett-Gnedenko, Fisher & Tippett (1928), Gnedenko (1941, 1943), que a única distribuição para a qual M_n converge com $n \rightarrow \infty$ é a distribuição de valores extremos generalizada. Se esta distribuição de valores extremos generalizada

- GEV - for denotada por H_ξ , com ξ um parâmetro da distribuição, então se diz que $F \in MDA(H_\xi)$, F pertence ao domínio de máxima atração de H_ξ .

Definição 1 (GEV). Distribuição de valores extremos generalizada, é definida por sua função densidade de probabilidade - pdf - a qual é dada por:

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}), & \xi \neq 0, \\ \exp(-e^{-x}), & \xi = 0, \end{cases} \quad (1)$$

105 O parâmetro ξ é conhecido como parâmetro de forma da distribuição e dependendo deste valor tem-se diferentes tipos de distribuição (casos particulares da GEV). Quando $\xi = 0$ a distribuição resultante é uma Gumbel, quando $\xi > 0$ uma Fréchet surge, e por fim quando $\xi < 0$ tem-se uma Weibull.

110 Para as aplicações financeiras não necessitamos calcular a qual MDA pertencem nossas distribuições contínuas, bastando saber que basicamente todas as distribuições de utilidade prática estão contidas em $MDA(H_\xi)$ para algum valor de ξ (McNeil et al., 2015, p. 139).

2.1. Excessos acima de um limiar

115 O método POT para calcular a função de distribuição dos valores que excedem um determinado limiar de um conjunto de dados vem sendo empregado no mundo financeiro para ajustar as caudas das distribuições de retornos, ou perdas, dos ativos. Este método é preferido a teoria clássica de valores extremos (e.g. máximos em bloco), pois, desperdiça uma quantidade menor de dados da série original. Qualquer valor que exceda o limiar pré-determinado é considerado na distribuição dos excessos. Esta é definida como.

120 **Definição 2** (Distribuição dos excessos). Seja X uma variável aleatória com função de distribuição F . A distribuição dos excessos sobre um limiar u tem a seguinte função de distribuição:

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (2)$$

para $0 \leq x < x_F - u$, onde $x_F \leq \infty$ é o limite direito da distribuição F .

125 Uma importante distribuição que surge na modelagem dos excessos sobre um limiar é a distribuição generalizada de Pareto – GPD, que segue.

Definição 3 (GPD). Distribuição de Pareto Generalizada é definida por sua função de distribuição:

$$G_{\xi, \psi}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\psi}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\psi}\right), & \xi = 0, \end{cases} \quad (3)$$

onde $\psi > 0$, e $x \geq 0$ quando $\xi \geq 0$ ou $0 \leq x \leq -\psi/\xi$ quando $\xi < 0$.

Os parâmetros ξ e ψ são conhecidos respectivamente como parâmetros de forma e escala da distribuição. A GPD tem papel fundamental na teoria de valor extremo em função do teorema de Pickands-Balkema-de Haan, Pickands (1975) e Balkema & de Haan

130 (1974), pois estes demonstram que, para um valor suficientemente alto do limiar u , a distribuição dos excessos $F_u(x)$ pode ser aproximada por uma GPD $G_{\xi,\psi}(x)$.

O que este teorema prova é que para distribuições as quais os máximos em bloco normalizados convergem para uma GEV (na forma da equação (1)), então a distribuição dos excessos acima de um limiar destas mesmas distribuições convergem para uma GPD, 135 dado um valor de limiar u adequado. Como para fins práticos basicamente todas as distribuições contínuas de fato estão no $MDA(H_\xi)$ para algum valor de ξ , temos que a GPD é a distribuição a ser escolhida para modelar excessos acima de um limiar.

Ao se fazer esta suposição que a distribuição dos excessos é igual a uma GPD, pode-se então, a partir dos dados de perdas, estimar os parâmetros de forma e escala e, portanto, 140 modelar a cauda direita da distribuição de perdas de forma parametrizada com o auxílio da equação (2).

Dada a parametrização de uma GPD, é interessante saber o valor esperado desta distribuição, uma vez que esta medida de valor central fornece importante informação sobre a quantidade de risco que se está medindo, assim como a informação de que a 145 própria distribuição foi ajustada aos dados de forma satisfatória.

O valor esperado de uma variável aleatória não negativa pode ser computado através da integral de sua cauda, $P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$. A cauda da GPD é, para $\xi \neq 0$, $(1 + \xi x/\psi)^{-1/\xi}$.

Desta forma, o valor esperado de uma GPD, $G_{\xi,\psi}(x)$, converge para valores de $\xi < 1$ 150 e é dado pela seguinte equação:

$$E[G_{\xi,\psi}(X)] = \frac{\psi}{1 - \xi} \quad (4)$$

Definição 4 (função média dos excessos). A função média dos excessos de uma variável aleatória X com média finita é dada por:

$$e(u) = E(X - u | X > u) \quad (5)$$

Ou seja, a equação (5) representa o valor esperado da função de distribuição dos excessos dada pela Definição 2. Ela representa a média de F_u como uma função do limiar 155 u . Por vezes também é conhecida como função média de vida residual (*mean residual life function*).

Para uma variável distribuída na forma de uma GPD, o parâmetro de escala é uma função linear em u dado por $\psi(u) = \psi + \xi u$, (Embrechts et al., 1997, Teorema 3.4.13(e)). Utilizando-se deste fato e da equação (4) chegamos ao cálculo da função média dos 160 excessos para uma GPD, dada por:

$$e(u) = \frac{\psi + \xi u}{1 - \xi} \quad (6)$$

onde $0 \leq u < \infty$ se $0 \leq \xi < 1$ e $0 \leq u \leq -\psi/\xi$ se $\xi < 0$. É possível observar que de fato a função média dos excessos em uma GPD é linear em u . Esta é uma característica importante de uma GPD e que pode ser utilizada para auxiliar a escolha de um valor adequado do limiar u de tal forma que a suposição de convergência $F_u(x) \rightarrow G_{\xi,\psi}(x)$ seja 165 válida.

Assim, quando da análise de uma determinada distribuição de perdas F e deseja-se ajustar a cauda desta, ou seja, ajustar as perdas acima de um dado valor limiar u a

uma GPD $G_{\xi,\psi}(x)$ é necessário primeiramente determinar um valor adequado de u que garanta a suposição de convergência. Um método frequentemente utilizado é o gráfico da função média dos excessos com relação a u . Analisando este gráfico, escolhe-se o menor valor de u para o qual a partir deste ponto a relação $e(u)$ vs u torna-se linear.

Deseja-se o menor valor de u para o qual a relação é linear pois, mesmo o método POT implica em grande perda de dados da série temporal, já que apenas os valores acima deste limiar são utilizados para fazer a estimação dos parâmetros ξ e ψ da GPD. Portanto, existe um *trade-off* na escolha do valor limiar u , escolhendo um valor muito baixo obtém-se uma boa quantidade de dados para estimar os parâmetros da GPD, mas a própria distribuição resultante não será GPD, uma vez que não estaremos trabalhando na região onde a relação $e(u)$ vs u é linear, e portanto os parâmetros estimados serão viesados. Por outro lado, um valor limiar muito alto impõe o custo de trabalhar com poucos dados para fazer a estimação dos parâmetros da distribuição e por conseguinte, os erros padrões dessas estimativas serão elevados.

Considerando este *trade-off*, uma saída é buscar minimizar o erro quadrado médio - MSE (*mean squared error*) do parâmetro estimado. A medida MSE pode ser decomposta entre a soma do quadrado do viés com a variância do estimador, idealmente deseja-se ter viés zero e variância mínima. Na impossibilidade de tal realização, um estimador relativamente eficiente é aquele que possui o menor MSE. Em (McNeil et al., 2015, seção 5.2.5, p. 139) é explorada através de simulação de Monte Carlo esta relação entre a escolha do limiar u e o MSE do parâmetro ξ obtido através do método POT e também da própria medida de risco $Var_{99\%}$. Chegam a conclusão que uma escolha de limiar tal que o número de excessos a este fique em torno de 100 observações é o ideal, e mais importante, a partir destas 100 observações o MSE é relativamente robusto, se elevando lentamente a partir de seu valor mínimo.

2.2. Estimando o VaR

Através da modelagem da cauda da distribuição F de perdas por uma GPD, é possível calcular a medida de risco Var_{α} em função dos parâmetros da GPD estimada e também fazendo uso da distribuição empírica de F .

Sob a suposição de convergência a cauda da distribuição F , $\bar{F}(x)$, para $x \geq u$ é dada por:

$$\begin{aligned}\bar{F}(x) &= P(X > u)P(X > x|X > u) \\ &= \bar{F}(u)P(X - u > x - u|X > u) \\ &= \bar{F}(u)\bar{F}_u(x - u) \\ &= \bar{F}(u) \left(1 + \xi \frac{x - u}{\psi}\right)^{-1/\xi}\end{aligned}\tag{7}$$

Aqui x são os valores a serem observados das perdas, e portanto $x - u$ são as perdas em excesso ao limiar.

A equação (7) efetivamente separou a distribuição F , ou melhor, sua cauda, em duas partes. A primeira parte, para valores menores que u , não foi modelado analiticamente e portanto utiliza-se a distribuição empírica das perdas, aqui representada por sua cauda

205 $\bar{F}(u)$, que nada mais é que o número observado de excessos de u sobre o número total de observações da amostra.

A segunda parte é justamente a modelagem através de uma GPD com parâmetros ξ e ψ dado o limiar u . Por esta modelagem paramétrica pode-se conhecer as probabilidades de cauda para valores de x maiores que u .

210 O quantil α é a inversa da função distribuição e retorna o valor para o qual um percentual α de observações da amostra é menor ou igual. Como se está trabalhando com a distribuição de perdas, VaR_α nada mais é que um quantil alto para o qual $\alpha\%$ das perdas devem ser menores ou iguais a este valor.

215 Como a equação (7) fornece a probabilidade de cauda, então esta é igual a $1 - \alpha$ para um valor de $\alpha \geq \bar{F}(u)$. O valor $1 - \alpha$ é conhecido como a cobertura da medida de risco. Fazendo $\bar{F}(x) = 1 - \alpha$ na equação (7) o valor de x representará VaR_α e basta manipular esta equação para encontrar VaR_α como função de $\bar{F}(u)$, α e dos parâmetros da GPD ξ e ψ . Que garante a equação abaixo:

$$VaR_\alpha = q_\alpha(F) = u + \frac{\psi}{\xi} \left[\left(\frac{1 - \alpha}{\bar{F}(u)} \right)^{-\xi} - 1 \right] \quad (8)$$

220 Portanto, a medida de risco VaR_α , para distribuições de perdas que tiveram suas caudas modeladas através de uma GPD da forma $G_{\xi, \psi(u)}$ com $\xi < 1$ e $\psi > 0$, pode ser calculada através da equação dada em (8). A estimativa desta medida de risco será encontrada através das estimativas dos parâmetros da GPD, assim como do limiar utilizado e de uma medida empírica de $\bar{F}(u)$ que será o número de excessos verificados sobre o total de amostras. É claro que, ao se adotar esta estimativa para $\bar{F}(u)$ se está implicitamente supondo que o número de amostras na série de perdas é significativa, 225 assim como o número de excessos verificados. Daí a importância de se utilizar um valor u adequado, conforme explicitado na seção 2.1.

A estimativa de medida de risco desenvolvida nesta seção se qualifica como uma medida incondicional, no sentido que ela não depende do estado atual das coisas, mas sim de todo o histórico de eventos de forma uniforme. Em outras palavras, VaR_α derivado 230 a partir da equação (8) é uma medida histórica de risco associado ao ativo em análise, entretanto, não leva em consideração se nos eventos mais recentes a volatilidade das perdas pode ser diferente do valor histórico.

De fato, uma das características marcantes das perdas (ou equivalentemente, dos retornos) dos ativos financeiros é o chamado *clustering* de volatilidade, onde grandes 235 volatilidades têm tendência a ficarem próximas ao longo da linha temporal. Em geral estes agrupamentos de volatilidades surgem a partir da autocorrelação destas, ou seja, a volatilidade em um período t é dependente das volatilidades verificadas em períodos anteriores. Um modelo bastante encontrado na literatura que busca modelar estas dependências é o modelo ARCH e suas variantes como GARCH, propostos por Engle 240 (1982) e Bollerslev (1986) respectivamente.

Assim, ao passo que as estimativas de risco desenvolvidas nesta seção são valiosas para prazos mais longos, ainda é necessário desenvolver um modelo que lide com o fato das autocorrelações de volatilidades das perdas e, portanto, com o fato de a distribuição das perdas não ser independente e igualmente distribuída ao longo do tempo. O modelo 245 proposto por McNeil & Frey (2000) pode ser utilizado para encontrar a medida de risco VaR_α condicional que se deseja, ainda dentro da metodologia POT.

2.3. Modelo eGARCH-POT

Ativos financeiros possuem características de autocorrelação, senão em seus retornos propriamente ditos, ao menos em suas volatilidades ou variações absolutas. Ou seja, dada uma grande variação no momento t é de se esperar novamente uma grande variação, não necessariamente na mesma direção daquela anterior, para o momento $t+1$ e posteriores. Desta forma, medidas de risco incondicionais, conforme aquelas derivadas em 2 podem ser adequadas somente para horizontes temporais mais longos, pois implicitamente tomam em consideração os fatos mais recentes com o mesmo valor de predição que fatos mais longínquos.

Assim, pode-se trabalhar com um modelo semelhante ao proposto por McNeil & Frey (2000) os quais fazem uma adequação dos retornos dos ativos a um modelo GARCH e posteriormente tratam os erros desta modelagem como *iid* e portanto, a metodologia de POT pode ser aplicada. Este modelo pode ser entendido como um modelo condicional para medidas de risco pois, efetivamente, é levado em conta o estado atual da previsão para a média e principalmente para a volatilidade ao se calcular o VaR_α . Desta forma a medida responde rapidamente às variações nos humores do mercado e pode sinalizar de forma ágil uma inadequação de capital reservado pela instituição financeira.

Além desta vantagem de cunho prático, a técnica possui uma atratividade teórica. O método POT deve ser aplicado a séries *iid* que sabidamente não é o caso de perdas de ativos financeiros. Ao se utilizar a técnica POT nos resíduos padronizados de um modelo GARCH das perdas, o que se está realizando é uma pré-filtragem destas perdas que garante, ou chega próximo disto, que os resíduos deste modelo sejam *iid* e portanto, aplicável a teoria de valor extremo.

Primeiramente, neste artigo, diferentemente de McNeil & Frey (2000) ou Karmakar & Shukla (2014), foi estabelecido um mesmo modelo eGARCH para as perdas dos ativos subjacentes. Esta variação de GARCH foi proposta por Nelson (1991) e busca, além de modelar a heterocedasticidade condicional da variância, também o chamado efeito alavancagem, onde retornos positivos e negativos possuem impactos diferenciados na volatilidade do ativo. O modelo adotado foi o eGARCH(2,1) e sua variância condicional é definida por:

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^2 (\alpha_i Z_{t-i} + \gamma_i (|Z_{t-i}| - E|Z_{t-i}|)) + \beta_1 \ln \sigma_{t-1}^2 \quad (9)$$

onde os coeficientes α_i capturam o efeito do sinal do erro, enquanto que os parâmetros γ_i o efeito magnitude destes erros. O coeficiente β_1 continua a ser o chamado coeficiente garch.

Denotando L_t como sendo a perda observada no período t , μ_t e σ_t são respectivamente a média e o desvio padrão condicionais, e seja Z_t inovações *iid* com média zero e desvio padrão unitário, então tem-se que:

$$L_t = \mu_t + \sigma_t Z_t \quad (10)$$

Seja $F_L(l)$ a distribuição marginal de L_t , então $F_{L_{t+1}}|\mathcal{G}_t(l)$ é a distribuição preditiva da perda para o próximo período, onde \mathcal{G}_t é o conjunto de informações disponíveis no período t , incluindo-o. Portanto, para o cálculo de VaR_α , se deseja encontrar o alfa-quantil na

cauda de $F_{L_{t+1}}|\mathcal{G}_t(l)$. Este quantil α é o ínfimo l tal que o valor da distribuição preditiva seja maior ou igual a α . Ou seja:

$$VaR_\alpha^t = \inf\{l \in \mathbb{R} : F_{L_{t+1}}|\mathcal{G}_t(l) \geq \alpha\} \quad (11)$$

Veja, este é o preditor de VaR_α calculado com as informações até o período t , inclusive. Este valor calculado deve ser comparado a perda realizada em $t+1$, para testar uma possível violação. Considerando que a distribuição de perdas é dada pela equação (10) e sabendo das propriedades de variáveis aleatórias e do operador de expectativa, a expressão de VaR_α^t subsume a:

$$VaR_\alpha^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}z_\alpha \quad (12)$$

onde z_α é o quantil α das inovações Z_t .

Dadas estas considerações, o modelo adotado segue um formato em dois estágios para ser implementado, como segue.

- Ajustar um modelo eGARCH para os dados de perdas, sem fazer suposições sobre a distribuição de Z . Deste modelo retira-se as estimativas de μ_{t+1} e σ_{t+1} e calcula-se as inovações implícitas resultantes, através da equação (10).
- Ao se considerar os resíduos padronizados como sendo as realizações da variável aleatória Z , esta pode ter sua cauda ajustada a uma GPD utilizando-se o método descrito na seção 2. Encontra-se por fim o valor de z_α , com o qual é finalizado o cálculo VaR_α através da equação dada em (12) para os valores de α iguais a 0,975 e 0,99.

Agora é necessário escolher um processo que modele a série temporal dada em (10), ou seja, precisa-se especificar o comportamento de μ_t e σ_t . Por suposição, o comportamento destas variáveis é dependente de acontecimentos passados, contidos no conjunto de informações \mathcal{G}_{t-1} . Pode-se estipular um modelo eGARCH(2,1) para a volatilidade condicional e um simples AR(1) para a média condicional. A ordem destes modelos foi escolhida como uma forma de compromisso entre parcimônia e o melhor ajuste dentre diversos outros modelos e ordens para os 6 ativos sob análise. Estes modelos eGARCH(2,1) e AR(1) para as volatilidades e médias condicionais respectivamente foram aqueles que, de forma geral, se ajustaram mais adequadamente as séries dadas.

Como critérios para a escolha deste modelo de filtro no primeiro estágio, deseja-se que as inovações Z_t , através de suas realizações na forma dos resíduos padronizados estimados no modelo possuam 2 características, ausência de autocorrelação serial em seus valores e nos seus quadrados.

Visando aplicar a teoria do valor extremo para o cálculo de VaR_α , não são feitas maiores suposições acerca da distribuição das inovações, mas está implícito que esta pertence ao MDA de uma GEV e portanto a distribuição de seus excessos sobre um limiar segue aproximadamente uma GPD.

O modelo completo para a medida condicional de risco VaR_α dada a distribuição de perdas L_t de um ativo será, portanto:

$$L_t = \mu + \phi_1 L_{t-1} + \epsilon_t \quad (13)$$

$$\epsilon_t = \sigma_t Z_t \quad (14)$$

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^2 (\alpha_i Z_{t-i} + \gamma_i (|Z_{t-i}| - E|Z_{t-i}|)) + \beta_1 \ln \sigma_{t-1}^2 \quad (15)$$

$$Z_t \sim \mathcal{D}(0, 1) \text{ e } \mathcal{D} \in MDA(H_\xi) \quad (16)$$

com a equação (12) fornecendo o valor de VaR_α , quando utilizada em conjunto com aquela dada por (8).

325 Este modelo é ajustado em seu primeiro estágio utilizando-se máxima-verossimilhança com uma distribuição normal para as inovações Z_t , mesmo sabendo que esta distribuição não é a mais adequada. Especificamente com relação a massa das caudas, a normal, mesmo em um modelo GARCH, ainda produz pouca curtose nos resíduos padronizados. Entretanto, é demonstrado, (Gouriéroux, 1997, Capítulo 4), que é possível obter estimadores consistentes e assintoticamente normais a partir desta técnica, devendo apenas os erros padrões serem corrigidos para a obtenção de valores robustos a má especificação do modelo.

330 Uma vez obtidos os resíduos padronizados do modelo eGARCH, \hat{Z}_t , aplica-se a estes a teoria do valor extremo descrita em 2.2 para se obter o quantil de interesse z_α . Para tanto, considerando a definição da df de uma GPD dada na equação (3) e denotando sua pdf por $g_{\xi, \psi}$, a função logarítmica de verossimilhança, que deve ser maximizada para a obtenção dos parâmetros ξ e ψ é:

$$\begin{aligned} \ln L(\xi, \psi; Z_j^u) &= \sum_{j=1}^{N_u} \ln g_{\xi, \psi}(Z_j^u) \\ &= -N_u \ln \psi - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{j=1}^{N_u} \ln \left(1 + \xi \frac{Z_j^u}{\psi}\right) \end{aligned} \quad (17)$$

onde N_u é o número de excessos acima do valor de limiar escolhido e Z_j^u são as inovações em excesso, de acordo com a EVT que exige as perdas em excesso ao limiar. O quantil obtido, z_α é aquele derivado de forma semi-paramétrica a partir da teoria EVT para os resíduos padronizados, que são tratados como realizações das inovações Z_t e portanto, ainda deve ser escalado e deslocado através da equação (12) para a obtenção da medida de risco de verdadeiro interesse, VaR_α .

3. Dados utilizados e estatísticas descritivas

345 Neste trabalho serão analisadas as séries de retornos (e perdas) de seis principais índices de ações das Américas, Ibovespa para o Brasil, IPC do México, IPSA no Chile, Merval da Argentina, S&P TSE para o Canadá e S&P500 dos Estados Unidos. Os retornos coletados foram entre as datas de 01/01/2003 a 31/12/2008 para o período considerado dentro da amostra, no qual são feitas algumas análises preliminares. O período fora da

350 amostra, de onde são retirados os resultados de *backtesting* se estende de 01/01/2009 a 30/08/2017. Em dias sem negociação nos mercados, os períodos iniciam-se na data útil seguinte e terminam em data útil imediatamente anterior.

A tabela 1 apresenta algumas das estatísticas descritivas mais importantes para as séries de *retornos* dos ativos no período completo, dentro e fora da amostra. É possível 355 verificar que os retornos não podem ser considerados normais, com a estatística de Jarque-Bera rejeitando a hipótese nula e com o alto grau de curtose em excesso verificado para todos os mercados analisados.

Também é possível verificar alguma autocorrelação serial entre os retornos através da estatística $Q(10)$ de Ljung-Box, calculadas com auxílio da metodologia dada por Fisher & Gallagher (2012). Entretanto, esta mesma correlação serial é muito mais significativa 360 nos quadrados dos retornos, de acordo com os fatos estilizados de séries financeiras já conhecidos, vide Cont (2001).

Table 1: Estatísticas descritivas dos retornos (amostra completa de 01/01/2003 a 30/08/2017).

Descritivas	IBovespa	IPC	IPSA	Merval	S&P TSE	S&P500
Média	0.00050	0.00058	0.00045	0.00106	0.00022	0.00028
Mediana	0.00095	0.00093	0.00063	0.00149	0.00074	0.00066
Máximo	0.13677	0.10441	0.11803	0.10432	0.09370	0.10957
Mínimo	-0.12096	-0.07266	-0.07236	-0.12952	-0.09788	-0.09470
Desvp	0.01739	0.01203	0.00976	0.01981	0.01064	0.01168
Assimetria	-0.08670	0.03784	-0.01775	-0.48666	-0.71699	-0.33132
Curtose exc.	4.90756	6.58809	10.63489	3.63347	11.84413	11.61430
Jarque-Bera	3655.76824	6666.52444	17262.83228	2125.37846	21949.89333	20846.77985
	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$Q(10)$	16.27860	42.80163	111.10837	13.32940	30.28797	59.66372
	0.00278	0.00000	0.00000	0.01350	0.00000	0.00000
$Q^2(10)$	1299.67247	1012.31695	919.76012	752.94283	2384.89328	1907.90243
	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
N.obs	3632.00000	3680.00000	3658.00000	3598.00000	3696.00000	3692.00000

Na figura 1 é possível visualizar as séries de retornos logarítmicos em estudo. Por inspeção visual simples é possível verificar a heterocedasticidade destes retornos, corroborando as estatísticas encontradas na tabela 1. A figura 2 é mais interessante para se 365 apreciar a normalidade destes retornos. Tratam-se de gráficos quantil-quantil feitos entre a amostra completa dos retornos e uma curva normal de referência. Caso as séries, e por conseguinte suas amostras, fossem normalmente distribuídas, os pontos deste gráfico estariam todos sobre a reta de referência, o que não é verificado em nenhuma destas. 370 Para todas as séries é observado um desvio da normalidade nas caudas, configurando distribuições leptocúrticas em todos os casos.

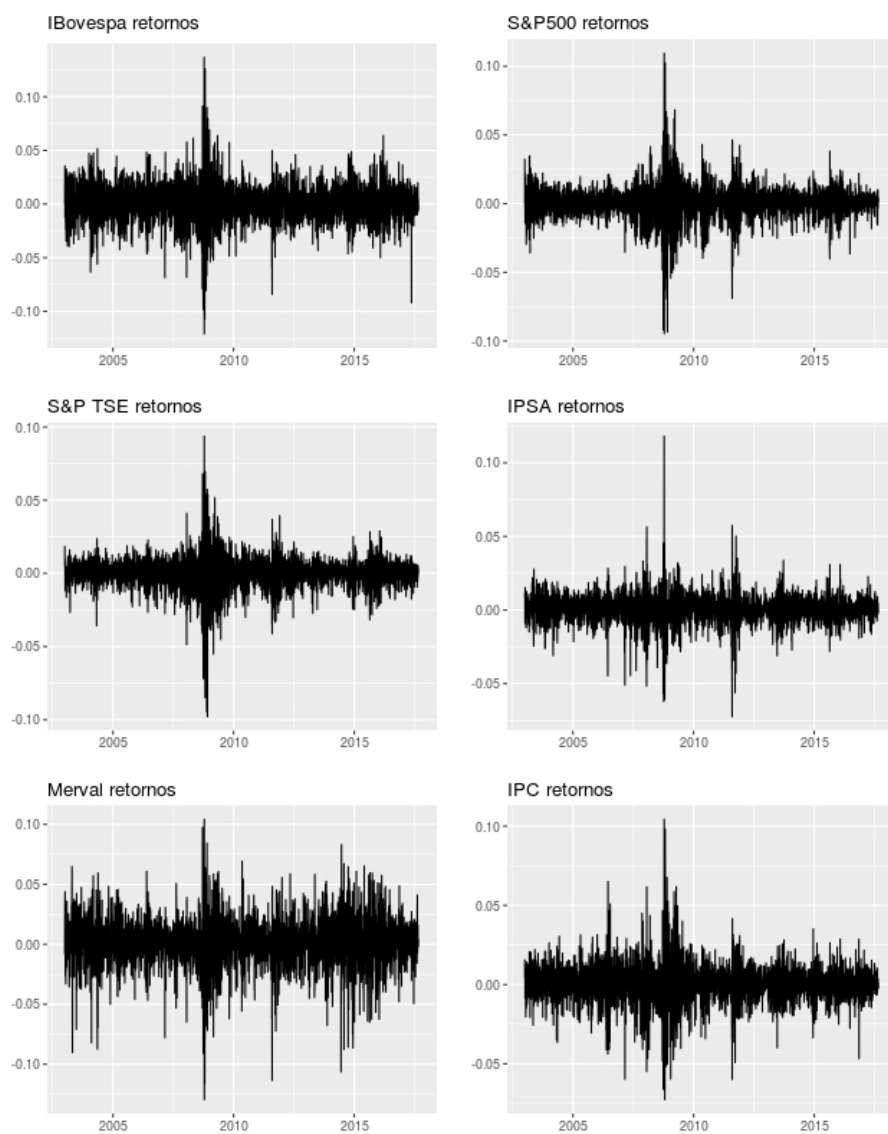


Figure 1: Retornos dos índices do estudo. Período completo entre 01/01/2003 a 30/08/2017.

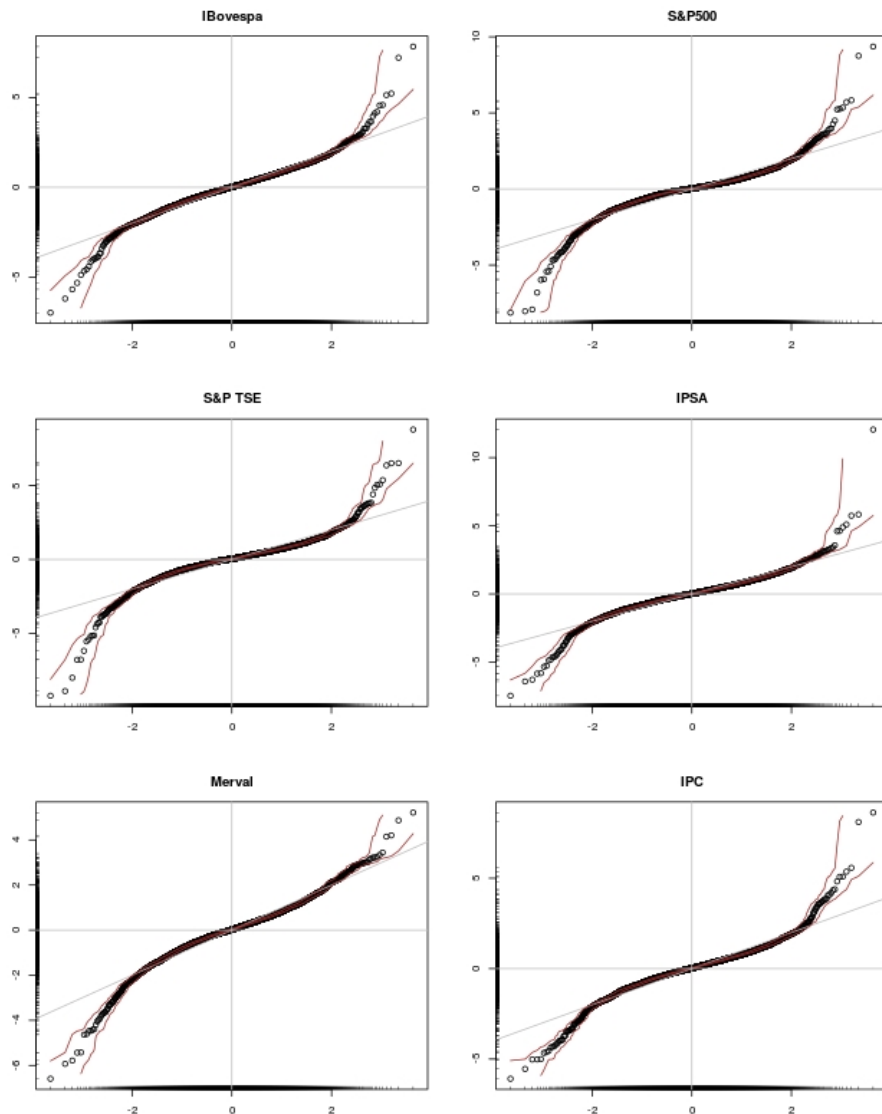


Figure 2: Análise de normalidade dos retornos através de gráficos quantil-quantil.

3.1. Filtro eGARCH

375 Voltando-se para o período dentro da amostra, o filtro proposto eGARCH(2,1) foi aplicado a estas séries, agora nas perdas que nada mais são que os retornos com o sinal trocado, e seus coeficientes estimados conforme a tabela 2. Os valores p de cada um destes coeficientes estão apresentados entre parênteses e foram calculados com base em erros-padrão robustos, de acordo com White (1982).

Como era de se esperar, nem todos os coeficientes estimados são significativos ao nível de confiança de 5% (alguns nem mesmo a 10%), o que não invalida o modelo, sendo

380 que para alguns índices específicos talvez fosse possível encontrar outro modelo GARCH
mais adequado. A principal função do modelo eGARCH neste primeiro estágio, deve
ser lembrado, é a filtragem da série de perdas, de modo que os resíduos padronizados
resultantes não sejam autocorrelacionados e tampouco possuam heterocedasticidade. E
neste ponto o modelo eGARCH(2,1) se saiu muito bem para todas as séries, conforme
385 demonstrado através dos gráficos de autocorrelação nas figuras 3 a 7.

Table 2: Parâmetros estimados do modelo eGARCH. Valores p apresentados de acordo com erros padrão robustos. (amostra de trabalho entre 01/01/2003 a 31/12/2008).

Parâmetros	IBovespa	IPC	IPSA	Merval	S&P TSE	S&P500
μ	-0.00104 (0.00616)	-0.00084 (0.00102)	-0.00077 (0.00296)	-0.00079 (0.00181)	-0.00054 (0.00004)	-0.00013 (0.41963)
ϕ_1	-0.00160 (0.93768)	0.06590 (0.00112)	0.18028 (0.00000)	-0.00235 (0.19700)	-0.01647 (0.64014)	-0.10160 (0.00000)
ω	-0.30206 (0.00000)	-0.31210 (0.00000)	-0.46252 (0.00002)	-0.72657 (0.48937)	-0.07680 (0.00000)	-0.14485 (0.00000)
α_1	0.26221 (0.00000)	0.19674 (0.00000)	0.15953 (0.00038)	0.09108 (0.25260)	0.13326 (0.00000)	0.17601 (0.00001)
α_2	-0.15613 (0.00000)	-0.07566 (0.04774)	-0.08164 (0.03776)	-0.02310 (0.84697)	-0.08771 (0.00001)	-0.07410 (0.06315)
β_1	0.96259 (0.00000)	0.96444 (0.00000)	0.95080 (0.00000)	0.90939 (0.00000)	0.99150 (0.00000)	0.98427 (0.00000)
γ_1	-0.14167 (0.03516)	0.05800 (0.40915)	0.33726 (0.00000)	0.06958 (0.68132)	0.09419 (0.05824)	-0.16073 (0.00000)
γ_2	0.26916 (0.00015)	0.10179 (0.19510)	-0.02009 (0.72923)	0.17946 (0.04203)	0.02824 (0.60813)	0.27486 (0.00000)

Para trabalhar com o *VaR* em seus quantis altos e portanto, modelar a cauda direita da
distribuição, passa-se a trabalhar com a distribuição das perdas dos ativos, como alertado
anteriormente. Os gráficos ACF são para as distribuições de perdas e seus quadrados na
parte superior, e na parte inferior os correlogramas são apresentados para os resíduos
390 padronizados e seus quadrados oriundos do modelo eGARCH. Através destes gráficos
fica bastante evidente como a filtragem foi bem sucedida em retirar a autocorrelação
encontrada originalmente nas perdas, especialmente em seus quadrados, que demonstra
claramente a natureza heterocedástica das séries sob análise.

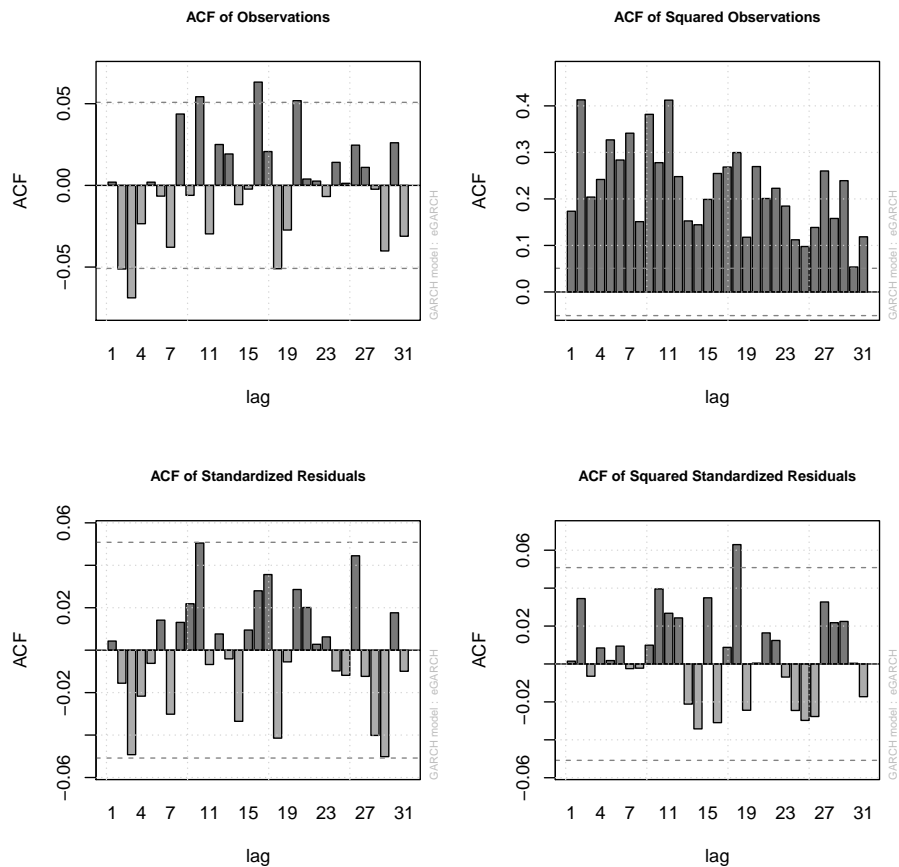


Figure 3: Ibovespa. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. Período dentro da amostra 01/01/2013 a 31/12/2008.

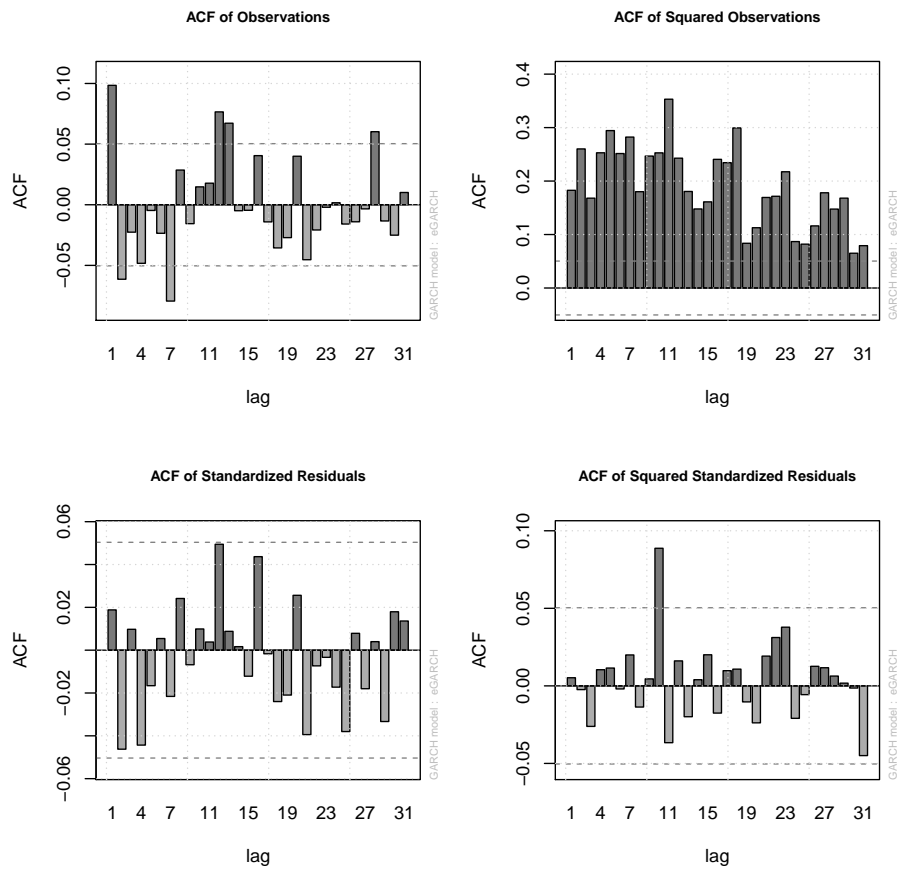


Figure 4: IPC. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. Período dentro da amostra 01/01/2013 a 31/12/2008.

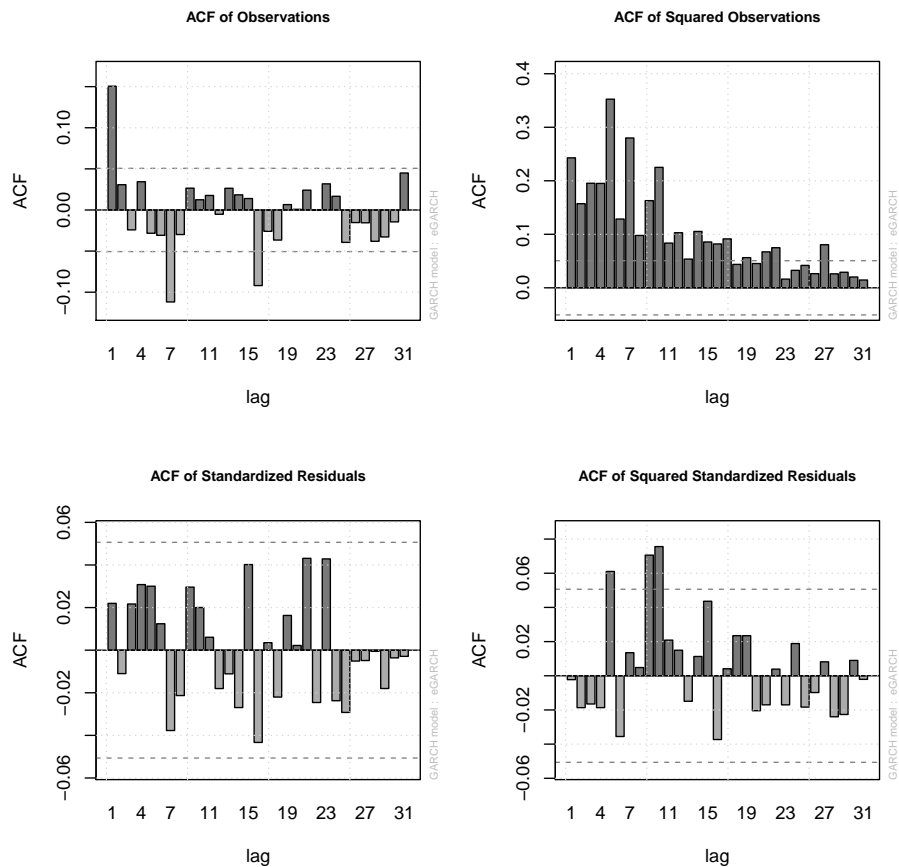


Figure 5: IPSA. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. Período dentro da amostra 01/01/2013 a 31/12/2008.

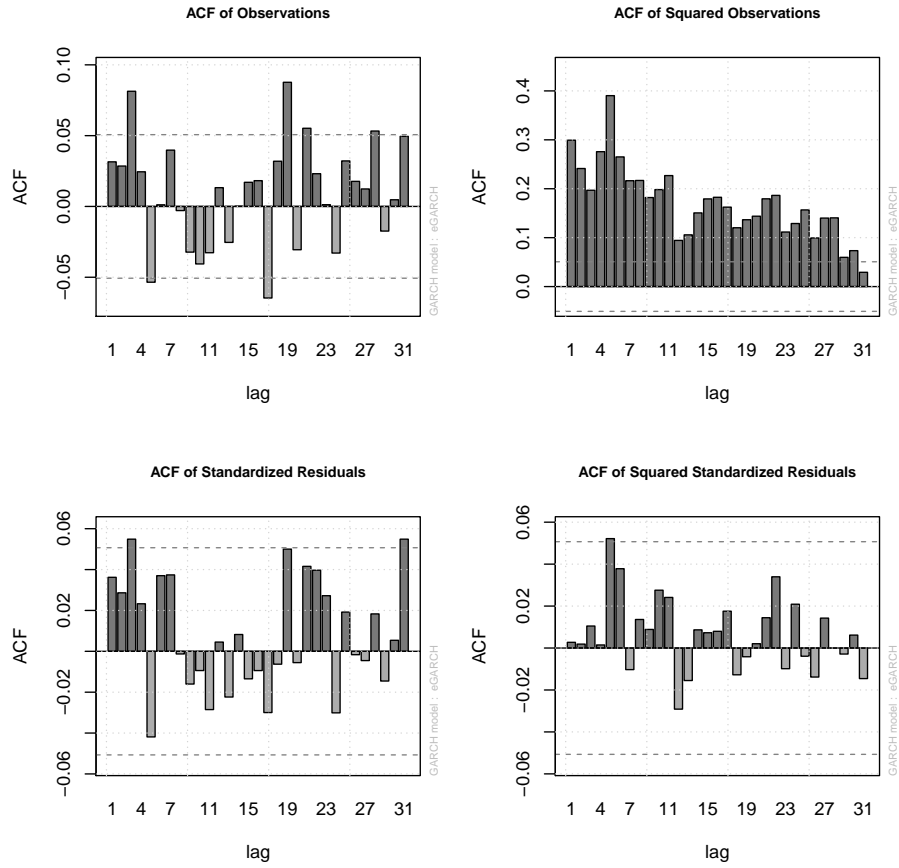


Figure 6: Merval. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. Período dentro da amostra 01/01/2013 a 31/12/2008.

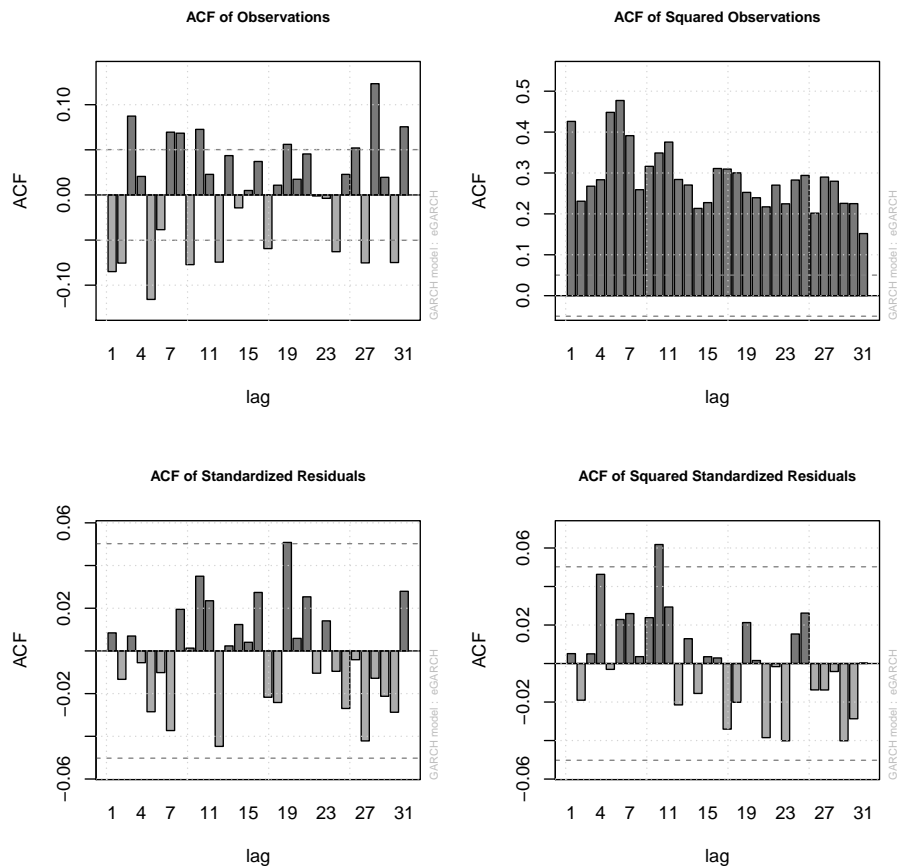


Figure 7: S&P TSE. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. Período dentro da amostra 01/01/2013 a 31/12/2008.

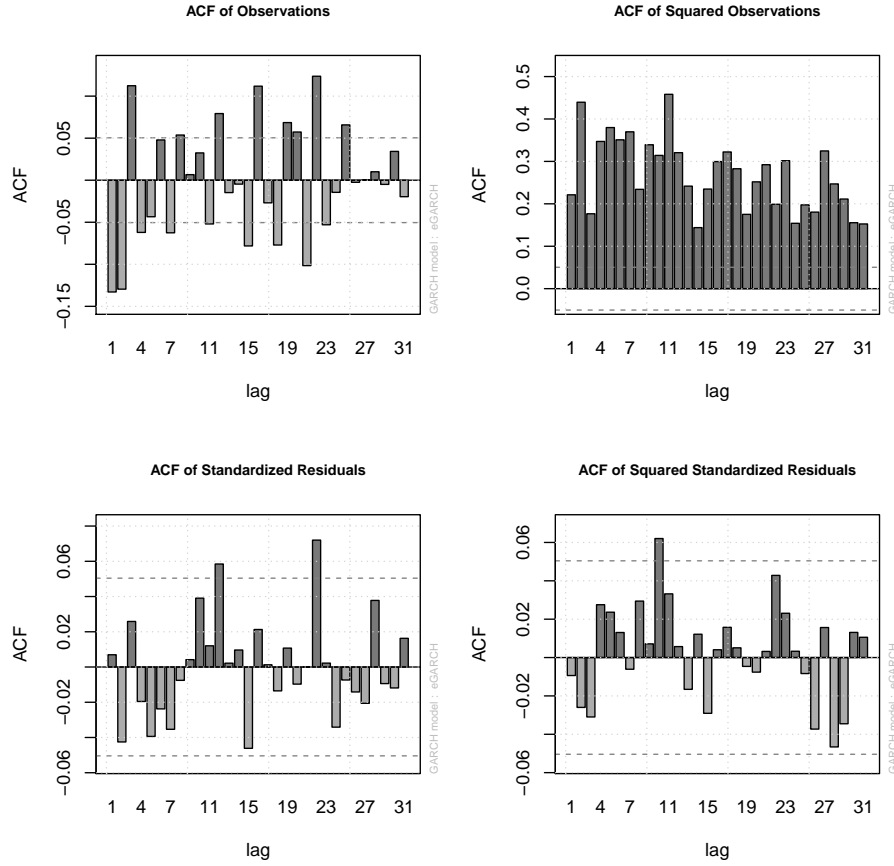


Figure 8: S&P500. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a modelagem eGARCH. Período dentro da amostra 01/01/2013 a 31/12/2008.

A tabela 3 apresenta novamente as estatísticas Jarque-Bera e Ljung-Box (Q e Q^2) desta vez para os resíduos padronizados resultantes da filtragem das perdas no primeiro estágio do modelo eGARCH-POT. Enquanto que os resíduos padronizados, assim como os retornos (e as perdas), de fato não são normais como já se esperava, as estatísticas de autocorrelação agora estão todas em favor da ausência desta. Para todos os índices analisados, não é possível rejeitar H_0 nos testes de autocorrelação, tanto para os resíduos ($Q(10)$) como para os seus quadrados ($Q^2(10)$) em evidente contraste com os valores apresentados na tabela 1 quando foram analisados os retornos destes índices.

Table 3: Estatísticas de diagnóstico para o modelo eGARCH. (Período dentro da amostra entre 01/01/2003 a 31/12/2008).

Estatística	IBovespa	IPC	IPSA	Merval	S&P TSE	S&P500
Curtose exc.	0.72736	1.09088	0.56202	3.26523	1.05074	1.50274
Jarque-Bera	49.43553	110.65485	34.73272	745.13236	140.05923	215.01842
	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Q(10)	5.06865	6.51735	4.76927	10.79627	2.48361	6.62423
	0.49583	0.30402	0.54183	0.04803	0.88760	0.29223
$Q^2(10)$	2.06331	2.65357	7.97627	3.96258	4.45027	4.68137
	0.93212	0.86672	0.17130	0.67110	0.59236	0.55562
Sign-bias	1.42255	0.01692	1.14179	0.39020	0.48399	0.34565
	0.15508	0.98650	0.25373	0.69645	0.62847	0.72966

Sendo assim, com retornos padronizados que não são normalmente distribuídos e possuem cauda longa com excesso de curtose, mas que após filtragem não apresentam mais autocorrelação ou heterocedasticidade, pode-se passar ao segundo estágio do model eGARCH-POT, ou seja, aplicar a teoria do valor extremo através do método *peaks over threshold* para parametrizar a cauda direita das distribuições de perdas dos ativos.

3.2. Método POT

Os resíduos padronizados são tratados como as realizações do processo de inovação no modelo eGARCH(2,1). Estas inovações serão então analisadas sob a ótica da EVT para a obtenção dos parâmetros da GPD que definem a cauda direita de sua distribuição.

Para tanto, deve ser estabelecido um limiar u adequado para cada uma das séries, de modo que seja satisfeito o teorema de Pickands-Balkema-de Haan. Este valor de limiar será diferente para cada série e sua escolha deve seguir os princípios delineados na seção 2.1 através da função média dos excessos. Entretanto, considerando o *trade-off* existente entre o viés e a variância dos parâmetros estimados da GPD com relação a escolha do valor deste limiar, pode-se abordar o problema desta escolha de outra forma.

Neste artigo foi utilizado o quantil empírico a 92% para a escolha do valor do limiar. Conforme visto anteriormente, um valor de limiar que resulte em um número de excessos observados a este limiar (N_u) entre 100 e 130 parece ser o limiar ótimo a ser escolhido. Considerando o tamanho da janela de dados dentro da amostra para os índices sob análise, este quantil resulta em número de excessos nesta magnitude.

A escolha do limiar através de um quantil empírico fixo também é mais adequada considerando-se que para a fase de *backtesting* do modelo é necessário reavaliar o valor deste limiar para cada dia dentro do período fora da amostra, o que se tornaria inviável de ser feito através da análise gráfica da função média dos excessos.

Escolhido o limiar u , trata-se de obter a série de inovações em excesso ao limiar $Z_t^u : Z_t^u = Z_t - u | Z_t > u$, onde Z_t são as inovações, em que os resíduos padronizados encontrados são as realizações desta e Z_t^u são portanto, as inovações em excesso, conforme teorizado na seção 2.2.

A esta série de inovações em excesso é aplicada a função log-verossimilhança dada em (17) que por sua vez é maximizada em relação aos parâmetros da GPD, ξ e ψ , para a obtenção de suas estimativas.

435 A tabela 4 apresenta os valores destes parâmetros e seus erros padrão para cada um dos índices, com a estimação feita com os dados do período dentro da amostra. Também são apresentados o número de observações dentro da amostra para o total dos resíduos padronizados, assim como o número de excessos observados (N_u) para o limiar escolhido (u). Observa-se como o número de excessos varia de acordo com o índice (assim como o total de observações), porém todos ficam em torno de 120 excessos, que é considerado um valor ideal.

Table 4: Parâmetros estimados para o modelo EVT dos resíduos padronizados. (Período dentro da amostra entre 01/01/2003 a 31/12/2008).

	IBovespa	IPC	IPSA	Merval	S&P TSE	S&P500
N.obs.	1487	1514	1498	1495	1522	1511
Limiar u	1.43392	1.40554	1.40436	1.35673	1.48743	1.36357
Num.exc. N_u	119	122	120	120	122	121
Par. forma ξ	-0.01136	0.00287	0.00343	0.07085	-0.00749	-0.02867
Erro padrão	0.07900	0.08418	0.08475	0.08132	0.08595	0.06368
Par. escala ψ	0.55190	0.61094	0.55517	0.65097	0.61939	0.72245
Erro padrão	0.06679	0.07552	0.06915	0.07947	0.07732	0.08017
Quantil $z_{0.975}$	2.07183	2.12178	2.05214	2.14835	2.20595	2.19073
Quantil $z_{0.990}$	2.56831	2.68420	2.56368	2.81771	2.76663	2.82263

440 Na figura 9 é possível visualizar os gráficos de ajuste das inovações em excesso de cada um dos índices contra suas distribuições GPD de referência, ou seja, aquelas com os parâmetros de forma e escala estimados para os respectivos índices. Verifica-se que a distribuição destes excessos pouco se desvia com relação a curva de referência, denotando um bom ajuste dos dados ao modelo teórico. Em contraste, quando modelados diretamente
445 através de uma distribuição normal, as séries de retornos se afastavam consideravelmente de suas referências como já apresentado na figura 2. Ao se utilizar um método semi-paramétrico como o proposto, modelando apenas uma parte da cauda da distribuição, a parte que interessa para a modelagem de risco, obtém-se uma estimação muito mais próxima da realidade que os dados apresentam.

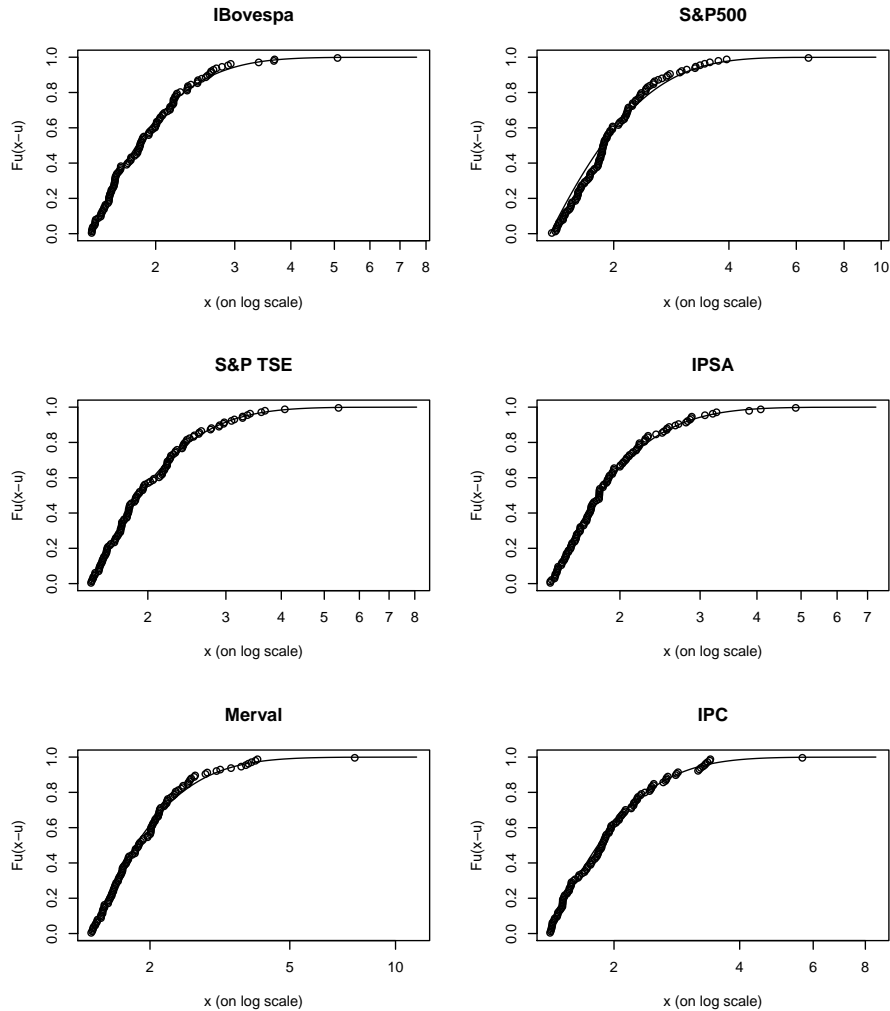


Figure 9: Qualidade do ajuste dos dados de inovações em excesso contra uma GPD de referência. Período dentro da amostra.

450 4. Avaliação dos modelos

A avaliação dos modelos aqui referidos concentra-se em testar através de *backtest* o modelo EVT condicional apresentado, o qual utiliza a metodologia em dois estágios proposta por McNeil & Frey (2000) com um filtro eGARCH(2,1) e o método POT, assim como outros modelos para a estimação do *VaR*, como o Normal e t-Student condicionais, Normal e t-Student incondicionais, o modelo proposto por RiskMetrics (1995) e o próprio modelo EVT incondicional, em um total de sete modelos sendo testados e comparados para fins de estimação da medida de risco. As definições destes modelos e suas formas de implementação estão descritas no Appendix A.

Para fazer o *backtest*, considere a série x_1, x_2, \dots, x_m , com $m \gg n$ e o conjunto de dias $T = \{n, \dots, m - 1\}$. Uma janela de dados de tamanho fixo n é utilizada e para cada dia $t \in T$ é reestimado o valor de Var_α^t . O período de teste fora da amostra vai de 01/01/2009 a 30/08/2017, com dados diários para as perdas dos índices sob análise. O número de observações (n) dentro da janela de dados utilizada para fazer a estimação dos modelos para cada um dos índices é aquele apresentado na tabela 4 (N.obs.), esse valor é fixo para cada série. Portanto, a partir do início do período de teste, esta janela fixa avança um dia e o modelo é estimado, resultando, com auxílio da equação (12), no valor estimado de Var_α^t , ou seja, a medida de risco calculada ao final do dia t que deverá ser comparada a perda incorrida no dia a frente, $t + 1$.

O quantil para a definição do limiar u é fixo em 0,92, o que resultará em valores distintos de limiar para cada rodada do teste, e possivelmente um número diferente de excessos observados. Entretanto essas diferenças, considerando o tamanho fixo da janela de dados, será muito pequeno em torno de uma unidade apenas. Mantém-se assim, um número de excessos em torno de 120 observações, valor adequado para se fazer as estimativas dos parâmetros da GPD.

A figura 10 apresenta o resultado do *backtest* para dois modelos, EVT condicional e normal incondicional. Entende-se por modelos incondicionais aqueles em que a volatilidade histórica de toda a janela de dados é utilizada para calcular as medias de risco. Claramente se percebe como o modelo condicional, que utiliza a última estimação para a volatilidade dos resíduos padronizados e então escalá-los para obter a medida de risco, é muito mais responsivo a alterações no regime de volatilidade do ativo. Um modelo incondicional, por sua vez, não responde de forma acentuada a variações de curto-prazo na volatilidade do ativo, pois estas observações mais extremas são atenuadas em meio a todas as outras observações utilizadas da janela de dados.

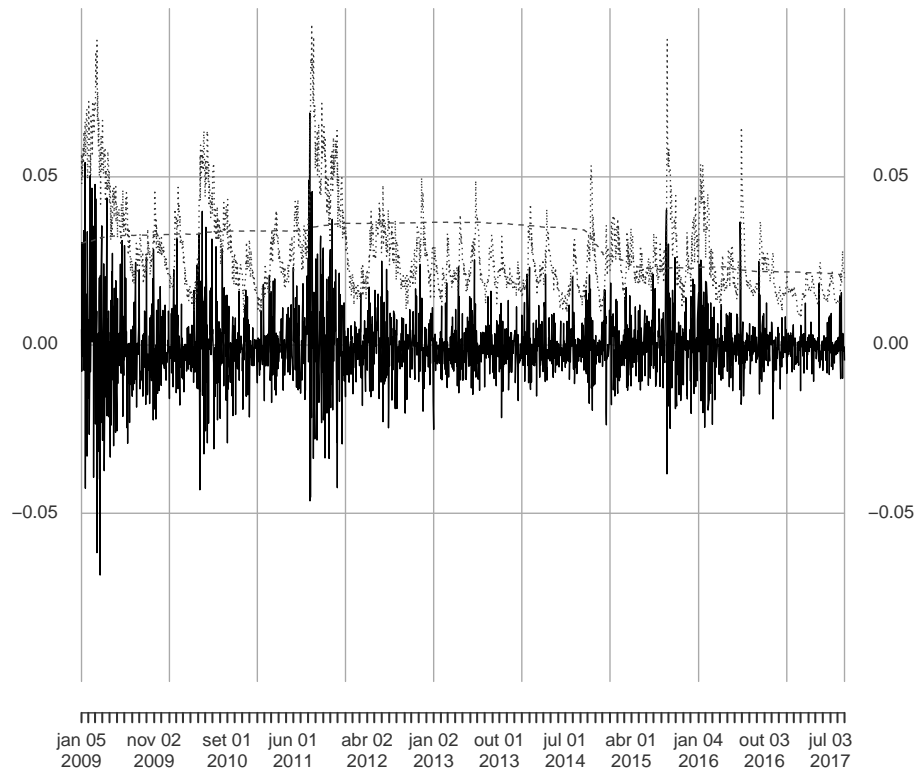


Figure 10: Teste fora da amostra para o S&P500. O modelo EVT condicional (linha pontilhada) é muito mais reativo a mudanças na volatilidade que um modelo normal incondicional (linha tracejada).

Uma violação é dita ocorrida quando a perda observada é maior que a medida de
 485 risco estimada no dia anterior, $x_{t+1} > VaR_{\alpha}^t$ para um α dentro do conjunto de níveis de
 significância, neste artigo $\alpha \in \{0,975; 0,990\}$. A tabela 5 apresenta em termos percentuais
 as violações ocorridas para cada um dos modelos para os níveis de cobertura dados.

4.1. Testes estatísticos

490 Pode ser realizado um teste estatístico para verificar se o modelo para VaR_{α}^t foi
 corretamente especificado, levando-se em consideração o seu nível de cobertura, $1 - \alpha$.
 Em Kupiec (1995), este tipo de teste é apresentado. Este permite que seja testado se
 a frequência de violações ao VaR é consistente com o valor esperado destas violações,
 o nível de cobertura. Sob a hipótese nula de um modelo corretamente especificado o
 número de violações segue uma distribuição binomial e o teste toma a forma de razão de

495 verossimilhança com a seguinte estatística:

$$LR_{uc} = -2 \ln \left(\frac{(1-p)^{n-X} p^X}{(1-\frac{X}{n})^{n-X} (\frac{X}{n})^X} \right) \quad (18)$$

onde p é o nível de cobertura, n é o número de observações do período fora da amostra e X neste caso é o número de violações ocorridas.

Este teste não faz nenhum tipo de assunção, e por conseguinte não testa, a hipótese de independência entre as violações, sendo considerado um teste *incondicional* para o *VaR*.

Table 5: Percentual de violações. (Período fora da amostra entre 01/01/2009 e 30/08/2017).

Modelo	IBovespa	IPC	IPSA	Merval	S&P TSE	S&P500
Cobertura = 1%						
EVT Condicional	1.21	0.97	1.25	1.28	1.06	1.06
Normal Condicional	1.45	1.94	1.71	2.24	1.79	2.11
t-Student Condicional	1.45	2.03	1.71	2.28	1.84	2.25
RiskMetrics	1.49	2.12	2.08	2.38	2.49	2.43
EVT Incond. Filtrada	0.75	0.60	0.74	1.19	1.20	1.33
Normal Incondicional	0.84	0.83	0.46	1.62	1.29	1.19
t-Student Incondicional	0.42	0.42	0.32	1.14	0.51	0.55
Cobertura = 2.5%						
EVT Condicional	2.47	2.49	2.55	2.90	2.30	2.34
Normal Condicional	2.61	3.23	2.78	3.57	3.64	3.81
t-Student Condicional	2.61	3.19	2.64	3.52	3.64	3.81
RiskMetrics	3.22	3.56	3.33	3.43	4.19	4.27
EVT Incond. Filtrada	1.73	1.39	1.95	2.52	2.58	2.29
Normal Incondicional	1.68	1.71	1.16	3.14	2.30	1.93
t-Student Incondicional	1.54	1.62	1.30	3.04	2.39	1.79

500 Um teste condicional é aquele proposto, entre outros, por Christoffersen & Pelletier (2004). A hipótese de independência entre as violações está relacionada a duração entre as observações destas. O tempo que se passa entre uma violação e outra deve ser independente e não formar agrupamentos (*clusters*). Sob a hipótese nula de um modelo corretamente especificado, esta duração não deve possuir memória. Como a única
505 distribuição contínua que não possui memória é a distribuição exponencial, os autores propõe ajustar os dados a uma distribuição Weibull da qual a exponencial é um caso particular quando o parâmetro $b = 1$ e, portanto, o teste é feito sobre este parâmetro. O teste de duração de Christoffersen é feito sob a forma de razão de verossimilhança, sendo a função densidade de uma Weibull:

$$f_W(D; a, b) = \begin{cases} a^b b D^{b-1} e^{-(aD)^b}, & D \geq 0 \\ 0, & D < 0. \end{cases} \quad (19)$$

510 onde D é a duração entre as violações e a e b são os parâmetros da distribuição.

Nota-se que este teste é destinado apenas a verificação da hipótese de independência das violações. Em conjunto com o teste de Kupiec, a tabela 6 fornece um panorama

completo sobre a adequação das especificações de modelos *VaR*.

Table 6: Testes estatísticos para o VaR. Teste incondicional de Kupiec, *LRuc*, e teste de independência por duração de Christoffersen e Pelletier, *LRdur*. Os modelos testados são: EVT condicional (*cevt*), Normal condicional (*cnorm*), t-Student condicional (*ct*), Riskmetrics (*riskmetrics*), EVT incondicional (*uevt*), Normal incondicional (*unorm*) e t-Student incondicional (*ut*). (Período fora da amostra entre 02/01/2009 e 30/08/2017).

Modelo	Estatística	IBovespa	IPC	IPSA	Merval	S&P TSE	S&P500
Cobertura 1%							
<i>cevt</i>	<i>LRuc</i>	0.92	0.02	1.27	1.58	0.07	0.07
<i>cevt</i>	<i>LRuc</i> p-valor	0.34	0.89	0.26	0.21	0.79	0.80
<i>cevt</i>	<i>LRdur</i>	0.98	2.04	0.29	2.34	0.37	3.92
<i>cevt</i>	<i>LRdur</i> p-valor	0.32	0.15	0.59	0.13	0.54	0.05
<i>cnorm</i>	<i>LRuc</i>	3.78	15.16	9.15	24.00	11.22	20.57
<i>cnorm</i>	<i>LRuc</i> p-valor	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
<i>cnorm</i>	<i>LRdur</i>	2.46	0.58	0.02	1.99	0.02	0.39
<i>cnorm</i>	<i>LRdur</i> p-valor	0.12	0.44	0.90	0.16	0.89	0.53
<i>ct</i>	<i>LRuc</i>	3.78	17.94	9.15	25.66	12.43	25.32
<i>ct</i>	<i>LRuc</i> p-valor	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
<i>ct</i>	<i>LRdur</i>	2.46	0.66	0.02	2.94	0.00	0.19
<i>ct</i>	<i>LRdur</i> p-valor	0.12	0.42	0.90	0.09	0.96	0.66
<i>riskmetrics</i>	<i>LRuc</i>	4.56	20.91	19.54	29.10	34.26	32.22
<i>riskmetrics</i>	<i>LRuc</i> p-valor	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
<i>riskmetrics</i>	<i>LRdur</i>	1.05	0.07	4.93	3.16	0.00	2.11
<i>riskmetrics</i>	<i>LRdur</i> p-valor	0.31	0.79	0.03	0.08	0.98	0.15
<i>uevt</i>	<i>LRuc</i>	1.53	4.07	1.61	0.72	0.80	2.18
<i>uevt</i>	<i>LRuc</i> p-valor	0.22	0.04	0.21	0.40	0.37	0.14
<i>uevt</i>	<i>LRdur</i>	1.20	3.21	10.38	8.29	35.76	28.49
<i>uevt</i>	<i>LRdur</i> p-valor	0.27	0.07	0.00	0.00	0.00	0.00
<i>unorm</i>	<i>LRuc</i>	0.59	0.66	7.85	6.82	1.67	0.77
<i>unorm</i>	<i>LRuc</i> p-valor	0.44	0.42	0.01	0.01	0.20	0.38
<i>unorm</i>	<i>LRdur</i>	2.49	9.73	7.92	4.70	40.84	31.79
<i>unorm</i>	<i>LRdur</i> p-valor	0.11	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00
<i>ut</i>	<i>LRuc</i>	9.33	9.57	13.51	0.41	6.54	5.32
<i>ut</i>	<i>LRuc</i> p-valor	0.00	0.00	0.00	0.52	0.01	0.02
<i>ut</i>	<i>LRdur</i>	0.52	0.66	16.16	8.62	11.24	18.50
<i>ut</i>	<i>LRdur</i> p-valor	0.47	0.41	0.00	0.00	0.00	0.00
Cobertura 2.5%							
<i>cevt</i>	<i>LRuc</i>	0.01	0.00	0.02	1.33	0.36	0.24
<i>cevt</i>	<i>LRuc</i> p-valor	0.93	0.99	0.89	0.25	0.55	0.63
<i>cevt</i>	<i>LRdur</i>	0.39	0.55	0.03	2.82	0.36	0.27
<i>cevt</i>	<i>LRdur</i> p-valor	0.53	0.46	0.86	0.09	0.55	0.60
<i>cnorm</i>	<i>LRuc</i>	0.11	4.38	0.67	8.71	10.10	13.21
<i>cnorm</i>	<i>LRuc</i> p-valor	0.74	0.04	0.41	0.00	0.00	0.00
<i>cnorm</i>	<i>LRdur</i>	0.43	0.14	0.37	0.54	0.86	0.01
<i>cnorm</i>	<i>LRdur</i> p-valor	0.51	0.71	0.55	0.46	0.35	0.92
<i>ct</i>	<i>LRuc</i>	0.11	3.86	0.17	7.99	10.10	13.21

ct	LRuc p-valor	0.74	0.05	0.68	0.00	0.00	0.00
ct	LRdur	0.43	0.10	0.32	0.51	0.86	0.01
ct	LRdur p-valor	0.51	0.75	0.57	0.48	0.35	0.92
riskmetrics	LRuc	4.17	8.79	5.60	6.63	21.18	23.10
riskmetrics	LRuc p-valor	0.04	0.00	0.02	0.01	0.00	0.00
riskmetrics	LRdur	7.73	1.55	3.58	1.00	0.26	2.50
riskmetrics	LRdur p-valor	0.01	0.21	0.06	0.32	0.61	0.11
uevt	LRuc	5.90	13.12	2.95	0.00	0.05	0.39
uevt	LRuc p-valor	0.02	0.00	0.09	0.95	0.82	0.53
uevt	LRdur	16.55	14.30	20.53	6.93	30.09	42.63
uevt	LRdur p-valor	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00
unorm	LRuc	6.69	6.24	19.86	3.27	0.36	3.19
unorm	LRuc p-valor	0.01	0.01	0.00	0.07	0.55	0.07
unorm	LRdur	14.09	19.01	8.98	13.89	40.84	31.24
unorm	LRdur p-valor	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
ut	LRuc	9.39	7.91	15.52	2.40	0.10	5.01
ut	LRuc p-valor	0.00	0.00	0.00	0.12	0.75	0.03
ut	LRdur	13.54	19.03	6.98	17.92	42.74	31.96
ut	LRdur p-valor	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00

515 Inspeccionando a tabela 6 verifica-se como o modelo EVT condicional, especialmente para o nível de cobertura a 1% é superior aos demais, prevalecendo como o único modelo a não rejeitar a hipótese nula a 5% de confiança para o teste de cobertura incondicional e apenas para o índice S&P500 este modelo obteve resultado no limiar da rejeição da hipótese nula a 5% para o teste de independência.

520 A tabela 7 apresenta um sumário contendo a quantidade de rejeições da hipótese nula de um modelo corretamente especificado para os valores de cobertura. Realizados dois testes, cobertura incondicional e independência, para cada um dos seis índices investigados, tem-se um total de doze testes por modelo. Verifica-se que, de fato, o modelo *cevt* - EVT condicional é aquele que apresenta o menor número de rejeições.

Table 7: Sumário para o número de rejeições das hipóteses nulas de um modelo corretamente especificado. De seis índices com dois testes, resulta em um total de doze rejeições possíveis. (Período fora da amostra entre 02/01/2009 e 30/08/2017).

Modelo	Cobertura 1%	Cobertura 2.5%
cevt	1	0
cnorm	5	4
ct	5	4
riskmetrics	7	7
uevt	5	8
unorm	7	9
ut	9	10

4.2. Teste MCS de Hansen

525 Outra forma de avaliar os modelos e buscar identificar aqueles superiores para um determinado nível de confiança e uma dada função de perda, é o *Model Confidence Set* - MCS de Hansen et al. (2011). O MCS é um conjunto de modelos construído de tal forma que contenha apenas os melhores modelos dado um nível de confiança. O MCS é, de certa forma, o análogo do intervalo de confiança para um parâmetro escalar. O "melhor" 530 modelo é avaliado através de uma função de perda a ser definida pelo pesquisador.

A função perda adotada neste trabalho é aquela definida em González-Rivera et al. (2004) como uma medida de ajuste para um modelo de *VaR*. A função \tilde{Q} ajustada para suavidade é definida no citado artigo como sendo:

$$\tilde{Q} = N_o^{-1} \sum_{t=n}^{m-1} ((1 - \alpha) - m_\delta(x_{t+1}, VaR_\alpha^t))(x_{t+1}, VaR_\alpha^t) \quad (20)$$

onde $N_o = (m - 1) - n$ é o número de observações fora da amostra menos uma observação. 535 Garantindo que o teste é feito para as estimativas de VaR_α^t apenas no período fora da amostra. A função $m_\delta(a, b) = \{1 + \exp[\delta(a - b)]\}^{-1}$ toma o lugar da função indicador quando ocorre uma violação e o parâmetro δ controla a suavidade da curva. Esta é uma função assimétrica que penaliza mais fortemente as violações ao *VaR*, um valores mais baixos de \tilde{Q} sinalizam um melhor ajuste.

540 5. Conclusão

Appendix A.

Apêndice descrevendo os modelos de estimação do *VaR*.

Appendix A.1. EVT condicional

545 *Appendix A.2. Normal condicional*

Appendix A.3. t-Student condicional

Appendix A.4. Riskmetrics

Appendix A.5. EVT incondicional

Appendix A.6. Normal condicional

550 *Appendix A.7. t-Student incondicional*

Referências

- Acerbi, C., & Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 26, 1487–1503.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1997). Thinking Coherently. *RISK*, 10, 68–71.
- 555 Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9, 203–228. doi:10.1111/1467-9965.00068.
- Balkema, A. A., & de Haan, L. (1974). Residual Life Time at Great Age. *The Annals of Probability*, 2, 792–804. doi:10.1214/aop/1176996548.
- on Banking Supervision, B. C. (2011). Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems. URL: <http://www.bis.org/publ/bcbs189.pdf>.

Teste de sign-bias não deu nenhuma rejeição de H_0 . Esquecer ou implementar modelos diferentes para cada ativo?

- on Banking Supervision, B. C. (2013). Basel III: The liquidity coverage ratio and liquidity risk monitoring tools. URL: <http://www.bis.org/publ/bcbs238.pdf>.
- on Banking Supervision, B. C. (2014). Basel III: The net stable funding ratio. URL: <http://www.bis.org/bcbs/publ/d295.pdf>.
- 565 Berkowitz, J., & O'Brien, J. (2002). How accurate are value-at-risk models at commercial banks? *The Journal of Finance*, 57, 1093–1111. URL: <http://dx.doi.org/10.1111/1540-6261.00455>. doi:10.1111/1540-6261.00455.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307–327. doi:10.1016/0304-4076(86)90063-1.
- 570 Byström, H. N. (2004). Managing extreme risks in tranquil and volatile markets using conditional extreme value theory. *International Review of Financial Analysis*, 13, 133–152.
- Chavez-Demoulin, V., Embrechts, P., & Hofert, M. (2016). An Extreme Value Approach for Modeling Operational Risk Losses Depending on Covariates. *Journal of Risk and Insurance*, 83, 735–776. URL: <http://dx.doi.org/10.1111/jori.12059>. doi:10.1111/jori.12059.
- 575 Christoffersen, P., & Pelletier, D. (2004). Backtesting value-at-risk: A duration-based approach. *Journal of Financial Econometrics*, 2, 84–108.
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1, 223–236. URL: <http://dx.doi.org/10.1080/713665670>. doi:10.1080/713665670.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C., & Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer.
- 580 Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50, 987. doi:10.2307/1912773.
- Fisher, R. A., & Tippett, L. H. C. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24, 180–190.
- 585 Fisher, T. J., & Gallagher, C. M. (2012). New weighted portmanteau statistics for time series goodness of fit testing. *Journal of the American Statistical Association*, 107, 777–787.
- Gencay, R., & Selcuk, F. (2004). Extreme value theory and value-at-risk: Relative performance in emerging markets. *International Journal of Forecasting*, 20, 287–303.
- Gnedenko, B. V. (1941). Limit theorems for the maximal term of a variational series. *Comptes Rendus (Doklady) de L'Académie des Sciences de l'URSS*, 32, 7–9.
- 590 Gnedenko, B. V. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Annals of Mathematics*, 44, 423–453.
- González-Rivera, G., Lee, T.-H., & Mishra, S. (2004). Forecasting volatility: A reality check based on option pricing, utility function, value-at-risk, and predictive likelihood. *International Journal of forecasting*, 20, 629–645.
- 595 Gouriéroux, C. (1997). *ARCH Models and Financial Applications*. Springer Series in Statistics. New York, NY: Springer New York. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-1860-9>. doi:10.1007/978-1-4612-1860-9.
- Hansen, P. R., Lunde, A., & Nason, J. M. (2011). The model confidence set. *Econometrica*, 79, 453–497.
- 600 Herrera, R., & Schipp, B. (2013). Value at risk forecasts by extreme value models in a conditional duration framework. *Journal of Empirical Finance*, 23, 33–47. doi:10.1016/j.jempfin.2013.05.002.
- Karmakar, M., & Paul, S. (2016). Intraday risk management in international stock markets: A conditional evt approach. *International Review of Financial Analysis*, 44, 34–55.
- Karmakar, M., & Shukla, G. K. (2014). Managing extreme risk in some major stock markets: An extreme value approach. *International Review of Economics and Finance*, . doi:<https://doi.org/10.1016/j.iref.2014.09.001>.
- 605 Kuester, K., Mittnik, S., & Paolella, M. S. (2006). Value-at-risk prediction: A comparison of alternative strategies. *Journal of Financial Econometrics*, 4, 53–89. URL: <http://dx.doi.org/10.1093/jjfinec/nbj002>. doi:10.1093/jjfinec/nbj002.
- 610 Kupiec, P. H. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *The journal of Derivatives*, 3, 73–84.
- Longin, F. M. (2000). From value at risk to stress testing: The extreme value approach. *Journal of Banking & Finance*, 24, 1097 – 1130. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378426699000771>. doi:[https://doi.org/10.1016/S0378-4266\(99\)00077-1](https://doi.org/10.1016/S0378-4266(99)00077-1).
- 615 McNeil, A. J., & Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, 7, 271–300. doi:10.1016/S0927-5398(00)00012-8.
- McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015). *Quantitative risk management: concepts, techniques and tools*. (Revised ed ed.). Princeton University Press.

- 620 Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, (pp. 347–370).
- O'Brien, J., & Szerszeń, P. J. (2017). An evaluation of bank measures for market risk before, during and after the financial crisis. *Journal of Banking & Finance*, 80, 215 – 234. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378426617300511>. doi:<https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2017.03.002>.
625 002.
- Pickands, J. (1975). Statistical Inference Using Extreme Order Statistics. *Annals of Statistics*, 3, 119–131. doi:10.1214/aos/1176343003.
- RiskMetrics (1995). *Technical Document - 3rd Edition*. Technical Report J.P Morgan Guaranty Trust Company.
- 630 Rocco, M. (2014). EXTREME VALUE THEORY IN FINANCE: A SURVEY. *Journal of Economic Surveys*, 28, 82–108. URL: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-6419.2012.00744.x>. doi:10.1111/j.1467-6419.2012.00744.x.
- White, H. (1982). Maximum likelihood estimation of misspecified models. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, (pp. 1–25).
- 635 Wong, M. C. S., Cheng, W. Y., & Wong, C. Y. P. (2003). Market risk management of banks: implications from the accuracy of value-at-risk forecasts. *Journal of Forecasting*, 22, 23–33.