

# Introdução a Superfície de Volatilidade

*Rafael Felipe Bressan*

*2019-02-09*



# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>5</b>
<b>Sobre os Autores</b>	<b>7</b>
Rafael Felipe Bressan . . . . .	7
Erik Naoki Kawano . . . . .	7
Glauber Naue . . . . .	7
<b>1 Introdução as opções</b>	<b>9</b>
1.1 Conceitos in the money, at the money e out the money . . . . .	10
1.2 Modelos americano e europeu de opções . . . . .	10
1.3 Hedge . . . . .	12
1.4 Travas . . . . .	12
<b>2 Processos Estocásticos em Finanças</b>	<b>13</b>
2.1 Processos de Markov . . . . .	13
2.2 Movimento Browniano . . . . .	14
2.3 Definição . . . . .	15
2.4 Movimento Browniano Geométrico . . . . .	16
<b>3 Modelo Black-Scholes-Merton</b>	<b>19</b>
3.1 Portfólio de replicação . . . . .	19
3.2 Precificação neutra ao risco . . . . .	20
3.3 Encontrando a equação de Black-Scholes . . . . .	20
3.4 Solução analítica . . . . .	21
3.5 Paridade compra e venda . . . . .	22
3.6 As Gregas . . . . .	23
<b>4 Smile de Volatilidade</b>	<b>25</b>
4.1 Reparametrizando B&S e definição de moneyness . . . . .	25
4.2 Características de smiles de volatilidade . . . . .	26
4.3 Smile como forma de precificação . . . . .	28
4.4 Estrutura a termo . . . . .	29
4.5 Arbitragem estática . . . . .	29
4.6 Limites de inclinação . . . . .	33
4.7 Distribuição implícita . . . . .	34
4.8 Conclusão . . . . .	35
<b>5 Superfícies de volatilidade</b>	<b>37</b>
5.1 Modelos estocásticos . . . . .	37
5.2 Modelos paramétricos . . . . .	40
5.3 Modelos não-paramétricos . . . . .	41
5.4 Extrapolação do smile . . . . .	42
5.5 Conclusão . . . . .	43

5.6	Referências . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Métodos de Calibração</b>	<b>45</b>
6.1	Calibração versus Interpolação . . . . .	45
6.2	Spline cúbica . . . . .	46
6.3	Suavização . . . . .	47
6.4	Parametrização . . . . .	49
6.5	Conclusão . . . . .	50
<b>7</b>	<b>Calibrando uma SVI</b>	<b>53</b>
7.1	Modelo SVI . . . . .	53
7.2	Restrições de não-arbitragem . . . . .	54
7.3	Reparametrização Quasi-explicit . . . . .	55
7.4	Algoritmo . . . . .	57
7.5	Resultados . . . . .	57
7.6	Conclusão . . . . .	61
<b>8</b>	<b>Superfície SVI</b>	<b>63</b>
8.1	Reparametrizações equivalentes . . . . .	63
8.2	Superfície SVI . . . . .	65
8.3	Condições de não-arbitragem . . . . .	66
8.4	Densidade neutra ao risco . . . . .	66
8.5	Superfície de volatilidade local . . . . .	67
8.6	Calibração da SSVI . . . . .	68
8.7	Conclusão . . . . .	73
8.8	Referências . . . . .	73
<b>9</b>	<b>Simulação de Monte Carlo</b>	<b>75</b>
9.1	Simulação de Monte Carlo . . . . .	75
9.2	Implementação em R . . . . .	76

# Prefácio

Este é um pequeno resumo, elaborado na forma de livro, sobre os estudos realizados pelo núcleo de derivativos e riscos do Clube de finanças ESAG.

Os estudos realizados pelos membros do núcleo foram sendo apresentados na forma de artigos no blog do Clube. A partir destes artigos foi feita esta coletânea de forma a apresentar todo o conteúdo em local único para facilitar a assimilação dos membros futuros e leitores de nosso blog.



# Sobre os Autores

## Rafael Felipe Bressan

Formado em Engenharia de Controle e Automação Industrial pela UFSC e aluno de graduação do curso de Ciências Econômicas na UDESC/Esag. Membro do Clube de Finanças Esag e gerente do núcleo de pesquisa em riscos e derivativos.

Se interessa por finanças quantitativas, modelagem e controle de riscos e desenvolveu, durante a elaboração deste livro, grande curiosidade sobre precificação de derivativos. Gosta de programar em R, linguagem com a qual elaborou este próprio livro e está aprendendo Python.

## Erik Naoki Kawano

Aluno de Engenharia de Produção Elétrica na UFSC. Membro do Clube de Finanças Esag e participante do núcleo de pesquisa em riscos e derivativos. Está atualmente aprendendo a programar em Python e em R.

## Glauber Naue

Aluno de Ciências Econômicas na UDESC/Esag. Membro do Clube de Finanças ESAG, participa do núcleo de pesquisa em riscos e derivativos. Atualmente realizando um estudo sobre modelo de fatores aplicado ao mercado brasileiro.





# Capítulo 1

## Introdução as opções

Neste Capítulo<sup>1</sup> iremos apresentar os instrumentos financeiros conhecidos como opções. Existem dois tipos de opção. Uma opção de compra dá ao detentor o direito de comprar o ativo subjacente até uma determinada data por um determinado preço. Uma opção de venda dá ao titular o direito de vender o ativo subjacente até uma determinada data por um determinado preço.

Alguns termos importantes para o melhor entendimento deste Capítulo são: “Ativo subjacente”, que é o ativo negociado no contrato, “data de vencimento”, no caso do modelo americano é até a data limite para exercer a opção de compra e no modelo europeu é na data final em que a opção de compra pode ou não ser exercida (serão discutidos mais detalhes sobre estas modalidades posteriormente) e “preço de exercício” (strike), é o valor a ser pago pelo ativo de acordo com o contrato. As opções americanas podem ser exercidas a qualquer momento até a data de vencimento. Por sua vez, as opções europeias podem ser exercidas somente na própria data de vencimento.

As opções europeias são geralmente mais fáceis de analisar do que as opções americanas, e algumas das propriedades de uma opção americana são frequentemente deduzidas daquelas de sua contraparte europeia.

A opção de compra (call) dá ao comprador da opção o **direito de comprar** o ativo subjacente pelo preço de exercício. A opção de venda (put) dá ao comprador da opção o **direito de vender** o ativo subjacente pelo preço combinado no contrato na data futura.

O preço de uma opção de compra diminui à medida que o preço de exercício aumenta, enquanto o preço de uma opção de venda aumenta à medida que o preço de exercício aumenta. Ambos os tipos de opção tendem a se tornar mais valiosas à medida que seu tempo até o vencimento aumenta. Na verdade existem seis fatores que afetam o preço de uma opção de ação, por exemplo:

1. O preço atual da ação,  $S_0$
2. O preço de exercício,  $K$
3. O tempo para expiração,  $\tau$
4. A volatilidade do preço das ações,  $\sigma$
5. A taxa de juros livre de risco,  $r$
6. Os dividendos que se espera sejam pagos,  $q$

Observamos que existem quatro tipos de participantes nos mercados de opções:

- Compradores de calls
- Vendedores de calls
- Compradores de puts
- Vendedores de puts

---

<sup>1</sup>Artigo originalmente escrito por Glauber Naue e Erik Kawano, adaptado por Rafael Bressan para este livro.

Tabela 1.1: Exemplo: Comprando call de X com o preço de exercício (strike) de 10.000

Ação	Prêmio Pago	Opção no Exercício	Lucro	Moneyness
9000	200	0	-200	OTM
9500	200	0	-200	OTM
10000	200	0	-200	ATM
10200	200	200	0	ITM
10500	200	500	300	ITM
11000	200	1000	800	ITM

Os compradores são referidos como tendo posições *long*, vendedores são referidos como tendo posições *short*. Vender uma opção também é conhecido como lançar a opção ou subscrever.

Exemplificando uma operação de compra de call, caso o preço do ativo tenha subido acima do preço de strike o comprador pode exercer sua opção de compra e ele lucrará a partir do momento em que o valor da ação for maior que o strike mais o valor pago pela opção (chamado de prêmio). Caso o preço do ativo tenha caído abaixo do strike, o comprador simplesmente não exerce sua opção, limitando sua perda nessa operação ao prêmio pago.

Usando a tabela 1.1 como exemplo é possível ver que o resultado final será maior que R\$ 0 quando o valor do ativo subjacente é maior que R\$10.200 (R\$10.000 de strike + R\$200 de prêmio), e o prejuízo final está limitado ao valor de R\$200. A figura 1.1 abaixo mostra o perfil de lucro da operação exemplificada, típico de uma compra de call.

No caso de uma operação de uma compra de put, caso o preço do ativo tenha subido acima do strike, não faz sentido o detentor da opção exercer seu direito, assim sua perda será apenas o valor pago pela opção. Caso o preço do ativo tenha descido abaixo do strike, o comprador da put pode realizar a venda e começará a lucrar a partir do momento em que o strike fique acima do valor do ativo somado ao valor do prêmio pago pela opção. Usando a tabela 1.2 como exemplo é possível ver que o resultado final será de no mínimo -R\$600 caso o valor do ativo subjacente seja igual ou maior que R\$15.000, e o resultado final aumenta conforme o ativo perde o valor, sendo positivo a partir de quando seu valor é de R\$14.400.

## 1.1 Conceitos in the money, at the money e out the money

Estes termos são usados para se referir a opções que estão com o preço de exercício (strike) do ativo abaixo, acima ou igual ao valor atual do ativo.

- Out the money: Strike do ativo subjacente está abaixo do valor de mercado no caso de calls ou quando o strike do ativo está acima do valor de mercado no caso de puts.
- At the money: Strike do ativo subjacente é o igual ao valor de mercado.
- In the money: Strike do ativo subjacente está acima do valor de mercado no caso de calls ou quando o strike do ativo está abaixo do valor de mercado no caso de puts.

## 1.2 Modelos americano e europeu de opções

No modelo americano de opções o comprador pode exercer seu direito de compra ou venda do ativo subjacente a qualquer momento entre o início do contrato e o vencimento dele, enquanto isso no modelo europeu a transação só pode ser realizada na data de vencimento.

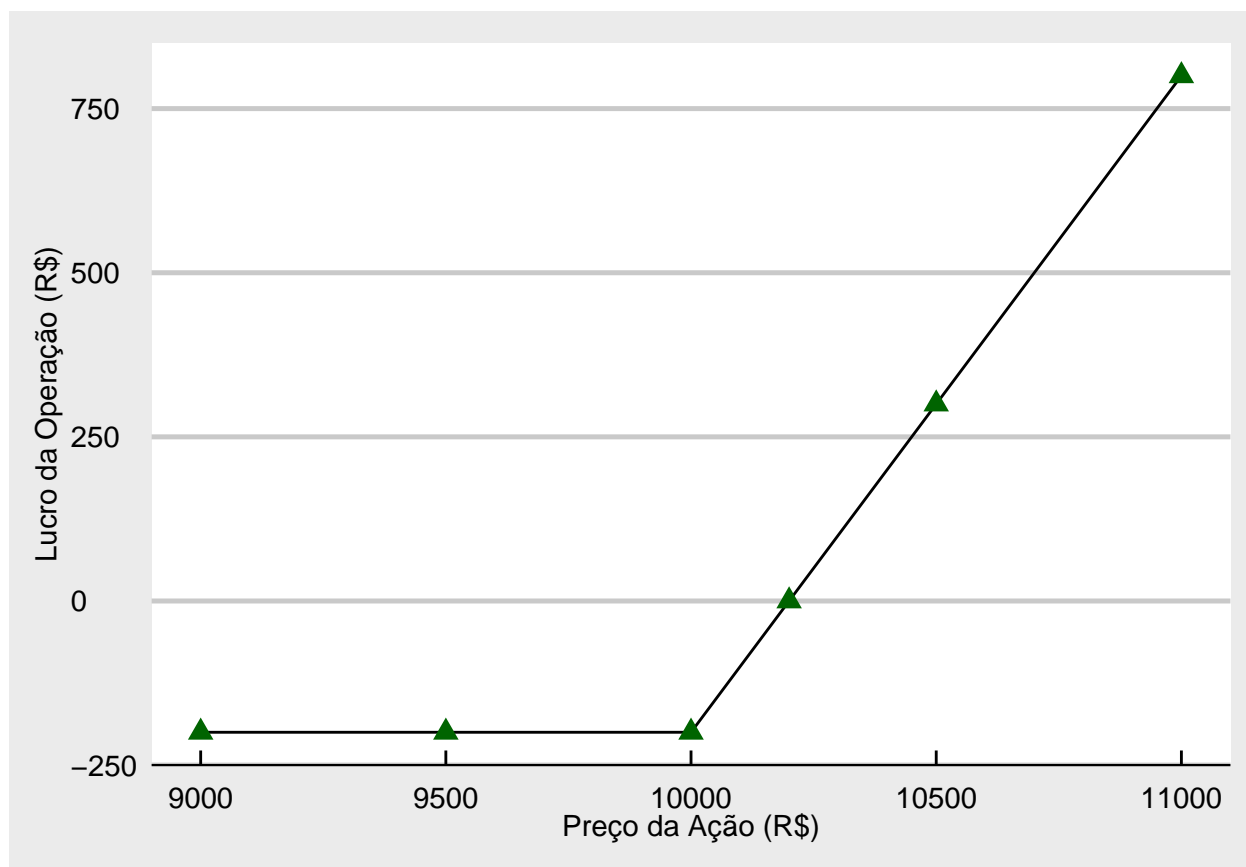


Figura 1.1: Perfil de lucro típico de uma compra de call.

## 1.3 Hedge

O mercado de opções pode ser usado tanto para hedge (proteção) quanto para especulação. O hedge é feito para limitar as possíveis perdas que um investidor pode ter ao estar com seu patrimônio atrelado a determinado ativo, por exemplo, para um acionista que possui ações de determinada empresa se proteger contra uma possível queda no valor de suas ações, ele pode comprar opções de venda at the money de suas ações para que seu prejuízo máximo seja o prêmio.

## 1.4 Travas

Devido ao mercado de opções nos oferecer diversas possibilidades entre call e put onde você pode estar comprado e/ou vendido irá surgir várias posições a serem assumidas, para nos adequarmos ao quanto estamos dispostos a encarar o risco para atingirmos o retorno desejado. Essas posições são conhecidas como “Travas”.

Entendendo as travas, existem diversas estratégias, como por exemplo: Trava de alta, trava de baixa, Long Straddle, Short Straddle, entre outras. Mas afinal qual é o funcionamento delas? Supondo que o leitor espere uma alta do mercado, no entanto acredite que não irá superar determinado ponto ele poderá realizar uma Trava de alta. Onde comprará uma opção de Call a um preço de strike X e vender outra Call com o preço de strike Y, onde obrigatoriamente  $Y > X$ . Nesta operação limitaremos o nosso ganho caso o mercado supere as nossas expectativas, no entanto diminuiremos o custo da operação, o custo será o prêmio pago pela opção X menos o prêmio recebido pela opção Y, para facilitar a compreensão observemos o gráfico a seguir:

Nesse caso o valor do prêmio da compra foi de R\$30,00 enquanto a da venda foi R\$10,00, assim limitamos nossa perda em R\$20,00, enquanto os preços de strike da compra e da venda da call foram respectivamente R\$250,00 e R\$300,00, fazendo o retorno máximo ser R\$30,00 que é a diferença entre os valores de strike a serem realizados e descontado o valor pago pelo prêmio.

Agora que o leitor já entendeu melhor o conceito da trava, vamos explorar uma mais complexa a Long Butterfly. Aqui é realizado a compra de uma put e call com preços de strike iguais, vendesse uma put com preço inferior e vende alguma call com preço superior as iniciais. Observe que pelo fato de contar com a venda de duas opções nessa estratégia tem um custo de operação reduzido, no entanto o ideal é utilizar em um mercado de pouca volatilidade, dado que se a volatilidade ser alta perdesse a possibilidade de ter um ganho maior, nesse caso recomenda o uso por exemplo de uma Long Straddle. Enfim vamos ao gráfico para facilitar a compreensão da estratégia:

Teremos então a compra de uma put e call de strike iguais de R\$150,00 a venda de uma put com strike inferior de R\$80, e a venda de uma call com preço superior R\$220. Os valores exatos dos prêmios não nos interessam no momento, porém é importante entender que teremos dois com saldos positivos referente a nossa venda e dois negativos que advém das compras, o resultado será nosso prejuízo máximo, olhando o gráfico nesse caso é de R\$20,00. Pela área de retorno do gráfico podemos ver que nosso risco está reduzido. Onde o pior cenário possível se encontra em o preço do ativo-objeto se aproximar do valor do R\$150,00, que é onde os contratos adquiridos não serão vantajosos em nenhuma ponta. No entanto se o preço se aproximar de R\$220 poderemos exercer nosso direito da compra da call inicial por R\$150,00(você terá o direito de comprar a um preço inferior), o mesmo será valido caso haja uma queda do preço se aproximado do valor de R\$80,00 onde a logica será a mesma só que aqui será o usado o direito da compra da put por R\$150,00(Você terá o direito de vender a um preço superior). Observe que apesar do nosso risco ser reduzido, limita os nossos ganhos, com a venda da call e da put com preços superior e inferior respectivamente.

Espero que o leitor tenha despertado interesse no assunto, com esse conteúdo dominado já saberá o básico sobre opções, fique atento a novas postagens em breve iremos mais a fundo explicando por exemplo o modelo Black Scholes, como as opções são precificadas entre outros materiais.

## Capítulo 2

# Processos Estocásticos em Finanças

Neste capítulo abordaremos um assunto técnico, mas muito utilizado e de fundamental importância para a precificação de instrumentos derivativos. Será apresentado o conceito de processos estocásticos - PE, e sua aplicação no mundo das finanças.

Um processo estocástico é a evolução temporal de uma determinada variável de interesse que pode assumir valores aleatórios em cada ponto no tempo. Em outras palavras, o caminho que a variável segue ao longo do tempo evolui de maneira incerta. Estes processos podem se dar em tempo discreto ou em tempo contínuo. Processo em tempo discreto são aqueles onde o valor da variável pode se alterar somente em intervalos pré-definidos de tempo, por exemplo ao final do dia. Em processos em tempo contínuo, o valor de nossa variável está constantemente em mudança, de forma aleatória seguindo alguma distribuição de probabilidades.

Estes processos são muito importantes em finanças pois, é amplamente aceito que a evolução do preço de ativos financeiros pode ser modelado por um PE em tempo contínuo, sendo este modelo portanto, a base para a teoria de precificação de ativos e da qual os derivativos fazem extenso uso. Aprender sobre a evolução temporal do preço de uma ação através de um processo estocástico é o primeiro passo para saber como atribuir um preço a uma opção sobre esta ação, por exemplo.

Deve ser notado também que apesar de o preço dos ativos serem **observados** apenas em intervalos discretos de tempo (apenas quando existe transação) e assumirem valores também discretos (múltiplos de um centavo), o preço e sua evolução estão ocorrendo continuamente, nossas observações que são discretas. Desta forma os processos em tempo contínuos são ideais para este tipo de modelagem.

## 2.1 Processos de Markov

Uma primeira definição de deve-se fazer para estudar PE aplicados a evolução do preço de ações é o conceito de processo de Markov. Este tipo de processo é tal que o histórico do processo que o levou até seu estado atual, é **irrelevante** para a previsão de seu estado futuro. Ou seja, toda a informação da história do processo já está contida no seu valor atual. Quando consideramos que preços de ativos seguem um processo de Markov, estamos assumindo válida pelo menos a forma fraca de mercados eficientes.

Uma implicação desta suposição, verificada empiricamente, é que não se pode obter lucros apenas seguindo padrões históricos do preço e extrapolando-os no futuro. Outra, mais importante para nossos processos, é que as distribuições de probabilidade que a variável aleatória segue em cada ponto no tempo são **independentes**.

## 2.2 Movimento Browniano

Suponha um processo de Markov, que para fins de simplificação consideraremos em tempo discretos. Se a distribuição de probabilidade para o próximo incremento no valor do processo for uma Normal com média zero e variância unitária, podemos representar este incremento por  $\phi(0, 1)$ . Como este é um processo de Markov, o segundo incremento será independente do primeiro e terá novamente a mesma distribuição de probabilidade. Qual seria então, a partir do período inicial até o segundo período, a distribuição de probabilidade dos possíveis valores de nosso hipotético processo? A resposta é a soma de duas normais  $\phi(0, 1)$  que resulta em  $\phi(0, 2)$ . Se assim continuarmos a fazer previsões para T períodos a frente, nossa distribuição terá densidade  $\phi(0, T)$ .

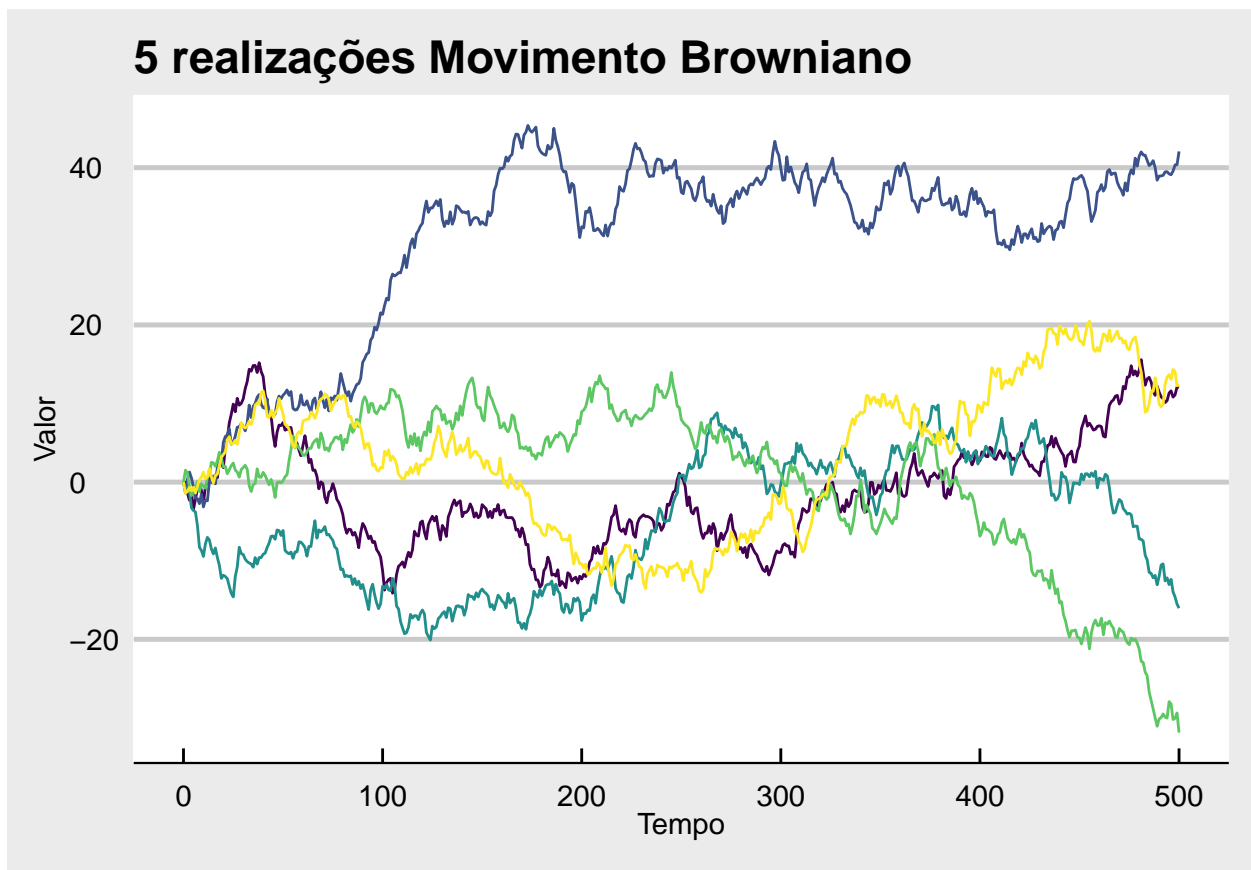
Para tempos discretos,  $T \in \mathbb{Z}$  este é o processo do passeio aleatório (*Random Walk*), entretanto para tempo contínuo quando  $T \in \mathbb{R}$  com incrementos acontecendo em intervalos de tempo infinitesimalmente pequenos, este é o Movimento Browniano - MB, que também é largamente conhecido como processo de Wiener.

```
t <- 0:500
m <- 5 # Numero de simulacoes
mc_names <- paste0("Sim", seq_len(m)) # Nomes das simulacoes
sigma2 <- 1
mu <- 0
brown_t <- matrix(nrow = length(t), ncol = m)
# MC Simulation
set.seed(543210)
for (i in seq_len(m)) {
  increments <- rnorm(length(t) - 1, mu, sqrt(sigma2))
  brown_t[, i] <- c(0, cumsum(increments))
}

colnames(brown_t) <- mc_names
mb <- as.tibble(cbind(t, brown_t)) %>%
  gather(key = sim, value = value, -t)
```

```
## Warning: `as.tibble()` is deprecated, use `as_tibble()` (but mind the new semantics).
## This warning is displayed once per session.
```

```
ggplot(mb, aes(x = t, y = value, color = sim)) +
  geom_line() +
  # geom_point(data = dens_tbl, aes(x = x, y = y), size = 1) +
  labs(title = "5 realizações Movimento Browniano",
       x = "Tempo",
       y = "Valor") +
  guides(color = FALSE) +
  scale_color_viridis_d() +
  theme_economist_white()
```



A figura acima mostra 5 realizações de um *mesmo* processo estocástico com média zero e variância unitária. É importante frisar que o processo que gerou as cinco séries é exatamente o mesmo, sendo elas tão distintas umas das outras ou não. Esta é uma importante característica dos processos estocásticos nas aplicações reais, o que nós observamos é apenas uma realização do processo, dentre as infinitas possíveis.

## 2.3 Definição

Agora que já foi passada a intuição sobre processos estocásticos, pode-se partir para definições mais formais sobre estes processos. Vamos adotar a notação do cálculo para tanto, e generalizar nosso MB possibilitando-o que tenha média diferente de zero ( $\mu$ ) e variância qualquer ( $\sigma^2$ ), mantendo estas constantes ao longo do tempo, entretanto. Desta forma um movimento Browniano com deriva pode ser descrito através da seguinte equação diferencial estocástica - EDE:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t \quad (2.1)$$

onde  $dB_t$  é nosso MB padrão em um intervalo de tempo infinitesimal,  $dt$ .

O processo  $X_t$  possui uma taxa de deriva (média instantânea) igual a  $\mu$  e volatilidade instantânea igual a  $\sigma$ . Quando um PE possui deriva igual a zero, como nosso MB padrão, o valor esperado deste processo para qualquer período futuro será zero. Este fato deixa de ser verdade no processo generalizado, com taxa de deriva diferente de zero. Neste caso o processo evoluirá seguindo uma taxa crescente (se  $\mu > 0$ ) ou decrescente (se  $\mu < 0$ ). Assim é possível, a partir de um MB padrão, modelar outros PE que possuam tendência temporal e variâncias diferentes.

## 2.4 Movimento Browniano Geométrico

Apesar de o processo  $X_t$  ser bastante flexível e cobrir uma grande gama de usos, ele ainda não é adequado para modelar o preço de ativos, e isto se dá em função de o processo de Wiener, mesmo com deriva positiva, poder atingir valores negativos com probabilidade maior que zero. Isto implicaria na possibilidade do preço de uma ação ser negativo, algo que obviamente não ocorre. Além desta impossibilidade, existe um outro empecilho para se utilizar o MB para modelar o processo de preços, e este é a deriva constante  $\mu$  com relação ao preço da ação.

A deriva pode ser interpretada como o valor esperado do retorno da ação em um dado período de tempo. Este retorno esperado ele é pode ser constante em termos percentuais (em um modelo simplificado), mas não em termos absolutos! Ou seja, dependendo do preço da ação, R\$ 1,00 ou R\$ 100,00, a deriva  $\mu$  deve ser diferente para que em termos percentuais a relação seja constante.

A solução para estes dois problemas é modelar o preço como um processo estocástico conhecido como Movimento Browniano Geométrico. Ele difere do MB padrão pois assume que o **logaritmo** da variável aleatória possui distribuição Normal. O MBG é a resolução para a seguinte EDE:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \quad (2.2)$$

Veja que este é basicamente o mesmo processo MB, porém a deriva, termo que multiplica  $dt$ , varia linearmente com o valor do processo ( $\mu X_t$ ) assim como a volatilidade instantânea ( $\sigma X_t$ ).

A solução para esta EDE, para um valor inicial qualquer de  $X$  ( $X_0 > 0$ ) é dada por:

$$X_t = X_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right) \quad (2.3)$$

A variável aleatória  $X$  segue um MB ao longo de uma trajetória exponencial. É fácil verificar que, por ser exponencial,  $X_t$  nunca terá valor negativo.

Esta é uma forma conveniente de representar a evolução de preços de um ativo pois naturalmente surge o conceito de retornos logarítmicos. O log-retorno de  $X$  é dado por  $r_t = \ln(X_t/X_0)$  de onde inferimos que se o processo de formação de preço de um ativo segue um MBG, então seus log-retornos serão normalmente distribuídos com média  $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$  e volatilidade  $\sigma$  em uma unidade de período considerado. Se escalarmos o período de tempo considerado para  $T$ , temos então que os retornos logarítmicos do ativo  $X$  seguem a seguinte distribuição normal:

$$r_T \sim \phi \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right) \quad (2.4)$$

Abaixo apresentamos 5 realizações de um MBG com valor de deriva  $\mu = 0,6\%a.p.$  e variância  $\sigma^2 = 1\%a.p.$ .

```
t <- 0:500
m <- 5 # Numero de simulacoes
mc_names <- paste0("Sim", seq_len(m)) # Nomes das simulacoes
sigma2 <- 0.01
mu <- 0.006 # c(0.098, 0.099, 0.1, 0.101, 0.102) / 10
brown_t <- matrix(nrow = length(t), ncol = m)
# MC Simulation
set.seed(1234567)
for (i in seq_len(m)) {
  log_ret <- rnorm(length(t) - 1, mu - (sigma2 / 2), sqrt(sigma2))
  brown_t[, i] <- c(1, cumprod(exp(log_ret)))
}
```



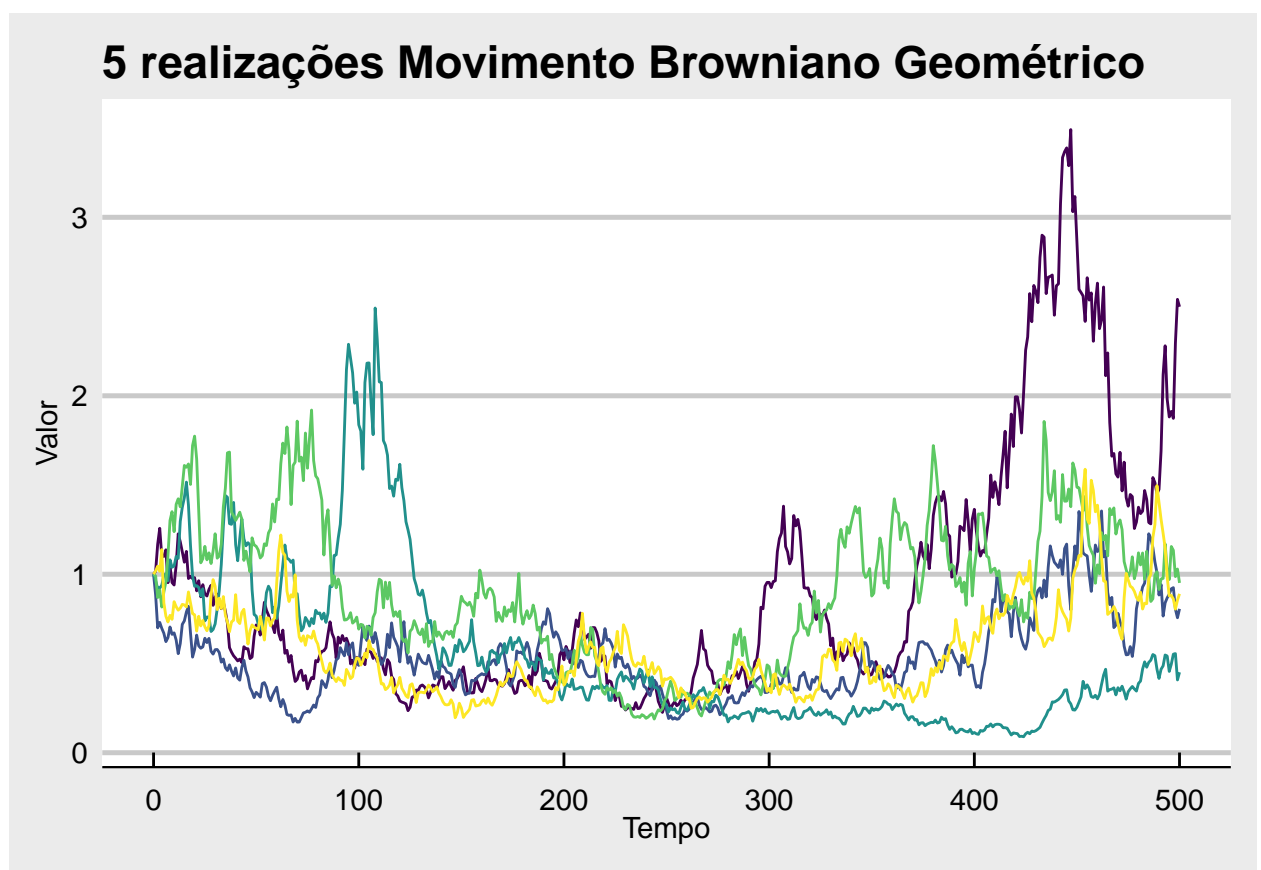
```

}

colnames(brown_t) <- mc_names
mb <- as.tibble(cbind(t, brown_t)) %>%
  gather(key = sim, value = value, -t)

ggplot(mb, aes(x = t, y = value, color = sim)) +
  geom_line() +
  labs(title = "5 realizações Movimento Browniano Geométrico",
       x = "Tempo",
       y = "Valor") +
  guides(color = FALSE) +
  scale_y_continuous(breaks = 0:10) +
  scale_color_viridis_d() +
  theme_economist_white()

```



O Movimento Browniano Geométrico aqui demonstrado serve de base para o famoso modelo **Black & Scholes** de precificação de opções, o qual assume que o ativo subjacente à opção (por exemplo, a ação de uma empresa) tem seu preço formado por um processo MBG.



## Capítulo 3

# Modelo Black-Scholes-Merton

Neste capítulo desenvolveremos o modelo para precificação de opções do tipo europeias proposto Black and Scholes (1973) e posteriormente expandido por Merton (1976). A derivação deste modelo se baseia nos conceitos apresentados sobre processos estocásticos do Capítulo 2.

Antes de entrar na modelagem desenvolvida pelos autores acima citados, iremos tratar de algumas definições essenciais, como por exemplo a precificação de ativos em um mundo neutro ao risco (*risk neutral valuation*) e portfólio de replicação (*replicating portfolio*), que são largamente utilizados na precificação de quaisquer derivativos, e não somente opções.

### 3.1 Portfólio de replicação

Suponha que se deseja precificar uma opção de compra sobre uma ação, vamos denotar o preço desta *call* de  $f_t$ . Sabemos que na data de expiração,  $T$ , da opção de compra seu preço será:  $f_T = \max(S_T - K, 0)$ , onde  $S_T$  é o preço da ação subjacente na data  $T$  e  $K$  é o preço de exercício da opção. Podemos criar um portfólio que envolva um ativo livre de risco, com preço  $B_t$  e a ação objeto do derivativo,  $S_t$ , que recrie o mesmo valor de pagamento que a opção na data de expiração. Ou seja, criamos o portfólio de replicação  $P_t = \Delta S_t + bB_t$ , no qual devemos escolher os valores de  $\Delta$  e  $b$  de tal forma que  $f_T = P_T$ .

De fato, para apenas um período a frente, podemos tomar emprestado a taxa de juros livre de risco<sup>1</sup>,  $r$  um valor igual ao preço corrente da ação,  $S_0$  e comprá-la, ao mesmo tempo em que se “trava” (faz *hedge*) deste portfólio vendendo a opção. O lucro desta operação em  $T$  deve ser zero, pois é um portfólio travado. Com estas premissas é possível calcular o preço do prêmio da opção a ser cobrado no período inicial para que o valor esperado da operação como um todo seja zero.

Este portfólio formado pela venda do ativo livre de risco e compra do ativo objeto é denominado *portfólio de replicação*, pois, ele fornece um fluxo de caixa igual ao derivativo que buscamos precificar. Ao adicionarmos ao portfólio de replicação a venda (ou seja, o negativo) do derivativo, temos um portfólio *hedgado*, onde não existe mais incerteza com relação ao seu retorno esperado.

---

<sup>1</sup>Esta é uma suposição do modelo, pode não ser verdade para algum investidor qualquer mas se for para algum outro investidor representativo, o princípio de ausência de arbitragem passa a valer, uma vez que este segundo investidor explorará o mercado e levará o preço do derivativo para o resultado requerido.

### 3.2 Precificação neutra ao risco

A metodologia de precificação de derivativos dentro do *mundo neutro ao risco*<sup>2</sup> é o carro-chefe das metodologias para se avaliar estes instrumentos. O princípio de precificação neutra ao risco afirma que um derivativo pode ser valorado através das seguintes suposições:

- o retorno esperado do ativo objeto é a taxa livre de risco, e
- o valor esperado do derivativo na expiração deve ser descontado pela taxa livre de risco para trazê-lo a valor presente.

É claro que o mundo real não é neutro ao risco, entretanto uma das provas que a metodologia faz é que, ao precificarmos um derivativo de forma relativa ao preço do ativo objeto, a precificação neutra ao risco encontra o mesmo valor para o derivativo que uma metodologia que leve em conta as preferências ao risco dos investidores. Entretanto, precificar um derivativo assumindo neutralidade ao risco é muito mais simples que encarar um modelo baseado no mundo real.

De fato a neutralidade ao risco soa um tanto quanto estranha a primeira vez. Porém, ela tem uma explicação lógica de sua validade nas circunstâncias em que é desenvolvida. Se os investidores forem avessos ao risco, por exemplo, os retornos esperados para o ativo objeto terão embutidos um prêmio pelo risco. Acontece que este prêmio pelo risco também deverá estar na taxa de desconto do valor esperado de pagamento do derivativo, de forma que este prêmio ao risco é cancelado.

É comum na literatura de derivativos encontrarmos os termos mundo-P e mundo-Q. O mundo-P se refere ao mundo real, com probabilidades P reais de ocorrência de eventos, enquanto que o mundo-Q é o mundo neutro ao risco, onde as probabilidades Q são ajustadas (tecnicamente suas medidas são alteradas) para refletir esta neutralidade. No mundo-Q é comum denotarmos o valor esperado de alguma variável aleatória com a seguinte notação:  $\mathbb{E}_Q[\cdot]$ .

Assim, a precificação de derivativos supondo um mundo neutro ao risco chega no preço correto para todos os mundos.

### 3.3 Encontrando a equação de Black-Scholes

Vamos partir do princípio que nossa ação, objeto da opção que desejamos precificar, siga um MBG conforme descrito no capítulo anterior. Portanto, o preço de nossa ação no período  $t$  deve observar a seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t + \sigma S_t dW_t \quad (3.1)$$

onde  $dW_t$  é o movimento Browniano, ou processo de Wiener.

Esta equação resume as principais hipóteses do modelo Black&Scholes de precificação de opções, são elas:

- O preço do ativo objeto é um processo estocástico e segue uma distribuição log-normal;
- O retorno esperado ( $\mu$ ) e a volatilidade ( $\sigma$ ) deste ativo são **constantes**, tanto no tempo quanto com relação ao próprio nível de preço do ativo objeto.

Ademais destas hipóteses, temos aquelas relacionadas a racionalidade dos mercados e ao princípio de ausência de oportunidades de arbitragem. Estas hipóteses nos levam a validade do mundo neutro ao risco e portanto, a resolução do modelo da forma como descreveremos abaixo.

Nossa opção será descrita por um portfólio de replicação, e se tomarmos seu preço no instante  $t$ , então a opção também deve seguir uma equação diferencial estocástica da forma:

<sup>2</sup>A precificação dentro do mundo neutro ao risco mereceria um, ou mais, *posts* por si só. Aqui lançaremos apenas os principais resultados que nos permitem encontrar o modelo de B&S.

$$df_t = \Delta dS_t + b dB_t \quad (3.2)$$

aqui  $dB_t$  representa a variação do ativo livre de risco (dinheiro) dentro de um período de tempo  $dt$ . Sabemos que o valor do ativo livre de risco não envolve incerteza alguma, é determinístico, e seu rendimento é a taxa de juros livre de risco. Assim, para uma taxa continuamente composta  $r$  uma unidade de  $B$  evolui através de  $B_t = e^{rt}$ , logo:

$$dB_t = rBdt \quad (3.3)$$

De acordo com o lema de Ito o diferencial de uma função que dependa do tempo e de um processo estocástico pode ser encontrado da seguinte forma:

$$df_t = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dS^2 \quad (3.4)$$

onde  $dS^2$  é a variação quadrática de nosso processo  $S_t$  que é um movimento browniano geométrico, logo  $dS^2 = \sigma^2 S^2 dt$ .

Igualando as equações (3.2) e (3.4), fazendo as devidas substituições trazidas pelas equações (3.1) e (3.3) e por fim rearranjando os termos, chegamos na seguinte relação:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 - \Delta \mu S - rbB \right) dt + \left( \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S - \Delta \sigma S \right) dW = 0 \quad (3.5)$$

que para ser válida para todo  $t$ , cada termo entre parênteses deve ser igual a zero simultaneamente. Rapidamente chegamos aos valores necessários de nosso portfólio de replicação.

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S} \quad (3.6)$$

$$rbB = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \quad (3.7)$$

Através da equação (3.2), integrando-a, chegamos na relação  $bB = f - \Delta S$  e pré-multiplicando ambos os lados por  $r$  temos então que:

$$rbB = r(f - \Delta S) \quad (3.8)$$

Finalmente, igualando as equações (3.7) e (3.8) e substituindo o valor de  $\Delta$  encontramos a famigerada equação diferencial parcial - EDP - de Black&Scholes:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS \frac{\partial f}{\partial S} - rf = 0 \quad (3.9)$$

## 3.4 Solução analítica

A equação possui diferentes formas de resolução<sup>3</sup>, a precificação do derivativo irá depender da forma que resolvermos a equação (3.9). O Modelo Black&Scholes é famoso por conseguir precificar opções call e put europeias, onde a resolução da equação fará uso dos *payoffs*. Para uma call:

<sup>3</sup>Uma demonstração completa de como encontrar a solução para a EDP de Black&Schole pode ser encontrada em <https://planetmath.org/AnalyticSolutionOfBlackScholesPDE>

$$f(S, T) = \max(S - K, 0) \quad (3.10)$$

Já no caso de uma put:

$$f(S, T) = \max(K - S, 0) \quad (3.11)$$

Onde:

- T é a data de vencimento da opção,
- K é o preço de exercício, e
- S é o preço do ativo subjacente.

Utilizando os *payoffs* dados nas equações (3.10) e (3.11), e resolvendo a EDP de Black&Scholes (3.9), iremos obter o modelo para se precificar os derivativos citados.

Para uma Call temos que:

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (3.12)$$

Já para um Put chegamos a:

$$P(S, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (3.13)$$

onde:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad (3.14)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t} \quad (3.15)$$

É a partir das equações (3.12) e (3.13) que se obtém as chamadas gregas, que são as sensibilidades do preço do derivativo em relação a alterações nos parâmetros do modelo. Explicaremos as gregas em maiores detalhes mais adiante.

### 3.5 Paridade compra e venda

Agora vamos falar um pouco sobre a paridade entre opções de compra e venda, algo que nos ajuda a precificar algum derivativo quando já conhecemos o preço de outro derivativo com especificações semelhantes.

Assumindo ausência de oportunidade de arbitragem, com um ativo subjacente que tenha liquidez, iremos verificar a paridade Call-Put que define uma relação entre os preços de uma call e put do tipo europeu, desde que possuam o **mesmo tempo de maturidade** e **preço de strike**. Aqui possuiremos menos premissas que o modelo Black&Scholes e premissas mais simples, tal relação poderá ser utilizada para encontrar o valor justo de uma opção. Com a ausência de arbitragem observe que dois portfólios que sempre geram o mesmo payoff em um instante T devem ter o mesmo valor em qualquer instante intermediário.

Imagine um primeiro portfólio onde o investidor compre uma opção de compra C, a qual possui tempo de maturidade T e preço de strike K, sobre algum ativo subjacente que chamaremos de S e compre um título B que seu valor no período T seja de \$30. E um segundo portfólio onde tenha o próprio ativo subjacente S que esteja sendo negociado a \$25 e compre uma put P com um preço de strike K e maturidade T.

Estes são portfólios de replicação entre si, eles terão exatamente o mesmo *payoff* no período T, e na ausência de arbitragem, podemos calcular seus retornos através da precificação neutra ao risco. Teremos uma relação onde os valores dos nossos portfólios serão:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_t + P_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_t + B_t]; \quad t \leq T \quad (3.16)$$

Como estamos em um mundo neutro ao risco,  $P_t$  e  $C_t$  são os preços da put e da call dados pelo modelo B&S, enquanto  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B_t]$  se resume a  $Ke^{-r(T-t)}$ , ou seja, a posição atual em ativo livre de risco deve ser o valor presente do strike das opções. O preço do subjacente é o próprio preço atualmente observado.

Como  $S_t$  e  $B_t = Ke^{-r(T-t)}$  são conhecidos, se no mercado existir um preço  $C_t$  então podemos calcular  $P_t$  e vice-versa. Esta é a essência da paridade compra e venda.

Observe que se essa relação não for mantida, teremos arbitragem: Suponhamos que  $S_t > B_t$  e que a put esteja com um prêmio mais alto que a call no entanto ambos possuem um preço de strike \$30 e maturidade T, que os prêmios sejam \$20 e \$15 respectivamente teremos então:  $30 + 20 = 15 + 25$ , nesse caso teremos  $50 \neq 40$ , então vende-se o que está mais caro, no caso a ação e a put e compraria o título e a call, chegando ao um lucro de  $50-40=10$ , de \$10 sem risco. Observe que independentemente de a ação subir acima ou cair abaixo do strike, o lucro obtido nesta operação será sempre de \$10.

## 3.6 As Gregas

As letras gregas utilizadas no mercado de opções são usadas para denotar as sensibilidades do preço da opção com relação a variação de alguma das variáveis do modelo, a seguir entraremos em detalhes sobre as principais gregas usadas para a análise de opções.

### 3.6.1 Delta

Já havíamos definido o delta anteriormente ao encontrarmos a EDP de Black&Scholes, isto é:

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S} \quad (3.17)$$

O delta mede a taxa com que o preço da opção muda conforme o valor do ativo subjacente oscila, seu valor pode variar entre 1 e 0 para call e entre 0 e -1 para put.

Exemplo: imagine uma opção de compra de 100 ações que possui um delta de 0,72, caso o ativo subjacente aumente \$1 o valor da opção aumentará \$72 (pois representa 100 ações), e caso o valor do ativo subjacente diminua o preço da opção diminuirá \$72.

O mesmo acontece com opções de venda, só que de uma forma inversamente proporcional pelo seu delta ser negativo. Uma opção de venda de 100 ações que possui um delta de -0,40 vai valer menos \$40 caso o preço do seu ativo subjacente aumente \$1, e vai valer mais \$40 caso o preço do seu ativo subjacente diminua \$1.

O strike da opção influencia o delta diretamente, quanto mais in-the-money for uma opção, call ou put, maior será o seu delta em valor absoluto, e quanto mais out-the-money, menor será o módulo de seu delta.

### 3.6.2 Gamma

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \quad (3.18)$$

O gamma mede a taxa com que o delta muda a cada oscilação do preço do ativo subjacente, seu impacto aumenta conforme o valor atual do ativo se aproxima do strike, sendo responsável pela convexidade do valor da opção. Opções de alto gamma são chamadas de explosivas, uma vez que mesmo pequenas variações no preço do ativo se traduzem em grandes oscilações no preço da opção.

### 3.6.3 Theta

$$\Theta = -\frac{\partial f}{\partial \tau}, \quad \tau = T - t \quad (3.19)$$

O Theta é uma taxa que mede o efeito do tempo sobre o preço da opção. Como as opções tem um maior valor de acordo com a quantidade de tempo até a data de vencimento, seu valor também diminui conforme o tempo passa, theta é a letra que mede essa variação (que sempre é negativa). O valor de theta representa a quantidade de dinheiro perdida no prêmio da opção a cada dia que passa.

### 3.6.4 Vega

$$\mathcal{V} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (3.20)$$

O vega é uma taxa que mede o efeito da mudança da volatilidade no preço da opção. Seu valor é praticamente constante em opções com a mesma data de vencimento, esse valor aumenta em datas de vencimento mais distantes devido ao maior espaço de tempo em que a volatilidade atua, devido ao maior intervalo de tempo que há para ocorrer mudanças nos preços.

### 3.6.5 Rho

$$\rho = \frac{\partial f}{\partial r} \quad (3.21)$$

O rho é uma taxa que mede a sensibilidade do preço da ação em relação à taxa livre de risco, caso o valor de rho determinada opção seja 0,7, para cada aumento de 1% da taxa livre de risco o valor da opção aumentará 0,7%. Essa taxa influi principalmente no preço de opções com uma data de vencimento extremamente distante, não afetando muito o preço de opções cuja data de vencimento é próxima.



## Capítulo 4

# Smile de Volatilidade

A volatilidade instantânea,  $\sigma$ , do ativo subjacente é a única variável no modelo B&S que não pode ser diretamente observada. De fato, a volatilidade (ou equivalentemente a variância) de um ativo é dita uma variável **latente**. Sabemos que ela existe e possui algum valor no processo gerador, o processo pelo qual os preços são formados, porém não conseguimos observá-la diretamente, apenas estimá-la. Uma das formas de estimação de volatilidade pode ser a partir de dados históricos, mas várias outras formas existem, entre elas processos GARCH, volatilidade realizada, volatilidade estocástica, etc.

Uma vez que a volatilidade não pode ser diretamente observada, a prática comum no mercado é fazer o caminho inverso. Considerar os preços de mercado para as opções como dado, e a partir do modelo B&S inverter a equação de preço da Call ou Put para encontrar a volatilidade deste modelo que é compatível com os preços de mercado. A esta volatilidade encontrada damos o nome de **volatilidade implícita**.

Portanto, o smile de volatilidade que tratamos neste post é na verdade um gráfico entre a volatilidade implícita, retirada de opções Européias (baunilhas, do inglês vanilla options) a partir do modelo B&S, contra os *strikes* destas opções.

### 4.1 Reparametrizando B&S e definição de moneyness

Nem sempre é interessante plotar o smile contra os *strikes* propriamente ditos, uma forma de avaliar o quanto uma opção está “dentro, fora ou no dinheiro” pode ser a grega Delta ou então o chamado *moneyness* (por favor, se alguém tiver uma boa tradução para este termo, deixe nos comentários). Tradicionalmente a medida de *moneyness* é a relação  $K/S$ , ou seja o strike contra o preço corrente do subjacente. Porém existem outras definições mais interessantes para se trabalhar, entretanto, antes devemos fazer uso de algumas definições e vamos reparametrizar as expressões  $d1$  e  $d2$  do modelo B&S.

Lembrando que em precificação de opções estamos no mundo neutro ao risco, vamos definir o valor *forward*,  $F$  do subjacente como o valor corrente composto pela taxa livre de risco até a maturidade da opção, ou seja:

$$F = e^{r\tau} S \quad (4.1)$$

A **volatilidade (implícita) total** pode ser definida como a volatilidade reescalada pela raiz do tempo, que nos dá uma informação da volatilidade esperada para o subjacente do período corrente até a maturidade. Da mesma forma, a **variância total**. Denotando a volatilidade total por  $\theta$  e a variância total por  $w$ , temos:

$$\theta = \sigma_{imp} \cdot \sqrt{\tau} \quad (4.2)$$

e

$$w = \sigma_{imp}^2 \cdot \tau \quad (4.3)$$

Vamos também definir a medida *forward log-moneyness* e denotá-la por  $k$ . Esta será a medida de *moneyness* que iremos utilizar ao longo deste e de outros artigos, portanto iremos utilizar este termo para designar o *forward log-moneyness* a não ser que expresse de forma contrária no texto.

$$k = \ln\left(\frac{K}{S}\right) - r\tau = \ln\left(\frac{K}{F}\right) \quad (4.4)$$

Logo, o *strike* está relacionado ao *moneyness* de forma que:  $K = Fe^k$ .

Podemos agora reparametrizar as expressões  $d1$  e  $d2$  do modelo B&S de forma que serão mais facilmente trabalhadas em modelos de volatilidade. Lembrando destas expressões que já foram apresentadas no Capítulo 3:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad (4.5)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \quad (4.6)$$

Substituindo as expressões para *forward log-moneyness* e volatilidade total nas definições acima temos as novas parametrizações para  $d1$  e  $d2$ :

$$d_1 = -\frac{k}{\theta} + \frac{\theta}{2} \quad (4.7)$$

$$d_2 = -\frac{k}{\theta} - \frac{\theta}{2} = d_1 - \theta \quad (4.8)$$

Retomando o valor da opção do tipo Call no modelo B&S, podemos reescrever sua fórmula de apreamento da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C(K, \tau) &= SN(d1) - Ke^{-r\tau}N(d2) \\ e^{r\tau}C(K, \tau) &= FN(d1) - KN(d2) \\ C_B &= F[N(d1) - e^k N(d2)] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Esta equação é conhecida como a forma de Black de precificação (*Black Call price formula*), que relaciona os valores *forward* da opção (também conhecido como valor não descontado), do subjacente e do *strike*. Esta formulação é particularmente útil quando formos extrair a distribuição neutra ao risco do subjacente que está implícita nos preços de mercado das opções.

## 4.2 Características de smiles de volatilidade

Caso o modelo de Black, Schole e Merton estivesse em acordo com a realidade, e os ativos tivessem seus preços formados a partir de um verdadeiro MBG, a volatilidade implícita seria uma constante. O gráfico do smile de volatilidade seria uma reta horizontal, com a mesma volatilidade para qualquer nível de *moneyness* e se considerarmos a superfície toda (que leva em conta os diversos tempos para expiração) esta seria paralela ao domínio  $(k, \tau)$ . Não estaríamos escrevendo (e você lendo) este artigo se este fosse o caso...

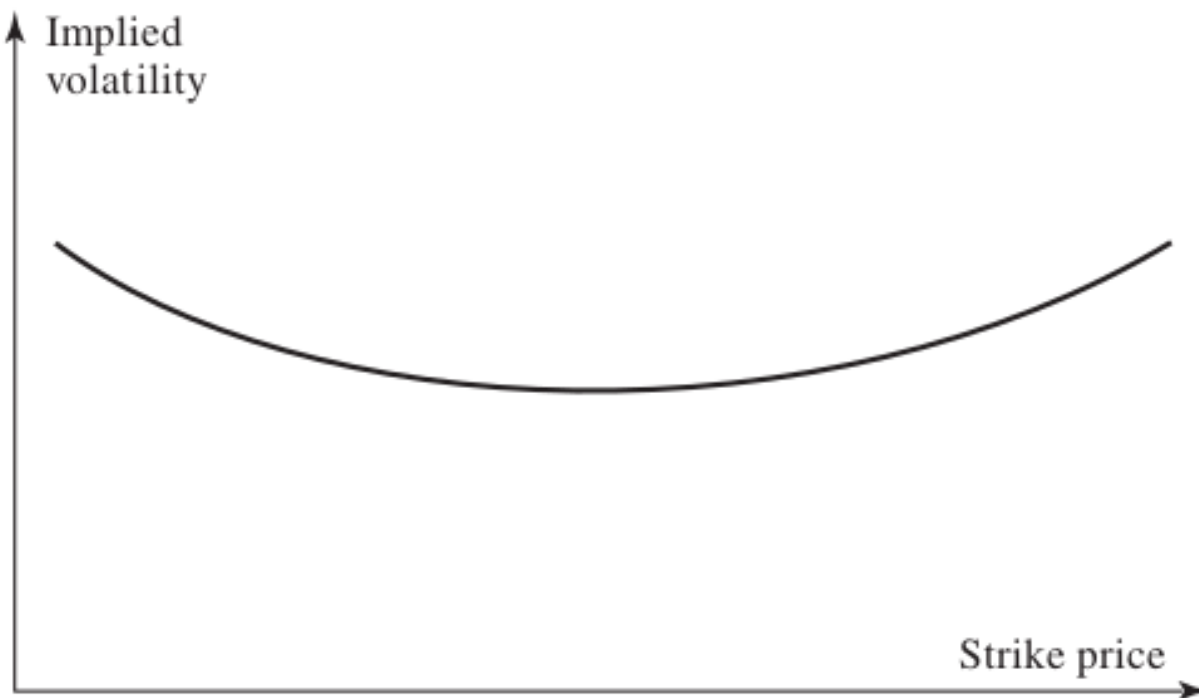


Figura 4.1: Smile típico de um mercado cambial.

O fato é que o modelo B&S é um modelo muito restritivo, com inúmeras suposições que não se verificam no mundo real e que por conseguinte, tornam os resultados do modelo pouco acurados. Entretanto este é um modelo muito conhecido, de fácil assimilação por parte dos agentes de mercado e que virou a língua franca nos mercados de derivativos. Se todos os *traders* conversarem em termos do modelo B&S, todos se entenderão, mesmo que internamente cada um possua seu próprio modelo de apreçamento.

Entre as características tipicamente observadas em smiles (e superfícies) de volatilidades pode-se citar:

- As volatilidades implícitas variam conforme o *strike* e prazo de expiração
- Smiles apresentam *skew*. Maior inclinação em uma das asas, representando uma maior probabilidade daqueles *strikes* acontecerem
- Smiles de equity tipicamente são negativos
- Mercados diferentes apresentam padrões de smile diferentes

#### 4.2.1 Mercados cambiais

Opções sobre moedas possuem tipicamente um smile de volatilidade conforme mostrado na figura 4.1 abaixo. A volatilidade implícita é relativamente baixa para opções ATM. Esta torna-se progressivamente maior quando a opção se move para dentro do dinheiro ou para fora.

Caso a distribuição dos preços do ativo subjacente, neste caso uma taxa de câmbio fosse perfeitamente log-normal como no modelo B&S, o smile não teria esta curvatura. Desta forma podemos afirmar que o mercado, ao precificar as opções, acredita que a distribuição deste ativo possui caudas com maior densidade que supõe a log-normal, existem maiores probabilidades de retornos muito baixos ou muito altos.

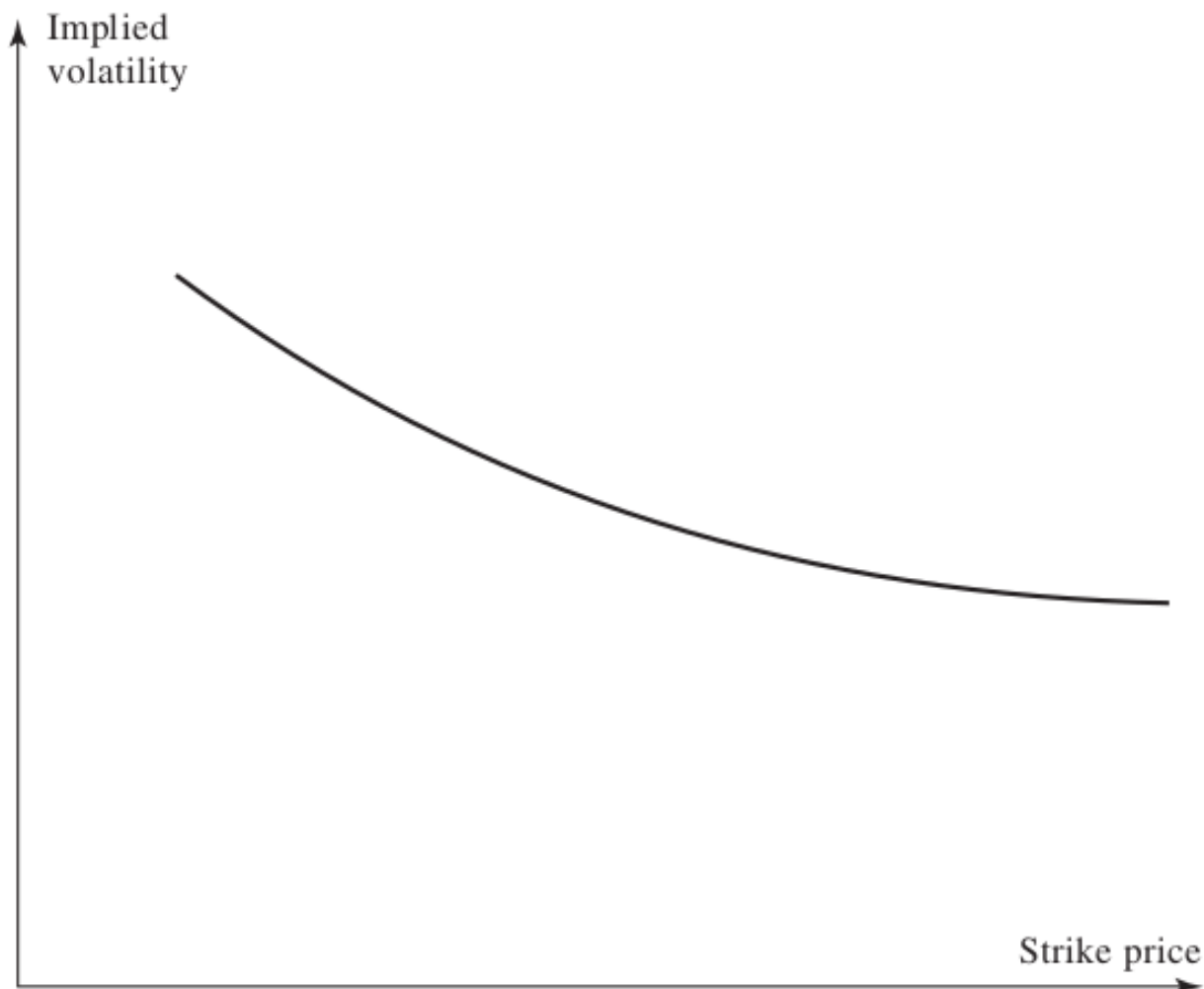


Figura 4.2: Smile típico de uma ação ou índice de ações.

#### 4.2.2 Mercados de *equities*

Nos mercados de *equities*, ações, índices de ações e ETFs, por exemplo, o smile apresenta uma característica de assimetria (*skew*, em inglês) negativa. A asa esquerda (parte onde as puts estão fora do dinheiro) apresenta valores de volatilidade implícita muito maiores que suas contrapartes no lado das calls. Este comportamento reflete a percepção de mercado de uma maior probabilidade de grandes perdas nas ações que altos ganhos, gerando portanto, uma distribuição de preços assimétrica. Como existe uma maior probabilidade de perdas extremas, o seguro para estas, ou seja, uma put é relativamente mais cara que uma call.

### 4.3 Smile como forma de precificação

Analisando a equação de B&S com a parametrização para  $d1$  e  $d2$  dada no início deste artigo é possível verificar que existe uma relação direta entre volatilidade implícita e preço de uma opção, seja esta uma call ou put.

Como  $d1$  é estritamente crescente em  $\theta$  e  $d2$  é estritamente decrescente e ao mesmo tempo o preço de uma opção é crescente em  $d1$  e decrescente em  $d2$ , logo, temos uma relação direta entre o preço de uma opção e sua volatilidade implícita para uma dada maturidade. Em outras palavras, em um smile, tudo o mais constante, quanto maior a volatilidade implícita maior o preço da opção naquele *strike*.

Outra forma de verificar esta relação é perceber que a grega Vega, que é calculada da mesma forma para calls e puts, é sempre positiva. Ou seja, um aumento no valor da volatilidade sempre leva a elevações no preço de uma opção.

Desta forma é normal entre os praticantes de mercado fazer a precificação de opções em termos de “pontos de volatilidade” e não em valores monetários propriamente ditos. Isto porque o modelo B&S, apesar de não ser o modelo correto (nenhum é) para a precificação de opções, é conhecido e de fácil entendimento para todos. Então todos os praticantes podem fazer suas cotações em termos de volatilidades implícitas, que são extraídas de opções baunilhas com o modelo B&S, e somente na hora de fechar um negócio e liquidar o pagamento, o preço efetivo a ser pago é acordado entre as partes.

## 4.4 Estrutura a termo

O mercado precifica a volatilidade implícita de forma que esta dependa também do tempo até expiração, bem como do preço de exercício, agregando uma segunda dimensão ao smile e transformando-o na famigerada **superfície de volatilidade implícita**.

A volatilidade implícita tende a ser uma função crescente da maturidade quando as volatilidades de curto prazo são historicamente baixas e função decrescente da maturidade quando as volatilidades de curto prazo são historicamente altas. Isso porque existe uma expectativa de reversão a uma média de longo prazo embutida na volatilidade. Esta característica é explorada explicitamente por alguns modelos de volatilidade, como em Heston (1993).

As superfícies de volatilidade combinam smiles com a estrutura a termo de volatilidade para tabular valores apropriados para precificar uma opção com qualquer preço de exercício e prazo de expiração.

Da mesma forma como a curva de juros em um dado momento é uma descrição concisa dos preços dos títulos negociados naquele mercado, assim, para um ativo subjacente em particular em determinado momento, a superfície de volatilidade implícita fornece uma descrição resumida de seu mercado de opções. Considerando que os rendimentos dos títulos são diferenciados pelo seu tempo até o vencimento, as opções são diferenciadas por seu tempo até a expiração e o *strike*, logo requerem uma superfície ao invés de uma curva.

A figura 4.3 demonstra uma superfície de volatilidade implícita do SPX em 15/09/2005, conforme apresentado em Gatheral (2011).

## 4.5 Arbitragem estática

Antes de definir o que é arbitragem estática que pode estar presente em uma superfície de volatilidade (ou na superfície de preço de opções), vamos partir para a intuição por trás desta definição.

O princípio de ausência de arbitragem é dominante na teoria financeira. Este princípio nos informa que não deve existir lucro sem que se incorra em algum tipo de risco, o lucro sempre é a remuneração do investidor que aceitou carregar alguma forma de risco durante o investimento. Portanto, não devem existir perfis de lucro acima da taxa livre de risco (*payoffs* positivos) com probabilidade de 100%.

Primeiro consideramos uma trava de alta com opções do tipo call. Excluindo-se os custos de transação, esta operação sempre oferece um retorno positivo ou zero, conforme a figura 4.4. Por mais que esta estratégia esteja montada fora do dinheiro, sempre existe uma possibilidade de ela ter lucro,  $S_T > K$  e portanto seu preço deve ser sempre maior que zero.

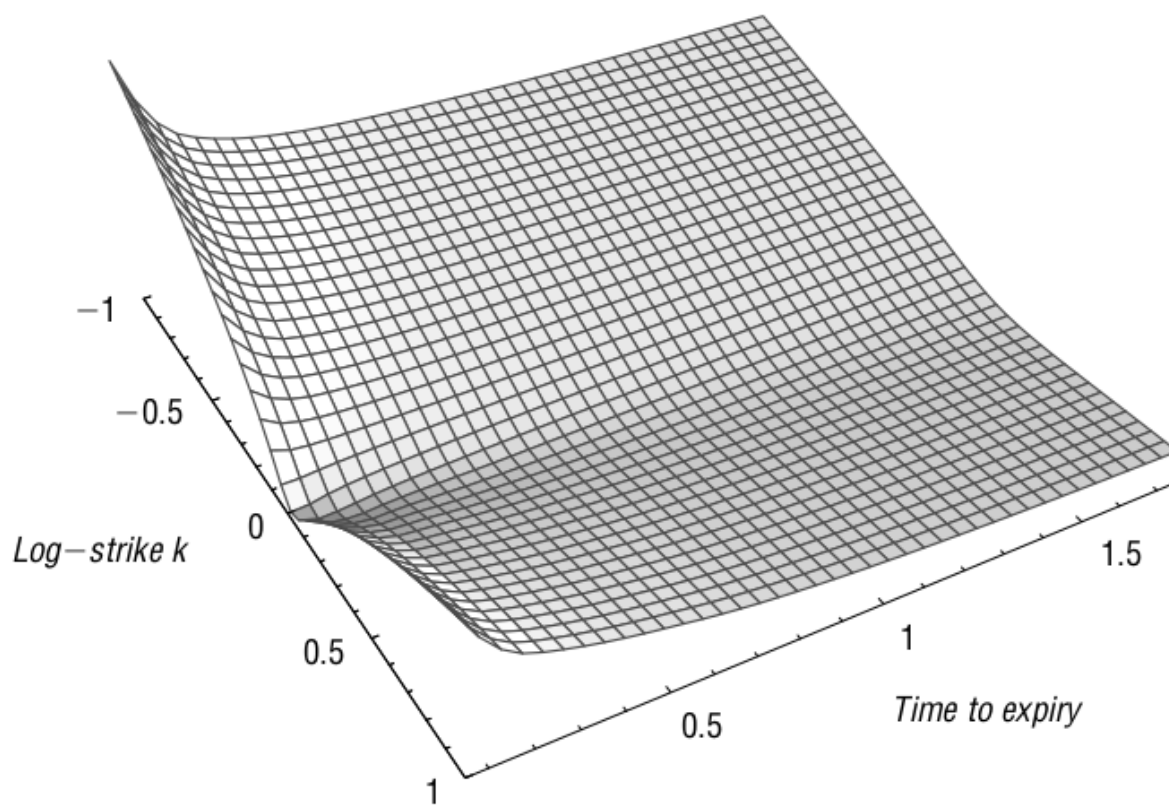


Figura 4.3: Superfície de volatilidade implícita.

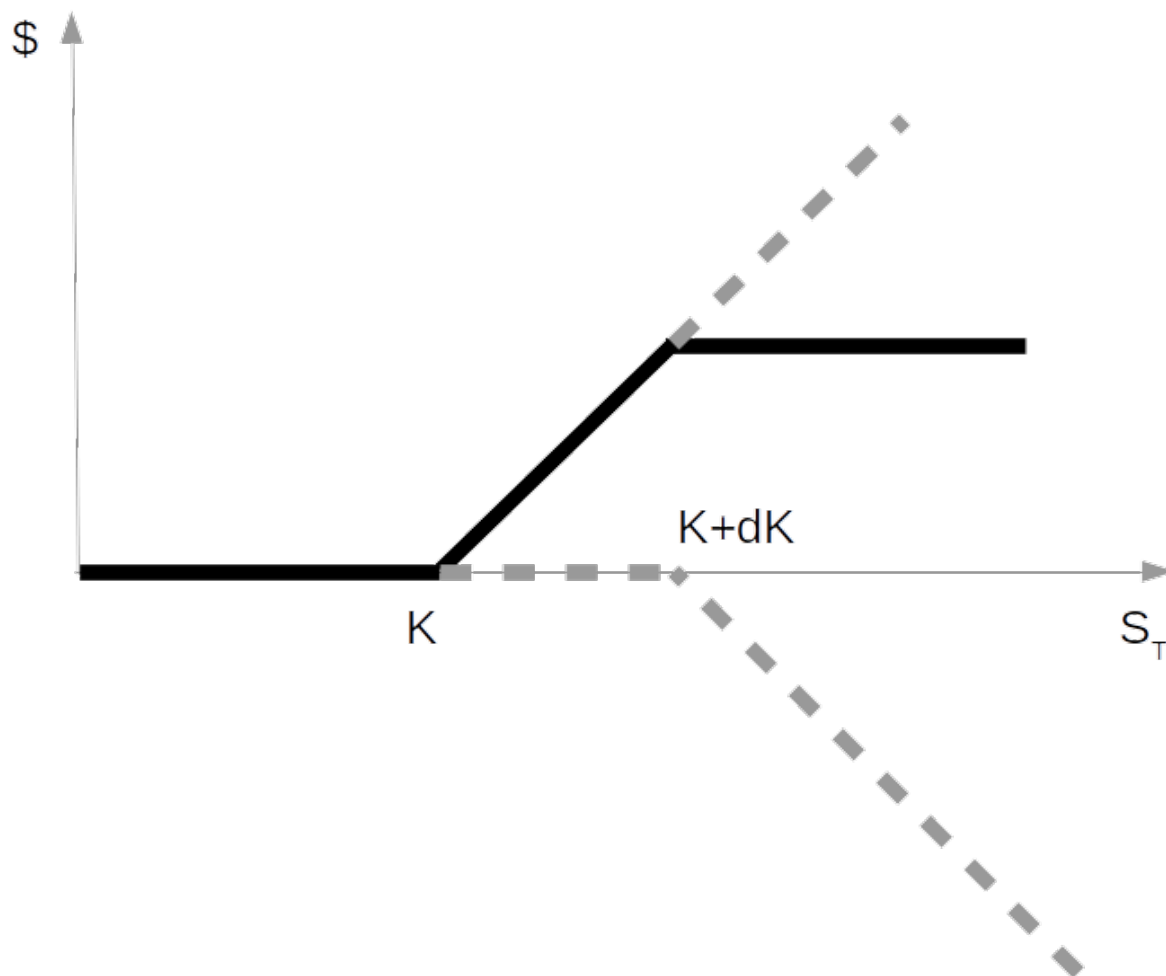


Figura 4.4: Perfil de lucro de uma trava de alta.

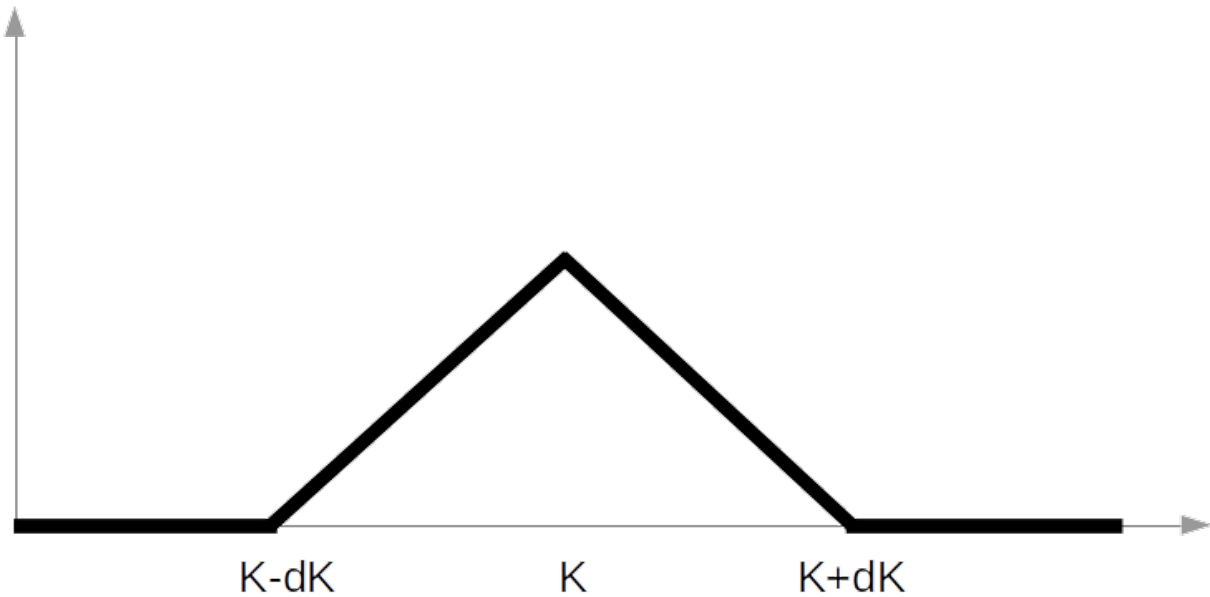


Figura 4.5: Borboleta realizada com calls.

É claro que quanto mais ITM estejam as opções, maior seu preço e quanto mais fora do dinheiro menor será seu valor até o limite inferior zero. Se levarmos a diferença entre os *strikes*,  $dK$  a zero temos que:

$$\frac{\partial C}{\partial K} \leq 0 \quad (4.10)$$

Este é o limite de arbitragem para travas de alta ou, mais conhecido pelo termo em inglês *call spread no-arbitrage* e impõe que os preços das calls devem ser uma função decrescente no *strike*. De forma equivalente e através da paridade compra-venda este limite de arbitragem para as puts é:

$$\frac{\partial P}{\partial K} \geq 0 \quad (4.11)$$

#### 4.5.1 Arbitragem de borboleta

Também deve ser imposta uma restrição na segunda derivada do preço das opções em relação ao *strike*, e esta é conhecida como limite de arbitragem para borboletas. Vejamos porquê.

Considere uma estratégia do tipo borboleta, onde se compra uma quantia de calls no *strike*  $K - dK$ , vende-se duas vezes esta quantia em  $K$  e compra-se novamente um lote em  $K + dK$ , o perfil de lucro desta operação no vencimento está representado na figura 4.5.

Seguindo a mesma linha de raciocínio anterior, como o *payoff* da borboleta é sempre não negativo também deve ser o seu valor para qualquer período anterior a expiração. Se denotarmos  $\pi_B$  o valor da borboleta, então  $\pi_B \geq 0$ .

Agora imagine que escalamos a estratégia de forma que um lote de compras (na venda são dois lotes) seja de tamanho  $1/dK^2$ , o valor para a montagem desta operação deve ser, portanto:



$$\pi_B = \frac{C(K - dK) - 2C(K) + C(K + dK)}{dK^2} \quad (4.12)$$

E se levarmos ao limite em que  $dK \rightarrow 0$ , a equação acima torna-se justamente a segunda derivada do preço da call no *strike*  $K$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C(K)}{\partial K^2} &= \pi_B \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ou seja, os preços das calls são uma função **convexa** nos *strikes*. O mesmo raciocínio pode ser feito para uma borboleta com puts e o resultado será equivalente, o preço das puts também deve ser uma função convexa nos *strikes*.

### 4.5.2 Arbitragem de calendário

Passamos agora a analisar os limites de arbitragem na estrutura a termo da superfície de volatilidade. A arbitragem de calendário normalmente é expressa em termos de monotonicidade dos preços em relação ao período para expiração. Ou seja, quanto maior o prazo de maturidade de uma opção para um mesmo preço de exercício, maior deve ser seu valor.

É fácil de entender este limite com base nas probabilidades de exercício. Como sabemos, em um processo estocástico do tipo MBG a variância do processo cresce conforme a **raiz do tempo**,  $\sqrt{\tau}$ . Quanto maior a variância do ativo subjacente, maior a probabilidade deste alcançar um determinado preço, mais elevado ou não. Assim, seja uma call ou put OTM quanto mais distante estiver seu prazo de maturidade, maior a probabilidade de exercício e portanto, maior seu valor.

Dado que a relação de **volatilidade total** implícita e preço de uma opção também é direta e positiva, conforme demonstrado na Seção 4.3, segue que a volatilidade total deve ser não decrescente no tempo para expiração.

Esta relação pode ser expressa através da seguinte equação para uma call precificada através de B&S:

$$\frac{\partial C_{BS}(k, \theta(\tau))}{\partial \tau} = \partial_\theta C_{BS} \cdot \partial_\tau \theta \geq 0 \quad (4.14)$$

onde  $\partial_\theta C_{BS}$  é a derivada parcial do preço da call em relação a volatilidade total implícita, que já demonstramos ser positiva e  $\partial_\tau \theta$  é a derivada parcial da volatilidade total implícita em relação ao tempo para maturidade que, portanto, deve ser maior ou igual a zero para obedecer a restrição imposta ao preço da call.

## 4.6 Limites de inclinação

Se mantivermos a volatilidade implícita constante para todos os *strikes*, os preços das calls no modelo B&S devem ser decrescentes. Por outro lado, para um *strike* fixo, o preço de uma call se eleva à medida que a volatilidade implícita aumenta. Suponha por um momento que a volatilidade implícita varia com o *strike* como é o caso nos smiles. À medida que o *strike* aumenta, se a volatilidade implícita aumentar muito rapidamente, seu efeito sobre o preço da call pode mais que compensar o declínio no preço devido a elevação do preço de exercício e, assim, levar a um aumento líquido no preço da opção. Isso violaria o requisito de que  $\partial C / \partial K \leq 0$  e, portanto, leva a um limite superior na taxa em que a volatilidade implícita pode aumentar com o *strike*.

Novamente, o mesmo raciocínio pode ser imposto para o lado das puts. A volatilidade implícita não pode se elevar tão rapidamente quando os *strikes* se reduzem de forma que uma put de *strike* menor tenha valor mais elevado que outra que esteja mais próxima do dinheiro.

Finalmente, um sumário dos limites impostos a uma superfície de preços de opções (calls no caso apresentado), que implicam em limites para a superfície de volatilidade é apresentado abaixo<sup>1</sup>:

1.  $\partial_\tau C \geq 0$
2.  $\lim_{K \rightarrow \infty} C(K, \tau) = 0$
3.  $\lim_{K \rightarrow -\infty} C(K, \tau) + K = a, \quad a \in \mathbb{R}$
4.  $C(K, \tau)$  é convexa em  $K$
5.  $C(K, \tau)$  é não-negativa

## 4.7 Distribuição implícita

O modelo B&S é baseado na suposição que o ativo subjacente segue uma distribuição log-normal em seus preços. Caso esta suposição fosse de fato realizada no mercado, o smile de volatilidade seria uma reta completamente horizontal, não haveria variação na volatilidade implícita conforme o preço de exercício. Entretanto, esta não é a realidade dos smiles e podemos fazer a pergunta inversa portanto, qual a distribuição neutra ao risco que está implícita no smile de volatilidade?

Certamente não é uma log-normal. Na verdade, a densidade da distribuição que está implícita em um smile nada mais é que a convexidade deste smile, ou seja, sua segunda derivada em relação ao *strike*. Esta distribuição implícita também é por vezes chamada de RND (*risk neutral density*) e é muito útil para fazer a precificação de outras opções que não são observadas no smile ou extrair probabilidades de ocorrência de eventos precificadas pelo mercado.

Pode-se obter este resultado a partir da definição do valor de uma call e é conhecido como a fórmula de Breeden and Litzenberger (1978). O valor de uma call é o valor esperado do *payoff* terminal desta call ponderado pela densidade neutra ao risco do subjacente. Ou seja:

$$C(S, t) = e^{-r\tau} \int_0^\infty p(S, t, S_T, T) \max\{S_T - K, 0\} dS_T \quad (4.15)$$

onde  $p(\cdot)$  é a densidade neutra ao risco e estamos supondo uma taxa de juros livre de risco constante durante o período de vida da opção. Como o *payoff* da call é não linear, sendo zero para qualquer valor de  $S_T \leq K$  e igual a  $S_T - K$  quando  $S_T > K$ , podemos escrever esta equação como:

$$C(S, t) = e^{-r\tau} \int_K^\infty p(S, t, S_T, T) (S_T - K) dS_T \quad (4.16)$$

que pode ser rearranjada, com alguma simplificação na notação, da seguinte forma.

---

<sup>1</sup>Retirado de Aurell (2014), p. 25.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial K} &= -e^{-r\tau} \int_K^{\infty} p(S_T) dS_T \\
e^{r\tau} \frac{\partial C}{\partial K} &= \int_{-\infty}^K p(S_T) dS_T \\
e^{r\tau} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} &= p(K) \\
\frac{\partial^2 C_B}{\partial K^2} &= p(K)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Onde usou-se a notação  $C_B$  para denotar a formulação de Black para o preço de uma call. Ou seja, a segunda derivada em relação ao strike do preço não descontado de uma call é a distribuição neutra ao risco do ativo subjacente, e é válida para todos preços de exercício.

Portanto, se desejarmos saber qual a distribuição de probabilidades de preços do ativo subjacente em uma data futura que possua vencimento de opções, basta encontrarmos a convexidade do smile dos preços *forward* daquele vencimento<sup>2</sup>.

## 4.8 Conclusão

O modelo de Black-Scholes-Merton, pode ser considerado a pedra fundamental para a precificação de opções. Entretanto, este modelo apresenta uma série de limitações que fazem com que os praticantes de mercado utilizem outras técnicas neste mercado. Uma destas é o uso do smile de volatilidade e sua interpretação como forma de precificar opções e extrair informações implícitas nos preços.

A assimetria do smile e suas asas informam que as distribuições de probabilidades para o ativo subjacente não são exatamente log-normais, e podem apresentar discrepâncias significativas, especialmente nas caudas da distribuição que muito interessam a gestão de risco, por exemplo.

Este foi um artigo denso, porém com vários conceitos importantes para a compreensão do comportamento da superfície de volatilidade. A estrutura a termo também é existente na volatilidade implícita e está limitada pela ausência de arbitragem do tipo calendário. O smile de volatilidade, que é uma fatia da superfície com prazo de expiração constante, possui suas próprias limitações de forma, com a ausência de arbitragem do tipo borboleta e limitações quanto a inclinação.

Por fim, foi demonstrado como a convexidade do smile de preços fornece a distribuição implícita para os preços do ativo subjacente para a data de expiração das opções.

---

<sup>2</sup>Simples em teoria, muito mais complicado na prática, com diversos problemas para a extrapolação do smile para *strikes* extremos.



## Capítulo 5

# Superfícies de volatilidade

Já mostramos em artigos anteriores, processos estocásticos em finanças, o modelo de Black&Scholes e, como na realidade dos mercados surgem os smiles de volatilidade, uma anomalia não prevista por B&S. Dado que este modelo não pode explicar o surgimento do smile de volatilidade e tampouco sua superfície, o estudo da volatilidade implícita tornou-se uma preocupação central nas finanças. Diversos modelos foram propostos ao longo dos anos, e ainda o são, para buscar conciliar a presença do smile de volatilidade e a natureza estocástica da precificação do ativo subjacente.

Apresentaremos alguns poucos destes modelos.

### 5.1 Modelos estocásticos

Volatilidade estocástica apresenta a noção que a volatilidade instantânea do ativo subjacente também é, por si só, um processo estocástico que pode ser correlacionado com o processo de formação do preço do ativo. O resultado destes modelo é um procedimento livre de arbitragem para a interpolação dos dados de mercado a superfície de volatilidade.

#### 5.1.1 Heston

O modelo de Heston, baseado no trabalho de Heston (1993), assume que o quadrado da volatilidade segue uma equação diferencial estocástica - EDE - do tipo Cox-Ingersoll-Ross - CIR, a qual apresenta características desejáveis do ponto de vista da variância. Abaixo estão as três equações que definem um modelo de Heston:

$$\begin{aligned}dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_1 \\ dv_t &= -\lambda(v_t - \bar{v})dt + \eta\sqrt{v_t}dW_2 \\ d\langle W_1, W_2 \rangle &= \rho dt\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde  $v_t$  é a variância estocástica,  $\lambda$  é o parâmetro que define a velocidade de convergência da volatilidade para seu valor de longo prazo  $\bar{v}$ ,  $\eta$  é a famigerada **volatilidade da volatilidade** e a notação  $d\langle W_1, W_2 \rangle$  indica a covariação entre os movimentos Brownianos padrões  $dW_1$  e  $dW_2$ .

Esta modelagem apresenta uma característica desejável, e até certo ponto, intuitiva para a volatilidade, o retorno a uma média de longo prazo. Empiricamente observamos regimes distintos de volatilidade para os ativos financeiros, em alguns momentos a volatilidade está anormalmente baixa ou durante momentos de estresse no mercado, incrivelmente alta. Porém não faria sentido um modelo onde a volatilidade pudesse

estacionar permanentemente no limite inferior ou então divergir para infinito. O modelo de Heston garante que, mesmo sendo estocástica, a volatilidade não é atraída para estes extremos.

Os preços das calls e puts européias possuem fórmula fechada para seu cômputo através da transformada de Fourier, como apresentado no artigo original. A complexidade destas equações e do método para sua resolução está fora do escopo deste blog, entretanto o leitor aficionado pode encontrar uma demonstração da forma de resolução em Gatheral (2011).

Basta-nos saber que em um *framework* geral de precificação de derivativos, o preço de uma call não descontada (preço de Black) pode ser escrita da seguinte forma:

$$C_B(x, v, \tau) = K [e^x P_1(x, v, \tau) - P_0(x, v, \tau)] \quad (5.2)$$

onde  $x := \ln K/F_t$ .  $P_1$  e  $P_0$  são duas probabilidades na medida neutra ao risco,  $\mathbb{Q}$ . Enquanto  $e^x P_1$  informa o valor esperado do ativo no vencimento dado que a opção está no dinheiro,  $P_0$  representa a probabilidade de ficar dentro do dinheiro na data de expiração.

As probabilidades  $P_j$ ,  $j = 0, 1$  podem ser calculadas através da seguinte equação:

$$P_j(x, v, \tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ \frac{\exp\{C_j(u, \tau)\bar{v} + D_j(u, \tau)v + iux\}}{iu} \right\} du \quad (5.3)$$

onde  $i$  representa o número imaginário  $\sqrt{-1}$  e  $\operatorname{Re}\{\cdot\}$  é apenas a parte real de seu argumento.

Primeiramente vamos definir algumas variáveis auxiliares:

$$\alpha_j = -\frac{u^2}{2} - \frac{iu}{2} + jiu$$

$$\beta_j = \lambda - j\rho\eta - \rho\eta iu$$

$$\gamma = \frac{\eta^2}{2}$$

$$r_\pm = \frac{\beta_j \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma} = \frac{\beta \pm d}{\eta^2}$$

$$d = \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$$

$$g = \frac{r_-}{r_+}$$

Então:

$$C_j(u, \tau) = \lambda \left\{ r_- \tau - \frac{2}{\eta^2} \ln \left( \frac{1 - ge^{-d\tau}}{1 - g} \right) \right\}$$

$$D_j(u, \tau) = r_- \frac{1 - e^{-d\tau}}{1 - ge^{-d\tau}}$$

### 5.1.2 SABR

Este modelo foi apresentado por Hagan et al. (2002) e assume que o preço *forward*,  $F_t$  do ativo subjacente e sua volatilidade instantânea,  $\alpha_t$ , seguem as seguintes EDEs:

$$\begin{aligned} dF_t &= \alpha_t F_t^\beta dW_1 \\ d\alpha_t &= \nu \alpha_t dW_2 \\ d\langle W_1, W_2 \rangle &= \rho dt \end{aligned}$$

onde  $\nu > 0$  é a volatilidade da volatilidade e  $\beta > 0$  é conhecido como o coeficiente de alavancagem.

A interpretação financeira se dá pela seguinte maneira:  $\alpha_t$  determina o nível geral de volatilidade do *forward* no dinheiro,  $\beta$  mede a assimetria do smile sendo as duas escolhas particulares:  $\beta = 1$  correspondendo ao modelo log-normal sem smile e  $\beta = 0$  correspondendo ao modelo normal com um smile irrealista,  $\rho$  também controla a inclinação do smile, quando  $\rho < 0$  uma inclinação negativa típica de *equities* surge e com a opção  $\rho = 0$  produzindo um smile de volatilidade simétrico, por fim,  $\nu$  é uma medida de convexidade. Também é possível verificar que a volatilidade estocástica,  $\alpha_t$  segue uma distribuição log-normal.

Comparado com outros modelos de volatilidade estocástica, o SABR é um dos mais simples e possui aproximações analíticas para o cálculo do preço de opções Europeias. Ele pode ser utilizado para ajustar um smile observado no mercado de forma acurada, entretanto, para ajustar uma superfície completa este modelo sofre com algumas restrições.

### 5.1.3 Bates

Em modelos de difusão como B&S e mesmo Heston, o processo de formação de preço do ativo se comporta como um movimento browniano e a probabilidade de que este preço se mova bruscamente em um curto período de tempo é muito pequena. Assim, em tais modelos, os preços das opções OTM mais curtas são muito inferiores ao que se observa nos mercados reais.

Para endereçar esta deficiência, Bates (1996) amplia o modelo de Heston incluindo saltos no processo de preço do ativo subjacente. Estes modelos, com a inclusão de saltos aleatórios na dinâmica de preços são conhecidos como *Jump-Diffusion*. A dinâmica é especificada pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_1(t) + J_t S_t dN_t \\ dv_t &= -\lambda(v_t - \bar{v})dt + \eta \sqrt{v_t} dW_2(t) \\ d\langle W_1, W_2 \rangle &= \rho dt \end{aligned} \tag{5.4}$$

Muito semelhante, portanto ao modelo de Heston nas equações (5.1), com a diferença da inclusão de um processo de Poisson,  $dN_t$  com intensidade  $\theta$  indicando a probabilidade instantânea de um salto de tamanho unitário.  $J_t$  é o tamanho do salto aleatório e seu logaritmo segue uma distribuição gaussiana:

$$\ln(1 + J) \sim N\left(\ln(1 + \beta) - \frac{1}{2}\alpha^2, \alpha^2\right) \tag{5.5}$$

Este modelo possui fórmulas fechadas para os preços de calls e puts, novamente utilizando-se o método da transformada de Fourier, que podem ser encontrados utilizando o método de Duffie et al. (2000).

### 5.1.4 Volatilidade local

Conforme visto na seção anterior sobre o *smile* de volatilidade, é possível a partir das volatilidades implícitas obter a distribuição neutra ao risco do preço terminal do ativo subjacente. O pesquisador e profissional de mercado Bruno Dupire em seu artigo, Dupire (1994), fez então o seguinte questionamento: dada uma distribuição implícita, existe apenas um processo de difusão<sup>1</sup> que seja consistente com esta distribuição? A resposta obtida foi sim, e deste processo surge a função de volatilidade local,  $\sigma_L(S, t)$ , por vezes também conhecida como função de volatilidade implícita.

A equação de Dupire é apresentada abaixo:

$$\frac{\partial C_B}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma_L^2 K^2 \frac{\partial^2 C_B}{\partial K^2}$$

da qual todos os termos podem ser obtidos a partir dos dados de mercado de uma superfície de volatilidade, com exceção é claro, da função de volatilidade local  $\sigma_L$  que poderá ser calculada. Esta equação pode ser vista como a definição da função de volatilidade local independente do processo que governa a evolução da volatilidade (um processo estocástico, por exemplo).

Uma forma de interpretar a volatilidade, ou mais precisamente a variância local, é na forma de valor esperado dentro da medida neutra ao risco. Resultado devido a trabalho de Derman and Kani (1998), onde a equação de Dupire pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial C_B}{\partial \tau} = \mathbb{E}[v_T | S_T = K] \frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C_B}{\partial K^2}$$

Ou seja, a variância local é a expectativa neutra ao risco da variância instantânea condicionada ao preço terminal do ativo,  $S_T$  ser igual ao preço de exercício  $K$ .

Uma das formas mais praticadas para a implementação de uma superfície de volatilidade local é através de árvores binomiais conforme apresentado por Derman and Kani (1994).

## 5.2 Modelos paramétricos

Diversas representações paramétricas já foram apresentadas para a superfície de volatilidade. Neste tipo de modelo uma função não-linear, dependente de um conjunto de parâmetros é especificada e, a partir dos dados observados no mercado, a parametrização é encontrada através da minimização de alguma função objetivo, método conhecido como **calibração**.

### 5.2.1 SVI

A parametrização da do tipo SVI (*Stochastic Volatility Inspired*) para o *smile* foi introduzida por Gatheral (2004) e é motivada pelo comportamento assintótico para *strikes* extremos. É baseada no *smile* gerado por um modelo de Heston (1993). Sua parametrização é dada em termos de *forward log-moneyness* conforme apresentado anteriormente,  $k = \ln(K/S) - r\tau = \ln(K/F)$ , por:

$$w(k) = a + b \left( \rho(k - m) + \sqrt{(k - m)^2 + \sigma^2} \right) \quad (5.6)$$

onde  $w$  é a variância total e o conjunto de parâmetros  $\chi_R = \{a, b, \rho, m, \sigma\}$  definem a forma deste *smile* que é conhecido como parametrização **raw** do SVI. Os limites destes parâmetros são tais que:  $a \in \mathbb{R}$ ,

<sup>1</sup>Processo de difusão é a solução de uma equação diferencial estocástica com propriedades de Markov. O Movimento Browniano é um exemplo.



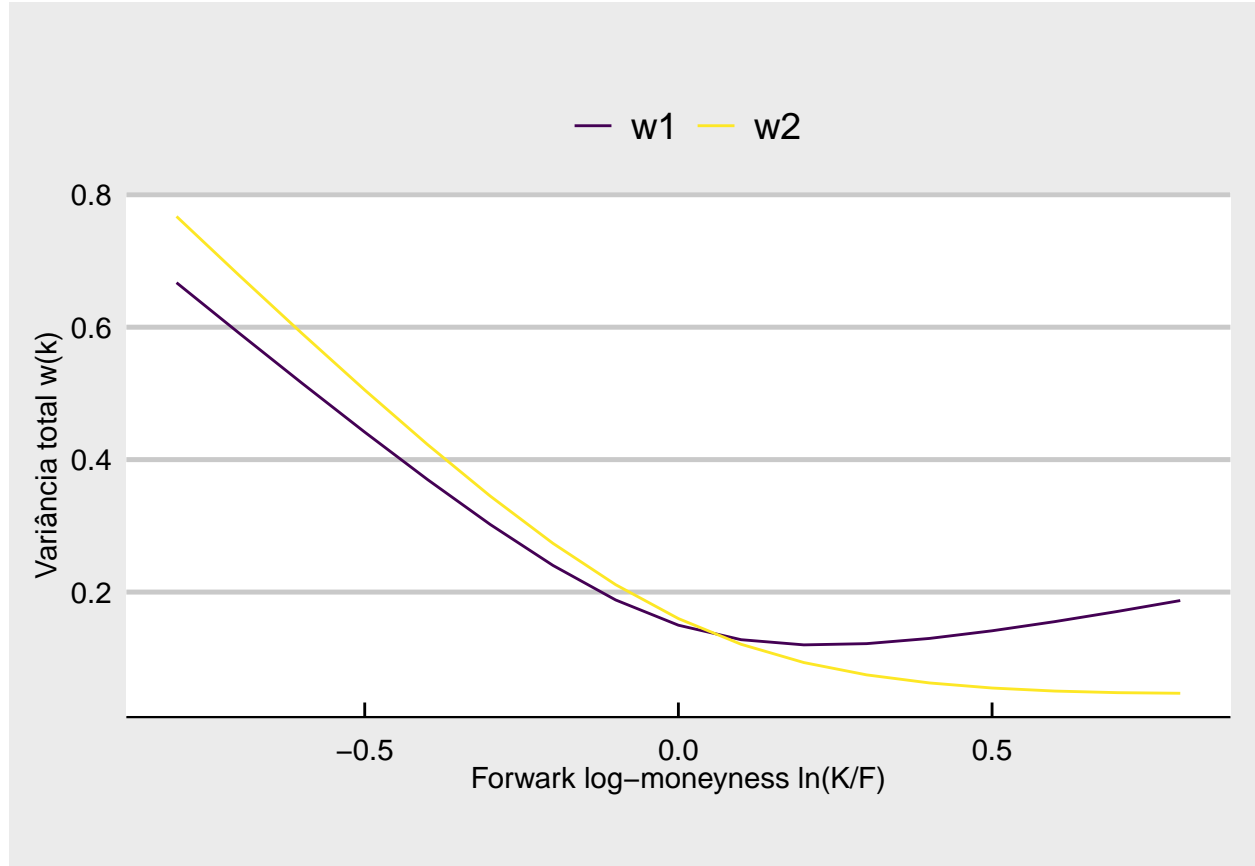


Figura 5.1: Duas parametrizações hipotéticas para a SVI.

$b \geq 0$ ,  $|\rho| < 1$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ , e a condição “óbvia” segundo Gatheral and Jacquier (2014),  $a + b\sigma\sqrt{1-\rho^2} \geq 0$ , que garante  $w(k; \chi_R) \geq 0$  para todo  $k \in \mathbb{R}$ . Alterações nestes parâmetros têm os seguintes efeitos:

- Aumentar  $a$  eleva o nível geral de variância, um deslocamento vertical do *smile*
- Aumentar  $b$  aumenta as inclinações das asas, comprimindo o *smile*
- Aumentar  $\rho$  provoca uma rotação no sentido anti-horário
- Aumentar  $m$  desloca o *smile* para a direita
- Aumentar  $\sigma$  reduz a curvatura no dinheiro (ATM) do *smile*

A figura 5.1 acima apresenta duas parametrizações hipotéticas para o modelo. A variância total  $w_1$  tem como conjunto de parâmetros,  $\chi = \{0, 0.5, -0.6, 0, 0.3\}$  e poderia representar um *smile* de taxas de câmbio por exemplo. Enquanto que o modelo  $w_2$  conta com  $\chi = \{-0.04, 0.5, -0.9, 0, 0.4\}$  e se ajusta melhor ao mercado de *equities*.

Existem outras duas parametrizações para o SVI, a natural e a *jump-wings* que podem ser conferidas no artigo de Gatheral and Jacquier (2014) e serão abordadas em outro artigo a ser publicado futuramente pelo CF.

O SVI tem muitas vantagens, como o baixo tempo computacional, a variância implícita se comporta linearmente nos extremos, conforme prescrito pela fórmula do momento de Lee (2004), e boa aproximação de volatilidades implícitas para *strikes* muito dentro ou fora do dinheiro. O ajuste do SVI para os mercados de *equities* é muito melhor do que para outros mercados.

## 5.3 Modelos não-paramétricos

Se violações de arbitragem na estimativa da superfície não representam um problema de interesse particular, virtualmente qualquer método não-paramétrico pode ser aplicado a dados de volatilidade implícita. Uma escolha específica deve ser feita a partir de considerações práticas.

### 5.3.1 Interpolação e suavização spline

As seguintes splines<sup>2</sup> podem ser empregadas para interpolar *smiles* de volatilidade:

- Spline cúbica
- B-spline cúbica

No caso da spline cúbica, esta é uma função polinomial de grau 3 definida em cada subintervalo demarcados pelos pontos de controle, no caso de interpolação são todos nós. Uma spline cúbica é uma função contínua, suave e diferenciável até a segunda ordem.

Uma B-spline<sup>3</sup>, ou *basis-spline* é uma função básica para funções spline de mesma ordem, o que significa que todas as funções spline possíveis podem ser construídas a partir de uma combinação linear de B-splines. Estas podem ser preferidas às splines cúbicas, devido à sua robustez a dados ruins e à capacidade de preservar a monotonicidade e a convexidade.

Praticamente qualquer linguagem de programação e até mesmo o Excel<sup>4</sup> possui funções pré-programadas para implementar interpolações spline, sendo um método de fácil aplicação. Entretanto, estas técnicas de interpolação não são específicas para superfícies de volatilidade e, portanto, não garantem que a superfície interpolada seja livre de oportunidades de arbitragem, mesmo que os dados apresentados o sejam.

### 5.3.2 Algoritmos livres de arbitragem

Considerando as limitações das interpolações com relação a presença de arbitragem na superfície gerada, vários artigos propõe algoritmos de interpolação que garantem que oportunidades de arbitragem estática não se apresentem, como em Kahalé (2004) e Wang et al. (2004).

Em comum, estes algoritmos possuem como requisito que os dados a serem interpolados sejam livres de arbitragem desde o início, o que nem sempre pode ser obtido. Kahalé (2004), por exemplo, propõe um procedimento de interpolação baseado em polinômios convexos por partes que simulam a fórmula de B&S. O resultado da função de preço de calls é livre de arbitragem e, portanto, também a volatilidade implícita calculada a partir dela. Em uma segunda etapa, a variância total implícita é interpolada linearmente ao longo dos *strikes*.

A abordagem de Fengler (2012) é baseada na suavização dos preços das opções por spline cúbica, e não em interpolação. Desta forma, os dados de entrada não precisam ser livres de arbitragem. Restrições especificamente adicionadas ao problema de minimização, a fim de garantir que não haja arbitragem, são impostos ao algoritmo spline. Uma possível desvantagem dessa abordagem é o fato de que a função de preço calls é aproximada por polinômios. Isso pode se mostrar desvantajoso, especialmente se extrapolação for necessária, já que a função de precificação certamente não é um polinômio. A escolha de uma grade suficientemente densa nos *strikes* pode minimizar este problema.

---

<sup>2</sup>Spline

<sup>3</sup>B-Spline

<sup>4</sup>Cubic Spline Function in VBA

## 5.4 Extrapolação do smile

É argumentado em Benaïm et al. (2008) que um método de extrapolação deve resultar em preços livres de arbitragem para as opções europeias (baunilha), ou seja, os preços das opções devem ser funções decrescentes (crescentes) para calls (puts), convexas com relação ao *strike*, e permanecer dentro de certos limites de inclinação. Além disso, o método de extrapolação deve idealmente ter as seguintes propriedades:

1. Deve precificar corretamente todas as opções baunilha observadas
2. A densidade da distribuição implícita e os preços das opções baunilha devem ser fáceis de calcular
3. O método não deve gerar caudas irrealistas e, se possível, deve permitir controlá-las
4. Deve ser robusto e flexível o suficiente para ser usado com uma ampla variedade de superfícies de volatilidade implícita
5. Deve ser fácil e rápido inicializar para um determinado *smile*

Uma das formas de extrapolação comumente utilizada é fazer a interpolação dos dados dentro da área observada, por exemplo com splines cúbicas, e então fazer a extrapolação na forma de uma linha reta, ou seja, mantendo na região de extrapolação a mesma inclinação observada no último ponto interpolado. Esta forma, segundo os autores não é adequada pois insere uma descontinuidade na densidade e também gera caudas muito curtas, de fato truncadas, a partir do ponto onde se inicia a extrapolação.

É proposto um método de extrapolação através de fórmulas fechadas para a asa esquerda (OTM puts) e direita (OTM call) do *smile*. Estas fórmulas têm as propriedades desejadas para *strikes* extremos e mantêm a convexidade dos preços. Suponha um intervalo de preços de exercício os quais existem observações de mercado e portanto, é possível fazer interpolação:  $K_- \leq K \leq K_+$ , os valores das puts,  $P(K)$ , para  $K < K_-$  e das calls,  $C(K)$ , para  $K > K_+$  são dados por:

$$P(K) = K^\mu \exp(a_1 + b_1 K + c_1 K^2) \quad (5.7)$$

$$C(K) = K^{-\nu} \exp\left(a_2 + \frac{b_2}{K} + \frac{c_2}{K^2}\right) \quad (5.8)$$

onde se garante  $\lim_{K \rightarrow 0} P(K) = 0$  e  $\lim_{K \rightarrow \infty} C(K) = 0$ , fazendo  $\mu > 1$  e  $\nu > 0$ . Estes parâmetros também servem para controlar a massa de probabilidade sob as caudas da distribuição.

As condições para ajustar o preço e suas duas primeiras derivadas em  $K_-$  e  $K_+$  produzem um conjunto de equações lineares para os parâmetros  $a_1, b_1, c_1$  e  $a_2, b_2, c_2$ , respectivamente.

## 5.5 Conclusão

Repassamos neste artigo, algumas das principais metodologias para a construção da superfície de volatilidade implícita. Modelos de volatilidade estocástica são capazes de gerar *smiles* compatíveis com aqueles observados nos mercados, sendo dependentes de técnicas de calibração destes modelos. O modelo paramétrico SVI pode ser adequado para mercado de *equities*, entretanto, assim como acontece nas técnicas de interpolação, restrições com relação aos parâmetros devem ser impostas a fim de evitar o surgimento de oportunidades de arbitragem estática. Por fim uma estratégia de como implementar a extrapolação do *smile* fora da região central foi apresentada.

## 5.6 Referências



## Capítulo 6

# Métodos de Calibração

Neste post iremos mostrar as diferenças existentes entre “interpolação”, “suavização” e “parametrização” de superfícies de volatilidade.

Como já apresentado em posts anteriores, existem diversas formas de interpolar, extrapolar, parametrizar e calibrar smiles de volatilidade. Existem vantagens e desvantagens para cada método.

### 6.1 Calibração versus Interpolação

Uma forma simples de gerar um smile de volatilidade a partir de dados observados no mercado é a **interpolação** destes dados. Diversas formas de interpolação existem, sendo talvez a mais conhecida a spline cúbica. Não é a proposta deste artigo detalhar os procedimentos de interpolação, restando saber que em tal procedimento é gerada uma função contínua em partes (piecewise) que **passa** por todos os pontos observados.

Uma interpolação força a passagem da função interpolada em todos os seus pontos de referência, como se estivesse ligando os pontos em um desenho a mão livre. Portanto, nestes pontos o erro da interpolação é zero por definição, entretanto em pontos intermediários podem surgir erros, inclusive aqueles que possibilitam a existência de arbitragem entre strikes de um mesmo smile<sup>1</sup>.

Em contraposição a métodos de interpolação, podem ser derivados métodos de suavização (smoothing) ou então a parametrização do smile de volatilidade. Seja suavização, ou parametrização, estes métodos não forçam a passagem da função que representa o smile pelos pontos de mercado, mas buscam minimizar alguma função perda com relação aos desvios em relação a estes pontos ao mesmo tempo em que buscam “suavizar” o smile, para que este não apresente variações bruscas entre os strikes ou alterações de convexidade na curva de preços, que não são condizentes com a teoria de precificação de derivativos.

Um método paramétrico, como o SVI, Heston, SABR ou Volatilidade Local, busca ajustar às volatilidades implícitas observadas através dos preços das opções sendo praticados no mercado uma determinada função, que possui parâmetros em sua definição que por sua vez determinam a forma desta função. Ao se ajustar os parâmetros, pode-se adequar a função para ficar “o mais próxima possível” dos dados observados, sem necessariamente, no entanto, passar por todos estes pontos.

A figura abaixo tenta mostrar as diferenças entre uma interpolação spline cúbica, uma suavização e uma parametrização SVI. Enquanto que a interpolação liga todos os pontos marcados, a suavização e a parametrização não necessariamente passam sobre estes pontos mas fornecem uma curva mais “suave”, sem trocas de convexidade, o que gera oportunidades de arbitragem e probabilidades negativas de ocorrência de determinados preços para o ativo subjacente, que ferem os princípios de precificação de opções. Os dados

---

<sup>1</sup>Veja mais detalhes no Capítulo Smile de Volatilidade

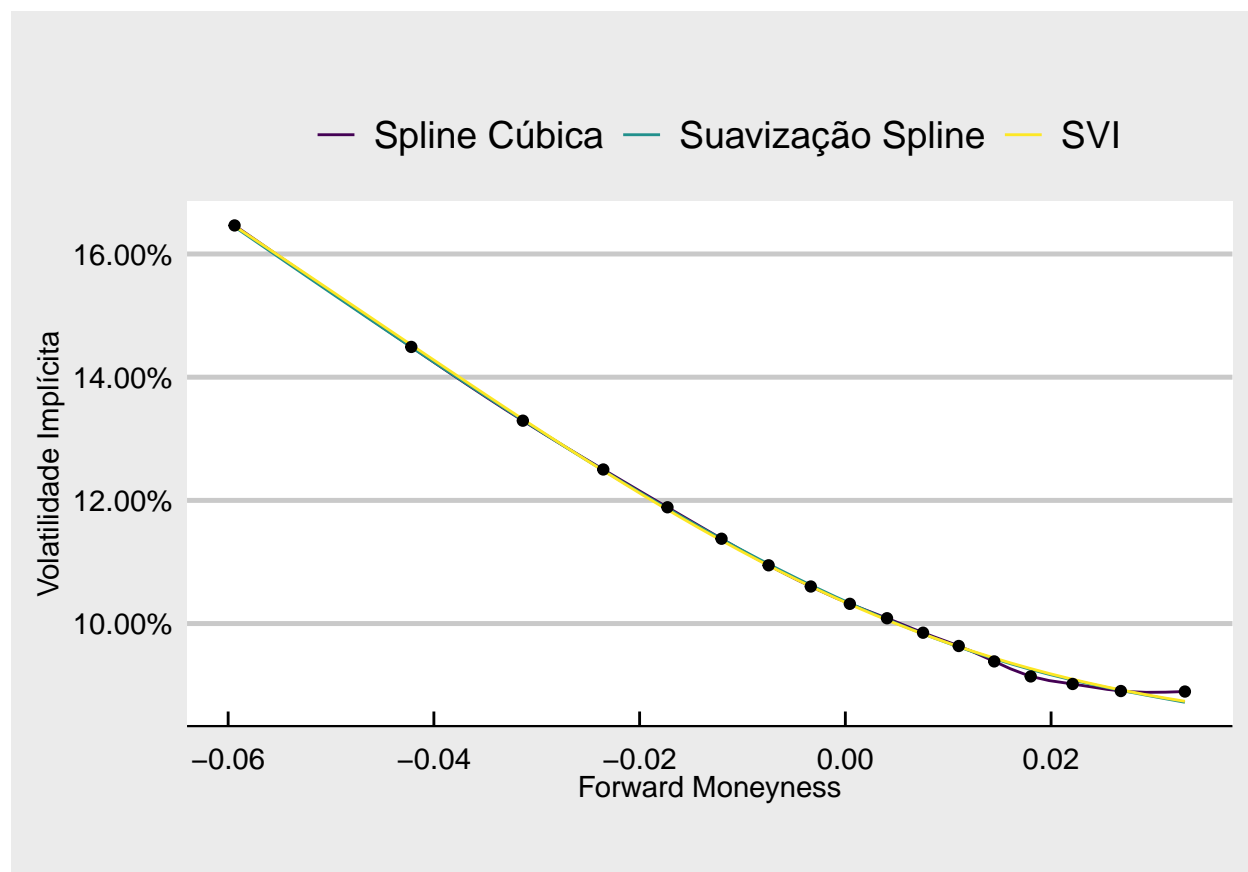


Figura 6.1: Diferentes métodos de ajuste de dados a um smile.

utilizados neste e nos próximos artigos sobre superfícies de volatilidade foram obtidos do site [ivolatility.com](http://ivolatility.com) na forma de amostra gratuita fornecida livremente. O ativo subjacente é o ETF IWM para a data de 21/09/2017.

Pode-se verificar como os métodos SVI e a suavização não passam sobre todos os pontos marcados, com a suavização tendo dificuldade com a curvatura nos valores mais altos de *moneyness* e a SVI possuindo uma inclinação mais branda na asa esquerda do smile.

## 6.2 Spline cúbica

Este método é possivelmente um dos mais flexíveis e conhecidos de interpolação de dados univariados existente, embora também exista sua versão bi-dimensional. Uma spline nada mais é que “uma curva definida matematicamente por dois ou mais pontos de controle”<sup>2</sup>.

No caso da spline cúbica, esta é uma função polinomial de grau 3 definida em cada subintervalo demarcados pelos pontos de controle, no caso de interpolação são todos nós. Ou seja, considere um segmento entre dois pontos consecutivos  $[c, d] \in S$  a spline é uma função cúbica com seus parâmetros calculados pelo algoritmo de ajuste. Para o próximo intervalo de pontos dentro do domínio da função, um novo polinômio de grau 3 é ajustado, sendo que nos pontos de nós uma restrição de igualdade entre as derivadas nos dois segmentos é aplicada para garantir a suavidade da função interpolada como um todo.

<sup>2</sup>Definição retirada de <https://pt.wikipedia.org/wiki/Spline>

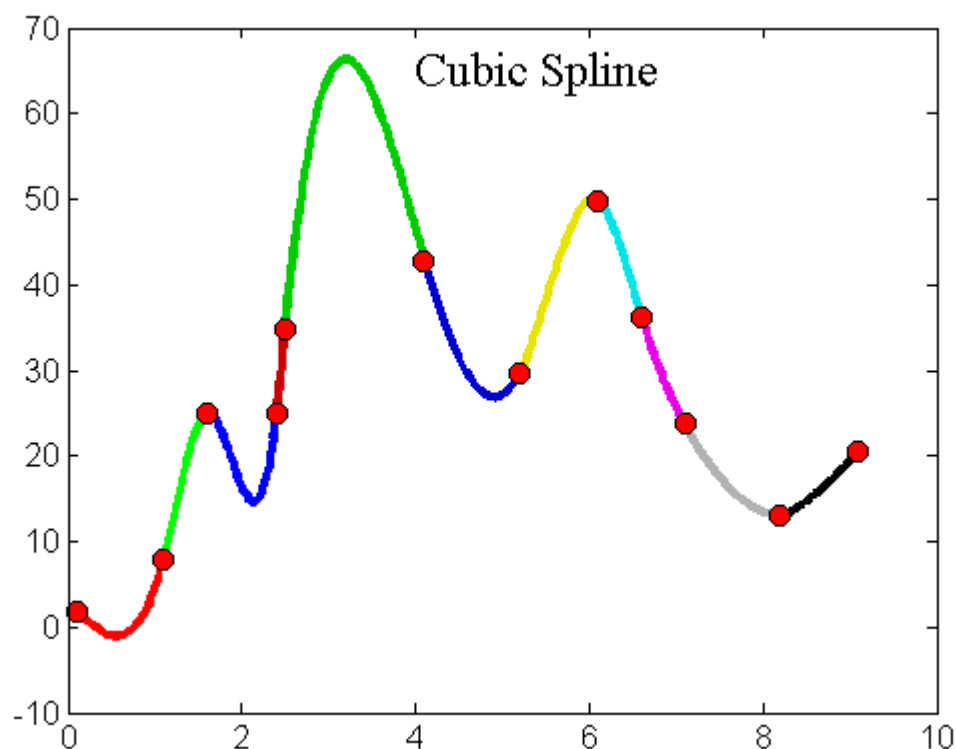


Figura 6.2: Cada segmento de uma spline cúbica é um polinômio de grau 3 diferente.

Assim, uma spline cúbica é uma função contínua, suave e diferenciável até a segunda ordem. Entretanto, suas derivadas, apesar de contínuas, podem não ser suaves, especialmente aquela de segunda ordem que pode apresentar pontos de “ruptura”. Esta característica de uma spline cúbica a torna pouco atrativa para a inferência de distribuições de probabilidade a partir de dados de volatilidade ou mesmo dos preços de opções.

## 6.3 Suavização

A técnica de suavização é muito semelhante a interpolação, inclusive o método spline também é aplicado, com algumas modificações de forma que nem todos os pontos fornecidos serão nós.

Na spline de suavização (ou aproximação), os pontos fornecidos são separados entre os nós, onde a função deve passar e pontos de controle, que são utilizados para controlar a curvatura da função nestes pontos.

Estas suavizações são principalmente utilizadas quando se possui muitas observações sujeitas a ruídos, de forma que uma interpolação entre todos os pontos seria tanto impraticável quanto sem sentido. O que se deseja, portanto, é uma função **aproximada** que melhor descreva o processo sob análise.

Um ponto em comum entre estas técnicas é o parâmetro de suavização, ausente, na interpolação, que controla a “suavidade” da função estimada.

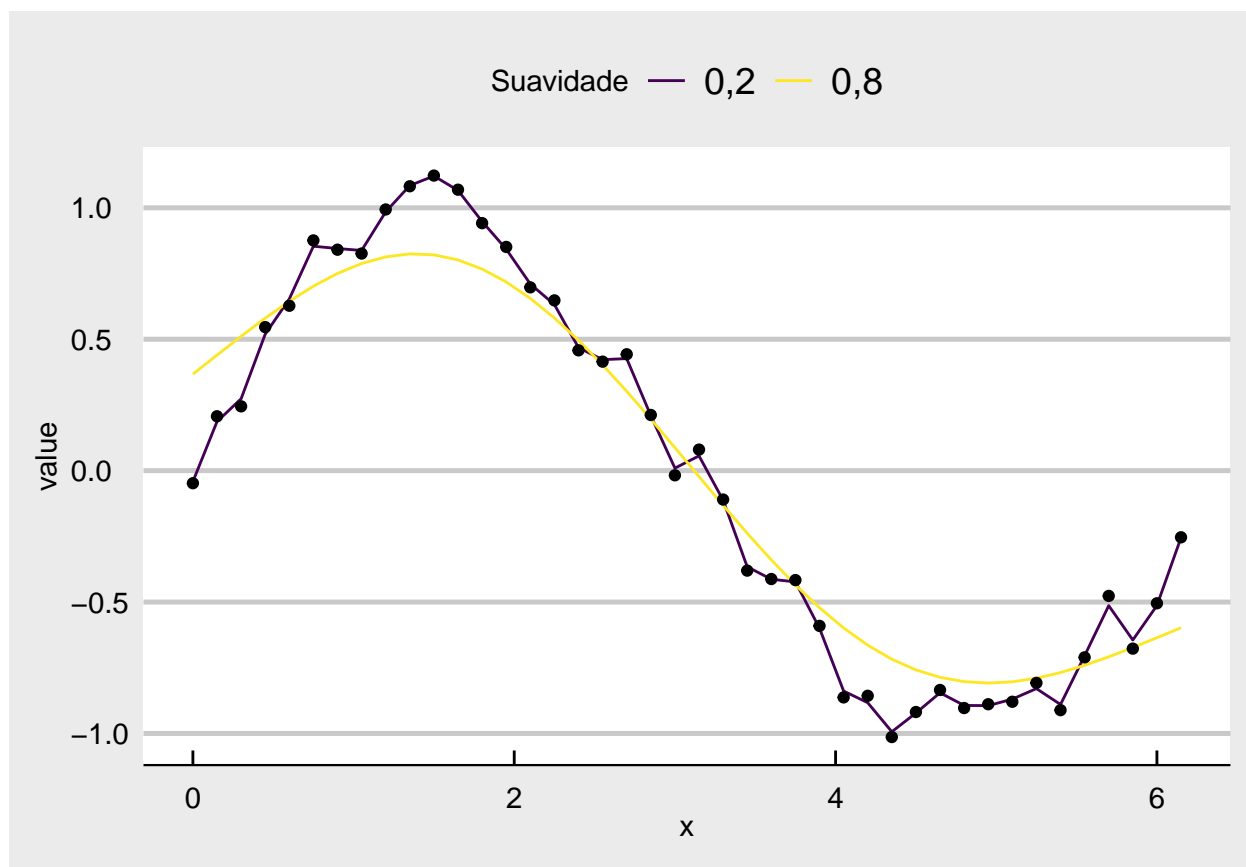


Figura 6.3: Menor parâmetro de suavização gera granularidade na curva.



## 6.4 Parametrização

E por fim as técnicas de parametrização. Nesta categoria estão diversos conhecidos modelos de superfícies de volatilidade implícita, dentre eles os modelos de Heston (1993), Volatilidade Local de Dupire (1994) e SVI de Gatheral (2004).

Em comum, estes modelos tentam parametrizar a superfície, e por conseguinte o smile de volatilidade, de acordo com alguma função, em geral não-linear, que possui características condizentes com a teoria de precificação de derivativos e também a observação empírica das superfícies.

Por exemplo, a parametrização *raw* da SVI possui a seguinte forma para a **variância total**<sup>3</sup> :

$$w(k) = a + b \left( \rho(k - m) + \sqrt{(k - m)^2 + \sigma^2} \right)$$

que fornece um espaço de cinco parâmetros  $\chi_B = \{a, b, \rho, m, \sigma\}$  que definem o smile e devem, portanto, serem calibrados a partir de dados observados no mercado.

O procedimento de calibração consiste em encontrar o conjunto de parâmetros que minimizam uma função perda entre a volatilidade prevista pelo modelo e os dados de mercado, enquanto satisfazem algumas restrições adicionais, como “ausência de arbitragem”, suavidade, etc. Trata-se, via de regra, de problemas de otimização não-linear com restrições de desigualdade também não-lineares.

### 6.4.1 Função perda

A função perda, ou função de calibração pode ser definida de diversas maneiras, de forma geral, para uma determinada maturidade, ela toma a forma:

$$L = \sum_{i=1}^n \lambda_i \|\hat{w}(k_i) - w_{imp}(k_i)\|$$

onde  $\|\cdot\|$  é alguma medida de norma, sendo a mais conhecida o quadrado das diferenças, dando origem a minimização do erro quadrático médio (RMSE). Para este smile sendo calibrado existem  $n$  strikes ( $k_i$ ) e suas volatilidades implícitas observadas são  $w_{imp}(k_i)$ . A resposta do modelo para um determinado strike é  $\hat{w}(k_i)$  e  $\lambda_i$  são os pesos dados na função perda para cada um destes strikes.

Os pesos  $\lambda_i$  são utilizados para ponderar as observações das volatilidades mais importantes para o cálculo, onde se deseja que a curva ajustada possua um menor erro. Em geral, estes pesos são calculado como inversamente proporcionais:

- ao quadrado dos *spreads bid-ask*, para dar mais importância às opções mais líquidas
- ao quadrado da grega vega calculada a partir do modelo BSM

### 6.4.2 Otimizadores

Os otimizadores são os algoritmos pelos quais o problema de minimização posto é resolvido. Se a função perda é convexa, e ela deve ser construída de forma a ser, mesmo que não estritamente, então ela possui um ou mais pontos de mínimo onde o gradiente desta função é igual a zero. O que os otimizadores fazem é buscar o conjunto de parâmetros que minimizam a função perda e atendem as restrições impostas simultaneamente. Os otimizadores podem ser classificados em dois grandes grupos, globais e locais.

Algoritmos locais dependem de uma estimativa inicial dos parâmetros para começarem a busca pelo mínimo. Seguindo uma regra utilizando-se o gradiente da função ou alguma heurística, estes otimizadores

<sup>3</sup>A variância total é definida pelo produto entre a variância implícita e o tempo para expiração,  $w = \sigma_{imp}^2 \cdot \tau$ .

caminham em direção ao ponto de mínimo mais próximo da estimativa inicial, daí o nome “local”. Como desvantagem destes otimizadores é a mais evidente é que se a função perda for altamente não-linear, com diversos pontos de mínimo local, este otimizador pode ficar preso em um destes pontos sem nunca, no entanto, encontrar o mínimo global. Eles são, portanto muito sensíveis à estimativa inicial dos parâmetros.

Por sua vez, otimizadores globais buscam mapear todo o espaço factível para os parâmetros e encontrar o ponto mínimo da função perda dentro deste espaço. Estes algoritmos não dependem de estimativas iniciais, uma vez que tentarão avaliar o espaço completo. São utilizados quando o problema de minimização é não-linear e possui múltiplos pontos de mínimo local. Estes algoritmos usam alguma forma de heurística para encontrar a região onde o mínimo global está localizado, mas são, em geral, ineficientes em apontar rapidamente onde este ponto de mínimo se encontra com precisão. Por esta razão, é frequente a utilização de otimizadores globais com um posterior refinamento de sua solução por algum algoritmo local.

Abaixo apresentamos alguns exemplos mais comuns de otimizadores, tanto locais quanto globais:

- **Gauss-Newton:** Este método é utilizado para encontrar as raízes de alguma função. Para encontrar o ponto de mínimo da função perda, precisa-se encontrar as raízes do gradiente desta função, portanto o método de Newton em otimização faz uso da função gradiente. Este é um método de otimização local.
- **Levenberg-Marquardt:** Método muito utilizado para problemas não-lineares, ele parte de uma modificação ao método de Gauss-Newton ao introduzir um fator de amortecimento calculado iterativamente.
- **L-BFGS-B:** BFGS é um método conhecido como quasi-Newton, onde não é necessário calcular a Hessiana do problema, ela é aproximada a partir do próprio gradiente. É bastante utilizado para resolver problemas não-lineares e em sua versão L-BFGS-B pode lidar com restrições do tipo *box*, intervalo dos parâmetros é fixo.
- **Nelder-Mead:** Este é um método livre do uso de gradiente, já que usa uma heurística para construir um simplex e a partir deste “procurar” por um mínimo. Bastante utilizado quando a função objetivo pode não ser diferenciável. Faz uso de um simplex inicial, que pode ser grande o suficiente para encampar o mínimo global, entretanto, não se classifica como um otimizador global.
- **Algoritmo Genético:** Este método utiliza conceitos da seleção natural para gerar os resultados da otimização. É um otimizador global, no sentido que independe de uma estimativa inicial de parâmetros e faz uma busca por todo o espaço factível. Em um algoritmo genético, uma população aleatória inicial de parâmetros é criada e a partir desta, as gerações evoluem conforme mutações e *cross-over* de características e é avaliado o *fitness* de cada conjunto de parâmetros até um deles ser considerado adequado.
- **Evolução Diferencial:** É um método de otimização global, assim como o Algoritmo Genético e o Enxame de Partículas. Sua diferença reside no fato de que sua população inicial é constantemente avaliada e deslocada de posição. Se o agente obtiver uma situação melhor (menor valor para a função perda) na nova posição, esta agora faz parte da população. Desta forma os agentes, antes espalhados pelo espaço factível dos parâmetros, tendem a convergir para um ponto com o menor valor da função perda.
- **Enxame de Partículas:** Do inglês, *Particle Swarm Optimization - PSO* este método é semelhante ao DE (*Differential Evolution*) porém as partículas (o equivalente dos agentes no DE) matém informações sobre a posição da melhor partícula até então, de forma a fazer com que as partículas tendam para a melhor solução.

## 6.5 Conclusão

Dependendo do objetivo da aplicação, superfícies de volatilidade podem ser interpoladas, suavizadas ou parametrizadas. A parametrização tem recebido especial interesse pois pode, ao mesmo

tempo que garante uma superfície livre de arbitragem estática se devidamente construída, ajustar-se muito bem aos dados observados e gerar distribuições neutras ao risco implícitas factíveis.

Para gerar uma superfície parametrizada, primeiramente é necessário um modelo teórico com propriedades desejáveis e que se ajuste aos dados de mercado quando calibrado. Escolhido este modelo paramétrico, passa-se a calibração do mesmo onde existem diversas opções de escolha entre otimizadores. Ao final do processo teremos um modelo de superfície devidamente parametrizado com valores que melhor se ajustam segundo alguma função perda escolhida.

Com a superfície de volatilidade calibrada, as aplicações possíveis incluem a precificação de derivativos, gerenciamento de risco, simulações de Monte Carlo, análises de stress, entre outras.



## Capítulo 7

# Calibrando uma SVI

Neste capítulo iremos mostrar como fazer uma calibração de um smile SVI baseado nos trabalhos de (Gatheral, 2004) e (De Marco and Martini, 2009). Escolheremos apenas uma fatia da superfície de volatilidade, fixando o tempo para expiração (maturidade) e coletando as volatilidades implícitas para diversos strikes.

Como já apresentado em posts anteriores, existem diversas formas de interpolar, extrapolar, parametrizar e calibrar smiles de volatilidade. Existem vantagens e desvantagens para cada método. Neste post iremos fixar nossa atenção no modelo paramétrico de smile chamado SVI - Stochastic Volatility Inspired - uma forma que une a “simplicidade” de um modelo paramétrico com o poder de adesão aos dados de mercado dos modelos de volatilidade estocástica (i.e. Heston, SABR e afins).

Chamar o modelo SVI de simples é puro eufemismo, ele é um modelo poderoso, com fundamento teórico avançado e diversos detalhes para sua calibração.

### 7.1 Modelo SVI

Este modelo foi apresentado por Jim Gatheral na conferência *Global Derivatives & Risk Management 2004* e foi bem recebido pelos profissionais de mercado interessados em superfícies de volatilidade para *equities*, principalmente.

O modelo possui duas propriedades que são as razões para sua popularidade. Ele satisfaz a fórmula do momento de Lee (2004), que é um resultado independente de modelo que especifica os limites assintóticos para um *smile* de volatilidade implícita. Portanto, o modelo SVI é válido para extrapolação além da região central dos dados disponíveis. Além disso, afirma-se que o modelo SVI é relativamente fácil de calibrar para dados de mercado, de modo que a superfície de volatilidade implícita correspondente é livre de arbitragem de calendário. As condições que garantem a ausência de arbitragem de borboleta foram resolvidas em um segundo artigo por Gatheral and Jacquier (2014).

No SVI é possível se estabelecer condições explícitas em seus parâmetros, de modo que o modelo não gere preços onde oportunidades de arbitragem estáticas possam ocorrer. A calibração para dados reais de mercado requer algoritmos de otimização não-linear e pode ser bastante demorada. Mais recentemente, um método para calibração que usa a estrutura inerente do modelo para reduzir as dimensões do problema de otimização foi desenvolvido em De Marco and Martini (2009).

A parametrização conhecida como *RAW* do SVI é apresentada na equação (7.1), seguindo a notação já introduzida anteriormente, portanto, estamos modelando a **variância total** implícita para um determinado prazo. Para diferentes maturidades, teremos diferentes conjuntos de parâmetros.

$$w(k) = a + b \left( \rho(k - m) + \sqrt{(k - m)^2 + \sigma^2} \right) \quad (7.1)$$

onde:  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \geq 0$ ,  $|\rho| < 1$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ , e  $a + b\sigma\sqrt{1\rho^2} \geq 0$  para garantir que  $\min w(k) > 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{R}$ .

## 7.2 Restrições de não-arbitragem

Antes de demonstrar a restrição imposta aos parâmetros  $b$  e  $\rho$  em função dos limites de inclinação das asas do *smile*, vamos derivar as expressões para  $w'(k)$  e  $w''(k)$  que nos serão úteis na demonstração.

A expressão para  $w'(k)$  é bastante simples:

$$w'(k) = b \left[ \rho + \frac{(k - m)}{\sqrt{(k - m)^2 + \sigma^2}} \right] \quad (7.2)$$

Derivando novamente a equação (7.2) em relação a  $k$  teremos uma expressão ainda mais simples, mesmo que após alguma manipulação algébrica um tanto tediosa<sup>1</sup>, e resulta em:

$$w''(k) = \frac{b\sigma^2}{[(k - m)^2 + \sigma^2]^{3/2}} \quad (7.3)$$

onde, se considerarmos  $b > 0$  temos que  $w''(k) > 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{R}$ , ou seja, o *smile* de volatilidade definido pela equação (7.1) é **estritamente** convexo.

Rogers and Tehranchi (2010) definiram os limites possíveis para a inclinação das asas em função do tempo para expiração, provando que o *smile* tende a ficar mais horizontal a medida que o prazo aumenta. Este limite pode ser escrito da seguinte forma e é uma **condição necessária** para a ausência de arbitragem:

$$|w'(k)| \leq \frac{4}{\tau} \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall \tau \in (0, \infty) \quad (7.4)$$

Sendo o *smile* convexo, suas máximas inclinações ocorrem quando  $k \rightarrow \pm\infty$ . Portanto, deve-se avaliar a restrição dada pela equação (7.4) nestes limites da seguinte maneira:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w'(k) = b(1 + \rho) \geq 0 \quad (7.5)$$

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} w'(k) = -b(1 - \rho) \leq 0 \quad (7.6)$$

que satisfazendo estas duas relações ao mesmo tempo em que se restringe os parâmetros  $b$  e  $\rho$  através da desigualdade de Rogers e Tehranchi nos garante o seguinte resultado para um SVI **livre de arbitragem de travas**.

$$b(1 + |\rho|) \leq \frac{4}{\tau} \quad (7.7)$$

Para garantir que a superfície gerada está livre de arbitragem do tipo borboleta deve-se primeiramente definir uma função<sup>2</sup>  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que:

<sup>1</sup>A resolução desta derivada é uma simples regra da divisão, entretanto a simplificação do resultado pede alguma manipulação algébrica. É possível utilizar sistemas de computação simbólica, o qual recomendamos o SymPy

<sup>2</sup>Condições para ausência de arbitragem do tipo borboleta em um SVI estão detalhadas na seção 2.2 do artigo de Gatheral and Jacquier (2014).

$$g(k) = \left(1 - \frac{kw'(k)}{2w(k)}\right)^2 - \frac{w'(k)^2}{4} \left(\frac{1}{w(k)} + \frac{1}{4}\right) + \frac{w''(k)}{2} \quad (7.8)$$

e seguir o lema :

**Lema 1** Uma fatia da superfície de volatilidade está livre de arbitragem do tipo borboleta se, e somente se,  $g(k) \geq 0$  para todo  $k \in \mathbb{R}$  e  $\lim_{k \rightarrow +\infty} d_1(k) = -\infty$ .

Infelizmente, a natureza altamente não-linear da função  $g(k)$  impossibilita a derivação de restrições gerais aos parâmetros do SVI. A forma mais simples de eliminar arbitragem do tipo borboleta é incluir a restrição  $g(k) \geq 0$  na função perda e proceder com a calibração dos parâmetros.

### 7.3 Reparametrização Quasi-explicit

Um dos problemas mais marcantes com a calibração do SVI dado pela equação (7.1) é sua natureza altamente não-linear que gera inúmeros pontos de mínimo locais. Mesmo em um ambiente simulado, um típico otimizador de mínimos quadrados como Levenberg-Marquardt não consegue chegar ao mínimo global, onde a função perda é igual a zero. A solução encontrada é dependente dos valores iniciais inputados ao otimizador e a robustez do conjunto de parâmetros encontrados não é garantida.

Uma forma de contornar este problema pode ser a utilização de otimizadores globais, como algoritmos genéticos, em um primeiro estágio e então o refinamento desta solução através de um otimizador local (LM, por exemplo).

Outra forma, adotada em De Marco and Martini (2009) é a reparametrização da equação (7.1) de forma que esta possa ser tratada como um problema linear. Para tanto, considere a seguinte troca de variáveis:

$$y = \frac{k - m}{\sigma} \quad (7.9)$$

então a parametrização *RAW* do SVI se torna.

$$w(y) = a + b\sigma \left(\rho y + \sqrt{y^2 + 1}\right) \quad (7.10)$$

Definindo agora as seguintes variáveis reparametrizadas é possível reduzir a dimensão de parâmetros de um SVI de 5 para apenas 3:

$$c = b\sigma \quad (7.11)$$

$$d = \rho b\sigma \quad (7.12)$$

$$w(y) = a + dy + c\sqrt{y^2 + 1} \quad (7.13)$$

Portanto, para um par fixo de  $(m, \sigma)$  nosso problema reduzido é:

$$P_{m,\sigma} := \min_{a,c,d \in D} f_y(a, c, d) \quad (7.14)$$

onde  $f_y(\cdot)$  é a função objetivo da reparametrização, e é dada pela seguinte equação:

$$f_y(a, c, d) = \sum_{i=1}^n [w(y_i) - \tilde{w}_i]^2 \quad (7.15)$$

onde  $\tilde{w}_i$  é a variância total observada correspondente ao *moneyness*  $k_i$ .

O domínio  $D$  dos parâmetros  $\{a, c, d\}$  é encontrado a partir do limite imposto por (7.7).

$$D = \begin{cases} 0 \leq c \leq 4\sigma \\ |d| \leq c \quad \text{e} \quad |d| \leq 4\sigma - c \\ 0 \leq a \leq \max\{\tilde{w}_i\} \end{cases} \quad (7.16)$$

O problema reduzido dado pela equação (7.14), é um típico problema de **mínimos quadrados** com restrições lineares. Este problema, por ser convexo, admite uma única solução interior (se existente) que será o mínimo global para este problema e é encontrada através do gradiente da função objetivo igualando-o a zero,  $\nabla f_y = 0$ . Esta equação gera um sistema linear nos parâmetros  $a, c, d$  que pode ser explicitamente resolvido. Caso a solução encontrada para este problema esteja contida no domínio  $D$ , esta solução é interior e é o mínimo desejado, caso contrário, deve-se percorrer o perímetro do domínio e encontrar o menor valor da função objetivo que será uma solução de canto.

Seja  $(a^*, c^*, d^*)$  a solução de (7.14) e  $(a^*, b^*, \rho^*)$  os correspondentes parâmetros originais recuperados, então o problema completo de calibração é:

$$P := \min_{m, \sigma} \sum_{i=1}^n (w_*(k_i) - \tilde{w}_i)^2 \quad (7.17)$$

$$\text{onde } w_*(k) = a^* + b^* \left( \rho^*(k - m) + \sqrt{(k - m)^2 + \sigma^2} \right).$$

O problema completo, (7.17) é um problema em apenas duas dimensões,  $(m, \sigma)$  e não-linear, que deve ser abordado através de algum tipo de otimizador global.

### 7.3.1 Solução explícita do problema reduzido

Nesta seção apresentaremos a solução, sem considerar as restrições impostas em (7.16) para o problema reduzido em (7.14), algo omitido em De Marco and Martini (2009). Esta seção é opcional para o leitor atento que já percebeu a semelhança entre o problema reduzido e um típico problema de regressão linear múltipla.

Para encontrar o conjunto de parâmetros  $(a^*, c^*, d^*)$  que representam os valores ótimos na equação (7.14), devemos resolver o seguinte sistema de equações:

$$\nabla f_y = \begin{bmatrix} \partial f_y / \partial a \\ \partial f_y / \partial d \\ \partial f_y / \partial c \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (7.18)$$

Cada uma das derivadas parciais da equação acima quando igualadas a zero dão origem ao sistema linear apresentado abaixo:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 & \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{y_i^2 + 1}}{y_i \sqrt{y_i^2 + 1}} \\ \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sqrt{y_i^2 + 1}} & \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{\sqrt{y_i^2 + 1}} & \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{y_i^2 + 1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ d \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i \\ \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i y_i \\ \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i \sqrt{y_i^2 + 1} \end{bmatrix} \quad (7.19)$$



Portanto, o problema reduzido pode ser resolvido através de um sistema linear de ordem 3 sob restrições também lineares.

## 7.4 Algoritmo

A otimização para encontrar os parâmetros ótimos de um SVI dadas observações de mercado e a técnica de calibração **Quasi-explicit** de De Marco and Martini (2009) pode ser resumida nos seguintes passos:

1. Definir valores iniciais para os parâmetros  $(m, \sigma)$ ,
2. Iniciar algum otimizador global com estes parâmetros e resolver o problema completo (7.17)
  - 2.1 Dentro da otimização global, resolver o problema reduzido (7.14) para os parâmetros  $(m, \sigma)$  dados,
3. Na convergência do problema completo do passo 2, otimizar uma última vez o problema reduzido,
4. Recuperar os parâmetros  $(a, b, \rho, m, \sigma)$

A escolha dos otimizadores fica a cargo pessoal, sendo sugerido testar vários para o mesmo problema. Eventualmente, para um determinado *smile* um otimizador pode se mostrar melhor que outro que vinha sendo utilizado em outras ocasiões.

Nos testes realizados pelo Clube de Finanças, entre os otimizadores globais para o problema completo utilizamos **Algoritmos Genéticos**, **Nelder-Mead restrito** e um **Método não-linear generalizado**. Para o problema reduzido, apesar de ser linear, o método de Nelder-Mead restrito se mostrou tão eficiente quanto e de mais fácil implementação. Se o objetivo for fazer uma calibração direta, dos cinco parâmetros ao mesmo tempo, uma combinação de otimizador global em primeiro estágio e o método de Levenberg-Marquardt restrito para refinamento da solução é o ideal.

## 7.5 Resultados

A seguir apresentamos um *smile* de referência para a calibração, obtido de [ivolatility.com](http://ivolatility.com) e então partimos para diferentes técnicas de calibração de um SVI. Os códigos em R também estão apresentados ao longo do texto para melhor compreensão e estudo do leitor.

Os dados utilizados neste exemplo estão apresentados na tabela 7.1 abaixo. Esta é uma típica apresentação de um *slice* de superfície, ou seja, dados para um *smile* apenas. As principais variáveis são: a data em que os dados foram coletados (*date*), o preço de fechamento do ativo (*stock\_price*), o prazo para expiração em dias (*period*), e medidas de moneyness como delta, *strike* e o próprio *moneyness*, além é claro da volatilidade implícita (*iv*) retirada do mercado.

Esta tabela poderia conter (de fato contém no arquivo original) outros períodos de expiração, e neste caso uma das colunas de *moneyness* começa a se repetir, no caso seria o delta pois baixamos uma tabela de volatilidades implícitas por delta. Assim, em uma tabela simples em formato *tidy* é possível armazenar informações de uma superfície inteira, a qual de outra forma necessitaria de um arranjo em 3 dimensões.

Ressaltamos aqui que a unidade de volatilidade implícita está em percentuais **ao ano**, enquanto que nosso período é de dias corridos. É necessário harmonizar estas medidas de forma que, para volatilidades dadas em percentual ao ano, o período também seja dado em **anos**. Logo nosso  $\tau = 30/365$ , ou seja, 0.08219.

Demonstraremos aqui os resultados para a calibração de uma *RAW SVI* pelos métodos “Direto”, “GA”, “Quasi-NM” e “Quasi-PQ”, abaixo explicados.

O método “Direto” é uma calibração direta através de um algoritmo de **Levenberg-Marquardt** da equação (7.1), ou seja, não existe reparametrização *Quasi-explicit* e o problema resolvido é não-linear em 5 dimensões. São realizadas 10 calibrações com estimativas iniciais dos parâmetros aleatórias, mas dentro

Tabela 7.1: Dados reais para exemplo de calibração de uma SVI.

date	symbol	exchange	stock_price_for_iv	period	delta	moneyness	strike
2017-09-21	IWM	NYSEArca	143.73	30	10	0.03	148.4
2017-09-21	IWM	NYSEArca	143.73	30	15	0.03	147.4
2017-09-21	IWM	NYSEArca	143.73	30	20	0.02	146.8
2017-09-21	IWM	NYSEArca	143.73	30	25	0.02	146.2
2017-09-21	IWM	NYSEArca	143.73	30	30	0.01	145.6
2017-09-21	IWM	NYSEArca	143.73	30	35	0.01	145.1
2017-09-21	IWM	NYSEArca	143.73	30	40	0.01	144.6
2017-09-21	IWM	NYSEArca	143.73	30	45	0.00	144.1
2017-09-21	IWM	NYSEArca	143.73	30	50	0.00	143.6
2017-09-21	IWM	NYSEArca	143.73	30	55	0.00	143.1
2017-09-21	IWM	NYSEArca	143.73	30	60	-0.01	142.5
2017-09-21	IWM	NYSEArca	143.73	30	65	-0.01	141.8
2017-09-21	IWM	NYSEArca	143.73	30	70	-0.02	141.1
2017-09-21	IWM	NYSEArca	143.73	30	75	-0.02	140.2
2017-09-21	IWM	NYSEArca	143.73	30	80	-0.03	139.1
2017-09-21	IWM	NYSEArca	143.73	30	85	-0.04	137.6
2017-09-21	IWM	NYSEArca	143.73	30	90	-0.06	135.3

de seus respectivos domínios. A melhor solução, aquela com o menor valor para a função objetivo, é selecionada. Todos os outros métodos utilizam a reparametrização, ocorrendo variações apenas nos algoritmos de otimização utilizados nos problemas reduzido e completo.

A calibração “GA” faz uso do otimizador global de **algoritmos genéticos** para o problema completo, ou seja, para estimar o par  $(m, \sigma)$  que corresponde ao mínimo global. Após, o problema reduzido é resolvido através do algoritmo de **Nelder-Mead**. Este método é robusto, pois o algoritmo genético tem grande probabilidade de encontrar a região onde se encontra o mínimo global e não ficar preso localmente. Entretanto a robustez ocorre às expensas do tempo de computação.

Os métodos ditos “Quasi” diferem entre si na resolução do problema reduzido. Enquanto “PQ” remete a **programação quadrática** e faz uso da resolução do sistema linear apresentado na equação (7.19) com as restrições impostas por (7.16), o método “Quasi-NM” utiliza o método de **Nelder-Mead** com restrições para a resolução deste mesmo problema reduzido. Em ambos os métodos, o problema completo é resolvido com um algoritmo de Nelder-Mead com 50 reinicializações das estimativas iniciais dos parâmetros  $(m, \sigma)$ , o que causa algum impacto no tempo de computação destes métodos.

```
smile <- dados %>%
  mutate(tau = period / 365) %>%
  select(moneyness, iv, tau)

par_names <- factor(c("a", "b", "\\rho", "m", "\\sigma"),
  levels = c("a", "b", "\\rho", "m", "\\sigma"))
k <- smile$moneyness
w <- smile$iv^2 * smile$tau
```

```

init_direct <- proc.time()
par_direct <- svi_fit_direct(k, w)
end_direct <- proc.time()
time_direct <- end_direct - init_direct

init_ga <- proc.time()
par_ga <- svi_fit_ga(k, w)
end_ga <- proc.time()
time_ga <- end_ga - init_ga

init_quasipq <- proc.time()
par_quasipq <- svi_fit_quasi(k, w, inner = "quadprog")
end_quasipq <- proc.time()
time_quasipq <- end_quasipq - init_quasipq

init_quasinm <- proc.time()
par_quasinm <- svi_fit_quasi(k, w)
end_quasinm <- proc.time()
time_quasinm <- end_quasinm - init_quasinm

iv_direct <- sqrt(svi_fun(par_direct$par[[1]], k) / smile$tau)
iv_ga <- sqrt(svi_fun(par_ga$par[[1]], k) / smile$tau)
iv_quasipq <- sqrt(svi_fun(par_quasipq$par[[1]], k) / smile$tau)
iv_quasinm <- sqrt(svi_fun(par_quasinm$par[[1]], k) / smile$tau)

plot_tbl <- tibble(k = k,
  Direct = iv_direct,
  GA = iv_ga,
  QuasiPQ = iv_quasipq,
  QuasiNM = iv_quasinm,
  observed = smile$iv) %>%
  gather(key = method, value = iv, -c(k, observed))

par_tbl <- bind_rows(par_direct, par_ga, par_quasipq, par_quasinm) %>%
  select(method, par) %>%
  mutate(method = c("Direct", "GA", "QuasiPQ", "QuasiNM")) %>%
  unnest() %>%
  mutate(names = rep(par_names, 4)) %>%
  spread(method, par) %>%
  select(names, Direct, GA, QuasiPQ, QuasiNM) %>%
  mutate(names = as.character(names)) %>%
  mutate_at(vars(Direct:QuasiNM), arred)

rmse_tbl <- bind_rows(par_direct, par_ga, par_quasipq, par_quasinm) %>%
  select(method, par) %>%
  mutate(method = c("Direct", "GA", "QuasiPQ", "QuasiNM")) %>%
  unnest() %>%
  group_by(method) %>%
  summarise(RMSE = rmse(par, k, w)) %>%
  spread(method, RMSE) %>%
  mutate(names = "RMSE") %>%
  select(names, Direct, GA, QuasiPQ, QuasiNM) %>%
  mutate_at(vars(Direct:QuasiNM), format, digits = 3, scientific = TRUE)

```

Tabela 7.2: Parâmetros estimados da calibração, RMSE e tempo de computação em segundos.

Estimativa	Direto	GA	QuasiPQ	QuasiNM
a	0.00000	0.00001	0.00000	0.00001
b	0.03538	0.01950	0.01695	0.01944
$\rho$	-1.00000	-0.80534	-1.00000	-0.79609
m	-0.06418	-0.00786	-0.01118	-0.00714
$\sigma$	0.06516	0.05041	0.06905	0.04996
RMSE	7.87e-05	8.69e-06	9.55e-05	8.69e-06
Tempo	0.16000	30.15000	0.18200	9.90700

```
time_tbl <- tibble(method = c("Direct", "GA", "QuasiPQ", "QuasiNM"),
  time = rbind(time_direct, time_ga,
    time_quasipq, time_quasinnm)[, 3]) %>%
  spread(method, time) %>%
  mutate(names = "Tempo") %>%
  select(names, Direct, GA, QuasiPQ, QuasiNM) %>%
  mutate_at(vars(Direct:QuasiNM), arred)

frame_tbl <- bind_rows(par_tbl, rmse_tbl, time_tbl)
```

Abaixo é apresentada uma tabela com os valores estimados para os parâmetros da SVI, o RMSE (root mean square error) e o tempo total em segundos para a calibração. Aqui o RMSE é definido como  $\sqrt{1/n \sum (w(k_i) - \tilde{w}_i)^2}$  e nos fornece um valor típico de erro **na variância**.

```
kable(frame_tbl,
  col.names = c("Estimativa", "Direto", "GA",
    "QuasiPQ", "QuasiNM"),
  caption = "Parâmetros estimados da calibração, RMSE e tempo de computação em segundos.",
  booktabs = TRUE) %>%
  kable_styling(bootstrap_options = "striped",
    font_size = 18,
    full_width = FALSE)
```

O método Direto, com algoritmo de Levenberg-Marquardt se mostrou muito mais rápido que os demais, principalmente com relação ao algoritmo genético, e com um bom ajuste dado o baixo valor de RMSE. O algoritmo genético é consideravelmente mais lento, entretanto durante as várias calibrações realizadas em testes (e que não estão apresentadas na tabela 7.2), este algoritmo sempre se mostrou robusto, com baixo RMSE, diferentemente dos outros métodos que por vezes, dependendo das estimativas iniciais, podem convergir para um mínimo local.

O gráfico com os ajustes realizados pode ser observado abaixo.

```
ggplot(plot_tbl, aes(x = k)) +
  geom_point(aes(y = observed)) +
  geom_line(aes(y = iv, color = method)) +
  guides(color = guide_legend(title = "")) +
  labs(title = "",
```

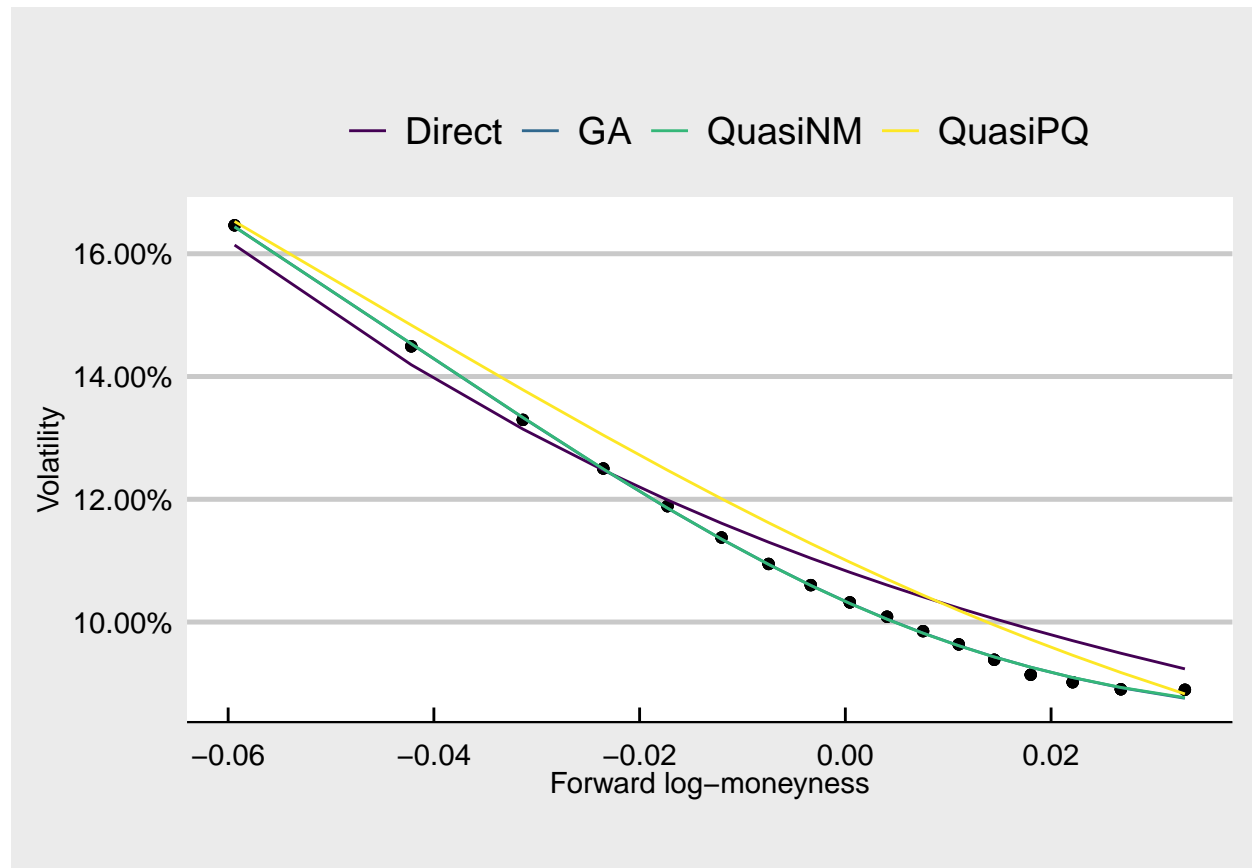


Figura 7.1: Comparação entre diferentes métodos de calibração de uma SVI.

```
x = "Forward log-moneyness",
y = "Volatility",
caption = "") +
scale_y_continuous(labels = scales::percent) +
scale_color_viridis_d() +
theme_economist_white()
```

De fato o método direto e o método *Quasi-explicit* com otimizador global do tipo algoritmo genético se mostram mais adequados para a calibração de um SVI. Enquanto o método direto é muito mais eficiente em termos computacionais, o método *Quasi-explicit* com GA é mais robusto. Desta forma, deve-se salientar que é necessário que o usuário, ao fazer uma calibração de *smile* de volatilidade, deve dispor de diferentes métodos de fazê-lo, e a inspeção visual do resultado é **obrigatória** para determinar qual método foi mais eficiente em ajustar a curva aos dados.

## 7.6 Conclusão

Apesar de neste exemplo ter se mostrado um método efetivo, com bom ajuste e baixo tempo de calibração, o método direto é altamente dependente dos valores iniciais dos parâmetros. Para tornar este método mais robusto, um número maior de reinicializações deve ser feita o que penaliza o tempo de calibração. O método *Quasi-explicit* com algoritmo genético para encontrar a região de  $(m, \sigma)$  onde se

encontra o mínimo global se mostrou bastante robusta, entretanto, de convergência lenta. Para ajustar apenas um *smile* alguns segundos a mais não representam problema. Porém, se imaginarmos que em uma grande instituição financeira são necessárias calibrações de, talvez, milhares de *smiles* representando inúmeras superfícies de diversos instrumentos, este método pode se mostrar computacionalmente caro.

Já os métodos *Quasi-explicit* que utilizam um algoritmo de Nelder-Mead para a resolução do problema completo se mostraram muito sensíveis às estimativas iniciais dos parâmetros. Mesmo utilizando 50 reinicializações do método, diversas vezes o ajuste realizado foi insatisfatório. A resolução através de programação quadrática é rápida, se comparada com NM, entretanto, quando as restrições impostas pela equação (7.16) se tornam ativas, este método parece sofrer com algum viés em sua solução.

## Capítulo 8

# Superfície SVI

Superfície SVI, ou somente SSVI é uma generalização do modelo SVI de (Gatheral, 2004) que busca solucionar o problema de restrição dos parâmetros do modelo para evitar a presença de arbitragem do tipo borboleta em um dado *smile*. Este modelo foi proposto por (Gatheral and Jacquier, 2014) e estende o modelo SVI original apresentando duas outras parametrizações equivalentes e então o modelo para superfícies propriamente dito.

### 8.1 Reparametrizações equivalentes

Existem duas outras formas de se apresentar um modelo SVI que são equivalentes a parametrização *RAW* já apresentada. Estas são as parametrizações “Natural” e “Jump-Wings” que são apresentadas abaixo.

Para um dado conjunto de parâmetros  $\chi_N = \{\Delta, \mu, \rho, \omega, \zeta\}$  a parametrização natural de um SVI é dada por:

$$w(k; \chi_N) = \Delta + \frac{\omega}{2} \left\{ 1 + \zeta \rho (k - \mu) + \sqrt{(\zeta(k - \mu) + \rho)^2 + (1 - \rho^2)} \right\} \quad (8.1)$$

onde  $\omega \geq 0$ ,  $\Delta, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $|\rho| < 1$  e  $\zeta > 0$ . A correspondência entre as parametrizações *raw* e natural é dada pelo seguinte mapeamento e seu inverso:

$$(a, b, \rho, m, \sigma) = \left( \Delta + \frac{\omega}{2}(1 - \rho^2), \frac{\omega\zeta}{2}, \rho, \mu - \frac{\rho}{\zeta}, \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\zeta} \right) \quad (8.2)$$

$$(\Delta, \mu, \rho, \omega, \zeta) = \left( a - \frac{\omega}{2}(1 - \rho^2), m + \frac{\rho\sigma}{\sqrt{1 - \rho^2}}, \rho, \frac{2b\sigma}{\sqrt{1 - \rho^2}}, \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\sigma} \right) \quad (8.3)$$

A desvantagem destas parametrizações é que o valor de seus parâmetros não são intuitivos para os *traders*, eles não carregam estes valores em sua memória durante a negociação. Valores característicos de uma superfície de volatilidade implícita que *traders* têm em mente são, por exemplo, volatilidade ATM, *skew* de volatilidade ATM e assíntotas. Desta forma a parametrização *Jump-Wings* é útil, pois relaciona estes valores típicos aos parâmetros *raw* de um SVI.

A parametrização *JW* é dada em termos da variância implícita (e não da variância total) e portanto existe uma dependência explícita do tempo em sua formulação. Para um dado tempo até a expiração,  $\tau$ , o conjunto de parâmetros  $\chi_J = \{v_\tau, \psi_\tau, p_\tau, c_\tau, \tilde{v}_\tau\}$  é definido pelas seguintes equações a partir dos parâmetros *raw*:

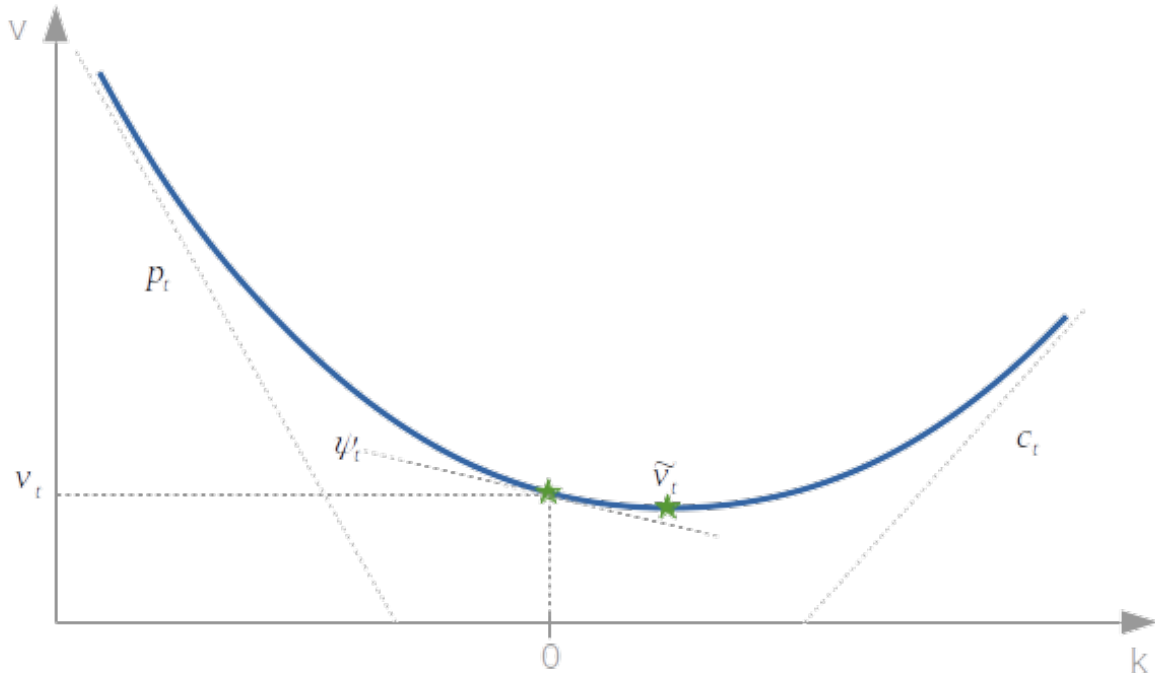


Figura 8.1: Interpretação dos parâmetros de um SVI-JW.

$$v_\tau = \frac{a + b\{-\rho m + \sqrt{m^2 + \sigma^2}\}}{\tau}, \quad (8.4)$$

$$\psi_\tau = \frac{1}{\sqrt{w_\tau}} \frac{b}{2} \left( -\frac{m}{\sqrt{m^2 + \sigma^2}} + \rho \right), \quad (8.5)$$

$$p_\tau = \frac{1}{\sqrt{w_\tau}} b(1 - \rho), \quad (8.6)$$

$$c_\tau = \frac{1}{\sqrt{w_\tau}} b(1 + \rho), \quad (8.7)$$

$$\tilde{v}_\tau = \frac{1}{\tau} \left( a + b\sigma\sqrt{1 - \rho^2} \right) \quad (8.8)$$

onde  $w_\tau = v_\tau \tau$  relaciona a variância total ATM com a variância ATM. Os parâmetros possuem as seguintes interpretações:  $v_\tau$  é a variância ATM,  $\psi_\tau$  o *skew* ATM,  $p_\tau$  a inclinação da asa esquerda (puts),  $c_\tau$  a inclinação da asa direita (calls) e  $\tilde{v}_\tau$  é a variância implícita mínima.

A figura 8.1 apresenta uma esquematização destes parâmetros sobre um *smile* fictício para melhor compreensão.

As relações inversas que trazem uma parametrização *JW* para uma *raw*, assumindo que  $m \neq 0$  são:



$$b = \frac{\sqrt{w_\tau}}{2}(c_\tau + p_\tau), \quad (8.9)$$

$$\rho = 1 - \frac{p_\tau \sqrt{w_\tau}}{b}, \quad (8.10)$$

$$a = \tilde{v}_\tau \tau - b\sigma \sqrt{1 - \rho^2}, \quad (8.11)$$

$$m = \frac{(v_\tau - \tilde{v}_\tau)\tau}{b \left\{ -\rho + \text{sign}(\alpha) \sqrt{1 + \alpha^2} - \alpha \sqrt{1 - \rho^2} \right\}}, \quad (8.12)$$

$$\sigma = \alpha m. \quad (8.13)$$

onde as variáveis auxiliares são definidas da seguinte forma:  $\beta := \rho - (2\psi_\tau \sqrt{w_\tau})/b$  e  $\alpha := \text{sign}(\beta) \sqrt{1/\beta^2 - 1}$ , com  $\beta \in [-1, 1]$  para garantir a convexidade do *smile*.

Se  $m = 0$ , então as equações para  $a, b, \rho$  se mantêm, porém,  $\sigma = (v_\tau \tau - a)/b$ . Desta forma temos relações entre as três parametrizações SVI, sendo possível navegar entre elas com tranquilidade. Um *trader* pode verificar no mercado os valores dos parâmetros  $JW$  e traduzi-los para *raw* e simular o *smile* ou fazer o caminho reverso, calibrar uma fatia da superfície com parâmetros *raw*, traduzi-los para  $JW$  e apresentar para sua mesa, onde todos conseguirão interpretar os valores a que estão habituados.

## 8.2 Superfície SVI

Uma SSVI surge como uma extensão à parametrização natural de um SVI, e fornece em uma única equação, a possibilidade de parametrizar uma superfície de volatilidade implícita por inteiro. É necessário, antes de mais nada, fazer algumas definições preliminares. Defina a variância total implícita no dinheiro (ATM) como  $\theta_\tau := \sigma_{BS}^2(0, \tau)\tau$  e  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \theta_\tau = 0$ .

**Definição 8.1.** Seja  $\varphi$  uma função suave em  $\mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}_+^*$  tal que  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \theta_\tau \varphi(\theta_\tau)$  exista em  $\mathbb{R}$ . Uma SSVI é definida por:

$$w(k, \theta_\tau) = \frac{\theta_\tau}{2} \left\{ 1 + \rho \varphi(\theta_\tau) k + \sqrt{(\varphi(\theta_\tau) k + \rho)^2 + (1 - \rho^2)} \right\} \quad (8.14)$$

Veja que na representação SSVI, engenhosamente os autores substituíram a dimensão de tempo,  $\tau$ , típica de superfícies de volatilidade, pela variância total ATM. Com esta representação, eles conseguiram derivar as condições necessárias para a ausência de arbitragem estática na superfície e sempre que necessário, é possível retornar a dimensão de tempo no calendário.

Agora é necessário definir a função  $\varphi$ , que então será substituída na equação (8.14) da definição 8.1 com seus próprios parâmetros e teremos por fim uma função  $w(k, \theta_\tau; \chi_{ssvi})$  que poderá ser calibrada para o conjunto de parâmetros da SSVI,  $\chi_{ssvi}$  contra os dados observados no mercado. No fundo, qualquer função que obedeça as condições impostas na definição 8.1 pode ser utilizada, entretanto os autores apresentam dois tipos de função que condizem com as observações empíricas.

### 8.2.1 Heston

Considere a função  $\varphi$  definida por:

$$\varphi(\theta) \equiv \frac{1}{\gamma \theta} \left\{ 1 - \frac{1 - e^{-\gamma \theta}}{\gamma \theta} \right\} \quad (8.15)$$

com  $\gamma > 0$ . Esta função recebeu este nome pois, seu *skew* na variância implícita é compatível com aquele previsto no modelo de Heston.

### 8.2.2 Lei de potência

A parametrização da função  $\varphi$  como uma lei de potência é primeiramente considerada da seguinte forma:  $\varphi(\theta) = \eta\theta^{-\gamma}$  com  $\eta > 0$  e  $0 < \gamma < 1$ . Entretanto, esta parametrização apresenta algumas limitações com relação a arbitragem do tipo borboleta e então é proposta a seguinte forma funcional:

$$\varphi(\theta) = \frac{\eta}{\theta^\gamma(1+\theta)^{1-\gamma}} \quad (8.16)$$

que é **garantida** não possuir arbitragem estática dado que  $\eta(1+|\rho|) \leq 2$ .

## 8.3 Condições de não-arbitragem

As condições para ausência de arbitragem estática para uma SSVI são colocadas através de dois teoremas (4.1 e 4.2) e provadas no artigo de (Gatheral and Jacquier, 2014), dos quais resulta o seguinte corolário.

**Corolário 8.1.** *A superfície SVI definida em 8.1 está livre de arbitragem estática se as seguintes condições são satisfeitas:*

1.  $\partial_\tau \theta_\tau \geq 0$ , para todo  $\tau > 0$
2.  $0 \leq \partial_\theta(\theta\varphi(\theta)) \leq \frac{1}{\rho^2} \left(1 + \sqrt{1 - \rho^2}\right) \varphi(\theta)$ , para todo  $\theta > 0$
3.  $\theta\varphi(\theta)(1 + |\rho|) < 4$ , para todo  $\theta > 0$
4.  $\theta\varphi(\theta)^2(1 + |\rho|) \leq 4$ , para todo  $\theta > 0$

Onde os dois primeiros itens dizem respeito a ausência de arbitragem de calendário, enquanto que os seguintes são exigências para a superfície estar livre de arbitragem do tipo borboleta.

Para uma função  $\varphi$  do tipo Heston, as condições nos seus parâmetros são:  $\gamma > 0$  que garante o atendimento as condições 1 e 2 do corolário 8.1 e  $\gamma \geq (1 + |\rho|)/4$  para garantir a ausência de arbitragem borboleta, a qual subsume a primeira condição.

Para a função do tipo lei de potência dada em (8.16) são necessárias as condições  $0 < \gamma < 1$  e  $\eta(1 + |\rho|) \leq 2$

A maneira típica de impor as restrições dos parâmetros no momento da calibração do modelo é inserir uma penalidade na função objetivo, quando a restrição é violada. Por exemplo, consideramos a restrição de desigualdade para a lei de potência,  $\eta(1 + |\rho|) - 2 \leq 0$ . No momento da calibração, nós devemos calcular o valor desta expressão e se o seu resultado for maior que zero, uma penalidade é somada a função objetivo da calibração (em geral a soma dos quadrados dos erros).

## 8.4 Densidade neutra ao risco

Já comentamos sobre a distribuição neutra ao risco implícita no preço de opções que pode ser obtida através da fórmula de (Breed and Litzenberger, 1978), assim como já foi introduzida uma certa função  $g(k)$  que desempenha um papel fundamental para garantir a ausência de arbitragem do tipo borboleta em *smiles* de variância total. O fato é que, para garantir a ausência de arbitragem a função  $g(k)$  deve ser não negativa em todo o seu suporte  $k \in \mathbb{R}$ . Ao mesmo tempo, a definição de ausência de arbitragem borboleta se confunde com o fato que a densidade neutra ao risco deve também ser não negativa, caso contrário não

seria uma densidade de probabilidade. Logo percebe-se a estreita relação entre a função  $g(k)$  e a densidade neutra ao risco implícita no preço de opções. De fato, a fórmula de Breeden-Litzenberger nos fornece:

$$p(k) = \frac{\partial^2 C_B(k, w(k))}{\partial K^2} \Big|_{K=Fe^k} \quad (8.17)$$

que após fazer as derivações da equação de Black e as substituições e manipulações algébricas com as reparametrizações do modelo B&S, resulta em:

$$p(k) = \frac{g(k)}{\sqrt{2\pi w(k)}} \exp\left(-\frac{d_2(k)^2}{2}\right) \quad (8.18)$$

E para relembrarmos, a função  $g(k)$  é dada por:

$$g(k) = \left(1 - \frac{kw'(k)}{2w(k)}\right)^2 - \frac{w'(k)^2}{4} \left(\frac{1}{w(k)} + \frac{1}{4}\right) + \frac{w''(k)}{2} \quad (8.19)$$

Ou seja, uma vez parametrizado um SVI para um dado prazo de maturidade,  $\tau$ , se torna simples a tarefa de extrair a densidade implícita. Possuímos a função  $w(k)$  e suas derivadas e certamente  $d_2(k)$ , bastando portanto, aplicar a equação (8.18) para extrair importante informação do mercado de opções.

## 8.5 Superfície de volatilidade local

De maneira semelhante ao procedimento realizado com a densidade implícita, também é possível, uma vez parametrizada a SSVI, derivar a **superfície de volatilidade local** através da equação de (Dupire, 1994). Esta equação toma a seguinte forma funcional:

$$\sigma_L^2(K, \tau) = \frac{\partial_\tau C_B(K, \tau)}{\frac{1}{2}K^2 \partial_{KK} C_B(K, \tau)} \quad (8.20)$$

Novamente tomando as derivadas da equação de Black e fazendo as substituições necessárias<sup>1</sup> chegamos a relação entre a superfície SVI e variância local.

$$\sigma_L^2(k, \tau) = \frac{\partial_\tau w(k, \theta_\tau)}{g(k, w(k, \theta_\tau))} \quad (8.21)$$

De forma bastante simplista, a superfície de volatilidade local pode ser entendida como aquela superfície de volatilidades instantâneas para o ativo subjacente,  $\sigma(S, t)$  que depende tanto do nível de preço deste ativo quanto do tempo, e fornece a previsão do mercado para a volatilidade instantânea de  $S$  dado que este ativo hoje está precificado em  $S_0$  e no tempo futuro  $\tau$  estará em  $K$ . Fazendo uma analogia com o mercado de juros, a superfície local está para a curva *forward* assim como a superfície implícita está para a curva de juros, numa aproximação.

A superfície local é muito utilizada para precificar opções exóticas, aquelas que possuem perfil de *payoff* distinto das opções europeias e podem ou não terem seus resultados atrelados ao caminho seguido pelo preço do ativo objeto durante a vida da opção. Nestes casos, a precificação se dá através da incorporação da superfície local estipulando um valor de volatilidade instantânea para cada possível combinação  $(S_t, t)$  em geral em um ambiente de simulação de Monte Carlo.

<sup>1</sup>Referimos o leitor ao material do prof. Antoine Jacquier para uma prova desta relação aqui

No caso da equação (8.21) temos uma nova derivada a ser computada,  $\partial_\tau w(k, \theta_\tau)$ , que só poderia ser feita de forma analítica caso  $\theta_\tau$  fosse parametrizada explicitamente. Nem sempre este é o caso, já que  $\theta_\tau$  são os valores de variância total ATM implícitas, ou seja, observa-se no mercado apenas alguns **pontos** de  $\theta_\tau$ , pontos estes que podem estar espaçados em intervalos diferentes de tempo. A solução para esta derivação é interpolar estes pontos, nem que seja uma simples interpolação linear, e então fazer a derivação de forma numérica através de um método de diferenças finitas. Note que na interpolação deve-se garantir a condição de não arbitragem de calendário,  $\partial_\tau \theta_\tau \geq 0$ .

## 8.6 Calibração da SSVI

Vamos retomar nosso exemplo de superfície de volatilidade do artigo anterior, porém agora com todas as datas de expiração, ou seja, a superfície completa. Os códigos R apresentados abaixo ajudam na compreensão do procedimento.

```
library(readr)
library(dplyr)
library(purrr)
library(kableExtra)
library(ggplot2)
library(ggthemes)
library(plot3D)
source('svi.R')
source('ssvi.R')
```

Primeiramente foram carregados os pacotes necessários para a leitura e manipulação dos dados (`readr`, `dplyr` e `purrr`) assim como os pacotes de visualização (`kableExtra`, `ggplot2`, `ggthemes` e `plot3D`). Em seguida os arquivos `svi.R` e `ssvi.R` são implementações do Clube de Finanças para as funções necessárias para calibrar uma SSVI.

Carregados os pacotes e as funções, deve-se carregar os dados da superfície de volatilidade e organizá-los da forma que necessitamos.

```
ssvi_data <- read_csv("./R/input/IV_Raw_Delta_surface.csv",
                     col_types = cols(date = col_date(format = "%m/%d/%Y"))) %>%
  mutate(tau = period / 365,
         theta = theta_vec(moneyness, tau, iv)) %>%
  rename(k = moneyness)
```

Para calibrar os parâmetros de uma SSVI, com a função  $\varphi$  do tipo **lei de potência**, necessitaremos dos dados de *moneyness* ( $k$ ), vencimento ( $\tau$ ) e volatilidade implícita ( $iv$ ) que será internamente convertida em variância total implícita ( $w$ ). Dentro da função de ajuste dos parâmetros `fit_ssvi()` a variância total ATM implícita  $\theta_\tau$  é calculada através de interpolação *spline* para cada uma das fatias da superfície, pois, nossos dados não necessariamente possuem esta observação. Cabe ressaltar também que os dados estão organizados de forma `tidy`, sendo portanto, todos os argumentos passados para as funções na forma de vetores, não sendo necessário gerar uma matriz contendo o *grid* ( $k, \tau$ ).

```
k <- ssvi_data$k
tau <- ssvi_data$tau
iv <- ssvi_data$iv
theta <- ssvi_data$theta

set.seed(12345)
powerlaw_par <- fit_ssvi(tau, k, iv, "powerlaw")
kable(powerlaw_par,
```

Tabela 8.1: Parâmetros da SSVI-power-law estimados.

	SSVI-PL
rho	-0.6479238
gamma	0.4926757
eta	0.8607807

```
caption = "Parâmetros da SSVI-power-law estimados.",
col.names = "SSVI-PL")
```

Podemos rapidamente checar se estes parâmetros estimados geram uma superfície livre de arbitragem.

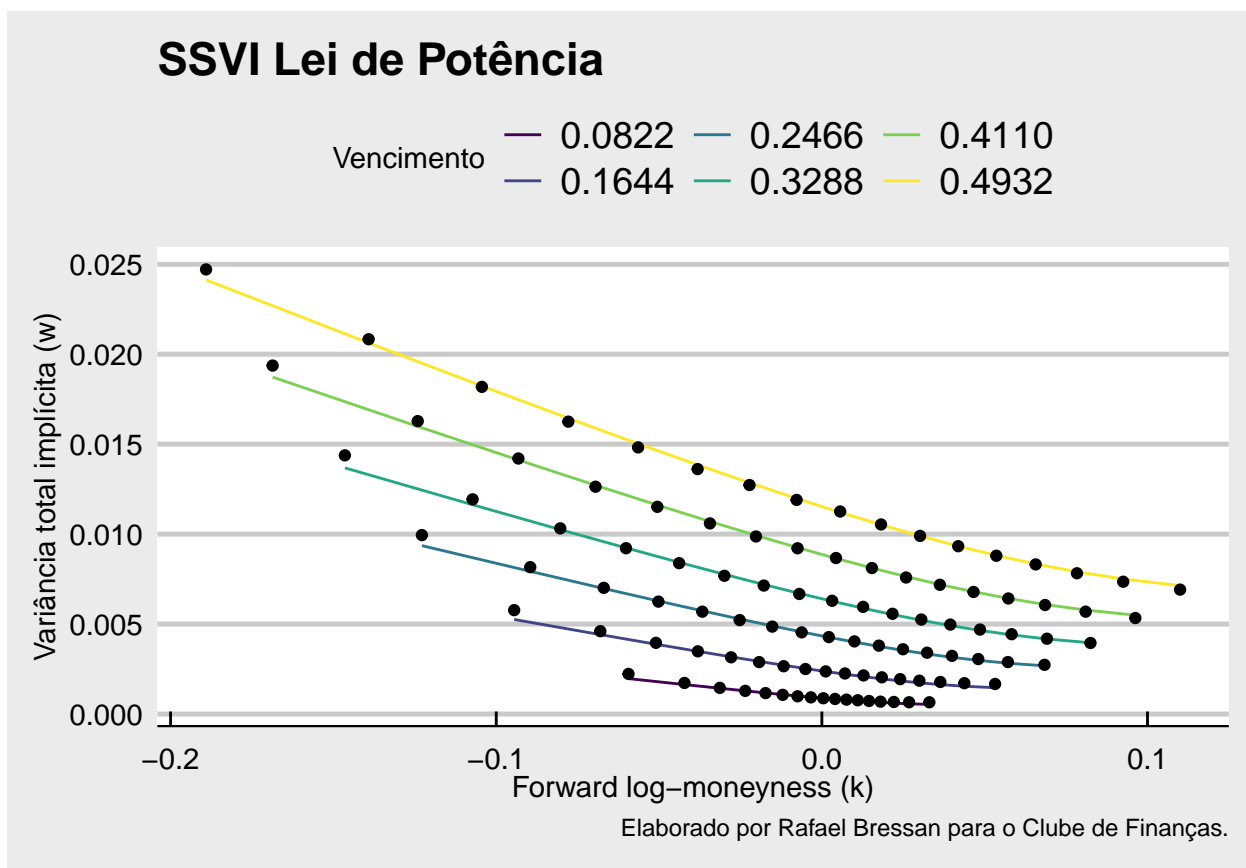
```
paste("Parametrização livre de arbitragem borboleta? :",
      ssvi_butterfly_cons(powerlaw_par, "powerlaw") <= 0)
```

```
## [1] "Parametrização livre de arbitragem borboleta? : TRUE"
```

Com os parâmetros estimados, é simples plotar todos os *smiles* que compõe a superfície e verificar visualmente o ajuste. Vamos plotar a **variância total** em função do *moneyness* e vencimentos, pois neste gráfico se verifica a condição de arbitragem de calendário simplesmente através do fato que as curvas geradas não devem se cruzar.

```
plt_df <- ssvi_data %>%
  mutate(w_pl = ssvi_fun(powerlaw_par, theta, k)) %>%
  select(k, tau, w_pl, iv) %>%
  filter(tau < 0.5)

ggplot(plt_df, aes(x = k, y = w_pl)) +
  geom_line(aes(color = as.factor(format(tau, digits = 3)))) +
  geom_point(aes(y = iv^2 * tau)) +
  guides(color = guide_legend(title = "Vencimento")) +
  labs(title = "SSVI Lei de Potência",
       x = "Forward log-moneyness (k)",
       y = "Variância total implícita (w)",
       caption = "Elaborado por Rafael Bressan para o Clube de Finanças.") +
  # scale_y_continuous(labels = scales::percent) +
  scale_color_viridis_d() +
  theme_economist_white()
```



Foram retirados os vencimentos mais longos apenas para uma melhor visualização da parte mais curta da superfície, que em geral é a mais complicada de se calibrar através de SVI. O resultado parece interessante, com as variâncias ao redor do dinheiro tendo boa aderência aos dados observados, porém para *puts* muito fora do dinheiro, a parametrização aparenta **subestimar** o valor da variância total e portanto estaria subprecificando as opções.

Iremos agora verificar a *densidade da distribuição implícita* para o período de vencimento de 90 dias. Utiliza-se para tanto a equação (8.18) onde  $w(k)$  (e suas derivadas e o próprio  $d_2$ ) será agora calculado com base nos parâmetros da tabela 8.1 para um vetor de *moneyness* mais amplo e denso. O resultado pode ser observado através da figura 8.2

```
thetadens <- ssvi_data %>%
  filter(period == 90) %>%
  pull(theta) %>%
  `[`(1)

kdens <- seq(-0.5, 0.3, length.out = 100)
dens <- ssvi_density(powerlaw_par, thetadens, kdens, "powerlaw")
dens_tbl <- tibble(kdens = kdens, dens = dens)

ggplot(dens_tbl, aes(x = kdens, y = dens)) +
  geom_line() +
  labs(title = "Densidade neutra ao risco SSVI",
       x = "Forward log-moneyness (k)",
       y = "Densidade",
       caption = "Elaborado por Rafael Bressan para o Clube de Finanças.") +
  scale_color_viridis_d() +
  theme_economist_white()
```

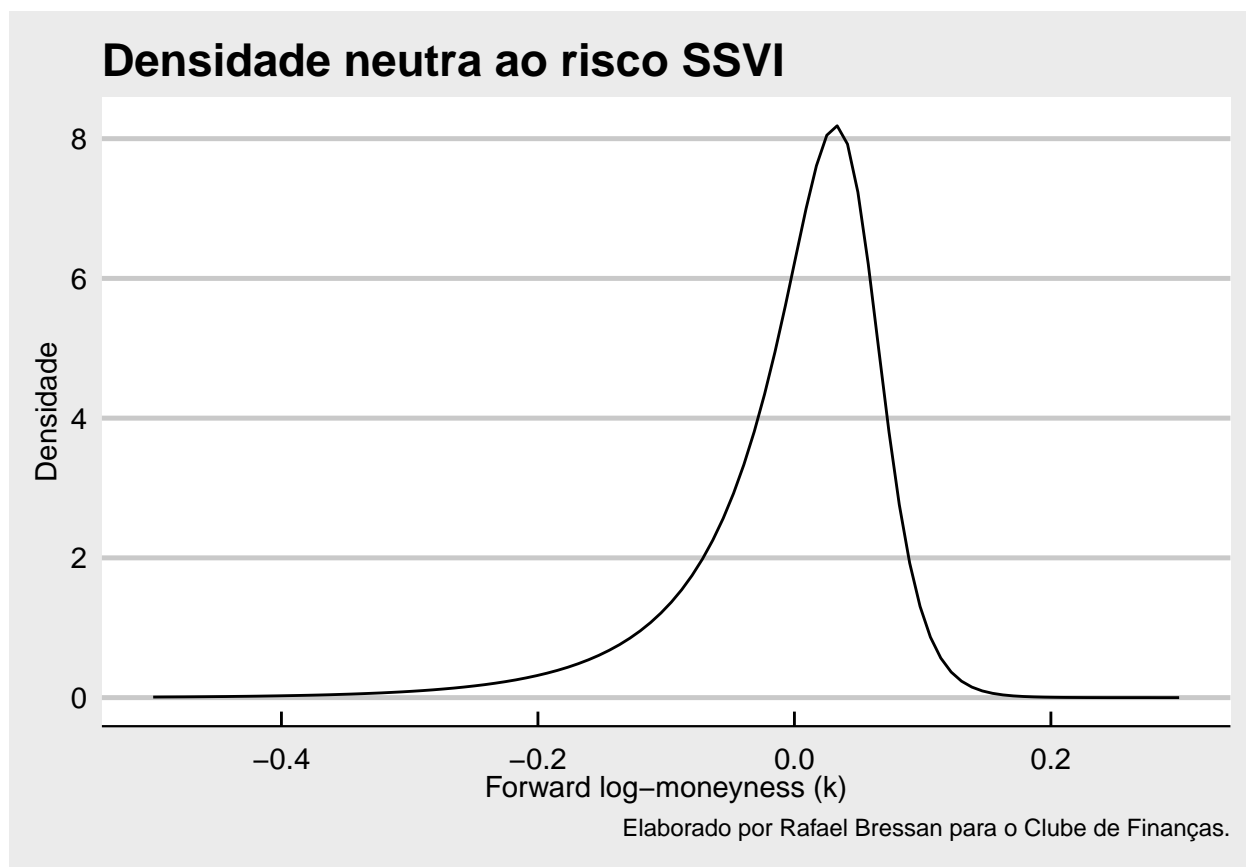


Figura 8.2: Densidade implícita estimada. Presença de assimetria e leptocurtose a esquerda.

Este é um gráfico interessante, que nos mostra exatamente o que se espera de um *smile* típico de *equities* que possui *skew* negativo. Percebemos como a densidade de probabilidades é assimétrica, com a cauda esquerda muito mais longa, refletindo o sentimento de mercado de uma maior probabilidade de grandes quedas no preço do ativo objeto que altas equivalentes. Sempre que verificamos um *smile* com *skew* negativo, como é o presente caso, a distribuição de probabilidades é assimétrica a esquerda.

Vamos conferir se a área sob esta curva de densidade integra aproximadamente 1, como deve ser.

```
area <- integrate(function(x) ssvi_density(powerlaw_par, thetadens, x, "powerlaw"),
                  lower = kdens[1],
                  upper = kdens[length(kdens)])
paste("Área sob a curva de densidade é: ", area$value)
```

```
[1] "Área sob a curva de densidade é: 0.999302879362191"
```

Chegou o momento de inferirmos a **superfície de volatilidade local** a partir de nossa parametrização SSVI. O método será a aplicação direta da equação (8.21) pois, com a parametrização realizada, dispomos de todos os dados necessários para seu cálculo.

Antes porém, devemos observar uma peculiaridade dos nossos dados. O site *ivolatility.com* fornece dados alinhados por **Delta**, ou seja, para cada período de vencimento temos um mesmo conjunto de Deltas, **mas não de moneyness**. Os valores deste último irá variar conforme o vencimento, uma vez que pela definição de *forward log-moneyness* que vimos utilizando é dependente do tempo para maturidade da opção. Desta forma precisamos gerar um novo *grid* ( $k, \tau$ ) para plotar nossa superfície de volatilidade local.

Para tanto, criaremos uma sequência uniforme de valores de  $k$  e tomaremos os valores que já possuímos de  $\tau$  e  $\theta_\tau$  recombina-ndo-os através da função `expand.grid()` para gerar o data frame que precisamos.

Feito isso, é apenas questão de aplicar a equação (8.21) e criar uma matriz (pois assim pede a função `surf3D()`) com os valores da volatilidade local.

```
kloc <- seq(-.4, 0.4, length.out = 17)
utau <- unique(tau)
utheta <- unique(theta)
names(utheta) <- utau # utheta will be a lookup vector
grid_df <- expand.grid(kloc, utau) %>%
  rename(kloc = Var1,
         tau = Var2) %>%
  mutate(theta = utheta[as.character(tau)])

loc_vol_vec <- ssvi_local_vol(powerlaw_par,
                             grid_df$tau,
                             grid_df$theta,
                             grid_df$kloc,
                             "powerlaw")

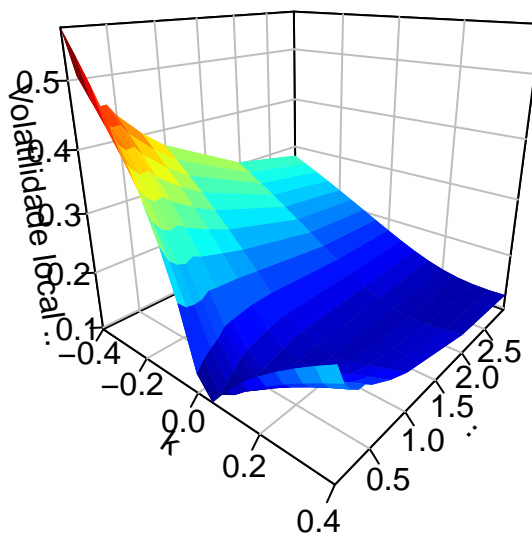
# Matrix where k is row
loc_vol_m <- matrix(loc_vol_vec, nrow = length(kloc))

# Plot Local Volatility Surface
# x is k, y is tau
M <- mesh(kloc, utau)
surf3D(M$x, M$y, loc_vol_m, colkey = FALSE, bty = "b2",
       phi = 20, ticktype = "detailed",
       xlab = "k",
       ylab = "\u03c4",
       zlab = "Volatilidade local \u03c3")
```

```
## Warning in persp.default(plist$xlim, plist$ylim, z = matrix(nrow = 2, ncol
```



```
## = 2, : conversion failure on ' ' in 'mbcsToSbcs': dot substituted for <cf>
## Warning in persp.default(plist$xlim, plist$ylim, z = matrix(nrow = 2, ncol
## = 2, : conversion failure on ' ' in 'mbcsToSbcs': dot substituted for <84>
## Warning in persp.default(plist$xlim, plist$ylim, z = matrix(nrow = 2, ncol
## = 2, : conversion failure on 'Volatilidade local ' in 'mbcsToSbcs': dot
## substituted for <cf>
## Warning in persp.default(plist$xlim, plist$ylim, z = matrix(nrow = 2, ncol
## = 2, : conversion failure on 'Volatilidade local ' in 'mbcsToSbcs': dot
## substituted for <83>
```



## 8.7 Conclusão

Apresentamos o modelo de superfícies SVI, que faz uma generalização dos *smiles* SVI e apresenta vantagens sobre a parametrização fatia-a-fatia em virtude dos teoremas sobre arbitragem estática, apresentando restrições para os parâmetros do modelo que garantem a ausência deste tipo de arbitragem.

Uma vez parametrizada toda uma SSVI, torna-se simples, uma mera aplicação de fórmulas a obtenção tanto da densidade da distribuição neutra ao risco implícita no preços das opções, como da superfície de volatilidade local através da equação de Dupire.

## 8.8 Referências



## Capítulo 9

# Simulação de Monte Carlo

Em capítulo anterior, sobre processos estocásticos, fizemos uso de uma poderosa ferramenta computacional, frequentemente utilizada em finanças para fazer simulações. Naquele artigo simulamos cinco realizações de caminhos de um processo estocástico, cada um com 500 passos a frente. Esta técnica é conhecida como Simulação de Monte Carlo - SMC e será abordada no presente artigo.

Neste artigo também iremos introduzir, no corpo do texto, os códigos em linguagem R utilizados para fazer as simulações, aumentando a didática de nossos artigos. A linguagem R é uma das preferidas para a modelagem estatística, é uma das linguagens de ciência de dados que vem ganhando muitos adeptos e, por conseguinte, é amplamente utilizada pelo mercado financeiro. E claro, é uma das preferidas aqui do CF também.

Nosso problema será simular a posição de um portfólio composto por uma posição comprada em uma ação PETR4 e uma *put* PETRV17. A opção de venda (*put*) tem preço de exercício em R\$ 16,92, data de expiração em 15/10/2018 e é do tipo europeia. Ao final do pregão do dia 21/09/2018 a ação PETR4 fechou cotada a R\$ 20,14 e a *put* em R\$ 0,12. A partir desta data até o dia da expiração da opção haverão 16 dias de pregão, que será nosso horizonte de simulação.

Para melhoria da didática do texto e também para simplificação do problema, manteremos algumas variáveis necessárias para a precificação de opções constantes ao longo do período de análise, são elas:

- Volatilidade: Será calculada a volatilidade implícita da opção da data de compra do portfólio, 21/09/2018, e será mantida constante a partir daí para fins de precificação na SMC;
- Taxa de juros: constante no valor de 6,5 %a.a. tem termos contínuos;
- Taxa de dividendos: suposto igual a zero.

### 9.1 Simulação de Monte Carlo

Para realizar uma SMC de um ativo financeiro deve-se primeiramente estabelecer uma distribuição de probabilidades que os retornos deste ativo deve seguir. Em nosso exemplo, utilizaremos a distribuição normal para os retornos logarítmicos da ação PETR4, em linha com o clássico modelo *Black & Scholes*, certamente existem diversas variantes que se ajustam melhor a realidade dos mercados, entretanto este é o modelo mais conhecido e base de todos os demais.

Uma vez escolhida a distribuição dos (log) retornos, tem-se de escolher valores para a média e variância desta distribuição. A média dos retornos iremos tirar do histórico da ação, o retorno médio diário dos último ano. A variância da distribuição será encontrada a partir da volatilidade implícita da opção na data de compra do portfólio. A função utilizada para encontrar esta volatilidade retorna um valor em termos

anuais, portanto, conforme visto no capítulo sobre processos estocásticos devemos reescalar uma volatilidade anual para diária, e isto é obtido fazendo a divisão por  $\sqrt{252}$ , onde temos 252 dias úteis em 1 ano.

Desta forma é possível fazer a simulação dos log-retornos da ação para cada um dos dias a frente, até a data de exercício da opção, 15/10/2018. Estes retornos são acumulados e o preço **simulado** da ação PETR4 em uma data intermediária é o preço de compra vezes o retorno acumulado até então.

Faremos 1.000 simulações destas, gerando caminhos possíveis de preços para a ação. É necessário fazer muitas simulações para termos uma boa ideia da distribuição dos preços na data final, não é raro serem feitas mais de mil simulações, as vezes até dez mil podem ser necessárias.

Uma vez gerados todos os caminhos simulados do preço do ativo objeto, podemos então precificar a *put* com base nestes preços simulados e as outras variáveis necessárias para se precificar uma opção europeia. Assim teremos também todos os caminhos de preço para a opção até sua data de exercício.

O valor de nosso portfólio, em qualquer ponto do intervalo de tempo em análise, será a soma do preço da ação com o preço da opção e será possível verificar o efeito de proteção contra quedas do preço do ativo objeto a compra da *put* tem no portfólio.

Cabe ressaltar aqui que o preço da opção **não** é simulado, não diretamente. Como a opção é um instrumento derivativo o seu preço “deriva” do preço do ativo objeto, este sim que é simulado. Uma vez que tenhamos o preço da ação, dadas nossas premissas de precificação, podemos calcular o prêmio da opção com base no modelo *Black & Scholes*.

## 9.2 Implementação em R

Conforme comentado, utilizamos aqui no CF a linguagem de programação R para realizar nossas atividades que envolvam métodos quantitativos em finanças. Abaixo irei apresentar o código utilizado, trecho a trecho e o resultado obtido ao final.

Primeiramente, no R, devemos carregar em nossa sessão de trabalho os pacotes que serão utilizados ao longo do código. Os pacotes funcionam como extensões ao R base, nestes pacotes encontramos diversas funções já programadas por outras pessoas que facilitam (e muito!) a nossa codificação.

```
library(tidyverse)
library(ggthemes)
library(tidyquant)
library(ragtop)
```

O pacote **ragtop**, por exemplo, possui já implementado dentro dele funções para fazer a precificação de opções europeias, sem que se tenha que implementar o modelo manualmente. Como a intenção deste artigo não é explicar o modelo *Black & Scholes*, vamos abstrair esta parte e simplesmente chamar uma função que nos retorna o valor da opção dadas as variáveis de entrada.

Em seguida iremos definir algumas de nossas variáveis, como o *ticker* da ação para buscar seus dados históricos através da função `tq_get()` do pacote **tidyquant** e calcular os retornos logarítmicos e tirar sua média, o preço e data de exercício da opção e também iremos relacionar os dias entre a data de compra e vencimento.

```
acao <- "PETR4.SA"
p_exer <- 16.92
d_exer <- as.Date("2018-10-15")
d_atual <- as.Date("2018-09-21")
dias <- seq(d_atual, d_exer, by = 1)
#dias <- dias[isBusinessDay("Brazil", dias)]
nsims <- 1000
ndias <- length(dias) - 1
```

```

sim_nomes <- paste0("sim", 1:nsims)

# Carregar os precos historicos da acao
p_hist <- tq_get(acao, from = d_atual - years(1), to = d_atual + days(1)) %>%
  filter(volume != 0.0)
ret_hist <- p_hist %>%
  tq_mutate(select = adjusted,
            mutate_fun = periodReturn,
            period = "daily",
            type = "log",
            leading = FALSE,
            col_rename = "log_ret") %>%
  na.omit()
rf <- log(1 + 0.065)
div <- 0
S0 <- last(ret_hist$adjusted)
P0 <- 0.12
mi <- 252 * mean(ret_hist$log_ret) # retorno medio em termos anuais
sigma <- implied_volatility(P0, -1, S0, p_exer, rf, (ndias + 1) / 365,
                           divrate = div)

```

Com o código acima obtemos basicamente todos os dados com os quais poderemos implementar a simulação de Monte Carlo. Entretanto, para realizar as simulações, necessitamos especificar mais algumas funções customizadas para nossas necessidades.

Primeiro iremos especificar uma função que retorna uma única simulação de log-retornos acumulados em uma coluna de dados, esta função é chamada de `mc_sim_fun`. A segunda função necessária é a função de precificação da opção europeia. Por padrão, a função `blackscholes()` do pacote `ragtop` retorna uma lista com o valor da opção, mas também suas gregas  $\Delta$  e  $\nu$ .

```

# Funcao para realizar uma simulacao
mc_sim_fun <- function(valor_i, N, media, volat){
  med_d <- media / 252
  volat_d <- volat / sqrt(252)
  ans <- tibble(c(valor_i, rnorm(N, med_d - (volat_d^2 / 2), volat_d))) %>%
    `colnames<-`("log_ret") %>%
    mutate(ret_ac = cumsum(log_ret)) %>%
    select(ret_ac)

  return(ans)
}

# Funcao para precificar uma opcao europeia
eur_option <- function(type, S0, K, r, time, vola, div) {
  callput <- ifelse(type == "call", 1, -1)

  ans <- blackscholes(callput, S0, K, r, time, vola, divrate = div)$Price
  return(ans)
}

```

Uma vez com os dados obtidos e as funções auxiliares programadas, podemos passar a SMC propriamente dita. Aqui vamos estabelecer o número de simulações (1.000), calcular um *data frame* com os log-retornos acumulados e então calcular o preço da ação para cada dia e simulação realizados. O preço da ação na data  $t$  será  $S_t = S_0 e^{r_t}$ , onde  $r_t$  é o log-retorno acumulado até a data  $t$ .

Após termos todos os preços do ativo objeto, passamos a computar qual seria o preço da opção,

$P_t$ , naquelas condições. O valor do portfólio é dado pela soma destes dois preços (lembre-se, nosso portfólio é composto por **uma** ação e uma opção de venda).

```
# Simulacao de Monte Carlo
# Valores Iniciais
inic <- rep(0, nsims)
set.seed(12345)
ret_ac_mc <- map_dfc(inic,
                     mc_sim_fun,
                     N = ndias,
                     media = mi,
                     volat = sigma)

precos_acao <- (S0 * exp(ret_ac_mc)) %>%
  set_names(sim_nomes) %>%
  mutate(anos_exp = (ndias:0) / 252) %>%
  gather(key = sims, value = St, -anos_exp)

# Evolucao do Portfólio
port_mc <- precos_acao %>%
  mutate(Pt = map2_dbl(St, anos_exp,
                      ~eur_option(type = "put",
                                   S0 = .x,
                                   K = p_exer,
                                   r = rf,
                                   time = .y,
                                   vola = sigma,
                                   div = div)),
         port_valor = Pt + St,
         data = rep(dias, nsims))
head(port_mc)
```

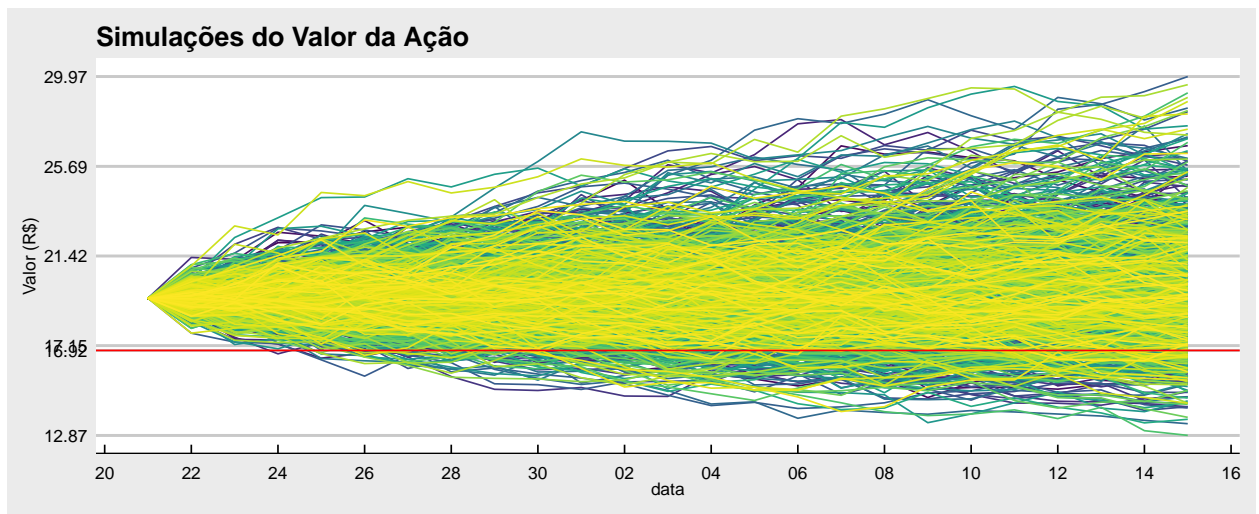
##	anos_exp	sims	St	Pt	port_valor	data
## 1	0.09523810	sim1	19.40838	0.19814037	19.60652	2018-09-21
## 2	0.09126984	sim1	19.74659	0.14627994	19.89287	2018-09-22
## 3	0.08730159	sim1	20.16159	0.09894207	20.26053	2018-09-23
## 4	0.08333333	sim1	20.11181	0.09428249	20.20610	2018-09-24
## 5	0.07936508	sim1	19.86686	0.10511830	19.97198	2018-09-25
## 6	0.07539683	sim1	20.22476	0.07026524	20.29503	2018-09-26

O *data frame* `port_mc` contém todas as informações da SMC de nosso portfólio. Contém as datas desde o dia da compra até a data de vencimento da opção e contém **todos** os caminhos de  $S_t$ ,  $P_t$  e do portfólio. Vamos plotar os resultados obtidos para a evolução apenas da ação, primeiramente.

```
brk <- round(sort(c(p_exer, seq(min(port_mc$St),
                               max(port_mc$St),
                               length.out = 5))),
             digits = 2)

ggplot(port_mc, aes(x = data, y = St)) +
  geom_line(aes(color = sims)) +
  geom_hline(yintercept = p_exer, color = "red") +
  guides(color = FALSE) +
  labs(title = "Simulações do Valor da Ação",
       x = "data",
       y = "Valor (R$)") +
  scale_y_continuous(breaks = brk) +
```

```
scale_x_date(date_breaks = "2 days", date_labels = "%d") +
scale_color_viridis_d() +
theme_economist_white()
```



Podemos verificar pela figura acima que a ação, pela nossa SMC, deve fechar na maioria dos caminhos simulados acima do preço de exercício da *put* (linha vermelha). Entretanto existe uma menor probabilidade de, até a data de vencimento, o preço da ação cair abaixo do *strike* desta opção.

Podemos inferir esta probabilidade através do número de caminhos que terminaram em preço da ação abaixo do valor de referência. O custo de proteção contra este risco é o prêmio por nós ao comprarmos a *put*. O código para esta inferência está abaixo.

```
p_baixo <- port_mc %>%
  filter(data == d_exer) %>%
  summarise(num_baixo = sum(St < p_exer)) %>%
  as.double()
prob <- p_baixo / nsims
```

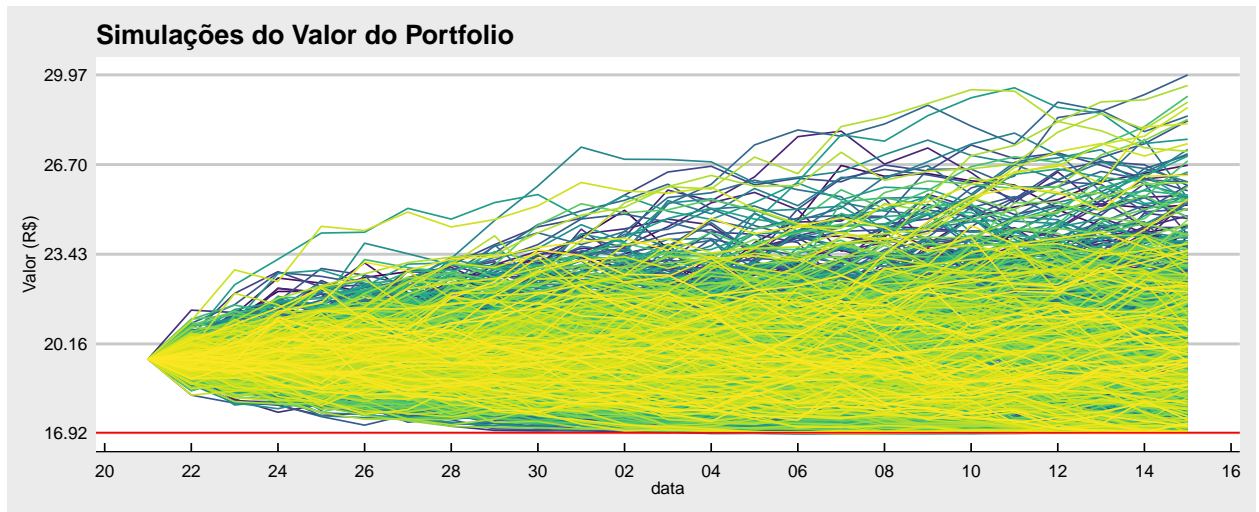
Este cálculo nos mostra que em 134 caminhos simulados do preço de PETR4, este terminou abaixo do preço de exercício da opção PETRV17, ou seja, uma probabilidade de 13.4%.

Para nos precavermos desta possível queda de preço e garantir um valor mínimo de nosso portfólio até a data de 15/10/2018, podemos comprar uma opção de venda, com preço de exercício no valor que desejamos e então o portfólio passa a ser composto pela ação e também pela opção. Caso na data de vencimento o preço da ação seja menor que o preço de exercício da *put*, esta opção estará ITM e pode ser exercida pelo valor da diferença entre os preços, ou seja, nos garantindo que nosso portfólio estará avaliado em R\$ 16,92.

Esta dinâmica pode ser verificada pela figura abaixo, que agora apresenta o valor do portfólio completo, ação mais opção. Verificamos que, de fato, no dia 15/10/2018 nosso investimento não estará em situação pior que o preço garantido pela compra da *put*.

```
brk <- round(sort(c(p_exer, seq(min(port_mc$port_valor),
                                max(port_mc$port_valor),
                                length.out = 5)[-1])),
              digits = 2)
ggplot(port_mc, aes(x = data, y = port_valor)) +
  geom_line(aes(color = sims)) +
  geom_hline(yintercept = p_exer, color = "red") +
  guides(color = FALSE) +
```

```
labs(title = "Simulações do Valor do Portfólio",
     x = "data",
     y = "Valor (R$)") +
scale_y_continuous(breaks = brk) +
scale_x_date(date_breaks = "2 days", date_labels = "%d") +
scale_color_viridis_d() +
theme_economist_white()
```



Ou seja, ao custo de 0.62% do preço da ação, compramos uma proteção contra uma queda de preços com probabilidade de 13.4%.

Esta é apenas uma (simples) aplicação das inúmeras possíveis que a Simulação de Monte Carlo possui no mundo das finanças. A SMC é uma poderosa ferramenta para avaliação e controle de risco de grandes portfólios, com centenas ou milhares de ativos, onde nem sempre consegue-se aferir medidas de retorno esperado ou de risco de mercado de forma analítica.



# Bibliografia

- Aurell, A. (2014). The svi implied volatility model and its calibration. Master's thesis, Kungliga Tekniska Högskolan.
- Bates, D. S. (1996). Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in deutsche mark options. *The Review of Financial Studies*, 9(1):69–107.
- Benaim, S., Dodgson, M., and Kainth, D. (2008). An arbitrage-free method for smile extrapolation. *Royal Bank of Scotland, Technical report*.
- Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3):637–654.
- Breeden, D. T. and Litzenberger, R. H. (1978). Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of business*, pages 621–651.
- De Marco, S. and Martini, C. (2009). Quasi-explicit calibration of gatheral's svi model'. *Zeliade White Paper*, pages 1–15.
- Derman, E. and Kani, I. (1994). The volatility smile and its implied tree. *Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes*, 7.
- Derman, E. and Kani, I. (1998). Stochastic implied trees: Arbitrage pricing with stochastic term and strike structure of volatility. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 01(01):61–110.
- Duffie, D., Pan, J., and Singleton, K. (2000). Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. *Econometrica*, 68(6):1343–1376.
- Dupire, B. (1994). Pricing with a smile. *Risk*, 7(1):18–20.
- Fengler, M. R. (2012). Option data and modeling bsm implied volatility. In *Handbook of computational finance*, pages 117–142. Springer.
- Gatheral, J. (2004). A parsimonious arbitrage-free implied volatility parameterization with application to the valuation of volatility derivatives. *Presentation at Global Derivatives & Risk Management, Madrid*.
- Gatheral, J. (2011). *The volatility surface: a practitioner's guide*, volume 357. John Wiley & Sons.
- Gatheral, J. and Jacquier, A. (2014). Arbitrage-free svi volatility surfaces. *Quantitative Finance*, 14(1):59–71.
- Hagan, P. S., Kumar, D., Lesniewski, A. S., and Woodward, D. E. (2002). Managing smile risk. *The Best of Wilmott*, 1:249–296.
- Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The review of financial studies*, 6(2):327–343.
- Kahalé, N. (2004). An arbitrage-free interpolation of volatilities. *Risk*, 17(5):102–106.
- Lee, R. W. (2004). The moment formula for implied volatility at extreme strikes. *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 14(3):469–480.

- Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of financial economics*, 3(1-2):125–144.
- Rogers, L. C. and Tehranchi, M. (2010). Can the implied volatility surface move by parallel shifts? *Finance and Stochastics*, 14(2):235–248.
- Wang, Y., Yin, H., and Qi, L. (2004). No-arbitrage interpolation of the option price function and its reformulation. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 120(3):627–649.