Pauta de Corrección

Primer Certamen
Introducción a la Informática Teórica

17 de mayo de 2014

1. Por turno.

   a) Este conjunto es finito, y por tanto regular.

   b) No es regular, cosa que demostramos por contradicción. Si L_3 es regular, cumple el lema de bombeo respectivo. Sea N la constante del lema, consideremos la palabra $\sigma = a^{N^3} \in L_3$, con $|\sigma| = N^3 \geq N$. Por el lema de bombeo podemos escribir:

   $$\sigma = \alpha\beta\gamma$$

   con $|\alpha\beta| \leq N$, $|\beta| > 0$ tales que para todo $k \in \mathbb{N}_0$:

   $$\alpha\beta^k\gamma \in L_3$$

   Elijamos $k = 2$, y nos fijamos únicamente en los largos, o sea:

   $$|\alpha\beta^2\gamma| = N^3 + |\beta|$$

   Como $0 < |\beta| \leq N$ esto es:

   $$\begin{aligned} N^3 < N^3 + |\beta| &\leq N^3 + N \\ &< N^3 + 3N^2 + 3N + 1 \\ &= (N+1)^3 \end{aligned}$$

   O sea, el largo de $\alpha\beta^2\gamma$ no es un cubo perfecto, y esa palabra no es parte de L_3. Esto contradice el lema de bombeo, L_3 no es regular.

Puntajes

Total			20
a)	Finito, por tanto regular	5	
b)	No es regular, demostración		
	Plantear lema de bombeo	3	
	Elegir σ que cumple condiciones	5	
	Elegir k que lleva a contradicción	5	
	Contradicción, conclusión	2	

2. Hay dos opciones, usar una construcción basada en autómatas o propiedades de clausura.

Primero autómatas. Suponemos dados DFAs $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1)$ y $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{02}, F_2)$ tales que $L_1 = \mathscr{L}(M_1)$ y $L_2 = \mathscr{L}(M_2)$. Nos interesa construir un DFA M que alterne pasos de M_1 y M_2, lo que significa que su estado incluye los estados de ambos y el turno. Acepta si M_1 aceptó (está en un estado final), M_2 acaba de aceptar (está en un estado final) y es el turno de M_1 (acaba de haber una movida de M_2). O sea, tendremos $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ con:

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 \times Q_2 \times \{1,2\} \\ q_0 &= (q_{01}, q_{02}, 1) \\ F &= F_1 \times F_2 \times \{1\} \end{aligned}$$

Definimos en base a esto:

$$\delta((q_1, q_2, t), a) = \begin{cases} (\delta(q_1, a), q_2, 2) & t = 1 \\ (q_1, \delta(q_2, a), 1) & t = 2 \end{cases}$$

Entonces $\mathscr{L}(M) = \text{SHUFFLE}(\mathscr{L}(M_1), \mathscr{L}(M_2))$

Puntajes

Total	20
Autómatas para L_1 y L_2	4
Estado de M	5
Función de transición de M	5
Estado inicial de M	2
Estados finales de M	4

Ahora propiedades de clausura. Consideremos las substituciones para todo $a \in \Sigma$, y usando Σ para representar el conjunto de todas las palabras de largo uno:

$$\begin{aligned} s_1(a) &= a\Sigma \\ s_2(a) &= \Sigma a \end{aligned}$$

Claramente $s_i(a)$ es regular para todo $a \in \Sigma$. Entonces:

$$\text{SHUFFLE}(L_1, L_2) = s_1(L_1) \cap s_2(L_2)$$

Los lenguajes regulares son cerrados respecto de todas las operaciones indicadas.

Puntajes

Total	20
Substituciones	10
Intersección	8
Conclusión	2

3. Esto da una respuesta a la común pregunta de un lenguaje que cumple el lema de bombeo pero no es regular. La misma idea da un lenguaje que cumple el lema de bombeo para lenguajes regulares (y por tanto el para lenguajes de contexto libre) sin ser de contexto libre.

   a) Si σ comienza en a, podemos elegir $\alpha = \epsilon$, $\beta = a$ y el resto γ. Repetir u omitir a inicial (independiente de si partimos en la primera o segunda parte de la unión) nos hace caer en la segunda parte. Si no comienza en a, estamos hablando de $b^* c^*$; si comienza en b podemos elegir $\alpha = \epsilon$, $\beta = b$, γ el resto; de no haber b elegimos $\alpha = \epsilon$, $\beta = c$ y γ lo demás.

   b) Definamos el homomorfismo $h \colon \{a, b, c\} \to \{0, 1\}$:

   $$h(a) = \epsilon$$
   $$h(b) = 0$$
   $$h(c) = 1$$

   Entonces:

   $$h(L \cap ab^* c^*) = \{0^r 1^r : r \geq 0\}$$

   Los lenguajes regulares son cerrados respecto de intersección y homomorfismos, por lo que el resultado sería regular de ser regular L. Pero el resultado no es regular.

Puntajes

Total			25
a)		10	
Caso comienza en a	5		
Caso comienza en b o c	5		
b)		15	
Reducir vía intersectar con $ab^* c^*$	7		
Demostrar $\{ab^r c^r : r \geq 0\}$ no regular	8		

4. Debemos cubrir tres situaciones diferentes. Para simplificar, admitimos producciones nulas, eliminarlas de la gramática quedará de ejercicio. El símbolo de partida de cada subgramática es el no-terminal al lado izquierdo de la primera producción, según nuestras convenciones.

   $b^* c^*$: Producciones son:

$$
\begin{aligned}
A &\longrightarrow bA \mid B \\
B &\longrightarrow cB \mid \epsilon
\end{aligned}
$$

   $aa^+ b^* c^*$: Reutilizando las anteriores:

$$
\begin{aligned}
C &\longrightarrow aaD \\
D &\longrightarrow aD \mid A
\end{aligned}
$$

   $\{ab^r c^r : r \geq 0\}$: Debemos generar una a, luego anidar:

$$
\begin{aligned}
E &\longrightarrow aF \\
F &\longrightarrow bFc \mid \epsilon
\end{aligned}
$$

   Uniendo todas las piezas:

$$
\begin{aligned}
S &\longrightarrow A \mid C \mid E \\
A &\longrightarrow bA \mid B \\
B &\longrightarrow aB \mid \epsilon \\
C &\longrightarrow aaD \\
D &\longrightarrow aD \mid A \\
E &\longrightarrow aF \\
F &\longrightarrow bFc \mid \epsilon
\end{aligned}
$$

Puntajes

Total		20
Reconocer tres casos a cubrir	2	
Caso $b^* c^*$	5	
Caso $aa^+ b^* c^*$	5	
Caso $\{ab^r c^r : r \geq 0\}$	5	
Combinar todo	3	

5. Construimos un PDA que acepta por stack vacío. La idea es acumular dos A en el stack cada vez que se lee una a, que descontamos al leer cada b. Para asegurar que el lenguaje esté en a^+b^+, cambiamos a un nuevo estado al leer la primera b. La figura 1 describe al autómata.

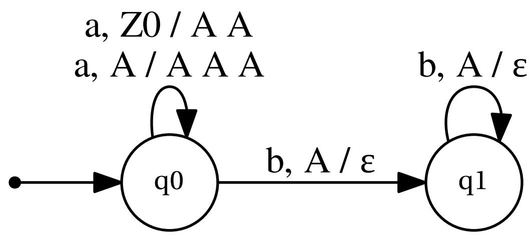

Figura 1: PDA para la pregunta 5

Puntajes

Total	15
Explicación y autómata	15

6. Es posible generar palabras de largo 1 y 3, pero no de largo 2 con estas producciones. En particular, no puede representar la gramática:

$$S \longrightarrow aaa$$

Puntajes

Total	20
Contraejemplo basta	20