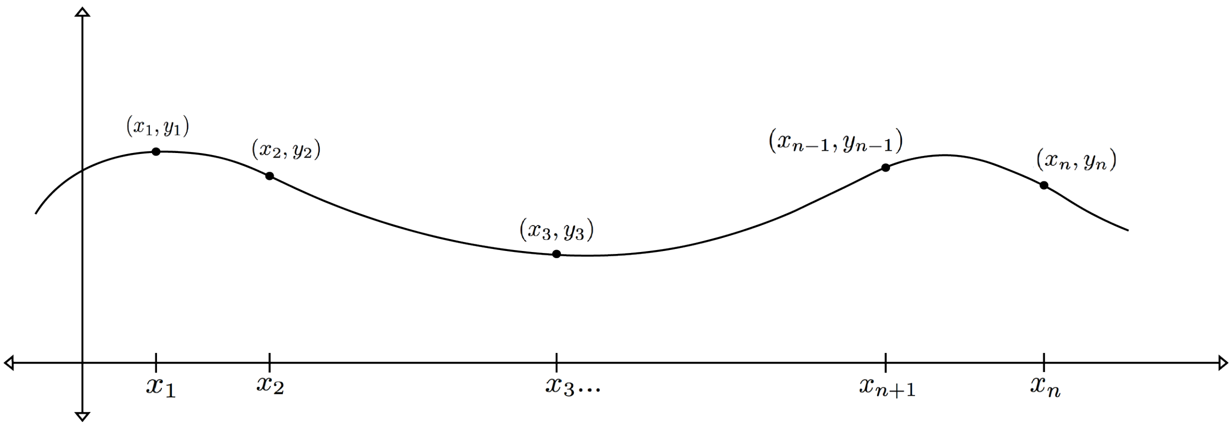
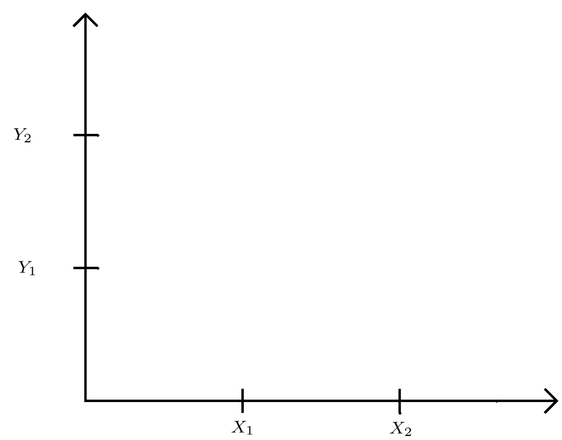
1. Interpolación (1D)

Definición. *La función $y = P(x)$ "interpola" los datos (x_1, y_1),...,(x_n, y_n) si $P(x_i) = y_i$ para cada $i = 1, ..., n$*



Ejemplo ¿Cuál es el polinomio de grado mínimo que interpola (x_1, y_1) y (x_2, y_2)?

lineal o cuadrático o etc...



1.1. Matriz de Vandermonde

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

<u>Recuerde:</u>

$$\frac{||x - \tilde{x}||}{||x||} \leq K(A) \cdot \frac{||b - A \cdot \tilde{x}||}{||b||}$$

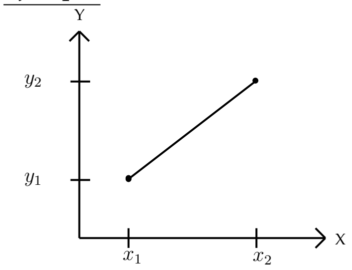
1.2. Interpolación de Lagrange

$$\begin{aligned} P_{n-1}(x) &= y_1 \cdot L_1(x) + ... + y_n \cdot L_n(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot L_i(x) \\ \text{donde} \quad & L_i(x_i) = 1, \quad L_i(x_J) = 0 \quad \text{para } i \neq J \end{aligned}$$

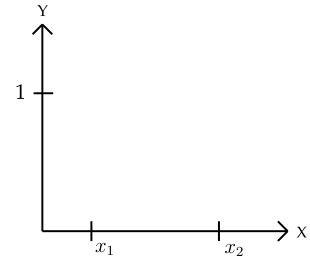
Ejemplo:

$$\begin{aligned} P_{n-1}(x_J) &= y_1 : L_1(x_J) + ... + y_J \cdot L_J(x_J) + ... + y_n \cdot L_n(x_J) \\ &= y_1 \cdot 0 + ... + \underline{y_J} \cdot 1 + ... + y_n \cdot 0 \\ P_{n-1}(x_J) &= y_J \end{aligned}$$

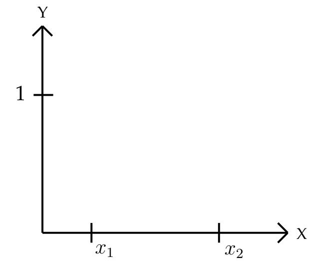
Ejemplo:



$$P_1(x) = y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2$$



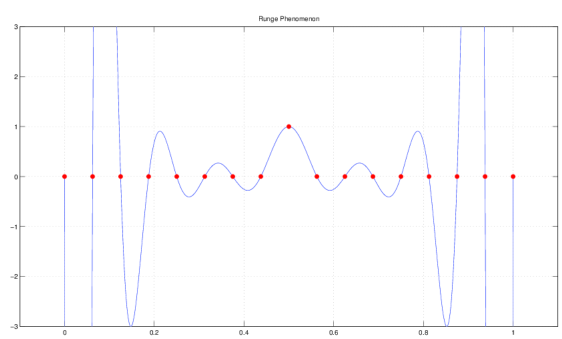
$L_1(x) = \frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}$



$L_2(x) = \frac{(x-x_2)}{(x_2-x_1)}$

$$\begin{aligned} P_1(x) &= y_1 \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} + y_2 \cdot \frac{(x-x_2)}{(x_2-x_1)} \\ &= a_0 + a_1 x \text{ (similar a la “Matriz de vandermonde”)} \\ &= \underbrace{\left[\frac{y_1 \cdot (-x_2)}{(x_1-x_2)} + \frac{y_2 \cdot (-x_1)}{(x_2-x_1)}\right]}_{a_0} + \underbrace{\left[\frac{y_1}{(x_1-x_2)} + \frac{y_2}{(x_2-x_1)}\right]}_{a_1} \cdot x \end{aligned}$$

Para $\underline{\overline{X}} = \{x_1, ..., x_n\}$



$L_k(x) = \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)}$

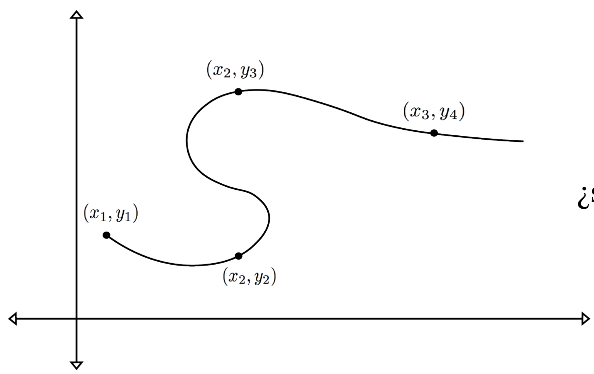
$$L_k(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}$$

donde

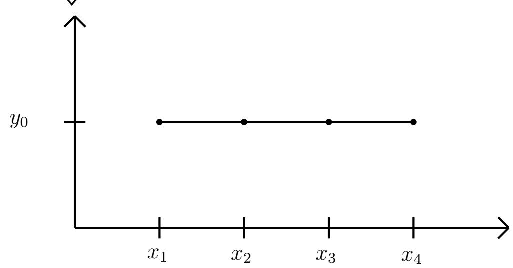
$$
\begin{gathered}
(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n) \\
\updownarrow \\
l_k(x) = \prod_{i=1, i \neq k}^{n} (x - x_i), L_k(x) = \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)}
\end{gathered}
$$

Teorema. *Sea* $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ *"n" puntos en el plano con* <u>*distinto*</u> *"*$\underline{x_i}''$*. entonces existe uno y sólo un polinomio* $P(x)$ *de grado* $n-1$ *o "*<u>*menor*</u>*" que satisface*

$$P(x_i) = y_i, \ \ \textit{para} \ \ i = 1 : n$$



¿se puede?



$P_{n-1}(x) =$ ____________________

Considerando 2 puntos:

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= y_0 \cdot \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} + y_0 \cdot \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} \\
&= y_0 \cdot \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} - \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} \right) \\
&= y_0 \cdot \left(\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2} \right) \\
&= \underline{y_0}
\end{aligned}
$$

1.3. Diferencias divididas de Newton

Recuerde:

$$
\begin{aligned}
P(x) &= 1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3 \\
&= 1 + x \cdot (2 + x \cdot (3 + 4 \cdot x)) \\
&\qquad\qquad \uparrow \\
&\qquad \text{Mín número de operaciones}
\end{aligned}
$$

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot x^i \Leftrightarrow \text{ Matriz de Vandermonde}$$

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot L_i(x)$$

Def: Denotemos que $\underline{f[x_1, x_2 ... x_{n-1} x_n]}$ es el coeficiente del término x^{n-1} en el único polinomio que interpola $(x_i, \underbrace{f(x_i)}_{Y_i})$.

$$, \quad P_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = a_0 + a_1 \cdot x + ... + \underline{a_{n-1}} \cdot x^{n-1}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow P_{n-1}(x) = f[x_1] &+ f[x_1 \;\; x_2] \cdot (x - x_1) \\
&+ f[x_1 \;\; x_2 \;\; x_3] \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \\
&\;\vdots \\
&+ f[x_1 ... x_n] \cdot (x - x_1) ... (x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Ej: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$

x_1	y_1	$= f[x_1]$	$f[x_1 \;\; x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	$f[x_1 \;\; x_2 \;\; x_3] = \dfrac{f[x_2 \;\; x_3] - f[x_1 \;\; x_2]}{x_3 - x_1}$
x_2	y_2	$= f[x_2]$	$f[x_2 \;\; x_3] = \dfrac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$	
x_3	y_3	$= f[x_3]$		

$$\Rightarrow P_2(x) = f[x_1] + f[x_1 \;\; x_2] \cdot (x - x_1) + f[x_1 \;\; x_2 \;\; x_3] \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Algorítmicamente

Input: $\overline{X} = [x_1, x_2, ..., x_n]$, $\overline{Y} = [y_1, ..., y_n]$
Code:

for $J = 1 : n$ **do**
  $f[x_J] = \overline{Y}_J$
end for
for $i = 2 : n$ **do**
  for $J = 1 : n + 1 - i$ **do**
    $f[x_J...x_{J+i-1}] = \dfrac{f[x_{J+1}...x_{J+i-1}] - f[x_J...x_{J+i-2}]}{x_{J+i-1} - x_J}$
  end for
end for

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f[x_1...x_i] \cdot \prod_{J=1}^{i-1} (x - x_J)$$

Ej: $(0, 1), (2, 3), (3, 0)$

$\underline{Lagrange}$:

$$P_2(x) = y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(0-2)(0-3)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(2-0)(2-3)}$$
$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(3-0)(3-2)}$$
$$P_2(x) = 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{6} + 3 \cdot \frac{(x) \cdot (x-3)}{-2} + 0 \cdot L_3(x)$$
$$= 1 + \frac{11}{3} \cdot x - \frac{4}{3} \cdot x^2 = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

$\underline{Vandermonde}$:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D.D.Newton

0	1	1	$\frac{-4}{3}$
2	3	-3	
3	0		

$$\Rightarrow \quad P_2(x) \quad = 1 + 1 \cdot (x - 0) + (\tfrac{-4}{3}) \cdot (x - 0)(x - 2)$$

¿Qué hago si quiero agregar 1 punto nuevo?

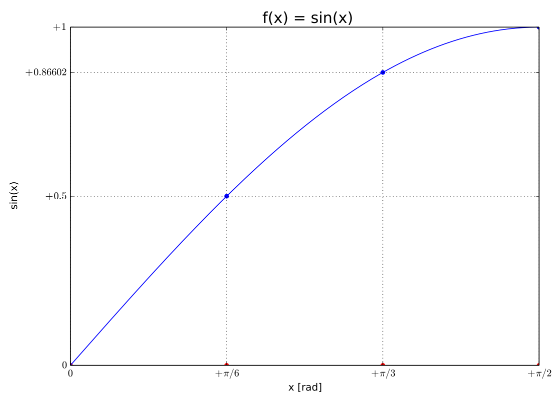
D.D Newton:

x_i	y_i			
0	1	1		
2	3	-3	$\frac{-4}{3}$	$\frac{-5}{3}$
3	0	0	$\frac{3}{-1}$	
1	0			

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= P_2(x) + (\tfrac{-5}{3}) \cdot (x-0)(x-2) \cdot (x-3) \\
&= 1 + 1 \cdot (x-0) - \frac{4}{3}(x-0)(x-2) \\
&\quad \frac{-5}{3} \cdot (x-0)(x-2)(x-3)
\end{aligned}
$$

Ejemplo: 3.7

$$f(x) = \sin(x), \text{4 puntos equiespaciados en } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$



x_i	y_i			
0	0			
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	0.9549	-0.2443	-0.1139
$\frac{2\pi}{6}$	0.8660	0.6990	-0.4232	
		0.2259		
$\frac{\pi}{2}$	1			

↑ ↑
data

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow P_3(x) &= 0 + 0{,}9549 \cdot (x-0) - 0{,}2443 \cdot (x) \cdot \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \\
&\quad - 0{,}1139 \cdot (x-0)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{2\pi}{6}\right)
\end{aligned}
$$

1.4. Error de Interpolación

Th: Asuma que $P(x)$ es el polinomio interpolador (de grado $n-1$ o menor) que ajusta n puntos $(x_1,\ y_1), ..., (x_n,\ y_n)$. El error de interpolación es

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{n!} \cdot f^{(n)}(c)$$

donde c está entre el menor y el mayor de los números $x, x_1, ..., x_n$.

Recuerde: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$

¿Qué tan buena es la interpolación de $f(x)$ obtenida por $P(x)$?

$$Error(x) = |f(x) - P(x)| \quad \Rightarrow \text{Peor caso} = \max_x |f(x) - P(x)|$$

$$\Rightarrow \max Error = \max_x |(x-x_1)...(x-x_n)| \cdot \frac{|f^{(n)}(c)|}{n!}$$

Ver ejemplo 3.7 en Matlab.

$\underline{\text{Runge Phenomenon}}$ $\Leftarrow$ Muy Importante

Ver en Matlab.

1.5. Interpolación de Chebyshev

Motivación: ¿Qué podemos mejorar de la fórmula de error de interpolación?

Recuerde: $\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)...(x-x_n)}{n!} \cdot f^{(n)}(c)$

Consideremos $x = [-1, 1]$

¿Podemos encontrar $x_1, ..., x_n$ de tal forma que $(x - x_1)...(x - x_n)$ es minimizado?

Ej: Consideremos n= 2,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (x - x_1) \cdot (x - x_2) \\ &\Rightarrow w(x_1, x_2) = \max_{x \in [-1,1]} |(x - x_1) \cdot (x - x_2)| \end{aligned}$$

$$\boxed{[x_1, x_2] = \arg\min_{x_1, x_2 \in [-1,1]} w(x_1, x_2)}$$

¿Cómo obtenemos x_1, x_2 ?

¿Y en general $x_1, ..., x_n$?

Teorema. *La elección de los números reales $-1 \leq x_1, ..., x_n \leq 1$ que hace el valor de*

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |(x - x_1)...(x - x_n)|$$

lo más pequeño posible es

raíces de los polinomios de Chebyshev $\rightarrow$ $x_i = \cos\left(\frac{(2 \cdot i - 1) \cdot \pi}{2 \cdot n}\right), \ i = 1, ..., n$

y el valor mínimo es $\dfrac{1}{2^{n-1}}$

De hecho, el mínimo es

$$(x - x_1)...(x - x_n) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n(x)$$

$\longrightarrow$ donde $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$ es el n-ésimo polinomio de Chebyshev

Nota:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2 \cdot x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2 \cdot x^2 - 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

¿Cuál es la interpretación gráfica?

$$x_i = \cos(\theta_i), \quad \theta_i = \frac{(2i-1)\cdot\pi}{2n}, \quad i = 1, ..., n$$

$i = 1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2n}$

$n = 5 \Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{5}\cdot\frac{\pi}{2}$

$\theta_2 = \frac{3\pi}{2n} = \frac{3\pi}{10}, \qquad \theta_3 = \frac{5\pi}{2\cdot 5} = \frac{\pi}{2}$

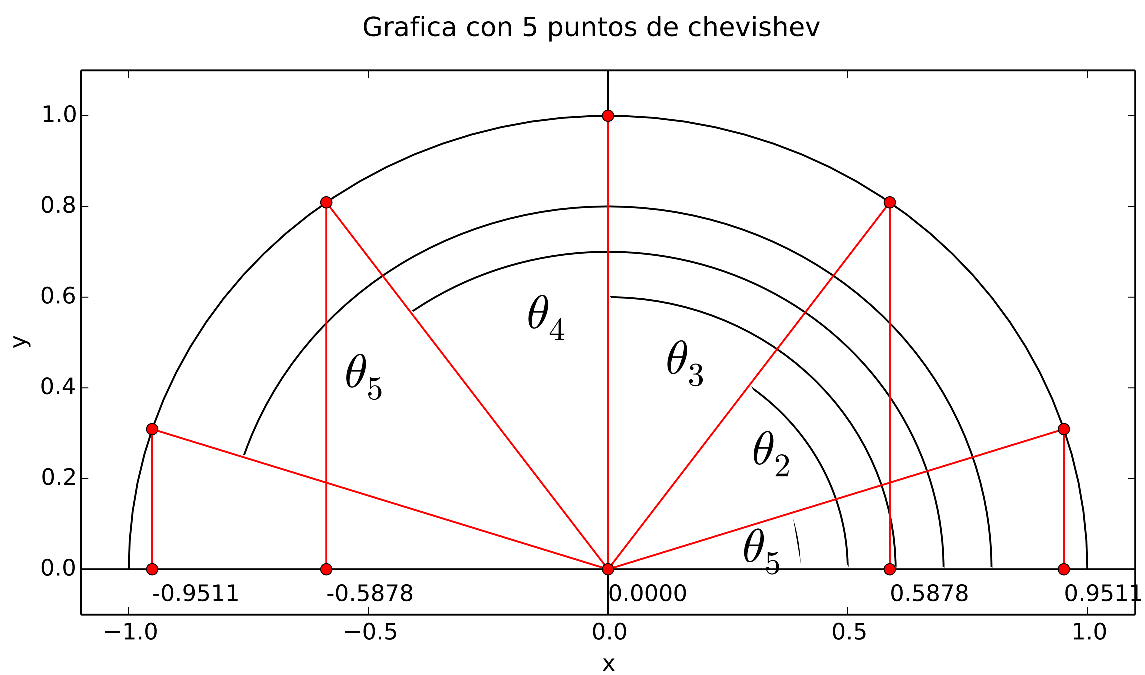
$\theta_4 = \frac{7\pi}{2\cdot 5} = \frac{7\pi}{10}, \qquad \theta_5 = \frac{9\pi}{10}$

$\theta_1 - \theta = \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{5}\cdot\frac{\pi}{2}$

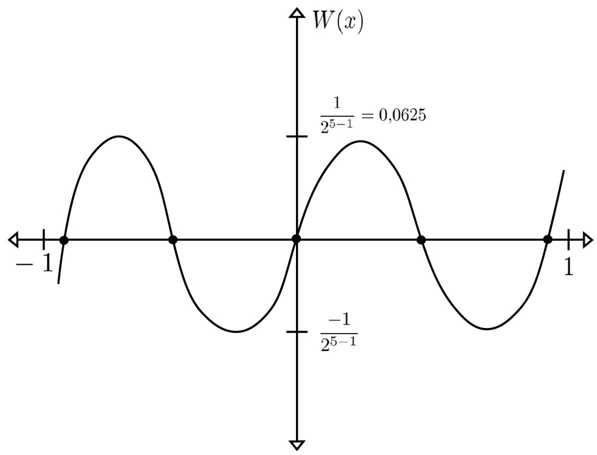
$\theta_{i+1} - \theta_i = \frac{2}{n}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{5}$

$\Rightarrow x_i = \cos(\theta_i)$

$x_1 = 0{,}9511, x_2 = 0{,}5878, x_3 = 0{,}0000, x_4 = -0{,}5878, x_5 = -0{,}9511$



Recuerde: $W(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$



<u>Ejemplo</u>: Ejemplo 3.10, Encuentre el peor caso del error para la diferencia de e^x y el polinomio de Chebyshev de grado 4 en el intervalo $x = [-1, 1]$.

$$\Rightarrow \qquad |e^x - P_4(x)| = \frac{|(x - x_1)...(x - x_5)|}{n!} \cdot |f^{(5)}(c)|$$

$$\leq \frac{1}{2^{5-1}} \cdot \frac{1}{n!} |f^{(5)}(c)|$$

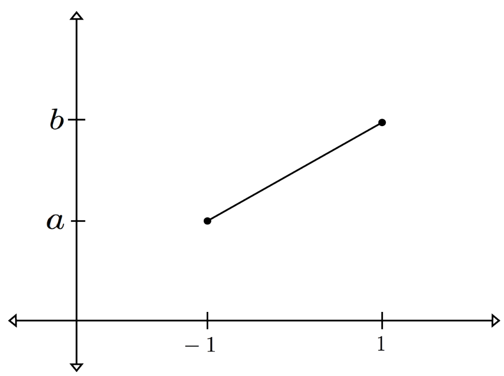
$$f(x) = e^x \Rightarrow f^{(5)}(c) = e^x, \text{max en}[-1, 1] \Rightarrow e^1$$

$$\Rightarrow \qquad |e^x - P_4(x)| \leq \frac{e}{2^4 \cdot 5!} \approx 0{,}00142$$

1.6. Cambio de Variable

Chebyshev points: $-1 \leq x_i \leq 1$ y en general $f(x)$ definido en $a \leq x \leq b$

$\Rightarrow$
$$y = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot x$$



$y = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot x$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Chebyshev} \\ \text{en } a \leq x \leq b}}{\tilde{x}_i} = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Chebyshev points} \\ \text{en } -1 \leq x_i \leq 1}}{x_i}$$

$$\Rightarrow |(x - x_i)...(x - x_n)| \leq \frac{(\frac{b-a}{2})^n}{2^{n-1}} \text{ en } x = [a, b]$$

También se podría hacer un cambio de variable de $[a, b]$ a $[-1, 1]$ y usar la misma teoría.