Innhold:

Informasjon om dokumentet

Dette dokumentet tar for seg dybden av andregradsfunksjoner. Man burde ligge på minst 4 hvis du skal gå igjennom dette dokumentet. Bruk ditt eget tempo og sørg for å forstå alt. Det er også viktig å øve, oppgaver finner du på nett. Øv til du ikke blir forvirret med en gang du ser en andregradsfunksjon.

© ABG-hjelp, CC BY 4.0

Definisjoner av begreper

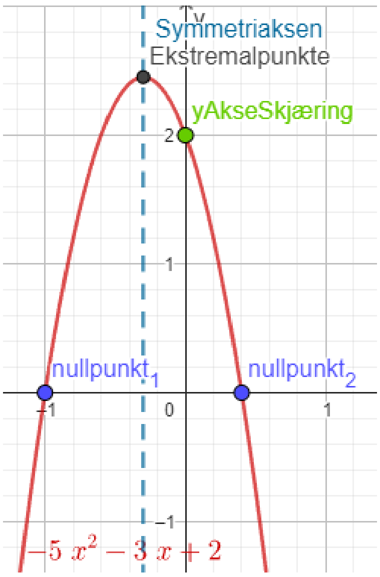
Andregradsfunksjon

En andregradsfunksjon er en funksjon hvor den høyeste eksponenten til en av x-ene er 2 og koeffisienten (tallet foran x-en, f.eks. er 3 koeffisienten til $3x^2$) ikke er null.

Et eksempel på en andregradsfunksjon ville vært:

$$f(x) = -5x^2 - 3x + 2$$

Fordi her er den høyeste eksponenten til en av x-ene er 2 og koeffisienten (som er -5 i eksemplet) er ikke null.



Ekstremalpunkt

Ekstremalpunkt er punktet hvor grafen har topp- eller bunnpunktet sitt, altså den minste eller største verdien grafen. (**Merk!** Andregradsfunksjoner har ikke både topp- og bunnpunkt, kun en av delene). Eksemplet har ett toppunkt.

Symmetriakse

Symmetriakse, også kalt symmetrilinje er en linje som alltid går igjennom ekstremalpunktet. Grunnen til at det heter symmetrilinja er fordi hvis du skjærer grafen i to der linja går, ser vi at det er to symetriske sider.

Nullpunkt

Nullpunkt er hvor grafen skjærer x-asken. I eksemplet er det to nullpunkt. Altså når funksjonen er lik null, $f(x) = 0$

Y-akse skjæring

Y-akse skjæring/kryssing er der grafen skjærer i y-aksen. I eksemplet ser vi at grafen gjør dette ved $y = 2$.

Parabel

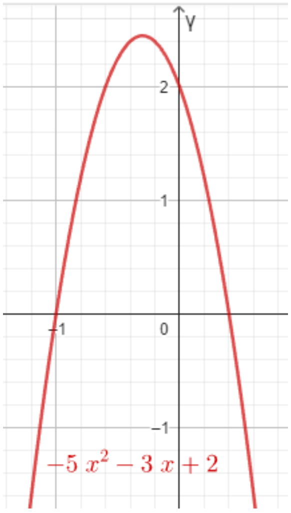
Når vi snakker om andregradsfunksjoner tenker vi på hvor grafen peker. Her peker grafen opp og vi kan si at parabelen peker oppover.

 © ABG-hjelp, CC BY 4.0

Strukturen og dens påvirkning på grafen

En andregradsfunksjon har funksjonsstrukturen:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (husk at det er ganging mellom x og de andre bokstavene)



Det som menes med a, b og c er tall funksjonen kan ha. I funksjonen:

$f(x) = -5x^2 - 3x + 2$

Har bokstavene disse verdiene:

$a = -5$, $b = -3$ og $c = 2$ (pass på negative og positive tall)

Her er a, b og c sin betydning for formen til grafen *(ikke forventet å huske alt dette, men det er nyttig informasjon)*:

- a: Om grafen peker oppover eller nedover. Når a er positiv peker den nedover. Når a er negativ peker den oppover *(som i eksemplet)*.
  En god huske regel er. Hvis den er positiv så smiler den, hvis den er negativ så er den sur.
  Styrer også hvor bred grafen er.
  Jo nærmere null a er, jo mindre spiss er grafen.
  Jo lengre unna null a er, jo mer spiss er den.
- b: Påvirker hvor symmetrilinja går, men er avhengig av a. Vi finner nemlig symetrilinja med formel $x = \frac{-b}{2a}$. Derfor vet vi at a også spiller en rolle i å finne symetri linja.
- c: Sier hvor y-akse skjæringspunktet er. Vi hadde vist uten å se grafen, at $f(x)$ skjærer y-aksen i punktet $(0\,,2)$ fordi $c = 2$. Grunnen til dette er fordi gele y-aksen ligger ved $x = 0$, så hvis vi setter funksjonen til null $f(0)$ så finner vi hvor den skjærer y-aksen. Alle x-ene vil bli byttet ut med null og vi vet at å gange med null, gjør det til null. Da vil alle ledd med x bli borte og vi står igjen med c fordi den ganges ikke med noen x.
  Eksempel: $f(0) = -5 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = -5 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 2 = 0 - 0 + 2 = 2.$

Oppsummert:

- a: Om grafen peker oppover eller nedover (negativ vs. positiv). Hvor bred grafen er (nærme eller lengre unna null).
- b: I samarbeid med a, hvor symetrilinja og ekstrimalpunktet er ($x = \frac{-b}{2a}$).
- c: Y-akse skjæringen.

 © ABG-hjelp, CC BY 4.0

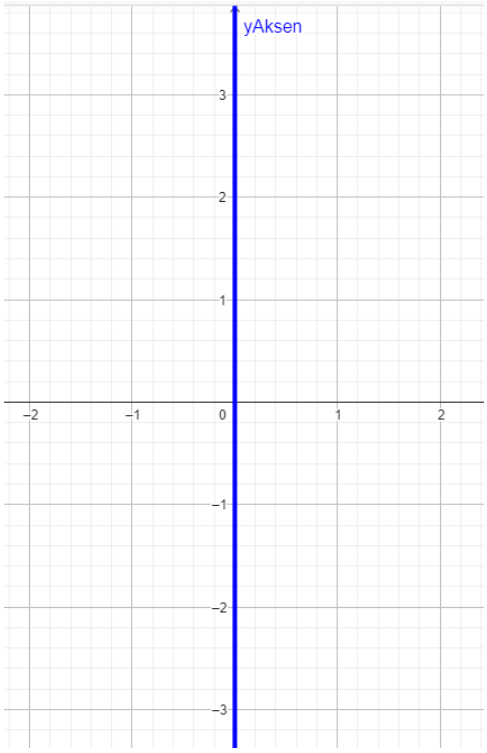
Regne med andregradsfunksjoner (inkludert eksempler)

Eksemplene vil bruke funksjonene:

- $f(x) = 2x^2 - 8x - 10$ ← husk
- $g(x) = x^2 - 9$ ← husk

Her går vi igjennom:

Finne Y-akse skjæring



For å finne Y-akse kryssning må vi finne verdien til funksjonen, ved $x = 0$, altså at vi putter null in i $f(x)$.

Hvorfor gjør vi dette:

Hvis vi ser på figuren ved siden av, så ser vi en linje som kun er der x-verdien er null. Vi ser også at dette er y-aksen. Det betyr at ved $x = 0$ så går y-aksen og når vi putter inn det i funksjonen vår, får vi verdien til funksjonen, når den er ved y-aksen.

Eksempel med $f(x)$ og $g(x)$:

$f(0) = 2 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 - 10$ $\qquad f(x) = 2x^2 - 8x - 10$

$= 2 \cdot 0 - 8 \cdot 0 - 10$

$= 0 - 0 - 10$

$= -10$

Da vet vi at den krysser y-aksen ved punktet $(0\,, -10)$. Et tips for å finne skjæringen med en gang er å bare se på c (altså konstantleddet, tallet som ikke ganges med noen x). Alle tall som ganges med x vil bli eliminert fordi vi setter $x = 0$, og alt ganget med 0 blir 0. Da står vi kun igjen med konstantleddet.

Da vet vi at y-akse skjæringen til $g(x) = x^2 - 9$ er -9 fordi det er konstantleddet. Altså skjærer $g(x)$ y-aksen ved $(0\,, -9)$ *(null er fordi det er x verdien i punktet, og $x = 0$ ved y-akse skjæringen)*.

<u>Oppsummering av metode:</u> Se på konstantledd eller ta $f(0)$.

 © ABG-hjelp, CC BY 4.0

Symmetrilinje & ekstremalpunkt

$f(x) = 2x^2 - 8x - 10$ ← husk

$g(x) = x^2 - 9$ ← husk

Symmetrilinje er gitt ved $x = \frac{-b}{2a}$. Da må vi starte med å definere a og b.

a og b i $f(x)$:

- $a = 2$
- $b = -8$ (viktig å huske minus)

a og b i $g(x)$:

- $a = 1$ (man skriver ikke 1 foran en variabel, så den er «usynelig»)
- $b = 0$ (den eksisterer ikke, så b må være null).

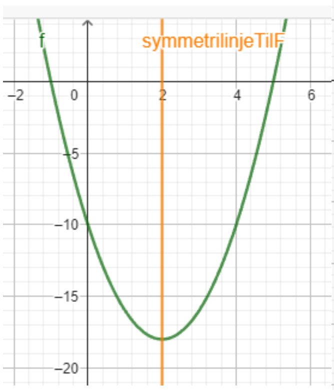
Finner symmetrilinja til $f(x)$:

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2$

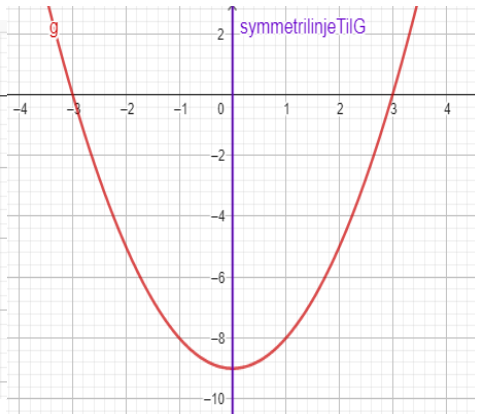
Finner symmetrilinja til $g(x)$:

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2 \cdot 1} = \frac{0}{2} = 0$

$f(x)$



$g(x)$



Nå som vi vet hvor symmetrilinja går og vi vet at den alltid går igjennom ekstremalpunktet, så kan vi bare ta $f(symmetrilinje)$ og få ekstremalpunktet. Dette kan vi fordi symmetrilinja er en x verdi, og det er det vi putter inn i funksjoner, så får vi en y-verdi tilbake.

$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 10 = 2 \cdot 4 - 8 \cdot 2 - 10 = 8 - 16 - 10 = -18$

$g(0) = 0^2 - 9 = 0 - 9 = -9$

<u>Oppsummering av metode:</u>

1. Finn symmetrilinje. $x = \frac{-b}{2a}$
2. Bruk svaret i funksjonen. $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

 © ABG-hjelp, CC BY 4.0

Nullpunkt

$f(x) = 2x^2 - 8x - 10$ ← husk

$g(x) = x^2 - 9$ ← husk

Denne delen er ikke så komplisert, men du må huske en formel som kommer til å være veldig viktig på videregående, og litt viktig i 10. trinn.

ABC formelen: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Denne siden vil forklare alt du trenger, som hva $\pm$.

Denne formelen bruker du for å finne nullpunkt til andregradsfunksjoner og kan også bli brukt i andregradslikninger. Det man gjør er å sette funksjonen til å være lik 0 ($f(x) = 0$)

Steg:

1. Identifisere a, b og c.
   I $f(x)$ så er dette verdiene: $a = 2, b = -8, c = -10$ (pass på positiv og negativ)
   I $g(x)$ så er dette verdiene: $a = 1, b = 0, c = -9$
2. Setter opp likning og bruker formelen for å finne nullpunkt.
   $f(x) = 0$
   $2x^2 - 8x - 10 = 0$
   $x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)}}{2 \cdot 2}$ Plugger inn i formelen
   $= \frac{8 \pm \sqrt{64 + 80}}{4}$ Blir positiv 8 fordi minus og minus blir pluss, det blir også $+80$ fordi $-4 \cdot (-10) \cdot 2 = +40 \cdot 2 = +80$
   $= \frac{8 \pm \sqrt{144}}{4} = \frac{8 \pm 12}{4}$ Når vi har pluss minus deler vi opp likningen i to, en med pluss og en med minus. Vi finner to forskjellige svar (hvis du ender opp med ± 0 så får du kun ett svar)
   $x_1 = \frac{8+12}{4}$ $x_2 = \frac{8-12}{4}$
   $x_1 = \frac{20}{4} = 5$ $x_2 = \frac{-4}{4} = -1$

Da har vi funnet nullpunktene til $f(x)$

Gjentar prosessen med $g(x)$. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \frac{0 \pm \sqrt{0 + 36}}{2} = \frac{0 \pm 6}{2}$

$x_1 = \frac{0+6}{2} = \frac{6}{2} = 3$ $x_2 = \frac{0-6}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

<u>Oppsummering:</u> Finn a, b og c. Sett $f(x) = 0$. Plugg inn i $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ og regn ut.

 © ABG-hjelp, CC BY 4.0

Nullpunkts faktorisering

$f(x) = 2x^2 - 8x - 10$ ← husk

$g(x) = x^2 - 9$ ← husk

Nullpunkts faktorisering er ikke noe du trenger å kunne, men hvis man vil fordype seg litt, så er det lurt.

Nullpunkt faktorisering er en måte man kan skrive en funksjon lettere på. For eksempel kan funksjonen $f(x) = 2x^2 - 8x - 10$ skrives som $2(x-5)(x+1)$. Dette er nyttig fordi det er enklere å regne med den faktoriserte versjonen, enn den uten parentes.

Steg:

1. Bruke ABC formelen $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
2. Putte nullpunktene inn i a, x_1 og x_2 i formelen $a(x - x_1)(x - x_2)$

Eksempel med $f(x)$:

- Nullpunkt: $x_1 = 5, x_2 = -1$
- $a = 2$

Putter inn i formel:

$2(x-5)\big(x-(-1)\big) = 2(x-5)(x+1)$

Da vet vi at $f(x)$ kan skrives på to måter:

1. $f(x) = 2x^2 - 8x - 10$
2. $f(x) = 2(x-5)(x+1)$

Viser at det er det samme ved å gange ut:

$f(x) = 2(x-5)(x+1) = 2(x^2 + x - 5x - 5) = 2(x^2 - 4x - 5) = 2x^2 - 8x - 10$

Hvorfor fungerer det?

Hvis vi gir referanse navn til $(x - x_1)$ og $(x - x_2)$. $q = (x - x_1), r = (x - x_2)$

For å få null, så må enten q eller r bli null. Når vi setter inn nullpunktet med minus foran, bytter vi fortegn til nullpunktet. Som nullpunktet 5 ble til $(x-5)$, men nullpunktet til parentesen blir fortsatt det samme, fordi hva må man bytte x med for å få 0 i parentesen. Nemlig 5, som er nullpunktet. Derfor beholder vi nullpunktene. Grunnen til av vi trenger a er fordi ekstremalpunktet vil ikke være like høyt/lavt og vi ville ikke hatt en lik graf.

Oppsummering: Bruk $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, så putt inn verdier i $a(x - x_1)(x - x_2)$.

 © ABG-hjelp, CC BY 4.0