

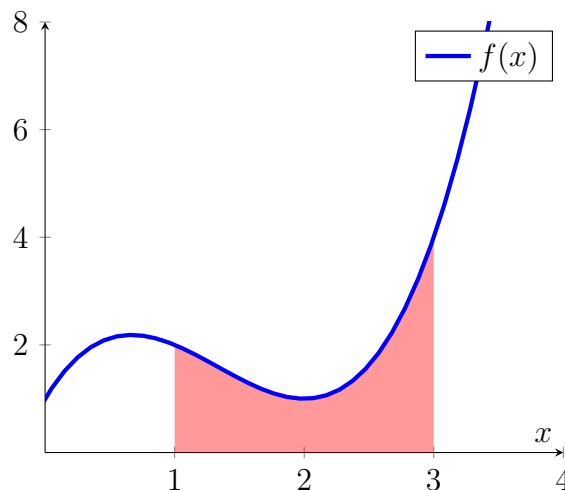
Eric's integraler

Eric Fridén

7 oktober 2024

1 Integraler

Att ”integrera” är att ta en funktion $f(x)$ och hitta *arean under grafen*.



Figur 1: Integralen av $f(x)$ från 1 till 3 markerat i rött.

Vi skriver arean i figur 1 symboliskt så här:

$$\int_1^3 f(x) dx$$

Vi uttalar det som ”integralen från 1 till 3 av f av x dx ”. Integraltecknet \int ser ut som ett utdraget S (och det är precis vad det är!) och vi skriver gränser längst upp och längst ner på s:et. Talet nedanför berättar områdets vänsterkant och talet ovanför berättar områdets högerkant. Det lilla tillägget ” dx ” har en djup och intressant matematisk mening som du kan lära dig om nån annan gång — för nu så nöjer vi oss med att ” dx ”-biten berättar att det är tecknet ” x ” som är funktionens variabel.

Målet med det här häftet är att vi ska kunna beräkna integraler, men innan vi är redo för det måste vi lära oss om *primitiva funktioner*.

2 Primitiva funktioner

Den *primitiva funktionen* till en funktion $f(x)$ är den funktion vars derivata är $f(x)$. Vi kan alltså tänka på uppgiften att hitta primitiva funktioner som att derivera *baklänges*. Vi skriver oftast den primitiva funktionen med samma bokstav som funktionen, men med stor bokstav istället för liten. Med andra ord:

$$F'(x) = f(x) \implies F(x) \text{ är primitiv funktion till } f(x)$$

Exempel 1

Hitta alla primitiva funktioner av $f(x) = 2x$

$$\text{Svar: } F(x) = x^2 + C$$

Bokstaven "C" i exempel 1 är viktig! Den visar att det finns oändligt många *olika* primitiva funktioner till $f(x)$. Både $F(x) = x^2 + 1$ och $F(x) = x^2 + 10^{40000}$ blir $2x$ när man deriverar dem eftersom konstanttermen försvinner.

Ibland kommer det vara relevant för oss att hitta ett specifikt värde på konstanten "C", men för nu så nöjer vi oss med att lägga till den när vi hittar den primitiva funktionen.

Reglerna för att hitta primitiva funktioner kan man ofta hitta själv om man helt enkelt vänder på deriveringsreglerna. Vi kommer att gå igenom dem en och en, men vill man ha en utmaning kan man försöka lista ut dem själv. Oavsett så är det en bra övning att bekräfta att $F'(x) = f(x)$ varje gång vi introducerar en ny räkneregler.

Räkneregler 1

$$f(x) = x^n \implies F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (x \neq -1)$$

Om du undrar varför x inte får vara -1 så kommer vi att ta upp det fallet senare, i räkneregler 6 på sidan 5. För tillfället så låtsas vi som ingenting och har i bakhuvudet att det finns ett undantag från räkneregler 1.

Övningsuppgifter 1

Hitta alla primitiva funktioner till följande funktioner:

(kom ihåg att $1 = x^0$)

a) $f(x) = x^4$

$F(x) =$ _____

b) $g(x) = 1$

$G(x) =$ _____

c) $h(x) = x^{27}$

$H(x) =$ _____

Samma smidiga regler om addition och multiplikation som vi använde med derivata gäller också när vi tar fram primitiva funktioner:

Räkneregler 2

$$f(x) = g(x) + h(x) \implies F(x) = G(x) + H(x)$$

$$f(x) = k \cdot g(x) \implies F(x) = k \cdot G(x)$$

Exempel 2

Hitta alla primitiva funktioner till $f(x) = 3x^2 - x$.

Svar:

$$F(x) = 3\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C = x^3 - \frac{x^2}{2} + C$$

Vi *hade* kunnat skriva svaret som $3\frac{x^3}{3} + C_1 - \frac{x^2}{2} + C_2$ med två olika konstanter, en från varje del. Vi gör inte det, och vi kommer att fortsätta att inte göra det, eftersom C_1 och C_2 representerar vilka konstanta tal som helst — och vi kan därför lika gärna baka ihop dem till en konstant.

Precis som med derivata så behöver n i räkneregler 1 inte vara ett positivt heltal. Regeln fungerar på precis samma sätt med exponenter som -2 , $\frac{1}{3}$ och $2,35$.

Exempel 3

Hitta alla primitiva funktioner till $f(x) = x^{-2} + x^{\frac{1}{3}} + x^{2,35}$

Vi börjar med att använda räkneregler 1 för alla tre termerna:

$$F(x) = \frac{x^{-3}}{-2} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{x^{3,35}}{3,35} + C$$

Sedan städar vi upp den primitiva funktionen med hjälp av vanliga bråkregler, och vi får vår slutgiltiga primitiva funktion:

$$F(x) = -\frac{x^{-3}}{2} + \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{x^{3,35}}{3,35} + C$$

Kom ihåg bråk- och potensregler när du löser uppgifterna i övningsuppgifter 2.

Övningsuppgifter 2

Hitta alla primitiva funktioner till följande funktioner:

a) $f(x) = \sqrt{x}$

$F(x) =$ _____

b) $g(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$

$G(x) =$ _____

c) $h(x) = 4x^{0,5}$

$H(x) =$ _____

Följande tre regler om primitiva funktioner till exponentialfunktioner kommer naturligt av deriveringsreglerna om samma funktioner.

Räkneregler 3

$$f(x) = e^x \implies F(x) = e^x + C$$

Räkneregler 4

$$f(x) = e^{kx} \implies F(x) = \frac{e^{kx}}{k} + C$$

Räkneregel 5

$$f(x) = a^{kx} \implies F(x) = \frac{a^{kx}}{k \ln(a)} + C$$

Exempel 4

Hitta alla primitiva funktioner till $f(x) = 3e^x - 4^{3x}$.

Svar:

$$F(x) = 3e^x - \frac{4^{3x}}{3 \ln(4)} + C$$

Övningsuppgifter 3

Hitta alla primitiva funktioner till följande funktioner:

a) $f(x) = \frac{1}{e^x}$

$F(x) =$ _____

b) $g(x) = 10^{2x}$

$G(x) =$ _____

c) $h(x) = \frac{3}{3^{3x}}$

$H(x) =$ _____

3 Ett underligt undantag

Nu är det dags att ta upp det specifika undantaget som fanns i räkneregel 1 på sidan 2 — hur ser den primitiva funktionen till $f(x) = \frac{1}{x}$ ut? Det finns en regel...

Räkneregel 6

$$f(x) = \frac{1}{x} \implies F(x) = \ln|x| + C$$

Hur kommer det sig? Varför då? Var %#& kom den naturliga logaritmen ifrån? Absolutbe-
lopp??? Alla fyra är utmärkta frågor med intressanta och sublima svar som vi inte har någon
plats för i det här lilla häftet.

4 Att beräkna integraler

Nu är det dags att gå tillbaka till vad vi skulle göra från början — att beräkna arean under en funktions graf (som i figur 1 på sidan 1). Vi kommer nu att introducera en av matematikens viktigaste räkneregler — *analysens fundamentalsats* — som beskriver precis hur vi kan använda primitiva funktioner för att beräkna integraler. Vill du veta mer om hur man kommer fram till den så kan du titta upp teorin om *Riemann-summor*.

Det finns också en bit helt ny notation här som vi ska förklara strax härunder. Men nu: Analysens fundamentalsats!

Räkneregel 7: Analysens fundamentalsats

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

Högerledet i räkneregel 7 här ovanför läser man högt som “F av x värderat från a till b”. Det är ett kortfattat och smidigt sätt att skriva skillnaden i funktionen F s värde mellan $x = a$ och $x = b$. Mer specifikt så beräknas det så här:

Räkneregel 8

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exempel 5

Beräkna:

$$\int_1^3 x^2 dx$$

Vi börjar med att hitta alla primitiva funktioner till $f(x)$.

$$f(x) = x^2 \implies F(x) = \frac{x^3}{3} + C$$

Nu kan vi beräkna integralen med hjälp av räkneregeln 7.

$$\int_1^3 x^2 dx = [x^3 + C]_1^3 = (3^3 + C) - (1^3 + C) = 27 - 1 = 26$$

Notera att alla konstanterna C försvann i uträkningen — det gör de alltid, så vi kommer i framtiden att med gott samvete ignorera konstanten när vi värderar integraler, och skriva uträkningen som:

$$\int_1^3 x^2 dx = [x^3]_1^3 = (3^3) - (1^3) = 27 - 1 = 26$$

Svar: $\int_1^3 x^2 dx = 26$

Övningsuppgifter 4

Beräkna följande integraler:

a)

$$\int_0^1 e^x dx = \underline{\hspace{10cm}}$$

b)

$$\int_{-2}^2 x^2 dx = \underline{\hspace{10cm}}$$

c)

$$\int_2^3 \frac{3}{2^x} dx = \underline{\hspace{10cm}}$$