Erics derivata

Eric Fridén

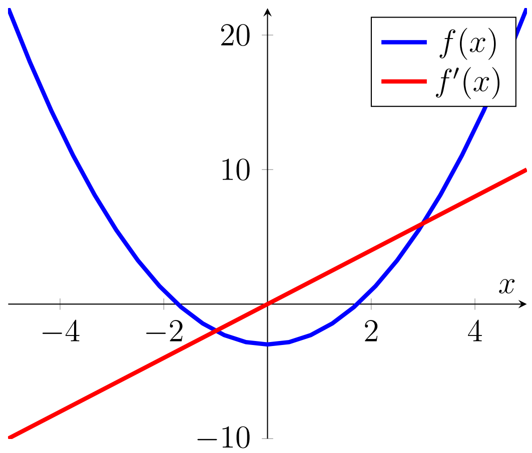
28 september 2024

1 Deriveringsregler

1.1 Vad är derivata?

Att "derivera" är att ta en funktion $f(x)$ och göra om den till en ny funktion som visar *förändringshastigheten* av den första!

Den nya funktionen kallas *derivatan* av $f(x)$. Den skrivs $f'(x)$ som uttalas " f-prim av x".



Figur 1: När funktionen i blått pekar neråt (sett från vänster till höger) är derivatan i rött negativ. Ju mer positiv (uppåt) lutning grafen till funktionen har, desto mer positiv blir derivatan.

I figur 1 så är $f(x) = x^2 - 3$ och $f'(x) = 2x$. Målet med det här kapitlet är att lära oss reglerna vi följer när vi tar reda på derivatan av en funktion.

1.2 Derivatan av x^n

Räkneregel 1

$$f(x) = x^n \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

Exempel 1

Vad är derivatan av x^3?

Svar: $f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$

Exempel 2

Vad är derivatan av $f(x) = 1$

Svar: $f(x) = x^0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 0 \cdot [\text{spelar ingen roll vad som kommer här}] = 0$

Övningsuppgifter 1

Derivera följande funktioner:

a) $f(x) = x^4$

$f'(x) =$ ____________

b) $g(x) = 1$

$g'(x) =$ ____________

c) $h(x) = x^{27}$

$h'(x) =$ ____________

1.3 Derivatan av polynom

Räkneregel 2

$$f(x) = kx^n \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = knx^{n-1}$$

Som du kanske märker i räkneregel 2 så "hände" det inget med k:et. Det är en generell regel för all derivata – en siffra multiplicerad med en funktion finns kvar efter att funktionen deriverats. Vi kan formulera den generella regeln så här:

Räkneregel 3

$$f(x) = kg(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = kg'(x)$$

Exempel 3

Vad är derivatan av $3x^2$?

Svar: $f'(x) = 3 \cdot 2x^{2-1} = 6x$

Exempel 4

Vad är derivatan av 3?

Svar: $f(x) = 3 \cdot x^0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot 0 = 0$

Övningsuppgifter 2

Derivera följande funktioner:

a) $f(x) = 3x^4$

$f'(x) =$ __________

b) $g(x) = 4$

$g'(x) =$ __________

c) $h(x) = 2x$

$h'(x) =$ __________

Vi behöver en till regel för att kunna derivera alla polynom – vi behöver veta hur vi hanterar funktioner med plustecken i. Som tur är så fungerar det på enklast tänkbara sätt, vi deriverar bara varje term för sig.

Exempel 5

Vad är derivatan av $3x^2 + x^3$?

Svar: $f'(x) = 6x + 3x^2$

Du kanske ser mönstret utifrån exemplet, här är iallafall den generella regeln:

Räkneregel 4

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Kolla igen på exempel 5 här ovanför och se att du är med på hur det funkar innan du gör övningsuppgifterna här under.

Övningsuppgifter 3

Derivera följande funktioner:

a) $f(x) = 3x^4 + 1$

$f'(x) =$ ______

b) $g(x) = 4x^2 + 3x$

$g'(x) =$ ______

c) $h(x) = 2x^{27} - 3x^3 + x$

$h'(x) =$ ______

1.4 Derivatan av a^x

Nu ska vi utvidga till derivator av funktioner där x finns i exponenten, en grupp av funktioner som kallas *exponentialfunktioner*.

Vi har följande regel som gäller för ett speciellt värde, när siffran i basen är $e \approx 2,77$. För en förklaring för vad e är och var regeln kommer från, se Appendix A på sidan 8.

Räkneregel 5

$$f(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = e^x$$

Övningsuppgifter 4

Derivera följande funktioner:

(kom ihåg räkneregel 3 på sidan 2, och räkneregel 4 på sidan 3).

a) $f(x) = e^x$

$f'(x) =$ ______

b) $g(x) = 3e^x$

$g'(x) =$ ______

c) $h(x) = 2e^x + x^2$

$h'(x) =$ ______

Räkneregel 6

$$f(x) = e^{kx} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = ke^{kx}$$

Exempel 6

Vad är derivatan av $f(x) = e^{3x}$?

Svar: $f'(x) = 3e^{3x}$

Exempel 7

Vad är derivatan av $f(x) = \frac{1}{e^x}$?

Lösning: Vi börjar med att skriva om $f(x)$ med hjälp av potensregler (se Appendix B på sidan 10).

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x} = e^{(-1)x}$$

Nu kan vi använda räkneregel 6.

Svar: $f'(x) = (-1) \cdot e^{(-1)x} = -e^{-x} = -\frac{1}{e^x}$

Övningsuppgifter 5

Derivera följande funktioner:

a) $f(x) = \frac{1}{e^{-3x}}$

$f'(x) =$ ____________

b) $g(x) = e^{5x}$

$g'(x) =$ ____________

c) $h(x) = 2e^x + \frac{1}{e^x} - e^{-2x}$

$h'(x) =$ ____________

1.4.1 Funktionen a^x

Om du tittar på figur 2 på sidan 8 och figur 3 på sidan 8 i Appendix A så ser du att derivatan får en faktor framför sig, 1,4 i ena fallet och 0,7 i det andra. Den faktorn är värdet av funktionen $\ln(2)$ för $f(x) = 2^x$ och $\ln(4)$ för $f(x) = 4^x$. Funktionen $\ln(x)$ kallas för den *naturliga logaritmen* och beskrivs i mer detalj i Appendix A

Räkneregel 7

$$f(x) = a^x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \ln(a)a^x$$

Exempel 8

Vad är derivatan till 3^x? Svar: $f'(x) = \ln(3)3^x$

Vi räknar väldigt sällan ut vad ett tal som $\ln(3)$ blir i decimalform — om vi inte absolut behöver så är det enklast att låta det stå som det är.

Vi har en till regel för detta som liknar regel 6 på sidan 4:

Räkneregel 8

$$f(x) = a^{kx} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = k\ln(a)a^{x}$$

Exempel 9

Vad är derivatan av $f(x) = \dfrac{2}{4^{2x}}$?

Lösning: Vi börjar med att skriva om $f(x)$ med hjälp av potensregler (se Appendix B på sidan 10).

$$\frac{2}{4^{2x}} = 2\frac{1}{4^{2x}} = 2 \cdot 4^{-2x} = 2 \cdot 4^{(-2)x}$$

Nu kan vi använda räkneregel 8.

Svar: $f'(x) = 2 \cdot (-2) \cdot \ln(4)4^{-2x} = -\dfrac{4\ln(4)}{4^{2x}}$

Övningsuppgifter 6

Derivera följande funktioner:

a) $f(x) = 3^{x}$

$f'(x) =$ __________

b) $g(x) = \dfrac{1}{2^{-3x}}$

$g'(x) =$ __________

c) $h(x) = 2 \cdot 3^{x} + \dfrac{2}{3^{x}} - \dfrac{2}{3^{-x}}$

$h'(x) =$ __________

Blandade uppgifter 1

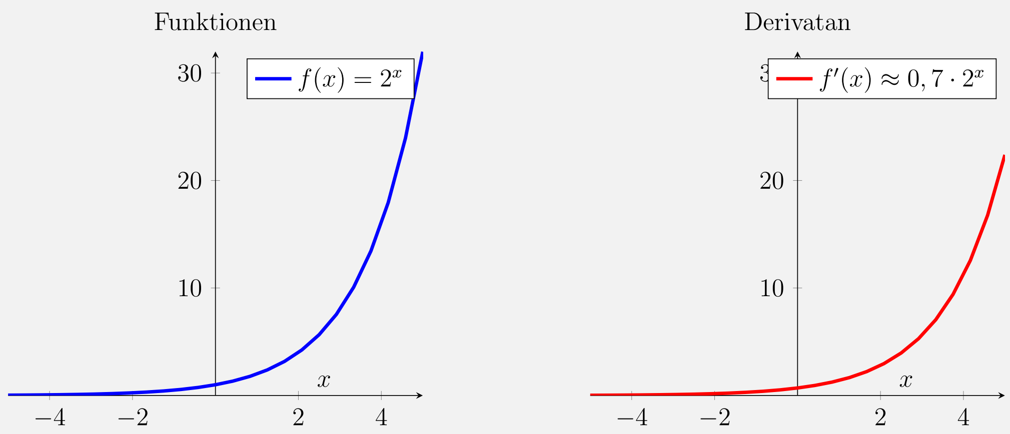
Derivera följande funktioner: (kom ihåg potensreglerna i Appendix B på sidan 10)

- $f(x) = x^2$ $\quad f'(x) = $ ______
- $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad g'(x) = $ ______
- $h(x) = 2 \cdot 3^x + 3x^2$ $\quad h'(x) = $ ______
- $i(x) = 2^x$ $\quad i'(x) = $ ______
- $j(x) = e^{-x} - e^x$ $\quad j'(x) = $ ______
- $k(x) = \dfrac{4}{3x^2} - e^x + 3$ $\quad k'(x) = $ ______
- $l(x) = x^{13} - 13^x$ $\quad l'(x) = $ ______
- $m(x) = \dfrac{2}{5 \cdot 3^x}$ $\quad m'(x) = $ ______
- $n(x) = \dfrac{x^5}{5}$ $\quad n'(x) = $ ______
- $o(x) = e^{x-3}$ $\quad o'(x) = $ ______
- $p(x) = \dfrac{2^{x+2}}{2^{2(x-2)}}$ $\quad p'(x) = $ ______

Appendix

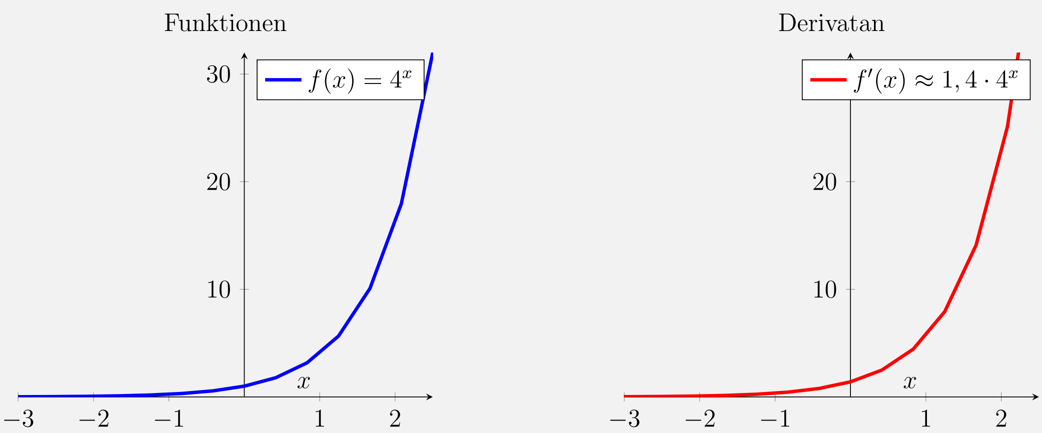
A Konstanten e och funktionen e^x

Vi börjar med att studera grafen till funktionen 2^x.



Figur 2: Exponentialfunktionen $f(x) = 2^x$ till vänster och funktionens derivata till höger.

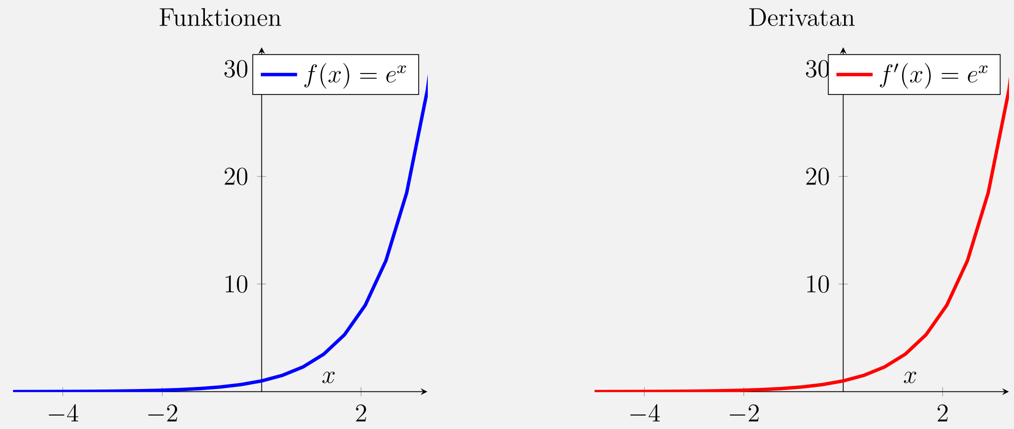
Funktionen har en speciell egenskap: den lutar mer och mer brant ju större värdet blir. Det verkar som att *derivatan* av 2^x ökar samtidigt som funktionen själv ökar, och att derivatans värde hela tiden är lite mindre än funktionens värde. Om vi testar med funktionen $f(x) = 4^x$ så får vi ett liknande samband — men denna gång åt andra hållet, derivatan är lite större än funktionen.



Figur 3: Exponentialfunktionen $f(x) = 4^x$ till vänster och funktionens derivata till höger.

De två graferna liknar varandra — men de är inte helt likadana. Någonstans mellan 2 och

4 finns ett tal som gör att $f(x)$ och $f'(x)$ är exakt likadana — en funktion som är sin egen derivata. Det talet kallas e och det är en konstant som är ungefär lika med 2,72.



Figur 4: Exponentialfunktionen $f(x) = e^x$ till vänster och funktionens derivata till höger.

Vi har därmed hittat en funktion $f(x)$ som har den trevliga egenskapen att $f(x) = f'(x)$ — vi kan formulera det som en väldigt användbar räkneregel:

Räkneregel 9

$$f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$$

A.1 Funktionen $\ln(x)$

I det här häftet kommer vi att stöta på funktionen $\ln(x)$, *den naturliga logaritmen*. Den definieras så här:

Räkneregel 10

$$x = \ln(y) \implies e^x = y$$

I fall när en funktion ett värde som t.ex. $\ln(3)$ som en del av sin lösning så räknar man generellt inte ut värdet av funktionen utan låter den stå som $\ln(3)$. Om man behöver räkna ut det så har alla datorer och de flesta miniräknare en ln-funktion.

B Potensregler

När man arbetar med derivata så dyker ofta potensfunktioner upp — det är därför viktigt att ha bra koll på en del centrala potensregler.

Räkneregel 11

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Här följer exempel på hur potensreglerna kan dyka upp i resten av häftet.

Exempel 10

Funktionen $f(x) = \frac{1}{e^x}$ kan inte deriveras med vanliga deriveringsregler — men med hjälp av potensreglerna kan vi skriva om det:

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x} = e^{(-1)\cdot x}$$

$f(x) = e^{(-1)\cdot x}$ kan deriveras med regel 6 på sidan 4.

Exempel 11

Funktionen $f(x) = \frac{5^x}{5^{2x}}$ kan inte deriveras med vanliga deriveringsregler — men med hjälp av potensreglerna kan vi skriva om det:

$$\frac{5^x}{5^{2x}} = 5^x \frac{1}{5^{2x}} = 5^x 5^{-2x} = 5^{x+(-2x)} = 5^{-x} = 5^{(-1)x}$$

$f(x) = 5^{(-1)x}$ kan deriveras med regel 8 på sidan 6.

Exempel 12

Funktionen $f(x) = e^{x+2}$ kan inte deriveras med vanliga deriveringsregler — men med hjälp av potensreglerna kan vi skriva om det:

$$e^{x+2} = e^x e^2 = e^2 e^x$$

$f(x) = e^2 e^x$ kan deriveras med regel 9 på sidan 9 och 3 på sidan 2.

C Facit till övningsuppgifter

Övningsuppgifter 1

a) $f'(x) = 4x^3$

b) $g'(x) = 0$

c) $h'(x) = 27x^{26}$

Övningsuppgifter 2

a) $f'(x) = 12x^3$

b) $g'(x) = 0$

c) $h'(x) = 2$

Övningsuppgifter 3

a) $f'(x) = 12x^3$

b) $g'(x) = 8x + 3$

c) $h'(x) = 54x^{26} - 9x^2 + 1$

Övningsuppgifter 4

a) $f'(x) = e^x$

b) $g'(x) = 3e^x$

c) $h'(x) = 2e^x + 2x$

Övningsuppgifter 5

a) $f'(x) = \dfrac{3}{e^{-3x}}$

b) $g'(x) = 5e^x$

c) $h'(x) = 2e^x - \dfrac{1}{e^x} + 2e^{-2x}$

Övningsuppgifter 6

a) $f'(x) = \ln(3)3^x$

b) $g'(x) = \dfrac{3\ln(2)}{2^{-3x}}$

c) $h'(x) = 2\ln(3)3^x - \dfrac{2\ln(3)}{3^x} - \dfrac{2}{3^{-x}}$

D Facit blandade uppgifter

Blandade uppgifter 1

- $f'(x) = 2x$
- $g'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$
- $h'(x) = 2\ln(3) + 6x$
- $i'(x) = \ln(2)2^x$
- $j'(x) = -e^{-x} - e^x$
- $k'(x) = -\dfrac{8}{3x^3} - e^x$
- $l'(x) = 13x^{12} - \ln(13)13^x$
- $m'(x) = -\dfrac{2\ln(3)}{5 \cdot 3^x}$
- $n'(x) = x^4$
- $o'(x) = e^{x-3}$
- $p'(x) = -\dfrac{2^6}{2^x}$