(1001919) Métodos computacionalmente intensivos

Lista de fixação 2

Exercício 1. Considere que $(\theta_1, \theta_2) \sim N(\mu, \Sigma)$, com $\mu = (0,0)$, $\Sigma_{i,i} = 1$ e $\Sigma_{1,2} = \rho$.

(a) Determine $f(\theta_2|\theta_1)$

(b) Utilize o amostrador de Gibbs para simular de (θ_1, θ_2) quando $\rho = 0.01$, $\rho = 0.5$ e $\rho = 0.99$

(c) Indique qual amostrador foi mais eficiente. Argumente porque este é o caso apesar de a probabilidade de aceitação ser 1 para todos os amostradores.

Exercício 2. *Considere que* $\lambda \sim N(0,1)$, $(\mu_1, \mu_2)|\lambda$ *são i.i.d.,* $\mu_i|\lambda \sim N(\lambda, 1)$, $X_{i,1}, \ldots, X_{i,n_i}|\mu_i$ *são i.i.d., e* $X_{i,j}|\mu_i \sim N(\mu_i, 1)$.

(a) Determine $f(\lambda|\mu_1, \mu_2, \boldsymbol{X})$, $f(\mu_1|\lambda, \mu_2, \boldsymbol{X})$, *e* $f(\mu_2|\lambda, \mu_1, \boldsymbol{X})$.

(b) Utilize o amostrador de Gibbs para simular de (λ, μ_1, μ_2) *quando* $\bar{x}_1 = 10.2$, $\bar{x}_2 = 5.7$, *e* $n_1 = n_2 = 100$. *Exibe uma estimativa da densidade de* $\lambda|x$

(c) Determine $f(\lambda|x)$ *e compare com a simulação anterior.*

Exercício 3. *Considere que* $X_1, \ldots, X_n$ *são i.i.d.,* $X_i \sim Bernoulli(0.5)$, (θ_0, θ_1) *são i.i.d.,* $\theta_i \sim Beta(1,1)$, $Y_1, \ldots, Y_n$ *são independentes dado* X *e* θ, $Y_i|X_i, \theta \sim Bernoulli(\theta_{X_i})$. *Implemente um amostrador de Gibbs para* $f(\theta_0, \theta_1|Y, X)$ *quando* $X = (0,1,0,NA,1,NA)$, $Y = (0,1,0,1,1,0)$, *e as observações em* X *são faltantes ao acaso.*

Exercício 4. *Considere que,* (α_1, α_2) *são i.i.d.,* $\alpha_i \sim Gamma(1,1)$, *e* $X_1, \ldots, X_n$ *são i.i.d. dado* (α_1, α_2), *e* $X_i|\alpha_1, \alpha_2 \sim Beta(\alpha_1, \alpha_2)$. *Implemente um amostrador de Gibbs com propostas de Metropolis quando* $X = (0.21, 0.35, 0.23, 0.27, 0.31, 0.29, 0.24)$.

Exercício 5. *Considere o modelo de imagem aleatória em que* $A = \{0, 1, \ldots, 10\}^2$, *temos* $(Z_{i,j})_{(i,j)\in A}$, $V(i,j) = \{(i^*, j^*) : |i^* - i| + |j^* - j| = 1\}$, *e*

$$f(z) \propto \prod_{(i,j)\in A} \exp\left(-\lambda \sum_{(i^*,j^*)\in V(i,j)} (Z_{i^*,j^*} - Z_{i,j})^2\right)$$

Implemente o amostrador de Gibbs para simular de Z. *Para tal, determine* $f(z_{i,j}|z_{-(i,j)})$ *quando*

(a) cada $Z_{i,j} \in \{0,1\}$

(b) cada $Z_{i,j} \in \{0, 1, \ldots, 255\}$

(c) cada $Z_{i,j} \in \Re$

Referências