Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа №4

Дисциплина Моделирование

Тема Программно-алгоритмическая реализация моделей на основе дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями II и III рода

Студент Набиев Ф.М.

Группа ИУ7–63Б

Оценка (баллы)

Преподаватель Градов В.М.

Москва, 2020 г.

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы: Получение навыков разработки алгоритмов решения смешанной краевой задачи при реализации моделей, построенных на квазилинейном уравнении параболического типа.

1 Теоретическая часть

1.1 Исходные данные

Задана математическая модель. Уравнение для функции $T(x,t)$:

$$c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\Big) - \frac{2}{R}\alpha(x)T + \frac{2T_0}{R}\alpha(x) \tag{1.1}$$

Краевые условия

$$\begin{cases} t = 0, \quad T(x,0) = T_0, \\ x = 0, \quad -k(T(0))\dfrac{\partial T}{\partial x} = F_0, \\ x = l, \quad -k(T(l))\dfrac{\partial T}{\partial x} = \alpha_N(T(l) - T_0) \end{cases}$$

Функция $\alpha(x)$

$$\alpha(x) = \frac{c}{x-d}$$

где

$$c = -\alpha_0 d = \frac{\alpha_0\alpha_N l}{\alpha_0 - \alpha_N}$$

$$d = \frac{\alpha_N l}{\alpha_N - \alpha_0}$$

Разностная схема

$$\begin{cases} \widehat{K}_0 \widehat{y}_0 + \widehat{M}_0 \widehat{y}_1 = \widehat{P}_0 \\ \widehat{A}_n \widehat{y}_{n-1} - \widehat{B}_n \widehat{y}_n + \widehat{D}_n \widehat{y}_{n+1} = -\widehat{F}_n, \quad 1 \le n \le N-1 \\ \widehat{K}_N \widehat{y}_N + \widehat{M}_{N-1} \widehat{y}_{N-1} = \widehat{P}_N \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\widehat{A}_n = \widehat{\chi}_{n-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{h}$$
$$\widehat{B}_n = \widehat{A}_n + \widehat{D}_n + \widehat{c}_n h + p_n h\tau$$
$$\widehat{D}_n = \widehat{\chi}_{n+\frac{1}{2}} \frac{\tau}{h}$$
$$\widehat{F}_n = f_n h\tau + \widehat{c}_n y_n h$$

Обозначим

$$F = -k(T)\frac{\partial T}{\partial x}$$
$$p(x) = \frac{2}{R}\alpha(x)$$
$$f(x) = \frac{2T_0}{R}\alpha(x)$$

Разностная схема с краевым условием $x = 0$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{h}{8}\ \widehat{c}_{\frac{1}{2}} + \frac{h}{4}\ \widehat{c}_0 + \widehat{\chi}_{\frac{1}{2}}\ \frac{\tau}{h} + \frac{\tau h}{8}p_{\frac{1}{2}} + \frac{\tau h}{4}p_0\right)\ \widehat{y}_0 + \\
&+\left(\frac{h}{8}\ \widehat{c}_{\frac{1}{2}} - \widehat{\chi}_{\frac{1}{2}}\ \frac{\tau}{h} + \frac{\tau h}{8}p_{\frac{1}{2}}\right)\ \widehat{y}_1 = \\
&= \frac{h}{8}\ \widehat{c}_{\frac{1}{2}}\ (y_0 + y_1) + \frac{h}{4}\ \widehat{c}_0\ y_0 + \widehat{F}\ \tau + \frac{\tau h}{4}(\ \widehat{f}_{\frac{1}{2}} + \widehat{f}_0\ )
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Получим разностный аналог краевого условия $x = l$. Проинтегрируем уравнение 1.1 на отрезке $[x_{N-\frac{1}{2}}, x_N]$ и на временном интервале $[t_m, t_{m+1}]$.

$$\begin{aligned}
&\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} c(T)\frac{\partial T}{\partial t}dt = -\int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} \frac{\partial F}{\partial x}dx - \\
&-\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x)T dt + \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(T)dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} \widehat{c}\ (\widehat{T} - T)dx = -\int_{t_m}^{t_{m+1}} (F_N - F_{N-\frac{1}{2}})dt - \\
&-\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} p\ \widehat{T}\ \tau dx + \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} \widehat{f}\ \tau dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{h}{4}[\ \widehat{c}_N\ (\ \widehat{y}_N - y_N) + \widehat{c}_{N-\frac{1}{2}}\ (\ \widehat{y}_{N-\frac{1}{2}} - y_{N-\frac{1}{2}})] = -(\ \widehat{F}_N - \widehat{F}_{N-\frac{1}{2}}\ )\tau - \\
&-(p_N\ \widehat{y}_N + p_{N-\frac{1}{2}}\ \widehat{y}_{N-\frac{1}{2}}\ )\tau\frac{h}{4} + (\ \widehat{f}_N + \widehat{f}_{N-\frac{1}{2}}\ )\tau\frac{h}{4}
\end{aligned}$$

Учитывая

$$\widehat{y}_{N-\frac{1}{2}} = \frac{\widehat{y}_{N-1} + \widehat{y}_N}{2}$$

$$y_{N-\frac{1}{2}} = \frac{y_{N-1} + y_N}{2}$$

$$\widehat{F}_N = \alpha_N (\widehat{y}_N - T_0)$$

$$\widehat{F}_{N-\frac{1}{2}} = \widehat{\chi}_{N-\frac{1}{2}} \frac{\widehat{y}_{N-1} - \widehat{y}_N}{h}$$

Получим

$$\begin{gathered}
\widehat{y}_N \left(\frac{h}{4}\ \widehat{c}_N + \frac{h}{8}\ \widehat{c}_{N-\frac{1}{2}} + \alpha_N \tau + \widehat{\chi}_{N-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{h} + p_N \frac{\tau h}{4} + p_{N-\frac{1}{2}} \frac{\tau h}{8}\right) + \\
+ \widehat{y}_{N-1} \left(\frac{h}{8}\ \widehat{c}_{N-\frac{1}{2}} - \widehat{\chi}_{N-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{h} + p_{N-\frac{1}{2}} \frac{\tau h}{8}\right) = \\
= \frac{h}{4}\ \widehat{c}_N\, y_N + \frac{h}{8}\ \widehat{c}_{N-\frac{1}{2}}\, y_{N-1} + \frac{h}{8}\ \widehat{c}_{N-\frac{1}{2}}\, y_N + T_0 \alpha_N \tau + (\widehat{f}_N + \widehat{f}_{N-\frac{1}{2}}) \frac{\tau h}{4}
\end{gathered} \tag{1.4}$$

С помощью формул 1.2 и 1.3 получим коэффициенты $\widehat{K}_0, \widehat{M}_0, \widehat{P}_0$, а с помощью 1.2 и 1.4 — $\widehat{K}_N, \widehat{M}_{N-1}, \widehat{P}_N$.

Для решения системы 1.2 используется метод простых итераций. Обозначим текущую итерацию за s, тогда предыдущая — $s-1$. С данными обозначениями итерационный процесс организуется следующим образом

$$A_n^{s-1} y_{n+1}^s - B_n^{s-1} y_n^s + D_n^{s-1} y_{n-1}^s = -F_n^{s-1}$$

Решение данной схемы осуществляется методом прогонки. Итерации прекращаются при условии

$$\max \left| \frac{y_n^s - y_n^{s-1}}{y_n^s} \right| \leq \varepsilon, n = \overline{0, N}$$

Значения параметров для отладки

$k(T) = a_1(b_1 + c_1 T^{m_1}), \frac{\text{Вт}}{\text{см К}},$

$c(T) = a_2 + b_2 T^{m_2} - \frac{c_2}{T^2}, \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3\text{К}},$

$a_1 = 0.0134,\ b_1 = 1,\ c_1 = 4.35 \cdot 10^{-4},\ m_1 = 1,$

$a_2 = 2.049,\ b_2 = 0.563 \cdot 10^{-3},\ c_2 = 0.528 \cdot 10^5,\ m_2 = 1$

$\alpha(x) = \frac{c}{x-d},$

$\alpha_0 = 0.05\ \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2\text{К}},$

$\alpha_N = 0.01\ \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2\text{К}},$

$l = 10$ см,

$T_0 = 300$ К,

$R = 0.5$ см

$F(t) = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}.$

2 Практическая часть

2.1 Реализация

Листинг 2.1 – Теплоёмкость стержня

```
def c(T):
    return a2 + b2 * T ** m2 - c2 / T ** 2
```

Листинг 2.2 – Коэффициенты теплопроводности материала стержня и теплоотдачи при обдуве

```
def k(T):
    return a1 * (b1 + c1 * T ** m1)


def alpha(x):
    d = (alphaN * l) / (alphaN - alpha0)
    c = -alpha0 * d
    return c / (x - d)
```

Листинг 2.3 – Замены p и f

```
def p(x):
    return 2 * alpha(x) / R


def f(x):
    return 2 * alpha(x) * T0 / R
```

Листинг 2.4 – Метод средних

```
def FAddHalf(x, h, F):
    return (F(x) + F(x + h)) / 2


def FSubHalf(x, h, F):
    return (F(x) + F(x - h)) / 2
```

Листинг 2.5 – Параметры разностной схемы

```
def A(T):
    return FSubHalf(T, t, k) * t / h


def D(T):
    return FAddHalf(T, t, k) * t / h


def B(x, T):
    return A(T) + D(T) + c(T) * h + p(x) * h * t


def F(x, T):
    return f(x) * h * t + c(T) * T * h
```

Листинг 2.6 – Краевые условия

```
def bounds_left(prevT):
    K0 = h / 8 * FAddHalf(
            prevT[0], t, c) + h / 4 * c(prevT[0]) + \
            FAddHalf(prevT[0], t, k) * t / h + \
            t * h / 8 * p(h / 2) + t * h / 4 * p(0)

    M0 = h / 8 * FAddHalf(
            prevT[0], t, c) - FAddHalf(prevT[0], t, k) * \
            t / h + t * h * p(h / 2) / 8

    P0 = h / 8 * FAddHalf(
            prevT[0], t, c) * (prevT[0] + prevT[1]) + \
            h / 4 * c(prevT[0]) * prevT[0] + F0 * t + \
            t * h / 8 * (3 * f(0) + f(h))

    return K0, M0, P0


def bounds_right(prevT):
    KN = h / 8 * FSubHalf(
            prevT[-1], t, c) + h / 4 * c(prevT[-1]) + \
            FSubHalf(prevT[-1], t, k) * t / h + t * \
            alphaN + t * h / 8 * p(l - h / 2) + t * h / 4 * p(l)

    MN = h / 8 * FSubHalf(
            prevT[-1], t, c) - FSubHalf(prevT[-1], t, k) * \
            t / h + t * h * p(l - h / 2) / 8

    PN = h / 8 * FSubHalf(
```

```
            prevT[-1], t, c) * (prevT[-1] + prevT[-2]) + h / \
            4 * c(prevT[-1]) * prevT[-1] + t * alphaN * T0 + \
            t * h / 4 * (f(l) + f(l - h / 2))

    return KN, MN, PN
```

Листинг 2.7 – Метод прогонки

```
def thomas(prevT):
    K0, M0, P0 = bounds_left(prevT)
    KN, MN, PN = bounds_right(prevT)

    # Прямой ход
    eps = [0, -M0 / K0]
    eta = [0, P0 / K0]

    x = h
    n = 1
    while (x + h < l):
        eps.append(D(prevT[n]) / (B(x, prevT[n]) - A(prevT[n]) * eps[n]))
        eta.append((
            F(x, prevT[n]) + A(prevT[n]) * eta[n]) /
            (B(x, prevT[n]) - A(prevT[n]) * eps[n]))

        n += 1
        x += h

    # Обратный ход
    y = [0] * (n + 1)
    y[n] = (PN - MN * eta[n]) / (KN + MN * eps[n])

    for i in range(n - 1, -1, -1):
        y[i] = eps[i + 1] * y[i + 1] + eta[i + 1]

    return y
```

Листинг 2.8 – Метод простых итераций

```
def termtest1(T, newT):
    max = fabs((T[0] - newT[0]) / newT[0])

    for i, j in zip(T, newT):
        d = fabs(i - j) / j

        if d > max:
```

```
            max = d

    return max < 1


def termtest2(T, newT):
    for i, j in zip(T, newT):
        if fabs((i - j) / j) > 1e-2:
            return True

    return False


def fixed_point_iteration():
    n = int(1 / h)
    ti = 0

    result = []
    newT = [0] * (n + 1)
    T = [T0] * (n + 1)

    result.append(T)

    while (True):
        buf = T

        while True:
            newT = thomas(buf)
            if termtest1(buf, newT):
                break
            buf = newT

        result.append(newT)
        ti += t

        if (termtest2(T, newT) == False):
            break

        T = newT

    return result, ti
```

2.2 Результаты работы

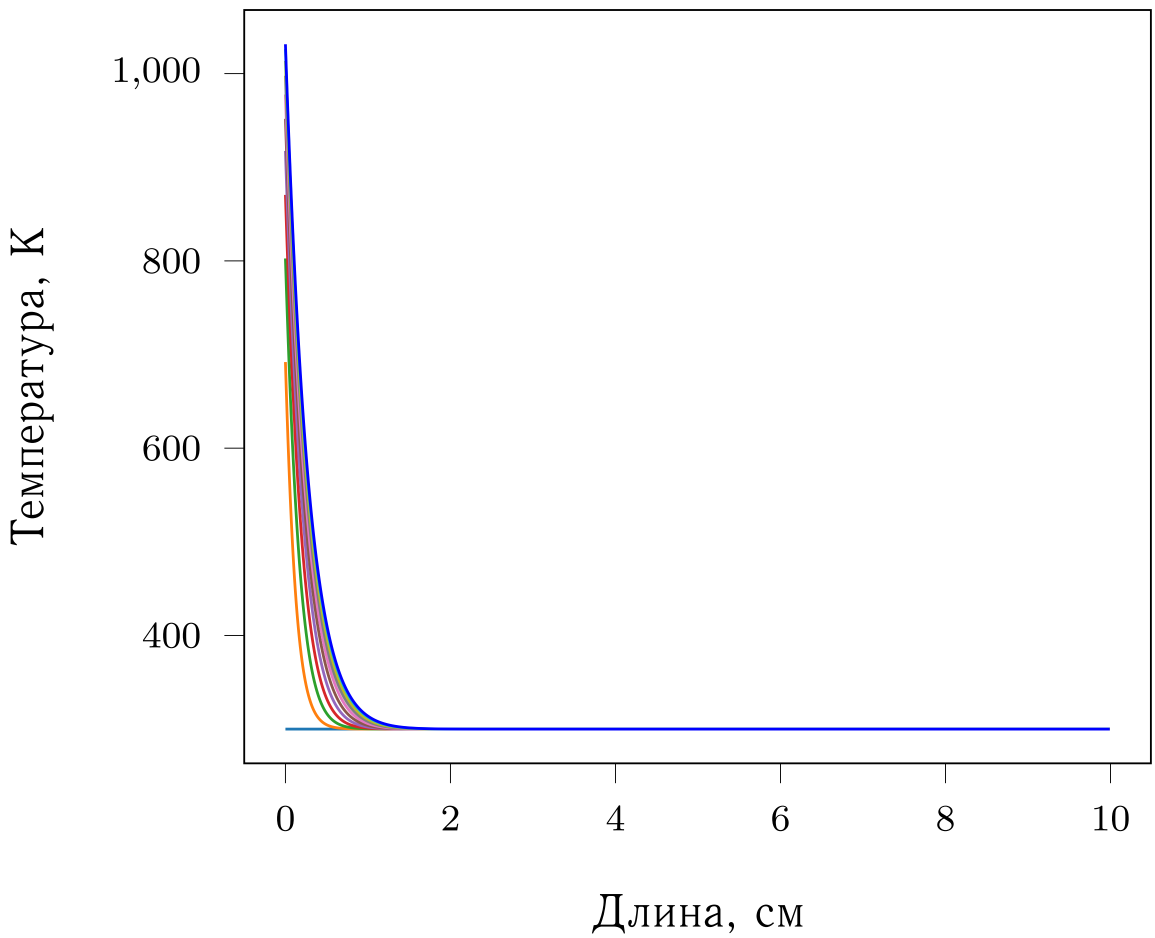
2.2.1 Представить разностный аналог краевого условия при $x = l$ и его краткий вывод интегро-интерполяционным методом

См. раздел 1.

2.2.2 График зависимости температуры от координаты при нескольких фиксированных значениях времени

На рисунке представлены графики зависимости температуры от координаты при нескольких фиксированных t. Последняя –– синяя кривая соответствует установившемуся режиму, когда поле перестает меняться с точностью 1e–3.

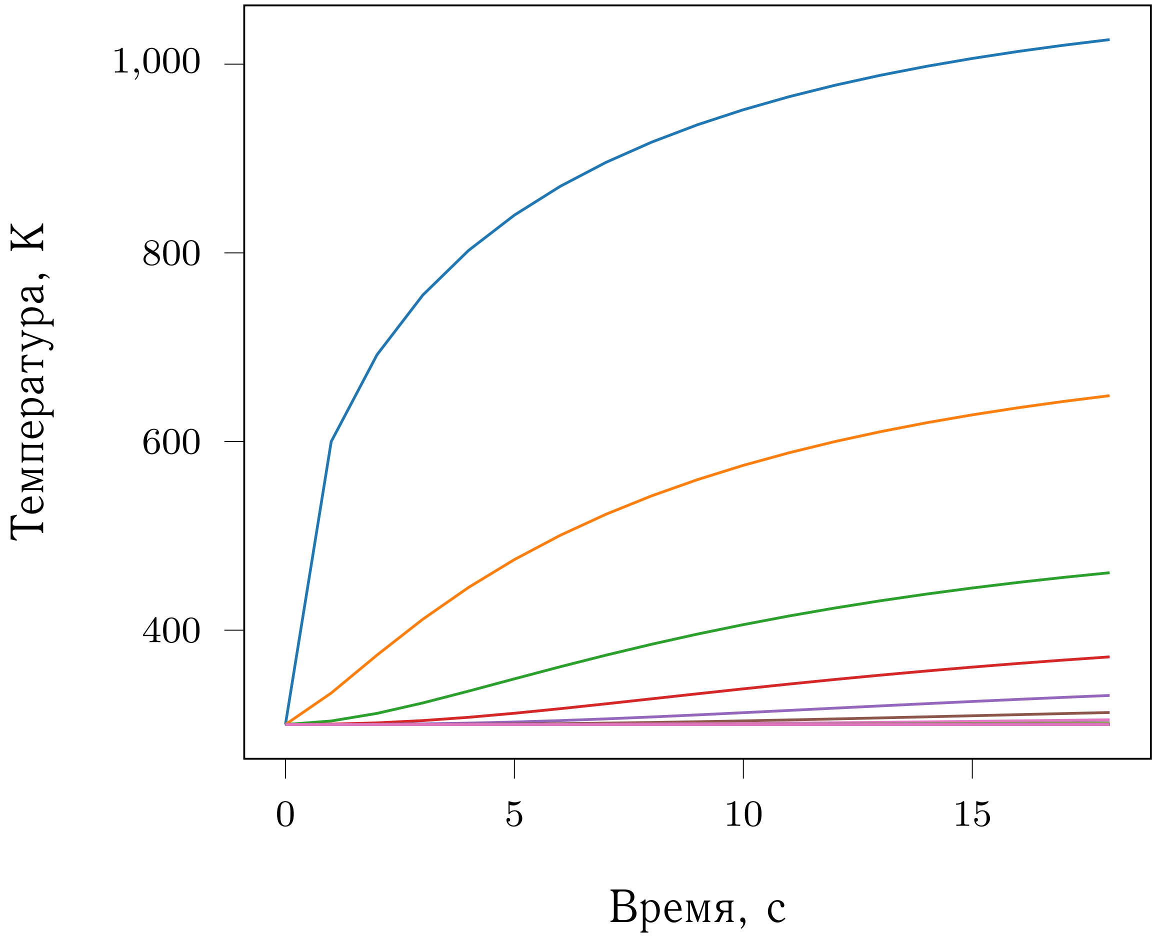
Рис. 2.1 – Зависимость температуры от координаты стержня



2.2.3 График зависимости температуры от времени при нескольких фиксированных значениях координаты

На рисунке представлены графики зависимости температуры от времени при фиксированных $x = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 3.2$.

Рис. 2.2 – Зависимость температуры от времени

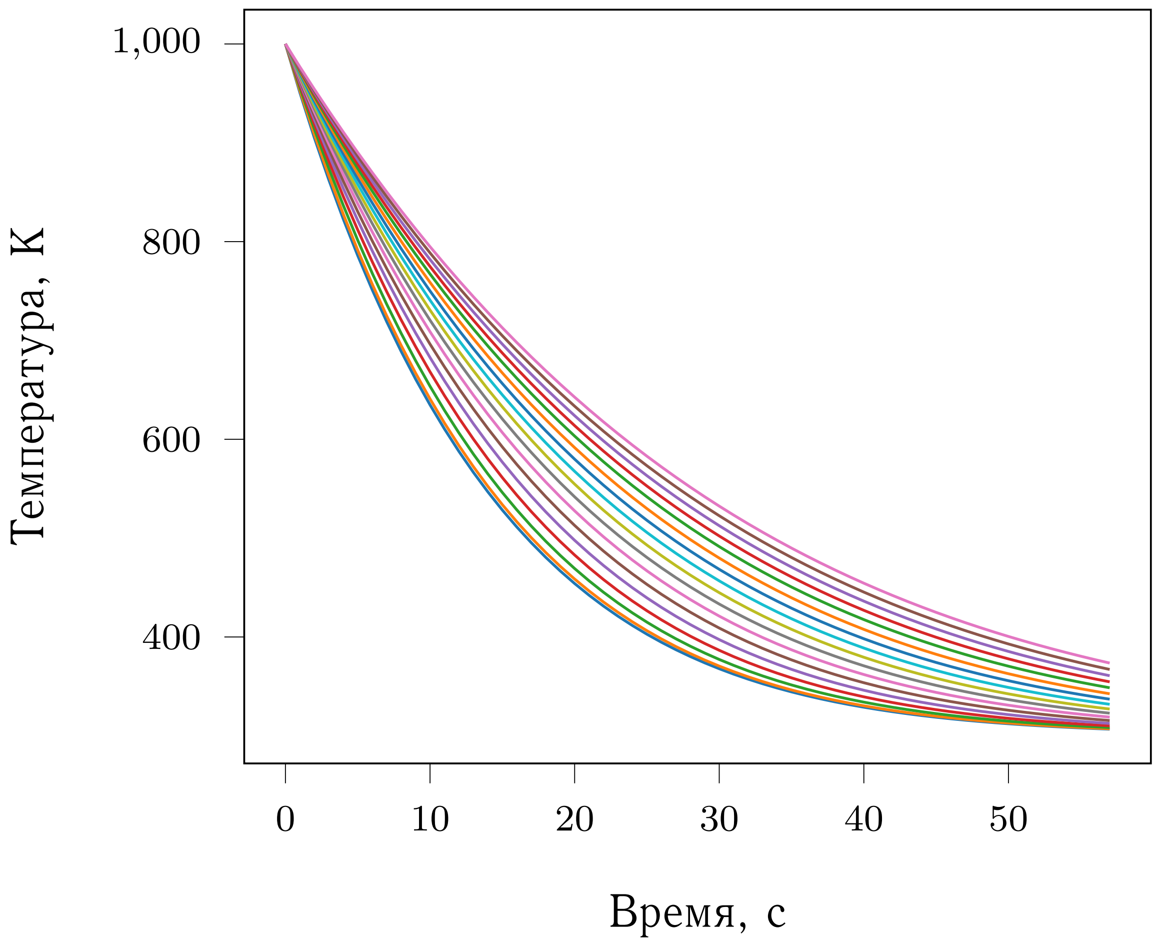


3 Ответы на контрольные вопросы

3.1 Приведите результаты тестирования программы (графики, общие соображения,качественный анализ). Учесть опыт выполнения лабораторной работы №3

Если после разогрева стержня положить поток равным 0, то будет происходить остывание, пока температура не выровняется по всей длине и не станет равной T_0.

Рис. 3.1 – Зависимость температуры от времени



Если для коэффициента теплопроводности стержня поменять зависимость от T на зависимость от x как в третьей лабораторной работе, а теплоемкость стержня задать равной нулю, то график $T(x,t)$ из этой лабораторной работы (рисунок 3.2) будет совпадать с графиком $T(x)$ из прошлой лабораторной работы (рисунок 3.3).

Рис. 3.2 – График из этой лабораторной работы

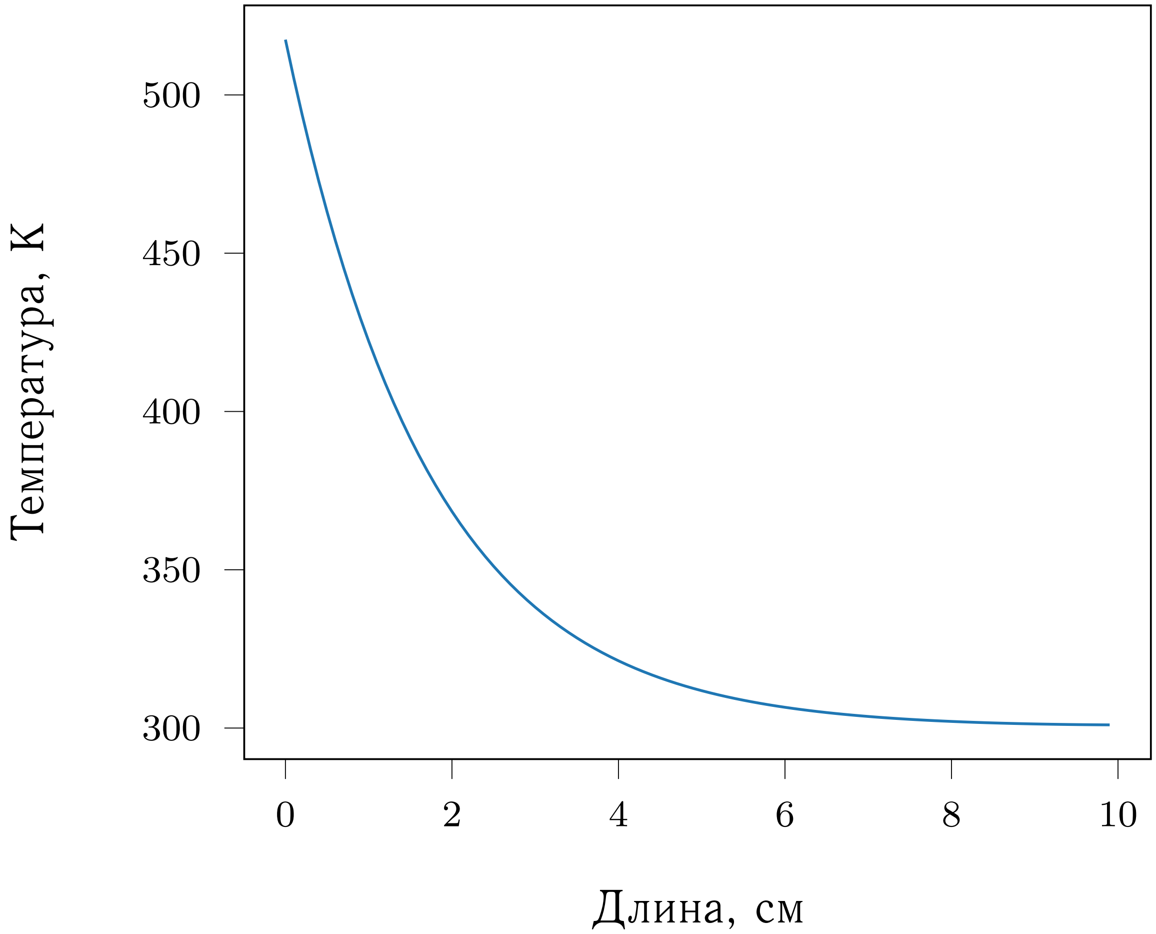
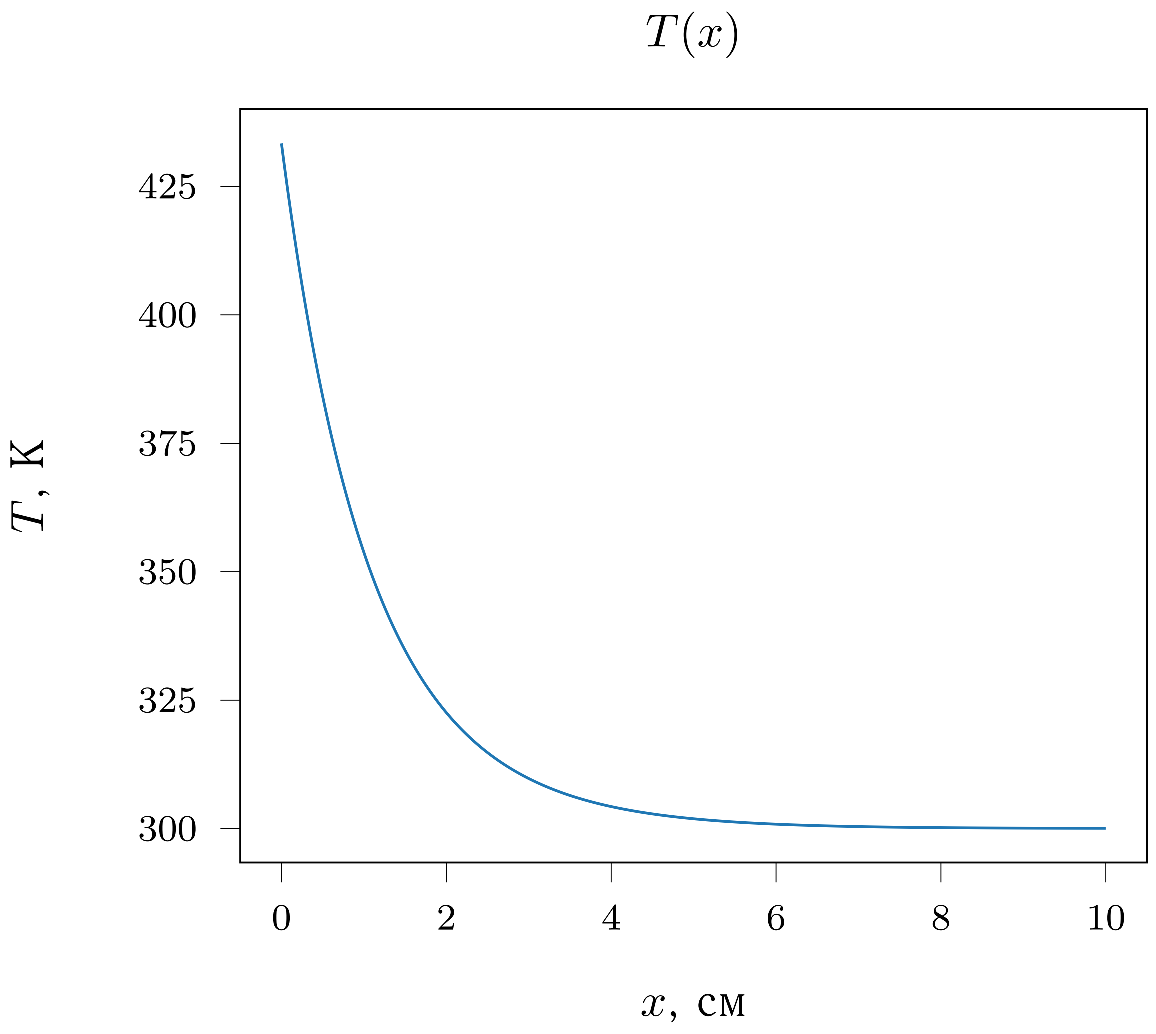


Рис. 3.3 – График из лабораторной работы №3



3.2 Выполните линеаризацию системы 1.2 по Ньютону, полагая для простоты, что все коэффициенты зависят только от одной переменной y_n. Приведите линеаризованный вариант уравнения и опишите алгоритм его решения.

$$\overset{\frown}{A}_n \overset{\frown}{y}_{n-1} - \overset{\frown}{B}_n \overset{\frown}{y}_n + \overset{\frown}{D}_n \overset{\frown}{y}_{n+1} = -\overset{\frown}{F}_n$$

Все коэффициенты зависят только от одной переменной, тогда

$$\left(\widehat{A}_n \widehat{y}_{n-1} - \widehat{B}_n \widehat{y}_n + \widehat{D}_n \widehat{y}_{n+1} + \widehat{F}_n \right)\Bigg|_{s-1} + \widehat{A}_n^{s-1} \Delta \widehat{y}_{n-1}^{s} +$$

$$+ \left(\frac{\partial \widehat{A}_n}{\partial \widehat{y}_n} \widehat{y}_{n-1} - \frac{\partial \widehat{B}_n}{\partial \widehat{y}_n} \widehat{y}_n - \widehat{B}_n + \frac{\partial \widehat{D}_n}{\partial \widehat{y}_n} \widehat{y}_{n+1} + \frac{\partial \widehat{F}_n}{\partial \widehat{y}_n}\right)\Bigg|_{s-1} \Delta \widehat{y}_n^{s} +$$

$$+ \widehat{D}_n^{s-1} \Delta \widehat{y}_{n+1}^{s} = 0$$

Каноничный вид

$$A_n \Delta \widehat{y}_{n-1}^{s} - B_n \Delta \widehat{y}_n^{s} + D_n \Delta \widehat{y}_{n+1}^{s} = -F_n$$

Тогда получаем, что

$$\begin{aligned}
&A_n = \widehat{A}_n^{s-1} \\
&B_n = \left(- \tfrac{\partial \widehat{A}_n}{\partial \widehat{y}_n} \widehat{y}_{n-1} + \tfrac{\partial \widehat{B}_n}{\partial \widehat{y}_n} \widehat{y}_n + \widehat{B}_n - \tfrac{\widehat{D}_n}{\partial \widehat{y}_n} \widehat{y}_{n+1} - \tfrac{\widehat{F}_n}{\partial \widehat{y}_n} \right)\Bigg|_{s-1} \\
&D_n = \widehat{D}_n^{s-1} \\
&F_n = \left(\widehat{A}_n \widehat{y}_{n-1} - \widehat{B}_n \widehat{y}_n + \widehat{D}_n \widehat{y}_{n+1} + \widehat{F}_n \right)\Bigg|_{s-1}
\end{aligned}$$

Краевое условие для y_0

$$\widehat{K}_0 \widehat{y}_0 + \widehat{M}_0 \widehat{y}_1 = \widehat{P}_0$$

Тогда

$$\left(\widehat{K}_0 \widehat{y}_0 + \widehat{M}_0 \widehat{y}_1 - \widehat{P}_0 \right)\Bigg|_{s-1} + \widehat{K}_0^{s-1} \Delta \widehat{y}_0^{s} + \widehat{M}_0^{s-1} \Delta \widehat{y}_1^{s} = 0$$

Каноничный вид

$$K_0 \Delta \overset{\frown}{y}{}_0^s + M_0 \Delta \overset{\frown}{y}{}_1^s = P_0$$

Тогда получаем, что

$$\begin{aligned}
&K_0 = \overset{\frown}{K}{}_0^{s-1} \\
&M_0 = \overset{\frown}{M}{}_0^{s-1} \\
&P_0 = \left(- \overset{\frown}{K}_0 \overset{\frown}{y}_0 - \overset{\frown}{M}_0 \overset{\frown}{y}_1 + \overset{\frown}{P}_0 \right) \Bigg|_{s-1}
\end{aligned}$$

Краевое условие для y_N

$$\overset{\frown}{K}_N \overset{\frown}{y}_N + \overset{\frown}{M}_{N-1} \overset{\frown}{y}_{N-1} = \overset{\frown}{P}_N$$

Тогда

$$\left(\overset{\frown}{K}_N \overset{\frown}{y}_N + \overset{\frown}{M}_{N-1} \overset{\frown}{y}_{N-1} - \overset{\frown}{P}_N \right) \Bigg|_{s-1} + \overset{\frown}{K}{}_N^{s-1} \Delta \overset{\frown}{y}{}_N^s + \overset{\frown}{M}{}_{N-1}^s \Delta \overset{\frown}{y}{}_{N-1}^s = 0$$

Каноничный вид

$$K_N \Delta \overset{\frown}{y}{}_N^s + M_{N-1} \Delta \overset{\frown}{y}{}_{N-1}^s = P_N$$

Тогда получается, что

$$\begin{aligned}
&K_N = \overset{\frown}{K}{}_N^{s-1} \\
&M_{N-1} = \overset{\frown}{M}{}_{N-1}^s \\
&P_N = \left(- \overset{\frown}{K}_N \overset{\frown}{y}_N - \overset{\frown}{M}_{N-1} \overset{\frown}{y}_{N-1} + \overset{\frown}{P}_N \right) \Bigg|_{s-1}
\end{aligned}$$

Система

$$\begin{cases} K_0 \Delta \overset{\frown}{y}{}_0^s + M_0 \Delta \overset{\frown}{y}{}_1^s = P_0 \\ A_n \Delta \overset{\frown}{y}{}_{n-1}^s - B_n \Delta \overset{\frown}{y}{}_n^s + D_n \Delta \overset{\frown}{y}{}_{n+1}^s = -F_n \\ K_N \Delta \overset{\frown}{y}{}_N^s + M_{N-1} \Delta \overset{\frown}{y}{}_{N-1}^s = P_N \end{cases}$$

Решается методом прогонки, в результате находятся все $\Delta \overset{\frown}{y}{}_n^s$, после чего определяются значения искомой функции в узлах $\overset{\frown}{y}{}_n^s = \overset{\frown}{y}{}_n^{s-1} + \Delta \overset{\frown}{y}{}_n^s$. Итерационный процесс заканчивается при выполнении условия $\max \left| \frac{\Delta \overset{\frown}{y}{}_n^s}{\overset{\frown}{y}{}_n^s} \right| \leq \varepsilon$.