Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа №3

Дисциплина Моделирование

Тема Программно-алгоритмическая реализация моделей на основе ОДУ второго порядка с краевыми условиями II и III рода

Студент Набиев Ф.М.

Группа ИУ7–63Б

Оценка (баллы)

Преподаватель Градов В.М.

Москва, 2020 г.

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы: Получение навыков разработки алгоритмов решения краевой задачи при реализации моделей, построенных на ОДУ второго порядка.

1 Теоретическая часть

1.1 Исходные данные

Уравнение функции $T(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(K(x)\frac{dT}{dx}\right) - \frac{2}{R}\alpha(x)T + \frac{2T_0}{R}\alpha(x) = 0 \tag{1.1}$$

Краевые условия:

$$\begin{cases} x = 0, \ -k(0)\dfrac{dT}{dx} = F_0 \\ x = l, \ -k(l)\dfrac{dT}{dx} = \alpha_N(T(l) - T_0) \end{cases}$$

Функции $k(x)$ и $\alpha(x)$ заданы своими константами:

$$k(x) = \frac{a}{x-b}$$

$$\alpha(x) = \frac{c}{x-d}$$

где константы a, b следует найти из условий $k(0) = k_0$, $k(l) = k_N$, а константы c, d из условий $\alpha(0) = \alpha_0$, $\alpha(l) = \alpha_N$. Величины k_0, k_N, α_0, α_N задает пользователь. Тогда

$$b = \frac{k_N l}{k_N - k_0}$$

$$a = -bk_0$$

$$c = -d\alpha_0$$

$$d = \frac{\alpha_N l}{\alpha_N - \alpha_0}$$

Разностная схема с разностными краевыми условиями при $x = 0$.

$$
\begin{aligned}
&A_n y_{n-1} - B_n y_n + C_n y_{n+1} = -D_n, \quad 1 \le n \le N-1 \qquad (1.2)\\
&A_n = \frac{\chi_{n+1/2}}{h}\\
&C_n = \frac{\chi_{n+1/2}}{h}\\
&B_n = A_n + C_n + p_n h\\
&D_n = f_n h
\end{aligned}
$$

Система 1.2 совместно с краевыми условиями решается методом прогонки. Для величин $\chi_{n+1/2}$ можно получить различные приближенные выражения интеграл методом трапеций или методом средних:

$$\chi_{n\pm1/2} = \frac{k_n + k_{n\pm1}}{2}$$

Разностный аналог краевого условия при $x = 0$:

$$y_0 \cdot \left(x_{\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{8} p_{\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{4} p_0\right) - y_1 \cdot \left(x_{\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{8} p_{\frac{1}{2}}\right) = \left(hF_0 + \frac{h^2}{4}(f_{\frac{1}{2}} + f_0)\right)$$

где

$$
\begin{aligned}
&F = -k(x)\frac{dT}{dx}\\
&p(x) = \frac{2}{R}\alpha(x)\\
&f(x) = \frac{2T_0}{R}\alpha(x)\\
&p_n = p(x_n), \;\; f_n = f(x_n)
\end{aligned}
$$

Простая аппроксимация:

$$p_{\frac{1}{2}} = \frac{p_0 + p_1}{2}$$

$$f_{\frac{1}{2}} = \frac{f_0 + f_1}{2}$$

Так же необходимо учесть, что

$$F_N = \alpha_N (y_N - T_0)$$

$$F_{N-\frac{1}{2}} = \chi_{N-\frac{1}{2}} \frac{y_{N-1} - y_N}{h} \tag{1.3}$$

Значения параметров для отладки:

$K_0 = 0.4$ Вт/см К
$K_N = 0.1$ Вт/см К
$\alpha_0 = 0.05$ Вт/см^2 К
$\alpha_N = 0.01$ Вт/см^2 К
$l = 10$ см
$T_0 = 300$ К
$R = 0.5$ см
$F_0 = 50$ Вт/см^2

1.2 Физическое содержание задачи

Сформулированная математическая модель описывает температурное поле $T(x)$ вдоль цилиндрического стержня радиуса R и длиной l, причем $R \ll l$ и температуру можно принять постоянной по радиусу цилиндра. Ось x направлена вдоль оси цилиндра и начало координат совпадает с левым торцем стержня. Слева при $x = 0$ цилиндр нагружается тепловым потоком F_0. Стержень обдувается воздухом, температура которого равна T_0. В результате происходит съем тепла с цилиндрической поверхности и поверхности правого торца при $x = l$. Функции $k(x)$,$\alpha(x)$ являются, соответственно, коэффициентами теплопроводности материала стержня и теплоотдачи при обдуве.

2 Практическая часть

2.1 Реализация

Листинг 2.1 – Параметры коэффициентов теплопроводности материала стержня и теплоотдачи при обдуве

```
b = params['kN'] * params['l'] / (params['kN'] - params['k0'])
a = params['k0'] * (-b)
d = params['AlphaN'] * params['l'] / (params['AlphaN'] - params['Alpha0'])
c = params['Alpha0'] * (-b)
```

Листинг 2.2 – Коэффициенты теплопроводности материала стержня и теплоотдачи при обдуве

```
def k(x):
    return a / (x - b)


def Alpha(x):
    return c / (x - d)
```

Листинг 2.3 – $p(x)$ и $f(x)$

```
def P(x):
    return 2 / params['R'] * Alpha(x)


def f(x):
    return 2 * params['t0'] / params['R'] * Alpha(x)
```

Листинг 2.4 – Метод средних для χ

```
def ChiLo(x):
    return 2 * k(x) * k(x - h) / (k(x) + k(x - h))


def ChiHi(x):
    return 2 * k(x) * k(x + h) / (k(x) + k(x + h))
```

Листинг 2.5 – Параметры разностной схемы

```
def A(n):
    return ChiHi(n) / h


```

```
def C(n):
    return ChiLo(n) / h


def B(n):
    return A(n) + C(n) + P(n) * h


def D(n):
    return f(n) * h
```

Листинг 2.6 – Краевые условия

```
def bounds_left():
    x0 = 0

    p0 = P(x0)
    p1 = P(x0 + h)
    p12 = (p0+p1)/2

    f0 = f(x0)
    f1 = f(x0+h)
    f12 = (f0+f1)/2

    M0 = -ChiHi(x0) + h * h / 8 * p12
    K0 = ChiHi(x0) + h * h / 8 * p12 + h * h / 4 * p0
    P0 = h * params['F0'] + h * h / 4 * (f12 + f0)

    return M0, K0, P0


def bounds_right():
    xn = params['l']

    pn = P(xn)
    pn1 = P(xn - h)
    pn12 = (pn+pn1)/2

    fn = f(xn)
    fn1 = f(xn-h)
    fn12 = (fn+fn1)/2

    Mn = (-ChiLo(xn) + h * h * pn12 / 8)
    Kn = (ChiLo(xn) + params['AlphaN'] *
          h + h * h * pn12 / 8 + h * h * pn / 4);
    Pn = (params['AlphaN'] * params['t0'] *
          h + h * h * (fn12 + fn) / 4);

```

```
    return Mn, Kn, Pn
```

Листинг 2.7 – Метод прогонки

```
def thomas():
    M0, K0, P0 = bounds_left()
    Mn, Kn, Pn = bounds_right()

    # прямой ход
    eps = [0, -M0/K0 ]
    eta = [0, P0/K0]

    x = h
    n = 1
    while x + h < N:
        eps.append(C(x) / (B(x) - A(x) * eps[n]))
        eta.append((A(x) * eta[n] + D(x)) / (B(x) - A(x) * eps[n]))
        n += 1
        x += h

    # обратный ход
    t = [0] * (n + 1)
    t[n] = (Pn - Mn * eta[n]) / (Kn + Mn * eps[n])

    for i in range(n - 1, -1, -1):
        t[i] = eps[i + 1] * t[i + 1] + eta[i + 1]

    return t
```

2.2 Результаты работы

2.2.1 Представить разностный аналог краевого условия при $x = l$ и его краткий вывод интегро-интерполяционным методом

Пусть

$$F = -k(x)\frac{dT}{dx}$$

$$p(x) = \alpha(x)\frac{2}{R}$$

$$f(x) = \alpha(x)\frac{2T_0}{R}$$

Учитывая 1.1, получим:

$$-\frac{d}{dx}(F) - p(x) + f(x) = 0$$

Проинтегрируем на отрезке $[\chi_{N-\frac{1}{2}}, \chi_N]$:

$$-\int_{\chi_{N-\frac{1}{2}}}^{\chi_N} \frac{dF}{dx}dx - \int_{\chi_{N-\frac{1}{2}}}^{\chi_N} p(x)Tdx + \int_{\chi_{N-\frac{1}{2}}}^{\chi_N} f(x)dx = 0$$

Второй и третий интегралы вычислим методом трапеций

$$F_{N-\frac{1}{2}} - F_N - \frac{p_{N-\frac{1}{2}}y_{N-\frac{1}{2}} + p_N y_N}{4}h + \frac{f_{N-\frac{1}{2}} + f_N}{4}h = 0$$

Зная

$$F_{N-\frac{1}{2}} = \chi_{N-\frac{1}{2}}\frac{y_{N-1} - y_N}{h}$$

$$F_N = \alpha_N(y_N - T_0)$$

$$y_{N-\frac{1}{2}} = \frac{y_N + y_{N-1}}{2}$$

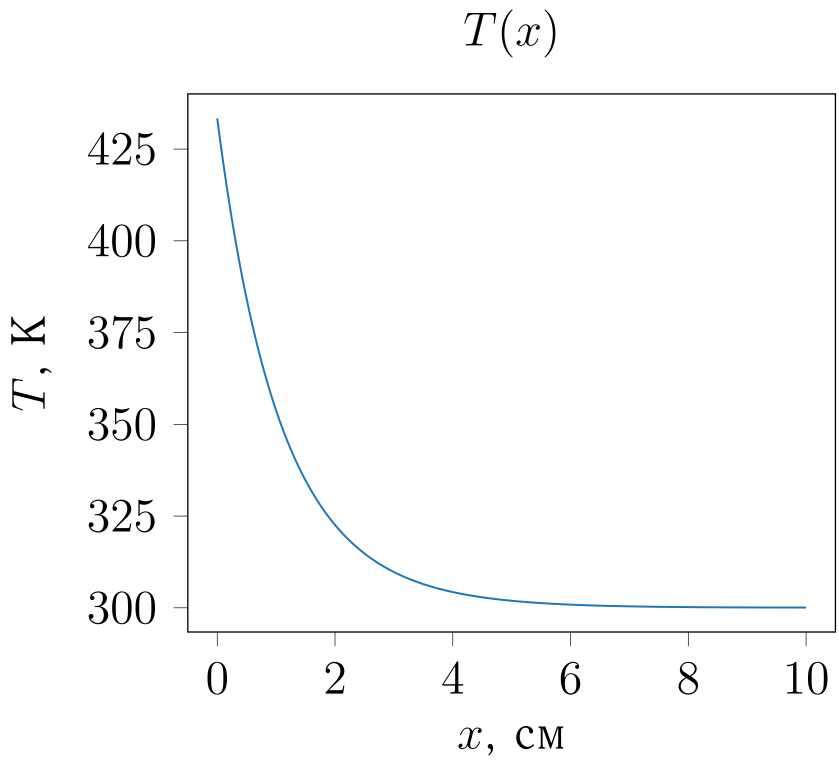
Получим:

$$\frac{\chi_{N-\frac{1}{2}}y_{N-1}}{h} - \frac{\chi_{N-\frac{1}{2}}y_N}{h} - \alpha_N y_N + \alpha_N T_0 - \frac{p_{N-\frac{1}{2}}y_{N-1}}{8}h - \frac{p_{N-\frac{1}{2}}y_N}{8}h -$$
$$- \frac{p_N y_N}{4}h + \frac{f_{N-\frac{1}{2}} + f_N}{4}h = 0$$

$$y_{N-1} \cdot \left(\frac{\chi_{N-\frac{1}{2}}}{h} - \frac{p_{N-\frac{1}{2}}}{8}h\right) + y_N \cdot \left(-\frac{\chi_{N-\frac{1}{2}}}{h} - \alpha_N - \frac{p_N}{4}h - \frac{p_{N-\frac{1}{2}}}{8}h\right) =$$
$$= -\left(\alpha_N T_0 + \frac{f_{N-\frac{1}{2}} + f_N}{4}h\right)$$

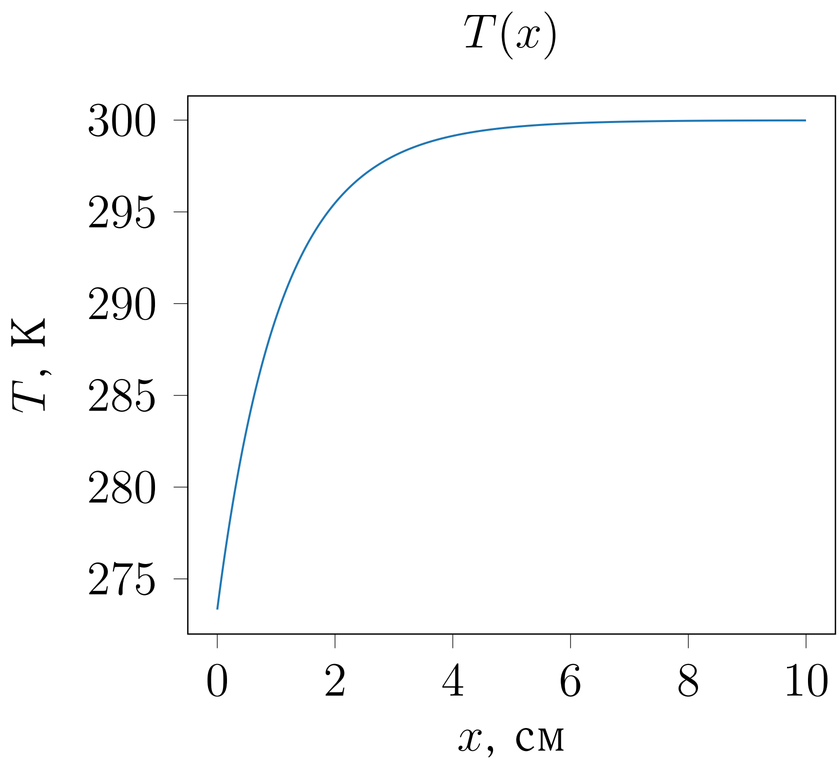
2.2.2 График зависимости температуры $T(x)$ от координаты x при заданных выше параметрах

Рис. 2.1 – График $T(x)$



2.2.3 График зависимости $T(x)$ при $F_0 = -10$ Вт/см^2

Рис. 2.2 – $T(x)$ при $F_0 = -10$



2.2.4 График зависимости $T(x)$ при увеличенных значениях $\alpha(x)$ (в 3 раза)

Рис. 2.3 – $T(x)$ при $3 \cdot \alpha(x)$

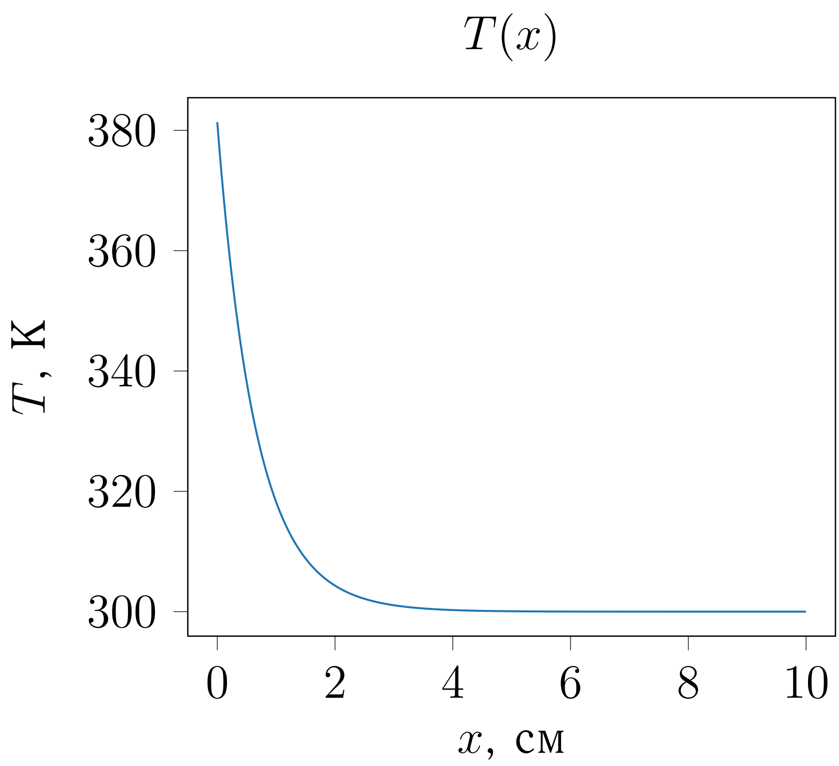
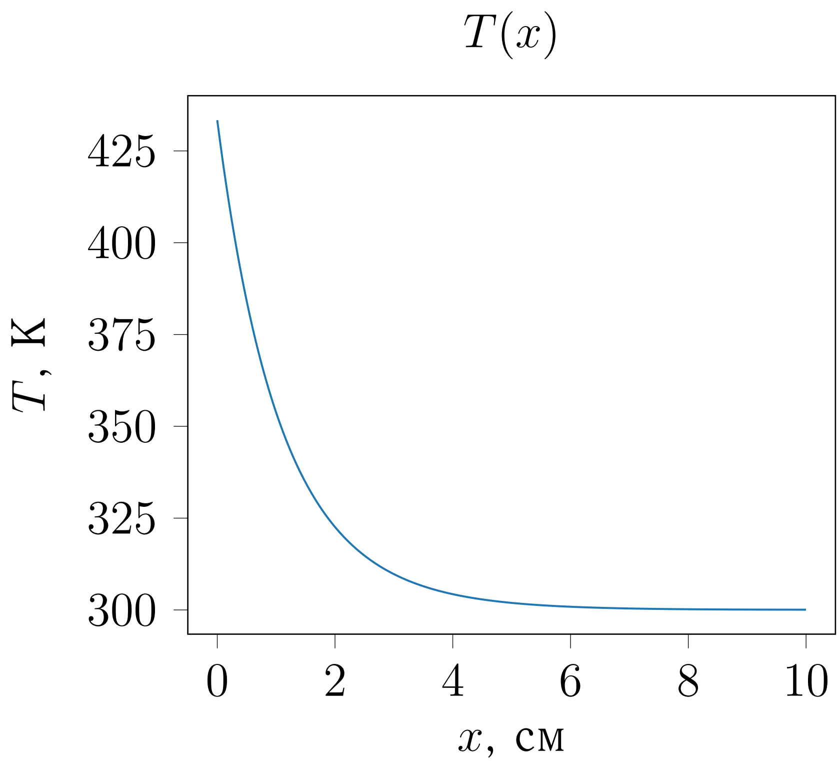


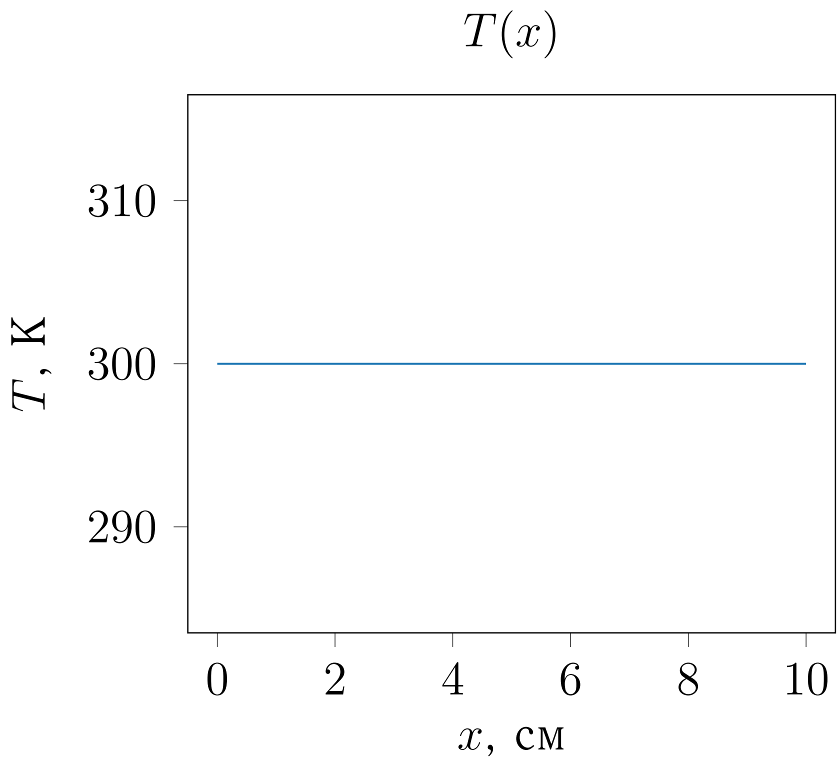
Рис. 2.4 – График из 2.2.2



При увеличении теплосъема и неизменном потоке $F0$ уровень температур $T(x)$ должен снижаться, а градиент увеличиваться.

2.2.5 График зависимости $T(x)$ при $F_0 = 0$

Рис. 2.5 – $T(x)$ при $F_0 = 0$



3 Ответы на контрольные вопросы

3.1 Какие способы тестирования программы можно предложить?

Можно ввести тепловой поток F_0 меньше нуля, что будет означать движение съёма тепла с левого торца. Тогда температура должна увеличиваться.

Так же тепловой поток F_0 можно установить в 0. Тогда съём тепла не будет происходить, и стержень останется при температуре окружающей среды.

Ещё один способ тестирования — увеличить коэффициент теплоотдачи. Так как стержень при том же тепловом потоке отдаёт больше тепла, скорость снижения температуры увеличится

3.2 Получите простейший разностный аналог нелинейного краевого условия при $x = l$,

$$-k(l)\frac{dT}{dx} = \alpha_N(T(l) - T_0) + \varphi(T)$$

где $\varphi(T)$ — заданная функция. Производную аппроксимируйте односторонней разностью

Построим разностную схему методом разностной аппроксимации на равномерной сетке с шагом h. Разностный аналог:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T(x+h) - T(x)}{h}$$

Тогда при $x = l$:

$$-k_l\frac{T_l - T_{l-1}}{h} = \alpha_N(T_l - T_0) + \varphi(T_l)$$

где $T_l = T(l)$, $k_l = k(l)$ и т.д. Имеем:

$$-(k_l + \alpha_N \cdot h)T_l + k_l T_{l-1} = \varphi(T_l) \cdot h - \alpha_N T_0 \cdot h$$

3.3 Опишите алгоритм применения метода прогонки, если при $x = 0$ краевое линейное (как в настоящей работе), а при $x = l$, как в 3.2

$$\begin{cases} x = 0, \ -k(0)\dfrac{dT}{dx} = F_0 \\ x = l, \ -k(l)\dfrac{dT}{dx} = \alpha_N(T(l) - T_0) + \varphi(T) \end{cases}$$

Изменим направление прогонки: прогоночные коэффициенты определять справа налево, а функцию — слева направо. Такая прогонка называется левой. Основная прогоночная формула записывается:

$$y_n = \varepsilon_{n-1}y_{n-1} + \eta_{n-1}$$

Принимая первого порядка точности аппроксимацию краевого условия при $x = 0$, имеем его разностный аналог

$$-k_0\frac{T_1 - T_0}{h} = F_0$$

$$-k_0T_1 + k_0T_0 = F_0h$$

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = 1 \\ \eta_0 = -\dfrac{F_0h}{k_0} \end{cases}$$

Аналогичная разностная аппроксимация правого краевого условия:

$$-(k_l + \alpha_N h)T_l + k_lT_{l-1} = \varphi(T_l)h - \alpha_N hT_0$$

$$-(k_l + \alpha_N h)T_l + k_l\frac{T_l - \eta_{l-1}}{\varepsilon_{l-1}} = \varphi(T_l)h - \alpha_N hT_0$$

Откуда получаем уравнение для определения T_0.

$$\varphi(T_l)h - (k_l + \alpha_N h - \frac{k_l}{\varepsilon_{l-1}})T_l = \frac{k_l\eta_{l-1}}{\varepsilon_{l-1}} - \alpha_N hT_0$$

3.4 Опишите алгоритм определения единственного значения сеточной функции y_p в одной заданной точке p. Использовать встречную прогонку, т.е. комбинацию правой и левой прогонок. Краевые условия линейные

Комбинируя левую и правую прогонки, получаем метод встречных прогонок.

Пусть $n = p$, где $0 < p < N$. Тогда в области $0 \leq n \leq p+1$ прогоночные коэффициенты α_n, β_n (правая прогонка):

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{C_n}{B_n - A_n\varepsilon_n}$$

$$\eta_{n+1} = \frac{D_n + A_n\eta_n}{B_n - A_n\varepsilon_n}$$
$$0 \leq n \leq p+1$$

А в области $p \leq n \leq N$ прогоночные коэффициенты ε_n, η_n (левая прогонка):

$$\xi_{n-1} = \frac{C_n}{B_n - A_n\xi_n}$$

$$\pi_{n-1} = \frac{A_n\pi_n + D_n}{B_n - A_n\xi_n}$$
$$p \leq n \leq N$$

Тогда

$$\begin{cases} y_n = \varepsilon_{n+1}y_{n+1} + \eta_{n+1} \\ y_{n+1} = \xi_n y_n + \pi_n \end{cases}$$

Подставив p вместо n, получим

$$\begin{cases} y_p = \varepsilon_{p+1}y_{p+1} + \eta_{p+1} \\ y_{p+1} = \xi_p y_p + \pi_p \end{cases}$$

$$y_p = \frac{\varepsilon_{p+1}\pi_p + \eta_{p+1}}{1 - \varepsilon_{p+1}\xi_p}$$