



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

Дисциплина Моделирование

Тема Программно-алгоритмическая реализация
моделей на основе дифференциальных
уравнений в частных производных
с краевыми условиями II и III рода

Студент Набиев Ф.М.

Группа ИУ7-63Б

Оценка (баллы) _____

Преподаватель Градов В.М.

Москва, 2020 г.

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы: Получение навыков разработки алгоритмов решения смешанной краевой задачи при реализации моделей, построенных на квазилинейном уравнении параболического типа.

1 Теоретическая часть

1.1 Исходные данные

Задана математическая модель. Уравнение для функции $T(x, t)$:

$$c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{2}{R} \alpha(x) T + \frac{2T_0}{R} \alpha(x) \quad (1.1)$$

Краевые условия

$$\begin{cases} t = 0, & T(x, 0) = T_0, \\ x = 0, & -k(T(0)) \frac{\partial T}{\partial x} = F_0, \\ x = l, & -k(T(l)) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_N(T(l) - T_0) \end{cases}$$

Функция $\alpha(x)$

$$\alpha(x) = \frac{c}{x - d}$$

где

$$c = -\alpha_0 d = \frac{\alpha_0 \alpha_N l}{\alpha_0 - \alpha_N}$$

$$d = \frac{\alpha_N l}{\alpha_N - \alpha_0}$$

Разностная схема

$$\begin{cases} \widehat{K}_0 \widehat{y}_0 + \widehat{M}_0 \widehat{y}_1 = \widehat{P}_0 \\ \widehat{A}_n \widehat{y}_{n-1} - \widehat{B}_n \widehat{y}_n + \widehat{D}_n \widehat{y}_{n+1} = -\widehat{F}_n, \quad 1 \leq n \leq N-1 \\ \widehat{K}_N \widehat{y}_N + \widehat{M}_{N-1} \widehat{y}_{N-1} = \widehat{P}_N \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \widehat{A}_n &= \widehat{\chi}_{n-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{h} \\ \widehat{B}_n &= \widehat{A}_n + \widehat{D}_n + \widehat{c}_n h + p_n h \tau \\ \widehat{D}_n &= \widehat{\chi}_{n+\frac{1}{2}} \frac{\tau}{h} \\ \widehat{F}_n &= f_n h \tau + \widehat{c}_n y_n h \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} F &= -k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \\ p(x) &= \frac{2}{R} \alpha(x) \\ f(x) &= \frac{2T_0}{R} \alpha(x) \end{aligned}$$

Разностная схема с краевым условием $x = 0$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h}{8} \widehat{c}_{\frac{1}{2}} + \frac{h}{4} \widehat{c}_0 + \widehat{\chi}_{\frac{1}{2}} \frac{\tau}{h} + \frac{\tau h}{8} p_{\frac{1}{2}} + \frac{\tau h}{4} p_0 \right) \widehat{y}_0 + \\ & + \left(\frac{h}{8} \widehat{c}_{\frac{1}{2}} - \widehat{\chi}_{\frac{1}{2}} \frac{\tau}{h} + \frac{\tau h}{8} p_{\frac{1}{2}} \right) \widehat{y}_1 = \\ & = \frac{h}{8} \widehat{c}_{\frac{1}{2}} (y_0 + y_1) + \frac{h}{4} \widehat{c}_0 y_0 + \widehat{F} \tau + \frac{\tau h}{4} (\widehat{f}_{\frac{1}{2}} + \widehat{f}_0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Получим разностный аналог краевого условия $x = l$. Проинтегрируем уравнение 1.1 на отрезке $[x_{N-\frac{1}{2}}, x_N]$ и на временном интервале $[t_m, t_{m+1}]$.

$$\begin{aligned} & \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} c(T) \frac{\partial T}{\partial t} dt = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} \frac{\partial F}{\partial x} dx - \\ & - \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x) T dt + \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(T) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} \widehat{c} (\widehat{T} - T) dx = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} (F_N - F_{N-\frac{1}{2}}) dt - \\ & - \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} p \widehat{T} \tau dx + \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} \widehat{f} \tau dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{h}{4} \left[\widehat{c}_N (\widehat{y}_N - y_N) + \widehat{c}_{N-\frac{1}{2}} (\widehat{y}_{N-\frac{1}{2}} - y_{N-\frac{1}{2}}) \right] = - (\widehat{F}_N - \widehat{F}_{N-\frac{1}{2}}) \tau - \\ & - (p_N \widehat{y}_N + p_{N-\frac{1}{2}} \widehat{y}_{N-\frac{1}{2}}) \tau \frac{h}{4} + (\widehat{f}_N + \widehat{f}_{N-\frac{1}{2}}) \tau \frac{h}{4} \end{aligned}$$

Учитывая

$$\widehat{y}_{N-\frac{1}{2}} = \frac{\widehat{y}_{N-1} + \widehat{y}_N}{2}$$

$$y_{N-\frac{1}{2}} = \frac{y_{N-1} + y_N}{2}$$

$$\widehat{F}_N = \alpha_N (\widehat{y}_N - T_0)$$

$$\widehat{F}_{N-\frac{1}{2}} = \widehat{\chi}_{N-\frac{1}{2}} \frac{\widehat{y}_{N-1} - \widehat{y}_N}{h}$$

Получим

$$\begin{aligned} & \widehat{y}_N \left(\frac{h}{4} \widehat{c}_N + \frac{h}{8} \widehat{c}_{N-\frac{1}{2}} + \alpha_N \tau + \widehat{\chi}_{N-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{h} + p_N \frac{\tau h}{4} + p_{N-\frac{1}{2}} \frac{\tau h}{8} \right) + \\ & + \widehat{y}_{N-1} \left(\frac{h}{8} \widehat{c}_{N-\frac{1}{2}} - \widehat{\chi}_{N-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{h} + p_{N-\frac{1}{2}} \frac{\tau h}{8} \right) = \\ & = \frac{h}{4} \widehat{c}_N y_N + \frac{h}{8} \widehat{c}_{N-\frac{1}{2}} y_{N-1} + \frac{h}{8} \widehat{c}_{N-\frac{1}{2}} y_N + T_0 \alpha_N \tau + (\widehat{f}_N + \widehat{f}_{N-\frac{1}{2}}) \frac{\tau h}{4} \end{aligned} \quad (1.4)$$

С помощью формул 1.2 и 1.3 получим коэффициенты $\widehat{K}_0, \widehat{M}_0, \widehat{P}_0$, а с помощью 1.2 и 1.4 — $\widehat{K}_N, \widehat{M}_{N-1}, \widehat{P}_N$.

Для решения системы 1.2 используется метод простых итераций. Обозначим текущую итерацию за s , тогда предыдущая — $s-1$. С данными обозначениями итерационный процесс организуется следующим образом

$$A_n^{s-1} y_{n+1}^s - B_n^{s-1} y_n^s + D_n^{s-1} y_{n-1}^s = -F_n^{s-1}$$

Решение данной схемы осуществляется методом прогонки. Итерации прекращаются при условии

$$\max \left| \frac{y_n^s - y_n^{s-1}}{y_n^s} \right| \leq \varepsilon, n = \overline{0, N}$$

Значения параметров для отладки

$$k(T) = a_1(b_1 + c_1 T^{m_1}), \frac{\text{Вт}}{\text{см} \cdot \text{К}},$$

$$c(T) = a_2 + b_2 T^{m_2} - \frac{c_2}{T^2}, \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3 \text{К}},$$

$$a_1 = 0.0134, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = 4.35 \cdot 10^{-4}, \quad m_1 = 1,$$

$$a_2 = 2.049, \quad b_2 = 0.563 \cdot 10^{-3}, \quad c_2 = 0.528 \cdot 10^5, \quad m_2 = 1$$

$$\alpha(x) = \frac{c}{x-d},$$

$$\alpha_0 = 0.05 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \text{К}},$$

$$\alpha_N = 0.01 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \text{К}},$$

$$l = 10 \text{ см},$$

$$T_0 = 300 \text{ К},$$

$$R = 0.5 \text{ см}$$

$$F(t) = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}.$$

2 Практическая часть

2.1 Реализация

Листинг 2.1 – Теплоёмкость стержня

```
1 def c(T):  
2     return a2 + b2 * T ** m2 - c2 / T ** 2
```

Листинг 2.2 – Коэффициенты теплопроводности материала стержня и теплоотдачи при обдуве

```
1 def k(T):  
2     return a1 * (b1 + c1 * T ** m1)  
3  
4  
5 def alpha(x):  
6     d = (alphaN * l) / (alphaN - alpha0)  
7     c = -alpha0 * d  
8     return c / (x - d)
```

Листинг 2.3 – Замены p и f

```
1 def p(x):  
2     return 2 * alpha(x) / R  
3  
4  
5 def f(x):  
6     return 2 * alpha(x) * T0 / R
```

Листинг 2.4 – Метод средних

```
1 def FAddHalf(x, h, F):  
2     return (F(x) + F(x + h)) / 2  
3  
4  
5 def FSubHalf(x, h, F):  
6     return (F(x) + F(x - h)) / 2
```

Листинг 2.5 – Параметры разностной схемы

```

1 def A(T):
2     return FSubHalf(T, t, k) * t / h
3
4
5 def D(T):
6     return FAddHalf(T, t, k) * t / h
7
8
9 def B(x, T):
10    return A(T) + D(T) + c(T) * h + p(x) * h * t
11
12
13 def F(x, T):
14    return f(x) * h * t + c(T) * T * h

```

Листинг 2.6 – Краевые условия

```

1 def bounds_left(prevT):
2     K0 = h / 8 * FAddHalf(
3         prevT[0], t, c) + h / 4 * c(prevT[0]) + \
4         FAddHalf(prevT[0], t, k) * t / h + \
5         t * h / 8 * p(h / 2) + t * h / 4 * p(0)
6
7     M0 = h / 8 * FAddHalf(
8         prevT[0], t, c) - FAddHalf(prevT[0], t, k) * \
9         t / h + t * h * p(h / 2) / 8
10
11     P0 = h / 8 * FAddHalf(
12         prevT[0], t, c) * (prevT[0] + prevT[1]) + \
13         h / 4 * c(prevT[0]) * prevT[0] + F0 * t + \
14         t * h / 8 * (3 * f(0) + f(h))
15
16     return K0, M0, P0
17
18
19 def bounds_right(prevT):
20     KN = h / 8 * FSubHalf(
21         prevT[-1], t, c) + h / 4 * c(prevT[-1]) + \
22         FSubHalf(prevT[-1], t, k) * t / h + t * \
23         alphaN + t * h / 8 * p(1 - h / 2) + t * h / 4 * p(1)
24
25     MN = h / 8 * FSubHalf(
26         prevT[-1], t, c) - FSubHalf(prevT[-1], t, k) * \
27         t / h + t * h * p(1 - h / 2) / 8
28
29     PN = h / 8 * FSubHalf(

```



```

30         prevT[-1], t, c) * (prevT[-1] + prevT[-2]) + h / \
31         4 * c(prevT[-1]) * prevT[-1] + t * alphaN * T0 + \
32         t * h / 4 * (f(1) + f(1 - h / 2))
33
34     return KN, MN, PN

```

Листинг 2.7 – Метод прогонки

```

1 def thomas(prevT):
2     K0, M0, P0 = bounds_left(prevT)
3     KN, MN, PN = bounds_right(prevT)
4
5     # Прямой ход
6     eps = [0, -M0 / K0]
7     eta = [0, P0 / K0]
8
9     x = h
10    n = 1
11    while (x + h < 1):
12        eps.append(D(prevT[n]) / (B(x, prevT[n]) - A(prevT[n]) * eps[n]))
13        eta.append((
14            F(x, prevT[n]) + A(prevT[n]) * eta[n]) /
15            (B(x, prevT[n]) - A(prevT[n]) * eps[n]))
16
17        n += 1
18        x += h
19
20    # Обратный ход
21    y = [0] * (n + 1)
22    y[n] = (PN - MN * eta[n]) / (KN + MN * eps[n])
23
24    for i in range(n - 1, -1, -1):
25        y[i] = eps[i + 1] * y[i + 1] + eta[i + 1]
26
27    return y

```

Листинг 2.8 – Метод простых итераций

```

1 def termtest1(T, newT):
2     max = fabs((T[0] - newT[0]) / newT[0])
3
4     for i, j in zip(T, newT):
5         d = fabs(i - j) / j
6
7         if d > max:

```

```

8         max = d
9
10    return max < 1
11
12
13 def termtest2(T, newT):
14     for i, j in zip(T, newT):
15         if fabs((i - j) / j) > 1e-2:
16             return True
17
18     return False
19
20
21 def fixed_point_iteration():
22     n = int(1 / h)
23     ti = 0
24
25     result = []
26     newT = [0] * (n + 1)
27     T = [T0] * (n + 1)
28
29     result.append(T)
30
31     while (True):
32         buf = T
33
34         while True:
35             newT = thomas(buf)
36             if termtest1(buf, newT):
37                 break
38             buf = newT
39
40         result.append(newT)
41         ti += 1
42
43         if (termtest2(T, newT) == False):
44             break
45
46         T = newT
47
48     return result, ti

```

2.2 Результаты работы

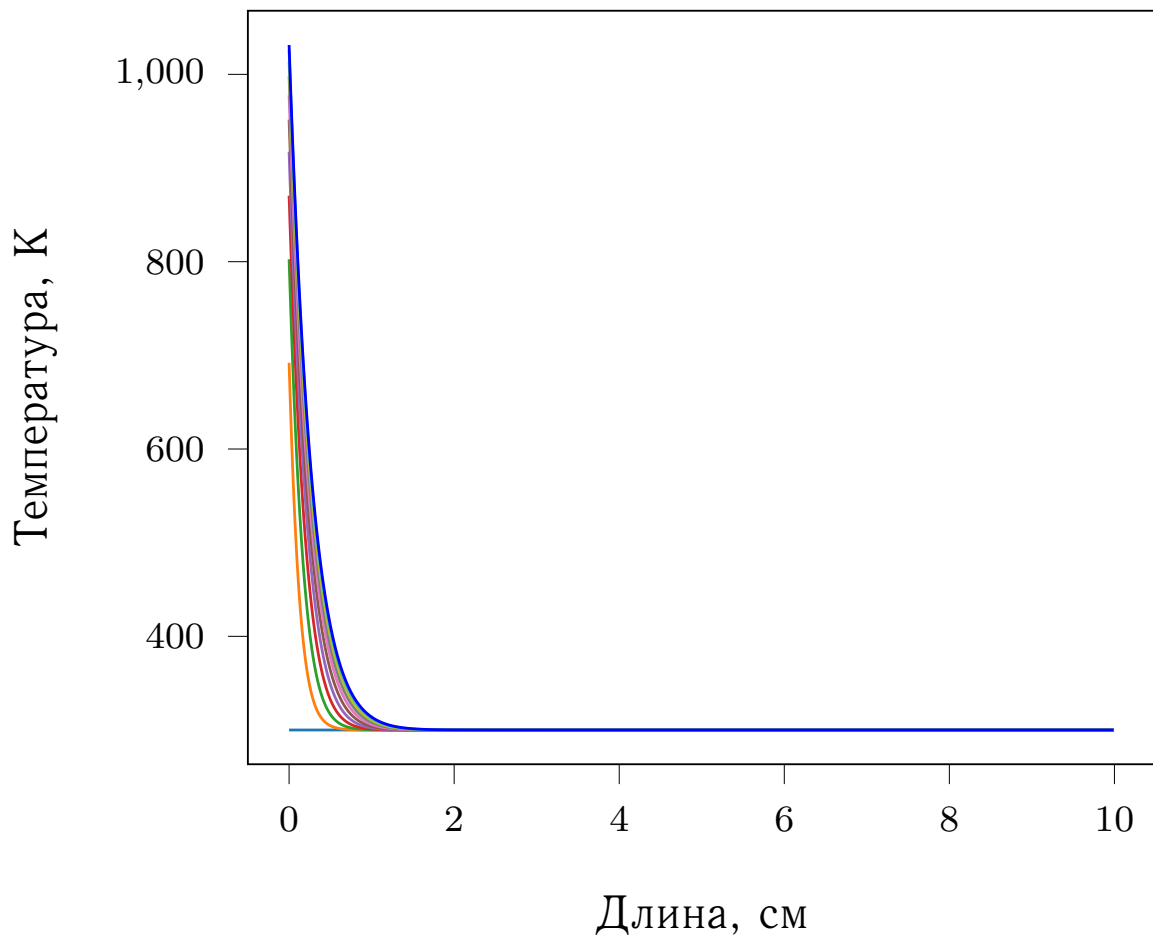
2.2.1 Представить разностный аналог краевого условия при $x = l$ и его краткий вывод интегро-интерполяционным методом

См. раздел 1.

2.2.2 График зависимости температуры от координаты при нескольких фиксированных значениях времени

На рисунке представлены графики зависимости температуры от координаты при нескольких фиксированных t . Последняя — синяя кривая соответствует установившемуся режиму, когда поле перестает меняться с точностью $1e-3$.

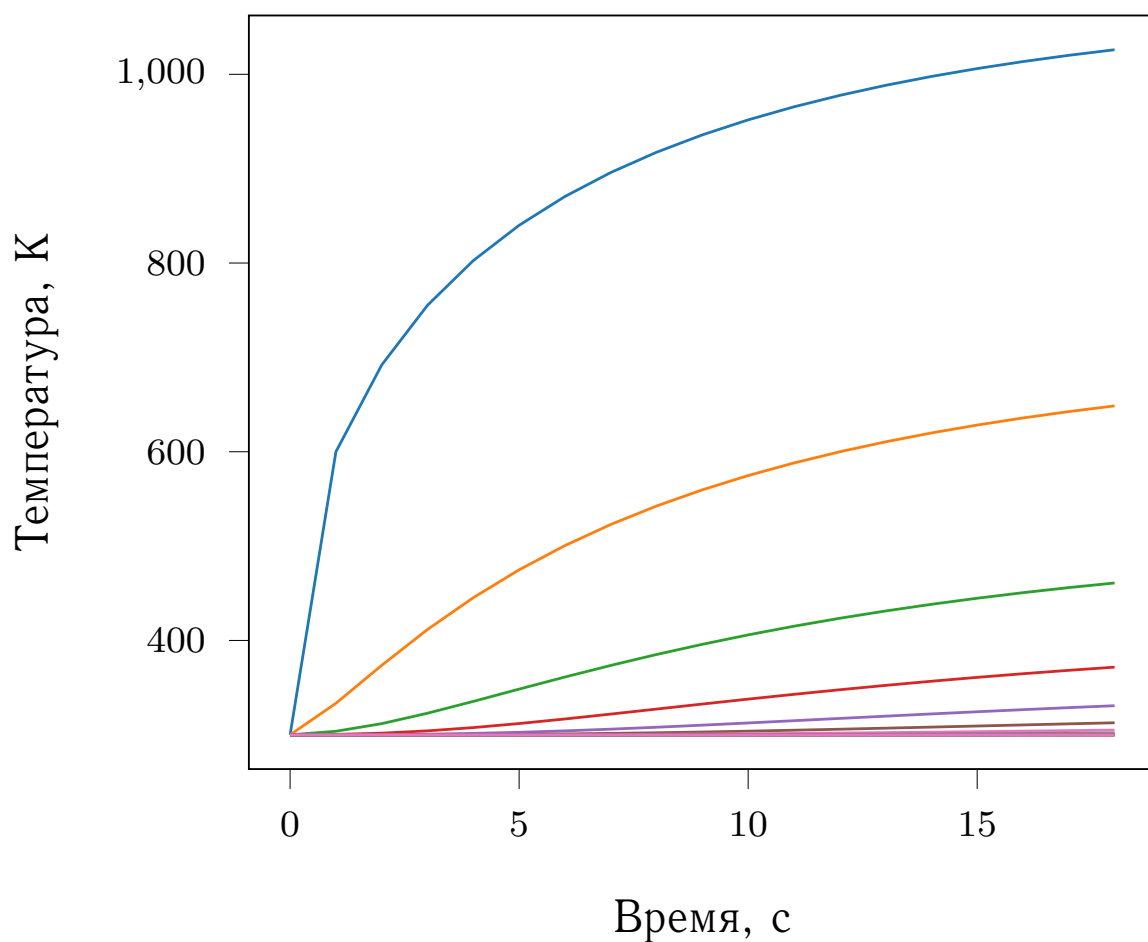
Рис. 2.1 – Зависимость температуры от координаты стержня



2.2.3 График зависимости температуры от времени при нескольких фиксированных значениях координаты

На рисунке представлены графики зависимости температуры от времени при фиксированных $x = 0, 0.2, 0.4, \dots, 3.2$.

Рис. 2.2 – Зависимость температуры от времени

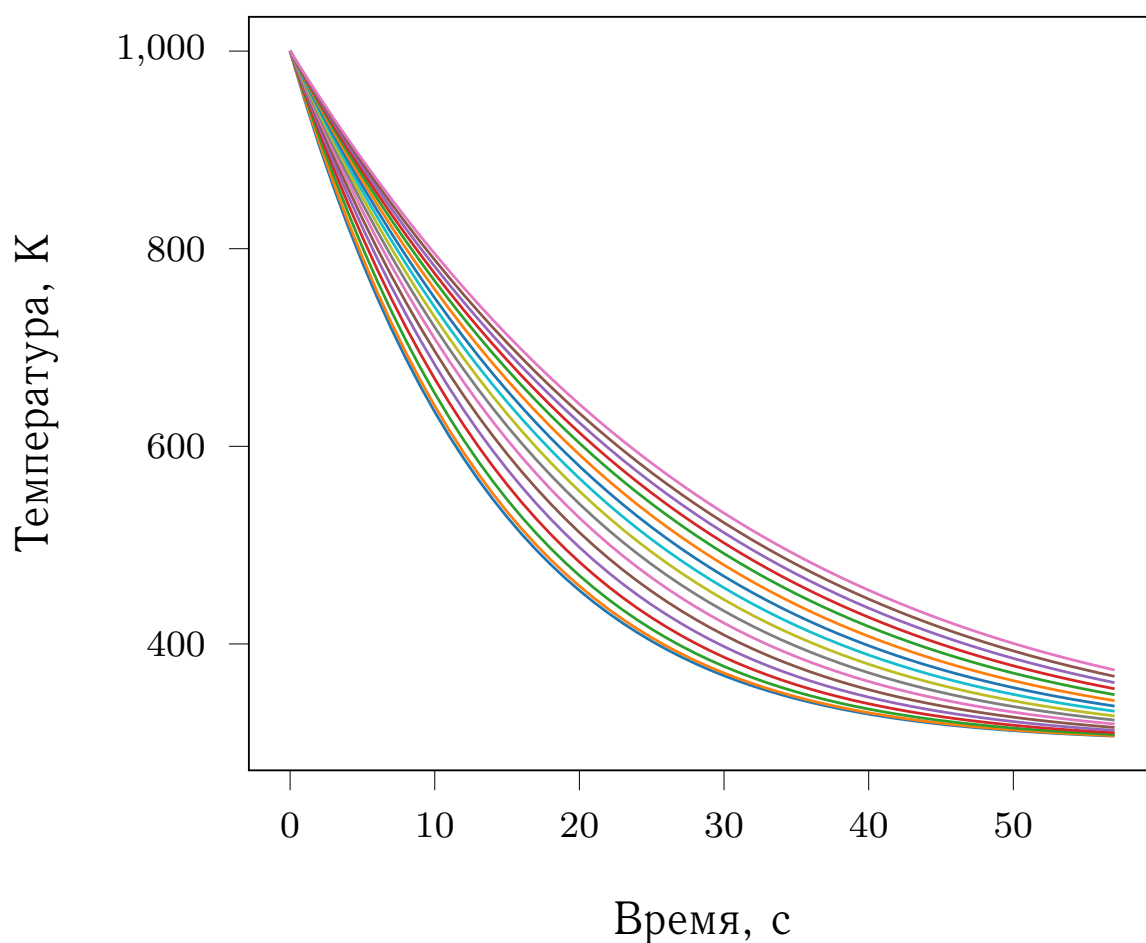


3 Ответы на контрольные вопросы

3.1 Приведите результаты тестирования программы (графики, общие соображения, качественный анализ). Учесть опыт выполнения лабораторной работы №3

Если после разогрева стержня положить поток равным 0, то будет происходить остывание, пока температура не выровняется по всей длине и не станет равной T_0 .

Рис. 3.1 – Зависимость температуры от времени



Если для коэффициента теплопроводности стержня поменять зависимость от T на зависимость от x как в третьей лабораторной работе, а теплоемкость стержня задать равной нулю, то график $T(x, t)$ из этой лабораторной работы (рисунок 3.2) будет совпадать с графиком $T(x)$ из прошлой лабораторной работы (рисунок 3.3).

Рис. 3.2 – График из этой лабораторной работы

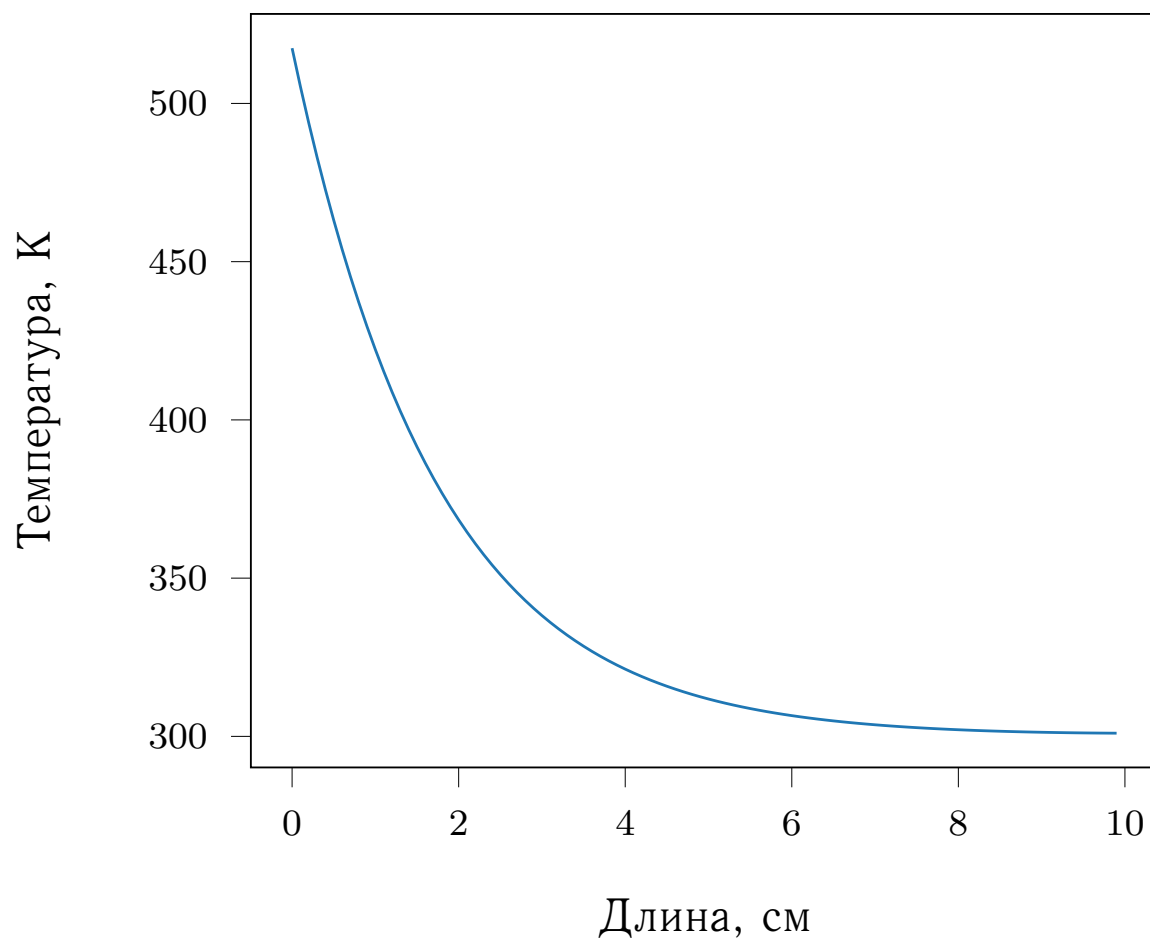
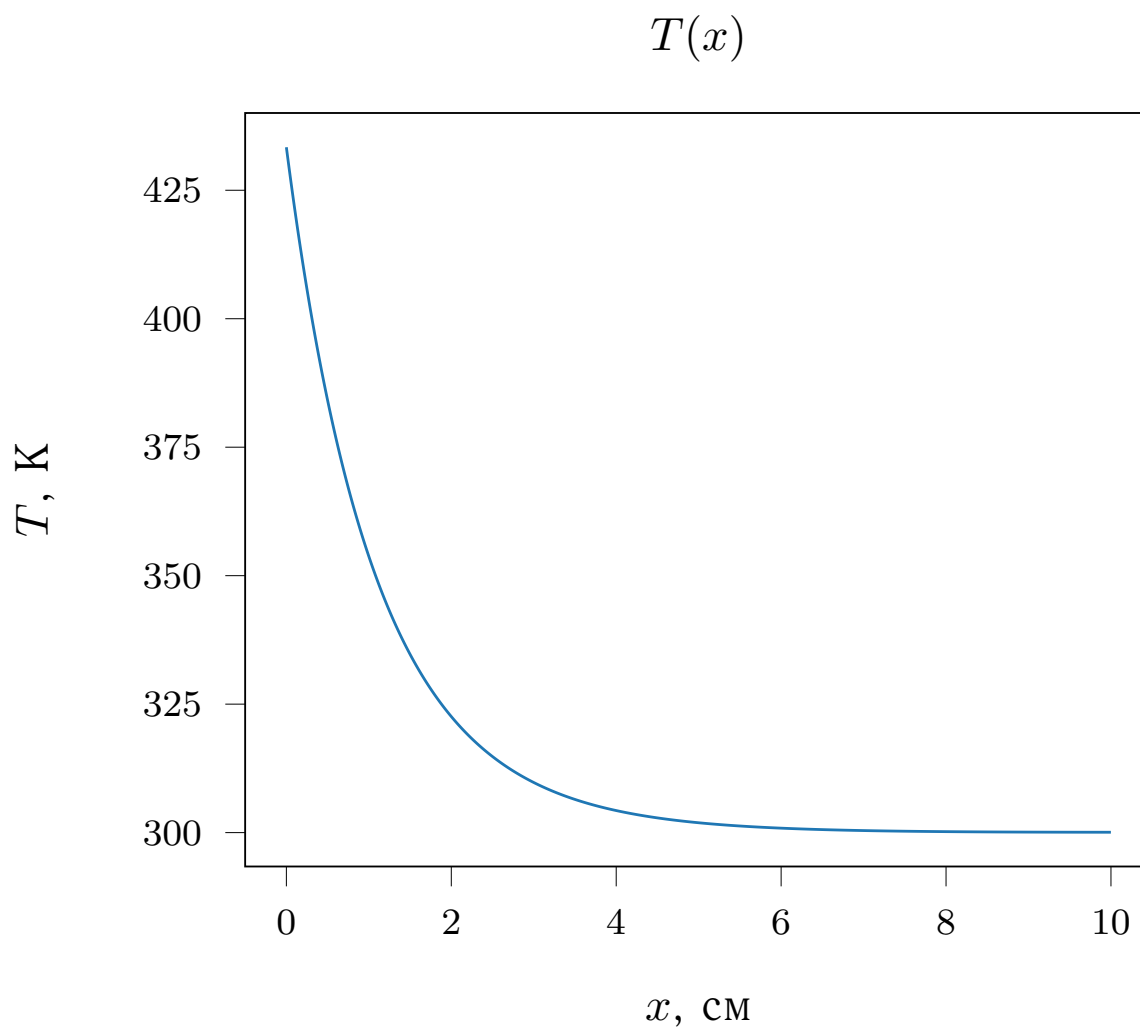


Рис. 3.3 – График из лабораторной работы №3



3.2 Выполните линеаризацию системы 1.2 по Ньютону, полагая для простоты, что все коэффициенты зависят только от одной переменной y_n . Приведите линеаризованный вариант уравнения и опишите алгоритм его решения.

$$\widehat{A}_n \widehat{y}_{n-1} - \widehat{B}_n \widehat{y}_n + \widehat{D}_n \widehat{y}_{n+1} = -\widehat{F}_n$$

Все коэффициенты зависят только от одной переменной, тогда

$$\begin{aligned}
& \left(\widehat{A}_n \widehat{y}_{n-1} - \widehat{B}_n \widehat{y}_n + \widehat{D}_n \widehat{y}_{n+1} + \widehat{F}_n \right) \Big|_{s-1} + \widehat{A}_n^{s-1} \Delta \widehat{y}_{n-1}^s + \\
& + \left(\frac{\partial \widehat{A}_n}{\partial \widehat{y}_n} \widehat{y}_{n-1} - \frac{\partial \widehat{B}_n}{\partial \widehat{y}_n} \widehat{y}_n - \widehat{B}_n + \frac{\partial \widehat{D}_n}{\partial \widehat{y}_n} \widehat{y}_{n+1} + \frac{\partial \widehat{F}_n}{\partial \widehat{y}_n} \right) \Big|_{s-1} \Delta \widehat{y}_n^s + \\
& + \widehat{D}_n^{s-1} \Delta \widehat{y}_{n+1}^s = 0
\end{aligned}$$

Каноничный вид

$$A_n \Delta \widehat{y}_{n-1}^s - B_n \Delta \widehat{y}_n^s + D_n \Delta \widehat{y}_{n+1}^s = -F_n$$

Тогда получаем, что

$$\begin{aligned}
A_n &= \widehat{A}_n^{s-1} \\
B_n &= \left(-\frac{\partial \widehat{A}_n}{\partial \widehat{y}_n} \widehat{y}_{n-1} + \frac{\partial \widehat{B}_n}{\partial \widehat{y}_n} \widehat{y}_n + \widehat{B}_n - \frac{\partial \widehat{D}_n}{\partial \widehat{y}_n} \widehat{y}_{n+1} - \frac{\partial \widehat{F}_n}{\partial \widehat{y}_n} \right) \Big|_{s-1} \\
D_n &= \widehat{D}_n^{s-1} \\
F_n &= \left(\widehat{A}_n \widehat{y}_{n-1} - \widehat{B}_n \widehat{y}_n + \widehat{D}_n \widehat{y}_{n+1} + \widehat{F}_n \right) \Big|_{s-1}
\end{aligned}$$

Краевое условие для y_0

$$\widehat{K}_0 \widehat{y}_0 + \widehat{M}_0 \widehat{y}_1 = \widehat{P}_0$$

Тогда

$$\left(\widehat{K}_0 \widehat{y}_0 + \widehat{M}_0 \widehat{y}_1 - \widehat{P}_0 \right) \Big|_{s-1} + \widehat{K}_0^{s-1} \Delta \widehat{y}_0^s + \widehat{M}_0^{s-1} \Delta \widehat{y}_1^s = 0$$

Каноничный вид

$$K_0 \Delta \widehat{y}_0^s + M_0 \Delta \widehat{y}_1^s = P_0$$

Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} K_0 &= \widehat{K}_0^{s-1} \\ M_0 &= \widehat{M}_0^{s-1} \\ P_0 &= \left(-\widehat{K}_0 \widehat{y}_0 - \widehat{M}_0 \widehat{y}_1 + \widehat{P}_0 \right) \Big|_{s-1} \end{aligned}$$

Краевое условие для y_N

$$\widehat{K}_N \widehat{y}_N + \widehat{M}_{N-1} \widehat{y}_{N-1} = \widehat{P}_N$$

Тогда

$$\left(\widehat{K}_N \widehat{y}_N + \widehat{M}_{N-1} \widehat{y}_{N-1} - \widehat{P}_N \right) \Big|_{s-1} + \widehat{K}_N^{s-1} \Delta \widehat{y}_N^s + \widehat{M}_{N-1}^s \Delta \widehat{y}_{N-1}^s = 0$$

Каноничный вид

$$K_N \Delta \widehat{y}_N^s + M_{N-1} \Delta \widehat{y}_{N-1}^s = P_N$$

Тогда получается, что

$$\begin{aligned} K_N &= \widehat{K}_N^{s-1} \\ M_{N-1} &= \widehat{M}_{N-1}^s \\ P_N &= \left(-\widehat{K}_N \widehat{y}_N - \widehat{M}_{N-1} \widehat{y}_{N-1} + \widehat{P}_N \right) \Big|_{s-1} \end{aligned}$$

Система

$$\begin{cases} K_0 \Delta \widehat{y}_0^s + M_0 \Delta \widehat{y}_1^s = P_0 \\ A_n \Delta \widehat{y}_{n-1}^s - B_n \Delta \widehat{y}_n^s + D_n \Delta \widehat{y}_{n+1}^s = -F_n \\ K_N \Delta \widehat{y}_N^s + M_{N-1} \Delta \widehat{y}_{N-1}^s = P_N \end{cases}$$

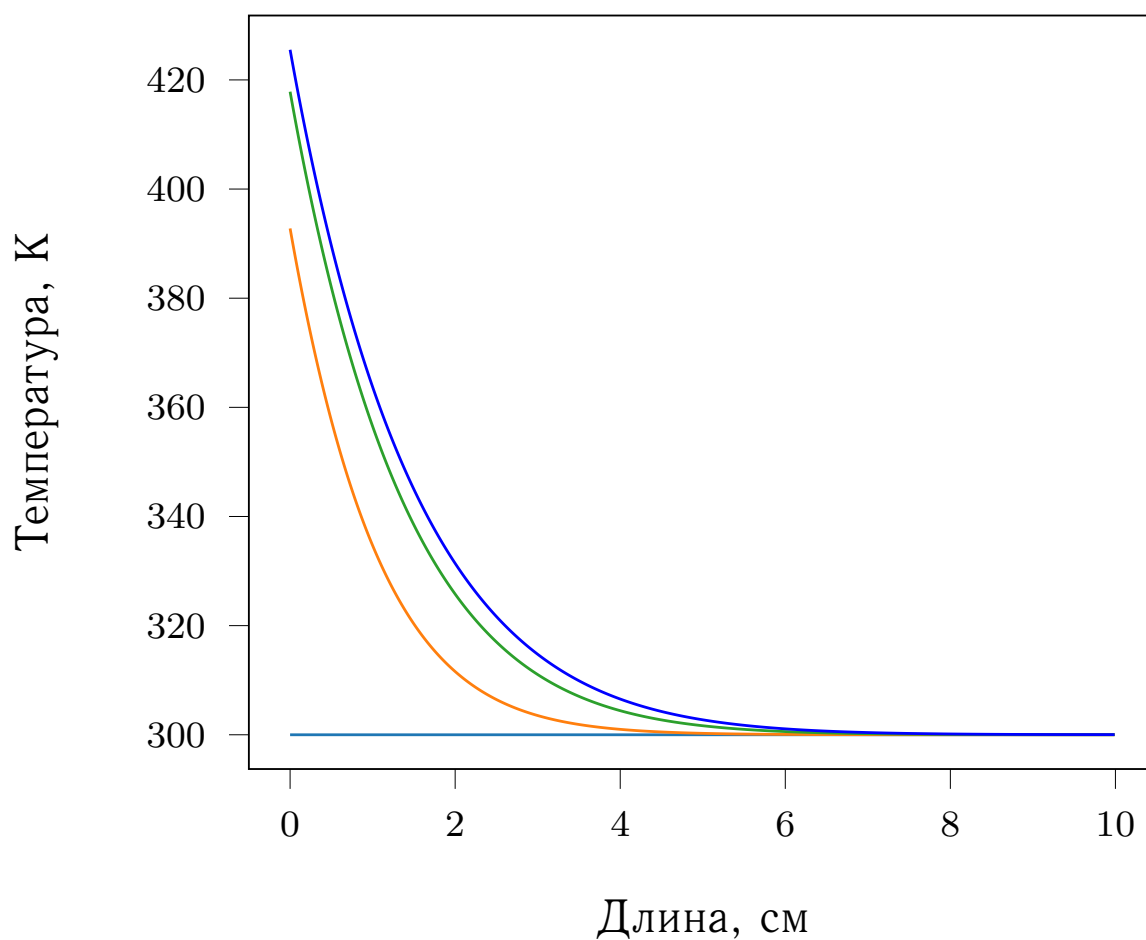
Решается методом прогонки, в результате находятся все $\Delta \widehat{y}_n^s$, после чего определяются значения искомой функции в узлах $\widehat{y}_n^s = \widehat{y}_n^{s-1} + \Delta \widehat{y}_n^s$. Итерационный процесс заканчивается при выполнении условия $\max \left| \frac{\Delta \widehat{y}_n^s}{\widehat{y}_n^s} \right| \leq \varepsilon$.

4 Дополнения к работе

4.1 Рис. 2.1 получите при $a_1 = 0.5$. Приведите не более 3–4 кривых, последнюю кривую, установившийся режим, обязательно

Последняя, синяя, кривая соответствует установившемуся режиму, когда поле перестает меняться с точностью $1e-3$.

Рис. 4.1 – Зависимость температуры от координаты стержня



4.2 Линеаризуйте краевое условие в 3.2, полагая, что K_0 , M_0 и P_0 зависят от y_0 и y_1

Краевое условие для y_0

$$\widehat{K}_0 \widehat{y}_0 + \widehat{M}_0 \widehat{y}_1 = \widehat{P}_0$$

где K_0 , M_0 , P_0 зависят от y_0 и y_1 .

Тогда

$$\begin{aligned}
0 = & \left(\widehat{K}_0 \widehat{y}_0 + \widehat{M}_0 \widehat{y}_1 - \widehat{P}_0 \right) \Big|_{s-1} + \\
& + \left(\widehat{K}_0 + \frac{\partial \widehat{K}_0}{\partial \widehat{y}_0} \widehat{y}_0 + \frac{\partial \widehat{M}_0}{\partial \widehat{y}_0} \widehat{y}_1 - \frac{\partial \widehat{P}_0}{\partial \widehat{y}_0} \right) \Big|_{s-1} \Delta \widehat{y}_0^s + \\
& + \left(\frac{\partial \widehat{K}_0}{\partial \widehat{y}_1} \widehat{y}_0 + \frac{\partial \widehat{M}_0}{\partial \widehat{y}_1} \widehat{y}_1 + \widehat{M}_0 - \frac{\partial \widehat{P}_0}{\partial \widehat{y}_1} \right) \Big|_{s-1} \Delta \widehat{y}_1^s
\end{aligned}$$

Каноничный вид

$$K_0 \Delta \widehat{y}_0^s + M_0 \Delta \widehat{y}_1^s = P_0$$

Тогда получаем, что

$$\begin{aligned}
K_0 &= \left(\widehat{K}_0 + \frac{\partial \widehat{K}_0}{\partial \widehat{y}_0} \widehat{y}_0 + \frac{\partial \widehat{M}_0}{\partial \widehat{y}_0} \widehat{y}_1 - \frac{\partial \widehat{P}_0}{\partial \widehat{y}_0} \right) \Big|_{s-1} \\
M_0 &= \left(\frac{\partial \widehat{K}_0}{\partial \widehat{y}_1} \widehat{y}_0 + \frac{\partial \widehat{M}_0}{\partial \widehat{y}_1} \widehat{y}_1 + \widehat{M}_0 - \frac{\partial \widehat{P}_0}{\partial \widehat{y}_1} \right) \Big|_{s-1} \\
P_0 &= \left(-\widehat{K}_0 \widehat{y}_0 - \widehat{M}_0 \widehat{y}_1 + \widehat{P}_0 \right) \Big|_{s-1}
\end{aligned}$$