Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа №2

Дисциплина Математическая статистика

Тема Интервальные оценки

Студент Набиев Ф.М.

Группа ИУ7-63Б

Преподаватель Власов П.А.

Москва, 2020 г.

1 Теоретическая часть

Пусть X — случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до вектора $\vec{\theta} = \big(\theta_1, \ldots, \theta_r\big)$ неизвестных параметров. Для упрощения рассуждений будем считать, что $r = 1$ и

$$\overrightarrow{\theta} = \big(\theta_1\big) = \big(\theta\big) \in \mathbb{R}^1$$

то есть закон распределения случайной величины X зависит от одного скалярного неизвестного параметра.

Пусть $\overrightarrow{X}$ — случайная выборка объема n из генеральной совокупности X. Тогда $\vec{x}$ — любая реализация случайной выборки $\overrightarrow{X}$.

Интервальной оценкой с коэффициентом доверия γ (γ-доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}\big(\overrightarrow{X}\big)$ и $\overline{\theta}\big(\overrightarrow{X}\big)$ таких, что

$$P\Big\{\underline{\theta}\big(\overrightarrow{X}\big) < \theta < \overline{\theta}\big(\overrightarrow{X}\big)\Big\} = \gamma$$

Доверительным интервалом с коэффициентом доверия γ (γ-доверительным интервалом) параметра θ называют интервал $\big(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x})\big)$, отвечающий выборочным значениям статистик $\underline{\theta}\big(\overrightarrow{X}\big)$ и $\overline{\theta}\big(\overrightarrow{X}\big)$.

■

Пусть генеральная совокупность X распределена по нормальному закону с параметрами μ и σ^2.

Тогда оценка математического ожидания

$$\underline{\mu}\big(\overrightarrow{X}\big) = \overline{X} - \frac{S\big(\overrightarrow{X}\big)t_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{\mu}\big(\overrightarrow{X}\big) = \overline{X} + \frac{S\big(\overrightarrow{X}\big)t_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$$

где

- $\overline{X}$ – оценка математического ожидания;
- n – число опытов;
- $S(\overrightarrow{X})$ – точечная оценка дисперсии случайной выборки $\overrightarrow{X}$;
- $t_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $1-\alpha$ для распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы;
- $\alpha = \frac{1-\gamma}{2}$.

Оценка для дисперсии

$$\underline{\sigma^2}(\overrightarrow{X}) = \frac{S(\overrightarrow{X})(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha}}$$

$$\overline{\sigma^2}(\overrightarrow{X}) = \frac{S(\overrightarrow{X})(n-1)}{\chi^2_{\alpha}}$$

где

- n — объем выборки;
- $S(\overrightarrow{X})$ — точечная оценка дисперсии случайной выборки $\overrightarrow{X}$;
- χ^2_α — квантиль уровня α для распределения χ^2 с $n-1$ степенями свободы;
- $\alpha = \frac{1-\gamma}{2}$.

■

2 Практическая часть

В листинге 2.1 приведён текст программы.

Листинг 2.1 – Текст программы

```
function lab2()
    X = [
        -13.40, -12.63, -13.65, -14.23, -13.39, -12.36, ...
        -13.52, -13.44, -13.87, -11.82, -12.01, -11.40, ...
        -13.02, -12.61, -13.06, -13.75, -13.55, -14.01, ...
        -11.75, -12.95, -12.59, -13.60, -12.76, -11.05, ...
        -13.15, -13.61, -11.73, -13.00, -12.66, -12.67, ...
        -12.60, -12.47, -13.52, -12.61, -11.93, -13.11, ...
        -13.22, -11.87, -13.44, -12.70, -11.78, -12.30, ...
        -12.89, -13.29, -12.48, -10.44, -12.55, -12.64, ...
        -12.03, -14.60, -14.56, -13.30, -11.32, -12.24, ...
        -11.17, -12.50, -13.25, -12.55, -12.85, -12.67, ...
        -12.41, -12.58, -12.10, -13.54, -12.69, -12.87, ...
        -12.71, -12.77, -13.30, -12.74, -12.73, -12.64, ...
        -12.18, -11.20, -12.40, -13.78, -13.71, -10.74, ...
        -11.89, -13.20, -11.31, -14.26, -10.38, -12.88, ...
        -11.39, -11.35, -12.55, -12.84, -10.25, -12.40, ...
        -14.01, -11.47, -13.14, -12.69, -11.92, -12.86, ...
        -13.06, -12.57, -13.63, -12.34, -12.84, -14.03, ...
        -13.34, -11.64, -13.58, -10.44, -11.37, -11.01, ...
        -13.80, -13.27, -12.32, -10.69, -12.92, -13.29, ...
        -12.58, -13.98, -11.46, -11.82, -12.33, -11.47, ...
    ];

    % Уровень доверия
    gamma = 0.9;

    % Объём выборки
    n = length(X);
    % Оценка мат. ожидания
    M = mean(X);
    % Оценка дисперсии
    D = var(X);

    % Границы доверительного интервала для мат. ожидания
    [M_lo, M_hi] = mean_bounds(X, gamma);
    % Границы доверительного интервала для дисперсии
    [D_lo, D_hi] = var_bounds(X, gamma);

    fprintf('mean     = %9.5f\n', M);
    fprintf('variance = %9.5f\n', D);

    fprintf('mean     in (%9.5f, %9.5f)\n', M_lo, M_hi);
    fprintf('variance in (%9.5f, %9.5f)\n', D_lo, D_hi);
```

```
% Создание массивов точечных оценок и границ дов. интервалов
M_pe    = zeros(1, n);
D_pe    = zeros(1, n);
M_pe_lo = zeros(1, n);
M_pe_hi = zeros(1, n);
D_pe_lo = zeros(1, n);
D_pe_hi = zeros(1, n);

% Заполнение созданных массивов
for i = 1 : n
    M_pe(i) = mean(X(1:i));
    D_pe(i) = var(X(1:i));

    [M_pe_lo(i), M_pe_hi(i)] = mean_bounds(X(1:i), gamma);
    [D_pe_lo(i), D_pe_hi(i)] = var_bounds(X(1:i), gamma);
end

% Построение графиков
subplot(2, 1, 1);
M_seq = (zeros(1, n) + M);
plot(10 : n, [M_seq(10:end)', ...
              M_pe(10:end)', ...
              M_pe_lo(10:end)', ...
              M_pe_hi(10:end)']);
xlim([10 n])
xlabel('n');
ylabel('y');
legend('$\hat \mu(\vec x_N)$', '$\hat \mu(\vec x_n)$', ...
       '$\underline{\mu}(\vec x_n)$', ...
       '$\overline{\mu}(\vec x_n)$', ...
       'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14, ...
       'Location', 'southeast');

subplot(2, 1, 2);
D_seq = (zeros(1, n) + D);
plot(10 : n, [D_seq(10:end)', ...
              D_pe(10:end)', ...
              D_pe_lo(10:end)', ...
              D_pe_hi(10:end)']);
xlim([10 n])
xlabel('n');
xlabel('n');
ylabel('z');
legend('$\hat S^2(\vec x_N)$', '$\hat S^2(\vec x_n)$', ...
       '$\underline{\sigma}^2(\vec x_n)$', ...
       '$\overline{\sigma}^2(\vec x_n)$', ...
       'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
```

```
end

% Границы доверительного интервала для мат. ожидания
function [lo, hi] = mean_bounds(X, gamma)
    n = length(X);
    M = mean(X);
    S = sqrt(var(X));

    alpha = (1 + gamma) / 2;
    interval = S / sqrt(n) * tinv(alpha, n - 1);

    lo = M - interval;
    hi = M + interval;
end

% Границы доверительного интервала для дисперсии
function [lo, hi] = var_bounds(X, gamma)
    n = length(X);
    D = var(X);

    lo = (n - 1) * D / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
    hi = (n - 1) * D / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);
end
```

В листинге 2.2 приведён результат выполнения описанной программы.

Листинг 2.2 – Результат программы

```
mean     = -12.61483
variance =   0.86533
mean     in (-12.75561, -12.47406)
variance in (  0.70792,   1.08610)
```

Рис. 2.1 – Графики оценки математического ожидания

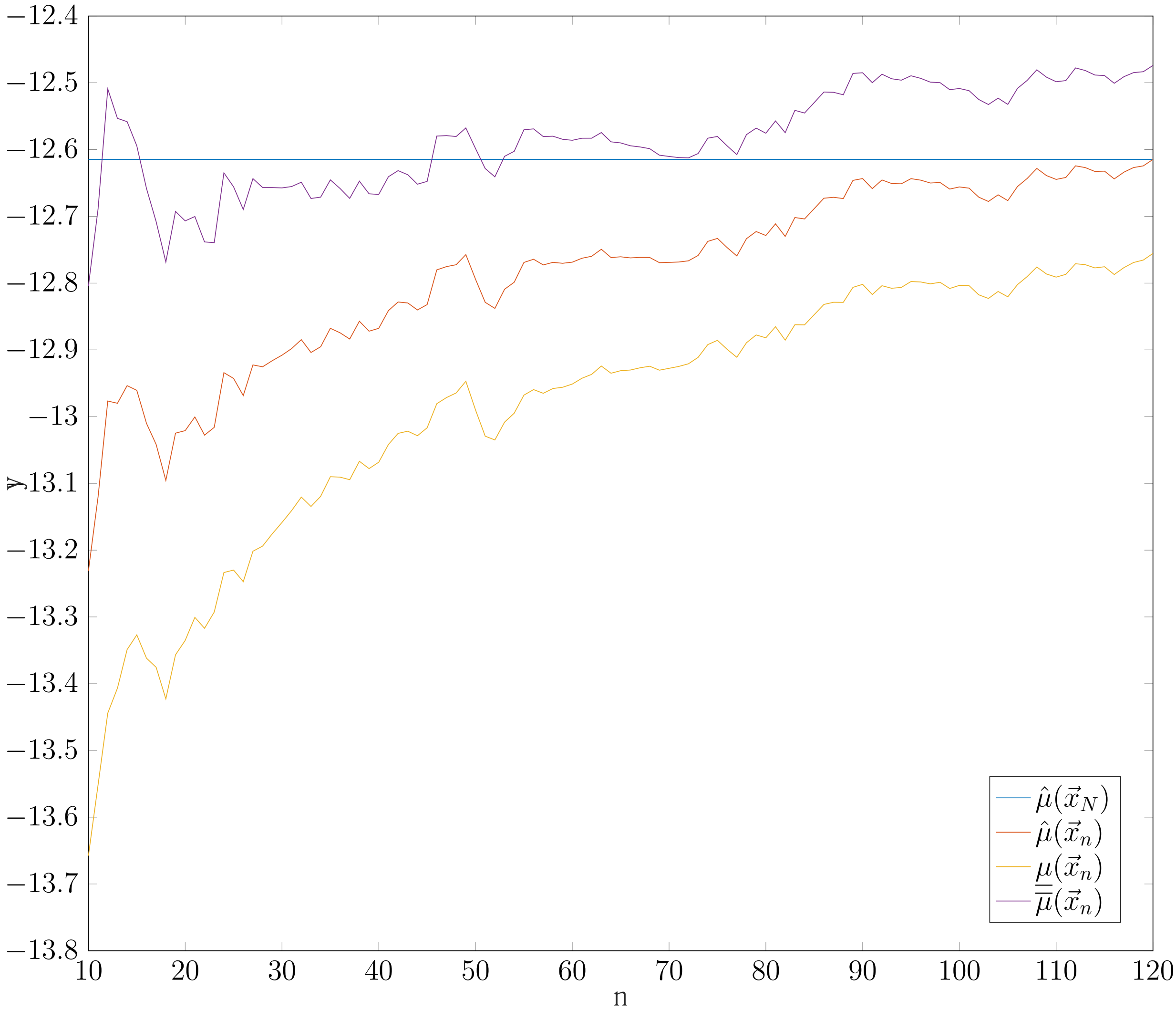

Рис. 2.2 – Графики оценки дисперсии