



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

---

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

---

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

Дисциплина	Математическая статистика
Тема	Интервальные оценки
Студент	Набиев Ф.М.
Группа	ИУ7-63Б
Преподаватель	Власов П.А.

Москва, 2020 г.

## 1 Теоретическая часть

Пусть  $X$  — случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до вектора  $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$  неизвестных параметров. Для упрощения рассуждений будем считать, что  $r = 1$  и

$$\vec{\theta} = (\theta_1) = (\theta) \in \mathbb{R}^1$$

то есть закон распределения случайной величины  $X$  зависит от одного скалярного неизвестного параметра.

Пусть  $\vec{X}$  — случайная выборка объема  $n$  из генеральной совокупности  $X$ . Тогда  $\vec{x}$  — любая реализация случайной выборки  $\vec{X}$ .

Интервальной оценкой с коэффициентом доверия  $\gamma$  ( $\gamma$ -доверительной интервальной оценкой) параметра  $\theta$  называют пару статистик  $\underline{\theta}(\vec{X})$  и  $\bar{\theta}(\vec{X})$  таких, что

$$P\left\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \bar{\theta}(\vec{X})\right\} = \gamma$$

Доверительным интервалом с коэффициентом доверия  $\gamma$  ( $\gamma$ -доверительным интервалом) параметра  $\theta$  называют интервал  $(\underline{\theta}(\vec{x}), \bar{\theta}(\vec{x}))$ , отвечающий выборочным значениям статистик  $\underline{\theta}(\vec{X})$  и  $\bar{\theta}(\vec{X})$ .

■

Пусть генеральная совокупность  $X$  распределена по нормальному закону с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ .

Тогда оценка математического ожидания

$$\underline{\mu}(\vec{X}) = \bar{X} - \frac{S(\vec{X})t_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{\mu}(\vec{X}) = \bar{X} + \frac{S(\vec{X})t_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$$

где

- $\overline{X}$  – оценка математического ожидания;
- $n$  – число опытов;
- $S(\overrightarrow{X})$  – точечная оценка дисперсии случайной выборки  $\overrightarrow{X}$ ;
- $t_{1-\alpha}$  – квантиль уровня  $1 - \alpha$  для распределения Стьюдента с  $n - 1$  степенями свободы;
- $\alpha = \frac{1-\gamma}{2}$ .

Оценка для дисперсии

$$\underline{\sigma^2}(\overrightarrow{X}) = \frac{S(\overrightarrow{X})(n-1)}{\chi_{1-\alpha}^2}$$

$$\overline{\sigma^2}(\overrightarrow{X}) = \frac{S(\overrightarrow{X})(n-1)}{\chi_{\alpha}^2}$$

где

- $n$  – объем выборки;
- $S(\overrightarrow{X})$  – точечная оценка дисперсии случайной выборки  $\overrightarrow{X}$ ;
- $\chi_{\alpha}^2$  – квантиль уровня  $\alpha$  для распределения  $\chi^2$  с  $n - 1$  степенями свободы;
- $\alpha = \frac{1-\gamma}{2}$ .



## 2 Практическая часть

В листинге 2.1 приведён текст программы.

Листинг 2.1 – Текст программы

```
1 function lab2()
2     X = [
3         -13.40, -12.63, -13.65, -14.23, -13.39, -12.36, ...
4         -13.52, -13.44, -13.87, -11.82, -12.01, -11.40, ...
5         -13.02, -12.61, -13.06, -13.75, -13.55, -14.01, ...
6         -11.75, -12.95, -12.59, -13.60, -12.76, -11.05, ...
7         -13.15, -13.61, -11.73, -13.00, -12.66, -12.67, ...
8         -12.60, -12.47, -13.52, -12.61, -11.93, -13.11, ...
9         -13.22, -11.87, -13.44, -12.70, -11.78, -12.30, ...
10        -12.89, -13.29, -12.48, -10.44, -12.55, -12.64, ...
11        -12.03, -14.60, -14.56, -13.30, -11.32, -12.24, ...
12        -11.17, -12.50, -13.25, -12.55, -12.85, -12.67, ...
13        -12.41, -12.58, -12.10, -13.54, -12.69, -12.87, ...
14        -12.71, -12.77, -13.30, -12.74, -12.73, -12.64, ...
15        -12.18, -11.20, -12.40, -13.78, -13.71, -10.74, ...
16        -11.89, -13.20, -11.31, -14.26, -10.38, -12.88, ...
17        -11.39, -11.35, -12.55, -12.84, -10.25, -12.40, ...
18        -14.01, -11.47, -13.14, -12.69, -11.92, -12.86, ...
19        -13.06, -12.57, -13.63, -12.34, -12.84, -14.03, ...
20        -13.34, -11.64, -13.58, -10.44, -11.37, -11.01, ...
21        -13.80, -13.27, -12.32, -10.69, -12.92, -13.29, ...
22        -12.58, -13.98, -11.46, -11.82, -12.33, -11.47, ...
23    ];
24
25    % Уровень доверия
26    gamma = 0.9;
27
28    % Объём выборки
29    n = length(X);
30    % Оценка мат. ожидания
31    M = mean(X);
32    % Оценка дисперсии
33    D = var(X);
34
35    % Границы доверительного интервала для мат. ожидания
36    [M_lo, M_hi] = mean_bounds(X, gamma);
37    % Границы доверительного интервала для дисперсии
38    [D_lo, D_hi] = var_bounds(X, gamma);
39
40    fprintf('mean      = %9.5f\n', M);
41    fprintf('variance = %9.5f\n', D);
42
43    fprintf('mean      in (%9.5f, %9.5f)\n', M_lo, M_hi);
44    fprintf('variance in (%9.5f, %9.5f)\n', D_lo, D_hi);
```

```

45
46 % Создание массивов точечных оценок и границ дов. интервалов
47 M_pe = zeros(1, n);
48 D_pe = zeros(1, n);
49 M_pe_lo = zeros(1, n);
50 M_pe_hi = zeros(1, n);
51 D_pe_lo = zeros(1, n);
52 D_pe_hi = zeros(1, n);
53
54 % Заполнение созданных массивов
55 for i = 1 : n
56     M_pe(i) = mean(X(1:i));
57     D_pe(i) = var(X(1:i));
58
59     [M_pe_lo(i), M_pe_hi(i)] = mean_bounds(X(1:i), gamma);
60     [D_pe_lo(i), D_pe_hi(i)] = var_bounds(X(1:i), gamma);
61 end
62
63 % Построение графиков
64 subplot(2, 1, 1);
65 plot(1 : n, [(zeros(1, n) + M) ', M_pe', M_pe_lo', M_pe_hi']);
66 xlabel('n');
67 ylabel('y');
68 legend('$\hat{\mu}(\vec{x}_N)$', '$\hat{\mu}(\vec{x}_n)$', ...
69     '$\underline{\mu}(\vec{x}_n)$', ...
70     '$\overline{\mu}(\vec{x}_n)$', ...
71     'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
72
73 subplot(2, 1, 2);
74 D_seq = (zeros(1, n) + D);
75 D_seq = D_seq(10:end);
76 D_pe = D_pe(10:end);
77 D_pe_lo = D_pe_lo(10:end);
78 D_pe_hi = D_pe_hi(10:end);
79 plot(10 : n, [D_seq', D_pe', D_pe_lo', D_pe_hi']);
80 xlim([10 n]);
81 xlabel('n');
82 xlabel('n');
83 ylabel('z');
84 legend('$\hat{S}^2(\vec{x}_N)$', '$\hat{S}^2(\vec{x}_n)$', ...
85     '$\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$', ...
86     '$\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$', ...
87     'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
88 end
89
90 % Границы доверительного интервала для мат. ожидания
91 function [lo, hi] = mean_bounds(X, gamma)
92     n = length(X);

```

```

93     M = mean(X);
94     S = sqrt(var(X));
95
96     alpha = (1 + gamma) / 2;
97     interval = S / sqrt(n) * tinv(alpha, n - 1);
98
99     lo = M - interval;
100    hi = M + interval;
101 end
102
103 % Границы доверительного интервала для дисперсии
104 function [lo, hi] = var_bounds(X, gamma)
105     n = length(X);
106     D = var(X);
107
108     lo = (n - 1) * D / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
109     hi = (n - 1) * D / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);
110 end

```

В листинге 2.2 приведён результат выполнения описанной программы.

### Листинг 2.2 – Результат программы

```

mean      = -12.61483
variance  =  0.86533
mean      in (-12.75561, -12.47406)
variance  in ( 0.70792,  1.08610)

```

Рис. 2.1 – Графики оценки математического ожидания

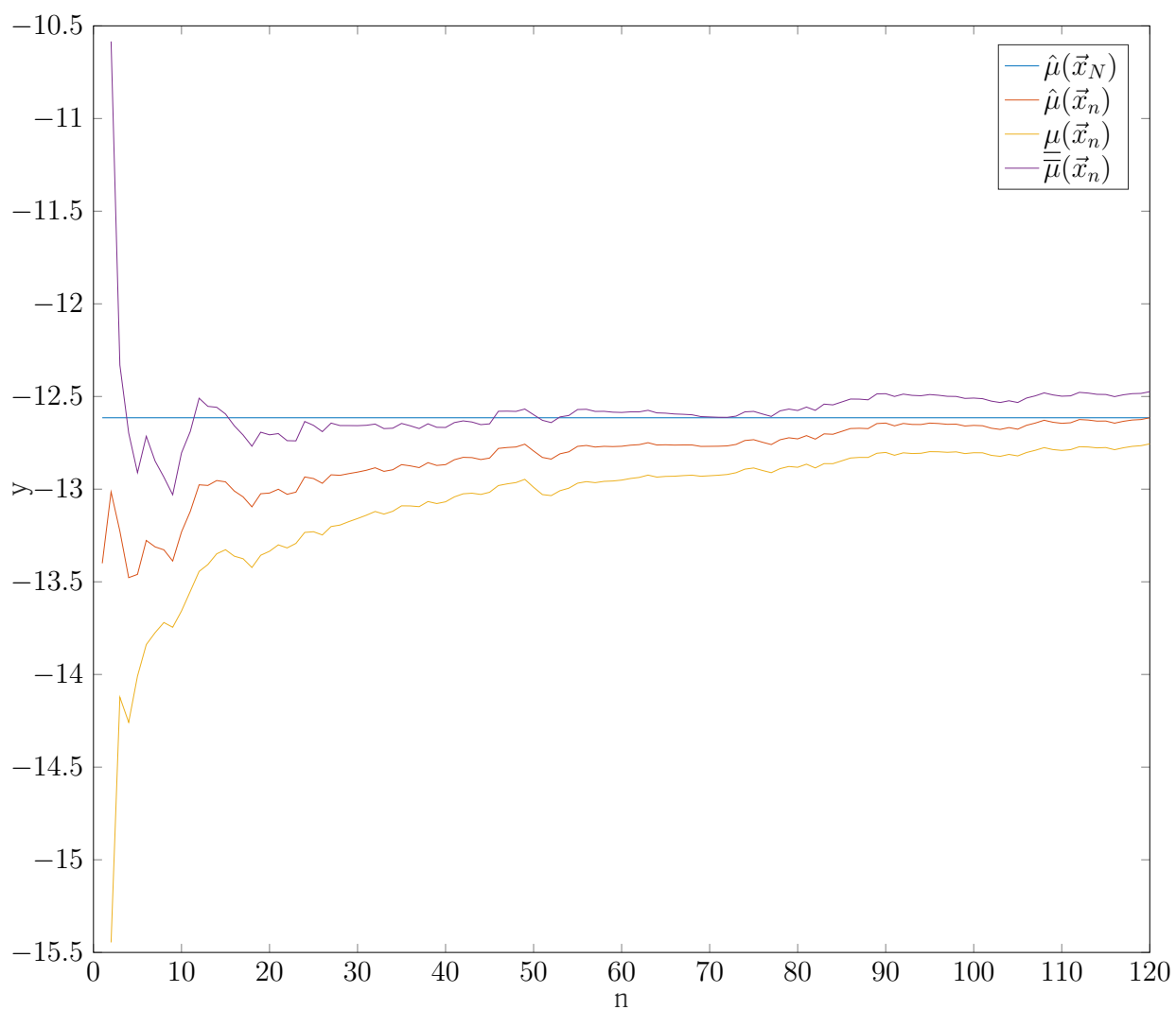


Рис. 2.2 – Графики оценки дисперсии

