Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Математическая статистика

Домашнее задание №1

Вариант №17

Набиев Фарис, ИУ7–63Б

2020 г.

Задача №1
Предельные теоремы теории вероятностей

Условие

Стрелок поражает мишень с вероятностью 0.9. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах число попаданий будет не менее 85 и не более 95?

Решение

Условие данной задачи описывает схему испытаний Бернули. При этом $n = 100$ — число испытаний. Очевидно, что $n \gg 1$. Тогда по интегральной теореме Муавра-Лапласа имеем:

$$P\Big\{k_1 \leqslant k \leqslant k_2\Big\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

где, k — число успехов; $x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}, i = \overline{1,2}$; $p = 0.9$ — вероятность успеха, $q = 1 - p = 0.1$ — вероятность неудачи.

$$P\Big\{x \in [85, 95]\Big\} = \Phi\left(\frac{95-90}{3}\right) - \Phi\left(\frac{85-90}{3}\right) \approx 2 \cdot \Phi(1.67) \approx \underline{\underline{0.905}}$$

Задача №2
Метод моментов

Условие

С использованием метода моментов для случайной выборки $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки указанных параметров заданного закона распределения:

$$f_X(x) = 3\theta x^2 e^{-\theta x^3}, \quad x > 0$$

Решение

Данный закон распределения зависит от единственного параметра θ, следовательно система метода моментов будет содержать только одно уравнение с одной неизвестной. Это уравнение имеет вид:

$$MX^1 = \hat{\mu}_1(\overrightarrow{X}) \tag{1}$$

При этом:

$$\hat{\mu}_1(\overrightarrow{X}) = \overline{X} \tag{2}$$

Теперь необходимо вычислить математическое ожидание случайной величины, подчиняющейся данному закону распределения:

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx$$

$$MX = \int_0^{+\infty} 3\theta x^3 e^{-\theta x^3} dx = \int_0^{+\infty} x e^{-\theta x^3} d(\theta x^3) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt[3]{\theta}} \int_0^{+\infty} (\theta x^3)^{\frac{1}{3}} e^{-\theta x^3} d(\theta x^3) = \left[t = x^3 x = t^{\frac{1}{3}}\right] = \frac{1}{\sqrt[3]{\theta}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{3}} e^{-t} dt \tag{3}$$

Обратим внимание на интегральное определение гамма-функции:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \tag{4}$$

Заметим схожесть в 3 и 4. Таким образом:

$$MX = \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{\sqrt[3]{\theta}} \tag{5}$$

Учитывая 1, 2 и 5, имеем:

$$\frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{\sqrt[3]{\theta}} = \overline{X} \Rightarrow \underline{\underline{\theta = \left(\frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{\overline{X}}\right)^3}}$$

Задача №3
Метод максимального правдоподобия

Условие

С использованием метода максимального правдоподобия для случайной выборки $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки параметров заданного закона распределения:

$$f_X(x) = \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x-2|}$$

А так же вычислить выборочные значения найденных оценок для выборки:

$$\vec{x}_5 = (-2, 4, -3, 5, 1)$$

Решение

Рассматриваемая случайная величина является непрерывной. Следовательно, функция правдоподобия принимает вид:

$$\mathcal{L}(\vec{x}_5) = f_X(x1) \cdot f_X(x2) \cdot f_X(x3) \cdot f_X(x4) \cdot f_X(x5) = \frac{\theta^5}{32} e^{-15\theta}$$

Для упрощения вычислений, проинтегрируем полученную функцию:

$$\ln \mathcal{L} = \ln \frac{\theta^5}{32} + \ln e^{-15\theta} = 5 \ln \theta - \ln 32 - 15\theta$$

Имея необходимое условие экстремума $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$, найдем искомый параметр:

$$\frac{5}{\theta} - 15 = 0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{3}$$

Зная достаточное условие экстремума $\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2} \neq 0$, проверим полученное значение:

$$-\frac{5}{\theta^2} \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{\theta = \frac{1}{3}}} \text{ — достаточное условие выполняется}$$

Задача №4
Доверительные интервалы

Условие

Плотность распределения времени t безотказной работы радиоэлектронной аппаратуры между двумя последовательными отказами дается формулой $f(t) = (1/T)e^{-(t/T)}$, $t \geqslant 0$. Для оценки параметра T провели испытания аппаратуры до появления $d = 5$ отказов. Общая продолжительность S работы с начала испытания до последнего отказа оказалась равной 1600 ч. Определить границы 80%-го доверительного интервала для параметра T, если известно, что величина $2S/T$ распределена по закону $\chi^2(2d)$.

Решение

Пусть q_α, $q_{1-\alpha}$ — квантили соответствующих уровней случайной величины $2S/T$, распределенной по закону χ^2 с степенями свободы $n = 2d = 10$. При этом $2\alpha + \gamma = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0.8}{2} = 0.1$. Таким образом:

$$\gamma = P\Big\{q_\alpha < \frac{2S}{T} < q_{1-\alpha}\Big\}$$

Из полученного тождества найдём оценку параметра T:

$$\gamma = P\Big\{\frac{2S}{q_{1-\alpha}} < T < \frac{2S}{q_\alpha}\Big\}$$

Значение квантилей q_α, $q_{1-\alpha}$ можем вычислить при помощи функции chi2inv пакета MATLAB:

$$q_{0.1} = 4.8652, \quad q_{0.9} = 15.9872$$

Имеем итоговую оценку:

$$\underline{\underline{0.8 \approx P\Big\{200.16 < T < 657.73\Big\}}}$$