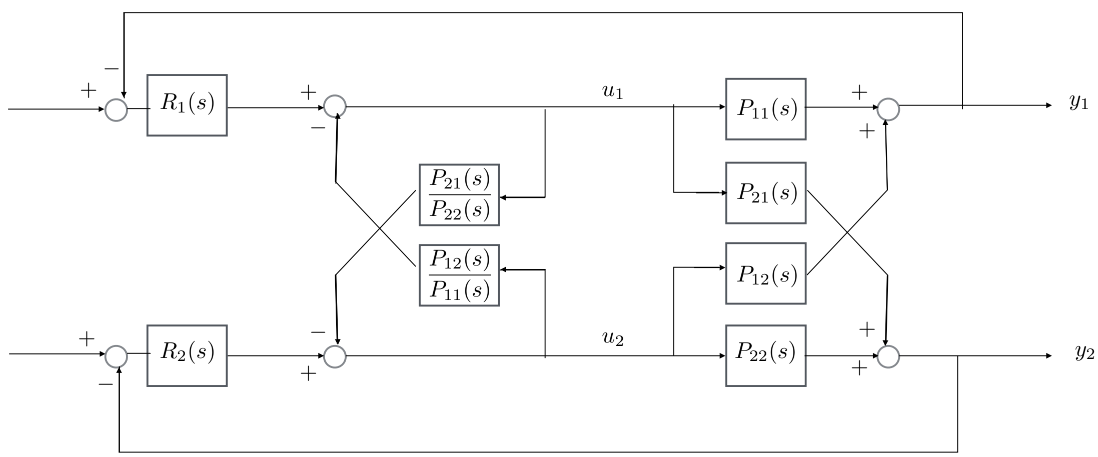
Dato il sistema LTI MIMO con due ingressi u1, u2 e due uscite y1, y2 descritto dalla matrice di trasferimento

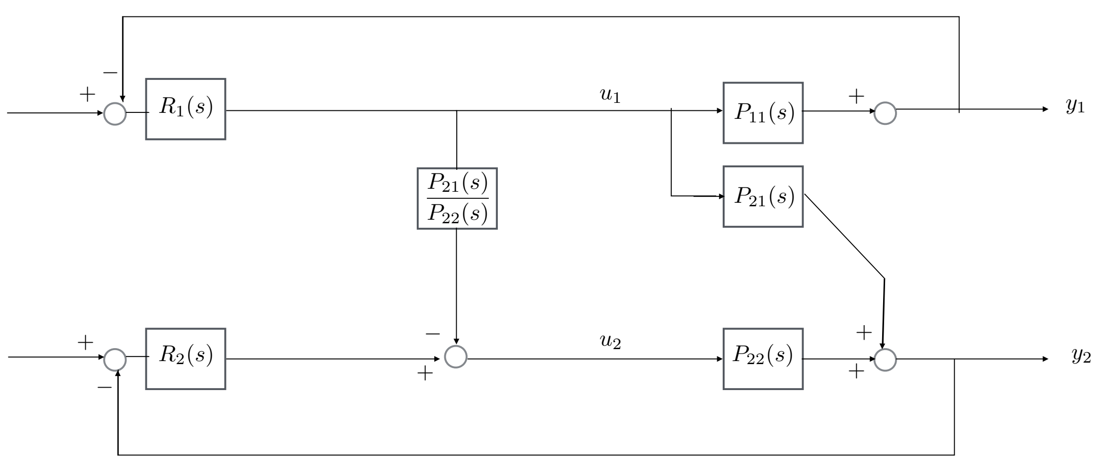
$$M(s) = \frac{1}{(1+5s)(1+s)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.2(1+s) & 5 \end{bmatrix}$$

Disegnare e mettere a punto per esso un sistema di controllo con disaccoppiatore all'indietro e regolatori di tipo PI o PID in modo da garantire per ambedue gli anelli un margine di fase di almeno 50, introducendo e illustrando le approssimazioni eventualmente necessarie.

Cominciamo per disegnare il sistema di controllo classico con disaccoppiatore all'indietro



A questo punto notiamo che lo schema deve essere modificato in quanto $P_{12}(s) = 0$.



Dopo aver disegnato il sistema di controllo bisogna seguire 2 step:

1. Si progetta R_1 considerando P_{11} e R_2 considerando P_{22}

   Se esiste un vincolo sul tempo di assestamento, si traduce in un vincolo di ω_c con la formula $Ta = 5/\omega_c$

   Se esiste un vincolo di pulsazione critica si progetta R_1 in modo che $R_1 P_{11} \simeq \dfrac{\omega_c}{s}$, introducendo in caso necessario dei poli per renderlo reale. Stessa cosa per R_2.

   Se esiste un vincolo sul margine di fase φ_m, si progetta un regolatore

$$\frac{K(1+s\tau)(1+s\tau_2)}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

   che con i zeri cancelli i poli, e con valori di K e T_i che soddisfi i vincoli di margine di fase: $\varphi_m = 90 - \arctan(KT_i)$ (Si noti che anziché $\arctan(\omega_c T_i)$ si è messo $\arctan(KT_i)$, questo perché facciamo coincidere il valore proporzionale e la pulsazione critica.

2. Si calcolano i disacoppiatori introducendo in caso necessario dei poli per renderli reali. Nel caso di aggiunta di poli questi vanno posizionati una decade oltre le $2\omega_c$ del sistema.

Cominciamo a svolgere il problema:

1. Progettazione di R_1

$$R_1 P_{11} = \frac{K(1+5s)(1+s)}{s(1+sT)} \cdot \frac{1}{(1+5s)(1+s)^2}$$

$$R_1 P_{11} = \frac{K}{s(1+sT)(1+s)}$$

   Per questo regolatore il margine di fase è: $90 - \arctan(K \cdot 1) - \arctan(K \cdot T)$

   A questo punto le scelte progettuali possono diventare tante, infatti fissato un K possiamo trovare diversi T e viceversa. Per questo motivo anziché introdurre un PID, proviamo a introdurre un semplice PI.

$$R_1 P_{11} = \frac{K(1+5s)}{s} \cdot \frac{1}{(1+5s)(1+s)^2}$$

$$R_1 P_{11} = \frac{K}{s(1+s)^2}$$

   A questo punto visto il vincolo di $\varphi_m > 50$ diventa

$$90 - 2\arctan(K \cdot 1) > 50 \quad \rightarrow \quad K = \tan 20 = 0.36$$

Progettazione di R_2

$$R_2 P_{22} = \frac{K(1+s)}{s} \cdot \frac{5}{(1+5s)(1+s)^2}$$

Basta notare che P_{22} è cinque volte P_{11}, detto questo possiamo subito concludere $R_2 = {}^1\!/_5\, R_1$ in quanto il vincolo sarebbe $5K = \tan 20$.

In conclusione:

$$R_1 = \frac{0.36(1+5s)}{s} \qquad\qquad R_2 = \frac{0.07(1+5s)}{s}$$

2 Calcolo dei disacoppiatori (in questo caso ne esiste solo uno in quanto $P_{12} = 0$)

$$\frac{P_{21}}{P_{22}} = \frac{2(1+s)}{5}$$

Basta renderlo reale inserendo un polo una decade oltre la pulsazione critica più grande tra le due del sistema, in questo caso $\max 0.36, 0.07 = 0.36$. Il polo da inserire è dunque

$$1 + \frac{s}{10 \cdot 0.36}$$

Il disacoppiatore diventa:

$$\frac{P_{21}}{P_{22}} = \frac{2(1+s)}{5(1+0.277s)}$$