Teoremi fondamentali

Associativita' $x + (y + z) = (x + y) + z$ $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

$$
\begin{aligned}
&((x + y) + z)) = \\
&\quad ((x + y) + z)) \cdot (x + (y + z))) \qquad (sfrutto\ idempotenza) \\
&\quad ((x + y) + z)) \cdot x + ((x + y) + z)) \cdot (y + z) \qquad (distributiva) \\
&\quad ((x + y) + z)) \cdot x + ((x + y) \cdot (y + z) + z \cdot (y + z)) \qquad (distributiva) \\
&\quad ((x + y) + z)) \cdot x + ((x + y) \cdot y + (x + y) \cdot z + z \cdot (y + z)) \qquad (distributiva) \\
&\quad x + (y + (x + y) \cdot z + z) \qquad (oss1, assorbimento) \\
&\quad x + (y + x \cdot z + y \cdot z + z) \qquad (distributiva) \\
&\quad x + (y + z) \qquad (assorbimento)
\end{aligned}
$$

$(oss1)$

$$
\begin{aligned}
&((x + y) + z))x = \\
&\quad = ((x + y) \cdot x + x \cdot z) \qquad (distributiva) \\
&\quad = (x + x \cdot z) \qquad (assorbimento) \\
&\quad = x \qquad (assorbimento)
\end{aligned}
$$

Idempotenza $x + x = x$ $x \cdot x = x$

$$
\begin{aligned}
&x + x = \\
&\quad (x + x) \cdot 1 \qquad (el.\ neutro) \\
&\quad (x + x) \cdot (x + \overline{x}) \qquad (complemento) \\
&\quad x + x \cdot \overline{x} \qquad (distributiva) \\
&\quad x + 0 \qquad (complemento) \\
&\quad x \qquad (el.\ neutro)
\end{aligned}
$$

Elemento forzante $x + 1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$

$$
\begin{aligned}
&x + 1 = \\
&\quad x + (x + \overline{x}) \qquad (el.\ neutro) \\
&\quad x + \overline{x} \qquad (idempotenza) \\
&\quad 1 \qquad (el\ neutro)
\end{aligned}
$$

Assorbimento $\quad x + x \cdot y = x \quad x(x+y) = x$

$$
\begin{aligned}
&x + x \cdot y = \\
&\qquad x \cdot 1 + x \cdot y \qquad (el.\ neutro) \\
&\qquad x \cdot (y + \overline{y}) + x \cdot y \qquad (complemento) \\
&\qquad x \cdot y + x \cdot \overline{y} + x \cdot y \qquad (distributiva) \\
&\qquad x \cdot y + x \cdot \overline{y} \qquad (idempotenza) \\
&\qquad x \cdot (y + \overline{y}) \qquad (distributiva) \\
&\qquad x \cdot 1 \qquad (complemento) \\
&\qquad x \qquad (el\ neutro)
\end{aligned}
$$

Semplificazione $\quad x + \overline{x} \cdot y = x + y \quad x + (\overline{x} \cdot y) = x \cdot y$

$$
\begin{aligned}
&x + \overline{x} \cdot y = \\
&\qquad x \cdot 1 + \overline{x} \cdot y \qquad (el.\ neutro) \\
&\qquad x \cdot (y + \overline{y}) + \overline{x} \cdot y \qquad (complemento) \\
&\qquad x \cdot y + x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y \qquad (distributiva) \\
&\qquad x \cdot y + x \cdot y + x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y \qquad (idempotenza) \\
&\qquad x \cdot (y + \overline{y}) + y \cdot (x + \overline{x}) \qquad (distributiva) \\
&\qquad x \cdot 1 + y \cdot 1 \qquad (complemento) \\
&\qquad x + y \qquad (el\ neutro)
\end{aligned}
$$

Consenso $\quad x \cdot y + \overline{x} \cdot z + y \cdot z = x \cdot y + \overline{x} \cdot z \quad (x+y) \cdot (\overline{x} + z) \cdot (y + z) = (x+y) \cdot (\overline{x} + z)$

$$
\begin{aligned}
&x \cdot y + \overline{x} \cdot z + y \cdot z = \\
&\qquad x \cdot y \cdot 1 + \overline{x} \cdot z \cdot 1 + y \cdot z \cdot 1 \qquad (el.\ neutro) \\
&\qquad x \cdot y \cdot (z + \overline{z}) + \overline{x} \cdot z \cdot (y + \overline{y}) + y \cdot z \cdot (x + \overline{x}) \qquad (complemento) \\
&\qquad x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot z + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot z + \overline{x} \cdot y \cdot z \qquad (distributiva) \\
&\qquad x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot z + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \qquad (idempotenza) \\
&\qquad x \cdot y \cdot (z + \overline{z}) + \overline{x} \cdot z \cdot (y + \overline{y}) \qquad (distributiva) \\
&\qquad x \cdot y \cdot 1 + \overline{x} \cdot z \cdot 1 \qquad (complemento) \\
&\qquad x \cdot y + \overline{x} \cdot z \qquad (el\ neutro)
\end{aligned}
$$

Legge di De Morgan $\overline{(x+y)} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ $\overline{(x \cdot y)} = \overline{x} + \overline{y}$

$$
\begin{aligned}
(x \cdot y)(\overline{x} + \overline{y}) = & \\
& (x \cdot y) \cdot \overline{x} + (x \cdot y) \cdot \overline{y} \qquad (distributiva) \\
& x \cdot \overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y} \cdot y \qquad (distributiva) \\
& 0 + 0 \qquad (complemento) \\
& 0 \qquad (el.\ neutro)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x \cdot y) + (\overline{x} + \overline{y}) = & \\
& ((\overline{x} + \overline{y}) + x)((\overline{x} + \overline{y}) + y) \qquad (distributiva) \\
& (1 + \overline{y})(\overline{x} + 1) \qquad (complemento) \\
& (1)(1) \qquad (el.\ forzante) \\
& 1 \qquad (el.\ neutro)
\end{aligned}
$$

Implicazione $x \leq x + y$ $x \geq x \cdot y$

Involuzione $\overline{\overline{x}} = x$

Unicita' del complemento $\overline{x}$ *è unico*

$$
\begin{aligned}
(Assurdo) \qquad & (a + a_1) = 1 \quad a \cdot a_1 = 0 \quad (a + a_2) = 1 \quad a \cdot a_2 = 0 \\
a_1 = \quad & a_1 \cdot 1 \qquad (el\ neutro) \\
& a_1(a + a_2) \qquad (ip.\ assurda) \\
& a_1 \cdot a + a_1 \cdot a_2) \qquad (distributiva) \\
& 0 + a_1 \cdot a_2) \qquad (ip.\ assurda) \\
& a \cdot a_2 + a_1 \cdot a_2) \qquad (ip.\ assurda) \\
& a_2(a + a_1) \qquad (distributiva) \\
& a_2(1) \qquad (ip.\ assurda) \\
& a_2 \qquad (el.\ neutro)
\end{aligned}
$$