Significato della divergenza e del rotore

Prima di dire qual' il significato geometrico della divergenza e del rotore chiariamo per prima qual' il contesto in cui ci troviamo. Supponiamo di avere una funzione $\mathbf{F} \in C^1$ che diciamo campo vettoriale, per semplicit considereremo per prima il caso vettoriale piano, ossia con $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. $\mathbf{F}$ sar dunque una funzione fatta cos:

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{bmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{bmatrix} = F_1(x,y)\,\hat{\mathbf{i}} + F_2(x,y)\,\hat{\mathbf{j}}$$

Significato di derivata parziale

La derivate parziali di $\mathbf{F}$ sono le derivate parziali fatte componente per componente:

$$\frac{\partial \mathbf{F}(x,y)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}\,\hat{\mathbf{j}}$$

Nel contesto in cui ci siamo messi, ossia quello dei campi vettoriali, fare la derivata parziale di $\mathbf{F}$ ci dice *come cambiano <u>in media</u> le componenti allo spostarci nella direzione in cui stata calcolata la derivata parziale.* Questo concetto pu rimanere poco chiaro per cui facciamo un esempio chiarire il concetto.

Esempio

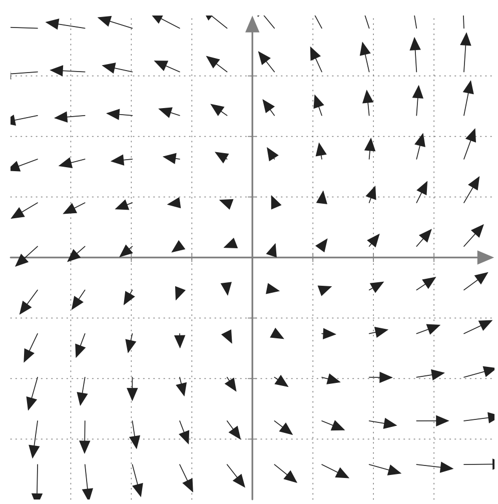
Sia

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{bmatrix} x - y \\ x + y \end{bmatrix}$$

Le derivate parziali sono:

$$\frac{\partial \mathbf{F}(x,y)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}(x,y)}{\partial y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Analizziamo il primo risultato, ovvero la derivata parziale rispetto a x. Quello che ci dice la derivata direzionale come variano, allo spostarci lungo x, la componente lungo x e la componente lungo y, in questo caso, abbiamo un risultato costante positivo per entrambe le componenti, cio, quando ci muoviamo lungo l'asse x via a via da sinistra verso destra, le componenti di x e y del vettore associato ad ogni punto, aumentano (in questo caso di un fattore costante) al aumentare di x.

Ci pu essere verificato facilmente dalla figura notando che all'estrema sinistra si ha un vettore che punta essenzialmente in basso (y negativa) e a sinistra (x negativa) e si nota come al aumentare di x gli si somma alla componente x e y il fattore 1 per cui all'estrema destra si ha un vettore con una freccia in alto (y positiva) e a destra (x positiva).

Per quanto riguarda la y le considerazioni sono le stesse, vediamo come allo spostarci in alto le componenti rispetto a x diminuiscono e le componenti rispetto a y aumentano.

Attenzione Il disegno del campo vettoriale fatto a scala altrimenti i vettori sarebbero troppo lunghi e si sovrapporrebbero. Inoltre, quanto detto evidenziabile pi facilmente lungo gli assi ma ci non vuol dire che non valga altrove.

Divergenza

La divergenza di $\mathbf{F}$ definita come:

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

notiamo che la divergenza prende un vettore e ne restituisce un numero (scalare).
La divergenza indica regioni in cui ci sono "sorgenti" o "pozzi" oppure regioni con un "flusso" squilibrato.

Divergenza Positiva

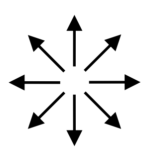


Figura 1.1: Esempio di "sorgente"

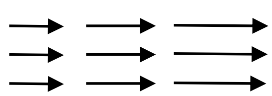


Figura 1.2: Flusso squilibrato dove se consideriamo una regione di raggio infinitesimo intorno al punto d'interesse **entra pi di quello che esce**

Divergenza Negativa

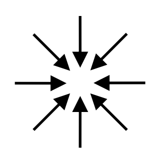


Figura 1.3: Esempio di "pozzo"

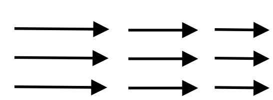


Figura 1.4: Flusso squilibrato dove se consideriamo una regione di raggio infinitesimo intorno al punto d'interesse, **entra meno di quello che esce**

Per capire un campo vettoriale, uno pu pensare al campo vettoriale proprio come un flusso, ad esempio di molecole d'acqua, immaginiamo di avere in ogni punto una molecola d'acqua, il vettore associato ad ogni punto ci indicher come si muover la particola nell'istante di tempo successivo, ecco perch si parla di "pozzi" e "sorgenti". Nei pozzi, tutte le molecole vicine tendono a convergere a un punto. Nelle sorgenti, le molecole vicine a un certo punto tendono ad allontanarsi perch da l ne escono delle nuove molecole che spostano le circondanti poco a poco.

Per capire da dove viene la formula ci serve anche il caso in cui la divergenza sia nulla.

Divergenza Nulla

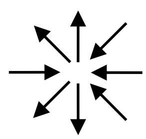


Figura 1.5: Flusso equilibrato (anche se squilibrato in alcune direzioni, viene compensato in altre)

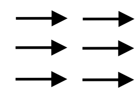


Figura 1.6: Flusso equilibrato, ossia, ne entra quanto ne esce

Quando per ogni punto del campo, la divergenza nulla, il campo prende il nome di *campo indivergente* e se inoltre a questa condizione il campo anche differenziabile ($\mathbf{F} \in C^1$) allora il campo si dice **solenoidale**, un esempio di campo solenoidale il campo magnetico.

Ora abbiamo tutti gli elementi per capire da dove viene la formula di divergenza, notiamo che nei casi di divergenza positiva si ha che:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} > 0 \qquad \text{poich al muoverci a destra la componente } x \text{ del vettore aumenta}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} > 0 \qquad \text{poich al muoverci in s la componente } y \text{ del vettore aumenta}$$

$$\text{mentre} \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \text{non cambiano.}$$

Nel caso di divergenza negativa si ha la stessa cosa solo che in questo caso le derivate parziali non nulle sono < 0 .
Quindi notiamo che non basta che $\dfrac{\partial F_1}{\partial x} > 0$ o che $\dfrac{\partial F_2}{\partial y} > 0$ infatti la somma di questi due che dev'essere positivo poich anche se una delle due derivate parziali positiva, ci non garantisce che sia positiva la divergenza, infatti l'altra potrebbe essere negativa e molto pi grande in modulo facendo si che la somma totale sia negativa.

Quindi la formula della divergenza non altro che un numero che ci indica se in un determinato punto la regione di raggio infinitesimo attorno a quel punto tende ad "accumulare" molecole o a "perderle".

Rotore

Il rotore di $\mathbf{F}$ definito come:

$$\text{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}}$$

Quindi nel caso di campi vettoriali piani in cui $F_3 = 0$ cio $\mathbf{F}(x, y)$, la formula si riduce a:

$$\text{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}}$$

Notiamo che il rotore una funzione che prende in ingresso un vettore e ne da un altro.

Ci che rappresenta il rotore la rotazione che soffrirebbe un punto se fosse messo nel punto in cui si calcolato il rotore. La rotazione viene considerata positiva se eseguita in senso antiorario e negativa se eseguita in senso orario. Il vettore punta secondo la regola della mano destra (ecco perch nel caso di campi vettoriali piani si ha un vettore che punta in direzione del versore $\hat{\mathbf{k}}$).
Nel caso in cui $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il significato resta invariato, solo che compaiono i primi due termini che si annullavano per i campi vettoriali piani, il primo termine rappresenta dunque la rotazione rispetto al piano yz, il secondo termine, la rotazione rispetto il piano xz e l'ultimo termine, la rotazione rispetto il piano xy.

Un campo in cui il rotore nullo si dice **campo irrotazionale**, questa caratteristica molto importante giacch tutti i **campi conservativi** (dove la circuitazione nulla) sono campi irrotazionali. Per cui essere irrotazionale una condizione necessaria (ma non sufficiente) affinch un campo sia conservativo (diventa sufficiente quando l'insieme semplicemente connesso):

$$\text{conservativo} \quad \Rightarrow \quad \text{irrotazionale}$$

Equivalentemente:

$$\text{non irrotazionale} \quad \Rightarrow \quad \text{non conservativo}$$

Tipi di rotazione

Se immaginiamo di avere un'asta rettangolare fatta di legno che galleggia sull'acqua, in sostanza ci sono due configurazioni sul campo vettoriale che ci possono dare una rotazione.

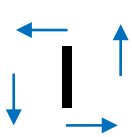


Figura 1.7: Configurazione A

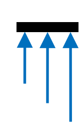


Figura 1.8: Configurazione B

Supponiamo di non conoscere la formula. Per ricavare la formula analizziamo la configurazione A, su questa configurazione possiamo vedere chiaramente come allo spostarci a destra le componenti su y dei vettori aumentano e come allo spostarci in su le componenti su x diminuiscono, cio:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} < 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} > 0$$

Proviamo a ricavare la formula in base alle considerazioni appena fatte. Poich abbiamo fissato la convenzione che le rotazioni in senso antiorario sono considerate positive, la formula che ricerchiamo ci dovr dare un numero positivo in rotazioni antiorarie , inoltre poich vogliamo che il risultato sia un vettore, vogliamo che il risultato abbia una direzione e un verso, che abbiamo detto essere definito dalla regola della mano destra. A questo punto non possiamo sommare le derivate parziali appena considerate ovvero: $\partial F_1/\partial y$ e $\partial F_2/\partial x$ poich se entrambe sono uguali in modulo, la somma risulterebbe nulla (assurdo) giacch vogliamo una quantit positiva, allora il rotore sul piano xy :

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

La formula in tre dimensioni si fa facendo le stesse considerazioni ma non solo rispetto al piano xy ma anche rispetto ai piani xz e yz.

Esempio
Il campo $\mathbf{F} = (-x + 3y)\hat{\mathbf{i}} + (3x + y)\hat{\mathbf{j}}$ ha entrambe le configurazioni, e in particolare, questo campo gode la propriet che ovunque si prenda un punto questo ha un rotore sempre pari a 2.

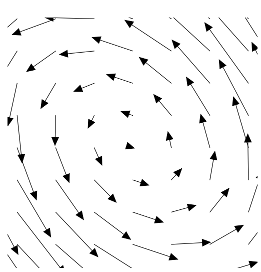


Figura 1.9: Nel origine questo campo assume la configurazione A

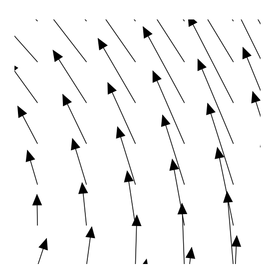


Figura 1.10: Zoom sulle ascisse positive dove la configurazione quella B

Laplaciano

Il laplaciano di una funzione f definito come:

$$\Delta f \;=\; \nabla \cdot \nabla f \;=\; \mathrm{div}\,(\mathrm{grad} f)$$

che pu essere anche espresso come:

$$\Delta f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2} f$$

nel caso di $\mathbf{R}^2$ diventa:

$$\Delta f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f$$

cio il laplaciano non altro che la divergenza del gradiente ed calcolato come la somma delle derivate parziali seconde non miste rispetto alle coordinate.
Le funzioni di classe C^2 ove il laplaciano nullo in ogni punto si dicono **funzioni armoniche**.

Il significato di questa operazione molto facile da capire alla luce del significato della divergenza e del gradiente. Ricordiamoci che il gradiente indica la direzione di massima crescita della funzione e trasforma una funzione in un campo vettoriale:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

quindi quella che avevamo definito come F_1 $\partial f/\partial x$, F_2 $\partial f/\partial y$ ed F_3 $\partial f/\partial z$.

Oramai sappiamo che la divergenza indica se i vettori che circondano un punto tendono a converge su quel punto o ad allontanarsi. Quindi:

$$\Delta f > 0 \qquad \text{ci indica un minimo}$$

$$\Delta f < 0 \qquad \text{ci indica un massimo}$$

Esempio

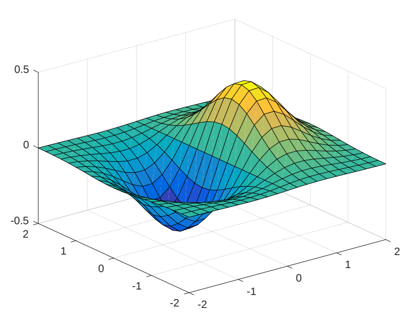


Figura 1.11: Grafico della funzione

Sia $f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$

La funzione ha un massimo locale in $(\sqrt{2}/2, 0)$ ove risulta $\Delta f \approx -2.5$ e un minimo locale in $(-\sqrt{2}/2, 0)$ ove risulta $\Delta f \approx 2.5$

Chiariamo ulteriormente perch il laplaciano nei minimi positivo e nei massimi negativo. Consideriamo i tipici casi di massimo, minimo e sella, cio: $-x^2 - y^2$, $x^2 + y^2$, e $x^2 - y^2$.

Consideriamo per prima $f(x, y) = -x^2 - y^2$

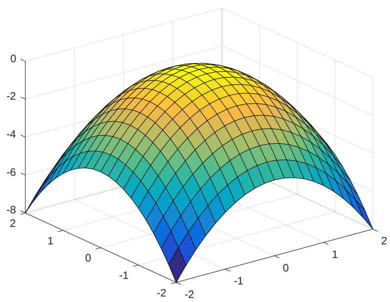


Figura 1.12: grafico di f

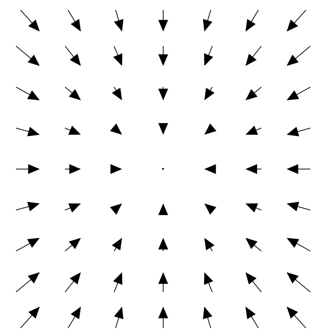


Figura 1.13: Gradiente di f

Vediamo che ha un massimo in $(0, 0)$ e che il laplaciano $\Delta f = -4$, questo dovuto a che nel punto, il gradiente, indicando la direzione di massima crescita, fa s che i vettori puntino nella direzione del massimo, la distribuzione dei vettori crea nel campo una configurazione di tipo pozzo che sappiamo che ha divergenza negativa, essendo il laplaciano la divergenza del gradiente si ha $\Delta f < 0$

Consideriamo ora $f(x, y) = x^2 + y^2$

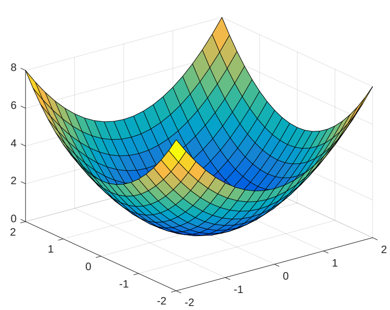


Figura 1.14: grafico di f

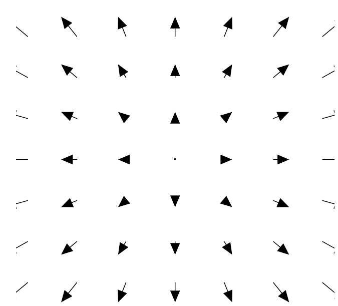


Figura 1.15: Gradiente di f

Allo stesso modo, vediamo che f un minimo in $(0, 0)$ e che il laplaciano $\Delta f = 4$, questo dovuto a che nel punto, il gradiente, indicando la direzione di massima crescita, fa s che i vettori si allontanino il pi possibile dal minimo, la distribuzione dei vettori crea nel campo una configurazione di tipo sorgente che sappiamo che ha divergenza positiva, essendo il laplaciano la divergenza del gradiente si ha $\Delta f > 0$.

Infine consideriamo $f(x, y) = x^2 - y^2$

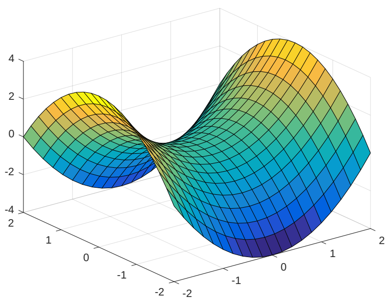


Figura 1.16: grafico di f

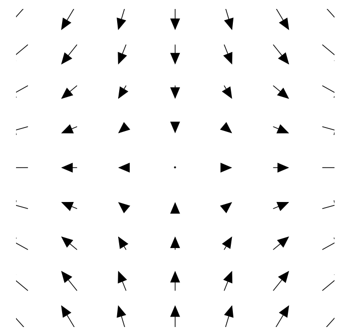


Figura 1.17: Gradiente di f

In questo caso vediamo che f ha un punto di sella in $(0, 0)$ e che il laplaciano $\Delta f = 0$. Questo dovuto a che nel punto, i vettori lungo y tendono a convergere poich un punto di massimo in quella direzione, ma quelli lungo x tendono ad allontanarsi poich un minimo in quella direzione, comunque il flusso viene equilibrato, ovvero ne entra tanto quanto ne esce, il che significa che la divergenza nulla facendo s che il laplaciano sia nullo.

PROVV. Ma purtroppo ci sono casi in cui una sella pu avere $\Delta f > 0$ e $\Delta f < 0$ come ad esempio $xy + x^2$ e $xy - x^2$

Da queste considerazioni si deduce:

$$\text{P un massimo} \Rightarrow \Delta f \leq 0$$

$$\text{P un minimo} \Rightarrow \Delta f \geq 0$$

$$\Delta f > 0 \Rightarrow \text{P un minimo o una sella}$$

$$\Delta f < 0 \Rightarrow \text{P un massimo o una sella}$$

$$\Delta f = 0 \Rightarrow \text{nulla si pu dire}$$

Inoltre notiamo che il laplaciano la traccia della matrice hessiana $\Delta f = \mathrm{tr}(H_f)$. Considerando quanto detto finora possiamo estendere il test dell'hessiana (anche se non molto utile in pratica).

$$\mathrm{tr}(H_f) > 0 \Rightarrow \text{P un minimo o una sella}$$

$$\mathrm{tr}(H_f) < 0 \Rightarrow \text{P un massimo o una sella}$$

$$\mathrm{tr}(H_f) = 0 \Rightarrow \text{nulla si pu dire}$$