Funzioni di due variabili

① Data la funzione $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \sin(xy)$ (Tema 25-11-2013)

(a) Calcolarne il gradiente individuando eventualmente i punti dov'è nullo.

Ricordando che il gradiente non è altro che un vettore che ha come come componenti le derivate parziali rispetto a x e rispetto a y si ottiene:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y\cos(xy) \\ y + x\cos(xy) \end{bmatrix}$$

Affinché il gradiente sia nullo, entrambi le componenti si devono annullare, per cui si perviene al sistema:

$$\begin{cases} x + y\cos(xy) = 0 \\ y + x\cos(xy) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y\cos(xy) \\ y = -x\cos(xy) \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x/y = -\cos(xy) \\ y/x = -\cos(xy) \end{matrix} \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow \quad y^2 = x^2 \ \Rightarrow \quad |y| = |x|$$

Si ha dunque che il gradiente si annulla per tutti i punti delle rette $\quad y = x \quad e \quad y = -x$

È giusto il risultato? No! non bisogna dimenticare l'equazione di partenza! Sostituendo quindi in $x = -y\cos(xy)$ il risultato $\quad y = x \quad e \quad y = -x \quad$ si ha:

$$x = -x\cos(x^2) \qquad \text{e} \qquad x = x\cos(x^2)$$

Affinché le uguaglianze vengano soddisfatte, deve avvenire che $\cos(x^2) = \pm 1$ e ciò avviene per $x^2 = 2k\pi$ e $x^2 = \pi + 2k\pi$ cioè per $x = \pm\sqrt{2k\pi}$ e $x = \pm\sqrt{\pi + 2k\pi}$

(b) Determinare la natura di tali punti.

I punti dove il gradiente è nullo si chiamano punti critici e possono essere classificati in massimi, minimi o punti di sella. Per poter determinare la natura dei punti critici si ricorre a una matrice, chiamata matrice hessiana che non è altro che la jacobiana del gradiente, ovvero le derivate parziali rispetto x e rispetto y di ciascuna componente del gradiente.

$$H = \partial\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) \end{bmatrix}$$

Nel caso sotto esame l'hessiana è:

$$H = \begin{bmatrix} 1 - y^2\sin(xy) & \cos(xy) - xy\sin(xy) \\ \cos(xy) - xy\sin(xy) & x^2\sin(xy) \end{bmatrix}$$

Arrivati a questo punto, non si studiano tutti i punti ma si studiano soltanto tre gruppi: $x = \pm\sqrt{2k\pi}$, $x = \pm\sqrt{\pi + 2k\pi}$ e $x = 0$

$$H|_{x=\pm\sqrt{2k\pi}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad H|_{x=\pm\sqrt{\pi+2k\pi}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ricordando che grazie ai teorema di Debreu per lo studio delle forme quadratiche si può concludere:

$$\begin{cases} \det H > 0 \ e \ f_{xx} > 0 \Rightarrow \text{minimo} \\ \det H > 0 \ e \ f_{xx} < 0 \Rightarrow \text{massimo} \\ \det H < 0 \Rightarrow \text{sella} \\ \det H = 0 \Rightarrow \text{nulla si può dire, applicare altri criteri} \end{cases}$$

Sfortunatamente, in questo caso nei primi due casi i determinanti risultano nulli per cui questo criterio non è applicabile.

Ci si posiziona lungo la retta $y = x$ e si studia il segno dei per i punti critici, l'equazione diventa $x^2 + \sin(x^2)$, e si nota che:

$$(x - \varepsilon)^2 + \sin((x - \varepsilon)^2) \leq x^2 + \sin(x^2)$$

$$(x + \varepsilon)^2 + \sin((x + \varepsilon)^2) \geq x^2 + \sin(x^2)$$

in quanto si può approssimare $\sin(x \pm \varepsilon) \sim x \pm \varepsilon$ poiché l'argomento tende a zero.
Si può dunque concludere che i tutti i punti critici lungo la retta sono punti di sella poiché nell'intorno dei punti si assumono valori positivi e negativi. Si realizza la stessa procedura per $y = -x$ arrivando alla stessa conclusione.

(c) Dato il vettore $\mathbf{r}(\theta) = \varepsilon\cos(\theta)\,\hat{\mathbf{i}} + \varepsilon\sin(\theta)\,\hat{\mathbf{j}}$, comporlo con la funzione f ottenendo $f(\mathbf{r}(\theta))$. Studiare il segno di tale funzione per $[0, 2\pi]$ (supporre ε piccolo quanto basta).

Ponendo $x = \varepsilon\cos(\theta)\,\hat{\mathbf{i}}$ e $y = \varepsilon\sin(\theta)\,\hat{\mathbf{j}}$ si ha:

$$f(\mathbf{r}(\theta)) = \frac{\varepsilon^2}{2}\cos(\theta)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}\sin(\theta)^2 + \varepsilon^2\sin(\theta)\cos(\theta) \xRightarrow{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1} \frac{\varepsilon^2}{2} + \varepsilon^2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

Ricordando la formula di duplicazione $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ si ha:

$$\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\sin(2\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon^2}{2}(1 + \sin(2\theta))$$

Poiché la funzione $\sin(2\theta)$ può assumere come valore minimo -1 si nota facilmente che la funzione composta $f(\mathbf{r}(\theta))$ è sempre ≥ 0

(d) Quali informazioni ci fornisce tale studio ai fini della domanda (b) ?

Quanto ricavato ci aiuta alla determinazione dei punti critici in quanto è parte del metodo risolutivo (Metodo del segno) per determinare la natura dei punti critici con hessiano nullo.
Il metodo ci dice che se $f(x, y) = 0$ per (x_0, y_0) valgono le regole:

se l'intorno di (x_0, y_0) assume valori sempre positivi $(\geq 0) \Rightarrow$ minimo
se l'intorno di (x_0, y_0) assume valori sempre negativi $(\leq 0) \Rightarrow$ massimo
se l'intorno di (x_0, y_0) assume valori positivi e negativi $\Rightarrow$ sella

In questo caso $f(x, y) = 0$ per $(0, 0)$. Poiché si è analizzato questo intorno nella domanda precedente (infatti $\mathbf{r}(\theta)$ è un cerchio di raggio infinitesimo centrato nel origine), possiamo concludere che in $(0, 0)$ si avrà un minimo.

Tutte le soluzioni trovate precedentemente vengono confermate dai grafici.

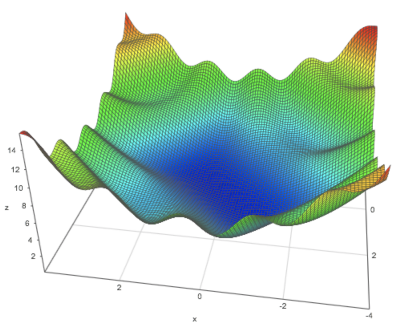

Figura 1.1: Grafico 1

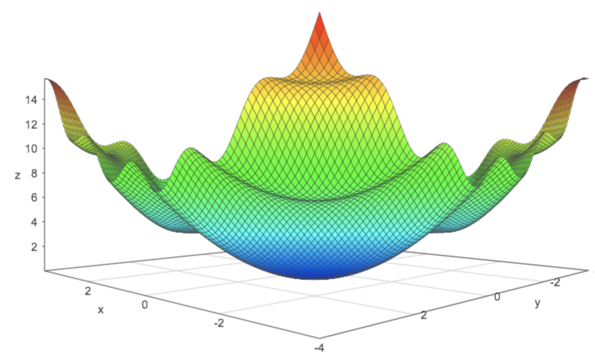

Figura 1.2: Grafico 2