1.1 Curve

① Data la linea $t\,\hat{\mathbf{i}} + t\,\hat{\mathbf{j}} + t^2\,\hat{\mathbf{k}}$ (Tema B 22-11-2016)

(a) Calcolare la curvatura laddove risulta massima

È facile vedere che la curva non è altro che una parabola sul piano $x = y$. Il punto di massima curvatura è il vertice della parabola che in questo caso si trova per $t = 0$.

$$k(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} \quad \Rightarrow \quad k(0) = \frac{\|r'(0) \times r''(0)\|}{\|r'(0)\|^3}$$

Calcoliamo per prima $r'(t)$ e $r''(t)$:

$$r'(t) = 1\hat{\mathbf{i}} + 1\hat{\mathbf{j}} + 2t\hat{\mathbf{k}} \quad \text{e} \quad r''(t) = 2\hat{\mathbf{k}}$$

Dalla prima si ottiene:

$$r'(0) = 1\hat{\mathbf{i}} + 1\hat{\mathbf{j}} \quad \text{per cui} \quad \|r'(0)\| = \sqrt{2}$$

Calcoliamo ora $r'(t) \times r''(t)$:

$$\det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} \quad \Rightarrow \quad \|r'(t) \times r''(t)\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

si noti che $r'(t) \times r''(t)$ non dipende dal valore di t. Mettendo assieme i risultati parziali si ha :

$$k(0) = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3} = 1$$

Altrimenti, non vedendo che è una parabola sul piano $x = y$ si studia il massimo della funzione di una variabile $k(t)$:

$$\max \left(\frac{2\sqrt{2}}{(2 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

(b) Calcolare i versori Tangente, Normale e Binormale nel punto trovato.

Ricordando che

$$\mathbf{T} = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \qquad \mathbf{B} = \frac{r'(t) \times r''(t)}{\|r'(t) \times r''(t)\|} \qquad \mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$$

Svolgiamo i calcoli:

$$\mathbf{T} = \frac{1\hat{\mathbf{i}} + 1\hat{\mathbf{j}} + 2t\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{1 + 1 + 4t^2}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{4 + 4}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{N} = \det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N}(0) = 1\hat{\mathbf{k}}$$

Riassumendo si ha:

$$\mathbf{T}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \qquad \mathbf{B}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \qquad \mathbf{N}(0) = (0, 0, 1)$$

(c) Stabilire se la linea è piana

Ci sono diversi modi per verificare che una curva è piana:

- La torsione τ è nulla
  Basta ricordare che la torsione è definita come :

$$\tau = \frac{(r' \times r'') \cdot r'''(t)}{\|r' \times r''\|^2}$$

  Vediamo agevolmente che è nulla poiché $r''' = 0$.

- Esiste un legame lineare tra le componenti.
  Infatti uno può vedere facilmente che $x = y$ per come è definita la curva (t, t, t^2)

- Il versore **B** è costante.
  (già verificato nell'esercizio precedente)

(d) Calcolare l'equazione del cerchio osculatore
Per trovare l'equazione del cerchio osculatore bisogna trovare prima il piano osculatore, ovvero il piano che contiene il versore Normale e il versore Tangente. Grazie alle considerazioni fatte precedentemente, si può dire immediatamente che il piano oscultatore alla curva piana è il piano $x = y$.
Ora per calcolare la sfera osculatrice, basta notare che non è altro che una sfera centrata in:

$$C_{so} = P + \rho\,\mathbf{N} = (0, 0, 0) + (0, 0, 1) = (0, 0, 1)$$

Quindi l'equazione della sfera osculatrice è: $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$
Il cerchio osculatore a un punto, è il cerchio fatto dall'intersezione del piano osculatore e la sfera osculatrice al punto.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1 \\ x = y \end{cases}$$

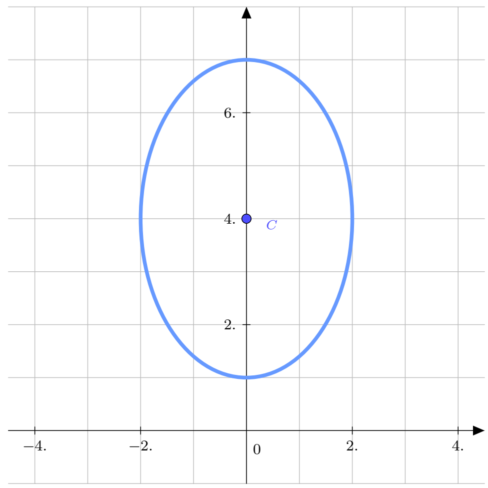
② Data l'elisse di semiassi 2 e 3, con centro in (0,4) e l'asse maggiore sull'asse y (Tema 26-11-2014)

(a) Scrivere l'equazione parametrica $r(t)$

Si comincia per graficare l'elisse e ricavare l'espressione analitica dell'elisse.

L'equazione dell'elisse è:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$



La parametrizzazione è dunque:

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 4 + 3\sin\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r(\theta) = 2\cos\theta\ \hat{\mathbf{i}} + (4 + 3\sin\theta)\ \hat{\mathbf{j}}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

(b) Calcolare il versore Tangente e il versore Normale in (0,1). Si calcola per primo gli equivalenti delle coordinate nella parametrizzazione.

$$\begin{cases} 0 = 2\cos\theta \\ 1 = 4 + 3\sin\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{3}{2}\pi$$

$$\mathbf{T} = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{-2\sin\theta\ \hat{\mathbf{i}} + 3\cos\theta\ \hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{4\sin^2\theta + 9\cos^2\theta}} \xrightarrow{in(0,1)} = \frac{2\ \hat{\mathbf{i}}}{\sqrt{4}} = (1, 0, 0)$$

In realtà lo si poteva vedere dal grafico

$$\mathbf{B} = \frac{r'(t) \times r''(t)}{\|r'(t) \times r''(t)\|} \qquad \mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$$

Poiché non c'è componente z nella curva possiamo dire immediatamente che $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$

$$\mathbf{N} = \det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N} = (0, 1, 0)$$

(c) Calcolare l'equazione del cerchio osculatore alla curva nel punto (0,1)

$$r'(t) = -2\sin\theta\ \hat{\mathbf{i}} + 3\cos\theta\ \hat{\mathbf{j}}$$
$$r''(t) = -2\cos\theta\ \hat{\mathbf{i}} - 3\sin\theta\ \hat{\mathbf{j}}$$

$$k(t) = \frac{\|r'(t)\times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} \quad \Rightarrow \quad k(t)|_{(0,1)} = k\left(^{3\pi}/_2\right) = \frac{\|r'(^{3\pi}/_2)\times r''(^{3\pi}/_2)\|}{\|r'(^{3\pi}/_2)\|^3}$$

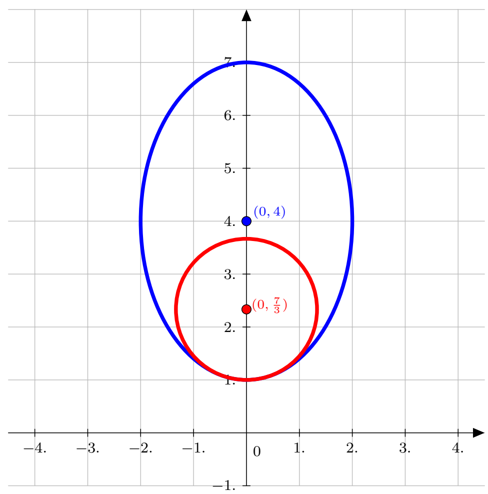
$$k\left(^{3\pi}/_2\right) = \frac{6(\sin^2(^{3\pi}/_2) + \cos^2(^{3\pi}/_2))}{\sqrt{4\sin^2(^{3\pi}/_2) + 9\cos^2(^{3\pi}/_2)}} = \frac{6}{8}$$

Il raggio di curvatura ρ che è l'inverso della curvatura, è dunque pari a $^4/_3$

$$C_{so} = P + \rho\,\mathbf{N} = (0,1,0) + \frac{4}{3}(0,1,0) = (0, {}^7/_3, 0)$$

Quindi il cerchio osculatore al punto è:

$$\begin{cases} x^2 + (y - {}^7/_3)^2 + z^2 = \frac{16}{9} \\ z = 0 \end{cases}$$



③ Data la curva $r(t) = t^2\ \hat{\mathbf{i}} + t^4\ \hat{\mathbf{j}}$ (Tema 11-09-2012)

(a) Stabilire se è regolare, piana, chiusa
Una curva si dice regolare se esiste una sua parametrizzazione almeno C^1 per la quale $\forall t \quad |r'(t)| \neq 0$. Calcoliamo $r'(t)$:

$$r'(t) = 2t\ \hat{\mathbf{i}} + 4t^3\ \hat{\mathbf{j}} \qquad \Rightarrow \qquad |r'(t)| = \sqrt{4t^2 + 16t^6}$$

Si nota facilmente che per $t = 0$ si ha $r'(t) = 0$. Ciò ci basta per concludere che non è regolare? NO! una curva si dice regolare se esiste <u>una</u> parametrizzazione per cui si verifica la condizione.
La curva si può facilmente riparametrizzare ponendo $t^* = t^2$, questa sostituzione da origine all'espressione: $r(t^*) = t^*\ \hat{\mathbf{i}} + (t^*)^2, \quad t^* > 0$. Per questa parametrizzazione si ha:

$$r'(t^*) = 1\ \hat{\mathbf{i}} + 2(t^*)\ \hat{\mathbf{j}} \qquad \Rightarrow \qquad |r'(t^*)| = \sqrt{1 + 4(t^*)^2}$$

Si può dunque concludere che la curva è regolare.

Una curva si dice chiusa se data una curva definita su un intervallo $[a, b]$ è tale che $r(a) = r(b)$. Nel caso sotto esame adottando la nuova parametrizzazione si ha che $[a, b] = [0, +\infty)$ e si può concludere facilmente che la curva non è chiusa.

Si può anche notare che la curva è piana osservando che $r'(t^*) = 0$ o più semplicemente notando che non c'è uno spostamento nella direzione z.

Per vedere che una curva non è semplice si cercano istanti di tempo diversi $t_1 \neq t_2$ che passano per lo stesso punto nello spazio ($r(t_1) = r(t_2)$), alcuni autori adottano la convenzione che $t_1, t_2 \in (a, b)$ (estremi esclusi) permettendo che esitano curve chiuse e semplici. In altre parole, con questa convenzione se si trovano istanti di tempo diversi che passano per lo stesso punto si deve vedere che gli istanti trovati non siano gli estremi, altrimenti non si può dire che la curva non è semplice.

Nella nuova parametrizzazione vediamo non esistono istanti t_i che soddisfano la condizione di non semplicità, possiamo dunque dire che la curva di partenza non è semplice? Nì, nel senso che in questo caso dipende se la convenzione adottata è quella della parametrizzazione e quella del sostegno. Adottando una convenzione, la semplicità della curva dev'essere analizzata rispetto alla parametrizzazione (che rappresenta il modo di percorrere il sostegno), si pensi ad esempio una bici in un velodromo circolare, facendo un giro esatto non passa mai due volte per lo stesso punto ma facendo più giri esistono almeno 2 istanti di tempo diversi in cui il ciclista si trova allo stesso punto della pista. Quindi con questa convenzione la semplicità dev'essere analizzata dalla parametrizzazione $r(t) = t^2\ \hat{\mathbf{i}} + t^4\ \hat{\mathbf{j}}$, assumendo il dominio $(-\infty, +\infty)$ si vede che la curva non è semplice in quanto ad esempio per $t = \pm 1$ si passa per lo stesso punto.
Adottando la convenzione del sostegno, una curva è semplicese ammette una parametrizzazione semplice, ovvero se esiste un modo di percorre il sostegno (insieme di punti descritti dalla curva) senza passare mai per lo stesso punto, continuando l'esempio del ciclista, in questo caso se la pista è circolare, esiste un modo di percorrerla senza passare per lo stesso punto (un solo giro) quindi sarebbe semplice, invece, se la pista fosse a forma di 8, non c'è modo di percorrerla tutta senza passare mai per l'incrocio.

La convenzione adottata diventa indifferente quando il sostegno presenta un "incrocio" ovvero, non è possibile disegnarla senza passare per lo stesso punto, in questi casi la curva non è semplice in entrambi le convenzioni.

(b) Calcolare la lunghezza $s(t)$ della curva, misurata fra i valori 0 e t del parametro.
La lunghezza di una curva $s(t)$ è definita come $s(t) = \int_0^t |r'(t)|\ dt$ quindi nel caso sotto esame si ha:

$$s(t) = \int_0^t |r'(t)|\ dt = \int_0^t \sqrt{1 + 4t^2}\ dt$$

La risoluzione di questo integrale richiede molti passaggi algebrici che si omettono per semplicità. La soluzione è

$$s(t) = \left[\frac{1}{2}\left(t\sqrt{1 + 4t^2} + \frac{1}{2}\ln\left(2t + \sqrt{1 + 4t^2}\right)\right)\right]_0^t$$