Integrali di linea e superficie

Lunghezza di una linea

Se consideriamo $y = f(x)$ come una funzione a valori reali parametrizzata come una curva in forma cartesiana con estremi a e b :

$$x\,\hat{\mathbf{i}} + f(x)\,\hat{\mathbf{j}} \qquad x \in [a,b]$$

allora la lunghezza della curva è pari a

$$\int_\gamma dr \equiv \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Area di una superficie

Se consideriamo $z = f(x,y)$ come una funzione a valori reali parametrizzata come una superficie in forma cartesiana :

$$x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + f(x,y)\,\hat{\mathbf{j}} \qquad x \in [a,b]\;\; y \in [c,d]$$

allora l'area della superficie è pari a :

$$\iint_\Sigma dS \equiv \iint_\Sigma \sqrt{1 + (\nabla f(x,y))^2}\,dx\,dy$$

Integrale di linea

Se consideriamo f come una funzione a valori reali che ci dice la denità puntuale allora la massa è data da:

$$\int_\gamma f \;\, dr \equiv \int_a^b f\,(\mathbf{r}(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt$$

Integrale di superficie

Se consideriamo f come una funzione a valori reali che ci dice la denità puntuale allora la massa è data da:

$$\iint_\Sigma f \;\, dS \equiv \iint_T f(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv$$

Lavoro di un campo vettoriale

Il lavoro rappresenta la risultante della forza applicata dal campo lungo direzione dello spostamento infinitesimo.

$$W = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,dr$$

Che può essere anche scritto come:

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \equiv \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

Flusso di un campo vettoriale

Il flusso rappresenta la quantità di carica, calore, acqua, o altro che attraversa la superficie Σ nell'unità di tempo.

$$\Phi = \iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS$$

Che può essere anche scritto come:

$$\iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_T \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\,du\,dv$$