Serie di Fourier

1 Calcolare la serie di Fourier della funzione $f_1 = \sin(2x)$:
In questo caso è inutile fare i conti poiché la funzione è già la serie di Fourier, infatti con Fourier quello che si cerca è esprimere una funzione periodica come combinazione lineare di sinusoidi e cosinusoidi quindi:

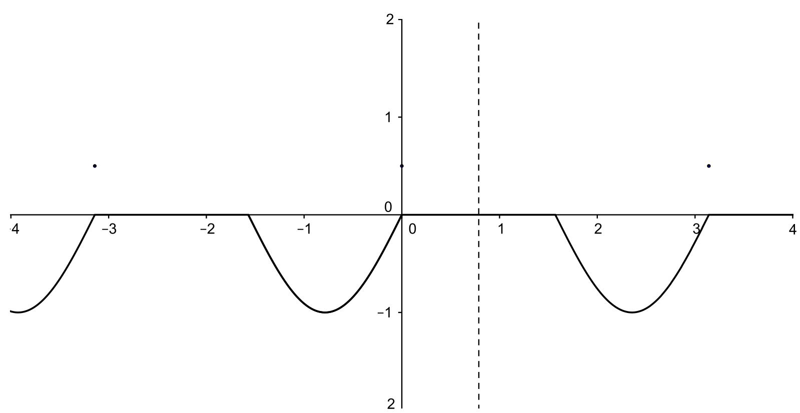
$$a_0 = 0 \qquad \forall n \ a_n = 0$$

Notiamo che essendo π periodica i termini saranno della forma $b_n \sin(2nx)$ quindi si avrà:

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{per } n = 1 \\ 0 & \forall n > 1 \end{cases}$$

2 Per la funzione $f_2 = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{per} \quad x = 0 \\ 0 & \text{per} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin(2x) & \text{per} \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$

(a) Dire se è possibile dire a priori che coefficienti saranno nulli o l'andamento dei coefficienti per $t \to \infty$



La funzione non è ne pari ne dispari quindi non possiamo stabilire a priori che i coefficienti a_n o b_n siano nulli. Però ricordando che la serie di Fourier non considera singoli punti possiamo eliminare i punti a altezza $\frac{1}{2}$ e considerare la funzione simmetrica rispetto $\frac{\pi}{4}$. Le sinusoidi e cosinusoidi contribuenti allo sviluppo in serie di Fourier devono avere le stesse simmetrie. Grafichiamo un po' di sinusoidi e cosinusoidi, in particolare per $n = 1, 2$ ricordando che alla funzione è associata una serie del tipo:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2nx) + b_n \sin(2nx)$$

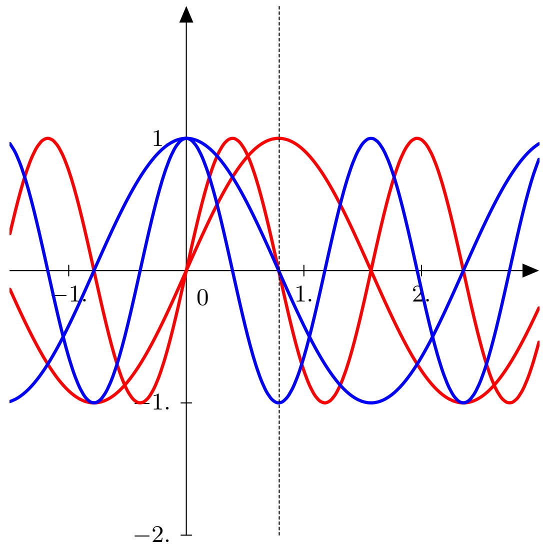


Figura 1.1: In rosso $\sin(2nx)$, in blu $\cos(2nx)$

Poiché il contributo delle sinusoidi che non hanno la simmetria rispetto $\frac{\pi}{4}$ è nullo, i termini $\cos(2x)\,[n = 1]$ e $\sin(4x)\,[n = 2]$ non compariranno nello sviluppo in serie di Fourier. Generalizzando possiamo dire che:

$$a_n = 0 \quad \forall n = 2k + 1$$

$$b_n = 0 \quad \forall n = 2k$$

(b) Dire in che senso e dove si ha la convergenza della serie di Fourier.

La serie di Fourier converge puntualmente ma non uniformemente (poiché è discontinua) in tutti i punti diversi da $k\pi$ (dove ci sono le discontinuità), in quei punti converge alla media dei limiti destro e sinistro cioè converge a 0.

Inoltre sappiamo che i coefficienti della serie di Fourier tendono a zero come

$$\frac{1}{n^{k+2}} \qquad \text{ove k è l'indice di regolarità della funzione}$$

In questo caso la funzione è C^0 quindi i coefficienti tendono a zero come $\frac{1}{n^2}$

③ Data la funzione $f(x) = \pi x - |x|x$ con $x \in [-\pi, \pi]$ e $T = 2\pi$ calcolare la serie di Fourier e discuterne la convergenza.
Per prima si realizza un'analisi qualitativa:

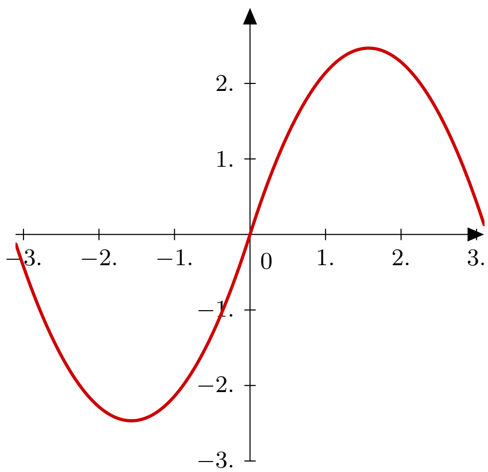


Figura 1.2

$$Funzione\ dispari \qquad \Rightarrow \qquad a_o\,, a_n\ nulli$$

Calcolo i b_n cioè:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)$$

Prima del calcolo numerico si apprezza l'esistenza di una simmetria pari rispetto a $\frac{\pi}{2}$ e si tiene in considerazione il fatto che tutti i coefficienti devono soddisfare questa proprietà.
Si graficano un po' di sinusoidi:

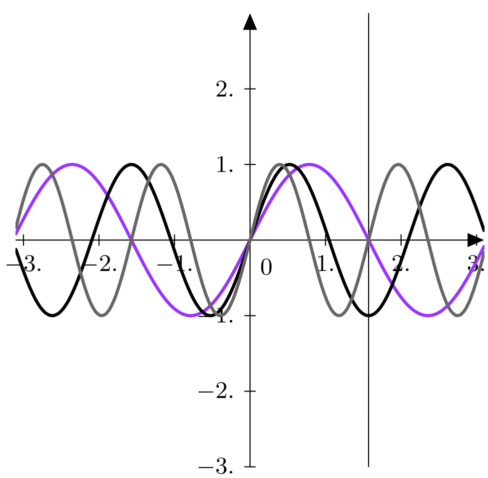


Figura 1.3

Le uniche sinusoidi che soddisfano questa proprietà di simmetria sono quelle con n dispari quindi i coefficienti con n pari saranno nulli.
Si passa ai conti:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi x - |x|x)\ \sin(nx)$$

Anziché distinguere due casi si nota dal primo grafico che la funzione $\pi x - |x|x$ è dispari, e si ricorda la regola fondamentale di parità delle funzioni:

$$\text{funzione dispari} \cdot \text{ funzione dispari} = \text{ funzione pari}$$

essendo il seno una funzione dispari si possono risparmiare un bel po' di conti e si può porre semplicemente:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} (\pi x - x^2)\ \sin(nx)$$

Integrando per parti si ha:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-(\pi x - x^2)\cos(nx)}{n} + \frac{1}{n} \int (\pi - 2x)\cos(nx) \right]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-(\pi x - x^2)\cos(nx)}{n} + \frac{1}{n} \left(\frac{(\pi - 2x)\sin(nx)}{n} - \frac{1}{n} \int 2\sin(nx) \right) \right]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-(\pi x - x^2)\cos(nx)}{n} + \frac{1}{n} \left(\frac{(\pi - 2x)\sin(nx)}{n} - \frac{2\cos(nx)}{n^2} \right) \right]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-(\pi x - x^2)\cos(nx)}{n} + \frac{(\pi - 2x)\sin(nx)}{n^2} - \frac{2\cos(nx)}{n^3} \right]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{2\,(-1)^n}{n^3} + \frac{2}{n^3} \right] \qquad = \left[\frac{4(1 - (-1)^n)}{\pi n^3} \right]$$

che si annulla per n pari confermando ancora una volta il risultato di prima. La serie di Fourier associata alla funzione è dunque:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(1 - (-1)^n)}{\pi n^3} \sin(nx)$$

oppure può essere riscritta come :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi(2k+1)^3} \sin((2k+1)x)$$

Infatti il grafico della serie è sostanzialmente identico a quello della funzione (non periodicizzata) nel intervallo contenuto nella periodicizzazione.

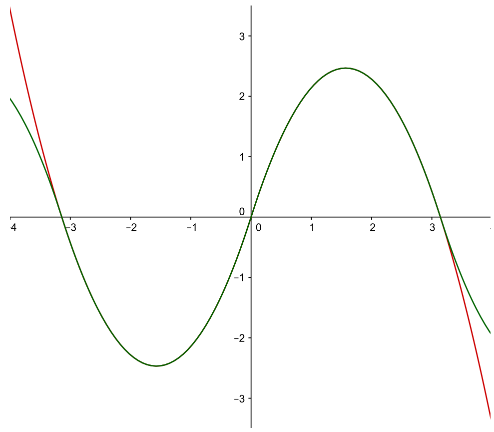


Figura 1.4

Creato da Rafael Mosca per il Politecnico di Milano