Equazioni differenziali

① Data l'equazione differenziale $y' = y^2 + 2y$

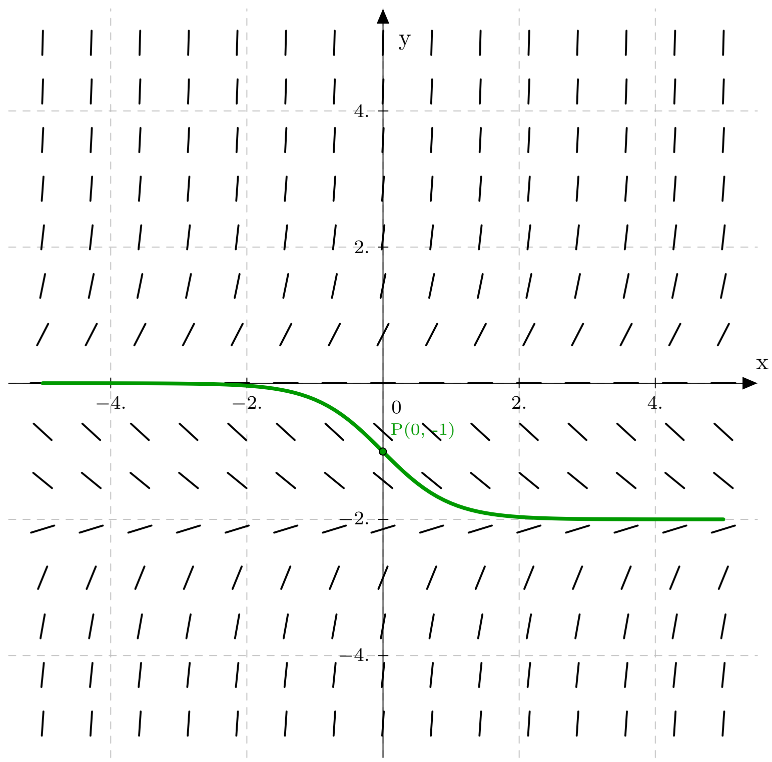
(a) Tracciare il campo di direzioni e sbozzare la soluzione che passa per il punto (0,-1).

Si comincia a per individuare le soluzioni costanti, ovvero laddove $y' = 0$ (pendenza nulla).

$$y' = 0 \qquad y' = y^2 + 2y \qquad 0 = y^2 + 2y \qquad \Rightarrow \qquad y = 0 \quad \wedge \quad y = -2$$

Si procede individuando le zone dove la pendenza è positiva, e le zone dove è negativa con lo studio delle disequazioni $y^2 + 2y > 0$ e $y^2 + 2y < 0$.

Mettendo tutto assieme si ottiene il campo di direzioni:



(b) Risolvere l'equazione differenziale e il problema di Cauchy.
L'equazione differenziale rientra nella categoria delle equazioni differenziali del primo ordine, in particolare si tratta di un'equazione differenziale di Bernoulli.
Procediamo dividendo entrambi i membri per y^α ove α è la massima potenza di y.

$$y' = y^2 + 2y \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y^2} = 1 + \frac{2y}{y^2} \qquad \frac{y'}{y^2} = 1 + 2y^{-1}$$

$$z = y^{-1} \quad \xRightarrow{Derivo} \quad z' = -y^{-2}y'$$

Facendo il cambio di variabili ottengo:

$$-z' = 1 + 2z \quad \Rightarrow \quad z' = -1 - 2z$$

Risolvendo con la formula generale di equazioni differenziali omogenee: $e^{A(t)}\left(C + \int b(t)e^{-A(t)}dt\right)$ si ottiene

$$z = e^{-2t}\left(C - \int e^{2t}dt\right) = e^{-2t}\left[C - \left(\frac{e^{2t}}{2} + C_2\right)dt\right] = Ce^{-2t} - \frac{1}{2} + C_2'e^{-2t}$$

ricordando la sostituzione si trova:

$$\frac{1}{y} = Ce^{-2t} - \frac{1}{2} + C_2e^{-2t} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{2Ce^{-2t} - 1 + 2C_2e^{-2t}}$$

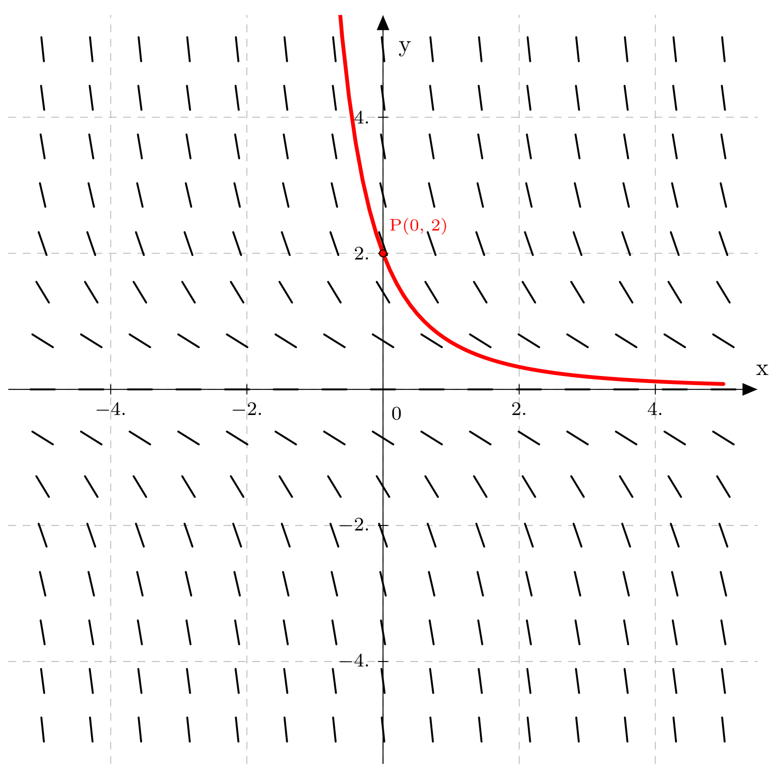
Per risolvere il problema di Cauchy ci basta sostituire i valori di y e t.

$$C^* = C + C_2 \quad \Rightarrow \quad -1 = \frac{2}{2C^* - 1} \quad \Rightarrow \quad 1 - 2C* = 2 \quad \Rightarrow \quad C^* = -\frac{1}{2}$$

2 Data l'equazione differenziale $y' = -|y|^{\frac{7}{5}}$ (Tema B 22-11-2016)

(a) Tracciare il campo di direzioni e sbozzare la soluzione che passa per il punto (0,2)

Si inizia individuando le soluzioni costanti, in questo caso esiste solo la soluzione costante $y = 0$. Successivamente non si studia il segno visto che la pendenza quando non è nulla, è negativa. Si procede sostituendo alcuni valori di y nell'equazione e graficando la corrispondente pendenza.



(b) Risolvere l'equazione differenziale Dato che c'è il modulo, procediamo ad analizzare i sotto-casi:

Per $y = 0$

si ha la soluzione costante

Per $y > 0$

$$y' = -y^{\frac{7}{5}} \quad \rightarrow \quad \frac{y'}{-y^{\frac{7}{5}}} = 1 \quad \rightarrow \quad -y^{-\frac{7}{5}}\, y' = 1 \quad \rightarrow \quad \int -y^{-\frac{7}{5}}\, y' = \int 1\, \mathrm{dx}$$

$$\frac{5}{2} y^{-\frac{2}{5}} = x + \mathrm{C} \quad \rightarrow \quad y^{-\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}x + \mathrm{C} \quad \rightarrow \quad y = \left(\frac{2}{5}x + \mathrm{C}\right)^{-\frac{5}{2}}$$

Per $y < 0$

$$y' = y^{\frac{7}{5}} \quad \rightarrow \quad \frac{y'}{y^{\frac{7}{5}}} = 1 \quad \rightarrow \quad y^{-\frac{7}{5}}\, y' = 1 \quad \rightarrow \quad \int y^{-\frac{7}{5}}\, y' = \int 1\, \mathrm{dx}$$

$$-\frac{5}{2} y^{-\frac{2}{5}} = x + \mathrm{C} \quad \rightarrow \quad y^{-\frac{2}{5}} = -\frac{2}{5}x + \mathrm{C} \quad \rightarrow \quad y = -\left(-\frac{2}{5}x + \mathrm{C}\right)^{-\frac{5}{2}}$$

Per risolvere il problema di Cauchy basta notare che il punto (0,2) ha y positiva per cui la soluzione da utilizzare è $y = \left(\frac{2}{5}x + \mathrm{C}\right)^{-\frac{5}{2}}$

$$2 = \left(\frac{2}{5} \cdot 0 + C\right)^{-\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad 2 = (C)^{-\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad C = (2)^{-\frac{2}{5}} \simeq 0,75$$

3 Data l'equazione differenziale $y'' - 4(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}} = 0$

(a) Calcolare la soluzione.

$$y'' = 4(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} = 4$$

Questa equazione differenziale si risolve notando che il membro a sinistra dell'equazione è la curvatura $k(x)$, dunque si tratta di trovare quelle funzioni che hanno curvatura costante $k(x) = 4$, le funzioni che hanno curvatura costante sono archi di circonferenza.

Ricordando che $\dfrac{1}{k(x)} = \rho(x)$ possiamo scrivere:

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \frac{1}{4^2}$$

isolando la y si trova:

$$y = C_2 \pm \sqrt{\frac{1}{16} - (x - C_1)^2}$$

(b) Che informazione danno le costanti?
Le le costanti fanno variare il punto dove è centrata la circonferenza e dunque fanno variare la posizione degli archi. Si noti che le funzioni che risolvono l'equazione differenziale sono archi di circonferenza in quanto le circonferenze non sono funzioni (non soddisfano la proprietà di biunivocità).

Creato da Rafael Mosca per il Politecnico di Milano