Problema: determinar a distância percorrida d por um raio de luz do sol dentro da atmosfera terrestre como função do ângulo zenital z.

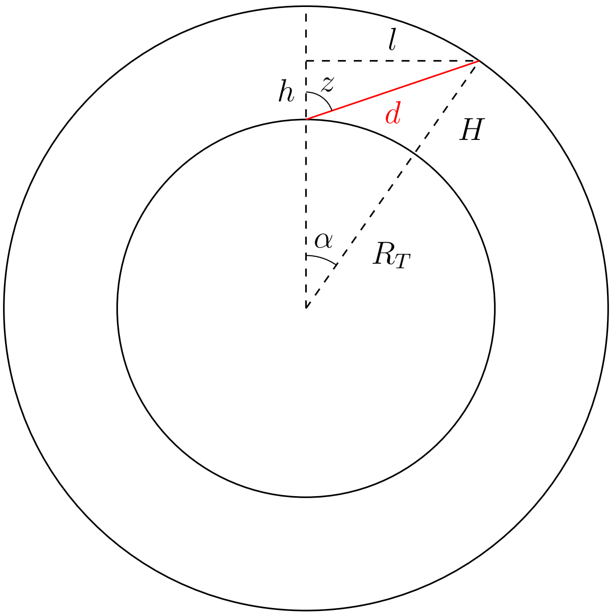

Figura 1: Caminho do raio de luz na atmosfera.

Da figura (1) extraímos as seguintes expressões trigonométricas:

$$d^2 = h^2 + l^2 \; ; \; \text{(Pitágoras)}, \tag{1}$$

$$(H + R_T)^2 = (h + R_T)^2 + l^2 \; ; \; \text{(Pitágoras)}, \tag{2}$$

e

$$\cos(z) = \frac{h}{d}. \tag{3}$$

Tomamos $(2) - (1)$:

$$\begin{aligned} (H + R_T)^2 - d^2 &= (h + R_T)^2 - h^2 \qquad (4)\\ H^2 + 2HR_T + \cancel{R_T{}^2} - d^2 &= \cancel{h^2} + 2hR_T + \cancel{R_T{}^2} - \cancel{h^2} \qquad (5) \end{aligned}$$

$$d^2 + 2hR_T - (H^2 + 2HR_T) = 0 \tag{6}$$

e agora usamos (3):

$$d^2 + 2(d\cos(z))R_T - (H^2 + 2HR_T) = 0. \tag{7}$$

Vemos que (7) é uma equação de segunda ordem para d. Logo,

$$d = \frac{-2R_T\cos(z) \pm \sqrt{(2R_T\cos(z))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-(H^2 + 2HR_T))}}{2} \tag{8}$$

donde

$$d = \frac{-\cancel{2}R_T\cos(z) \pm \cancel{2}R_T\cos(z)\sqrt{1+\frac{H(H+2R_T)}{{R_T}^2\cos^2(z)}}}{\cancel{2}}. \tag{9}$$

Usamos agora o fato de que dado que o raio da Terra ($\sim 6500km$) é muito maior do que a espessura da atmosfera terrestre ($\sim 12km$), o que faz com que a fração que aparece dentro da raiz quadrada em (9) tenha valor inferior a 1 o que por sua vez nos permite lançar mão da aproximação binomial em primeira ordem:

$$\begin{aligned} d &\approx R_T\cos(z)(-1 \pm 1 + \frac{H(H+2R_T)}{2{R_T}^2\cos^2(z)}) && (10)\\ &\approx R_T\cos(z)(\cancel{-1} + \cancel{1} + \frac{H(H+2R_T)}{2{R_T}^2\cos^2(z)}) && (11)\\ &\approx \cancel{R_T\cos(z)}(\frac{H(H+2R_T)}{2{R_T}^{\cancel{2}}\cos^{\cancel{2}}(z)}) && (12)\end{aligned}$$

Onde de (10) para (11) restringimos apenas ao sinal positivo já que, sendo d uma distância não pode ser negativa.

Finalmente temos a distância percorrida pelo raio de luz do sol no interior da atmosfera até atingir a superfície do planeta à um ângulo zenital z:

$$\boxed{d \approx \frac{H(H+2R_T)}{2R_T\cos(z)}.} \tag{13}$$