TP Méthode approchées UMIN215

Bruno Y., Chlöé T., Julien D. et Rémi F.

13 avril 2015

Partie Théorique

Exercice 1 - Sur le problème de la couverture sommet minimale : trois approches différentes

1. a) On a :

$$x_i = \begin{cases} 0 \text{ si } x_i \notin S \\ 1 \text{ si } x_i \in S \end{cases}$$

On peut donc déduire que le (PL) donne bien une solution optimale. z compte bien le nombre de sommets dans S. Si $(v_r, v_s) \in E$, on a x_r et x_s qui valent 1 : il faut qu'il y ait au moins un sommet couvre l'arête.

b) On ne peut pas avoir $x_s + x_r = 1$ car v_r et v_s peuvent tout deux appartenir à S.

c) Soit une solution optimale, alors elle respecte les contraintes du (PL) et correspond à un z minimum : elle correspond donc à une solution du (PL).

d) Supposons qu'il existe $(v_r, v_s) \in E$ tel que $x_r < \frac{1}{2}$ et $x_s < \frac{1}{2}$, alors on aurait $x_r + x_s < 1$, ce qui viole une contrainte. Donc $x_r \geq \frac{1}{2}$ ou $x_s \geq \frac{1}{2}$.

e) Soit I une instance quelconque, alors on a $\rho = \frac{max(A(I))}{Opt(I)}$. Par ailleurs, on sait que :

$$Opt(I) = S_{ILP}(I) \tag{1}$$

$$S_{LP}(I) \leq S_{ILP}(I) \tag{2}$$

On peut déduire de (2) que $\frac{1}{S_{LP}(I)} \geq \frac{1}{S_{ILP}(I)}$. Donc on arrive à l'inéquation suivante : $\frac{A(I)}{S_{LP}(I)} \geq \frac{A(I)}{Opt(I)}$. Notons que $A(I)$ est la solution obtenue en arrondissant la solution de $S_{LP}(I)$.
On peut remarquer que puisqu'il existe i tel que $x_i \geq \frac{1}{2}$, donc $2x_i \geq 1$.
On peut donc écrire :

$$A(I) = \sum_{i, x_i \geq \frac{1}{2}} 1 \leq \sum_{i \in S^*} 2x_i \leq 2 \sum_{i=1}^{n} x_i = 2Opt(I). \tag{3}$$

On déduit finalement que $\frac{A(I)}{Opt(I)} = 2$ et $\rho = \frac{max(A(I))}{Opt(I)} \leq 2$ Montrons que $\rho = 2$ en considérons le cas suivant :

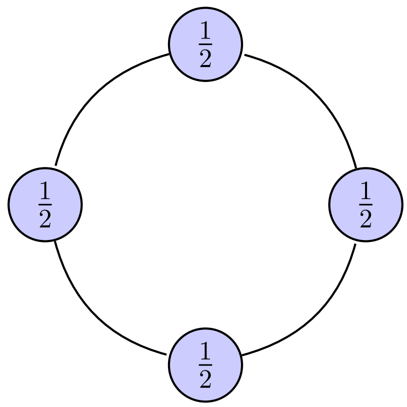


Figure 1 – Résultat donné par l'Algorithme 1 pour le problème Vertex cover.

On peut remarquer qu'ici, $A(I) = 4$ alors que $Opt(I) = 2$.

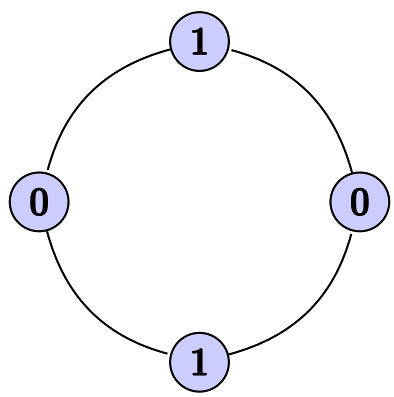


Figure 2 – Résultat optimal pour le problème Vertex cover.

On peut donc finalement conclure que $\rho = \frac{max(A(I))}{OptI} = 2$.

f) i) Pour obtenir notre nouvel programme linéaire (PL'), il suffit simplement d'introduire les poids $w_i \in \mathbf{N}^*, i \in \{1, \ldots, n\}$ et de poser $z = \sum_{j=1}^{n} w_i x_i$.

$$PL' \begin{cases} \min\ z = \sum_{j=1}^{n} w_i x_i \\ x_r + x_s \geq 1, \forall \{v_r, v_s\} \in E \\ x_j \in \{0, 1\}, j \in \{1, \ldots, n\} \end{cases}$$

ii) On peut remplacer le programme linéaire en nombre entiers (PL') par un autre utilisant une matrice A. Pour un graphe $G = (V, E)$, la matrice A utilisé dans le programme linéaire en nombres entiers possède les caractéristiques suivantes :
— A à $2 * |E|$ lignes et $|V|$ colonnes.
— Chaque ligne apparaît deux fois dans la matrice.
— La matrice A est constituée uniquement de 1 et il n'y a que deux 1 par ligne.

$$PL' \begin{cases} \min\ z = \sum_{j=1}^{n} w_i x_i \\ A * \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ x_j \in \{0,1\}, j \in \{1, \dots, n\} \end{cases}.$$

iii) A terminer..

2. a) Dans les pires des cas, les deux sommets de chaque arêtes sont pris : $A(I) \geq 2 * m$ avec $m = |E|$. De plus, il y a toujours, au moins un sommet par arête dans la solution optimale : $Opt(I) \geq n$. On peut donc écrire que $\frac{1}{Opt(I)} \leq n$ et donc que $\frac{A(I)}{Opt(I)} \leq 2$.

Exercice 2 - Sur le problème du couplage maximum de poids minimum : un début d'étude polyédrale sur le problème de couplage

Exercice 3 - Sur le problème de la coupe maximum

Exercice 4 - Sur le problème de Partition

Exercice 5 - Sur le problème du sac à dos simple

Exercice 6 - Programmation dynamique

Exercice 7 - Sur le produit matriciel

Exercice 8 - Résolution numérique

Exercice 9 - Seuil d'approximation pour le problème Bin Packing

Exercice 10 - Seuil d'approximation pour le problème de la coloration de sommets (reps. d'arêtes)

Exercice 11 - Comparaisons branch and bound and branch and cut

1. On peut tracer les droites correspondantes aux contraintes de PL_0 :
   - $y_1 = 5 - \frac{3}{2}x$
   - $y_2 = \frac{17}{2} - \frac{2}{5}x$

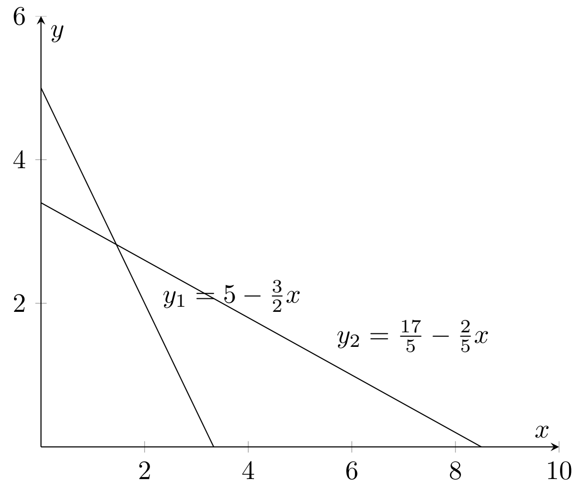
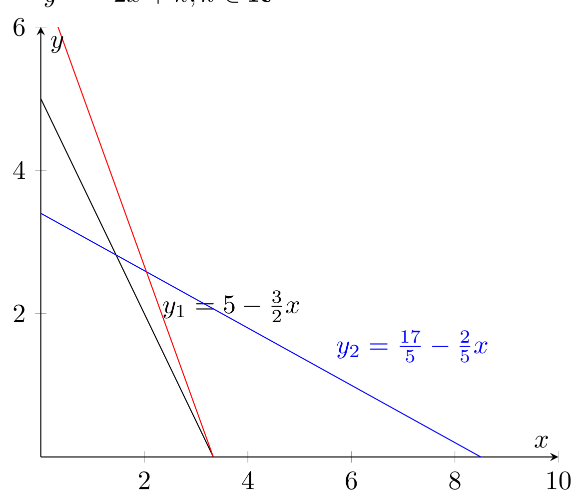


FIGURE 3 – Représentation des équations de PL_0.

   Le polytope associé aux équations de PL_0 est donc celui formé par les points : $P_0(0,0)$, $P_1(0, \frac{17}{5})$, $P_2(\frac{16}{11}, \frac{31}{11})$ et $P_3(\frac{10}{3}, 0)$

2. On peut tracer la fonction objective :
   - $y = -2x + k, k \in \mathbf{R}$



   La solution optimale pour PL_0 est donc $x_1 = \frac{10}{3}$ et $x_2 = 0$ avec $z = \frac{20}{3}$.

3. On commence par reprendre le programme linéaire donné :

$$PL_0 \begin{cases} \max\ z(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 17 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On ajoute les variables d'écarts x_3 et x_4 pour obtenir PL_1 :

$$PL_1 \begin{cases} \max\ z(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 17 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

			2	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	17	2	5	1	0
0	x_4	10	3	2	0	1
	z	0	-2	-1	0	0

			2	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	$\frac{31}{3}$	0	$\frac{11}{3}$	1	$\frac{-2}{3}$
2	x_1	$\frac{10}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
	z	$\frac{20}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$

Puisque que l'on a $\frac{31}{3} = \frac{11}{3}x_2 + x_3 - \frac{2}{3}x_4$, on peut déduire que : $\frac{11}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_4 \geq \frac{1}{3}$.
Puisque l'on a $\frac{10}{3} = x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4$, on peut donc déduire que $x_4 = 10 - 3x_1 - 2x_2$.
On obtient finalement la contrainte : $2x_1 + 5x_2 \geq 7$.
Le tableau final donne :

			2	1	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	10	0	0	1	0	1
2	x_1	$\frac{36}{11}$	1	0	0	$\frac{5}{11}$	$\frac{2}{11}$
1	x_2	$\frac{1}{11}$	0	1	0	$\frac{-2}{11}$	$\frac{-3}{11}$
	z	$\frac{73}{11}$	0	0	0	$\frac{8}{11}$	$\frac{1}{11}$

On choisi l'équation $\frac{36}{11} = x_1 + \frac{5}{11}x_4 + \frac{2}{11}x_5$, on déduit donc $\frac{5}{11}x_4 + \frac{2}{11}x_5 \geq \frac{3}{11}$. Ce qui revient à écrire par l'équation précédente que $\frac{36}{11} - x_1 \geq \frac{3}{11}$ et donc que $x_1 \leq 3$.

			2	1	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	$\frac{17}{2}$	0	0	1	$\frac{-5}{2}$	0	$\frac{11}{2}$
0	x_4	$\frac{3}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{-11}{2}$
1	x_2	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-3}{2}$
2	x_1	3	1	0	0	0	0	1
	z	$\frac{13}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

On sélectionne l'équation $\frac{1}{2} = x_2 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_6$. Donc on déduit que $\frac{1}{2} \leq \frac{-3}{2}x_6$

Partie Pratique

2.1 Programmation dynamique

2.2 Branch and Bound

2.3 Comparaisons entre un algorithme de complexité exponentielle et un FP-TAS