

Algèbre 2

Dimension finie

Question 1/18

Matrice de passage

Réponse 1/18

$$P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(\text{id}) = [\mathcal{B}_2]_{\mathcal{B}_1}$$

Question 2/18

Matrice associée à une composition

Réponse 2/18

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

Question 3/18

Dimension d'une somme directe

Réponse 3/18

$$\dim \left(\bigoplus_{i=1}^n (E_i) \right) = \sum_{i=1}^n (\dim(E_i))$$

Question 4/18

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est inversible

Réponse 4/18

$$u \in \mathrm{GL}(E)$$

La réciproque est vraie

Question 5/18

Rang d'une famille

Réponse 5/18

$$\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n) = \dim(\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n))$$

Question 6/18

Produit matriciel avec l'évaluation

Réponse 6/18

$$[f(X)]_{\mathcal{C}} = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)[X]_{\mathcal{B}}$$

Question 7/18

Formule de Grassmann

Réponse 7/18

$$\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$$

Question 8/18

Dimension d'un supplémentaire S de F dans E

Réponse 8/18

$$\dim(S) = \dim(E) - \dim(F)$$

Question 9/18

Formule de changement de base

Réponse 9/18

$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ des bases de E , $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ des bases de F

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2}(f) &= P_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_1, \mathcal{B}_1}(f) P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \\ &= \left(P_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{C}_2}\right)^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_1, \mathcal{B}_1}(f) P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}\end{aligned}$$

Question 10/18

Théorème du rang

Réponse 10/18

$$\dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f) = \dim(E)$$

Question 11/18

Majoration du rang d'une application linéaire
 $u \in \mathcal{L}(E, F)$

Réponse 11/18

$$\operatorname{rg}(u) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$$

Question 12/18

Effet d'une composition sur le rang

Réponse 12/18

$$\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$$

Si v est injective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$

Si u est surjective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$

Question 13/18

Rang d'une application linéaire

Réponse 13/18

$$\operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{Im}(u))$$

Question 14/18

Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Réponse 14/18

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

Question 15/18

Conservation de l'image et du noyau pour les matrices

Réponse 15/18

$$\begin{aligned} M &\in \mathcal{M}_{n,p}(K), P \in \mathrm{GL}_n(K), Q \in \mathrm{GL}_n(K) \\ \ker(PM) &= \ker(M) \\ \mathrm{Im}(MQ) &= \mathrm{Im}(M) \end{aligned}$$

Question 16/18

Dimension d'un produit cartésien

Réponse 16/18

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

Question 17/18

Conservation du rang pour les matrices

Réponse 17/18

$$M \in \mathcal{M}_{n,p}(K), P \in \mathrm{GL}_n(K), Q \in \mathrm{GL}_n(K) \\ \mathrm{rg}(PMQ) = \mathrm{rg}(M)$$

Question 18/18

Image d'une matrice

Réponse 18/18

$$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}(C_1(M), \dots, C_n(M))$$