

# Analyse

## *Calcul différentiel*

## Question 1/15

Hessienne

## Réponse 1/15

$$H_f(a) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} = J_{\nabla f}(a)$$

## Question 2/15

$$L \in \mathcal{L}(F, G)$$
$$d(L \circ f)(a)$$

## Réponse 2/15

$$L \circ \mathrm{d}f(a)$$

## Question 3/15

Jacobienne

## Réponse 3/15

$$J_f(a) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a)} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a)} & \cdots & \boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)} & \cdots & \boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(a)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \boxed{\frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a)} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{d}f_i(a))$$

## Question 4/15

$$d(f \circ g)(a)$$



## Réponse 4/15

$$df(g(a)) \circ df(a)$$

## Question 5/15

Différentielle de  $f$  en  $a$

## Réponse 5/15

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(a) &\in \mathcal{L}(E, F) \\ f(a+h) &= f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + o_{\|h\| \rightarrow 0}(\|h\|) \end{aligned}$$

## Question 6/15

$$\nabla f(a)$$

## Réponse 6/15

L'unique vecteur vérifiant  
 $df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$

## Question 7/15

Théorème de Schwarz

## Réponse 7/15

$$\begin{array}{c} \text{Si } f \text{ est } \mathcal{C}^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \end{array}$$

## Question 8/15

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial x_j}(a)$$



## Réponse 8/15

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial y_k}(g(a)) \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(a) \right)$$

## Question 9/15

$$(f \circ \gamma)'(t)$$
$$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$$

## Réponse 9/15

$$df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

## Question 10/15

$$D_h(f)$$

## Réponse 10/15

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{f(a + th) - f(a)}{t} \right)$$

## Question 11/15

Règle de la chaîne

## Réponse 11/15

$$\frac{\partial f \circ \varphi}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial y_k}(\varphi(a)) \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(a) \right)$$

## Question 12/15

Lien différentielle – intégration



## Réponse 12/15

$$f(b) - f(a) = \int_a^b (\mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)) \, \mathrm{d}t$$

## Question 13/15

Différentielle avec les dérivées partielles

## Réponse 13/15

$$df(a) \cdot h = \sum_{k=1}^n \left( h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right)$$

## Question 14/15

Lien entre  $D$  et  $d$  pour une fonction différentiable

## Réponse 14/15

$$df(a) \cdot h = D_h f(a)$$

## Question 15/15

$f$  est différentiable sur un ouvert  $U$  en  $a \in U$

## Réponse 15/15

$$\begin{aligned} f(a + h) &= f(a) + u_a(h) + \|h\|\varepsilon_a(h) \\ u_a &\in \mathcal{L}(E, F) \\ \lim_{\|h\| \rightarrow 0} (\varepsilon_a(h)) &= 0 \end{aligned}$$