Algèbre 2
Algèbre linéaire

Question 1/31

Un ensemble E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

E est un $\mathbb{K}$-ev

Réponse 1/31

$(E, +)$ est un groupe abélien

E est muni d'une loi de composition externe $\cdot$

avec $\forall(\lambda, \mu, x, y) \in \mathbb{K}^2 \times E^2$

$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ (associativité externe ou pseudo-associativité)

$1_{\mathbb{K}}x = x$ (compatibilité du neutre de $(\mathbb{K}, \times)$)

$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (distributivité de $\cdot$ sur $+_E$)

$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (distributivité de $\cdot$ sur $+_{\mathbb{K}}$)

Question 2/31

Structure de $\mathcal{L}(E, F)$

Réponse 2/31

$\mathbb{K}$-ev

Question 3/31

Automorphisme d'espaces vectoriels

Réponse 3/31

Endomorphisme d'espaces vectoriels bijectif

$\mathrm{GL}(E)$

Question 4/31

Si E est un $\mathbb{K}$-ev

Un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel de E

Réponse 4/31

F est stable par les lois $+$ et $\cdot$ et les lois induites définissent sur F une structure d'espace-vectoriel

Question 5/31

Famille génératrice de E

Réponse 5/31

$$\forall x \in E \; \exists (\lambda_i)_{i \in I}, \; x = \sum_{i \in I} (\lambda_i x_i)$$

$$\mathrm{Vect}\big((x_i)_{i \in I}\big) = E$$

Question 6/31

Diagonalisation d'une symétrie

Réponse 6/31

$$s = \ker(s + \mathrm{id}) \oplus \ker(s - \mathrm{id})$$

Question 7/31

Structure de $\ker(f)$

$$f : E \to F$$

Réponse 7/31

Sous-espace vectoriel de E

Question 8/31

Si E est un espace vectoriel et $F \subset E$

Caractérisation(s) des sous-espaces vectoriels

Réponse 8/31

$$0 \in F$$
$$\forall (x, y, \lambda) \in F^2 \times \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$$

Question 9/31

Si E est un $\mathbb{K}$-ev et $X \subset E$

$\mathrm{Vect}(X)$

Réponse 9/31

Plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X

Question 10/31

Si $(A, +, \times)$ est un anneau et $\mathbb{K}$ un corps

A est une $\mathbb{K}$-algèbre

Réponse 10/31

$$\forall(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times A^2$$
$$\lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y)$$

Question 11/31

Caractérisation géométrique des symétries

Réponse 11/31

s est une symétrie si et seulement s'il existe deux sous-espaces F et G de E tels que

$F \oplus G = E$ avec $\forall (f, g) \in F \times G$

$$s(f+g) = f - g$$

$$F = \ker(s - \mathrm{id}),\ G = \ker(s + \mathrm{id})$$

Une symétrie est une symétrie géométrique par rapport à $\ker(s - \mathrm{id})$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{id})$

Question 12/31

Endomorphisme diagonalisable

$(b_i)_{i \in I}$ une base de E

Réponse 12/31

$$\forall i \in I,\ \exists \lambda_i \in \mathbb{K},\ f(b_i) = \lambda_i b_i$$

Les λ_i sont les valeurs propres

Si $x \neq 0$, $f(x) = \lambda x$ est un vecteur propre associé à λ

$\ker(f - \lambda \mathrm{id})$ est le sous-espace propre de f associé à λ

Question 13/31

Caractérisation géométrique des projecteurs

Réponse 13/31

p est un projecteur si et seulement s'il existe deux sous-espaces F et G de E tels que

$$F \oplus G = E \text{ avec } \forall (f, g) \in F \times G \; p(f+g) = f$$

$$F = \operatorname{im}(p),\ G = \ker(p)$$

Un projecteur est une projection géométrique sur $\operatorname{im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$

Question 14/31

Endomorphisme nilpotent

$u \in \mathcal{L}(E)$

Réponse 14/31

$$\exists n \in \mathbb{N},\ u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Question 15/31

Structure des polynomes annulateurs

Réponse 15/31

Idéal de $\mathbb{K}[X]$

Question 16/31

Projecteur

Réponse 16/31

$$p \circ p = p$$

Question 17/31

Somme directe

Réponse 17/31

$E \oplus F$ est directe si et seulement si

$$E \cap F = \{0\}$$

Question 18/31

$\varphi : E \times F \to G$ est bilinéaire

Réponse 18/31

$$\forall (x, x', y, y', \lambda) \in E^2 \times F^2 \times \mathbb{K}$$
$$\varphi(\lambda x + x', y) = \lambda \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$$
$$\varphi(x, \lambda y + y') = \lambda \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$$

Question 19/31

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev

$f : E \to F$ est une application linéaire

Réponse 19/31

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ \ f(\lambda x) = \lambda f(x)$$
$$\forall (x, y) \in E^2,\ \ f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Question 20/31

Structure de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$

Réponse 20/31

Groupe

Question 21/31

Structure de $\mathcal{L}(E)$

Réponse 21/31

$(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre

Question 22/31

Polynome annulateur

$P \in \mathbb{K}[X]$ est annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$

Réponse 22/31

$$P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Question 23/31

Endomorphisme d'espaces vectoriels

Réponse 23/31

Application linéaire de E dans lui-même

$$\mathcal{L}(E)$$

Question 24/31

Symétrie

Réponse 24/31

$$s \circ s = \mathrm{id}$$

Question 25/31

Image directe et réciproque de sous-espaces vectoriels par un homomorphisme

Réponse 25/31

Si E et F sont deux groupes, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire, E' et F' deux sous-espaces vectoriels de E et F

$f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F

$f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de F

Question 26/31

Caractérisation de l'image et diagonalisation d'un projecteur

Réponse 26/31

$$\operatorname{im}(p) = \ker(p - \operatorname{id})$$
$$E = \ker(p) \oplus \ker(p - \operatorname{id})$$

Question 27/31

$$\mathrm{Vect}(X) + \mathrm{Vect}(Y)$$

Réponse 27/31

$$\mathrm{Vect}(X \cup Y)$$

Question 28/31

Famille libre de E

Réponse 28/31

$$\forall (\lambda_i)_{i\in I},\ \sum_{i\in I}(\lambda_i x_i) = 0 \Rightarrow \forall i \in I,\ \lambda_i = 0$$

$$\forall x \in E\ \exists ! (\lambda_i)_{i\in I},\ x = \sum_{i\in I}(\lambda_i x_i)$$

Question 29/31

Base de E

Réponse 29/31

Famille libre maximale de E

Famille génératrice minimale de E

Question 30/31

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev

Caractérisation des applications linéaires

Réponse 30/31

$$\forall(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2,\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Question 31/31

Isomorphisme d'espaces vectoriels

Réponse 31/31

Application linéaire bijective