

Analyse

Séries numériques

Question 1/19

Critère d'Abel

Réponse 1/19

Si (a_n) est une suite réelle positive décroissante de limite nulle, et la somme partielle de $\sum b_n$ est bornée, alors $\sum a_n b_n$ converge

Les suites $e^{in\alpha}$, $\cos(n\alpha)$ et $\sin(n\alpha)$ vérifient les conditions pour (b_n) lorsque $\alpha \not\equiv 0 [2\pi]$

Question 2/19

Produit de Cauchy

Réponse 2/19

Si $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ sont absolument convergentes
et $c_n = \sum_{k=0}^n (a_k b_{n-k})$, alors $\sum c_n$ est absolument
convergente

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n) \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (b_n) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n (a_k b_{n-k}) \right)$$

Question 3/19

Encadrement des sommes par les intégrales
 f est continue et décroissante sur $[n_0, +\infty[$
avec $n_0 \in \mathbb{Z}$

Réponse 3/19

$$\begin{aligned} & \int_{n_0+1}^{n+1} (f(t)) \, dt \\ & \leq \sum_{k=n_0+1}^n (f(k)) \leq \\ & \int_{n_0}^n (f(t)) \, dt \end{aligned}$$

Question 4/19

Convergence absolue

Réponse 4/19

$\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge
Si $\sum |u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge

Question 5/19

Série alternée

Réponse 5/19

$\sum u_n$ est alternée s'il existe une suite (a_n) positive décroissante de limite nulle telle que

$$u_n = (-1)^n a_n$$

Question 6/19

Comparaison par dominance

Réponse 6/19

$$u_n = O(v_n)$$

Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge

Si $\sum u_n$ ou $\sum |u_n|$ diverge alors $\sum v_n$ diverge

Question 7/19

$$\sum_{i \in I} (a_i)$$

Réponse 7/19

$$\sup \left(\left\{ \sum_{i \in J} (a_i), \quad J \in \mathcal{P}_f(I) \right\} \right)$$

Question 8/19

Formule du binôme négatif

Réponse 8/19

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \left(\frac{n!}{(n-p)!} z^{n-p} \right) = \frac{p!}{(1-z)^{p+1}}$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\binom{n+p}{p} z^n \right) = \frac{1}{(1-z)^{p+1}}$$

Question 9/19

Sommabilité

Réponse 9/19

(a_i) est sommable si $\sum_{i \in I} (|a_i|) < +\infty$

Question 10/19

Série de Bertrand

Réponse 10/19

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta}(n)} \right)$$

Une série de Bertrand converge si et seulement si $(\alpha, \beta) > (1, 1)$ pour l'ordre lexicographique

Question 11/19

$\sum u_n$ diverge grossièrement

Réponse 11/19

(u_n) ne tend pas vers 0

Question 12/19

Caractérisation par ε de la somme

Réponse 12/19

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(I), \forall K \in \mathcal{P}_f(I)$$
$$J_\varepsilon \subset K \Rightarrow \left| S - \sum_{i \in K} (a_i) \right| \leq \varepsilon$$

Question 13/19

Règle de d'Alembert

Réponse 13/19

Si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow \ell$ où $0 \leq \ell < 1$, alors $\sum u_n$
converge absolument

Si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow \ell$ où $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge
grossièrement

Question 14/19

Série de Riemann

Réponse 14/19

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} \right)$$

Une série de Riemann converge si et seulement
si $\alpha > 1$

Question 15/19

Théorème de comparaison des séries à termes positifs

Réponse 15/19

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq v_n$$

Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge

Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge

Question 16/19

$$\ell^1(I, X)$$

Réponse 16/19

Ensemble des familles sommables indexées sur
 I à valeurs dans $X \subset \mathbb{C}$

Question 17/19

Semi-convergence

Réponse 17/19

Convergence sans convergence absolue

Question 18/19

Théorème spécial de convergence des séries
alternées

Réponse 18/19

Une série alternée est convergente

Les sommes partielles sont du signe du premier
terme

Les restes sont du signe de leur premier terme
et de valeur absolue plus petite que celle de ce
dernier

Question 19/19

Règle de Riemann

Réponse 19/19

S'il existe $\alpha > 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ est bornée,
alors $\sum u_n$ converge

Si (nu_n) est minorée par $m > 0$ à partir de
 $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum u_n$ diverge