Analyse complexe
Théorème des résidus

Question 1/8

CNS pour que U soit élémentaire

Réponse 1/8

$$U \text{ est simplement connexe}$$
$$U = \mathbb{C} \text{ ou } U \text{ est biholomorphe à } D(0,1)$$

Question 2/8

Un ouvert U de $\mathbb{C}$ est élémentaire

Réponse 2/8

U est non vide, connexe et toute fonction holomorphe sur U admet une primitive sur U

Question 3/8

$I(a, \gamma)$ pour un lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Réponse 3/8

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}$$

Question 4/8

Transfert du caractère élémentaire par un holomorphisme

Réponse 4/8

Si $\varphi : U_1 \to U_2$ est un biholomorphisme et U_1 est élémentaire alors U_2 est élémentaire

Question 5/8

$$\operatorname{Res}(f; z)$$

Réponse 5/8

Coefficient a_{-1} du développement en série de Laurent de f en z

Question 6/8

Indice du lacet $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ continu par rapport à $z \in \mathbb{C}$

Réponse 6/8

$$\mathit{\Phi}(\beta) - \mathit{\Phi}(\alpha) \text{ où } \mathit{\Phi}(t) \text{ est continue et vérifie}$$
$$\varphi(t) = \exp(2\mathrm{i}\pi\mathit{\Phi}(t))$$

Question 7/8

Stabilité du caractère ouvert par union

Réponse 7/8

Si U_1 et U_2 sont élémentaires et $U_1 \cap U_2$ est connexe alors $U_1 \cup U_2$ est élémentaire
Si (U_n) est une suite croissante d'ouverts élémentaires alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ est élémentaire

Question 8/8

Théorème des résidus

Réponse 8/8

Si U est un ouvert élémentaire de $\mathbb{C}$, F un ensemble fini de points de U, $f \in H(U \setminus F)$ et γ un lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans $U \setminus F$ alors

$$\int_\gamma (f(z))\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi \sum_{a\in F} I(a\gamma)\,\mathrm{Res}(f;a)$$