Analyse
Séries Numériques

Question 1/17

Formule du binôme négatif

Réponse 1/17

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n!}{(n-p)!} z^{n-p} \right) = \frac{p!}{(1-z)^{p+1}}$$

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\binom{n+p}{p} z^n \right)$$

Question 2/17

Produit de Cauchy

Réponse 2/17

Si $\sum a_n$ et $\sum\limits_{n} b_n$ sont absolument convergentes et $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(a_k b_{n-k})$, alors $\sum c_n$ est absolument convergente

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n)\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(b_n)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k b_{n-k})\right)$$

Question 3/17

Théorème de comparaison des séries à termes positifs

Réponse 3/17

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge

Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge

Question 4/17

Règle de Riemann

Réponse 4/17

S'il existe $\alpha > 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ est bornée,
alors $\sum u_n$ converge
Si (nu_n) est minorée par $m > 0$ à partir de
$n \in \mathbb{N}$, alors $\sum u_n$ diverge

Question 5/17

Théorème spécial de convergence des séries alternées

Réponse 5/17

Une série alternée est convergente
Les sommes partielles sont du signe du premier terme
Les restes sont du signe de leur premier terme et de valeur absolue plus petite que celle de ce dernier

Question 6/17

Convergence absolue

Réponse 6/17

$$\sum u_n \text{ converge absolument si } \sum |u_n| \text{ converge}$$
$$\text{Si } \sum |u_n| \text{ converge alors } \sum u_n \text{ converge}$$

Question 7/17

Série alternée

Réponse 7/17

$\sum u_n$ est alternée s'il existe une suite (a_n) positive décroissante de limite nulle telle que

$$u_n = (-1)^n a_n$$

Question 8/17

Critère d’Abel

Réponse 8/17

Si (a_n) est une suite réelle positive décroissante de limite nulle, et la somme partielle de $\sum b_n$ est bornée, alors $\sum a_n b_n$ converge
Les suites $\mathrm{e}^{in\alpha}$, $\cos(n\alpha)$ et $\sin(n\alpha)$ vérifient les conditions pour (b_n) lorsque $\alpha \not\equiv 0 \ [2\pi]$

Question 9/17

Encadrement des sommes par les intégrales

f est continue et décroissante sur $[n_0, +\infty[$

avec $n_0 \in \mathbb{Z}$

Réponse 9/17

$$\int_{n_0+1}^{n+1} (f(t))\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} (f(k)) \leqslant \int_{n_0}^{n} (f(t))\,\mathrm{d}t$$

Question 10/17

Comparaison par dominance

Réponse 10/17

$$u_n = O(v_n)$$

$$\text{Si } \sum v_n \text{ converge alors } \sum u_n \text{ converge}$$

$$\text{Si } \sum u_n \text{ ou } \sum |u_n| \text{ diverge alors } \sum v_n \text{ diverge}$$

Question 11/17

Série de Bertrand

Réponse 11/17

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}\right)$$

Une série de Bertrand converge si et seulement si $(\alpha, \beta) > (1, 1)$ pour l'ordre lexicographique

Question 12/17

Semi-convergence

Réponse 12/17

Convergence sans convergence absolue

Question 13/17

Sommabilité

Réponse 13/17

$$(a_i) \text{ est sommable si } \sum_{i \in I} (|a_i|) < +\infty$$

Question 14/17

Règle de d'Alembert

Réponse 14/17

$$\text{Si } \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ell \text{ où } 0 \leqslant \ell < 1, \text{ alors } \sum u_n \text{ converge absolument}$$

$$\text{Si } \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ell \text{ où } \ell > 1, \text{ alors } \sum u_n \text{ diverge grossièrement}$$

Question 15/17

$$\sum_{i \in I} (a_i)$$

Réponse 15/17

$$\sup\left(\left\{\sum_{i\in J}(a_i),\ \ J \in \mathcal{P}_f(I)\right\}\right)$$

Question 16/17

$$\sum u_n \text{ diverge grossièrement}$$

Réponse 16/17

(u_n) ne tend pas vers 0

Question 17/17

Série de Riemann

Réponse 17/17

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

Une série de Riemann converge si et seulement si $\alpha > 1$