

# Algèbre 1

## *Polynômes et fractions rationnelles*

## Question 1/16

Propriétés de  $\varphi: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[x]$

## Réponse 1/16

Homomorphisme d'anneaux surjectif

## Question 2/16

Structure de  $\mathbb{A}[X]$

## Réponse 2/16

Anneau commutatif

## Question 3/16

Structure de  $\mathbb{A}[X]$  si  $\mathbb{A}$  est intègre

## Réponse 3/16

Anneau intègre commutatif

## Question 4/16

$$\text{val}(P)$$



## Réponse 4/16

$$\min(\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\})$$

## Question 5/16

Interpolation de la fonction  $f$  aux points  
 $(x_1, \dots, x_n)$

## Réponse 5/16

$$P = \sum_{i=1}^n (f(x_i) L_i)$$

## Question 6/16

Un anneau commutatif  $\mathbb{B}$  est une algèbre sur  
un anneau commutatif  $\mathbb{A}$   
 $\mathbb{A}$ -algèbre  $\mathbb{B}$

## Réponse 6/16

$$\forall (\lambda, \mu, x, y) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{B}^2$$

$$(\lambda\mu)y = \lambda(\mu y)$$

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

$$1_{\mathbb{A}}x = x$$

## Question 7/16

Structure de  $\mathbb{K}(X)$

## Réponse 7/16

Corps

## Question 8/16

Relations de Viète

$P = \sum_{k=0}^n (a_k X^k)$  est scindé à racines  
 $(r_1, \dots, r_n)$



## Réponse 8/16

$$\sum_{K \in \mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)} \left( \prod_{j \in K} (r_j) \right) = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

## Question 9/16

Propriétés de  $\varphi: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[x]$  si  $\text{car}(\mathbb{K}) = 0$

## Réponse 9/16

Isomorphisme d'anneaux

## Question 10/16

Décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$

$F$  a des pôles  $(r_1, \dots, r_k)$  de multiplicité  
 $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$

## Réponse 10/16

$$F = E + \sum_{i=0}^k \left( \sum_{j=0}^{\alpha_i} \left( \frac{\lambda_{i,j}}{(X - r_i)^j} \right) \right)$$

## Question 11/16

Partie polaire d'une décomposition en éléments  
simples dans  $\mathbb{C}(X)$

$F$  a des pôles  $(r_1, \dots, r_k)$  de multiplicité  
 $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$

## Réponse 11/16

$$\sum_{j=0}^{\alpha_i} \left( \frac{\lambda_{i,j}}{(X - r_i)^j} \right)$$

## Question 12/16

$$\deg(P)$$



## Réponse 12/16

$$\max(\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\})$$

## Question 13/16

Décomposition en éléments simples de  $\frac{P'}{P}$  de  
racines  $(r_1, \dots, r_k)$  de multiplicité  
 $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$

## Réponse 13/16

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\alpha_i}{X - r_i} \right)$$

## Question 14/16

Décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$   
 $F$  avec  $Q = Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_k^{\alpha_k}$ ,  $\deg(Q_i) \leq 2$

## Réponse 14/16

$$F = E + \sum_{i=0}^k \left( \sum_{\substack{j=0 \\ \deg(A_{i,j}) < \deg(Q_i)}}^{\alpha_i} \left( \frac{A_{i,j}}{Q_i^j} \right) \right)$$

## Question 15/16

Coefficient avec le terme  $X - r$  de la  
décomposition en éléments simples de  $F = \frac{P}{Q}$   
dans  $\mathbb{C}(X)$

## Réponse 15/16

$$\lambda = \frac{P(r)}{\frac{Q}{X-r}(r)} = \frac{P(r)}{Q'(r)}$$

## Question 16/16

$i$ -ième polynôme interpolateur de Lagrange



## Réponse 16/16

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left( \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right)$$