Analyse
Intégration

Question 1/19

Structure de $\mathrm{Esc}([a,b])$

Réponse 1/19

Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$

Question 2/19

Pas d'une subdivision σ

Réponse 2/19

$$p(\sigma) = \max_{i \in [\![0, n-1]\!]} (\sigma_{i+1} - \sigma_i)$$

Question 3/19

Subdivision associée à $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

Réponse 3/19

Subdivision de $[a, b]$ telle que f soit constante sur les $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$

Question 4/19

Fonction continue par morceaux sur un intervalle I

Réponse 4/19

f est continue sur tout segment inclus dans I

Question 5/19

Sommes de Riemann

Réponse 5/19

$$\text{Si } \sigma^n = (\sigma_{n,k})_{k\in[\![1,\ell_n]\!]} \text{ une subdivision de } [a,b]$$
$$\text{tel que } \lim_{n\to+\infty}(p(\sigma^n)) = 0 \text{ et } x_{n,k} \in \,]\sigma_{n,k},\sigma_{n,k+1}[$$
$$\int_a^b (f(x))\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\ell_n}(p_{n,k}\times f(x_{n,k}))\right)$$
$$p_{n,k} = \sigma_{n,k+1} - \sigma_{n,k}$$

Question 6/19

Subdivision d'un intervalle $[a, b]$

Réponse 6/19

$$\sigma = (a = \sigma_0 < \cdots < \sigma_n = b)$$

Question 7/19

Relation de raffinement

Réponse 7/19

$$\sigma \leqslant \tau \Leftrightarrow \tau \subset \sigma$$

Question 8/19

Sommes de Riemann sur $[0, 1]$

Réponse 8/19

$$\int_0^1 (f(x))\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right)$$

Question 9/19

Intégrabilité au sens de Riemann de f sur $[a, b]$

Réponse 9/19

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists (g, h) \in \mathrm{Esc}_-(f) \times \mathrm{Esc}_+(f)$$
$$\int_a^b (h(x) - g(x))\,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

Question 10/19

$$\mathrm{Esc}_{+}(f)$$

Réponse 10/19

$$\{g \in \mathrm{Esc}([a,b]) \mid \forall x \in [a,b],\ g(x) \geqslant f(x)\}$$

Question 11/19

Fonctions continues par morceaux sur un segment

Réponse 11/19

Il existe une subdivision $a = \sigma_0 < \cdots < \sigma_n = b$ de $[a, b]$ tel que f soit continue sur les $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$ et admette une limite à droite et à gauche à chaque σ_i

Question 12/19

$$\mathrm{Esc}_{-}(f)$$

Réponse 12/19

$$\{g \in \mathrm{Esc}([a,b]) \mid \forall x \in [a,b],\ g(x) \leqslant f(x)\}$$

Question 13/19

Critère séquentiel d'intégrabilité

Réponse 13/19

$$\exists((\varphi_n),(\theta_n)) \in \left(\mathrm{Esc}([a,b])^{\mathbb{N}}\right)^2$$

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \theta_n(x)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b (\theta_n(x))\,\mathrm{d}x\right) = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b (\varphi_n(x))\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b (f(x))\,\mathrm{d}x$$

Question 14/19

Critère d'intégrabilité de f par encadrement

Réponse 14/19

$$\exists(\varphi,\theta)\in \mathrm{Esc}([a,b])^2$$
$$|f(x)-\varphi(x)|\leqslant \theta(x)\wedge \int_a^b(\theta(x))\,\mathrm{d}x\leqslant \varepsilon$$

Question 15/19

Moyenne de f sur $[a, b]$

Réponse 15/19

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x))\,\mathrm{d}x$$

Question 16/19

Structure de $\mathrm{Int}([a, b])$

Réponse 16/19

$\mathbb{R}$ espace vectoriel

Question 17/19

Intégrale de Riemann

Réponse 17/19

$$\int_a^b (f(x))\,\mathrm{d}x$$
$$= \sup\left(\int_a^b (g(x))\,\mathrm{d}x \;\middle|\; g \in \mathrm{Esc}_-(f)\right)$$
$$= \inf\left(\int_a^b (g(x))\,\mathrm{d}x \;\middle|\; g \in \mathrm{Esc}_+(f)\right)$$

Question 18/19

Intégrale d'une fonction en escalier

Réponse 18/19

$$\int_a^b (f(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} ((\sigma_{i+1} - \sigma_i) f_i)$$

f_i est la valeur constante de f sur $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$

Question 19/19

Fonctions en escalier

Réponse 19/19

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est en escalier s'il existe $\sigma = (a = \sigma_0 < \cdots < \sigma_n = b)$ telle que f soit constante sur les $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$