Moyenne de Césàro

Théorème : Moyenne de Césàro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes.

Si (u_n) converge vers ℓ, alors $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k)$ converge également, et sa limite est ℓ.

Preuve : Moyenne de Césàro

Soit (u_n) une suite tel que $u_n \to \ell$.

Montrons que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k) \to \ell$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k) - \ell\right| &= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k) - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(\ell)\right| \\
&= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k - \ell)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(|u_k - \ell|) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}(|u_k - \ell|) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n}(|u_k - \ell|) \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}(|u_k - \ell|) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}(|u_k - \ell|) + \frac{n-n_0+1}{n+1}\times\frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}(|u_k - \ell|) + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

De plus, il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que $\dfrac{1}{n_1+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1}(u_k) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Donc, pour tout $n \geqslant n_1$, $\left|\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.

Donc, $\left|\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k) - \ell\right| \to 0$.

Donc, $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k) \to \ell$.