

Topologie et calcul différentiel

Calcul différentiel

Question 1/23

Lien entre extremum local et les différentielles
de $f \in \mathcal{C}^2$

Réponse 1/23

Si $df_a = 0$ et d^2f_a est définie positive alors f admet un minimum local strict en a

Question 2/23

Uniforme continuité relative

Réponse 2/23

Soit $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b]$ est continue alors
pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in U$, il existe $\delta > 0$ tel

que si $\|x - x'\| < \delta$ alors

$$\|f(t, x) - f(t, x')\| < \varepsilon \text{ pour tout } t \in I$$

Ainsi, $x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt$ est continue

Question 3/23

$$f \in \mathcal{L}(E, F)$$
$$\mathrm{d}f_a$$

Réponse 3/23

f

Question 4/23

Différentielle d'une fonction bilinéaire $B(f, g)$

Réponse 4/23

Si f et g sont différentiables en a alors $B(f, g)$ l'est et $dB(f, g)_a = B(df_a, g) + B(f, dg_a)$

Cas particulier du produit :

$$d(fg)_a = df_a g + f dg_a$$

Question 5/23

Théorème de Hahn-Banach

Réponse 5/23

Si $v \in F$, $v \neq 0$ alors il existe $\lambda: F \rightarrow \mathbb{R}$ forme linéaire continue telle que $\lambda(v) = 0$

Question 6/23

Hessienne de f en a

Réponse 6/23

Si f est \mathcal{C}^2 , sa Hessienne en a est

$$\left(d^2 f(e_i, e_j) \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$$

Question 7/23

CNS pour $f \in \mathcal{C}^1$ en dimension finie et
 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$

Réponse 7/23

Toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ existent et
sont continues

Question 8/23

Propriétés de $\int_a^b \mathrm{d}_E f_{(t,x)} \, \mathrm{d}t$

Réponse 8/23

Si $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b]$ est continue et $d_E f: I \times U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ existe et est continue

alors $g: x \mapsto \int_a^b f(t, x) \, dt$ est \mathcal{C}^1 et

$$dg_x = \int_a^b d_E f_{(t,x)} \, dt$$

Question 9/23

Différentielle en un extremum local

Réponse 9/23

Si f admet un extremum local en a alors

$$df_a = 0$$

Question 10/23

Comportement de $f : [a, b] \rightarrow F$ si $df_x = 0$
pour tout $x \in]a, b[$

Réponse 10/23

f est constante

Question 11/23

Théorème de Schwarz

Réponse 11/23

Si $f:U \rightarrow F$ est \mathcal{C}^2 alors pour tout $a \in U$, la forme bilinéaire d^2f_a est symétrique

En dimesion finie, on obtient $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Question 12/23

Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ et
 $\mathcal{L}^2(E, F)$

Réponse 12/23

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) &\longrightarrow \mathcal{L}^2(E, F) \\ f &\longmapsto ((u, v) \mapsto f(v)(w)) \\ (v \mapsto B(v, \cdot)) &\longleftarrow B\end{aligned}$$

Question 13/23

Gradient de f en a

Réponse 13/23

L'unique vecteur $\nabla f(a)$ tel que

$$df_a(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

Question 14/23

$$R([a, b], F)$$

Réponse 14/23

Adhérence des fonctions en escalier sur $[a, b]$
 $\left(R([a, b], F), \|\cdot\|_{[a, b]} \right)$ est un espace de Banach

Question 15/23

Expression de f par rapport à sa différentielle

Réponse 15/23

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 \mathrm{d}f_{x+t(y-x)}(y-x) \, \mathrm{d}t$$

Plus généralement, si γ est un chemin \mathcal{C}^1 de x

$$\text{à } y, \quad f(y) = \int_0^1 \mathrm{d}f_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \, \mathrm{d}t$$

Question 16/23

Formule de Taylor

Réponse 16/23

Si f est \mathcal{C}^n alors

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{d^k f_a(h, \dots, h)}{k!} \right) + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} d^n f_{a+th}(h, \dots, h) dt$$

Question 17/23

f est différentiable en $a \in U$

Réponse 17/23

$$\begin{aligned} &\exists g \in \mathcal{L}(E, F) \\ f(a + h) &= f(a) + g(h) + o_{\|h\| \rightarrow 0}(\|h\|) \end{aligned}$$

Question 18/23

Caractère \mathcal{C}^1 d'une intégrale

Réponse 18/23

Si $f[a, b] \rightarrow F$ est continue alors $g : x \mapsto \int_a^x f$
est \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$

Question 19/23

Différentielle d'une combinaison linéaire $f + \lambda g$

Réponse 19/23

Si f et g sont différentiables en a alors $f + \lambda g$
l'est et $d(f + \lambda g)_a = df_a + \lambda dg_a$

Question 20/23

Différentielle d'un couple (f_1, f_2)

Réponse 20/23

f_1 et f_2 sont différentiables en a si et seulement si (f_1, f_2) le sont et $d(f_1, f_2)_a = (d(f_1)_a, d(f_2)_a)$

Question 21/23

Convergence de (f_n) si (df_n) converge

Réponse 21/23

Si (f_n) une suite de fonctions \mathcal{C}^1 converge simplement vers f et (df_n) converge uniformément vers $g: U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ alors f est \mathcal{C}^1 et $df = g$

Question 22/23

Différentielle d'une composée $g \circ f$

Réponse 22/23

Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(g \circ f)_a = \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a$

Question 23/23

$$\mathcal{L}(E, F)$$

Réponse 23/23

Applications linéaires continues de E dans F