# Algèbre
# *Réduction d'endomorphismes*

# Question 1/13

Théorème de Cayley-Hamilton

# Réponse 1/13

$$\pi_A \mid \chi_A$$

# Question 2/13

$$\chi_A(X)$$

# Réponse 2/13

$$\det(XI_n - A)$$

# Question 3/13

$u$ est diagonalisable

Critère avec un annulateur

# Réponse 3/13

$P(u) = 0$ avec $P$ scindé à racines simples

$\pi_u$ est scindé à racines simples

# Question 4/13

$u$ est diagonalisable

Critère avec les espaces propres

# Réponse 4/13

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} (E_\lambda(u))$$

$$\dim(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} (\dim(E_\lambda(u)))$$

# Question 5/13

Lemme de décomposision des noyaux

# Réponse 5/13

$$\text{Si } (P_1, \cdots, P_n) \in \mathbb{K}[X]^n \text{ et } \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,$$
$$i \neq j \Rightarrow P_i \wedge P_j = 1$$
$$\ker\left(\left(\prod_{k=1}^{n}(P_k)\right)(u)\right) = \bigoplus_{k=1}^{n}(\ker(P_k(u)))$$

# Question 6/13

Expression de $\mathrm{tr}(A)$ avec $\mathrm{sp}(A)$

# Réponse 6/13

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} \left(\mu_\lambda(A)\lambda\right)$$

# Question 7/13

$u$ est diagonalisable

Critère avec $\chi_u$ et $\mathrm{sp}(u)$

# Réponse 7/13

$$\chi_u \text{ est sindé et } \forall \lambda \in \mathrm{sp}(u),$$
$$\dim(E_\lambda(u)) = \mu_\lambda(u)$$

# Question 8/13

Sous-espace caractéristique

# Réponse 8/13

$$F_\lambda(u) = \ker\Big((u - \lambda\,\mathrm{id})^{\mu_\lambda(u)}\Big)$$

# Question 9/13

Expression de $\det(A)$ avec $\mathrm{sp}(A)$

# Réponse 9/13

$$\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} \left( \lambda^{\mu_\lambda(A)} \right)$$

# Question 10/13

Lien entre spectre et racines

# Réponse 10/13

$$P(u) = 0 \Rightarrow \mathrm{sp}(u) \subset \mathrm{rac}(P(u))$$

# Question 11/13

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ dans } \mathcal{B} \text{ adaptée à } \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} (F_\lambda(u))$$

# Réponse 11/13

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_n + T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p I_n + T_p \end{pmatrix}$$

$$(T_1, \cdots, T_p) \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$$

# Question 12/13

$u$ est trigonalisable

# Réponse 12/13

$$\chi_u \text{ est scindé}$$
$$P(u) = 0 \text{ avec } P \text{ scindé}$$
$$\pi_u \text{ est scindé}$$

# Question 13/13

Coefficients de $\chi_A$ avec $\mathrm{tr}(A)$ et $\det(A)$

# Réponse 13/13

$$\chi_A(X) = X^n - \operatorname{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$