

Algèbre 1

Structures algébriques

Question 1/60

Soit E et F deux ensembles munis d'une structure de X , munis respectivement des lois de composition internes $\left(\underset{1}{\star}, \dots, \underset{n}{\star}\right)$ et $\left(\underset{1}{\diamond}, \dots, \underset{n}{\diamond}\right)$, et externes $\left(\underset{1}{\square}, \dots, \underset{m}{\square}\right)$ et $\left(\underset{1}{\triangle}, \dots, \underset{m}{\triangle}\right)$ sur K_1, \dots, K_m
 $f: E \rightarrow F$ est un homomorphisme

Réponse 1/60

f respecte les lois interne : soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\forall (x, y) \in E^2, f\left(x \underset{k}{\star} y\right) = f(x) \underset{k}{\diamond} f(y)$$

f respecte les lois externes : soit $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$

$$\forall (\lambda, x) \in K_k \times E, f\left(\lambda \underset{k}{\square} y\right) = \lambda \underset{k}{\triangle} f(x)$$

f est compatible avec le neutre (si le neutre e_i pour la loi $\underset{i}{\star}$ est imposé dans les axiomes, donc

le neutre e'_i existe pour la loi $\underset{i}{\diamond}$) : $f(e_i) = e'_i$

Question 2/60

Les classes à gauche modulo H

Réponse 2/60

$$\{aH, a \in G\}$$

Question 3/60

Magma

Réponse 3/60

Muni d'une loi de composition interne

Question 4/60

Sous-groupe engendrée par une partie X

Réponse 4/60

$$\langle X \rangle$$

C'est le plus petit sous-groupe contenant X

Question 5/60

x et y sont dans la même classe à gauche
modulo H

Réponse 5/60

$$x \equiv_g y [H] \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

Question 6/60

x et y sont dans la même classe à droite
modulo H

Réponse 6/60

$$x \equiv_d y [H] \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

Question 7/60

Image directe et réciproque de sous-groupes
par un homomorphisme

Réponse 7/60

Si G et H sont deux groupes, et $f \in \text{Hom}(G, H)$ un morphisme de groupes, G' et H' deux sous-groupes respectivement de G et H

$f(G')$ est un sous-groupe de H
 $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G

Question 8/60

Sous-groupe monogène

Réponse 8/60

$$\langle x \rangle = \{x^n, n \in \mathbb{N}\}$$

Question 9/60

Soit $e \in E$

e est un élément neutre pour la loi \star

Réponse 9/60

$$\forall x \in E, \quad e \star x = x = x \star e$$

Question 10/60

Automorphisme de X

Réponse 10/60

Endomorphisme et isomorphisme de X

Question 11/60

Si \star est une loi associative sur E et
 $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$

Réponse 11/60

$x_1 \star \cdots \star x_n$ ne dépend pas du parenthésage
admissible

Question 12/60

Si G et H sont deux groupes et
 $f \in \text{Hom}(G, H)$
 $f(x^{-1})$

Réponse 12/60

$$f(x)^{-1}$$

Question 13/60

Si G est un groupe
Structure de $(\text{Aut}(G), \circ)$

Réponse 13/60

$(\text{Aut}(G), \circ)$ est un groupe

Question 14/60

Associativité

Réponse 14/60

\star est associative si et seulement
si $\forall (x, y, z) \in E^3, (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$

Question 15/60

Groupe cyclique

Réponse 15/60

Groupe monogène fini

Question 16/60

Description par le haut du sous-groupe
engendré par une partie

Réponse 16/60

Soient \mathcal{G} l'ensemble des sous-groupes de G et

$$\mathcal{H} = \{H \in \mathcal{G} \mid X \subset H\}$$

$$\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} (H)$$

Question 17/60

Ensemble formé par les classes à gauche et à droite

Réponse 17/60

$\{Ha, a \in G\}$ est une partition de G
 $\{aH, a \in G\}$ est une partition de G

Question 18/60

Isomorphisme de X

Réponse 18/60

Homomorphisme de X bijectif

Question 19/60

Monoïde

Réponse 19/60

Muni d'une loi d'une composition interne, de
l'associativité et d'un élément neutre

Un monoïde est un magma

Question 20/60

Si (G, \star) est un groupe

Un sous-ensemble H de G est appelé
sous-groupe de G

Réponse 20/60

H est stable pour la loi de G et la loi induite définit sur H une structure de groupe

Question 21/60

Passage au quotient de la loi dans le cas abélien
Si G est un groupe abélien et H un
sous-groupe de G

Réponse 21/60

$\equiv_g = \equiv_d$ et on note la relation \equiv

La loi induite correspond au produit des classes élément par élément

$$\begin{aligned}(ab)H &= (aH) \cdot (bH) \\ &= \{x \cdot y, x \in aH, y \in bH\}\end{aligned}$$

La loi induite sur l'ensemble quotient munit celui-ci d'une structure de groupe abélien

Question 22/60

Fibres de f

Soit $x \in f^{-1}(\{y\})$

Réponse 22/60

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{y\}) &= x \times \ker(f) \\ &= \{x \times z, z \in \ker(f)\} = \ker(f) \times x \end{aligned}$$

Question 23/60

Description des groupes monogènes
Si $G = \langle x \rangle$

Réponse 23/60

Si $\text{ord}(x) = +\infty$, G est isomorphe à \mathbb{Z}

Si $\text{ord}(x) = n \in \mathbb{N}^*$, G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Question 24/60

Endomorphisme de X

Réponse 24/60

Homomorphisme de X de E dans lui-même
(muni des mêmes lois)

Question 25/60

Soit $x \in E$

x est un élément absorbant pour \star

Réponse 25/60

$$\forall y \in E, \ x \star y = x = y \star x$$

Question 26/60

Réciproque d'isomorphisme

Réponse 26/60

Si $f: F \rightarrow F$ est un isomorphisme, alors f^{-1}
est un isomorphisme

Question 27/60

Groupe abélien

Réponse 27/60

La loi \star de G est commutative

Question 28/60

Distributivité généralisée

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j \in J_i} (x_{i,j}) \right)$$

Réponse 28/60

$$\sum_{(j_1, \dots, j_n) \in J_1 \times \dots \times J_n} \left(\prod_{i=1}^n (x_{i, j_i}) \right)$$

Question 29/60

Distributivité

Réponse 29/60

La loi \star est distributive à gauche sur \diamond si et seulement

$$\text{si } \forall (x, y, z) \in E^3, \quad x \star (y \diamond z) = (x \star y) \diamond (x \star z)$$

La loi \star est distributive à droite sur \diamond si et seulement

$$\text{si } \forall (x, y, z) \in E^3, \quad (y \diamond z) \star x = (y \star x) \diamond (z \star x)$$

La loi \star est distributive sur \diamond si et seulement si elle est distributive à gauche et à droite

Question 30/60

Sous-groupe propre de G

Réponse 30/60

Sous-groupe de G distinct de G et $\{e_G\}$

Question 31/60

Si $f \in \text{Hom}(G, K)$ et H est un sous-groupe distingué et $H \subset \ker(f)$

Réponse 31/60

$$f = \tilde{f} \circ \pi$$

La réciproque est vraie

Question 32/60

Élément régulier ou simplifiable

Réponse 32/60

x est régulier à gauche si et seulement
si $\forall (y, z) \in E^2, x \star y = x \star z \Rightarrow y = z$

x est régulier à droite si et seulement
si $\forall (y, z) \in E^2, y \star x = z \star x \Rightarrow y = z$

x est régulier si et seulement s'il est régulier à
gauche et à droite

Si x admet un symétrique, alors il est régulier

Question 33/60

Résolution de $x^n = e$

Réponse 33/60

$\{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = e\}$ est de la forme $a\mathbb{Z}$

x est d'ordre fini si et seulement si $a \neq 0$ (on a donc $\text{ord}(x) = a$)

Question 34/60

Soient $e \in E$ un élément neutre pour la loi \star et

$$x \in E$$

y est un symétrique de x pour la loi \star

Réponse 34/60

$$x \star y = e = y \star x$$

Question 35/60

Les classes à droite modulo H

Réponse 35/60

$$\{Ha, a \in G\}$$

Question 36/60

Cardinal des classes de congruence

Réponse 36/60

$$|Ha, a \in G| = |Ha, a \in G| = |H|$$

Question 37/60

Groupe

Réponse 37/60

Muni d'une loi d'une composition interne, de
l'associativité, d'un élément neutre et de
symétriques

Un groupe est un monoïde

Question 38/60

Théorème de Lagrange pour l'ordre des groupes

Réponse 38/60

Si G est un groupe fini et H un sous-groupe de G

$$|H| \mid |G|$$

Question 39/60

Si $f \in \text{Hom}(G, K)$ et H est un sous-groupe distingué

Réponse 39/60

f passe au quotient avec $\tilde{f}: G/H \rightarrow K$

Question 40/60

Symétrique de $x \star y$

Réponse 40/60

$$y^s \star x^s$$

Question 41/60

Ordre d'un groupe
Si G est un groupe

Réponse 41/60

$$\text{ord}(G) = |G|$$

Question 42/60

Si (G, \star) est un groupe et $H \subset G$
Caractérisation(s) des sous-groupes

Réponse 42/60

$$H \neq \emptyset \quad \forall (x, y) \in H, \quad x \star y \in H$$

$$\forall x \in H, \quad x^s \in H$$

$$H \neq \emptyset \quad \forall (x, y) \in H^2, \quad x \star y^s \in H$$

$$e_G \in H \quad \forall (x, y) \in H^2, \quad x \star y^s \in H$$

Question 43/60

Soient E muni d'une structure de X et $F \subset E$
 F est un sous- X de E

Réponse 43/60

F est stable par les lois de E

F contient les neutres imposés par E

Les lois induites sur F par les lois de E
vérifient les axiomes de la structure de X

Question 44/60

$$\text{Si } \ker(f) = \{e_G\}$$

Réponse 44/60

f est injectif (la réciproque est vraie)

Question 45/60

Intersection de sous-groupes

Si G est un groupe, et $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de G

Réponse 45/60

$\bigcap_{i \in I} (H_i)$ est un sous-groupe de G

Question 46/60

Passage au quotient de la loi dans le cas d'un
sous-groupe distingué

Si G est un groupe et H un sous-groupe
distingué de G

Réponse 46/60

$\equiv_g = \equiv_d$ et on note la relation \equiv

La loi induite correspond au produit des classes élément par élément

$$\begin{aligned}(ab)H &= (aH) \cdot (bH) \\ &= \{x \cdot y, x \in aH, y \in bH\}\end{aligned}$$

La loi induite sur l'ensemble quotient munit celui-ci d'une structure de groupe

Question 47/60

Soient E muni d'une loi \star , $F \subset E$
 F est stable par \star

Réponse 47/60

$$\forall (x, y) \in F^2, x \star y \in F$$

La loi de E se restreint en une loi \star_F appelée
loi induite sur F par \star

Question 48/60

Description par le bas du sous-groupe engendré
par une partie

Réponse 48/60

$$\langle X \rangle = \{x_1 \cdots x_n, (x_1, \cdots, x_n) \in X^n\} \\ \cup \{x^{-1}, x \in X\}$$

e correspond au produit vide

Question 49/60

Si G et H sont deux groupes et $f \in \text{Hom}(g, h)$
un morphisme de groupes
 $\ker(f)$

Réponse 49/60

$$f^{-1}(e_H) = \{y \in G \mid f(y) = e_H\}$$

Question 50/60

Si G et H sont deux groupes et
 $f \in \text{Hom}(G, H)$
 $f(e_G)$

Réponse 50/60

$$f(e_H)$$

Question 51/60

Ordre d'un élément d'un groupe

Réponse 51/60

$$\text{ord}(x) = \min(\{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = e\})$$

Question 52/60

Premier théorème d'isomorphisme

Réponse 52/60

Si $f \in \text{Hom}(G, H)$

$\ker(f)$ est un sous-groupe distingué de G , et f passe au quotient, définissant un morphisme de groupes $\tilde{f}: G / \ker(f) \rightarrow H$

\tilde{f} est injectif et sa corestriction à son image est un isomorphisme

Question 53/60

Commutativité généralisée

Réponse 53/60

Si \star est une loi commutative et associative sur

$$E, (x_1, \dots, x_n) \in E^n \text{ et } \sigma \in \mathfrak{S}_n$$

$$x_1 \star \dots \star x_n = x_{\sigma(1)} \star \dots \star x_{\sigma(n)}$$

Question 54/60

Théorème de Lagrange pour l'ordre des
éléments d'un groupe

Réponse 54/60

Si G est un groupe fini et $x \in G$
 $\text{ord}(x) \mid |G|$

Question 55/60

Si H est un sous-groupe distingué de G

Réponse 55/60

$$\begin{aligned} & \forall a \in G, aH = Ha \\ \Leftrightarrow & \forall a \in G, \forall h \in H, aha^{-1} \in H \end{aligned}$$

Question 56/60

Commutativité

Réponse 56/60

\star est commutative si et seulement
si $\forall (x, y) \in E^2, x \star y = y \star x$

Question 57/60

Propriétés d'un groupe (G, \star)

Réponse 57/60

G admet un unique élément neutre pour \star
 $\forall x \in G, \exists! x^s \in G$

Question 58/60

Soient (G, \star) et (H, \diamond) deux groupes
 $f: G \rightarrow H$ est un homomorphisme de groupe

Réponse 58/60

$$\forall (x, y) \in G^2, f(x \star y) = f(x) \diamond f(y)$$

L'ensemble des homomorphisme de G dans H
est noté $\text{Hom}(G, H)$

Si $(G, \star) = (H, \diamond)$, f est un endomorphisme

L'ensemble des automorphismes de G est noté
 $\text{Aut}(G)$

Question 59/60

Propriété des groupes monogènes

Réponse 59/60

Un groupe monogène est abélien

Question 60/60

Associativité externe

E est muni d'une loi de composition externe \diamond
sur \mathbb{K} , muni d'une loi de composition interne \star

Réponse 60/60

$$\forall (\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K}^2 \times E, (\lambda \star \mu) \diamond x = \lambda \diamond (\mu \diamond x)$$