Algèbre 1
Structures algébriques

Question 1/60

Associativité

Réponse 1/60

$$\star \text{ est associative si et seulement si} \forall (x, y, z) \in E^3,\ (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

Question 2/60

Sous-groupe engendrée par une partie X

Réponse 2/60

$$\langle X \rangle$$

C'est le plus petit sous-groupe contenant X

Question 3/60

Théorème de Lagrange pour l'ordre des éléments d'un groupe

Réponse 3/60

Si G est un groupe fini et $x \in G$

$$\mathrm{ord}(x) \mid |G|$$

Question 4/60

Description par le bas du sous-groupe engendré par une partie

Réponse 4/60

$$\langle X\rangle = \{x_1 \cdots x_n,\ (x_1, \cdots, x_n) \in X^n\}$$
$$\cup \left\{x^{-1},\ x \in X\right\}$$

e correspond au produit vide

Question 5/60

Automorphisme de X

Réponse 5/60

Endomorphisme et isomorphisme de X

Question 6/60

Ordre d'un groupe

Si G est un groupe

Réponse 6/60

$$\mathrm{ord}(G) = |G|$$

Question 7/60

Distributivité généralisée

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in J_i}(x_{i,j})\right)$$

Réponse 7/60

$$\sum_{(j_1,\cdots,j_n)\in J_1\times\cdots\times J_n}\left(\prod_{i=1}^{n}(x_{i,j_i})\right)$$

Question 8/60

Commutativité

Réponse 8/60

$\star$ est commutative si et seulement

si$\forall (x, y) \in E^2,\ x \star y = y \star x$

Question 9/60

Si $f \in \hom(G, K)$ et H est un sous-groupe distingué

Réponse 9/60

f passe au quotient avec $\tilde{f} : G/H \to K$

Question 10/60

Si G et H sont deux groupes et

$f \in \hom(G, H)$

$f\left(x^{-1}\right)$

Réponse 10/60

$$f(x)^{-1}$$

Question 11/60

Soient E muni d'une structure de X et $F \subset E$

F est un sous-X de E

Réponse 11/60

F est stable par les lois de E

F contient les neutres imposés par E

Les lois induites sur F par les lois de E

vérifient les axiomes de la structure de X

Question 12/60

$$\text{Si } \ker(f) = \{e_G\}$$

Réponse 12/60

f est injectif (la réciproque est vraie)

Question 13/60

Si $(G, \star)$ est un groupe
Un sous-ensemble H de G est appelé
sous-groupe de G

Réponse 13/60

H est stable pour la loi de G et la loi induite définit sur H une structure de groupe

Question 14/60

Image directe et réciproque de sous-groupes par un homomorphisme

Réponse 14/60

Si G et H sont deux groupes, et $f \in \hom(G, H)$ un morphisme de groupes, G' et H' deux sous-groupes respectivement de G et H

$f(G')$ est un sous-groupe de H

$f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G

Question 15/60

Soit E et F deux ensembles munis d'une structure de X, munis respectivement des lois de composition internes $\left(\underset{1}{\star}, \cdots, \underset{n}{\star}\right)$ et $\left(\underset{1}{\diamond}, \cdots, \underset{n}{\diamond}\right)$, et externes $\left(\underset{1}{\square}, \cdots, \underset{m}{\square}\right)$ et $\left(\underset{1}{\triangle}, \cdots, \underset{m}{\triangle}\right)$ sur $K_1, \cdots, K_m$

$f : E \to F$ est un homomorphisme

Réponse 15/60

$$f \text{ respecte les lois interne : soit } k \in [\![1, n]\!]$$
$$\forall (x, y) \in E^2,\ f\left(x \underset{k}{\star} y\right) = f(x) \underset{k}{\diamond} f(y)$$
$$f \text{ respecte les lois externes : soit } k \in [\![1, m]\!]$$
$$\forall (\lambda, x) \in K_k \times E,\ f\left(\lambda \underset{k}{\square} y\right) = \lambda \underset{k}{\triangle} f(x)$$
f est compatible avec le neutre (si le neutre e_i pour la loi $\underset{i}{\star}$ est imposé dans les axiomes, donc le neutre e'_i existe pour la loi $\underset{i}{\diamond}$) : $f(e_i) = e'_i$

Question 16/60

Description par le haut du sous-groupe engendré par une partie

Réponse 16/60

Soient $\mathcal{G}$ l'ensemble des sous-groupes de G et

$$\mathcal{H} = \{H \in \mathcal{H} \mid X \subset H\}$$

$$\langle X \rangle = \bigcap_{x \in \mathcal{H}} (H)$$

Question 17/60

Groupe cyclique

Réponse 17/60

Groupe monogène fini

Question 18/60

Soient E muni d'une loi $\star$, $F \subset E$

F est stable par $\star$

Réponse 18/60

$$\forall (x,y) \in F^2,\ x \star y \in F$$

La loi de E se restreint en une loi $\star_F$ appelée loi induite sur F par $\star$

Question 19/60

Soit $x \in E$

x est un élement absorbant pour $\star$

Réponse 19/60

$$\forall y \in E,\ x \star y = x = y \star x$$

Question 20/60

Symétrique de $x \star y$

Réponse 20/60

$$y^s \star x^s$$

Question 21/60

Endomorphisme de X

Réponse 21/60

Homomorphisme de X de E dans lui-même
(muni des mêmes lois)

Question 22/60

Distributivité

Réponse 22/60

La loi $\star$ est distributive à gauche sur $\diamond$ si et seulement si$\forall (x,y,z) \in E^3,\ x \star (y \diamond z) = (x \star y) \diamond (x \star z)$

La loi $\star$ est distributive à droite sur $\diamond$ si et seulement si$\forall (x,y,z) \in E^3,\ (y \diamond z) \star x = (y \star x) \diamond (z \star x)$

La loi $\star$ est distributive sur $\diamond$ si et seulement si elle est distributive à gauche et à droite

Question 23/60

Sous-groupe propre de G

Réponse 23/60

Sous-groupe de G distinct de G et $\{e_G\}$

Question 24/60

Si G et H sont deux groupes et $f \in \hom(g, h)$
un morphisme de groupes
$\ker(f)$

Réponse 24/60

$$f^{-1}(e_H) = \{y \in G \mid f(y) = e_H\}$$

Question 25/60

Cardinal des classes de congruence

Réponse 25/60

$$|Ha,\ a \in G| = |Ha,\ a \in G| = |H|$$

Question 26/60

Intersection de sous-groupes

Si G est un groupe, et $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de G

Réponse 26/60

$$\bigcap_{i \in I} (H_i) \text{ est un sous-groupe de } G$$

Question 27/60

Propriétés d'un groupe $(G, \star)$

Réponse 27/60

$$G \text{ admet un uique élément neutre pour } \star$$
$$\forall x \in G,\ \exists! x^s \in G$$

Question 28/60

Propriété des groupes monogènes

Réponse 28/60

Un groupe monogène est abélien

Question 29/60

Soient $e \in E$ un élément neutre pour la loi $\star$ et

$x \in E$

y est un symétrique de x pour la loi $\star$

Réponse 29/60

$$x \star y = e = y \star x$$

Question 30/60

Les classes à droite modulo H

Réponse 30/60

$$\{Ha,\ a \in G\}$$

Question 31/60

Passage au quotient de la loi dans le cas d'un sous-groupe distingué

Si G est un groupe et H un sous-groupe distingué de G

Réponse 31/60

$\equiv_g = \equiv_d$ et on note la relation $\equiv$
La loi induite corrrespond au produit des classes élément par élément : $(ab)H = (aH) \cdot (bH) = \{x \cdot y,\ x \in aH,\ y \in bH\}$
La loi induite sur l'ensemble quotient munit celui-ci d'une structure de groupe

Question 32/60

Soit $e \in E$

e est un élément neutre pour la loi $\star$

Réponse 32/60

$$\forall x \in E,\ e \star x = x = x \star e$$

Question 33/60

Groupe abélien

Réponse 33/60

La loi $\star$ de G est commutative

Question 34/60

Commutativité généralisée

Réponse 34/60

Si $\star$ est une loi commutative et associative sur E, $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$x_1 \star \cdots \star x_n = x_{\sigma(1)} \star \cdots \star x_{\sigma(n)}$$

Question 35/60

x et y sont dans la même classe à droite modulo H

Réponse 35/60

$$x \equiv_d y \, [H] \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

Question 36/60

Isomorphisme de X

Réponse 36/60

Homomorphisme de X bijectif

Question 37/60

Associativité externe

E est muni d'une loi decomposition externe $\diamond$ sur $\mathbb{K}$, muni d'une loi de composition interne $\star$

Réponse 37/60

$$\forall(\lambda,\mu,x)\in\mathbb{K}^2\times E,\ (\lambda\star\mu)\diamond x=\lambda\diamond(\mu\diamond x)$$

Question 38/60

Théorème de Lagrange pour l'ordre des groupes

Réponse 38/60

Si G est un groupe fini et H un sous-groupe de G

$$|H| \mid |G|$$

Question 39/60

Élément régulier ou simplifiable

Réponse 39/60

x est régulier à gauche si et seulement si$\forall (y,z) \in E^2,\ x \star y = x \star z \Rightarrow y = z$

x est régulier à droite si et seulement si$\forall (y,z) \in E^2,\ y \star x = z \star x \Rightarrow y = z$

x est régulier si et seulement s'il est régulier à gauche et à droite

Si x admet un symétrique, alors il est régulier

Question 40/60

Les classes à gauche modulo H

Réponse 40/60

$$\{aH,\ a \in G\}$$

Question 41/60

Premier théorème d'isomorphisme

Réponse 41/60

Si $f \in \hom(G, H)$
$\ker(f)$ est un sous-groupe distingué de G, et f passe au quotient, définissant un morphisme de groupes $\tilde{f} : G/\ker(f) \to H$
$\tilde{f}$ est injectif et sa corestriction à son image est un isomorphisme

Question 42/60

Groupe

Réponse 42/60

Muni d'une loi d'une composition interne, de l'associativité, d'un élément neutre et de symétriques

Un groupe est un monoïde

Question 43/60

Description des groupes monogènes

Si $G = \langle x \rangle$

Réponse 43/60

$$\text{Si } \operatorname{ord}(x) = +\infty,\ G \text{ est isomorphe à } \mathbb{Z}$$
$$\text{Si } \operatorname{ord}(x) = n \in \mathbb{N}^*,\ G \text{ est isomorphe à } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Question 44/60

Si H est un sous-groupe distingué de G

Réponse 44/60

$$\forall a \in G,\ aH = Ha \Leftrightarrow \forall a \in G,\ \forall h \in H,\ aha^{-1} \in H$$

Question 45/60

Si $(G, \star)$ est un groupe et $H \subset G$

Caractérisation(s) des sous-groupes

Réponse 45/60

$$H \neq \varnothing \quad \forall (x, y) \in H,\ x \star y \in H$$

$$\forall x \in H,\ x^s \in H$$

$$H \neq \varnothing \quad \forall (x, y) \in H^2,\ x \star y^s \in H$$

$$e_G \in H \quad \forall (x, y) \in H^2,\ x \star y^s \in H$$

Question 46/60

Ensemble formé par les classes à gauche et à droite

Réponse 46/60

$$\{Ha,\ a \in G\} \text{ est une partition de } G$$
$$\{aH,\ a \in G\} \text{ est une partition de } G$$

Question 47/60

Si $f \in \hom(G, K)$ et H est un sous-groupe distingué et $H \subset \ker(f)$

Réponse 47/60

$$f = \tilde{f} \circ \pi$$

La réciproque est vraie

Question 48/60

Si G est un gruope

Structure de $(\mathrm{aut}(G), \circ)$

Réponse 48/60

$$(\mathrm{aut}(G), \circ) \text{ est un groupe}$$

Question 49/60

Ordre d'un élément d'un groupe

Réponse 49/60

$$\operatorname{ord}(x) = \min(\{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = e\})$$

Question 50/60

Si $\star$ est une loi associative sur E et $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$

Réponse 50/60

$x_1 \star \cdots \star x_n$ ne dépend pas du parenthésage admissible

Question 51/60

x et y sont dans la même classe à gauche modulo H

Réponse 51/60

$$x \equiv_g y \, [H] \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

Question 52/60

Magma

Réponse 52/60

Muni d'une loi de composition interne

Question 53/60

Sous-groupe monogène

Réponse 53/60

$$\langle x \rangle = \{x^n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Question 54/60

Fibres de f

Soit $x \in f^{-1}(\{y\})$

Réponse 54/60

$$f^{-1}(\{y\}) = x \times \ker(f)$$
$$= \{x \times z,\ z \in \ker(f)\} = \ker(f) \times x$$

Question 55/60

Réciproque d'isomorphisme

Réponse 55/60

Si $f : F \to F$ est un isomorphisme, alors f^{-1} est un isomorphisme

Question 56/60

Passage au quotient de la loi dans le cas abélien

Si G est un groupe abélien et H un sous-groupe de G

Réponse 56/60

$\equiv_g = \equiv_d$ et on note la relation $\equiv$
La loi induite corrrespond au produit des classes élément par élément : $(ab)H = (aH)\cdot(bH) = \{x\cdot y,\ x\in aH,\ y\in bH\}$
La loi induite sur l'ensemble quotient munit celui-ci d'une structure de groupe abélien

Question 57/60

Résolution de $x^n = 1$

Réponse 57/60

$$\{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = e\} \text{ est de la forme } a\mathbb{Z}$$
$$\mathrm{ord}(x) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ et } \mathrm{ord}(x) = a$$

Question 58/60

Soient $(G, \star)$ et $(H, \diamond)$ deux groupes
$f : G \to H$ est un homomorphisme de groupe

Réponse 58/60

$$\forall (x, y) \in G^2,\ f(x \star y) = f(x) \diamond f(y)$$

L'ensemble des homomorphisme de G dans H est noté $\hom(G, H)$

Si $(G, \star) = (H, \diamond)$, f est un endomorphisme

L'ensemble des automorphismes de G est noté $\mathrm{aut}(G)$

Question 59/60

Si G et H sont deux groupes et

$f \in \hom(G, H)$

$f(e_G)$

Réponse 59/60

$$f(e_H)$$

Question 60/60

Monoïde

Réponse 60/60

Muni d'une loi d'une composition interne, de l'associativité et d'un élément neutre

Un monoïde est un magma