Intégration et théorie de la mesure

Mesures produit et changements de variables

Question 1/14

Changement de variable polaire en dimension 2

Réponse 1/14

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}_+ \times]-\pi,\pi[} \widetilde{f}(r, \theta)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Question 2/14

$$\mathcal{B}(X \times Y)$$

Réponse 2/14

$\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ si X et Y sont à base dénombrable d'ouverts

Question 3/14

Changement de variable polaire en dimension > 2

Réponse 3/14

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x = \iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}^{d-1}} f(ru)\,r^{d-1}\mathrm{d}r\sigma(\mathrm{d}u)$$

$$\sigma(A) = \mu(\{ru, r \in [0,1], u \in A\}),\ A \subset \mathbb{S}^{d-1}$$

Question 4/14

(φ_n) est une approximation de l'unité

Réponse 4/14

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \int_X \varphi_n = 1$$

$$\text{Pour tout } R > 0,\ \int_{B(0,R)^\complement} \varphi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} = 0$$

Question 5/14

Théorème de Fubini-Tonelli

Réponse 5/14

Si $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}_+}$ est mesurable pour $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

$$\text{alors } f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+} \qquad \text{et}$$
$$x \longmapsto \int_Y f(x, y)\, \nu(\mathrm{d}y)$$

$$f : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+} \qquad \text{sont mesurables et}$$
$$y \longmapsto \int_X f(x, y)\, \mu(\mathrm{d}x)$$

$$\iint_{X \times Y} f(x, y)\, \mu \otimes \nu(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$
$$= \int_X \left(\int_Y f(x, y)\, \nu(\mathrm{d}y) \right) \mu(\mathrm{d}x)$$
$$= \int_Y \left(\int_X f(x, y)\, \mu(\mathrm{d}x) \right) \nu(\mathrm{d}y)$$

Question 6/14

Porpriétés de $\varphi_n * f$ où (φ_n) est une approximation de l'unité

Réponse 6/14

$$\text{Si } f \in \mathcal{C}_b^0\left(\mathbb{R}^d\right) \text{ alors } \varphi_n * f \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} f$$

$$\text{Si } f \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right) \text{ alors } \varphi_n * f \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} f$$

Question 7/14

Porpriétés de $(f * g)(x)$ pour $f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, $g \in \mathcal{C}_b^1\left(\mathbb{R}^d\right) := \left\{g \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^d\right), g \in L^\infty, \nabla g \in L^\infty\right\}$

Réponse 7/14

$$f * g \in \mathcal{C}_b^1\left(\mathbb{R}^d\right) \text{ et } \nabla(f * g) = f * (\nabla f)$$

Question 8/14

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

Réponse 8/14

$$\sigma(\{A \times B, (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\})$$

C'est la plus petite tribu qui rend les fonctions coordonnées mesurables

Question 9/14

Formule de changements de variables

Réponse 9/14

Si U et V sont deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi : U \to V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et $f : V \to \mathbb{R}$ mesurable, alors

$$\int_V f(x)\,\mathrm{d}x = \int_V f \circ \varphi(y) \times J_\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

où $J_\varphi(y) = |\det(\nabla\varphi(y))|$

Question 10/14

Théorème de Fubini-Lebesgue

Réponse 10/14

$$\text{Si } f \in L^1(X \times Y, \mu \otimes \nu) \text{ alors } f_x \in L^1(Y, \nu),$$
$$f^y \in L^1(X, \mu),\ \int_Y f_x(y)\,\nu(\mathrm{d}y) \in L^1(X, \mu) \text{ et}$$
$$\int_X f(x)\,\mu(\mathrm{d}x) \in L^1(Y, \nu) \text{ et}$$
$$\iint_{X\times Y} f(x, y)\,\mu\otimes\nu(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$
$$= \int_X \left(\int_Y f(x, y)\,\nu(\mathrm{d}y)\right) \mu(\mathrm{d}x)$$
$$= \int_Y \left(\int_X f(x, y)\,\mu(\mathrm{d}x)\right) \nu(\mathrm{d}y)$$

Question 11/14

$$\mu \otimes \nu$$

Réponse 11/14

L'unique mesure sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ vérifiant

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \times \nu(B)$$

$$\mu \otimes \nu(C) = \int_X \nu(C_x)\, \mu(\mathrm{d}x) = \int_Y \mu(C^y)\, \nu(\mathrm{d}y)$$

Question 12/14

$$(f * g)(x)$$
$$(f, g) \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$$

Réponse 12/14

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

$$f * g \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right) \text{ et } \|f * g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$$

Question 13/14

Porpriétés de $(f * g)(x)$ pour $f \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$,
$g \in L^{p'}\left(\mathbb{R}^d\right)$, $p' = \dfrac{p}{p-1}$

Réponse 13/14

$$f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ et } \|f * g\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$$

Si $p \in]1, +\infty[$ alors $f * g$ est uniformément continue

Question 14/14

Densité des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans L^p

Réponse 14/14

Si $p \in [1, +\infty[$ alors $\mathcal{C}_c^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ est dense dans $L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$