# Algèbre 1
# *Matrices*

# Question 1/24

Produit par blocs

$$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

$$B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$$

$$C = AB$$

# Réponse 1/24

$$0 = i_0 < \cdots < i_q = m$$
$$0 = j_0 < \cdots < j_r = p$$
$$0 = k_0 < \cdots < k_s = m$$
$$A = \left(A_{i_a,j_b}\right),\ B = \left(B_{j_b,k_c}\right)$$
$$C = (C_{i_a,k_c}) = \left(\sum_{b=1}^{r} (A_{i_a,j_b} B_{j_b,k_c})\right)$$

# Question 2/24

$$D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$$

$$D^m$$

# Réponse 2/24

$$D^m = \begin{pmatrix} d_{1,1}^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n,n}^m \end{pmatrix}$$

# Question 3/24

Description du produit matriciel par colonne

$\mathrm{C}_i(M)$ représente la $i$-ième colonne de $M$

# Réponse 3/24

$$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$
$$C = A \times B$$
$$\forall k \in [\![1, q]\!],\ \mathrm{C}_k(C) = \sum_{j=1}^{p} (b_{j,k} \mathrm{C}_j(A))$$

# Question 4/24

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$$

$$T^m$$

# Réponse 4/24

$$T^m = \begin{pmatrix} t_{1,1}^m & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n}^m \end{pmatrix}$$

# Question 5/24

Matrice de transvection $E(i, j, \lambda)$

# Réponse 5/24

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2 \setminus \{(i,j)\},\ k \neq \ell,\ e_{k,\ell} = 0$$
$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ e_{k,k} = 1$$
$$e_{i,j} = \lambda$$

# Question 6/24

Matrice de dilatation $E(i, \lambda)$

# Réponse 6/24

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ k \neq \ell,\ e_{k,\ell} = 0$$
$$\forall k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\},\ e_{k,k} = 1$$
$$e_{i,i} = \lambda$$

# Question 7/24

Définition du produit matriciel

# Réponse 7/24

$$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

$$C = A \times B$$

$$\forall (i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!],\ \ c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} (a_{i,j} b_{j,k})$$

## Question 8/24

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

# Réponse 8/24

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid MN = I_n\}$$

# Question 9/24

Système de Cramer

# Réponse 9/24

$$AX = B \text{ est de Cramer si } A \text{ est inversible}$$
$$AX = B \text{ a une unique solution } X = A^{-1}B$$

# Question 10/24

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

# Réponse 10/24

$$ad - bc$$

# Question 11/24

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

$$M^{-1}$$

# Réponse 11/24

$$
\begin{aligned}
M^{-1} &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

# Question 12/24

Matrice de transposition $E(i, j)$

# Réponse 12/24

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2 \setminus \{(i,j),(j,i)\},\ k \neq \ell,\ e_{k,\ell} = 0$$
$$\forall k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i,j\},\ e_{k,k} = 1$$
$$e_{i,i} = e_{j,j} = 0$$
$$e_{i,j} = e_{j,i} = 1$$

# Question 13/24

Matrice identité

# Réponse 13/24

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Question 14/24

$$E(i,j)^{-1}$$
$$E(i,j,\lambda)^{-1}$$
$$E(i,\lambda)^{-1}$$

# Réponse 14/24

$$E(i,j)$$
$$E(i,j,-\lambda)$$
$$E\left(i,\lambda^{-1}\right)$$

## Question 15/24

Factorisation de $A^n - B^n$

# Réponse 15/24

$$(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \text{ tel que } AB = BA$$

$$(A - B)\sum_{k=0}^{n-1}\left(A^{n-k-1}B^k\right)$$

# Question 16/24

$$\text{Transposée de la matrice } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

# Réponse 16/24

$$A^\top = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,p} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

# Question 17/24

Propriété des matrices $E_{i,j}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

# Réponse 17/24

La famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Toute matrice $A$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut s'exprimer de la forme $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} (\lambda_{i,j}E_{i,j})$

# Question 18/24

Factorisation de $(A+B)^n$

# Réponse 18/24

$$(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \text{ tel que } AB = BA$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left( \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \right)$$

# Question 19/24

Description du produit matriciel par ligne

$\mathrm{L}_i(M)$ représente la $i$-ième ligne de $M$

# Réponse 19/24

$$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$
$$C = A \times B$$
$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{L}_i(C) = \sum_{j=1}^{p} (a_{i,j} \mathrm{L}_j(B))$$

# Question 20/24

Matrice élémentaite $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

# Réponse 20/24

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$$
$$e_{k,\ell} = \delta_{(i,j),(k,\ell)} = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$$

# Question 21/24

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$$

# Réponse 21/24

$$\left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M = M^\top \right\}$$

# Question 22/24

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \cdots & \bullet & t_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$$

$$T^m$$

# Réponse 22/24

$$T^m = \begin{pmatrix} t_{1,1}^m & 0 & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \cdots & \bullet & t_{n,n}^m \end{pmatrix}$$

# Question 23/24

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

# Réponse 23/24

$$\left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M = -M^\top \right\}$$

# Question 24/24

Structure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

## Réponse 24/24

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un anneau non commutatif