

Algèbre 2

Déterminants

Question 1/25

Valeurs des x_k pour $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B$

$$A = (A_1 \mid \cdots \mid A_n)$$

Réponse 1/25

$$x_k = \frac{\det \left((A_1 \mid \cdots \mid A_{k-1} \mid B \mid A_{k+1} \mid \cdots \mid A_n) \right)}{\det(A)}$$

Question 2/25

$\det_{\mathcal{B}}$

Expression avec \mathcal{B}'

Réponse 2/25

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}$$

Question 3/25

Cofacteur de position (i, j) de M

Réponse 3/25

$$(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(M)$$

Question 4/25

Expression de l'inverse par la comatrice

Réponse 4/25

$$M^{-1} = \frac{\text{Com}(M)^{\top}}{\det(M)}$$

Question 5/25

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$$

Réponse 5/25

$$\ker(\det) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}$$

Question 6/25

Développement suivant une colonne
Développement suivant une ligne

Réponse 6/25

$$\det(M) = \sum_{i=1}^n \left((-1)^{i+j} m_{i,j} \Delta_{i,j}(M) \right)$$

$$\det(M) = \sum_{j=1}^n \left((-1)^{i+j} m_{i,j} \Delta_{i,j}(M) \right)$$

Question 7/25

Application multilinéaire

Réponse 7/25

$$\begin{aligned} & \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i + x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &= \lambda \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &+ \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Question 8/25

$$\det(u \circ v)$$

Réponse 8/25

$$\det(u) \det(v)$$

Question 9/25

Déterminant d'un endomorphisme

Réponse 9/25

$$\varphi_u = \det(u)\varphi$$

Question 10/25

Comatrice de M

Réponse 10/25

$$\begin{aligned} & \text{Com}(M) \\ = & (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(M)_{(k,\ell) \in \llbracket 1,n \rrbracket \setminus \{i\} \times \llbracket 1,n \rrbracket \setminus \{j\}} \end{aligned}$$

Question 11/25

$$\begin{vmatrix} \boxed{A_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{A_n} \end{vmatrix}$$

Réponse 11/25

$$\prod_{i=1}^n (\det(A_i))$$

Question 12/25

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix}$$

Réponse 12/25

$$\prod_{i=1}^n (\lambda_i)$$

Question 13/25

φ est antisymétrique

Réponse 13/25

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon(\sigma) \varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

Question 14/25

$$\mathrm{SL}(E)$$

Réponse 14/25

$$\ker(\det) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \det(u) = 1\}$$

Question 15/25

Forme n -linéaire

Réponse 15/25

Application linéaire à valeurs dans \mathbb{K}

Question 16/25

Ensemble des formes n -linéaires alternées

Réponse 16/25

$$\text{Vect}(\det_{\mathcal{B}})$$

Question 17/25

Déterminant d'une famille de vecteurs
 (x_1, \dots, x_n) par rapport à \mathcal{B}

Réponse 17/25

Si $\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme n -linéaire alternée
telle que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$
 $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$

Question 18/25

Déterminant de Vandermonde

$$V(x_1, \dots, x_n)$$

Réponse 18/25

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} (x_j - x_i)$$

Question 19/25

Mineur de position (i, j) de M

Réponse 19/25

$$\Delta_{i,j}(M) = \det \left((m_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \llbracket 1,n \rrbracket \setminus \{i\} \times \llbracket 1,n \rrbracket \setminus \{j\}} \right)$$

Question 20/25

Lien forme antisymétrique – forme alternée

Réponse 20/25

Toute forme n -linéaire alternée est
antisymétrique

Si $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, toute forme antisymétrique est
alternée

Question 21/25

Caractérisation du déterminant par l'image
d'une base

Réponse 21/25

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$$

Question 22/25

$$\det(A)$$

Réponse 22/25

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \right) \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)} \right) \end{aligned}$$

Question 23/25

φ est alternée

Réponse 23/25

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ s'il existe } i \neq j \text{ tel que}$$
$$x_i = x_j$$

Question 24/25

Description du déterminant par les coordonnées

$$[x_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

Réponse 24/25

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \right) \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)} \right)\end{aligned}$$

Question 25/25

$$u \in \mathcal{L}(E)$$
$$\det(\lambda u)$$

Réponse 25/25

$$\lambda^{\dim(E)} \det(u)$$