Algèbre 1
Corps

Question 1/14

Propriété de $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Réponse 1/14

$\mathbb{F}_p$ est un corps si et seulement si p est premier

Question 2/14

Groupe

Réponse 2/14

Muni d'une loi de composition interne, de l'associativité, d'un élément neutre et de symétriques

Question 3/14

Si K est un corps de caractéristique nulle
Propriété pour les éléments de K

Réponse 3/14

$$\forall (n, x) \in \mathbb{Z} \times K,\ n \times x = 0_K \Leftrightarrow$$
$$(x = 0_K \wedge n = 0)$$

Question 4/14

Image directe et réciproque de sous-corps par un homomorphisme

Réponse 4/14

Si K et L sont deux corps, et $f: K \to L$ un morphisme de corps, K' et L' deux sous-corps respectivement de K et L

$f(K')$ est un sous-corps de L

$f^{-1}(L')$ est un sous-corps de K

Question 5/14

Si $(K, +, \times)$ est un groupe et $L \subset K$

Caractérisation des sous-corps

Réponse 5/14

$$1_K \in L \quad \forall (x,y) \in L,\ x - y \in L$$
$$\forall (x,y) \in L,\ y \neq 0 \Rightarrow xy^{-1} \in L$$

Anneau

Réponse 6/14

Muni de deux lois de composition internes
(généralement notées $+$ et $\times$)
$(A, +)$ est un groupe abélien
$(A, \times)$ est un monoïde
$\times$ est distributive sur $+$

Question 7/14

Si $(K, +, \times)$ est un corps

Un sous-ensemble L de K est un sous-corps de K

Réponse 7/14

L est stable pour les lois $+$ et $\times$

$1_K \in L$

Les lois induites sur L définissent sur L une structure de corps

Question 8/14

Si K est un corps, d'élément neutre $1_K \neq 0_K$,
$H = \{n \times 1_K,\ n \in \mathbb{Z}\}$ le sous-groupe
monogène de $(K, +)$ engendré par 1_K
Caractéristique d'un corps

Réponse 8/14

Si H est infini, K est de caractéristique nulle
Si H est fini de cardinal p, K est de caractéristique p

Question 9/14

$$\text{Soient } \left(A, \underset{A}{+}, \underset{A}{\times}\right) \text{ et } \left(B, \underset{B}{+}, \underset{B}{\times}\right) \text{ deux anneaux}$$

$$f : A \to B \text{ est un homomorphisme d'anneaux}$$

Réponse 9/14

$$\forall (x,y) \in A^2,\ f\left(x \underset{A}{+} y\right) = f(x) \underset{B}{+} f(y)$$

$$\forall (x,y) \in A^2,\ f\left(x \underset{A}{\times} y\right) = f(x) \underset{B}{\times} f(y)$$

$$f(1_A) = 1_B$$

Question 10/14

Propriété de la caractéristique d'un corps

Réponse 10/14

Si K est un corps de caractéristique p non nulle, p est premier

Question 11/14

$$\text{Soient } \left(K, \underset{K}{+}, \underset{K}{\times}\right) \text{ et } \left(L, \underset{L}{+}, \underset{L}{\times}\right) \text{ deux corps}$$

$$f : K \to L \text{ est un homomorphisme de corps}$$

Réponse 11/14

f est un homomorphisme des anneaux de K et L

Question 12/14

Propriété des homomorphismes de corps

Réponse 12/14

Un homomorphisme de corps est injectif

Question 13/14

Corps

Réponse 13/14

Muni de deux lois de composition internes
(généralement notées $+$ et $\times$)
$(K, +, \times)$ est un anneau commutatif
$(K^*, \times)$ est un groupe

Question 14/14

Si K est un corps de caractéristique finie p

Propriété pour les éléments de K

Réponse 14/14

$$\forall x \in K,\ px = 0_K$$