Analyse complexe
Théorie de Cauchy

Question 1/13

Théorème de Morera

Réponse 1/13

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$, il y a équivalence entre f est analytique sur U et f est continue et vérifie $\forall (a, b, c) \in U^3$ tels que $\Delta(a, b, c) \subset U$,

$$\int_{[a,b]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[b,c]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[c,a]} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Question 2/13

Invariance par homotopie des intégrales

Réponse 2/13

Si f est holomorphe et Γ de classe $\mathcal{C}^2$, en posant $\gamma_s = \Gamma(s, \cdot)$, si γ_s vérifie l'une des deux conditions suivantes, $\forall s \in [0, 1]$, γ_s est fermé ou $\gamma_s(0)$ et $\gamma_s(1)$ sont indépendant de s alors

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Question 3/13

Intégration sur le chemin opposé

Réponse 3/13

$$\text{Si } \gamma^*(t) = \gamma(a+b-t),$$
$$\int_{\gamma^*} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Question 4/13

Invariance par paramétrage de l'intégrale

Réponse 4/13

Si $\varphi : [a', b'] \to [a, b]$ est croissante et $\mathcal{C}^1$, en posant $\gamma_0 = \gamma \circ \varphi$, $\displaystyle\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$

Question 5/13

Théorème de Cauchy

Réponse 5/13

Pour U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$, f est holomorphe sur U si et seulement si f est analytique sur U

Question 6/13

Formule de Cauchy

Réponse 6/13

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, f holomorphe sur U et $z_0 \in U$ alors pour tout $z \in D(z_0, r)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - r} \,\mathrm{d}w$$

Question 7/13

Intégrales sur un lacet

Réponse 7/13

Si f est holomorphe sur U et $\gamma(a) = \gamma(b)$,

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Question 8/13

Majoration d’une intégrale

Réponse 8/13

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \max_{z\in\gamma([a,b])} |f(z)| \times \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t}_{\text{longueur de } \gamma}$$

Question 9/13

Concaténation d'intégrales

Réponse 9/13

Si $c \in [a,b]$, $\gamma_1 = \gamma_{|[a,c]}$ et $\gamma_2 = \gamma_{|[c,b]}$,

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Question 10/13

Coefficients de la série de Taylor d'une fonction holomorphe

Réponse 10/13

$$a_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}w$$

Question 11/13

Intégrale sur $\partial\Gamma$ où $\Gamma\colon [0,1]^2 \to U$

Réponse 11/13

Si f est holomorphe et Γ de classe $\mathcal{C}^2$ alors

$$\int_{\partial\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Question 12/13

Primitive de fonctions holomorphe sur un ouvert simplement connexe U (ie connexe par arcs et tout lacet est homotope à un lacet constant)

Réponse 12/13

Toute fonction f holomorphe de classe $\mathcal{C}^1$
admet une primitive holomorphe sur U
Ce résultat est en particulier vrai si U est étoilé

Question 13/13

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux}$$

Réponse 13/13

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$