

# **Algèbre 2**

## ***Espaces préhilbertiens réels***

## Question 1/40

Supplémentaire orthogonal

## Réponse 1/40

En dimension finie, tout sev  $F$  de  $E$  admet un unique supplémentaire  $F^\perp$  tel que  $F \perp F^\perp$  et

$$F \oplus F^\perp = E$$

## Question 2/40

Structure de l'orthogonal

## Réponse 2/40

$X^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$

## Question 3/40

Expression de  $\|x\|^2$  dans la base orthonormée  
 $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$

## Réponse 3/40

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n \left( \langle x, b_i \rangle^2 \right)$$

## Question 4/40

$\varphi$  est négative



## Réponse 4/40

$$\mathrm{im}(q_\varphi) \subset \mathbb{R}_-$$

## Question 5/40

Groupe orthogonal

## Réponse 5/40

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), P^\top P = I_n\}$$

## Question 6/40

Expression matricielle de  $\varphi(x, y)$

## Réponse 6/40

$$\varphi(x, y) = [x]_{\mathcal{B}}^{\top} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) [y]_{\mathcal{B}}$$

## Question 7/40

Structure de l'ensemble des formes bilinéaires

## Réponse 7/40

$\mathcal{B}(E)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

## Question 8/40

Projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel  
en dimension finie



## Réponse 8/40

$$z = \sum_{i=1}^m (\langle y, b_i \rangle b_i)$$

## Question 9/40

Famille orthogonale

Famille orthonormale

## Réponse 9/40

$(x_i)_{i \in I}$  est orthogonale :

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow x_i \perp x_j$$

$(x_i)_{i \in I}$  est orthonormée :

$$(x_i)_{i \in I} \text{ est orthogonale et } \forall i \in I, \|x_i\|$$

## Question 10/40

Théorème de Pythagore généralisé

## Réponse 10/40

$$\left\| \sum_{i=1}^n (x_i) \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \left( \|x_i\|^2 \right)$$

## Question 11/40

Vecteurs orthogonaux

## Réponse 11/40

$$x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

## Question 12/40

Double orthogonal



## Réponse 12/40

$$X \subset (X^\perp)^\perp$$

En dimension finie,  $X = (X^\perp)^\perp$

## Question 13/40

Si  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  est une base orthonormée  
et  $u \in \mathcal{L}(E)$   
 $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$

## Réponse 13/40

$$= \begin{pmatrix} (\langle b_i, u(b_j) \rangle)_{\{i,j\} \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \\ \langle b_1, u(b_1) \rangle & \cdots & \langle b_1, u(b_n) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle b_n, u(b_1) \rangle & \cdots & \langle b_n, u(b_n) \rangle \end{pmatrix}$$

## Question 14/40

$\varphi$  est définie

## Réponse 14/40

$$\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

## Question 15/40

$$\dim(\mathcal{B}(E))$$

Réponse 15/40

$$n^2$$

## Question 16/40

Inégalité de Cauchy-Schwarz pour un produit  
scalaire  
Cas d'égalité



## Réponse 16/40

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$

Égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires

## Question 17/40

Espace préhilbertien réel

## Réponse 17/40

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  où  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

## Question 18/40

Théorème de Pythagore

## Réponse 18/40

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

## Question 19/40

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

## Réponse 19/40

$$(\varphi(e_i, e_j))_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$$

## Question 20/40

Forme quadratique



## Réponse 20/40

$q: E \rightarrow \mathbb{R}$  tel qu'il existe  $\varphi \in \mathcal{B}(E)$  tel que

$$q(x) = \varphi(x, x)$$

$q_\varphi$  est la forme quadratique associée à  $\varphi$

## Question 21/40

Projeté orthogonal sur  $\text{Vect}(x)$

## Réponse 21/40

$$z = \langle y, x \rangle \frac{x}{\|x\|^2}$$

## Question 22/40

$$X^\perp$$

## Réponse 22/40

$$\{x \in E, x \perp X\}$$

## Question 23/40

Orthogonal d'une union

Orthogonal d'une somme

Orthogonal d'une intersection

## Réponse 23/40

$$(F \cup G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$$

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$$

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp \text{ (en dimension finie)}$$

$$(F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp \text{ (sinon)}$$

## Question 24/40

Projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel



## Réponse 24/40

$z$  est le projeté orthogonal de  $y$  sur  $F$  si et seulement si  $z \in F$  et  $(y - z) \perp F$

## Question 25/40

$\varphi$  est positive

## Réponse 25/40

$$\text{im}(q_\varphi) \subset \mathbb{R}_+$$

## Question 26/40

Groupe spécial orthogonal

## Réponse 26/40

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \det(P) = 1\}$$

## Question 27/40

Expression de  $\langle x, y \rangle$  dans la base orthonormée  
 $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$

## Réponse 27/40

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n (\langle x, b_i \rangle \langle y, b_i \rangle)$$

## Question 28/40

Sous-espaces orthogonaux



## Réponse 28/40

$$F \perp G \Leftrightarrow \forall (x, y) \in F \times G, x \perp y$$

## Question 29/40

Formule de polarisation

## Réponse 29/40

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$$

## Question 30/40

Procédé d'orthonormalisation de  
Gram-Schmidt

## Réponse 30/40

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$$

$$\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, f_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

$$u_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\langle e_k, f_i \rangle f_i)$$

## Question 31/40

$\varphi$  est symétrique

## Réponse 31/40

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

## Question 32/40

Matrice orthogonale



## Réponse 32/40

$P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est orthogonale si et seulement si

$$P^\top P = I_n$$

## Question 33/40

Coordonnées de  $x$  dans la base orthonormée

$$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$$

## Réponse 33/40

$$[x]_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \langle x, b_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, b_n \rangle \end{pmatrix}$$

## Question 34/40

Produit scalaire

## Réponse 34/40

Forme bilinéaire symétrique, définie et positive  
Noté  $\langle x, y \rangle$  ou  $(x|y)$

## Question 35/40

$$\|x\|$$

Réponse 35/40

$$\sqrt{\langle x, x \rangle}$$

## Question 36/40

$$d(x, F)$$



## Réponse 36/40

$$\min_{y \in F} (\|x - y\|) = \|x - p_F(x)\|$$

## Question 37/40

Espace euclidien

## Réponse 37/40

Espace préhilbertien réel de dimension finie

## Question 38/40

Norme

## Réponse 38/40

$$\forall x \in E, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (séparation)}$$

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x) \text{ (absolue} \\ \text{homogénéité)}$$

$$\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y) \\ \text{(inégalité triangulaire)}$$

## Question 39/40

Norme euclidienne

## Réponse 39/40

Une norme  $N$  est euclidienne si et seulement  
s'il existe un produit scalaire dont  $N$  est la  
norme associée

## Question 40/40

Formule de changement de base pour les formes bilinéaires



## Réponse 40/40

$$\text{Mat}_{\mathcal{D}}(\varphi) = (P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}})^{\top} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$$