

# Analyse

## *Dérivation de fonctions*

## Question 1/15

Fonction L-lipschitzienne

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}$$

## Réponse 1/15

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

## Question 2/15

$$\left( \prod_{k=1}^n (f_k) \right)' (x)$$

## Réponse 2/15

$$\sum_{k=1}^n \left( f'_k(x) \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\}} (f_i(x)) \right)$$

## Question 3/15

DL<sub>1</sub>

$f$  est dérivable de dérivée  $p$  en  $x_0$

## Réponse 3/15

$$\exists \varepsilon : \mathcal{V}(x_0) \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} (\varepsilon(x)) = 0$$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)p + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

## Question 4/15

Inégalité des accroissements finis  
 $f$  est une application continue sur  $[a, b]$  et  
dérivable sur  $]a, b[$   
 $\forall x \in ]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$



## Réponse 4/15

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$$

## Question 5/15

$$\text{Si } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_i(x) \neq 0$$
$$\left( \prod_{i=1}^n (f_i) \right)' (x)$$

## Réponse 5/15

$$\left( \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (f_i(x)) \right) \sum_{k=1}^n \left( \frac{f'_i(x)}{f_i(x)} \right)$$

## Question 6/15

Si  $f$  est bijective  
 $(f^{-1})'(x)$

## Réponse 6/15

$$\frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)}$$

## Question 7/15

Inégalité des accroissements finis

$f$  est une application continue sur  $[a, b]$  et  
dérivable sur  $]a, b[$

$$\forall x \in ]a, b[, |f'(x)| \leq M$$

## Réponse 7/15

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

## Question 8/15

Description topologique—topologique des  
limites

Soit  $a \in \overline{X}$ ,  $b \in \overline{\mathbb{R}}$

$f$  admet une limite  $b$  lorsque  $x$  tend vers  $a$



## Réponse 8/15

$$\forall V \in \mathcal{V}(b), \exists U \in \mathcal{V}(a), f(U \cap X) \subset V$$

## Question 9/15

Description métrique–métrique des limites

Soit  $a \in \overline{X}$ ,  $b \in \overline{\mathbb{R}}$

$f$  admet une limite  $b$  lorsque  $x$  tend vers  $a$

## Réponse 9/15

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

## Question 10/15

$$\text{Si } \exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_i(x) = 0$$
$$\left( \prod_{i=1}^n (f_i) \right)'(x)$$

## Réponse 10/15

$$f'_i(x) \times \prod_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (f_k(x))$$

## Question 11/15

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est concave sur  $I$

## Réponse 11/15

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1]$$
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

## Question 12/15

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe sur  $I$



## Réponse 12/15

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1]$$
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

## Question 13/15

$$(f_1 \circ \cdots \circ f_n)'(x)$$

## Réponse 13/15

$$\prod_{k=1}^n ((f'_k \circ f_{k-1} \circ \cdots \circ f_1)(x))$$

## Question 14/15

Inégalité de Jensen  
 $f$  est convexe sur  $I$

## Réponse 14/15

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n, \sum_{k=1}^n (\lambda_k) = 1$$
$$f\left(\sum_{k=1}^n (\lambda_k x_k)\right) \leq \sum_{k=1}^n (\lambda_k f(x_k))$$

## Question 15/15

Théorème des accroissements finis  
 $f$  est une application continue sur  $[a, b]$  et  
dérivable sur  $]a, b[$

## Réponse 15/15

$$\exists c \in ]a, b[, \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$