Analyse
Séries numériques

Question 1/19

Série de Riemann

Réponse 1/19

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

Une série de Riemann converge si et seulement si $\alpha > 1$

Question 2/19

$$\sum u_n \text{ diverge grossièrement}$$

Réponse 2/19

(u_n) ne tend pas vers 0

Question 3/19

Formule du binôme négatif

Réponse 3/19

$$\sum_{n=p}^{+\infty}\left(\frac{n!}{(n-p)!}z^{n-p}\right)=\frac{p!}{(1-z)^{p+1}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\tbinom{n+p}{p}z^{n}\right)=\frac{1}{(1-z)^{p+1}}$$

Question 4/19

Encadrement des sommes par les intégrales
f est continue et décroissante sur $[n_0, +\infty[$
avec $n_0 \in \mathbb{Z}$

Réponse 4/19

$$\int_{n_0+1}^{n+1} (f(t))\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} (f(k)) \leqslant \int_{n_0}^{n} (f(t))\,\mathrm{d}t$$

Question 5/19

Critère d'Abel

Réponse 5/19

Si (a_n) est une suite réelle positive décroissante de limite nulle, et la somme partielle de $\sum b_n$ est bornée, alors $\sum a_n b_n$ converge
Les suites $\mathrm{e}^{in\alpha}$, $\cos(n\alpha)$ et $\sin(n\alpha)$ vérifient les conditions pour (b_n) lorsque $\alpha \not\equiv 0\ [2\pi]$

Question 6/19

Série de Bertrand

Réponse 6/19

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}(n)}\right)$$

Une série de Bertrand converge si et seulement si $(\alpha, \beta) > (1, 1)$ pour l'ordre lexicographique

Question 7/19

Produit de Cauchy

Réponse 7/19

Si $\sum_n a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes et $c_n = \sum_{k=0}^{n}(a_k b_{n-k})$, alors $\sum c_n$ est absolument convergente

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n)\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(b_n)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k b_{n-k})\right)$$

Question 8/19

Théorème spécial de convergence des séries alternées

Réponse 8/19

Une série alternée est convergente
Les sommes partielles sont du signe du premier terme
Les restes sont du signe de leur premier terme et de valeur absolue plus petite que celle de ce dernier

Question 9/19

Série alternée

Réponse 9/19

$\sum u_n$ est alternée s'il existe une suite (a_n) positive décroissante de limite nulle telle que

$$u_n = (-1)^n a_n$$

Question 10/19

Sommabilité

Réponse 10/19

$$(a_i) \text{ est sommable si } \sum_{i\in I}(|a_i|) < +\infty$$

Question 11/19

Règle de Riemann

Réponse 11/19

S'il existe $\alpha > 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ est bornée,
alors $\sum u_n$ converge
Si (nu_n) est minorée par $m > 0$ à partir de
$n \in \mathbb{N}$, alors $\sum u_n$ diverge

Question 12/19

Convergence absolue

Réponse 12/19

$$\sum u_n \text{ converge absolument si } \sum |u_n| \text{ converge}$$

$$\text{Si } \sum |u_n| \text{ converge alors } \sum u_n \text{ converge}$$

Question 13/19

Règle de d'Alembert

Réponse 13/19

$$\text{Si } \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ell \text{ où } 0 \leqslant \ell < 1, \text{ alors } \sum u_n \text{ converge absolument}$$

$$\text{Si } \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ell \text{ où } \ell > 1, \text{ alors } \sum u_n \text{ diverge grossièrement}$$

Question 14/19

$$\sum_{i \in I} (a_i)$$

Réponse 14/19

$$\sup\left(\left\{\sum_{i\in J}(a_i),\ \ J\in\mathcal{P}_f(I)\right\}\right)$$

Question 15/19

$$\ell^1(I, X)$$

Réponse 15/19

Ensemble des familles sommables indexées sur I à valeurs dans $X \subset \mathbb{C}$

Question 16/19

Semi-convergence

Réponse 16/19

Convergence sans convergence absolue

Question 17/19

Comparaison par dominance

Réponse 17/19

$$u_n = \mathrm{O}(v_n)$$

$$\text{Si } \sum v_n \text{ converge alors } \sum u_n \text{ converge}$$

$$\text{Si } \sum u_n \text{ ou } \sum |u_n| \text{ diverge alors } \sum v_n \text{ diverge}$$

Question 18/19

Théorème de comparaison des séries à termes positifs

Réponse 18/19

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$
$$\text{Si } \sum v_n \text{ converge alors } \sum u_n \text{ converge}$$
$$\text{Si } \sum u_n \text{ diverge alors } \sum v_n \text{ diverge}$$

Question 19/19

Caractérisation par ε de la somme

Réponse 19/19

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists J_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(I),\ \forall K \in \mathcal{P}_f(I)$$

$$J_\varepsilon \subset K \Rightarrow \left| S - \sum_{i \in K} (a_i) \right| \leqslant \varepsilon$$