Analyse complexe
Fonctions méromorphes

Question 1/14

Image de f au voisinage de z_0 qui est une singularité essentielle

Réponse 1/14

Si V est un voisinage de z_0 dans U alors $f(V \setminus \{z_0\})$ est dense dans $\mathbb{C}$

Question 2/14

Grand théorème de Picard

Réponse 2/14

Si f a une singularité essentielle en z_0 alors il existe $F \subset \mathbb{C}$, $|F| \leqslant 1$ telle que pour tout V voisinage de z_0 dans U, $\mathbb{C} \setminus F \subset f(V \setminus \{z_0\})$

Question 3/14

Théorème de Mittag-Leffler

Réponse 3/14

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et F une partie discrète et fermée de U, alors pour $(P_a)_{a\in F}$ des polynômes non nuls sans termes constants, il existe une fonction méromorphe suc $\mathbb{C}$ qui a exactement F comme pôles et qui admet $P_a\left(\dfrac{1}{z-a}\right)$ comme partie singulière en tout $a \in F$

Question 4/14

f est méromorphe en z_0

Réponse 4/14

f admet une singularité illusoire ou un pôle en z_0

Question 5/14

$$\sum_{\alpha\in A} u_\alpha(z) \text{ converge normalement sur tout compact de } U$$

Réponse 5/14

Pour tout compact K de U, il existe une partie F_K finie de A telle que pour tout $\alpha \in A \setminus F_K$, u_α n'a pas de pôles dans K et $\displaystyle\sum_{\alpha \in A \setminus F_K} u_\alpha(z)$ converge normalement sur K

Question 6/14

Coefficients de la DSE de $u(z) = \sum_{\alpha \in A} u_\alpha(z)$ en z_0

Réponse 6/14

$$\text{Si pour tout } \alpha \in A,\ u_\alpha(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{\alpha,n}(z - z_0)^n$$

$$\text{alors } a_n = \sum_{\alpha\in A} a_{\alpha,n} \text{ qui converge absolument}$$

Question 7/14

Partie singulière de f en z_0

Réponse 7/14

Partie négative du développenent en série de Laurent de f holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$ où $z_0 \in U$

Question 8/14

f admet une singularité essentielle en z_0

Réponse 8/14

f est holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$ et la singularité en z_0 n'est ni illusoire ni un pôle

Question 9/14

f admet un pôle d'ordre k en z_0

Réponse 9/14

$$|f(z)| \xrightarrow[\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}]{} +\infty$$

Il existe $k \geqslant 1$ tel que $a_{-k} \neq 0$ et pour tout $n < -k$, $a_n = 0$

Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $f(z) - P\left(\dfrac{1}{z - z_0}\right)$ est bornée au voisinage de z_0

Question 10/14

Pôles de $\sum u_\alpha(z)$ qui converge normalement sur tout compact

Réponse 10/14

Pour F_α les pôles de u_α alors $F = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha$ est une partie discrète fermée de U et $u(z) = \sum_{\alpha \in A} u_\alpha(z)$ converge absolument sur $U \setminus F$

Question 11/14

$$\text{Convergence de } \sum_{\alpha \in A} u_\alpha^{(n)}(z)$$

Réponse 11/14

Si $\sum\limits_{\alpha \in A} u_\alpha(z)$ converge normalement vers u sur tout compact de $\mathbb{C}$ alors u est méromorphe et $\sum\limits_{\alpha \in A} u_\alpha^{(n)}(z)$ converge normalement vers $u^{(n)}(z)$

Question 12/14

f est méromorphe sur U

Réponse 12/14

$f : U \setminus F \to \mathbb{C}$ est holomorphe avec F une partie discrète et fermée de U et f est méromorphe en tout point de F

Question 13/14

Identité d'Euler

Réponse 13/14

$$\cot(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z + n\pi} + \frac{1}{z - n\pi} \right)$$

Question 14/14

f admet une singularité illusoire en z_0

Réponse 14/14

f est bornée au voisinage de z_0

Pour tout $n < 0$, $a_n = 0$

f se prolonge en $\widetilde{f}$ folomorphe sur U