Probabilités

Espaces probabilisés

Question 1/26

σ-algèbre

Tribu

Réponse 1/26

Une σ-algèbre $\mathcal{T}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant

$$\Omega \in \mathcal{T}$$

$$A \in \mathcal{T} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{T}$$

Si I est dénombrable et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$, $\bigcup_{i \in I}(A_i) \in \mathcal{T}$

Question 2/26

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i)\right)$$

Réponse 2/26

$$\sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ I \neq \varnothing}} \left((-1)^{|I|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} (A_i) \right) \right)$$

Question 3/26

Les A_i, $i \in I$ sont mutuellement indépendants

Réponse 3/26

$$\forall J \in \mathcal{P}_f(I),\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}(A_j)\right) = \prod_{j\in J}(\mathbb{P}(A_j))$$

Question 4/26

Formule des probabilités totales

Réponse 4/26

Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système quasi-complet au plus dénombrable

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} (\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B \mid A_i))$$

Question 5/26

Système quasi-complet d'événements

Réponse 5/26

$\mathcal{C}$ est quasi-complet si

Les événements de $\mathcal{C}$ ne sont pas impossibles

Les événements de $\mathcal{C}$ sont deux à deux disjoints

$$\sum_{A \in \mathcal{C}} (\mathbb{P}(A)) = 1$$

Question 6/26

Formule de Bayes simple

Réponse 6/26

$$\text{Si } \mathbb{P}(A) \neq 0 \text{ et } \mathbb{P}(B) \neq 0$$
$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Question 7/26

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n)\right)$$

Réponse 7/26

$$\lim_{N \to +\infty} \left(\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} (A_n) \right) \right)$$

Question 8/26

Tribu des boréliens sur $\mathbb{R}^n$

Réponse 8/26

$$\mathcal{B}^n$$

Tribu engendrée par les $I_1 \times \cdots \times I_n$ où les I_k sont des intervalles

Question 9/26

Espace probabilisé

Modèle probabiliste de Kolmogorov

Réponse 9/26

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ où $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace probabilisable et $\mathbb{P}$ une mesure de probabilités

Question 10/26

$$\liminf(A_n)$$

Réponse 10/26

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty}(A_k)\right)$$

Question 11/26

Formule des probabilités totales pour le système complet $(A, \overline{A})$

Réponse 11/26

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(B \mid \overline{A}\right)$$

Question 12/26

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n)\right)$$

Réponse 12/26

$$\lim_{N \to +\infty} \left(\mathbb{P} \left(\bigcap_{n=0}^{N} (A_n) \right) \right)$$

Question 13/26

$$\mathbb{P}(\{\omega\})$$

Réponse 13/26

$$\frac{1}{|\Omega|}$$

Question 14/26

Formule des probabilités totales associée à une variable aléatoire réelle discrète

Réponse 14/26

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(B \mid X = x)\right)$$

Question 15/26

Intersection de tribus

Réponse 15/26

Si $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ est une famille de σ-algèbres sur Ω,

alors $\displaystyle\bigcap_{i\in I}(\mathcal{T}_i)$ est une σ-algèbre sur Ω

Question 16/26

Mesure de probabilités

Réponse 16/26

$$\text{Application } \mathbb{P}\colon\ \mathcal{T} \to \mathbb{R} \text{ vérifiant}$$
$$0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$$
$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$
$$\mathbb{P}\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} (A_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{P}(A_n))$$

Question 17/26

Tribu engendrée par une famille

Réponse 17/26

$\sigma\left((A_i)_{i\in I}\right)$ avec A_i des éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$

Plus petite σ-algèbre de Ω contenant $(A_i)_{i\in I}$

Question 18/26

Formule de Bayes sur un système complet

Réponse 18/26

Si $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet au plus dénombrable tel que pour tout $i \in I$,

$$\mathbb{P}(A_i) \neq 0 \text{ et } \mathbb{P}(B) \neq 0$$

$$\mathbb{P}(A_j \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_j)\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i\in I}(\mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i))}$$

Question 19/26

Distribution de probabilités

Réponse 19/26

$$\text{Famille } (p_i)_{i \in I} \text{ tel que } \sum_{i \in I} (p_i) = 1$$

Question 20/26

$$\limsup(A_n)$$

Réponse 20/26

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty}(A_k)\right)$$

Question 21/26

A et B sont indépendants

Réponse 21/26

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Question 22/26

Formule des probabilités composées

Réponse 22/26

$$\text{Si } \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1}(A_i)\right) \neq 0$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(A_i)\right) = \mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{n}\left(\mathbb{P}\left(A_i \;\middle|\; \bigcap_{j=1}^{i-1}(A_j)\right)\right)$$

Question 23/26

Système complet d'événements

Réponse 23/26

Famille $\{A_i,\ i \in I\}$ formant une partition de Ω

Question 24/26

$$\mathbb{P}_b(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$$

Réponse 24/26

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Question 25/26

Espace probabilisable

Réponse 25/26

$$(\mathcal{T}, \Omega)$$

$\mathcal{T}$ est une σ-algèbre sur Ω

Question 26/26

Tribu des boréliens

Réponse 26/26

$$\mathcal{B}^1 \text{ ou } \mathcal{B}$$

$$\sigma\left((]-\infty, a[)_{a\in\mathbb{R}}\right)$$

$\mathcal{B}^1$ est aussi engendrée par n'importe quel type d'intervalle de $\mathbb{R}$