

Intégration et théorie de la mesure *Espaces L^p*

Question 1/10

$$L^p(\mu)$$

Réponse 1/10

$$\mathcal{L}^p / \sim \text{ où } f \sim g \text{ ssi } f = g \text{ } \mu\text{-pp}$$

Question 2/10

$$\mathcal{L}^p(\mu)$$

Réponse 2/10

$$\mathcal{L}^\infty = \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurables, } \int |f|^p \, d\mu < +\infty \right\}$$
$$\mathcal{L}^\infty = \{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurables, } \|f\|_\infty < +\infty \}$$

Question 3/10

Inégalité de Jensen

Réponse 3/10

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, μ une mesure de probabilités ($\mu(X) = 1$ et $\mu \geq 0$), si $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable alors

$$\varphi\left(\int_X f \, d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ f \, d\mu$$

Question 4/10

Densité des fonctions en escalier dans L^p

Réponse 4/10

Si $p \in [1, +\infty]$ alors les fonctions en escalier
sont dense dans L^p

Question 5/10

Inégalité de Hölder

Réponse 5/10

Si $p \in [1, +\infty]$ et $p' = \frac{p}{p-1}$ alors pour f et g
mesurables, $\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$

Question 6/10

Structures des L^p

Réponse 6/10

L^p sont des espaces de Banach

L^2 est un espace de Hilbert avec $\langle f, g \rangle = \int f g$

Question 7/10

Densité des fonctions lipschitziennes à support compact dans L^p

Réponse 7/10

Si (X, d) est un espace métrique localement compact (pour tout $x \in X$, il existe O ouvert tel que $x \in O$ et \overline{O} est compact), séparable et μ de Radon (finie sur tout compact) et $p \in [1, +\infty[$ alors les fonctions lipschitziennes à support compact de L^p sont dense dans L^p

Question 8/10

$$\|f\|_{L^p}$$

Réponse 8/10

$$\left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } p \in \mathbb{N}^*$$
$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{c \geq 0, |f| \leq c \text{ } \mu\text{-pp}\}$$

Question 9/10

Inégalité de Minkowski

Réponse 9/10

Si $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables et $p \in [1, +\infty]$, alors $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$

Question 10/10

Densité des fonctions lipschitziennes dans L^p

Réponse 10/10

Si $p \in [1, +\infty[$ et μ est extérieurement régulière alors les fonctions lipschitziennes de L^p sont dense dans L^p