Fractions continues
Transformation de Möbius

Question 1/14

$$f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \text{ est normalisé}$$

Réponse 1/14

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 1$$

Question 2/14

Définition des A_n et B_n associés à $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Réponse 2/14

$$\begin{cases} A_{-1} = 1 \\ A_0 = b_0 \\ B_{-1} = 0 \\ B_0 = 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2} \\ B_n = b_n q_{n-1} + a_n B_{n-2} \end{cases}$$

Question 3/14

Fromule du déterminant généralisée

Réponse 3/14

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n} (a_k)$$

Question 4/14

$$f \in \mathcal{M} \text{ est loxodromique}$$

Réponse 4/14

$$f \sim \alpha z,\ \alpha \in \mathbb{C}^*,\ \alpha \neq 1$$
$$f \text{ est diagonalisable}$$

Question 5/14

$f \in \mathcal{M}$ et $g \in \mathcal{M}$ sont conjuguées

Réponse 5/14

Il existe $h \in \mathcal{M}$ tel que $f = h \circ g \circ h^{-1}$

Question 6/14

$f \in \mathcal{M}$ est hyperbolique

Réponse 6/14

$$f \sim kz,\ k \in \mathbb{R}^*,\ k \neq 1$$
$$f \text{ est diagonalisable}$$

Question 7/14

Théorème de Pringsheim

Réponse 7/14

Soient (a_n) et (b_n) deux suites complexes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|b_n| \geqslant |a_n| + 1$ alors

$$\mathop{\mathcal{K}}_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ converge}$$

Question 8/14

$$f \in \mathcal{M} \text{ est parabolique}$$

Réponse 8/14

$$f \sim z + 1 \text{ (translation)}$$

f n'est pas diagonalisable

Question 9/14

$$\operatorname*{\mathcal{K}}_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \sim \operatorname*{\mathcal{K}}_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{a'_n}{b'_n}\right)$$

Réponse 9/14

Il existe $(r_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $r_0 = 1$, $b_0 = b'_0$ et

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} a_n = r_n r_{n-1} a'_n \\ b_n = r_n b'_n \end{cases}$

Question 10/14

Théorème de Stern-Stolz

Réponse 10/14

La fraction continue $b_0 + \underset{k=1}{\overset{+\infty}{\mathrm{K}}}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ converge si et seulement si $\sum |b_n|$ diverge

Question 11/14

Définition des S_n associés à $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n) \in_{\mathbb{N}^*}$

Réponse 11/14

$$S_0(w) = s_0(w) \text{ où } s_0(w) = b_0 + w$$

$$S_n(w) = S_{n-1} \circ s_n(w) \text{ où } s_n(w) = \frac{a_n}{b_n + w}$$

$$S_n(w) \frac{A_n + A_{n-1} w}{B_n + B_{n-1} w}$$

Question 12/14

CNS pour que $f \in \mathcal{M}$ et $g \in \mathcal{M}$ soient conjuguées

Réponse 12/14

$$\operatorname{tr}(f)^2 = \operatorname{tr}(g)^2$$

Question 13/14

Théorème de Seidel-Stern

Réponse 13/14

Soit $\underset{k=1}{\overset{+\infty}{\mathcal{K}}}\left(\frac{1}{b_n}\right)$ une fraction continue telle que

$\begin{cases} b_n > 0 \\ \sum b_n \text{ diverge} \end{cases}$ alors $\underset{k=1}{\overset{+\infty}{\mathcal{K}}}\left(\frac{1}{b_n}\right)$ converge dans $\mathbb{R}$

Question 14/14

$f \in \mathcal{M}$ est elliptique

Réponse 14/14

$$f \sim \alpha z,\ \alpha \in \mathbb{U}^* \text{ (rotation)}$$
$$f \text{ est diagonalisable}$$