Topologie et calcul différentiel

Dual d'un espace de Banach

Question 1/6

Propriétés de E si E^* est séparable

Réponse 1/6

Si E est un Banach et E^* est séparable alors E l'est

En particulier, si E est séparable et réflexif alors E^* est séparable

Question 2/6

Morphisme canonique $E \to E^{**}$

Réponse 2/6

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto \left(\begin{aligned} \delta_x : E^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

Cette application est une isométrie

Question 3/6

Espace reflexif

Réponse 3/6

Un espace de Banach est réflexif si l'application

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} \delta_x : E^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad f \longmapsto f(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un isomorphisme

Question 4/6

Théorème de représentation de Riesz

Réponse 4/6

Si $\mu \in E^*$ alors in existe un unique $y \in E$ tel que $\mu = \langle y, \bullet \rangle$

Question 5/6

Théorème de Hahn-Banach

Réponse 5/6

Si E est un evn, V un sev de E et $f : V \to \mathbb{R}$ une application linéaire continue alors f se prolonge en une application continue $\overline{f} : E \to \mathbb{R}$ telle que $\left\|\overline{f}\right\|_{E^*} = \left\|\overline{f}\right\|_{V^*}$

Question 6/6

Application duale

Réponse 6/6

Si E et F sont deux evn et $f : E \to F$ est linéaire et continue alors

$$\begin{aligned} f^* : F^* &\longrightarrow E^* \\ \mu &\longmapsto (x \mapsto \mu(f(x))) \end{aligned} \qquad \text{vérifie } |||f||| = |||f^*|||$$