

Algèbre 1

Formes bilinéaires

Question 1/25

$$\varphi \in \text{Bil}(E, F)$$
$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi)$$

Réponse 1/25

$$(\varphi(e_i, f_j))_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket}$$

Question 2/25

Lien entre $S(E)$ et $A(E)$

Réponse 2/25

$$\begin{aligned} \text{Si } \text{car}(\mathbb{k}) \neq 2, \text{ Bil}(E, E) &= S(E) \oplus A(E) \\ \text{Si } \text{car}(\mathbb{k}) = 2, A(E) &\subset S(E) \end{aligned}$$

Question 3/25

φ est non dégénérée

Réponse 3/25

$$\operatorname{rg}(\varphi) = \dim(E) = \dim(F)$$

Question 4/25

$$\dim(A(E))$$

Réponse 4/25

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Question 5/25

Équivalences à φ symétrique sur ℓ_φ et r_φ

Réponse 5/25

$$l_\varphi = r_\varphi$$

$$l_\varphi = {}^t l_\varphi$$

$$r_\varphi = {}^t r_\varphi$$

Question 6/25

$\varphi \in \text{Bil}(E, E)$ est symétrique

Réponse 6/25

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

Question 7/25

Décomposition explicite de $\varphi \in \text{Bil}(E, E)$ dans
 $S(E) \oplus A(E)$

Réponse 7/25

$$\varphi_S(x, y) = \frac{1}{2}(\varphi(x, y) + \varphi(y, x))$$
$$\varphi_A(x, y) = \frac{1}{2}(\varphi(x, y) - \varphi(y, x))$$

Question 8/25

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F^*}(\ell_\varphi)$$

Réponse 8/25

$${}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi)$$

Question 9/25

$$V^{\perp, \varphi}$$
$$V \subset E$$

Réponse 9/25

$$\{y \in F, \forall x \in V, \varphi(x, y) = 0\}$$

Question 10/25

$\varphi \in \text{Bil}(E, E)$ est alternée

Réponse 10/25

$$\varphi(x, x) = 0$$

Question 11/25

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E^*}(r_\varphi)$$

Réponse 11/25

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi)$$

Question 12/25

Lien entre $\dim(V)$, $\dim(V^{\perp, \varphi})$ et $\dim(E)$

Réponse 12/25

$$\dim(V) + \dim(V^{\perp, \varphi}) \geq \dim(E)$$

Il y a égalité si et seulement si φ est non dégénérée

Question 13/25

$$\dim(S(E))$$

Réponse 13/25

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Question 14/25

Expression de $V^{\perp, \varphi}$ avec r_φ et ℓ_φ

Réponse 14/25

$$V^{\perp, \varphi} = \ell_{\varphi}(V)^{\perp} = r_{\varphi}^{-1}(V)$$

Question 15/25

Lien entre $\ell_\varphi: E \longrightarrow F$, $r_\varphi: E \longrightarrow F$
 $x \longmapsto \varphi(x, \cdot)$ $x \longmapsto \varphi(\cdot, x)$
et $\text{Bil}(E, F)$

Réponse 15/25

$$\ell : \text{Bil}(E, F) \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$$

$$\varphi \longmapsto \ell_\varphi$$

et

$$r : \text{Bil}(E, F) \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$$

$$\varphi \longmapsto r_\varphi$$

sont deux isomorphismes

Question 16/25

$\varphi(X, Y)$ matriciellement

Réponse 16/25

tXY où X et Y sont des vecteurs colonnes

Question 17/25

Lien entre antisymétrique et alternée

Réponse 17/25

Si φ est alternée alors elle est antisymétrique

Si $\text{car}(\mathbb{k}) \neq 2$ est φ est antisymétrique alors elle
est alternée

Question 18/25

Restriction d'une forme bilinéaire non
dégénérée

Réponse 18/25

La restriction d'une forme bilinéaire non dégénérée n'est en général pas dégénérée

Question 19/25

$\varphi \in \text{Bil}(E, E)$ est antisymétrique

Réponse 19/25

$$\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$$

Question 20/25

$$E^{\perp, \varphi}$$

Réponse 20/25

$$\ker(r_\varphi)$$

Question 21/25

$$W^{\varphi, \perp}$$

$$W \subset F$$

Réponse 21/25

$$\{x \in E, \forall y \in W, \varphi(x, y) = 0\}$$

Question 22/25

$$F^{\varphi, \perp}$$

Réponse 22/25

$$\ker(\ell_\varphi)$$

Question 23/25

Quotient d'une forme bilinéaire dégénérée

Réponse 23/25

Si $\varphi \in \text{Bil}(E, F)$ est dégénérée alors il existe une unique forme bilinéaire non dégénérée $\varphi' \in \text{Bil}(E / \ker(\ell_\varphi), F / \ker(r_\varphi))$ telle que

$$\varphi(\cdot, \cdot) = \varphi'(\pi_E(\cdot), \pi_F(\cdot))$$

Question 24/25

Équivalences à φ antisymétrique sur ℓ_φ et r_φ

Réponse 24/25

$$l_\varphi = -r_\varphi$$

$$l_\varphi = -{}^t l_\varphi$$

$$r_\varphi = -{}^t r_\varphi$$

Question 25/25

Expression de $W^{\varphi, \perp}$ avec r_φ et ℓ_φ

Réponse 25/25

$$V^{\perp, \varphi} = \ell_{\varphi}^{-1}(W) = r_{\varphi}(W)^{\perp}$$