

**Concentration de la
mesure**

***Inégalités de
concentration***

Question 1/27

Équivalent de l'inégalité triangulaire pour

$$\left\| \sum_{i=1}^n (X_i) \right\|_{\psi_2}^2$$

Réponse 1/27

Si les X_i sont indépendantes, centrées et sous-gaussiennes,

$$\left\| \sum_{i=1}^n (X_i) \right\|_{\psi_2}^2 \leq C \sum_{i=1}^n \left(\|X_i\|_{\psi_2} \right)^2$$

Question 2/27

$$\|X\|_{\psi_2}$$

Réponse 2/27

$$\inf \left(\left\{ t > 0, \mathbb{E} \left(e^{\frac{x^2}{t^2}} \right) \leq 2 \right\} \right)$$

$\|\cdot\|_{\psi_2}$ est une norme

Question 3/27

$$\inf_{a \in \mathbb{R}} (\mathbb{E}(|X - a|))$$

Réponse 3/27

$\mathbb{E}(|X - m_X|)$ avec m_X une médiane de X

Question 4/27

Inégalité de Chernov pour des variables de
Bernoulli

Réponse 4/27

Si X_1, \dots, X_n sont des variables de Bernoulli indépendantes avec X_i de paramètre p_i et si $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $\mu = p_1 + \dots + p_n$ alors

$$\mathbb{P}(S_n \geq t) \leq e^{-\mu} \left(\frac{e\mu}{t} \right)^t$$

Question 5/27

X est une variable aléatoire réelle
sous-gaussienne

Réponse 5/27

$$\exists K_1 > 0, \forall t > 0, \mathbb{P}(|X| \geq t) \leq 2e^{\frac{-t^2}{K_1^2}}$$

$$\exists K_2 > 0, \forall p \geq 1, \|X\|_{L^p} \leq K_2 \sqrt{p}$$

$$\exists K_3 > 0, \forall |\lambda| \leq \frac{1}{K_3}, \mathbb{E}\left(e^{\lambda^2 X^2}\right) \leq e^{K_3^2 \lambda^2}$$

$$\exists K_4 > 0, \mathbb{E}\left(e^{\frac{X^2}{K_4}}\right) \leq 2$$

$$\exists K_5 > 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) \leq e^{K_5^2 \lambda^2} \quad (\mathbb{E}(X) = 0)$$

$$\exists C > 0, \forall i \neq j, K_i \leq CK_j$$

Question 6/27

Fonction génératrice des moments
Transformée de Laplace

Réponse 6/27

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) = e^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

Question 7/27

Généralisation de l'inégalité de
Bienaymé-Tchebychev

Réponse 7/27

$$\forall t > 0, \forall a \in \mathbb{R},$$
$$\mathbb{P}(|X - a| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(|X - a|^p)}{t^p}$$

Question 8/27

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Réponse 8/27

$$\mathbb{P}_X(dx) = \frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

Question 9/27

Loi de probabilités d'une variable
sous-exponentielle

Réponse 9/27

$$\mathbb{P}_X(\mathrm{d}x) = \frac{\mathrm{e}^{-|x|}}{2} \mathrm{d}x$$

Question 10/27

Inégalité de Markov

Réponse 10/27

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}$$

Question 11/27

$$\|X\|_{\psi_1}$$

Réponse 11/27

$$\inf \left(\left\{ t > 0, \mathbb{E} \left(e^{\frac{|X|}{t}} \right) \leq 2 \right\} \right)$$

$\|\cdot\|_{\psi_1}$ est une norme

Question 12/27

Majoration de $\| \|X\|_2 - \sqrt{n} \|_{\psi_2}$

Réponse 12/27

$$\left| \|X\|_2 - \sqrt{n} \right|_{\psi_2} \leq C \cdot \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left\{ \|X_i\|_{\psi_2}^2 \right\}$$

pour $X = (X_1, \dots, X_n)$ avec les X_i des variables aléatoires sous-gaussiennes centrées réduites

Question 13/27

X est une variable aléatoire réelle
sous-exponentielle

Réponse 13/27

$$\exists K_1 > 0, \forall t > 0, \mathbb{P}(|X| \geq t) \leq 2e^{\frac{-t}{K_1}}$$

$$\exists K_2 > 0, \forall p \geq 1, \|X\|_{L^p} \leq K_2 p$$

$$\exists K_3 > 0, \forall 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{K_3}, \mathbb{E}(e^{\lambda|X|}) \leq e^{K_3 \lambda}$$

$$\exists K_4 > 0, \mathbb{E}\left(e^{\frac{|X|}{K_4}}\right) \leq 2$$

$$\exists K_5 > 0, \forall |\lambda| \leq \frac{1}{K_5}, \mathbb{E}(e^{\lambda X}) \leq e^{K_5^2 \lambda^2} \quad (\mathbb{E}(X) = 0)$$

$$\exists C > 0, \forall i \neq j, K_i \leq C K_j$$

Question 14/27

Inégalité de Chernov

Réponse 14/27

$$\forall t > 0, \mathbb{P}(X \geq t) \leq e^{-\lambda t} \mathbb{E}(e^{\lambda X})$$

Question 15/27

Transformée log-Laplace de X

Réponse 15/27

$$\psi(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda X})$$

ψ est convexe

Question 16/27

Lien entre $\|\cdot\|_{\psi_1}$ et $\|\cdot\|_{\psi_2}$

Réponse 16/27

Si X est sous-gaussienne, $\|X^2\|_{\psi_1} = \|X\|_{\psi_2}^2$

Question 17/27

$$\inf_{a \in \mathbb{R}} \left(\mathbb{E} \left((X - a)^2 \right) \right)$$

Réponse 17/27

$$\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|) = \mathbb{V}(X)$$

Question 18/27

Inégalité de Bernstein

Réponse 18/27

Si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes centrées et sous-exponentielles

$$\text{alors } \mathbb{P} \left(\left| \sum_{i=1}^n (X_i) \right| \geq t \right) \\ \leq 2 \exp \left(-C \min \left(\frac{t^2}{\sum_{i=1}^n \|X_i\|_{\psi_1}^2}, \frac{t}{\max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \|X_i\|_{\psi_1}} \right) \right)$$

Question 19/27

Inégalité de Hoeffding

Réponse 19/27

Si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes avec X_i à valeurs dans $[a_i, b_i]$ et si $S_n = X_1 + \dots + X_n$ alors

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq t) \leq 2 \exp \left(\frac{-2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} \right)$$

Question 20/27

Théorème de Johnson-Lindenstrauss

Réponse 20/27

Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout D , pour tout n , si A est une partie finie de \mathbb{R}^D de cardinal $\leq n$, il existe d et une ε -isométrie sur A^1 linéaire φ dès lors que

$$d \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \ln(n)$$

1. $\forall x, y \in A, (1-\varepsilon)\|\varphi(x)-\varphi(y)\| \leq \|x-y\| \leq (1+\varepsilon)\|\varphi(x)-\varphi(y)\|$

Question 21/27

Lien entre $\|X\|_{\psi_2}$ et $X - \mathbb{E}(X)$

Réponse 21/27

$$\|X - \mathbb{E}(X)\|_{\psi_2} \leq C \|X\|_{\psi_2}$$

Question 22/27

Propriété de $\|X \cdot x\|_{\psi_2}$ pour
 $X = (X_1, \dots, X_n)$ avec les X_i des variables
aléatoires sous-gaussiennes centrées réduites

Réponse 22/27

$$\sup_{n \geq 1} \left(\sup_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} \left(\|X \cdot x\|_{\psi_2} \right) \right) < +\infty$$

Question 23/27

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Réponse 23/27

$$\forall t > 0, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{t^2}$$

Question 24/27

Moment d'ordre p

Réponse 24/27

$$\mathbb{E}(|X|^p)$$

Question 25/27

$\|XY\|_{\psi_1}$ pour X et Y sous-gaussiennes

Réponse 25/27

$$\|XY\|_{\psi_1} \leq \|X\|_{\psi_2} \|Y\|_{\psi_2}$$

Question 26/27

Borne de Chernov

Réponse 26/27

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq e^{\psi^*(t)} \text{ où } \psi^*(t) = -\sup_{\lambda \geq 0} (\lambda t - \psi(\lambda))$$

Question 27/27

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie une inégalité de concentration de concentration α

Réponse 27/27

$$\begin{aligned} &\exists a \in \mathbb{R}, \forall t \geqslant 0, \\ &\mu(\{x \in \mathbb{R}^n, |f(x) - a| \geqslant t\}) \leqslant \alpha(t) \end{aligned}$$