

Algèbre 2

Dimension finie

Question 1/29

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est inversible

Réponse 1/29

$$u \in \mathrm{GL}(E)$$

La réciproque est vraie

Question 2/29

Dimension d'une somme directe

Réponse 2/29

$$\dim \left(\bigoplus_{i=1}^n (E_i) \right) = \sum_{i=1}^n (\dim(E_i))$$

Question 3/29

Matrice associée à une composition

Réponse 3/29

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

Question 4/29

Endomorphisme diagonalisable

Réponse 4/29

Il existe une base \mathcal{B} dans laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale

Question 5/29

Produit matriciel avec l'évaluation

Réponse 5/29

$$[f(X)]_{\mathcal{C}} = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)[X]_{\mathcal{B}}$$

Question 6/29

Matrices semblables

Réponse 6/29

$$\begin{aligned} &A \in \mathcal{M}_n(K), B \in \mathcal{M}_n(K) \\ &\exists(P) \in \mathrm{GL}_n(K), B = P^{-1}AP \end{aligned}$$

Question 7/29

Formule de Grassmann

Réponse 7/29

$$\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$$

Question 8/29

Rang d'une famille

Réponse 8/29

$$\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n) = \dim(\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n))$$

Question 9/29

Conservation de l'image et du noyau pour les matrices

Réponse 9/29

$$\begin{aligned} M &\in \mathcal{M}_{n,p}(K), P \in \mathrm{GL}_n(K), Q \in \mathrm{GL}_n(K) \\ \ker(PM) &= \ker(M) \\ \mathrm{Im}(MQ) &= \mathrm{Im}(M) \end{aligned}$$

Question 10/29

Forme linéaire

Réponse 10/29

Application linéaire (sur un \mathbb{K} -espace vectoriel
 E) de E vers \mathbb{K}

Un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

Question 11/29

Propriétés de la trace

Réponse 11/29

C'est une forme linéaire

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^{\top})$$

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

Si M et N sont semblables, $\operatorname{tr}(N) = \operatorname{tr}(M)$

Question 12/29

Matrice de passage

Réponse 12/29

$$P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(\text{id}) = [\mathcal{B}_2]_{\mathcal{B}_1}$$

Question 13/29

Matrices équivalentes

Réponse 13/29

$$\begin{aligned} N &\in \mathcal{M}_n(K), M \in \mathcal{M}_n(K) \\ \exists (P, Q) &\in \mathrm{GL}_n(K)^2, N = PMQ \end{aligned}$$

Question 14/29

Effet d'une composition sur le rang

Réponse 14/29

$$\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$$

Si v est injective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$

Si u est surjective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$

Question 15/29

Dimension d'un supplémentaire S de F dans E

Réponse 15/29

$$\dim(S) = \dim(E) - \dim(F)$$

Question 16/29

Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Réponse 16/29

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

Question 17/29

Matrice diagonalisable

Réponse 17/29

Matrice semblable à une matrice diagonale

Question 18/29

Hyperplan

Réponse 18/29

$$\exists \in E^* \setminus \{0\}, H = \ker(\varphi)$$

φ est l'équation caractéristique de H

Question 19/29

Classification des matrices équivalentes par le
rang

Réponse 19/29

N est équivalent à M si et seulement si

$$\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(N)$$

Question 20/29

Dimension d'un produit cartésien

Réponse 20/29

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

Question 21/29

Trace d'un projecteur et d'une symétrie

Réponse 21/29

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(p) &= \mathrm{rg}(p) \\ \mathrm{tr}(s) &= n - 2 \mathrm{rg}(s - \mathrm{id})\end{aligned}$$

Question 22/29

Rang d'une application linéaire

Réponse 22/29

$$\operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{Im}(u))$$

Question 23/29

Théorème du rang

Réponse 23/29

$$\dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f) = \dim(E)$$

Question 24/29

Majoration du rang d'une application linéaire
 $u \in \mathcal{L}(E, F)$

Réponse 24/29

$$\operatorname{rg}(u) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$$

Question 25/29

Formule de changement de base

Réponse 25/29

$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ des bases de E , $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ des bases de F

$$\begin{aligned}\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2}(f) &= P_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_1} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1}(f) P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \\ &= \left(P_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{C}_2}\right)^{-1} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1}(f) P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}\end{aligned}$$

Question 26/29

Image d'une matrice

Réponse 26/29

$$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}(C_1(M), \dots, C_n(M))$$

Question 27/29

Trace d'une matrice

Réponse 27/29

$$A \in \mathcal{M}_n(K)$$
$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \left([A]_{i,i} \right)$$

Question 28/29

Conservation du rang pour les matrices

Réponse 28/29

$$M \in \mathcal{M}_{n,p}(K), P \in \mathrm{GL}_n(K), Q \in \mathrm{GL}_n(K) \\ \mathrm{rg}(PMQ) = \mathrm{rg}(M)$$

Question 29/29

Dual

Réponse 29/29

$$E^*$$

$\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ constitué des formes linéaires