

Algèbre 1

Corps

Question 1/14

Image directe et réciproque de sous-corps par
un homomorphisme

Réponse 1/14

Si K et L sont deux corps, et $f: K \rightarrow L$ un morphisme de corps, K' et L' deux sous-corps respectivement de K et L

- $f(K')$ est un sous-corps de L
- $f^{-1}(L')$ est un sous-corps de K

Question 2/14

Propriété de $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Réponse 2/14

\mathbb{F}_p est un corps si et seulement si p est premier

Question 3/14

Corps

Réponse 3/14

Muni de deux lois de composition internes
(généralement notées $+$ et \times)
 $(K, +, \times)$ est un anneau commutatif
 (K^*, \times) est un groupe

Question 4/14

Si K est un corps, d'élément neutre $1_K \neq 0_K$,
 $H = \{n \times 1_K, n \in \mathbb{Z}\}$ le sous-groupe
monogène de $(K, +)$ engendré par 1_K
Caractéristique d'un corps

Réponse 4/14

Si H est infini, K est de caractéristique nulle

Si H est fini de cardinal p , K est de
caractéristique p

Question 5/14

Si K est un corps de caractéristique finie p
Propriété pour les éléments de K

Réponse 5/14

$$\forall x \in K, \quad px = 0_K$$

Question 6/14

Groupe

Réponse 6/14

Muni d'une loi de composition interne, de l'associativité, d'un élément neutre et de symétriques

Question 7/14

Si $(K, +, \times)$ est un corps

Un sous-ensemble L de K est un sous-corps de
 K

Réponse 7/14

L est stable pour les lois $+$ et \times

$$1_K \in L$$

Les lois induites sur L définissent sur L une
structure de corps

Question 8/14

Soient $\left(K, +_K, \times_K\right)$ et $\left(L, +_L, \times_L\right)$ deux corps
 $f: K \rightarrow L$ est un homomorphisme de corps

Réponse 8/14

f est un homomorphisme des anneaux de K et L

Question 9/14

Anneau

Réponse 9/14

Muni de deux lois de composition internes
(généralement notées $+$ et \times)
 $(A, +)$ est un groupe abélien
 (A, \times) est un monoïde
 \times est distributive sur $+$

Question 10/14

Propriété des homomorphismes de corps

Réponse 10/14

Un homomorphisme de corps est injectif

Question 11/14

Propriété de la caractéristique d'un corps

Réponse 11/14

Si K est un corps de caractéristique p non nulle, p est premier

Question 12/14

Si $(K, +, \times)$ est un groupe et $L \subset K$
Caractérisation des sous-corps

Réponse 12/14

$$\begin{aligned} 1_K &\in L \quad \forall (x, y) \in L, \quad x - y \in L \\ \forall (x, y) &\in L, \quad y \neq 0 \Rightarrow xy^{-1} \in L \end{aligned}$$

Question 13/14

Si K est un corps de caractéristique nulle
Propriété pour les éléments de K

Réponse 13/14

$$\begin{aligned} &\forall (n, x) \in \mathbb{Z} \times K \\ n \times x = 0_K &\Leftrightarrow (x = 0_K \vee n = 0) \end{aligned}$$

Question 14/14

Soient $\left(A, +_A, \times_A\right)$ et $\left(B, +_B, \times_B\right)$ deux anneaux
 $f: A \rightarrow B$ est un homomorphisme d'anneaux

Réponse 14/14

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad f\left(x \underset{A}{+} y\right) = f(x) \underset{B}{+} f(y)$$

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad f\left(x \underset{A}{\times} y\right) = f(x) \underset{B}{\times} f(y)$$
$$f(1_A) = 1_B$$