

Algèbre linéaire & dimension finie

Lemme : Lemme de décomposition des noyaux

Si E est un \mathbb{K} espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P \wedge Q = 1$, alors $\ker(PQ(u)) = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u))$.

Preuve : Lemme de décomposition des noyaux

$P \wedge Q = 1$. Donc, il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $PU + QV = 1$.

Montrons l'égalité :

Soit $x \in \ker(PQ(u))$.

$x = (PU + QV)(u)(x)$.

$(Q(u) \circ (PU)(u))(x) = (U(u) \circ (PQ)(u))(x) = 0$. Donc, $(PU)(u)(x) \in \ker(Q(u))$.

De même, $(QV)(u)(x) \in \ker(P(u))$.

Donc, $\ker((PQ)(u)) \subset \ker(P(u)) + \ker(Q(u))$.

Réciproquement, $\ker(P(u)) \subset \ker((PQ)(u))$ et $\ker(Q(u)) \subset \ker((PQ)(u))$.

Donc, $\ker(P(u)) + \ker(Q(u)) \subset \ker((PQ)(u))$.

Montrons que la somme est directe :

Soit $x \in \ker(P(u)) \cap \ker(Q(u))$.

$x = (P(u) \circ U(u) + Q(u) \circ V(u))(x) = U(u)(0) + V(u)(0) = 0$.

Donc, $\ker((PQ)(u)) = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u))$.

Théorème : Théorème des noyaux itérés

Si E est un \mathbb{K} espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $(\dim(\ker(u^{k+1})) - \dim(\ker(u^k)))$ est décroissante.

Preuve : Théorème des noyaux itérés

Montrons que $\operatorname{rg}(u^k) - \operatorname{rg}(u^{k+1}) = \dim(\ker(u) \cap \operatorname{im}(u^k))$:

Soit $v = u|_{\operatorname{im}(u^k)}$. $\operatorname{im}(v) = \operatorname{im}(u^{k+1})$.

Ainsi, $\ker(v) = \{x \in \operatorname{im}(u^k) \mid v(x) = u(x) = 0\} = \operatorname{im}(u^k) \cap \ker(u)$.

Donc,

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(u^k) - \operatorname{rg}(u^{k+1}) &= \operatorname{rg}(u^k) - \dim(u(\operatorname{im}(u^k))) \\ &= \dim(\ker(v)) \\ &= \dim(\operatorname{im}(u^k) \cap \ker(u)) \end{aligned}$$

Soit $d_k = \dim(\ker(u^{k+1})) - \dim(\ker(u^k))$.

On a donc, $d_k = \operatorname{rg}(u^k) - \operatorname{rg}(u^{k+1}) = \dim(\operatorname{im}(u^k) \cap \ker(u))$.

Comme $\operatorname{im}(u^{k+1}) \subset \operatorname{im}(u^k)$, on a donc que $\operatorname{im}(u^{k+1}) \cap \ker(u) \subset \operatorname{im}(u^k) \cap \ker(u)$.

Donc, $\dim(\ker(u^{k+2})) - \dim(\ker(u^{k+1})) \leq \dim(\ker(u^{k+1})) - \dim(\ker(u^k))$.

Propriété : Caractérisation de la trace

Si φ est une forme linéaire non nulle définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, vérifiant pour tout A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'équation $\varphi(AB) = \varphi(BA)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\varphi = \lambda \cdot \text{tr}$.

Preuve : Caractérisation de la trace

$(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\text{tr}(E_{i,j}) = \delta_{i,j}$.
Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$. $\varphi(E_{i,j}) = \varphi(E_{i,1}E_{1,j}) = \varphi(E_{1,j}E_{i,1}) = \varphi(0) = 0$.
De plus, $\varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{i,k}E_{k,i}) = \varphi(E_{k,i}E_{i,k}) = \varphi(E_{k,k})$.
Donc, les $\varphi(E_{i,i})$ sont tous égaux de valeur $\lambda \neq 0$.
Donc, φ et $\lambda \cdot \text{tr}$ coïncident sur une base.
Donc, ils sont égaux.

Propriété : Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $f_A: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X \mapsto \text{tr}(AX)$, alors $\Phi: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ est un isomorphisme, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ étant le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 $A \mapsto f_A$

Preuve : Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Si $(A, B, \lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \times \mathbb{K}$, alors
 $\Phi(A + \lambda B)(X) = f_{A+\lambda B}(X)$
 $= \text{tr}((A + \lambda B)X)$
 $= \text{tr}(AX) + \lambda \text{tr}(BX)$
 $= f_A(X) + \lambda f_B(X)$
 $= (\Phi(A) + \lambda \Phi(B))(X)$
Donc, $\Phi(A + \lambda B) = \Phi(A) + \lambda \Phi(B)$.
De plus, $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*)$. Il suffit donc d'étudier l'injectivité de Φ .
Soit $A \in \ker(\Phi)$.
 $f_A = 0$ donc, pour tout X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{tr}(AX) = 0$.
Or, A est équivalent à $I_{n,n,r}$ où $r = \text{rg}(A)$.
Donc, il existe $(P, Q) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PI_{n,n,r}Q$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $r \neq 0$. En posant $X = Q^{-1}P^{-1}$, on a
 $\text{tr}(PI_{n,n,r}QX) = \text{tr}(I_{n,n,r}(QXP)) = \text{tr}(I_{n,n,r}) = r \neq 0$, ce qui contredit $f_A = 0$.
Donc, $\text{rg}(A) = 0$.
Donc, Φ est injective, donc bijective.

Remarque : Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On a donc que tout $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ est donc de la forme $X \mapsto \text{tr}(AX) = f_A$.
Ainsi, pour tout hyperplan H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $H = \ker(f_A)$.