Intégration et probabilités

Transformée de Fourier

Question 1/11

$$\lambda_d(\mathrm{d}x)$$

Réponse 1/11

$$\frac{\mathrm{d}x}{(2\pi)^{d/2}}$$

Question 2/11

Intégrale de Gauss

Réponse 2/11

$$g_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma^d} \exp\left(\frac{|x|^2}{2\sigma^2} \right)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_\sigma(x)\, \lambda_d(\mathrm{d}x) = 1$$

Question 3/11

$$\mathcal{F}f(\xi)$$

Réponse 3/11

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x} \, \lambda_d(\mathrm{d}x)$$

Question 4/11

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}_y f)$$

Réponse 4/11

$$\tau_y \mathcal{F} f$$

Question 5/11

$$\text{Régularité de } \mathcal{F} : \begin{aligned} \mathcal{L}^1 &\longrightarrow \mathcal{C}_0\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big) \\ f &\longmapsto \mathcal{F}f \end{aligned}$$

Réponse 5/11

$\mathcal{F}$ est 1-lipschitzienne

Question 6/11

$$\mathcal{F}g(\xi)$$

$$f \in \mathcal{L}^1,\ M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}),\ g(x) = f\left(M^{-1}x\right)$$

Réponse 6/11

$$|\det(M)|\,\mathcal{F}f\left(M^\top \xi\right)$$

Question 7/11

Théorème d'inversion de Fourier

Réponse 7/11

Si $f \in \mathcal{L}^1$ telle que $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}^1$ λ_d presque partout alors $f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}f(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot x}\,\lambda_d(\mathrm{d}\xi)$

Question 8/11

$$\mathcal{F}(f * g)$$

Réponse 8/11

$$\mathcal{F}f \times \mathcal{F}g$$

Question 9/11

Régulatité de $\mathcal{F}f$

Réponse 9/11

Si $|x|^k f \in \mathcal{L}^1$ alors $\mathcal{F}f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leqslant k$,

$$\frac{\partial^{|\alpha|} \mathcal{F}f}{\partial x^\alpha}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} (-\mathrm{i}x)^\alpha f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi \cdot x} \, \lambda_d(\mathrm{d}x)$$

En particulier, $\mathcal{F}f(\xi) \underset{|\xi| \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{|\xi|^k}\right)$

Question 10/11

Limite de $\mathcal{F}f$

Réponse 10/11

$$\mathcal{F}f \text{ est continue et } \mathcal{F}f(\xi) \xrightarrow[|\xi| \to +\infty]{} 0$$

Question 11/11

$$\mathcal{F}(\tau_y f)$$

Réponse 11/11

$$\mathrm{e}_{-y}\,\mathcal{F}f$$