Algèbre 1

Matrices

Question 1/18

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Réponse 1/18

$$ad - bc$$

Question 2/18

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$$

Réponse 2/18

$$\left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M = M^\top \right\}$$

Question 3/18

Factorisation de $A^n - B^n$

Réponse 3/18

$$(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \text{ tel que } AB = BA$$

$$(A - B)\sum_{k=0}^{n-1}\left(A^{n-k-1}B^k\right)$$

Question 4/18

$$D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$$

$$D^m$$

Réponse 4/18

$$D^m = \begin{pmatrix} d_{1,1}^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n,n}^m \end{pmatrix}$$

Question 5/18

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \cdots & \bullet & t_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$$

$$T^m$$

Réponse 5/18

$$T^m = \begin{pmatrix} t_{1,1}^m & 0 & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \cdots & \bullet & t_{n,n}^m \end{pmatrix}$$

Question 6/18

Structure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Réponse 6/18

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un anneau non commutatif

Question 7/18

Factorisation de $(A+B)^n$

Réponse 7/18

$$(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \text{ tel que } AB = BA$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} A^k B^{n-k} \right)$$

Question 8/18

Matrice identité

Réponse 8/18

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 9/18

Définition du produit matriciel

Réponse 9/18

$$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

$$C = A \times B$$

$$\forall (i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!],\ c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} (a_{i,j} b_{j,k})$$

Question 10/18

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

Réponse 10/18

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid MN = I_n\}$$

Question 11/18

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$$

$$T^m$$

Réponse 11/18

$$T^m = \begin{pmatrix} t_{1,1}^m & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n}^m \end{pmatrix}$$

Question 12/18

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

$$M^{-1}$$

Réponse 12/18

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Question 13/18

Description du produit matriciel par ligne

$\mathrm{L}_i(M)$ représente la i-ième ligne de M

Réponse 13/18

$$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$
$$C = A \times B$$
$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{L}_i(C) = \sum_{j=1}^{p} (a_{i,j} \mathrm{L}_j(B))$$

Question 14/18

Matrice élémentaite $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Réponse 14/18

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ e_{i,j} = \delta_{(i,j),(k,\ell)} = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$$

Question 15/18

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

Réponse 15/18

$$\left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M = -M^\top \right\}$$

Question 16/18

Propriété des matrices $E_{i,j}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Réponse 16/18

La famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut s'exprimer de la forme $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} (\lambda_{i,j} E_{i,j})$

Question 17/18

$$\text{Transposée de la matrice } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Réponse 17/18

$$A^\top = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,p} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Question 18/18

Description du produit matriciel par colonne

$\mathrm{C}_i(M)$ représente la i-ième colonne de M

Réponse 18/18

$$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

$$C = A \times B$$

$$\forall k \in [\![1, q]\!],\ \ \mathrm{C}_k(C) = \sum_{j=1}^{p} (b_{j,k}\mathrm{C}_j(A))$$