Analyse et équations aux dérivées partielles

L'équation de transport non linéaire

Question 1/5

Solutions de $\partial_t u + a(u)\,\partial_x u = 0$, $u_{|t=0} = u_0$
avec a et u_0 de classe $\mathcal{C}^1$ et $u \in \mathcal{C}^1([0,T[\times\mathbb{R})$

Réponse 1/5

Si $\|u_0\|_{L^\infty} + \|u_0'\|_{L^\infty} < +\infty$ et T est tel que $1 + T \inf_{y \in \mathbb{R}} (a'(u_0(y)) \cdot u_0'(y)) > 0$[1] alors l'équation admet une unique solutions dans $\mathcal{C}^1([0,T] \times \mathbb{R})$

1. $T = \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{\|u_0'\|_{L^\infty} \times \max\limits_{|y| \leqslant \|u_0\|_{L^\infty}} (|a(y)|)}$ convient

Question 2/5

Solutions faibles de $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$,
$u_{|t=0} = u_0$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$ $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$

Réponse 2/5

u et $f(u)$ sont dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} u\,\partial_t\varphi + f(u)\,\partial_x\varphi\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} u_0\varphi(0,\cdot)\,\mathrm{d}x = 0$$

La solution n'est pas nécessairement unique

Si de plus $u \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}_+, L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})\right)$ alors $u_0 = u(0,\cdot)$ presque partout

Question 3/5

$$\text{Solutions de } \dot{X}(t) = a(u(t, X(t))),\ X(0) = x_0$$
$$\text{avec } a \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et } u \in \mathcal{C}^1([0, T[\times \mathbb{R})$$

Réponse 3/5

X admet une unique solution
$X(t) = x_0 + a(u(x_0)) \times t$ (droite caractéristique
de $\partial_t u + a(u)\,\partial_x u = 0$), et $u(t, X(t)) = u_0(x_0)$

Question 4/5

Théorème de Kruzkov

Réponse 4/5

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, il existe une unique solution entropique à $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$, $u_{|t=0} = u_0$ dans la classe $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$
De plus, $\inf(u_0) \leqslant u \leqslant \sup(u_0)$ presque partout dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

Question 5/5

Solutions entropiques de $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$,
$u_{|t=0} = u_0$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$ $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$

Réponse 5/5

Pour tout $\eta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ telle que $\eta'' > 0$ et q est telle que $q' = \eta' f'$, $\eta(u)$ et $q(u)$ sont dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \eta(u)\,\partial_t \varphi + q(u)\,\partial_x \varphi \,\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0)\varphi(0,\cdot)\,\mathrm{d}x = 0$$