Calcul différentiel
Sous-variétés

Question 1/19

Carte pour une variété topologique

Réponse 1/19

(U, φ) avec U un ouvert de X et
$\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme

Question 2/19

Deux cartes (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) sont compatibles d'ordre k

Réponse 2/19

$$U_1 \cap U_2 = \varnothing \text{ ou}$$
$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2) \text{ est un}$$
$$\mathcal{C}^k\text{-difféomorphisme}$$

Question 3/19

Atlas d'ordre k

Réponse 3/19

Atlas dont deux cartes sont toujours compatibles d'ordre k

Question 4/19

Variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$

Réponse 4/19

Variété topologique munie d'une structure différentielle de classe $\mathcal{C}^k$

Question 5/19

Espace tangent pour une sous-variété définie par paramétrisation

Réponse 5/19

$$T_xM = \mathrm{im}(\mathrm{d}h_0)$$

Question 6/19

Définition par submersion

Réponse 6/19

Une partie non vide M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ de dimension p si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ et une submersion[1] $g : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ de classe $\mathcal{C}^k$ tels que $M \cap U = g^{-1}(0_{\mathbb{R}^{n-p}})$
Il suffit d'avoir la surjectivité sur M car elle se conserve localement

1. $\mathrm{d}g_x$ est surjective pour tout x

Question 7/19

Théorème de Whitney (version forte)

Réponse 7/19

Toute variété différentielle compacte de dimension n se plonge dans $\mathbb{R}^{2n}$ comme une sous-variété de dimension n

Ce résultat est optimal car la bouteille de Klein est de dimension 2 mais n'est pas une sous-variété différentielle de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$

Question 8/19

Atlas pour une variété topologique

Réponse 8/19

$$\text{Famille } ((U_i, \varphi_i))_{i \in I} \text{ tel que } X = \bigcup_{i \in I} (U_i)$$

Question 9/19

X est une variété topologique

Réponse 9/19

X est un espace séparé tel que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert de x homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Question 10/19

Structure différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ de M

Réponse 10/19

Atlas de classe $\mathcal{C}^k$ maximal, i.e. si une carte est compatible avec toutes celle de l'atlas alors elle appartient à l'atlas

Question 11/19

Définition par redressement

Réponse 11/19

Une partie non vide M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ de dimension p si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $f : U \to V$ tels que $f(M \cap U) = V \cap \left(\mathbb{R}^d \times \{0\}\right)$

Question 12/19

$$T_x M$$

Réponse 12/19

$$\{v \in \mathbb{R}^n, \exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M, \gamma(0)=x \wedge \gamma'(0)=v\}$$

C'est un espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $\dim(M)$

Question 13/19

Espace tangent pour une sous-variété définie par un graphe

Réponse 13/19

$$T_xM = \left\{(h, \mathrm{d}\varphi_x(h)), h \in \mathbb{R}^d\right\}$$

Pour $M = \{(x, \varphi(x)), x \in U\}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-d}$

Question 14/19

Définition par les graphes

Réponse 14/19

Une partie non vide M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ de dimension p si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ tel que $M \cap U$ soit le graphe d'une application f de classe $\mathcal{C}^k$ d'un ouvert de $\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^{n-d} \cong \{0\} \times \mathbb{R}^{n-d}$

Question 15/19

Espace tangent pour une sous-variété définie par submersion

Réponse 15/19

$$T_x M = \bigcap_{i=1}^{n-d} (\ker(\mathrm{d}(g_i)_x))$$

Question 16/19

$f : M \to N$ continue est de classe $\mathcal{C}^k$ en a

M et N sont deux variétés de classe $\mathcal{C}^k$

Réponse 16/19

$f(a) \in N$ et il existe (U, φ) et (V, ψ) deux cartes de M et N telles que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi\big(f^{-1}(V) \cap U\big) \to \psi(V)$ est $\mathcal{C}^k$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "f"'] \arrow[d, "\varphi"] & & V \arrow[d, "\psi"'] \\
\varphi(U) \arrow[d, hook, "\mathrm{id}"] & & \psi(V) \arrow[d, hook, "\mathrm{id}"'] \\
\varphi\big(f^{-1}(V) \cap U\big) \arrow[rr, hook, two heads, "\psi \circ f \circ \varphi^{-1}"] & & \psi(V)
\end{tikzcd}$$

Question 17/19

Définition par paramétrisation

Réponse 17/19

Une partie non vide M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ de dimension p si pour tout $h \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert Ω de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et une appication $h\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ qui soit une immersion[1] et un homéomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ sur $M \cap U$

1. $\mathrm{d}h_x$ est injective

Question 18/19

Fibré tangent

Réponse 18/19

$$\left\{(x, v), x \in M, v \in T_x M\right\}$$

Question 19/19

$$f : M \to N \text{ est numérique}$$

Réponse 19/19

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ et } N = \mathbb{R}$$