

Algèbre 1

Structures algébriques

Question 1/23

Endomorphisme de X

Réponse 1/23

Homomorphisme de X de E dans lui-même
(muni des mêmes lois)

Question 2/23

Associativité externe

E est muni d'une loi de composition externe \diamond
sur \mathbb{K} , muni d'une loi de composition interne \star

Réponse 2/23

$$\forall (\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K}^2 \times E, (\lambda \star \mu) \diamond x = \lambda \diamond (\mu \diamond x)$$

Question 3/23

Soient $e \in E$ un élément neutre pour la loi \star et

$$x \in E$$

y est un symétrique de x pour la loi \star

Réponse 3/23

$$x \star y = e = y \star x$$

Question 4/23

Élément régulier ou simplifiable

Réponse 4/23

x est régulier à gauche si et seulement si

$$\forall (y, z) \in E^2, x \star y = x \star z \Rightarrow y = z$$

x est régulier à droite si et seulement si

$$\forall (y, z) \in E^2, y \star x = z \star x \Rightarrow y = z$$

x est régulier si et seulement s'il est régulier à gauche et à droite

Si x admet un symétrique, alors il est régulier

Question 5/23

Magma

Réponse 5/23

Muni d'une loi de composition interne

Question 6/23

Associativité

Réponse 6/23

\star est associative si et seulement si

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

Question 7/23

Commutativité

Réponse 7/23

\star est commutative si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x \star y = y \star x$$

Question 8/23

Soient E muni d'une structure de X et $F \subset E$
 F est un sous- X de E

Réponse 8/23

F est stable par les lois de E

F contient les neutres imposés par E

Les lois induites sur F par les lois de E
vérifient les axiomes de la structure de X

Question 9/23

Soient E muni d'une loi \star , $F \subset E$
 F est stable par \star

Réponse 9/23

$$\forall (x, y) \in F^2, x \star y \in F$$

La loi de E se restreint en une loi \star_F appelée
loi induite sur F par \star

Question 10/23

Monoïde

Réponse 10/23

Muni d'une loi d'une composition interne, de
l'associativité et d'un élément neutre

Un monoïde est un magma

Question 11/23

Soit $e \in E$

e est un élément neutre pour la loi \star

Réponse 11/23

$$\forall x \in E, \quad e \star x = x = x \star e$$

Question 12/23

Distributivité généralisée

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j \in J_i} (x_{i,j}) \right)$$

Réponse 12/23

$$\sum_{(j_1, \dots, j_n) \in J_1 \times \dots \times J_n} \left(\prod_{i=1}^n (x_{i, j_i}) \right)$$

Question 13/23

Isomorphisme de X

Réponse 13/23

Homomorphisme de X bijectif

Question 14/23

Soit E et F deux ensembles munis d'une structure de X , munis respectivement des lois de composition internes $\left(\underset{1}{\star}, \dots, \underset{n}{\star}\right)$ et $\left(\underset{1}{\diamond}, \dots, \underset{n}{\diamond}\right)$, et externes $\left(\underset{1}{\square}, \dots, \underset{m}{\square}\right)$ et $\left(\underset{1}{\circ}, \dots, \underset{m}{\circ}\right)$ sur K_1, \dots, K_m
 $f: E \rightarrow F$ est un homomorphisme

Réponse 14/23

f respecte les lois interne : soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\forall (x, y) \in E^2, f\left(x \underset{k}{\star} y\right) = f(x) \underset{k}{\diamond} f(y)$$

f respecte les lois extenres : soit $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$

$$\forall (\lambda, x) \in K_k \times E, f\left(\lambda \underset{k}{\square} y\right) = \lambda \underset{k}{\circ} f(x)$$

f est compatible avec le neutre (si le neutre e_i pour la loi $\underset{i}{\star}$ est imposé dans les axiomes, donc

le neutre e'_i existe pour la loi $\underset{i}{\diamond}$) : $f(e_i) = e'_i$

Question 15/23

Symétrique de $x \star y$

Réponse 15/23

$$y^s \star x^s$$

Question 16/23

Si \star est une loi associative sur E et
 $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$

Réponse 16/23

$x_1 \star \cdots \star x_n$ ne dépend pas du parenthésage
admissible

Question 17/23

Distributivité

Réponse 17/23

La loi \star est distributive à gauche sur \diamond si et seulement si

$$\forall (x, y, z) \in E^3, x \star (y \diamond z) = (x \star y) \diamond (x \star z)$$

La loi \star est distributive à droite sur \diamond si et seulement si

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (y \diamond z) \star x = (y \star x) \diamond (z \star x)$$

La loi \star est distributive sur \diamond si et seulement si elle est distributive à gauche et à droite

Question 18/23

Automorphisme de X

Réponse 18/23

Endomorphisme et isomorphisme de X

Question 19/23

Commutativité généralisée

Réponse 19/23

Si \star est une loi commutative et associative sur

$$E, (x_1, \dots, x_n) \in E^n \text{ et } \sigma \in \mathfrak{S}_n$$

$$x_1 \star \dots \star x_n = x_{\sigma(1)} \star \dots \star x_{\sigma(n)}$$

Question 20/23

Réciproque d'isomorphisme

Réponse 20/23

Si $f: F \rightarrow F$ est un isomorphisme, alors f^{-1}
est un isomorphisme

Question 21/23

Réponse 21/23

Question 22/23

Soit $x \in E$

x est un élément absorbant pour \star

Réponse 22/23

$$\forall y \in E, \ x \star y = x = y \star x$$

Question 23/23

Groupe

Réponse 23/23

Muni d'une loi d'une composition interne, de
l'associativité, d'un élément neutre et de
symétriques

Un groupe est un monoïde