Groupe fondamental et revêtement

Revêtements

Question 1/14

Revêtement d'un espace topologique B
Définition avec l'espace discret

Réponse 1/14

$p\colon X \to B$ continue avec X un espace topologique tel que pour tout $y \in B$, il existe un voisinage ouvert V de y, un espace discret D et $h\colon V \times D \to p^{-1}(V)$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} V \times D \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & p^{-1}(V) \arrow[dl, "p"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Question 2/14

Revêtement d'un espace topologique B

Définition avec l'espace discret

Réponse 2/14

$p\colon X \to B$ continue avec X un espace topologique tel que pour tout $y \in B$, il existe un voisinage ouvert V de y, tel que $p^{-1}(V)$ est une réunion disjointe d'ouverts de X qui s'envoient chacun homéomorphiquement sur V via p

Question 3/14

Revêtement associé à une action proprement discontinue

Réponse 3/14

Si $G \curvearrowright X$ par homéomorphismes est proprement discontinue, G est discret et X est un espace topologique alors $\pi : X \to G\backslash X$ [1] est un revêtement dont le groupe de Galois contient G

1. $G\backslash X$ désigne les classes à gauche par l'action $G \curvearrowright X$

Question 4/14

Groupe des automorphismes de p

Réponse 4/14

$$\mathrm{Gal}(()p) := \{\varphi \text{ homéomorphismes}, p \circ \varphi = p\}$$

Question 5/14

CNS pour que $G \curvearrowright X$ soit proprement discontinue

Réponse 5/14

G est discret, X est localement compact et $G \curvearrowright X$ est libre et propre

Question 6/14

Action propre

$$G \curvearrowright X$$

Réponse 6/14

Pour tout compact de X,
$\{g \in G, g(K) \cap K \neq \varnothing\}$ est fini

Question 7/14

Morphisme de revêtement

Réponse 7/14

$\varphi : X \to X'$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & X' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Question 8/14

Action proprement discontinue

$$G \curvearrowright X$$

Réponse 8/14

Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que pour tout $g \neq 1$, $g(U) \cap U = \varnothing$

Question 9/14

Revêtement galoisien

Réponse 9/14

p est galoisien si pour tout $x \in B$,

$\mathrm{Gal}(()p) \curvearrowright p^{-1}(x)$ transitivement

Si cette propriété est vérifiée pour un $x \in B$

alors elle est vérifiée pour tout $x \in B$

Question 10/14

Propriétés de $\mathrm{Gal}(p)$ si $p\colon X \to B$ est un revêtement galoisien et X est connexe

Réponse 10/14

$\mathrm{Gal}(p) \curvearrowright X$ est proprement discontinue et $\mathrm{Gal}(p)\backslash p$ et B sont homéomorphes

Question 11/14

Revêtement trivial

Réponse 11/14

Un revêtement pour lequel $V = B$ convient

Question 12/14

Propriété locale d'un revêtement

Réponse 12/14

Un revêtement est un homéomorphisme local

Question 13/14

Factorisation par un revêtement

Réponse 13/14

Si on a le diagramme suivant qui commute

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[dr, "p"] & \\ X/p \arrow[rr, "\varphi"] & & B \end{tikzcd}$$

Alors φ est un homéomorphisme

Question 14/14

Terminologie associée aux revêtements

Réponse 14/14

X : espace total

B : base

p : revêtement

V : voisinage distingué (de y) ou assiette

h : trivialisation locale

$p^{-1}(y)$: fibre de y ou pile d'assiettes