

**Intégration et théorie  
de la mesure**  
*Intégration de  
Lebesgue*

## Question 1/8

Lemme de Fatou

## Réponse 1/8

Si  $(f_n)$  est une suite de fonctions mesurables  
alors  $\liminf \left( \int_X f_n \, d\mu \right) \leq \int_X \liminf(f_n) \, d\mu$

## Question 2/8

$f$  est étagée

## Réponse 2/8

$$f = \sum_{i=1}^n (\lambda_i \mathbb{1}_{\{f=\lambda_i\}})$$

## Question 3/8

Inégalité de Tchebychev

## Réponse 3/8

$$\text{Si } \alpha > 0, \mu(\{f \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f \, d\mu$$

## Question 4/8

Intégrale d'une fonction étagée



## Réponse 4/8

$$\int f \, d\mu = \sum_{\lambda \in \text{im}(f)} (\lambda \mu(\{f = \lambda_i\}))$$

## Question 5/8

Théorème de convergence dominée

## Réponse 5/8

Si  $(f_n : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+})$  est une suite de fonctions mesurables qui convergent simplement vers  $f$  et telle qu'il existe  $g \in L^1(X)$  pour laquelle  $f_n \leq |g|$   $\mu$ -pp pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $\lim \left( \int_X f_n \, d\mu \right) = \int_X f \, d\mu$

## Question 6/8

Lien entre fonction mesurable et fonction étagée

## Réponse 6/8

Toute fonction mesurable est limite simple de fonctions mesurables croissantes

## Question 7/8

Théorème de convergence monotone (ou  
Beppo-Levi)

## Réponse 7/8

Si  $(f_n : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+})$  est une suite croissantes  
de fonctions mesurables qui convergent  
simplement vers  $f$  alors

$$\lim \left( \int_X f_n \, d\mu \right) = \int_X f \, d\mu$$

## Question 8/8

Intégrale d'une fonction positive  $f$



## Réponse 8/8

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left( \left\{ \int_X g \, d\mu, g \text{ étagée}, g \leq f \right\} \right)$$