

Intégration et probabilités

Bases des probabilités

Question 1/30

Formule de transfert

Réponse 1/30

$$\mathbb{E}(f(X))$$

Question 2/30

$$X \sim \mathcal{U}(E)$$

Réponse 2/30

$$X(\Omega) = E$$
$$\mathbb{P}(X = e) = \frac{1}{|E|}$$

Question 3/30

Loi d'une variable aléatoire X

Réponse 3/30

Mesure image \mathbb{P}_X de \mathbb{P} par X

$$\forall A \in \mathcal{E}, \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) := \mathbb{P}(X \in A)$$

Question 4/30

$$X \sim \mathcal{G}(p)$$

Réponse 4/30

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}$$

$$g_X(t) = \frac{pt}{1 - qt}$$

Question 5/30

Fonction de répartition

Réponse 5/30

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

F_X caractérise entièrement la loi de X

F_X est croissante, continue à droite et de limite
0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$

Question 6/30

$$X \sim \mathcal{U}(K)$$

Réponse 6/30

Loi de densité $\frac{\mathbb{1}_K x}{\lambda(K)}$ par rapport à λ

Question 7/30

$$\mathbb{E}(X)$$

Réponse 7/30

$$\int_{\Omega} (X(\omega)) \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)$$

Question 8/30

Inégalité de Chernov

Réponse 8/30

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq e^{-\lambda x} \mathbb{E}(e^{\lambda X})$$

Question 9/30

$$X \sim \mathcal{B}(p)$$

Réponse 9/30

$$X(\Omega) = \{0, 1\}$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = p$$

$$\mathbb{E}(X) = p$$

$$\mathbb{V}(X) = pq$$

$$g_X(t) = pt + q$$

Question 10/30

$$\mathbb{V}(X)$$

Réponse 10/30

$$\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

Question 11/30

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Réponse 11/30

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq x) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{x^2}$$

Question 12/30

Inégalité de Markov

Réponse 12/30

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{x}$$

$$\text{De plus, } \mathbb{P}(X \geq x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)$$

Question 13/30

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Réponse 13/30

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$\mathbb{E}(X) = np$$

$$\mathbb{V}(X) = npq$$

$$g_X(t) = (pt + q)^n$$

Question 14/30

Inégalité de Markov généralisée pour l'ordre p

Réponse 14/30

Si X admet un moment d'ordre p ,

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}(X^p)}{x^p}$$

$$\text{De plus, } \mathbb{P}(X \geq x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^p} \right)$$

Question 15/30

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$$

Réponse 15/30

Loi de densité $\frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ par rapport à λ

$$\mathbb{E}(X) = m$$
$$\mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

Question 16/30

Fonction génératrice

Réponse 16/30

Si X est à valeurs dans \mathbb{N} ,

$$g_X(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(X = n) s^n) = \mathbb{E}(s^X)$$

g_X est continue sur $\overline{D(0, 1)}$ et est holomorphe
sur $D(0, 1)$

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{g_s^{(n)}}{n!}$$

Question 17/30

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

Réponse 17/30

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

$$\mathbb{V}(X) = \lambda$$

$$g_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$$

Question 18/30

$$X \sim \mathcal{E}(\theta)$$

Réponse 18/30

Loi de densité $\theta e^{-\theta x}$ par rapport à λ

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\theta}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

Question 19/30

Caractérisation de la loi par les espérances

Réponse 19/30

Si X est une variable aléatoire dans (E, \mathcal{E})
alors la loi de \mathbb{P}_X est caractérisé par les
 $\{\mathbb{E}(f(X)), f: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable}\}$ ou plus
simplement par les $\{\mathbb{E}(f(X)), f \in H\}$ où H
est un sous-ensemble dense de $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

Question 20/30

α -quartile

Réponse 20/30

Si X est une variable aléatoire réelle et $\alpha \in]0, 1[$, un α -quartile de la loi de X est un nombre $q \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X \leq q) \geq \alpha$ et

$$\mathbb{P}(X \geq q) \geq 1 - \alpha$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, on parle de médiane

Question 21/30

$$\text{cov}(X, Y)$$

Réponse 21/30

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

Question 22/30

Moment factoriel

Réponse 22/30

$$\mathbb{E}(X(X-1)\cdots(X-n+1)) = g_X^{(n)}(1^-)$$

Question 23/30

Moment absolu d'ordre p

Réponse 23/30

Si X est une variable aléatoire réelle, son moment absolu d'ordre p est $\mathbb{E}(|X|^p)$

Question 24/30

Corrélation entre X et Y

Réponse 24/30

$$\begin{aligned} \operatorname{cor}(X, Y) &= \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}} = \\ &\left\langle \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\|X\|_{L^2}}, \frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\|Y\|_{L^2}} \right\rangle_{L^2} \end{aligned}$$

Question 25/30

Fonction caractéristique

Réponse 25/30

$$\varphi_X(\xi) = \mathbb{E}(e^{i\xi \cdot X}) = \mathcal{FP}_X(-\xi)$$

φ_X caractérise la loi de X

Question 26/30

Matrice des variances-covariances

Réponse 26/30

$$\left(\text{cov}(X_i, X_j)\right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

Question 27/30

$$X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$$

Réponse 27/30

$$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

$$g_X(t) = \frac{1}{n} \frac{t^{n+1} - t}{t - 1}$$

Question 28/30

Variable aléatoire

Réponse 28/30

Application mesurable $X : (\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ où
 (E, \mathcal{E}) est un espace mesurable

Question 29/30

Transformée de Laplace

Réponse 29/30

$$\mathcal{L}_X(\lambda) = \mathbb{E}(e^{-\lambda X}) \text{ pour } \lambda \geqslant 0$$
$$\mathcal{L}_X \leqslant 1$$

On peut aussi définir $\mathcal{L}_X \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ pour
 $\lambda < 0$

\mathcal{L}_X caractérise la loi de X

Question 30/30

Espace de probabilités

Réponse 30/30

Espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où \mathbb{P} est une mesure
de probabilités
 Ω est appelé univers