Intégration et théorie de la mesure

Intégrales à paramètre

Question 1/2

Dérivation d'une intégrale à paramètre

$$F(x) = \int_X f(x,t)\,\mathrm{d}\mu(t)$$

$$f : I \times (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{C}$$

I intervalle de $\mathbb{R}$

Réponse 1/2

Si pour tout $x \in I$, $f(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)$ existe μ-pp, il existe $g\colon X \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que pour tout $(x,t) \in I \times X$,

$$|f(x,t) - f(x_0,t)| \leqslant g(t)|x - x_0| \ \mu\text{-pp}$$

Alors F est dérivable en x_0 et

$$F'(x_0) \int_X \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}\mu(t)$$

Question 2/2

Continuité d'une intégrale à paramètre

$$F(x) = \int_X f(x,t)\,\mathrm{d}\mu(t)$$

$$f\colon I \times (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{C}$$

I intervalle de $\mathbb{R}$

Réponse 2/2

Si pour tout $x \in I$, $f(x,\cdot)$ est mesurable de $(X,\mathcal{A})$ dans $(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$, $f(\cdot,t)$ est continue en x_0 μ-pp, il existe $g : X \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que pour tout $(x,t) \in I \times X$, $|f(x,t)| \leqslant g(t)$ μ-pp

Alors F est continue en x_0