# Algèbre 1
# *Corps*

# Question 1/14

Groupe

# Réponse 1/14

Muni d'une loi de composition interne, de l'associativité, d'un élément neutre et de symétriques

# Question 2/14

Si $K$ est un corps de caractéristique nulle
Propriété pour les éléments de $K$

# Réponse 2/14

$$\forall (n, x) \in \mathbb{Z} \times K$$
$$n \times x = 0_K \Leftrightarrow (x = 0_K \vee n = 0)$$

# Question 3/14

Propriété de la caractéristique d'un corps

# Réponse 3/14

Si $K$ est un corps de caractéristique $p$ non nulle, $p$ est premier

# Question 4/14

Si $K$ est un corps de caractéristique finie $p$
Propriété pour les éléments de $K$

# Réponse 4/14

$$\forall x \in K,\ px = 0_K$$

# Question 5/14

Anneau

# Réponse 5/14

Muni de deux lois de composition internes
(généralement notées $+$ et $\times$)
$(A, +)$ est un groupe abélien
$(A, \times)$ est un monoïde
$\times$ est distributive sur $+$

# Question 6/14

$$\text{Soient } \left(A, \underset{A}{+}, \underset{A}{\times}\right) \text{ et } \left(B, \underset{B}{+}, \underset{B}{\times}\right) \text{ deux anneaux}$$

$$f : A \to B \text{ est un homomorphisme d'anneaux}$$

# Réponse 6/14

$$\forall (x,y) \in A^2,\ f\left(x \underset{A}{+} y\right) = f(x) \underset{B}{+} f(y)$$

$$\forall (x,y) \in A^2,\ f\left(x \underset{A}{\times} y\right) = f(x) \underset{B}{\times} f(y)$$

$$f(1_A) = 1_B$$

# Question 7/14

Si $(K, +, \times)$ est un corps

Un sous-ensemble $L$ de $K$ est un sous-corps de $K$

# Réponse 7/14

$L$ est stable pour les lois $+$ et $\times$

$1_K \in L$

Les lois induites sur $L$ définissent sur $L$ une structure de corps

# Question 8/14

Si $K$ est un corps, d'élément neutre $1_K \neq 0_K$,
$H = \{n \times 1_K,\ n \in \mathbb{Z}\}$ le sous-groupe
monogène de $(K, +)$ engendré par $1_K$
Caractéristique d'un corps

# Réponse 8/14

Si $H$ est infini, $K$ est de caractéristique nulle
Si $H$ est fini de cardinal $p$, $K$ est de caractéristique $p$

# Question 9/14

Si $(K, +, \times)$ est un groupe et $L \subset K$

Caractérisation des sous-corps

# Réponse 9/14

$$1_K \in L \quad \forall (x,y) \in L,\ x - y \in L$$
$$\forall (x,y) \in L,\ y \neq 0 \Rightarrow xy^{-1} \in L$$

# Question 10/14

Corps

# Réponse 10/14

Muni de deux lois de composition internes
(généralement notées $+$ et $\times$)
$(K, +, \times)$ est un anneau commutatif
$(K^*, \times)$ est un groupe

# Question 11/14

Propriété de $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

# Réponse 11/14

$\mathbb{F}_p$ est un corps si et seulement si $p$ est premier

# Question 12/14

Image directe et réciproque de sous-corps par un homomorphisme

# Réponse 12/14

Si $K$ et $L$ sont deux corps, et $f : K \to L$ un morphisme de corps, $K'$ et $L'$ deux sous-corps respectivement de $K$ et $L$

$f(K')$ est un sous-corps de $L$

$f^{-1}(L')$ est un sous-corps de $K$

# Question 13/14

Propriété des homomorphismes de corps

# Réponse 13/14

Un homomorphisme de corps est injectif

# Question 14/14

$$\text{Soient } \left(K, \underset{K}{+}, \underset{K}{\times}\right) \text{ et } \left(L, \underset{L}{+}, \underset{L}{\times}\right) \text{ deux corps}$$

$$f : K \to L \text{ est un homomorphisme de corps}$$

# Réponse 14/14

$f$ est un homomorphisme des anneaux de $K$ et $L$