Probabilités

Variables aléatoires discrètes

Question 1/11

$$X \sim \mathcal{U}(n)$$

Réponse 1/11

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!]$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

$$G_X(t) = \frac{1}{n}\frac{t^n-1}{t-1}$$

Question 2/11

$$X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$G_{X+Y}$$

Réponse 2/11

$$G_X G_Y$$

Question 3/11

$$X \sim \mathcal{B}(p)$$

Réponse 3/11

$$X(\Omega) = \{0, 1\}$$
$$\mathbb{P}(X = 1) = p$$
$$\mathbb{E}(X) = p$$
$$\mathbb{V}(X) = pq$$
$$G_X(t) = pt + q$$

Question 4/11

$$\mathbb{P}(X = n) \text{ avec } G_X(t)$$

Réponse 4/11

$$\frac{G_X^{(n)}(1)}{n!}$$

Question 5/11

$$G_X(t)$$

Réponse 5/11

$$\mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(X = n)t^n)$$

Question 6/11

$$\mathbb{V}(X) \text{ avec } G_X(t)$$

Réponse 6/11

$$G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$$

Question 7/11

$$\mathbb{E}(X) \text{ avec } G_X(t)$$

Réponse 7/11

$$G'_X(1)$$

Question 8/11

Lemmes de Borel-Cantelli

Réponse 8/11

$$\text{Si } \sum \mathbb{P}(A_n) \text{ converge alors}$$
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty}(A_k)\right)\right) = 0$$
$$\text{Si } \sum \mathbb{P}(A_n) \text{ diverge avel les } (A_n) \text{ mutuellement}$$
$$\text{indépendants alors } \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty}(A_k)\right)\right) = 1$$

Question 9/11

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

Réponse 9/11

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$
$$\mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$
$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$
$$\mathbb{V}(X) = \lambda$$
$$G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$$

Question 10/11

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Réponse 10/11

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!]$$
$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$
$$\mathbb{E}(X) = np$$
$$\mathbb{V}(X) = npq$$
$$G_X(t) = (pt + q)^n$$

Question 11/11

$$X \sim \mathcal{G}(p)$$

Réponse 11/11

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}$$

$$G_X(t) = \frac{pt}{1 - qt}$$