

# Algèbre 1

## *Groupes*

## Question 1/43

Réciproque d'isomorphisme

## Réponse 1/43

Si  $f: F \rightarrow F$  est un isomorphisme, alors  $f^{-1}$   
est un isomorphisme

## Question 2/43

Les classes à gauche modulo  $H$

## Réponse 2/43

$$\{aH, a \in G\}$$

## Question 3/43

Les classes à droite modulo  $H$

## Réponse 3/43

$$\{Ha, \ a \in G\}$$

## Question 4/43

Description par le bas du sous-groupe engendré  
par une partie



## Réponse 4/43

$$\langle X \rangle = \{x_1 \cdots x_n, (x_1, \cdots, x_n) \in X^n\} \\ \cup \{x^{-1}, x \in X\}$$

$e$  correspond au produit vide

## Question 5/43

Sous-groupe monogène

## Réponse 5/43

$$\langle x \rangle = \{x^n, n \in \mathbb{N}\}$$

## Question 6/43

Si  $(G, \star)$  est un groupe et  $H \subset G$   
Caractérisation(s) des sous-groupes

## Réponse 6/43

$$H \neq \emptyset \quad \forall (x, y) \in H, \quad x \star y \in H$$

$$\forall x \in H, \quad x^s \in H$$

$$H \neq \emptyset \quad \forall (x, y) \in H^2, \quad x \star y^s \in H$$

$$e_G \in H \quad \forall (x, y) \in H^2, \quad x \star y^s \in H$$

## Question 7/43

Fibres de  $f$

Soit  $x \in f^{-1}(\{y\})$

## Réponse 7/43

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{y\}) &= x \times \ker(f) \\ &= \{x \times z, z \in \ker(f)\} = \ker(f) \times x \end{aligned}$$

## Question 8/43

Passage au quotient de la loi dans le cas d'un  
sous-groupe distingué

Si  $G$  est un groupe et  $H$  un sous-groupe  
distingué de  $G$



## Réponse 8/43

$\equiv_g = \equiv_d$  et on note la relation  $\equiv$

La loi induite correspond au produit des  
classes élément par élément

$$\begin{aligned}(ab)H &= (aH) \cdot (bH) \\ &= \{x \cdot y, x \in aH, y \in bH\}\end{aligned}$$

La loi induite sur l'ensemble quotient munit  
celui-ci d'une structure de groupe

## Question 9/43

Propriété des groupes monogènes

## Réponse 9/43

Un groupe monogène est abélien

## Question 10/43

Ordre d'un élément d'un groupe

## Réponse 10/43

$$\text{ord}(x) = \min(\{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = e\})$$

## Question 11/43

Premier théorème d'isomorphisme

## Réponse 11/43

Si  $f \in \text{Hom}(G, H)$

$\ker(f)$  est un sous-groupe distingué de  $G$ , et  $f$  passe au quotient, définissant un morphisme de groupes  $\tilde{f}: G / \ker(f) \rightarrow H$

$\tilde{f}$  est injectif et sa corestriction à son image est un isomorphisme

## Question 12/43

Endomorphisme de groupes



## Réponse 12/43

Homomorphisme de groupes de  $E$  dans  
lui-même (muni des mêmes lois)

## Question 13/43

Si  $G$  et  $H$  sont deux groupes et  
 $f \in \text{Hom}(G, H)$   
 $f(e_G)$

## Réponse 13/43

$$f(e_H)$$

## Question 14/43

Théorème de Lagrange pour l'ordre des  
éléments d'un groupe

## Réponse 14/43

Si  $G$  est un groupe fini et  $x \in G$   
 $\text{ord}(x) \mid |G|$

## Question 15/43

Automorphisme de groupes

## Réponse 15/43

Endomorphisme et isomorphisme de groupes

## Question 16/43

Si  $(G, \star)$  est un groupe

Un sous-ensemble  $H$  de  $G$  est un sous-groupe  
de  $G$



## Réponse 16/43

$H$  est stable pour la loi de  $G$  et la loi induite définit sur  $H$  une structure de groupe

## Question 17/43

Passage au quotient de la loi dans le cas abélien  
Si  $G$  est un groupe abélien et  $H$  un  
sous-groupe de  $G$

## Réponse 17/43

$\equiv_g = \equiv_d$  et on note la relation  $\equiv$

La loi induite correspond au produit des classes élément par élément

$$\begin{aligned}(ab)H &= (aH) \cdot (bH) \\ &= \{x \cdot y, x \in aH, y \in bH\}\end{aligned}$$

La loi induite sur l'ensemble quotient munit celui-ci d'une structure de groupe abélien

## Question 18/43

Isomorphisme de groupes

## Réponse 18/43

Homomorphisme de groupes bijectif

## Question 19/43

Ordre d'un groupe  
Si  $G$  est un groupe

## Réponse 19/43

$$\text{ord}(G) = |G|$$

## Question 20/43

Groupe



## Réponse 20/43

Muni d'une loi de composition interne, de l'associativité, d'un élément neutre et de symétriques

## Question 21/43

Si  $G$  et  $H$  sont deux groupes et  
 $f \in \text{Hom}(G, H)$   
 $f(x^{-1})$

## Réponse 21/43

$$f(x)^{-1}$$

## Question 22/43

$$\text{Si } \ker(f) = \{e_G\}$$

## Réponse 22/43

$f$  est injectif (la réciproque est vraie)

## Question 23/43

Intersection de sous-groupes

Si  $G$  est un groupe, et  $(H_i)_{i \in I}$  une famille de sous-groupes de  $G$

## Réponse 23/43

$\bigcap_{i \in I} (H_i)$  est un sous-groupe de  $G$

## Question 24/43

$x$  et  $y$  sont dans la même classe à droite  
modulo  $H$



## Réponse 24/43

$$x \equiv_d y [H] \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

## Question 25/43

Si  $G$  est un groupe  
Structure de  $(\text{Aut}(G), \circ)$

## Réponse 25/43

$(\text{Aut}(G), \circ)$  est un groupe

## Question 26/43

Si  $H$  est un sous-groupe distingué de  $G$

## Réponse 26/43

$$\begin{aligned} & \forall a \in G, aH = Ha \\ \Leftrightarrow & \forall a \in G, \forall h \in H, aha^{-1} \in H \end{aligned}$$

## Question 27/43

Sous-groupe propre de  $G$

## Réponse 27/43

Sous-groupe de  $G$  distinct de  $G$  et  $\{e_G\}$

## Question 28/43

Description des groupes monogènes  
Si  $G = \langle x \rangle$



## Réponse 28/43

Si  $\text{ord}(x) = +\infty$ ,  $G$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$

Si  $\text{ord}(x) = n \in \mathbb{N}^*$ ,  $G$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

## Question 29/43

Si  $f \in \text{Hom}(G, K)$  et  $H$  est un sous-groupe distingué et  $H \subset \ker(f)$

## Réponse 29/43

$$f = \tilde{f} \circ \pi$$

La réciproque est vraie

## Question 30/43

Sous-groupe engendrée par une partie  $X$

## Réponse 30/43

$$\langle X \rangle$$

C'est le plus petit sous-groupe contenant  $X$

## Question 31/43

Soient  $(G, \star)$  et  $(H, \diamond)$  deux groupes  
 $f: G \rightarrow H$  est un homomorphisme de groupes

## Réponse 31/43

$$\forall (x, y) \in G^2, f(x \star y) = f(x) \diamond f(y)$$

L'ensemble des homomorphisme de  $G$  dans  $H$   
est noté  $\text{Hom}(G, H)$

Si  $(G, \star) = (H, \diamond)$ ,  $f$  est un endomorphisme

L'ensemble des automorphismes de  $G$  est noté  
 $\text{Aut}(G)$

## Question 32/43

Groupe cyclique



## Réponse 32/43

Groupe monogène fini

## Question 33/43

Si  $f \in \text{Hom}(G, K)$  et  $H$  est un sous-groupe distingué

## Réponse 33/43

$f$  passe au quotient avec  $\tilde{f}: G/H \rightarrow K$

## Question 34/43

Résolution de  $x^n = e$

## Réponse 34/43

$\{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = e\}$  est de la forme  $a\mathbb{Z}$

$x$  est d'ordre fini si et seulement si  $a \neq 0$  (on a donc  $\text{ord}(x) = a$ )

## Question 35/43

$x$  et  $y$  sont dans la même classe à gauche  
modulo  $H$

## Réponse 35/43

$$x \equiv_g y [H] \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

## Question 36/43

Propriétés d'un groupe  $(G, \star)$



## Réponse 36/43

$G$  admet un unique élément neutre pour  $\star$   
 $\forall x \in G, \exists! x^s \in G$

## Question 37/43

Théorème de Lagrange pour l'ordre des groupes

## Réponse 37/43

Si  $G$  est un groupe fini et  $H$  un sous-groupe de  $G$

$$|H| \mid |G|$$

## Question 38/43

Si  $G$  et  $H$  sont deux groupes et  $f \in \text{Hom}(g, h)$   
un morphisme de groupes  
 $\ker(f)$

## Réponse 38/43

$$f^{-1}(e_H) = \{y \in G \mid f(y) = e_H\}$$

## Question 39/43

Description par le haut du sous-groupe  
engendré par une partie

## Réponse 39/43

Soient  $\mathcal{G}$  l'ensemble des sous-groupes de  $G$  et

$$\mathcal{H} = \{H \in \mathcal{G} \mid X \subset H\}$$

$$\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} (H)$$

## Question 40/43

Image directe et réciproque de sous-groupes  
par un homomorphisme



## Réponse 40/43

Si  $G$  et  $H$  sont deux groupes, et  $f \in \text{Hom}(G, H)$  un morphisme de groupes,  $G'$  et  $H'$  deux sous-groupes respectivement de  $G$  et  $H$

$f(G')$  est un sous-groupe de  $H$   
 $f^{-1}(H')$  est un sous-groupe de  $G$

## Question 41/43

Cardinal des classes de congruence

## Réponse 41/43

$$|Ha, a \in G| = |Ha, a \in G| = |H|$$

## Question 42/43

Groupe abélien

## Réponse 42/43

La loi  $\star$  de  $G$  est commutative

## Question 43/43

Ensemble formé par les classes à gauche et à droite

## Réponse 43/43

$\{Ha, a \in G\}$  est une partition de  $G$   
 $\{aH, a \in G\}$  est une partition de  $G$