

# **Intégration et probabilités**

## ***Bases des probabilités***

## Question 1/16

Variable aléatoire

## Réponse 1/16

Application mesurable  $X : (\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$  où  
 $(E, \mathcal{E})$  est un espace mesurable

## Question 2/16

Loi d'une variable aléatoire  $X$

## Réponse 2/16

Mesure image  $\mathbb{P}_X$  de  $\mathbb{P}$  par  $X$

$$\forall A \in \mathcal{E}, \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) := \mathbb{P}(X \in A)$$

## Question 3/16

Moment absolu d'ordre  $p$

## Réponse 3/16

Si  $X$  est une variable aléatoire réelle, son moment absolu d'ordre  $p$  est  $\mathbb{E}(|X|^p)$

## Question 4/16

Formule de transfert



## Réponse 4/16

$$\mathbb{E}(f(X))$$

## Question 5/16

$\alpha$ -quartile

## Réponse 5/16

Si  $X$  est une variable aléatoire réelle et  $\alpha \in ]0, 1[$ , un  $\alpha$ -quartile de la loi de  $X$  est un nombre  $q \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathbb{P}(X \leq q) \geq \alpha$  et

$$\mathbb{P}(X \geq q) \geq 1 - \alpha$$

Si  $\alpha = \frac{1}{2}$ , on parle de médiane

## Question 6/16

Matrice des variances-covariances

## Réponse 6/16

$$\left(\text{cov}(X_i, X_j)\right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

## Question 7/16

Caractérisation de la loi par les espérances

## Réponse 7/16

Si  $X$  est une variable aléatoire dans  $(E, \mathcal{E})$   
alors la loi de  $\mathbb{P}_X$  est caractérisé par les  
 $\{\mathbb{E}(f(X)), f: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable}\}$  ou plus  
simplement par les  $\{\mathbb{E}(f(X)), f \in H\}$  où  $H$   
est un sous-ensemble dense de  $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

## Question 8/16

$$\mathbb{V}(X)$$



## Réponse 8/16

$$\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

## Question 9/16

Espace de probabilités

## Réponse 9/16

Espace mesuré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  où  $\mathbb{P}$  est une mesure  
de probabilités  
 $\Omega$  est appelé univers

## Question 10/16

Corrélation entre  $X$  et  $Y$

## Réponse 10/16

$$\begin{aligned} \operatorname{cor}(X, Y) &= \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}} = \\ &\left\langle \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\|X\|_{L^2}}, \frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\|Y\|_{L^2}} \right\rangle_{L^2} \end{aligned}$$

## Question 11/16

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

## Réponse 11/16

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq x) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{x^2}$$

## Question 12/16

Inégalité de Markov généralisée pour l'ordre  $p$



## Réponse 12/16

Si  $X$  admet un moment d'ordre  $p$ ,

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}(X^p)}{x^p}$$

$$\text{De plus, } \mathbb{P}(X \geq x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^p} \right)$$

## Question 13/16

$$\mathbb{E}(X)$$

## Réponse 13/16

$$\int_{\Omega} (X(\omega)) \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)$$

## Question 14/16

Inégalité de Markov

## Réponse 14/16

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{x}$$

$$\text{De plus, } \mathbb{P}(X \geq x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \right)$$

## Question 15/16

$$\text{cov}(X, Y)$$

## Réponse 15/16

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

## Question 16/16

Inégalité de Chernov



## Réponse 16/16

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq e^{-\lambda x} \mathbb{E}(e^{\lambda X})$$