

# **Algèbre 1**

## ***Actions de groupes***

## Question 1/15

Action d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $X$

## Réponse 1/15

Morphisme  $\alpha: G \rightarrow (\mathfrak{S}(X), \circ)$

## Question 2/15

Non-trivialité de  $X^G$  pour  $G$  un  $p$ -groupe

## Réponse 2/15

$$|X^G| \equiv |X| \pmod{p}$$

En particulier,  $Z(G)$  est non trivial

## Question 3/15

Stabilisateur de  $x$

## Réponse 3/15

$$\text{stab}(x) = \{g \in G, g \cdot x = x\}$$

## Question 4/15

Action transitive



## Réponse 4/15

$$\forall (x, y) \in X^2, \exists g \in G, g \cdot x = y$$

## Question 5/15

$|G/\text{stab}(x)|$  pour  $G$  fini

## Réponse 5/15

$$|G/\text{stab}(x)| = \frac{|G|}{|\text{stab}(x)|} = |G \cdot x|$$

## Question 6/15

Action simplement transitive

## Réponse 6/15

Action libre et transitive

$$\forall (x, y) \in X^2, \exists! g \in G, g \cdot x = y$$

## Question 7/15

Formule des classes

## Réponse 7/15

Si  $G$  agit sur  $X$  et  $\mathcal{R}$  est un ensemble de représentants des orbites de l'action alors

$$|X| = \sum_{x \in \mathcal{R}} (|G / \text{stab}(x)|)$$

## Question 8/15

$p$ -groupe



## Réponse 8/15

Pour  $p \in \mathbb{P}$ , un  $p$ -groupe est un groupe  $G$  vérifiant  $|G| = p^n$

## Question 9/15

Orbite de  $x$

## Réponse 9/15

$$G \cdot x = \{g \cdot x, g \in G\}$$

## Question 10/15

Lemme de Cayley et conséquence

## Réponse 10/15

Tout groupe  $G$  fini se réalise comme un  
sous-groupe de  $\mathfrak{S}(G) \cong \mathfrak{S}_n$

Si  $\mathbb{k}$  est un corps,  $G$  est isomorphe à un  
sous-groupe de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$

## Question 11/15

Action libre

## Réponse 11/15

$$\forall g \neq 1, \text{fix}(g) \neq \emptyset$$

## Question 12/15

Action fidèle



## Réponse 12/15

$\alpha$  est injective

## Question 13/15

Lemme de Cauchy

## Réponse 13/15

Si  $p \in \mathbb{P}$  divise l'ordre de  $G$ , alors  $G$  possède  
un élément d'ordre  $p$

## Question 14/15

$$X^G$$

## Réponse 14/15

$$\bigcap_{g \in G} (\text{fix}(g))$$

## Question 15/15

Fixateurs de  $g$

## Réponse 15/15

$$\text{fix}(g) = \{x \in X, g \cdot x = x\}$$