

Topologie

Topologie des espaces vectoriels normés

Question 1/44

Image continue d'un connexe par arcs

Réponse 1/44

Si f est continue et A une partie connexe par arcs, alors $f(A)$ est connexe par arcs

Question 2/44

Expression de $\|M\|_2$ avec tr

Réponse 2/44

$$\|M\|_2 = \sqrt{\text{tr}(\overline{M}^\top M)}$$

Question 3/44

Normes usuelles sur \mathbb{K}^n

Réponse 3/44

$$\|x\|_1 = \sum_{k=0}^n (|x_k|)$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^n (|x_k|^2)}$$

$$\|x\|_\infty = \max(\{|x_k|, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\})$$

Question 4/44

Théorème des bornes atteintes

Réponse 4/44

Si K est un compact non vide et f une application continue, alors f est bornée sur K et atteint ses bornes

Question 5/44

$$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$
$$\exp(M)$$

Réponse 5/44

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{M^n}{n!} \right)$$

Question 6/44

Identité du parallélogramme

Réponse 6/44

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Question 7/44

\dot{A}

Réponse 7/44

$$\{x \in A, \exists \varepsilon > 0, \mathcal{B}(x, \varepsilon) \subset A\}$$

Question 8/44

$$\text{fr}(A)$$

Réponse 8/44

$$\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$$

Question 9/44

Espace de Hilbert

Réponse 9/44

Espace préhilbertien réel complet

Question 10/44

$f: E \rightarrow \mathbb{K}$ est une application polynomiale sur
 E de base (e_1, \dots, e_n)

Réponse 10/44

$$\text{Si } x = \sum_{k=1}^n (x_k e_k)$$

$$\exists (\lambda_{k_1, \dots, k_n})_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N}^n)},$$

$$f(x) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n} \left(\lambda_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \right)$$

Question 11/44

Espace complet

Réponse 11/44

Espace métrique où les suites de Cauchy sont
convergeantes

Question 12/44

Définition alternative d'un espace complet

Réponse 12/44

Espace où toute suite convergent absolument
est convergente

Question 13/44

$f: A \rightarrow B$ est une isométrie

Réponse 13/44

$$\begin{aligned} f(A) &= B \\ \forall (a, a') \in A^2, \|f(a) - f(a')\| &= \|a - a'\| \end{aligned}$$

Question 14/44

Continuité des applications polynomiales

Réponse 14/44

Une application polynomiale dans un evn de dimension finie est continue

Question 15/44

$$|||u|||$$

Réponse 15/44

$$\sup(\{\|u(x)\|, x \in E, \|x\| = 1\})$$

Question 16/44

$$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ telle que } \|M\| < 1$$
$$\sum M^k$$

Réponse 16/44

$$I_n - M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} (M^k) = (I_n - M)^{-1}$$

Question 17/44

Normes usuelles sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Réponse 17/44

$$\|M\|_1 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p (|m_{i,j}|) \right)$$

$$\|M\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p (|m_{i,j}|^2) \right)}$$

$$\|M\|_\infty = \max(\{|m_{i,j}|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, p \rrbracket\})$$

Question 18/44

Chemin joignant $x \in E$ à $y \in E$

Réponse 18/44

Application γ continue de $[0, 1]$ dans E telle
que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$

Question 19/44

Partie complète A d'un espace métrique E

Réponse 19/44

Toute suite de Cauchy dans A est convergente
dans A

Question 20/44

Normes usuelles sur $\mathbb{K}[X]$
Normes avec les valeurs

Réponse 20/44

$$\|P\|_1 = \int_a^b (|P(t)|) \, dt$$

$$\|P\|_2 = \sqrt{\int_a^b (|P(t)|^2) \, dt}$$

$$\|P\|_\infty = \sup(\{|P(x)|, x \in [a, b]\})$$

Question 21/44

Normes usuelles sur $\mathcal{C}([a, b])$

Réponse 21/44

$$\|f\|_1 = \int_a^b (|f(t)|) \, dt$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b (|f(t)|^2) \, dt}$$

$$\|f\|_\infty = \sup(\{|f(x)|, x \in [a, b]\})$$

Question 22/44

Normes usuelles sur $\mathbb{K}[X]$
Normes avec les coefficients

Réponse 22/44

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{\deg(P)} (|p_k|)$$

$$\|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\deg(P)} (|p_k|^2)}$$

$$\|P\|_\infty = \max(\{|p_k|, k \in \llbracket 1, \deg(P) \rrbracket\})$$

Question 23/44

Caractérisation des convexes par les
applications continues

Réponse 23/44

A est connexe si et seulement si toute application continue de A dans $\{0, 1\}$ est constante

Question 24/44

A est connexe

Réponse 24/44

Les seules parties ouvertes et fermées de A sont
 A et \emptyset

Question 25/44

Théorème de Borel-Lebesgue

Réponse 25/44

Si K est un compact et $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts telle que $K \subset \bigcup_{i \in I} (\Omega_i)$

Alors, il existe $J \subset I$ fini tel que $K \subset \bigcup_{i \in J} (\Omega_i)$

Question 26/44

Image continue d'un connexe

Réponse 26/44

Si f est continue et A connexe, alors $f(A)$ est
connexe

Question 27/44

Image continue d'un compact

Réponse 27/44

Si f est continue et K un compact, alors $f(K)$
est un compact

Question 28/44

$$E \setminus \overline{A}$$

Réponse 28/44

$$\overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}}$$

Question 29/44

Théorème de Riesz

Réponse 29/44

E est de dimension finie si et seulement si sa
boule unité est fermée

Question 30/44

Théorème du point fixe de Picard

Réponse 30/44

Soit A une partie complète d'un espace métrique E et $f: A \rightarrow A$ une application k -contractante (i.e. k -lipsichtzienne, $k < 1$)

f a un unique point fixe $p \in A$

La suite définie par $u_0 \in A$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers p et $d(u_n, p) \leq \frac{k^n}{1-k} d(u_1, u_0)$

Question 31/44

$$\varphi \in \mathcal{L}(E_1 \times \cdots \times E_n, F)$$
$$|||\varphi|||$$

Réponse 31/44

$$\sup_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n \\ N_1(x_1) = \dots = N_n(x_n) = 1}} (\|\varphi(x_1, \dots, x_n)\|)$$

Question 32/44

Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Réponse 32/44

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$$

Question 33/44

Normes usuelles sur $\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$

Réponse 33/44

$$u \in \ell_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{N}) : \|u\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} (|u_k|)$$

$$u \in \ell_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N}) : \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} (|u_k|^2)}$$

$$u \in \ell_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mathbb{N}) : \|u\|_{\infty} = \sup(\{|u_k|, k \in \mathbb{N}\})$$

Question 34/44

A est une partie connexe par arcs de E

Réponse 34/44

$\forall (x, y) \in A^2$, il existe un chemin joignant x à y

Question 35/44

A est une partie étoilée de E

Réponse 35/44

$$\exists a \in A, \forall x \in A, [a, x] \subset A$$

Question 36/44

N et N' sont équivalentes

Réponse 36/44

$$\exists(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \alpha N \leq N' \leq \beta N$$

Question 37/44

Théorème de Bolzano-Weirstrass

Réponse 37/44

Dans un evn de dimension finie, toute suite bornée admet une valeur d'adhérence

Question 38/44

$$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$
$$|||M|||$$

Réponse 38/44

$$\sup(\{\|MX\|, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \|X\| = 1\})$$

Question 39/44

$$u \in \mathcal{L}(E)$$
$$\exp(u)$$

Réponse 39/44

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{u^n}{n!} \right)$$

Question 40/44

$$\mathrm{sp}(\exp(M))$$

Réponse 40/44

$$\{e^\lambda, \lambda \in \operatorname{sp}(M)\}$$

Question 41/44

Propriétés de $\|\cdot\|$

Réponse 41/44

$$|||u \circ v||| \leq |||u||| \times |||v|||$$

$$|||\text{id}||| = 1$$

$$|||u^{-1}||| \geq \frac{1}{|||u|||}$$

Question 42/44

Théorème de Heine

Réponse 42/44

Si f est une application continue sur un compact, alors f est uniformément continue

Question 43/44

$$E \setminus \mathring{A}$$

Réponse 43/44

$$\overline{E \setminus A}$$

Question 44/44

Espace de Banach

Réponse 44/44

Evn complet