

Algèbre 1

Structures algébriques

Question 1/79

Groupe cyclique

Réponse 1/79

Groupe monogène fini

Question 2/79

Fibres de f

Soit $x \in f^{-1}(\{y\})$

Réponse 2/79

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{y\}) &= x \times \ker(f) \\ &= \{x \times z, z \in \ker(f)\} = \ker(f) \times x \end{aligned}$$

Question 3/79

Soient E muni d'une structure de X et $F \subset E$
 F est un sous- X de E

Réponse 3/79

F est stable par les lois de E

F contient les neutres imposés par E

Les lois induites sur F par les lois de E
vérifient les axiomes de la structure de X

Question 4/79

Intersection de sous-groupes

Si G est un groupe, et $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de G

Réponse 4/79

$\bigcap_{i \in I} (H_i)$ est un sous-groupe de G

Question 5/79

Élément absorbant dans un anneau $(A, +, \times)$

Réponse 5/79

0

Question 6/79

Image directe et réciproque de sous-groupes
par un homomorphisme

Réponse 6/79

Si G et H sont deux groupes, et $f \in \text{Hom}(G, H)$ un morphisme de groupes, G' et H' deux sous-groupes respectivement de G et H

$f(G')$ est un sous-groupe de H
 $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G

Question 7/79

Idéal principal

Réponse 7/79

Idéal engendré par un unique élément a de la
forme $I = aA = \{ay, y \in A\}$
 I est souvent noté (a)

Question 8/79

Soit E et F deux ensembles munis d'une structure de X , munis respectivement des lois de composition internes $\left(\underset{1}{\star}, \dots, \underset{n}{\star}\right)$ et $\left(\underset{1}{\diamond}, \dots, \underset{n}{\diamond}\right)$, et externes $\left(\underset{1}{\square}, \dots, \underset{m}{\square}\right)$ et $\left(\underset{1}{\triangle}, \dots, \underset{m}{\triangle}\right)$ sur K_1, \dots, K_m
 $f: E \rightarrow F$ est un homomorphisme

Réponse 8/79

f respecte les lois interne : soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\forall (x, y) \in E^2, f\left(x \underset{k}{\star} y\right) = f(x) \underset{k}{\diamond} f(y)$$

f respecte les lois externes : soit $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$

$$\forall (\lambda, x) \in K_k \times E, f\left(\lambda \underset{k}{\square} y\right) = \lambda \underset{k}{\triangle} f(x)$$

f est compatible avec le neutre (si le neutre e_i pour la loi $\underset{i}{\star}$ est imposé dans les axiomes, donc

le neutre e'_i existe pour la loi $\underset{i}{\diamond}$) : $f(e_i) = e'_i$

Question 9/79

Propriétés d'un groupe (G, \star)

Réponse 9/79

G admet un unique élément neutre pour \star
 $\forall x \in G, \exists! x^s \in G$

Question 10/79

Diviseurs de zéro dans un anneau A

Réponse 10/79

$a \in A$ est un diviseur de 0 à gauche si et seulement s'il existe $b \in A$ tel que $ab = 0$

$a \in A$ est un diviseur de 0 à droite si et seulement s'il existe $b \in A$ tel que $ba = 0$

$a \in A$ est un diviseur de 0 si et seulement si a est diviseur de 0 à gauche et à droite

Question 11/79

Si (G, \star) est un groupe et $H \subset G$
Caractérisation(s) des sous-groupes

Réponse 11/79

$$H \neq \emptyset \quad \forall (x, y) \in H, \quad x \star y \in H$$

$$\forall x \in H, \quad x^s \in H$$

$$H \neq \emptyset \quad \forall (x, y) \in H^2, \quad x \star y^s \in H$$

$$e_G \in H \quad \forall (x, y) \in H^2, \quad x \star y^s \in H$$

Question 12/79

Soient (G, \star) et (H, \diamond) deux groupes
 $f: G \rightarrow H$ est un homomorphisme de groupes

Réponse 12/79

$$\forall (x, y) \in G^2, f(x \star y) = f(x) \diamond f(y)$$

L'ensemble des homomorphisme de G dans H
est noté $\text{Hom}(G, H)$

Si $(G, \star) = (H, \diamond)$, f est un endomorphisme

L'ensemble des automorphismes de G est noté
 $\text{Aut}(G)$

Question 13/79

Si $(A, +, \times)$ est un groupe et $B \subset A$
Caractérisation(s) des sous-anneaux

Réponse 13/79

$$1_A \in B \quad \forall (x, y) \in B, \quad x - y \in B$$
$$\forall (x, y) \in B, \quad xy \in B$$

Question 14/79

Propriété des groupes monogènes

Réponse 14/79

Un groupe monogène est abélien

Question 15/79

Théorème de Lagrange pour l'ordre des
éléments d'un groupe

Réponse 15/79

Si G est un groupe fini et $x \in G$
 $\text{ord}(x) \mid |G|$

Question 16/79

Isomorphisme de X

Réponse 16/79

Homomorphisme de X bijectif

Question 17/79

Factorisation de $(a + b)^n$ dans un anneau A

Réponse 17/79

$$(a, b) \in A^2 \text{ tel que } ab = ba$$
$$\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right)$$

Question 18/79

Associativité

Réponse 18/79

\star est associative si et seulement
si $\forall (x, y, z) \in E^3, (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$

Question 19/79

Si G et H sont deux groupes et
 $f \in \text{Hom}(G, H)$
 $f(e_G)$

Réponse 19/79

$$f(e_H)$$

Question 20/79

Ordre d'un groupe
Si G est un groupe

Réponse 20/79

$$\text{ord}(G) = |G|$$

Question 21/79

Groupe abélien

Réponse 21/79

La loi \star de G est commutative

Question 22/79

Groupe

Réponse 22/79

Muni d'une loi de composition interne, de l'associativité, d'un élément neutre et de symétriques

Un groupe est un monoïde

Question 23/79

Anneau principal

Réponse 23/79

Un anneau intègre dont tous les idéaux sont
principaux

Question 24/79

Si $f \in \text{Hom}(G, K)$ et H est un sous-groupe distingué

Réponse 24/79

f passe au quotient avec $\tilde{f}: G/H \rightarrow K$

Question 25/79

Commutativité généralisée

Réponse 25/79

Si \star est une loi commutative et associative sur

$$E, (x_1, \dots, x_n) \in E^n \text{ et } \sigma \in \mathfrak{S}_n$$

$$x_1 \star \dots \star x_n = x_{\sigma(1)} \star \dots \star x_{\sigma(n)}$$

Question 26/79

Anneau

Réponse 26/79

Muni de deux lois de composition internes
(généralement notées $+$ et \times)
 $(A, +)$ est un groupe abélien
 (A, \times) est un monoïde
 \times est distributive sur $+$

Question 27/79

Les classes à gauche modulo H

Réponse 27/79

$$\{aH, a \in G\}$$

Question 28/79

Si $f \in \text{Hom}(G, K)$ et H est un sous-groupe distingué et $H \subset \ker(f)$

Réponse 28/79

$$f = \tilde{f} \circ \pi$$

La réciproque est vraie

Question 29/79

Commutativité

Réponse 29/79

\star est commutative si et seulement
si $\forall (x, y) \in E^2, x \star y = y \star x$

Question 30/79

Si G et H sont deux groupes et
 $f \in \text{Hom}(G, H)$
 $f(x^{-1})$

Réponse 30/79

$$f(x)^{-1}$$

Question 31/79

Si \star est une loi associative sur E et
 $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$

Réponse 31/79

$x_1 \star \cdots \star x_n$ ne dépend pas du parenthésage
admissible

Question 32/79

Associativité externe

E est muni d'une loi de composition externe \diamond
sur \mathbb{K} , muni d'une loi de composition interne \star

Réponse 32/79

$$\forall (\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K}^2 \times E, (\lambda \star \mu) \diamond x = \lambda \diamond (\mu \diamond x)$$

Question 33/79

Anneau intègre

Réponse 33/79

Anneau commutatif non réduit à $\{0\}$ et sans diviseurs de 0

Question 34/79

Endomorphisme de X

Réponse 34/79

Homomorphisme de X de E dans lui-même
(muni des mêmes lois)

Question 35/79

Description des groupes monogènes
Si $G = \langle x \rangle$

Réponse 35/79

Si $\text{ord}(x) = +\infty$, G est isomorphe à \mathbb{Z}

Si $\text{ord}(x) = n \in \mathbb{N}^*$, G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Question 36/79

Monoïde

Réponse 36/79

Muni d'une loi de composition interne, de
l'associativité et d'un élément neutre
Un monoïde est un magma

Question 37/79

Passage au quotient de la loi dans le cas abélien

Si G est un groupe abélien et H un
sous-groupe de G

Réponse 37/79

$\equiv_g = \equiv_d$ et on note la relation \equiv

La loi induite correspond au produit des classes élément par élément

$$\begin{aligned}(ab)H &= (aH) \cdot (bH) \\ &= \{x \cdot y, x \in aH, y \in bH\}\end{aligned}$$

La loi induite sur l'ensemble quotient munit celui-ci d'une structure de groupe abélien

Question 38/79

Si G et H sont deux groupes et $f \in \text{Hom}(G, H)$
un morphisme de groupes
 $\ker(f)$

Réponse 38/79

$$f^{-1}(e_H) = \{y \in G \mid f(y) = e_H\}$$

Question 39/79

Ensemble formé par les classes à gauche et à droite

Réponse 39/79

$\{Ha, a \in G\}$ est une partition de G
 $\{aH, a \in G\}$ est une partition de G

Question 40/79

Si (G, \star) est un groupe

Un sous-ensemble H de G est un sous-groupe
de G

Réponse 40/79

H est stable pour la loi de G et la loi induite définit sur H une structure de groupe

Question 41/79

Résolution de $x^n = e$

Réponse 41/79

$\{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = e\}$ est de la forme $a\mathbb{Z}$

x est d'ordre fini si et seulement si $a \neq 0$ (on a donc $\text{ord}(x) = a$)

Question 42/79

Si H est un sous-groupe distingué de G

Réponse 42/79

$$\begin{aligned} & \forall a \in G, aH = Ha \\ \Leftrightarrow & \forall a \in G, \forall h \in H, aha^{-1} \in H \end{aligned}$$

Question 43/79

Distributivité

Réponse 43/79

La loi \star est distributive à gauche sur \diamond si et seulement

$$\text{si } \forall (x, y, z) \in E^3, \quad x \star (y \diamond z) = (x \star y) \diamond (x \star z)$$

La loi \star est distributive à droite sur \diamond si et seulement

$$\text{si } \forall (x, y, z) \in E^3, \quad (y \diamond z) \star x = (y \star x) \diamond (z \star x)$$

La loi \star est distributive sur \diamond si et seulement si elle est distributive à gauche et à droite

Question 44/79

Distributivité généralisée

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j \in J_i} (x_{i,j}) \right)$$

Réponse 44/79

$$\sum_{(j_1, \dots, j_n) \in J_1 \times \dots \times J_n} \left(\prod_{i=1}^n (x_{i, j_i}) \right)$$

Question 45/79

$$\text{Si } \ker(f) = \{e_G\}$$

Réponse 45/79

f est injectif (la réciproque est vraie)

Question 46/79

Magma

Réponse 46/79

Muni d'une loi de composition interne

Question 47/79

Soient $\left(A, +_A, \times_A\right)$ et $\left(B, +_B, \times_B\right)$ deux anneaux
 $f: A \rightarrow B$ est un homomorphisme d'anneaux

Réponse 47/79

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad f\left(x \underset{A}{+} y\right) = f(x) \underset{B}{+} f(y)$$

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad f\left(x \underset{A}{\times} y\right) = f(x) \underset{B}{\times} f(y)$$
$$f(1_A) = 1_B$$

Question 48/79

Les classes à droite modulo H

Réponse 48/79

$$\{Ha, \ a \in G\}$$

Question 49/79

Passage au quotient de la loi dans le cas d'un
sous-groupe distingué

Si G est un groupe et H un sous-groupe
distingué de G

Réponse 49/79

$\equiv_g = \equiv_d$ et on note la relation \equiv

La loi induite correspond au produit des
classes élément par élément

$$\begin{aligned}(ab)H &= (aH) \cdot (bH) \\ &= \{x \cdot y, x \in aH, y \in bH\}\end{aligned}$$

La loi induite sur l'ensemble quotient munit
celui-ci d'une structure de groupe

Question 50/79

Description par le haut du sous-groupe
engendré par une partie

Réponse 50/79

Soient \mathcal{G} l'ensemble des sous-groupes de G et

$$\mathcal{H} = \{H \in \mathcal{G} \mid X \subset H\}$$

$$\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} (H)$$

Question 51/79

Ordre d'un élément d'un groupe

Réponse 51/79

$$\text{ord}(x) = \min(\{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = e\})$$

Question 52/79

Intersection de sous-anneaux

Si A est un groupe, et $(B_i)_{i \in I}$ une famille de sous-anneaux de A

Réponse 52/79

$\bigcap_{i \in I} (B_i)$ est un sous-anneau de A

Question 53/79

Élément régulier ou simplifiable

Réponse 53/79

x est régulier à gauche si et seulement
si $\forall (y, z) \in E^2, x \star y = x \star z \Rightarrow y = z$

x est régulier à droite si et seulement
si $\forall (y, z) \in E^2, y \star x = z \star x \Rightarrow y = z$

x est régulier si et seulement s'il est régulier à
gauche et à droite

Si x admet un symétrique, alors il est régulier

Question 54/79

Description par le bas du sous-groupe engendré
par une partie

Réponse 54/79

$$\langle X \rangle = \{x_1 \cdots x_n, (x_1, \cdots, x_n) \in X^n\} \\ \cup \{x^{-1}, x \in X\}$$

e correspond au produit vide

Question 55/79

Soient $e \in E$ un élément neutre pour la loi \star et

$$x \in E$$

y est un symétrique de x pour la loi \star

Réponse 55/79

$$x \star y = e = y \star x$$

Question 56/79

Sous-groupe monogène

Réponse 56/79

$$\langle x \rangle = \{x^n, n \in \mathbb{N}\}$$

Question 57/79

Anneau commutatif

Réponse 57/79

Anneau dont la loi \times est commutative

Question 58/79

x et y sont dans la même classe à droite
modulo H

Réponse 58/79

$$x \equiv_d y [H] \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

Question 59/79

Sous-groupe propre de G

Réponse 59/79

Sous-groupe de G distinct de G et $\{e_G\}$

Question 60/79

Si $(A, +, \times)$ est un anneau

Un sous-ensemble B de A est un sous-anneau
de A

Réponse 60/79

B est stable pour les lois $+$ et \times

$$1_A \in B$$

Les lois induites sur B définissent sur B une structure d'anneau

Question 61/79

Réciproque d'isomorphisme

Réponse 61/79

Si $f: F \rightarrow F$ est un isomorphisme, alors f^{-1}
est un isomorphisme

Question 62/79

Si $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif

Un sous-ensemble I de A est un sous-anneau
idéal de A

Réponse 62/79

I est un sous-groupe de $(A, +)$
 $\forall i \in I, \forall a \in A, ia \in I$

Question 63/79

Soit $e \in E$

e est un élément neutre pour la loi \star

Réponse 63/79

$$\forall x \in E, \quad e \star x = x = x \star e$$

Question 64/79

Si A est un anneau commutatif et I un idéal
de A

Anneau quotient

Réponse 64/79

A/I peut être muni d'une multiplication avec
pour tout $(a, b) \in A$, $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$
 A/I est muni d'une structure d'anneau

Question 65/79

Automorphisme de X

Réponse 65/79

Endomorphisme et isomorphisme de X

Question 66/79

Propriété sur 1 et 0 si l'anneau A a plus d'un élément

Réponse 66/79

$$1 \neq 0$$

Question 67/79

Factorisation de $a^n - b^n$ dans un anneau A

Réponse 67/79

$(a, b) \in A^2$ tel que $ab = ba$

$$(a - b) \sum_{k=0}^{n-1} (a^{n-k-1} b^k)$$

Question 68/79

Théorème de Lagrange pour l'ordre des groupes

Réponse 68/79

Si G est un groupe fini et H un sous-groupe de G

$$|H| \mid |G|$$

Question 69/79

Élément régulier d'un anneau

Réponse 69/79

L'élément n'est pas diviseur de 0

La réciproque est vraie

S'adapte à gauche et à droite

Question 70/79

Image directe et réciproque de sous-anneaux
par un homomorphisme

Réponse 70/79

Si A et B sont deux anneaux, et $f: A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux, A' et B' deux sous-anneaux respectivement de A et B

$f(A')$ est un sous-anneau de B

$f^{-1}(B')$ est un sous-anneau de A

Question 71/79

Symétrique de $x \star y$

Réponse 71/79

$$y^s \star x^s$$

Question 72/79

Si G est un groupe
Structure de $(\text{Aut}(G), \circ)$

Réponse 72/79

$(\text{Aut}(G), \circ)$ est un groupe

Question 73/79

Cardinal des classes de congruence

Réponse 73/79

$$|Ha, a \in G| = |Ha, a \in G| = |H|$$

Question 74/79

Premier théorème d'isomorphisme

Réponse 74/79

Si $f \in \text{Hom}(G, H)$

$\ker(f)$ est un sous-groupe distingué de G , et f passe au quotient, définissant un morphisme de groupes $\tilde{f}: G / \ker(f) \rightarrow H$

\tilde{f} est injectif et sa corestriction à son image est un isomorphisme

Question 75/79

Soient E muni d'une loi \star , $F \subset E$
 F est stable par \star

Réponse 75/79

$$\forall (x, y) \in F^2, x \star y \in F$$

La loi de E se restreint en une loi \star_F appelée
loi induite sur F par \star

Question 76/79

Groupe des inversibles d'un anneau

Réponse 76/79

$$A^\times$$

A^\times est un groupe multiplicatif

Question 77/79

x et y sont dans la même classe à gauche
modulo H

Réponse 77/79

$$x \equiv_g y [H] \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

Question 78/79

Soit $x \in E$

x est un élément absorbant pour \star

Réponse 78/79

$$\forall y \in E, \ x \star y = x = y \star x$$

Question 79/79

Sous-groupe engendrée par une partie X

Réponse 79/79

$$\langle X \rangle$$

C'est le plus petit sous-groupe contenant X