

Algèbre 2

Algèbre linéaire

Question 1/31

$$\text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y)$$

Réponse 1/31

$$\text{Vect}(X \cup Y)$$

Question 2/31

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev

Caractérisation des applications linéaires

Réponse 2/31

$$\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Question 3/31

Si E est un \mathbb{K} -ev et $X \subset E$
 $\text{Vect}(X)$

Réponse 3/31

Plus petit sous-espace vectoriel de E contenant
 X

Question 4/31

Caractérisation géométrique des projecteurs

Réponse 4/31

p est un projecteur si et seulement s'il existe deux sous-espaces F et G de E tels que $F \oplus G = E$ avec $\forall (f, g) \in F \times G \ p(f + g) = f$
 $F = \text{im}(p), G = \text{ker}(p)$

Un projecteur est une projection géométrique sur $\text{im}(p)$ parallèlement à $\text{ker}(p)$

Question 5/31

Base de E

Réponse 5/31

Famille libre maximale de E

Famille génératrice minimale de E

Question 6/31

Structure de $\ker(f)$

$$f : E \rightarrow F$$

Réponse 6/31

Sous-espace vectoriel de E

Question 7/31

Endomorphisme d'espaces vectoriels

Réponse 7/31

Application linéaire de E dans lui-même
 $\mathcal{L}(E)$

Question 8/31

Image directe et réciproque de sous-espaces vectoriels par un homomorphisme

Réponse 8/31

Si E et F sont deux groupes, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$
une application linéaire, E' et F' deux
sous-espaces vectoriels de E et F
 $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F
 $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E

Question 9/31

Somme directe

Réponse 9/31

$E \oplus F$ est directe si et seulement si
 $E \cap F = \{0\}$

Question 10/31

Structure des polynomes annulateurs

Réponse 10/31

Idéal de $\mathbb{K}[X]$

Question 11/31

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev
 $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire

Réponse 11/31

$$\begin{aligned} \forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad f(\lambda x) &= \lambda f(x) \\ \forall (x, y) \in E^2, \quad f(x + y) &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

Question 12/31

Endomorphisme diagonalisable
 $(b_i)_{i \in I}$ une base de E

Réponse 12/31

$$\forall i \in I, \exists \lambda_i \in \mathbb{K}, f(b_i) = \lambda_i b_i$$

Les λ_i sont les valeurs propres

Si $x \neq 0$, $f(x) = \lambda x$ est un vecteur propre
associé à λ

$\ker(f - \lambda \text{id})$ est le sous-espace propre de f
associé à λ

Question 13/31

Un ensemble E est un espace vectoriel sur \mathbb{K}
 E est un \mathbb{K} -ev

Réponse 13/31

$(E, +)$ est un groupe abélien

E est muni d'une loi de composition externe \cdot

avec $\forall (\lambda, \mu, x, y) \in \mathbb{K}^2 \times E^2$

$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ (associativité externe ou pseudo-associativité)

$1_{\mathbb{K}}x = x$ (compatibilité du neutre de (\mathbb{K}, \times))

$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (distributivité de \cdot sur $+_E$)

$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (distributivité de \cdot sur $+_{\mathbb{K}}$)

Question 14/31

Si E est un \mathbb{K} -ev

Un sous-ensemble F de E est un sous-espace
vectoriel de E

Réponse 14/31

F est stable par les lois $+$ et \cdot et les lois induites définissent sur F une structure d'espace-vectoriel

Question 15/31

Symétrie

Réponse 15/31

$$s \circ s = \text{id}$$

Question 16/31

Structure de $\mathcal{L}(E, F)$

Réponse 16/31

\mathbb{K} -ev

Question 17/31

Caractérisation géométrique des symétries

Réponse 17/31

s est une symétrie si et seulement s'il existe deux sous-espaces F et G de E tels que

$$F \oplus G = E \text{ avec } \forall (f, g) \in F \times G$$

$$s(f + g) = f - g$$

$$F = \ker(s - \text{id}), G = \ker(s + \text{id})$$

Une symétrie est une symétrie géométrique par rapport à $\ker(s - \text{id})$ parallèlement à $\ker(s + \text{id})$

Question 18/31

$\varphi: E \times F \rightarrow G$ est bilinéaire

Réponse 18/31

$$\begin{aligned}\forall (x, x', y, y', \lambda) &\in E^2 \times F^2 \times \mathbb{K} \\ \varphi(\lambda x + x', y) &= \lambda \varphi(x, y) + \varphi(x', y) \\ \varphi(x, \lambda y + y') &= \lambda \varphi(x, y) + \varphi(x, y')\end{aligned}$$

Question 19/31

Si E est un espace vectoriel et $F \subset E$

Caractérisation(s) des sous-espaces vectoriels

Réponse 19/31

$$0 \in F$$
$$\forall (x, y, \lambda) \in F^2 \times \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$$

Question 20/31

Structure de $\mathcal{L}(E)$

Réponse 20/31

$(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une \mathbb{K} -algèbre

Question 21/31

Famille libre de E

Réponse 21/31

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I}, \sum_{i \in I} (\lambda_i x_i) = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$$

$$\forall x \in E \exists! (\lambda_i)_{i \in I}, x = \sum_{i \in I} (\lambda_i x_i)$$

Question 22/31

Automorphisme d'espaces vectoriels

Réponse 22/31

Endomorphisme d'espaces vectoriels bijectif
 $\text{GL}(E)$

Question 23/31

Isomorphisme d'espaces vectoriels

Réponse 23/31

Application linéaire bijective

Question 24/31

Caractérisation de l'image et diagonalisation
d'un projecteur

Réponse 24/31

$$\begin{aligned}\operatorname{im}(p) &= \ker(p - \operatorname{id}) \\ E &= \ker(p) \oplus \ker(p - \operatorname{id})\end{aligned}$$

Question 25/31

Structure de $(\text{GL}(E), \circ)$

Réponse 25/31

Groupe

Question 26/31

Si $(A, +, \times)$ est un anneau et \mathbb{K} un corps
 A est une \mathbb{K} -algèbre

Réponse 26/31

$$\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times A^2$$
$$\lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y)$$

Question 27/31

Projecteur

Réponse 27/31

$$p \circ p = p$$

Question 28/31

Polynome annulateur

$P \in \mathbb{K}[X]$ est annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$

Réponse 28/31

$$P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Question 29/31

Famille génératrice de E

Réponse 29/31

$$\forall x \in E \exists (\lambda_i)_{i \in I}, \quad x = \sum_{i \in I} (\lambda_i x_i)$$
$$\text{Vect}\left((x_i)_{i \in I}\right) = E$$

Question 30/31

Endomorphisme nilpotent
 $u \in \mathcal{L}(E)$

Réponse 30/31

$$\exists n \in \mathbb{N}, u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Question 31/31

Diagonalisation d'une symétrie

Réponse 31/31

$$s = \ker(s + \text{id}) \oplus \ker(s - \text{id})$$