

# **Algèbre 2**

## ***Dimension finie***

## Question 1/30

Matrice diagonalisable

## Réponse 1/30

Matrice semblable à une matrice diagonale

## Question 2/30

Produit matriciel avec l'évaluation

## Réponse 2/30

$$[f(X)]_{\mathcal{C}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)[X]_{\mathcal{B}}$$

## Question 3/30

Image d'une matrice

## Réponse 3/30

$$\mathrm{im}(M) = \mathrm{Vect}(C_1(M), \dots, C_n(M))$$

## Question 4/30

Matrices semblables



## Réponse 4/30

$$\begin{aligned} &A \in \mathcal{M}_n(K), B \in \mathcal{M}_n(K) \\ &\exists (P) \in \mathrm{GL}_n(K), B = P^{-1}AP \end{aligned}$$

## Question 5/30

Hyperplan

## Réponse 5/30

$$\exists \in E^* \setminus \{0\}, H = \ker(\varphi)$$

$\varphi$  est l'équation caractéristique de  $H$

## Question 6/30

Forme linéaire

## Réponse 6/30

Application linéaire (sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  
 $E$ ) de  $E$  vers  $\mathbb{K}$

Un élément de  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

## Question 7/30

Trace d'une matrice

## Réponse 7/30

$$A \in \mathcal{M}_n(K)$$
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n (a_{i,i})$$

## Question 8/30

Majoration du rang d'une application linéaire  
 $u \in \mathcal{L}(E, F)$



## Réponse 8/30

$$\operatorname{rg}(u) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$$

## Question 9/30

Endomorphisme diagonalisable

## Réponse 9/30

Il existe une base  $\mathcal{B}$  dans laquelle  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est diagonale

## Question 10/30

Propriétés de la trace

## Réponse 10/30

C'est une forme linéaire

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^{\top})$$

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

Si  $M$  et  $N$  sont semblables,  $\operatorname{tr}(N) = \operatorname{tr}(M)$

## Question 11/30

Dimension d'une somme directe

## Réponse 11/30

$$\dim \left( \bigoplus_{i=1}^n (E_i) \right) = \sum_{i=1}^n (\dim(E_i))$$

## Question 12/30

Matrices équivalentes



## Réponse 12/30

$$\begin{aligned} N &\in \mathcal{M}_n(K), M \in \mathcal{M}_n(K) \\ \exists (P, Q) &\in \mathrm{GL}_n(K)^2, N = PMQ \end{aligned}$$

## Question 13/30

Rang d'une famille

## Réponse 13/30

$$\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n) = \dim(\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n))$$

## Question 14/30

Dimension d'un supplémentaire  $S$  de  $F$  dans  $E$

## Réponse 14/30

$$\dim(S) = \dim(E) - \dim(F)$$

## Question 15/30

Trace d'un projecteur et d'une symétrie

## Réponse 15/30

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(p) &= \mathrm{rg}(p) \\ \mathrm{tr}(s) &= n - 2 \mathrm{rg}(s - \mathrm{id})\end{aligned}$$

## Question 16/30

Dimension d'un produit cartésien



## Réponse 16/30

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

## Question 17/30

Théorème du rang

## Réponse 17/30

$$\dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f) = \dim(E)$$

## Question 18/30

Formule de Grassmann

## Réponse 18/30

$$\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$$

## Question 19/30

Matrice associée à une composition

## Réponse 19/30

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

## Question 20/30

Conservation de l'image et du noyau pour les matrices



## Réponse 20/30

$$\begin{aligned} M &\in \mathcal{M}_{n,p}(K), P \in \mathrm{GL}_n(K), Q \in \mathrm{GL}_n(K) \\ \ker(PM) &= \ker(M) \\ \mathrm{im}(MQ) &= \mathrm{im}(M) \end{aligned}$$

## Question 21/30

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est inversible

## Réponse 21/30

$$u \in \mathrm{GL}(E)$$

La réciproque est vraie

## Question 22/30

Classification des matrices équivalentes par le  
rang

## Réponse 22/30

$N$  est équivalent à  $M$  si et seulement si

$$\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(N)$$

## Question 23/30

Dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$

## Réponse 23/30

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

## Question 24/30

Rang d'une application linéaire



## Réponse 24/30

$$\operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{im}(u))$$

## Question 25/30

Conservation du rang pour les matrices

## Réponse 25/30

$$M \in \mathcal{M}_{n,p}(K), P \in \mathrm{GL}_n(K), Q \in \mathrm{GL}_n(K) \\ \mathrm{rg}(PMQ) = \mathrm{rg}(M)$$

## Question 26/30

Dual

## Réponse 26/30

$$E^*$$

$\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  constitué des formes linéaires

## Question 27/30

Matrice de passage

## Réponse 27/30

$$P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(\text{id}) = [\mathcal{B}_2]_{\mathcal{B}_1}$$

## Question 28/30

Effet d'une composition sur le rang



## Réponse 28/30

$$\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$$

Si  $v$  est injective,  $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$

Si  $u$  est surjective,  $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$

## Question 29/30

Formule de changement de base

## Réponse 29/30

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \text{ des bases de } E, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \text{ des bases de } F \\ \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2}(f) = P_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1}(f) P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \\ = \left( P_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{C}_2} \right)^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1}(f) P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \end{aligned}$$

## Question 30/30

$$I_{n,p,r}$$

Réponse 30/30

$$\left( \begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array} \right)$$