

Algèbre 2

Anneaux

Question 1/27

CNS pour $P \triangleleft A$ premier

Réponse 1/27

A/P est intègre

Question 2/27

$a \in A$ est idempotent

Réponse 2/27

$$a^2 = a$$

Question 3/27

$$I \triangleleft A$$

Réponse 3/27

$$(I, +) \leq (A, +) \text{ et } \forall a \in A, \forall i \in I, ai \in I$$

Question 4/27

Caractéristique de A

Réponse 4/27

n tel que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \ker(\varphi)$

$$\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow A$$

$$n \longmapsto n \cdot 1_A$$

Question 5/27

$a \in A$ est irréductible

Réponse 5/27

$$a \notin A^\times, a \neq 0, a = bc \Rightarrow a \in A^\times \vee c \in A^\times$$

Question 6/27

$$I \cdot J \text{ pour } I + J = A$$

Réponse 6/27

$$I \cap J$$

Question 7/27

Lemme de factorisation des morphismes
d'anneaux

Réponse 7/27

Si $f: A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux
alors il existe un unique morphisme d'anneaux
 $\overline{f}: A/\ker(f) \rightarrow B$ tel que $f = \overline{f} \circ \pi$

Question 8/27

$a \in A$ est nilpotent

Réponse 8/27

Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$

Question 9/27

Conservation de la primalité par morphisme

Réponse 9/27

$f^{-1}(P)$ est premier

Si f est surjectif alors $f(A)$ est premier

Question 10/27

$a \in A$ est diviseur de 0

Réponse 10/27

Il existe $b \in A^\times$ tel que $ab = 0$

Question 11/27

$I \triangleleft A$ et $J \triangleleft A$ sont premiers entre eux

Réponse 11/27

$$I + J = A$$

Question 12/27

Théorème de localisation

Réponse 12/27

Si S est une partie multiplicative de A , il existe un anneau $S^{-1}A$ et un morphisme $\varphi_S: S^{-1}A \rightarrow A$ tel que si B est un anneau et $f: A \rightarrow B$ est un morphisme tel que $f(s) \in A^\times$ pour tout $s \in S$ alors il existe un unique morphisme $\tilde{f}: S^{-1}A \rightarrow B$ tel que $f = \tilde{f} \circ \varphi_S$ et de plus, pour tout $s \in S$, $\varphi_S(s) \in (S^{-1}A)^\times$

Question 13/27

Lien entre premier et irréductible

Réponse 13/27

Si A est intègre et $x \in A$ est premier alors x
est irréductible

Question 14/27

A est intègre

Réponse 14/27

A ne possède pas de diviseurs de 0

Question 15/27

Propriété de $G \leq A^\times$ fini

Réponse 15/27

Un tel G est cyclique

Question 16/27

PU du produit d'anneaux

Réponse 16/27

Pour tout anneau B et tout morphisme $f_i : B \rightarrow A_i$ il existe un unique $f : B \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$ tel que $\pi_i \circ f = f_i$

Question 17/27

Théorème chinois

Réponse 17/27

Si $I_1, \dots, I_n \triangleleft A$ sont deux à deux premiers entre eux, alors on a un isomorphisme d'anneaux $f: A/(I_1 \cdot \dots \cdot I_n) \rightarrow \prod_{i=1}^n A/I_i$

Question 18/27

Corps des fractions

Réponse 18/27

Si A est intègre, le corps des fractions de A est
 $S^{-1}A$ pour $S = A^*$
 $S^{-1}A$ est alors un corps

Question 19/27

CNS pour $M \triangleleft A$ maximal

Réponse 19/27

A/M est un corps

Question 20/27

PU du A -module $A[X]$

Réponse 20/27

Pour tout $f: A \rightarrow B$ et $b \in B$, il existe un

unique $\text{ev}_{f,b}: A[X] \longrightarrow B$

$$\sum_{i=0}^n a_i X^i \longmapsto \sum_{i=0}^n a_i b^i$$

Question 21/27

$a \in A$ est racine de l'unité

Réponse 21/27

Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 1$

Question 22/27

$$I + J$$
$$I \triangleleft A \text{ et } J \triangleleft A$$

Réponse 22/27

$$I + J = (I \cup J) \triangleleft A$$

Question 23/27

Image d'un idéal par un morphisme d'anneaux

Réponse 23/27

$f(I)$ est un idéal si f est surjectif

Question 24/27

S est une partie multiplicative

Réponse 24/27

$$1 \in S$$
$$\forall (a, b) \in S^2, ab \in S$$

Question 25/27

$p \in A$ est premier

Réponse 25/27

$$p \notin A^\times, p \neq 0, p \mid ab \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b$$

Question 26/27

$$I \cdot J$$
$$I \triangleleft A \text{ et } J \triangleleft A$$

Réponse 26/27

$$I \cdot J = (i \times j, i \in I, j \in J) \triangleleft A$$

Question 27/27

$$a \mid b$$

Réponse 27/27

$$\exists c \in A, b = ac$$