

Analyse

Suites de fonctions

Question 1/14

Convergence uniforme à partir des dérivées

Réponse 1/14

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est \mathcal{C}^k sur un intervalle I

$$\forall j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, u_n^{(j)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS}} v_j \text{ sur } I$$

$$u_n^{(k)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU}} v_k$$

alors v_0 est de classe \mathcal{C}^k

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, v_0^{(j)} = v_j$$

$$\forall j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, u_n^{(j)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU}} v_j$$

Question 2/14

Théorème de la double limite

Réponse 2/14

Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_n \in \mathbb{C}$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU}} u$
alors (ℓ_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ et $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$

Question 3/14

Primitivation d'une limite uniforme

Réponse 3/14

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur un intervalle I
et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU}} u$ sur I , alors

$$\int_a^x (u_n(t)) \, dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU}} \int_a^x (u(t)) \, dt$$

Question 4/14

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS}} u$$

Caractérisation par les limites

Réponse 4/14

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} u(x)$$

Question 5/14

Polynôme trigonométrique complexe

Réponse 5/14

$$\text{Vect}\left(\{e^{int}, n \in \mathbb{Z}\}\right)$$

Question 6/14

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU}} u$$

Caractérisation par les limites

Réponse 6/14

$$\|u_n - u\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Question 7/14

$$\|f\|_{\infty}$$

Réponse 7/14

$$\sup(\{|f(x)|, x \in A\})$$

$\|\cdot\|_\infty$ est une norme

Question 8/14

Conservation de la continuité par passage à la limite uniforme

Réponse 8/14

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est continue en a et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU}} u$
sur un voisinage de a , alors u est continue en a

Question 9/14

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS}} u$$

Caractérisation par ε

Réponse 9/14

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$$
$$\forall n \geq N, |u_n(x) - u(x)| \leq \varepsilon$$

Question 10/14

Polynôme trigonométrique réel

Réponse 10/14

$$\text{Vect}(\{\cos(nt), n \in \mathbb{N}\} \uplus \{\sin(nt), n \in \mathbb{N}^*\})$$

Question 11/14

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU}} u$$

Caractérisation par ε

Réponse 11/14

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, |u_n(x) - u(x)| \leq \varepsilon$$

Question 12/14

Propriétés conservées par convergence simple

Réponse 12/14

Paricité

T -périodicité

Monotonie

Caractère k -lipsichtzien

Question 13/14

Théorème de Weierstrass trigonométrique

Réponse 13/14

Toute fonction complexe (ou réelle), continue et 2π -périodique est limite uniforme sur \mathbb{R} d'une suite de polynômes trigonométriques complexes (ou réels)

Question 14/14

Théorème de Weirstrass

Réponse 14/14

Toute fonction continue sur un segment y est
limite uniforme d'une suite de fonctions
polynomiales