

# **Probabilités**

## ***Variables aléatoires***

## Question 1/54

$$L^1$$

## Réponse 1/54

Variables aléatoires réelles discrètes admettant  
une espérance finie

## Question 2/54

Variables décorrélées

## Réponse 2/54

$$\text{cov}(X, Y) = 0$$

## Question 3/54

Structure des variables aléatoires de  $\mathbb{R}^{\Omega}$

## Réponse 3/54

Sous-algèbre de  $\mathbb{R}^{\Omega}$

## Question 4/54

Inégalités de Markov



## Réponse 4/54

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq \lambda \mathbb{E}(X)) &\leq \frac{1}{\lambda} \\ \mathbb{P}(X \geq \varepsilon) &\leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon} \\ \mathbb{P}(X > \varepsilon) &\leq \frac{\mathbb{E}^\varepsilon(X)}{\varepsilon} \\ \mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) &\leq \frac{\mathbb{E}^\varepsilon(X^2)}{\varepsilon^2}\end{aligned}$$

## Question 5/54

Convergence en probabilités

## Réponse 5/54

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathbb{P}(|X_n - X| \leq \varepsilon)) = 0$$

## Question 6/54

Théorème d'or de Bernoulli

## Réponse 6/54

$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$  avec les  $X_i$  mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p$

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(|Z_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

## Question 7/54

$$\mathbb{E}(XY)$$

## Réponse 7/54

$$\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \text{ si } X \perp\!\!\!\perp Y$$

## Question 8/54

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev



## Réponse 8/54

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$
$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma(X)^2}{\varepsilon^2}$$

## Question 9/54

Loi binomiale négative

## Réponse 9/54

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$X \sim \mathcal{J}(r, p)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{rp}{p}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{rp}{p^2}$$

## Question 10/54

Loi hypergéométrique

## Réponse 10/54

$$X(\Omega) \subset \llbracket 1, n \rrbracket$$

$$X \sim \mathcal{H}(N, n, p)$$

$$\forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$\mathbb{E}(X) = np$$

$$\mathbb{V}(X) = np(1-p) \frac{N-n}{N-1}$$

## Question 11/54

$$\mathbb{E}(X)$$

## Réponse 11/54

$$\sum_{x \in X(\Omega)} (x \mathbb{P}(X = x)) = \sum_{\omega \in \Omega} (\mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega))$$

## Question 12/54

$$\mathbb{V}(\lambda X + \mu)$$



## Réponse 12/54

$$\lambda^2 \mathbb{V}(X)$$

## Question 13/54

$$\mathbb{P}_{f(X)}$$

## Réponse 13/54

$$\mathbb{P}_X \circ \widehat{f^{-1}}$$

## Question 14/54

Loi de Poisson

## Réponse 14/54

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

$$\mathbb{V}(X) = \lambda$$

## Question 15/54

Lemme des coalitions

## Réponse 15/54

Si  $(X_1, \dots, X_n)$  sont mutuellement indépendantes, alors  $f(X_1, \dots, X_m)$  et  $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$

## Question 16/54

Variable aléatoire discrète



## Réponse 16/54

$X(\Omega)$  est fini

## Question 17/54

Coefficient de corrélation

## Réponse 17/54

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

## Question 18/54

$$\text{Si } X : (\Omega, \mathcal{T}) \xrightarrow{\mathcal{T}_X} (E; \mathcal{T}')$$

## Réponse 18/54

$$\{X^{-1}(A), A \in \mathcal{T}'\}$$

## Question 19/54

Loi binomiale

## Réponse 19/54

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$$

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$\mathbb{E}(X) = np$$

$$\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$$

## Question 20/54

Matrice des variances-covariances



## Réponse 20/54

$$\underline{\mathbb{V}}(X_1, \dots, X_n) = (\text{cov}(X_i, X_j))_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$$

## Question 21/54

$$\sigma(X)$$

## Réponse 21/54

$$\sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

## Question 22/54

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n)$$

## Réponse 22/54

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (\mathbb{V}(X)_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\text{cov}(X_i, X_j)) \\ &= (1 \cdots 1) \underline{\mathbb{V}}(X_1, \cdots, X_n) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Question 23/54

Loi de Bernoulli

## Réponse 23/54

$$X(\Omega) = \{0, 1\}$$

$$X \sim \mathcal{B}(p)$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

$$\mathbb{E}(X) = p$$

$$\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$$

## Question 24/54

Cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz  
pour cov



## Réponse 24/54

Il existe  $(a, b) \neq (0, 0)$  tel que  $aX + bY = c$   
presque sûrement

## Question 25/54

$$\mathbb{P}(f(X) = x)$$

## Réponse 25/54

$$\sum_{y \in f^{-1}(x) \cap X(\Omega)} (\mathbb{P}(X = y))$$

## Question 26/54

Variable aléatoire réelle

## Réponse 26/54

Variable aléatoire à valeurs dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$

## Question 27/54

Loi géométrique

## Réponse 27/54

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$X \sim \mathcal{G}(n)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}$$

## Question 28/54

Loi de Pascal



## Réponse 28/54

$$X(\Omega) = \llbracket r, +\infty \llbracket$$

$$X \sim \mathcal{P}(r, p)$$

$$\forall k \in \llbracket r, +\infty \llbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{r q}{p^2}$$

## Question 29/54

Variable centrée réduite associée à  $X$

## Réponse 29/54

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

## Question 30/54

$$\mathbb{V}(X + Y)$$

Réponse 30/54

$$\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2 \operatorname{cov}(X, Y)$$

## Question 31/54

Moment d'ordre  $k$

Moment centré d'ordre  $k$

## Réponse 31/54

$$\mathbb{E}(X^k)$$
$$\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^k\right)$$

## Question 32/54

Inégalité de Cauchy-Schwarz pour  $\mathbb{E}$



## Réponse 32/54

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$$

## Question 33/54

Variables indépendantes

## Réponse 33/54

$$X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$$

$$\mathbb{P}(X \in A_1, Y \in A_2) = \mathbb{P}(X \in A_1)\mathbb{P}(Y \in A_2)$$

## Question 34/54

Fonction de répartition de  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

## Réponse 34/54

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

## Question 35/54

Variable réduite

Réponse 35/54

$$\mathbb{V}(X) = 1$$

## Question 36/54

Variable centrée



## Réponse 36/54

$$\mathbb{E}(X) = 0$$

## Question 37/54

$$\text{cov}(X, Y)$$

## Réponse 37/54

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) \\ = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

## Question 38/54

Loi conjointe de  $(X_1, \dots, X_n)$

## Réponse 38/54

$\mathbb{P}(X_1, \dots, X_n)$  définie sur  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$

## Question 39/54

$k$ -ième loi marginale de  $(X_1, \dots, X_n)$

## Réponse 39/54

Loi de  $X_k$

## Question 40/54

$$L^n$$



## Réponse 40/54

Variables aléatoires réelles discrètes admettant  
un moment d'ordre  $n$

## Question 41/54

Formule de polarisation

## Réponse 41/54

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{2}(\mathbb{V}(X + Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y))$$

## Question 42/54

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y)$$

## Réponse 42/54

$$\lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

## Question 43/54

Variable aléatoire

## Réponse 43/54

Application mesurable  $X : (\Omega, \mathcal{T}) \rightarrow (E, \mathcal{T}')$

Si  $\Omega' \in \mathcal{T}$  tel que  $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ , on peut définir  $X$   
sur  $\Omega'$

## Question 44/54

$$\mathbb{V}(X)$$



## Réponse 44/54

$$\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

## Question 45/54

Loi quasi-certaine

## Réponse 45/54

$X = c$  presque sûrement

$$\mathbb{P}(X = c) = 1, \mathbb{P}(X \neq c) = 0$$

$$\mathbb{E}(X) = c$$

$$\mathbb{V}(X) = 0$$

## Question 46/54

Application mesurable

## Réponse 46/54

Si  $(E, \mathcal{S})$  et  $(F, \mathcal{T})$  sont deux espaces mesurables et  $f: E \rightarrow F$   
 $\forall B \in \mathcal{T}, f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$

## Question 47/54

Formule de l'espérance totale

## Réponse 47/54

Si  $(A_i)$  est un système quasi-complet  
d'événements au plus dénombrable

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} (\mathbb{E}(X \mid A_i) \mathbb{P}(A_i))$$

## Question 48/54

Loi uniforme



## Réponse 48/54

$$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$$

$$X \sim \mathcal{U}(n)$$

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

## Question 49/54

Vecteur aléatoire réel

## Réponse 49/54

Vecteur aléatoire à valeurs dans  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$

## Question 50/54

Loi d'une variable aléatoire

## Réponse 50/54

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$$

## Question 51/54

Loi faible des grands nombres

## Réponse 51/54

$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$  avec les  $X_i$  mutuellement indépendantes suivant une même loi et d'espérance  $m$

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(|Z_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{n\varepsilon^2}$$

## Question 52/54

Espérance conditionnelle



## Réponse 52/54

$$\mathbb{E}(X \mid A) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x \mathbb{P}(X = x \mid A))$$

## Question 53/54

Formule de Koenig-Huyghens

## Réponse 53/54

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

## Question 54/54

Inégalité de Cauchy-Schwarz pour cov

## Réponse 54/54

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$$