Calcul différentiel
Sous-variétés

Question 1/12

Définition par redressement

Réponse 1/12

Une partie non vide M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ de dimension p si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $f : U \to V$ tels que

$$f(M \cap U) = V \cap \left(\mathbb{R}^d \times \{0\}\right)$$

Question 2/12

Carte pour une variété topologique

Réponse 2/12

(U, φ) avec U un ouvert de X et
$\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme

Question 3/12

Espace tangent pour une sous-variété définie par un graphe

Réponse 3/12

$$T_xM = \left\{(h, \mathrm{d}\varphi_x(h)), h \in \mathbb{R}^d\right\}$$

Pour $M = \{(x, \varphi(x)), x \in U\}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-d}$

Question 4/12

Espace tangent pour une sous-variété définie par paramétrisation

Réponse 4/12

$$T_x M = \mathrm{im}(\mathrm{d}h_0)$$

Question 5/12

Définition par les graphes

Réponse 5/12

Une partie non vide M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ de dimension p si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ tel que $M \cap U$ soit le graphe d'une application f de classe $\mathcal{C}^k$ d'un ouvert de $\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^{n-d} \cong \{0\} \times \mathbb{R}^{n-d}$

Question 6/12

Définition par submersion

Réponse 6/12

Une partie non vide M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ de dimension p si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ et une submersion[1] $g : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ de classe $\mathcal{C}^k$ tels que $M \cap U = g^{-1}(0_{\mathbb{R}^{n-p}})$
Il suffit d'avoir la surjectivité sur M car elle se conserve localement

1. $\mathrm{d}g_x$ est surjective pour tout x

Question 7/12

$$T_x M$$

Réponse 7/12

$$\{v \in \mathbb{R}^n, \exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M, \gamma(0)=x \wedge \gamma'(0)=v\}$$

C'est un espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $\dim(M)$

Question 8/12

Fibré tangent

Réponse 8/12

$$\{(x, v), x \in M, v \in T_xM\}$$

Question 9/12

X est une variété topologique

Réponse 9/12

X est un espace séparé tel que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert de x homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Question 10/12

Atlas pour une variété topologique

Réponse 10/12

$$\text{Famille } ((U_i, \varphi_i))_{i \in I} \text{ tel que } X = \bigcup_{i \in I} (U_i)$$

Question 11/12

Définition par paramétrisation

Réponse 11/12

Une partie non vide M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ de dimension p si pour tout $h \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert Ω de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et une appication $h\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ qui soit une immersion[1] et un homéomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ sur $M \cap U$

1. $\mathrm{d}h_x$ est injective

Question 12/12

Espace tangent pour une sous-variété définie par submersion

Réponse 12/12

$$T_xM = \bigcap_{i=1}^{n-d} (\ker(\mathrm{d}(g_i)_x))$$