Analyse
Développements limités

Question 1/24

Développement limité au sens fort (définition)

$$P_n \in \mathbb{R}[X]$$

Réponse 1/24

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} P_n(x) + O\Big((x - x_0)^{n+1}\Big)$$

Question 2/24

Développement limité de $\mathrm{ch}(x)$

Réponse 2/24

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x^{2k}}{(2k)!} \right) + o(x^n)$$

Question 3/24

Développement limité de $\arctan(x)$

Réponse 3/24

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right)\right)$$

Question 4/24

Développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$

Réponse 4/24

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k x^k\right) + o(x^n)$$

Question 5/24

Développement limité de $\tan(x)$

Réponse 5/24

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^6\right)$$

Question 6/24

Développement limité de $\cos(x)$

Réponse 6/24

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right) + o\left(x^{2n+1}\right)$$

Question 7/24

Développement limité (définition)

$$P_n \in \mathbb{R}[X]$$

Réponse 7/24

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} P_n(x) + o\left((x - x_0)^n\right)$$

Question 8/24

Reste de Taylor à l'ordre n

Réponse 8/24

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \right)$$

Question 9/24

Formule de Taylor-Young à l'ordre n au point x_0

Réponse 9/24

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \right) + o\big((x - x_0)^n\big)$$

Question 10/24

Développement limité de $\sin(x)$

Réponse 10/24

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) + o\left(x^{2n+2}\right)$$

Question 11/24

Restriction d'un développement limité
$T_{m,x_0}(P)$ est la troncature à l'ordre m au
voisinage de x_0 du polynôme P

Réponse 11/24

$$
\begin{aligned}
& f(x) \underset{x \to x_0}{=} P(x) + o((x - x_0)^n) \\
\Rightarrow\ & f(x) \underset{x \to x_0}{=} (T_{m,x_0}(P))(x) + o((x - x_0)^m)
\end{aligned}
$$

Question 12/24

Développement limité de $\dfrac{1}{1-x}$

Réponse 12/24

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(x^k\right) + o(x^n)$$

Question 13/24

$$\text{Développement limité de } \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

Réponse 13/24

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o\left(x^3\right)$$

Question 14/24

Développement limité de $\exp(x)$

Réponse 14/24

$$\mathrm{e}^{x} \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x^k}{k!} \right) + o(x^n)$$

Question 15/24

Si f est une fonction dérivable au voisinage de 0 avec $f'(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + o\left(x^{n-1}\right)$

Réponse 15/24

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + a_0 x + \cdots + \frac{an-1}{n} x^n + o(x^n)$$

Question 16/24

Développement de Taylor de f

Réponse 16/24

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \right)$$

Question 17/24

Développement limité de $(1+x)^\alpha$

Réponse 17/24

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)}{k!} x^k \right) + o(x^n)$$

Question 18/24

Développement asymptotique de f sur une échelle de comparaison $\mathcal{E}$ au voisinage de x_0 à la précision $\varphi \in \mathcal{E}$

Réponse 18/24

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{\substack{\psi\in\mathcal{E} \\ \varphi=o(\psi)\vee\varphi=\psi}} \Big(a_\psi\psi(x) + o(\varphi(x))\Big)$$

Question 19/24

Développement limité de $\mathrm{sh}(x)$

Réponse 19/24

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) + o\left(x^{2n+2}\right)$$

Question 20/24

Développement limité de $\sqrt{1+x}$

Réponse 20/24

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o\left(x^3\right)$$

Question 21/24

Développement limité de $\mathrm{th}(x)$

Réponse 21/24

$$\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^6\right)$$

Question 22/24

Développement limité de $\ln(1 + x)$

Réponse 22/24

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right) + o(x^n)$$

Question 23/24

Développement limités d'un inverse

Réponse 23/24

Identifier les coefficients avec $x = \left(f^{-1} \circ f\right)(x) + o(x^n)$ avec le développement limité de f

Question 24/24

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0 avec

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + a_0 x + \cdots + an - 1x^n + o(x^n)$$

Réponse 24/24

$$f'(x) \underset{x \to 0}{=} a_1 + \cdots + n a_n x^{n-1} + o\left(x^{n-1}\right)$$