

# **Algèbre 2**

## ***Déterminants***

## Question 1/25

Déterminant d'un endomorphisme

## Réponse 1/25

$$\varphi_u = \det(u)\varphi$$

## Question 2/25

Comatrice de  $M$

## Réponse 2/25

$$\begin{aligned} & \text{Com}(M) \\ = & (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(M)_{(k,\ell) \in \llbracket 1,n \rrbracket \setminus \{i\} \times \llbracket 1,n \rrbracket \setminus \{j\}} \end{aligned}$$

## Question 3/25

$\varphi$  est alternée

## Réponse 3/25

$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$  s'il existe  $i \neq j$  tel que  
 $x_i = x_j$

## Question 4/25

$\det_{\mathcal{B}}$

Expression avec  $\mathcal{B}'$



## Réponse 4/25

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}$$

## Question 5/25

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$$

## Réponse 5/25

$$\ker(\det) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}$$

## Question 6/25

Description du déterminant par les coordonnées

$$[x_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

## Réponse 6/25

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left( \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \right) \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \left( \varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)} \right)\end{aligned}$$

## Question 7/25

Déterminant de Vandermonde

$$V(x_1, \dots, x_n)$$

## Réponse 7/25

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} (x_j - x_i)$$

## Question 8/25

Application multilinéaire



## Réponse 8/25

$$\begin{aligned} & \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i + x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &= \lambda \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &+ \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

## Question 9/25

$$\det(A)$$

## Réponse 9/25

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left( \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \right) \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \left( \varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)} \right) \end{aligned}$$

## Question 10/25

Caractérisation du déterminant par l'image  
d'une base

## Réponse 10/25

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$$

## Question 11/25

Développement suivant une colonne  
Développement suivant une ligne

## Réponse 11/25

$$\det(M) = \sum_{i=1}^n \left( (-1)^{i+j} m_{i,j} \Delta_{i,j}(M) \right)$$

$$\det(M) = \sum_{j=1}^n \left( (-1)^{i+j} m_{i,j} \Delta_{i,j}(M) \right)$$

## Question 12/25

$$\begin{vmatrix} \boxed{A_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{A_n} \end{vmatrix}$$



## Réponse 12/25

$$\prod_{i=1}^n (\det(A_i))$$

## Question 13/25

Expression de l'inverse par la comatrice

## Réponse 13/25

$$M^{-1} = \frac{\text{Com}(M)^{\top}}{\det(M)}$$

## Question 14/25

Mineur de position  $(i, j)$  de  $M$

## Réponse 14/25

$$\Delta_{i,j}(M) = \det \left( (m_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \llbracket 1,n \rrbracket \setminus \{i\} \times \llbracket 1,n \rrbracket \setminus \{j\}} \right)$$

## Question 15/25

Cofacteur de position  $(i, j)$  de  $M$

## Réponse 15/25

$$(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(M)$$

## Question 16/25

$\varphi$  est antisymétrique



## Réponse 16/25

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon(\sigma) \varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

## Question 17/25

$$u \in \mathcal{L}(E)$$
$$\det(\lambda u)$$

## Réponse 17/25

$$\lambda^{\dim(E)} \det(u)$$

## Question 18/25

Ensemble des formes  $n$ -linéaires alternées

## Réponse 18/25

$$\text{Vect}(\det_{\mathcal{B}})$$

## Question 19/25

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix}$$

## Réponse 19/25

$$\prod_{i=1}^n (\lambda_i)$$

## Question 20/25

$$\mathrm{SL}(E)$$



## Réponse 20/25

$$\ker(\det) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \det(u) = 1\}$$

## Question 21/25

$$\det(u \circ v)$$

## Réponse 21/25

$$\det(u) \det(v)$$

## Question 22/25

Valeurs des  $x_k$  pour  $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B$

$$A = (A_1 \mid \cdots \mid A_n)$$

## Réponse 22/25

$$x_k = \frac{\det \left( (A_1 \mid \cdots \mid A_{k-1} \mid B \mid A_{k+1} \mid \cdots \mid A_n) \right)}{\det(A)}$$

## Question 23/25

Forme  $n$ -linéaire

## Réponse 23/25

Application linéaire à valeurs dans  $\mathbb{K}$

## Question 24/25

Déterminant d'une famille de vecteurs  
 $(x_1, \dots, x_n)$  par rapport à  $\mathcal{B}$



## Réponse 24/25

Si  $\det_{\mathcal{B}}$  est l'unique forme  $n$ -linéaire alternée  
telle que  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$   
 $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$

## Question 25/25

Lien forme antisymétrique – forme alternée

## Réponse 25/25

Toute forme  $n$ -linéaire alternée est  
antisymétrique

Si  $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ , toute forme antisymétrique est  
alternée