Algèbre 1
Formes quadratiques

Question 1/35

Groupe orthogonal

Réponse 1/35

$$\mathrm{O}(E) = \Big\{u \in \mathrm{GL}(E), \forall (x, y) \in E^2,\\ b_q(u(x), u(y)) = b_q(x, y)\Big\}$$

Question 2/35

(E, q) espace quadratique, φ forme polaire associée à q

$A^{\perp}$

Réponse 2/35

$$\ell_\varphi(A)^\perp$$

Question 3/35

A et A' sont congruentes

Réponse 3/35

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{k}),\ A = {}^tPAP$$

Question 4/35

Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$

Réponse 4/35

Si q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}$ alors il existe $(r,s)\in\mathbb{N}^2$ et $(\mu_1,\cdots,\mu_{r+s})\in(E^*)^{r+s}$

$$\text{tel que } q=\sum_{i=1}^{r}\mu_i^2-\sum_{i=r+1}^{r+s}\mu_i^2$$

Deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}$ sont isomorphes si et seulement si elles ont la même signature (couple (r,s))

Question 5/35

$u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique, E $\mathbb{R}$-ev

Réponse 5/35

Φ_u est une forme bilinéaire symétrique

De manière équvalente, $u^* = u$

Question 6/35

q est une forme quadratique

Réponse 6/35

Il existe $\varphi \in \mathrm{Bil}(E, E)$ tel que $q(x) = \varphi(x, x)$

Question 7/35

$$\mathrm{im}(u^*)$$

Réponse 7/35

$$\ker(u)^{\perp}$$

Question 8/35

Polynôme homogène associée à $q \in \mathrm{Q}(E)$

Réponse 8/35

$$\rho_q : \quad \mathbb{k}^n \longrightarrow \mathbb{k}$$
$$(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$$

ρ_q est homogène de degré 2 si et seulement si $q \in \mathrm{Q}(E)$

Question 9/35

$u \in \mathrm{S}(E)$ est positif (resp. défini positif), E $\mathbb{R}$-ev

Réponse 9/35

La forme quadratique q_u associée à Φ_u est positive (resp. définie positive)

Question 10/35

Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{C}$

Réponse 10/35

Si q est une forme quadratique sur $\mathbb{C}$ alors il existe $\left(\mu_1, \cdots, \mu_{\mathrm{rg}(q)}\right) \in (E^*)^{\mathrm{rg}(q)}$ tel que

$$q = \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(q)} \mu_i^2$$

Deux formes quadratiques sur $\mathbb{C}$ sont isomorphes si et seulement si elles ont le même rang

Question 11/35

Forme polaire associée à q

Réponse 11/35

$$\pi^{-1}(q) \text{ où } \pi : \begin{array}{rcl} \mathrm{Bil}(E,E) & \longrightarrow & \mathrm{Q}(E) \\ \varphi & \longmapsto & q_\varphi := \varphi(\cdot,\cdot) \end{array}$$

π est un isomorphisme

Question 12/35

Espace euclidien

Réponse 12/35

Espace quadratique (E, q) sur $\mathbb{R}$ de dimension

n et $q > 0$

$\|x\| = \sqrt{q(x)}$ est une norme sur E

Question 13/35

Théorème d'inertie de Sylvester

Réponse 13/35

Si (E, q) est un espace quadratique sur $\mathbb{R}$ et

$$q = \sum_{i=1}^{r} \mu_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} \mu_i^2 \text{ alors}$$

$$r = \max\Big(\Big\{\dim(F), F \text{ sev}, q_{|F} > 0\Big\}\Big),$$

$$s = \max\Big(\Big\{\dim(F), F \text{ sev}, q_{|F} < 0\Big\}\Big)$$

Question 14/35

Cône

Réponse 14/35

Partie d'un ev stable par multiplication scalaire

Question 15/35

Espace quadratique

Réponse 15/35

(E, q) avec q une forme quadratique sur E

Question 16/35

$$\ker\left(q_{|V}\right)$$

Réponse 16/35

$$V \cap V^{\perp}$$

Question 17/35

Racine carrée d'un endomorphisme symétrique

Réponse 17/35

Si $u \in \mathrm{S}^{++}(E)$, E $\mathbb{R}$-ev, il existe un unique $h \in \mathrm{S}^{++}(E)$ tel que $u = h^2$

De plus, $h \in \mathbb{R}[u]$

Question 18/35

Propriétés des valeurs propres de $u \in \mathrm{S}(E)$

Réponse 18/35

$$\mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}$$

Question 19/35

Matrice de $q \in \mathrm{Q}(E)$ dans une base $\mathcal{B}$ de E

Réponse 19/35

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(\pi^{-1}(q)\big) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{k})$$

Question 20/35

Décomposition polaire

Réponse 20/35

Si $g \in \mathrm{GL}(E)$, E $\mathbb{R}$-ev, il existe un unique $(u, s) \in \mathrm{O}(E) \times \mathrm{S}^{++}(E)$ tel que $g = us$

De plus, $u \in \mathbb{R}[g^* g]$

Question 21/35

CN entre V et $\mathcal{C}(q)$ pour avoir $E = V \oplus V^{\perp}$

Réponse 21/35

$$V \cap \mathcal{C}(q) = \{0\}$$

Question 22/35

q est définie positive (resp. définie négative)

(E, q) espace quadratique sur $\mathbb{R}$

Réponse 22/35

$$\forall x \neq 0,\ q(x) > 0 \text{ (resp. } < 0)$$

Dans ce cas, $\mathcal{C}(q) = \{0\}$ et pour tout sev V, $q_{|V}$ est non dégénérée

Question 23/35

Poupriétés de q exprimée dans la base duale de $(e_1, \cdots, e_n)$ base orthogonale de E

Réponse 23/35

$$q = \sum_{i=1}^{n} q(e_i)\mu_i^2, \ (\mu_i) \text{ base duale de } (e_i)$$
$$\text{Réciproquement, si } q = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i^2 \text{ alors la base antéduale de } (\mu_i) \text{ est } (e_i) \text{ et } q(e_i) = a_i$$
$$\mathrm{rg}(q) = |\{i \in [\![1,n]\!], a_i \neq 0\}|$$
$$\mathrm{discr}(q) = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists i \in [\![1,n]\!], a_i = 0 \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i \bmod \left(\mathbb{k}^\times\right)^2 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$\ker(q) = \bigcap_{\substack{i\in[\![1,n]\!] \\ a_i\neq 0}} \ker(\mu_i)$$

Question 24/35

$$\operatorname{discr}(q)$$

Réponse 24/35

$$\begin{cases} 0 & \text{si } q \text{ dégénérée} \\ \det_{\mathcal{B}}(q) \bmod \left(\mathbb{k}^{\times}\right)^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Question 25/35

Cône isotrope de q

Réponse 25/35

$$\mathcal{C}(q) = \{x \in E, q(x) = 0\}$$
$$\ker(q) \subset \mathcal{C}(q)$$

Question 26/35

Forme bilinéaire associée à $u \in \mathcal{L}(E)$

Réponse 26/35

$$\begin{aligned} \Phi_u : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle u(x), y \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathrm{Bil}(E) \\ u &\longmapsto \Phi_u \end{aligned} \quad \text{est un isomorphisme}$$

Question 27/35

Méthode de Gauss

Réponse 27/35

Si $f \in \Bbbk[X_1, \cdots, X_n]_2$[1] et $(X_i := \mu_i)$ est une base de E^* alors il existe un algorithme qui permet de trouver $(L_1, \cdots, L_n) \in (\Bbbk[X_1, \cdots, X_n]_1)^n$ et $(a_1, \cdots, a_n) \in \Bbbk^n$ tels que $f = \sum_{i=1}^{n} a_i L_i^2$

1. polynômes homogènes de degré 2

Question 28/35

Factorisation d'une forme quadratique

Réponse 28/35

Si q est une forme quadratique sur E alors il existe une unique forme quadratique

$$q' : E/\ker(q) \to \mathbb{k}$$

q' est non dégénérée

Question 29/35

CNS pour que $(q, q') \in \mathrm{Q}(E)^2$ soient isomorphes

Réponse 29/35

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q') \text{ sont congruentes}$$

Question 30/35

(E, q) et (E', q') sont isomorphes

Réponse 30/35

Il existe $u : E \to E'$ un isomorphisme tel que $u(E) = E'$ et $q' = q \circ u$

Question 31/35

q est positive (resp. négative)

(E, q) espace quadratique sur $\mathbb{R}$

Réponse 31/35

$$\forall x \in E,\ q(x) \geqslant 0 \ (\text{resp. } \leqslant 0)$$

Question 32/35

$$u^*$$

Réponse 32/35

Si (E, q) est un espace quadratique non dégénéré et φ la forme polaire associée à q et $u \in \mathcal{L}(E)$ alors il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\varphi(u(x), y) = \varphi(x, u^*(y))$

Question 33/35

Théorème spectral (ou théorème de structure)

Réponse 33/35

Si $u \in \mathrm{S}(E)$, E $\mathbb{R}$-ev, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale

Question 34/35

$$\ker(u^*)$$

Réponse 34/35

$$\mathrm{im}(u)^{\perp}$$

Question 35/35

$$\ker(q)$$

Réponse 35/35

$$E^{\perp} = \ker(\ell_{\varphi})$$