Algèbre 2 Déterminants

Question 1/18

Déterminant d'une famille de vecteurs (x_1, \dots, x_n) par rapport à \mathcal{B}

Réponse 1/18

Si $\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme n-linéaire alternée telle que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)$

Question 2/18

arphi est alternée

Réponse 2/18

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$$
 s'il existe $i \neq j$ tel que $x_i = x_j$

Question 3/18

Description du déterminant par les coordonnées

$$[x_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

Réponse 3/18

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1), 1} \dots a_{\sigma(n), n})$$
$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\varepsilon(\tau) a_{1, \tau(1)} \dots a_{n, \tau(n)})$$

 $\tau \in \mathfrak{S}_n$

Question 4/18

Caractérisation du déterminant par l'image d'une base

Réponse 4/18

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$$

Question 5/18

$$\det(u \circ v)$$

Réponse 5/18

$$\det(u)\det(v)$$

Question 6/18

 $\det(A)$

Réponse 6/18

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n})$$

$$= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} (\varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)})$$

Question 7/18

 φ est antisymétrique

Réponse 7/18

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$$

Question 8/18

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$$

Réponse 8/18

$$\ker(\det) = \{ A \in \operatorname{GL}_{[n]}[n] | \det(A) = 1 \}$$

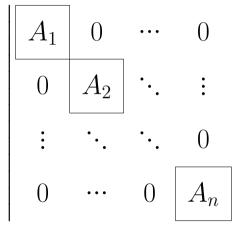
Question 9/18

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix}$$

Réponse 9/18

$$\prod_{i=1}^{n} (\lambda_i)$$

Question 10/18



Réponse 10/18

$$\prod_{i=1}^{n} (\det(A_i))$$

Question 11/18

Forme n-linéaire

Réponse 11/18

Application linéaire à valeurs dans K

Question 12/18

Déterminant d'un endomorphisme

Réponse 12/18

$$\varphi_u = \det(u)\varphi$$

Question 13/18

Lien forme antisymétrique – forme alternée

Réponse 13/18

Toute forme n-linéaire alternée est antisymétrique Si $\operatorname{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, toute forme antisymétrique est alternée

Question 14/18

 $\det_{\mathcal{B}}$ Expression avec \mathcal{B}'

Réponse 14/18

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\det_{\mathcal{B}'}$$

Question 15/18

Ensemble des formes n-linéaires alternées

Réponse 15/18

 $Vect(det_{\mathcal{B}})$

Question 16/18

Application multilinéaire

Réponse 16/18

$$\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i + x_i', x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$$= \lambda \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$$+ \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Question 17/18

SL(E)

Réponse 17/18

$$\ker(\det) = \{ u \in \mathcal{L}(E) \mid \det(u) = 1 \}$$

Question 18/18

$$u \in \mathcal{L}(E)$$
$$\det(\lambda u)$$

Réponse 18/18

$$\lambda^{\dim(E)}\det(u)$$