

# Algèbre 1

## *Structures algébriques*

## Question 1/21

Associativité

## Réponse 1/21

$\star$  est associative si et seulement si

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

## Question 2/21

Commutativité généralisée

## Réponse 2/21

Si  $\star$  est une loi commutative et associative sur

$$E, (x_1, \dots, x_n) \in E^n \text{ et } \sigma \in \mathfrak{S}_n$$

$$x_1 \star \dots \star x_n = x_{\sigma(1)} \star \dots \star x_{\sigma(n)}$$

## Question 3/21

Soit  $x \in E$

$x$  est un élément absorbant pour  $\star$

## Réponse 3/21

$$\forall y \in E, \ x \star y = x = y \star x$$

## Question 4/21

Distributivité généralisée

$$\prod_{i=1}^n \left( \sum_{j \in J_i} (x_{i,j}) \right)$$



## Réponse 4/21

$$\sum_{(j_1, \dots, j_n) \in J_1 \times \dots \times J_n} \left( \prod_{i=1}^n (x_{i, j_i}) \right)$$

## Question 5/21

Soient  $E$  muni d'une structure de  $X$  et  $F \subset E$   
 $F$  est un sous- $X$  de  $E$

## Réponse 5/21

$F$  est stable par les lois de  $E$

$F$  contient les neutres imposés par  $E$

Les lois induites sur  $F$  par les lois de  $E$   
vérifient les axiomes de la structure de  $X$

## Question 6/21

Groupe

## Réponse 6/21

Muni d'une loi d'une composition interne, de  
l'associativité, d'un élément neutre et de  
symétriques

Un groupe est un monoïde

## Question 7/21

Commutativité

## Réponse 7/21

$\star$  est commutative si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x \star y = y \star x$$

## Question 8/21

Automorphisme de  $X$



## Réponse 8/21

Endomorphisme et isomorphisme de  $X$

## Question 9/21

Soit  $e \in E$

$e$  est un élément neutre pour la loi  $\star$

## Réponse 9/21

$$\forall x \in E, \quad e \star x = x = x \star e$$

## Question 10/21

Magma

## Réponse 10/21

Muni d'une loi de composition interne

## Question 11/21

Endomorphisme de  $X$

## Réponse 11/21

Homomorphisme de  $X$  de  $E$  dans lui-même  
(muni des mêmes lois)

## Question 12/21

Soient  $e \in E$  un élément neutre pour la loi  $\star$  et

$$x \in E$$

$y$  est un symétrique de  $x$  pour la loi  $\star$



## Réponse 12/21

$$x \star y = e = y \star x$$

## Question 13/21

Soient  $E$  muni d'une loi  $\star$ ,  $F \subset E$   
 $F$  est stable par  $\star$

## Réponse 13/21

$$\forall (x, y) \in F^2, x \star y \in F$$

La loi de  $E$  se restreint en une loi  $\star_F$  appelée  
loi induite sur  $F$  par  $\star$

## Question 14/21

Symétrique de  $x \star y$

## Réponse 14/21

$$y^s \star x^s$$

## Question 15/21

Si  $\star$  est une loi associative sur  $E$  et  
 $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$

## Réponse 15/21

$x_1 \star \cdots \star x_n$  ne dépend pas du parenthésage  
admissible

## Question 16/21

Associativité externe

$E$  est muni d'une loi de composition externe  $\diamond$   
sur  $\mathbb{K}$ , muni d'une loi de composition interne  $\star$



## Réponse 16/21

$$\forall (\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K}^2 \times E, (\lambda \star \mu) \diamond x = \lambda \diamond (\mu \diamond x)$$

## Question 17/21

Distributivité

## Réponse 17/21

La loi  $\star$  est distributive à gauche sur  $\diamond$  si et seulement si

$$\forall (x, y, z) \in E^3, x \star (y \diamond z) = (x \star y) \diamond (x \star z)$$

La loi  $\star$  est distributive à droite sur  $\diamond$  si et seulement si

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (y \diamond z) \star x = (y \star x) \diamond (z \star x)$$

La loi  $\star$  est distributive sur  $\diamond$  si et seulement si elle est distributive à gauche et à droite

## Question 18/21

Élément régulier ou simplifiable

## Réponse 18/21

$x$  est régulier à gauche si et seulement si

$$\forall (y, z) \in E^2, x \star y = x \star z \Rightarrow y = z$$

$x$  est régulier à droite si et seulement si

$$\forall (y, z) \in E^2, y \star x = z \star x \Rightarrow y = z$$

$x$  est régulier si et seulement s'il est régulier à gauche et à droite

Si  $x$  admet un symétrique, alors il est régulier

## Question 19/21

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles munis d'une structure de  $X$ , munis respectivement des lois de composition internes  $\left(\underset{1}{\star}, \dots, \underset{n}{\star}\right)$  et  $\left(\underset{1}{\diamond}, \dots, \underset{n}{\diamond}\right)$ , et externes  $\left(\underset{1}{\square}, \dots, \underset{m}{\square}\right)$  et  $\left(\underset{1}{\circ}, \dots, \underset{m}{\circ}\right)$  sur  $K_1, \dots, K_m$

$f: E \rightarrow F$  est un homomorphisme

## Réponse 19/21

$f$  respecte les lois interne : soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\forall (x, y) \in E^2, f\left(x \underset{k}{\star} y\right) = f(x) \underset{k}{\diamond} f(y)$$

$f$  respecte les lois extenres : soit  $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$

$$\forall (\lambda, x) \in K_k \times E, f\left(\lambda \underset{k}{\square} y\right) = \lambda \underset{k}{\circ} f(x)$$

$f$  est compatible avec le neutre (si le neutre  $e_i$  pour la loi  $\underset{i}{\star}$  est imposé dans les axiomes, donc

le neutre  $e'_i$  existe pour la loi  $\underset{i}{\diamond}$ ) :  $f(e_i) = e'_i$

## Question 20/21

Monoïde



## Réponse 20/21

Muni d'une loi d'une composition interne, de  
l'associativité et d'un élément neutre

Un monoïde est un magma

## Question 21/21

Isomorphisme de  $X$

## Réponse 21/21

Homomorphisme de  $X$  bijectif