

Algèbre 2

Déterminants

Question 1/18

Déterminant d'une famille de vecteurs
 (x_1, \dots, x_n) par rapport à \mathcal{B}

Réponse 1/18

Si $\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme n -linéaire alternée
telle que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$
 $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$

Question 2/18

φ est alternée

Réponse 2/18

$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ s'il existe $i \neq j$ tel que
 $x_i = x_j$

Question 3/18

Description du déterminant par les coordonnées

$$[x_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

Réponse 3/18

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \right) \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)} \right)\end{aligned}$$

Question 4/18

Caractérisation du déterminant par l'image
d'une base

Réponse 4/18

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$$

Question 5/18

$$\det(u \circ v)$$

Réponse 5/18

$$\det(u) \det(v)$$

Question 6/18

$$\det(A)$$

Réponse 6/18

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \right) \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)} \right) \end{aligned}$$

Question 7/18

φ est antisymétrique

Réponse 7/18

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon(\sigma) \varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

Question 8/18

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$$

Réponse 8/18

$$\ker(\det) = \{ A \in \mathrm{GL}_[(n)]\mathbb{K} \mid \det(A) = 1 \}$$

Question 9/18

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix}$$

Réponse 9/18

$$\prod_{i=1}^n (\lambda_i)$$

Question 10/18

$$\begin{vmatrix} \boxed{A_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{A_n} \end{vmatrix}$$

Réponse 10/18

$$\prod_{i=1}^n (\det(A_i))$$

Question 11/18

Forme n -linéaire

Réponse 11/18

Application linéaire à valeurs dans \mathbb{K}

Question 12/18

Déterminant d'un endomorphisme

Réponse 12/18

$$\varphi_u = \det(u)\varphi$$

Question 13/18

Lien forme antisymétrique – forme alternée

Réponse 13/18

Toute forme n -linéaire alternée est
antisymétrique

Si $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, toute forme antisymétrique est
alternée

Question 14/18

$\det_{\mathcal{B}}$

Expression avec \mathcal{B}'

Réponse 14/18

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}$$

Question 15/18

Ensemble des formes n -linéaires alternées

Réponse 15/18

$$\text{Vect}(\det_{\mathcal{B}})$$

Question 16/18

Application multilinéaire

Réponse 16/18

$$\begin{aligned} & \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i + x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &= \lambda \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &+ \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Question 17/18

$$\mathrm{SL}(E)$$

Réponse 17/18

$$\ker(\det) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \det(u) = 1\}$$

Question 18/18

$$u \in \mathcal{L}(E)$$
$$\det(\lambda u)$$

Réponse 18/18

$$\lambda^{\dim(E)} \det(u)$$