Algèbre linéaire & dimension finie

Lemme : Lemme de décomposition des noyaux

Si E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P \wedge Q = 1$, alors $\ker(PQ(u)) = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u))$.

Preuve : Lemme de décomposition des noyaux

$P \wedge Q = 1$. Donc, il existe $(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $PU + QV = 1$.

Montrons l'égalité :
Soit $x \in \ker(PQ(u))$.
$x = (PU + QV)(u)(x)$.
$(Q(u) \circ (PU)(u))(x) = (U(u) \circ (PQ)(u))(x) = 0$. Donc, $(PU)(u)(x) \in \ker(Q(u))$.
De même, $(QV)(u)(x) \in \ker(P(u))$.
Donc, $\ker((PQ)(u)) \subset \ker(P(u)) + \ker(Q(u))$.
Réciproquement, $\ker(P(u)) \subset \ker((PQ)(u))$ et $\ker(Q(u)) \subset \ker((PQ)(u))$.
Donc, $\ker(P(u)) + \ker(Q(u)) \subset \ker((PQ)(u))$.

Montrons que la somme est directe :
Soit $x \in \ker(P(u)) \cap \ker(Q(u))$.
$x = (P(u) \circ U(u) + Q(u) \circ V(u))(x) = U(u)(0) + V(u)(0) = 0$.

Donc, $\ker((PQ)(u)) = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u))$.

Théorème : Théorème des noyaux itérés

Si E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\left(\dim\left(\ker\left(u^{k+1}\right)\right) - \dim\left(\ker\left(u^k\right)\right)\right)$ est décroissante.

Preuve : Théorème des noyaux itérés

Montrons que $\operatorname{rg}\left(u^k\right) - \operatorname{rg}\left(u^{k+1}\right) = \dim\left(\ker(u) \cap \operatorname{im}\left(u^k\right)\right)$ *:*
Soit $v = u_{|\operatorname{im}\left(u^k\right)}$. $\operatorname{im}(v) = \operatorname{im}\left(u^{k+1}\right)$.
Ainsi, $\ker(v) = \left\{x \in \operatorname{im}\left(u^k\right) \mid v(x) = u(x) = 0\right\} = \operatorname{im}\left(u^k\right) \cap \ker(u)$.
Donc,

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}\left(u^k\right) - \operatorname{rg}\left(u^{k+1}\right) &= \operatorname{rg}\left(u^k\right) - \dim\left(u\left(\operatorname{im}\left(u^k\right)\right)\right)\\ &= \dim(\ker(v))\\ &= \dim\left(\operatorname{im}\left(u^k\right) \cap \ker(u)\right)\end{aligned}$$

Soit $d_k = \dim\left(\ker\left(u^{k+1}\right)\right) - \dim\left(\ker\left(u^k\right)\right)$.
On a donc, $d_k = \operatorname{rg}\left(u^k\right) - \operatorname{rg}\left(u^{k+1}\right) = \dim\left(\operatorname{im}\left(u^k\right) \cap \ker(u)\right)$.
Comme $\operatorname{im}\left(u^{k+1}\right) \subset \operatorname{im}\left(u^k\right)$, on a donc que $\operatorname{im}\left(u^{k+1}\right) \cap \ker(u) \subset \operatorname{im}\left(u^k\right) \cap \ker(u)$.
Donc, $\dim\left(\ker\left(u^{k+2}\right)\right) - \dim\left(\ker\left(u^{k+1}\right)\right) \leqslant \dim\left(\ker\left(u^{k+1}\right)\right) - \dim\left(\ker\left(u^k\right)\right)$.

Propriété : Caratérisation de la trace

Si φ est une forme linéaire non nulle définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, vérifiant pour tout A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'équation $\varphi(AB) = \varphi(BA)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{tr}$.

Preuve : Caratérisation de la trace

$(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{tr}(E_{i,j}) = \delta_{i,j}$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. $\varphi(E_{i,j}) = \varphi(E_{i,1}E_{1,j}) = \varphi(E_{1,j}E_{i,1}) = \varphi(0) = 0$.
De plus, $\varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{i,k}E_{k,i}) = \varphi(E_{k,i}E_{i,k}) = \varphi(E_{k,k})$.
Donc, les $\varphi(E_{i,i})$ sont tous égaux de valeur $\lambda \neq 0$.
Donc, φ et $\lambda \cdot \mathrm{tr}$ coïncident sur une base.
Donc, ils sont égaux.

Propriété : Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\begin{array}{rl} f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto \mathrm{tr}(AX) \end{array}$, alors $\begin{array}{rl} \varPhi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \overset{\cong}{\to} \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* \\ A & \mapsto f_A \end{array}$ est un isomorphisme, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ étant le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve : Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Si $(A, B, \lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \times \mathbb{K}$, alors

$$\begin{aligned} \varPhi(A+\lambda B)(X) &= f_{A+\lambda B}(X) \\ &= \mathrm{tr}((A+\lambda B)X) \\ &= \mathrm{tr}(AX) + \lambda\,\mathrm{tr}(BX) \\ &= f_A(X) + \lambda f_B(X) \\ &= (\varPhi(A) + \lambda\varPhi(B))(X) \end{aligned}$$

Donc, $\varPhi(A+\lambda B) = \varPhi(A) + \lambda\varPhi(B)$.
De plus, $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*)$. Il suffit donc d'étudier l'injectivité de $\varPhi$.
Soit $A \in \ker(\varPhi)$.
$f_A = 0$ donc, pour tout X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(AX) = 0$.
Or, A est équivalent à $I_{n,n,r}$ où $r = \mathrm{rg}(A)$.
Donc, il existe $(P,Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PI_{n,n,r}Q$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $r \neq 0$. En posant $X = Q^{-1}P^{-1}$, on a $\mathrm{tr}(PI_{n,n,r}QX) = \mathrm{tr}(I_{n,n,r}(QXP)) = \mathrm{tr}(I_{n,n,r}) = r \neq 0$, ce qui contredit $f_A = 0$.
Donc, $\mathrm{rg}(A) = 0$.
Donc, $\varPhi$ est injective, donc bijective.

Remarque : Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On a donc que tout $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ est donc de la forme $X \mapsto \mathrm{tr}(AX) = f_A$.
Ainsi, pour tout hyperplan H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $H = \ker(f_A)$.