Algèbre 1
Structures algébriques

Question 1/90

Théorème de Lagrange pour l'ordre des groupes

Réponse 1/90

Si G est un groupe fini et H un sous-groupe de G

$$|H| \mid |G|$$

Question 2/90

Associativité

Réponse 2/90

$\star$ est associative si et seulement si$\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$

Question 3/90

Distributivité

Réponse 3/90

La loi $\star$ est distributive à gauche sur $\diamond$ si et seulement si $\forall(x, y, z) \in E^3,\ x \star (y \diamond z) = (x \star y) \diamond (x \star z)$

La loi $\star$ est distributive à droite sur $\diamond$ si et seulement si $\forall(x, y, z) \in E^3,\ (y \diamond z) \star x = (y \star x) \diamond (z \star x)$

La loi $\star$ est distributive sur $\diamond$ si et seulement si elle est distributive à gauche et à droite

Description par le bas du sous-groupe engendré par une partie

Réponse 4/90

$$\langle X \rangle = \{x_1 \cdots x_n,\ (x_1, \cdots, x_n) \in X^n\}$$
$$\cup \left\{x^{-1},\ x \in X\right\}$$
e correspond au produit vide

Question 5/90

Si K est un corps de caractéristique finie p

Propriété pour les éléments de K

Réponse 5/90

$$\forall x \in K,\ px = 0_K$$

Question 6/90

Idéal principal

Réponse 6/90

Idéal engendré par un unique élément a de la forme $I = aA = \{ay,\ y \in A\}$

I est souvent noté (a)

Question 7/90

Propriété de la caractéristique d’un corps

Réponse 7/90

Si K est un corps de caractéristique p non nulle, p est premier

Question 8/90

Passage au quotient de la loi dans le cas abélien

Si G est un groupe abélien et H un sous-groupe de G

Réponse 8/90

$\equiv_g = \equiv_d$ et on note la relation $\equiv$

La loi induite corrrespond au produit des classes élément par élément

$$(ab)H = (aH) \cdot (bH)$$
$$= \{x \cdot y,\ x \in aH,\ y \in bH\}$$

La loi induite sur l'ensemble quotient munit celui-ci d'une structure de groupe abélien

Question 9/90

Si $(G, \star)$ est un groupe et $H \subset G$

Caractérisation(s) des sous-groupes

Réponse 9/90

$$H \neq \varnothing \quad \forall (x,y) \in H,\ x \star y \in H$$
$$\forall x \in H,\ x^s \in H$$
$$H \neq \varnothing \quad \forall (x,y) \in H^2,\ x \star y^s \in H$$
$$e_G \in H \quad \forall (x,y) \in H^2,\ x \star y^s \in H$$

Question 10/90

Soient $e \in E$ un élément neutre pour la loi $\star$ et

$x \in E$

y est un symétrique de x pour la loi $\star$

Réponse 10/90

$$x \star y = e = y \star x$$

Question 11/90

Ensemble formé par les classes à gauche et à droite

Réponse 11/90

$$\{Ha,\ a \in G\} \text{ est une partition de } G$$
$$\{aH,\ a \in G\} \text{ est une partition de } G$$

Question 12/90

Sous-groupe engendrée par une partie X

Réponse 12/90

$$\langle X \rangle$$

C'est le plus petit sous-groupe contenant X

Question 13/90

Si K est un corps de caractéristique nulle
Propriété pour les éléments de K

Réponse 13/90

$$\forall (n,x) \in \mathbb{Z} \times K$$
$$n \times x = 0_K \Leftrightarrow (x = 0_K \vee n = 0)$$

Question 14/90

Si K est un corps, d'élément neutre $1_K \neq 0_K$,
$H = \{n \times 1_K,\ n \in \mathbb{Z}\}$ le sous-groupe
monogène de $(K, +)$ engendré par 1_K
Caractéristique d'un corps

Réponse 14/90

Si H est infini, K est de caractéristique nulle
Si H est fini de cardinal p, K est de caractéristique p

Question 15/90

Fibres de f

Soit $x \in f^{-1}(\{y\})$

Réponse 15/90

$$f^{-1}(\{y\}) = x \times \ker(f)$$
$$= \{x \times z,\ z \in \ker(f)\} = \ker(f) \times x$$

Question 16/90

$$\text{Soient } \left(K, \underset{K}{+}, \underset{K}{\times}\right) \text{ et } \left(L, \underset{L}{+}, \underset{L}{\times}\right) \text{ deux corps}$$

$$f : K \to L \text{ est un homomorphisme de corps}$$

Réponse 16/90

f est un homomorphisme des anneaux de K et L

Question 17/90

Si $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif
Un sous-ensemble I de A est un sous-anneau idéal de A

Réponse 17/90

$$I \text{ est un sous-groupe de } (A, +)$$
$$\forall i \in I,\ \forall a \in A,\ ia \in I$$

Question 18/90

Résolution de $x^n = e$

Réponse 18/90

$\{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = e\}$ est de la forme $a\mathbb{Z}$
x est d'ordre fini si et seulement si $a \neq 0$ (on a donc $\mathrm{ord}(x) = a$)

Question 19/90

Image directe et réciproque de sous-corps par un homomorphisme

Réponse 19/90

Si K et L sont deux corps, et $f : K \to L$ un morphisme de corps, K' et L' deux sous-corps respectivement de K et L

$f(K')$ est un sous-corps de L

$f^{-1}(L')$ est un sous-corps de K

Question 20/90

Ordre d'un groupe

Si G est un groupe

Réponse 20/90

$$\mathrm{ord}(G) = |G|$$

Question 21/90

Si $(K, +, \times)$ est un corps

Un sous-ensemble L de K est un sous-corps de K

Réponse 21/90

L est stable pour les lois $+$ et $\times$

$1_K \in L$

Les lois induites sur L définissent sur L une structure de corps

Question 22/90

Soient $(G, \star)$ et $(H, \diamond)$ deux groupes
$f : G \to H$ est un homomorphisme de groupes

Réponse 22/90

$$\forall (x,y) \in G^2,\ f(x \star y) = f(x) \diamond f(y)$$

L'ensemble des homomorphisme de G dans H est noté $\mathrm{Hom}(G,H)$

Si $(G,\star) = (H,\diamond)$, f est un endomorphisme

L'ensemble des automorphismes de G est noté $\mathrm{Aut}(G)$

Question 23/90

Soient E muni d'une loi $\star$, $F \subset E$

F est stable par $\star$

Réponse 23/90

$$\forall (x, y) \in F^2,\ x \star y \in F$$

La loi de E se restreint en une loi $\star_F$ appelée loi induite sur F par $\star$

Question 24/90

Soit $x \in E$

x est un élement absorbant pour $\star$

Réponse 24/90

$$\forall y \in E,\ x \star y = x = y \star x$$

Question 25/90

Description par le haut du sous-groupe engendré par une partie

Réponse 25/90

Soient $\mathcal{G}$ l'ensemble des sous-groupes de G et

$$\mathcal{H} = \{H \in \mathcal{G} \mid X \subset H\}$$

$$\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} (H)$$

Question 26/90

Sous-groupe monogène

Réponse 26/90

$$\langle x \rangle = \{x^n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Question 27/90

Magma

Réponse 27/90

Muni d'une loi de composition interne

Question 28/90

Factorisation de $a^n - b^n$ dans un anneau A

Réponse 28/90

$$(a, b) \in A^2 \text{ tel que } ab = ba$$

$$(a - b)\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{n-k-1}b^k\right)$$

Question 29/90

Description des groupes monogènes

Si $G = \langle x \rangle$

Réponse 29/90

$$\text{Si } \mathrm{ord}(x) = +\infty,\ G \text{ est isomorphe à } \mathbb{Z}$$
$$\text{Si } \mathrm{ord}(x) = n \in \mathbb{N}^*,\ G \text{ est isomorphe à } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Question 30/90

Si G et H sont deux groupes et

$f \in \mathrm{Hom}(G, H)$

$f(e_G)$

Réponse 30/90

$$f(e_H)$$

Question 31/90

Sous-groupe propre de G

Réponse 31/90

Sous-groupe de G distinct de G et $\{e_G\}$

Question 32/90

Soit E et F deux ensembles munis d'une structure de X, munis respectivement des lois de composition internes $\left(\underset{1}{\star}, \cdots, \underset{n}{\star}\right)$ et $\left(\underset{1}{\diamond}, \cdots, \underset{n}{\diamond}\right)$, et externes $\left(\underset{1}{\square}, \cdots, \underset{m}{\square}\right)$ et $\left(\underset{1}{\triangle}, \cdots, \underset{m}{\triangle}\right)$ sur $K_1, \cdots, K_m$

$f : E \to F$ est un homomorphisme

Réponse 32/90

f respecte les lois interne : soit $k \in [\![1, n]\!]$

$$\forall (x, y) \in E^2,\ f\left(x \underset{k}{\star} y\right) = f(x) \underset{k}{\diamond} f(y)$$

f respecte les lois externes : soit $k \in [\![1, m]\!]$

$$\forall (\lambda, x) \in K_k \times E,\ f\left(\lambda \underset{k}{\square} y\right) = \lambda \underset{k}{\vartriangle} f(x)$$

f est compatible avec le neutre (si le neutre e_i pour la loi $\underset{i}{\star}$ est imposé dans les axiomes, donc le neutre e_i' existe pour la loi $\underset{i}{\diamond}$) : $f(e_i) = e_i'$

Question 33/90

Propriété des groupes monogènes

Réponse 33/90

Un groupe monogène est abélien

Question 34/90

Cardinal des classes de congruence

Réponse 34/90

$$|Ha,\ a \in G| = |Ha,\ a \in G| = |H|$$

Question 35/90

Diviseurs de zéro dans un anneau A

Réponse 35/90

$a \in A$ est un diviseur de 0 à gauche si et seulement s'il existe $b \in A$ tel que $ab = 0$

$a \in A$ est un diviseur de 0 à droite si et seulement s'il existe $b \in A$ tel que $ba = 0$

$a \in A$ est un diciseur de0 si et seulement si a est diviseur de 0 à gauche et à droite

Question 36/90

Anneau

Réponse 36/90

Muni de deux lois de composition internes

(généralement notées $+$ et $\times$)

$(A, +)$ est un groupe abélien

$(A, \times)$ est un monoïde

$\times$ est distributive sur $+$

Question 37/90

Réciproque d'isomorphisme

Réponse 37/90

Si $f : F \to F$ est un isomorphisme, alors f^{-1} est un isomorphisme

Question 38/90

Associativité externe

E est muni d'une loi decomposition externe $\diamond$ sur $\mathbb{K}$, muni d'une loi de composition interne $\star$

Réponse 38/90

$$\forall(\lambda,\mu,x)\in\mathbb{K}^2\times E,\ (\lambda\star\mu)\diamond x=\lambda\diamond(\mu\diamond x)$$

Question 39/90

Intersection de sous-anneaux

Si A est un groupe, et $(B_i)_{i \in I}$ une famille de sous-anneaux de A

Réponse 39/90

$$\bigcap_{i \in I} (B_i) \text{ est un sous-anneau de } A$$

Question 40/90

Élément réguulier d'un anneau

Réponse 40/90

L'élément n'est pas diviseur de 0

La réciproque est vraie

S'adapte à gauche et à droite

Question 41/90

Propriété des homomorphismes de corps

Réponse 41/90

Un homomorphisme de corps est injectif

Question 42/90

$$\text{Si } \ker(f) = \{e_G\}$$

Réponse 42/90

f est injectif (la réciproque est vraie)

Question 43/90

Groupe abélien

Réponse 43/90

La loi $\star$ de G est commutative

Question 44/90

Monoïde

Réponse 44/90

Muni d'une loi de composition interne, de l'associativité et d'un élément neutre

Un monoïde est un magma

Question 45/90

Groupe des inversibles d'un anneau

Réponse 45/90

$$A^\times$$

$A^\times$ est un groupe multiplicatif

Question 46/90

Factorisation de $(a+b)^n$ dans un anneau A

Réponse 46/90

$$(a, b) \in A^2 \text{ tel que } ab = ba$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right)$$

Question 47/90

Anneau principal

Réponse 47/90

Un anneau intègre dont tous les idéaux sont principaux

Question 48/90

Intersection de sous-groupes

Si G est un groupe, et $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de G

Réponse 48/90

$$\bigcap_{i \in I} (H_i) \text{ est un sous-groupe de } G$$

Question 49/90

Si $f \in \mathrm{Hom}(G, K)$ et H est un sous-groupe distingué

Réponse 49/90

f passe au quotient avec $\tilde{f}: G/H \to K$

Question 50/90

Passage au quotient de la loi dans le cas d'un sous-groupe distingué
Si G est un groupe et H un sous-groupe distingué de G

Réponse 50/90

$\equiv_g = \equiv_d$ et on note la relation $\equiv$

La loi induite corrrespond au produit des classes élément par élément

$$(ab)H = (aH) \cdot (bH)$$

$$= \{x \cdot y,\ x \in aH,\ y \in bH\}$$

La loi induite sur l'ensemble quotient munit celui-ci d'une structure de groupe

Question 51/90

Commutativité généralisée

Réponse 51/90

Si $\star$ est une loi commutative et associative sur E, $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$x_1 \star \cdots \star x_n = x_{\sigma(1)} \star \cdots \star x_{\sigma(n)}$$

Question 52/90

Si G et H sont deux groupes et $f \in \mathrm{Hom}(g, h)$
un morphisme de groupes
$\ker(f)$

Réponse 52/90

$$f^{-1}(e_H) = \{y \in G \mid f(y) = e_H\}$$

Question 53/90

Si $\star$ est une loi associative sur E et $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$

Réponse 53/90

$x_1 \star \cdots \star x_n$ ne dépend pas du parenthésage admissible

Question 54/90

Si $(A, +, \times)$ est un groupe et $B \subset A$

Caractérisation des sous-anneaux

Réponse 54/90

$$1_A \in B \quad \forall (x, y) \in B,\ x - y \in B$$
$$\forall (x, y) \in B,\ xy \in B$$

Question 55/90

Soient $\left(A, \underset{A}{+}, \underset{A}{\times}\right)$ et $\left(B, \underset{B}{+}, \underset{B}{\times}\right)$ deux anneaux

$f : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux

Réponse 55/90

$$\forall (x,y) \in A^2,\ f\left(x \underset{A}{+} y\right) = f(x) \underset{B}{+} f(y)$$
$$\forall (x,y) \in A^2,\ f\left(x \underset{A}{\times} y\right) = f(x) \underset{B}{\times} f(y)$$
$$f(1_A) = 1_B$$

Question 56/90

Soit $e \in E$

e est un élément neutre pour la loi $\star$

Réponse 56/90

$$\forall x \in E,\ e \star x = x = x \star e$$

Question 57/90

Distributivité généralisée

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in J_i}(x_{i,j})\right)$$

Réponse 57/90

$$\sum_{(j_1,\cdots,j_n)\in J_1\times\cdots\times J_n}\left(\prod_{i=1}^{n}(x_{i,j_i})\right)$$

Question 58/90

Isomorphisme de X

Réponse 58/90

Homomorphisme de X bijectif

Question 59/90

x et y sont dans la même classe à gauche modulo H

Réponse 59/90

$$x \equiv_g y\,[H] \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

Question 60/90

Commutativité

Réponse 60/90

$\star$ est commutative si et seulement

si$\forall (x, y) \in E^2,\ x \star y = y \star x$

Question 61/90

Symétrique de $x \star y$

Réponse 61/90

$$y^s \star x^s$$

Question 62/90

Corps

Réponse 62/90

Muni de deux lois de composition internes
(généralement notées $+$ et $\times$)
$(K, +, \times)$ est un anneau commutatif
$(K^*, \times)$ est un groupe

Question 63/90

Si G est un gruope

Structure de $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$

Réponse 63/90

$$(\mathrm{Aut}(G), \circ) \text{ est un groupe}$$

Question 64/90

Si G et H sont deux groupes et

$f \in \mathrm{Hom}(G, H)$

$f\left(x^{-1}\right)$

Réponse 64/90

$$f(x)^{-1}$$

Question 65/90

Élément régulier ou simplifiable

Réponse 65/90

x est régulier à gauche si et seulement si$\forall (y,z) \in E^2,\ x \star y = x \star z \Rightarrow y = z$

x est régulier à droite si et seulement si$\forall (y,z) \in E^2,\ y \star x = z \star x \Rightarrow y = z$

x est régulier si et seulement s'il est régulier à gauche et à droite

Si x admet un symétrique, alors il est régulier

Question 66/90

Si $(A, +, \times)$ est un anneau
Un sous-ensemble B de A est un sous-anneau
de A

Réponse 66/90

B est stable pour les lois $+$ et $\times$

$1_A \in B$

Les lois induites sur B définissent sur B une structure d'anneau

Question 67/90

Soient E muni d'une structure de X et $F \subset E$

F est un sous-X de E

Réponse 67/90

F est stable par les lois de E
F contient les neutres imposés par E
Les lois induites sur F par les lois de E
vérifient les axiomes de la structure de X

Question 68/90

Si H est un sous-groupe distingué de G

Réponse 68/90

$$\forall a \in G,\ aH = Ha$$
$$\Leftrightarrow \forall a \in G,\ \forall h \in H,\ aha^{-1} \in H$$

Question 69/90

Élément absorbant dans un anneau $(A, +, \times)$

Réponse 69/90

$$0$$

Question 70/90

Image directe et réciproque de sous-anneaux par un homomorphisme

Réponse 70/90

Si A et B sont deux anneaux, et $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux, A' et B' deux sous-anneaux respectivement de A et B

$f(A')$ est un sous-anneau de B

$f^{-1}(B')$ est un sous-anneau de A

Question 71/90

Si $f \in \mathrm{Hom}(G, K)$ et H est un sous-groupe distingué et $H \subset \ker(f)$

Réponse 71/90

$$f = \tilde{f} \circ \pi$$

La réciproque est vraie

Question 72/90

Premier théorème d'isomorphisme

Réponse 72/90

Si $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$
$\ker(f)$ est un sous-groupe distingué de G, et f passe au quotient, définissant un morphisme de groupes $\tilde{f} : G/\ker(f) \to H$
$\tilde{f}$ est injectif et sa corestriction à son image est un isomorphisme

Question 73/90

Propriétés d'un groupe $(G, \star)$

Réponse 73/90

G admet un uique élément neutre pour $\star$

$\forall x \in G,\ \exists! x^s \in G$

Question 74/90

Si $(K, +, \times)$ est un groupe et $L \subset K$

Caractérisation des sous-corps

Réponse 74/90

$$1_K \in L \quad \forall (x,y) \in L,\ x - y \in L$$
$$\forall (x,y) \in L,\ y \neq 0 \Rightarrow xy^{-1} \in L$$

Question 75/90

Les classes à droite modulo H

Réponse 75/90

$$\{Ha,\ a \in G\}$$

Question 76/90

x et y sont dans la même classe à droite modulo H

Réponse 76/90

$$x \equiv_d y \, [H] \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

Question 77/90

Image directe et réciproque de sous-groupes par un homomorphisme

Réponse 77/90

Si G et H sont deux groupes, et $f \in \operatorname{Hom}(G, H)$ un morphisme de groupes, G' et H' deux sous-groupes respectivement de G et H

$f(G')$ est un sous-groupe de H

$f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G

Question 78/90

Si A est un anneau commutatif et I un idéal de A

Anneau quotient

Réponse 78/90

A/I peut être muni d'une multiplication avec pour tout $(a, b) \in A$, $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$

A/I est muni d'une structure d'anneau

Question 79/90

Anneau intègre

Réponse 79/90

Anneau commutatif non réduit à $\{0\}$ et sans diviseurs de 0

Question 80/90

Anneau commutatif

Réponse 80/90

Anneau dont la loi $\times$ est commutative

Question 81/90

Endomorphisme de X

Réponse 81/90

Homomorphisme de X de E dans lui-même
(muni des mêmes lois)

Question 82/90

Si $(G, \star)$ est un groupe

Un sous-ensemble H de G est un sous-groupe de G

Réponse 82/90

H est stable pour la loi de G et la loi induite définit sur H une structure de groupe

Question 83/90

Les classes à gauche modulo H

Réponse 83/90

$$\{aH,\ a \in G\}$$

Question 84/90

Automorphisme de X

Réponse 84/90

Endomorphisme et isomorphisme de X

Question 85/90

Théorème de Lagrange pour l'ordre des éléments d'un groupe

Réponse 85/90

Si G est un groupe fini et $x \in G$

$$\operatorname{ord}(x) \mid |G|$$

Question 86/90

Ordre d'un élément d'un groupe

Réponse 86/90

$$\operatorname{ord}(x) = \min(\{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = e\})$$

Question 87/90

Propriété sur 1 et 0 si l'anneau A a plus d'un élément

Réponse 87/90

$$1 \neq 0$$

Question 88/90

Groupe

Réponse 88/90

Muni d'une loi de composition interne, de l'associativité, d'un élément neutre et de symétriques

Un groupe est un monoïde

Question 89/90

Groupe cyclique

Réponse 89/90

Groupe monogène fini

Question 90/90

Propriété de $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Réponse 90/90

$\mathbb{F}_p$ est un corps si et seulement si p est premier