Algèbre 1
Produit tensoriel

Question 1/19

Interprétation matricielle du tenseur

Réponse 1/19

Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_{E'}}(u)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_{F'}}(v)$ alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{E \otimes F}, \mathcal{B}_{E' \otimes F'}}(u \otimes v) = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,m}B \\ \vdots & \vdots\!\cdot\!\vdots & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,m}B \end{pmatrix}$$

Question 2/19

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_{i-1} \otimes (e_i + e'_i) \otimes e_{i+1} \otimes \cdots \otimes e_n$$

Réponse 2/19

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n + e_1 \otimes \cdots \otimes e_i' \otimes \cdots \otimes e_n$$

Question 3/19

$$(A \otimes B) \otimes C$$

Réponse 3/19

$$A \otimes (B \otimes C)$$

Question 4/19

$$\operatorname{tr}(u \otimes v)$$
$$u \in \mathcal{L}(E),\ v \in \mathcal{L}(F)$$

Réponse 4/19

$$\operatorname{tr}(u)\operatorname{tr}(v)$$

Question 5/19

$$\lambda \times (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n)$$

Réponse 5/19

$$(\lambda e_1) \otimes e_2 \otimes \cdots \otimes e_n$$
$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_{n-1} \otimes (\lambda e_n)$$

Question 6/19

$$\det(u \otimes v)$$
$$u \in \mathcal{L}(E),\ v \in \mathcal{L}(F)$$

Réponse 6/19

$$\det(u)^{\dim(F)} \det(v)^{\dim(E)}$$

Question 7/19

« Associativité » du produit tensoriel

Réponse 7/19

$$\begin{array}{rcl} (E \otimes F) \otimes G & \longrightarrow & E \otimes (F \otimes G) \\ (x \otimes y) \otimes z & \longmapsto & x \otimes (y \otimes z) \end{array}$$ est un isomorphisme

Question 8/19

« Commutativité » du produit tensoriel

Réponse 8/19

$$\begin{array}{ccc} E \otimes F & \longrightarrow & F \otimes E \\ x \otimes y & \longmapsto & y \otimes x \end{array} \text{ est un isomorphisme}$$

Question 9/19

Structure canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}(E, F)$

Réponse 9/19

$$\begin{aligned} E^* \otimes F &\longrightarrow \mathrm{Hom}(E, F) \\ \ell \otimes x &\longmapsto (y \mapsto \ell(x)y) \end{aligned}$$

Question 10/19

Structure de n-Lin

Réponse 10/19

$\mathbb{k}$-ev

Question 11/19

Application linéaire associée à une application $u \in \mathcal{E} = n\text{-Lin}(E_1, \cdots, E_n; F)$

Réponse 11/19

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{E} &\longrightarrow F^{I_1 \times \cdots \times I_n} \\ \varphi &\longmapsto \left(\varphi\left(e_{i_1}^{(1)}, \cdots, e_{i_n}^{(n)}\right)\right)_{(i_1, \cdots, i_n) \in I_1 \times \cdots \times I_n}\end{aligned}$$

Où $\left(e_i^{(j)}\right)_{i \in I_j}$ est une base de E_j

Question 12/19

$$(u' \otimes v') \circ (u \otimes v)$$

Réponse 12/19

Pour $u : E \to E'$, $u' : E' \to E''$, $v : F \to F'$ et $v' : F' \to F''$

$$(u' \otimes v') \circ (u \otimes v) = (u' \circ u) \otimes (v' \otimes v)$$

Question 13/19

$$\mathrm{rg}(u \otimes v)$$
$$u \in \mathcal{L}(E),\ v \in \mathcal{L}(F)$$

Réponse 13/19

$$\mathrm{rg}(u)\,\mathrm{rg}(v)$$

Question 14/19

Définition du produit tensoriel de $E_1, \cdots, E_n$
des $\mathbb{k}$-ev de dimension finie

Réponse 14/19

Il existe $(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n, \mathit{\Pi})$ tel que $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ est un $\mathbb{k}$-ev et $\mathit{\Pi} \in n\text{-Lin}(E_1, \cdots, E_n; E_1 \otimes \cdots \otimes E_n)$ est tel que pour tout F $\mathbb{k}$-ev, tout $\varphi \in n\text{-Lin}(E_1, \cdots, E_n; F)$ se factorise en un unique $\overline{\varphi}$ linéaire vérifiant $\varphi = \overline{\varphi} \circ \mathit{\Pi}$

$(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n, \mathit{\Pi})$ est unique à unique isomorphisme près

Question 15/19

Structure canoniquement isomorphe à
$(E_1 \oplus E_2) \otimes F$

Réponse 15/19

$$\begin{aligned}(E_1 \oplus E_2) \otimes F &\longrightarrow (E_1 \otimes F) \oplus (E_2 \otimes F)\\ (x_1 \oplus x_2) \otimes y &\longmapsto (x_1 \otimes y) \oplus (x_2 \otimes y)\end{aligned}$$

Question 16/19

$$(A + A') \otimes (B + B')$$

Réponse 16/19

$$A \otimes B + A' \otimes B'$$

Question 17/19

$$(AA') \otimes (BB')$$

Réponse 17/19

$$(A \otimes B) \times (A' \otimes B')$$

Question 18/19

Structure canoniquement isomorphe à $E^* \otimes F^*$

Réponse 18/19

$$\begin{aligned} E^* \otimes F^* &\longrightarrow (E \otimes F)^* \\ \mu \otimes \nu &\longmapsto (x \otimes y \mapsto \mu(x) \otimes \nu(y)) \end{aligned}$$

Question 19/19

Structure canoniquement isomorphe à
$\mathrm{Hom}(E, E') \otimes \mathrm{Hom}(F, F')$

Réponse 19/19

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}(E, E') \\ \otimes \\ \mathrm{Hom}(F, F') \end{pmatrix} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(E \otimes F, E \otimes F') \\ u \otimes v & \longmapsto & (x \otimes y \mapsto u(x) \otimes v(y)) \end{array}$$