Analyse

Intégrales à paramètre

Question 1/3

Dérivation d'une intégrale à paramètre

Réponse 1/3

Si
$$\forall t \in J, f(\cdot, t)$$
 est de classe \mathcal{C}^1
 $\forall x \in I, f(x, \cdot)$ est intégrable et $\frac{\partial}{\partial x}(f(x, \cdot))$ est continue par morceaux

continue par morceaux
$$\exists \varphi \colon J \to \mathbb{R}_+ \text{ intégrable telle que}$$

$$\forall (x,t) \in I \times J, \left| \frac{\partial}{\partial x} (f(x,t)) \right| \leqslant \varphi(t)$$

$$\text{Alors, } \int_J (f(x,t)) \, \mathrm{d}t \text{ est de classe } \mathcal{C}^1$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\int_J (f(x,t)) \, \mathrm{d}t \right) = \int_J \left(\frac{\partial}{\partial x} (f(x,t)) \right) \, \mathrm{d}t$$

Question 2/3

Dérivation d'une intégrale à paramètre pour la classe \mathcal{C}^k

Réponse 2/3

Si
$$\forall t \in J, f(\cdot, t)$$
 est de classe \mathcal{C}^k

$$\forall x, i \in I \times [1, k-1], \frac{\partial^i}{\partial x^i}(f(x, \cdot)) \text{ est intégrable}$$

et
$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}(f(x,\cdot))$$
 est continue par morceaux $\exists \varphi : J \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que

 $\forall (x,t) \in I \times J, \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (f(x,t)) \right| \leqslant \varphi(t)$

Alors, $\int_{I} (f(x,t)) dt$ est de classe \mathcal{C}^{k} , $\forall i \leq k$, $\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i} \left(\int_J (f(x,t)) \, \mathrm{d}t \right) = \int_J \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} (f(x,t)) \right) \, \mathrm{d}t$

Question 3/3

Continuité d'une intégrale à paramètre

Réponse 3/3

Si
$$\forall t \in J, f(\cdot, t)$$
 est continue $\forall x \in I, f(x, \cdot)$ est continue par morceaux $\exists \varphi : J \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que $\forall (x, t) \in I \times J, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$ Alors, $x \mapsto \int_I (f(x, t)) dt$ est continue sur I