Analyse complexe
Séries de Dirichlet

Question 1/12

Théorème de Landau

Réponse 1/12

Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$ est une série de Dirichlet à termes positifs avec une abscisse de convergence $\sigma \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$ est définie et holomorphe sur le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) > \sigma\}$ et ne se prolonge analytiquement sur aucun voisinage de σ

Question 2/12

Abscisse de convergence d'une série de Dirichlet

Réponse 2/12

$$\inf\left(\left\{s \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} \text{ converge absolument}\right\}\right)$$

Question 3/12

Théorème de la progression arithmétique de Dirichlet

Réponse 3/12

En posant $\zeta_{\mathbb{P},\alpha}(s) = \sum_{\substack{p\in\mathbb{P} \\ p\equiv\alpha[m]}} p^{-s}$,

$\zeta_{\mathbb{P},\alpha}(s) - \frac{1}{\varphi(m)}\frac{1}{s-1}$ définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de 1 et $\{p \in \mathbb{P}, p \equiv \alpha\ [m]\}$ a une densité analytique de $\frac{1}{\varphi(m)}$

Question 4/12

Développement eulérien d'une série de Dirichlet associé à une fonction multiplicative

Réponse 4/12

$$\text{Pour } \mathrm{Re}(z) > \sigma_{\mathrm{abs}},$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a(n) n^{-s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a\left(p^k\right) p^{-ks} \right)$$

Question 5/12

Développement eulérien d'une série de Dirichlet associé à une fonction strictemene multiplicative bornée

Réponse 5/12

Pour $\mathrm{Re}(z) > 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a(n) n^{-s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - a(p)p\right)^{-1}$$

Le produit infini converge sur tout compact de $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$

Question 6/12

Densité naturelle

Réponse 6/12

$$A \subset \mathbb{P} \text{ admet une densité analytique } \delta \in [0,1]$$
$$\text{si } \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{|\{p \in A, p \leqslant x\}|}{|\{p \in \mathbb{P}, p \leqslant x\}|} \right) = \delta$$

Question 7/12

Caractère de Dirichlet modulo N

Réponse 7/12

Morphisme de groupes $\chi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^*$

χ est étendu à $\mathbb{Z}$ par

$$\chi(n) = \begin{cases} \chi(\overline{n}) & \text{si } n \wedge N = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Question 8/12

Densité analytique

Réponse 8/12

$$\text{Soit } \zeta_A(s) = \sum_{p \in A} p^{-s} \ (\text{pour } \mathrm{Re}(s) > 1)$$

$$A \subset \mathbb{P} \text{ admet une densité analytique } \delta \in [0,1]$$

$$\text{si } \lim_{s \to 1^+} \left(\frac{\zeta_A(s)}{\zeta_{\mathbb{P}}(s)} \right) = \delta$$

Question 9/12

Valeurs de σ et σ_{abs} pour (a_n) périodique non nulle

Réponse 9/12

$$\sigma_{\text{abs}} = 1,\ \sigma \in [0,1]$$

$$\sigma = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n = 0 \\ 1 \ \text{ sinon} \end{cases}$$

Question 10/12

Abscisse de convergence d'une série de Dirichlet

Réponse 10/12

$$\inf\left(\left\{s \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} \text{ converge}\right\}\right)$$

Une série de Dirichlet est holomorphe sur

$$\{\mathrm{Re}(z) > \sigma\}$$

Question 11/12

Équivalent de la série de Dirichlet $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$ en

$$\mathrm{Re}(s) \to +\infty$$

Réponse 11/12

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} \underset{\mathrm{Re}(s)\to+\infty}{\sim} a_{n_0} n_0^{-s} \text{ où}$$
$$n_0 = \min(\{n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0\})$$

Question 12/12

Théorème des nombres premiers

Réponse 12/12

$$\pi(x) = |\{p \in \mathbb{P}, p \leqslant x\}|$$

$$\pi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{\log(x)}$$