Algèbre 2
Déterminants

Question 1/18

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$$

Réponse 1/18

$$\ker(\det) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}$$

Question 2/18

Déterminant d'un endomorphisme

Réponse 2/18

$$\varphi_u = \det(u)\varphi$$

Question 3/18

$$\mathrm{SL}(E)$$

Réponse 3/18

$$\ker(\det) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \det(u) = 1\}$$

Question 4/18

$$\det(A)$$

Réponse 4/18

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\Big(\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}\Big)$$

$$=\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n}\Big(\varepsilon(\tau)a_{1,\tau(1)}\cdots a_{n,\tau(n)}\Big)$$

Question 5/18

$$\begin{vmatrix} \boxed{A_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{A_n} \end{vmatrix}$$

Réponse 5/18

$$\prod_{i=1}^{n}(\det(A_i))$$

Question 6/18

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix}$$

Réponse 6/18

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i)$$

Question 7/18

Ensemble des formes n-linéaires alternées

Réponse 7/18

$$\mathrm{Vect}(\det_{\mathcal{B}})$$

Question 8/18

$$u \in \mathcal{L}(E)$$
$$\det(\lambda u)$$

Réponse 8/18

$$\lambda^{\dim(E)} \det(u)$$

Question 9/18

Application multilinéaire

Réponse 9/18

$$\begin{aligned}
&\varphi(x_1, \cdots, x_{i-1}, \lambda x_i + x_i', x_{i+1}, \cdots, x_n) \\
&= \lambda \varphi(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) \\
&+ \varphi(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \cdots, x_n)
\end{aligned}$$

Question 10/18

Lien forme antisymétrique – forme alternée

Réponse 10/18

Toute forme n-linéaire alternée est antisymétrique

Si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, toute forme antisymétrique est alternée

Question 11/18

Caractérisation du déterminant par l'image d'une base

Réponse 11/18

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$$

Question 12/18

Forme n-linéaire

Réponse 12/18

Application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$

Question 13/18

φ est alternée

Réponse 13/18

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = 0 \text{ s'il existe } i \neq j \text{ tel que } x_i = x_j$$

Question 14/18

Déterminant d'une famille de vecteurs $(x_1, \cdots, x_n)$ par rapport à $\mathcal{B}$

Réponse 14/18

Si $\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme n-linéaire alternée
telle que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)$$

Question 15/18

$$\det(u \circ v)$$

Réponse 15/18

$$\det(u)\det(v)$$

Question 16/18

$\det_{\mathcal{B}}$

Expression avec $\mathcal{B}'$

Réponse 16/18

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}$$

Question 17/18

φ est antisymétrique

Réponse 17/18

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \varepsilon(\sigma)\varphi\left(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}\right)$$

Question 18/18

Description du déterminant par les coordonnées

$$[x_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

Réponse 18/18

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \Big(\varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \Big)$$

$$= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \Big(\varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)} \Big)$$