Algèbre 2
Déterminants

Question 1/25

$$\det_{\mathcal{B}}$$

Expression avec $\mathcal{B}'$

Réponse 1/25

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}$$

Question 2/25

Application multilinéaire

Réponse 2/25

$$\begin{aligned}
&\varphi(x_1, \cdots, x_{i-1}, \lambda x_i + x_i', x_{i+1}, \cdots, x_n)\\
&= \lambda\varphi(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)\\
&+ \varphi(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \cdots, x_n)
\end{aligned}$$

Question 3/25

Forme n-linéaire

Réponse 3/25

Application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$

Question 4/25

Déterminant d'une famille de vecteurs $(x_1, \cdots, x_n)$ par rapport à $\mathcal{B}$

Réponse 4/25

Si $\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme n-linéaire alternée

telle que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)$$

Question 5/25

$$\begin{vmatrix} \boxed{A_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{A_n} \end{vmatrix}$$

Réponse 5/25

$$\prod_{i=1}^{n}(\det(A_i))$$

Question 6/25

Caractérisation du déterminant par l'image d'une base

Réponse 6/25

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$$

Question 7/25

$$\det(u \circ v)$$

Réponse 7/25

$$\det(u)\det(v)$$

Question 8/25

Déterminant de Vandermonde

$$V(x_1, \cdots, x_n)$$

Réponse 8/25

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} (x_j - x_i)$$

Question 9/25

Lien forme antisymétrique – forme alternée

Réponse 9/25

Toute forme n-linéaire alternée est antisymétrique

Si $\operatorname{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, toute forme antisymétrique est alternée

Question 10/25

Déterminant d'un endomorphisme

Réponse 10/25

$$\varphi_u = \det(u)\varphi$$

Question 11/25

$$\mathrm{SL}(E)$$

Réponse 11/25

$$\ker(\det) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \det(u) = 1\}$$

Question 12/25

$$u \in \mathcal{L}(E)$$
$$\det(\lambda u)$$

Réponse 12/25

$$\lambda^{\dim(E)} \det(u)$$

Question 13/25

Développement suivant une colonne
Développement suivant une ligne

Réponse 13/25

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} \Big((-1)^{i+j} m_{i,j} \Delta_{i,j}(M) \Big)$$

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} \Big((-1)^{i+j} m_{i,j} \Delta_{i,j}(M) \Big)$$

Question 14/25

Mineur de position (i, j) de M

Réponse 14/25

$$\Delta_{i,j}(M) = \det\Big((m_{k,\ell})_{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}\times[\![1,n]\!]\setminus\{j\}}\Big)$$

Question 15/25

Comatrice de M

$\mathrm{Com}(M)$

Réponse 15/25

$$\left((-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(M)\right)_{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}\times[\![1,n]\!]\setminus\{j\}}$$

Question 16/25

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix}$$

Réponse 16/25

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i)$$

Question 17/25

φ est antisymétrique

Réponse 17/25

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \varepsilon(\sigma)\varphi\big(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}\big)$$

Question 18/25

Ensemble des formes n-linéaires alternées

Réponse 18/25

$$\mathrm{Vect}(\det_{\mathcal{B}})$$

Question 19/25

φ est alternée

Réponse 19/25

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = 0 \text{ s'il existe } i \neq j \text{ tel que}$$
$$x_i = x_j$$

Question 20/25

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$$

Réponse 20/25

$$\ker(\det) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}$$

Question 21/25

$$\text{Valeurs des } x_k \text{ pour } A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B$$

$$A = \left(A_1 \middle| \cdots \middle| A_n \right)$$

Réponse 21/25

$$x_k = \frac{\det\left(\left(A_1 \middle| \cdots \middle| A_{k-1} \middle| B \middle| A_{k+1} \middle| \cdots \middle| A_n\right)\right)}{\det(A)}$$

Question 22/25

Cofacteur de position (i, j) de M

Réponse 22/25

$$(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(M)$$

Question 23/25

$$\det(A)$$

Réponse 23/25

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\Big(\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}\Big)$$

$$=\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n}\Big(\varepsilon(\tau)a_{1,\tau(1)}\cdots a_{n,\tau(n)}\Big)$$

Question 24/25

Description du déterminant par les coordonnées

$$[x_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

Réponse 24/25

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \Big(\varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}\Big)$$

$$= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \Big(\varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)}\Big)$$

Question 25/25

Expression de l'inverse par la comatrice

Réponse 25/25

$$M^{-1} = \frac{\mathrm{Com}(M)^{\top}}{\det(M)}$$