

# Probabilités

## *Espaces probabilisés*

## Question 1/26

Formule des probabilités totales associée à une variable aléatoire réelle discrète

## Réponse 1/26

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{x \in X(\Omega)} (\mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(B \mid X = x))$$

## Question 2/26

Formule des probabilités totales pour le système complet  $(A, \overline{A})$

## Réponse 2/26

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B \mid \overline{A})$$

## Question 3/26

Distribution de probabilités

## Réponse 3/26

Famille  $(p_i)_{i \in I}$  tel que  $\sum_{i \in I} (p_i) = 1$

## Question 4/26

Système complet d'événements



## Réponse 4/26

Famille  $\{A_i, i \in I\}$  d'éléments non vides  
formant une partition de  $\Omega$

## Question 5/26

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i)\right)$$

## Réponse 5/26

$$\sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ I \neq \emptyset}} \left( (-1)^{|I|-1} \mathbb{P} \left( \bigcap_{i \in I} (A_i) \right) \right)$$

## Question 6/26

Formule des probabilités composées

## Réponse 6/26

$$\text{Si } \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} (A_i)\right) \neq 0$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (A_i)\right) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{i=2}^n \left( \mathbb{P}\left(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} (A_j)\right) \right)$$

## Question 7/26

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$$

## Réponse 7/26

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

## Question 8/26

$\sigma$ -algèbre  
Tribu



## Réponse 8/26

Une  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{T}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{P}(\Omega)$  vérifiant

$$\Omega \in \mathcal{T}$$

$$A \in \mathcal{T} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{T}$$

Si  $I$  est dénombrable et  $(A_i)_{i \in I}$  une famille

$$\text{d'éléments de } \mathcal{T}, \bigcup_{i \in I} (A_i) \in \mathcal{T}$$

## Question 9/26

Tribu engendrée par une famille

## Réponse 9/26

$\sigma((A_i)_{i \in I})$  avec  $A_i$  des éléments de  $\mathcal{P}(\Omega)$   
Plus petite  $\sigma$ -algèbre de  $\Omega$  contenant  $(A_i)_{i \in I}$

## Question 10/26

Les  $A_i$ ,  $i \in I$  sont mutuellement indépendants

## Réponse 10/26

$$\forall J \in \mathcal{P}_f(I), \mathbb{P} \left( \bigcap_{j \in J} (A_j) \right) = \prod_{j \in J} (\mathbb{P}(A_j))$$

## Question 11/26

Formule de Bayes simple

## Réponse 11/26

$$\begin{aligned} &\text{Si } \mathbb{P}(A) \neq 0 \text{ et } \mathbb{P}(B) \neq 0 \\ \mathbb{P}(A \mid B) &= \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \end{aligned}$$

## Question 12/26

Système quasi-complet d'événements



## Réponse 12/26

$\mathcal{C}$  est quasi-complet si

Les événements de  $\mathcal{C}$  ne sont pas impossibles

Les événements de  $\mathcal{C}$  sont deux à deux disjoints

$$\sum_{A \in \mathcal{C}} (\mathbb{P}(A)) = 1$$

## Question 13/26

Tribu des boréliens

## Réponse 13/26

$$\mathcal{B}^1 \text{ ou } \mathcal{B} \\ \sigma\left(\left(]-\infty, a[ \right)_{a \in \mathbb{R}}\right)$$

$\mathcal{B}^1$  est aussi engendrée par n'importe quel type d'intervalle de  $\mathbb{R}$

## Question 14/26

Formule des probabilités totales

## Réponse 14/26

Si  $(A_i)_{i \in I}$  est un système quasi-complet au plus dénombrable

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} (\mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B \mid A_i))$$

## Question 15/26

Mesure de probabilités

## Réponse 15/26

Application  $\mathbb{P}: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{P}(A_n))$$

## Question 16/26

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n)\right)$$



## Réponse 16/26

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \mathbb{P} \left( \bigcup_{n=0}^N (A_n) \right) \right)$$

## Question 17/26

$$\limsup(A_n)$$

## Réponse 17/26

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left( \bigcup_{k=n}^{+\infty} (A_k) \right)$$

## Question 18/26

Espace probabilisable

## Réponse 18/26

$$(\Omega, \mathcal{T})$$

$\mathcal{T}$  est une  $\sigma$ -algèbre sur  $\Omega$

## Question 19/26

$$\liminf(A_n)$$

## Réponse 19/26

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left( \bigcap_{k=n}^{+\infty} (A_k) \right)$$

## Question 20/26

Intersection de tribus



## Réponse 20/26

Si  $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$  est une famille de  $\sigma$ -algèbres sur  $\Omega$ ,  
alors  $\bigcap_{i \in I} (\mathcal{T}_i)$  est une  $\sigma$ -algèbre sur  $\Omega$

## Question 21/26

Espace probabilisé  
Modèle probabiliste de Kolmogorov

## Réponse 21/26

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$  où  $(\Omega, \mathcal{T})$  est un espace  
probabilisable et  $\mathbb{P}$  une mesure de probabilités

## Question 22/26

Formule de Bayes sur un système complet

## Réponse 22/26

Si  $(A_i)_{i \in I}$  est un système quasi-complet au plus dénombrable tel que pour tout  $i \in I$ ,

$$\mathbb{P}(A_i) \neq 0 \text{ et } \mathbb{P}(B) \neq 0$$
$$\mathbb{P}(A_j \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_j) \mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i \in I} (\mathbb{P}(B \mid A_i) \mathbb{P}(A_i))}$$

## Question 23/26

$\mathbb{P}(\{\omega\})$  pour une distribution de probabilités  
uniforme

## Réponse 23/26

$$\frac{1}{|\Omega|}$$

## Question 24/26

$A$  et  $B$  sont indépendants  
 $\mathbb{P}(A \cap B)$



## Réponse 24/26

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

## Question 25/26

Tribu des boréliens sur  $\mathbb{R}^n$

## Réponse 25/26

$$\mathcal{B}^n$$

Tribu engendrée par les  $I_1 \times \cdots \times I_n$  où les  $I_k$   
sont des intervalles

## Question 26/26

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n)\right)$$

## Réponse 26/26

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \mathbb{P} \left( \bigcap_{n=0}^N (A_n) \right) \right)$$