

Moyenne de Césàro

Théorème : Moyenne de Césàro

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes.

Si (u_n) converge vers ℓ , alors $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (u_k)$ converge également, et sa limite est ℓ .

Preuve : Moyenne de Césàro

Soit (u_n) une suite tel que $u_n \rightarrow \ell$.

Montrons que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (u_k) \rightarrow \ell$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (u_k) - \ell \right| &= \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (u_k) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (\ell) \right| \\ &= \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (u_k - \ell) \right| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (|u_k - \ell|) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0-1} (|u_k - \ell|) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0}^n (|u_k - \ell|) \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0-1} (|u_k - \ell|) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0}^n \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0-1} (|u_k - \ell|) + \frac{n - n_0 + 1}{n+1} \times \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0-1} (|u_k - \ell|) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

De plus, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $\frac{1}{n_1+1} \sum_{k=0}^{n_0-1} (u_k) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc, pour tout $n \geq n_1$, $\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (u_k) - \ell \right| \leq \varepsilon$.

Donc, $\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (u_k) - \ell \right| \rightarrow 0$.

Donc, $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (u_k) \rightarrow \ell$.