

# Algèbre 1

## *Matrices*

## Question 1/24

Factorisation de  $(A + B)^n$

## Réponse 1/24

$$(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \text{ tel que } AB = BA$$
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

## Question 2/24

$$\begin{array}{c} E(i, j)^{-1} \\ E(i, j, \lambda)^{-1} \\ E(i, \lambda)^{-1} \end{array}$$

## Réponse 2/24

$$\begin{array}{c} E(i, j) \\ E(i, j, -\lambda) \\ E(i, \lambda^{-1}) \end{array}$$

## Question 3/24

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \cdots & \bullet & t_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$$

$T^m$

## Réponse 3/24

$$T^m = \begin{pmatrix} t_{1,1}^m & 0 & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \bullet & \cdots & \bullet & t_{n,n}^m \end{pmatrix}$$

## Question 4/24

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$



## Réponse 4/24

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid MN = I_n\}$$

## Question 5/24

Matrice de transposition  $E(i, j)$

## Réponse 5/24

$$\forall (k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \setminus \{(i, j), (j, i)\}, \quad k \neq \ell, \quad e_{k, \ell} = 0$$

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}, \quad e_{k, k} = 1$$

$$e_{i, i} = e_{j, j} = 0$$

$$e_{i, j} = e_{j, i} = 1$$

## Question 6/24

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$$

$T^m$

## Réponse 6/24

$$T^m = \begin{pmatrix} t_{1,1}^m & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n}^m \end{pmatrix}$$

## Question 7/24

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$$

## Réponse 7/24

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M = M^{\top}\}$$

## Question 8/24

Description du produit matriciel par colonne  
 $C_i(M)$  représente la  $i$ -ième colonne de  $M$



## Réponse 8/24

$$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

$$C = A \times \underset{p}{B}$$

$$\forall k \in \llbracket 1, q \rrbracket, C_k(C) = \sum_{j=1}^p (b_{j,k} C_j(A))$$

## Question 9/24

Définition du produit matriciel

## Réponse 9/24

$$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$
$$C = A \times B$$

$$\forall (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, c_{i,k} = \sum_{j=1}^p (a_{i,j} b_{j,k})$$

## Question 10/24

Transposée de la matrice  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$

## Réponse 10/24

$$A^{\top} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,p} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

## Question 11/24

Factorisation de  $A^n - B^n$

## Réponse 11/24

$$(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \text{ tel que } AB = BA$$
$$(A - B) \sum_{k=0}^{n-1} (A^{n-k-1} B^k)$$

## Question 12/24

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$



## Réponse 12/24

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M = -M^{\top}\}$$

## Question 13/24

Structure de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

## Réponse 13/24

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est un anneau non commutatif

## Question 14/24

Matrice de dilatation  $E(i, \lambda)$

## Réponse 14/24

$$\begin{aligned}\forall (k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad k \neq \ell, \quad e_{k, \ell} &= 0 \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}, \quad e_{k, k} &= 1 \\ e_{i, i} &= \lambda\end{aligned}$$

## Question 15/24

Produit par blocs

$$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

$$B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$$

$$C = AB$$

## Réponse 15/24

$$0 = i_0 < \dots < i_q = m$$

$$0 = j_0 < \dots < j_r = p$$

$$0 = k_0 < \dots < k_s = m$$

$$A = (A_{i_a, j_b}), \quad B = (B_{j_b, k_c})$$

$$C = (C_{i_a, k_c}) = \left( \sum_{b=1}^r (A_{i_a, j_b} B_{j_b, k_c}) \right)$$

## Question 16/24

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$
$$\det(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$



Réponse 16/24

$$ad - bc$$

## Question 17/24

Description du produit matriciel par ligne  
 $L_i(M)$  représente la  $i$ -ième ligne de  $M$

## Réponse 17/24

$$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

$$C = A \times \underset{p}{B}$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_i(C) = \sum_{j=1}^p (a_{i,j} L_j(B))$$

## Question 18/24

Matrice identité

## Réponse 18/24

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Question 19/24

Matrice élémentaire  $E_{i,j}$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## Réponse 19/24

$$\begin{aligned}\forall (k, \ell) &\in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \\ e_{k, \ell} &= \delta_{(i, j), (k, \ell)} = \delta_{i, k} \delta_{j, \ell}\end{aligned}$$

## Question 20/24

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

$M^{-1}$



## Réponse 20/24

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Question 21/24

Matrice de transvection  $E(i, j, \lambda)$

## Réponse 21/24

$$\begin{aligned}\forall (k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \setminus \{(i, j)\}, \quad k \neq \ell, \quad e_{k, \ell} &= 0 \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad e_{k, k} &= 1 \\ e_{i, j} &= \lambda\end{aligned}$$

## Question 22/24

Système de Cramer

## Réponse 22/24

$AX = B$  est de Cramer si  $A$  est inversible  
 $AX = B$  a une unique solution  $X = A^{-1}B$

## Question 23/24

Propriété des matrices  $E_{i,j}$  dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## Réponse 23/24

La famille  $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$  est une base canonique de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  peut s'exprimer

de la forme 
$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket} (\lambda_{i,j} E_{i,j})$$

## Question 24/24

$$D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$$

$D^m$



## Réponse 24/24

$$D^m = \begin{pmatrix} d_{1,1}^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n,n}^m \end{pmatrix}$$