

Analyse complexe

Fonctions

méromorphes

Question 1/23

Image de f au voisinage de z_0 qui est une singularité essentielle

Réponse 1/23

Si V est un voisinage de z_0 dans U alors
 $f(V \setminus \{z_0\})$ est dense dans \mathbb{C}

Question 2/23

$\sum_{\alpha \in A} u_{\alpha}(z)$ converge normalement sur tout
compact de U

Réponse 2/23

Pour tout compact K de U , il existe une partie F_K finie de A telle que pour tout $\alpha \in A \setminus F_K$, u_α n'a pas de pôles dans K et $\sum_{\alpha \in A \setminus F_K} u_\alpha(z)$ converge normalement sur K

Question 3/23

Fonction elliptique holomorphe sur \mathbb{C}

Réponse 3/23

Une fonction elliptique et holomorphe sur \mathbb{C}
est constante

Question 4/23

Réseau de \mathbb{C}

Réponse 4/23

$\Lambda \leq \mathbb{C}$ de la forme $\Lambda = \omega_1 \mathbb{Z} + \omega_2 \mathbb{Z}$

Question 5/23

Fonction elliptique pour Λ

Réponse 5/23

Fonction f méromorphe sur \mathbb{C} vérifiant
 $f(z + \lambda) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \Lambda$

Question 6/23

f est méromorphe sur U

Réponse 6/23

$f: U \setminus F \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe avec F une partie discrète et fermée de U et f est méromorphe en tout point de F

Question 7/23

f est méromorphe en z_0

Réponse 7/23

f admet une singularité illusoire ou un pôle en
 z_0

Question 8/23

$$\zeta(s)$$

Réponse 8/23

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Question 9/23

CNS de Convergence de $\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{|\lambda|^\alpha}$ avec Λ un
réseau

Réponse 9/23

$$\alpha > 2$$

Question 10/23

$$G_n(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{G_n(\alpha \Lambda)}{\lambda^n}$$

Réponse 10/23

$$\frac{1}{\alpha^n} G_n(\Lambda)$$

Question 11/23

Coefficients de la DSE de $u(z) = \sum_{\alpha \in A} u_{\alpha}(z)$ en z_0

Réponse 11/23

Si pour tout $\alpha \in A$, $u_\alpha(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{\alpha,n} (z - z_0)^n$

alors $a_n = \sum_{\alpha \in A} a_{\alpha,n}$ qui converge absolument

Question 12/23

Formes des fonction elliptiques pour Λ

Réponse 12/23

Si f est une fonction elliptique pour Λ alors il existe un unique $(R, S) \in \mathbb{C}(X)$ tel que

$$f = R(\wp_\Lambda) + S(\wp_\Lambda)\wp'_\Lambda$$

Question 13/23

Grand théorème de Picard

Réponse 13/23

Si f a une singularité essentielle en z_0 alors il existe $F \subset \mathbb{C}$, $|F| \leq 1$ telle que pour tout V voisinage de z_0 dans U , $\mathbb{C} \setminus F \subset f(V \setminus \{z_0\})$

Question 14/23

f admet une singularité illusoire en z_0

Réponse 14/23

f est bornée au voisinage de z_0

Pour tout $n < 0$, $a_n = 0$

f se prolonge en \tilde{f} holomorphe sur U

Question 15/23

Théorème de Mittag-Leffler

Réponse 15/23

Soit U un ouvert de \mathbb{C} et F une partie discrète et fermée de U , alors pour $(P_a)_{a \in F}$ des polynômes non nuls sans termes constants, il existe une fonction méromorphe sur \mathbb{C} qui a exactement F comme pôles et qui admet

$$P_a \left(\frac{1}{z - a} \right) \text{ comme partie singulière en tout } a \in F$$

Question 16/23

Identité d'Euler

Réponse 16/23

$$\cot(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z + n\pi} + \frac{1}{z - n\pi} \right)$$

Question 17/23

Pôles de $\sum u_\alpha(z)$ qui converge normalement
sur tout compact

Réponse 17/23

Pour F_α les pôles de u_α alors $F = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha$ est
une partie discrète fermée de \bar{U} et
 $u(z) = \sum_{\alpha \in A} u_\alpha(z)$ converge absolument sur
 $U \setminus F$

Question 18/23

Partie singulière de f en z_0

Réponse 18/23

Partie négative du développement en série de
Laurent de f holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$ où
 $z_0 \in U$

Question 19/23

f admet une singularité essentielle en z_0

Réponse 19/23

f est holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$ et la singularité en z_0 n'est ni illusoire ni un pôle

Question 20/23

$$\wp_{\Lambda}(z)$$

Réponse 20/23

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z + \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

\wp_Λ converge normalement sur tout compact de \mathbb{C} et définit une fonction méromorphe sur \mathbb{C} et Λ -périodique

Question 21/23

Convergence de $\sum_{\alpha \in A} u_{\alpha}^{(n)}(z)$

Réponse 21/23

Si $\sum_{\alpha \in A} u_{\alpha}(z)$ converge normalement vers u sur tout compact de \mathbb{C} alors u est méromorphe et $\sum_{\alpha \in A} u_{\alpha}^{(n)}(z)$ converge normalement vers $u^{(n)}(z)$

Question 22/23

Propriété de $G_n: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\tau \longmapsto G_n(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$$

$$G_n(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^n}$$

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

Réponse 22/23

G_n est holomorphe

Question 23/23

f admet un pôle d'ordre k en z_0

Réponse 23/23

$$|f(z)| \xrightarrow[\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}]{} +\infty$$

Il existe $k \geq 1$ tel que $a_{-k} \neq 0$ et pour tout
 $n < -k$, $a_n = 0$

Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $f(z) - P\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$
est bornée au voisinage de z_0