

# Topologie

## *Topologie des espaces vectoriels normés*

## Question 1/44

Définition alternative d'un espace complet

## Réponse 1/44

Espace où toute suite convergent absolument  
est convergente

## Question 2/44

$A$  est une partie étoilée de  $E$

## Réponse 2/44

$$\exists a \in A, \forall x \in A, [a, x] \subset A$$

## Question 3/44

Image continue d'un connexe

## Réponse 3/44

Si  $f$  est continue et  $A$  connexe, alors  $f(A)$  est  
connexe

## Question 4/44

$f: A \rightarrow B$  est une isométrie



## Réponse 4/44

$$\begin{aligned} f(A) &= B \\ \forall (a, a') \in A^2, \|f(a) - f(a')\| &= \|a - a'\| \end{aligned}$$

## Question 5/44

$$\mathrm{sp}(\exp(M))$$

## Réponse 5/44

$$\{e^\lambda, \lambda \in \operatorname{sp}(M)\}$$

## Question 6/44

$f: E \rightarrow \mathbb{K}$  est une application polynomiale sur  
 $E$  de base  $(e_1, \dots, e_n)$

## Réponse 6/44

$$\text{Si } x = \sum_{k=1}^n (x_k e_k)$$

$$\exists (\lambda_{k_1, \dots, k_n})_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N}^n)},$$

$$f(x) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n} \left( \lambda_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \right)$$

## Question 7/44

Image continue d'un compact

## Réponse 7/44

Si  $f$  est continue et  $K$  un compact, alors  $f(K)$   
est un compact

## Question 8/44

$A$  est une partie connexe par arcs de  $E$



## Réponse 8/44

$\forall (x, y) \in A^2$ , il existe un chemin joignant  $x$  à  $y$

## Question 9/44

Théorème de Riesz

## Réponse 9/44

$E$  est de dimension finie si et seulement si sa  
boule unité est fermée

## Question 10/44

Théorème de Bolzano-Weirstrass

## Réponse 10/44

Dans un evn de dimension finie, toute suite bornée admet une valeur d'adhérence

## Question 11/44

Normes usuelles sur  $\mathbb{K}[X]$   
Normes avec les valeurs

## Réponse 11/44

$$\|P\|_1 = \int_a^b (|P(t)|) \, dt$$

$$\|P\|_2 = \sqrt{\int_a^b (|P(t)|^2) \, dt}$$

$$\|P\|_\infty = \sup(\{|P(x)|, x \in [a, b]\})$$

## Question 12/44

$$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$
$$\exp(M)$$



## Réponse 12/44

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{M^n}{n!} \right)$$

## Question 13/44

$$u \in \mathcal{L}(E)$$
$$\exp(u)$$

## Réponse 13/44

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{u^n}{n!} \right)$$

## Question 14/44

Théorème de Borel-Lebesgue

## Réponse 14/44

Si  $K$  est un compact et  $(\Omega_i)_{i \in I}$  une famille d'ouverts telle que  $K \subset \bigcup_{i \in I} (\Omega_i)$

Alors, il existe  $J \subset I$  fini tel que  $K \subset \bigcup_{i \in J} (\Omega_i)$

## Question 15/44

Partie complète  $A$  d'un espace métrique  $E$

## Réponse 15/44

Toute suite de Cauchy dans  $A$  est convergente  
dans  $A$

## Question 16/44

Image continue d'un connexe par arcs



## Réponse 16/44

Si  $f$  est continue et  $A$  une partie connexe par arcs, alors  $f(A)$  est connexe par arcs

## Question 17/44

Chemin joignant  $x \in E$  à  $y \in E$

## Réponse 17/44

Application  $\gamma$  continue de  $[0, 1]$  dans  $E$  telle  
que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(1) = y$

## Question 18/44

Normes usuelles sur  $\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$

## Réponse 18/44

$$u \in \ell_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{N}) : \|u\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} (|u_k|)$$

$$u \in \ell_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N}) : \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} (|u_k|^2)}$$

$$u \in \ell_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mathbb{N}) : \|u\|_{\infty} = \sup(\{|u_k|, k \in \mathbb{N}\})$$

## Question 19/44

Normes usuelles sur  $\mathbb{K}^n$

## Réponse 19/44

$$\|x\|_1 = \sum_{k=0}^n (|x_k|)$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^n (|x_k|^2)}$$

$$\|x\|_\infty = \max(\{|x_k|, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\})$$

## Question 20/44

$$|||u|||$$



## Réponse 20/44

$$\sup(\{\|u(x)\|, x \in E, \|x\| = 1\})$$

## Question 21/44

Propriétés de  $\|\cdot\|$

## Réponse 21/44

$$|||u \circ v||| \leq |||u||| \times |||v|||$$

$$|||\text{id}||| = 1$$

$$|||u^{-1}||| \geq \frac{1}{|||u|||}$$

## Question 22/44

Caractérisation des convexes par les  
applications continues

## Réponse 22/44

$A$  est connexe si et seulement si toute application continue de  $A$  dans  $\{0, 1\}$  est constante

## Question 23/44

Continuité des applications polynomiales

## Réponse 23/44

Une application polynomiale dans un evn de dimension finie est continue

## Question 24/44

$$E \setminus \mathring{A}$$



## Réponse 24/44

$$\overline{E \setminus A}$$

## Question 25/44

$N$  et  $N'$  sont équivalentes

## Réponse 25/44

$$\exists(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \alpha N \leq N' \leq \beta N$$

## Question 26/44

Espace de Hilbert

## Réponse 26/44

Espace préhilbertien réel complet

## Question 27/44

$$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$
$$\|M\|$$

## Réponse 27/44

$$\sup(\{\|MX\|, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \|X\| = 1\})$$

## Question 28/44

Espace de Banach



## Réponse 28/44

Evn complet

## Question 29/44

Expression de  $\|M\|_2$  avec  $\text{tr}$

## Réponse 29/44

$$\|M\|_2 = \sqrt{\text{tr}(\overline{M}^\top M)}$$

## Question 30/44

$\dot{A}$

## Réponse 30/44

$$\{x \in A, \exists \varepsilon > 0, \mathcal{B}(x, \varepsilon) \subset A\}$$

## Question 31/44

Normes usuelles sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## Réponse 31/44

$$\|M\|_1 = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^p (|m_{i,j}|) \right)$$

$$\|M\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^p (|m_{i,j}|^2) \right)}$$

$$\|M\|_\infty = \max(\{|m_{i,j}|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, p \rrbracket\})$$

## Question 32/44

Identité du parallélogramme



## Réponse 32/44

Pour une norme associée à un produit scalaire

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

## Question 33/44

Théorème des bornes atteintes

## Réponse 33/44

Si  $K$  est un compact non vide et  $f$  une application continue, alors  $f$  est bornée sur  $K$  et atteint ses bornes

## Question 34/44

$$\varphi \in \mathcal{L}(E_1 \times \cdots \times E_n, F)$$
$$|||\varphi|||$$

## Réponse 34/44

$$\sup_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n \\ N_1(x_1) = \dots = N_n(x_n) = 1}} (\|\varphi(x_1, \dots, x_n)\|)$$

## Question 35/44

$$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ telle que } \|M\| < 1$$
$$\sum M^k$$

## Réponse 35/44

$$I_n - M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} (M^k) = (I_n - M)^{-1}$$

## Question 36/44

Produit scalaire canonique sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$



## Réponse 36/44

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$$

## Question 37/44

Normes usuelles sur  $\mathbb{K}[X]$   
Normes avec les coefficients

## Réponse 37/44

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{\deg(P)} (|p_k|)$$

$$\|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\deg(P)} (|p_k|^2)}$$

$$\|P\|_\infty = \max(\{|p_k|, k \in \llbracket 1, \deg(P) \rrbracket\})$$

## Question 38/44

Normes usuelles sur  $\mathcal{C}([a, b])$

## Réponse 38/44

$$\|f\|_1 = \int_a^b (|f(t)|) \, dt$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b (|f(t)|^2) \, dt}$$

$$\|f\|_\infty = \sup(\{|f(x)|, x \in [a, b]\})$$

## Question 39/44

$$E \setminus \overline{A}$$

## Réponse 39/44

$$\overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}}$$

## Question 40/44

$$\text{fr}(A)$$



## Réponse 40/44

$$\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$$

## Question 41/44

Espace complet

## Réponse 41/44

Espace métrique où les suites de Cauchy sont  
convergeantes

## Question 42/44

$A$  est connexe

## Réponse 42/44

Les seules parties ouvertes et fermées de  $A$  sont  
 $A$  et  $\emptyset$

## Question 43/44

Théorème du point fixe de Picard

## Réponse 43/44

Soit  $A$  une partie complète d'un espace métrique  $E$  et  $f: A \rightarrow A$  une application  $k$ -contractante (i.e.  $k$ -lipsichtzienne,  $k < 1$ )

$f$  a un unique point fixe  $p \in A$

La suite définie par  $u_0 \in A$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  converge vers  $p$  et  $d(u_n, p) \leq \frac{k^n}{1-k} d(u_1, u_0)$

## Question 44/44

Théorème de Heine



## Réponse 44/44

Si  $f$  est une application continue sur un compact, alors  $f$  est uniformément continue