

# **Algèbre 2**

## ***Espaces préhilbertiens réels***

## Question 1/18

Formule de changement de base pour les formes bilinéaires

## Réponse 1/18

$$\text{Mat}_{\mathcal{D}}(\varphi) = (P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}})^{\top} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$$

## Question 2/18

$\varphi$  est définie

## Réponse 2/18

$$\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

## Question 3/18

Norme

## Réponse 3/18

$$\forall x \in E, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (séparation)}$$

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x) \text{ (absolue} \\ \text{homogénéité)}$$

$$\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y) \\ \text{(inégalité triangulaire)}$$

## Question 4/18

Structure de l'ensemble des formes bilinéaires



## Réponse 4/18

$\mathcal{B}(E)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

## Question 5/18

Formule de polarisation

## Réponse 5/18

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$$

## Question 6/18

$\varphi$  est positive

## Réponse 6/18

$$\text{im}(q_\varphi) \subset \mathbb{R}_+$$

## Question 7/18

$\varphi$  est négative

## Réponse 7/18

$$\mathrm{im}(q_\varphi) \subset \mathbb{R}_-$$

## Question 8/18

Forme quadratique



## Réponse 8/18

$q: E \rightarrow \mathbb{R}$  tel qu'il existe  $\varphi \in \mathcal{B}(E)$  tel que

$$q(x) = \varphi(x, x)$$

$q_\varphi$  est la forme quadratique associée à  $\varphi$

## Question 9/18

Norme euclidienne

## Réponse 9/18

Une norme  $N$  est euclidienne si et seulement  
s'il existe un produit scalaire dont  $N$  est la  
norme associée

## Question 10/18

Espace préhilbertien réel

## Réponse 10/18

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  où  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

## Question 11/18

Produit scalaire

## Réponse 11/18

Forme bilinéaire symétrique, définie et positive  
Noté  $\langle x, y \rangle$  ou  $(x|y)$

## Question 12/18

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$$



## Réponse 12/18

$$(\varphi(e_i, e_j))_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$$

## Question 13/18

Inégalité de Cauchy-Schwarz pour un produit  
scalaire  
Cas d'égalité

## Réponse 13/18

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$

Égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires

## Question 14/18

Espace euclidien

## Réponse 14/18

Espace préhilbertien réel de dimension finie

## Question 15/18

$$\|x\|$$

## Réponse 15/18

$$\sqrt{\langle x, x \rangle}$$

## Question 16/18

$\varphi$  est symétrique



## Réponse 16/18

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

## Question 17/18

Expression matricielle de  $\varphi(x, y)$

## Réponse 17/18

$$\varphi(x, y) = [x]_{\mathcal{B}}^{\top} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)[y]_{\mathcal{B}}$$

## Question 18/18

$$\dim(\mathcal{B}(E))$$

## Réponse 18/18

$$n^2$$