

# **Analyse**

## ***Fonctions de deux variables***

## Question 1/12

$$\nabla f(X)$$

## Réponse 1/12

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(f(X)) \\ \frac{\partial}{\partial y}(f(X)) \end{pmatrix}$$

## Question 2/12

Expression de la dérivée le long d'un vecteur

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ avec } \nabla$$

## Réponse 2/12

$$\begin{aligned} D_u(f) &= \langle \nabla f(X), u \rangle \\ &= a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(X)) + b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(f(X)) \end{aligned}$$

## Question 3/12

Extremum local  
Extremum global

## Réponse 3/12

Maximum local :

$$\forall X \in D \subset \mathbb{R}^2, f(X) \leq f(X_0)$$

Maximum global :

$$\exists V \in \mathcal{V}(X_0), \forall X \in D \cap V, f(X) \leq f(X_0)$$

Extremum : maximum ou minimum

## Question 4/12

DL d'une fonction de deux variables



## Réponse 4/12

$$f(X_0 + H) = P(h, k) + o(\|H\|^n)$$

## Question 5/12

Condition nécessaire pour un extremum local

## Réponse 5/12

$$\nabla f(X_0) = 0$$

## Question 6/12

Dérivée selon un vecteur  $u$

## Réponse 6/12

$$D_u(f) = \frac{d}{dt}(f(X + tu))$$

## Question 7/12

Dérivée directionnelle

## Réponse 7/12

$D_u(f)$  avec  $u$  unitaire

## Question 8/12

$$\frac{\partial}{\partial u}(f(\varphi(u, v), \psi(u, v)))$$



## Réponse 8/12

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}(f(\varphi(u, v), \psi(u, v))) \frac{\partial}{\partial u}(\varphi(u, v)) \\ & + \frac{\partial}{\partial y}(f(\varphi(u, v), \psi(u, v))) \frac{\partial}{\partial u}(\psi(u, v)) \end{aligned}$$

## Question 9/12

Règle de la chaîne

## Réponse 9/12

$$\begin{aligned} &\text{Si } \gamma(t) = (x(t), y(t)) \\ &\quad \frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) \\ &= x'(t) \frac{\partial}{\partial x}(f(\gamma(t))) + y'(t) \frac{\partial}{\partial y}(f(\gamma(t))) \\ &\quad = \langle \gamma'(t), \nabla f(\gamma(t)) \rangle \end{aligned}$$

## Question 10/12

Point critique

## Réponse 10/12

$$\nabla f(X_0) = 0$$

## Question 11/12

Ligne de niveau de  $f$  de hauteur  $a$

## Réponse 11/12

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = a\}$$

## Question 12/12

DL<sub>1</sub> de  $f(x, y)$  au voisinage de  $X_0$



## Réponse 12/12

$$\begin{aligned} & f(X_0) + (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} (f(X_0)) \\ & \quad + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} (f(X_0)) \\ &= f(X_0) + \langle X - X_0, \nabla f(X_0) \rangle + o(\|X - X_0\|) \end{aligned}$$