Algèbre 1
Caractères des représentations linéaires

Question 1/17

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle$$

Réponse 1/17

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_V(g)} \times \chi_W(g) = \dim(\mathrm{Hom}_G(V,W))$$

Question 2/17

Théorème de Frobénius

Réponse 2/17

Les $(\chi_I, I \in \mathcal{I}_G(\mathbb{C}))$ forment une base de $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(G)$

Question 3/17

CNS pour avoir $\chi_V(g) = \dim(V)$

Réponse 3/17

$$\rho(g) = \mathrm{id}_V$$

Question 4/17

Caractère de (ρ, V)

Réponse 4/17

$$\begin{aligned} \chi_V : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \mathrm{tr}(\rho(g)) \end{aligned}$$

Question 5/17

Produit scalaire sur $\mathcal{R}_G(\mathbb{C})$

Réponse 5/17

Si (v, V) et (w, W) sont deux représentations complexes de G alors

$$\langle [u], [v] \rangle = \dim(\mathrm{Hom}_G(V, W))$$

En particulier, sur $\mathcal{I}_G(\mathbb{C})$, $\langle [u], [v] \rangle = \delta_{[u],[v]}$

Question 6/17

$$\chi_{V \otimes W}$$

Réponse 6/17

$$\chi_V \times \chi_W$$

Question 7/17

CNS pour V irréductible

Réponse 7/17

$$\|\chi_V\| = 1$$

Question 8/17

$$\chi_{V \oplus W}$$

Réponse 8/17

$$\chi_V + \chi_W$$

Question 9/17

$$\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}$$

Réponse 9/17

$$\overline{\chi_V} \times \chi_W$$

Question 10/17

Produit scalaire hermitien sur V invariant par l'action de G

Réponse 10/17

$$\langle x, y \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle gx, gy \rangle$$

Question 11/17

Fonction centrales

Réponse 11/17

$$f \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(G) \text{ si pour tout } (g,h) \in G^2,$$
$$f\left(ghg^{-1}\right) = f(h)$$
$$\dim(\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(G)) = \left|\left\{\left\{ghg^{-1}, g \in G\right\}, h \in G\right\}\right|$$

Question 12/17

$$\chi_V\left(g^{-1}\right)$$

Réponse 12/17

$$\overline{\chi_V(g)}$$

Question 13/17

Propriétés de $f_{V,\alpha} = \dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\alpha(g)} \times \rho(g)$ pour α une fonction centrale

Réponse 13/17

$$f_{V,\alpha} \in \mathrm{Hom}_G(()V)$$

$$\text{Si } V \in \mathcal{I}_G(\mathbb{C}),\ f_{V,\alpha} = \frac{\langle \alpha, \chi_V \rangle}{\dim(V)} \mathrm{id}_V$$

$$\text{Si } u \in \mathrm{Hom}_G(V, W),\ u \circ f_{V,\alpha} = f_{W,\alpha} \circ u$$

Question 14/17

Expression de $\dim\left(V^G\right)$ avec χ_V

Réponse 14/17

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)$$

Question 15/17

$$f_{V,\chi_I} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_I(g)} \times \rho(g)$$

$$I \in \mathcal{I}_G(\mathbb{C})$$

Réponse 15/17

$$\frac{1}{\dim(I)} p$$

p le projecteur sur I parallèlement aux autres représentations irréductibles

Question 16/17

$$\chi_{V^*}$$

Réponse 16/17

$$\overline{\chi_V}$$

Question 17/17

$$\mathrm{sp}(\rho(g))$$

Réponse 17/17

$$\mathrm{sp}(\rho(g)) \subset \mathbb{U}_{|G|}$$