

Analyse

Intégrales à paramètre

Question 1/3

Dérivation d'une intégrale à paramètre

Réponse 1/3

Si $\forall t \in J$, $f(\cdot, t)$ est de classe \mathcal{C}^1
 $\forall x \in I$, $f(x, \cdot)$ est intégrable et $\frac{\partial}{\partial x}(f(x, \cdot))$ est
continue par morceaux

$\exists \varphi: J \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que
 $\forall (x, t) \in I \times J$, $|\frac{\partial}{\partial x}(f(x, t))| \leq \varphi(t)$
Alors, $\int_J (f(x, t)) \, dt$ est de classe \mathcal{C}^1
 $\frac{d}{dx} \left(\int_J (f(x, t)) \, dt \right) = \int_J \left(\frac{\partial}{\partial x}(f(x, t)) \right) \, dt$

Question 2/3

Dérivation d'une intégrale à paramètre pour la
classe \mathcal{C}^k

Réponse 2/3

Si $\forall t \in J$, $f(\cdot, t)$ est de classe \mathcal{C}^k

$\forall x, i \in I \times \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, $\frac{\partial^i}{\partial x^i}(f(x, \cdot))$ est intégrable

et $\frac{\partial^k}{\partial x^k}(f(x, \cdot))$ est continue par morceaux

$\exists \varphi: J \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J, \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k}(f(x, t)) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors, $\int_J (f(x, t)) \, dt$ est de classe \mathcal{C}^k , $\forall i \leq k$,

$$\frac{d^i}{dx^i} \left(\int_J (f(x, t)) \, dt \right) = \int_J \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}(f(x, t)) \right) dt$$

Question 3/3

Continuité d'une intégrale à paramètre

Réponse 3/3

Si $\forall t \in J$, $f(\cdot, t)$ est continue

$\forall x \in I$, $f(x, \cdot)$ est continue par morceaux

$\exists \varphi: J \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que

$\forall (x, t) \in I \times J$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$

Alors, $x \mapsto \int_J (f(x, t)) \, dt$ est continue sur I