

**Intégration et
probabilités**
Transformée de Fourier

Question 1/19

Limite de $\mathcal{F}f$

Réponse 1/19

$\mathcal{F}f$ est continue et $\mathcal{F}f(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow +\infty} 0$

Question 2/19

Proporété de $\mathcal{F}: \mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$

Réponse 2/19

\mathcal{F} est injective

Question 3/19

Théorème de Hahn-Jordan

Réponse 3/19

Si μ est une mesure signée sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$
alors μ se décompose de manière unique en
deux mesures positives μ_+ et μ_- étrangères
telles que $\mu = \mu_+ - \mu_-$

Question 4/19

Lemme de réciprocité pour des mesures

Réponse 4/19

Si μ et ν sont deux mesures signées,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}\mu(x) \nu(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}\nu(x) \mu(\mathrm{d}x)$$

Question 5/19

Lemme de réciprocité

Réponse 5/19

Si f et g sont deux fonctions dans \mathcal{L}^1 ,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}f(x)g(x) \lambda_d(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathcal{F}g(x) \lambda_d(\mathrm{d}x)$$

Question 6/19

$$\mathcal{F}(e_y f)$$

Réponse 6/19

$$\tau_y \mathcal{F}f$$

Question 7/19

$$\lambda_d(\mathrm{d}x)$$

Réponse 7/19

$$\frac{dx}{(2\pi)^{d/2}}$$

Question 8/19

$$\mathcal{F}(f * g)$$

Réponse 8/19

$$\mathcal{F}f \times \mathcal{F}g$$

Question 9/19

$$\mathcal{F}(\tau_y f)$$

Réponse 9/19

$$e_{-y} \mathcal{F}f$$

Question 10/19

$$\mathcal{F}g(\xi)$$
$$f \in \mathcal{L}^1, M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}), g(x) = f(M^{-1}x)$$

Réponse 10/19

$$|\det(M)| \mathcal{F}f(M^\top \xi)$$

Question 11/19

$$\mathcal{F}f(\xi)$$

Réponse 11/19

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi \cdot x} \lambda_d(dx)$$

Question 12/19

$$\begin{aligned} \text{Régularité de } \mathcal{F}: \mathcal{L}^1 &\longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \\ f &\longmapsto \mathcal{F}f \end{aligned}$$

Réponse 12/19

\mathcal{F} est 1-lipschitzienne

Question 13/19

Intégrale de Gauss

Réponse 13/19

$$g_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma^d} \exp\left(\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right)$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} g_{\sigma}(x) \lambda_d(\mathrm{d}x) = 1$$

Question 14/19

$$\mathcal{F}_\mu$$

Réponse 14/19

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi \cdot x} \mu(dx)$$

Question 15/19

Formule de Fourier-Plancherel

Réponse 15/19

L'unique application $\Phi: L^2 \rightarrow L^2$ continue telle
que $\Phi|_{L^1 \cap L^2} = \mathcal{F}|_{L^1 \cap L^2}$
 Φ est une isométrie

Question 16/19

Régularité de $\mathcal{F}f$

Réponse 16/19

Si $|x|^k f \in \mathcal{L}^1$ alors $\mathcal{F}f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et pour
tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq k$,

$$\frac{\partial^{|\alpha|} \mathcal{F}f}{\partial x^\alpha}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} (-ix)^\alpha f(x) e^{-i\xi \cdot x} \lambda_d(dx)$$

$$\text{En particulier, } \mathcal{F}f(\xi) = o_{|\xi| \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|\xi|^k} \right)$$

Question 17/19

Théorème d'inversion de Fourier

Réponse 17/19

Si $f \in \mathcal{L}^1$ telle que $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}^1 \lambda_d$ presque partout alors $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}f(\xi) e^{i\xi \cdot x} \lambda_d(d\xi)$

Question 18/19

$$\mu * \nu$$

Réponse 18/19

$$\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(x + y) \mu \otimes \nu(\mathrm{d}x \mathrm{d}y)$$

Question 19/19

Théorème d'inversion de Fourier pour les
mesures

Réponse 19/19

Soit μ une mesure signée sur \mathbb{R}^d telle que $\mathcal{F}\mu \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ alors μ admet une densité par rapport à $\mathcal{RFF}\mu \lambda_d$ presque partout