Algèbre 1
Forme linéaire et dualité

Question 1/20

Crochet de dualité

Réponse 1/20

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E^* \times E &\longrightarrow \Bbbk \\ (\ell, u) &\longmapsto \ell(u) \end{aligned}$$

Question 2/20

$\dim(F^{\perp})$ en dimension finie

Réponse 2/20

$$\dim(E) = \dim\left(F^{\perp}\right) + \dim(F)$$

Question 3/20

$$\ker({}^t u)$$
$$\operatorname{im}({}^t u)$$

Réponse 3/20

En dimension finie

$$\mathrm{im}(u)^{\perp}$$

$$\ker(u)^{\perp}$$

Question 4/20

Forme linéaire sur $\mathbb{k}$ où E est un $\mathbb{k}$-ev

Réponse 4/20

Application linéaire $\ell : E \to \mathbb{k}$

L'ensemble des formes linéaires est le dual de E noté E^*

Question 5/20

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$$

$$A^\top$$

Réponse 5/20

$$A^\top = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F^*,\mathcal{B}_E^*}({}^t u)$$

Question 6/20

Première forme coordonnée

Réponse 6/20

Forme linéaire sur E de base $(e_1, \cdots, e_n)$
vérifiant $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$

Question 7/20

$$(F+G)^{\perp}$$

Réponse 7/20

$$F^{\perp} \cap G^{\perp}$$

Question 8/20

$$\text{Propriété de } \tau : E \longrightarrow E^{**}$$
$$x \longmapsto \begin{pmatrix} E^* \longrightarrow \mathbb{k} \\ \ell \longmapsto \ell(x) \end{pmatrix}$$

Réponse 8/20

τ est un isomorphisme en dimension finie

Question 9/20

$$u \in \mathcal{L}(E, F)$$

$$^t u$$

Réponse 9/20

$$\begin{aligned} {}^t u : F^* &\longrightarrow E^* \\ \ell &\longmapsto \ell \circ u \end{aligned}$$

Question 10/20

Propriétés sur les bases de E^*

Réponse 10/20

Pour toute base $\mathcal{B}'$ de E^*, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B}' = \mathcal{B}^*$

Question 11/20

$$V \subset E^*$$
$$V^\top$$

Réponse 11/20

$$\{x \in E, \forall \ell \in V, \ell(x) = 0\}$$

Question 12/20

Propriétés de $^{\perp}$ en dimension finie

Réponse 12/20

$$\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$$
$$(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$$

Question 13/20

Propriété de ${}^{t}\cdot$ en dimension finie

Réponse 13/20

${}^t\cdot$ est un isomorphisme

Question 14/20

Théorème du rang

Réponse 14/20

Si S est un supplémentaire de F dans E, alors S est un système de représentants de E/F et $\pi_S\colon S \to E/F$ est un isomorphisme

Question 15/20

$$V^\perp \cap E^{**}$$

Réponse 15/20

$$\tau(V^\top)$$

Question 16/20

$$\ker(g)^{\perp}$$

Réponse 16/20

$$\Bbbk g$$

Question 17/20

Élément canoniquement isomorphe à $F^\perp$ F sev de E

Réponse 17/20

$$(E/F)^*$$

Question 18/20

$$\mathrm{rg}({}^t u)$$

Réponse 18/20

En dimension finie

$$\mathrm{rg}(u)$$

Question 19/20

CNS pour $f \in \mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_n)$ dans E de dimension finie

Réponse 19/20

$$\ker(f) \supset \bigcap i = 1n\ker(')f_i$$

Question 20/20

$$A \subset E$$

$$A^{\perp}$$

Réponse 20/20

$$\{\ell \in E^*, \forall a \in A, \langle \ell, a \rangle = 0\}$$