

Algèbre 1

Groupes

Question 1/43

Si (G, \star) est un groupe et $H \subset G$
Caractérisation(s) des sous-groupes

Réponse 1/43

$$H \neq \emptyset \quad \forall (x, y) \in H, \quad x \star y \in H$$

$$\forall x \in H, \quad x^s \in H$$

$$H \neq \emptyset \quad \forall (x, y) \in H^2, \quad x \star y^s \in H$$

$$e_G \in H \quad \forall (x, y) \in H^2, \quad x \star y^s \in H$$

Question 2/43

Endomorphisme de X

Réponse 2/43

Homomorphisme de X de E dans lui-même
(muni des mêmes lois)

Question 3/43

Si (G, \star) est un groupe
Un sous-ensemble H de G est appelé
sous-groupe de G

Réponse 3/43

H est stable pour la loi de G et la loi induite définit sur H une structure de groupe

Question 4/43

Ordre d'un élément d'un groupe

Réponse 4/43

$$\text{ord}(x) = \min(\{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = e\})$$

Question 5/43

Ordre d'un groupe
Si G est un groupe

Réponse 5/43

$$\text{ord}(G) = |G|$$

Question 6/43

x et y sont dans la même classe à gauche
modulo H

Réponse 6/43

$$x \equiv_g y [H] \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

Question 7/43

Théorème de Lagrange pour l'ordre des groupes

Réponse 7/43

Si G est un groupe fini et H un sous-groupe de G

$$|H| \mid |G|$$

Question 8/43

Isomorphisme de X

Réponse 8/43

Homomorphisme de X bijectif

Question 9/43

Premier théorème d'isomorphisme

Réponse 9/43

Si $f \in \text{Hom}(G, H)$

$\ker(f)$ est un sous-groupe distingué de G , et f passe au quotient, définissant un morphisme de groupes $\tilde{f}: G / \ker(f) \rightarrow H$

\tilde{f} est injectif et sa corestriction à son image est un isomorphisme

Question 10/43

Les classes à gauche modulo H

Réponse 10/43

$$\{aH, a \in G\}$$

Question 11/43

$$\text{Si } \ker(f) = \{e_G\}$$

Réponse 11/43

f est injectif (la réciproque est vraie)

Question 12/43

Si H est un sous-groupe distingué de G

Réponse 12/43

$$\begin{aligned} & \forall a \in G, aH = Ha \\ \Leftrightarrow & \forall a \in G, \forall h \in H, aha^{-1} \in H \end{aligned}$$

Question 13/43

Si G et H sont deux groupes et
 $f \in \text{Hom}(G, H)$
 $f(x^{-1})$

Réponse 13/43

$$f(x)^{-1}$$

Question 14/43

Image directe et réciproque de sous-groupes
par un homomorphisme

Réponse 14/43

Si G et H sont deux groupes, et $f \in \text{Hom}(G, H)$ un morphisme de groupes, G' et H' deux sous-groupes respectivement de G et H

$f(G')$ est un sous-groupe de H
 $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G

Question 15/43

Si G est un groupe
Structure de $(\text{Aut}(G), \circ)$

Réponse 15/43

$(\text{Aut}(G), \circ)$ est un groupe

Question 16/43

Sous-groupe monogène

Réponse 16/43

$$\langle x \rangle = \{x^n, n \in \mathbb{N}\}$$

Question 17/43

Description des groupes monogènes
Si $G = \langle x \rangle$

Réponse 17/43

Si $\text{ord}(x) = +\infty$, G est isomorphe à \mathbb{Z}

Si $\text{ord}(x) = n \in \mathbb{N}^*$, G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Question 18/43

Si $f \in \text{Hom}(G, K)$ et H est un sous-groupe distingué et $H \subset \ker(f)$

Réponse 18/43

$$f = \tilde{f} \circ \pi$$

La réciproque est vraie

Question 19/43

Groupe abélien

Réponse 19/43

La loi \star de G est commutative

Question 20/43

Réciproque d'isomorphisme

Réponse 20/43

Si $f: F \rightarrow F$ est un isomorphisme, alors f^{-1}
est un isomorphisme

Question 21/43

Propriété des groupes monogènes

Réponse 21/43

Un groupe monogène est abélien

Question 22/43

Sous-groupe propre de G

Réponse 22/43

Sous-groupe de G distinct de G et $\{e_G\}$

Question 23/43

Résolution de $x^n = e$

Réponse 23/43

$\{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = e\}$ est de la forme $a\mathbb{Z}$

x est d'ordre fini si et seulement si $a \neq 0$ (on a donc $\text{ord}(x) = a$)

Question 24/43

Description par le bas du sous-groupe engendré
par une partie

Réponse 24/43

$$\langle X \rangle = \{x_1 \cdots x_n, (x_1, \cdots, x_n) \in X^n\} \\ \cup \{x^{-1}, x \in X\}$$

e correspond au produit vide

Question 25/43

Propriétés d'un groupe (G, \star)

Réponse 25/43

G admet un unique élément neutre pour \star
 $\forall x \in G, \exists! x^s \in G$

Question 26/43

Passage au quotient de la loi dans le cas d'un
sous-groupe distingué

Si G est un groupe et H un sous-groupe
distingué de G

Réponse 26/43

$\equiv_g = \equiv_d$ et on note la relation \equiv

La loi induite correspond au produit des
classes élément par élément

$$\begin{aligned}(ab)H &= (aH) \cdot (bH) \\ &= \{x \cdot y, x \in aH, y \in bH\}\end{aligned}$$

La loi induite sur l'ensemble quotient munit
celui-ci d'une structure de groupe

Question 27/43

Les classes à droite modulo H

Réponse 27/43

$$\{Ha, a \in G\}$$

Question 28/43

Soient (G, \star) et (H, \diamond) deux groupes
 $f: G \rightarrow H$ est un homomorphisme de groupe

Réponse 28/43

$$\forall (x, y) \in G^2, f(x \star y) = f(x) \diamond f(y)$$

L'ensemble des homomorphisme de G dans H
est noté $\text{Hom}(G, H)$

Si $(G, \star) = (H, \diamond)$, f est un endomorphisme

L'ensemble des automorphismes de G est noté
 $\text{Aut}(G)$

Question 29/43

Groupe cyclique

Réponse 29/43

Groupe monogène fini

Question 30/43

Fibres de f

Soit $x \in f^{-1}(\{y\})$

Réponse 30/43

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{y\}) &= x \times \ker(f) \\ &= \{x \times z, z \in \ker(f)\} = \ker(f) \times x \end{aligned}$$

Question 31/43

Groupe

Réponse 31/43

Muni d'une loi d'une composition interne, de l'associativité, d'un élément neutre et de symétriques

Question 32/43

Ensemble formé par les classes à gauche et à droite

Réponse 32/43

$\{Ha, a \in G\}$ est une partition de G
 $\{aH, a \in G\}$ est une partition de G

Question 33/43

Si G et H sont deux groupes et
 $f \in \text{Hom}(G, H)$
 $f(e_G)$

Réponse 33/43

$$f(e_H)$$

Question 34/43

Si $f \in \text{Hom}(G, K)$ et H est un sous-groupe distingué

Réponse 34/43

f passe au quotient avec $\tilde{f}: G/H \rightarrow K$

Question 35/43

Sous-groupe engendrée par une partie X

Réponse 35/43

$$\langle X \rangle$$

C'est le plus petit sous-groupe contenant X

Question 36/43

Théorème de Lagrange pour l'ordre des
éléments d'un groupe

Réponse 36/43

Si G est un groupe fini et $x \in G$
 $\text{ord}(x) \mid |G|$

Question 37/43

Cardinal des classes de congruence

Réponse 37/43

$$|Ha, a \in G| = |Ha, a \in G| = |H|$$

Question 38/43

Description par le haut du sous-groupe
engendré par une partie

Réponse 38/43

Soient \mathcal{G} l'ensemble des sous-groupes de G et

$$\mathcal{H} = \{H \in \mathcal{G} \mid X \subset H\}$$

$$\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} (H)$$

Question 39/43

Automorphisme de X

Réponse 39/43

Endomorphisme et isomorphisme de X

Question 40/43

Si G et H sont deux groupes et $f \in \text{Hom}(g, h)$
un morphisme de groupes
 $\ker(f)$

Réponse 40/43

$$f^{-1}(e_H) = \{y \in G \mid f(y) = e_H\}$$

Question 41/43

Passage au quotient de la loi dans le cas abélien
Si G est un groupe abélien et H un
sous-groupe de G

Réponse 41/43

$\equiv_g = \equiv_d$ et on note la relation \equiv

La loi induite correspond au produit des classes élément par élément

$$\begin{aligned}(ab)H &= (aH) \cdot (bH) \\ &= \{x \cdot y, x \in aH, y \in bH\}\end{aligned}$$

La loi induite sur l'ensemble quotient munit celui-ci d'une structure de groupe abélien

Question 42/43

x et y sont dans la même classe à droite
modulo H

Réponse 42/43

$$x \equiv_d y [H] \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

Question 43/43

Intersection de sous-groupes

Si G est un groupe, et $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de G

Réponse 43/43

$\bigcap_{i \in I} (H_i)$ est un sous-groupe de G