Algèbre 1
Matrices

Question 1/10

Matrice élémentaite $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Réponse 1/10

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ e_{i,j} = \delta_{(i,j),(k,\ell)} = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$$

Question 2/10

Propriété des matrices $E_{i,j}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Réponse 2/10

La famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut s'exprimer de la forme $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} (\lambda_{i,j}E_{i,j})$

Question 3/10

Description du produit matriciel par colonne

$\mathrm{C}_i(M)$ représente la i-ième colonne de M

Réponse 3/10

$$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

$$C = A \times B$$

$$\forall k \in [\![1, q]\!],\ \ \mathrm{C}_k(C) = \sum_{j=1}^{p} (b_{j,k} \mathrm{C}_j(A))$$

Question 4/10

Description du produit matriciel par ligne

$\mathrm{L}_i(M)$ représente la i-ième ligne de M

Réponse 4/10

$$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

$$C = A \times B$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \ \mathrm{L}_i(C) = \sum_{j=1}^{p} (a_{i,j} \mathrm{L}_j(B))$$

Question 5/10

Matrice identité

Réponse 5/10

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 6/10

Factorisation de $A^n - B^n$

Réponse 6/10

$$(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \text{ tel que } AB = BA$$

$$(A - B)\sum_{k=0}^{n-1}\left(A^{n-k-1}B^k\right)$$

Question 7/10

Factorisation de $(A+B)^n$

Réponse 7/10

$$(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \text{ tel que } AB = BA$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} A^k B^{n-k} \right)$$

Question 8/10

Transposée de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Réponse 8/10

$$A^\top = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,p} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Question 9/10

Structure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Réponse 9/10

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un anneau non commutatif

Question 10/10

Définition du produit matriciel

Réponse 10/10

$$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

$$C = A \times B$$

$$\forall (i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!],\ c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} (a_{i,j} b_{j,k})$$