Intégration et théorie de la mesure

Construction de mesures

Question 1/14

$\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ est une classe momotone (ou λ-système)

Réponse 1/14

$$X \in \mathcal{N}$$

$$(A, B) \in \mathcal{N}^2,\ A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{N}$$

$$(A_j) \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}^*} \text{ croissante alors } \bigcup_{n \geqslant 1} A_j \in \mathcal{N}$$

Question 2/14

Régularité extérieure

Réponse 2/14

$$\mu(A) = \inf(\{\mu(O), O \text{ ouvert}, A \subset O\})$$

Question 3/14

Lemme des classes monotones

Réponse 3/14

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ stable par intersection finie alors

$$m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$$

Question 4/14

Mesure extérieure

Réponse 4/14

$$\mu^* \text{ est une mesure extérieure si}$$
$$\mu^*(\varnothing) = 0$$
$$A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$$
$$\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(A_n)$$

Question 5/14

Tribu complétée $\overline{\mathcal{A}}$

Réponse 5/14

$$\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}_\mu) \text{ où}$$
$$\mathcal{N}_\mu = \{A \subset X, \exists B \in \mathcal{A}, A \subset B \wedge \mu(B) = 0\}$$

Question 6/14

Définition explicite de $\overline{\mathcal{A}}$

Réponse 6/14

$$\left\{A \subset X, \exists (B, B') \in \mathcal{A}^2, \\ B \subset A \subset B' \wedge \mu(B' \setminus B) = 0\right\}$$

μ se prolonge de manière unique sur $\overline{\mathcal{A}}$

Question 7/14

Lien entre Riemann-intégrable et Lebesgue-intégrable

Réponse 7/14

Toute fonction Riemann-intégrable est Lebesgue-intégrable et la valeur des intégrales est la même

Question 8/14

Théorème de Carathéodory

Réponse 8/14

$\mathcal{M}(\mu) = \{A \subset X, A$ est μ^*-mesurable$\}$ est une tribu et μ^* est une mesure sur $\mathcal{M}(\mu^*)$

Question 9/14

A est μ^*-mesurable

Réponse 9/14

$$\text{Pour tout } E \subset X,$$
$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

Question 10/14

Mesure extérieure de Lebesgue

Réponse 10/14

$$\mu_L^*(A) = \inf_{\substack{A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_j \\ P_j \text{ pavés ouverts}}} \left(\left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(P_j) \right\} \right)$$

Question 11/14

$$m(\mathcal{C}) \text{ pour } \mathcal{C} \subset X$$

Réponse 11/14

$$\bigcap_{\substack{\mathcal{N}\ \lambda\text{-système} \\ \mathcal{C}\subset\mathcal{N}}} \mathcal{N}$$

Question 12/14

Régularité intérieure

Réponse 12/14

$$\mu(A) = \sup(\{\mu(K), K \text{ compact}, K \subset A\})$$

Question 13/14

Régularité de μ_L la mesure de Lebesgue

Réponse 13/14

μ_L est intérieurement et extérieurement régulière

Question 14/14

Unicité de meusures qui coïncident sur un ensembl $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$

Réponse 14/14

Si $\mathcal{C}$ est stable par intersections finies, $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$ et il existe $(X_k) \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ croissante avec $\mu(X_k) < +\infty$ tel que $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} X_k$ alors $\mu = \nu$ sur $\mathcal{A}$