

Algèbre 1

Arithmétique

Question 1/13

Formule de Legendre

Réponse 1/13

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$

Question 2/13

Lemme de Gauss

Réponse 2/13

Si $a \mid bc$ et $a \wedge b = 1$, alors $a \mid c$

Question 3/13

$$a \vee b$$

Réponse 3/13

$$\begin{aligned} & \min(\{n \in \mathbb{N}, a \mid n \wedge b \mid n\}) \\ & \max_{(\mathbb{N}^*, |)}(\{n \in \mathbb{N}, a \mid n \wedge b \mid n\}) \\ & \sup_{(\mathbb{N}^*, |)}(a, b) \\ & a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$(a) \cap (b)$ pour un anneau principal

Question 4/13

Relation entre \wedge et \vee

Réponse 4/13

$$(a \wedge b)(a \vee b) = ab$$

Question 5/13

Distributivité de \times sur \wedge et \vee

Réponse 5/13

Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$

$$(a \wedge b) \times c = (ac) \wedge (bc)$$

$$(a \vee b) \times c = (ac) \vee (bc)$$

Question 6/13

$$a \wedge b$$

Réponse 6/13

$$\begin{aligned} & \max(\{n \in \mathbb{N}, n \mid a \wedge n \mid b\}) \\ & \max_{(\mathbb{N}^*, |)}(\{n \in \mathbb{N}, n \mid a \wedge n \mid b\}) \\ & \inf_{(\mathbb{N}^*, |)}(a, b) \\ & a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$(a) + (b)$ pour un anneau principal

Question 7/13

Anneau euclidien

Réponse 7/13

Si \mathbb{A} est un anneau intègre, avec un stathme

$$(v: \mathbb{A} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N})$$

A est euclidien si

$$\forall a \in \mathbb{A}, \forall b \in \mathbb{A} \setminus \{0\} \exists (q, r) \in \mathbb{A}^2, a = bq + r \\ r = 0 \vee v(r) < v(b)$$

Question 8/13

Théorème des restes chinois

$$\begin{cases} x \equiv b_1 [a_1] \\ \vdots \\ x \equiv b_n [a_n] \end{cases}$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}, a_i \wedge a_j = 1$$

Réponse 8/13

$$\hat{a}_i = \prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_j)$$

$$a_i u_i + \hat{a}_i v_i = 1$$

$$x \equiv \sum_{i=1}^n (b_i v_i \hat{a}_i) \left[\prod_{i=1}^n (a_i) \right]$$

Question 9/13

Lemme d'Euclide

Réponse 9/13

Si $a \mid bc$ et $a \in \mathbb{P}$, alors $a \mid b \vee a \mid c$

Si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$, alors $a \wedge bc = 1$

Question 10/13

Divisibilité avec le produit

Réponse 10/13

Si $a \wedge b = 1$, $a \mid c \wedge b \mid c$, alors $ab \mid c$

Question 11/13

Théorème de Fermat

Réponse 11/13

$$p \in \mathbb{P}, a \in \mathbb{N}, a^p \equiv a \ [p]$$

Si p ne divise pas a , $a^{p-1} \equiv 1 \ [p]$

Question 12/13

$$\varphi(n)$$

Réponse 12/13

$$|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$$

Question 13/13

Théorème d'Euler

Réponse 13/13

$$n \in \mathbb{N}^*, \ x \in \mathbb{N}^*, \ x \wedge n = 1, \ x^{\varphi(n)} \equiv 1 \ [n]$$