Algèbre 1
Formes quadratiques

Question 1/25

Poupriétés de q exprimée dans la base duale de $(e_1, \cdots, e_n)$ base orthogonale de E

Réponse 1/25

$$q = \sum_{i=1}^{n} q(e_i)\mu_i^2,\ (\mu_i) \text{ base duale de } (e_i)$$

Réciproquement, si $q = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i^2$ alors la base antéduale de (μ_i) est (e_i) et $q(e_i) = a_i$

$$\operatorname{rg}(q) = |\{i \in [\![1, n]\!], a_i \neq 0\}|$$

$$\operatorname{discr}(q) = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists i \in [\![1, n]\!], a_i = 0 \\ \prod_{i=1}^{n} a_i \bmod \left(\mathbb{k}^\times\right)^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\ker(q) = \bigcap_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ a_i \neq 0}} \ker(\mu_i)$$

Question 2/25

Polynôme homogène associée à $q \in \mathrm{Q}(E)$

Réponse 2/25

$$\rho_q : \quad \mathbb{k}^n \longrightarrow \mathbb{k}$$
$$(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$$

ρ_q est homogène de degré 2 si et seulement si

$$q \in \mathrm{Q}(E)$$

Question 3/25

$$\mathrm{im}(u^*)$$

Réponse 3/25

$$\ker(u)^{\perp}$$

Question 4/25

Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{C}$

Réponse 4/25

Si q est une forme quadratique sur $\mathbb{C}$ alors il existe $\left(\mu_1, \cdots, \mu_{\text{rg}(q)}\right) \in (E^*)^{\text{rg}(q)}$ tel que

$$q = \sum_{i=1}^{\text{rg}(q)} \mu_i^2$$

Question 5/25

q est positive (resp. négative)

(E, q) espace quadratique sur $\mathbb{R}$

Réponse 5/25

$$\forall x \in E,\ q(x) \geqslant 0 \ (\text{resp. } \leqslant 0)$$

Question 6/25

Cône

Réponse 6/25

Partie d'un ev stable par multiplication scalaire

Question 7/25

CNS pour que $(q, q') \in \mathrm{Q}(E)^2$ soient isomorphes

Réponse 7/25

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q') \text{ sont congruentes}$$

Question 8/25

Forme polaire associée à q

Réponse 8/25

$$\pi^{-1}(q) \text{ où } \pi\colon \begin{aligned}[t] \mathrm{Bil}(E,E) &\longrightarrow \mathrm{Q}(E) \\ \varphi &\longmapsto q_\varphi := \varphi(\cdot,\cdot) \end{aligned}$$

$$\pi \text{ est un isomorphisme}$$

Question 9/25

Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$

Réponse 9/25

Si q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}$ alors il existe $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ et $(\mu_1, \cdots, \mu_{r+s}) \in (E^*)^{r+s}$

$$\text{tel que } q = \sum_{i=1}^{r} \mu_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} \mu_i^2$$

Question 10/25

q est une forme quadratique

Réponse 10/25

Il existe $\varphi \in \mathrm{Bil}(E, E)$ tel que $q(x) = \varphi(x, x)$

Question 11/25

Cône isotrope de q

Réponse 11/25

$$\mathcal{C}(q) = \{x \in E, q(x) = 0\}$$
$$\ker(q) \subset \mathcal{C}(q)$$

Question 12/25

$$\operatorname{discr}(q)$$

Réponse 12/25

$$\begin{cases} 0 & \text{si } q \text{ dégénérée} \\ \det_{\mathcal{B}}(q) \bmod \left(\Bbbk^{\times}\right)^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Question 13/25

CN entre V et $\mathcal{C}(q)$ pour avoir $E = V \oplus V^{\perp}$

Réponse 13/25

$$V \cap \mathcal{C}(q) = \{0\}$$

Question 14/25

Matrice de $q \in \mathrm{Q}(E)$ dans une base $\mathcal{B}$ de E

Réponse 14/25

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\pi^{-1}(q)\right) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{k})$$

Question 15/25

Factorisation d'une forme quadratique

Réponse 15/25

Si q est une forme quadratique sur E alors il existe une unique forme quadratique

$$q' : E/\ker(q) \to \mathbb{k}$$

q' est non dégénérée

Question 16/25

(E, q) et (E', q') sont isomorphes

Réponse 16/25

Il existe $u : E \to E'$ un isomorphisme tel que $u(E) = E'$ et $q' = q \circ u$

Question 17/25

A et A' sont congruentes

Réponse 17/25

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{k}),\ A = {}^tPAP$$

Question 18/25

(E, q) espace quadratique, φ forme polaire associée à q

$A^{\perp}$

Réponse 18/25

$$\ell_\varphi(A)^\perp$$

Question 19/25

q est définie positive (resp. définie négative)

(E, q) espace quadratique sur $\mathbb{R}$

Réponse 19/25

$$\forall x \neq 0,\ q(x) > 0 \text{ (resp. } < 0)$$

Dans ce cas, $\mathcal{C}(q) = \{0\}$ et pour tout sev V,

$q_{|V}$ est non dégénérée

Question 20/25

$$\ker(u^*)$$

Réponse 20/25

$$\mathrm{im}(u)^{\perp}$$

Question 21/25

Espace quadratique

Réponse 21/25

(E, q) avec q une forme quadratique sur E

Question 22/25

Méthode de Gauss

Réponse 22/25

Si $f \in \mathbb{k}[X_1, \cdots, X_n]_2$[1] et $(X_i := \mu_i)$ est une base de E^* alors il existe un algorithme qui permet de trouver

$(L_1, \cdots, L_n) \in (\mathbb{k}[X_1, \cdots, X_n]_1)^n$ et

$(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{k}^n$ tels que $f = \sum_{i=1}^{n} a_i L_i^2$

1. polynômes homogènes de degré 2

Question 23/25

$$u^*$$

Réponse 23/25

Si (E, q) est un espace quadratique non dégénéré et φ la forme polaire associée à q et $u \in \mathcal{L}(E)$ alors il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\varphi(u(x), y) = \varphi(x, u^*(y))$

Question 24/25

$$\ker(q)$$

Réponse 24/25

$$E^{\perp} = \ker(\ell_{\varphi})$$

Question 25/25

$$\ker\left(q_{|V}\right)$$

Réponse 25/25

$$V \cap V^{\perp}$$