Algèbre 1

Groupes

Question 1/43

Image directe et réciproque de sous-groupes par un homomorphisme

Réponse 1/43

Si G et H sont deux groupes, et
$f \in \mathrm{Hom}(G, H)$ un morphisme de groupes, G'
et H' deux sous-groupes respectivement de G
et H

$f(G')$ est un sous-groupe de H

$f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G

Question 2/43

Groupe abélien

Réponse 2/43

La loi $\star$ de G est commutative

Question 3/43

Description des groupes monogènes

Si $G = \langle x \rangle$

Réponse 3/43

$$\text{Si } \operatorname{ord}(x) = +\infty,\ G \text{ est isomorphe à } \mathbb{Z}$$
$$\text{Si } \operatorname{ord}(x) = n \in \mathbb{N}^*,\ G \text{ est isomorphe à } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Question 4/43

x et y sont dans la même classe à droite modulo H

Réponse 4/43

$$x \equiv_d y\,[H] \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

Question 5/43

Si G et H sont deux groupes et

$f \in \mathrm{Hom}(G, H)$

$f(e_G)$

Réponse 5/43

$$f(e_H)$$

Question 6/43

Sous-groupe monogène

Réponse 6/43

$$\langle x \rangle = \{x^n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Question 7/43

Sous-groupe engendrée par une partie X

Réponse 7/43

$$\langle X \rangle$$

C'est le plus petit sous-groupe contenant X

Question 8/43

Cardinal des classes de congruence

Réponse 8/43

$$|Ha,\ a \in G| = |Ha,\ a \in G| = |H|$$

Question 9/43

Si $(G, \star)$ est un groupe

Un sous-ensemble H de G est un sous-groupe de G

Réponse 9/43

H est stable pour la loi de G et la loi induite définit sur H une structure de groupe

Question 10/43

Ordre d'un élément d'un groupe

Réponse 10/43

$$\mathrm{ord}(x) = \min(\{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = e\})$$

Question 11/43

Passage au quotient de la loi dans le cas abélien

Si G est un groupe abélien et H un sous-groupe de G

Réponse 11/43

$\equiv_g = \equiv_d$ et on note la relation $\equiv$

La loi induite corrrespond au produit des classes élément par élément

$$(ab)H = (aH) \cdot (bH)$$

$$= \{x \cdot y,\ x \in aH,\ y \in bH\}$$

La loi induite sur l'ensemble quotient munit celui-ci d'une structure de groupe abélien

Question 12/43

$$\text{Si } \ker(f) = \{e_G\}$$

Réponse 12/43

f est injectif (la réciproque est vraie)

Question 13/43

Groupe cyclique

Réponse 13/43

Groupe monogène fini

Question 14/43

Si G est un gruope

Structure de $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$

Réponse 14/43

$$(\mathrm{Aut}(G), \circ) \text{ est un groupe}$$

Question 15/43

Si $(G, \star)$ est un groupe et $H \subset G$

Caractérisation(s) des sous-groupes

Réponse 15/43

$$H \neq \varnothing \quad \forall (x,y) \in H,\ x \star y \in H$$

$$\forall x \in H,\ x^s \in H$$

$$H \neq \varnothing \quad \forall (x,y) \in H^2,\ x \star y^s \in H$$

$$e_G \in H \quad \forall (x,y) \in H^2,\ x \star y^s \in H$$

Question 16/43

Endomorphisme de groupes

Réponse 16/43

Homomorphisme de groupes de E dans lui-même (muni des mêmes lois)

Question 17/43

Réciproque d'isomorphisme

Réponse 17/43

Si $f : F \to F$ est un isomorphisme, alors f^{-1} est un isomorphisme

Question 18/43

Propriétés d'un groupe $(G, \star)$

Réponse 18/43

G admet un uique élément neutre pour $\star$

$\forall x \in G,\ \exists! x^s \in G$

Question 19/43

Si $f \in \mathrm{Hom}(G, K)$ et H est un sous-groupe distingué

Réponse 19/43

f passe au quotient avec $\tilde{f} : G/H \to K$

Question 20/43

Automorphisme de groupes

Réponse 20/43

Endomorphisme et isomorphisme de groupes

Question 21/43

Théorème de Lagrange pour l'ordre des éléments d'un groupe

Réponse 21/43

Si G est un groupe fini et $x \in G$

$$\mathrm{ord}(x) \mid |G|$$

Question 22/43

Si G et H sont deux groupes et

$f \in \mathrm{Hom}(G, H)$

$f\left(x^{-1}\right)$

Réponse 22/43

$$f(x)^{-1}$$

Question 23/43

Les classes à gauche modulo H

Réponse 23/43

$$\{aH,\ a \in G\}$$

Question 24/43

Passage au quotient de la loi dans le cas d'un sous-groupe distingué

Si G est un groupe et H un sous-groupe distingué de G

Réponse 24/43

$\equiv_g = \equiv_d$ et on note la relation $\equiv$

La loi induite corrrespond au produit des classes élément par élément

$$(ab)H = (aH) \cdot (bH)$$

$$= \{x \cdot y,\ x \in aH,\ y \in bH\}$$

La loi induite sur l'ensemble quotient munit celui-ci d'une structure de groupe

Question 25/43

Description par le bas du sous-groupe engendré par une partie

Réponse 25/43

$$\langle X \rangle = \{x_1 \cdots x_n,\ (x_1, \cdots, x_n) \in X^n\}$$
$$\cup \left\{x^{-1},\ x \in X\right\}$$

e correspond au produit vide

Question 26/43

Soient $(G, \star)$ et $(H, \diamond)$ deux groupes

$f : G \to H$ est un homomorphisme de groupes

Réponse 26/43

$$\forall (x,y) \in G^2,\ \ f(x \star y) = f(x) \diamond f(y)$$

L'ensemble des homomorphisme de G dans H est noté $\mathrm{Hom}(G,H)$

Si $(G,\star) = (H,\diamond)$, f est un endomorphisme

L'ensemble des automorphismes de G est noté $\mathrm{Aut}(G)$

x et y sont dans la même classe à gauche modulo H

Réponse 27/43

$$x \equiv_g y \, [H] \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

Question 28/43

Si H est un sous-groupe distingué de G

Réponse 28/43

$$\begin{aligned}&\forall a \in G,\ aH = Ha\\ \Leftrightarrow\ &\forall a \in G,\ \forall h \in H,\ aha^{-1} \in H\end{aligned}$$

Question 29/43

Fibres de f

Soit $x \in f^{-1}(\{y\})$

Réponse 29/43

$$f^{-1}(\{y\}) = x \times \ker(f)$$
$$= \{x \times z,\ z \in \ker(f)\} = \ker(f) \times x$$

Question 30/43

Si $f \in \mathrm{Hom}(G, K)$ et H est un sous-groupe distingué et $H \subset \ker(f)$

Réponse 30/43

$$f = \tilde{f} \circ \pi$$

La réciproque est vraie

Question 31/43

Théorème de Lagrange pour l'ordre des groupes

Réponse 31/43

Si G est un groupe fini et H un sous-groupe de G

$$|H| \mid |G|$$

Question 32/43

Isomorphisme de groupes

Réponse 32/43

Homomorphisme de groupes bijectif

Question 33/43

Intersection de sous-groupes

Si G est un groupe, et $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de G

Réponse 33/43

$$\bigcap_{i \in I} (H_i) \text{ est un sous-groupe de } G$$

Question 34/43

Ensemble formé par les classes à gauche et à droite

Réponse 34/43

$$\{Ha,\ a \in G\} \text{ est une partition de } G$$
$$\{aH,\ a \in G\} \text{ est une partition de } G$$

Question 35/43

Premier théorème d'isomorphisme

Réponse 35/43

Si $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$
$\ker(f)$ est un sous-groupe distingué de G, et f passe au quotient, définissant un morphisme de groupes $\tilde{f} : G/\ker(f) \to H$
$\tilde{f}$ est injectif et sa corestriction à son image est un isomorphisme

Question 36/43

Description par le haut du sous-groupe engendré par une partie

Réponse 36/43

Soient $\mathcal{G}$ l'ensemble des sous-groupes de G et

$$\mathcal{H} = \{H \in \mathcal{G} \mid X \subset H\}$$

$$\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} (H)$$

Question 37/43

Propriété des groupes monogènes

Réponse 37/43

Un groupe monogène est abélien

Question 38/43

Les classes à droite modulo H

Réponse 38/43

$$\{Ha,\ a \in G\}$$

Question 39/43

Si G et H sont deux groupes et $f \in \mathrm{Hom}(g, h)$
un morphisme de groupes
$\ker(f)$

Réponse 39/43

$$f^{-1}(e_H) = \{y \in G \mid f(y) = e_H\}$$

Question 40/43

Ordre d'un groupe

Si G est un groupe

Réponse 40/43

$$\mathrm{ord}(G) = |G|$$

Question 41/43

Résolution de $x^n = e$

Réponse 41/43

$\{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = e\}$ est de la forme $a\mathbb{Z}$

x est d'ordre fini si et seulement si $a \neq 0$ (on a donc $\mathrm{ord}(x) = a$)

Question 42/43

Sous-groupe propre de G

Réponse 42/43

Sous-groupe de G distinct de G et $\{e_G\}$

Question 43/43

Groupe

Réponse 43/43

Muni d'une loi de composition interne, de l'associativité, d'un élément neutre et de symétriques