# Analyse
# *Séries de fonctions*

# Question 1/5

Dérivation terme à terme

# Réponse 1/5

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$, $\sum u_n$ CVS sur $I$, $\sum u'_n$ CVU sur $I$

Alors, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$,

$\displaystyle S' = \sum_{n=0}^{+\infty}(u'_n)$, $\sum u_n$ CVU sur tout segment de $I$

# Question 2/5

Dérivation terme à terme pour la classe $\mathcal{C}^k$

# Réponse 2/5

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$, $\sum u_n^{(k)}$ CVU sur $I$, $\forall j \in [\![1, k-1]\!]$, $\sum u_n^{(j)}$ CVS sur $I$

$$\text{Alors, } \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n) \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } I,$$

$$\forall j \in [\![0, k]\!],\ S^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(u_n^{(j)}\right) \text{ et } \sum u_n^j \text{ CVU}$$

sur tout segment de $I$

# Question 3/5

Théorème de sommation $L^1$

# Réponse 3/5

Si $u_n$ est intégrable sur $I$, $\sum u_n$ CVS vers $S$ sur $I$, $\sum \int_I (|u_n|)$ converge

$$\text{Alors, } S = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n) \text{ est intégrable,}$$

$$\int_I (S(t))\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_I (u_n(t))\,\mathrm{d}t \right)$$

# Question 4/5

$$\sum u_n \text{ converge normalement sur } A$$

# Réponse 4/5

$u_n$ est bornée sur $A$ pour tout $n$

$\sum \|u_n\|_\infty$ converge

# Question 5/5

CVU d'une série de fonctions

# Réponse 5/5

$$\sum u_n \text{ CVU sur } A \text{ si et seulement si } u_n \text{ CVS sur } A \text{ et } \|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$