

# Algèbre 2

## *Dimension finie*

## Question 1/18

Formule de Grassmann

## Réponse 1/18

$$\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$$

## Question 2/18

Conservation du rang pour les matrices

## Réponse 2/18

$$M \in \mathcal{M}_{n,p}(K), P \in \mathrm{GL}_n(K), Q \in \mathrm{GL}_n(K) \\ \mathrm{rg}(PMQ) = \mathrm{rg}(M)$$

## Question 3/18

Rang d'une application linéaire

## Réponse 3/18

$$\operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{Im}(u))$$

## Question 4/18

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est inversible



## Réponse 4/18

$$u \in \mathrm{GL}(E)$$

La réciproque est vraie

## Question 5/18

Dimension d'un produit cartésien

## Réponse 5/18

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

## Question 6/18

Rang d'une famille

## Réponse 6/18

$$\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n) = \dim(\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n))$$

## Question 7/18

Théorème du rang

## Réponse 7/18

$$\dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f) = \dim(E)$$

## Question 8/18

Dimension d'une somme directe



## Réponse 8/18

$$\dim \left( \bigoplus_{i=1}^n (E_i) \right) = \sum_{i=1}^n (\dim(E_i))$$

## Question 9/18

Matrice de passage

## Réponse 9/18

$$P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(\text{id}) = [\mathcal{B}_2]_{\mathcal{B}_1}$$

## Question 10/18

Matrice associée à une composition

## Réponse 10/18

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

## Question 11/18

Majoration du rang d'une application linéaire  
 $u \in \mathcal{L}(E, F)$

## Réponse 11/18

$$\operatorname{rg}(u) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$$

## Question 12/18

Formule de changement de base



## Réponse 12/18

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \text{ des bases de } E, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \text{ des bases de } F \\ \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2}(f) = P_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1}(f) P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \\ = \left(P_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{C}_2}\right)^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1}(f) P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \end{aligned}$$

## Question 13/18

Produit matriciel avec l'évaluation

## Réponse 13/18

$$[f(X)]_{\mathcal{C}} = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)[X]_{\mathcal{B}}$$

## Question 14/18

Effet d'une composition sur le rang

## Réponse 14/18

$$\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$$

Si  $v$  est injective,  $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$

Si  $u$  est surjective,  $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$

## Question 15/18

Conservation de l'image et du noyau pour les matrices

## Réponse 15/18

$$\begin{aligned} M &\in \mathcal{M}_{n,p}(K), P \in \mathrm{GL}_n(K), Q \in \mathrm{GL}_n(K) \\ \ker(PM) &= \ker(M) \\ \mathrm{Im}(MQ) &= \mathrm{Im}(M) \end{aligned}$$

## Question 16/18

Dimension d'un supplémentaire  $S$  de  $F$  dans  $E$



## Réponse 16/18

$$\dim(S) = \dim(E) - \dim(F)$$

## Question 17/18

Image d'une matrice

## Réponse 17/18

$$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}(C_1(M), \dots, C_n(M))$$

## Question 18/18

Dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$

## Réponse 18/18

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$