

Analyse

Calcul différentiel

Question 1/24

Développement de Taylor-Young à l'ordre 2

Réponse 1/24

$$f(a + h) \underset{\|h\| \rightarrow 0}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \frac{1}{2} \langle H_f(a)h, h \rangle + o(\|h^2\|)$$

Question 2/24

Différentielle de f en a

Réponse 2/24

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(a) &\in \mathcal{L}(E, F) \\ f(a + h) &= f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \underset{\|h\| \rightarrow 0}{o}(\|h\|) \end{aligned}$$

Question 3/24

Différentielle avec les dérivées partielles

Réponse 3/24

$$df(a) \cdot h = \sum_{k=1}^n \left(h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right)$$

Question 4/24

Développement de Taylor-Young numérique à l'ordre 2

Réponse 4/24

$$f(a + h) \underset{\|h\| \rightarrow 0}{=} f(a) + \sum_{i=1}^n \left(h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right) + \\ \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \left(h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right) + o(\|h^2\|)$$

Question 5/24

Règle de la chaîne

Réponse 5/24

$$\frac{\partial f \circ \varphi}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_k}(\varphi(a)) \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(a) \right)$$

Question 6/24

Lien différentielle – intégration

Réponse 6/24

$$f(b) - f(a) = \int_a^b (\mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)) \, \mathrm{d}t$$

Question 7/24

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial x_j}(a)$$

Réponse 7/24

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_k}(g(a)) \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(a) \right)$$

Question 8/24

$$(f \circ \gamma)'(t)$$
$$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$$

Réponse 8/24

$$df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

Question 9/24

Hessienne

Réponse 9/24

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} = J_{\nabla f}(a)$$

Question 10/24

Jacobienne

$$J_f(a)$$

Réponse 10/24

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a)} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a)} & \cdots & \boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)} & \cdots & \boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(a)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \boxed{\frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a)} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{d}f_i(a))$$

$\partial_j f(a)$

Question 11/24

Développement de Taylor-Young matriciel à l'ordre 2

Réponse 11/24

$$f(a + h) \underset{\|h\| \rightarrow 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o(\|h^2\|)$$

Question 12/24

$$D_h(f)$$

Réponse 12/24

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(a + th) - f(a)}{t} \right)$$

Question 13/24

Vecteurs tangents à $\Gamma_k(f) = f^{-1}(\{k\})$ dans un euclidien

Réponse 13/24

$$T_{x_0}\Gamma_k(f) \subset \nabla f(a)^\perp \text{ avec égalité si } \nabla f(a) \neq 0$$

Question 14/24

$$L \in \mathcal{L}(F, G)$$
$$d(L \circ f)(a)$$

Réponse 14/24

$$L \circ \mathrm{d}f(a)$$

Question 15/24

Vecteurs tangents à $\Gamma_k(f) = f^{-1}(\{k\})$

Réponse 15/24

$$T_{x_0}\Gamma_k(f) \subset \ker(df(x_0)) \text{ avec égalité si } df(x_0) \neq 0$$

Question 16/24

CS d'extrémum de f en a

Réponse 16/24

Maximum : $\nabla f(a) = 0$ et $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Minimum : $\nabla f(a) = 0$ et $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$

Question 17/24

Optimisation sous contrainte

Réponse 17/24

Soient U un ouvert de E et $(f, g) \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})^2$
Pour $X = g^{-1}(\{0\})$ et $a \in X$, si $dg(a) \neq 0$ et
 $f|_X$ a un extrémum local en a alors il existe
 $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $df(a) = \lambda dg(a)$

Question 18/24

Lien entre D et d pour une fonction différentiable

Réponse 18/24

$$df(a) \cdot h = D_h f(a)$$

Question 19/24

f est différentiable sur un ouvert U en $a \in U$

Réponse 19/24

$$\begin{aligned} f(a + h) &= f(a) + u_a(h) + \|h\|\varepsilon_a(h) \\ u_a &\in \mathcal{L}(E, F) \\ \lim_{\|h\| \rightarrow 0} (\varepsilon_a(h)) &= 0 \end{aligned}$$

Question 20/24

CN d'extrémum de f en a

Réponse 20/24

Maximum : $\nabla f(a) = 0$ et $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

Minimum : $\nabla f(a) = 0$ et $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^-(\mathbb{R})$

Question 21/24

$$d(f \circ g)(a)$$

Réponse 21/24

$$df(g(a)) \circ df(a)$$

Question 22/24

Théorème de Schwarz

Réponse 22/24

$$\begin{array}{c} \text{Si } f \text{ est } \mathcal{C}^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \end{array}$$

Question 23/24

$$\nabla f(a)$$

Réponse 23/24

L'unique vecteur vérifiant

$$df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

Question 24/24

v est tangent à X en x

Réponse 24/24

$$\exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow X, \gamma(0) = x \wedge \gamma'(0) = v$$