Analyse et équations aux dérivées partielles

L'équation de transport linéaire

Question 1/7

Équation caractéristique associée à une EDO

Réponse 1/7

Résoudre pour X où u est constante sur

$$u(t, X(t))$$

Question 2/7

$$u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$$

Réponse 2/7

$$\forall R > 0,\ \int_{-R}^{R} |u(t)| \, \mathrm{d}t < +\infty$$

Question 3/7

$$\text{Solution faible de } \partial_t u + c\,\partial_x u = 0,$$
$$u(0,x) = u_0(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}),\ c \in \mathbb{R}$$

Réponse 3/7

u est solution faible si pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} u(t,x)(\partial_t\varphi + c\,\partial_x\varphi)(t,x)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(0,x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Si $u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ alors l'équation possède une unique solution dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ définie par

$$u(x,t) = u_0(x - ct)$$

Question 4/7

$$\text{Solution de } \partial_t u + c\,\partial_x u = f,$$
$$u(0,x) = u_0(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}),\ c \in \mathbb{R},$$
$$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$$

Réponse 4/7

Si $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ alors l'équation possède une unique solution dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ définie par

$$u(x,t) = u_0(x - ct) + \int_0^t f(\tau, x - c(t - \tau))\,\mathrm{d}\tau$$

Question 5/7

$$\text{Solution de } \partial_t u + c\partial_x u = 0,$$
$$u(0,x) = u_0(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}),\ c \in \mathbb{R}$$

Réponse 5/7

Si $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ alors l'équation possède une unique solution dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ définie par
$$u(x,t) = u_0(x - ct)$$

Question 6/7

Propriété de la solution faible de
$\partial_t u + c\partial_x u = 0$, $u(0,x) = u_0(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$,
$c \in \mathbb{R}$ pour $u \in \mathcal{C}^1$

Réponse 6/7

La solution u est une solution « forte » et $u_0 = u(0, \cdot)$

Question 7/7

CNS pour avoir $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ nulle sur Ω un ouvert

Réponse 7/7

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),\ \int_\Omega u(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$$