

**Concentration de la
mesure**

***Inégalités de
concentration***

Question 1/18

Inégalité de Hoeffding

Réponse 1/18

Si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes avec X_i à valeurs dans $[a_i, b_i]$ et si $S_n = X_1 + \dots + X_n$ alors

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq t) \leq 2 \exp \left(\frac{-2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} \right)$$

Question 2/18

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie une inégalité de concentration de concentration α

Réponse 2/18

$$\begin{aligned} &\exists a \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0, \\ &\mu(\{x \in \mathbb{R}^n, |f(x) - a| \geq t\}) \leq \alpha(t) \end{aligned}$$

Question 3/18

Fonction génératrice des moments
Transformée de Laplace

Réponse 3/18

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) = e^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

Question 4/18

Lien entre $\|X\|_{\psi_2}$ et $X - \mathbb{E}(X)$

Réponse 4/18

$$\|X - \mathbb{E}(X)\|_{\psi_2} \leq C \|X\|_{\psi_2}$$

Question 5/18

$$\|X\|_{\psi_2}$$

Réponse 5/18

$$\inf_{\|\cdot\|_{\psi_2} \text{ est une norme}} \left(\left\{ t > 0, \mathbb{E} \left(e^{\frac{X^2}{t^2}} \right) \leq 2 \right\} \right)$$

Question 6/18

$$\inf_{a \in \mathbb{R}} \left(\mathbb{E} \left((X - a)^2 \right) \right)$$

Réponse 6/18

$$\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|) = \mathbb{V}(X)$$

Question 7/18

Borne de Chernov

Réponse 7/18

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq e^{\psi^*(t)} \text{ où}$$
$$\psi^*(t) = - \sup_{\lambda \geq 0} (\lambda t - \psi(\lambda))$$

Question 8/18

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Réponse 8/18

$$\forall t > 0, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{t^2}$$

Question 9/18

$$\inf_{a \in \mathbb{R}} (\mathbb{E}(|X - a|))$$

Réponse 9/18

$\mathbb{E}(|X - m_X|)$ avec m_X une médiane de X

Question 10/18

Inégalité de Markov

Réponse 10/18

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}$$

Question 11/18

Généralisation de l'inégalité de
Bienaymé-Tchebychev

Réponse 11/18

$$\forall t > 0, \forall a \in \mathbb{R},$$
$$\mathbb{P}(|X - a| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(|X - a|^p)}{t^p}$$

Question 12/18

Inégalité de Chernov pour des variables de
Bernoulli

Réponse 12/18

Si X_1, \dots, X_n sont des variables de Bernoulli indépendantes avec X_i de paramètre p_i et si $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $\mu = p_1 + \dots + p_n$ alors

$$\mathbb{P}(S_n \geq t) \leq e^{-\mu} \left(\frac{e\mu}{t} \right)^t$$

Question 13/18

Équivalent de l'inégalité triangulaire pour

$$\left\| \sum_{i=1}^n (X_i) \right\|_{\psi_2}$$

Réponse 13/18

Si les X_i sont indépendantes, centrées et sous-gaussiennes,

$$\left\| \sum_{i=1}^n (X_i) \right\|_{\psi_2} \leq C \sum_{i=1}^n \left(\|X_i\|_{\psi_2} \right)$$

Question 14/18

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Réponse 14/18

$$\mathbb{P}_X(dx) = \frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

Question 15/18

X est une variable aléatoire réelle
sous-gaussienne

Réponse 15/18

$$\exists K_1 > 0, \forall t > 0, \mathbb{P}(|X| \geq t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{K_1^2}}$$

$$\exists K_2 > 0, \forall p \geq 1, \|X\|_{L^p} \leq \sqrt{p}$$

$$\exists K_3 > 0, \forall \lambda \leq \frac{1}{K_3}, \mathbb{E}\left(e^{\lambda^2 X^2}\right) \leq e^{K_3^2 \lambda^2}$$

$$\exists K_4 > 0, \mathbb{E}\left(e^{\frac{X^2}{K_4}}\right) \leq 2$$

$$\exists K_5 > 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) \leq e^{K_5^2 \lambda^2} \quad (\mathbb{E}(X) = 0)$$

$$\exists C > 0, \forall i \neq j, K_i \leq CK_j$$

Question 16/18

Moment d'ordre p

Réponse 16/18

$$\mathbb{E}(|X|^p)$$

Question 17/18

Transformée log-Laplace de X

Réponse 17/18

$$\psi(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda X})$$

ψ est convexe

Question 18/18

Inégalité de Chernov

Réponse 18/18

$$\forall t > 0, \mathbb{P}(X \geq t) \leq e^{-\lambda t} \mathbb{E}(e^{\lambda X})$$