

Algèbre 1

Anneaux

Question 1/24

Intersection de sous-anneaux

Si A est un groupe, et $(B_i)_{i \in I}$ une famille de sous-anneaux de A

Réponse 1/24

$\bigcap_{i \in I} (B_i)$ est un sous-anneau de A

Question 2/24

Anneau principal

Réponse 2/24

Un anneau intègre dont tous les idéaux sont
principaux

Question 3/24

Si $(A, +, \times)$ est un groupe et $B \subset A$
Caractérisation des sous-anneaux

Réponse 3/24

$$1_A \in B \quad \forall (x, y) \in B, \quad x - y \in B$$
$$\forall (x, y) \in B, \quad xy \in B$$

Question 4/24

Élément absorbant dans un anneau $(A, +, \times)$

Réponse 4/24

0

Question 5/24

Monoïde

Réponse 5/24

Muni d'une loi de composition interne, de l'associativité et d'un élément neutre

Question 6/24

Endomorphisme d'anneaux

Réponse 6/24

Homomorphisme d'anneaux de E dans
lui-même (muni des mêmes lois)

Question 7/24

Soient $\left(A, +_A, \times_A\right)$ et $\left(B, +_B, \times_B\right)$ deux anneaux
 $f: A \rightarrow B$ est un homomorphisme d'anneaux

Réponse 7/24

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad f\left(x \underset{A}{+} y\right) = f(x) \underset{B}{+} f(y)$$

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad f\left(x \underset{A}{\times} y\right) = f(x) \underset{B}{\times} f(y)$$
$$f(1_A) = 1_B$$

Question 8/24

Diviseurs de zéro dans un anneau A

Réponse 8/24

$a \in A$ est un diviseur de 0 à gauche si et seulement s'il existe $b \in A$ tel que $ab = 0$

$a \in A$ est un diviseur de 0 à droite si et seulement s'il existe $b \in A$ tel que $ba = 0$

$a \in A$ est un diviseur de 0 si et seulement si a est diviseur de 0 à gauche et à droite

Question 9/24

Anneau

Réponse 9/24

Muni de deux lois de composition internes
(généralement notées $+$ et \times)
 $(A, +)$ est un groupe abélien
 (A, \times) est un monoïde
 \times est distributive sur $+$

Question 10/24

Groupe

Réponse 10/24

Muni d'une loi de composition interne, de l'associativité, d'un élément neutre et de symétriques

Question 11/24

Idéal principal

Réponse 11/24

Idéal engendré par un unique élément a de la
forme $I = aA = \{ay, y \in A\}$
 I est souvent noté (a)

Question 12/24

Factorisation de $a^n - b^n$ dans un anneau A

Réponse 12/24

$(a, b) \in A^2$ tel que $ab = ba$

$$(a - b) \sum_{k=0}^{n-1} (a^{n-k-1} b^k)$$

Question 13/24

Élément régulier d'un anneau

Réponse 13/24

L'élément n'est pas diviseur de 0

La réciproque est vraie

S'adapte à gauche et à droite

Question 14/24

Isomorphisme d'anneaux

Réponse 14/24

Homomorphisme d'anneaux bijectif

Question 15/24

Anneau intègre

Réponse 15/24

Anneau commutatif non réduit à $\{0\}$ et sans diviseurs de 0

Question 16/24

Propriété sur 1 et 0 si l'anneau A a plus d'un élément

Réponse 16/24

$$1 \neq 0$$

Question 17/24

Si A est un anneau commutatif et I un idéal
de A

Anneau quotient

Réponse 17/24

A/I peut être muni d'une multiplication avec
pour tout $(a, b) \in A$, $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$
 A/I est muni d'une structure d'anneau

Question 18/24

Si $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif

Un sous-ensemble I de A est un sous-anneau
idéal de A

Réponse 18/24

I est un sous-groupe de $(A, +)$
 $\forall i \in I, \forall a \in A, ia \in I$

Question 19/24

Automorphisme d'anneaux

Réponse 19/24

Endomorphisme et isomorphisme d'anneaux

Question 20/24

Anneau commutatif

Réponse 20/24

Anneau dont la loi \times est commutative

Question 21/24

Si $(A, +, \times)$ est un anneau

Un sous-ensemble B de A est un sous-anneau
de A

Réponse 21/24

B est stable pour les lois $+$ et \times

$$1_A \in B$$

Les lois induites sur B définissent sur B une structure d'anneau

Question 22/24

Image directe et réciproque de sous-anneaux
par un homomorphisme

Réponse 22/24

Si A et B sont deux anneaux, et $f: A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux, A' et B' deux sous-anneaux respectivement de A et B

$f(A')$ est un sous-anneau de B

$f^{-1}(B')$ est un sous-anneau de A

Question 23/24

Factorisation de $(a + b)^n$ dans un anneau A

Réponse 23/24

$$(a, b) \in A^2 \text{ tel que } ab = ba$$
$$\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right)$$

Question 24/24

Groupe des inversibles d'un anneau

Réponse 24/24

$$A^\times$$

A^\times est un groupe multiplicatif