

**Analyse et équations  
aux dérivées partielles**  
*Équations linéaires  
d'ondes et de transport*

## Question 1/7

CNS pour avoir  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  nulle sur  $\Omega$  un ouvert

## Réponse 1/7

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \int_{\Omega} u(t) \varphi(t) \, dt = 0$$

## Question 2/7

$$u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$$

## Réponse 2/7

$$\forall R > 0, \int_{-R}^R |u(t)| \, dt < +\infty$$

## Question 3/7

Solution faible de  $\partial_t u + c \partial_x u = 0$ ,  
 $u(0, x) = u_0(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ,  $c \in \mathbb{R}$

## Réponse 3/7

$u$  est solution faible si pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} u(t, x) (\partial_t \varphi + c \partial_x \varphi)(t, x) \, dt dx \\ + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) \, dx = 0$$

Si  $u_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  alors l'équation possède une unique solution dans  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$  définie par

$$u(x, t) = u_0(x - ct)$$

## Question 4/7

Propriété de la solution faible de  
 $\partial_t u + c \partial_x u = 0$ ,  $u(0, x) = u_0(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ,  
 $c \in \mathbb{R}$  pour  $u \in \mathcal{C}^1$



## Réponse 4/7

La solution  $u$  est une solution « forte » et  
 $u_0 = u(0, \cdot)$

## Question 5/7

$$\begin{aligned} &\text{Solution de } \partial_t u + c \partial_x u = f, \\ &u(0, x) = u_0(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \quad c \in \mathbb{R}, \\ &\quad f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \end{aligned}$$

## Réponse 5/7

Si  $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  alors l'équation possède une unique solution dans  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$  définie par

$$u(x, t) = u_0(x - ct) + \int_0^t f(\tau, x - c(t - \tau)) \, d\tau$$

## Question 6/7

Solution de  $\partial_t u + c \partial_x u = 0$ ,  
 $u(0, x) = u_0(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ ,  $c \in \mathbb{R}$

## Réponse 6/7

Si  $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  alors l'équation possède une unique solution dans  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$  définie par

$$u(x, t) = u_0(x - ct)$$

## Question 7/7

Équation caractéristique associée à une EDO

## Réponse 7/7

Résoudre pour  $X$  où  $u$  est constante sur  
 $u(t, X(t))$