

# Analyse

## *Suites numériques*

## Question 1/15

Théorème de la moyenne de Cesàro

## Réponse 1/15

Soit  $(u_n)$  une suite et soit  $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (u_k)$

Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , alors  $(v_n)$  converge vers  $\ell$

## Question 2/15

Trouver une solution particulière  $(v_n)$  à la suite  $u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + a_0u_n + b_n$  pour un second membre  $b_n = \lambda^n Q(n)$  avec  $Q \in \mathbb{C}[X]$

## Réponse 2/15

$v_n = n^m \lambda^n R(n)$  où  $m$  est la multiplicité de  $\lambda$  comme racine de  $P$  le polynôme caractéristique de la suite et  $\deg(R) = \deg(Q)$

## Question 3/15

Polynôme caractéristique d'une récurrence  
linéaire

$$u_{n+k} - a_{k-1}u_{n+k-1} - \cdots - a_1u_{n+1} - a_0u_n = 0$$

## Réponse 3/15

$$P = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \dots - a_1X - a_0$$

## Question 4/15

Explicitation des suites récurrentes linéaires  
d'ordre 2 où  $P$  le polynôme caractéristique  
admet 1 racine double  $r$

Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$



## Réponse 4/15

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)r^n$$

## Question 5/15

Critère spécial de convergence des séries  
alternée

## Réponse 5/15

$\left( \sum_{n=0}^N ((-1)^n a_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite finie  
quand  $N$  tend vers  $+\infty$

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} ((-1)^n a_n) \right| \leq a_{N+1}$$

## Question 6/15

Sous-ensemble compact

## Réponse 6/15

Soit  $E$  un espace métrique et  $K \subset E$   
 $K$  est compact si de toute suite  $(u_n)$   
d'éléments de  $K$ , on peut extraire une suite  
convergeant vers un élément de  $K$

## Question 7/15

Un sous-ensemble  $F$  est fermé

## Réponse 7/15

Toute suite convergente d'éléments de  $F$   
converge vers une limite  $\ell \in F$

## Question 8/15

L'ensemble  $X$  est dense dans  $\mathbb{R}$



## Réponse 8/15

$\forall x \in \mathbb{R}$ , il existe une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $X$  tel que  $(u_n)$  converge vers  $x$

## Question 9/15

Soit  $f$  une application contractante sur un intervalle  $I$ , de facteur de Lipschitz  $k < 1$ , et  $(u_n)$  une suite récurrente à valeurs dans  $I$ ,  
définie par  $f$

Soit  $\ell$  un point fixe de  $f$  sur  $I$

## Réponse 9/15

$$|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$$

## Question 10/15

Explicitation de  $u_{n+1} = au_n + \lambda^n P(n)$  où  
 $\lambda \neq a$

## Réponse 10/15

$$u_n = \lambda^n Q(n) \text{ avec } \deg(P) = \deg(Q)$$

## Question 11/15

Explicitation des suites récurrentes linéaires  
d'ordre 2 où  $P$  le polynôme caractéristique  
admet 2 racines  $r$  et  $s$   
Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

## Réponse 11/15

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r^n + \mu s^n$$

## Question 12/15

Explicitation de  $u_{n+1} = au_n + \lambda^n P(n)$  où  
 $\lambda = a$



## Réponse 12/15

$$u_n = n\lambda^n Q(n) \text{ avec } \deg(P) = \deg(Q)$$

## Question 13/15

Explicitation des suites  
arithmético-géométriques

## Réponse 13/15

Soit  $\ell$  un point fixe de la suite  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  la solution de l'équation homogène (géométrique)

$$u_n = v_n + \ell$$

## Question 14/15

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes et de limite  $\ell$   
Inégalité entre la différences des termes des  
suites et la limite

## Réponse 14/15

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - \ell| \leq |v_n - u_n|$$

## Question 15/15

Théorème de Bolzano-Weierstrass

## Réponse 15/15

De toute suite réelle bornée on peut extraire  
une suite convergente