Analyse complexe
Théorie de Cauchy

Question 1/31

Convergence de $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n(z))$ avec u_n holomorphe

Réponse 1/31

Si aucun u_n ne vaut identiquement -1 et que $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n)$ converge uniformément sur tout compact de U alors $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n(z))$ converge vers u holomorphe sur U non identiquement nulle et telle que pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, $v_{z_0}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty}(v_{z_0}(u_n)) < +\infty$ (et la somme est finie)

Question 2/31

Réexpression d'une fonction f holomorphe et T-périodique sur une bande $B(a_1, a_2) = \{z \in \mathbb{C}, a_1 < \operatorname{Im} z < a_2\}$ où $-\infty \leqslant a_1 < a_2 \leqslant +\infty$

Réponse 2/31

$$f = g \circ e_T \text{ où } e_T(z) = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{T} z} \text{ et } g \text{ est holomorphe}$$
$$\text{sur } A\left(\mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}\pi a_2}{T}}, \mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}\pi a_1}{T}}\right)$$

Question 3/31

Principe du maximum

Réponse 3/31

Si f est holomorphe sur U et $|f|$ admet un maximum sur U alors f est constante dur U

Question 4/31

Série de fonctions holomorphes

Réponse 4/31

Si (u_n) est une suite de fonctions holomorphe telle que $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n)$ converge uniformément vers f sur tout compact de U alors f est holomorphe sur U et $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(u_n^{(k)}\right)$ cvu vers $f^{(k)}$ sur tout compact de U

Question 5/31

Coefficients de la série de Taylor d'une fonction holomorphe

Réponse 5/31

$$a_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w$$

Question 6/31

Lien entre fonction holomorphe sur la couronne $A(R_1, R_2)$ et série de Laurent

Réponse 6/31

$$\text{Les application } (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \left(z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} (a_n z^n) \right)$$

$$\text{et } f \mapsto \left(\frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \,\mathrm{d}z \right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ où } \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n z^n) \text{ est}$$

$$\text{holomorphe sur } D(0,R_1) \text{ et } \sum_{n\in-\mathbb{N}^*} (a_n z^n) \text{ est}$$

$$\text{holomorphe sur } D(0,R_2) \text{ sont deux bijections}$$

réciproques

Question 7/31

Formule de Cauchy

Réponse 7/31

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, f holomorphe sur U et $z_0 \in U$ alors pour tout $z \in D(z_0, r)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - r} \,\mathrm{d}w$$

Question 8/31

CNS de convergence de $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty}(1 - a_n)$ vers un réel non nul pour $a_n \in [0, 1[$

Réponse 8/31

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n) \text{ converge}$$

Question 9/31

Intgrale de f sur $C(0, r)$ holomorphe sur couronne

Réponse 9/31

$$\int_{C(0,r)} f(z)\,\mathrm{d}z \text{ est indépendante de } r$$

Question 10/31

Primitive de fonctions holomorphe sur un ouvert simplement connexe U (ie connexe par arcs et tout lacet est homotope à un lacet constant)

Réponse 10/31

Toute fonction f holomorphe de classe $\mathcal{C}^1$
admet une primitive holomorphe sur U
Ce résultat est en particulier vrai si U est étoilé

Question 11/31

Théorème de Morera

Réponse 11/31

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$, il y a équivalence entre f est analytique sur U et f est continue et vérifie $\forall (a, b, c) \in U^3$ tels que $\Delta(a, b, c) \subset U$,

$$\int_{[a,b]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[b,c]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[c,a]} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Question 12/31

Intégrale sur $\partial\Gamma$ où $\Gamma\colon [0,1]^2 \to U$

Réponse 12/31

Si f est holomorphe et Γ de classe $\mathcal{C}^2$ alors

$$\int_{\partial\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Question 13/31

Propriétés équivalentes à $f = 0$ sur U ou f est holomorphe

Réponse 13/31

L'ensemble des zéros de f possède un point d'accumulation dans U

$$\exists z_0 \in U,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(z_0) = 0$$

Question 14/31

Invariance par homotopie des intégrales

Réponse 14/31

Si f est holomorphe et Γ de classe $\mathcal{C}^2$, en posant $\gamma_s = \Gamma(s, \cdot)$, si γ_s vérifie l'une des deux conditions suivantes, $\forall s \in [0, 1]$, γ_s est fermé ou $\gamma_s(0)$ et $\gamma_s(1)$ sont indépendant de s alors

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Question 15/31

Invariance par paramétrage de l'intégrale

Réponse 15/31

Si $\varphi : [a', b'] \to [a, b]$ est croissante et $\mathcal{C}^1$, en posant $\gamma_0 = \gamma \circ \varphi$, $\displaystyle\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$

Question 16/31

Majoration d’une intégrale

Réponse 16/31

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \max_{z\in\gamma([a,b])} |f(z)| \times \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t}_{\text{longueur de } \gamma}$$

Question 17/31

Limite uniforme de fonctions holomorphes

Réponse 17/31

Si (f_n) est une suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur U vers f sur tout compact de U alors f est holomorphe et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge uniformément sur tout compact de U vers $f^{(k)}$

Question 18/31

Intégrales sur un lacet

Réponse 18/31

Si f est holomorphe sur U et $\gamma(a) = \gamma(b)$,

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Question 19/31

Inégalité de Cauchy

Réponse 19/31

$$\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| \leqslant r^{-n} \max_{\theta\in[0,2\pi]} \left|f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|$$

Question 20/31

Théorème de Cauchy

Réponse 20/31

Pour U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$, f est holomorphe sur U si et seulement si f est analytique sur U

Question 21/31

Maximum de f continue sur $\overline{U}$ et holomorphe sur U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$

Réponse 21/31

$$\max_{z\in\overline{U}}|f(z)| = \max_{z\in\partial U}|f(z)|$$

Question 22/31

Principe du prolongement analytique

Réponse 22/31

Si f et g sont holomorphe sur U et coïncident sur un ouvert de U alors $f = g$ sur U

Soit f analytique non identiquement nulle sur U, l'ensemble des zéros de f sont isolés

Question 23/31

CNS de convergence de $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty}(1+a_n)$ pour $a_n \in \mathbb{R}_+$

Réponse 23/31

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n) \text{ converge}$$

Question 24/31

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux}$$

Réponse 24/31

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Question 25/31

$$\text{Majoration de } \left| \sum_{k=0}^{N} \left(f\left(\frac{kT}{N}\right) \right) - \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x \right|$$

dans le cas où f est la restiction d'une fonction holomorphe T-périodique sur $B(-a, a)$ avec $a > 0$

Réponse 25/31

$$\text{Si } |f| \text{ est majorée par } M \text{ et } r = \mathrm{e}^{\frac{2\pi a}{T}}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{N}\left(f\left(\frac{kT}{N}\right)\right) - \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2TM}{r^N - 1}$$

Question 26/31

$$\text{Majoration élémentaire de } \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)-1,$$

$$a_k \in \mathbb{C}$$

Réponse 26/31

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)-1\right| \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|)-1$$

Question 27/31

$$\text{CN de convergence de } \prod_{n=0}^{+\infty}(1+a_n) \text{ pour } a_n \in \mathbb{C}$$

Réponse 27/31

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(|a_n|) \text{ converge}$$

Le produit est non nul ssi pour tout n, $a_n \neq -1$

Question 28/31

Inégalité de Cauchy via la formule de Parseval

Réponse 28/31

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\right|^2 r^{2n}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|^2 \mathrm{d}\theta$$

Question 29/31

Théorème de Liouville

Réponse 29/31

Toute fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$ est constante

Question 30/31

Intégration sur le chemin opposé

Réponse 30/31

$$\text{Si } \gamma^*(t) = \gamma(a+b-t),$$
$$\int_{\gamma^*} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Question 31/31

Concaténation d’intégrales

Réponse 31/31

$$\text{Si } c \in [a, b],\ \gamma_1 = \gamma_{|[a,c]} \text{ et } \gamma_2 = \gamma_{|[c,b]},$$
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$$