Intégration et théorie de la mesure

Structure des mesures

Question 1/16

Théorème de décomposition de Lebesgue

Réponse 1/16

Si $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesuré, μ une mesure positive σ-finie et ν une mesure (positive, signée ou complexe) σ-finie alors il existe un unique couple (ν_a, ν_s) de mesures (positives, signées ou complexes) telles que $\nu = \nu_a + \nu_s$, $\nu_a \ll \mu$ et $\nu_s \perp \mu$

Question 2/16

Théorème de Radon-Nikodym

Réponse 2/16

Si $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, μ et ν deux mesures positives σ-finies, alors $\nu \ll \mu$ si et seulement s'il existe $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}_+$ mesurable telle que $\nu = f\mu$

Une telle fonction f est unique μ-pp

Question 3/16

Lien entre absolument continue et à variations bornées

Réponse 3/16

Si f est absolument continue alors elle est à variations bornées

Question 4/16

Mesure vectorielle

Réponse 4/16

$$\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^d \text{ vérifiant}$$
$$\nu(\varnothing) = 0$$
$$\text{Pour tout } (A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \text{ vérifiant}$$
$$i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing,\ \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$$
$$\text{et cette série converge normalement}$$

Question 5/16

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ est absolument continue}$$

Réponse 5/16

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,$$
$$\forall 0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant 1,$$
$$\sum_{j=1}^{n} b_j - a_j < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$$

Question 6/16

CNS pour f absolument continue

Réponse 6/16

$$\mathrm{d}f \ll \lambda$$

Question 7/16

Deux mesures positives μ et $\widetilde{\mu}$ sont étrangères

$$\mu \perp \widetilde{\mu}$$

Réponse 7/16

$$\exists A \in \mathcal{A},\ \mu(A) = 0 \wedge \widetilde{\mu}\left(A^{\complement}\right) = 0$$

Question 8/16

$$\nu = f\mu \text{ avec } f \in L^1$$

Réponse 8/16

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$$

Question 9/16

Théorème de dérivation de Lebesgue

Réponse 9/16

$$\text{Si } f \in L^1(\mathbb{R}^d) \text{ alors pour tout } x \in \mathbb{R}^d,$$

$$\left| f(x) - \frac{1}{\lambda(B(x,R))} \int_{B(x,R)} f(y)\,\mathrm{d}y \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda(B(x,R))} \int_{B(x,R)} |f(x) - f(y)|\,\mathrm{d}y \xrightarrow[R \to 0]{} 0$$

$$\lambda\text{-pp}$$

Question 10/16

ν est absolument continue par rapport à la mesure positive μ

$$\nu \ll \mu$$

Réponse 10/16

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$$

Ou de manière équivalente, $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow |\nu|(A) = 0$$

Question 11/16

Mesure signée

Réponse 11/16

$$\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \text{ vérifiant}$$
$$\nu(\varnothing) = 0$$
$$\text{Pour tout } (A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \text{ vérifiant}$$
$$i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing,\ \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$$
$$\text{et cette série converge absolument}$$

Question 12/16

Dérivée de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ selon le théorème de dérivation de Lebesgue

Réponse 12/16

Si f est absolument continue et $\mathrm{d}f = g\mathrm{d}x$ avec $g \in L^1$ alors $f'(x) = \lim_{\lambda(I)\to 0} \left(\frac{1}{\lambda(I)} \int_I \mathrm{d}f \right) = g$
λ-pp

On a donc $\mathrm{d}f = f'\mathrm{d}x$

Question 13/16

Mesure positive associée à une mesure ν

Réponse 13/16

$|\nu|$ définie par

$$|\nu|(A) = \sup\left(\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}|\nu(A_n)|, A = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right\}\right)$$

C'est la plus petite mesure positive μ qui vérifie $|\nu(A)| \leqslant \mu(A)$

Question 14/16

Mesure complexe

Réponse 14/16

$$\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \text{ vérifiant}$$

$$\nu(\varnothing) = 0$$

$$\text{Pour tout } (A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \text{ vérifiant}$$

$$i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing,\ \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$$

$$\text{et cette série converge absolument}$$

Question 15/16

CNS pour f à variations bornées

Réponse 15/16

Il existe g_1 et g_2 càdlàg[1] telles que $f = g_1 - g_2$

En particulier, $\mathrm{d}f = \mathrm{d}g_1 - \mathrm{d}g_2$

1. Continue à droite, admettant une limite à gauche

Question 16/16

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ est à variations bornées}$$

Réponse 16/16

$$\sup_{\substack{0=x_0 \\ \leqslant \cdots \leqslant \\ x_n=1}} \left(\left\{ \sum_{j=1}^{n} \left| f(x_j) - f(x_{j-1}) \right| \right\} \right) < +\infty$$