# Concentration de la mesure

## *Inégalités de concentration*

# Question 1/27

Moment d'ordre $p$

# Réponse 1/27

$$\mathbb{E}(|X|^p)$$

## Question 2/27

Inégalité de Chernov

# Réponse 2/27

$$\forall t > 0,\ \mathbb{P}(X \geqslant t) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right)$$

# Question 3/27

Théorème de Johnson-Linderstrauss

# Réponse 3/27

Il existe une constantete $C > 0$ telle que pour tout $D$, pour tout $n$, si $A$ est une partie finie de $\mathbb{R}^D$ de cardinal $\leqslant n$, il existe $d$ et une $\epsilon$-isométrie sur $A$[1] linéaire $\varphi$ dès lors que

$$d \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2} \ln(n)$$

1. $\forall x, y \in A$, $(1-\varepsilon)\|\varphi(x)-\varphi(y)\| \leqslant \|x-y\| \leqslant (1+\varepsilon)\|\varphi(x)-\varphi(y)\|$

# Question 4/27

Loi de probabilités d'une variable sous-exponentielle

# Réponse 4/27

$$\mathbb{P}_X(\mathrm{d}x) = \frac{\mathrm{e}^{-|x|}}{2}\,\mathrm{d}x$$

# Question 5/27

Lien entre $\|\cdot\|_{\psi_1}$ et $\|\cdot\|_{\psi_2}$

# Réponse 5/27

Si $X$ est sous-gaussienne, $\left\|X^2\right\|_{\psi_1} = \|X\|_{\psi_2}^2$

# Question 6/27

Fonction génératrice des moments
Transformée de Laplace

# Réponse 6/27

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right) = \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

# Question 7/27

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifie une inégalité de concentration de concentration $\alpha$

# Réponse 7/27

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall t \geqslant 0,$$
$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n, |f(x) - a| \geqslant t\}) \leqslant \alpha(t)$$

# Question 8/27

Majoration de $\big\| \|X\|_2 - \sqrt{n} \big\|_{\psi_2}$

# Réponse 8/27

$$\left\| \|X\|_2 - \sqrt{n} \right\|_{\psi_2} \leqslant C \cdot \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left\{ \|X_i\|_{\psi_2}^2 \right\}$$

pour $X = (X_1, \cdots, X_n)$ avec les $X_i$ des variables aléatoires sous-gaussiennes centrées réduites

# Question 9/27

$X$ est une variable aléatoire réelle sous-exponentielle

# Réponse 9/27

$$\exists K_1 > 0,\ \forall t > 0,\ \mathbb{P}(|X| \geqslant t) \leqslant 2\mathrm{e}^{\frac{-t}{K_1}}$$
$$\exists K_2 > 0,\ \forall p \geqslant 1,\ \|X\|_{L^p} \leqslant K_2 p$$
$$\exists K_3 > 0,\ \forall 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{K_3},\ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda|X|}\right) \leqslant \mathrm{e}^{K_3\lambda}$$
$$\exists K_4 > 0,\ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\frac{|X|}{K_4}}\right) \leqslant 2$$
$$\exists K_5>0,\ \forall|\lambda|\leqslant\frac{1}{K_5},\ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right)\leqslant\mathrm{e}^{K_5^2\lambda^2}\ (\mathbb{E}(X)=0)$$
$$\exists C > 0,\ \forall i \neq j,\ K_i \leqslant C K_j$$

# Question 10/27

Inégalité de Markov

# Réponse 10/27

$$\mathbb{P}(X \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{t}$$

# Question 11/27

Propriété de $\|X \cdot x\|_{\psi_2}$ pour $X = (X_1, \cdots, X_n)$ avec les $X_i$ des variables aléatoires sous-gaussiennes centrées réduites

# Réponse 11/27

$$\sup_{n \geqslant 1} \left( \sup_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} \left( \|X \cdot x\|_{\psi_2} \right) \right) < +\infty$$

# Question 12/27

Inégalité de Hoeffding

# Réponse 12/27

Si $X_1, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes avec $X_i$ à valeurs dans $[a_i, b_i]$ et si $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ alors

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant t) \leqslant 2\exp\left(\frac{-2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right)$$

# Question 13/27

$$\|X\|_{\psi_1}$$

# Réponse 13/27

$$\inf\left(\left\{t>0, \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\frac{|X|}{t}}\right)\leqslant 2\right\}\right)$$

$\|\cdot\|_{\psi_1}$ est une norme

# Question 14/27

Généralisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

# Réponse 14/27

$$\forall t > 0,\ \forall a \in \mathbb{R},$$
$$\mathbb{P}(|X - a| \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X - a|^p)}{t^p}$$

# Question 15/27

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

# Réponse 15/27

$$\mathbb{P}_X(\mathrm{d}x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x$$

# Question 16/27

$X$ est une variable aléatoire réelle sous-gaussienne

# Réponse 16/27

$$\exists K_1 > 0,\ \forall t > 0,\ \mathbb{P}(|X| \geqslant t) \leqslant 2\mathrm{e}^{\frac{-t^2}{K_1^2}}$$

$$\exists K_2 > 0,\ \forall p \geqslant 1,\ \|X\|_{L^p} \leqslant K_2\sqrt{p}$$

$$\exists K_3 > 0,\ \forall |\lambda| \leqslant \frac{1}{K_3},\ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda^2 X^2}\right) \leqslant \mathrm{e}^{K_3^2\lambda^2}$$

$$\exists K_4 > 0,\ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\frac{X^2}{K_4}}\right) \leqslant 2$$

$$\exists K_5 > 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right) \leqslant \mathrm{e}^{K_5^2\lambda^2}\ (\mathbb{E}(X) = 0)$$

$$\exists C > 0,\ \forall i \neq j,\ K_i \leqslant C K_j$$

# Question 17/27

Lien entre $\|X\|_{\psi_2}$ et $X - \mathbb{E}(X)$

# Réponse 17/27

$$\|X - \mathbb{E}(X)\|_{\psi_2} \leqslant C\|X\|_{\psi_2}$$

# Question 18/27

Borne de Chernov

# Réponse 18/27

$$\mathbb{P}(X \geqslant t) \leqslant \mathrm{e}^{\psi^*(t)} \text{ où}$$
$$\psi^*(t) = -\sup_{\lambda \geqslant 0}(\lambda t - \psi(\lambda))$$

# Question 19/27

Transformée log-Laplace de $X$

# Réponse 19/27

$$\psi(\lambda) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right)$$

$\psi$ est convexe

# Question 20/27

$$\inf_{a\in\mathbb{R}} \left(\mathbb{E}(|X-a|)\right)$$

# Réponse 20/27

$\mathbb{E}(|X - m_X|)$ avec $m_X$ une médiane de $X$

# Question 21/27

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

# Réponse 21/27

$$\forall t > 0,\ \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{t^2}$$

# Question 22/27

Inégalité de Chernov pour des variables de Bernoulli

# Réponse 22/27

Si $X_1, \cdots, X_n$ sont des variables de Bernoulli indépendantes avec $X_i$ de paramètre $p_i$ et si $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $\mu = p_1 + \cdots + p_n$ alors

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant t) \leqslant \mathrm{e}^{-\mu} \left( \frac{\mathrm{e}\mu}{t} \right)^t$$

# Question 23/27

$$\inf_{a\in\mathbb{R}}\left(\mathbb{E}\left((X-a)^2\right)\right)$$

# Réponse 23/27

$$\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|) = \mathbb{V}(X)$$

# Question 24/27

$$\|X\|_{\psi_2}$$

# Réponse 24/27

$$\inf\left(\left\{t > 0, \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\frac{X^2}{t^2}}\right) \leqslant 2\right\}\right)$$

$\|\cdot\|_{\psi_2}$ est une norme

# Question 25/27

Inégalité de Bernstein

## Réponse 25/27

Si $X_1, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes centrées et sous-exponentielles

$$\text{alors } \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i)\right| \geqslant t\right)$$

$$\leqslant 2\exp\left(-C\min\left(\frac{t^2}{\sum_{i=1}^{n}\|X_i\|_{\psi_1}^2}, \frac{t}{\max_{i\in[\![1,n]\!]}\|X_i\|_{\psi_1}}\right)\right)$$

# Question 26/27

Équivalent de l'inégalité triangulaire pour

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(X_i)\right\|_{\psi_2}^2$$

# Réponse 26/27

Si les $X_i$ sont indépendantes, centrées et sous-gaussiennes,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(X_i)\right\|_{\psi_2}^{2} \leqslant C\sum_{i=1}^{n}\left(\|X_i\|_{\psi_2}\right)^2$$

# Question 27/27

$\|XY\|_{\psi_1}$ pour $X$ et $Y$ sous-gaussiennes

# Réponse 27/27

$$\|XY\|_{\psi_1} \leqslant \|X\|_{\psi_2}\|Y\|_{\psi_2}$$