Intégration et théorie de la mesure

Espaces L^p

Question 1/13

$$\|f\|_{L^p}$$

Réponse 1/13

$$\left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } p \in \mathbb{N}^*$$
$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\left\{c \geqslant 0, |f| \leqslant c \ \mu\text{-pp}\right\}$$

Question 2/13

Inégalité de Jensen

Réponse 2/13

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, μ une mesure de probabilités ($\mu(X) = 1$ et $\mu \geqslant 0$), si $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ est convexe et $f\colon X \to \mathbb{R}$ mesurable alors

$$\varphi\left(\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right) \leqslant \int_X \varphi \circ f \,\mathrm{d}\mu$$

Question 3/13

Densité des fonctions lipschitziennes à support compact dans L^p

Réponse 3/13

Si (X,d) est un espace métrique localement compact (pour tout $x \in X$, il existe O ouvert tel que $x \in O$ et $\overline{O}$ est compact), séparable et μ de Radon (finie sur tout compact) et $p \in [1,+\infty[$ alors les fonctions lipschitziennes à support compact de L^p sont dense dans L^p

Question 4/13

Densité des fonctions lipschitziennes dans L^p

Réponse 4/13

Si $p \in [1, +\infty[$ alors les fonctions lipschitziennes de L^p sont dense dans L^p

Question 5/13

Densité des fonctions en escalier dans L^p

Réponse 5/13

Si $p \in [1, +\infty]$ alors les fonctions en escalier sont dense dans L^p

Question 6/13

Inégalité de Hölder

Réponse 6/13

Si $p \in [1, +\infty]$ et $p' = \dfrac{p}{p-1}$ alors pour f et g mesurables, $\displaystyle\int |fg| \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$

Question 7/13

$$\mathcal{B}(X \times Y)$$

Réponse 7/13

$\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ si X et Y sont à base dénombrable d'ouverts

Question 8/13

$$\mathcal{L}^p(\mu)$$

Réponse 8/13

$$\left\{ f : X \to \mathbb{R} \text{ mesurables}, \int |f|^p \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}$$

$$\mathcal{L}^\infty = \{ f : X \to \mathbb{R} \text{ mesurables}, \|f\|_\infty < +\infty \}$$

Question 9/13

$$L^p(\mu)$$

Réponse 9/13

$$\mathcal{L}^p/\sim \text{ où } f \sim g \text{ ssi } f = g \ \mu\text{-pp}$$

Question 10/13

Structures des L^p

Réponse 10/13

$$L^p \text{ sont des espaces de Banach}$$
$$L^2 \text{ est un expace de Hilbert avec } \langle f, g \rangle = \int fg$$

Question 11/13

Inégalité de Minkowski

Réponse 11/13

$$\text{Si } f, g : X \to \mathbb{R} \text{ sont mesurables et}$$
$$p \in [1, +\infty], \text{ alors } \|f + g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

Question 12/13

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

Réponse 12/13

$$\sigma(\{A \times B, (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\})$$

C'est la plus petite tribu qui rend les fonctions coordonnées mesurables

Question 13/13

$$\mu \bigotimes \nu$$

Réponse 13/13

L'unique mesure sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ vérifiant

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \times \nu(B)$$

$$\mu \otimes \nu(C) = \int_X \nu(C_x)\, \mu(\mathrm{d}x) = \int_Y \mu(C^y)\, \nu(\mathrm{d}y)$$