

Analyse complexe

Théorème des résidus

Question 1/12

$\text{Res}(f; a)$ si a est un pôle d'ordre $k \geq 1$

Réponse 1/12

$$\frac{1}{(k-1)!} \tilde{f}^{k-1}(a) \text{ où } \tilde{f}(z) = (z-a)^k f(z)$$

Question 2/12

Théorème des résidus

Réponse 2/12

Si U est un ouvert élémentaire de \mathbb{C} , F un ensemble fini de points de U , $f \in H(U \setminus F)$ et γ un lacet \mathcal{C}^1 par morceaux dans $U \setminus F$ alors

$$\int_{\gamma} (f(z)) \, dz = 2i\pi \sum_{a \in F} I(a, \gamma) \operatorname{Res}(f; a)$$

Question 3/12

CNS pour que U soit élémentaire

Réponse 3/12

U est simplement connexe

$U = \mathbb{C}$ ou U est biholomorphe à $D(0, 1)$

Question 4/12

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g'}; a\right) \text{ si } v_a(f) \geq 0 \text{ et } v_a(g) = 1$$

Réponse 4/12

$$\frac{f(a)}{g(a)}$$

Question 5/12

$$\operatorname{Res}(f; a) \text{ si } v_a(f) \geq -1$$

Réponse 5/12

$$\lim_{z \rightarrow a} ((z - a)f(z))$$

Question 6/12

Un ouvert U de \mathbb{C} est élémentaire

Réponse 6/12

U est non vide, connexe et toute fonction holomorphe sur U admet une primitive sur U

Question 7/12

Indice du lacet $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ continu par
rapport à $z \in \mathbb{C}$

Réponse 7/12

$$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) \text{ où } \Phi(t) \text{ est continue et vérifie}$$
$$\gamma(t) = \exp(2i\pi\Phi(t))$$

Question 8/12

Stabilité du caractère élémentaire par union

Réponse 8/12

Si U_1 et U_2 sont élémentaires et $U_1 \cap U_2$ est connexe alors $U_1 \cup U_2$ est élémentaire

Si (U_n) est une suite croissante d'ouverts élémentaires alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ est élémentaire

Question 9/12

$$\operatorname{Res}(f; z)$$

Réponse 9/12

Coefficient a_{-1} du développement en série de
Laurent de f en z

Question 10/12

$I(a, \gamma)$ pour un lacet \mathcal{C}^1 par morceaux

Réponse 10/12

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}$$

Question 11/12

$\text{Res}\left(\frac{f'}{f}; a\right)$ pour f non identiquement nulle

Réponse 11/12

$$v_a(f)$$

Question 12/12

Transfert du caractère élémentaire par un holomorphisme

Réponse 12/12

Si $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$ est un biholomorphisme et U_1 est élémentaire alors U_2 est élémentaire