Intégration et théorie de la mesure

Structure des mesures

Question 1/9

Mesure complexe

Réponse 1/9

$$\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \text{ vérifiant}$$

$$\nu(\varnothing) = 0$$

$$\text{Pour tout } (A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \text{ vérifiant}$$

$$i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing,\ \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$$

$$\text{et cette série converge absolument}$$

Question 2/9

Mesure positive associée à une mesure ν

Réponse 2/9

$|\nu|$ définie par

$$|\nu|(A) = \sup\left(\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}|\nu(A_n)|, A = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty}A_n\right\}\right)$$

C'est la plus petite mesure positive μ qui vérifie $|\nu(A)| \leqslant \mu(A)$

Question 3/9

ν est absolument continue par rapport à la mesure positive μ

$$\nu \ll \mu$$

Réponse 3/9

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$$

Ou de manière équivalente, $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow |\nu|(A) = 0$$

Question 4/9

Mesure signée

Réponse 4/9

$$\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \text{ vérifiant}$$
$$\nu(\varnothing) = 0$$
$$\text{Pour tout } (A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \text{ vérifiant}$$
$$i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing,\ \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$$
$$\text{et cette série converge absolument}$$

Question 5/9

$$\nu = f\mu \text{ avec } f \in L^1$$

Réponse 5/9

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$$

Question 6/9

Théorème de Radon-Nikodym

Réponse 6/9

Si $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, μ et ν deux mesures positives σ-finies, alors $\nu \ll \mu$ si et seulement s'il existe $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}_+$ mesurable telle que $\nu = f\mu$

Une telle fonction f est unique μ-pp

Question 7/9

Théorème de décomposition de Lebesgue

Réponse 7/9

Si $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesuré, μ une mesure positive σ-finie et ν une mesure (positive, signée ou complexe) σ-finie alors il existe un unique couple (ν_a, ν_s) de mesures (positives, signées ou complexes) telles que $\nu = \nu_a + \nu_s$, $\nu_a \ll \mu$ et $\nu_s \perp \mu$

Question 8/9

Deux mesures positives μ et $\widetilde{\mu}$ sont étrangères

$$\mu \perp \widetilde{\mu}$$

Réponse 8/9

$$\exists A \in \mathcal{A},\ \mu(A) = 0 \wedge \widetilde{\mu}\left(A^{\complement}\right) = 0$$

Question 9/9

Mesure vectorielle

Réponse 9/9

$$\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^d \text{ vérifiant}$$
$$\nu(\varnothing) = 0$$
$$\text{Pour tout } (A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \text{ vérifiant}$$
$$i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing,\ \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$$
$$\text{et cette série converge normalement}$$