

Algèbre

Espaces préhilbertiens réels

Question 1/20

Caractérisation des isométrie vectorielle

Réponse 1/20

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$u \in \mathrm{O}(E) \Leftrightarrow u \in \mathrm{GL}(E) \wedge u^* = u^{-1}$$

il existe une BON e telle que $u(e)$ est une BON

Question 2/20

Représentation des formes linéaires d'un espace euclidien

Réponse 2/20

Pour toute forme linéaire φ , il existe un unique $u \in E$ tel que $\varphi(\cdot) = \langle u, \cdot \rangle$

Question 3/20

Décomposition polaire de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Réponse 3/20

$$\exists (O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), A = OS$$

Il y a unicité si $A \in GL_n(\mathbb{R})$

Question 4/20

$$\text{im}(u^*)$$

Réponse 4/20

$$\ker(u)^\perp$$

Question 5/20

$$R_{\theta}^{-1} = R_{\theta}^{\perp}$$

Réponse 5/20

$$R_{-\theta}$$

Question 6/20

$$\ker(u^*)$$

Réponse 6/20

$$\operatorname{im}(u)^\perp$$

Question 7/20

$$u \in S^{++}(\mathbb{R})$$

Réponse 7/20

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle > 0$$

Question 8/20

Réduction des isométries en BON

Réponse 8/20

Il existe une BON (ou pour toute) \mathbb{B} telle que

$$\text{Mat}_{\mathbb{B}}([\cdot])u = \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_q & & \\ & & R_{\theta_1} & \\ & & & \ddots \\ & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix}$$

Question 9/20

Racine d'un endomorphisme

Réponse 9/20

$$\forall u \in S^+(E), \exists! r \in S^+(E), r^2 = s$$

Question 10/20

Description de $O_n(\mathbb{R})$

Réponse 10/20

$$R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
$$S_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Question 11/20

Théorème spectral matriciel

Réponse 11/20

$$M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists (P, D) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}_n(\mathbb{R}), M = PDP^{\top}$$

Question 12/20

Caractérisation spectrale de $S^+(\mathbb{R})$

Réponse 12/20

$$\mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$$

Question 13/20

Théorème spectral

Réponse 13/20

Sont équivalents :

$$u \in S(E)$$

Il existe une BON de vecteurs propres de u

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)}^{\perp} (E_{\lambda}(u))$$

Question 14/20

$$S_{\theta} S_{\theta'}$$

Réponse 14/20

$$R_{\theta-\theta'}$$

Question 15/20

Caractérisation spectrale de $S^{++}(\mathbb{R})$

Réponse 15/20

$$\mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$$

Question 16/20

$$R_{\theta}R_{\theta'}$$

Réponse 16/20

$$R_{\theta'+\theta}$$

Question 17/20

Inégalité de Bessel

Réponse 17/20

Une projection p est orthogonale si et seulement si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$

Question 18/20

Formules de polarisation

Réponse 18/20

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2}{2}$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$$

Question 19/20

$$u \in S^+(\mathbb{R})$$

Réponse 19/20

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geq 0$$

Question 20/20

Caractérisation matricielle de $u \in S(E)$

Réponse 20/20

Il existe une BON (ou pour toute) \mathcal{B}
 $\text{Mat}_{\mathbb{B}}([\]u \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$