Algèbre 1
Formes bilinéaires

Question 1/25

$$V^{\perp,\varphi}$$

$$V \subset E$$

Réponse 1/25

$$\{y \in F, \forall x \in V, \varphi(x, y) = 0\}$$

Question 2/25

$$W^{\varphi,\perp}$$

$$W \subset F$$

Réponse 2/25

$$\{x \in E, \forall y \in W, \varphi(x, y) = 0\}$$

Question 3/25

Décomposition explicite de $\varphi \in \mathrm{Bil}(E, E)$ dans $\mathrm{S}(E) \oplus \mathrm{A}(E)$

Réponse 3/25

$$\varphi_S(x, y) = \frac{1}{2}(\varphi(x, y) + \varphi(y, x))$$
$$\varphi_A(x, y) = \frac{1}{2}(\varphi(x, y) - \varphi(y, x))$$

Question 4/25

Expression de $V^{\perp,\varphi}$ avec r_φ et ℓ_φ

Réponse 4/25

$$V^{\perp,\varphi} = \ell_\varphi(V)^\perp = r_\varphi^{-1}(V)$$

Question 5/25

$$\varphi \in \mathrm{Bil}(E, E) \text{ est alternée}$$

Réponse 5/25

$$\varphi(x, x) = 0$$

Question 6/25

Expression de $W^{\varphi,\perp}$ avec r_φ et ℓ_φ

Réponse 6/25

$$V^{\perp,\varphi} = \ell_\varphi^{-1}(W) = r_\varphi(W)^\perp$$

Question 7/25

φ est non dégénérée

Réponse 7/25

$$\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(E) = \dim(F)$$

Question 8/25

$\varphi \in \mathrm{Bil}(E, E)$ est symétrique

Réponse 8/25

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

Question 9/25

Équivalences à φ symétrique sur ℓ_φ et r_φ

Réponse 9/25

$$\ell_\varphi = r_\varphi$$
$$\ell_\varphi = {}^t\ell_\varphi$$
$$r_\varphi = {}^t r_\varphi$$

Question 10/25

$$\dim(\mathrm{S}(E))$$

Réponse 10/25

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Question 11/25

$$F^{\varphi,\perp}$$

Réponse 11/25

$$\ker(\ell_\varphi)$$

Question 12/25

Équivalences à φ antisymétrique sur ℓ_φ et r_φ

Réponse 12/25

$$\begin{aligned} \ell_\varphi &= -r_\varphi \\ \ell_\varphi &= -{}^t\ell_\varphi \\ r_\varphi &= -{}^t r_\varphi \end{aligned}$$

Question 13/25

Restriction d’une forme bilinéaire non dégénérée

Réponse 13/25

La restriction d'une forme bilinéaire non dégénérée n'est en général pas dégénérée

Question 14/25

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E^*}(r_\varphi)$$

Réponse 14/25

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)$$

Question 15/25

$\varphi(X, Y)$ matriciellement

Réponse 15/25

$${}^{t}XMY \text{ où } X \text{ et } Y \text{ sont des vecteurs colonnes}$$

Question 16/25

Lien entre $\mathrm{S}(E)$ et $\mathrm{A}(E)$

Réponse 16/25

$$\text{Si } \operatorname{car}(\mathbb{k}) \neq 2,\ \operatorname{Bil}(E, E) = \mathrm{S}(E) \oplus \mathrm{A}(E)$$
$$\text{Si } \operatorname{car}(\mathbb{k}) = 2,\ \mathrm{A}(E) \subset \mathrm{S}(E)$$

Question 17/25

$$E^{\perp,\varphi}$$

Réponse 17/25

$$\ker(r_\varphi)$$

Question 18/25

$$\dim(\mathrm{A}(E))$$

Réponse 18/25

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Question 19/25

Lien entre antisymétrique et alternée

Réponse 19/25

Si φ est alternée alors elle est antisymétrique
Si $\mathrm{car}(\mathbb{k}) \neq 2$ est φ est antisymétrique alors elle est alternée

Question 20/25

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F^*}(\ell_\varphi)$$

Réponse 20/25

$$ {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi) $$

Question 21/25

$$\varphi \in \mathrm{Bil}(E, E) \text{ est antisymétrique}$$

Réponse 21/25

$$\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$$

Question 22/25

$$\varphi \in \mathrm{Bil}(E, F)$$
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)$$

Réponse 22/25

$$\left(\varphi(e_i, f_j)\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]}$$

Question 23/25

Lien entre $\dim(V)$, $\dim\left(V^{\perp,\varphi}\right)$ et $\dim(E)$

Réponse 23/25

$$\dim(V) + \dim\left(V^{\perp,\varphi}\right) \geqslant \dim(E)$$

Il y a égalité si et seulement si φ est non dégénérée

Question 24/25

$$\text{Lien entre } \ell_\varphi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \varphi(x,\cdot) \end{array}, \ r_\varphi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \varphi(\cdot,x) \end{array}$$

$$\text{et } \mathrm{Bil}(E,F)$$

Réponse 24/25

$$\begin{aligned} \ell : \mathrm{Bil}(E,F) &\longrightarrow \mathcal{L}(E,F) \\ \varphi &\longmapsto \ell_\varphi \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r : \mathrm{Bil}(E,F) &\longrightarrow \mathcal{L}(E,F) \\ \varphi &\longmapsto r_\varphi \end{aligned}$$

sont deux isomorphismes

Question 25/25

Quotient d'une fore bilinéaire dégénérée

Réponse 25/25

Si $\varphi \in \mathrm{Bil}(E, F)$ est dégénérée alors il existe une unique forme bilinéaire non dégénérée $\varphi' \in \mathrm{Bil}(E/\ker(\ell_\varphi), F/\ker(r_\varphi))$ telle que $\varphi(\cdot, \cdot) = \varphi'(\pi_E(\cdot), \pi_F(\cdot))$