Intégration et théorie de la mesure

Intégration de Lebesgue

Question 1/8

Intégrale d'une fonction étagée

Réponse 1/8

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{\lambda \in \mathrm{im}(f)} \left(\lambda \mu(\{f = \lambda_i\})\right)$$

Question 2/8

f est étagée

Réponse 2/8

$$f = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \mathbb{1}_{\{f=\lambda_i\}} \right)$$

Question 3/8

Théorème de convergence dominée

Réponse 3/8

Si $\left(f_n : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}_+}\right)$ est une suite de fonctions mesurables qui convergent simplement vers f et telle qu'il existe $g \in L^1(X)$ pour laquelle $f_n \leqslant |g|$ μ-pp pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim \left(\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \right) = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$

Question 4/8

Lien entre fonction mesurable et fonction étagée

Réponse 4/8

Toute fonction mesurable est limite simple de fonctions mesurables croissantes

Question 5/8

Lemme de Fatou

Réponse 5/8

Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables

$$\text{alors } \liminf\left(\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu\right) \leqslant \int_X \liminf(f_n)\,\mathrm{d}\mu$$

Question 6/8

Intégrale d'une fonction positive f

Réponse 6/8

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sup\left(\left\{ \int_X g \, \mathrm{d}\mu, g \text{ étagée }, g \leqslant f \right\} \right)$$

Question 7/8

Théorème de convergence monotone (ou Beppo-Levi)

Réponse 7/8

Si $\left(f_n\colon (X,\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}_+}\right)$ est une suite croissantes de fonctions mesurables qui convergent simplement vers f alors

$$\lim\left(\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu\right) = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

Question 8/8

Inegailté de Tchebychev

Réponse 8/8

$$\text{Si } \alpha > 0,\ \mu(\{f \geqslant \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_X f \,\mathrm{d}\mu$$