Analyse complexe
Théorie de Cauchy

Question 1/21

Primitive de fonctions holomorphe sur un ouvert simplement connexe U (ie connexe par arcs et tout lacet est homotope à un lacet constant)

Réponse 1/21

Toute fonction f holomorphe de classe $\mathcal{C}^1$
admet une primitive holomorphe sur U
Ce résultat est en particulier vrai si U est étoilé

Question 2/21

Formule de Cauchy

Réponse 2/21

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, f holomorphe sur U et $z_0 \in U$ alors pour tout $z \in D(z_0, r)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - r} \,\mathrm{d}w$$

Question 3/21

Invariance par homotopie des intégrales

Réponse 3/21

Si f est holomorphe et Γ de classe $\mathcal{C}^2$, en posant $\gamma_s = \Gamma(s, \cdot)$, si γ_s vérifie l'une des deux conditions suivantes, $\forall s \in [0,1]$, γ_s est fermé ou $\gamma_s(0)$ et $\gamma_s(1)$ sont indépendant de s alors

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Question 4/21

Propriétés équivalentes à $f = 0$ sur U ou f est holomorphe

Réponse 4/21

L'ensemble des zéros de f possède un point d'accumulation dans U

$$\exists z_0 \mathrm{i} U,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(z_0) = 0$$

Question 5/21

Théorème de Cauchy

Réponse 5/21

Pour U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$, f est holomorphe sur U si et seulement si f est analytique sur U

Question 6/21

Majoration d'une intégrale

Réponse 6/21

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leqslant \max_{z\in\gamma([a,b])} |f(z)| \times \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t}_{\text{longueur de } \gamma}$$

Question 7/21

Intégrale sur $\partial\Gamma$ où $\Gamma\colon [0,1]^2 \to U$

Réponse 7/21

Si f est holomorphe et Γ de classe $\mathcal{C}^2$ alors

$$\int_{\partial\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Question 8/21

Intgrale de f sur $C(0, r)$ holomorphe sur couronne

Réponse 8/21

$$\int_{C(0,r)} f(z)\,\mathrm{d}z \text{ est indépendante de } r$$

Question 9/21

Intégrales sur un lacet

Réponse 9/21

Si f est holomorphe sur U et $\gamma(a) = \gamma(b)$,

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Question 10/21

Concaténation d'intégrales

Réponse 10/21

Si $c \in [a,b]$, $\gamma_1 = \gamma_{|[a,c]}$ et $\gamma_2 = \gamma_{|[c,b]}$,

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Question 11/21

Intégration sur le chemin opposé

Réponse 11/21

$$\text{Si } \gamma^*(t) = \gamma(a+b-t),$$
$$\int_{\gamma^*} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Question 12/21

Théorème de Liouville

Réponse 12/21

Toute fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$ est constante

Question 13/21

Principe du prolongement analytique

Réponse 13/21

Si f et g sont holomorphe sur U et coïncident sur un ouvert de U alors $f = g$ sur U

Soit f analytique non identiquement nulle sur U, l'ensemble des zéros de f sont isolés

Question 14/21

Invariance par paramétrage de l'intégrale

Réponse 14/21

Si $\varphi : [a', b'] \to [a, b]$ est croissante et $\mathcal{C}^1$, en posant $\gamma_0 = \gamma \circ \varphi$, $\displaystyle\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$

Question 15/21

Principe du maximum

Réponse 15/21

Si f est holomorphe sur U et $|f|$ admet un maximum sur U alors f est constante dur U

Question 16/21

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux}$$

Réponse 16/21

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Question 17/21

Coefficients de la série de Taylor d'une fonction holomorphe

Réponse 17/21

$$a_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}w$$

Question 18/21

Lien entre fonction holomorphe sur la couronne $A(R_1, R_2)$ et série de Laurent

Réponse 18/21

$$\text{Les application } (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \left(z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} (a_n z^n)\right)$$

$$\text{et } f \mapsto \left(\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ où } \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n z^n) \text{ est}$$

$$\text{holomorphe sur } D(0,R_1) \text{ et } \sum_{n\in-\mathbb{N}^*} (a_n z^n) \text{ est}$$

$$\text{holomorphe sur } D(0,R_2) \text{ sont deux bijections}$$

réciproques

Question 19/21

Théorème de Morera

Réponse 19/21

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$, il y a équivalence entre f est analytique sur U et f est continue et vérifie $\forall (a, b, c) \in U^3$ tels que $\Delta(a, b, c) \subset U$,

$$\int_{[a,b]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[b,c]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[c,a]} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Question 20/21

Inégalité de Cauchy

Réponse 20/21

$$\left|\frac{f^{(n)}(z_n)}{n!}\right| \leqslant r^{-n} \max_{\theta\in[0,2\pi]} \left| f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|$$

Question 21/21

Maximum de f continue sur $\overline{U}$ et holomorphe sur U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$

Réponse 21/21

$$\max_{z \in \overline{U}} |f(z)| = \max_{z \in \partial U} |f(z)|$$