Algèbre 1

Polynômes et fractions rationnelles

Question 1/16

Partie polaire d'une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

F a des pôles $(r_1, \cdots, r_k)$ de multiplicité $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$

Réponse 1/16

$$\sum_{j=0}^{\alpha_i} \left(\frac{\lambda_{i,j}}{(X - r_i)^j} \right)$$

Question 2/16

$$\deg(P)$$

Réponse 2/16

$$\max(\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\})$$

Question 3/16

Propriétés de $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[x]$

Réponse 3/16

Homomorphisme d’anneaux surjectif

Question 4/16

Structure de $\mathbb{A}[X]$

Réponse 4/16

Anneau commutatif

Question 5/16

Interpolation de la fonction f aux points $(x_1, \cdots, x_n)$

Réponse 5/16

$$P = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) L_i)$$

Question 6/16

i-ième polynôme interpolateur de Lagrange

Réponse 6/16

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Question 7/16

Propriétés de $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[x]$ si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$

Réponse 7/16

Isomorphisme d'anneaux

Question 8/16

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

F avec $Q = Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_k^{\alpha_k}$, $\deg(Q_i) \leqslant 2$

Réponse 8/16

$$F = E + \sum_{i=0}^{k} \left(\sum_{j=0}^{\alpha_i} \left(\frac{A_{i,j}}{Q_i^j} \right) \right)$$

$$\deg(A_{i,j}) < \deg(Q_i)$$

Question 9/16

Structure de $\mathbb{K}(X)$

Réponse 9/16

Corps

Question 10/16

Coefficient avec le terme $X - r$ de la décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{P}{Q}$ dans $\mathbb{C}(X)$

Réponse 10/16

$$\lambda = \frac{P(r)}{\frac{Q}{X-r}(r)} = \frac{P(r)}{Q'(r)}$$

Question 11/16

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

F a des pôles $(r_1, \cdots, r_k)$ de multiplicité $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$

Réponse 11/16

$$F = E + \sum_{i=0}^{k} \left(\sum_{j=0}^{\alpha_i} \left(\frac{\lambda_{i,j}}{(X - r_i)^j} \right) \right)$$

Question 12/16

Relations de Viète

$$P = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k X^k\right) \text{ est scindé à racines}$$

$$\left(r_1, \cdots, r_n\right)$$

Réponse 12/16

$$\sum_{K \in \mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)} \left(\prod_{j \in K} (r_j) \right) = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Question 13/16

Décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ de racines $(r_1, \cdots, r_k)$ de multiplicité $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$

Réponse 13/16

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{X - r_i} \right)$$

Question 14/16

Structure de $\mathbb{A}[X]$ si $\mathbb{A}$ est intègre

Réponse 14/16

Anneau intègre commutatif

Question 15/16

Un anneau commutatif $\mathbb{B}$ est une algèbre sur
un anneau commutatif $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}$-algèbre $\mathbb{B}$

Réponse 15/16

$$\forall(\lambda, \mu, x, y) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{B}^2$$
$$(\lambda\mu)y = \lambda(\mu y)$$
$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$
$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$
$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$
$$1_{\mathbb{A}}x = x$$

Question 16/16

$$\mathrm{val}(P)$$

Réponse 16/16

$$\min(\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\})$$