

# Algèbre 1

## *Structures algébriques*

## Question 1/90

Groupe des inversibles d'un anneau

## Réponse 1/90

$$A^\times$$

$A^\times$  est un groupe multiplicatif

## Question 2/90

Si  $(K, +, \times)$  est un groupe et  $L \subset K$   
Caractérisation des sous-corps

## Réponse 2/90

$$\begin{aligned} 1_K \in L \quad \forall (x, y) \in L, \quad x - y \in L \\ \forall (x, y) \in L, \quad y \neq 0 \Rightarrow xy^{-1} \in L \end{aligned}$$

## Question 3/90

Si  $(G, \star)$  est un groupe

Un sous-ensemble  $H$  de  $G$  est un sous-groupe  
de  $G$

## Réponse 3/90

$H$  est stable pour la loi de  $G$  et la loi induite définit sur  $H$  une structure de groupe

## Question 4/90

Description par le haut du sous-groupe  
engendré par une partie



## Réponse 4/90

Soient  $\mathcal{G}$  l'ensemble des sous-groupes de  $G$  et

$$\mathcal{H} = \{H \in \mathcal{G} \mid X \subset H\}$$

$$\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} (H)$$

## Question 5/90

Associativité externe

$E$  est muni d'une loi de composition externe  $\diamond$   
sur  $\mathbb{K}$ , muni d'une loi de composition interne  $\star$

## Réponse 5/90

$$\forall (\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K}^2 \times E, (\lambda \star \mu) \diamond x = \lambda \diamond (\mu \diamond x)$$

## Question 6/90

Commutativité généralisée

## Réponse 6/90

Si  $\star$  est une loi commutative et associative sur

$E$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$x_1 \star \dots \star x_n = x_{\sigma(1)} \star \dots \star x_{\sigma(n)}$$

## Question 7/90

Magma

## Réponse 7/90

Muni d'une loi de composition interne

## Question 8/90

Image directe et réciproque de sous-groupes  
par un homomorphisme



## Réponse 8/90

Si  $G$  et  $H$  sont deux groupes, et  $f \in \text{Hom}(G, H)$  un morphisme de groupes,  $G'$  et  $H'$  deux sous-groupes respectivement de  $G$  et  $H$

$f(G')$  est un sous-groupe de  $H$   
 $f^{-1}(H')$  est un sous-groupe de  $G$

## Question 9/90

Si  $H$  est un sous-groupe distingué de  $G$

## Réponse 9/90

$$\begin{aligned} & \forall a \in G, aH = Ha \\ \Leftrightarrow & \forall a \in G, \forall h \in H, aha^{-1} \in H \end{aligned}$$

## Question 10/90

Si  $K$  est un corps, d'élément neutre  $1_K \neq 0_K$ ,  
 $H = \{n \times 1_K, n \in \mathbb{Z}\}$  le sous-groupe  
monogène de  $(K, +)$  engendré par  $1_K$   
Caractéristique d'un corps

## Réponse 10/90

Si  $H$  est infini,  $K$  est de caractéristique nulle

Si  $H$  est fini de cardinal  $p$ ,  $K$  est de  
caractéristique  $p$

## Question 11/90

Soient  $E$  muni d'une structure de  $X$  et  $F \subset E$   
 $F$  est un sous- $X$  de  $E$

## Réponse 11/90

$F$  est stable par les lois de  $E$

$F$  contient les neutres imposés par  $E$

Les lois induites sur  $F$  par les lois de  $E$   
vérifient les axiomes de la structure de  $X$

## Question 12/90

Propriétés d'un groupe  $(G, \star)$



## Réponse 12/90

$G$  admet un unique élément neutre pour  $\star$   
 $\forall x \in G, \exists! x^s \in G$

## Question 13/90

Diviseurs de zéro dans un anneau  $A$

## Réponse 13/90

$a \in A$  est un diviseur de 0 à gauche si et seulement s'il existe  $b \in A$  tel que  $ab = 0$

$a \in A$  est un diviseur de 0 à droite si et seulement s'il existe  $b \in A$  tel que  $ba = 0$

$a \in A$  est un diviseur de 0 si et seulement si  $a$  est diviseur de 0 à gauche et à droite

## Question 14/90

Cardinal des classes de congruence

## Réponse 14/90

$$|Ha, a \in G| = |Ha, a \in G| = |H|$$

## Question 15/90

Réciproque d'isomorphisme

## Réponse 15/90

Si  $f: F \rightarrow F$  est un isomorphisme, alors  $f^{-1}$   
est un isomorphisme

## Question 16/90

Passage au quotient de la loi dans le cas d'un  
sous-groupe distingué

Si  $G$  est un groupe et  $H$  un sous-groupe  
distingué de  $G$



## Réponse 16/90

$\equiv_g = \equiv_d$  et on note la relation  $\equiv$

La loi induite correspond au produit des  
classes élément par élément

$$\begin{aligned}(ab)H &= (aH) \cdot (bH) \\ &= \{x \cdot y, x \in aH, y \in bH\}\end{aligned}$$

La loi induite sur l'ensemble quotient munit  
celui-ci d'une structure de groupe

## Question 17/90

Monoïde

## Réponse 17/90

Muni d'une loi de composition interne, de  
l'associativité et d'un élément neutre

Un monoïde est un magma

## Question 18/90

Si  $G$  et  $H$  sont deux groupes et  
 $f \in \text{Hom}(G, H)$   
 $f(e_G)$

Réponse 18/90

$$f(e_H)$$

## Question 19/90

Résolution de  $x^n = e$

## Réponse 19/90

$\{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = e\}$  est de la forme  $a\mathbb{Z}$

$x$  est d'ordre fini si et seulement si  $a \neq 0$  (on a donc  $\text{ord}(x) = a$ )

## Question 20/90

Sous-groupe propre de  $G$



## Réponse 20/90

Sous-groupe de  $G$  distinct de  $G$  et  $\{e_G\}$

## Question 21/90

Symétrique de  $x \star y$

## Réponse 21/90

$$y^s \star x^s$$

## Question 22/90

Anneau

## Réponse 22/90

Muni de deux lois de composition internes  
(généralement notées  $+$  et  $\times$ )  
 $(A, +)$  est un groupe abélien  
 $(A, \times)$  est un monoïde  
 $\times$  est distributive sur  $+$

## Question 23/90

Distributivité généralisée

$$\prod_{i=1}^n \left( \sum_{j \in J_i} (x_{i,j}) \right)$$

## Réponse 23/90

$$\sum_{(j_1, \dots, j_n) \in J_1 \times \dots \times J_n} \left( \prod_{i=1}^n (x_{i, j_i}) \right)$$

## Question 24/90

Si  $K$  est un corps de caractéristique nulle  
Propriété pour les éléments de  $K$



## Réponse 24/90

$$\forall (n, x) \in \mathbb{Z} \times K$$
$$n \times x = 0_K \Leftrightarrow (x = 0_K \vee n = 0)$$

## Question 25/90

Factorisation de  $a^n - b^n$  dans un anneau  $A$

## Réponse 25/90

$(a, b) \in A^2$  tel que  $ab = ba$

$$(a - b) \sum_{k=0}^{n-1} (a^{n-k-1} b^k)$$

## Question 26/90

Passage au quotient de la loi dans le cas abélien

Si  $G$  est un groupe abélien et  $H$  un  
sous-groupe de  $G$

## Réponse 26/90

$\equiv_g = \equiv_d$  et on note la relation  $\equiv$

La loi induite correspond au produit des classes élément par élément

$$\begin{aligned}(ab)H &= (aH) \cdot (bH) \\ &= \{x \cdot y, x \in aH, y \in bH\}\end{aligned}$$

La loi induite sur l'ensemble quotient munit celui-ci d'une structure de groupe abélien

## Question 27/90

Isomorphisme de  $X$

## Réponse 27/90

Homomorphisme de  $X$  bijectif

## Question 28/90

Commutativité



## Réponse 28/90

$\star$  est commutative si et seulement  
si  $\forall (x, y) \in E^2, x \star y = y \star x$

## Question 29/90

Sous-groupe engendrée par une partie  $X$

## Réponse 29/90

$$\langle X \rangle$$

C'est le plus petit sous-groupe contenant  $X$

## Question 30/90

Si  $(G, \star)$  est un groupe et  $H \subset G$   
Caractérisation(s) des sous-groupes

## Réponse 30/90

$$H \neq \emptyset \quad \forall (x, y) \in H, \quad x \star y \in H$$

$$\forall x \in H, \quad x^s \in H$$

$$H \neq \emptyset \quad \forall (x, y) \in H^2, \quad x \star y^s \in H$$

$$e_G \in H \quad \forall (x, y) \in H^2, \quad x \star y^s \in H$$

## Question 31/90

Image directe et réciproque de sous-anneaux  
par un homomorphisme

## Réponse 31/90

Si  $A$  et  $B$  sont deux anneaux, et  $f: A \rightarrow B$  un morphisme d'anneaux,  $A'$  et  $B'$  deux sous-anneaux respectivement de  $A$  et  $B$

$f(A')$  est un sous-anneau de  $B$

$f^{-1}(B')$  est un sous-anneau de  $A$

## Question 32/90

Soient  $(G, \star)$  et  $(H, \diamond)$  deux groupes  
 $f: G \rightarrow H$  est un homomorphisme de groupes



## Réponse 32/90

$$\forall (x, y) \in G^2, f(x \star y) = f(x) \diamond f(y)$$

L'ensemble des homomorphisme de  $G$  dans  $H$   
est noté  $\text{Hom}(G, H)$

Si  $(G, \star) = (H, \diamond)$ ,  $f$  est un endomorphisme

L'ensemble des automorphismes de  $G$  est noté  
 $\text{Aut}(G)$

## Question 33/90

Si  $A$  est un anneau commutatif et  $I$  un idéal  
de  $A$

Anneau quotient

## Réponse 33/90

$A/I$  peut être muni d'une multiplication avec  
pour tout  $(a, b) \in A$ ,  $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$   
 $A/I$  est muni d'une structure d'anneau

## Question 34/90

Intersection de sous-groupes

Si  $G$  est un groupe, et  $(H_i)_{i \in I}$  une famille de sous-groupes de  $G$

## Réponse 34/90

$\bigcap_{i \in I} (H_i)$  est un sous-groupe de  $G$

## Question 35/90

$x$  et  $y$  sont dans la même classe à droite  
modulo  $H$

## Réponse 35/90

$$x \equiv_d y [H] \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

## Question 36/90

Sous-groupe monogène



## Réponse 36/90

$$\langle x \rangle = \{x^n, n \in \mathbb{N}\}$$

## Question 37/90

Si  $(A, +, \times)$  est un anneau commutatif  
Un sous-ensemble  $I$  de  $A$  est un sous-anneau  
idéal de  $A$

## Réponse 37/90

$I$  est un sous-groupe de  $(A, +)$   
 $\forall i \in I, \forall a \in A, ia \in I$

## Question 38/90

Soient  $e \in E$  un élément neutre pour la loi  $\star$  et

$$x \in E$$

$y$  est un symétrique de  $x$  pour la loi  $\star$

Réponse 38/90

$$x \star y = e = y \star x$$

## Question 39/90

Intersection de sous-anneaux

Si  $A$  est un groupe, et  $(B_i)_{i \in I}$  une famille de sous-anneaux de  $A$

## Réponse 39/90

$\bigcap_{i \in I} (B_i)$  est un sous-anneau de  $A$

## Question 40/90

Image directe et réciproque de sous-corps par  
un homomorphisme



## Réponse 40/90

Si  $K$  et  $L$  sont deux corps, et  $f: K \rightarrow L$  un morphisme de corps,  $K'$  et  $L'$  deux sous-corps respectivement de  $K$  et  $L$

$f(K')$  est un sous-corps de  $L$

$f^{-1}(L')$  est un sous-corps de  $K$

## Question 41/90

Anneau principal

## Réponse 41/90

Un anneau intègre dont tous les idéaux sont  
principaux

## Question 42/90

Groupe

## Réponse 42/90

Muni d'une loi de composition interne, de l'associativité, d'un élément neutre et de symétriques

Un groupe est un monoïde

## Question 43/90

Les classes à gauche modulo  $H$

## Réponse 43/90

$$\{aH, a \in G\}$$

## Question 44/90

Soient  $E$  muni d'une loi  $\star$ ,  $F \subset E$   
 $F$  est stable par  $\star$



## Réponse 44/90

$$\forall (x, y) \in F^2, x \star y \in F$$

La loi de  $E$  se restreint en une loi  $\star_F$  appelée  
loi induite sur  $F$  par  $\star$

## Question 45/90

Si  $G$  et  $H$  sont deux groupes et  $f \in \text{Hom}(g, h)$   
un morphisme de groupes  
 $\ker(f)$

## Réponse 45/90

$$f^{-1}(e_H) = \{y \in G \mid f(y) = e_H\}$$

## Question 46/90

Si  $f \in \text{Hom}(G, K)$  et  $H$  est un sous-groupe distingué

## Réponse 46/90

$f$  passe au quotient avec  $\tilde{f}: G/H \rightarrow K$

## Question 47/90

Si  $G$  est un groupe  
Structure de  $(\text{Aut}(G), \circ)$

## Réponse 47/90

$(\text{Aut}(G), \circ)$  est un groupe

## Question 48/90

Description des groupes monogènes  
Si  $G = \langle x \rangle$



## Réponse 48/90

Si  $\text{ord}(x) = +\infty$ ,  $G$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$

Si  $\text{ord}(x) = n \in \mathbb{N}^*$ ,  $G$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

## Question 49/90

Les classes à droite modulo  $H$

## Réponse 49/90

$$\{Ha, \ a \in G\}$$

## Question 50/90

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles munis d'une structure de  $X$ , munis respectivement des lois de composition internes  $\left(\underset{1}{\star}, \dots, \underset{n}{\star}\right)$  et  $\left(\underset{1}{\diamond}, \dots, \underset{n}{\diamond}\right)$ , et externes  $\left(\underset{1}{\square}, \dots, \underset{m}{\square}\right)$  et  $\left(\underset{1}{\triangle}, \dots, \underset{m}{\triangle}\right)$  sur  $K_1, \dots, K_m$   
 $f: E \rightarrow F$  est un homomorphisme

## Réponse 50/90

$f$  respecte les lois interne : soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\forall (x, y) \in E^2, f\left(x \underset{k}{\star} y\right) = f(x) \underset{k}{\diamond} f(y)$$

$f$  respecte les lois externes : soit  $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$

$$\forall (\lambda, x) \in K_k \times E, f\left(\lambda \underset{k}{\square} y\right) = \lambda \underset{k}{\triangle} f(x)$$

$f$  est compatible avec le neutre (si le neutre  $e_i$  pour la loi  $\underset{i}{\star}$  est imposé dans les axiomes, donc

le neutre  $e'_i$  existe pour la loi  $\underset{i}{\diamond}$ ) :  $f(e_i) = e'_i$

## Question 51/90

Anneau commutatif

## Réponse 51/90

Anneau dont la loi  $\times$  est commutative

## Question 52/90

Premier théorème d'isomorphisme



## Réponse 52/90

Si  $f \in \text{Hom}(G, H)$

$\ker(f)$  est un sous-groupe distingué de  $G$ , et  $f$  passe au quotient, définissant un morphisme de groupes  $\tilde{f}: G / \ker(f) \rightarrow H$

$\tilde{f}$  est injectif et sa corestriction à son image est un isomorphisme

## Question 53/90

Élément régulier d'un anneau

## Réponse 53/90

L'élément n'est pas diviseur de 0

La réciproque est vraie

S'adapte à gauche et à droite

## Question 54/90

Théorème de Lagrange pour l'ordre des groupes

## Réponse 54/90

Si  $G$  est un groupe fini et  $H$  un sous-groupe de  $G$

$$|H| \mid |G|$$

## Question 55/90

Si  $\star$  est une loi associative sur  $E$  et  
 $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$

## Réponse 55/90

$x_1 \star \cdots \star x_n$  ne dépend pas du parenthésage  
admissible

## Question 56/90

Élément régulier ou simplifiable



## Réponse 56/90

$x$  est régulier à gauche si et seulement  
si  $\forall (y, z) \in E^2, x \star y = x \star z \Rightarrow y = z$

$x$  est régulier à droite si et seulement  
si  $\forall (y, z) \in E^2, y \star x = z \star x \Rightarrow y = z$

$x$  est régulier si et seulement s'il est régulier à  
gauche et à droite

Si  $x$  admet un symétrique, alors il est régulier

## Question 57/90

Ordre d'un groupe  
Si  $G$  est un groupe

Réponse 57/90

$$\text{ord}(G) = |G|$$

## Question 58/90

Distributivité

## Réponse 58/90

La loi  $\star$  est distributive à gauche sur  $\diamond$  si et seulement

$$\text{si } \forall (x, y, z) \in E^3, \quad x \star (y \diamond z) = (x \star y) \diamond (x \star z)$$

La loi  $\star$  est distributive à droite sur  $\diamond$  si et seulement

$$\text{si } \forall (x, y, z) \in E^3, \quad (y \diamond z) \star x = (y \star x) \diamond (z \star x)$$

La loi  $\star$  est distributive sur  $\diamond$  si et seulement si elle est distributive à gauche et à droite

## Question 59/90

Élément absorbant dans un anneau  $(A, +, \times)$

Réponse 59/90

0

## Question 60/90

Description par le bas du sous-groupe engendré  
par une partie



## Réponse 60/90

$$\langle X \rangle = \{x_1 \cdots x_n, (x_1, \cdots, x_n) \in X^n\} \\ \cup \{x^{-1}, x \in X\}$$

$e$  correspond au produit vide

## Question 61/90

Ordre d'un élément d'un groupe

## Réponse 61/90

$$\text{ord}(x) = \min(\{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = e\})$$

## Question 62/90

Si  $f \in \text{Hom}(G, K)$  et  $H$  est un sous-groupe distingué et  $H \subset \ker(f)$

## Réponse 62/90

$$f = \tilde{f} \circ \pi$$

La réciproque est vraie

## Question 63/90

Soit  $x \in E$

$x$  est un élément absorbant pour  $\star$

## Réponse 63/90

$$\forall y \in E, \ x \star y = x = y \star x$$

## Question 64/90

Fibres de  $f$

Soit  $x \in f^{-1}(\{y\})$



## Réponse 64/90

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{y\}) &= x \times \ker(f) \\ &= \{x \times z, z \in \ker(f)\} = \ker(f) \times x \end{aligned}$$

## Question 65/90

$x$  et  $y$  sont dans la même classe à gauche  
modulo  $H$

## Réponse 65/90

$$x \equiv_g y [H] \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

## Question 66/90

Groupe abélien

## Réponse 66/90

La loi  $\star$  de  $G$  est commutative

## Question 67/90

Théorème de Lagrange pour l'ordre des  
éléments d'un groupe

## Réponse 67/90

Si  $G$  est un groupe fini et  $x \in G$   
 $\text{ord}(x) \mid |G|$

## Question 68/90

Si  $(K, +, \times)$  est un corps

Un sous-ensemble  $L$  de  $K$  est un sous-corps de  
 $K$



## Réponse 68/90

$L$  est stable pour les lois  $+$  et  $\times$

$$1_K \in L$$

Les lois induites sur  $L$  définissent sur  $L$  une  
structure de corps

## Question 69/90

Anneau intègre

## Réponse 69/90

Anneau commutatif non réduit à  $\{0\}$  et sans diviseurs de 0

## Question 70/90

Propriété de  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

## Réponse 70/90

$\mathbb{F}_p$  est un corps si et seulement si  $p$  est premier

## Question 71/90

Si  $K$  est un corps de caractéristique finie  $p$   
Propriété pour les éléments de  $K$

Réponse 71/90

$$\forall x \in K, \quad px = 0_K$$

## Question 72/90

Propriété des groupes monogènes



## Réponse 72/90

Un groupe monogène est abélien

## Question 73/90

Si  $(A, +, \times)$  est un groupe et  $B \subset A$   
Caractérisation des sous-anneaux

## Réponse 73/90

$$1_A \in B \quad \forall (x, y) \in B, \quad x - y \in B$$
$$\forall (x, y) \in B, \quad xy \in B$$

## Question 74/90

Soient  $\left(K, +_K, \times_K\right)$  et  $\left(L, +_L, \times_L\right)$  deux corps  
 $f: K \rightarrow L$  est un homomorphisme de corps

## Réponse 74/90

$f$  est un homomorphisme des anneaux de  $K$  et  $L$

## Question 75/90

Corps

## Réponse 75/90

Muni de deux lois de composition internes  
(généralement notées  $+$  et  $\times$ )  
 $(K, +, \times)$  est un anneau commutatif  
 $(K^*, \times)$  est un groupe

## Question 76/90

Idéal principal



## Réponse 76/90

Idéal engendré par un unique élément  $a$  de la  
forme  $I = aA = \{ay, y \in A\}$   
 $I$  est souvent noté  $(a)$

## Question 77/90

Propriété des homomorphismes de corps

## Réponse 77/90

Un homomorphisme de corps est injectif

## Question 78/90

Groupe cyclique

Réponse 78/90

Groupe monogène fini

## Question 79/90

$$\text{Si } \ker(f) = \{e_G\}$$

## Réponse 79/90

$f$  est injectif (la réciproque est vraie)

## Question 80/90

Propriété sur 1 et 0 si l'anneau  $A$  a plus d'un élément



Réponse 80/90

$$1 \neq 0$$

## Question 81/90

Ensemble formé par les classes à gauche et à droite

## Réponse 81/90

$\{Ha, a \in G\}$  est une partition de  $G$   
 $\{aH, a \in G\}$  est une partition de  $G$

## Question 82/90

Endomorphisme de  $X$

## Réponse 82/90

Homomorphisme de  $X$  de  $E$  dans lui-même  
(muni des mêmes lois)

## Question 83/90

Propriété de la caractéristique d'un corps

## Réponse 83/90

Si  $K$  est un corps de caractéristique  $p$  non nulle,  $p$  est premier

## Question 84/90

Factorisation de  $(a + b)^n$  dans un anneau  $A$



## Réponse 84/90

$$(a, b) \in A^2 \text{ tel que } ab = ba$$
$$\sum_{k=0}^n \left( \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right)$$

## Question 85/90

Automorphisme de  $X$

Réponse 85/90

Endomorphisme et isomorphisme de  $X$

## Question 86/90

Si  $(A, +, \times)$  est un anneau

Un sous-ensemble  $B$  de  $A$  est un sous-anneau  
de  $A$

## Réponse 86/90

$B$  est stable pour les lois  $+$  et  $\times$

$$1_A \in B$$

Les lois induites sur  $B$  définissent sur  $B$  une structure d'anneau

## Question 87/90

Si  $G$  et  $H$  sont deux groupes et  
 $f \in \text{Hom}(G, H)$   
 $f(x^{-1})$

Réponse 87/90

$$f(x)^{-1}$$

## Question 88/90

Soit  $e \in E$

$e$  est un élément neutre pour la loi  $\star$



Réponse 88/90

$$\forall x \in E, \quad e \star x = x = x \star e$$

## Question 89/90

Soient  $\left(A, +_A, \times_A\right)$  et  $\left(B, +_B, \times_B\right)$  deux anneaux  
 $f: A \rightarrow B$  est un homomorphisme d'anneaux

## Réponse 89/90

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad f\left(x \underset{A}{+} y\right) = f(x) \underset{B}{+} f(y)$$

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad f\left(x \underset{A}{\times} y\right) = f(x) \underset{B}{\times} f(y)$$
$$f(1_A) = 1_B$$

## Question 90/90

Associativité

## Réponse 90/90

$\star$  est associative si et seulement  
si  $\forall (x, y, z) \in E^3, (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$