

Algèbre 1

Polynômes et fractions rationnelles

Question 1/16

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

$$F = \frac{P}{Q} \text{ avec } Q = Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_k^{\alpha_k}, \deg(Q_i) \leq 2$$

Réponse 1/16

$$F = E + \sum_{i=0}^k \left(\sum_{\substack{j=0 \\ \deg(A_{i,j}) < \deg(Q_i)}}^{\alpha_i} \left(\frac{A_{i,j}}{Q_i^j} \right) \right)$$

Question 2/16

i -ième polynôme interpolateur de Lagrange

Réponse 2/16

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Question 3/16

Propriétés de $\varphi: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[x]$

Réponse 3/16

Homomorphisme d'anneaux surjectif

Question 4/16

$$\deg(P)$$

Réponse 4/16

$$\max(\{n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0\})$$

Question 5/16

Structure de $\mathbb{K}(X)$

Réponse 5/16

Corps

Question 6/16

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

F a des pôles (r_1, \dots, r_k) de multiplicité
 $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$

Réponse 6/16

$$F = E + \sum_{i=0}^k \left(\sum_{j=0}^{\alpha_i} \left(\frac{\lambda_{i,j}}{(X - r_i)^j} \right) \right)$$

Question 7/16

Interpolation de la fonction f aux points
 (x_1, \dots, x_n)

Réponse 7/16

$$P = \sum_{i=1}^n (f(x_i) L_i)$$

Question 8/16

Structure de $\mathbb{A}[X]$

Réponse 8/16

Anneau commutatif

Question 9/16

Structure de $\mathbb{A}[X]$ si \mathbb{A} est intègre

Réponse 9/16

Anneau intègre commutatif

Question 10/16

Partie polaire d'une décomposition en éléments
simples dans $\mathbb{C}(X)$

F a des pôles (r_1, \dots, r_k) de multiplicité
 $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$

Réponse 10/16

$$\sum_{j=0}^{\alpha_i} \left(\frac{\lambda_{i,j}}{(X - r_i)^j} \right)$$

Question 11/16

Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ de
racines (r_1, \dots, r_k) de multiplicité
 $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$

Réponse 11/16

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i}{X - r_i} \right)$$

Question 12/16

Coefficient avec le terme $X - r$ de la
décomposition en éléments simples de $F = \frac{P}{Q}$
dans $\mathbb{C}(X)$

Réponse 12/16

$$\lambda = \frac{P(r)}{\frac{Q}{X-r}(r)} = \frac{P(r)}{Q'(r)}$$

Question 13/16

Propriétés de $\varphi: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[x]$ si $\text{car}(\mathbb{K}) = 0$

Réponse 13/16

Isomorphisme d'anneaux

Question 14/16

Relations de Viète

$P = \sum_{k=0}^n (a_k X^k)$ est scindé à racines
 (r_1, \dots, r_n)

Réponse 14/16

$$\sum_{K \in \mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)} \left(\prod_{j \in K} (r_j) \right) = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Question 15/16

$$\text{val}(P)$$

Réponse 15/16

$$\min(\{n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0\})$$

Question 16/16

Un anneau commutatif \mathbb{B} est une algèbre sur
un anneau commutatif \mathbb{A}
 \mathbb{A} -algèbre \mathbb{B}

Réponse 16/16

$$\forall (\lambda, \mu, x, y) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{B}^2$$

$$(\lambda\mu)y = \lambda(\mu y)$$

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

$$1_{\mathbb{A}}x = x$$