

# **Algèbre 1**

## ***Arithmétique***

## Question 1/13

Anneau euclidien

## Réponse 1/13

Si  $\mathbb{A}$  est un anneau intègre, avec un stathme

$$(v: \mathbb{A} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N})$$

$A$  est euclidien si

$$\forall a \in \mathbb{A}, \forall b \in \mathbb{A} \setminus \{0\} \exists (q, r) \in \mathbb{A}^2, a = bq + r \\ r = 0 \vee v(r) < v(b)$$

## Question 2/13

Distributivité de  $\times$  sur  $\wedge$  et  $\vee$

## Réponse 2/13

Si  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$

$$(a \wedge b) \times c = (ac) \wedge (bc)$$

$$(a \vee b) \times c = (ac) \vee (bc)$$

## Question 3/13

Théorème d'Euler

## Réponse 3/13

$$n \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{N}^*, \ x^{\varphi(n)} \equiv 1 \ [n]$$

## Question 4/13

$$a \wedge b$$



## Réponse 4/13

$$\begin{aligned} & \max(\{n \in \mathbb{N}, n \mid a \wedge n \mid b\}) \\ & \max_{(\mathbb{N}^*, |)}(\{n \in \mathbb{N}, n \mid a \wedge n \mid b\}) \\ & \inf_{(\mathbb{N}^*, |)}(a, b) \\ & a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$(a) + (b)$  pour un anneau principal

## Question 5/13

$$\varphi(n)$$

## Réponse 5/13

$$|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$$

## Question 6/13

Divisibilité avec le produit

## Réponse 6/13

Si  $a \wedge b = 1$ ,  $a \mid c \wedge b \mid c$ , alors  $ab \mid c$

## Question 7/13

Théorème des restes chinois

$$\begin{cases} x \equiv b_1 [a_1] \\ \vdots \\ x \equiv b_n [a_n] \end{cases}$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}, a_i \wedge a_j = 1$$

## Réponse 7/13

$$\hat{a}_i = \prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_j)$$

$$a_i u_i + \hat{a}_i v_i = 1$$

$$x \equiv \sum_{i=1}^n (b_i v_i \hat{a}_i) \left[ \prod_{i=1}^n (a_i) \right]$$

## Question 8/13

Relation entre  $\wedge$  et  $\vee$



## Réponse 8/13

$$(a \wedge b)(a \vee b) = ab$$

## Question 9/13

Lemme d'Euclide

## Réponse 9/13

Si  $a \mid bc$  et  $a \in \mathbb{P}$ , alors  $a \mid b \vee a \mid c$

Si  $a \wedge b = 1$  et  $a \wedge c = 1$ , alors  $a \wedge bc = 1$

## Question 10/13

$$a \vee b$$

## Réponse 10/13

$$\begin{aligned} & \min(\{n \in \mathbb{N}, a \mid n \wedge b \mid n\}) \\ & \max_{(\mathbb{N}^*, |)}(\{n \in \mathbb{N}, a \mid n \wedge b \mid n\}) \\ & \sup_{(\mathbb{N}^*, |)}(a, b) \\ & a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$(a) \cap (b)$  pour un anneau principal

## Question 11/13

Théorème de Fermat

## Réponse 11/13

$$p \in \mathbb{P}, a \in \mathbb{N}, a^p \equiv a \ [p]$$

Si  $p$  ne divise pas  $a$ ,  $a^{p-1} \equiv 1 \ [p]$

## Question 12/13

Lemme de Gauss



## Réponse 12/13

Si  $a \mid bc$  et  $a \wedge b = 1$ , alors  $a \mid c$

## Question 13/13

Formule de Legendre

## Réponse 13/13

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$