

# **Algèbre 2**

## ***Algèbre linéaire***

## Question 1/31

Famille génératrice de  $E$

## Réponse 1/31

$$\forall x \in E \exists (\lambda_i)_{i \in I}, \quad x = \sum_{i \in I} (\lambda_i x_i)$$
$$\text{Vect}\left((x_i)_{i \in I}\right) = E$$

## Question 2/31

Structure de  $\mathcal{L}(E)$

## Réponse 2/31

$(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre

## Question 3/31

Caractérisation géométrique des projecteurs

## Réponse 3/31

$p$  est un projecteur si et seulement s'il existe deux sous-espaces  $F$  et  $G$  de  $E$  tels que

$$F \oplus G = E \text{ avec } \forall (f, g) \in F \times G,$$

$$p(f + g) = f$$

$$F = \operatorname{im}(p), G = \ker(p)$$

Un projecteur est une projection géométrique sur  $\operatorname{im}(p)$  parallèlement à  $\ker(p)$

## Question 4/31

Polynome annulateur  
 $P \in \mathbb{K}[X]$  est annulateur de  $u \in \mathcal{L}(E)$



## Réponse 4/31

$$P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

## Question 5/31

Somme directe

## Réponse 5/31

$E \oplus F$  est directe si et seulement si

$$E \cap F = \{0\}$$

## Question 6/31

Structure des polynomes annulateurs

## Réponse 6/31

Idéal de  $\mathbb{K}[X]$

## Question 7/31

Endomorphisme nilpotent  
 $u \in \mathcal{L}(E)$

## Réponse 7/31

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

## Question 8/31

$\varphi: E \times F \rightarrow G$  est bilinéaire



## Réponse 8/31

$$\begin{aligned}\forall (x, x', y, y', \lambda) &\in E^2 \times F^2 \times \mathbb{K} \\ \varphi(\lambda x + x', y) &= \lambda \varphi(x, y) + \varphi(x', y) \\ \varphi(x, \lambda y + y') &= \lambda \varphi(x, y) + \varphi(x, y')\end{aligned}$$

## Question 9/31

Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev

Un sous-ensemble  $F$  de  $E$  est un sous-espace  
vectoriel de  $E$

## Réponse 9/31

$F$  est stable par les lois  $+$  et  $\cdot$  et les lois induites définissent sur  $F$  une structure d'espace-vectoriel

## Question 10/31

Endomorphisme d'espaces vectoriels

## Réponse 10/31

Application linéaire de  $E$  dans lui-même  
 $\mathcal{L}(E)$

## Question 11/31

Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev et  $X \subset E$   
 $\text{Vect}(X)$

## Réponse 11/31

Plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  
 $X$

## Question 12/31

Automorphisme d'espaces vectoriels



## Réponse 12/31

Endomorphisme d'espaces vectoriels bijectif  
 $\text{GL}(E)$

## Question 13/31

Diagonalisation d'une symétrie

## Réponse 13/31

$$s = \ker(s + \text{id}) \oplus \ker(s - \text{id})$$

## Question 14/31

Symétrie

## Réponse 14/31

$$s \circ s = \text{id}$$

## Question 15/31

Endomorphisme diagonalisable  
 $(b_i)_{i \in I}$  une base de  $E$

## Réponse 15/31

$$\forall i \in I, \exists \lambda_i \in \mathbb{K}, f(b_i) = \lambda_i b_i$$

Les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres

Si  $x \neq 0$ ,  $f(x) = \lambda x$  est un vecteur propre  
associé à  $\lambda$

$\ker(f - \lambda \text{id})$  est le sous-espace propre de  $f$   
associé à  $\lambda$

## Question 16/31

Caractérisation de l'image et diagonalisation  
d'un projecteur



## Réponse 16/31

$$\begin{aligned}\operatorname{im}(p) &= \ker(p - \operatorname{id}) \\ E &= \ker(p) \oplus \ker(p - \operatorname{id})\end{aligned}$$

## Question 17/31

Projecteur

## Réponse 17/31

$$p \circ p = p$$

## Question 18/31

Un ensemble  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$   
 $E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev

## Réponse 18/31

$(E, +)$  est un groupe abélien

$E$  est muni d'une loi de composition externe  $\cdot$

avec  $\forall (\lambda, \mu, x, y) \in \mathbb{K}^2 \times E^2$

$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$  (associativité externe ou pseudo-associativité)

$1_{\mathbb{K}}x = x$  (compatibilité du neutre de  $(\mathbb{K}, \times)$ )

$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$  (distributivité de  $\cdot$  sur  $+_E$ )

$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$  (distributivité de  $\cdot$  sur  $+_{\mathbb{K}}$ )

## Question 19/31

Image directe et réciproque de sous-espaces vectoriels par un homomorphisme

## Réponse 19/31

Si  $E$  et  $F$  sont deux groupes, et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$   
une application linéaire,  $E'$  et  $F'$  deux  
sous-espaces vectoriels de  $E$  et  $F$   
 $f(E')$  est un sous-espace vectoriel de  $F$   
 $f^{-1}(F')$  est un sous-espace vectoriel de  $E$

## Question 20/31

$$\text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y)$$



## Réponse 20/31

$$\text{Vect}(X \cup Y)$$

## Question 21/31

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev

Caractérisation des applications linéaires

## Réponse 21/31

$$\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

## Question 22/31

Si  $(A, +, \times)$  est un anneau et  $\mathbb{K}$  un corps  
 $A$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre

## Réponse 22/31

$$\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times A^2$$
$$\lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y)$$

## Question 23/31

Structure de  $\mathcal{L}(E, F)$

## Réponse 23/31

$\mathbb{K}$ -ev

## Question 24/31

Isomorphisme d'espaces vectoriels



## Réponse 24/31

Application linéaire bijective

## Question 25/31

Base de  $E$

## Réponse 25/31

Famille libre maximale de  $E$

Famille génératrice minimale de  $E$

## Question 26/31

Caractérisation géométrique des symétries

## Réponse 26/31

$s$  est une symétrie si et seulement s'il existe deux sous-espaces  $F$  et  $G$  de  $E$  tels que

$$F \oplus G = E \text{ avec } \forall (f, g) \in F \times G,$$

$$s(f + g) = f - g$$

$$F = \ker(s - \text{id}), G = \ker(s + \text{id})$$

Une symétrie est une symétrie géométrique par rapport à  $\ker(s - \text{id})$  parallèlement à  $\ker(s + \text{id})$

## Question 27/31

Structure de  $\ker(f)$

$$f : E \rightarrow F$$

## Réponse 27/31

Sous-espace vectoriel de  $E$

## Question 28/31

Si  $E$  est un espace vectoriel et  $F \subset E$

Caractérisation(s) des sous-espaces vectoriels



## Réponse 28/31

$$0 \in F$$
$$\forall (x, y, \lambda) \in F^2 \times \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$$

## Question 29/31

Structure de  $(\text{GL}(E), \circ)$

## Réponse 29/31

Groupe

## Question 30/31

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev  
 $f : E \rightarrow F$  est une application linéaire

## Réponse 30/31

$$\begin{aligned} \forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad f(\lambda x) &= \lambda f(x) \\ \forall (x, y) \in E^2, \quad f(x + y) &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

## Question 31/31

Famille libre de  $E$

## Réponse 31/31

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I}, \sum_{i \in I} (\lambda_i x_i) = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$$

$$\forall x \in E \exists! (\lambda_i)_{i \in I}, x = \sum_{i \in I} (\lambda_i x_i)$$