

# Probabilités

## *Variables aléatoires*

## Question 1/38

$$\text{Si } X : (\Omega, \mathcal{T}) \xrightarrow{\mathcal{T}_X} (E; \mathcal{T}')$$

## Réponse 1/38

$$\{X^{-1}(A), A \in \mathcal{T}'\}$$

## Question 2/38

Application mesurable

## Réponse 2/38

Si  $(E, \mathcal{S})$  et  $(F, \mathcal{T})$  sont deux espaces mesurables et  $f: E \rightarrow F$   
 $\forall B \in \mathcal{T}, f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$

## Question 3/38

Formule de Koenig-Huyghens

## Réponse 3/38

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

## Question 4/38

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n)$$



## Réponse 4/38

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (\mathbb{V}(X)_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\text{cov}(X_i, X_j)) \\ &= (1 \cdots 1) \underline{\mathbb{V}}(X_1, \cdots, X_n) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Question 5/38

$$\mathbb{P}_{f(X)}$$

## Réponse 5/38

$$\mathbb{P}_X \circ \widehat{f^{-1}}$$

## Question 6/38

Variable centrée

## Réponse 6/38

$$\mathbb{E}(X) = 0$$

## Question 7/38

Matrice des variances-covariances

## Réponse 7/38

$$\underline{\mathbb{V}}(X_1, \dots, X_n) = (\text{cov}(X_i, X_j))_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$$

## Question 8/38

Structure des variables aléatoires de  $\mathbb{R}^{\Omega}$



## Réponse 8/38

Sous-algèbre de  $\mathbb{R}^{\Omega}$

## Question 9/38

Variables décorrélées

## Réponse 9/38

$$\text{cov}(X, Y) = 0$$

## Question 10/38

Variable aléatoire réelle

## Réponse 10/38

Variable aléatoire à valeurs dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$

## Question 11/38

Variable aléatoire discrète

## Réponse 11/38

$X(\Omega)$  est fini

## Question 12/38

Fonction de répartition de  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$



## Réponse 12/38

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

## Question 13/38

$$\mathbb{V}(X)$$

## Réponse 13/38

$$\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

## Question 14/38

Coefficient de corrélation

## Réponse 14/38

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

## Question 15/38

Loi d'une variable aléatoire

## Réponse 15/38

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$$

## Question 16/38

$$\mathbb{V}(\lambda X + \mu)$$



## Réponse 16/38

$$\lambda^2 \mathbb{V}(X)$$

## Question 17/38

Cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz  
pour cov

## Réponse 17/38

Il existe  $(a, b) \neq (0, 0)$  tel que  $aX + bY = c$   
presque sûrement

## Question 18/38

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y)$$

## Réponse 18/38

$$\lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

## Question 19/38

$$\mathbb{P}(f(X) = x)$$

## Réponse 19/38

$$\sum_{y \in f^{-1}(x) \cap X(\Omega)} (\mathbb{P}(X = y))$$

## Question 20/38

$$\mathbb{E}(XY)$$



## Réponse 20/38

$$\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \text{ si } X \perp\!\!\!\perp Y$$

## Question 21/38

Loi conjointe de  $(X_1, \dots, X_n)$

## Réponse 21/38

$\mathbb{P}(X_1, \dots, X_n)$  définie sur  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$

## Question 22/38

Variable centrée réduite associée à  $X$

## Réponse 22/38

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

## Question 23/38

Inégalité de Cauchy-Schwarz pour cov

## Réponse 23/38

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$$

## Question 24/38

Vecteur aléatoire réel



## Réponse 24/38

Vecteur aléatoire à valeurs dans  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$

## Question 25/38

Lemme des coalitions

## Réponse 25/38

Si  $(X_1, \dots, X_n)$  sont mutuellement indépendantes, alors  $f(X_1, \dots, X_m)$  et  $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$

## Question 26/38

Variable aléatoire

## Réponse 26/38

Application mesurable  $X : (\Omega, \mathcal{T}) \rightarrow (E, \mathcal{T}')$

Si  $\Omega' \in \mathcal{T}$  tel que  $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ , on peut définir  $X$   
sur  $\Omega'$

## Question 27/38

Inégalité de Cauchy-Schwarz pour  $\mathbb{E}$

## Réponse 27/38

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$$

## Question 28/38

Variable réduite



Réponse 28/38

$$\mathbb{V}(X) = 1$$

## Question 29/38

$$\mathbb{V}(X + Y)$$

## Réponse 29/38

$$\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2 \operatorname{cov}(X, Y)$$

## Question 30/38

$k$ -ième loi marginale de  $(X_1, \dots, X_n)$

## Réponse 30/38

Loi de  $X_k$

## Question 31/38

$$\text{cov}(X, Y)$$

## Réponse 31/38

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) \\ = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

## Question 32/38

Moment d'ordre  $k$

Moment centré d'ordre  $k$



## Réponse 32/38

$$\mathbb{E}(X^k)$$
$$\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^k\right)$$

## Question 33/38

$$\mathbb{E}(X)$$

## Réponse 33/38

$$\sum_{x \in X(\Omega)} (x \mathbb{P}(X = x)) = \sum_{\omega \in \Omega} (\mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega))$$

## Question 34/38

Variables indépendantes

## Réponse 34/38

$$X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$$

$$\mathbb{P}(X \in A_1, Y \in A_2) = \mathbb{P}(X \in A_1)\mathbb{P}(Y \in A_2)$$

## Question 35/38

Formule de polarisation

## Réponse 35/38

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{2}(\mathbb{V}(X + Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y))$$

## Question 36/38

Espérance conditionnelle



## Réponse 36/38

$$\mathbb{E}(X \mid A) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x \mathbb{P}(X = x \mid A))$$

## Question 37/38

Formule de l'espérance totale

## Réponse 37/38

Si  $(A_i)$  est un système quasi-complet d'événements au plus dénombrable

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} (\mathbb{E}(X \mid A_i) \mathbb{P}(A_i))$$

## Question 38/38

$$\sigma(X)$$

Réponse 38/38

$$\sqrt{\mathbb{V}(X)}$$