Analyse et équations aux dérivées partielles

L'équation de transport non linéaire

Question 1/2

Solutions de $\partial_t u + a(u)\,\partial_x u = 0$, $u_{t=0} = u_0$
avec a et u_0 de classe $\mathcal{C}^1$ et $u \in \mathcal{C}^1([0,T[\,\times\,\mathbb{R})$

Réponse 1/2

Si $\|u_0\|_{L^\infty} + \|u_0'\|_{L^\infty} < +\infty$ et T est tel que $1 + T \inf_{y\in\mathbb{R}} (a'(u_0(y)) \cdot u_0'(y)) > 0$[1] alors l'équation admet une unique solutions dans $\mathcal{C}^1([0,T]\times\mathbb{R})$

1. $T = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\|u_0'\|_{L^\infty} \times \max\limits_{|y|\leqslant\|u_0\|_{L^\infty}} (|a(y)|)}$ convient

Question 2/2

$$\text{Solutions de } \dot{X}(t) = a(u(t, X(t))),\ X(0) = x_0$$
$$\text{avec } a \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et } u \in \mathcal{C}^1([0, T[\times \mathbb{R})$$

Réponse 2/2

X admet une unique solution $X(t) = x_0 + a(u(x_0)) \times t$ (droite caractéristique de $\partial_t u + a(u)\,\partial_x u = 0$), et $u(t, X(t)) = u_0(x_0)$[1]

1. texte