Intégration et théorie de la mesure

Espaces L^p

Question 1/7

$$L^p(\mu)$$

Réponse 1/7

$$\mathcal{L}^p/\sim \text{ où } f \sim g \text{ ssi } f = g \ \mu\text{-pp}$$

Question 2/7

$$\mathcal{L}^p(\mu)$$

Réponse 2/7

$$\left\{ f : X \to \mathbb{R} \text{ mesurables}, \int |f|^p \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}$$

$$\mathcal{L}^\infty = \{ f : X \to \mathbb{R} \text{ mesurables}, \|f\|_\infty < +\infty \}$$

Question 3/7

$$\|f\|_{L^p}$$

Réponse 3/7

$$\left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } p \in \mathbb{N}^*$$
$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\left\{c \geqslant 0, |f| \leqslant c \ \mu\text{-pp}\right\}$$

Question 4/7

Inégalité de Jensen

Réponse 4/7

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, μ une mesure de probabilités ($\mu(X) = 1$ et $\mu \geqslant 0$), si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est convexe et $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable alors

$$\varphi\left(\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right) \leqslant \int_X \varphi \circ f \,\mathrm{d}\mu$$

Question 5/7

Inégalité de Hölder

Réponse 5/7

$$\text{Si } p \in [1, +\infty] \text{ et } p' = \frac{p}{p-1} \text{ alors pour } f \text{ et } g \text{ mesurables, } \int |fg| \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

Question 6/7

Structures des L^p

Réponse 6/7

$$L^p \text{ sont des espaces de Banach}$$

$$L^2 \text{ est un expace de Hilbert avec } \langle f, g \rangle = \int fg$$

Question 7/7

Inégalité de Minkowski

Réponse 7/7

Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ sont mesurables et $p \in [1, +\infty]$, alors $\|f + g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$