Algèbre 1

Arithmétique

Question 1/12

Théorème de Fermat

Réponse 1/12

$$p \in \mathbb{P},\ a \in \mathbb{N},\ a^p \equiv a\ [p]$$

Si p ne divise pas a, $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$

Question 2/12

Lemme d'Euclide

Réponse 2/12

$$\text{Si } a \mid bc \text{ et } a \in \mathbb{P}, \text{ alors } a \mid b \vee a \mid c$$

$$\text{Si } a \wedge b = 1 \text{ et } a \wedge c = 1, \text{ alors } a \wedge bc = 1$$

Question 3/12

Formule de Legendre

Réponse 3/12

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$

Question 4/12

$$a \wedge b$$

Réponse 4/12

$$\max(\{n \in \mathbb{N} \mid n \mid a \wedge n \mid b\})$$

$$\max_{(\mathbb{N}^*, |)}(\{n \in \mathbb{N} \mid n \mid a \wedge n \mid b\})$$

$$\inf_{(\mathbb{N}^*, |)}(a, b)$$

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$$

$$(a) + (b) \text{ pour un anneau principal}$$

Question 5/12

Théorème des restes chinois

$$\begin{cases} x \equiv b_1 \ [a_1] \\ \vdots \\ x \equiv b_n \ [a_n] \end{cases}$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\},\ a_i \wedge a_j = 1$$

Réponse 5/12

$$\widehat{a_i} = \prod_{j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}} (a_j)$$

$$a_i u_i + \widehat{a_i} v_i = 1$$

$$x \equiv \sum_{i=1}^{n} (b_i v_i \widehat{a_i}) \left[\prod_{i=1}^{n} (a_i) \right]$$

Question 6/12

Lemme de Gauss

Réponse 6/12

$$\text{Si } a \mid bc \text{ et } a \wedge b = 1, \text{ alors } a \mid c$$

Question 7/12

Théorème d'Euler

Réponse 7/12

$$n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{N}^*,\ x^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$$

Question 8/12

$$a \vee b$$

Réponse 8/12

$$\min(\{n \in \mathbb{N} \mid a \mid n \wedge b \mid n\})$$
$$\max_{(\mathbb{N}^*,|)}(\{n \in \mathbb{N} \mid a \mid n \wedge b \mid n\})$$
$$\sup_{(\mathbb{N}^*,|)}(a, b)$$
$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$$
$$(a) \cap (b) \text{ pour un anneau principal}$$

Question 9/12

Relation entre $\wedge$ et $\vee$

Réponse 9/12

$$(a \wedge b)(a \vee b) = ab$$

Question 10/12

$$\varphi(n)$$

Réponse 10/12

$$\left|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}\right|$$

Question 11/12

Divisibilité avec le produit

Réponse 11/12

$$\text{Si } a \wedge b = 1,\ a \mid c \wedge b \mid c, \text{ alors } ab \mid c$$

Question 12/12

Anneau euclidien

Réponse 12/12

Si $\mathbb{A}$ est un anneau intègre, avec un stathme

$(v : \mathbb{A} \setminus \{0\} \to \mathbb{N})$

A est euclidien si

$$\forall a \in \mathbb{A},\ \forall b \in \mathbb{A} \setminus \{0\}\ \exists (q, r) \in \mathbb{A}^2,\ a = bq + r$$

$$r = 0 \vee v(r) < v(b)$$