

**Analyse**  
***Développements***  
***limités***

## Question 1/24

Développement limité de  $(1 + x)^\alpha$

## Réponse 1/24

$$(1+x)^{\alpha} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \left( \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)}{k!} x^k \right) + o(x^n)$$

## Question 2/24

Si  $f$  est une fonction dérivable au voisinage de 0 avec  $f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + o(x^{n-1})$

## Réponse 2/24

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + a_0 x + \dots + \frac{an - 1}{n} x^n + o(x^n)$$

## Question 3/24

Développement limité de  $\operatorname{sh}(x)$

## Réponse 3/24

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \left( \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) + o(x^{2n+2})$$

## Question 4/24

Développement limité de  $\arctan(x)$



## Réponse 4/24

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \left( (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \right)$$

## Question 5/24

Reste de Taylor à l'ordre  $n$

## Réponse 5/24

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \left( \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \right)$$

## Question 6/24

Développement limité de  $\tan(x)$

## Réponse 6/24

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

## Question 7/24

Développement limité de  $\ln(1 + x)$

## Réponse 7/24

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \left( (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right) + o(x^n)$$

## Question 8/24

Développement limité de  $\sin(x)$



## Réponse 8/24

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \left( (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) + o(x^{2n+2})$$

## Question 9/24

Développement limité au sens fort (définition)

$$P_n \in \mathbb{R}[X]$$

## Réponse 9/24

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P_n(x) + O\left((x - x_0)^{n+1}\right)$$

## Question 10/24

Développement limité de  $\cos(x)$

## Réponse 10/24

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \left( (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right) + o(x^{2n+1})$$

## Question 11/24

Développement limité de  $\exp(x)$

## Réponse 11/24

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \left( \frac{x^k}{k!} \right) + o(x^n)$$

## Question 12/24

Développement limité de  $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$



## Réponse 12/24

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3)$$

## Question 13/24

Formule de Taylor-Young à l'ordre  $n$  au point  
 $x_0$

## Réponse 13/24

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n \left( \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \right) + o((x - x_0)^n)$$

## Question 14/24

Développement limités d'un inverse

## Réponse 14/24

Identifier les coefficients avec  
 $x = (f^{-1} \circ f)(x) + o(x^n)$  avec le  
développement limité de  $f$

## Question 15/24

Développement de Taylor de  $f$

## Réponse 15/24

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \right)$$

## Question 16/24

Développement asymptotique de  $f$  sur une échelle de comparaison  $\mathcal{E}$  au voisinage de  $x_0$  à la précision  $\varphi \in \mathcal{E}$



## Réponse 16/24

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{\substack{\psi \in \mathcal{E} \\ \varphi = o(\psi) \vee \varphi = \psi}} (a_\psi \psi(x) + o(\varphi(x)))$$

## Question 17/24

Restriction d'un développement limité  
 $T_{m,x_0}(P)$  est la troncature à l'ordre  $m$  au  
voisinage de  $x_0$  du polynôme  $P$

## Réponse 17/24

$$\begin{aligned} f(x) &=_{x \rightarrow x_0} P(x) + o((x - x_0)^n) \\ \Rightarrow f(x) &=_{x \rightarrow x_0} (T_{m, x_0}(P))(x) + o((x - x_0)^m) \end{aligned}$$

## Question 18/24

Développement limité de  $\operatorname{ch}(x)$

## Réponse 18/24

$$\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \left( \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right) + o(x^n)$$

## Question 19/24

Développement limité de  $\sqrt{1+x}$

## Réponse 19/24

$$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

## Question 20/24

Développement limité de  $\frac{1}{1-x}$



## Réponse 20/24

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (x^k) + o(x^n)$$

## Question 21/24

Développement limité de  $\frac{1}{1+x}$

## Réponse 21/24

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \left( (-1)^k x^k \right) + o(x^n)$$

## Question 22/24

Développement limité (définition)

$$P_n \in \mathbb{R}[X]$$

## Réponse 22/24

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P_n(x) + o((x - x_0)^n)$$

## Question 23/24

Si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  au voisinage de 0 avec

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + a_0x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + o(x^n)$$

## Réponse 23/24

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_1 + \cdots + na_n x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

## Question 24/24

Développement limité de  $\operatorname{th}(x)$



## Réponse 24/24

$$\operatorname{th}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$