# Algèbre 2

# *Algèbre linéaire*

# Question 1/13

Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-ev

Caractérisation des applications linéaires

# Réponse 1/13

$$\forall(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2,\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

# Question 2/13

Si $E$ est un espace vectoriel et $F \subset E$

Caractérisation(s) des sous-espaces vectoriels

# Réponse 2/13

$$0 \in F$$
$$\forall (x, y, \lambda) \in F^2 \times \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$$

# Question 3/13

$$\varphi : E \times F \to G \text{ est bilinéaire}$$

# Réponse 3/13

$$\forall (x, x', y, y', \lambda) \in E^2 \times F^2 \times \mathbb{K}$$
$$\varphi(\lambda x + x', y) = \lambda \varphi(x) + \varphi(y)$$
$$\varphi(x, \lambda y + y') = \lambda \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$$

# Question 4/13

Un ensemble $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

$E$ est un $\mathbb{K}$-ev

# Réponse 4/13

$(E, +)$ est un groupe abélien

$E$ est muni d'une loi de composition externe $\cdot$

avec $\forall (\lambda, \mu, x, y) \in \mathbb{K}^2 \times E^2$

$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ (associativité externe ou pseudo-associativité)

$1_{\mathbb{K}} x = x$ (compatibilité du neutre de $(\mathbb{K}, \times)$)

$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (distributivité de $\cdot$ sur $+_E$)

$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (distributivité de $\cdot$ sur $+_{\mathbb{K}}$)

# Question 5/13

Si $E$ est un $\mathbb{K}$-ev

Un sous-ensemble $F$ de $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$

# Réponse 5/13

$F$ est stable par les lois $+$ et $\cdot$ et les lois induites définissent sur $F$ une structure d'espace-vectoriel

# Question 6/13

Si $E$ est un $\mathbb{K}$-ev et $X \subset E$

$\mathrm{Vect}(X)$

# Réponse 6/13

Plus petit sous-espace vectoriel de $E$ contenant $X$

# Question 7/13

$$\mathrm{Vect}(X) + \mathrm{Vect}(Y)$$

# Réponse 7/13

$$\mathrm{Vect}(X \cup Y)$$

# Question 8/13

Base de $E$

# Réponse 8/13

Famille libre maximale de $E$

Famille génératrice minimale de $E$

# Question 9/13

Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-ev

$f : E \to F$ est une application linéaire

# Réponse 9/13

$$\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ \ f(\lambda x) = \lambda f(x)$$
$$\forall(x, y) \in E^2,\ \ f(x + y) = f(x) + f(y)$$

# Question 10/13

Structure de $\mathcal{L}(E, F)$

# Réponse 10/13

$\mathbb{K}$-ev

# Question 11/13

Famille génératrice de $E$

# Réponse 11/13

$$\forall x \in E\ \exists (\lambda_i)_{i\in I},\ x = \sum_{i\in I} (\lambda_i x_i)$$

$$\mathrm{Vect}\Big((x_i)_{i\in I}\Big) = E$$

# Question 12/13

Famille libre de $E$

# Réponse 12/13

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I}, \ \sum_{i \in I} (\lambda_i x_i) = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \ \lambda_i = 0$$

$$\forall x \in E \ \exists ! (\lambda_i)_{i \in I}, \ x = \sum_{i \in I} (\lambda_i x_i)$$

# Question 13/13

Somme directe

# Réponse 13/13

$$E \oplus F \text{ est directe si et seulement si } E \cap F = \{0\}$$