

Analyse

Séries entières

Question 1/15

Développement en série entière de $\frac{1}{1+x}$

Réponse 1/15

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} ((-1)^n x^n)$$

$R = 1$

Question 2/15

Développement en série entière de $\arctan(x)$

Réponse 2/15

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right)$$

$R = 1$

Question 3/15

Règle de d'Alembert pour les séries entières

Réponse 3/15

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right) = \ell \text{ alors } R_u = \frac{1}{\ell}$$

Question 4/15

Développement en série entière de $\operatorname{sh}(x)$

Réponse 4/15

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$$
$$R = +\infty$$

Question 5/15

Développement en série entière de $\exp(x)$

Réponse 5/15

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right)$$
$$R = +\infty$$

Question 6/15

Développement en série entière de $\operatorname{ch}(x)$

Réponse 6/15

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{2n}}{(2n)!} \right)$$
$$R = +\infty$$

Question 7/15

Unicité du développement en série entière

Réponse 7/15

S'il existe une suite (z_n) non nulle telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (z_n) = 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n z^n) = 0 \text{ alors } \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n z^n)$$

est nulle sur son domaine de définition

Question 8/15

Développement en série entière de $(1 + x)^\alpha$

Réponse 8/15

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\prod_{j=0}^{n-1} (\alpha - j)}{n!} x^n \right)$$
$$R = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \notin \mathbb{N} \\ +\infty & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Question 9/15

Développement en série entière de $\frac{1}{1+x^2}$

Réponse 9/15

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} ((-1)^n x^{2n})$$

$R = 1$

Question 10/15

Développement en série entière de $\cos(x)$

Réponse 10/15

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right)$$

$R = +\infty$

Question 11/15

Théorème d'Abel radial

Réponse 11/15

Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et que $\sum a_n R^n$ converge, alors la série entière est continue sur $[0, R]$ et

$$\lim_{x \rightarrow \ell} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n R^n)$$

Question 12/15

Développement en série entière de $\sin(x)$

Réponse 12/15

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$$

$R = +\infty$

Question 13/15

Développement en série entière de $\ln(1 + x)$

Réponse 13/15

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left((-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right)$$

$R = 1$

Question 14/15

Lemme d'Abel

Réponse 14/15

Si $(a_n z_0^n)$ est bornée et $n \in \mathbb{N}$ alors, si $|z| < |z_0|$ alors $\sum a_n z^n$ converge absolument

Question 15/15

Développement en série entière de $\frac{1}{1-x}$

Réponse 15/15

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)$$
$$R = 1$$