

# Analyse

## *Calcul asymptotique*

## Question 1/26

$$u_n = \Theta(v_n)$$

Définition avec les suites

## Réponse 1/26

$$\exists(\mu_n), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = \mu_n v_n$$

Avec  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \varepsilon \leq \mu_n \leq M$

## Question 2/26

$$u_n = O(v_n)$$

Définition avec les suites

## Réponse 2/26

$$\exists(\mu_n), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = \mu_n v_n$$

Avec  $(\mu_n)$  bornée

## Question 3/26

$$u_n = \Theta(v_n)$$

Définition avec un encadrement

## Réponse 3/26

$$\exists (M, M') \in (\mathbb{R}_+)^2, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$$
$$M|v_n| \leq |u_n| \leq M'|v_n|$$

## Question 4/26

$$(u_n) \sim (u'_n) \wedge (v_n) \sim (v'_n)$$

Avec  $(v_n)$  qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang



## Réponse 4/26

$$\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \sim \left(\frac{u'_n}{v'_n}\right)$$

## Question 5/26

$$u_n = o(1)$$

## Réponse 5/26

$(u_n)$  tend vers 0

## Question 6/26

$$u_n = l + o(1)$$

## Réponse 6/26

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l$$

## Question 7/26

Produits de  $o$  et  $O$

## Réponse 7/26

$$u_n = o(w_n) \wedge v_n = o(x_n) \Rightarrow u_n v_n = o(w_n x_n)$$

$$u_n = O(w_n) \wedge v_n = o(x_n) \Rightarrow u_n v_n = o(w_n x_n)$$

$$u_n = o(w_n) \wedge v_n = O(x_n) \Rightarrow u_n v_n = o(w_n x_n)$$

$$u_n = O(w_n) \wedge v_n = O(x_n) \Rightarrow u_n v_n = O(w_n x_n)$$

$$w_n o(x_n) = o(w_n x_n)$$

$$w_n O(x_n) = O(w_n x_n)$$

## Question 8/26

$$u_n = o(v_n)$$

Définition avec les suites



## Réponse 8/26

$$\exists(\varepsilon_n), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = \varepsilon_n v_n$$

Avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varepsilon_n) = 0$

## Question 9/26

Formule de Stirling

## Réponse 9/26

$$(n!)_{+\infty} \sim \left( \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n \right)$$

## Question 10/26

$$u_n = O(1)$$

## Réponse 10/26

$(u_n)$  est borné

## Question 11/26

$$u_n = O(v_n)$$

Définition avec un majorant

## Réponse 11/26

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq M|v_n|$$

## Question 12/26

$$(u_n) \sim (v_n)$$



## Réponse 12/26

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{u_n}{v_n} \right) = 1$$

## Question 13/26

$$(u_n) \sim (u'_n) \wedge (v_n) \sim (v'_n)$$

## Réponse 13/26

$$(u_n v_n) \sim (u'_n v'_n)$$

## Question 14/26

$$u_n = o(v_n)$$

Définition avec un epsilon

## Réponse 14/26

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

## Question 15/26

Transitivité de  $o$  et  $O$

## Réponse 15/26

$$u_n = O(v_n) \wedge v_n = O(w_n) \Rightarrow u_n = O(w_n)$$

$$u_n = o(v_n) \wedge v_n = o(w_n) \Rightarrow u_n = o(w_n)$$

$$u_n = o(v_n) \wedge v_n = O(w_n) \Rightarrow u_n = o(w_n)$$

$$u_n = O(v_n) \wedge v_n = o(w_n) \Rightarrow u_n = o(w_n)$$

## Question 16/26

$$u_n = \Omega(v_n)$$

Définition avec  $O$



## Réponse 16/26

$$v_n = O(u_n)$$

## Question 17/26

Sommes de  $o$  et  $O$

## Réponse 17/26

$$u_n = o(w_n) \wedge v_n = o(w_n) \Rightarrow u_n + v_n = o(w_n)$$

$$u_n = O(w_n) \wedge v_n = O(w_n) \Rightarrow u_n + v_n = O(w_n)$$

$$u_n = o(w_n) \wedge v_n = O(w_n) \Rightarrow u_n + v_n = O(w_n)$$

$$u_n = O(w_n) \wedge v_n = o(w_n) \Rightarrow u_n + v_n = O(w_n)$$

## Question 18/26

Équivalents classiques

## Réponse 18/26

$$(\ln(1+x)) \underset{0}{\sim}(x)$$

$$(e^x - 1) \underset{0}{\sim}(x)$$

Pour  $a \neq 0$

$$((1+x)^a - 1) \underset{0}{\sim}(ax)$$

$$(\sin(x)) \underset{0}{\sim}(x)$$

$$(\cos(x)) \underset{0}{\sim}\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)$$

$$(\tan(x)) \underset{0}{\sim}(x)$$

$$(\operatorname{sh}(x)) \underset{0}{\sim}(x)$$

$$(\operatorname{ch}(x)) \underset{0}{\sim}\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)$$

$$(\operatorname{th}(x)) \underset{0}{\sim}(x)$$

$$(\arcsin(x)) \underset{0}{\sim}(x)$$

$$(\arctan(x)) \underset{0}{\sim}(x)$$

## Question 19/26

$$u_n = \Theta(v_n)$$

Définition avec  $O$  et  $\Omega$

## Réponse 19/26

$$u_n = O(v_n) \wedge u_n = \Omega(v_n)$$

## Question 20/26

$$u_n = \Omega(v_n)$$

Définition avec un minorant



## Réponse 20/26

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \geq M|v_n|$$

## Question 21/26

Équivalent d'un polynôme  $P$  de degré  $d = \deg(P)$  et de monôme dominant  $a_d X^d$

## Réponse 21/26

$$(P(n)) \sim (a_d n^d)$$

## Question 22/26

Implication entre  $o$  et  $O$

## Réponse 22/26

$$u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$$

## Question 23/26

$$(u_n) \sim (v_n)$$

## Réponse 23/26

$$u_n = v_n + o(v_n)$$

## Question 24/26

$$(u_n) \sim (u'_n) \wedge (v_n) \sim (v'_n)$$

$$u_n = o(v_n)$$



## Réponse 24/26

$$u'_n = o(v'_n)$$

## Question 25/26

$$u_n = \Omega(v_n)$$

Définition avec les suites si  $(v_n)$  ne s'annule pas

## Réponse 25/26

$$\exists(\mu_n), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = \mu_n v_n$$

Avec  $(\mu_n)$  minorée

## Question 26/26

$$(u_n) \sim (u'_n)$$

$$a \in \mathbb{R}$$

## Réponse 26/26

$$(u_n^a) \sim (v_n^a)$$