

# **Algèbre 1**

## ***Anneaux***

## Question 1/24

Intersection de sous-anneaux

Si  $A$  est un groupe, et  $(B_i)_{i \in I}$  une famille de sous-anneaux de  $A$

## Réponse 1/24

$\bigcap_{i \in I} (B_i)$  est un sous-anneau de  $A$

## Question 2/24

Factorisation de  $(a + b)^n$  dans un anneau  $A$

## Réponse 2/24

$$(a, b) \in A^2 \text{ tel que } ab = ba$$
$$\sum_{k=0}^n \left( \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right)$$

## Question 3/24

Isomorphisme d'anneaux

## Réponse 3/24

Homomorphisme d'anneaux bijectif

## Question 4/24

Anneau principal



## Réponse 4/24

Un anneau intègre dont tous les idéaux sont  
principaux

## Question 5/24

Propriété sur 1 et 0 si l'anneau  $A$  a plus d'un élément

## Réponse 5/24

$$1 \neq 0$$

## Question 6/24

Factorisation de  $a^n - b^n$  dans un anneau  $A$

## Réponse 6/24

$(a, b) \in A^2$  tel que  $ab = ba$

$$(a - b) \sum_{k=0}^{n-1} (a^{n-k-1} b^k)$$

## Question 7/24

Si  $(A, +, \times)$  est un anneau

Un sous-ensemble  $B$  de  $A$  est un sous-anneau  
de  $A$

## Réponse 7/24

$B$  est stable pour les lois  $+$  et  $\times$

$$1_A \in B$$

Les lois induites sur  $B$  définissent sur  $B$  une structure d'anneau

## Question 8/24

Soient  $\left(A, +_A, \times_A\right)$  et  $\left(B, +_B, \times_B\right)$  deux anneaux  
 $f: A \rightarrow B$  est un homomorphisme d'anneaux



## Réponse 8/24

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad f\left(x \underset{A}{+} y\right) = f(x) \underset{B}{+} f(y)$$

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad f\left(x \underset{A}{\times} y\right) = f(x) \underset{B}{\times} f(y)$$
$$f(1_A) = 1_B$$

## Question 9/24

Si  $(A, +, \times)$  est un anneau commutatif

Un sous-ensemble  $I$  de  $A$  est un sous-anneau  
idéal de  $A$

## Réponse 9/24

$I$  est un sous-groupe de  $(A, +)$   
 $\forall i \in I, \forall a \in A, ia \in I$

## Question 10/24

Anneau intègre

## Réponse 10/24

Anneau commutatif non réduit à  $\{0\}$  et sans  
diviseurs de 0

## Question 11/24

Automorphisme d'anneaux

## Réponse 11/24

Endomorphisme et isomorphisme d'anneaux

## Question 12/24

Si  $A$  est un anneau commutatif et  $I$  un idéal  
de  $A$

Anneau quotient



## Réponse 12/24

$A/I$  peut être muni d'une multiplication avec  
pour tout  $(a, b) \in A$ ,  $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$   
 $A/I$  est muni d'une structure d'anneau

## Question 13/24

Diviseurs de zéro dans un anneau  $A$

## Réponse 13/24

$a \in A$  est un diviseur de 0 à gauche si et seulement s'il existe  $b \in A$  tel que  $ab = 0$

$a \in A$  est un diviseur de 0 à droite si et seulement s'il existe  $b \in A$  tel que  $ba = 0$

$a \in A$  est un diviseur de 0 si et seulement si  $a$  est diviseur de 0 à gauche et à droite

## Question 14/24

Groupe des inversibles d'un anneau

## Réponse 14/24

$$A^\times$$

$A^\times$  est un groupe multiplicatif

## Question 15/24

Si  $(A, +, \times)$  est un groupe et  $B \subset A$   
Caractérisation des sous-anneaux

## Réponse 15/24

$$1_A \in B \quad \forall (x, y) \in B, \quad x - y \in B$$
$$\forall (x, y) \in B, \quad xy \in B$$

## Question 16/24

Élément régulier d'un anneau



## Réponse 16/24

L'élément n'est pas diviseur de 0

La réciproque est vraie

S'adapte à gauche et à droite

## Question 17/24

Endomorphisme d'anneaux

## Réponse 17/24

Homomorphisme d'anneaux de  $E$  dans  
lui-même (muni des mêmes lois)

## Question 18/24

Idéal principal

## Réponse 18/24

Idéal engendré par un unique élément  $a$  de la  
forme  $I = aA = \{ay, y \in A\}$   
 $I$  est souvent noté  $(a)$

## Question 19/24

Image directe et réciproque de sous-anneaux  
par un homomorphisme

## Réponse 19/24

Si  $A$  et  $B$  sont deux anneaux, et  $f: A \rightarrow B$  un morphisme d'anneaux,  $A'$  et  $B'$  deux sous-anneaux respectivement de  $A$  et  $B$

$f(A')$  est un sous-anneau de  $B$

$f^{-1}(B')$  est un sous-anneau de  $A$

## Question 20/24

Élément absorbant dans un anneau  $(A, +, \times)$



Réponse 20/24

0

## Question 21/24

Groupe

## Réponse 21/24

Muni d'une loi de composition interne, de l'associativité, d'un élément neutre et de symétriques

## Question 22/24

Anneau commutatif

## Réponse 22/24

Anneau dont la loi  $\times$  est commutative

## Question 23/24

Anneau

## Réponse 23/24

Muni de deux lois de composition internes  
(généralement notées  $+$  et  $\times$ )  
 $(A, +)$  est un groupe abélien  
 $(A, \times)$  est un monoïde  
 $\times$  est distributive sur  $+$

## Question 24/24

Monoïde



## Réponse 24/24

Muni d'une loi de composition interne, de l'associativité et d'un élément neutre