Analyse

Suites numériques

Question 1/15

Explicitation des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 où P le polynôme caractéristique admet 2 racines r et s

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Réponse 1/15

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda r^n+\mu s^n$$

Question 2/15

Polynôme caractéristique d'une récurrence linéaire

$$u_{n+k} - a_{k-1}u_{n+k-1} - \cdots - a_1 u_{n+1} - a_0 u_n = 0$$

Réponse 2/15

$$P = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \cdots - a_1 X - a_0$$

Question 3/15

Sous-ensemble compact

Réponse 3/15

Soit E un espace métrique et $K \subset E$
K est compact si de toute suite (u_n)
d'éléments de K, on peut extraire une suite
convergeant vers un élément de K

Question 4/15

Critère spécial de convergence des séries alternée

Réponse 4/15

$$\left(\sum_{n=0}^{N}((-1)^n a_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{admet une limite finie}$$

quand N tend vers $+\infty$

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}((-1)^n a_n)\right| \leqslant a_{N+1}$$

Question 5/15

Soit f une application contractante sur un intervalle I, de facteur de Lipschitz $k < 1$, et (u_n) une suite récurrente à valeurs dans I, définie par f

Soit ℓ un point fixe de f sur I

Réponse 5/15

$$|u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell|$$

Question 6/15

Explicitation des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 où P le polynôme caractéristique admet 1 racines double r

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Réponse 6/15

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)r^n$$

Question 7/15

Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes et de limite ℓ

Réponse 7/15

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n - \ell| \leqslant |v_n - u_n|$$

Question 8/15

Théorème de la moyenne de Cesàro

Réponse 8/15

Soit (u_n) une suite et soit $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(u_k)$

Si (u_n) converge vers ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ

Question 9/15

Explicitation de $u_{n+1} = au_n + \lambda^n P(n)$ où $\lambda \neq a$

Réponse 9/15

$$u_n = \lambda^n Q(n) \text{ avec } \deg(P) = \deg(Q)$$

Question 10/15

Trouver une solution particulière (v_n) à la suite $u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + a_0 u_n + b_n$ pour un second membre $b_n = \lambda^n Q(n)$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$

Réponse 10/15

$v_n = n^m \lambda^n R(n)$ où m est la multiplicité de λ comme racine de P le polynôme caractéristique de la suite et $\deg(R) = \deg(Q)$

Question 11/15

Un sous-ensemble F est fermé

Réponse 11/15

Toute suite convergente d'éléments de F converge vers une limite $\ell \in F$

Question 12/15

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Réponse 12/15

De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente

Question 13/15

Explicitation des suites
arithmético-géométriques

Réponse 13/15

Soit ℓ un point fixe de la suite (u_n), (v_n) la solution de l'équation homogène (géométrique)

$$u_n = v_n + \ell$$

Question 14/15

L'ensemble X est dense dans $\mathbb{R}$

Réponse 14/15

$\forall x \in \mathbb{R}$, il existe une suite (u_n) d'éléments de X tel que (u_n) converge vers x

Question 15/15

Explicitation de $u_{n+1} = au_n + \lambda^n P(n)$ où $\lambda = a$

Réponse 15/15

$$u_n = n\lambda^n Q(n) \text{ avec } \deg(P) = \deg(Q)$$