Analyse
Fonctions de deux variables

Question 1/12

Extremum local
Extremum global

Réponse 1/12

Maximum local :

$$\forall X \in D \subset \mathbb{R}^2,\ f(X) \leqslant f(X_0)$$

Maximum global :

$$\exists V \in \mathcal{V}(X_0),\ \forall X \in D \cap V,\ f(X) \leqslant f(X_0)$$

Extremum : maximum ou minimum

Question 2/12

DL$_1$ de $f(x,y)$ au voisinage de X_0

Réponse 2/12

$$
\begin{aligned}
&f(X_0) + (x - x_0)\frac{\partial}{\partial x}(f(X_0)) \\
&+ (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}(f(X_0)) \\
&= f(X_0) + \langle X - X_0, \nabla f(X_0)\rangle + o(\|X - X_0\|)
\end{aligned}
$$

Question 3/12

DL d'une fonction de deux variables

Réponse 3/12

$$f(X_0 + H) = P(h, k) + o(\|H\|^n)$$

Question 4/12

$$\nabla f(X)$$

Réponse 4/12

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(f(X)) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(f(X)) \end{pmatrix}$$

Question 5/12

Règle de la chaîne

Réponse 5/12

$$\text{Si } f \text{ est } \mathcal{C}^1$$

$$\text{Si } \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t), y(t)))$$

$$= x'(t)\frac{\partial}{\partial x}(f(\gamma(t))) + y'(t)\frac{\partial}{\partial y}(f(\gamma(t)))$$

$$= \langle \gamma'(t), \nabla f(\gamma(t)) \rangle$$

Question 6/12

Condition nécessaire pour un extremum local

Réponse 6/12

$$\nabla f(X_0) = 0$$

Question 7/12

Dérivée directionnelle

Réponse 7/12

$$D_u(f) \text{ avec } u \text{ unitaire}$$

Question 8/12

Ligne de niveau de f de hauteur a

Réponse 8/12

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x, y) = a\right\}$$

Question 9/12

Dérivée selon un vecteur u

Réponse 9/12

$$D_u(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(X + tu))$$

Question 10/12

Expression de la dérivée le long d'un vecteur

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ avec } \nabla$$

Réponse 10/12

$$D_u(f) = \langle \nabla f(X), u \rangle$$
$$= a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(X)) + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(f(X))$$

Question 11/12

$$\frac{\partial}{\partial u}(f(\varphi(u,v),\psi(u,v)))$$

Réponse 11/12

$$\text{Si } f \text{ est } \mathcal{C}^1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(\varphi(u,v),\psi(u,v)))\frac{\partial}{\partial u}(\varphi(u,v))$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(f(\varphi(u,v),\psi(u,v)))\frac{\partial}{\partial u}(\psi(u,v))$$

Question 12/12

Point critique

Réponse 12/12

$$\nabla f(X_0) = 0$$