

# Algèbre

## *Espaces préhilbertiens réels*

## Question 1/20

$$u \in S^{++}(\mathbb{R})$$

## Réponse 1/20

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle > 0$$

## Question 2/20

Décomposition polaire de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

## Réponse 2/20

$$\exists (O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), A = OS$$

Il y a unicité si  $A \in GL_n(\mathbb{R})$

## Question 3/20

$$u \in S^+(\mathbb{R})$$

## Réponse 3/20

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geq 0$$

## Question 4/20

$$R_{\theta}^{-1} = R_{\theta}^{\perp}$$



## Réponse 4/20

$$R_{-\theta}$$

## Question 5/20

Caractérisation matricielle de  $u \in S(E)$

## Réponse 5/20

Il existe une BON (ou pour toute)  $\mathcal{B}$   
 $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

## Question 6/20

Caractérisation spectrale de  $S^+(\mathbb{R})$

## Réponse 6/20

$$\mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$$

## Question 7/20

$$\ker(u^*)$$

## Réponse 7/20

$$\operatorname{im}(u)^\perp$$

## Question 8/20

$$S_{\theta} S_{\theta'}$$



## Réponse 8/20

$$R_{\theta-\theta'}$$

## Question 9/20

$$\text{im}(u^*)$$

## Réponse 9/20

$$\ker(u)^\perp$$

## Question 10/20

Formules de polarisation

## Réponse 10/20

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2}{2}$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$$

## Question 11/20

Représentation des formes linéaires d'un espace euclidien

## Réponse 11/20

Pour toute forme linéaire  $\varphi$ , il existe un unique  $u \in E$  tel que  $\varphi(\cdot) = \langle u, \cdot \rangle$

## Question 12/20

Racine d'un endomorphisme



## Réponse 12/20

$$\forall u \in S^+(E), \exists! r \in S^+(E), r^2 = s$$

## Question 13/20

Caractérisation spectrale de  $S^{++}(\mathbb{R})$

## Réponse 13/20

$$\mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$$

## Question 14/20

Réduction des isométries en BON

## Réponse 14/20

Il existe une BON (ou pour toute)  $\mathcal{B}$  telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_q & & \\ & & R_{\theta_1} & \\ & & & \ddots \\ & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix}$$

## Question 15/20

Inégalité de Bessel

## Réponse 15/20

Une projection  $p$  est orthogonale si et seulement si pour tout  $x \in E$ ,  $\|p(x)\| \leq \|x\|$

## Question 16/20

Théorème spectral



## Réponse 16/20

Sont équivalents :

$$u \in S(E)$$

Il existe une BON de vecteurs propres de  $u$

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)}^{\perp} (E_{\lambda}(u))$$

## Question 17/20

$$R_{\theta}R_{\theta'}$$

Réponse 17/20

$$R_{\theta'+\theta}$$

## Question 18/20

Description de  $O_n(\mathbb{R})$

## Réponse 18/20

$$R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
$$S_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

## Question 19/20

Théorème spectral matriciel

## Réponse 19/20

$$M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists (P, D) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}_n(\mathbb{R}), M = PDP^\top$$

## Question 20/20

Caractérisation des isométrie vectorielle



## Réponse 20/20

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$u \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow u \in \mathrm{GL}(E) \wedge u^* = u^{-1}$$

il existe une BON  $e$  telle que  $u(e)$  est une BON