Analyse

Intégrales à paramètre

Question 1/3

Dérivation d'une intégrale à paramètre

Réponse 1/3

$$\text{Si } \forall t \in J,\ f(\cdot, t) \text{ est de classe } \mathcal{C}^1$$
$$\forall x \in I,\ f(x, \cdot) \text{ est intégrable et } \frac{\partial}{\partial x}(f(x,\cdot)) \text{ est continue par morceaux}$$
$$\exists \varphi : J \to \mathbb{R}_+ \text{ intégrable telle que}$$
$$\forall (x,t) \in I \times J,\ \left|\frac{\partial}{\partial x}(f(x,t))\right| \leqslant \varphi(t)$$
$$\text{Alors, } \int_J (f(x,t))\,\mathrm{d}t \text{ est de classe } \mathcal{C}^1$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_J (f(x,t))\,\mathrm{d}t\right) = \int_J \left(\frac{\partial}{\partial x}(f(x,t))\right)\mathrm{d}t$$

Question 2/3

Continuité d'une intégrale à paramètre

Réponse 2/3

$$\text{Si } \forall t \in J,\ f(\cdot, t) \text{ est continue}$$
$$\forall x \in I,\ f(x, \cdot) \text{ est continue par morceaux}$$
$$\exists \varphi : J \to \mathbb{R}_+ \text{ intégrable telle que}$$
$$\forall (x, t) \in I \times J,\ |f(x, t)| \leqslant \varphi(t)$$
$$\text{Alors, } x \mapsto \int_J (f(x, t))\,\mathrm{d}t \text{ est continue sur } I$$

Question 3/3

Dérivation d'une intégrale à paramètre pour la classe $\mathcal{C}^k$

Réponse 3/3

$$\text{Si } \forall t \in J,\ f(\cdot, t) \text{ est de classe } \mathcal{C}^k$$
$$\forall x, i \in I \times [\![1, k-1]\!],\ \frac{\partial^i}{\partial x^i}(f(x, \cdot)) \text{ est intégrable}$$
$$\text{et } \frac{\partial^k}{\partial x^k}(f(x, \cdot)) \text{ est continue par morceaux}$$
$$\exists \varphi : J \to \mathbb{R}_+ \text{ intégrable telle que}$$
$$\forall (x, t) \in I \times J,\ \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}(f(x, t))\right| \leqslant \varphi(t)$$
$$\text{Alors, } \int_J (f(x, t))\,\mathrm{d}t \text{ est de classe } \mathcal{C}^k,\ \forall i \leqslant k,$$
$$\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}\left(\int_J (f(x, t))\,\mathrm{d}t\right) = \int_J \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}(f(x, t))\right)\mathrm{d}t$$