Algèbre 2
Espaces préhilbertiens réels

Question 1/40

Produit scalaire

Réponse 1/40

Forme bilinéaire symétrique, définie et positive

Noté $\langle x, y \rangle$ ou $(x|y)$

Question 2/40

Matrice orthogonale

Réponse 2/40

$P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si

$$P^\top P = I_n$$

Question 3/40

φ est définie

Réponse 3/40

$$\forall x \in E,\ \varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Question 4/40

Projeté orthogonal sur $\mathrm{Vect}(x)$

Réponse 4/40

$$z = \langle y, x \rangle \frac{x}{\left\| x \right\|^2}$$

Question 5/40

Coordonnées de x dans la base orthonormée

$$\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_n)$$

Réponse 5/40

$$[x]_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \langle x, b_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, b_n \rangle \end{pmatrix}$$

Question 6/40

Structure de l'ensemble des formes bilinéaires

Réponse 6/40

$\mathcal{B}(E)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Question 7/40

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Réponse 7/40

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$$

$$\forall k \in [\![2, n]\!],\ \ f_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

$$u_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\langle e_k, f_i \rangle f_i)$$

Question 8/40

Expression de $\|x\|^2$ dans la base orthonormée $\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_n)$

Réponse 8/40

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} \left(\langle x, b_i \rangle^2 \right)$$

Question 9/40

Structure de l'orthogonal

Réponse 9/40

$X^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E

Question 10/40

Théorème de Pythagore

Réponse 10/40

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Question 11/40

φ est positive

Réponse 11/40

$$\mathrm{im}(q_\varphi) \subset \mathbb{R}_+$$

Question 12/40

φ est symétrique

Réponse 12/40

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

Question 13/40

Expression matricielle de $\varphi(x, y)$

Réponse 13/40

$$\varphi(x, y) = [x]_{\mathcal{B}}^{\top} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)[y]_{\mathcal{B}}$$

Question 14/40

Orhtogonal d'une union
Orthogonal d'une somme
Orthogonal d'une intersection

Réponse 14/40

$$(F \cup G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$$
$$(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$$
$$(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp} \text{ (en dimension finie)}$$
$$(F \cap G)^{\perp} \supset F^{\perp} + G^{\perp} \text{ (sinon)}$$

Question 15/40

Supplémentaire orthogonal

Réponse 15/40

En dimension finie, tout sev F de E admet un unique supplémentaire $F^\perp$ tel que $F \perp F^\perp$ et $F \oplus F^\perp = E$

Question 16/40

Inégalité de Cauchy-Schwarz pour un produit scalaire

Cas d'égalité

Réponse 16/40

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \times \|y\|$$

Égalité si et seulement si x et y sont colinéaires

Question 17/40

Formule de changement de base pour les formes bilinéaires

Réponse 17/40

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(\varphi) = \left(P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}\right)^{\top} \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$$

Question 18/40

$$\|x\|$$

Réponse 18/40

$$\sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Question 19/40

$$d(x, F)$$

Réponse 19/40

$$\min_{y \in F}(\|x - y\|) = \|x - p_F(x)\|$$

Question 20/40

Norme

Réponse 20/40

$$\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (séparation)}$$
$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \text{ (absolue homogénéité)}$$
$$\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y) \text{ (inégalité triangulaire)}$$

Question 21/40

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

Réponse 21/40

$$\left(\varphi(e_i, e_j)\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

Question 22/40

Sous-espaces orthogonaux

Réponse 22/40

$$F \perp G \Leftrightarrow \forall (x, y) \in F \times G,\ x \perp y$$

Question 23/40

Projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel en dimension finie

Réponse 23/40

$$z = \sum_{i=1}^{m} (\langle y, b_i \rangle b_i)$$

Question 24/40

Si $\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_n)$ est une base orthonormée

et $u \in \mathcal{L}(E)$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$

Réponse 24/40

$$\left(\langle b_i, u(b_j)\rangle\right)_{\{i,j\}\in[\![1,n]\!]^2}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle b_1, u(b_1)\rangle & \cdots & \langle b_1, u(b_n)\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle b_n, u(b_1)\rangle & \cdots & \langle b_n, u(b_n)\rangle \end{pmatrix}$$

Question 25/40

Formule de polarisation

Réponse 25/40

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$$

Question 26/40

Forme quadratique

Réponse 26/40

$$q : E \to \mathbb{R} \text{ tel qu'il existe } \varphi \in \mathcal{B}(E) \text{ tel que}$$
$$q(x) = \varphi(x, x)$$
$$q_\varphi \text{ est la forme quadratique associée à } \varphi$$

Question 27/40

Projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel

Réponse 27/40

z est le projeté orthogonal de y sur F si et seulement si $z \in F$ et $(y - z) \perp F$

Question 28/40

Norme euclidienne

Réponse 28/40

Une norme N est euclidienne si et seulement s'il existe un produit scalaire dont N est la norme associée

Question 29/40

Vecteurs orthogonaux

Réponse 29/40

$$x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

Question 30/40

Groupe orthogonal

Réponse 30/40

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{ P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; P^\top P = I_n \right\}$$

Question 31/40

Expression de $\langle x, y\rangle$ dans la base orthonormée
$\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_n)$

Réponse 31/40

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\langle x, b_i \rangle \langle y, b_i \rangle)$$

Question 32/40

Groupe spécial orthogonal

Réponse 32/40

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det(P) = 1\}$$

Question 33/40

Double orthogonal

Réponse 33/40

$$X \subset \left(X^{\perp}\right)^{\perp}$$

En dimension finie, $X = \left(X^{\perp}\right)^{\perp}$

Question 34/40

$$\dim(\mathcal{B}(E))$$

Réponse 34/40

$$n^2$$

Question 35/40

Théorème de Pythagore généralisé

Réponse 35/40

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(x_i)\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\|x_i\|^2\right)$$

Question 36/40

Espace euclidien

Réponse 36/40

Espace préhilbertien réel de dimension finie

Question 37/40

φ est négative

Réponse 37/40

$$\mathrm{im}(q_\varphi) \subset \mathbb{R}_-$$

Question 38/40

Espace préhilbertien réel

Réponse 38/40

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Question 39/40

$$X^{\perp}$$

Réponse 39/40

$$\{x \in E \mid x \perp X\}$$

Question 40/40

Famille orthogonale
Famille orthonormale

Réponse 40/40

$$(x_i)_{i \in I} \text{ est orthogonale :}$$
$$\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow x_i \perp x_j$$
$$(x_i)_{i \in I} \text{ est orthonormée :}$$
$$(x_i)_{i \in I} \text{ est orthogonale et } \forall i \in I,\ \|x_i\|$$