

Algèbre 1

Actions de groupes

Question 1/16

Formule des classes

Réponse 1/16

Si G agit sur X et \mathcal{R} est un ensemble de représentants des orbites de l'action alors

$$|X| = \sum_{x \in \mathcal{R}} (|G / \text{stab}(x)|)$$

Question 2/16

$|G/\text{stab}(x)|$ pour G fini

Réponse 2/16

$$|G/\text{stab}(x)| = \frac{|G|}{|\text{stab}(x)|} = |G \cdot x|$$

Question 3/16

Fixateurs de g

Réponse 3/16

$$\text{fix}(g) = \{x \in X, g \cdot x = x\}$$

Question 4/16

Non-trivialité de X^G pour G un p -groupe

Réponse 4/16

$$|X^G| \equiv |X| \pmod{p}$$

En particulier, $Z(G)$ est non trivial

Question 5/16

Action transitive

Réponse 5/16

$$\forall (x, y) \in X^2, \exists g \in G, g \cdot x = y$$

Question 6/16

Formule de Burnside

Réponse 6/16

Le nombre d'orbites N d'une action de G sur X vérifie $N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (|\text{fix}(g)|)$

Question 7/16

Action libre

Réponse 7/16

$$\forall g \neq 1, \text{fix}(g) \neq \emptyset$$

Question 8/16

Action simplement transitive

Réponse 8/16

Action libre et transitive

$$\forall (x, y) \in X^2, \exists! g \in G, g \cdot x = y$$

Question 9/16

Orbite de x

Réponse 9/16

$$G \cdot x = \{g \cdot x, g \in G\}$$

Question 10/16

Lemme de Cauchy

Réponse 10/16

Si $p \in \mathbb{P}$ divise l'ordre de G , alors G possède
un élément d'ordre p

Question 11/16

Action fidèle

Réponse 11/16

α est injective

Question 12/16

Stabilisateur de x

Réponse 12/16

$$\text{stab}(x) = \{g \in G, g \cdot x = x\}$$

Question 13/16

$$X^G$$

Réponse 13/16

$$\bigcap_{g \in G} (\text{fix}(g))$$

Question 14/16

p -groupe

Réponse 14/16

Pour $p \in \mathbb{P}$, un p -groupe est un groupe G vérifiant $|G| = p^n$

Question 15/16

Lemme de Cayley et conséquence

Réponse 15/16

Tout groupe G fini se réalise comme un
sous-groupe de $\mathfrak{S}(G) \cong \mathfrak{S}_n$

Si \mathbb{k} est un corps, G est isomorphe à un
sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$

Question 16/16

Action d'un groupe G sur un ensemble X

Réponse 16/16

Morphisme $\alpha: G \rightarrow (\mathfrak{S}(X), \circ)$