

Algèbre 2

Dimension finie

Question 1/30

Dimension d'un supplémentaire S de F dans E

Réponse 1/30

$$\dim(S) = \dim(E) - \dim(F)$$

Question 2/30

Conservation du rang pour les matrices

Réponse 2/30

$$M \in \mathcal{M}_{n,p}(K), P \in \mathrm{GL}_n(K), Q \in \mathrm{GL}_n(K) \\ \mathrm{rg}(PMQ) = \mathrm{rg}(M)$$

Question 3/30

Hyperplan

Réponse 3/30

$$\exists \in E^* \setminus \{0\}, H = \ker(\varphi)$$

φ est l'équation caractéristique de H

Question 4/30

Classification des matrices équivalentes par le
rang

Réponse 4/30

N est équivalent à M si et seulement si

$$\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(N)$$

Question 5/30

Propriétés de la trace

Réponse 5/30

C'est une forme linéaire

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^{\top})$$

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

Si M et N sont semblables, $\operatorname{tr}(N) = \operatorname{tr}(M)$

Question 6/30

Théorème du rang

Réponse 6/30

$$\dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f) = \dim(E)$$

Question 7/30

Endomorphisme diagonalisable

Réponse 7/30

Il existe une base \mathcal{B} dans laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale

Question 8/30

Matrice de passage

Réponse 8/30

$$P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(\text{id}) = [\mathcal{B}_2]_{\mathcal{B}_1}$$

Question 9/30

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est inversible

Réponse 9/30

$$u \in \mathrm{GL}(E)$$

La réciproque est vraie

Question 10/30

Matrice diagonalisable

Réponse 10/30

Matrice semblable à une matrice diagonale

Question 11/30

Conservation de l'image et du noyau pour les matrices

Réponse 11/30

$$\begin{aligned} M &\in \mathcal{M}_{n,p}(K), P \in \mathrm{GL}_n(K), Q \in \mathrm{GL}_n(K) \\ \ker(PM) &= \ker(M) \\ \mathrm{im}(MQ) &= \mathrm{im}(M) \end{aligned}$$

Question 12/30

Trace d'une matrice

Réponse 12/30

$$A \in \mathcal{M}_n(K)$$
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \left([A]_{i,i} \right)$$

Question 13/30

Trace d'un projecteur et d'une symétrie

Réponse 13/30

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(p) &= \mathrm{rg}(p) \\ \mathrm{tr}(s) &= n - 2 \mathrm{rg}(s - \mathrm{id})\end{aligned}$$

Question 14/30

Rang d'une application linéaire

Réponse 14/30

$$\operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{im}(u))$$

Question 15/30

Formule de changement de base

Réponse 15/30

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \text{ des bases de } E, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \text{ des bases de } F \\ \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2}(f) = P_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1}(f) P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \\ = \left(P_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{C}_2} \right)^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1}(f) P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \end{aligned}$$

Question 16/30

Majoration du rang d'une application linéaire
 $u \in \mathcal{L}(E, F)$

Réponse 16/30

$$\operatorname{rg}(u) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$$

Question 17/30

Formule de Grassmann

Réponse 17/30

$$\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$$

Question 18/30

Dual

Réponse 18/30

$$E^*$$

$\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ constitué des formes linéaires

Question 19/30

Effet d'une composition sur le rang

Réponse 19/30

$$\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$$

Si v est injective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$

Si u est surjective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$

Question 20/30

Matrice associée à une composition

Réponse 20/30

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

Question 21/30

$$I_{n,p,r}$$

Réponse 21/30

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array} \right)$$

Question 22/30

Forme linéaire

Réponse 22/30

Application linéaire (sur un \mathbb{K} -espace vectoriel
 E) de E vers \mathbb{K}

Un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

Question 23/30

Image d'une matrice

Réponse 23/30

$$\mathrm{im}(M) = \mathrm{Vect}(C_1(M), \dots, C_n(M))$$

Question 24/30

Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Réponse 24/30

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

Question 25/30

Matrices semblables

Réponse 25/30

$$\begin{aligned} A &\in \mathcal{M}_n(K), B \in \mathcal{M}_n(K) \\ \exists (P) &\in \mathrm{GL}_n(K), B = P^{-1}AP \end{aligned}$$

Question 26/30

Produit matriciel avec l'évaluation

Réponse 26/30

$$[f(X)]_{\mathcal{C}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)[X]_{\mathcal{B}}$$

Question 27/30

Dimension d'une somme directe

Réponse 27/30

$$\dim \left(\bigoplus_{i=1}^n (E_i) \right) = \sum_{i=1}^n (\dim(E_i))$$

Question 28/30

Rang d'une famille

Réponse 28/30

$$\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n) = \dim(\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n))$$

Question 29/30

Matrices équivalentes

Réponse 29/30

$$\begin{aligned} N &\in \mathcal{M}_n(K), M \in \mathcal{M}_n(K) \\ \exists (P, Q) &\in \mathrm{GL}_n(K)^2, N = PMQ \end{aligned}$$

Question 30/30

Dimension d'un produit cartésien

Réponse 30/30

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$