Algèbre 1
Actions de groupes

Question 1/16

Action libre

Réponse 1/16

$$\forall g \neq 1,\ \mathrm{fix}(g) \neq \varnothing$$

Question 2/16

Non-trivialité de X^G pour G un p-groupe

Réponse 2/16

$$\left|X^G\right| \equiv |X| \; [p]$$

En particulier, $Z(G)$ est non trivial

Question 3/16

$$X^G$$

Réponse 3/16

$$\bigcap_{g \in G} (\mathrm{fix}(g))$$

Question 4/16

$$|G/\operatorname{stab}(x)| \text{ pour } G \text{ fini}$$

Réponse 4/16

$$|G/\operatorname{stab}(x)| = \frac{|G|}{|\operatorname{stab}(x)|} = |G \cdot x|$$

Question 5/16

Action transitive

Réponse 5/16

$$\forall (x, y) \in X^2,\ \exists g \in G,\ g \cdot x = y$$

Question 6/16

Orbite de x

Réponse 6/16

$$G \cdot x = \{g \cdot x, g \in G\}$$

Question 7/16

Fixateurs de g

Réponse 7/16

$$\mathrm{fix}(g) = \{x \in X, g \cdot x = x\}$$

Question 8/16

Lemme de Cayley et conséquence

Réponse 8/16

Tout groupe G fini se realise comme un sous-groupe de $\mathfrak{S}(G) \cong \mathfrak{S}_n$

Si $\mathbb{k}$ est un corps, G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$

Question 9/16

Action simplement transitive

Réponse 9/16

Action libre et transitive

$$\forall (x,y) \in X^2,\ \exists! g \in G,\ g \cdot x = y$$

Question 10/16

Formule des classes

Réponse 10/16

Si G agit sur X et $\mathcal{R}$ est un ensemble de représentants des orbites de l'action alors

$$|X| = \sum_{x \in \mathcal{R}} (|G/\operatorname{stab}(x)|)$$

Question 11/16

p-groupe de Sylow

Réponse 11/16

Si $|G| = p^\ell m$, $p \wedge m = 1$, un p-groupe de Sylow est un sous-groupe H de G vérifiant $|H| = p^\ell$

Question 12/16

Stabilisateur de x

Réponse 12/16

$$\mathrm{stab}(x) = \{g \in G, g \cdot x = x\}$$

Question 13/16

Action fidèle

Réponse 13/16

α est injective

Question 14/16

Action d'un groupe G sur un ensemble X

Réponse 14/16

Morphisme $\alpha : G \to (\mathfrak{S}(X), \circ)$

Question 15/16

Lemme de Cauchy

Réponse 15/16

Si $p \in \mathbb{P}$ divise l'ordre de G, alors G possède un élément d'ordre p

Question 16/16

p-groupe

Réponse 16/16

Pour $p \in \mathbb{P}$, un p-groupe est un groupe G vérifiant $|G| = p^n$