Mathématiques $1^{\text{ère}}$

Table des matières

1 Le second degré

1.1 Racine d'un polynôme du second degré

1.1.1 Définitions

Définition : Un polynôme du second degré est défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels fixés, avec $a \neq 0$.
Définition : Si $P(x_0) = 0$ alors, x_0 est racine de P.

1.1.2 Factorisation

Théorème : Si x_1 est une racine de $P(x) = ax^2 + bx + c$ alors, il existe un réel x_2 tel que $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Remarque : Un polynôme du second degré admet au plus deux racines.

1.1.3 Somme et produit des racines

Propriété : Soient x_1 et x_2 les deux racines de $P(x) = ax^2 + bx + c$ alors $\begin{cases} S=x_1+x_2=\frac{-b}{a} \\ P=x_1x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$, x_1 et x_2 sont les racines de $Q(x) = x^2 - Sx + P$.

1.2 Équations du second degré

1.2.1 Forme canonique et discriminant

Remarque :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 + \tfrac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\tfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Définition : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant.
Définition : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-b^2+4ac}{4a}$ est la forme canonique de $f(x)$.

1.2.2 Résolution

Remarque : Soit $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ avec $a \neq 0$.
Définition : Si $\Delta < 0$ alors, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$.
Définition : Si $\Delta = 0$ alors, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.
Définition : Si $\Delta > 0$ alors, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.
Théorème : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, si $\Delta < 0$ alors, $f(x)$ n'admet aucune racine.
Théorème : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, si $\Delta = 0$ alors, $f(x)$ admet une racine double en $x_0 = \frac{-b}{2a}$ avec $f(x) = a(x - x_0)^2$.
Théorème : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, si $\Delta > 0$ alors, $f(x)$ admet deux racines distinctes en $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ avec $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

1.3 Représentation graphique

1.3.1 Sommet et axe de symétrie

Remarque : On a montré que $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$ ainsi, $f(x) = a(x - \alpha)^2 + f(\alpha)$.
Propriété : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, la courbe représentative de f est une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$. Elle admet donc la droite d'équation $x = \alpha$ pour axe de symétrie.

1.3.2 Tableau de variations

Remarque : Si $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
ax^2+bx+c		$\searrow$	β	$\nearrow$	

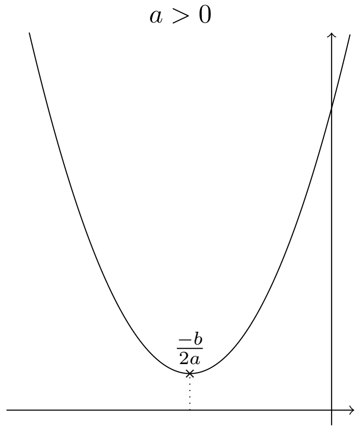
Remarque : Si $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
ax^2+bx+c		$\nearrow$	β	$\searrow$	

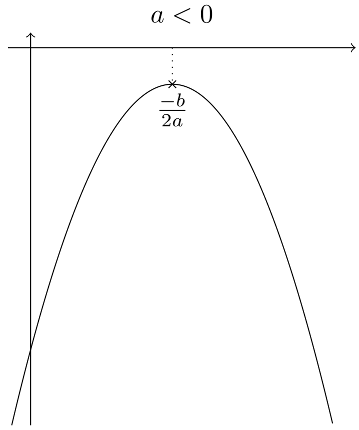
1.3.3 Application aux racines

$\Delta < 0$

$a > 0$

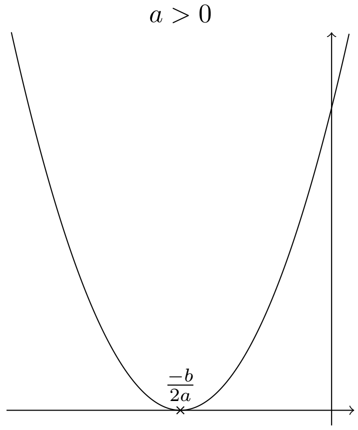


$a < 0$

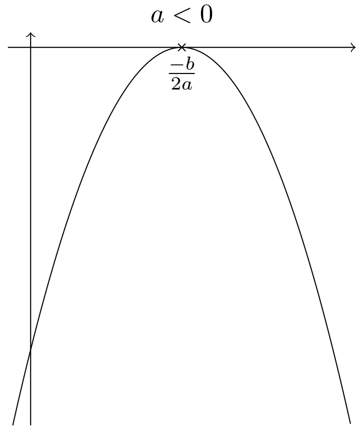


$\Delta = 0$

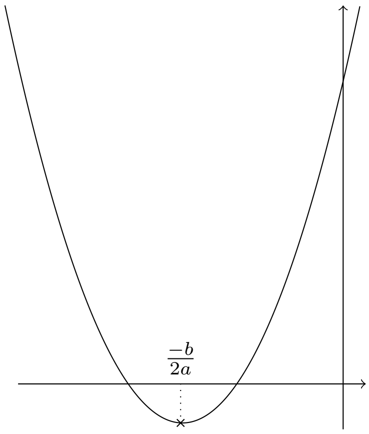
$a > 0$

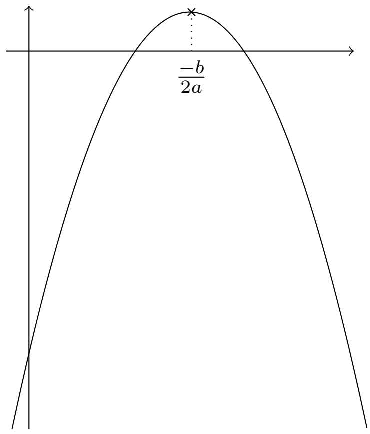


$a < 0$



$\Delta > 0$ $a > 0$ $a < 0$





1.4 Signe de $ax^2 + bx + c$

Remarque : $f(x) = a\Big(\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big)$ avec $a \neq 0$, si $\Delta < 0$ alors $\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ d'où $f(x)$ est du signe de a.
Remarque : $f(x) = a\Big(\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big)$ avec $a \neq 0$, si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2$ d'où $f(x)$ est du signe de a et s'annule en $\frac{-b}{2a}$.
Remarque : $f(x) = a\Big(\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big)$ avec $a \neq 0$, si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 < x_2$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$ax^2 + bx + c$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

Théorème : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ est du signe de a.
Théorème : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, si $\Delta = 0$ alors $f(x)$ est du signe de a sauf en α où elle s'annule.
Théorème : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, si $\Delta > 0$ alors $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur des racines.

2 Les fonctions dérivées

2.1 Nombre dérivé

2.1.1 Définition

Définition : Soit f une fonction définie sur E et $a \in E$, f est dite dérivable en a, de nombre dérivé $f'(a)$, si $\lim\limits_{h \to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right) = f'(a)$.
Définition : La tangente en $A(a; f(a))$ à $(y = f(x))$ admet pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Définition : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente en a.

2.2 Calcul de nombres dérivés

2.2.1 Fonction affine $f(x) = mx + p$

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h} \\ &= \frac{mh}{h} \\ &= m\end{aligned}$$
$f'(a) = m$

2.2.2 Fonction carrée $f(x) = x^2$

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h} \\ &= \frac{2ah+h^2}{h} \\ &= 2a + h\end{aligned}$$
$f'(a) = 2a$

2.2.3 Fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}^*$
$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} \\ &= \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} \\ &= \frac{-1}{a(a+h)}\end{aligned}$$
$f'(a) = -\frac{1}{a^2}$

2.2.4 Fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}^*$
$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} \\ &= \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\end{aligned}$$
$f'(a) = -\frac{1}{2\sqrt{a}}$

2.2.5 Fonction valeur absolue $f(x) = |x|$

Définition : $\begin{cases} |x| = x \text{ si } x \geqslant 0 \\ |x| = -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$.
Remarque : La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

2.3 Fonction dérivée

2.3.1 Définitions

Définition : Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle admet un nombre dérivable pour tout $x \in I$.

Définition : La fonction qui à x fait correspondre le nombre dérivé en x est appelée fonction dérivée et est notés f'.

2.3.2 Dérivée de fonctions usuelles

Définition : $f(x) = mx + p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = m$.
Définition : $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 2x$.
Définition : $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.
Définition : $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Définition : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = nx^{n-1}$.
Définition : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(x) = \frac{1}{x^n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$.

2.4 Opérations

2.4.1 Somme

Théorème : Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors $(f+g)$ est dérivable sur I, avec $(f+g)' = f' + g'$.

2.4.2 Produit

Théorème : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. La fonction $(u \times v)$ est dérivable sur I avec $(uv)' = u'v + uv'$.
Démonstration :
$$\begin{aligned}(uv)' &= \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h}\\ &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}\\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h}v(a+h) + u(a)\frac{v(a+h) - v(a)}{h}\\ &= u'(a)v(a) + u(a)v'(a)\end{aligned}$$
Conséquence : $(kf)' = kf'$ pour k un réel fixé.

2.4.3 Quotient

Démonstration : Soit f une fonction dérivable sur I avec $f(x) = 0$ sur I. Soit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{g(a+h) - g(a)}{h}\\ &= \frac{\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)}}{h}\\ &= \frac{f(a) - f(a+h)}{hf(a)f(a+h)}\\ &= -\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times \frac{1}{f(a)f(a+h)}\end{aligned}$$
Or, $\lim\limits_{h \to 0}\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right) = f'(a)$ et $\lim\limits_{h \to 0}\left(\frac{1}{f(a)f(a+h)}\right) = \frac{1}{(f(a))^2}$.
D'où $\lim\limits_{h \to 0} = \left(\frac{g(a+h) - g(a)}{h}\right) = \frac{-f'(a)}{(f(a))^2}$.
Théorème : Soit f une fonction dérivable sur I avec $f(x) \neq 0$ pour tout x sur I. Alors, $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I avec $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$.
Théorème : Soient u et v deux fonctions dérivable sur I avec $v(x) \neq 0$ pour tour x dans I. La fonction $\left(\frac{u}{v}\right)$ est dérivable sur I avec $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
Démonstration :
$$\begin{aligned}\left(\frac{u}{v}\right)' &= \left(u \times \frac{1}{v}\right)'\\ &= u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(\frac{1}{v}\right)'\\ &= \frac{u'}{v} + u \times \frac{-v'}{v^2}\\ &= \frac{u'v - uv'}{v^2}\end{aligned}$$

2.4.4 Composition

Théorème : Soient f et g deux fonctions dérivables, alors $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \times f'(x)$.
Conséquence : $(f(x)^n)' = n(f(x))^{n-1} \times f'(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Conséquence : $\left(\frac{1}{f(x)^n}\right)' = \frac{-n}{(f(x))^{n+1}} \times f'(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Conséquence : $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \times f'(x)$.
Conséquence : $(f(ax+b))' = f'(ax+b) \times a$ pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$.

3 Application de la dérivée

3.1 Dérivée et variation

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si $f'(x) > 0$ sur I, sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si $f'(x) < 0$ sur I, sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.
Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si $f'(x) = 0$ sur I, alors f est constante sur I.

3.2 Extremum local d'une fonction

Définition : Soit f une fonction définie sur E et $a \in E$. f admet un extremum local en $x = a$ s'il existe un intervalle ouvert, centré en a tel que la restriction de f à cet intervalle admette un extremum en a.
Propriété : Soit f une fonction dérivable. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.
Propriété : Soit f une fonction dérivable. Si f' s'annule en a, alors f admet un extremum local en a.

3.3 Des polynômes du troisième degré

3.3.1 $f(x) = x^3 - ax$; où $a > 0$

Remarque : f est définie sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 3x^2 - a$.
$3x^2 - a = 0$
$\Leftrightarrow\ x^2 = \frac{a}{3}$
$\Leftrightarrow\ x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$
Le coefficient de x^2 étant $3 > 0$, on en déduit le signe de f'.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{a}{3}}$		$\sqrt{\frac{a}{3}}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de $f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

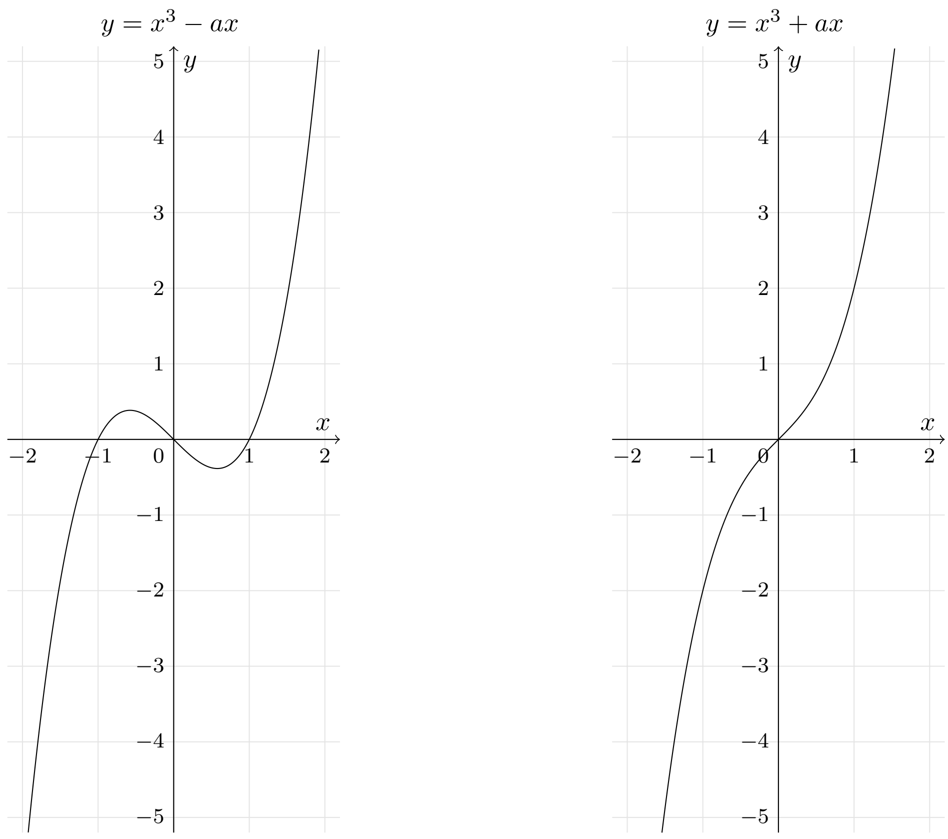
3.3.2 $f(x) = x^3 + ax$; où $a > 0$

Remarque : f est définie sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 3x^2 + a$.
$3x^2 + a \geqslant a > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	
Variations de $f(x)$		$\nearrow$	

3.3.3 Courbes représentatives

Remarque : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$



4 Suites numériques

4.1 Notion de suites

Définition : Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Définition : Pour $n \in \mathbb{N}$, et une suite (u), on note u_n l'image de l'entier n par la suite (u).

4.2 Exemples fondamentaux de générations d'une suite

4.2.1 Mode explicite

Définition : La suite (u) est définie par $u_n = f(n)$.

4.2.2 Mode itératif ou récurrent

Définition : La suite (u) est définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$.

4.3 Sens de variation

4.3.1 Définitions

Définition : La suite (u_n) est dite croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
Définition : La suite (u_n) est dite strictement croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
Définition : La suite (u_n) est dite décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
Définition : La suite (u_n) est dite strictement décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

4.3.2 Méthodes

Méthode : Si $u_n = f(n)$, alors u_n est de même sens que $f(n)$.
Méthode : Dans les autres cas, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

4.4 Suites arithmétiques

4.4.1 Généralité

Définition : Une suite (u_n) est dite arithmétique de raison r, un réel fixé, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r si et seulement si, $u_n = u_0 + nr$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.4.2 Représentation graphique

Propriété : La représentation graphique d'une suite arithmétique est un ensemble de points alignés.
Remarque : Une suite arithmétique a un accroissement linéaire ou une évolution linéaire.

4.4.3 Somme des termes

Théorème : Soit (u_n) une suite arithmétique. $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$. C'est-à-dire : $\sum\limits_{k=0}^{n}(u_k) = (n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$. D'où : $\sum\limits_{k=m}^{n}(u_k) = (n-m+1)\left(\frac{u_m+u_n}{2}\right)$, avec $m \leqslant n$.

4.5 Suites géométriques

4.5.1 Généralités

Définition : La suite (u_n) est dite géométrique de raison q, un réel fixé, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$.
Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q si et seulement si, $u_n = u_0 \times q^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.5.2 Représentation graphique

Remarque : Une suite géométrique a un accroissement exponentiel ou une évolution exponentielle.

4.5.3 Somme des termes

Théorème : Soit (u_n) une suite géométrique. $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \left(\frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q}\right) = u_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$.
C'est-à-dire : $\sum\limits_{k=0}^{n} (u_k) = u_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$. D'où : $\sum\limits_{k=m}^{n} (u_k) = u_m \times \left(\frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}\right)$, avec $m \leqslant n$.

5 Limites de suites

5.1 Cas où la limite est infinie

Définition : On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle du type $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$.

Définition : On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty; A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = -\infty$.

Remarque : Une suite qui admet pour limite $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante et, de même, une suite croissante n'admet pas non plus nécessairement pour limite $+\infty$.

5.2 Cas où la limite est finie

Définition : On dit que la suite (u_n) admet pour limite un réel l, si tout intervalle centré en l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = l$.

5.3 Limites de suites géométriques

Théorème : Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) = 0$.

Théorème : Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) = +\infty$.

5.4 Vocabulaire

Définition : Soit (u_n) une suite. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$, la suite est dite convergente.

Définition : Soit (u_n) une suite. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \pm\infty$ ou si la suite (u_n) n'admet pas de limite, la suite est dite divergente.

6 Trigonométrie

6.1 Angles orientés

6.1.1 Le radian

Définition : L'angle plat vaut π radians.

6.1.2 Orientation

Définition : Le sens inverse à celui des aiguilles d'une montre est appelé le sens trigonométrique. Le sens contraire est appelé anti-trigonométrique.
Définition : Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé. Le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens trigonométrique est appelé cercle trigonométrique.

6.1.3 Point associé à un angle x

Définition : Soient M un point du cercle trigonométrique et l la longueur entre l'origine du cercle et le point M. Le point M est associé à l'angle x, avec : $x = l$ si l'on parcourt le cercle dans le sens trigonométrique et $x = -l$ si l'on parcourt le cercle dans le sens anti-trigonométrique.
Définition : Un point M est associé à un réel x est aussi associé à $x + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
Définition : La mesure principale d'un nombre est l'unique mesure dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.
Remarque : La mesure principale correspond au chemin le plus court sur le cercle.

6.1.4 Angles orientés de vecteurs

Définition : Soit l la longueur de l'arc $\widehat{AB}$. $(\vec{u}, \vec{v}) = l$ si l'on parcourt le cercle dans le sens trigonométrique.
Définition : Soit l la longueur de l'arc $\widehat{AB}$. $(\vec{u}, \vec{v}) = -l$ si l'on parcourt le cercle dans le sens anti-trigonométrique.

6.2 Sinus et cosinus

6.2.1 Définition

Définition : soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et M le point du cercle trigonométrique associé à l'angle de mesure α, $\begin{cases} \cos(\alpha) = x_M \\ \sin(\alpha) = y_M \end{cases}$.
Propriété : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \end{cases}$.
Relation fondamentale : $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
Valeurs de référence :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

6.2.2 Propriétés des fonctions sinus et cosinus

6.2.2.1 Périodicité

Propriété : $\begin{cases} \cos(x+2k\pi) = \cos(x) \\ \sin(x+2k\pi) = \sin(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Propriété : Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.

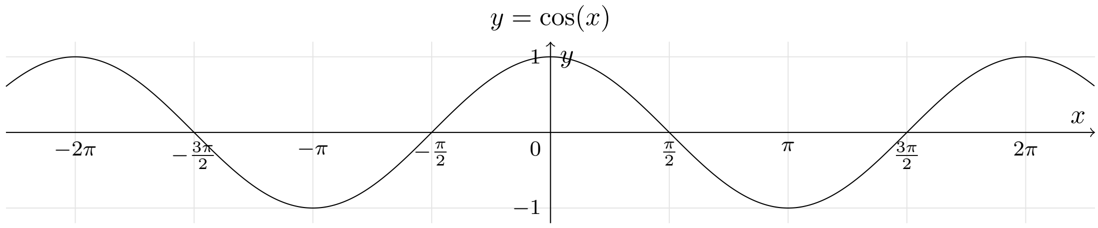
6.2.2.2 Parité

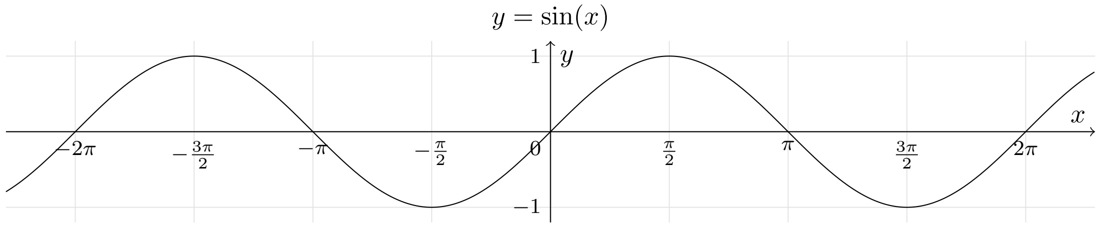
Propriété : $\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Propriété : La fonction cosinus est paire.
Propriété : La fonction sinus est impaire.

6.2.2.3 Variations

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1 $\searrow$	0 $\searrow$	-1
$\sin(x)$	0 $\nearrow$	1 $\searrow$	0

6.2.2.4 Courbes représentatives





6.2.2.5 Dérivées

Propriété : $\begin{cases} (\cos(x))' = -\sin(x) \\ (\sin(x))' = \cos(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6.3 Angles associés

Propriété : $\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété : $\begin{cases} \cos(x+2k\pi) = \cos(x) \\ \sin(x+2k\pi) = \sin(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

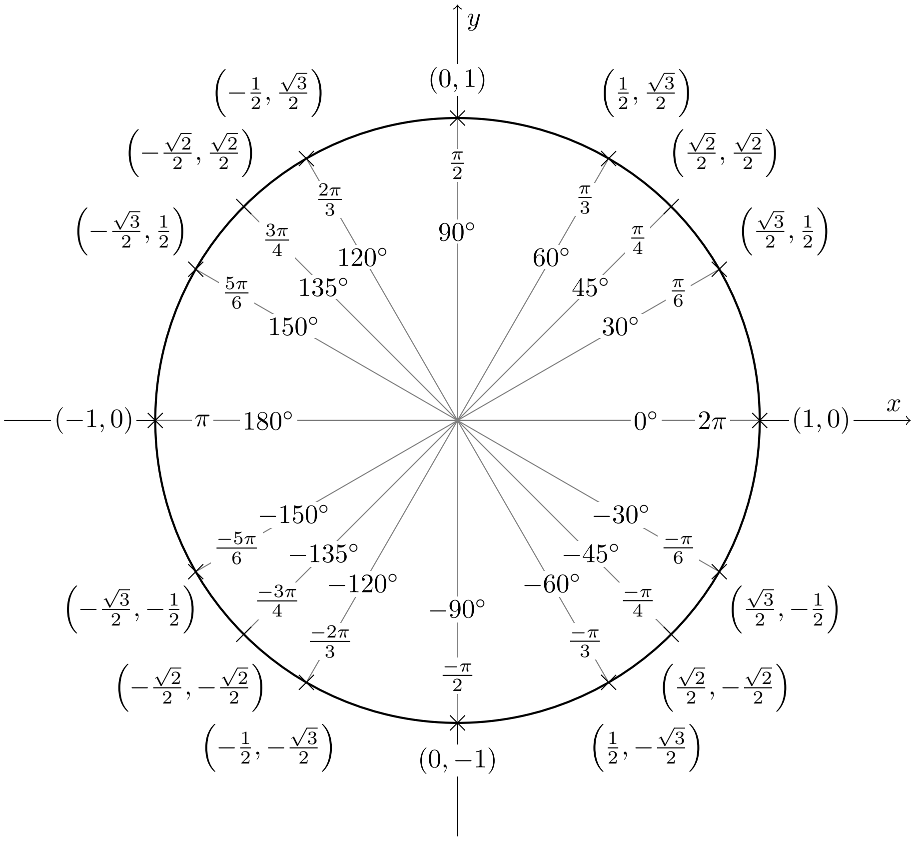
Propriété : $\begin{cases} \cos(x+\pi) = -\cos(x) \\ \sin(x+\pi) = -\sin(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

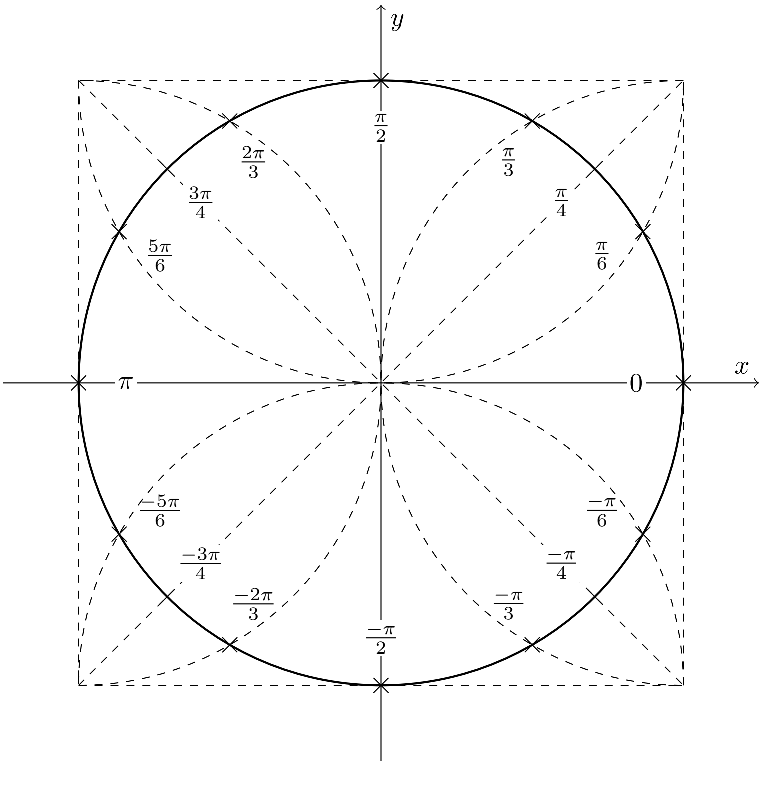
Propriété : $\begin{cases} \cos(\pi-x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi-x) = \sin(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété : $\begin{cases} \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété : $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6.4 Cercle trigonométrique

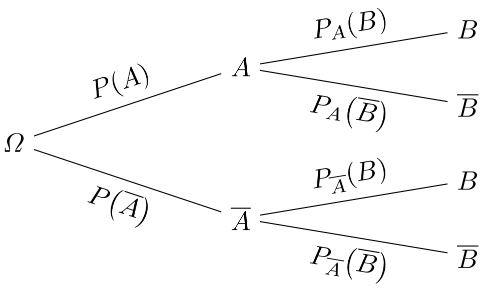




7 Probabilités conditionnelles

7.1 Probabilité conditionnelle

Définition : Soient A et B deux événements avec $P(B) \neq 0$. La probabilité que A soit réalisé sachant que B soit réalisé est $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. $P_B(A)$ se lit « P de A sachant B ».
Remarque : $P_B(A) \times P(B) = P(A \cap B) = P(B \cap A) = P_A(B) \times P(A)$.
Arbre pondéré de probabilités :



$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$

$P(A \cap \overline{B}) = P_A(\overline{B}) \times P(A)$

$P(\overline{A} \cap B) = P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P_{\overline{A}}(\overline{B}) \times P(\overline{A})$

Remarque : La somme des probabilités des branches issues d'un nœud vaut 1.
Remarque : La probabilité d'un chemin est égal au produit des probabilités des branches composant ce chemin.
Remarque : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins réalisant cet événement

7.2 Formules des probabilités totales

Définition : $\{B_1, B_2, B_3, \cdots, B_n\}$ est une partition de l'univers Ω si $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$, noté $\bigcup\limits_{k=1}^{n} (B_k) = \Omega$, et si $B_k \cap B_j = \varnothing$ pour $k \neq j$.
Théorème : Soit $\{B_1, B_2, B_3, \cdots, B_n\}$ une partition de l'univers Ω et A un événement. $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} (P(A \cap B_k)) = \sum\limits_{k=1}^{n} (P_{B_k}(A) \times P(B_k))$

7.3 Événements indépendants

Définition : Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. A et B sont dits indépendants si $P_A(B) = P(B)$.
Remarque : Soient A et B deux événements indépendants, $P_A(B) = P(B)$.
Remarque : Soient A et B deux événements indépendants, $P_B(A) = P(A)$.
Remarque : Soient A est indépendant de B si et seulement si B est indépendant de A.
Théorème : A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
Remarque : A et B sont indépendants si et seulement si $\overline{A}$ et B sont indépendants.
Remarque : A et B sont indépendants si et seulement si A et $\overline{B}$ sont indépendants.
Remarque : A et B sont indépendants si et seulement si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

8 Probabilités

8.1 Variable aléatoire réelle

Définition : Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. Une variable aléatoire réelle, notée X, est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.
Définition : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ est l'image univers de Ω par X.
Définition : La loi de X est la probabilité définie par $p(X = x_k) = p_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

8.2 Espérance

Définition : Soient une expérience aléatoire d'univers Ω et X une variable aléatoire réelle d'univers image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$. On appelle espérance mathématiques de X le réel noté $E(X)$ défini par $E(X) = x_1 p(X = x_1) + x_2 p(X = x_2) + x_3 p(X = x_3) + \cdots + x_n p(X = x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k p(X = x_k))$.
Remarque : Le terme espérance vient du langage des jeux. Lorsque X représente le gain, $E(X)$ représente le gain moyen que peut « espérer » un joueur sur un grand nombre de parties.
Remarque : $E(X)$ est la moyenne des résultats x_k, pondérés par les valeurs p_k. Ainsi, $E(X)$ est parfois noté $\overline{X}$ ou m.
Remarque : $E(X) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} (X(\omega) p(\omega))$.

8.3 Variance et écart type

Définition : Soient une expérience aléatoire d'univers Ω et X une variable aléatoire réelle d'univers image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$. On appelle variance de X le réel noté $V(X)$ défini par
$$\begin{aligned} V(X) &= p(X = x_1)(x_1 - E(X))^2 + p(X = x_2)(x_2 - E(X))^2 + \cdots + p(X = x_n)(x_n - E(X))^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big(p(X = x_k)(x_k - E(X))^2 \Big) \end{aligned}$$
Remarque : La variance représente la moyenne des carrés des écarts à la moyenne $E(X)$, des résultats x_k pondérés par les valeurs p_k.
Remarque : Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $p(X = x_k) \geqslant 0$ et $(x_k - E(X))^2 \geqslant 0$ d'où $V(X) \geqslant 0$.
Remarque : Les valeurs $(x_k - E(X))$ sont les valeurs prises par la variable aléatoire réelle $(X - E(X))$, $E(X)$ est un nombre fixé, donc $V(X) = E\Big((X - E(X))^2\Big)$
Définition : Soient une expérience aléatoire d'univers Ω et X une variable aléatoire réelle d'univers image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$. On appelle écart type de la variable aléatoire réelle X le réel noté $\sigma(X)$ défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

9 Fonction exponentielle

9.1 $y' = y$ et $y(0) = 1$

Lemme : Si une fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifie $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.
Démonstration :
Soit $g(x) = f(x) \times f(-x)$.
$g'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times f'(-x) \times (-1)$
$\quad = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x)$
$\quad = 0$
Donc, $g(x) = k = g(0) = f(0) \times f(-0) = 1$.
Donc, $g(x) = f(x) \times f(-x) = 1$, et ainsi, $f(x) \neq 0$.
Théorème : Il existe une unique fonction, appelée exponentielle et notée exp, solution de l'équation $\left\{\begin{smallmatrix} y'=y \\ y(0)=1 \end{smallmatrix}\right.$.
Démonstration :
On admet l'existence de solution.
Soient f et g deux fonctions vérifiant $\left\{\begin{smallmatrix} f'(x)=f(x) \\ f(0)=1 \end{smallmatrix}\right.$ et $\left\{\begin{smallmatrix} g'(x)=g(x) \\ g(0)=1 \end{smallmatrix}\right.$.
Soit $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
$h'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2} = 0$.
D'où $h(x) = k$.
Or, $h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 1 = k$.
Ainsi, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

9.2 Vers une nouvelle écriture

9.2.1 Propriétés fondamentales

Propriété : La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $(\exp(x))' = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.
Propriété : Pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.
Propriété : Pour tout réel x, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
Propriété : Pour tous réels x et y, $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
Propriété : Pour tout réel x, $\exp(x \times n) = (\exp(x))^n$.
Propriété : Pour tout réel x, $\exp\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}$.
Propriété : Pour tout réel x, $\exp(x) > 0$.
Démonstration de $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$:
Soit $f(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)}$.
$f'(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = f(x)$.
Ainsi, $f(x) = \exp(x)$.
$f(0) = \frac{\exp(a)}{\exp(a)} = 1$.
D'où $\frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = \exp(x)$.
Ou encore, $\exp(a + x) = \exp(a) \times \exp(x)$.

9.2.2 Nouvelle notation

Définition : On note $\exp(1) = \mathrm{e}$ et $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.
Remarque : $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.
Remarque : $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$.
Remarque : $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$.
Remarque : $\mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$.
Remarque : $\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$.
Remarque : $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}^x}$.
Remarque : $\mathrm{e}^x > 0$.

9.2.3 Étude de la fonction exponentielle

Remarque : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x > 0$.
Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x	$\nearrow$	1	e	$\nearrow$

Conséquences : $\mathrm{e}^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.
Conséquences : $\mathrm{e}^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.
Conséquences : $\mathrm{e}^x > \mathrm{e} \Leftrightarrow x > 1$.
Conséquences : $\mathrm{e}^x < \mathrm{e} \Leftrightarrow x < 1$.

9.3 Fonctions exponentielles

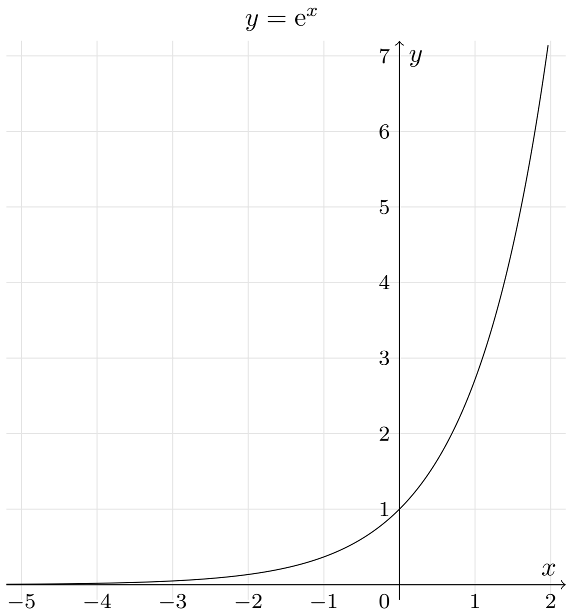
9.3.1 $f(x) = \mathrm{e}^{kx}$, avec $k \in \mathbb{R}$ fixé

Remarque : $f'(x) = \left(\mathrm{e}^{kx}\right)' = k\,\mathrm{e}^{kx}$.
Remarque : $\left(\mathrm{e}^{u(x)}\right)' = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$.

9.3.2 Application aux suites géométriques

Théorème : Pour tout réel k, la suite (u_n) définie par $u_n = \mathrm{e}^{kn}$ est une suite géométrique de raison $q = \mathrm{e}^k$.
Théorème : Si $u_n = q^n \times u_0$ avec $q > 0$, alors il existe un $k \in \mathbb{R}$, tel que $q = \mathrm{e}^k$.
Remarque : $0 < q < 1 \Leftrightarrow k < 0$.
Remarque : $q = 1 \Leftrightarrow k = 0$.
Remarque : $q > 1 \Leftrightarrow k > 0$.

9.4 Courbe représentative



10 Produit scalaire

10.1 Expression du produit scalaire

Rappel : La norme du vecteur $\vec{u}$ est sa longueur notée $\|\vec{u}\|$.
Définition : Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Définition : Si $\vec{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\vec{v} \neq \overrightarrow{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
Définition : Si $\vec{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\vec{v} = \overrightarrow{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
Propriété : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

10.2 Propriétés

Théorème : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$.
Théorème : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
Théorème : $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Théorème : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
Remarque : $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \vec{u}^2 - \vec{v}^2\right)$.

10.3 Résultat fondamental

Remarque : Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs, $\alpha = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et H le projeté orthogonal de C sur (AB).
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\alpha)$.
Remarque : Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs, $\alpha = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et H le projeté orthogonal de C sur (AB).
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $H \in [AB)$.
Remarque : Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs, $\alpha = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et H le projeté orthogonal de C sur (AB).
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $H \notin [AB)$.

10.4 Expression dans une base orthogonale

Théorème : Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. Soit $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{a'}{b'}$ deux vecteurs, $\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb'$.
Conséquence : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Conséquence : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

11 Application du produit scalaire

11.1 Équations de droite

Définition : Un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ est dit normal à (AB).
Théorème : Toute droite de vecteur normal $\vec{n}\binom{a}{b} \neq \overrightarrow{0}$ admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.
Théorème : Réciproquement, $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $c \in \mathbb{R}$ est l'équation d'une droite de vecteur normal $\vec{n}\binom{a}{b}$.
Remarque : La droite (D) $ax+by+c = 0$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$ car $\vec{u} \cdot \vec{n} = -ba + ab = 0$.

11.2 Équations de cercles

Théorème : L'équation du cercle de centre $I(a; b)$ et de rayon $r \geqslant 0$ est $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.