Mathématiques 2$^{\text{de}}$

Table des matières

1 Figures et propriétés de référence

1.1 Les triangles

1.1.1 Médianes

Théorème : Une médiane d'un triangle étant issue d'un sommet passant par le milieu du côté opposé, les trois médianes sont concourantes en un point appelé le centre de gravité du triangle et situé au $\frac{2}{3}$ de chacune des médianes.

1.1.2 Médiatrices

Théorème : Une médiatrice d'un triangle étant la droite issue du milieu d'un côté, perpendiculaire à ce même côté, les trois médiatrices sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.

1.1.3 Hauteurs

Théorème : Une hauteur d'un triangle étant la droite issue d'un sommer perpendiculaire au côté opposé, les trois hauteurs sont concourantes en un point nommé orthocentre du triangle.

1.1.4 Bissectrices

Théorème : Une bissectrice d'un triangle étant la droite issue d'un sommet et divisant l'angle à ce sommet en deux angles égaux, les trois bissectrices sont concourantes en un point qui est le centre du cercle inscrit du triangle.

1.1.5 Le triangle rectangle

Théorème de Pythagore : ABC est un triangle rectangle en A si $BC^2 = BA^2 + CA^2$.
Théorème : ABC est un triangle rectangle en A si A se situe sur le cercle de diamètre $[BC]$.

1.1.6 Théorème de Thalès

Théorème de Thalès : Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.
Théorème de Thalès : Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

1.2 Les quadrilatères

1.2.1 Propriétés caractéristiques

Propriété : Un quadrilatère est un parallélogramme si ses diagonales ont le même milieu.
Propriété : Un quadrilatère est un rectangle si ses diagonales ont le même milieu et sont de même longueur.
Propriété : Un quadrilatère est un losange si ses diagonales ont le même milieu et sont perpendiculaires.
Propriété : Un quadrilatère est un carré si ses diagonales ont le même milieu, sont de même longueur et perpendiculaires.

1.2.2 Symétries

Propriété : Un parallélogramme admet pour centre de symétrie le point d'intersection de ses diagonales.
Propriété : Un rectangle admet pour axes de symétries les deux médiatrices de ses côtés et pour centre de symétrie le point d'intersection de ses diagonales.
Propriété : Un losange admet pour axes de symétries ses deux diagonales et pour centre de symétrie le point d'intersection de ses diagonales.
Propriété : Un carré admet pour axes de symétries les deux médiatrices de ses côtés ainsi que ses deux diagonales et pour centre de symétrie le point d'intersection de ses diagonales.

1.3 Relations trigonométriques

Remarque : Soit ABC un triangle rectangle en A.
Cosinus : $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{AB}{BC}$.
Sinus : $\sin\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{AC}{BC}$.
Tangente : $\tan\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{\sin\left(\widehat{ABC}\right)}{\cos\left(\widehat{ABC}\right)} = \frac{AC}{AB}$.
Relation fondamentale : $\cos^2\left(\widehat{ABC}\right) + \sin^2\left(\widehat{ABC}\right) = 1$.

1.4 Projection orthogonale

Définition : Le projeté du point A sur la droite (d) est le point H de la droite (d) tel que $(AH) \perp (d)$.
Propriété : Le projeté orthogonal de point A sur la droite (d) est le point de la droite (d) le plus proche de A.

2 Les vecteurs

2.1 Notation et norme d'un vecteur

Définition : Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par sa direction (direction de la droite (AB)), sa longueur (la distance AB) et son sens de A vers B.
Propriété : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ si $ABDC$ est un parallélogramme.
Remarque : Nous noterons $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = \vec{v}$.
Remarque : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.
Définition : La longueur d'un vecteur $\vec{u}$ et appelé la norme de $\vec{u}$, noté $\|\vec{u}\|$. Ainsi $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$.
Définition : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits orthogonaux lorsque (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

2.2 Addition de vecteurs

Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Propriété : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
Propriété : $\vec{u} + \overrightarrow{0} = \vec{u}$.

2.3 Soustraction de vecteurs

Définition : L'opposé du vecteur $\vec{u}$ noté $-\vec{u}$ qui est de même longueur et direction que $\vec{u}$ et de sens opposé.
Définition : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.
Remarque : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

2.4 Produit par un nombre réel

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel fixé, si $k = 0$, $k\vec{u} = \overrightarrow{0}$.
Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel fixé, si $k > 0$, $k\vec{u}$ est de même direction et sens que $\vec{u}$ et de longueur k fois la longueur de $\vec{u}$.
Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel fixé, si $k < 0$, $k\vec{u}$ est de même direction, de sens opposé à $\vec{u}$ et de longueur $-k$ fois la longueur de $\vec{u}$.
Propriété : $0 \times \vec{u} = \overrightarrow{0}$.
Propriété : $a(b\vec{u}) = ab\vec{u}$.
Propriété : $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$.

2.5 Les vecteurs colinéaires

Définition : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
Remarque : $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.
Remarque : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'ils ont la même direction.
Propriété : Les points A, B et C sont alignés si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Définition : Soit A et B deux points, $\overrightarrow{AB}$ est dit directeur de la droite (AB).
Remarque : $(AB) \parallel (CD)$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2.6 Propriétés géométriques

Propriété : $ABCD$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Propriété : I est le milieu de $[AB]$ si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou si $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
Propriété : G est le centre de gravité du triangle ABC si $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ où A' est le milieu de $[BC]$.

3 Coordonnées cartésiennes

3.1 Repères du plan

Définition : Soient un point O, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs non colinéaires.
Définition : Le couple $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ est appelé une base du plan vectoriel.
Définition : Le triplet $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est appelé un repère du plan.
Définition : O est l'origine du repère.
Théorème : Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. À tout vecteur $\vec{u}$ il correspond un unique couple de réels $(a; b)$ tel que $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ et à tout point M il correspond un unique couple de réels $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
Remarque : $(a; b)$ sont les coordonnées de $\vec{u}$, notées $\vec{u}(a; b)$, où a est l'abscisse et b l'ordonnée.
Remarque : $(x; y)$ sont les coordonnées de M, notées $M(x; y)$, où x est l'abscisse et y l'ordonnée.

3.2 Propriétés

Théorème : Soient $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan, $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{a'}{b'}$ deux vecteurs, $\vec{u} = \vec{v}$ si $a = a'$ et $b = b'$.
Théorème : Soient $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan, $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{a'}{b'}$ deux vecteurs, $\vec{u} + \vec{v} = \binom{a+a'}{b+b'}$.
Théorème : Soient $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan et $\vec{u}\binom{a}{b}$ un vecteur, soit k un nombre réel alors $k\vec{u} = k\binom{a}{b} = \binom{ka}{kb}$.
Théorème : Soient $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points : $\overrightarrow{AB} = \binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$, soit I le milieu de $[AB]$, I admet pour coordonnées $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$.

3.3 Repères orthonormés

Définition : Le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est dit orthonormé si $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux avec $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$.
Théorème : Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé et $\vec{u}\binom{a}{b}$ un vecteur, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Théorème : Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points, on a $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

3.4 Colinéarité

Théorème : Soient $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{a'}{b'}$ deux vecteurs dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' = 0$.
Remarque : A, B et C sont alignés si $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$.

4 Calculs

4.1 Notations

Définition : Soient A et B deux ensembles, la réunion des ensembles A et B est l'ensemble noté $A \cup B$ (A union B) et qui est l'ensemble des éléments appartenant à A ou/et B. $A \cup B$ se lit « A union B ».
Définition : Soient A et B deux ensembles, l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B est l'ensemble noté $A \cap B$ (A intersection B) et qui est l'ensemble des éléments appartenant à A et B. $A \cap B$ se lit « A inter B ».
Définition : Soient A et B deux ensembles, $A \subset B$ (A est un sous ensemble de B) et $B \supset A$ (B est un sur ensemble de A) signifient que A est un sous ensemble de B. $A \subset B$ et $B \supset A$ se lisent « A est inclus dans B ».
Définition : Soient a un nombre et A un ensemble, $a \in A$ (a appartient à A) signifie que a est un élément de A. $a \in A$ se lit « a appartient à A ».

4.2 Ensembles de nombre

Définition : $\mathbb{N} = \{\text{entiers naturels}\} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$.
Définition : $\mathbb{Z} = \{\text{entiers relatifs}\} = \{0; 1; -1; 2; -2; \ldots\}$.
Définition : $\mathbb{D} = \{\text{décimaux}\} = \left\{\frac{k}{10^n} \,;\, k \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\right\}$.
Définition : $\mathbb{Q} = \{\text{rationnels}\} = \left\{\frac{k}{n} \,;\, k \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
Définition : $\mathbb{R} = \{\text{réels}\} = \{\text{tous les nombres}\}$.
Remarque : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Notation : Un ensemble de nombre privé de 0 se note avec une étoile. $n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 0$ se note $n \in \mathbb{N}^*$.
Remarque : $\mathbb{R}$ peut être représenté par une droite.

4.3 Puissances

Propriété : $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n = a \times \ldots \times a$ (n facteurs).
Propriété : $a \in \mathbb{R}$, $a^0 = 1$.
Propriété : $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
Propriété : $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $a^n \times a^p = a^{(n+p)}$.
Propriété : $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $\frac{a^n}{a^p} = a^{(n-p)}$.
Propriété : $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{R}$, $(ab)^n = a^n \times b^n$.

4.4 Racine carrée

Définition : Soit $x \geqslant 0$, $\sqrt{x}$ est le nombre réel positif dont le carré vaut x.
Propriété : $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.
Propriété : $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Propriété : $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
Propriété : $a \in \mathbb{R}_+$, $(\sqrt{a})^2 = a$.
Propriété : $a \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{a^2} = a$.
Remarque : $a \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$, $x^2 = a$ si $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

4.5 Arithmétique

4.5.1 Diviseurs

Définition : Soient deux entiers a et b, a est un diviseur de b s'il existe un entier tel que $b = ka$ (b est un multiple de a).
Remarque : n est pair s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$.
Remarque : n est impair s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.
Critère de divisibilité : Un nombre est divisible par 2 si son chiffre des unités l'est.
Critère de divisibilité : Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres l'est.
Critère de divisibilité : Un nombre est divisible par 5 si son chiffre des unités l'est.
Critère de divisibilité : Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres l'est.

4.5.2 Nombres premiers

Définition : Un entier naturel est dit premier s'il admet exactement deux diviseurs.
Théorème : Tout entier naturel admet une unique décomposition de facteurs premiers.

5 Équations

5.1 Lorsque l'inconnue ne figure pas au dénominateur

Théorème : Un produit de facteurs est nul si l'un au moins de ses facteurs est nul.
Remarque : Ainsi pour résoudre une équation, on se ramènera à un produit de facteurs égal à 0, grâce à des factorisations.
Identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
Identité remarquable : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

5.2 Lorsque l'inconnue figure au dénominateur

Définition : L'ensemble de définition est l'ensemble des valeurs pour lesquelles l'expression est définie.

6 Inéquations

6.1 Rappel sur les inégalités

Propriété : Soient a, b et c trois réels, si $a \leqslant b$ alors $a + c \leqslant b + c$.
Propriété : Soient a, b et c trois réels, si $a < b$ alors $a + c < b + c$.
Propriété : Soient a, b et c trois réels, si $a \leqslant b$ et $c > 0$ alors $ac \leqslant bc$.
Propriété : Soient a, b et c trois réels, si $a \leqslant b$ et $c < 0$ alors $ac \geqslant bc$.
Propriété : Soient a, b et c trois réels, si $a < b$ et $c > 0$ alors $ac < bc$.
Propriété : Soient a, b et c trois réels, si $a < b$ et $c < 0$ alors $ac > bc$.

6.2 Intervalles

L'intervalle noté	**est appelé**	**est l'ensemble des réels tel que**
$[a; b]$	intervalle fermée	$a \leqslant x \leqslant b$
$]a; b[$	intervalle ouverte	$a < x < b$
$[a; b[$	Intervalle semi-ouvert	$a \leqslant x < b$
$]a; b]$	Intervalle semi-ouvert	$a < x \leqslant b$
$]-\infty; a]$	Demi-droite fermée	$x \leqslant a$
$[a; +\infty[$	Demi-droite fermée	$x \geqslant a$
$]-\infty; a[$	Demi-droite ouverte	$x < a$
$]a; +\infty[$	Demi-droite ouverte	$x > a$
$]-\infty; +\infty[$	La droite des réels	$x \in \mathbb{R}$

6.3 Signe de $ax + b$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		Signe de $-a$	0	Signe de a	

7 Fonctions – Généralités

7.1 Notion de fonction

Définition : Définir une fonction sur un ensemble de réels E, c'est associer à chaque $x \in E$ un réel unique.
On note : $f : E \to \mathbb{R}$.
On note : $x \mapsto f(x)$.
Définition : E est l'ensemble de définition de la fonction f.
Définition : $f(x)$ est l'image de x par f. Si $y_0 = f(x_0)$ alors x_0 est un antécédent de y_0.

7.2 Courbe représentative

Définition : Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthogonal du plan, la courbe représentative de la fonction f est l'ensemble des points $M(x; f(x))$ pour $x \in E_f$. $y = f(x)$ est l'équation cartésienne de la courbe.

7.3 Fonctions affines

Définition : Une fonction f est affine si son expression est de la forme $f(x) = mx + p$ où m et p sont deux réels fixés. m est le coefficient directeur. p est l'ordonnée à l'origine.
Remarque : Lorsque $p = 0$, $f(x) = mx$, alors f est dite linéaire.
Remarque : Lorsque $m = 0$, $f(x) = p$, alors f est dite constante.
Propriété : Une fonction f est affine si la variation de $f(x)$ est proportionnelle à la variation de x. Le coefficient de proportionnalité est le coefficient directeur.

8 Propriétés des fonctions

8.1 Parité

Définition : Un ensemble de nombres, E, est dit symétrique par rapport à zéro lorsque pout tout $x \in E$, $-x \in E$.

8.1.1 Fonctions paires

Définition : Une fonction f, définie sur E_f est dite paire si E_f est symétrique à 0 pour tout $x \in E_f$, $f(-x) = f(x)$.
Propriété : Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthogonal, une fonction est paire si sa courbe représentative est symétrique par rapport à (O_y).

8.1.2 Fonctions impaires

Définition : Une fonction f, définie sur E_f est dite impaire si E_f est symétrique par rapport à 0 pour tout $x \in E_f$, $f(-x) = -f(x)$.
Propriété : Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthogonal, une fonction est impaire si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine.

8.2 Sens de variation

Définition : Soit f, une fonction définie sur E. f est dite strictement croissante sur E si pour tout nombres a et b de E, $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
Définition : Soit f, une fonction définie sur E. f est dite strictement décroissante sur E si pour tout nombres a et b de E, $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.
Définition : Soit f, une fonction définie sur E. f est dite croissante sur E si pour tout nombres a et b de E, $a < b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$.
Définition : Soit f, une fonction définie sur E. f est dite décroissante sur E si pour tout nombres a et b de E, $a < b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$.
Définition : Soit f, une fonction définie sur E. Soit $f(x) = mx + p$, si $m > 0$, alors f est strictement croissante.
Définition : Soit f, une fonction définie sur E. Soit $f(x) = mx + p$, si $m < 0$, alors f est strictement décroissante.

8.3 Minimum, maximum

Définition : Soit f définie sur E, f admet un maximum en x_0 si $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout $x \in E$.
Définition : Soit f définie sur E, f admet un minimum en x_0 si $f(x) \geqslant f(x_0)$ pour tout $x \in E$.
Définition : Un extremum est un maximum ou un minimum.

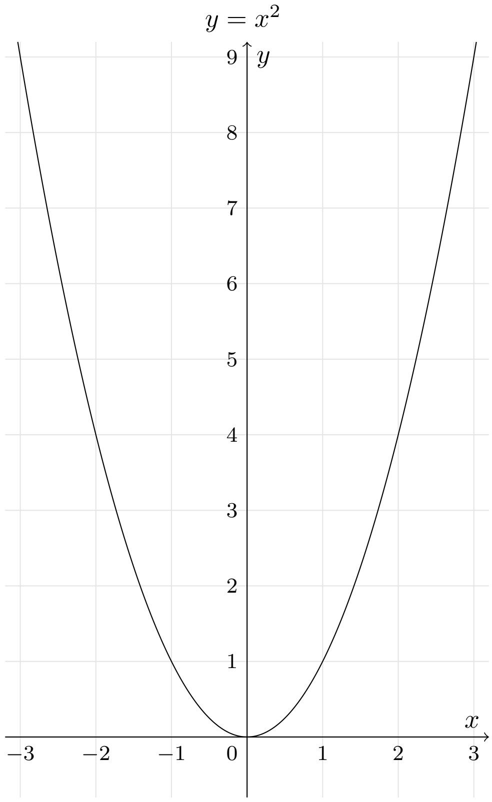
9 Fonctions de référence

9.1 La fonction carrée

Définition : La fonction carrée est définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^2$.
Propriété : La fonction carrée est une fonction paire.
Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$	0	$\nearrow$

Courbe représentative : Cette courbe est symétrique par rapport à O_y. C'est une parabole.

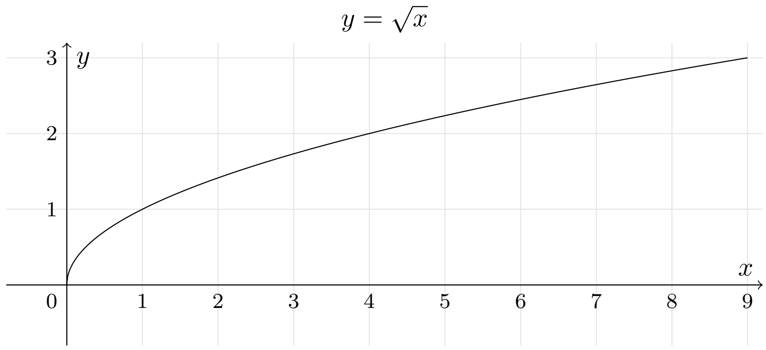


9.2 La fonction racine carrée

Définition : La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$, par $f(x) = \sqrt{x}$.
Tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 $\nearrow$	

Courbe représentative :

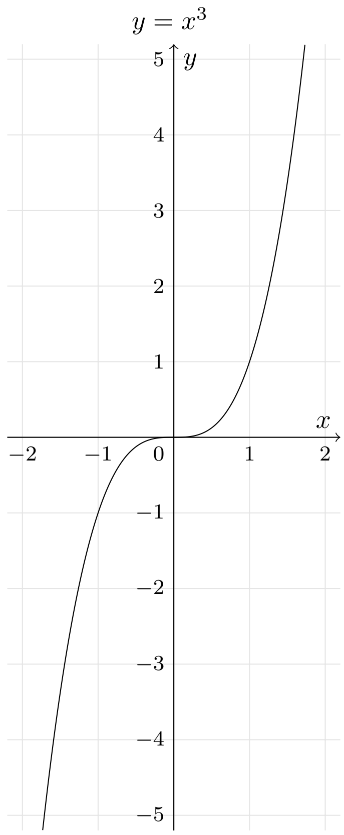


9.3 La fonction cube

Définition : La fonction cube est définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^3$.
Propriété : La fonction cube est une fonction impaire.
Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Courbe représentative :

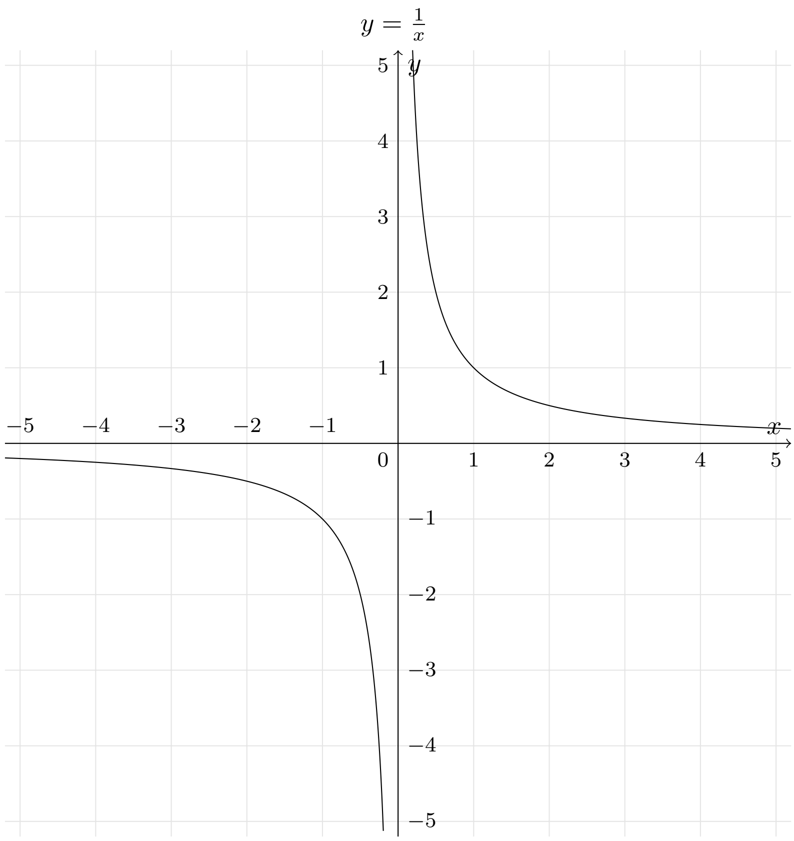


9.4 La fonction inverse

Définition : La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$, par $f(x) = \frac{1}{x}$.
Propriété : La fonction inverse est une fonction impaire.
Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

Remarque : La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$.
Courbe représentative : Cette courbe est symétrique par rapport à O. C'est une hyperbole.



9.5 Propriétés

Propriété : $0 < x < 1$ alors $0 < x^3 < x^2 < x < \sqrt{x} < 1$.
Propriété : $x > 1$ alors $1 < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3$.
Propriété : $0 \leqslant a < x < b$ alors $a^2 < x^2 < b^2$.
Propriété : $a < x < b \leqslant 0$ alors $a^2 > x^2 > b^2$.
Propriété : $a < x < b$ avec $a < 0$ et $b > 0$ alors $0 \leq x^2 < \sup\big(a^2; b^2\big)$.
Propriété : $a < b$ alors $a^3 < b^3$.
Propriété : $0 \leqslant a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
Propriété : $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$.
Propriété : $a < b < 0$ alors $0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

10 Valeur absolue

10.1 Distance entre deux réels

Définition : La distance entre les nombres réels a et b est notée $|b-a|$ et se lit « valeur absolue de $b-a$ ». Ainsi, $d(a;b) = |b-a| = a-b$ si $a \geqslant b$ et $d(a;b) = |b-a| = b-a$ si $a \leqslant b$.
Remarque : $|x|$ est la distance entre x et 0. Ainsi, $|x| = x$ si $x \geqslant 0$ et $|x| = -x$ si $x \leqslant 0$.

10.2 Propriétés

Propriété : $|x| \geqslant 0$.
Propriété : $|x| = 0$ si $x = 0$.
Propriété : $|-x| = |x|$ et $|x-y| = |y-x|$.
Propriété : $|x-a| = 0$ si $x = a$.
Propriété : $|xy| = |x| \times |y|$.
Propriété : $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ pour $y \neq 0$.
Propriété : $|x| = |y|$ si $x = y$ ou si $x = -y$.
Inégalité triangulaire : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

10.3 Inéquations

Définition : La distance entre un réel x et un réel a est $|x-a|$. Ainsi, pour $r > 0$, $|x-a| < r$ signifie que la distance entre x et a est plus petite que r.
Remarque : $|x-a| \leqslant r$ si $x \in [a-r; a+r]$.
Remarque : $|x-a| < r$ si $x \in]a-r; a+r[$.
Remarque : $|x-a| \geqslant r$ si $x \in]-\infty; a-r] \cup [a+r; +\infty[$.
Remarque : $|x-a| > r$ si $x \in]-\infty; a-r[\cup]a+r; +\infty[$.

10.4 Équations

Remarque :

x	$-\infty$		a		$+\infty$
Signe de $(x-a)$		$-$	0	$+$	
$\|x-a\|$		$(a-x)$	0	$(x-a)$	

10.5 Encadrement d'un réel

10.5.1 Définitions

Définition : Encadrer un nombre réel x, c'est trouver deux nombres a et b tel que $a \leqslant x \leqslant b$. $(b-a)$ est l'amplitude de l'encadrement.

10.5.2 Valeur approchée

Définition : Soient a, x, $\varepsilon > 0$, trois réel. a est une valeur approchée de x à ε près si $|x-a| \leqslant \varepsilon$ ou si $a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon$.
Remarque : a est une valeur approchée par excès si $a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a$.
Remarque : a est une valeur approchée par défaut si $a \leqslant x \leqslant a + \varepsilon$.

10.5.3 Arrondi et troncature

Définition : L'arrondi à n décimales d'un réel x est le nombre à n décimales qui est le plus proche de x.
Définition : La troncature à n décimales d'un réel x consiste à ne regarder que les n premières décimales de x.

11 Équations de droite

11.1 Équations cartésiennes d'une droite

Théorème : Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan. Toute droite admet une équation cartésienne, c'est-à-dire du type $ax+by+c=0$ où a, b et c sont trois réels quelconques avec a et b non simultanément nuls.
Définition : Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan. Soient A et B deux points distincts d'une droite (D). $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (D).
Théorème : Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan. Pour tous réels a, b et c, avec a et b non simultanément nuls, $ax+by+c=0$ est l'équation cartésienne d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix}-b\\a\end{smallmatrix}\right)$.

11.2 Équation réduite d'une droite

Remarque : Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan. Toute droite admet une équation du type $ax+by+c=0$, avec $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix}-b\\a\end{smallmatrix}\right)$ pour vecteur directeur, ainsi si $b\neq 0$, c'est à dire si cette droite n'est pas verticale, alors cette droite admet pour équation $y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$.
Remarque : Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan. Toute droite admet une équation du type $ax+by+c=0$, avec $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix}-b\\a\end{smallmatrix}\right)$ pour vecteur directeur, ainsi si $b=0$, c'est à dire si cette droite est verticale, alors cette droite admet pour équation $x=-\frac{c}{a}$.
Théorème : Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan. Toute droite non verticale admet une unique équation dite réduite du type : $y=mx+p$, avec m et p deux réels fixés. p est appelé l'ordonnée à l'origine, car la droite passe alors par le point $A(0;p)$, et m est appelé le coefficient directeur. Les droites verticales admettent une équation du type $x=k$.
Remarque : Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan. $y=mx+p$ si $mx-y+p=0$, ainsi le vecteur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix}1\\m\end{smallmatrix}\right)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $y=mx+p$. D'où, deux droites d'équations $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$ sont parallèles si $m=m'$, et ces deux droites sont sécantes si $m\neq m'$.
Théorème : Soient $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan et (D) une droite d'équation réduite $y=mx+p$, $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points distincts de (D). On a coefficient directeur $=\frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}$, ou encore, $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
Remarque : Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan. En se déplaçant sur une droite l'accroissement des ordonnées est proportionnel à l'accroissement des abscisses, le facteur de proportionnalité étant le coefficient directeur. Ainsi si l'on se déplace sur la droite en augmentant l'abscisse de 1, l'ordonnée varie de m.

11.3 Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

11.3.1 Définitions

Définition : Un système de deux équations linéaires à deux inconnues est un système qui peut se mettre sous la forme $\begin{cases} ax+by+c=0\\ a'x+b'y+c'=0\end{cases}$, avec a, b, c, a', b', c' des réels donnés.
Définition : Un couple $(u;v)$ est solution du système s'il vérifie $\begin{cases} au+bv+c=0\\ a'u+b'v+c'=0\end{cases}$.
Définition : Résoudre le système c'est trouver l'ensemble des couples solution de ce système.
Interprétation géométrique : Soit (D) la droite d'équation $ax+by+c=0$, et (D') la droite d'équation $a'x+b'y+c'=0$. Résoudre le système revient alors à trouver les coordonnées $(x;y)$ des points d'intersection de ces deux droites, et ainsi, trois cas sont possibles : (D) et (D') sont sécantes, il existe alors un unique couple de solution $(x_0;y_0)$, coordonnées de l'unique point d'intersection, (D) et (D') sont parallèles distinctes, il n'y a aucune solution ou (D) et (D') sont confondues, il y a alors une infinité de solution, $S=\{(x;y),ax+by=-c\}$, coordonnées des points de la droite (D).
Remarque : Or $\overrightarrow{V}\left(\begin{smallmatrix}-b\\a\end{smallmatrix}\right)$ et $\overrightarrow{V'}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs respectifs des droites (D) et (D'). Ainsi, (D) et (D') sont parallèles si $\det\left(\overrightarrow{V},\overrightarrow{V'}\right)=\begin{vmatrix}-b & -b'\\ a & a'\end{vmatrix}=0$, donc si $ab'-a'b=0$.

11.3.2 Critère d'existence et d'unicité de la solution

Définition : Le réel $(ab'-a'b)$ est appelé déterminant du système $\begin{cases} ax+by+c=0\\ a'x+b'y+c'=0\end{cases}$. On le note $D=\begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix}=ab'-a'b$.
Théorème : Soit le système $\begin{cases} ax+by+c=0\\ a'x+b'y+c'=0\end{cases}$. Si $ab'-a'b\neq 0$, alors le système admet un unique couple de solutions. Si $ab'-a'b=0$, alors le système admet une infinité de solutions ou aucune.

12 Statistiques

12.1 Vocabulaire

Définition : On appelle population tout ensemble soumis à une étude statistique et individu tout élément de cette population.
Définition : Dans une étude statistique on étudie des caractères, les réponses à ces caractères sont appelées les modalités.
Définition : La modalité possédant le plus grand effectif est appelée la classe modale.
Définition : Il existe deux types de caractères : les caractères qualitatifs, pour lesquels les réponses (ou modalités) ne sont pas un nombre et les caractères quantitatifs, pour lesquels les réponses (ou modalités) sont un nombre. Les caractères quantitatifs sont dits continu si les réponses peuvent être n'importe quelle valeur d'un intervalle. Les caractères quantitatifs sont dits discret si les réponses ne peuvent prendre que certaines valeurs.
Définition : La fréquence d'une modalité est le quotient de l'effectif d'une modalité par l'effectif total. Les fréquences sont généralement exprimées en pourcentage.

12.2 Représentations graphiques

12.2.1 Effectifs cumulés

Définition : L'effectif cumulé croissant d'un caractère de valeur k est la somme des effectifs associés aux valeurs du caractère qui sont inférieures ou égales à k.
Définition : L'effectif cumulé décroissant d'un caractère de valeur k est la somme des effectifs associés aux valeurs du caractère qui sont supérieures ou égales à k.
Définition : La ligne brisée obtenue en joignant les sommets du graphe en bâtons des effectifs cumulés croissants (respectivement décroissants) est appelée polygone des effectifs cumulés croissants (respectivement décroissants).
Remarque : On définit d'une façon similaire, en remplaçant les effectifs par les fréquences, les fréquences cumulées croissantes, décroissantes et les polygones des fréquences cumulées.

12.2.2 Histogramme

Définition : Un histogramme est un graphe où chaque modalité est représentée par un rectangle dont l'aire est proportionnelle à son effectif.
Remarque : Attention à ne pas confondre histogramme et diagramme en bâtons. En effet, ceux-ci ne peuvent coïncider que lorsqu'il s'agit d'un regroupement par classes de même longueur.

12.3 Mesures de position centrale

12.3.1 Moyenne

12.3.1.1 Pour un caractère quantitatif discret

Définition : Soit une série statistique $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ..., $(x_p; n_p)$, où x_i sont les modalités et n_i les effectifs correspondants. On appelle moyenne de cette série le nombre noté $\overline{x}$ défini par $\overline{x} = \frac{n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_px_p}{n_1+n_2+\ldots+n_p} = f_1x_1+f_2x_2+\ldots+f_px_p$; où, f_1, f_2, ..., f_p représentent les fréquences respectives des modalités x_1, x_2, ..., x_p.

12.3.1.2 Pour un caractère quantitatif continu

Définition : On définit la moyenne de la même façon que précédemment en prenant pour valeur de la modalité le centre de l'intervalle.

12.3.1.3 Propriétés

Théorème : Soit $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ..., $(x_p; n_p)$ une série statistique de moyenne $\overline{x}$. La série $(kx_1; n_1)$, $(kx_2; n_2)$, ..., $(kx_p; n_p)$, où k est un réel fixé, admet pour moyenne $k\overline{x}$. Soit X et Y deux séries statistiques admettant respectivement $\overline{X}$, $\overline{Y}$ pour moyenne et N_X, N_Y pour effectif total. La série obtenue en effectuant la réunion de ces deux séries admet pour moyenne : $\frac{N_X\times\overline{X}+N_Y\times\overline{Y}}{N_X+N_Y}$.

12.3.2 Médiane

Définition : La médiane d'un caractère quantitatif est le nombre m tel qu'au moins 50% de la population admette des valeurs inférieures ou égales à m et qu'au moins 50% de la population admette des valeurs supérieures ou égales à m.
Remarque : Détermination pratique de la médiane pour un caractère quantitatif discret d'effectif total N. Si N est impair, nous prendrons pour médiane la valeur centrale de cette série. Si N est pair, nous prendrons la moyenne des deux valeurs centrales de cette série.
Remarque : Détermination pratique de la médiane pour un caractère quantitatif continu graphiquement, la médiane est l'abscisse du point du polygone des effectifs cumulés croissants (ou décroissants) dont l'ordonnée représente 50% de la population.
Remarque : Détermination pratique de la médiane pour un caractère quantitatif continu par le calcul, posons $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $M\left(x_M; \frac{k}{2}\right)$. Les points A et B sont deux points du polygone des effectifs cumulés croissants. L'effectif total étant de k, la médiane est l'abscisse du point du polygone des effectifs cumulés croissants d'ordonnée $\frac{k}{2}$. Ce point se situe donc sur le segment $[AB]$ et la médiane est l'abscisse x_M du point M.

12.4 Mesures de dispersion

12.4.1 Étendue

Définition : L'étendue d'un caractère quantitatif est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de ce caractère.

12.4.2 Quartiles

Définition : Le premier quartile d'un caractère quantitatif, noté Q_1, est la plus petite valeur de cette série telle qu'au moins 25% de l'effectif total admette des valeurs inférieures ou égales à Q_1. Le troisième quartile quantitatif, noté Q_3, est la plus petite valeur de cette série telle qu'au moins 75% de l'effectif total admette des valeurs inférieures ou égales à Q_3. On appelle écart interquartile le nombre $(Q_3 - Q_1)$.
Remarque : Dans le cas d'une série quantitative continue, c'est à dire dans le cas d'un regroupement par classes, nous utiliserons alors le graphe des effectifs cumulés croissants pour déterminer les quartiles. Q_1 étant l'abscisse du point dont l'ordonnée correspond à 25% de l'effectif total. Q_3 étant l'abscisse du point dont l'ordonnée correspond à 75% de l'effectif total.
Remarque : L'écart interquartile est une autre mesure de la dispersion d'une série. En effet, l'intervalle $[Q_1; Q_3]$ contient environ 50% de l'effectif total, ainsi, plus il est petit, moins la série est dispersée.
Remarque : La médiane et l'écart interquartile sont deux paramètres moins sensibles aux valeurs extrêmes de la série que ne le sont la moyenne et l'étendue.

12.4.3 Déciles

Remarque : On définit de la même façon que le quartiles les déciles D_1 et D_9, en remplaçant les pourcentages par respectivement 10% et 90%, l'écart interdécile étant alors $(D_9 - D_1)$.

12.4.4 Écart-type et variance

Remarque : Soit une série statistique $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, …, $(x_p; n_p)$, où x_i sont les modalités, n_i les effectifs correspondants de la moyenne $\overline{x}$.
Définition : La variance de la série est définie par

$$\begin{aligned} V &= \frac{n_1(x_1-\overline{x})^2+n_2(x_2-\overline{x})^2+\ldots+n_p(x_p-\overline{x})^2}{n_1+n_2+\ldots+n_p} \\ &= \frac{1}{N}\left[n_1(x_1-\overline{x})^2+n_2(x_2-\overline{x})^2+\ldots+n_p(x_p-\overline{x})^2\right] \\ &= f_1(x_1-\overline{x})^2+f_2(x_2-\overline{x})^2+\ldots+f_p(x_p-\overline{x})^2 \end{aligned}$$

Définition : L'écart-type de la série est le nombre noté s défini par $s = \sqrt{V}$.
Remarque : La variance représente la moyenne des carrés des écarts à la moyenne de la série et il est donc logique afin de mesurer la dispersion de la série d'en prendre la racine carrée.
Remarque : Il aurait été naturel, afin de rendre ces écarts positifs, d'en prendre les valeurs absolues. On définit ainsi l'écart-moyen mais celui-ci, à cause des valeurs absolues, se révèle trop difficile à manier.

13 Probabilités

13.1 Vocabulaire

13.1.1 Expérience aléatoire

Définition : Une expérience aléatoire est une expérience dont on connaît le déroulement mais dont on ne peut prévoir l'issue.

13.1.2 Univers

Définition : L'univers d'une expérience aléatoire, noté Ω, est l'ensemble des issues, ou résultats, possibles.

13.1.3 événements

13.1.3.1 Définitions

Définition : Un événement A est une partie, ou sous ensemble, de l'univers Ω. A est dit réalisé si le résultat de l'expérience aléatoire est un élément de A.

13.1.3.2 événements particuliers

Définition : $\varnothing$ est un événement qui n'est jamais réalisé, c'est l'événement impossible.
Définition : Ω est un événement qui est toujours réalisé, c'est l'événement certain.
Définition : Un événement qui ne contient qu'un seul élément est appelé événement élémentaire.
Définition : Deux événements sont dits disjoints si leur intersection est vide, on dit aussi qu'ils sont incompatibles.
Définition : L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$, est son complémentaire dans Ω, c'est à dire l'ensemble des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.
Définition : Soient A et B deux événements, la réunion et l'intersection de ces événements sont des événements. $A \cup B$ est réalisé si l'un au moins des événements A ou B est réalisé.
Définition : Soient A et B deux événements, la réunion et l'intersection de ces événements sont des événements. $A \cap B$ est réalisé si les événements A et B sont réalisés en même temps.

13.2 Probabilité

13.2.1 Définition

Définition : Soit $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire. Définir une loi de probabilité p sur Ω, c'est associer à chaque élément a_i de Ω un nombre positif ou nul, noté $p_i = p(\{a_i\})$, et vérifiant $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$. On appelle alors probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, la somme des probabilités des éléments de A.
Remarque : Ainsi, la probabilité d'un événement A est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires de A.

13.2.2 Propriétés

Théorème : Soit p une loi de probabilité sur Ω. Soient A et B deux événements, $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.
Théorème : Soit p une loi de probabilité sur Ω. Soient A et B deux événements, $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
Théorème : Soit p une loi de probabilité sur Ω. Soient A et B deux événements, $p(\Omega) = 1$ et $p(\varnothing) = 0$.
Théorème : Soit p une loi de probabilité sur Ω. Soient A et B deux événements, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

13.2.3 Loi des grands nombres

Remarque : Soit une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Chaque nombre $p_i = p(\{a_i\})$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, est un nombre qui modélise, pour toutes les expériences, la fréquence d'apparition f_i, de l'issue a_i. Le résultat ci-dessous nous permet de valider ou de remettre en question le choix du modèle $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\}$.
Loi faible des grands nombres : Si le modèle est bon, les fréquences f_i, calculées sur des séries de taille N, se rapprochent des p_i lorsque N devient grand.

13.3 Équiprobabilité

13.3.1 Définitions

Définition : Soit une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, il y a équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.
Théorème : Soit une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, la probabilité d'un événement élémentaire $\{a_i\}$ dans un univers Ω équiprobable vaut : $p(\{a_i\}) = \frac{1}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{1}{n}$.

13.3.2 Propriété fondamentale

Théorème : Soit Ω l'univers fini d'une expérience aléatoire équiprobable et A un événement. On a $p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.
Remarque : Ainsi sous la condition d'équiprobabilité dans un univers fini, le calcul de la probabilité d'un événement consiste en un dénombrement en premier lieu des cas possibles, puis des cas favorables.

14 Pourcentages

14.1 Coefficient multiplicateur

14.1.1 Cas général

Définition : Soient V_I la valeur initiale et V_F la valeur finale. Le coefficient multiplicateur, noté C_M, de V_I à V_F, est le nombre qui multiplié par V_I donne V_F. Ainsi $C_M = \frac{V_F}{V_I}$.
Théorème : Augmenter une quantité de $t\%$ correspond au coefficient multiplicateur $C_M = 1 + \frac{t}{100}$.
Théorème : Diminuer une quantité de $t\%$ correspond au coefficient multiplicateur $C_M = 1 - \frac{t}{100}$.
Remarque : Un coefficient multiplicateur strictement supérieur à 1 correspond à une hausse.
Remarque : Un coefficient multiplicateur strictement inférieur à 1 correspond à une baisse.

14.1.2 Taux d'évolution

Remarque : Afin de ne pas avoir à distinguer deux formules du coefficient multiplicateur C_M, suivant qu'il s'agisse d'une hausse ou d'une baisse, nous sommes amenés à définir le taux d'évolution noté τ, avec alors $C_M = 1 + \tau$. Une hausse de $t\%$ correspondant à un taux de $\frac{t}{100}$ et une baisse de $t\%$ correspondant à un taux de $-\frac{t}{100}$.
Théorème : Le taux d'évolution de V_I à V_F , ou variation relative, est donné par $\tau = \frac{V_F}{V_I} - 1 = \frac{V_F - V_I}{V_I}$.
Remarque : $V_F - V_I$ est la variation absolue, tandis que $\frac{V_F - V_I}{V_I}$ est la variation relative.

14.2 Applications

14.2.1 Évolutions successives

Théorème : Considérons trois valeurs successives V_1, V_2 et V_3, τ_1 le taux d'évolution de V_1 à V_2 et τ_2 le taux d'évolution de V_2 à V_3. Soit Υ le taux d'évolution globale, c'est à dire de V_1 à V_3. Le coefficient multiplicateur global est égal au produit des coefficients multiplicateurs des deux évolutions, ainsi $1 + \Upsilon = (1 + \tau_1) \times (1 + \tau_2)$.

14.2.2 Évolutions réciproques

Remarque : On considère deux valeurs successives V_1 et V_2 et on note τ le taux d'évolution de V_1 à V_2. On cherche le taux d'évolution Υ de V_2 à V_1 c'est-à-dire le taux d'évolution qu'il faudrait appliquer à V_2 pour retrouver la valeur initiale V_1.
Théorème : Le coefficient multiplicateur de l'évolution (réciproque) de V_2 à V_1 est l'inverse du coefficient multiplicateur de l'évolution de V_1 à V_2.