

Mathématiques 1^{ère}

Table des matières

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Le second degré | 1 |
| 1.1 | Racine d'un polynôme du second degré | 1 |
| 1.1.1 | Définitions | 1 |
| 1.1.2 | Factorisation | 1 |
| 1.1.3 | Somme et produit des racines | 1 |
| 1.2 | Équations du second degré | 1 |
| 1.2.1 | Forme canonique et discriminant | 1 |
| 1.2.2 | Résolution | 1 |
| 1.3 | Représentation graphique | 1 |
| 1.3.1 | Sommet et axe de symétrie | 1 |
| 1.3.2 | Tableau de variations | 2 |
| 1.3.3 | Application aux racines | 2 |
| 1.4 | Signe de $ax^2 + bx + c$ | 3 |
| 2 | Les fonctions dérivées | 4 |
| 2.1 | Nombre dérivé | 4 |
| 2.1.1 | Définition | 4 |
| 2.2 | Calcul de nombres dérivés | 4 |
| 2.2.1 | Fonction affine $f(x) = mx + p$ | 4 |
| 2.2.2 | Fonction carrée $f(x) = x^2$ | 4 |
| 2.2.3 | Fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ | 4 |
| 2.2.4 | Fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ | 4 |
| 2.2.5 | Fonction valeur absolue $f(x) = x $ | 4 |
| 2.3 | Fonction dérivée | 4 |
| 2.3.1 | Définitions | 4 |
| 2.3.2 | Dérivée de fonctions usuelles | 5 |
| 2.4 | Opérations | 5 |
| 2.4.1 | Somme | 5 |
| 2.4.2 | Produit | 5 |
| 2.4.3 | Quotient | 5 |
| 2.4.4 | Composition | 5 |
| 3 | Application de la dérivée | 7 |
| 3.1 | Dérivée et variation | 7 |
| 3.2 | Extremum local d'une fonction | 7 |
| 3.3 | Des polynômes du troisième degré | 7 |
| 3.3.1 | $f(x) = x^3 - ax$; où $a > 0$ | 7 |
| 3.3.2 | $f(x) = x^3 + ax$; où $a > 0$ | 7 |
| 3.3.3 | Courbes représentatives | 8 |
| 4 | Suites numériques | 9 |
| 4.1 | Notion de suites | 9 |
| 4.2 | Exemples fondamentaux de générations d'une suite | 9 |
| 4.2.1 | Mode explicite | 9 |
| 4.2.2 | Mode itératif ou récurrent | 9 |
| 4.3 | Sens de variation | 9 |
| 4.3.1 | Définitions | 9 |
| 4.3.2 | Méthodes | 9 |
| 4.4 | Suites arithmétiques | 9 |
| 4.4.1 | Généralité | 9 |
| 4.4.2 | Représentation graphique | 9 |
| 4.4.3 | Somme des termes | 9 |
| 4.5 | Suites géométriques | 9 |
| 4.5.1 | Généralités | 9 |
| 4.5.2 | Représentation graphique | 9 |
| 4.5.3 | Somme des termes | 10 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 5 | Limites de suites | 11 |
| 5.1 | Cas où la limite est infinie | 11 |
| 5.2 | Cas où la limite est finie | 11 |
| 5.3 | Limites de suites géométriques | 11 |
| 5.4 | Vocabulaire | 11 |
| 6 | Trigonométrie | 12 |
| 6.1 | Angles orientés | 12 |
| 6.1.1 | Le radian | 12 |
| 6.1.2 | Orientation | 12 |
| 6.1.3 | Point associé à un angle x | 12 |
| 6.1.4 | Angles orientés de vecteurs | 12 |
| 6.2 | Sinus et cosinus | 12 |
| 6.2.1 | Définition | 12 |
| 6.2.2 | Propriétés des fonctions sinus et cosinus | 12 |
| 6.2.2.1 | Périodicité | 12 |
| 6.2.2.2 | Parité | 12 |
| 6.2.2.3 | Variations | 13 |
| 6.2.2.4 | Courbes représentatives | 13 |
| 6.2.2.5 | Dérivées | 13 |
| 6.3 | Angles associés | 13 |
| 6.4 | Cercle trigonométrique | 14 |
| 7 | Probabilités conditionnelles | 15 |
| 7.1 | Probabilité conditionnelle | 15 |
| 7.2 | Formules des probabilités totales | 15 |
| 7.3 | Événements indépendants | 15 |
| 8 | Probabilités | 16 |
| 8.1 | Variable aléatoire réelle | 16 |
| 8.2 | Espérance | 16 |
| 8.3 | Variance et écart type | 16 |
| 9 | Fonction exponentielle | 17 |
| 9.1 | $y' = y$ et $y(0) = 1$ | 17 |
| 9.2 | Vers une nouvelle écriture | 17 |
| 9.2.1 | Propriétés fondamentales | 17 |
| 9.2.2 | Nouvelle notation | 17 |
| 9.2.3 | Étude de la fonction exponentielle | 18 |
| 9.3 | Fonctions exponentielles | 18 |
| 9.3.1 | $f(x) = e^{kx}$, avec $k \in \mathbb{R}$ fixé | 18 |
| 9.3.2 | Application aux suites géométriques | 18 |
| 9.4 | Courbe représentative | 18 |
| 10 | Produit scalaire | 19 |
| 10.1 | Expression du produit scalaire | 19 |
| 10.2 | Propriétés | 19 |
| 10.3 | Résultat fondamental | 19 |
| 10.4 | Expression dans une base orthogonale | 19 |
| 11 | Application du produit scalaire | 20 |
| 11.1 | Équations de droite | 20 |
| 11.2 | Équations de cercles | 20 |

1 Le second degré

1.1 Racine d'un polynôme du second degré

1.1.1 Définitions

Définition : Un polynôme du second degré est défini sur \mathbb{R} par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels fixés, avec $a \neq 0$.

Définition : Si $P(x_0) = 0$ alors, x_0 est racine de P .

1.1.2 Factorisation

Théorème : Si x_1 est une racine de $P(x) = ax^2 + bx + c$ alors, il existe un réel x_2 tel que $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Remarque : Un polynôme du second degré admet au plus deux racines.

1.1.3 Somme et produit des racines

Propriété : Soient x_1 et x_2 les deux racines de $P(x) = ax^2 + bx + c$ alors $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ P=x_1x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$, x_1 et x_2 sont les racines de $Q(x) = x^2 - Sx + P$.

1.2 Équations du second degré

1.2.1 Forme canonique et discriminant

Remarque :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Définition : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant.

Définition : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$ est la forme canonique de $f(x)$.

1.2.2 Résolution

Remarque : Soit $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ avec $a \neq 0$.

Définition : Si $\Delta < 0$ alors, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$.

Définition : Si $\Delta = 0$ alors, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Définition : Si $\Delta > 0$ alors, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.

Théorème : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, si $\Delta < 0$ alors, $f(x)$ n'admet aucune racine.

Théorème : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, si $\Delta = 0$ alors, $f(x)$ admet une racine double en $x_0 = -\frac{b}{2a}$ avec $f(x) = a(x - x_0)^2$.

Théorème : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, si $\Delta > 0$ alors, $f(x)$ admet deux racines distinctes en $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ avec $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

1.3 Représentation graphique

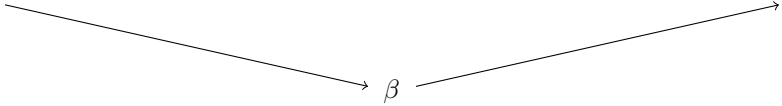
1.3.1 Sommet et axe de symétrie

Remarque : On a montré que $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$ ainsi, $f(x) = a(x - \alpha)^2 + f(\alpha)$.

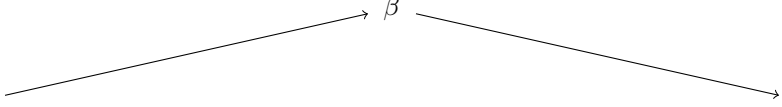
Propriété : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, la courbe représentative de f est une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$. Elle admet donc la droite d'équation $x = \alpha$ pour axe de symétrie.

1.3.2 Tableau de variations

Remarque : Si $a > 0$

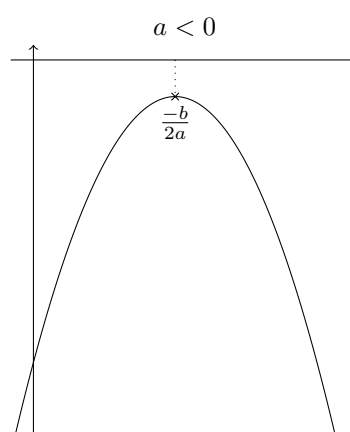
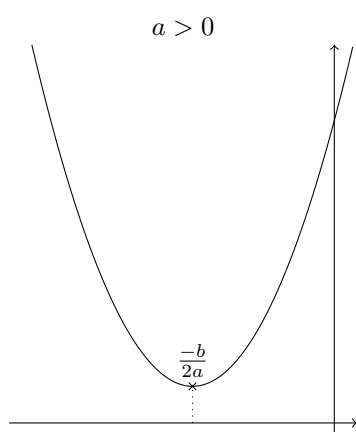
| | | | |
|-------------|--|----------|-----------|
| x | $-\infty$ | α | $+\infty$ |
| ax^2+bx+c |  | | |

Remarque : Si $a < 0$

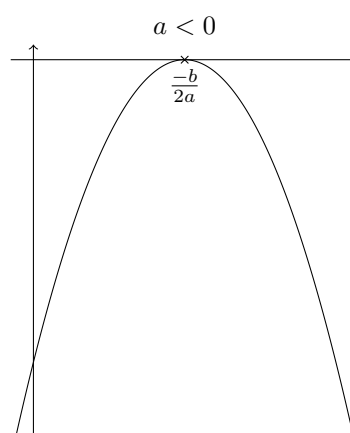
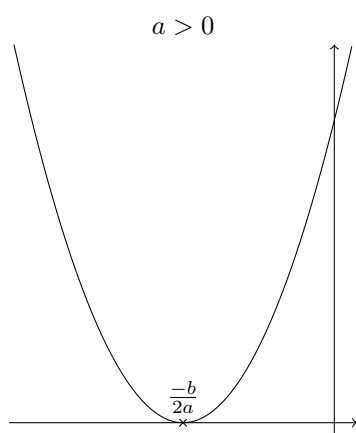
| | | | |
|-------------|--|----------|-----------|
| x | $-\infty$ | α | $+\infty$ |
| ax^2+bx+c |  | | |

1.3.3 Application aux racines

$\Delta < 0$

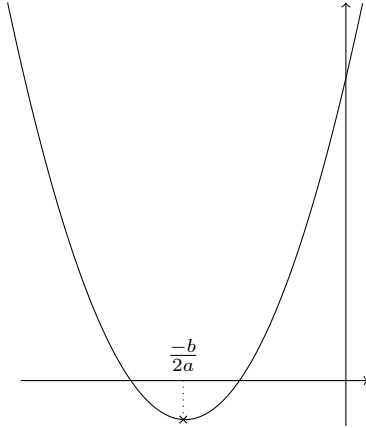


$\Delta = 0$

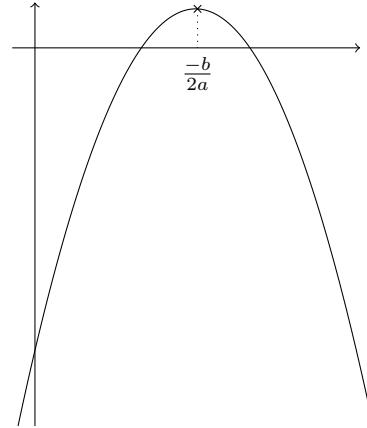


$$\Delta > 0$$

$$a > 0$$



$$a < 0$$



1.4 Signe de $ax^2 + bx + c$

Remarque : $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ avec $a \neq 0$, si $\Delta < 0$ alors $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ d'où $f(x)$ est du signe de a .

Remarque : $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ avec $a \neq 0$, si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ d'où $f(x)$ est du signe de a et s'annule en $-\frac{b}{2a}$.

Remarque : $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ avec $a \neq 0$, si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 < x_2$.

| x | $-\infty$ | x_1 | x_2 | $+\infty$ | |
|----------------------|--------------|-------|---------------|-----------|--------------|
| $x - x_1$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | |
| $x - x_2$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | |
| $(x - x_1)(x - x_2)$ | $+$ | 0 | $-$ | $+$ | |
| $ax^2 + bx + c$ | Signe de a | 0 | Signe de $-a$ | 0 | Signe de a |

Théorème : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ est du signe de a .

Théorème : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, si $\Delta = 0$ alors $f(x)$ est du signe de a sauf en α où elle s'annule.

Théorème : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, si $\Delta > 0$ alors $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur des racines.

2 Les fonctions dérivées

2.1 Nombre dérivé

2.1.1 Définition

Définition : Soit f une fonction définie sur E et $a \in E$, f est dite dérivable en a , de nombre dérivé $f'(a)$, si $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right) = f'(a)$.

Définition : La tangente en $A(a; f(a))$ à $(y = f(x))$ admet pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Définition : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente en a .

2.2 Calcul de nombres dérivés

2.2.1 Fonction affine $f(x) = mx + p$

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h} \\ &= \frac{mh}{h} \\ &= m \end{aligned}$$

$$f'(a) = m$$

2.2.2 Fonction carrée $f(x) = x^2$

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h} \\ &= \frac{2ah+h^2}{h} \\ &= 2a + h \end{aligned}$$

$$f'(a) = 2a$$

2.2.3 Fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}^*$
$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} \\ &= \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} \\ &= \frac{-1}{a(a+h)} \end{aligned}$$

$$f'(a) = -\frac{1}{a^2}$$

2.2.4 Fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}^*$
$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} \end{aligned}$$

$$f'(a) = -\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

2.2.5 Fonction valeur absolue $f(x) = |x|$

Définition : $\begin{cases} |x|=x & \text{si } x \geq 0 \\ |x|=-x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Remarque : La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

2.3 Fonction dérivée

2.3.1 Définitions

Définition : Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle admet un nombre dérivé pour tout $x \in I$.

Définition : La fonction qui à x fait correspondre le nombre dérivé en x est appelée fonction dérivée et est notée f' .

2.3.2 Dérivée de fonctions usuelles

Définition : $f(x) = mx + p$ est dérivable sur \mathbb{R} avec $f'(x) = m$.

Définition : $f(x) = x^2$ est dérivable sur \mathbb{R} avec $f'(x) = 2x$.

Définition : $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* avec $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Définition : $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* avec $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Définition : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(x) = x^n$ est dérivable sur \mathbb{R} avec $f'(x) = nx^{n-1}$.

Définition : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(x) = \frac{1}{x^n}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* avec $f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$.

2.4 Opérations

2.4.1 Somme

Théorème : Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , alors $(f + g)$ est dérivable sur I , avec $(f + g)' = f' + g'$.

2.4.2 Produit

Théorème : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I . La fonction $(u \times v)$ est dérivable sur I avec $(uv)' = u'v + uv'$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}(uv)' &= \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a+h) + u(a) \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \\ &= u'(a)v(a) + u(a)v'(a)\end{aligned}$$

Conséquence : $(kf)' = kf'$ pour k un réel fixé.

2.4.3 Quotient

Démonstration : Soit f une fonction dérivable sur I avec $f(x) \neq 0$ sur I . Soit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)}}{h} \\ &= \frac{\frac{f(a) - f(a+h)}{f(a)f(a+h)}}{h} \\ &= -\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times \frac{1}{f(a)f(a+h)}\end{aligned}$$

$$\text{Or, } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = f'(a) \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{f(a)f(a+h)} \right) = \frac{1}{(f(a))^2}.$$

$$\text{D'où } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right) = \frac{-f'(a)}{(f(a))^2}.$$

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur I avec $f(x) \neq 0$ pour tout x sur I . Alors, $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I avec $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$.

Théorème : Soient u et v deux fonctions dérivables sur I avec $v(x) \neq 0$ pour tout x dans I . La fonction $\left(\frac{u}{v}\right)$ est dérivable sur I avec $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}\left(\frac{u}{v}\right)' &= \left(u \times \frac{1}{v}\right)' \\ &= u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(\frac{1}{v}\right)' \\ &= \frac{u'}{v} + u \times \frac{-v'}{v^2} \\ &= \frac{u'v - uv'}{v^2}\end{aligned}$$

2.4.4 Composition

Théorème : Soient f et g deux fonctions dérivables, alors $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \times f'(x)$.

Conséquence : $(f(x)^n)' = n(f(x))^{n-1} \times f'(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Conséquence : $\left(\frac{1}{f(x)^n}\right)' = \frac{-n}{(f(x))^{n+1}} \times f'(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Conséquence : $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \times f'(x).$

Conséquence : $(f(ax+b))' = f'(ax+b) \times a$ pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2.$

3 Application de la dérivée

3.1 Dérivée et variation

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Si $f'(x) > 0$ sur I , sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Si $f'(x) < 0$ sur I , sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Si $f'(x) = 0$ sur I , alors f est constante sur I .

3.2 Extremum local d'une fonction

Définition : Soit f une fonction définie sur E et $a \in E$. f admet un extremum local en $x = a$ s'il existe un intervalle ouvert, centré en a tel que la restriction de f à cet intervalle admette un extremum en a .

Propriété : Soit f une fonction dérivable. Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.

Propriété : Soit f une fonction dérivable. Si f' s'annule en a , alors f admet un extremum local en a .

3.3 Des polynômes du troisième degré

3.3.1 $f(x) = x^3 - ax$; où $a > 0$


Remarque : f est définie sur \mathbb{R} avec $f'(x) = 3x^2 - a$.

$$3x^2 - a = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{a}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{a}{3}}$$


Le coefficient de x^2 étant $3 > 0$, on en déduit le signe de f' .

| | | | | | |
|----------------------|--|-----------------------|----------------------|-----------|---|
| x | $-\infty$ | $-\sqrt{\frac{a}{3}}$ | $\sqrt{\frac{a}{3}}$ | $+\infty$ | |
| Signe de $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| Variations de $f(x)$ |  | | | | |

3.3.2 $f(x) = x^3 + ax$; où $a > 0$

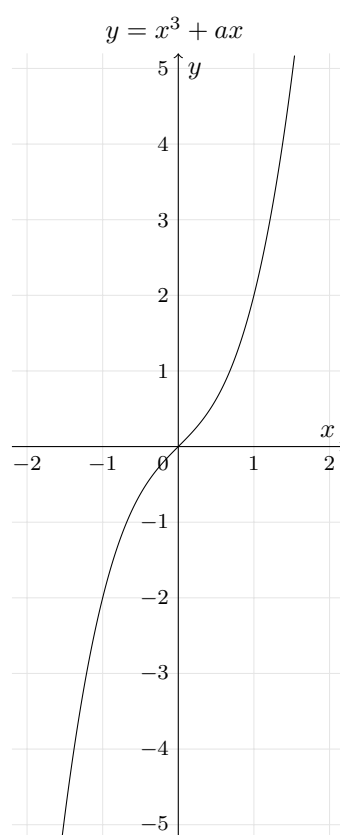
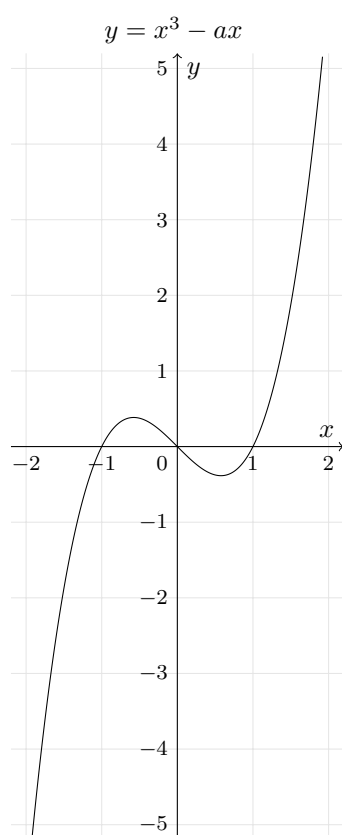
Remarque : f est définie sur \mathbb{R} avec $f'(x) = 3x^2 + a$.

$$3x^2 + a \geq a > 0$$

| | | |
|----------------------|--|-----------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| Signe de $f'(x)$ | + | |
| Variations de $f(x)$ |  | |

3.3.3 Courbes représentatives

Remarque : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$



4 Suites numériques

4.1 Notion de suites

Définition : Une suite numérique est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{R} .

Définition : Pour $n \in \mathbb{N}$, et une suite (u) , on note u_n l'image de l'entier n par la suite (u) .

4.2 Exemples fondamentaux de générations d'une suite

4.2.1 Mode explicite

Définition : La suite (u) est définie par $u_n = f(n)$.

4.2.2 Mode itératif ou récurrent

Définition : La suite (u) est définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$.

4.3 Sens de variation

4.3.1 Définitions

Définition : La suite (u_n) est dite croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.

Définition : La suite (u_n) est dite strictement croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.

Définition : La suite (u_n) est dite décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

Définition : La suite (u_n) est dite strictement décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

4.3.2 Méthodes

Méthode : Si $u_n = f(n)$, alors u_n est de même sens que $f(n)$.

Méthode : Dans les autres cas, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

4.4 Suites arithmétiques

4.4.1 Généralité

Définition : Une suite (u_n) est dite arithmétique de raison r , un réel fixé, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r si et seulement si, $u_n = u_0 + nr$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.4.2 Représentation graphique

Propriété : La représentation graphique d'une suite arithmétique est un ensemble de points alignés.

Remarque : Une suite arithmétique a un accroissement linéaire ou une évolution linéaire.

4.4.3 Somme des termes

Théorème : Soit (u_n) une suite arithmétique. $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$. C'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^n (u_k) = (n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right). \text{ D'où : } \sum_{k=m}^n (u_k) = (n-m+1)\left(\frac{u_m+u_n}{2}\right), \text{ avec } m \leq n.$$

4.5 Suites géométriques

4.5.1 Généralités

Définition : La suite (u_n) est dite géométrique de raison q , un réel fixé, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$.

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q si et seulement si, $u_n = u_0 \times q^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.5.2 Représentation graphique

Remarque : Une suite géométrique a un accroissement exponentiel ou une évolution exponentielle.

4.5.3 Somme des termes

Théorème : Soit (u_n) une suite géométrique. $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \left(\frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q} \right) = u_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$.

C'est-à-dire : $\sum_{k=0}^n (u_k) = u_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$. D'où : $\sum_{k=m}^n (u_k) = u_m \times \left(\frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} \right)$, avec $m \leq n$.

5 Limites de suites

5.1 Cas où la limite est infinie

Définition : On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle du type $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$.

Définition : On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle du type $] -\infty; A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -\infty$.

Remarque : Une suite qui admet pour limite $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante et, de même, une suite croissante n'admet pas non plus nécessairement pour limite $+\infty$.

5.2 Cas où la limite est finie

Définition : On dit que la suite (u_n) admet pour limite un réel l , si tout intervalle centré en l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l$.

5.3 Limites de suites géométriques

Théorème : Si $|q| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q^n) = 0$.

Théorème : Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q^n) = +\infty$.

5.4 Vocabulaire

Définition : Soit (u_n) une suite. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$, la suite est dite convergente.

Définition : Soit (u_n) une suite. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \pm\infty$ ou si la suite (u_n) n'admet pas de limite, la suite est dite divergente.

6 Trigonométrie

6.1 Angles orientés

6.1.1 Le radian

Définition : L'angle plat vaut π radians.

6.1.2 Orientation

Définition : Le sens inverse à celui des aiguilles d'une montre est appelé le sens trigonométrique. Le sens contraire est appelé anti-trigonométrique.

Définition : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. Le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens trigonométrique est appelé cercle trigonométrique.

6.1.3 Point associé à un angle x

Définition : Soient M un point du cercle trigonométrique et l la longueur entre l'origine du cercle et le point M . Le point M est associé à l'angle x , avec : $x = l$ si l'on parcourt le cercle dans le sens trigonométrique et $x = -l$ si l'on parcourt le cercle dans le sens anti-trigonométrique.

Définition : Un point M est associé à un réel x est aussi associé à $x + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Définition : La mesure principale d'un nombre est l'unique mesure dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

Remarque : La mesure principale correspond au chemin le plus court sur le cercle.

6.1.4 Angles orientés de vecteurs

Définition : Soit l la longueur de l'arc \widehat{AB} . $(\vec{u}, \vec{v}) = l$ si l'on parcourt le cercle dans le sens trigonométrique.

Définition : Soit l la longueur de l'arc \widehat{AB} . $(\vec{u}, \vec{v}) = -l$ si l'on parcourt le cercle dans le sens anti-trigonométrique.

6.2 Sinus et cosinus

6.2.1 Définition

Définition : soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et M le point du cercle trigonométrique associé à l'angle de mesure α , $\begin{cases} \cos(\alpha) = x_M \\ \sin(\alpha) = y_M \end{cases}$.

Propriété : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} -1 \leq \cos(x) \leq 1 \\ -1 \leq \sin(x) \leq 1 \end{cases}$.

Relation fondamentale : $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Valeurs de référence :

| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | π |
|-----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-------|
| $\cos(x)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 |
| $\sin(x)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 |

6.2.2 Propriétés des fonctions sinus et cosinus

6.2.2.1 Périodicité

Propriété : $\begin{cases} \cos(x+2k\pi) = \cos(x) \\ \sin(x+2k\pi) = \sin(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété : Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π .

6.2.2.2 Parité

Propriété : $\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

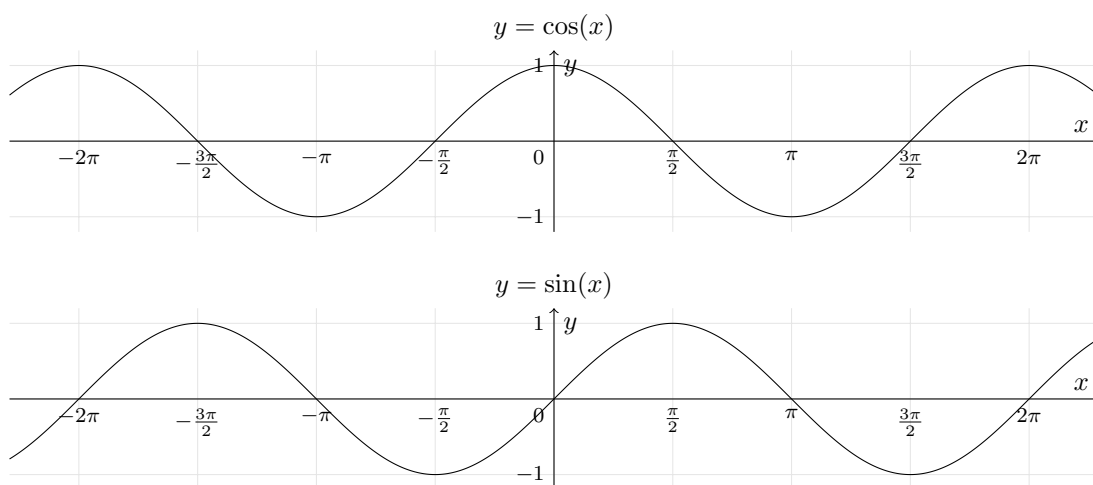
Propriété : La fonction cosinus est paire.

Propriété : La fonction sinus est impaire.

6.2.2.3 Variations

| | | | |
|-----------|---|-----------------|-------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π |
| $\cos(x)$ | 1 | 0 | -1 |
| $\sin(x)$ | 0 | 1 | 0 |

6.2.2.4 Courbes représentatives



6.2.2.5 Dérivées

Propriété : $\begin{cases} (\cos(x))' = -\sin(x) \\ (\sin(x))' = \cos(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6.3 Angles associés

Propriété : $\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété : $\begin{cases} \cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \\ \sin(x + 2k\pi) = \sin(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété : $\begin{cases} \cos(x + \pi) = -\cos(x) \\ \sin(x + \pi) = -\sin(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété : $\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) = \sin(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété : $\begin{cases} \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x) \\ \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété : $\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6.4 Cercle trigonométrique



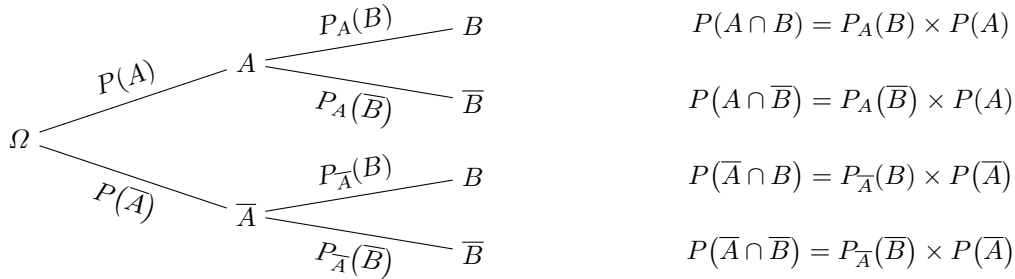
7 Probabilités conditionnelles

7.1 Probabilité conditionnelle

Définition : Soient A et B deux événements avec $P(B) \neq 0$. La probabilité que A soit réalisé sachant que B soit réalisé est $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. $P_B(A)$ se lit « P de A sachant B ».

Remarque : $P_B(A) \times P(B) = P(A \cap B) = P(B \cap A) = P_A(B) \times P(A)$.

Arbre pondéré de probabilités :



Remarque : La somme des probabilités des branches issues d'un nœud vaut 1.

Remarque : La probabilité d'un chemin est égal au produit des probabilités des branches composant ce chemin.

Remarque : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins réalisant cet événement

7.2 Formules des probabilités totales

Définition : $\{B_1, B_2, B_3, \dots, B_n\}$ est une partition de l'univers Ω si $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_n = \Omega$, noté $\bigcup_{k=1}^n (B_k) = \Omega$, et si $B_k \cap B_j = \emptyset$ pour $k \neq j$.

Théorème : Soit $\{B_1, B_2, B_3, \dots, B_n\}$ une partition de l'univers Ω et A un événement.

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n) = \sum_{k=1}^n (P(A \cap B_k)) = \sum_{k=1}^n (P_{B_k}(A) \times P(B_k))$$

7.3 Événements indépendants

Définition : Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. A et B sont dits indépendants si $P_A(B) = P(B)$.

Remarque : Soient A et B deux événements indépendants, $P_A(B) = P(B)$.

Remarque : Soient A et B deux événements indépendants, $P_B(A) = P(A)$.

Remarque : Soient A est indépendant de B si et seulement si B est indépendant de A .

Théorème : A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque : A et B sont indépendants si et seulement si \bar{A} et B sont indépendants.

Remarque : A et B sont indépendants si et seulement si A et \bar{B} sont indépendants.

Remarque : A et B sont indépendants si et seulement si \bar{A} et \bar{B} sont indépendants.

8 Probabilités

8.1 Variable aléatoire réelle

Définition : Soit une expérience aléatoire d'univers Ω . Une variable aléatoire réelle, notée X , est une application de Ω dans \mathbb{R} .

Définition : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ est l'image univers de Ω par X .

Définition : La loi de X est la probabilité définie par $p(X = x_k) = p_k$ pour $1 \leq k \leq n$.

8.2 Espérance

Définition : Soient une expérience aléatoire d'univers Ω et X une variable aléatoire réelle d'univers image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. On appelle espérance mathématiques de X le réel noté $E(X)$ défini par $E(X) = x_1p(X = x_1) + x_2p(X = x_2) + x_3p(X = x_3) + \dots + x_np(X = x_n) = \sum_{k=1}^n (x_k p(X = x_k))$.

Remarque : Le terme espérance vient du langage des jeux. Lorsque X représente le gain, $E(X)$ représente le gain moyen que peut « espérer » un joueur sur un grand nombre de parties.

Remarque : $E(X)$ est la moyenne des résultats x_k , pondérés par les valeurs p_k . Ainsi, $E(X)$ est parfois noté \bar{X} ou m .

Remarque : $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega)p(\omega))$.

8.3 Variance et écart type

Définition : Soient une expérience aléatoire d'univers Ω et X une variable aléatoire réelle d'univers image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. On appelle variance de X le réel noté $V(X)$ défini par $V(X) = p(X = x_1)(x_1 - E(X))^2 + p(X = x_2)(x_2 - E(X))^2 + \dots + p(X = x_n)(x_n - E(X))^2$
$$= \sum_{k=1}^n (p(X = x_k)(x_k - E(X))^2)$$

Remarque : La variance représente la moyenne des carrés des écarts à la moyenne $E(X)$, des résultats x_k pondérés par les valeurs p_k .

Remarque : Pour tout $1 \leq k \leq n$, $p(X = x_k) \geq 0$ et $(x_k - E(X))^2 \geq 0$ d'où $V(X) \geq 0$.

Remarque : Les valeurs $(x_k - E(X))$ sont les valeurs prises par la variable aléatoire réelle $(X - E(X))$, $E(X)$ est un nombre fixé, donc $V(X) = E((X - E(X))^2)$

Définition : Soient une expérience aléatoire d'univers Ω et X une variable aléatoire réelle d'univers image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. On appelle écart type de la variable aléatoire réelle X le réel noté $\sigma(X)$ défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

9 Fonction exponentielle

9.1 $y' = y$ et $y(0) = 1$

Lemme : Si une fonction f , dérivable sur \mathbb{R} , vérifie $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.

Démonstration :

Soit $g(x) = f(x) \times f(-x)$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \times f(-x) + f(x) \times f'(-x) \times (-1) \\ &= f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, $g(x) = k = g(0) = f(0) \times f(-0) = 1$.

Donc, $g(x) = f(x) \times f(-x) = 1$, et ainsi, $f(x) \neq 0$.

Théorème : Il existe une unique fonction, appelée exponentielle et notée \exp , solution de l'équation

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Démonstration :

On admet l'existence de solution.

Soient f et g deux fonctions vérifiant $\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} g'(x) = g(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$.

Soit $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

$$h'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2} = 0.$$

D'où $h(x) = k$.

$$\text{Or, } h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 1 = k.$$

$$\text{Ainsi, } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

9.2 Vers une nouvelle écriture

9.2.1 Propriétés fondamentales

Propriété : La fonction exponentielle est définie et dérivable sur \mathbb{R} avec $(\exp(x))' = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

Propriété : Pour tous réels x et y , $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Propriété : Pour tout réel x , $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

Propriété : Pour tous réels x et y , $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Propriété : Pour tout réel x , $\exp(x \times n) = (\exp(x))^n$.

Propriété : Pour tout réel x , $\exp\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}$.

Propriété : Pour tout réel x , $\exp(x) > 0$.

Démonstration de $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$:

Soit $f(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)}$.

$$f'(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = f(x).$$

Ainsi, $f(x) = \exp(x)$.

$$f(0) = \frac{\exp(a)}{\exp(a)} = 1.$$

D'où $\frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = \exp(x)$.

Ou encore, $\exp(a + x) = \exp(a) \times \exp(x)$.

9.2.2 Nouvelle notation

Définition : On note $\exp(1) = e$ et $\exp(x) = e^x$.

Remarque : $(e^x)' = e^x$.

Remarque : $e^{x+y} = e^x \times e^y$.

Remarque : $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

Remarque : $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$.

Remarque : $e^{nx} = (e^x)^n$.

Remarque : $e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$.

Remarque : $e^x > 0$.

9.2.3 Étude de la fonction exponentielle

Remarque : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x > 0$.

Tableau de variations :

| x | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
|-------|-----------|-----|-----|-----------|
| e^x | | | | |

Conséquences : $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Conséquences : $e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

Conséquences : $e^x > e \Leftrightarrow x > 1$.

Conséquences : $e^x < e \Leftrightarrow x < 1$.

9.3 Fonctions exponentielles

9.3.1 $f(x) = e^{kx}$, avec $k \in \mathbb{R}$ fixé

Remarque : $f'(x) = (e^{kx})' = k e^{kx}$.

Remarque : $(e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$.

9.3.2 Application aux suites géométriques

Théorème : Pour tout réel k , la suite (u_n) définie par $u_n = e^{kn}$ est une suite géométrique de raison $q = e^k$.

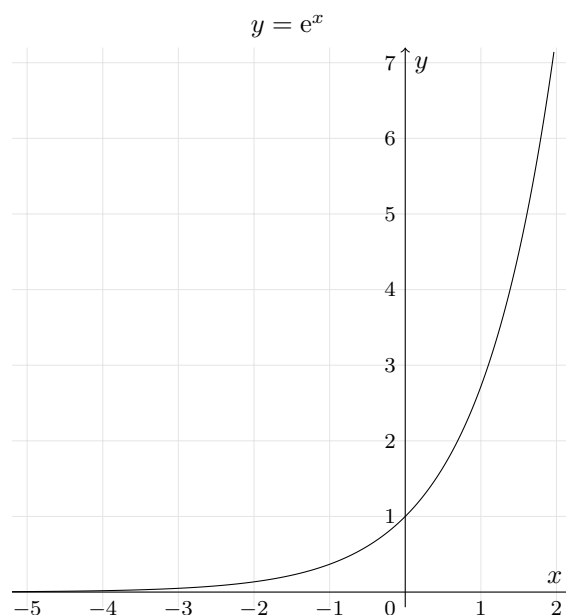
Théorème : Si $u_n = q^n \times u_0$ avec $q > 0$, alors il existe un $k \in \mathbb{R}$, tel que $q = e^k$.

Remarque : $0 < q < 1 \Leftrightarrow k < 0$.

Remarque : $q = 1 \Leftrightarrow k = 0$.

Remarque : $q > 1 \Leftrightarrow k > 0$.

9.4 Courbe représentative



10 Produit scalaire

10.1 Expression du produit scalaire

Rappel : La norme du vecteur \vec{u} est sa longueur notée $\|\vec{u}\|$.

Définition : Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Définition : Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Définition : Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriété : \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

10.2 Propriétés

Théorème : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$.

Théorème : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Théorème : $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Théorème : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

Remarque : $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \vec{u}^2 - \vec{v}^2)$.

10.3 Résultat fondamental

Remarque : Soient \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} deux vecteurs, $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et H le projeté orthogonal de C sur (AB) .

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\alpha)$.

Remarque : Soient \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} deux vecteurs, $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et H le projeté orthogonal de C sur (AB) .

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $H \in [AB]$.

Remarque : Soient \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} deux vecteurs, $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et H le projeté orthogonal de C sur (AB) .

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $H \notin [AB]$.

10.4 Expression dans une base orthogonale

Théorème : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ deux vecteurs, $\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb'$.

Conséquence : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Conséquence : $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

11 Application du produit scalaire

11.1 Équations de droite

Définition : Un vecteur \vec{n} orthogonal à \overrightarrow{AB} est dit normal à (AB) .

Théorème : Toute droite de vecteur normal $\vec{n}(\frac{a}{b}) \neq \vec{0}$ admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Théorème : Réciproquement, $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $c \in \mathbb{R}$ est l'équation d'une droite de vecteur normal $\vec{n}(\frac{a}{b})$.

Remarque : La droite (D) $ax + by + c = 0$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}(\frac{-b}{a})$ car $\vec{u} \cdot \vec{n} = -ba + ab = 0$.

11.2 Équations de cercles

Théorème : L'équation du cercle de centre $I(a; b)$ et de rayon $r \geq 0$ est $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

