

Mathématiques 1^{ère}

Table des matières

1	Le second degré	1
1.1	Racine d'un polynôme du second degré	1
1.1.1	Définitions	1
1.1.2	Factorisation	1
1.1.3	Somme et produit des racines	1
1.2	Équations du second degré	1
1.2.1	Forme canonique et discriminant	1
1.2.2	Résolution	1
1.3	Représentation graphique	1
1.3.1	Sommet et axe de symétrie	1
1.3.2	Tableau de variations	2
1.3.3	Application aux racines	2
1.4	Signe de $ax^2 + bx + c$	3
2	Les fonctions dérivées	4
2.1	Nombre dérivé	4
2.1.1	Définition	4
2.2	Calcul de nombres dérivés	4
2.2.1	Fonction affine $f(x) = mx + p$	4
2.2.2	Fonction carrée $f(x) = x^2$	4
2.2.3	Fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$	4
2.2.4	Fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$	4
2.2.5	Fonction valeur absolue $f(x) = x $	4
2.3	Fonction dérivée	4
2.3.1	Définitions	4
2.3.2	Dérivée de fonctions usuelles	5
2.4	Opérations	5
2.4.1	Somme	5
2.4.2	Produit	5
2.4.3	Quotient	5
2.4.4	Composition	5
3	Application de la dérivée	7
3.1	Dérivée et variation	7
3.2	Extremum local d'une fonction	7
3.3	Des polynômes du troisième degré	7
3.3.1	$f(x) = x^3 - ax$; où $a > 0$	7
3.3.2	$f(x) = x^3 + ax$; où $a > 0$	7
3.3.3	Courbes représentatives	8
4	Suites numériques	9
4.1	Notion de suites	9
4.2	Exemples fondamentaux de générations d'une suite	9
4.2.1	Mode explicite	9
4.2.2	Mode itératif ou récurrent	9
4.3	Sens de variation	9
4.3.1	Définitions	9
4.3.2	Méthodes	9
4.4	Suites arithmétiques	9
4.4.1	Généralité	9
4.4.2	Représentation graphique	9
4.4.3	Somme des termes	9
4.5	Suites géométriques	9
4.5.1	Généralités	9
4.5.2	Représentation graphique	9
4.5.3	Somme des termes	10

5	Limites de suites	11
5.1	Cas où la limite est infinie	11
5.2	Cas où la limite est finie	11
5.3	Limites de suites géométriques	11
5.4	Vocabulaire	11
6	Trigonométrie	12
6.1	Angles orientés	12
6.1.1	Le radian	12
6.1.2	Orientation	12
6.1.3	Point associé à un angle x	12
6.1.4	Angles orientés de vecteurs	12
6.2	Sinus et cosinus	12
6.2.1	Définition	12
6.2.2	Propriétés des fonctions sinus et cosinus	12
6.2.2.1	Périodicité	12
6.2.2.2	Parité	12
6.2.2.3	Variations	13
6.2.2.4	Courbes représentatives	13
6.2.2.5	Dérivées	13
6.3	Angles associés	13
6.4	Cercle trigonométrique	14
7	Probabilités conditionnelles	15
7.1	Probabilité conditionnelle	15
7.2	Formules des probabilités totales	15
7.3	Événements indépendants	15
8	Probabilités	16
8.1	Variable aléatoire réelle	16
8.2	Espérance	16
8.3	Variance et écart type	16
9	Fonction exponentielle	17
9.1	$y' = y$ et $y(0) = 1$	17
9.2	Vers une nouvelle écriture	17
9.2.1	Propriétés fondamentales	17
9.2.2	Nouvelle notation	17
9.2.3	Étude de la fonction exponentielle	18
9.3	Fonctions exponentielles	18
9.3.1	$f(x) = e^{kx}$, avec $k \in \mathbb{R}$ fixé	18
9.3.2	Application aux suites géométriques	18
9.4	Courbe représentative	18
10	Produit scalaire	19
10.1	Expression du produit scalaire	19
10.2	Propriétés	19
10.3	Résultat fondamental	19
10.4	Expression dans une base orthogonale	19
11	Application du produit scalaire	20
11.1	Équations de droite	20
11.2	Équations de cercles	20

1 Le second degré

1.1 Racine d'un polynôme du second degré

1.1.1 Définitions

Définition : Un polynôme du second degré est défini sur \mathbb{R} par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels fixés, avec $a \neq 0$.

Définition : Si $P(x_0) = 0$ alors, x_0 est racine de P .

1.1.2 Factorisation

Théorème : Si x_1 est une racine de $P(x) = ax^2 + bx + c$ alors, il existe un réel x_2 tel que $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Remarque : Un polynôme du second degré admet au plus deux racines.

1.1.3 Somme et produit des racines

Propriété : Soient x_1 et x_2 les deux racines de $P(x) = ax^2 + bx + c$ alors $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ P=x_1x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$, x_1 et x_2 sont les racines de $Q(x) = x^2 - Sx + P$.

1.2 Équations du second degré

1.2.1 Forme canonique et discriminant

Remarque :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Définition : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant.

Définition : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$ est la forme canonique de $f(x)$.

1.2.2 Résolution

Remarque : Soit $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ avec $a \neq 0$.

Remarque : Si $\Delta < 0$ alors, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$.

Remarque : Si $\Delta = 0$ alors, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Remarque : Si $\Delta > 0$ alors, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.

Théorème : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, si $\Delta < 0$ alors, $f(x)$ n'admet aucune racine.

Théorème : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, si $\Delta = 0$ alors, $f(x)$ admet une racine double en $x_0 = -\frac{b}{2a}$ avec $f(x) = a(x - x_0)^2$.

Théorème : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, si $\Delta > 0$ alors, $f(x)$ admet deux racines distinctes en $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ avec $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

1.3 Représentation graphique

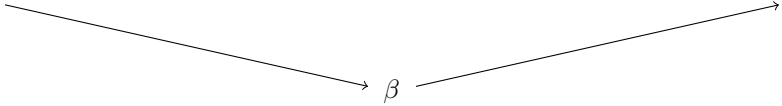
1.3.1 Sommet et axe de symétrie

Remarque : On a montré que $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$ ainsi, $f(x) = a(x - \alpha)^2 + f(\alpha)$.

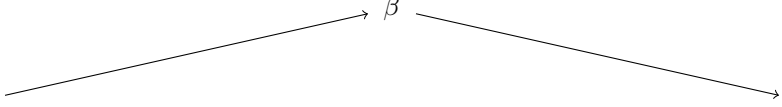
Propriété : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, la courbe représentative de f est une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$. Elle admet donc la droite d'équation $x = \alpha$ pour axe de symétrie.

1.3.2 Tableau de variations

Remarque : Si $a > 0$

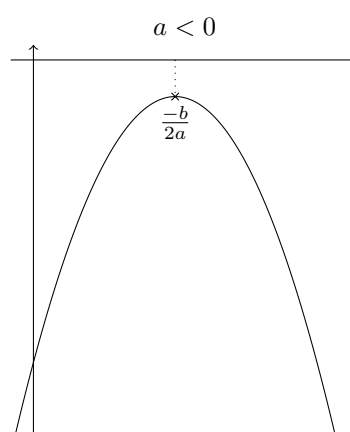
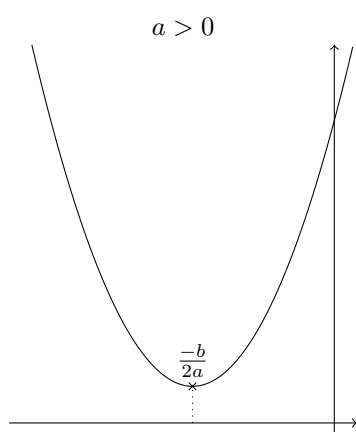
x	$-\infty$	α	$+\infty$
ax^2+bx+c			

Remarque : Si $a < 0$

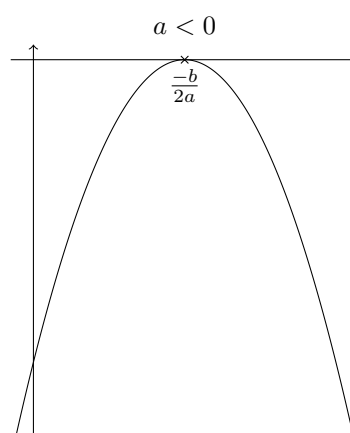
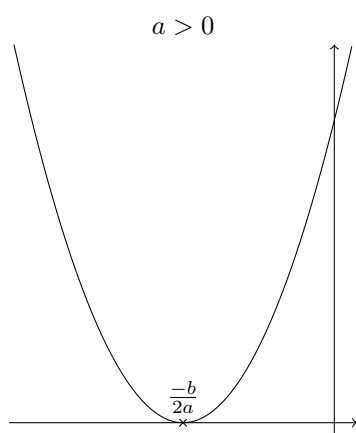
x	$-\infty$	α	$+\infty$
ax^2+bx+c			

1.3.3 Application aux racines

$\Delta < 0$

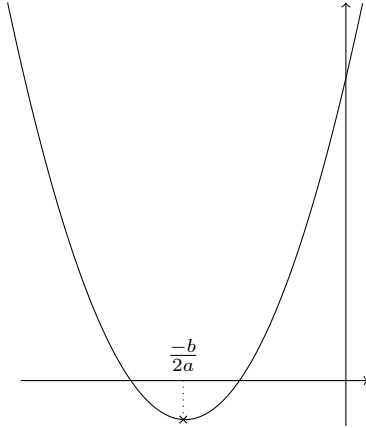


$\Delta = 0$

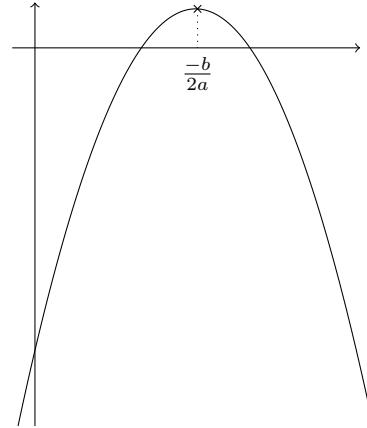


$$\Delta > 0$$

$$a > 0$$



$$a < 0$$



1.4 Signe de $ax^2 + bx + c$

Remarque : $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ avec $a \neq 0$, si $\Delta < 0$ alors $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ d'où $f(x)$ est du signe de a .

Remarque : $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ avec $a \neq 0$, si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ d'où $f(x)$ est du signe de a et s'annule en $-\frac{b}{2a}$.

Remarque : $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ avec $a \neq 0$, si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 < x_2$.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$x - x_1$	-	0	+	+	
$x - x_2$	-	-	0	+	
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	-	+	
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a

Théorème : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ est du signe de a .

Théorème : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, si $\Delta = 0$ alors $f(x)$ est du signe de a sauf en α où elle s'annule.

Théorème : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, si $\Delta > 0$ alors $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur des racines.

2 Les fonctions dérivées

2.1 Nombre dérivé

2.1.1 Définition

Définition : Soit f une fonction définie sur E et $a \in E$, f est dite dérivable en a , de nombre dérivé $f'(a)$, si $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right) = f'(a)$.

Définition : La tangente en $A(a; f(a))$ à $(y = f(x))$ admet pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Définition : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente en a .

2.2 Calcul de nombres dérivés

2.2.1 Fonction affine $f(x) = mx + p$

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h} \\ &= \frac{mh}{h} \\ &= m \end{aligned}$$

$$f'(a) = m$$

2.2.2 Fonction carrée $f(x) = x^2$

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h} \\ &= \frac{2ah+h^2}{h} \\ &= 2a + h \end{aligned}$$

$$f'(a) = 2a$$

2.2.3 Fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}^*$
$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} \\ &= \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} \\ &= \frac{-1}{a(a+h)} \end{aligned}$$

$$f'(a) = -\frac{1}{a^2}$$

2.2.4 Fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}^*$
$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} \end{aligned}$$

$$f'(a) = -\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

2.2.5 Fonction valeur absolue $f(x) = |x|$

Définition : $\begin{cases} |x|=x & \text{si } x \geq 0 \\ |x|=-x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Remarque : La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

2.3 Fonction dérivée

2.3.1 Définitions

Définition : Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle admet un nombre dérivé pour tout $x \in I$.

Définition : La fonction qui à x fait correspondre le nombre dérivé en x est appelée fonction dérivée et est notée f' .

2.3.2 Dérivée de fonctions usuelles

Définition : $f(x) = mx + p$ est dérivable sur \mathbb{R} avec $f'(x) = m$.

Définition : $f(x) = x^2$ est dérivable sur \mathbb{R} avec $f'(x) = 2x$.

Définition : $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* avec $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Définition : $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* avec $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Définition : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(x) = x^n$ est dérivable sur \mathbb{R} avec $f'(x) = nx^{n-1}$.

Définition : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(x) = \frac{1}{x^n}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* avec $f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$.

2.4 Opérations

2.4.1 Somme

Théorème : Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , alors $(f + g)$ est dérivable sur I , avec $(f + g)' = f' + g'$.

2.4.2 Produit

Théorème : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I . La fonction $(u \times v)$ est dérivable sur I avec $(uv)' = u'v + uv'$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}(uv)' &= \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a+h) + u(a) \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \\ &= u'(a)v(a) + u(a)v'(a)\end{aligned}$$

Conséquence : $(kf)' = kf'$ pour k un réel fixé.

2.4.3 Quotient

Démonstration : Soit f une fonction dérivable sur I avec $f(x) \neq 0$ sur I . Soit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)}}{h} \\ &= \frac{f(a) - f(a+h)}{hf(a)f(a+h)} \\ &= -\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times \frac{1}{f(a)f(a+h)}\end{aligned}$$

$$\text{Or, } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = f'(a) \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{f(a)f(a+h)} \right) = \frac{1}{(f(a))^2}.$$

$$\text{D'où } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right) = \frac{-f'(a)}{(f(a))^2}.$$

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur I avec $f(x) \neq 0$ pour tout x sur I . Alors, $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I avec $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$.

Théorème : Soient u et v deux fonctions dérivables sur I avec $v(x) \neq 0$ pour tout x dans I . La fonction $\left(\frac{u}{v}\right)$ est dérivable sur I avec $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}\left(\frac{u}{v}\right)' &= \left(u \times \frac{1}{v}\right)' \\ &= u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(\frac{1}{v}\right)' \\ &= \frac{u'}{v} + u \times \frac{-v'}{v^2} \\ &= \frac{u'v - uv'}{v^2}\end{aligned}$$

2.4.4 Composition

Théorème : Soient f et g deux fonctions dérivables, alors $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \times f'(x)$.

Conséquence : $(f(x)^n)' = n(f(x))^{n-1} \times f'(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Conséquence : $\left(\frac{1}{f(x)^n}\right)' = \frac{-n}{(f(x))^{n+1}} \times f'(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Conséquence : $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \times f'(x).$

Conséquence : $(f(ax+b))' = f'(ax+b) \times a$ pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2.$

3 Application de la dérivée

3.1 Dérivée et variation

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Si $f'(x) > 0$ sur I , sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Si $f'(x) < 0$ sur I , sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Si $f'(x) = 0$ sur I , alors f est constante sur I .

3.2 Extremum local d'une fonction

Définition : Soit f une fonction définie sur E et $a \in E$. f admet un extremum local en $x = a$ s'il existe un intervalle ouvert, centré en a tel que la restriction de f à cet intervalle admette un extremum en a .

Propriété : Soit f une fonction dérivable. Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.

Propriété : Soit f une fonction dérivable. Si f' s'annule en a , alors f admet un extremum local en a .

3.3 Des polynômes du troisième degré

3.3.1 $f(x) = x^3 - ax$; où $a > 0$


Remarque : f est définie sur \mathbb{R} avec $f'(x) = 3x^2 - a$.

$$3x^2 - a = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{a}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{a}{3}}$$


Le coefficient de x^2 étant $3 > 0$, on en déduit le signe de f' .

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+
Variations de $f(x)$					

3.3.2 $f(x) = x^3 + ax$; où $a > 0$

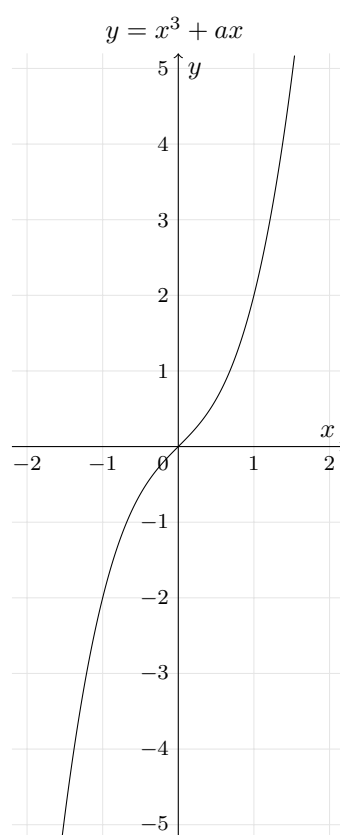
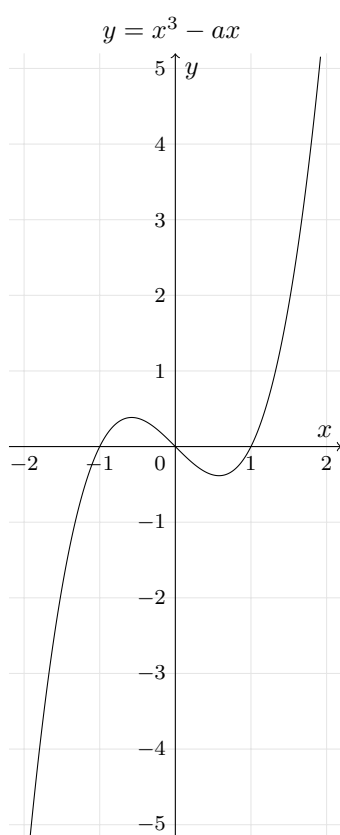
Remarque : f est définie sur \mathbb{R} avec $f'(x) = 3x^2 + a$.

$$3x^2 + a \geq a > 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de $f(x)$		

3.3.3 Courbes représentatives

Remarque : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$



4 Suites numériques

4.1 Notion de suites

Définition : Une suite numérique est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{R} .

Définition : Pour $n \in \mathbb{N}$, et une suite (u) , on note u_n l'image de l'entier n par la suite (u) .

4.2 Exemples fondamentaux de générations d'une suite

4.2.1 Mode explicite

Définition : La suite (u) est définie par $u_n = f(n)$.

4.2.2 Mode itératif ou récurrent

Définition : La suite (u) est définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$.

4.3 Sens de variation

4.3.1 Définitions

Définition : La suite (u_n) est dite croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.

Définition : La suite (u_n) est dite strictement croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.

Définition : La suite (u_n) est dite décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

Définition : La suite (u_n) est dite strictement décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

4.3.2 Méthodes

Méthode : Si $u_n = f(n)$, alors u_n est de même sens que $f(n)$.

Méthode : Dans les autres cas, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

4.4 Suites arithmétiques

4.4.1 Généralité

Définition : Une suite (u_n) est dite arithmétique de raison r , un réel fixé, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r si et seulement si, $u_n = u_0 + nr$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.4.2 Représentation graphique

Propriété : La représentation graphique d'une suite arithmétique est un ensemble de points alignés.

Remarque : Une suite arithmétique a un accroissement linéaire ou une évolution linéaire.

4.4.3 Somme des termes

Théorème : Soit (u_n) une suite arithmétique. $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$. C'est-à-dire :
$$\sum_{k=0}^n (u_k) = (n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$
. D'où : $\sum_{k=m}^n (u_k) = (n-m+1)\left(\frac{u_m+u_n}{2}\right)$, avec $m \leq n$.

4.5 Suites géométriques

4.5.1 Généralités

Définition : La suite (u_n) est dite géométrique de raison q , un réel fixé, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$.

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q si et seulement si, $u_n = u_0 \times q^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.5.2 Représentation graphique

Remarque : Une suite géométrique a un accroissement exponentiel ou une évolution exponentielle.

4.5.3 Somme des termes

Théorème : Soit (u_n) une suite géométrique. $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \left(\frac{u_0 - u_{n+1}}{1 - q} \right) = u_0 \times \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$.

C'est-à-dire : $\sum_{k=0}^n (u_k) = u_0 \times \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$. D'où : $\sum_{k=m}^n (u_k) = u_m \times \left(\frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q} \right)$, avec $m \leq n$.

5 Limites de suites

5.1 Cas où la limite est infinie

Définition : On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle du type $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$.

Définition : On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle du type $] -\infty; A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -\infty$.

Remarque : Une suite qui admet pour limite $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante et, de même, une suite croissante n'admet pas non plus nécessairement pour limite $+\infty$.

5.2 Cas où la limite est finie

Définition : On dit que la suite (u_n) admet pour limite un réel ℓ , si tout intervalle centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$.

5.3 Limites de suites géométriques

Théorème : Si $|q| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q^n) = 0$.

Théorème : Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q^n) = +\infty$.

5.4 Vocabulaire

Définition : Soit (u_n) une suite. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, la suite est dite convergente.

Définition : Soit (u_n) une suite. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \pm\infty$ ou si la suite (u_n) n'admet pas de limite, la suite est dite divergente.

6 Trigonométrie

6.1 Angles orientés

6.1.1 Le radian

Définition : L'angle plat vaut π radians.

6.1.2 Orientation

Définition : Le sens inverse à celui des aiguilles d'une montre est appelé le sens trigonométrique. Le sens contraire est appelé anti-trigonométrique.

Définition : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. Le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens trigonométrique est appelé cercle trigonométrique.

6.1.3 Point associé à un angle x

Définition : Soient M un point du cercle trigonométrique et ℓ la longueur entre l'origine du cercle et le point M . Le point M est associé à l'angle x , avec : $x = \ell$ si l'on parcourt le cercle dans le sens trigonométrique et $x = -\ell$ si l'on parcourt le cercle dans le sens anti-trigonométrique.

Définition : Un point M est associé à un réel x est aussi associé à $x + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Définition : La mesure principale d'un nombre est l'unique mesure dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

Remarque : La mesure principale correspond au chemin le plus court sur le cercle.

6.1.4 Angles orientés de vecteurs

Définition : Soit ℓ la longueur de l'arc \widehat{AB} . $(\vec{u}, \vec{v}) = \ell$ si l'on parcourt le cercle dans le sens trigonométrique.

Définition : Soit ℓ la longueur de l'arc \widehat{AB} . $(\vec{u}, \vec{v}) = -\ell$ si l'on parcourt le cercle dans le sens anti-trigonométrique.

6.2 Sinus et cosinus

6.2.1 Définition

Définition : soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et M le point du cercle trigonométrique associé à l'angle de mesure α , $\begin{cases} \cos(\alpha) = x_M \\ \sin(\alpha) = y_M \end{cases}$.

Propriété : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} -1 \leq \cos(x) \leq 1 \\ -1 \leq \sin(x) \leq 1 \end{cases}$.

Relation fondamentale : $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Valeurs de référence :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

6.2.2 Propriétés des fonctions sinus et cosinus

6.2.2.1 Périodicité

Propriété : $\begin{cases} \cos(x+2k\pi) = \cos(x) \\ \sin(x+2k\pi) = \sin(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété : Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π .

6.2.2.2 Parité

Propriété : $\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

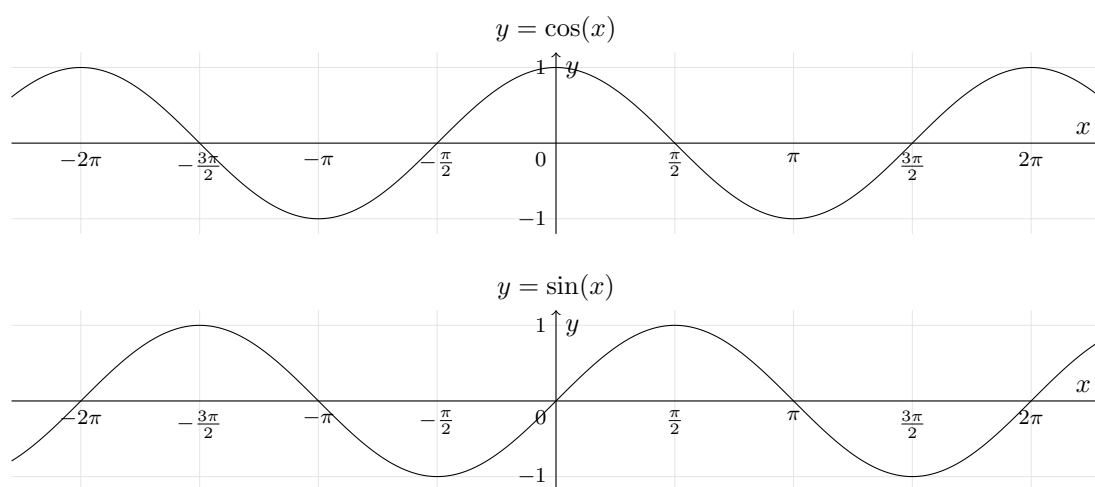
Propriété : La fonction cosinus est paire.

Propriété : La fonction sinus est impaire.

6.2.2.3 Variations

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	0	-1
$\sin(x)$	0	1	0

6.2.2.4 Courbes représentatives



6.2.2.5 Dérivées

Propriété : $\begin{cases} (\cos(x))' = -\sin(x) \\ (\sin(x))' = \cos(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6.3 Angles associés

Propriété : $\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété : $\begin{cases} \cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \\ \sin(x + 2k\pi) = \sin(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété : $\begin{cases} \cos(x + \pi) = -\cos(x) \\ \sin(x + \pi) = -\sin(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété : $\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) = \sin(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété : $\begin{cases} \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x) \\ \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété : $\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x) \end{cases}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6.4 Cercle trigonométrique



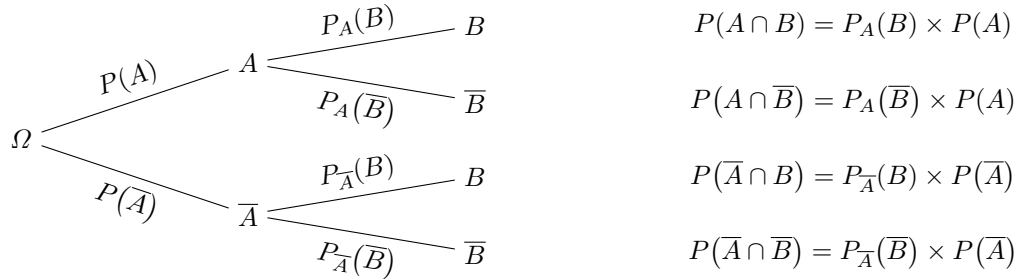
7 Probabilités conditionnelles

7.1 Probabilité conditionnelle

Définition : Soient A et B deux événements avec $P(B) \neq 0$. La probabilité que A soit réalisé sachant que B soit réalisé est $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. $P_B(A)$ se lit « P de A sachant B ».

Remarque : $P_B(A) \times P(B) = P(A \cap B) = P(B \cap A) = P_A(B) \times P(A)$.

Arbre pondéré de probabilités :



Remarque : La somme des probabilités des branches issues d'un nœud vaut 1.

Remarque : La probabilité d'un chemin est égal au produit des probabilités des branches composant ce chemin.

Remarque : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins réalisant cet événement

7.2 Formules des probabilités totales

Définition : $\{B_1, B_2, B_3, \dots, B_n\}$ est une partition de l'univers Ω si $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_n = \Omega$, noté $\bigcup_{k=1}^n (B_k) = \Omega$, et si $B_k \cap B_j = \emptyset$ pour $k \neq j$.

Théorème : Soit $\{B_1, B_2, B_3, \dots, B_n\}$ une partition de l'univers Ω et A un événement.

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n) = \sum_{k=1}^n (P(A \cap B_k)) = \sum_{k=1}^n (P_{B_k}(A) \times P(B_k))$$

7.3 Événements indépendants

Définition : Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. A et B sont dits indépendants si $P_A(B) = P(B)$.

Remarque : Soient A et B deux événements indépendants, $P_A(B) = P(B)$.

Remarque : Soient A et B deux événements indépendants, $P_B(A) = P(A)$.

Remarque : A et B sont indépendants si et seulement si B et A sont indépendants.

Théorème : A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque : A et B sont indépendants si et seulement si \bar{A} et B sont indépendants.

Remarque : A et B sont indépendants si et seulement si A et \bar{B} sont indépendants.

Remarque : A et B sont indépendants si et seulement si \bar{A} et \bar{B} sont indépendants.

8 Probabilités

8.1 Variable aléatoire réelle

Définition : Soit une expérience aléatoire d'univers Ω . Une variable aléatoire réelle, notée X , est une application de Ω dans \mathbb{R} .

Définition : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ est l'image univers de Ω par X .

Définition : La loi de X est la probabilité définie par $p(X = x_k) = p_k$ pour $1 \leq k \leq n$.

8.2 Espérance

Définition : Soient une expérience aléatoire d'univers Ω et X une variable aléatoire réelle d'univers image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. On appelle espérance mathématiques de X le réel noté $E(X)$ défini par $E(X) = x_1p(X = x_1) + x_2p(X = x_2) + x_3p(X = x_3) + \dots + x_np(X = x_n) = \sum_{k=1}^n (x_k p(X = x_k))$.

Remarque : Le terme espérance vient du langage des jeux. Lorsque X représente le gain, $E(X)$ représente le gain moyen que peut « espérer » un joueur sur un grand nombre de parties.

Remarque : $E(X)$ est la moyenne des résultats x_k , pondérés par les valeurs p_k . Ainsi, $E(X)$ est parfois noté \bar{X} ou m .

Remarque : $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega)p(\omega))$.

8.3 Variance et écart type

Définition : Soient une expérience aléatoire d'univers Ω et X une variable aléatoire réelle d'univers image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. On appelle variance de X le réel noté $V(X)$ défini par $V(X) = p(X = x_1)(x_1 - E(X))^2 + p(X = x_2)(x_2 - E(X))^2 + \dots + p(X = x_n)(x_n - E(X))^2$
$$= \sum_{k=1}^n \left(p(X = x_k)(x_k - E(X))^2 \right)$$

Remarque : La variance représente la moyenne des carrés des écarts à la moyenne $E(X)$, des résultats x_k pondérés par les valeurs p_k .

Remarque : Pour tout $1 \leq k \leq n$, $p(X = x_k) \geq 0$ et $(x_k - E(X))^2 \geq 0$ d'où $V(X) \geq 0$.

Remarque : Les valeurs $(x_k - E(X))$ sont les valeurs prises par la variable aléatoire réelle $(X - E(X))$, $E(X)$ est un nombre fixé, donc $V(X) = E((X - E(X))^2)$

Définition : Soient une expérience aléatoire d'univers Ω et X une variable aléatoire réelle d'univers image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. On appelle écart type de la variable aléatoire réelle X le réel noté $\sigma(X)$ défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

9 Fonction exponentielle

9.1 $y' = y$ et $y(0) = 1$

Lemme : Si une fonction f , dérivable sur \mathbb{R} , vérifie $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.

Démonstration :

Soit $g(x) = f(x) \times f(-x)$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \times f(-x) + f(x) \times f'(-x) \times (-1) \\ &= f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, $g(x) = k = g(0) = f(0) \times f(-0) = 1$.

Donc, $g(x) = f(x) \times f(-x) = 1$, et ainsi, $f(x) \neq 0$.

Théorème : Il existe une unique fonction, appelée exponentielle et notée \exp , solution de l'équation

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Démonstration :

On admet l'existence de solution.

Soient f et g deux fonctions vérifiant $\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} g'(x) = g(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$.

Soit $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

$$h'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2} = 0.$$

D'où $h(x) = k$.

$$\text{Or, } h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 1 = k.$$

$$\text{Ainsi, } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

9.2 Vers une nouvelle écriture

9.2.1 Propriétés fondamentales

Propriété : La fonction exponentielle est définie et dérivable sur \mathbb{R} avec $(\exp(x))' = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

Propriété : Pour tous réels x et y , $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Propriété : Pour tout réel x , $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

Propriété : Pour tous réels x et y , $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Propriété : Pour tout réel x , $\exp(x \times n) = (\exp(x))^n$.

Propriété : Pour tout réel x , $\exp\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}$.

Propriété : Pour tout réel x , $\exp(x) > 0$.

Démonstration de $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$:

Soit $f(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)}$.

$$f'(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = f(x).$$

Ainsi, $f(x) = \exp(x)$.

$$f(0) = \frac{\exp(a)}{\exp(a)} = 1.$$

D'où $\frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = \exp(x)$.

Où encore, $\exp(a + x) = \exp(a) \times \exp(x)$.

9.2.2 Nouvelle notation

Définition : On note $\exp(1) = e$ et $\exp(x) = e^x$.

Remarque : $(e^x)' = e^x$.

Remarque : $e^{x+y} = e^x \times e^y$.

Remarque : $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

Remarque : $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$.

Remarque : $e^{nx} = (e^x)^n$.

Remarque : $e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$.

Remarque : $e^x > 0$.

9.2.3 Étude de la fonction exponentielle

Remarque : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x > 0$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x				

Conséquence : $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Conséquence : $e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

Conséquence : $e^x > e \Leftrightarrow x > 1$.

Conséquence : $e^x < e \Leftrightarrow x < 1$.

9.3 Fonctions exponentielles

9.3.1 $f(x) = e^{kx}$, avec $k \in \mathbb{R}$ fixé

Remarque : $f'(x) = (e^{kx})' = ke^{kx}$.

Remarque : $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$.

9.3.2 Application aux suites géométriques

Théorème : Pour tout réel k , la suite (u_n) définie par $u_n = e^{kn}$ est une suite géométrique de raison $q = e^k$.

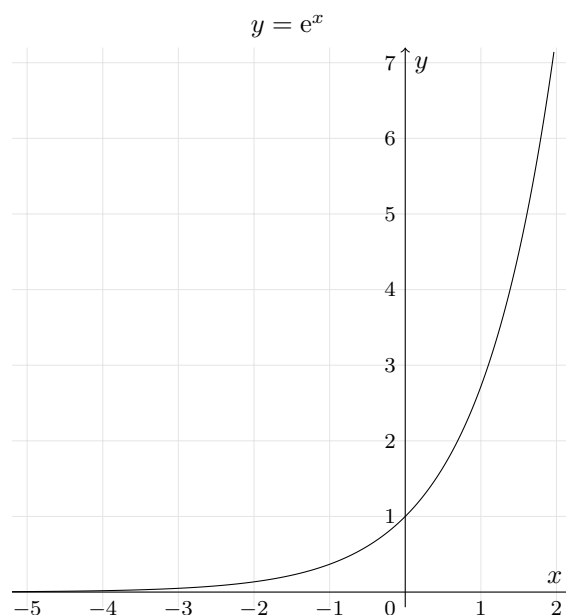
Théorème : Si $u_n = q^n \times u_0$ avec $q > 0$, alors il existe un $k \in \mathbb{R}$, tel que $q = e^k$.

Remarque : $0 < q < 1 \Leftrightarrow k < 0$.

Remarque : $q = 1 \Leftrightarrow k = 0$.

Remarque : $q > 1 \Leftrightarrow k > 0$.

9.4 Courbe représentative



10 Produit scalaire

10.1 Expression du produit scalaire

Rappel : La norme du vecteur \vec{u} est sa longueur notée $\|\vec{u}\|$.

Définition : Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Définition : Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Définition : Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriété : \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

10.2 Propriétés

Théorème : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$.

Théorème : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Théorème : $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Théorème : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

Remarque : $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \vec{u}^2 - \vec{v}^2)$.

10.3 Résultat fondamental

Remarque : Soient \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} deux vecteurs, $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et H le projeté orthogonal de C sur (AB) .

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\alpha)$.

Remarque : Soient \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} deux vecteurs, $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et H le projeté orthogonal de C sur (AB) .

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $H \in [AB]$.

Remarque : Soient \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} deux vecteurs, $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et H le projeté orthogonal de C sur (AB) .

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $H \notin [AB]$.

10.4 Expression dans une base orthogonale

Théorème : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ deux vecteurs, $\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb'$.

Conséquence : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Conséquence : $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

11 Application du produit scalaire

11.1 Équations de droite

Définition : Un vecteur \vec{n} orthogonal à \overrightarrow{AB} est dit normal à (AB) .

Théorème : Toute droite de vecteur normal $\vec{n}(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}) \neq \vec{0}$ admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Théorème : Réciproquement, $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $c \in \mathbb{R}$ est l'équation d'une droite de vecteur normal $\vec{n}(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix})$.

Remarque : La droite (D) $ax + by + c = 0$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}(\begin{smallmatrix} -b \\ a \end{smallmatrix})$ car $\vec{u} \cdot \vec{n} = -ba + ab = 0$.

11.2 Équations de cercles

Théorème : L'équation du cercle de centre $I(a; b)$ et de rayon $r \geq 0$ est $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

