

Mathématiques 1<sup>ère</sup>





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Le second degré</b>	<b>1</b>
1.1	Racine d'un polynôme du second degré . . . . .	1
1.1.1	Définitions . . . . .	1
1.1.2	Factorisation . . . . .	1
1.1.3	Somme et produit des racines . . . . .	1
1.2	Équations du second degré . . . . .	1
1.2.1	Forme canonique et discriminant . . . . .	1
1.2.2	Résolution . . . . .	1
1.3	Représentation graphique . . . . .	1
1.3.1	Sommet et axe de symétrie . . . . .	1
1.3.2	Tableau de variations . . . . .	2
1.3.3	Application aux racines . . . . .	2
1.4	Signe de $ax^2 + bx + c$ . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Les fonctions dérivées</b>	<b>4</b>
2.1	Nombre dérivé . . . . .	4
2.1.1	Définition . . . . .	4
2.2	Calcul de nombres dérivés . . . . .	4
2.2.1	Fonction affine $f(x) = mx + p$ . . . . .	4
2.2.2	Fonction carrée $f(x) = x^2$ . . . . .	4
2.2.3	Fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ . . . . .	4
2.2.4	Fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ . . . . .	4
2.2.5	Fonction valeur absolue $f(x) =  x $ . . . . .	4
2.3	Fonction dérivée . . . . .	4
2.3.1	Définitions . . . . .	4
2.3.2	Dérivée de fonctions usuelles . . . . .	5
2.4	Opérations . . . . .	5
2.4.1	Somme . . . . .	5
2.4.2	Produit . . . . .	5
2.4.3	Quotient . . . . .	5
2.4.4	Composition . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Application de la dérivée</b>	<b>7</b>
3.1	Dérivée et variation . . . . .	7
3.2	Extremum local d'une fonction . . . . .	7
3.3	Des polynômes du troisième degré . . . . .	7
3.3.1	$f(x) = x^3 - ax$ ; où $a > 0$ . . . . .	7
3.3.2	$f(x) = x^3 + ax$ ; où $a > 0$ . . . . .	7
3.3.3	Courbes représentatives . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Suites numériques</b>	<b>9</b>
4.1	Notion de suites . . . . .	9
4.2	Exemples fondamentaux de générations d'une suite . . . . .	9
4.2.1	Mode explicite . . . . .	9
4.2.2	Mode itératif ou récurrent . . . . .	9
4.3	Sens de variation . . . . .	9
4.3.1	Définitions . . . . .	9
4.3.2	Méthodes . . . . .	9
4.4	Suites arithmétiques . . . . .	9
4.4.1	Généralité . . . . .	9
4.4.2	Représentation graphique . . . . .	9
4.4.3	Somme des termes . . . . .	9
4.5	Suites géométriques . . . . .	9
4.5.1	Généralités . . . . .	9
4.5.2	Représentation graphique . . . . .	9
4.5.3	Somme des termes . . . . .	10

<b>5</b>	<b>Limites de suites</b>	<b>11</b>
5.1	Cas où la limite est infinie . . . . .	11
5.2	Cas où la limite est finie . . . . .	11
5.3	Limites de suites géométriques . . . . .	11
5.4	Vocabulaire . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Trigonométrie</b>	<b>12</b>
6.1	Angles orientés . . . . .	12
6.1.1	Le radian . . . . .	12
6.1.2	Orientation . . . . .	12
6.1.3	Point associé à un angle $x$ . . . . .	12
6.1.4	Angles orientés de vecteurs . . . . .	12
6.2	Sinus et cosinus . . . . .	12
6.2.1	Définition . . . . .	12
6.2.2	Propriétés des fonctions sinus et cosinus . . . . .	12
6.2.2.1	Périodicité . . . . .	12
6.2.2.2	Parité . . . . .	12
6.2.2.3	Variations . . . . .	13
6.2.2.4	Courbes représentatives . . . . .	13
6.2.2.5	Dérivées . . . . .	13
6.3	Angles associés . . . . .	13
6.4	Cercle trigonométrique . . . . .	14
<b>7</b>	<b>Probabilités conditionnelles</b>	<b>15</b>
7.1	Probabilité conditionnelle . . . . .	15
7.2	Formules des probabilités totales . . . . .	15
7.3	Événements indépendants . . . . .	15
<b>8</b>	<b>Probabilités</b>	<b>16</b>
8.1	Variable aléatoire réelle . . . . .	16
8.2	Espérance . . . . .	16
8.3	Variance et écart type . . . . .	16
<b>9</b>	<b>Fonction exponentielle</b>	<b>17</b>
9.1	$y' = y$ et $y(0) = 1$ . . . . .	17
9.2	Vers une nouvelle écriture . . . . .	17
9.2.1	Propriétés fondamentales . . . . .	17
9.2.2	Nouvelle notation . . . . .	17
9.2.3	Étude de la fonction exponentielle . . . . .	18
9.3	Fonctions exponentielles . . . . .	18
9.3.1	$f(x) = e^{kx}$ , avec $k \in \mathbb{R}$ fixé . . . . .	18
9.3.2	Application aux suites géométriques . . . . .	18
9.4	Courbe représentative . . . . .	18
<b>10</b>	<b>Produit scalaire</b>	<b>19</b>
10.1	Expression du produit scalaire . . . . .	19
10.2	Propriétés . . . . .	19
10.3	Résultat fondamental . . . . .	19
10.4	Expression dans une base orthogonale . . . . .	19
<b>11</b>	<b>Application du produit scalaire</b>	<b>20</b>
11.1	Équations de droite . . . . .	20
11.2	Équations de cercles . . . . .	20









# 1 Le second degré

## 1.1 Racine d'un polynôme du second degré

### 1.1.1 Définitions

**Définition :** Un polynôme du second degré est défini sur  $\mathbb{R}$  par :  $P(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a, b$  et  $c$  sont des réels fixés, avec  $a \neq 0$ .

**Définition :** Si  $P(x_0) = 0$  alors,  $x_0$  est racine de  $P$ .

### 1.1.2 Factorisation

**Théorème :** Si  $x_1$  est une racine de  $P(x) = ax^2 + bx + c$  alors, il existe un réel  $x_2$  tel que  $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ .

**Remarque :** Un polynôme du second degré admet au plus deux racines.

### 1.1.3 Somme et produit des racines

**Propriété :** Soient  $x_1$  et  $x_2$  les deux racines de  $P(x) = ax^2 + bx + c$  alors  $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ P=x_1x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$ ,  $x_1$  et  $x_2$  sont les racines de  $Q(x) = x^2 - Sx + P$ .

## 1.2 Équations du second degré

### 1.2.1 Forme canonique et discriminant

**Remarque :**

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

**Définition :** Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$ ,  $\Delta = b^2 - 4ac$  est le discriminant.

**Définition :** Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$ ,  $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - \alpha)^2 + \beta$  avec  $\alpha = -\frac{b}{2a}$  et  $\beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$  est la forme canonique de  $f(x)$ .

### 1.2.2 Résolution

**Remarque :** Soit  $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$  avec  $a \neq 0$ .

**Définition :** Si  $\Delta < 0$  alors,  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ .

**Définition :** Si  $\Delta = 0$  alors,  $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ .

**Définition :** Si  $\Delta > 0$  alors,  $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ .

**Théorème :** Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$ , si  $\Delta < 0$  alors,  $f(x)$  n'admet aucune racine.

**Théorème :** Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$ , si  $\Delta = 0$  alors,  $f(x)$  admet une racine double en  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  avec  $f(x) = a(x - x_0)^2$ .

**Théorème :** Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$ , si  $\Delta > 0$  alors,  $f(x)$  admet deux racines distinctes en  $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$  avec  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ .

## 1.3 Représentation graphique

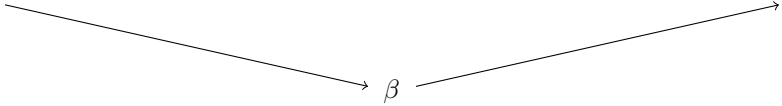
### 1.3.1 Sommet et axe de symétrie

**Remarque :** On a montré que  $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$  ainsi,  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + f(\alpha)$ .

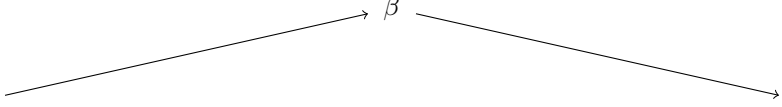
**Propriété :** Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$ , la courbe représentative de  $f$  est une parabole de sommet  $S(\alpha; \beta)$ . Elle admet donc la droite d'équation  $x = \alpha$  pour axe de symétrie.

### 1.3.2 Tableau de variations

Remarque : Si  $a > 0$

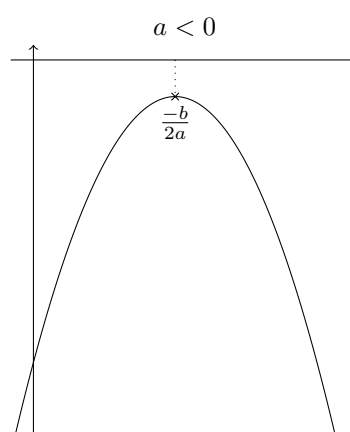
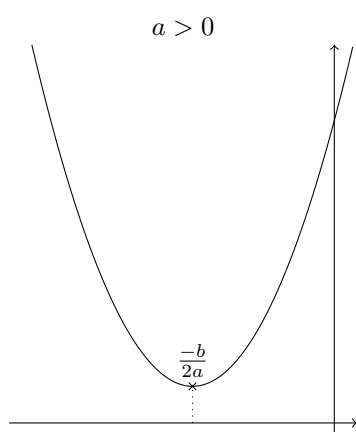
$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$ax^2+bx+c$			

Remarque : Si  $a < 0$

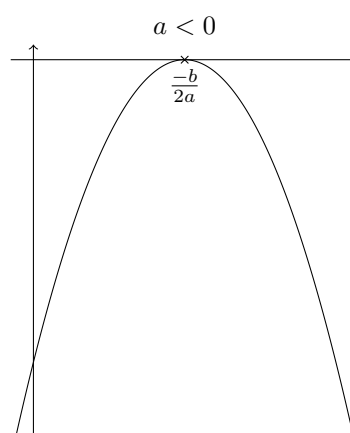
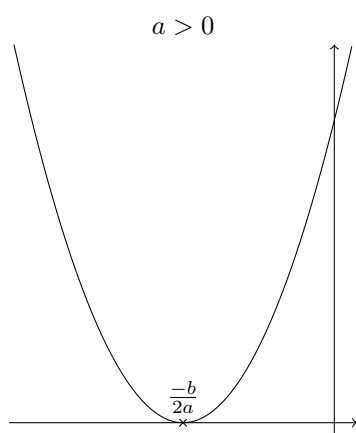
$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$ax^2+bx+c$			

### 1.3.3 Application aux racines

$\Delta < 0$

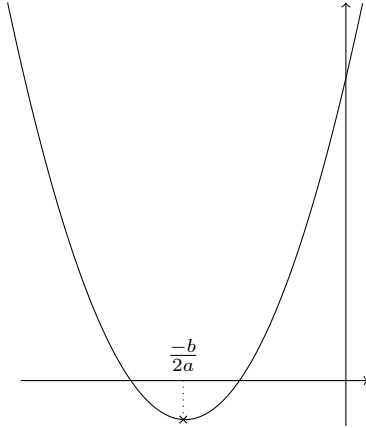


$\Delta = 0$

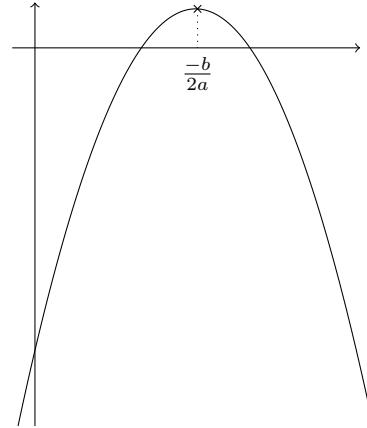


$$\Delta > 0$$

$$a > 0$$



$$a < 0$$



#### 1.4 Signe de $ax^2 + bx + c$

**Remarque :**  $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$  avec  $a \neq 0$ , si  $\Delta < 0$  alors  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$  d'où  $f(x)$  est du signe de  $a$ .

**Remarque :**  $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$  avec  $a \neq 0$ , si  $\Delta = 0$  alors  $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  d'où  $f(x)$  est du signe de  $a$  et s'annule en  $-\frac{b}{2a}$ .

**Remarque :**  $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$  avec  $a \neq 0$ , si  $\Delta > 0$  alors  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  avec  $x_1 < x_2$ .

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
$x - x_1$	-	0	+	+	
$x - x_2$	-	-	0	+	
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	-	+	
$ax^2 + bx + c$	Signe de $a$	0	Signe de $-a$	0	Signe de $a$

**Théorème :** Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$ , si  $\Delta < 0$  alors  $f(x)$  est du signe de  $a$ .

**Théorème :** Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$ , si  $\Delta = 0$  alors  $f(x)$  est du signe de  $a$  sauf en  $\alpha$  où elle s'annule.

**Théorème :** Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$ , si  $\Delta > 0$  alors  $f(x)$  est du signe de  $a$  à l'extérieur des racines et du signe de  $-a$  à l'intérieur des racines.

## 2 Les fonctions dérivées

### 2.1 Nombre dérivé

#### 2.1.1 Définition

**Définition :** Soit  $f$  une fonction définie sur  $E$  et  $a \in E$ ,  $f$  est dite dérivable en  $a$ , de nombre dérivé  $f'(a)$ , si  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right) = f'(a)$ .

**Définition :** La tangente en  $A(a; f(a))$  à  $(y = f(x))$  admet pour équation  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

**Définition :**  $f'(a)$  est le coefficient directeur de la tangente en  $a$ .

### 2.2 Calcul de nombres dérivés

#### 2.2.1 Fonction affine $f(x) = mx + p$

**Définition :** Soit  $a \in \mathbb{R}$   
$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h} \\ &= \frac{mh}{h} \\ &= m \end{aligned}$$

$$f'(a) = m$$

#### 2.2.2 Fonction carrée $f(x) = x^2$

**Définition :** Soit  $a \in \mathbb{R}$   
$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h} \\ &= \frac{2ah+h^2}{h} \\ &= 2a + h \end{aligned}$$

$$f'(a) = 2a$$

#### 2.2.3 Fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$

**Définition :** Soit  $a \in \mathbb{R}^*$   
$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} \\ &= \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} \\ &= \frac{-1}{a(a+h)} \end{aligned}$$

$$f'(a) = -\frac{1}{a^2}$$

#### 2.2.4 Fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$

**Définition :** Soit  $a \in \mathbb{R}^*$   
$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} \end{aligned}$$

$$f'(a) = -\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

#### 2.2.5 Fonction valeur absolue $f(x) = |x|$

**Définition :**  $\begin{cases} |x|=x & \text{si } x \geq 0 \\ |x|=-x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ .

**Remarque :** La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

### 2.3 Fonction dérivée

#### 2.3.1 Définitions

**Définition :** Une fonction  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$  si elle admet un nombre dérivé pour tout  $x \in I$ .

**Définition :** La fonction qui à  $x$  fait correspondre le nombre dérivé en  $x$  est appelée fonction dérivée et est notée  $f'$ .

### 2.3.2 Dérivée de fonctions usuelles

**Définition :**  $f(x) = mx + p$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec  $f'(x) = m$ .

**Définition :**  $f(x) = x^2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec  $f'(x) = 2x$ .

**Définition :**  $f(x) = \frac{1}{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  avec  $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ .

**Définition :**  $f(x) = \sqrt{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  avec  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

**Définition :** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $f(x) = x^n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

**Définition :** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $f(x) = \frac{1}{x^n}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  avec  $f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$ .

## 2.4 Opérations

### 2.4.1 Somme

**Théorème :** Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ , alors  $(f + g)$  est dérivable sur  $I$ , avec  $(f + g)' = f' + g'$ .

### 2.4.2 Produit

**Théorème :** Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ . La fonction  $(u \times v)$  est dérivable sur  $I$  avec  $(uv)' = u'v + uv'$ .

**Démonstration :**

$$\begin{aligned}(uv)' &= \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a+h) + u(a) \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \\ &= u'(a)v(a) + u(a)v'(a)\end{aligned}$$

**Conséquence :**  $(kf)' = kf'$  pour  $k$  un réel fixé.

### 2.4.3 Quotient

**Démonstration :** Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$  avec  $f(x) \neq 0$  sur  $I$ . Soit  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ .

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)}}{h} \\ &= \frac{f(a) - f(a+h)}{hf(a)f(a+h)} \\ &= -\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times \frac{1}{f(a)f(a+h)}\end{aligned}$$

$$\text{Or, } \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = f'(a) \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{f(a)f(a+h)} \right) = \frac{1}{(f(a))^2}.$$

$$\text{D'où } \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right) = \frac{-f'(a)}{(f(a))^2}.$$

**Théorème :** Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$  avec  $f(x) \neq 0$  pour tout  $x$  sur  $I$ . Alors,  $\frac{1}{f}$  est dérivable sur  $I$  avec  $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$ .

**Théorème :** Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur  $I$  avec  $v(x) \neq 0$  pour tout  $x$  dans  $I$ . La fonction  $\left(\frac{u}{v}\right)$  est dérivable sur  $I$  avec  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ .

**Démonstration :**

$$\begin{aligned}\left(\frac{u}{v}\right)' &= \left(u \times \frac{1}{v}\right)' \\ &= u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(\frac{1}{v}\right)' \\ &= \frac{u'}{v} + u \times \frac{-v'}{v^2} \\ &= \frac{u'v - uv'}{v^2}\end{aligned}$$

### 2.4.4 Composition

**Théorème :** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables, alors  $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \times f'(x)$ .

**Conséquence :**  $(f(x)^n)' = n(f(x))^{n-1} \times f'(x)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Conséquence :**  $\left(\frac{1}{f(x)^n}\right)' = \frac{-n}{(f(x))^{n+1}} \times f'(x)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Conséquence :**  $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \times f'(x).$

**Conséquence :**  $(f(ax+b))' = f'(ax+b) \times a$  pour tout  $(a;b) \in \mathbb{R}^2.$

### 3 Application de la dérivée

#### 3.1 Dérivée et variation

**Théorème :** Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ . Si  $f'(x) > 0$  sur  $I$ , sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

**Théorème :** Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ . Si  $f'(x) < 0$  sur  $I$ , sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

**Théorème :** Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ . Si  $f'(x) = 0$  sur  $I$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .

#### 3.2 Extremum local d'une fonction

**Définition :** Soit  $f$  une fonction définie sur  $E$  et  $a \in E$ .  $f$  admet un extremum local en  $x = a$  s'il existe un intervalle ouvert, centré en  $a$  tel que la restriction de  $f$  à cet intervalle admette un extremum en  $a$ .

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction dérivable. Si  $f$  admet un extremum local en  $a$ , alors  $f'(a) = 0$ .

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction dérivable. Si  $f'$  s'annule en  $a$ , alors  $f$  admet un extremum local en  $a$ .

#### 3.3 Des polynômes du troisième degré

##### 3.3.1 $f(x) = x^3 - ax$ ; où $a > 0$


**Remarque :**  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  avec  $f'(x) = 3x^2 - a$ .

$$3x^2 - a = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{a}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{a}{3}}$$


Le coefficient de  $x^2$  étant  $3 > 0$ , on en déduit le signe de  $f'$ .

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+
Variations de $f(x)$					

##### 3.3.2 $f(x) = x^3 + ax$ ; où $a > 0$

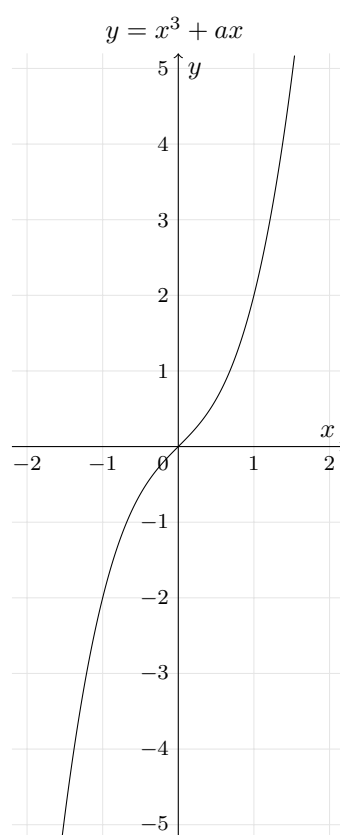
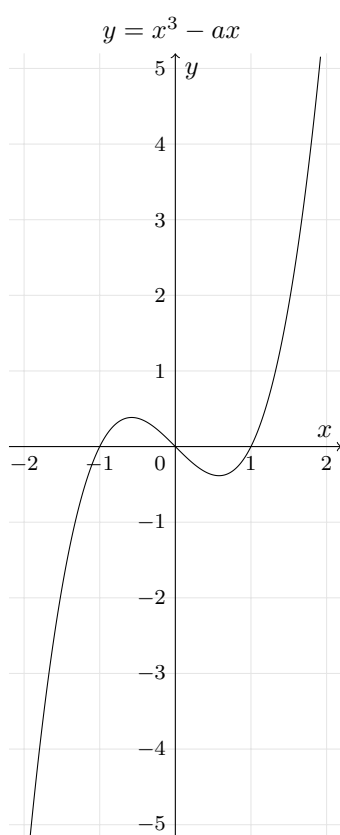
**Remarque :**  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  avec  $f'(x) = 3x^2 + a$ .

$$3x^2 + a \geq a > 0$$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de $f(x)$		

### 3.3.3 Courbes représentatives

Remarque : Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$





## 4 Suites numériques

### 4.1 Notion de suites

**Définition :** Une suite numérique est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition :** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , et une suite  $(u)$ , on note  $u_n$  l'image de l'entier  $n$  par la suite  $(u)$ .

### 4.2 Exemples fondamentaux de générations d'une suite

#### 4.2.1 Mode explicite

**Définition :** La suite  $(u)$  est définie par  $u_n = f(n)$ .

#### 4.2.2 Mode itératif ou récurrent

**Définition :** La suite  $(u)$  est définie par  $u_0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

### 4.3 Sens de variation

#### 4.3.1 Définitions

**Définition :** La suite  $(u_n)$  est dite croissante si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} \geq u_n$ .

**Définition :** La suite  $(u_n)$  est dite strictement croissante si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} > u_n$ .

**Définition :** La suite  $(u_n)$  est dite décroissante si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$ .

**Définition :** La suite  $(u_n)$  est dite strictement décroissante si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} < u_n$ .

#### 4.3.2 Méthodes

**Méthode :** Si  $u_n = f(n)$ , alors  $u_n$  est de même sens que  $f(n)$ .

**Méthode :** Dans les autres cas, on étudie le signe de  $u_{n+1} - u_n$ .

### 4.4 Suites arithmétiques

#### 4.4.1 Généralité

**Définition :** Une suite  $(u_n)$  est dite arithmétique de raison  $r$ , un réel fixé, si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + r$ .

**Propriété :**  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r$  si et seulement si,  $u_n = u_0 + nr$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

#### 4.4.2 Représentation graphique

**Propriété :** La représentation graphique d'une suite arithmétique est un ensemble de points alignés.

**Remarque :** Une suite arithmétique a un accroissement linéaire ou une évolution linéaire.

#### 4.4.3 Somme des termes

**Théorème :** Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique.  $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$ . C'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^n (u_k) = (n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right). \text{ D'où : } \sum_{k=m}^n (u_k) = (n-m+1)\left(\frac{u_m+u_n}{2}\right), \text{ avec } m \leq n.$$

### 4.5 Suites géométriques

#### 4.5.1 Généralités

**Définition :** La suite  $(u_n)$  est dite géométrique de raison  $q$ , un réel fixé, si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n \times q$ .

**Propriété :**  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q$  si et seulement si,  $u_n = u_0 \times q^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

#### 4.5.2 Représentation graphique

**Remarque :** Une suite géométrique a un accroissement exponentiel ou une évolution exponentielle.

### 4.5.3 Somme des termes

**Théorème :** Soit  $(u_n)$  une suite géométrique.  $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \left( \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q} \right) = u_0 \times \left( \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$ .

C'est-à-dire :  $\sum_{k=0}^n (u_k) = u_0 \times \left( \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$ . D'où :  $\sum_{k=m}^n (u_k) = u_m \times \left( \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} \right)$ , avec  $m \leq n$ .

## 5 Limites de suites

### 5.1 Cas où la limite est infinie

**Définition :** On dit que la suite  $(u_n)$  admet pour limite  $+\infty$  si tout intervalle du type  $[A; +\infty[$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$ .

**Définition :** On dit que la suite  $(u_n)$  admet pour limite  $-\infty$  si tout intervalle du type  $] -\infty; A]$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -\infty$ .

**Remarque :** Une suite qui admet pour limite  $+\infty$  n'est pas nécessairement croissante et, de même, une suite croissante n'admet pas non plus nécessairement pour limite  $+\infty$ .

### 5.2 Cas où la limite est finie

**Définition :** On dit que la suite  $(u_n)$  admet pour limite un réel  $l$ , si tout intervalle centré en  $l$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l$ .

### 5.3 Limites de suites géométriques

**Théorème :** Si  $|q| < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q^n) = 0$ .

**Théorème :** Si  $q > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q^n) = +\infty$ .

### 5.4 Vocabulaire

**Définition :** Soit  $(u_n)$  une suite. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l$  avec  $l \in \mathbb{R}$ , la suite est dite convergente.

**Définition :** Soit  $(u_n)$  une suite. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \pm\infty$  ou si la suite  $(u_n)$  n'admet pas de limite, la suite est dite divergente.

## 6 Trigonométrie

### 6.1 Angles orientés

#### 6.1.1 Le radian

**Définition :** L'angle plat vaut  $\pi$  radians.

#### 6.1.2 Orientation

**Définition :** Le sens inverse à celui des aiguilles d'une montre est appelé le sens trigonométrique. Le sens contraire est appelé anti-trigonométrique.

**Définition :** Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé. Le cercle de centre  $O$  et de rayon 1, orienté dans le sens trigonométrique est appelé cercle trigonométrique.

#### 6.1.3 Point associé à un angle $x$

**Définition :** Soient  $M$  un point du cercle trigonométrique et  $l$  la longueur entre l'origine du cercle et le point  $M$ . Le point  $M$  est associé à l'angle  $x$ , avec :  $x = l$  si l'on parcourt le cercle dans le sens trigonométrique et  $x = -l$  si l'on parcourt le cercle dans le sens anti-trigonométrique.

**Définition :** Un point  $M$  est associé à un réel  $x$  est aussi associé à  $x + 2k\pi$ , où  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Définition :** La mesure principale d'un nombre est l'unique mesure dans l'intervalle  $]-\pi; \pi]$ .

**Remarque :** La mesure principale correspond au chemin le plus court sur le cercle.

#### 6.1.4 Angles orientés de vecteurs

**Définition :** Soit  $l$  la longueur de l'arc  $\widehat{AB}$ .  $(\vec{u}, \vec{v}) = l$  si l'on parcourt le cercle dans le sens trigonométrique.

**Définition :** Soit  $l$  la longueur de l'arc  $\widehat{AB}$ .  $(\vec{u}, \vec{v}) = -l$  si l'on parcourt le cercle dans le sens anti-trigonométrique.

### 6.2 Sinus et cosinus

#### 6.2.1 Définition

**Définition :** soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $M$  le point du cercle trigonométrique associé à l'angle de mesure  $\alpha$ ,  $\begin{cases} \cos(\alpha) = x_M \\ \sin(\alpha) = y_M \end{cases}$ .

**Propriété :** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\begin{cases} -1 \leq \cos(x) \leq 1 \\ -1 \leq \sin(x) \leq 1 \end{cases}$ .

**Relation fondamentale :**  $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ .

**Valeurs de référence :**

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

#### 6.2.2 Propriétés des fonctions sinus et cosinus

##### 6.2.2.1 Périodicité

**Propriété :**  $\begin{cases} \cos(x+2k\pi) = \cos(x) \\ \sin(x+2k\pi) = \sin(x) \end{cases}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Propriété :** Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période  $2\pi$ .

##### 6.2.2.2 Parité

**Propriété :**  $\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

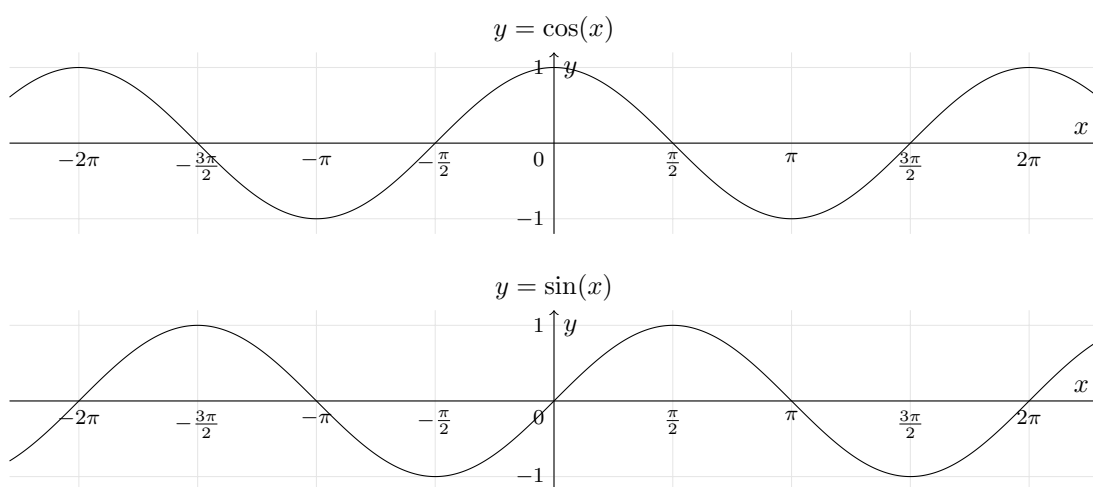
**Propriété :** La fonction cosinus est paire.

**Propriété :** La fonction sinus est impaire.

### 6.2.2.3 Variations

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\cos(x)$	1	0	-1
$\sin(x)$	0	1	0

### 6.2.2.4 Courbes représentatives



### 6.2.2.5 Dérivées

Propriété :  $\begin{cases} (\cos(x))' = -\sin(x) \\ (\sin(x))' = \cos(x) \end{cases}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

## 6.3 Angles associés

Propriété :  $\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Propriété :  $\begin{cases} \cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \\ \sin(x + 2k\pi) = \sin(x) \end{cases}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Propriété :  $\begin{cases} \cos(x + \pi) = -\cos(x) \\ \sin(x + \pi) = -\sin(x) \end{cases}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Propriété :  $\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) = \sin(x) \end{cases}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Propriété :  $\begin{cases} \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x) \\ \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x) \end{cases}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Propriété :  $\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x) \end{cases}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

## 6.4 Cercle trigonométrique



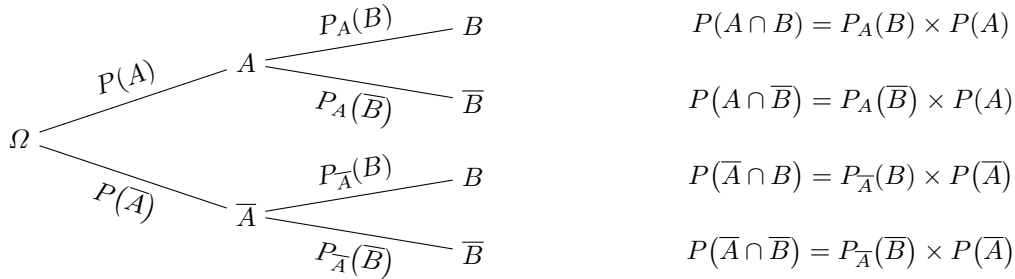
## 7 Probabilités conditionnelles

### 7.1 Probabilité conditionnelle

**Définition :** Soient  $A$  et  $B$  deux événements avec  $P(B) \neq 0$ . La probabilité que  $A$  soit réalisé sachant que  $B$  soit réalisé est  $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ .  $P_B(A)$  se lit «  $P$  de  $A$  sachant  $B$  ».

**Remarque :**  $P_B(A) \times P(B) = P(A \cap B) = P(B \cap A) = P_A(B) \times P(A)$ .

**Arbre pondéré de probabilités :**



**Remarque :** La somme des probabilités des branches issues d'un nœud vaut 1.

**Remarque :** La probabilité d'un chemin est égal au produit des probabilités des branches composant ce chemin.

**Remarque :** La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins réalisant cet événement

### 7.2 Formules des probabilités totales

**Définition :**  $\{B_1, B_2, B_3, \dots, B_n\}$  est une partition de l'univers  $\Omega$  si  $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_n = \bigcup_{k=1}^n (B_k) = \Omega$  et si  $B_k \cap B_j = \emptyset$  pour  $k \neq j$ .

**Théorème :** Soit  $\{B_1, B_2, B_3, \dots, B_n\}$  une partition de l'univers  $\Omega$  et  $A$  un événement.

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n) = \sum_{k=1}^n (P(A \cap B_k)) = \sum_{k=1}^n (P_{B_k}(A) \times P(B_k))$$

### 7.3 Événements indépendants

**Définition :** Soient  $A$  et  $B$  deux événements avec  $P(A) \neq 0$  et  $P(B) \neq 0$ .  $A$  et  $B$  sont dits indépendants si  $P_A(B) = P(B)$ .

**Remarque :** Soient  $A$  et  $B$  deux événements indépendants,  $P_A(B) = P(B)$ .

**Remarque :** Soient  $A$  et  $B$  deux événements indépendants,  $P_B(A) = P(A)$ .

**Remarque :** Soient  $A$  est indépendant de  $B$  si et seulement si  $B$  est indépendant de  $A$ .

**Théorème :**  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

**Remarque :**  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si  $\bar{A}$  et  $B$  sont indépendants.

**Remarque :**  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si  $A$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.

**Remarque :**  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.

## 8 Probabilités

### 8.1 Variable aléatoire réelle

**Définition :** Soit une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$ . Une variable aléatoire réelle, notée  $X$ , est une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition :**  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  est l'image univers de  $\Omega$  par  $X$ .

**Définition :** La loi de  $X$  est la probabilité définie par  $p(X = x_k) = p_k$  pour  $1 \leq k \leq n$ .

### 8.2 Espérance

**Définition :** Soient une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$  et  $X$  une variable aléatoire réelle d'univers image  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . On appelle espérance mathématiques de  $X$  le réel noté  $E(X)$  défini par  $E(X) = x_1p(X = x_1) + x_2p(X = x_2) + x_3p(X = x_3) + \dots + x_np(X = x_n) = \sum_{k=1}^n (x_k p(X = x_k))$ .

**Remarque :** Le terme espérance vient du langage des jeux. Lorsque  $X$  représente le gain,  $E(X)$  représente le gain moyen que peut « espérer » un joueur sur un grand nombre de parties.

**Remarque :**  $E(X)$  est la moyenne des résultats  $x_k$ , pondérés par les valeurs  $p_k$ . Ainsi,  $E(X)$  est parfois noté  $\bar{X}$  ou  $m$ .

**Remarque :**  $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega)p(\omega))$ .

### 8.3 Variance et écart type

**Définition :** Soient une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$  et  $X$  une variable aléatoire réelle d'univers image  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . On appelle variance de  $X$  le réel noté  $V(X)$  défini par

$$V(X) = p(X = x_1)(x_1 - E(X))^2 + p(X = x_2)(x_2 - E(X))^2 + \dots + p(X = x_n)(x_n - E(X))^2 \\ = \sum_{k=1}^n (p(X = x_k)(x_k - E(X))^2)$$

**Remarque :** La variance représente la moyenne des carrés des écarts à la moyenne  $E(X)$ , des résultats  $x_k$  pondérés par les valeurs  $p_k$ .

**Remarque :** Pour tout  $1 \leq k \leq n$ ,  $p(X = x_k) \geq 0$  et  $(x_k - E(X))^2 \geq 0$  d'où  $V(X) \geq 0$ .

**Remarque :** Les valeurs  $(x_k - E(X))$  sont les valeurs prises par la variable aléatoire réelle  $(X - E(X))$ ,  $E(X)$  est un nombre fixé, donc  $V(X) = E((X - E(X))^2)$

**Définition :** Soient une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$  et  $X$  une variable aléatoire réelle d'univers image  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . On appelle écart type de la variable aléatoire réelle  $X$  le réel noté  $\sigma(X)$  défini par  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .



## 9 Fonction exponentielle

### 9.1 $y' = y$ et $y(0) = 1$

**Lemme :** Si une fonction  $f$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$ , vérifie  $f'(x) = f(x)$  et  $f(0) = 1$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \neq 0$ .

**Démonstration :**

Soit  $g(x) = f(x) \times f(-x)$ .

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \times f(-x) + f(x) \times f'(-x) \times (-1) \\ &= f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc,  $g(x) = k = g(0) = f(0) \times f(-0) = 1$ .

Donc,  $g(x) = f(x) \times f(-x) = 1$ , et ainsi,  $f(x) \neq 0$ .

**Théorème :** Il existe une unique fonction, appelée exponentielle et notée  $\exp$ , solution de l'équation

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

**Démonstration :**

On admet l'existence de solution.

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions vérifiant  $\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$  et  $\begin{cases} g'(x) = g(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$ .

Soit  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ .

$$h'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2} = 0.$$

D'où  $h(x) = k$ .

Or,  $h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 1 = k$ .

Ainsi,  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ .

### 9.2 Vers une nouvelle écriture

#### 9.2.1 Propriétés fondamentales

**Propriété :** La fonction exponentielle est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec  $(\exp(x))' = \exp(x)$  et  $\exp(0) = 1$ .

**Propriété :** Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$ .

**Propriété :** Pour tout réel  $x$ ,  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ .

**Propriété :** Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$ .

**Propriété :** Pour tout réel  $x$ ,  $\exp(x \times n) = (\exp(x))^n$ .

**Propriété :** Pour tout réel  $x$ ,  $\exp\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}$ .

**Propriété :** Pour tout réel  $x$ ,  $\exp(x) > 0$ .

**Démonstration de  $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$  :**

Soit  $f(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(x)}$ .

$$f'(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(x)} = f(x).$$

$$f(0) = \frac{\exp(a)}{\exp(a)} = 1.$$

Ainsi,  $f(x) = \exp(x)$ .

D'où  $\frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = \exp(x)$ .

Ou encore,  $\exp(a + x) = \exp(a) \times \exp(x)$ .

#### 9.2.2 Nouvelle notation

**Définition :** On note  $\exp(1) = e$  et  $\exp(x) = e^x$ .

**Remarque :**  $(e^x)' = e^x$ .

**Remarque :**  $e^{x+y} = e^x \times e^y$ .

**Remarque :**  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ .

**Remarque :**  $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ .

**Remarque :**  $e^{nx} = (e^x)^n$ .

**Remarque :**  $e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$ .

**Remarque :**  $e^x > 0$ .

### 9.2.3 Étude de la fonction exponentielle

**Remarque :** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(e^x)' = e^x > 0$ .

**Tableau de variations :**

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$e^x$				

**Conséquences :**  $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ .

**Conséquences :**  $e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$ .

**Conséquences :**  $e^x > e \Leftrightarrow x > 1$ .

**Conséquences :**  $e^x < e \Leftrightarrow x < 1$ .

## 9.3 Fonctions exponentielles

### 9.3.1 $f(x) = e^{kx}$ , avec $k \in \mathbb{R}$ fixé

**Remarque :**  $f'(x) = (e^{kx})' = ke^{kx}$ .

**Remarque :**  $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$ .

### 9.3.2 Application aux suites géométriques

**Théorème :** Pour tout réel  $k$ , la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = e^{kn}$  est une suite géométrique de raison  $q = e^k$ .

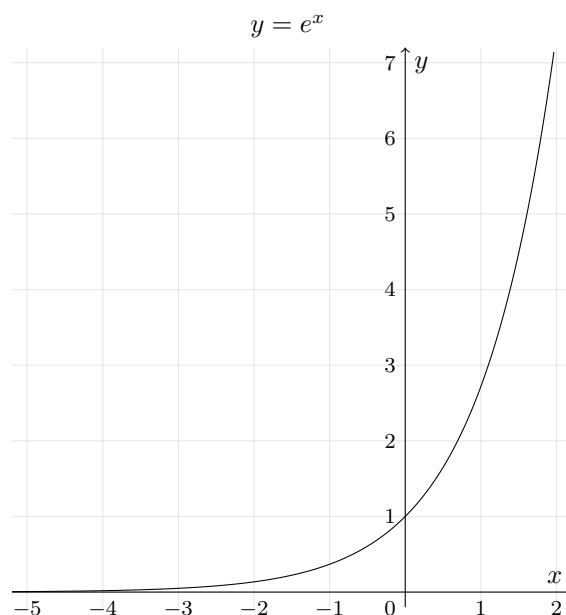
**Théorème :** Si  $u_n = q^n \times u_0$  avec  $q > 0$ , alors il existe un  $k \in \mathbb{R}$ , tel que  $q = e^k$ .

**Remarque :**  $0 < q < 1 \Leftrightarrow k < 0$ .

**Remarque :**  $q = 1 \Leftrightarrow k = 0$ .

**Remarque :**  $q > 1 \Leftrightarrow k > 0$ .

## 9.4 Courbe représentative



## 10 Produit scalaire

### 10.1 Expression du produit scalaire

**Rappel :** La norme du vecteur  $\vec{u}$  est sa longueur notée  $\|\vec{u}\|$ .

**Définition :** Le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

**Définition :** Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ .

**Définition :** Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

**Propriété :**  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

### 10.2 Propriétés

**Théorème :**  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$ .

**Théorème :**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ .

**Théorème :**  $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

**Théorème :**  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ .

**Remarque :**  $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \vec{u}^2 - \vec{v}^2)$ .

### 10.3 Résultat fondamental

**Remarque :** Soient  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  deux vecteurs,  $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  et  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ .

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\alpha)$ .

**Remarque :** Soient  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  deux vecteurs,  $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  et  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ .

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$  si  $H \in [AB)$ .

**Remarque :** Soient  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  deux vecteurs,  $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  et  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ .

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$  si  $H \notin [AB)$ .

### 10.4 Expression dans une base orthogonale

**Théorème :** Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan. Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$  deux vecteurs,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb'$ .

**Conséquence :**  $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

**Conséquence :**  $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

## 11 Application du produit scalaire

### 11.1 Équations de droite

**Définition :** Un vecteur  $\vec{n}$  orthogonal à  $\overrightarrow{AB}$  est dit normal à  $(AB)$ .

**Théorème :** Toute droite de vecteur normal  $\vec{n}(\frac{a}{b}) \neq \vec{0}$  admet une équation de la forme  $ax + by + c = 0$  avec  $c \in \mathbb{R}$ .

**Théorème :** Réciproquement,  $ax + by + c = 0$  avec  $(a, b) \neq (0, 0)$  et  $c \in \mathbb{R}$  est l'équation d'une droite de vecteur normal  $\vec{n}(\frac{a}{b})$ .

**Remarque :** La droite  $(D)$   $ax + by + c = 0$  admet pour vecteur directeur  $\vec{u}(\frac{-b}{a})$  car  $\vec{u} \cdot \vec{n} = -ba + ab = 0$ .

### 11.2 Équations de cercles

**Théorème :** L'équation du cercle de centre  $I(a; b)$  et de rayon  $r \geq 0$  est  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ .



